$S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\, (u,v) \in \Omega\}$ $\quad S = \{x = \varphi(u,v),\, y = \psi(u,v),\, z = \chi(u,v),\, (u,v) \subset \overline{\Omega}\}$
$u = u_0 \quad F_{u_0} \subset \mathbb{E}^3 : F_{u_0} = \{\overline{r} = \overline{r}(u_0,v),\, (u_0,v) \subset \overline{\Omega}\}$
$v = v_0 \quad F_{v_0} \subset \mathbb{E}^3 : F_{v_0} = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v_0),\, (u,v_0) \subset \overline{\Omega}\}$
**Пример.** Рассмотрим в $\mathbb{E}^3$ сферу $S = \{x = \cos\varphi\cos\psi,\, y = \sin\varphi\cos\psi,\, z = \sin\psi,$
$0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi,\, -\pi/2 \leqslant \psi \leqslant \pi/2\}$. Тогда формула $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

**Пример.** Зададим параметрически кривую:
$y = 0 : x = \Phi(u),\, z = \Psi(u), \alpha \leqslant u \leqslant \beta,\ \varPhi(u) \geqslant 0$
$S = \{x = \varPhi(u)\cos v,\, y = \varPhi(u)\sin v,\, z = \Psi(u),\, \alpha \leqslant u \leqslant \beta,\, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi\}$
$S = \{x = (a + a/2\cos u)\cos v,\, y = (a + a/2\cos u)\sin v,\, z = a/2\sin u\}\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\, 0 \leqslant v \leqslant 2\pi$

**Определение.** Точка $M \subset S : \overline{OM} = \overline{r}(u_1,v_1) = \overline{r}(u_2,v_2)$ для различных точек $(u_1,v_2)$ и $(u_2,v_2)$ множества $\overline{\Omega}$, называются кратными точками поверхности $S$.

**Определение.** Поверхность $S$, имеющая кратные точки, называется поверхностью с самопересечениями.

**Определение.** Если поверхность $S$ ограничивает некоторое тело $G \subset \mathbb{E}^3$, т.е. $\partial G = S$, по поверхности $S$ называется замкнутой

## 1.3. Допустимые замены переменных.

$F : \Omega \to \mathbb{E}^3$, $\overline{r} = \overline{r}(u,v)$ — взаимооднозначное, непрерывно дифференцируемое, без особых точек
$G : \overline{\Omega^*} \to \mathbb{E}^3 \overline{\rho} = \overline{\rho}(u^*,v^*)$
Эти отображения называются эквивалентными или задающими одну и ту же поверхность, если $\exists H : \overline{\Omega^*} \to \overline{\Omega} : u = h^1(u^*,v^*),\, v = h^2(u^*,v^*)$ и оно обладает следующими свойствами.

1) Взаимооднозначность

2) Непрерывная дифференцируемость

3) $\mathcal{J}_{(u,v)} = \frac{D(u,v)}{D(u^*,v^*)} \neq 0$ в $\overline{\Omega^*}$

4) $\overline{\rho}(u^*,v^*) = \overline{r}(h^1(u^*,v^*),h^2(u^*,v^*)$

Преобразование параметров осуществляющего переход от одного преобразования поверхности $S$ к другому ему эквивалентному, называется допустимой заменой параметра.

**Предложение.** *Если $S = \{\overline{r} = \overline{r}(u,v),\, (u,v) \in \overline{\Omega}\}$ является простой гладкой поверхностью, то при допустимой замене параметра поверхность $S = \{\overline{\rho} = \overline{\rho}(u^*,v^*),\, (u^*,v^*) \in$ $\in \overline{\Omega^*}\}$ остается простой гладкой поверхностью.*

$[\overline{\rho_{u^*}},\, \overline{\rho_{v^*}}] \neq 0$
$\overline{\rho_{u^*}} = h^1_{u^*}\overline{r_u} + h^2_{u^*}\overline{r_v},\, \overline{\rho_{v^*}} = h^1_{v^*}\overline{r_u} + h^2_{v^*}\overline{r_v}$
$[\overline{\rho_{u^*}},\overline{\rho_{v^*}}] = (h^1_{u^*}h^2_{v^*} - h^1_{v^*}h^2_{u^*})[\overline{r_u},\overline{r_v}] \neq 0$

## 1.4. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Рассмотрим $\overline{r_0} = \overline{r}(u_0,v_0)$
$\varGamma = \{\overline{r} = \overline{r}(u(t),v(t)),\, \alpha \leqslant t \leqslant \beta\} \subset S; \quad \overline{r_0} \in \varGamma$
$d\overline{r} = \overline{r_u}du + \overline{r_v}dv \quad du = u'(t)dt,\, dv = v'(t)dt$

