Содержание

Часть I

Функции, заданные неявно

1. Функции, заданные неявно

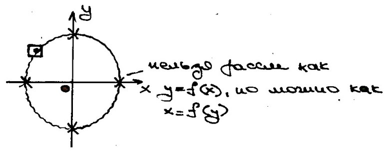
1.1. Основные понятия

$$f(x,y) = 0; \qquad (1)$$

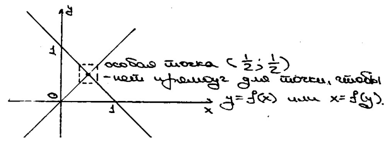
$D_f = \{(x,y) \in \mathbf{E}^2 : f(x,y) = 0\}$ - график уравнения 1. $D_f \leftrightarrow Ox$

1.1.1. Примеры

1. $x^2 + y^2 - 1 = 0$
   $f_x = 2x;\ f_y = 2y$
   Точку (0,1), например, нельзя рассматривать как y=f(x), но можно как x=f(y)



2. $(x-y)(x+y-1) = 0$
   $f_x = (x+y-1)+(x-y);\quad f_y = -(x+y-1)+(x-y)$
   $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ - особая точка, где обе 0. Ни по Ox, ни по Oy нет биекции.



1.2. Теорема о неявно заданной функции

Достаточное условие, при котором уравнение 1 локально определеяет y как $f(x)$ и y обладает некоторыми дифф. свойствами.

Теорема 1. *Если*

1. $f(x_0,y_0) = 0$
2. *в некоторой* $u(x_0,y_0)$ *функция f обладает непрерывной частной производной*
3. $f_y(x_0,y_0) \neq 0$,

То $\exists \Pi = \{(x,y) : |x-x_0| \le r_1, |y-y_0| \le r_2\} \in U(x_0,y_0)$ *в пределах которого уравнение 1 определяет y как функцию переменной x* ($y = f(x)$)*, которая непрерывно дифференцируема на* $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ *и* $y' = -\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)} \mid_{y=f(x)}$

Доказательство. **I. Существование неявно заданной функции**
$3 \Rightarrow$ Пусть $f_y(x_0,y_0) > 0 \ \rightarrow_{(2)} \exists \Pi_1 = \{(x,y) : |x-x_0| \le r, |y-y_0| \le r_2\} \in U(x_0,y_0)$ такой, что $\forall (x.y) \in \Pi_1 \Rightarrow f_y(x,y) > 0$
$\psi(y) = f(x_0,y),\ \psi(y_0) = 0,\ \psi$- возрастает на $[y_0 - r_2, y_0 + r_2]$

$\psi'(y) = f_y(x_0,y) > 0,\ \forall y \in [y_0 - r_2, y_0 + r_2] \Rightarrow \psi(y_0 - r_2) < 0, \psi(y_0 + r_2) > 0$
$f(x_0, y_0 - r_2) < 0,\ f(x_0,y_0 + r_2) > 0$
$\exists r_1 \in (0,r):\ f(x,y_0 - r_2) < 0, f(x,y_0 + r_2) > 0, \forall x \in [x_0 - r, x_0 + r]$
$\Pi = \{(x,y) : |x - x_0| \le r_1, |y - y_0| \le r_2\} \in U(x_0,y_0)$
Покажем, что в П1 определяет y как функцию от x
$\overline{x} \in [x_0 - r_1, x_0 + r_1]$
$\phi(y) = f(\overline{x},y),\ \phi(y_0 - r_2) < 0, \phi(y_0 + r_2) > 0$
$\phi(y)$ непрерывна на $[y_0 - r_2; y_0 + r_2] \Rightarrow$ по теореме о промежуточном значении $\exists \overline{y} \in (y_0 - r_2; y_0 + r_2) : \phi(\overline{y}) = 0$ и эта точна единственная.
$\phi'(y) = f_y(\overline{x},y) > 0$ в $\Pi_1 \subset \Pi$
$f(\overline{x},\overline{y}) = 0\ \ y = f(x)$
II.
$\Pi_1 = \{(x,y) : |x - x_0| \le r_1, |y - y_0| \le r_2\}$
$(x_0,y_0) \in \Pi,\ f(x_0,y_0) = 0,\ (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in \Pi$ и $f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) = 0;$
$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0;$
$\Delta f = f(x_0 + \Delta x,y_0 + \Delta y) - f(x_0,y_0 + \Delta y) + f(x_0,y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = 0;$
$\exists \Theta_1, \Theta_2 : 0 < \Theta_I < 1 : \Delta f = f_x(x_0 + \Theta_1\Delta x,y_0 + \Delta y)\Delta x + f_y(x_0 + \Delta x,y_0 + \Theta_2\Delta y)\Delta y = 0;$

$$\Delta y = -\frac{f_x(x_0 + \Theta_1\Delta x,y_0 + \Delta y)}{f_y(x_0 + \Delta x,y_0 + \Theta_2\Delta y)}\Delta x \Rightarrow |\Delta y| \le \frac{M}{m}|\Delta x|$$

$\Rightarrow$ при $\Delta x \to 0, \Delta y \to 0\ \ f_y$ непрерывно в П - компакт $\Rightarrow \exists m > 0 : f_y(x,y) \ge m;\ \exists M > 0 : |f_y(x,y)| \le M$ на П

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{f_x(x_0 + \Theta_1\Delta x, y_0 + \Delta y)}{f_y(x_0,y_0 + \Theta_2\Delta y)};\ \ f'(x_0) = -\frac{f_x(x_0,f(x_0))}{f_y(x_0,f(x_))};\ \ y_0 = -f(x_0);$$

В силу произвольности (x_0,y_0) производная существует на всем $(x_0 - r_1, x_0 + r_1)$ □

Замечание
Теорема остается справедливой, если в $f(x,y) = 0,\ x = (x_1,x_2,\dots,x_m)$
$\Pi = \{(x_1,x_2,\dots,x_m,y) : |x_i - x_i^0|_{i=\overline{1,m}} \le r_i, |y - y_0| \le \rho\}$

1.3. Неявные функции, определяемые системой уравнений

$$\begin{cases} f_1(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots y_n) = 0 \\ f_2(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots y_n) = 0 \\ \hfill\dots \\ f_n(x_1,\dots,x_n,y_1,\dots y_n) = 0 \end{cases}$$

$x^0 \in \mathbb{E}^m, y^0 \in \mathbb{E}^n;\ \Pi(x^0) = \{x \in \mathbb{E}^m : |x_i - x_i^0| \le r_i, i = \overline{1,m}\}$
$\Pi(y^0) = \{y \in \mathbb{E}^n : |y_i - y_i^0| \le \rho_i, i = \overline{1,n}\}$
$\Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y_0) = \{(x,y) \in \mathbb{E}^n + m : x \in \Pi(x^0), y \in \Pi(y^0)\}$
Система определяет в П $y_1,\dots,y_n$ как неявные функции переменных $x_1,\dots x_m$, если $\forall x \in \Pi(x^0)$ ставится в соответствие такое $y \in \Pi(x^0)$, что $f_i(x,y) = 0,\ i \in \overline{1,n}$

Теорема 2. *Пусть*

1. $f_i(x^0,y^0) = 0, \ i \in \overline{1,n}$
2. *Функции* $f_i, i \in \overline{1,n}$ *обладают в некоторой окрестности* $U(x^0,y^0)$ *непрерывностью частных проихводных по переменным* $x_j, j \in \overline{1,m}$ *и* $y_i, i \in \overline{1,n}$
3. $\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial y_n} \\ & \dots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} (x^0,y^0) \neq 0$

Тогда $\exists \Pi = \Pi(x^0) \times |pi(y^0) \in U$, *в пределах которого система определяет переменные* $y_1, \dots ,y_n$ *как неявно заданные функции переменных* $x_1, \dots ,x_m$ *и эти функции* $y_i = f_i(x)$ *обладают непрерывными частными производными в* $\Pi(x^0)$ *и* $y_i^0 = f'^i(x^0), \overline{1,n}$

2. Локальные экстремумы функций многих переменных

2.1. Определение и необходимые условия существования экстремумов

$\omega = f(x), \ x \in \mathbb{E}^m, \ x = (x_1, x_2, \dots , x_m), x^0 = (x_1^0, \dots , x_m^0)$

Определение. Точка x^0 называется точкой локального минимума [максимума] функции $\omega = f(x)$, если $\exists B_\delta(x^0) : \forall x \in B_\delta(x^0)$ выполнено $f(x^0) < f(x) \ \ [f(x^0) > f(x)]$

Теорема 1 (Необходимое условие существования локального экстремума)**.** *Если функция* $\omega = f(x)$ *дифференцируема в точке* x^0 *и имеет в этой точке локальный экстремум, и все ее частные производные в этой точке =0 т.е.*

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_0) = 0$$

Доказательство. Фиксируем $x_2^0, \dots , x_m^0; \ f(x_1,x_2^0, \dots , x_m^0) = f(x_1); \ f'(x_1^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. f диф. в точке x_1^0 и имеет в ней локальный экстремум. Тогда по теореме Ферма $f'(x_1^0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)$. Равенство 0 остальных ч.п. доказывает аналогично. □

Предложение. *1 - необходимое, но не достаточное условие существования локального экстремума. например:*
$\omega = xy; \ (0,0) : \frac{\partial \omega}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial \omega}{y}(0,0) = 0,$ *но* $\nexists B_\delta(0,0) : \forall (x,y) \in B_\delta \to \omega(x,y) > \omega(0,0) = 0$ *или* $\omega(x,y) < \omega(0,0) = 0$. *Точка* $x^0 : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0) = 0$ *- стационарная точка*

Теорема (1'). *Если* $\omega = f(x)$ *дифференцируема в точке* x^0 *и имеет в этой точке лок. экстремум, то дифференциал* $df(x^0) \equiv 0$ *относ дифф. независ. перем.* $dx_1, \dots dx_m$

Доказательство. $df(x^0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0)dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x^0)dx_m;$ из т.1 $\Rightarrow df(x^0) = 0$ □

2.2. Достаточное условие существования локального экстремума

$\omega = f(x)$, $x^0 : \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_m}(x_m^0) = 0$; f -дважды непрерывно дифференцируема в точке x^0 т.е. $d^2 f(x^0) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} dx_i dx_j$; $a_{ij} = a_{ji}$;

Это квадратичная форма относительно $dx_i, i = \overline{1,m}$; $k = k(x) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} x_i x_j$; $a_{ij} = a_{ji}$

1. k(x) - положительно определенная кв. форма: $\forall x \neq 0 \to k(x) > 0$
2. k(x) - отрицательно определенная кв. форма: $\forall x \neq 0 \to k(x) < 0$
3. k(x) - положительно полуопредел. кв. форма: $\forall x \to k(x) \geq 0$ & $\exists x \neq 0 : k(x) = 0$
4. k(x) - отрицательно полуопредел. кв. форма: $\forall x \to k(x) \leq 0$ & $\exists x \neq 0 : k(x) = 0$
5. k(x) - неопределенная кв. форма: $\exists x', x'' : k(x') > 0$ & $k(x'') < 0$

Теорема 2. *Пусть $\omega = f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности стационарной точки x^0.*

1. *Если $d^2 f(x^0)$ положительно определенная кв. форма, то т x^0 - точка лок. min*
2. *Если $d^2 f(x^0)$ отрицательно определенная кв. форма, то т x^0 - точка лок. max*
3. *Если $d^2 f(x^0)$ неопределенная кв. форма, то т x^0 не является точкой лок. экстремума функции*

Доказательство. 1. $f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\rho^2), \rho \to 0$; $df(x^0) = 0$ по т. 7.1.
$dx_1 = x_1 - x_1^0 \dots dx_m = x_m - x_m^0$; $\rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2}$
$o(\rho^2) \overset{\rho \to 0}{=} \alpha(\rho)\rho^2$, $\alpha(\rho) \xrightarrow{rho \to 0} 0$,
Обозначим $h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}; i = \overline{1,m}$; $|h_i| \leq 1$; $h_i^2 + \dots h_m^2 = 1$; $h = (h1, \dots, h_m)$. Тогда:

$$f(x) - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j + \alpha(\rho) \right]$$

Функция $k(h) = \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij} h_i h_j$ - непрерывна на компакте $S = \{h : h_1^2 + \dots h_m^2 = 1\}$
Тогда по 2 теореме Вейерштрасса:
$\exists h' \in S : h' \neq 0, k(h') = \mu > 0, \exists \rho' > 0 : \forall \rho < \rho' \to |\alpha(\rho)| < \frac{\mu}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow \forall \rho < \rho' \to f(x) - f(x^0) > 0. \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i - x_i^0)^2 < \rho^2$

2. Аналогично 1 пункту
3. Как и в первом пункте $f(x) - f(x^0) = df(x^0) + \frac{1}{2} d^2 f(x^0) + o(\rho^2), \rho \to 0$; $df(x^0) = 0$ по т. 7.1. $dx_1 = x_1 - x_1^0 \dots dx_m = x_m - x_m^0$; $\rho = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_m - x_m^0)^2}$
$o(\rho^2) \overset{\rho \to 0}{=} \alpha(\rho)\rho^2$, $\alpha(\rho) \xrightarrow{\rho \to 0} 0$,
$h_i = \frac{x_i - x_i^0}{\rho}; i = \overline{1,m}$; $|h_i| \leq 1$; $h_i^2 + \dots h_m^2 = 1$; Тогда $h_i' = \frac{x_i' - x^0}{\rho}$, $h_i'' = \frac{x_i'' - x_0}{\rho}; i = \overline{1,m}$;
$\exists h' = (h_1', \dots, h_m'), h'' = (h_1'', \dots, h_m'') : k(h') > 0, k(h'') < 0$

$$f(x') - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} h'_i h'_j + \alpha(\rho) \right] \Rightarrow \exists \rho' : \forall \rho < \rho' \; f(x') - f(x^0) > 0$$

$$f(x'') - f(x^0) = \rho^2 \left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} h''_i h''_j + \alpha(\rho) \right] \Rightarrow \exists \rho'' : \forall \rho < \rho'' \; f(x'') - f(x^0) < 0$$

□

Предложение. *1. Если x^0 - стационарная точка, $\omega = f(x)$ и $d^2 f(x^0)$ - положительно [отрицательно] полуопределенная кв. форма, то о существовании локального экстремума нельзя ничего сказать.* $\omega = f_1(x,y) = (x-y)^4$, $\omega = f_2(x,y) = x^4 + y^4$; $(x^0,y^0) = (0,0)$ *- стационарная точка* f_1 *и* f_2*. Тогда:*
$df_1 = 4(x-y)^3(dx-dy)$; $d^2 f_1 = 12(x-y)^2(dx-dy)^2$; $d^2 f_1(x,x) = 0$ *- полуопределенная кв. форма.*
$df_2 = 4x^3dx + 4y^3dy$; $d^2 f_2 = 12x^2dx^2 + 12y^2dy^2 > 0$ *везде кроме (0,0) - точки локального минимума функции* f_2; $f_2(0,0) = 0$

