Universidade do Minho
Escola de Engenharia

MODELOS DETERMINÍSTICO DE INVESTIGAÇÃO OPERACIONAL

RELATÓRIO DE PROJETO 3

GESTÃO DE PROJETOS - JANEIRO 2021

Ana Luísa Carneiro A89533

Luís Miguel Pinto A89506

Ana Rita Peixoto A89612

Pedro Almeida Fernandes A89574

ÍNDICE

INTRODUÇÃO

No trabalho prático 3 é proposto a formulação e modelação de um problema que consiste em planear a execução de um projeto através da redução do tempo das atividades que compõem o projeto. O objetivo deste trabalho visa reduzir o tempo de certas atividades de forma a que o custo dessa redução seja o mínimo possivel e que o projeto tenha uma certa duração.

O desenvolvimento deste trabalho focou-se em diversos conceitos que foram a base da formulação e modelação apresentada, tais como: programação linear mista, diagrama de Gantt, caminho crítico, gestão de projetos, entre outros.

PARTE 0

REMOÇÃO DAS ATIVIDADES - REDE DO PROJETO

De modo a personalizar o projeto, foi proposto eliminar certas atividades, tendo em conta o maior número de inscrição do aluno do grupo. No nosso caso, o número selecionado foi o 89612. Assim, foram eliminadas as atividades 1 e 2 do projeto dando origem a seguinte rede do projeto:

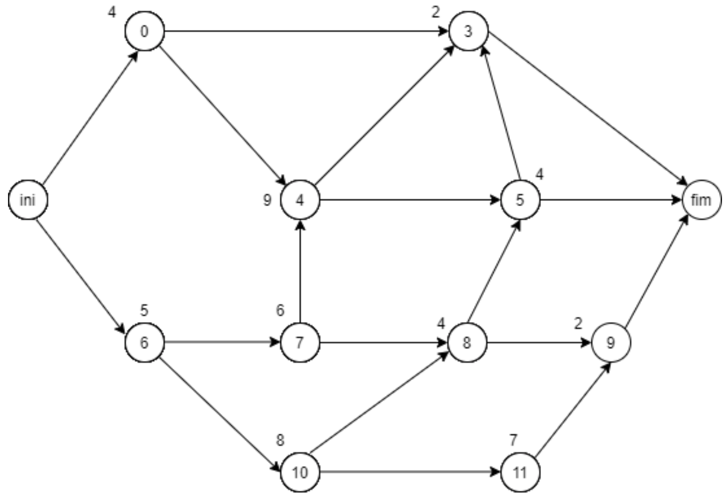

Figura 1: Rede do problema

DIAGRAMA DE GANTT

Através da nova rede do projeto, construiu-se o diagrama de Gantt que representa o plano de execução da projeto assim como o tempo que este vai demorar – 26 U.T. Na figura 2, esta representado o diagrama de Gantt para a nova rede e na figura 3 fica representado a rede com o plano de execução do projeto.

