
Schülerskript SMP

MATHEMATIK

8. März 2018

Inhaltsverzeichnis

1	Folgen	4
1.1	Verschiedene Darstellungen	4
1.1.1	Explizite Darstellung	4
1.1.2	Rekursive Darstellung	4
1.2	Auffällige Folgen	5
1.2.1	Arithmetische Folgen	5
1.2.2	Geometrische Folgen	5
1.3	Klassifizierung von Folgen	6
1.3.1	Monotonie	6
1.3.2	Beschränktheit	6
1.3.3	Konvergenz	6
1.4	Vollständige Induktion	6
2	Reihen	7
2.1	Arithmetische Reihen	7
3	Funktionsuntersuchung	8
3.1	Stetigkeit	8
3.2	Differenzierbarkeit	9
3.2.1	Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit	9
3.3	Ableitungsregeln	9
3.3.1	Produktregel	9
3.3.2	Quotientenregel	10
3.3.3	Kettenregel	11
3.3.4	Tangente und Normale	11
3.4	Vollständige Funktionsuntersuchung	11
3.4.1	Definitionsbereich	11
3.4.2	Achsenschnittpunkte	11
3.4.3	Symmetrie	11
3.4.4	Grenzwerte	12
3.4.5	Asymptoten	12
3.4.6	Monotonie	13
3.4.7	Extremstellen	13
3.4.8	Wendestellen	13
3.4.9	Beispiel	13
3.5	Funktionenscharen	13

4	Trigonometrie	15
4.1	Kurze Wiederholung	15
4.2	Additions- und Verdopplungssätze	16
4.3	Allgemeine Sinus- und Kosinussätze	16
4.4	Sinusfunktionen	16
4.5	Polarkoordinaten	17
4.5.1	Umrechnung	17
4.6	Beispiel einer Funktionsdiskussion	17
4.6.1	Definitionsmenge	17
4.6.2	Periodizität und Amplitude	17
4.6.3	Nullstellen	17
4.6.4	Ableitungen	18
5	Vektorielle Geometrie	19
5.1	Vektoren	19
5.1.1	Besondere Vektoren	19
5.2	Linearkombination	20
5.3	Basen und Erzeugendensystem	21
5.3.1	Besondere Basen	21
5.3.2	Basistransformation	21
5.4	Winkel zwischen Vektoren	22
5.4.1	Orientierte Winkel	22
5.5	Geraden	22
5.6	Ebenen	22
5.7	Skalarprodukt	22
6	Komplexe Zahlen	23
6.1	Einführung	23
6.2	Darstellung komplexer Zahlen	24
6.2.1	Kartesische Darstellung	24
6.2.2	Polarkoordinatendarstellung	25
6.2.3	Umrechnung zwischen den Darstellungen	26
7	Statistik und Wahrscheinlichkeit	27
7.1	Hypothesentests	27
8	Arithmetik	28
8.1	Die Macht der Arithmetik	28
9	Matrizen	29
9.1	Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorithmus	29
9.2	LGS mit dem Taschenrechner lösen	30
10	Algorythmik	31
10.1	g	31
11	Integrale	32
11.1	Integralrechnung	32
11.1.1	Stammfunktionen	32
11.1.2	Begriff des Integrals	32
11.1.3	Der Hauptsatz	33

11.1.4 Integrationsregeln	34
11.1.5 Beispiele zur Integration	37

FOLGEN

Definition 1.0.0

Eine Funktion, bei der nur natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zugeordnet wird, nennt man Folge. Folgen können auch nur für Teilbereiche von \mathbb{N} definiert sein. $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bezeichnet die Folge, wobei $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

1.1 Verschiedene Darstellungen

1.1.1 Explizite Darstellung

Definition 1.1.1

Wenn ein beliebiges Glied der Folge direkt berechenbar ist, ist ihre Darstellung explizit.

1.1.2 Rekursive Darstellung

Definition 1.1.2

Wenn für die Berechnung des n -ten Gliedes einer Folge das $(n-1)$ -te Glied benötigt wird, ist ihre Darstellung rekursiv. In diesen Fällen braucht man immer ein Startglied, oft a_0 oder a_1 .



Bemerkung

Für manche Folgen sind beide Darstellungen möglich, wobei die explizite Darstellung oftmals viel praktischer ist, da die Berechnung der Folgeglieder anhand der rekursiven Darstellung schnell sehr aufwendig wird.

Web-Diagramme

Hier handelt es sich um ein graphisches Verfahren, das dazu dient, das Verhalten einer Folge, deren Darstellung rekursiv ist, zu untersuchen.

Dazu muss man der rekursiven Folgenrechtschreibung eine Funktion $f(a_{n-1}) = a_n$ zuordnen, sodass - grob gesagt - "die Funktion das Gleiche mit x macht, was die Folge macht, um von a_n auf a_{n+1} zu kommen. Zusätzlich zeichnet man in ein kartesisches Koordinatensystem die Hauptdiagonale ein (entspricht dem Graphen von $f(x) = x$).

Dann trägt man das erste Folgeglied auf der Abszissenachse ein und verbindet ihn mit der entsprechenden Funktion anhand einer vertikalen



Bemerkung

Dieses Verfahren kann aber ausschließlich bei rekursiven Folgen angewendet werden, bei denen keine zusätzliche Abhängigkeit von n vorliegt (Beispiel: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 3 + 4 \cdot n$) oder die Rekursivitätsebene

den 1. Grad überschreitet, was bedeutet, dass a_n nicht nur in Abhängigkeit von a_{n-1} beschrieben wird, sondern zusätzlich von mindestens a_{n-2} (Beispiel: die Fibonacci-Folge).

1.2 Auffällige Folgen

1.2.1 Arithmetische Folgen

Definition 1.2.1

Eine Folge wird arithmetisch genannt, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

2. Explizite Darstellung:

Mit Startglied a_0 : $a_n = a_0 + n \cdot d$

Mit Startglied a_1 : $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Mit Startglied a_x : $a_n = a_x + (n - x) \cdot d$



Bemerkung

Letzteres gilt auch für beliebige Folgenglieder, also ist $a_n = a_p + (n - p) \cdot d$; $n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:

$$a_n = a_{n-1} + 3; a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 + n \cdot 3$$

1.2.2 Geometrische Folgen

Definition 1.2.2

Eine Folge wird geometrisch genannt, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

2. Explizite Darstellung:

Mit Startglied a_0 : $a_n = a_0 \cdot q^n$

Mit Startglied a_1 : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Mit Startglied a_x : $a_n = a_x \cdot q^{n-x}$



Bemerkung

Letzteres gilt auch für beliebige Folgenglieder, also ist $a_n = a_p \cdot q^{n-p}$; $n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:

$$a_n = a_{n-1} \cdot 3; a_0 = 2 \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^n$$

1.3 Klassifizierung von Folgen

1.3.1 Monotonie

1.3.2 Beschränktheit

1.3.3 Konvergenz

Definition

Epsilon-n0-Definition

Grenzwertsätze

