תכנון וניתוח אלגוריתמים

<u>הרצאה 23</u>

מסלולים קצרים בין כל הזוגות

מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות

- עד כה הכרנו שיטות למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור יחיד.
- עתה נכיר שיטות למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל זוגות הקודקודים בגרף.
- עתה נציג אלגוריתמים שונים הפותרים את הבעיה של מסלולים קצרים בין כל הזוגות של קודקודי הגרף.
- אלגוריתם של דייקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות.

- בפרק הקודם הכרנו אלגוריתם של דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור <u>יחיד</u>.
- עתה נפעיל את אותו אלגוריתם – דיקסטרה **n** פעמים כאשר $n=|V|$, ובהפעלה ה- **i**–ית קודקוד מקור יחיד יהיה קודקוד **i** עבור $1\leq i \leq n$.
- נתון גרף $G=(V,E)$ וכל המשקלות של הקשתות הם אי שליליים.

- נניח שבגרף n=|V| קודקודים וממוספרים באופן אקראי מ –1 עד n , והגרף G מיוצג בעזרת מטריצת סמיכות כדלהלן :

$$a_{ij} = \begin{cases} Eij \text{ ((i,j) משקל שעל הקשת)} & \text{אם קיימת קשת } (i,j) \\ 0 & i=j \\ \infty & \text{אחרת} \end{cases}$$

- d[i][v]– מציין אורך המסלול הקצר ביותר מקודקוד מקור i לקודקוד v.

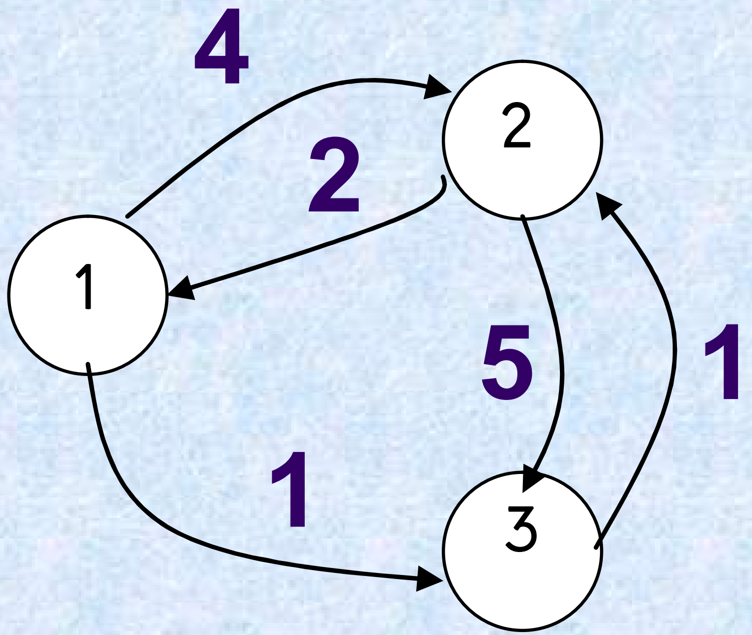
- ברור כי $d[i][i]$ שווה לאפס לכל $1 \le i \le n$, כי כל המשקלות של הקשתות הם אי שליליים ובפרט אם ישנם מעגלים בגרף אז אורכי המסלולים המהווים מעגל הם גם כן אי שליליים, לכן אורך המסלול הקצר ביותר מקודקוד מקור i לעצמו הוא 0.
- כמו כן $d[i][j]= a_{ij}$ מאחר ש-a_{ij} מתאר את אורך המסלול המינימלי <u>הזמני</u> מקודקוד מקור i לקודקוד j.

- זו הערכה תחילית הכי טובה שאפשר לתת כאורך המסלול המינימלי מקודקוד מקור i לכל לקודקוד j
.
- כמו כן אם אין קשת מקודקוד מקור i לקודקוד j אזי הערכה שתנתן ל d[i][j] הינה ∞ , המופיע גם כן במטריצה ב – a_{ij} .
- לסיכום, האלגוריתם המבוקש הינו :

- לכל קודקוד i , עבור $i=1,...n$, בצע : $d[i][i]=0$.
- לכל קודקוד i , עבור $i=1,...n$, בצע :
  - לכל קודקוד j , עבור $j=1...n$ בצע :
    אם $i \neq j$ אז $d[i][j]= a_{ij}$.
- לכל קודקוד מקור i , עבור $i=1..n$
- בצע : קרא לשיגרה <u>דיקסטרה (G,i,d)</u> .

- השיגרה דיקסטרה מוצאת מסלולים קצרים מקודקוד מקור i ליתר הקודקודים.

עבור הגרף הבא :



- באיטרציה ראשונה קודקוד מקור הינו קודקוד 1.
- עתה נפעיל את האלגוריתם – דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 1 ליתר הקודקודים ואז נקבל :

קודקוד j	1	2	3
d[1][j]	0	2	1

- באיטרציה שניה קודקוד מקור הינו קודקוד 2.
- עתה נפעיל את האלגוריתם – דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 2 ליתר הקודקודים ואז נקבל :

קודקוד j	1	2	3
d[2][j]	2	0	3

- באיטרציה שלישית קודקוד מקור הינו קודקוד 3.
- עתה נפעיל את האלגוריתם – דיקסטרה למציאת מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 3 ליתר הקודקודים ואז נקבל :

קודקוד j	1	2	3
d[3][j]	3	1	0

:

- סופית, קיבלנו מטריצת המסלולים הקצרים בין כל הזוגות והיא:

d=

	1	2	3
1	0	2	1
2	2	0	3
3	3	1	0

- לכן סופית, סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם הנדון היא$O(|V|^3)$.

* ***אלגוריתם של בלמן פורד-*** *למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות*
* *ניתן לפתור בעיית מסלולים קצרים בין כל הזוגות על ידי הרצת אלגוריתם בלמן-פורד עבור מסלולים קצרים ממקור יחיד* n *פעמים כאשר* $n=|V|$*, פעם אחת עבור כל אחד מן הקודקודים כמקור.*

- כלומר אם קודקודי הגרף ממוספרים באופן מקרי מ-1 עד n אז באיטרציה ראשונה קובעים כקודקוד מקור את הקודקוד 1 ובאמצעות האלגוריתם בלמן-פורד נמצא מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 1 ליתר קודקודי הגרף.
- באיטרציה שניה קובעים כקודקוד מקור את הקודקוד 2 ובאמצעות האלגוריתם בלמן-פורד נמצא מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור 2 ליתר קודקודי הגרף וכך הלאה ,

- ובאיטרציה האחרונה , באיטרציה ה- **n** ית קובעים כקודקוד מקור את הקודקוד **n** ובאמצעות האלגוריתם בלמן-פורד נמצא מסלולים קצרים ביותר מקודקוד מקור **n** ליתר קודקודי הגרף.
- סופית, כך נמצא מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות .

- כזכור ,בניגוד לאלגוריתם של דיקסטרה , באלגוריתם של בלמן-פורד מרשים משקלות קשתות שליליים, אך אסור שברשת יהיו מעגליים שליליים.
- לכן סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם בלמן-פורד למציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות היא $O(|V|^4)$ או $O(|V|^2\cdot|E|)$ תוך שימוש במבני נתונים מסוים לייצוג הגרף.

- עתה נראה אלגוריתם של פלויד- וורשל שפותר את הבעיה – מציאת מסלולים קצרים ביותר בין כל הזוגות, תחת אותם אילוצים כמו של בלמן-פורד, בסיבוכיות זמן ריצה $O(|V|^3)$.