Пример. $w = P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $w = Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\mathbb{E}^2/\{(0,0)\}$ — не является односвязной областью

$$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y); \mathit{\Gamma} = \{(x,y):\ x = \cos t, y = \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$$
$$\oint\limits_{\mathit{\Gamma}} Pdx + Qdy = \oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \frac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$$

3. Замена переменных в кратном интеграле.

3.1. Преобразование плоских областей

$\Omega^* \subset \mathbb{E}^2_{(uv)}$, $\Omega \subset \mathbb{E}^2_{(x,y)}$;

$$F : \overline{\Omega^*} \to \overline{\Omega};\ F : x = f^1(u,v),\ y = f^2(y,v) \tag{2}$$

1. F — взаимно однородное отображение
2. F — дважды непрерывна дифференцируема
3. $\mathcal{J}_F = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ в $\overline{\Omega^*}$

$G = F^{-1};\ G : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega^*} \quad G : u = g^1(x,y),\ V = g^2(x,y)$

Свойство А. При отображении F внутренние точки множества $\overline{\Omega^*}$ переходят во внутренние точки $\overline{\Omega}$.

Свойство Б. При отображении F гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

Доказательство. Свойства А: $w_0 = (u_0,v_0) \in \Omega^* \to z_0 = (x_0,y_0) \in ?$
Из (2) определены u и v как функции переменных x и y в некоторой окрестности т. z_0, $z_0 \in \Omega$ □

Доказательство. Свойства Б: $\mathit{\Gamma}^* = \{(u,v) : u = \varphi(t), v = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, $\mathit{\Gamma}^* \subset \Omega^*$, $\mathit{\Gamma}^*$ — гладкая кривая, φ, ψ — непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$ функции и $\forall\ t \in [\alpha, \beta] \to$ $\to [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$
$\mathit{\Gamma} = \{(x,y) : x = f_1(\varphi(t), \psi(t)),\ y = f^2(\varphi(t), \psi(t)), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, $\mathit{\Gamma} \subset \Omega$
$x'(t) = \dfrac{\partial f^1}{\partial u}\varphi'(t) + \dfrac{\partial f^1}{\partial v}\psi'(t); \quad y'(t) = \dfrac{\partial f^2}{\partial u}\phi'(t) + \dfrac{\partial f^2}{\partial v}\psi'(t)$. Учтем что $\mathcal{J} \neq 0$, предположим что $\exists t_0 :\ x'(t_0) = y'(t_0 = 0$ из неравенства якобиана нулю следует $\varphi'(t) = \psi'(t_0) = 0$ — противоречие

$$\begin{cases} x &= f^1(u_0,v),\ y = f^2(u_0,v),\ v \in \mathbb{R} \\ u^0 &= g^1(x,y) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= f^1(u,v_0),\ y = f^2(u,v_0),\ u \in \mathbb{R} \\ v^0 &= g^2(x,y) \end{cases}$$

Кривые каждого из семейств не пересекаются в силу взаимо однозначности F, но через каждую точку проходит 2 кривые по одной из каждого семейства. □

Пример. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,
(ρ_0, φ_0) $(\rho_0, \varphi_0 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
$\prod = \{(\rho, \varphi) : 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi\}$; $F : \prod \longleftrightarrow K/K_1$,
$K = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}$, $K_1 = \{(x,y) : y = 0, 0 \leqslant x < R\}$
$m(K_1) = 0$. $\mathcal{J}_F = \rho > 0$ в $\prod$

Пример 2. $F : x = \rho\cos\varphi\cos\psi$, $y = \rho\sin\varphi\sin\psi$
$\prod = \{(\rho, \varphi, \psi) : 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi, -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$
K/K_1, $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$
$K_1 = \{(x,y,z) : 0 \leqslant x^2 + z^2 < R^2, y = 0)\}$, $m(K_1) = 0$; $\mathcal{J}_F = \rho^2\cos\psi > 0$ в $\prod$

Пример 3. $F :$ $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$
$\prod = \{(\rho, \varphi, z)\ 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < H\}$
$K\backslash K_1 : K = \{(x,y,z) : x^2 + y2 < R, 0 < z < H\}$

$K_1 = \{(x,y,z) :$ $o < x < R$, $y = 0, 0 < z < H\}$, $m(K_1) = 0$; $\mathcal{J} = \rho > 0$ в $\prod$

3.2. Выражение площади в криволинейных координатах.

