

# Inhaltsverzeichnis

[../MAIN/main.tex]subfiles

# Kapitel 1

## Folgen

Clara

Eine Funktion, bei der nur natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zugeordnet wird, nennt man Folge.  
Folgen können auch nur für Teilbereiche von  $\mathbb{N}$  definiert sein.

$(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnet die Folge, wobei  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

In einem Ausdruck muss das  $n$  immer dasselbe bleiben!

Um statt Funktionen Folgen zu behandeln:

- ON  $\rightarrow$  **MODE**  $\rightarrow$  Zeile 4: statt FUNC **SEQ** auswählen
- in Y=
- Mit  $nMin$  den Startindex angeben
- Mit  $u(n)$  die Folgenrechtschreibung angeben
- Falls die Folge rekursiv anzugeben ist, muss mit  $u(nMin)$  das Startglied angegeben werden

Es ist üblich eine rekursive Folge mit  $a_{n+1}$  in Abhängigkeit von  $a_n$  zu haben. Diese Darstellung ist mit dem GTR nicht direkt verwendbar. Man muss es umschreiben um  $a_n$  in Abhängigkeit von  $a_{n-1}$  zu haben.

### 1.1 Verschiedene Darstellungen

#### 1.1.1 Explizite Darstellung

Wenn ein beliebiges Glied der Folge direkt berechenbar ist, ist ihre Darstellung explizit.

1.  $a_n = 3^n \Rightarrow a_4 = 3^4 = 81$
2. Die Folge der  $n$ -ten positiven, ungeraden Zahl:  
 $a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1) \Rightarrow$  Die 8. positive, ungerade Zahl ist  $a_8 = 1 + 2 \cdot (8 - 1) = 15$

#### 1.1.2 Rekursive Darstellung

Wenn für die Berechnung des  $n$ -ten Gliedes eines (oder sogar mehrere) der vorherigen Glieder benötigt wird, ist ihre Darstellung rekursiv. In diesen Fällen braucht man immer ein Startglied, oft  $a_0$  oder  $a_1$ .

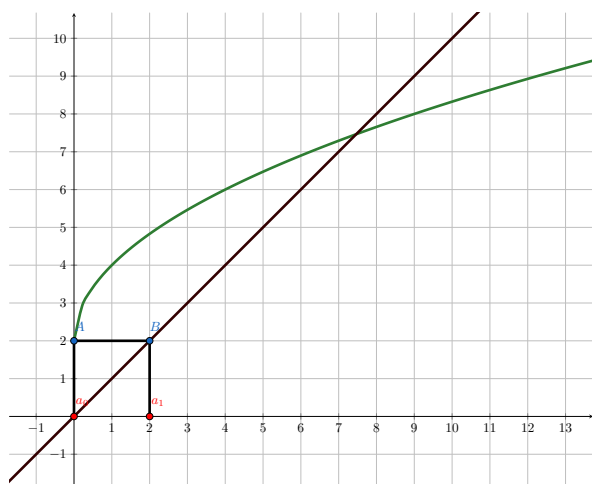
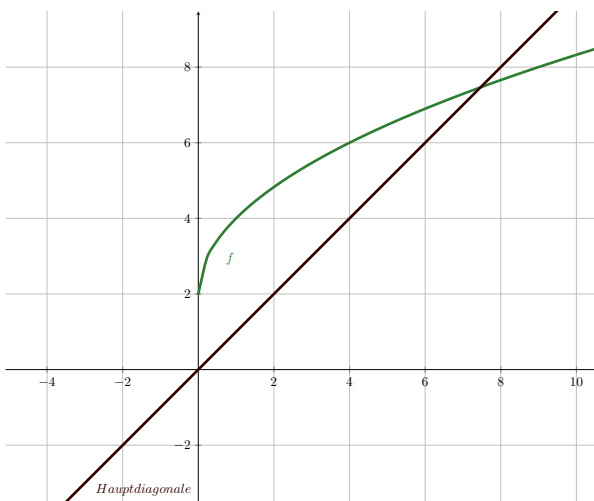
1.  $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2; a_0 = 5$   
 $a_1 = 3 \cdot a_{1-1} + 2 = 3 \cdot a_0 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$   
 $a_2 = 3 \cdot a_{2-1} + 2 = 3 \cdot a_1 + 2 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$   
 $a_3 = 3 \cdot a_{3-1} + 2 = 3 \cdot a_2 + 2 = 3 \cdot 53 + 2 = 159$   
und so weiter...
2. Die Folge der  $n$ -ten positiven, ungeraden Zahl:  
 $a_n = a_{n-1} + 2; a_1 = 1$

