אלגוריתמים בגרפים
הרצאה 1.1

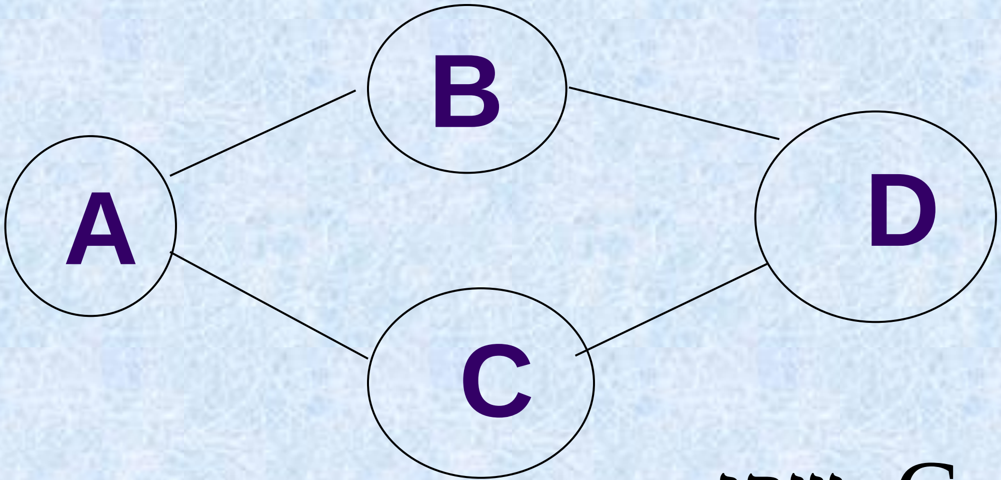
הגדרות ומושגי יסוד בגרפים

ד"ר ראובן חוטובלי

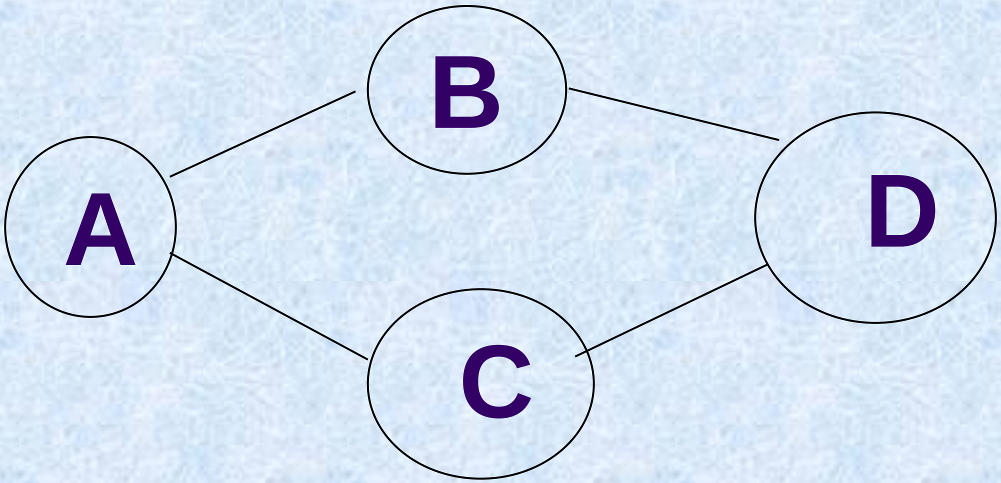
הגדרות ומושגי יסוד בגרפים

- גרף (graph) מורכב מקבוצה סופית לא ריקה של קדקודים (vertices) ומקבוצת צלעות (edges).
- נהוג לסמן גרף כדלהלן: $G=(V,E)$
- כאשר G מציין גרף,
- V מציין את קבוצת הקדקודים
- E מציין את קבוצת הצלעות.

- התרשים הבא :



- מתאר גרף G=(V,E) שבו
- V={A,B,C,D}
- E={(A,B),(A,C),(B,D),(C,D)}



איור

- * שים לב שכל קשת, הקו המקשר בין זוג הקדקודים בגרף, מצוינת על ידי זוג קדקודים.
- הזוג (A,B) מציין קשת המחברת את הקדקודים A ו- B.
- הזוג (A,C) מציין קשת המחברת את הקדקודים A ו- C.
- הזוג (B,D) מציין קשת המחברת את הקדקודים B ו- D.
- הזוג (C,D) מציין קשת המחברת את הקדקודים C ו- D.

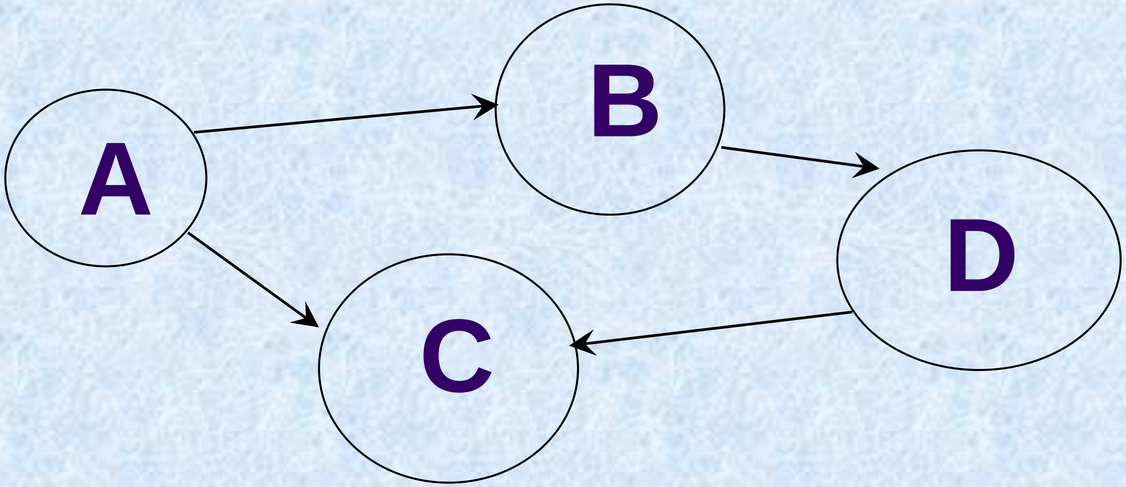
ראינו קו דם כי:
V={A,B,C,D}
E={(A,B),(A,C),(B,D),(C,D)}

- שימו לב שהזוגות אינם זוגות סדורים, כלומר במקום הזוג (A,B) יכולים לציין (B,A).
- עבור הגרף שבתרשים ניתן להגדיר את E כדלקמן:
- E={(B,A),(A,C),(B,D),(D,C)}
- אך ברור כי לא ניתן לשייך ל- E את הזוגות (A,B) וגם (B,A)כי זו אותה קשת ולפי הגדרת הקבוצה כל איבר מופיע בה פעם אחת בלבד.

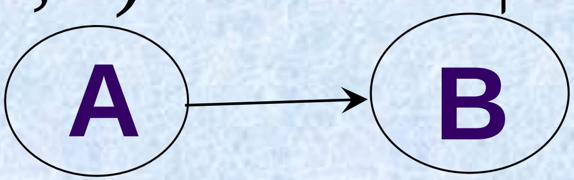
- בנוסף נהוג לסמן גרף גם בצורה אחרת: G=(N,A) כאשר
- N מציין את קבוצת הקדקודים (Nodes)
- A מציין את קבוצת הקשתות(Arcs).
- אין הבדלים בין הסימונים.

גרף מכוון

- גרף מכוון - – directed graph הינו גרף שבו הקשתות מכוונות, המכונה גם קבוצה של זוגות סדורים.
- התרשימים הבאים מתארים שני גרפים מכוונים.
- גרף1:



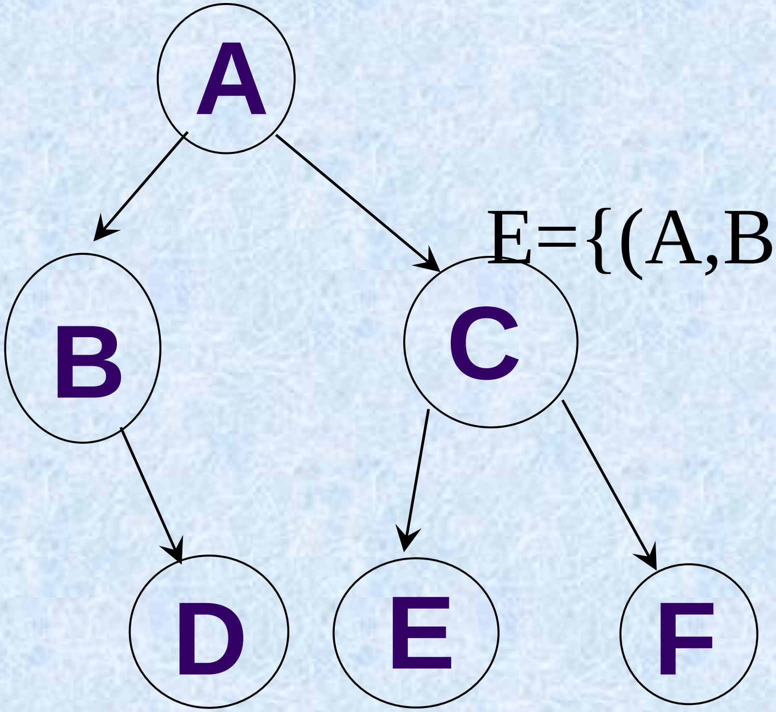
- $G=(V,E)$
- $V=\{A,B,C,D\}$
- $E=\{(A,B),(A,C),(B,D),(D,C)\}$
- * שימו לב לזוג סדור אשר מייצג קשת מכוונת (A,B)
- שלהלן:



- קשת זו יוצאת מקדקוד A ונכנסת לקדקוד B, על ידי <u>זוג סדור</u> (A,B).

- באופן כלליף
- **הקדקוד הראשון** בזוג הקדקודים הסדור מציין את מקור הקשת (מאיזה קדקוד יוצאת הקשת)
- **והקדקוד השני** בזוג הקדקודים הסדור מציין את היעד של הקשת (לאיזה קדקוד נכנסת הקשת).

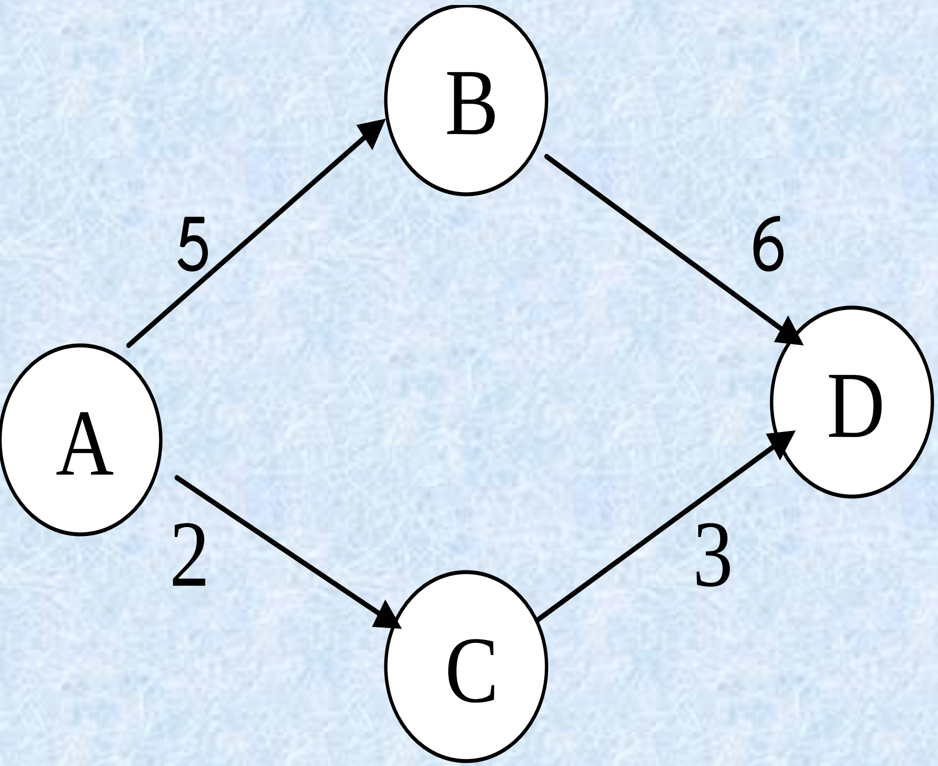
- <u>גרף 2</u>: G=(V,E)
- V={A,B,C,D,E,F}
- E={(A,B),(A,C),(B,D),(C,E),(C,F)}



- * שים לב לכך שכל עץ הינו גרף, אך לא כל גרף הינו עץ.

