

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ  
ИНСТИТУТ

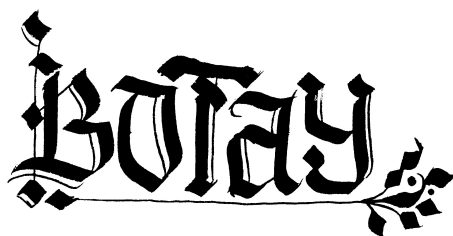
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

---

# Гармонический анализ

---

ЭКЗАМЕН



Автор: [ДОМРАЧЕВ АЛЕКСЕЙ](#)

*при поддержке студсоветов ФРТК и ФУПМ*



## Содержание

1	Теорема Римана. Стремление к нулю коэффициентов Фурье.	2
2	Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации.	6
3	Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке.	9
4	Дифференцирование и интегрирования рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.	12
5	Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье.	17
6	Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции.	18
7	Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими членами.	20
8	Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенства Бесселя.	22
9	Полнота ортогональной системы функций, ортогональный базис и равенство Парсеваля.	24
10	Полнота тригонометрической системы в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном, равенство Парсеваля для тригонометрической системы.	27
11	Теорема Рисса-Фишера	29
12	Полнота и замкнутость ортогональной системы, их связь	30
13	Полнота пространств $C[a,b]$ , неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами.	32
14	Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость собственных интегралов, зависящих от параметра.	34
15	Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле.	36

# 1. Теорема Римана. Стремление к нулю коэффициентов Фурье.

$X = \{a, b\} : [a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$ , может быть  $a = -\infty, b = +\infty$ ,  $X$  — промежуток.

Функция  $y = f(x)$  называется абсолютно интегрируемой на промежутке  $X$ , если  $\int_X |f| dx$  сходится.

**Определение 1.1.**

**Обозначения.** Совокупность абсолютно интегрируемых функций обозначается  $L^1_R(X)$

**Замечание** Если  $f$  интегрируема на  $[a, b]$ , то  $|f|$  — интегрируема на  $[a, b]$ . В обратную сторону утверждение неверно, пример функция Дирихле не интегрируема в общем случае, но интегрируема по модулю.

$$\tilde{D}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in \mathbb{Q} \\ -1 & , x \in \mathbb{J} \end{cases}$$

**Замечание.** На  $L^1_R(X)$  можно определить операции сложения функций и умножения функции на действительное число. Тем самым  $L^1_R(X)$  превращается в линейное пространство.

Функция  $f \in L^1_R(X)$  называется абсолютно интегрируемой с квадратом, если  $\int_X |f|^2 dx$  сходится. Множество таких функций обозначают  $L^2_R(X)$

**Определение 1.2.**

$$|f|^2 \in L^1_R(X) \Rightarrow f \in L^2_R(X)$$

$$* - f : X \rightarrow \mathbb{R} \Rightarrow |f|^2 = f^2$$

$$\text{НО } f : X \rightarrow \mathbb{C} \Rightarrow |f|^2 \neq f^2$$

**Пример.**  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}, X = (0, 1], f \in L^1_R(X), f^2 \notin L^1_R(X)$

**Предложение.**  $L^2_R(X)$  — линейное пространство.

**Определение.** Линейное пространство  $L$  называется нормированным пространством, если на  $L$  введена функция  $\|\cdot\|$  называемая нормой, обладающая следующими свойствами ( $\forall x, y \in L \ \& \forall \alpha \in \mathbb{R}$ )

$$1. \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

$$2. \ \|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$$

$$3. \|x\| \geq 0, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

**Теорема Римана об осцилляции.** Если  $f(x)$  абсолютно интегрируемая на конечном или бесконечном интервале  $(a,b)$ :  $f \in L_R^1(X)$ ,  $X = \{a,b\}$ , то справедливо следующее равенство

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin tx dx = 0;$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \cos tx dx = 0$$

**Доказательство.**

*Первый случай.*  $f$  — интегрируемая на  $[a,b]$  функция. Критерий интегрируемости:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\} : \bar{S}_T - \underline{S}_T < \varepsilon/2$$

Возьмем  $m_i = \inf_{[x_{i-1}, x_i]} f$ ,  $M_i = \sup_{[x_{i-1}, x_i]} f$ ,  $M = \sup_{[a,b]} |f|$ .

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(x) \sin tx dx \right| &= \left| \sum_{i=1}^k \int_{x_{i-1}}^{x_i} (f(x) - m_i) \sin tx dx + \sum_{i=1}^k m_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin tx dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \Delta x_i + \sum_{i=1}^k \frac{m_i}{|t|} |\cos tx_{i-1} - \cos tx_i| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k (M_i - m_i) \Delta x_i + 2k \frac{M}{|t|} < \varepsilon/2 + 2k \frac{M}{|t|} \end{aligned}$$

Так как числа  $M$  и  $k$  фиксированы, то

$$\forall \varepsilon > 0 \exists t_0 > 0 : \forall t : |t| > t_0 \mapsto 2kM/|t| < \varepsilon/2 \mapsto \left| \int_a^b f(x) \sin tx dx \right| < \varepsilon,$$

то есть  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin tx dx = 0$

*Второй случай.*  $X = [a,b)$ ,  $f$  имеет особенность в точке  $b$ .

$$|f(x) \sin tx| \leq |f(x)| \Rightarrow f(x) \sin tx \in L_R^1(X) \Rightarrow$$

Критерий Коши:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) \in (0, b-a) : \left| \int_{b-\delta}^b f(x) \sin tx dx \right| < \varepsilon/2$$

$f$  интегрируема на  $[a, b - \delta] \Rightarrow$  из п. 1  $\exists t_0 > 0 : \forall t : |t| > t_0 \mapsto \left| \int_a^{b-\delta} f(x) \sin tx dx \right| < \varepsilon/2$

Поэтому при  $|t| > t_0 \mapsto$

$$\mapsto \left| \int_a^b f(x) \sin tx dx \right| = \left| \int_a^{b-\delta} f(x) \sin tx dx + \int_{b-\delta}^b f(x) \sin tx dx \right| \leq \left| \int_a^{b-\delta} f(x) \sin tx dx \right| + \int_{b-\delta}^b |f(x)| \sin tx dx < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Итак,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin tx dx = 0$

Косинус доказывается аналогично.

Если  $f \in L_R^1(X)$ ,  $X = \{-a, a\}$ , четная на  $X$ , то

**Теорема 1.2.**

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

Если  $f$  нечетная на  $X$ , то

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

Если  $f \in L_R^1(X)$ ,  $X = \{0, T\}$ , и периодическая с периодом  $T$  продолжена на  $\mathbb{R}$ , то  $f$  абсолютно интегрируема на любом отрезке конечной длины и  $\forall a \in \mathbb{R}$

**Теорема 1.3.**

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx$$

## Тригонометрические ряды Фурье.

**Замечание.** В теории тригонометрических рядов Фурье принята запись

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \sim f(x) \text{ — Ряд Фурье}$$

Замечание 1. Так как  $\left| f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \right| \leq |f(x)|$  и  $\left| f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \right| \leq |f(x)| \Rightarrow$  несобственные интегралы, задающие  $a_k$  и  $b_k$  сходятся.

Замечание 2. Из т. Римана об осцилляции следует, что  $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0$ , при  $k \rightarrow \infty$

**Замечание 3.** Функцию  $f \in \mathcal{L}_R^2[-l, l]$  периодически с периодом  $2l$  продолжим на  $\mathbb{R}$ . По теореме об интеграле периодической функции продолженная функция будет абсолютно интегрируема на любом конечном интервале. Если  $f$  непрерывна на  $[-l, l]$  и  $f(-l+0) = f(l-0)$ , то продолженная функция будет непрерывна на всей числовой оси. Если эти пределы не совпадают, то в т.  $(2m+1)l, m \in \mathbb{Z}$  — точка разрыва 1-го рода со скачком  $f(-l+0) - f(l-0)$

## 2. Представление частичной суммы ряда Фурье интегралом через ядро Дирихле. Принцип локализации.

Будем рассматривать такие функции:  $f \in L_R^1[-l, l]$

Функцию

**Определение**  
**2.1.**

$$D_n(u) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku$$

называют ядром Дирихле

Запишем частичную сумму ряда Фурье в подходящем виде:

$$\begin{aligned} S_n^f &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left( a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(t) dt + \sum_{k=1}^n \left( \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{k\pi t}{l} dt \right] \cos \frac{k\pi x}{l} + \left[ \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{k\pi t}{l} dt \right] \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \left( \cos \frac{\pi kt}{l} \cos \frac{\pi kx}{l} + \sin \frac{\pi kt}{l} \sin \frac{\pi kx}{l} \right) \right] dt = \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \left[ \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi(t-x)}{l} \right] dt = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) D_n dt \end{aligned}$$

Свойства.

