Analysis I + II

Mach' dir keine Sorgen wegen deiner Schwierigkeiten mit der Mathematik. Ich kann dir versichern, daß meine noch größer sind.

Brief an ein Schulmädchen, 1943
Albert Einstein

Rémy Moll
Physics Bachelor ETH

26. Februar 2021

ETH zürich

Inhaltsverzeichnis

Kapitel 1

Mengenlehre

1.1 Naive Mengenlehre

Eingeführt ~ 1895 von Georg Cantor, um Widersprüche in der Mathematik zu beseitigen.

1.1.1 Cantor's Postulate

Definition 1.1.1: Mengenpostulate (Cantor)

1. Eine Menge besteht aus voneinander unterscheidbaren Elementen: "$x \in X$ bedeutet: x ist ein Element der Menge X
2. Eine Menge ist unverwechselbar durch ihre Elemente bestimmt.
3. Eine Menge ist nicht Element von sich selbst.

   Bemerkung:

   Elemente von Mengen können durchaus wieder Mengen sein, aber eine Menge kann sich nicht selbst beinhalten. Das ist das Well-founded-Axiom.

4. Ist A eine Aussage über Elemente einer Menge X, so ist

$$\{x \mid A \text{ ist wahr für } x\}$$

auch eine Menge. (Bemerkung: | bedeutet: 'so, dass')

Bemerkung:

In der modernen Mengenlehre gibt es bis zu 8 Postulate, die wir nicht benötigen.

Bemerkung:

Auf diese Postulate bauen alle Ergebnisse und Beweise des folgenden Kurses auf.

Beispiel:

- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ..\}$
- $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$
- $\{\} = \emptyset$ Die leere Menge

- $\{x \in \mathbb{N} \mid \exists a \in \mathbb{Z} : 3a + 1 = x\}$ (Ergibt: $\{1, 4, 7, 10, 13, 16, ...\}$)

Definition 1.1.2: Mengenoperationen

Seien X, Y Mengen. Wir definieren:

- $X \cup Y = \{z \mid z \in X \text{ oder } z \in Y\}$
- $X \cap Y = \{z \mid z \in X \text{ und } z \in Y\}$
- $X \backslash Y = \{z \mid z \in X \text{ und } z \notin Y\}$
- $X \triangle Y = (X \cup Y) \backslash (X \cap Y)$ Das ist die symmetrische Differenz. $X \triangle Y = Y \triangle X$

Definition 1.1.3: Disjunkte Mengen

Es seien X und Y Mengen. X und Y sind **disjunkt**, falls gilt: $x \cap Y = \emptyset$.

Definition 1.1.4: Kollektionen von Mengen

Wir bezeichnen Mengen von Mengen als Familien, Kollektionen von Mengen.

Definition 1.1.5: Potenzmenge

Sei X eine Menge. Wir schreiben $\mathcal{P}(X) = \{Y \mid Y \subseteq X\}$. Wir nennen $\mathcal{P}(X)$ die **Potenzmenge von** X.

Beispiel:

$X = \{a, 3\} \Rightarrow \mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{3\}, X\}$

Kollektionen von Mengen schreiben wir oft in der Form $\{X_0, X_1, X_2, ...\} = (X_i)_{i \in \mathbb{N}}$.
Allgemeiner betrachten wir Familien $(X_i)_{i \in I}$ für eine (beliebige) Indexmenge I.

Beispiel:

Für $n \in \mathbb{Z} : X_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 < n\}$

Definition 1.1.6: Vereinigung und Durchschnitt von Familien

Ist $(X_i)_{i \in I} = \mathcal{X}$ eine Familie von Mengen, so sind

$$\bigcup_{i \in I}^{\infty} = \bigcup_{X \in \mathcal{X}} = \{x \mid \exists A : x \in A\}$$

$$\bigcap_{i \in I}^{\infty} = \bigcap_{X \in \mathcal{X}} = \{x \mid \forall A : x \in A\}$$

respektiv die Vereinigung und der Durchschnitt der Mengen in $\mathcal{X}$.

Beispiel:

Sei $\forall n \in \mathbb{Z} : X_n = \{m \in \mathbb{Z} \mid m^2 < n\}$ und sei $\mathcal{X} = (X_n)_{n\in\mathbb{Z}}$. Dann gilt:

$$\bigcup_{X\in\mathcal{X}} = \emptyset$$

$$\bigcap_{X\in\mathcal{X}} = \mathbb{Z}$$

Definition 1.1.7: Kartesisches Produkt

Seien X, Y beliebige Mengen. Das Kartesische Produkt von X mit Y ist

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y\}$$

Bemerkung:

(x, y) ist ein geoordnetes Tupel von 2 Elementen. Das bedeutet $(x, y) = (y, x) \Rightarrow x = y$

Diese Definition ist auch allgemeiner für 3 und $n \in \mathbb{N}$ Mengen gültig.

$$X \times Y \times Z = \{(x, y) \mid x \in X \text{ und } y \in Y \text{ und } z \in Z\}$$

Allgemeiner: Ist $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie von Mengen, dann gilt:

$$\prod_{i\in I} X_i = \{(x_i)_{i\in I} \mid x_i \in X_i \ \forall i \in I\}$$

Beispiel:

- $X = \{0, 1\}$
- $X \times X = \{(0, 0), (0, 1), (1, 1)\}$
- $X \times X \times X = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$
- $A = \{a, b\}$
- $X \times A = \{(0, a), (0, b), (1, a), (1, b)\}$

  Bemerkung:

  $X \times A \neq A \times X$, aber sie sind ähnlich, verbunden
- $X \times \emptyset = \emptyset$

Bemerkung:

Ein geordnetes Tupel kann formell als Menge $(x, y) = \{x, \{y\}\}$ dargestellt werden. Hierfür wird Postulat 3 verwendet. (Siehe Aufgabe Skript)

1.2 Funktionen

Bemerkung:

Für uns ist das Wort 'Abbildung' ein Synonym für eine Funktion.

Definition 1.2.1

Seien X, Y Mengen. Eine Funktion f von X nach Y ist eine Vorschrift/Regel, die jedem Element von X ein Element von Y zuordnet.