2. *Условие* $d^2 f(x^0) \geq 0$ $[d^2 f(x^0) \leq 0]$ *- необходимое условие локального экстремума.*

Примеры

(a) $\omega = x^4 + y^4 - 2x^2$; $d\omega = (4x^3 - 4x)dx + 4y^3dy$; $d^2\omega = (12x^2 - 4)dx^2 + 12y^2dy^2$
$M_1(0,0), M_2(1,0), M_3(-1,0)$
$d^2\omega(M_1) = -4dx^2 < 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_1-$ *локальный max*
$d^2\omega(M_2) = 8dx^2 > 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_2-$ *локальный min*
$d^2\omega(M_3) = 8dx^2 > 0$; $\forall dx \neq 0 \Rightarrow M_3-$ *локальный min*

(b) $\omega = \lambda x_1^2 + x_2^2 + \dots + 2x_2 + \dots + 2x_m, \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$
$\frac{\partial \omega}{\partial x_1} = 2\lambda x_1, \frac{\partial \omega}{\partial x_2} = 2x_2 + 2, \dots, \frac{\partial \omega}{\partial x_m} = 2x_m + 2$;
Стационарная точка M(0,-1,. . . , -1)
$d^2\omega = 2\lambda dx_1^2 + 2dx_2^2 + \dots 2dx_m^2$; *Тогда есть два случая:*
   i. $\lambda > 0 \;\Rightarrow\; d^2\omega^{(M)} > 0 \;\; \forall (dx_1, \dots, dx_m) \neq (0, \dots, 0)$ *M - точка лок. min*
   ii. $\lambda < 0$ $(dx_1, \dots, dx_m) = (1,0, \dots, 0)$ $d^2\omega < 0$
   $(dx_1, \dots, dx_m) = (0,1,0, \dots, 0)$ $d^2\omega > 0$ *локальный экстремум*

3. Понятие условного экстремума

Пример $\omega = x^2 + y^2$, при условии $x + y - 1 = 0$.
$y = 1 - x, \omega = x^2 + (1-x)^2 = 2x^2 - 2x + 1$
$\omega' = 2(2x+1) = 0 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2}$ $\omega'' = x > 0 \to x_0$ - локальный минимум $\omega = \omega(x)$
$M_0(\frac{1}{2}; \frac{1}{2})$ - т. условного минимума $\omega = x^2 + y^2$ при $x + y - 1 = 0; \omega = \frac{1}{2}$. Абсолютный экстремум $\omega = 0$ в (0;0)

3.1. Общая постановка задачи

$\omega = f(x,y),\ x \in \mathbb{E}^m,\ y \in \mathbb{E}^n;\ x = (x_1, x_2, \dots, x_m),\ y = (y_1, \dots, y_n);$

$$\Phi_1(x,y) = 0,\ \Phi_2(x,y) = 0,\ \dots \Phi_n(x,y) = 0; \text{ - условия связи} \tag{2}$$

Условия связи 2 в пространстве $\mathbb{E}^{m+n}$ определяют множество $\mathbb{X}$:

$$\mathbb{X} = \{(x,y) : \Phi_1(x,y) = 0,\ \Phi_2(x,y) = 0,\ \dots \Phi_n(x,y) = 0\};\ dim\mathbb{X} = m$$

Определение (Точка условного минимума). точка $M_0(x^0, y^0) : \Phi_i(x^0, y^0) = 0, \forall i = \overline{1,n}$, называется точкой лок. min [max] функции $\omega = f(x,y)$, при условиях связи 2, если

$$\exists B_\varepsilon(M_0) :\ \forall (x,y) \in B_\varepsilon(M_0) \cap \mathbb{X} \Rightarrow f(x^0, y^0) < f(x,y)\ [f(x^0, y^0) > f(x,y)]$$

3.2. Необходимые условия существования лок. экстремума

$M_0(x^0, y^0) : \Phi_i(x^0, y^0) = 0, i = \overline{1,n};\ \ f, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ - непр дифф в некоторой окр $U(M_0)$

$$\frac{D(\Phi_1, \dots, \Phi_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} = \Delta_{\Phi,y} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1} & \cdots & \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} (M_0) \neq 0$$

$\exists \Pi = \Pi(x^0) \times \Pi(y^0) \subset U(M_0) : y_1 = \varphi_1(x1, \dots, x_m) \dots y_n = \varphi_n(x1, \dots, x_m)$
$\omega) = f(x) = f(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n) = f(x, \varphi_1(x), \dots \varphi_n(x)$
Если x^0- точка лок. экстремума f, $\Rightarrow df(x^0) \equiv 0\ \forall dx_1, \dots, dx_m \Rightarrow$
$\Rightarrow df(x^0, y^0) \equiv 0 = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) dx_k + \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial y_j}(M_0) dy_j$
где $dy_j(M_0) = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}(x_0) dx_i, j = \overline{1,n}$
$A_1 dx_1 + \dots + A_m dx_m \equiv 0\ \forall dx_1, \dots, dx_m \Rightarrow$
Необх. условие существования лок. условного экстремума: $A_1 = \dots = A_m = 0$.
Замечания:

1. Теорема о функциях, заданных неявно системой уравнений, говорит только о существовании функций $\varphi_1 \dots \varphi_n$, но не дает метода их нахождения

2. В приведенных рассуждениях $x_1, \dots x_m$ - независимые переменные, а $y_1, \dots y_n$ - зависимые

Если $\varphi_1 \dots \varphi_n$ - неизвестны, то $dy_j(M_0)$ можно найти как:

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) dx_m + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) dy_1 + \dots \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) dy_n = 0 \tag{3}$$

$$\vdots \tag{4}$$

$$\underbrace{\frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) dx_1 + \dots + \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) dx_m}_{D + \mathbb{J}dy = 0} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) dy_1 + \dots \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) dy_n = 0 \tag{5}$$

3.3. Метод Лагранжа

Выполненные условия связи 2

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1}(M_0)dx_1 + \dots + \dfrac{\partial f}{\partial x_m}(M_0)dx_m + \dfrac{\partial f}{\partial y_1}(M_0)dy_1 + \dots \dfrac{\partial f}{\partial y_n}(M_0)dy_n = 0 \\ D + \mathbb{J}dy = 0 \mid \times \lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \dots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \end{cases} \Bigg| +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(M_0) \right] dx_k +$$

$$+ \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{\partial f}{\partial y_j}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_j}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_j}(M_0) \right] dy_j = 0$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ выбираются таким образом, чтобы

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial y_1}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_1}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_1}(M_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial y_n}(M_0) + \lambda_1 \frac{\partial \Phi_1}{\partial y_n}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial y_n}(M_0) \end{cases} \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial x_k}(M_0) = 0, \ k = \overline{1,m} \right] \tag{7}$$

$\exists! \ \lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0);$

Подставляем $\lambda_0 : \ \sum\limits_{k=1}^{m} \left[\frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_k}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_k}(M_0) \right] dx_k = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_1}(M_0) + \dots + \lambda_n^0 \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_1}(M_0) \\ \dots \\ \frac{\partial f}{\partial x_m}(M_0) + \lambda_1^0 \frac{\partial \Phi_1}{\partial x_m}(M_0) + \dots + \lambda_n \frac{\partial \Phi_n}{\partial x_m}(M_0) \end{cases} \tag{8}$$

$$\left[\frac{\partial \Lambda}{\partial y_j}(M_0) = 0, \ j = \overline{1,n} \right] \tag{9}$$

В итоге из этого всего имеем 2n+m уравнений для нахождения $(x_1, \dots, x_m, y_1, \dots, y_n, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$

Теорема 3 (необходимое условие существования локального экстремума)**.** *Пусть функции $f, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ непрерывно дифф. в $U(M_0)$, $\Delta_{\Phi,y} \neq 0$, и $M_0(x_0, y_0)$ - т. локального условного экстремума функции $\omega = f(x,y)$ при условиях связи $\Phi_1(x,y) = 0, \dots, \Phi_n(x,y) = 0$ Тогда найдутся числа $(\lambda_1^0, \dots, \lambda_n^0) = \lambda^0$ такие, что в точке M_0 выполнены 8 и 6 $\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda_1 \Phi_1(x,y) + \dots + \lambda_n \Phi_n(x,y)$ - функция Лагранжа*

Следствие:

Пусть выволнены условия теоремы 3. Если т M_0 является точкой локального условного экстремума функции $\omega = f(x,y)$ при условии связи $\Phi_1(x,y) = 0, \ \dots \Phi_n(x,y) = 0$; то в ней выполнены равенства 9 и 7, т.е. M_0 - стационарная точка функции Лагранжа.

3.4. Достаточные условия существования локального экстремума

$\Lambda(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda_1\Phi(x,y) + \dots + \lambda_n\Phi_n(x,y);$
$\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_1^0);\;\; x^0 = (x_1^0, \dots, x_m^0);\;\; y^0 = (y_1^0, \dots, y_n^0)$

$$\begin{cases} \frac{\partial\Lambda}{x_k} = 0 & k = \overline{1,m} \\ \frac{\partial\Lambda}{y_j} = 0 & j = \overline{1,n} \\ Q\Phi_i = 0; & i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{10}$$

$f, \Phi_1, \dots, \Phi_n$ дважды непрерывно дифференцируемы в $U(M_0)$, $\Delta_{\Phi,y}(M_0) \neq 0$; $M_0(x^0, y^0) \in X$, $M(x^0 + \Delta x, y^0 + \Delta y) \in X$
$\Delta f(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = f(M) - f(M_0) = \Lambda(M, \lambda^0) - \Lambda(M_0, \lambda^0) = \Delta\Lambda(M_0, \lambda^0, \Delta x, \Delta y)$

$$\begin{aligned}
&\Delta\Lambda\,(M_0,(\Delta x, \Delta y)) = \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,j=1}^{m}\frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial x_k\partial x_j}\Delta x_k\Delta x_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial x_k\partial y_j}\Delta x_k\Delta y_j + \sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Lambda(M_0)}{\partial y_k\partial y_j}\Delta y_k\Delta y_j\right] + \\
&\quad + \sum_{k,j=1}^{m}\alpha_{kj}^1\Delta x_k\Delta x_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}^2\Delta x_k\Delta y_j + \sum_{k,j=1}^{n}\alpha_{kj}^3\Delta y_k\Delta y_j = \\
&= \Bigg/ \begin{array}{ll} \alpha_{kj}^i \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\;\; \alpha_{kj}^2, \alpha_{kj}^3 \text{ зависят от } \Delta x, \Delta y \\ \Delta y_j \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\;\; j = \overline{1,n} \\ \Delta x_j = dx_j;\; \Delta y_j = \alpha y_j + \gamma_j, \gamma \to 0 & \text{при } \Delta x \to 0;\;\; j = \overline{1,n} \end{array} \Bigg/ = \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{k,j=1}^{m}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_k\partial x_j}dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial x_k\partial y_j}dx_k dy_j + \sum_{k,j=1}^{n}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial y_k\partial y_j}dy_k dy_j\right] + \\
&\quad + \sum_{k,j=1}^{m}\widetilde{\alpha_{kj}^1}dx_k dx_j + \sum_{k=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\widetilde{\alpha_{kj}^2}dx_k dy_j + \sum_{k,j=1}^{n}\widetilde{\alpha_{kj}^3}dy_k dy_j
\end{aligned}$$

$dy_j(M_0) = \sum\limits_{k=1}^{m} C_k dx_k$; $d^2\widetilde{\Lambda}(M_0, (\Delta x, \Delta y)) = \sum\limits_{k,j=1}^{m} A_{kj}dx_k dx_j$; $A_{kj} = A_{jk}$
$\Delta = \Lambda(M_0,(\Delta x, \Delta y)) = d^2\hat{\Lambda}(M_0) + \beta(\Delta x)$, $\beta(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$
$d^2\hat{\Lambda}(M_0) = d^2\Lambda(M_0)$ т.к. первые производные функции Лагранжа в стационарной точке M_0; $= 0 \;\Rightarrow d^2y$ равны 0

Теорема 4. *Пусть f и $\Phi_j, j = \overline{1,n}$ дважды дифф функции в $U(M_0)$ (M_0 - стационарная точка функции Лагранжа) и $\Delta_{\Phi,y}(M_0) \neq 0$ тогда*

1. *Если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ положительно определенная квадратичная форма, то M_0 - точка условного минимума функции f при условии связи*
2. *Если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ отрицательно определенная квадратичная форма, то M_0 - точка условного максимума функции f при условии связи*
3. *Ecои $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ неопределенная квадратичная форма, то экстремума нет*

Замечание: если $d^2\hat{\Lambda}(M_0)$ полуопределенная кв. форма, то нужно проводить дополнительные исследования

4. Кратные интегралы

4.1. Определения и свойства

Определение. Совокупность измеримых открытых множеств $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ называется разбиением множества Ω, если:

1. $\Omega_k \subset \Omega,\ k = \overline{1,n}$
2. $\Omega_k \cap \Omega_j = \emptyset$, если $k \neq j$
3. $\cup_{k=1}^n \overline{\Omega}_k = \overline{\Omega}$

Определение. $\Delta(\Omega) = \sup\limits_{x,y \in \Omega} \rho(x,y)$ - диаметр множества. (Ω - огранич. мн-во)

Определение. Число $\Delta_T = \max\limits_{1 \leq k \leq n} \Delta(\Omega_k)$ - называется мелкостью разбиения $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$

Определение. Разбиение $T' = \{\Omega'_j\}$ - называется измельчением разбиения $T = \{\Omega_k\}$ если $\forall \Omega'_j \subset T\ \ \exists \Omega_k \subset T : \Omega'_j \subset \Omega_k$

Свойства измельчения:

1. Если T' измельчение T, а T'' - измельчение T' то T' измельчение T''
2. Для двух разбиений $T' = \{\Omega'_k\}$ и $T'' = \{\Omega''_j\}$ множества Ω $\exists$ разбиение T множества Ω , что Т будет измельчением разбиений T' и T''

Замечание: Если $G = \cup_{j=1}^p Q_j$ клеточное множество и $\Omega \subset G$ то в качестве разбиения множества Ω можно взять $T = \{\Omega_k\}$, где $\Omega_k = \Omega \cap int(Q_k),\ k = \overline{1,p}$

4.2. Интегральные суммы. Кратный интеграл Римана. Необходимое усл. существования кр. интеграла Римана

$T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n, \omega = f(x), x \in \mathbb{E}$, опред. на $\overline{\Omega}$; $\xi = \{\xi_1, \ldots, \xi_n\} : \xi \in \overline{\Omega_k}$

Определение. $I\{T, \xi\} = \sum\limits_{k=1}^n f(\xi_k) m(\Omega_k) -$ интегральная сумма функции f

Определение. $m(\Omega_k)$ - мера множества Ω_k

Определение. Число I называется пределом интегральных сумм $I\{T,\xi\}$, при мелкости разбиения стремящейся к 0, если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 :\ \forall T : \Delta_T < \delta \ \&\ \forall \varepsilon \Rightarrow |I\{T,\xi\} - T| < \varepsilon$$

Определение (Кратный интеграл Римана)**.** Число I, являющееся пределом интегральных сумм при $\Delta_t \to 0$ называется кратным интегралом Римана функции f по множеству Ω [$\overline{\Omega}$]. А функция f называется интегрируемой по риману по множеству Ω [$\overline{\Omega}$].