**Свойства ядра Дирихле:**

1.  $D_n(u) = D_n(-u)$  — функция четная
2.  $D_n(u + 2\pi) = D_n(u)$  — функция периодическая с периодом  $2\pi$
3.  $D_n(u)$  — непрерывная на  $\mathbb{R}$  функция
4.  $D_n(u) = \frac{\sin(n + 1/2)u}{2 \sin u/2}$ ,  $u \neq 2\pi m \forall m \in \mathbb{Z}$ , но

$$\lim_{u \rightarrow 0} D_n(u) = \left(n + \frac{1}{2}\right)$$

$$5. \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x) dx = \pi \xrightarrow{\text{СБ. 1}} \int_0^{\pi} D_n(x) dx = \pi/2, \forall l \mapsto \int_0^l D_n\left(\frac{\pi}{l}y\right) dy = l/2$$

**Доказательство.**

Свойство 4.

$$D_n(u) \sin \frac{u}{2} = 1/2 \sin \frac{u}{2} + \sum_{k=1}^n \cos ku \sin \frac{u}{2} = 1/2 \sin \frac{u}{2} + 1/2 \sum_{k=1}^n \sin(k+1/2)u - \sin(k-1/2)u =$$

$$= 1/2 \sin(n+1/2)u$$

Выведем Формулу Дирихле.

**Доказательство.**

Итак:

$$S_n^f(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) D_n \left( \frac{\pi}{l} (t-x) \right) dt = \frac{1}{l} \int_{x-l}^{x+l} f(t) D_n \left( \frac{\pi}{l} (t-x) \right) dt =$$

$$\left| \begin{array}{l} t-x=z, dt=dz, t=x+l, z=l \\ t=x+z; z=-l \end{array} \right|$$

$$= \frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(x+z) D_n \left( \frac{\pi}{l} z \right) dz + \frac{1}{l} \int_0^l f(x+z) D_n \left( \frac{\pi}{l} z \right) dz =$$

$$|z=-S|$$

$$= \frac{1}{l} \int_0^l f(x-S) D_n \left( -\frac{\pi}{l} S \right) dS + \frac{1}{l} \int_0^l f(x+z) D_n \left( \frac{\pi}{l} z \right) dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_n^f(x) = \frac{1}{l} \int_0^l [f(x+z) + f(x-z)] D_n \left( \frac{\pi}{l} z \right) dz$$

**Принцип локализации.****Теорема 2.1.**

Пусть функция  $f \in L_R^1[-l, l]$  продолжена с периодом  $2l$  на  $\mathbb{R}$ . Тогда сходимость тригонометрического ряда Фурье функции  $f$  в произвольной точке  $x_0$  и сумма этого ряда в точке  $x_0$  (если ряд сходится в т.  $x_0$ ) зависят от поведения функции  $f$  в достаточно малой окрестности  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  т.  $x_0$  при некотором  $\delta > 0$ .

**Доказательство.**При  $u \neq 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$  справедливо тождество

$$D_n(u) = 1/2 + \cos u + \dots + \cos nu = \frac{\sin(n+1/2)u}{2 \sin u/2}$$



и формула Дирихле:  $S_n^f(x) = \frac{1}{l} \int_0^l [f(x+u) + f(x-u)] D_n\left(\frac{\pi}{l}u\right) du$

Запишем частичную сумму

$$S_n^f(x_0) = \frac{1}{l} \int_0^l \left[ \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z)}{2 \sin \frac{\pi}{2l}z} \right] \sin \left[ \frac{\pi}{l}(n+1/2)z \right]$$

Так как  $f(x_0+z) + f(x_0-z) \in L_R^1[-l, l]$  и

$$\forall z : \delta \in (0; z) \mapsto \frac{|f(x_0+z) + f(x_0-z)|}{2 \sin \frac{\pi}{2l}z} \leq \frac{|f(x_0+z) + f(x_0-z)|}{2 \sin \frac{\pi\delta}{2l}} \Rightarrow$$

То по признаку сравнения функция  $F(z) = \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z)}{2 \sin \frac{\pi}{2l}z} \in L_R^1[-l, l]$  абсолютно интегрируема на  $[\delta, l]$ . В силу теоремы об осцилляции:

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_{\delta}^l F(z) \sin \left[ \frac{\pi}{l}(n+1/2)z \right] dz = 0 \Rightarrow$$

$$S_n^f(x_0) - \frac{1}{l} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z)}{2 \sin \frac{\pi}{2l}z} \sin \left[ \frac{\pi}{l}(n+1/2)z \right] dz \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Это значит, что существование и величина предела  $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^f(x_0)$  зависит только от существования и величины предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \int_0^{\delta} \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z)}{2 \sin \left[ \frac{\pi z}{2l} \right]} \sin \left[ \frac{\pi}{l}(n+1/2)z \right] dz$$

То есть от значений функции  $f$  на интервале  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

### 3. Достаточные условия сходимости ряда Фурье в точке.

**Признак Дини.** Пусть  $f \in L^1_R[-l, l]$  продолжена с периодом  $2l$  на  $\mathbb{R}$ , а

**Теорема 3.1.**  $S_0$  — такое число, что для некоторого  $\delta > 0$ ,  $\delta \in (0, l)$  сходится интеграл

$$\int_0^\delta \frac{|f(x_0 + z) + f(x_0 - z) - 2S_0|}{z} dz,$$

тогда ряд Фурье функции  $f$  сходится в точке  $x_0$  к числу  $S_0$ :

$$S_n^f(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_0$$

**Доказательство.**

$$\frac{f(x_0 + z) + f(x_0 - z) - 2S_0}{z} \in L^1_R[0, l]$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} D_n(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} (1/2 + \cos u + \dots + \cos nu) du = \pi,$$

в силу четности

$$\int_0^\pi D_n(u) du = \pi/2 \text{ и } \int_0^l D_n\left(\frac{\pi z}{l}\right) dz = \frac{l}{2},$$

поэтому получим

$$S_0 = \frac{2}{l} \int_0^l S_0 D_n\left(\frac{\pi z}{l}\right) dz.$$

В силу

$$S_n^f(x) = \frac{1}{l} \int_0^l (f(x+z) + f(x-z)) D_n\left(\frac{\pi}{l} z\right) dz$$

$$\begin{aligned} S_n^f(x_0) - S_0 &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z)}{2 \sin \frac{\pi}{2l} z} \sin \left[ \frac{\pi}{l} (n+1/2) z \right] dz - S_0 \frac{2}{l} \int_0^l D_n\left(\frac{\pi}{l} z\right) dz = \\ &= \frac{1}{l} \int_0^l \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z) - 2S_0}{2 \sin \frac{\pi}{2l} z} \sin \left[ \frac{\pi}{l} (n+1/2) z \right] dz \end{aligned}$$

$$g(z) = \frac{f(x_0+z) + f(x_0-z) - 2S_0}{z} \frac{z}{2 \sin \frac{\pi}{2l} z}$$

На отрезке  $[0, l]$  знаменатель обращается в 0 при  $z = 0$ , а  $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{2 \sin \frac{\pi}{2l} z} = \frac{l}{\pi}$ , поэтому

функция  $\frac{z}{2 \sin \left( \frac{\pi z}{2l} \right)}$  ограничена.

Так как  $g(z) \in L_R^1[0, l]$ , то по теореме Римана интеграл в правой части разности  $S_n^f(x_0) - S_0$  стремится к нулю при  $n \rightarrow \infty$ , т.е.  $S_n^f(x_0) - S_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ , поэтому

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^f(x_0) = S_0$$

### Признак Гельдера.

Функция  $y = f(x)$  в т.  $x_0$  удовлетворяет условию Гельдера, если

#### Определение 3.1.

1. существуют конечные значения  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$

2.  $\exists \alpha \in (0, 1]$ ,  $\exists C > 0$ ,  $\exists \delta > 0 : \forall z \in (0, \delta)$

$$|f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)| \leq Cz^\alpha$$

$$|f(x_0 + z) - f(x_0 + 0)| \leq Cz^\alpha$$

$\alpha$  — показатель Гельдера, при  $\alpha = 1$  условие выше — условие Липшица.

Введем.

Обобщенную левую производную:

$$f'_-(x_0) = \lim_{z \rightarrow -0} \frac{f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)}{-z}$$

Обобщенную правую производную:

$$f'_+(x_0) = \lim_{z \rightarrow +0} \frac{f(x_0 + z) - f(x_0 + 0)}{z}$$

**Предложение.** Если у функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  существуют конечные обобщенные производные  $f'_\pm(x_0)$ , то функция  $f$  в точке  $x_0$  удовлетворяет условиям Липшица.

#### Доказательство.

$$\exists \alpha \in (0, 1], \exists C_{1,2} > 0, \exists \delta > 0 : \forall z \in (0, \delta) \mapsto \begin{cases} \left| \frac{f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)}{-z} \right| \leq C_1 \\ \left| \frac{f(x_0 + z) - f(x_0 + 0)}{z} \right| \leq C_2 \end{cases}$$

Тогда выберем  $C = \max\{C_1, C_2\} \rightarrow$  условие Гельдера при  $\alpha = 1$ , т.е. условие Липшица.

