Metody Numeryczne 2
Laboratorium 6
Metoda Rungego-Kutty rzędu trzeciego dla układu dwóch równań

Szymon Adach

12 stycznia 2016

1 Treść zadania

Zadanie 3: Metoda Rungego-Kutty rzędu trzeciego ($r = 3$) dla układu dwóch równań ($\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$).

2 Opis metody

Rozwiązywany układ równań ma postać:

$$\begin{cases} y'(x) = f(x, y(x), z(x)) \\ z'(x) = g(x, y(x), z(x)) \end{cases}$$

Równanie to określone jest na przedziale $(a, b]$ dla warunkow początkowych $y_a = y(a)$, $z_a = z(a)$. Ogólne wzory w metodzie Rungego-Kutty mają postać:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \sum_{j=1}^{r} c_j k_j$$

$$k_j = f(x_i + h \cdot \sum_{l=1}^{j-1} b_{jl}, y_i + +h \cdot \textstyle\sum_{l=1}^{j-1} b_{jl} k_l)$$

Gdzie współczynniki c_j oraz b_{jl} spełniają:

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ c_2 & b_{21} & 0 \\ c_3 & b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \frac{2-3(\alpha+\beta)}{6\alpha\beta} & 0 & 0 \\ \frac{3\beta-2}{6\alpha(\beta-\alpha)} & \alpha & 0 \\ \frac{2-3\alpha}{6\beta(\beta-\alpha)} & \frac{3\alpha\beta(1-\alpha)-\beta^2}{\alpha(2-3\alpha)} & \frac{\beta(\beta-\alpha)}{\alpha(2-3\alpha)} \end{bmatrix}$$

Dla $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$: $\begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ c_2 & b_{21} & 0 \\ c_3 & b_{31} & b_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ \frac{1}{6} & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}$

Modyfikacja metody dla układu dwóch równań da się zapisać jako:

```
for m = 2:length(x)
k(1) = f(x(m-1), y(m-1), z(m-1));
l(1) = g(x(m-1), y(m-1), z(m-1));

k(2) = f(x(m-1) + h, y(m-1) + k(1) * h, z(m-1) + l(1) * h);
l(2) = g(x(m-1) + h, y(m-1) + k(1) * h, z(m-1) + l(1) * h);

k(3) = f(x(m-1) + h/2, y(m-1) + h * ( 1/4 * k(1) + 1/4 * k(2)),...
z(m-1) + h * ( 1/4 * l(1) + 1/4 * l(2)));
l(3) = g(x(m-1) + h/2, y(m-1) + h * ( 1/4 * k(1) + 1/4 * k(2)), ...
z(m-1) + h * ( 1/4 * l(1) + 1/4 * l(2)));

y(m) = y(m-1) + 1/6 * h * (k(1) + 4*k(2) + k(3));
z(m) = z(m-1) + 1/6 * h * (l(1) + 4*l(2) + l(3));
end
```

Współczynniki zostały podane jawnie - były wcześniej obliczone w celu przyspieszenia działania programu.

3 Działanie programu

Program jest uruchamiany poleceniem:

RK3ODE(f, g, a, b, n, y_a, z_a)

- **f** - uchwyt do funkcji f(x,y,z)
- **g** - uchwyt do funkcji g(x,y,z)
- **a,b** - poczatek i koniec przedziału
- **n** - liczba węzłów
- **y_a** - warunek początkowy $y(a) = y_a$
- **z_a** - warunek początkowy $z(a) = z_a$

Funkcja ta zwraca wektory y, z zawierające obliczone wartości y_i, z_i dla węzłów. Jednak w celu graficznej prezentacji wyników należy uruchomić:

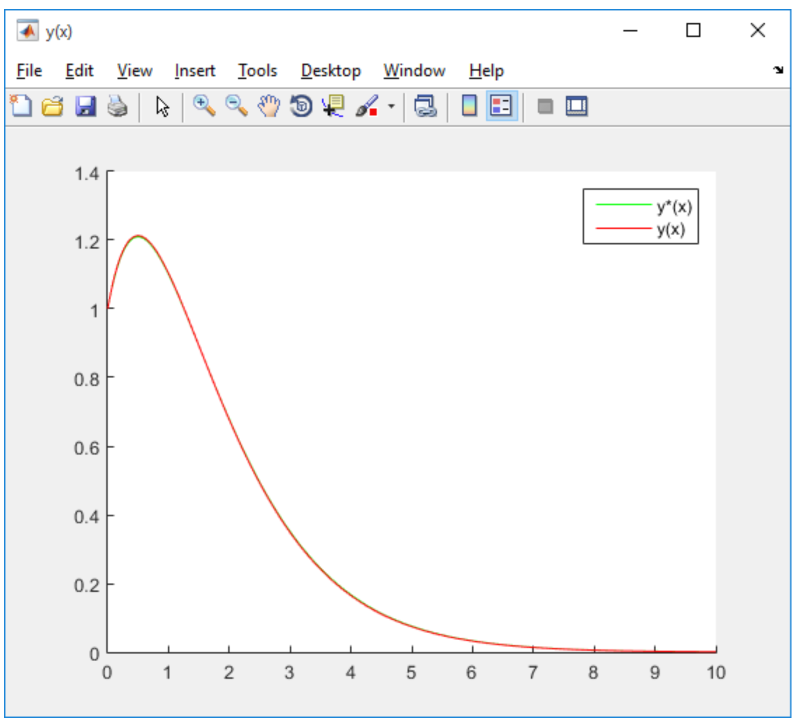
test_rk3ode(s, n)

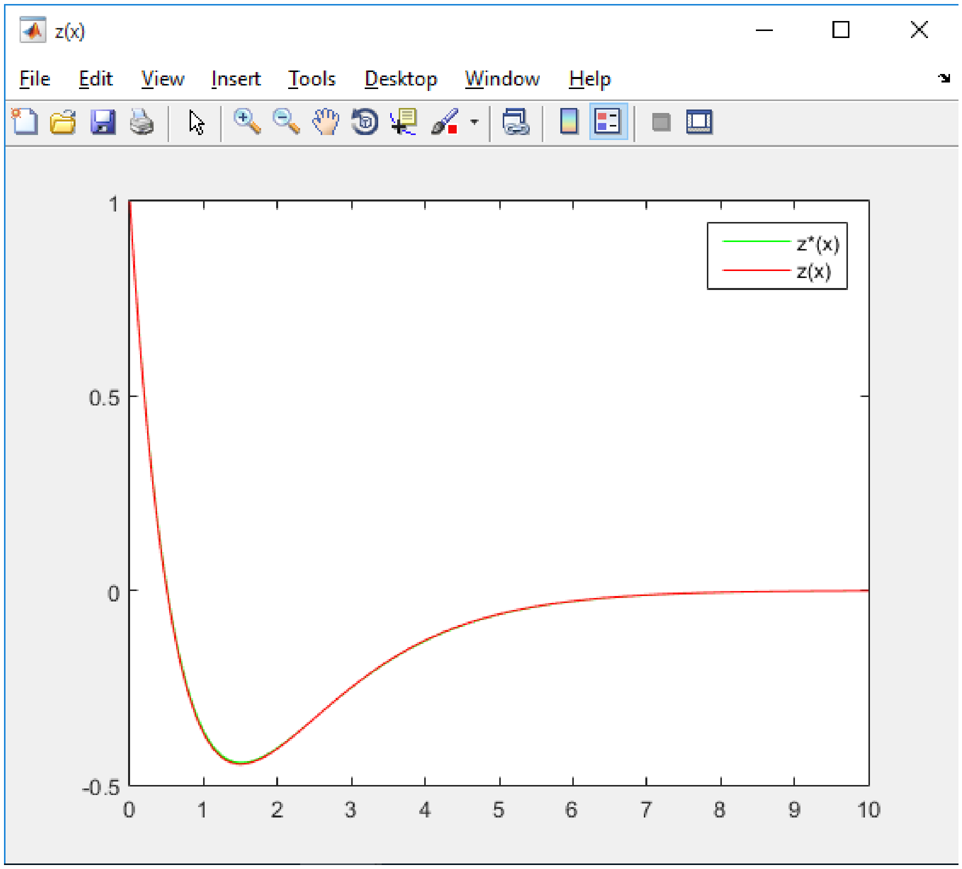
- **s** - numer przykładu (liczba od 1 do 3)
- **n** - liczba węzłów

