SPIV Configuration in Pinhole Camera Model

Liu Ning

June 9, 2025

1 SPIV translation configuration

1.1 双相机布置

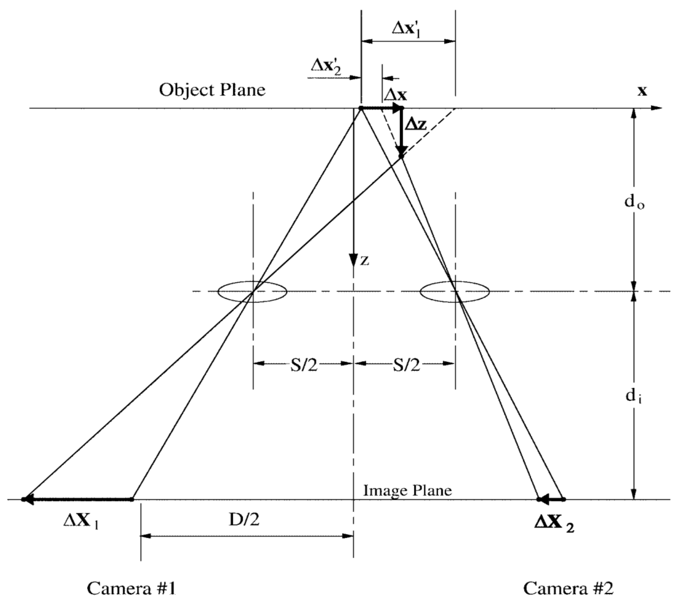

Figure 1: Schematic of stereocamera in the translation configuration.

1.2 双二维像重构实际三维空间

附录中提供了双相机 object plane 中二维像重构世界坐标系空间的映射关系，$\Delta\mathbf{X}_{left\ camera}$ 和 $\Delta\mathbf{X}_{right\ camera}$ 在上述代码中对应 **dXl** 和 **dXr**，分别表示实际三维距离矢量在 object plane（对应激光面）中的投影 [1]。两个矢量的第一项可与 ΔX_{left} 和 ΔX_{right} 构成两个线性方程组，

[1] 注意此处没有讨论成像平面上的投影。在平行布置的情况下，object、lens 和 image 三者平面平行，object plane 上的距离投影矢量 $\Delta\mathbf{x_o}$ 与 image plane 上的距离投影矢量 $\Delta\mathbf{x_i}$ 满足 $\Delta\mathbf{x_o}/d_o = -\Delta\mathbf{x_i}/d_i$（相似三角形）。后续通过像平面（照片上反映）的距离反算真实三维空间的距离并无难度，因此推导到此为止。

$$
-\frac{d_o\left(\frac{S}{2}+x\right)}{d_o-z}+\frac{d_o\left(\Delta x_{world}+\frac{S}{2}+x\right)}{-\Delta z_{world}+d_o-z}=\Delta X_{left}, \tag{1}
$$

$$
-\frac{d_o\left(-\frac{S}{2}+x\right)}{d_o-z}+\frac{d_o\left(\Delta x_{world}-\frac{S}{2}+x\right)}{-\Delta z_{world}+d_o-z}=\Delta X_{right}. \tag{2}
$$

求解得到世界坐标系下的 Δx_{world} 和 Δz_{world} 为

$$
\Delta x_{world} = \frac{\Delta X_{left}(x-S/2)-\Delta X_{right}(x+S/2)}{-S-(\Delta X_{left}-\Delta X_{right})}, \tag{3}
$$

$$
\Delta z_{world} = \frac{-d_o(\Delta X_{left}-\Delta X_{right})}{-S-(\Delta X_{left}-\Delta X_{right})}. \tag{4}
$$

而两个矢量的第二项可以分别独立求解世界坐标系下的 Δy_{world}，

$$
-\frac{d_o y}{d_o-z}+\frac{d_o(\Delta y_{world}+y)}{-\Delta z_{world}+d_o-z}=\Delta Y_{left}, \tag{5}
$$

$$
-\frac{d_o y}{d_o-z}+\frac{d_o(\Delta y_{world}+y)}{-\Delta z_{world}+d_o-z}=\Delta Y_{right}. \tag{6}
$$

将二者的求解结果取平均以提高结果的精确性，

$$
\Delta y_{world}=\frac{-y\Delta z_{world}}{d_o}+\frac{1}{2}\cdot(\Delta Y_{left}+\Delta Y_{right})\left(1-\frac{\Delta z}{d_o}\right). \tag{7}
$$

至此，颗粒的实际距离矢量 $\begin{bmatrix} \Delta x_{world} & \Delta y_{world} & \Delta z_{world} \end{bmatrix}^T$ 均已求出。

