Inhaltsverzeichnis

[../MAIN/main.tex]subfiles

Kapitel 1

FOLGEN

by CLARA

Definition

Eine Funktion, bei der nur natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zugeordnet wird, nennt man Folge.
Folgen können auch nur für Teilbereiche von $\mathbb{N}$ definiert sein.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet die Folge, wobei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

Bemerkung:
In einem Ausdruck muss das n immer dasselbe bleiben!

GTR-Tipp:

Um statt Funktionen Folgen zu behandeln:

- ON $\to$ MODE $\to$ Zeile 4: statt FUNC SEQ auswählen
- in Y=
- Mit $nMin$ den Startindex angeben
- Mit $u(n)$ die Folgenvorschrift angeben
- Falls die Folge rekursiv anzugeben ist, muss mit $u(nMin)$ das Startglied angegeben werden

Bemerkung:
Es ist üblich eine rekursive Folge mit a_{n+1} in Abhängigkeit von a_n zu haben. Diese Darstellung ist mit dem GTR nicht direkt verwendbar. Man muss es ümschreibenüm a_n in Abhängigkeit von a_{n-1} zu haben.

1.1 Verschiedene Darstellungen

1.1.1 Explizite Darstellung

Definition

Wenn ein beliebiges Glied der Folge direkt berechenbar ist, ist ihre Darstellung explizit.

Beispiel:

1. $a_n = 3^n \Rightarrow a_4 = 3^4 = 81$
2. Die Folge der $n-ten$ positiven, ungeraden Zahl:
   $a_n = 1 + 2 \cdot (n-1) \Rightarrow$ Die 8. positive, ungerade Zahl ist $a_8 = 1 + 2 \cdot (8-1) = 15$

1.1.2 Rekursive Darstellung

Definition

Wenn für die Berechnung des $n-ten$ Gliedes eines (oder sogar mehrere) der vorherigen Glieder benötigt wird, ist ihre Darstellung rekursiv. In diesen Fällen braucht man immer ein Startglied, oft a_0 oder a_1.

Beispiel:

1. $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2; a_0 = 5$
   $a_1 = 3 \cdot a_{1-1} + 2 = 3 \cdot a_0 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$
   $a_2 = 3 \cdot a_{2-1} + 2 = 3 \cdot a_1 + 2 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$
   $a_3 = 3 \cdot a_{3-1} + 2 = 3 \cdot a_2 + 2 = 3 \cdot 53 + 2 = 159$
   und so weiter...

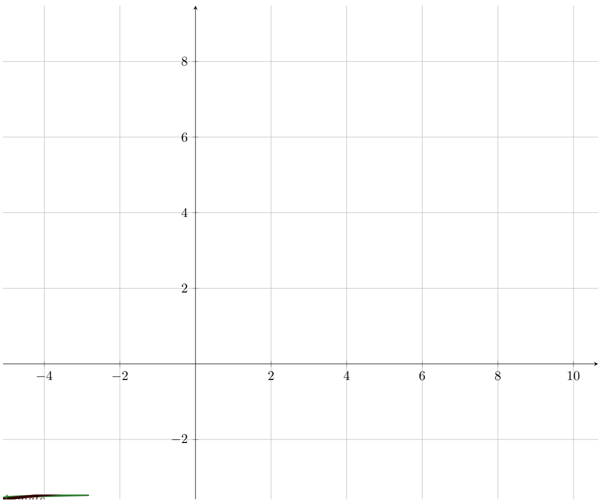
2. Die Folge der $n - ten$ positiven, ungeraden Zahl:
   $a_n = a_{n-1} + 2; a_1 = 1$

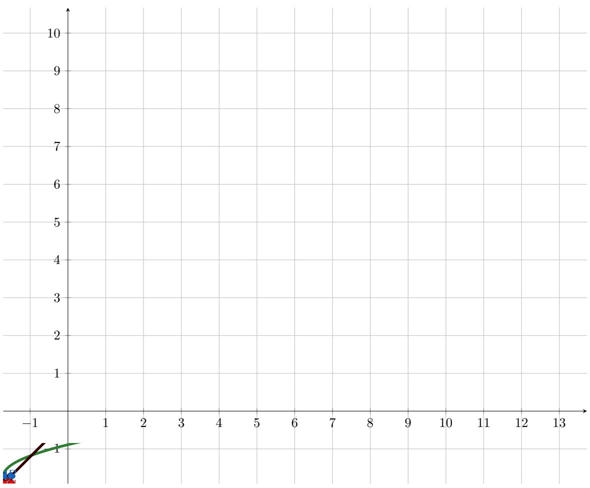
Bemerkung:
Für manche Folgen sind beide Darstellungen möglich, wobei die explizite Darstellung oftmals viel praktischer ist, da die Berechnung der Folgeglieder anhand der rekursiven Darstellung schnell sehr aufwendig wird.