Обозначение: $\int\limits_{\Omega} f(x) d\omega = \int \ldots \int\limits_{\Omega} f(x_1, \ldots, x_m) dx_1 \ldots dx_m = \int \ldots \int\limits_{\Omega} f dx_1 \ldots dx_m$

Теорема 1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m f$ - измеримая область, а $\omega = f(x)$ опред. и инт. на $\overline{\Omega}$ тогда эта функция ограничена на $\overline{\Omega}$*

Пример: $\omega = f(x) \equiv c$; $\forall x \in \overline{\Omega}$, Ω - измеримое множество.
$\forall T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n \; \forall \xi \;\; I = \{T, \xi\} = \sum\limits_{k=1}^n C \cdot m(\Omega_k) = C \cdot m(\Omega)$

Теорема 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ - измеримая область, $\omega = f(x)$ опр. и огр на $\overline{\Omega}$. $f(x) \equiv 0$ на $\overline{\Omega} \backslash \Gamma$, $m(\Gamma) = 0$, тогда f интегрируема на Ω и $\int\limits_\Omega f d\omega = 0$*

Доказательство. $\exists c > 0 : \forall x \in \overline{\Omega} \to |f(x)| \leq c$
$\forall \varepsilon > 0 \exists G_\varepsilon = \widetilde{\cup}_{j=1}^p Q_j : \Gamma \subset G_\varepsilon$ и $0 \leq m\Gamma \leq m(G_\varepsilon) < \frac{\varepsilon}{c}$
$T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n, \widetilde{T} = T' \cup T'' = \{\Omega'_k\} \cup \{\Omega''_j\}$; где $\Omega'_k = \Omega_k \backslash \overline{G_\varepsilon}$ и $\Omega''_j = \Omega_j \cap (int(Q_i)), i = \overline{1,p}, j = \overline{1,n}$. И т.к. на Ω'_k функция $f(x) \equiv 0$, а Ω''_j содержит точки из Γ получим:
$\forall \xi \to |I\{\widetilde{T}, \xi\}| = |\sum\limits_j f(\xi_i) m(\Omega''_j)| \leq c \cdot m(G_\varepsilon) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$ □

4.3. Суммы Дарбу. критерий интегрируемости. Интеграл непрерывных функций

$\Omega \subset \mathbb{E}^m$ измеримая область. $\omega = f(x)$ определена и ограниченна на $\overline{\Omega}$. $T = \{\Omega_k\}_{k=1}^n$ - разбиение Ω. $m_k = \inf\limits_{x \in \overline{\Omega}_k} f(x), M_k = \sup\limits_{x \in \overline{\Omega}_k} f(x)$

$S_*(T) = \sum\limits_{k=1}^n m_k m(\Omega_k)$; $S^*(T) = \sum\limits_{k=1}^n M_k m(\Omega_k)$; - **нижняя и верхняя суммы Дарбу**

Теорема 3 (Критерий интегрируемости). *Пусть $\omega \subset \mathbb{E}$ - измеримая область, а функция $\omega = f(x)$ опр. и огр. на $\overline{\Omega}$. Для того, чтобы f была интегрируема на Ω необходимо и достаточно чтобы* $\boxed{\forall \varepsilon > 0 \; \exists T : |S^*(T) - S_*(T)| < S|}$

Теорема 4 (Интегрируемость функции, непрерывной на замкнутом измеримом мн-ве). *Функция $\omega = f(x)$ непр. на замыкании измеримой области Ω интегрируема на ней.*

5. Свойства кратных интегралов

Теорема 5. *Если $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ - измеримая область, то $\int\limits_\Omega = m(\Omega)$*

$f(x) \equiv 1$ на $\overline{\Omega}. \forall x \in \overline{\Omega}$, Ω - измеримое множество.

Теорема 6 (интегрируемость подмнож.). *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ и $\Omega' \subset \Omega$ измеримые области и функция $\omega = f(x)$ интегрируема на Ω , тогда f интегрируема на множестве Ω'*

Доказательство. $\Omega' \neq \Omega$; f интегрируема на Ω. $T = \{\Omega_k\}, T' = \{\Omega'_k\}$, где $\Omega'_k = \Omega_k \cap \Omega'$ тогда $\forall \varepsilon > 0 \; \exists T : S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon$;
$M'_k = \sup\limits_{\overline{\Omega}'_k} f \leq \sup\limits_{\overline{\Omega}_k} f = M_k; m'_k = \inf\limits_{\overline{\Omega}'_k} f \geq \inf\limits_{\overline{\Omega}_k} f = m_k \Rightarrow$

$$S^*(T') - S_*(T') \leq S^*(T) - S_*(T) < \varepsilon \tag{11}$$

□

Теорема 7 (аддитивность интеграла). *Пусть Ω и Ω' измеримые области в $\mathbb{E}^m$, $\Omega' \subset \Omega$ и $\Omega'' = \Omega \backslash \overline{\Omega}'$. Если функция $\omega = f(x)$ интегрируема на Ω, то f интегрируема на Ω' и Ω'' и $\int\limits_\Omega f d\omega = \int \Omega' f d\omega + \int \Omega'' f d\omega$*

Доказательство. Из теоремы 6 $\Rightarrow$ f интегрируема на Ω' и Ω'' и существует интеграл в 11. T' - разбиение Ω'. T'' - разбиение Ω''. Тогда $T = T' \cup T''$ -разбиение множества Ω.
$\Delta_t = \max\{\Delta_{T'}, \Delta_{T''}\}$. $\forall \xi', \xi'' : \xi = \xi' \cup \xi'' \to I\{T, \xi\} = I\{T', \xi'\} + I\{T'', \xi''\}$ $\Delta_T \to 0 \Rightarrow 11$ $\square$

Теорема 8 (линейность интеграла)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ измеримая область. $\omega = f(x)$ и $\omega = g(x)$ интегрируемые на Ω функции. Тогда $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\omega = \alpha f(x) + \beta g(x)$ интегрируема на Ω:*
$\int\limits_\Omega \big[\alpha f + \beta g\big] d\omega = \alpha \int\limits_\Omega f d\omega + \beta \int\limits_\Omega g d\omega$
Кроме того функция $\omega = f \cdot g$ так же интегрируема на Ω

Теорема 9 (Инт. от положительной функции)**.** *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ измеримая область. Функция $\omega = f(x)$ определена на $\overline{\Omega}$, $f(x) \geq 0 \forall x \in \Omega$ и f интегр на Ω. Тогда: $\int\limits_\Omega f d\omega \geq 0$*

Теорема 10. *Если f и g интегрируема на измеримой области $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ и $\forall x \in \overline{\Omega} \to f(x) \geq g(x)$, то $\int\limits_\Omega f d\omega \geq \int\limits_\Omega g d\omega$*

Теорема 11. *Если f интегрируемость на измеримой области $\Omega \subset \mathbb{E}$, то функция $|f|$ интегрируема на Ω и выполнено: $|\int\limits_\Omega f d\omega| \leq \int\limits_\Omega |f| d\omega \leq c m(\Omega)$, где $c : \forall x \in \overline{\Omega} \to |f(x)| \leq c$*

Замечание: В обратную сторону не верно. Контрпример - функция Дирихле.

Теорема 12. *Если $\Omega \subset \mathbb{E}$ и $\Omega' \subset \mathbb{E} : \Omega' \subset \Omega, \omega = f(x)$ интегрируема на Ω и $f(x) \geq 0$ $\forall x \in \Omega$, тогда $\int\limits_{\Omega'} f d\omega \leq \int\limits_\Omega f d\omega$*

Теорема 13. *Пусть функции $\omega = f(x)$ и $\omega = g(x)$ интегрируемы на измеримой области $\Omega \subset \mathbb{E}$. g не меняет знак на $\overline{\Omega}$, $m \leq f(x) \leq M$ $\forall x \in \overline{\Omega}$, тогда $\exists \mu : m \leq \mu \leq M : \int\limits_\Omega f g d\omega = \mu \int\limits_\Omega g d\omega$. Если же f непрерывна на $\overline{\Omega}$, то $\exists x^0 \in \overline{\Omega} : \int\limits_\Omega f g d\omega = f(x^0) \int\limits_\Omega g d\omega$*

Теорема 14. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ - измеримая область $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \Omega_3 \dots \subset \Omega$*

Доказательство. $\forall x \in \overline{\Omega} \to |f(x)| \leq C, \widetilde{\Omega}_k = \Omega \backslash \overline{\Omega}_k$ - измеримое множество и $m(\widetilde{\Omega}_k) = m(\Omega) \backslash m(\overline{\Omega}) \backslash m(\overline{\Omega}) \xrightarrow{k \to \infty} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ $\exists k_0 : m(\widetilde{\Omega}_{k_0}) < \frac{\varepsilon}{4c}$
Ω_{k_0}, f интегрируема на $\Omega_{k_0} \Rightarrow \exists T^{k_0}$ область $\Omega_{k_0} : S^*(T^{k_0}) - S_*(T^{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2}$
$\exists T = T^{k_0} \cup \widetilde{T}^{k_0}$, где $\widetilde{T}^{k_0}$ разбиение множества $\Omega \backslash \overline{\Omega}_{k_0} = \widetilde{\Omega}_{k_0}$
$S^*(T) - S_*(T) = S^*(T^{k_0}) - S^*(T^{k_0}) + S^*(\widetilde{\Omega}^{k_0}) - S_*(\widetilde{\Omega}^{k_0}) < \frac{\varepsilon}{2} + 2c\frac{\varepsilon}{4c} = \varepsilon$
$|\int\limits_\Omega f d\omega - \int\limits_{\Omega_k} f d\omega| = |\int\limits_{\widetilde{\Omega}} f d\omega| < c m(\widetilde{\Omega}) \xrightarrow{k \to \infty} 0$ $\square$

6. Сведение кратного интеграла к повторному

6.1. Двойные интегралы

$\mathbb{E}^2, Oxy, \Pi = \{(x,y) : a < x < b, c < y < d\}$

Теорема 1. *Пусть функция* $\omega = f(x,y)$ *определена на* $\overline{\Pi}$ *и интегрируема на* Π *и выполнено:* $\forall x \in [a,b]\ \exists\, \mathbb{J}(x) = \int\limits_c^d F(x,y)dy$ *тогда функция* $\mathbb{J}(x)$ *интегрируема на* $[a,b]$ *и существует повторный интеграл:*

$$\int\limits_a^b \mathbb{J}(x)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy \ \text{и}\ \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)dy = \iint\limits_{\Pi} d(x,y)dxdy$$

Доказательство. $a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b,\ c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$
$\Pi_{ij} = (x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j), i = \overline{1,k}, j = \overline{1,n}$
$\{\Pi_{ij}\}$ - разбиение Π; $\Delta_x^i = x_i - x_{i-1}, i = \overline{1,k}; \Delta_y^j = y_j - y_{j-1}, j = \overline{1,n}$
$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ в $\overline{\Pi}_{ij}$ выполнено $(inf)\ m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij}\ (sup)$
$\sum\limits_{j=1}^n m_{ij}\Delta_y^j \leq \mathbb{J}(\xi_i) \leq \sum\limits_{j=1}^n M_{ij}\Delta_y^j \Rightarrow$
$\sum\limits_{i=1}^k \sum\limits_{j=1}^n m_{ij}\Delta_y^j\Delta_x^i \leq \sum\limits_{i=1}^k \mathbb{J}(\xi_i)\Delta_x^i \leq \sum\limits_{i=1}^k \sum\limits_{j=1}^n M_{ij}\Delta_y^j\Delta_x^i;\ \Delta_T \to 0$ □

Определение. Область $\Omega \subset \mathbb{E}^2$ называется **элементарной относительно Оу**, если ее граница состоит из графиков двух функций: $y = \phi(x);\ y = \psi(x)$ и, быть может, отрезков прямых $x = a;\ x = b$, при этом $\forall x \in [a,b] \to \psi(x) \leq \phi(x)$.

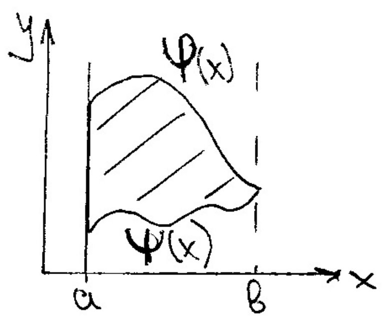
Теорема 2. *Пусть* $\omega = f(x,y)$ *непрерывна на* $\overline{\Omega}$ *и область* Ω *элементарна относительно оси* Oy, *ее граница состоит из двух графиков непрерывных функций* $y = \phi(x);\ y = \psi(x)$ *и, быть может, отрезков прямых* $x = a;\ x = b$, *причем* $\forall x \in [a,b] \to \psi(x) \leq \phi(x)$. *Тогда существует повторный интеграл* $\int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi(x)}^{\phi(x)} f(x,y)dy = \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy$

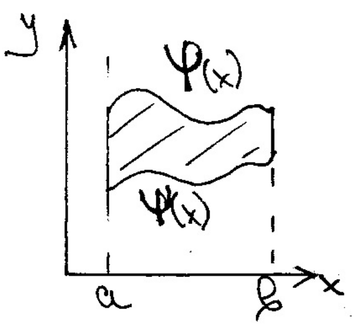
Доказательство. **Замечание:** из условия теоремы следует, что:

1. Ω - измеримая область
2. f - интегрируема на Ω
3. При фикс x функция f непрерывна по переменной y. И f интегрируема на $[\phi(x), \psi(x)]$

Пусть Π такой прямоугольник, что $\overline{\Omega} \subseteq \overline{\Pi}$ Тогда: $f(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ,(x,y) \in \overline{\Omega} \\ 0 & ,(x,y) \in \overline{\Pi} \backslash \overline{\Omega} \end{cases}$

□





6.2. m-кратные интегралы

$\Omega \subset \mathbb{E}^m$, $Ox_1 \dots x_m$; $\varepsilon_m\{(x_1, \dots, x_m) : x_m = 0\}$ где Ω_m - проекция области Ω на мн-во ε_m

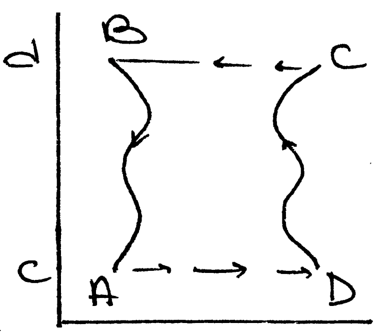
Определение. Область $\Omega \subset \mathbb{E}^m$ называется **элементарной относительно** Ox_m, если ее проекция на Ω_m на множество ε_m является областью, а граница Ω (т.е.$\delta\Omega$) состоит из графиков двух функций: $x_m = \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$; $x_m = \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ и, быть может, боковой поверхности цилиндра, основанием которого является $\delta\Omega_m$ причем $\forall(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \overline{\Omega}_m \to \psi(x_1, \dots, x_{m-1}) \le \phi(x_1, \dots, x_{m-1})$.

