Schülerskript SMP

MATHEMATIK

4. März 2018

Clara, Bruno, Pascal, Rémy, ..., 1^{ere} SMP

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen

Eine Funktion , bei der nur natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zugeordnet wird, nennt man Folge.
Folgen können auch nur für Teilbereiche von $\mathbb{N}$ definiert sein.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet die Folge, wobei $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$

1.1 Verschiedene Darstellungen

1.1.1 Explizite Darstellung

Wenn ein beliebiges Glied der Folge direkt berechenbar ist, ist ihre Darstellung explizit.

Beispiele

1. $a_n = 3^n \Rightarrow a_4 = 3^4 = 91$
2. Die Folge der $n - ten$ positiven, ungeraden Zahl:
   $a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1) \Rightarrow$ Die 8. positive, ungerade Zahl ist $a_8 = 1 + 2 \cdot (8 - 1) = 15$

1.1.2 Rekursive Darstellung

Wenn für die Berechnung des $n - ten$ Gliedes einer Folge das $(n - 1) - te$ Glied benötigt wird, ist ihre Darstellung rekursiv.
In diesen Fällen braucht man immer ein Startglied, oft a_0 oder a_1.

Beispiele

1. $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2; a_0 = 5$
   $\mathrm{a}_1 = 3 \cdot a_{1-1} + 2 = 3 \cdot a_0 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$
   $a_2 = 3 \cdot a_{2-1} + 2 = 3 \cdot a_1 + 2 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$
   $a_3 = 3 \cdot a_{3-1} + 2 = 3 \cdot a_2 + 2 = 3 \cdot 53 + 2 = 159$
   und so weiter...
2. Die Folge der $n - ten$ positiven, ungeraden Zahl:

1.2 Auffällige Folgen

1.2.1 Arithmetische Folgen

1.2.2 Geometrische Folgen

1.3 Klassifizierung von Folgen

1.3.1 Monotonie

1.3.2 Beschränktheit

1.3.3 Konvergenz

Definition

Epsilon-n0-Definition

Grenzwertsätze

1.4 Vollständige Induktion

Kapitel 2

Reihen

2.1 g

g

Kapitel 3

Funktionsuntersuchung

Die **Analysis** (griechisch análysis, deutsch „Auflösung“) ist ein Teilgebiet der Mathematik. Die Untersuchung von reellen und komplexen Funktionen hinsichtlich Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit zählt zu den Hauptgegenständen der Analysis. Die hierzu entwickelten Methoden sind in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften von großer Bedeutung.

3.1 Stetigkeit

Definition 3.1.0

Eine Funktion ist stetig an der Stelle x_0, wenn:

1. $x_0 \in D$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert
3. $\lim\limits_{x \to x_0^{\pm}} f(x) = f(x_0)$

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft. Die Funktion f heit dann stetig, wenn sie an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge stetig ist.

Ist f stetig und $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intevall, dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Ist f zudem streng monoton, so ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig.

Stetige Fortsetzungen

beim Vereinfachen von gebrochenrationalen Funktionen ist Vorsicht geboten, denn eine hebbare Definitionslcke "aufzuheben"verändert den Definitionsbereich der Funktion. Die daraus resultierende Funktion wird **stetige Fortsetzung** genannt.

3.2 Differenzierbarkeit

Definition 3.2.0

Eine Funktion ist differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, wenn der beitseitige Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ existiert. Anschaulich soll Die Funktion links und rechts des x_0 die selbe Ableitung haben.

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Dieser Grenzwert ist die **Ableitung** von f an der Stelle x_0.
Die Funktion heit differenzierbar, wenn sie $\forall x \in D$ differenzierbar ist.

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar, da bei der Stelle $x_0 = 0$ der linksseitige Grenzwert des differenzenquotienten ($\lim\limits_{h \to 0^-} f'(x_0) = -1$) nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert (1) bereinstimmt.

3.2.1 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie an dieser Stelle auch stetig. Die Umkehrung gilt erst einmal nicht, aber es gibt eine verneinende Aussage: Ist f an der Stelle x_0 nicht stetig, so ist sie hier auch nicht differenzierbar.

3.3 Ableitungsregeln

Ein Ableitungswert gibt die Steigung an einem bestimmten Punkt an. Im Allgemeinen und zum Beweisen wird der Differentenquotient benötigt, um eine Ableitungsfunktion zu definieren, es geht aber in vielen Fällen schneller.

3.3.1 Produktregel

Definition 3.3.1

Sind die Funktionen u und v an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, dann ist die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ bei x_0 auch differenzierbar und es gilt:

$f'(x0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$

Beweis

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0+h) + u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} v(x_0+h)\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \lim_{h\to 0} u(x_0)\frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \\
&= v(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} + u(x_0) \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \\
&= u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)
\end{aligned}$$

3.3.2 Quotientenregel

Definition 3.3.2

Sind die Funktionen u und v an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, dann ist die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bei x_0 auch differenzierbar und es gilt:

$f'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}$

Beweis

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x_0+h)v(x_0)}{v(x_0+h)v(x_0)}-\dfrac{u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0v(x_0+h))}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0+h)v(x_0)h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)v(x_0){\color{red}-u(x_0)v(x_0)}-u(x_0)v(x_0+h){\color{red}+u(x_0)v(x_0)}}{v(x_0+h)v(x_0)h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{h}-\dfrac{u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)}{h}}{v(x_0+h)v(x_0)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0)-u(x_0)\dfrac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0+h)v(x_0)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0)-u(x_0)\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{v(x_0+h-v(x_0)}{h}}{v(x_0)v(x_0)}\\
&= \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{(v(x_0))^2}
\end{aligned}$$

3.3.3 Kettenregel

Definition 3.3.3

Die Funktion v sei an der Stelle x_0 differenzierbar und die Funktion u an der Stelle $v(x_0)$. Dann ist die Funktion $f = u \circ v$ mit der Gleichung $f(x) = u(v(x))$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Es gilt:

$f'(x_0) = v'(x_0) \cdot u'(v(x_0))$

3.3.4 Tangente und Normale

Definition 3.3.4

Ist die Funktion f differenzierbar an der Stelle x_0, dann hat die **Tangente** an dem Graphen von f die Steigung $a = f'(x_0)$ und den Y-Achsenabschnitt $b = -f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$. Daraus ergibt sich die Tangentengleichung:

$T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Eine Merkhilfe dazu ist das Wort „Fuxufu“, wobei „u“ dem x_0 entspricht.

Die **Normale** an der Stelle x_0 bezeichnet die Gerade, die genau senkrecht zur Tangente steht und diese im Berührpunkt des Graphen schneidet.

