Kapitel 1

KOMPLEXE ZAHLEN

by PASCAL

1.1 Einführung

Die Ursache für die Einführung der komplexen Zahlen ist vergleichbar mit der jeglicher anderer Zahlenmengen (abgesehen von $\mathbb{N}$). Alles basiert auf einer Rechnung oder einer Menge an Rechnungen, welche für die vorhandenen Zahlenmengen **keine Lösung besitzen** oder aber diese Zahlenmengen einem nicht erlauben eine Lösung zu finden. Ein Beispiel hierfür ist die Einführung der negativen Zahlen. Gleichungen der Form $2 + x = 1$ waren eine Zeit lang nicht lösbar. Ebenso galt einmal, dass $x^2 - 2 = 0$ keine Lösung besitzt, da hierfür die reellen Zahlen benötigt werden. Analog dazu wird die Erweiterung auf die komplexen Zahlen begründet. Dies wird an folgendem klassischen Beispiel erläutert:

$$
\begin{aligned}
& x^2 + 1 = 0 \\
& \Leftrightarrow x = \sqrt{-1} \quad \lightning
\end{aligned}
$$

Um dieser und anderen Gleichungen eine Lösung zuzuteilen ist es nicht nur notwendig die Zahlenmenge zu erweitern, sondern auch, neue Symbole und Zeichen einzuführen um die neuen Zahlen zu kennzeichnen. Für die $\mathbb{Z}$ ist es das Symbol "-", für $\mathbb{Q}$ ","und $\frac{a}{b}$, für $\mathbb{R}$ $\sqrt{a}$ und die Zeichen π und e zum Beispiel (auch wenn beide sich anders darstellen lassen). (Ein) gewisse(r) Mathematiker (Leibniz glaube ich) hat entschieden, dass das einzige benötigte Zeichen i sein sollte, da er sie imaginäre Zahl nannte (Für den Fall, dass ich hier ein bisschen was durcheinander bringe, sind Direktverbesserungen kommentarlos erlaubt und erwünscht).

Definition - Imaginäre Einheit

Die Ikone i der komplexen Zahl trägt den Namen **imaginäre Einheit** und wird folglich definiert:

$$i \in \mathbb{C} : i^2 = -1; \mathbb{C} = \mathbb{R} \cup \{i\}$$

Algebraische Form

Definition - Algebraische Formel

Komplexe Zahlen werden im Allgemeinen mit dem Buchstaben z dargestellt oder aber auch z_I, wobei I ein Punkt der Gauß'schen Zahlenebene ist (Weiteres hierzu folgt). Die sogenannte **algebraische / arithmetische Form** einer solchen Zahl wird wie folgt definiert:

$$z = \underbrace{x}_{Re(z)} + \underbrace{y}_{Im(z)} \cdot i; x, y \in \mathbb{R}; i \in \mathbb{C}$$

Hierbei wird $x = Re(z)$ **Realteil** und $y = Im(z)$ und zwar **nur** y **Imaginärteil** genannt.

Bemerkung:
Eine Zahl $z = x + yi \in \mathbb{C}$ heißt **rein imaginär** für $x = 0$.
Analog dazu wird sie für $y = 0$ als reell bezeichnet.

1.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Da wir nun wissen (oder halt auch nicht), weshalb wir die komplexen Zahlen benötigen, gilt es nun die verschiedenen Verknüpfungen, mit welchen wir zwei komplexe Zahlen verbinden, zu definieren. Wie alle anderen bekannten Mengen (außer $\mathbb{N}$), ist $\mathbb{C}$ teil eines **Körpers** welcher die zwei Verknüpfungen, denen wir allgemein die Namen **Addition** und **Multiplikation** geben. Das 3-Tupel (oder auch Tripel) ($\mathbb{C}$, +, *) ist somit der Körper, mit welchem wir arbeiten werden (jemals gefragt warum keine weiteren Verknüpfungen eingeführt wurden?). Jedoch muss auch erstmal bewiesen werden, dass dieses Tripel ein Körper ist:

Beweis

Die Addition:

Für die Addition gilt bekanntlich zu beweisen, dass ($\mathbb{C}$, $\oplus$) eine abelsche oder auch kommutative Gruppe ist:

1)

$$\begin{aligned}\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \oplus z_2 &= (x_1 + y_1 i) \oplus (x_2 + y_2 i)\\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i)\\ &\in \mathbb{C}\\ \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \oplus : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad &\text{(Abgeschlossenheit)}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) \oplus (x_3 + y_3 i)\\ &= ((x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)i)\\ &= (x_1 + y_1 i) \oplus ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i)\\ &= (x_1 + y_1 i) \oplus ((x_2 + y_2 i) \oplus (x_3 + y_3 i))\\ &= z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3)\\ \Rightarrow \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 {+} z_2) \oplus z_3 = z_1 \oplus (z_2 + z_3) \quad &\text{(Assoziativität)}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}0 = (0 + 0i) \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C} :&\\ z \oplus 0 &= (x + yi) \oplus (0 + 0i)\\ &= ((x + 0) + (y + 0)i)\\ &= (x + yi)\\ &= z\\ \Rightarrow \exists! 0 : z \oplus 0 = z; z \in \mathbb{C} \quad &\text{(Neutrales Element)}\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}-z = -(x + yi) \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} :&\\ z \oplus (-z) =&(x + yi) \oplus (-(x + yi))\\ =&((x - x) + (y - y)i)\\ =&(0 + 0i)\\ =&0\\ \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \exists - z : z \oplus -z = 0 \quad &\text{(Inverses Element)}\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}z_1 \oplus z_2 &= (x_1 + y_1 i) \oplus (x_2 + y_2 i)\\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i)\\ &= ((x_2 + x_1) + (y_2 + y_1)i)\\ &= (x_2 + y_2 i) \oplus (x_1 + y_1 i)\\ &= z_2 \oplus z_1\\ \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1 \quad &\text{(Kommutativität)}\end{aligned}$$

Die Multiplikation:

Für die Multiplikation gilt ebenfalls zu beweisen, dass ($\mathbb{C}$, $\otimes$) eine kommutative Gruppe ist:

1)

$$\begin{aligned}\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \otimes z_2 &= (x_1 + y_1 i) \otimes (x_2 + y_2 i) \\ &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i) \\ &\in \mathbb{C} \\ \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \otimes : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad &\text{(Abgeschlossenheit)}\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}(z_1 \otimes z_2) \otimes z_3 &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i) \otimes (x_3 + y_3 i) \\ &= ((x_1 x_2 x_3 - y_1 y_2 x_3 - x_1 y_2 y_3 - x_2 y_1 y_3) + (x_1 x_2 y_3 - y_1 y_2 y_3 + x_1 y_2 x_3 + x_2 y_1 x_3) i) \\ &= (x_1 + y_1 i) \otimes ((x_2 x_3 - y_2 y_3) + (x_2 y_3 + x_3 y_2) i) \\ &= (x_1 + y_1 i) \otimes ((x_2 + y_2 i) \otimes (x_3 + y_3 i)) \\ &= z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3) \\ \Rightarrow \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 + z_2) \otimes z_3 = z_1 \otimes (z_2 + z_3) \quad &\text{(Assoziativität)}\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}1 = (1 + 0i) \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C} : \\ z \otimes 1 &= (x + yi) \otimes (1 + 0i) \\ &= ((1 \cdot x - 0 \cdot y) + (1 \cdot y + 0 \cdot x) i) \\ &= (x + yi) \\ &= z \\ \Rightarrow \exists! 1 : z \otimes 1 = z; z \in \mathbb{C} \quad &\text{(Neutrales Element)}\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}z^{-1} = (x + yi)^{-1} \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} : \\ z \otimes z^{-1} &= (x + yi) \otimes \frac{1}{(x + yi)} \\ &= \frac{(x + yi) \cdot (x - yi)}{(x + yi) \cdot (x - yi)} \\ &= \frac{((x^2 + y^2) + (0i))}{((x^2 + y^2) + (0i))} \\ &= (1 + 0i) \\ &= e \\ \Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \exists z^{-1} : z \otimes z^{-1} = 1 \quad &\text{(Inverses Element)}\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}z_1 \otimes z_2 &= (x_1 + y_1 i) \otimes (x_2 + y_2 i) \\ &= ((x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i) \\ &= ((-y_1 y_2 + x_1 x_2) + (x_2 y_1 + x_1 y_2) i) \\ &= (x_2 + y_2 i) \otimes (x_1 + y_1 i) \\ &= z_2 \otimes z_1 \\ \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \otimes z_2 = z_2 \otimes z_1 \quad &\text{(Kommutativität)}\end{aligned}$$