Po uruchomieniu w dolnej i górnej części ekranu prezentowane są wykresy rozwiązań jednego z trzech przykładowych układów równań. W każdym oknie rysowane są wykresy rozwiązania dokładnego oraz znalezionego metodą Rungego-Kutty. Ponadto w konsoli wypisywany jest komunikat:
`Max blad y(x) =`
`Max blad z(x) =`

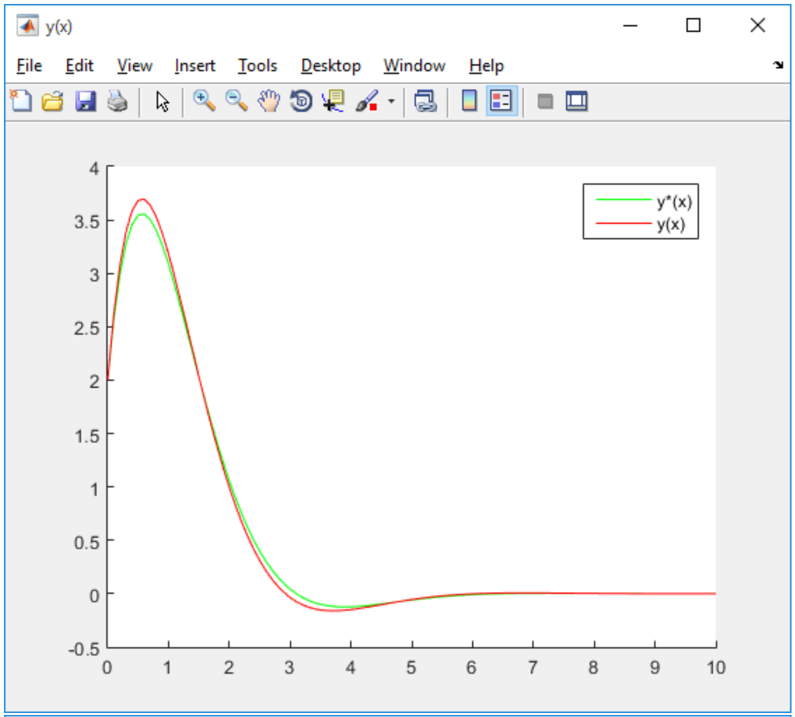
4 Przykłady

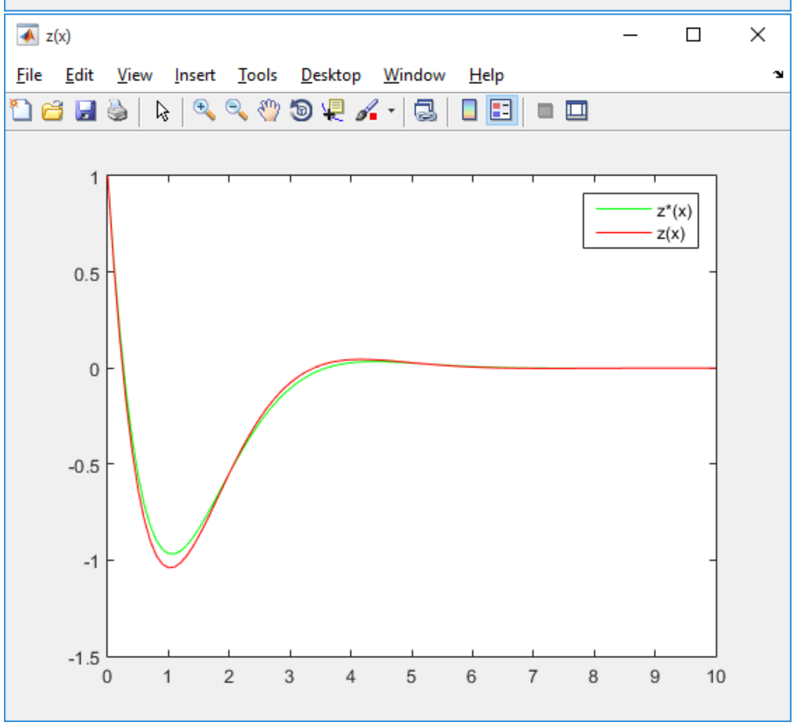
1. **Wywołanie:**
   $y' = z, \qquad y(0) = 1$
   $z' = -2y - z, \qquad z(0) = 1$
   $(a, b] = (0, 10]$
   `test_rk3ode(1, 500)`
   Wyjście:
   `Max blad y(x)=0.003230`
   `Max blad z(x)=0.006594`
   Rozwiązanie dokładne: $y(x) = e^{-x}(2x + 1)$,
   $z(x) = e^{-x}(1 - 2x)$