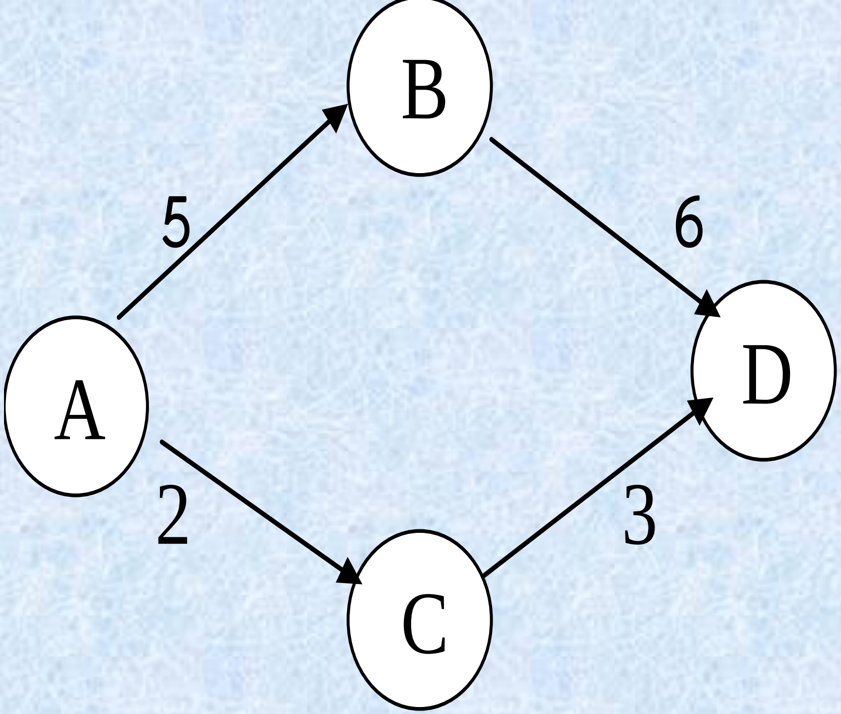
- ***סימון:*** נתון גרף $G=(V,E)$.
- מספר הקדקודים בגרף מסומן כ- $|V|$
- ומספר הקשתות בגרף מסומן כ- $|E|$.
- ***רשת*** (network) הינה גרף (מכוון/לא מכוון) שבו לכל קשת מיוחס מספר/מספרים.
- המספר/ים המיוחס/ים לקשת נקרא <u>משקל</u>/ות הקשת(weight).
- רשת מכונה גם ***<u>כגרף משוקלל</u>*** (weight graph).

התרשים הבא מתאר רשת:



- לכל קשת מיוחסת מספר, אשר יכול לייצג מחיר, מרחק, מקסימום כמות הזרם שניתן להזרים מקדקוד אחד לקדקוד אחר וכ"ו.
- ***<u>צומת a סמוך(או עוקב) (adjacent)</u>*** לקדקוד b אם יש קשת לא מכוונת בין קדקוד a לקדקוד b או אם יש קשת מכוונת מקדקוד b לקדקוד a.

התרשים הבא מתאר רשת:



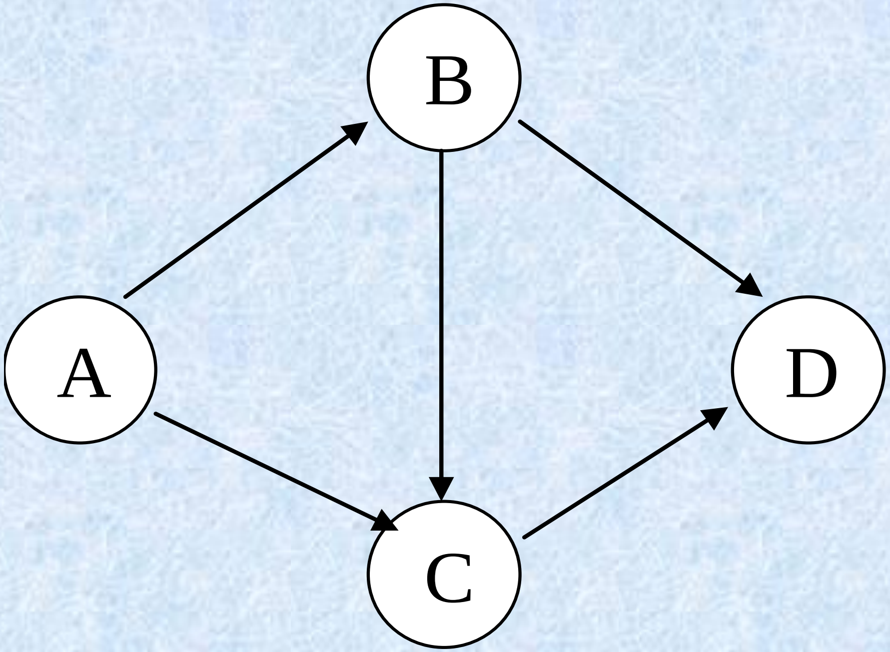
בתרשים זה:

- קדקוד B <u>סמוך</u> ל קדקוד A מאחר שיש קשת מכוונת מקדקוד A לקדקוד B.
- קדקוד C <u>סמוך</u> לקדקוד A מאחר שיש קשת מכוונת מקדקוד A לקדקוד C, וכ"ו.

דרגות

- דרגת הכניסה (indegree) של קדקוד- מספר הקשתות הנכנסות לקדקוד.
- דרגת היציאה (outdegree) של קדקוד- מספר הקשתות היוצאות מקדקוד.
- דרגה(degree) של קדקוד- מספר הקשתות הנוגעות בו.

באיור שלהלן



- ***בעבור הקדקוד D*** הדרגה שלו 2,
  - דרגת הכניסה שלו 2
  - ודרגת היציאה הינה אפס.
- ***בעבור הקדקוד C*** הדרגה שלו 3,
- דרגת הכניסה שלו 2 ודרגת היציאה שלו היא 1.

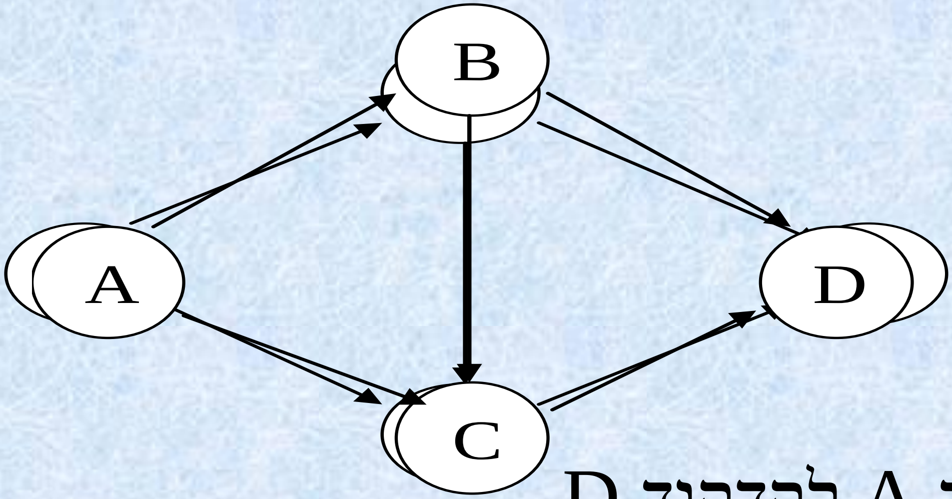
הגדרת מסלול

- ***מסלול (path)*** ***באורך k*** מקדקוד a לקדקוד b הינה סידרה של (k+1) קדקודים בגרף:

$$n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 \ldots\ldots n_i n_{i+1} \ldots\ldots n_k n_{k+1}$$

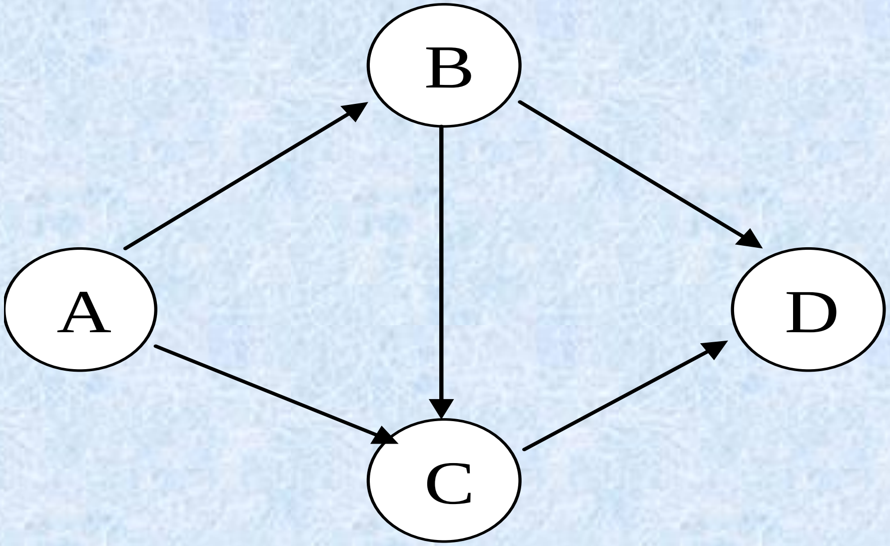
- כך שלכל $1 \leq i \leq k$ קדקוד n_{i+1} סמוך לקדקוד n_i בגרף ו- $n_1 = a$, $n_{k+1} = b$.

באיור שלהלן:



- קיים מסלול באורך 3 מקדקוד A לקדקוד D.
- מאחר שישנה סידרה של 4 קדקודים A,B,C,D
- וישנה קשת מקדקוד A לקדקוד B
- וישנה קשת מקדקוד B לקדקוד C
- וישנה קשת מקדקוד C לקדקוד D.
- תיאור המסלול:

המשך

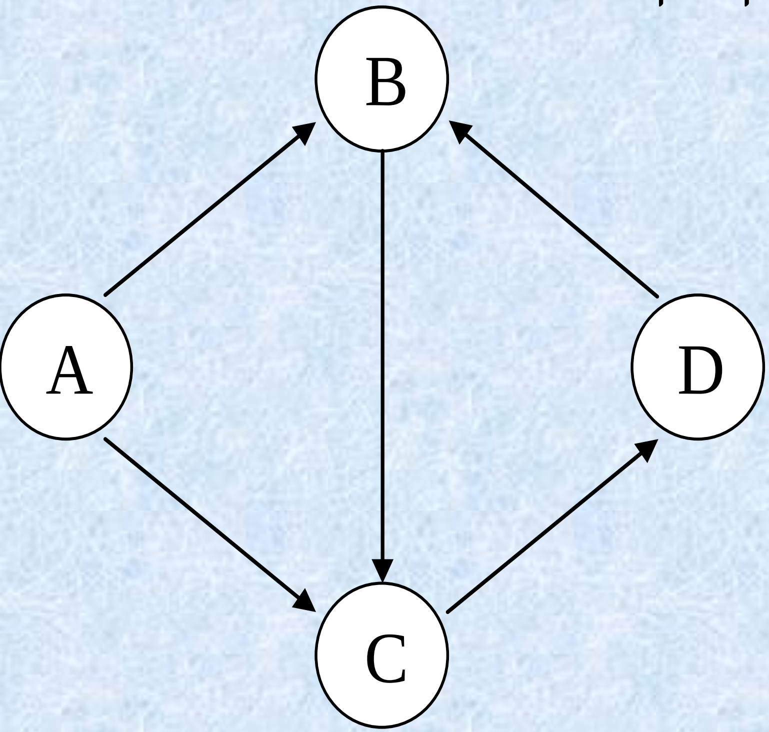


- הערה: קיים גם מסלול באורך 2 מקדקוד A לקדקוד D. מהו?
- כלומר מקדקוד לקדקוד יכולים להיות כמה מסלולים באורכים שונים.
- קדקוד נשיג: קדקוד b יקרא נשיג (להשיג) מקדקוד a בגרף אם קיים מסלול באורך כלשהו בגרף מקדקוד a לקדקוד b.
- בתרשים שמעלה, לדוגמה , קדקוד D נשיג מקדקוד A, מאחר שיש מסלול באורך 3 למשל מקדקוד A לקדקוד D.

הגדרת מעגל

- מעגל(cycle)- מסלול בגרף מקדקוד כלשהו לעצמו.
- בתרשים הבא:
- יש מעגל מקדקוד B ל- B,

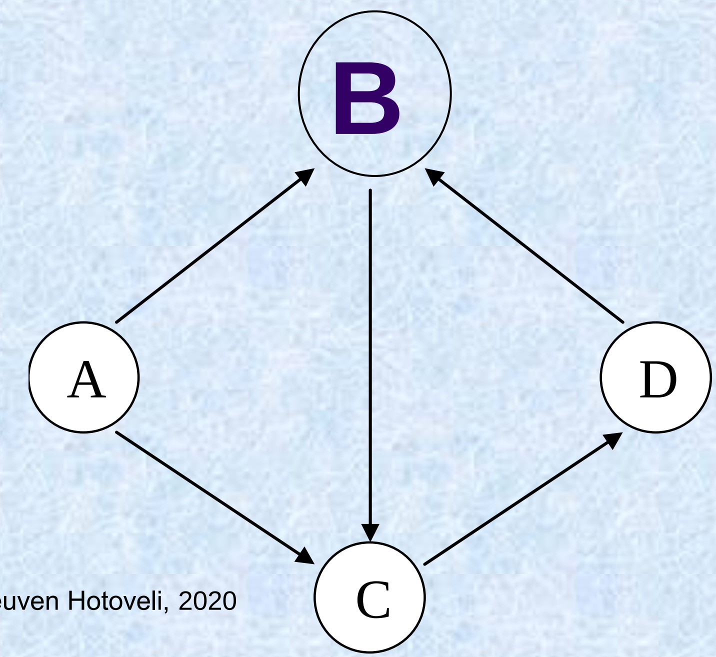
והמסלול הינו: B →C→ D →B.



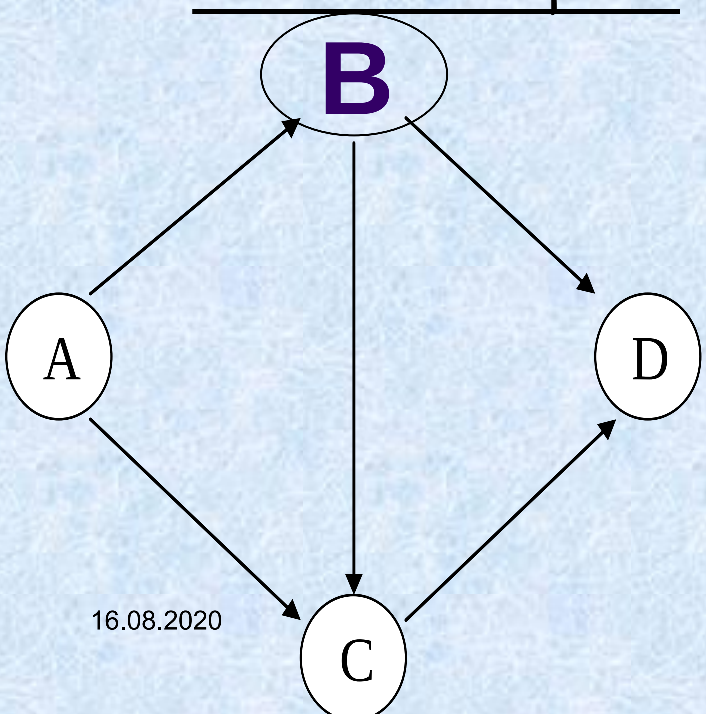
גרף מעגלי

- <u>גרף מעגלי</u>(cycle graph)- הינו גרף שבו לפחות מעגל אחד, אחרת הגרף נקרא <u>לא מעגלי</u>(acycle).

- דוגמא <u>לגרף מעגלי</u>:



דוגמא <u>לגרף לא מעגלי</u>:



מסלול פשוט

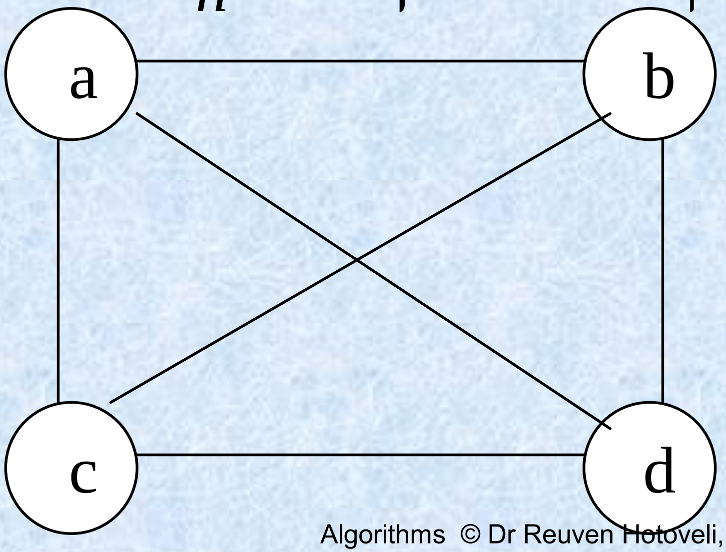
- <u>מסלול פשוט</u> (simple path) – הינו מסלול בו אף קשת של הגרף לא מופיעה יותר מפעם אחת.
- באופן אנלוגי כך ניתן להגדיר גם <u>מעגל פשוט</u>.
- <u>**הערה:**</u>
- מעתה נדבר על מסלולים (מעגלים) פשוטים, אלא אם יצויין במפורש אחרת!!!

הגדרת גרף שלם

- גרף שלם(או מלא) (Complete graph) – הינו גרף שבו כל קדקוד מחובר לשאר קדקודי הגרף.
- סימון:

גרף מלא שבו n קדקודים יסומן ב - k_n .

דוגמא ל- K_4



הגדרת רכיב קשיר

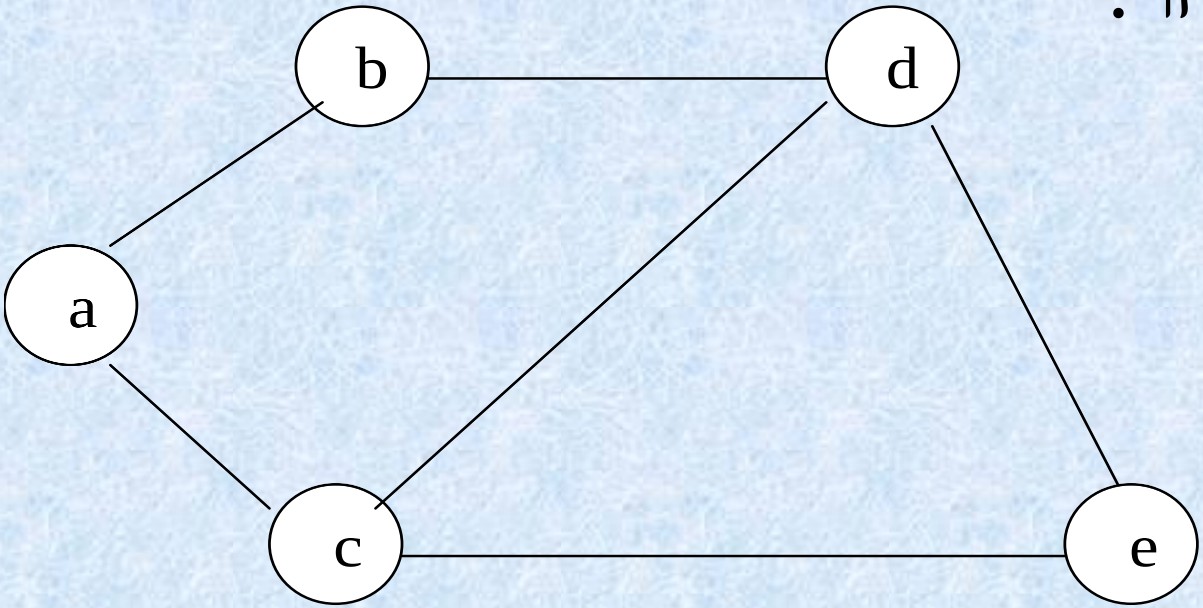
- <u>רכיב קשיר</u>(Connected Complete) – זוהי קבוצה מקסימלית של קדקודים בגרף לא מכוון שבה יש מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף.

  קדקוד בודד ללא שכנים יקרא גם כן רכיב קשיר.

- <u>גרף קשיר</u>(Connected graph) – מכונה גם כ"גרף מחובר" הינו ***<u>גרף לא מכוון</u>*** בעל רכיב קשיר אחד בלבד, כלומר קיים מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף.

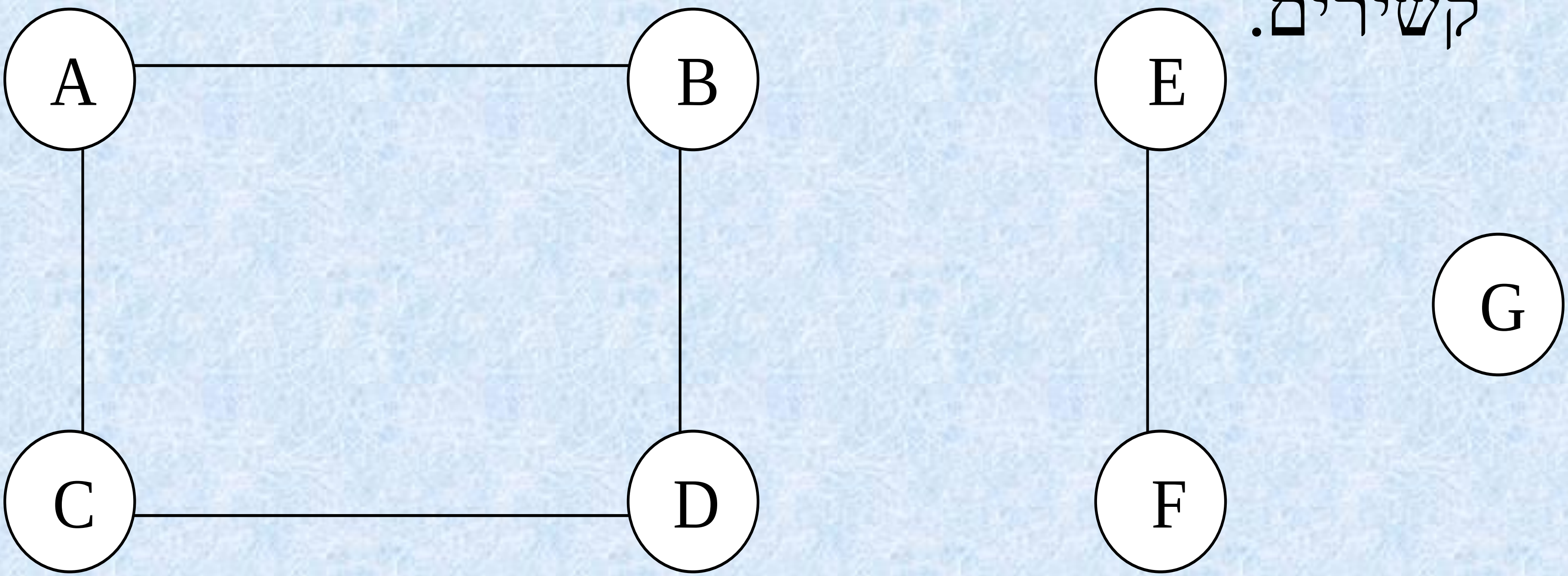
דוגמת גרף קשיר

- דוגמה 1: דוגמא זאת מתארת גרף שבו רכיב קשיר אחד {a,b,c,d,e} מאחר ומכל קדקוד קיים מסלול לכל קדקוד אחר.

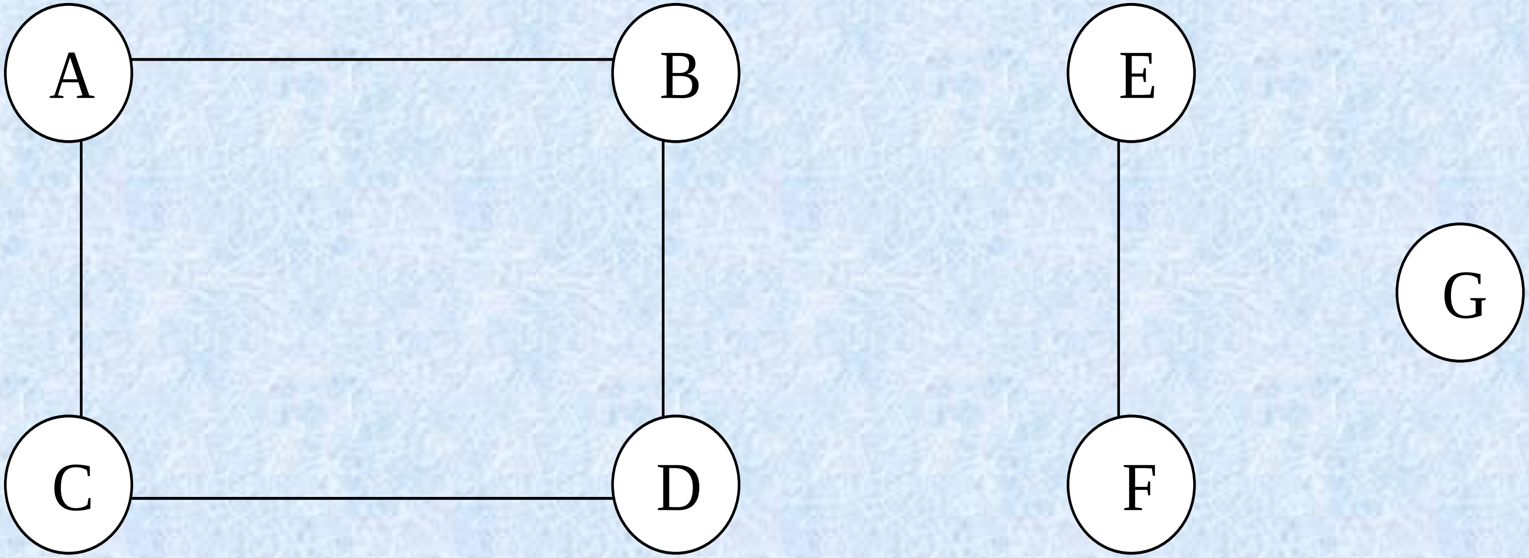


דוגמת גרף לא קשיר

- דוגמה 2: תרשים זה מתאר גרף שבו 3 רכיבים קשירים.

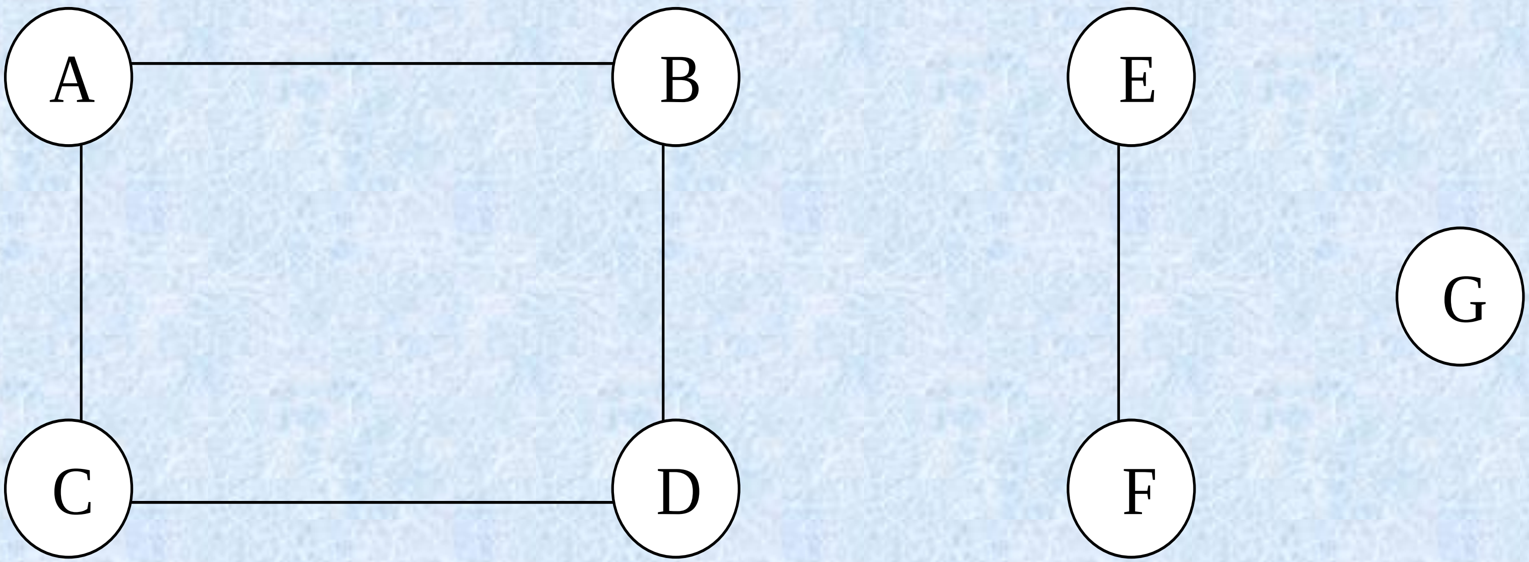


באיור זה



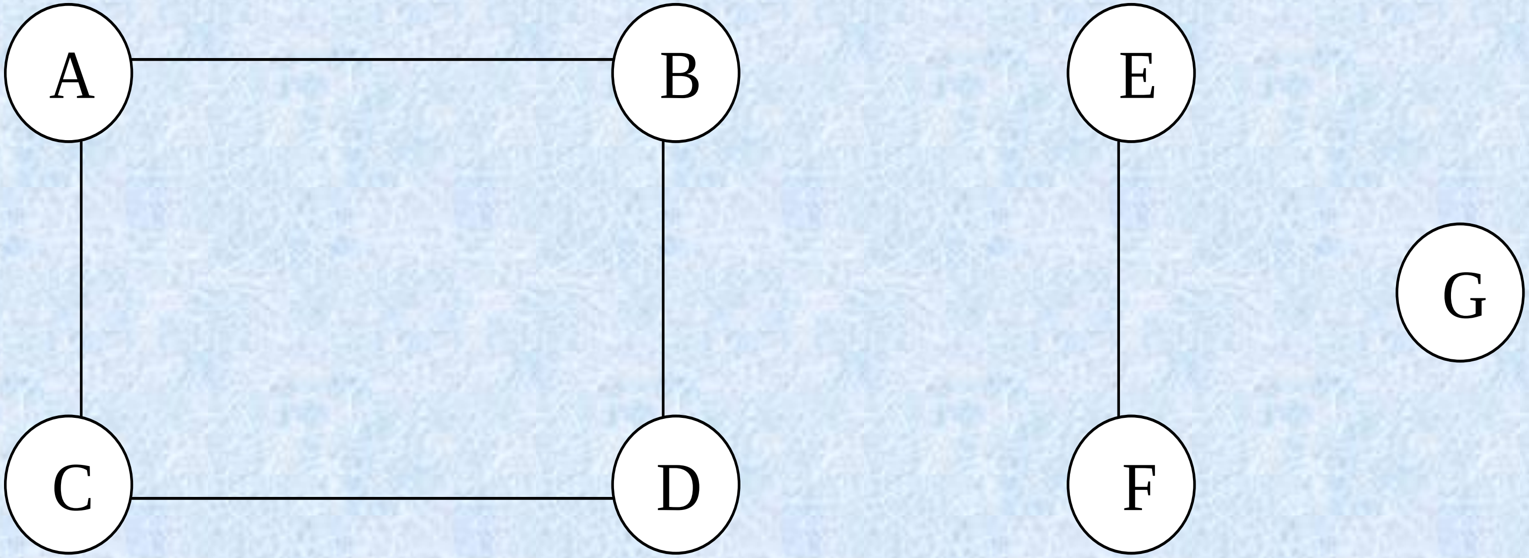
- רכיב קשיר אחד הינו קבוצה מקסימלית של קדקודים בגרף והיא: {A,B,C,D}, מאחר שבקבוצה זו יש מסלול פשוט בין כל שני קדקודים בגרף.
- לקבוצה זו לא ניתן לצרף אף אחד מהקדקודים E,F,G מאחר שלדוגמה אין מסלול מקדקוד A ל- E או ל- F או ל- G.

באיור זה



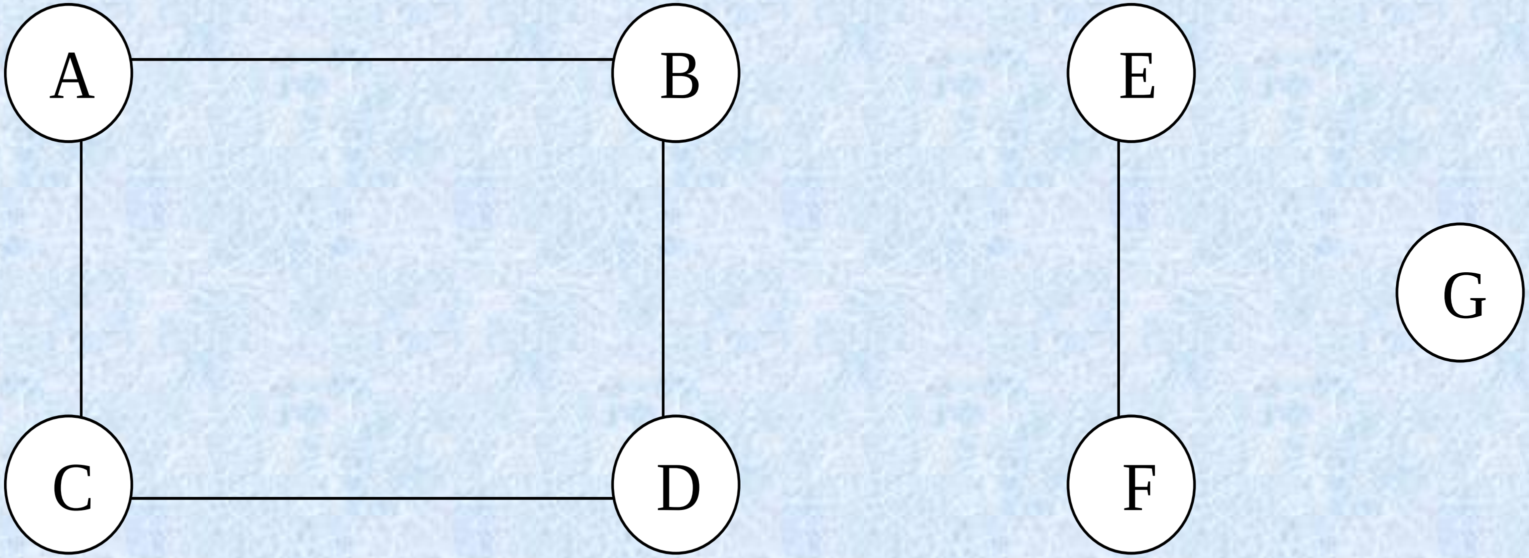
- רכיב קשיר שני הינו קבוצה מקסימלית של קדקודים בגרף והיא: {E,F}.

באיור זה



- רכיב קשיר שלישי הינו: {G}, כיוון שעל פי ההגדרה קדקוד בודד יכול להיקרא גם כן רכיב קשיר , בתנאי שקבוצה זו הינה מקסימלית, כלומר בלתי אפשרי להוסיף לקבוצה זו עוד קדקודים בגרף כך שבקבוצה החדשה שתתקבל יהיה קיים מסלול בין כל שני קדקודים בקבוצה.

