

Kapitel 1

EXPONENTIALFUNKTIONEN

by CLARA

Definition

Man bezeichnet als Exponentialfunktion eine Funktion der Form $x \rightarrow a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$.
 x ist die Variable und wird *Exponent* oder *Hochzahl* genannt.
 a nennt man *Basis* oder *Grundzahl*, sie ist für jede Funktion fest vorgegeben.

Allgemeiner gilt jede Funktion, bei der die Variable im Exponenten steht als Exponentialfunktion.

1.1 Wiederholung: Potenzgesetze

Theorem

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, sowie $n, m \in \mathbb{N}$, dann gilt:

1. $a^0 = 1$ (für $a \neq 0$)

2. $a^1 = a$

3. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Mal}}$

4. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

7. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

9. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

10. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

1.2 Die Eulersche Zahl (e)

Definition

$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995\dots$

Die **Eulersche Zahl** (e) ist eine irrationale, transzendente und reelle Zahl, die die Basis des (natürlichen) Logarithmus und der (natürlichen) Exponentialfunktion ist.

Die Darstellung, der man am Häufigsten begegnet ist diese: $e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$; $t \in \mathbb{R}$

Benannt nach dem bekannten Mathematiker Leonhard Euler ist diese Zahl eine der wichtigsten Konstanten der Mathematik. Sie ist die Basis des natürlichen Logarithmus und der natürlichen Exponentialfunktion. Diese besondere Exponentialfunktion wird aufgrund dieser Beziehung zur Zahl e häufig kurz e -Funktion genannt, sie eignet sich zur Modellierung von Wachstums- und Zufallsprozessen.

Bemerkung:

Eine alternative Definition wäre folgende: Die positive Zahl a , für die die Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ mit ihrer Ableitungsfunktion f' übereinstimmt, heißt Eulersche Zahl. (siehe 12.5)

Definition

Eine reelle Zahl heißt (oder allgemeiner eine komplexe Zahl) transzendent, wenn sie nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Andernfalls handelt es sich um eine algebraische Zahl. Jede reelle transzendente Zahl ist überdies irrational.

1.2.1 Verschiedene Darstellungen

e ist darstellbar bzw. ergibt sich durch:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t ; t \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N}$

1.2.2 Herleitung zur Zahl e

Wir definieren eine Folge $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ durch $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ und beweisen ihre Konvergenz.

•

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

- Die Umformung ermöglicht uns auf den Term $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$ die Ungleichung von Bernoulli anzuwenden. Diese besagt Folgendes: $(1+x)^n > 1 + nx$ für $n \geq 2$ und $x > -1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} &> 1 + (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

- Dies kann man für den ersten Ausdruck verwenden:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &> \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow e_n$ ist streng monoton steigend

Sei eine Folge f_n mit $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}$, deren Monotonieverhalten wir untersuchen wollen. Dazu formen wir den Term so um, dass die Bernoulli-Ungleichung angewandt werden kann.

•

$$\begin{aligned}
 \frac{f_n}{f_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}} \\
 &= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
 &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\
 &= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\
 &= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\
 &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}
 \end{aligned}$$

- Bernoulli: $(1+x)^n > 1+nx$ für $n \geq 2$ und $x > -1$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} &> 1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)} \\
 &= \frac{n+1}{n}
 \end{aligned}$$

- $\Rightarrow \frac{f_n}{f_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$

- $\frac{f_n}{f_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} < 1 \Leftrightarrow f_n$ **ist streng monoton fallend**

Als Letztes zeigt man, dass f_n zu e_n eine obere Schranke ist:

$$\Leftrightarrow \begin{array}{ccc} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} & > & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \\ f_n & > & e_n \end{array}$$

Eine streng monoton steigende Folge, die eine monoton fallende Folge, als oberer Schranke hat, konvergiert. Es gilt also, dass e_n konvergent ist. e_n besitzt einen besonderen Grenzwert, der **Eulersche Zahl** genannt wird.