Web-Diagramme

Hier handelt es sich um ein graphisches Verfahren, das dazu dient, das Verhalten einer Folge, deren Darstellung rekursiv ist, zu untersuchen. Es ermögicht die Beobachtung des Langzeitverhaltens (Konvergenz, Divergenz oder Oszillation) einer rekursiven Folge.

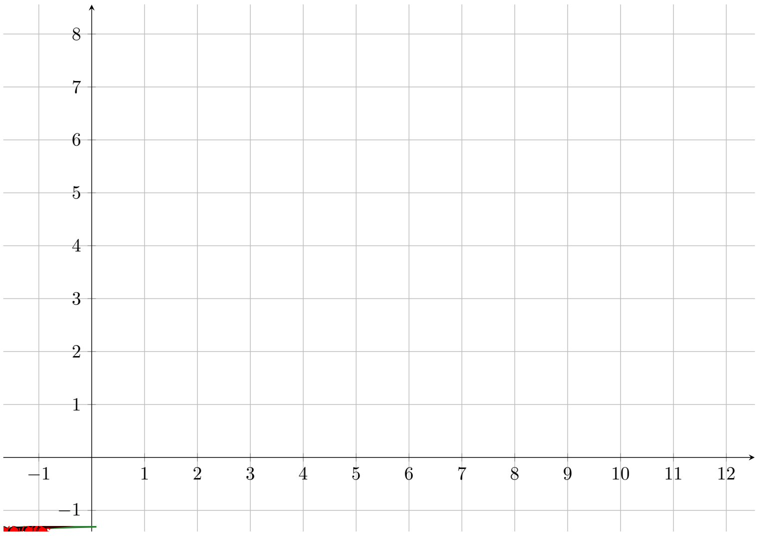
Dazu muss man der rekursiven Folgenvorschrift eine Funktion $f(a_{n-1}) = a_n$ zuordnen, sodass - grob gesagt - "die Funktion das Gleiche mit x macht, dass die Folge macht, um von a_n auf a_{n+1} zu kommen". Man muss verstehen, dass es sich hierbei nicht um den Graphen der Folge handelt, die Werte der Folgenglieder sind nicht wie gewohnt abzulesen. Zusätzlich zeichnet man in ein kartesisches Koordinatensystem die Hauptdiagonale ein (entspricht dem Graphen von $f(x) = x$). Exemplarisch wird hier die Folge $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n} + 2$ behandelt, dementsprechend ist die Hilfsfunktion hier f mit $f(x) = 2\sqrt{x} + 2$.





Dann trägt man den Wert des ersten Folgegliedes auf die Abzissenachse ein und verbindet ihn mit der entsprechenden Funktion anhand eines vertikalen Striches. Der Ordinatenwert, der so erhalten wird (Punkt A), entspricht dem Wert von a_1. Um den Vorgang erneuern zu können, muss der gefundene Wert wieder auf die Abzissenachse, dazu benutzt man die Hauptdiagonale als Špiegel". Ein horizontaler Strich bis zur Hauptdiagonale (zum Punkt B) und ein vertikaler bis zur Abzissenachse lösen das Problem. So ist der Wert von a_1 aud der Abzissenachse, dort wird er für den nächsten Schritt benötigt.