Теорема 3. *Пусть $\omega = f(x)$ непрерывна на $\overline{\Omega}$ и область Ω элементарна относительно оси Ox_m, ее граница состоит из двух графиков непрерывных функций $y = \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$; $y = \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$ и, быть может, боковой поверхности цилиндра оси Ox_m, причем $\forall(x_1, \dots, x_{m-1}) \in \overline{\Omega}_m \to \psi_1(x_1, \dots, x_{m-1}) \le \phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})$. Тогда существует повторный интеграл* $\underbrace{\int \cdots \int}_{\Omega_m} dx_1 \dots dx_{m-1} \int\limits_{\psi_1(x_1, \dots, x_{m-1}}^{\phi_1(x_1, \dots, x_{m-1})} f(x) dx_m = \underbrace{\int \cdots \int}_{\Omega_m} f(x_1, \dots, x_m) dx_1 \dots dx_m$

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v) \end{cases} \quad (x,y) \in \Omega; (u,v) \in \Omega^*; \ \mathbb{J} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}; \ \iint\limits_{\Omega} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} f(x,y)|\mathbb{J}(u,v)|dudv$$

7. Формула Грина.

7.1. Вывод формулы.

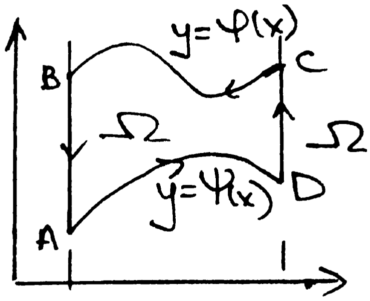


I случай. $\Omega \subset \mathscr{E}$ элементарная область относительно Oy,
$y = \varphi(x), y = \psi(x), \psi(x) \leqslant \varphi(x) \, \forall x \in [a,b]$
$\omega = P(x,y), \omega = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$
ψ, φ — непрерывны на $[a,b]$

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{\psi}^{\varphi} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dy = \int\limits_a^b P(x,\varphi(x))dx - $$
$$- \int\limits_a^b P(x,\psi(x))dx = \int\limits_{BC} P(x,y)dx - \int\limits_{AB} P(x,y)dx = - \int\limits_{CB} P(x,y)dx - $$
$$- \int\limits_{AD} P(x,y)dx = - \oint\limits_{ADCBA} P(x,y)dx = - \oint\limits_{d\Omega} P(x,y)dx$$

$$\int\limits_{BA} P(x,y)dx = \int\limits_{DC} P(x,y)dx = 0 \Rightarrow \iint\limits_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)dxdy = -\oint\limits_{d\Omega} P(x,y)dx$$

II случай. $\Omega \subset \mathscr{E}$ элементарная область относительно Ox,
$x = \varphi(y), x = \psi(y), \psi(y) \leqslant \varphi(y) \forall y \in [c,d]$
$\omega = Q(x,y), \omega = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$
ψ, φ — непрерывны на $[c,d]$



$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{\psi(y)}^{\varphi(y)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)dx = \int\limits_c^d Q(\varphi(y),y)dy -$
$- \int\limits_c^d Q(\psi(y),y)dy = \int\limits_{DC} Q(x,y)dy + \int\limits_{BA} Q(x,y)dy =$
$= \oint\limits_{ADCBA} Q(x,y)dy = \oint\limits_{d\Omega} Q(x,y)dy$

Выше мы воспользовались тем, что $\int\limits_{AD} Q(x,y)dy = \int\limits_{CB} Q(x,y)dy = 0$

Теорема 1. *Пусть область* Ω *представляет собой объединение конечного числа измеримых областей элементарных относительно* Oy. $\overline{\Omega} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} \overline{\Omega'_i}, \overline{\Omega''_i}$, $i = \overline{1,k}$, $j = \overline{1,k}$.
Функции $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ *непрерывны в* $\overline{\Omega}$, *тогда справедлива формула Грина:*

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Теорема (1'). *Если граница* $\partial\Omega$ *ограниченной области* $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ *состоит из конечного числа кусочно гладких контуров и эти функции непрерывны, то имеет место формула Грина:*

$$\iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\right] dxdy = \int\limits_{\partial\Omega} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

7.2. Некоторые приложения формулы Грина.

A. Вычисление плоских измеримых областей.

Предложение. *Если граница* $\partial\Omega$ *ограниченной области* $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ *состоит из конечного числа кусочно гладких контуров, то ее* $m(\Omega)$ *определяется из формулы:*

$$m(\Omega) = 1/2 \int\limits_{\partial\Omega} [xdy - ydx]$$

Доказательство. По формуле Грина $\int\limits_{\partial\Omega} [xdy - ydx] = 2 \iint\limits_{\Omega} dxdy = 2m(\Omega)$ □

B. Условия, при которых дифференциальное выражение(дифф. форма) $Pdx + Qdy$ является дифференциалом некоторой функции $f =$ $= f(x,y)$

Теорема 2. *Пусть область* $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ *— произвольная область и функции* P *и* Q *непрерывны на* $\overline{\Omega}$, *тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\oint\limits_{\Gamma} P(x,y)dx+Q(x,y)dy = 0$, *где Γ — произвольная замкнутая кусочно гладкая кривая, причем $\Gamma \subset \Omega$*

2. $z' = (x',y'), z'' = (x'',y'')$ *— т. области Ω, $\Gamma \subset \Omega$ – кусочно гладкая кривая, соединяющая точки z' и z'', то $\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy$ не зависит от кривой Γ, а только от т. z' и z''.*

3. *Существует функция $w = f(x,y)$ такая, что $df = Pdx + Qdy$, при этом если $z', z'' \in \Omega$ и $\Gamma \subset \Omega$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая точки z' и z'', то*
$$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = f(z'') - f(z') \tag{12}$$

Доказательство. Схема доказательства: $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 1$

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ $z', z'' \in \Omega, \Gamma', \Gamma''$ — кусочно гладкие кривые соединяющие точки z' и z''
$\Gamma = \Gamma' \cup (\Gamma'')^-$ — замкнутуая кусочно гладкая кривая
$0 \overset{1}{=} \int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy - \int\limits_{\Gamma''} Pdx + Qdy \Rightarrow \int\limits_{\Gamma'} Pdx + Qdy = \int\limits_{\Gamma''} Pdx + Qdy$

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ $z^0 = (x_0,y_0) \in \Omega;$ $\Gamma_z \subset \Omega$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая т. z_0 и $z = (x,y)$
$$f(z) = f(x,y) = \int\limits_{\Gamma_z} Pdx + Qdy.$$
$z = (x,y), z' = (x + \Delta x,y), z' \in \Omega$ и $[z, z'] \subset \Omega$
$$\Delta f(z, \Delta x) = f(x + \Delta x,y) - f(x,y) = \int\limits_{\Gamma\{z,z'\}} Pdx + Qdy = \int\limits_{x}^{x+\Delta x} P(t,y)dt =$$
$$= P(x + \theta\Delta x,y)\Delta x, 0 < \theta < 1$$
$\dfrac{f(x + \Delta x,y) - f(x,y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x,y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ аналогично $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$
$\Gamma = \{(x,y), x = \varphi(t), y = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, $z' = (\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$, $z'' = (\varphi(\beta),\psi(\beta))$
$\int\limits_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int\limits_{\alpha}^{\beta}[P(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t)) \cdot \psi'(t)]dt = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{\partial f}{\partial x}x' + \frac{\partial f}{\partial y}y'\right] dt =$
$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} \frac{d}{dt}[f(\phi(t),\psi(t))]dt = f(\varphi(\beta),\psi(\beta)) - f(\varphi(\alpha),\psi(\alpha)) = f(z'') - f(z')$

$\boxed{3 \Rightarrow 1}$ $\Gamma \subset \Omega$ — кусочно гладкая замкнутая кривая, т.е. z' и $z'' \Rightarrow (12) \Rightarrow \int\limits_{\Gamma} Pdx+Qdy = 0$
$\square$

Теорема 3. *Если в условии теоремы 2 $\Omega \subset \mathscr{E}^2$ — односвязная область и функция $P,Q,\frac{\partial P}{\partial y},\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, то по условиям 1–3 теорема 2 эквивалентна следующему условию:*
4. $\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)$ $\forall(x,y) \subset \Omega$

Доказательство. $\boxed{3 \Rightarrow 4}$ $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x}$

$\boxed{4 \Rightarrow 1}$ $\mathit{\Gamma} \subset \Omega$ простая кусочно гладкая замкнутая кривая $\mathit{\Gamma} = \partial\Omega^*, \Omega^* \subset \Omega$.

$\int\limits_{\mathit{\Gamma}} Pdx + Qdy = \iint\limits_{\Omega^*} \left[\frac{\partial Q}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial x}\right] dxdy = 0$ □

Легко доказать, если $\mathit{\Gamma}$ имеет конечное число точек самопересечения. Для произвольной кусочно гладкой замкнутой кривой все остальное справедливо.

Пример. $w = P(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$, $w = Q(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, $\mathbb{E}^2/\{(0,0)\}$ — не является односвязной областью

$\frac{\partial P}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y); \mathit{\Gamma} = \{(x,y): \ x = \cos t, y = \sin t, 0 \leqslant t \leqslant 2\pi\}$

$\oint\limits_{\mathit{\Gamma}} Pdx + Qdy = \oint\limits_{\mathit{\Gamma}} \dfrac{-ydx + xdy}{x^2 + y^2} = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0$

8. Замена переменных в кратном интеграле.

8.1. Преобразование плоских областей

$\Omega^* \subset \mathbb{E}^2_{(uv)}, \Omega \subset \mathbb{E}^2_{(x,y)};$

$$F : \overline{\Omega^*} \to \overline{\Omega};\ F : x = f^1(u,v),\ y = f^2(y,v) \qquad (13)$$

1. F — взаимно однородное отображение
2. F — дважды непрерывна дифференцируема
3. $\mathcal{J}_F = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} \neq 0$ в $\overline{\Omega^*}$

$G = F^{-1};\ G : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega^*} \quad G : u = g^1(x,y),\ V = g^2(x,y)$

Свойство А. При отображении F внутренние точки множества $\overline{\Omega^*}$ переходят во внутренние точки $\overline{\Omega}$.

Свойство Б. При отображении F гладкая кривая переходит в гладкую кривую.

Доказательство. Свойства А: $w_0 = (u_0,v_0) \in \Omega^* \to z_0 = (x_0,y_0) \in ?$
Из (13) определены u и v как функции переменных x и y в некоторой окрестности т. z_0, $z_0 \in \Omega$ □

Доказательство. Свойства Б: $\mathit{\Gamma}^* = \{(u,v) : u = \varphi(t), v = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, $\mathit{\Gamma}^* \subset \Omega^*$, $\mathit{\Gamma}^*$ — гладкая кривая, φ, ψ — непрерывно дифференцируемы на $[\alpha, \beta]$ функции и $\forall\ t \in [\alpha, \beta] \to$
$\to [\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 \neq 0$

$\Gamma = \{(x,y) : x = f_1(\varphi(t), \psi(t)), \, y = f^2(\varphi(t), \psi(t)), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$, $\Gamma \subset \Omega$
$x'(t) = \frac{\partial f^1}{\partial u}\varphi'(t) + \frac{\partial f^1}{\partial v}\psi'(t)$; $\quad y'(t) = \frac{\partial f^2}{\partial u}\phi'(t) + \frac{\partial f^2}{\partial v}\psi'(t)$. Учтем что $\mathcal{J} \neq 0$, предположим что $\exists t_0 : \; x'(t_0) = y'(t_0 = 0$ из неравенства якобиана нулю следует $\varphi'(t) = \psi'(t_0) = 0$ — противоречие

$$\begin{cases} x &= f^1(u_0,v), \, y = f^2(u_0,v), \, v \in \mathbb{R} \\ u^0 &= g^1(x,y) \end{cases}$$
$$\begin{cases} x &= f^1(u,v_0), \, y = f^2(u,v_0), \, u \in \mathbb{R} \\ v^0 &= g^2(x,y) \end{cases}$$

Кривые каждого из семейств не пересекаются в силу взаимо однозначности F, но через каждую точку проходит 2 кривые по одной из каждого семейства. □

Пример. $x = \rho\cos\varphi, \, y = \rho\sin\varphi,$
$(\rho_0, \varphi_0) \quad (\rho_0, \varphi_0 + 2\pi k), \, k \in \mathbb{Z}; \; 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$
$\prod = \{(\rho, \varphi) : 0 < \rho < R, \, 0 < \varphi < 2\pi\}; \; F : \prod \longleftrightarrow K/K_1,$
$K = \{(x,y) : x^2 + y^2 < R^2\}, \, K_1 = \{(x,y) : y = 0, \, 0 \leqslant x < R\}$
$m(K_1) = 0. \; \mathcal{J}_F = \rho > 0$ в $\prod$

Пример 2. $F : x = \rho\cos\varphi\cos\psi, \, y = \rho\sin\varphi\sin\psi$
$\prod = \{(\rho, \varphi, \psi) : 0 < \rho < R, \, 0 < \varphi < 2\pi, \; -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$
$K/K_1, \, K = \{(x,y,z) : x^2 + y^2 + z^2 < R^2\}$
$K_1 = \{(x,y,z) : 0 \leqslant x^2 + z^2 < R^2, \, y = 0)\}, \, m(K_1) = 0; \; \mathcal{J}_F = \rho^2\cos\psi > 0$ в $\prod$

Пример 3. $F : \; x = \rho\cos\varphi, \, y = \rho\sin\varphi, \, z = z$
$\prod = \{(\rho, \varphi, z) \; 0 < \rho < R, \, 0 < \varphi < 2\pi, 0 < z < H\}$
$K \backslash K_1 : K = \{(x,y,z) : x^2 + y2 < R, \, 0 < z < H\}$
$K_1 = \{(x,y,z) : \; o < x < R, \, y = 0, \, 0 < z < H\}, \, m(K_1) = 0; \; \mathcal{J} = \rho > 0$ в $\prod$

8.2. Выражение площади в криволинейных координатах.

