תכנון וניתוח אלגוריתמים
הרצאה 20

מסלולים קצרים לפי דייקסטרה

- בסעיף זה נתוודע אל הבעיה השימושית - הנקראת בעיית מסלולים קצרים ונציג לה פתרונות המשתמשים ברשתות (גרף ממושקל).
- נציג פתרונות שונים ונחקור את סיבוכיות זמן הריצה שלהם.
- **<u>הגדרה פורמלית של בעיית המסלול הקצר</u>**
- נתון גרף משוקלל $G=(V,E)$.

- לכל קשת מיוחסת מספר אשר יכול לייצג מחיר, מרחק בין שני ישובים, עלות בניית כביש שיקשר בין שני הישובים , ממוצע מספר הלקוחות העוברים מטרמינל אחד לטרמינל אחר , זמן בכדי להגיע מישוב אחד לישוב אחר ועוד.
- בלי הגבלת הכלליות נניח שמספר שמיוחס לקשת יציין את המרחק בין שני ישובים.

- כל קדקוד ברשת מייצג ישוב וכל קשת ברשת מייצגת כביש בין שני ישובים והמספר שעל הקשת מייצג את האורך של כביש זה (מרחק בין שני ישובים).
- **הבעיה היא** – מהו אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד מקור (ישוב מסוים) לקדקוד אחר (לישוב אחר) ברשת, בהתחשב למרחקים שישנם בין הישובים השונים.

- להלן התיאור הפורמלי של הבעיה:
- נתון גרף קשיר $G=(V,E)$
- עם קדקודים הממוספרים באופן אקראי מ- 0 עד n-1 , כלומר $|V|=n$
- עם פונקציית משקל $W: E \rightarrow R$, אשר מייחסת לכל קשת מספר שנכנה אותו בשם מרחק ,ועם המרחקים E_{ij} לכל קשת (i,j) המחברת שני קדקודי הגרף i ו j .

- <u>הגדרה</u>:המשקל של המסלול

$P=(V_{0,}V_1,V_2,\ldots\ldots\ldots V_k)$

- הינו סכום המשקולות המיוחסות לקשתות (V_{i-1},V_i) , לכל $1 < i < k$.
- כלומר

$$W(P)=\sum_{i=1}^{k}W(V_{i-1},V_i)$$

- $W(V_{i-1},V_i)$ מייצג את המשקל שעל הקשת (V_{i-1},V_i).
- W(P) מייצג את המשקל של המסלול P .

- נגדיר את אורך (משקל) המסלול הקצר ביותר (המינימלי) מקדקוד u לקדקוד v בגרף על ידי :
- אם קיים מסלול כלשהו P מקדקוד
- u לקדקוד vברשת $\min_{p} W(p)$
- $L(u,v)=$
- אחרת ∞

- הגדרה:מסלול קצר ביותר מקדקוד u אל קדקוד v מוגדר כמסלול p כלשהו שעבורו $W(p)=L(u,v)$
- עתה נכיר מספר אלגוריתמים שונים למציאת מסלולים קצרים וחד מהם הוא:
- **אלגוריתם דיקסטרה - Dijkstra**
- נתונה רשת $G=(V,E)$ עם פונקציית המשקל $W:E\to R^{+}$
- כלומר, לכל קשת מתאימים משקל חיובי.

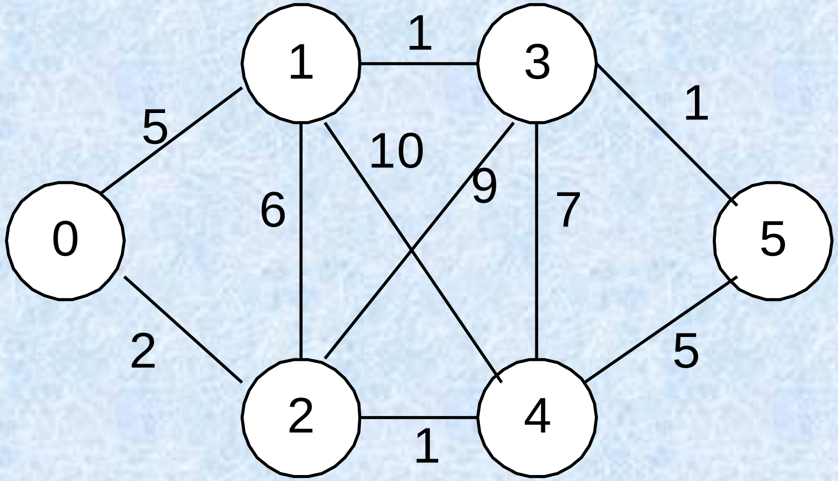
- להלן מספר דרישות לצורך ביצוע האלגוריתם :
- א . נניח שהגרף מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות כדלקמן:

$$a_{ij} = \begin{cases} E_{ij} & \text{אם קיימת קשת } (i, j) \\ 0 & \text{אם } i=j \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

- בהנחה שקיימת קשת (i , j) , <u>אורך המסלול המינימלי הזמני</u> מקדקוד i לקדקוד j הינו המספר שמיוחס לקשת (i , j) .
- אורך המסלול המינימלי של המסלול המעגלי מקדקוד i לעצמו הינו 0 , כיוון שלא מאפשרים מעגלים שאורכם שלילי או אפס.
- קביעה זו די הגיונית כי מחפשים מסלולים בעלי אורך מינימלי שהינם מסלולים פשוטים וללא מעגלים.

- במידה ולא קיימת קשת (i , j) , לא ברור שבעתיד יהיה מסלול מקדקוד i לקדקוד j , לכן המרחק המינימלי הקצר ביותר מקדקוד i לקדקוד j הינו המרחק המינימלי הגרוע ביותר שהינו ∞ .
- לדוגמא עבור הרשת הבאה:

- מטריצת הסמיכות תוגדר כך:



	0	1	2	3	4	5
0	0	5	2	∞	∞	∞
1	5	0	6	1	10	∞
2	2	6	0	9	1	∞
3	∞	1	9	0	7	1
4	∞	10	1	7	0	5
5	∞	∞	∞	1	5	0

- ב.נניח שקדקוד מקור הינו קדקוד 0.
- ג. קבוצת הקדקודים תחולק לשתי קבוצות:
- אחת הקבוצה P(לכבוד "קבוע") אשר תכיל קדקודים, כך שאורך המסלול המינימלי מקדקוד מקור עד אליהם הינו קבוע ולא ישתנה בעתיד עד סוף האלגוריתם.
- והשניה הקבוצה T (לכבוד "זמניים" (temporaries) אשר תכיל קדקודים כך שאורך המסלול המינימלי מקדקוד מקור עד אליהם הינו זמני ועשוי להשתנות בעתיד עד סוף האלגוריתם.

- מאחר שאין מסלולים מעגליים בעלי אורך אי חיובי, המסלול בעל אורך המינימלי מקדקוד מקור לעצמו הינו 0 וערך זה לא ישתנה עד סוף האלגוריתם.
- לכן, בהנחה שקדקוד 0 הינו קדקוד מקור, בתחילת האלגוריתם קדקוד 0 ישתייך לקבוצה P ויתר הקדקודים ישתייכו לקבוצה T .

- ד. עבור כל קדקוד u ברשת נרצה לשמור את אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד מקור 0 לקדקוד u ואותו נסמן על ידי d[u] לכבוד המילה (distance).
- בתחילת האלגוריתם לכל קדקוד u , פרט לקדקוד מקור, נבצע את ההשמה הבאה: $d[u] \leftarrow \infty$ ו- $d[0] \leftarrow 0$ מאחר שאורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד מקור לעצמו הינו 0.

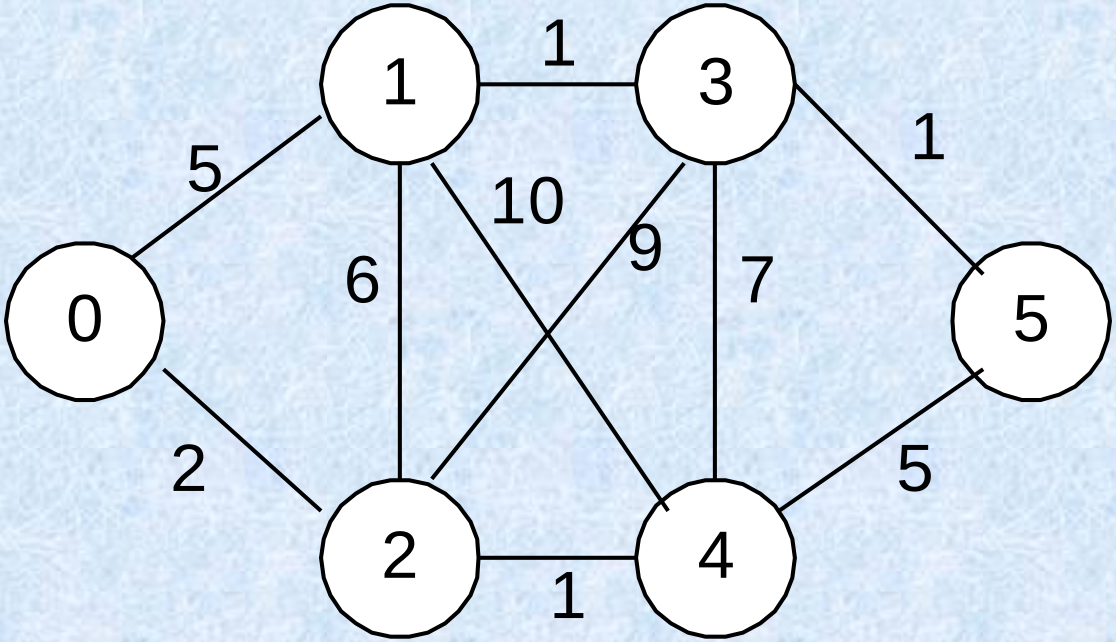
- ה. כמו כן נרצה לשמור לגבי כל קדקוד מידע על זהות הקדקוד הקודם לו ("הורה" שלו) במסלול הקצר.
- לאור זאת נשתמש במערך Pa , כך שלכל קדקוד u ברשת Pa[u] יציין קדקוד ממנו הגענו ל - u .
- <u>הערה</u>- הסימן Pa, נבע מהסיבה ש - Pa[u] מייצג "הורה" (parent) של קדקוד u בעת סריקה למציאת המסלול הקצר.

- בתחילת האלגוריתם לכל קדקוד u , פרט לקדקוד מקור, נבצע השמה ’_’←Pa[u] (משמעותו undefined - עדיין לא מוגדר).לגבי קדקוד מקור 0 נבצע: Pa[0]←nil , המציין שלקדקוד מקור אין אב.
- לאור האמור לעיל בתחילת האלגוריתם ניתן לבצע סדרת ההוראות הבאות:
- - P←{0} ו T={ 1,2,……..,n-1 }
- - d[0] ← 0

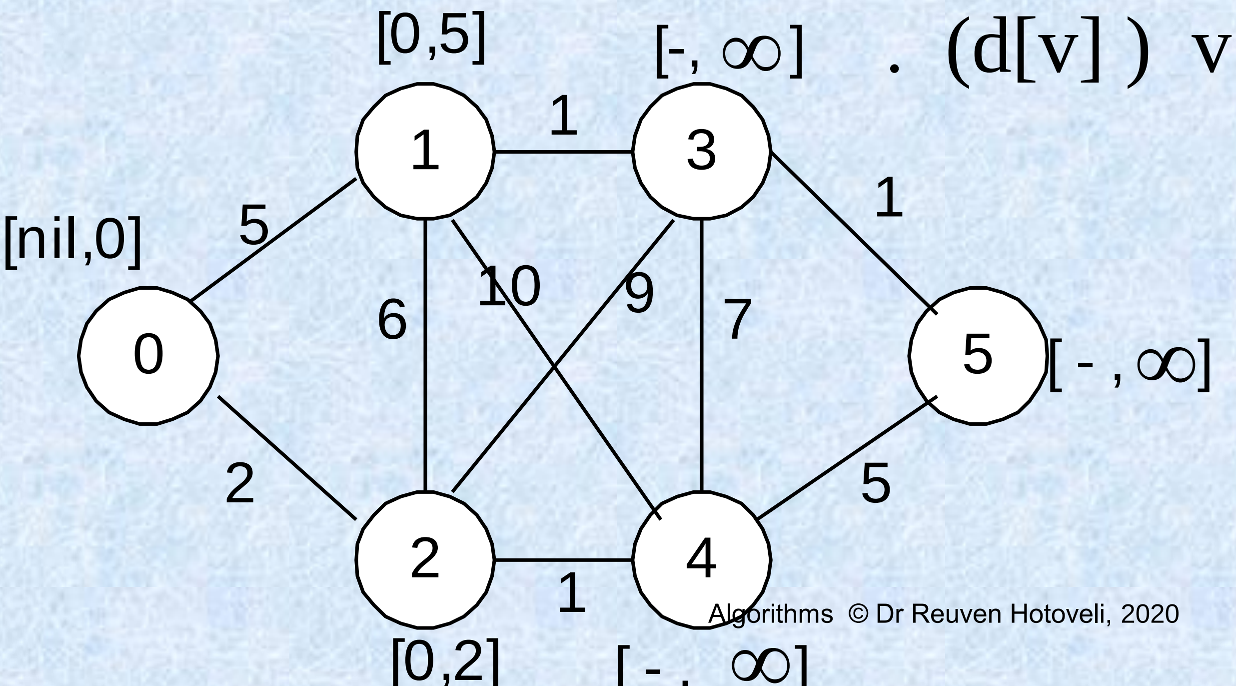
- - לכל קדקוד j שאינו קדקוד מקור , כלומר לכל j=1…n-1 בצע:
- $d[j] \leftarrow a_{0\,j}$ מאחר ש $a_{0\,j}$ מתאר את אורך המסלול המינימלי **הזמני** העובר דרך הקשת (0,j) .
- - $P[0] \leftarrow nil$
- - לכל קדקוד שאינו קדקוד מקור, כלומר לכל j=1…n-1
אם קיימת קשת (0, j) אז בצע : $Pa[j] \leftarrow$ ’0’
- אחרת בצע : $Pa[j] \leftarrow$ ’-'

- בשלב הבא עלינו לשפר את אורכי המסלולים הקצרים $d[j]$ מקדקוד מקור 0 לכל קדקוד אחר j , $1 \le j \le n-1$.
- הדרך לשיפור אורכי המסלולים מתבססת על תהליך איטרטיבי של איתור מסלול מקדקוד מקור לקדקוד j שבעזרתו ניתן לשפר את אורך המסלול המינימלי, עד שלא יהיה מקום לשיפורים נוספים.