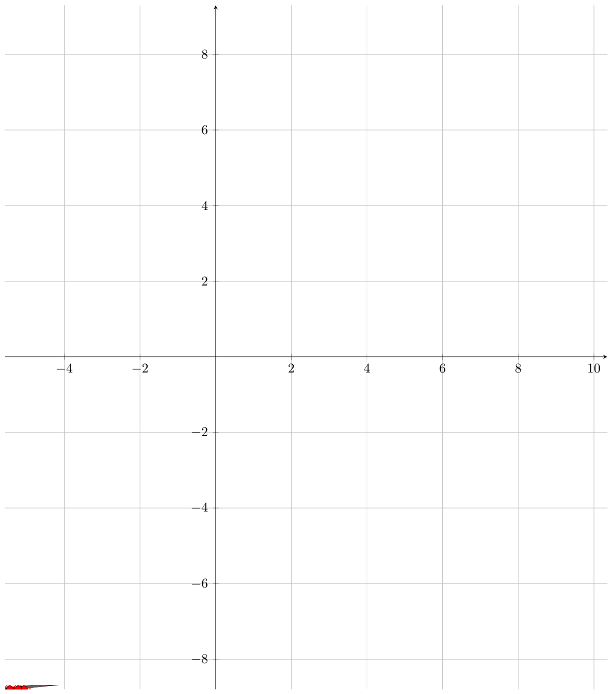
Dasselbe muss mehrmals wiederholt werden, so wird jeweils das nächste Folgeglied auf die Abzissenachse abgebildet (rote Punkte). Daraus kann man dann eine Tendenz erkennen, die die Entwicklung der Folgeglieder beschreibt. Je nach dem, was für eine Tendenz zu erkennen ist, kann man verschiedene Schlüsse bezüglich der Entwicklung der Folge schließen. In diesem Falle wird deutlich, dass die Folge konvergiert, der Grenzwert ist die Schnittstelle zwischen der Hilfsfunktion und der Hauptdiagonalen, es fehlt nur noch diesen zu berechnen.

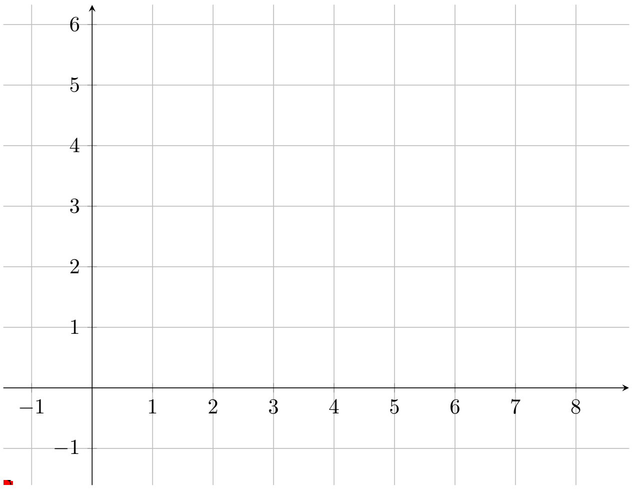


$$h(x) = x; \quad f(x) = 2\sqrt{x} + 2$$
$$h(x) = g(x) \Leftrightarrow x - 2\sqrt{x} - 2 = 0$$
$$\Rightarrow x_1 = \left(\frac{2 + \sqrt{12}}{2}\right)^2$$
$$g = x_1$$

Es gibt andere mögliche Tendenzen, hier ein paar Beispiele:

Die divergierende Treppe, es gibt also keinen Grenzwert, man kann den uneigendlichen Grenzwert aber ablesen, hier ist der Grenzwert der Folge a_n mit $a_{n+1} = -\frac{3}{2}a_n - 4$ und $a_0 = 5$: $-\infty$





Die konvergierende Spirale, es gibt also einen Grenzwert, den man erneut mit der Schnittstelle zwischen Funktion und Hauptdiagonale ermitteln kann. Hier konvergiert die Folge a_n mit $a_{n+1} = \frac{4}{a_n} + 1$ und $a_1 = 1$

Bemerkung:

Dieses Verfahren kann ausschließlich bei rekusiven Folgen angewendet werden, bei denen keine zusätzliche Abhängigkeit von n vorliegt (Beispiel: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 4n + 3$) oder die Rekursivitätsebene den 1. Grad überschreitet, was bedeutet, dass a_n nicht nur in Abhängigkeit von a_{n-1} beschrieben wird, sondern von anderen Rekursivitätsebenen wie a_{n-2} (Beispiel: die Fibonacci-Folge).

GTR-Tipp:

Mit den GTR ist dieses Verfahren auch möglich, die Arbeit der Fertigstellung der Striche wird vom Rechner übernommen. Das Bild ist vom Benutzer nur noch zu deuten, gegebenenfalls ist die Schnittstelle auszurechnen.

- Der Rechner muss auf SEQ stehen
- in Y= die rekursive Folge angeben
- In 2nd FORMAT von Time auf Web stellen
- TRACE verwenden
- Sooft auf ENTER drücken, bis ausreichend Striche zu sehen sind.