Beispiel:

- X = Alle ETH-Mitarbeiter
- $Y = \mathbb{N}$
- $f : X \mapsto Y$ ist gegeben durch $f(x)$= Alter von x in Tagen, $x \in X$

Definition 1.2.2: Funktion

Seien X, Y Menge. Eine **Funktion** von X nach Y ist eine Teilmenge F von $X \times Y$ (d.h. Tupel) mit folgender Eigenschaft:

$$\forall x \in X \; \exists! y \in Y : (x, y) \in F$$

Bemerkung:

Eine Funktion als Teilmenge von $X \times Y$ nennt man in der Praxis Funktionsgraphen der Abbildungsvorschrift $f : X \mapsto Y$. Graph von f ist $\{(x, f(X)) \mid x \in X\} \leqslant X \times Y$ Entspricht dem Funktionsgraphen aus der Schule, wobei der Graph hier der eigentliche Bestandteil der Funktion ist, und nicht anders herum.

Definition 1.2.3

Ist $f : X \mapsto Y$ eine Funktion ($f \leqslant X \times Y$), so nennen wir X den **Definitionsbereich** und Y den **Wertebereich** von f.

Bemerkung:

Funktionen sind keine Formeln. Sie hängen von den Mengen, die sie definieren ab. $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{N}$ mit $f(x) = x^2$ **ist nicht gleich** $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ **ist nicht gleich** $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}^+$ mit $f(x) = x^2$.

Beispiel:

1. Sei X eine Menge und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Die **charakteristische Funktion** von $A \subseteq X$ ist die Funktion $\chi_A : X \mapsto \{0,1\} = Y$ gegeben durch:

$$f(x) = \begin{cases} 1 \text{ falls } x \in A \\ 0 \text{ falls } x \notin A \end{cases}$$

2. Sei X eine Menge und $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Die **Inklusionsabbildung** $z_a : A \mapsto X$ ist gegeben durch: $z_A(x) = x(\ \forall x \in A)$.
   Für $X = A$ heisst $z_X = z_A$ die **Identitätsabbildung**.

3. Seien X, Y Mengen. Die **Projektionsabbildungen**

$$\pi_X : X \times Y \mapsto X$$

$$\pi_Y : X \times Y \mapsto Y$$

sind gegeben durch:

$$\pi_X(x, y) = x$$

$$\pi_Y(x, y) = y$$

Notation: Sind X, Y Mengen, so schreiben wir $Y^X = map(X, Y)$ für die Menge aller Funktionen von X nach Y.

Bemerkung:

Sind X und Y endliche Mengen mit je m und n Elemente. Dann gibt es n^m Funktionen $f \in Y^X$

Definition 1.2.4: Verknüpfung

Seien X, Y, Z Mengen, seien $f : X \mapsto Y$ und $g : Y \mapsto Z$ Funktionen. Wir schreiben $g \circ f$ für die Funktion $X \mapsto Z$ gegeben durch

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))\ \forall x \in X$$

Spezialfall: Ist $A \subseteq X$ eine Teilmenge und $f : X \mapsto Y$ eine Funktion, so nennen wir $f \circ z_A : A \mapsto Y$ die **Einschränkung** von f auf A. Notation: $f|_A = f \circ z_A$

Definition 1.2.5

Seien X, Y Mengen. Eine Funktion $f : X \mapsto Y$ heißt ...

- **surjektiv**, wenn sie jedes Element der Zielmenge mindestens einmal als Funktionswert annimmt. Das heißt, jedes Element der Zielmenge hat mindestens ein Urbild.

$$\forall y \in Y\ \exists x \in X : \quad f(x) = y$$

($|X| \geqslant |Y|$. Beispiel: $f(x) = \sin x$ mit $Y = (0, 1)$)

- **injektiv**, wenn zu jedem Element der Wertemenge höchstens ein (oder auch gar kein) Element der Definitionsmenge existiert. Zwei verschiedene Elemente x_1 und x_2 der Definitionsmenge bilden also nie auf den gleichen Term y der Wertmenge ab.

$$\forall x_1, x_2 \in X : \qquad f(x_1) = f(x_2) \quad \Rightarrow \quad x_1 = x_2$$

> **Bemerkung:**
>
> Dies bedeutet **nicht**: $\forall x_1, x_2 \in X : \qquad x_1 = x_2 \quad \Rightarrow \quad f(x_1) = f(x_2)$

($|X| \leqslant |Y|$. Beispiel: $f(x) = 2x$ mit $X = \mathbb{Z}$)

- **bijektiv**, wenn eine vollständige Paarbildung existiert. Jedes Element der Wertmenge besitzt genau ein Element der Definitionsmenge und jedes Element der Definitionsmenge besitzt genau ein Element der Wertmenge. Eine Funktion ist genau dann bijektiv, wenn sie sowohl surjektiv, als auch injektiv ist.
($|X| = |Y|$. Beispiel: $f(x) = x^3$)

Beispiel:

$f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ mit $f(x) = x + 2$ ist injektiv aber nicht surjektiv.

Definition 1.2.6: Umkehrfunktion

Wir nennen $g : Y \mapsto X$ gegeben durch $g(y) =$ (das eindeutige $x \in X$ mit $f(x) = y$) die **Umkehrfunktion** zu f. $g = f^{-1}$.

Lemma 1.2.1

Seien $f : X \mapsto Y$ und $g : Y \mapsto Z$ Funktionen.

1. Sind f, g injektiv, so ist auch $g \circ f$ injektiv.
2. Ist $f \circ g$ injektiv, so ist auch f injektiv.
3. Sind f, g surjektiv, so ist auch $g \circ f$ surjektiv.
4. Ist $f \circ g$ surjektiv, so ist auch g surjektiv.
5. Sind f, g bijektiv, so ist auch $g \circ f$ bijektiv.

Beweis:

1. Zeige: $\forall x_1, x_2 \in X : g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_1)$ weil g injektiv ist.
$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_1$ weil f injektiv ist.
2. Analog

3. TODO

□

Beispiel:

- $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}; x \mapsto x^2$ - Nicht injektiv und nicht surjektiv.
- $f : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+; x \mapsto x^2$ - Injektiv und surjektiv also auch bijektiv.

Bemerkung - Notation:

Seien $f : X \mapsto Y$ eine Funktion un $A \subseteq X, B \subseteq Y$ Teilmengen. Dann ist

$$f(A) = \{y \in Y \mid \exists x \in A : f(x) = y\} \leqslant Y$$

das Bild von A unter f.

$$f^{-1}(B) = \{x \in X \mid \exists f(x) \in B\}$$

ist das Urbild von B.

Bemerkung:

$f : X \mapsto Y$ ist surjektiv falls $f(X) = Y$.
$f^{-1}(Y) = X$ gilt immer, und lässt nicht auf Bijektivität zurückschließen.

