SMP-Mathe

Mach' dir keine Sorgen wegen deiner Schwierigkeiten mit der Mathematik. Ich kann dir versichern, daß meine noch größer sind.

Brief an ein Schulmädchen, 1943
ALBERT EINSTEIN

Clara Schaefer
Pascal Borel
Bruno Gelfort
Rémy Moll

1e und Te (2017-2019)

20. Februar 2021

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen

by Clara

Definition 1.0.1

Eine Funktion, bei der nur natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zugeordnet wird, nennt man Folge. Folgen können auch nur für Teilbereiche von $\mathbb{N}$ definiert sein.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet die Folge, wobei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

GTR-Tipp

Um statt Funktionen Folgen zu behandeln:

- ON → MODE → Zeile 4: statt FUNC SEQ auswählen
- in Y=
- Mit $nMin$ den Startindex angeben
- Mit $u(n)$ die Folgenvorschrift angeben
- Falls die Folge rekursiv anzugeben ist, muss mit $u(nMin)$ das Startglied angegeben werden

Bemerkung:

Es ist üblich eine rekursive Folge mit a_{n+1} in Abhängigkeit von a_n zu haben. Diese Darstellung ist mit dem GTR nicht direkt verwendbar. Man muss es umschreibenüm a_n in Abhängigkeit von a_{n-1} zu haben.

1.1 Verschiedene Darstellungen

1.1.1 Explizite Darstellung

Definition 1.1.1

Wenn ein beliebiges Glied der Folge direkt berechenbar ist, ist ihre Darstellung explizit.

Beispiel:

1. $a_n = 3^n \Rightarrow a_4 = 3^4 = 81$
2. Die Folge der $n - ten$ positiven, ungeraden Zahl:
   $a_n = 2 \cdot (n-1) + 1 \Rightarrow$ Die 8. positive, ungerade Zahl ist $a_8 = 2 \cdot (8-1) + 1 = 15$

1.1.2 Rekursive Darstellung

Definition 1.1.2

Wenn für die Berechnung des $n-ten$ Gliedes eines (oder sogar mehrere) der vorherigen Glieder benötigt wird, ist ihre Darstellung rekursiv. In diesen Fällen braucht man immer ein Startglied, oft a_0 oder a_1.

Beispiel:

1. $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2;\ a_0 = 5$
   $a_1 = 3 \cdot a_{1-1} + 2 = 3 \cdot a_0 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$
   $a_2 = 3 \cdot a_{2-1} + 2 = 3 \cdot a_1 + 2 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$
   $a_3 = 3 \cdot a_{3-1} + 2 = 3 \cdot a_2 + 2 = 3 \cdot 53 + 2 = 159$
   und so weiter...

2. Die Folge der $n - ten$ positiven, ungeraden Zahl:
   $a_n = a_{n-1} + 2;\ a_1 = 1$

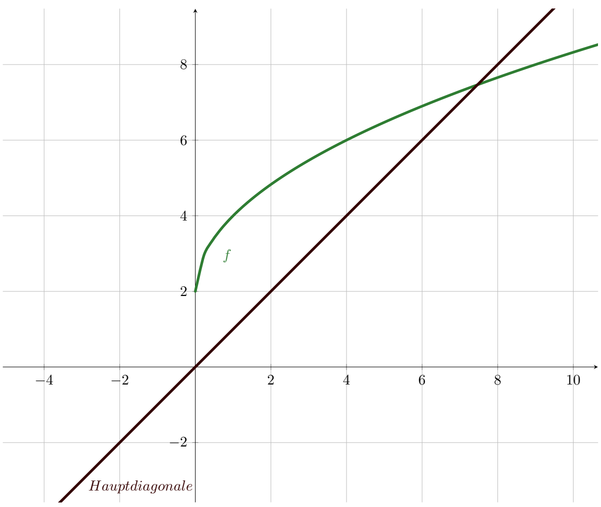
Bemerkung:

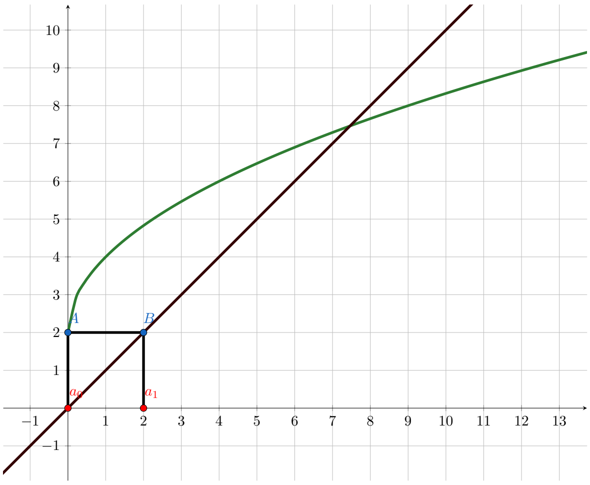
Für manche Folgen sind beide Darstellungen möglich, wobei die explizite Darstellung oftmals viel praktischer ist, da die Berechnung der Folgeglieder anhand der rekursiven Darstellung schnell sehr aufwendig wird.

Web-Diagramme

Hier handelt es sich um ein graphisches Verfahren, das dazu dient, das Verhalten einer Folge, deren Darstellung rekursiv ist, zu untersuchen. Es ermögicht die Beobachtung des Langzeitverhaltens (Konvergenz, Divergenz oder Oszillation) einer rekursiven Folge.

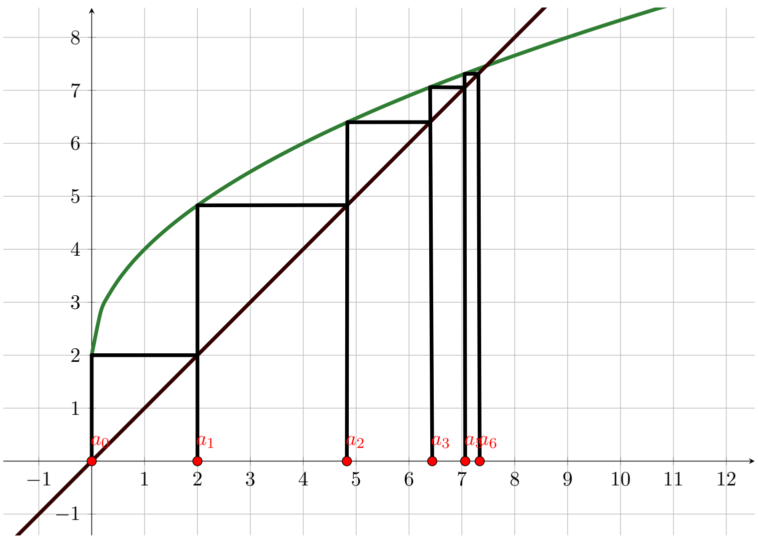
Dazu muss man der rekursiven Folgenvorschrift eine Funktion $f(a_{n-1}) = a_n$ zuordnen, sodass - grob gesagt - "die Funktion das Gleiche mit x macht, dass die Folge macht, um von a_n auf a_{n+1} zu kommen". Man muss verstehen, dass es sich hierbei nicht um den Graphen der Folge handelt, die Werte der Folgenglieder sind nicht wie gewohnt abzulesen. Zusätzlich zeichnet man in ein kartesisches Koordinatensystem die Hauptdiagonale ein (entspricht dem Graphen von $f(x) = x$). Exemplarisch wird hier die Folge $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 2$ behandelt, dementsprechend ist die Hilfsfunktion hier f mit $f(x) = 2\sqrt{x} + 2$.





Dann trägt man den Wert des ersten Folgegliedes auf die Abzissenachse ein und verbindet ihn mit der entsprechenden Funktion anhand eines vertikalen Striches. Der Ordinatenwert, der so erhalten wird (Punkt A), entspricht dem Wert von a_1. Um den Vorgang erneuern zu können, muss der gefundene Wert wieder auf die Abzissenachse, dazu benutzt man die Hauptdiagonale als Ŝpiegel". Ein horizontaler Strich bis zur Hauptdiagonale (zum Punkt B) und ein vertikaler bis zur Abzissenachse lösen das Problem. So ist der Wert von a_1 aud der Abzissenachse, dort wird er für den nächsten Schritt benötigt.

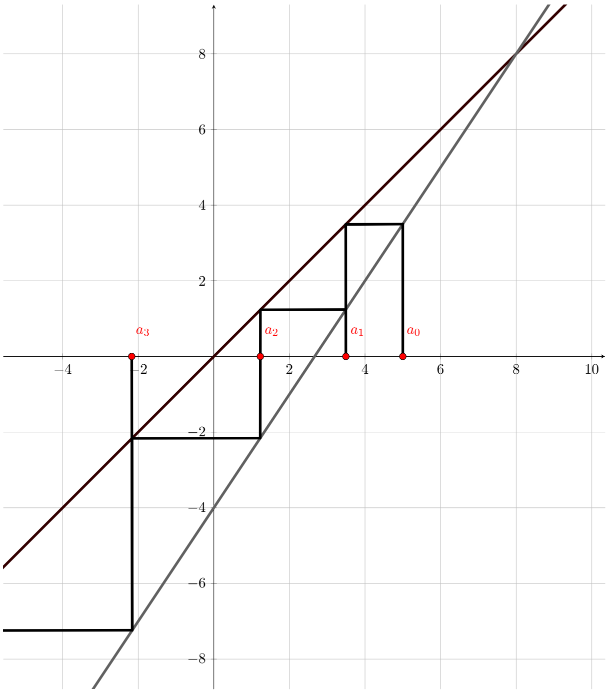
Dasselbe muss mehrmals wiederholt werden, so wird jeweils das nächste Folgeglied auf die Abzissenachse abgebildet (rote Punkte). Daraus kann man dann eine Tendenz erkennen, die die Entwicklung der Folgeglieder beschreibt. Je nach dem, was für eine Tendenz zu erkennen ist, kann man verschiedene Schlüsse bezüglich der Entwicklung der Folge schließen. In diesem Falle wird deutlich, dass die Folge konvergiert, der Grenzwert ist die Schnittstelle zwischen der Hilfsfunktion und der Hauptdiagonalen, es fehlt nur noch diesen zu berechnen.

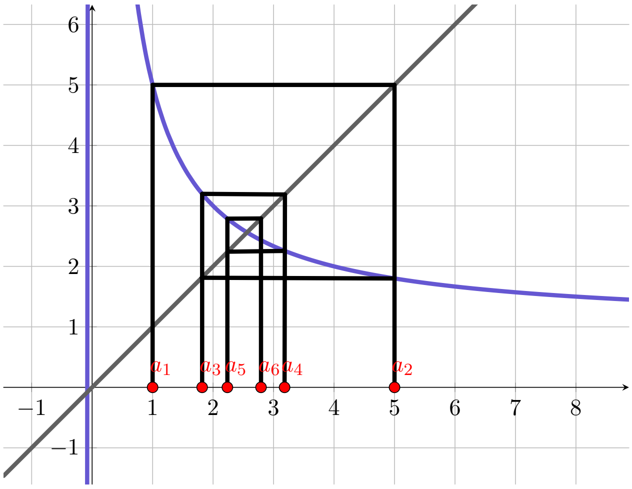


$$h(x) = x; \quad f(x) = 2\sqrt{x} + 2$$
$$h(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = \left(\frac{2+\sqrt{12}}{2}\right)^2$$
$$g = x_1$$

Es gibt andere mögliche Tendenzen, hier ein paar Beispiele:

Die divergierende Treppe, es gibt also keinen Grenzwert, man kann den uneigendlichen Grenzwert aber ablesen, hier ist der Grenzwert der Folge a_n (mit $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n - 4$ und $a_0 = 5$) $-\infty$





Die konvergierende Spirale, es gibt also einen Grenzwert, den man erneut mit der Schnittstelle zwischen Funktion und Hauptdiagonale ermitteln kann. Hier konvergiert die Folge a_n mit $a_{n+1} = \frac{4}{a_n} + 1$ und $a_1 = 1$

Bemerkung:

Dieses Verfahren kann ausschließlich bei rekusiven Folgen angewendet werden, bei denen keine zusätzliche Abhängigkeit von n vorliegt (Beispiel: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4n + 3$) oder die Rekursivitätsebene den 1. Grad überschreitet, was bedeutet, dass a_n nicht nur in Abhängigkeit von a_{n-1} beschrieben wird, sondern von anderen Rekursivitätsebenen wie a_{n-2} (Beispiel: die Fibonacci-Folge).

GTR-Tipp

Mit den GTR ist dieses Verfahren auch möglich, die Arbeit der Fertigstellung der Striche wird vom Rechner übernommen. Das Bild ist vom Benutzer nur noch zu deuten, gegebenenfalls ist die Schnittstelle auszurechnen.

- Der Rechner muss auf SEQ stehen
- in Y= die rekursive Folge angeben
- In 2nd FORMAT von Time auf Web stellen
- TRACE verwenden

- Sooft auf ENTER drücken, bis ausreichend Striche zu sehen sind.

1.2 Auffällige Folgen

1.2.1 Arithmetische Folgen

Definition 1.2.1

Eine Folge wird arithmetisch genannt, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:
   $a_n = a_{n-1} + d$
2. Explizite Darstellung:
   Mit Startglied a_0: $a_n = a_0 + n \cdot d$
   Mit Startglied a_1: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
   Mit Startglied a_x: $a_n = a_x + (n-x) \cdot d$

Bemerkung:

Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist $a_n = a_p + (n-p) \cdot d;\ n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:

$a_n = a_{n-1} + 3;\ a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 + n \cdot 3 = 3n$

Bemerkung:

Jedes Folgeglied einer solchen Folge ist das arithmetische Mittel seines Vorgängers und Nachgängers: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

1.2.2 Geometrische Folgen

Definition 1.2.2

Eine Folge wird geometrisch genannt, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

- Rekursive Darstellung:
  $a_n = a_{n-1} \cdot q$
- Explizite Darstellung:
  Mit Startglied a_0: $a_n = a_0 \cdot q^n$
  Mit Startglied a_1: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
  Mit Startglied a_x: $a_n = a_x \cdot q^{n-x}$

Bemerkung:

Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist $a_n = a_p \cdot q^{n-p}; n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:

$a_n = a_{n-1} \cdot 3; a_0 = 2 \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^n$

Bemerkung:

Jedes Folgeglied einer solchen Folge ist das geometrische Mittel seines Vorgängers und Nachgängers: $a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

1.3 Klassifizierung von Folgen

1.3.1 Monotonie

Definition 1.3.1

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt monoton $\begin{cases}\text{steigend/wachsend} \\ \text{fallend/abnehmend}\end{cases}$ wenn $\begin{cases} a_{n+1} \geqslant a_n \\ a_{n+1} \leqslant a_n \end{cases}$.

Gelten dabei sagar **strikte** Ordnungsrelationen ($>$ oder $<$), dann ist (a_n) **streng** monoton wachsend bzw. abnehmend.

Strategie:

- Das Vorzeichen von $a_{n+1} - a_n$ bestimmen, ist es $\leqslant 0$ dann ist die Folge fallend, ist es $\geqslant 0$, dann ist die Folge wachsend.
- $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mit 1 vergleichen, ist es $\leqslant 1$, dann ist die Folge fallend, ist es $\geqslant 1$, dann ist die Folge wachsend.

Beispiel:

Untersucht wird die Monotonie der Folge $a_n = \frac{8n}{n^2+1}$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{8(n+1)}{(n+1)^2+1} - \frac{8n}{n^2+1} \\
&= \frac{8n+8}{n^2+2n+1+1} - \frac{8n}{n^2+1} \\
&= \frac{8n^3+8n^2+8n+8-(8n^3+16n^2+16n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \\
&= \frac{-8n^2-8n+8}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \\
&= -\frac{8(n^2+n-1)}{\underbrace{(n^2+2n+2)(n^2+1)}_{\geqslant 2 \forall n \in \mathbb{N}}} < 0 \text{ für } (n^2+n+1) > 0 \Leftrightarrow \text{ für } (n \geqslant 1)(\text{weil } n \in \mathbb{N})
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ a_n ist für $n \in \mathbb{N}$ weder steigend noch fallend.
a_n ist für $n \in \mathbb{N}^*$ streng monoton fallend.

1.3.2 Beschränktheit

Definition 1.3.2

Man nennt eine Folge $(a_n)n \in \mathbb{N}$ nach $\begin{cases}\text{oben} \\ \text{unten}\end{cases}$ **beschränkt**

wenn es eine Zahl $\begin{cases} S \in \mathbb{R} \\ s \in \mathbb{R} \end{cases}$ gibt mit $\begin{cases} a_n \leqslant S \\ a_n \geqslant s \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.
S ist eine obere Schranke
s ist eine untere Schranke

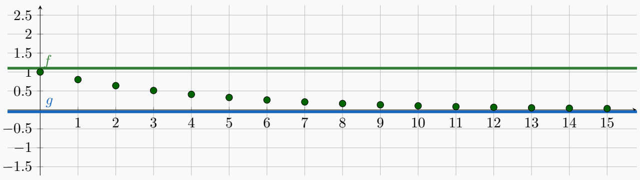
Definition 1.3.3

Die kleinste obere Schranke ist das **Supremum** der Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.
Die größte untere Schranke ist das **Infimum** der Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Definition 1.3.4

Eine nach **oben und unten** beschränkte Folge heißt **beschränkte** Folge (suite bornée).

Beispiel:



Die abgebildete Folge $a_n = 0,8^n$ besitzt als mögliche obere Schranke die Gerade $f : y = 1,1$, unten die Gerade $g : y = -0,05$. a_n ist also **beschränkt**.

Unbeschränktheit

Beispiel:

Unbeschränktheit mit Abschätzungen zeigen:

$$a_n = \frac{n^2}{n+2} \geqslant \frac{n^2}{n+2n} = \frac{n^2}{3n} = \frac{1}{3}n \qquad \forall n \geqslant 1$$

$u_n = \frac{1}{3}n$ ist eine unbeschränkte Folge, a_n ist ab einem bestimmten Glied (a_1) immer darüber: a_n ist ebenfalls unbeschränkt, sie divergiert nach $+\infty$

1.3.3 Konvergenz

Definition 1.3.5

Eine Folge $(a_n)n \in \mathbb{N}$ ist konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt.
Man sagt a_n konvergiert gegen $g = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

Theorem 1.3.1

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(a_n - g) = 0$$

Wörtlich: Eine Folge (a_n) konvergiert gegen g genau dann, wenn $(a_n - g)$ gegen den Wert 0 konvergiert.

Beispiel:

$a_n = \dfrac{3n^4 - 1}{n^4}$

a_n hat vermutlich den Grenzwert $g = 3$.

$a_n - 3 = \dfrac{3n^4 - 1}{n^4} - 3 = \dfrac{3n^4 - 1 - 3n^4}{n^4} = -\dfrac{1}{n^4} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

Monotone Konvergenz

Theorem 1.3.2

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Beweis:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Folge monoton wachsend sei und sei a die kleinste obere Schranke (Supremum).

- Sei $\varepsilon \geqslant 0$ dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke der Folgeglieder $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.
- (a_n) ist wachsend
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} \geqslant a - \varepsilon$
- $\forall n > n_0$ gilt $a - \varepsilon < a_{n_0} \leqslant a_n < a + \varepsilon \qquad —-a$

  $\Leftrightarrow -\varepsilon < a_{n_0} - a \leqslant a_n - a < \varepsilon$
- $\Rightarrow \lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$

Analog kann man mit einer nach unten beschränkten monoton fallenden Folge argumentieren. □

Besser zu verstehen, wenn man es so sagt:

Theorem 1.3.3

$$\exists\, S \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \;:\; a_n \leqslant a_{n+1} \;\wedge\; a_n \leqslant S$$

$$\Rightarrow \exists\, g \in \mathbb{R} \;:\; \lim_{n \to \infty} a_n = g \;\wedge\; g \leqslant S$$

und

$$\exists\, s \in \mathbb{R} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \;:\; a_n \geqslant a_{n+1} \;\wedge\; a_n \geqslant s$$

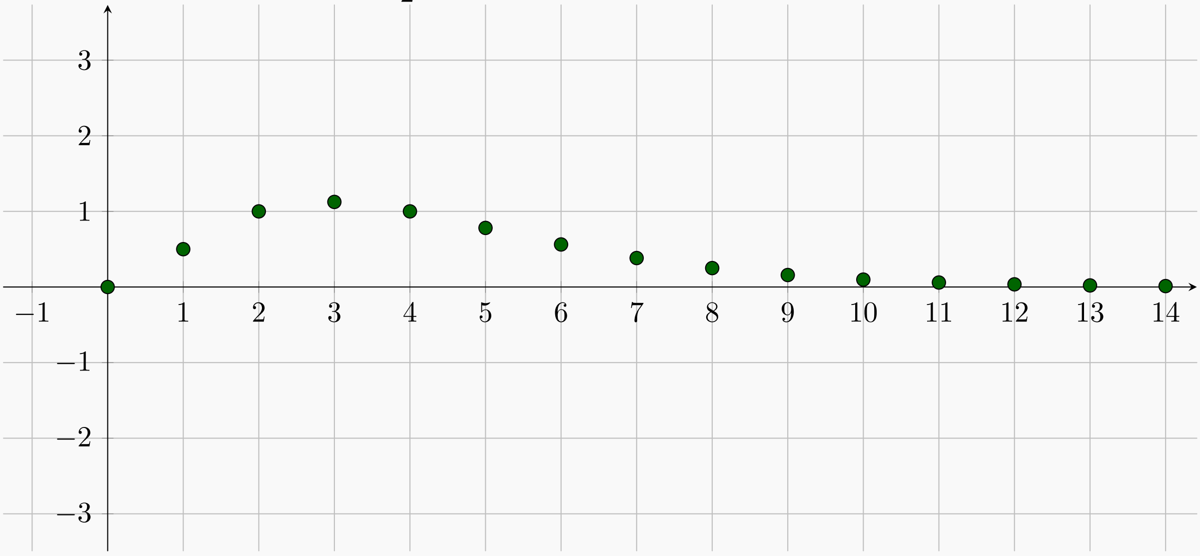
$$\Rightarrow \exists\, g \in \mathbb{R} \;:\; \lim_{n \to \infty} a_n = g \;\wedge\; g \geqslant s$$

<u>Wörtlich:</u>

- Eine monoton **wachsende** Folge (a_n) ist genau dann **konvergent**, wenn sie nach **oben beschränkt** ist. Ihr Grenzwert g ist kleiner oder gleich der oberen Schranke $S \in \mathbb{R}$.
- Eine monoton **fallende** Folge (a_n) ist genau dann **konvergent**, wenn sie nach **unten beschränkt** ist. Ihr Grenzwert g ist größer oder gleich der oberen Schranke $s \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

Untersucht wird die Folge $u_n = \dfrac{n^2}{2^n}$



- <u>Beschränktheit:</u>

  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geqslant 0$, für $n = 0, \quad a_n = 0 \Rightarrow$ die untere Schranke $s = 0$ ist das Infimum.

- <u>Monotonie:</u>

$$\begin{aligned}
\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2} \\
&= \frac{(n+1)^2}{2n^2} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leqslant \frac{8}{9} < 1 \qquad \forall n \geqslant 3
\end{aligned}$$

N.R.: $\quad 1 + \dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{4}{3} \qquad \forall n \geqslant 3$

$\Rightarrow \quad \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^2 \leqslant \dfrac{16}{9}$

Somit ist u_n ab dem 3. Folgeglied streng monoton fallend $\Rightarrow S = u_3 = \dfrac{9}{8}$

$\Rightarrow a_n$ konvergiert gegen den Grenzwert $g = 0$

Divergenz

Definition 1.3.6

Eine Folge (a_n), die keinen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ besitzt (nicht kovergiert), wird **divergent** genannt.

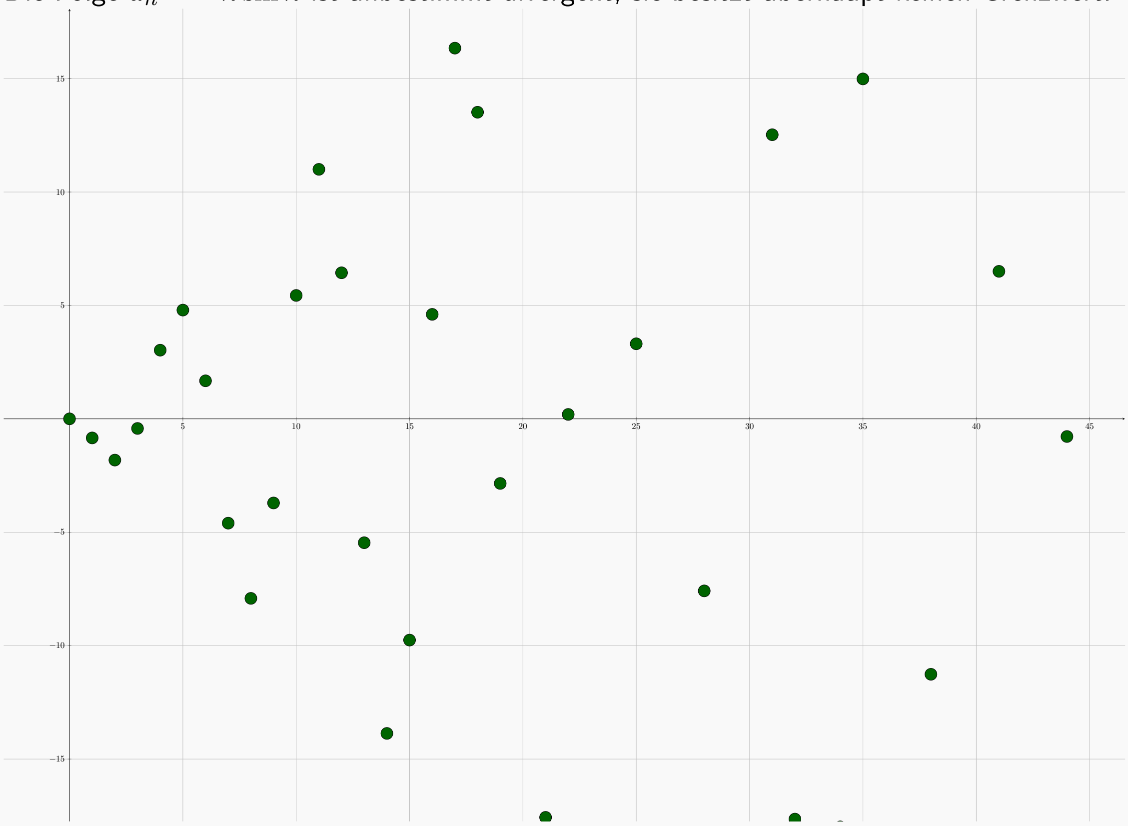
Kann man ihr trotzdem einen Grenzwert wie $\pm\infty$ zuordnen ist sie **bestimmt divergent**.
Besitzt die Folge überhaupt keinen Grenzwert, so heißt sie **unbestimmt divergent**.

Bemerkung:

Man nennt einen Grenzwert $g = +\infty$ oder $g = -\infty$ einen **uneigentlichen Grenzwert**.

Beispiel:

- Die Folge $u_n = -4n^5$ ist bestimmt divergent ($g = -\infty$).
- Die Folge $a_n = -n \sin n$ ist unbestimmt divergent, sie besitzt überhaupt keinen Grenzwert.



Epsilon-n0-Definition

Definition 1.3.7

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \;\Leftrightarrow\; \forall\varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geqslant n_0 \;:\; |a_n - g| < \varepsilon$$

Strategie:

- den Ausdruck $|a_n - g|$ vereinfachen
- die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ zu einer Ungleichung der Form $n >$ ... umformen.
- man hat jetzt die Bedingung für n, n_0 ist das erste Glied, dass sie erfüllt.
- Beweis führen: sei $n \geqslant n_0$ beliebig, dann ist $|a_n - g| = ... < \varepsilon$.

Bemerkung:

Wenn ein bestimmtes ε angegeben ist, dann verwendet man, um das gesuchte n_0 zu finden die Gaußklammern. Angewendet werden diese $\lfloor x \rfloor$ um eine Zahl abzurunden, diese $\lceil x \rceil$ um aufzurunden. In unserem Fall wollen wir eine ganze Zahl, für die die Ungleichung auf jeden Fall erfüllt wird, deshalb rundet man auf also Gaußklammer $\lceil x \rceil$.

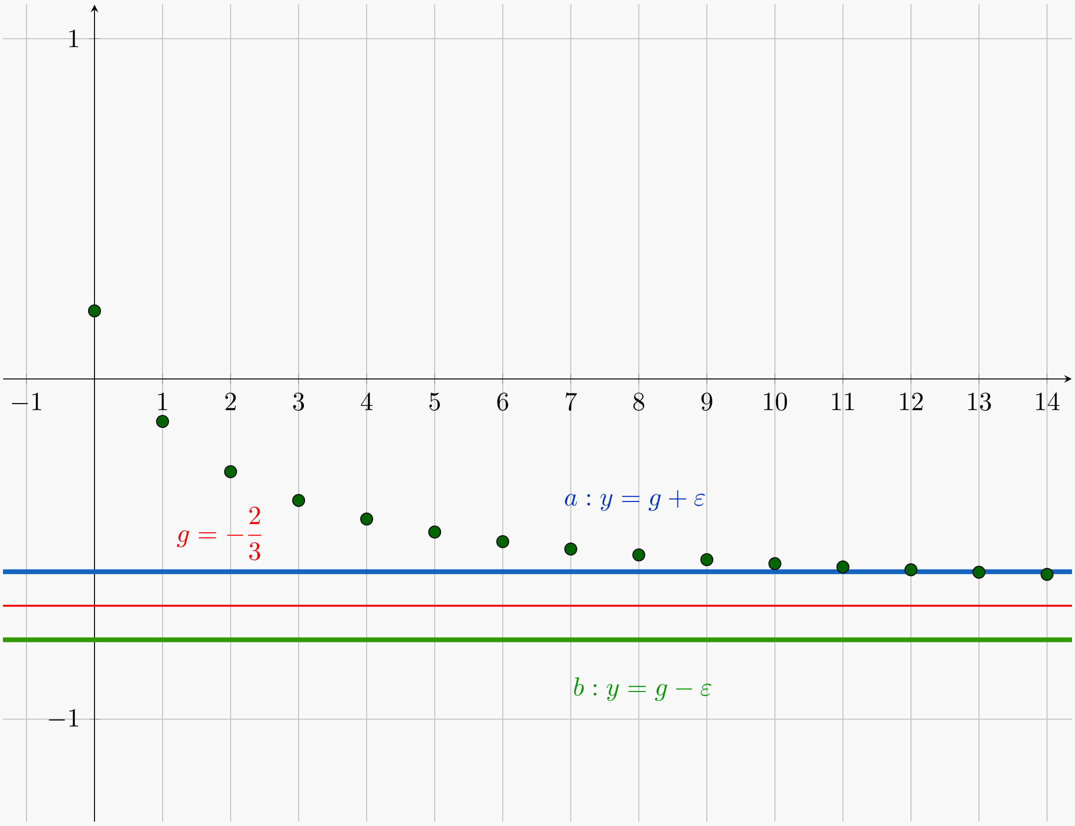
Bemerkung:

Auch Divergenz kann so gezeigt werden:

$$\forall a \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon > 0\ \forall n_0 \in \mathbb{N}\ \exists n \geqslant n_0 \ :\ |a_n - a| \geqslant \varepsilon$$

Beispiel:

Die Folge $a_n = \dfrac{1-2n}{5+3n}$ wird untersucht, es wird geschätzt, dass (a_n) gegen $-\dfrac{2}{3}$ konvergiert.



- $$\begin{aligned} |a_n - g| &= \left|\frac{1-2n}{5+3n} + \frac{2}{3}\right| \\ &= \left|\frac{3(1-2n)+2(5+3n)}{3(5+3n)}\right| \\ &= \left|\frac{3-6n+10+6n}{15+9n}\right| \\ &= \left|\frac{13}{15+9n}\right| \\ &= \frac{13}{15+9n} \end{aligned}$$

- $$\begin{array}{cccc} & \dfrac{13}{15+9n} & < & \varepsilon \\ \Leftrightarrow & 13 & < & \varepsilon(15+9n) \\ \Leftrightarrow & 13-15\epsilon & < & 9n\varepsilon \\ \Leftrightarrow & n & > & \dfrac{13-15\varepsilon}{9\varepsilon} \end{array}$$

- $n_0 = \left\lceil \dfrac{13-15\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rceil$

- Sei ε beliebig und $n \geqslant n_0$, dann gilt $|a_n - g| = \left|\dfrac{1-2n}{5+3n} + \dfrac{2}{3}\right| = \dfrac{13}{15+9n} < \epsilon$

Grenzwertsätze

Die Grenzwertsätze führen die Grenzwerte komplizierter Folgen auf einfachere Grenzwertbetrachtungen bekannter Folgen zurück.

Theorem 1.3.4

Seien u_n und v_n sind konvergente Folgen mit Grenzwerten U und V.

- Die Folge $u_n \pm v_n$ ist konvergent und besitzt den Grenzwert $U \pm V$.
- Die Folge $u_n \cdot v_n$ ist konvergent und besitzt den Grenzwert $U \cdot V$.
- Die Folge $\frac{u_n}{v_n}$ ist konvergent und besitzt für $V \neq 0$ den Grenzwert $\frac{U}{V}$.

Beispiel:

$$a_n = \frac{4\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} - 2n} = \frac{\cancel{n}\left(\frac{4}{\sqrt{n}} - 1\right)}{\cancel{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)} = \frac{\frac{4}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2}$$

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}$$

Kapitel 2

Reihen

by Clara

Definition 2.0.1

Eine Reihe ist eine Folge, deren Glieder die Partialsummen einer anderen Folge ist. Das bedeutet, dass das $n-te$ Glied der Reihe, die Summe der ersten n Glieder einer anderen Folge ist.
Man hat also:

- Mit Startglied a_0: $s_n = \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i$
- Mit Startglied a_1: $s_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$
- Mit Startglied a_x: $s_n = \sum\limits_{i=x}^{x+n-1} a_i$

Bemerkung:

In manchen Fällen steht s_n für die Partialsumme einer anderen Folge bis zum $n-ten$ Glied. Dann gilt für ein beliebiges Startglied a_x der Folge: $s_n = \sum\limits_{i=x}^{n} a_i$

2.1 Artithmetische Reihen

2.1.1 Gauß'sche Summenformel

Die Gauß'sche Summenformel bezeichnet die Summe der n ersten natürlichen Zahlen, also:
$1 + 2 + 3 + ... + n = \sum\limits_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

Begründung:

n	1	2	3	4	...
1	n	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...
$\sum$ $n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	...

So sieht man also, dass wenn man die vorher bestimmte Reihe mit sich selbst addiert (ein Mal davon "falschrum"), man n Mal $n+1$ bekommt. Um dann den Wert einer einzelnen Reihe zu bekommen teilt man durch zwei.

Bemerkung:

Gauß'sche Summenformel ist ein Spezialfall der arithmetischen Reihe, ihre Glieder werden **Dreieckszahlen** genannt.

Beweis:

Um zu beweisen, dass für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = g(n)$$

gilt, reicht es aus,

$$g(n) - g(n-1) = f(n)$$

für alle positiven n und

$$g(0) = 0$$

zu zeigen. In der Tat trifft dies hier zu:

$$g(n) - g(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1-n+1)}{2} = \frac{n \cdot 2}{2} = n = f(n)$$

für alle n und $g(0) = \dfrac{0 \cdot 1}{2} = 0$

Quelle: Wikipedia (Gaußsche Summenformel) □

Bemerkung:

Auch ein Beweis durch vollständige Induktion ist möglich, dieser wäre sogar empfehlenswert, da er einfacher durchzuführen ist (Siehe Kapitel 10)

2.1.2 Allgemein

Definition 2.1.1

Wenn s_n die Summe der ersten n Folgeglieder einer arithmetische Folge ist, heißt sie arithmetische Reihe.
Sei eine arithmetische Folge a mit Startglied a_x und s, die entsprechende Reihe, dann gilt

$$s_n = \frac{n \cdot (a_x + a_{x+n-1})}{2}$$

Bemerkung:

1. Am häufigsten wird verwendet:
   - Mit Startglied a_0 : $s_n = \dfrac{n \cdot (a_0 + a_{n-1})}{2}$
   - Mit Startglied a_1 : $s_n = \dfrac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$
2. Alternativ kann auch folgende Darstellung verwendet werden:
   $s_n = \dfrac{n \cdot (2a_x + (n-1) \cdot d)}{2}$

Beweis:

Sei eine arithmetische Folge a, mit Startglied a_x und Differenz d, und s, die entsprechende Reihe, dann gilt

$$\begin{aligned}
s_n &= a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + ...a_{x+n-1} \\
&= a_x + (a_x + d) + (a_x + 2d) + ... + (a_x + (n-1) \cdot d) \\
&= n \cdot a_x + d + 2d + ... + (n-1) \cdot d \\
&= n \cdot a_x + (1 + 2 + ... + (n-1)) \cdot d \qquad \text{(Gauß)} \\
&= n \cdot a_x + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d \\
&= n \cdot \frac{2a_x + (n-1) \cdot d}{2} \\
&= n \cdot \frac{a_x + \overbrace{a_x + (n-1) \cdot d}^{a_{x+n-1}}}{2} \\
&= n \cdot \frac{a_x + a_{x+n-1}}{2}
\end{aligned}$$

□

2.2 Geometrische Reihen

Definition 2.2.1

Wenn s_n die Summe der ersten n Folgeglieder einer geometrischen Folge ist, heißt sie geometrischen Reihe.
Sei eine geometrische Folge a mit Startglied a_x und s, die entsprechende Reihe, dann gilt
$s_n = \sum_{i=x}^{n+x-1} a_i = a_x \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Bemerkung:

Am häufigsten wird verwendet:

- Mit Startglied a_0 : $s_n = a_0 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$
- Mit Startglied a_1 : $s_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$

Beweis:

<u>Allgemein:</u>

$$\begin{aligned}
(1-q)(1+q+q^2+q^3+...+q^n) &= (1-q) + (q-q^2) + (q^2-q^3) + (q^3-q^4) + ... + (q^n - q^{n+1}) \\
&= 1 + (-q+q) + (-q^2+q^2) + (-q^3+q^3) + ... + (-q^n+q^n) - q^{n+1} \\
&= 1 - q^{n+1}
\end{aligned}$$

Man hat also $\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Entsprechend ergibt sich $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + ... + q^{n-1}}_{n \quad Summanden} = \frac{1-q^n}{1-q}$

Somit gilt für eine Reihe s, die die Partialsumme einer geometrischen Folge a, mit Quotient q und

Anfangsglied a_x, ist, folgendes:

$$
\begin{aligned}
s_n &= \sum_{i=x}^{x+n-1} a_i \\
&= a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + \ldots + a_{x+n-1} \\
&= a_x + a_x \cdot q + a_x \cdot q^2 + \ldots + a_x \cdot q^{n-1} \\
&= a_x \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \\
&= a_x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\
&= a_x \cdot \frac{1-q^n}{1-q}
\end{aligned}
$$

$\square$

Kapitel 3

Funktionsuntersuchung

by Bruno

Die **Analysis** (griechisch análysis, deutsch „Auflösung“) ist ein Teilgebiet der Mathematik. Die Untersuchung von reellen und komplexen Funktionen hinsichtlich Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit zählt zu den Hauptgegenständen der Analysis. Die hierzu entwickelten Methoden sind in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften von großer Bedeutung.

3.1 Stetigkeit

Definition 3.1.1

Eine Funktion ist stetig an der Stelle x_0, wenn:

1. $x_0 \in D$
2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ existiert
3. $\lim\limits_{x \to x_0^\pm} f(x) = f(x_0)$

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft. Die Funktion f heißt dann stetig, wenn sie an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge stetig ist.

Bemerkung:

Theorem 3.1.1

Ist f stetig und $I \subset \mathbb{R}$ ein reelles Intevall, dann ist $f(I)$ ebenfalls ein Intervall. Ist f zudem streng monoton, so ist die Umkehrfunktion f^{-1} ebenfalls stetig.

Bemerkung:

Stetige Funktionen haben sehr angenehme Eigenschaften, die intuitiv mit der "Definition" des Stiftes, welcher beim Zeichnen des Funktionsgraphen nicht angehoben wird, im Zusammenhang stehen.
So sagt der **Zwischenwertsatz** aus, dass eine reelle, im Intervall $[a; b]$ stetige Funktion f jeden Wert zwischen $f(a)$ und $f(b)$ ainnimmt.
Haben a und b zudem verschiedene Vorzeichen, so verspricht der Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle von f in diesem abgeschlossenen Intervall. Dieser Sonderfall ist als **Nullstellensatz** von Bolzano bekannt.

Theorem 3.1.2: Zwischenwertsatz

Ist $f : [a; b] \Rightarrow$ eine stetige reelle Funktion die auf einem Intervall definiert ist, dann existiert zu **jedem** $s \in [f(a); f(b)]$ bzw. $[f(b); f(a)]$ (vom Vorzeichen der Funktionswerte abhängig) **ein** $c \in [a; b]$ mit

$f(c) = s$

Stetige Fortsetzungen

Beim Vereinfachen von gebrochenrationalen Funktionen ist Vorsicht geboten, denn eine hebbare Definitionslücke "aufzuheben" verändert den Definitionsbereich der Funktion. Die daraus resultierende Funktion wird **stetige Fortsetzung** genannt.

3.2 Differenzierbarkeit

Definition 3.2.1

Eine Funktion ist differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$, wenn der beitseitige Grenzwert des Differenzenquotienten für $h \to 0$ existiert. Anschaulich soll Die Funktion links und rechts des x_0 die selbe Ableitung haben.
$\lim\limits_{h \to 0^+} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim\limits_{h \to 0^-} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$
Dieser Grenzwert ist die **Ableitung** von f an der Stelle x_0.
Die Funktion heißt differenzierbar, wenn sie $\forall x \in D$ differenzierbar ist.

Die Funktion $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar, da bei der Stelle $x_0 = 0$ der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ($\lim\limits_{h \to 0^-} f'(x_0) = -1$) nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert (1) übereinstimmt.

3.2.1 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist sie an dieser Stelle auch stetig.
Die Umkehrung gilt erst einmal nicht, aber es gibt eine verneinende Aussage: Ist f an der Stelle x_0 nicht stetig, so ist sie hier auch nicht differenzierbar.

Theorem 3.2.1

f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig.

Bemerkung:

Ist eine Funktion differenzierbar und ist ihre Ableitung zusätzlich stetig, dann wird sie **Stetig differenzierbar** genannt.

3.3 Ableitungsregeln

Ein Ableitungswert gibt die Steigung an einem bestimmten Punkt an. Im Allgemeinen und zum Beweisen wird der Differentenquotient benötigt, um eine Ableitungsfunktion zu definieren, es geht aber in vielen Fällen schneller.

Theorem 3.3.1: Produktregel

Sind die Funktionen u und v an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, dann ist die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ bei x_0 auch differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0+h)+u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0+h)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}v(x_0+h)\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}\lim_{h\to 0}u(x_0)\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\\
&= v(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}+u(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}\\
&= u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.3.2: Quotientenregel

Sind die Funktionen u und v an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, dann ist die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bei x_0 auch differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0)\cdot v(x_0) - u(x_0)\cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)}-\frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x_0+h)v(x_0)}{v(x_0+h)v(x_0)}-\frac{u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0)v(x_0+h))}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0+h)v(x_0)h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)-u(x_0)v(x_0+h)+u(x_0)v(x_0)}{v(x_0+h)v(x_0)h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x_0+h)v(x_0)-u(x_0)v(x_0)}{h}-\frac{u(x_0)v(x_0+h)-u(x_0)v(x_0)}{h}}{v(x_0+h)v(x_0)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0)-u(x_0)\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0+h)v(x_0)}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{\lim_{h\to 0}\frac{u(x_0+h)-u(x_0)}{h}v(x_0)-u(x_0)\lim_{h\to 0}\frac{v(x_0+h)-v(x_0)}{h}}{v(x_0)v(x_0)}\\
&= \frac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{(v(x_0))^2}
\end{aligned}$$

□

Theorem 3.3.3: Kettenregel

Funktion v sei an der Stelle x_0 differenzierbar und die Funktion u an der Stelle $v(x_0)$. Dann ist die Funktion $f = u \circ v$ mit der Gleichung $f(x) = u(v(x))$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Es gilt:

$$f'(x_0) = v'(x_0) \cdot u'(v(x_0))$$

3.3.1 Tangente und Normale

Theorem 3.3.4

Ist die Funktion f differenzierbar an der Stelle x_0, dann hat die **Tangente** an dem Graphen von f die Steigung $a = f'(x_0)$ und den Y-Achsenabschnitt $b = -f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$. Daraus ergibt sich die Tangentengleichung:

$$T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Bemerkung:

Eine Merkhilfe dazu ist das Wort „Fuxufu“, wobei „u“ dem x_0 entspricht.

Definition 3.3.1

Die **Normale** an der Stelle x_0 bezeichnet die Gerade, die genau senkrecht zur Tangente steht und diese im Berührpunkt des Graphen schneidet.

$$N_{x_0}(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

3.4 Vollständige Funktionsuntersuchung

3.4.1 Definitionsbereich

Am Anfang muss der Definitionsbereich angegeben werden, um eventuelle Divisionen durch null zu vermeiden. Man achte dabei auch auf hebbare Definitionslücken (siehe "Stetigkeit")

3.4.2 Achsenschnittpunkte

Es gibt zwei Arten von Achsenschnittpunkten:

1. X-Achsenschittpunkte (Nullstellen), die man mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung für Nullstellen $f(x) = 0$ herausfindet
2. Y-Achsenschnittpunkt, den man durch einsetzen bekommt: $f(0)$

3.4.3 Symmetrie

Y-Achsensymmetrie

Durch Lösung der Gleichung $f(x) = f(-x)$ findet man heraus ob die Funktion achsensymmetrisch ist.
Zudem ist die Funktion dann achsensymmetrisch, wenn nur gerade Exponenten vorhanden sind.
Die Funktion nennt man **gerade**.

Symmetrie zum Origo

Durch Lösung der Gleichung $f(x) = -f(-x)$ findet man heraus ob die Funktion punktsymmetrisch ist. Zudem ist die Funktion dann punktsymmetrisch, wenn nur ungerade Exponenten vorhanden sind.
Die Funktion nennt man **ungerade**.

Symmetrie zu einem beliebigen Punkt

Definition 3.4.1

Symmetrie zu einem Punkt liegt vor, wenn für den Punkt $P(x_0|y_0)$ gilt:

$$f(x_0 + h) - y_0 = -f(x_0 - h) + y_0$$

Beispiel:

$f(x) = \frac{x}{x-1}$
Aus dem Schnittpunkt der Asymptoten kann man vermuten, dass $f(x)$ achsensymmetrisch zum Punkt $P(1|1)$ ist.

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow f(x_0+h) - y_0 &= \tfrac{1+h}{1+h-1} - 1 = \tfrac{1}{h} \\ \Rightarrow -f(x_0-h) + y_0 &= -[\tfrac{1-h}{1-h-1} + 1] = \tfrac{1}{h} \end{aligned}\right\} \tfrac{1}{h} = \tfrac{1}{h} \text{ Die Funktion } f \text{ ist zu } P \text{ symmetrisch.}$$

3.4.4 Grenzwerte

Definition 3.4.2

Das Symbol $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ mit $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\pm\infty$ eingeschlossen) bezeichnet den Limes der reellen Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für den Grenzübergang von x gegen eine Stelle x_0, wobei x_0 nicht umbedingt in der Definitionsmenge von f enthalten sein muss.
Eine Zahl $g \in \overline{\mathbb{R}}$ ist der Grenzwert einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ für $x \to x_0$, falls für jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Folgegliedern aus D und Grenzwert x_0 die Folge $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert g hat.

$$lim_{x\to x_0} f(x) = g$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n\to\infty} a_n = x_0 : \lim_{n\to\infty} f(a_n) = g$$

Theorem 3.4.1: Règle de l'Hôpital (Für Grenzwerte des Typs $0/0$ und ∞/∞)

Seien zwei differenzierbare Funktionen f und g und gelte entweder

$$\lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \qquad \text{ODER} \qquad \lim_{x\to x_0} g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) = 0$$

(sie sind also entweder konvergent gegen 0 oder bestimmt divergent) dann gilt:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Bemerkung:

1. Falls die Funktionsvorschrift nicht direkt ein Bruch ist (siehe 2. Beispiel) sollte man diese erst zu einem Bruch umformen, um mit der Hospital-Regel fortfahren zu können.
2. ACHTUNG: Die Hospital-Regel ist nicht umkehrbar!