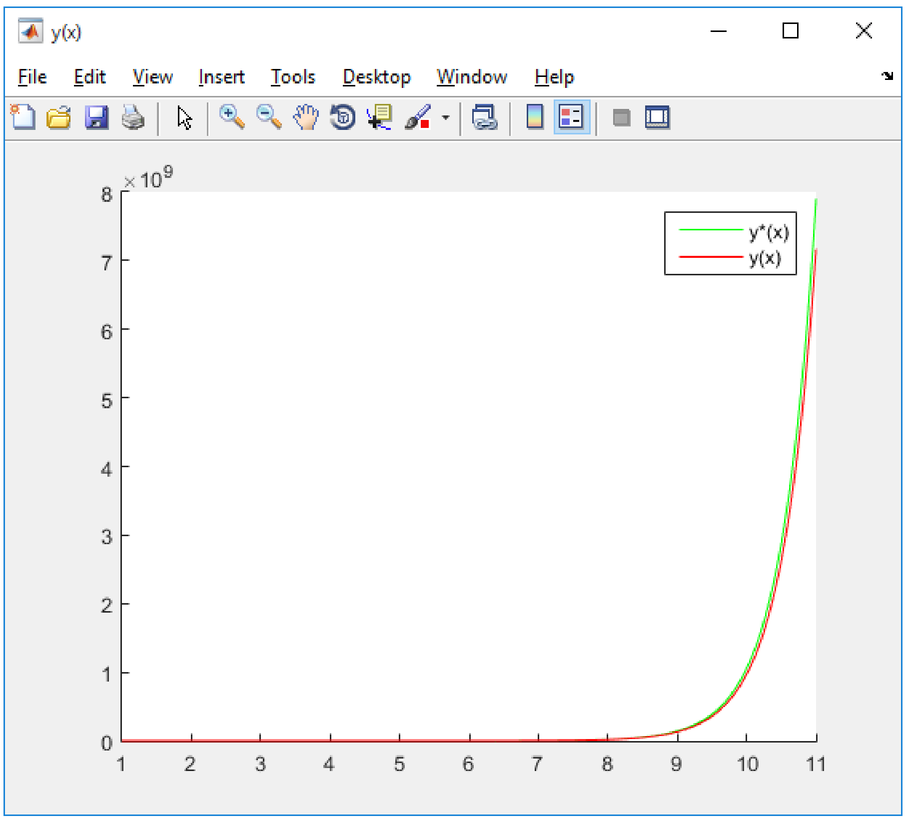


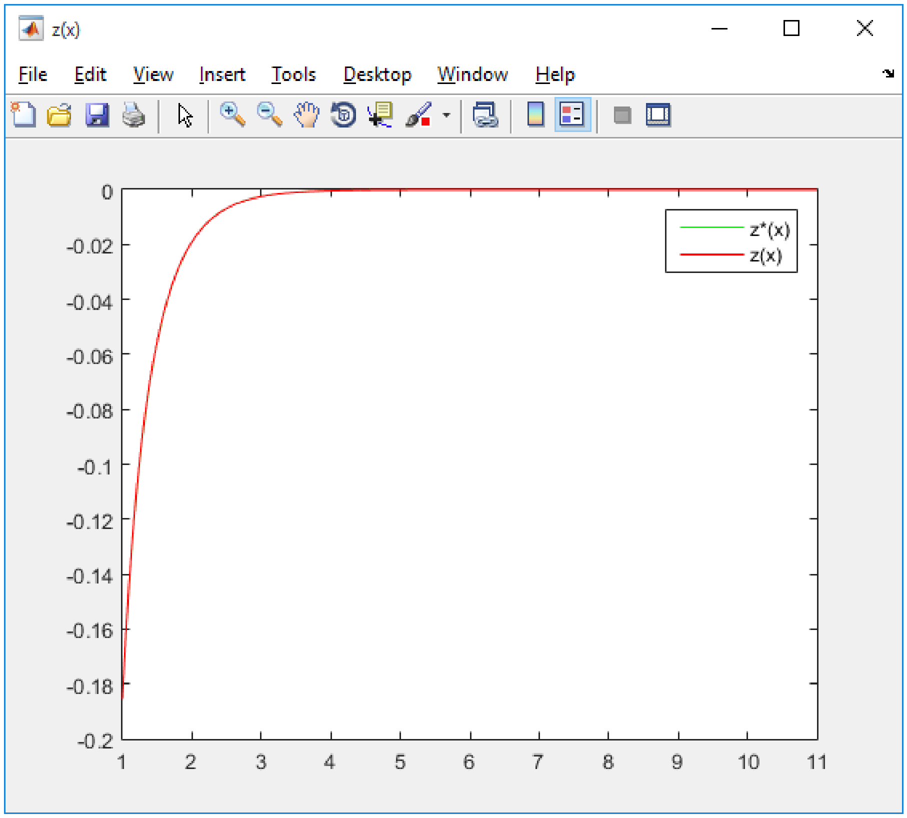
2. **Wywołanie:**
   $y' = y + 5z, \qquad y(0) = 2$
   $z' = -y - 3z, \qquad z(0) = 1$
   $(a, b] = (0, 10]$
   `test_rk3ode(2, 100)`
   Wyjście:
   `Max blad y(x)=0.139011`
   `Max blad z(x)=0.079480`