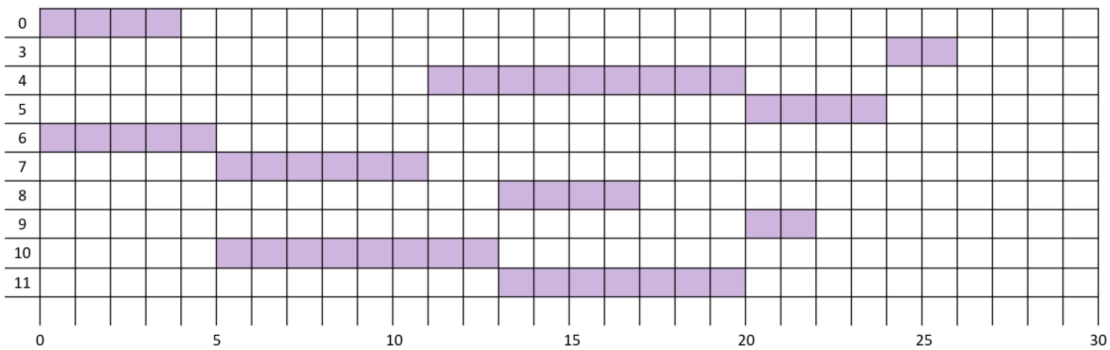

Figura 2: Diagrama de Gantt

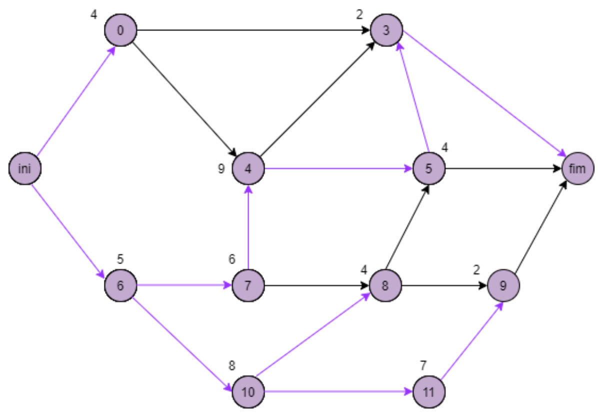

Figura 3: Rede com o plano de execução

FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

DESCRIÇÃO E OBJETIVO DO PROBLEMA

O projeto III tem como objetivo reduzir a duração do projeto em 3 unidades de tempo, através da redução do tempo das atividades de modo a minimizar o custo suplementar.

Neste trabalho é necessário planear um projeto constituído por várias atividades com relações de precedência e antecedência entre elas. Por exemplo, para realizar a atividade 10 é necessário que a atividade 6 esteja concluída. Além disso, cada atividade tem associado uma duração e um custo normal. Pretende-se que a duração total do projeto seja reduzida em 3 unidades, de 26 U.T. para 23 U.T., através da redução do tempo das atividades. A cada redução estão associados dois custos suplementares: o custo suplementar (c1) de reduzir a duração da atividade por unidade de tempo e outro custo (c2) de reduzir a duração da atividade por unidade de tempo após ter aplicado a máxima redução a um custo c1.

Contudo, nem todas as atividades podem ser reduzidas. Para as atividades 7 e 9, existem um conjunto de opções onde se associa uma determinada duração a um custo suplementar, tal como está representado na figura 4. Pela figura conseguimos ver que para cada duração existem um custo suplementar associado. Porém para a opção 3 não existe custo suplementar, uma vez que se trata da implementação base do problema. Assim, o custo para a opção 3 será só o custo normal de realizar atividade 7 e 9.

Atividade	Opção 1		Opção 2		Opção 3	
	Duração	Custo Adicional	Duração	Custo Adicional	Duração	Custo Adicional
7	5	300	4	1100	6	0
9	1	200	0	400	2	0

Figura 4: Opções para as atividades 7 e 9

Para a resolução deste problema, implementou-se inicialmente um conjunto de variáveis de decisão *ti* que representa o tempo de início da atividade i. Para uma dada atividade j, o tempo de início da atividade j deve ser posterior ao tempo de conclusão de cada uma das atividades i que precedem j. As restrições do problema, relativas a cada um dos arcos do grafo, traduzem as relações de precedência entre as atividades. Dado que *ti*, designa o tempo de início da atividade i, a função *ti + di* designa o tempo de conclusão da atividade i. O projeto termina no instante *tf*, quando todas as atividades predecessoras à atividade fictícia *fim* estiverem concluídas.

ESCOLHA DAS VARIAVES DE DECISÃO

As incógnitas do problema devem permitir obter as reduções que se devem fazer de forma a que a duração do projeto seja 23 U.T. Para isso, foram implementadas variáveis que constituem as possíveis reduções de tempo das atividades 0,3,4,5,6,8,10 e 11 e as opções de duração disponíveis para as atividades 7 e 9. Além destas novas variáveis, foram inicialmente implementadas as variáveis *ti*, tal como mencionado em cima, como forma de representar o plano de execução do projeto com as novas durações.

