אלגוריתמים בגרפים
הרצאה 1.2

מפרט

המפרט

- כזכור כדי לנסח מפרט לטיפוס הנתונים גרף, עלינו לעשות שני דברים:
- 1.להגדיר את המודל המתמטי של טיפוס הנתונים גרף.
- 2. לפרט את הפעולות על טיפוס נתונים זה.
- עד כה הגדרנו את המודל המתמטי וכעת נעבור לפעולות הבסיסיות על גרף.
- להלן מספר הפעולות הבסיסיות על הגרפים:

המפרט

- <u>הוספת קשת join –</u>
- הפעולה **join(x,y,g)** או "<u>**הוסף קשת**</u>(x,y,g)" מוסיפה קשת מקדקוד x לקדקוד y בגרף g.
- <u>הוספת קשת משוקללת (קשת שעליה משקל **joinw** –</u>
- הפעולה **joinw(x,y,w,g)** או

  "<u>**הוסף קשת משוקללת**</u>**(x,y,w,g)**"

  מוסיפה קשת משוקללת מקדקוד x לקדקוד y ברשת (גרף משוקלל).

המפרט

- הסרת קשת remv –
- הפעולה **remv(x,y,g)** או "**הסר קשת(x,y,g)**" מסירה קשת מקדקוד x לקדקוד y בגרף g.
- הסרת קשת משוקללת remvw –
- הפעולה **remvw(x,y,w,g)** או

"**הסר קשת משוקללת(x,y,w,g)**" מסירה קשת מקדקוד x לקדקוד y ברשת g ומציבה ב-w את משקל הקשת המוסרת.

<u>המפרט</u>

- <u>בדיקת שכנות (סמיכות) של קדקודים adjacent –</u>
- הפעולה **adjacent(x,y,g)** או "**<u>סמוכים?</u>(x,y,g)**" מחזירה ערך "אמת" (true) אם קדקוד y שכן (סמוך) לקדקוד x, אחרת, מחזירה ערך "שקר" (false).
- בהתאם למימוש הגרף אותו נראה בהמשך, לא תמיד נדע מראש את מספר הצמתים (קדקודים) בגרף.
- במקרים אלו להלן מספר הפעולות הבסיסיות על הגרפים:

- <u>בדיקת גרף ריק graph_is_empty –</u>
- הפעולה **graph_is_empty(G)** או "**<u>גרף ריק?(G)</u>**" מחזירה ערך "אמת" (true) אם הגרף G ריק, אחרת, מחזירה ערך "שקר" (false).

המפרט

- בדיקת שייכות אלמנט בקבוצת הצמתים של גרף – **findelement**
- הפעולה **findelement**(G,X) או
  "**קיום אלמנט**?(G,X)"
- הפעולה מקבלת גרף G ואלמנט X ומחזירה מצביע (מיקום) לפריט המידע עם מידע X , אחרת, הפעולה תחזיר מצביע (מיקום) לכלום.

ייצוג של גרפים

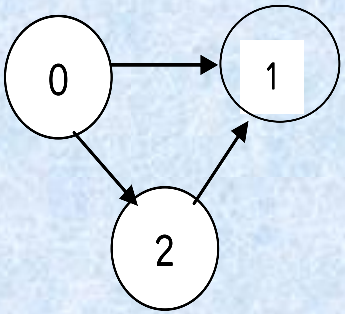
- המטרה העיקרית היא לממש את המפרט.
- בהינתן מפרט אפשר לבנות עבורו מימושים שונים. ***נבחין בין שני מקרים***:
- מקרה 1: מספר הקדקודים בגרף ידוע מראש.
- מקרה 2: מספר הקדקודים בגרף לא ידוע מראש.
- במסגרת הקורס נדון במקרה 1 **בלבד.**

ייצוג 1

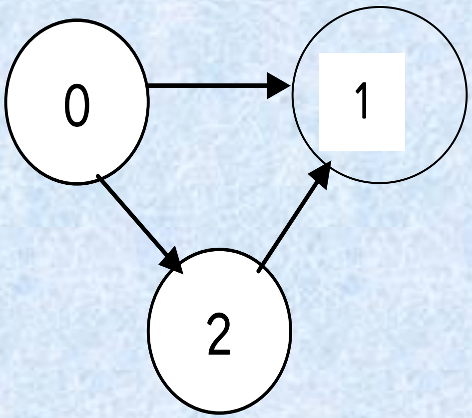
- **<u>השיטה הראשונה</u>** לייצוג גרף משתמשת ב"מטריצת סמיכות" (שכנות/קישוריות).
- מאחר ומספר הקדקודים בגרף ידוע מראש (נניח n), אזי כל קדקוד בגרף מיוצג ע"י מספר שלם בין 0 ל-(n-1).
- בשלב זה נניח שאין כל מידע המיוחס לקדקודים.
- כמו כן נרצה לדעת רק על קיום קשתות הגרף ולא במידע המיוחס להן.

