

# *Schülerskript SMP*

Mach' dir keine Sorgen wegen deiner Schwierigkeiten mit der Mathematik.  
Ich kann dir versichern, daß meine noch größer sind.

---

*Brief an ein Schulmädchen, 1943*  
ALBERT EINSTEIN

Clara Schaefer  
Bruno Gelfort  
Pascal Borel  
Rémy Moll

1<sup>ere</sup> & Te SMP

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Folgen</b>	<b>4</b>
1.1	Verschiedene Darstellungen . . . . .	4
1.1.1	Explizite Darstellung . . . . .	4
1.1.2	Rekursive Darstellung . . . . .	4
1.2	Auffällige Folgen . . . . .	5
1.2.1	Arithmetische Folgen . . . . .	5
1.2.2	Geometrische Folgen . . . . .	5
1.3	Klassifizierung von Folgen . . . . .	6
1.3.1	Monotonie . . . . .	6
1.3.2	Beschränktheit . . . . .	6
1.3.3	Konvergenz . . . . .	6
1.4	Vollständige Induktion . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Reihen</b>	<b>7</b>
2.1	Arithmetische Reihen . . . . .	7
2.1.1	Gauß'sche Summenformel . . . . .	7
2.1.2	Allgemein . . . . .	8
2.2	Geometrische Reihen . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Funktionsuntersuchung</b>	<b>10</b>
3.1	Stetigkeit . . . . .	10
3.2	Differenzierbarkeit . . . . .	11
3.2.1	Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit . . . . .	11
3.3	Ableitungsregeln . . . . .	11
3.3.1	Produktregel . . . . .	11
3.3.2	Quotientenregel . . . . .	12
3.3.3	Kettenregel . . . . .	12
3.3.4	Tangente und Normale . . . . .	12
3.4	Vollständige Funktionsuntersuchung . . . . .	13
3.4.1	Definitionsbereich . . . . .	13
3.4.2	Achsenschnittpunkte . . . . .	13
3.4.3	Symmetrie . . . . .	13
3.4.4	Grenzwerte . . . . .	14
3.4.5	Asymptoten . . . . .	15
3.4.6	Monotonie . . . . .	15
3.4.7	Extremstellen . . . . .	16
3.4.8	Wendestellen . . . . .	16
3.4.9	Umkehrbarkeit . . . . .	16
3.4.10	Beispiel . . . . .	17
3.5	Funktionenscharen . . . . .	21
3.5.1	Beispiel . . . . .	21
<b>4</b>	<b>Trigonometrie</b>	<b>25</b>
4.1	Kurze Wiederholung . . . . .	25
4.2	Additions- und Verdopplungssätze . . . . .	26
4.3	Allgemeine Sinus- und Kosinussätze . . . . .	26
4.4	Sinusfunktionen . . . . .	26
4.4.1	Zusammengesetzte Sinusfunktionen . . . . .	27
4.5	Polarkoordinaten . . . . .	27
4.5.1	Umrechnung . . . . .	27
4.6	Beispiel einer Funktionsdiskussion . . . . .	27
4.6.1	Definitionsmenge . . . . .	27
4.6.2	Periodizität und Amplitude . . . . .	27
4.6.3	Nullstellen . . . . .	27

4.6.4	Ableitungen . . . . .	27
4.6.5	Extremstellen . . . . .	28
4.6.6	Wendestellen . . . . .	28
4.6.7	Schaubild . . . . .	29
4.6.8	Symmetrie . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Vektorielle Geometrie</b>	<b>31</b>
5.1	Vektoren . . . . .	31
5.1.1	Besondere Vektoren . . . . .	31
5.2	Basen und Erzeugendensystem . . . . .	32
5.2.1	Besondere Basen . . . . .	32
5.2.2	Basistransformation . . . . .	32
5.3	Winkel zwischen Vektoren . . . . .	33
5.3.1	Orientierte Winkel . . . . .	33
5.3.2	Rechnungen mit Winkeln . . . . .	34
5.4	Linearkombination . . . . .	35
5.5	Skalarprodukt . . . . .	35
5.6	Kreuzprodukt . . . . .	36
5.7	Geraden . . . . .	39
5.7.1	Darstellungen . . . . .	39
5.7.2	Lagebeziehungen zwischen Geraden . . . . .	40
5.7.3	Abstand zu einem Punkt . . . . .	42
5.7.4	Abstand zweier Geraden . . . . .	44
5.8	Ebenen . . . . .	45
5.8.1	Darstellungen . . . . .	45
5.8.2	Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden . . . . .	47
5.8.3	Lagebeziehungen zwischen Ebenen . . . . .	49
5.8.4	Winkel zwischen Ebenen (und Geraden) . . . . .	51
5.8.5	Abstand zu einem Punkt . . . . .	52
5.9	Kreise und Kugeln . . . . .	54
5.9.1	Kreise . . . . .	54
5.9.2	Kugeln . . . . .	54
5.10	Spatprodukt . . . . .	54
5.11	Dyadisches Produkt . . . . .	54
5.12	Sätze . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Komplexe Zahlen</b>	<b>55</b>
6.1	Einführung . . . . .	55
6.2	Der Körper der komplexen Zahlen . . . . .	55
6.3	Darstellung komplexer Zahlen . . . . .	56
6.3.1	Kartesische Darstellung . . . . .	56
6.3.2	Polarkoordinatendarstellung . . . . .	58
6.3.3	Umrechnung zwischen den Darstellungen . . . . .	59
<b>7</b>	<b>Statistik und Wahrscheinlichkeit</b>	<b>60</b>
7.1	Hypothesentests . . . . .	60
<b>8</b>	<b>Arithmetik</b>	<b>61</b>
8.1	Die vollständige Induktion . . . . .	61
<b>9</b>	<b>Matrizen</b>	<b>64</b>
9.1	Lineare Gleichungssysteme und Gaußalgorithmus . . . . .	64
9.2	LGS mit dem Taschenrechner lösen . . . . .	64
9.2.1	Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme . . . . .	64
9.2.2	Nicht eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme . . . . .	65
<b>10</b>	<b>Algorithmik</b>	<b>66</b>
10.1	Algorithmen und Programmierung . . . . .	66
10.1.1	Pseudocode . . . . .	66
10.1.2	Python . . . . .	66
10.2	Algorithmen und mathematische Anwendungen . . . . .	67
10.2.1	Iterationsverfahren . . . . .	67

<b>11</b>	<b>Integrale</b>	<b>69</b>
11.1	Einführung - Stammfunktionen . . . . .	69
11.2	Bestimmte Integrale . . . . .	69
11.3	Sätze über Integrale . . . . .	70
11.4	Integrationsregeln und -techniken . . . . .	72
11.4.1	Potenzregel . . . . .	72
11.4.2	Partielle Integration . . . . .	72
11.4.3	Substitution . . . . .	73
11.4.4	Substitution der Integrationsvariablen . . . . .	74
11.4.5	Partialbruchzerlegung . . . . .	74
11.4.6	Integrale von $e$ -Funktionen . . . . .	74
11.4.7	Integrale von $\ln()$ -Funktionen . . . . .	74
11.4.8	Integrale von (un)geraden Funktionen . . . . .	74
11.4.9	Integrale von periodischen Funktionen . . . . .	75
11.5	Flächen und Volumen mit Integralen berechnen . . . . .	75
11.5.1	Fläche zwischen einer Funktion und der $x_1$ -Achse . . . . .	75
11.5.2	Fläche zwischen zwei Funktionen . . . . .	76
11.5.3	Volumenangaben mittels Integralen . . . . .	77
11.6	Uneigentliche Integrale . . . . .	77
11.7	Merkswerte Integrale . . . . .	78
<b>12</b>	<b>Exponentialfunktionen</b>	<b>79</b>
12.1	Wiederholung: Potenzgesetze . . . . .	79
12.2	Die Eulersche Zahl ( $e$ ) . . . . .	79
12.2.1	Verschiedene Darstellungen . . . . .	80
12.2.2	Herleitung zur Zahl $e$ . . . . .	80
12.2.3	$e$ ist irrational . . . . .	81
12.3	Eigenschaften . . . . .	84
12.4	Basiswechsel . . . . .	85
12.5	Ableitungsregeln . . . . .	86
12.5.1	Aktivität . . . . .	88
<b>13</b>	<b>Logarithmen</b>	<b>89</b>
13.1	Eigenschaften . . . . .	89
13.2	Rechengesetze . . . . .	89
<b>14</b>	<b>Algebra</b>	<b>91</b>
<b>15</b>	<b>ANHANG: Physik</b>	<b>92</b>
15.1	La physique des particules . . . . .	92
15.2	Interaction gravitationnelle . . . . .	92
15.2.1	Le champ de gravitation . . . . .	92
15.3	Interaction électromagnétique . . . . .	93
15.3.1	Le champ électrique . . . . .	93
15.3.2	Le champ magnétique . . . . .	94
15.4	Mouvement, vitesse et accélération d'un système physique . . . . .	94
15.5	Les 3 lois de Newton . . . . .	94
15.5.1	1 <sup>ère</sup> loi . . . . .	94

### Definition 1.0.0

Eine Funktion, bei der nur natürlichen Zahlen eine reelle Zahl zugeordnet wird, nennt man Folge. Folgen können auch nur für Teilbereiche von  $\mathbb{N}$  definiert sein.  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  bezeichnet die Folge, wobei  $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$

### Bemerkung:

In einem Ausdruck muss das  $n$  immer dasselbe bleiben!

## 1.1 Verschiedene Darstellungen

### 1.1.1 Explizite Darstellung

#### Definition 1.1.1

Wenn ein beliebiges Glied der Folge direkt berechenbar ist, ist ihre Darstellung explizit.

### Beispiel:

1.  $a_n = 3^n \Rightarrow a_4 = 3^4 = 91$
2. Die Folge der  $n$ -ten positiven, ungeraden Zahl:  
 $a_n = 1 + 2 \cdot (n - 1) \Rightarrow$  Die 8. positive, ungerade Zahl ist  $a_8 = 1 + 2 \cdot (8 - 1) = 15$

### 1.1.2 Rekursive Darstellung

#### Definition 1.1.2

Wenn für die Berechnung des  $n$ -ten Gliedes einer Folge das  $(n - 1)$ -te Glied benötigt wird, ist ihre Darstellung rekursiv. In diesen Fällen braucht man immer ein Startglied, oft  $a_0$  oder  $a_1$ .

### Beispiel:

1.  $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 2; a_0 = 5$   
 $a_1 = 3 \cdot a_{1-1} + 2 = 3 \cdot a_0 + 2 = 3 \cdot 5 + 2 = 17$   
 $a_2 = 3 \cdot a_{2-1} + 2 = 3 \cdot a_1 + 2 = 3 \cdot 17 + 2 = 53$   
 $a_3 = 3 \cdot a_{3-1} + 2 = 3 \cdot a_2 + 2 = 3 \cdot 53 + 2 = 159$   
und so weiter...
2. Die Folge der  $n$ -ten positiven, ungeraden Zahl:  
 $a_n = a_{n-1} + 2; a_1 = 1$

### Bemerkung:

Für manche Folgen sind beide Darstellungen möglich, wobei die explizite Darstellung oftmals viel praktischer ist, da die Berechnung der Folgeglieder anhand der rekursiven Darstellung schnell sehr aufwendig wird.

### GTR-Tipp:

Wie man im GTR macht

## Web-Diagramme

Hier handelt es sich um ein graphisches Verfahren, das dazu dient, das Verhalten einer Folge, deren Darstellung rekursiv ist, zu untersuchen.

Dazu muss man der rekursiven Folgenrechtschrift eine Funktion  $f(a_{n-1}) = a_n$  zuordnen, sodass - grob gesagt - "die Funktion das Gleiche mit  $x$  macht, was die Folge macht, um von  $a_n$  auf  $a_{n+1}$  zu kommen. Zusätzlich zeichnet man in ein kartesisches Koordinatensystem die Hauptdiagonale ein (entspricht dem Graphen von  $f(x) = x$ ). Dann trägt man das erste Folgenglied auf die Abszissenachse ein und verbindet ihn mit der entsprechenden Funktion anhand eines vertikalen

### Bemerkung:

Dieses Verfahren kann aber ausschließlich bei rekursiven Folgen angewendet werden, bei denen keine zusätzliche Abhängigkeit von  $n$  vorliegt (Beispiel:  $a_n = 3 \cdot a_{n-1} + 3 + 4 \cdot n$ ) oder die Rekursivitätsebene den 1. Grad überschreitet, was bedeutet, dass  $a_n$  nicht nur in Abhängigkeit von  $a_{n-1}$  beschrieben wird, sondern zusätzlich von mindestens  $a_{n-2}$  (Beispiel: die Fibonacci-Folge).

### GTR-Tipp:

Verwendung mit dem GTR

## 1.2 Auffällige Folgen

### 1.2.1 Arithmetische Folgen

#### Definition 1.2.1

Eine Folge wird arithmetisch genannt, wenn die Differenz zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:

$$a_n = a_{n-1} + d$$

2. Explizite Darstellung:

Mit Startglied  $a_0$ :  $a_n = a_0 + n \cdot d$

Mit Startglied  $a_1$ :  $a_n = a_1 + (n - 1) \cdot d$

Mit Startglied  $a_x$ :  $a_n = a_x + (n - x) \cdot d$

### Bemerkung:

Letzteres gilt auch für beliebige Folgenglieder, also ist  $a_n = a_p + (n - p) \cdot d$ ;  $n, p \in \mathbb{N}$

### Beispiel:

$$a_n = a_{n-1} + 3; a_0 = 0 \Leftrightarrow a_n = 0 + n \cdot 3$$

### Bemerkung:

Jedes Folgenglied einer solchen Folge ist das arithmetische Mittel seines Vorgängers und Nachgängers:  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$

### 1.2.2 Geometrische Folgen

#### Definition 1.2.2

Eine Folge wird geometrisch genannt, wenn der Quotient zweier aufeinander folgender Glieder konstant ist.

1. Rekursive Darstellung:

$$a_n = a_{n-1} \cdot q$$

2. Explizite Darstellung:

Mit Startglied  $a_0$ :  $a_n = a_0 \cdot q^n$

Mit Startglied  $a_1$ :  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

Mit Startglied  $a_x$ :  $a_n = a_x \cdot q^{n-x}$

Bemerkung:

Letzteres gilt auch für beliebige Folgeglieder, also ist  $a_n = a_p \cdot q^{n-p}; n, p \in \mathbb{N}$

Beispiel:

$$a_n = a_{n-1} \cdot 3; a_0 = 2 \Leftrightarrow a_n = 2 \cdot 3^n$$

Bemerkung:

Jedes Folgeglied einer solchen Folge ist das geometrische Mittel seines Vorgängers und Nachgängers:

$$a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

## 1.3 Klassifizierung von Folgen

### 1.3.1 Monotonie

### 1.3.2 Beschränktheit

### 1.3.3 Konvergenz

Definition

Epsilon-n0-Definition

Grenzwertsätze

## 1.4 Vollständige Induktion

### Definition 2.0.0

Eine Reihe ist eine Folge, deren Glieder die Partialsummen einer anderen Folge ist. Das bedeutet, dass das  $n$ -te Glied der Reihe, die Summe der ersten  $n$  Glieder einer anderen Folge ist. Man hat also:

1. Mit Startglied  $a_0$ :  $s_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i$

2. Mit Startglied  $a_1$ :  $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$

3. Mit Startglied  $a_x$ :  $s_n = \sum_{i=x}^{x+n-1} a_i$

### Bemerkung:

In manchen Fällen steht  $s_n$  für die Partialsumme einer anderen Folge bis zum  $n$ -ten Glied. Dann gilt für ein beliebiges Startglied  $a_x$  der Folge:  $s_n = \sum_{i=x}^n a_i$

## 2.1 Arithmetische Reihen

### 2.1.1 Gauß'sche Summenformel

Die Gauß'sche Summenformel bezeichnet die Summe der  $n$  ersten natürlichen Zahlen, also:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

### Begründung:

1	2	3	4	...	$n$	
$n$	$n-1$	$n-2$	$n-3$	...	1	
$\sum$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	$n+1$	...	$n+1$

So sieht man also, dass wenn man die vorher bestimmte Reihe mit sich selbst addiert (ein Mal davon "falschrum"), man  $n$  Mal  $n+1$  bekommt. Um dann den Wert einer einzelnen Reihe zu bekommen teilt man durch zwei.

### Bemerkung:

Die Gauß'sche Summenformel ist ein Spezialfall der arithmetischen Reihe, ihre Glieder werden **Dreieckszahlen** genannt.



## Beweis

Um zu beweisen, dass für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = g(n)$$

gilt, reicht es aus,

$$g(n) - g(n-1) = f(n)$$

für alle positiven  $n$  und

$$g(0) = 0$$

zu zeigen. In der Tat trifft dies hier zu:

$$g(n) - g(n-1) = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2} = \frac{n(n+1-n+1)}{2} = \frac{n \cdot 2}{2} = n = f(n)$$

für alle  $n$

$$\text{und } g(0) = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$$

Quelle: Wikipedia (Gaußsche Summenformel)

□

## Bemerkung:

Auch ein Beweis durch vollständige Induktion ist möglich, dieser wäre sogar empfehlenswert, da er einfacher durchzuführen ist: (Ziehe Kapitel 8)

## 2.1.2 Allgemein

## Definition 2.1.2

Wenn  $s_n$  die Summe der ersten  $n$  Folgenglieder einer arithmetische Folge ist, heißt sie arithmetische Reihe.

Sei eine arithmetische Folge  $a$  mit Startglied  $a_x$  und  $s$ , die entsprechende Reihe, dann gilt

$$s_n = \frac{n \cdot (a_x + a_{x+n-1})}{2}$$

## Bemerkung:

1. Am häufigsten wird verwendet:

- Mit Startglied  $a_0$  :  $s_n = \frac{n \cdot (a_0 + a_{n-1})}{2}$

- Mit Startglied  $a_1$  :  $s_n = \frac{n \cdot (a_1 + a_n)}{2}$

2. Alternativ kann auch folgende Darstellung verwendet werden:

$$s_n = \frac{n \cdot (2a_x + (n-1) \cdot d)}{2}$$

## Beweis

Sei eine arithmetische Folge  $a$ , mit Startglied  $a_x$  und Differenz  $d$ , und  $s$ , die entsprechende Reihe, dann gilt

$$s_n = a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + \dots + a_{x+n-1}$$

$$= a_x + (a_x + d) + (a_x + 2d) + \dots + (a_x + (n-1) \cdot d)$$

$$= n \cdot a_x + d + 2d + \dots + (n-1) \cdot d$$

$$= n \cdot a_x + (1 + 2 + \dots + (n-1)) \cdot d \quad (\text{Gauß})$$

$$= n \cdot a_x + \frac{(n-1) \cdot n}{2} \cdot d$$

$$= n \cdot \frac{2a_x + (n-1) \cdot d}{2}$$

$$= n \cdot \frac{a_x + \overbrace{a_x + (n-1) \cdot d}^{a_{x+n-1}}}{2}$$

$$= n \cdot \frac{a_x + a_{x+n-1}}{2}$$

□

## 2.2 Geometrische Reihen

### Definition 2.2.0

Wenn  $s_n$  die Summe der ersten  $n$  Folgenglieder einer geometrischen Folge ist, heißt sie geometrischen Reihe.

Sei eine geometrische Folge  $a$  mit Startglied  $a_x$  und  $s$ , die entsprechende Reihe, dann gilt

$$s_n = \sum_{i=x}^{n+x-1} a_i = a_x \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

### Bemerkung:

Am häufigsten wird verwendet:

- Mit Startglied  $a_0$  :  $s_n = a_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$
- Mit Startglied  $a_1$  :  $s_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q}$

### Beweis

#### Allgemein:

$$\begin{aligned} & (1 - q)(1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n) \\ &= (1 - q) + (q - q^2) + (q^2 - q^3) + (q^3 - q^4) + \dots + (q^n - q^{n+1}) \\ &= 1 + (-q + q) + (-q^2 + q^2) + (-q^3 + q^3) + \dots + (-q^n + q^n) - q^{n+1} \\ &= 1 - q^{n+1} \end{aligned}$$

$$\text{Man hat also } \sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$\text{Entsprechend ergibt sich } \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \underbrace{1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^{n-1}}_{n \text{ Summanden}} = \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

Somit gilt für eine Reihe  $s$ , die die Partialsumme einer geometrischen Folge  $a$ , mit Quotient  $q$  und Anfangsglied  $a_x$ , ist, folgendes:

$$\begin{aligned} s_n &= \sum_{i=x}^{x+n-1} a_i \\ &= a_x + a_{x+1} + a_{x+2} + \dots + a_{x+n-1} \\ &= a_x + a_x \cdot q + a_x \cdot q^2 + \dots + a_x \cdot q^{n-1} \\ &= a_x \cdot (1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \\ &= a_x \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k \\ &= a_x \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

□

---

# FUNKTIONSUNTERSUCHUNG

---

Die **Analysis** (griechisch *análysis*, deutsch „Auflösung“) ist ein Teilgebiet der Mathematik. Die Untersuchung von reellen und komplexen Funktionen hinsichtlich Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Integrierbarkeit zählt zu den Hauptgegenständen der Analysis. Die hierzu entwickelten Methoden sind in allen Natur- und Ingenieurwissenschaften von großer Bedeutung.

### 3.1 Stetigkeit

#### Definition 3.1.0

Eine Funktion ist stetig an der Stelle  $x_0$ , wenn:

1.  $x_0 \in D$
2.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  existiert
3.  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x) = f(x_0)$

Stetigkeit ist eine lokale Eigenschaft. Die Funktion  $f$  heißt dann stetig, wenn sie an jeder Stelle ihrer Definitionsmenge stetig ist.

**Bemerkung:**

Ist  $f$  stetig und  $I \subset \mathbb{R}$  ein reelles Intervall, dann ist  $f(I)$  ebenfalls ein Intervall. Ist  $f$  zudem streng monoton, so ist die Umkehrfunktion  $f^{-1}$  ebenfalls stetig.

**Bemerkung:**

Stetige Funktionen haben sehr angenehme Eigenschaften, die intuitiv mit der ”Definition” des Stiftes, welcher beim Zeichnen des Funktionsgraphen nicht angehoben wird, im Zusammenhang stehen.

So sagt der **Zwischenwertsatz** aus, dass eine reelle, im Intervall  $[a; b]$  stetige Funktion  $f$  jeden Wert zwischen  $f(a)$  und  $f(b)$  annimmt.

Haben  $a$  und  $b$  zudem verschiedene Vorzeichen, so verspricht der Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle von  $f$  in diesem abgeschlossenen Intervall. Dieser Sonderfall ist als **Nullstellensatz** von Bolzano bekannt.

#### Definition 3.1.0

**Zwischenwertsatz:**

Ist  $f : [a; b] \Rightarrow$  eine stetige reelle Funktion die auf einem Intervall definiert ist, dann existiert zu **jedem**  $s \in [f(a); f(b)]$  bzw.  $[f(b); f(a)]$  (vom Vorzeichen der Funktionswerte abhängig) **ein**  $c \in [a; b]$  mit  $f(c) = s$

#### Stetige Fortsetzungen

beim Vereinfachen von gebrochenrationalen Funktionen ist Vorsicht geboten, denn eine hebbare Definitionslücke ”aufzuheben” verändert den Definitionsbereich der Funktion. Die daraus resultierende Funktion wird **stetige Fortsetzung** genannt.

## 3.2 Differenzierbarkeit

### Definition 3.2.0

Eine Funktion ist differenzierbar an der Stelle  $x_0 \in D$ , wenn der beiseitige Grenzwert des Differenzenquotienten für  $h \rightarrow 0$  existiert. Anschaulich soll Die Funktion links und rechts des  $x_0$  die selbe Ableitung haben.

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Dieser Grenzwert ist die **Ableitung** von  $f$  an der Stelle  $x_0$ .

Die Funktion heißt differenzierbar, wenn sie  $\forall x \in D$  differenzierbar ist.

Die Funktion  $f(x) = |x|$  ist nicht differenzierbar, da bei der Stelle  $x_0 = 0$  der linksseitige Grenzwert des Differenzenquotienten ( $\lim_{h \rightarrow 0^-} f'(x_0) = -1$ ) nicht mit dem rechtsseitigen Grenzwert (1) übereinstimmt.

### 3.2.1 Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit

Ist eine Funktion  $f$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar, so ist sie an dieser Stelle auch stetig. Die Umkehrung gilt erst einmal nicht, aber es gibt eine verneinende Aussage: Ist  $f$  an der Stelle  $x_0$  nicht stetig, so ist sie hier auch nicht differenzierbar.

Ist eine Funktion differenzierbar und ist ihre Ableitung zusätzlich stetig, dann wird sie **Stetig differenzierbar** genannt.

## 3.3 Ableitungsregeln

Ein Ableitungswert gibt die Steigung an einem bestimmten Punkt an. Im Allgemeinen und zum Beweisen wird der Differenzenquotient benötigt, um eine Ableitungsfunktion zu definieren, es geht aber in vielen Fällen schneller.

### 3.3.1 Produktregel

#### Definition 3.3.1

Sind die Funktionen  $u$  und  $v$  an der Stelle  $x_0 \in D$  differenzierbar, dann ist die Funktion  $f(x) = u(x) \cdot v(x)$  bei  $x_0$  auch differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0)$$

Beweis

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0 + h) + u(x_0)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0 + h)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0)v(x_0 + h) - u(x_0)v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} v(x_0 + h) \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} u(x_0) \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \\ &= v(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} + u(x_0) \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \\ &= u'(x_0)v(x_0) + u(x_0)v'(x_0) \end{aligned}$$

□

### 3.3.2 Quotientenregel

#### Definition 3.3.2

Sind die Funktionen  $u$  und  $v$  an der Stelle  $x_0 \in D$  differenzierbar, dann ist die Funktion  $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$  bei  $x_0$  auch differenzierbar und es gilt:

$$f'(x_0) = \frac{u'(x_0) \cdot v(x_0) - u(x_0) \cdot v'(x_0)}{v^2(x_0)}$$

#### Beweis

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x_0 + h)}{v(x_0 + h)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x_0 + h)}{v(x_0 + h)} - \frac{u(x_0)}{v(x_0)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{u(x_0 + h)v(x_0)}{v(x_0 + h)v(x_0)} - \frac{u(x_0)v(x_0 + h)}{v(x_0)v(x_0 + h)}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + h)}{v(x_0 + h)v(x_0)h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + h) + u(x_0)v(x_0) - u(x_0)v(x_0)}{v(x_0 + h)v(x_0)h} \quad \square \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h)v(x_0) - u(x_0)v(x_0 + h)}{h} \cdot \frac{v(x_0 + h)v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot \frac{v(x_0 + h)v(x_0)}{v(x_0) - u(x_0)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h) - u(x_0)}{h} \cdot \frac{v(x_0 + h)v(x_0)}{v(x_0)v(x_0)} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h) - v(x_0)}{h} \\ &= \frac{u'(x_0)v(x_0) - u(x_0)v'(x_0)}{(v(x_0))^2} \end{aligned}$$

### 3.3.3 Kettenregel

#### Definition 3.3.3

Die Funktion  $v$  sei an der Stelle  $x_0$  differenzierbar und die Funktion  $u$  an der Stelle  $v(x_0)$ . Dann ist die Funktion  $f = u \circ v$  mit der Gleichung  $f(x) = u(v(x))$  an der Stelle  $x_0$  differenzierbar. Es gilt:

$$f'(x_0) = v'(x_0) \cdot u'(v(x_0))$$

### 3.3.4 Tangente und Normale

#### Definition 3.3.4

Ist die Funktion  $f$  differenzierbar an der Stelle  $x_0$ , dann hat die **Tangente** an dem Graphen von  $f$  die Steigung  $a = f'(x_0)$  und den Y-Achsenabschnitt  $b = -f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$ . Daraus ergibt sich die Tangentengleichung:

$$T_{x_0}(x) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Eine Merkhilfe dazu ist das Wort „Fuxufu“, wobei „u“ dem  $x_0$  entspricht.

