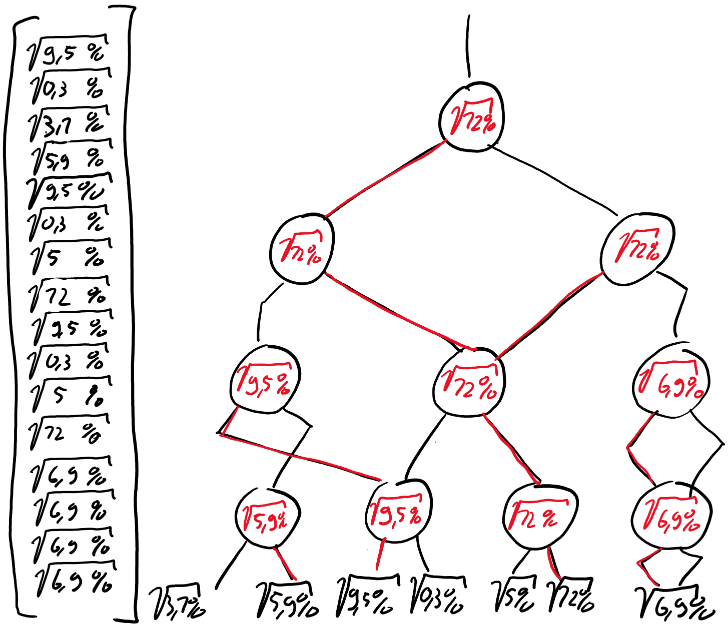
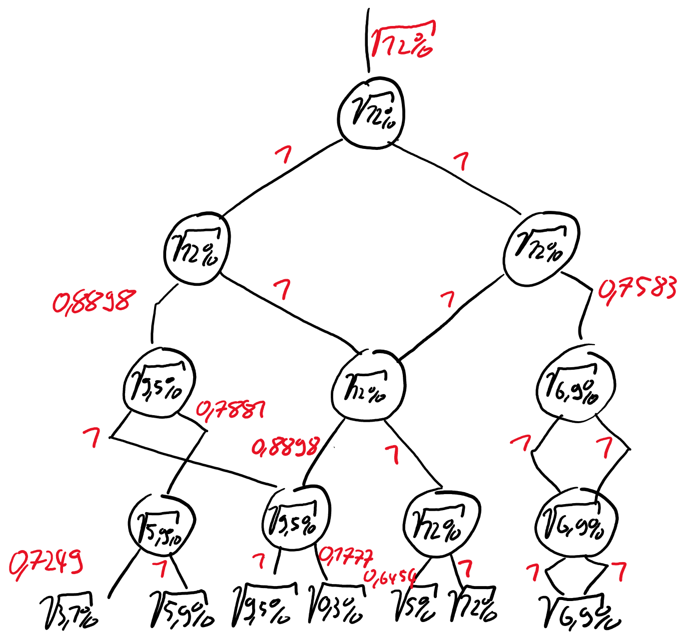
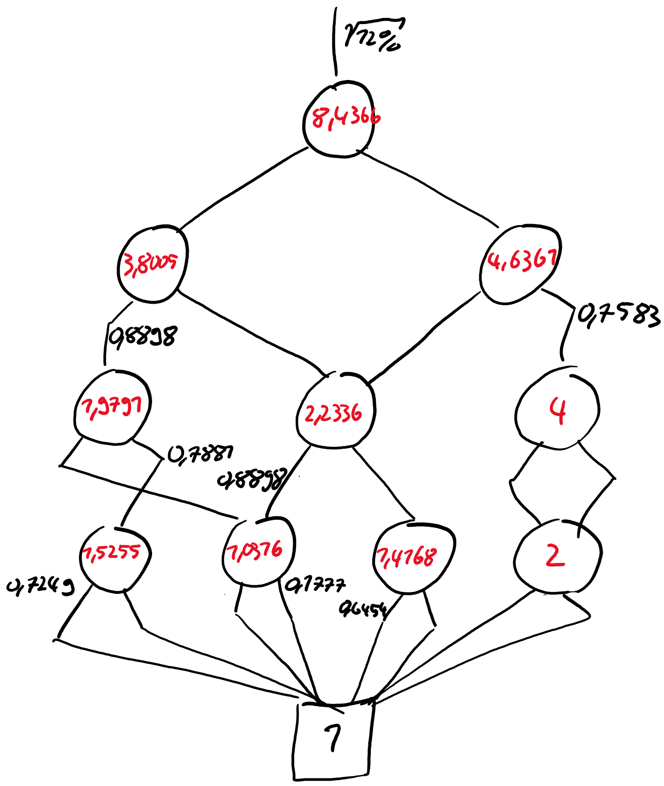
Anleitung zum Aufbau eines Entscheidungsdiagramms aus einem Vektor und zur Durchführung einer Messung eines Qubits