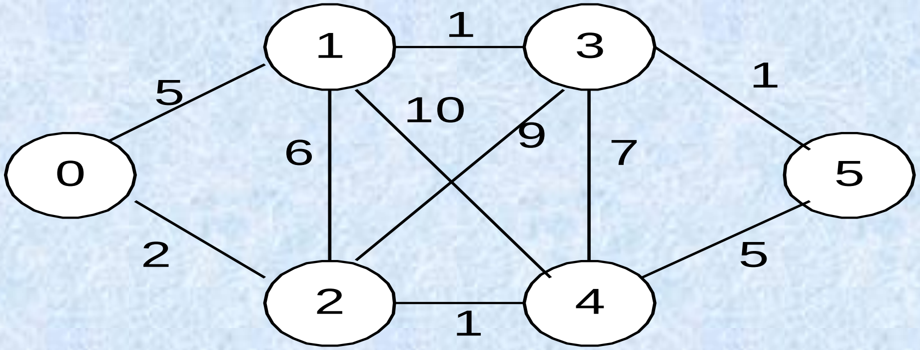
טרם נציג את האלגוריתם נדגים את אופן הפעולה של האלגוריתם של דיקסטרה על הרשת הבאה:



- בתהליך התיאור של האלגוריתם סמוך לכל קדקוד V של הגרף מופיעים שני מספרים ;
- השמאלי מייצג את הקדקוד שהינו "הורה" של v (Pa[v]) ;
- הימני מייצג את אורך המסלול הזמני הקצר ביותר מקדקוד מקור 0 לקדקוד v (d[v]) .
- תמונת הרשת בהתחלה הינה:

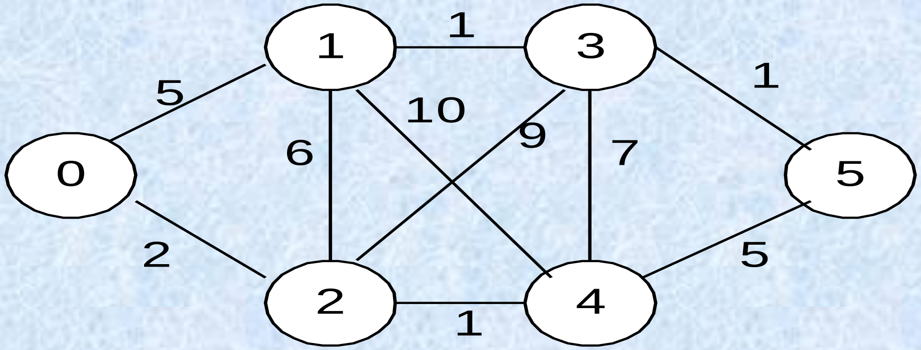


איור



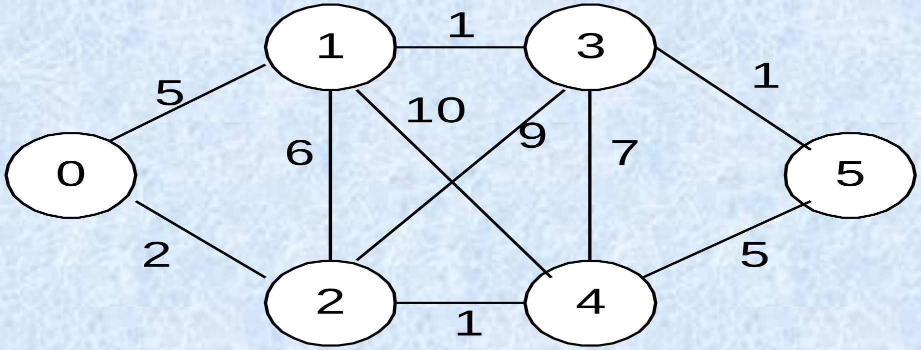
- $P=\{\ 0\ \}$ $\qquad T=\{\ 1,2,3,4,5\ \}$
- עתה השאלה המרכזית היא כיצד משפרים את המסלולים מקדקוד מקור 0 ליתר הקדקודים כך שאורכים שלהם יהיו מינימליים.

	קבוצה P	קבוצה T				
קדקוד v	0	1	2	3	4	5
d[v]	0	5	2	∞	∞	∞



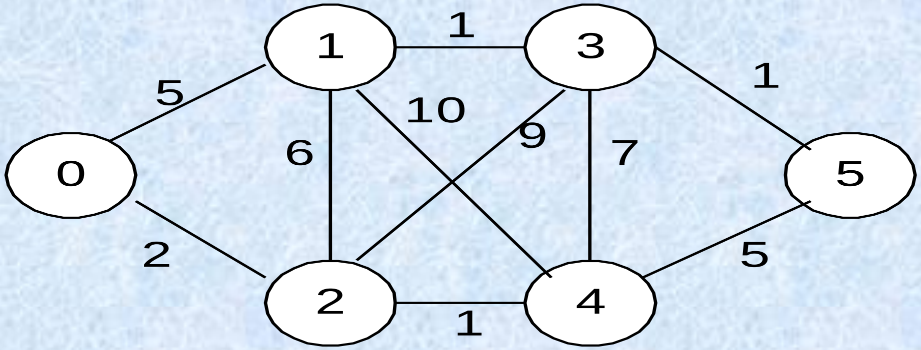
	קבוצה P	קבוצה T				
קדקוד v	0	1	2	3	4	5
d[v]	0	5	2	∞	∞	∞

- בשיטה זו בכל איטרציה נבצע 2 צעדים.
- ***<u>איטרציה ראשונה</u>***
- <u>צעד ראשון</u>
- נמצא קדקוד, מבין הקדקודים "הזמניים" שבקבוצה T , בעל אורך המסלול המינימלי הזמני הקטן ביותר מקדקוד מקור עד אליו. נכנה קדקוד זה בשם K.
- בדוגמא שלנו K=2 , מאחר ש d[2]=2 ול- d[2] ערך הכי קטן מבין כל ה- d[v] עבור $v \in T$.



	קבוצה P		קבוצה T			
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	2	5	∞	∞	∞

- כעת נצרף את הקדקוד הזה- K לקבוצה P
- ונוריד אותו מקבוצה T .
- כלומר המרחק המינימלי מקדקוד מקור 0 עד אליו (K) הינו קבוע ולא ישתנה עד סוף האלגוריתם.
- אי לכך בדוגמא שלנו:
- P={ 0,2 } T={ 1,3,4,5 }



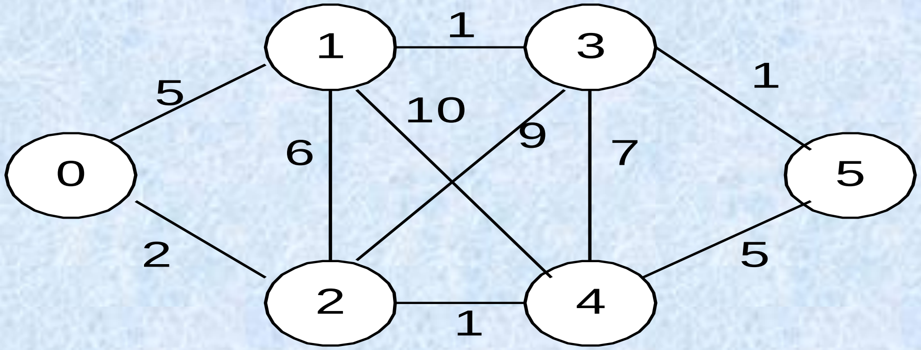
	קבוצה P		קבוצה T			
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	2	5	∞	∞	∞

- צעד שני
- בצעד זה ננסה לשפר את האורכים של המסלולים הקצרים מקדקוד מקור 0 לכל קדקוד j כאשר $j \in T$ וכל מסלול כזה עובר דרך הקדקוד K=2.
- בדוגמא שלנו:
- בחינת מסלול 0~~~~~1
-

אורך המסלול   אורך הקשת

2   6

0~~~~~2 ⟶ 1



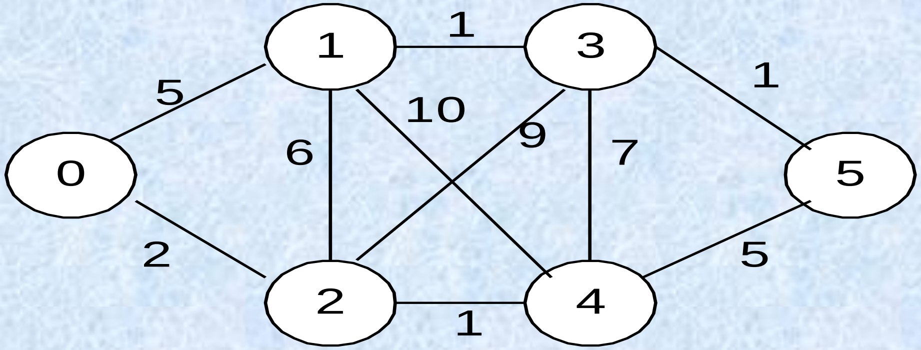
	קבוצה P		קבוצה T			
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	2	5	∞	∞	∞

- <u>בחינת מסלול 0~~~~~>1</u>
- אורך המסלול
- שהיה עד כה | כעת
- 5 | 8

אורך המסלול → 2   אורך הקשת → 6

0~~~~~>2 ⟶ 1

- מאחר ש 5< 8 אין שיפור באורך המסלול מקדקוד מקור 0 לקדקוד 1, העובר דרך הקדקוד 2.
- לכן אורך המסלול המינימלי 0~~~~~>1 לא משתנה וערכו נשאר 5 ו"ההורה" של קדקוד 1 הוא קדקוד 0 .



	קבוצה P		קבוצה T			
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	**2**	5	∞	∞	∞

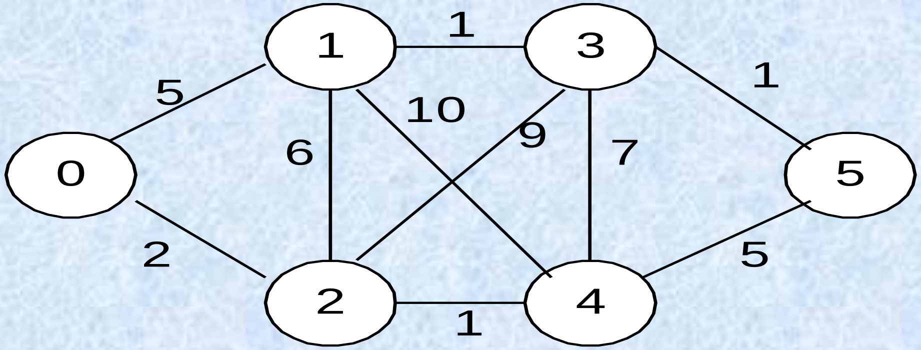
- <u>בחינת מסלול 0~~~~~~>3</u>
- אורך המסלול

שהיה עד כה	כעת
∞	11

אורך הקשת 9 · אורך המסלול 2

$0 \sim\sim\sim\sim\sim\sim> 2 \longrightarrow 3$

- לכן אורך המסלול המינימלי 0~~~~~~>3 משתנה וערכו 11 ו"ההורה" של קדקוד 3 יהיה קדקוד 2 .