$N_{x_0}(x) = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

3.4 Vollständige Funktionsuntersuchung

3.4.1 Definitionsbereich

Am Anfang muss der Definitionsbereich angegeben werden, um eventuelle Divisionen durch null zu vermeiden. Man achte dabei auch auf hebbare Definitionslücken (siehe "Stetigkeit")

3.4.2 Achsenschnittpunkte

Es gibt zwei Arten von Achsenschnittpunkten:

1. X-Achsenschittpunkte (Nullstellen), die man mit $f(x) = 0$ herausfindet
2. Y-Achsenschnittpunkt, den man durch einsetzen bekommt: $f(0)$

3.4.3 Symmetrie

Y-Achsensymmetrie

Durch Lösung der Gleichung $f(x) = f(-x)$ findet man heraus ob die Funktion achsensymmetrisch ist.
Zudem ist die Funktion dann achsensymmetrisch, wenn nur gerade Exponenten vorhanden sind.

Symmetrie zum Origo

Durch Lösung der Gleichung $f(x) = -f(-x)$ findet man heraus ob die Funktion punktsymmetrisch ist.
Zudem ist die Funktion dann punktsymmetrisch, wenn nur ungerade Exponenten vorhanden sind.

Symmetrie zu einem beliebigen Punkt

Definition 3.4.3

Symmetrie zu einem Punkt liegt vor, wenn für den Punkt $P(x_0|y_0)$ gilt:

$f(x_0 + h) - y_0 = -f(x_0 - h) + y_0$

Beispiel

$f(x) = \frac{x}{x-1}$

Aus dem Schnittpunkt der Asymptoten kann man vermuten, dass $f(x)$ achsensymmetrisch zum Punkt $P(1|1)$ ist.

$$\left.\begin{array}{r} \Rightarrow f(x_0+h) - y_0 = \frac{1+h}{1+h-1} - 1 = \frac{1}{h} \\ \Rightarrow -f(x_0-h) + y_0 = -[\frac{1-h}{1-h-1} + 1] = \frac{1}{h} \end{array}\right\} \frac{1}{h} = \frac{1}{h} \text{ Die Funktion } f \text{ ist zu } P \text{ symmetrisch.}$$

3.4.4 Grenzwerte

3.4.5 Asymptoten

Eine Asymptote ist eine Gerade oder Kurve, die sich dem Graphen einer Funktion immer weiter annähert. Dabei unterscheidet man verschiedene Fälle:

Definition 3.4.5

1. **Senkrechte Asymptote**: Hat f an der stelle x_0 eine Polstelle, und gilt:
$\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = \pm\infty$
dann ist die Gerade $x = x_0$ eine senkrechte Asymptote von f.

2. **Waagerechte Asymptote**: Konvergiert f für $x \to \infty$ gegen eine reelle Zahl $g \in \mathbb{R}$, das heit
$\lim\limits_{x \to x_{0+}} f(x) = g$.
Die Gerde $y = g$ ist die **waagerechte** Asymptote von f. Das Gleiche gilt für $\lim\limits_{x \to -\infty}$.
Bei gebrochenrationalen Funktionen ist dies der Fall, wenn der Zählergrad kleiner (dann ist $g = 0$) oder gleich dem Nennergrad m ist.

3. **Schräge Asymptote**: Sie ist eine Gerade ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), der sich f mit $|x| \to \infty$ beliebig annähert:
$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - g(x)] = 0$ oder $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$
Bei einer gebrochenrationalen Funktion ist der "Fehlergrad"???(wie nennt man das??), das heit der Abstand von g zu f durch den Rest der Polynomdivision von Zähler mit Nenner gegeben.

4. **Asymptotische Kurven** Indem man in der Definition der schrägen Asymptote auch Polynome zulässt, erhält man Näherungskuven, die die gleiche Limesbedingung erfüllen muss:
$\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - P(x)] = 0$ oder $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - P(x)] = 0$
Diese begegnen einen bei gebrochenrationalen Funktion mit $n > m + 1$.

3.4.6 Monotonie

3.4.7 Extremstellen

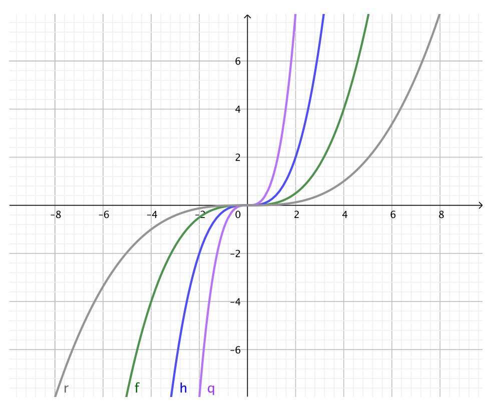
3.4.8 Wendestellen

3.4.9 Beispiel

3.5 Funktionenscharen

Erklärung:

Eine **Funktionenschar** ist eine Menge von Funktionen, die neben der Variable auch noch einen veränderlichen Parameter im Funktionsterm enthält. Jedem Wert des Parameters ist ein Graph der Schar zugeordnet. Der Parameter, oft a, wird hierbei überall wie eine Konstante behandelt.
Der Punkt, den alle Graphen, unabhängig von ihren Parametern, beinhalten, nennt man Bündel. Die Graphen einer Funktionenschar bilden gemeinsam eine Kurvenschar.
Hier ist die Kurvenschar der Funktion
$f(x) = ax^3$. Sie verlaufen alle durch das Bündel $P(0|0)$



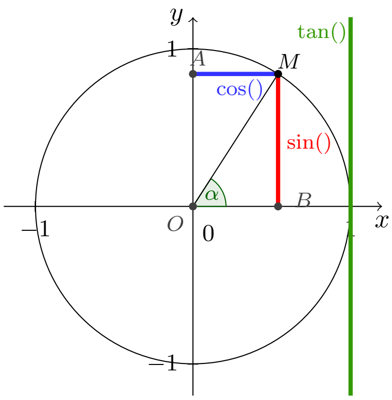
Kapitel 4

Trigonometrie

4.1 Kurze Wiederholung

Definition 4.1.0

Im Kreis mit Radius 1 gelte:
$\cos(\alpha) = x_M$
$\sin(\alpha) = y_M$
$\tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$



Es ergeben sich folgende (wissenswerte) Werte:

	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	180° π	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° 2π
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	0	X	0

4.2 Addtions- und Verdopplungssätze

Theorem

$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$
$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$
$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$

Hieraus ergeben sich einige weitere Relationen, wie z.B. $\sin(2a)$. Diese lassen sich jedoch schnell und leicht herleiten.

