

《数理统计》课程期中练习（应统）

1. 设 $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ 为总体 $N(1, 9)$ 的样本, $\eta = a(\xi_1 + 2\xi_2 + c)^2 + b(\xi_3 - \xi_4 + d)^2$ 服从 χ^2 分布, 求 a, b, c, d 的值。

2. 设总体容量为 8 的一组样本观察值为 1, 2, 2, 5, 4, 3, 4, 5 求经验分布函数 $F_n(x)$ 。

3. 已知随机变量 ξ 的分布函数为

$$F(x, \theta_2) = \begin{cases} 1 - \left(\frac{\theta_1}{x}\right)^{\theta_2} & x > \theta_1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (\theta_1 > 0, \theta_2 > 1), \text{ 其中 } \theta_1 \text{ 已知, } \theta_2 \text{ 为未知参}$$

数, 求 θ_2 的矩估计。

4. 设总体 $\xi \sim f(x) = \begin{cases} \lambda \alpha x^{\alpha-1} \exp\{-\lambda x^\alpha\} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$, 其中 $\alpha > 0$ 为常数, $\lambda > 0$ 为未知

参数, x_1, \dots, x_n 为样本观测值, 求 λ 的极大似然估计。

5. 设 $\xi \sim N(a_1, 4), \eta \sim N(a_2, 9)$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为 ξ 的样本, $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_m$ 为 η 的样本, 且相互独立, (1) 证明 $\hat{a} = \bar{\xi} - \bar{\eta}$ 为 $a_1 - a_2$ 的无偏估计。(2) 设 $n + m = l$, l 已知, 求 n, m 使 $D(\hat{a})$ 达到最小。

6. 设总体, $\xi \sim f(x, \lambda) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases} \lambda > 0$ $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为总体 ξ 的样本, 求

$\frac{1}{\lambda}$ 的有效估计量, 一致最小方差无偏估计及 $R-C$ 下界。

7. 甲、乙两台机床加工同一种零件，分别从甲、乙机床加工的零件中随机地抽取 8 个和 7 个样本，测量其长度结果为 $\bar{x} = 22.2, \tilde{S}_1^2 = 0.22, \bar{y} = 20, \tilde{S}_2^2 = 0.35$ 。假设两机床所加工零件的长度都服从正态分布，方差相等且独立，求 $a_1 - a_2$ 置信度为 95% 的置信区间。

8. 设 $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 为 ξ 的样本 ($n \geq 3$),

当用 $2\bar{\xi} - \xi_1, \frac{1}{2}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{6}\xi_3, \frac{1}{3}\xi_1 + \frac{1}{3}\xi_2 + \frac{1}{3}\xi_3$ 作为 a 的估计时，那个更有效。

9. 设 $\xi \sim N(0, 4)$, $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4, \xi_5, \xi_6$ 为 ξ 的样本，求常数 k

$$\text{使 } P \left\{ \frac{(\xi_1 - \xi_2)^2}{(\xi_3 + \xi_4)^2 + (\xi_5 + \xi_6)^2} < k \right\} = 0.95 \quad .$$

10. 设 $\xi \sim N(a, \sigma^2)$, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{16}$ 为 ξ 的样本

$$\text{求 (1) } P \left\{ \frac{\tilde{S}^2}{\sigma^2} < 2.038 \right\} \quad (2) \quad D\tilde{S}^2$$