**Следствие.** Если функция  $y = f(x)$  в т.  $x_0$  имеет производную, то она в этой точке удовлетворяет условию Липшица.

**Замечание.** В обратную сторону утверждение следствия неверно. Пример:  $y = |x|$  — в т.  $x_0 = 0$  удовлетворяет Липшицу, но не является дифференцируемой в этой точке.

**Теорема 3.2.** Пусть функция  $f \in L^1_R[-l, l]$  продолжена с периодом  $2l$  на  $\mathbb{R}$  и в точке  $x_0$  удовлетворяет условию Гельдера, тогда тригонометрический ряд Фурье функции  $f$  в точке  $x_0$  сходится к

$$\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}.$$

Если кроме того,  $f$  непрерывна в т.  $x_0$ , то тригонометрический ряд Фурье функции  $f$  в этой точке сходится к  $f(x_0)$

**Доказательство.**

Обозначим  $S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$

$$\begin{aligned} \forall z \in (0, \delta) \mapsto \frac{|f(x_0 + z) + f(x_0 - z) - 2S_0|}{z} &\leq \\ &\leq \frac{|f(x_0 + z) - f(x_0 + 0)|}{z} + \frac{|f(x_0 - z) - f(x_0 - 0)|}{z} \leq \\ &\leq \frac{Cz^\alpha + Cz^\alpha}{z} = \frac{2C}{z^{1-\alpha}}, \end{aligned}$$

Но так как  $\alpha \in (0, 1]$ , то  $1 - \alpha \in [0, 1) \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \int_0^\delta \frac{dz}{z^{1-\alpha}} < \infty \xrightarrow{\text{пр. сравнения}} \int_0^\delta \frac{|f(x_0 + z) + f(x_0 - z) - 2S_0|}{z} dz < \infty \xrightarrow{\text{пр. Дини}} \\ \Rightarrow S_n^f(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} S_0 = \frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2} \end{aligned}$$

**Следствие.** Пусть функция  $f \in L^1_R[-l, l]$  продолжена с периодом  $2l$  на  $\mathbb{R}$  и в точке  $x_0$  у нее существуют конечные  $f'_\pm(x_0)$ , тогда тригонометрический ряд Фурье функции  $f$  в т.  $x_0$  сходится к  $\frac{f(x_0 + 0) + f(x_0 - 0)}{2}$ . Если же  $f$  дифференцируема в т.  $x_0$ , то тригонометрический ряд Фурье в той т. сходится к  $f(x_0)$ .

## 4. Дифференцирование и интегрирования рядов Фурье. Порядок убывания коэффициентов Фурье.

**Определение 4.1.** Функция  $y = f(x)$  называется **кусочно непрерывной** на отрезке  $[a, b]$ , если  $\exists T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ , такое что  $f$  непрерывно на  $(x_{i-1}, x_i)$ ,  $i = \overline{1, n}$  и существует конечное  $f(a+0)$ ,  $f(x_i \pm 0)$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $f(b-0)$

Пример  $y = \begin{cases} \operatorname{sign} x, & x \in (-1, 1) \\ 0, & x = \pm 1 \end{cases}$ , продолжим с периодом 2 на  $\mathbb{R} \Rightarrow \forall [a, b]$  содержит точку  $x = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , следовательно  $y$  — кусочно непрерывная.

**Определение 4.2.** Функция  $y = f(x)$  называется **кусочно непрерывно дифференцируемой** на  $[a, b]$ , если  $\exists T = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$ , такие, что на  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = \overline{0, n}$ , функция  $f$  обладает непрерывными производными  $f'$ , может быть с изменением значения функции  $f$  в точке  $x_k$ ,  $k = \overline{1, n}$

**Определение 4.3.** Функция  $f$  называется **кусочно гладкой** на отрезке  $[a, b]$ , если она непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и кусочно непрерывно дифференцируема на нем.

**Замечание 1.**  $y = f(x)$  периодическая с периодом  $2l$  на  $\mathbb{R}$

$$f(x + 2l) = f(x) \Rightarrow f(-l) = f(l)$$

и  $f$  кусочно гладкая на  $[-l, l]$ , то  $f$  кусочно гладкая на любом  $[a, b] \subset \mathbb{R}$

**Замечание 2.** Производная  $f'$  кусочно непрерывной дифференцируемой на  $[a, b]$  функции  $y = f(x)$  будет кусочно непрерывной на  $[a, b]$  функцией.

**Замечание 3.** Тригонометрический ряд Фурье кусочно непрерывной дифференцируемой на  $[a, b]$  функции  $y = f(x)$  в каждой точке непрерывности функции  $f$  сходится к  $f(x)$ , а в точке разрыва  $x$  сходится к  $1/2 [f(x-0) + f(x+0)]$

### О почленном дифференцировании рядов Фурье.

**Теорема 4.1.** Пусть  $y = f(x)$ ,  $2l$ -периодична на  $\mathbb{R}$  и кусочно гладкая на  $[-l, l]$ , тогда тригонометрический ряд Фурье функции  $y = f(x)$  получается из тригонометрического ряда Фурье функции  $f$  путем его почленного дифференцирования.

**Доказательство.**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$f'(x) \sim \frac{\overline{a_0}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \overline{a_k} \cos \frac{k\pi x}{l} + \overline{b_k} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$\overline{a_0} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f'(x) dx = \frac{1}{l} (f(l) - f(-l)) = 0$$

$$\overline{a_k} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \left[ f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_{-l}^l + \frac{k\pi}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right] = \frac{k\pi}{l} b_k$$

$$\overline{b_k} = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \left[ f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{k\pi}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right] = -\frac{k\pi}{l} a_k$$

**Формальное дифференцирование** тригонометрического ряда Фурье функции  $f$  дает:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[ -\frac{k\pi}{l} a_k \right] \sin \frac{k\pi x}{l} + \left[ \frac{k\pi}{l} b_k \right] \cos \frac{k\pi x}{l}$$

**Следствие.** Пусть  $f$   $2l$ -периодическая на  $\mathbb{R}$  функция, имеет непрерывную производную на  $[-l, l]$  до порядка  $(m-2)$  включительно и кусочно гладкую производную порядка  $(m-1)$  на  $[-l, l]$ , тогда тригонометрический ряд Фурье функции  $f^{(m)}$  получается из тригонометрического ряда Фурье функции  $f$  путем формального  $m$ -кратного дифференцирования.

## Асимптотические оценки коэффициентов Фурье.

**Предложение 1.** Пусть функция  $y = f(x)$ ,  $2l$ -периодическая на  $\mathbb{R}$  и кусочно гладкая на  $[-l, l]$ , тогда для ее коэффициентов Фурье справедливы следующие асимптотические оценки:

$$a_n = o\left(\frac{1}{n}\right), b_n = o\left(\frac{1}{n}\right) \text{ при } n \rightarrow \infty$$

**Доказательство.**

Следует из того, что коэф. Фурье производной  $f'$  равны  $\overline{a_k} = \frac{\pi k}{l} b_k$ ,  $\overline{b_k} = \frac{\pi k}{l} a_k$ . Так как  $f'$  кусочно-непрерывна на  $[-l, l]$ , то  $f' \in L_R^1[-l, l] \Rightarrow$  по теореме Римана об осцилляции  $\overline{a_k}, \overline{b_k}$  стремятся к 0 при  $k \rightarrow \infty$

**Вывод из предложения:**

$$\overline{a_k} = \frac{\pi b_k}{l} \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0, \quad \overline{b_k} = -\frac{\pi a_k}{l} \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

**Предложение 2.** Пусть  $f$  кусочно непрерывна дифференцируема на  $[-l, l]$  и периодически с периодом  $2l$  продолжена на  $\mathbb{R}$ . Тогда для коэффициентов Фурье функции  $f$  справедливо:

$$\exists C < \infty : \forall k \in \mathbb{N} \mapsto |ka_k| \leq C \text{ \& } |kb_k| \leq C$$

$$a_k = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad b_k = O\left(\frac{1}{k}\right), \quad k \rightarrow \infty$$

**Доказательство.**

$$\exists T = \{-l = x_0 < x_1 < \dots < x_n = l\}$$

$f$  непрерывно дифференцируема на  $[x_{k-1}, x_k]$ ,  $k = \overline{1, n}$ . Тогда

$$\begin{aligned} |ka_k| &= \left| \frac{k}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right| = \left| \int_{-l}^l \underbrace{f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}}_{f(x) = u, \cos \frac{k\pi x}{l} dx = dv} dx \right| = \\ &= \frac{k}{l} \left| \frac{l}{k\pi} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_{-l}^l - \frac{l}{k\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right| = \\ &= \frac{k}{l} \left| \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right| = \\ &= \frac{k}{l} \left| \sum_{i=1}^n \left[ \frac{l}{k\pi} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_{x_{i-1}}^{x_i} - \frac{l}{k\pi} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right] \right| \leq \\ &\leq \frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n |f(x_i)| + \frac{1}{\pi} \left| \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right| \end{aligned}$$

$$\frac{2}{\pi} \sum_{i=0}^n |f(x_i)| = B, \exists A_1 > 0 \& A_2 > 0 : \begin{cases} \left| \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right| \leq A_1 \\ \left| \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx \right| \leq A_2 \end{cases}$$