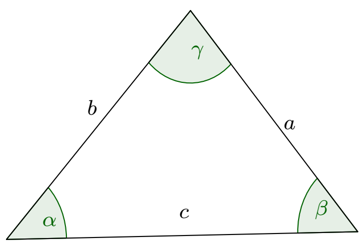
4.3 Allgemeine Sinus- und Kosinussätze

In einem beliebigen Dreieck gelten abgewandelte Formen der aus der 8. Klasse bekannten Sätze:

Theorem

$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$$

$$c = a + b - 2abcos(\gamma)$$



Man bemerkt, dass sich die bekannten Relationen ergeben, wenn einer der Winkel den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt.

4.4 Sinusfunktionen

Zur Vollständigen Funktionsdiskussion einer Sinus-Funktion sind einige Besonderheiten zu beachten:

1. Amplitude und Periodizität
   Eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$ hat:
   - die Periode $P = \frac{2\pi}{|b|}$
   - die Amplitude $A = |a|$
   - die Verschiebung entlang der x-Achse um d und entlang der y-Achse um c
2. Symmetrieeigenschaften
   Hier sollte zumindest bekannt sein, dass $f(x) = \sin(x)$ punktsymmetrisch zum Origo ist, und dass $f(x) = \cos(x)$ Achsensymmetrisch zur y-Achse ist.
3. Die Null-, Extrem- und Wendestellen sind in Form einer Menge anzugeben. (Es sei denn, die Aufgabenvorschrift fordert explizit auf eine Begrenzung auf ein angegebenes Intervall auf)

   > Beispiel:
   > Die Nullstellen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ lassen sich dartstellen als: $x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

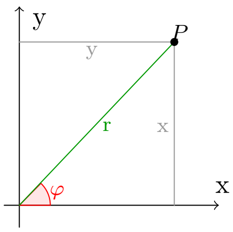
4. Bei der Teilung durch eine Sinusfunktion können Definitionslücken an dessen Nullstellen entstehen. Auch diese können in der bereits gezeigten Form angegeben werden.

4.5 Polarkoordinaten

In der Kursstufe beschränken wir uns auf die Benutzung von Polarkoordinaten für Punkte in der Ebene (2D).

Definition 4.5.0

Polarkoordinaten sind eine Form der eindeutigen Punktangaben, doch anstatt wie kartesische Koordinaten 2 Entfernungen x und y zu verwenden, haben sie die Form $(r|\varphi)$. r ist hierbei die Entfernung zum Origo und φ ein orientierter Winkel (in rad).



4.5.1 Umrechnung

Kartesisch → Polar

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\varphi = \tan(\frac{y}{x})$

Polar → Kartesisch

- $x = r \cdot \cos(\varphi)$
- $y = r \cdot \sin(\varphi)$

Kapitel 5

Vektorielle Geometrie

5.1 Vektoren

Definition 5.1.0

Ein Vektor ist Element eines Vektorraums.

Vektorräume, wir erinnern uns zurück. Verknüpfungen, inverse Elemente und die dazugehörenden Gesetze, konsequente Definitionen und mathematische Korrektheit, die guten alten Zeiten...
Tatsächlich kann ein Vektor in den meisten Fällen als Verschiebung bezeichnet werden, **nicht aber als Pfeil oder Strich!**

5.1.1 Besondere Vektoren

Der Ortsvektor

Der Vektor von O auf den Punkt P, geschrieben als $\vec{OP}$ oder $\vec{o}$.

Hat P die Koordinaten $(P_1|P_2|...|P_n)$, so besitzt $\vec{o}$ die Darstellung $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ ... \\ P_n \end{pmatrix}$.

Der Nullvektor

Der Vektor mit Wert $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, er hat keine und alle Richtungen zugleich.

Er ist somit das neutrale Element der Vektoraddition.

Der Verbindungsvektor

Der Vektor $\vec{AB}$ ist der Vektor, der den Punkt A auf den Punkt B abbildet. Er ist definiert als:
$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$, woraus folgt, dass:

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ ... \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Der Gegenvektor

Der Gegenvektor zu $\vec{AB}$ ist $\vec{BA}$, definiert als $-\vec{AB}$.

Er ist somit das inverse Element der Vektoraddition.

5.1.2 Der Einheitsvektor

Norm eines Vektors

Die Norm eines Vektors ist anschaulich als seine Länge zu interpretieren. Der Betrag, wie sie ebenfalls genannt wird, eines Vektors $\vec{v}$ ist folgendermaßen definiert: $|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_{i^2}}; \vec{v} \in \mathbb{R}^n$

5.2 Winkel zwischen Vektoren

5.2.1 Orientierte Winkel

5.3 Geraden

5.4 Ebenen

5.5 Skalarprodukt

Kapitel 6

Komplexe Zahlen

6.1 Einführung

Problem: Es gibt algebraische Gleichungen, die in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzen.

$\Rightarrow x^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{-1}$ Keine Reelle Lösung!

Es kann hierbei ein neues Symbol eingeführt werden : $i = \sqrt{-1}$
Damit kann man der obigen Gleichung die Lösung $x = i$ zuordnen

Wenn wir voraussetzen, dass diese neue Zahlen nach denselben Rechengesetzen genügen, wie die reellen Zahlen, erhalten wir damit auch Lösungen für andere bisher nicht lösbare quadratische Gleichungen, wie das folgende Beispiel zeigt:

$\Rightarrow x^2 + 2x + 5 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \quad \overbrace{\sqrt{4-20}}^{=\sqrt{16*(-1)}}}{2} = \tfrac{-24i}{2} = -12i$$

Bezeichnungen

1. Der Ausdruck $\sqrt{-1}$ heißt **imaginäre Einheit** und wird hier mit i bezeichnet.
2. Ausdrücke der Form $i \cdot y$ mit $y \in \mathbb{R}$ heißen **imaginäre Zahlen**
3. Ausdrücke der Form $z = x + i * y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ werden als **Komplexe Zahlen** bezeichnet
4. Ist $z = x + i * y$ eine Komplexe Zahl, so heißen
   $x = Re(z)$ **Realteil** von z
   $y = Im(z)$ **Imaginärteil** von z
5. Die Menge $\mathbb{C} = \{z = x + jy | x, y \in \mathbb{R}\}$ wird als Menge der Komplexen Zahlen bezeichnet

Aber

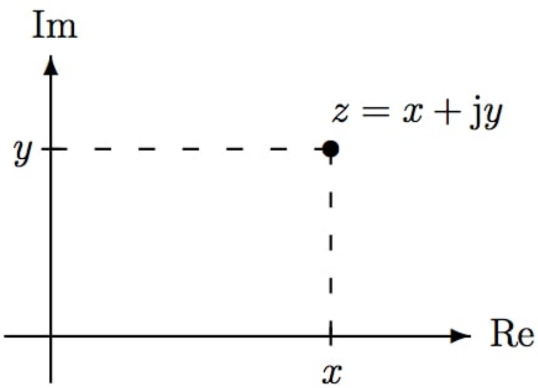
Der **Imaginärteil** y einer komplexen Zahl $z = x + i * y$ ist selbst eine reelle Zahl! Der **Imaginärteil** ist lediglich der Faktor bei i!

6.2 Darstellung komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl wird durch zwei reelle Zahlen charakterisiert. Wie bei zweidimensionalen Vektoren brauchen wir hier zur geometrischen Veranschaulichung auch eine zweidimensionale Ebene.

6.2.1 Kartesische Darstellung

Jeder komplexen Zahl $z = x + i * y$ entspricht genau ein Punkt $P = (x, y)$ in der komplexen Zahlenebene und umgekehrt.

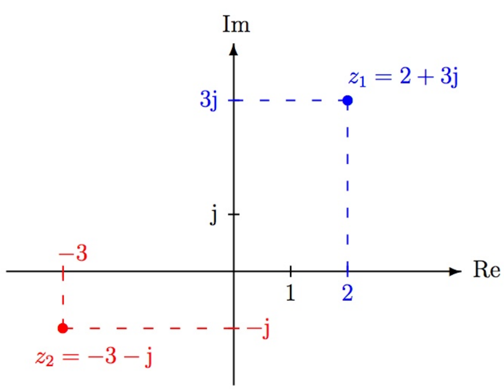


Bezeichnungen

1. Die komplexe Zahlenebene nennt sich auch Gaußsche- Zahlenebene
2. Hier werden die Achsen des Koordinatensystems als **reelle Achse** bzw. **imaginäre Achse** bezeichnet.

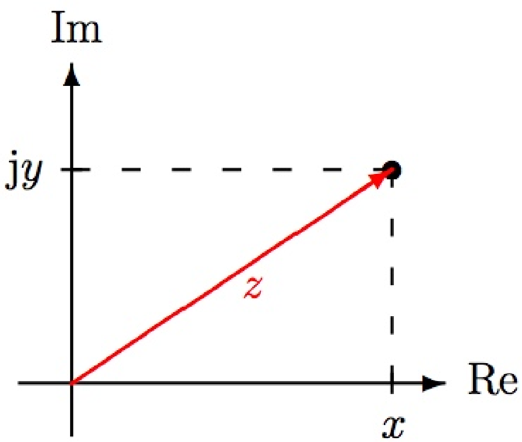
Beispiel

Die folgenden komplexen Zahlen sind in der Gaußschen Zahlenebene darzustellen:
$z_1 = 2 + 3 * j$ $z_2 = -3 - j$ (i wird hier j genannt)



Bemerkungen

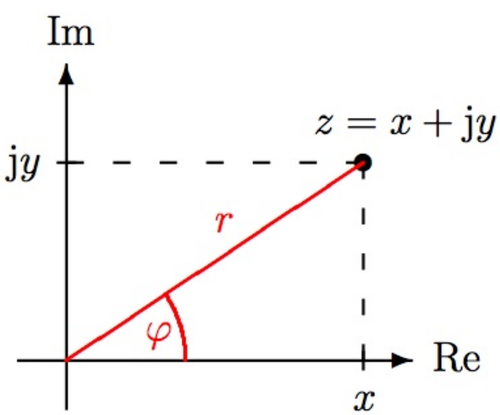
Für manche Anwendungen ist es hilfreich, eine komplexe Zahl nicht als Punkt $P = (x, y)$ in der Gaußschen Zahlenebene zu veranschaulichen, sondern stattdessen den Ortsvektor zu betrachten
$z = x + j * y \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



In diesem Fall spricht man von z als einem **komplexen Zeiger**.

6.2.2 Polarkoordinatendarstellung

Neben der eben eingeführten kartesischen Darstellung $z = x + j * y$ kann eine komplexe Zahl auch entsprechend der hier stehenden Skizze dich ihren Radius und den Winkel eindeutig festgelegt werden.



Erinnerung

Zusammenhang zwischen den Koordinaten $P(x, y)$ und $P(r, \varphi)$:

$$\begin{pmatrix} x = r * cos(\varphi) \\ \\ y = r * sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ tan(\varphi) = \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Der Zusammenhang zwischen dem Quotienten $\frac{x}{y}$ und dem Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig, da die Tangensfunktion -periodisch ist.
Damit erhält man die **trigonometrische Darstellung** :

$z = x + j * y = r * cos(\varphi) + j * r * sin(\varphi) \Rightarrow z = r(cos(\varphi) + j * sin(\varphi))$

Dieser Ausdruck von z wird im Folgenden sehr häufig auftreten. Deshalb wird dafür die Abkürzung

$e^{j\varphi} = cos(\varphi) + j * sin(\varphi)$

ein. Somit ergibt sich schließlich eine sehr kompakte Darstellung, die sogenannte **Exponentialdarstellung** einer komplexen Zahl:

$z = r(cos(\varphi) + r * j * sin(\varphi)) = r * e^{j\varphi}$

\\\\ Zusammenfassung

Eine komplexe Zahl lässt sich auf verschiedene Arten darstellen:

1. $z = x + j * y$ (kartesische Darstellung)
2. $z = (cos(\varphi) + j * sin(\varphi))$ (trigonometrische Darstellung)
3. $z = r * e^{j\varphi}$ (Exponential-Darstellung)

6.2.3 Umrechnung zwischen den Darstellungen

Kapitel 7

Statistik und Wahrscheinlichkeit

dsfdfs

7.1 Hypothesentests

Nur ein Test zur GH Kompabilituf OSX Geräten
?a

Kapitel 8

Arithmetik

Nur ein weiterer kleiner Test

8.1 Die Macht der Arithmetik

Sie ist unglaublich star... Stärker als alle andere... Die Eine, um sie alle zu knechten... Sie ist mein *Scccchhhattzz*

Kapitel 9

Matrizen

9.1 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorythmus

Lineare Gleichungssysteme lassen sich aufwendig mit Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren lösen, Carl Friedrich Gauß hat ein "Algorythmus" erfunden, mit dem sich ohne Taschenrechner leicht und relativ schnell lösen lässt.
Diese lassen sich aufwendig mit Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren lösen, Carl Friedrich Gauat ein "Algorythmus" erfunden, mit dem sich ohne Taschenrechner leicht und relativ schnell lösen lässt.
Am Besten wird dieser mit einem Beispiel Erläutert:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 4x+3y+z &=& 13 & (1) \\ 2x-5y+3z &=& 1 & (2) \\ 7x-y-2z &=& -1 & (3) \end{array} \right. \qquad \{\ 1\cdot(1)-2\cdot(2)\ \} \text{ und } \{\ 7\cdot(1)-4\cdot(3)\ \} \qquad D=\mathbb{R}^3$$

Hier versucht man in Zeile (2) und (3) die erste Variabel zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5z &=& 11 \\ 0x+25y+15z &=& 95 \end{array} \right. \qquad \{\ 25\cdot(2)-13\cdot(3)\ \}$$

Jetzt versucht man die zweite Variabel in der dritten Gleichung zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5z &=& 11 \\ 0x+0y-320z &=& -960 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow z=3$$

Jetzt wird eingesetzt

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5\cdot 3 &=& 11 \\ 0x+0y+z &=& 3 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow y=2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+0y+0z &=& 1 \\ 0x+y+0z &=& 2 \\ 0x+0y+z &=& 3 \end{array} \right.$$

$\mathbb{L}=\{(1|2|3)\}$ Die Lösungsmenge wird als n-Tupel alphabetisch sortiert.