<table>
<tr><td colspan="2">1. Erstelle ein Objekt der Klasse DecisionDiagram aus Matrix/Vektor</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. Untersuche Matrix/Vektor auf gleiche Teilmatrizen/Teilvektoren (Gleiche Knoten speichern / DD vereinfachen)</td></tr>
<tr><td>3. Unten beginnend: Für alle Knoten den betragsmäßig größten Wert der Nachfolgeknoten auf den betrachteten Knoten übernehmen (In der letzten Ebene sind die Nachfolge-Werte die Einträge des Zustandsvektors)</td><td></td></tr>
<tr><td>4. Kantengewichte bestimmen: Wert des Nachfolgeknoten dividiert durch den Wert des Quellknoten (betrachtete Kante ist zwischen diesen Knoten)</td><td></td></tr>
</table>

Projektarbeit: Literaturrecherche zu Simulationsalgorithmen für Quantencomputing
Betreuer: Martin Hardieck
Autor: Lukas Lepper, 20.10.2020
Version 4

5. Die Werte der letzten Ebene (Elemente des Zustandsvektors) auf 1 setzen, wenn Eintrag ungleich 0 war (oder auf 0 setzen, wenn Eintrag 0 war).



6. Die „gewichtete Wahrscheinlichkeit“ berechnen: $p = p_{links} \cdot \omega_l^2 + p_{rechts} \cdot \omega_r^2$ (Wert des linken Nachfolgeknoten multipliziert mit dem quadrierten Kantengewicht der linken Kante, addiert mit derselben Rechnung für die rechte Kante)

7. Knoten neu zusammenfassen (unten beginnend: Knoten, deren ausgehende Kanten die selben Kantengewichte haben, zusammenfassen)

8. Für alle Kanten das Produkt der Kantengewichte auf dem jeweiligen Ast berechnen (von der betrachteten Kante bis zur Kante über dem Wurzelknoten).

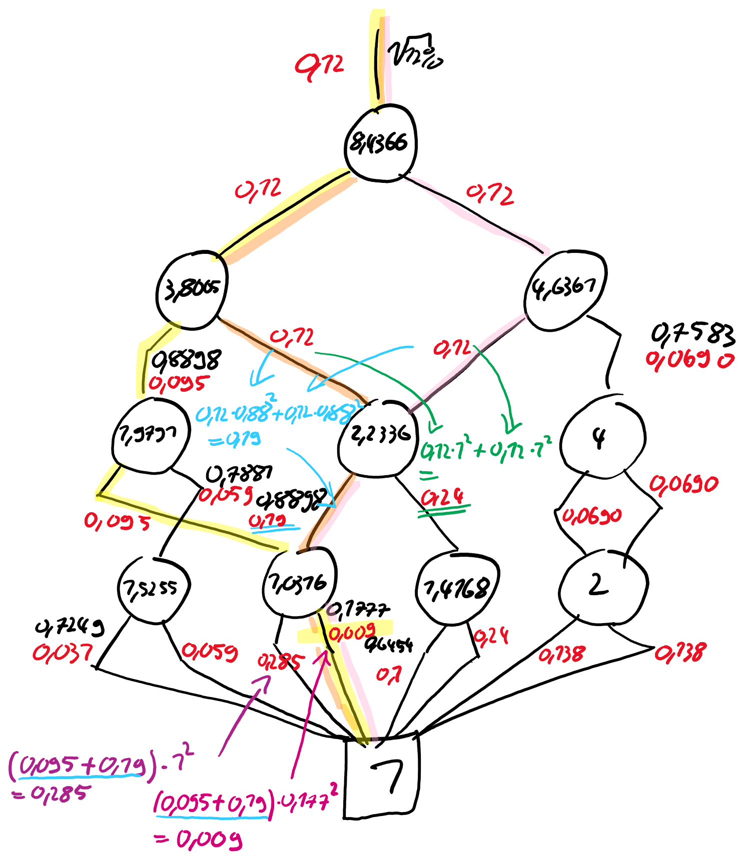
Wurden nur identische Teilvektoren zusammengefasst, sind bei mehreren eingehenden Kanten diese Produkte gleich. (siehe Beispiel) Werden Knoten nach den Kantengewichten zusammengefasst (7.), sind diese Werte nicht immer gleich.

