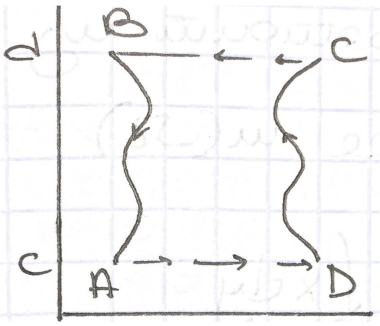
Формула Грина.

1. Вывод формулы.

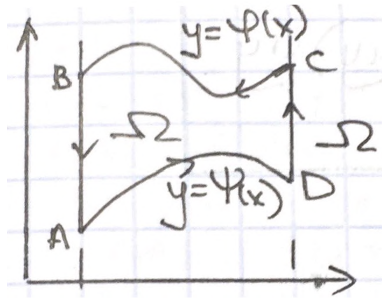


I случай. $\Omega \subset \mathscr{E}$ элементарная область относительно Oy,
$y = \varphi(x), y = \psi(x), \psi(x) \leqslant \varphi(x) \forall x \in [a,b]$
$\omega = P(x,y), \omega = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$
ψ, φ — непрерывны на $[a,b]$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi}^{\varphi} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy = \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx - \int\limits_a^b P(x,\psi(x))dx = \int\limits_{BC} P(x,y)dx - \int\limits_{AB} P(x,y)dx = -\int\limits_{CB} P(x,y)dx - \int\limits_{AD} P(x,y)dx = -\oint\limits_{ADCBA} P(x,y)dx = -\oint\limits_{d\Omega} P(x,y)dx$$

$$\int\limits_{BA} P(x,y)dx = \int\limits_{DC} P(x,y)dx = 0 \Rightarrow \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = -\oint\limits_{d\Omega} P(x,y)dx$$

II случай. $\Omega \subset \mathscr{E}$ элементарная область относительно Ox,
$x = \varphi(y), x = \psi(y), \psi(y) \leqslant \varphi(y) \forall y \in [c,d]$
$\omega = Q(x,y), \omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$
ψ, φ — непрерывны на $[c,d]$



$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dx = \int\limits_c^d Q(\varphi(y),y)dy - \int\limits_c^d Q(\psi(y),y)dy = \int\limits_{DC} Q(x,y)dy + \int\limits_{BA} Q(x,y)dy = \oint\limits_{ADCBA} Q(x,y)dy = \oint\limits_{d\Omega} Q(x,y)dy$$

Выше мы воспользовались тем, что $\int\limits_{AD} Q(x,y)dy = \int\limits_{CB} Q(x,y)dy = 0$

Теорема 1. Пусть область Ω представляет собой объединение конечного числа измеримых областей элементарных относительно Oy. $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \overline{\Omega'_i}, \overline{\Omega''_i}$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,k}$.
Функции $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, тогда справедлива формула Грина:

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Теорема 1'. Если граница $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ состоит из конечного числа кусочно гладких контуров и эти функции непрерывны, то имеет место формула Грина:

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2. Некоторые приложения формулы Грина.

A. Вычисление плоских измеримых областей.

Предложение. Если граница $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ состоит из конечного числа кусочно гладких контуров, то ее $m(\Omega)$ определяется из формулы:

$$m(\Omega) = 1/2 \int\limits_{\partial\Omega} [xdy - ydx]$$

Доказательство. По формуле Грина $\int\limits_{\partial\Omega} [xdy - ydx] = 2 \iint\limits_{\Omega} dxdy = 2m(\Omega)$

B. Условия, при которых дифференциальное выражение(дифф. форма) $Pdx + Qdy$ является дифференциалом некоторой функции $f = f(x,y)$

Теорема 2. Пусть область $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ — произвольная область и функции P и Q непрерывны на $\overline{\Omega}$, тогда следующие условия эквивалентны:

1. $\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, где Γ — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая, причем $\Gamma \subset \Omega$
2. $z' = (x',y'), z'' = (x'', y'')$ — т. области Ω, $\Gamma \subset \Omega$ – кусочно гладкая кривая, соединяющая точки z' и z'', то $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ не зависит от кривой Γ, а только от т. z' и z''.
3. Существует функция $w = f(x,y)$ такая, что $df = Pdx + Qdy$, при этом если $z', z'' \in \Omega$ и $\Gamma \subset \Omega$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая точки z' и z'', то

$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = f(z'') - f(z') \qquad (1)$$

Схема доказательства: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $z', z'' \in \Omega, \Gamma', \Gamma''$ — кусочно гладкие кривые соединяющие точки z' и z''
$\Gamma = \Gamma' \cup (\Gamma'')^-$ — замкнутуая кусочно гладкая кривая
$0 \overset{1}{=} \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy - \int\limits_{\Gamma''} Pdx + Qdy \Rightarrow \int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma''} Pdx + Qdy$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ $z^0 = (x_0,y_0) \in \Omega$; $\Gamma_z \subset \Omega$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая т. z_0 и $z = (x,y)$

$$f(z) = f(x,y) = \int\limits_{\Gamma_z} Pdx + Qdy.$$

$z=(x,y), z'=(x+\Delta x,y), z'\in\Omega$ и $[z,z']\subset\Omega$

$$\Delta f(z,\Delta x)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=\int\limits_{\Gamma\{z,z'\}}Pdx+Qdy=\int\limits_{x}^{x+\Delta x}P(t,y)dt=$$
$$=P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x, 0<\theta<1$$

$\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x,y)\Rightarrow\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=P(x,y)$ аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$
$\Gamma=\{(x,y), x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$, $z'=(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$, $z''=(\varphi(\beta),\psi(\beta))$
$\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)]dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right]dt=$
$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{d}{dt}[f(\phi(t),\psi(t))]dt=f(\varphi(\beta),\psi(\beta))-f(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=f(z'')-f(z')$

$\boxed{3\Rightarrow 1}$ $\Gamma\subset\Omega$ — кусочно гладкая замкнутая кривая, т.е. z' и $z''\Rightarrow(1)\Rightarrow\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=0$

Теорема 3. Если в условии теоремы 2 $\Omega\subset\mathscr{E}^2$ — односвязная область и функция $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, то по условиям 1–3 теорема 2 эквивалентна следующему условию:
4. $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ \forall(x,y)\subset\Omega$

Доказательство. $3\Rightarrow 4$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$
$4\Rightarrow 1$ $\Gamma\subset\Omega$ простая кусочно гладкая замкнутая кривая $\Gamma=\partial\Omega^*,\Omega^*\subset\Omega$.
$\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=\iint\limits_{\Omega^*}\left[\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right]dxdy=0$
Легко доказать, если Γ имеет конечное число точек самопересечения. Для произвольной кусочно гладкой замкнутой кривой все остальное справедливо.