1.2.3 e ist irrational

Wie schon erwähnt, handelt es sich bei der Eulerschen Zahl um eine transzendente Zahl, daraus ergibt sich schon, dass sie irrational ist. Trotzdem ist es interessant, dies zu beweisen.

Beweis

Teil A: unnötig

Sei f eine Funktion mit $f(x) = xe^{1-x}$ mit Schaubild \mathcal{C}

1. Monotonieverhalten:

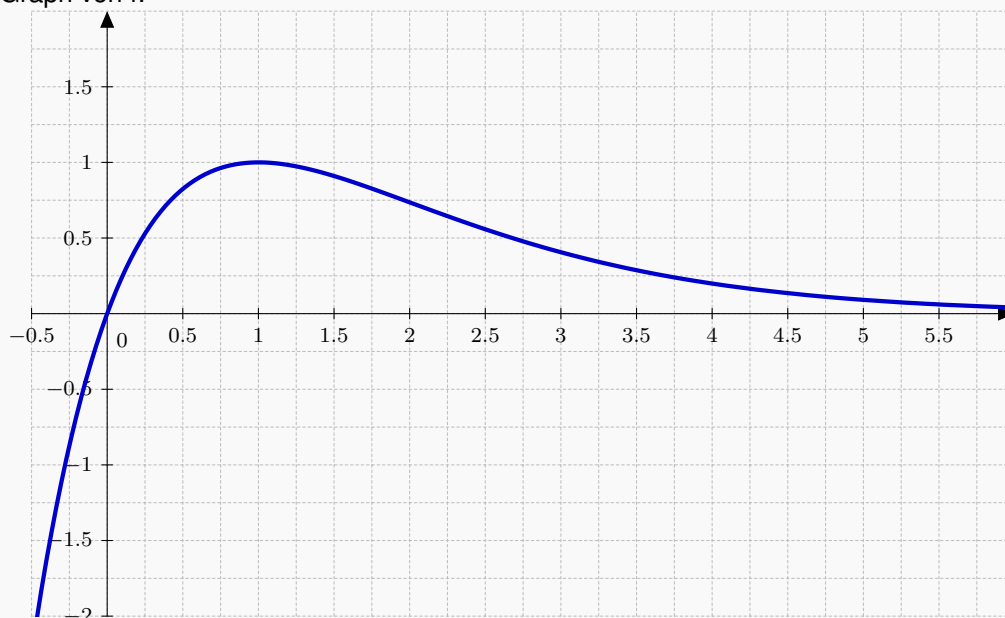
$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1-x} - xe^{1-x} \\ &= (1-x) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \forall x < 1: & f'(x) > 0 & & \Leftrightarrow f \nearrow \\ \text{für } x = 1: & f'(x) = 0 & \text{und VZW } + \rightarrow - & \Leftrightarrow \text{Hochpunkt} \\ \forall x > 1: & f'(x) < 0 & & \Leftrightarrow f \searrow \end{array}$$

Grenzwerte:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\rightarrow 0} = 0$ (Croissance comparée)
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\rightarrow +\infty} = -\infty$

2. Graph von f :



3. Man hat I_1 , das Integral mit $I_1 = \int_0^1 f(x)dx$

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^1 x e^{1-x} dx \\
 &= [-x e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x} dx \\
 &= -1 e^{1-1} - 0^1 - [e^{1-x}]_0^1 \\
 &= -1 - 1 + e \\
 &= e - 2
 \end{aligned}
 \qquad
 \begin{aligned}
 u(x) &= x & u'(x) &= 1 \\
 v'(x) &= e^{1-x} & v(x) &= -e^{1-x}
 \end{aligned}$$

Teil B: $n \in \mathbb{N}$

Sei I_n das Integral mit $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$, $n \geq 1$

1. (a) \mathbb{Z} : $\forall x \in [0; 1]$ gilt $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$

$$\begin{array}{ccccc}
 x^n & \stackrel{?}{\leq} & x^n e^{1-x} & \stackrel{?}{\leq} & e x^n \\
 \downarrow & & \downarrow & & \\
 1 & \leq & e^{1-x} & \leq & e
 \end{array} \quad | : x^n$$

