SchülerSkript SMP

MATHEMATIK

27. Februar 2018

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen

1.1 test

hallo das soll mal gehen

Kapitel 2

Reihen

2.1 g

g

Kapitel 3

Funktionsuntersuchung

Die **Analysis** (griechisch ???????? análysis, deutsch „Auflösung“) ist ein Teilgebiet der Mathematik. Die Untersuchung von reellen und komplexen Funktionen hinsichtlich Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit zählt zu den Hauptgegenständen der Analysis. Die hierzu entwickelten Methoden sind in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften von großer Bedeutung.

3.1 Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Joséphine will das machen, +Der Differentenquotient

3.2 Ableitungsregeln

Ein Ableitungswert gibt die Steigung an einem bestimmten Punkt an. Im Allgemeinen und zum Beweisen wird der Differentenquotient benötigt, um eine Ableitungsfunktion zu definieren, es geht aber in vielen Fällen schneller.

3.2.1 Produktregel

Sind die Funktionen u und v an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, dann ist die Funktion $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ bei x_0 auch differenzierbar und es gilt:

$f'(x0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0+h) + u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0+h)}{h} + \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} v(x_0+h)\frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} \lim_{h\to 0} u(x_0)\frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \\
&= v(x_0)\lim_{h\to 0} \frac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} + u(x_0)\lim_{h\to 0} \frac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h} \\
&= u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)
\end{aligned}
$$

3.2.2 Quotientenregel

Sind die Funktionen u und v an der Stelle $x_0 \in D$ differenzierbar, dann ist die Funktion $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ bei x_0 auch differenzierbar und es gilt:

$f'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}$

$$
\begin{aligned}
\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)} - \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x_0+h)}{v(x_0+h)} - \dfrac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x_0+h)v(x_0)}{v(x_0+h)v(x_0)} - \dfrac{u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0v(x_0+h))}}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0) - u(x_0)v(x_0+h)}{v(x_0+h)v(x_0)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u(x_0+h)v(x_0) - u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0+h) + u(x_0)v(x_0)}{v(x_0+h)v(x_0)h} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x_0+h)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{h} - \dfrac{u(x_0)v(x_0+h) - u(x_0)v(x_0)}{h}}{v(x_0+h)v(x_0)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\dfrac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} v(x_0) - u(x_0) \dfrac{v(x_0+h) - v(x_0)}{h}}{v(x_0+h)v(x_0)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{u(x_0+h) - u(x_0)}{h} v(x_0) - u(x_0) \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{v(x_0+h-v(x_0)}{h}}{v(x_0)v(x_0)} \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{(v(x_0))^2}
\end{aligned}
$$

3.2.3 Kettenregel

Die Funktion v sei an der Stelle x_0 differenzierbar und die Funktion u an der Stelle $v(x_0)$. Dann ist die Funktion $f = u \circ v$ mit der Gleichung $f(x) = u(v(x))$ an der Stelle x_0 differenzierbar. Es gilt:
$f'(x_0) = v'(x_0) \cdot u'(v(x_0))$

3.2.4 Tangente und Normale

Ist die Funktion f differenzierbar an der Stelle x_0, dann hat die **Tangente** an dem Graphen von f die Steigung $a = f'(x_0)$ und den Y-Achsenabschnitt $b = -f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$. Daraus ergibt sich die Tangentengleichung:

$T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

Eine Merkhilfe dazu ist das Wort „Fuxufu“, wobei „u“ dem x_0 entspricht.

Die **Normale** an der Stelle x_0 bezeichnet die Gerade, die genau senkrecht zur Tangente steht und diese im Berührpunkt des Graphen schneidet.

$N_{x_0}(x) = \frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$

3.3 Vollständige Funktionsuntersuchung

3.3.1 Definitionsbereich

Am Anfang muss der Definitionsbereich angegeben werden, um eventuelle Divisionen durch null zu vermeiden.