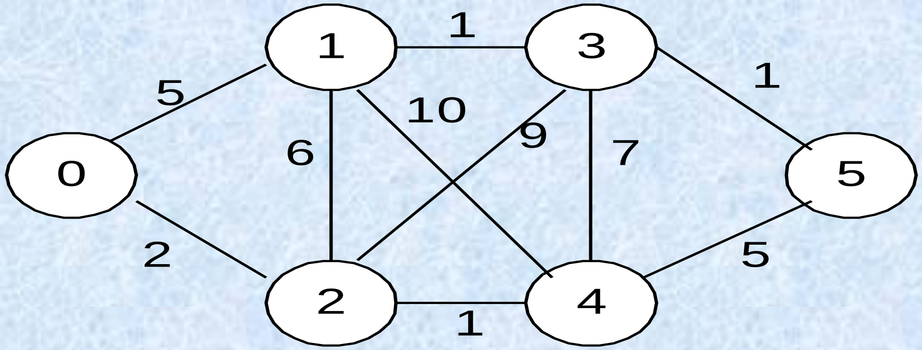
	קבוצה P		קבוצה T			
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	2	5	11	∞	∞

- בחינת מסלול 0~~~~~~>4
- אורך הקשת   אורך המסלול
- שהיה עד כה | כעת   1   2

∞ | 3   0~~~~~~>2 ⟶ 4

לכן אורך המסלול המינימלי 0~~~~~~>4 משתנה וערכו 3

ו"ההורה" של קדקוד 4 יהיה קדקוד 2 .



	קבוצה P		קבוצה T			
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	2	5	11	3	∞

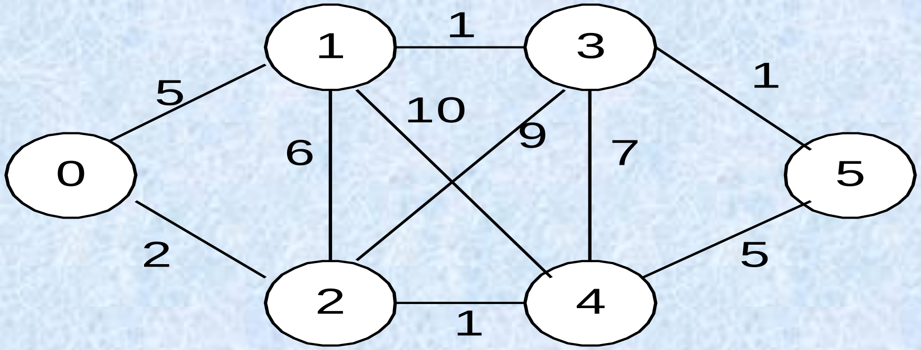
- <u>בחינת מסלול 0~~~~~>5</u>
- אורך הקשת   אורך המסלול

∞ 2

0~~~~~> 2 $\longrightarrow$ 5

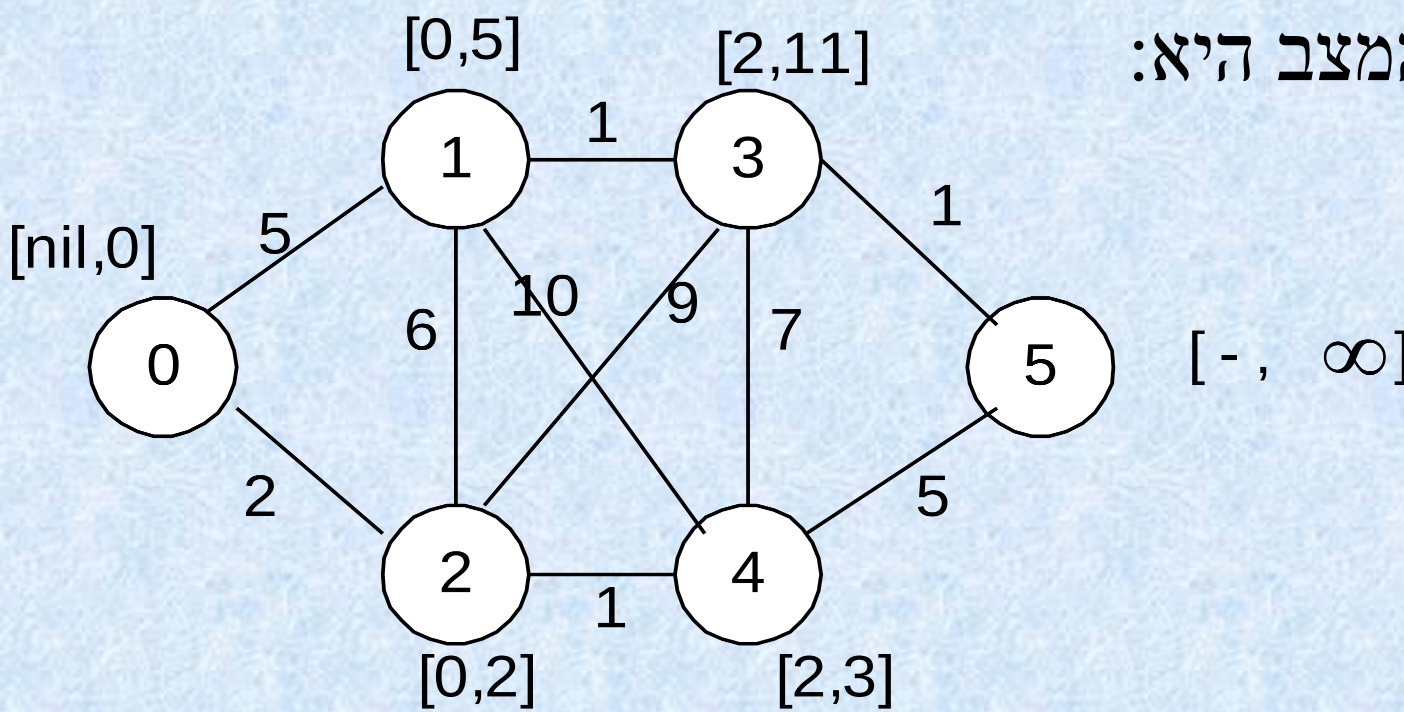
אורך המסלול שהיה עד כה	אורך המסלול כעת
∞	∞

- ולכן לא ניתן לשפר את אורך המסלול המינימלי מקדקוד 0 לקדקוד 5.



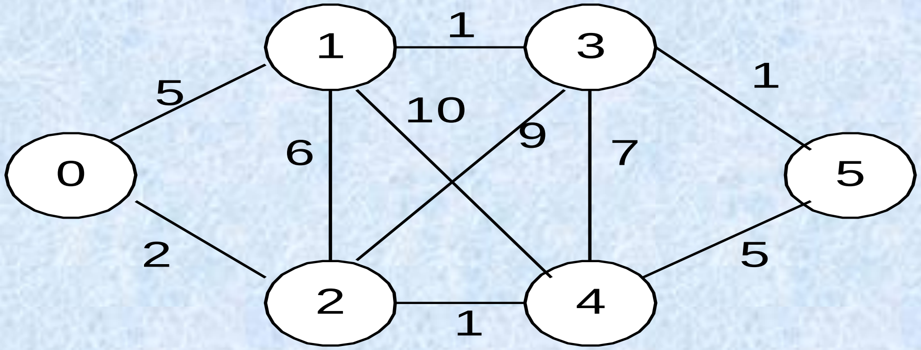
	קבוצה P		קבוצה T			
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	2	5	11	3	∞

- לאחר בדיקת כל המסלולים האפשריים מקדקוד מקור 0 לכל קדקוד אחר j , כאשר $j \in T$, תמונת המצב היא:



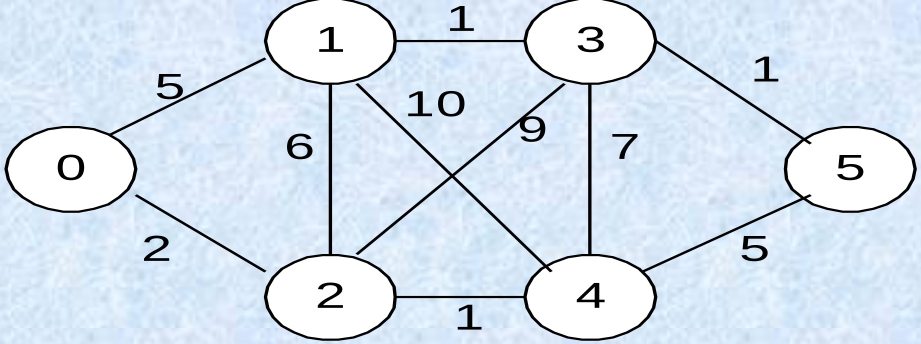
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	2	5	11	3	∞
	קבוצה P		קבוצה T			

- התהליך חוזר חלילה.



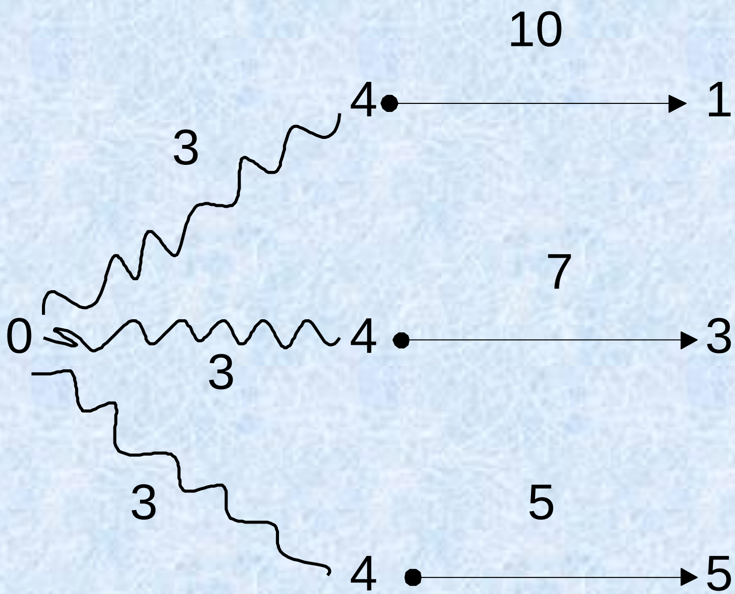
	קבוצה P		קבוצה T			
קדקוד v	0	2	1	3	4	5
d[v]	0	2	5	11	3	∞

- ***איטרציה שניה***
- צעד ראשון: נקבע $K = 4$, כיוון ש $d[4]=3$ ולמשתנה זה ערך הכי קטן מאשר לכל משתנה אחר $d[j]$ לכל $j \in T$.
- לכן נקבל: $P=\{ 0,2,4 \}$ $T=\{ 1,3,5 \}$.
- צעד שני
- שיפורי מסלולים קצרים מקדקוד מקור 0 לכל קדקוד j, $j \in T$, ומסלולים אלה עוברים דרך הקדקוד $K = 4$.