ייצוג 1

- לאור האמור לעיל, הדרך הטבעית להצגה של גרף הוא מערך דו-מימדי מסדר **n x n**. נסמן אותו ב- **g** .
- מערך דו-מימדי (מטריצה ריבועית) מייצג כל זוג סדור אפשרי של קדקודים.
- דוגמא עבור גרף מכוון הבא:
- נייצג את הגרף בעזרת המטריצה הריבועית הבאה:

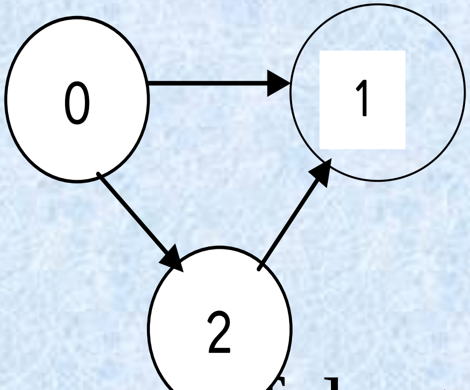


ייצוג 1



g	0	1	2
0	0	1	1
1	0	0	0
2	0	1	0

- השורות הן הקדקודים מהם יוצאות הקשתות
- והעמודות הן הקדקודים בהם נכנסות הקשתות.



ייצוג 1

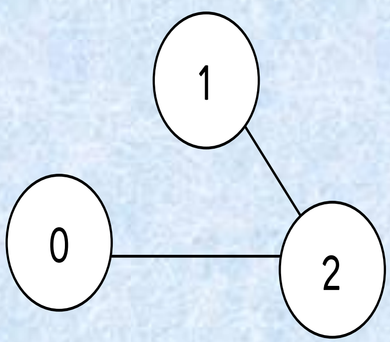
- במטריצה זו נרשום 1 (ערך true) או 0 (ערך false).
- g[i][j] שווה ל- 1 (true) כאשר הקדקוד j סמוך לקדקוד i (כלומר קיימת קשת <i,j>),
- g[i][j] שווה ל- 0 (false) כאשר הקדקוד j לא סמוך לקדקוד i (כלומר לא קיימת קשת <i,j>).
- בדוגמא שלנו g[0][1]=1 כי קיימת קשת מקדקוד 0 ל-1
- g[1][0]=0 מאחר ולא קיימת קשת מקדקוד 1 ל- 0.

ייצוג 1 בעבור גרף לא מכוון

- <u>הערה</u>: עבור גרף לא מכוון g המערך הדו-מימדי יוגדר כדלהלן:

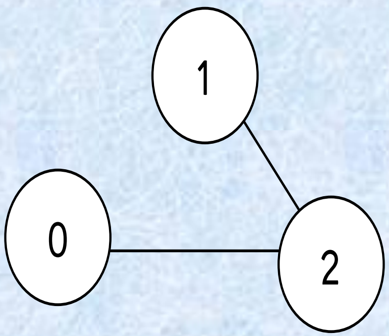
$$g[i][j]=\begin{cases}1 & \text{אם קיימת קשת לא מכוונת } (i,j)\\ 0 & \text{אם } i=j\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

- לדוגמא, בהינתן הגרף הבא:



- נייצג את הגרף בעזרת המטריצה הריבועית הבאה :

$$\begin{array}{c|c} & 0\ 1\ 2 \\ \begin{matrix}0\\1\\2\end{matrix} & \begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1\\1 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}$$



- מאחר וקיימת קשת **לא מכוונת** $g[0][2]=g[2][0]=1$ בין הקדקודים 0 ו- 2.

