Kapitel 1

REIHEN

by CLARA

Definition

Eine Reihe ist eine Folge, deren Glieder die Partialsummen einer anderen Folge ist. Das bedeutet, dass das $n-te$ Glied der Reihe, die Summe der ersten n Glieder einer anderen Folge ist.
Man hat also:

- Mit Startglied a_0: $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$
- Mit Startglied a_1: $s_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$
- Mit Startglied a_x: $s_n = \sum_{i=x}^{x+n-1} a_i$

Bemerkung:
In manchen Fällen steht s_n für die Partialsumme einer anderen Folge bis zum $n-ten$ Glied. Dann gilt für ein beliebiges Startglied a_x der Folge: $s_n = \sum_{i=x}^{n} a_i$

1.1 Artithmetische Reihen

1.1.1 Gauß'sche Summenformel

Die Gauß'sche Summenformel bezeichnet die Summe der n ersten natürlichen Zahlen, also:
$1+2+3+...+n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Begründung:

	1	2	3	4	...	n
	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	1
$\sum$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	...	$n+1$

So sieht man also, dass wenn man die vorher bestimmte Reihe mit sich selbst addiert (ein Mal davon "falschrum"), man n Mal $n+1$ bekommt. Um dann den Wert einer einzelnen Reihe zu bekommen teilt man durch zwei.

Bemerkung:
Die Gauß'sche Summenformel ist ein Spezialfall der arithmetischen Reihe, ihre Glieder werden **Dreieckszahlen** genannt.

Beweis

Um zu beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$
$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n)$
gilt, reicht es aus,
$g(n) - g(n-1) = f(n)$
für alle positiven n und
$g(0) = 0$
zu zeigen. In der Tat trifft dies hier zu:

$g(n) - g(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1-n+1)}{2} = \frac{n \cdot 2}{2} = n = f(n)$
für alle n
und $g(0) = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$

Quelle: Wikipedia (Gaußsche Summenformel)
□

Bemerkung:
Auch ein Beweis durch vollständige Induktion ist möglich, dieser wäre sogar empfehlenswert, da er einfacher durchzuführen ist (Siehe Kapitel 10)

1.1.2 Allgemein

Definition

Wenn s_n die Summe der ersten n Folgeglieder einer arithmetische Folge ist, heißt sie arithmetische Reihe.
Sei eine arithmetische Folge a mit Startglied a_x und s, die entsprechende Reihe, dann gilt
$s_n = \frac{n \cdot (a_x + a_{x+n-1})}{2}$

Bemerkung:

1. Am häufigsten wird verwendet:
   - Mit Startglied a_0 : $s_n = \frac{n \cdot (a_0 + a_{n-1})}{2}$
   - Mit Startglied a_1 : $s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$
2. Alternativ kann auch folgende Darstellung verwendet werden:
   $s_n = \frac{n \cdot (2a_x + (n-1) \cdot d)}{2}$

Beweis

Sei eine arithmetische Folge a, mit Startglied a_x und Differenz d, und s, die entsprechende Reihe, dann gilt

$$\begin{aligned}
s_n &= a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + ...a_{x+n-1} \\
&= a_x + (a_x + d) + (a_x + 2d) + ... + (a_x + (n-1) \cdot d) \\
&= n \cdot a_x + d + 2d + ... + (n-1) \cdot d \\
&= n \cdot a_x + (1 + 2 + ... + (n-1)) \cdot d \qquad \text{(Gauß)} \\
&= n \cdot a_x + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d \\
&= n \cdot \frac{2a_x + (n-1) \cdot d}{2} \\
&= n \cdot \frac{a_x + \overbrace{a_x + (n-1) \cdot d}^{a_{x+n-1}}}{2} \\
&= n \cdot \frac{a_x + a_{x+n-1}}{2}
\end{aligned}$$

□

1.2 Geometrische Reihen

Definition

Wenn s_n die Summe der ersten n Folgeglieder einer geometrischen Folge ist, heißt sie geometrischen Reihe.
Sei eine geometrische Folge a mit Startglied a_x und s, die entsprechende Reihe, dann gilt
$s_n = \sum_{i=x}^{n+x-1} a_i = a_x \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Bemerkung:

Am häufigsten wird verwendet:

- Mit Startglied $a_0 : s_n = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$
- Mit Startglied $a_1 : s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Beweis

Allgemein:

$$\begin{aligned}
(1-q)(1+q+q^2+q^3+...+q^n) &= (1-q)+(q-q^2)+(q^2-q^3)+(q^3-q^4)+...+(q^n-q^{n+1}) \\
&= 1+(-q+q)+(-q^2+q^2)+(-q^3+q^3)+...+(-q^n+q^n)-q^{n+1} \\
&= 1-q^{n+1}
\end{aligned}$$

Man hat also $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1+q+q^2+q^3+...+q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$
Entsprechend ergibt sich $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \underbrace{1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1}}_{n \quad Summanden} = \frac{1-q^n}{1-q}$
Somit gilt für eine Reihe s, die die Partialsumme einer geometrischen Folge a, mit Quotient q und Anfangsglied a_x, ist, folgendes:

$$\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=x}^{x+n-1} a_i \\
&= a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + ... + a_{x+n-1} \\
&= a_x + a_x \cdot q + a_x \cdot q^2 + ... + a_x \cdot q^{n-1} \\
&= a_x \cdot (1+q+q^2+...+q^{n-1}) \\
&= a_x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\
&= a_x \cdot \frac{1-q^n}{1-q}
\end{aligned}$$

□