

Metody Numeryczne 2

Laboratorium 2

Interpolacja funkcjami sklejanymi liniowymi z przestrzeni $S_1(\Delta_n, 0)$

Szymon Adach

4 listopada 2015

1 Treść zadania

Zadanie 6: Interpolacja funkcjami sklejanymi liniowymi z przestrzeni $S_1(\Delta_n, 0)$. Zagęszczanie podziału Δ_n aż do osiągnięcia błędu rzeczywistego, mierzonego w środkach posprzedałów, mniejszego od ε .

2 Opis metody

Niech Δ_n będzie podziałem odcinka $[a, b]$:

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$$

Wówczas definiujemy przestrzeń funkcji:

$$S_m(\Delta_n, k) = \{s \in C^k([a, b]) : s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in P_m([x_{i-1}, x_i]), \quad i = 1, \dots, m\}$$

gdzie P_m to przestrzeń wielomianów stopnia m . W tych funkcjach sklepanych funkcją bazową jest funkcja:

$$\psi(x) = \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \in [-1, 0] \\ 1-x & \text{dla } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{dla pozostałych } x \end{cases}$$

Definiujemy również funkcję opartą na węzłach x_{i-1}, x_i, x_{i+1} , $i = 0, 1, \dots, n$:

$$\psi_i(x) = \psi\left(\frac{x - x_i}{h}\right), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

dzięki której możemy zdefiniować wielomian sklejany

$$s(x) = \sum_{j=0}^n a_j \psi_j(x)$$

Zadanie można podzielić na następujące podproblemy:

1. **Podział odcinka na n części i znalezienie splajnów.**

```
// f – funkcja interpolowana
x = linspace(a, b, n+1);
h = (b-a)/n;
val = zeros(1, length(x)-1);
for k=1:length(x)-1
    mid = (x(k) + h/2);
    val(k) = f(x(k)) * (x(k+1) - mid) / ...
        (x(k+1)-x(k)) + f(x(k+1)) * ...
        (mid - x(k)) / (x(k+1) - x(k));
end
```

2. **Sprawdzenie wartości błędu maksymalnego (mierzonego w środkach podprzedziałów)**

Zgodnie z poleceniem dokonywane jest obliczenie błędu maksymalnego i porównanie jego wartości z ε podanym przez użytkownika. Jeżeli interpolacja nie spełnia zadanego warunku, to program przechodzi do pierwszego kroku przy dwukrotnym zagęszczeniu podziału Δ_n . W przeciwnym przypadku program przechodzi do punktu trzeciego.

```
val_diff = zeros(1, length(val));
for k=1:length(x)-1
    mid = (x(k) + h/2);
    val_diff(k) = abs(f(mid) - val(k));
end
max_err = max(val_diff);
```

3. **Narysowanie wykresów funkcji interpolowanej i splajnów.**

3 Działanie programu

Program został napisany w MATLAB-ie, składa się z 4 plików:

- **spline.m** - pętla główna programu
- **calc_mid.m** - obliczanie splajnów
- **err.m** - obliczenie błędu maksymalnego
- **plotter.m** - rysowanie wykresów

Program jest uruchamiany poleceniem **find_zeroes(a, b, n, e, f)**, gdzie:

- **a, b** - początek i koniec przedziału, na którym interpolujemy
- **n** - liczba podprzedziałów
- **e** - oczekiwana dokładność
- **f** - funkcja interpolowana (w MATLAB-ie uchwyt do funkcji)

Po wykonaniu obliczeń prezentowany jest wykres funkcji interpolowanej oraz splajnów, a w konsoli wypisywana jest wynikowa liczba podprzedziałów i użyta dokładność.