De forma a cumprir com as regras previstas para a redução de tempo de cada atividade foi implementada uma variável que representa a totalidade da redução do tempo da atividade, isto é, a soma das reduções previstas com custo c1 e com custo c2. Como forma de representar a redução c1 e c2 foram criadas duas variáveis distintas. Por fim, houve necessidade de criar uma variável que conseguisse estabelecer a regra “a redução com custo c2 só pode ser utilizada se c1 atingir a redução máxima”. Para isso, criou-se uma variável binária que representa a seleção ou não da redução a custo c2.

As opções disponíveis para 7 e 9, foram representadas através de variáveis binárias, pois deve-se ao facto de que para cada atividade só pode ser escolhida uma opção. Assim, temos *op1_j*, *op2_j* e *op3_j* que representam a seleção, ou não, da opção 1, 2 e 3 (tal como está na figura 4), para cada atividade *j* (j = 7 ou j = 9). Desta forma, cada atividade tem ainda duas variáveis que representam o custo e a duração associados à opção selecionada.

RESTRIÇÕES

As restrições implementadas tiveram em consideração três principais fatores : que o tempo final do projeto seja 23 U.T., que as relações de precedência tenham em consideração as reduções de tempo e que cumpram as limitações das reduções c1 e c2 . Notar também que a escolha da opção para as atividades 7 e 9 deve ser única.

Na parte 0 foi obtido o tempo máximo de duração de projeto, tf = 26. Desta forma, obedecendo à redução proposta, implementou-se uma restrição que implica que o tempo máximo do projeto seja 23. Para atingir o novo tempo, é necessário ter em consideração as reduções do tempo das atividades nos vários arcos. Para isso, retirou-se à duração original de cada atividade o valor total da redução dessa atividade.

Em relação às reduções, é necessário ter em consideração o seu limite máximo. Além disso, através da utilização de variáveis binárias, que representam a seleção da redução a custo c2, foi possível estabelecer uma restrição que impõe que caso a variável binária seja 1, então existem reduções com custo c2 e, por isso, a redução com custo c1 tem de atingir o limite máximo.

No caso das atividades 7 e 9 foram consideradas diversas opções onde se associa a duração das atividades a um determinado custo. Para cada atividade existem 3 opções, que foram representadas por variáveis binárias. A restrição implementada impõe que apenas seja escolhida uma opção para cada atividade. A duração e o custo suplementar das atividade têm em consideração a opção escolhida, ou seja, se uma opção for selecionada, então o custo e duração associados a essa opção também são selecionados.

FUNÇÃO OBJETIVO

A função objetivo implementada traduz o custo suplementar mínimo possível tendo em conta as reduções obtidas. Esta função é representada como o somatório da relação existente entre cada redução e o custo associado.

MODELAÇÃO DO PROBLEMA

VARIVEIS DE DECISÃO

Tal como referido anteriormente, foram criadas variáveis de decisão que refletem a redução do tempo de atividade, representado da seguinte forma:

$$ri \ - redução\ total\ do\ tempo\ da\ atividade\ i$$
$$ri = ri\_1 + ri\_2$$
$$ri \geq 0 \wedge ri \in \mathbb{R}$$

$$ri\_1 - redução\ da\ atividade\ i\ utilizando\ o\ custo\ c1$$
$$ri\_1 \geq 0 \wedge ri\_1 \in \mathbb{R}$$

$$ri\_2 - redução\ da\ atividade\ i\ utilizando\ o\ custo\ c2$$
$$ri\_2 \geq 0 \wedge ri\_2 \in \mathbb{R}$$

$$com\ i \in \{0,3,4,5,6,8,10,11\}$$

```
// Redução Total para as atividades 0,3,4,5,6,8,10,11
r0 = r0_1 + r0_2;
r3 = r3_1 + r3_2;
r4 = r4_1 + r4_2;
r5 = r5_1 + r5_2;
r6 = r6_1 + r6_2;
r8 = r8_1 + r8_2;
r10 = r10_1 + r10_2;
r11 = r11_1 + r11_2;
```