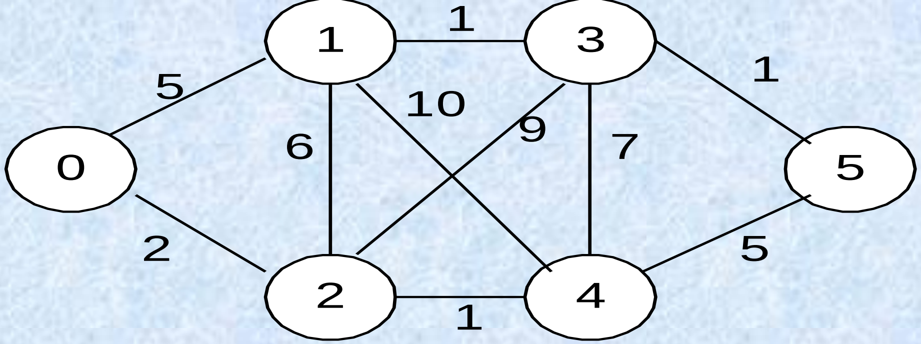


	קבוצה P			קבוצה T		
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	3	5	11	∞

אורך המסלול   אורך הקשת

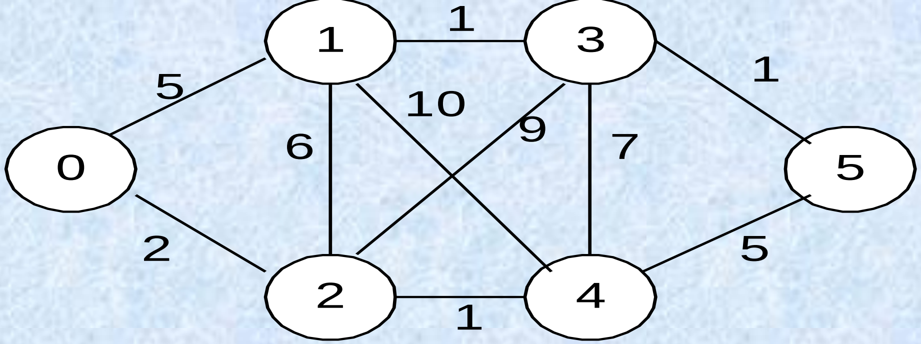


אורך המסלול שכעת	אורך המסלול שהיה	אורך המסלול שיהיה
13	5	5
10	11	10
8	∞	8



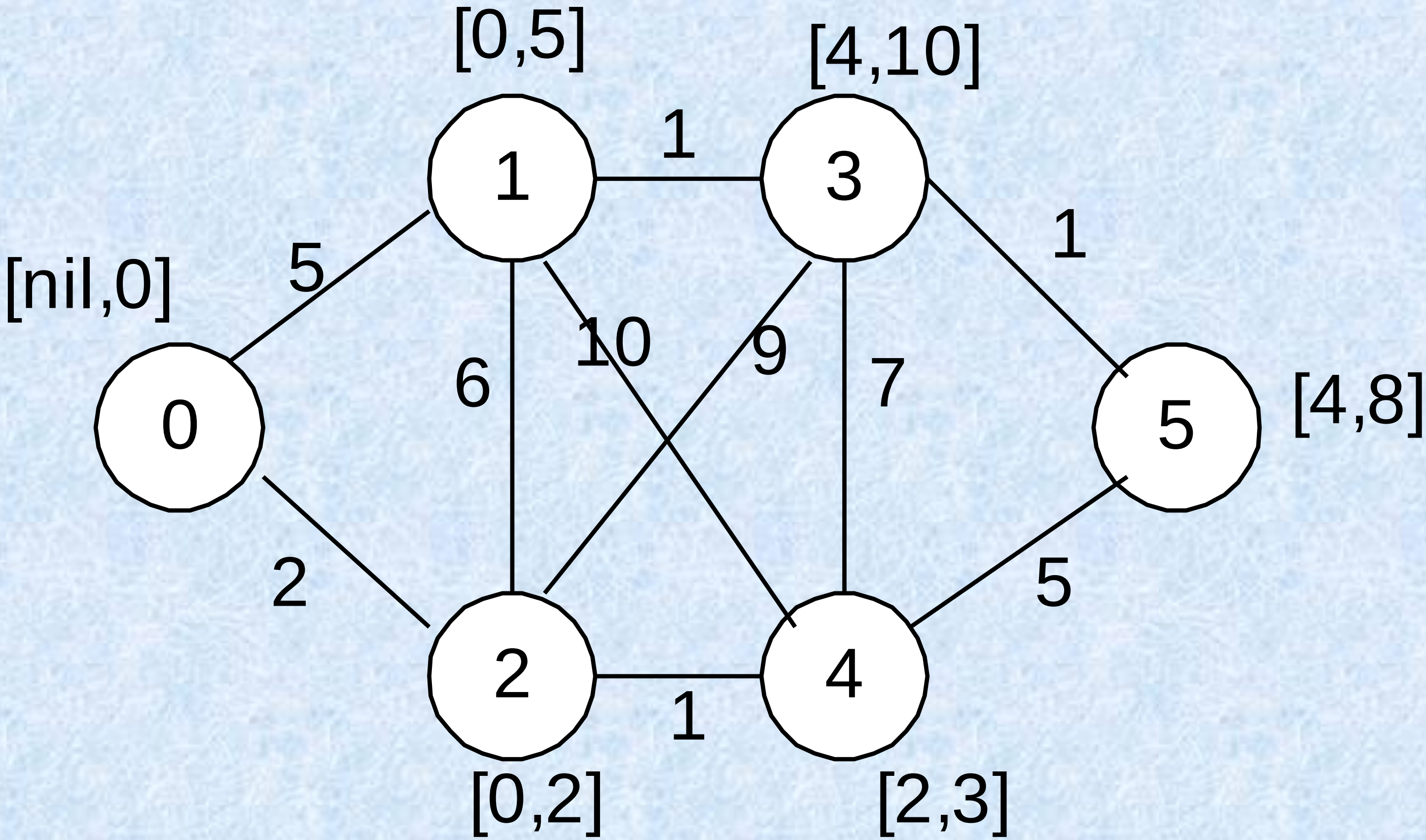
	קבוצה P			קבוצה T		
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	3	5	10	8

- בחינת מסלול 0~~~~~~~~~>1 : רואים שאין שיפור
- בחינת מסלול 0~~~~~~~~~~>3: יש שיפור ולכן ההורה של הקדקוד 3 יהיה קדקוד 4.
- בחינת מסלול 0~~~~~~~~~>5: יש שיפור ולכן ההורה של הקדקוד 5 יהיה קדקוד 4 .



	קבוצה P			קבוצה T		
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	3	5	10	8

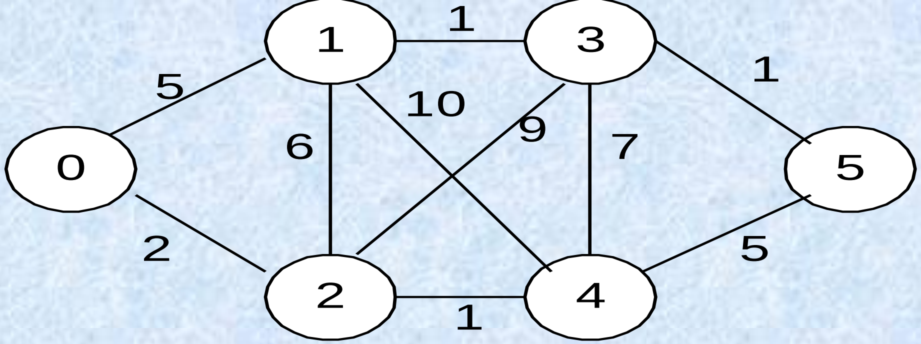
- עתה תמונת המצב הינה:



קדקוד v	0 2 4	1 3 5
d[v]	0 2 3	5 10 8

קבוצה P קבוצה T

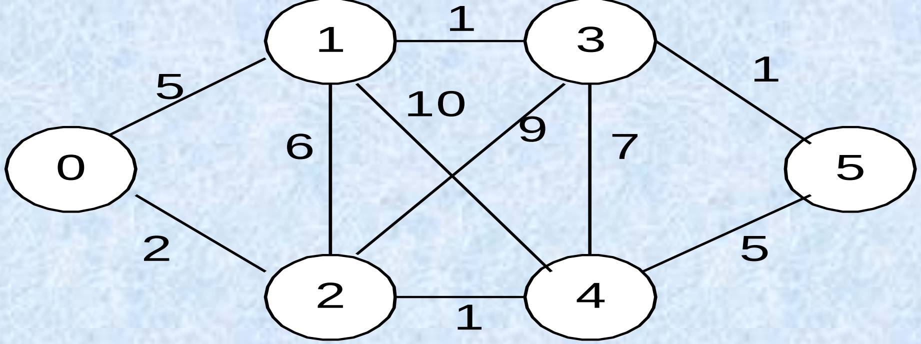
- התהליך חוזר חלילה.



	קבוצה P			קבוצה T		
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	3	5	10	8

איטרציה שלישית

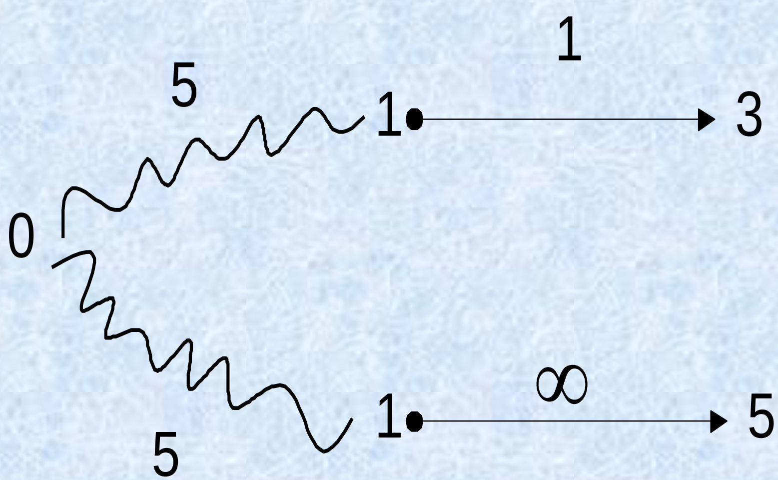
- צעד ראשון נקבע K = 1, כיוון ש d[1] =5 ולמשתנה זה ערך הכי קטן מאשר לכל משתנה אחר d[j] לכל $j \in T$.
- לכן נקבל P={ 0,1,2,4} T={3,5}
- צעד שני שיפורי מסלולים קצרים מקדקוד 0 לכל קדקוד j, $j \in T$, דרך הקדקוד K = 1.

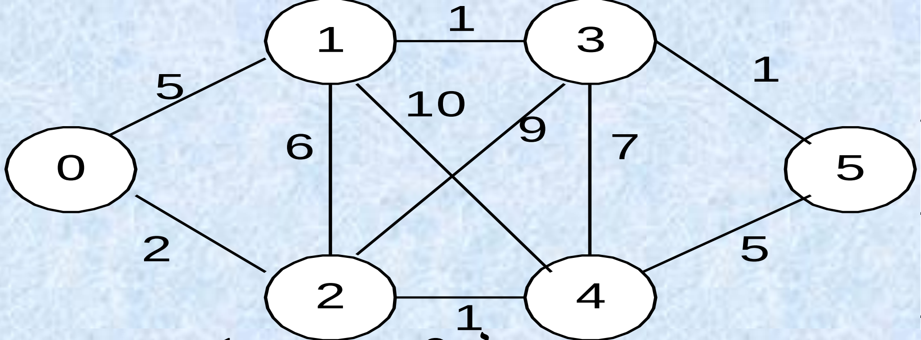


	קבוצה P				קבוצה T	
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	**3**	5	10	8

אורך המסלול שיהיה	אורך המסלול שהיה	אורך המסלול שכעת
6	10	6
8	8	∞

אורך המסלול אורך הקשת

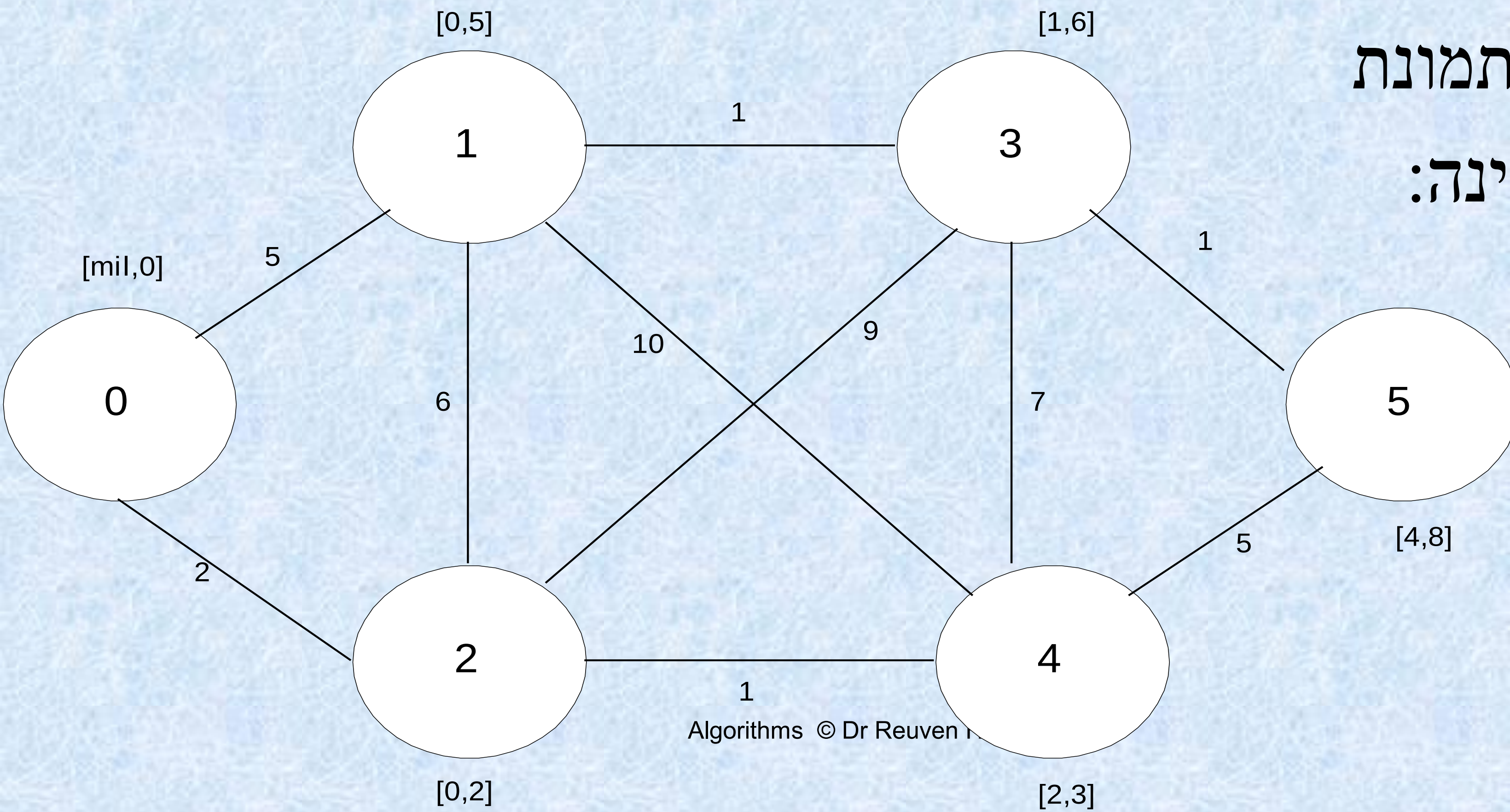




	קבוצה P				קבוצה T	
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	**3**	**5**	**6**	8

