

《基础物理实验》实验报告

分组号：01—9

实验名称 RLC 电路的谐振与暂态过程 指导教师 尹倩青
姓 名 李奉治 学号 2016K8009929036 专 业 计算机科学与技术 组内编号 08
实验日期 2017 年 11 月 20 日 实验地点 教 709 成绩评定

RLC 电路的谐振与暂态过程

一、实验目的

1. 熟悉函数发生器和示波器的基本操作
2. 研究 RLC 电路的谐振现象
3. 掌握 RLC 串并联电路的幅频特性和相频特性的测量方法
3. 用实验的方法找出电路的谐振频率，利用幅频曲线求出电路的品质因数 Q 值
4. 用数字存储示波器观察 RLC 串联电路的暂态过程，理解阻尼振动规律

二、仪器用具

0.1H 标准电感，100 Ω 标准电阻

电阻箱，电容箱

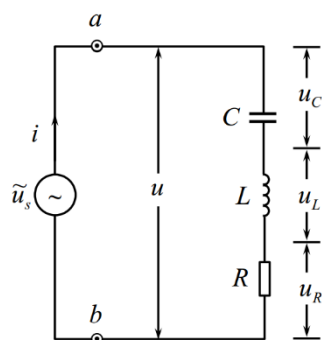
函数发生器，示波器

数字多用表，导线等

三、实验原理

1. 串联谐振

RLC 串联电路如图 1 所示。其总阻抗 $|Z|$ 、电压 u 与电流 i 之间的相位差 φ 、电流 i 分别为



$$|Z| = \sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}$$

$$i = \frac{u}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}$$

图 1 RLC 串联电路

式中 $\omega = 2\pi f$ 为角频率（ f 为频率）， $|Z|$ ， φ ， i 都是 f 的函数，当电路中其它元件参量取确定值的情况下，它们的特性完全取决于频率。

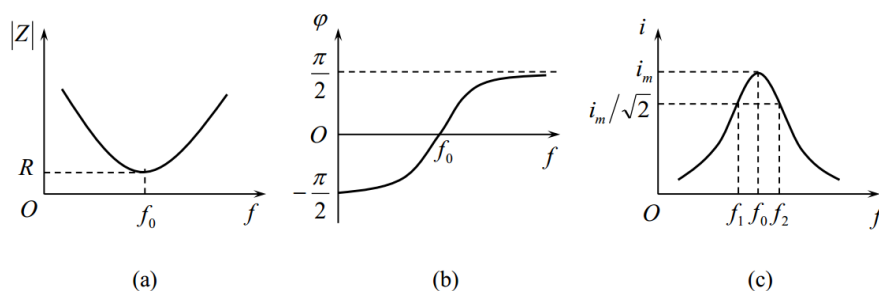


图 2 RLC 串联电路的频率特性 (a)阻抗特性；(b)相频特性；(c)幅频特性

图 2 中(a)、(b)、(c)分别为 RLC 串联电路的阻抗、相位差、电流随频率的变化曲线。其中(b) $\varphi - f$ 曲线称为相频特性曲线；(c) $i - f$ 曲线称为幅频特性曲线，它表示在总电压 u 保持不变的条件下 i 随 f 的变化曲线。相频特性曲线和幅频特性曲线有时统称为频率响应特性曲线。

由曲线图可以看出，存在一个特殊的频率 f_0 ，这种特殊的状态称为串联谐振，此时角频率 ω_0 （或频率 f_0 ）称为谐振角频率（或谐振频率）。谐振时，有

$$u_L = i_m |Z_L| = \frac{\omega_0 L}{R} u, \frac{u_L}{u} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$u_C = i_m |Z_C| = \frac{1}{R \omega_0 C} u, \frac{u_C}{u} = \frac{1}{R \omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

