# Kapitel 1

# MATRIZEN

by BRUNO

## 1.1 Überblick und Grundrechenarten

### 1.1.1 Arten von Matritzen

**Definition**

Matritzen sind ........ und bilden einen abgeschlossenen Körper. Sie wird durch ihre Koeffizienten und ihr Dimension definiert: Eine Matrix der Dimension $m \times n$ besitzt $m$ Zeilen und $n$ Spalten.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,j} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,j} & \dots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,j} & \dots & a_{,n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,j} & \dots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Sie wird quadratische Matrix genannt wenn $m = n$.

GTR-Tipp:

Im Matrix Menü: [matrix] $+$ [MATH] kann man mit dem Befehl...

1. ... rref$[B]$ die **Dreiecksform** einer Matrix $B$ ausrechnen lassen:

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & b_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,3} \end{pmatrix}$$

2. ... rref$[C]$ die **Diagonalform** einer Matrix $C$ ausrechnen lassen:

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{4,4} \end{pmatrix}$$

### 1.1.2 Addition und Multiplikation

## 1.2 Lineare Gleichungssysteme und Gaußalgorithmus

Lineare Gleichungssysteme lassen sich aufwendig mit Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren lösen, Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat ein Algorithmus erfunden, mit dem sie sich ohne Taschenrechner leicht und relativ schnell lösen lassen.
Am Besten wird dieser mit einem Beispiel Erläutert:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 4x+3y+z &=& 13 & (1) \\ 2x-5y+3z &=& 1 & (2) \\ 7x-y-2z &=& -1 & (3) \end{array} \right. \qquad \{\, 1\cdot(1)-2\cdot(2)\,\} \text{ und } \{\, 7\cdot(1)-4\cdot(3)\,\} \qquad D=\mathbb{R}^3$$

Hier versucht man in Zeile (2) und (3) die erste Variabel zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5z &=& 11 \\ 0x+25y+15z &=& 95 \end{array} \right. \qquad \{\, 25\cdot(2)-13\cdot(3)\,\}$$

Jetzt versucht man die zweite Variabel in der dritten Gleichung zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5z &=& 11 \\ 0x+0y-320z &=& -960 \qquad \Leftrightarrow z=3 \end{array} \right.$$

Jetzt wird eingesetzt

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5\cdot 3 &=& 11 \qquad \Leftrightarrow y=2 \\ 0x+0y+z &=& 3 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+0y+0z &=& 1 \\ 0x+y+0z &=& 2 \\ 0x+0y+z &=& 3 \end{array} \right.$$

$\mathbb{L}=\{(1;2;3)\}$ Die Lösungsmenge wird als n-Tupel (geordente Objekte) alphabetisch sortiert.

## 1.3 LGS mit dem Taschenrechner lösen

### 1.3.1 Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich sehr viel schneller mit dem Taschgenrechner lösen:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 2x-5y+3z &=& 1 \\ 7x-y-2z &=& -1 \end{array} \right.$$

Hierfür geht man beim Taschenrechner auf [matrix] und auf [edit]. Dann gibt man seine Matrix (hier als Beispiel) ein:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right|$$

Dann geht man wieder in den rechnen-Modus und gibt ein: [matrix], dann geht man auf [math], [rref]. dann geht man nochmal auf [matrix], [A] (die gerade bearbeitete Matrix):

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right| \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\{(1;2;3)\}$$

Die Lösungsmenge wird als n-Tupel angegeben.
Wenn sich Werte mit Kommazahlen ergeben, ist es nützlich, im Taschenrechner [Math] $+$ [1](Frac) einzugeben, um sich die Werte in Brüchen anzeigen zu lassen.

### 1.3.2 Nicht eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme

Oft begegnen einem auch unterbestimmte LGS, sei es in der Geometrie (Zwei Ebenengleichungen, die in einem Gleichungssystem als Lösung die Schnittgerade ergeben) oder in anderen Teilbereichen. Sie sind auch recht aufwendig von Hand zu lösen, deshalb hier den schnelleren GTR-Lösungsweg:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0x_3 & = & 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = & 5 \end{cases}$$

Unterbestimmte LGS erkennt man daran, dass es mehr unbekannte als Gleichungen gibt:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right| \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{(2t+10; t; t+5 | t \in \mathbb{R})\}$$

Auch hier wird die Lösungsmenge als n-Tupel angegeben, in Abhängigkeit eines Faktors, dessen Wertebereich in der Lösungsmenge ebenfalls angegeben werden muss.