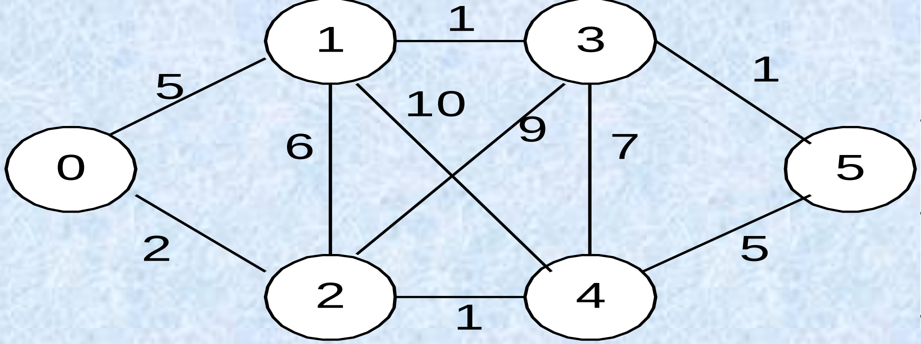
- בחינת מסלול 0~~~>3: יש שיפור. ההורה של 3 יהיה 1.
- בחינת מסלול 0~~~~~~~~>5: רואים שאין שיפור.
- עתה תמונת

המצב הינה:



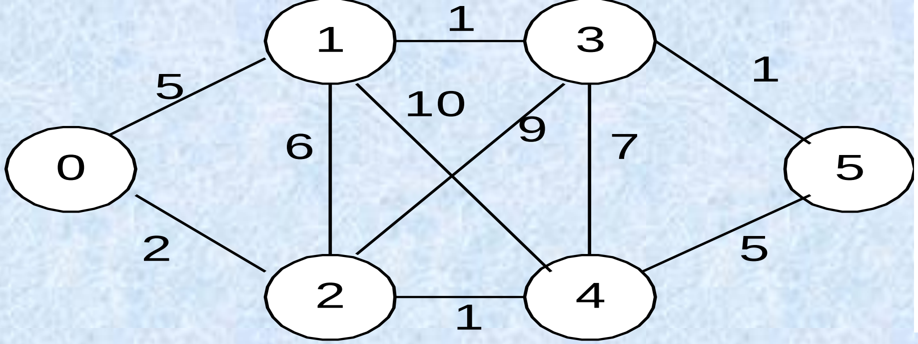
קדקוד V	0 1 2 4	3 5
d[V]	0 5 2 3	6 8
	קבוצה P	קבוצה T

- התהליך חוזר חלילה.



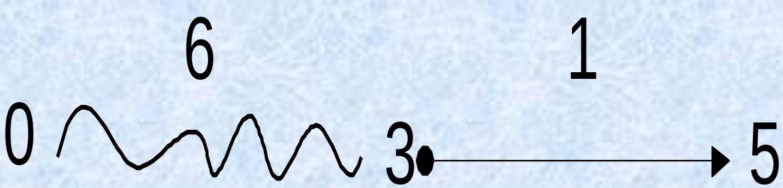
	קבוצה P				קבוצה T	
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	**3**	**5**	**6**	8

- <u>איטרציה רביעית</u>
- <u>צעד ראשון</u> נקבע K = 3 , כיוון ש- d[3] = 6 ולמשתנה זה ערך יותר קטן מאשר למשתנה d[6] שערכו 8.
- לכן נקבל: P={ 0 , 1 , 2 ,3 , 4} T={5}
- <u>צעד שני</u> ניסיון לשיפור מסלול 5 <~~~~ 0 העובר דרך קדקוד K = 3.



	קבוצה P					קבוצה T
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	**3**	**5**	**6**	8

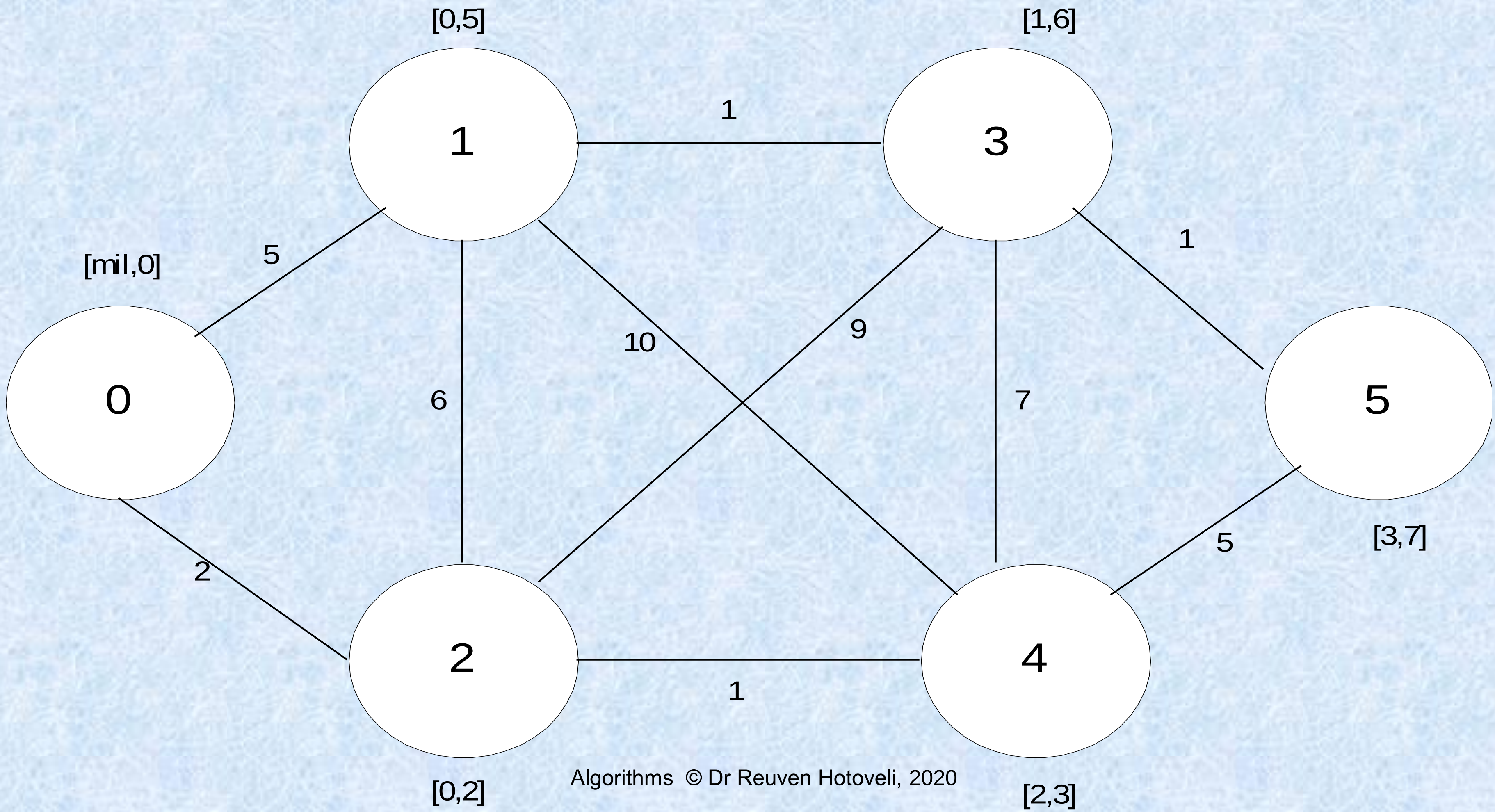
אורך המסלול שכעת	אורך המסלול שהיה	אורך המסלול שיהיה
7	8	7



- מאחר שיש שיפור באורך המסלול מ- 0 לקדקוד 5 דרך הקדקוד 3 , אז ההורה של קדקוד 5 יהיה קדקוד 3.

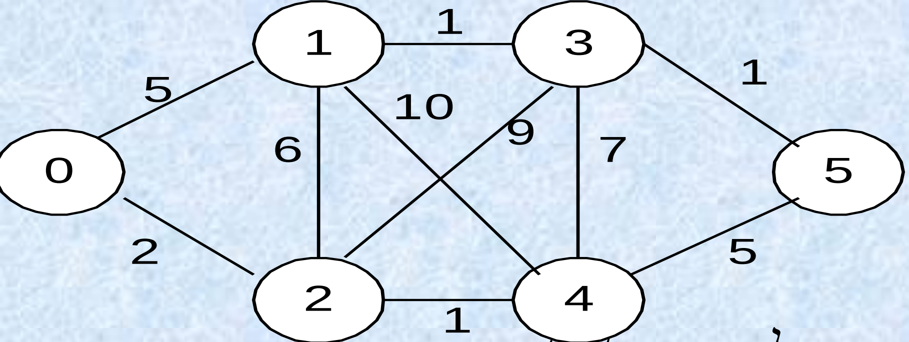
	קבוצה P					קבוצה T
קדקוד v	0	2	4	1	3	5
d[v]	0	2	**3**	**5**	**6**	7

- עתה תמונת המצב הינה:



קדקוד V	0 1 2 3 4	5
d[V]	0 5 2 6 3	7
	קבוצה P	קבוצה T

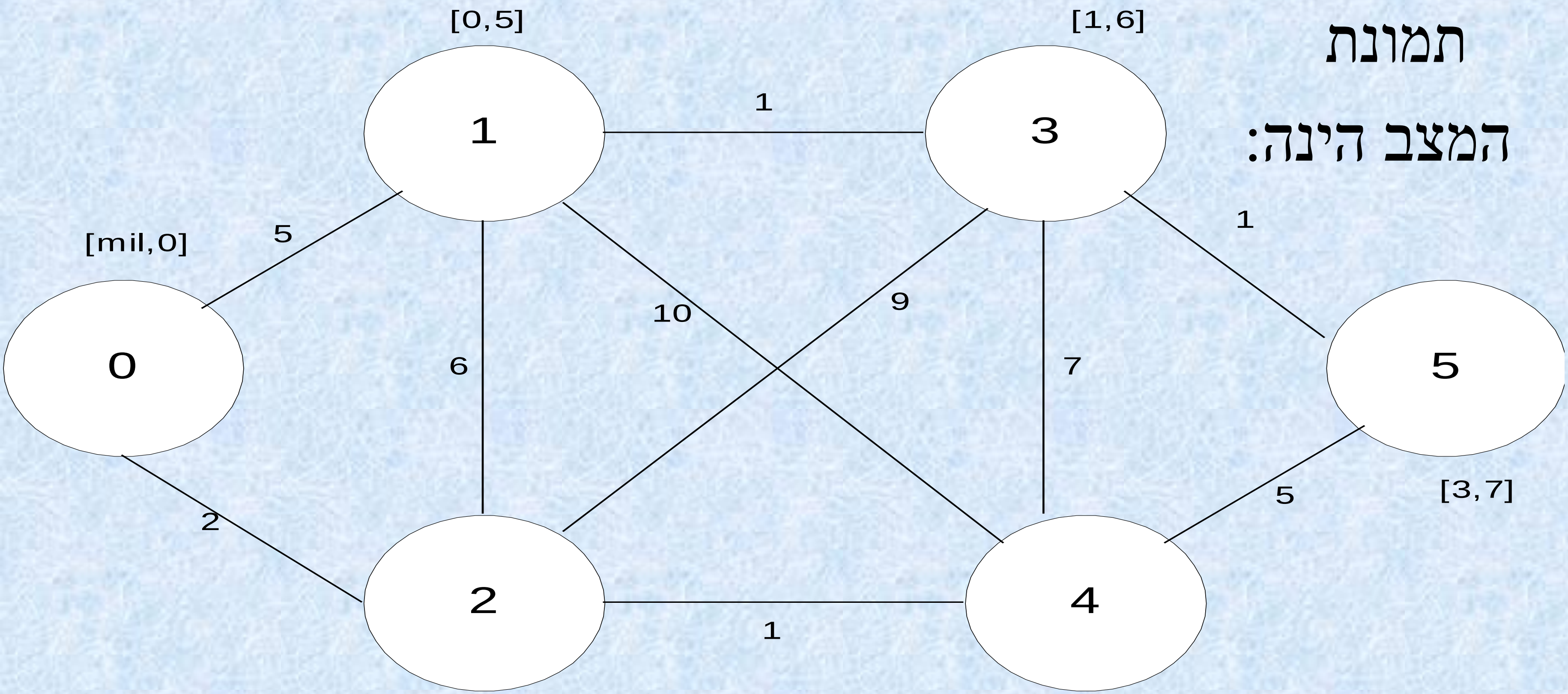
- <u>איטרציה חמישית</u>
- <u>צעד ראשון </u>נקבע ש $K = 5$ (ברור!)
- לכן נקבל: (קבוצה ריקה) - $T=\emptyset$ $p=\{0,1,2,3,4,5\}$

