

Stereo PIV principle

Part I: Stereo PIV in perspective of pinhole camera model

刘宁

浙江大学

2025 年 7 月 6 日



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

One big picture: Stereo PIV principle

一些废话定义:

- Stereo PIV 是一种基于双目立体视觉原理的三维流场测量方法。
- 其核心是通过两台相机对同一平面上的粒子进行拍摄，利用视差原理重建三维流场。

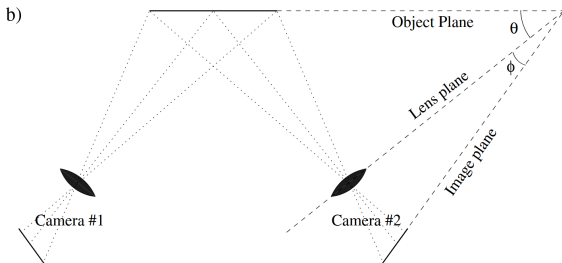


图 1: Stereo PIV 原理示意图。



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

Camera: a 3D world to 2D image mapping function

$$\mathbf{x} = P\mathbf{X}.$$

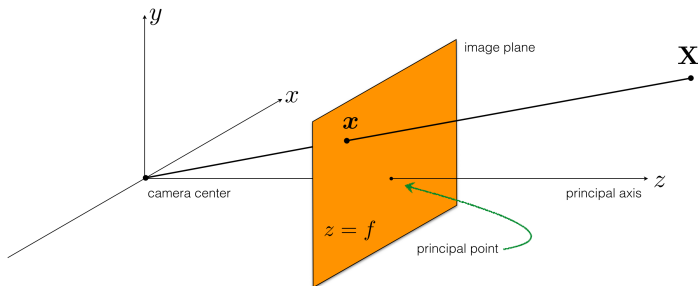


图 2: Pinhole camera model. [Source](#)



One big picture: Stereo PIV principle

Stereo PIV 不仅需要 XY 平面的映射关系¹，而且需要知道映射函数的 z 向导数²，用以后续重建三维流场。

基于上述物理信息，在 Stereo PIV 中的左右相机重构三维流场可以变换为求解超定线性方程组的问题（最暴力但缺乏物理依据的解法 SVD）

¹ 此处预设了 object plane 厚度为 0，且与 $Z = 0$ 平面重合，因此映射函数不显含 Z ，其实此处的单台相机映射函数为：

$$\begin{cases} x = F(X, Y, 0), \\ y = G(X, Y, 0). \end{cases}$$

考虑到实际激光平面厚度为 $1 \sim 2\text{mm}$ ，相机景深也不为 0，上述映射函数缺乏 Z 方向信息。

² stereo calibration 相当于估计映射函数的马克劳林一阶余项，在标定时控制 (X, Y) 不变，在激光面范围内仅沿 Z 方向移动标定板 dZ ，通过不同相机上的位移 (dx, dy) 变化近似得到 $\frac{\partial F}{\partial Z}$ 和 $\frac{\partial G}{\partial Z}$

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial F}{\partial Z} \big|_{(X,Y,0)} \cdot dZ, \\ dy = \frac{\partial G}{\partial Z} \big|_{(X,Y,0)} \cdot dZ. \end{cases}$$



One big picture: Stereo PIV principle

Stereo PIV 不仅需要 xy 平面的映射关系，而且需要知道映射函数的 z 向导数，用以后续重建三维流场。

基于上述物理信息，在 Stereo PIV 中的左右相机重构三维流场可以变换为求解超定线性方程组的问题（SVD!）

$$\begin{bmatrix} dx_{left} \\ dy_{left} \\ dx_{right} \\ dy_{right} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{left}}{\partial X} & \frac{\partial F_{left}}{\partial Y} & \frac{\partial F_{left}}{\partial Z} \\ \frac{\partial G_{left}}{\partial X} & \frac{\partial G_{left}}{\partial Y} & \frac{\partial G_{left}}{\partial Z} \\ \frac{\partial F_{right}}{\partial X} & \frac{\partial F_{right}}{\partial Y} & \frac{\partial F_{right}}{\partial Z} \\ \frac{\partial G_{right}}{\partial X} & \frac{\partial G_{right}}{\partial Y} & \frac{\partial G_{right}}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}.$$

两边除以 dt ，右边项即是三维速度矢量。



Frame vs Coordinate transformation

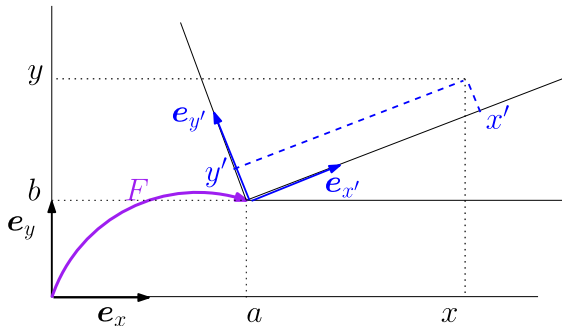


图 3: Frame vs Coordinate transformation. [Source](#)

