



TRABALHO PRÁTICO II

GRUPO 39

Ana Luísa L. Tomé Carneiro A89533

Ana Rita Abreu Peixoto A89612

Pedro Almeida Fernandes A89574

Luís Miguel Lopes Pinto A89506

DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Uma empresa alimentar produz e vende vários tipos de alimentos como tomates e pimentos. A empresa vende os tomates a 2 euros/kg e os pimentos 3 euros/kg. O custo de produção de x kg de tomate e y kg de pimentos é dado pela expressão $x^2 + 3xy + y^2$. A receita obtida com a venda destes dois produtos é dada por $2x + 3y$. A empresa gostaria de saber quantos tomates e pimentos deve produzir de forma a obter lucro máximo?

fonte: http://newb.kettering.edu/wp/experientialcalculus/wp-content/uploads/sites/15/2017/05/Module_II.pdf

Como forma de aumentar a complexidade do nosso problema, assumimos que a empresa para além de tomates e pimentos também irá produzir pepinos (z), que serão vendidos a 4 euros/kg. Com a adição deste produto o custo de produção vai ser alterada para $x^2 + 3x^2yz + y^2 + z^2$ e a receita obtida com a venda será de $2x + 3y + 4z$.

Formulação

Sabendo que o custo de produção é dado por $C(x, y, z) = x^2 + 3x^2yz + y^2 + z^2$ e que a receita é dada pela expressão $R(x, y, z) = 2x + 3y + 4z$, então o lucro obtido com estes produtos é $P(x, y, z) = R(x, y, z) - C(x, y, z) = 2x + 3y + 4z - x^2 - 3x^2yz - y^2 - z^2$. Assim de forma a resolver o problema basta maximizar a expressão $P(x, y, z)$, ou seja:

$$\max_{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3} P(x, y, z) = - \min_{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3} -P(x, y, z)$$

OBJETIVO E CONDIÇÕES DE APLICABILIDADE

O objetivo deste projeto é determinar o lucro máximo para a empresa com a venda dos produtos através de rotinas de otimização do **software MatLab – fminunc e fminsearch**. Para adequar o problema às rotinas utilizadas foi necessário considerar a expressão simétrica da função de maximização original, uma vez que estas rotinas apenas minimizam expressões.

Relativamente às condições de aplicabilidade, a rotina **fminunc** apenas pode ser usada para funções diferenciáveis, enquanto que a **fminsearch** pode ser usada em qualquer contexto. Dado que a nossa função é diferenciável foi possível utilizar ambas as rotinas como forma de resolver o problema.

IMPLEMENTAÇÃO DO PROBLEMA

Em contexto MatLab a nossa formulação traduziu-se na seguinte função:

```
function [f] = profit(x,a)
R = a(1)*x(1) + a(2)*x(2) + a(3)*x(3); % revenue
C = x(1)^2 + 3*(x(1)^2)*x(2)*x(3) + x(2)^2 + x(3)^2; % cost
P = R - C; % profit
f = -P; % Para prob de maximizacao
end
```

Na implementação da expressão, usou-se dois vetores: **x** (variáveis de decisão) e **a** (parâmetros do problema que podem ser alterados). As expressões **R**, **C** e **P**, representam a receita, custo de produção e lucro, respetivamente. Quanto ao retorno da função, **f**, esta representa o simétrico da expressão **P**.

MatLab	x(1)	x(2)	x(3)
Formulação	x - tomates	y - pimentos	z - pepino

MatLab	a(1)	a(2)	a(3)
Formulação	preço tomates	preço pimentos	preço pepino

TESTES COMPUTACIONAIS

Os testes computacionais realizados tiveram como intuito atingir a solução ótima do problema. Para isso, foram alterados o ponto inicial, os parâmetros da função e optimset.

As dificuldades sentidas residiram principalmente em encontrar pontos iniciais de modo a que a função convirja para um minimizante.

FMINUNC

Como forma de encontrar o mínimo utilizou-se a seguinte instrução no matlab, na qual o vetor **a** = [2 3 4] representa os preços iniciais de cada produto:

```
fx >> [xmin,fmin,exitflag,output]= fminunc('profit',[0 2 1],[],a)
```

```
xmin =
    0.1030    1.4685    1.9766

fmin =
   -6.3515

exitflag =
     1
```

Assim, obteve-se o output à esquerda. O resultado obtido para o ponto [0 2 1] convergiu para o minimizante local [0.1030 1.4685 1.9766], pois o valor da exitflag obtido foi igual a 1. O mínimo obtido foi -6.3515.