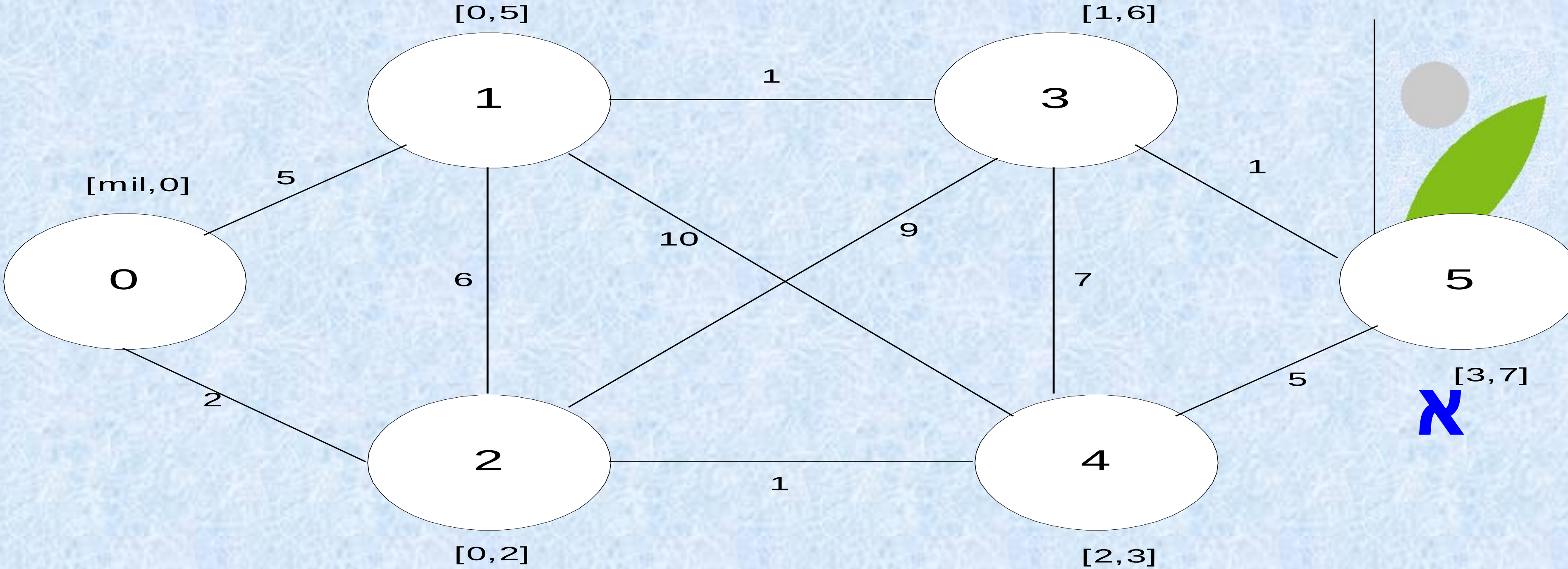


	קבוצה P						קבוצה T
קדקוד v	0	2	4	1	**3**	5	ריקה!
d[v]	0	2	**3**	**5**	**6**	**7**	

- מאחר ו T היא קבוצה ריקה אזי כל המסלולים הקצרים נקבעו ואין את מה לשפר, לכן האלגוריתם הסתיים וסופית תמונת

המצב הינה:





- הערה: באמצעות האלגוריתם ניתן לקבוע מהו מסלול עצמו.
- כך למשל עבור המסלול 5 ~~~~~~~~> 0 המסלול הינו (מהסוף להתחלה) קודם קדקוד 5 , אביו של 5 הינו 3 ואביו של 3 הינו 1 ואביו של 1 הינו קדקוד 0 ולקדקוד 0 אין אב כיוון שהוא קדקוד מקור. לכן המסלול הינו: $5 \longrightarrow 3 \longrightarrow 1 \longrightarrow 0$.

סיכום - אתחול

- עתה נוכל לסכם את האלגוריתם כדלהלן:
- צעד 0
- 0.1 $T=\{1,2,\ldots,n-1\}$ $P=\{0\}$
- 0.2 $d[0] \leftarrow 0$
- 0.3 לכל קדקוד , שאינו קדקוד מקור , כלומר לכל $j=1,\ldots,n-1$ בצע: $d[j] \leftarrow a[0,j]$
- 0.4 סוף הלולאה

סיכום - אתחול

- 0.5 Pa[0]←nil
- 0.6 לכל קדקוד j=1,….,n-1 בצע:
- אם קיימת קשת (0,j)
- אז בצע: Pa [j]←'0'
- אחרת בצע: Pa[j]←'-'
- 0.7 סוף לולאה.

סיכום

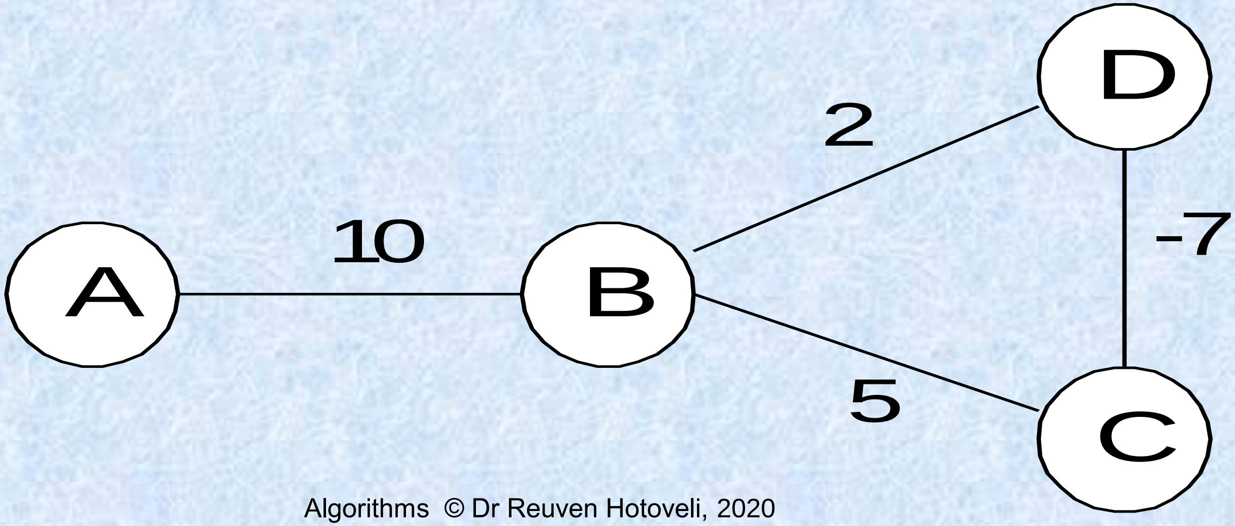
- צעד 1
- 1.1 מצא קדקוד k מתוך קבוצת הקדקודים "הזמניים"- T
בעל ערך d[k] מינימלי, כלומר: לכל $j \in T$
d[k]=min { d[j] }
- 1.2 צרף את הקדקוד k לקבוצה p כלומר p←p+{k}
- 1.3 להוריד את הקדקוד k מקבוצה T כלומר T←T-{k}
- 1.4 אם T=∅ (T הינה קבוצה ריקה) אזי סיים !
- אחרת עבור לצעד 2.

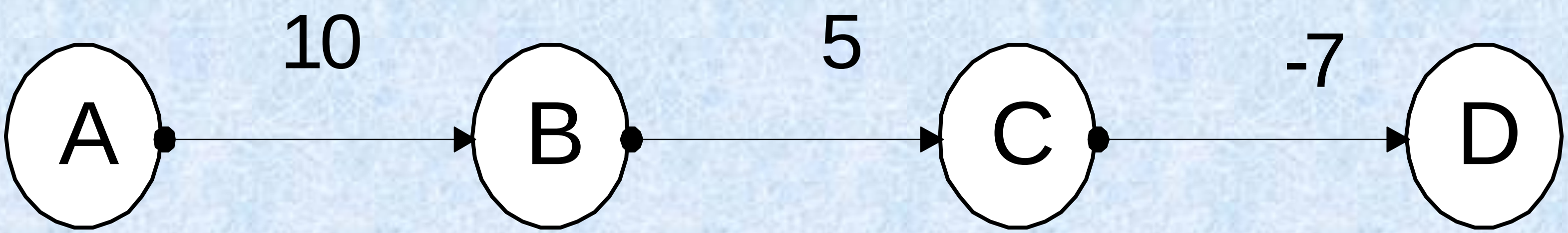
סיכום

- צעד 2
- 2.1 לכל קדקוד $j \in T$ בצע :
- 2.1.1 אם $d[k]+a[k]]j] < d[j]$
- אז בצע: $Pa[j] \leftarrow k$
- 2.1.2 $d[j]=\min \{ d[j] , d[k]+ a[k][j] \}$
- 2.2 סוף הלולאה
- 2.3 חזור לצעד 1 .

הערה

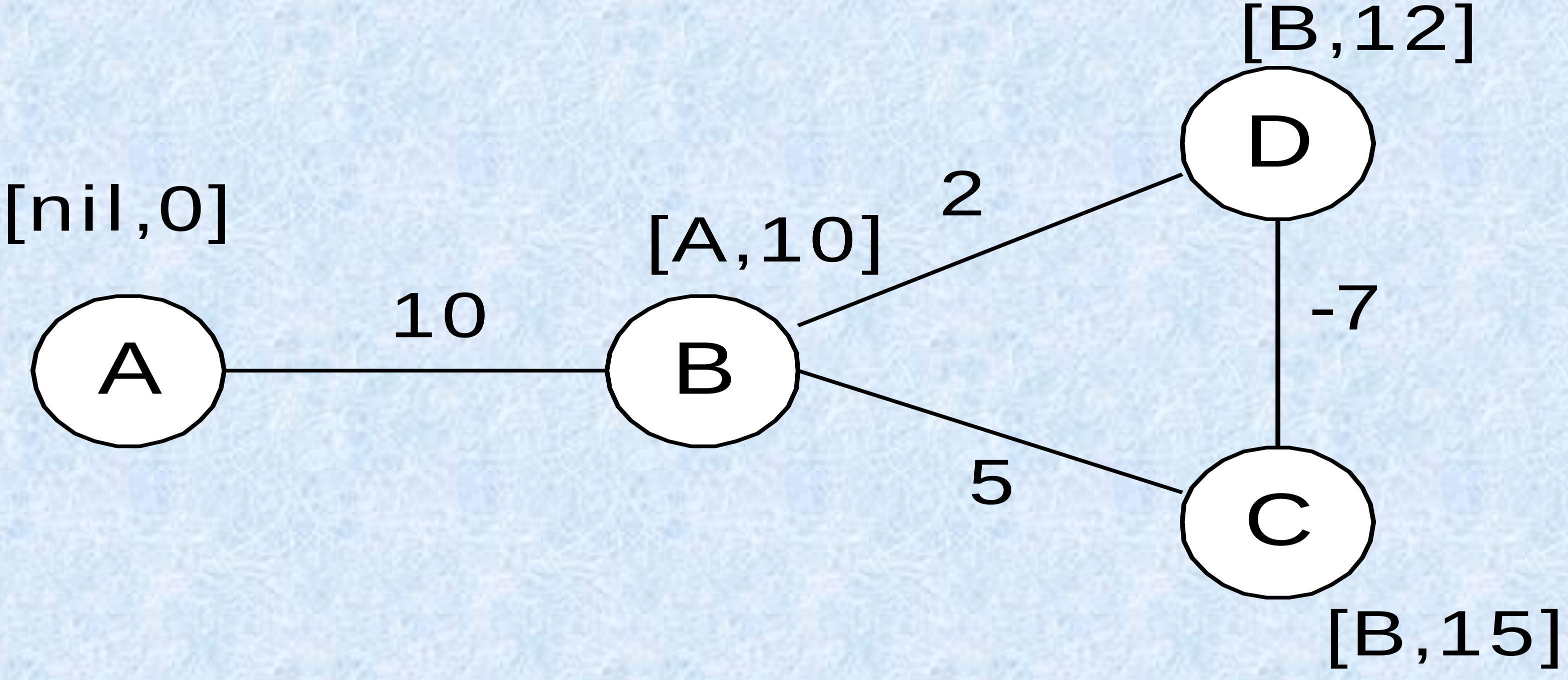
- הערה חשובה! אלגוריתם של דיקסטרה פועל כהלכה בתנאי שכל המשקלות המיוחסות לקשתות הגרף הינן חיוביות.
- נראה זאת בשלילה. **נניח שאפשר לייחס משקל שלילי לקשת כלשהי**. נתבונן על הגרף הבא:



- שים לב שלקשת (C,D) מיוחס מספר שלילי (- 7). קל לראות שהמסלול בעל אורך הקצר ביותר מקדקוד A לקדקוד D הינו:
- 

- ואורכו 8.