ייצוג 1 בעבור גרף לא מכוון

- ניתן לשים לב שעבור גרף לא מכוון g, המטריצה הריבועית המייצגת אותו היא מטריצה סימטרית ביחס לאלכסון הראשי.
- לאור האמור לעיל, עבור הגרף, בעל 100 קדקודים, כל קדקוד בגרף מיוצג על ידי מספר שלם בין 0 ל- 99.
- המערך הדו-מימדי g מייצג כל זוג סדור אפשרי של צמתים.
- אם g[i][j]=1 אזי ניתן לומר שקיימת קשת מקדקוד שמספרו i לקדקוד שמספרו j, ואם ערכו 0 אזי לא קיימת קשת <i,j>.

מימוש הפעולות תחת ייצוג 1

- כעת נציג את האלגוריתמים לטיפול בפעולות הבסיסיות שהזכרנו קודם במפרט.
- אלגוריתם לפעולה – <u>הוספת קשת</u>
- <u>**הוסף-קשת**(x,y,g)</u>
- (1) $g[x][y] \longleftarrow 1$
- אלגוריתם לפעולה – <u>הסרת קשת</u>
- <u>**הסר-קשת**(x,y,g)</u>
- (1) $g[x][y] \longleftarrow 0$

מימוש הפעולות תחת ייצוג 1

- אלגוריתם לבדיקת שכנות של קדקודים
- <u>**סמוכים**?(x,y,g)</u>
- אם g[x][y]שווה ל- 1 אזי החזר "אמת".
- אחרת, החזר "שקר".

- במקרה הנדון **הגרף** ריק אם אין בו אף קשת.

ייצוג 2

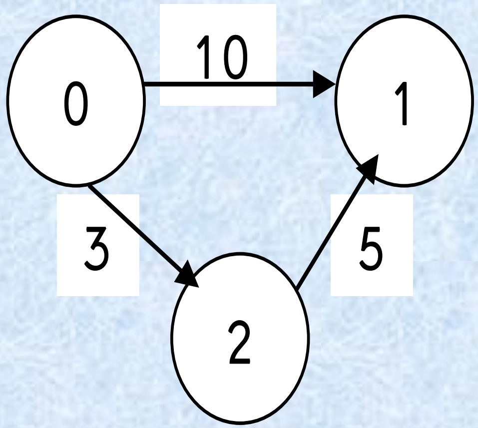
- **<u>השיטה השנייה</u>** לייצוג גרף משוקלל(משקל בעל קשת) משתמשת במטריצה הריבועית הבאה:
- מאחר שמספר הקדקודים בגרף ידוע מראש (נניח n) אזי כל קדקוד בגרף מיוצג על ידי מספר שלם בין 0 ל-(n-1).
- בשלב זה נניח שאין כל מידע המיוחס לקדקודים. כמו כן נרצה לדעת על קיום קשתות הגרף **<u>וגם</u>** במידע המיוחס להן.

ייצוג 2

- לאור זאת, הדרך הטבעית להצגה של גרף היא מערך דו-מימדי (מטריצה ריבועית) מסדר $n \times n$. נכנה אותו ב- מטריצת המשקלות ונסמנה ב- g.
- מערך דו-מימדי מייצג כל זוג סדור אפשרי של קדקודים.
- לגבי כל אלמנט במטריצה זו נחזיק מספר מאפיינים:
- 1. האם קיימת קשת בין זוג סדור של קדקודים.
- 2. במידה וקיימת קשת בין זוג סדור של קדקודים נרצה לדעת מהו המידע המיוחס לה.

ייצוג 2

- דוגמא עבור גרף מכוון וייצוגו :



