《数理统计》课程期中练习

1.设ξ_1,ξ_2,ξ_3,ξ_4为总体$N(0,9)$的样本，$\eta=a(\xi_1+2\xi_2)^2+b(\xi_3+\xi_4)^2$服从$\chi^2$分布，求$a$，$b$的值。（8 分）

2. 设总体容量为 7 的一组样本观察值为 1，1，2，5，3，3，4 求经验分布函数$F_n\left(x\right)$（8 分）

3. 设总体$\xi\sim f(x;\theta)=\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\theta}+1\right)x^{\frac{1}{\theta}} & 0<x<1,\theta>0\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，$x_1,x_2,\cdots,x_n$为样本观察值，求$\theta$的矩估计。（10 分））

4. 设ξ的概率密度函数为

$$f(x,\theta)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)}, & x>\theta\\ 0, & x\le\theta\end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数，ξ_1，ξ_2,…，ξ_n是来自总体ξ的一个样本，求θ的极大似然估计。（10 分）

5. 在均值为a，方差为σ^2的正态总体中分别抽取容量为n_1,n_2的两个独立样本，$\overline{\xi_1}$，$\overline{\xi_2}$分别为两个样本均值，试证明任何常数b_1 ,b_2 $\left(b_1+b_2=1\right)$,$\eta=b_1\overline{\xi_1}+b_2\overline{\xi_2}$，都为$a$的无偏估计量，并确定$b_1$,b_2 的值，使η的方差达到最小。（12 分）

6. 设$\xi\sim f(x,\theta)=\begin{cases}\theta e^{-\theta x} & x>0,\theta>0\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$，其中$\theta$未知，$\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n$为总体$\xi$的样本，求$\dfrac{1}{\theta}$的有效估计量，一致最小方差无偏估计及$R-C$下界。（12 分）

7, 甲、乙两台机床加工同一种零件，分别从甲、乙机床加工的零件中随机地抽测 8 个和 7 个样本，测量其长度结果为$\overline{x}=21.2, S_1^2=0.25, \overline{y}=20, S_2^2=0.36$。假设两机床所加工零件的长度都服从正态分布，方差相等且独立，求a_1-a_2置信度为 95%的置信区间。（10 分）

8. 设$\xi \sim N(a,\sigma^2)$，$\xi_{1,}\xi_2 \cdots,\xi_n$为$\xi$的样本$(n>3)$，当用$2\overline{\xi}-\xi_{1,}$ $\frac{1}{2}\xi_1+\frac{2}{3}\xi_2-\frac{1}{6}\xi_{3,}$ $\overline{\xi}$作为a的估计时，那个更有效。（10 分）

9. 设$\xi \sim N(0,4)$，$\xi_{1,}\xi_2,\xi_3,\xi_4$为$\xi$的样本，求常数 k

使$P\left\{\frac{\left(\xi_1-\xi_2\right)^2}{\left(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4\right)^2}<k\right\}=0.95$ (10 分)

10. 设$\xi \sim N(a,\sigma^2)$，$\xi_{1,}\xi_2 \cdots,\xi_n$为$\xi$的样本

证明：$E\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\xi_i-\overline{\xi}\right)^2\right]^2=(n^2-1)\sigma^4$ (10 分)