Beispiel - Exkurs - Algebraische Strukturen:

Sei X eine Menge. Eine binäre Operation auf X ist eine Funktion $\alpha : X \times X \mapsto X$ (ordnet einem Tupel aus X ein neues Element aus X zu): $(x_1, x_2) \mapsto \alpha(x_1, x_2) = x_1 * x_2$.
Wir nennen α assoziativ falls

- $\alpha(x_1, \alpha(x_2, x_3)) = \alpha(\alpha(x_1, x_2), x_3)\ \forall x_1, x_2, x_3 \in X$
- KG
- NE

(X, α, e) mit α assoziativ und kommutativ nennt man **Monoid**.

Bemerkung:

Alle anderen Strukturen (Dioide, Ringe, Körper, Vektorräume,...) werden ebenfalls so aufgebaut.

Definition 1.2.7: Funktion

Sei eine Funktion $\mathcal{F} \subseteq X \times Y$. Dann kann man folgende Tests durchführen:

- $\forall x \in X\ \exists! y \in Y : (x, y) \in \mathcal{F}$ (ist es eine Funktion?)
- $\forall y \in Y :\ \forall x_1, x_2 \in X : (x_1, y) \in \mathcal{F} \land (x_2, y) \in \mathcal{F}$ (ist die Funktion injektiv?)

- $\forall y \in Y : \exists x \in X : (x, y) \in \mathcal{F}$ (ist die Funktionen surjektiv?)
- Aus Injektivität und surjektivität folgt Bijektivität: $\forall yy \in Y \; \exists! x \in X : (x, y) \in \mathcal{F}$

In der üblichen Darstellung ist die Darstellung einfacher: $f : X \to Y; x \mapsto f(x)$.

- f ist injektiv $\Leftrightarrow$ $\forall x_1, x_2 \in X : f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$
- f ist surjektiv $\Leftrightarrow$ $\forall y \in Y \; \exists x \in X : y = f(x)$

1.3 Relationen und Quotienten

Definition 1.3.1: Relation

Eine **Relation** $\mathcal{R}$ auf einer Menge X ist eine Teilmenge von $X \times X$.
Wir schreiben oft $\widehat{=}, \approx, \sim, \cong, \leqslant, \preccurlyeq, \ldots$ für $\mathcal{R}$ und statt $(x_1, x_2) \in \mathcal{R}$ auch $x_1 \mathcal{R} x_2$.
Diese Relation kann folgende Eigenschaften haben:

- Reflexiv, falls $x \mathcal{R} x \; \forall x \in X$ gilt.
- Symmetrisch, falls $x_1 \mathcal{R} x_2 \Leftrightarrow x_2 \mathcal{R} x_1 \; \forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}$ gilt.
- Transitiv, falls $x_1 \mathcal{R} x_2 \mathcal{R} x_3 \Leftrightarrow x_1 \mathcal{R} x_3$
- Antisymmetrisch, falls $x_1 \mathcal{R} x_2 \wedge x_2 \mathcal{R} x_1 \Rightarrow x_1 = x_2 \; \forall x_1, x_2 \in \mathcal{R}$

Eine Relation heißt **Äquivalenzrelation** falls sie reflexiv, symmetrisch und transitiv ist.
Eine Relation heißt **Ordnungsrelation** falls sie reflexiv, antisymmetrisch und transitiv ist.

Beispiel:

- Die Identitätsabbildung ist die einzige reflexive Abbildung.
- Was bedeutet 'symmetrisch' für eine Funktion $f : X \to X$?
  Eine Funktion heißt idempotent falls $f^{\circ Z} : X \to X$ die Identität ist.

  Beispiel:

  $$x \in \mathbb{R} \mapsto -x \in \mathbb{R}$$
  $$x \in \mathbb{R} \backslash \{0\} \mapsto \frac{1}{x} \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$$

Beispiel - Äquivalenzrelationen:

Eine Äquivalenzrelation drückt meistens eine Gleichheit in gewissen Aspekten aus. Dies sollte in folgenden Beispielen ersichtlich werden:

- Die Gleichheit: $x_1 = x_2$

- $\equiv : X \times X$, das heißt zwei Elemente $x_1, x_2 \in X$ eine beliebige Relation zueinander haben (also einfach in der selben Menge sind)
- Seien zwei Mengen X, Y und eine Funktion $f : X \to Y$.

  $\sim$: $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow f(x_1) = f(x_2)$ ist eine Äquivalenzrelation auf X.

  Beispiel:

  $f(x) = x^2$ für $x \in \mathbb{R}$. Dann ist $x \sim -x$ (besser: $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \vee x_1 = x_2$)

- $X = \mathbb{R}^2$; $(x_1, y_1) \sim (x_2, y_2) \Leftrightarrow (x_1, y_1)$ und (x_2, y_2) sind im selben Quadranten in $\mathbb{R}^2$ ist ebenfalls äquivalent.
- $\mathcal{X} = \{g \mid \text{Geraden in der euklidischen Ebene } \mathbb{R}^2\}$.
  $g_1 \parallel g_2 \Leftrightarrow g_1$ und g_2 sind parallel.
  - Reflexivität: $g \parallel g$
  - Symmetrie: $g \parallel h \Leftrightarrow h \parallel g$
  - Transitivität: $g \parallel h, h \parallel i \Rightarrow g \parallel i$
- Sei $d \geqslant 1$ eine natürliche Zahl. Wir schreiben $m \equiv n(d)$ falls $m - n$ durch d teilbar ist mit $m, n \in \mathbb{Z}$.
  - Reflexivität: $m \equiv m$ (obvious)
  - Symmetrie: $m \equiv n \Leftrightarrow n \equiv m$. Stimmt, da $m \equiv n \Leftrightarrow \dfrac{m-n}{d} \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt $-\dfrac{m-n}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \dfrac{n-m}{d} \in \mathbb{Z} \Rightarrow n \equiv m$
  - Transitivität: $m \equiv n, n \equiv k$ Bedeutet, dass $\dfrac{m-n}{d} \in \mathbb{Z}, \dfrac{n-k}{d} \in \mathbb{Z}$, was bedeutet, dass $\dfrac{m-n}{d} + \dfrac{n-k}{d} = \dfrac{m-k}{d} \in \mathbb{Z}$. Daraus folgt, dass auch $m \equiv k$.
- Sei $\approx$: 'ist ungefähr gleich' eine Relation auf r. $x \approx y \Leftrightarrow |x - y| < 10^{-80}$.
  - Reflexivität: Ja
  - Symmetrie: Ja
  - Transitivität: Nein, für sehr kleine Zahlen nicht.

Beispiel - Ordnungsrelationen:

- $\leqslant$ auf $\mathbb{Q}$ oder $\mathbb{R}$
  - Reflexivität: Ja
  - Transitivität: $x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ (Axiom)
  - Antisymmetrie: $x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y$
- $\subseteq$ für Mengen.