g	0	1	2
0	0 /	1 / 10	1 / 3
1	0 /	0 /	0 /
2	0 /	1 / 5	0 /

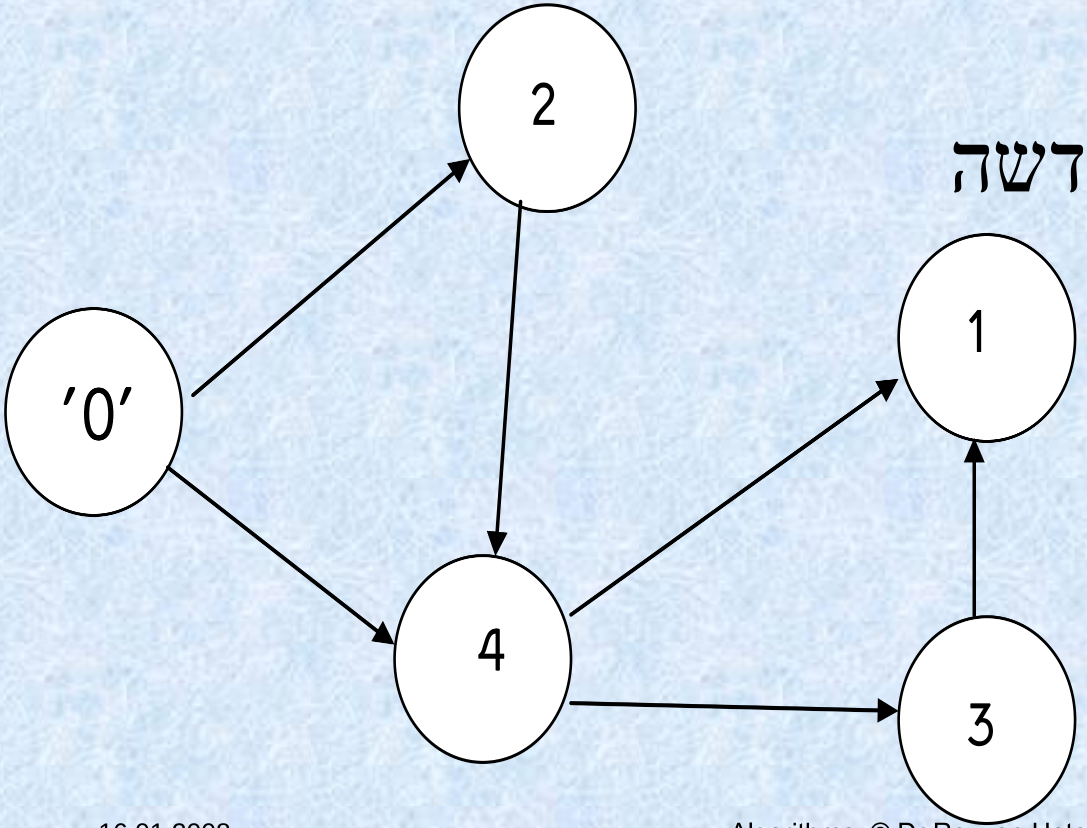
ייצוג 3

- **<u>השיטה השלישית לייצוג גרף באמצעות מבנה מקושר-רשימת סמיכות</u>**
- בשיטה זו אנו עדיין מניחים שמספר הקדקודים בגרף ידוע מראש (נניח n) וכל קדקוד בגרף מיוצג ע"י מספר שלם בין 0 ל (n-1).
- בשלב זה אנו עדיין לא מייחסים מידע לקדקודים אך כן מאפשרים לייחס מידע לקשתות.

ייצוג 3

- עתה נציג את הגרף בעזרת מערך של רשימות, כאשר גודל המערך הינו n.
- נבהיר את השיטה החדשה

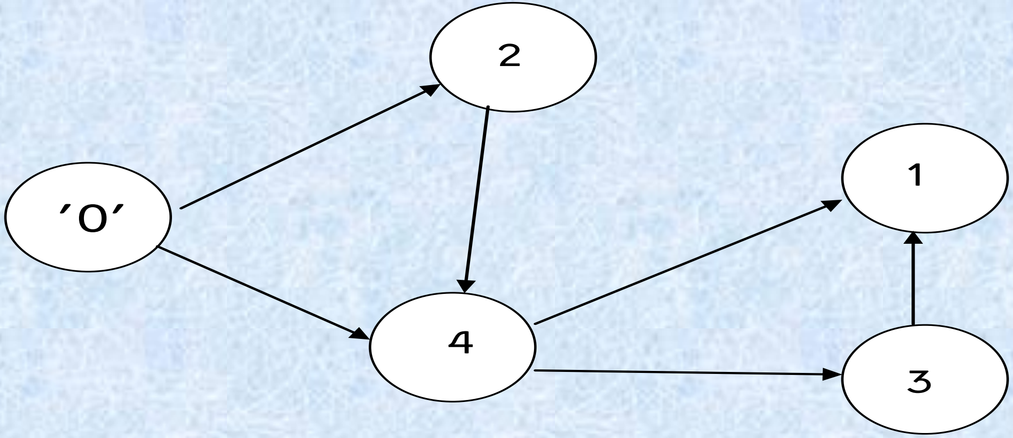
בעזרת הגרף הבא :