Beispiel:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \qquad x_0 = 0 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x\to x_0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$g(x) = x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \qquad \text{für } x \to \infty \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{1\}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{x\to\infty} g(x) &= \lim_{x\to\infty} x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x-1}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} \\
&= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2}{x^2-1} = 2
\end{aligned}$$

3.4.5 Asymptoten

Eine Asymptote ist eine Gerade oder Kurve, die sich dem Graphen einer Funktion immer weiter annähert. Dabei unterscheidet man verschiedene Fälle:

Definition 3.4.3

1. **Senkrechte Asymptote:**

   Hat f an der stelle x_0 eine Polstelle, und gilt:

   $$\lim_{x\to x_{0}\pm} f(x) = \pm\infty$$

   dann ist die Gerade $x = x_0$ eine senkrechte Asymptote von f.

2. **Waagerechte Asymptote:**

   Konvergiert f für $x \to \infty$ gegen eine reelle Zahl $g \in \mathbb{R}$, das heißt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = g$, dann ist die Gerade $y = g$ die **waagerechte** Asymptote von f. Das Gleiche gilt für $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

Bei gebrochenrationalen Funktionen ist dies der Fall, wenn der Zählergrad kleiner (dann ist $g = 0$) oder gleich dem Nennergrad m ist.

3. **Schräge Asymptote:**

   Sie ist eine Gerade ($g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), der sich f mit $|x| \to \infty$ beliebig annähert:

   $$\lim_{x\to\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ oder } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

   Bei einer gebrochenrationalen Funktion ist der "Fehlergrad", das heißt der Abstand von g zu f durch den Rest der Polynomdivision von Zähler mit Nenner gegeben.

4. **Asymptotische Kurven:**

   Indem man in der Definition der schrägen Asymptote auch Polynome zulässt, erhält man Näherungskuven, die die gleiche Limesbedingung erfüllen müssen:

   $$\lim_{x\to\infty} [f(x) - P(x)] = 0 \text{ oder } \lim_{x\to-\infty} [f(x) - P(x)] = 0$$

   Diese erscheinen bei gebrochenrationalen Funktion mit $n > m + 1$.

3.4.6 Monotonie

Definition 3.4.4

Eine stetige Funktion f mit $a, b \in I \subset D_f$ ist:

1. ... auf dem Intervall I monoton wachsend, wenn $\forall a < b : f(a) \leqslant f(b)$
2. ... auf dem Intervall I monoton fallend, wenn $\forall a < b : f(a) \geqslant f(b)$

Wenn die Ordnungsrelation strikt sind, dann wird die Funktion als **streng monoton** bezeichnet.
Die Funktion f hat eine Ableitungsfunktion f'. Falls f...

1. monoton wachsend auf I ist, dann ist $f'(x) \geqslant 0, \quad \forall x \in I$
2. monoton fallend auf I ist, dann ist $f'(x) \leqslant 0, \quad \forall x \in I$
3. konstant auf I ist, dann ist $f'(x) = 0, \quad \forall x \in I$

Beim Aufstellen der Monotonietabelle sind Definitionslücken zu beachten.
Es handelt sich dabei um eine Tabelle, die die Definitionsmenge in Intervalle mit monotonen Steigungsverhalten unterteilt wird. Das Monotonieverhalten verändert sich an Extrem- oder Polstellen.

Bemerkung:

f sei eine Funktion...

- dann ist die Zahl S obere Schranke, wenn $\forall x : f(x) \leqslant S$. f heißt in diesem Fall nach oben beschränkt. Die in diesem Fall kleinstmögliche Zahl wird **Supremum** genannt: $\sup f$
- dann ist die Zahl s untere Schranke, wenn $\forall x : f(x) \geqslant s$. f ist in diesem Fall nach unten beschränkt. Die in diesem Fall größtmögliche Zahl wird **Infimum** genannt: $\inf f$

Bemerkung:

Eine Funktion f ist...

- **konvergent**, wenn sie einen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ hat
- **bestimmt divergent**, wenn sie **keinen** reellen Grenzwert, also $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \pm\infty$
- **unbestimmt divergent**, wenn es keine Zahl $g \in \overline{\mathbb{R}}$ ($\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R}$ mit ∞ und $-\infty$) gibt mit $\lim_{x \to +\infty} f(x) = g$

Beispiel:

$f(x) = x \cdot \sin x$

3.4.7 Extremstellen

Für die Bestimmung von Extremstellen gilt es zwei Bedingungen zu überprüfen:
Hat an einer Stelle x_0 die erste Ableitung von f eine Nullstelle, also $f'(x_0) = 0$, dann handelt es sich um eine Extremstelle **oder** um einen Sattelpunkt. Diese Bedingung ist die notwendige Bedingung für eine Extremstelle. Mit ihr ist eine grobe Kategorisierung gemacht, eine Extremstelle ist noch nicht bewiesen.
Hat f' an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel oder ist $f''(x_0) \neq 0$, dann ist der Sonderfall des Wendepunktes ausgeschlossen und es handelt sich um deine Extremstelle. Es gilt also:

$$\exists!$$

$x_0 \in I \subseteq D_f : f(x_0) \geqslant oder \leqslant f(x) Der Punkt$ P(x₀|$f(x_0)$) heißt Hochpunkt oder Tiefpunkt. Diese Bedingung ist die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle.

3.4.8 Wendestellen

Für die Bestimmung von Wendestellen gilt es auch zwei Bedingungen zu überprüfen:
Hat an einer Stelle x_0 die zweite Ableitung von f eine Nullstelle, also $f''(x_0) = 0$, dann handelt es sich um eine Wendestelle **oder** um einen geraden Abschnitt. Diese Bedingung ist die notwendige Bedingung für eine Wendestelle.
Hat f'' an der Stelle x_0 einen Vorzeichenwechsel oder ist $f'''(x_0) \neq 0$, dann ist der Sonderfall ausgeschlossen und es handelt sich um deine Wendestelle. Der Punkt $W(x_0|f(x_0))$ heißt Wendepunkt. Diese Bedingung ist die hinreichende Bedingung für eine Wendestelle.

Bemerkung - NEW-Regel:

Eine Hilfsformel, die den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Ableitungen einfach darstellt ist die NEW-Regel:
N = Nullstellen
E = Extremstellen
W = Wendestellen

$$\begin{array}{lccccc} f & N & E & W & & \\ f' & & N & E & W & \\ f'' & & & N & E & W \end{array}$$

3.4.9 Funktionseinordnung

Definition 3.4.5

Jede Funktion f bildet auf verschiedene Weise eine Definitionsmenge D_f auf eine Wertmenge W_f ab. Hat eine Menge G eine größere Mächtigkeit (notiert $|G|$) als K, dann besitzt G mehr Elemente als K.

Dies gilt eigentlich nicht für überabzählbar unendlich große Mengen, diese sind theoretisch alle gleich groß (unendlich groß!).
Eine Funktion f ist ...

- **surjektiv**, wenn sie jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert annimmt. Das heißt, jedes Element der Zielmenge hat mindestens ein Urbild.

$$\forall y \in W_f \quad \exists x \in D_f : \quad f(x) = y$$

$|D_f| \geqslant |W_f|$. Beispiel: $f(x) = \sin x$

- **injektiv**, wenn zu jedem Element der Wertmenge höchstens ein (oder auch gar kein) Element der Definitionsmenge existiert. Zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 der Definitionsmenge bilden also nie auf den gleichen Term y der Wertmenge ab.

$$\forall x_1, x_2 \in D_f : \qquad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

ACHTUNG: Dies bedeutet **nicht**: $\forall x_1, x_2 \in D_f : \qquad x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$

$|D_f| \leqslant |W_f|$. Beispiel: $f(x) = 2x$ mit $D_f = \mathbb{Z}$

- **bijektiv**, wenn eine vollständige Paarbildung existiert. Jedes Element der Wertmenge besitzt genau ein Element der Definitionsmenge und jedes Element der Definitionsmenge besitzt genau ein Element der Wertmenge. Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn sie sowohl surjektiv, als auch injektiv ist.

$|D_f| = |W_f|$. Beispiel: $f(x) = x^3$

Bemerkung:

Ausführlichere Erklärungen hier, einfach auf die Links klicken:
UNI VORLESUNGSSKRIPT oder ÜBERSCHAUBAR(ER) MIT GRAPHEN

3.4.10 Umkehrbarkeit

Definition 3.4.6

Sei f eine Funktion mit $f : D_f \mapsto W_f$ mit $x \mapsto y$, dann ist die Funktion genau dann eindeutig umkehrbar, wenn es zu jedem $y \in W_f$ **genau ein** $x \in D_f$ existiert.
Wenn diese Funktion umkehrbar ist, dann existiert auch eine Umkehrfunktion $\overline{f}(x)$ die jedem $x \in W_f$ genau ein $y \in D_f$ zuordnet, analog zur Funktion, nur andersrum, also mit $y \mapsto x$.
Es gilt:

$$D_{\overline{f}=W_f} \text{ und } W_{\overline{f}} = D_f$$

Bemerkung:

Es gibt viele Funktionen (surjektive Funktionen) die nicht in ihrer vollständigen Definitionsmenge umkehrbar sind, zum Beispiel x^n mit n als gerade Zahl, $\sin(x), \tan(x)$, und viele mehr. Hier beschränkt man die Funktion auf ein bestimmtes Intervall, um sie umkehren zu können.
Die Funktion $f(x) = x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}$ und $W_f = \mathbb{R}_0^+$ hat für $y = 4$ zwei Urbilder: -2 und 2. Beschränkt man die Funktion auf $D_f = \mathbb{R}_0^+$, ist sie umkehrbar und die Umkehrfunktion lautet

$\overline{f}(x) = \sqrt{x}$

Theorem 3.4.2: Umkehr- / Inversenregel

Sei f eine bijektive (also umkehrbare), differenzierbare, reelle Funktion bei der gilt: $f'(x) \neq 0$, dann ist die Umkehrfunktion auch differenzierbar mit der Ableitung
$\overline{f}'(y) = \dfrac{1}{f'(\overline{f}(y))} = \dfrac{1}{f'(x)}$

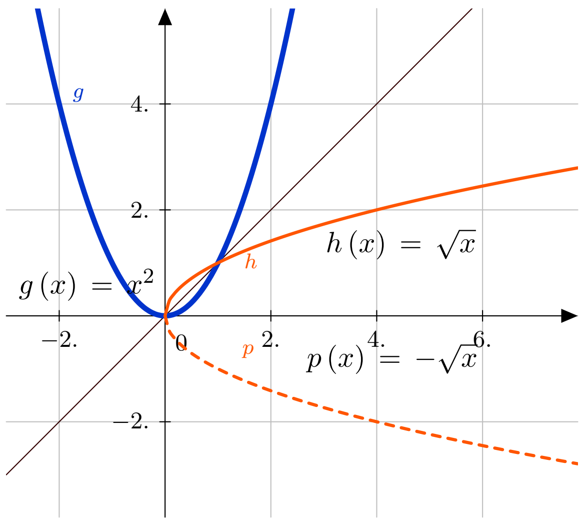
Beweis:

$$\begin{array}{lccl} \Rightarrow & \overline{f}(f(x)) & = & x & |ableiten \\ \Leftrightarrow & \overline{f}'(f(x)) \cdot f'(x) & = & 1 \\ \Leftrightarrow & \overline{f}'(f(x)) & = & \dfrac{1}{f'(x)} \\ \Leftrightarrow & \overline{f}'(y) & = & \dfrac{1}{f'(x)} & |mit y = f(x) \end{array}$$

□

Bemerkung:

Anschaulich ist eine Umkehrfunktion eine Axenspiegelung entlang der Winkelhalbierende am Ursprung, also dem Funktionsgraphen von $f(x) = x$



Beispiel:

Die Funktion $f(x) = x^2$ mit $D_f = \mathbb{R}_0^+$ ist umzukehren. Leichtes Spiel...

$$\begin{array}{lccll} \Rightarrow & y & = & x^2 \\ \Leftrightarrow & x & = & \pm\sqrt{y} & \textit{Variablen tauschen} \\ \Leftrightarrow & y & = & \pm\sqrt{x} \\ \Rightarrow & \overline{f}(x) & = & \pm\sqrt{x} \end{array}$$

3.4.11 Beispiel

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 1} = \frac{(2x-2)^2}{2x-1} \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{\tfrac{1}{2}\}$$

$$f'(x) = \frac{(8x-8)(2x-1) - (4x^2-8x+4)(2)}{(2x-1)^2} = \frac{16x^2 - 8x - 16x + 8 - 8x^2 + 16x - 8}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{8x^2 - 8x}{(2x-1)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(16x-8)(4x^2-4x+1) - (8x^2-8x)(8x-4)}{((2x-1)^2)^2}$$

$$= \frac{\cancel{(2x-1)} \cdot 8 \cdot (4x^2-4x+1) - (8x^2-8x) \cdot 4 \cdot \cancel{(2x-1)}}{(2x-1)^{\cancel{4}3}} = \frac{8}{8x^3 - 12x^3 + 6x - 1}$$

Achsenschnittpunkte

Bestimmung der Nullstelle(n):

$$\begin{array}{rccl} \Rightarrow & f(x) & = & 0 \quad D=\mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\} \\ \Leftrightarrow & \dfrac{(2x-2)^2}{(2x-1)} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 2x-2 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & x & = & 1 \quad L=\{1\} \end{array}$$

Die Gleichung für die senkrechte Asymptote lautet deshalb $x = 1$

Bestimmung des Y-Achsenabschnitts:

$\Rightarrow f(0) = \frac{4}{-1} = -4$

Symmetrie:

Man kann anhand des GTR vermuten dass f punktsymmetrisch ist. Dieser Symmetriepunkt P_0 lässt sich entweder dort ablesen oder ist (häufig) den Schnittpunkt der Asymptoten. $P_o(\frac{1}{2}|-2)$

$$\begin{array}{rcl} \Rightarrow \quad f(x_0+h)-y_0 & = & f(\frac{1}{2}+h)+2 \\ & = & \dfrac{4(\frac{1}{2}+h)^2-8(\frac{1}{2}+h)+4}{2(\frac{1}{2}+h)-1}+2 \\ & = & \dfrac{4(\frac{1}{4}+h+h^2)-4-8h+4}{2h}+\dfrac{4h}{2h} \\ & = & \dfrac{1+4h+4h^2-8h+4h}{2h}=\dfrac{4h^2+1}{2h} \\ \Rightarrow \quad -f(x_0-h)+y_0 & = & -f(\frac{1}{2}-h)-2 \\ & = & -\dfrac{4(\frac{1}{2}-h)^2-8(\frac{1}{2}-h)+4}{2(\frac{1}{2}-h)-1}-2 \\ & = & -\dfrac{4(\frac{1}{4}-h+h^2)-4+8h+4}{-2h}-\dfrac{4h}{2h} \\ & = & \dfrac{1-4h+4h^2+8h-4h}{2h}=\dfrac{4h^2+1}{2h} \end{array}$$

Hiermit hat man die Punktsymmetrie von f zu P_0 bewiesen.

Bestimmung der Grenzwerte der Funktion:

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2-8x+4}{2x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(4-\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{4-0+0}{0-0} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2-8x+4}{2x-1} = \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}(-4+\frac{8}{x}+\frac{4}{x^2})}{\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{2}{x}-\frac{1}{x^2}} = \frac{-4+0+0}{-0-0} = -\infty$$

Bemerkung:

Da die Punktsymmetrie vorher bewiesen wurde hätte der $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ gar nicht errechnet werden müssen!

$$\begin{array}{rcccl} \Rightarrow \quad \lim\limits_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x) & = & \lim\limits_{h\to0} \dfrac{4(\frac{1}{2}+h)^2-8(\frac{1}{2}+h)+4}{2(\frac{1}{2}+h)-1} & = & \lim\limits_{h\to0} \dfrac{1+4h+4h^2-4+h+4}{2h} \\ & & & = & \dfrac{\lim\limits_{h\to0} 1+5h+4h^2}{\lim\limits_{h\to0} 2h} \\ & & & = & \dfrac{1}{0}=+\infty \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{4(\frac{1}{2}-h)^2 - 8(\frac{1}{2}-h)+4}{2(\frac{1}{2}-h)-1} = \lim_{h\to 0} \frac{1-4h+4h^2-4-4h+4}{-2h}$$

$$= \frac{\lim\limits_{h\to 0} 1-8h+4h^2}{\lim\limits_{h\to 0} -2h}$$

$$= -\frac{1}{0} = -\infty$$

<u>Asymptoten:</u>

Es liegt eine nicht hebbare Definitionslücke bei $x = \dfrac{1}{2}$ vor, also ist dies die Gleichung der senkrechten Asymptote.

Da der Grenzwert $\to \pm\infty$ keinen eindeutigen Wert annimmt, macht man eine Polynomdivision ...

$$\begin{array}{lllllll}
\Rightarrow & (4x^2 & -8x & +4) & : & (2x-1) & = 2x-3+\dfrac{1}{2x-1} \\
& -(4x^2 & -2x) & & & & \\
& & -6x & +4 & & & \\
& & -(-6x & +3) & & & \\
& & & 1 & & &
\end{array}$$

... und erhält die Gleichung der schiefen Asymptote $y = 2x-3$

<u>Monotonieverhalten:</u>

Untersuchung auf Extremstellen:

- Notwendige Bedingung: $\Rightarrow f'(x) = 0$

  $\Leftrightarrow \dfrac{8x^2-8x}{4x^2-4x+1} = 0 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{\frac{1}{2}\}$

  $\Leftrightarrow x(8x-8) = 0$

  $\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \qquad L = \{1;0\}$

- Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel $f'(x)$ oder $f''(x) \neq 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(8x-8)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(2x-1)^2$		$+$		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$(0\mid f(0))$	$\searrow$	$-\infty$ $+\infty$	$\searrow$	$(1\mid f(1))$	$\nearrow$	$+\infty$

Krümmungsverhalten:

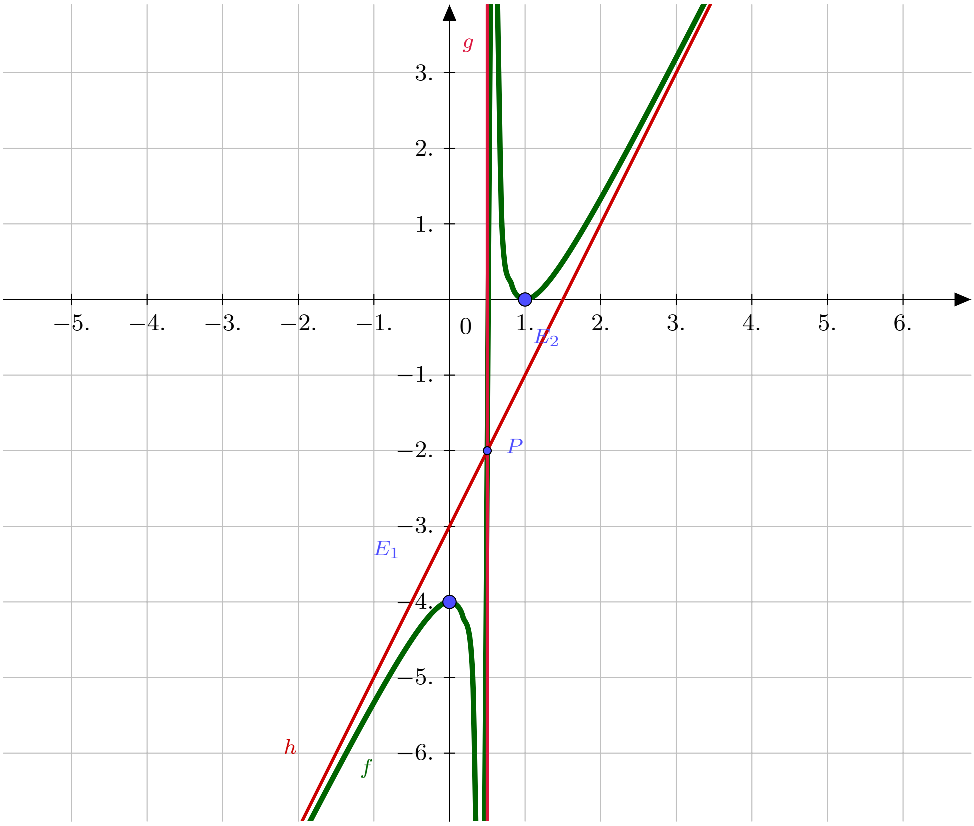
Untersuchung auf Wendestellen:

- Notwendige Bedingung: $\Rightarrow f''(x) = 0$

  $\Leftrightarrow \dfrac{8}{(2x-1)^3} = 0$

  $\Leftrightarrow 8 = 0$ ϟ

Die Funktion weist keine Wendestellen vor. Bei Lösbarkeit der Gleichung ist als hinreichende Bedingung ein Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ zu zeigen oder $f''' \neq 0$ zu beweisen. Dann kann die Skizze beginnen:



3.5 Funktionenscharen

Erklärung:

Eine **Funktionenschar** ist eine Menge von Funktionen, die neben der Variable auch noch einen veränderlichen Parameter im Funktionsterm enthält. Jedem Wert des Parameters ist ein Graph der Schar zugeordnet. Der Parameter, oft a, wird hierbei überall wie eine Konstante behandelt.

Der Punkt, den alle Graphen, unabhängig von ihren Parametern, beinhalten, nennt man Bündel. Die Graphen einer Funktionenschar bilden gemeinsam eine Kurvenschar.

Hier ist die Kurvenschar der Funktion $f(x) = ax^3$. Sie verlaufen alle durch das Bündel $P(0|0)$

[height=12]kap3/BundelFunktionenscharen.eps

3.5.1 Beispiel

$f_a(x) = \dfrac{x^2 - 3ax}{x+a} \qquad D_f = \mathbb{R}\backslash\{-a\}, \qquad a \in \mathbb{R}^+$
Sei K_a der Graph der Funktion.

Bestimmen Sie die Schnittpunkte von K_a mit den Koordinatenachsen

$f_a(0) = \dfrac{0}{x+a} = 0$

$$\begin{array}{rcrcl} \Rightarrow f_a(x) = 0 & \Leftrightarrow & x^2 - 3x & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & x(x-3a) & = & 0 \\ & \Leftrightarrow & x = 0 & \vee & x = 3a \end{array}$$

Es ergeben sich die Punkte $P_1(0|0)$ und $P_2(3a|0)$

Bestimmen Sie die Asymptoten von K_a

$$\begin{array}{llllll} \Rightarrow & (x^2 & -3ax & +0) & : \ (x+a) & = \ x - 4a + \dfrac{4a^2}{x+a} \\ & -(x^2 & +ax) & & & \\ & & -4ax & +0 & & \\ & & -(-4ax & -4a^2) & & \\ & & & 4a^2 & & \end{array}$$

Man erhält die schiefe Asymptote $y = x - 4a$
Es liegt eine nicht hebbare Definitionslücke bei $-a$ vor, daraus ergibt sich eine vertikale Asymptote $\Rightarrow x = -a$

Zeigen Sie $f_a''(x) = \frac{8a^2}{(x+a)^3}$

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{(2x-3a)(x+a) - (x^2-3ax)(1)}{(x+a)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 2ax - 3ax - 3a^2 - x^2 - 3ax}{x^2 + 2ax + a^2} \\ &= \frac{x^2 + 2ax - 3a^2}{(x+a)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_a''(x) &= \frac{(2x+2a)(x^2+2ax+a^2) - (x^2-2ax-3a^2)(2(x+a))}{(x+a)^4} \\ &= \frac{2x^2 + 4ax + 2a^2 - 2x^2 + 4ax + 6a^2}{(x+a)^3} \\ &= \frac{8a^2}{(x+a)^3} \end{aligned}$$

Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von a an und erstellen Sie eine Monotonietabelle der Funktionen f_a]Weisen Sie nach, dass K_a genau einen Hochpunkt und genau einen Tiefpunkt besitzt. Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von a an und erstellen Sie eine Monotonietabelle der Funktionen f_a
Notwendige Bedingung für Extremstellen: $\Rightarrow f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow x^2 + 2ax - 3a^2 = 0 \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{-a\}$

$\Rightarrow \Delta = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2$

$\Leftrightarrow x_1 = a \quad \vee \quad x_2 = -3a \qquad\qquad L = \{a; -3a\}$

$\Rightarrow f(a) = \dfrac{a^2 - 3a^2}{2a} = -a$

$\Rightarrow f(-3a) = \dfrac{9a^2 + 9a^2}{-2a} = -9a$

Es ergeben sich somit die Extremstellen $H(-3a|-9a)$ und $T(a|-a)$. Bevor man mit der Monotonietabelle beginnt, muss die Polstelle untersucht werden.

$$\lim_{x \to -a^+} f_a = \lim_{x \to -a^+} \frac{x^2 - 3ax}{x + a} = \lim_{h \to 0} \frac{(-a+h)^2 - 3a(-a+h)}{(-a+h)+a} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 - 5ah + 4a^2}{h} = +\infty$$

$$\lim_{x \to -a^-} f_a = \lim_{x \to -a^-} \frac{x^2 - 3ax}{x + a} = \lim_{h \to 0} \frac{(-a-h)^2 - 3a(-a-h)}{(-a-h)+a} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + 5ah + 4a^2}{-h} = -\infty$$

Jetzt kann die Monotonietabelle erstellt werden:

x	$-\infty$		$-3a$		$-a$		a		$+\infty$
$x^2 - 2ax - 3a$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(x+a)^2$		$+$		$+$	‖	$+$		$+$	
$f_a'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$H(-3a\vert-9a)$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$T(a\vert-a)$	$\nearrow$	$+\infty$

Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt gibt, durch den alle Graphen Ka gehen.

Diesen Punkt haben wir schon per "Zufall" herausgefunden, da wir eine Nullstelle gefunden haben, die nicht von a abhängt. Wenn man diesen aber nicht gefunden hat, geht man diesen Lösungsweg:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad f_1 = f_2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2 - 3x}{x+1} &= \frac{x^2 - 6x}{x+2} \qquad\qquad D = \mathbb{R}\backslash\{-1; -2\} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{x-3}{x+1} &= \frac{x-6}{x+2} \\ \Leftrightarrow \quad -x &= -5x \\ \Leftrightarrow \quad x &= 0 \end{aligned}$$

[U+FFFD] $\qquad L = \{0\}$

Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}^+$ so, dass der Graph K_a durch den Punkt $P(5|\frac{5}{3})$ verläuft

$$\Rightarrow \quad f_a(5) = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{5^2 - 15a}{5+a} = \frac{5}{3} \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{-5\}$$

$$\Leftrightarrow \quad 15 - 9a = 5 + a$$

$$\Leftrightarrow \quad a = 1 \qquad L = \{1\}$$

Berechnen Sie die Schnittpunkte von K_1 mit der Geraden $j(x) = -15x - 4$

$$\Rightarrow f_1(x) = \frac{x^2 - 3x}{x+1} = -15x - 4 = y$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 - 3x = -15x^2 - 19x - 4$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x^2 + 4x + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_1(-\frac{1}{2}) = \frac{(\frac{1}{2})^2 - 3 \cdot (\frac{1}{2})}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{7}{2}$$

Es existiert genau ein Schnittpunkt von K_1 mit der Geraden j: $P_{K_1 j}(-\frac{1}{2}|\frac{7}{2})$

Vom Punkt $A(0|-4)$ wird die Tangente an K_1 gelegt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente und die Koordinaten des Berührpunktes

Sei $B(x_0|f_(x_0))$, dann lautet die Tangentengleichung:

$$\Rightarrow \quad T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

$$= \frac{x_0^2 + 2x_0 - 3}{(x_0+1)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{x_0^2 - 3x_0}{x_0 + 1}$$

Jetzt werden die Koordinaten des Punktes $A(0|-4)$, durch den die Tangente auch noch geht, eingesetzt.

$$\Rightarrow \quad T_{x_0}(0) = -4 = \frac{x_0^2 + 2x_0 - 3}{(x_0+1)^2} \cdot (-x_0) + \frac{x_0^2 - 3x_0}{x_0 + 1} \qquad D = \mathbb{R}\backslash\{-1\}$$

$$\Leftrightarrow \quad -4(x_0+1)^2 = (x_0^2 + 2x_0 - 3)(-x_0) + (x_0^2 - 3x_0)(x_0 + 1)$$

$$\Leftrightarrow \quad -4x_0^2 - 8x_0 - 4 = -x_0^3 - 2x_0^2 + 3x_0 + x_0^3 + x_0^2 - 3x_0^2 - 3x_0$$

$$\Leftrightarrow \quad 4x_0^2 + 8x_0 + 4 = 4x_0^2$$

$$\Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{1}{2} \qquad L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Nun werden die Koordinaten des Berührpunktes mit der Ursprünglichen Funktion f durch einsetzen errechnet.

$$\Rightarrow f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot -\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow B\left(-\frac{1}{2}|\frac{7}{2}\right)$$

Da es sich um eine Tangente handelt, muss nun die Steigung am Berührpunkt errechnet werden, um die Tangentengleichung bestimmen zu können.

$$\Rightarrow f_1'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -15$$

Die Tangentengleichung lautet somit:

$$t(x) = -15x - 4 \qquad \text{mit} \quad D_t = \mathbb{R}$$

Kapitel 4

Trigonometrie

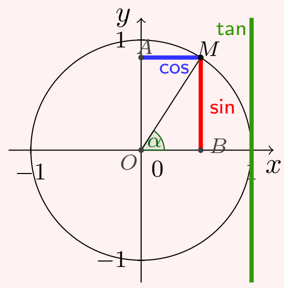
by Rémy

4.1 Kurze Wiederholung

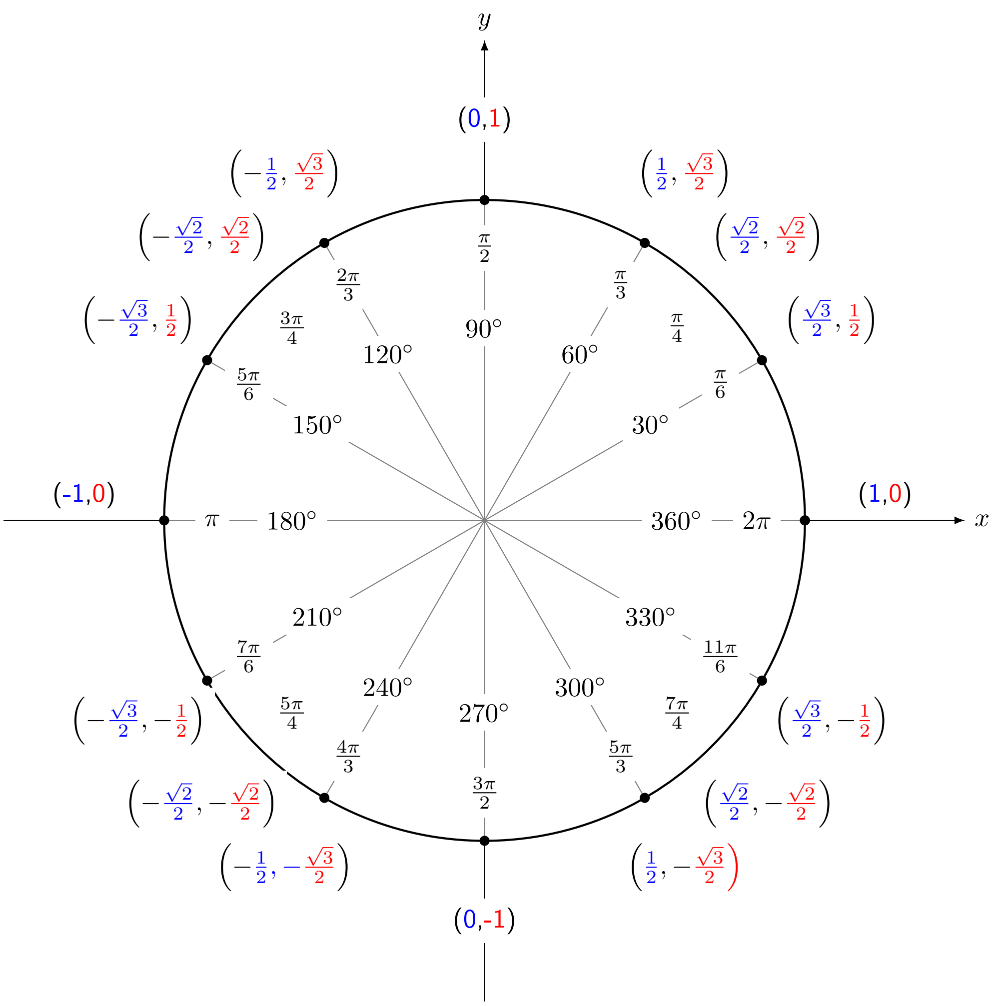
Definition 4.1.1

In einem Kreis mit Radius 1 gelte:

- $\cos(\alpha) = x_M$
- $\sin(\alpha) = y_M$
- $\tan(\alpha) = \dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$



Es ergeben sich folgende (wissenswerte) Werte:



Des Weiteren gilt:

	15° $\frac{\pi}{12}$	45° $\frac{\pi}{4}$	75° $\frac{5\pi}{12}$
$\sin(\alpha)$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$
$\cos(\alpha)$	$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

4.2 Additions- und Verdopplungssätze

Theorem 4.2.1

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

Bemerkung:

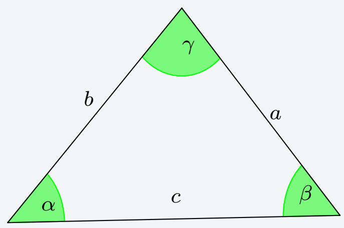
Hieraus ergeben sich einige weitere Relationen, wie z.B. $\sin(2a)$. Diese lassen sich jedoch schnell und leicht herleiten.

4.3 Allgemeine Sinus- und Kosinussätze

In einem beliebigen Dreieck gelten abgewandelte Formen der aus der 8. Klasse bekannten Sätze:

Theorem 4.3.1

- $\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$
- $c^2 = a^2 + b^2 - 2abcos(\gamma)$



Bemerkung:

Man bemerkt, dass sich die bekannten Relationen ergeben, wenn einer der Winkel den Wert $\frac{\pi}{2}$ annimmt.

4.4 Sinusfunktionen

Zur Vollständigen Funktionsdiskussion einer Sinus-Funktion sind einige Besonderheiten zu beachten:

1. Amplitude und Periodizität
   Eine Funktion der Form $f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$ hat:

   - die Periode $P = \dfrac{2\pi}{|b|}$
   - die Amplitude $A = |a|$
   - die Verschiebung entlang der x-Achse um d und entlang der y-Achse um c

2. Symmetrieeigenschaften
   Hier sollte zumindest bekannt sein, dass $f(x) = \sin(x)$ punktsymmetrisch zum Origo ist, und dass $f(x) = \cos(x)$ Achsensymmetrisch zur y-Achse ist.

3. Die Null-, Extrem- und Wendestellen sind in Form einer Menge anzugeben. (Es sei denn, die Aufgabenvorschrift fordert explizit zu einer Begrenzung auf ein angegebenes Intervall auf)

   Beispiel:

   Die Nullstellen der Funktion $f(x) = \sin(x)$ lassen sich dartstellen als: $x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

4. Bei der Teilung durch eine Sinusfunktion können Definitionslücken an dessen Nullstellen entstehen. Auch diese können in der bereits gezeigten Form angegeben werden.

4.4.1 Zusammengesetzte Sinusfunktionen

4.5 Polarkoordinaten

In der Kursstufe beschränken wir uns auf die Benutzung von Polarkoordinaten für Punkte in der Ebene (2D).

Definition 4.5.1

Polarkoordinaten sind eine Form der eindeutigen Punktangaben, doch anstatt wie kartesische Koordinaten 2 Entfernungen x und y zu verwenden, haben sie die Form $(r|\varphi)$. r ist hierbei die Entfernung zum Origo und φ ein orientierter Winkel (in rad).

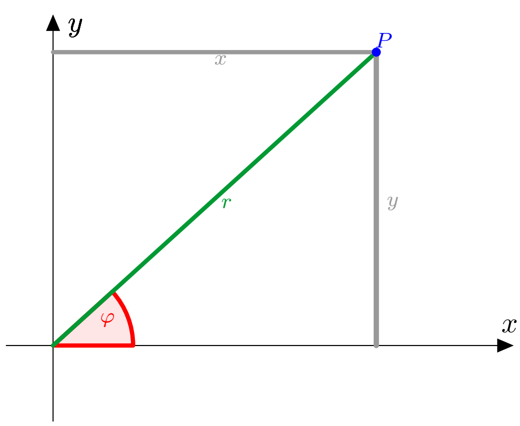
4.5.1 Umrechnung

Kartesisch → Polar

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\varphi = \tan(\dfrac{y}{x})$

Polar → Kartesisch

- $x = r \cdot \cos(\varphi)$
- $y = r \cdot \sin(\varphi)$



4.6 Beispiele einer Funktionsdiskussion

4.6.1 $f(x) = 2\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)$

Sei die Funktion $f(x) = 2\cos(x) + 2\sin(x)\cos(x)$, ihr Schaubild sei K.
Untersuchen Sie K im Intervall $[0; 2\pi]$ auf gemeinsame Punkte mit der x-Achse, sowie Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K im Intervall $[0; 2\pi]$. Untersuchen Sie K auf Symmetrie.

Definitionsmenge
$D = \mathbb{R}$

Periodizität und Amplitude
Die Periode von f ist $P = 2\pi$. Die Amplitude A beträgt $\frac{3}{2}\sqrt{3}$.

Nullstellen
Notwendige und hinreichende Bedingung:

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \left(\frac{1}{2}\pi \middle| 0\right); \left(\frac{3}{2}\pi \middle| 0\right) \right\}$$

Ableitungen

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -2\sin(x) + 2(\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)) \\
&= -2\sin(x) + 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\
&= -2\sin(x) + 2(1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)) \\
&= -4\sin^2(x) - 2\sin(x) + 2 \\
f''(x) &= -4(\cos(x)\sin(x) + \sin(x)\cos(x)) - 2\cos(x) \\
&= -8\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) \\
f'''(x) &= -8(\cos(x)\cos(x) - \sin(x)\sin(x)) + 2\sin(x) \\
&= -8(1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)) + 2\sin(x) \\
&= 16\sin^2(x) + 2\sin(x) - 8
\end{aligned}$$

Extremstellen
Notwendige Bedingung:
$f'(x) = 0$
$\Leftrightarrow 4\sin^2(x) - 2\sin(x) + 2 = 0$
Substitution: $y = \sin(x)$
$\Rightarrow 4y^2 - 2y + 2 = 0$
$\overset{ABC-Formel}{\Rightarrow} y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4*(-4)*2}}{-8}$
Resubsitution:

$$\Rightarrow \begin{cases} \sin(x) &= \frac{2+\sqrt{20}}{-8} \\ \sin(x) &= \frac{2-\sqrt{20}}{-8} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \left\{ \frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi \right\}$$

Hinreichende Bedingung:
$f''(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{1}{6}\pi\right) & \overset{?}{=} 0 \\ f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) & \overset{?}{=} 0 \\ f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) & \overset{?}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) - 2\sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) & \overset{?}{=} 0 \\ 8\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)\cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) - 2\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) & \overset{?}{=} 0 \\ 8\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) & \overset{?}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8*\frac{1}{2}*\frac{\sqrt{3}}{2} - 2*\frac{\sqrt{3}}{2} & \overset{!}{\neq} 0 \quad , < 0 \Rightarrow HP \\ 8*\frac{1}{2}*-\frac{\sqrt{3}}{2} - 2*-\frac{\sqrt{3}}{2} & \overset{!}{\neq} 0 \quad , > 0 \Rightarrow TP \\ 8*(-1)(0) - 2(0) & \overset{!}{=} 0 \quad \Rightarrow \text{kein } EP \end{cases}$$

Ergebnis

Auf dem Intervall $[0;2\pi]$ besitzt K den Hochpunkt H$\left(\frac{1}{6}\pi|f\left(\frac{1}{6}\pi\right)\right)$ und den Tiefpunk T$\left(\frac{5}{6}\pi|f\left(\frac{5}{6}\pi\right)\right)$.
$\Leftrightarrow$ H$\left(\frac{1}{6}\pi|\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$ und T$\left(\frac{5}{6}\pi|-\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$.

Wendestellen

Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned} f''(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow -8\sin(x)\cos(x) - 2\cos(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow \cos(x)(-2-8\sin(x)) &= 0 \\ \overset{SdN}{\Rightarrow} \begin{cases} \cos(x) &= 0 \\ \sin(x) &= -\frac{1}{4} \end{cases} & \\ \Rightarrow \mathbb{L} = \left\{\frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \sim 3,394; \sim 6,031\right\} & \end{aligned}$$

Hinreichende Bedingung:

$f'''(x) \neq 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} f'''\left(\frac{1}{2}\pi\right) \overset{?}{=} 0 \\ f'''\left(\frac{3}{2}\pi\right) \overset{?}{=} 0 \\ f'''(3,394) \overset{?}{=} 0 \\ f'''(6,031) \overset{?}{=} 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16\sin^2\left(\frac{1}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{1}{2}\pi\right) - 8 \overset{?}{=} 0 \\ 16\sin^2\left(\frac{3}{2}\pi\right) + \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 8 \overset{?}{=} 0 \\ 16\sin^2(3,394) + \sin(3,394) - 8 \overset{?}{=} 0 \\ 16\sin^2(6,031) + \sin(6,031) - 8 \overset{?}{=} 0 \end{cases}$$

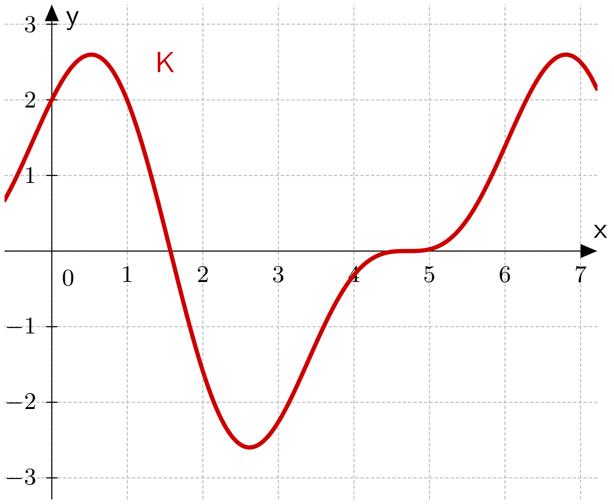
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 16*1+1-8 \overset{!}{\neq} 0 \quad , > 0 \Rightarrow WP \\ 16*1-1-8 \overset{!}{\neq} 0 \quad , > 0 \Rightarrow WP \\ -7,5 \overset{!}{=} 0 \quad , < 0 \Rightarrow WP \\ -7,5 \overset{!}{=} 0 \quad , < 0 \Rightarrow WP \end{cases}$$

> **Bemerkung:**
>
> Außerdem: $f'\left(\frac{3}{2}\pi\right) = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt

Ergebnis

Auf dem Intervall $[0;2\pi]$ besitzt K die Wendepunkte $\left(\frac{1}{2}\pi\middle|f\left(\frac{1}{2}\pi\right)\right)$, $(3,394|f(3,394))$, $(6,031|f(6,031))$ und den Sattelpunkt $\left(\frac{3}{2}\pi\middle|f\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right)$.
$\Leftrightarrow$W$_1\left(\frac{1}{2}\pi\middle|0\right)$, $W_2(3,394|-1,452)$, $W_3(6,031|1,452)$, $S\left(\frac{3}{2}\pi\middle|0\right)$.

Schaubild



Symmetrie

K ist punktsymmetrisch zu W_1, denn es gilt:

$$\begin{aligned} f(\frac{1}{2}\pi + x) &= -1 * f(\frac{1}{2}\pi - x) \\ \Leftrightarrow 2\cos(\frac{1}{2}\pi + x) + 2\sin(\frac{1}{2}\pi + x)\cos(\frac{1}{2}\pi + x) &= -1 * (2\cos(\frac{1}{2}\pi - x) + 2\sin(\frac{1}{2}\pi - x)\cos(\frac{1}{2}\pi - x)) \\ \Leftrightarrow -2\sin(x) - 2\cos(x)\sin(x) &= -1 * (2\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x)) \end{aligned}$$

K ist außerdem zu S punktsymmetrisch, denn es gilt:

$$\begin{aligned} f(\frac{3}{2}\pi + x) &= -1 * f(\frac{3}{2}\pi - x) \\ \Leftrightarrow 2\cos(\frac{3}{2}\pi + x) + 2\sin(\frac{3}{2}\pi + x)\cos(\frac{3}{2}\pi + x) &= -1 * (2\cos(\frac{3}{2}\pi - x) + 2\sin(\frac{3}{2}\pi - x)\cos(\frac{3}{2}\pi - x)) \\ \Leftrightarrow 2\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x) &= -1 * (-2\sin(x) - 2\cos(x)\sin(x)) \end{aligned}$$

Kapitel 5

Exponentialfunktionen

by CLARA

Definition 5.0.1

Man bezeichnet als Exponentialfunktion eine Funktion der Form $x \to a^x$ mit $a \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$
x ist die Variable und wird *Exponent* oder *Hochzahl* genannt.
a nennt man *Basis* oder *Grundzahl*, sie ist für jede Funktion fest forgegeben.

Allgemeiner gilt jede Funktion, bei der die Variable im Exponenten steht als Exponentialfunktion.

5.1 Wiederholung: Potenzgesetze

Theorem 5.1.1

Seien a, $b \in \mathbb{R}$, sowie n, $m \in \mathbb{N}$, dann gilt:

1. $a^0 = 1$ (für $a \neq 0$)
2. $a^1 = a$
3. $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{nMal}$
4. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
5. $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
6. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
7. $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$
8. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
9. $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
10. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

5.2 Die Eulersche Zahl (e)

Definition 5.2.1

$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...$

Die **Eulersche Zahl** (e) ist eine irrationale, transzendente und reelle Zahl, die die Basis des (natürlichen) Logarithmus und der (natürlichen) Exponentialfunktion ist.

Die Darstellung, der man am Häufigsten begegnet ist diese: $e = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t ; t \in \mathbb{R}$

Benannt nach dem bekannten Mathematiker Leonhard Euler ist diese Zahl eine der wichtigsten Konstanten der Mathematik. Sie ist die Basis des natürlichen Logarithmus und der natürlichen Exponentialfunktion. Diese besondere Exponentialfunktion wird aufgrund dieser Beziehung zur Zahl e häufig kurz e-Funktion genannt, sie eignet sich zur Modellierung von Wachstums- und Zufallsprozessen.

Bemerkung:

Eine alternative Definition wäre folgende: Die positive Zahl a, für die die Exponentialfunktion f mit $f(x) = a^x$ mit ihrer Ableitungsfunktion f' übereinstimmt, heißt Eulersche Zahl. (siehe 12.5)

Definition 5.2.2

Eine reelle Zahl heißt (oder allgemeiner eine komplexe Zahl) transzendent, wenn sie nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Andernfalls handelt es sich um eine algebraische Zahl. Jede reelle transzendente Zahl ist überdies irrational.

5.2.1 Verschiedene Darstellungen

e ist darstellbar bzw. ergibt sich durch:

- $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- $\lim\limits_{t\to\infty} \left(1+\frac{1}{t}\right)^t ; t \in \mathbb{R}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N}$

5.2.2 Herleitung zur Zahl e

Wir definieren eine Folge $(e_n)n \in \mathbb{N}$ durch $e_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ und beweisen ihre Konvergenz.

- $$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

- Die Umformung ermöglicht uns auf den Term $\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$ die Ungleichung von Bernoulli anzuwenden. Diese besagt Folgendes: $(1+x)^n > 1+nx$ für $n \geqslant 2$ und $x > -1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} &> 1+(n+1)\cdot\left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 1-\frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

- Dies kann man für den ersten Ausdruck verwenden:

$$\begin{aligned}\Rightarrow \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &> \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= 1\end{aligned}$$

$\Leftrightarrow e_n$ **ist streng monoton steigend**

Sei eine Folge f_n mit $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}$, deren Monotonieverhalten wir untersuchen wollen. Dazu formen wir den Term so um, dass die Bernoulli-Ungleichung angewandt werden kann.

- $$\begin{aligned}\frac{f_n}{f_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+2}} \\ &= \left(\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{n}} \\ &= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right) \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(\frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}\end{aligned}$$

- Bernoulli: $(1+x)^n > 1 + nx$ für $n \geqslant 2$ und $x > -1$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \left(1+\frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} &> 1 + (n+2) \cdot \frac{1}{n(n+2)} \\ &= \frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

- $\Rightarrow \frac{f_n}{f_{n+1}} = \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} > \frac{n+1}{n} \cdot \frac{n}{n+1} = 1$

- $\frac{f_n}{f_{n+1}} > 1 \Leftrightarrow \frac{f_{n+1}}{f_n} < 1 \Leftrightarrow f_n$ **ist streng monoton fallend**

Als Letztes zeigt man, dass f_n zu e_n eine obere Schranke ist:

$$\begin{array}{cccc} & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} & > & \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \\ \Leftrightarrow & f_n & > & e_n \end{array}$$

Eine streng monoton steigende Folge, die eine monoton fallende Folge, als ober Schranke hat, konvergiert. Es gilt also, dass e_n konvergent ist. e_n besitzt einen besonderen Grenzwert, der **Eulersche Zahl** genannt wird.