Figura 5: Representação do r no *lpsolve*

Além disso, foram implementadas variáveis que denotam o custo suplementar e duração da atividade j, sendo j as atividades 7 e 9. Essas variáveis podem ser observadas através da representação seguinte:

$$cj - custo\ sumplementar\ da\ atividade\ j$$
$$cj \geq 0 \wedge cj \in \mathbb{R}$$

$$dj - duração\ da\ atividade\ j$$
$$dj \geq 0 \wedge dj \in \mathbb{R}$$

$$com\ j \in \{7,9\}$$

O custo e duração das atividades 7 e 9 são obtidas através da associação do custo ou da duração (cj e dj respetivamente) com o valor binário de opk_j (k=1,2 ou 3 ; j =7 ou 9). Por exemplo, se a opção 2 da atividade 7 for selecionada então obtemos um custo de 1100 U.M. (300*0+1110*1+0*0), o que representa o custo de implementar a opção 2 no problema.

```
// custo de cada opção para 7 e 9
c7 = 300op1_7 + 1100op2_7 + 0op3_7;
c9 = 200op1_9 + 400op2_9 + 0op3_9;

// duração de cada opção para 7 e 9
d7 = 5op1_7 + 4op2_7 + 6op3_7;
d9 = 1op1_9 + 0op2_9 + 2op3_9;
```

Figura 6: Representação do custo e da duração em *lpsolve*

Por último, também foi necessária a utilização de variáveis binárias (figura 4) de modo a explicitar a seleção, ou não, de reduções com custo c2, e também as opções relativas às atividades 7 e 9. Podem ser representadas matematicamente do seguinte modo:

$$yi = \begin{cases} 1, & caso\ for\ utilizada\ a\ redução\ c2\ na\ atividade\ i \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$

$$opk\_j = \begin{cases} 1, & caso\ a\ opção\ k\ for\ selecionada\ para\ j \\ 0, & caso\ contrário \end{cases}$$
$$com\ k \in \{1,2,3\}$$

```
/* Variáveis de decisão binárias */
bin
op1_9, op2_9, op3_9,
op1_7, op2_7, op3_7,
y0, y3, y4, y5, y6,
y8, y10, y11;
```

Figura 7: Variáveis de decisão binárias

PARAMETROS

Os parâmetros do problema, ou seja, os dados do sistema que não podem ser alterados são: a rede do projeto, os custos associados às várias possibilidades de redução para cada atividade, assim como os limites máximos e normas para essas reduções, as opções de duração para as atividades 7 e 9 e, finalmente, a duração máxima do projeto.

FUNCAO OBJETIVO

Tal como foi supramencionado, a função objetivo retrata um problema de otimização representando a **minimização** do custo suplementar associado a cada redução. Assim, obteve-se a seguinte função:

```
// custo associado à redução das durações das actividades
min: 200 r0_1 + 100 r0_2 + 200 r3_1 + 100 r3_2 + 800 r4_1 + 400 r4_2 + 1600 r5_1 + 800 r5_2 +
     180 r6_1 + 90 r6_2 + c7 + 200 r8_1 + 100 r8_2 + c9 + 1000 r10_1 + 500 r10_2 +
     600 r11_1 + 300 r11_2;
```

Figura 8: Função objetivo

RESTRIÇÕES

A primeira restrição do problema a ter em consideração, delimita o valor do tempo máximo para concluir o projeto.

```
// tempo máximo para concluir o projecto
tf <= 23;
```