Für manche Folgen sind beide Darstellungen möglich, wobei die explizite Darstellung oftmals viel praktischer ist, da die Berechnung der Folgeglieder anhand der rekursiven Darstellung schnell sehr aufwendig wird.

## Web-Diagramme

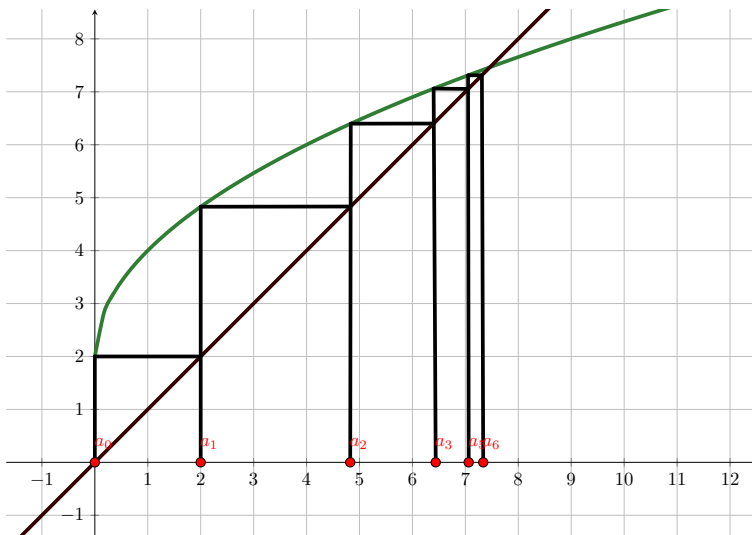
Hier handelt es sich um ein graphisches Verfahren, das dazu dient, das Verhalten einer Folge, deren Darstellung rekursiv ist, zu untersuchen. Es ermöglicht die Beobachtung des Langzeitverhaltens (Konvergenz, Divergenz oder Oszillation) einer rekursiven Folge.

Dazu muss man der rekursiven Folgenrechtsvorschrift eine Funktion  $f(a_{n-1}) = a_n$  zuordnen, sodass - grob gesagt - "die Funktion das Gleiche mit  $x$  macht, dass die Folge macht, um von  $a_n$  auf  $a_{n+1}$  zu kommen". Man muss verstehen, dass es sich hierbei nicht um den Graphen der Folge handelt, die Werte der Folgenglieder sind nicht wie gewohnt abzulesen. Zusätzlich zeichnet man in ein kartesisches Koordinatensystem die **Hauptdiagonale** ein (entspricht dem Graphen von  $f(x) = x$ ). Exemplarisch wird hier die Folge  $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 2$  behandelt, dementsprechend ist die Hilfsfunktion hier  $f$  mit  $f(x) = 2\sqrt{x} + 2$ .



Dann trägt man den Wert des ersten Folgengliedes auf die Abzissenachse ein und verbindet ihn mit der entsprechenden Funktion anhand eines vertikalen Striches. Der Ordinatenwert, der so erhalten wird (Punkt A), entspricht dem Wert von  $a_1$ . Um den Vorgang erneuern zu können, muss der gefundene Wert wieder auf die Abzissenachse, dazu benutzt man die Hauptdiagonale als Spiegel". Ein horizontaler Strich bis zur Hauptdiagonale (zum Punkt B) und ein vertikaler bis zur Abzissenachse lösen das Problem. So ist der Wert von  $a_1$  auf der Abzissenachse, dort wird er für den nächsten Schritt benötigt.

Dasselbe muss mehrmals wiederholt werden, so wird jeweils das nächste Folgenglied auf die Abzissenachse abgebildet (rote Punkte). Daraus kann man dann eine **Tendenz** erkennen, die die Entwicklung der Folgenglieder beschreibt. Je nach dem, was für eine Tendenz zu erkennen ist, kann man verschiedene Schlüsse bezüglich der Entwicklung der Folge schließen. In diesem Falle wird deutlich, dass die Folge konvergiert, der Grenzwert ist die Schnittstelle zwischen der Hilfsfunktion und der Hauptdiagonalen, es fehlt nur noch diesen zu berechnen.



$$h(x) = x; \quad f(x) = 2\sqrt{x} + 2$$

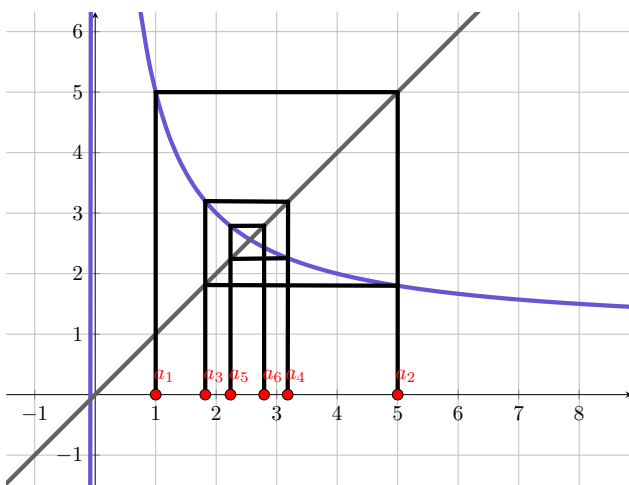
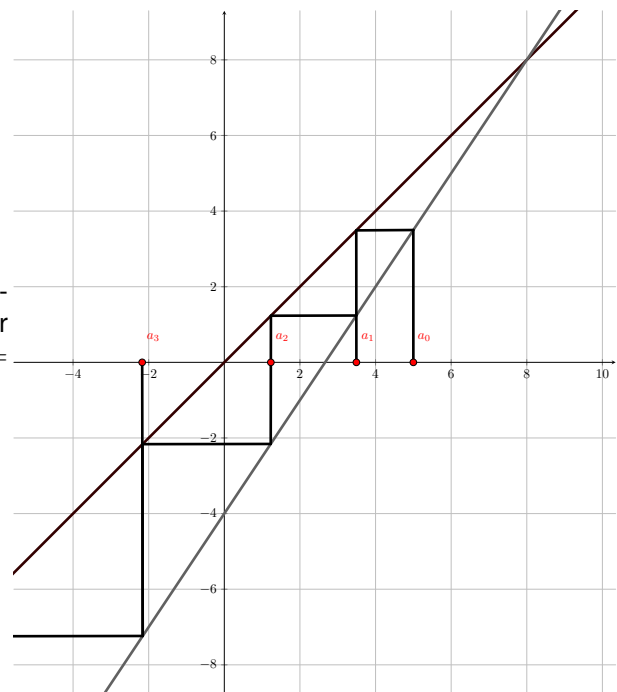
$$h(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \left( \frac{2 + \sqrt{12}}{2} \right)^2$$

$$g = x_1$$

Es gibt andere mögliche Tendenzen, hier ein paar Beispiele:

Die divergierende Treppe, es gibt also keinen Grenzwert, man kann den uneigentlichen Grenzwert aber ablesen, hier ist der Grenzwert der Folge  $a_n$  mit  $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n - 4$  und  $a_0 = 5$ :  $-\infty$



Die konvergierende Spirale, es gibt also einen Grenzwert, den man erneut mit der Schnittstelle zwischen Funktion und Hauptdiagonale ermitteln kann. Hier konvergiert die Folge  $a_n$  mit  $a_{n+1} = \frac{4}{a_n} + 1$  und  $a_1 = 1$

Dieses Verfahren kann ausschließlich bei rekursiven Folgen angewendet werden, bei denen keine zusätzliche Abhängigkeit von  $n$  vorliegt (Beispiel:  $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4n + 3$ ) oder die Rekursivitätsebene den 1. Grad überschreitet, was bedeutet, dass  $a_n$  nicht nur in Abhängigkeit von  $a_{n-1}$  beschrieben wird, sondern von anderen

Rekursivitätsebenen wie  $a_{n-2}$  (Beispiel: die Fibonacci-Folge).

Mit den GTR ist dieses Verfahren auch möglich, die Arbeit der Fertigstellung der Striche wird vom Rechner übernommen. Das Bild ist vom Benutzer nur noch zu deuten, gegebenenfalls ist die Schnittstelle auszurechnen.

- Der Rechner muss auf **SEQ** stehen
- in  $Y=$  die rekursive Folge angeben
- In 2nd **FORMAT** von Time auf **Web** stellen
- **TRACE** verwenden
- Sooft auf **ENTER** drücken, bis ausreichend Striche zu sehen sind.

## 1.2 Auffällige Folgen

### 1.2.1 Arithmetische Folgen

Eine Folge wird arithmetisch genannt, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

2. Explizite Darstellung:

Mit Startglied  $a_0$ :  $a_n = a_0 + n \cdot d$

Mit Startglied  $a_1$ :  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Mit Startglied  $a_x$ :  $a_n = a_x + (n - x) \cdot d$

Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist  $a_n = a_p + (n - p) \cdot d$ ;  $n, p \in$

$$a_n = a_{n-1} + 3; a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 + n \cdot 3$$

Jedes Folgeglied einer solchen Folge ist das arithmetische Mittel seines Vorgängers und Nachgängers:  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

### 1.2.2 Geometrische Folgen

Eine Folge wird geometrisch genannt, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

- Rekursive Darstellung:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

- Explizite Darstellung:

Mit Startglied  $a_0$ :  $a_n = a_0 \cdot q^n$

Mit Startglied  $a_1$ :  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Mit Startglied  $a_x$ :  $a_n = a_x \cdot q^{n-x}$

Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist  $a_n = a_p \cdot q^{n-p}$ ;  $n, p \in$

$$a_n = a_{n-1} \cdot 3; a_0 = 2 \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^n$$

Jedes Folgeglied einer solchen Folge ist das geometrische Mittel seines Vorgängers und Nachgängers:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

## 1.3 Klassifizierung von Folgen

### 1.3.1 Monotonie

Eine Folge  $(a_n)_n \in$  heißt monoton  $\begin{cases} \text{steigend/wachsend} \\ \text{fallend/abnehmend} \end{cases}$  wenn  $\begin{cases} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \end{cases}$ .

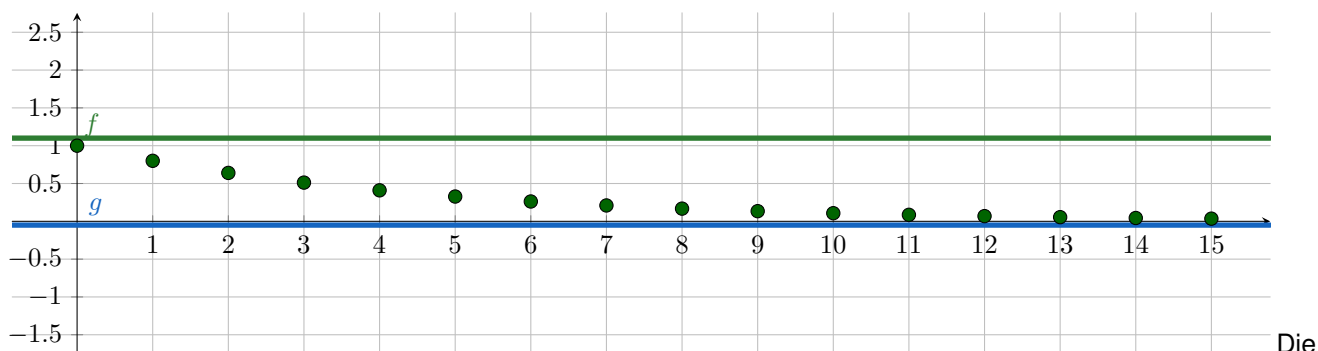
Gelten dabei sogar **strikte** Ordnungsrelationen ( $>$  oder  $<$ ), dann ist  $(a_n)$  **streng** monoton wachsend beziehungsweise abnehmend.

Strategie:

- Das **Vorzeichen von  $a_{n+1} - a_n$  bestimmen**, ist es  $\leq 0$  dann ist die Folge fallend, ist es  $\geq 0$ , dann ist die Folge wachsend.
- **$\frac{a_{n+1}}{a_n}$  mit 1 vergleichen**, ist es  $\leq 1$ , dann ist die Folge fallend, ist es  $\geq 1$ , dann ist die Folge wachsend.

Untersucht wird die Monotonie der Folge  $a_n = \frac{8n}{n^2 + 1}$ .

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{8(n+1)}{(n+1)^2 + 1} - \frac{8n}{n^2 + 1} \\ &= \frac{8n+8}{n^2+2n+1+1} - \frac{8n}{n^2+1} \\ &= \frac{8n^3+8n^2+8n+8 - (8n^3+16n^2+16n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \\ &= \frac{-8n^2-8n+8}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \end{aligned}$$



Die abgebildete Folge  $a_n = \frac{8n}{n^2+1}$  besitzt als mögliche obere Schranke die Gerade  $f : y = 1,1$ , unten die Gerade  $g : y = -0,05$ .  $a_n$  ist also **beschränkt**.

### Unbeschränktheit

Unbeschränktheit mit Abschätzungen zeigen:

$$a_n = \frac{n^2}{n+2} \geq \frac{n^2}{n+2n} = \frac{n^2}{3n} = \frac{1}{3}n \quad \forall n \geq 1$$

$u_n = \frac{1}{3}n$  ist eine unbeschränkte Folge,  $a_n$  ist ab einem bestimmten Glied ( $a_1$ ) immer darüber:  
 $a_n$  ist ebenfalls unbeschränkt, sie divergiert nach  $+\infty$

### 1.3.2 Konvergenz

Eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt.

Man sagt  $a_n$  konvergiert gegen  $g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - g) = 0$$

Wörtlich: Eine Folge  $(a_n)$  konvergiert gegen  $g$  genau dann, wenn  $(a_n - g)$  gegen den Wert 0 konvergiert.

$$a_n = \frac{3n^4 - 1}{n^4}$$

$a_n$  hat vermutlich den Grenzwert  $g = 3$ .

$$a_n - 3 = \frac{3n^4 - 1}{n^4} - 3 = \frac{3n^4 - 1 - 3n^4}{n^4} = -\frac{1}{n^4} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

## Monotone Konvergenz

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Folge monoton wachsend sei und sei  $a$  die kleinste obere Schranke (Supremum).

- Sei  $\varepsilon \geq 0$  dann ist  $a - \varepsilon$  keine obere Schranke der Folgeglieder  $\{a_n; \in\}$ .
- $(a_n)$  ist wachsend
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  mit  $a_{n_0} \geq a - \varepsilon$
- $\forall n > n_0$  gilt  $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < a + \varepsilon$      $|-a$   
 $\Leftrightarrow -\varepsilon < a_{n_0} - a \leq a_n - a < \varepsilon$
- $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Analog kann man mit einer nach unten beschränkten monoton fallenden Folge argumentieren. Besser zu verstehen, wenn man es so sagt:

$$\begin{aligned} \exists S \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : a_n \leq a_{n+1} \wedge a_n \leq S \\ \Rightarrow \exists g \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \wedge g \leq S \end{aligned}$$