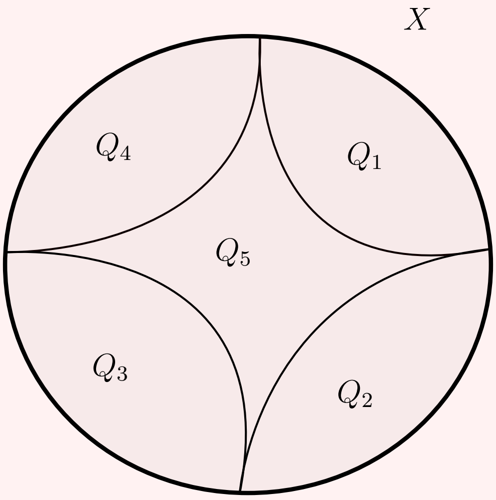
- Reflexivität: $A \subseteq A$
- Transitivität: $A \subseteq B, B \subseteq C \Rightarrow A \subseteq C$
- Antisymmetrie: $A \subseteq B, B \subseteq A \Rightarrow A = B$

- $\prec$, lexikographische Ordnung. Untersuchung wird dem Leser zur Übung gelassen.

Definition 1.3.2: Partition

Sei X eine Menge. Eine Partition $\mathcal{P}$ auf X ist eine Menge von Teilmengen von X, so dass:

- $\bigcup_{Q \in \mathcal{P}} Q = x$ und
- $\forall Q_1, Q_2 \in P : Q_1 \cap Q_2 \neq \emptyset \Rightarrow Q_1 = Q_2$ und
- $\emptyset \notin \mathcal{P}$



Beispiel:

- Quadranten im $\mathbb{R}^2$
- $\mathcal{P} = \{\{..., -4, -2, 0, 2, 4, ...\}, \{..., -3, -1, 1, 3, ...\}\}$ ist eine Partition auf $\mathbb{Z}$.

Definition 1.3.3: Äquivalenzrelation

Eine Teilmenge $\sim \subseteq X \times X$ heisst Äquivalenzrelation auf der Menge X falls sie...

- Reflexiv: $\forall x \in X : x \sim x$ (d.h. $(x, x) \in \sim$)
- Symetrisch: $\forall x, y \in X : x \sim y \Rightarrow y \sim x$
- Transitiv: $\forall x, y \in X : x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow x \sim z$
  ... ist.

Theorem 1.3.1

Eine Äquivalenzrelation definiert eine Partition.

Definition 1.3.4: Äquivalenzklasse

Sei $\sim$ eine Äquivalenzrelation auf X. Wir definieren zu jedem $x_0 \in X$ die Äquivalenzklasse:

$$[x_0]_\sim = \{x \in X \mid x \sim x_0\}$$

Damit ist

$$\mathcal{P} = \{[x]_\sim \mid x \in X\}$$

Eine Partition auf X.

Beweis:

Da $\sim$ reflexiv ist, gilt $x_0 \in [x_0]_\sim$. Daher gilt $[x_0]_\sim \neq \emptyset$. Da $[x_0]_\sim \subseteq X$ gilt auf jeden Fall

$$\bigcup_{[x]_\sim \in \mathcal{P}} \subseteq X$$

Des Weiteren gilt wegen $[x_0]_\sim$ auch Gleichheit?
Für die letzte Eigenschaft der Partition müssen wir zeigen, dass:

$$[x_0]_\sim \cap [x_1]_\sim \neq \emptyset \Rightarrow [x_0]_\sim = [x_1]_\sim$$

für alle $x_0, x_1 \in X$.
Angenommen:

$y \in [x_0]_\sim \cap [x_1]_\sim$ und $z \in [x_0]_\sim$

$y \sim x_0 \Leftrightarrow x_0 \sim y$

$y \sim x_1 \qquad z \sim x_0$

$\Rightarrow z \sim y$

Wegen Symmetrie und Transitivität erhalten wir $x_0 \sim y$ und $z \sim y$. Wegen $y \sim x_1$ und Transitivität erhalten wir $z \sim x_1$ (oder auch: $z \in [x_1]_\sim$). Da $z \in [x_1]_\sim$ beliebig war, gilt also $[x_0]_\sim \subseteq [x_1]_\sim$. Auf Grund der Symmetrie zwischen x_0 und x_1 folgt ebenso $[x_1]_\sim \subseteq [x_0]_\sim$, also $[x_1]_\sim = [x_0]_\sim$. □

Theorem 1.3.2

Angenommen $\mathcal{P}$ ist eine Partition auf X. Dann können wir eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X definieren, so dass die Äquivalenzklassen genau die Elemente der Partition sind. Und zwar gilt: $x \sim y :\Leftrightarrow \; \exists Q : x, y \in Q \in \mathcal{P}$

Bemerkung:

Das heisst, dass man das jeweils Eine durch das jeweils Andere definieren.

Definition 1.3.5: Quotientenraum

Für eine Äquivalenzrelation $\sim$ auf X nennen wir

$$X/_{\sim} = \{[x]_{\sim} : x \in X\}$$

den **Quotientenraum** von X modulo $\sim$.

Bemerkung:

Entspricht genau der Partition, mit dem Unterschied, dass der Quotientenraum dann verwendet wird, wenn uns die Anfangsmenge nicht mehr interessiert.

Beispiel:

Wir betrachten $X = \mathbb{N}_{\geqslant 1}$ und definieren die Äquivalenzrelation $(m,n) \sim :\Leftrightarrow mb = an$.

$R)$ $(m,n) \sim (m,n) \Leftrightarrow mn = mn$ $\checkmark$

$S)$ $(m,n) \sim (a,b) \Leftrightarrow (a,b) \sim (m,n)$ $\checkmark$

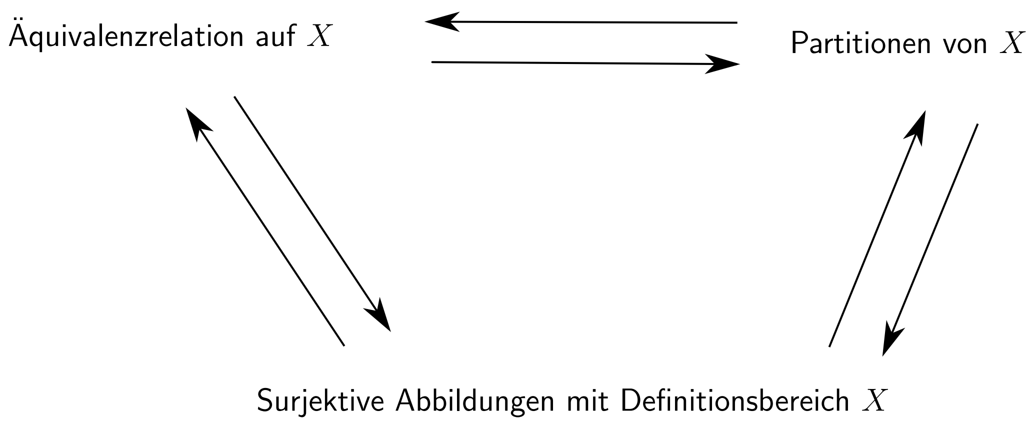
$T)$ Angenommen

$$\begin{array}{cccc} & (m,n) \sim (a,b) & \text{und} & (a,b) \sim (k,l) \\ \Leftrightarrow & mb = an & & al = kb \\ \Leftrightarrow & mbl = anl & = & aln = kbn \\ \Rightarrow & mbl & = & kbn \mid b \geqslant 1 \\ \Leftrightarrow & ml & = & kn \\ \Leftrightarrow & (m,n) & \sim & (k,l) \\ & & \checkmark & \end{array}$$

Dieser Quotientenraum $X/_{\sim} = \mathbb{Q}$ entspricht der Menge der rationalen Zahlen: $[(m,n)]_{\sim} = \frac{m}{n}$.
Denn $\frac{m}{n} = \frac{a}{b} \Leftrightarrow mb = an$.

Definition 1.3.6: Wohldefiniertheit

Eine Funktion(svorschrift) heisst **wohldefiniert**, falls das Ergebnis von keiner Wahl abhängt.



Beispiel:

Von einer surjektiven Abbildung zu Partitionen:
Angenommen $f : X \to Y$ ist surjektiv. Dann definiert $\mathcal{P} = \{f^{-1} : y \in Y\}$ eine Partition.

Beispiel:

- Nicht wohldefiniert: $f\left(\frac{m}{n}\right) = m$ der Zähler der rationalen Zahl $\frac{m}{n}$.
  $\frac{m}{n} = [(m,n)]_\sim \mapsto (m,n)$(Ein Repräsentatn der Äquivalenzklasse (hier wird eine Wahl getroffen.)) $\mapsto m$
- Wohldefiniert: $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, $\left(\frac{m}{n}, \frac{a}{b}\right) \mapsto \frac{ma}{nb}$
  Entspricht einer Aussage mit Umwegen, die nicht unbedingt wohldefiniert sind, aber das Endergebnis ist wohldefiniert.

Definition 1.3.7: Kanonische Projektion

$$x \mapsto [x]_\sim \in X/_\sim$$

wird auch **Quotientenabbildung** oder **kanonische Projektion** genannt. Dies ist die 'offensichtliche' Abbildung, bei der man keine (wirkliche) Wahl trifft.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\mathbb{Z}/_{(d)} &= \text{ Quotientenraum von } \mathbb{Z} \text{ modulo der Äquivalenzrelation } a \equiv b(d) \text{ falls } d|(a-b)\\ &= \{[0]_\sim, [1]_\sim, ...[d-1]_\sim\}\end{aligned}$$

$$f([a]) = (-1)^a \in \{1, -1\}$$

Wohldefiniert?

- Ja, wenn d gerade ist: $a \sim a + kd \Rightarrow (-1)^a = (-1)^{a+kd}$
- Nein, wenn nicht: $a \sim d$ aber $(-1)^0 = 1 \wedge (-1)^a = -1$

Beispiel:

$d = 3$ definiert $\mathbb{Z}/_{(3)} = \{[0]_{mod3}, [1]_{mod3}, [2]_{mod3}\}$ (Restklassen Modulo 3).
Nicht wohldefiniert, denn $0 \sim 3$ aber $(-1)^0 = 1 \neq -1 = -(1)^3$ also $f([0]) \neq f([3])$ (verschiedene Outputs) obwohl $[0] = [3]$ (gleiche Inputs).

1.4 Kardinalität (Mächtigkeit)

Definition 1.4.1

Seien X, Y zwei Mengen.

Wir sagen X ist **gleichmächtig** zu Y, schreiben $X \sim Y$ oder $|X| = |Y|$ falls es eine Bijektion $f : X \to Y$ gibt.
Wir sagen X ist **schmächtiger** als Y (oder Y ist **mächtiger**), schreiben $X \preccurlyeq Y$, falls es eine Injektion $g : X \to Y$ gibt.
Des Weiter ist X **echt schmächtiger** als Y, $X \prec Y$, falls $X \preccurlyeq Y$ aber $X \nsim Y$

Theorem 1.4.1

Gleichmächtig erfüllt alle Eigenschaften einer Äquivalenzrelation auf der Klasse aller Mengen. (Äquivalenzrelationen sind nur für Mengen definiert, aber es gibt keine Menge aller Mengen!)

Beweis:

$R)$ $X \sim X$ wegen $id : X \to X, x \mapsto x$

$S)$ $X \sim Y \Rightarrow Y \sim X$, denn wenn $f : X \to Y$ bijektiv ist, so ist auch $f^{-1} : Y \to X$ bijektiv.

$T)$ $Y \sim Y \wedge Y \sim Z \Rightarrow X \sim Z$, denn falls $f : X \to Y$ bijektiv ist, so ist auch $g \circ f : X \to Z$ es.

□

Theorem 1.4.2

$\preccurlyeq$ definiert eine Ordnungsrelation auf den Mächtigkeiten.

Beweis:

$R)$ $X \preccurlyeq X$ da $id : X \to X$ injektiv ist. ?

$T)$ $X \preccurlyeq Y \text{und} Y \preccurlyeq Z \Rightarrow x \preccurlyeq Z$
$\exists f : X \to Y$ injektiv $\exists g : Y \to Z$ injektiv $\Rightarrow g \circ f : X \to Z$

$AS)$ $X \preccurlyeq Y$ und $Y \preccurlyeq X \not\Rightarrow X = Y$
Vielleicht stimmt stattdessen: $|X| = |Y|$

□

Theorem 1.4.3: Cantor-Schröder-Bernstein

Seien X, Y zwei Mengen mit $X \preccurlyeq Y$ und $Y \preccurlyeq X$. Dann gilt $X \sim Y$.