3.3.2 Achsenschnittpunkte

Es gibt zwei Arten von Achsenschnittpunkten:

1. X-Achsenschittpunkte (Nullstellen), die man mit $f(x) = 0$ herausfindet
2. Y-Achsenschnittpunkt, den man durch einsetzen bekommt: $f(0)$

3.3.3 Symmetrie

Y-Achsensymmetrie

Durch Lösung der Gleichung $f(x) = f(-x)$ findet man heraus ob die Funktion achsensymmetrisch ist. Zudem ist die Funktion dann achsensymmetrisch, wenn nur gerade Exponenten vorhanden sind.

Symmetrie zum Origo

Durch Lösung der Gleichung $f(x) = -f(-x)$ findet man heraus ob die Funktion punktsymmetrisch ist. Zudem ist die Funktion dann punktsymmetrisch, wenn nur ungerade Exponenten vorhanden sind.

Symmetrie zu einem beliebigen Punkt

Symmetrie zu einem Punkt liegt vor, wenn für den Punkt $P(x_0|y_0)$ gilt:

$f(x_0 + h) - y_0 = -f(x_0 - h) + y_0$

Beispiel

$f(x) = \frac{x}{x-1}$

Aus dem Schnittpunkt der Asymptoten kann man vermuten, dass $f(x)$ achsensymmetrisch zum Punkt $P(1|1)$ ist.

$$\left.\begin{aligned} \Rightarrow f(x_0 + h) - y_0 = \tfrac{1+h}{1+h-1} - 1 = \tfrac{1}{h} \\ \Rightarrow -f(x_0 - h) + y_0 = -[\tfrac{1-h}{1-h-1} + 1] = \tfrac{1}{h} \end{aligned}\right\} \tfrac{1}{h} = \tfrac{1}{h} \text{ Die Funktion } f \text{ ist zu } P \text{ symmetrisch.}$$

3.3.4 Grenzwerte

3.3.5 Monotonie

3.3.6 Extremstellen

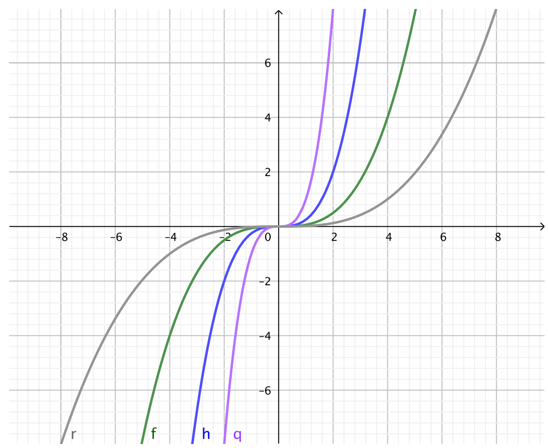
3.3.7 Wendestellen

3.3.8 Beispiel

3.4 Funktionenscharen

Erklärung:

Eine **Funktionenschar** ist eine Menge von Funktionen, die neben der Variable auch noch einen veränderlichen Parameter im Funktionsterm enthält. Jedem Wert des Parameters ist ein Graph der Schar zugeordnet. Der Parameter, oft a, wird hierbei überall wie eine Konstante behandelt.
Der Punkt, den alle Graphen, unabhängig von ihren Parametern, beinhalten, nennt man Bündel. Die Graphen einer Funktionenschar bilden gemeinsam eine Kurvenschar.
Hier ist die Kurvenschar der Funktion
$f(x) = ax^3$. Sie verlaufen alle durch das Bündel $P(0|0)$

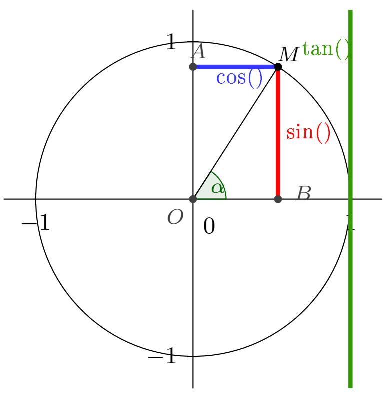


Kapitel 4

Trigonometrie

4.1 Kurze Wiederholung

Im Kreis mit Radius 1 gelte:
$cos(\alpha) = x_M$
$sin(\alpha) = y_M$
$tan(\alpha) = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$