Durante a fase de testes foram realizadas diversas tentativas com diferentes pontos iniciais, tais como: [1 2 1], [1 2 3] e [1 0 1]. Nos dois primeiros casos obteve-se convergência para o minimizante já apresentado, contudo o número de iterações e chamadas à função foram diferentes. No último caso, não houve convergência para nenhum minimizante (exitflag = -3).

No que toca à variação dos parâmetros, foram alterados os preços dos produtos dando origem ao vetor **a** = [1.7 2.5 3.2], obtendo-se os seguintes resultados para o ponto inicial [0 2 1]:

Variáveis - mín	x(1)	x(2)	x(3)	F
Resultado	0.1266	1.2122	1.5708	-4.2279

FMINSEARCH

De modo a encontrar o mínimo da função, utilizou-se também a rotina fminsearch no matlab, na qual o vetor **a** = [2 3 4] representa os preços iniciais de cada produto:

```
fx >> [xmin,fmin,exitflag,output]=fminsearch('profit',[0 2 1],[],a)
```

```
xmin =
    0.1030    1.4686    1.9767

fmin =
   -6.3515

exitflag =
     1
```

Deste modo, obteve-se o output à esquerda. Tal como era previsto, os valores obtidos foram muito semelhantes aos valores obtidos com a rotina `fminunc`. Assim sendo, o minimizante local é o ponto $[0.1030 \ 1.4686 \ 1.9767]$ e o valor do mínimo local da função é -6.3515 . Dado que a `exitFlag = 1`, conclui-se que a função convergiu.

Foram realizados outros testes, considerando os mesmos pontos utilizados para a rotina `fminunc`. Os resultados obtidos para as 2 rotinas foram semelhantes: os dois primeiros pontos convergiram para o minimizante presente na figura ao lado; para o

3º ponto, verificou-se que `exitflag = 0`. De forma a parar o processo iterativo modificou-se o `optimset`, contudo não foi possível atingir a convergência dado que o valor `fmin` tende para $-\infty$.

```
f> >> options = optimset('MaxFunEvals', 10000, 'MaxIter', 10000)
f> >> [xmin,fmin,exitflag,output]=fminsearch('profit',[1 0 1],options,a)
```

Em relação à variação dos parâmetros, foi considerado o vetor $a = [1.7 \ 2.5 \ 3.2]$, considerando o ponto inicial $[0 \ 2 \ 1]$, obtendo-se o seguinte resultado:

Variáveis - min	x(1)	x(2)	x(3)	F
Resultado	0.1266	1.2122	1.5709	-4.2279

Comparativamente à rotina `fminunc`, a diferença mais significativa residiu no número de iterações (iterations) e número de acessos à função (funcCount), sendo que na rotina `fminsearch` esse valor é superior.

DISCUSSÃO DE RESULTADOS

Uma vez que foi necessário transformar o problema de maximização num problema de minimização é necessário ter especial atenção aos resultados obtidos. Assim, o valor `fmin` observado foi negativo e igual a -6.3515 , o que corresponde ao valor 6.3515 no problema de maximização. O minimizante $[0.1030 \ 1.4686 \ 1.9767]$ obtido pelo matlab corresponde então ao maximizante do problema de maximização pretendido. Os valores das quantidades no maximizante são números positivos, o que revela ser uma solução admissível quer no contexto matemático quer no do problema.

Deste modo, o lucro máximo de **6.3515€** pode ser obtido produzindo 0.1030kg de tomates, 1.4686kg de pimentos e 1.9767kg de pepinos, considerando os preços por kg de 2, 3 e 4€ respetivamente. Assim, recorrendo à expressão analítica da função de custo, obtém-se um custo de produção $C(0.1030, 1.4686, 1.9767) = \mathbf{6.16713}$ e a receita $R(0.1030, 1.4686, 1.9767) = \mathbf{12.5186}$.

Nos testes realizados foram considerados diferentes valores para os parâmetros correspondentes ao preço (vetor a). Os resultados obtidos, tal como era previsto, mostram que com a diminuição do preço de venda diminui também o lucro total, uma vez que a função de custos não é impactada pelos parâmetros supramencionados.