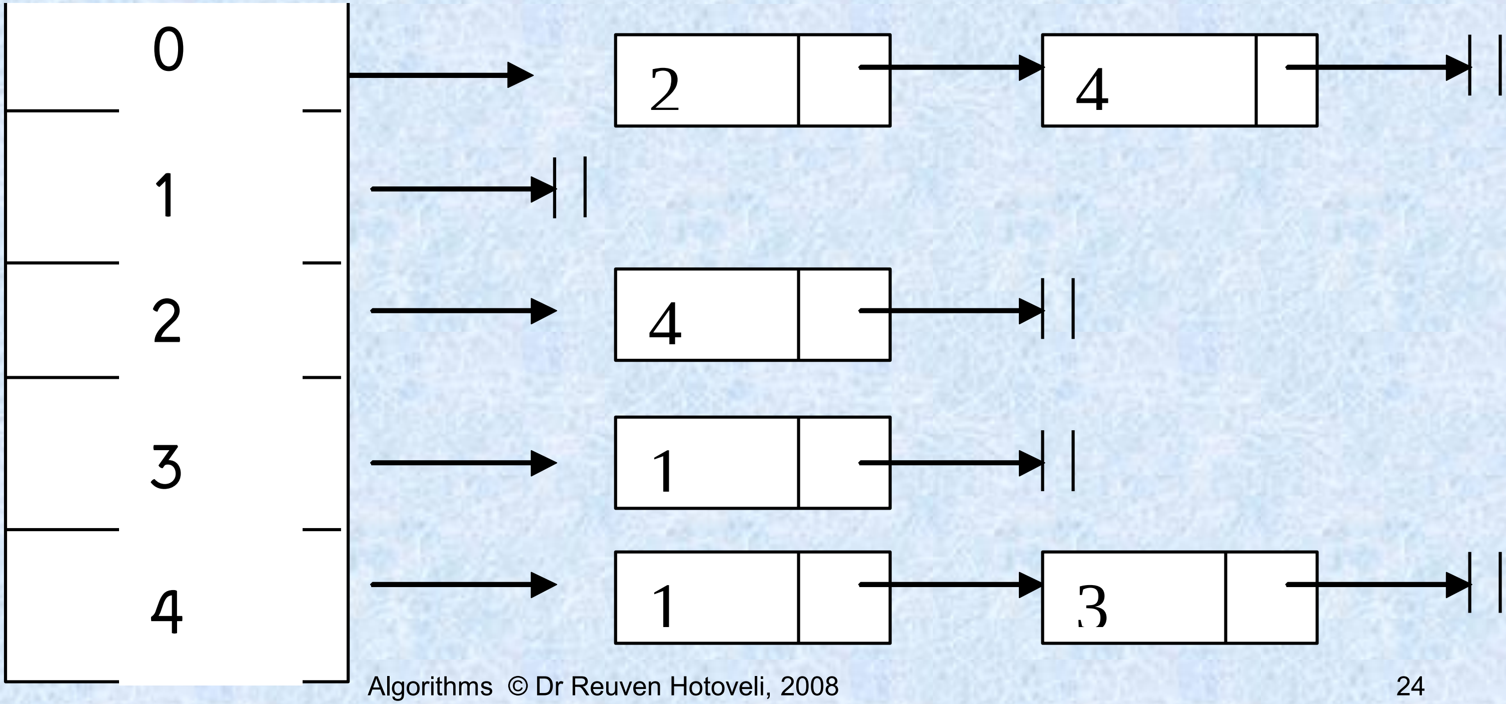
ייצוג 3

- הקדקודים של הגרף מיוצגים על ידי מערך. כל אינדקס של המערך מייצג קדקוד (קדקוד) בגרף.
- הקשתות של הגרף מיוצגות על ידי רשימה הנקראת רשימת סמיכות (שכנות/קשירות).
- כל קדקוד ברשימת סמיכות מייצג קשת בגרף.

