

دانشگاه تهران

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر

ریاضیات مهندسی - بهار ۱۴۰۴

تمرین کامپیوتری

دستیار تمرین: بابک حسینی محتشم - محمد سینا پرویزی مطلق

سوال اول

در این درس با مفهوم سری فوریه و کاربردهای آن آشنا شدید. در این قسمت می‌خواهیم سری فوریه را پیاده‌سازی کنیم. برای این کار رابطه زیر را برای سری فوریه در نظر بگیرید:

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right) \right)$$

$$a_0 = \frac{1}{T} \sum_{t_0}^{t_0+T} f(t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \sum_{t_0}^{t_0+T} f(t) \cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \sum_{t_0}^{t_0+T} f(t) \sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$$

به دلیل ماهیت دیجیتالی و گسسته بودن اطلاعات در کامپیوترها از نوع دیگری از رابطه فوریه با نام‌های تبدیل و سری فوریه گسسته استفاده می‌شود. با کمک روابط بالا می‌توانید سری فوریه یک سیگنال گسسته را به دست آورید.

(۱) یکی از توابع متناوبی که سری فوریه آن را در درس حساب کردید (مانند موج مربعی یا مثلثی) در نظر بگیرید. تابع مورد نظر را به صورت یک آرایه برای یک دوره تناوب تشکیل دهید و رسم کنید. برای این کار می‌توانید از کتابخانه‌های `matplotlib` و `numpy` در پایتون استفاده کنید.

(۲) حال به کمک روابط داده شده تابعی بنویسید که با دریافت آرایه تشکیل شده، ضرایب سری فوریه گسسته آن را حساب کند و برگرداند. مقادیر سه ضریب فوریه اول را در گزارش بیاورید و با حساب کردن آن‌ها به طور دستی، از درست کار کردن تابع اطمینان حاصل کنید.

۳) حال تابعی بنویسید که با دریافت ضرایب سری فوریه، تابع اولیه را حساب کند و برگرداند. سپس تابع بازتولید شده را رسم کنید. تاثیر افزایش تعداد ضرایبها را در تابع بازتولید شده هم به صورت دیداری و هم با متریکهای خطا بررسی و گزارش کنید. می‌توانید از کتابخانه sklearn استفاده کنید.



هدف سوال: پیاده‌سازی تابع فوریه و بررسی تاثیر تعداد ضرایب بر خطای تابع بازتولید شده

سوال دوم

در این قسمت می‌خواهیم از مقادیر پیکسل‌های تصویری دلخواه تبدیل فوریه بگیریم. برای حساب کردن تبدیل فوریه دو بعدی از رابطه زیر استفاده کنید:

$$f[k, l] = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m, n] e^{-j2\pi(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N})}$$

(۱) تابعی بنویسید که با دریافت یک تصویر، رابطه بالا را برای هر پیکسل تصویر حساب کند و آرایه دو بعدی ضرایب را برگرداند.

(۲) تصویر دلخواهی را با سایز ۶۴ در ۶۴ پیکسل به صورت سیاه و سفید باز کنید، مقادیر آن را بین صفر و یک نرمالایز کنید و تابع بالا را روی آن صدا بزنید. به دلیل تفاوت بسیار میان اندازه ضرایب، از آرایه به دست آمده لگاریتم گرفته و تصویر ضرایب را نمایش دهید.

(۳) حال می‌خواهیم بررسی کنیم با کم کردن تعداد ضرایب فوریه کیفیت تصویر چه مقدار افت می‌کند. برای این کار، با بررسی رابطه و دانش خود از سری فوریه یک بعدی، بیان کنید از ضرایب موجود در ماتریس دو بعدی کدام ضرایب را بهتر است نگه داریم تا عکس بازسازی شده با کیفیت بیشتری باشد. سپس تابعی بنویسید تا با دریافت تصویر و عددی بین صفر و یک، به نسبت داده شده ضرایب از تصویر را نگه دارد و بقیه ضرایب را صفر کند و ضرایب جدید را برگرداند.

(۴) حال تابعی بنویسید که با دریافت ماتریس ضرایب فوریه، تصویر را بازسازی کرده و خروجی دهد. برای این کار می‌توانید از رابطه زیر استفاده کنید.

$$f[k, l] = \frac{1}{M \times N} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} f[m, n] e^{j2\pi(\frac{km}{M} + \frac{ln}{N})}$$

سپس قسمت حقیقی یا اندازه ضرایب به دست آمده را رسم کنید تا تصویر بازسازی شده را مشاهده کنید. حال با کمک دو تابع اخیر اثر تعداد ضرایب بر کیفیت تصویر بازسازی شده را به صورت دیداری و با متریک‌های خطا بررسی و گزارش کنید.

(۵) در نهایت تصویر را این بار به صورت رنگی لود کنید و به ازای هر کانال تصویر با استفاده از توابع بالا ضرایب را به دست آورده و با ترکیب سه کانال، خروجی بازسازی شده را با تعداد مختلفی از ضرایب رسم کنید.

هدف سوال: پیاده‌سازی تابع فوریه دو بعدی و بررسی تاثیر تعداد ضرایب فوریه بر کیفیت تصویر بازسازی شده

نحوه تحویل

- در هیچ یک از دو سوال مجاز به استفاده از توابع آماده مرتبط با سری یا تبدیل فوریه نمی‌باشید.
- تنها یک فایل نوتبوک شامل گزارش را آپلود کنید.
- تمام بخش‌های قابل اجرای نوتبوک باید اجرا شده باشند و نتایج آماده باشد.