- אך בעזרת אלגוריתם דיקסטרה לאחר שתי איטרציות ראשונות נקבל את תמונת המצב הבא (בדוק!):



- באיטרציה הבאה (מבין הקדקודים הזמניים C , D) נבחר בקדקוד D, כיוון ש $d[C]=15 > d[D]= 12$.
- לכן הקבוצה P תהיה : $P=\{A, B,D \}$
- כלומר אורך המסלול המינימלי מ- A ל- D הוא 12 והוא "לכאורה" קבוע, וערכו לא ישתנה עד סוף האלגוריתם, כי הקדקוד D מצטרף לקבוצה P.
- ברור שהתוצאה שקיבלנו $d[D] = 12$ ***<u>אינה נכונה</u>***, כיוון שהערך הצפוי ל - $d[D]$ הינו 8 .זוהי סתירה להנחתנו.

- מסקנה: אם ברצוננו להפעיל את האלגוריתם של דיקסטרה חובה לדרוש שכל המשקולות על הקשתות חייבות להיות חיוביות.
- <u>יעילות האלגוריתם של דיקסטרה</u>
- נתון גרף $G=(V,E)$. $|V|$ מציין את מספר הקדקודים בגרף G.
- <u>צעד 0</u> סיבוכיות זמן הריצה של הצעד 0 הינה $0(|V|)$.

- <u>צעד 1</u>
  - 1.1 נניח שהקבוצה T ממומשת בעזרת מערך.
- לאור הנחה זו צעד זה דורש זמן $0(|V|)$.
  - 1.2 נניח שהקבוצה P ממומשת בעזרת מערך. לכן צעד זה דורש זמן $0(1)$.
  - 1.3 בהמשך להנחה שב – 1.1 בצעד 1.1 ניתן לשמור מידע על מיקומו של הקדקוד K . לכן, צעד זה דורש $0(1)$.
- מכיוון שצעד 1 מתבצע $|V|$ פעמים,אז הזמן הכולל שצעד 1 דורש הוא $0(|V|^2)$.

- צעד 2
- נניח שהגרף מיוצג בעזרת רשימות סמיכות .
- ברור כי באלגוריתם הנדון , כל קדקוד של גרף מוכנס לקבוצה P פעם אחת כך שכל קשת ברשימת הסמיכות נבחנת בדיוק פעם אחת במהלך האלגוריתם.
- לאור האמור לעיל צעד 2 מתבצע בסך הכל $0(|E|)$ פעמים.

- סופית:סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם "דיקסטרה" היא:

$$\boxed{O(|V|^2 + |E|) = O(|V|^2)}$$

- **<u>הערה:</u>**
- למעשה ניתן להשיג זמן ריצה של $O(|E|\log|V|)$ כאשר הקבוצה T ממומשת בעזרת מבנה נתונים מסויים הנקרא ערמה בינרית (heap) .
- להלן מספר עובדות אודות הערמה :

ניסוח אחר של האלגוריתם

- INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
- 1. for each vertex $v \in V$ do
-     1.1 $d[v] \leftarrow \infty$
-     1.2 $\pi[v] \leftarrow NIL$
- 2. $d[s] \leftarrow 0$
- כאשר $\pi[v]$ הוא קדקוד "קודם" של v .

המשך ניסוח חדש

- טכניקת ההקלה (relaxation) :

- RELAX(u,v,w)
- 1. if d[v] > d[u] + w(u,v) then
- 1.1 d[v] ← d[u] + w(u,v)
- 1.2 $\pi[v] \leftarrow u$

המשך הניסוח

- DIJKSTRA(G,w,s)
- 1. INITIALIZE-SINGLE-SOURCE(G,s)
- 1. S← $\emptyset$
- 2. Q← V {Q - הוא תור של קדקודים}
- 3. While Q $\neq \emptyset$ do
- 3.1 u← Extract_Min(Q)
- 3.2 $S \leftarrow S \cup \{u\}$
- 3.3 for each vertex $v \in Adj[u]$
- do RELAX(u,v,w)

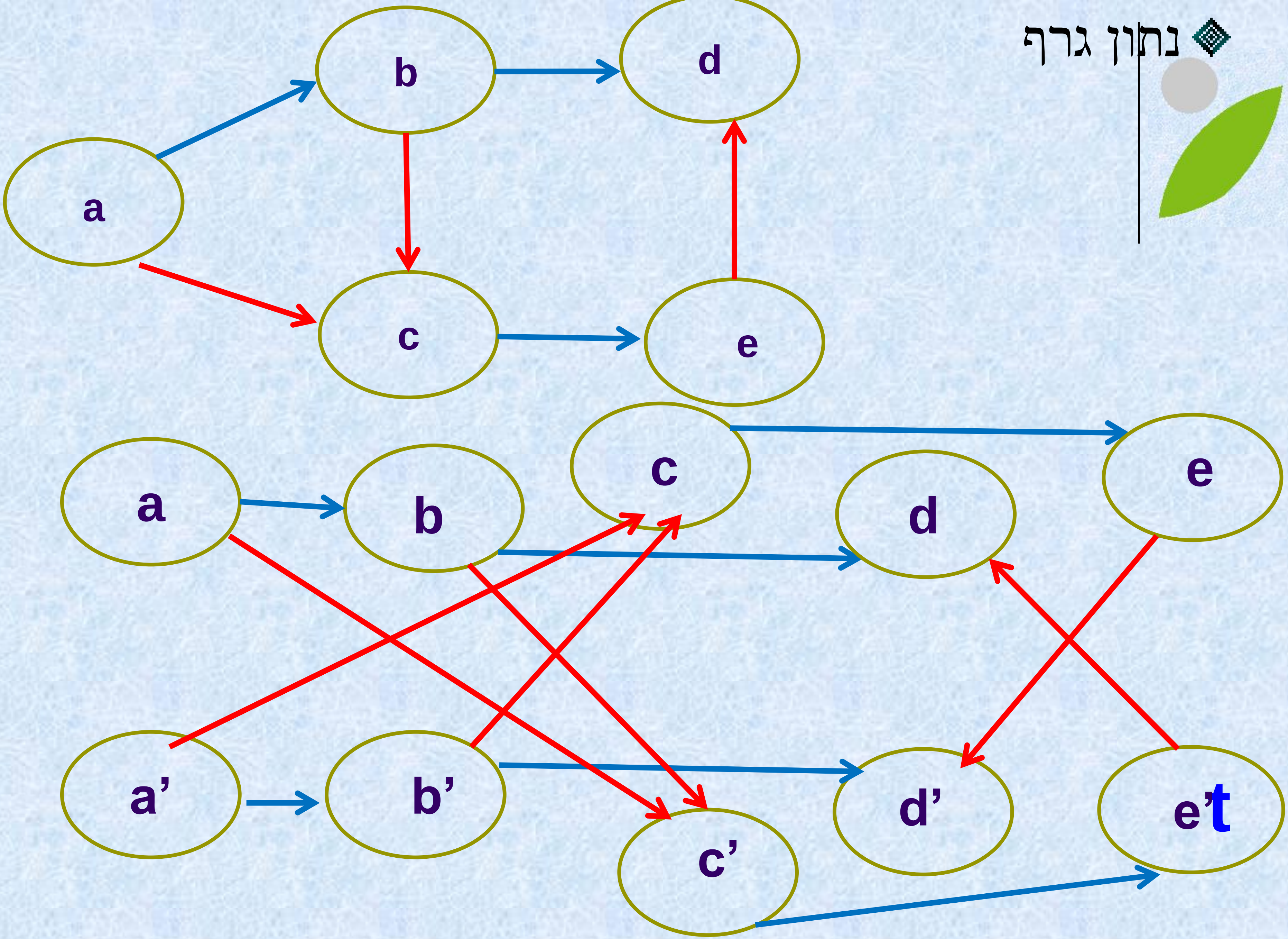
הרעיון

- זמן הריצה של Dijkstra הוא
$O(|V|+|V|*extract\_min + |E|*update)$:

תרגיל 3

- נתון גרף מכוון $G=(V, E)$, $w:E\rightarrow R^+$, $s,t\in V$ וכל קשת צבועה באדום או כחול. יש למצוא אורך מק"ב מ-s ל-t מבין המסלולים בעלי מס' זוגי של קשתות אדומות.

נתון גרף



תשובה

- לשם נוחות, עבור צומת $v\in V$ נסמן $v_0=(v,0)$ ו-$v_1=(v,1)$.
- נגדיר $G'=(V', E')$ כדלהלן:
- $V'=\{v0, v1 \mid v\in V\}$, ו-
- $E'=\{(u_0, v_0), (u_1, v_1) \mid (u,v) \in E$ כחולה$\}$.

$\cup\{(u_0, v_1), (u_1, v_0) \mid (u,v) \in E$ אדומה$\}$

אלגוריתם+הוכחה

- <u>האלגוריתם:</u> הרץ Dijkstra על G’ מ-s0. החזר את אורך המק"ב מ-s0 ל-t0.
- <u>הוכחת נכונות:</u> מההגדרות נובע שקיים מסלול בין s_0 ל- t_0 אםם קיים מסלול מ-s ל- t באותו אורך ובעל מס' אדומות זוגי.
- לכן מק"ב כלשהו מ-s_0 ל- t_0 הוא בעל אותו אורך של מק"ב מבין המסלולים בעלי מס' זוגי של קשתות אדומות מ-s ל-t.

נכונות האלגוריתם

- משפט 1:
- נתון גרף $G=(V,E)$ עם פונקציית המשקל $W:E\rightarrow R$.
- יהי $P=(V_0,V_1,\ldots,V_k)$ מסלול הקצר ביותר מקדקוד V_0 לקדקוד V_k .
- אם $Pij=(V_i,V_{i+1},\ldots,V_j)$ הינו תת מסלול מקדקוד V_i לקדקוד V_j עבור $0\le i\le j\le k$, אז Pij הינו מסלול בעל אורך מינימלי מקדקוד V_i לקדקוד V_j .

- הוכחה:
- נפרק את המסלול P לתתי מסלולים הבאים:
- $P_{0i} \qquad\qquad P_{ij} \qquad\qquad P_{jk}$
- $V_0 \rightsquigarrow V_i \rightsquigarrow V_j \rightsquigarrow V_k$
- ברור כי
- $W(P)=W(P_{0i})+W(P_{ij}) + W(P_{jk})$

- כעת נניח שקיים מסלול אחר P'_{ij} מקדקוד V_i לקדקוד V_j המקיים: $W(P'_{ij}) < W(P_{ij})$
- עתה נתבונן במסלול החדש מקדקוד V_0 לקדקוד V_k
- P_{0i} P'_{ij} P_{jk}
- $V_0 \sim V_i \sim V_j \sim V_k$
- המשקל של המסלול הינו :
- $W(P') = W(P_{0i}) + W(P'_{ij}) + W(P_{jk}) < W(P_{0i}) + W(P_{ij}) + W(P_{jk})$

- כלומר $W(P) < W(P')$.
- וזוהי סתירה לנתון ש P – מסלול בעל אורך מינימלי.
- לכן הנחתנו אינה נכונה .
-
- מש"ל.