5.2.3 e ist irrational

Wie schon erwähnt, handelt es sich bei der Eulerschen Zahl um eine transzendente Zahl, daraus ergibt sich schon, dass sie irrational ist. Trotzdem ist es interessant, dies zu beweisen.

Beweis:

Teil A: unnötig

Sei f eine Funktion mit $f(x) = xe^{1-x}$ mit Schaubild $\mathcal{C}$

1. Monotonieverhalten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1-x} - xe^{1-x} \\ &= (1-x) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

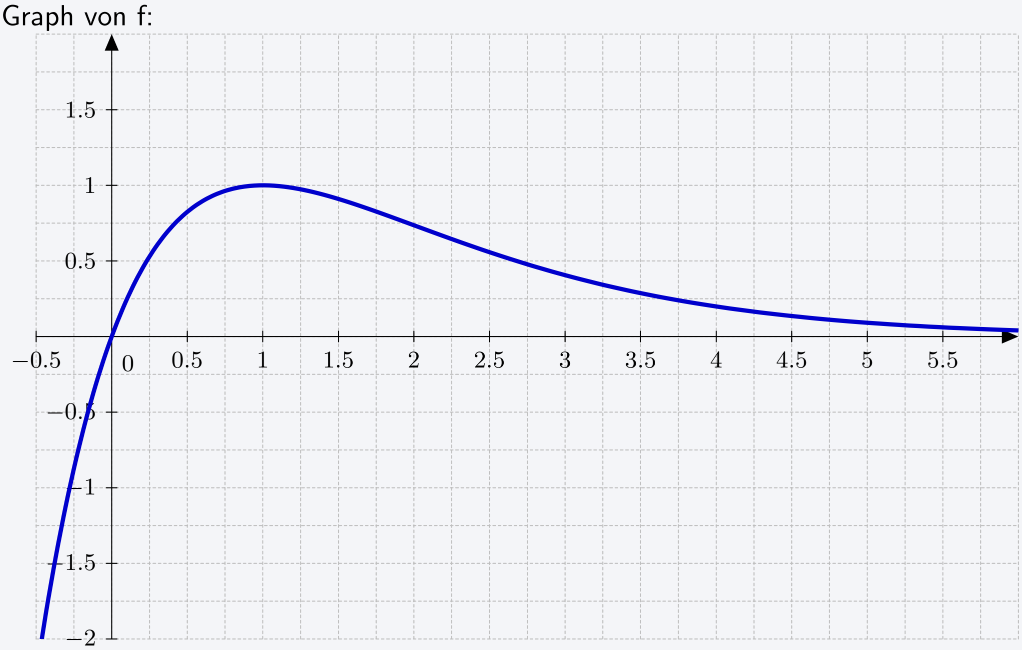
$$\begin{array}{rlll} \forall x < 1: & f'(x) > 0 & & \Leftrightarrow f \nearrow \\ \text{für } x = 1: & f'(x) = 0 & \text{und VZW } + \to - & \Leftrightarrow \text{Hochpunkt} \\ \forall x > 1: & f'(x) < 0 & & \Leftrightarrow f \searrow \end{array}$$

Grenzwerte:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \underbrace{x}_{\to +\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\to 0} = 0$ (Croissance comparée)

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \underbrace{x}_{\to -\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\to +\infty} = -\infty$

2. Graph von f:



3. Man hat I_1, das Integral mit $I_1 = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 xe^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x}\mathrm{d}x \\ &= -1e^{1-1} - 0^1 - \left[e^{1-x}\right]_0^1 \\ &= -1 - 1 + e \\ &= e - 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x) &= x & u\prime(x) &= 1 \\ v'(x) &= e^{1-x} & v(x) &= -e^{1-x} \end{aligned}$$

<u>Teil B:</u> $n \in \mathbb{N}$

Sei I_n das Integral mit $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x}\mathrm{d}x$, $n \geqslant 1$

1. (a) Zz: $\forall x \in [0;1]$ gilt $x^n \leqslant x^n e^{1-x} \leqslant ex^n$

$$\begin{array}{ccccccc} x^n & \overset{?}{\leqslant} & x^n e^{1-x} & \overset{?}{\leqslant} & ex^n & & | : x^n \\ 1 & \overset{!}{\leqslant} & e^{1-x} & \overset{!}{\leqslant} & e & & \end{array}$$

N.R.: für $x \in [0;1]$ ist $(1-x) \in [0;1]$ und entsprechen $e^{1-x} \in [e^0; e^1] = [1; e]$

(b) Sei J_n das Integral mit $J_n = \int_0^1 x^n \mathrm{d}x$

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 x^n \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1}\right]_0^1 \\ &= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(c) Zz: $\forall n \geqslant 1$ gilt $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$

$$\begin{array}{cccccccc} & x^n & \leqslant & f(x) = x^n e^{1-x} & \leqslant & ex^n & & | \int_0^1 ()\mathrm{d}x \\ \Leftrightarrow & \int_0^1 x^n \mathrm{d}x & \leqslant & I_n & \leqslant & \int_0^1 ex^n \mathrm{d}x & & \\ \Leftrightarrow & J_n & \leqslant & I_n & \leqslant & e \cdot \int_0^1 x^n \mathrm{d}x = e \cdot J_n & & \\ \Leftrightarrow & \dfrac{1}{n+1} & \leqslant & I_n & \leqslant & \dfrac{e}{n+1} & & \end{array}$$

2. Z: $\forall n \geqslant 1$ gilt $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^{1-x} \mathsf{d}x \\ &= \left[-e^{1-x} \cdot x^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n ex - 1\mathsf{d}x \\ &= -e^{1-1} \cdot 1^{n+1} - 0 + (n+1) \cdot I_n \\ &= (n+1)I_n - 1 \end{aligned}$$

$$u(x) = x^{n+1} \quad u\prime(x) = (n+1)x^n$$
$$v'(x) = e^{1-x} \quad v(x) = -e^{1-x}$$

3. Sei $k_n = n!e - I_n$, $n \geqslant 1$

   (a)

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= (n+1)!e - I_{n+1} \\ &= (n+1)n!e - (n+1)I_n + 1 && \text{siehe 2.} \\ &= (n+1)(n!e - I_n) + 1 \\ &= (n+1)k_n + 1 \end{aligned}$$

   (b) $\mathbb{Z}$z: $\forall n \geqslant 1$ gilt $k_n \in \mathbb{Z}$:

   IA: für $n = 1: \quad k_1 = 1!e - I_1 = e - (e-2) = 2$ (wahr)

   IV: für ein beliebiges aber festes $n \in \mathbb{N}$ gelte: $\quad k_n \in \mathbb{Z}$

   IB: dann gelte für $(n+1): \quad k_{n+1} \in \mathbb{Z}$

   IS: $k_{n+1} = \underbrace{(n+1)}_{\in\mathbb{Z} \text{ da } n\in\mathbb{N}} \underbrace{k_n}_{\in\mathbb{Z}(\text{IB})} + \underbrace{1}_{\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$

   (c) $\mathbb{Z}$z: $\forall n \geqslant 2$ gilt $n!e = k_n + I_n \notin \mathbb{Z}$

   Wir haben: $\dfrac{1}{n+1} \leqslant I_n \leqslant \dfrac{e}{n+1}$ (1.(c))

   Und es gilt:

   - $k_n \in \mathbb{Z}$
   - $\forall n \geqslant 0 : \dfrac{1}{n+1} \geqslant 0$
   - $\forall n \geqslant 2 : n+1 \geqslant 3 \Rightarrow \dfrac{1}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$
     und $e \leqslant 3 \Rightarrow \dfrac{e}{n+1} \leqslant 1$

   $\Rightarrow \forall n \geqslant 2 : 0 < I_n < 1 \Rightarrow I_n \notin \mathbb{N} \Rightarrow k_n + I_n \notin \mathbb{N} \Rightarrow n!e \notin \mathbb{N}$

4. Seien $p, q \in \mathbb{N}$
   Dann gilt für $n \geqslant q : \dfrac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$

   Das stimmt weil $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (q+1) \cdot q \cdot (q-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow q$ teilt $n! \Rightarrow \dfrac{n!}{q} \in \mathbb{N} \Rightarrow \dfrac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$ da $p \in \mathbb{N}$

   Hypothese: $e \in \mathbb{Q}$

   $\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}$, sodass $e = \dfrac{p}{q}$

$\Rightarrow n!e = \frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$

Im Voraus wurde aber gezeigt, dass $n!e \notin \mathbb{N}$: **Widerspruch**

$\Leftrightarrow \boxed{e \notin \mathbb{Q}}$

Herkunft der Aufgabenstellung: Buch? S.199 Nr. 78, d'après le bac □

5.3 Eigenschaften

- $f(x) = a^x$
- $a \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$
- $D_f = \mathbb{R}$
- $W_f = \mathbb{R}^+$
- für $0 > a > 1$: f ist streng monoton fallend
  für $a > 1$: f ist streng monoton wachsend
- für $0 > a > 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$
  für $a > 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$
  $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 1$
- x-Achse ist waagerechte Asmyptote

Zusammengesetzte Funktionen

Sei $f(x) = a^x$ mit $a > 1$ und $g(x) = x^n$ mit n $\in \mathbb{R}$:

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} = a^x \cdot x^n = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} a^x \cdot x^n = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{a^x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = 0$
- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^n}{a^x} = \pm\infty$

Croissances comparées

> **Bemerkung:**
>
> Diese Grenzwerte gelten auch wenn g ein Polynom beliebig hohen Grades ist.
> Allgemein kann man also sagen, dass eine Exponentialfunktion ihr Wachstum bezüglich dem jedes Polynoms immer durchsetzt.

Bemerkung:

ACHTUNG: Das Vorzeichen der anderen Funktion(en) muss natürlich immer beachtet werden. Da die Wertemenge einer Exponentialfunktion immer $\mathbb{R}^+$ ist, hängt das Vorzeichen ausschließlich von der(den) anderen Funktion(en) ab. Wenn der (höchste) Exponent also eine gerade Zahl ist, dann bleiben die Grenzwerte dieselben (0 oder $+\infty$). Im Falle eines höchsten Exponenten, der ungerade ist, ändert sich dementsprechend das Vorzeichen (0 oder $-\infty$) des Grenzwertes für $x \to -\infty$. Der Grenzwert für $x \to +\infty$ bleibt derselbe, selbst wenn der höchste Exponent eine negative Zahl ist.

Für $f(x) = a^x$ mit $0 < a < 1$ und $g(x) = x^n$ mit n $\in \mathbb{R}$:
Es gilt weiterhin, dass sich das Wachstum der Exponentialfunktion durchsetzt, anhand dieser Aussage können die Grenzwerte von Funktionen, die Exponentialfunktionen mit Basis < 1 beinhalten, leicht bestimmt werden.
ACHTUNG: Auch hier gilt es, auf das Vorzeichen der anderen Funktion(en) zu achten.

5.4 Basiswechsel

Seien, $a, b \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$:

Theorem 5.4.1

$$a^x = b^{x \cdot \log_b a}$$

Beweis:

$$\begin{aligned} a^x &= (b^{\log_b a})^x \\ &= b^{x \cdot \log_b a} \end{aligned}$$

$\square$

5.5 Ableitungsregeln

Anhand der Definition des Differenzialquotienten kann man ermitteln, wie man Exponentialfunktionen ableitet.

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} a^x \cdot \frac{a^h - 1}{h} \\ &= a^x \cdot \underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h}}_{\text{eine Konstante } \lambda} \end{aligned}$$

$\square$

So erkennen wir, dass die Ableitung einer Funktion f der Form a^x diese selbe Funktion mal einem konstanten Vorfaktor λ ist: $(a^x)' = a^x \cdot \lambda$

Nun versucht man, Weiteres über λ zu erfahren: $\lambda = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{a^h - 1}{h}$ ist ein Grenzwert, der sich ausschließlich in Abhängigkeit von a verändert, ist also für jede definierte Funktion eine Konstante.
Wenn man mehrere Graphen der Funktionenschar $g_a(h) = \dfrac{a^h - 1}{h}$ zeichnet, erkennt man, dass es sich um stetige Funktionen handelt. Somit kann man behaupten, dass $\lim\limits_{h \to 0} g_a(h) = g_a(0)$ ist, dies entspricht auch λ.

GRAPEHN VERSCHIEDEN A AUCH E UND LAMBDA SAGEN

Hier ist auffällig, dass wenn man a so verändert, dass der y-Achsenschnittpunkt (0—1) wird, man sich immer mehr der Zahl e nähert. Wenn man für a genau e einsetzt hat man $g_e(0) = 1$. λ ist also 1 für die Funktion e^x, was gut zeigt, dass die natürliche Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung darstellt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^x = (\lim_{h \to 0} \frac{e^h - 1}{h}) \cdot e^x = 1 \cdot e^x = e^x$$

Eine wichtige Eigenschaft ist auch, dass $f'(0) = \lambda$ ist. Dies kann man auf zwei verschiedene aber gleichermaßen einfache Arten herausfinden, beide verwenden die vorher angewendete Definition des Differenzialquotienten.

$$\text{Differentialquotient neu angewendet:} \quad f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lambda$$
$$\text{Vorheriges Ergebnis genutzt:} \quad f'(x) = a^x \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} \Rightarrow f'(0) = a^0 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \cdot \lim_{h \to 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lambda$$

λ entspricht also auch der Steigung der Tangenten der Ausgangsfunktion an der y-Achse.

Exponentialfonktionen mit natürlicher Basis

Theorem 5.5.1

Die natürliche Exponentialfunktion überstimmt mit ihrer Ableitungsfunktion.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f' = e^x$$

Theorem 5.5.2

Die Funktion f mit $f(x) = e^{v(x)}$ ist eine Verkettung der Funktion $v : x \to v(x)$ mit der Exponentialfunktion $u : v \to e^v$. Exisitiert die Ableitung v', so gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = v'(x) \cdot e^{v(x)}$$

Bemerkung:

Letzteres kann natürlich auch verwendet werden, um eine Stammfunktion zu ermitteln.
Die Funktion f mit $f(x) = e^{v(x)}$ mit v differenzierbar hat als mögliche Stammfunktion F mit

$$F(x) = \frac{1}{v'(x)} \cdot e^{v(x)} + C$$

Beispiel:

1. $f(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+1}$
   $\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1} = -\frac{2}{3}x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+1}$
   $\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} : (-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1} + C = -\frac{2}{3x} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1} + C$

2. $f(t) = \frac{\sin(tx)}{e^{tx}}$
   $\Rightarrow f'(x) = \frac{t \cdot \cos(tx) \cdot e^{tx} - \sin(tx) \cdot t \cdot e^{tx}}{(e^{tx})^2} = \frac{t \cdot e^{tx} \cdot (\cos(tx) - \sin(tx))}{(e^{tx})^2} = \frac{t \cdot (\cos(tx) - \sin(tx))}{e^{tx}}$

3. $f(x) = x \cdot e^{t\sqrt{x}+0{,}5}$
   $\Rightarrow f'(x) = e^{t\sqrt{x}+0{,}5} + x \cdot (-\frac{t}{\sqrt{x}}) \cdot e^{t\sqrt{x}+0{,}5} = (1 - t\sqrt{x}) \cdot e^{t\sqrt{x}+0{,}5}$

Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis

Der vorher erwähnte Wert λ ist für beliebige Basen schwierig festzulegen. Viel einfacher geht es nach einem Basiswechsel. Wenn man nämlich e als Grundzahl wählt, kann wiederum die Ableitungsregel für Funktionen mit natürlicher Basis angewendet werden, so wurde das Problem umgangen.

Theorem 5.5.3

Sei f eine Funktion mit $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$. dann ist ihre Ableitungsfunktion f', für die gilt:

$$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{x \cdot \ln(a)}) && \text{Basiswechsel und Kettenregel anwenden} \\
&= (x \cdot \ln(a))' \cdot e^{x \cdot \ln(a)} && \text{Ableiten (} \ln a \text{ ist eine Konstante)} \\
&= \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln a} && \text{Auf ursprüngliche Basis bringen} \\
&= \ln(a) \cdot a^x
\end{aligned}$$

□

Dasselbe Prinzip kann auch für verkettete Funktionen angewendet werden.

Theorem 5.5.4

Die Funktion f mit $f(x) = a^{v(x)}, a \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$ ist eine Verkettung der Funktion $v : x \to v(x)$ mit der Exponentialfunktion $u : v \to a^v$. Exisitiert die Ableitung v', so gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = v'(x) \cdot \ln(a) \cdot a^{v(x)}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(a^{v(x)}) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(e^{v(x)\cdot\ln(a)}) && \text{Basiswechsel und Kettenregel anwenden} \\
&= (v(x)\cdot\ln(a))'\cdot e^{v(x)\cdot\ln(a)} && \text{Ableiten ($\ln a$ ist eine Konstante)} \\
&= v'(x)\cdot\ln(a)\cdot e^{v(x)\cdot\ln a} && \text{Auf ursprüngliche Basis bringen} \\
&= v'(x)\cdot\ln(a)\cdot a^{v(x)}
\end{aligned}$$

□

5.5.1 Aktivität

Quelle: Déclic 1ère?????? ich weiß nicht ob ich das noch mache

Kapitel 6

Logarithmen

by Clara

Definition 6.0.1

Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent, mit dem die Basis des Logarithmus' potenziert werden muss, um die gegebene Zahl zu erhalten. Logarithmen sind nur für positive reelle Zahlen definiert, die Basis muss positiv und ungleich 1 sein

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Definition 6.0.2

Man bezeichnet als Logarithmusfunktion eine Funktion der Form $x \rightarrow \log_b x$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$
x ist die Variable und wird *Argument* oder *Numerus* genannt, Logarithmusfunktionen sind nur für positive, reelle Zahlen definiert: $x \in \mathbb{R}^+$
b nennt man *Basis* oder *Grundzahl*, sie ist für jede Funktion fest forgegeben.

Hier Graphen

Besondere Logarithmen

Logarithmus naturalis	:	lna	$:=$	$\log_e a$
Logarithmus dualis	:	lda	$:=$	$\log_2 a$
Dekadischer Logarithmus	:	lga	$:=$	$\log_{10} a$

6.1 Rechengesetze

Aus den Potenzgesetzen kann man die Logarithmussätze erhalten.

Theorem 6.1.1

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$

$\log_c(a \cdot b)$	$=$	$\log_c a + \log_c b$	Produktregel
$\log_c \left(\frac{a}{b}\right)$	$=$	$\log_c a - \log_c b$	Quotientenregel
$\log_c a^n$	$=$	$n \cdot \log_c a$	1. Potenzregel
$\log_c \sqrt[n]{a}$	$=$	$\frac{1}{n} \cdot \log_c a$	2. Potenzregel

Bemerkung:

Die zweite Potenzregel ist nur ein Sonderfall der ersten, da $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

6.2 Gleichungen lösen

Beispiel:

- $\ln(x-2)+\ln(x+2)=\ln(4+2x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{2\cdot(2+x)}\right)=0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-2}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2}=1 \Leftrightarrow x=4$
- $\ln(1-x)+\ln(1+x)=2(\ln 3-\ln 5) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{(1-x)\cdot(1+x)\cdot 5^2}{3^2}\right)=0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)\cdot(1+x)\cdot 5^2}{3^2}=1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{4}{5}$
- $e^{2+\ln x}=x+3 \Leftrightarrow e^2\cdot x=x+3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{e^2-1}$
- $2x\ln(3e^x-2) \Leftrightarrow$

6.3 Logarithmusfunktionen

6.3.1 Eigenschaften

- $f(x)=\log_b x$
- $b\in\mathbb{R}^+\backslash 1$
- $D_f=\mathbb{R}^+$
- $W_f=\mathbb{R}$
- für $0>b>1$: f ist streng monoton wachsend
  für $b>1$: f ist streng monoton fallend
- für $0>b>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
  $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$
  für $b>1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$
  $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$
- $f(1)=0$
- y-Achse ist senkrechte Asmyptote

6.3.2 Ableitungsregeln

6.3.3 Funktionsuntersuchungsbeispiel

Kapitel 7

Integrale

by Rémy

7.1 Einführung - Stammfunktionen

Definition 7.1.1

Sei f eine Funktion, die über einem Intervall $I \in \mathbb{R}$ definiert ist. Man nennt jede Funktion F, die auf I differenzierbar ist, für die gilt $F'(x) = f(x)$,$\forall x \in I$ eine *Stammfunktion* von f.
Ist F irgendeine Stammfunktion von f, dann ist auch $F(x)+C$ (mit konstantem C) eine Stammfunktion, denn beim Ableiten fällt C als konstanter Summand weg. Jede Funktion hat also unendlich viele Stammfunktionen, die sich aber nur um einen konstanten Summanden unterscheiden.

Theorem 7.1.1

Jede auf I stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion über I.

7.2 Bestimmte Integrale

Definition 7.2.1

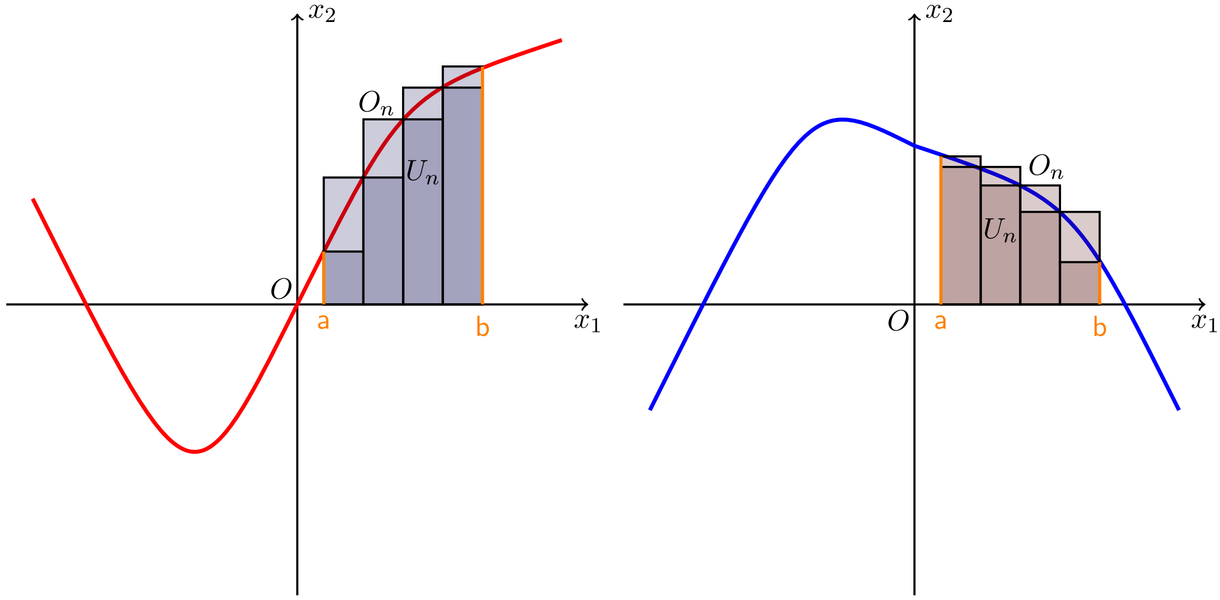
Sei f eine auf einem Intervall I stetige Funktion und zwei reelle Zahlen $a, b \in I$. Die reelle Zahl, dargestellt durch $\int_a^b f(t)dt$ und gegeben durch $F(b) - F(a)$, mit F als beliebige Stammfunktion von f, wird bestimmtes Integral von a bis b von f genannt. Eine weitere Darstellungsmöglichkeit des bestimmten Integrals sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty} s_n \\
&= \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} S_n \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{b-a}{n} \cdot k\right)
\end{aligned}$$

S_n und O_n bezeichnen die Obersumme, wohingegen s_n und U_n die Untersumme bezeichnen.

Bemerkung:

Der Hauptunterschied zwischen einem bestimmten und einem unbestimmten Integral ist die Existenz (bestimmtes Integral) bzw. das Fehlen (unbestimmtes Integral) der Integrationsgrenzen.
Bei einem bestimmten Integral ist die Lösung ein Flächeinhalt, also ein einfacher Zahlenwert.
Bei einem unbestimmten Integral erhält man als Lösung eine (wie soeben eingeführte) Stammfunktion.



Bemerkung:

a und b bezeichnen jeweils die untere und obere Grenze des zu berechnenden Integrals. Sie bezeichnen anschaulich die x-Werte, zwischen denen die Fläche berechnet wird. Tatsächlich ist die geometrische Interpretation von $\int_a^b f(t)dt$ die Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion und der x_1-Achse, die durch die Geraden $x = a$ und $x = b$ begrenzt wird.

Theorem 7.2.1

Für eine auf einem Intervall I stetige Funktion f und einer reellen Zahl $a \in I$ gilt: Die Funktion, die über I definiert ist durch $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$, ist die Stammfunktion von f, die bei a gleich 0 ist.

Aus diesen Sätzen stellt sich der **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung** zusammen. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf die Integralrechnung, da die Differentialrechnung bereits in Kapitel **??** behandelt wird.

Bemerkung:

Man beobachtet hier eine Erweiterung der NEW-Regel (siehe **??**, NEW-Regel):

N = Nullstellen
E = Extremstellen
W = Wendestellen

$$\begin{array}{cccccc} F & N & E & W & & \\ f & & N & E & W & \\ f' & & & N & E & W \end{array}$$

7.3 Sätze über Integrale

Theorem 7.3.1

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad \text{Invertieren der Intergrationsgrenzen}$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad \text{Summenregel}$$

$$\int_a^b r * f(x)dx = r * \int_a^b f(x)dx \quad \text{Linearität}$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad \text{Abschnittweise Integration}$$

Beweis - Invertieren der Intergrationsgrenzen:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$$

□

Beweis - Summenregel:

$$\int_a^b f(x)+g(x)dx = [F(x)+G(x)]_a^b = F(b)+G(b)-(F(a)+G(b)) = F(b)-F(a)+G(b)-G(b)$$

$$= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

□

Beweis - Linearität:

$$\int_a^b r * f(x)dx = [r * F(x)]_a^b = r * F(b) - r * F(a) = r * (F(a) - F(b)) = r * \int_a^b f(x)dx$$

□

Beweis - Abschnittweise Integration:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(a) - F(b) - (F(b) - F(c)) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

□

Theorem 7.3.2

Sei eine in $[a;b]$ stetige Funktion f. Wenn für $m, M \in \mathbb{R}$ gilt: $m \leqslant f(t) \leqslant M \ \forall t \in [a;b]$, dann gilt:

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)dt \leqslant M(b-a)$$

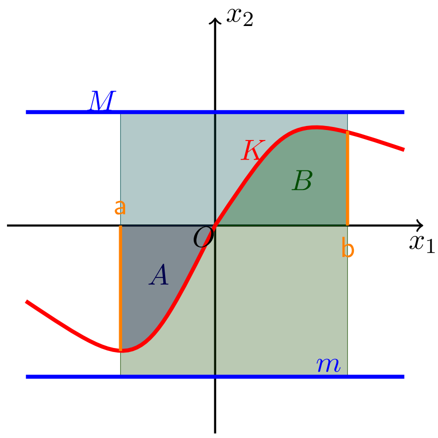
Beweis:

Es reicht, $m \leqslant f(t) \leqslant M$ als Ungleichung zwischen a und b zu integrieren. □

Bemerkung:

Eine Konsequenz davon ist, dass falls $|f(t)| \leqslant M \; \forall t \in [a;b]$, dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leqslant M(|b-a|)$$



Außerdem:

Definition 7.3.1

Für eine auf $[a;b]$ stetige Funktion f mit $a \neq b$ gilt: Der Mittelwert von f auf $[a;b]$ ist gegeben durch

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t)dt$$

7.4 Integrationsregeln und -techniken

7.4.1 Potenzregel

Hoffentlich einleuchtend und selbstverständlich:

Theorem 7.4.1

$$\forall n \in \mathbb{Z}n\{-1\} : \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Bemerkung:

Die einzige Ausnahme stellt der Fall $n = -1$ dar:

Theorem 7.4.2

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

Eine Konsequenz dessen ist:

Theorem 7.4.3

$$\int \frac{a}{bx+c} dx = \frac{a}{b} \ln(|bx+c|) + C$$

Beweis:

$$\left(\frac{a}{b} \ln(|bx+c|) \right)' = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{bx+c} \cdot b = \frac{a}{bx+c}$$

□

7.4.2 Partielle Integration

Theorem 7.4.4

Seien u und v zwei stetig differenzierbare Funktionen auf dem Intervall I. Dann gilt:

$$\int u(x)'v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
& & (u(x) * v(x))' &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&\Rightarrow & \int (u(x) * v(x))'dx &= \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \\
&\Leftrightarrow & u(x) * v(x) &= \int u'(x)v(x)dx + \int u(x)v'(x)dx \\
&\Leftrightarrow & \int u(x)v'(x)dx &= u(x) * v(x) - \int u'(x)v(x)dx
\end{aligned}$$

$\square$

Beispiel:

$$\int x\sin(x)dx \qquad \text{Mit } u(x) = x;\ u'(x) = 1;\ \ v(x) = \sin(x);\ v'(x) = -\cos(x)$$

$$\begin{aligned}
&= \int x(-\cos(x))'dx \\
&= -x\cos(x) - \int -\cos(x) * 1dx \\
&= -x\cos(x) + \int \cos(x)dx \\
&= -x\cos(x) + \sin(x)
\end{aligned}$$

7.4.3 Substitution

Theorem 7.4.5

Sei f eine auf $[a;b]$ stetige funktion und g eine auf diesem Intervall differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung g'. Wenn die Verkettung $f \circ g$ existiert, gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z)dz$$

Eine abgespeckte Variante dieses Theorems, genannt lineare Substitution ist gegeben durch:

Theorem 7.4.6

Für ein Funktion f mit einer Stammfunktion F und $r \neq 0$ gilt:

$$\int_a^b f(rx+s)dx = \frac{1}{r}[F(rx+s)]_a^b + C$$

Beispiel:

Zu berechnen:

$$\int_0^4 \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2\sqrt{x}}dx$$

Substitution:

$$\begin{aligned} g(x) &= x^2\sqrt{x} \quad (\text{alternativ: } g(x) = x^2\sqrt{x}+1) \\ \frac{dg}{dx} &= (x^2\sqrt{x})' \\ &= \frac{5}{2}\cdot x\sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\left(\Leftrightarrow dx = \frac{2}{5x\sqrt{x}}dg \Rightarrow \int_0^4 \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2\sqrt{x}}dx = \int_{g(0)}^{g(4)} \frac{\cancel{x\sqrt{x}}}{1+g}\cdot\frac{2}{5\cancel{x\sqrt{x}}}dg\right)$$

Berechnung des Integrals:

$$\begin{aligned} \int_0^4 \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2\sqrt{x}}dx &= \int_0^4 f(g(x))\cdot g'(x)dx \qquad \text{mit } f(x) = \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+x} \text{ und } g(x) = x^2\sqrt{x} \\ &= \int_{g(0)}^{g(4)} \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1+z}dz \\ &= \frac{2}{5}\cdot\int_{0^2\cdot\sqrt{0}}^{4^2\cdot\sqrt{4}} \frac{1}{1+z}dz \\ &= \frac{2}{5}\cdot[\ln(|1+z|)]_0^{32} \\ &\boxed{= \frac{2}{5}\cdot\ln(33)} \end{aligned}$$

7.4.4 Substitution der Integrationsvariablen

Theorem 7.4.7

Sei f eine auf $[a;b]$ stetige funktion und g eine auf diesem Intervall differenzierbare und umkehrbare Funktion mit stetiger Ableitungsfunktion g'. Wenn die verkettung $f\circ g$ esxistiert, gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} f(g(t)) * g'(t)dt$$

7.4.5 Integrale von e-Funktionen

Theorem 7.4.8

Für $f(x) = e^{l(x)}$ mit $l(x) = ax+b$ gilt: $F(x) = \frac{1}{a}e^{l(x)}$

Beweis:

Man bilde $F'(x)$. □

7.4.6 Integrale von $\ln()$-Funktionen

Es handelt sich hierbei streng genommen auch um eine Substitution:

Theorem 7.4.9

Für $x \in \mathbb{R}^+$ ist F eine Stammfunktion zur Funktion $f(x) = \ln(x)$ mit $F(x) = x\ln(x) - x$

Beweis:

Der Beweis erfolgt über partielle Integration und wird dem Schüler als Übung überlassen. □

7.4.7 Integrale von (un)geraden Funktionen

Theorem 7.4.10

Sei f eine auf einem Intervall I stetige und auf 0 zentrierte Funktion. Wenn f gerade ist, gilt $\forall a \in \mathbb{R}$: $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$, und wenn f ungerade ist:

$$\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$$

Beweis:

Sei die Funktion $\varphi(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)dt = F(x) - F(-x)$ mit F, einer Stammfunktion von f. Also ist φ auf $I = [-x; x]$ differenzierbar und $\varphi'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) + f(-x)$.

- Wenn f auf I ungerade ist, gilt: $f(x) = -f(-x) \Rightarrow \varphi'(x) = 0$ und somit konstant. Deshalb gilt $\varphi(x) = \varphi'(x) = 0$ auf I, was $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$ beweist.
- Wenn f gerade ist, gilt: $f(x) = f(-x) \Rightarrow \varphi'(x) = 2f(x)$. Also gilt für $\varphi(x) = \displaystyle\int_{0}^{x} 2f(t)dt$, einer Stammfunktion von $2f(x)$, $\varphi(0) = 0$, was $\displaystyle\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$ beweist.

□

7.4.8 Integrale von periodischen Funktionen

Theorem 7.4.11

Für jede in $\mathbb{R}$ stetige und periodische Funktion f gilt:

$$\int_{a}^{a+T} f(x)dx \text{ ist unabhängig von } a \text{ und } \int_{a}^{a+T} f(x)dx = \int_{0}^{T} f(x)dx$$

Beweis:

Sei die Funktion $\varphi = \int_x^{x+T} f(t)dt = F(x+T) - F(x)$ mit F, einer Stammfunktion von f. Dann ist $\varphi(x)$ auf f differenzierbar und $\varphi'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$ (denn f hat die Periode T). Also ist $\varphi(x)$ auf $\mathbb{R}$ konstant. Daraus folgt, dass $\int_a^{a+T} f(t)dt$ nicht von a abhängt und dass $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$. □

7.5 Flächen und Volumen mit Integralen berechnen

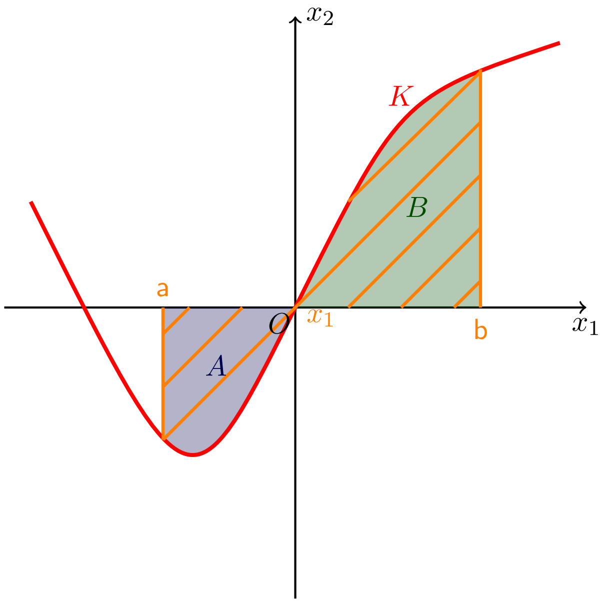
7.5.1 Fläche zwischen einer Funktion und der x_1-Achse

Definition 7.5.1

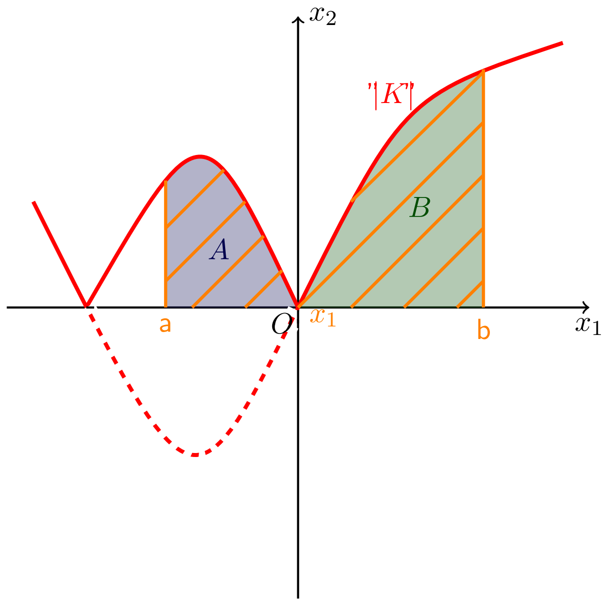
Für die auf dem Intervall $[a;b]$ (also stückweise) stetige Funktion f mit Nullstellen und $x_1, x_2, ..., x_n$ mit $a \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant ... \leqslant x_n \leqslant b$ ist der Flächeninhalt A zwischen dem Graphen von f und der x_1-Achse im Intervall $[a;b]$ gegeben durch:

$$\begin{aligned} A &= \left|\int_a^{x_1} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx\right| + ... + \left|\int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx\right| + \left|\int_{x_n}^{b} f(x)dx\right| \\ &= \left|\int_a^b f(x)dx\right| \end{aligned}$$

Bildhaft sieht das folgendermaßen aus:



$$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= |\int_a^{x_1} f(x)dx| + |\int_{x_1}^{b} f(x)dx| \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} C &= A + B \\ &= \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{b} f(x)dx \\ &= \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

Beispiel:

$f(x) = x^2 - 2x^3; x \in \mathbb{R}$
notwendige und hinreichende Bedingung für Nullstellen: $f(x) = 0$
$\Leftrightarrow x^2(1-2x) = 0$

$$\overset{SdN}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 &= 0 \\ 1-2x &= 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
A_{-1}^{1} &= \left|\int_{-1}^{0} x^2 - 2x^3 dx\right| + \left|\int_{0}^{0.5} x^2 - 2x^3 dx\right| + \left|\int_{0.5}^{1} x^2 - 2x^3 dx\right| \\
&= \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_{-1}^{0}\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_{0}^{0.5}\right| + \left|\left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4\right]_{0.5}^{1}\right| \\
&= \left|0 - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right)\right| + \left|\frac{1}{24} - \frac{1}{32} - 0\right| + \left|\frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{32}\right)\right| \\
&= 1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} \\
&= \frac{49}{48} \text{ FE}
\end{aligned}$$

GTR-Tipp

Mit $Y_1 = f(x)$ und $Y_2 = abs(Y_1)$ bzw. $Y_2 = |Y_1|$ (zu finden in `MATH` ¿ `NUM` oder über `F2`, also `ALPHA`+`WINDOW`) lässt sich die Fläche berechnen über `MATH` ¿ `MATH` mit der Option `fnInt`.
Hierzu wählt man Y_2 aus und gibt a und b an.

7.5.2 Fläche zwischen zwei Funktionen

Theorem 7.5.1

Für zwei auf $[a;b]$ stetige Funktionen f und g gilt: Die Fläche zwischen ihren Schaubildern C_f und C_g ist gegeben durch:

$$\int_a^b (g(x) - f(x))dx$$

7.5.3 Volumenangaben mittels Integralen

Theorem 7.5.2

Man betrachtet einen Körper, der durch zwei parallele Ebenen mit den Gleichungen $x_3 = a$ und $x_3 = b$ begrenzt wird. Für alle $a \leqslant z \leqslant b$ nennt man P_z die zur x_1-Achse orthogonale Fläche mit der Seite z und $S(z)$ die Fläche des Schnitts des Körpers durch P_z. Ist S stetig, so ist ist das Volumen V des Körpers gegeben durch:

$$V = \int_a^b S(z)dz$$

Bemerkung:

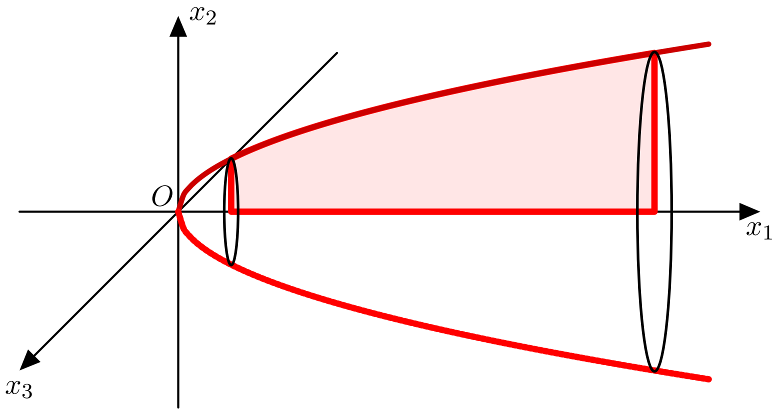
Analog zur Unterteilung einer Fläche in kleine Balken, kann man ein Volumen in kleine Scheiben unterteilen.

Bemerkung:

Dieses Theorem nehmen wir hin, ohne es zu beweisen, uns geht es ohnehin um die Schlussfolgerungen, die wir daraus ziehen können:

Theorem 7.5.3

Ein Körper, der durch die Rotation der Kurve von f um die x_1-Achse entsteht, hat ein Volumen von $\pi \int_a^b f^2(z)dz$.
Tatsächlich ist die Fläche eines zur x_3-Achse parallelen Querschnitts die der Scheibe mit Radius $f(z)$.



7.6 Uneigentliche Integrale

Definition 7.6.1

Ist die Funktion f auf $[a;+\infty)$ stetig und existiert der Grenzwert $\lim\limits_{Z\to\infty} \int_a^Z f(x)dx$, so heißt dieser Grenzwert *uneigentliches Integral* von f über $[a;+\infty)$.
Schreibweise: $\int_a^{+\infty} f(x)dx$

Analog dazu spricht man von einem uneigentlichen Integral für $\int_{-\infty}^b f(x)dx$

Beispiel:

$f(x) = \frac{-3}{x^3}$
$A(z) = \int_z^{-2} \frac{-3}{x^3}dx = \left[\frac{3}{2}x^{-2}\right]_z^{-2} = \frac{3}{8} - \frac{3}{2}z^{-2}$
$\lim\limits_{z\to-\infty} \frac{3}{8} - \frac{3}{2}z^{-2} = \frac{3}{8}$
$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral hat den Wert $\frac{3}{8}$.

Beispiel:

$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$A(z) = \int_z 1^Z \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^Z = 2\sqrt{Z} - 2$
$\lim_{Z \to \infty} 2\sqrt{Z} - 2 \; Z \overset{\to}{\to} \infty \; \infty$
$\Rightarrow$ Das uneigentliche Integral existiert nicht.

Definition 7.6.2

Ist die Funktion f auf $(a;b]$ stetig und existiert der Grenzwert $\lim\limits_{Z \to a} \int_Z^b f(x)dx$, so heißt dieser Grenzwert *uneigentliches Integral* von f über $(a;b]$.
Schreibweise: $\int_a^b f(x)dx$
Analog dazu spricht man von einem uneigentlichen Integral für $\int_c^a f(x)dx$

Bemerkung:

Diese Berechnung ergibt nur dann Sinn, wenn bei a eine Definitionslücke vorliegt.

7.7 Merkenswerte Integrale

Hier eine (möglicherweise unvollständige) rückblickende Liste mit Integralen, die insbesondere zum Abitur beherrscht werden sollten.
Diese sollten ohne weitere Rechtfertigung oder Beweis verwendet werden dürfen. (Diese Angabe ist ohne Gewähr)

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$
$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$
$$\int \sin x dx = -\cos x + C$$
$$\int \cos x dx = \sin x + C$$
$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + C$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$$
$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln(|u(x)|) + C$$
$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b} + C$$

$ACHTUNG:$ Definitionsmengen sind zu beachten.

Kapitel 8

Vektorielle Geometrie

by PASCAL

8.1 Vektoren

Definition 8.1.1

Ein Vektor ist Element eines Vektorraums.

Vektorräume, wir erinnern uns zurück. Verknüpfungen, inverse Elemente und die dazugehörenden Gesetze, konsequente Definitionen und mathematische Korrektheit, die guten alten Zeiten...
Tatsächlich kann ein Vektor in den meisten Fällen als Verschiebung bezeichnet werden, **nicht aber als Pfeil oder Strich!**

8.1.1 Besondere Vektoren

Definition 8.1.2: Der Ortsvektor

Der Vektor von O auf den Punkt P, geschrieben als $\overrightarrow{OP}$ oder $\vec{p}$.

Hat P die Koordinaten $(P_1|P_2|...|P_n)$, so besitzt $\vec{p}$ die Darstellung $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ ... \\ P_n \end{pmatrix}$.

Definition 8.1.3: Der Nullvektor

Der Vektor mit Wert $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{pmatrix}$, er hat keine und alle Richtungen zugleich.

Bemerkung:

Er ist somit das neutrale Element der Vektoraddition.

Definition 8.1.4: Der Verbindingsvektor

Der Vektor $\overrightarrow{AB}$ ist der Vektor, der den Punkt A auf den Punkt B abbildet. Er ist definiert als: $\overrightarrow{AB} = \vec{b} - \vec{a}$, woraus folgt, dass:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ ... \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

Definition 8.1.5: Der Gegenvektor

Der Gegenvektor zu $\overrightarrow{AB}$ ist $\overrightarrow{BA}$, definiert als $-\overrightarrow{AB}$.

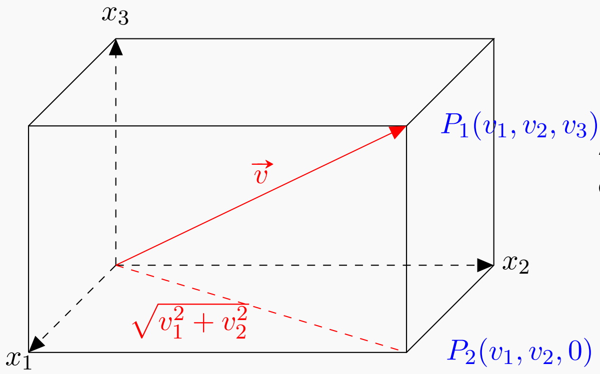
Bemerkung:

Er ist somit das inverse Element der Vektoraddition.

Bemerkung:

Definition 8.1.6: Norm eines Vektors

Die Norm eines Vektors ist anschaulich als seine Länge zu interpretieren. Der Betrag, wie sie ebenfalls genannt wird, eines Vektors $\vec{v}$ ist folgendermaßen definiert: $—\vec{v}— = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} v_i^2}; \vec{v} \in \mathbb{R}^n$.



Anhand dieser Graphik lässt sich die Berechnung der Norm eines Vektors $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ verdeutlichen. Für diesen glit: $—\vec{v}— = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$.

Definition 8.1.7: Der Einheitsvektor

Ein Vektor, dessen Norm 1 beträgt wird als normiert oder Einheitsvektor bezeichnet. Für jeden Vektor $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ existiert ein Einheitsvektor $\overrightarrow{v^*}$, der folgendermaßen definiert wird: $\overrightarrow{v^*} = \frac{1}{—\vec{v}—} * \vec{v}$.

8.2 Basen und Erzeugendensystem

Definition 8.2.1

Eine endliche Anzahl von Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in V$ heißt Erzeugendensystem, wenn sich **jeder** Vektor $\vec{v} \in V$ als Linearkombination dieser Vektoren schreiben lässt. Um ein Erzeugendensystem zu bilden benötigt man mindestens die Anzahl Vektoren, die der Anzahl von Dimensionen von $\vec{v}$ entspricht. Wenn man **genau** diese Anzahl besitzt, spricht man von einer Basis.

8.2.1 Besondere Basen

Definition 8.2.2: Orthogonalbasis

Sind die Vektoren der Basis paarweise orthogonal zueinander, so spricht man von einer **Orthogonalbasis**.

Definition 8.2.3: Orthonormalbasis

Sind die Vektoren zusätzlich zu dieser Bedingung normiert, wird sie als **Orthonormalbasis** bezeichnet.

Die einfachste und meist benutzte Basis des $\mathbb{R}^3$ besteht aus den drei Vektoren $\vec{e_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{e_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sie wird als **Standardbasis** des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Vektoren wie $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ lassen sich als eine Linearkombination der drei Vektoren der Standardbasis darstellen: $\vec{v} = 2\cdot\vec{e_1}+3\cdot\vec{e_2}+8\cdot\vec{e_3}$.

8.2.2 Basistransformation

Theorem 8.2.1: Basistransformation

Bilden die Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n}$ eine Basis des n-dimensionalen Vektorraums V und sei der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{pmatrix}$; $\vec{v} \in V$. Dann gilt wie üblich: $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{a_1} + v_2 \cdot \vec{a_2} + ... + v_n \cdot \vec{a_n}$. Sei eine weitere Basis $\vec{b_1}, \vec{b_2}, ..., \vec{b_n}$ des selben Vektorraumes, so besitzt der Vektor $\vec{v}$ andere Koordinaten: $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \\ ... \\ v_n' \end{pmatrix}$.

