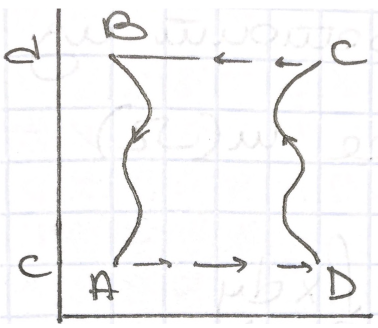
1. Формула Грина.

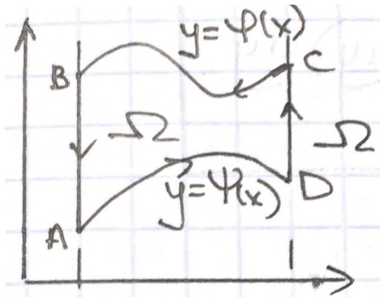
1.1. Вывод формулы.



I случай. $\Omega \subset \mathscr{E}$ элементарная область относительно Oy,
$y=\varphi(x), y=\psi(x), \psi(x) \leqslant \varphi(x)\, \forall x \in [a,b]$
$\omega = P(x,y), \omega = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$
ψ, φ — непрерывны на $[a,b]$
$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi}^{\varphi} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy = \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx -$
$-\int\limits_a^b P(x,\psi(x))dx = \int\limits_{BC} P(x,y)dx - \int\limits_{AB} P(x,y)dx = -\int\limits_{CB} P(x,y)dx -$
$-\int\limits_{AD} P(x,y)dx = -\oint\limits_{ADCBA} P(x,y)dx = -\oint\limits_{d\Omega} P(x,y)dx$

$$\int\limits_{BA} P(x,y)dx = \int\limits_{DC} P(x,y)dx = 0 \Rightarrow \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = -\oint\limits_{d\Omega} P(x,y)dx$$

II случай. $\Omega \subset \mathscr{E}$ элементарная область относительно Ox,
$x=\varphi(y), x=\psi(y), \psi(y) \leqslant \varphi(y) \forall y \in [c,d]$
$\omega = Q(x,y), \omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$
ψ, φ — непрерывны на $[c,d]$
$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dx = \int\limits_c^d Q(\varphi(y),y)dy -$
$-\int\limits_c^d Q(\psi(y),y)dy = \int\limits_{DC} Q(x,y)dy + \int\limits_{BA} Q(x,y)dy =$
$= \oint\limits_{ADCBA} Q(x,y)dy = \oint\limits_{d\Omega} Q(x,y)dy$



Выше мы воспользовались тем, что $\int\limits_{AD} Q(x,y)dy = \int\limits_{CB} Q(x,y)dy = 0$

Теорема 1. *Пусть область* Ω *представляет собой объединение конечного числа измеримых областей элементарных относительно* Oy. $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \overline{\Omega'_i}, \overline{\Omega''_i}$, $i=\overline{1,k}$, $j=\overline{1,k}$.
Функции $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны в* $\overline{\Omega}$, *тогда справедлива формула Грина:*

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Теорема (1'). *Если граница* $\partial\Omega$ *ограниченной области* $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ *состоит из конечного числа кусочно гладких контуров и эти функции непрерывны, то имеет место формула Грина:*

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

2. Некоторые приложения формулы Грина.

А. Вычисление плоских измеримых областей.

Предложение. *Если граница $\partial\Omega$ ограниченной области $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ состоит из конечного числа кусочно гладких контуров, то ее $m(\Omega)$ определяется из формулы:*

$$m(\Omega) = 1/2 \int\limits_{\partial\Omega} [xdy - ydx]$$

Доказательство. По формуле Грина $\int\limits_{\partial\Omega} [xdy - ydx] = 2 \iint\limits_{\Omega} dxdy = 2m(\Omega)$ □

B. Условия, при которых дифференциальное выражение(дифф. форма) $Pdx + Qdy$ является дифференциалом некоторой функции $f = = f(x,y)$