באיור זה

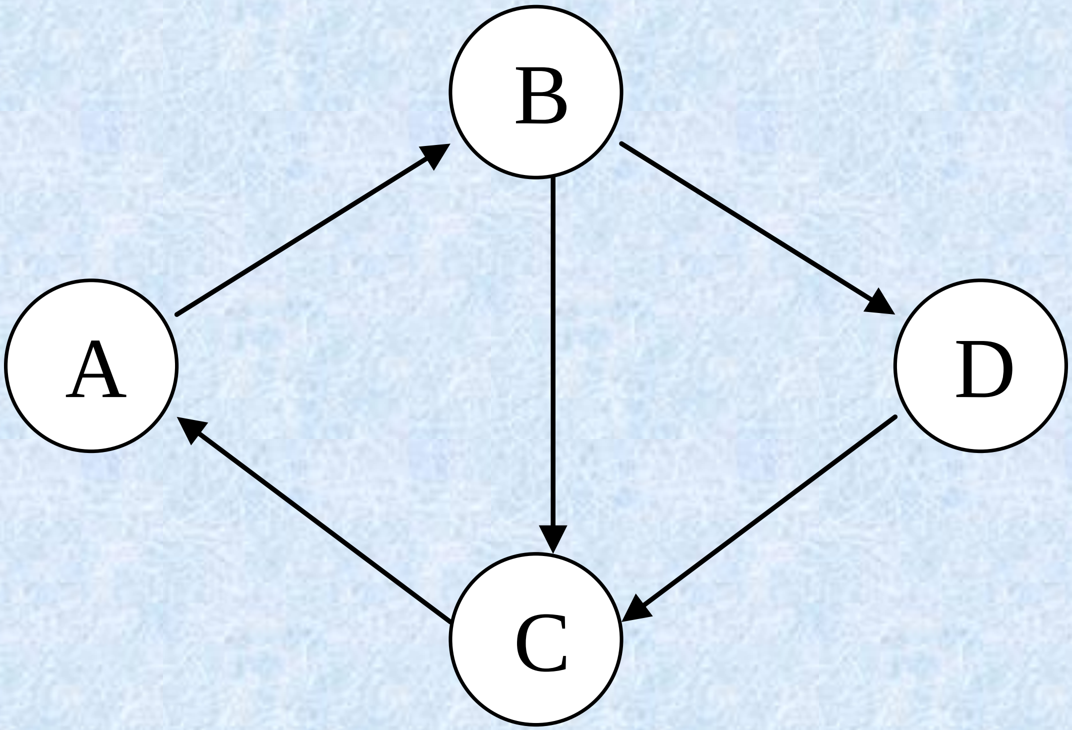


- סופית, בתרשים ישנם 3 רכיבים קשירים והם:
  - {A,B,C,D}
  - {E,F}
  - {G}

- **<u>רכיב קשיר מכוון בחוזקה (רק"ח)</u>** (Strongly Connected directed graph)
  - הינה קבוצה מקסימלית של קדקודים **בגרף מכוון** שבו יש מסלול פשוט <u>ומכוון</u> בין כל שני קדקודים בגרף.
  - קדקוד בודד ללא שכנים יקרא גם רכיב קשיר מכוון בחוזקה
- **<u>גרף קשיר היטב</u>**:
  - גרף מכוון ייקרא קשיר היטב אם יש בו רק"ח אחד בלבד.

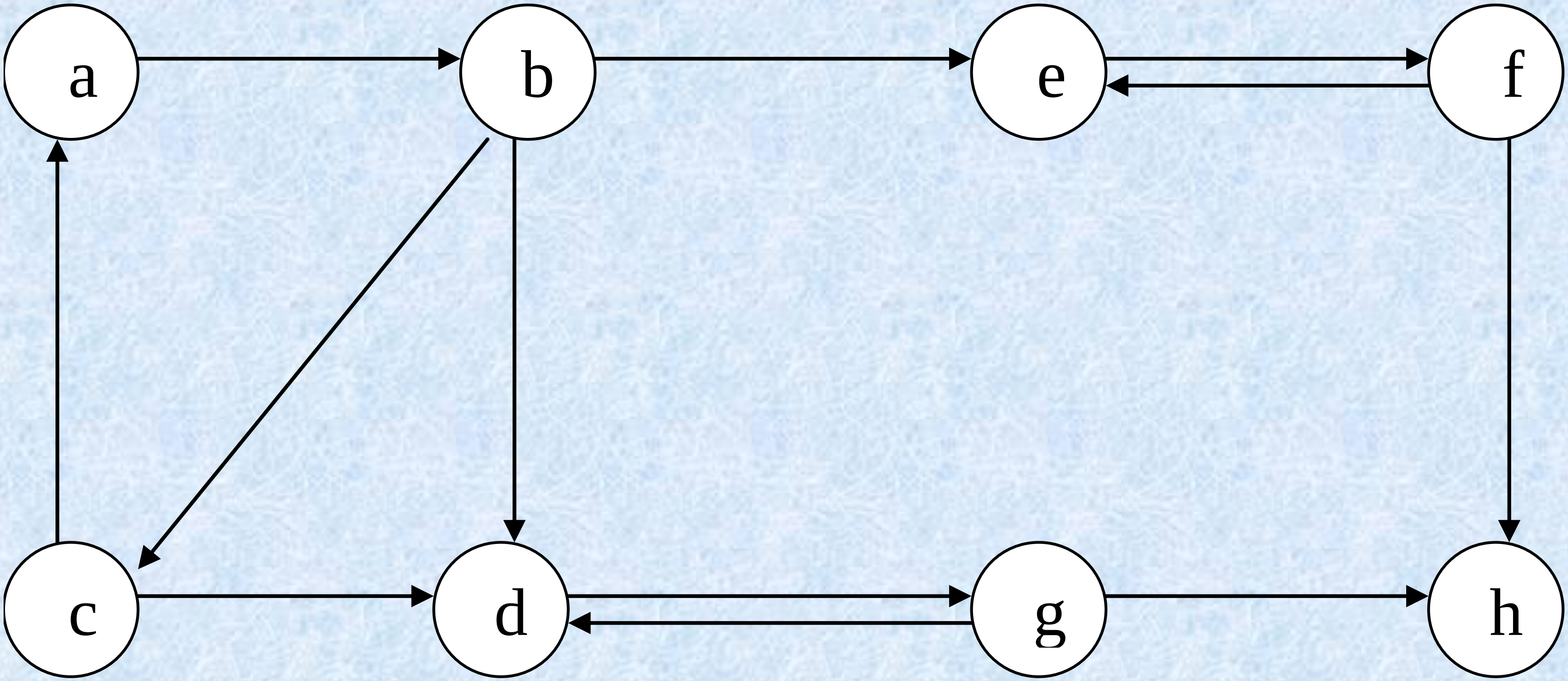
דוגמת גרף קשיר היטב

- בגרף הבא יש מסלול מכוון מכל קדקוד לכל קדקוד אחר בגרף.

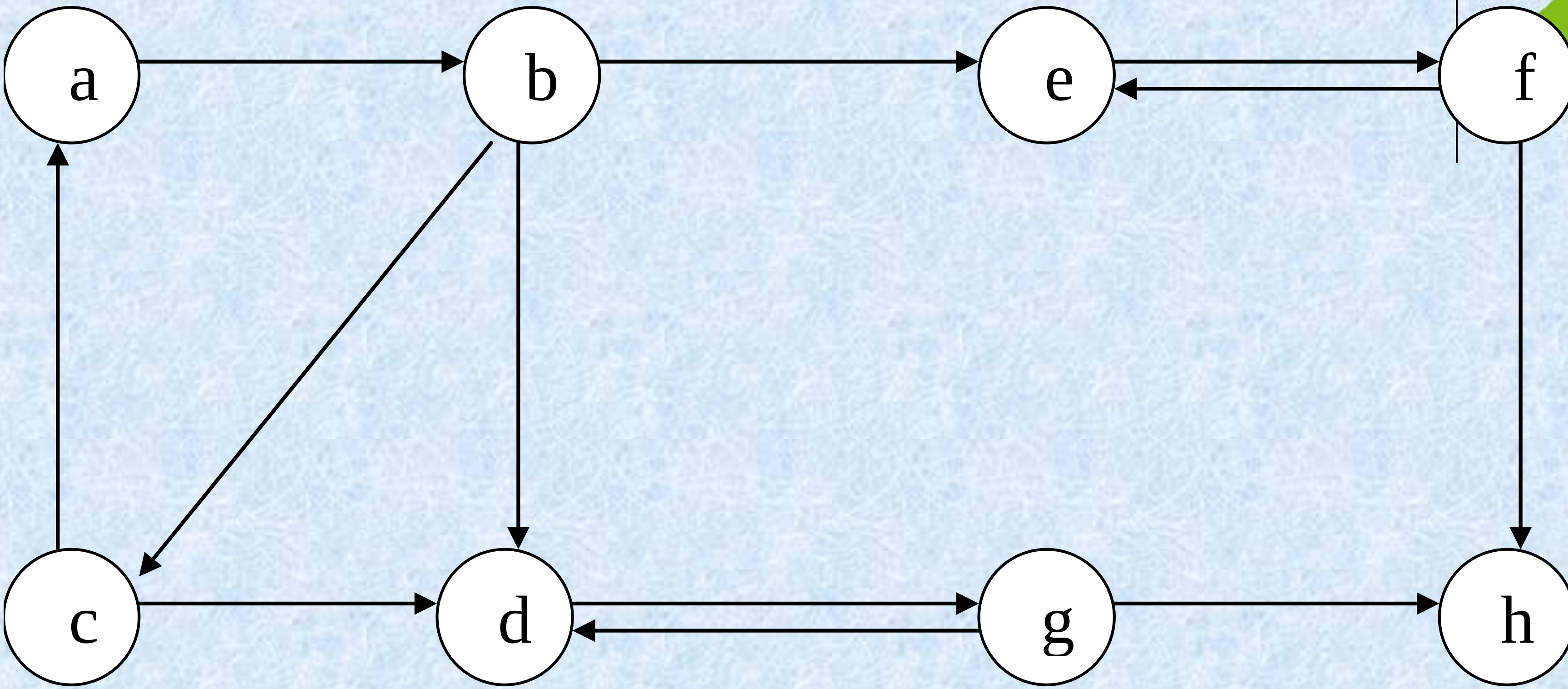


דוגמת גרף קשיר היטב

- התרשים הבא מתאר גרף מכוון שבו 4 רכיבי קשירות חזקה.



בגרף

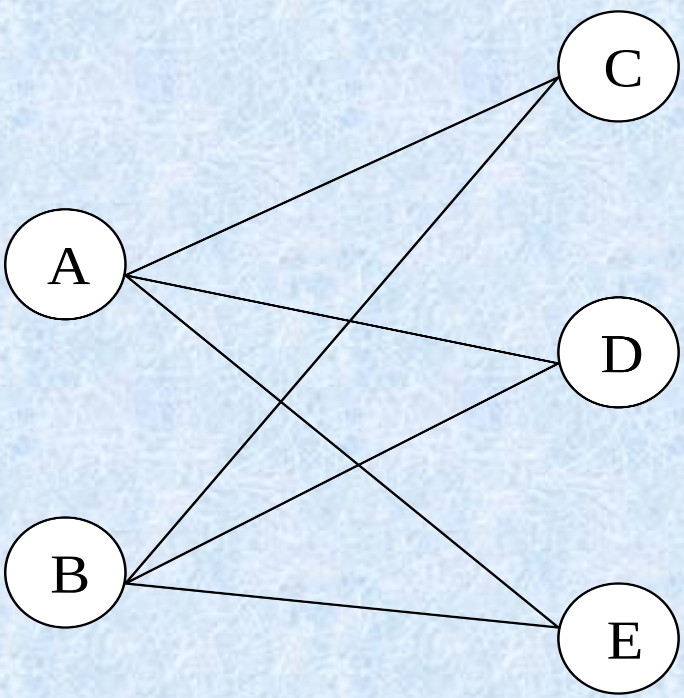


- הרק"ח_ים הם:
- {d,g} {e,f} {h} {a,b,c}

הגדרת גרף דו צדדי

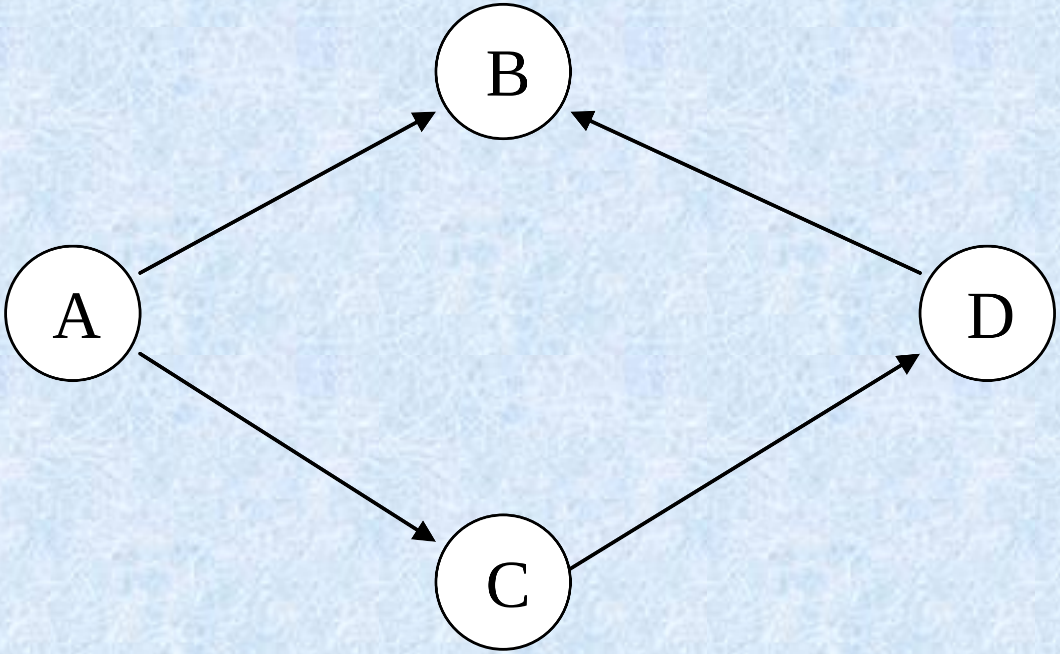
- <u>גרף דו-צדדי</u> – (bipartite graph) הינו גרף שבו קבוצת הקדקודים מתחלקת לשתי קבוצות זרות $V = V_1 \cup V_2$ כך ש: V_1 ו - V_2 קבוצות זרות באופן שאם $x, y \in V_1$ או $x, y \in V_2$ אז לא קיימת קשת בין x ו- y. נהוג לסמן גרף דו-צדדי על ידי $G = (V_1, V_2, E)$

- דוגמה לגרף דו צדדי



דוגמת גרף דו צדדי

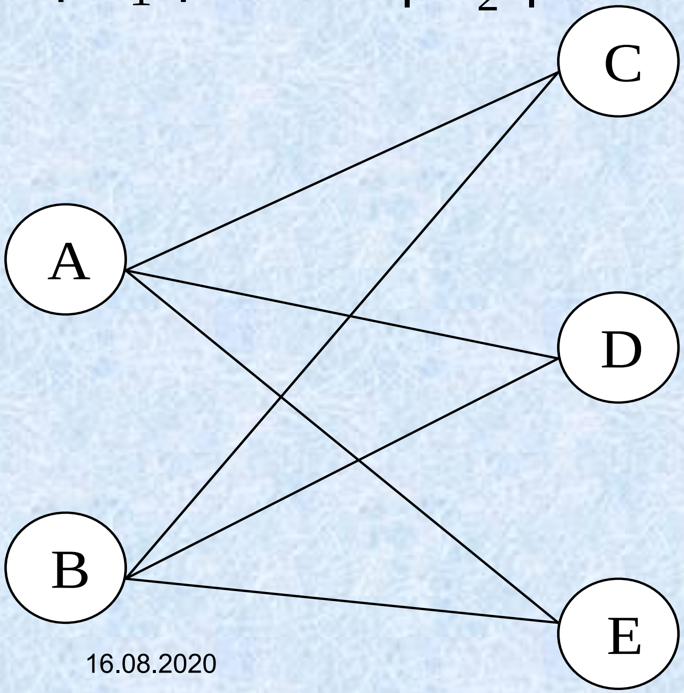
- התרשים הבא מתאר גרף דו-צדדי:
- בגרף זה $V_1 = \{A, D\}$ ו- $V_2 = \{B, C\}$



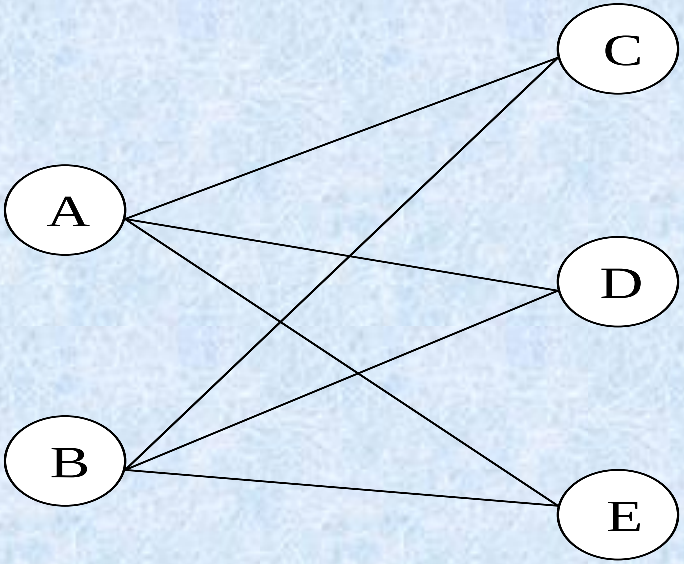
- קשתות בגרף זה יוצאות מקדקוד כלשהו השייך ל – V_1 אל קדקוד אחר השייך ל – V_2 או להיפך.
- אין קשתות מקדקוד אחד השייך ל - V_1 לקדקוד אחר השייך ל - V_1. כנ"ל לגבי V_2.
- ***הערה:*** גרף דו צדדי יכול להיות גרף מכוון או גרף לא מכוון.

- **גרף דו-צדדי מלא** – הינו גרף דו-צדדי $G=(V_1,V_2,E)$ בו לכל $x\in V_1$ ולכל $y\in V_2$ קיימת קשת $(x,y)\in E$.
- גרף זה יסומן על ידי K_{nm} כאשר $|V_2|=m$ ו-$|V_1|=n$
- התרשים הבא

מתאר את K_{23}:



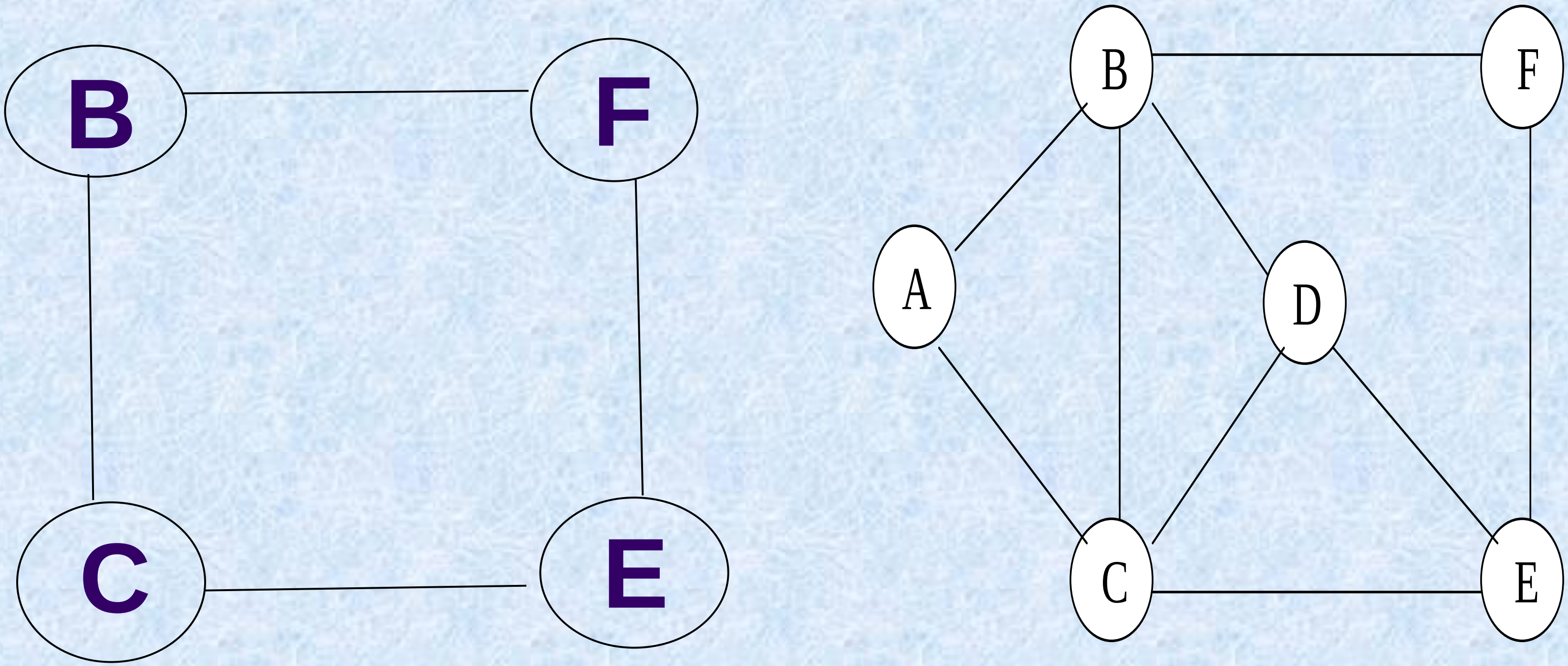
בגרף זה:



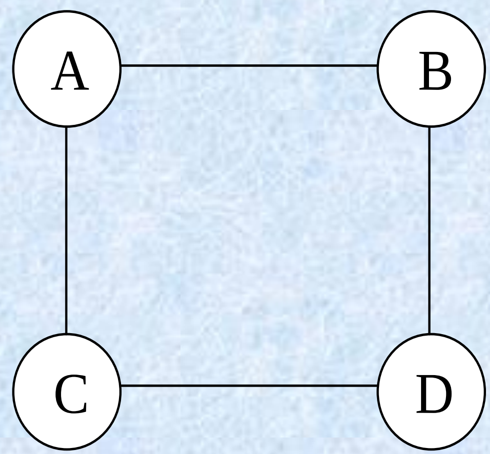
- $V_1 = \{A, B\}$ ו – $V_2 = \{C, D, E\}$
- מקדקוד A ישנה קשת לכל קדקוד אחר השייך ל- V_2 ומכל קדקוד השייך ל -V_2 ישנה קשת לקדקודA.
- מקדקוד B ישנה קשת בינו לבין כל קדקוד אחר השייך ל - V_2 .

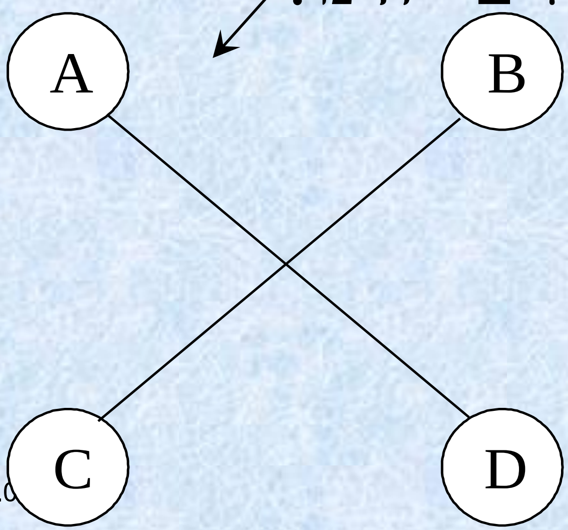
- ***<u>תת גרף</u>*** (Sub-graph) של $G=(V,E)$ הינו גרף $G=(V',E')$ כך ש $V' \subseteq V$ ו $E' \subseteq E$.

