

Stereo PIV principle

Part I: Stereo PIV in perspective of pinhole camera model

刘宁

浙江大学

2025 年 7 月 6 日



浙江大学
ZHEJIANG UNIVERSITY

One big picture: Stereo PIV principle

一些废话定义:

- Stereo PIV 是一种基于双目立体视觉原理的三维流场测量方法。
- 其核心是通过两台相机对同一平面上的粒子进行拍摄，利用视差原理重建三维流场。

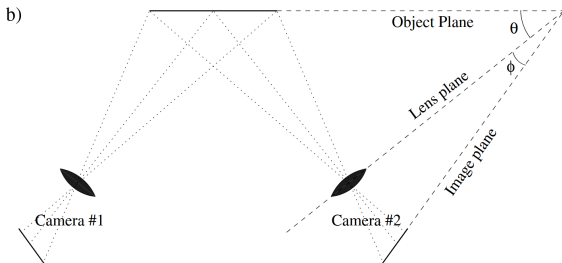


图 1: Stereo PIV 原理示意图。



Camera: a 3D world to 2D image mapping function

$$\mathbf{x} = P\mathbf{X}.$$

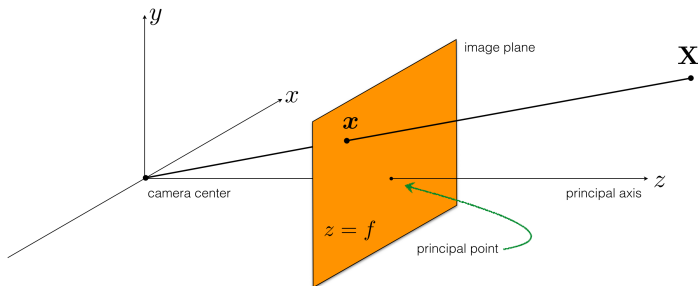


图 2: Pinhole camera model. [Source](#)



One big picture: Stereo PIV principle

Stereo PIV 不仅需要 XY 平面的映射关系¹，而且需要知道映射函数的 z 向导数²，用以后续重建三维流场。

基于上述物理信息，在 Stereo PIV 中的左右相机重构三维流场可以变换为求解超定线性方程组的问题（最暴力但缺乏物理依据的解法 SVD）

¹ 此处预设了 object plane 厚度为 0，且与 $Z = 0$ 平面重合，因此映射函数不显含 Z ，其实此处的单台相机映射函数为：

$$\begin{cases} x = F(X, Y, 0), \\ y = G(X, Y, 0). \end{cases}$$

考虑到实际激光平面厚度为 $1 \sim 2\text{mm}$ ，相机景深也不为 0，上述映射函数缺乏 Z 方向信息。

² stereo calibration 相当于估计映射函数的马克劳林一阶余项，在标定时控制 (X, Y) 不变，在激光面范围内仅沿 Z 方向移动标定板 dZ ，通过不同相机上的位移 (dx, dy) 变化近似得到 $\frac{\partial F}{\partial Z}$ 和 $\frac{\partial G}{\partial Z}$

$$\begin{cases} dx = \frac{\partial F}{\partial Z} \Big|_{(X,Y,0)} \cdot dZ, \\ dy = \frac{\partial G}{\partial Z} \Big|_{(X,Y,0)} \cdot dZ. \end{cases}$$



One big picture: Stereo PIV principle

Stereo PIV 不仅需要 xy 平面的映射关系，而且需要知道映射函数的 z 向导数，用以后续重建三维流场。

基于上述物理信息，在 Stereo PIV 中的左右相机重构三维流场可以变换为求解超定线性方程组的问题（SVD!）

$$\begin{bmatrix} dx_{left} \\ dy_{left} \\ dx_{right} \\ dy_{right} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_{left}}{\partial X} & \frac{\partial F_{left}}{\partial Y} & \frac{\partial F_{left}}{\partial Z} \\ \frac{\partial G_{left}}{\partial X} & \frac{\partial G_{left}}{\partial Y} & \frac{\partial G_{left}}{\partial Z} \\ \frac{\partial F_{right}}{\partial X} & \frac{\partial F_{right}}{\partial Y} & \frac{\partial F_{right}}{\partial Z} \\ \frac{\partial G_{right}}{\partial X} & \frac{\partial G_{right}}{\partial Y} & \frac{\partial G_{right}}{\partial Z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dX \\ dY \\ dZ \end{bmatrix}.$$

两边除以 dt ，右边项即是三维速度矢量。



Frame vs Coordinate transformation

- Frame transform matrix

$$F = \begin{bmatrix} \mathbf{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

- Coordinate transform matrix

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^T & -\mathbf{R}^T \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix}.$$

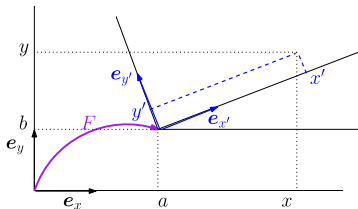


图 3: Frame vs Coordinate transformation.

Source



浙江大學
ZHEJIANG UNIVERSITY

Extrinsic parameters: camera pose

- 相机外参描述相机在世界坐标系中的位置和方向。
- 通常用旋转矩阵 \mathbf{R} 和平移向量 \mathbf{t} 表示。

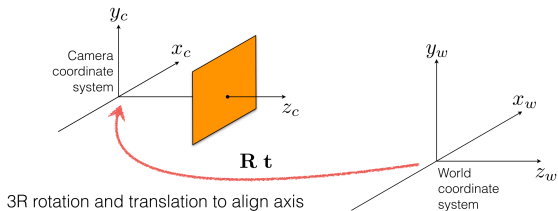


图 4: Extrinsic parameters of a camera. [Source](#)