Auch Verknüpfungen sind Gesellschaftswesen, gemeinsam glänzen sie:

Zu guter Letzt muss das Distributivgesetz gelten: (Bidde schön Frau Rämie mol)

$$\begin{aligned}
(z_1 \oplus z_2) \otimes z_3 &= ((x_1 + y_1 i) \oplus (x_2 + y_2 i)) \otimes (x_3 + y_3 i) \\
&= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) \otimes (x_3 + y_3 i) \\
&= ((x_1 x_3 + x_2 x_3 - y_1 y_3 - y_2 y_3) + (x_1 y_3 + x_2 y_3 + y_1 x_3 + y_2 x_3)i) \\
&= ((x_1 x_3 - y_1 y_3) + (x_1 y_3 + x_3 y_1)i) + ((x_2 x_3 - y_2 y_3) + (x_2 y_3 + x_3 y_2)i) \\
&= (x_1 + y_1 i) \otimes (x_3 + y_3 i) \oplus (x_2 + y_2 i) \otimes (x_3 + y_3 i) \\
&= z_1 \otimes z_3 \oplus z_2 \otimes z_3
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 \oplus z_2) \otimes z_3 = z_1 \otimes z_3 \oplus z_2 \otimes z_3 \quad \text{(Distributivität)}$$

□

1.3 Die Gauß'sche Zahlenebene

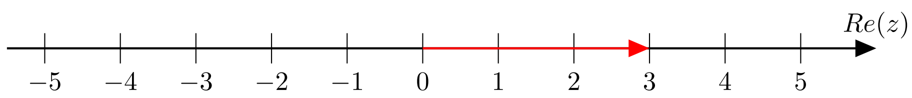
1.3.1 Einleitung

Hinführung

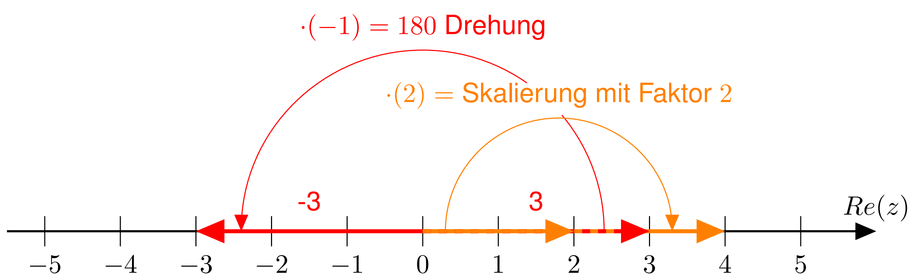
Der Körper der komplexen Zahlen wurde nun definiert, wohingegen der Platz dieser auf unserem allbekannten Zahlensystem schleierhaft bleibt. Um einen Ansatz für eine Integration zu finden, bietet sich an zu beobachten, wie sich komplexe Zahlen auf der **reellen Zahlengerade** (welche eine Veranschaulichung des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^1$ ist) verhalten.