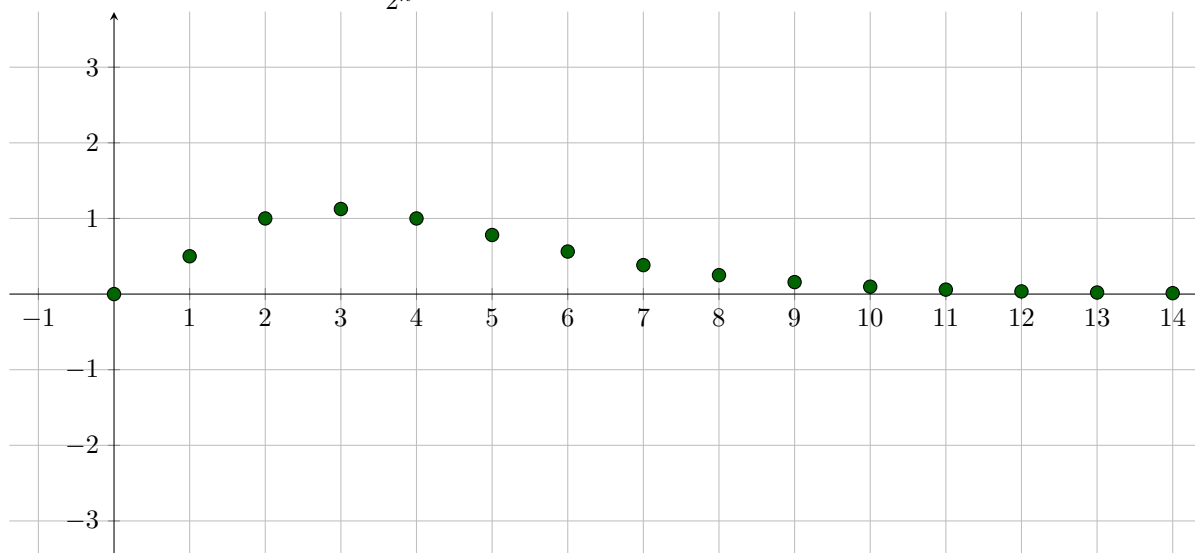
und

$$\begin{aligned} \exists s \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : a_n \geq a_{n+1} \wedge a_n \geq s \\ \Rightarrow \exists g \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \wedge g \geq s \end{aligned}$$

### Wörtlich:

- Eine monoton **wachsende** Folge  $(a_n)$  ist genau dann **konvergent**, wenn sie nach **oben beschränkt** ist. Ihr Grenzwert  $g$  ist kleiner oder gleich der oberen Schranke  $S \in \mathbb{R}$ .
- Eine monoton **fallende** Folge  $(a_n)$  ist genau dann **konvergent**, wenn sie nach **unten beschränkt** ist. Ihr Grenzwert  $g$  ist größer oder gleich der unteren Schranke  $s \in \mathbb{R}$ .

Untersucht wird die Folge  $u_n = \frac{n^2}{2^n}$



- Beschränktheit:

$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0$ , für  $n = 0$ ,  $a_n = 0 \Rightarrow$  die untere Schranke  $s = 0$  ist das Infimum.



- Monotonie:

$$\begin{aligned}
 \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \\
 &= \frac{(n+1)^2}{2n^2} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{8}{9} < 1 \quad \forall n \geq 3
 \end{aligned}$$

$$\text{N.R.:} \quad 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{4}{3} \quad \forall n \geq 3$$

$$\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{16}{9}$$

Somit ist  $u_n$  ab dem 3. Folgenglied **streng monoton fallend**  $\Rightarrow S = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow a_n$  konvergiert gegen den Grenzwert  $g = 0$