Die **Normale** an der Stelle  $x_0$  bezeichnet die Gerade, die genau senkrecht zur Tangente steht und diese im Berührungspunkt des Graphen schneidet.

$$N_{x_0}(x) = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

### 3.4 Vollständige Funktionsuntersuchung

#### 3.4.1 Definitionsbereich

Am Anfang muss der Definitionsbereich angegeben werden, um eventuelle Divisionen durch null zu vermeiden. Man achte dabei auch auf hebbare Definitionslücken (siehe "Stetigkeit")

#### 3.4.2 Achsenschnittpunkte

Es gibt zwei Arten von Achsenschnittpunkten:

1. X-Achsenschnittpunkte (Nullstellen), die man mit der notwendigen und hinreichenden Bedingung für Nullstellen  $f(x) = 0$  herausfindet
2. Y-Achsenschnittpunkt, den man durch einsetzen bekommt:  $f(0)$

#### 3.4.3 Symmetrie

##### Y-Achsensymmetrie

Durch Lösung der Gleichung  $f(x) = f(-x)$  findet man heraus ob die Funktion achsensymmetrisch ist. Zudem ist die Funktion dann achsensymmetrisch, wenn nur gerade Exponenten vorhanden sind. Die Funktion nennt man **gerade**.

##### Symmetrie zum Origo

Durch Lösung der Gleichung  $f(x) = -f(-x)$  findet man heraus ob die Funktion punktsymmetrisch ist. Zudem ist die Funktion dann punktsymmetrisch, wenn nur ungerade Exponenten vorhanden sind. Die Funktion nennt man **ungerade**.

##### Symmetrie zu einem beliebigen Punkt

###### Definition 3.4.3

Symmetrie zu einem Punkt liegt vor, wenn für den Punkt  $P(x_0|y_0)$  gilt:

$$f(x_0 + h) - y_0 = -f(x_0 - h) + y_0$$

###### Beispiel:

$$f(x) = \frac{x}{x-1}$$

Aus dem Schnittpunkt der Asymptoten kann man vermuten, dass  $f(x)$  achsensymmetrisch zum Punkt  $P(1|1)$  ist.

$$\left. \begin{aligned} \Rightarrow f(x_0 + h) - y_0 &= \frac{1+h}{1+h-1} - 1 = \frac{1}{h} \\ \Rightarrow -f(x_0 - h) + y_0 &= -\left[\frac{1-h}{1-h-1} + 1\right] = \frac{1}{h} \end{aligned} \right\} \frac{1}{h} = \frac{1}{h} \text{ Die Funktion } f \text{ ist zu } P \text{ symmetrisch.}$$

### 3.4.4 Grenzwerte

#### Definition 3.4.4

Das Symbol  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$  mit  $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$  ( $\pm\infty$  eingeschlossen) bezeichnet den Limes der reellen Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  für den Grenzübergang von  $x$  gegen eine Stelle  $x_0$ , wobei  $x_0$  nicht unbedingt in der Definitionsmenge von  $f$  enthalten sein muss.

Eine Zahl  $g \in \overline{\mathbb{R}}$  ist der Grenzwert einer Funktion  $f : D \rightarrow \mathbb{R}$  für  $x \rightarrow x_0$ , falls für jede Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit Folgengliedern aus  $D$  und Grenzwert  $x_0$  die Folge  $(f(a_n))_{n \in \mathbb{N}}$  den Grenzwert  $g$  hat.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g \Leftrightarrow \forall (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ mit } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = x_0 : \lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = g$$

#### Definition 3.4.4

Regel von l'Hospital: für Grenzwerte des Typs  $0/0$  und  $\infty/\infty$

Seien zwei Funktionen  $f$  und  $g$  differenzierbar und eine Zahl  $x_0 : g'(x_0) \neq 0$  und gelte entweder

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \quad \text{ODER} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$$

dann gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

#### Bemerkung:

1. Falls die Funktionsvorschrift nicht direkt ein Bruch ist (siehe 2. Beispiel) sollte man diese erst zu einem Bruch umformen, um mit der Hospital-Regel fortfahren zu können.
2. ACHTUNG: Die Hospital-Regel ist nicht umkehrbar!

#### Beispiel:

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad x_0 = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\cos(x)}{1} = 1$$

$$g(x) = x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \quad \text{für } x \rightarrow \infty \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \log\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x-1} \cdot (-2)}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2}{\frac{x^2-1}{x^2}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^2}{x^2-1} = 2 \end{aligned}$$

### 3.4.5 Asymptoten

Eine Asymptote ist eine Gerade oder Kurve, die sich dem Graphen einer Funktion immer weiter annähert. Dabei unterscheidet man verschiedene Fälle:

#### Definition 3.4.5

1. **Senkrechte Asymptote:** Hat  $f$  an der Stelle  $x_0$  eine Polstelle, und gilt:

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \pm\infty$$

dann ist die Gerade  $x = x_0$  eine senkrechte Asymptote von  $f$ .

2. **Waagerechte Asymptote:** Konvergiert  $f$  für  $x \rightarrow \infty$  gegen eine reelle Zahl  $g \in \mathbb{R}$ , das heißt

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = g.$$

Die Gerade  $y = g$  ist die **waagerechte** Asymptote von  $f$ . Das Gleiche gilt für  $\lim_{x \rightarrow -\infty}$ .

Bei gebrochenrationalen Funktionen ist dies der Fall, wenn der Zählergrad kleiner (dann ist  $g = 0$ ) oder gleich dem Nennergrad  $m$  ist.

3. **Schräge Asymptote:** Sie ist eine Gerade ( $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ), der sich  $f$  mit  $|x| \rightarrow \infty$  beliebig annähert:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ oder } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

Bei einer gebrochenrationalen Funktion ist der "Fehlergrad", das heißt der Abstand von  $g$  zu  $f$  durch den Rest der Polynomdivision von Zähler mit Nenner gegeben.

4. **Asymptotische Kurven** Indem man in der Definition der schrägen Asymptote auch Polynome zulässt, erhält man Näherungskurven, die die gleiche Limesbedingung erfüllen müssen:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - P(x)] = 0 \text{ oder } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - P(x)] = 0$$

Diese begegnen einen bei gebrochenrationalen Funktion mit  $n > m + 1$ .

### 3.4.6 Monotonie

#### Definition 3.4.6

Eine stetige Funktion  $f$  mit  $a, b \in I \subset D_f$  ist :

1. ... auf dem Intervall  $I$  monoton wachsend, wenn  $\forall a < b : f(a) \leq f(b)$
2. ... auf dem Intervall  $I$  monoton fallend, wenn  $\forall a < b : f(a) \geq f(b)$

Wenn die Ordnungsrelation strikt sind, dann wird die Funktion als **streng monoton** bezeichnet.

Die Funktion  $f$  hat eine Ableitungsfunktion  $f'$ . Falls  $f$ ...

1. monoton wachsend auf  $I$  ist, dann ist  $f'(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in I$
2. monoton fallend auf  $I$  ist, dann ist  $f'(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in I$
3. konstant auf  $I$  ist, dann ist  $f'(x) = 0$ ,  $\forall x \in I$

Beim Aufstellen der Monotonietabelle sind Definitivlücken zu beachten.

Es handelt sich dabei um eine Tabelle, die die Definitionsmenge in Intervalle mit monotonen Steigungsverhalten unterteilt wird. Das Monotonieverhalten verändert sich an Extrem- oder Polstellen.

#### Bemerkung:

$f$  sei eine Funktion...

- dann ist die Zahl  $S$  obere Schranke, wenn  $\forall x : f(x) \leq S$ .  $f$  heißt in diesem Fall nach oben beschränkt. Die



in diesem Fall kleinstmögliche Zahl wird **Supremum** genannt:  $\sup f$

- dann ist die Zahl  $s$  untere Schranke, wenn  $\forall x : f(x) \geq s$ .  $f$  ist in diesem Fall nach unten beschränkt. Die in diesem Fall größtmögliche Zahl wird **Infimum** genannt:  $\inf f$

### 3.4.7 Extremstellen

Für die Bestimmung von Extremstellen gilt es zwei Bedingungen zu überprüfen:

Hat an einer Stelle  $x_0$  die erste Ableitung von  $f$  eine Nullstelle, also  $f'(x_0) = 0$ , dann handelt es sich um eine Extremstelle **oder** um einen Sattelpunkt. Diese Bedingung ist die notwendige Bedingung für eine Extremstelle. Mit ihr ist eine grobe Kategorisierung gemacht, eine Extremstelle ist noch nicht bewiesen.

Hat  $f'$  an der Stelle  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel oder ist  $f''(x_0) \neq 0$ , dann ist der Sonderfall des Wendepunktes ausgeschlossen und es handelt sich um eine Extremstelle. Es gilt also:

$$\exists! x_0 \in I \subseteq D_f : f(x_0) \geq \text{oder} \leq f(x)$$

Der Punkt  $P(x_0|f(x_0))$  heißt Hochpunkt oder Tiefpunkt. Diese Bedingung ist die hinreichende Bedingung für eine Extremstelle.

### 3.4.8 Wendestellen

Für die Bestimmung von Wendestellen gilt es auch zwei Bedingungen zu überprüfen:

Hat an einer Stelle  $x_0$  die zweite Ableitung von  $f$  eine Nullstelle, also  $f''(x_0) = 0$ , dann handelt es sich um eine Wendestelle **oder** um einen geraden Abschnitt. Diese Bedingung ist die notwendige Bedingung für eine Wendestelle.

Hat  $f''$  an der Stelle  $x_0$  einen Vorzeichenwechsel oder ist  $f'''(x_0) \neq 0$ , dann ist der Sonderfall ausgeschlossen und es handelt sich um eine Wendestelle. Der Punkt  $W(x_0|f(x_0))$  heißt Wendepunkt. Diese Bedingung ist die hinreichende Bedingung für eine Wendestelle.

Bemerkung:

Eine Hilfsformel, die den Zusammenhang zwischen den verschiedenen Ableitungen einfach darstellt ist die NEW-Regel:

N = Nullstellen  
E = Extremstellen  
W = Wendestellen

$f$	$N$	$E$	$W$		
$f'$		$N$	$E$	$W$	
$f''$			$N$	$E$	$W$

### 3.4.9 Umkehrbarkeit

#### Definition 3.4.9

Sei  $f$  eine Funktion mit  $f : D_f \mapsto W_f$  mit  $x \mapsto y$ , dann ist die Funktion genau dann eindeutig umkehrbar, wenn es zu jedem  $y \in W_f$  **genau ein**  $x \in D_f$  existiert.

Wenn diese Funktion umkehrbar ist, dann existiert auch eine Umkehrfunktion  $\bar{f}(x)$  die jedem  $x \in W_f$  genau ein  $y \in D_f$  zuordnet, analog zur Funktion, nur andersrum, also mit  $y \mapsto x$

Es gilt:  $D_{\bar{f}} = W_f$  und  $W_{\bar{f}} = D_f$

Bemerkung:

Es gibt viele Funktionen die nicht in ihren vollständigen Definitionsmengen umkehrbar sind, zum Beispiel  $x^n$  mit  $n$  als gerade Zahl,  $\sin(x)$ ,  $\tan(x)$ , und viele mehr. Hier beschränkt man die Funktion auf ein bestimmtes

Intervall, um sie umkehren zu können.

Die Funktion  $f(x) = x^2$  mit  $D_f = \mathbb{R}$  und  $W_f = \mathbb{R}_0^+$  hat für  $y = 4$  zwei Urbilder:  $-2$  und  $2$ . Beschränkt man die Funktion auf  $D_f = \mathbb{R}_0^+$ , ist sie umkehrbar und die Umkehrfunktion lautet  $\bar{f}(x) = \sqrt{x}$

### Definition 3.4.9

Umkehrregel oder Inversenregel

Sei  $f$  eine bijektive (also umkehrbare), differenzierbare, reelle Funktion bei der gilt:  $f'(x) \neq 0$ , dann ist die Umkehrfunktion auch differenzierbar mit der Ableitung

$$\bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(\bar{f}(y))} = \frac{1}{f'(x)}$$

Beweis

$$\Rightarrow \quad \bar{f}(f(x)) = x \quad | \text{ ableiten}$$

$$\Leftrightarrow \bar{f}'(f(x)) \cdot f'(x) = 1$$

$$\Leftrightarrow \bar{f}'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)} \quad \square$$

$$\Leftrightarrow \bar{f}'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad | \text{ mit } y = f(x)$$

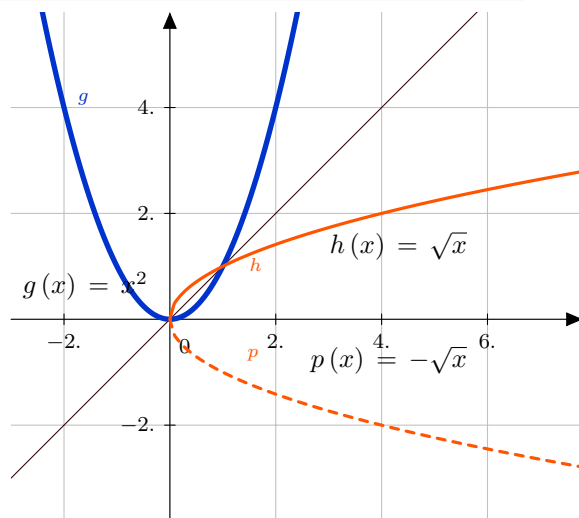
Bemerkung:

Anschaulich ist eine Umkehrfunktion eine Axenspiegelung entlang der Winkelhalbierenden am Ursprung, also dem Funktionsgraphen von  $f(x) = x$

Beispiel:

Die Funktion  $f(x) = x^2$  mit  $D_f = \mathbb{R}_0^+$  ist umzukehren. Leichtes Spiel...

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= x^2 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{y} & \text{Variablen tauschen} \\ \Leftrightarrow y &= \sqrt{x} \\ \Rightarrow \bar{f}(x) &= \sqrt{x} \end{aligned}$$



### 3.4.10 Beispiel

$$f(x) = \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 1} = \frac{(2x - 2)^2}{2x - 1} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$f'(x) = \frac{(8x - 8)(2x - 1) - (4x^2 - 8x + 4)(2)}{(2x - 1)^2} = \frac{16x^2 - 8x - 16x + 8 - 8x^2 + 16x - 8}{4x^2 - 4x + 1} = \frac{8x^2 - 8x}{(2x - 1)^2}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(16x - 8)(4x^2 - 4x + 1) - (8x^2 - 8x)(8x - 4)}{((2x - 1)^2)^2} \\ &= \frac{\cancel{(2x - 1)} \cdot 8 \cdot (4x^2 - 4x + 1) - (8x^2 - 8x) \cdot 4 \cdot \cancel{(2x - 1)}}{(2x - 1)^4} = \frac{8}{8x^3 - 12x^2 + 6x - 1} \end{aligned}$$

**Achsenschnittpunkte**Bestimmung der Nullstelle(n):

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x) &= 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{\tfrac{1}{2}\} \\
\Leftrightarrow \frac{(2x-2)^2}{(2x-1)} &= 0 \\
\Leftrightarrow 2x-2 &= 0 \\
\Leftrightarrow x &= 1 \quad L = \{1\}
\end{aligned}$$

Die Gleichung für die senkrechte Asymptote lautet deshalb  $x = 1$

Bestimmung des Y-Achsenabschnitts:

$$\Rightarrow f(0) = \frac{4}{-1} = -4$$

Symmetrie:

Man kann anhand des GTR vermuten dass  $f$  punktsymmetrisch ist. Dieser Symmetriepunkt  $P_0$  lässt sich entweder dort ablesen oder ist (häufig) den Schnittpunkt der Asymptoten.  $P_0(\frac{1}{2} | -2)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f(x_0 + h) - y_0 &= f(\tfrac{1}{2} + h) + 2 \\
&= \frac{4(\tfrac{1}{2} + h)^2 - 8(\tfrac{1}{2} + h) + 4}{2(\tfrac{1}{2} + h) - 1} + 2 \\
&= \frac{4(\tfrac{1}{4} + h + h^2) - 4 - 8h + 4}{2h} + \frac{4h}{2h} \\
&= \frac{1 + 4h + 4h^2 - 8h + 4h}{2h} = \frac{4h^2 + 1}{2h} \\
\\
\Rightarrow -f(x_0 - h) + y_0 &= -f(\tfrac{1}{2} - h) - 2 \\
&= -\frac{4(\tfrac{1}{2} - h)^2 - 8(\tfrac{1}{2} - h) + 4}{2(\tfrac{1}{2} - h) - 1} - 2 \\
&= -\frac{4(\tfrac{1}{4} - h + h^2) - 4 + 8h + 4}{-2h} - \frac{4h}{2h} \\
&= \frac{1 - 4h + 4h^2 + 8h - 4h}{2h} = \frac{4h^2 + 1}{2h}
\end{aligned}$$

Hiermit hat man die Punktsymmetrie von  $f$  zu  $P_0$  bewiesen.

Bestimmung der Grenzwerte der Funktion:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} (4 - \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{4 - 0 + 0}{0 - 0} = +\infty \\
\\
\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2 - 8x + 4}{2x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -\infty} (-4 + \frac{8}{x} + \frac{4}{x^2})}{\lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}} = \frac{-4 + 0 + 0}{-0 - 0} = -\infty
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Da die Punktsymmetrie vorher bewiesen wurde hätte der  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  gar nicht errechnet werden müssen!

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(\frac{1}{2} + h)^2 - 8(\frac{1}{2} + h) + 4}{2(\frac{1}{2} + h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 + 4h + 4h^2 - 4 + h + 4}{2h} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} 1 + 5h + 4h^2}{\lim_{h \rightarrow 0} 2h} \\
 &= \frac{1}{0} = +\infty \\
 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{4(\frac{1}{2} - h)^2 - 8(\frac{1}{2} - h) + 4}{2(\frac{1}{2} - h) - 1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 4h + 4h^2 - 4 - 4h + 4}{-2h} \\
 &= \frac{\lim_{h \rightarrow 0} 1 - 8h + 4h^2}{\lim_{h \rightarrow 0} -2h} \\
 &= -\frac{1}{0} = -\infty
 \end{aligned}$$

Asymptoten:

Es liegt eine nicht hebbare Definitionslücke bei  $x = \frac{1}{2}$  vor, also ist dies die Gleichung der senkrechten Asymptote.

Da der Grenzwert  $\rightarrow \pm\infty$  keinen eindeutigen Wert annimmt, macht man eine Polynomdivision ...

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow (4x^2 - 8x + 4) : (2x - 1) &= 2x - 3 + \frac{1}{2x - 1} \\
 -(4x^2 - 2x) & \\
 \hline
 -6x + 4 & \\
 -(-6x + 3) & \\
 \hline
 1 &
 \end{aligned}$$

... und erhält die Gleichung der schiefen Asymptote  $y = 2x - 3$

Monotonieverhalten:

Untersuchung auf Extremstellen:

- Notwendige Bedingung:  $\Rightarrow f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{8x^2 - 8x}{4x^2 - 4x + 1} = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{2}\}$$

$$\Leftrightarrow x(8x - 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 1 \quad L = \{1; 0\}$$

- Hinreichende Bedingung: Vorzeichenwechsel  $f'(x)$  oder  $f''(x) \neq 0$

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{1}{2}$	$1$	$+\infty$
$x$	$-$	$0$	$+$	$+$	$+$
$(8x - 8)$	$-$		$-$	$-$	$0$
$(2x - 1)^2$	$+$		$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$
$f(x)$	$(0 f(0))$ $-\infty \nearrow \searrow -\infty$			$+\infty \searrow \nearrow +\infty$ $(1 f(1))$	

Krümmungsverhalten:

Untersuchung auf Wendestellen:

- Notwendige Bedingung:  $\Rightarrow f''(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{(2x-1)^3} = 0$$

$$\Leftrightarrow 8 = 0 \quad \text{!}$$

Die Funktion weist keine Wendestellen vor. Bei Lösbarkeit der Gleichung ist als hinreichende Bedingung ein Vorzeichenwechsel von  $f''(x)$  zu zeigen oder  $f''' \neq 0$  zu beweisen. Dann kann die Skizze beginnen:



## 3.5 Funktionenscharen

Erklärung:

Eine **Funktionenschar** ist eine Menge von Funktionen, die neben der Variable auch noch einen veränderlichen Parameter im Funktionsterm enthält. Jedem Wert des Parameters ist ein Graph der Schar zugeordnet. Der Parameter, oft  $a$ , wird hierbei überall wie eine Konstante behandelt.

Der Punkt, den alle Graphen, unabhängig von ihren Parametern, beinhalten, nennt man Bündel. Die Graphen einer Funktionenschar bilden gemeinsam eine Kurvenschar.

Hier ist die Kurvenschar der Funktion  $f(x) = ax^3$ . Sie verlaufen alle durch das Bündel  $P(0|0)$



### 3.5.1 Beispiel

$$f_a(x) = \frac{x^2 - 3ax}{x + a} \quad D_f = \mathbb{R} \setminus \{-a\}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

Sei  $K_a$  der Graph der Funktion.

**Bestimmen Sie die Schnittpunkte von  $K_a$  mit den Koordinatenachsen**

$$f_a(0) = \frac{0}{0 + a} = 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f_a(x) = 0 &\Leftrightarrow x^2 - 3ax = 0 \\ &\Leftrightarrow x(x - 3a) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \quad \vee \quad x = 3a \end{aligned}$$

Es ergeben sich die Punkte  $P_1(0|0)$  und  $P_2(3a|0)$

**Bestimmen Sie die Asymptoten von  $K_a$**

$$\begin{aligned} \Rightarrow (x^2 - 3ax + 0) : (x + a) &= x - 4a + \frac{4a^2}{x + a} \\ -(x^2 + ax) & \\ -4ax + 0 & \\ -(-4ax - 4a^2) & \\ 4a^2 & \end{aligned}$$

Man erhält die schiefe Asymptote  $y = x - 4a$

Es liegt eine nicht hebbare Definitionslücke bei  $-a$  vor, daraus ergibt sich eine vertikale Asymptote  $\Rightarrow x = -a$

**Zeigen Sie**  $f''_a(x) = \frac{8a^2}{(x+a)^3}$

$$\begin{aligned} f'_a(x) &= \frac{(2x-3a)(x+a) - (x^2-3ax)(1)}{(x+a)^2} \\ &= \frac{2x^2+2ax-3ax-3a^2-x^2-3ax}{(x+a)^2} \\ &= \frac{x^2+2ax-3a^2}{(x+a)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''_a(x) &= \frac{(2x+2a)(x^2+2ax+a^2) - (x^2-2ax-3a^2)(2(x+a))}{(x+a)^4} \\ &= \frac{2x^2+4ax+2a^2-2x^2+4ax+6a^2}{(x+a)^3} \\ &= \frac{8a^2}{(x+a)^3} \end{aligned}$$

**Weisen Sie nach, dass  $K_a$  genau einen Hochpunkt und genau einen Tiefpunkt besitzt. Geben Sie die Koordinaten dieser Punkte in Abhängigkeit von  $a$  an und erstellen Sie eine Monotonietabelle der Funktionen  $f_a$**

Notwendige Bedingung für Extremstellen:  $\Rightarrow f'(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2ax - 3a^2 = 0 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-a\}$$

$$\Rightarrow \Delta = 4a^2 + 12a^2 = 16a^2$$

$$\Leftrightarrow x_1 = a \quad \vee \quad x_2 = -3a \quad L = \{a; -3a\}$$

$$\Rightarrow f(a) = \frac{a^2 - 3a^2}{2a} = -a$$

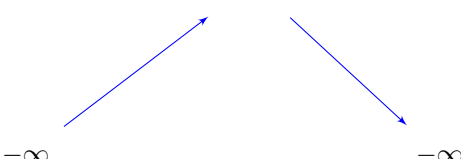
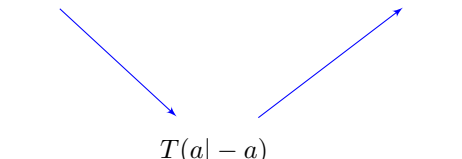
$$\Rightarrow f(-3a) = \frac{9a^2 + 9a^2}{-2a} = -9a$$

Es ergeben sich somit die Extremstellen  $H(-3a | -9a)$  und  $T(a | -a)$ . Bevor man mit der Monotonietabelle beginnt, muss die Polstelle untersucht werden.

$$\lim_{x \rightarrow -a^+} f_a = \lim_{x \rightarrow -a^+} \frac{x^2 - 3ax}{x+a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-a+h)^2 - 3a(-a+h)}{(-a+h)+a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 - 5ah + 4a^2}{h} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -a^-} f_a = \lim_{x \rightarrow -a^-} \frac{x^2 - 3ax}{x+a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(-a-h)^2 - 3a(-a-h)}{(-a-h)+a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 + 5ah + 4a^2}{-h} = -\infty$$

Jetzt kann die Monotonietabelle erstellt werden:

$x$	$-\infty$	$-3a$	$-a$	$a$	$+\infty$	
$x^2 - 2ax - 3a$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$(x + a)^2$	$+$		$+$	$+$		$+$
$f'_a(x)$	$+$	$0$	$-$	$-$	$0$	$+$
$f_a(x)$	<div><math>H(-3a -9a)</math></div> <div></div>			<div><math>+\infty</math></div> <div></div> <div><math>T(a -a)</math></div>		

**Zeigen Sie, dass es genau einen Punkt gibt, durch den alle Graphen  $K_a$  gehen.**

Diesen Punkt haben wir schon per "Zufall" herausgefunden, da wir eine Nullstelle gefunden haben, die nicht von  $a$  abhängt. Wenn man diesen aber nicht gefunden hat, geht man diesen Lösungsweg:

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f_1 = f_2 &\Leftrightarrow \frac{x^2 - 3x}{x+1} = \frac{x^2 - 6x}{x+2} & D = \mathbb{R} \setminus \{-1; -2\} \\
 &\Leftrightarrow \frac{x-3}{x+1} = \frac{x-6}{x+2} \\
 &\Leftrightarrow -x = -5x \\
 &\Leftrightarrow x = 0 & L = \{0\}
 \end{aligned}$$

**Bestimmen Sie  $a \in \mathbb{R}^+$  so, dass der Graph  $K_a$  durch den Punkt  $P(5 | \frac{5}{3})$  verläuft**

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f_a(5) = \frac{5}{3} &\Leftrightarrow \frac{5^2 - 15a}{5+a} = \frac{5}{3} & D = \mathbb{R} \setminus \{-5\} \\
 &\Leftrightarrow 15 - 9a = 5 + a \\
 &\Leftrightarrow a = 1 & L = \{1\}
 \end{aligned}$$

**Berechnen Sie die Schnittpunkte von  $K_1$  mit der Geraden  $j(x) = -15x - 4$**

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f_1(x) &= \frac{x^2 - 3x}{x+1} = -15x - 4 = y \\
 &\Leftrightarrow x^2 - 3x = -15x^2 - 19x - 4 \\
 &\Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 1 = 0
 \end{aligned}$$

$$\Delta = 0 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow f_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{7}{2}$$



Es existiert genau ein Schnittpunkt von  $K_1$  mit der Geraden  $j$ :  $P_{K_1j}(-\frac{1}{2}|\frac{7}{2})$

**Vom Punkt  $A(0|-4)$  wird die Tangente an  $K_1$  gelegt. Bestimmen Sie eine Gleichung der Tangente und die Koordinaten des Berührungpunktes**

Sei  $B(x_0|f(x_0))$ , dann lautet die Tangentengleichung:

$$\begin{aligned}\Rightarrow T_{x_0}(x) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0) \\ &= \frac{x_0^2 + 2x_0 - 3}{(x_0 + 1)^2} \cdot (x - x_0) + \frac{x_0^2 - 3x_0}{x_0 + 1}\end{aligned}$$

Jetzt werden die Koordinaten des Punktes  $A(0|-4)$ , durch den die Tangente auch noch geht, eingesetzt.

$$\begin{aligned}\Rightarrow T_{x_0}(0) &= -4 = \frac{x_0^2 + 2x_0 - 3}{(x_0 + 1)^2} \cdot (-x_0) + \frac{x_0^2 - 3x_0}{x_0 + 1} & D = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ \Leftrightarrow -4(x_0 + 1)^2 &= (x_0^2 + 2x_0 - 3)(-x_0) + (x_0^2 - 3x_0)(x_0 + 1) \\ \Leftrightarrow -4x_0^2 - 8x_0 - 4 &= -x_0^3 - 2x_0^2 + 3x_0 + x_0^3 + x_0^2 - 3x_0^2 - 3x_0 \\ \Leftrightarrow 4x_0^2 + 8x_0 + 4 &= 4x_0^2 \\ \Leftrightarrow x_0 &= -\frac{1}{2} & L = \left\{-\frac{1}{2}\right\}\end{aligned}$$

Nun werden die Koordinaten des Berührungpunktes mit der Ursprünglichen Funktion  $f$  durch einsetzen errechnet.

$$\begin{aligned}\Rightarrow f_1\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 3 \cdot -\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 1} = \frac{7}{2} \\ \Rightarrow B\left(-\frac{1}{2}|\frac{7}{2}\right)\end{aligned}$$

Da es sich um eine Tangente handelt, muss nun die Steigung am Berührungpunkt errechnet werden, um die Tangentengleichung bestimmen zu können.

$$\Rightarrow f'_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) - 3}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2} = -15$$

Die Tangentengleichung lautet:

$$t(x) = -15x - 4 \quad \text{mit} \quad D_t = \mathbb{R}$$

## TRIGONOMETRIE

flegntrue

### 4.1 Kurze Wiederholung

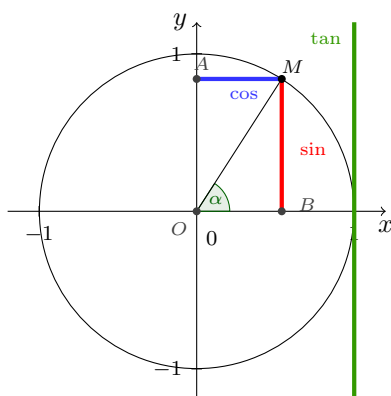
#### Definition 4.1.0

In einem Kreis mit Radius 1 gelte:

$$\cos(\alpha) = x_M$$

$$\sin(\alpha) = y_M$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$



Es ergeben sich folgende (wissenswerte) Werte:

	0° 0	30° $\frac{\pi}{6}$	45° $\frac{\pi}{4}$	60° $\frac{\pi}{3}$	90° $\frac{\pi}{2}$	180° $\pi$	270° $\frac{3\pi}{2}$	360° $2\pi$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	X	0	X	0

## 4.2 Additions- und Verdopplungssätze

### Theorem

$$\begin{aligned}\cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a - b) &= \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b) \\ \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \sin(a + b) &= \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)\end{aligned}$$

### Bemerkung:

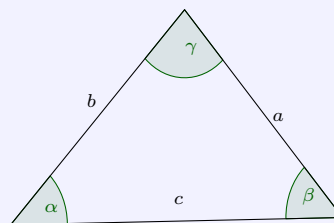
Hieraus ergeben sich einige weitere Relationen, wie z.B.  $\sin(2a)$ . Diese lassen sich jedoch schnell und leicht herleiten.