- Frame transform matrix³

$$F = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{o}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

- Coordinate transform matrix⁴

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{o}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

³Frame transformation 是将一个坐标系的原点和方向变换到另一个坐标系。

⁴Coordinate transformation 是将一个坐标系中的点转换到另一个坐标系中。



Frames in camera system

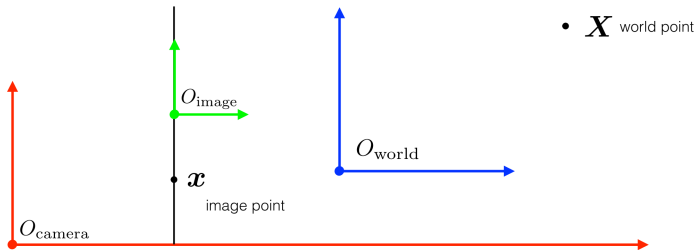


图 4: Frames in camera system. [Source](#)



Extrinsic parameters: world to camera coordinate

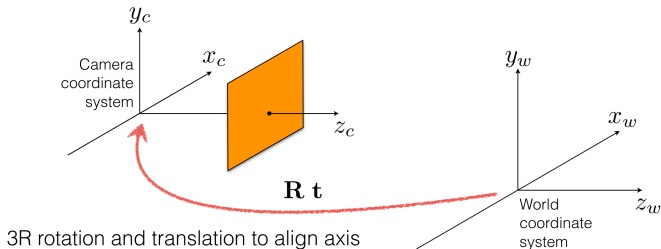


图 5: Extrinsic parameters of a camera. [Source](#)

- 相机外参描述相机在世界坐标系中的位置和方向。
- 通常用旋转矩阵 $R := \mathbf{O}_{dummy-xyz_{world}} \rightarrow \mathbf{O}_{dummy-xyz_{camera}}$ 和平移向量 $t := \mathbf{O}_{world} \rightarrow \mathbf{O}_{camera}$ 表示。



Extrinsic parameters: world coordinate to camera coordinate

已知世界坐标系到相机坐标系的变换关系,

$$F = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{o}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

世界坐标系中的点转换为相机坐标系中可表示为:

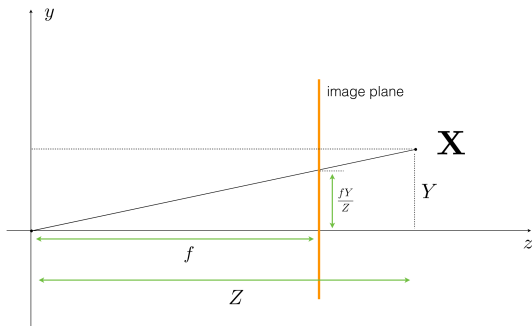
$$\begin{bmatrix} X_c \\ Y_c \\ Z_c \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{o}^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_w \\ Y_w \\ Z_w \\ 1 \end{bmatrix}.$$

在非齐次坐标系中, 上述变换矩阵可以简化为

$$\mathbf{R}^T [\mathbf{I} \mid -\mathbf{t}].$$



Intrinsic parameters: camera coordinate to image coordinate

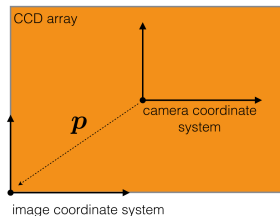


$$[X \ Y \ Z]^T \mapsto [fX/Z \ fY/Z]^T$$

图 6: Points in camera coordinates to image coordinates. [Source](#)



Intrinsic parameters: camera coordinate to image coordinate



$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} f_x & 0 & c_x \\ 0 & f_y & c_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

图 7: Intrinsic parameters of a camera. [Source](#). 注意图片中的箭头方向是错误的，应该反过来。

- 相机内参描述相机的光学特性和成像几何。
- 通常用焦距 f_x, f_y 、主点坐标 (c_x, c_y) 和畸变系数 \mathbf{k} 表示。



Takeaway msg

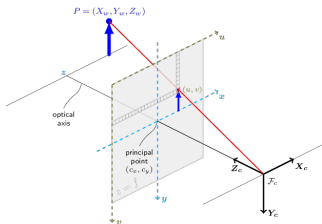


图 8: Pinhole camera model. [Source](#)

变换矩阵 \mathbf{P} 非齐次坐标系下的表达式为:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K}\mathbf{R}^T[\mathbf{I} \mid -\mathbf{t}].$$

更常见的是齐次坐标系下的表达式:

$$\mathbf{P} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T\mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

- \mathbf{P} 是相机的投影矩阵，将三维世界坐标系中的点投影到二维图像平面上。
- \mathbf{K} 是相机内参矩阵，包含焦距和主点位置等信息。
- \mathbf{R} 是相机外参的旋转矩阵，描述相机坐标系相对于世界坐标系的旋转。
- \mathbf{t} 是相机外参的平移向量，描述相机坐标系原点相对于世界坐标系原点的平移。



Estimate the camera parameters using OpenCV



浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY

3D reconstruction from stereo PIV