Metody Numeryczne 2
Laboratorium 5

Obliczanie wskaźnika uwarunkowania macierzy
$A = A^T$ i diagonalnie silnie dominującej

Szymon Adach

12 grudnia 2015

1 Treść zadania

Zadanie 6: Obliczanie wskaźnika uwarunkowania macierzy $A = A^T$ i diagonalnie silnie dominującej ($cond_2(A) = \frac{\lambda_{max}}{\lambda_{min}}$). Do obliczenia λ_{max} należy zastosować zwykłą metodę potegową, a do obliczenia λ_{min} odwrotną metodę potegową. Odpowiedni układ równań należy rozwiązać metodą iteracyjną Jacobiego.

2 Opis metody

λ_{max} obliczana jest za pomocą prostej metody potęgowej. Aby wyeliminować nadmiar bądź niedomiar zastosowano normowanie wektora x. Algorytm znajdowania tej wartości własnej macierzy A przedstawia się następująco:

$$\begin{cases} x^{(0)} \neq 0 \\ x^{(k+1)} = A \cdot x^{(k)} \text{ dla } k = 0, 1 \dots n \end{cases}$$

Ponadto w każdej iteracji wykonywane jest normowanie wektora x:

$$x^{(k+1)} = \frac{x^{(k+1)}}{\|x^{(k+1)}\|_2}$$

Wektor $x^{(0)}$ jest losowany podczas uruchamiania programu. Końcowy wynik obliczany jest ze wzoru:

$$\lambda_{max} = \frac{(Ax, x)}{\|x^{(k+1)}\|_2}$$

λ_{min} obliczana jest za pomocą odwrotnej metody potęgowej. Algorytm znajdowania tej wartości własnej macierzy A przedstawia się następująco:

$$\begin{cases} \lambda^* \approx \lambda_i \\ x^{(0)} \neq 0 \\ (A - \lambda^* I)y^{(k+1)} = x^{(k)} \\ \lambda_i^{(k)} = \frac{1}{(y^{(k+1)}, x^{(k)})} - \lambda^* \\ x^{(k+1)} = \frac{y^{(k+1)}}{\|(y^{(k+1)}\|_2} \end{cases}$$

Wektor $x^{(0)}$ jest losowany podczas uruchamiania programu. Równanie $(A - \lambda^* I)y^{(k+1)} = x^{(k)}$ rozwiązywane jest za pomocą metody iteracyjnej Jacobiego z zadaną dokładnością.

3 Działanie programu

Program jest uruchamiany poleceniem:

conditional_number(A, n, e)

- **A** - macierz, której wskaźnik uwarunkowania zostanie obliczony
- **n** - liczba iteracji w metodach potęgowej i odwrotnej potęgowej
- **e** - błąd bezwzględny metody Jacobiego rozwiązywania równania $(A - \lambda^* I)y^{(k+1)} = x^{(k)}$ w odwrotnej metodzie potęgowej

Po wykonaniu obliczeń prezentowane są wartości λ_{max}, λ_{min} oraz $cond_2(A)$:

```
Lambda_min =
Lambda_max =
cond_2(A) =
```

4 Przykłady

1. **Wywołanie:**
   $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$
   `condition_number(A, 100, 0.001)`
   Wyjście:
   ```
   Lambda_min = 2.588539
   Lambda_max = 5.414214
   cond_2(A) = 2.091610
   ```
   eig(A) = 2.5858 4.0000 5.4142
   Obserwacja: Dla tego problemu podobny wpływ na dokładność programu ma zwiększenie liczby iteracji oraz zmniejszenie dopuszczalnego błędu metody Jacobiego.

2. **Wywołanie:** `aproksymacja(@(x)x^6+5*x^5, 10, 7)`
   Wyjście:

3. **Wywołanie:** `aproksymacja(@cos, 10, 4)`
   Wyjście: