

# תכנון וניתוח אלגוריתמים

---

תרגיל 9

תרגילים על דייקסטרה

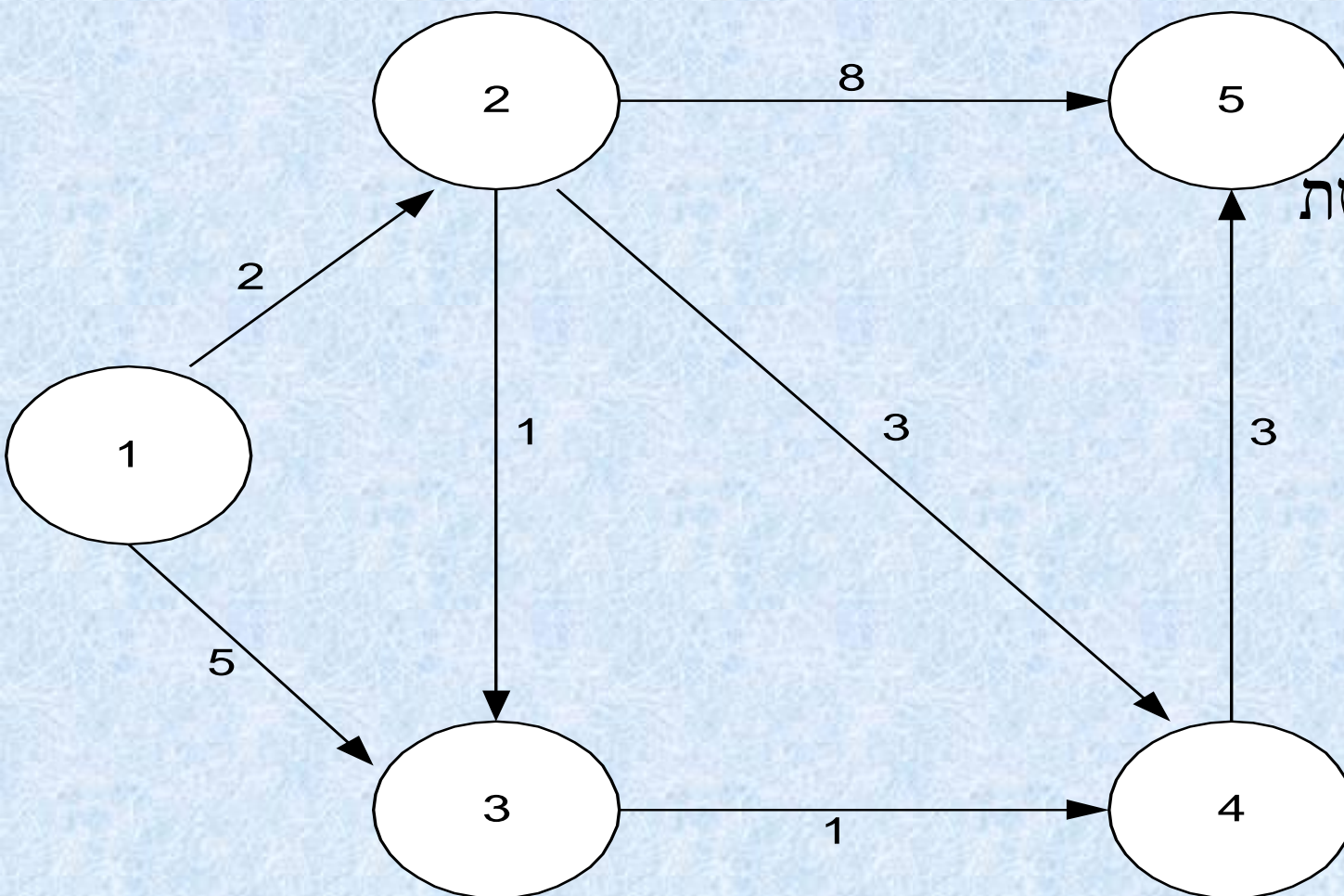




1.1

נתונה הרשת

הבאה:

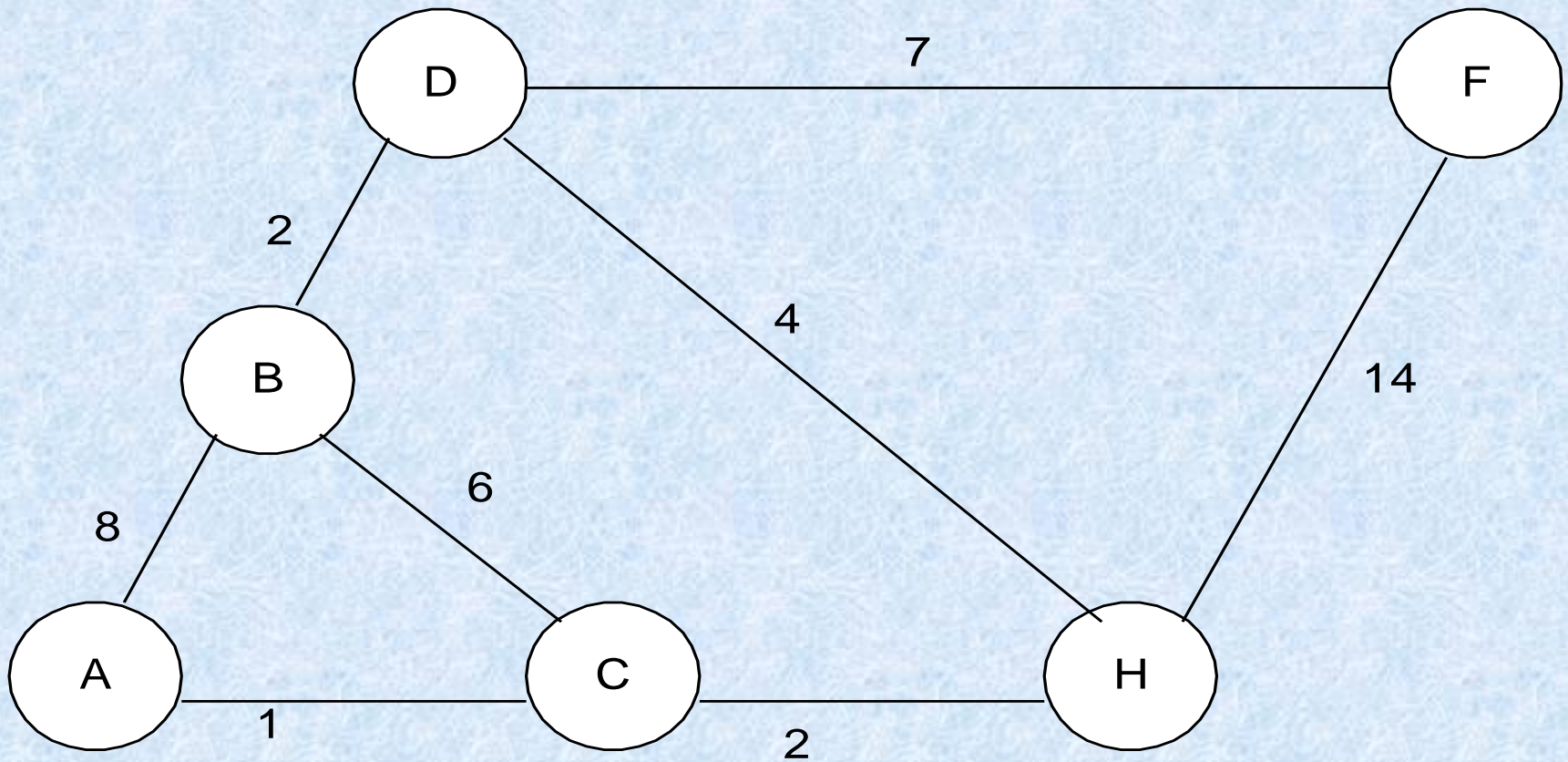




- ◆ הנח כי קודקוד מקור הוא "1".
- ◆ הרץ את האלגוריתם של דייקסטרה על הרשת הנתונה.
- ◆ מצא מסלול מינימלי מקודקוד מקור ליתר הקודקודים ברשת זו.
- ◆ צייר את עץ המסלולים הקצרים.



- ◆ 3. גרף  $G$  מוגדר ע"י  $G=(V,E)$  כאשר  $V$  מבטא קבוצות צמתים בגרף, ו  $E$  – מבטא קבוצת קשתות בגרף.
- ◆ פונקציית המשקל  $W : E \rightarrow R^+$  קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף  $G$ .
- ◆ א. לפניך רשת שבעבורה מצא את המסלולים הקצרים ביותר מן הקודקוד  $A$  לכל אחד מן הקודקודים האחרים ברשת הנתונה.
- ◆ תאר את המסלולים האלה בצורת עץ, באופן סכמתי.







❖ ב. כל קשת בגרף  $G$  צבועה בכחול או באדום.  $X$  ו  $Y$  הם קודקודים בגרף

❖ כתוב אלגוריתם מילולי, קצר ויעיל, בעברית מובנת, למציאת אורך המסלול הקצר ביותר מ-  $X$  ל-  $Y$ ,

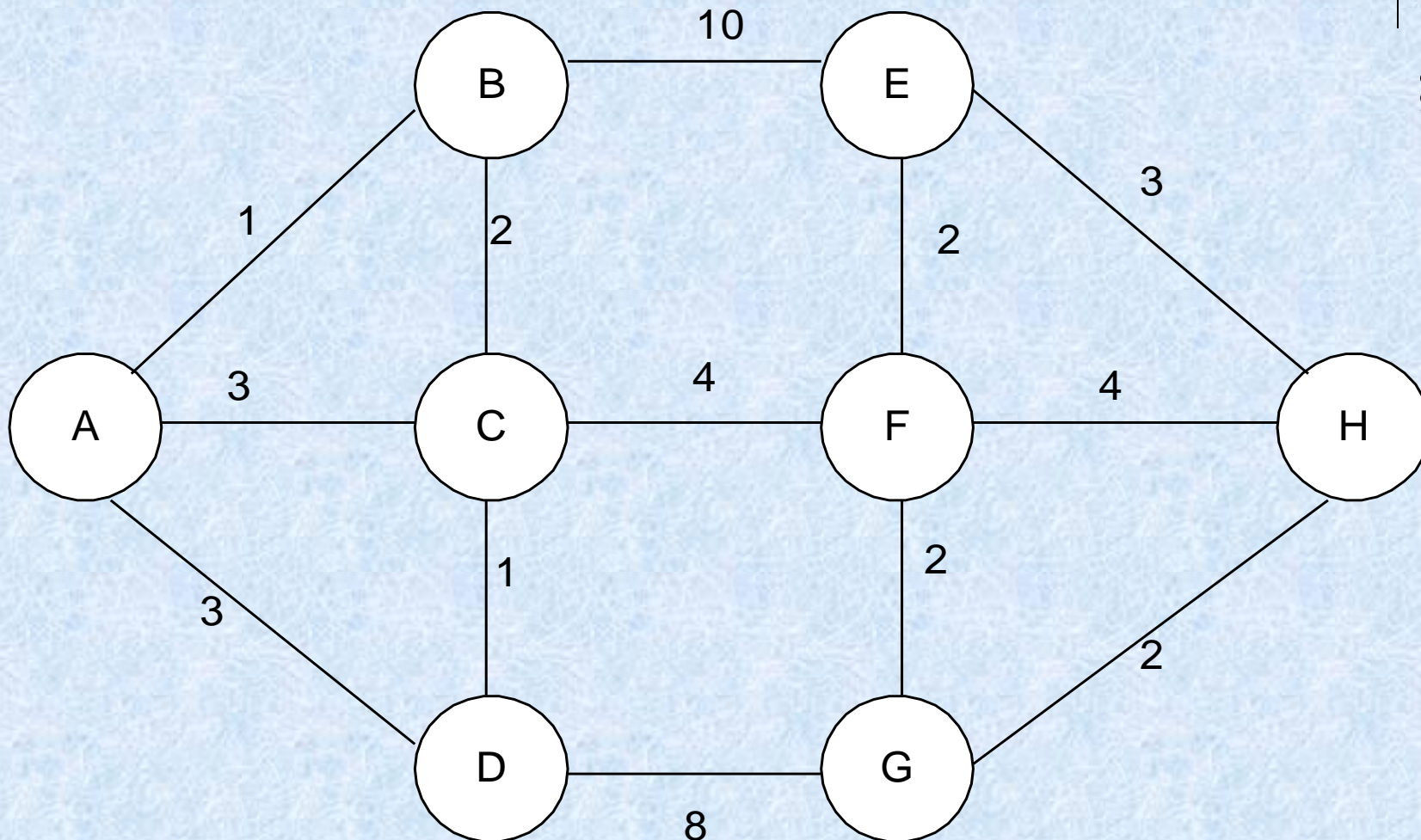
❖ כאשר חלקו הראשון של המסלול יהיה מורכב מקשתות

❖ **אדומות בלבד** וחלקו השני יהיה מורכב מקשתות **כחולות בלבד**.

❖ **שים לב** : כל אחד משני החלקים יכול להיות ריק.



- ◆ 4. גרף  $G$  מוגדר ע"י  $G=(V,E)$  כאשר  $V$  מבטא קבוצות צמתים בגרף, ו  $E$  – מבטא קבוצת קשתות בגרף.
- ◆ פונקציית המשקל  $W : E \rightarrow R^+$  קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף  $G$ .
- ◆ א. לפניך רשת שבעבורה מצא את המסלולים הקצרים ביותר מן הקודקוד  $A$  לכל אחד מן הקודקודים האחרים ברשת הנתונה.
- ◆ תאר את המסלולים האלה בצורת עץ, באופן סכמתי.