$\partial\Omega^* = \{(u,v) : \; u = \varphi(t), \, v = \psi(t), \, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$
$\partial\Omega = \{(x,y) : \; x = f^1(\varphi(t),\psi(t)), y = f^2(\varphi(t),\psi(t)), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$
α и β выбраны таким образом, что $\partial\Omega$ обходится в положительном направлении.

$$m(\Omega) = \int\limits_{\partial\Omega} x dy = \int\limits_\alpha^\beta f^1(\varphi(t),\psi(t)) \left[\frac{\partial f^2}{\partial u}\varphi'(t) + \frac{\partial f^2}{\partial v}\psi'(t)\right] dt = \pm \int\limits_{\partial\Omega^*} f^1 \frac{\partial f^2}{\partial u} du + f^1 \frac{\partial f^2}{\partial v} dv$$
$$P(u,v) = f^1 \frac{\partial f^2}{\partial u}, \, Q(u,v) = f^1 \frac{\partial f^2}{\partial v}$$
$$\frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial f^1}{\partial v}\frac{\partial f^2}{\partial u} + f^1 \frac{\partial^2 f^2}{\partial v \partial u}, \, \frac{\partial Q}{\partial u} = \frac{\partial f^1}{\partial u}\frac{\partial f^2}{\partial v} + f^1 \frac{\partial^2 f^2}{\partial u \partial v}$$
$$\frac{\partial Q}{\partial u} - \frac{\partial P}{\partial v} = \frac{\partial f_1}{\partial u}\frac{\partial f^2}{\partial v} - \frac{\partial f^1}{\partial v}\frac{\partial f^2}{\partial u} = \mathcal{J}_F(u,v)$$

$m(\Omega) = \iint\limits_{\Omega^*} |(J)_F(u,v)|\, dudv$

Предложение. *Если $\mathcal{J}_F(u,v) > 0$, то положительному обходу $\partial\Omega^*$ соответствует положительному обходу $\partial\Omega$. Если $\mathcal{J}_F(u,v) < 0$, то положительный обход $\partial\Omega^*$ соответствует отрицательный обход $\partial\Omega$*

8.3. Геометрический смысл модуля якобиана.

$[\alpha,\beta] \subset [\alpha_2,\beta_2] \subset \ldots \subset [\alpha_k,\beta_k] \subset \ldots;\ \delta_k = \beta_k - \alpha_k \to 0$ при $k \to \infty$

т. Кантора $\exists! x_0 : x_0 \in [\alpha_k, \beta_k] \forall k$

$y = f(x)$ — строго монотонна на $[\alpha,\beta]$, непрерывна на $[\alpha,\beta]$ и дифференцируема на (α,β), тогда:
$\forall k \exists x_k \in (\alpha_k,\beta_k) : f(\beta_k) - f(\alpha_k) = f'(x_k) \cdot \delta_k;\ B_k = f(\beta_k), A_k = f(\alpha_k),\ \Delta k$ для отрезка $[A_k, B_k]$ или $[B_k, A_k]$
$|f'(x_k)| = \frac{\Delta k}{\delta k},\ k \to \infty,\ x_k \to x_0;\ |f'(x_0)| = \lim\limits_{k\to\infty} \frac{\Delta K}{\delta K}$
$\overline{Q_k^*} \subset \Omega^*;\ \overline{Q_1^*} \subset \overline{Q_2^*} \subset \ldots \subset \overline{Q_k^*} \subset \ldots$ причем $m(\overline{Q_k^*}) \to 0(\,k \ \to \infty) \Rightarrow \exists$ единственная точка $\omega_0 = (u_0,v_0) : \omega_0 \in \overline{Q_k^*}\ \forall k$
$\exists \omega_k \in \overline{\Omega_k^*} : m(\overline{Q_k^*}) = |\mathcal{J}_F(\omega_k)|\, m(\overline{Q_k^*}),\ \overline{Q_k^*} = F(\overline{Q_k^*}),\ \omega_k \to \omega_0$ при $k \to \infty$ значит:
$|\mathcal{J}(\omega_0)| = \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{m(\overline{\Omega})}{m(\overline{\Omega_k^*})}$ — коэффициент растяжения точки ω_0 плоскости переменных u,v при заданном отображении F в x,y.

8.4. Замена переменных в двойном интеграле.

Напомним начальные условия:
$F = \overline{\Omega^*} \to \overline{\Omega}$

I Взаимно однозначное

II Дважды непрырвна дифференцируема

III $\mathcal{J}_k(u^*,v^*) \neq 0;\ (u^*,v^*) \in \overline{\Omega^*}$

Нас теперь будет интересовать $\iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy$ причем $w = g(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$

Теорема 4. *Пусть отображение F удовлетворяет свойствам I–II, функция $w = g(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и F преобразование ограниченной замкнутой области с кусочно гладкой границей $\overline{\Omega^*}$ в ограниченной замкнутой области с кусочно гладкой границей $\overline{\Omega}$. Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} g(f^1(u,v),f^2(u,v))\, |\mathcal{J}_F(u,v)|\, dudv \qquad (14)$$

Доказательство. T^* — разбиение области Ω^*, $T^* = \{\Omega_i^*\}_{i=1}^n$ при F $T = \{\Omega_i\}_{i=1}^n$ — разбиение Ω. $I = \sum\limits_{i=1}^n g(z^i) m(\Omega_i)$

$z^i = (x^i, y^i) \in \overline{\Omega_i}$, $\forall i \, \exists w^i = (u^i,v^i) \in \overline{\Omega^*} : m(\Omega_i) = |\mathcal{J}_F(w^i)| \, m(\Omega_i^*)$ тогда, учитывая что $z^i = (f^1(w^i),f^2(w^i)))$

$$I = \sum_{i=1}^{n} g(z^i) m(\Omega_i) = \sum_{i=1}^{n} g(z^i) \left|\mathcal{J}_F(w^i)\right| m(\Omega_i^*) = \sum_{i=1}^{n} g(f^1(w^i),f^2(w^i)) \left|\mathcal{J}_F(w^i)\right| m(\Omega_i^*) \quad (15)$$

Заметим, что первая часть (15) стремится к первой части (14) и аналогично ведут себя вторые части. □

Замечание. Эта же формула справедлива в случае m–кратного интеграла.

Часть II

Поверхностные интегралы.

9. Понятие поверхности.

9.1. Простейшие примеры задания поверхности.

Вся эта тема рассматривается на $\mathbb{E}^3, Oxyz$.
Перечислим способы задания поверхности:

1° График функции — простейший пример задания поверхности
$z = f(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega}$, $f(x,y) \geqslant 0$

2° $F(x,y,z) = 0$, предполагаем, что в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) F непрерывно дифференцируема и $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Это уравнение задает функцию z как не явную функцию от x и $y : z = f(x,y)$ в окрестности некоторой точки (x_0,y_0,z_0).

3° $F(x,y) = 0$ — случай задания цилиндрической поверхности.

9.2. Параметрическое задание поверхности.

$F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^2_{(u,v)} \to \mathbb{E}^3_{(x,y,z)}$

I $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$

II $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$, F непрерывно дифференцируема

$$\begin{pmatrix} \varphi_u & \psi_u & \chi_u \\ \varphi_v & \psi_v & \chi_v \end{pmatrix} \qquad A = \Delta_{\psi\chi} = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix} \quad B = \Delta_{\chi\varphi} = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix} \quad C = \Delta_{\varphi\psi} = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

Предположим, что хотя бы 1 из определителей $\neq 0 : \Delta_{\varphi\psi} \neq 0$, $U(u_0,v_0,x_0,y_0)$

$$\begin{cases} x - \varphi(u,v) = 0 \\ y - \psi(u,v) = 0 \end{cases} \quad u = h(x,y),\ v = g(x,y) \text{ в } \widetilde{u}(x_0,y_0),\ z = \chi(h(x,y),g(x,y)) \Rightarrow z = f(x,y)$$

(u_0,v_0) — особая точка: $\Delta_{\psi\chi} = \Delta_{\chi\varphi} = \Delta_{\varphi\psi} = 0$
(u_0,v_0) — не является особой: $[\overline{r_u}(u_0,v_0),\overline{r_v}(u_0,v_0)] \neq \overline{0} \Rightarrow \overline{r_u}(u_0,v_0) \neq \overline{0}$, $\overline{r_v}(u_0,v_0) \neq \overline{0}$

Определение. Множество точек $S \subset \mathbb{E}^3_{(x,y,z)}$ являющихся образом ограниченной замкнутой плоской области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^2_{(u,v)}$ при непрерывном отображении F вида I называется параметрически заданной поверхностью, а отображение I называется ее координатным представлением

$$S = \{x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\ (u,v) \subset \overline{\Omega}\} \tag{16}$$

Определение. Множество точек $S \subset \mathbb{E}^3_{(x,y,z)}$ являющихся образом ограниченной замкнутой плоской области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^2_{(u,v)}$ при непрерывном отображении F вида II называется параметрически заданной поверхностью, а отображение II называется ее векторным представлением

$$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ u,v \in \overline{\Omega}\} \tag{17}$$

Определение. Непрерывно дифференцируемое отображение F вида I или II называется гладким, если $[\overline{r_u},\overline{r_v}] \neq 0$ в $\overline{\Omega}$
Определение. Поверхность S вида (16) или (17) называется *простой гладкой поверхностью*, если отображение F вида I или II соответственно взаимно однозначно или гладкое.
Пример. $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^2_{(x,y)}$, f — непрерывно дифференцируемая функция.
$\overline{r} = (x,y,f(x,y))$, $\overline{r_x} = (1,0,f_x)$. $\overline{r_y} = (0,1,f_y)$

$$[\overline{r_x},\overline{r_v}] = \begin{vmatrix} i\ j\ k \\ 1\ 0\ f_x \\ 0\ 1\ f_y \end{vmatrix} = -f_x i - f_y j + k \neq \overline{0} \quad |[\overline{r_x},\overline{r_v}]| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Определение. Для простой гладкой поверхности $S \subset \mathbb{E}^3$, заданной отображением F вида I или II образ $\partial\Omega$ при F названной краем поверхности S обозначается δS . Нужно помнить, что грань и граница не совпадают $\partial S = S$, но $\delta S \neq \partial S$

$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ (u,v) \in \Omega\} \quad S = \{x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\ (u,v) \subset \overline{\Omega}\}$
$u = u_0 \quad F_{u_0} \subset \mathbb{E}^3 : F_{u_0} = \{\overline{r} = \overline{r}(u_0,v),\ (u_0,v) \subset \overline{\Omega}\}$
$v = v_0 \quad F_{v_0} \subset \mathbb{E}^3 : F_{v_0} = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v_0),\ (u,v_0) \subset \overline{\Omega}\}$
Пример. Рассмотрим в $\mathbb{E}^3$ сферу $S = \{x = \cos\varphi\cos\psi,\ y = \sin\varphi\cos\psi,\ z = \sin\psi,$
$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2\}$. Тогда формула $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Пример. Зададим параметрически кривую:
$y = 0 : x = \Phi(u),\ z = \Psi(u), \alpha \leqslant u \leqslant \beta,\ \mathit{\Phi}(u) \geqslant 0$
$S = \{x = \mathit{\Phi}(u)\cos v,\ y = \mathit{\Phi}(u)\sin v,\ z = \Psi(u),\ \alpha \leqslant u \leqslant \beta,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\}$
$S = \{x = (a + a/2\cos u)\cos v,\ y = (a + a/2\cos u)\sin v,\ z = a/2\sin u\}\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

Определение. Точка $M \subset S : \overline{OM} = \overline{r}(u_1,v_1) = \overline{r}(u_2,v_2)$ для различных точек (u_1,v_2) и (u_2,v_2) множества $\overline{\Omega}$, называются кратными точками поверхности S.

Определение. Поверхность S, имеющая кратные точки, называется поверхностью с самопересечениями.

Определение. Если поверхность S ограничивает некоторое тело $G \subset \mathbb{E}^3$, т.е. $\partial G = S$, по поверхности S называется замкнутой

9.3. Допустимые замены переменных.

$F : \Omega \to \mathbb{E}^3$, $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$ — взаимооднозначное, непрерывно дифференцируемое, без особых точек
$G : \overline{\Omega^*} \to \mathbb{E}^3 \overline{\rho} = \overline{\rho}(u^*,v^*)$
Эти отображения называются эквивалентными или задающими одну и ту же поверхность, если $\exists H : \overline{\Omega^*} \to \overline{\Omega} : u = h^1(u^*,v^*)$, $v = h^2(u^*,v^*)$ и оно обладает следующими свойствами.

1) Взаимооднозначность

2) Непрерывная дифференцируемость

3) $\mathcal{J}_{(u,v)} = \frac{D(u,v)}{D(u^*,v^*)} \neq 0$ в $\overline{\Omega^*}$

4) $\overline{\rho}(u^*,v^*) = \overline{r}(h^1(u^*,v^*),h^2(u^*,v^*)$

Преобразование параметров осуществляющего переход от одного преобразования поверхности S к другому ему эквивалентному, называется допустимой заменой параметра.