1.2 Auffällige Folgen

1.2.1 Arithmetische Folgen

Definition

Eine Folge wird arithmetisch genannt, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:
   $a_n = a_{n-1} + d$
2. Explizite Darstellung:
   Mit Startglied a_0: $a_n = a_0 + n \cdot d$
   Mit Startglied a_1: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
   Mit Startglied a_x: $a_n = a_x + (n-x) \cdot d$

Bemerkung:
Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist $a_n = a_p + (n-p) \cdot d; n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:
$a_n = a_{n-1} + 3; a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 + n \cdot 3$

Bemerkung:
Jedes Folgeglied einer solchen Folge ist das arithmetische Mittel seines Vorgängers und Nachgängers: $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

1.2.2 Geometrische Folgen

Definition

Eine Folge wird geometrisch genannt, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

- Rekursive Darstellung:
  $a_n = a_{n-1} \cdot q$
- Explizite Darstellung:
  Mit Startglied a_0: $a_n = a_0 \cdot q^n$
  Mit Startglied a_1: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
  Mit Startglied a_x: $a_n = a_x \cdot q^{n-x}$

Bemerkung:
Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist $a_n = a_p \cdot q^{n-p}; n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:
$a_n = a_{n-1} \cdot 3; a_0 = 2 \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^n$

Bemerkung:
Jedes Folgeglied einer solchen Folge ist das geometrische Mittel seines Vorgängers und Nachgängers:
$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$

1.3 Klassifizierung von Folgen

1.3.1 Monotonie

Definition

Eine Folge $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ heißt monoton $\begin{cases} \text{steigend/wachsend} \\ \text{fallend/abnehmend} \end{cases}$ wenn $\begin{cases} a_{n+1} \geq a_n \\ a_{n+1} \leq a_n \end{cases}$.

Gelten dabei sagar **strikte** Ordnungsrelationen ($>$ oder $<$), dann ist (a_n) **streng** monoton wachsend beziehungsweise abnehmend.

Strategie:

- Das Vorzeichen von $a_{n+1} - a_n$ bestimmen, ist es ≤ 0 dann ist die Folge fallend, ist es ≥ 0, dann ist die Folge wachsend.
- $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ mit 1 vergleichen, ist es ≤ 1, dann ist die Folge fallend, ist es ≥ 1, dann ist die Folge wachsend.

Beispiel:
Untersucht wird die Monotonie der Folge $a_n = \frac{8n}{n^2+1}$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{8(n+1)}{(n+1)^2+1} - \frac{8n}{n^2+1} \\
&= \frac{8n+8}{n^2+2n+1+1} - \frac{8n}{n^2+1} \\
&= \frac{8n^3+8n^2+8n+8-(8n^3+16n^2+16n)}{(n^2+2n+2)(n^2+1)} \\
&= \frac{-8n^2-8n+8}{(n^2+2n+2)(n^2+1)}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ a$_n$ ist für $n \in \mathbb{N}$ weder steigend noch fallend.
a_n ist für $n \in \mathbb{N}^*$ streng monoton fallend.

1.3.2 Beschränktheit

Definition

Man nennt eine Folge $(a_n)n \in \mathbb{N}$ nach $\begin{cases} \text{oben} \\ \text{unten} \end{cases}$ **beschränkt**

wenn es eine Zahl $\begin{cases} S \in \mathbb{R} \\ s \in \mathbb{R} \end{cases}$ gibt mit $\begin{cases} a_n \leq S \\ a_n \geq s \end{cases}$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