Definition

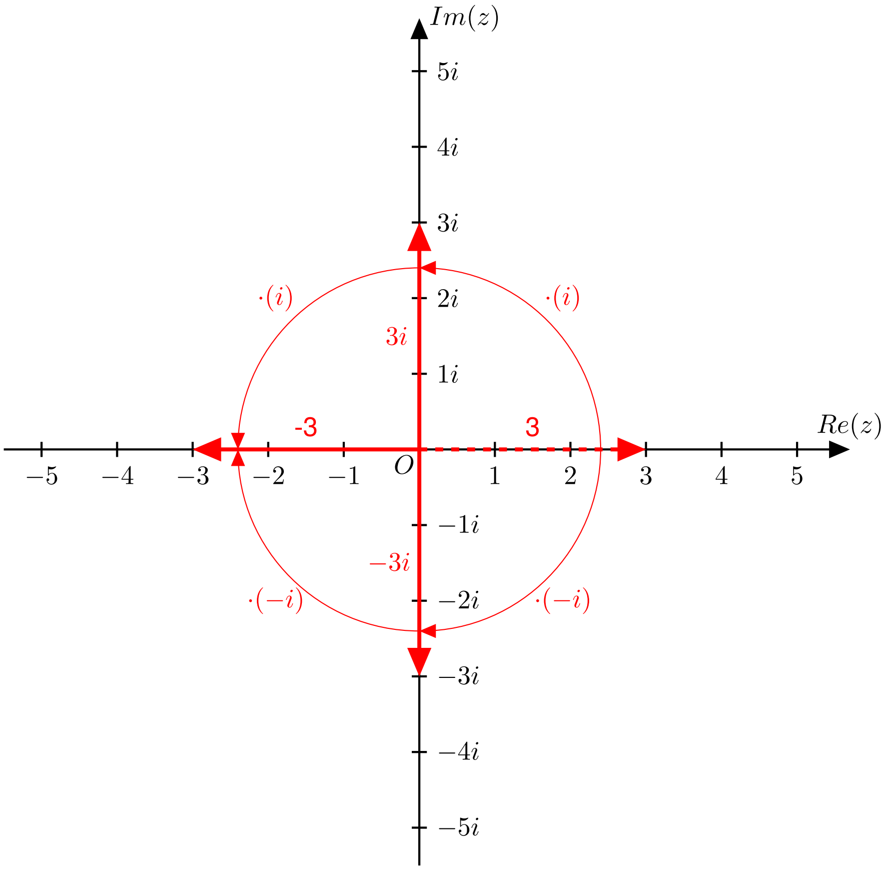
Als **Zeiger** wird ein visuelles Hilfsmittel definiert, welches in der Gauß'schen Zahlenebene das Analoge zu dem Pfeil eines Ortsvektors eines Vektorraumes ist.



Addition und Multiplikation mit einem positiven Faktor im $\mathbb{R}^1$ sind nicht von Interesse, wohingegen die Multiplikation mit einem negativen Faktor uns reichlich mehr mitteilt:

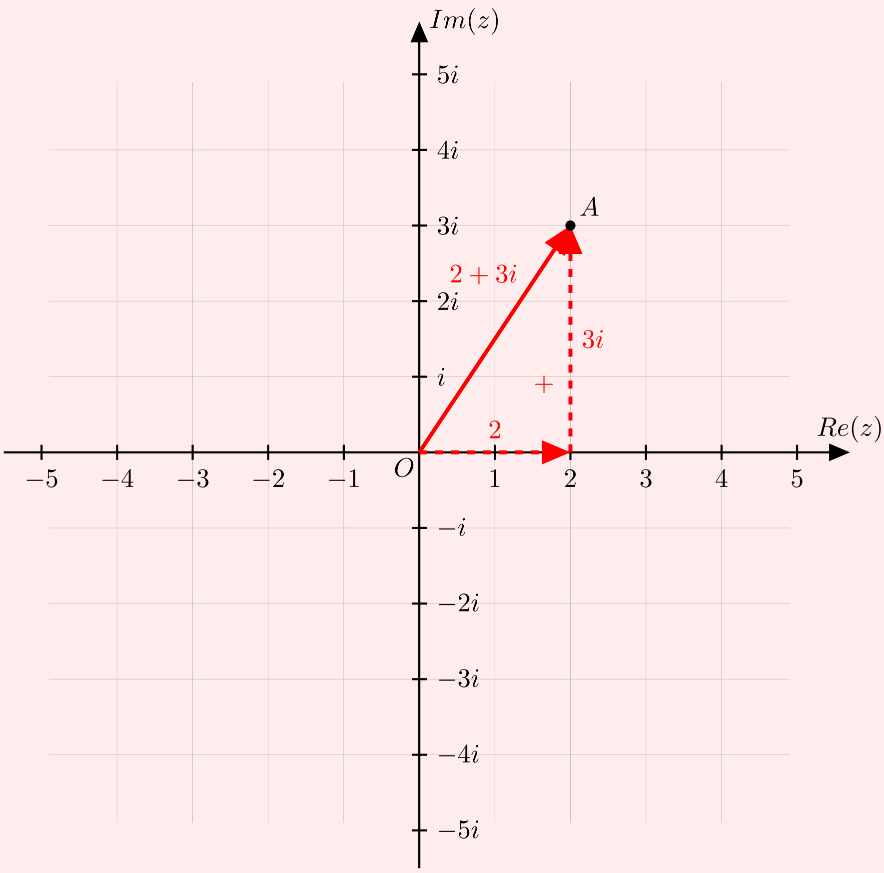


Da gilt, dass: $i^2 = -1$ ist die Multiplikation einer reellen Zahl mit i^2 äquivalent zu einer 180 - Grad Drehung. Daraus lässt sich schließen, dass die Multiplikation mit i einer 90 **- Grad Drehung** entspricht, da: $a \cdot i^2 = a \cdot i \cdot i; a \in \mathbb{R}$ und man davon ausgeht, dass $\cdot(i)$ bei jeder Instanz dieselbe Transformation anwendet. Somit entsteht eine wunderschöne Ebene, in der alle Zahlen zusammen spielen und sich amüsieren können:



Definition - Gauß'sche Zahlenebene

Seien eine reelle Achse mit Einheit 1 und eine imaginäre Achse mit Einheit i. Dann nennt sich **Gauß'sche Zahlenebene** gerade die Ebene, welche als Achsen die zueinander orthogonalen genannten Achsen hat. Konvention ist es, die imaginäre Achse vertikal zu platzieren.



Bemerkung:

Da jede komplexe Zahl eine Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene besitzt, lassen sie sich ebenfalls über einen Winkel und den Abstand zum Origo beschreiben.

Definition - Betrag einer komplexen Zahl

Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit dem **Abstand der Zahl zum Origo** oder der Länge des Zeigers. Pythagoras liefert uns eine Formel:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}; z = x + yi$$

Definition - Argument einer komplexen Zahl

Das **Argument** einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit dem **Winkel der Zahl**, welcher der Zeiger mit der „rechten Hälfte"der reellen Achse einschließt (im mathematischen Sinn und modulo 2π). Pythagoras liefert uns weitere Formeln:

1) 1. und 3. Quadrant:

$$arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot (\text{Quadrant} - 1); z = x + yi$$

2) 2. und 4. Quadrant:

$$arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{\pi}{2} \cdot (\text{Quadrant} - 1); z = x + yi$$

Definition - Betrag-Winkel Form

Als **Betrag-Winkel Form** wird eine Darstellungsform einer komplexen Zahl definiert, welche diese explizit über deren Argument und Betrag definiert. Sie ist keine offizielle Darstellungsweise einer komplexen

Zahl, jedoch bringt sie uns der nächsten wichtigen näher und fasst die zwei vorangehenden Definitionen zusammen.