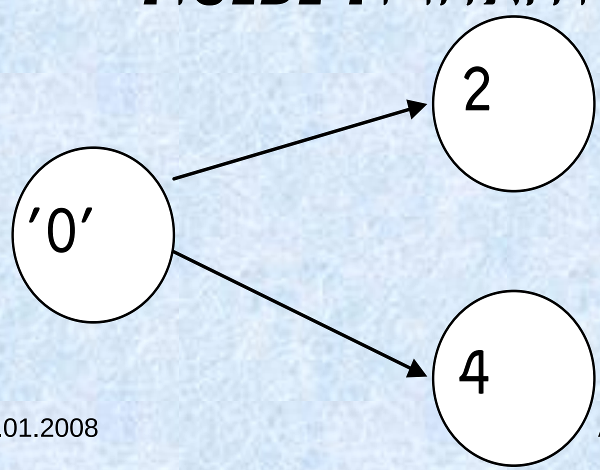
ייצוג 3



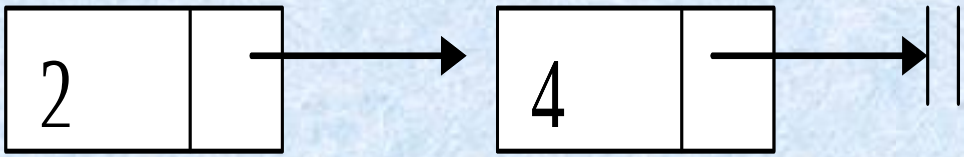
- נייצג את הגרף בעזרת מערך של רשימות הבא :



- כל כניסה במערך, אשר מייצגת קדקוד כלשהו x של הגרף, מצביע לרשימת סמיכות של צמתים המייצגת את הקשתות היוצאות מקדקוד (x) – זה.
- בגרף הנתון מקדקוד שמספרו 0 יוצאות 2 קשתות, האחת נכנסת לקדקוד שמספרו 2 והאחרת נכנסת לקדקוד שמספרו 4.

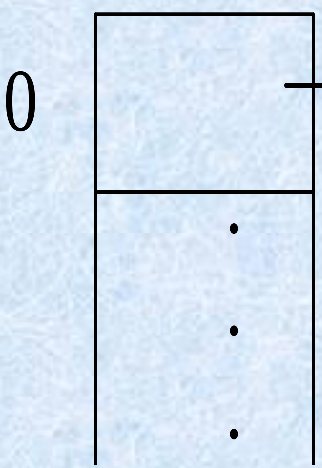


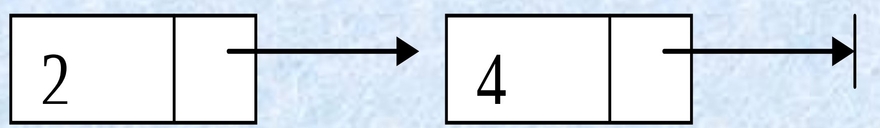
- קדקוד 0 מיוצג על ידי כניסה 0 של המערך.
- הקשתות של הגרף (היוצאות מקדקוד זה – 0) מיוצגות על ידי רשימת סמיכות הבאה:



- כל קדקוד ברשימת סמיכות כאמור מייצגת קשת בגרף
- (קשתות <0,4> , <0,2>) .

- כניסה מספר 0 (המייצגת קדקוד בגרף שמספרו 0) מצביע לרשימת סמיכות של צמתים המייצגת את הקשתות היוצאות מקדקוד 0 בגרף.





- שים לב! בין הקדקודים 2 ו-4 לא בהכרח חייב שתהיה בניהם קשת בגרף.

- לאור האמור לעיל נוכל להגדיר את הגרף בעל 100 קדקודים כדלהלן :
- כאמור כל קדקוד בגרף מיוצג על ידי מספר שלם בין 0 ל-99.
- המערך החד מימדי (g) שגודלו 100 מייצג את קדקודי הגרף.
- כמו כן כניסה מספר x (המייצג קדקוד שמספרו x בגרף) מצביע לרשימת סמיכות של צמתים המייצגת את הקשתות היוצאות מקדקוד x בגרף.

- בהמשך למבנה נתונים שהגדרנו כעת מימשו את הפעולות הבסיסיות שהזכרנו במפרט, ואלו הן :
- הוספת קשת מ x – ל- y בגרף g .
- הוספת קשת משוקללת (שמשקלה w) מ- x ל-y בגרף g.
- הסרת קשת מ- x ל-y בגרף g .
- בדיקת שכנות (סמיכות) של קדקודים - adjacent