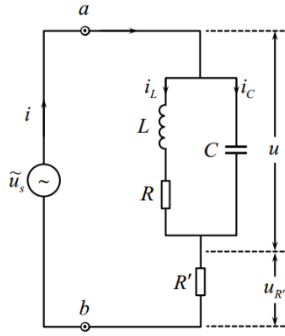
令
$$Q = \frac{u_L}{u} = \frac{u_C}{u} \text{ 或 } Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R \omega_0 C}$$

Q 称为谐振电路的品质因数，简称 Q 值。它是由电路的固有特性决定的，是标志和衡量谐振电路性能优劣的重要的参量。 Q 值标志着储耗能特性、电压分配特性和频率选择性。

串联谐振又称为电压谐振。在电力系统中应避免发生串联谐振，而其在无线电工程中有广泛应用。

2. 并联谐振

RLC 并联电路如图 3 所示。其总阻抗 $|Z_p|$ 、电压 u 与电流 i 之间的相位差 φ 、电压 u (或电流 i)分别为



$$|Z_p| = \sqrt{\frac{R^2 + (\omega L)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega CR)^2}}$$

$$\varphi = \arctan \frac{\omega L - \omega C[R^2 + (\omega L)^2]}{R}$$

$$u = i|Z_p| = \frac{u_{R'}}{R'} |Z_p|$$

图 3 RLC 并联电路

显然，它们都是频率的函数。当 $\varphi = 0$ 时，电流和电压同相位，整个电路呈纯电阻性，即发生谐振。

可求得并联谐振的角频率 ω_p （或并联谐振频率 f_p ）为

$$\omega_p = 2\pi f_p = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{L}\right)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}$$

式中 $\omega_0 = 2\pi f_0 = 1/\sqrt{LC}$ ， $Q = \omega_0 L/R = \sqrt{L/C}/R$ 。可见并联谐振频率 f_p 与 f_0 稍有不同，当 $Q \gg 1$ 时，

$$\omega_p \approx \omega_0, f_p \approx f_0。$$

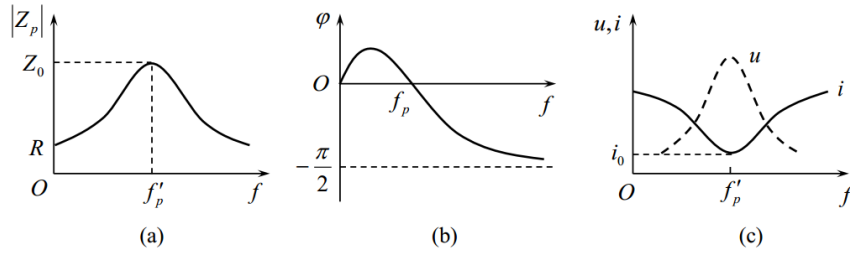


图 4 RLC 并联电路的频率特性 (a)阻抗特性；(b)相频特性；(c)幅频特性

图 4 中(a)、(b)、(c)分别为 RLC 并联电路的阻抗、相位差、电流或电压随频率的变化曲线。显然，在谐振频率两边区域，并联电路的电抗特性与串联电路时截然相反。在 $f = f_p$ 处，总阻抗达到极大值，总电流达到极小值。

与串联谐振类似，可用品质因数 Q ，即

$$Q_1 = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C}, Q_2 = \frac{i_C}{i} \approx \frac{i_L}{i}, Q_3 = \frac{f_0}{\Delta f}$$

标志并联谐振电路的性能优劣，其意义也类同。不过，此时 $i_L \approx i_C = iQ$ ，谐振支路中的电流为总电流的 Q 倍。因此，有时称并联谐振为电流谐振。