$\partial\Omega^* = \{(u,v) :\ u = \varphi(t), v = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$
$\partial\Omega = \{(x,y) :\ x = f^1(\varphi(t),\psi(t)), y = f^2(\varphi(t),\psi(t)), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$
α и β выбраны таким образом, что $\partial\Omega$ обходится в положительном направлении.

$$m(\Omega) = \int\limits_{\partial\Omega} xdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f^1(\varphi(t),\psi(t)) \left[\frac{\partial f^2}{\partial u}\varphi'(t) + \frac{\partial f^2}{\partial v}\psi'(t)\right] dt = \pm \int\limits_{\partial\Omega^*} f^1\frac{\partial f^2}{\partial u}du + f^1\frac{\partial f^2}{\partial v}dv$$

$$P(u,v) = f^1\frac{\partial f^2}{\partial u},\ Q(u,v) = f^1\frac{\partial f^2}{\partial v}$$

$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial f^1}{\partial v}\frac{\partial f^2}{\partial u} + f^1\frac{\partial^2 f^2}{\partial v\partial u},\ \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial f^1}{\partial u}\frac{\partial f^2}{\partial v} + f^1\frac{\partial^2 f^2}{\partial u\partial v}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f^2}{\partial v} - \frac{\partial f^1}{\partial v}\frac{\partial f^2}{\partial u} = \mathcal{J}_F(u,v)$$

$$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega^*} |(J)_F(u,v)|\, dudv$$

Предложение. *Если $\mathcal{J}_F(u,v) > 0$, то положительному обходу $\partial\Omega^*$ соответствует положительному обходу $\partial\Omega$. Если $\mathcal{J}_F(u,v) < 0$, то положительный обход $\partial\Omega^*$ соответствует отрицательный обход $\partial\Omega$*

3.3. Геометрический смысл модуля якобиана.

$[\alpha, \beta] \subset [\alpha_2, \beta_2] \subset \ldots \subset [\alpha_k,\beta_k] \subset \ldots$; $\delta_k = \beta_k - \alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$

т. Кантора $\exists! x_0 : x_0 \in [\alpha_k, \beta_k] \forall k$

$y = f(x)$ — строго монотонна на $[\alpha, \beta]$, непрерывна на $[\alpha, \beta]$ и дифференцируема на (α, β), тогда:
$\forall k \exists x_k \in (\alpha_k, \beta_k) : f(\beta_k) - f(\alpha_k) = f'(x_k) \cdot \delta_k;$ $B_k = f(\beta_k), A_k = f(\alpha_k)$, Δk для отрезка $[A_k, B_k]$ или $[B_k, A_k]$
$|f'(x_k)| = \frac{\Delta k}{\delta k}$, $k \to \infty$, $x_k \to x_0$; $|f'(x_0)| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\Delta K}{\delta K}$
$\overline{Q_k^*} \subset \Omega^*$; $\overline{Q_1^*} \subset \overline{Q_2^*} \subset \ldots \subset \overline{Q_k^*} \subset \ldots$ причем $m(\overline{Q_k^*}) \to 0 (k \to \infty) \Rightarrow \exists$ единственная точка $\omega_0 = (u_0, v_0) : \omega_0 \in \overline{Q_k^*}\ \forall k$
$\exists \omega_k \in \overline{\Omega_k^*} : m(\overline{Q_k^*}) = |\mathcal{J}_F(\omega_k)|\, m(\overline{Q_k^*})$, $\overline{Q_k^*} = F(\overline{Q_k^*})$, $\omega_k \to \omega_0$ при $k \to \infty$ значит:
$|\mathcal{J}(\omega_0)| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{m(\overline{\Omega})}{m(\overline{\Omega_k^*})}$ — коэффициент растяжения точки ω_0 плоскости переменных u,v при заданном отображении F в x,y.