## 4.3 Allgemeine Sinus- und Kosinussätze

In einem beliebigen Dreieck gelten abgewandelte Formen der aus der 8. Klasse bekannten Sätze:

### Theorem

$$\begin{aligned}\frac{a}{\sin(\alpha)} &= \frac{b}{\sin(\beta)} = \frac{c}{\sin(\gamma)} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab\cos(\gamma)\end{aligned}$$



### Bemerkung:

Man bemerkt, dass sich die bekannten Relationen ergeben, wenn einer der Winkel den Wert  $\frac{\pi}{2}$  annimmt.

## 4.4 Sinusfunktionen

Zur Vollständigen Funktionsdiskussion einer Sinus-Funktion sind einige Besonderheiten zu beachten:

### 1. Amplitude und Periodizität

Eine Funktion der Form  $f(x) = a \cdot \sin(b(x - c)) + d$  hat:

- die Periode  $P = \frac{2\pi}{|b|}$
- die Amplitude  $A = |a|$
- die Verschiebung entlang der  $x$ -Achse um  $d$  und entlang der  $y$ -Achse um  $c$

### 2. Symmetrieeigenschaften

Hier sollte zumindest bekannt sein, dass  $f(x) = \sin(x)$  punktsymmetrisch zum Origo ist, und dass  $f(x) = \cos(x)$  Achsensymmetrisch zur  $y$ -Achse ist.

### 3. Die Null-, Extrem- und Wendestellen sind in Form einer Menge anzugeben. (Es sei denn, die Aufgabenvorschrift fordert explizit zu einer Begrenzung auf ein angegebenes Intervall auf)

### Beispiel:

Die Nullstellen der Funktion  $f(x) = \sin(x)$  lassen sich darstellen als:  $x \in \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$

### 4. Bei der Teilung durch eine Sinusfunktion können Definitionslücken an dessen Nullstellen entstehen. Auch diese können in der bereits gezeigten Form angegeben werden.

### 4.4.1 Zusammengesetzte Sinusfunktionen

## 4.5 Polarkoordinaten

In der Kursstufe beschränken wir uns auf die Benutzung von Polarkoordinaten für Punkte in der Ebene (2D).

### Definition 4.5.0

Polarkoordinaten sind eine Form der eindeutigen Punktangaben, doch anstatt wie kartesische Koordinaten 2 Entfernungen  $x$  und  $y$  zu verwenden, haben sie die Form  $(r|\varphi)$ .  $r$  ist hierbei die Entfernung zum Origo und  $\varphi$  ein orientierter Winkel (in  $rad$ ).

### 4.5.1 Umrechnung

#### Kartesisch $\rightarrow$ Polar

- $r = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\varphi = \tan\left(\frac{y}{x}\right)$

#### Polar $\rightarrow$ Kartesisch

- $x = r \cdot \cos(\varphi)$
- $y = r \cdot \sin(\varphi)$



## 4.6 Beispiel einer Funktionsdiskussion

Sei die Funktion  $f(x) = 2 \cos(x) + 2 \sin(x) \cos(x)$ , ihr Schaubild sei K.

Untersuchen Sie K im Intervall  $[0; 2\pi]$  auf gemeinsame Punkte mit der  $x$ -Achse, sowie Extrem- und Wendepunkte. Zeichnen Sie K im Intervall  $[0; 2\pi]$ . Untersuchen Sie K auf Symmetrie.

### 4.6.1 Definitionsmenge

$$D = \mathbb{R}$$

### 4.6.2 Periodizität und Amplitude

Die Periode von  $f$  ist  $P = 2\pi$ . Die Amplitude  $A$  beträgt  $\frac{3}{2}\sqrt{3}$ .

### 4.6.3 Nullstellen

Notwendige und hinreichende Bedingung:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos(x) + 2 \sin(x) \cos(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2 \cos(x)(1 + \sin(x)) &= 0 \\ \stackrel{S.d.N}{\Rightarrow} \begin{cases} 2 \cos(x) &= 0 \\ 1 + \sin(x) &= 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) &= 0 \\ \sin(x) &= -1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= \frac{1}{2}\pi \\ x_2 &= \frac{3}{2}\pi \end{cases} \\ \Rightarrow \mathbb{L} &= \{(\frac{1}{2}\pi|0); (\frac{3}{2}\pi|0)\} \end{aligned}$$

### 4.6.4 Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2 \sin(x) + 2(\cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x)) \\ &= -2 \sin(x) + 2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= -2 \sin(x) + 2(1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)) \\ &= -4 \sin^2(x) - 2 \sin(x) + 2 \\ f''(x) &= -4(\cos(x) \sin(x) + \sin(x) \cos(x)) - 2 \cos(x) \\ &= -8 \sin(x) \cos(x) - 2 \cos(x) \\ f'''(x) &= -8(\cos(x) \cos(x) - \sin(x) \sin(x)) + 2 \sin(x) \\ &= -8(1 - \sin^2(x) - \sin^2(x)) + 2 \sin(x) \\ &= 16 \sin^2(x) + 2 \sin(x) - 8 \end{aligned}$$

### 4.6.5 Extremstellen

#### Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow 4 \sin^2(x) - 2 \sin(x) + 2 &= 0 \\
 \text{Substitution : } y &= \sin(x) \\
 \Rightarrow 4y^2 - 2y + 2 &= 0 \\
 \xrightarrow{ABC\text{-Formel}} y_{1,2} &= \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 * (-4) * 2}}{-8} \\
 \text{Resubstitution :} \\
 \Rightarrow \begin{cases} \sin(x) &= \frac{2 + \sqrt{20}}{-8} \\ \sin(x) &= \frac{2 - \sqrt{20}}{-8} \end{cases} \\
 \Rightarrow \mathbb{L} &= \left\{ \frac{1}{6}\pi; \frac{5}{6}\pi; \frac{3}{2}\pi \right\}
 \end{aligned}$$

#### Hinreichende Bedingung:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &\neq 0 \\
 \Rightarrow \begin{cases} f''\left(\frac{1}{6}\pi\right) &\stackrel{?}{=} 0 \\ f''\left(\frac{5}{6}\pi\right) &\stackrel{?}{=} 0 \\ f''\left(\frac{3}{2}\pi\right) &\stackrel{?}{=} 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) \cos\left(\frac{1}{6}\pi\right) - 2 \sin\left(\frac{1}{6}\pi\right) &\stackrel{?}{=} 0 \\ 8 \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) \cos\left(\frac{5}{6}\pi\right) - 2 \sin\left(\frac{5}{6}\pi\right) &\stackrel{?}{=} 0 \\ 8 \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) \cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) - 2 \sin\left(\frac{3}{2}\pi\right) &\stackrel{?}{=} 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow \begin{cases} 8 * \frac{1}{2} * \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 * \frac{\sqrt{3}}{2} &\stackrel{!}{\neq} 0 \quad , < 0 \Rightarrow HP \\ 8 * \frac{1}{2} * -\frac{\sqrt{3}}{2} - 2 * -\frac{\sqrt{3}}{2} &\stackrel{!}{\neq} 0 \quad , > 0 \Rightarrow TP \\ 8 * (-1)(0) - 2(0) &\stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \text{kein } EP \end{cases}
 \end{aligned}$$

#### Ergebnis

Auf dem Intervall  $[0; 2\pi]$  besitzt  $K$  den Hochpunkt  $H(\frac{1}{6}\pi | f(\frac{1}{6}\pi))$  und den Tiefpunkt  $T(\frac{5}{6}\pi | f(\frac{5}{6}\pi))$ .  
 $\Leftrightarrow H(\frac{1}{6}\pi | \frac{3}{2}\sqrt{3})$  und  $T(\frac{5}{6}\pi | -\frac{3}{2}\sqrt{3})$ .

### 4.6.6 Wendestellen

#### Notwendige Bedingung:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow -8 \sin(x) \cos(x) - 2 \cos(x) &= 0 \\
 \Leftrightarrow \cos(x)(-2 - 8 \sin(x)) &= 0 \\
 \xrightarrow{SdN} \begin{cases} \cos(x) &= 0 \\ \sin(x) &= -\frac{1}{4} \end{cases} \\
 \Rightarrow \mathbb{L} &= \left\{ \frac{1}{2}\pi; \frac{3}{2}\pi; \sim 3,394; \sim 6,031 \right\}
 \end{aligned}$$

**Hinreichende Bedingung:**

$$\begin{aligned}
 & f'''(x) \neq 0 \\
 \Rightarrow & \begin{cases} f'''(\frac{1}{2}\pi) \stackrel{?}{=} 0 \\ f'''(\frac{3}{2}\pi) \stackrel{?}{=} 0 \\ f'''(3,394) \stackrel{?}{=} 0 \\ f'''(6,031) \stackrel{?}{=} 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 16 \sin^2(\frac{1}{2}\pi) + \sin(\frac{1}{2}\pi) - 8 \stackrel{?}{=} 0 \\ 16 \sin^2(\frac{3}{2}\pi) + \sin(\frac{3}{2}\pi) - 8 \stackrel{?}{=} 0 \\ 16 \sin^2(3,394) + \sin(3,394) - 8 \stackrel{?}{=} 0 \\ 16 \sin^2(6,031) + \sin(6,031) - 8 \stackrel{?}{=} 0 \end{cases} \\
 \Leftrightarrow & \begin{cases} 16 * 1 + 1 - 8 \stackrel{!}{\neq} 0, > 0 \Rightarrow WP \\ 16 * 1 - 1 - 8 \stackrel{!}{\neq} 0, > 0, \text{ außerdem: } f'(\frac{3}{2}\pi) = 0 \Rightarrow \text{Sattelpunkt} \\ -7,5 \stackrel{!}{=} 0, < 0 \Rightarrow WP \\ -7,5 \stackrel{!}{=} 0, < 0 \Rightarrow WP \end{cases}
 \end{aligned}$$

**Ergebnis**

Auf dem Intervall  $[0; 2\pi]$  besitzt K die Wendepunkte  $(\frac{1}{2}\pi | f(\frac{1}{2}\pi))$ ,  $(3,394 | f(3,394))$ ,  $(6,031 | f(6,031))$  und den Sattelpunkt  $(\frac{3}{2}\pi | f(\frac{3}{2}\pi))$ .

$\Leftrightarrow W_1(\frac{1}{2}\pi | 0)$ ,  $W_2(3,394 | -1,452)$ ,  $W_3(6,031 | 1,452)$ ,  $S(\frac{3}{2}\pi | 0)$ .

**4.6.7 Schaubild**

### 4.6.8 Symmetrie

K ist punktsymmetrisch zu  $W_1$ , denn es gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) &= -1 * f\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) \\ \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi + x\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi + x\right) &= -1 * (2\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) + 2\sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)) \\ \Leftrightarrow -2\sin(x) - 2\cos(x)\sin(x) &= -1 * (2\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x)) \end{aligned}$$

K ist außerdem zu  $S$  punktsymmetrisch, denn es gilt:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) &= -1 * f\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) \\ \Leftrightarrow 2\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) + 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi + x\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi + x\right) &= -1 * (2\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) + 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)\cos\left(\frac{3}{2}\pi - x\right)) \\ \Leftrightarrow 2\sin(x) + 2\cos(x)\sin(x) &= -1 * (-2\sin(x) - 2\cos(x)\sin(x)) \end{aligned}$$

# VEKTORIELLE GEOMETRIE

---

## 5.1 Vektoren

### Definition 5.1.0

Ein Vektor ist Element eines Vektorraums.

Vektorräume, wir erinnern uns zurück. Verknüpfungen, inverse Elemente und die dazugehörenden Gesetze, konsequente Definitionen und mathematische Korrektheit, die guten alten Zeiten...  
Tatsächlich kann ein Vektor in den meisten Fällen als Verschiebung bezeichnet werden, **nicht aber als Pfeil oder Strich!**

### 5.1.1 Besondere Vektoren

#### Der Ortsvektor

Der Vektor von  $O$  auf den Punkt  $P$ , geschrieben als  $\overrightarrow{OP}$  oder  $\vec{p}$ .

Hat  $P$  die Koordinaten  $(P_1|P_2|\dots|P_n)$ , so besitzt  $\vec{p}$  die Darstellung  $\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \dots \\ P_n \end{pmatrix}$ .

#### Der Nullvektor

Der Vektor mit Wert  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$ , er hat keine und alle Richtungen zugleich.

#### Bemerkung:

Er ist somit das neutrale Element der Vektoraddition.

#### Der Verbindungsvektor

Der Vektor  $\overrightarrow{AB}$  ist der Vektor, der den Punkt  $A$  auf den Punkt  $B$  abbildet. Er ist definiert als:  
 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ , woraus folgt, dass:

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ \dots \\ b_n - a_n \end{pmatrix}.$$

#### Der Gegenvektor

Der Gegenvektor zu  $\overrightarrow{AB}$  ist  $\overrightarrow{BA}$ , definiert als  $-\overrightarrow{AB}$ .

#### Bemerkung:

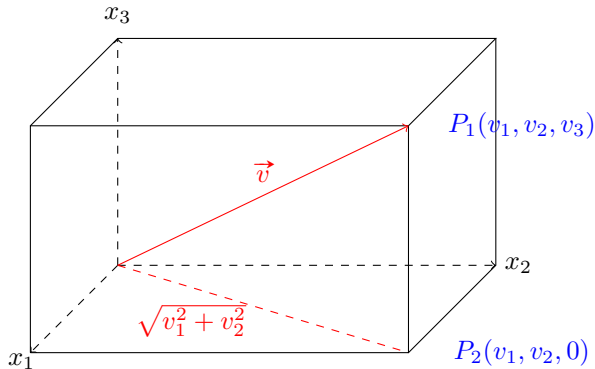
Er ist somit das inverse Element der Vektoraddition.



## Der Einheitsvektor

### Norm eines Vektors

Die Norm eines Vektors ist anschaulich als seine Länge zu interpretieren. Der Betrag, wie sie ebenfalls genannt wird, eines Vektors  $\vec{v}$  ist folgendermaßen definiert:  $|\vec{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ ;  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ .



Anhand dieser Graphik lässt sich die Berechnung der Norm eines Vektors  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  verdeutlichen. Für diesen gilt:  $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$ .

Ein Vektor, dessen Norm 1 beträgt wird als normiert oder Einheitsvektor bezeichnet. Für jeden Vektor  $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$  existiert ein Einheitsvektor  $\vec{v}^*$ , der folgendermaßen definiert wird:  $\vec{v}^* = \frac{1}{|\vec{v}|} \cdot \vec{v}$ .

## 5.2 Basen und Erzeugendensystem

Eine endliche Anzahl von Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$  heißt Erzeugendensystem, wenn sich jeder Vektor  $\vec{v} \in V$  als Linearkombination dieser Vektoren schreiben lässt. Um ein Erzeugendensystem zu bilden benötigt man mindestens die Anzahl Vektoren, die der Anzahl von Dimensionen von  $\vec{v}$  entspricht. Wenn man **genau** diese Anzahl besitzt, spricht man von einer Basis.

### 5.2.1 Besondere Basen

#### Orthogonalbasis

Sind die Vektoren der Basis paarweise orthogonal zueinander, so spricht man von einer **Orthogonalbasis**.

#### Orthonormalbasis

Sind die Vektoren zusätzlich zu dieser Bedingung normiert, wird sie als **Orthonormalbasis** bezeichnet. Die einfachste und meist benutzte Basis des  $\mathbb{R}^3$  besteht aus den drei Vektoren  $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ . Sie wird als **Standardbasis** des  $\mathbb{R}^3$  bezeichnet. Vektoren wie  $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$  lassen sich als eine Linearkombination der drei Vektoren der Standardbasis darstellen:  $\vec{v} = 2 \cdot \vec{e}_1 + 3 \cdot \vec{e}_2 + 8 \cdot \vec{e}_3$ .

### 5.2.2 Basistransformation

Bilden die Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$  eine Basis des  $n$ -dimensionalen Vektorraums  $V$  und sei der Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \dots \\ v_n \end{pmatrix}$ ;  $\vec{v} \in V$ . Dann gilt wie üblich:  $\vec{v} = v_1 \cdot \vec{a}_1 + v_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + v_n \cdot \vec{a}_n$ . Sei eine weitere Basis  $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$

des selben Vektorraumes, so besitzt der Vektor  $\vec{v}$  andere Koordinaten:  $\vec{v} = \begin{pmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ \vdots \\ v'_n \end{pmatrix}$ . Dabei muss gelten:

$$\vec{v} = v_1 \cdot \vec{a}_1 + v_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + v_n \cdot \vec{a}_n = v'_1 \cdot \vec{b}_1 + v'_2 \cdot \vec{b}_2 + \dots + v'_n \cdot \vec{b}_n.$$

#### Bemerkung:

Um die Koordinaten eines Vektors in einer anderen Basis als der Aktuellen zu bestimmen, löst man diese Gleichung, die sich ergibt.

#### Beispiel:

Basis 1: Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ , Basis 2:  $\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 8 \end{pmatrix}$ ,  $\vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ , Vektor  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

(in der Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ )

$$\vec{v} = -5 \cdot \vec{a}_1 + 3 \cdot \vec{a}_2 + 2 \cdot \vec{a}_3 = r \cdot \vec{b}_1 + s \cdot \vec{b}_2 + t \cdot \vec{b}_3 \Leftrightarrow \begin{cases} 4r - 2s + t = -5 \\ 9r - 2s + 3t = 3 \\ -r + 8s + t = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -r + 8s + t = 2 \\ 0 + 30s + 5t = 3 \\ 0 + 70s + 12t = 21 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -r + 8s + t = 2 \\ 0 + 30s + 5t = 3 \\ 0 + 0 + \frac{1}{3} \cdot t = 14 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = -15.2 \\ s = -6.9 \\ t = 42 \end{cases}$$

$$\mathbb{L} = \{-15.2 | -6.9 | 42\}$$

Daraus lässt sich folgern:  $\vec{v} = -15.2 \cdot \vec{b}_1 - 6.9 \cdot \vec{b}_2 + 42 \cdot \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} -15.2 \\ -6.9 \\ 42 \end{pmatrix}$  (in der anderen Basis).

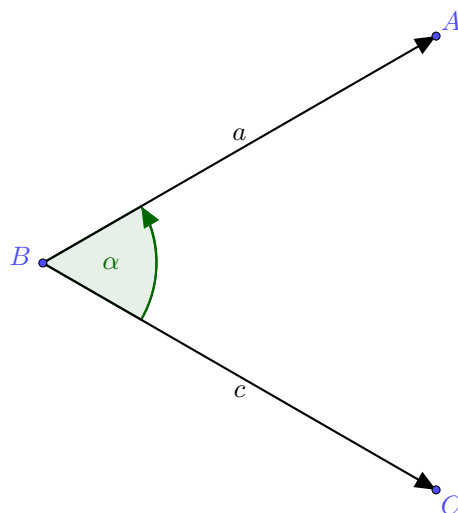
## 5.3 Winkel zwischen Vektoren

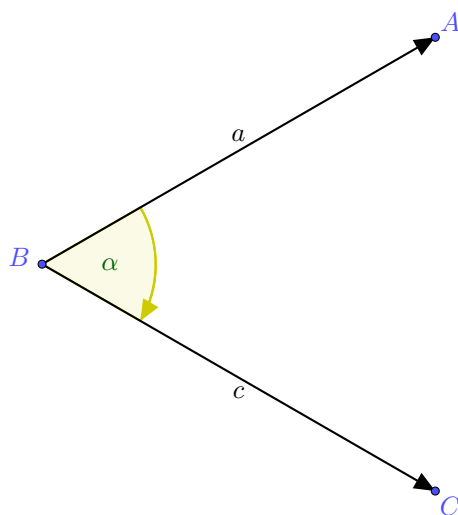
### Definition 5.3.0

Unter einem Winkel zwischen zwei Vektoren versteht man den Winkel, der entsteht, wenn man beide Vektoren an einen **gemeinsamen Startpunkt** verschiebt ohne dabei ihre Ausrichtung zu verändern.

### 5.3.1 Orientierte Winkel

Wenn man in der Mathematik mit Winkeln arbeitet, werden sie immer im **mathematisch positiven** Sinn angegeben. Dies bedeutet, dass man von einem Vektor oder Schenkel, der an den Winkel grenzt, ausgeht und über Rotation um den Schnittpunkt „gegen den Uhrzeigersinn“ zum anderen gelangt, bis beide übereinanderliegen (wenn man davon ausgeht, dass sich





beide schneiden). So ergibt sich  $\alpha = \angle ABC = \angle ac = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{3}$ . Ein Winkel  $\alpha$  wird zudem immer so angegeben, dass  $\alpha \in I; I = [-\pi, \pi]$  gilt. Dies bedeutet, dass man nur Winkel zwischen 0 und 180 erhält, und das in beide „Richtungen“, als im mathematisch positiven und negativen Sinn. Diese Einschränkung kennzeichnet man mit dem Ausdruck „**modulo**  $2\pi$ “.

### 5.3.2 Rechnungen mit Winkeln

Bei Berechnungen von Winkeln zwischen Vektoren geht man genau wie in der elementaren Geometrie vor. So wird die Differenz zwischen zwei Winkeln  $\theta_1$  und  $\theta_2$  wie gehabt berechnet:  $\Delta\theta = \theta_1 - \theta_2$ . Jedoch benötigt man weitere Rechenregeln, um mit Winkeln rechnen zu können.

#### Theorem

Relation de Chasles:

$$(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}); \quad \text{modulo } 2\pi$$

Umformungen:

$$(1) \quad (\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$$

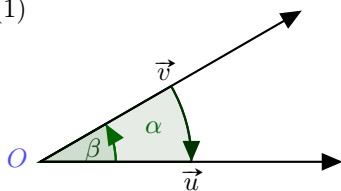
$$(2) \quad (-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$$

$$(3) \quad (\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (-\vec{u}, \vec{v})$$

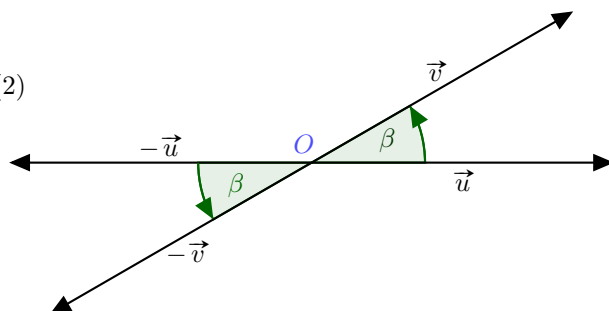
Aus der ersten und letzten dieser Relationen lässt sich analog dazu bestimmen:

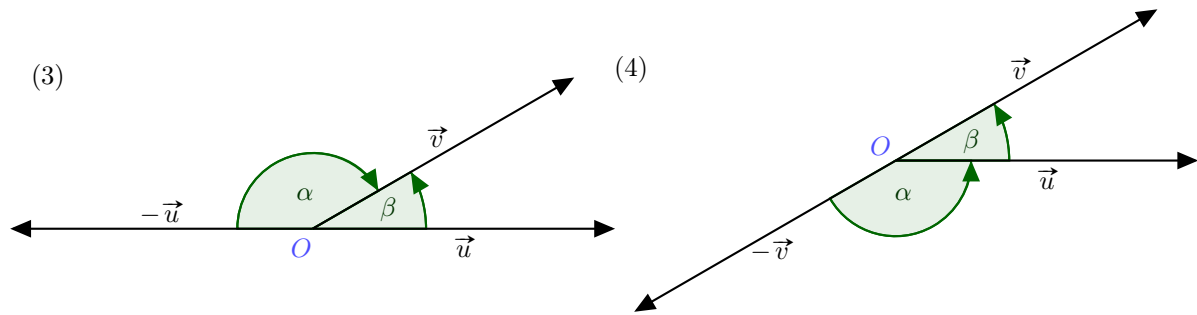
$$(4) \quad (\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}) = \pi - (-\vec{v}, \vec{u})$$

(1)



(2)





## 5.4 Linearkombination

Vektoren lassen sich allgemein mit der additiven Verknüpfung des Vektorraums verknüpfen. Diese Verknüpfung zwischen zwei beliebigen Vektoren  $\vec{v}$  und  $\vec{u}$  erfolgt, wie auch schon im Teil Verbindungsvektor gezeigt wird, wie folgt:  $\vec{v} + \vec{u} = \begin{pmatrix} v_1 + u_1 \\ v_2 + u_2 \\ \dots \\ v_n + u_n \end{pmatrix}$ . Anschaulich wird  $\vec{u}$  an  $\vec{v}$  angehängt und der Schaft von  $\vec{v}$  mit der Spitze von  $\vec{u}$  verbunden, um den neuen Vektor zu bilden.

### Definition 5.4.0

Eine Familie von Vektoren  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V$  wird als linear abhängig bezeichnet, wenn die Gleichung:  $r_1 \cdot \vec{a}_1 + r_2 \cdot \vec{a}_2 + \dots + r_n \cdot \vec{a}_n = \vec{0}$ ;  $r_i \in \mathbb{R}$  nicht nur die triviale Lösung  $r_1 = r_2 = \dots = r_n = 0$  besitzt. Existiert nur diese Lösung, ist die Familie linear unabhängig.

Anders gesagt, ist eine Familie von Vektoren linear abhängig, wenn sich einzelne Vektoren dieser Familie als Linearkombination von einer beliebigen Anzahl anderer Vektoren der Familie darstellen lassen.

### Bemerkung:

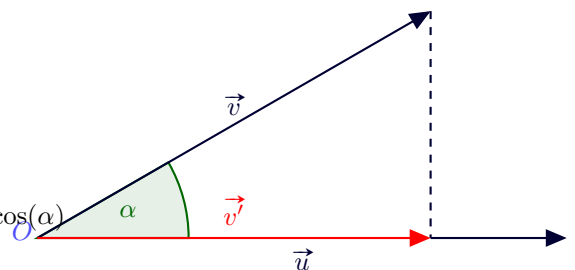
Eine linear abhängige Familie **aus genau zwei** Vektoren wird als kollinear bezeichnet.  
Eine linear abhängige Familie **aus genau drei** Vektoren dagegen nennt man komplanar.

## 5.5 Skalarprodukt

Das Skalarprodukt ist eine ("multiplikative") Verknüpfung des Vektorraums. Seinen Namen trägt es, da es aus zwei Vektoren einen Skalar, alias eine Zahl macht. Es dient dazu ein Maß für den Winkel, den zwei Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  einschließen, festzulegen. Zudem lässt sich von dieser Definition aus der Winkel selber anhand der

Vektoren bestimmt werden. Es wird als die Multiplikation der Norm der Projektion des Vektors  $\vec{v}$  in die Richtung von  $\vec{u}$ , das heißt, der Anteil von  $\vec{v}$  der auf der Geraden liegt, entlang welcher  $\vec{u}$  liegt, mit der Norm von  $\vec{u}$  definiert. Im Klartext bedeutet das:

$$\begin{aligned} \vec{u} \odot \vec{v} &:= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \\ &= |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \end{aligned}$$



Daraus lässt sich ableiten, dass:

- $0 \leq \alpha < 90$  (spitzer Winkel)  $\Leftrightarrow \cos \alpha > 0 \Leftrightarrow \vec{u} \odot \vec{v} > 0$
- $90 < \alpha \leq 180$  (stumpfer Winkel)  $\Leftrightarrow \cos \alpha < 0 \Leftrightarrow \vec{u} \odot \vec{v} < 0$
- $\alpha = 90$  (rechter Winkel)  $\Leftrightarrow \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \odot \vec{v} = 0$

Da wir nun aber selten Zugriff auf den Winkel haben, und dieser in den meisten Fällen die gesuchte Variable ist, benötigen wir eine praktikablere Berechnung, welche dasselbe Ergebnis liefert. Als Ansatz kann man auf

eine im Abschnitt "Orthonormalbasis" bereits besprochene Schreibweise von Vektoren zurückgreifen:

$$\begin{aligned}\vec{u} &= u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 + u_3 \cdot \vec{e}_3 \\ \vec{v} &= v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3\end{aligned}$$

Somit erreicht man folgendes Ergebnis:  $\vec{u} \odot \vec{v} = (u_1 \cdot \vec{e}_1 + u_2 \cdot \vec{e}_2 + u_3 \cdot \vec{e}_3) \odot \vec{v} = v_1 \cdot \vec{e}_1 + v_2 \cdot \vec{e}_2 + v_3 \cdot \vec{e}_3$  Um hiermit allerdings weiterrechnen zu können, müssen einige Rechenregeln bezüglich des Skalarprodukts aufgestellt werden. Zunächst gilt, dass das Skalarprodukt symmetrisch ist:  $\vec{u} \odot \vec{v} = \vec{v} \odot \vec{u}$ , da

Bemerkung:

Aus dieser Gleichung folgt:  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u} \odot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$ .

## 5.6 Kreuzprodukt

Das Kreuzprodukt ist das zweite nützliche Werkzeug welches in der Vektorgeometrie genutzt wird. Es dient hauptsächlich zur einfachen Berechnung eines zu zwei **nicht kollinearen** Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  orthogonalen

Vektors  $\vec{i}$ . Seine Formel lautet wie folgt:  $\vec{i} = \vec{u} \times \vec{v} := \begin{pmatrix} u_2 \cdot v_3 - u_3 \cdot v_2 \\ u_3 \cdot v_1 - u_1 \cdot v_3 \\ u_1 \cdot v_2 - u_2 \cdot v_1 \end{pmatrix}$ .

Beweis

Seien  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  beliebige zueinander nicht kollineare Vektoren des  $\mathbb{R}^3$ . Ein zu beiden Vektoren orthogonaler Vektor ergibt sich durch:

$$\begin{cases} \vec{u} \odot \vec{i} = 0 & (1) \\ \vec{v} \odot \vec{i} = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_3 i_3 = 0 & (1) & | \cdot v_1 \\ v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3 = 0 & (2) & | \cdot (-u_1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 = 0 & (1) \\ -u_1 v_1 i_1 - u_1 v_2 i_2 - u_1 v_3 i_3 = 0 & (2) & |(1) + (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 = 0 & (1) \\ u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 - u_1 v_2 i_2 - u_1 v_3 i_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 = 0 & (1) \\ (u_2 v_1 - u_1 v_2) \cdot i_2 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot i_3 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 = 0 & (1) \\ (u_2 v_1 - u_1 v_2) \cdot i_2 = -(u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot i_3 & (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 = 0 & (1) \\ i_2 = (u_3 v_1 - u_1 v_3) \wedge i_3 = -(u_2 v_1 - u_1 v_2) & (2) \end{cases} \quad \textbf{Eine mögliche Lösung}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + u_2 v_1 i_2 + u_3 v_1 i_3 = 0 & (1) \\ i_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u_1 v_1 i_1 + (u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot u_2 v_1 + (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot u_3 v_1 = 0 & (1) \\ i_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{-(u_3 v_1 - u_1 v_3) \cdot u_2 v_1 - (u_1 v_2 - u_2 v_1) \cdot u_3 v_1}{u_1 v_1} & (1) \\ i_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = \frac{(u_1 v_3 - u_3 v_1) \cdot u_2 + (u_2 v_1 - u_1 v_2) \cdot u_3}{u_1} & (1) \\ i_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 = u_2 v_3 - u_3 v_2 + \frac{-u_3 v_1 u_2 + u_2 v_1 u_3}{u_1} & (1) \\ i_2 = u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 = u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} i_1 &= u_2 v_3 - u_3 v_2 & (1) \\ i_2 &= u_3 v_1 - u_1 v_3 & (2) \\ i_3 &= u_1 v_2 - u_2 v_1 & (3) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \vec{i} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

□

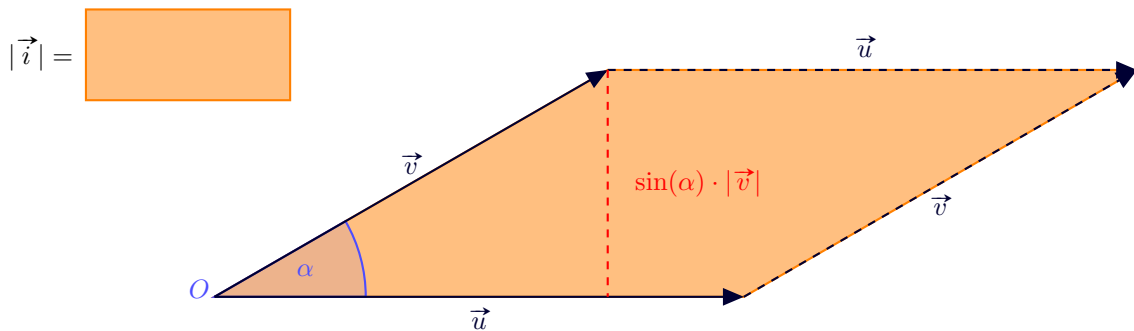
Bemerkung:

$$\vec{u} \times \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \parallel \vec{v} (\vec{u} = r \cdot \vec{v}; r \in \mathbb{R})$$

Zudem gilt:

$$\begin{aligned} |\vec{i}| &= |\vec{u}| \cdot (\sin(\alpha) \cdot |\vec{v}|) \\ &= |\vec{u}| \cdot \left( \sin \left( \cos^{-1} \left( \frac{\vec{u} \odot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \right) \right) \cdot |\vec{v}| \right) \end{aligned}$$

Einfacher gesagt ist der Betrag des Vektors  $\vec{i}$  gleich der Fläche des Parallelogramms, welches die zwei Vektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  aufspannen. Um diese doch recht verwirrende Erklärung etwas zu verdeutlichen folgt eine visuelle Darstellung:



## Beweis

$$\begin{aligned}
|\vec{u}| \cdot (\sin(\alpha) \cdot |\vec{v}|) &= \sqrt{(|\vec{u}|)^2 \cdot (|\vec{v}|)^2} \cdot \sin(\alpha) \\
&= \sqrt{(|\vec{u}|)^2 \cdot (|\vec{v}|)^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha))} \\
&= \sqrt{(\vec{u})^2 \cdot (\vec{v})^2 \cdot (1 - \cos^2(\alpha))} \\
&= \sqrt{(\vec{u})^2 \cdot (\vec{v})^2 - (\vec{u})^2 \cdot (\vec{v})^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \\
&= \sqrt{\vec{u} \odot \vec{u} \cdot \vec{v} \odot \vec{v} - (|\vec{u}|)^2 \cdot (|\vec{v}|)^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \\
&= \sqrt{\vec{u} \odot \vec{u} \cdot \vec{v} \odot \vec{v} - |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha) \cdot |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos(\alpha)} \\
&= \sqrt{\vec{u} \odot \vec{u} \cdot \vec{v} \odot \vec{v} - \vec{u} \odot \vec{v} \cdot \vec{u} \odot \vec{v}} \\
&= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2) \cdot (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - (u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3)^2} \\
&= \sqrt{\cancel{u_1^2 v_1^2} + u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + \cancel{u_2^2 v_2^2} + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2} \\
&\quad + \cancel{u_3^2 v_3^2} - (\cancel{u_1^2 v_1^2} + u_1 v_1 u_2 v_2 + u_1 v_1 u_3 v_3 + u_2 v_2 u_1 v_1 + \cancel{u_2^2 v_2^2} \\
&\quad + u_2 v_2 u_3 v_3 + u_3 v_3 u_1 v_1 + u_3 v_3 u_2 v_2 + \cancel{u_3^2 v_3^2}) \\
&= \sqrt{u_1^2 v_2^2 + u_1^2 v_3^2 + u_2^2 v_1^2 + u_2^2 v_3^2 + u_3^2 v_1^2 + u_3^2 v_2^2} \\
&\quad + - (2u_1 v_1 u_2 v_2 + 2u_1 v_1 u_3 v_3 + 2u_2 v_2 u_3 v_3) \\
&= \sqrt{u_1^2 v_2^2 - 2u_1 v_1 u_2 v_2 + u_2^2 v_1^2 + u_1^2 v_3^2 - 2u_1 v_1 u_3 v_3 + u_3^2 v_1^2 + u_2^2 v_3^2 - 2u_2 v_2 u_3 v_3 + u_3^2 v_2^2} \\
&= \sqrt{(u_1 v_2 - u_2 v_1)^2 + (u_1 v_3 - u_3 v_1)^2 + (u_2 v_3 - u_3 v_2)^2} \\
&= \left| \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix} \right| \quad (\text{unter anderem, aber auch}) \\
&= |\vec{i}|
\end{aligned}$$

□

## 5.7 Geraden

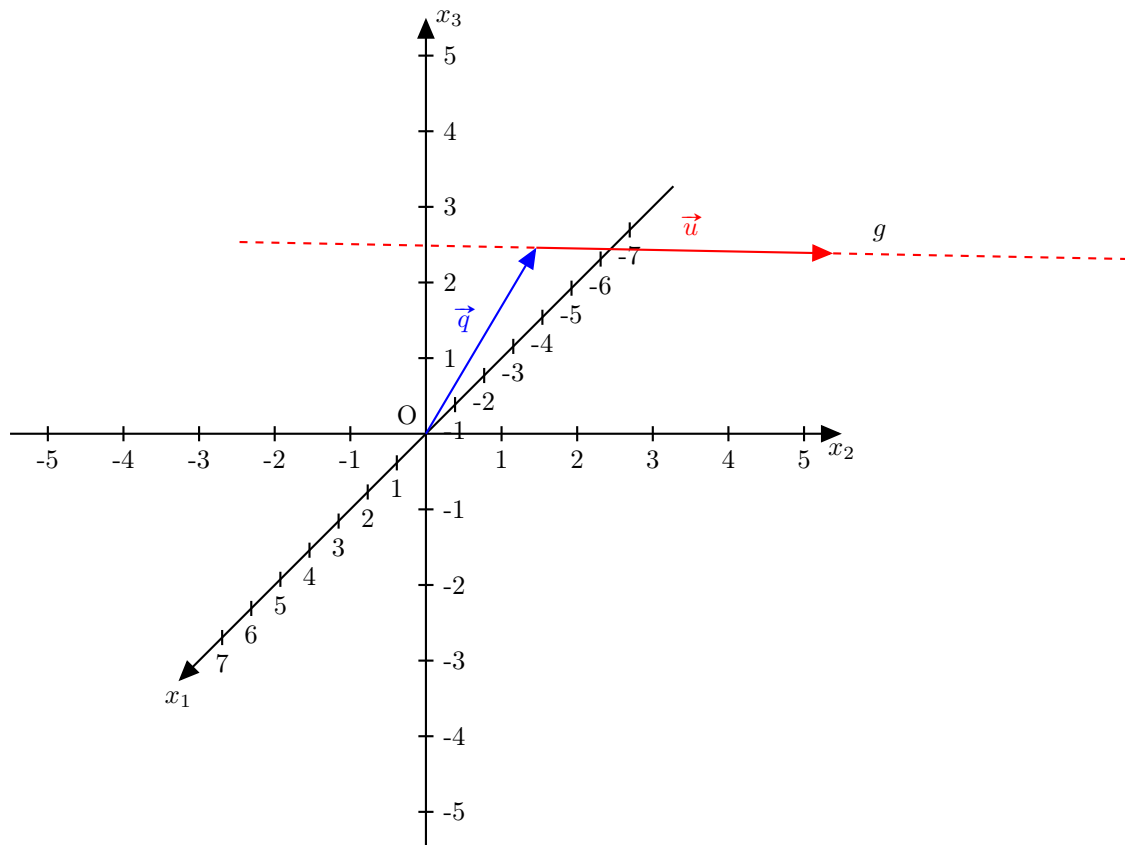
### 5.7.1 Darstellungen

Eine Gerade ist ein sehr bekannter Bestandteil der elementaren Geometrie. Bezogen auf die Vektorgeometrie ist sie nichts anderes als ein unendlich langer Vektor, beziehungsweise eine Linearkombination aus unendlich vielen (identischen / kollinearen) Vektoren. Somit ergibt sich die eindeutige **Parameterform** einer Geraden  $g$ :  $g: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{u}; s \in \mathbb{R}$ . Diese Schreibweise beschreibt die der Geraden zugehörigen Punktmenge. Der Vektor  $\vec{q}$  bestimmt die **Position** der Geraden im Raum und trägt folglich den Namen **Stützvektor**, wohingegen der Vektor  $\vec{u}$  die **Ausrichtung** der Geraden anzeigt und **Richtungsvektor** genannt wird.

#### Bemerkung:

Die Parameterform ist die einzige mögliche Darstellungsform einer Geraden im  $\mathbb{R}^3$ , da ihr Normalvektor nicht eindeutig bestimmt werden kann. Im  $\mathbb{R}^2$  jedoch ist dies möglich, ähnlich wie für Kreise. Zudem kann eine Gerade in Koordinatenform durch die **Schnittmenge zweier Ebenen** beschrieben werden (siehe auch, 5.7.3 Lagebeziehungen zwischen Ebenen“).

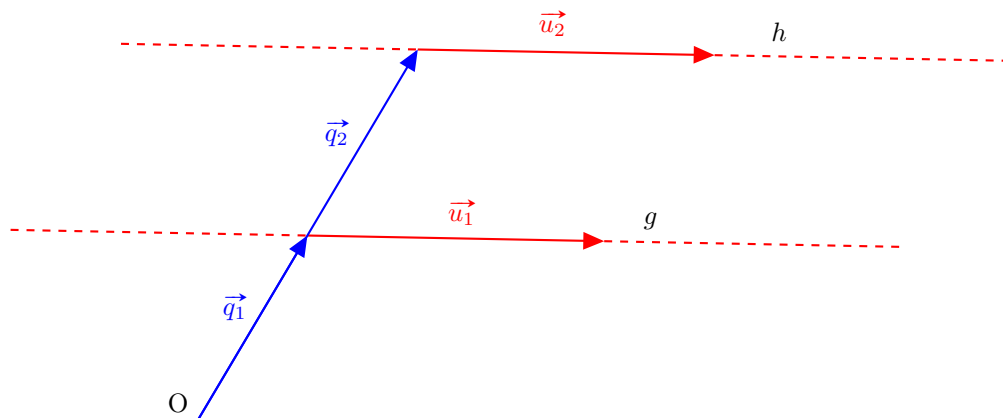




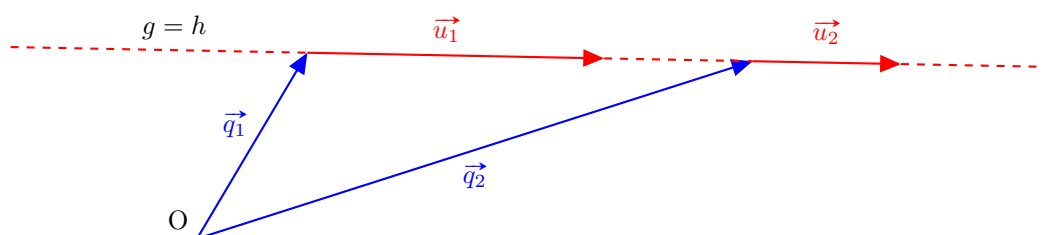
### 5.7.2 Lagebeziehungen zwischen Geraden

Es gibt bezüglich Geraden vier verschiedene Beziehungen, vorausgesetzt diese befinden sich im  $\mathbb{R}^3$ . Zwei Geraden  $g$  und  $h$  können...

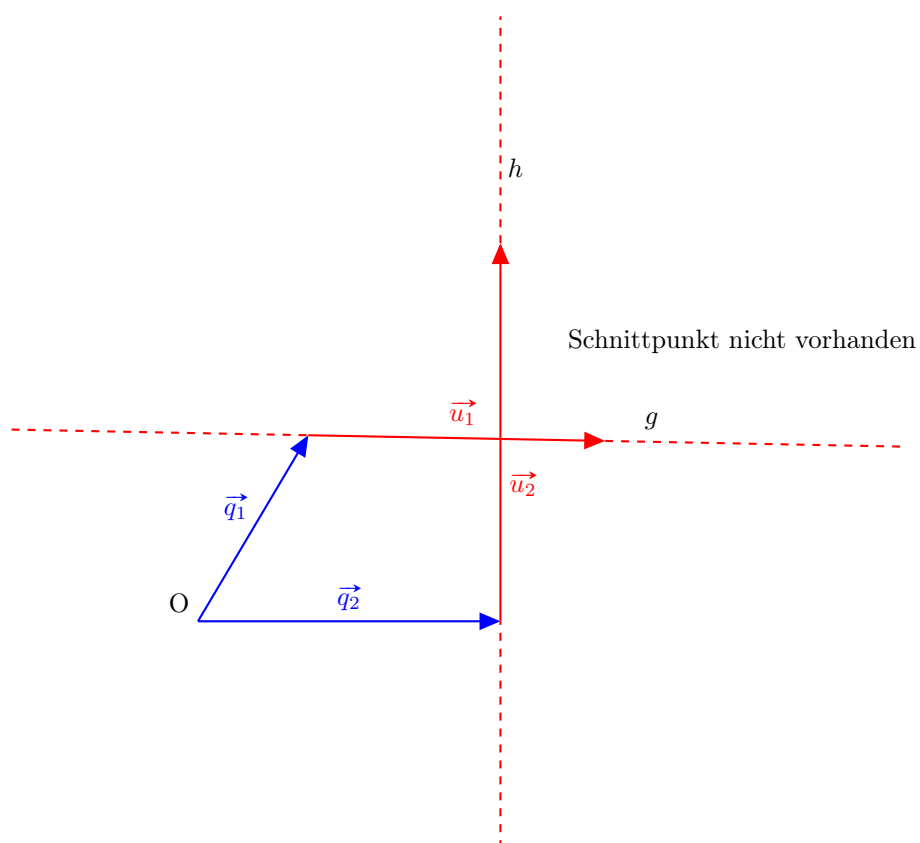
1) ...parallel...



2) ...identisch...

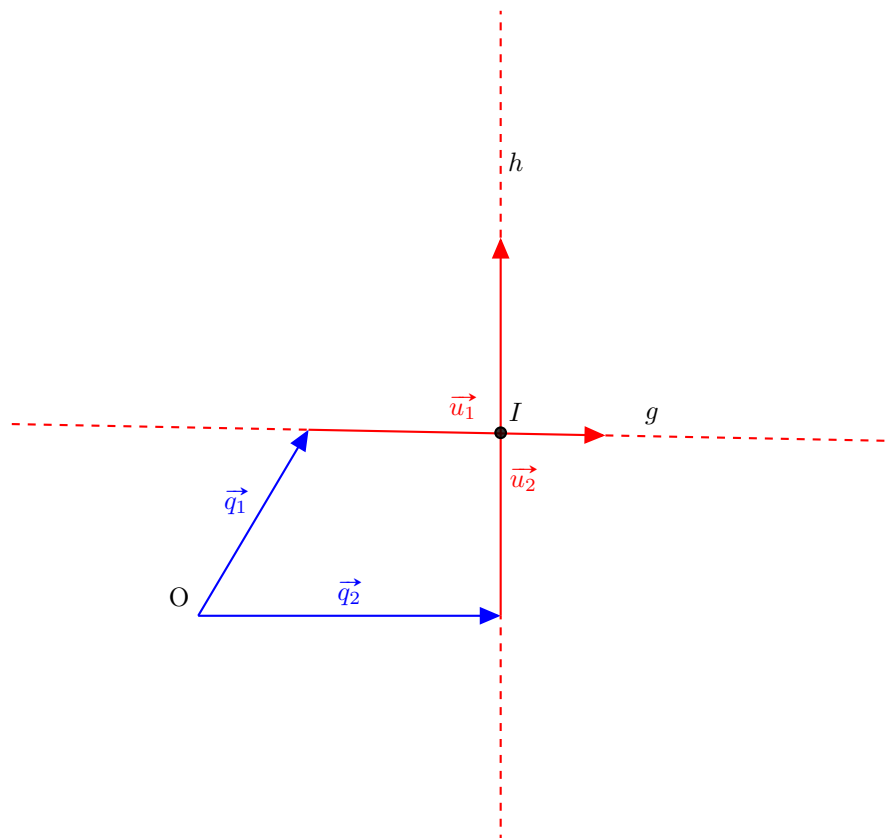


3) ...windschief zueinander...

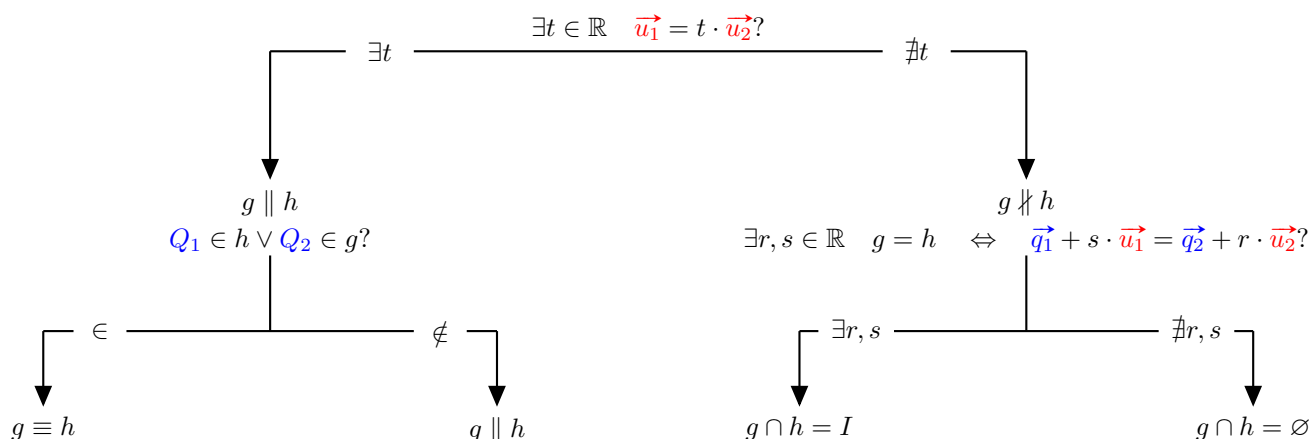


...sein oder...

4) ...**sich schneiden**



Die Lagebeziehung zwischen zwei Geraden  $g$  und  $h$  lässt sich wie folgt ermitteln:



### 5.7.3 Abstand zu einem Punkt

#### Definition 5.7.3

Der **Lotfußpunkt**  $L$  einer Geraden  $g: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{u}; t \in \mathbb{R}$  zu einem Punkt  $P \notin g$  ist definiert durch:  $\overrightarrow{LP} \odot \vec{u} = 0$ . Er ist somit der dem Punkt  $P$  am nächsten gelegenen Punkt der Gerade  $g$  und wird folglich hauptsächlich zur Abstandsberechnung genutzt.

Der Abstand von einer Geraden  $g$  zu einem Punkt  $P$  ist äquivalent zur **Norm des Verbindungsvektors**  $\overrightarrow{LP}$ , wobei  $L$  der Lotfußpunkt der Geraden  $g$  zu  $P$  ist. Für die Berechnung des Abstands gibt es drei verschiedene Lösungsansätze (OHG) von denen zwei gebräuchlicher sind als der dritte.

#### Orthogonalität:

Da die Norm des Verbindungsvektors gesucht wird, gilt es nun diesen eindeutig zu bestimmen. Folgender Ablauf führt zum Ziel:

- 1) Punkt  $L$  auf der Geraden  $g$  in Abhängigkeit des Faktors des Richtungsvektors bestimmen:

$$\vec{l} = \begin{pmatrix} q_1 + t \cdot u_1 \\ q_2 + t \cdot u_2 \\ q_3 + t \cdot u_3 \end{pmatrix}$$

- 2) Verbindungsvektor bestimmen:

$$\overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} p_1 - (q_1 + t \cdot u_1) \\ p_2 - (q_2 + t \cdot u_2) \\ p_3 - (q_3 + t \cdot u_3) \end{pmatrix}$$

- 3)  $\overrightarrow{LP} \odot \vec{u} = 0$  und Gleichung lösen (nach  $t$  auflösen):

$$0 = u_1 \cdot (p_1 - (q_1 + t \cdot u_1)) + u_2 \cdot (p_2 - (q_2 + t \cdot u_2)) + u_3 \cdot (p_3 - (q_3 + t \cdot u_3))$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

- 4) Verbindungsvektor berechnen:

$$\overrightarrow{LP} = \begin{pmatrix} p_1 - \left( q_1 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_1 \right) \\ p_2 - \left( q_2 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_2 \right) \\ p_3 - \left( q_3 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_3 \right) \end{pmatrix}$$

5) Norm des Verbindungsvektors berechnen:

$$\begin{aligned}
 d(g, P) &= |\overrightarrow{LP}| \\
 &= \left| \begin{pmatrix} p_1 - \left( q_1 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_1 \right) \\ p_2 - \left( q_2 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_2 \right) \\ p_3 - \left( q_3 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_3 \right) \end{pmatrix} \right| \\
 &= \sqrt{\left( p_1 - \left( q_1 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_1 \right) \right)^2} \\
 &\quad + \left( p_2 - \left( q_2 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_2 \right) \right)^2 \\
 &\quad + \left( p_3 - \left( q_3 + \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2} \cdot u_3 \right) \right)^2}
 \end{aligned}$$

### Hilfsebene:

Diese Methode hat sich Platz zwei erkämpft:

- 1) Hilfsebene  $E$  bestimmen ( $\vec{n} \equiv \vec{u}$   $P \in E$ , da die Gerade  $g$  die Ebene im rechten Winkel durchstößt und der Verbindungsvektor somit orthogonal zur Geraden ist):

$$\begin{aligned}
 E : \vec{u} \odot [\vec{x} - \vec{p}] &= 0 \\
 \Leftrightarrow u_1 x_1 + u_2 x_2 + u_3 x_3 &= u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3
 \end{aligned}$$

- 2)  $g = E$  und Gleichung lösen (nach  $t$  auflösen):

$$\begin{aligned}
 u_1(q_1 + t \cdot u_1) + u_2(q_2 + t \cdot u_2) + u_3(q_3 + t \cdot u_3) &= u_1 p_1 + u_2 p_2 + u_3 p_3 \\
 \Leftrightarrow t &= \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}
 \end{aligned}$$

- 3) Siehe Schritt 4 Orthogonalität

- 4) Siehe Schritt 5 Orthogonalität

### Grenzwertberechnung:

Zu guter Letzt wollen wir die Analysis Fanatiker befriedigen:

- 1) Siehe Schritt 1 Orthogonalität  
 2) Siehe Schritt 2 Orthogonalität  
 3) Norm des Vektors in Abhängigkeit von  $t$  bestimmen:

$$\begin{aligned}
 |\overrightarrow{LP}| &= \sqrt{(p_1 - (q_1 + t \cdot u_1))^2 + (p_2 - (q_2 + t \cdot u_2))^2 + (p_3 - (q_3 + t \cdot u_3))^2} \\
 &= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)t^2 + 2((q_1 - p_1) \cdot u_1 + (q_2 - p_2) \cdot u_2 + (q_3 - p_3) \cdot u_3)t} \\
 &\quad + ((p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2)
 \end{aligned}$$

Somit ergibt sich eine Funktion  $f(t)$ :

$$\begin{aligned}
 f(t) &= \sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)t^2 + 2((q_1 - p_1) \cdot u_1 + (q_2 - p_2) \cdot u_2 + (q_3 - p_3) \cdot u_3)t} \\
 &\quad + ((p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2)
 \end{aligned}$$

4) Tiefpunkt von  $f(t)$  berechnen:

$$f'(t) = \frac{2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)t + 2((q_1 - p_1) \cdot u_1 + (q_2 - p_2) \cdot u_2 + (q_3 - p_3) \cdot u_3)}{2\sqrt{(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)t^2 + 2((q_1 - p_1) \cdot u_1 + (q_2 - p_2) \cdot u_2 + (q_3 - p_3) \cdot u_3)t} + \dots} \dots$$

$$\dots + ((p_1 - q_1)^2 + (p_2 - q_2)^2 + (p_3 - q_3)^2)$$

notwendige Bedingung TP:

$$f'(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)t + 2((q_1 - p_1) \cdot u_1 + (q_2 - p_2) \cdot u_2 + (q_3 - p_3) \cdot u_3)$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{u_1 \cdot (p_1 - q_1) + u_2 \cdot (p_2 - q_2) + u_3 \cdot (p_3 - q_3)}{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Die hinreichende Bedingung ist nicht zu prüfen, sie gilt (der Minimalabstand existiert immer), und die Art des Extremwerts ist ebenfalls vorbestimmt, da der Verbindungsvektor unendlich lang wird wenn man den Lotfußpunkt in beide Richtungen entlang der Geraden verschiebt.