Dabei muss gelten: $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{a_1} + v_2 \cdot \vec{a_2} + ... + v_n \cdot \vec{a_n} = v_1' \cdot \vec{b_1} + v_2' \cdot \vec{b_2} + ... + v_n' \cdot \vec{b_n}$.

Bemerkung:

Um die Koordinaten eines Vektors in einer anderen Basis als der Aktuellen zu bestimmen, löst man diese Gleichung, die sich ergibt.

Beispiel:

Basis 1: Standardbasis des $\mathbb{R}^3$, Basis 2: $\vec{b_1} = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{b_2} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}, \vec{b_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ (in der Standardbasis des $\mathbb{R}^3$)

$$\vec{v} = -5 \cdot \vec{a_1} + 3 \cdot \vec{a_2} + 2 \cdot \vec{a_3} = r \cdot \vec{b_1} + s \cdot \vec{b_2} + t \cdot \vec{b_3}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccccc} 4r & -2s & t & = & -5 \\ 9r & -2s & 3t & = & 3 \\ -r & 8s & t & = & 2 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccccc} -r & 8s & t & = & 2 \\ 0 & 30s & 5t & = & 3 \\ 0 & 70s & 12t & = & 21 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccccc} -r & 8s & t & = & 2 \\ 0 & 30s & 5t & = & 3 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \cdot t & = & 14 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{lcr} r & = & -15.2 \\ s & = & -6.9 \\ t & = & 42 \end{array} \right|$$

$\Rightarrow \mathbb{L} = \{-15.2|-6.9|42\}$

Daraus lässt sich folgern: $\vec{v} = -15.2 \cdot \vec{b_1} - 6.9 \cdot \vec{b_2} + 42 \cdot \vec{b_3} = \begin{pmatrix} -15.2 \\ -6.9 \\ 42 \end{pmatrix}$ (in der anderen Basis).

8.3 Winkel zwischen Vektoren

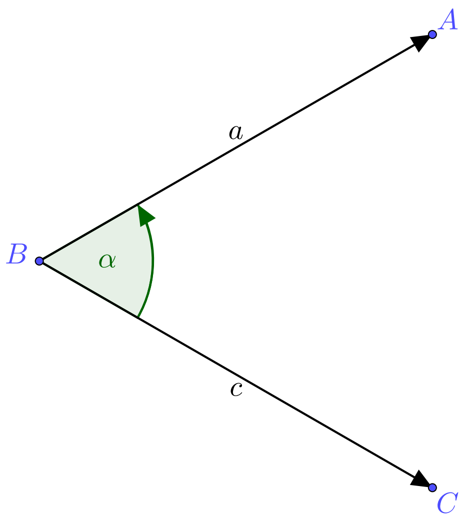
Definition 8.3.1: Winkel zwischen zwei Vektoren

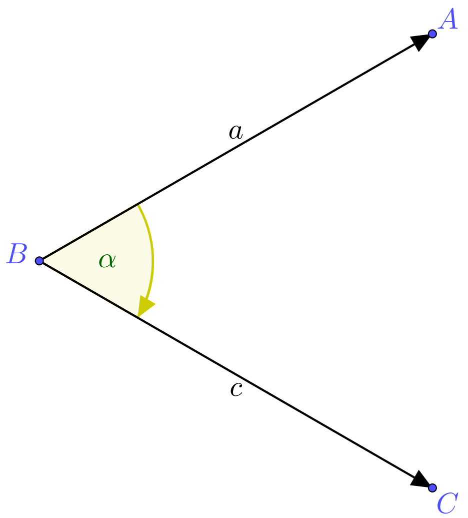
Unter einem Winkel zwischen zwei Vektoren versteht man den Winkel, der ensteht, wenn man beide Vektoren an einen **gemeinsamen Startpunkt** verschiebt ohne dabei ihre Ausrichtung zu verändern.

8.3.1 Orientierte Winkel

Definition 8.3.2: Mathematisch positiver Sinn

Winkel werden in der Mathematik zumeist im **mathematisch positiven Sinn** angegeben, welcher dem Uhrzeigersinn entgegengesetzt verläuft.





So ergibt sich $\alpha = \angle ABC = \angle ac = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$. Ein Winkel α wird zudem meist derart angegeben, dass $\alpha \in [-\pi, \pi]$ oder $\alpha \in [0, 2\pi]$ gilt. Dies bedeutet, dass man nur Winkel zwischen 0 und 180 erhält, im mathematisch positiven und negativen Sinn. Diese Einschränkung kennzeichnet man mit dem Ausdruck „**modulo** 2π“.

8.3.2 Rechnungen mit Winkeln

Bei Berechnungen von Winkeln zwischen Vektoren geht man genau wie in der elementaren Geometrie vor. So wird die Differenz zwischen zwei Winkeln θ_1 und θ_2 wie gehabt berechnet: $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$. Jedoch benötigt man weitere Rechenregeln, um mit Winkeln rechnen zu können.

Theorem 8.3.1: Relation de Chasles

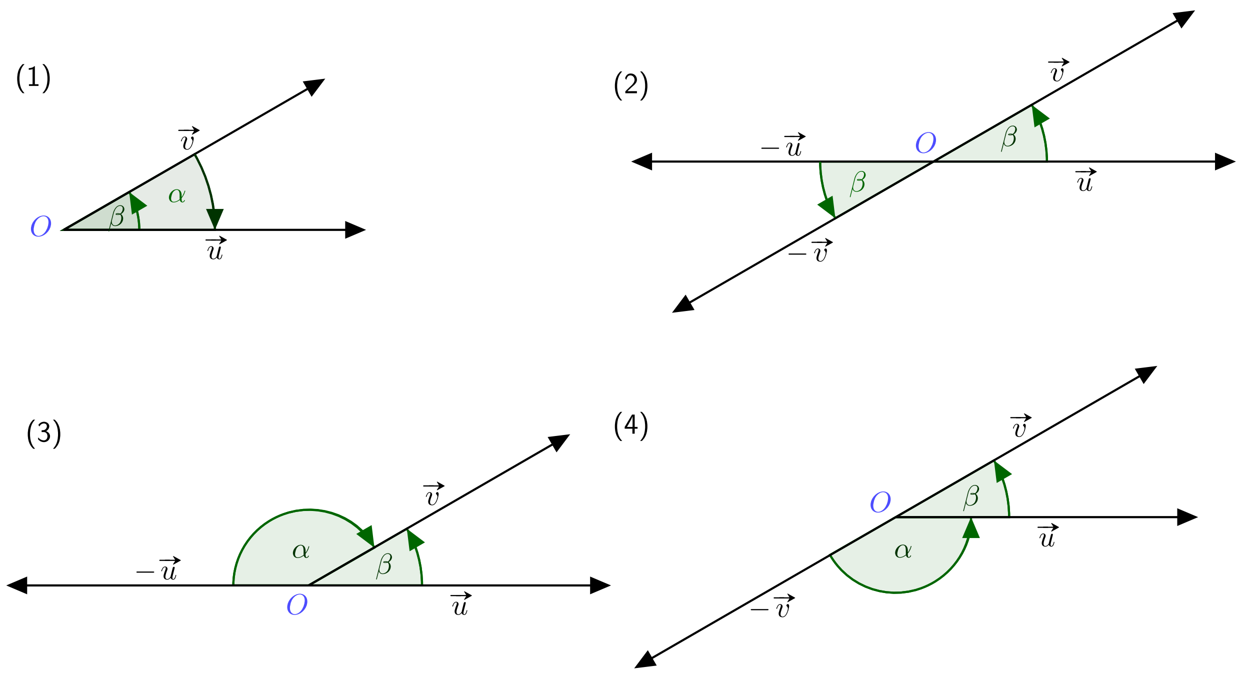
$(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}); \quad modulo \quad 2\pi$

Umformungen:

[(1)]$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) \quad (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (-\vec{u}, \vec{v})$

Aus der ersten und letzten dieser Relationen lässt sich analog dazu bestimmen:

[(4)]$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) = \pi - (-\vec{v}, \vec{u})$



8.4 Linearkombination

Vektoren lassen sich allgemein mit der additiven Verknüpfung des Vektorraums verknüpfen. Diese Verknüpfung zwischen zwei beliebigen Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{u}$ erfolgt, wie auch schon im Teil Verbindungsvektor gezeigt wird, wie folgt: $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \dots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}$. Anschaulich wird $\vec{u}$ an $\vec{v}$ angehängt und der Schaft von $\vec{v}$ mit der Spitze von $\vec{u}$ verbunden, um den neuen Vektor zu bilden.

Definition 8.4.1

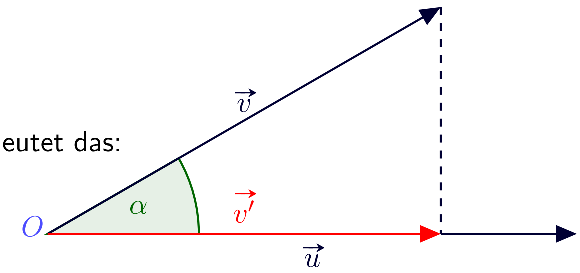
3. Eine Familie von Vektoren $\vec{a_1}, \vec{a_2}, ..., \vec{a_n} \in V$ wird als linear abhängig bezeichnet, wenn die Gleichung: $r_1 \cdot \vec{a_1} + r_2 \cdot \vec{a_2} + ... + r_n \cdot \vec{a_n} = \vec{0}; r_i \in \mathbb{R}$ nicht nur die triviale Lösung $r_1 = r_2 = ... = r_n = 0$ besitzt. Existiert nur diese Lösung, ist die Familie linear unabhägig.

Anders gesagt, ist eine Familie von Vektoren linear abhängig, wenn sich einzelne Vektoren dieser Familie als Linearkombination von einer beliebigen Anzahl anderer Vektoren der Familie darstellen lassen.

> **Bemerkung:**
>
> Eine linear abhängige Familie **aus genau zwei** Vektoren wird als kollinear bezeichnet.
> Eine linear abhängige Familie **aus genau drei** Vektoren dagegen nennt man komplanar.

8.5 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine ("multiplikative") Verknüpfung des Vektorraums. Seinen Namen trägt es, da es aus zwei Vektoren einen Skalar, alias eine Zahl macht. Es dient dazu ein Maß für den Winkel, den zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ einschließen, festzulegen. Zudem lässt sich von dieser Definition aus der Winkel selber anhand der



Vektoren bestimmt werden. Es wird als die Multiplikation der Norm der Projektion des Vektors $\vec{v}$ in die Richtung von $\vec{u}$, das heißt, der Anteil von $\vec{v}$ der auf der Geraden liegt, entlang welcher $\vec{u}$ liegt, mit der Norm von $\vec{u}$ definiert. Im Klartext bedeutet das:

Definition 8.5.1

$$\vec{u} \odot \vec{v} |\vec{u}| \cdot |\vec{v'}|$$
$$= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)$$

Daraus lässt sich ableiten, dass:

- $0 <= \alpha < 90$ (spitzer Winkel) $\cos\alpha > 0 \Leftrightarrow \vec{u} \odot \vec{v} > 0$
- $90 < \alpha <= 180$ (stumpfer Winkel) $\cos\alpha < 0 \Leftrightarrow \vec{u} \odot \vec{v} < 0$
- $\alpha = 90$ (rechter Winkel) $\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \odot \vec{v} = 0$

Da wir nun aber selten Zugriff auf den Winkel haben, und dieser in den meisten Fällen die gesuchte Variable ist, benötigen wir eine praktikablere Berechnung, welche dasselbe Ergebnis liefert. Als Ansatz kann man auf eine im Abschnitt "Orthonormalbasis" bereits besprochene Schreibweise von Vektoren zurückgreifen:

$$\vec{u} = u_1 \cdot \vec{e_1} + u_2 \cdot \vec{e_2} + u_3 \cdot \vec{e_3}$$
$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{e_1} + v_2 \cdot \vec{e_2} + v_3 \cdot \vec{e_3}$$

Somit erreicht man folgendes Ergebnis: $\vec{u} \odot \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{e_1} + u_2 \cdot \vec{e_2} + u_3 \cdot \vec{e_3}) \odot \vec{v} = v_1 \cdot \vec{e_1} + v_2 \cdot \vec{e_2} + v_3 \cdot \vec{e_3}$
Um hiermt allerdings weiterrechnen zu können, müssen einige Rechenregeln bezüglich des Skalarprodukts aufgestellt werden. Zunächst gilt, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist: $\vec{u} \odot \vec{v} = \vec{v} \odot \vec{u}$, da

Bemerkung:

Aus dieser Gleichung folgt: $\cos(\alpha) = \dfrac{\vec{u} \odot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$.

8.6 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt ist das zweite nützliche Werkzeug, welches in der Vektorgeometrie genutzt wird. Es dient hauptsächlich zur einfachen Berechnung eines zu zwei **nicht kollinearen** Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ orthogonalen Vektors $\vec{i}$.

Definition 8.6.1

$$\vec{i} = \vec{u} \times \vec{v} \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$$

Beweis:

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ beliebige zueinander nicht kollineare Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Ein zu beiden Vektoren orthogonaler Vektor ergibt sich durch:

$$\begin{cases} \vec{u} \odot \vec{i} & = & 0 & (1) \\ \vec{v} \odot \vec{i} & = & 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 & = & 0 & (1) & \quad | \cdot v_1 \\ v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 & = & 0 & (2) & \quad | \cdot (-u_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 & = & 0 & (1) & \\ -u_1 v_1 i_1 - u_1 v_2 i_2 - u_1 v_3 i_3 & = & 0 & (2) & \quad |(1)+(2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 & = & 0 & (1) \\ u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 - u_1 v_2 i_2 - u_1 v_3 i_3 & = & 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 & = & 0 & (1) \\ (u_2 v_1 - u_1 v_2) \cdot i_2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot i_3 & = & 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 & = & 0 & (1) \\ (u_2 v_1 - u_1 v_2) \cdot i_2 & = & -(u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot i_3 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 & = & 0 & (1) \\ i_2 \; = \; (u_3 v_1 - u_1 v_3) \wedge i_3 & = & -(u_2 v_1 - u_1 v_2) & (2) \end{cases} \qquad \textbf{Eine}\ \text{mögliche Lösung}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 & = & 0 & (1) \\ i_2 & = & u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 & = & u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot u_2 v_1 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot u_3 v_1 & = & 0 & (1) \\ i_2 & = & u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 & = & u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 & = & \dfrac{-(u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot u_2 v_1 - (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot u_3 v_1}{u_1 v_1} & (1) \\ i_2 & = & u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 & = & u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 & = & \dfrac{(u_1 v_3 - u_3 v_1) \cdot u_2 + (u_2 v_1 - u_1 v_2) \cdot u_3}{u_1} & (1) \\ i_2 & = & u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 & = & u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 & = & u_2 v_3 - u_3 v_2 + \dfrac{\cancel{-u_3 v_1 u_2} + \cancel{u_2 v_1 u_3}}{\cancel{u_1}} & (1) \\ i_2 & = & u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 & = & u_2v_3 - u_3v_2 & (1) \\ i_2 & = & u_3v_1 - u_1v_3 & (2) \\ i_3 & = & u_1v_2 - u_2v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{i} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

□

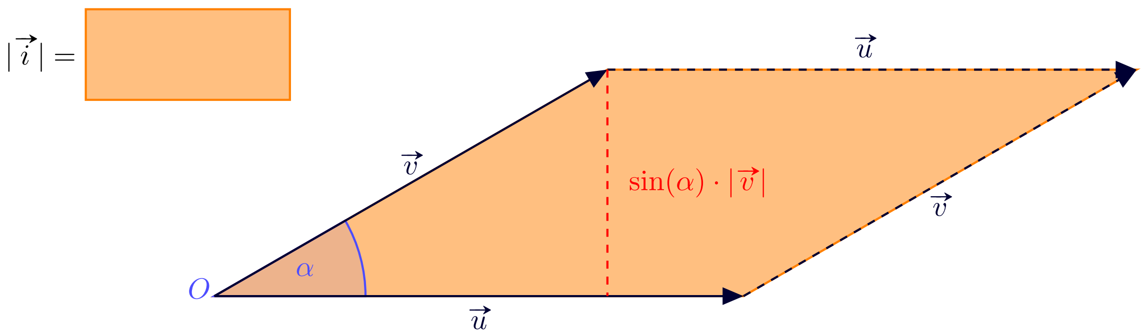
Bemerkung:

$\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} (\vec{u} = r \cdot \vec{v}; r \in \mathbb{R})$

Zudem gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{i}| &= |\vec{u}| \cdot (\sin(\alpha) \cdot |\vec{v}|) \\ &= |\vec{u}| \cdot \left(\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\vec{u} \odot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)\right) \cdot |\vec{v}|\right) \end{aligned}$$

Einfacher gesagt ist der Betrag des Vektors $\vec{i}$ gleich der Fläche des Parallelogramms, welches die zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ aufspannen. Um diese doch recht verwirrende Erklärung etwas zu verdeutlichen folgt eine visuelle Darstellung:



Beweis:

$$
\begin{aligned}
|\vec{u}| \cdot (sin(\alpha) \cdot |\vec{v}|) &= \sqrt{(|\vec{u}|)^2 \cdot (|\vec{v}|)^2} \cdot \sin(\alpha) \\
&= \sqrt{(|\vec{u}|)^2 \cdot (|\vec{v}|)^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha))} \\
&= \sqrt{(\vec{u})^2 \cdot (\vec{v})^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha))} \\
&= \sqrt{(\vec{u})^2 \cdot (\vec{v})^2 - (\vec{u})^2 \cdot (\vec{v})^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \\
&= \sqrt{\vec{u} \odot \vec{u} \cdot \vec{v} \odot \vec{v} - (|\vec{u}|)^2 \cdot (|\vec{v}|)^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \\
&= \sqrt{\vec{u} \odot \vec{u} \cdot \vec{v} \odot \vec{v} - |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)} \\
&= \sqrt{\vec{u} \odot \vec{u} \cdot \vec{v} \odot \vec{v} - \vec{u} \odot \vec{v} \cdot \vec{u} \odot \vec{v}} \\
&= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2} \\
&= \sqrt{\begin{aligned}&(\cancel{u_1^2v_1^2} + u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + \cancel{u_2^2v_2^2} + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 \\ &+ \cancel{u_3^2v_3^2}) - (\cancel{u_1^2v_1^2} + u_1v_1u_2v_2 + u_1v_1u_3v_3 + u_2v_2u_1v_1 + \cancel{u_2^2v_2^2} \\ &+ u_2v_2u_3v_3 + u_3v_3u_1v_1 + u_3v_3u_2v_2 + \cancel{u_3^2v_3^2}\end{aligned}} \\
&= \sqrt{\begin{aligned}&u_1^2v_2^2 + u_1^2v_3^2 + u_2^2v_1^2 + u_2^2v_3^2 + u_3^2v_1^2 + u_3^2v_2^2 \\ &+ \; - (2u_1v_1u_2v_2 + 2u_1v_1u_3v_3 + 2u_2v_2u_3v_3)\end{aligned}} \\
&= \sqrt{u_1^2v_2^2 - 2u_1v_1u_2v_2 + u_2^2v_1^2 + u_1^2v_3^2 - 2u_1v_1u_3v_3 + u_3^2v_1^2 + u_2^2v_3^2 - 2u_2v_2u_3v_3 + u_3^2v_2^2} \\
&= \sqrt{(u_1v_2 - u_2v_1)^2 + (u_1v_3 - u_3v_1)^2 + (u_2v_3 - u_3v_2)^2} \\
&= \left| \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix} \right| \qquad \text{(unter anderem, aber auch)} \\
&= |\vec{i}|
\end{aligned}
$$

□

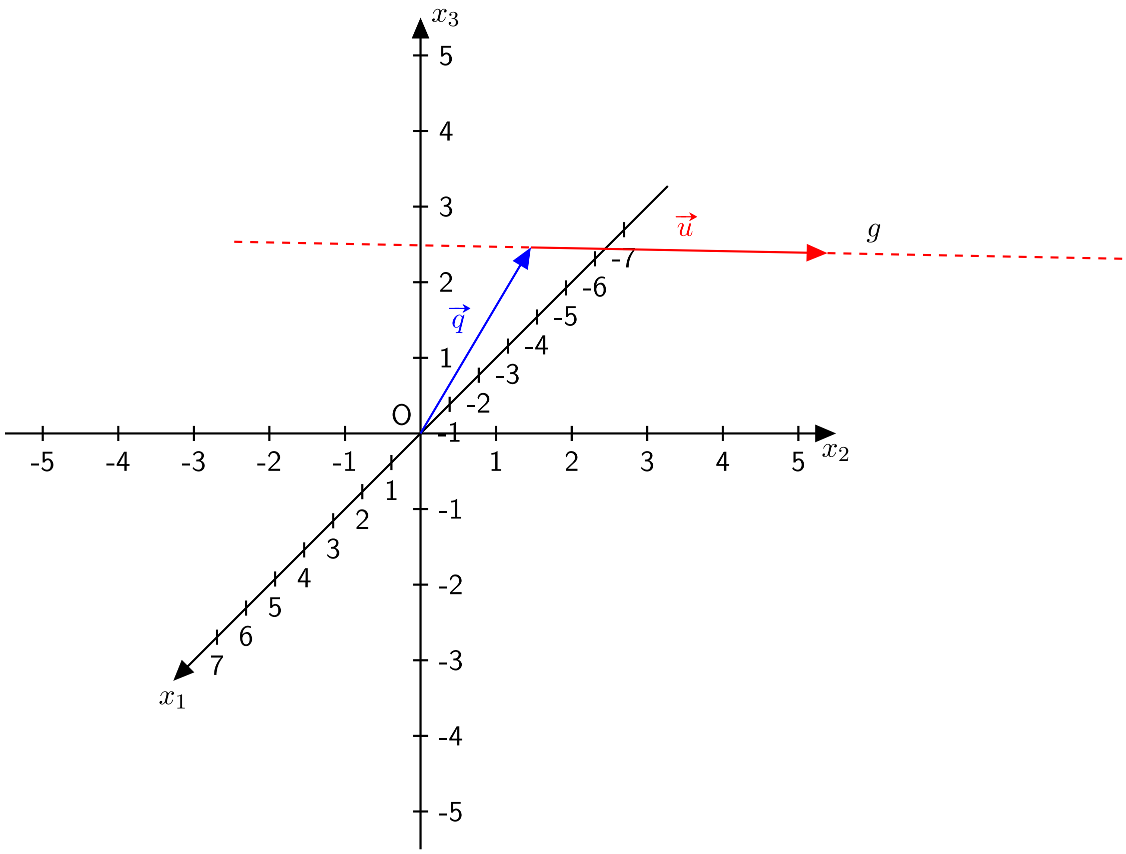
8.7 Geraden

8.7.1 Darstellungen

Eine Gerade ist ein sehr bekannter Bestandteil der elementaren Geometrie. Bezogen auf die Vektorgeometrie ist sie nichts anderes als ein unendlich langer Vektor, beziehungsweise eine Linearkombination aus unendlich vielen (identischen / kollinearen) Vektoren. Somit ergibt sich die eindeutige **Parameterform** einer Geraden $g: \quad g: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{u}; s \in \mathbb{R}$. Diese Schreibweise beschreibt die der Geraden zugehörigen Punktmenge. Der Vektor $\vec{q}$ bestimmt die Position der Geraden im Raum und trägt folglich den Namen **Stützvektor**, wohingegen der Vektor $\vec{u}$ die Ausrichtung der Geraden anzeigt und **Richtungsvektor** genannt wird.

Bemerkung:

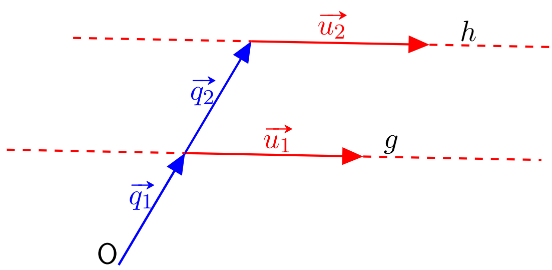
Die Parameterform ist die einzige mögliche Darstellungsform einer Geraden im $\mathbb{R}^3$, da ihr Normalvektor nicht eindeutig bestimmt werden kann. Im $\mathbb{R}^2$ jedoch ist dies möglich, ähnlich wie für Kreise. Zudem kann eine Gerade in Koordinatenform durch **die Schnittmenge zweier Ebenen** beschrieben werden (siehe auch„5.7.3 Lagebeziehungen zwischen Ebenen“).



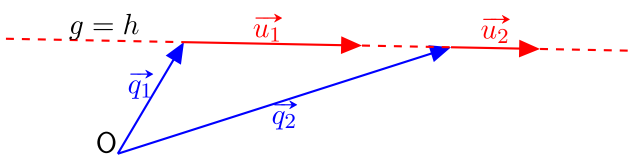
8.7.2 Lagebeziehungen zwischen Geraden

Es gibt bezüglich Geraden vier verschiedene Beziehungen, vorausgesetzt diese befinden sich im $\mathbb{R}^3$. Zwei Geraden g und h können...

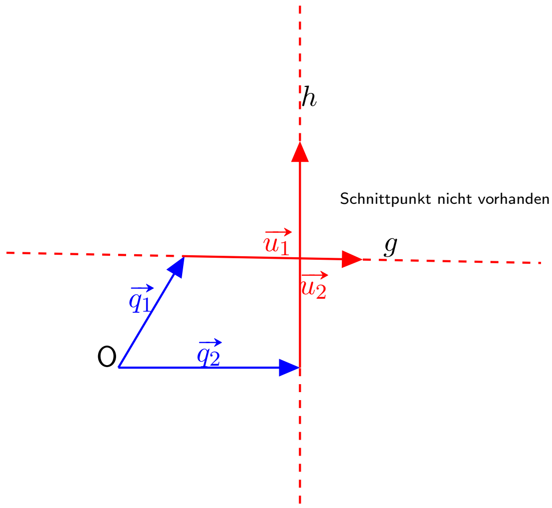
1)...**parallel** sein...



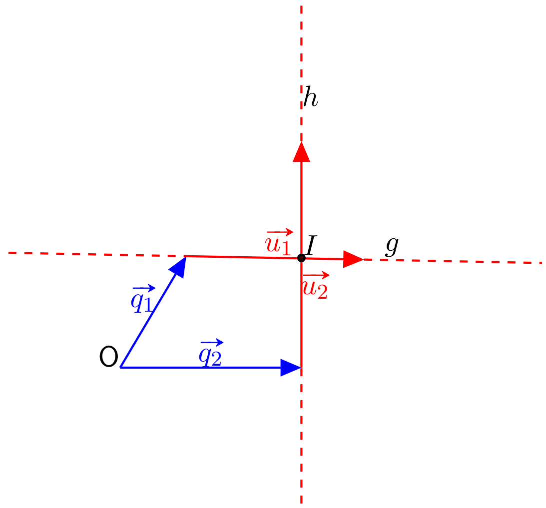
2)...**identisch** sein...



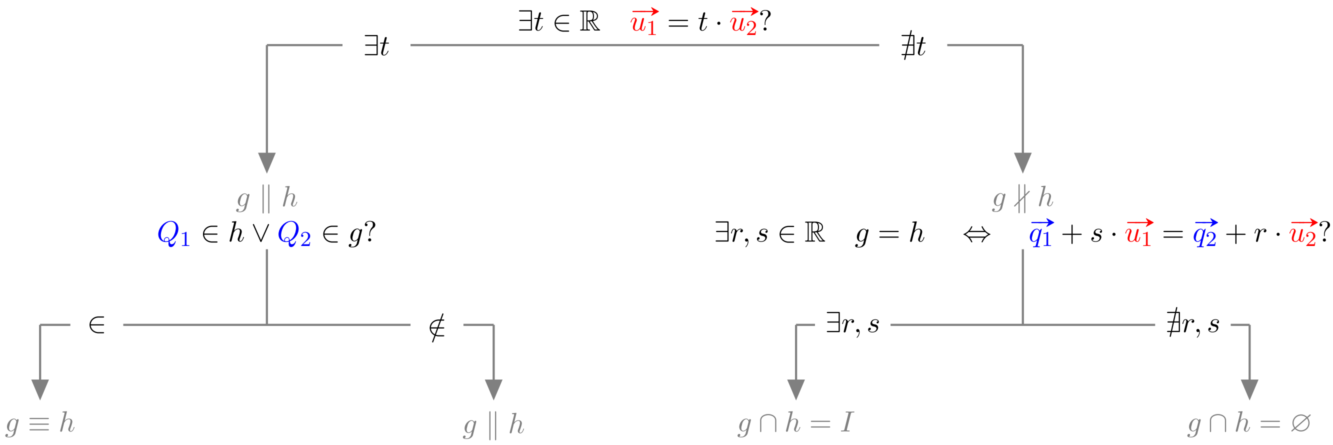
3)...**windschief zueinander** sein...



4)...**sich schneiden**



Die Lagebeziehung zwischen zwei Geraden g und h lässt sich wie folgt ermitteln:



8.7.3 Abstand zu einem Punkt

Definition 8.7.1

Der **Lotfußpunkt** L einer Geraden $g : \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{u}; t \in \mathbb{R}$ zu einem Punkt $P \notin g$ ist definiert durch: $\overrightarrow{LP} \odot \vec{u} = 0$. Er ist somit der dem Punkt P am nähesten gelegenen Punkt der Gerade g und wird folglich hauptsächlich zur Abstandsberechnung genutzt.

Der Abstand von einer Geraden g zu einem Punkt P ist äquivalent zur **Norm des Verbindungsvektors** $\overrightarrow{LP}$, wobei L der Lotfußpunkt der Geraden g zu P ist. Für die Berechnung des Abstands gibt es drei verschiedene Lösungsansätze (OHG) von denen zwei gebräuchlicher sind als der dritte.

Orthogonalität: Da die Norm des Verbindungsvektors gesucht wird, gilt es nun diesen eindeutig zu bestimmen. Folgender Ablauf führt zum Ziel:

1. Punkt L auf der Geraden g in Abhängigkeit des Faktors des Richtungsvektors bestimmen:

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} q_1 + t \cdot u_1 \\ q_2 + t \cdot u_2 \\ q_3 + t \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

2. Verbindungsvektor bestimmen:

$$\overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} p_1 - (q_1 + t \cdot u_1) \\ p_2 - (q_2 + t \cdot u_2) \\ p_3 - (q_3 + t \cdot u_3) \end{pmatrix}$$

3. $\overrightarrow{LP} \odot \vec{u} = 0$ und Gleichung lösen (nach t auflösen):

$$0 = u_1 \cdot (p_1 - (q_1 + t \cdot u_1)) + u_2 \cdot (p_2 - (q_2 + t \cdot u_2)) + u_3 \cdot (p_3 - (q_3 + t \cdot u_3))$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

4. Verbindungsvektor berechnen:

$$\overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} p_1 - (q_1 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_1) \\ p_2 - (q_2 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_2) \\ p_3 - (q_3 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_3) \end{pmatrix}$$

5. Norm des Verbindungsvektors berechnen:

$$\begin{aligned} d(g,P) &= |\overrightarrow{LP}| \\ &= \left| \begin{pmatrix} p_1 - \left(q_1 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_1\right) \\ p_2 - \left(q_2 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_2\right) \\ p_3 - \left(q_3 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_3\right) \end{pmatrix} \right| \\ &= \sqrt{\left(p_1 - \left(q_1 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_1\right)\right)^2} \\ &\overline{+\left(p_2 - \left(q_2 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_2\right)\right)^2} \\ &\overline{+\left(p_3 - \left(q_3 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2} \cdot u_3\right)\right)^2} \end{aligned}$$

<u>Hilfsebene</u>: Diese Methode hat sich Platz zwei erkämpft:

1. Hilfsebene E bestimmen ($\vec{n} \equiv \vec{u} \quad P \in E$, da die Gerade g die Ebene im rechten Winkel durchstößt und der Verbindungsvektor somit orthogonal zur Geraden ist):

$$E : \vec{u} \odot [\vec{x} - \vec{p}] = 0$$
$$\Leftrightarrow u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3$$

2. $g = E$ und Gleichung lösen (nach t auflösen):

$$u_1(q_1 + t \cdot u_1) + u_2(q_2 + t \cdot u_2) + u_3(q_3 + t \cdot u_3) = u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{{u_1}^2 + {u_2}^2 + {u_3}^2}$$

3. Siehe Schritt **??** Orthogonalität

4. Siehe Schritt **??** Orthogonalität

Grenzwertberechnung: Zu guter Letzt wollen wir die Analysis Fanatiker befriedigen:

1. Siehe Schritt **??** Orthogonalität
2. Siehe Schritt **??** Orthogonalität
3. Norm des Vektors in Abhängigkeit von t bestimmen:

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{LP}| &= \sqrt{(p_1-(q_1+t\cdot u_1))^2+(p_2-(q_2+t\cdot u_2))^2+(p_3-(q_3+t\cdot u_3))^2} \\ &= \sqrt{({u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2)t^2+2((q_1-p_1)\cdot u_1+(q_2-p_2)\cdot u_2+(q_3-p_3)\cdot u_3)t} \\ &\quad \overline{+((p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2)}\end{aligned}$$

Somit ergibt sich eine Funktion $f(t)$:

$$\begin{aligned}f(t) &= \sqrt{({u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2)t^2+2((q_1-p_1)\cdot u_1+(q_2-p_2)\cdot u_2+(q_3-p_3)\cdot u_3)t} \\ &\quad \overline{+((p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2)}\end{aligned}$$

4. Tiefpunkt von $f(t)$ berechnen:

$$\begin{aligned}f'(t) &= \frac{2({u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2)t+2((q_1-p_1)\cdot u_1+(q_2-p_2)\cdot u_2+(q_3-p_3)\cdot u_3)}{2\sqrt{({u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2)t^2+2((q_1-p_1)\cdot u_1+(q_2-p_2)\cdot u_2+(q_3-p_3)\cdot u_3)t}\cdots} \\ &\quad \cdots\overline{\overline{+((p_1-q_1)^2+(p_2-q_2)^2+(p_3-q_3)^2)}}\end{aligned}$$

notwendige Bedingung TP:

$$\begin{aligned}&f'(t)=0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 2({u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2)t+2((q_1-p_1)\cdot u_1+(q_2-p_2)\cdot u_2+(q_3-p_3)\cdot u_3 \\ &\Leftrightarrow t = \frac{u_1\cdot(p_1-q_1)+u_2\cdot(p_2-q_2)+u_3\cdot(p_3-q_3)}{{u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2}\end{aligned}$$

Die hinreichende Bedingung ist nicht zu prüfen, sie gilt (der Minimalabstand existiert immer), und die Art des Extremwerts ist ebenfalls vorbestimmt, da der Verbindungsvektor unendlich lang wird wenn man den Lotfußpunkt in beide Richtungen entlang der Geraden verschiebt.

5. Siehe Schritt **??** Orthogonalität
6. Siehe Schritt **??** Orthogonalität

Bemerkung:

Wie sich unschwer erkennen lässt, sind die Formeln für die Berechnung von t bei allen drei Lösungsansätzen identisch. Die Methoden unterscheiden sich somit nur am Anfang voneiander.

Bemerkung:

Zur Abstandsberechnung gibt es eine allgemeine Formel, welche die oben aufgelisteten Vorgehensweisen überflüssig macht. Da sie für das Abitur allerdings nicht zugelassen ist, wird sie hier nicht bewiesen beziehungsweise graphisch ergänzt: $d(g,P) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{QP}|}{|\vec{u}|}$.

8.7.4 Abstand zweier Geraden

Zwei nicht sich schneidende oder identische Geraden haben einen **eindeutig definierten Minimalabstand**. Bei zwei parallelen Geraden ist dies einfach zu visualisieren, der Abstand zweier windschiefer Geraden jedoch weniger. Im Folgenden sollen beide Fälle untersucht werden.

Parallele Geraden: Der Abstand zweier paralleler Geraden g und h entspricht genau dem Abstand eines Punktes $P \in g \vee P \in h$ zur jeweiligen gegenüberliegenden Geraden. Somit genügt es den Abstand zwischen zwischen dem Stützpunkt einer Geraden und der anderen zu berechnen.

Windschiefe Geraden: Der minimale Abstand zweier windschiefer Geraden lässt sich mithilfe einer **Hilfsebene** verbildlichen und bestimmen. Gegeben seien zwei Geraden $g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}; r \in \mathbb{R}$ und $h : \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}; s \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass: $E : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \vee E : \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}; s, r \in \mathbb{R}$. Somit ergibt sich eine Ebene, welche entweder die Gerade g oder h enthält und parallel zur anderen ist. Der Minimalabstand ist äquivalent zum Abstand zwischen einem Punkt der Geraden, die nicht in der Ebene enthalten ist, und der Ebene. Für die genaue Vorgehensweise von diesem Punkt aus empfiehlt es sich sich den Teil „Abstand zu einem Punkt“ unter Ebenen zuzuwenden.

Bemerkung:

Zur Berechnung des Abstands zweier windschiefer Geraden gibt es zudem eine Formel, welche zugleich das **Ergebnis des Skalarprodukts** veranschaulicht. Aus zwei Geraden

$$g : \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}; r \in \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad h : \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}; s \in \mathbb{R}$$

lässt sich mit dem Kreuzprodukt ein normierter Normalenvektor n_0 zu beiden Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ errechnen, den man mit dem Verbindungsvektor der beiden Ortsvektoren $(\vec{q} - \vec{p})$ zur Minimalabstandsberechnung der beiden Geraden skaliert:

$$d(g,h) = |n_0 \odot (\vec{q} - \vec{p})| = |\frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \odot (\vec{q} - \vec{p})|$$

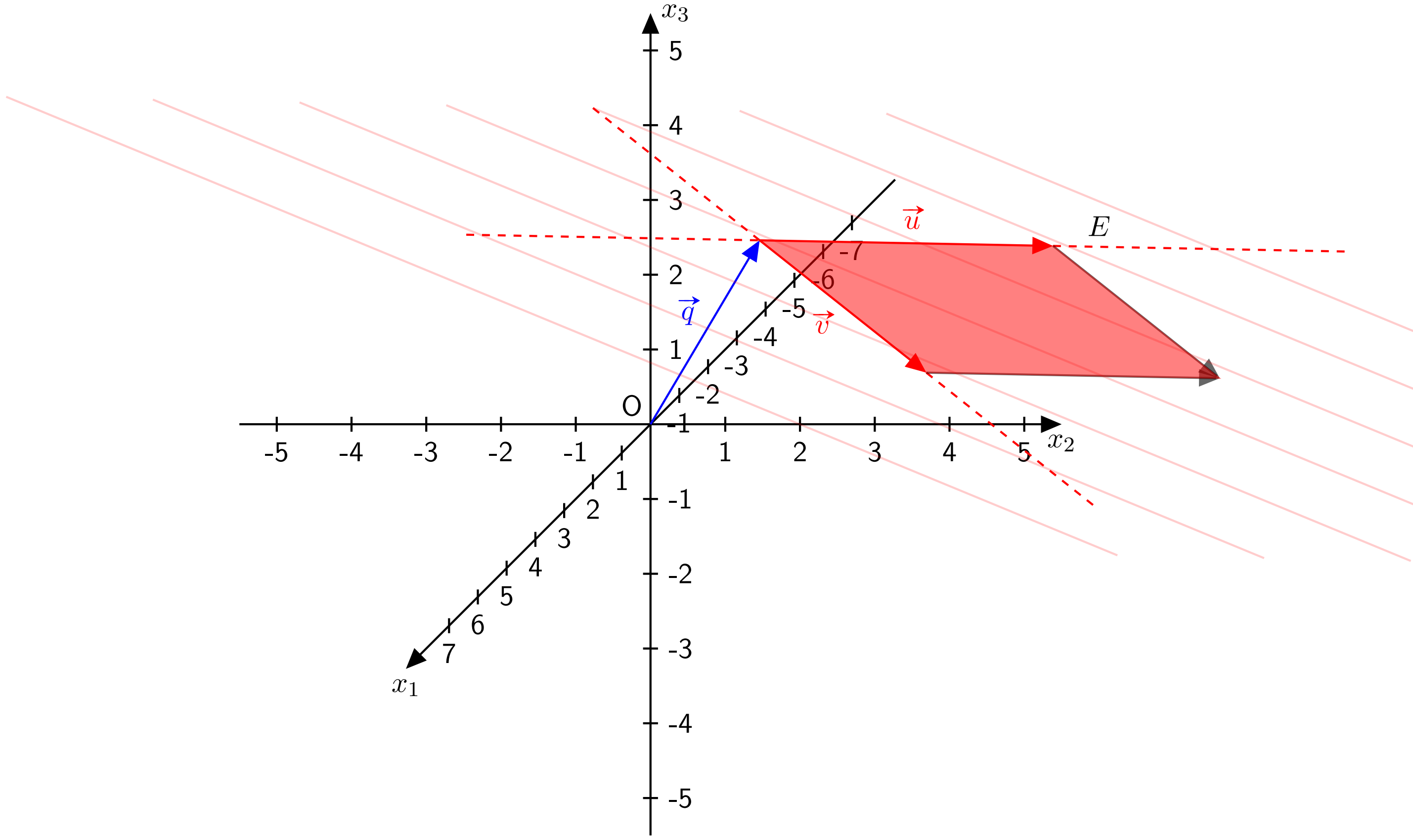
8.8 Ebenen

8.8.1 Darstellungen

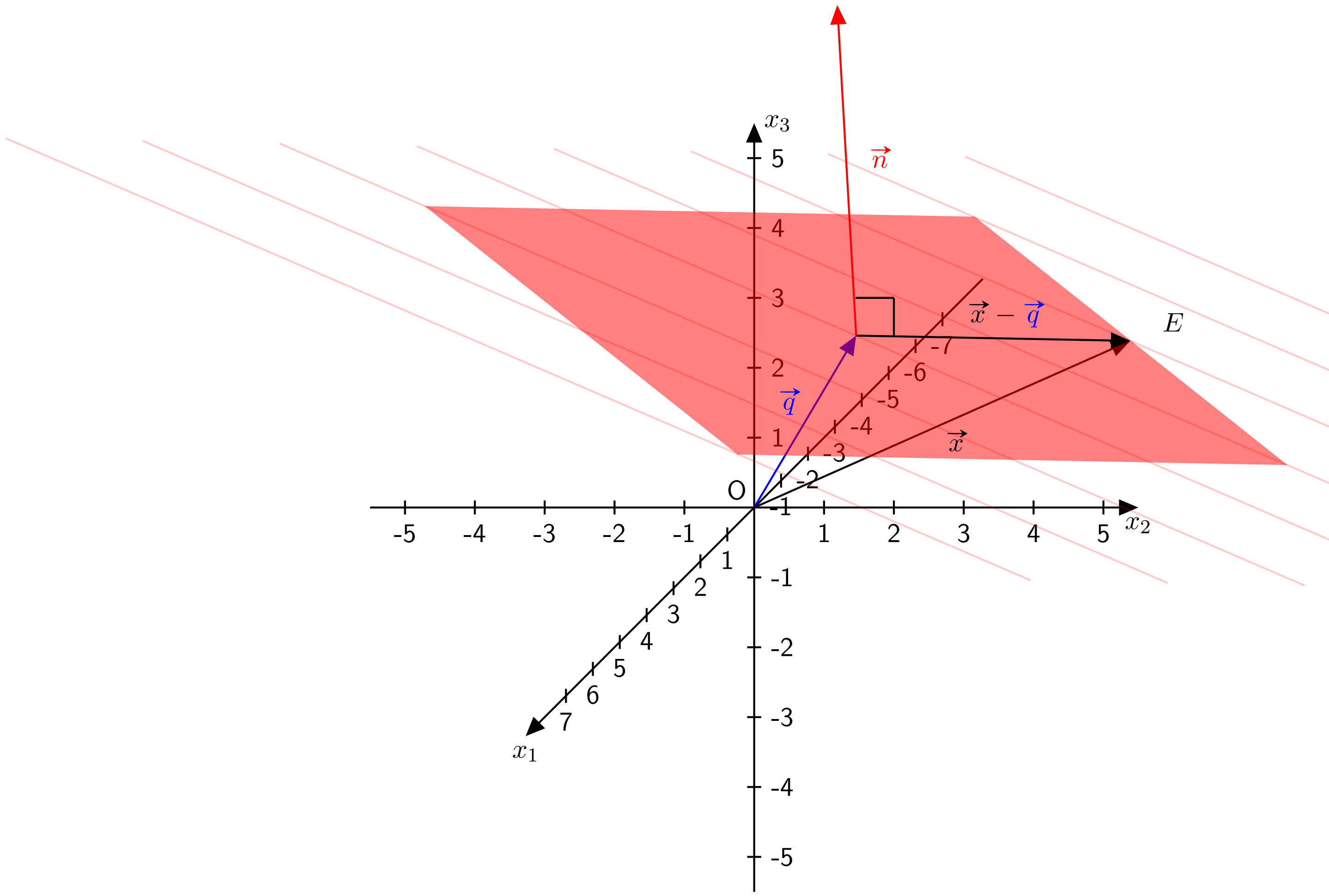
Die Darstellung einer Ebene beinhaltet immer die gleichen Informationen: Ihre Position im Raum und ihre Ausrichtung:

Name	*Darstellung*
Parameterform	$E : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}; \qquad s, t \in \mathbb{R}$
Normalenform	$E : (\vec{x} - \vec{q}) \odot \vec{n} = 0$
Koordinatenform	$E : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d; \quad d = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 + n_3 \cdot q_3$

Die erste bei Geraden bereits eingeführte Form ist leicht zu verstehen. An den Stützvektor setzt man anschließend einen zweiten Richtungsvektor; die beiden Vektoren werden **Spannvektoren** genannt, da sie gemeinsam die Ebene aufspannen. Da man sich über diese beliebig in zwei Dimensionen bewegen kann, ist jeder Punkt in einer Ebene erreichbar. Bei der Bildung der Ebene muss man beachten, dass die Spannvektoren **nicht kollinear** sind. In diesem Fall erhält man wieder eine Gerade.