Теорема 2. *Пусть область $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ — произвольная область и функции P и Q непрерывны на $\overline{\Omega}$, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$, *где Γ — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая, причем $\Gamma \subset \Omega$*
2. $z' = (x',y'), z'' = (x'',y'')$ — *т. области Ω, $\Gamma \subset \Omega$ - кусочно гладкая кривая, соединяющая точки z' и z'', то $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ не зависит от кривой Γ, а только от т. z' и z''.*
3. *Существует функция $w = f(x,y)$ такая, что $df = Pdx + Qdy$, при этом если $z', z'' \in \Omega$ и $\Gamma \subset \Omega$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая точки z' и z'', то*
$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = f(z'') - f(z') \tag{1}$$

Доказательство. Схема доказательства: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $z', z'' \in \Omega, \Gamma', \Gamma''$ — кусочно гладкие кривые соединяющие точки z' и z''
$\Gamma = \Gamma' \cup (\Gamma'')^-$ — замкнутуая кусочно гладкая кривая
$0 \overset{1}{=} \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy - \int\limits_{\Gamma''} Pdx + Qdy \Rightarrow \int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma''} Pdx + Qdy$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ $z^0 = (x_0,y_0) \in \Omega;$ $\Gamma_z \subset \Omega$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая т. z_0 и $z = (x,y)$

$$f(z) = f(x,y) = \int\limits_{\Gamma_z} Pdx + Qdy.$$

$z=(x,y), z'=(x+\Delta x,y), z'\in\Omega$ и $[z,z']\subset\Omega$

$$\Delta f(z,\Delta x)=f(x+\Delta x,y)-f(x,y)=\int\limits_{\Gamma\{z,z'\}} Pdx+Qdy=\int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)dt=$$
$$=P(x+\theta\Delta x,y)\Delta x, 0<\theta<1$$

$\dfrac{f(x+\Delta x,y)-f(x,y)}{\Delta x}=P(x+\theta\Delta x,y)\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=P(x,y)$ аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=Q(x,y)$
$\Gamma=\{(x,y), x=\varphi(t), y=\psi(t), \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$, $z'=(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$, $z''=(\varphi(\beta),\psi(\beta))$
$\int\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t))\cdot\varphi'(t)+Q(\varphi(t),\psi(t))\cdot\psi'(t)]dt=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\left[\frac{\partial f}{\partial x}x'+\frac{\partial f}{\partial y}y'\right]dt=$
$=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{d}{dt}[f(\phi(t),\psi(t))]dt=f(\varphi(\beta),\psi(\beta))-f(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))=f(z'')-f(z')$

$\boxed{3\Rightarrow 1}$ $\Gamma\subset\Omega$ — кусочно гладкая замкнутая кривая, т.е. z' и $z''\Rightarrow(1)\Rightarrow\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=0$ $\square$

Теорема 3. *Если в условии теоремы 2* $\Omega\subset\mathscr{E}^2$ *— односвязная область и функция* $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны в* $\overline{\Omega}$, *то по условиям 1–3 теорема 2 эквивалентна следующему условию:*
4. $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\ \forall(x,y)\subset\Omega$

Доказательство. $\boxed{3\Rightarrow 4}$ $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)=\frac{\partial Q}{\partial x}$
$\boxed{4\Rightarrow 1}$ $\Gamma\subset\Omega$ простая кусочно гладкая замкнутая кривая $\Gamma=\partial\Omega^*, \Omega^*\subset\Omega$.
$\int\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=\iint\limits_{\Omega^*}\left[\frac{\partial Q}{\partial y}-\frac{\partial P}{\partial x}\right]dxdy=0$ $\square$

Легко доказать, если Γ имеет конечное число точек самопересечения. Для произвольной кусочно гладкой замкнутой кривой все остальное справедливо.

Пример. $w=P(x,y)=\frac{y}{x^2+y^2}$, $w=Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, $\mathbb{E}^2/\{(0,0)\}$ — не является односвязной областью

$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)=\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y); \Gamma=\{(x,y):\ x=\cos t, y=\sin t, 0\leqslant t\leqslant 2\pi\}$
$\oint\limits_{\Gamma}Pdx+Qdy=\oint\limits_{\Gamma}\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}=\int\limits_{0}^{2\pi}dt=2\pi\neq 0$

3. Замена переменных в кратном интеграле.