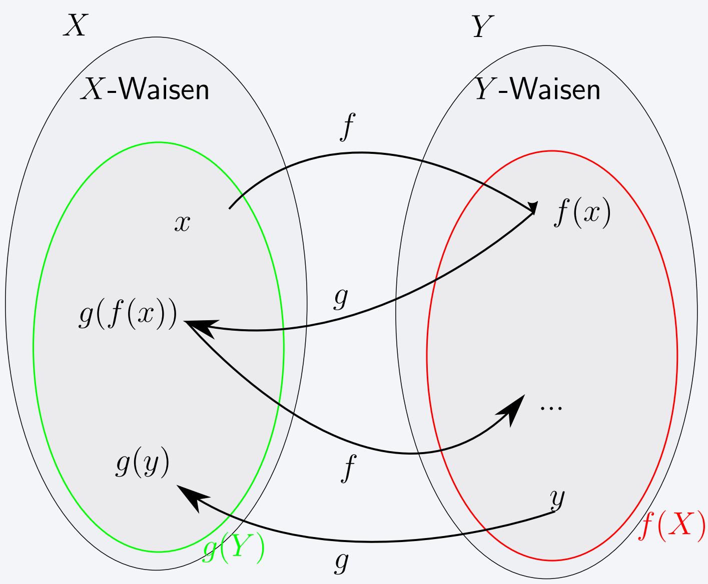
Beweis:

Seien $f : X \to Y$ injektiv, $g : Y \to X$ injektiv.
Wir müssen aus diesen Beiden eine Bijektion $H : X \to Y$ konstruieren.
Wir führen folgende eigenartige Biologie ein:

- Wir sagen $f(x) \in Y$ ist das Kind von $x \in X$
- Wir sagen $f(y) \in X$ ist das Kind von $y \in Y$ (Injetkiv bedeutet, dass jeder nur einen Elternteil haben kann)

Bemerkung:

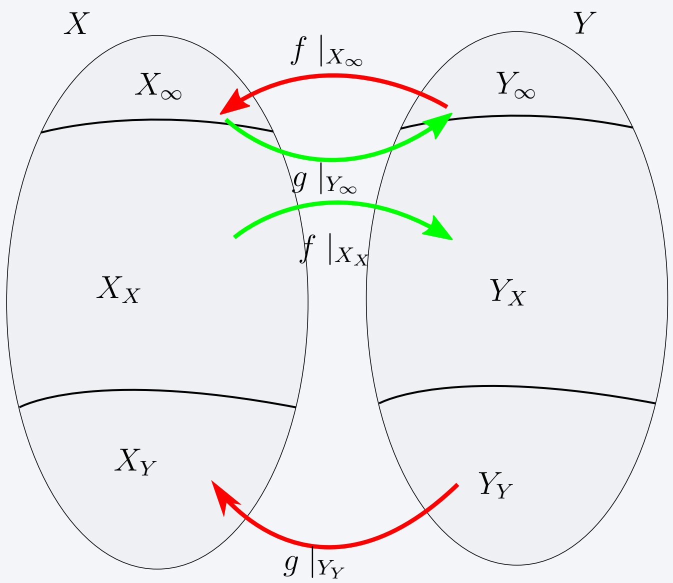
Also hat $x \in X$ ein Kind $f(x) \in Y$, welches das Kind $g(f(x)) \in X$ hat, welches das Kind $f(g(f(x))) \in Y$ hat....



- Wir sagen, $x \in X$ ist ein X-Waise falls x nicht das Kind eines $y \in Y$ ist: $x \in X \backslash g(Y)$.
- Wir sagen, $y \in Y$ ist ein Y-Waise falls y nicht das Kind eines $x \in X$ ist: $y \in Y \backslash f(X)$.
- Wir definieren
  - $X_\infty = \{x \in X \mid x$ hat Vorfahren jeder Generation, stammt nicht von einem Waisen ab $\}$
    (Das schließt nicht die Fälle aus, bei denen $f(x_0) = y_0$ und $g(y_0) = x_0$)
  - $X_X = \{x \in X \mid x$ ist ein X-Waise oder stammt von einem X-Waisen ab $\}$
  - $X_Y = \{x \in X \mid x$ stammt von einem Y-Waisen ab $\}$
- Analog definieren wir:
  - $Y_\infty = \{y \in Y \mid y$ hat Vorfahren jeder Generation, stammt nicht von einem Waisen ab $\}$
    (Das schließt nicht die Fälle aus, bei denen $f(x_0) = y_0$ und $g(y_0) = x_0$)
  - $Y_Y = \{y \in Y \mid y$ ist ein Y-Waise oder stammt von einem Y-Waisen ab $\}$
  - $Y_X = \{y \in Y \mid y$ stammt von einem X-Waisen ab $\}$
    (Nicht in beide Richtungen unendlich)
- $f(X_\infty) = Y_\infty$
  Wenn $x \in Y_\infty$ dann hat $f(x)$ ebenso eine unendlich lange Stammline $\Rightarrow f(X_\infty) \leqslant Y_\infty$

Wenn $y \in Y\infty$ dann ist y kein Y-Waise, also ist $y = f(x)$ für ein eindeutig bestimmtes $x \in X_\infty$

- $f(X_X) = Y_X$ (analog)
- $g(Y_Y) = X_Y$ (analog)



Daraus ergibt sich, dass:

$$H : \begin{cases} x \in X_\infty \mapsto & f(x) \in Y_x \subseteq Y \\ x \in X_X \mapsto & f(x) \in Y_\infty \subseteq Y \\ x \in X_y \mapsto & g^{-1}(x) \in Y_y \subseteq Y \end{cases}$$

eine Bijektion $H : X \to Y$ definiert. (Weil f g jeweils bijektiv sind für die verschiedenen Partionen von X und Y) (Wären es keine Partitionen in X, wären die Funktionen nicht wohldefiniert, wären es keine Partionen in Y, wären die Funktionen keine Bijektionen mehr, sie wären nicht injektiv) $\square$

Bemerkung - formaler:

- x-Waisen $= X \backslash g(Y)$
- $X_X = X \backslash g(Y) \cup \bigcup_{n \geqslant 1} (g \circ f)^n (X \backslash f(Y))$
- $X_Y = \bigcup_{n \geqslant 0} (g \circ f)^n \circ g(Y \backslash f(X))$
- $X_\infty = X \backslash (X_X \cup X_Y)$

Beispiel - Hilbert Hotel (*2) in CSB:

- $X = Y = \mathbb{N}$, $f(n) = n + 1 : x \to Y$, $g(m) = m + 1 : Y \to X$
- X-Waisen $= \{0\}$, Y-Waisen $= \{0\}$
- $X_X = 2\mathbb{N}$, $X_Y = 2\mathbb{N} + 1$

- $Y_Y = 2\mathbb{N}$, $Y_X = 2\mathbb{N} + 1$
- Von X_X nach Y_X: $f(n) = n + 1$
- Von X_Y nach Y_Y: $g^{-1}(n) = n - 1$
- $X_\infty = Y_\infty = \emptyset$

Definition 1.4.2

Wir bezeichnen die Äquivalenzklasse einer Menge X bezüglich Gleichmächtigkeit als die **Kardinalität** von X, die **Mächtigkeit** von X, und schreiben auch $|X|$. Falls $X = \{x_1, ..., x_n\}$ eine endliche Menge ist, so schreiben wir $|X| = n$.
Ebenso schreiben wir $|\emptyset| = 0$.