Предложение. *Если $S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{\Omega}\}$ является простой гладкой поверхностью, то при допустимой замене параметра поверхность $S = \{\overline{\rho} = \overline{\rho}(u^*,v^*),\ (u^*,v^*) \in \in \overline{\Omega^*}\}$ остается простой гладкой поверхностью.*

$[\overline{\rho_{u^*}}, \overline{\rho_{v^*}}] \neq 0$
$\overline{\rho_{u^*}} = h^1_{u^*}\overline{r_u} + h^2_{u^*}\overline{r_v}$, $\overline{\rho_{v^*}} = h^1_{v^*}\overline{r_u} + h^2_{v^*}\overline{r_v}$
$[\overline{\rho_{u^*}},\overline{\rho_{v^*}}] = (h^1_{u^*}h^2_{v^*} - h^1_{v^*}h^2_{u^*})[\overline{r_u},\overline{r_v}] \neq 0$

9.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Рассмотрим $\overline{r_0} = \overline{r}(u_0,v_0)$
$\Gamma = \{\overline{r} = \overline{r}(u(t),v(t)),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \subset S; \quad \overline{r_0} \in \Gamma$
$d\overline{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}dv \quad du = u'(t)dt,\ dv = v'(t)dt$

Определение. Плоскость, проходящая через точку $r_0 \in S$, в которой лежат все касательные к кривым $\Gamma \subset S$, в точке $\overline{r_0}$, называется касательной плоскостью, а т $\overline{r_0}$ называется точкой касания. В Каждой точке $\overline{r_0}$, которая не является особой существует и единственная касательная плоскость.
$\overline{r} = (x,y,z)$, $\overline{r_0} = (x_0,y_0,z_0)$, $x_0 = \varphi(u_0,v_0)$, $y_0 = \psi(u_0,v_0)$, ${}_0 = \chi(u_0,v_0)$

$\overline{r_u} = (x_u,y_u,z_u)(u_0,v_0)$, $\overline{r_v} = (x_v,y_v,z_v)(u_0,v_0)$

$$((\overline{r}-\overline{r_0}),\overline{r_u},\overline{r_v}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \quad z = f(x,y),(x,y) \in \overline{\Omega}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0 \quad f_x(x-x_0)+f_y(y-y_0)-(z-z_0) = 0$$

Определение. Прямая, проходящая через точку $\overline{r_0} \in S$(простой гладкой поверхности), перпендикулярно касательной плоскости в этой точке называется нормальной прямой.

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C} \quad A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = \frac{z-z_0}{-1}$$

Определение. Ненулевой вектор, параллельный нормальной прямой, проходящий через точку $\overline{r_0} \in S$ касательной плоскости, называется вектором нормали к поверхности S в т. $\overline{r_0}$

$$\overline{n} = \pm\frac{[\overline{r_u},\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|}$$

Фиксируя $+$ или $-$ задается непрерывная векторная функция.

9.5. Двусторонние и односторонние поверхности. Ориентация поверхности.

Рассмотрим поверхность S, выберем точку на этой поверхности $A_0 \in S$, выпустим из нее контур $\Gamma_0 \in S$.

Рассматриваемые случаи:

I Как ушел так и пришел (прим. лента Мебиуса)

II Ушел и пришел с обратным направлением

Определение. Если для любой точки $A_0 \in S$ при обходе любого контура $\Gamma_0 \subset S$, $\Gamma_0 \cap \delta S = \varnothing$ с началом и концом в точке A_0 имеем место случай II, то поверхность S называется односторонней поверхностью. Такие поверхности рассматривать не будем.

Определение. Если для любой точки $A_0 \in S$ при обходе любого контура $\Gamma_0 \subset S$ с началом и концом в точке A_0 имеем место случай I, то поверхность S называется двусторонней поверхностью.

Предложение. *Для двусторонней гладкой поверхности S с кусочно гладким краем δS задание направления нормали в одой точке определяет задание направления нормали во всех точках поверхности.*

Доказательство. $\overline{n} = \pm\dfrac{[\overline{r_u}, \overline{r_v}]}{|[\overline{r_u}, \overline{r_v}]|}$, выберем две точки и нормаль в однйо из них: A_0, A_1, $\overline{n_0}$, ne$\Gamma^1_{01} \to \overline{n_1}$, $\Gamma^2_{01} \to \overline{n}^-_1$, $\Gamma = \Gamma^1_{01} \cup (\Gamma^2_{01})^-$ — противоречие □

Определение. Гладкая поверхность S называется ориентированной, если единичный вектор нормали $\overline{n}$ задан на ней как непрерывная векторная функция.
$\cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\Delta = A^2 + B^2 + C^2$

$z = f(x,y)$, $\cos\alpha = \dfrac{-f_x}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\beta = \dfrac{-f_y}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\Delta = 1 + f_x^2 = f_y^2$

$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\, (u,v) \in \Omega\}$ $\quad S = \{x = \varphi(u,v),\, y = \psi(u,v),\, z = \chi(u,v),\, (u,v) \subset \overline{\Omega}\}$
$u = u_0 \quad F_{u_0} \subset \mathbb{E}^3 : F_{u_0} = \{\overline{r} = \overline{r}(u_0,v),\, (u_0,v) \subset \overline{\Omega}\}$
$v = v_0 \quad F_{v_0} \subset \mathbb{E}^3 : F_{v_0} = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v_0),\, (u,v_0) \subset \overline{\Omega}\}$
Пример. Рассмотрим в $\mathbb{E}^3$ сферу $S = \{x = \cos\varphi\cos\psi,\, y = \sin\varphi\cos\psi,\, z = \sin\psi,$
$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2\}$. Тогда формула $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Пример. Зададим параметрически кривую:
$y = 0 : x = \Phi(u),\, z = \Psi(u), \alpha \leqslant u \leqslant \beta,\ \Phi(u) \geqslant 0$
$S = \{x = \Phi(u)\cos v,\, y = \Phi(u)\sin v,\, z = \Psi(u),\, \alpha \leqslant u \leqslant \beta,\, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\}$
$S = \{x = (a + a/2\cos u)\cos v,\, y = (a + a/2\cos u)\sin v,\, z = a/2\sin u\}\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

Определение. Точка $M \subset S : \overline{OM} = \overline{r}(u_1,v_1) = \overline{r}(u_2,v_2)$ для различных точек (u_1,v_2) и (u_2,v_2) множества $\overline{\Omega}$, называются кратными точками поверхности S.

Определение. Поверхность S, имеющая кратные точки, называется поверхностью с самопересечениями.

Определение. Если поверхность S ограничивает некоторое тело $G \subset \mathbb{E}^3$, т.е. $\partial G = S$, по поверхности S называется замкнутой

9.6. Допустимые замены переменных.

$F : \Omega \to \mathbb{E}^3, \overline{r} = \overline{r}(u,v)$ — взаимооднозначное, непрерывно дифференцируемое, без особых точек
$G : \overline{\Omega^*} \to \mathbb{E}^3\overline{\rho} = \overline{\rho}(u^*,v^*)$
Эти отображения называются эквивалентными или задающими одну и ту же поверхность, если $\exists H : \overline{\Omega^*} \to \overline{\Omega} : u = h^1(u^*,v^*),\, v = h^2(u^*,v^*)$ и оно обладает следующими свойствами.

1) Взаимооднозначность

2) Непрерывная дифференцируемость

3) $\mathcal{J}_{(u,v)} = \frac{D(u,v)}{D(u^*,v^*)} \neq 0$ в $\overline{\Omega^*}$

4) $\overline{\rho}(u^*,v^*) = \overline{r}(h^1(u^*,v^*),h^2(u^*,v^*)$

Преобразование параметров осуществляющего переход от одного преобразования поверхности S к другому ему эквивалентному, называется допустимой заменой параметра.

Предложение. *Если $S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{\Omega}\}$ является простой гладкой поверхностью, то при допустимой замене параметра поверхность $S = \{\overline{\rho} = \overline{\rho}(u^*,v^*),\ (u^*,v^*) \in \in \overline{\Omega^*}\}$ остается простой гладкой поверхностью.*

$[\overline{\rho_{u^*}}, \overline{\rho_{v^*}}] \neq 0$
$\overline{\rho_{u^*}} = h^1_{u^*}\overline{r_u} + h^2_{u^*}\overline{r_v}$, $\overline{\rho_{v^*}} = h^1_{v^*}\overline{r_u} + h^2_{v^*}\overline{r_v}$
$[\overline{\rho_{u^*}},\overline{\rho_{v^*}}] = (h^1_{u^*}h^2_{v^*} - h^1_{v^*}h^2_{u^*})[\overline{r_u},\overline{r_v}] \neq 0$

9.7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Рассмотрим $\overline{r_0} = \overline{r}(u_0,v_0)$
$\mathit{\Gamma} = \{\overline{r} = \overline{r}(u(t),v(t)),\ \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \subset S; \quad \overline{r_0} \in \mathit{\Gamma}$
$d\overline{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}dv \quad du = u'(t)dt,\ dv = v'(t)dt$

Определение. Плоскость, проходящая через точку $r_0 \in S$, в которой лежат все касательные к кривым $\mathit{\Gamma} \subset S$, в точке $\overline{r_0}$, называется касательной плоскостью, а т $\overline{r_0}$ называется точкой касания. В Каждой точке $\overline{r_0}$, которая не является особой существует и единственная касательная плоскость.
$\overline{r} = (x,y,z)$, $\overline{r_0} = (x_0,y_0,z_0)$, $x_0 = \varphi(u_0,v_0)$, $y_0 = \psi(u_0,v_0)$, ${}_0 = \chi(u_0,v_0)$
$\overline{r_u} = (x_u,y_u,z_u)(u_0,v_0)$, $\overline{r_v} = (x_v,y_v,z_v)(u_0,v_0)$

$$((\overline{r} - \overline{r_0}),\overline{r_u},\overline{r_v}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \quad z = f(x,y),(x,y) \in \overline{\Omega}$$

Пример.

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0 \quad f_x(x - x_0) + f_y(y - y_0) - (z - z_0) = 0$$

Определение. Прямая, проходящая через точку $\overline{r_0} \in S$(простой гладкой поверхности), перпендикулярно касательной плоскости в этой точке называется нормальной прямой.

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C} \quad A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{x - x_0}{f_x} = \frac{y - y_0}{f_y} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Определение. Ненулевой вектор, параллельный нормальной прямой, проходящий через точку $\overline{r_0} \in S$ касательной плоскости, называется вектором нормали к поверхности S в т. $\overline{r_0}$

$$\overline{n} = \pm\frac{[\overline{r_u},\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|}$$

Фиксируя + или − задается непрерывная векторная функция.

9.8. Двусторонние и односторонние поверхности. Ориентация поверхности.

Рассмотрим поверхность S, выберем точку на этой поверхности $A_0 \in S$, выпустим из нее контур $\mathit{\Gamma}_0 \in S$.
Рассматриваемые случаи:

I Как ушел так и пришел (прим. лента Мебиуса)

II Ушел и пришел с обратным направлением

Определение. Если для любой точки $A_0 \in S$ при обходе любого контура $\mathit{\Gamma}_0 \subset S$, $\mathit{\Gamma}_0 \cap \delta S = \varnothing$ с началом и концом в точке A_0 имеем место случай II, то поверхность S называется односторонней поверхностью. Такие поверхности рассматривать не будем.

Определение. Если для любой точки $A_0 \in S$ при обходе любого контура $\mathit{\Gamma}_0 \subset S$ с началом и концом в точке A_0 имеем место случай I, то поверхность S называется двусторонней поверхностью.

Предложение. *Для двусторонней гладкой поверхности S с кусочно гладким краем δS задание направления нормали в одой точке определяет задание направления нормали во всех точках поверхности.*

Доказательство. $\overline{n} = \pm\dfrac{[\overline{r_u},\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|}$, выберем две точки и нормаль в однйо из них: A_0, A_1, $\overline{n_0}$, ne$\mathit{\Gamma}_{01}^1 \to \overline{n_1}$, $\mathit{\Gamma}_{01}^2 \to \overline{n}_1^-$, $\mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}_{01}^1 \cup (\mathit{\Gamma}_{01}^2)^-$ — противоречие □

Определение. Гладкая поверхность S называется ориентированной, если единичный вектор нормали $\overline{n}$ задан на ней как непрерывная векторная функция.

$\cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\Delta = A^2 + B^2 + C^2$

$z = f(x,y)$, $\cos\alpha = \dfrac{-f_x}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\beta = \dfrac{-f_y}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\Delta = 1 + f_x^2 = f_y^2$

9.9. Кусочно гладкие поверхности

S — простая гладкая поверхность с кусочно гладким краем δS.

Определение. Ориентация края δS поверхности S согласовывается с ориентацией поверхности S, если глядя конца вектора нормали на край он обходится против часовой стрелки.

Определение. Поверхность S называется кусочно гладкой поверхностью, если ее можно представить в виде конечного объединения простых гладких поверхностей, которые пересекаются разве что только по общим краям

$S = \bigcup\limits_{k=1}^{m} S_k$, S_k — простая гладкая поверхнсоть

Пример. $S = \{\overline{r} = \overline{r}(\varphi,\psi),\ 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\ -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2\}$ — сферические координаты.

$S:\ x^2 + y^2 + z = 1$

$S_1 = \{z = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 = 1/2\}$;

$S_2 = \{z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2},\ x^2 + y^2 = 1/2\}$

$S_3 = \{\overline{r} = \overline{r}(\varphi, \psi),\ |\psi| \leqslant \pi/4,\ 0 \leqslant \varphi \leqslant \pi\}$;

$S_4 = \{\overline{r} = \overline{r}(\varphi, \psi),\ |\psi| \leqslant \pi/4,\ \pi \leqslant \varphi \leqslant 2\pi\}$

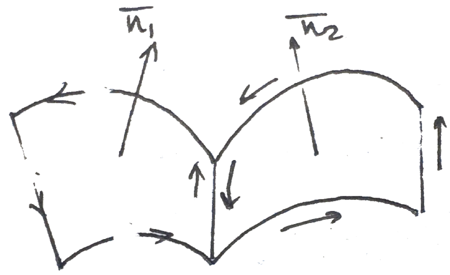


Рис. 1: $\overline{n} = \{\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_m}\}$

10. Площадь поверхности

10.1. Пример Шварца (сапог Шварца)

Рассмотрим прямой круговой цилиндр $\prod$, радиуса R и высотой H

$S_{\triangle} = R \sin \pi/n \sqrt{(H/m)^2 + R^2 \left(1 - \cos \pi/n\right)^2}$

$S_{\Pi} = 2mnS_{\triangle} = 2\pi R \frac{\sin \pi/n}{\pi/n} \sqrt{\frac{R^2\pi^4}{4} \left(m/n^2\right)^2 \left(\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{\pi/2n}\right)^4 + H^2}$

$m \to \infty,\ n \to \infty : m/n^2 \to q \geq 0 \Rightarrow S = 2\pi R \sqrt{\frac{R^2\pi^4}{4} q^2 + H^2};\ S = 2\pi RH \Leftrightarrow q = 0$

Предложение. *Площадь простой гладкой поверхности S не зависит от ее векторного представления.*

Доказательство. Воспользуемся допустимой заменой координат:

$H:\quad u = h^1(u^*, v^*),\ v = h^2(u^*, v^*),\ (u^*, v^*) \in \overline{\Omega^*}$

$m(S) = \iint\limits_{\Omega} |[\overline{r_u}, \overline{r_v}]|\, dudv = \iint\limits_{\Omega^*} |\, |[\overline{r_u}(h^1, h^2),\, \overline{r_v}(h^1, h^2)]|\, |\mathcal{J}_H(u^*, v^*)| du^* dv^* = \iint\limits_{\Omega^*} |\overline{\rho_{u^*}}, \overline{\rho_{v^*}}|\, du^*,dv^*$

□

10.2. Другое выражение для площади поверхности

$|[\overline{r_u}, \overline{r_v}]|^2 + (\overline{r_u}, \overline{r_v})^2 = |\overline{r_u}|^2\, |\overline{r_v}|^2$

$|[\overline{r_u}, \overline{r_v}]| = \sqrt{EG - F^2},\ E = |r_u|^2,\ G = |r_v|^2,\ F = (\overline{r_u}, \overline{r_v})$

$m(s) = \oint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2} dudv$ — первый дифференциал поверхности.