3. RLC 电路的暂态过程

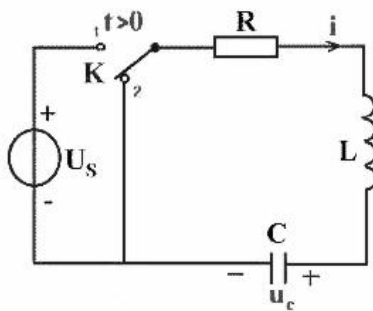


图 5 RLC 暂态电路

电路如图 5。先观察放电过程，即开关 S 先合向“1”使电容充电至 E，然后把 S 倒向“2”，电容就在闭合的 RLC 电路中放电。电路方程为 $L \frac{di}{dt} + Ri + u_c = 0$ 。将 $i = C du_c / dt$ 带入得

$$LC \frac{d^2 u_c}{dt^2} + RC \frac{du_c}{dt} + u_c = 0$$

根据初始条件 $t = 0, u_c = E, du_c/dt = 0$ 解方程，方程的解分为 3 种情况：

① $R^2 < 4L/C$ 属于阻尼较小的情况。引入阻尼系数 $\zeta = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$ 后，对应 $\zeta < 1$ 。此时方程的解为

$$u_c = \sqrt{\frac{4L}{4L - R^2 C}} E e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi)$$

其中时间常量为 $\tau = 2L/R$ ，衰减振动的角频率为 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2 C}{4L}}$ ， u_c 随时间变化的规律如图 6 中曲线 I 所示，即阻尼振动状态。此时振动的振幅呈指数衰减。 τ 的大小决定了振幅衰减的快慢， τ 越小，振幅衰减越迅速。

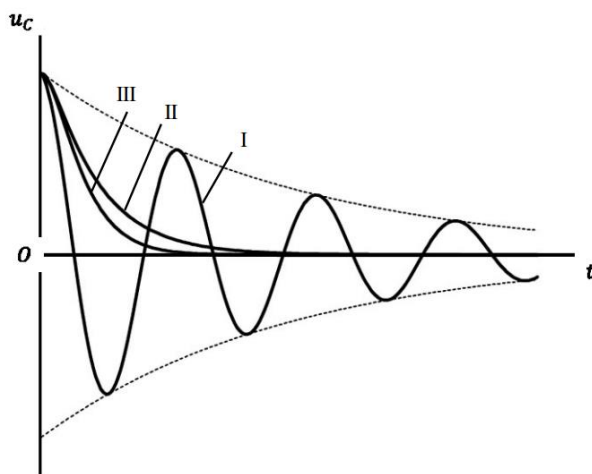


图 6 RLC 暂态过程中的三种阻尼曲线

如果 $R^2 \ll 4L/C$ ，通常是 R 很小的情况，振幅的衰减很缓慢， $\omega \approx 1/\sqrt{LC} = \omega_0$ 。此时近似为 LC 电路地自由振动， ω_0 为 $R = 0$ 时 LC 回路的固有频率。衰减振动的周期 $T = 2\pi/\omega \approx 2\pi\sqrt{LC}$

② $R^2 > 4L/C$ ，即阻尼系数 $\zeta > 1$ 。对应于过阻尼状态，其解为

$$u_C = \sqrt{\frac{4L}{R^2C - 4L}} E e^{-\alpha t} \text{Sinh}(\beta t + \varphi)$$

式中

$$\alpha = \frac{R}{2L}, \beta = \frac{1}{\sqrt{RC}} \sqrt{\frac{R^2C}{4L} - 1}$$

所表示的 $u_C - t$ 的关系曲线见图 6 中的曲线 II，它是以缓慢的方式逐渐回零。可以证明，若 L 和 C 固定，随电阻 R 的增长， u_C 衰减到零的过程更加缓慢。