Es ergeben sich folgende (wissenswerte) Werte:
TAAABELLLE

4.2 Polarkoordinaten

adf

4.3 Addtions- und Versopplungssätze

$cos(a - b) = cos(a)cos(b) + sin(a)sin(b)$
$sin(a - b) = sin(a)cos(b) - cos(a)sin(b)$
$cos(a + b) = cos(a)cos(b) - sin(a)sin(b)$
$sin(a + b) = sin(a)cos(b) + cos(a)sin(b)$

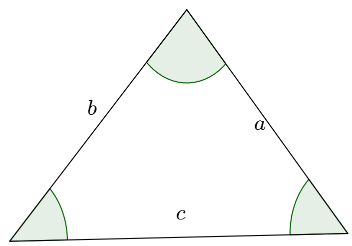
4.4 Allgemeine Sinus- und Kosinussätze

Diese Sätze gelten in einem beliebigen Dreieck:

$$\frac{a}{sin(\alpha)} = \frac{b}{sin(\beta)} = \frac{c}{sin(\gamma)}$$

$$c = a + b - 2abcos(\gamma)$$

Winkelnamen!!



Man bemerkt, dass sich die bekannten Relationen ergeben, wenn man für einen der Winkel den Wert $\frac{\pi}{2}$ nimmt.

Kapitel 5

Vektorielle Geometrie

dsdfs

5.1 g

f

Kapitel 6

Komplexe Zahlen

6.1 Einführung

Problem: Es gibt algebraische Gleichungen, die in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ keine Lösung besitzen.

$\Rightarrow x^2 + 1 = 0$
$\Leftrightarrow x = \sqrt{-1}$ Keine Reelle Lösung!

Es kann hierbei ein neues Symbol eingeführt werden : $i = \sqrt{-1}$
Damit kann man der obigen Gleichung die Lösung $x = i$ zuordnen

Wenn wir voraussetzen, dass diese neue Zahlen nach denselben Rechengesetzen genügen, wie die reellen Zahlen, erhalten wir damit auch Lösungen für andere bisher nicht lösbare quadratische Gleichungen, wie das folgende Beispiel zeigt:

$\Rightarrow x^2 + 2x + 5 = 0$

$$\Rightarrow x = \frac{-2 \ \overbrace{\sqrt{4-20}}^{=\sqrt{16*(-1)}}}{2} = \tfrac{-24i}{2} = -12i$$

Bezeichnungen

1. Der Ausdruck $\sqrt{-1}$ heißt **imaginäre Einheit** und wird hier mit i bezeichnet.
2. Ausdrücke der Form $i \cdot y$ mit $y \in \mathbb{R}$ heißen **imaginäre Zahlen**
3. Ausdrücke der Form $z = x + i * y$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ werden als **Komplexe Zahlen** bezeichnet
4. Ist $z = x + i * y$ eine Komplexe Zahl, so heißen
   $x = Re(z)$ **Realteil** von z
   $y = Im(z)$ **Imaginärteil** von z
5. Die Menge $\mathbb{C} = \{z = x + jy | x, y \in \mathbb{R}\}$ wird als Menge der Komplexen Zahlen bezeichnet

Aber

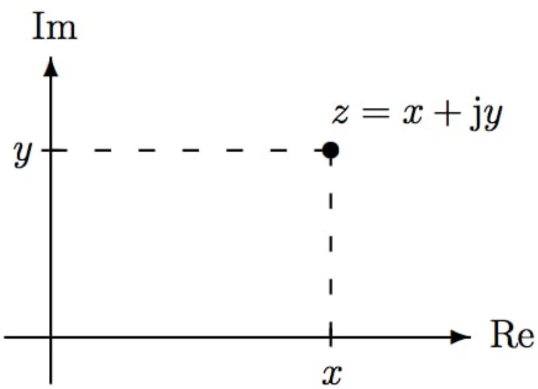
Der **Imaginärteil** y einer komplexen Zahl $z = x + i * y$ ist selbst eine reelle Zahl! Der **Imaginärteil** ist lediglich der Faktor bei i!

6.2 Darstellung komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl wird durch zwei reelle Zahlen charakterisiert. Wie bei zweidimensionalen Vektoren brauchen wir hier zur geometrischen Veranschaulichung auch eine zweidimensionale Ebene.