S ist eine obere Schranke
s ist eine untere Schranke

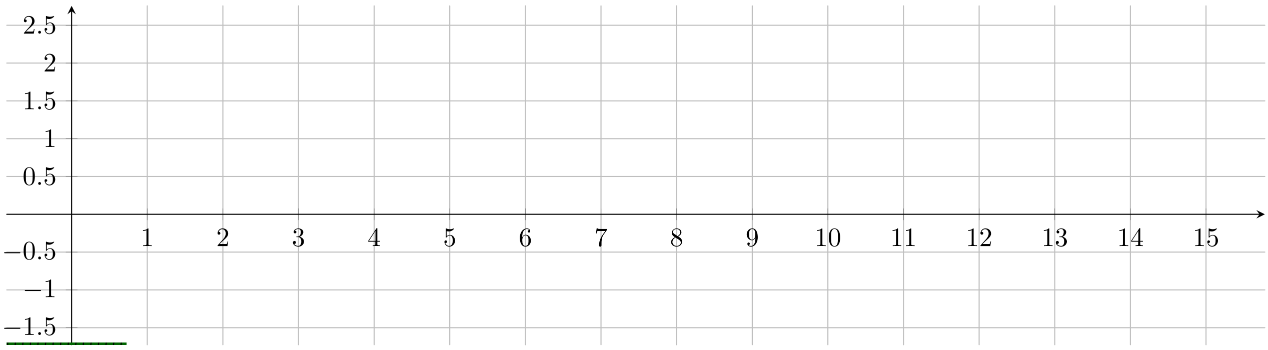
Definition

Die kleinste obere Schranke ist das **Supremum** der Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.
Die größte untere Schranke ist das **Infimum** der Menge $\{a_n; n \in \mathbb{N}\}$.

Definition

Eine nach **oben und unten** beschränkte Folge heißt **beschränkte** Folge (suite bornée).

Beispiel:



Die abgebildete Folge $a_n = 0,8^n$ besitzt als mögliche obere Schranke die Gerade $f : y = 1,1$, unten die Gerade $g : y = -0,05$. a_n ist also **beschränkt**.

Unbeschränktheit

Beispiel:
Unbeschränktheit mit Abschätzungen zeigen:

$$a_n = \frac{n^2}{n+2} \geq \frac{n^2}{n+2n} = \frac{n^2}{3n} = \frac{1}{3}n \qquad \forall n \geq 1$$

$u_n = \frac{1}{3}n$ ist eine unbeschränkte Folge, a_n ist ab einem bestimmten Glied (a_1) immer darüber:
a_n ist ebenfalls unbeschränkt, sie divergiert nach $+\infty$

1.3.3 Konvergenz

Definition

Eine Folge $(a_n)n \in \mathbb{N}$ ist konvergent, wenn sie einen Grenzwert besitzt.
Man sagt a_n konvergiert gegen $g = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Theorem

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (a_n - g) = 0$$

Wörtlich: Eine Folge (a_n) konvergiert gegen g genau dann, wenn $(a_n - g)$ gegen den Wert 0 konvergiert.

Beispiel:

$$a_n = \frac{3n^4 - 1}{n^4}$$

a_n hat vermutlich den Grenzwert $g = 3$.

$$a_n - 3 = \frac{3n^4 - 1}{n^4} - 3 = \frac{3n^4 - 1 - 3n^4}{n^4} = -\frac{1}{n^4} \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

Monotone Konvergenz

Theorem

Eine monotone Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Beweis

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass die Folge monoton wachsend sei und sei a die kleinste obere Schranke (Supremum).

- Sei $\varepsilon \geq 0$ dann ist $a - \varepsilon$ keine obere Schranke der Folgeglieder $\{a_n; \in \mathbb{N}\}$.
- (a_n) ist wachsend
- $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ mit $a_{n_0} \geq a - \varepsilon$
- $\forall n > n_0$ gilt $a - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n < a + \varepsilon$ |-a
  $\Leftrightarrow -\varepsilon < a_{n_0} - a \leq a_n - a < \varepsilon$
- $\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Analog kann man mit einer nach unten beschränkten monoton fallenden Folge argumentieren. □

Besser zu verstehen, wenn man es so sagt:

Theorem

$$\exists S \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : a_n \leq a_{n+1} \ \wedge \ a_n \leq S$$
$$\Rightarrow \exists g \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n = g \ \wedge \ g \leq S$$