Die Normalenform und Koordinatenform sind weitaus weniger intuitiv und erfordern eine genauere Erklärung. Sie lässt sich zudem leichter anhand einer Graphik erklären:



Somit ist jeder Punkt $X \in E$, wenn der Verbindingsvektor $(\vec{x} - \vec{q})$ orthogonal zum Vektor $\vec{n}$ ist. Dabei spielt die Position des sogenannten **Normalenvektors** keine Rolle, ebenso wenig wie seine Norm. Allein seine Ausrichtung bestimmt die der Ebene. Um die Position im Raum genau zu bestimmen, benötigt man zudem einen Punkt $Q \in E$. Diese zusätzliche Information schließt alle anderen parallelen Ebenen aus, die durch einen kollinearen Normalenvektor defniert sind.
Aus der Normalenform lässt sich die Koordinatenform ableiten. Man macht häufiger Gebrauch von letzterer, da sich leichter mit ihr rechnen lässt. Man bildet sie wie folgt:

$$
\begin{aligned}
& E : (\vec{x} - \vec{q}) \odot \vec{n} = 0 \\
\Leftrightarrow \quad & E : \vec{x} \odot \vec{n} = \vec{q} \odot \vec{n} \\
\Leftrightarrow \quad & E : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d; \quad d = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 + n_3 \cdot q_3
\end{aligned}
$$

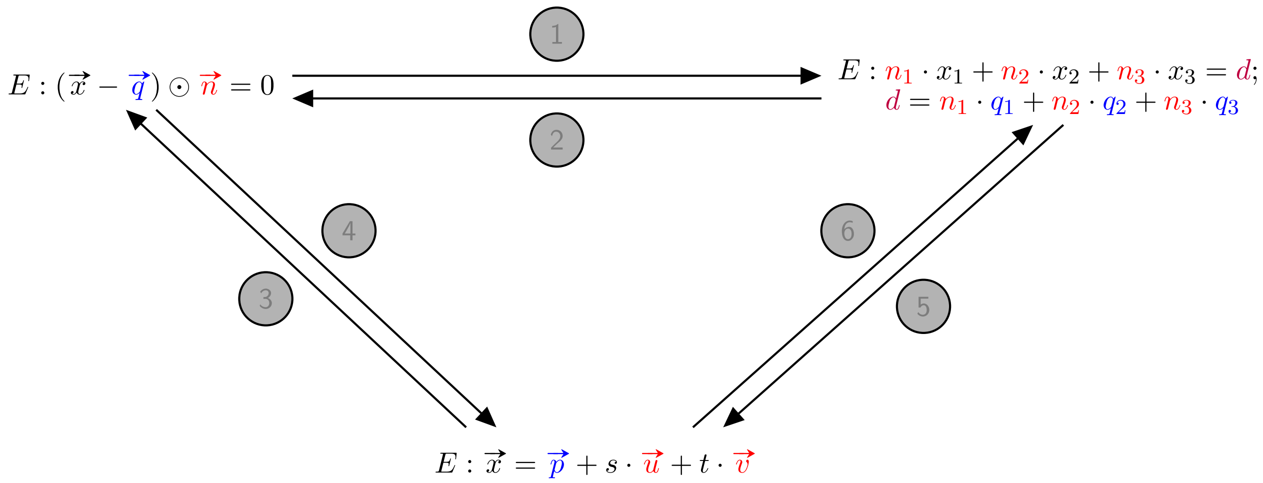
Bemerkung:

Ebenen lassen sich auch mittels **Spurpunkten** und **Spurgeraden** lokalisieren. Spurpunkte sind die der Achsen des Koordinatensystems, welche in der Ebene enthalten sind. Aus diesen lassen sich anschließend die Spurgeraden bilden (durch Verbinden der Punkte). Folgende Möglichkeiten bieten sich an:

1. 3 Spurpunkte
2. 2 Spurpunkte $\Rightarrow E \parallel \vec{x_1} \vee E \parallel \vec{x_2} \vee E \parallel \vec{x_3}$
3. 1 Spurpunkt $\Rightarrow E \parallel E_{x_1 x_2} \vee E \parallel E_{x_2 x_3} \vee E \parallel E_{x_1 x_3}$

4. Ausnahme des vorherigen Falls: $P \equiv O \Rightarrow$ Ausrichtung von E lässt sich nicht bestimmen
5. ∞ Punkte $\Rightarrow$ Eine der Achsen des Koordinatensystems $\in E$, Ausrichtung von E lässt sich nicht bestimmen
6. ∞„ $\cdot 2$“0 Punkte $\Rightarrow E \equiv E_{x_1x_2} \vee E \equiv E_{x_2x_3} \vee E \equiv E_{x_1x_3}$

Drei beziehungsweise zwei (falls man Normalenform und Koordinatenform als eine ansieht) verschiedene Darstellungsweisen sind zwar interessant und eine nicht ganz unwichtige Überlegung, jedoch scheint das auf den ersten Blick unnütz. Im Laufe dieser section wird sich der jeweilige Nutzen noch offenbaren. Dann wird einem auch deutlich, dass es manchmal von Vorteil sein kann die Formen umzuformen. Die Herangehensweisen für jede Umformung unterscheiden sich nur wenig voneiander, Folgendes Diagramm stellt eine Möglichkeit vor:

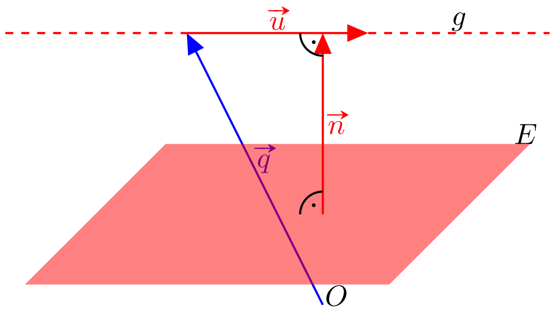


1. Siehe oben
2. $\vec{n}$ aus den einzelnen Faktoren herausarbeiten $\wedge$ Per Punktprobe (Koordinaten einsetzen) einen Punkt Q von E ermitteln
3. $\vec{n}$ mittels Kreuzprodukt ermitteln $\wedge$ Stützpunkt P als Punkt Q einsetzen
4. Zwei Punkte $U, V \not\equiv Q$ von E ermitteln $\wedge$ Q als Stützpunkt P $\wedge$ $(\vec{u} - \vec{q})$ und $(\vec{v} - \vec{q})$ als Spannvektoren einsetzen
5. Siehe **??** (gleiches Prinzip)
6. Siehe **??** (gleiches Prinzip) $\wedge$ Skalarprodukt „ausmultiplizieren“

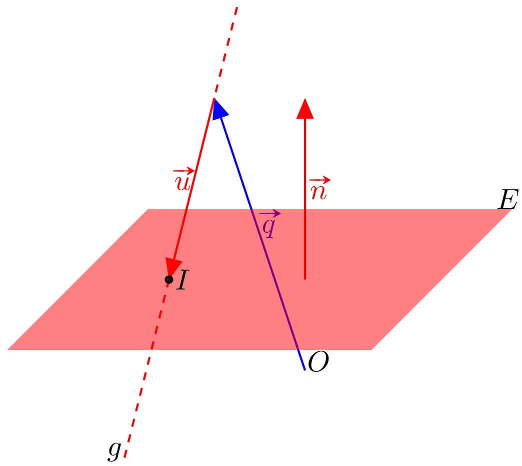
8.8.2 Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden

Ebenen und Geraden können im Gegensatz zu zwei Geraden nur eine von den drei folgenden Beziehungen zueinander haben. Eine Ebene E und eine Gerade g können...

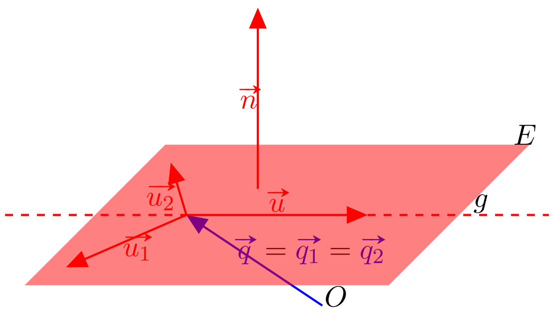
1)...**parallel** sein ...



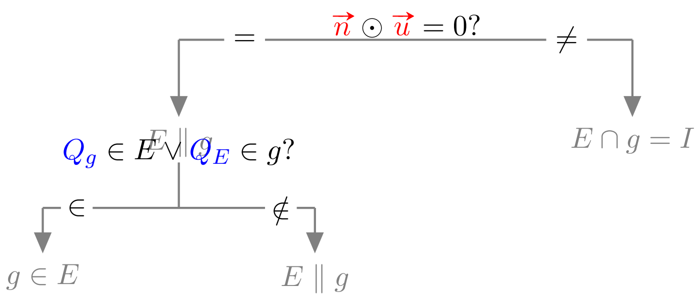
2)...**sich schneiden**



3) Zudem kann g **in E liegen**



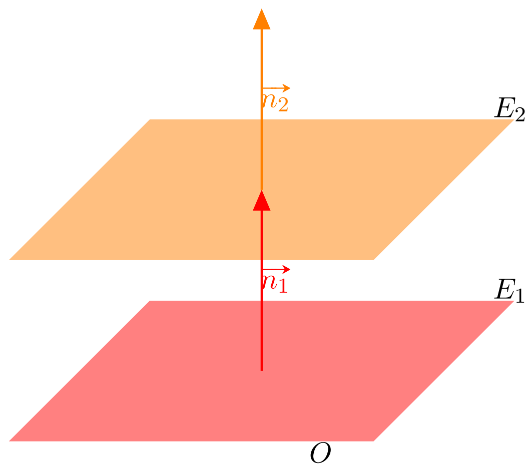
Die Lagebeziehung zwischen einer Ebene E und einer Geraden g lässt sich wie folgt ermitteln:



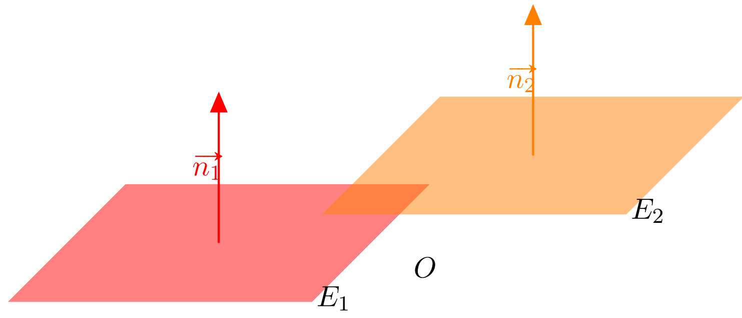
8.8.3 Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Ebenen teilen bezüglich ihrer Lage zueinander eine Eigenschaft mit einer Ebene und einer Geraden. Zwei Ebenen E_1 und E_2 können ebenfalls:

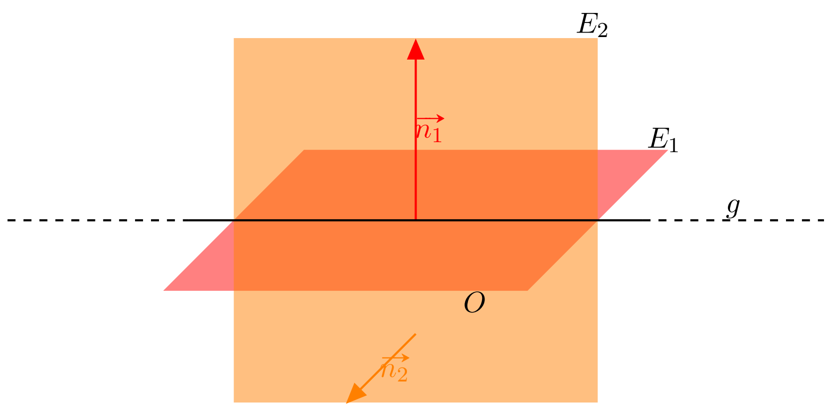
1. ...**parallel** sein...



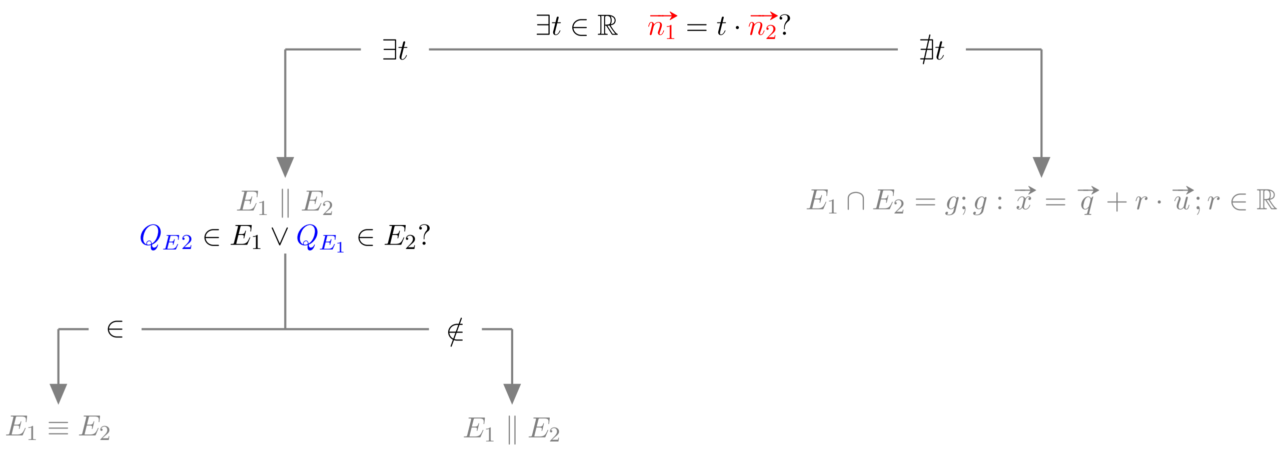
2. ...**identisch** sein



3. ...**sich schneiden**



Die Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen E_1 und E_2 lässt sich wie folgt ermitteln:



Für die Berechnung der Schnittgeraden gibt es unterschiedliche Ansätze abhängig von der Ausgangssituation, welche durch die zwei möglichen Darstellungsweisen von Ebenen bedingt sind. Drei mögliche Fälle können auftreten:

1. $E_1 : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d; \quad d = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 + n_3 \cdot q_3 \ \wedge \ E_2 : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d; \quad d = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 + n_3 \cdot q_3$
2. $E_1 : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d; \quad d = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 + n_3 \cdot q_3 \ \wedge \ E_2 : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R}$
3. $E_1 : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R} \ \wedge \ E_2 : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R}$

8.8.4 Winkel zwischen Ebenen (und Geraden)

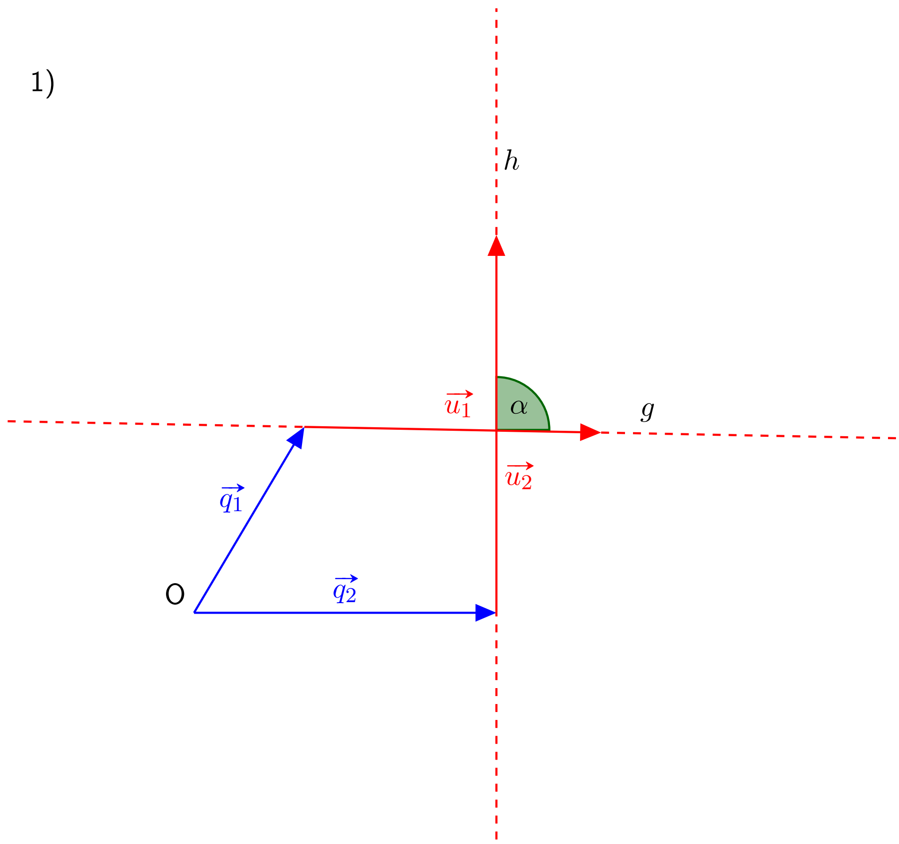
Die einzige bisher angesprochene Möglichkeit den Winkel zwischen zwei geometrischen Formen zu ermitteln macht sich der Definition des Skalarprodukts zunutze. Wie bereits erläutert gilt: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \odot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|}$. Hierbei soll erneut hervorgehoben werden, dass der Winkel der "kleinere" der beiden möglichen ist. Den anderen erhält man in Abhängigkeit des ersten. Daraus lässt sich ableiten wie zwei Geraden oder Ebenen oder auch eine Gerade und eine Ebene zueinander stehen:

1. Geraden: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u_1} \odot \vec{u_2}}{|\vec{u_1}| \cdot |\vec{u_2}|}$

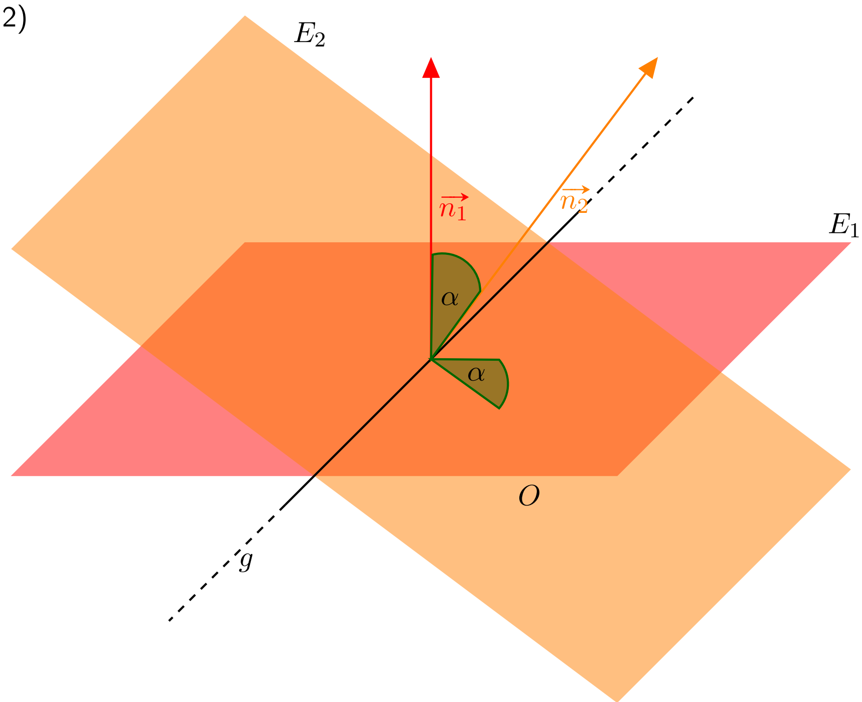
2. Ebenen: $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n_1} \odot \vec{n_2}}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$

3. Gerade / Ebene: $\sin(\alpha) = \frac{\vec{u} \odot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$

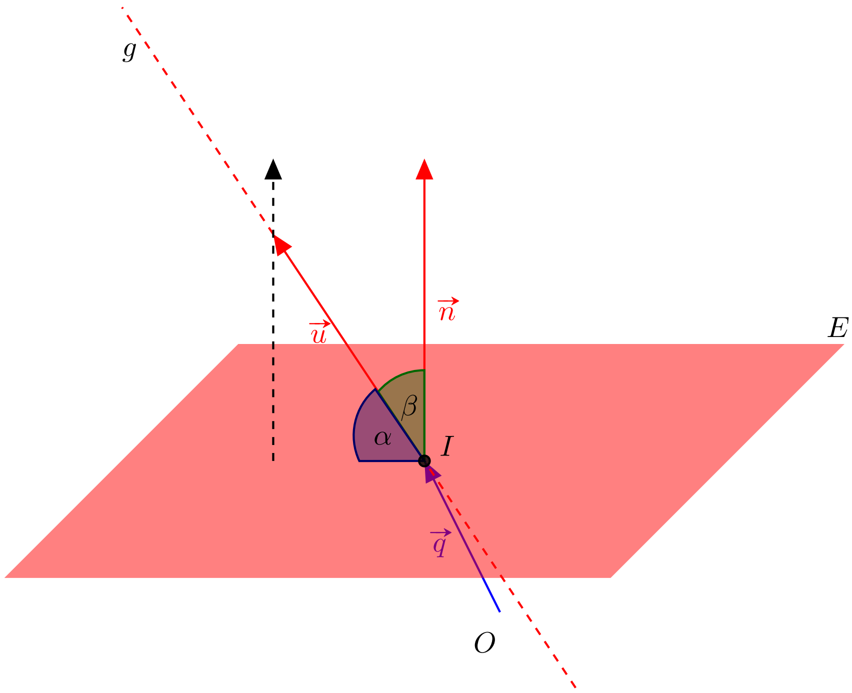
1)



2)



3)

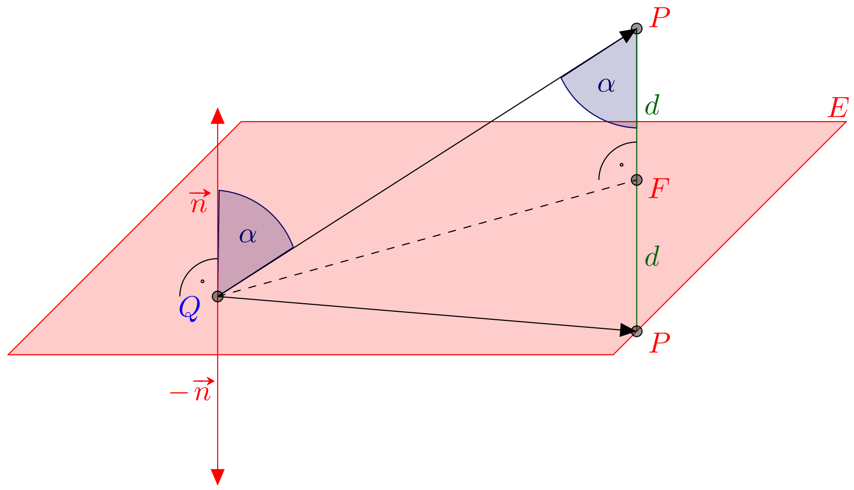


8.8.5 Abstand zu einem Punkt

Eine simple und intuitive Art den Abstand einer Ebene E zu einem Punkt P zu bestimmen, wäre eine Gerade zu erstellen, welche durch P geht und die als Richtungsvektor den Normalenvektor Es hat, da $\vec{n}$ per Definition orthogonal zu E ist und somit ein anderer kollinearer Vektor den ßchnellst möglichsten Weg zum Punkt"darstellt. Anschließend müsste man den Schnittpunkt der Geraden und E und die Norm des somit erhaltenen Vektors berechnen. Es sticht einem schnell ins Auge, dass dies ein großer Aufwand ist. Tatsächlich gibt es einen für das Abitur zugelassenen schnelleren Lösungsweg: die **Hess'sche Normalenform**.

Definition 8.8.1: Hess'sche Normalenform

Die Hess'sche Normalenform ist eine besondere Normalenform einer Ebene, dadurch besonders, dass der Normalenvektor normiert ist. Sie lässt sich wie folgt ableiten: $E_h : \frac{\vec{n} \odot [\vec{x} - \vec{q}]}{|\vec{n}|} = 0$



Anhand dieser Graphik lässt sich die Formel zur Berechnung des Abstands eines Punktes zu einer Ebene ablesen: $d = \frac{|\vec{n} \odot (\vec{p} - \vec{q})|}{|\vec{n}|}$

Beweis:

$\overrightarrow{FP} = r \cdot \vec{n}; r \in \mathbb{R}^+$:
Nach Theoremen der Trigonometrie und der Definition des Skalarprodukts gilt:

$$cos(\alpha) = \frac{d}{|\overrightarrow{QP}|}$$
$$cos(\alpha) = \frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{QP}|}$$

Daraus folgt:

$$\frac{d}{|\overrightarrow{QP}|} = \frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{QP}|}$$
$$d = \frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}|}$$
$$d = \frac{\vec{n} \odot (\vec{p} - \vec{q})}{|\vec{n}|}$$

$\overrightarrow{FP} = r \cdot \overrightarrow{n}; r \in \mathbb{R}^-$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{|\overrightarrow{QP}|} &= \frac{-\overrightarrow{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|-\overrightarrow{n}| \cdot |\overrightarrow{QP}|} \\ d &= -\frac{\overrightarrow{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|\overrightarrow{n}|} \\ d &= -\frac{\overrightarrow{n} \odot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q})}{|\overrightarrow{n}|} \end{aligned}$$

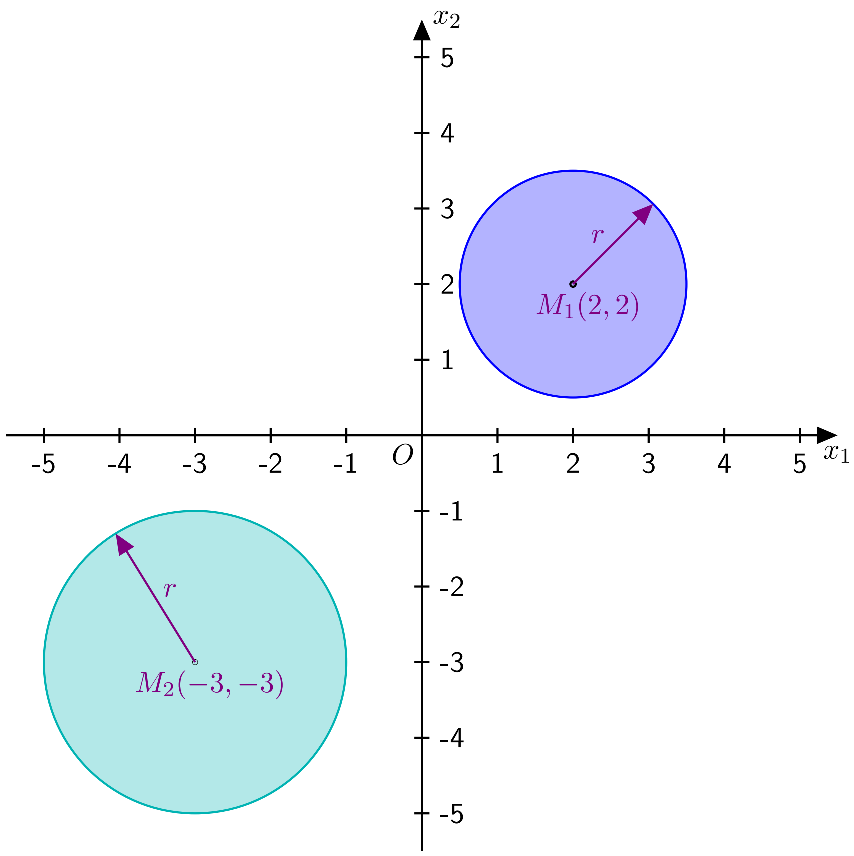
Somit lautet die gesuchte Formel: $d = \frac{|\overrightarrow{n} \odot (\overrightarrow{p} - \overrightarrow{q})|}{|\overrightarrow{n}|}$ □

8.9 Kreise und Sphären

Letzte relevant Objektgruppe ist die der Kreise und Sphären, wobei Letztere lediglich auf den $\mathbb{R}^3$ angewandte Formen der Ersten sind.

8.9.1 Kreise

Kreise werden über einen **Mittelpunkt** und einen **Radius** definiert. Alle Punkte, welche einen Distanz gleich dem Radius zum Mittelpunkt aufweisen, sind teil der Kreismenge, die den Kreis algebraisch beschreibt. Wie bei allen anderen Sektoren der Geometrie ist es von Nöten, das Ganze zu visualisieren:



Hieraus ergibt sich eine einfache Formel, um einen Kreis zu definieren, aus welcher auch die allgemeine Kreisgleichung folgt:

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{MP}| = r; P \in M_K \text{ mit } M_k \text{ Kreismenge}\\
\Leftrightarrow&|\overrightarrow{MP}|^2 = r^2\\
\Leftrightarrow&|\vec{p} - \vec{m}|^2 = r^2\\
\Leftrightarrow&\left|\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \end{pmatrix}\right|^2 = r^2; (x, y) = (p_x, p_y) \wedge (a, b) = (m_x, m_y)\\
\Leftrightarrow&\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = r^2\\
\Leftrightarrow&(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2
\end{aligned}
$$

Wie die Graphik es bereits verdeutlicht, kann es von Nutzen sein mit einer Kreisscheibe zu arbeiten. Diese wird über die Menge der Punkte, die innerhalb des Kreises liegen, definiert. Somit erschließt sich, dass jeglicher Punkt, der eine Entfernung zum Mittelpunkt, welche kleiner als der oder gleich dem Radius ist, teil dieser Kreisscheibe ist:

$$|\overrightarrow{MP}| \leqslant r; P \in M_K$$

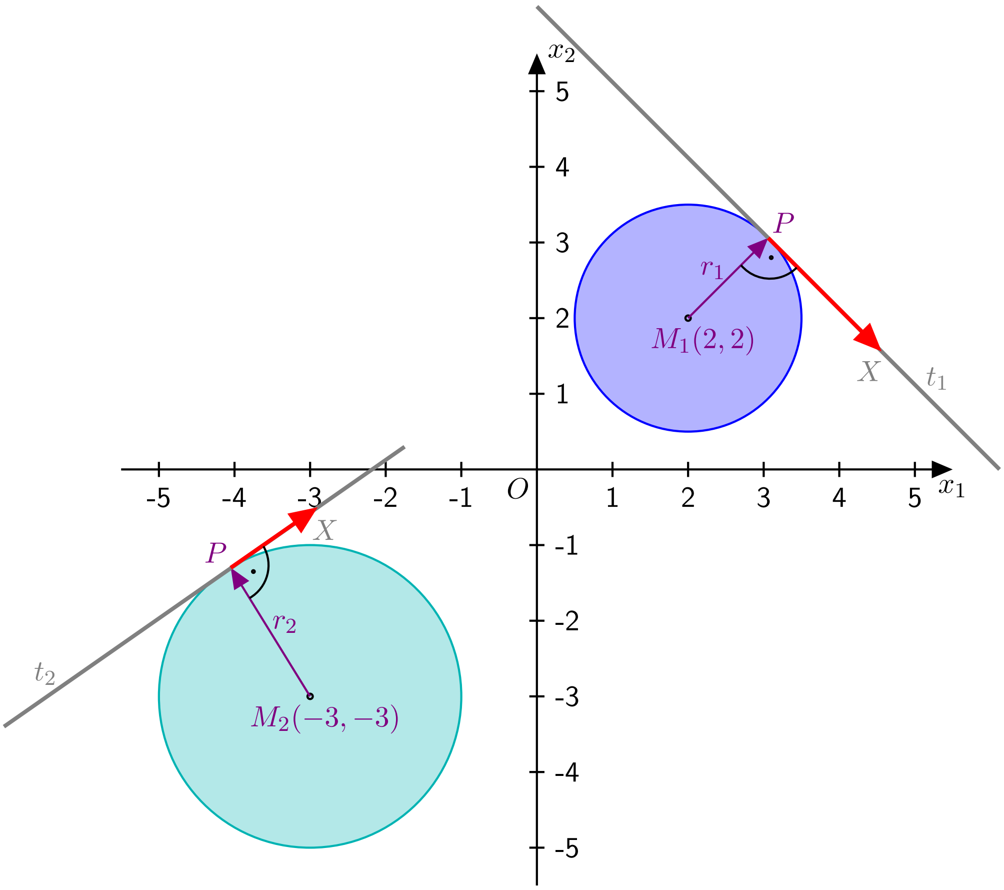
Bemerkung:

Anhand dessen lässt sich bereits eine Eigenschaft eines Kreises im Vektorraum erkennen: **er ist lediglich im $\mathbb{R}^2$ definierbar**. Überträgt man diese Formel in einen Raum mit mehr Dimensionen erhält man eine Sphäre oder gar eine Hypersphäre.

Tangenten an einen Kreis

Definition 8.9.1

Eine Tangente an einen Punkt eines Kreises ist vergleichbar mit der an einen Punkt einer Kurve. Sie ist gerade zu der Geraden equivalent, die **den Kreis in diesem Punkt berührt**. Dies impliziert auch, dass es nur eine Menge identischer Geraden gibt, welche erfolgreich als Tangente kandidieren können.



Erneut liefert uns die Graphik eine generelle Formel:

$$
\begin{aligned}
&\overrightarrow{MP} \odot \overrightarrow{PX} = 0; P \in M_K, X \in M_T \text{ mit } M_K \text{ und } M_T \text{ Kreis- und Tangentenmenge}\\
\Leftrightarrow&(\vec{p} - \vec{m}) \odot (\vec{x} - \vec{p}) = 0 \quad | + (\vec{p} - \vec{m})^2\\
\Leftrightarrow&(\vec{p} - \vec{m}) \odot (\vec{x} - \vec{p}) + (\vec{p} - \vec{m})^2 = (\vec{p} - \vec{m})^2\\
\Leftrightarrow&(\vec{p} - \vec{m}) \odot ((\vec{x} \cancel{- \vec{p}}) + (\cancel{\vec{p}} - \vec{m})) = (\vec{p} - \vec{m})^2\\
\Leftrightarrow&(\vec{p} - \vec{m}) \odot (\vec{x} - \vec{m}) = r^2
\end{aligned}
$$

Polare an einen Kreis

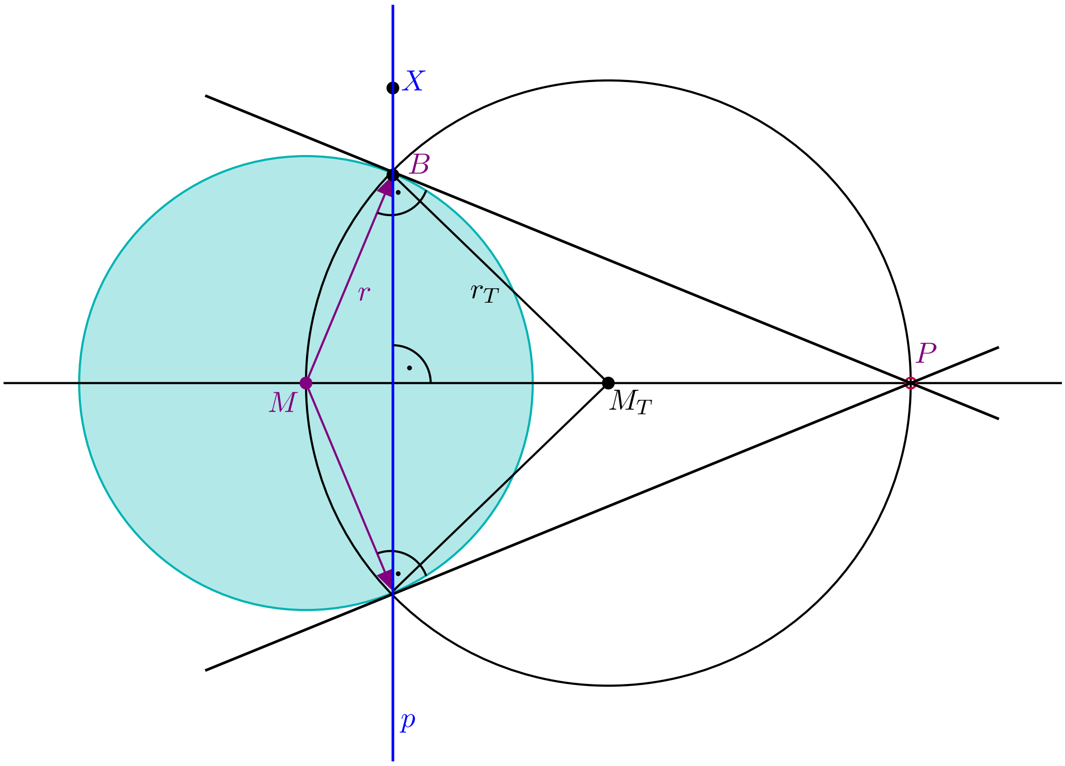
Definition 8.9.2

Sei $\mathscr{C}$ ein Kreis mit Mittelpunkt M und P ein Punkt mit $|\overrightarrow{MP}| \nleq r$. Des Weiteren seien die zwei Tangenten(mengen) an den Kreis, die durch den Punkt P gehen, gegeben. Dann bezeichnet man die Gerade, welche die Berührpunkte der Tangenten beinhaltet, als **Polare an den Kreis $\mathscr{C}$ zum Punkt P**.

Bemerkung:

Tatsächlich ist das nur die halbe Wahrheit, die Polare existiert für alle P ungleich M. Sie landet dann außerhalb des Kreises und schneidet diesen nicht (berührt ihn in einem, wenn gilt $|\overrightarrow{MP}| = r$).

Die Prozedur sollte allmählich bekannt vorkommen:

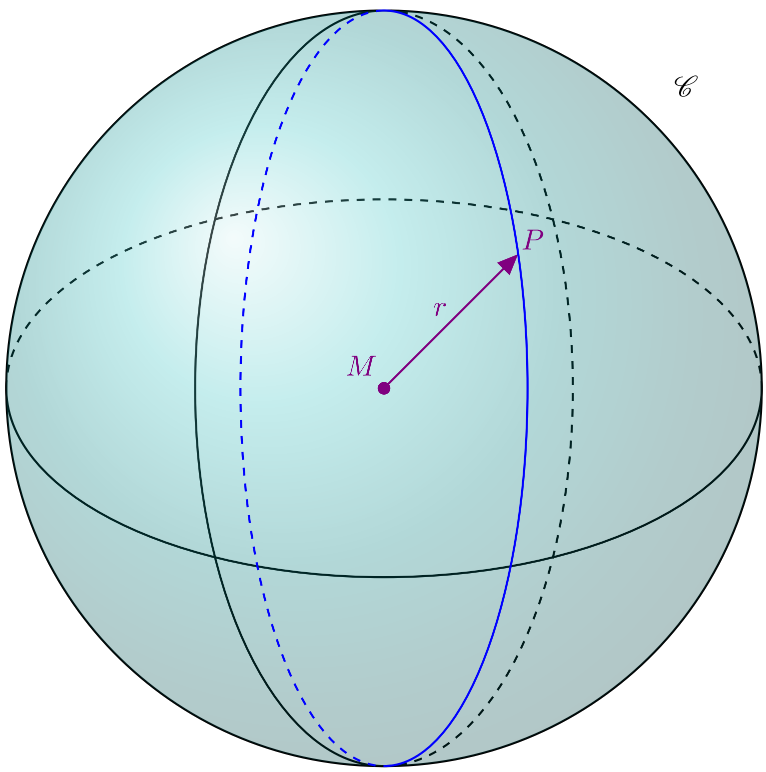


Wenn auch ein wenig um mehr Ecken gedacht als üblich:

$$
\begin{aligned}
&\left| \begin{array}{l} \overrightarrow{MB} \odot \overrightarrow{PB} = 0 \\ \overrightarrow{MP} \odot \overrightarrow{BX} = 0 \end{array} \right| \\
\Leftrightarrow &\left| \begin{array}{l} (\vec{b} - \vec{m}) \odot (\vec{b} - \vec{p}) = 0 \\ (\vec{p} - \vec{m}) \odot (\vec{x} - \vec{b}) = 0 \end{array} \right| \qquad \text{Nach der bereits aufgestellten Formel für Tangenten} \\
\Leftrightarrow &\left| \begin{array}{c} (\vec{b} - \vec{m}) \odot (\vec{p} - \vec{m}) = r^2 \\ (\vec{p} - \vec{m}) \odot (\vec{x} - \vec{b}) = 0 \end{array} \right| \qquad (1) + (2) \\
\Leftrightarrow &(\vec{p} - \vec{m})((\vec{x} - \cancel{\vec{b}}) + (\cancel{\vec{b}} - \vec{m})) = r^2 \\
\Leftrightarrow &(\vec{p} - \vec{m})(\vec{x} - \vec{m}) = r^2
\end{aligned}
$$

8.9.2 Sphären

Sphären werden wie Kreise über einen **Mittelpunkt** und einen **Radius** definiert. Alle Punkte, welche einen Distanz gleich dem Radius zum Mittelpunkt aufweisen, sind teil der Sphärenmenge, die die Sphäre algebraisch beschreibt:



Theorem 8.9.1: Sphärengleichung

Eine Sphäre im $\mathbb{R}^n; n \geqslant 3$ mit Mittelpunkt M und Radius r ist eindeutig über die folgende Gleichung definiert:

$$|\overrightarrow{MP}| = r; P \in M_{\mathscr{C}}$$

Die allgebraische Formel lautet somit wie folgt:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2; (x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) \wedge (a, b, c) = (m_x, m_y, m_z)$$

Beweis:

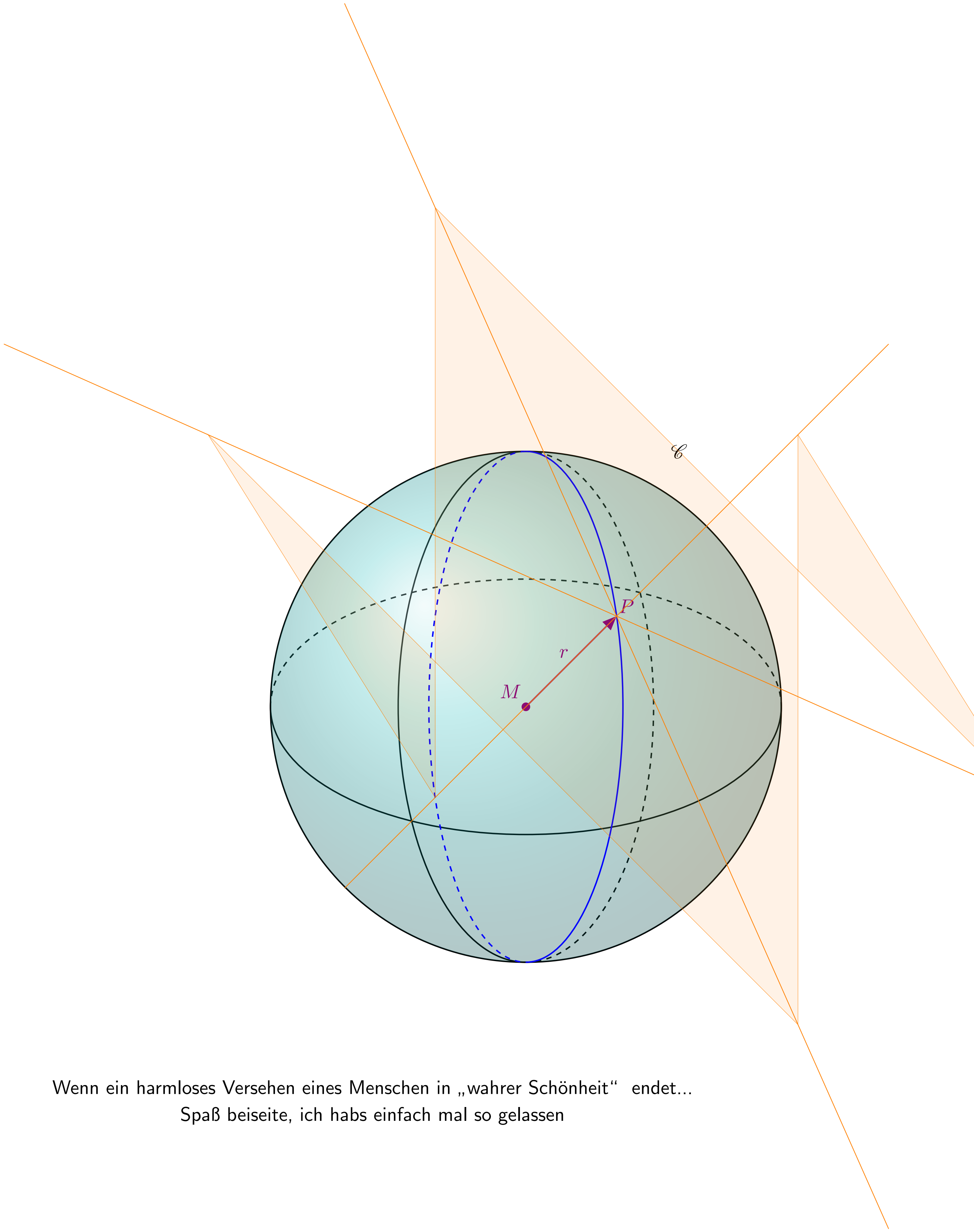
$$\begin{aligned}
&|\overrightarrow{MP}| = r; P \in M_{\mathscr{C}} \text{ mit } M_{\mathscr{C}} \text{ Kreismenge} \\
\Leftrightarrow &|\overrightarrow{MP}|^2 = r^2 \\
\Leftrightarrow &|\vec{p} - \vec{m}|^2 = r^2 \\
\Leftrightarrow &\left|\begin{pmatrix} x-a \\ y-b \\ z-c \end{pmatrix}\right|^2 = r^2; (x, y, z) = (p_x, p_y, p_z) \wedge (a, b, c) = (m_x, m_y, m_z) \\
\Leftrightarrow &\left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}\right)^2 = r^2 \\
\Leftrightarrow &(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2
\end{aligned}$$

□

Tangenten an eine Sphäre

Definition 8.9.3

Die Tangente in einem Punkt an eine Sphäre unterscheidet sich nur in einer Eigenschaft von der an einen Kreis: mehrere nicht identische Geraden berühren eine Sphäre in einem Punkt. Tatsächlich stellt diese Menge von Geraden eine Ebene dar: die **Tangentialebene**.



Wenn ein harmloses Versehen eines Menschen in „wahrer Schönheit“ endet...
Spaß beiseite, ich habs einfach mal so gelassen

Theorem 8.9.2: Tangentialebene

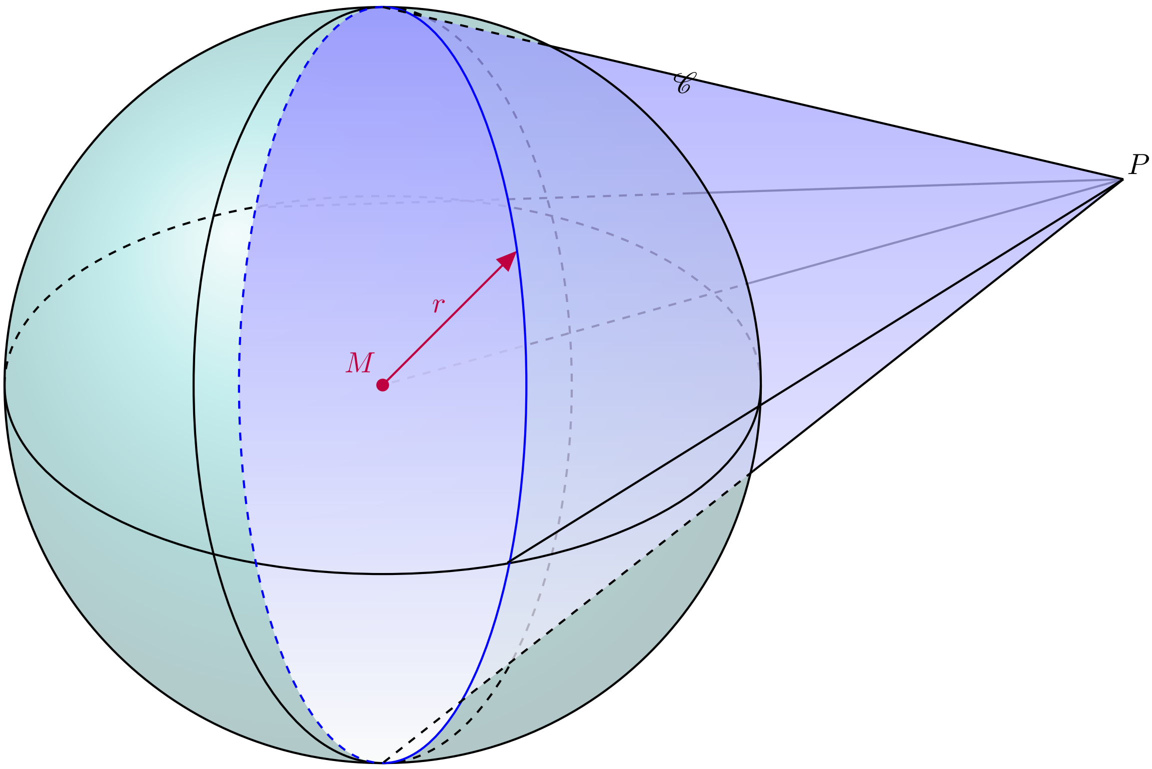
Für die Tangentialebene an eine Sphäre $\mathscr{C}$, mit Mittelpunkt M und Radius r, in einem Punkt P gilt:

$$|\overrightarrow{MP}| = r$$

Polarebene?

Definition 8.9.4

Sei $\mathscr{C}$ eine Sphäre mit Mittelpunkt M und P ein Punkt mit $|\overrightarrow{MP}| \nleq r$. Des Weiteren seien die überabzählbar vielen Tangenten(mengen) an $\mathscr{C}$, die durch den Punkt P gehen, gegeben. Dann bezeichnet man die Ebene, welche die Berührpunkte der Tangenten beinhaltet, als **Polare an die Sphäre $\mathscr{C}$ zum Punkt P**.



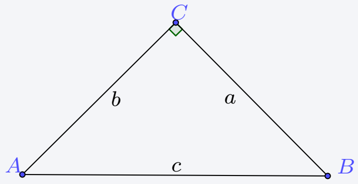
8.10 Sätze

8.10.1 Sätze des Pythagoras

Theorem 8.10.1

In einem rechtwinkligen Dreieck ΔABC gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$



Beweis:

Man modelliere die 3 Seiten durch Vektoren, $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.
Es gilt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
|\vec{a} + \vec{b}| &= \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2} \\
&= \sqrt{{b_1}^2 - 2b_1 a_2 + {a_1}^2 + {b_2}^2 - 2b_2 a_2 + {a_2}^2} \\
&= \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 - 2(b_1 a_2 + b_2 a_2)} \\
&= \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2} \\
&= |\vec{c}|, \text{ denn } \vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \\
\Leftrightarrow |\vec{c}|^2 &= {b_1}^2 + {b_2}^2 + {a_1}^2 + {a_2}^2 \\
\Leftrightarrow |\vec{c}|^2 &= |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 \\
\Leftrightarrow c^2 &= a^2 + b^2
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

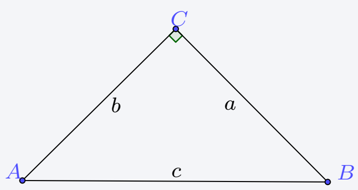
Dieser Beweis ist weitaus intuitiver und einfacher, wenn er in der klassischen Geometrie vollführt wird, aber das Ziel ist der Beweis über Vektoren, und somit analytisch.

Theorem 8.10.2: Umkehrung

Falls für ein Dreieck ΔABC gilt:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dann ist dieses Dreieck in C rechtwinklig.