9.2 LGS mit dem Taschenrechner lösen

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich sehr viel schneller mit dem Taschgenrechner lösen:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 2x-5y+3z &=& 1 \\ 7x-y-2z &=& -1 \end{array} \right.$$

Hierfür geht man beim Taschenrechner auf [matrix] und auf [edit]. Dann gibt man seine Matrix (hier als Beispiel) ein:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Dann geht man wieder in den rechnen-Modus und gibt ein: [matrix], dann geht man auf [math], [rref]. dann geht man nochmal auf [matrix], [A] (die gerade bearbeitete Matrix):

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1|2|3)\}$$

Wenn Werte mit Kommazahlen drankommen, ist es ntzlich, im Taschenrechner [Math] + [1](Frac) einzugeben, um sich die Werte in Brchen anzeigen zu lassen.

Kapitel 10

Algorythmik

sdffzgkzgs

10.1 g

fljzgkg

Kapitel 11

Integrale

11.1 Integralrechnung

11.1.1 Stammfunktionen

Eine Funktion F heißt Stammfunktion der Funktion f, wenn $F'(x) = f(x)$ gilt.
Ist F irgendeine Stammfunktion von f, dann ist auch $F(x) + C$ (mit konstantem C) eine Stammfunktion, denn beim Ableiten fällt ja C als konstanter Summand weg. Jede Funktion hat also unendlich viele Stammfunktionen, die sich aber nur um einen konstanten Summanden unterscheiden.

11.1.2 Begriff des Integrals

math3-eps-converted-to.pdf

Abbildung 11.1: Integral und Flächeninhalt

In Abb. 11.1 soll die Fläche zwischen der x-Achse und der Funktion $y = f(x)$ zwischen $x = a$ und $x = b$ berechnet werden.
Um eine Näherung für diese Fläche zu bekommen, teilt man sie in Streifen auf (in der Abb. 11.1 sind es 6 Streifen) und nimmt die Summe der Flächeninhalte der Rechtecke als Näherung für die Fläche. Wenn man die Zahl der Streifen so erhöht, dass die Breite jedes Streifens gegen Null geht, dann bekommt man als Grenzwert die gesuchte Fläche. In Abb. 11.1 ist die Näherung:

$$A_6 = y_1(x_1 - x_0) + y_2(x_2 - x_1) + y_3(x_3 - x_2) + y_4(x_4 - x_3) + y_5(x_5 - x_4) + y_6(x_6 - x_5)$$

Beachtet man, dass $y_k = f(x_k)$ ist und schreibt man $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ usw., dann bekommt man für n Streifen:

$$A_n = f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k$$

Der Grenzwert dieser A_n ist nun die gesuchte Fläche:

$$\int_a^b y = \int_a^b f(x)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k \tag{11.1}$$

Beim Grenzübergang ist nur zu beachten, dass mit Erhöhung der Streifenzahl n auch alle Breiten Δx_k gegen Null gehen, also $\lim_{n\to\infty} \max \Delta x_k = 0$ gilt.
Schaut man sich die Abb. 11.1 an, dann stellt man fest, dass statt $f(x_k)$ als Seite der Rechtecke auch Rechtecke verwendet werden könnten, deren Seite irgendein $f(u_k)$ ist, wobei $x_{k-1} \leq u_k \leq x_k$ ist.
Grenzwerte der Art von Gl. (11.1) heißen *Integrale*. Funktionen, für die dieser Grenzwert für jede Art der Unterteilungsfolge und jede Wahl der $f(u_k)$ existiert und immer denselben Wert ergibt, heißen *integrierbar*.
Als Physiker sagt man, durch Integration werden Elemente der Form $y = f(x)x$ aufaddiert.

11.1.3 Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

Die Bestimmung der Grenzwerte in Gleichung (11.1) ist eine mühselige Angelegenheit. Aber alles wendet sich zum Guten, denn Integrale können mittels Stammfunktionen bestimmt werden.
Um dies klar zu machen betrachten wir irgendeine Stammfunktion F der Randfunktion f. Nach der Grundformel (**??**) ist dann

$$F(x) = F'(x)x = f(x)x\Delta F(x_k) \approx f(x_k)\Delta x_k F(x_k) - F(x_{k-1}) \approx f(x_k)\Delta x_k$$

Die Näherung ist umso besser je kleiner Δx_k ist.
Wendet man diese Beziehung auf die Näherungssumme A_n an, dann bekommt man:

$$A_n \approx (F(x_1) - F(x_0)) + (F(x_2) - F(x_1)) + \cdots (F(x_n) - F(x_{n-1})$$

In dieser Gleichung heben sich alle Summanden bis auf $F(x_0)$ und $F(x_n)$ heraus, also ist, weil $x_0 = a$ und $x_n = b$ ist, $A_n \approx F(b) - F(a)$.
Diese Näherung wird umso besser, je kleiner die Δx werden, also hat man für den Grenzwert:

$$\int_a^b f(x)x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_k = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b \tag{11.2}$$