$$z = |z|_{arg(z)}; z \in \mathbb{C}$$

1.3.2 Polarform

Definition - Polarform

Die **Polarform** einer komplexen Zahl definiert diese Zahl (wie auch die Betrag-Winkel Form) über deren **Argument und Betrag**.

$$z = |z| \cdot (\cos(arg(z)) + \sin(arg(z))i)$$

Beweis

Nach dem Satz von Pythagoras gilt $\forall z = x + yi; z \in \mathbb{C}$:

$$\Rightarrow \left| \begin{matrix} \frac{x}{|z|} & = \cos(arg(z)) \\ \frac{y}{|z|} & = \sin(arg(z)) \\ |z| & = \sqrt{x^2 + y^2} \end{matrix} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{matrix} x & = \cos(arg(z)) \cdot |z| \\ y & = \sin(arg(z)) \cdot |z| \\ |z| & = \sqrt{x^2 + y^2} \end{matrix} \right|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= x + yi \\ &= \cos(arg(z)) \cdot |z| + (\sin(arg(z)) \cdot |z|)i \\ &= |z| \cdot (\cos(arg(z)) + \sin(arg(z))i) \end{aligned}$$

□

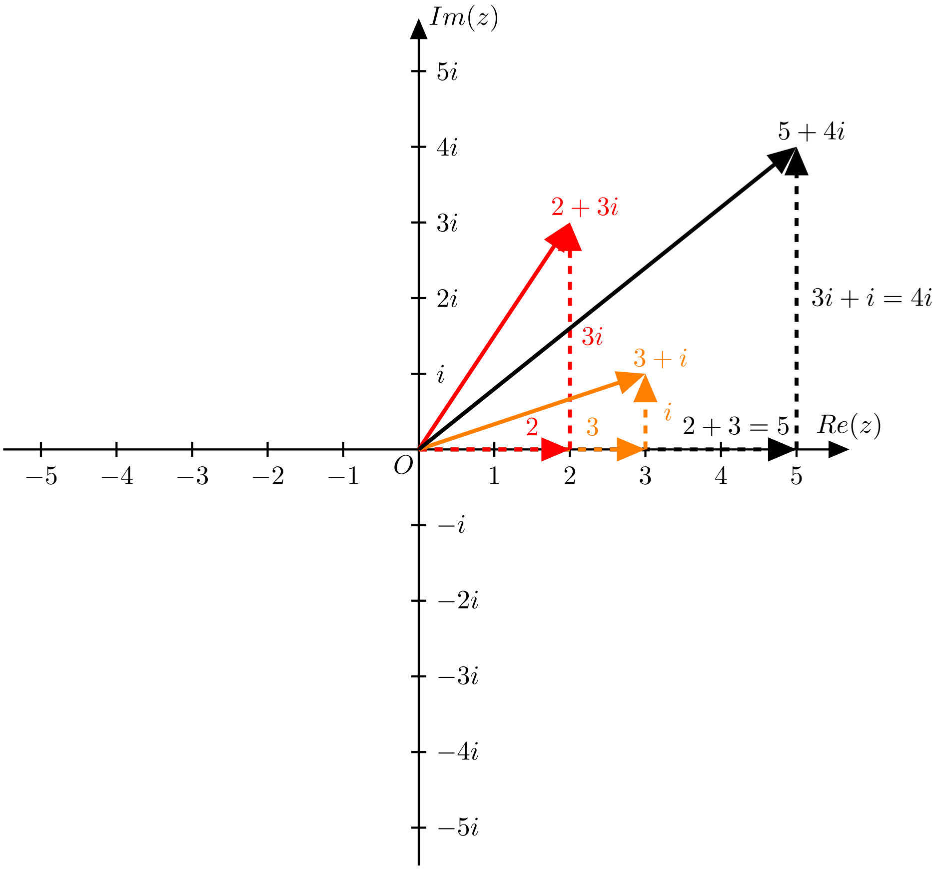
1.3.3 Rechenoperationen in der Gauß'schen Zahlenebene

Die bereits angesprochenen basischen Rechenoperationen lassen sich in der Gauß'schen Zahlenebene als Transformation darstellen. Weshalb dies interessant ist, wird im Verlauf dieses Abschniits hoffentlich noch deutlich.