③ $R^2 = 4L/C$ ，即阻尼系数 $\zeta = 1$ 。对应于临界阻尼状态，其解为

$$u_C = E \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau}$$

其中 $\tau = 2L/R$ 。它是从过阻尼到阻尼振动过渡的分界点， $u_C - t$ 的关系见图 6 中的曲线 III。

对于充电过程，即开关 S 先在位置“2”，待电容放电完毕，再把 S 倒向“1”，电源 E 将对电容充电，于是电路方程变为

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$$

初始条件为 $t = 0, u_C = 0, du_C/dt = 0$ 。方程解为

$$\begin{aligned} R^2 < \frac{4L}{C}, u_C &= E \left[1 - \sqrt{\frac{4L}{4L - R^2C}} e^{-t/\tau} \cos(\omega t + \varphi) \right] \\ R^2 > \frac{4L}{C}, u_C &= E \left[1 - \sqrt{\frac{4L}{R^2C - 4L}} e^{-t/\tau} \text{Sinh}(\omega t + \varphi) \right] \\ R^2 = \frac{4L}{C}, u_C &= E \left[1 - \left(1 + \frac{t}{\tau}\right) e^{-t/\tau} \right] \end{aligned}$$

可见，充电过程和放电过程十分类似，只是最后趋向的平衡位置不同。

四、实验内容与数据处理

1. 测 RLC 串联电路的相频特性和幅频特性曲线

1) 按照讲义连接电路，调节函数发生器频率，通过 CH1 与 CH2 相位差为 0，CH2 的幅度最大来判断；记录此时的频率。（通过示波器读出）

保持 $u_{pp} = 2.0V$, $L = 0.1H$, $C = 0.05\mu F$, $R = 100\Omega$, 可测得谐振频率 $f_0 = 2.25kHz$, 与计算值相符。

2) 用万用表测量此时电感、电容两端的电压 u_L 、 u_C 和电源的路端电压 u 用以计算 Q 值。

实验可测得 $u = 0.466V$, $u_L = 5.55V$, $u_C = 5.55V$, 带入 $Q = \frac{u_L}{u} = \frac{u_C}{u}$ 的计算公式, 得出 $Q = 11.91$ 。根据公式, 代入 $L = 0.1H$, $R = 100\Omega$, $f_0 = 2.25kHz$ 计算所得的计算值为 $Q = 14.13$, 两者近似相等。

3) 保持 CH1 幅度值 2V 不变, 按照建议的频率点测量 CH1 与 CH2 的相位差, 和 CH2 的幅度值。用以完成相频曲线和幅频曲线。

实验测得数据如下, 使用 Matlab 绘图可得:

相位差 φ	频率 (kHz)	电阻两端电压 u_R (mV)	相位差 φ	频率 (kHz)	电阻两端电压 u_R (mV)
-80°	1.88	183	15°	2.28	512
-72°	2.02	259	30°	2.30	490
-60°	2.09	315	45°	2.36	413
-45°	2.16	446	60°	2.43	312
-30°	2.20	490	72°	2.64	198
-15°	2.23	512	80°	3.21	123
0°	2.25	518			

