



**Universidade do Minho**  
Escola de Engenharia

# MODELOS DETERMINÍSTICO DE INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

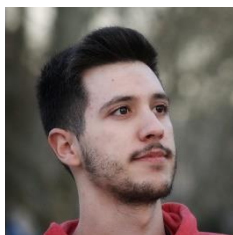
RELATÓRIO DE PROJETO 2

MINA – DEZEMBRO 2020



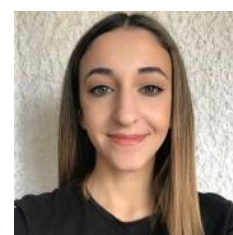
Luís Miguel Pinto A89506

Ana Luísa Carneiro A89533



Pedro Almeida Fernandes A89574

Ana Rita Peixoto A89612



## ÍNDICE

---

INTRODUÇÃO .....	2
VALOR ESTIMADO DE INVENTÁRIO.....	3
FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	4
DESCRIÇÃO E OBJETIVO DO PROBLEMA .....	4
ESCOLHA DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO .....	5
RESTRIÇÕES .....	5
FUNÇÃO OBJETIVO .....	5
REDE DO PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO .....	6
FICHEIRO DE INPUT SUBMETIDO NO SOFTWARE .....	7
INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS .....	8
FICHEIRO DE OUTPUT RELAX4.....	8
ANÁLISE DE RESULTADOS.....	8
PLANO DE ESCAVAÇÃO.....	10
VALIDAÇÃO DO MODELO .....	11
ADMISSIBILIDADE E CORREÇÃO .....	11
ADEQUAÇÃO AO SISTEMA REAL.....	11
CONCLUSÃO .....	12

## INTRODUÇÃO

---

No trabalho prático 2 é proposto a formulação de um problema que consiste em fazer a exploração mineira através da remoção de blocos com recursos minérios, segundo regras de extração que visam a manutenção da segurança e estrutura da mina. O objetivo deste projeto é usar um software de otimização de redes (*relax4*) para determinar os blocos que devem ser extraídos de forma a maximizar o lucro.

O desenvolvimento deste trabalho focou-se em diversos conceitos que foram a base da solução apresentada, tais como: fecho máximo e corte mínimo de um grafo.

## VALOR ESTIMADO DE INVENTÁRIO

Dado o contexto do problema, e de modo a personalizar o inventário do minério, foi proposto associar determinados valores de minério aos vértices 2,4,7 e 10, tendo em conta o maior número de inscrição do aluno do grupo. No nosso caso, o número selecionado foi o 89612. Assim, foram associados aos vértices 2,4,7 e 10 os valores 1,2,9 e 6, respetivamente, originando o seguinte quadro:

<b>nível -1</b>							10	8				
<b>nível -2</b>						12	14	15	40			
<b>nível -3</b>					16				20			
<b>nível -4</b>				3	18	9			6			
<b>nível -5</b>					20	1		2				

Figura 1: Valor estimado do inventário

## FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

### DESCRIÇÃO E OBJETIVO DO PROBLEMA

O projeto II tem como objetivo determinar os blocos que devem ser extraídos de uma mina a céu aberto, de modo a maximizar o lucro.

Neste problema o minério está distribuído por 5 níveis com diferentes custos de escavação. Assim, o minério está dividido pelos níveis -1, -2, -3, -4 e -5 com custos de escavação 1,2,3,4 e 5, respetivamente. De forma a cumprir com o objetivo proposto e por questões de segurança e estabilidade de terreno, é necessário que para cada bloco a ser removido sejam também escavados 3 blocos no nível de profundidade acima, ou seja, o bloco que está imediatamente por cima e os dois que lhe são adjacentes. Existem também alguns blocos que se encontram fora do âmbito do problema, e como tal, não podem ser escavados.

Para a resolução desse problema devemos selecionar um conjunto de blocos que maximiza o lucro - definido como a diferença entre o valor do minério e o custo das escavações. A resolução do problema passa por determinar o fecho máximo de um grafo  $G$ , através da resolução de um problema de fluxo máximo num grafo auxiliar  $G' = (V', A')$ , em que o conjunto de vértices de  $G'$  tem dois vértices adicionais, um vértice fonte ( $s$ ) e um terminal ( $t$ ).

O fecho máximo de um grafo  $G$  consiste em determinar o subconjunto fechado de vértices, tal que o somatório dos pesos dos vértices seja máximo. Este problema pode ser determinado através da resolução do problema de corte mínimo ( $s,t$ ) de um grafo auxiliar  $G'$ , ou seja, o problema dual do problema de fluxo máximo.

Para criação do grafo  $G'$ , devemos considerar um modelo em que existe um nó para cada bloco com lucro. Para a seleção dos blocos com lucro tivemos em conta o ficheiro excel fornecido pelos docentes. E deste modo, apenas serão reconhecidos como blocos valiosos aqueles cujo valor seja positivo (i.e, lucro  $> 0$ , com lucro = valor do mineiro – custo nível), representados a púrpura na figura 2.

nível -1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	9	7	-1	-1	-1	-1
nível -2		-2	-2	-2	-2	10	12	13	38	-2	-2	
nível -3			-3	-3	13	-3	-3	-3	17	-3		
nível -4				-1	14	5	-4	-4	2			
nível -5					15	-4	-5	-3				

Figura 2 : Tabela dos lucros

Deverá existir um arco desde o vértice fonte ( $s$ ) até cada bloco valioso, cuja capacidade corresponderá à soma do **lucro do bloco alvo** (dado que apenas são escolhidos blocos com lucro positivo) com o somatório dos **valores dos minérios** necessários escavar previamente. A título de exemplo, na figura 3, representamos quais os blocos a considerar no cálculo da capacidade para o **vértice 1**:  $(20-5) + 3 + 18 + 9 + 16 + 12 + 14 + 15 + 10 + 8 = 120$ .

nível -1							10	8				
nível -2						12	14	15	40			
nível -3					16				20			
nível -4				3	18	9			6			
nível -5					20	1		2				

Figura 3: Determinação da capacidade do vértice 1

Em adição aos nós dos blocos valiosos, existem outros nós que representam os níveis de profundidade da mina. Assim, entre os nós de um dado bloco e o nível de profundidade onde este se encontra, existe um arco de capacidade infinita.

Finalmente, existem arcos que ligam os nós de cada nível de profundidade ao vértice terminal (t), com uma capacidade igual ao somatório dos **custos** associados à escavação dos blocos de níveis menos profundos. A título de exemplo, visto que o **vértice 1** se encontra no nível de profundidade -5 o cálculo do seu custo traduz-se em:

$$9*1 + 7*2 + 5*3 + 3*4 = 50.$$

**Nota:** o custo do nível 5 não foi considerado no cálculo do custo pois já terá sido contabilizado anteriormente no cálculo do lucro do bloco.

## ESCOLHA DAS VARIÁVEIS DE DECISÃO

No contexto do problema, consideramos fundamental representar os blocos com lucro como sendo as variáveis de decisão. Desta forma, conseguimos averiguar se devemos ou não incluir determinados blocos no plano de escavação.

## RESTRIÇÕES

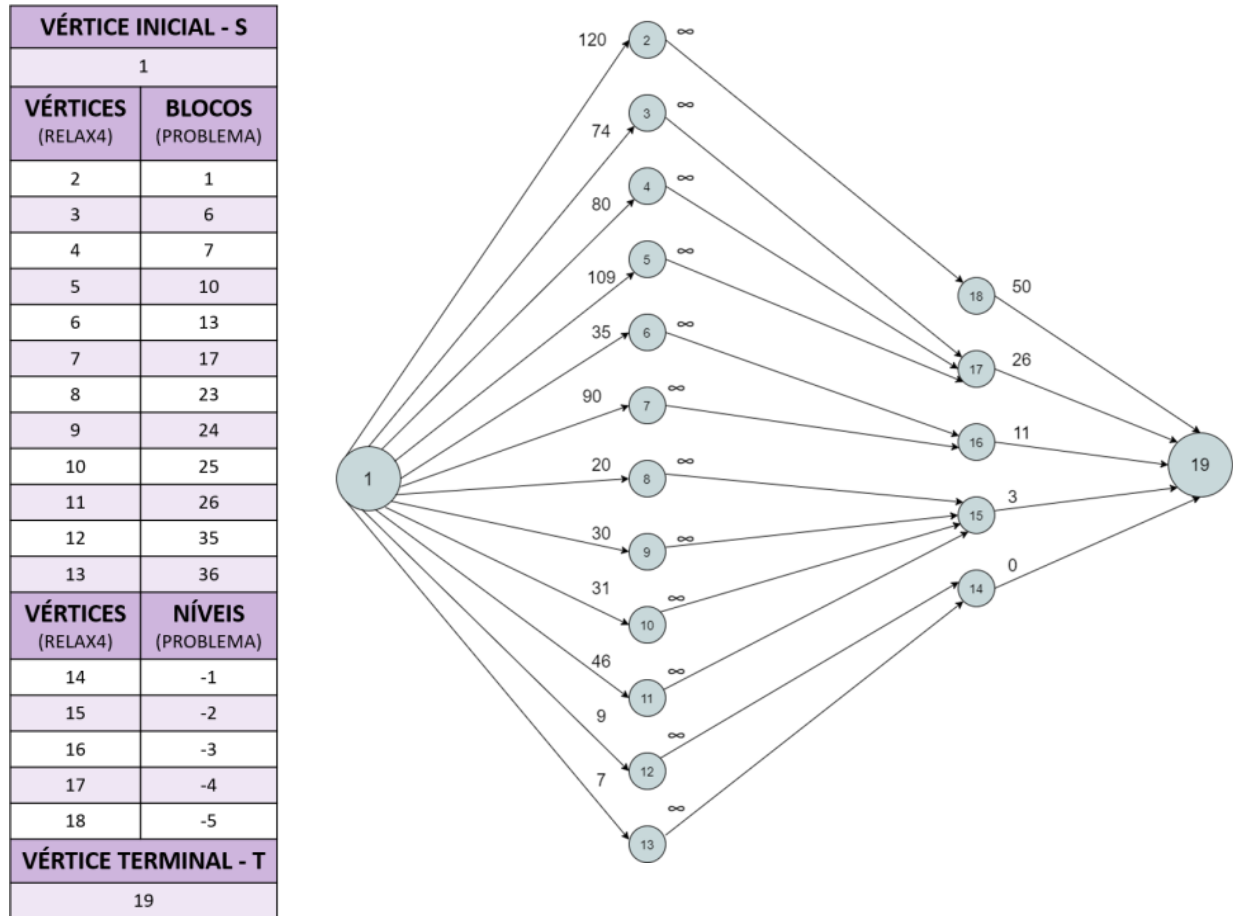
No caso das restrições, foi necessário considerar as consequências nos níveis suprajacentes na escavação de um bloco. De forma a não comprometer a segurança da mina alguns blocos encontra-se fora do âmbito de escavação. Em adição, para atingir um bloco selecionado teríamos primeiro de remover o bloco imediatamente acima e seus adjacentes, e assim sucessivamente para cada bloco até atingir o nível mais superficial.

## FUNÇÃO OBJETIVO

O objetivo do problema é determinar quais os blocos a escavar de modo a maximizar o lucro. Deste modo, foi necessário associar ao arco de retorno (t,s) um custo unitário de transporte igual a -1, dado que o *relax4* assume que todos os problemas são de minimização, e o problema atual é de maximização.

## REDE DO PROBLEMA DE FLUXO MÁXIMO

O problema formulado anteriormente traduz-se no grafo  $G'$  (rede do problema) que se encontra representado graficamente na figura 4.



**Figura 4** : Correspondência *relax4* com o problema e Grafo  $G'$

Tal como referido anteriormente, para cada arco (fonte - bloco) está associado o seu proveito (i.e, somatório dos valores de minério dos blocos individuais suprajacentes e o valor do lucro do bloco alvo). Por outro lado, para cada arco (nível - terminal) está associado o seu custo total de remoção (i.e, somatório dos custos individuais de cada bloco dos níveis suprajacentes pertencentes à pirâmide invertida).

Na tabela da figura 4 está presente a relação entre a numeração dos vértices utilizada no *Relax4* e a numeração fornecida no problema. Além disso, está também representada a correspondência entre os vértices utilizados no *Relax4* e os níveis do minério.

## FICHEIRO DE INPUT SUBMETIDO NO SOFTWARE

Para a criação do ficheiro de *input*, é necessário seguir algumas normas. Na primeira linha, é necessário indicar o número de vértices considerados. Na linha seguinte, o valor indicado representa o número de arestas do problema, incluindo a aresta que une os vértices 19 (terminal) e 1 (origem).

As arestas do grafo (figura 4) referentes ao lucro, estão indicadas desde a linha 3 até à linha 14. Desde a linha 15 à 26 representa as arestas com capacidade infinita. No caso das linhas 27 à 31 estão indicados os custos associados a cada nível de profundidade. Por fim, na linha 32 está representado o arco de retorno de fluxo (aresta 19-1 referida anteriormente).

Para finalizar, foi necessário explicitar que não existe oferta nem procura em cada vértice, representada pelos zeros presentes nas linhas 33 a 51.

```

1 19
2 30
3 1 2 0 120
4 1 3 0 74
5 1 4 0 80
6 1 5 0 109
7 1 6 0 35
8 1 7 0 90
9 1 8 0 20
10 1 9 0 30
11 1 10 0 31
12 1 11 0 46
13 1 12 0 9
14 1 13 0 7
15 2 18 0 1000
16 3 17 0 1000
17 4 17 0 1000
18 5 17 0 1000
19 6 16 0 1000
20 7 16 0 1000
21 8 15 0 1000
22 9 15 0 1000
23 10 15 0 1000
24 11 15 0 1000
25 12 14 0 1000
26 13 14 0 1000
27 14 19 0 0
28 15 19 0 3
29 16 19 0 11
30 17 19 0 26
31 18 19 0 50
32 19 1 -1 1000
33 0
34 0
35 0
36 0
37 0
38 0
39 0
40 0
41 0
42 0
43 0
44 0
45 0
46 0
47 0
48 0
49 0
50 0
51 0

```

**Figura 5:** Ficheiro *input* do *relax4*



## INTERPRETAÇÃO DE RESULTADOS

### FICHEIRO DE OUTPUT RELAX4

Após a execução do ficheiro de *input* exposto anteriormente, obtivemos o seguinte ficheiro de *output*:

```
END OF READING
NUMBER OF NODES = 19, NUMBER OF ARCS = 30
CONSTRUCT LINKED LISTS FOR THE PROBLEM
CALLING RELAX4 TO SOLVE THE PROBLEM
*****
TOTAL SOLUTION TIME = 0. SECS.
TIME IN INITIALIZATION = 0. SECS.
1 2 50.
1 3 26.
1 7 11.
1 8 3.
2 18 50.
3 17 26.
7 16 11.
8 15 3.
15 19 3.
16 19 11.
17 19 26.
18 19 50.
19 1 90.
OPTIMAL COST = -90.
NUMBER OF AUCTION/SHORTEST PATH ITERATIONS = 18
NUMBER OF ITERATIONS = 21
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 3
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 2
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 4
*****
```

Figura 6: Ficheiro de *output* do *relax4*

### ANÁLISE DE RESULTADOS

A partir da análise do ficheiro de *output*, conseguimos inferir quais os blocos selecionados para a escavação pelo *relax4*. Os vértices selecionados foram o 2, 3, 7 e 8, que correspondem aos blocos 1, 6, 17 e 23 (figura 4), respetivamente.

O valor de “*optimal cost*” obtido foi 90. Este valor resulta da soma dos custos associados a cada vértice selecionado ( $90 = 50 + 26 + 11 + 3$ ). No entanto, este não é o verdadeiro custo, uma vez que esta fórmula está a sobrepor o custo da remoção dos blocos. A título de exemplo, visto que a área de escavação do bloco 23 se encontra incluída na área de escavação do bloco 1, apenas será realista considerar esse custo uma vez.

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
—	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	—
—	—	11	12	13	14	15	16	17	18	—	—
—	—	—	5	6	7	8	9	10	—	—	—
—	—	—	—	1	2	3	4	—	—	—	—

Figura 7: Tradução solução *relax4*

Assim, o custo real seria o custo da remoção de toda a superfície colorida:

$$\text{custo: } 64 = 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 6 + 2 \cdot 9 + 1 \cdot 11$$

Para obter o proveito precisamos de somar todos os valores de minérios que foram removidos, obtendo-se:

$$\text{proveito: } 185 = 20 + 18 + 3 + 9 + 16 + 12 + 14 + 15 + 10 + 8 + 40 + 20$$