5) Siehe Schritt 4 Orthogonalität

6) Siehe Schritt 5 Orthogonalität

Bemerkung:

Wie sich unschwer erkennen lässt, sind die Formeln für die Berechnung von  $t$  bei allen drei Lösungsansätzen identisch. Die Methoden unterscheiden sich somit nur am Anfang voneinander.

Bemerkung:

Zur Abstandsberechnung gibt es eine allgemeine Formel, welche die oben aufgelisteten Vorgehensweisen überflüssig macht. Da sie für das Abitur allerdings nicht zugelassen ist, wird sie hier nicht bewiesen beziehungsweise graphisch ergänzt:  $d(g, P) = \frac{|\vec{u} \times \overrightarrow{QP}|}{|\vec{u}|}$ .

### 5.7.4 Abstand zweier Geraden

Zwei nicht sich schneidende oder identische Geraden haben einen **eindeutig definierten Minimalabstand**. Bei zwei parallelen Geraden ist dies einfach zu visualisieren, der Abstand zweier windschiefer Geraden jedoch weniger. Im Folgenden sollen beide Fälle untersucht werden.

Parallele Geraden:

Der Abstand zweier paralleler Geraden  $g$  und  $h$  entspricht genau dem Abstand eines Punktes  $P \in g \vee P \in h$  zur jeweiligen gegenüberliegenden Geraden. Somit genügt es den Abstand zwischen dem Stützpunkt einer Geraden und der anderen zu berechnen.

Windschiefe Geraden:

Der minimale Abstand zweier windschiefer Geraden lässt sich mithilfe einer **Hilfebene** verbildlichen und bestimmen. Gegeben seien zwei Geraden  $g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}; r \in \mathbb{R}$  und  $h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}; s \in \mathbb{R}$ . Daraus folgt, dass:  $E: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v} \vee E: \vec{x} = \vec{q} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}; s, r \in \mathbb{R}$ . Somit ergibt sich eine Ebene, welche entweder die Gerade  $g$  oder  $h$  enthält und parallel zur anderen ist. Der Minimalabstand ist äquivalent zum Abstand zwischen einem Punkt der Geraden, die nicht in der Ebene enthalten ist, und der Ebene. Für die genaue Vorgehensweise von diesem Punkt aus empfiehlt es sich den Teil „Abstand zu einem Punkt“ unter Ebenen zuzuwenden.

Bemerkung:

Zur Berechnung des Abstands zweier windschiefer Geraden gibt es zudem eine Formel, welche zugleich das **Ergebnis des Skalarprodukts** veranschaulicht. Aus zwei Geraden

$$g: \vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}; r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad h: \vec{x} = \vec{q} + s \cdot \vec{v}; s \in \mathbb{R}$$

lässt sich mit dem Kreuzprodukt ein normierter Normalenvektor  $n_0$  zu beiden Richtungsvektoren  $\vec{u}$  und  $\vec{v}$  errechnen, den man mit dem Verbindungsvektor der beiden Ortsvektoren  $(\vec{q} - \vec{p})$  zur Minimalabstandsrechnung der beiden Geraden skaliert:

$$d(g, h) = |n_0 \odot (\vec{q} - \vec{p})| = \left| \frac{\vec{u} \times \vec{v}}{|\vec{u} \times \vec{v}|} \odot (\vec{q} - \vec{p}) \right|$$

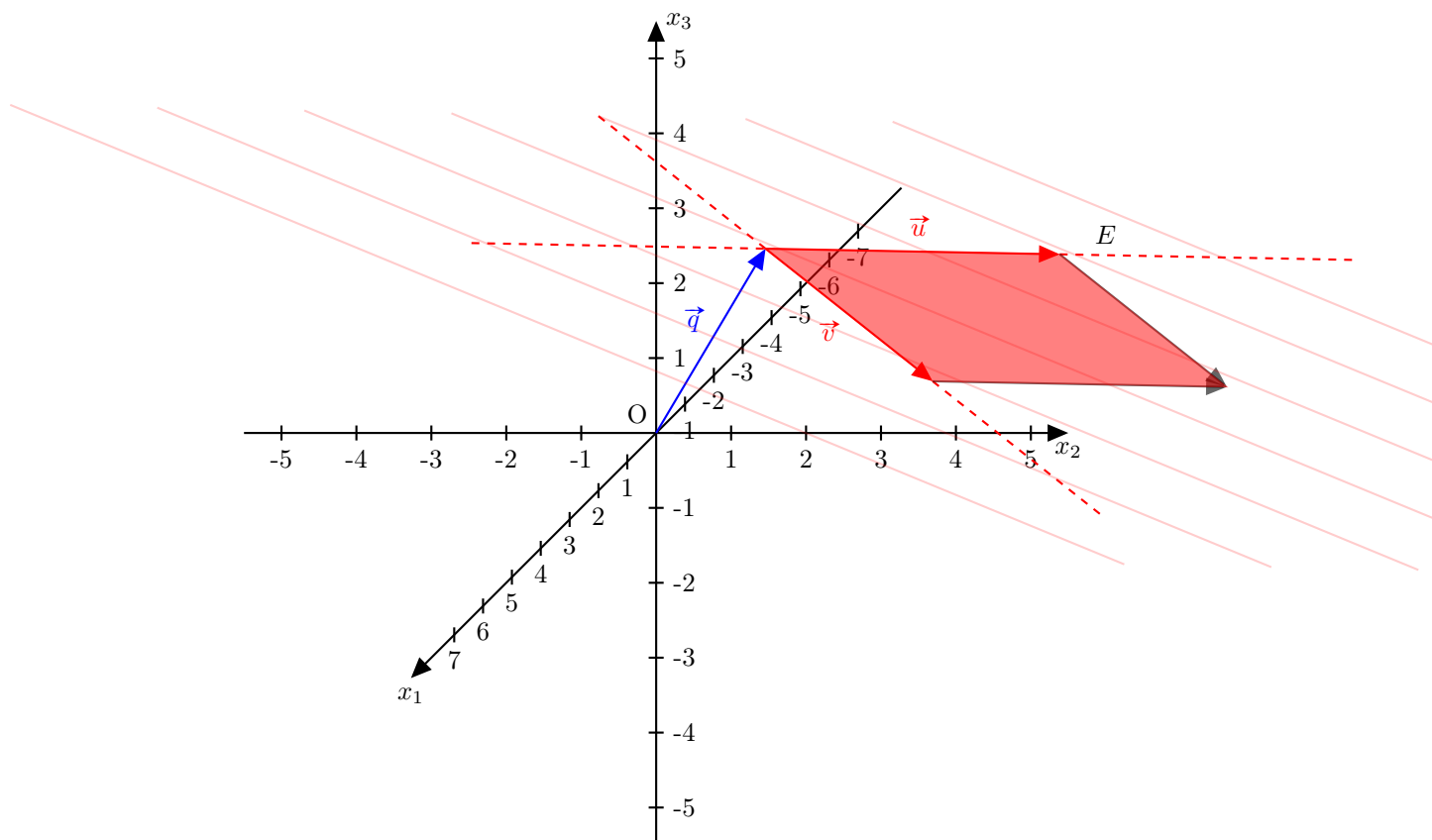
## 5.8 Ebenen

### 5.8.1 Darstellungen

Die Darstellung einer Ebene beinhaltet immer die gleichen Informationen: Ihre **Position** im Raum und ihre **Ausrichtung**:

Name	Darstellung
Parameterform	$E: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R}$
Normalenform	$E: (\vec{x} - \vec{q}) \odot \vec{n} = 0$
Koordinatenform	$E: n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 = d; \quad d = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 + n_3 \cdot q_3$

Die erste bei Geraden bereits eingeführte Form ist leicht zu verstehen. An den Stützvektor setzt man anschließend einen zweiten Richtungsvektor; die beiden Vektoren werden **Spannvektoren** genannt, da sie gemeinsam die Ebene aufspannen. Da man sich über diese beliebig in zwei Dimensionen bewegen kann, ist jeder Punkt in einer Ebene erreichbar. Bei der Bildung der Ebene muss man beachten, dass die Spannvektoren **nicht kollinear** sind. In diesem Fall erhält man wieder eine Gerade.



Die Normalenform und Koordinatenform sind weitaus weniger intuitiv und erfordern eine genauere Erklärung. Sie lässt sich zudem leichter anhand einer Graphik erklären:



Somit ist jeder Punkt  $X \in E$ , wenn der Verbindungsvektor  $(\vec{x} - \vec{q})$  orthogonal zum Vektor  $\vec{n}$  ist. Dabei spielt die Position des sogenannten **Normalenvektors** keine Rolle, ebenso wenig wie seine Norm. Allein seine Ausrichtung bestimmt die der Ebene. Um die Position im Raum genau zu bestimmen, benötigt man zudem einen Punkt  $Q \in E$ . Diese zusätzliche Information schließt alle anderen parallelen Ebenen aus, die durch einen kollinearen Normalenvektor definiert sind.

Aus der Normalenform lässt sich die Koordinatenform ableiten. Man macht häufiger Gebrauch von letzterer, da sich leichter mit ihr rechnen lässt. Man bildet sie wie folgt:

$$\begin{aligned}
 E : (\vec{x} - \vec{q}) \odot \vec{n} &= 0 \\
 \Leftrightarrow E : \vec{x} \odot \vec{n} &= \vec{q} \odot \vec{n} \\
 \Leftrightarrow E : n_1 \cdot x_1 + n_2 \cdot x_2 + n_3 \cdot x_3 &= d; \quad d = n_1 \cdot q_1 + n_2 \cdot q_2 + n_3 \cdot q_3
 \end{aligned}$$

#### Bemerkung:

Ebenen lassen sich auch mittels **Spurpunkten** und **Spurgeraden** lokalisieren. Spurpunkte sind die der Achsen des Koordinatensystems, welche in der Ebene enthalten sind. Aus diesen lassen sich anschließend die Spurgeraden bilden (durch Verbinden der Punkte). Folgende Möglichkeiten bieten sich an:

- 1) 3 Spurpunkte
- 2) 2 Spurpunkte  $\Rightarrow E \parallel \vec{x}_1 \vee E \parallel \vec{x}_2 \vee E \parallel \vec{x}_3$
- 3) 1 Spurpunkt  $\Rightarrow E \parallel E_{x_1 x_2} \vee E \parallel E_{x_2 x_3} \vee E \parallel E_{x_1 x_3}$

- 4) Ausnahme des vorherigen Falls:  $P \equiv O \Rightarrow$  Ausrichtung von  $E$  lässt sich nicht bestimmen
- 5)  $\infty$  Punkte  $\Rightarrow$  Eine der Achsen des Koordinatensystems  $\in E$ , Ausrichtung von  $E$  lässt sich nicht bestimmen
- 6)  $\infty, \cdot 2^{\circ}$  Punkte  $\Rightarrow E \equiv E_{x_1x_2} \vee E \equiv E_{x_2x_3} \vee E \equiv E_{x_1x_3}$

Drei beziehungsweise zwei (falls man Normalenform und Koordinatenform als eine ansieht) verschiedene Darstellungsweisen sind zwar interessant und eine nicht ganz unwichtige Überlegung, jedoch scheint das auf den ersten Blick unnütz. Im Laufe dieser section wird sich der jeweilige Nutzen noch offenbaren. Dann wird einem auch deutlich, dass es manchmal von Vorteil sein kann die Formen umzuformen. Die Herangehensweisen für jede Umformung unterscheiden sich nur wenig voneinander, Folgendes Diagramm stellt eine Möglichkeit vor:

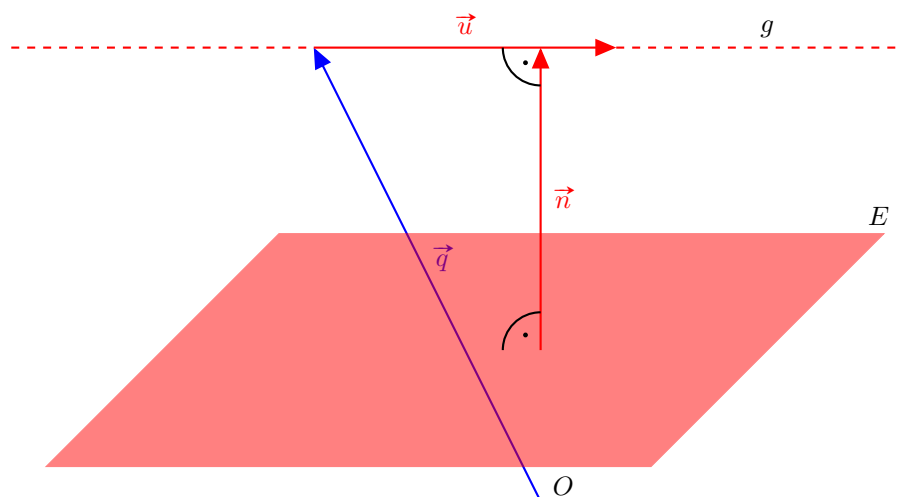


- 1) Siehe oben
- 2)  $\vec{n}$  aus den einzelnen Faktoren herausarbeiten  $\wedge$  Per Punktprobe (Koordinaten einsetzen) einen Punkt  $Q$  von  $E$  ermitteln
- 3)  $\vec{n}$  mittels Kreuzprodukt ermitteln  $\wedge$  Stützpunkt  $P$  als Punkt  $Q$  einsetzen
- 4) Zwei Punkte  $U, V \neq Q$  von  $E$  ermitteln  $\wedge Q$  als Stützpunkt  $P$   $\wedge (\vec{u} - \vec{q})$  und  $(\vec{v} - \vec{q})$  als Spannvektoren einsetzen
- 5) Siehe 4 (gleiches Prinzip)
- 6) Siehe 3 (gleiches Prinzip)  $\wedge$  Skalarprodukt „ausmultiplizieren“

### 5.8.2 Lagebeziehungen zwischen Ebenen und Geraden

Ebenen und Geraden können im Gegensatz zu zwei Geraden nur eine von den drei folgenden Beziehungen zueinander haben. Eine Ebene  $E$  und eine Gerade  $g$  können...

- 1) ...parallel...





...sein oder...

2) **...sich schneiden**

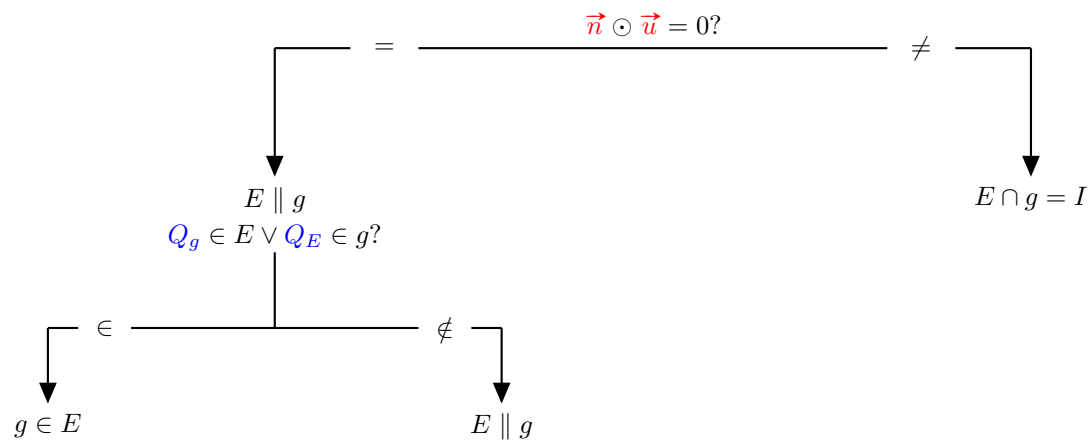


Zudem kann g...

3) **...in  $E$  liegen**



Die Lagebeziehung zwischen einer Ebene  $E$  und einer Geraden  $g$  lässt sich wie folgt ermitteln:



### 5.8.3 Lagebeziehungen zwischen Ebenen

Ebenen teilen bezüglich ihrer Lage zueinander eine Eigenschaft mit einer Ebene und einer Geraden. Zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  können ebenfalls:

1) ...parallel...

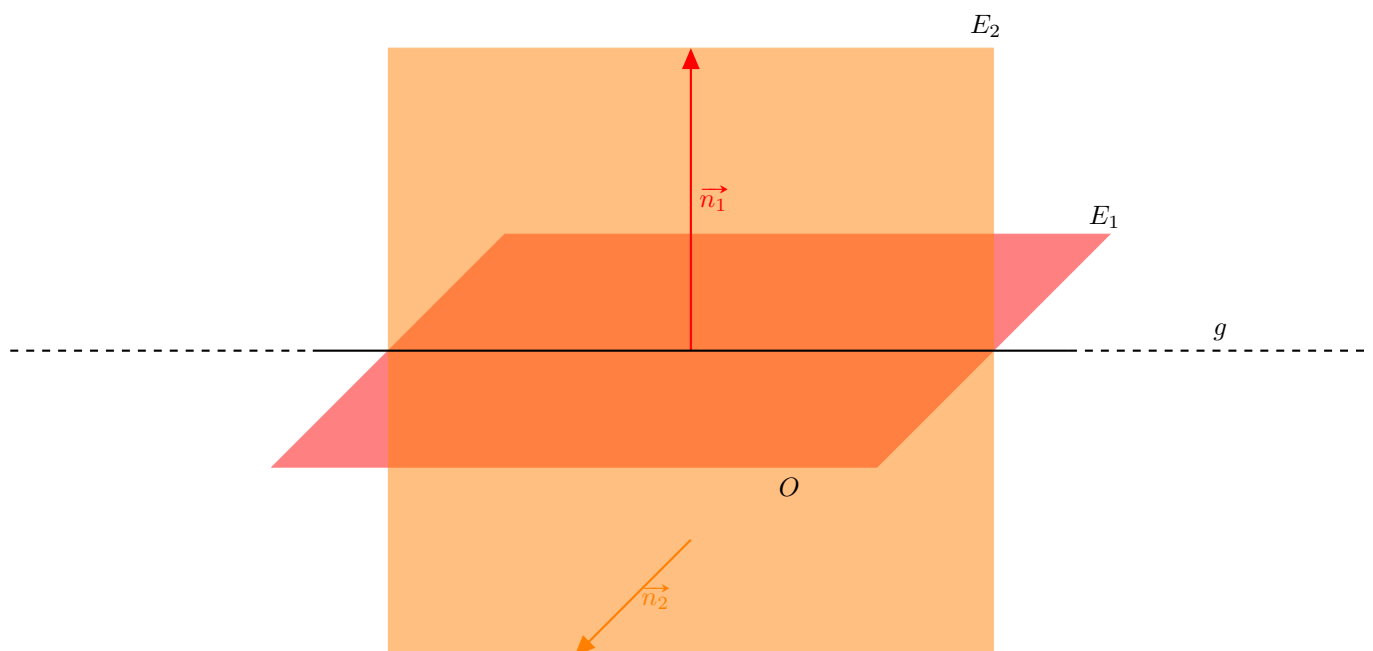


2) ...identisch

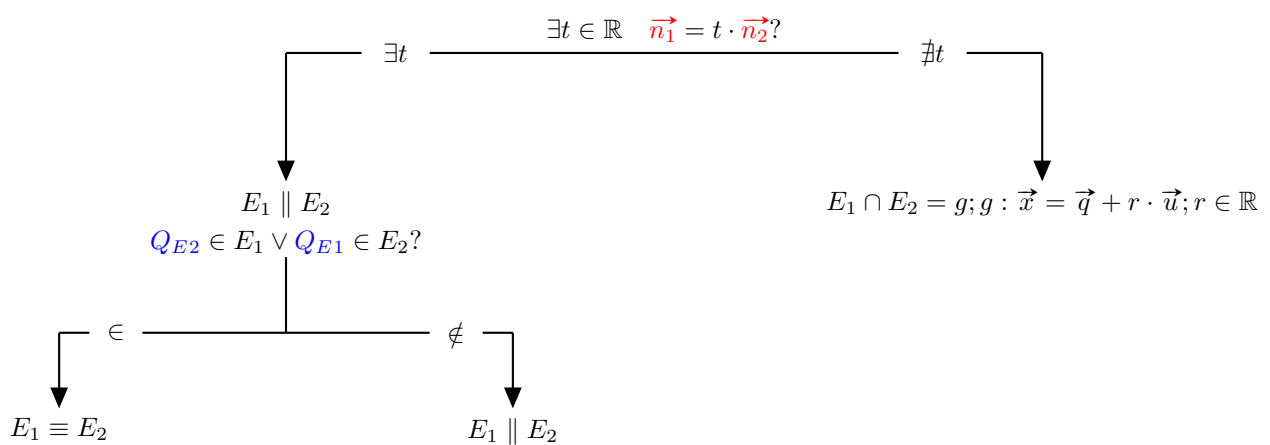


...sein oder...

3) ...sich schneiden



Die Lagebeziehung zwischen zwei Ebenen  $E_1$  und  $E_2$  lässt sich wie folgt ermitteln:



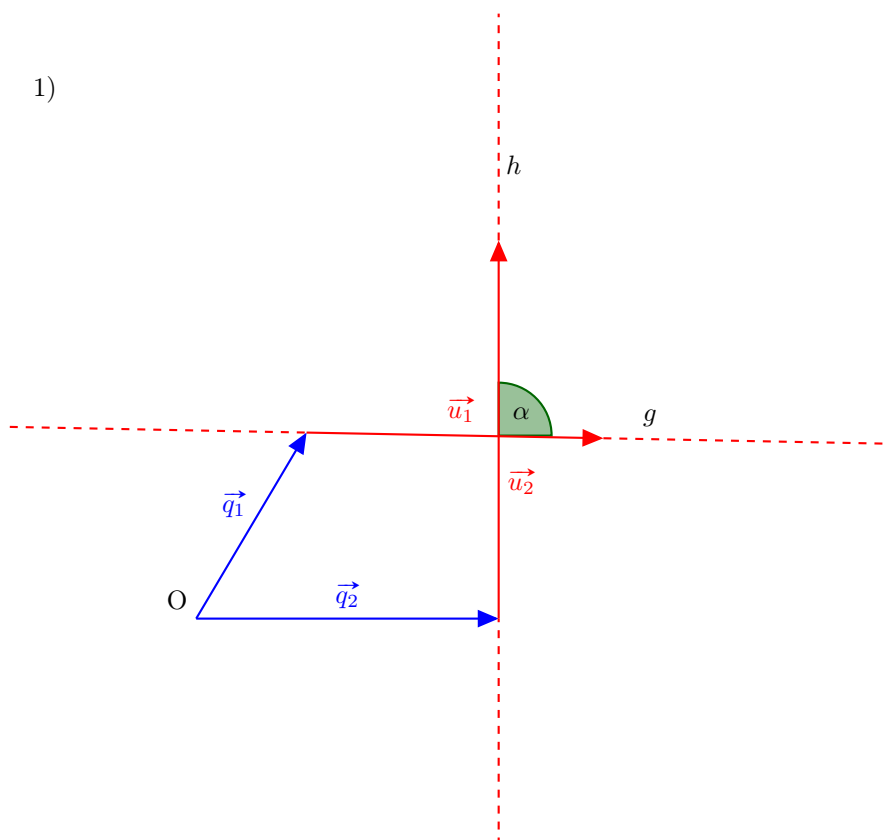
Für die Berechnung der Schnittgeraden gibt es unterschiedliche Ansätze abhängig von der Ausgangssituation, welche durch die zwei möglichen Darstellungsweisen von Ebenen bedingt sind. Drei mögliche Fälle können auftreten:

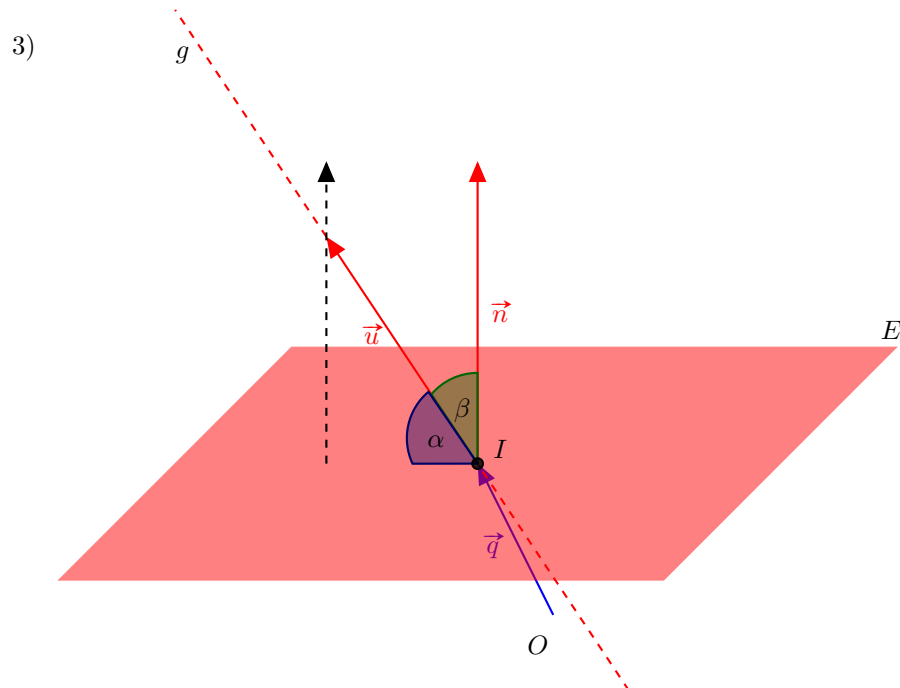
- 1)  $E_1 : \vec{n}_1 \cdot x_1 + \vec{n}_2 \cdot x_2 + \vec{n}_3 \cdot x_3 = d; \quad d = \vec{n}_1 \cdot \vec{q}_1 + \vec{n}_2 \cdot \vec{q}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{q}_3 \wedge E_2 : \vec{n}_1 \cdot x_1 + \vec{n}_2 \cdot x_2 + \vec{n}_3 \cdot x_3 = d; \quad d = \vec{n}_1 \cdot \vec{q}_1 + \vec{n}_2 \cdot \vec{q}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{q}_3$
- 2)  $E_1 : \vec{n}_1 \cdot x_1 + \vec{n}_2 \cdot x_2 + \vec{n}_3 \cdot x_3 = d; \quad d = \vec{n}_1 \cdot \vec{q}_1 + \vec{n}_2 \cdot \vec{q}_2 + \vec{n}_3 \cdot \vec{q}_3 \wedge E_2 : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R}$
- 3)  $E_1 : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R} \wedge E_2 : \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}; \quad s, t \in \mathbb{R}$

#### 5.8.4 Winkel zwischen Ebenen (und Geraden)

Die einzige bisher angesprochene Möglichkeit den Winkel zwischen zwei geometrischen Formen zu ermitteln macht sich der Definition des Skalarprodukts zunutze. Wie bereits erläutert gilt:  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{v} \odot \vec{u}}{|\vec{v}| \cdot |\vec{u}|}$ . Hierbei soll erneut hervorgehoben werden, dass der Winkel der "kleinere" der beiden möglichen ist. Den anderen erhält man in Abhängigkeit des ersten. Daraus lässt sich ableiten wie zwei Geraden oder Ebenen oder auch eine Gerade und eine Ebene zueinander stehen:

- 1) Geraden:  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{u}_1 \odot \vec{u}_2}{|\vec{u}_1| \cdot |\vec{u}_2|}$
- 2) Ebenen:  $\cos(\alpha) = \frac{\vec{n}_1 \odot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$
- 3) Gerade / Ebene:  $\sin(\alpha) = \frac{\vec{u} \odot \vec{n}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$





### 5.8.5 Abstand zu einem Punkt

Eine simple und intuitive Art den Abstand einer Ebene  $E$  zu einem Punkt  $P$  zu bestimmen, wäre eine Gerade zu erstellen, welche durch  $P$  geht und die als Richtungsvektor den Normalenvektor  $E$ s hat, da  $\vec{n}$  per Definition orthogonal zu  $E$  ist und somit ein anderer kollinearer Vektor den "schnellsten Weg zum Punkt" darstellt. Anschließend müsste man den Schnittpunkt der Geraden und  $E$  und die Norm des somit erhaltenen Vektors berechnen. Es sticht einem schnell ins Auge, dass dies ein großer Aufwand ist. Tatsächlich gibt es einen für das Abitur zugelassenen schnelleren Lösungsweg: die **Hess'sche Normalenform**.

