Schülerskript SMP

MATHEMATIK

8. März 2018

Clara, Bruno, Pascal, Rémy, ..., 1^{ere} SMP

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Folgen

Definition 1.0.0

Eine Funktion , bei der nur natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zugeordnet wird, nennt man Folge. Folgen können auch nur für Teilbereiche von $\mathbb{N}$ definiert sein.
$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnet die Folge, wobei $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$

1.1 Verschiedene Darstellungen

1.1.1 Explizite Darstellung

Definition 1.1.1

Wenn ein beliebiges Glied der Folge direkt berechenbar ist, ist ihre Darstellung explizit.

1.1.2 Rekursive Darstellung

Definition 1.1.2

Wenn für die Berechnung des $n-ten$ Gliedes einer Folge das $(n-1)-te$ Glied benötigt wird, ist ihre Darstellung rekursiv. In diesen Fällen braucht man immer ein Startglied, oft a_0 oder a_1.

Bemerkung
Für manche Folgen sind beide Darstellungen möglich, wobei die explizite Darstellung oftmals viel praktischer ist, da die Berechnung der Folgeglieder anhand der rekursiven Darstellung schnell sehr aufwendig wird.

Web-Diagramme

Hier handelt es sich um eine graphisches Verfahren, das dazu dient, das Verhalten einer Folge, deren Darstellung rekursiv ist, zu untersuchen.
Dazu muss man der rekursiven Folgenvorschrift eine Funktion $f(a_{n-1}) = a_n$ zuordnen, sodass - grob gesagt - "die Funktion das Gleiche mit x macht, dass die Folge macht, um von a_n auf a_{n+1} zu kommen. Zusätzlich zeichnet man in ein kartesisches Koordinatensystem die Hauptdiagonale ein (entspricht dem Graphen von $f(x) = x$).
Dann trägt man das erste Folgeglied auf der Abzissenachse ein und verbindet ihn mit der entsprechenden Funktion anhand eines vertikalen

Bemerkung
Dieses Verfahren kann aber ausschließlich bei rekusiven Folgen angewendet werden, bei denen keine zusätzliche Abhängigkeit von n vorliegt (Beispiel: $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 3 + 4 \cdot n$) oder die Rekursivitätsebene

den 1. Grad überschreitet, was bedeutet, dass a_n nicht nur in Abhängigkeit von a_{n-1} beschrieben wird, sondern zusätzlich von mindestens a_{n-2} (Beispiel: die Fibonacci-Folge).

1.2 Auffällige Folgen

1.2.1 Arithmetische Folgen

Definition 1.2.1

Eine Folge wird arithmetisch genannt, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:
   $a_n = a_{n-1} + d$
2. Explizite Darstellung:
   Mit Startglied a_0: $a_n = a_0 + n \cdot d$
   Mit Startglied a_1: $a_n = a_1 + (n-1) \cdot d$
   Mit Startglied a_x: $a_n = a_x + (n-x) \cdot d$

Bemerkung
Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist $a_n = a_p + (n-p) \cdot d; n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:
$a_n = a_{n-1} + 3; a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 + n \cdot 3$

1.2.2 Geometrische Folgen

Definition 1.2.2

Eine Folge wird geometrisch genannt, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:
   $a_n = a_{n-1} \cdot q$
2. Explizite Darstellung:
   Mit Startglied a_0: $a_n = a_0 \cdot q^n$
   Mit Startglied a_1: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
   Mit Startglied a_x: $a_n = a_x \cdot q^{n-x}$

Bemerkung
Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist $a_n = a_p \cdot q^{n-p}; n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:
$a_n = a_{n-1} \cdot 3; a_0 = 2 \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^n$

1.3 Klassifizierung von Folgen

1.3.1 Monotonie

1.3.2 Beschränktheit

1.3.3 Konvergenz

Definition

Epsilon-n0-Definition

Grenzwertsätze