Die Addition ist die einfachste Transformation, weil sie equivalent zur Linearkombination bei Vektoren ist, da gilt:

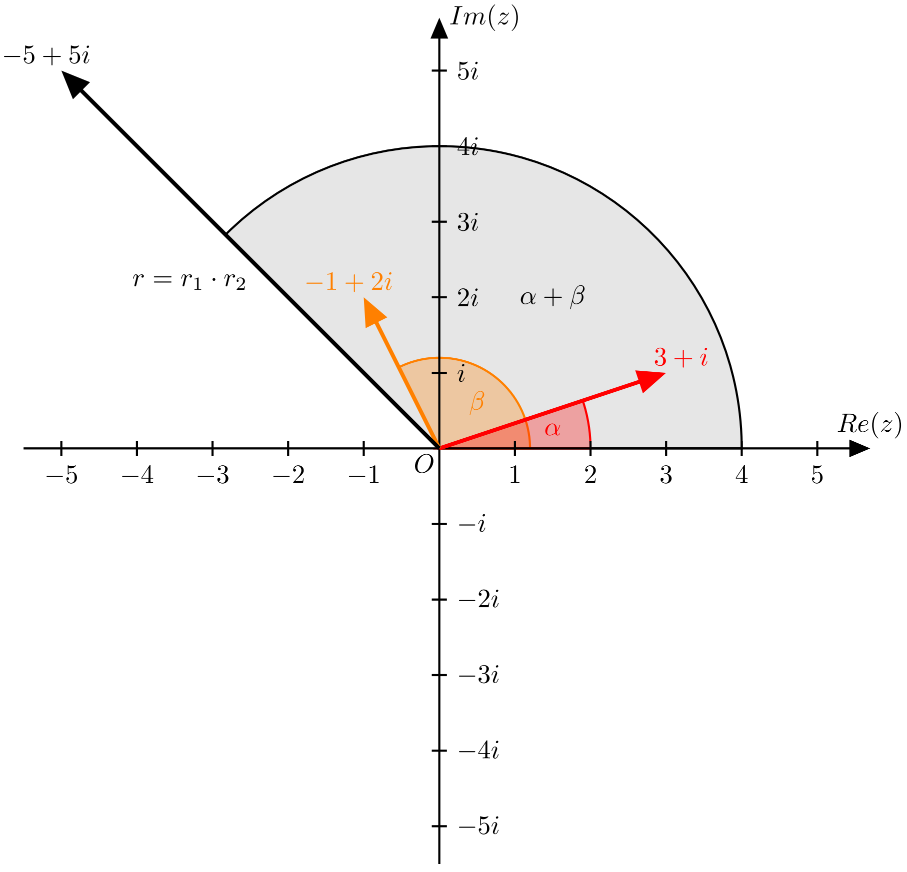
$$(z_1 + z_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i)$$

Bildlich bedeutet das:



Im Gegensatz dazu ist die Multiplikation weniger intuitiv. Aus logistischen Gründen wird sie trotz allem in diesem Abschnitt besprochen. Bildlich stellt sie eine Drehstreckung dar (auch dies wird gegen Ende des Kapitels genauer beschrieben), da gilt:

$$(z_1 \cdot z_2) = r_{1\alpha} \cdot r_{2\beta} = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha+\beta}$$



$Im(z)$
$Re(z)$
$-5+5i$
$r = r_1 \cdot r_2$
$-1+2i$
$\alpha + \beta$
$3+i$
β
α
O
$5i$
$4i$
$3i$
$2i$
i
$-i$
$-2i$
$-3i$
$-4i$
$-5i$
-5
-4
-3
-2
-1
1
2
3
4
5