Пример. $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{\Omega}$
$m(S) = \oint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + (f_x)^2 + (f_y)^2} dxdy = \oint\limits_{\Omega} \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$

11. Поверхностные интегралы

11.1. Поверхностный интеграл первого рода

$g = g(x,y,z)$ непрерывна на простой гладкой поверхности S, $S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{\Omega}\}$
$S = \bigcup\limits_{j=1}^{k} S_j$, $\xi_j \in S_j$, $T = \{S_j\}_{j=1}^k$; $\xi = \{\xi_j\}_{j=1}^k$; $\quad \sigma\{T,\xi\} = \sum\limits_{j=1}^{k} g(\xi_j) m(S_j)$

Определение. Число I называется пределом интегральной суммы $\sigma\{T,\xi\}$ при $\Delta_T \to 0$, если $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T : \Delta_T < \delta \& \forall \xi \Rightarrow |\sigma\{T,\xi\} - I| < \varepsilon$

Определение Если существует предел $\sigma\{T,\xi\}$ при $\Delta_T \to 0$, то он называется поверхностным интегралом первого рода от функции g по поверхности S
Обозначение. $\iint\limits_S g(x,y,z)dS = \iint\limits_S gdS$

11.2. Сведение поверхностного интеграла первого роад к двойному интегралу

Теорема 1. *Если S простая гладкая поверхность с кусочно гладким краем δS, а $g(x,y,z)$ непрерывна на S, то справедлива формула:*

$$\iint\limits_S g(x,y,z)dS = \iint\limits_S g(\overline{r}(u,v)\,|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|)$$

Доказательство. $T = \{S_i\}$, $T_i = \{\Omega_i\}$, $\Delta_T \to 0 \Leftrightarrow \Delta_{T'} \to 0$
$F(\Omega_i) = S_i$, $\xi_i \in S_i$, $\overline{O\xi} = \overline{r}(\eta_i)$, $\xi = \{\xi_i\}$, $\eta = \{\eta_i\}$
$\sigma^S\{T,\xi\} =\sim_i g(\xi_i)m(S_i) = \sum\limits_i g(\xi_i) \iint\limits_{\Omega_i} |[\overline{r_u},\overline{r_v}]| dudv$
$\exists \eta_i^* \in \overline{\Omega_i} :\ \sum\limits_i g(r(\eta_i))|[\overline{r_u}(\eta_i^*),\overline{r_v}(\eta_i^*)]|m(\Omega_i)$
$\sigma\{T',\eta\} = \sum\limits_i g(r(\eta_i))|[\overline{r_u}(\eta_i),\overline{r_v}(\eta_i)]|m(\Omega_i)$
$w = |[\overline{r_u}(\eta),\overline{r_v}(\eta)]|$ — непрерывна на $\overline{\Omega} \overset{\text{т. Кантора}}{\Longrightarrow}$ равномерно непрерывна на $\overline{\Omega}$
$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) : \forall \eta, \eta' \in \overline{\Omega} : \rho(\eta > \eta') < \delta \to ||[\overline{r_u}(\eta),\overline{r_v}(\eta)]| - |[\overline{r_u}(\eta'),\overline{r_v}(\eta')]|| < \frac{\varepsilon}{Mm(\Omega)}$
$|\sigma^S\{T,\xi\} - \sigma\{T',\eta\} \leqslant M \sum\limits_i ||[\overline{r_u}(\eta),\overline{r_v}(\eta)]| - |[\overline{r_u}(\eta'),\overline{r_v}(\eta')]||m(\Omega_i) \leqslant M\frac{\varepsilon}{Mm(\Omega)} m(\Omega) = \varepsilon$
$\Delta_T \to 0 \Rightarrow \sigma^S\{T,\xi\} \to I \leftarrow \sigma\{T',\eta\}$ $\square$

11.3. Определение поверхностного интеграла второго рода

$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v), (u,v) \in \overline{\Omega}\}$ ориентированная гладкая поверхность с кусочно гладким краем δS, $\overline{n} = \pm\frac{[\overline{r_u},\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|}$, $R = R(x,y,z)$ определена на S
$T = \{S_i\}$, X_i — проекция S_i на плоскость xOy
Из T отбрасываем те S_i, которые

1. не взаимно однозначное отображение на плоскость xOy
2. часть S_i лежит сверху и снизу от поверхности S_i (согнутый листик)

$T' = \{S_i\}$; $X_i = \pm m(X_i)$, $\Delta_T <$ наибольший диаметр множеств $S_i \in T'$
Ориентация: δS_i, $S_i \in T'$, согласована с ориентацией поверхности S, ∂X_i обходится таким образом, что X_i остается слева.

Правило выбора знака: $X_i = \pm m(X_i)$
$'+' \to \delta S_i, \partial X_i$ — ориентированы одинаково
$'-' \to \delta S_i . \partial X_i$ — противоположно ориентированы
$\overline{\xi_i} \in S_i$, $S_i \in T'$, $\xi = \{\xi_i\} \to \sigma\{T',\xi,+\} = \sum\limits_i R(\xi_i)x_i; \quad \sigma\{T',\xi,-\} = -\sigma\{T,\xi,+\}$

Определение. Число I называется пределом суммы $\sigma\{T,\xi,+\}$ при $\Delta_T \to 0$, если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall T' : \Delta_{T'} < \delta \& \forall\xi \to |\sigma\{T',\xi,+\} - I| < \varepsilon$
Если предел I существует, то о называется поверхностным интегралом второго рода и обозначается: $I = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy = \iint\limits_S Rdxdy$

Пример. $S = \{z = g(x,y), x,y \in \overline{\Omega}\}$, ориентирована таким образом, что $\overline{n}$ образует острый угол с Oz, $T = \{S_i\};$, $T = T'$, $R = R(x,y,z)$, $\xi_i \in S_i$, $\xi_i(x_i,y_i,g(x_i,y_i))$
$\sigma\{T,\xi,+\} = \sum\limits_i R(\xi_i)m(X_i) = \sum\limits_i R(x_i,y_i,g(x_i,y_i))m(X_i)$
$\Delta_T \to 0 \Rightarrow \iint\limits_\Omega R(x,y,g(x,y,))dxdy = \iint\limits_S R(x,y,z)dxdy$

11.4. Общий вид поверхностного интеграла 2-го рода.

$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v), (u,v) \in \overline{\Omega}\}$ — ориентированная гладкая поверхность с кусочно гладким краем δS
$\overline{n} = \frac{\pm[\overline{r_u},\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|}$, Q, P на S $\qquad T = \{S_i\}$, Y_i — проекция S_i на плоскость yOz
из T отбрасываем те S_i, которые

1. не биективное отображение на плоскость yOz
2. Часть S_i лежит сверху и снизу от поверхности

$T' = \{S_i\}$, $Y_i = \pm m(Y_i)$, $\Delta_{T'}$ — диаметр (наиб) множеств $S_i' \in T'$

$$\iint\limits_S P(x,y,z)dydz + Q(x,y,z)dzdx + R(x,y,z)dxdy$$

11.5. Сведение поверхностных интегралов 2-го рода к поверхностному интегралу первого рода.

Теорема 2. *Пусть S — ориентированная гладкая поверхность с кусочно гладким краем P, Q, R непрерывна на S, тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_S [P\cos(\overline{n}\overset{\wedge}{,} i) + Q\cos(\overline{n}\overset{\wedge}{,} j) + R\cos(\overline{n}\overset{\wedge}{,} k)]dS$$

Доказательство. 1) $S = \{x,y,z : z = g(X,y), (x,y) \in \overline{\Omega}\}$
Выбрана верхняя сторона поверхности S, X_i — полож., $T = T'$
$m(S_i) = \iint\limits_{\Omega_i} \frac{dxdy}{\cos\gamma_i} = \cos\gamma_i^* m(X_i); \quad X + i = m(X_i) = \cos\gamma_i^* \cdot m(S_i)$
$\xi_i \in S_i$, $\xi = \{\xi_i\} : \sigma\{T, \xi, +\} = \sum\limits_i R(\xi_i)X_i = \sum\limits_i R(\xi_i)\cos\gamma_i^* m(S_i)$
$\sigma'\{T, \xi\} = \sum\limits_i R(\xi_i)\cos\gamma_i m(S_i)$, $\gamma_i^* = \gamma(\xi_i^*)$, $\xi_i^* \in S_i$, $\gamma_i = \gamma(\xi_i)$
$\cos\gamma$ — функция непрерывна на S
$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall\xi\&\xi'\ \rho(\xi,\xi') < \delta \to |\cos\gamma(\xi) - \cos\gamma(\xi')| < \frac{\varepsilon}{Mm(\xi)}$
$|\sigma\{\xi, T, +\} - \sigma'\{T,\xi\}| \leqslant M\frac{\varepsilon}{Mm(\xi)}\sum\limits_i m(S_i) = \varepsilon$
$T : \Delta_T < \delta$
$\iint\limits_S Rdxdy = \iint\limits_S R\cos(\overline{n}\overset{\wedge}{,} k)dS$

2) Общий случай $T = T' \cup T$"
$$\sigma\{T', \xi, +\} \underset{\Delta_{T'} \to 0}{\longrightarrow} \iint\limits_S R\cos(\overline{n}\overset{\wedge}{,} k)$$
$$\sigma\{T', \xi, +\} \underset{\Delta_{T'} \to 0}{\longrightarrow} 0$$
□

Часть III

Теория поля

12. Элементы векторного анализа

12.1. Скалярные и векторные поля

Если в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ задана функция $u = u(x,y,z)$, то будем говорить, что в $\mathcal{D}$ задано *скалярное поле* $\forall(x,y,z) \in \mathcal{D}, (x,y,z) \to u$
Если в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ задана векторная функция $\overline{a} = (P,Q,R), P = P(x,y,z), Q = Q(x,y,z), R = R(x,y,z)$, то будем говорить, что в области $\mathcal{D}$ задано *векторное поле* $\forall(x,y,z) \in \mathbb{D}\ (x,y,z) \to \overline{a}(P,Q,R)$

12.2. Вектор Гамильтона

$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$

1. Если функция u или вектор $\overline{a}$ стоят справа от ∇, то он действует на них как дифференциальные оператор

2. Если функция u или вектора $\overline{a}$ стоят слева от ∇, то получаем новый дифференциальный оператор

Пример 1

$$\mathrm{grad} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right) = \nabla u$$

Пример 2

$$\mathrm{grad} uv = u\mathrm{grad} v + v\mathrm{grad} u$$

Пример 3

$$\overline{r} = (x,y,z),\ \rho = |\overline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$
$$\nabla u(\rho) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}(\rho), \frac{\partial u}{\partial y}(\rho), \frac{\partial u}{\partial z}(\rho)\right) = u'(\rho)\cdot\left(\frac{x}{\rho}, \frac{y}{\rho}, \frac{z}{\rho}\right) = \frac{u'(\rho)}{\rho}\overline{r}$$

Пример 4 $(\nabla, \overline{a}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \mathrm{div}\overline{a}$
Эта функция называется дивергенцией векторного поля $\overline{a}$

Пример 5

$$[\nabla, \overline{a}] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) k = \mathrm{rot}\overline{a}$$

Пример 6

$$\mathrm{div}(u\overline{a}) = (\nabla, u\overline{a}) = (\mathrm{grad} u, \overline{a}) + u(\nabla, \overline{a}) = (\mathrm{grad} u,\overline{a}) + u\mathrm{div}\overline{a}$$

Пример 7

$$\mathrm{div}[\overline{a},\overline{b}] = (\nabla, [\overline{a},\overline{b}]) = (\nabla, \overline{a}, \overline{b}) = (\overline{b},\nabla,\overline{a}) - (\overline{a},\nabla, \overline{b}) = (\overline{b}, \mathrm{rot}\overline{a}) - (\overline{a}, \mathrm{rot}\overline{b})$$

Пример 8

$$\mathrm{rot}(u,\overline{a}) = [\nabla, u\overline{a}] = [\nabla u,\overline{a}] + u[\nabla, \overline{a}] = [\mathrm{grad} u,\overline{a}] + u\mathrm{rot}\overline{a}$$

Пример 9

$$\mathrm{rot}[\overline{a},\overline{b}] = [\nabla, [\overline{a},\overline{b}]] = \overline{a}(\nabla, \overline{b}) - \overline{b}(\nabla, \overline{a}) = \overline{a}\mathrm{div} b - \overline{b}\mathrm{div} a + (\overline{b},\nabla)\overline{a} - (\overline{a}, \nabla)\overline{b}$$

Пример 10

$$[\overline{b}, \mathrm{rot}\overline{a}] = \left[\overline{b},[\nabla, \overline{a}]\right] = \nabla(\overline{b},\overline{a}) - (\overline{b},\nabla)\overline{a}$$

Пример 11

$$(\overline{c}, \overline{b}, \mathrm{rot}\overline{a}) = (\overline{c}, [\overline{b}, \mathrm{rot}\overline{a}]) = (\overline{c}, \nabla(\overline{b}, \overline{a})) - (\overline{c}, (\overline{b}\nabla)\overline{a}) = (\overline{b}, (\overline{c}\nabla), a) - (\overline{c}, (\overline{b}\nabla), \overline{a})$$

Пример 12

$$\mathrm{divrot}\overline{a} = (\nabla, \mathrm{rot}\overline{a}) = (\nabla, [\nabla, \overline{a}]) = (\nabla, \nabla, \overline{a}) = 0$$

Пример 13

$$\mathrm{rotgrad}u = [\nabla, \nabla u] = u[\nabla, \nabla] = 0$$

13. Формула Остроградского – Гаусса

13.1. Доказательство формулы

Определение. Область $D \subset \mathbb{E}^3$ называется *элементарной относительно оси Oz* если ее проекция Ω на гиперплоскость $\mathcal{E}_z = \{(x,y,z) : z = 0\}$ является областю и ∂D состоит из графиков функция $z = \psi(x,y)$, $z = \varphi(x,y)$ причем $\psi(x,y) \leqslant \varphi(x,y) \, \forall (x,y) \in \overline{\Omega}$ и, быть может, цилиндрическая поверхность, образующая которой параллельна Oz и направляющей ее является $\partial\Omega$
$D = \{(x,y,z) \in \mathbb{E}^3 : \psi(x,y) \leqslant z \leqslant \varphi(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega}\}$

Замечание. Элементарная относительно Oz область $\mathcal{D}$ измерима, если Ω — измерима, и φ, ψ непрывны на $\overline{\Omega}$.