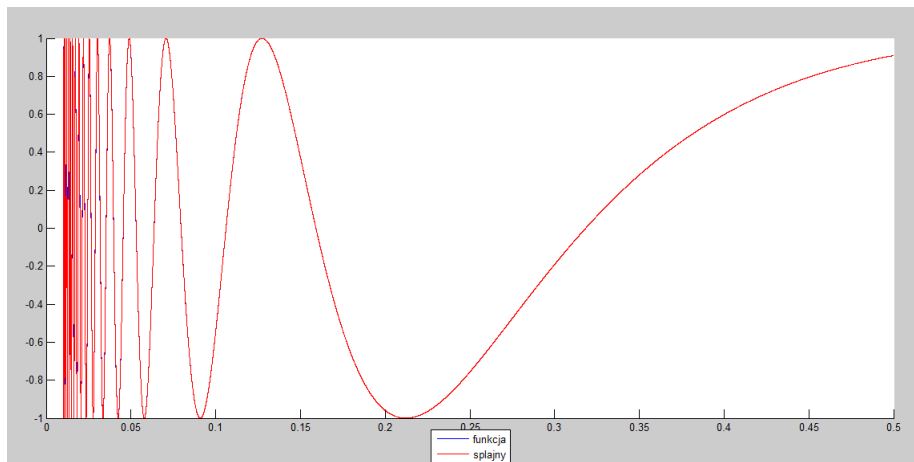
4 Przykłady

1. **Wywołanie:** `spline(0.01, 0.5, 20, 0.01, @(x)sin(1./x))`

Wyjście:

Liczba węzłów: 20480

Błąd maksymalny (liczony w środkach): 0.006842



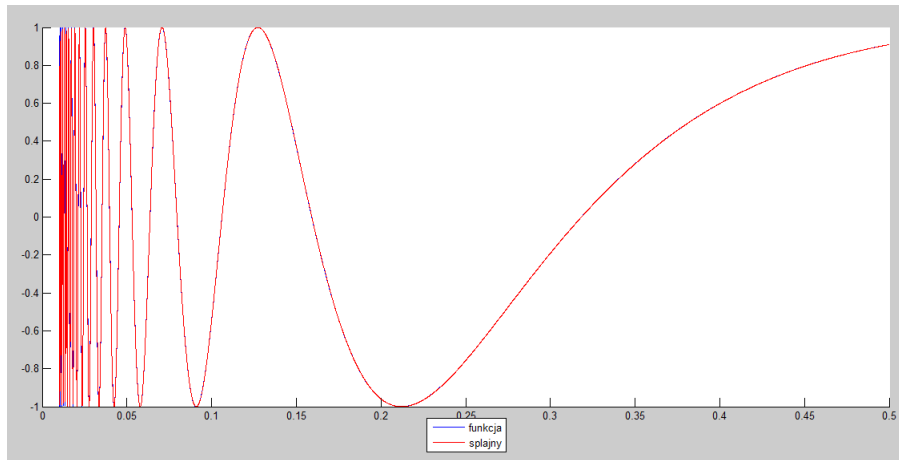
Komentarz: Przy zadanej dużej dokładności i czas działania funkcji jest zwiększony ze względu na "gęstość" wykresu funkcji, która wpływa na liczbę operacji.

2. **Wywołanie:** `spline(0.01, 0.5, 4, 0.25, @(x)sin(1./x))`

Wyjście:

Liczba węzłów: 4096

Błąd maksymalny (liczony w środkach): 0.154378

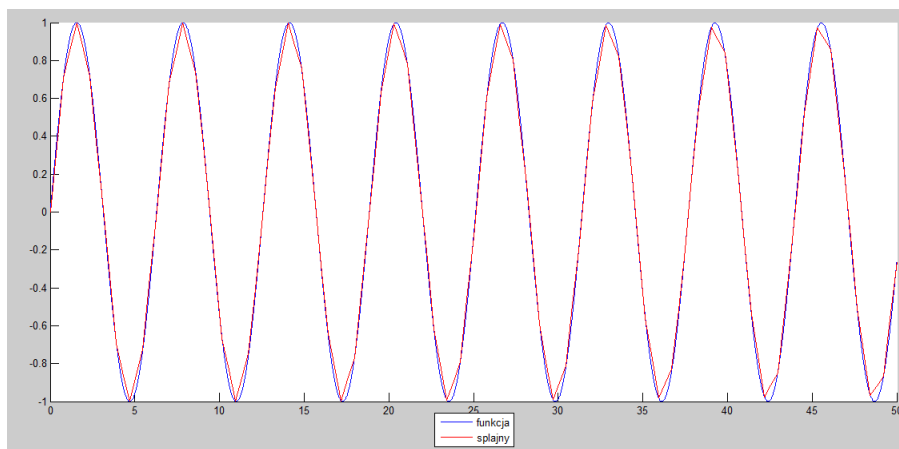


3. **Wywołanie:** `spline(0, 50, 8, 0.25, @(x)sin(x))`

Wyjście:

Liczba węzłów: 64

Błąd maksymalny (liczony w środkach): 0.074659



4. **Wywołanie:** `spline(0, 25, 2, 3, @(x)x.^2.-21.*x+104)`

Wyjście:

Liczba węzłów: 8

Błąd maksymalny (liczony w środkach): 2.441406