   Rozwiązanie dokładne:
   $y(x) = e^{-x}(9\sin(x) + 2\cos(x),$
   $z(x) = e^{-x}(\cos(x) - 4sin(x))$


y(x)
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
y*(x)
y(x)

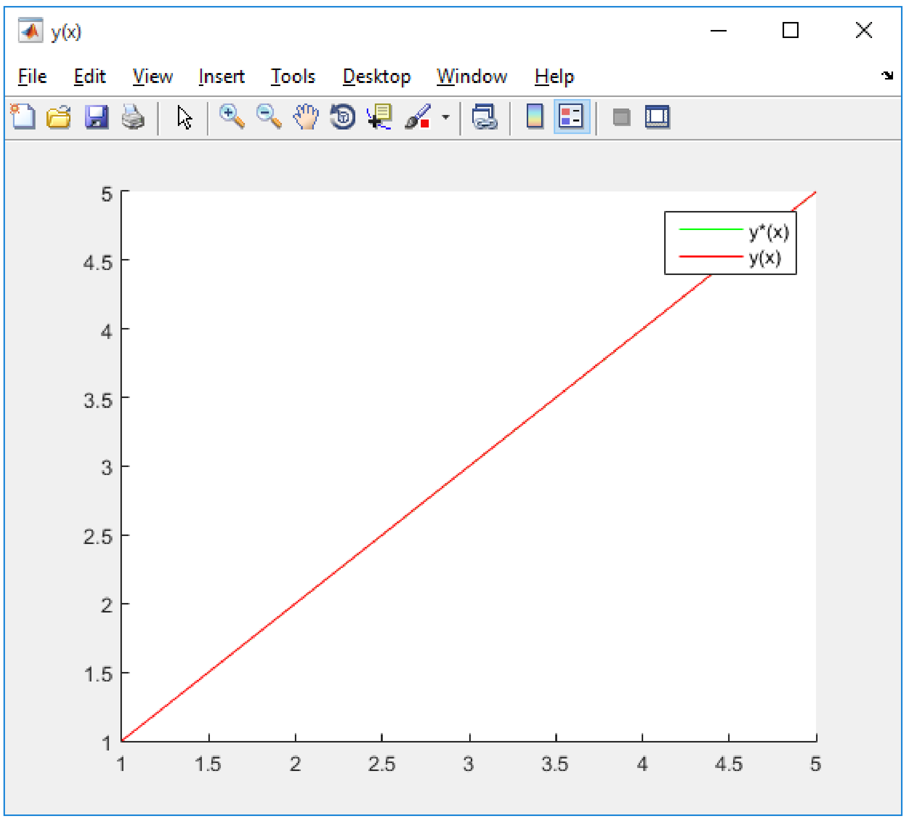

z(x)
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
z*(x)
z(x)