❖ ב. יהיו  $Z, Y, X$  קודקודים בגרף .

❖ כתוב אלגוריתם מילולי, קצר ויעיל בעברית מובנית, אשר מחזיר את תשובה "אמת" (true) אם כל המסלולים הקצרים ביותר מ- $X$  ל- $Y$  עוברים דרך  $Z$ , אחרת הוא מחזיר את התשובה "שקר" (false) .

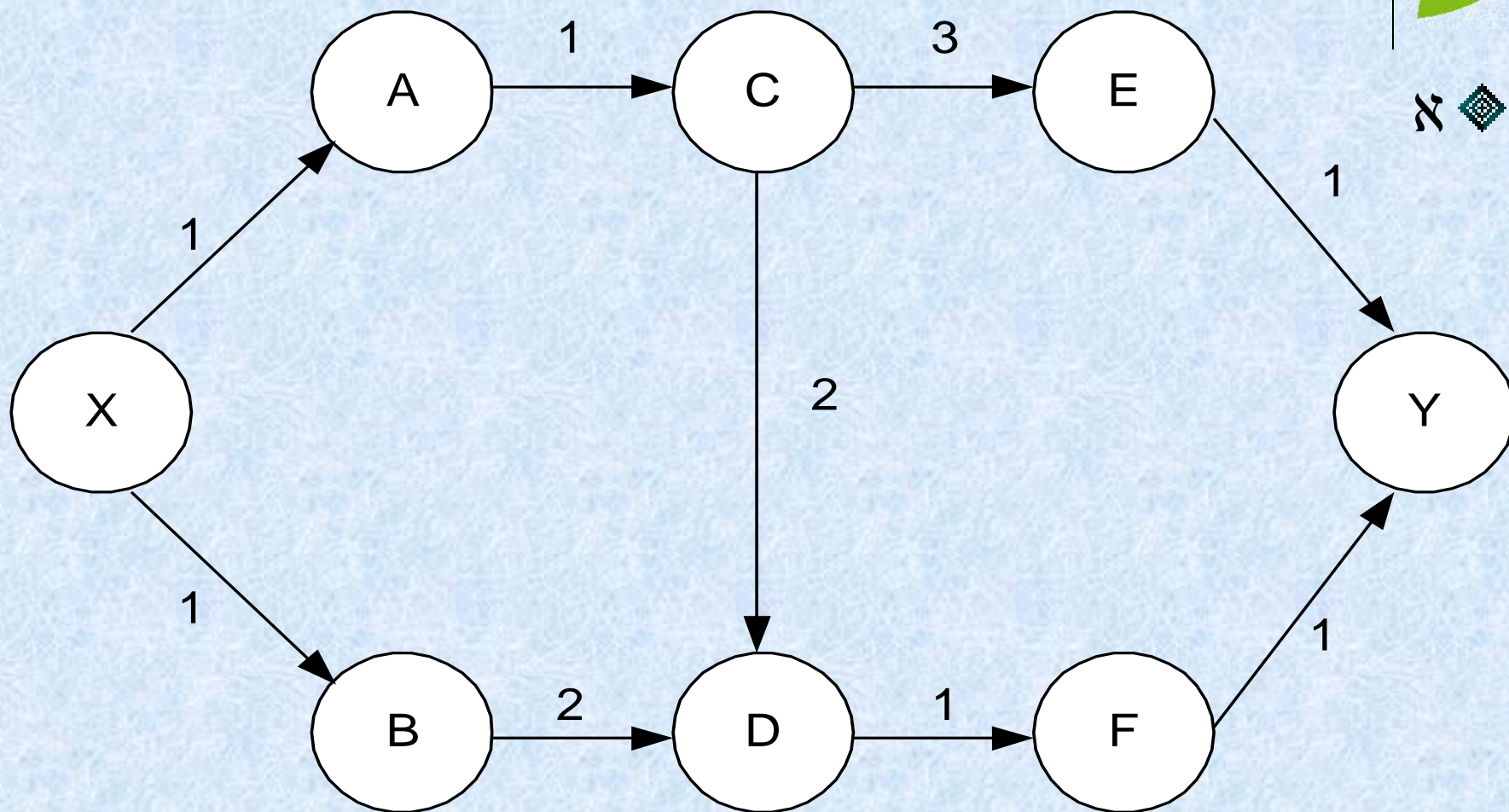


5. גרף  $G$  מוגדר ע"י  $G=(V,E)$  כאשר  $V$  מבטא קבוצות צמתים בגרף, ו  $E$  – מבטא קבוצת קשתות בגרף.