## Divergenz

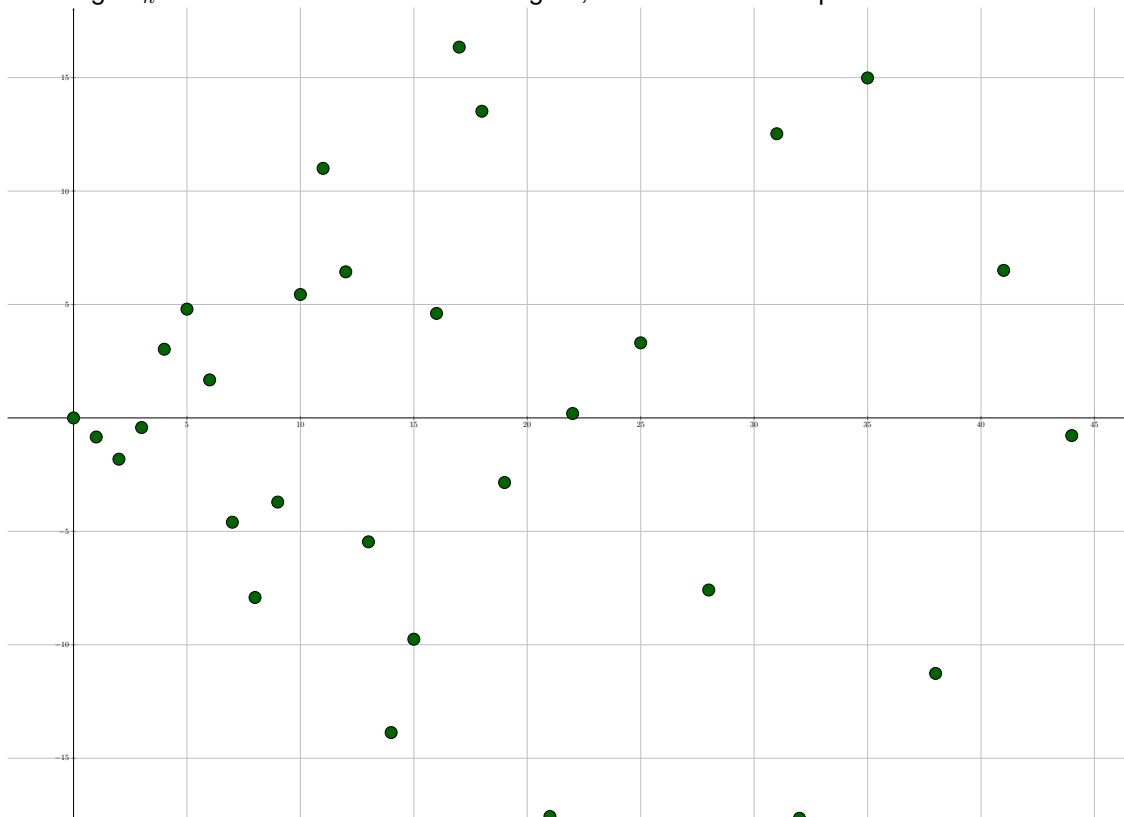
Eine Folge  $(a_n)$ , die keinen Grenzwert  $g \in \mathbb{R}$  besitzt (nicht konvergiert), wird **divergent** genannt.

Kann man ihr trotzdem einen Grenzwert wie  $\pm\infty$  zuordnen ist sie **bestimmt divergent**.

Besitzt die Folge überhaupt keinen Grenzwert, so heißt sie **unbestimmt divergent**.

Man nennt einen Grenzwert  $g = +\infty$  oder  $g = -\infty$  einen **uneigentlichen Grenzwert**.

- Die Folge  $u_n = -4n^5$  ist bestimmt divergent ( $g = -\infty$ ).
- Die Folge  $a_n = -n \sin n$  ist unbestimmt divergent, sie besitzt überhaupt keinen Grenzwert.



## Epsilon-n0-Definition

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : |a_n - g| < \varepsilon$$

Strategie:

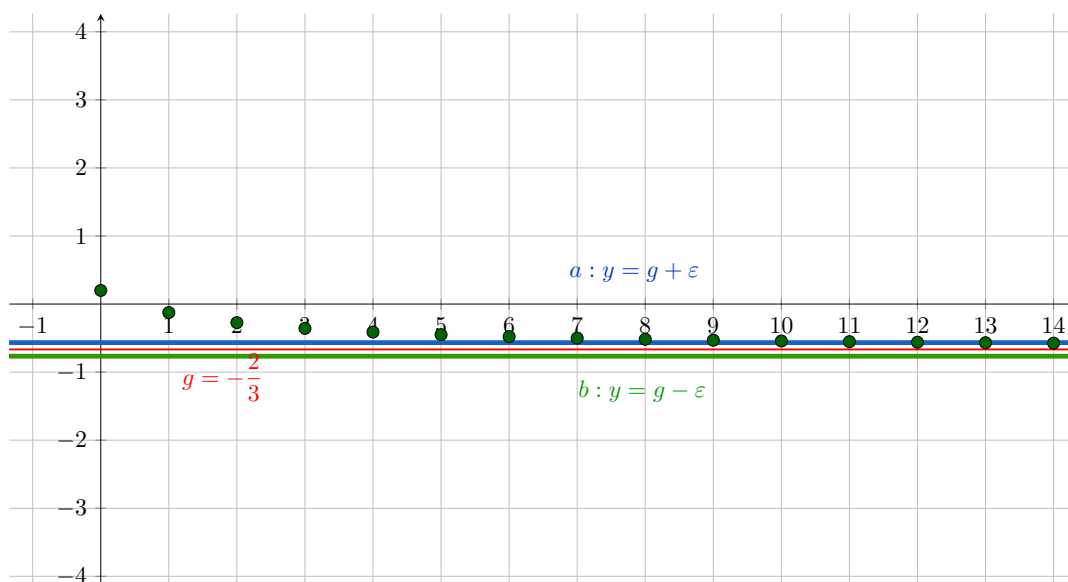
- den Ausdruck  $|a_n - g|$  vereinfachen
- die Ungleichung  $|a_n - g| < \varepsilon$  zu einer Ungleichung der Form  $n > \dots$  umformen.
- man hat jetzt die Bedingung für  $n$ ,  $n_0$  ist das erste Glied, dass sie erfüllt.
- Beweis führen: sei  $n \geq n_0$  beliebig, dann ist  $|a_n - g| = \dots < \varepsilon$ .