N.R.: für $x \in [0; 1]$ ist $(1-x) \in [0; 1]$ und entsprechen $e^{1-x} \in [e^0; e^1] = [1; e]$

(b) Sei J_n das Integral mit $J_n = \int_0^1 x^n dx$

$$\begin{aligned}
 J_n &= \int_0^1 x^n dx \\
 &= \left[\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \right]_0^1 \\
 &= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\
 &= \frac{1}{n+1}
 \end{aligned}$$

(c) \mathbb{Z} : $\forall n \geq 1$ gilt $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

$$\begin{aligned}
 x^n &\leq f(x) = x^n e^{1-x} \leq e x^n && | \int_0^1 () dx \\
 \Leftrightarrow \int_0^1 x^n dx &\leq I_n \leq \int_0^1 e x^n dx \\
 \Leftrightarrow J_n &\leq I_n \leq e \cdot \int_0^1 x^n dx = e \cdot J_n \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} &\leq I_n \leq \frac{e}{n+1}
 \end{aligned}$$

2. \mathbb{Z} : $\forall n \geq 1$ gilt $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

$$I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^{1-x} dx$$

$$= \left[-e^{1-x} \cdot x^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} dx$$

$$= -e^{1-1} \cdot 1^{n+1} - 0 + (n+1) \cdot I_n$$

$$= (n+1)I_n - 1$$

$$u(x) = x^{n+1} \quad u'(x) = (n+1)x^n$$

$$v'(x) = e^{1-x} \quad v(x) = -e^{1-x}$$

3. Sei $k_n = n!e - I_n$, $n \geq 1$

(a)

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= (n+1)!e - I_{n+1} \\ &= (n+1)n!e - (n+1)I_n + 1 && \text{siehe 2.} \\ &= (n+1)(n!e - I_n) + 1 \\ &= (n+1)k_n + 1 \end{aligned}$$

(b) \mathbb{Z} : $\forall n \geq 1$ gilt $k_n \in \mathbb{Z}$:

IA: für $n = 1$: $k_1 = 1!e - I_1 = e - (e - 2) = 2$ (wahr)

IV: für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $k_n \in \mathbb{Z}$

IB: dann gelte für $(n+1)$: $k_{n+1} \in \mathbb{Z}$

IS: $k_{n+1} = \underbrace{(n+1)}_{\in \mathbb{Z} \text{ da } n \in \mathbb{N}} \underbrace{k_n}_{\in \mathbb{Z} \text{ (IB)}} + \underbrace{1}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$

(c) \mathbb{Z} : $\forall n \geq 2$ gilt $n!e = k_n + I_n \notin \mathbb{Z}$

Wir haben: $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ (1.(c))

Und es gilt:

- $k_n \in \mathbb{Z}$
- $\forall n \geq 0: \frac{1}{n+1} \geq 0$
- $\forall n \geq 2: n+1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$
und $e \leq 3 \Rightarrow \frac{e}{n+1} \leq 1$

$$\Rightarrow \forall n \geq 2: 0 < I_n < 1 \Rightarrow I_n \notin \mathbb{N} \Rightarrow k_n + I_n \notin \mathbb{N} \Rightarrow n!e \notin \mathbb{N}$$

4. Seien $p, q \in \mathbb{N}$

Dann gilt für $n \geq q$: $\frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$

Das stimmt weil $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (q+1) \cdot q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow q$ teilt $n! \Rightarrow \frac{n!}{q} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$ da $p \in \mathbb{N}$

Hypothese: $e \in \mathbb{Q}$

$$\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}, \text{ sodass } e = \frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow n!e = \frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$$

Im Voraus wurde aber gezeigt, dass $n!e \notin \mathbb{N}$: **Widerspruch**

$$\Leftrightarrow \boxed{e \notin \mathbb{Q}}$$

1.3 Eigenschaften

- $f(x) = a^x$
- $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$
- $D_f = \mathbb{R}$
- $W_f = \mathbb{R}^+$
- für $0 > a > 1$: f ist streng monoton fallend
für $a > 1$: f ist streng monoton wachsend
- für $0 > a > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$
für $a > 1$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 1$
- x-Achse ist waagerechte Asymptote

Zusammengesetzte Funktionen

Sei $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ und $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{R}$:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x \cdot x^n = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x \cdot x^n = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x^n} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{a^x} = \pm\infty$

Croissances comparées

Bemerkung:

Diese Grenzwerte gelten auch wenn g ein Polynom beliebig hohen Grades ist.