und

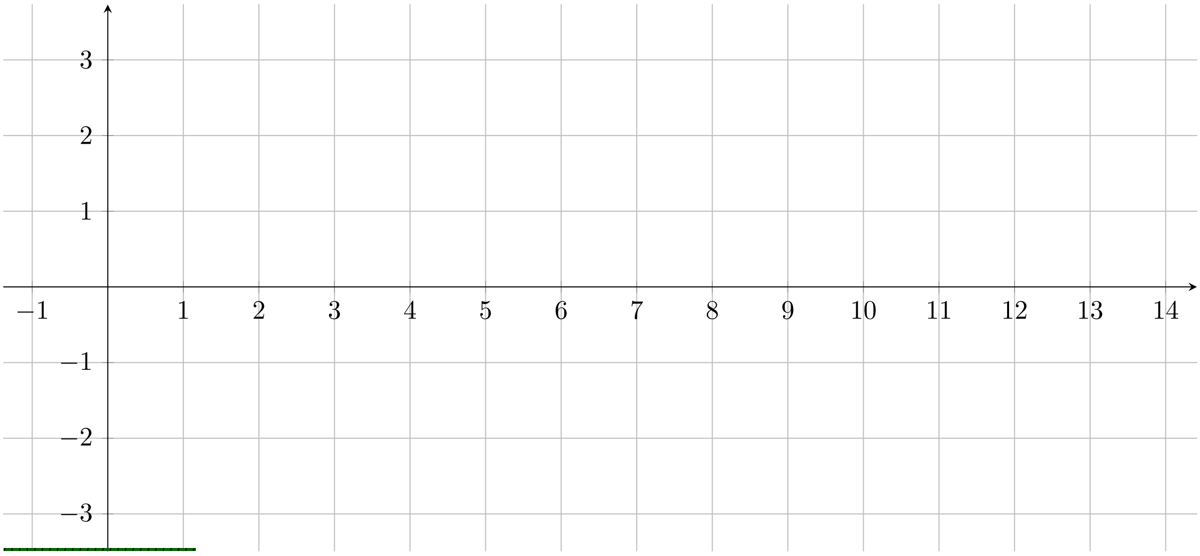
$$\exists s \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 : a_n \geq a_{n+1} \ \wedge \ a_n \geq s$$
$$\Rightarrow \exists g \in \mathbb{R} : \lim_{n\to\infty} a_n = g \ \wedge \ g \geq s$$

Wörtlicch:

- Eine monoton **wachsende** Folge (a_n) ist genau dann **konvergent**, wenn sie nach **oben beschränkt** ist. Ihr Grenzwert g ist kleiner oder gleich der oberen Schranke $S \in \mathbb{R}$.
- Eine monoton **fallende** Folge (a_n) ist genau dann **konvergent**, wenn sie nach **unten beschränkt** ist. Ihr Grenzwert g ist größer oder gleich der oberen Schranke $s \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

Untersucht wird die Folge $u_n = \frac{n^2}{2^n}$



- Beschränktheit:

  $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n \geq 0,$ für $n = 0, \quad a_n = 0 \Rightarrow$ die untere Schranke $s = 0$ ist das Infimum.

- Monotonie:

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{(n+1)^2}{2^{n+1}} \cdot \frac{2^n}{n^2}\\ &= \frac{(n+1)^2}{2n^2}\\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^2\\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{8}{9} < 1 \qquad \forall n \geq 3\end{aligned}$$

N.R.: $\quad 1 + \frac{1}{n} \leq \frac{4}{3} \qquad \forall n \geq 3$

$$\Rightarrow \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \leq \frac{16}{9}$$

Somit ist u_n ab dem 3. Folgeglied streng monoton fallend $\Rightarrow S = \frac{9}{8}$

$\Rightarrow a_n$ konvergiert gegen den Grenzwert $g = 0$

Divergenz

Definition

Eine Folge (a_n), die keinen Grenzwert $g \in \mathbb{R}$ besitzt (nicht kovergiert), wird **divergent** genannt.