Figura 9: Restrição do tempo máximo do projeto

De seguida, foi necessário adaptar as restrições do arco definidas na parte 0, de modo a incluir as reduções associadas a cada atividade.

```
/* relações de precedência na restrição tj >= ti - ri + di.
A função ti - ri + di designa o tempo de conclusão da atividade i
após a redução da duração, de di para -ri + di */
arco_i0: t0 >= ti + 0 ;
arco_03: t3 >= t0 - r0 + 4 ;
arco_04: t4 >= t0 - r0 + 4 ;
arco_43: t3 >= t4 - r4 + 9 ;
arco_53: t3 >= t5 - r5 + 4 ;
arco_3f: tf >= t3 - r3 + 2 ;
arco_45: t5 >= t4 - r4 + 9 ;
arco_5f: tf >= t5 - r5 + 4 ;
arco_i6: t6 >= ti + 0 ;
arco_74: t4 >= t7 + d7;
arco_85: t5 >= t8 - r8 + 4 ;
arco_9f: tf >= t9 + d9;
arco_67: t7 >= t6 - r6 + 5 ;
arco_78: t8 >= t7 + d7;
arco_89: t9 >= t8 - r8 + 4 ;
arco_610: t10 >= t6 - r6 + 5 ;
arco_108: t8 >= t10 - r10 + 8 ;
arco_119: t9 >= t11 - r11 + 7 ;
arco_1011: t11 >= t10 - r10+ 8;
```

Figura 10: Restrições dos arcos

Em adição, foi necessário considerar restrições que refletissem o cumprimento da regra "a redução com custo c2 só pode ser utilizada se c1 atingir a redução máxima". A implementação desta regra baseou-se no uso de uma variável binária para cada atividade que indica a seleção ou não da redução com custo c2. Assim, se a variável *yi* for igual a 0 então a variável *ri_2* não foi selecionada o que faz com que esta seja obrigatoriamente 0 (exemplo, *r0_2*<=0.5*0). Consequentemente, a redução *ri_1* terá de ser menor ou igual ao seu máximo (exemplo, r0_1<=0.5 e *r0_1*>=0.5*0). Se a variável *yi* for igual a 1 então a variável *ri_2* foi selecionada o que faz com que esta seja menor ou igual ao seu limite máximo (exemplo, *r0_2*<= 0.5*1). Consequentemente, a redução *ri_1* terá de ser igual ao seu máximo (exemplo, *r0_2*<=0.5 e *r0_1*>=0.5*1 que equivale a termos *r0_1*=0.5).

```
/* REDUÇOES */

// reduções máximas permitidas para c1
r0_1 <= 0.5;
r0_1 >= 0.5 y0;

r3_1 <= 0.5;
r3_1 >= 0.5 y3;

r4_1 <= 2;
r4_1 >= 2 y4;

r5_1 <= 0.5;
r5_1 >= 0.5 y5;

r6_1 <= 1;
r6_1 >= 1 y6;

r8_1 <= 0.5;
r8_1 >= 0.5 y8;

r10_1 <= 0.5;
r10_1 >= 0.5 y10;

r11_1 <= 1;
r11_1 >= 1 y11;

// reduções máximas permitidas para c2
r0_2 <= 0.5 y0;
r3_2 <= 0.5 y3;
r4_2 <= 1 y4;
r5_2 <= 0.5 y5;
r6_2 <= 1 y6;
r8_2 <= 0.5 y8;
r10_2 <= 0.5 y10;
r11_2 <= 1 y11;
```

Figura 11: Restrições para o cumprimento da regra

Por último, para as atividades 7 e 9, foi necessário considerar as restrições que refletem a obrigatoriedade de unicidade da opção. Dado que as variáveis são binárias e a soma das mesmas tem de ser igual a 1, então apenas uma das variáveis poderá obter o valor 1, e as restantes o valor 0. Desta forma, garante-se que apenas uma só opção é selecionada.

```
// escolha das opções
op1_7 + op2_7 + op3_7 = 1;
op1_9 + op2_9 + op3_9 = 1;
```

Figura 12: Restrições para as atividades 7 e 9

INTERPRETAÇÃO DA SOLUÇÃO ÓTIMA

SOLUÇÃO OTIMA

Através da utilização do software LPSolve, obtemos os resultados da figura 12, onde estão representados todos os valores das variáveis de decisão de forma a obtermos a solução ótima. As variáveis que se encontram no retângulo a vermelho, representam as reduções e opções escolhidas nas atividades. Desta forma, foram escolhidas as reduções máximas a um custo c1 e a um custo c2 para as atividades 3 e 6. Para as atividades 7 e 9 foi escolhida a opção 3 que representa o custo e duração normais, ou seja, o que já se encontrava implementado.