Definition 1.4.3: Unendlichkeit

Wir sagen X ist **abzählbar unendlich** falls $|X| = |\mathbb{N}|$ (eine Bijektion existiert, das heißt jedem Element aus X ein Index zugeordnet werden kann).
Wir sagen, dass X **unendlich** ist, falls $\mathbb{N} \preccurlyeq X$.
Wir sagen, dass X **überabzählbar unendlich** ist, falls $\mathbb{N} \prec X$.

Bemerkung:

Eine injektive Funktion $f : X \to X$ muss nicht surjektiv sein.
Hilbert Hotel: $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $n \mapsto n + 1$

Theorem 1.4.4: Cantor's Diagonalargument

Sei X eine Menge. Dann gilt $X \prec \mathcal{P}(X)$.

Beweis:

Wir definieren die Funktion $f : X \to \mathcal{P}(X)$, $x \mapsto \{x\}$.
Diese Funktion ist injektiv, also gilt: $X \preccurlyeq \mathcal{P}(X)$.
Außerdem darf die Funktion keine Bijektion sein, um echt schmächtiger zu zeigen. Ad Absurdum: Angenommen $f : X \to \mathcal{P}(X)$ ist eine Bijektion.
Wir definieren $A = \{x \in X \mid x \notin f(x)\} \in \mathcal{P}(X)$. Da f bijektiv ist, muss es ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) = A$ geben.

$$x_0 \in f(x_0) \Leftrightarrow x_0 \in A \Leftrightarrow x_0 \notin f(x_0)$$

Dieser Widerspruch zeigt, dass f nicht surjektiv sein kann. Also gilt der Satz.

$$X \prec \mathcal{P}(X) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(X)) \prec \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))) \prec ...$$

□

1.5 Das Auswahlaxiom (Zorn'sche Lemma)

Theorem 1.5.1: Auswahlaxiom

Angenommen X, Y sind zwei Mengen und $f : X \to Y$ ist surjektiv. Dann existiert eine Funktion $g : Y \to X$, so dass $g(y) \in f^{-1}(\{y\})$ für alle $y \in Y$.
g wird auch ein Schnitt genannt.

Korollar 1.5.1 (1): Auswahlaxiom

Sei Y eine Menge und $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{P}(Y)$ eine Familie von nichtleeren Teilmengen von Y. Dann existiert eine Funktion $F : \mathcal{X} \to Y$, so dass $F(A) \in A$ für alle $A \in \mathcal{X}$.

Korollar 1.5.1 (2): Auswahlaxiom

Sei I eine Menge und $x_i \; \forall i \in I$ eine nichtleere Menge. Dann ist das kartesische Produkt

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ f : I \to \bigcup_{i \in I} X_i \mid f(i) \in X_i \text{ für alle } i \in I \right\} \neq \emptyset$$

Kapitel 2

Reelle Zahlen

Unser Ziel ist es, die Reellen Zahlen mit Elementen wie

$$\pi = 3.14159265359..., \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

und all den anderen bekannten Eigenschaften **eindeutig** und **kohärent** zu konstruieren.

2.1 Geordnete Körper

Definition 2.1.1: Körper

Ein Körper ist eine Menge K zusammen mit speziellen Elementen 0_K und $1_K \in K$ und 2 Operationen (d.h. Funktionen):

$$+ : K \times K \to K; (a, b) \mapsto a + b$$

$$* : K \times K \to K; (a, b) \mapsto a * b = ab$$

Man schreibt den Körper K als das Tupel $(K, 0, 1, +, *)$.
Die Relationen müssen erfüllen:

- $0 + a = a + 0 = a, \ \ \forall a \in K$
- $a + b = b + a, \ \ \forall a, b \in K$
- $\forall a \in K \ \exists b \in K$ mit $a + b = 0$ (das heißt $b = -a$)
- $(a + b) + c = a + (b + c)$
- $1 * a = a * 1 = a, \ \ \forall a \in K$
- $a * b = b * a, \ \ \forall a, b \in K$
- $(a * b) * c = a * (b * c)$
- $a * (b + c) = a * b + b * c$
- $\forall a \in K \backslash \{0\} \ \exists b \in K$ mit $a * b = 1$ (das heißt $b = a^{-1}$)

Beispiel:

- $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ mit den üblichen $1, 0, *, 1$ sind Körper
- $K = \mathcal{F}_3 = \mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}} = \{[0], [1], [2]\}$ ebenfalls
- $K = \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} = \{a + b\omega \mid a, b \in \mathbb{R}\}$
  Wenn wir $* :\Leftrightarrow (a + b\omega)(c + d\omega) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\omega$ mit $\omega^2 = 3$ definieren, dann kann man alle Gesetze beweisen.
  Man findet dann auch ein inverses Element: $(a + b\omega)(\dfrac{a}{a^2 + 3b^2} - \dfrac{b}{a^2 + 3b^2}\omega) = 1 + 0$ also $\omega = 1$.

Definition 2.1.2: Geordneter Körper

Sei K ein Körper, und sei $\leqslant$ eine Ordnungsrelation auf der Menge K. Wir nennen $(K, \leqslant)$ einen geordneten Körper, falls:

Theorem 2.1.1: Körperaxiome

1. $\forall x, y \in K$ gilt $x \leqslant y$ oder $y \leqslant x$ (Die Ordnung ist total, alle Elemente können verglichen werden)

2. $\forall x, y, z \in K$ gilt $x \leqslant y \Leftrightarrow x + z \leqslant y + z$

3. $\forall x, y \in K \backslash \{0\}$ gilt $x \geqslant 0, y \geqslant 0 \Rightarrow xy \geqslant 0$

gelten.