如何确定世界坐标系下的 x, y？

2 SPIV angular-displacement configuration

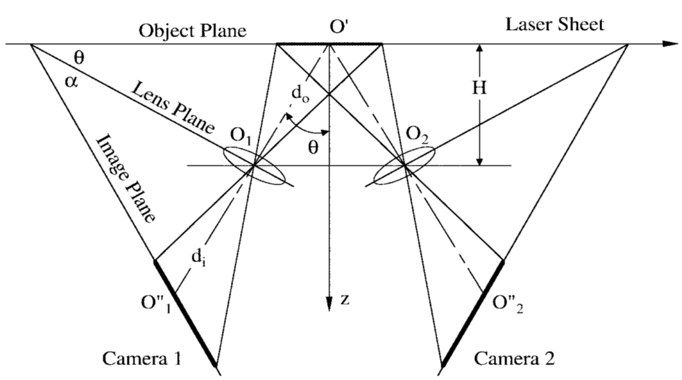

Figure 2: Schematic of stereocamera in the angular-displacement configuration.

2.1 沙姆定律（Scheimpflug principle）

只要满足成像、镜头、测量三个平面交于同一条直线（对于未移轴的镜头，认为三个平行平面相交于无限远处）的条件，则可以保证测量平面的物体能够清晰成像，因此能够起到调整景深区域位置的作用。

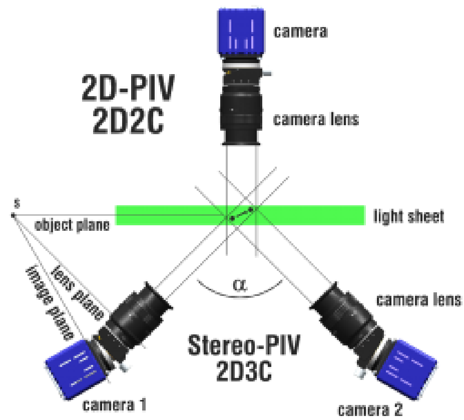

Figure 3: Lavision Stereo-PIV system.

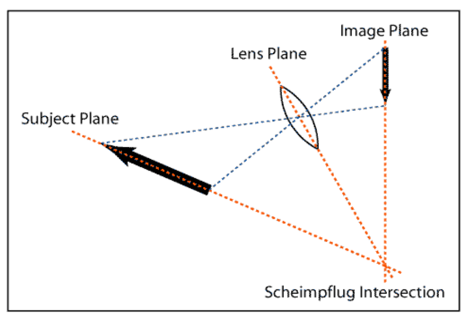

Figure 4: The angles of the Scheimpflug principle, using the example of a photographic lens.

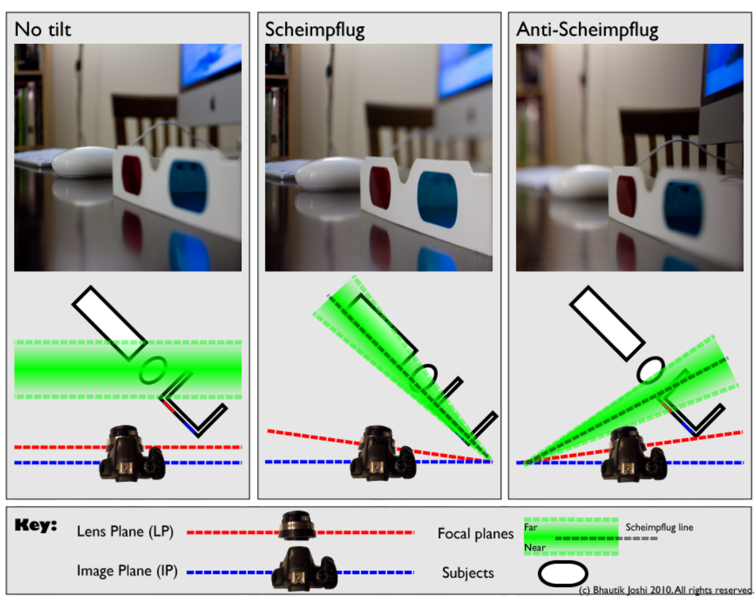

Figure 5: Illustration of the Scheimpflug principle.