Wenn ein bestimmtes  $\varepsilon$  angegeben ist, dann verwendet man, um das **gesuchte**  $n_0$  zu finden die Gaußklammern. Angewendet werden diese  $\lfloor x \rfloor$  um eine Zahl abzurunden, diese  $\lceil x \rceil$  um aufzurunden. In unserem Fall wollen wir eine ganze Zahl, für die die Ungleichung auf jeden Fall erfüllt wird, deshalb rundet man auf also **Gaußklammer**  $\lceil x \rceil$ .

Auch Divergenz kann so gezeigt werden:

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists n \geq n_0 : |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Die Folge  $a_n = \frac{1-2n}{5+3n}$  wird untersucht, es wird geschätzt, dass  $(a_n)$  gegen  $-\frac{2}{3}$  konvergiert.



•

$$\begin{aligned} |a_n - g| &= \left| \frac{1-2n}{5+3n} + \frac{2}{3} \right| \\ &= \left| \frac{3(1-2n) + 2(5+3n)}{3(5+3n)} \right| \\ &= \left| \frac{3-6n+10+6n}{15+9n} \right| \\ &= \left| \frac{13}{15+9n} \right| \\ &= \frac{13}{15+9n} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{13}{15+9n} &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \frac{13}{15+9n} &< \varepsilon(15+9n) \\ \Leftrightarrow 13-15\varepsilon &< 9n\varepsilon \\ \Leftrightarrow n &> \frac{13-15\varepsilon}{9\varepsilon} \end{aligned}$$

- $n_0 = \left\lceil \frac{13 - 15\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rceil$

- Sei  $\varepsilon$  beliebig und  $n \geq n_0$ , dann gilt  $|a_n - g| = \left| \frac{1 - 2n}{5 + 3n} + \frac{2}{3} \right| = \frac{13}{15 + 9n} < \varepsilon$

## Grenzwertsätze

Die Grenzwertsätze führen die Grenzwerte komplizierter Folgen auf einfachere Grenzwertbetrachtungen bekannter Folgen zurück.

Seien  $u_n$  und  $v_n$  sind konvergente Folgen mit Grenzwerten  $U$  und  $V$ .

- Die Folge  $u_n \pm v_n$  ist konvergent und besitzt den Grenzwert  $U \pm V$ .
- Die Folge  $u_n \cdot v_n$  ist konvergent und besitzt den Grenzwert  $U \cdot V$ .
- Die Folge  $\frac{u_n}{v_n}$  ist konvergent und besitzt für  $V \neq 0$  den Grenzwert  $\frac{U}{V}$ .

$$a_n = \frac{4\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} - 2n} = \frac{\cancel{n} \left( \frac{4}{\sqrt{n}} - 1 \right)}{\cancel{n} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} - 2 \right)} = \frac{\frac{4}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2}$$

$$g = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4}{\sqrt{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} 1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \lim_{n \rightarrow \infty} 2} = \frac{0 - 1}{0 - 2} = \frac{1}{2}$$