בהינתן הגרף הבא תת-גרף שלו יכול להיות:

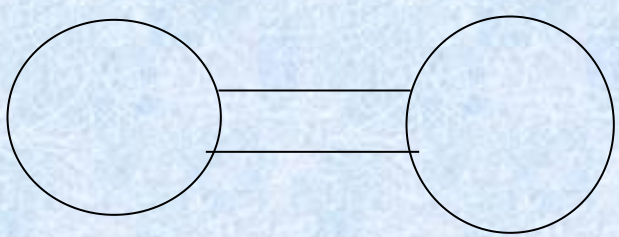


- **גרף משלים**: נתון גרף פשוט G=(V,E), חסר לולאות וצלעות מרובות. גרף משלים של G מסומן כ- $\overline{G}$ ומוגדר כדלהלן: $\overline{G}=(V,\overline{E})$, כאשר $\overline{E}$ הינה אוסף הצלעות החסרות ב-G בין כל שני קדקודים כלשהם בגרף.
- דוגמא : עבור הגרף הבא: הגרף המשלים הינו:

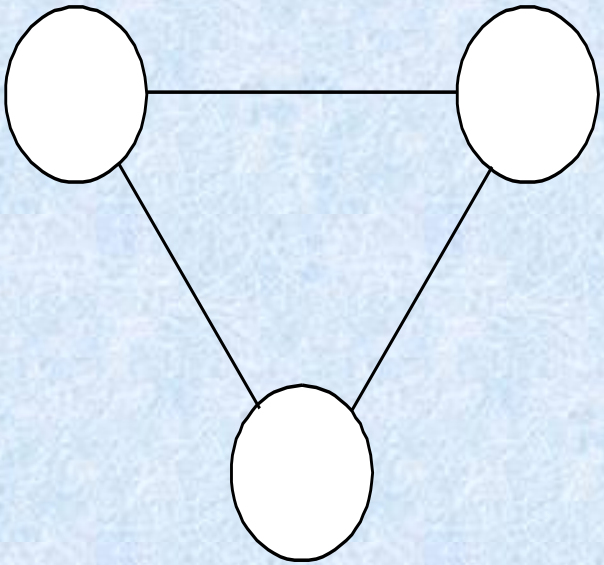




- ***משפט*** נתון גרף קשיר לא מכוון G=(V,E).
  אם $|V| = n$ ו - $|E| \geq n$ אזי בגרף יש מעגל.
- הוכחה באינדוקציה על n
- <u>בסיס</u>: עבור n=2
  אכן בגרף יש מעגל



- עבור n=3



- אכן בגרף יש מעגל

- <u>צעד משלים</u>: נניח נכונות הטענה עבור $k<n$.
- ונוכיח עבור $k=n$.
- כעת יהי גרף G עם n קדקודים ובו n קשתות לפחות.
- כעת **נניח בשלילה** שבגרף G אין מעגל. לכן, ב – G חייב שיהיה קדקוד שהינו עלה (ממנו אין יציאה).

- אם נסיר מגרף G את העלה (קדקוד) x אזי נקבל גרף חדש G’ שבו n-1 קדקודים ולפחות n-1 קשתות.
- לכן, בהמשך להנחת האינדוקציה בגרף G’ יש מעגל
- אך G’ הינו תת גרף של G
- כלומר אם בגרף G’ יש מעגל אזי גם בגרף G יש מעגל בסתירה להנחה שבגרף G אין מעגל.
- לכן, הנחתנו (בגרף G אין מעגל) אינה נכונה והמסקנה היא שבגרף G יש מעגל. ***משל***

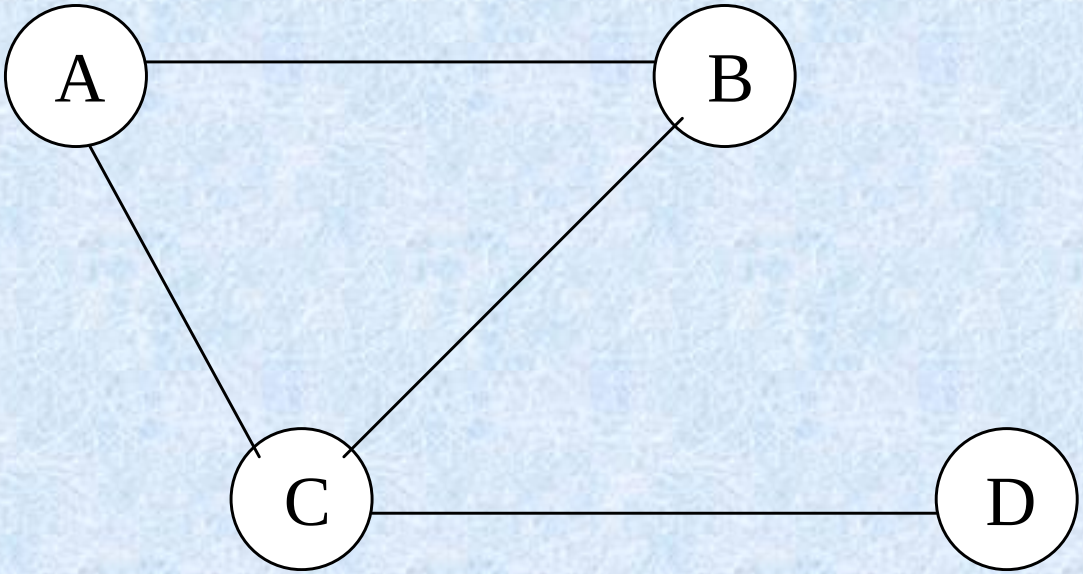
אבחנה:

- גרף G הינו עץ אם הוא:
  - קשיר ובעל n-1 קשתות
  - או חסר מעגלים ובעל n-1 קשתות

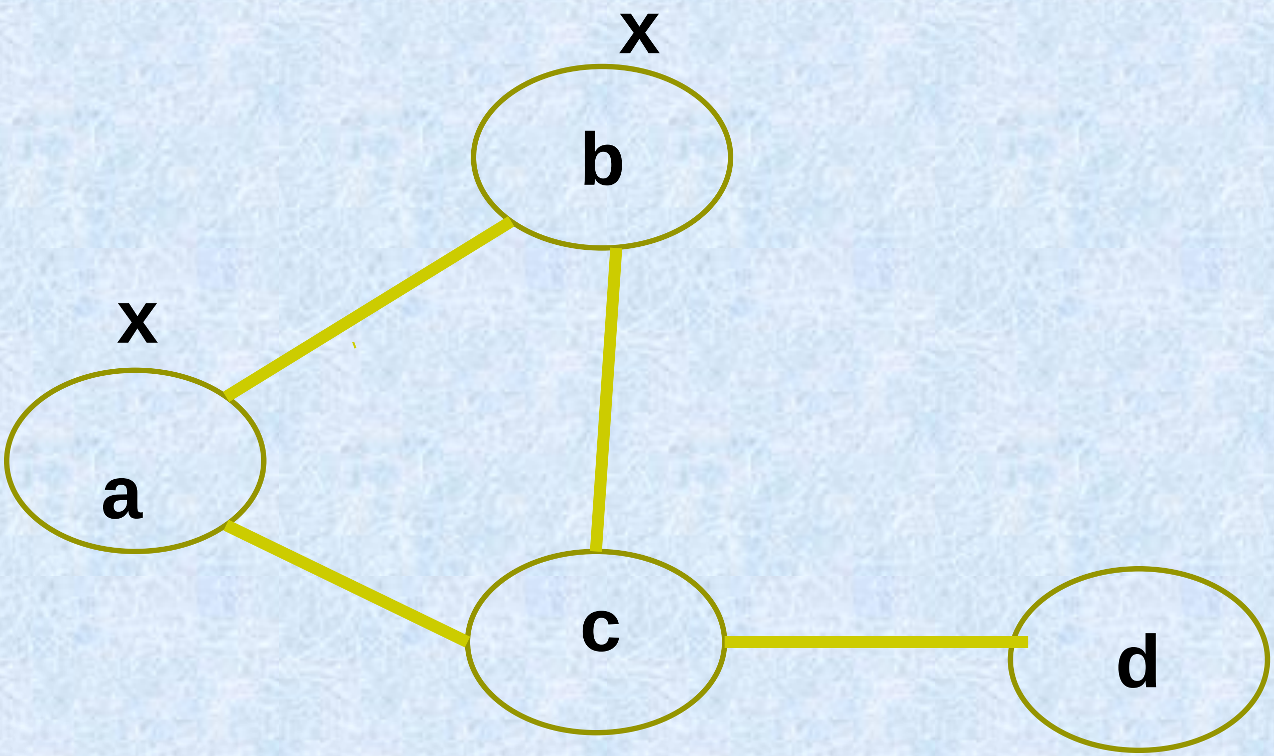
- **<u>משפט</u>**
- בכל גרף פשוט $G=(V,E)$ מתקיים $\sum_{v \varepsilon V} d(v) = 2|E|$
כאשר $d(v)$ מציין דרגתו של צומת v בגרף.
- <u>נימוק</u>: כל צלע בגרף G מחברת בדיוק שני קדקודים, כלומר כל צלע יוצאת בדיוק משני קדקודים.

לכן, כל צלע ב G – נמנית בדיוק פעמיים בחישוב הדרגה של הקדקודים.

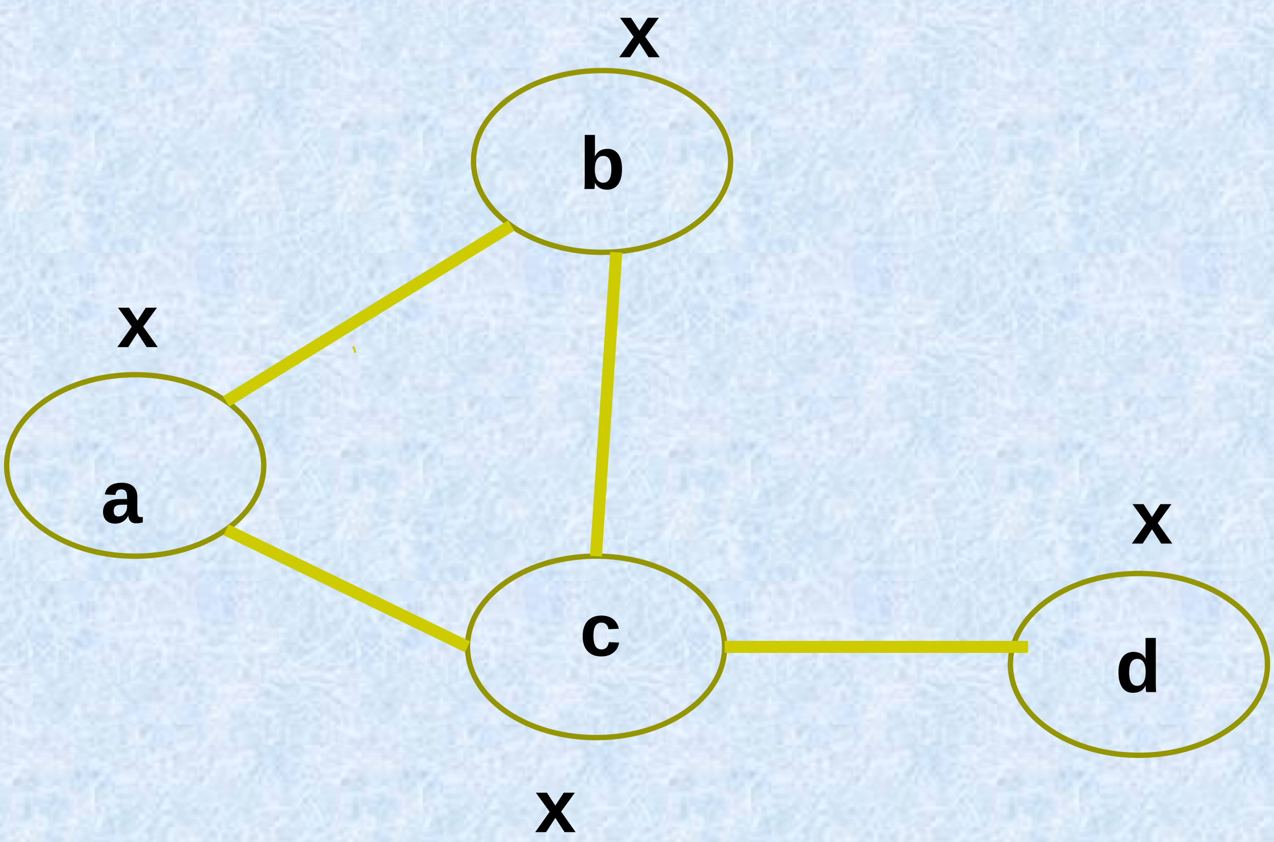
נבהיר את המשפט בעזרת הגרף הבא:



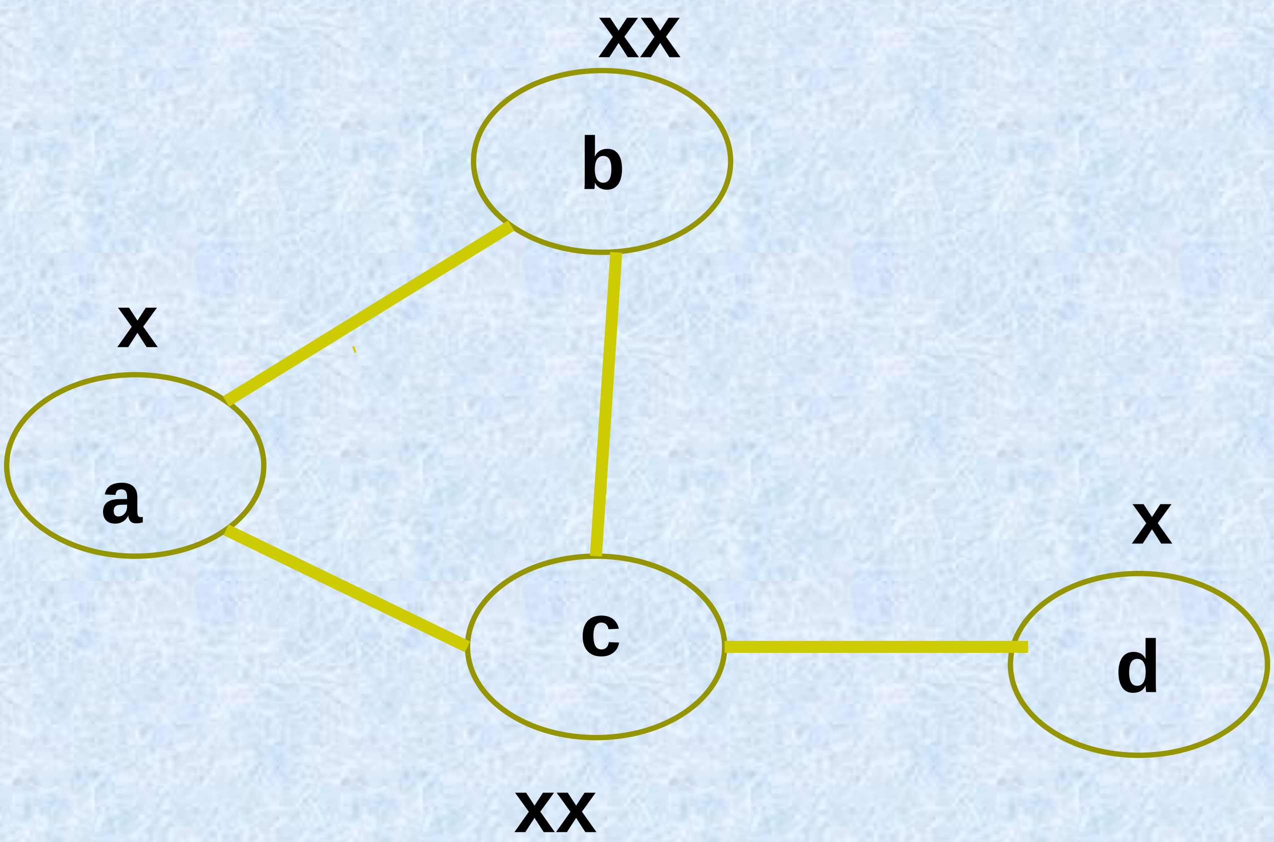
- נעבור על כל הקשתות של הגרף בסדר כלשהו, באופן אקראי לחלוטין. עבור כל קשת נשים סימן x ליד כל אחד משני הקדקודים המהווים את הקשת הנסרקת.
- בהתחלה נטפל בקשת(A,B) אזי תמונת הגרף שנקבל הינה:



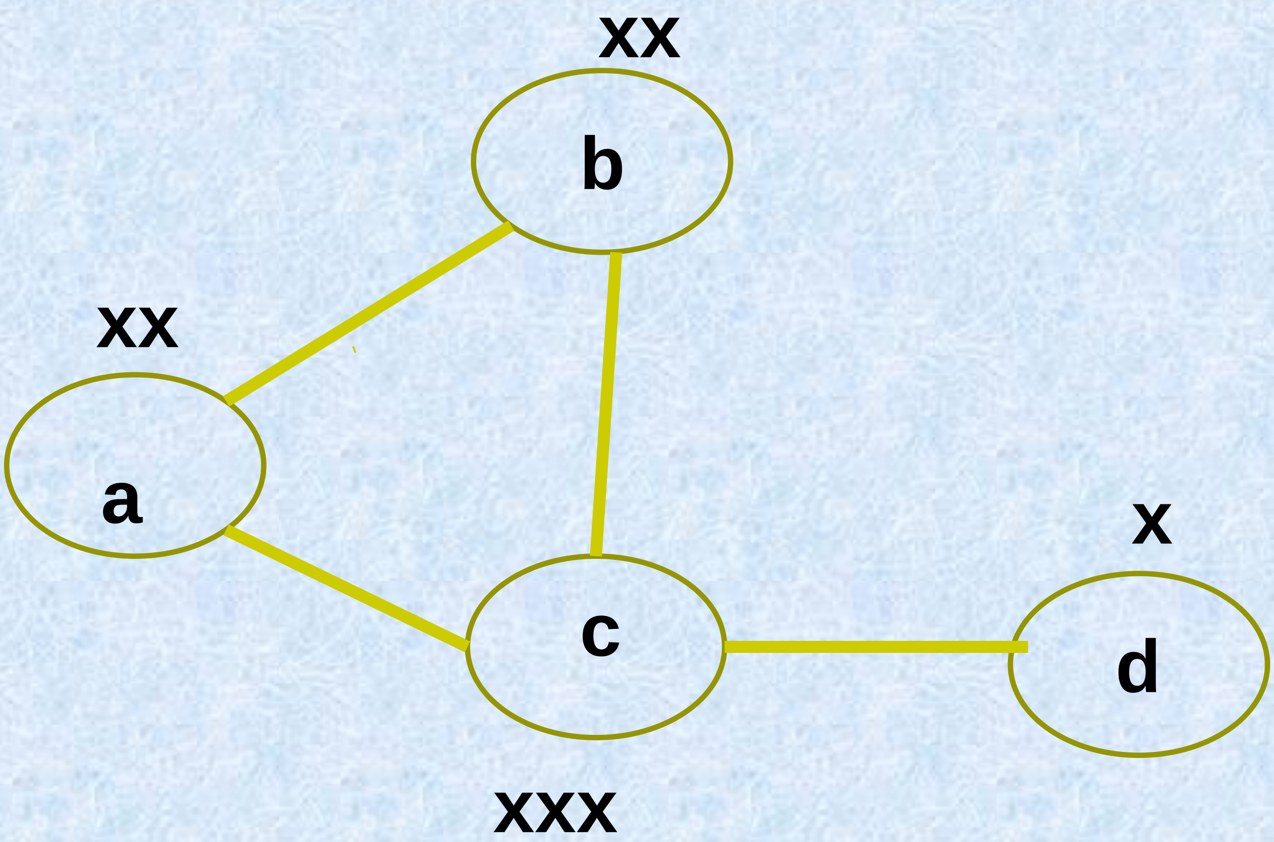
כעת נטפל בקשת(C,D) אזי תמונת הגרף שנקבל הינה:



כעת נטפל בקשת(B,C) אזי תמונת הגרף שנקבל הינה:



כעת נטפל בקשת(A,C) אזי תמונת הגרף שנקבל הינה:

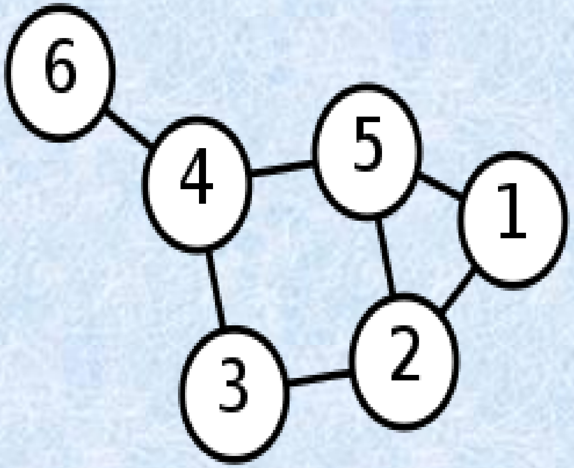


- כשמטפלים בקשת אחת (קשת כלשהי בגרף) אזי דרושים 2 x-ים.
- מאחר שבגרף $|E|$ קשתות, ידרשו $2|E|$ x -ים בכדי לסרוק ולטפל בכל קשתות הגרף.
- כעת בכל קדקוד יהיו x-ים כמספר הקשתות הנוגעות בו, כלומר אם דרגתו של צומת הינו $d(v)$ אזי מספר ה - x-ים שחלים על קדקוד זה הינו $d(v)$.
- לכן, מספר ה - x-ים החלים בכל קודקודי הגרף הינו

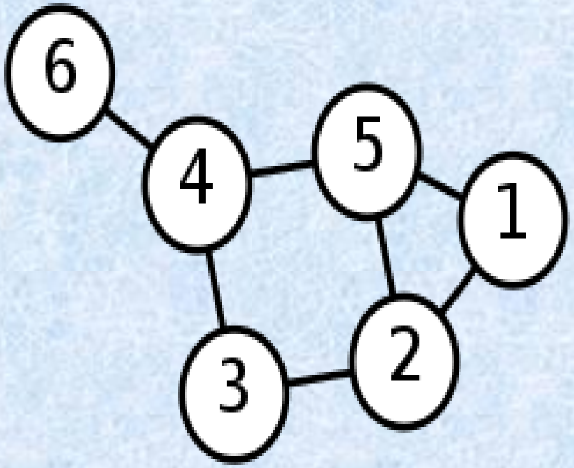
$$\sum_{v \varepsilon V} d(v) = 2|E|$$

למת לחיצות הידיים

- 6 אנשים נפגשים במסיבה ולהלן תיאור של לחיצות ידיים:
- 6 ו- 4 לוחצים ידיים.
- 5 ו- 4 לוחצים ידיים.
- 3 ו- 4 לוחצים ידיים.
- 3 ו- 2 לוחצים ידיים.
- 5 ו- 2 לוחצים ידיים.
- 1 ו- 5 לוחצים ידיים.
- 1 ו- 2 לוחצים ידיים.

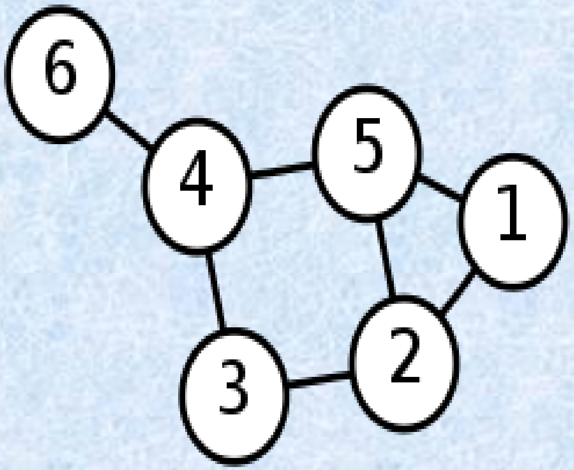


למת לחיצות הידיים



- בגרף יש מספר זוגי של קדקודים (ארבעה קדקודים שהם: 2, 4, 5, 6) בעלי דרגה אי זוגית.
- כלומר, כמות האנשים שלחצו ידיים מספר אי זוגי של פעמים היא זוגית
- האם הדבר נכון לכל גרף?

למת לחיצות הידיים



- לפי המשפט שראינו קודם $\sum_{v \varepsilon V} d(v) = 2|E|$
- כלומר סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה אי זוגית + סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה זוגית שווה ל-$2|E|$
- לכן, סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה אי זוגית = סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה זוגית - $2|E|$
- לכן, סכום הדרגות של כל הקדקודים בעלי דרגה אי זוגית = למספר זוגי כלשהו

למת לחיצות הידיים

- שאלה? כמה מספרים אי-זוגיים צריך לחבר ע"מ שסכומם יהיה זוגי?
- לכן, מספר הקדקודים בעלי דרגה אי זוגית הוא זוגי.
- בתורת הגרפים , **למת לחיצות הידיים** היא משפט הקובע שבכל גרף לא מכוון קיימים מספר זוגי של צמתים שדרגתם אי זוגית.
- בניסוח שונה, במסיבה שבה חלק מהאנשים לוחצים ידיים, כמות האנשים שלחצו ידיים מספר אי זוגי של פעמים היא זוגית.
- תוצאה זו הוכח על ידי לאונרד אוילר.