Dies ist der **Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung**. Mit ihm wird das Problem der Integration auf das Auffinden einer Stammfunktion zurückgeführt. Als Mathematiker müsste man noch anfügen, dass diese Beziehung nicht immer gilt, sondern nur unter gewissen Voraussetzungen.
Der Hauptsatz ist sicher dann richtig, wenn die Funktion f stetig ist. In diesem Fall kann man auch so formulieren:

$$I_a(x) = \int_a^x f(\xi)\xi \qquad I'_a(x) = f(x)$$

Die Funktion I_a nennt man hier die Integralfunktion. Man kann sie sich vorstellen als die Funktion die jeder Stelle x die Fläche zwischen a und x zuordnet. Unter den obigen Voraussetzungen ist also die Ableitung der Integralfunktion gleich der Randfunktion. Ist die Randfunktion f nicht im ganzen Intervall stetig, sondern nur »stückweise stetig«, dann ist zwar die Integralfunktion immer noch stetig, aber in den Trennpunkten der Stetigkeitsbereiche nicht mehr notwendig differenzierbar.
Häufig kommen auch sogenannte *unbestimmte Integrale* vor. Ein unbestimmtes Integral ist einfach eine Stammfunktion. Man schreibt dann

$$\int f(x)x = F(x) + C$$

und nennt C die *Integrationskonstante*.
Eine Stammfunktion zu finden, ist allerdings häufig auch nicht sehr einfach. Für viele aus elementaren Funktionen zusammengesetzte Funktionen bekommt man leider Stammfunktionen, die nicht mehr elementar dargestellt werden können. Das gilt schon für so einfach aussehende Integrale wie

$$\int \frac{\sin x}{x} x$$

Da $\sin x/x$ in ihrem Definitionsbereich stetig ist, muss sie nach dem Hauptsatz eine Stammfunktion haben. Sie lässt sich allerdings nicht mehr durch elementare Funktionen ausdrücken, sondern gibt eine »neue« sogenannte »höhere« Funktion, die man Integralsinus nennt. Ihre Funktionswerte kann man mit Tabellen oder mit Computerprogrammen bestimmen. Zunächst mag man meinen, dies sei etwas besonderes, aber auch die Werte eines Logarithmus oder eines Sinus kann man nur mit dem Taschenrechner berechnen oder aus einer Funktionentafel entnehmen.

11.1.4 Integrationsregeln

Da Integration die Umkehrung des Ableitens ist (»Aufleiten«) übertragen sich die Ableitungsregeln auf das Integrieren:

- Konstante Faktoren bleiben stehen.
- Summen werden summandenweise aufgeleitet.
- $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$

- $\int_a^b = -\int_b^a$
- Es gibt *keine direkte* Umkehrung der Produkt-, Quotienten und Kettenregel, sondern hier muss man kompliziertere Verfahren verwenden.

Wichtige Integrale sind:

$$\int x^n x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \tag{11.3}$$

$$\int \sin x x = -\cos x \tag{11.4}$$

$$\int \cos x x = \sin x \tag{11.5}$$

$$\int \frac{x}{\cos^2 x} = \tan x \tag{11.6}$$

$$\int \frac{1}{x} x = \ln |x| \tag{11.7}$$

$$\int \frac{x}{1+x^2} = \arctan x \tag{11.8}$$

In Formelsammlungen stehen viele Integrale, es gibt auch Integraltafeln, die hunderte von Integralen fertig angeben. CAS-Programme können alle sehr gut integrieren.
Aus der Formel (11.2) erkennt man, dass das Integral negativ wird, wenn im betrachteten Intervall $f(x) < 0$ ist. Dann verläuft die Kurve unterhalb der x-Achse, und man muss als Fläche den Betrag nehmen. Integrale sind aber nicht nur Flächen, mit ihnen kann man Volumina, Energien, Ladungen und und und ... ausrechnen, und bei vielen dieser Größen sind negative Werte durchaus sinnvoll!

Produktintegration

Nach der Produktregel ist $(uv)' = u'v + uv'$. Integriert man nun beide Seiten, und beachtet, dass nach dem Hauptsatz $\int (uv)' x = uv$ ist, dann bekommt man die Formel für die Produktintegration, die auch *partielle Integration* genannt wird.

$$\int u'v x = uv - \int uv' x \tag{11.9}$$

Mit dieser Regel kann man Integrale folgender Form lösen:

$$\int x \sin x x$$

Setzt man hier $u' = \sin x$, $v = x$, dann ist $u = -\cos x$ und $v' = 1$. Setzt man diese Werte in die Produktintegrations-Formel ein, dann folgt:

$$\begin{aligned} \int x \sin x x &= (-\cos x)x - \int (-\cos x) \cdot 1 x \\ &= -x \cos x + \int \cos x x = -x \cos x + \sin x \end{aligned}$$

Ein anderes schönes Beispiel ist die Stammfunktion von $\ln x$. Dazu fasst man $\ln x$ als $1 \cdot \ln x$ auf und wählt $u' = 1$, $v = \ln x$, also $u = x$ und $v' = 1/x$ und erhält:

$$\int \ln x x = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} x = x \ln x - \int 1 x = x \ln x - x$$

Substitutionsmethode

Es soll die Stammfunktion von $x(1-x^2)^9$ bestimmt werden. Hier wäre zum Ableiten die Kettenregel und die Produktregel nötig, beides gibt es aber in reiner Form beim Integrieren nicht. Man kann aber häufig durch geschickte Substitution das Integral auf eine Form bringen, für die dann eine Stammfunktion angegeben werden kann. Der wesentliche Punkt dabei ist, dass nicht nur x sondern auch x der Substitution unterworfen werden muss.

In diesem Beispiel setzen wir $u = 1 - x^2$. Dann ist $u = u'(x)x = -2xx$. Somit ist $x = -u/2x$. Nun geht's los:

$$\int x(1-x^2)^9 x = \int x u^9 \frac{-1}{2x} u = -\frac{1}{2} \int u^9 u = -\frac{1}{20} u^{10} = -\frac{1}{20}(1-x^2)^{10}$$

Hätten wir hier die Stammfunktion nicht benötigt, sondern nur den Wert eines bestimmten Integrals, dann hätte man sich die Rücksetzung sparen können, indem man die Grenzen auf die neue Variable umschreibt:

$$\int_{x=0}^{1} x(1-x^2)^9 x = -\frac{1}{2} \int_{u=1}^{0} u^9 u = -\frac{1}{20} \left[u^{10}\right]_1^0 = -\frac{1}{20}(0-1) = \frac{1}{20}$$

In diesem Beispiel haben wir einen Teilausdruck des Integrals gleich u gesetzt. Im folgenden Beispiel machen wir es anders herum und setzen x gleich einer Funktion von u. Es soll die Fläche einer Ellipse berechnet werden. Für den oberen Ellipsenbogen gilt die Gleichung (Auflösen der Mittelpunktsform (**??**) nach y):

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Die Fläche unter dem oberen Ellipsenbogen ist die halbe Ellipsenfläche und berechnet sich so:

$$A = \int\limits_{x=-a}^{a} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\, x = \int\limits_{u=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u}\, a \cos u\, u = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} ab \cos^2 u\, u$$

Dabei hat man $x = a \sin u$ gesetzt, dann wird $x = a \cos u u$. Nun muss man nur noch die Stammfunktion von $\cos^2 u$ ermitteln. Dazu kann man etwa die Beziehung $\cos 2u = 2\cos^2 u - 1$ heranziehen, also $\cos^2 u = \frac{1}{2}(1 + \cos 2u)$. Diese hat die Stammfunktion $\frac{1}{2}(u + \sin u \cos u)$. Damit bekommt man für die Fläche:

$$A = \frac{ab}{2}\left[u + \sin u \cos u\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} = \frac{ab}{2}[(\frac{\pi}{2} + 0) - (-\frac{\pi}{2} + 0)] = \frac{1}{2}\pi ab$$

Die gesamte Fläche der Ellipse ist doppelt so groß, also πab.