3.1. Преобразование плоских областей

$\Omega^*\subset\mathbb{E}^2_{(uv)}, \Omega\subset\mathbb{E}^2_{(x,y)}$;

$$F:\overline{\Omega^*}\to\overline{\Omega};\ F: x=f^1(u,v), y=f^2(y,v) \qquad (2)$$

1. F — взаимно однородное отображение
2. F — дважды непрерывна дифференцируема
3. $\mathcal{J}_F = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ в $\overline{\Omega^*}$

$G = F^{-1}$; $G : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega^*}$ $\quad G : u = g^1(x,y)$, $V = g^2(x,y)$

Свойство А. При отображении F внутренние точки множества $\overline{\Omega^*}$ переходят во внутренние точки $\overline{\Omega}$.

Свойство Б. При отображении F гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

Доказательство. Свойства А: $w_0 = (u_0,v_0) \in \Omega^* \to z_0 = (x_0,y_0) \in ?$
Из (2) определены u и v как функции переменных x и y в некоторой окрестности т. z_0, $z_0 \in \Omega$ □

Доказательство. Свойства Б: $\Gamma^* = \{(u,v) : u = \varphi(t), v = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, $\Gamma^* \subset \Omega^*$, Γ^* — гладкая кривая, φ, ψ — непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$ функции и $\forall\, t \in [\alpha, \beta] \to$ $\to [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$
$\Gamma = \{(x,y) : x = f_1(\varphi(t), \psi(t)), y = f^2(\varphi(t), \psi(t)), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, $\Gamma \subset \Omega$
$x'(t) = \frac{\partial f^1}{\partial u}\varphi'(t) + \frac{\partial f^1}{\partial v}\psi'(t); \quad y'(t) = \frac{\partial f^2}{\partial u}\phi'(t) + \frac{\partial f^2}{\partial v}\psi'(t)$. Учтем что $\mathcal{J} \neq 0$, предположим что $\exists t_0 :\ x'(t_0) = y'(t_0 = 0$ из неравенства якобиана нулю следует $\varphi'(t) = \psi'(t_0) = 0$ — противоречие

$$\begin{cases} x &= f^1(u_0,v),\, y = f^2(u_0,v),\, v \in \mathbb{R} \\ u^0 &= g^1(x,y) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= f^1(u,v_0),\, y = f^2(u,v_0),\, u \in \mathbb{R} \\ v^0 &= g^2(x,y) \end{cases}$$

Кривые каждого из семейств не пересекаются в силу взаимо однозначности F, но через каждую точку проходит 2 кривые по одной из каждого семейства. □

Пример. $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$,
$(\rho_0, \varphi_0) \quad (\rho_0, \varphi_0 + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
$\prod = \{(\rho, \varphi) : 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi\}$; $F : \prod \longleftrightarrow K/K_1$,
$K = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}$, $K_1 = \{(x,y) : y = 0, 0 \leqslant x < R\}$
$m(K_1) = 0$. $\mathcal{J}_F = \rho > 0$ в $\prod$

Пример 2. $F : x = \rho\cos\varphi\cos\psi$, $y = \rho\sin\varphi\sin\psi$
$\prod = \{(\rho, \varphi, \psi) : 0 < \rho < R, 0 < \varphi < 2\pi, \ -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$
K/K_1, $K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$
$K_1 = \{(x,y,z) : 0 \leqslant x^2 + z^2 < R^2, y = 0)\}$, $m(K_1) = 0$; $\mathcal{J}_F = \rho^2\cos\psi > 0$ в $\prod$

Пример 3. $F:\ x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi,\ z=z$
$\prod=\{(\rho,\varphi,z)\ 0<\rho<R,\ 0<\varphi<2\pi, 0<z<H\}$
$K\backslash K_1 : K=\{(x,y,z) : x^2+y2<R,\ 0<z<H\}$

$K_1=\{(x,y,z):\ o<x<R,\ y=0,\ 0<z<H\},\ m(K_1)=0;\ \mathcal{J}=\rho>0$ в $\prod$

3.2. Выражение площади в криволинейных координатах.