Allgemein kann man also sagen, dass eine Exponentialfunktion ihr Wachstum bezüglich dem jedes Polynoms immer durchsetzt.

Bemerkung:

⚠ Das Vorzeichen der anderen Funktion(en) muss natürlich immer beachtet werden.

Da die Wertemenge einer Exponentialfunktion immer \mathbb{R}^+ ist, hängt das Vorzeichen ausschließlich von der(den) anderen Funktion(en) ab. Wenn der (höchste) Exponent also eine gerade Zahl ist, dann bleiben die Grenzwerte dieselben (0 oder $+\infty$). Im Falle eines höchsten Exponenten, der ungerade ist, ändert sich dementsprechend das Vorzeichen (0 oder $-\infty$) des Grenzwertes für $x \rightarrow -\infty$. Der Grenzwert für $x \rightarrow +\infty$ bleibt derselbe, selbst wenn der höchste Exponent eine negative Zahl ist.

Für $f(x) = a^x$ mit $0 < a < 1$ und $g(x) = x^n$ mit $n \in \mathbb{R}$:

Es gilt weiterhin, dass sich das Wachstum der Exponentialfunktion durchsetzt, anhand dieser Aussage können die Grenzwerte von Funktionen, die Exponentialfunktionen mit Basis < 1 beinhalten, leicht bestimmt werden.

⚠ Auch hier gilt es, auf das Vorzeichen der anderen Funktion(en) zu achten.

1.4 Basiswechsel

Seien, $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$:

Theorem

$$a^x = b^{x \cdot \log_b a}$$

Beweis

$$\begin{aligned} a^x &= (b^{\log_b a})^x \\ &= b^{x \cdot \log_b a} \end{aligned}$$

□

1.5 Ableitungsregeln

Anhand der Definition des Differenzialquotienten kann man ermitteln, wie man Exponentialfunktionen ableitet.

Beweis

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a^{x_0} \cdot \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^{x_0} \cdot \underbrace{\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{\text{eine Konstante } \lambda} \end{aligned}$$

□

So erkennen wir, dass die Ableitung einer Funktion f der Form a^x diese selbe Funktion mal einem konstanten Vorfaktor λ ist: $(a^x)' = a^x \cdot \lambda$

Nun versucht man, Weiteres über λ zu erfahren: $\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ ist ein Grenzwert, der sich ausschließlich in Abhängigkeit von a verändert, ist also für jede definierte Funktion eine Konstante.

Wenn man mehrere Graphen der Funktionenschar $g_a(h) = \frac{a^h - 1}{h}$ zeichnet, erkennt man, dass es sich um stetige Funktionen handelt. Somit kann man behaupten, dass $\lim_{h \rightarrow 0} g_a(h) = g_a(0)$ ist, dies entspricht auch λ .

GRAPEHN VERSCHIEDEN A AUCH E UND LAMBDA SAGEN

Hier ist auffällig, dass wenn man a so verändert, dass der y-Achsen Schnittpunkt (0|1) wird, man sich immer mehr der Zahl e nähert. Wenn man für a genau e einsetzt hat man $g_e(0) = 1$. λ ist also 1 für die Funktion e^x , was gut zeigt, dass die natürliche Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung darstellt:

$$\frac{d}{dx}e^x = \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}\right) \cdot e^x = 1 \cdot e^x = e^x$$

Eine wichtige Eigenschaft ist auch, dass $f'(0) = \lambda$ ist. Dies kann man auf zwei verschiedene aber gleichermaßen einfache Arten herausfinden, beide verwenden die vorher angewendete Definition des Differenzialquotienten.

$$\text{Differentialquotient neu angewendet: } f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lambda$$

$$\text{Vorheriges Ergebnis genutzt: } f'(x) = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \Rightarrow f'(0) = a^0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lambda$$

λ entspricht also auch der Steigung der Tangenten der Ausgangsfunktion an der y-Achse.