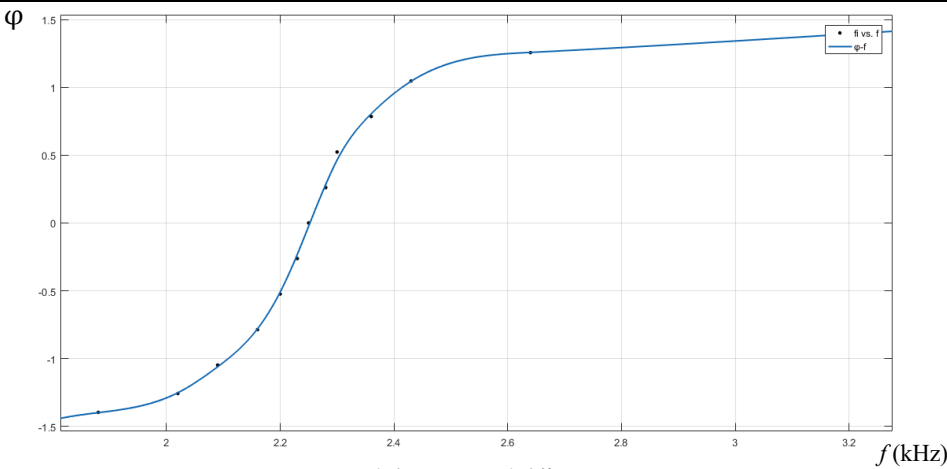


图 7 $\varphi - f$ 图像

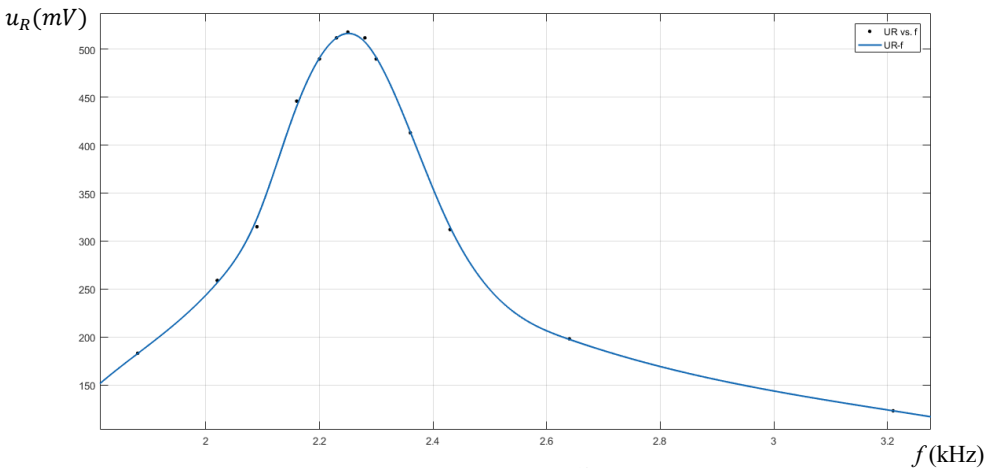


图 8 $U_R - f$ 图像

2. 测 RLC 并联电路的相频特性和幅频特性曲线

1) 按照讲义连接电路，CH1 接电源总电压，CH2 接电阻 R' 两端电压；通过 MATH 做差 CH1-CH2，显示为紫色的信号线。调节函数发生器频率，通过观察 CH1-CH2 与 CH2 相位差为 0，CH2 的幅度最小来判断谐振点；记录此时的频率。（通过示波器读出）

保持 $u + u_{R'} = 2.0V$ ， $L = 0.1H$ ， $C = 0.05\mu F$ ， $R' = 5k\Omega$ ，可测得谐振频率 $f_0 = 2.25kHz$ ，与计算值相符。

2) 保持 CH1 总电压幅度值 2V 不变(不同频率点需要调节函数发生器)，按照建议的频率点测量 CH1-CH2 与 CH2 的相位差，和 CH1-CH2，CH2 的幅度值。用以完成相频曲线和幅频曲线。

实验测得数据如下，使用 Matlab 绘图（ φ 取反）可得：

频率(kHz)	相位差 φ	幅度值 u (mV)	幅度值 i (mV)	频率(kHz)	相位差 φ	幅度值 u (mV)	幅度值 i (mV)
2.05	85°	680	485	2.253	-6°	812	72
2.15	77°	763	248	2.256	-16°	816	74
2.20	63°	785	135	2.265	-34°	849	84
2.231	40°	839	84	2.275	-49°	863	102
2.24	22°	850	77	2.32	-73°	823	209
2.247	8°	835	72	2.40	-82°	761	393
2.25	0°	811	71	2.60	-90°	530	691

