Kapitel 1

LOGARITHMEN

by CLARA

Definition

Der Logarithmus einer Zahl ist der Exponent, mit dem die Basis des Logarithmus' potenziert werden muss, um die gegebene Zahl zu erhalten. Logarithmen sind nur für positive reelle Zahlen definiert, die Basis muss positiv und ungleich 1 sein

$$\log_b a = x \Leftrightarrow b^x = a$$

Definition

Man bezeichnet als Logarithmusfunktion eine Funktion der Form $x \to \log_b x$ mit $b \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$
x ist die Variable und wird *Argument* oder *Numerus* genannt, Logarithmusfunktionen sind nur für positive, reelle Zahlen definiert: $x \in \mathbb{R}^+$
b nennt man *Basis* oder *Grundzahl*, sie ist für jede Funktion fest forgegeben.

Hier Graphen

Besondere Logarithmen

Logarithmus naturalis	:	$\ln a$	$:=$	$\log_e a$
Logarithmus dualis	:	$\operatorname{ld} a$	$:=$	$\log_2 a$
Dekadischer Logarithmus	:	$\lg a$	$:=$	$\log_{10} a$

1.1 Rechengesetze

Aus den Potenzgesetzen kann man die Logarithmussätze erhalten.

Theorem

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\log_c(a \cdot b) &= \log_c a + \log_c b && \text{Produktregel}\\
\log_c\left(\frac{a}{b}\right) &= \log_c a - \log_c b && \text{Quotientenregel}\\
\log_c a^n &= n \cdot \log_c a && \text{1. Potenzregel}\\
\log_c \sqrt[n]{a} &= \frac{1}{n} \cdot \log_c a && \text{2. Potenzregel}
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Die zweite Potenzregel ist nur ein Sonderfall der ersten, da $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

1.2 Gleichungen lösen

Beispiel:

- $\ln(x-2)+\ln(x+2) = \ln(4+2x) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{(x-2)\cdot(x+2)}{2\cdot(2+x)}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{x-2}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = 1 \Leftrightarrow x = 4$
- $\ln(1-x) + \ln(1+x) = 2(\ln 3 - \ln 5) \Leftrightarrow \ln\left(\frac{(1-x)\cdot(1+x)\cdot 5^2}{3^2}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)\cdot(1+x)\cdot 5^2}{3^2} = 1 \Leftrightarrow$ $x = \pm\frac{4}{5}$
- $e^{2+\ln x} = x+3 \Leftrightarrow e^2 \cdot x = x+3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{e^2-1}$
- $2x\ln(3e^x - 2) \Leftrightarrow$

1.3 Logarithmusfunktionen

1.3.1 Eigenschaften

- $f(x) = \log_b x$
- $b \in \mathbb{R}^+ \backslash 1$
- $D_f = \mathbb{R}^+$
- $W_f = \mathbb{R}$
- für $0 > b > 1$: f ist streng monoton wachsend
  für $b > 1$: f ist streng monoton fallend
- für $0 > b > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$
  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$
  für $b > 1$: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
  $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$
- $f(1) = 0$
- y-Achse ist senkrechte Asmyptote

1.3.2 Ableitungsregeln

1.3.3 Funktionsuntersuchungsbeispiel