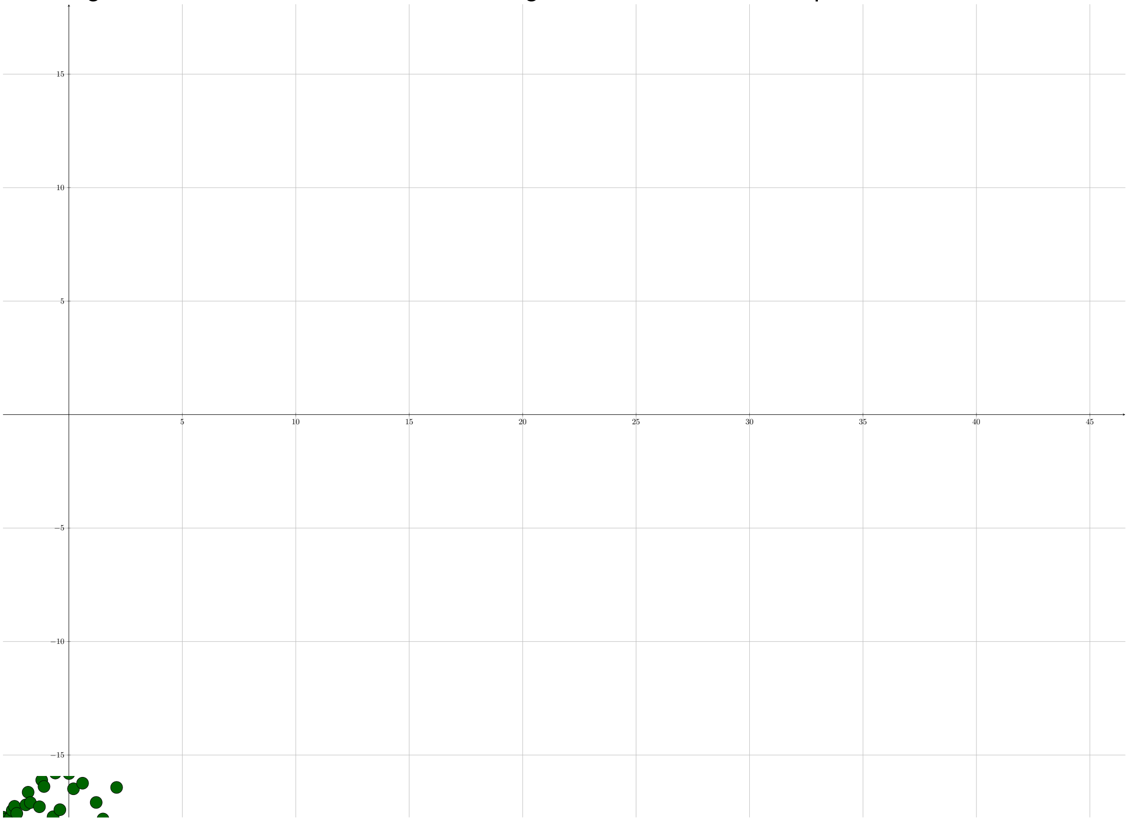
Kann man ihr trotzdem einen Grenzwert wie $\pm\infty$ zuordnen ist sie **bestimmt divergent**.
Besitzt die Folge überhaupt keinen Grenzwert, so heißt sie **unbestimmt divergent**.

Bemerkung:
Man nennt einen Grenzwert $g = +\infty$ oder $g = -\infty$ einen **uneigentlichen Grenzwert**.

Beispiel:

- Die Folge $u_n = -4n^5$ ist bestimmt divergent ($g = -\infty$).

- Die Folge $a_n = -n \sin n$ ist unbestimmt divergent, sie besitzt überhaupt keinen Grenzwert.



Epsilon-n0-Definition

Definition

$$\lim_{n\to\infty} a_n = g \;\Leftrightarrow\; \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \, : \, |a_n - g| < \varepsilon$$

Strategie:

- den Ausdruck $|a_n - g|$ vereinfachen
- die Ungleichung $|a_n - g| < \varepsilon$ zu einer Ungleichung der Form $n >$ ... umformen.
- man hat jetzt die Bedingung für n, n_0 ist das erste Glied, dass sie erfüllt.
- Beweis führen: sei $n \geq n_0$ beliebig, dann ist $|a_n - g| =$ ... $< \varepsilon$.