Тогда пусть  $C = \max\{B + A_1, B + A_2\}$ , тогда  $|ka_k| \leq C$  и  $|kb_k| \leq C$

**Следствие.** Пусть  $y = f(x)$ ,  $2l$ -периодическая на  $\mathbb{R}$  и на  $[-l, l]$  обладает непрерывной производной до порядка  $(m - 2)$  включительно и кусочно гладкой производной порядка  $(m - 1)$ . Тогда для коэффициентов Фурье функции  $f$  справедлива оценка:

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^m}\right), b_k = o\left(\frac{1}{k^m}\right), k \rightarrow \infty$$

**Доказательство.**

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$f^{(m)}(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} C_m a_k k^m \cos \left( \frac{k\pi x}{l} + m \frac{\pi}{2} \right) + C_m b_k k^m \sin \left( \frac{k\pi x}{l} + m \frac{\pi}{2} \right)$$

$$C_m = \left( \frac{\pi}{l} \right)^m : \left. \begin{array}{l} |a_k k^m| \rightarrow 0 \\ |b_k k^m| \rightarrow 0 \end{array} \right\} k \rightarrow \infty$$

## Почленное интегрирование рядов Фурье.

**Теорема 4.2.** Пусть функция  $y = f(x)$  кусочно непрерывная на  $[-l, l]$ ,  $2l$ -периодическая продолжена на  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l}$  тогда тригонометрический ряд Фурье функции  $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt - \frac{a_0 x}{2}$  может быть получена путем формального интегрирования ряда Фурье функции  $f$ .

**Доказательство.**

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$  — кусочно гладкая на  $[-l, l] \Rightarrow \Phi(x)$  — кусочно гладкая на  $[-l, l]$ , т.к.  $\Phi(x) = F(x) - a_0 x/2$  имеет кусочно-непрерывную производную  $f(x) - a_0/2$ , причем  $\forall x$ :

$$\Phi(x + 2l) - \Phi(x) = \int_x^{x+2l} f(t) dt - a_0 l = \int_{-l}^l f(t) dt - a_0 l = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \Phi$   $2l$ -периодическая на  $\mathbb{R}$ . Тогда по первой теореме этого пункта

$$\Phi(x) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \cos \frac{k\pi x}{l} + B_k \sin \frac{k\pi x}{l}$$

$$a_k = \frac{k\pi}{l} B_k, b_k = -\frac{k\pi}{l} A_k, \text{ причем } \Phi(0) = 0 \rightarrow \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k = 0 \rightarrow \frac{A_0}{2} = \frac{l}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} \text{ q}$$



$$\frac{l}{\pi} \left[ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} + \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{b_k}{k} \cos \frac{k\pi x}{l} + \frac{a_k}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{l}{\pi} \frac{b_k}{k} \left( 1 - \cos \frac{k\pi x}{l} \right) + \frac{l}{\pi} \frac{a_k}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}$$

К такому же результату мы придем формально проинтегрировав ряд.

**Замечание.**  $f$  кусочно непрерывная на  $[-l, l]$  и  $2l$ -периодическая и продолжена на  $\mathbb{R}$ , то для ее коэффициентов Фурье справедливо:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{k} < \infty$$

То есть  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin \frac{k\pi x}{l}}{k}$  не может быть рядом Фурье никакой функции, так как расходится по интегральному признаку.

## 5. Теорема о равномерной сходимости ряда Фурье.

Тригонометрический ряд Фурье  $2l$ -периодич. на  $\mathbb{R}$  и кусочно гладкой

**Теорема 5.1.** на  $[-l, l]$  функции  $f(x)$  сходится равномерно на  $\mathbb{R}$  к  $f$

### Доказательство.

1. Так как наша функция кусочно-гладкая, значит у неё существуют конечные значения справа и слева для каждой точки непрерывности, а также в силу кусочно-непрерывной дифференцируемости конечные значения производной справа и слева от неё, значит выполнено условие Липшица, значит выполнен признак Гельдера поточечной сходимости функции непрерывной к своему значению  $\Rightarrow$  ряд Фурье сходится к  $f$ .

2. Теперь докажем равномерность. Воспользуемся неравенство Коши–Буняковского:

$$\sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n \left| \frac{l}{k\pi} \bar{b}_k \right| \leq \frac{l}{\pi} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\bar{b}_k)^2}$$

$$\sum_{k=1}^n |b_k| \leq \frac{1}{\pi} \sqrt{\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \sqrt{\sum_{k=1}^n (\bar{a}_k)^2}$$

Также  $f' \in L_R^1[-l, l] \Rightarrow \{ \text{Неравенство Бесселя} \} \sum_{i=1}^{\infty} \bar{a}_k^2$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} \bar{b}_k^2$  сходятся как и ряд  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ , а частные суммы этих рядов ограничены и  $\sum_{k=1}^n |a_k| \leq C, n = 1, 2, \dots \Rightarrow$  по признаку сходимости  $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| < \infty$  и  $\sum_{k=1}^{\infty} |b_k| < \infty$

$$\left| a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right| \leq |a_k| + |b_k| \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  по признаку Вейерштрасса ряд Фурье  $f$  сходится равномерно на  $\mathbb{R}$  к  $f$

## 6. Равномерная сходимость сумм Фейера для непрерывной функции.

### Сумма и ядро Фейера.

$f$  —  $2l$ -периодическая и непрерывная на всей  $\mathbb{R}$ , тогда сумма

**Определение**

**6.1.**

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0^f(x) + S_1^f(x) + \dots + S_n^f(x)}{n+1}$$

называется **суммой Фейера**

$$S_n^f(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x+z) D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right) dz; \quad \sigma_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x+z) F_n(z) dz$$

$$F_n(z) = \frac{D_0\left(\frac{\pi}{l}z\right) + D_1\left(\frac{\pi}{l}z\right) + \dots + D_n\left(\frac{\pi}{l}z\right)}{n+1} \text{ — ядро Фейера}$$

Свойства ядра Фейера:

**Определение**

**6.2.**

1.  $F_n$  —  $2l$ -периодическая, четная и непрерывная на  $\mathbb{R}$  функция.

$$2. \quad \frac{1}{l} \int_{-l}^l F_n(z) dz = 1, \text{ т.к. } \int_0^l D\left(\frac{\pi}{l}y\right) dy = l/2$$

$$3. \quad F_n(z) \geq 0 \forall z \in \mathbb{R} \left\{ F_n(u) = \frac{1}{2(n+1)} \left( \frac{\sin(n+1)\frac{\pi}{2l}u}{\sin \frac{\pi}{2l}u} \right)^2 \right\}$$

$$4. \quad \forall \delta \in (0, l) \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{[\delta, l]} F_n(z) = 0;$$

$$\max F_n(z) \leq \frac{1}{2(n+1) \sin \frac{\pi}{2l} \delta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Последовательность  $\{\sigma_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  сумм Фейера  $2l$ -периодической и непрерывной на  $\mathbb{R}$  функции  $f$  сходится равномерно на  $\mathbb{R}$  к функции  $f$

**Теорема 6.1.**

**Доказательство.**

1. Докажем что  $f$  — равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$ ; на  $[-2l, 2l]$  функция  $f$  равномерно непрерывная по т. Кантора, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in [-2l, 2l] : |x' - x''| < \delta \mapsto |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

Возьмем произвольные любые  $\xi, \eta : |\xi - \eta| < \delta < l, x' \in [-l, l]$ , тогда

$$\begin{aligned} \exists k : \xi = x' + 2kl, \eta = x'' + 2kl &\Rightarrow |\xi - \eta| = |x' - x''| < \delta \Rightarrow \\ &\Rightarrow |f(\xi) - f(\eta)| = |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \end{aligned}$$

Условие равномерной непрерывности:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall x \in \mathbb{R} \& \forall z : |z| < \delta \mapsto |f(x+z) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$\Rightarrow f$  — равномерно непрерывна на  $\mathbb{R}$

$$|\sigma_n(x) - f(x)| = \left| \frac{1}{l} \int_{-l}^l (f(x+z) - f(x)) F_n(z) dz \right| \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x+z) - f(x)| F_n(z) dz$$

$$\frac{1}{l} \int_{-\delta}^{\delta} |f(x+z) - f(x)| F_n(z) dz \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{l} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(z) dz$$

По свойству  $\frac{1}{l} \int_{-l}^l F_n(z) dz = 1$  и  $F_n(z) > 0 \forall z \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{l} \int_{-a}^a F_n(z) dz < 1 \forall a < l$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{l} \int_{-\delta}^{\delta} F_n(z) dz < \frac{\varepsilon}{2}$$