#### Definition 5.8.5

Hess'sche Normalenform:

Die Hess'sche Normalenform ist eine besondere Normalenform einer Ebene, dadurch besonders, dass der Normalenvektor normiert ist. Sie lässt sich wie folgt ableiten:  $E_h : \frac{\vec{n} \odot [\vec{x} - \vec{q}]}{|\vec{n}|} = 0$



Anhand dieser Graphik lässt sich die Formel zur Berechnung des Abstands eines Punktes zu einer Ebene ablesen:  $d = \frac{|\vec{n} \odot (\vec{p} - \vec{q})|}{|\vec{n}|}$

## Beweis

$$\overrightarrow{FP} = r \cdot \vec{n}; r \in \mathbb{R}^+:$$

Nach Theoremen der Trigonometrie und der Definition des Skalarprodukts gilt:

$$\begin{aligned} \cos(\alpha) &= \frac{d}{|\overrightarrow{QP}|} \\ \cos(\alpha) &= \frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{QP}|} \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \frac{d}{|\overrightarrow{QP}|} &= \frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{QP}|} \\ d &= \frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}|} \\ d &= \frac{\vec{n} \odot (\vec{p} - \vec{q})}{|\vec{n}|} \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{FP} = r \cdot \vec{n}; r \in \mathbb{R}^-:$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{|\overrightarrow{QP}|} &= \frac{-\vec{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|-\vec{n}| \cdot |\overrightarrow{QP}|} \\ d &= -\frac{\vec{n} \odot \overrightarrow{QP}}{|\vec{n}|} \\ d &= -\frac{\vec{n} \odot (\vec{p} - \vec{q})}{|\vec{n}|} \end{aligned}$$

Somit lautet die gesuchte Formel:  $d = \frac{|\vec{n} \odot (\vec{p} - \vec{q})|}{|\vec{n}|}$

□

## 5.9 Kreise und Kugeln

### 5.9.1 Kreise

### 5.9.2 Kugeln

## 5.10 Spatprodukt

## 5.11 Dyadisches Produkt

## 5.12 Sätze

## KOMPLEXE ZAHLEN

### 6.1 Einführung

Die Ursache für die Einführung der komplexen Zahlen ist vergleichbar mit der jeglicher anderer Zahlenmengen (abgesehen von  $\mathbb{N}$ ). Alles basiert auf einer Rechnung oder einer Menge an Rechnungen, welche für die vorhandenen Zahlenmengen **keine Lösung besitzen** oder aber diese Zahlenmengen einem nicht erlauben eine Lösung zu finden. Ein Beispiel hierfür ist die Einführung der negativen Zahlen. Gleichungen der Form  $2 + x = 1$  waren eine Zeit lang nicht lösbar. Ebenso galt einmal, dass  $x^2 - 2 = 0$  keine Lösung besitzt, da hierfür die reellen Zahlen benötigt werden. Analog dazu wird die Erweiterung auf die komplexen Zahlen begründet. Dies wird an folgendem klassischen Beispiel erläutert:

$$\begin{aligned}x^2 + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \sqrt{-1} \quad \text{!}\end{aligned}$$

Um dieser und anderen Gleichungen eine Lösung zuzuteilen ist es nicht nur notwendig die Zahlenmenge zu erweitern, sondern auch, neue Symbole und Zeichen einzuführen um die neuen Zahlen zu kennzeichnen. Für die  $\mathbb{Z}$  ist es das Symbol "-", für  $\mathbb{Q}$  "und  $\frac{a}{b}$ ", für  $\mathbb{R}$   $\sqrt{a}$  und die Zeichen  $\pi$  und  $e$  zum Beispiel (auch wenn beide sich anders darstellen lassen). (Ein) gewisse(r) Mathematiker (Leibniz glaube ich) hat entschieden, dass das einzige benötigte Zeichen  $i$  sein sollte, da er sie imaginäre Zahl nannte (Für den Fall, dass ich hier ein bisschen was durcheinander bringe, sind Direktverbesserungen kommentarlos erlaubt und erwünscht). Und dem war so, weshalb nun gilt:

$$i \in \mathbb{C} : i^2 = -1; \mathbb{C} := \mathbb{R} \cup \{i\}$$

#### Definition 6.1.0

Komplexe Zahlen werden standardmäßig mit dem Buchstaben  $z$  dargestellt. Die allgemeine Formel einer solchen Zahl lautet:

$$z = \underbrace{x}_{\text{Re}(z)} + \underbrace{y \cdot i}_{\text{Im}(z)}; x, y \in \mathbb{R}; i \in \mathbb{C}$$

Hierbei wird  $x = \text{Re}(z)$  Realteil und  $y = \text{Im}(z)$  und zwar nur  $y$  Imaginärteil genannt.

#### Bemerkung:

Eine Zahl  $z = x + yi \in \mathbb{C}$  heißt rein imaginäre Zahl für  $x = 0$ . Analog dazu wird sie für  $y = 0$  als reell bezeichnet.

### 6.2 Der Körper der komplexen Zahlen

Da wir nun wissen (oder halt auch nicht), weshalb wir die komplexen Zahlen benötigen, gilt es nun die verschiedenen Verknüpfungen, mit welchen wir zwei komplexe Zahlen verbinden, zu definieren. Wie alle anderen bekannten Mengen (außer  $\mathbb{N}$ ), ist  $\mathbb{C}$  teil eines **Körpers** welcher die zwei Verknüpfungen, denen wir allgemein die Namen **Addition** und **Multiplikation** geben. Das 3-Tupel (oder auch Tripel)  $(\mathbb{C}, +, *)$  ist somit der Körper, mit welchem wir arbeiten werden (jemals gefragt warum keine weiteren Verknüpfungen eingeführt wurden?). Jedoch muss auch erstmal bewiesen werden, dass dieses Tripel ein Körper ist:



## Beweis

**Die Addition:**

Für die Addition gilt bekanntlich zu beweisen, dass  $(\mathbb{C}, \oplus)$  eine abelsche oder auch kommutative Gruppe ist :

1)

$$\begin{aligned} \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \oplus z_2 &:= (x_1 + y_1 i) \oplus (x_2 + y_2 i) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i) \\ &\in \mathbb{C} \\ \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : \oplus : \mathbb{C} \times \mathbb{C} &\rightarrow \mathbb{C} \quad (\text{Abgeschlossenheit}) \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i) \oplus (x_3 + y_3 i) \\ &= ((x_1 + x_2 + x_3) + (y_1 + y_2 + y_3) i) \\ &= (x_1 + y_1 i) \oplus ((x_2 + x_3) + (y_2 + y_3) i) \\ &= (x_1 + y_1 i) \oplus ((x_2 + y_2 i) \oplus (x_3 + y_3 i)) \\ &= z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) \\ \Rightarrow \forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C} : (z_1 \oplus z_2) \oplus z_3 &= z_1 \oplus (z_2 \oplus z_3) \quad (\text{Assoziativität}) \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} e &= (0 + 0i) \in \mathbb{C}, z \in \mathbb{C} : z \oplus e = (x + yi) \oplus (0 + 0i) \\ &= ((x + 0) + (y + 0)i) \\ &= (x + yi) \\ \Rightarrow \exists e : z \oplus e = z; z \in \mathbb{C} &\quad (\text{Neutrales Element}) \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} z_1 \oplus z_2 &= (x_1 + y_1 i) \oplus (x_2 + y_2 i) \\ &= ((x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i) \\ &= ((x_2 + x_1) + (y_2 + y_1) i) \\ &= (x_2 + y_2 i) \oplus (x_1 + y_1 i) \\ &= z_2 \oplus z_1 \\ \Rightarrow \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : z_1 \oplus z_2 &= z_2 \oplus z_1 \quad (\text{Kommutativgesetz}) \end{aligned}$$

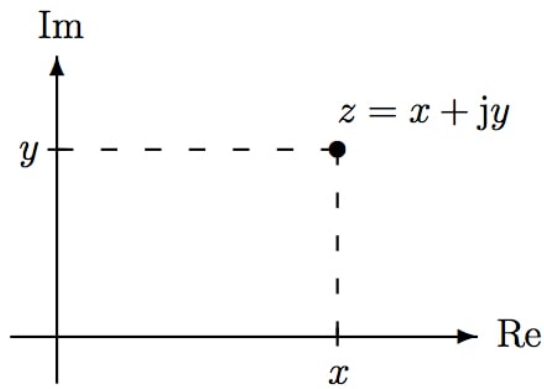
□

## 6.3 Darstellung komplexer Zahlen

Eine komplexe Zahl wird durch zwei reelle Zahlen charakterisiert. Wie bei zweidimensionalen Vektoren brauchen wir hier zur geometrischen Veranschaulichung auch eine zweidimensionale Ebene.

### 6.3.1 Kartesische Darstellung

Jeder komplexen Zahl  $z = x + i * y$  entspricht genau ein Punkt  $P = (x, y)$  in der komplexen Zahlenebene und umgekehrt.



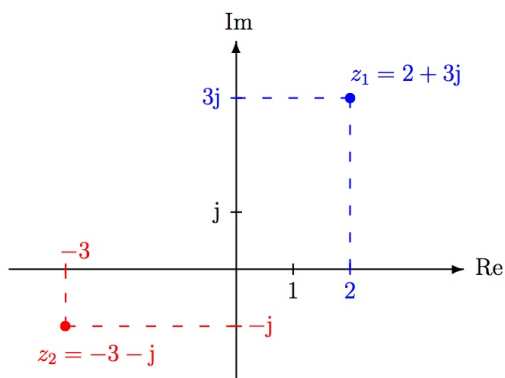
Bemerkung:  
Bezeichnungen

1. Die komplexe Zahlenebene nennt sich auch Gaußsche- Zahlenebene
2. Hier werden die Achsen des Koordinatensystems als **reelle Achse** bzw. **imaginäre Achse** bezeichnet.

Bemerkung:  
Beispiel

Die folgenden komplexen Zahlen sind in der Gaußschen Zahlenebene darzustellen:

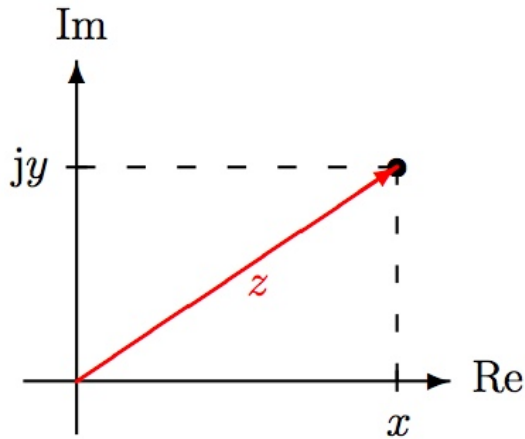
$$z_1 = 2 + 3j \quad z_2 = -3 - j \quad (i \text{ wird hier } j \text{ genannt})$$



Bemerkung:  
Bemerkungen

Für manche Anwendungen ist es hilfreich, eine komplexe Zahl nicht als Punkt  $P = (x, y)$  in der Gaußschen Zahlenebene zu veranschaulichen, sondern stattdessen den Ortsvektor zu betrachten

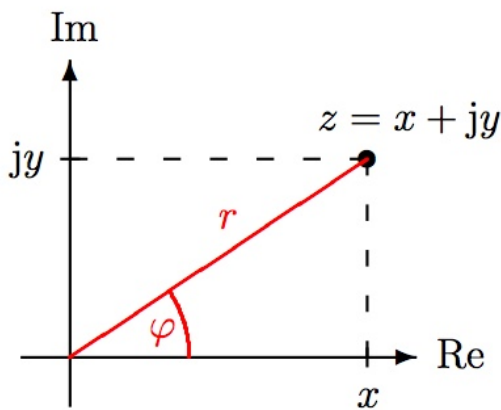
$$z = x + j * y \Leftrightarrow z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$



In diesem Fall spricht man von  $z$  als einem **komplexen Zeiger**.

### 6.3.2 Polarkoordinatendarstellung

Neben der eben eingeführten kartesischen Darstellung  $z = x + j * y$  kann eine komplexe Zahl auch entsprechend der hier stehenden Skizze durch ihren Radius und den Winkel eindeutig festgelegt werden.



Bemerkung:  
Erinnerung

Zusammenhang zwischen den Koordinaten  $P(x, y)$  und  $P(r, \varphi)$  :

$$\begin{pmatrix} x = r * \cos(\varphi) \\ y = r * \sin(\varphi) \end{pmatrix} \text{ bzw. } \begin{pmatrix} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \tan(\varphi) = \frac{y}{x} \end{pmatrix}$$

Bemerkung:  
Bemerkung

Der Zusammenhang zwischen dem Quotienten  $\frac{y}{x}$  und dem Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$  eindeutig, da die Tangensfunktion -periodisch ist.

Damit erhält man die **trigonometrische Darstellung** :

$$z = x + j * y = r * \cos(\varphi) + j * r * \sin(\varphi) \Rightarrow z = r(\cos(\varphi) + j * \sin(\varphi))$$

Dieser Ausdruck von  $z$  wird im Folgenden sehr häufig auftreten. Deshalb wird dafür die Abkürzung

$$e^{j\varphi} = \cos(\varphi) + j * \sin(\varphi)$$

ein. Somit ergibt sich schließlich eine sehr kompakte Darstellung, die sogenannte **Exponentialdarstellung** einer komplexen Zahl:

$$z = r(\cos(\varphi) + j * \sin(\varphi)) = r * e^{j\varphi}$$

Bemerkung:  
Zusammenfassung

Eine komplexe Zahl lässt sich auf verschiedene Arten darstellen:

1.  $z = x + j * y$  (kartesische Darstellung)
2.  $z = (\cos(\varphi) + j * \sin(\varphi))$  (trigonometrische Darstellung)
3.  $z = r * e^{j\varphi}$  (Exponential-Darstellung)

### 6.3.3 Umrechnung zwischen den Darstellungen

---

# STATISTIK UND WAHRSCHEINLICHKEIT

---

## 7.1 Hypothesentests

## ARITHMETIK

---

### 8.1 Die vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine mathematische Beweismethode, nach der eine Aussage für alle natürlichen Zahlen bewiesen wird, die größer oder gleich einem bestimmten Startwert sind.

Daher wird der Beweis in zwei Etappen durchgeführt; mit dem **Induktionsanfang** beweist man die Aussage für die kleinste Zahl, mit dem **Induktionsschritt** für die nächste Zahl, also logischerweise für alle darauffolgenden Zahlen.

#### Beweis

Beweis der Gaußschen Summenformel

$$\mathbb{Z} : S(n) = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\text{Induktionsanfang : } 1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$$

$$\text{Induktionsvoraussetzung : } \text{für ein beliebiges, aber festes } k \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \sum_{i=1}^k = \frac{k(k+1)}{2}$$

$$\text{Induktionsbehauptung : } \text{man behauptet, dass } \forall n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \sum_{i=1}^{n+1} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2} \quad \square$$

$$\text{Induktionsschluss : } \sum_{i=1}^n + (n+1) = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{2(n+1)}{2} = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

#### Beweis

Beweis der Summe ungerader Zahlen

$$\mathbb{Z} \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

$$\text{Induktionsanfang : } \sum_{k=1}^1 (2k-1) = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = 1^2$$

$$\text{Induktionsvoraussetzung : } \text{für ein beliebiges, aber festes } i \in \mathbb{N} \text{ gilt: } \sum_{k=1}^i (2k-1) = i^2$$

$$\text{Induktionsbehauptung : } \text{man behauptet, dass } \forall n \in \mathbb{N} : \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = (n+1)^2$$

$$\text{Induktionsschluss : } \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1) + 2(n+1) - 1 = n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2 \quad \square$$

## Beweis

Beweis der Bernoullischen Ungleichung

$$\mathbb{Z} : \forall n \in \mathbb{N} \quad n > 0 : \quad (1+x)^n \geq 1+nx \quad ; x \geq -1$$

$$\textbf{Induktionsanfang} : (1+x)^0 = 1 \geq 1 = 1 + 0x$$

**Induktionsvoraussetzung** : Es gelte nun:  $(1+x)^n \geq 1+nx; n \in \mathbb{N}_0$

$$\textbf{Induktionsbehauptung} : (1+x)^{n+1} \geq 1+(n+1)x$$

$$\begin{aligned} \textbf{Induktionsschluss} : (1+x)^{n+1} &= (1+x)^n \cdot (1+x) \stackrel{\text{I.V.}}{\geq} (1+nx) \cdot (1+x) = nx^2 + nx + x + 1 \\ &\geq 1 + x + nx = 1 + (n+1)x \end{aligned}$$

□

## Beweis

Beweis der Summe der Quadratzahlen

Mittels Induktion lässt sich "nur" eine vorhandene Formel beweisen.

$$\mathbb{Z} : S(n) = \sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\textbf{Induktionsanfang} : S(1) = \sum_{i=1}^1 i^2 = 1^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6}$$

**Induktionsvoraussetzung** : keine Ahnung was hier rein soll

$$\textbf{Induktionsbehauptung} : S(n+1) = \sum_{i=1}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$$

$$\begin{aligned} \textbf{Induktionsschluss} : S(n) + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{2n^3 + 9n^2 + 13n + 6}{6} \end{aligned}$$

□

## Beweis

Beweis für eine Abschätzung der Summe der Quadratzahlen

$$\mathbb{Z} : \sum_{i=1}^n i^2 > \frac{n^3}{3}$$

**Induktionsanfang :**  $1^2 > \frac{1^3}{3}$

**Induktionsvoraussetzung :** für ein beliebiges, aber festes  $k \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{i=1}^k i^2 > \frac{k^3}{3}$

**Induktionsbehauptung :** man behauptet, dass  $\forall n \in \mathbb{N}$  gilt:  $\sum_{i=1}^{n+1} i^2 > \frac{(n+1)^3}{3}$

$$\begin{aligned} \text{Induktionsschluss: } \sum_{i=1}^{n+1} i^2 &= \sum_{i=1}^n i^2 + (n+1)^2 > \overbrace{\frac{n^3}{3}}^{> \frac{n^3}{3}} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 6n + 3}{3} \\ &= \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 3n + 2}{3} \\ &= \frac{(n+1)^3}{3} + \frac{3n+2}{3} \underbrace{>}_{n \geq 0} \frac{(n+1)^3}{3} \end{aligned}$$

□

## Beweis

Summe der Kubikzahlen

□

## Beweis

Beweis einer Abschätzung der Fakultät

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 4 : \quad n! > n^2$$

**Induktionsanfang :**  $n_0 = 4 : \quad 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0! = 24 > 16 = 4^2$

**Induktionsvoraussetzung :**  $\exists n \in \mathbb{N}, \quad n \geq 4 : \quad n! > n^2$

**Induktionsbehauptung :**  $n! \geq n^2 \Rightarrow (n+1)! > (n+1)^2 = (n+1) \cdot (n+1)$

**Induktionsschluss :**  $(n+1)! = (n+1) \cdot n! > (n+1) \cdot n^2$

$$\Rightarrow n^2 \stackrel{?}{>} (n+1)$$

**Mini-induktion :**  $n_0 = 4 : \quad 4^2 = 16 > 5 = 4 + 1$

$$\Rightarrow (n^2)' \stackrel{?}{>} (n+1)'$$

$$\Leftrightarrow 2n \stackrel{!}{>} 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

□

Am Besten so viele Induktionen wie möglich?



## MATRIZEN

---

### 9.1 Lineare Gleichungssysteme und Gaußalgorithmus

Lineare Gleichungssysteme lassen sich aufwendig mit Einsetzungsverfahren oder Additionsverfahren lösen, Carl Friedrich Gauß (1777-1855) hat ein "Algorithmus" erfunden, mit dem sie sich ohne Taschenrechner leicht und relativ schnell lösen lassen.

Am Besten wird dieser mit einem Beispiel Erläutert:

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y + z = 13 & (1) \\ 2x - 5y + 3z = 1 & (2) \\ 7x - y - 2z = -1 & (3) \end{cases} \quad \{ 1 \cdot (1) - 2 \cdot (2) \} \text{ und } \{ 7 \cdot (1) - 4 \cdot (3) \} \quad D = \mathbb{R}^3$$

Hier versucht man in Zeile (2) und (3) die erste Variabel zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + z = 13 \\ 0x + 13y - 5z = 11 \\ 0x + 25y + 15z = 95 \end{cases} \quad \{ 25 \cdot (2) - 13 \cdot (3) \}$$

Jetzt versucht man die zweite Variabel in der dritten Gleichung zu eliminieren

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + z = 13 \\ 0x + 13y - 5z = 11 \\ 0x + 0y - 320z = -960 \end{cases} \quad \Leftrightarrow z = 3$$

Jetzt wird eingesetzt

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + z = 13 \\ 0x + 13y - 5 \cdot 3 = 11 \\ 0x + 0y + z = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow y = 2$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + y + 0z = 2 \\ 0x + 0y + z = 3 \end{cases}$$

$\mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}$  Die Lösungsmenge wird als n-Tupel (geordnete Objekte) alphabetisch sortiert.

### 9.2 LGS mit dem Taschenrechner lösen

#### 9.2.1 Eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme

Ein lineares Gleichungssystem lässt sich sehr viel schneller mit dem Taschenrechner lösen:

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x + 3y + z = 13 \\ 2x - 5y + 3z = 1 \\ 7x - y - 2z = -1 \end{cases}$$

Hierfür geht man beim Taschenrechner auf [matrix] und auf [edit]. Dann gibt man seine Matrix (hier als Beispiel) ein:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 4 & 3 & 1 & 13 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 7 & -1 & -2 & -1 \end{array} \right|$$

Dann geht man wieder in den rechnen-Modus und gibt ein: [matrix], dann geht man auf [math], [rref]. dann geht man nochmal auf [matrix], [A] (die gerade bearbeitete Matrix):

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right| \Rightarrow \mathbb{L} = \{(1; 2; 3)\}$$

Die Lösungsmenge wird als n-Tupel angegeben.

Wenn sich Werte mit Kommazahlen ergeben, ist es nützlich, im Taschenrechner [Math] + [1](Frac) einzugeben, um sich die Werte in Brüchen anzeigen zu lassen.

### 9.2.2 Nicht eindeutig lösbare lineare Gleichungssysteme

Oft begegnen einem auch unterbestimmte LGS, sei es in der Geometrie (Zwei Ebenengleichungen, die in einem Gleichungssystem als Lösung die Schnittgerade ergeben) oder in anderen Teilbereichen. Sie sind auch recht aufwendig von Hand zu lösen, deshalb hier den schnelleren GTR-Lösungsweg:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0x_3 &= 10 \\ x_1 - x_2 - x_3 &= 5 \end{cases}$$

Unterbestimmte LGS erkennt man daran, dass es mehr unbekannte als Gleichungen gibt:

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 10 \\ 1 & -1 & -1 & 5 \end{array} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{cccc} 1 & -2 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right| \Rightarrow \mathbb{L} = \{(2t + 10; t; t + 5 | t \in \mathbb{R})\}$$

Auch hier wird die Lösungsmenge als n-Tupel angegeben, in Abhängigkeit eines Faktors, dessen Wertebereich in der Lösungsmenge ebenfalls angegeben werden muss.

## ALGORITHMIK

---

### 10.1 Algorithmen und Programmierung

#### Definition 10.1.0

Algorithmen besitzen die folgenden charakteristischen Eigenschaften:

1. Eindeutigkeit: ein Algorithmus darf keine widersprüchliche Beschreibung haben. Diese muss eindeutig sein.
2. Ausführbarkeit: jeder Einzelschritt muss ausführbar sein.
3. Finitheit (= Endlichkeit): die Beschreibung des Algorithmus muss endlich sein.
4. Terminierung: nach endlich vielen Schritten muss der Algorithmus enden und ein Ergebnis liefern.
5. Determiniertheit: der Algorithmus muss bei gleichen Voraussetzungen stets das gleiche Ergebnis liefern.
6. Determinismus: zu jedem Zeitpunkt der Ausführung besteht höchstens eine Möglichkeit der Fortsetzung. Der Folgeschritt ist also eindeutig bestimmt.

Diese Eigenschaften können in der Mathematik genutzt werden, um Probleme zu lösen. Hierfür bedarf es einer einheitlichen Schreibweise.

Insbesondere vor dem Abitur stehen den Schülern mehrere Möglichkeiten zur Verfügung, die im Folgenden behandelt werden.

#### 10.1.1 Pseudocode

Pseudocode ist ein Programmcode, der nicht zur maschinellen Interpretation, sondern lediglich zur Veranschaulichung eines Algorithmus dient. Meistens ähnelt er höheren Programmiersprachen, gemischt mit natürlicher Sprache und mathematischer Notation. Er ist leichter verständlich als realer Programmcode aber klarer und weniger missverständlich als eine Beschreibung in natürlicher Sprache.

Beispiel:

Ein Beispiel erübrigt sich.

#### 10.1.2 Python

Programmiersprache, bekannt durch ihre einfach verständliche Syntax, sie gilt als höhere Sprache, was sie zu einer auf die (gesprochene) Sprache angepasste Sprache macht. Sie ist somit gerade für Einsteiger interessant und eignet sich dennoch für größere Projekte. Ein weiterer Vorteil ist die mittlerweile allgegenwärtige Präsenz der Sprache, denn sie wird auch für Apps und Webdevelopment verwendet.

#### Syntax

Folgendes macht die Syntax Pythons aus:

1. gute Lesbarkeit des Quellcodes
2. englische Schlüsselwörter
3. wenig syntaktische Konstruktionen

## Funktionsweise

Python verwendet Schleifen und Verzweigungen.

```
#Schleifen:
for: #(Wiederholung ueber Elemente einer Sequenz (Zahl, Liste, Zeit...))
    #Inhalt der Schleife
while: #(Wiederholung, solange ein logischer Ausdruck wahr ist)
    #Inhalt der Schleife

#Verzweigungen:
if: #(prueft, ob ein logischer Ausdruck wahr ist)
    #Inhalt der Verzweigung
elif: #(prueft, ob ein anderer logischer Ausdruck wahr ist)
    #Inhalt der Verzweigung
else: #(letzter Fall, tritt ein, wenn keine der obigen Bedingungen erfuehlt wurde)
    #Inhalt der Verzweigung
```

Beispiel:

Man nehme den Algorithmus, der die Fibonacci-Sequenz bis zum  $n$ -ten Glied generiert:

```
a = 0
b = 1
n = 10
for iteration in range(n):
    print(a)
    a = a+b
    b = a-b
```

## 10.2 Algorithmen und mathematische Anwendungen

### 10.2.1 Iterationsverfahren

Unter Iteration versteht man ein Verfahren zur schrittweisen Annäherung an die Lösung einer Gleichung unter Anwendung eines sich wiederholenden Rechengangs. Das bedeutet, (wenn es möglich ist) aus einer Näherungslösung durch Anwenden eines Algorithmus zu einer besseren Näherungslösung zu kommen und die Lösung beliebig gut an die exakte Lösung heranzuführen. Man sagt dann, dass die Iteration konvergiert.

Beispiele für Verfahren dieser Art werden im Folgenden behandelt.

#### Newton-Rhapson Verfahren

Das Newton-Rhapson Verfahren, auch bekannt als Newtonmethode dient der Nullstellenbestimmung komplexer Polynome und allgemein jeder differenzierbaren Funktion.

Die Grundidee ist, die Nullstelle der Tangente an der Stelle  $x_0$  von  $f$  zu nehmen und den Vorgang mit  $f(NS_T)$  zu wiederholen.

Eine mögliche Umsetzung in Python wäre:

```
def fx(x):
    return 3*x**3+5*x**2+3          #beliebige Funktion (muss angegeben werden)

def f_strich(x):
    return 9*x**2+10*x             #muss auch manuell angegeben werden

def NS_Tangente(x):
    NS_T = x - fx(x)/f_strich(x)
    return NS_T

Startwert=1
altwert = NS_Tangente(Startwert)
Genauigkeit = 0.00001
```

```
while abs(altwert-NS_Tangente(altwert))>Genauigkeit:
    altwert=NS_Tangente(altwert)
print(altwert)
```

## Heron-Verfahren

Es handelt sich hierbei um eine vereinfachte Version des Newton-Rhapson Verfahrens, da es zur Berechnung einer Näherung der Quadratwurzel einer reellen Zahl  $a > 0$  dient.

Man erhält das gewünschte Ergebnis durch die Berechnung der Nullstelle einer Funktion  $f(x) = x^2 - a$ . Es gilt also:  $f'(x) = 2x$ .

Durch die Verwendung des Newton-Rhapson Verfahrens erhält man die Iterationsvorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \Leftrightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - a}{2x_n} = \frac{x_n^2 + a}{2x_n} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{a}{x_n} \right)$$

Als kluger, ungefähr zutreffender Startwert gilt  $x_0 = \frac{a+1}{2}$

Eine mögliche Umsetzung in Python wäre:

```
a=2                                     #Muss manuell angegeben werden
def fx(x):
    return x**2-a

def f_strich(x):
    return 2*x

def next_val(wert):
    return 0.5*(wert+(a/wert))

Startwert=(a+1)/2
altwert = next_val(Startwert)
Genauigkeit = 0.00001

while abs(altwert-next_val(altwert))>Genauigkeit:
    altwert=next_val(altwert)
print(altwert)
```

## INTEGRALE

---

### 11.1 Einführung - Stammfunktionen

#### Definition 11.1.0

Sei  $f$  eine Funktion, die über einem Intervall  $I \in \mathbb{R}$  definiert ist. Man nennt jede Funktion  $F$ , die auf  $I$  differenzierbar ist, für die gilt  $F'(x) = f(x)$ ,  $\forall x \in I$  eine *Stammfunktion* von  $f$ .  
Ist  $F$  irgendeine Stammfunktion von  $f$ , dann ist auch  $F(x) + C$  (mit konstantem  $C$ ) eine Stammfunktion, denn beim Ableiten fällt  $C$  als konstanter Summand weg. Jede Funktion hat also unendlich viele Stammfunktionen, die sich aber nur um einen konstanten Summanden unterscheiden.

#### Theorem

Jede auf  $I$  stetige Funktion besitzt eine Stammfunktion über  $I$ .

### 11.2 Bestimmte Integrale

#### Definition 11.2.0

Sei  $f$  eine auf einem Intervall  $I$  stetige Funktion und zwei reelle Zahlen  $a, b \in I$ . Die reelle Zahl, dargestellt durch  $\int_a^b f(t)dt$  und gegeben durch  $F(b) - F(a)$ , mit  $F$  als beliebige Stammfunktion von  $f$ , wird bestimmtes Integral von  $a$  bis  $b$  von  $f$  genannt. Eine weitere Darstellungsmöglichkeit des bestimmten Integrals sieht folgendermaßen aus:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} O_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{b-a}{n} \cdot k\right)\end{aligned}$$

$S_n$  und  $O_n$  bezeichnen die Obersumme, wohingegen  $s_n$  und  $U_n$  die Untersumme bezeichnen.

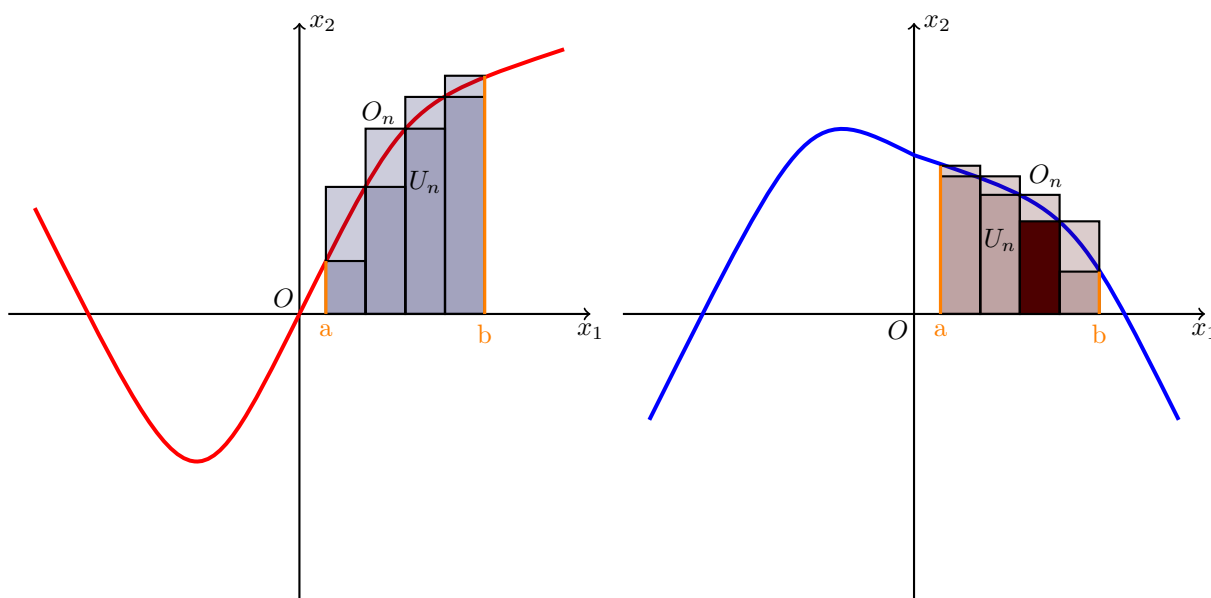
#### Bemerkung:

Der Hauptunterschied zwischen einem bestimmten und einem unbestimmten Integral ist die Existenz (bestimmtes Integral) bzw. das Fehlen (unbestimmtes Integral) der Integrationsgrenzen.

Bei einem bestimmten Integral ist die Lösung ein Flächeneinhalt, also ein einfacher Zahlenwert.

Bei einem unbestimmten Integral erhält man als Lösung eine (wie soeben eingeführte) Stammfunktion.

Werden feste Integrationsgrenzen angegeben, handelt es sich um ein bestimmtes Integral.

Bemerkung:

$a$  und  $b$  bezeichnen jeweils die untere und obere Grenze des zu berechnenden Integrals. Sie bezeichnen anschaulich die  $x$ -Werte, zwischen denen die Fläche berechnet wird. Tatsächlich ist die geometrische Interpretation von  $\int_a^b f(t)dt$  die Fläche zwischen dem Schaubild der Funktion und der  $x_1$ -Achse, die durch die Geraden  $x = a$  und  $x = b$  begrenzt wird.

**Theorem**

Für eine auf einem Intervall  $I$  stetige Funktion  $f$  und einer reellen Zahl  $a \in I$  gilt: Die Funktion, die über  $I$  definiert ist durch  $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ , ist die Stammfunktion von  $f$ , die bei  $a$  gleich 0 ist.

Aus diesen Sätzen stellt sich der **Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung** zusammen. Wir beschränken uns in diesem Kapitel auf die Integralrechnung, da die Differentialrechnung bereits in Kapitel 3 behandelt wird.

Bemerkung:

Man beobachtet hier eine Erweiterung der NEW-Regel (siehe 3.4.8, NEW-Regel):

N = Nullstellen  
E = Extremstellen  
W = Wendestellen

$F$	$N$	$E$	$W$		
$f$		$N$	$E$	$W$	
$f'$			$N$	$E$	$W$

### 11.3 Sätze über Integrale

**Theorem**

$$\begin{aligned}
 \int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx && \text{Invertieren der Integrationsgrenzen} \\
 \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx && \text{Summenregel} \\
 \int_a^b r * f(x)dx &= r * \int_a^b f(x)dx && \text{Linearität} \\
 \int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx && \text{Abschnittweise Integration}
 \end{aligned}$$

Invertieren der Integrationsgrenzen:

## Beweis

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = -(F(a) - F(b)) = -\int_b^a f(x)dx$$

□

Summenregel:

## Beweis

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x) + g(x)dx &= [F(x) + G(x)]_a^b = F(b) + G(b) - (F(a) + G(a)) = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx\end{aligned}$$

□

Linearität:

## Beweis

$$\int_a^b r * f(x)dx = [r * F(x)]_a^b = r * F(b) - r * F(a) = r * (F(b) - F(a)) = r * \int_a^b f(x)dx$$

□

Abschnittsweise Integration:

## Beweis

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = F(b) - F(a) + (F(c) - F(b)) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(x)dx$$

□

## Theorem

Sei eine in  $[a; b]$  stetige Funktion  $f$ . Wenn für  $m, M \in \mathbb{R}$  gilt:  $m \leq f(t) \leq M \forall t \in [a; b]$ , dann gilt:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t)dt \leq M(b-a)$$

## Beweis

Es reicht,  $m \leq f(t) \leq M$  als Ungleichung zwischen  $a$  und  $b$  zu integrieren.

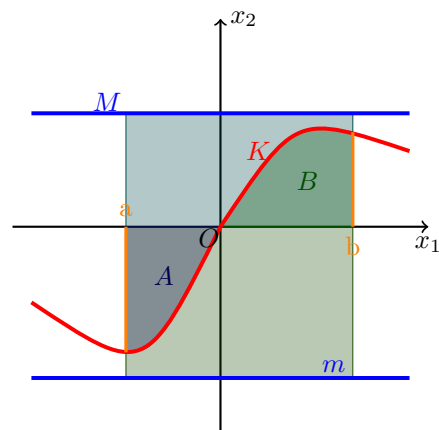
□

## Bemerkung:

Eine Konsequenz davon ist, dass falls  $|f(t)| \leq M \forall t \in [a; b]$ , dann gilt:

$$\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq M(|b-a|)$$

Außerdem:





**Definition 11.3.0**

Für eine auf  $[a; b]$  stetige Funktion  $f$  mit  $a \neq b$  gilt: Der Mittelwert von  $f$  auf  $[a; b]$  ist gegeben durch

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt$$

**11.4 Integrationsregeln und -techniken****11.4.1 Potenzregel**

Hoffentlich einleuchtend und selbstverständlich:

**Theorem**

$$\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} : \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

Bemerkung:

Die einzige Ausnahme stellt der Fall  $n = -1$  dar:

**Theorem**

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln(|x|) + C$$

Eine Konsequenz dessen ist:

**Theorem**

$$\int \frac{a}{bx+c} dx = \frac{a}{b} \ln(|bx+c|) + C$$

**Beweis**

So what? □

**11.4.2 Partielle Integration****Theorem**

Seien  $u$  und  $v$  zwei stetig differenzierbare Funktionen im Intervall  $I$  und  $u'$  und  $v'$  in  $I$  stetig. Dann gilt:

$$\int u(x)' v(x) dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x) dx$$

**Beweis**

Nachweisen  $u, v$  diffbar und  $u', v'$  stetig (kommt noch in sauber)

$$\begin{aligned} & (u(x) * v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ \Leftrightarrow & \int (u(x) * v(x))' dx = \int u'(x)v(x) + \int u(x)v'(x) \\ \Leftrightarrow & u(x) * v(x) = \int u'(x)v(x) + \int u(x)v'(x) \\ \Leftrightarrow & \int u(x)v'(x) = u(x) * v(x) - \int u'(x)v(x) \end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$\begin{aligned}
 \int x \sin(x) dx &= \int x(-\cos(x))' dx \\
 &= -x \cos(x) - \int -\cos(x) * 1 dx \\
 &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx \\
 &= -x \cos(x) + \sin(x)
 \end{aligned}$$

### 11.4.3 Substitution

#### Theorem

Es sei  $f$  eine auf  $[a; b]$  stetige Funktion und  $g$  eine auf diesem Intervall differenzierbare Funktion mit stetiger Ableitung  $g'$ . Wenn die Verkettung  $f \circ g$  existiert, gilt:

$$\int_a^b f(g(x)) * g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(z) dz$$

Eine abgespeckte Variante dieses Theorems, genannt lineare Substitution ist gegeben durch:

#### Theorem

Für eine Funktion  $f$  mit einer Stammfunktion  $F$  und  $r \neq 0$  gilt:

$$\int_a^b f(rx + s) dx = \frac{1}{r} [F(rx + s)]_a^b$$

Beispiel:

Zu berechnen:

$$\int_0^4 \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2\sqrt{x}} dx$$

**Substitution:**

$$\begin{aligned}
 u &= x^2\sqrt{x} \quad (\text{alternativ } u = x^2\sqrt{x} + 1) \\
 \frac{du}{dx} &= (x^2\sqrt{x})' \\
 &= \frac{5}{2} \cdot x\sqrt{x} \\
 \Leftrightarrow dx &= \frac{2}{5x\sqrt{x}} du
 \end{aligned}$$

**Berechnung des Integrals:**

$$\begin{aligned}
 \int_0^4 \frac{x\sqrt{x}}{1+x^2\sqrt{x}} dx &= \int_{u(0)}^{u(4)} \frac{\cancel{x\sqrt{x}}}{1+u} \cdot \frac{2}{5\cancel{x\sqrt{x}}} du \\
 &= \frac{2}{5} \cdot \int_{0^2\sqrt{0}}^{4^2\sqrt{4}} \frac{1}{1+u} du \\
 &= \frac{2}{5} \cdot [\ln(|1+u|)]_0^{32} \\
 &= \frac{2}{5} \cdot \ln(33)
 \end{aligned}$$

### 11.4.4 Substitution der Integrationsvariablen

#### Theorem

Es sei  $f$  eine auf  $[a; b]$  stetige Funktion und  $g$  eine auf diesem Intervall differenzierbare und umkehrbare Funktion mit stetiger Ableitungsfunktion  $g'$ . Wenn die Verkettung  $f \circ g$  existiert, gilt:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\bar{g}(a)}^{\bar{g}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

### 11.4.5 Partialbruchzerlegung

?

### 11.4.6 Integrale von $e$ -Funktionen

#### Theorem

Für  $f(x) = e^{l(x)}$  mit  $l(x) = ax + b$  gilt:  $F(x) = \frac{1}{a} e^{l(x)}$

#### Beweis

Man bilde  $F'(x)$ . □

### 11.4.7 Integrale von $\ln()$ -Funktionen

Es handelt sich hierbei streng genommen auch um eine Substitution:

#### Theorem

Für  $x \in \mathbb{R}^+$  ist  $F$  eine Stammfunktion zur Funktion  $f(x) = \ln(x)$  mit  $F(x) = x \ln(x) - x$

#### Beweis

Der Beweis erfolgt über partielle Integration und wird dem Schüler als Übung überlassen. □

### 11.4.8 Integrale von (un)geraden Funktionen

#### Theorem

Sei  $f$  eine auf einem Intervall  $I$  stetige und auf 0 zentrierte Funktion. Wenn  $f$  gerade ist, gilt für alle  $a \in \mathbb{R}$ :  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$ , und wenn  $f$  ungerade ist  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$

#### Beweis

Sei die Funktion  $\varphi(x) = \int_{-x}^x f(t) dt = F(x) - F(-x)$  mit  $F$ , einer Stammfunktion von  $f$ . Also ist  $\varphi$  auf  $I = [-x; x]$  differenzierbar und  $\varphi'(x) = F'(x) - F'(-x) = f(x) + f(-x)$ .

Wenn  $f$  auf  $I$  ungerade ist, gilt:  $\varphi'(x) = 0$  und somit konstant (und außerdem  $= \varphi(x)$ ) auf  $I$ , was  $\int_{-a}^a f(t) dt = 0$  beweist.

Wenn  $f$  gerade ist, gilt:  $\varphi'(x) = 2f(x)$ . Also gilt für  $\varphi(x) = \int_0^x 2f(t) dt$ , einer Stammfunktion von  $2f(x)$ ,  $\varphi(0) = 0$ , was  $\int_{-a}^a f(t) dt = 2 \int_0^a f(t) dt$  beweist. □

### 11.4.9 Integrale von periodischen Funktionen

#### Theorem

Für jede auf  $\mathbb{R}$  stetige und periodische Funktion  $f$  gilt:

$$\int_a^{a+T} f(x)dx \text{ ist unabhängig von } a \text{ und } \int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$$

#### Beweis

Sei die Funktion  $\varphi = \int_x^{x+T} f(t)dt = F(x+T) - F(x)$  mit  $F$ , einer Stammfunktion von  $f$ . Dann ist  $\varphi(x)$  auf  $\mathbb{R}$  differenzierbar und  $\varphi'(x) = F'(x+T) - F'(x) = f(x+T) - f(x) = 0$  (denn  $f$  hat die Periode  $T$ ). Also ist  $\varphi(x)$  auf  $\mathbb{R}$  konstant. Daraus folgt, dass  $\int_a^{a+T} f(t)dt$  nicht von  $a$  abhängt und dass  $\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_0^T f(x)dx$ .  $\square$

## 11.5 Flächen und Volumen mit Integralen berechnen

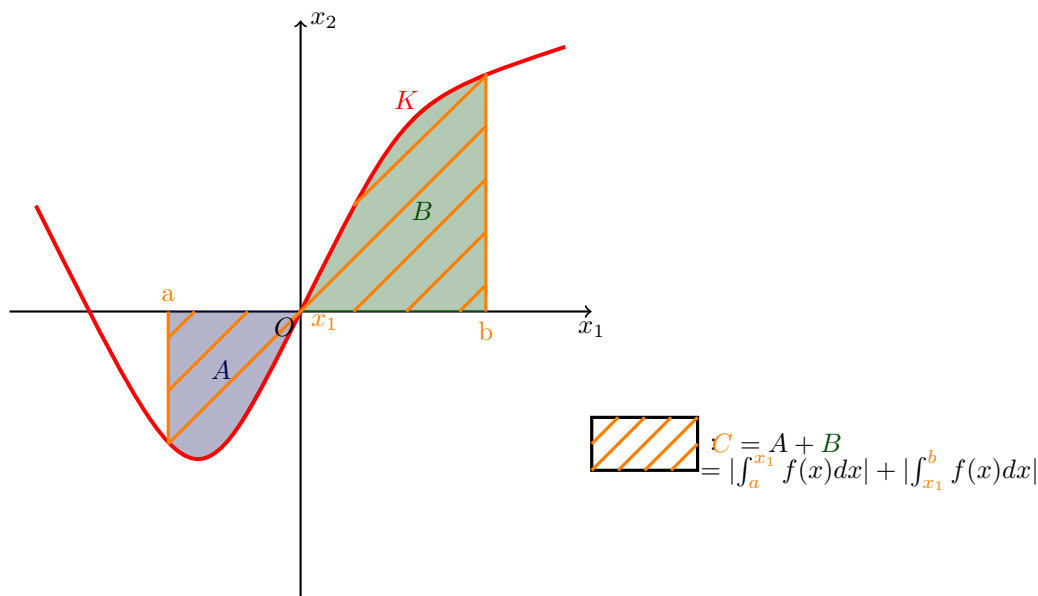
### 11.5.1 Fläche zwischen einer Funktion und der $x_1$ -Achse

#### Definition 11.5.1

Für die auf dem Intervall  $[a; b]$  (also stückweise) stetige Funktion  $f$  mit Nullstellen und  $x_1, x_2, \dots, x_n$  mit  $a \leq x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n \leq b$  ist der Flächeninhalt  $A$  zwischen dem Graphen von  $f$  und der  $x_1$ -Achse im Intervall  $[a; b]$  gegeben durch:

$$A = \left| \int_a^{x_1} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx \right| + \dots + \left| \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x)dx \right| + \left| \int_{x_n}^b f(x)dx \right|$$

Bildhaft sieht das folgendermaßen aus:



Beispiel:

$$f(x) = x^2 - 2x^3; x \in \mathbb{R}$$

notwendige und hinreichende Bedingung für Nullstellen:  $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2(1 - 2x) = 0$$

$$\stackrel{SdN}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x^2 = 0 \\ 1 - 2x = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 &= 0 \\ x_2 &= \frac{1}{2} \end{cases}$$

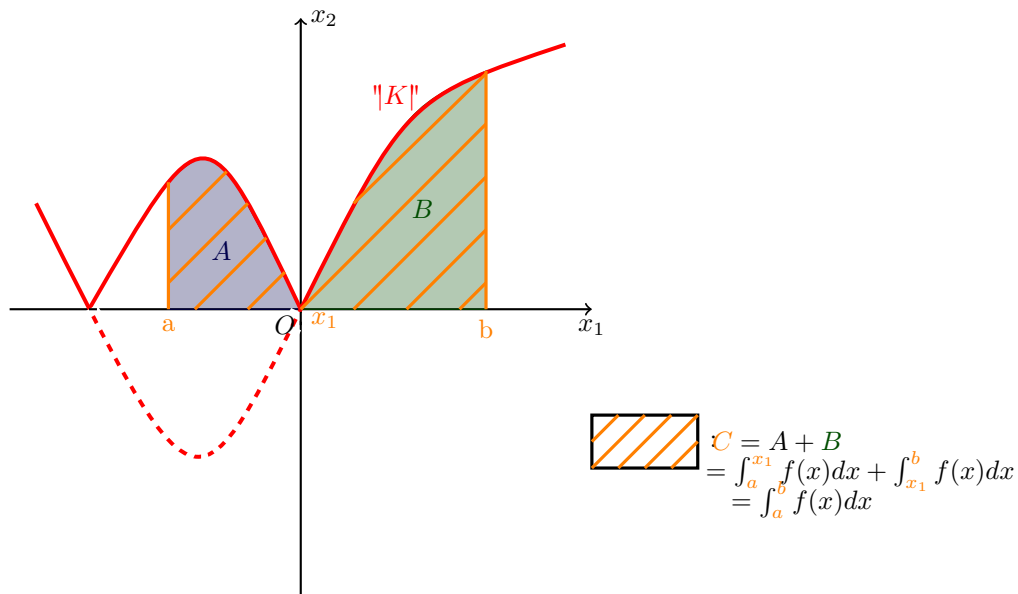
Also gilt:

$$\begin{aligned} A_{-1}^1 &= \left| \int_{-1}^0 x^2 - 2x^3 dx \right| + \left| \int_0^{0.5} x^2 - 2x^3 dx \right| + \left| \int_{0.5}^1 x^2 - 2x^3 dx \right| \\ &= \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right]_{-1}^0 \right| + \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right]_0^{0.5} \right| + \left| \left[ \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^4 \right]_{0.5}^1 \right| \\ &= \left| 0 - \left( -\frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) \right| + \left| \frac{1}{24} - \frac{1}{32} - 0 \right| + \left| \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{24} - \frac{1}{32} \right) \right| \\ &= 1 + \frac{1}{12} - \frac{1}{16} \\ &= \frac{49}{48} \text{ FE} \end{aligned}$$

GTR-Tipp:

Mit  $Y_1 = f(x)$  und  $Y_2 = \text{abs}(Y_1)$  bzw.  $Y_2 = |Y_1|$  (zu finden in 'MATH' > 'NUM' oder über Alpha-F2) lässt sich die Fläche berechnen über 2nd-CALC mit der Option Integral.

Hierzu wählt man  $Y_2$  aus und gibt  $a$  und  $b$  an.



#### Theorem

Für zwei auf  $[a; b]$  stetige Funktionen  $f$  und  $g$  gilt: Die Fläche zwischen ihren Schaubildern  $C_f$  und  $C_g$  ist gegeben durch:  $\int_a^b (g(x) - f(x)) dx$ .

### 11.5.3 Volumenangaben mittels Integralen

#### Theorem

Man betrachtet einen Körper, der durch zwei parallele Ebenen mit den Gleichungen  $x_3 = a$  und  $x_3 = b$  begrenzt wird. Für alle  $a \leq z \leq b$  nennt man  $P_z$  die orthogonale Fläche zu  $x_3$ -Achse mit der Seite  $z$  und  $S(z)$  die Fläche des Schnitts des Körpers durch  $P_z$ . Ist  $S$  stetig, so ist das Volumen  $V$  des Körpers gegeben durch:

$$V = \int_a^b S(z) dz$$

#### Bemerkung:

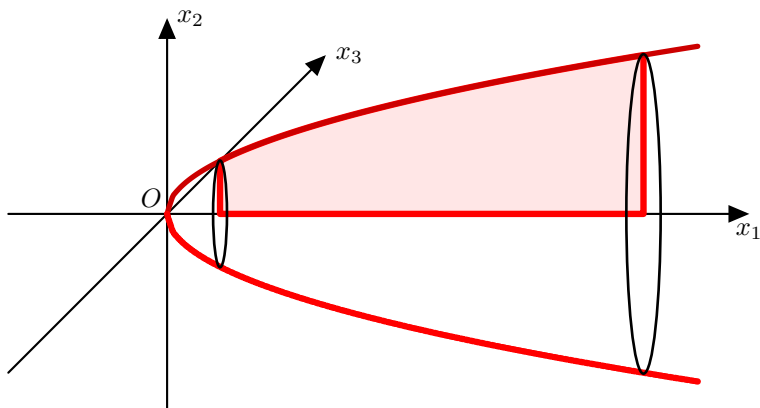
Dieses Theorem nehmen wir hin, ohne es zu beweisen, uns geht es ohnehin um die Schlussfolgerungen, die wir daraus ziehen können:

#### Theorem

Ein Körper, der durch die Rotation der Kurve von  $f$  um die  $x_1$ -Achse entsteht, hat ein Volumen von

$$\pi \int_a^b f^2(z) dz.$$

Tatsächlich ist die Fläche eines zur  $x_3$ -Achse parallelen Querschnitts die der Scheibe mit Radius  $f(z)$ .



## 11.6 Uneigentliche Integrale

### Definition 11.6.0

Ist die Funktion  $f$  auf  $[a; +\infty)$  stetig und existiert der Grenzwert  $\lim_{Z \rightarrow \infty} \int_a^Z f(x) dx$ , so heißt dieser Grenzwert *uneigentliches Integral* von  $f$  über  $[a; +\infty)$ .

Schreibweise:  $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

Analog dazu spricht man von einem uneigentlichen Integral für  $\int_{-\infty}^b f(x) dx$

#### Beispiel:

$$f(x) = \frac{-3}{x^3}$$

$$A(z) = \int_z^{-2} \frac{-3}{x^3} dx = \left[ \frac{3}{2} x^{-2} \right]_z^{-2} = \frac{3}{8} - \frac{3}{2} z^{-2}$$

$$\lim_{z \rightarrow -\infty} \frac{3}{8} - \frac{3}{2} z^{-2} = \frac{3}{8}$$

$\Rightarrow$  Das uneigentliche Integral hat den Wert  $\frac{3}{8}$ .

Beispiel:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$A(z) = \int_z^Z \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^Z = 2\sqrt{Z} - 2$$

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} 2\sqrt{Z} - 2 \xrightarrow{Z \rightarrow \infty} \infty$$

$\Rightarrow$  Das uneigentliche Integral existiert nicht.

#### Definition 11.6.0

Ist die Funktion  $f$  auf  $(a; b]$  stetig und existiert der Grenzwert  $\lim_{Z \rightarrow a} \int_Z^b f(x) dx$ , so heißt dieser Grenzwert *uneigentliches Integral* von  $f$  über  $(a; b]$ .

Schreibweise:  $\int_a^b f(x) dx$

Analog dazu spricht man von einem uneigentlichen Integral für  $\int_c^a f(x) dx$

Bemerkung:

Diese Berechnung ergibt nur dann Sinn, wenn bei  $a$  eine Definitionslücke vorliegt.

## 11.7 Merkwürdige Integrale

Hier eine (möglicherweise unvollständige) rückblickende Liste mit Integralen, die insbesondere zum Abitur beherrscht werden sollten.

Diese sollten ohne weitere Rechtfertigung oder Beweis verwendet werden dürfen. (Diese Angabe ist ohne Gewähr)

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \\ \int \frac{1}{x} dx &= \ln(|x|) + C \\ \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \cos x dx &= \sin x + C \\ \int \frac{1}{\cos^2 x} dx &= \tan x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2\sqrt{x} + C \\ \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx &= \ln(|u(x)|) + C \\ \int e^{ax+b} dx &= \frac{1}{a} e^{ax+b} + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{x}} dx &= 2 + C \end{aligned}$$

⚠ Definitionsmengen sind zu beachten.

## EXPONENTIALFUNKTIONEN

---

### Definition 12.0.0

Man bezeichnet als Exponentialfunktion eine Funktion der Form  $x \rightarrow a^x$  mit  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$ .  
 $x$  ist die Variable und wird *Exponent* oder *Hochzahl* genannt.  
 $a$  nennt man *Basis* oder *Grundzahl*, sie ist für jede Funktion fest vorgegeben.

