3.4. Замена переменных в двойном интеграле.

Напомним начальные условия:
$F = \overline{\Omega^*} \to \overline{\Omega}$

I Взаимно однозначное

II Дважды непрырывна дифференцируема

III $\mathcal{J}_k(u^*,v^*) \neq 0;\ (u^*,v^*) \in \overline{\Omega^*}$

Нас теперь будет интересовать $\iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy$ причем $w = g(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$

Теорема 4. *Пусть отображение F удовлетворяет свойствам I–II, функция $w = g(x,y)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и F преобразование ограниченной замкнутой области с кусочно гладкой границей $\overline{\Omega^*}$ в ограниченной замкнутой области с кусочно гладкой границей $\overline{\Omega}$. Тогда справедлива формула*

$$\iint\limits_{\Omega} g(x,y)dxdy = \iint\limits_{\Omega^*} g(f^1(u,v),f^2(u,v))\left|\mathcal{J}_F(u,v)\right| dudv \tag{3}$$

Доказательство. T^* — разбиение области Ω^*, $T^* = \{\Omega_i^*\}_{i=1}^n$ при F $T = \{\Omega_i\}_{i=1}^n$ — разбиение Ω. $I = \sum\limits_{i=1}^{n} g(z^i)m(\Omega_i)$
$z^i = (x^i,y^i) \in \overline{\Omega_i}$, $\forall i\, \exists w^i = (u^i,v^i) \in \overline{\Omega^*} : m(\Omega_i) = \left|\mathcal{J}_F(w^i)\right| m(\Omega_i^*)$ тогда, учитывая что $z^i = (f^1(w^i),f^2(w^i)))$

$$I = \sum_{i=1}^{n} g(z^i)m(\Omega_i) = \sum_{i=1}^{n} g(z^i)\left|\mathcal{J}_F(w^i)\right| m(\Omega_i^*) = \sum_{i=1}^{n} g(f^1(w^i),f^2(w^i))\left|\mathcal{J}_F(w^i)\right| m(\Omega_i^*) \tag{4}$$

Заметим, что первая часть (4) стремится к первой части (3) и аналогично ведут себя вторые части. □

Замечание. Эта же формула справедлива в случае m–кратного интеграла.

Поверхностные интегралы.

1. Понятие поверхности.

1.1. Простейшие примеры задания поверхности.

Вся эта тема рассматривается на $\mathbb{E}^3, Oxyz$.
Перечислим способы задания поверхности:

1° График функции — простейший пример задания поверхности
$z = f(x,y), (x,y) \in \overline{\Omega},\ f(x,y) \geqslant 0$

2° $F(x,y,z) = 0$, предполагаем, что в окрестности точки (x_0,y_0,z_0) F непрерывно дифференцируема и $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$. Это уравнение задает функцию z как не явную функцию от x и y : $z = f(x,y)$ в окрестности некоторой точки (x_0,y_0,z_0).

3° $F(x,y) = 0$ — случай задания цилиндрической поверхности.

1.2. Параметрическое задание поверхности.

$F : \overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^2_{(u,v)} \to \mathbb{E}^3_{(x,y,z)}$

I $x = \varphi(u,v)$, $y = \psi(u,v)$, $z = \chi(u,v)$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$

II $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$, $(u,v) \in \overline{\Omega}$, F непрерывно дифференцируема

$$\begin{pmatrix} \varphi_u\ \psi_u\ \chi_u \\ \varphi_v\ \psi_v\ \chi_v \end{pmatrix} \qquad A = \Delta_{\psi\chi} = \begin{vmatrix} \psi_u\ \chi_u \\ \psi_v\ \chi_v \end{vmatrix} \quad B = \Delta_{\chi\varphi} = \begin{vmatrix} \chi_u\ \varphi_u \\ \chi_v\ \varphi_v \end{vmatrix} \quad C = \Delta_{\varphi\psi} = \begin{vmatrix} \varphi_u\ \psi_u \\ \varphi_v\ \psi_v \end{vmatrix}$$

Предположим, что хотя бы 1 из определителей $\neq 0 : \Delta_{\varphi\psi} \neq 0$, $U(u_0,v_0,x_0,y_0)$

$$\begin{cases} x - \varphi(u,v) = 0 \\ y - \psi(u,v) = 0 \end{cases} \quad u = h(x,y),\ v = g(x,y) \text{ в } \widetilde{u}(x_0,y_0),\ z = \chi(h(x,y),g(x,y)) \Rightarrow z = f(x,y)$$

(u_0,v_0) — особая точка: $\Delta_{\psi\chi} = \Delta_{\chi\varphi} = \Delta_{\varphi\psi} = 0$

(u_0,v_0) — не является особой: $[\overline{r_u}(u_0,v_0),\overline{r_v}(u_0,v_0)] \neq \overline{0} \Rightarrow \overline{r_u}(u_0,v_0) \neq \overline{0}$, $\overline{r_v}(u_0,v_0) \neq \overline{0}$

Определение. Множество точек $S \subset \mathbb{E}^3_{(x,y,z)}$ являющихся образом ограниченной замкнутой плоской области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^2_{(u,v)}$ при непрерывном отображении F вида I называется параметрически заданной поверхностью, а отображение I называется ее координатным представлением

$$S = \{x = \varphi(u,v),\ y = \psi(u,v),\ z = \chi(u,v),\ (u,v) \subset \overline{\Omega}\} \tag{5}$$

Определение. Множество точек $S \subset \mathbb{E}^3_{(x,y,z)}$ являющихся образом ограниченной замкнутой плоской области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^2_{(u,v)}$ при непрерывном отображении F вида II называется параметрически заданной поверхностью, а отображение II называется ее векторным представлением

$$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\ u,v \in \overline{\Omega}\} \tag{6}$$

Определение. Непрерывно дифференцируемое отображение F вида I или II называется гладким, если $[\overline{r_u},\overline{r_v}] \neq 0$ в $\overline{\Omega}$

Определение. Поверхность S вида (5) или (6) называется *простой гладкой поверхностью*, если отображение F вида I или II соответственно взаимно однозначно или гладкое.

Пример. $z = f(x,y)$, $(x,y) \in \overline{\Omega} \subset \mathbb{E}^2_{(x,y)}$, f — непрерывно дифференцируемая функция.

$\overline{r} = (x,y,f(x,y))$, $\overline{r_x} = (1,0,f_x)$. $\overline{r_y} = (0,1,f_y)$

$$[\overline{r_x},\overline{r_v}] = \begin{vmatrix} i\ j\ k \\ 1\ 0\ f_x \\ 0\ 1\ f_y \end{vmatrix} = -f_x i - f_y j + k \neq \overline{0} \quad |[\overline{r_x},\overline{r_v}]| = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$$

Определение. Для простой гладкой поверхности $S \subset \mathbb{E}^3$, заданной отображением F вида I или II образ $\partial\Omega$ при F названной краем поверхности S обозначается δS . Нужно помнить, что грань и граница не совпадают $\partial S = S$, но $\delta S \neq \partial S$