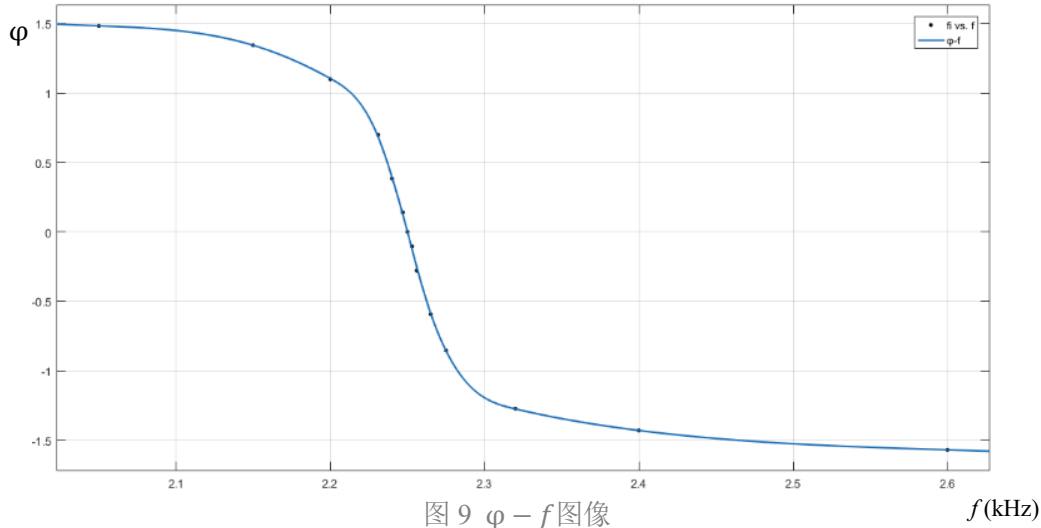


图 9 $\varphi - f$ 图像

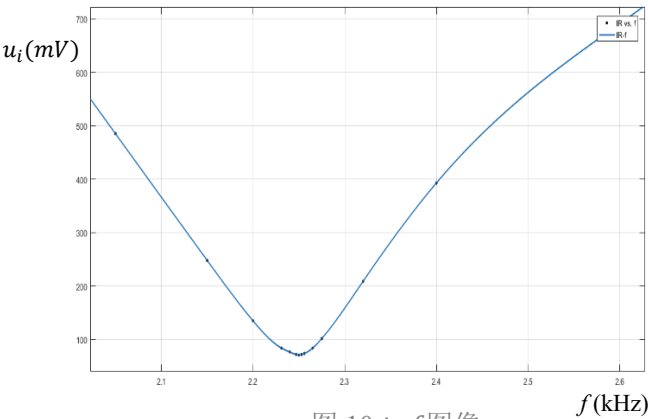


图 10 $i - f$ 图像

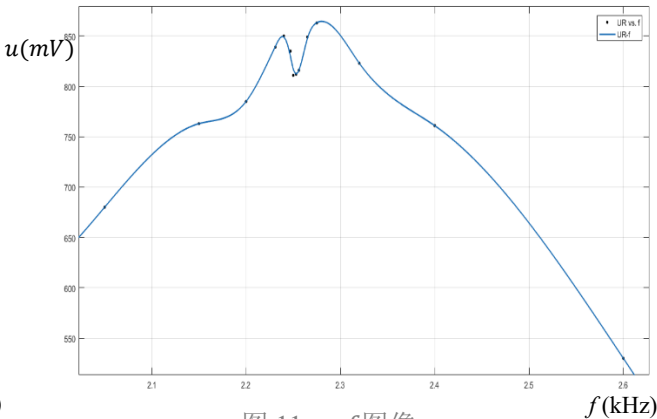


图 11 $u - f$ 图像

3. 观测 RLC 串联电路的暂态过程

实验电路如图 12 所示。由函数发生器产生方波。为便于观察，要求将方波的低电平调整与示波器的扫描基线一致。由低电平到高电平相当于充电，由高电平到低电平相当于放电。函数发生器各参数可设为：频率 50 Hz，电压峰峰值 $u_{pp} = 2.0V$ ，偏移 $1V$ 。示波器 CH1 通道用来测量总电压，CH2 用来测量电容两端电压 u_C ，注意两个通道必须共地。实验中 $L = 0.1H$, $C = 0.2\mu F$ 。