Теорема 1. *Если измеримая область $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ элементарна относительно трех координатных осей одновременно, $\partial\mathcal{D}$ ориентирована внешней нормалью $\overline{n}$, векторное поле $\overline{a} = (P,Q,R)$ непрерывно дифференцируема в $\overline{\mathcal{D}}$, то справедлива формула Остроградского–Гаусса:*

$$\iint\limits_{\partial\mathcal{D}} Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iiint\limits_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dxdydz$$

Доказательство. $\iint\limits_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dxdydz =$ этот интеграл существует в силу наложенных ограничений на поле $= \iint\limits_{\Omega} dxdy \int\limits_{\psi(x,y)}^{\varphi(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = \iint\limits_{\Omega} R(x,y,\varphi(x,y))dxdy - \iint\limits_{\Omega} R(x,y,\psi(x,y))dxdy = \iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy +$
$+ \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy$;
$S_1 = \{(x,y,z) : z = \varphi(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega}\}$,
$S_2 = \{(x,y,z) : z = \psi(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega}\}$;
$S = \{(x,y,z) : (x,y) \in X \subset \partial\Omega\} \; n \perp Oz \to \iint\limits_{S} R(x,y,z)dxdy = 0$

Тогда наш интеграл равен $\iint\limits_{S_1} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{S_2} R(x,y,z)dxdy + \iint\limits_{S} R(x,yz)dxdy = \iint\limits_{\partial D} R(x,y,z)dxdy$

□

$\iint\limits_S Pdydz + Qdzdx + Rdxdy = \iint\limits_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)dS = \iint\limits_S (\overline{a},\overline{n})dS$ — этот интеграл будем называть потоком векторного поля a через поверхность S в направлении вектора нормали.

$\iint\limits_{\partial\mathcal{D}} (\overline{a},\overline{n})dS = \iiint\limits_{\mathcal{D}} div\overline{a}d\mathcal{D}$ — формула Остроградского–Гаусса

13.2. Приложения формулы Остроградского–Гаусса

1. $m(\mathcal{D}) = 1/3 \iint\limits_{\partial\mathcal{D}} xdydz + ydzdx + zdxdy$

2. Инвариантность div $\overline{a}$

Теорема 2. *Пусть $\overline{a}$ — непрерывно дифференцируемое в $\overline{\mathcal{D}}$ векторное поле. $S_\varepsilon(M_0)$ — шар с центром в M_0 и радиусом ε, причем $\overline{S_\varepsilon(M_0)} \subset \mathcal{D}$, тогда div $\overline{a} = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\iint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a},\overline{n})dS}{m(S_\varepsilon(M_0))}$*

Доказательство. $\iiint\limits_{S_\varepsilon(M_0)} \mathrm{div}\overline{a}d\mathcal{D} = \iint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a},\overline{n})dS$

$\exists M^* \in S_\varepsilon(M_0) : \mathrm{div}\overline{a}(M^*) \cdot m(S_\varepsilon(M_0)) = \iint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a},\overline{n})dS$

$\mathrm{div}\overline{a}(M^*) = \dfrac{\iint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a},\overline{n})dS}{m(S_\varepsilon(M_0))} \quad \varepsilon \to 0 : M^* \to M_0$ $\square$

13.3. Соленоидальные векторные поля.

Определение. Область $\mathcal{D} \in \mathbb{E}^3$ называется объемно–односвязной областью, если любая замкнутая поверхность $S \subset \mathcal{D}$ является границей области $\mathcal{D}' \subset \mathcal{D}$

Замечание. Из определения следует, что $\partial\mathcal{D}$ объемно–односвязной области является связным множеством.

Определение. Непрерывное векторное поле $\overline{a}$ заданное в области $\mathcal{D}$ называется соленоидальным, если поток векторного поля через любую замкнутую кусочно гладкую поверхность $S \subset \mathcal{D}$ равен нулю: $\iint\limits_S (\overline{a},\overline{n})dS = 0$

Теорема 3. *Для того, чтобы непрерывно дифференцируемое векторное поле $\overline{a}$ было соленоидальным в области $\mathcal{D}$ необходимо, а в случае объемной односвязной области и достаточно, чтобы* $\mathrm{div}\overline{a} = 0$ *в* $\mathcal{D}$

Доказательство. **Необходимость** $\overline{a}$ — соленоидальна в $\mathcal{D}$

$\forall M_0 \in \mathcal{D}\ S_\varepsilon(M_0) \subset \mathcal{D} \quad \mathrm{div}\overline{a}(M_0) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \dfrac{\iint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a},\overline{n})}{m(S_\varepsilon(M_))} = 0$

Достаточность. $\forall S \subset \mathcal{D}$ $\iint\limits_S (\overline{a},\overline{n})dS = \iiint\limits_{\mathcal{D}'} \mathrm{div}\overline{a}dD \Rightarrow \overline{a}$ — соленоидальна. $\square$

Пример. $\overline{r} = (x,y,z)$. $\rho = |\overline{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\overline{a} = \nabla\frac{1}{\rho} = -\frac{\overline{r}}{\rho^3}$
$\mathrm{div}\overline{a} = (\nabla, -\frac{\overline{r}}{\rho^3}) = -(\nabla\frac{1}{\rho^3},\overline{r}) - \frac{1}{\rho^3}(\nabla,\overline{r}) = \frac{3}{\rho^5}(\overline{r},\overline{r}) - \frac{3}{\rho^3} = \frac{3}{\rho^3} - \frac{3}{\rho^3} = 0$
$\iint\limits_S (\overline{a},\overline{n})dS = \iint\limits_S (-\frac{\overline{r}}{R^3},\frac{\overline{r}}{R})dS = -\frac{1}{R^2}\iint\limits_S dS = -4\pi \neq 0$
$S : x^2+y^2+z^2 = R^2$

14. Формула Стокса.

14.1. Простая гладкая поверхность.

$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ (u,v) \in \overline{\Omega}\}$

1. r дважды непрерывно дифференцируема в $\overline{\Omega}$
2. $\partial\Omega$ — кусочно гладкая поверхность, следовательно ∂S — кусочно гладкая
3. Ориентация края δS согласованно с ориентацией нормали поверхности S
4. В $\mathcal{D}$ задано непрерывно дифференцируемое векторное поле $\overline{a} = (P,Q,R)$

$\int\limits_{\delta S} Pdx + Qdy + Rdz = \int\limits_{\delta S} (\overline{a}, d\overline{r})$

Теорема 1. *При заданных условиях 1 – 4 циркуляция векторного поля $\overline{a}$ вдоль кривой δS равна потоку вихря векторного поля $\overline{a}$ через ту сторону поверхности S, с которой обход δS виден по ходу часовой стрелки.*

$$\int\limits_{\delta S} (\overline{a},d\overline{r}) = \iint\limits_S (\mathrm{rot}\overline{a},\overline{n})dS$$

Доказательство. $\overline{c},\overline{b},\mathrm{rot}\overline{a} = (\overline{b},(\overline{c},\nabla)\overline{a}) - (\overline{c},(\overline{b},\nabla)a)$

$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),(u,v) \in \overline{\Omega}\}$
$\partial\Omega = \{u = \varphi(t), v = \psi(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$
$\delta S = \{\overline{r} = \overline{r}(\varphi(t)),\psi(t)), \alpha \leqslant t \leqslant \beta\}$

$\int\limits_{\delta S} (\overline{a}, dr) = \int\limits_{\alpha}^{\beta} (\overline{a}(\varphi(t),\psi(t)), \overline{r_u}(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + \overline{r_v}(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t))dt = \int\limits_{\partial\Omega} (\overline{a},\overline{r_u})du + (\overline{a},\overline{r_v})dv =$
$= \iint\limits_{\Omega} \left[\frac{\partial}{\partial u}(\overline{a},\overline{r_v}) - \frac{\partial}{\partial u}(\overline{a},\overline{r_u})\right] dudv = \iint\limits_{\Omega} \left[(\frac{\partial\overline{a}}{\partial x}x_u + \frac{\partial\overline{a}}{\partial y}y_u + \frac{\partial\overline{a}}{\partial z}z_u, \overline{r_v}) - (\frac{\partial\overline{a}}{\partial x}x_v + \frac{\partial\overline{a}}{\partial y}y_v + \frac{\partial\overline{a}}{\partial z}z_v, \overline{r_u})\right] =$
$= \iint\limits_{\Omega} [((r_u\nabla)\overline{a},\overline{r_v}) - ((\overline{r_v}\nabla)\overline{a},\overline{r_u})]\, dudv = \iint\limits_{\Omega} (\overline{r_u},\overline{r_v},\mathrm{rot}\overline{a})dudv = \iint\limits_{\Omega} \left(\mathrm{rot}\overline{a}, \frac{[\overline{r_u},\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|}\right) |[\overline{r_u},\overline{r_v}]|\, dudv =$
$= \iint\limits_S (\mathrm{rot}\overline{a},\overline{n})dS$ $\square$

14.2. Кусочно гладкая поверхность.

$S = \bigcup\limits_{i=1}^{k} S_i, \delta S_i$

$\sum\limits_{i=1}^{k} \oint\limits_{\partial S_i} (\overline{a}, d\overline{r}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \iint\limits_{S_i} (\mathrm{rot}\overline{a}, \overline{n}) dS$

$\oint\limits_{\partial S} (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_{S} (\mathrm{rot}\overline{a}, \overline{n}) dS$

На каждой S_i свой $\overline{n} \Rightarrow$ формула Стокса остается справедливой

14.3. Инвариантность $\mathrm{rot}\overline{a}$

$\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$, непрерывно дифференцируемое векторное поле $\overline{a}$

$M_0(\overline{r_0}) = M_0 \subset \mathcal{D}, \overline{n}, \ \prod : (\overline{r} - \overline{r_0}, \overline{n}) = 0$

$S_\varepsilon(M_0) \subset \prod, \partial S_\varepsilon(M_0)$ — ориентирована положительно, обход согласован с $\overline{n}$

$\oint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\mathrm{rot}\overline{a}, \overline{n}) dS$

$(\mathrm{rot}\overline{a}, \overline{n})(M^*) m(S_\varepsilon(M_0)) = \oint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a}, d\overline{r})$

$(\mathrm{rot}\overline{a}, \overline{n})(M_0) = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \dfrac{\oint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a}, d\overline{r})}{m(S_\varepsilon(M_0))}$

Теорема 2. *Если в области $\mathcal{D}$ задано непрерывное дифференцируемое векторное поле $\overline{a}$ и в нем выбрана точка M_0 в которой задан вектор нормали $\overline{n}$ и построена плоскость проходящая через эту точку и в ней выбран круг, ориентированный положительно, то выполнена формула*

$$(\mathrm{rot}\overline{a}, \overline{n})(M_0) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\oint\limits_{\partial S_\varepsilon(M_0)} (\overline{a}, d\overline{r})}{m(S_\varepsilon(M_0))}$$

14.4. Потенциальные векторные поля.

В $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ задано непрерывное векторное поле $\overline{a}$

Определение. Непрерывное векторное поле $\overline{a}$ называют потенциальным, если существует такая функция u, что $\overline{a} = \mathrm{grad} u$

Теорема 3. *Пусть в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ задано непрерывное дифференцируемое поле $\overline{a}$, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $\oint\limits_{\Gamma} (\overline{a}, d\overline{r}) = 0$, *для любой кусочно гладкая замкнутой кривой $\Gamma \subset \mathcal{D}$*

2. $\int\limits_{\Gamma} (\overline{a}, d\overline{r})$, *$\Gamma$ — кусочно гладкая кривая, соединяющая точки A, B, $\Gamma \subset \mathcal{D}$ не зависит от кривой Γ (для любых точек $A, B \in \mathcal{D}$)*

3. *Поле $\overline{a}$ — потенциальное.*

* — *доказательство аналогично плоскому случаю*

Определение. Область $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ называется поверхностно односвязной, если на любой кусочно гладкий контур $\gamma \subset \mathcal{D}$ можно натянуть поверхность S, лежащую в области $\mathcal{D}$

Замечание. Шар с выколотой точкой не является объемно–односвязной областью, но этот шар является поверхностно односвязной областью. Тор является объемно–односвязной областью , но не является поверхностно–односвязной областью.

Теорема 4. *Для потенциальности непрерывно дифференцируемого векторного поля $\overline{a}$, определенного в области $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$, необходимо, а в случае поверхностно односвязанности достаточно, чтобы векторное поле $\overline{a}$ было безвехревым, т.е.* $\mathrm{rot}\overline{a} = \overline{0}$

Доказательство. **Необходимость.** $\exists u: \quad \overline{a} = \mathrm{grad} u$ в $\mathcal{D} \subset \mathbb{E}^3$ $\overline{a} = \nabla u$ $\mathrm{rot}\overline{a} = [\nabla, \nabla u] = \overline{0}$
Достаточность. $\mathrm{rot}\overline{a} = \overline{0}$
$\forall \gamma \subset \mathcal{D}$, кусочно гладкий контур $\gamma = \delta S, S \subset \mathcal{D}$
$\oint\limits_\gamma (\overline{a}, d\overline{r}) = \iint\limits_S (\mathrm{rot}\overline{a}, \overline{n}) dS = 0$, тогда $1 \Leftrightarrow 3$ □

Замечание. В случае отсутствия поверхностной односвязанности $\mathcal{D}$ из $\mathrm{rot}\overline{a} = 0 \not\Rightarrow$ потенциальность
$\overline{a} = \left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}, z\right)$ определяет $\mathbb{E}^3 \backslash \{Oz\}$, $\quad \mathrm{rot}\overline{a} = \overline{0}$
$\gamma : \{x^2 + y^2 = 1, z = 0\}$, $\oint\limits_\gamma (\overline{a}, d\overline{r}) = \oint\limits_\gamma -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy + z dz = 2\pi \neq 0 \Rightarrow$ нет потенциальности поля.