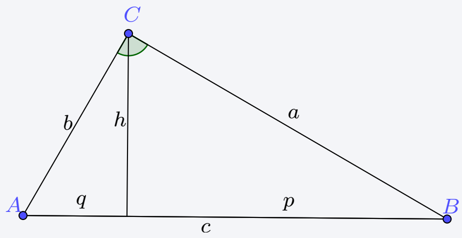
Beweis:

Sind Äquivalenzumformungen nicht schön? □

8.10.2 Euklids Sätze

Theorem 8.10.3: Kathetensatz

In einem in C rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit h der Höhe zu C gilt:



- $a^2 = p \cdot c$
- $b^2 = q \cdot c$

Beweis:

- $$\begin{aligned} a^2 &= c^2 - b^2 && |\text{Pythagoras} \\ &= c^2 - (q^2 + h^2) \\ &= c^2 - ((c-p)^2 + (a^2 - p^2)) \\ &= c^2 - c^2 + 2cp - p^2 - a^2 + p^2 \\ \Leftrightarrow 2a^2 &= 2cp \\ \Leftrightarrow a^2 &= cp \end{aligned}$$

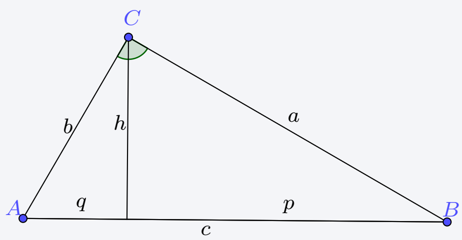
- $$\begin{aligned} b^2 &= c^2 - a^2 && |\text{Pythagoras} \\ &= c^2 - (p^2 + h^2) \\ &= c^2 - ((c-q)^2 + (b^2 - q^2)) \\ &= c^2 - c^2 + 2cq - q^2 - b^2 + q^2 \\ \Leftrightarrow 2b^2 &= 2cq \\ \Leftrightarrow b^2 &= cq \end{aligned}$$

□

Theorem 8.10.4: Höhensatz

In einem in C rechtwinkligen Dreieck ΔABC mit h der Höhe zu C gilt:

$$h^2 = p \cdot q$$



Beweis:

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 = c^2 \\
\Leftrightarrow \quad & p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = (p+q)^2 \\
\Leftrightarrow \quad & p^2 + h^2 + q^2 + h^2 = p^2 + 2pq + q^2 \\
\Leftrightarrow \quad & h^2 + h^2 = 2pq \\
\Leftrightarrow \quad & 2h^2 = 2pq \\
\Leftrightarrow \quad & h^2 = pq
\end{aligned}$$

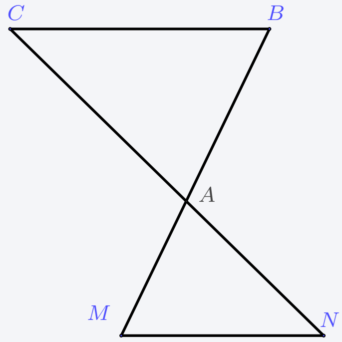
□

8.10.3 Strahlensätze

Theorem 8.10.5

Sei ein Dreieck ΔABC mit M einem Punkt der Geraden (AB) und N einem Punkt der Geraden (AC). Wenn $(BC)//(MN)$, dann gilt:

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$$



Beweis:

$$\begin{aligned}
(BC)//(MN) \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} &= k \cdot \overrightarrow{MN}, k \in \mathbb{R} && |\text{Die Vektoren sind kollinear.} \\
&= k \cdot (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}) && |\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Da $\overrightarrow{MA}$ und $\overrightarrow{BA}$ kollinear sind, und $\overrightarrow{AN}$ und $\overrightarrow{AC}$ auch, gilt:

$$\begin{cases} |\overrightarrow{BA}| &= k \cdot |\overrightarrow{MA}| \\ |\overrightarrow{AC}| &= k \cdot |\overrightarrow{AN}| \\ |\overrightarrow{BC}| &= k \cdot |\overrightarrow{MN}| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{MA}|} &= k \\ \dfrac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AN}|} &= k \\ \dfrac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{MN}|} &= k \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{BA}|}{|\overrightarrow{MA}|} = \frac{|\overrightarrow{AC}|}{|\overrightarrow{AN}|} = \frac{|\overrightarrow{BC}|}{|\overrightarrow{MN}|} \Leftrightarrow \frac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{BA}|} = \frac{|\overrightarrow{AN}|}{|\overrightarrow{AC}|} = \frac{|\overrightarrow{MN}|}{|\overrightarrow{BC}|}$$

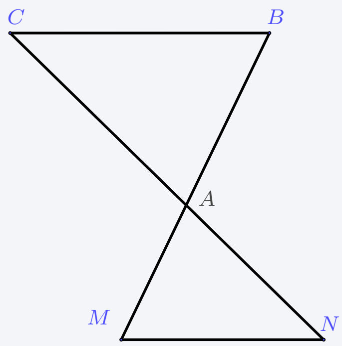
□

Theorem 8.10.6: Umkehrung

Sei ein Dreieck ΔABC mit M einem Punkt der Geraden (AB) und N einem Punkt der Geraden (AC). Wenn gilt:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AM}{AN}$$

Dann ist $(BC)//(MN)$.



Beweis:

Auch hier profitieren wir von Äquivalenzumformungen. $\square$

8.10.4 Der Satz des Apollonios

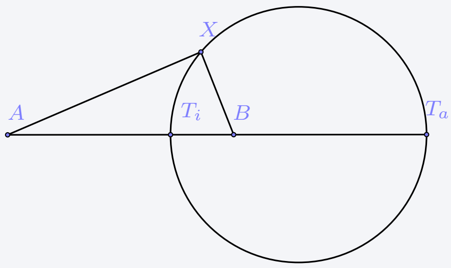
Theorem 8.10.7

Gegeben sind: Eine Strecke $[AB]$ und eine positive Zahl $\lambda \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$. Dann ist die Punktmenge

$$M_A = \left\{ X \,\middle|\, \frac{\overline{AX}}{\overline{BX}} = \lambda \right\}$$

ein Kreis, den man **Kreis des Apollonios** nennt.

Anschaulich:



Beweis:

Anfangen kann man den den Beweis damit, dass man zwei Punkte sucht, die die Bedingung erfüllen **und** auf der Geraden AB liegen. Logisch ist, dass einer dieser Punkte zwischen A und B sein wird, dieser wird **innerer Teilungspunkt** T_i genannt. Der andere Punkt liegt außerhalb der Strecke $[AB]$ und wird **äußerer Teilungspunkt** T_a genannt.
Im letzten Schritt des Beweises wird man anhand des Skalarprodukts zeigen, dass für alle Punkte X, die ebenfalls die Verhältnisgleichung erfüllen, die Vektoren $\overrightarrow{T_iX}$ und $\overrightarrow{T_aX}$ orthogonal zueinander sind. Somit liegen diese Punkte auf dem Thaleskreis (frz.: Theoreme du triangle rectangle) über T_i und T_a, der dann **Apolliniuskreis** genannt wird.

1. Für möglichst einfache Koordinaten platziert man A auf den Origo, $[AB]$ entlang der x-Achse, und kürzt $\overline{AB}$ mit b ab. Gleichermaßen verfährt man mit den Längen $\overline{AT_i} = t_i$ und $\overline{AT_a} = t_a$, und man führt den Punkt $X(x|y)$ ein.
   Hier nochmal ein überblick:

   ▷A(0—0) ▷B(b—0) ▷T$_i(t_i|0)$ ▷T$_a(t_a|0)$ ▷X(x—y)

2. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AT_i}}{\overline{T_iB}} &= \lambda \\
\Leftrightarrow \quad \frac{t_i}{b-t_i} &= \lambda \\
\Leftrightarrow \quad t_i &= \lambda \cdot b - \lambda \cdot t_i \\
\Leftrightarrow \quad \lambda \cdot t_i + t_i &= \lambda \cdot b \\
\Leftrightarrow \quad (\lambda+1)\cdot t_i &= \lambda \cdot b \\
\Leftrightarrow \quad t_i &= \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot b
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
\frac{\overline{AT_a}}{\overline{T_aB}} &= \lambda \\
\Leftrightarrow \quad \frac{t_a}{t_a-b} &= \lambda \\
\Leftrightarrow \quad t_a &= \lambda \cdot t_a - \lambda \cdot b \\
\Leftrightarrow \quad \lambda \cdot t_a - t_a &= \lambda \cdot b \\
\Leftrightarrow \quad (\lambda-1\cdot)t_a &= \lambda \cdot b \\
\Leftrightarrow \quad t_a &= \frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot b
\end{aligned}$$

- $t_i + t_a = \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot b + \frac{\lambda}{\lambda-1}\cdot b = (\frac{\lambda}{\lambda+1} + \frac{\lambda}{\lambda-1})\cdot b = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\cdot 2b \qquad (1)$
- $t_i \cdot t_a = \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot b \cdot \frac{\lambda}{\lambda+1}\cdot b = \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\cdot b^2 \qquad (2)$

Diese Zusammenänge werden gleich benötigt.

3. Jetzt wo wir T_i und T_a in Abhängigkeit von b und λ bestimmt haben, kann man die Vorraussetzung auch noch auf den Punkt X anwenden.

$$\begin{aligned}
\frac{\overline{AX}}{\overline{XB}} &= \lambda \\
\Leftrightarrow \quad \frac{(\overline{AX})^2}{(\overline{XB})^2} &= \lambda^2 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{x^2+y^2}{(x-b)^2+y^2} &= \lambda^2 \\
\Leftrightarrow \quad x^2+y^2 &= \lambda^2[(x-b)^2+y^2] \\
\Leftrightarrow \quad 0 &= \lambda^2\cdot(x-b)^2 + \lambda^2 y^2 - x^2 - y^2 \\
&= x^2\cdot\lambda^2 - 2bx\cdot\lambda^2 + b^2\cdot\lambda^2 + y^2\cdot\lambda^2 - x^2 - y^2 \, (3)
\end{aligned}$$

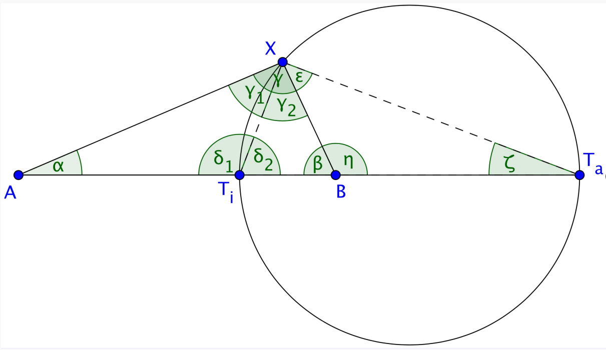
4. Jetzt prüft man auf Orthogonalität zwischen $\overrightarrow{T_iX} = \begin{pmatrix} x-t_i \\ y \end{pmatrix}; \overrightarrow{T_aX} = \begin{pmatrix} x-t_a \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{T_iX}\cdot\overrightarrow{T_aX} &= (x-t_i)\cdot(x-t_a)+y^2 \\
&= x^2-(t_i+t_a)x + t_i\cdot t_a + y^2 && \text{Benutze (1) und (2)} \\
&= x^2 - \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\cdot 2bx + \frac{\lambda^2}{\lambda^2-1}\cdot b^2 + y^2 \\
&= \frac{x^2\cdot(\lambda^2-1) - 2bx\cdot\lambda^2 + b^2\cdot\lambda^2 + y^2\cdot(\lambda^2-1)}{\lambda^2-1} \\
&= \frac{x^2\cdot\lambda^2 - 2bx\cdot\lambda^2 b^2\cdot\lambda^2 + y^2\cdot\lambda^2 - x^2 - y^2}{\lambda^2-1} && \text{Benutze (3)} \\
&= 0
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Man hat bewiesen, dass für alle Punkte X die Vektoren T i X und T a X orthogonal zueinander sind, weshalb sie auf dem Thaleskreis über T i und T a liegen müssen.

$\square$

Bemerkung:



Die Figur und die Zusammenhänge, die man durch den Satz des Apollonios erhalten hat, kann man benutzen, um ein wenig mit Winkeln zu spielen:

Über diese 10 Winkel lassen sich einige Beziehungen aufstellen:

$\rhd\ \alpha + \beta + \gamma = 180$ $\rhd\ \beta + \gamma_2 + \delta_2 = 180$ $\rhd\ \delta_1 + \delta_2 = 180$ $\rhd\ \alpha + \gamma + \epsilon + \zeta = 180$ $\rhd\ \epsilon + \zeta + \eta = 180$

$\rhd\ +\gamma_1 + \delta_1 = 180$ $\rhd\ \gamma_1 + \gamma_2 = \gamma$ $\rhd\ \gamma_2 + \epsilon = 90$ $\rhd\ \beta + \eta = 180$ $\rhd\ \gamma_2 + \delta_2 + \epsilon + \zeta = 18$

Löst man dieses Gleichungssystem, erhält man $\gamma_1 = \gamma_2$, was bedeutet, dass die Gerade T_iX Winkelhalbierende des Winkels $\gamma = \angle AXB$ ist.

Kapitel 9

Komplexe Zahlen

by Pascal

9.1 Einführung

Die Ursache für die Einführung der komplexen Zahlen ist vergleichbar mit der jeglicher anderer Zahlenmengen (abgesehen von $\mathbb{N}$). Alles basiert auf einer Rechnung oder einer Menge an Rechnungen, welche für die vorhandenen Zahlenmengen **keine Lösung besitzen** oder aber diese Zahlenmengen einem nicht erlauben eine Lösung zu finden. Ein Beispiel hierfür ist die Einführung der negativen Zahlen. Gleichungen der Form $2 + x = 1$ waren eine Zeit lang nicht lösbar. Ebenso galt einmal, dass $x^2 - 2 = 0$ keine Lösung besitzt, da hierfür die reellen Zahlen benötigt werden. Analog dazu wird die Erweiterung auf die komplexen Zahlen begründet. Dies wird an folgendem klassischen Beispiel erläutert:

$$\begin{aligned} &x^2 + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{-1} \quad \lightning \end{aligned}$$

Um dieser und anderen Gleichungen eine Lösung zuzuteilen ist es nicht nur notwendig die Zahlenmenge zu erweitern, sondern auch, neue Symbole und Zeichen einzuführen um die neuen Zahlen zu kennzeichnen. Für die $\mathbb{Z}$ ist es das Symbol "-", für $\mathbb{Q}$ ","und $\frac{a}{b}$, für $\mathbb{R}$ $\sqrt{a}$ und die Zeichen π und e zum Beispiel (auch wenn beide sich anders darstellen lassen). (Ein) gewisse(r) Mathematiker (Leibniz glaube ich) hat entschieden, dass das einzige benötigte Zeichen i sein sollte, da er sie imaginäre Zahl nannte (Für den Fall, dass ich hier ein bisschen was durcheinander bringe, sind Direktverbesserungen kommentarlos erlaubt und erwünscht).

Definition 9.1.1: Imaginäre Einheit

Die Ikone i der komplexen Zahl trägt den Namen **imaginäre Einheit** und wird folglich definiert:

$$i \in \mathbb{C} : i^2 = -1; \mathbb{C}\mathbb{R} \cup \{i\}$$

Algebraische Form

Definition 9.1.2: Algebraische Formel

Komplexe Zahlen werden im Allgemeinen mit dem Buchstaben z dargestellt oder aber auch z_I, wobei I ein Punkt der Gauß'schen Zahlenebene ist (Weiteres hierzu folgt). Die sogenannte **algebraische / arithmetische Form** einer solchen Zahl wird wie folgt definiert:

$$z = \underbrace{x}_{Re(z)} + \underbrace{y}_{Im(z)} \cdot i; x, y \in \mathbb{R}; i \in \mathbb{C}$$

Hierbei wird $x = Re(z)$ **Realteil** und $y = Im(z)$ und zwar **nur** y **Imaginärteil** genannt.

Bemerkung:

Eine Zahl $z = x + yi \in \mathbb{C}$ heißt **rein imaginär** für $x = 0$.
Analog dazu wird sie für $y = 0$ als reell bezeichnet.

9.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Da wir nun wissen (oder halt auch nicht), weshalb wir die komplexen Zahlen benötigen, gilt es nun die verschiedenen Verknüpfungen, mit welchen wir zwei komplexe Zahlen verbinden, zu definieren. Wie alle anderen bekannten Mengen (außer $\mathbb{N}$), ist $\mathbb{C}$ teil eines **Körpers** welcher die zwei Verknüpfungen, denen wir allgemein die Namen **Addition** und **Multiplikation** geben. Das 3-Tupel (oder auch Tripel) ($\mathbb{C}$, $+$, *) ist somit der Körper, mit welchem wir arbeiten werden (jemals gefragt warum keine weiteren Verknüpfungen eingeführt wurden?). Jedoch muss auch erstmal bewiesen werden, dass dieses Tripel ein Körper ist:

Beweis:

Die Addition:

Für die Addition gilt bekanntlich zu beweisen, dass ($\mathbb{C}$, $\oplus$) eine abelsche oder auch kommutative Gruppe ist:

[1)]

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \oplus z_2 (x_1 + y_1 i) \oplus (x_2 + y_2 i) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) \\ &\in \mathbb{C} \\ \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \oplus : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{(Abgeschlossenheit)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) \oplus (x_3 + y_3 i) \\ &= ((x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3)i) \\ &= (x_1 + y_1 i) \oplus ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3)i) \\ &= (x_1 + y_1 i) \oplus ((x_2 + y_2 i) \oplus (x_3 + y_3 i)) \\ &= z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) \\ \Rightarrow \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 {+} z_2) \oplus z_3 = z_1 \oplus (z_2 + z_3) \quad &\text{(Assoziativität)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = (0 + 0i) \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C} : \\ z \oplus 0 &= (x + yi) \oplus (0 + 0i) \\ &= ((x + 0) + (y + 0)i) \\ &= (x + yi) \\ &= z \\ \Rightarrow \exists ! 0 : z \oplus 0 = z; z \in \mathbb{C} \quad \text{(Neutrales Element)} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
-z = -(x+yi) \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C}:&\\
z \oplus (-z) =& (x+yi) \oplus (-(x+yi))\\
=& ((x-x)+(y-y)i)\\
=& (0+0i)\\
=& 0
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \exists -z : z \oplus -z = 0$ (Inverses Element)

$$
\begin{aligned}
z_1 \oplus z_2 &= (x_1+y_1i) \oplus (x_2+y_2i)\\
&= ((x_1+x_2)+(y_1+y_2)i)\\
&= ((x_2+x_1)+(y_2+y_1)i)\\
&= (x_2+y_2i) \oplus (x_1+y_1i)\\
&= z_2 \oplus z_1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \oplus z_2 = z_2 \oplus z_1$ (Kommutativität)

Die Multiplikation:

Für die Multiplikation gilt ebenfalls zu beweisen, dass $(\mathbb{C}, \otimes)$ eine kommutative Gruppe ist:

[1)]

$$\begin{aligned}
\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \otimes z_2 (x_1 + y_1 i) \otimes (x_2 + y_2 i) \\
&= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i) \\
&\in \mathbb{C}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \otimes : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \quad \text{(Abgeschlossenheit)}$$

$$\begin{aligned}
(z_1 \otimes z_2) \otimes z_3 &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i) \otimes (x_3 + y_3 i) \\
&= ((x_1x_2x_3 - y_1y_2x_3 - x_1y_2y_3 - x_2y_1y_3) + (x_1x_2y_3 - y_1y_2y_3 + x_1y_2x_3 + \\
&= (x_1 + y_1 i) \otimes ((x_2x_3 - y_2y_3) + (x_2y_3 + x_3y_2)i) \\
&= (x_1 + y_1 i) \otimes ((x_2 + y_2 i) \otimes (x_3 + y_3 i)) \\
&= z_1 \otimes (z_2 \otimes z_3)
\end{aligned}$$

2. $$\Rightarrow \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 + z_2) \otimes z_3 = z_1 \otimes (z_2 + z_3) \quad \text{(Assoziativität)}$$

3.

$$\begin{aligned}
1 = (1 + 0i) \in \mathbb{C}, \forall z \in \mathbb{C} : \\
z \otimes 1 &= (x + yi) \otimes (1 + 0i) \\
&= ((1 \cdot x - 0 \cdot y) + (1 \cdot y + 0 \cdot x)i) \\
&= (x + yi) \\
&= z
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists! 1 : z \otimes 1 = z; z \in \mathbb{C} \quad \text{(Neutrales Element)}$$

4.

$$\begin{aligned}
z^{-1} = (x + yi)^{-1} \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} : \\
z \otimes z^{-1} &= (x + yi) \otimes \frac{1}{(x + yi)} \\
&= \frac{(x + yi) \cdot (x - yi)}{(x + yi) \cdot (x - yi)} \\
&= \frac{((x^2 + y^2) + (0i))}{((x^2 + y^2) + (0i))} \\
&= (1 + 0i) \\
&= e
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall z \in \mathbb{C} \exists z^{-1} : z \otimes z^{-1} = 1 \quad \text{(Inverses Element)}$$

5.

$$\begin{aligned} z_1 \otimes z_2 &= (x_1 + y_1 i) \otimes (x_2 + y_2 i) \\ &= ((x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)i) \\ &= ((-y_1y_2 + x_1x_2) + (x_2y_1 + x_1y_2)i) \\ &= (x_2 + y_2 i) \otimes (x_1 + y_1 i) \\ &= z_2 \otimes z_1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \otimes z_2 = z_2 \otimes z_1 \quad \text{(Kommutativität)}$$

Auch Verknüpfungen sind Gesellschaftswesen, gemeinsam glänzen sie:

Zu guter Letzt muss das Distributivgesetz gelten: (Bidde schön Frau Rämie mol)

$$\begin{aligned} (z_1 \oplus z_2) \otimes z_3 &= ((x_1 + y_1 i) \oplus (x_2 + y_2 i)) \otimes (x_3 + y_3 i) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i) \otimes (x_3 + y_3 i) \\ &= ((x_1x_3 + x_2x_3 - y_1y_3 - y_2y_3) + (x_1y_3 + x_2y_3 + y_1x_3 + y_2x_3)i) \\ &= ((x_1x_3 - y_1y_3) + (x_1y_3 + x_3y_1)i) + ((x_2x_3 - y_2y_3) + (x_2y_3 + x_3y_2)i) \\ &= (x_1 + y_1 i) \otimes (x_3 + y_3 i) \oplus (x_2 + y_2 i) \otimes (x_3 + y_3 i) \\ &= z_1 \otimes z_3 \oplus z_2 \otimes z_3 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 \oplus z_2) \otimes z_3 = z_1 \otimes z_3 \oplus z_2 \otimes z_3 \quad \text{(Distributivität)}$$

□

9.3 Die Gauß'sche Zahlenebene

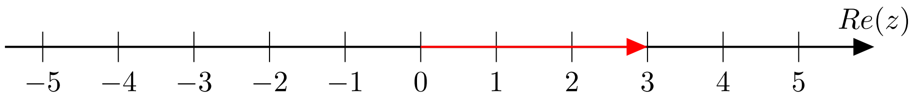
9.3.1 Einleitung

Hinführung

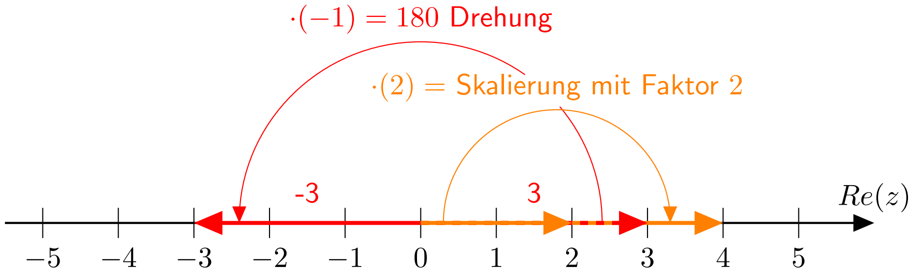
Der Körper der komplexen Zahlen wurde nun definiert, wohingegen der Platz dieser auf unserem allbekannten Zahlensystem schleierhaft bleibt. Um einen Ansatz für eine Integration zu finden, bietet sich an zu beobachten, wie sich komplexe Zahlen auf der **reellen Zahlengerade** (welche eine Veranschaulichung des euklidischen Vektorraums $\mathbb{R}^1$ ist) verhalten.

Definition 9.3.1

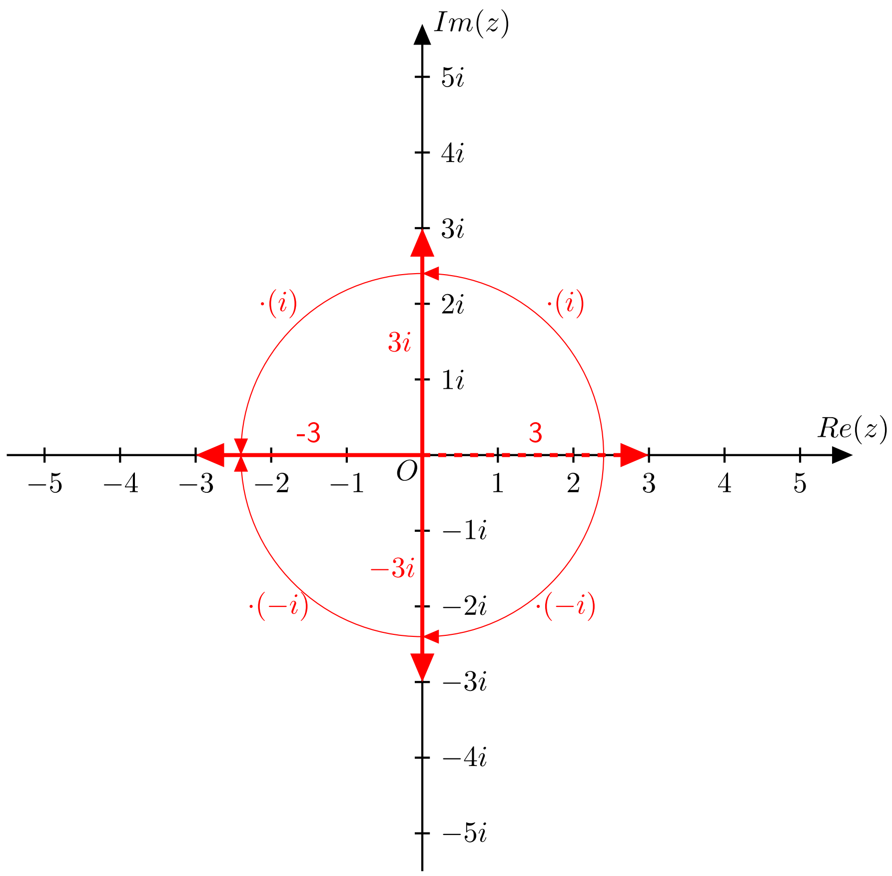
Als **Zeiger** wird ein visuelles Hilfsmittel definiert, welches in der Gauß'schen Zahlenebene das Analoge zu dem Pfeil eines Ortsvektors eines Vektorraumes ist.



Addition und Multiplikation mit einem positiven Faktor im $\mathbb{R}^1$ sind nicht von Interesse, wohingegen die Multiplikation mit einem negativen Faktor uns reichlich mehr mitteilt:

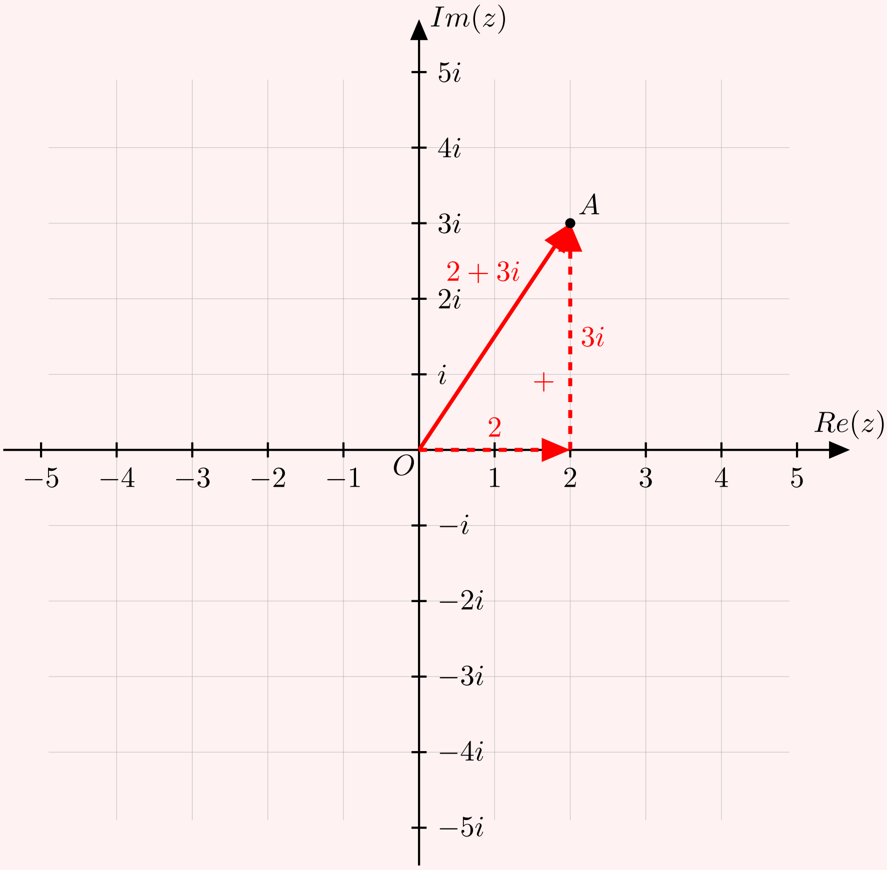


Da gilt, dass: $i^2 = -1$ ist die Multiplikation einer reellen Zahl mit i^2 äquivalent zu einer 180 - Grad Drehung. Daraus lässt sich schließen, dass die Multiplikation mit i einer 90 - **Grad Drehung** entspricht, da: $a \cdot i^2 = a \cdot i \cdot i; a \in \mathbb{R}$ und man davon ausgeht, dass $\cdot(i)$ bei jeder Instanz dieselbe Transformation anwendet. Somit entsteht eine wunderschöne Ebene, in der alle Zahlen zusammen spielen und sich amüsieren können:



Definition 9.3.2: Gauß'sche Zahlenebene

Seien eine reelle Achse mit Einheit 1 und eine imaginäre Achse mit Einheit i. Dann nennt sich **Gauß'sche Zahlenebene** gerade die Ebene, welche als Achsen die zueinander orthogonalen genannten Achsen hat. Konvention ist es, die imaginäre Achse vertikal zu platzieren.



Bemerkung:

Da jede komplexe Zahl eine Darstellung in der Gauß'schen Zahlenebene besitzt, lassen sie sich ebenfalls über einen Winkel und den Abstand zum Origo beschreiben.

Definition 9.3.3: Betrag einer komplexen Zahl

Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit dem **Abstand der Zahl zum Origo** oder der Länge des Zeigers. Pythagoras liefert uns eine Formel:

$$|z|\sqrt{x^2+y^2}; z = x + yi$$

Definition 9.3.4: Argument einer komplexen Zahl

Das **Argument** einer komplexen Zahl ist gleichbedeutend mit dem **Winkel der Zahl**, welcher der Zeiger mit der „rechten Hälfte"der reellen Achse einschließt (im mathematischen Sinn und modulo 2π). Pythagoras liefert uns weitere Formeln:

[1)]1. und 3. Quadrant:

$$arg(z)\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)+\frac{\pi}{2}\cdot(\text{Quadrant}-1); z = x + yi$$

2. und 4. Quadrant:

$$arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right)+\frac{\pi}{2}\cdot(\text{Quadrant}-1); z = x + yi$$

Definition 9.3.5: Betrag-Winkel Form

2. Als **Betrag-Winkel Form** wird eine Darstellungsform einer komplexen Zahl definiert, welche diese explizit über deren Argument und Betrag definiert. Sie ist keine offizielle Darstellungsweise einer komplexen Zahl, jedoch bringt sie uns der nächsten wichtigen näher und fasst die zwei vorangehenden Definitionen zusammen.

$$z = |z|_{arg(z)}; z \in \mathbb{C}$$

9.3.2 Polarform

Definition 9.3.6: Polarform

Die **Polarform** einer komplexen Zahl definiert diese Zahl (wie auch die Betrag-Winkel Form) über deren **Argument und Betrag**.

$$z = |z| \cdot (\cos(arg(z)) + \sin(arg(z))i)$$

Beweis:

Nach dem Satz von Pythagoras gilt $\forall z = x + yi; z \in \mathbb{C}$:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{ll} \frac{x}{|z|} & = \cos(arg(z)) \\ \frac{y}{|z|} & = \sin(arg(z)) \\ |z| & = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{ll} x & = \cos(arg(z)) \cdot |z| \\ y & = \sin(arg(z)) \cdot |z| \\ |z| & = \sqrt{x^2 + y^2} \end{array} \right|$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow z &= x + yi \\ &= \cos(arg(z)) \cdot |z| + (\sin(arg(z)) \cdot |z|)i \\ &= |z| \cdot (\cos(arg(z)) + \sin(arg(z))i) \end{aligned}$$

□

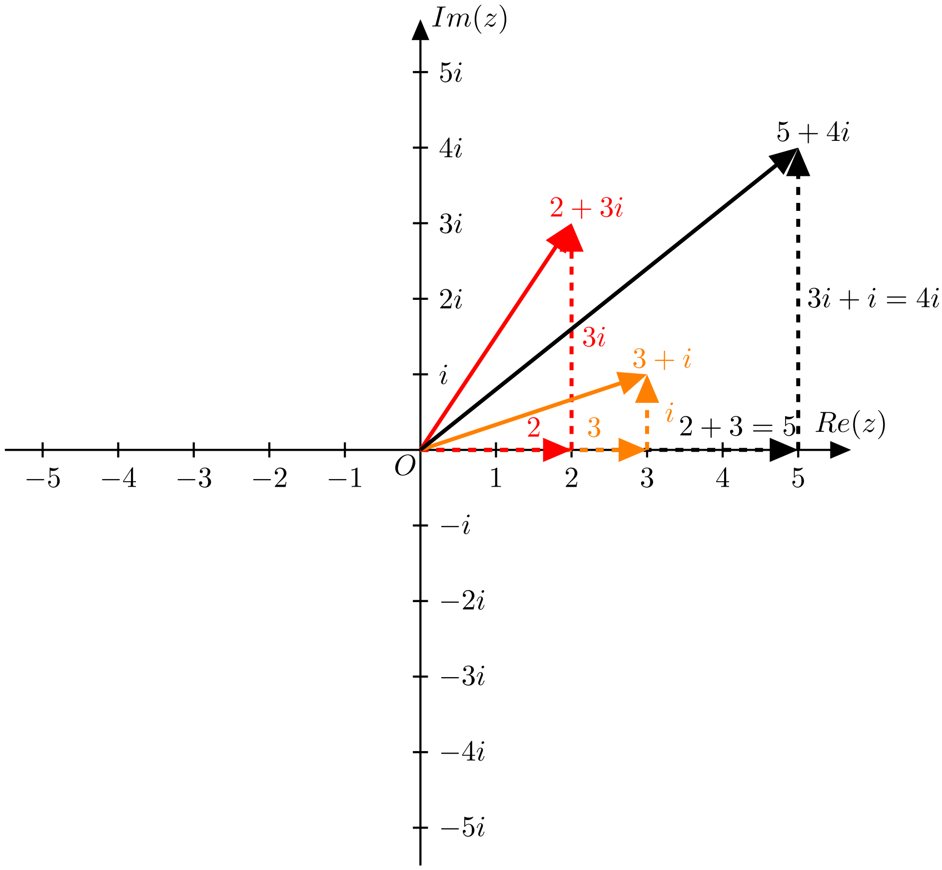
9.3.3 Rechenoperationen in der Gauß'schen Zahlenebene

Die bereits angesprochenen basischen Rechenoperationen lassen sich in der Gauß'schen Zahlenebene als Transformation darstellen. Weshalb dies interessant ist, wird im Verlauf dieses Abschniits hoffentlich noch deutlich.

Die Addition ist die einfachste Transformation, weil sie equivalent zur Linearkombination bei Vektoren ist, da gilt:

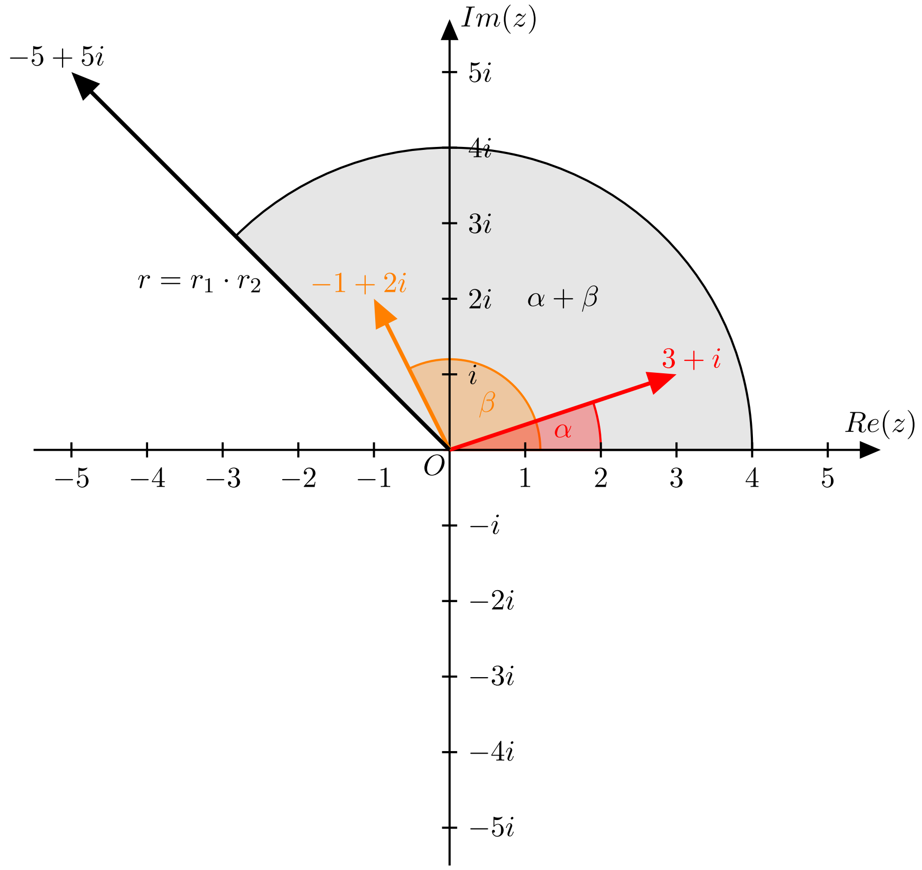
$$(z_1 + z_2) = ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)i)$$

Bildlich bedeutet das:



Im Gegensatz dazu ist die Multiplikation weniger intuitiv. Aus logistischen Gründen wird sie trotz allem in diesem Abschnitt besprochen. Bildlich stellt sie eine Drehstreckung dar (auch dies wird gegen Ende des Kapitels genauer beschrieben), da gilt:

$$(z_1 \cdot z_2) = r_{1\alpha} \cdot r_{2\beta} = (r_1 \cdot r_2)_{\alpha+\beta}$$



$Im(z)$
$-5+5i$
$5i$
$4i$
$3i$
$r = r_1 \cdot r_2$
$-1+2i$
$2i$
$\alpha+\beta$
$3+i$
i
β
α
$Re(z)$
O
-5 -4 -3 -2 -1 1 2 3 4 5
$-i$
$-2i$
$-3i$
$-4i$
$-5i$

Kapitel 10

Zahlentheorie

by Bruno

10.1 Körper

Definition 10.1.1

Ein Körper ist eine Menge K, versehen mit zwei inneren zweistelligen Verknüpfungen $+$ und $\cdot$, also Addition und Multiplikation, für welche eine Addition

$$\oplus \quad : \quad K \times K \to K \qquad ; \qquad (a;b) \longmapsto a+b$$

und eine Multiplikation

$$\odot \quad : \quad K \times K \to K \qquad ; \qquad (a;b) \longmapsto a \cdot b$$

gegeben sind, sodass folgende Gesetze bewisen sind:

Assoziativgesetz $(A1)$ $a + (b + c) = (a + b) + c$

Kommutativgesetz $(A2)$ $a + b = b + a$

Neutrales Element $(A3)$ $\exists! \quad 0 \quad mit:$

$a + 0 = 0 + a = a$

Inverses Element $(A4)$ $\forall a \in K \quad \exists! - a \in Kmit:$

$a + (-a) = 0$

Assoziativgesetz $(M1)$ $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$

Kommutativgesetz $(M2)$ $a \cdot b = b \cdot a$

Neutrales Element $(M3)$ $\exists! \quad 1 \in Kmit$

$1 \cdot a = a \cdot 1 = a$

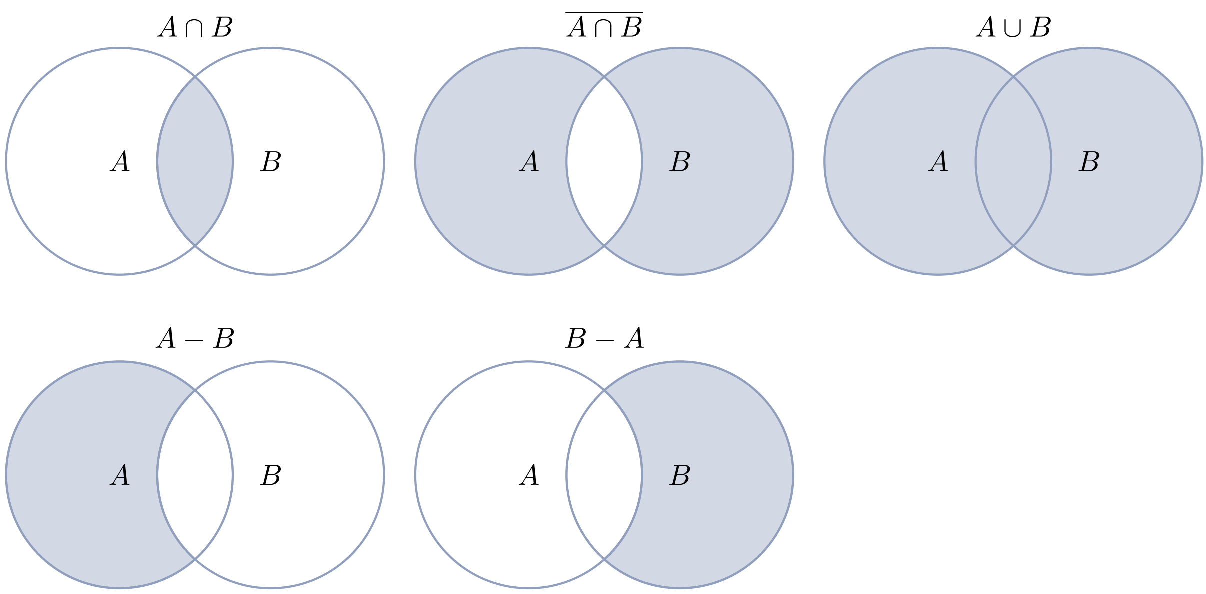
Inverses Element $(M4)$ $\exists! \quad \frac{1}{a} \quad zujedema \in K\backslash\{0\}mit:$

$a \cdot \frac{1}{a} = 1$

Distributivgesetz (D) $a \cdot (b + c) = ab + ac$

Dies erfüllen $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^n$ (Vektorräume), $\mathbb{C}$, Matritzen, prime Restklassengruppen $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ ...

10.2 Mengenoperatoren



10.3 Teilbarkeit

10.3.1 Teilbarkeitseigenschaften

Definition 10.3.1

Die ganze Zahl $a \in \mathbb{Z}$ teilt $b \in \mathbb{Z}$, wenn es ein x gibt, mit $b = a \cdot x$. Man schreibt:

$$a \mid b$$

a ist ein **Teiler** von b und b ist **Vielfaches** von a
Zwei Zahlen $a, b \in \mathbb{Z}$ sind **teilerfrend**, wenn aus $c \mid a$ und $c \mid b$ folgt $|c| = 1$

Theorem 10.3.1

Aus dieser Teilbarkeitsrelation ergeben sich mehrere Eigenschaften:
Sei $a, b, c, t \in \mathbb{Z}$ und $t \neq 0$:

1. $a \mid b \quad$ und $\quad$ a$| \; c \quad dann \quad$ a $\mid b \pm c$
2. $a \mid b \quad$ und $\quad b \mid c \quad$ dann $\quad a \mid c$
3. $a \mid b \quad$ dann $\quad a \mid bc$
4. $at \mid bt \quad \Leftrightarrow \quad a \mid b$
5. $a \mid b \quad$ dann $\quad b = 0 \quad$ oder $\quad |a| \leqslant |b|$
6. $a \mid b \quad$ und $\quad b \mid a \quad$ dann $\quad a = \pm b$

Beweis:

- (2) Wenn $a \mid b$ und $b \mid c$, dann gibt es $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $b = a \cdot x$ und $c = b \cdot y$. Also gilt auch $c = b \cdot y = a \cdot (xy)$ und somit $a \mid c$
- (3) Weil offensichtlich $b \mid bc$ gilt, folgt die Aussage sofort aus Aussage (3)
- (4) $at \mid bt \quad \Leftrightarrow \quad \exists x \in \mathbb{Z}: \; bt = atx \quad \Leftrightarrow \quad b = ax \quad \Leftrightarrow \quad a \mid b$
- (5) Sei $b = ax$ mit $x \in \mathbb{Z}$. Wenn $x = 0$, dann ist $b = 0$. In alles anderen Fällen ist $|x| > 1$ und daher $|b| = |a| \cdot |x| \geqslant |a|$
- (6) Wenn weder $a = 0$ noch $b = 0$ ist, dann folgt aus (4) $|a| \geqslant |b| \geqslant |a|$ und daher $a = \pm b$. Wenn also $a = 0$, dann folgt $b = 0$

$\square$

10.3.2 Euklidische Division

Definition 10.3.2

Seien a und b zwei natürliche Zahlen. Es gibt dann immer $q, r \in \mathbb{N}$ sodass

$$a = b \cdot q + r \qquad 0 \leqslant r < b$$

q heißt **Quotient** und r heißt **Rest**. Man schreibt: $q = a \div b$ und $r \equiv a \mod b$

10.4 Primzahlen

Hier die Liste der Primzahlen bis 100:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97

Definition 10.4.1

Eine natürliche Zahl heißt Primzahl, wenn sie in $\mathbb{N}$ genau zwei Teiler besitzt.

Theorem 10.4.1: Unednlichkeit der Primzahlen

Es gibt unendlich viele Primzahlen

Beweis - nach Euklid:

Jede ganze Zahl $n > 1$ ist durch eine Primzahl teilbar. Entweder ist n selber eine Primzahl oder $n = a \cdot b$ mit $a, b \in \mathbb{N}$.
Also ist $1 < a = \dfrac{n}{b} < n$. Wenn man diesen Schritt endlich oft macht, kommt man am Ende auf ein neues $a' \in \mathbb{P}$.
$\forall$: Nehmen wir jetzt an, es gäbe nur endlich viele Primzahlen $p_1, p_2, ..., p_{r-1}, p_r$.
Dann ist

$$N = p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{r-1} \cdot p_r + 1 = \left(\prod_{r=1}^{r} P_r\right) + 1$$

eine ganze Zahl > 1 und hat daher mindestens einen Primteiler $p_l \in \mathbb{P}$ und $l \in \{1, 2, ..., r-1, r\}$
Dann hat man:

$$\Rightarrow \begin{cases} p_l & | \quad p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{r-1} \cdot p_r p_l \quad | \\ p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{r-1} \cdot p_r + 1 & \end{cases}.$$

$\Leftrightarrow p_l \mid p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{r-1} \cdot p_r - (p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{r-1} \cdot p_r + 1)$
$\Leftrightarrow p_l \mid (-1)$ oder $p_l \mid 1$ ↯, da $p_l = 1$ aber $1 \notin \mathbb{P}$
N muss also einen Primteiler haben ungleich $p_r \quad mit \quad r \in \{1, 2, 3, ..., r-1, r\}$ oder **selber prim sein**. □

Theorem 10.4.2

Jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$, die nicht prim ist, besitzt einen Primfaktor p, für den gilt

$$p^2 \leqslant n \quad \Leftrightarrow \quad p \leqslant \sqrt{n}$$

Also lässt sich jede Zahl, die nicht prim ist, in Primfaktoren zerlegen.
Jede natürliche Zahl $n \geqslant 2$ besitzt eine eindeutige **Primfaktorzerlegung** der Form

$$n = (p_1)^{a_1} \cdot (p_2)^{a_2} \cdot ... \cdot (p_{k-1})^{a_{k-1}} \cdot (p_k)^{a_k}$$

mit $p_1 < p_2 < ... < p_{k-1} < p_k$ und $\{p_1, p_2, ..., p_{k-1}, p_k\} \in \mathbb{P}$ und $a_1, a_2, ...a_{k-1}, a_k \in \mathbb{N}$

10.5 Restklassen oder Kongruenzklassen

Definition 10.5.1

Seien drei natürliche Zahlen $a, b, n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$.