פונקציית המשקל  $W : E \rightarrow R^+$  קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף  $G$ .

א. לפניך רשת. מצא את כל המסלולים הקצרים ביותר מן הקודקוד  $X$  לקודקוד  $Y$  ברשת הנתונה.

תאר כל מסלול כזה בנפרד באופן סכמתי, בצורת רשימה לינארית מקושרת.





ב. יהי  $S$  קודקוד בגרף.

נסמן לכל מסלול  $P$  מקודקוד  $S$  לקודקוד  $a$ :

$W(P)$  כמשקל המסלול (כלומר את סכום משקלי הקשתות של מסלול  $P$ ).

$L(P)$  כאורך המסלול (כלומר את מספר הקשתות במסלול  $P$ ).

כתוב אלגוריתם מילולי קצר ויעיל, בעברית מובנית, המוצא לכל קודקוד  $a$  את הערך המינימלי האפשרי של

$$W(P) + L(P).$$



6. ◆

◆ יהי  $G=(V,E)$  גרף מכוון.

◆ פונקציית המשקל  $W : E \rightarrow R$  קובעת משקל שלם,  $W(e)$ , המקיים  $1 \leq W(e) \leq 5$  לכל קשת  $e$  בגרף.

◆ יהי  $s \in V$  קודקוד נתון בגרף.

◆ א. נסמן  $|V|$  מספר הקודקודים בגרף.

◆ מספר הקשתות בגרף  $|E|$  -





❖ כתוב אלגוריתם מילולי קצר ויעיל, בעיברית

מובנית, בעל סיבוכיות זמן  $O(|V| + |E|)$

, אשר מוצא לכל צומת  $v \in V - \{s\}$  את  
משקל המסלול הקל ביותר מ- $s$  ל- $v$ .

❖ ב. הראה כי סיבוכיות הזמן של האלגוריתם

שהצעת היא הסיבוכיות הנדרשת,  $O(|V| + |E|)$ .



7. נתון גרף  $G=(V,E)$ . פונקצית המשקל  $W : E \rightarrow R^+$  קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף  $G$ .
- א. כתוב אלגוריתם יעיל הקובע אם קשת מסויימת  $e$  נמצאת על כל המסלולים הקצרים ביותר מקודקוד  $s$  לקודקוד  $t$ .
- ב. נתח את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהיצעת בסעיף הקודם.



8. נתון גרף  $G=(V,E)$ . פונקצית המשקל  $W : E \rightarrow R^+$  קובעת משקל (מספר) לכל קשת בגרף  $G$ . כל קשת בגרף צבועה באדום או בלבן. נתונים שני קודקודים  $s$  ו  $t$  בגרף  $G$ .
- א. כתוב אלגוריתם יעיל אשר מוצא מבין המסלולים הקצרים ביותר בין  $s$  ל  $t$  ( ביחס למשקולות שעל הקשתות ) את זה שמספר הקשתות האדומות מינימלי.
- ב. נתח את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעת בסעיף א'.



9. נתון גרף לא מכוון עם משקולות חיוביים על הקשתות. חלק מהקשתות אדומות וחלקן האחר כחולות ונתון קודקוד  $s$ .

א. תאר אלגוריתם יעיל המוצא את המסלול המינימלי בעלת מספר זוגי של קשתות אדומות מ- $s$  אל כל קדוקד אחר בגרף.

ב. נתח את סיבוכיות זמן הריצה של האלגוריתם שהצעת בסעיף א'.





10.10

רשת תקשורת מתוארת ע"י גרף מכוון שבו כל קשת מייצגת ערוץ תקשורת.

לכל קשת  $(u, v)$  יש "משקל"  $r(u, v)$  שהינו מספר בין 0 ל-1 המתאר את האמינות (reliability) של הערוץ (למעשה זו ההסתברות שהוא יעבוד).





❖ בהנחה שמתקיימת אי-תלות הסתברותית בין המאורעות, ההסתברות שמסלול כלשהו יעבוד היא מכפלת ההסתברויות על קשתותיו.

❖ עליכם למצוא אלגוריתם יעיל שמקבל גרף כזה וזוג קדקודים  $(s, t)$  ומוצא מסלול אמין ביותר מ- $s$  ל- $t$ .  
(הערה: כדאי להפריד בין הצגת האלגוריתם להוכחת הנכונות. האלגוריתם אמור להיות קל מאוד להצגה, גם אם הוכחת נכונותו דורשת מאמץ מסוים).