Por fim, para obter o lucro realiza-se a diferença entre o proveito e os custos, obtendo-se o valor:

$$\text{lucro: } 121 = 185 - 64$$

## PLANO DE ESCAVAÇÃO

Para melhor visualização do plano de escavação, apresentamos um esquema visual passo a passo da sua implementação, ou seja, um guião de remoção dos blocos representados a laranja:

29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
-----	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	-----
-----	-----	11	12	13	14	15	16	17	18	-----	-----
-----	-----	-----	5	6	7	8	9	10	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	1	2	3	4	-----	-----	-----	-----

Figura 8 : Mina Pré-Exploração

29	30	31	32				36	37	38	39	40	
-----	19	20	21	22			24	25	26	27	28	-----
-----	-----	11	12	13	14	15	16	17	18	-----	-----	
-----	-----	-----	5	6	7	8	9	10	-----	-----	-----	
-----	-----	-----	-----	1	2	3	4	-----	-----	-----	-----	

Figura 9 : 1ª Fase de Exploração

29	30	31	32									40
-----	19	20	21	22			24				28	-----
-----	-----	11	12	13	14	15	16			18	-----	-----
-----	-----	-----	5	6	7	8	9	10	-----	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	1	2	3	4	-----	-----	-----	-----	-----

Figura 10 : 2ª Fase de Exploração

29											40	
-----	19									28	-----	
-----	-----	11				15	16			18	-----	-----
-----	-----	-----	5			7	8	9	10	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----	1	2	3	4	-----	-----	-----	-----	-----

Figura 11 : 3ª Fase de Exploração

										40		
-----										28	-----	
-----	-----						16			18	-----	-----
-----	-----	-----					8	9	10	-----	-----	-----
-----	-----	-----	-----			2	3	4	-----	-----	-----	-----

Figura 12 : Mina Pós-Exploração

## VALIDAÇÃO DO MODELO

De modo a validar o modelo, é importante focar a análise em 2 pontos: garantir que a solução obtida é admissível e correta e que a solução se adequa ao sistema real.

### ADMISSIBILIDADE E CORREÇÃO

De forma a verificar que a solução obtida é admissível, temos de ter em consideração 2 fatores. Por um lado, verificar que todos os blocos selecionados na solução constituem lucro. Por outro lado, provar que os blocos não selecionados apresentam prejuízo.

No que toca à correção, devemos confirmar que a solução obedece às restrições estipuladas. Mais concretamente, averiguar que foram respeitadas as regras de remoção de blocos da mina.

Para provar a admissibilidade da solução apresentamos na tabela seguinte o resultado das verificações:

BLOCOS SELECIONADOS			
BLOCO	MINÉRIO	CUSTO	LUCRO
1	125	55	70
6	78	30	48
17	38	14	24
23	22	5	17
BLOCO NÃO SELECIONADO			
BLOCO	MINÉRIO	CUSTO	PREJUÍZO
10	6	16	10

Figura 13 : Tabela dos lucros e prejuízos

### ADEQUAÇÃO AO SISTEMA REAL

O outro ponto referido averigua se a solução é adequada à realidade, isto é, se é uma solução que faz sentido no contexto do problema. Por um lado, a solução enquadra-se porque conseguimos encontrar um plano de escavação cujo lucro obtido é o maior possível. Por outro, ao observarmos atentamente o resultado da escavação vemos que não há seleção de blocos com minério que crie prejuízo na sua remoção mostrando, em princípio, respeitar o critério da maximização do lucro.

## CONCLUSÃO

---

Concluindo o 2º trabalho prático, consideramos que a realização deste projeto foi fundamental para melhor formular e modelar problemas de otimização de redes.

Durante a realização deste trabalho surgiram algumas dificuldades. Nomeadamente a representação do ficheiro de input no software relax4. Até chegar ao resultado final fomos obtendo erros de formatação mas que acabaram por ser colmatados com algum estudo mais aprofundando.

Para além disso, houve uma procura constante de simplificação deste ficheiro. No final, a solução escolhida apresenta um número bastante menor de linhas em contraste a soluções prévias, tornando a implementação escolhida mais simples sem perder nenhuma especificação.

Com base no que foi exposto, consideramos que as dificuldades foram ultrapassadas de forma eficaz e que por isso o balanço do resultado foi positivo.