Введем  $M = \max_{[-l, l]} |f(x)|$ ;  $\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto \max_{[-\delta, l]} F_n(z) \leq \frac{\varepsilon}{8M}$

$$\frac{1}{l} \int_{\delta}^l |f(x+z) - f(x)| F_n(z) dz \leq \frac{1}{l} 2M \frac{\varepsilon}{8M} (l - \delta) < \frac{\varepsilon}{4}$$

2. Аналогично,  $\frac{1}{l} \int_{-l}^{-\delta} |f(x+z) - f(x)| F_n(z) dz < \frac{\varepsilon}{4}$

3. Тогда  $|\sigma_n(x) - f(x)| = \frac{1}{l} \left| \int_{-\delta}^{\delta} + \int_{\delta}^l + \int_{-l}^{-\delta} \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$ , т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) : \forall n \geq N \& \forall x \in \mathbb{R} \rightarrow |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \sigma_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{x \in \mathbb{R}} f(x)$$

## 7. Теоремы Вейерштрасса о приближении непрерывных функций тригонометрическими и алгебраическими членами.

$$T_m(x) = A_0 + \sum A_k \cos \frac{k\pi x}{l} + B_k \sin \frac{k\pi x}{l} \text{ — тригоном. многочлен}$$

**Теорема 7.1.** Теорема Вейерштрасса. Любую  $2l$ -периодическую непрерывную на  $\mathbb{R}$  функцию  $y = f(x)$  с любой степенью точности можно равномерно на  $\mathbb{R}$  приблизить тригонометрическим многочленом, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T_m : \max_{x \in [-l, l]} |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon$$

### Доказательство.

Мы продолжили  $f$  на  $\mathbb{R}$  с периодом  $2l$  и к полученной функции применим теорему Фейера. Тогда:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \forall x \mapsto |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

В качестве  $T_m(x)$  выбрали некоторую сумму Фейера  $\sigma_n(f, x)$  при  $n \geq N$ . Тогда для  $T_m(x)$  выполняется:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T_m : \max_{x \in [-l, l]} |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon$$

**Теорема 7.2.** Любую непрерывную на  $[a, b]$  функцию  $y = f(x)$  с любой степенью точностью можно *равномерно* на  $[a, b]$  приблизить многочленом, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_n(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots + \alpha_n x^n : \max |f(x) - P_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

### Доказательство.

I.  $[a, b] = [0, l]$ ,  $f$  чётно продолжим на  $[-l; 0]$  и периодически с периодом  $2l$  на  $\mathbb{R}$ , обозначим  $\tilde{f}(x) = f(x)$ ,  $x \in [0; l]$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists T_m : \max_{x \in [0, l]} |f(x) - T_m(x)| < \varepsilon/2$$

$y = \cos \frac{k\pi x}{l}$ ,  $y = \sin \frac{k\pi x}{l}$  — раскладываются в ряд Тейлора, который равномерно сходится, в частности, на  $[0, l] \Rightarrow T_m$  раскладывается в ряд Тейлора, равномерно сходящийся на  $[0, l]$

Если  $P_n(x)$  — частичная сумма ряда Тейлора  $T_m(x)$ , в силу равномерной сходимости

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n : \max |T_m(x) - P_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in [0, l]$$

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, l] |f(x) - P_n(x)| &\leq |f(x) - T_m(x)| + |T_m(x) - P_n(x)| \leq \max |f(x) - T_m(x)| + \\ &+ \max |T_m(x) - P_n(x)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

II.  $[a, b]$  — произвольный.  $x = a + \frac{t}{l}(b - a)$ ,  $t \in [0, l]$

$$F(t) = f\left(a + \frac{t}{l}(b - a)\right)$$

$F(t)$  — непрерывна на  $[a, b]$  как суперпозиция двух непрерывных функций.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists P_n : \max |F(t) - P_n(t)| < \varepsilon \quad \forall t \in [0, l]$$

$$t = \frac{x - a}{b - a}l \rightarrow P_n(t) = Q_n(x) \Rightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists Q_n : \max |f(x) - Q_n(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in [a, b]$$

А значит случай I верен при всех  $x \in [a, b]$

## 8. Минимальное свойство коэффициентов Фурье по ортогональной системе. Неравенства Бесселя.

$\mathcal{E}$  — предгильбертово пространство

$\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\} \subset \mathcal{E}$

**Определение 8.1.** Система  $\Phi$  называется **ортогональной**, если  $\forall i, j : i \neq j \mapsto (\varphi_i, \varphi_j) = 0$ .  
Если при этом  $\forall i \mapsto (\varphi_i, \varphi_i) = 1$ , то система  $\Phi$  называется **ортонормированной**.

Начальные условия:  $\mathcal{E}$  — предгильбертово пространство,  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n, \dots\}$  — счетная ортонормированная система элементов из  $\mathcal{E}$

**Определение 8.2.** Назовем **рядом Фурье** элементов  $f \in \mathcal{E}$  по системе  $\Phi$  следующий ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k \varphi_k, \quad f_k = (f, \varphi_k)$$

$f_k$  — коэффициент Фурье элемента  $f$

**Частичная сумма ряда Фурье** элемента  $f$  по системе  $\Phi$

$$S_n^f = \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k, \quad f_k = (f, \varphi_k)$$

$\|f - g\|$  — **отклонение элемента  $g$**  от элемента  $f$ .

$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$  — **норма** элемента  $f$

**Теорема 8.1.** **Основная теорема.** Из всех сумм вида  $\sum_{k=1}^n c_k \varphi_k$ , наименьшее отклонение по норме данного пространства от элемента  $f$  имеет частичная сумма ряда Фурье элемента  $f$  по  $\Phi$

**Доказательство.**

$$\|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|^2 = (f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k) = \sum_{k=1}^n c_k^2 - 2 \sum_{k=1}^n c_k (f, \varphi_k) + \|f\|^2$$

выделим полный квадрат и учтем, что  $(f, \varphi_k) = f_k$

$$\|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|^2 = \sum_{k=1}^n (c_k - f_k)^2 + \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2$$

Следовательно отклонение наименьшее, если  $c_k = f_k$

**Следствие 1.** Для любого элемента  $f \in \mathcal{E}$ , для любых чисел  $c_k$ , для любой счетной ортонормированной системы элементов  $\Phi$  и для любого фиксированного числа  $n$ , выполняется неравенство:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k\|^2$$

**Следствие 2.** Для любого элемента  $f \in \mathcal{E}$ , для любой счетной ортонормированной системы элементов  $\Phi$  и для любого фиксированного числа  $n$ , справедливо **тождество Бесселя**:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 = \|f - \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k\|^2$$

**Следствие 3.** Для любого элемента  $f \in \mathcal{E}$ , для любой счетной ортонормированной системы элементов  $\Phi$  и для любого фиксированного числа  $n$ , справедливо **неравенство Бесселя**:

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 \leq \|f\|^2$$

#### Доказательство.

Из тождества Бесселя:

$$\sum_{k=1}^n f_k^2 \leq \|f\|^2$$

$S_n = \sum_{k=1}^n f_k^2$  — монотонно возрастающая последовательность, к тому же она ограничена из неравенства выше, следовательно  $\sum_{k=1}^{\infty} f_k^2 < \infty$ .



## 9. Полнота ортогональной системы функций, ортогональный базис и равенство Парсеваля.

\* — это небольшой билет, просто много текста для понимания.)

Метрическое пространство  $\mathcal{M} = (\mathcal{L}, \rho)$  — полное, если  $\forall \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная последовательность, сходится.

$\mathcal{N} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$  — полное, если  $\forall \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$  — фундаментальная последовательность сходится.  
 $\rho(x, y) = \|x - y\|$

**Определение 9.1.** Полное линейное нормированное пространство называется банаховым. Полное предгильбертово пространство называется гильбертовым пространством.

$\mathcal{E} = (\mathcal{L}, (\cdot, \cdot))$  — предгильбертово, а  $\mathcal{L}$  — бесконечномерное.

**Определение 9.2.**  $\mathcal{L}' \subset \mathcal{L}$ ,  $\mathcal{N} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$  — банахово пространство.  $\mathcal{N}' = (\mathcal{L}', \|\cdot\|)$  называется **подпространством** пространства  $\mathcal{N}$ , если  $\mathcal{N}'$  — банахово.

**Определение.** Норма  $\|\cdot\|_2$  на линейном пространстве  $\mathcal{L}$  не слабее нормы  $\|\cdot\|_1$  на этом пространстве, если

$$\exists C > 0 : \forall x \in \mathcal{L} \mapsto \|x\|_1 \leq C \cdot \|x\|_2$$

Нормы  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  на  $\mathcal{L}$  эквивалентны, если

$$\exists C_1 > 0 \& \exists C_2 > 0 : \forall x \in \mathcal{L} \mapsto C_1 \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq C_2 \|x\|_2$$

**Определение 9.3.**  $\mathcal{L} = \mathcal{C}[a, b]$  — пространство функций непрерывных на  $[a, b]$

1.  $\|f\|_c = \max |f(x)|$ ,  $\mathcal{C}[a, b] = (\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_c)$  сходимость в  $\mathcal{C}[a, b]$  равномерная.
2.  $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx$ ,  $L_c^1[a, b] = (\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_1)$  сходимость в  $L_c^1[a, b]$  — сходится в среднем.
3.  $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx}$ ,  $L_C^2[a, b] = (\mathcal{C}[a, b], \|\cdot\|_2)$  — сходимость в среднем квадратичном.