Es wird für die betrachtete Kante die Summe dieser Produkte auf den eingehenden Kanten gebildet. Anschließend wird die Summe mit dem quadrierten Betrag des aktuellen Kantengewichts multipliziert (So werden alle möglichen Äste abgedeckt. Das Kantengewicht der aktuellen Kante kommt in allen möglichen Ästen vor, und kann ausgeklammert werden.)

$$\prod\nolimits_{3,\text{rechts}} = \left(\prod\nolimits_{2,\text{links}} + \prod\nolimits_{2,\text{rechts}}\right) \cdot \omega^2 = (0{,}12 + 0{,}12) \cdot 0{,}8898^2 = 0{,}19$$

$$\left(\prod\nolimits_{3,\text{links}} + \prod\nolimits_{3,\text{rechts}}\right) \cdot \omega^2 = (0{,}095 + 0{,}19) \cdot 0{,}1777^2 = 0{,}009$$

$$= (0{,}12 \cdot 0{,}8898^2 + (0{,}12 \cdot 0{,}8898^2 + 0{,}12 \cdot 0{,}8898^2)) \cdot 0{,}1777^2$$

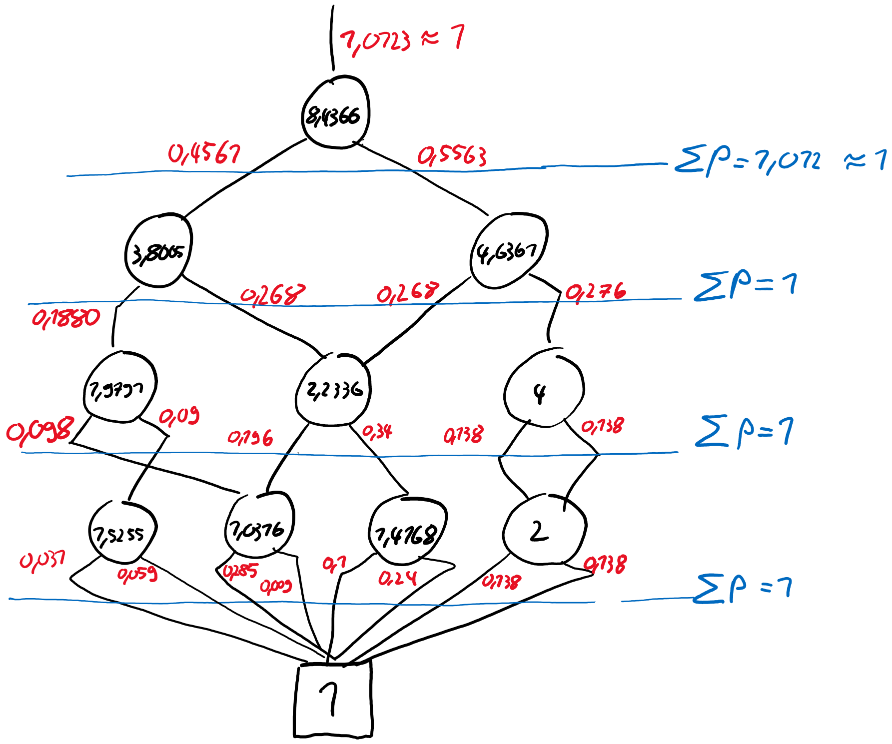
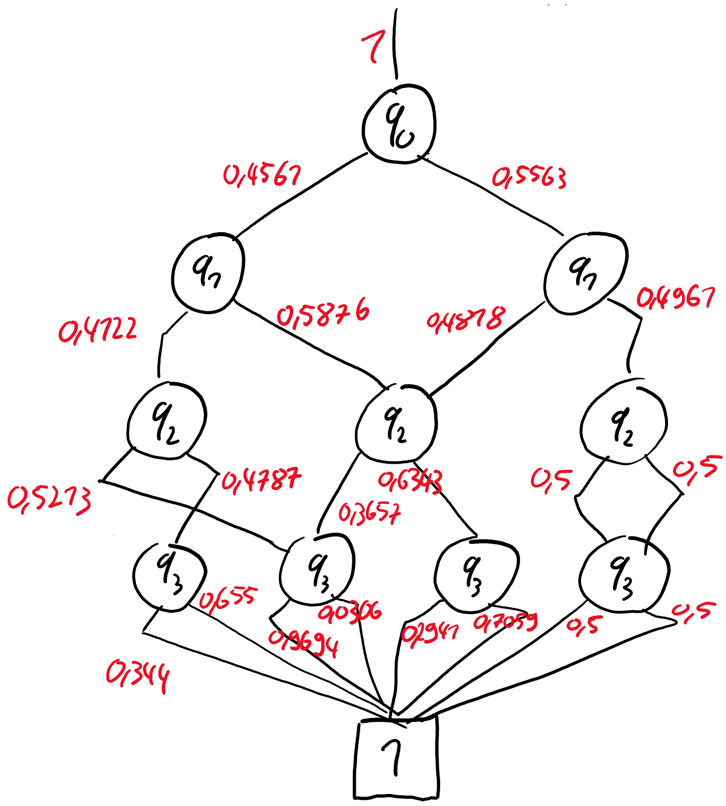


Bestimmung der „Upstream Wahrscheinlichkeit“

Bsp.: $\sqrt{0{,}72}^2 \cdot 1^2 \cdot 0{,}8898^2 \cdot 1^2 \cdot 0{,}1777^2$

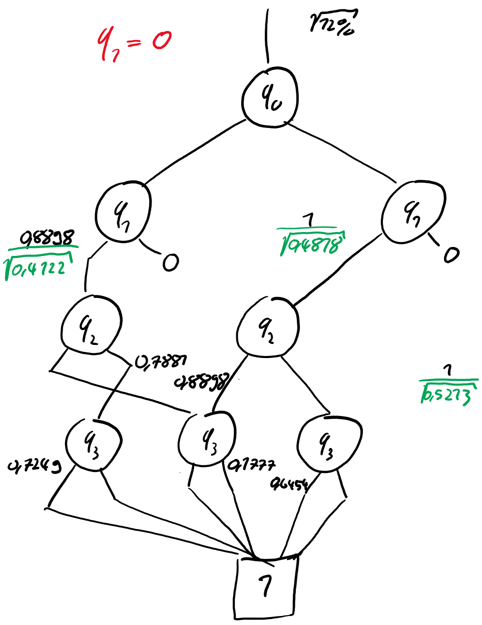
$+\sqrt{0{,}72}^2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 0{,}8898^2 \cdot 0{,}1777^2$