6.2.1 Kartesische Darstellung

Jeder komplexen Zahl $z = x + i * y$ entspricht genau ein Punkt $P = (x, y)$ in der komplexen Zahlenebene und umgekehrt.

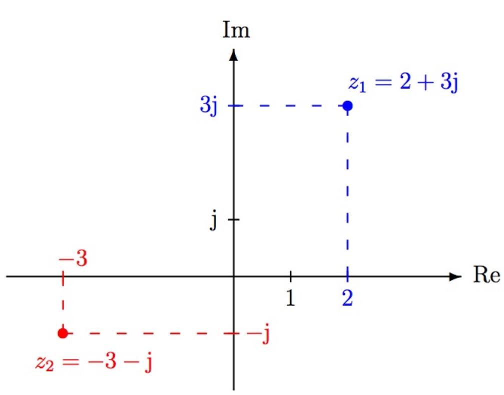


Bezeichnungen

1. Die komplexe Zahlenebene nennt sich auch Gaußsche- Zahlenebene
2. Hier werden die Achsen des Koordinatensystems als **reelle Achse** bzw. **imaginäre Achse** bezeichnet.

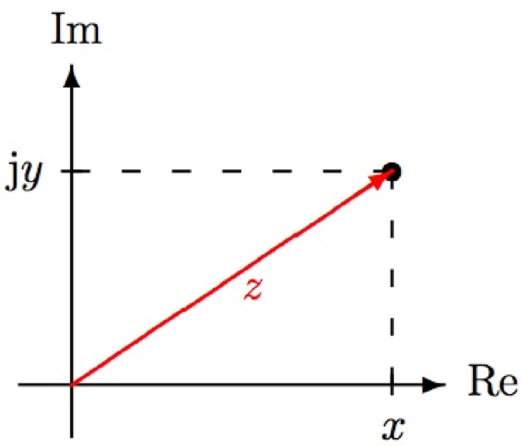
Beispiel

Die folgenden komplexen Zahlen sind in der Gaußschen Zahlenebene darzustellen:
$z_1 = 2 + 3 * j$ $z_2 = -3 - j$ (i wird hier j genannt)



Bemerkungen

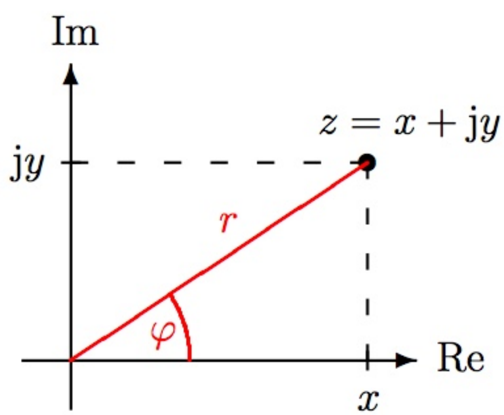
Für manche Anwendungen ist es hilfreich, eine komplexe Zahl nicht als Punkt $P = (x, y)$ in der Gaußschen Zahlenebene zu veranschaulichen, sondern stattdessen den Ortsvektor zu betrachten
$z = x + j * y \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$



In diesem Fall spricht man von z als einem **komplexen Zeiger**.

6.2.2 Polarkoordinatendarstellung

Neben der eben eingeführten kartesischen Darstellung $z = x + j * y$ kann eine komplexe Zahl auch entsprechend der hier stehenden Skizze dich ihren Radius und den Winkel eindeutig festgelegt werden.



Erinnerung

Zusammenhang zwischen den Koordinaten $P(x, y)$ und $P(r, \varphi)$:

$$\begin{pmatrix} x = r * cos(\varphi) \\ \\ y = r * sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \\ tan(\varphi) = \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

Bemerkung

Der Zusammenhang zwischen dem Quotienten $\frac{x}{y}$ und dem Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ eindeutig, da die Tangensfunktion -periodisch ist.
Damit erhält man die **trigonometrische Darstellung** :

$$z = x + j * y = r * cos(\varphi) + j * r * sin(\varphi) \Rightarrow z = r(cos(\varphi) + j * sin(\varphi))$$