**Предложение.** Для норм, введенных на линейном пространстве  $\mathcal{C}[a,b]$  справедливо:

1.  $\|\cdot\|_C$  не слабее норм  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$
2.  $\|\cdot\|_2$  не слабее нормы  $\|\cdot\|_1$

*Доказательство.* Пункт первый:

$$\begin{aligned}\|f\|_1 &= \int_a^b |f(x)| dx \leq \|f\|_C \int_a^b dx = (b-a) \|f\|_C \\ \|f\|_2 &= \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \leq \sqrt{\|f\|_C^2 \int_a^b dx} = \sqrt{b-a} \|f\|_C\end{aligned}$$

Пункт второй:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| dx \leq \sqrt{\int_a^b (f(x))^2 dx} \sqrt{\int_a^b dx} = \sqrt{b-a} \|f\|_2$$

□

**Пример.**  $\tilde{\mathcal{C}}[a,b] = \{f \in \mathcal{C}[a,b] : f(a) = f(b)\}$

$\tilde{\mathcal{C}}[a,b] = (\tilde{\mathcal{C}}[a,b], \|\cdot\|_C)$  — подпространство  $\mathcal{C}[a,b]$

Счетная система  $\Phi = \{\varphi_i\}_{i=1}^\infty$ , элементов нормированного пространства

**Определение**  $\mathcal{N} = (\mathcal{L}, \|\cdot\|)$  называется **полной**, если

**9.4.**

$$\forall f \in \mathcal{N} \ \& \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R} : \|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\| < \varepsilon$$

**Теорема 9.1.**

Пусть в гильбертовом пространстве  $\mathcal{E}$  задана счетная ортонормированная система  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ . Ряд Фурье элемента  $f$  из  $\mathcal{E}$  по системе  $\Phi$  сходится к  $f$  тогда и только тогда, когда  $\|f\|^2 = \sum_{k=1}^\infty f_k^2$ ,  $f_k = (f, \varphi_k)$  — равенство Парсеваля.

**Доказательство.**

Необходимость

$$\sum_{k=1}^\infty f_k \varphi_k \text{ сходится к } f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto \|f - \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k\| < \sqrt{\varepsilon}$$

Из тождества Бесселя:

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 = \|f - \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k\|^2 < \varepsilon \Leftrightarrow \sum_{k=1}^n f_k^2 = \|f\|^2$$

Достаточность. Дано равенство Парсеваля:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \mapsto \|f\|^2 - \sum_{k=1}^n f_k^2 < \varepsilon$$

применение тождества Бесселя заканчивает доказательство.

### Определение 9.5.

Счетная ортонормированная система  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^\infty$ , элементарного предгильбертового пространства  $\mathcal{E}$  называется **ортонормированным базисом**, если любой элемент  $f$  этого пространства является суммой своего ряда Фурье.

### Теорема 9.2.

Для счетной ортонормированной системы  $\Phi$  в предгильбертовом пространстве  $\mathcal{E}$  эквивалентны следующие условия:

1.  $\Phi$  — полная система в  $\mathcal{E}$
2.  $\Phi$  — ортонормированный базис пространства  $\mathcal{E}$
3.  $\forall f \in \mathcal{E} \mapsto \|f\|^2 = \sum_{k=1}^\infty f_k^2, f_k = (f, \varphi_k)$  (Равенство Парсеваля)

### Доказательство.

2)  $\Leftrightarrow$  3) следует из теоремы 9.1.

1)  $\Rightarrow$  2):  $[\Phi \text{ — полная}] \stackrel{\text{def}}{=} \left[ \forall \varepsilon > 0 \ \& \ \forall f \in \mathcal{E} \ \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : \|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\| < \varepsilon \right]$

Из теоремы 8.1:

$$\|f - \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k\| \leq \|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\| < \varepsilon$$

Используя тождество Бесселя

$$\|f - S_{n_0}^f\| = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n_0} f_k^2 \text{ — убывающая последовательность}$$

Значит  $\{f - S_n^f\}$  — убывающая  $\Rightarrow \forall n \geq n_0 \mapsto \|f - S_n^f\| \leq \varepsilon$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto \|f - S_n^f\| < \varepsilon \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^f = f \text{ (по норме)}$$

$$2) \Rightarrow 1) \left[ \Phi \text{ — ОНБ в } \mathcal{E} \right] = \left[ \underline{\forall f \in \mathcal{E} \mapsto f = \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k} \right]$$

$$\underline{\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 : \forall n \geq n_0 \mapsto \|f - \sum_{k=1}^n f_k \varphi_k\| < \varepsilon} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$  то, что подчеркнуто говорит о том, что система  $\Phi$  полна в  $\mathcal{E}$  по определению.

## 10. Полнота тригонометрической системы в пространстве функций, интегрируемых с квадратом. Сходимость ряда Фурье в среднем квадратичном, равенство Парсеваля для тригонометрической системы.

**Полнота тригонометрических систем.** Пусть имеем:

$$\Phi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{kl}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi x}{l} \right\}_{k=1}^{\infty} - \text{ортонормированная система}$$

Подмножество  $N'$  множества нормированного пространства  $N$  называется **плотным** в  $N$ , если

**10.1.**

$$\forall g \in N \ \& \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists f \in N' : \|f - g\| < \varepsilon$$

**Теорема 0**

Подмножество  $\tilde{C}[a, b]$  пространства  $L_R^2[a, b]$  плотно в  $L_R^2[a, b]$

**Теорема**

**10.1.**

Если ортонормированная система  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  полна в  $\tilde{C}[a, b]$ , то она полна в  $L_R^2[a, b]$  и  $L_C^2[a, b]$

**Доказательство.**

По теореме 0

$$\forall \varepsilon > 0 \ \& \ \forall f \in \mathcal{L}_R^2[a, b] \ \exists g \in \tilde{C}[a, b] : \|f - g\|_2 < \varepsilon/2$$

$$\text{Система } \Phi \text{ полна в } \tilde{C}[a, b] \Rightarrow \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : \|g - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\|_C < \frac{\varepsilon}{2\sqrt{b-a}}$$

$$\begin{aligned} \|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\| &= \|f - g + g - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\|_2 \leq \|f - g\|_2 + \|g - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\|_2 = \\ &= \|f - g\|_2 + \sqrt{b-a} \|g - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\|_C < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \Phi$  полна в  $L_R^2[a, b]$  и так как она состоит из непрерывных функций, то  $\Phi$  полна в  $L_C^2[a, b]$

**Теорема**

**10.2.**

Тригонометрические системы полны в  $\mathcal{L}_R^2[-l, l]$  и в  $\mathcal{L}_C^2[-l, l]$

**Доказательство.**

По теореме Вейерштрасса любую непрерывную функцию можно равномерно приблизить с любой точностью тригонометрическим многочленом. Тогда

$$\forall f \in C[a,b] \ \& \ \forall \varepsilon > 0 \exists \alpha_1, \dots, \alpha_n : \|f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k\| < \varepsilon$$

Следовательно тригонометрическая система полна в  $C$ , тогда по теореме 10.1 она полна в  $\mathcal{L}_R^2[a,b]$  и  $\mathcal{L}_C^2[a,b]$

Несколько фактов.

$$\Phi = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2l}}, \frac{1}{\sqrt{l}} \cos \frac{k\pi x}{l}, \frac{1}{\sqrt{l}} \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots \right\}_{k=1}^{\infty} \quad \alpha_k, \beta_k$$

1.  $\Phi$  ортонормированный базис в  $\mathcal{L}_R^2[-l,l]$ , т.е. тригонометрический ряд Фурье

$$\forall f \in \mathcal{L}_R^2[-l,l]$$

сходится по норме  $\|\circ\|_2$  к  $f$

2. Равенство Парсеваля

$$\alpha_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 + \beta_k^2 = \|f\|_2^2$$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 = \frac{1}{l} \|f\|_2^2$$

3. Система  $\Phi$  замкнута в  $L_R^2[-l,l]$ , т.е.  $(f, \varphi_k) = 0 \ \forall k \Rightarrow f = 0$  (в смысле определения эквивалентных функций)

## 11. Теорема Рисса-Фишера

### Теорема 11.1.

**Рисса-Фишера.** Пусть в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  задана счетная ортонормированная система элементов  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  и последовательность чисел  $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$  такова, что  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ , тогда  $\exists f \in \mathcal{H}$  :

1.  $\alpha_k = (f, \varphi_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots$  — коэффициенты Фурье по системе  $\Phi$
2.  $f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k$  ( $f$  сходится к ряду Фурье по норме)
3.  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 = \|f\|^2$