- מסקנה 1 :
- נתון גרף $G=(V,E)$ עם פונקצית משקל $W : E \rightarrow R^{+}$
- נניח כי s הינו קדקוד מקור.
- יהי P מסלול בעל אורך מינימלי מקדקוד s לקדקוד a בגרף.
- מסלול זה P ניתן לפירוק באופן הבא:

$$s \overset{p'}{\rightsquigarrow} v \longrightarrow a$$

- ומתקיים : $L(s,a)=L(s,v)+W(v,a)$

- כלומר, אורך המסלול המינימלי מקדקוד s לקדקוד a הינו אורך המסלול המינימלי מקדקוד s לקדקוד v בתוספת המשקל שעל הקשת (v,a) , בתנאי שקיימת קשת מקדקוד v לקדקוד a .
- הוכחה:
- מאחר ש - P הוא מסלול בעל אורך מינימלי אז לפי ההגדרה $L(s,a)=W(P)$

- אך ברור כי :
- $W(P)=W(P')+W(v,a)$
- כמו כן לפי משפט 1ברור כי P' הינו מסלול בעל אורך מינימלי מקדקוד s לקדקוד v .
- כלומר מתקיים: $W(P')=L(s,v)$
- לסיכום
- $L(s,a)=W(P)=W(P')+W(v,a)=L(s,v)+W(v,a)$

- מסקנה 2:
- לכל קשת $(u,a) \in E$ ברשת מתקיים :
- $L(s,a) \leq L(s,u)+W(u,a)$

- מסקנה 3:
- תכונה הנובעת מאלגוריתם דיקסטרה
- תהי $(u,v) \in E$ קשת ברשת. בתום צעד מספר 2 של האלגוריתם דיקסטרה מתקיים: $d[v] \leq d[u] + w(u,v)$

- הוכחה:
- בצעד מספר 2 של האלגוריתם ביצענו את המשפט הבא :
- $d[v] = \min \{ d[v], d[u]+w(u,v) \}$
- אם $d[v] > d[u]+w(u,v)$ אזי לאחר צעד 2 יתקיים:
- $d[v] = d[u]+w(u,v)$
- ואם $d[v] <= d[u] +w(u,v)$ אזי $d[u]$ ו-$d[v]$ אינם משתנים ולכן $d[v] <= d[u]+w(u,v)$.
  מש"ל .

- <u>משפט 2</u>
- נתון גרף $G=(V,E)$ עם פונקצית משקל $W : E \rightarrow R^{+}$.
- יהי s קדקוד מקור באלגוריתם למציאת מסלולים בעלי משקל מינימלי .
- בתחילת האלגוריתם מתקיים: $d[v] \geq L(s,v)$ לכל קדקוד v בגרף .
- אם $d[v] = L(s,v)$ אזי הערך של $d[v]$ לא ישתנה עד סוף האלגוריתם.

- הוכחה
- לפי צעד 0 באלגוריתם $d(s)=0$.
- מאחר שאנו לא מרשים קיומם של המעגלים באורך שלילי ברשת אז אורך המסלול הקצר ביותר מקדקוד מקור לעצמו הינו 0 , כלומר $L(s,s)=0$ ולכן $d[s]=L(s,s)$.
- בעבור יתר הקדקודים, פרט למקור, $d[v]=\infty$ ולכן מתקיים $d[v] \geq L(s,v)$.

- עתה נניח שקדקוד v הוא הקדקוד הראשון שעבורו מתקיים: $d[v] < L(s,v)$
- בתום צעד 2 באלגוריתם של דיקסטרה העדכון של $d[v]$ התבצע באמצעות הקשת (u,v) .
- נתבונן במסלול הבא : $s \rightsquigarrow u \longrightarrow v$
- $L(s,u)+w(u,v) \geq L(s,v) > d[v] = d[u]+w(u,v)$
- לפי מסקנה 2   הנחה

- מכאן נובע ש $d[u] < L(s,u)$
- זוהי סתירה להנחה ,כיוון שכאשר בוחנים את הקשת (u,v) משנים את $d[v]$ ולא את $d[u]$.
- לפני קביעת ערכו ל $d[v]$, נקבע ערכו של $d[u]$
- מאחר שמניחים שקדקוד v הוא הקדקוד הראשון שעבורו מתקיים $d(v) < L(s,v)$ לכן לא יתכן כי $d(u) < L(s,u)$.

- מאחר שקיבלנו סתירה להנחתנו, המסקנה היא ש-
- $d[v] \geq L(s,v)$ לכל קדקוד v ברשת .
- לכן אם באיטרציה מסוימת משיגים את השיווין $d[v]=L(s,v)$
- ***<u>הוא אינו יכול לקטון</u>***, משום שזה עתה ראינו כי $d[v] \geq L(s,v)$
- ***<u>והוא אינו יכול לגדול</u>*** כי צעד 2 של האלגוריתם
- $d[v]=\min\{\ d[v]\ ,\ d[u]+w(u,v)\ \}$
- אינו מגדיל את ערכו של d. ***<u>משל</u>***

- <u>משפט 3</u>
- יהי מסלול בעל אורך מינימלי $s \rightsquigarrow u \longrightarrow v$
- בגרף $G=(V,E)$. אם $d[u]=L(s,u)$ אז $d[v]=L(s,v)$.
- הוכחה
- $$d[v] \underset{\text{מסקנה 3}}{\le} d[u]+w(u,v) \underset{\text{נתון}}{=} L(s,u)+w(u,v) \underset{\text{לפי מסקנה 1}}{=} L(s,v)$$
- אך לפי משפט 2 $d[v] \ge L(s,v)$ לכן $d[v] = L(s,v)$.

<u>משל.</u>

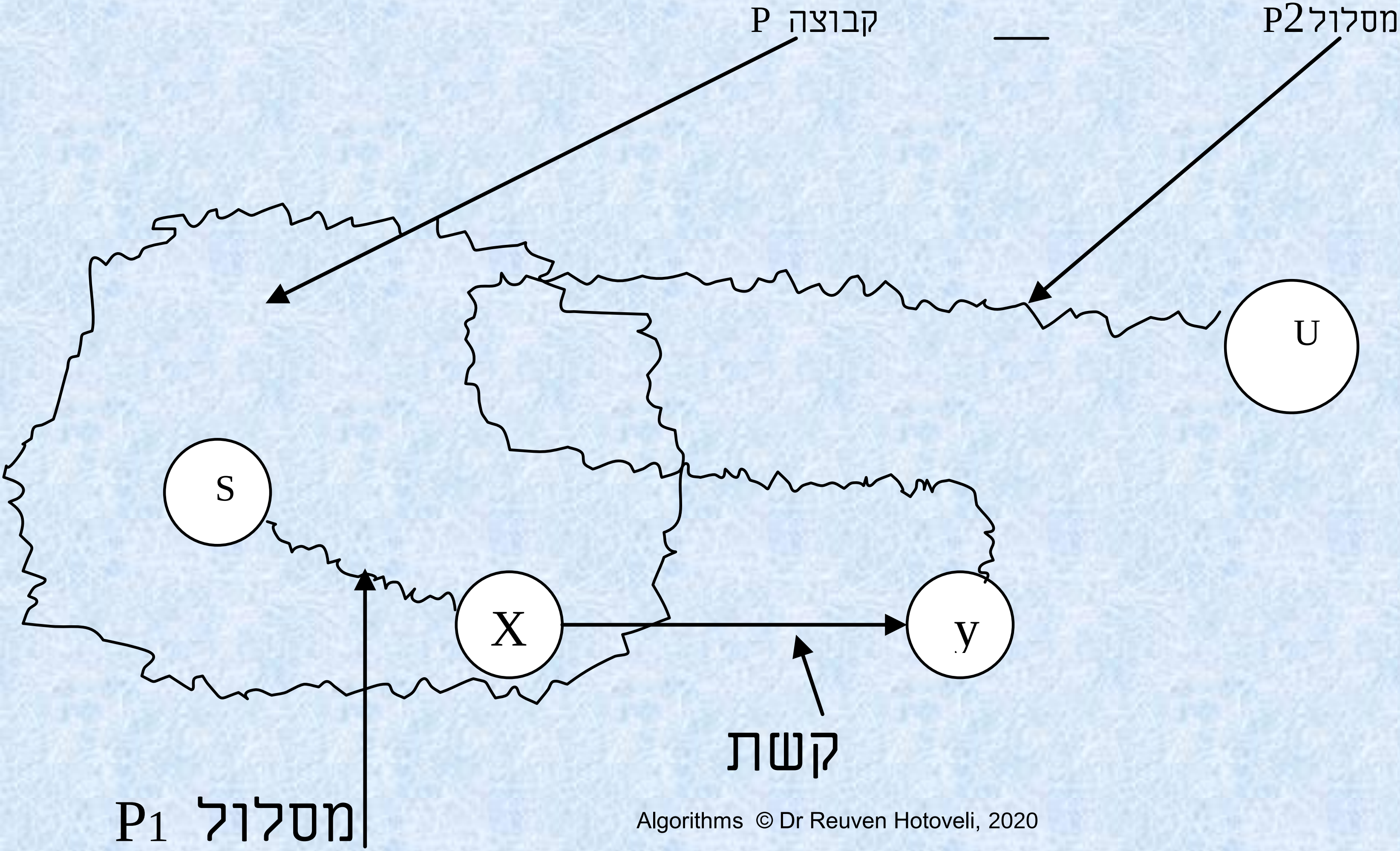
- <u>משפט 4</u>
- (משפט מרכזי להוכחת נכונות האלגוריתם של דיקסטרה).
- לאחר הרצת אלגוריתם של דיקסטרה על הגרף $G=(V,E)$, עם פונקצית משקל W (המשקולות על קשתות חיוביות) וקדקוד s שהינו קדקוד מקור, לכל קדקוד $u \in V$ מתקיים: $d[u]=L(s,u)$

- ***הוכחה***
- נראה,עבור כל קדקוד u , שמתקיים $d[u]=L(s,u)$ כאשר הקדקוד u מצטרף לקבוצה P (צעד מספר 1 באלגוריתם).
- כאמור P זוהי קבוצת הקדקודים כך שהמסלול בעל אורך מינימלי מקדקוד מקור S עד אליהם הינו <u>קבוע</u> ולא ישתנה בעתיד עד סוף האלגוריתם.

- נניח בשלילה ויהי u ***הקדקוד הראשון*** שעבורו $d[u] \neq L(s,u)$ לאחר שהקדקוד u הצטרף לקבוצה P.
- ברור כי $u \neq s$ מכיוון ש- s הינו קדקוד מקור והוא הראשון שמצטרף לקבוצה P ולפי צעד 0 של האלגוריתם מתקיים: $d[s] = 0 = L(s,s)$

- מאחר ש- s $u \neq s$ ו- $s \in P$ אזי ברור שהקבוצה P שונה מקבוצה ריקה ($P \neq \emptyset$) לפני שהקדקוד u מצטרף לקבוצה P .

- יהי מסלול מקדקוד $s \in P$ לקדקוד $u \in T$ (סימונים לפי האלגוריתם) המתואר באיור הבא :



קבוצה P
מסלולP2
U
S
X
y
קשת
מסלול P1

- נניח שהמסלול המינימלי מקדקוד s לקדקוד u הינו
- P1 P2
- $s \overset{P1}{\rightsquigarrow} x \longrightarrow y \overset{P2}{\rightsquigarrow} u$
- כאשר $x \in P$ ו $y \in T$.
- מאחר ש- $x \in P$ וקדקוד u <u>***הוא הראשון***</u> שעבורו
- $d[u] \neq L(s,u)$, כאשר u מצטרף לקבוצה P אזי ברור כי $d[x]=L(s,x)$

- בזמן שהקדקוד x הצטרף לקבוצה P (בצעד מס' 1 של האלגוריתם) מייד לאחר מכן צעד מס' 2 של האלגוריתם מעדכן את ה- $d[y]$ של הקדקוד y <u>ולפי משפט 3</u> נובע כי $d[y]=L(s,y)$.
- המשמעות היא ברגע ש- u יצטרף לקבוצה P ברור שצריך להתקיים : $d[y]= L(s,y)$.

- מאחר שהקדקוד y הינו קדקוד מקדים לקדקוד u במסלול הקצר מקדקוד s לקדקוד u ולפי דרישת האלגוריתם **כל המשקולות הן חיוביות** אזי ברור כי :
- $L(s,y) \le L(s,u)$ ולכן מתקיים :
- $d[y]=L(s,y) \le L(s,u) \le d[u]$
-

לפי משפט 2

- הקדקודים y ו- u שייכים לקבוצה T , לכן כאשר קדקוד u נבחר ברור שצריך להתקיים:
- $d[u] \leq d[y]$
- מחד $d[u] \geq d[y]$ ומאידך $d[u] \leq d[y]$.
לכן,ברור שצריך להתקיים $d[u] = d[y]$.
- $d[y] = L(s,y) \leq L(s,u) \leq d[u] = d[y]$
-

ראינו עתה

- ולכן
- d[y]= L(s,y)=L(s,u)=d[u]=d[y]
- כלומר $d[u]=L(s,u)$ וזוהי סתירה להנחתנו .
- ולכן כל קדקוד u שמצטרף לקבוצה P מתקיים
- $d[u]=L(s,u)$
- ועל פי משפט 2 ידוע שה- d[u] לא ישתנה עד סוף האלגוריתם . ***<u>מ.ש.ל</u>***

תרגול כיתה

- נתון גרף מכוון $G=(V,E)$, $w: E \rightarrow \{1,2,3\}$, $s \in V$.

  מצא מסלולים קצרים ביותר מ-s.