Partialbruchzerlegung

Die Partialbruchzerlegung ist ein allgemeines Verfahren zur Integration gebrochen rationaler Funktionen. Es sei gegeben:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m} \tag{11.10}$$

Im Falle $m \leq n$ führt man zuerst eine Polynomdivision aus, dann bekommt man eine ganzrationale Funktion und eine gebrochen rationale mit $m > n$, so dass wir uns für das Weitere auf den Fall $m > n$ beschränken können.
Das Nennerpolynom kann im Komplexen vollständig in Linearfaktoren zerlegt werden, im Reellen bleiben ggf. quadratische Faktoren übrig, die keine reellen Nullstellen mehr haben. Seien nun x_k die Nullstellen von $Q(x)$ mit der Vielfachheit ν_k dann kann man $Q(x)$ stets auf die folgende Form bringen:

$$Q(x) = b_m(x - x_1)^{\nu_1}(x - x_2)^{\nu_2} \ldots (x - x_k)^{\nu_k}(x^2 + \alpha_1 x + \beta_1)^{\mu_1} \ldots (x^2 + \alpha_r x + \beta_r)^{\mu_r} \tag{11.11}$$

Die gebrochen rationale Funktion $f(x)$ lässt sich nun als Summe von Partialbrüchen schreiben. Dabei gilt:

1. Jeder Linearfaktor $(x - x_k)$ der Vielfachheit ν_k trägt zur Zerlegung die folgenden Summanden bei:

$$\frac{A_1}{(x - x_k)} + \frac{A_2}{(x - x_k)^2} + \cdots + \frac{A_{\nu_k}}{(x - x_k)^{\nu_k}}$$

2. Jeder quadratische Faktor mit der Vielfachheit μ_k trägt die folgenden Summanden bei:

$$\frac{C_1 x + D_1}{(x^2 + \alpha x + \beta)} + \frac{C_2 x + D_2}{(x^2 + \alpha x + \beta)^2} + \cdots + \frac{C_{\mu_k} x + D_{\mu_k}}{(x^2 + \alpha x + \beta)^{\mu_k}}$$

Die Linearfaktoren lassen sich sofort integrieren, bei den quadratischen geht man so vor:

$$(x^2 + \alpha x + \beta) = \left(x + \tfrac{\alpha}{2}\right)^2 + \delta^2 = (\delta y)^2 + \delta^2 = \delta^2(y^2 + 1)$$

Hier hat man quadratisch ergänzt und $\delta \cdot y = x + \frac{\alpha}{2}$ substituiert. Mit dieser Substitution ist

$$x = \delta y - \frac{\alpha}{2} \qquad y = \frac{x + \frac{\alpha}{2}}{\delta} \qquad x = \delta y$$

Nun wird das Integral zu:

$$\begin{aligned}\int \frac{Cx + D}{(x^2 + \alpha x + \beta)^\mu} x &= \frac{1}{\delta^{2\mu-1}} \int \frac{C\delta y + D - \frac{1}{2}C\alpha}{(y^2+1)^\mu} y \\ &= \frac{C}{\delta^{2\mu-2}} \int \frac{yy}{(y^2+1)^\mu} + \frac{D - \frac{1}{2}C\alpha}{\delta^{2\mu-1}} \int \frac{y}{(y^2+1)^\mu}\end{aligned}$$

Für das erste der beiden verbleibenden Integrale bekommt man dann

$$\int \frac{yy}{(y^2+1)^\mu} = \frac{1}{2} \int \frac{u}{u^\mu} = \begin{cases} \dfrac{u^{1-\mu}}{2(1-\mu)} = & \text{für } \mu = 2, 3, \ldots \\ \frac{1}{2} \ln |u| & \text{für } \mu = 1 \end{cases} \tag{11.12}$$

Hier hat man $u = y^2 + 1$ gesetzt. Nun muss noch das zweite bestimmt werden.

$$J_\mu = \int \frac{y}{(y^2+1)^\mu}$$

Für $\mu = 1$ ist es bekannt, $J_1 = \arctan y$.
Wir werden eine Rekursionsformel für die J_μ herleiten. Wir beginnen mit der Beziehung

$$J_{\mu+1} = \int \frac{(y^2+1) - y^2}{(y^2+1)^{\mu+1}} y = J_\mu - \int \frac{y^2}{(y^2+1)^{\mu+1}} y$$

Nun denken wir uns den zweiten Integranden als y·Rest geschrieben und integrieren partiell:

$$\int y \cdot \frac{yy}{(y^2+1)^{\mu+1}} = \frac{-y}{2\mu(y^2+1)^\mu} + \frac{1}{2\mu} \int \frac{y}{(y^2+1)^\mu} = \frac{-y}{2\mu(y^2+1)^\mu} + \frac{1}{2\mu} J_\mu$$

Setzt man das oben ein, so bekommt man die Rekursionsformel:

$$J_{\mu+1} = \left(1 - \frac{1}{2\mu}\right) J_\mu + \frac{y}{2\mu(y^2+1)^\mu} \tag{11.13}$$

Insbesondere ist dann (rechne das nach!)

$$\begin{aligned} J_1 &= \arctan y \\ J_2 &= \frac{1}{2} \arctan y + \frac{y}{2(y^2+1)} \\ J_3 &= \frac{3}{8}\left(\arctan y + \frac{y}{y^2+1}\right) + \frac{y}{4(y^2+1)^2} \\ J_4 &= \frac{5}{16}\left(\arctan y + \frac{y}{y^2+1}\right) + \frac{5}{24} \cdot \frac{y}{(y^2+1)^2} + \frac{y}{6(y^2+1)^3} \end{aligned}$$

11.1.5 Beispiele zur Integration

Man bestimme die Fläche unter der Parabel $y = 2x^2$ im Bereich $1 \le x \le 4$.

$$\int_1^4 2x^2 x = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_1^4 = \frac{2}{3}(64 - 1) = 42$$