**Определение.** Плоскость, проходящая через точку $r_0 \in S$, в которой лежат все касательные к кривым $\varGamma \subset S$, в точке $\overline{r_0}$, называется касательной плоскостью, а т $\overline{r_0}$ называется точкой касания. В Каждой точке $\overline{r_0}$, которая не является особой существует и единственная касательная плоскость.
$\overline{r} = (x,y,z)$, $\overline{r_0} = (x_0,y_0,z_0)$, $x_0 = \varphi(u_0,v_0)$, $y_0 = \psi(u_0,v_0)$, $_0 = \chi(u_0,v_0)$
$\overline{r_u} = (x_u,y_u,z_u)(u_0,v_0)$, $\overline{r_v} = (x_v,y_v,z_v)(u_0,v_0)$

$$((\overline{r} - \overline{r_0}), \overline{r_u}, \overline{r_v}) \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0 \quad z = f(x,y),(x,y) \in \overline{\Omega}$$

**Пример.**

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f_x \\ 0 & 1 & f_y \end{vmatrix} = 0 \quad f_x(x-x_0) + f_y(y-y_0) - (z-z_0) = 0$$

**Определение.** Прямая, проходящая через точку $\overline{r_0} \in S$(простой гладкой поверхности), перпендикулярно касательной плоскости в этой точке называется нормальной прямой.

$$\frac{x-x_0}{A} = \frac{y-y_0}{B} = \frac{z-z_0}{C} \quad A = \begin{vmatrix} \psi_u & \chi_u \\ \psi_v & \chi_v \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} \chi_u & \varphi_u \\ \chi_v & \varphi_v \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix}$$

$$\frac{x-x_0}{f_x} = \frac{y-y_0}{f_y} = \frac{z-z_0}{-1}$$

**Определение.** Ненулевой вектор, параллельный нормальной прямой, проходящий через точку $\overline{r_0} \in S$ касательной плоскости, называется вектором нормали к поверхности $S$ в т. $\overline{r_0}$

$$\overline{n} = \pm \frac{[\overline{r_u},\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|}$$

Фиксируя $+$ или $-$ задается непрерывная векторная функция.

## 1.5. Двусторонние и односторонние поверхности. Ориентация поверхности.

Рассмотрим поверхность $S$, выберем точку на этой поверхности $A_0 \in S$, выпустим из нее контур $\varGamma_0 \in S$.
Рассматриваемые случаи:

I Как ушел так и пришел (прим. лента Мебиуса)

II Ушел и пришел с обратным направлением

**Определение.** Если для любой точки $A_0 \in S$ при обходе любого контура $\mathit{\Gamma}_0 \subset S$, $\mathit{\Gamma}_0 \cap \delta S = \varnothing$ с началом и концом в точке $A_0$ имеем место случай II, то поверхность $S$ называется односторонней поверхностью. Такие поверхности рассматривать не будем.

**Определение.** Если для любой точки $A_0 \in S$ при обходе любого контура $\mathit{\Gamma}_0 \subset S$ с началом и концом в точке $A_0$ имеем место случай I, то поверхность $S$ называется двусторонней поверхностью.

**Предложение.** *Для двусторонней гладкой поверхности $S$ с кусочно гладким краем $\delta S$ задание направления нормали в одой точке определяет задание направления нормали во всех точках поверхности.*

*Доказательство.* $\overline{n} = \pm\dfrac{[\overline{r_u},\overline{r_v}]}{|[\overline{r_u},\overline{r_v}]|}$, выберем две точки и нормаль в однйо из них: $A_0$, $A_1$, $\overline{n_0}$, $\mathit{\Gamma}_{01}^1 \to \overline{n_1}$, $\mathit{\Gamma}_{01}^2 \to \overline{n_1}^-$, $\mathit{\Gamma} = \mathit{\Gamma}_{01}^1 \cup (\mathit{\Gamma}_{01}^2)^-$ — противоречие $\square$

**Определение.** Гладкая поверхность $S$ называется ориентированной, если единичный вектор нормали $\overline{n}$ задан на ней как непрерывная векторная функция.

$\cos\alpha = \dfrac{A}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\beta = \dfrac{B}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\gamma = \dfrac{C}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\Delta = A^2 + B^2 + C^2$

$z = f(x,y)$, $\cos\alpha = \dfrac{-f_x}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\beta = \dfrac{-f_y}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\cos\gamma = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\Delta}}$, $\Delta = 1 + f_x^2 = f_y^2$