Com estas reduções conseguimos reduzir a duração do projeto em 3 U.T., pois foi reduzido 2 U.T. á atividade 6 e 1 U.T. á atividade 3. Contudo, estas reduções tiveram um custo suplementar de 420 U.M., que representa o custo suplementar mínimo possivel.

Este resultado traduz-se num custo total do projeto igual a: 9300 (custo normal) + 420 (custo suplementar) = 9720 U.M. e numa duração do projeto de 23 U.T. .

Variables	MILP Feasible	result
	420	420
tf	23	23
t3	22	22
t9	21	21
t5	18	18
t8	14	14
t11	14	14
t4	9	9
t10	6	6
d7	6	6
t7	3	3
r6	2	2
d9	2	2
r3	1	1
y6	1	1
y3	1	1
r6_2	1	1
r6_1	1	1
op3_9	1	1
op3_7	1	1
r3_1	0,50000000...	0,500000...
r3_2	0,5	0,5
y8	0	0
y5	0	0

• • •

Figura 13: Resultado obtido com o LPSolve

É de notar que nem todas as variáveis estão representadas na figura 12, pois como têm valores iguais a 0, não têm significado relevante para a interpretação das reduções e opções selecionadas.

PLANO DE EXECUÇÃO – DIAGRAMA DE GANTT

Para além de termos obtido o resultado acima apresentado, através do LPSolve conseguimos também obter o plano de execução do projeto que se encontra representado pelo retângulo vermelho. Através destes valores conseguimos criar o diagrama de Gantt com os novos valores de duração das atividades (figura 14).

Variables	MILP ...	result
	420	420
y8	0	0
y6	1	1
y5	0	0
y4	0	0
y3	1	1
y11	0	0
y10	0	0
y0	0	0
ti	0	0
tf	23	23
t9	21	21
t8	14	14
t7	3	3
t6	0	0
t5	18	18
t4	9	9
t3	22	22
t11	14	14
t10	6	6
t0	0	0
r8_2	0	0

• • •

Figura 14: Resultado do plano com o LPSolve

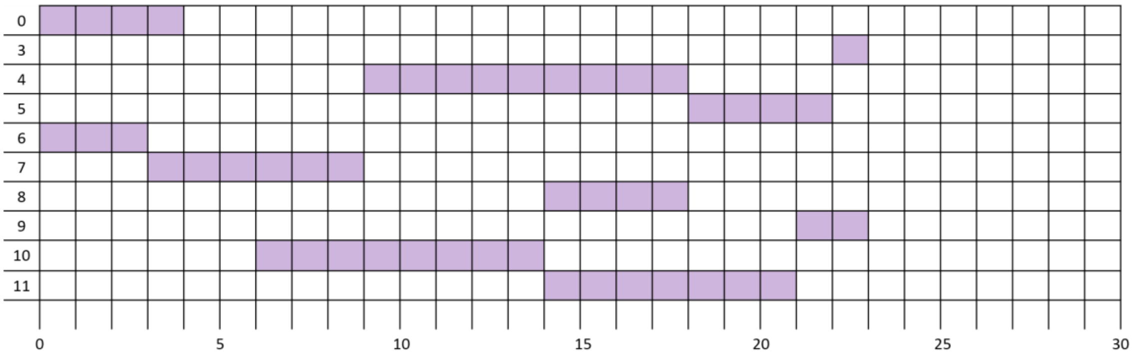

Figura 15: Digrama de Gantt LPSolve

Como o LPSolve não conhece o modelo, a solução da figura 14 não seria o plano mais eficiente. Assim, uma outra solução alternativa que se poderia obter e planear seria fazer com que todas as atividades começassem o mais cedo possivel. Assim, obteve-se o seguinte diagrama Gantt que representa o plano de execução mais eficiente.