$\partial\Omega^*=\{(u,v):\ u=\varphi(t),\ v=\psi(t),\ \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$
$\partial\Omega=\{(x,y):\ x=f^1(\varphi(t),\psi(t)), y=f^2(\varphi(t),\psi(t)), \alpha\leqslant t\leqslant\beta\}$
α и β выбраны таким образом, что $\partial\Omega$ обходится в положительном направлении.

$$m(\Omega)=\int\limits_{\partial\Omega}xdy=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f^1(\varphi(t),\psi(t))\left[\tfrac{\partial f^2}{\partial u}\varphi'(t)+\tfrac{\partial f^2}{\partial v}\psi'(t)\right]dt=\pm\int\limits_{\partial\Omega^*}f^1\tfrac{\partial f^2}{\partial u}du+f^1\tfrac{\partial f^2}{\partial v}dv$$

$$P(u,v)=f^1\frac{\partial f^2}{\partial u},\ Q(u,v)=f^1\frac{\partial f^2}{\partial v}$$

$$\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial f^1}{\partial v}\frac{\partial f^2}{\partial u}+f^1\frac{\partial^2 f^2}{\partial v\partial u},\ \frac{\partial Q}{\partial u}=\frac{\partial f^1}{\partial u}\frac{\partial f^2}{\partial v}+f^1\frac{\partial^2 f^2}{\partial u\partial v}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial u}-\frac{\partial P}{\partial v}=\frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f^2}{\partial v}-\frac{\partial f^1}{\partial v}\frac{\partial f^2}{\partial u}=\mathcal{J}_F(u,v)$$

$$m(\Omega)=\iint\limits_{\Omega^*}|(J)_F(u,v)|\,dudv$$

Предложение. *Если $\mathcal{J}_F(u,v)>0$, то положительному обходу $\partial\Omega^*$ соответствует положительному обходу $\partial\Omega$. Если $\mathcal{J}_F(u,v)<0$, то положительный обход $\partial\Omega^*$ соответствует отрицательный обход $\partial\Omega$*

3.3. Геометрический смысл модуля якобиана.

$[\alpha,\beta]\subset[\alpha_2,\beta_2]\subset\ldots\subset[\alpha_k,\beta_k]\subset\ldots;\ \delta_k=\beta_k-\alpha_k\to 0$ при $k\to\infty$

т. Кантора $\exists! x_0 : x_0\in[\alpha_k,\beta_k]\forall k$

$y=f(x)$ — строго монотонна на $[\alpha,\beta]$, непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и дифференцируема на (α,β), тогда:
$\forall k\exists x_k\in(\alpha_k,\beta_k) : f(\beta_k)-f(\alpha_k)=f'(x_k)\cdot\delta_k;\ B_k=f(\beta_k), A_k=f(\alpha_k),\ \Delta k$ для отрезка $[A_k,B_k]$ или $[B_k,A_k]$
$|f'(x_k)|=\frac{\Delta k}{\delta k},\ k\to\infty,\ x_k\to x_0;\ |f'(x_0)|=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\Delta K}{\delta K}$
$\overline{Q_k^*}\subset\Omega^*;\ \overline{Q_1^*}\subset\overline{Q_2^*}\subset\ldots\subset\overline{Q_k^*}\subset\ldots$ причем $m(\overline{Q_k^*})\to 0(\ k\ \to\infty)\Rightarrow\exists$ единственная точка $\omega_0=(u_0,v_0):\omega_0\in\overline{Q_k^*}\ \forall k$
$\exists\omega_k\in\overline{\Omega_k^*}: m(\overline{Q_k^*})=|\mathcal{J}_F(\omega_k)|\,m(\overline{Q_k^*}),\ \overline{Q_k^*}=F(\overline{Q_k^*}),\ \omega_k\to\omega_0$ при $k\to\infty$ значит:
$|\mathcal{J}(\omega_0)|=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{m(\overline{\Omega})}{m(\overline{\Omega_k^*})}$ — коэффициент растяжения точки ω_0 плоскости переменных u,v при заданном отображении F в x,y.