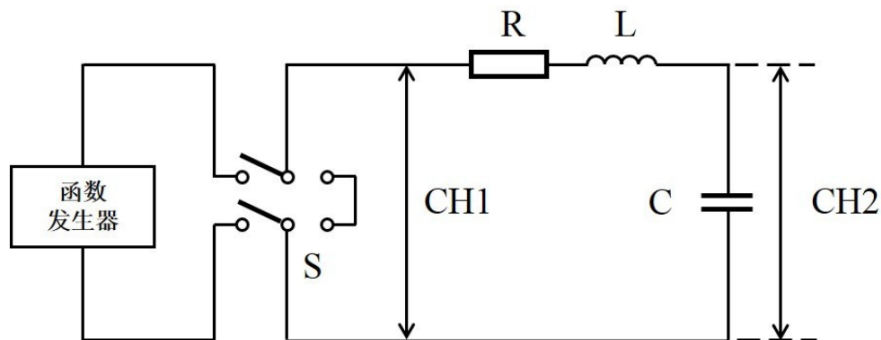


图 12 RLC 暂态过程实验电路

1) $R = 0\Omega$ ，测量 u_C 波形。

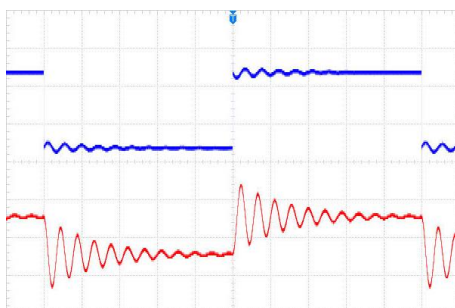


图 13

2) 调节 R 测得临界电阻 R_C ，并与理论值比较。

调节可得 $R_C = 1190\Omega$ ，对应的图像如下所示。理论值 $R_C = 1414\Omega$ 。



图 14

3) 记录 $R = 2k\Omega, 20k\Omega$ 的 u_C 波形。函数发生器频率可分别选为 250Hz ($R = 2k\Omega$)，和 20 Hz ($R = 20k\Omega$)

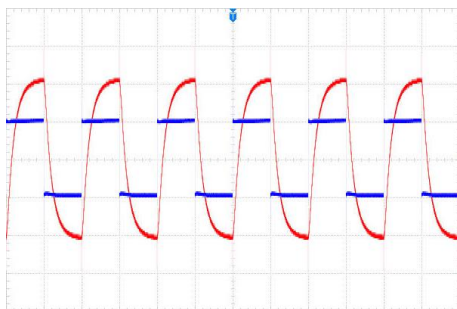


图 15 $f = 250Hz$ $R = 2k\Omega$

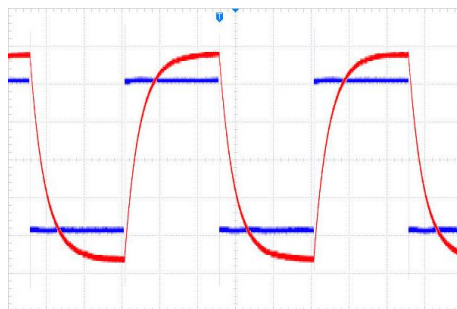


图 16 $f = 20Hz$ $R = 20k\Omega$

六、实验结果

测 RLC 串联和并联电路的相频特性和幅频特性曲线实验中，除了 RLC 并联电路的电压幅频特性图像，其余所测得的曲线与理论曲线形态基本吻合。RLC 并联电路的电压幅频特性图像在理论峰值处出现一个较大波动。

观测 RLC 串联电路的暂态过程实验中，可通过示波器清晰的观测到电路中的电压变化特点。通过观察图像调节出的临界电阻值与理论值符合较好，基本完成了实验要求。

七、实验感想

本实验操作较为简单，主要的困难在于测量值的不稳定性。对于这样不稳定的测量值，我们只能对其取一段时间内的平均值作为测量值。这样虽然精度不高，却足够进行定性分析。这时进行物理实验的一种处理手段。

另外，在 RLC 并联电路的电压幅频特性图像中，出现了一个理论值中不存在的波动，这个现象值得我进行继续后续研究。