Wenn $a = q_1 \cdot n + r_1$ und $b = q_2 \cdot n + r_2$ und $r_1 = r_2$, also falls a und b bei der euklidischen Division durch n den gleichen Rest besitzen, dann gilt

$$a \equiv b \mod n$$

Beispiel:

- $29 \equiv -121 \mod 5$ da $29 \equiv 5 \cdot 5 + 4$ und $-121 = 5 \cdot (-25) + 4$
- $88 \equiv 24 \mod 8$ da $8 \mid 88$ und $8 \mid 24$
- $87 \equiv 23 \mod 8$

Theorem 10.5.1

Seien a, b zwei ganze Zahlen und $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$, dann gilt
(1) $a \equiv b \mod n \quad \Leftrightarrow \quad n \mid (a - b)$
(2) $a \equiv 0 \mod n \quad \Leftrightarrow \quad n \mid a$
(3) falls $n' \geqslant 2$ und $n' \mid n$ dann gilt: $a \equiv b \mod n \quad \Rightarrow \quad a \equiv b \mod n'$

Beweis:

- (1) $a \equiv b \mod n \quad \Leftrightarrow \quad a - b \equiv 0 \mod n \quad \Leftrightarrow \quad n$ teilt $(a - b)$

$\square$

Beispiel:

- (1) $61 \equiv 29 \mod 8$ (Rest 5) $\Leftrightarrow \quad 8 \mid (61 - 29) = 32$
- (3) $4 \geqslant 2$ und $4 \mid 12$ $43 \equiv 67 \mod 12$ $(r = 7)$ $\Rightarrow \quad 43 \equiv 67 \mod 4$

Theorem 10.5.2

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ gilt:
Jede ganze Zahl a ist modulo n kongruent zu einer natürlichen Zahl r mit $0 \geqslant r \geqslant n - 1$
Anders gesagt gibt es zu jeder Zahl immer Kongruenzklassen.

Definition 10.5.2

Es seien $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$ und $r \in \mathbb{N}$ mit $0 \leqslant r < n$
Die Menge $[r] \mod n$ ist die Menge aller ganzen Zahlen z, die bei der euklidischen Division durch n den Rest r liefern.
Sie ist eine Menge von Zahlen, die den Abstand n zueinander haben.
Kongruenzen sind mit der Addition und der Multiplikation verträglich. Seien a, b, a^*, b^* ganze Zahlen:

$$\Rightarrow \begin{cases} a & \equiv & a^* \mod n \\ b & \equiv & b^* \mod n \end{cases}$$

$\Rightarrow a + b \equiv a^* + b^* \mod n$ und $a \cdot b \equiv a^* \cdot b^* \mod n$

Beispiel:

- $[1] \mod 4 = \{..., -7, -3, 1, 5, 9, ...\}$
- $[2] \mod 4 = \{..., -6, -2, 2, 6, 10, ...\}$
- $[3] \mod 4 = \{..., -5, -1, 3, 7, 11, ...\}$
- $[4] \mod 4 = [0] \mod 4 = \{..., -8, -4, 0, 4, 8, 12, ...\}$

Theorem 10.5.3

Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $a, b \geqslant 2$ und $a \mid b$, dann gilt

$$[r] \mod b \subseteq [r] \mod a$$

($\subseteq$ heißt "Teilmenge")

Beispiel:

So gilt zum Beispiel:

$$\begin{array}{rll} & [2] \mod 10 & \subseteq [2] \mod 5 \\ \Leftrightarrow & \{..., -28, -18, -8, 2, 12, 22, ...\} & \subseteq \{..., -18, -13, -8, -3, 2, 7, 12, 17, ...\} \end{array}.$$

10.5.1 Mit Kongruenzen rechnen und beweisen

Definition 10.5.3

Kongruenzen sind mit der Addition und der Multiplikation verträglich. Daraus folgen diese Eigenschaften:

Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant 2$. a und a^* zwei (beliebige) ganze Zahlen.

1. Für jede ganze Zahl k gilt:

$$a \equiv a^* \mod n \quad \Rightarrow \quad k \cdot a \equiv k \cdot a^* \mod n$$

2. Für jede natürliche Zahl $p \in \mathbb{N} \backslash \{0\}$ gilt:

$$a \equiv a^* \mod n \quad \Rightarrow \quad a^p \equiv a^{*p} \mod n$$

Diese Eigenschaften sind **keine** Äquivalenzen, sondern Folgerungen! Bei Beweisen kann man also nicht vom Ergebnis ausgehen, und dann durch das dividieren auf beiden Seiten des Kongruenzzeichens auf ein einfaches Ergebnis kommen. Man muss von etwas einfachem ausgehen, und das dann so umformen, dass man auf die gewünschte Kongruenz kommt.

Beispiel:

$Z\!\!\!Z : 35^{228} + 84^{501} \equiv 0 \mod 17$

$$\begin{array}{rrcl|rrcl} \Rightarrow & 35 & = & 34 + 1 = 17 \cdot 2 + 1 & \Rightarrow & 84 & = & 85 - 1 = 17 \cdot 5 - 1 \\ \Rightarrow & 35 & \equiv & 1 \mod 17 & \Rightarrow & 84 & \equiv & -1 \mod 17 \\ \Rightarrow & 35^{228} & \equiv & 1 \mod 17 & \Rightarrow & 84^{501} & \equiv & -1 \mod 17 \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad 35^{228} + 84^{501} \equiv 1 - 1 \mod 17 \equiv 0 \mod 17$$

Definition 10.5.4

Es seien a und b zwei natürliche Zahlen größer Null mit $a > b$. r sei der Rest der Euklidischen Division von a durch b. Dann gilt:

1. Wenn $r = 0$, dann sind die gemeinsamen Teiler von a und b die Teiler von b. Da die Division aufgeht, teilt b die Zahl a. a ist also ein Vielfaches von b, deshalb sind die Teiler von a auch die Teiler von b.

2. Wenn $r \neq 0$, dann sind die gemeinsamen Teiler von a und b gerade die gemeinsamen Teiler von b und r. (Äquivalenz $\Leftrightarrow$)

Beweis:

Die Euklidische Division sagt $\quad a = b \cdot q + r$

$$n|a \quad \wedge \quad n|b \Rightarrow n|q \cdot b \quad \Rightarrow \quad n|a - q \cdot b$$
$$\Rightarrow \quad n|r$$

Alle Teiler n haben die Eigeschaften: $n|a$, $n|b$ und $n|r$. n ist also Teiler von a, b und r.
Umgekehrt gilt: wenn $n|b$ und $n|r$:
$\Rightarrow$ n — q $\cdot b + r$
$\Rightarrow$ $n|a$ $\square$

10.5.2 Der Euklidische Algorithmus

Der Euklidische Algorithmus ist eine effiziente Methode um den ggT (größter gemeinsamer Teiler) zweier Zahlen zu finden, wenn die Primfaktorzerlegung nicht vorliegt.

Definition 10.5.5

Seien $a, b \in \mathbb{N}$. Sei a die größere Zahl, also $a > b$. Sei b kein Teiler von a. Nun wiederholt man immer wieder die Euklidische Division mit den Resten der vorherigen Division. Nach obigem Satz sind die Teiler von a und b auch die Teiler von b und r. Man möchte ja den ersten gemeinsamen Teiler der Zahlen a und b finden.

$$\begin{array}{rcll}
a & = & q_1 \cdot b + r_1 & \quad 0 < r_1 < b \\
b & = & q_2 \cdot r_1 + r_2 & \quad 0 < r_2 < r_1 \\
r_1 & = & q_3 \cdot r_2 + r_3 & \quad 0 < r_3 < r_2 \\
 & & \vdots & \\
r_{n-2} & = & q_n \cdot r_{n-1} + r_n & \quad 0 < r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} & = & q_{n+1} \cdot r_n + 0 &
\end{array}$$

Deshalb ist r_n der größte gemeinsame Teiler der Zahlen a und b:
Die Folge der Reste $r_k \in \mathbb{N}$ mit $k = \{1, 2, ..., n-1, n\}$ ist streng monoton fallend. Diese Folge hat den Grenzwert $g = 0$. Deshalb gibt es immer **ein** letztes r_n der Folge.
Die **Existenz** von der letzten Zahl r_n ist sicher, da $b \nmid a$. Die Teiler von a und b sind also auch die Teiler von b und r_1. Da die Folge der Reste monoton fallend ist, kommt man am Ende auf jeden Fall auf eine Zahl r_n, die Teilerin von a und b ist.

Theorem 10.5.4

Aus vorheriger Definition des Euklidischen Algorithmus ergeben sich diese Eigenschaften der Zahl r_n:

1. r_n ist gleichzeitig Teiler von a und b.
2. Jeder andere Teiler von a und b ist auch Teiler von r_n

r_n ist der größte gemeinsame Teiler von a und b. ggT$(a\,;b) = r_n$. Es gilt also:

- ggT$(a\,;b) =$ ggT$(b\,;a)$
- $a|c$ und $b|d \quad \Rightarrow \quad$ ggT$(a\,;b)|$ ggT$(c\,;d)$
- ggT$(a^2;b^2) = (\text{ggT}(a;b))^2$

Beispiel:

Man sucht den ggT von $a = 780$ und $b = 567$.

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 780 & = & 1\cdot 567 & + & 213 \\ 567 & = & 2\cdot 213 & + & 141 \\ 213 & = & 1\cdot 141 & + & 72 \\ 141 & = & 1\cdot 72 & + & 69 \\ 72 & = & 1\cdot 69 & + & 3 \\ 69 & = & 23\cdot 3 & + & 0 \end{array}\right\} \quad ggT(780;567) = ggT(567;780) = 3$$

Jetzt sucht man den ggT von $c = 3\cdot 780 = 2340$ und $d = 567\cdot 5 = 2835$.

$$\left.\begin{array}{rcrcl} 2835 & = & 1\cdot 2340 & + & 495 \\ 2340 & = & 4\cdot 495 & + & 360 \\ 495 & = & 1\cdot 360 & + & 135 \\ 360 & = & 2\cdot 135 & + & 90 \\ 135 & = & 1\cdot 90 & + & 45 \\ 90 & = & 2\cdot 45 & + & 0 \end{array}\right\} \quad ggT(2340;2835) = ggT(2835;2340) = 45$$

$780\,|\,2340$ und $567|2835$ folgt ggT$(780,567)\,|$ ggT$(2340;2385)$ oder auch $3\,|\,45$

10.5.3 Der kleine Satz von Fermat

Definition 10.5.6

Sei a eine ganze Zahl und $p \in \mathbb{P}$ kein Teiler von a. Dann gilt

$$a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

$$\Rightarrow a^p \equiv a \mod p$$

Beweis:

Seien p eine Primzahl und $a \in Z$ und zwei Listen (oder Mengen) von Zahlen

$$M : a, 2a, 3a, 4a, ..., (p-2)a, (p-1)a$$

$$N : 1, 2, 3, 4, ..., (p-2), (p-1)$$

Erst wird bewiesen, dass bei der Division von 2 Zahlen $k, k' \in \mathbb{N}$ mit $k \neq k'$ ein anderer Rest rauskommt. Dies wird und später hilfreich sein.

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad k \quad &\not\equiv \quad k' \mod p \qquad \text{(da } k \neq k' \text{ und } k < p \text{ und } k' < p\text{)}\\ \Rightarrow \quad k \cdot a \quad &\not\equiv \quad k' \cdot a \mod p\end{aligned}$$

Die Reste von beliebigen Zahlen $x \in M$ durch $p \in \mathbb{P}$ ergeben genau die Zahlen $y \in N$, da in beiden Mengen genau $(p-1)$ verschiedene Elemente sind und da gerade gezeigt wurde dass jedes Element aus M bei der Division durch p einen unterschiedlichen Rest hat. Die Reihenfolge der zu $x \in M$ zugehörigen Reste $y \in N$ ist natürlich nicht klar (ganz normal bei Mengen).

Wir benennen um, damit es klarer wird:

$$\left.\begin{aligned} a &\equiv r_1 \mod p\\ 2a &\equiv r_2 \mod p\\ 3a &\equiv r_3 \mod p\\ &\vdots\\ (p-2)a &\equiv r_{p-2} \mod p\\ (p-1)a &\equiv r_{p-1} \mod p\end{aligned}\right\}$$

$r_1, r_2, ..., r_{p-1}$ sind alle voneinander verschieden ($\widehat{=}$ paarweise verschieden) und sind genau alle Elemente aus der Menge N

Demnach gilt die Schreibweise:

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-2} \cdot r_{p-1} \quad = \quad 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-2) \cdot (p-1) \quad = \quad (p-1)!$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a &\equiv r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot ... \cdot r_{p-1} \mod p\\ (p-1)!a^{p-1} &\equiv (p-1)! \mod p\end{aligned}$$

Da ggT$((p-1)!; p) = 1$, kann man durch (p-1)! teilen, ohne dass sich das Modulo verändert

$\Rightarrow a^{p-1} \equiv 1 \mod p$ □

10.5.4 Zusammenhänge zwischen ggT und kgV

Theorem 10.5.5

Das kgV besitzt ähnliche Eigenschaften wie der ggT Seien a, b, c, d, k ganze Zahlen ungleich Null. Dann gilt:

1. kgV$(a; b)$ = kgV$(b; a)$
2. kgV$(k \cdot a; k \cdot b) = |k|\cdot$ kgV $(a; b)$
3. Falls $a|c$ und $b|d$, dann gilt auch kgV$(a; b)$ — kgV$(c; d)$

Eine wichtige Eigenschaft, die oft benutzt wird, ist folgende:

$$\text{ggT}(a; b) \cdot \text{kgV}(a; b) = |a \cdot b|$$

Eine andere Art, den ggT und den kgV zu ermitteln ist die über die Primfaktorzerlegung. Diese wird gleich mithilfe eines Beispiels erklärt.

Beispiel:

$$\begin{aligned} a = 12474 \quad &= \quad 2 \cdot 3^4 \cdot 7 \cdot 11 \quad = \quad 2^1 \cdot 3^4 \cdot 5^0 \cdot 7^1 \cdot 11^1 \cdot 17^0\\ b = 33320 \quad &= \quad 2^3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 17 \quad = \quad 2^3 \cdot 3^0 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^0 \cdot 17^1\end{aligned}$$

Daraus ergeben sich
$\text{ggT}(a;b) = 2^1 \cdot 7^1 \quad = \quad 14$
$\text{kgV}(a;b) = 2^3 \cdot 3^4 \cdot 5^1 \cdot 7^2 \cdot 11^1 \cdot 17^1 \quad = \quad 29688120$

10.5.5 Die Sätze von Bézout, Gauß und der Fundamentalsatz des ggT

Definition 10.5.7: Fundamentalsatz des ggT

Der **Fundamentalsatz des ggT** besagt, dass für $a, b \in \mathbb{N}$ ganze Zahlen u und v exisitieren, sodass gilt:

$$a \cdot u + b \cdot v = \text{ggT(a; b)}$$

Wenn a und b teilerfrend sind, dann gilt im Sonderfall: $\exists u, v \in \mathbb{Z}$:

$$a \cdot u + b \cdot v = \text{ggT(a; b)} = 1$$

Daraus folgt der **Satz von Bézout**. Zwei ganze Zahlen ungleich Null sind genau dann teilerfrend, wenn $\exists u, v \in \mathbb{Z}$ gibt, sodass gilt:

$$a \cdot u + b \cdot v = 1$$

Der **Satz von Gauß** ist bei diophantischen Gleichungen nützlich: Es seien a, b und c ganze Zahlen ungleich Null und seien a und b teilerfrend.

$$a|bc \quad \Rightarrow \quad a|c$$

Daraus folgt:

$$\text{ggT(a; } b_1) \quad \text{und} \quad \text{ggT(a; } b_2) \quad \Leftrightarrow \quad \text{ggT(a; } b_1 \cdot b_2)$$

Beispiel:

Musterlösung einer diophantischen Gleichung:

$$(1) \qquad 12597a - 3813b = 3$$

Enweder man sucht mit dem Taschenrechner eine Lösung oder man verwendet den oft längen Weg mit einer hohen Vorzeichenfehlerwahrscheinlichkeit. Wir sind mutig und die Zahken sind groß, deshalb nehmen wir den Weg mit dem Gaus'schen Algorithmus. Man merkt dass 12597, 3813 mit 3 gekürzt werden kann.

$$(1) \quad \Leftrightarrow \quad 4199a - 1271b = 1$$

$$\begin{aligned}
4199 &= 3 \cdot 1271 + 386 \\
1271 &= 3 \cdot 386 + 113 \\
386 &= 3 \cdot 113 + 47 \\
113 &= 2 \cdot 47 + 19 \\
47 &= 2 \cdot 19 + 9 \\
19 &= 2 \cdot 9 + 1
\end{aligned}$$

Jetzt wird zurück eingesetzt, um auf eine Lösung zu kommen

$$\begin{array}{rcl} 1 &=& 19-2\cdot(9)\\ 1 &=& 19-2\cdot(47-2\cdot 19) = 5\cdot 19-2\cdot 47\\ 1 &=& 5\cdot(113-2\cdot 47)-2\cdot 47 = 5\cdot 113-12\cdot 47\\ 1 &=& 5\cdot 113-12\cdot(386-3\cdot 113) = 41\cdot 113-12\cdot 386\\ 1 &=& 41\cdot(1271-3\cdot 386)-12\cdot 386 = 41\cdot 1271-135\cdot 386\\ 1 &=& 41\cdot 1271-135\cdot(4199-3\cdot 1271) = 446\cdot 1271-135\cdot 4199 \end{array}$$

Eine Lösung dieser Gleichung ist also das Zahlentupel $(-135; -446)$. Jetzt zieht man eine Gleichung von der anderen ab:

$\Rightarrow \quad 4199(a+135)-1271(b+446)=0$

$\Leftrightarrow \quad 4199(a+135)=1271(b+446)$

Unter Verwendung des Satzes von Gauß folgert man

$\Rightarrow \quad 4199|b+446$

$\Rightarrow \quad 4199k=b+446$

$\Leftrightarrow \quad b=4199k-446$

Jetzt wird eingesetzt

$\Rightarrow \quad 4199a+135\cdot 4199 = 1271(4199k-446+446) = 1271\cdot 4199k$

$\Leftrightarrow \quad a=1271k-135$

Die Lösungsmenge Für die Geichung (1) lautet

$$\mathbb{L}=\{(1271k-135; 4199k-446); \quad k\in\mathbb{Z}\}$$

Jetzt kann man jede ganze Zahl F durch unendlich viele Linearkombinationen von 1271 und 4199 darstellen. Sei die Aufgabe

$$4199a-1271b=F$$

$$\mathbb{L}_F=\{(1271k-(F\cdot 135); 4199k-(F\cdot 446)); \quad k\in\mathbb{Z}\}$$

10.5.6 Das RSA Verschlüsselungsverfahren

Die RSA-Verschlüsselung ist eine sehr sichere Verschlüsselungsmethode, welche auch sehr viele Kommunikationsdienste benutzen. Mit einem langen Schlüssel kann ein brute force Angriff (Rumprobieren) mehrere Generationen dauern und noch ist kein Algorithmus (öffentlich) bekannt, der entschlüsseln kann.

Konstruktion der Schlüssel

1. Man nimmt 2 sehr große Primzahlen p und q, die privat bleiben.

2. Man rechnet das Rsa-Modul $N = p\cdot q$ aus. N ist ein Teil des öffentlichen Schlüssels und hat mehrere hunderte von Dezimalstellen

3. Man bestimmt die Anzahl der zu N teilerfrenden Zahlen. Wenn man dazu nur N kennt, brauchen Computer Jahre. Da wir aber die Primfaktorzerlegung haben, ist $\varphi(N)=(p-1)\cdot(q-1)$. φ sei die Funktion die die Anzahl an teilerfrenden Zahlen angibt. Die Anzahl der zu N teilerfrenden Zahlen ist das Produkt der zu p teilerfrenden Zahlen mit den zu q teilerfrenden Zahlen. p und q sind prim, deshalb ist $\varphi(p)=(p-1)$.

4. Man wählt eine Zahl e mit $1<e<(p-1)\cdot(q-1)$ mit ggT$(e;(p-1)(q-1))=1$. Sie ist also teilerfrend mit $\varphi(N)$

   Der öffentliche Schlüssel ist (e,N). Geheim bleiben p, q, und $(p-1)\cdot(q-1)$.

5. Jetzt bestimmt man eine Zahl d mit $e\cdot d\equiv 1 \mod (p-1)(q-1)$. Man bestimmt also das Inverse Element zu e bei der Rechnung mit $\mod (p-1)(q-1)$. Dies macht man mithilfe des Euklidischen

Algorithmus:

$e \cdot d \quad \equiv \quad 1 \mod (p-1)(q-1)$

$\Leftrightarrow (p-1)(q-1) \cdot k \quad = \quad e \cdot d - 1 \qquad (k \in \mathbb{Z})$

$\Leftrightarrow e \cdot d - k \cdot (p-1)(q-1) = 1$ Eine lösbare Diophantische Gleichung! (ggT$(e; (p-1)(q-1)) = 1$))

$\Leftrightarrow e \cdot d + k \cdot (p-1)(q-1) = 1$ da $k \in \mathbb{Z}$

Der private Schlüssel ist (d, N)

Ver- und Entschlüsselung der Nachricht

Sei T der Klartext, also der unverschlüsselte Text und G der geheime, verschlüsselte Text.

- Verschlüsselung: $G = T^e \mod N$
- Entschlüsselung: $T = G^d \mod N$

Damit diese Rechnung funktioniert, muss $(T^e)^d \equiv T \mod N$ gelten. Um dies zu prüfen, schauen wir uns die Ausgangsgleichheiten an:

$$e \cdot d \equiv 1 \mod (p-1)(q-1) \qquad \Leftrightarrow \qquad e \cdot d = r \cdot (p-1)(q-1) + 1 \qquad r \in \mathbb{Z}$$

Und es sei die (Eulersche) Formel gegeben (Vorraussetzung: ggT$(a; pq) = 1$):

$$a^{(p-1)(q-1)} \equiv 1 \mod pq$$

Dann müssen nur Potenzgesetze angewandt werden:

$$\begin{aligned}(T^e)^d = T^{e \cdot d} &= T^{r \cdot (p-1)(q-1)+1} \\ &= T^{r \cdot (p-1)(q-1)} \cdot T \\ &= \left(T^{(p-1)(q-1)}\right)^r \cdot T \\ &\equiv 1^r \cdot T \mod pq \\ &\equiv T \mod N\end{aligned}$$

Beispiel:

Nehmen wir zur Veranschaulichung lieber kleine Primzahlen

1. $p = 7$ und $q = 23$
2. $N = p \cdot q = 161$
3. $\varphi(N) = (p-1)(q-1) = 132$
4. $e = 5$ passt, da ggT$(5; 161) = 1$ und $1 < 5 < 132$
5. Sei d mit $5d \equiv 1 mod 132$ oder auch äquivalent $5d + 132r = 1$. Ein Lösungstupel ist $(53; -2)$.

Der öffentliche Schlüssel ist $(5; 161)$ und der geheime Schlüssel ist $(53; 161)$
Nun verschlüsseln wir die Nachricht „ADVENT“. Der Absender bekommt den öffentlichen Schlüssel.

Nachricht	A	D	V	E	N	T
Zugehörige Zahl	1	4	22	5	14	20
$G = T^5 \mod 161$	1	58	22	66	84	125
Übermittlung der Nachricht						
$T = G^{53} \mod 161$	1	4	22	5	14	20
Entschlüsselte Nachricht	A	D	V	E	N	T

10.6 Die vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine mathematische Beweismethode, nach der eine Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen wird, die größer oder gleich einem bestimmten Startwert sind.
Daher wird der Beweis in zwei Etappen durchgeführt; mit dem **Induktionsanfang** beweist man die Aussage für die kleinste Zahl, mit dem **Induktionsschritt** für die nächste Zahl, also logischerweise für alle darauffolgenden Zahlen.

Beweis - Gaußsche Summenformel:

$\text{Zz}: S(n) = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Induktionsanfang : $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$

Induktionsvorraussetzung : $für ein beliebiges, aber festes k \in \mathbb{N} gilt: \sum_{i=1}^{k} = \frac{k(k+1)}{2}$

Induktionsbehauptung : $man behauptet, dass \forall n \in \mathbb{N} gilt: \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$ $\square$

Induktionsschluss : $\sum_{i=1}^{n} +(n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$

Beweis - Summe ungerader Zahlen:

$\text{Zz}\ \forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2$

Induktionsanfang : $\sum_{k=1}^{1} (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$

Induktionsvorraussetzung : $für ein beliebiges, aber festes i \in \mathbb{N} gilt: \sum_{k=1}^{i} (2k-1) = i^2$

Induktionsbehauptung : $man behauptet, dass \forall n \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$

Induktionsschluss : $\sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^{n} (2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$

$\square$

Beweis - Bernoullische Ungleichung:

$Z\!\!\!Z: \forall n \in \mathbb{N} \quad n > 0: \qquad (1+x)^n \geqslant 1 + nx \qquad ; x \geqslant -1$

$$\begin{aligned}
\textbf{Induktionsanfang}: &\quad (1+x)^0 = 1 \geqslant 1 = 1 + 0x \\
\textbf{Induktionsvorraussetzung}: &\quad Esgeltenun: (1+x)^n \geqslant 1 + nx; n \in \mathbb{N}_0 \\
\textbf{Induktionsbehauptung}: &\quad (1+x)^{n+1} \geqslant 1 + (n+1)x \\
\textbf{Induktionsschluss}: &\quad (1+x)^{n+1} = (1+x)^n \cdot (1+x) \overset{\text{I.V.}}{\geqslant} (1+nx) \cdot (1+x) = nx^2 + nx + x + 1 \\
&\quad \geqslant 1 + x + nx = 1 + (n+1)x
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis - Summe der Quadratzahlen:

Mittels Induktion lässt sich "nur" eine vorhandene Formel beweisen.

$Z\!\!\!Z: S(n) = \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$\begin{aligned}
\textbf{Induktionsanfang}: &\quad S(1) = \sum_{i=1}^{1} i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} \\
\textbf{Induktionsvorraussetzung}: &\quad keineAhnungwashierreinsoll \\
\textbf{Induktionsbehauptung}: &\quad S(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \\
\textbf{Induktionsschluss}: &\quad S(n) + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \\
&\quad \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6}
\end{aligned}$$

$\square$

Beweis - Summe der Quadratzahlen (Abschätzung):

$Z\!\!\!Z: \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 > \dfrac{n^3}{3}$

Induktionsanfang : $1^2 > \frac{1^3}{3}$

Induktionsvorraussetzung : $f\ddot{u}reinbeliebiges, aberfestesk \in \mathbb{N}gilt : \sum_{i=1}^{k} i^2 > \frac{k^3}{3}$

Induktionsbehauptung : $manbehauptet, dass\forall n \in \mathbb{N}gilt : \sum_{i=1}^{n+1} i^2 > \frac{(n+1)^3}{3}$

Induktionsschluss : $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \overbrace{\sum_{i=1}^{n} i^2}^{>\frac{n^3}{3}} + (n+1)^2 > \frac{n^3}{3} + (n+1)^2$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 6n + 3}{3}$$

$$= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n + 2}{3}$$

$$= \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{3n+2}{3} \overset{n \geqslant 0}{\overbrace{>}} \frac{(n+1)^3}{3}$$

$\square$

Beweis - Abschätzung der Fakultät:

$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 4 : \quad n! > n^2$

Induktionsanfang : $n_o = 4 : \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 24 > 16 = 4^2$

Induktionsvorraussetzung : $\exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geqslant 4 : \quad n! > n^2$

Induktionsbehauptung : $n! \geqslant n^2 \Rightarrow (n+1)! > (n+1)^2 = (n+1) \cdot (n+1)$

Induktionsschluss : $(n+1)! = (n+1) \cdot n! \quad > \quad (n+1) \cdot n^2$

$$\Rightarrow n^2 \overset{?}{>} (n+1)$$

Mini-induktion : $n_0 = 4 : \quad 4^2 = 16 > 5 = 4 + 1$

$$\Rightarrow (n^2)' \overset{?}{>} (n+1)'$$

$$\Leftrightarrow 2n \overset{!}{>} 1 \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

$\square$

Kapitel 11

Wahrscheinlichkeitstheorie

by Rémy

Bemerkung:

Der Oberbegriff **Stochastik** wird hier nicht verwendet, da wir uns SMP nicht mit der überflüssigen **Statistik** beschäftigen.

11.1 Wiederholungen: Unter- & Mittelstufe

11.1.1 Zufallsexperimente

Definition 11.1.1

Als Zufallsexperiment bezeichnet man Versuche, deren Ergebnisse sich nicht vorhersagen lassen, also vom Zufall abhängig sind.
Vor der Durchführung eines Zufallsexperiments muss eine **Ergebnismenge** S festgelegt werden. Sie beinhaltet alle möglichen Ergebnisse: $S = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$
Ein Versuch heißt Zufallsexperiment, falls:

- er unter gleichen Bedingungen beliebig oft wiederholbar ist
- alle möglichen Ergebnisse vor Durchführung bekannt sind
- sein Ergebnis sich nicht mit Sicherheit vorhersagen lässt
- bei jeder Durchführung genau ein Ergebnis aus S auftritt

Beispiel:

Bekannte Zufallsexperimente sind:

- das Werfen einer Münze
- das Werfen eines Würfels
- das Ziehen einer Kugel aus einer Urne
- ...

Definition 11.1.2: Laplace-Experiment

Laplace-Experimente sind Experimente, deren Ergebnisse jeweils gleichwahrscheinlich sind.

Beispiel:

Ein Beispiel hierfür wäre der Wurf eines **perfekten** Würfels.

Theorem 11.1.1

In einem Laplace-Experiment gilt für die Wahrscheinlichkeit P, dass ein Ergebnis A von n möglichen Ergebnis eintritt:

$$P(A) = \frac{1}{n}$$

Mehrstufige Zufallsexperimente

Definition 11.1.3

Werden mehrere (n) Zufallsexperimente nacheinander ausgerführt, so kann man sie als ein einziges Zufallsexperiment zusammenfassen. Man nennt dies ein **mehrstufiges Zufallsexperiment**. Die Ergebnisse eines solchen Experiments kann man als geordnete n-Tupel auffassen.

Beispiel:

Zweifaches Werfen einer Münze: $S = \{(Z/Z), (Z/K), (K/Z), (K/K)\}$.

Bemerkung:

Alternativ kann man S als einfache Menge definieren. Bei zweifachem Münzwurf wäre eine mögliche Darstellung $S = \{0, 1, 2\}$ mit der Anzahl an Kopf-Würfen als Ergebnis möglich.

Ereignisse

Definition 11.1.4: Ereignisse

Jede Teilmenge A von der Ergebnismenge S nennt man ein Ereignis. Endet das Zufallsexperiment mit einem Ergebnis aus A, sagt man: A ist eingetreten.

Beispiel:

Werfen eines Würfels: $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

A: Augenzahl ist gerade:	$A = \{2, 4, 6\}$
B: Augenzahl ist ungerade:	$B = \{1, 3, 5\}$
C: Augenzahl ist Primzahl:	$C = \{2, 3, 5\}$
D: Augenzahl < 7:	$D = S$
E: Augenzahl $= 6$:	$E = \{6\}$
F: Augenzahl > 6:	$F = \{\}$

Bemerkung:

Definition 11.1.5

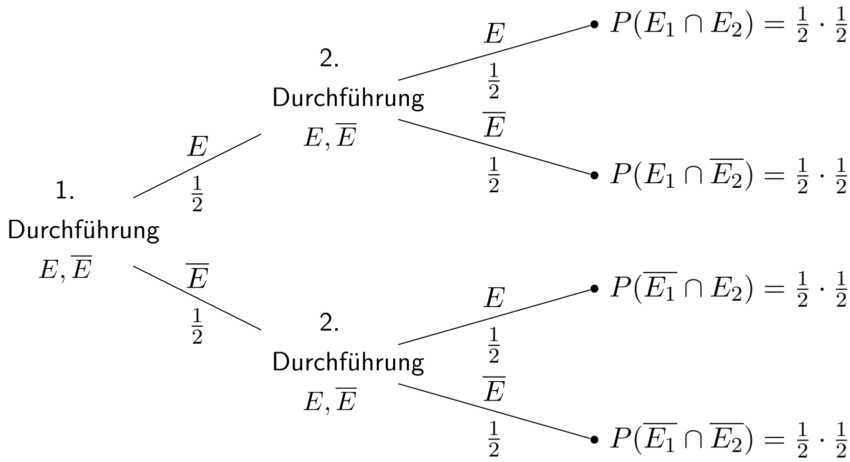
- Ein Ereignis, das nur aus einem Ergebnis besteht, heißt **Elementarereignis**.
- $B = \bar{A}$ (A quer) ist das **Gegenereignis** von A. Es gilt: $B = S \backslash A$
- Ein Ereignis, das immer eintritt, heißt **sicheres Ereignis**
- Ein Ereignis, das niemals eintritt, heißt **unmögliches Ereignis**

Baumdiagramme

Definition 11.1.6: Bernoulli-Experiment

Bei Bernoulli-Experimenten gibt es nur 2 mögliche Ausgänge: Erfolg / Miserfolg ($= \overline{\text{Erfolg}}$). Mehrfaches Ausführen (l Mal) von Bernoulli-Experimenten ergibt eine **Bernoulli-Kette** der Länge l.

Eine Bernoulli-Kette kann als **Baumdiagramm** dargestellt werden:



E bezeichnet das Erfolgs-Ereignis, $\overline{E}$ bezeichnet somit den Miserfolg. Jeder Pfad trägt 2 Informationen: das jeweilige Ereignis und seine Wahrscheinlichkeit.

Definition 11.1.7: Pfadregeln

- Die Summe der Wahrscheinlichkeiten auf den Ästen, die von einem Knoten (Ort der Verzweigung), ist $= 1$.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Pfades (also eines Elementarereignisses) ist gleich dem **Produkt** der Wahrscheinlichkeiten aller Äste des Pfades.
- Die Wahrscheinlichkeit eines Ereignissesb ist gleich der **Summe** der Wahrscheinlichkeit der Pfade, die zu diesem Ereignis führen.

Bemerkung:

Besonders beim Urnenmodell eines Zufallsexperiments muss beachtet werden, ob nach dem Ziehen zurückgelegt wird, oder nicht, weil sich die Wahrscheinlichkeiten der Äste sonst entsprechend verändern.

Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Definition 11.1.8: Häufigkeiten

Nach der n-fachen Durchführung eines Zufallsexperiments betrachtet man, wie oft Ereignisse eingetreten sind.
Ist das Ereignis A H-mal eingetreten, so nennt man H die **absolute Häufigkeit** und $\frac{H}{n}$ die **relative Häufigkeit** von A.

Theorem 11.1.2

Wird ein Zufallsexperiment sehr häufig durchgeführt, so stabilisieren sich die relativen Häufigkeiten der Ereignisse. Es gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{H_n(E)}{n} \right) = P(E)$$

mit E einem Ereignis, und H_n seiner Häufigkeit nach n Wiederholungen.

11.1.2 Zufallsvariable

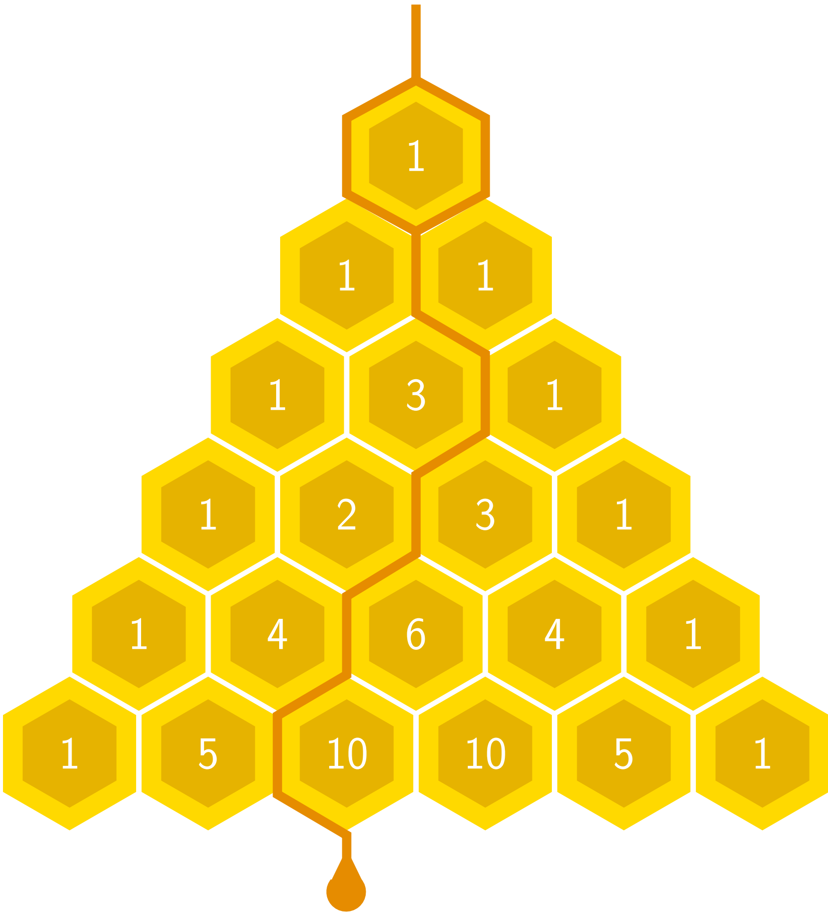
Definition 11.1.9

Sind die Ergebnisse eines Zufallsexperiments Zahlen, oder kann man den Ergebnissen Zahlen zuornen, so nennt man die Variable für diese Zahlen **Zufallsvariable** X.
Mit Hilfe von Zufallsvariablen kann man Zufallsexperimente einfacher bechreiben.

Beispiel:

Zählen von Erfolgen (1) und Miserfolgen (0) bei Bernoulli-Ketten: statt $P(($Erfolg, Erfolg, ..., Erfolg, $))$ (n Mal) schreibt man einfach: $P(x = k * 1)$ mit k der gewünschten Anzahl an Erfolgen.

11.1.3 Das Pascal'sche Dreieck



Bekannt aus der Mittelstufe. Es ergibt sich, wenn man die Summe von zwei Werten eine Stufe tiefer, zwischen die beiden Werte schreibt. Es wird vor Allem für Binomialkoeffizienten verwendet, findet aber auch in der Wahrscheinlichkeitsrechnung Verwendung.

11.2 Kombinatorik

11.2.1 Binomialkoeffizienten

Definition 11.2.1

Der Binomialkoeffizient ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen einer n-elementigen Menge.

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \qquad \text{(gesprochen "n über k")} \qquad \forall 0 \leqslant k \leqslant n$$

Bemerkung:

Anschaulich entspricht das den Möglichkeiten, genau k bestimmte Kugeln von n Kugeln zu ziehen, wobei die gezogenen Kugeln nicht zurückgelegt werden, und die Reihenfolge, in der sie gezogen wurden, nicht beachtet wird.

Bemerkung:

Die gefundenen Werte entsprechen den Vorfaktoren, die man für das k-te Element aus der $n$ten Reihe aus dem Pascalschen Dreieck ablesen kann.
Das bedeutet, dass Potenzen von Binomen auch über Binomialkoeffizienten darstellbar sind:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Bemerkung:

Die obige Definition gilt nur für $0 \leqslant k \leqslant n$ da die Fakultät (!) nicht für negative Zahlen definiert ist.

GTR-Tipp

Im englischen wird $\binom{n}{r}$ als "n choose r"gesprochen. Auf dem GTR findet sich die Option unter `MATH` ¿ `PRB`. Es handelt sich um `nCr`.
Benutzung: `<ZAHL`$_1$`>` `nCr` `<ZAHL`$_2$`>`. (Entspricht $\binom{Z_1}{Z_2}$)

Theorem 11.2.1

Für Binomialkoeffizienten gelten mehrere Eigenschaften, unter ihnen wollen wir folgende zwei hervorheben:

1. $$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

2. $$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Beweis:

1.

$$\begin{aligned}
\binom{n+1}{k+1} &= \frac{(n+1)!}{(n-k)!k!} \\
&= \frac{n!}{k!} \frac{(n+1)}{(n-k)!(k+1)} \\
&= \frac{n!}{k!} \frac{n-k+k+1}{(n-k)!(k+1)} \\
&= \frac{n!}{k!} \left(\frac{n-k}{(n-k)!(k+1)} + \frac{k+1}{(n-k)!(k+1)} \right) \\
&= \frac{n!}{k!} \left(\frac{1}{(n-k-1)!(k+1)} + \frac{1}{(n-k)!} \right) \\
&= \frac{n!}{k!} \left(\frac{1}{(n-(k+1))!(k+1)} + \frac{1}{(n-k)!} \right) \\
&= \frac{n!}{(n-k)!k!} + \frac{n!}{(n-k-1)!(k+1)!} \\
&= \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \frac{n!}{(n-(k-n))!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{n-k}\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

1. Entspricht der Aussage, dass ein Glied im Pascal'schen Dreieck sich aus der Summe der zwei überliegenden Glieder ergibt.
2. Entspricht der Aussage, dass das Pascal'sche Dreieck symmetrisch ist.

11.2.2 Kombinatorik

Theorem 11.2.2

Kombinatorik bezeichnet die Anzahl der Möglichkeiten der Anordnung von k Elementen auf n Stellen. Es werden 2 Fälle unterschieden:

- Die Reihenfolge der Elemente wird berücksichtigt:

$$n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$$

- Die Reihenfolge der Elemente wird **nicht** berücksichtigt:

$$\binom{n}{k}$$

Bemerkung:

Auch hier gilt die Einschränkung $0 \leqslant k \leqslant n$. Diese ist sinnvoll, denn es ist nicht möglich, eine k-elementige Teilmenge einer n-elementigen Menge zu nehmen, wenn $k > n$. Deshalb gilt:

$$\text{Anzahl Möglichkeiten} = 0 \qquad \text{für } n \leqslant k$$

Beweis:

Es handelt sich hier eher um eine logische Begründung:

- Reihenfolge berücksichtigt:
  1. Auswahl: n Möglichkeiten
  2. Auswahl: $n-1$ Möglichkeiten
  ..

k-te Auswahl: $n-(k-1)$ Möglichkeiten

$$\Rightarrow \quad \text{Möglichkeiten insgesamt: } n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))$$

- Reihenfolge **nicht** berücksichtigt:
  1. Auswahl: n Möglichkeiten, 1 mögliche Permutation
  1. Auswahl: $n-1$ Möglichkeiten, 2 mögliche Permutationen
  ..
  k-te Auswahl: $n-(k-1)$ Möglichkeiten, k mögliche Permutationen

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad \text{Möglichkeiten insgesamt: } & \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1)) \quad \} \text{ 1 neue Möglichkeit pro unterschiedlichem Fall}}{1*2*...*(k-1)(k-2)k \quad \} \text{ Anzahl der Wege, die zur selben Teilmenge führen}} \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(k-1))}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \binom{n}{k}\end{aligned}$$

□

Beispiel:

Nehmen wir das Ereignis E: bei einer Lotto-Ziehung “6 aus 49” sind genau 4 Zahlen richtig.

$$P(E) = \frac{\binom{6}{4}\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}}$$

Zunächst nimmt man die Anzahl an Möglichkeiten, 4 richtige Kugeln von 6 zu ziehen, man multipliziert diese durch die Anzahl an Möglichkeiten, 2 Kugeln aus den 43 “unerwünschten” zu ziehen. Um die Wahrscheinlichkeit zu erhalten teilt man durch die Gesamtanzahl an Möglichkeite, 6 Kugeln aus 49 zu ziehen.

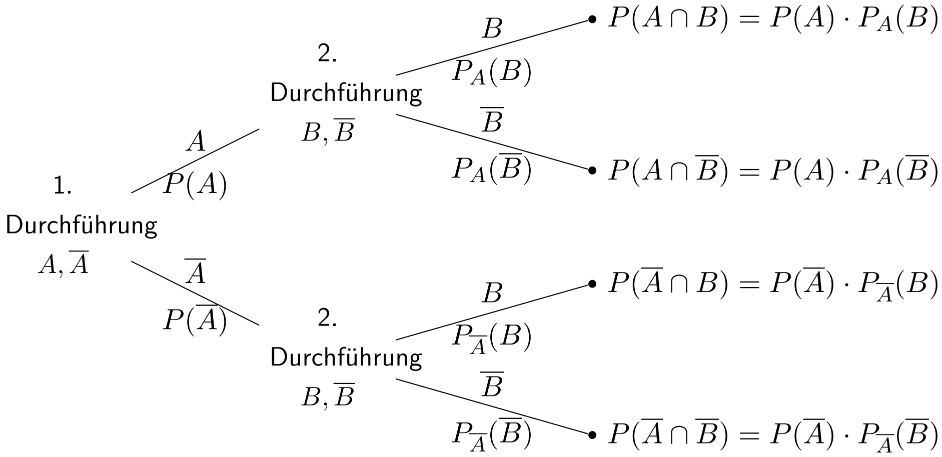
11.3 Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition 11.3.1

Sind A und B beliebige Ereignisse mit $P(A) \neq 0$, so bezeichnet man $P_A(B)$ oder $P(B|A)$ die **durch A bedingte Wahrscheinlichkeit von B**. Es gilt:

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

Daraus ergibt sich die korrekte Darstellung als Baumdiagramm:



Theorem 11.3.1: Satz von Bayes

$$P_B(A) = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Bemerkung:

Folgende Aussagen sind zu dieser Formulierung äquivalent:

- $P_A(B) \cdot P(B) = P_B(A) \cdot P(A)$
- $P(A) = P_A(B) \cdot P(B) + P_A(\overline{B}) \cdot P(\overline{B})$ (totale Wahrscheinlichkeit von A)

Beweis:

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{P(A \cap B)}{P(A)} \cdot P(A)}{P(B)} = \frac{P_A(B) \cdot P(A)}{P(B)}$$

□

11.3.1 Stochastische Unabhängigkeit

Definition 11.3.2

Die Ergebnisse A und B werden stochastisch unabhängig genannt, wenn das Eintreten As die Wahrscheinlichkeit Bs nicht verändert. Es gilt dann:

$$P_A(B) = P(B)$$

11.4 Wahrscheinlichkeitsverteilung

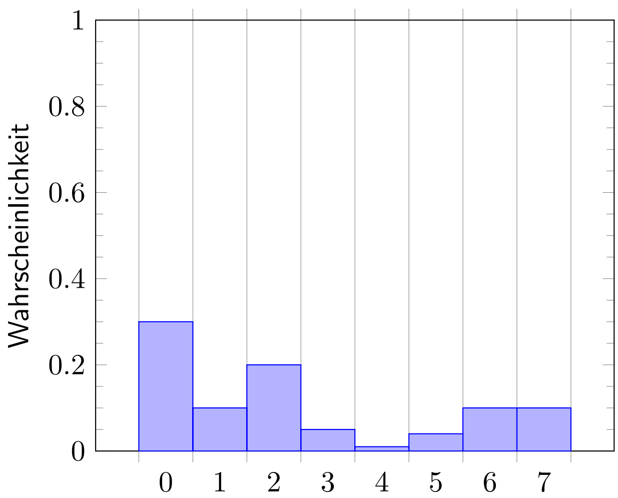
Definition 11.4.1

Man nennt $P(e_i)$ **Wahrscheinlichkeit** und die Zuordnung $e_i \longmapsto P(e_i)$ **Wahrscheinlichkeitsverteilung**, wenn gilt:

- $e_i \in S = \{e_1, e_2, ..., e_n\} \wedge P(e_i) \in \mathbb{R}$

- $!\exists P(e_i) \forall e_i \in S$
- $0 \leqslant P(e_i) \leqslant 1 \forall i \leqslant n$
- $P(e_1) + P(e_2) + ... + P(e_n) = 1$

Darstellung:



Bemerkung:

Dieses Balkendiagramm wird als Histogramm bezeichnet und ist in vielen Fällen eine gute Darstellungsmöglichkeit.

GTR-Tipp

1. Mit `seq()` (in `LIST > OPS`) wird die Liste mit allen X-Werten generiert:
   `seq(X,X,0,<Anzahl an Versuchen>,1)→<Variable>`.
   (→ wird durch die Taste `STO>` aufgerufen)

2. Mit `<gewünschte Verteilung>()` (in `DISTR > DISTR`) wird die Liste mit allen Y-Werten generiert:
   `<Verteilung>(<Anzahl an Versuchen>,<Erfolgswahrscheinlichkeit>)→<Variable>`.

