

# Kapitel 1

## REIHEN

by CLARA

### Definition

Eine Reihe ist eine Folge, deren Glieder die Partialsummen einer anderen Folge ist. Das bedeutet, dass das  $n$ -te Glied der Reihe, die Summe der ersten  $n$  Glieder einer anderen Folge ist. Man hat also:

- Mit Startglied  $a_0$ :  $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$
- Mit Startglied  $a_1$ :  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$
- Mit Startglied  $a_x$ :  $s_n = \sum_{i=x}^{x+n-1} a_i$

### Bemerkung:

In manchen Fällen steht  $s_n$  für die Partialsumme einer anderen Folge bis zum  $n$ -ten Glied. Dann gilt für ein beliebiges Startglied  $a_x$  der Folge:  $s_n = \sum_{i=x}^n a_i$

## 1.1 Arithmetische Reihen

### 1.1.1 Gauß'sche Summenformel

Die Gauß'sche Summenformel bezeichnet die Summe der  $n$  ersten natürlichen Zahlen, also:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

### Begründung:

	1	2	3	4	...	$n$
	$n$	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	1
$\sum$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	...	$n+1$

So sieht man also, dass wenn man die vorher bestimmte Reihe mit sich selbst addiert (ein Mal davon "falschrum"), man  $n$  Mal  $n+1$  bekommt. Um dann den Wert einer einzelnen Reihe zu bekommen teilt man durch zwei.

### Bemerkung:

Die Gauß'sche Summenformel ist ein Spezialfall der arithmetischen Reihe, ihre Glieder werden **Dreieckszahlen** genannt.

## Beweis

Um zu beweisen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = g(n)$$

gilt, reicht es aus,

$$g(n) - g(n-1) = f(n)$$

für alle positiven  $n$  und

$$g(0) = 0$$

zu zeigen. In der Tat trifft dies hier zu:

$$g(n) - g(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1-n+1)}{2} = \frac{n \cdot 2}{2} = n = f(n)$$

für alle  $n$

$$\text{und } g(0) = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$$

Quelle: Wikipedia (Gaußsche Summenformel)

□

## Bemerkung:

Auch ein Beweis durch vollständige Induktion ist möglich, dieser wäre sogar empfehlenswert, da er einfacher durchzuführen ist (Siehe Kapitel 8)

## 1.1.2 Allgemein

## Definition

Wenn  $s_n$  die Summe der ersten  $n$  Folgenglieder einer arithmetische Folge ist, heißt sie arithmetische Reihe.

Sei eine arithmetische Folge  $a$  mit Startglied  $a_x$  und  $s$ , die entsprechende Reihe, dann gilt

$$s_n = \frac{n \cdot (a_x + a_{x+n-1})}{2}$$

## Bemerkung:

1. Am häufigsten wird verwendet:

- Mit Startglied  $a_0$  :  $s_n = \frac{n \cdot (a_0 + a_{n-1})}{2}$
- Mit Startglied  $a_1$  :  $s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

2. Alternativ kann auch folgende Darstellung verwendet werden:

$$s_n = \frac{n \cdot (2a_x + (n-1) \cdot d)}{2}$$

## Beweis

Sei eine arithmetische Folge  $a$ , mit Startglied  $a_x$  und Differenz  $d$ , und  $s$ , die entsprechende Reihe, dann gilt

$$\begin{aligned}
 s_n &= a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + \dots + a_{x+n-1} \\
 &= a_x + (a_x + d) + (a_x + 2d) + \dots + (a_x + (n-1) \cdot d) \\
 &= n \cdot a_x + d + 2d + \dots + (n-1) \cdot d \\
 &= n \cdot a_x + (1 + 2 + \dots + (n-1)) \cdot d \quad (\text{Gau\ss}) \\
 &= n \cdot a_x + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d \\
 &= n \cdot \frac{2a_x + (n-1) \cdot d}{2} \\
 &= n \cdot \frac{a_x + \overbrace{a_x + (n-1) \cdot d}^{a_{x+n-1}}}{2} \\
 &= n \cdot \frac{a_x + a_{x+n-1}}{2}
 \end{aligned}$$

□

## 1.2 Geometrische Reihen

## Definition

Wenn  $s_n$  die Summe der ersten  $n$  Folgenglieder einer geometrischen Folge ist, hei\ss t sie geometrischen Reihe.

Sei eine geometrische Folge  $a$  mit Startglied  $a_x$  und  $s$ , die entsprechende Reihe, dann gilt

$$s_n = \sum_{i=x}^{n+x-1} a_i = a_x \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

## Bemerkung:

Am h\u00e4ufigsten wird verwendet:

- Mit Startglied  $a_0$  :  $s_n = a_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$
- Mit Startglied  $a_1$  :  $s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

## Beweis

Allgemein:

$$\begin{aligned}
 (1-q)(1+q+q^2+q^3+\dots+q^n) &= (1-q) + (q-q^2) + (q^2-q^3) + (q^3-q^4) + \dots + (q^n - q^{n+1}) \\
 &= 1 + (-q+q) + (-q^2+q^2) + (-q^3+q^3) + \dots + (-q^n+q^n) - q^{n+1} \\
 &= 1 - q^{n+1}
 \end{aligned}$$

Man hat also  $\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Entsprechend ergibt sich  $\sum_{k=0}^{n-1} q^k = \underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$

Somit gilt für eine Reihe  $s$ , die die Partialsumme einer geometrischen Folge  $a$ , mit Quotient  $q$  und Anfangsglied  $a_x$ , ist, folgendes:

$$\begin{aligned}
 s_n &= \sum_{i=x}^{x+n-1} a_i \\
 &= a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + \dots + a_{x+n-1} \\
 &= a_x + a_x \cdot q + a_x \cdot q^2 + \dots + a_x \cdot q^{n-1} \\
 &= a_x \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\
 &= a_x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\
 &= a_x \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}
 \end{aligned}$$

□