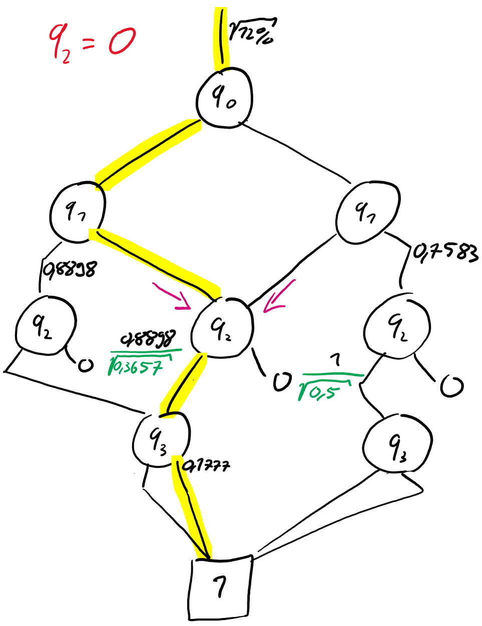
$+\sqrt{0{,}72}^2 \cdot 1^2 \cdot 1^2 \cdot 0{,}8898^2 \cdot 0{,}1777^2 = 0{,}009$

9. Berechnung der Kantenwahrscheinlichkeit: Für jede Kante wird dieses Produkt mit dem im Knoten, am unteren Ende der jeweiligen Kante, gespeichertem Wert multipliziert.	
10. Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeiten (Entscheidung: Zustand 0 oder 1): $P_{01}(q_2 = 1) = \frac{P(0\cap1\cap1)}{P_0(q_1=1)})$	 bedingte Wahrscheinlichkeiten $P_A(B)$

11. Messung durchführen:
    Messung anhand der summierten bedingten Wahrscheinlichkeiten aller Knoten einer Ebene, für q_2=0.

    Zufallszahl zwischen 0 und 1 erzeugen. Ist diese kleiner gleich $\sum P_{00,01,10,11}\,(q_2 = 0)$ wird das jeweilige Qubit mit 0 gemessen, andernfalls mit 1.





12. Die nichtgemessene Wahrscheinlichkeit wird zu 0, der darunterliegende Baum fällt weg.

13. Entscheidungsdiagramm neu normieren: Auf der Ebene, wo das Qubit gemessen wurde, werden die ausgehenden Kanten aller Knoten durch die Wurzel der jeweiligen bedingten Wahrscheinlichkeit geteilt.

$$P = \begin{bmatrix} 0,2305 \\ 0,0073 \\ 0,0752 \\ 0,7437 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0,7972 \\ 0,0062 \\ 0,7038 \\ 0,2497 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0,7822 \\ 0,0058 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2598 \\ 0,0082 \\ 0 \\ 0 \\ 0,2598 \\ 0,0082 \\ 0 \\ 0 \\ 0,738 \\ 0,738 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\sum 1,0724 \approx 1$ (Ungenauigkeiten in der Berechnung)

$\sum 1$

14. Für die Einträge im Zustandsvektor müssen alle Kantengewichte eines Astes für alle möglichen Äste multipliziert werden. Die Entscheidung 0, 1 muss sich gemerkt werden → jeder Ast wird durch eine binäre Zahl dargestellt. Umwandlung in Dezimalzahl gibt Index des Eintrags im Zustandsvektor an.

    Oder unten beginnend: Einen Teilvektor aus den nachfolgenden Werten, multipliziert mit dem aktuellen Kantengewicht, berechnen (analog dazu, wie zuvor das Diagramm erstellt wurde).

0 0 0 0	$\sqrt{0,7823}$
0 0 0 1	$\sqrt{0,0058}$
0 1 0 0	$\sqrt{0,2598}$
0 1 0 1	$\sqrt{0,0082}$
1 0 0 0	$\sqrt{0,2598}$
1 0 0 1	$\sqrt{0,0082}$
1 1 0 0	$\sqrt{0,738}$
1 1 0 1	$\sqrt{0,738}$

$\sum \approx 1$

$$0101:\ \sqrt{0,72} \cdot \frac{1}{\sqrt{0,3657}} \cdot 0,8898 \cdot 0,1777$$
$$= \sqrt{0,008}$$