3. Im Menü `STAT PLOT > Plot 1` kann der gewünschte Anzeigemodus gewählt werden, für die `Xlist` wird die erste Liste gewählt, für `Freq` die zweite. Beim Anzeige achte man auf die richtigen Maßstäbe: Die Anzahl an Versuchen für `Xmax`, 1 für `Ymax`.

Bemerkung:

Der GTR ist ab einer Anzahl von über 48 überfordert, dann können die Balken wegen der niedrigen Auflösung nicht alle angezeigt werden. In einem solchen Fall kann nur ein Ausschnitt des Histogramms angezeigt werden, sonst erscheint eine Fehlermeldung.

Bemerkung:

Alternativ kann eine Funktion definiert werden über `<Verteilung>(<Anzahl an Versuchen>,<Erfolgswahrscheinlichkeit>,round(X,0))` und anschließend angezeigt werden.
Dies funktioniert nur für ganze x, weshalb X durch `round(X,0)` (zu finden in... (KP, catalog durchsuchen)) auf den nächsten ganzen Wert gerundet wird.

Definition 11.4.2: Erwartungswert

Es sei eine Zuffalsvariable X mit Werten $x_1, x_2, ..., x_n$ und die zugehörige Wahrscheinlichkeitsverteilung $P(X)$. Als Erwartungswert μ wird das arithmetische Mittel der Werte von $P(X)$ bezeichnet:

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i)$$

Definition 11.4.3: Median einer Wahrscheinlichkeitsverteilung

Als Median einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnenn wir den den Wert X_n, ab dem die kumulierte Wahrscheinlichkeit von $P(X = x_i)$ den Wert von 50% überschreitet.

Bemerkung:

Anschaulich bezeichnet der Erwartungswert den durchschnittlichen Wert, den eine Zufallsgröße annimt, wenn ein Zufallsexperiment unendlich oft durchgeführt wird.

11.4.1 Binomialverteilung

Theorem 11.4.1

Für eine Bernoulli-Kette der Länge $l \in \mathbb{N}$ und der Trefferwahrscheinlichkeit P (Wahrscheinlichkeit für einen Pfad) gilt:

$$P(X = k) = \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k}$$

mit k der gerwünschten Anzahl an Erfolgen.
Außerdem gilt:

$$P(X \leqslant k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{l}{i} p^i (1-p)^{l-i}$$

Bemerkung:

Definition 11.4.4

X heißt in diesem Fall **binomialverteilte Zufallsvariable**. Die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung heißt Binomialverteilung. Es gilt $P(X = k) = B_{l,p}(k)$.
Die kumulierte Binomialverteilung wird durch ist gegeben durch: $P(X \leqslant k) = F_{l,p}(k)$.
l ist die Länge der Bernoulli-Kette, p die Erfolgswahrscheinlichkeit und k ist die gewünschte Anzahl an Erfolgen.

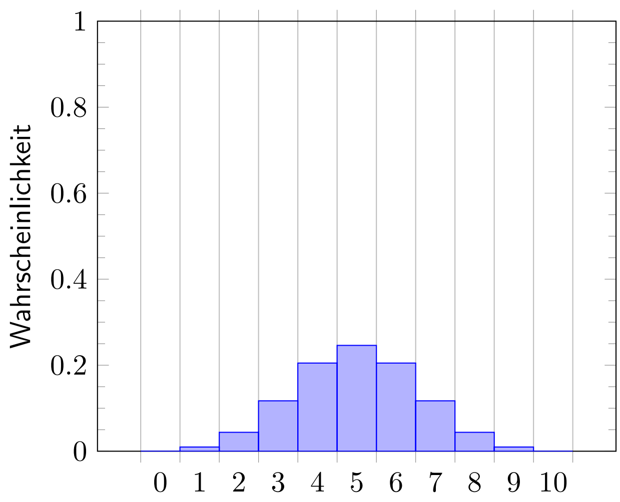
GTR-Tipp

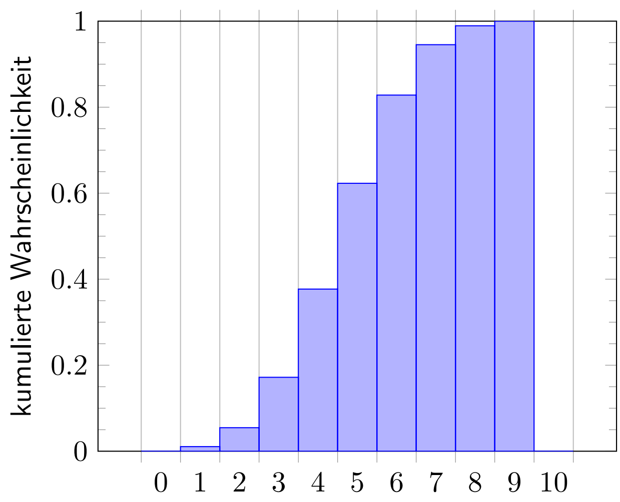
Beide Berechnungen werden durch einen GTR-Befehl automatisiert:

- $\binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k}$ wird duch den Befehl `binomPDF(l,p,k)` berechnet.
- $\sum_{i=0}^{k} \binom{l}{i} p^i (1-p)^{l-i}$ wird duch den Befehl `binomCDF(l,p,k)` berechnet.

Beide Befehle befinden sich im `DISTR`-Menü (`2ND`+`VARS`)

Darstellung:





Erwartungswert

Theorem 11.4.2: Erwartungswert einer Binomialverteilung

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X gilt:

$$E(x) = n \cdot p$$

mit n der Anzahl an Versuchen, und p der Erfolgswahrscheinlichkeit eines Versuchs.

Beweis:

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \sum_{k=0}^{n} x_k \cdot P(X = x_k) \\
&= \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \cdot k \frac{n!}{(n-k)!k!} \cdot p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n} k \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!k!} p^{k-1} (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \cdot \sum_{k=0}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \cdot \sum_{k=1}^{n} k \binom{n-1}{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\
&= n \cdot p \cdot 1 \\
&= n \cdot p
\end{aligned}
$$

Bemerkung:

Der Startindex der Summe kann verändert werden, da die kumulierte Wahrscheinlichkeit sich nicht verändert. Für $k = 0$ ist $\binom{n-1}{k-1} = 0$.

□

11.5 Kontinuierliche Wahrscheinlichkeiten

Manche Ereignisse lassen sich nicht als ganze Zahl modellieren oder können nicht einzeln abgezählt werden, weshalb man ihre Wahrscheinlichkeitsverteilung nur durch kontinuierliche Funktionen darstellen kann. Man kann dies als Erweiterung der diskreten Wahrscheinlichkeit auf die reellen Zahlen sehen, analog zum Übergang von den Folgen zu den Funktionen.

Definition 11.5.1: Dichtefunktion

Eine auf $I = [a; b]$ stetige Funktion f heißt Dichtefunktion einer Wahrscheinlichkeit, wenn gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = 1$$

Definition 11.5.2

Die Wahrscheinlichkeitsverteilung P, die jedem Intervall $[c; d] \subset I$ den Wert $P([c; d]) = \int_c^d f(x)dx$ zuordnet, heißt Wahrscheinlichkeitsverteilung über I.

Bemerkung:

Durch die Definition des Integrals lassen sich folgende Eigenschaften direkt ableiten:

- $P(I) = 1$
- $[c; d] \subset I \Rightarrow P([c; d]) \in [0; 1]$
- mit $I = [a; b]$ gilt: $P([a; c]) = 1 - P([c; b])$
- Die Wahrscheinlichkeit eines "Singleton", einer ein-elementigen Menge, also eines einzelnen Ergebnisses ist: $P(c) = P([c; c]) = \int_c^c f(x)dx = 0$.
- Das bedeutet, dass $P(A \cap B)$ null sein kann, ohnen dass A und B disjunkt sind. (Zum Beispiel, wenn der Schnitt genau ein Element enthält.)
- Es folgt außerdem, dass $P([c; d]) = P(]c; d]) = P([c; d[) = P(]c; d[) = \int_c^d f(t)dt$

Definition 11.5.3: Stetige Zufallsvariable

Sei P eine Wahrscheinlichkeitsverteilung über I mit Dichtefunktion f.

- Eine Zufallsvariable X mit Werten Auswahl I folgt der Wahrscheinlichkeitsverteilung P, wenn gilt:
$$P(c \leqslant X \leqslant d) = \int_c^d f(t)dt$$
- Die Verteilungsfunktion F ist definiert durch $F(X) = P(X \leqslant x) = P(a \leqslant x) = \int_a^x f(t)dt$

Bemerkung:

F besitzt per Definition folgende Eigenschaften:

- F ist differenzierbar und $F' = f$
- F ist monoton steigend auf I
- Für $h > 0$ und $x + h \in I$ gilt: $P(x + h) = F(x + h) - F(x)$.
(Gleichbedeutend mit der Aussage $P(c \leqslant X \leqslant d) = F(d) - F(c)$)

Definition 11.5.4: Erwartungswert

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten aus $I = [a; b]$. Der Erwartungswert ist gegeben durch:

$$E(X) = \mu = \int_a^b t \cdot f(t)dt$$

Definition 11.5.5: Varianz

Sei X eine Zufallsvariable mit Werten aus $I = [a; b]$. Die Varianz ist gegeben durch:

$$\sigma^2 = \int_a^b (t - \mu)^2 \cdot f(t)dt$$

11.5.1 Exponentialverteilung: $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Definition 11.5.6

Eine stetige Zufallsvariable X hat eine Exponentialverteilung wenn X die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte hat:

$$f_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

$f_\lambda(x)$ heißt Dichtefunktion der Exponentialverteilung.

Bemerkung:

Diese Funktion erfüllt die Bedingungen der Wahrscheinlichkeitsverteilung, denn sie ist auf $\mathbb{R}_+$ definiert und stetig. Außerdem gilt: $\displaystyle\int_0^\infty f_\lambda dt = 1$.

Definition 11.5.7

Die Verteilungsfunktion der Exponentialverteilung ist gegeben durch:

$$P(X \leqslant x) = F_\lambda(x) = \int_0^x f_\lambda(t)dt = 1 - e^{-\lambda x}$$

Bemerkung:

Solche Funktionen werden verwendet, um Halbwärtszeiten oder Lebensdauern zu modellieren.

Theorem 11.5.1: Gedächtnislosigkeit

Für eine exponentialverteilte Zufallsvariable X gilt folgende Eigenschaft:

$$P_{(X \geqslant x)}(X \geqslant x + t) = P(X \geqslant t) \qquad \forall t, x \geqslant 0$$

Bemerkung:

Das bedeutet beispielsweise für die Zersetzung eines radioaktiven Atoms, dass die Wahrscheinlichkeit sich bei $x + t$ zu zersetzen unter der Voraussetzung, dass diese noch nicht bei x stattgefunden hat, nicht von x abhängt.
Solche Lebensdauern werden als “alterungslos” bezeichnet.

Bemerkung:

Die Gedächtnislosigkeit ist definierte Eigenschaft der Exponentialverteilung. (Es handelt sich somit um eine notwendige und hinreichende Bedingung)

Beweis:

$$
\begin{aligned}
P_{(X \geqslant x)}(X \geqslant x+t) &= \frac{P((X \geqslant x) \cap (X \geqslant x+t))}{P(X \geqslant x)} \\
&= \frac{P(X \geqslant x+t)}{P(X \geqslant x)} \\
&= \frac{1-(1-e^{-\lambda(x+t)})}{1-(1-e^{-\lambda x})} \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} \\
&= e^{-\lambda t} \\
&= 1-(1-e^{-\lambda(t)}) \\
&= P(X \geqslant t)
\end{aligned}
$$

□

Theorem 11.5.2: Erwartungswert

Für die Exponentialverteilung gilt:

$$\mu = \frac{1}{\lambda}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\mu &= \int_0^\infty t \cdot f_\lambda(t)dt \\
&= \int_0^\infty t \cdot \lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \left[-t \cdot e^{-\lambda t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -1 \cdot e^{-\lambda t}dt \\
&= \left[-t \cdot \lambda e^{-\lambda t}\right]_0^\infty - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda t}\right]_0^\infty \\
&= 0 - 0 - \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda}
\end{aligned}
$$

□

Theorem 11.5.3: Varianz

Für die Exponentialverteilung gilt:

$$\sigma^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

Beweis:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \int_0^\infty (t-\mu)^2 \cdot f_\lambda(t)dt \\
&= \int_0^\infty (t-\mu)^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \int_0^\infty t^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt - \int_0^\infty 2\mu t \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt + \int_0^\infty \mu^2 \cdot \lambda e^{-\lambda t} dt \\
&= \Big[-t^2 \cdot e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -2t \cdot e^{-\lambda t} dt - \left(\Big[-2\mu t \cdot e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty - \int_0^\infty -2\mu \cdot e^{-\lambda t} dt\right) + \Big[-\mu^2 \cdot e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty \\
&= \Big[-t^2 \cdot e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty - \left(\left[\frac{2t}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} dt\right) - \left(\Big[-2\mu t \cdot e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty - \left[\frac{2\mu}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t}\right]_0^\infty\right) + \Big[-\mu^2 \cdot e^{-} \\
&= \Big[-t^2 \cdot e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty - \left[\frac{2t}{\lambda} e^{-\lambda t}\right]_0^\infty + \left[-\frac{2}{\lambda^2} e^{-\lambda t}\right]_0^\infty - \Big[-2\mu t \cdot e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty + \left[\frac{2\mu}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t}\right]_0^\infty + \Big[-\mu^2 \cdot e^{-\lambda t}\Big]_0^\infty \\
&= 0 - 0 - (0-0) + 0 + \frac{2}{\lambda^2} - (0-0) + 0 - \frac{2\mu}{\lambda} + 0 + \mu^2 \qquad \Big| \mu = \frac{1}{\lambda} \\
&= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{2}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung:

$$\Rightarrow \sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}} = \frac{1}{\lambda} = \mu$$

11.5.2 Normalverteilung: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

Definition 11.5.8

Eine stetige Zufallsvariable X hat eine (Gauß- oder) Normalverteilung mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 wenn X die folgende Wahrscheinlichkeitsdichte hat:

$$\varphi_{\mu,\sigma^2}(x) = f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$\varphi(x)$ ist die Dichtefunktion der Normalverteilung.

Definition 11.5.9

Die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist gegeben durch:

$$P(X \leqslant x) = \Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi_{\mu,\sigma^2}(t)dt$$

Durch Substitution erhält man:

$$\Phi_{\mu,\sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$$

Bemerkung:

Diese Definition ist somit analog zur Definition der Verteilungsfunktion der Binomialverteilung (Integral als Summe der Flächen).
Außerdem bedeutet das, dass $\Phi(x) \xrightarrow{x \to \infty} 1$.

GTR-Tipp

Zur Berechnung geht man, wie üblich, ins Menü `DISTR` und wählt für φ `normalpdf`, und für Φ `normalcdf` aus.

Theorem 11.5.4

Für eine normalverteilte Zufallsvariable X mit den Parametern n, p und der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\text{Var}(X)} = \sqrt{\sigma^2}$ erhält man folgende Näherungen:

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 68,3\%$
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 95,4\%$
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$

Beweis:

Die Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Streuintervall $I = [\mu - z\sigma; \mu + z\sigma]$ kann berechnet werden als:

$$\begin{aligned} P(I) &= 2\Phi(z) - 1 \\ &= 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt - 1 \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:

Andersherum kann die Größe von I berechnet werden über:

$$z = \Phi^{-1}\left(\frac{P+1}{2}\right)$$

GTR-Tipp

Diese Berechnung kann auch vom GTR getätigt werden: Im Menü DISTR wählt man `invNorm()` aus, und gibt in der Eingabe die Fläche (also die Wahrscheinlichkeit), μ und σ an. Man erhält somit die Breite des Intervalls, und kann dies wieder in Abhängigkeit von σ angeben.

Rückführung: Binomialverteilung

Warum interessiert uns das? Weil die Binomialverteilung diese symmetrische Kurve für $n \to \infty$ Versuche annähert. Noch nicht überzeugt? Über die Varianz können wir interessante Aussagen über die Verteilung der Wahrscheinlichkeiten machen.

Theorem 11.5.5: Laplace-Bedingung

Für eine Binomialverteilung mit $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ und $\mu = np$ gilt:
Wenn $\sigma > 3$, dann kann diese Binomialverteilung durch die Normalverteilung angenähert werden.

$$B_{l,p}(k) = P(X = k) = \binom{l}{k} p^k (1-p)^{l-k} \approx \varphi_{\mu,\sigma^2}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{k-\mu}{\sigma}\right)^2} \; ; k \in \mathbb{Z}$$

Daraus folgt, dass die Verteilungsfunktion ebenfalls angenähert werden kann:

$$P(a \leqslant X \leqslant b) \approx \int_{a-0,5}^{b+a,5} \varphi_{\mu,\sigma^2}(x)dx = \Phi_{\mu,\sigma^2}(b+0,5) - \Phi_{\mu,\sigma^2}(a-0,5)$$

Beweis:

Die Abweichung wird so gering, dass sie vernachlässigbar wird. □

Theorem 11.5.6

Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit den Parametern n, p und der Varianz $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$ erhält man folgende Näherungen:

- $P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 68,3\%$
- $P(\mu - 2\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 95,4\%$
- $P(\mu - 3\sigma \leqslant X \leqslant \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$

11.6 Hypothesen

11.6.1 Signifikanztests

Einseitiger Test

Zweiseitiger Test

11.6.2 Hypothesentests

Fehler 1. Art

Fehler 2. Art

Kapitel 12

Matrizen

by Bruno

12.1 Überblick und Grundrechenarten

12.1.1 Definition und Einordnung

Definition 12.1.1

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung von Elementen. Sie tauchen in fast allen Gebieten der Mathematik und der Mechanik auf und erleichtern Rechen- und Gedankenvorgänge. Eine Matrix ist eindeutig durch ihre **Komponenten** und ihr **Typ** definiert: Eine Matrix mit m Zeilen und n Spalten wird $m \times n$ - Matrix genannt. Stammen ihre Komponenten aus einem Körper K, spricht man von einer *Matrix über K*.

Spalte

Hauptdiagonale

Zeile

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,j} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,j} & \cdots & a_{2,n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,j} & \cdots & a_{3,n} \\ & & \vdots & & & \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,j} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:

Die Eselsbrücke **Z***eile* **Z***uerst*, **S***palte* **S***päter* ist für die Benennung einer Matrix hilfreich!

Eine Matrix, die aus nur einer Spalte oder nur einer Zeile besteht, wird auch Vektor genannt.

Ganz formal gesehen ist eine Matrix eine Funktion, die jedem Funktionswert $(i; j)$ einen Eintrag zuordnet. Quadratische Matrizen vollen Rangs bilden mit der Matrizenaddition und der Skalarmultiplikation einen abgeschlossenen Körper.

GTR-Tipp

Im Matrix Menü: [matrix] + [MATH] kann man mit dem Befehl...

1. ... ref$[B]$ ("Row echelon form") die **Dreiecksform** einer Matrix B ausrechnen lassen:

$$B = \begin{pmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & b_{1,3} & b_{1,4} \\ 0 & b_{2,2} & b_{2,3} & b_{2,4} \\ 0 & 0 & b_{3,3} & b_{3,4} \\ 0 & 0 & 0 & b_{4,3} \end{pmatrix}$$

2. ... rref$[C]$ ("Reduced row echelon form") die **Diagonalform** einer Matrix C ausrechnen lassen. Die einzigen Nicht-Null Einträge sind auf der Hauptdiagonalen:

$$C = \begin{pmatrix} c_{1,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{2,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c_{3,3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c_{4,4} \end{pmatrix}$$

12.1.2 Rang einer Matrix

Definition 12.1.2

Der **Rang** einer Matrix ist die maximale Anzahl linear unabhängiger Zeilen- bzw. Spaltenvektoren. Auf Deutsch und an Matrizen angewandt: Stammt eine Matrix vollen Rangs aus einem Gleichungssystem, dann ist dieses System nicht redundant. Jede Zeile bzw. Spalte beschreibt demnach Zusammenhänge, die die anderen Spalten nicht geben.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

Die Matrix A ist vom Rang 2, da die erste und die dritte Spalte vielfache voneinander sind. Die dritte Spalte stellt einen Zusammenhang dar, den die erste schon gegeben hat. Die Spalten 1 und 3 sind redundant. Anhand des GTR kann man den Rang einer Matrix auch bestimmen: mit dem $rref$-Befehl kann man die "Reduced row echelon form" einer Matrix ausrechnen lassen:

$$rref(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad rref(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Anzahl an Nicht-Null-Zeilen der reduzierten Form verrät den Rang der Matrix: Rang$(A) = 2$ und Rang$(B) = 3$

12.1.3 Addition und Multiplikation

- **Matritzenaddition** Matrizen können addiert werden, wenn sie vom gleichen Typ sind. Eine $m \times n$ Matrix A kann nur mit einer $m \times n$ Matrix B addiert werden. Hierfür wird jede Komponente $a_{i,j}$ mit ihrem zugehörigen Komponenten $b_{i,j}$ addiert:

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$$

Das Neutrale Element der Addition ist logischerweise eine leere Matrix, das inverse findet man mit der Skalierung $\cdot(-1)$.

- **Skalarmultiplikation**

  Die Skalarmultiplikation mit einer reellen Zahl k, die man aus Vektoren kennt, kann auf Matrizen erweitert werden:

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Matrizenmultiplikation**

  Die Matrizenmultiplikation ist eine weder kommutative, noch nullteilerfreie Verknüpfung. Ist A eine $m \times p$ - Matrix und B eine $p \times n$ - Matrix, dann sind die Matrizen multiplizierbar (d.h., die Anzahl der *Spalten* von A muss mit der Anzahl der *Zeilen* von$B$ übereinstimmen). Die einzelnen Komponenten der Produktmatrix $C = A \times B$ werden so ausgerechnet:

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{m} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

  Die Komponenten $c_{i,j}$ ergeben sich also aus dem Skalarprodukt der i-ten Zeile von A mit der j-ten Spalte von B. Die Durchführung per Hand wird mit der Falk'schen Anordnung erleichtert:

$$\begin{array}{cc} & B = \begin{pmatrix} b_{11} & \ldots & \boxed{\begin{matrix} b_{1k} \\ \vdots \\ b_{pk} \end{matrix}} & \ldots & b_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{p1} & \cdots & & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix} \\ A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \boxed{a_{i1} \ \cdots \ a_{ip}} & & \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mp} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1k} & \ldots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \cdots & \boxed{c_{ik}} & \cdots & c_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ c_{m1} & \cdots & c_{mk} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix} = C \end{array}$$

  Bei der Matrizenmultiplikation ist Vorsicht geboten! Generell werden Matrizen immer von links multipliziert, das heißt:

$$A^3 = A \cdot A^2$$

12.1.4 Potenz und Invertierbarkeit einer quadratischen Matrix

Potenzgesetze, v.a. bei $n \times n$ Matrizen.....Invertierbarkeit 2×2 Matrizen "AlphaA Lenvers".....Determinante

12.2 Anwendungen von Matrizen

Fürs ABI

12.3 Lineare Gleichungssysteme und Gaußalgorithmus

Lineare Gleichungssysteme lassen sich aufwendig mit Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren lösen, Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat ein Algorithmus erfunden, mit dem sie sich ohne Taschenrechner leicht und relativ schnell lösen lassen.
Am Besten wird dieser mit einem Beispiel Erläutert:

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+3y+z &= 13 \quad (1) \\ 2x-5y+3z &= 1 \quad (2) \\ 7x-y-2z &= -1 \quad (3) \end{cases} \qquad \{\ 1\cdot(1)-2\cdot(2)\ \} \text{ und } \{\ 7\cdot(1)-4\cdot(3)\ \} \qquad D=\mathbb{R}^3$$

Hier versucht man in Zeile (2) und (3) die erste Variabel zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+z &= 13 \\ 0x+13y-5z &= 11 \\ 0x+25y+15z &= 95 \end{cases} \qquad \{25\cdot(2)-13\cdot(3)\}$$

Jetzt versucht man die zweite Variabel in der dritten Gleichung zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+z &= 13 \\ 0x+13y-5z &= 11 \\ 0x+0y-320z &= -960 \qquad \Leftrightarrow z=3 \end{cases}$$

Jetzt wird eingesetzt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3y+z &= 13 \\ 0x+13y-5\cdot 3 &= 11 \qquad \Leftrightarrow y=2 \\ 0x+0y+z &= 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+0y+0z &= 1 \\ 0x+y+0z &= 2 \\ 0x+0y+z &= 3 \end{cases}$$

$\mathbb{L}=\{(1;2;3)\}$ Die Lösungsmenge wird als n-Tupel (geordente Objekte) alphabetisch sortiert.

12.4 LGS mit dem Taschenrechner lösen

12.4.1 Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich sehr viel schneller mit dem Taschgenrechner lösen:

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x+3y+z &= 13 \\ 2x-5y+3z &= 1 \\ 7x-y-2z &= -1 \end{cases}$$

Hierfür geht man beim Taschenrechner auf [matrix] und auf [edit]. Dann gibt man seine Matrix (hier als Beispiel) ein:

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

Dann geht man wieder in den rechnen-Modus und gibt ein: [matrix], dann geht man auf [math], [rref]. dann geht man nochmal auf [matrix], [A] (die gerade bearbeitete Matrix):

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \qquad \Rightarrow \mathbb{L}=\{(1;2;3)\}$$

Die Lösungsmenge wird als n-Tupel angegeben.
Wenn sich Werte mit Kommazahlen ergeben, ist es nützlich, im Taschenrechner [Math] + [1](Frac) einzugeben, um sich die Werte in Brüchen anzeigen zu lassen.

12.4.2 Nicht eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme

Oft begegnen einem auch unterbestimmte LGS, sei es in der Geometrie (Zwei Ebenengleichungen, die in einem Gleichungssystem als Lösung die Schnittgerade ergeben) oder in anderen Teilbereichen. Sie sind auch recht aufwendig von Hand zu lösen, deshalb hier den schnelleren GTR-Lösungsweg:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 5 \end{cases}$$

Unterbestimmte LGS erkennt man daran, dass es mehr unbekannte als Gleichungen gibt:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right| \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{(2t+10; t; t+5 | t \in \mathbb{R})\}$$

Auch hier wird die Lösungsmenge als n-Tupel angegeben, in Abhängigkeit eines Faktors, dessen Wertebereich in der Lösungsmenge ebenfalls angegeben werden muss.

Kapitel 13

Algorithmik

by RÉMY

13.1 Algorithmen und Programmierung

Definition 13.1.1

Algorithmen besitzen die folgenden charakteristischen Eigenschaften:

- Eindeutigkeit: ein Algorithmus darf keine widersprüchliche Beschreibung haben. Diese muss eindeutig sein.
- Ausführbarkeit: jeder Einzelschritt muss ausführbar sein.
- Finitheit (= Endlichkeit): die Beschreibung des Algorithmus muss endlich sein.
- Terminierung: nach endlich vielen Schritten muss der Algorithmus enden und ein Ergebnis liefern.
- Determiniertheit: der Algorithmus muss bei gleichen Voraussetzungen stets das gleiche Ergebnis liefern.
- Determinismus: zu jedem Zeitpunkt der Ausführung besteht höchstens eine Möglichkeit der Fortsetzung. Der Folgeschritt ist also eindeutig bestimmt.

Diese Eigenschaften können in der Mathematik genutzt werden, um Probleme zu lösen. Hierfür bedarf es einer einheitlichen Schreibweise.
Insbesondere vor dem Abitur stehen den Schülern mehrere Möglichkeiten zur Verfügung, die im Folgenden behandelt werden.

13.1.1 Pseudocode

Pseudocode ist ein Programmcode, der nicht zur maschinellen Interpretation, sondern lediglich zur Veranschaulichung eines Algorithmus dient. Meistens ähnelt er höheren Programmiersprachen, gemischt mit natürlicher Sprache und mathematischer Notation. Er ist leichter verständlich als realer Programmcode aber klarer und weniger missverständlich als eine Beschreibung in natürlicher Sprache.

Beispiel:

Ein Beispiel erübrigt sich.

13.1.2 Python

Programmiersprache, bekannt durch ihre einfach verständliche Syntax, sie gilt als höhere Sprache, was sie zu einer auf die (gesprochene) Sprache angepasste Sprache macht. Sie ist somit gerade für Einsteiger interessant und eignet sich dennoch für größere Projekte. Ein weiterer Vorteil ist die mitlerweile allgegenwärtige Präsenz der Sprache, denn sie wird auch für Apps und Web-Entwicklung verwendet.

Syntax

Folgendes macht die Syntax Pythons aus:

- gute Lesbarkeit des Quellcodes
- englische Schlüsselwörter
- wenig syntaktische Konstruktionen

Funktionsweise

Python verwendet Schleifen und Verzweigungen.

```
#Schleifen:
for: #(Wiederholung ueber Elemente einer Sequenz (Zahl, Liste, Zeit...))
   #Inhalt der Schleife
while: #(Wiederholung, solange ein logischer Ausdruck wahr ist)
   #Inhalt der Schleife

#Verzweigungen:
if: #(prueft,ob ein logischer Ausdruck wahr ist)
   #Inhalt der Verzweigung
elif: #(prueft,ob ein anderer logischer Ausdruck wahr ist)
   #Inhalt der Verzweigung
else: #(letzter Fall, tritt ein, wenn keine der obigen Bedingungen erfuellt wurde)
   #Inhalt der Verzweigung
```

Beispiel:

Man nehme den Algorithmus, der die Fibonacci-Sequenz bis zum n-ten Glied generiert:

```
a = 0
b = 1
n = 10
for iteration in range(n):
   print(a)
   a = a+b
   b = a-b
```

13.2 Algorithmen und mathematische Anwendungen

13.2.1 Iterationsverfahren

Unter Iteration versteht man ein Verfahren zur schrittweisen Annäherung an die Lösung einer Gleichung unter Anwendung eines sich wiederholenden Rechengangs. Das bedeutet, (wenn es möglich ist) aus einer Näherungslösung durch Anwenden eines Algorithmus zu einer besseren Näherungslösung zu kommen und die Lösung beliebig gut an die exakte Lösung heranzuführen. Man sagt dann, dass die Iteration konvergiert. Beispiele für Verfahren dieser Art werden im Folgenden behandelt.

Newton-Rhapson Verfahren

Das Newton-Rhapson Verfahren, auch bekannt als Newtonmethode dient der Nullstellenbestimmung komplexer Polynome und allgemein jeder differenzierbaren Funktion.

Die Grundidee ist, die Nullstelle der Tangente an der Stelle x_0 von f zu nehmen und den Vorgang mit $f(\mathrm{NS}_T)$ zu wiederholen.
Eine mögliche Umsetzung in Python wäre:

```
def fx(x):
   return 3*x**3+5x**2+3          #beliebige Funktion (muss angegeben werden)

def f_strich(x):
   return 9*x**2+10*x             #muss auch manuell angegeben werden

def NS_Tangente(x):
   NS_T = x - fx(x)/f_strich(x)
   return NS_T

Startwert=1
altwert = NS_Tangente(Startwert)
Genauigkeit = 0.00001

while abs(altwert-NS_Tangente(altwert))>Genauigkeit:
   altwert=NS_Tangente(altwert)
print(altwert)
```

Heron-Verfahren

Es handelt sich hierbei um eine vereinfachte Version des Newton-Rhapson Verfahrens, da es zur Berechnung einer Näherung der Quadratwurzel einer reellen Zahl $a > 0$ dient.
Man erhält das gewünschte Ergebnis durch die Berechnung der Nullstelle einer Funktion $f(x) = x^2 - a$.
Es gilt also: $f'(x) = 2x$.
Durch die Verwendung des Newton-Rhapson Verfahrens erhält man die Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

$$\Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

Als kluger, ungefähr zutreffender Startwert gilt $x_0 = \dfrac{a+1}{2}$
Eine mögliche Umsetzung in Python wäre:

```
a=2                                     #Muss manuell angegeben werden
def fx(x):
   return x**2-a

def f_strich(x):
   return 2*x

def next_val(wert):
   return 0.5*(wert+(a/wert))

Startwert=(a+1)/2
altwert = next_val(Startwert)
Genauigkeit = 0.00001

while abs(altwert-next_val(altwert))>Genauigkeit:
   altwert=next_val(altwert)
print(altwert)
```

Kapitel 14

ANHANG: Physik

by Bruno

14.1 La physique des particules

Le modèle standard de la physique dans sa beauté incontestée.

14.2 Interaction gravitationelle

Definition 14.2.1

L'interaction gravitationnelle est une force toujours attractive qui agit sur tout ce qui poss[U+FFFD]de une masse, mais avec une intensité extr[U+FFFD]mement faible (c'est l'interaction la plus faible). Son domaine d'action est l'infini.

Un corps est considéré ponctuel si sa taille $\leqslant \dfrac{\text{distance d'observation}}{100}$

$$\overrightarrow{F_g} = -\frac{G \cdot m_a \cdot m_b}{r^2} \cdot \overrightarrow{u_{AB}}$$

Si: $r =$AB $G = 6,67 \cdot 10^{-11}$(S.I) $\overrightarrow{u_{AB}} \rightarrow$ vecteur normé

14.2.1 Le champ de gravitation

Definition 14.2.2

Tout objet de Masse M et d'origine spaciale O crée autour de lui un champ gravitationnel.
En un point quelconque P, ce champ s'écrit $\vec{\mathcal{G}}_{(P)}$.
Un deuxi[U+FFFD]me objet de masse m placé en ce point P est soumis a la force de gravitation:

$$\vec{F}_{O/P} = m \cdot \vec{\mathcal{G}}_{(P)}$$

D'ou on peut tirer la formule pour le champ de gravitation d'un objet considéré ponctuel de masse M a une distance d:

$$\mathcal{G}_o = \frac{G \cdot M}{d^2}$$

14.3 Interaction électromagnétique

Definition 14.3.1

L'interaction éléctromagn[U+FFFD]tique est une force attractive ou répulsive qui agit sur tout ce qui poss[U+FFFD]de une charge éléctrique. Son domaine d'action est également l'infini.

14.3.1 Le champ électrique

Definition 14.3.2

La loi de Coulomb
Dans le vide, 2 corps ponctuels A et B de charges q_a et q_b exercent l'un sur l'autre des forces :

$$\vec{F}_{A/B} = K \cdot \frac{q_a \cdot q_b}{r^2} \cdot \vec{U}_{A/B}$$

avec

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 (S.I.)$$

ε_0: permittivité du vide (réponse d'un milieu donné a un champ électrique appliqué) $(8,85 \cdot 10^9)$
ACHTUNG: [5ex] $\vec{F}$ et $\vec{E}$ n'ont pas forcément le meme sens, cela dépend de la charge q

La relation entre force électrique et champ électrique s'exprime avec q (Coulombs), charge de source:

$$\vec{F_e} = q \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow F_e = |q| \cdot E$$

Le champ électrique s'exprime donc de cette manière:

$$\underset{J}{\vec{E}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\overset{C}{q}}{\underset{m^2}{r^2}} \cdot \vec{U}_{A/B}$$

$\vec{E}$ va dans le sens des potentiels décroissants
Les lignes de champ sont tangentes aux vecteurs champ électrique tandis que les équipotentielles relient les points ou le champ électrique possede la meme valeur(intensité)

Dans un condensateur plan, le champ électrique est uniforme (lignes de champ paralleles) et la valeur du champ électrique est

$$\underset{J}{E} = \frac{\overset{V}{|U_{ab}|}}{\underset{m}{d}}$$

et, avec Q (charge totale) et S (surface des armatures)

$$\underset{J}{E} = \frac{\overset{C}{Q}}{\underset{S.I.}{\varepsilon_0} \cdot \underset{m^2}{S}}$$

14.3.2 Le champ magnétique

Definition 14.3.3

Dans une bobine: Soit B_i l'intensité du champ magnétique, I l'intensité du courant, N le nombre de spires (jointives) et l la longueur de la bobine,

$$\underset{T}{B_i} = \underset{S.I.}{\mu_0} \cdot \frac{N \cdot I}{\underset{m}{l}}$$

avec μ_0 la perméabilité du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

On obtient deux bobines de Helmholz quand $d = R$; Le champ est donc uniforme

14.4 Mouvement, vitesse et accélération d'un système physique

Definition 14.4.1

Dans la base de Frenet: avec a_τ l'accélération tangentielle et a_η l'accélération normale et ρ le rayon de courbure,

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \qquad \text{et} \qquad a_\eta = \frac{v^2}{\underset{m}{\rho}}$$

$$a = \sqrt{{a_\tau}^2 + {a_\eta}^2}$$

Voici les trois formules magiques pour un mouvement rectiligne uniformément varié:

$$a_x = cste$$

$$v_x = a_x \cdot t + v_{x0}$$

$$x = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 + v_{x0} \cdot t + x_0$$

Dans un mouvement circulaire de rayon R, avec $\omega = \dfrac{\Delta\theta}{\Delta t}$ étant la vitesse angulaire,

$$V = \underbrace{\omega}_{\text{rad/s}} \cdot R$$

La fréquence f est définie

$$f(\text{Hz}) = \frac{1}{T(\text{s})} = \frac{\omega\,(\text{rad/s})}{2\pi(\text{rad})}$$

14.5 Les 3 lois de Newton

14.5.1 1^{ere} loi

Definition 14.5.1

Dans un référentiel galiléen, le centre d'inertie d'un solide isolé ou pseudo-isolé est animé d'un mouvement **rectiligne uniforme** (et réciproquement) :

$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \text{Mvt rect. uniforme}$$

14.5.2 2^{eme} loi

Definition 14.5.2

Dans un référentiel galiléen, le PFD prédit que

$$\sum \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{a}$$

14.5.3 3^{eme} loi

Definition 14.5.3

C'est le principe de l'action et de la réaction. Soient A et B deux centres d'inertie de deux objets dans un référentiel galiléen :

$$\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}$$

14.6 Énergies et TEC

Definition 14.6.1

L'énergie fait bouger des choses... Il existe plusieures formes d'énergie :

- E_c L'énergie cinétique, Vitesse v : $E_c = 1/2 \cdot m \cdot v^2$
- E_{pp} L'énergie potentielle de pesanteur, Altitude z : $E_{pp} = m \cdot g \cdot z$
- E_{pe} L'énergie potentielle élastique, Longueur déformée x : $E_{pe} = 1/2 \cdot k \cdot x^2$

- E_{th} L'énergie thermique, Température T
- E_c L'énergie potentielle électrique : $E_c = 1/2 \cdot C \cdot U_c^2$
- E_m L'énergie potentielle magnétique : $E_m = 1/2 \cdot L \cdot i^2$
- Les énergies physique, chimique et nucléaire, Masse des corps m

L'énergie peut cependant changer de forme par un travail, transfert d'énergie :

- travail mécanique W_m (force) : $W_{A \to B}(\vec{F}) = W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos\alpha$
- travail électrique W_e (courant électrique) : $W_{A \to B}(\vec{F}_e) = q \cdot (V_A - V_B)$
- travail rayonnant W_r (rayonnement)
- chaleur Q (chaleur)

On retient aussi :

$$W_{AB}(\vec{P}) = m \cdot g \cdot (z_A - z_B)$$
$$W_{AB}(\vec{f}) = -f \cdot \widetilde{AB}$$
$$W_{AB}(\vec{R}_n) = 0$$
$$W_{AB}(\vec{F}_R) = 1/2 \cdot k \cdot ({x_B}^2 - {x_A}^2)$$

La **puissance moyenne** mesure la quantité d'énergie transférée par seconde :

$$P_m(\vec{F}) = \frac{\overbrace{W_{AB}(\vec{F})}^{J}}{\underbrace{\Delta t}_{s}}$$

La **puissance instantanée**:

$$P(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v} = F \cdot v \cdot \cos\alpha$$

Le **TEC** :

$$\Delta E_{cA \to B} = \sum W_{AB}(\vec{F}_{ext})$$

14.7 L'analyse dimensionnelle

Definition 14.7.1

Les différentes dimensions sont :

- Longueur L
- Masse M
- Durée T

- Température θ
- Intensité électrique I
- Intensité lumineuse J
- Quantité de matière N

Il ne faut pas oublier les grandeurs sans dimensions, comme les angles ou les facteurs...

14.8 Mouvements dans le champ de pesanteur uniforme

Definition 14.8.1

La force de frottement du fluide sur le corps peut être donnée par l'expression:

$$f = k \cdot v^n$$

où k contient le coefficient de pénétration du corps et la nature du fluide et n est réel. Ce sont des coefficients seulement déterminables par des expériences.

Pour des petites vitesses (quelques cm/s), $n = 1$, la force de frottement est donc proportionnelle à la vitesse du corps. Dans le cas d'une sphère de rayon R et η la viscosité,

$$f = (6\pi \cdot \mathbb{R} \cdot \eta) \cdot v$$

Pour des vitesses plus grandes (quelques m/s), $n = 2$ convient mieux. Si S est la section, C_x le coefficient de trainée, ρ_{fluide} la masse volumique,

$$f = \frac{1}{2} C_x \cdot \rho_{fluide} \cdot S \cdot v^2$$

Dans une chute non libre, le régime **permanent** est atteint quand $\vec{P} = -\vec{f}$, donc quand $a = \frac{dv}{dt} = 0$.

14.9 Mouvements de satellites et des planètes

Definition 14.9.1

L'accélération d'un satellite terrestre est égal au champ de gravitation:

$$\vec{a} = \vec{\mathcal{G}}$$

Des formules souvent retrouvées sont :

$$g_0 \approx \mathcal{G}_0 = \frac{G \cdot M_T}{{R_T}^2} \Leftrightarrow G \cdot M_T = g_0 \cdot {R_T}^2$$

$$a = a_n = \frac{G \cdot M_T}{r^2} = \frac{v^2}{r} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}} = \sqrt{\frac{g_0 \cdot {R_T}^2}{(R_T + h)}}$$

$$V = \frac{d}{t} = \frac{2\pi r}{T} \Leftrightarrow T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{r}}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{r^3}{G \cdot M_T}} = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{g_0 \cdot {R_T}^2}}$$

14.9.1 Les 3 lois de Kepler

Definition 14.9.2

$1^{\text{ère}}$ **loi :**
La trajectoire d'un astre (solaire) est une éllipse dont le soleil est un des foyers

$2^{\text{ème}}$ **lo :**
Si la planète met la mème durée pour aller de $A \to B$ que de $C \to D$, alors $\mathcal{A}_{AMB} = \mathcal{A}_{CMD}$

$3^{\text{ème}}$ **loi :**

$$\frac{T^2}{a^3} = cste$$

14.10 Systèmes oscillants

Definition 14.10.1

A COMPLETER APRES AVOIT FAIT LES OSCILLATEURS ÉLECTRIQUES
La période propre d'un pendule simple, non amorti est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

Bien que T_0 est aussi proportionnel à l'amplitude θ, ce facteur peut être négligé dans nos calculs

La période propre d'un pendule élastique horizontal non amorti est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On remarque que la **pulsation propre** ω_0 d'un pendule élastique horizontal non amorti est un peu comme la vitesse angulaire pour un oscillateur :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Dans le cas d'un système oscillant amorti, on distingue entre un régime **pseudo-périodique** et un régime **apériodique** (aucune oscillation)

14.11 Oscillateurs mécaniques en régime forcé

Definition 14.11.1

La bande passante est l'intervalle des fréquences pour lesquelles le résonnateur donne une réponse importante en amplitude. Elle est déterminable sur le graphique de l'amplitude en fonction de la fréquence. On fait $\frac{X_{mres}}{\sqrt{2}}$ et on retrouve la largeur de la bande passante $\Delta f = f_2 - f_1$. Il en résulte le facteur de qualité Q :

$$Q = \frac{f_{res}}{\Delta f} \approx \frac{f_0}{f_2 - f_1}$$

14.12 Émission, propagation et réception des ondes

Definition 14.12.1

La célérité (vitesse de propagation) de l'onde est constante dans un milieu non dispersif.

$$v = \frac{d}{\Delta t} = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f$$

Une onde est périodique dans l'espace et dans le temps. Dans un moment donné, les points P_1 et P_2 du milieu (en gros, deux courbes d'onde) sont en phase si

$$d(P_1; P_2) = k \cdot \lambda \quad ; k \in \mathbb{Z}$$

et ils sont en opposition de phase si

$$d(P_1; P_2) = (2k+1) \cdot \frac{\lambda}{2}; \in \mathbb{Z}$$

L'indice de réfraction n et la célérité v_Φ des ondes électromagnétiques sont proportionnels:

$$v_\Phi = \frac{c}{n}$$

14.13 Diffraction des ondes

Definition 14.13.1

Il y a seulement diffraction si l'obstacle de l'onde a une dimension du même ordre de grandeur que celle-ci.
L'écart angulaire pour la diffraction par une fente est, avec a largeur de la fente, θ, mesuré entre le milieu de la tache centrale et la première extinction :

$$\theta = \frac{\lambda}{a}$$

14.14 Particules chargées dans un champ électrique ou magnétique

Definition 14.14.1

La force magnétique s'exerçant sur une particule de charge q est

$$\vec{F}_m = q \cdot (\vec{v} \times \vec{B})$$

, d'après la loi de Lorentz. On utilise la règle de la main droite pour le produit vectoriel.

Et dans la plupart des cas, α vaut 90

$$\Rightarrow F_m = |q| \cdot v \cdot B \cdot \sin(\alpha)$$

La trajectoire d'une particule chargée dans un champ magnétique est circulaire, lorsqu'on reste dans un plan. La trajectoire dans un champ électrique est une parabole. La trajectoire rectiligne suivant l'accélération dans E passe par le milieu d'une des faces du condensateur.

14.15 Action d'un champ magnétique sur un circuit parcouru par un courant

Definition 14.15.1

L'intensité instantanée dans un circuit électrique est définie par :

$$i = Qt$$

Un conducteur rectiligne de longueur l, parcouru par un courant continu d'intensité I et placé dans un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ $(\vec{l}$: pouce, $\vec{B}$: index, $\vec{F_l}$: majeur) :

$$\vec{F_l} = I \cdot (\vec{l} \times \vec{B})$$

Le flux magnétique dans une bobine a l'unité Weber (Wb) :

$$\Phi = N \cdot \vec{B} \cdot \vec{S} = N \cdot B \cdot S \cdot \cos\alpha$$

La fem d'induction suite a une variation du flux :

$$e = -\Phi t$$

$$\Rightarrow i = \frac{e}{R} = -\frac{1}{R} \cdot \Phi t$$

14.16 Dipôles dans un circuit

14.16.1 Lois générales de dipôles

Definition 14.16.1

La loi d'Ohm généralisée, avec e, force électromotrice éventuelle

$$U_{AB} = R_{AB} \cdot I_{AB} - e_{AB}$$

La puissance électrique instantanée aux bornes d'un dipôle AB est exprimée en Watt (W) :

$$\mathcal{P} = U_{AB} \cdot i_{AB}$$

La puissance électrique instantanée (la bobine reçoit un travail électrique W) :

$$P = Wt$$

14.16.2 Le dipôle (R,L)

Definition 14.16.2

La Loi de Faraday-Lenz, avec L, inductance de la Bobine (Henri H)

$$e = -L \cdot it$$

Le flux propre appelé flux d'autoinduction de la bobine (WB)

$$\Phi = L \cdot i$$

La constante de temps τ :

$$\tau = \frac{L}{R}$$

La tension aux bornes d'une Bobine avec une résistance propre r si $i_{A \to B}$

$$u_{AB} = r \cdot i + L \cdot it$$

L'équation différentielle à établir aura toujours des $+$

$$U_G = R_T \cdot i + L \cdot it$$

L'énergie (potentielle) magnétique emmagasinée par une bobine est :

$$E_m = \frac{1}{2} \cdot L \cdot i^2$$

14.16.3 Le dipôle (R,C)

Definition 14.16.3

La capacité du condensateur C (Farad F) est sa capacité á acquérir une certaine charge :

$$q = C \cdot U_c$$

La capacité C en fonction de l'aire de la surface des armatures A, de la distance entre les armatures d et la permittivité absolue de l'isolant ε. ε_0 est la permittivité du vide et ε_r la permittivité relative ou constante diéléctrique du matériau utilisé :

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d}$$

Lors de l'association en série, l'inverse des capacités est additionné :

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + ... + \frac{1}{C_n}$$

Branchés en parallèle, les capacités des condensateurs sont additionnées.

La constante de temps τ : $\tau = R \cdot C$

L'intensité aux bornes du condensateur lors de la charge et de la décharge :

$$i = C \cdot U_C t = C \cdot U_{AB} t$$

L'équation différentielle à établir aura toujours des +

$$U_G = qt + \frac{q}{RC}$$

L'énergie (potentielle) électrique emmagasinée par le condensateur initialement déchargé est :

$$E_c = \frac{1}{2} \cdot C \cdot U_c^2$$

14.16.4 Le dipôle (R,L,C) et les oscillations électriques

Definition 14.16.4

On rappelle la pulsation propre $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$

La période propre T_0 des oscillations électriques est :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$