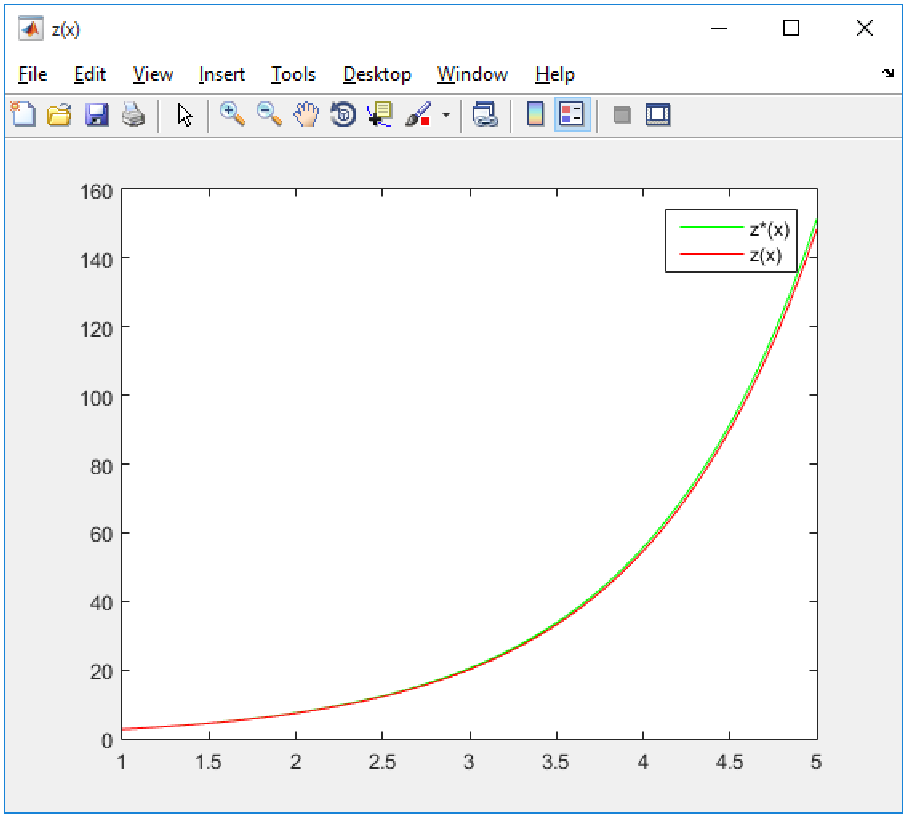
3. **Wywołanie:**
   $y' = 2y, \qquad y(1) = 2e^2$
   $z' = yz^2, \qquad z(1) = \frac{1}{2-e^2}$
   $(a, b] = (1, 11]$
   `test_rk3ode(3, 1000)`
   Wyjście:
   `Max blad y(x)=730545494.058938`
   `Max blad z(x)=0.000343`
   Rozwiązanie dokładne:
   $y(x) = 2e^{2x},$
   $z(x) = \frac{1}{2-e^{2x}}$




z(x)
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
z*(x)
z(x)
0
-0.02
-0.04
-0.06
-0.08
-0.1
-0.12
-0.14
-0.16
-0.18
-0.2
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

4. **Wywołanie:**
$y' = \frac{1}{1+z} + sin(y) - \frac{1}{1+e^x} - sin(x) + 1, \qquad y(1) = 1$
$z' = cos(y+z) + e^x - cos(x+e^x), \qquad z(1) = e$
$(a, b] = (1, 5]$ `test_rk3ode(4, 50)`
Wyjście:
`Max blad y(x)=0.000815`
`Max blad z(x)=2.949982`
Rozwiązanie dokładne:
$y(x) = x,$
$z(x) = e^x$




z(x)
File Edit View Insert Tools Desktop Window Help
160
140
120
100
80
60
40
20
0
1
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
5
z*(x)
z(x)