Bestimme die Formel für das Volumen einer Pyramide der Höhe h und der Grundfläche G.
Man stellt sich die Pyramide aus dünnen Schichten der Dicke x parallel zur Grundfläche aufgebaut vor. Die x-Achse legt man durch die Spitze der Pyramide, so dass die Höhe auf die x-Achse zu liegen kommt. Da die Flächen der Schichten dann durch zentrische Streckung aus der Grundfläche entstehen, hat eine Schicht im Abstand x von der Spitze die Fläche $A(x)$, für die nach dem Strahlensatz gilt:

$$\frac{x^2}{h^2} = \frac{A(x)}{G} \qquad A(x) = \frac{G}{h^2}x^2$$

Das Volumen einer Schicht ist dann $V = A(x)x$. Das Volumen der Pyramide ist die Summe der Volumina aller Schichten, diese Summe bekommt man durch Integration:

$$V = \int_0^h V = \int_0^h \frac{G}{h^2}x^2x = \frac{G}{h^2} \cdot \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^h = \frac{G}{3h^2}(h^3 - 0) = \frac{1}{3}Gh$$

Bestimme die Energie, die notwendig ist, um einen Körper der Masse m im Schwerefeld der Masse M vom Abstand R ins Unendliche zu bringen.
Um den Körper das Stückchen r vom Zentralkörper zu entfernen, braucht man die Arbeit $W = Fr$, wobei F die Gravitationskraft ist. Die gesamte notwendige Arbeit ist dann:

$$W = \int_R^\infty W = \int_R^\infty G\frac{Mm}{r^2}r = GMm\left[-\frac{1}{r}\right]_R^\infty = GMm(0 - (-\frac{1}{R})) = \frac{GMm}{R}$$

Dies war ein Beispiel eines sogenannten *uneigentlichen Integrals*, bei solchen liegen entweder die Grenzen im Unendlichen, oder die Funktion selbst wird an einer Stelle unendlich.
Bestimme $\int_{-\infty}^{\infty} {}^{-x^2}x$
Diese Aufgabe habe ich eingefügt, weil das ein wichtiges Integral ist. Seine Berechnung ist aber nicht ganz einfach, man muss einen »Umweg« machen. Zuerst schreiben wir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}^{-x^2}x = \sqrt{\left(\int_{-\infty}^{\infty} {}^{-x^2}x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} {}^{-y^2}y\right)} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} {}^{-(x^2+y^2)}xy}$$

Führt man nun Polarkoordinaten ein, also $x = r\cos\phi; y = r\sin\phi$, dann ist das Flächenelement $r\phi r$ und $x^2+y^2 = r^2$. Das letzte Integral wird dadurch

$$\int_0^{2\pi}\phi\int_0^\infty r^{-r^2}r = 2\pi\left[-\tfrac{1}{2}{}^{-r^2}\right]_0^\infty = \pi\int_{-\infty}^{\infty} {}^{-x^2}x = \sqrt{\pi}$$

Mit Substitution kann man nun noch beweisen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} {}^{-ax^2}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

Dazu setzt man $u^2 = ax^2u = \sqrt{a}x$. Dies kann nur gehen, wenn $a > 0$ ist. Man kann zeigen, dass die Formel sogar für komplexe a stimmt, sofern $\Re a > 0$ ist.

Anmerkung: ${}^{-x^2}$ hat keine elementare Stammfunktion, es gibt aber eine Reihe von höheren Funktionen, die mit diesem Integral verwandt sind. Zunächst ist dabei die aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung bekannte Normalverteilung (Gauß-Verteilung) zu erwähnen, die durch

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} {}^{-\frac{1}{2}t^2}tmit\Phi(\infty) = 1$$

definiert ist. Daneben gibt es die Gaußsche Fehlerfunktion

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x {}^{-t^2}twobei\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Bestimme das Integral durch Partialbruchzerlegung. Es sei gegeben:

$$f(x) = \frac{x+2}{(x^2-1)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+1}$$

Nun müssen die Koeffizienten $A, \ldots, F$ bestimmt werden. Dazu multipliziert man zuerst mit dem Hauptnenner durch:

$$x + 2 = A(x+1)(x^2+1)^2 + B(x-1)(x^2+1)^2 + (Cx+D)(x^2-1) + (Ex+F)(x^4-1)$$

Zunächst kann man nun für x spezielle Werte einsetzen, so dass möglichst viele Ausdrücke Null werden:

$$\begin{aligned} x = 1: &\qquad 3 = 8AA = \tfrac{3}{8} \\ x = -1: &\qquad 1 = -8BB = -\tfrac{1}{8} \\ x = 0: &\qquad 2 = \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} - D - F \end{aligned}$$

Hätte man nur einfache Vielfachheiten, so könnte man auf diese Weise alle Koeffizienten bestimmen. Hier ist das leider nicht der Fall, so dass wir zur »Ochsentour« greifen müssen. Dazu wird die rechte Seite ausmultipliziert und dann ein Koeffizientenvergleich gemacht:

$$\begin{aligned} x + 2 = {} & (A - B - D - F) + (A + B - C - E)x + (2A - 2B + D)x^2 \\ & + (2A + 2B + C)x^3 + (A - B + F)x^4 + (A + B + E)x^5 \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich liefert nun ein Gleichungssystem (wobei wir unsere schon bekannten Werte für A und B gleich einsetzen)

$$\begin{aligned} 2 &= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} - D - F \\ 1 &= \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8} - C - E \\ 0 &= \tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4} + DD = -1 \\ 0 &= \tfrac{3}{4} - \tfrac{1}{4} + CC = -\tfrac{1}{2} \\ 0 &= \tfrac{3}{8} + \tfrac{1}{8} + FF = -\tfrac{1}{2} \\ 0 &= \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{8} + EE = -\tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

Setzt man die sich aus den letzten vier Gleichungen ergebenden Werte nun in die beiden ersten ein, so sind diese erfüllt. Wir sind fertig und haben das Ergebnis

$$f(x) = \frac{\frac{3}{8}}{(x-1)} - \frac{\frac{1}{8}}{x+1} - \frac{\frac{1}{2}x + 1}{(x^2+1)^2} - \frac{\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}}{x^2+1}$$

Nach den Gleichungen (11.12) und (11.13) ergibt sich so:

$$\begin{aligned} \int f(x)x = {} & \frac{3}{8}\ln|x-1| - \frac{1}{8}\ln|x+1| + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2+1} \\ & - \frac{1}{2}\arctan x - \frac{x}{2(x^2+1)} - \frac{1}{8}\ln|x^2+1| - \frac{1}{2}\arctan x \end{aligned}$$

Der Koeffizientenvergleich ist deshalb so leicht gegangen, weil wir schon einige Werte mit der Einsetze-Methode ermittelt hatten. Man hätte statt des Koeffizientenvergleichs auch weitere Gleichungen erzeugen können, indem man einfach weitere Zahlen einsetzt. Wenn irgend möglich, sollte man versuchen mit der Einsetze-Methode zum Ziel zu kommen. Am aller einfachsten ist es allerdings, Mathematica anzuwerfen, dann hat man das Integral in Sekundenbruchteilen.