### Доказательство.

Условие 2: рассмотрим суммы  $S_n = \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k$

$$\begin{aligned} \|S_{n+p} - S_n\|^2 &= \left\| \sum_{k=1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k \right\|^2 = \\ &= \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k \varphi_k \right) = \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 \end{aligned}$$

По условию:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty \stackrel{\text{кр. Коши}}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \exists N = N(\varepsilon) : \forall n \geq N \ \& \ \forall p \in \mathbb{N} \mapsto \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k^2 < \varepsilon^2$$

$$\|S_{n+p} - S_n\| < \varepsilon \Leftrightarrow \{S_n\} \text{ — фундаментальная}$$

$$\Rightarrow \exists f \in \mathcal{H} : f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k \text{ (по норме)}$$

Условие 1: Рассмотрим  $(f, \varphi_k)$

$$(f, \varphi_k) = (f - S_n, \varphi_k) + (S_n, \varphi_k)$$

Из неравенства Коши–Буняковского:

$$(f - S_n, \varphi_k) \leq \|f - S_n\| \|\varphi_k\| = \|f - S_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(S_n, \varphi_k) = \left( \sum_{j=1}^n \alpha_j \varphi_j, \varphi_k \right) = \alpha_k, \begin{cases} j \neq k \rightarrow (\varphi_j, \varphi_k) = 0 \\ j = k \rightarrow (\varphi_j, \varphi_k) = 1 \end{cases} \Rightarrow (f, \varphi_k) = \alpha_k$$

Условие 3 следует из т. 9.2.

## 12. Полнота и замкнутость ортогональной системы, их СВЯЗЬ

**Определение 12.1.** Счетная ортонормированная система элементов  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  предгильбертова пространства  $\mathcal{E}$  называется **замкнутой**, если из равенств  $(f, \varphi_k) = 0, k = 1, 2, \dots$  следует, что  $f = 0$

**Теорема 12.1.**

1. Если в предгильбертовом пространстве  $\mathcal{E}$  ортонормированная система элементов  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  полна, то она замкнута
2. Если в гильбертовом пространстве  $\mathcal{H}$  ортонормированная система элементов  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  замкнута, то она полна.

**Доказательство.**

Докажем утверждение 1.  $\Phi$  — полна  $\stackrel{T.9.2}{\Rightarrow} \forall f \in \mathcal{E} \mapsto \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} f_k^2$ ,

$$f_k = (f, \varphi_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \|f\| = 0 \Rightarrow f = 0 \Rightarrow \Phi \text{ замкнута}$$

Докажем утверждение 2.  $\Phi$  — замкнута, но не является полной

$$\exists g \in \mathcal{H} : \|g\|^2 > \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2, g_k = (g, \varphi_k), k = 1, 2, \dots \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2 < \infty$$

т.к. это ряд с положительными членами, и все его част. суммы сходятся. Тогда по т. Рисса–Фишера

$$\exists f \in \mathcal{H} : f = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \varphi_k \text{ и } \|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} g_k^2, f \neq g,$$

из замкнутости следует

$$(f - g, \varphi_k) = 0, \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow f - g = 0 \Rightarrow f = g \text{ — противоречие}$$

**Теорема 12.2.** Произвольная числовая последовательность  $\{\alpha_k\}$  является последовательностью коэффициентов Фурье, некоторого элемента  $f$  гильбертова пространства  $\mathcal{H}$  по ортонормированной системе элементов  $\Phi = \{\varphi_k\}_{k=1}^{\infty}$  в том и только том случае, когда  $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$ . При этом, если система  $\Phi$  полна, то такой элемент  $f$  из  $\mathcal{H}$  нахо-

дится единственным образом. Если система  $\Phi$  не является полной, то такой элемент  $f$  находится с точностью до элемента  $g \neq 0$ , который имеет нулевой ряд Фурье.

*Доказательство.* Достаточность следует из т. Рисса-Фишера

*Необходимость.*

$$\exists f \in \mathcal{H} : \alpha_k = (f, \varphi_k), k = 1, 2, \dots \xRightarrow{\text{неравенство Бесселя}} \|f\|^2 \geq \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k^2 < \infty$$

□



### 13. Полнота пространства $C[a,b]$ , неполнота пространств непрерывных на отрезке функций с интегральными нормами.

Пространство  $C[a,b]$  полно, а пространства  $\mathcal{L}_C^1[a,b]$  и  $\mathcal{L}_C^2[a,b]$  неполны.

**Теорема**

**13.1.**

**Доказательство.**

Если последовательность  $f_n$  непрерывных на  $[a,b]$  функций фундаментальная в норме  $\|\cdot\|_C$ , то

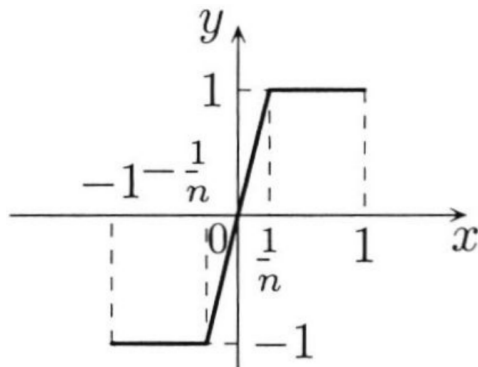
$$\forall \varepsilon > 0 \rightarrow \exists n_0 : \forall n, m \geq n_0, \forall x \in [a,b] \mapsto |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

т.е. выполнен критерий Коши равномерной сходимости, и  $f_n(x) \Rightarrow f(x)$  на  $[a,b]$ . Предельная функция для равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций также непрерывна, поэтому  $f \in C[a,b]$ . Итак,  $f_n \rightarrow f$  в  $C[a,b]$ , и пространство  $C[a,b]$  полно.

Докажем неполноту  $\mathcal{L}_C^2[-1,1]$  (в общем случае неполнота  $\mathcal{L}_C^2$  и  $\mathcal{L}_C^1$  доказывается аналогично). Рассмотрим последовательность непрерывных на  $[-1,1]$  функций

$$f_n(x) = \begin{cases} nx, & \text{если } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 1, & \text{если } x \in [-1; -\frac{1}{n}] \cup [\frac{1}{n}; 1] \end{cases}$$

График такой функции:



Легко видеть, что

$$\forall x \in [0,1] \rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \text{sign } x = f(x)$$

Докажем, что имеет место сходимость также в среднем квадратичном ( $\text{sign } x \in \mathcal{L}_R^2[-1,1]$ ). В самом деле,

$$\begin{aligned} \|f_n - f\|_2^2 &= \int_{-1}^1 (f_n(x) - f(x))^2 dx = \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{n}} (1 - nx)^2 dx < 2 \int_0^{\frac{1}{n}} 1 dx = \frac{2}{n} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

то есть  $\|f_n - f\|_2 \rightarrow 0$

Поэтому последовательность  $f_n$  фундаментальна в  $\mathcal{L}_R^2[-1,1]$ , значит, и в  $\mathcal{L}_C^2[-1,1]$ . Но она не может сходиться в  $\mathcal{L}_C^2[-1,1]$ , так как не существует непрерывной на  $[-1,1]$  функции  $g$  такой, что  $\|f_n - g\|_2 \rightarrow 0$ . В самом деле, если  $f_n \rightarrow g$  в  $\mathcal{L}_C^2[-1,1]$ , то  $f_n \rightarrow g$  в  $\mathcal{L}_R^2[-1,1]$ . Так как последовательность  $f_n$  имеет в  $\mathcal{L}_R^2[-1,1]$  два предела  $f$  и  $g$ , то  $f = g$  в  $\mathcal{L}_R^2[-1,1]$ , т.е.  $f \sim g$  и  $\int_{-1}^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 0$ . Отсюда следует, что  $\int_0^1 (f(x) - g(x))^2 dx = 0$ . Так как  $f(x) = 1$  на  $[0,1]$ , то  $\int_0^1 (1 - g(x))^2 dx = 0$ . Так как функция  $g$  непрерывна на  $[-1,1]$ , то  $g(x) \equiv 1$  на  $[0,1]$ . Аналогично  $g(x) \equiv -1$  на  $[-1,0]$ . Полученное противоречие показывает, что фундаментальная последовательность  $f_n$  в  $\mathcal{L}_C^2[-1,1]$  не имеет предела в этом пространстве, т.е. пространство  $\mathcal{L}_C^2[-1,1]$  неполно.

## 14. Непрерывность, интегрируемость и дифференцируемость собственных интегралов, зависящих от параметра.

**Начальные условия.**  $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{E}^2 : a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} = [a, b] \times [c, d]$

$w = f(x, y)$ , при каждом фиксированном  $y \in [c, d]$ , функция  $w = f(x, y)$  интегрируема на  $[a, b]$

$\forall y \in [c, d] \quad J = J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$  — интеграл зависящий от параметра.