目的：

- 增大公共景深区域（common focus area）

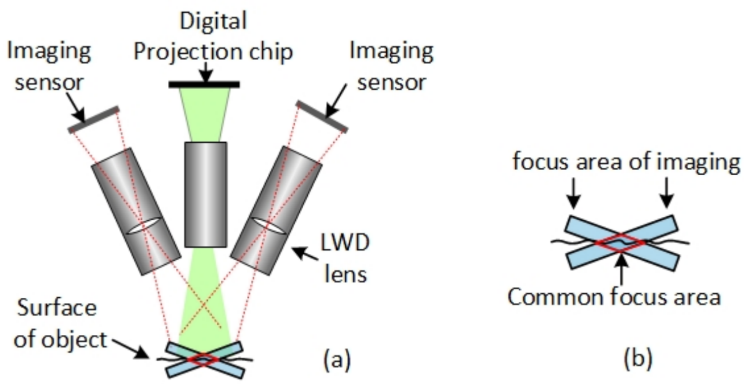

Figure 6: (a) The schematic of setup. (b) The common focus area (Marked with red quadrangle).

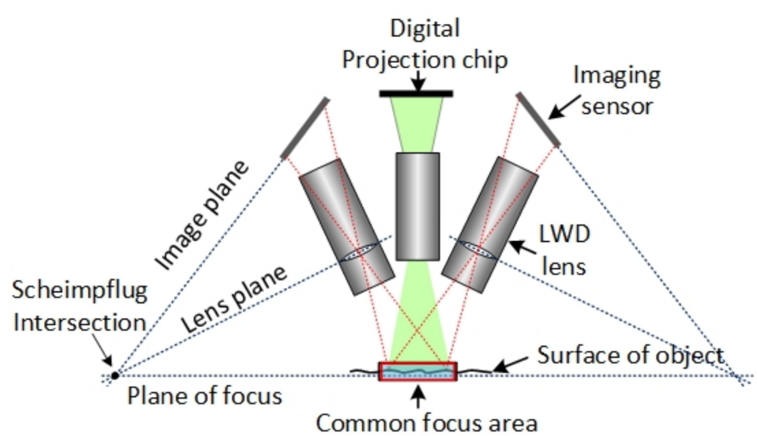

Figure 7: System design based on the Scheimpflug principle.

副作用：

- 不均匀放大倍率 $\Longleftarrow \alpha \neq 0$
- 同侧布置两台相机畸变拉伸方向相反（oppositely stretched）

2.2 $\alpha = 0$ condition: Image Plane // Lens Plane

为满足 $\alpha = 0$ 情况的成像条件，需要牺牲光圈[2]，增大景深，使其能够覆盖尽可能大的三维空间，

$$\delta z = 4(1 + M_n^{-1})^2 f^{\#^2} \lambda. \tag{8}$$

其中，λ 为激光波长，$M_n = d_i/d_o$ 为相机放大倍率（Camera magnification）。

[2] $f\#$ 值越大，光圈越小，得到的景深 δz 越大。

同侧对称布置下双相机的映射关系计算见附录。首先计算世界坐标系下距离矢量

上述方程组完整,一台相机的 object plane 数据可以直接求解三维矢量。但是相机照片并没有 object plane 中的所有分量信息，因此必须考虑如何从投影到 image plane 后的矢量信息重建三维空间。

在 object plane 中 $[X \quad Y \quad Z]^T_{\{left,right\}}$ 映射到 image plane 为 $[x_i \quad y_i \quad z_i]^T_{\{left,right\}}$，两者均在相机坐标系内，满足关系：

$$x_i = -\frac{d_i}{Z}\cdot X$$
$$y_i = -\frac{d_i}{Z}\cdot Y$$
$$z_i = -d_i.$$

2.3 双相机异侧布置

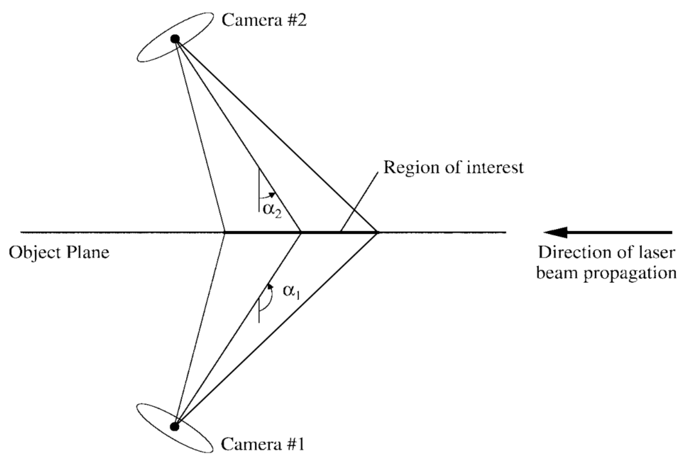

Figure 8: Stereoscopic arrangement with cameras on either side of the light sheet (adapted from Willert 1997).

优势：

- 增大 forward scatter，提高信噪比？
- 两台相机的畸变拉伸方向一致

2.4 水棱镜