Allgemeiner gilt jede Funktion, bei der die Variable im Exponenten steht als Exponentialfunktion.

Hier Graphen für  $a < 1$

$a > 1$

$a = e$

### 12.1 Wiederholung: Potenzgesetze

Seien  $a, b \in \mathbb{R}$ , sowie  $n, m \in \mathbb{N}$ , dann gilt:

1.  $a^0 = 1$  (für  $a \neq 0$ )

2.  $a^1 = a$

3.  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ Mal}}$

4.  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

5.  $(a^n)^m = a^{n \cdot m}$

6.  $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

7.  $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$

8.  $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

9.  $a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$

10.  $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

### 12.2 Die Eulersche Zahl ( $e$ )

#### Definition 12.2.0

$e = 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995\dots$

Die **Eulersche Zahl** ( $e$ ) ist eine irrationale, transzendente und reelle Zahl, die die Basis des (natürlichen) Logarithmus und der (natürlichen) Exponentialfunktion ist.

Die Darstellung, der man am Häufigsten begegnet ist diese:  $e = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t$ ;  $t \in \mathbb{R}$

Benannt nach dem bekannten Mathematiker Leonhard Euler ist diese Zahl eine der wichtigsten Konstanten der Mathematik. Sie ist die Basis des natürlichen Logarithmus und der natürlichen Exponentialfunktion. Diese besondere Exponentialfunktion wird aufgrund dieser Beziehung zur Zahl  $e$  häufig kurz  $e$ -Funktion genannt, sie eignet sich zur Modellierung von Wachstums- und Zufallsprozessen.

#### Bemerkung:

Eine alternative Definition wäre folgende: Die positive Zahl  $a$ , für die die Exponentialfunktion  $f$  mit  $f(x) = a^x$  mit ihrer Ableitungsfunktion  $f'$  übereinstimmt, heißt Eulersche Zahl. (siehe 12.5)



**Definition 12.2.0**

Eine reelle Zahl heißt (oder allgemeiner eine komplexe Zahl) transzendent, wenn sie nicht Nullstelle eines Polynoms mit ganzzahligen Koeffizienten ist. Andernfalls handelt es sich um eine algebraische Zahl. Jede reelle transzendente Zahl ist überdies irrational.

**12.2.1 Verschiedene Darstellungen**

$e$  ist darstellbar bzw. ergibt sich durch:

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$
- $\lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t ; t \in \mathbb{R}$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n ; n \in \mathbb{N}$

**12.2.2 Herleitung zur Zahl  $e$** 

Wir definieren eine Folge  $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$  durch  $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$  und beweisen ihre Konvergenz.

•

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \\ &= \left(\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \end{aligned}$$

- Die Umformung ermöglicht uns auf den Term  $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$  die Ungleichung von Bernoulli anzuwenden. Diese besagt Folgendes:  $(1+x)^n > 1+nx$  für  $n \geq 2$  und  $x > -1$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} &> 1 + (n+1) \cdot \left(-\frac{1}{(n+1)^2}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

- Dies kann man an den ersten Ausdruck anwenden:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &> \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\Leftrightarrow e_n$  ist streng monoton steigend

Sei eine Folge  $f_n$  mit  $f_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}$ , deren Monotonieverhalten wir untersuchen wollen. Dazu formen wir den Term so um, dass die Bernoulli-Ungleichung angewandt werden kann.

•

$$\begin{aligned}
\frac{f_n}{f_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+2}} \\
&= \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} \\
&= \left(\frac{\frac{n+1}{n}}{\frac{n+2}{n+1}}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n(n+2)}\right)^{n+2} \cdot \frac{n}{n+1}
\end{aligned}$$

- Bernoulli:  $(1+x)^n > 1+nx$  für  $n \geq 2$  und  $x > -1$

Eine streng monoton steigende Folge, die eine monoton fallende Folge, als ober Schranke hat, konvergiert. Es gilt also, dass  $e_n$  konvergent ist,  $e_n$  besitzt einen besonderen Grenzwert, der *Eulersche Zahl* genannt wird.

### 12.2.3 $e$ ist irrational

Wie schon erwähnt, handelt es sich bei der Eulerschen Zahl um eine transzendente Zahl, daraus ergibt sich schon, dass sie irrational ist. Trotzdem ist es interessant, dies zu beweisen.

## Beweis

Teil A: unnötigSei  $f$  eine Funktion mit  $f(x) = xe^{1-x}$  mit Schaubild  $\mathcal{C}$ 

1. Monotonieverhalten:

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{1-x} - xe^{1-x} \\ &= (1-x) \cdot e^{1-x} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll} \forall x < 1: & f'(x) > 0 & & \Leftrightarrow f \nearrow \\ \text{für } x = 1: & f'(x) = 0 & \text{und VZW } + \rightarrow - & \Leftrightarrow \text{Hochpunkt} \\ \forall x > 1: & f'(x) < 0 & & \Leftrightarrow f \searrow \end{array}$$

Grenzwerte:

$$- \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow +\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\rightarrow 0} = 0 \text{ (Croissance comparée)}$$

$$- \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow -\infty} \underbrace{e^{1-x}}_{\rightarrow +\infty} = -\infty$$

2. Hier Graph von  $f$ 3. Man hat  $I_1$ , das Integral mit  $I_1 = \int_0^1 f(x) dx$ 

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 xe^{1-x} dx \\ &= [-xe^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x} dx \\ &= -1e^{1-1} - 0^1 - [e^{1-x}]_0^1 \\ &= -1 - 1 + e \\ &= e - 2 \end{aligned} \quad \begin{array}{ll} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v'(x) = e^{1-x} & v(x) = -e^{1-x} \end{array}$$

Teil B:  $n \in \mathbb{N}$ Sei  $I_n$  das Integral mit  $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx$ ,  $n \geq 1$ 1. (a)  $\mathbb{Z}$ :  $\forall x \in [0; 1]$  gilt  $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$ 

$$\begin{array}{ccccc} x^n & \stackrel{?}{\leq} & x^n e^{1-x} & \stackrel{?}{\leq} & ex^n \\ 1 & \stackrel{!}{\leq} & e^{1-x} & \stackrel{!}{\leq} & e \end{array} \quad | : x^n$$

N.R.: für  $x \in [0; 1]$  ist  $(1-x) \in [0; 1]$  und entsprechen  $e^{1-x} \in [e^0; e^1] = [1; e]$

(b) Sei  $J_n$  das Integral mit  $J_n = \int_0^1 x^n dx$

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^1 x^n dx \\ &= \left[ \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} \right]_0^1 \\ &= \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

(c)  $\mathbb{Z}$ :  $\forall n \geq 1$  gilt  $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$

$$\begin{aligned} x^n &\leq f(x) = x^n e^{1-x} \leq ex^n && | \int_0^1 (\cdot) dx \\ \Leftrightarrow \int_0^1 x^n dx &\leq I_n \leq \int_0^1 ex^n dx \\ \Leftrightarrow J_n &\leq I_n \leq e \cdot \int_0^1 x^n dx = e \cdot J_n \\ \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} &\leq I_n \leq \frac{e}{n+1} \end{aligned}$$

2.  $\mathbb{Z}$ :  $\forall n \geq 1$  gilt  $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_0^1 x^{n+1} \cdot e^{1-x} dx \\ &= \left[ -e^{1-x} \cdot x^{n+1} \right]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n ex - 1 dx && \begin{array}{ll} u(x) = x^{n+1} & u'(x) = (n+1)x^n \\ v'(x) = e^{1-x} & v(x) = -e^{1-x} \end{array} \\ &= -e^{1-1} \cdot 1^{n+1} - 0 + (n+1) \cdot I_n \\ &= (n+1)I_n - 1 \end{aligned}$$

3. Sei  $k_n = n!e - I_n$ ,  $n \geq 1$

(a)

$$\begin{aligned} k_{n+1} &= (n+1)!e - I_{n+1} \\ &= (n+1)n!e - (n+1)I_n + 1 && \text{siehe 2.} \\ &= (n+1)(n!e - I_n) + 1 \\ &= (n+1)k_n + 1 \end{aligned}$$

(b)  $\mathbb{Z}$ :  $\forall n \geq 1$  gilt  $k_n \in \mathbb{Z}$ :

**IA:** für  $n = 1$ :  $k_1 = 1!e - I_1 = e - (e - 2) = 2$  (wahr)

**IV:** für ein beliebiges aber festes  $n \in \mathbb{N}$  gelte:  $k_n \in \mathbb{Z}$

**IB:** dann gelte für  $(n + 1)$ :  $k_{n+1} \in \mathbb{Z}$

**IS:**  $k_{n+1} = \underbrace{(n+1)}_{\in \mathbb{Z} \text{ da } n \in \mathbb{N} \in \mathbb{Z}(\text{IB})} \underbrace{k_n}_{\in \mathbb{Z}} + \underbrace{1}_{\in \mathbb{Z}} \in \mathbb{Z}$

(c)  $\mathbb{Z}$ :  $\forall n \geq 2$  gilt  $n!e = k_n + I_n \notin \mathbb{Z}$

Wir haben:  $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$  (1.(c))

Und es gilt:

–  $k_n \in \mathbb{Z}$

–  $\forall n \geq 0: \frac{1}{n+1} \geq 0$

–  $\forall n \geq 2: n+1 \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{3}$

und  $e \leq 3 \Rightarrow \frac{e}{n+1} \leq 1$

$\Rightarrow \forall n \geq 2: 0 < I_n < 1 \Rightarrow I_n \notin \mathbb{N} \Rightarrow k_n + I_n \notin \mathbb{N} \Rightarrow n!e \notin \mathbb{N}$

4. Seien  $p, q \in \mathbb{N}$

Dann gilt für  $n \geq q$ :  $\frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$

Das stimmt weil  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (q+1) \cdot q \cdot (q-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow q$  teilt  $n! \Rightarrow \frac{n!}{q} \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$  da  $p \in \mathbb{N}$

Hypothese:  $e \in \mathbb{Q}$

$\Rightarrow \exists p, q \in \mathbb{N}$ , sodass  $e = \frac{p}{q}$

$\Rightarrow n!e = \frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$

Im Voraus wurde aber gezeigt, dass  $n!e \notin \mathbb{N}$ : **Widerspruch**

$\Leftrightarrow \boxed{e \notin \mathbb{Q}} \heartsuit$

Herkunft der Aufgabenstellung: Buch? S.199 Nr. 78, d'après le bac (Blatt von Mme Treynard)  $\square$

## 12.3 Eigenschaften

- $f(x) = a^x$
- $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$
- $D_f = \mathbb{R}$
- $W_f = \mathbb{R}^+$
- für  $0 < a < 1$ :  $f$  ist streng monoton fallend
- für  $a > 1$ :  $f$  ist streng monoton wachsend

- für  $0 > a > 1$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$   
für  $a > 1$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$   
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $f(0) = 1$
- x-Achse ist waagerechte Asymptote

### Zusammengesetzte Funktionen

Sei  $f(x) = a^x$  mit  $a > 1$  und  $g(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{R}$ :

$$\left. \begin{aligned}
 & - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a^x \cdot x^n = +\infty \\
 & - \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x \cdot x^n = 0 \\
 & - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^x}{x^n} = +\infty \\
 & - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{a^x}{x^n} = 0 \\
 & - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{a^x} = 0 \\
 & - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^n}{a^x} = \pm\infty
 \end{aligned} \right\} \text{Croissances comparées}$$

#### Bemerkung:

Diese Grenzwerte gelten auch wenn  $g$  ein Polynom beliebig hohen Grades ist.

Allgemein kann man also sagen, dass eine Exponentialfunktion ihr Wachstum bezüglich dem jedes Polynoms immer durchsetzt.

#### Bemerkung:

⚠ Das Vorzeichen der anderen Funktion(en) muss natürlich immer beachtet werden.

Da die Wertemenge einer Exponentialfunktion immer  $\mathbb{R}^+$  ist, hängt das Vorzeichen ausschließlich von der(den) anderen Funktion(en) ab. Wenn der (höchste) Exponent also eine gerade Zahl ist, dann bleiben die Grenzwerte dieselben (0 oder  $+\infty$ ). Im Falle eines höchsten Exponenten, der ungerade ist, ändert sich dementsprechend das Vorzeichen (0 oder  $-\infty$ ) des Grenzwertes für  $x \rightarrow -\infty$ . Der Grenzwert für  $x \rightarrow +\infty$  bleibt derselbe, selbst wenn der höchste Exponent eine negative Zahl ist.

Für  $f(x) = a^x$  mit  $0 < a < 1$  und  $g(x) = x^n$  mit  $n \in \mathbb{R}$ :

Es gilt weiterhin, dass sich das Wachstum der Exponentialfunktion durchsetzt, anhand dieser Aussage können die Grenzwerte von Funktionen, die Exponentialfunktionen mit Basis  $< 1$  beinhalten, leicht bestimmt werden.

⚠ Auch hier gilt es, auf das Vorzeichen der anderen Funktion(en) zu achten.

## 12.4 Basiswechsel

Seien,  $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$ :

### Theorem

$$a^x = b^{x \cdot \log_b a}$$

## Beweis

$$\begin{aligned} a^x &= (b^{\log_b a})^x \\ &= b^{x \cdot \log_b a} \end{aligned}$$

□

## 12.5 Ableitungsregeln

Anhand der Definition des Differenzialquotienten kann man ermitteln, wie man Exponentialfunktionen ableitet.

## Beweis

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0+h} - a^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x_0} \cdot a^h - a^{x_0}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} a^{x_0} \cdot \frac{a^h - 1}{h} \end{aligned}$$

□

So erkennen wir, dass die Ableitung einer Funktion  $f$  der Form  $a^x$  diese selbe Funktion mal einem konstanten Vorfaktor  $\lambda$  ist:  $(a^x)' = a^x \cdot \lambda$

Nun versucht man, Weiteres über  $\lambda$  zu erfahren:  $\lambda = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$  ist ein Grenzwert, der sich ausschließlich in Abhängigkeit von  $a$  verändert, ist also für jede definierte Funktion eine Konstante.

Wenn man mehrere Graphen der Funktionenschar  $g_a(h) = \frac{a^h - 1}{h}$  zeichnet, erkennt man, dass es sich um stetige Funktionen handelt. Somit kann man behaupten, dass  $\lim_{h \rightarrow 0} g_a(h) = g_a(0)$  ist, dies entspricht auch  $\lambda$ .

### GRAPEHN VERSCHIEDEN A AUCH E UND LAMBDA SAGEN

Hier ist auffällig, dass wenn man  $a$  so verändert, dass der y-Achsenschnittpunkt  $(0|1)$  wird, man sich immer mehr der Zahl  $e$  nähert. Wenn man für  $a$  genau  $e$  einsetzt hat man  $g_e(0) = 1$ .  $\lambda$  ist also 1 für die Funktion  $e^x$ , was gut zeigt, dass die natürliche Exponentialfunktion ihre eigene Ableitung darstellt:

$$\frac{d}{dx} e^x = \left( \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} \right) \cdot e^x = 1 \cdot e^x = e^x$$

Eine wichtige Eigenschaft ist auch, dass  $f'(0) = \lambda$  ist. Dies kann man auf zwei verschiedene aber gleichermaßen einfache Arten herausfinden, beide verwenden die vorher angewendete Definition des Differenzialquotienten.

Differentialquotient neu angewendet:  $f'(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{0+h} - a^0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lambda$

Vorheriges Ergebnis genutzt:  $f'(x) = a^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} \Rightarrow f'(0) = a^0 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = 1 \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lambda$

$\lambda$  entspricht also auch der Steigung der Tangenten der Ausgangsfunktion an der y-Achse.

### Exponentialfunktionen mit natürlicher Basis

## Theorem

Die natürliche Exponentialfunktion überstimmt mit ihrer Ableitungsfunktion.

$$f(x) = e^x \Rightarrow f' = e^x$$

**Theorem**

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{v(x)}$  ist eine Verkettung der Funktion  $v : x \rightarrow v(x)$  mit der Exponentialfunktion  $u : v \rightarrow e^v$ . Existiert die Ableitung  $v'$ , so gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = v'(x) \cdot e^{v(x)}$$

**Bemerkung:**

Letzteres kann natürlich auch verwendet werden, um eine Stammfunktion zu ermitteln.

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = e^{v(x)}$  mit  $v$  differenzierbar hat als mögliche Stammfunktion  $F$  mit

$$F(x) = \frac{1}{v'(x)} \cdot e^{v(x)}$$

**Beispiel:**

$$1. f(x) = \frac{2}{3} \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2}{3} \cdot (-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1} = -\frac{2}{3}x \cdot e^{-\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} : (-x) \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1} = -\frac{2}{3x} \cdot e^{\frac{1}{2}x^2+1}$$

$$2. f(t) = \frac{\sin(tx)}{e^{tx}}$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{t \cdot \cos(tx) \cdot e^{tx} - \sin(tx) \cdot t \cdot e^{tx}}{(e^{tx})^2} = \frac{t \cdot e^{tx} \cdot (\cos(tx) - \sin(tx))}{(e^{tx})^2} = \frac{t \cdot (\cos(tx) - \sin(tx))}{e^{tx}}$$

$$3. f(x) = x \cdot e^{t\sqrt{x}+0,5}$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{t\sqrt{x}+0,5} + x \cdot \left(-\frac{t}{\sqrt{x}}\right) \cdot e^{t\sqrt{x}+0,5} = (1 - t\sqrt{x}) \cdot e^{t\sqrt{x}+0,5}$$

**Exponentialfunktionen mit beliebiger Basis**

Der vorher erwähnte Wert  $\lambda$  ist für beliebige Basen schwierig festzulegen. Viel einfacher geht es nach einem Basiswechsel. Wenn man nämlich  $e$  als Grundzahl wählt, kann wiederum die Ableitungsregel für Funktionen mit natürlicher Basis angewendet werden, so wurde das Problem umgangen.

**Theorem**

Sei  $f$  eine Funktion mit  $f(x) = a^x, a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$ . dann ist ihre Ableitungsfunktion  $f'$ , für die gilt:

$$f'(x) = \ln(a) \cdot a^x$$

**Beweis**

$\frac{d}{dx}(a^x)$	$= \frac{d}{dx}(e^{x \cdot \ln(a)})$	Basiswechsel und Kettenregel anwenden
	$= (x \cdot \ln(a))' \cdot e^{x \cdot \ln(a)}$	Ableiten ( $\ln a$ ist eine Konstante)
	$= \ln(a) \cdot e^{x \cdot \ln a}$	Auf ursprüngliche Basis bringen
	$= \ln(a) \cdot a^x$	

□

Dasselbe Prinzip kann auch für verkettete Funktionen angewendet werden.



## Theorem

Die Funktion  $f$  mit  $f(x) = a^{v(x)}$ ,  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$  ist eine Verkettung der Funktion  $v : x \rightarrow v(x)$  mit der Exponentialfunktion  $u : v \rightarrow a^v$ . Existiert die Ableitung  $v'$ , so gilt nach der Kettenregel

$$f'(x) = v'(x) \cdot \ln(a) \cdot a^{v(x)}$$

## Beweis

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(a^{v(x)}) &= \frac{d}{dx}(e^{v(x) \cdot \ln(a)}) \\ &= (v(x) \cdot \ln(a))' \cdot e^{v(x) \cdot \ln(a)} \\ &= v'(x) \cdot \ln(a) \cdot e^{v(x) \cdot \ln(a)} \\ &= v'(x) \cdot \ln(a) \cdot a^{v(x)} \end{aligned}$$

Basiswechsel und Kettenregel anwenden

Ableiten ( $\ln a$  ist eine Konstante)

Auf ursprüngliche Basis bringen

□

## 12.5.1 Aktivität

Quelle: Déclic 1ère?????

# LOGARITHMEN

---

### Definition 13.0.0

Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent, mit dem die Basis des Logarithmus' potenziert werden muss, um die gegebene Zahl zu erhalten. Logarithmen sind nur für positive reelle Zahlen definiert, die Basis muss positiv und ungleich 1 sein

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

### Definition 13.0.0

Man bezeichnet als Logarithmusfunktion eine Funktion der Form  $x \rightarrow \log_b x$  mit  $b \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$   $x$  ist die Variable und wird *Argument* oder *Numerus* genannt, Logarithmusfunktionen sind nur für positive, reelle Zahlen definiert:  $x \in \mathbb{R}^+$   
 $b$  nennt man *Basis* oder *Grundzahl*, sie ist für jede Funktion fest vorgegeben.

Hier Graphen

### Besondere Logarithmen

Logarithmus naturalis	:	$\ln a$	:=	$\log_e a$
Logarithmus dualis	:	$\text{ld } a$	:=	$\log_2 a$
Dekadischer Logarithmus	:	$\lg a$	:=	$\log_{10} a$

## 13.1 Eigenschaften

- $f(x) = \log_b x$
- $b \in \mathbb{R}^+ \setminus 1$
- $D_f = \mathbb{R}^+$
- $W_f = \mathbb{R}$
- für  $0 > b > 1$ :  $f$  ist streng monoton wachsend  
für  $b > 1$ :  $f$  ist streng monoton fallend
- für  $0 > b > 1$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$   
für  $b > 1$ :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$   
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$
- $f(1) = 0$
- y-Achse ist senkrechte Asymptote

## 13.2 Rechengesetze

Aus den Potenzgesetzen kann man die Logarithmussätze erhalten.

## Theorem

Seien  $a, b, c \in \mathbb{R}^+$  und  $n \in \mathbb{N}$

$\log_c(a \cdot b)$	$=$	$\log_c a + \log_c b$	Produktregel
$\log_c\left(\frac{a}{b}\right)$	$=$	$\log_c a - \log_c b$	Quotientenregel
$\log_c a^n$	$=$	$n \cdot \log_c a$	1. Potenzregel
$\log_c \sqrt[n]{a}$	$=$	$\frac{1}{n} \cdot \log_c a$	2. Potenzregel

Bemerkung:

Die zweite Potenzregel ist nur ein Sonderfall der ersten, da  $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

---

## *Kapitel 14*

---

# ALGEBRA

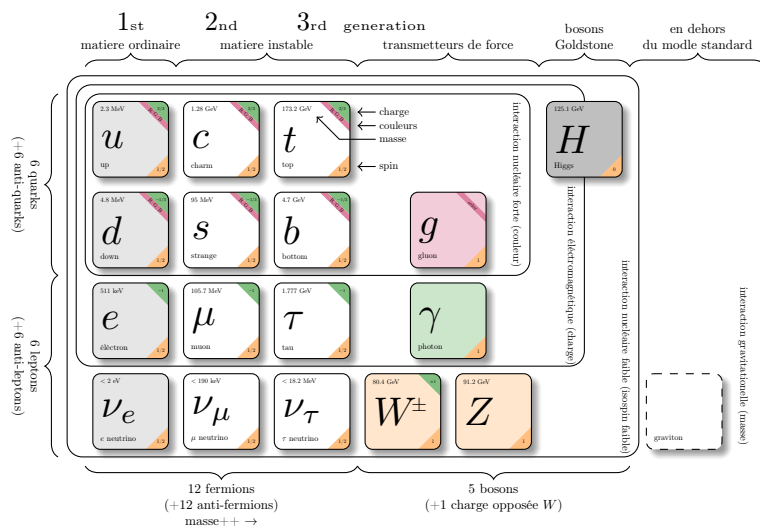
---

test d@

## ANHANG: PHYSIK

### 15.1 La physique des particules

Le modele standard de la physique dans sa beauté incontestée.



### 15.2 Interaction gravitationnelle

#### Definition 15.2.0

L'interaction gravitationnelle est une force toujours **attractive** qui agit sur tout ce qui possde une masse, mais avec une intensité extrmement faible (c'est l'interaction la plus faible). Son domaine d'action est **l'infini**.

Un corps est considéré ponctuel si sa taille  $\leq \frac{\text{distance d'observation}}{100}$

$$\vec{F}_g = -\frac{G \cdot m_a \cdot m_b}{r^2} \cdot \vec{u}_{AB}$$

Si:  $r = AB$   $G = 6,67 \cdot 10^{-11} (\text{S.I})$   $\vec{u}_{AB} \rightarrow$  vecteur normé

#### 15.2.1 Le champ de gravitation

Tout objet de Masse M et d'origine spaciale Q crée autour de lui un champ gravitationnel.

En un point quelconque P, ce champ s'écrit  $\vec{g}_{(P)}$ .

Un deuxime objet de masse m placé en ce point P est soumis a la force de gravitation:

$$\vec{F}_{O/P} = m \cdot \vec{g}_{(P)}$$

D'où on peut tirer la formule pour le champ de gravitation d'un objet considéré ponctuel de masse  $M$  à une distance  $d$ :

$$\mathcal{G}_o = \frac{G \cdot M}{d^2}$$

## 15.3 Interaction électromagnétique

### Definition 15.3.0

L'interaction électromagnétique est une force **attractive** ou **répulsive** qui agit sur tout ce qui possède une charge électrique. Son domaine d'action est également **l'infini**.

### 15.3.1 Le champ électrique

#### Definition 15.3.1

La loi de Coulomb

Dans le vide, 2 corps ponctuels A et B de charges  $q_a$  et  $q_b$  exercent l'un sur l'autre des forces:

$$\vec{F}_{A/B} = K \cdot \frac{q_a \cdot q_b}{r^2} \cdot \vec{U}_{A/B}$$

avec

$$K = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \cdot 10^9 (S.I.)$$

$\epsilon_0$ : permittivité du vide (réponse d'un milieu donné à un champ électrique appliqué) ( $8,85 \cdot 10^{-12}$ )

⚠  $\vec{F}$  et  $\vec{E}$  n'ont pas forcément le même sens, cela dépend de la charge  $q$

La relation entre force électrique et champ électrique s'exprime avec  $q$  (Coulombs), charge de source:

$$\vec{F}_e = q \cdot \vec{E}$$

$$\Rightarrow F_e = |q| \cdot E$$

Le champ électrique s'exprime donc de cette manière:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2} \cdot \vec{U}_{A/B}$$

(Diagramme de notation:  $J$  pointe vers  $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ ,  $C$  pointe vers  $q$ ,  $m^2$  pointe vers  $r^2$ )

$\vec{E}$  va dans le sens des potentiels décroissants

Les lignes de champ sont tangentes aux vecteurs champ électrique tandis que les équipotentielle relient les points où le champ électrique possède la même valeur (intensité)

Dans un condensateur plan, le champ électrique est uniforme (lignes de champ parallèles) et la valeur du champ électrique est

$$E = \frac{|U_{ab}|}{d}$$

(Diagramme de notation:  $J$  pointe vers  $|U_{ab}|$ ,  $V$  pointe vers  $|U_{ab}|$ ,  $m$  pointe vers  $d$ )

et, avec  $Q$  (charge totale) et  $S$  (surface des armatures)

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 \cdot S}$$

(Diagramme de notation:  $J$  pointe vers  $Q$ ,  $C$  pointe vers  $Q$ ,  $S.I.$  pointe vers  $\epsilon_0$ ,  $m^2$  pointe vers  $S$ )

### 15.3.2 Le champ magnétique

#### Definition 15.3.2

**Dans une bobine:** Soit  $B_i$  l'intensité du champ magnétique,  $I$  l'intensité du courant,  $N$  le nombre de spires (jointives) et  $l$  la longueur de la bobine,

$$B_i = \mu_0 \cdot \frac{N}{l} \cdot I$$

avec la perméabilité du vide

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$$

On obtient deux bobines de Helmholtz quand  $d = R$ ; Le champ est donc uniforme

### 15.4 Mouvement, vitesse et accélération d'un système physique

#### Definition 15.4.0

Dans la base de Frenet: avec  $a_\tau$  l'accélération tangentielle et  $a_\eta$  l'accélération normale et  $\rho$  le rayon de courbure,

$$a_\tau = \frac{dV}{dt} \quad \text{et} \quad a_\eta = \frac{v^2}{\rho}$$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\eta^2}$$

Voici les trois formules magiques pour un mouvement rectiligne uniformément varié:

$$a_x = \text{cste}$$

$$v_x = a_x \cdot t + v_{x0}$$

$$x = \frac{1}{2} a_x \cdot t^2 + v_{x0} \cdot t + x_0$$

Dans un mouvement circulaire de rayon  $R$ , avec  $\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$  étant la vitesse angulaire,

$$V = \omega \cdot R$$

La fréquence  $f$  est définie

$$f(\text{Hz}) = \frac{1}{T(\text{s})} = \frac{\omega(\text{rad/s})}{2\pi(\text{rad})}$$

### 15.5 Les 3 lois de Newton

#### 15.5.1 1<sup>ère</sup> loi

bla