Dieser Ausdruck von z wird im Folgenden sehr häufig auftreten. Deshalb wird dafür die Abkürzung

$$e^{j\varphi} = cos(\varphi) + j * sin(\varphi)$$

ein. Somit ergibt sich schließlich eine sehr kompakte Darstellung, die sogenannte **Exponentialdarstellung** einer komplexen Zahl:

$$z = r(cos(\varphi) + r * j * sin(\varphi)) = r * e^{j\varphi}$$

Zusammenfassung

Eine komplexe Zahl lässt sich auf verschiedene Arten darstellen:

1. $z = x + j * y$ (kartesische Darstellung)
2. $z = (cos(\varphi) + j * sin(\varphi))$ (trigonometrische Darstellung)
3. $z = r * e^{j\varphi}$ (Exponential-Darstellung)

6.2.3 Umrechnung zwischen den Darstellungen

Kapitel 7

Statistik und Wahrscheinlichkeit

dsfdfs

7.1 Hypothesentests

Nur ein Test zur GH Kompabilituf OSX Geräten
?a

Kapitel 8

Arithmetik

Nur ein weiterer kleiner Test

Kapitel 9

Arithmetik

Nur ein weiterer kleiner Test

Kapitel 10

Matrizen

10.1 Lineare Gleichungssysteme und Gauß-Algorythmus

Lineare Gleichungssysteme lassen sich aufwendig mit Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren lösen, Carl Friedrich Gauß hat ein "Algorythmus" erfunden, mit dem sich ohne Taschenrechner leicht und relativ schnell lösen lässt.
Diese lassen sich aufwendig mit Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren lösen, Carl Friedrich Gauat ein "Algorythmus" erfunden, mit dem sich ohne Taschenrechner leicht und relativ schnell lösen lässt.
Am Besten wird dieser mit einem Beispiel Erläutert:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcll} 4x+3y+z &=& 13 & (1) \\ 2x-5y+3z &=& 1 & (2) \\ 7x-y-2z &=& -1 & (3) \end{array} \right. \qquad \{\ 1\cdot(1)-2\cdot(2)\ \} \text{ und } \{\ 7\cdot(1)-4\cdot(3)\ \} \qquad D=\mathbb{R}^3$$

Hier versucht man in Zeile (2) und (3) die erste Variabel zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5z &=& 11 \\ 0x+25y+15z &=& 95 \end{array} \right. \qquad \{\ 25\cdot(2)-13\cdot(3)\ \}$$

Jetzt versucht man die zweite Variabel in der dritten Gleichung zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5z &=& 11 \\ 0x+0y-320z &=& -960 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow z=3$$

Jetzt wird eingesetzt

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x+3y+z &=& 13 \\ 0x+13y-5\cdot 3 &=& 11 \\ 0x+0y+z &=& 3 \end{array} \right. \qquad \Leftrightarrow y=2$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} x+0y+0z &=& 1 \\ 0x+y+0z &=& 2 \\ 0x+0y+z &=& 3 \end{array} \right.$$

$\mathbb{L}=\{(1|2|3)\}$ Die Lösungsmenge wird als n-Tupel alphabetisch sortiert.

10.2 LGS mit dem Taschenrechner lösen

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich sehr viel schneller mit dem Taschgenrechner lösen:

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{rcl} 4x + 3y + z & = & 13 \\ 2x - 5y + 3z & = & 1 \\ 7x - y - 2z & = & -1 \end{array} \right.$$

Hierfür geht man beim Taschenrechner auf [matrix] und auf [edit]. Dann gibt man seine Matrix (hier als Beispiel) ein:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right|$$

Dann geht man wieder in den rechnen-Modus und gibt ein: [matrix], dann geht man auf [math], [rref]. dann geht man nochmal auf [matrix], [A] (die gerade bearbeitete Matrix):

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right| \qquad \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1|2|3)\}$$

Wenn Werte mit Kommazahlen drankommen, ist es ntzlich, im Taschenrechner [Math] + [1](Frac) einzugeben, um sich die Werte in Brchen anzeigen zu lassen.

Kapitel 11

Algorythmik

sdffzgkzgs

11.1 g

fljzgkg