Exponentialfunktionen mit natürlicher Basis

Theorem

Die natürliche Exponentialfunktion überstimmt mit ihrer Ableitungsfunktion.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f' = e^x$$

Theorem

Die Funktion f mit $f(x) = e^{v(x)}$ ist eine Verkettung der Funktion $v : x \rightarrow v(x)$ mit der Exponentialfunktion $u : v \rightarrow e^v$. Existiert die Ableitung v' , so gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = v'(x) \cdot e^{v(x)}$$

Bemerkung:

Letzteres kann natürlich auch verwendet werden, um eine Stammfunktion zu ermitteln.

Die Funktion f mit $f(x) = e^{v(x)}$ mit v differenzierbar hat als mögliche Stammfunktion F mit

$$F(x) = \frac{1}{v'(x)} \cdot e^{v(x)} + C$$

Beispiel:

$$1. f(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1} = -\frac{2}{3}x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} : (-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1} + C = -\frac{2}{3x} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1} + C$$

$$2. f(t) = \frac{\sin(tx)}{e^{tx}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{t \cdot \cos(tx) \cdot e^{tx} - \sin(tx) \cdot t \cdot e^{tx}}{(e^{tx})^2} = \frac{t \cdot e^{tx} \cdot (\cos(tx) - \sin(tx))}{(e^{tx})^2} = \frac{t \cdot (\cos(tx) - \sin(tx))}{e^{tx}}$$

$$3. f(x) = x \cdot e^{t\sqrt{x}+0,5}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{t\sqrt{x}+0,5} + x \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{x}}\right) \cdot e^{t\sqrt{x}+0,5} = (1 - t\sqrt{x}) \cdot e^{t\sqrt{x}+0,5}$$

Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis

Der vorher erwähnte Wert λ ist für beliebige Basen schwierig festzulegen. Viel einfacher geht es nach einem Basiswechsel. Wenn man nämlich e als Grundzahl wählt, kann wiederum die Ableitungsregel für Funktionen mit natürlicher Basis angewendet werden, so wurde das Problem umgangen.

Theorem

Sei f eine Funktion mit $f(x) = a^x$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$. dann ist ihre Ableitungsfunktion f' , für die gilt:

$$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$$

Beweis

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(a^x) &= \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln(a)}) \\
 &= (x \cdot \ln(a))' \cdot e^{x \cdot \ln(a)} \\
 &= \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln a} \\
 &= \ln(a) \cdot a^x
 \end{aligned}$$

Basiswechsel und Kettenregel anwenden

Ableiten ($\ln a$ ist eine Konstante)

Auf ursprüngliche Basis bringen

□

Dasselbe Prinzip kann auch für verkettete Funktionen angewendet werden.

Theorem

Die Funktion f mit $f(x) = a^{v(x)}$, $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$ ist eine Verkettung der Funktion $v : x \rightarrow v(x)$ mit der Exponentialfunktion $u : v \rightarrow a^v$. Existiert die Ableitung v' , so gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = v'(x) \cdot \ln(a) \cdot a^{v(x)}$$

Beweis

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx}(a^{v(x)}) &= \frac{d}{dx}(e^{v(x) \cdot \ln(a)}) \\
 &= (v(x) \cdot \ln(a))' \cdot e^{v(x) \cdot \ln(a)} \\
 &= v'(x) \cdot \ln(a) \cdot e^{v(x) \cdot \ln a} \\
 &= v'(x) \cdot \ln(a) \cdot a^{v(x)}
 \end{aligned}$$

Basiswechsel und Kettenregel anwenden

Ableiten ($\ln a$ ist eine Konstante)

Auf ursprüngliche Basis bringen

□

1.5.1 Aktivität

Quelle: Déclic 1ère????? ich weiß nicht ob ich das noch mache