Module : La didactique–Spécialité : Mathématiques

L'atelier numéro 3 (Jeux de cadre et registres)

Diverses méthodes pour calculer $1+2+3+...+n$

1 Arithmétique algébrique

(a) Si on a deviné le résultat $(1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2})$: récurrence immédiate.

(b) Sinon : $\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2=\sum_{k=0}^{n}(k^2+2k+1)$

Donc : $\sum_{k=1}^{n+1}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)$

D'où :$(n+1)^2+\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k+(n+1)$

$(n+1)^2-(n+1)=2\sum_{k=1}^{n}k$

Alors : $\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$.

2 Arithmétique "visuelle"

$$1+2+3+...+n=M$$

$$+$$

$$n+n-1+...+1=M$$

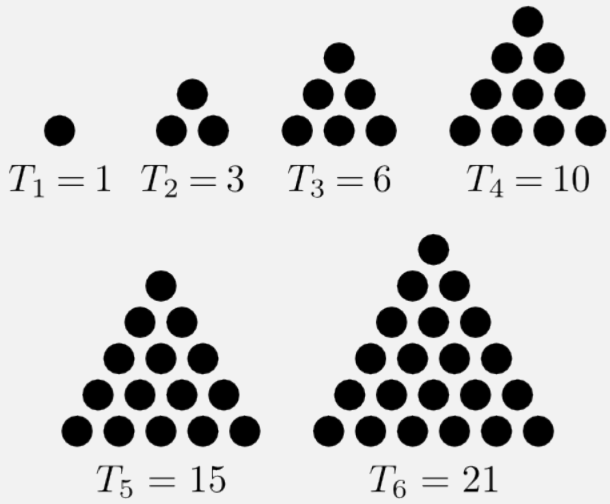
$$-----------------$$

$$n(n+1)=2M$$

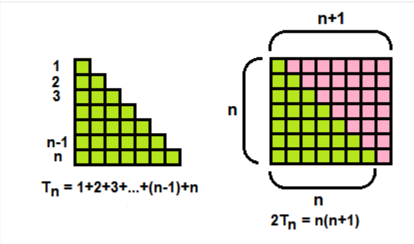
$$M=\frac{n(n+1)}{2}.$$

3 Géométrie "visuelle"

Les nombres triangulaires des Grecs



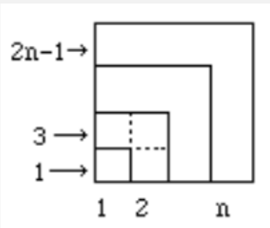
Les six premiers nombres triangulaires



❹ Mixte géométrie "visuelle"-arithmétique-algèbre

Par les "gnomons" des Grecs, on calcule d'abord la somme

$$\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$$



Alors : $1 + 3 + 5 + ... + (2n - 1) = n^2$
Posons : $M = 2 + 4 + 6 + ... + 2n$
Donc :$(n + 1) + M = 1 + (2 + 1) + (4 + 1) + (6 + 1) + ... + (2n + 1)$
D'où : $(n+1)+2(1+2+3+...+n) = 1+3+5+.....+(2n-1)+(2n+1) = (n + 1)^2$

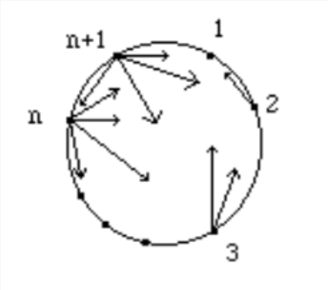
$$1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{(n + 1)^2 - (n + 1)}{2}$$

Alors : $1 + 2 + 3 + ... + n = \dfrac{n(n + 1)}{2}$

❺ Géométrie combinatoire ou combinatoire pure

Comparer deux points de vue et calculer le nombre de segments reliant

2 à 2, n+1 points sur un cercle (c'est aussi un problème de « poignée de main », qui peut être résolu dans un cadre purement combinatoire).



(a) un point de vue "local" : nombre de segments issus du point $n+1$, puis du point n, puis ..., ce qui donne $n+(n-1)+...+1$;

(b) un point de vue global : nombres de paires de points,ce qui donne directement C_{n+1}^{2}.

D'où :$1+2+3+...+n = C_{n+1}^{2} = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

⑥ Algèbre et analyse des polynômes

On dérive la relation $1+x+x^2+...+x^n = \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$,

Donc : $1+2x+3x^2+....+nx^{n-1} = \dfrac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$.

On fait tendre x vers 1 :

$\lim\limits_{x\to 1} 1+2x+3x^2+....+nx^{n-1} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(n+1)x^n(1-x)+(1-x^{n+1})}{(1-x)^2}$

D'où : $1+2+3+...+n = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{-(n+1)x^n+(1+x+x^2+...+x^n)}{(1-x)}$

Par la règle de L'Hospital on a donc :

$$1+2+3+...+n = \lim_{x\to 1} \frac{-(n+1)nx^{n-1}+(1+2x+3x^2+...+nx^{n-1})}{(-1)}.$$

Donc : $1+2+3+...+n = n(n+1)-(1+2+3+...+n)$.

D'où :$1+2+3+...+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

⑦ La limité d'une somme d'exponentielles

Il s'agit d'un changement de point de vue dans l'expression précédente : on remplace x par e^x,ce qui a l'avantage de donner une forme fixe . On écrit donc

$1+e^x+e^{2x}+....+e^{nx} = \dfrac{e^{(n+1)x}-1}{e^x-1}$.

⑧ La limite d'une somme trigonométrique

C'est le point de vue "partie imaginaire" de la relation précédente, avec la relation

$$\sin(x)+\sin(2x)+...+\sin(nx)=\frac{\sin(\frac{(n+1)x}{2})\sin(\frac{nx}{2})}{\sin(\frac{x}{2})}$$

On divise alors par x, et on fait tendre x vers 0.