**Теорема 14.1.** Если  $w = f(x, y)$  непрерывна на  $\Pi$ , то функция  $J = J(y)$  непрерывна на  $[c, d]$

**Доказательство.**

$\Pi$  — компакт,  $w = f(x, y)$  непрерывна на  $\Pi$ , следовательно можем воспользоваться Т. Кантора:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall (x, y) \in \Pi : y + \Delta y \in [c, d] \& |\Delta y| < \delta \mapsto |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b - a}$$

Рассмотрим приращение функции  $\mathcal{J}$ ,  $\forall y \in [c, d]$ :

$$\begin{aligned} |\Delta \mathcal{J}(y, \Delta y)| &= |\mathcal{J}(y + \Delta y) - \mathcal{J}(y)| = \left| \int_a^b [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, y + \Delta y) - f(x, y)| dx < \frac{\varepsilon}{b - a} \int_a^b dx = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathcal{J}$  непрерывна на  $[c, d]$

**Теорема 14.2.** Если  $w = f(x, y)$  непрерывна на  $\Pi$ , то  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$  непрерывна на  $[c, d]$  и  $\forall y_0 \in [c, d]$  выполняется

$$\int_c^{y_0} \mathcal{J}(y) dy = \int_c^{y_0} \left[ \int_a^b f(x, y) dx \right] dy = \int_a^b \left[ \int_c^{y_0} f(x, y) dy \right] dx$$

**Доказательство.**

Из т. 14.1 следует, что  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_y$  интегрируема на  $[c, d]$ . По теореме о сведении кратно-го интеграла к повторному: каждый из повторных интегралов существует и равен двойному интегралу:

$$\iint_{\Pi_0} f(x, y) dx dy, \text{ где } \Pi_0 = [a, b] \times [c, d]$$

**Теорема 14.3.**

Если функция  $w = f(x, y)$  и  $w = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  непрерывна на  $\Pi$ , то  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$  дифференцируема на  $[c, d]$  и

$$\mathcal{J}'(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$$

**Доказательство.**

По условию  $w = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  непрерывна на  $\Pi$  введем функцию  $g(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx$  — непрерывна на  $[c, d]$  по т. 14.1 и интегрируема на  $[c, d]$  по теореме 14.2, следовательно

$$\forall y \in [c, d] \mapsto \int_y^c g(y) dy = \int_a^b \left[ \int_c^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) dx \right] dy = \int_a^b [f(x, y) - f(x, c)] dx = \mathcal{J}(y) - \mathcal{J}(c)$$

$$\mathcal{J}(y) = \int_c^y g(y) dy + \mathcal{J}(c)$$

Из непрерывности и интегрируемости  $g(y)$ , следует дифференцируемость  $\mathcal{J}$  на  $[c, d]$ , значит,

$$\mathcal{J}'(y) = g(y) = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y} dx$$

## 15. Равномерная сходимость несобственных интегралов, зависящих от параметра. Критерий Коши, признаки Вейерштрасса и Дирихле.

**Несобственный интеграл первого рода. Начальные условия.**

$\Pi = [a, +\infty) \times E$ , где  $E \in \mathbb{R}^1$

$w = f(x, y)$  при каждом фиксированном  $y \in E$  интегрируема в несобственном смысле на  $[a, +\infty)$

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_y = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, y \in E$$

**Определение 15.1.** Несобственный интеграл  $\mathcal{J} = \mathcal{J}_y$  сходится равномерно по параметру  $y$  на множестве  $E$ , если

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) \geq a : \forall R \geq A \& \forall y \in E \mapsto \left| \int_R^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

**Отрицание:**

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall A \geq a \exists R_A \geq A \& \exists y_A \in E \mapsto \left| \int_{R_A}^{+\infty} f(x, y_A) dx \right| \geq \varepsilon_0$$

**Несобственный интеграл второго рода. Начальные условия.**  $\Pi_b = [a, b) \times E, E \subset \mathbb{R}$

Если  $\forall y \in E$  фиксированная функция  $w = f(x, y)$  интегрируема в несобственном смысле на  $[a, b)$ , то на  $E$  определена функция:

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

**Определение 15.2.** Несобственный интеграл  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $E$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall \eta \in (0, \delta) \& \forall y \in E \mapsto \left| \int_{b-\eta}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

**Теорема 15.1.**

**Критерий Коши.** Для равномерной сходимости по параметру  $y$  на множестве  $E$  несобственного интеграла  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$  необходимо и достаточно, чтобы выполнялось следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > 0 \geq a : \forall R', R'' : R'' > R' \geq A \& \forall y \in E \mapsto \left| \int_{R'}^{R''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

**Доказательство.**

*Необходимость.*

Непосредственно следует из определения.

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) \geq a : \forall R' \geq A \& \forall y \in E \mapsto \left| \int_{R'}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \left| \int_{R''}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\text{Так как } R'' > R' \Rightarrow \left| \int_{R'}^{R''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

*Достаточность.*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) > 0 \geq a : \forall R', R'' : R'' > R' \geq A \& \forall y \in E \mapsto \left| \int_{R'}^{R''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

Тогда по критерию Коши сходимости несобственных интегралов при всех  $y \in E$  интеграл сходится, следовательно устремляя  $R^n \rightarrow \infty$  получаем равномерную сходимость.

**Замечание****Отрицание условия Коши:**

$$\exists \varepsilon_0 > 0 : \forall A \geq a \exists R'_A, R''_A : R''_A > R'_A \geq A \& \exists y_A \in E : \left| \int_{R'_A}^{R''_A} f(x, y_A) dx \right| \geq \varepsilon_0$$

**Теорема 15.2.**

**Признак Вейерштрасса.** Функция  $w = f(x, y)$  определена на  $\Pi = [a, +\infty) \times E$ , при каждом фиксированном  $y \in E$  функция  $f$  интегрируема на  $[a, R]$ ,  $\forall R > a$  и на  $\Pi$  выполнено неравенство  $|f(x, y)| \leq g(x)$ . Если  $\int_a^{+\infty} g(x) dx < \infty$ , то несобственный интеграл  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $E$

**Доказательство.**

Из критерия Коши:

$$\int_a^{+\infty} g(x)dx < \infty \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists A = A(\varepsilon) : \forall R', R'' : R' > R'' \geq A \mapsto \int_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon$$

Тогда  $\forall y \in E$  выполняется

$$\left| \int_{R'}^{R''} f(x,y)dx \right| \leq \int_{R'}^{R''} |f(x,y)| dx \leq \int_{R'}^{R''} g(x)dx < \varepsilon$$

Следовательно  $\mathcal{J} = \mathcal{J}(y)$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $E$

Следствие.

Если функция  $w = \varphi(x,y)$  ограничена на  $\Pi = [a, +\infty) \times E$  и

$\forall y \in E \varphi(x,y)$  интегрируема на  $[a,R] \forall R \geq a$ , а  $\int_a^{+\infty} |h(x)|dx < \infty$ , то

сходится равномерно по параметру  $y$  на  $E$  интеграл  $\int_a^b \varphi(x,y)h(x)dx$

**Доказательство.**

$$g(x) = M|h(x)|, M = \sup_{\Pi} |\varphi(x,y)| \Rightarrow \text{признак Вейрештрасса.}$$

**Теорема  
15.3.**

**Признак Дирихле.** Пусть  $w = f(x,y)$  непрерывна в  $\Pi_{\infty}$  и  $\forall x \in$

$[c,d] \mathcal{J}(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)dx$  сходится и выполнены следующие условия:

$$1. \exists M > 0 : \forall R > a \ \& \ \forall y \in [c,d] \left| \int_R^{\infty} f(x,y)dx \right| \leq M$$

2.  $g = g(x)$  непрерывно дифференцируема, монотонна и

$$g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +0} 0,$$

Тогда  $\int_a^b f(x,y)g(x)dx$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $[c,d]$

**Доказательство.**

Проинтегрируем по частям:  $\forall R > a \ \& \ \forall y \in [c,d] \mapsto$

$$\mapsto \int_R^{+\infty} f(x,y)g(x)dx = F(x,y)g(x) \Big|_R^{+\infty} - \int_R^{+\infty} F(x,y)g'(x)dx$$

Так как  $\forall y \in [c, d] \mapsto \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x, y)g(x) = 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_R^{+\infty} f(x, y)g(x)dx = -F(R, y)g(R) - \int_R^{+\infty} F(x, y)g'(x)dx;$$

По условию  $g'(x) \leq 0$  &  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \Rightarrow g(R) \geq 0$  и опять же по условию

$$\left| \int_R^{+\infty} f(x, y)dx \right| \leq M \Rightarrow$$

$$\left| \int_R^{+\infty} f(x, y)g(x)dx \right| \leq Mg(R) - M \int_R^{+\infty} g'(x)dx = 2Mg(R) = 2M|g(R)|$$

**Теорема  
15.4.**

**Признак Дини.** Пусть функция  $w = f(x, y)$  непрерывна на  $\Pi_\infty$ , неотрицательна на нем и  $\forall y \in [c, d]$  интеграл  $\mathcal{J}(y)$  сходится и функция  $\mathcal{J}(y)$  непрерывна на  $[c, d]$ , тогда  $\mathcal{J}(y)$  сходится равномерно по параметру  $y$  на  $[c, d]$ .