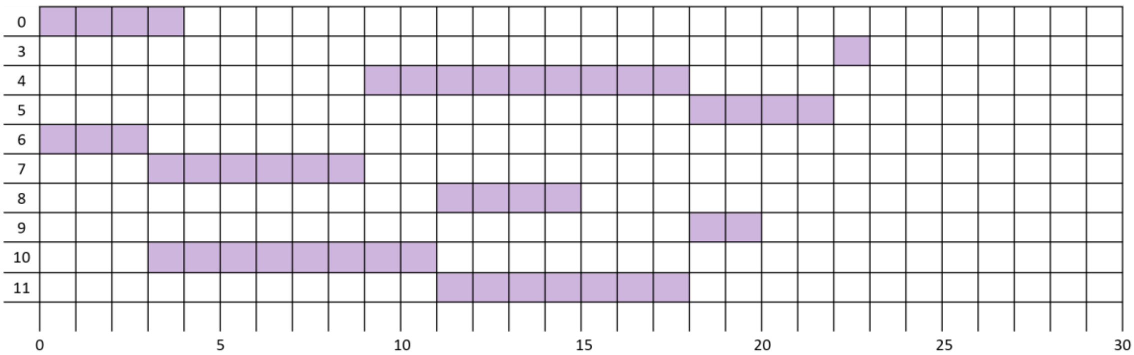

Figura 16: Diagrama Gantt de uma solução alternativa

VALIDAÇÃO DA SOLUÇÃO

De modo a verificar o custo suplementar total das reduções selecionadas obtido pelo LPSolve (420 U.M.), criaram-se as seguintes tabelas. Na figura 16, a coluna "Redução 1" representa o valor da redução com custo C1 obtido através do LPSolve. O mesmo acontece para a coluna "Redução 2". A coluna "TOTAL" corresponde à soma da multiplicação dos custos suplementares pela quantidade de redução.

Atividade	Redução 1	Custo 1	Redução 2	Custo 2	TOTAL
0	0	200	0	100	= **0**
3	0,5	200	0,5	100	= **150**
4	0	800	0	400	= **0**
5	0	1600	0	800	= **0**
6	1	180	1	90	= **270**
8	0	200	0	100	= **0**
10	0	1000	0	500	= **0**
11	0	600	0	300	= **0**
TOTAL					= **420**

Figura 17: Custos suplementares das atividades

Na figura 17 encontramos o custo das diversas opções para as atividades 7 e 9. Podemos observar pelas colunas "Opção 1", "Opção 2" e "Opção 3" (variáveis de decisão) que apenas a Opção 3 foi selecionada. A coluna "TOTAL" corresponde à soma da multiplicação dos custos suplementares pelo valor da opção.

Atividade	Opção 1	Custo 1	Opção 2	Custo 2	Opção 3	Custo 3	Total
7	0	300	0	1100	1	0	= **0**
9	0	200	0	400	1	0	= **0**
TOTAL							= **0**

Figura 18: Custos suplementares das atividades 7 e 9

A soma dos custos suplementares das atividades da figura 16 com os da figura 17 perfaz um total de 420, tal como queríamos mostrar.

CONCLUSÃO

Dado por concluído o 3º trabalho prático, consideramos que a realização deste projeto foi fundamental para melhor formular e modelar problemas de programação linear inteira mista, nomeadamente de minimização.

Durante a realização deste trabalho surgiram algumas dificuldades. A maior dificuldade encontrada foi conseguir restringir a utilização das reduções c2, dado que só poderiam acontecer caso se verificasse o máximo de redução c1 respetiva. Esta dificuldade foi ultrapassada através do uso misto de variáveis binárias e reais. Além disso, também se revelou desafiante representar a opcionalidade das atividades 7 e 9.

Com base no que foi exposto, consideramos que as dificuldades foram ultrapassadas de forma eficaz e que por isso o balanço do resultado foi positivo.