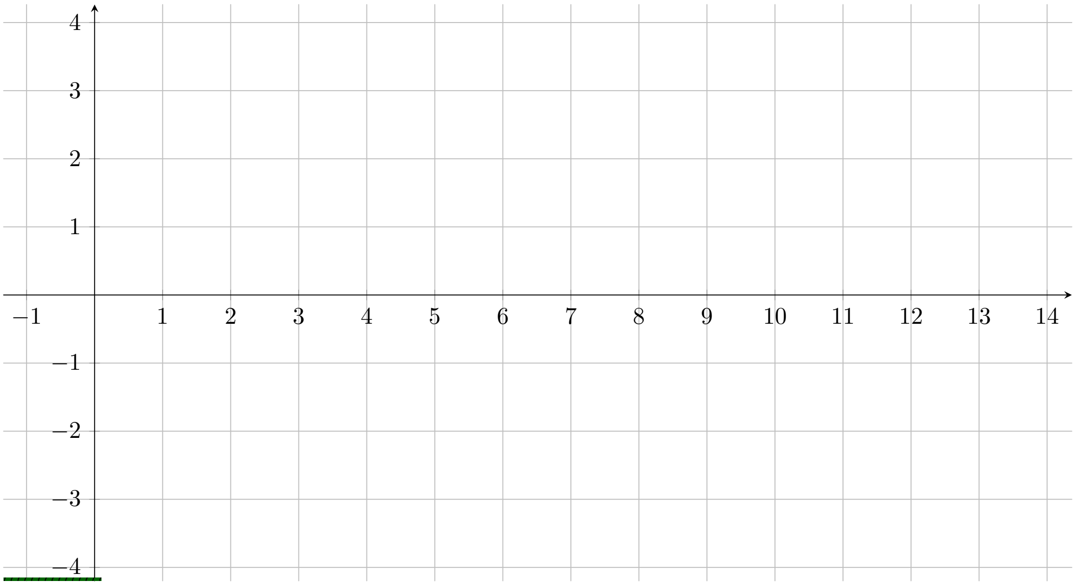
Bemerkung:
Wenn ein bestimmtes ε angegeben ist, dann verwendet man, um das gesuchte n_0 zu finden die Gaußklammern. Angewendet werden diese $\lfloor x \rfloor$ um eine Zahl abzurunden, diese $\lceil x \rceil$ um aufzurunden. In unserem Fall wollen wir eine ganze Zahl, für die die Ungleichung auf jeden Fall erfüllt wird, deshalb rundet man auf also Gaußklammer $\lceil x \rceil$.

Bemerkung:

Auch Divergenz kann so gezeigt werden:

$$\forall a \in \mathbb{R}\; \exists \varepsilon > 0\; \forall n_0 \in \mathbb{N}\; \exists n \geq n_0 \, : \, |a_n - a| \geq \varepsilon$$

Beispiel:
Die Folge $a_n = \dfrac{1-2n}{5+3n}$ wird untersucht, es wird geschätzt, dass (a_n) gegen $-\dfrac{2}{3}$ konvergiert.



- $$\begin{aligned} |a_n - g| &= \left| \frac{1-2n}{5+3n} + \frac{2}{3} \right| \\ &= \left| \frac{3(1-2n)+2(5+3n)}{3(5+3n)} \right| \\ &= \left| \frac{3-6n+10+6n}{15+9n} \right| \\ &= \left| \frac{13}{15+9n} \right| \\ &= \frac{13}{15+9n} \end{aligned}$$

- $$\begin{array}{cccc} & \frac{13}{15+9n} & < & \varepsilon \\ \Leftrightarrow & 13 & < & \varepsilon(15+9n) \\ \Leftrightarrow & 13-15\epsilon & < & 9n\varepsilon \\ \Leftrightarrow & n & > & \frac{13-15\varepsilon}{9\varepsilon} \end{array}$$

- $n_0 = \left\lceil \frac{13-15\varepsilon}{9\varepsilon} \right\rceil$

- Sei ε beliebig und $n \geq n_0$, dann gilt $|a_n - g| = \left| \frac{1-2n}{5+3n} + \frac{2}{3} \right| = \frac{13}{15+9n} < \epsilon$

Grenzwertsätze

Die Grenzwertsätze führen die Grenzwerte komplizierter Folgen auf einfachere Grenzwertbetrachtungen bekannter Folgen zurück.

Theorem

Seien u_n und v_n sind konvergente Folgen mit Grenzwerten U und V.

- Die Folge $u_n \pm v_n$ ist konvergent und besitzt den Grenzwert $U \pm V$.
- Die Folge $u_n \cdot v_n$ ist konvergent und besitzt den Grenzwert $U \cdot V$.
- Die Folge $\frac{u_n}{v_n}$ ist konvergent und besitzt für $V \neq 0$ den Grenzwert $\frac{U}{V}$.

Beispiel:

$$a_n = \frac{4\sqrt{n} - n}{\sqrt{n} - 2n} = \frac{\cancel{n}\left(\frac{4}{\sqrt{n}} - 1\right)}{\cancel{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} - 2\right)} = \frac{\frac{4}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2}$$

$$g = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4}{\sqrt{n}} - 1}{\frac{1}{\sqrt{n}} - 2} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{4}{\sqrt{n}} - \lim\limits_{n\to\infty} 1}{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} - \lim\limits_{n\to\infty} 2} = \frac{0-1}{0-2} = \frac{1}{2}$$