Beispiel:

Sei K ein Körper, so dass ein Element $\theta \in K$ existiert, mit $\theta^2 = -1$. Dann gibt es keine Ordnungsrelation auf K, die K zu einem geordnetem Körper macht.
Wenn θ entweder größer oder kleiner als 0 ist, dann lassen sich immer Widersprüche herleiten:
$\theta \geqslant 0 \Rightarrow \theta * \theta = \theta^2 = -1 \geqslant 0$ ↯

2.1.1 Konsequenzen der Axiome für angeordnete Körper $(K, \leqslant)$

Definition 2.1.3: Positivität

Für $x, y \in K$ sagen wir x ist positiv falls $x \geqslant 0, x \neq 0, x > 0$, wobei allgemein $x > y$ bedeutet:

$$x \geqslant y \wedge x \neq y$$

- x ist negativ falls $x < 0$.
- x ist nicht negativ, falls $x \geqslant 0$.

Bemerkung - Annahme:

Im Folgenden gilt für Körper $0 \neq 1$.

Theorem 2.1.2

- (Trichotomie) Für $x, y \in K$ gilt genau eine der Aussagen

$$x < y \qquad x = y \qquad x < y$$

- Für $x, y, z, w \in K$ gilt:

$$\begin{cases} x \leqslant z \\ y \leqslant w \end{cases} \Rightarrow x + y \leqslant z + w$$

Beweis:

$x \leqslant z \Rightarrow x + y \leqslant z + y$ und $y \leqslant w \Rightarrow z + y \leqslant z + w$.

Daraus folgt $x + y \leqslant z + w$ (wegen der Transitivität) □

- Es gilt $x \leqslant y \Leftrightarrow y - x$ nicht negativ, also: $0 \leqslant y - z$
- Es gilt $x \leqslant 0 \Leftrightarrow 0 \leqslant -x$
- Es gilt $x^2 \geqslant 0 \; \forall x \in K$

Beweis:

Falls $x \geqslant 0$ dann folgt das aus Axiom (3) für angeordnete Körper.
Falls $x \leqslant 0$ dann gilt $-x \geqslant 0$ wegen obig. Dann gilt $x^2 = (-x)^2 \geqslant 0$ mit Axiom (3). □

- Es gilt $0 < 1$ weil $1 = 1^2$ und jedes Quadrat ist größer als 0. Damit gilt auch $-1 < 0$.

Bemerkung:

Sei K ein angeordneter Körper. Wir identifizieren $\mathbb{Z}$ mit der Teilmenge

$$\{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

von K. Daraus folgt: angeordnete Körper sind unendlich.
Wir schreiben $\frac{a}{b} \in K$ für das Element $a * b^{-1}, b \neq 0$ und $a, b \in \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq K$$

Definition 2.1.4: Signum

Sei $(K, \leqslant)$ ein angeordneter Körper. Dann nennen wir die Funktion $sgn : K \to \{-1, 0, 1\}$ gegeben durch

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 \text{ falls } x < 0 \\ 0 \text{ falls } x = 0 \\ +1 \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$

das Signum (zu deutsch Vorzeichen).

Bemerkung:

Diese Funktion ist wohldefiniert, denn es wird immer nur je ein Wert zugeordnet (Definition einer Funktion), dank der Trichotomie.

Definition 2.1.5: Absolutbetrag

Sei $(K, \leqslant)$ ein angeordneter Körper. Der **Absolutbetrag** auf K ist die Funktion $|.| : K \to K$

gegeben durch

$$|x| = \begin{cases} -x \text{ falls } x < 0 \\ 0 \text{ falls } x = 0 \\ x \text{ falls } x > 0 \end{cases}$$

2.1.2 Weitere Konsequenzen

Theorem 2.1.3

$$|x| \geqslant 0 \; \forall x \in K$$

und

$$|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Theorem 2.1.4

$$\forall x, y \in K : |xy| = |x| * |y| \text{ und } sgn(xy) = sgn(x) * sgn(y)$$

Theorem 2.1.5

Für $x, y \in K$ gilt:

$$|x| \leqslant y \Leftrightarrow -y \leqslant x \leqslant y$$

Theorem 2.1.6: Dreiecksungleichung ($\mathbb{R}$)

$$\forall x, y \in K : |x + y| \leqslant |x| + |y|$$

Beweis:

Es gilt: $\begin{cases} a \leqslant |a| \text{ und } b \leqslant |b| & \Rightarrow a + b \leqslant |a| + |b| \\ -a \leqslant |a| \text{ und } -b \leqslant |b| & \Rightarrow -(a+b) \leqslant |a| + |b| \end{cases}$.

Folgt:

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

$\square$

2.2 Vollständigkeit und ihre Konsequenzen

Definition 2.2.1: Vollständiger Körper

Es sei K ein angeordneter Körper (Menge mit 0,1, Operationen $+$, $*$ und Ordnungsrelation, für die die 9 Axiome der Aritmetik und die 3 Axiome für die Kompabilität mit $\leqslant$ gelten). Das

Vollständigkeitsaxiom für K ist folgende Aussage:

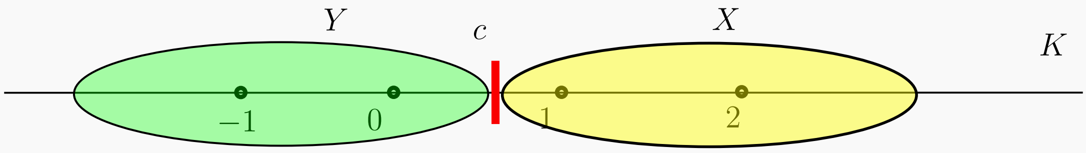
Theorem 2.2.1: Vollständigkeitsaxiom (V)

Seien $X \subseteq K$ und $Y \subseteq K$ Teilmengen von K, so dass $x \leqslant y$ für alle $x \in X, y \in Y$. Dann existiert ein $c \in K$ mit $x \leqslant c \leqslant y \ \ \forall x \in X, y \in Y$

Gilt dieses Axiom für einen Körper, so ist dieser Körper **vollständig**.

Bemerkung:

Wir können $(K, \leqslant)$ als Gerade zeichnen.



Es werden nachfolgend die **Konsequenzen der Vollständigkeit** behandelt. Hierzu betrachten wir $\mathbb{K}$, einen angeordneten, vollständigen Körper.

Bemerkung - Spoiler:

Laut späterer Definition gilt: $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. nachfolgende Eigenschaften sind also sehr wichtig.

2.2.1 Maximum und Minimum, Supremum und Infimum

Im folgenden Abschnitt behandeln wir nur Maxima und gehen analog für Minima vor.

Definition 2.2.2: Maximum

Sei $X \subseteq \mathbb{K}$. Ein Element $x_0 \in X$ heißt **Maximum** von X falls $x \leqslant x_0 \ \forall x \in X$.
Falls es ein Maximum von X gibt, dann ist es eindeutig bestimmbar: sind x_0, x_1 Maxima, dann gilt $x_1 \leqslant x_0$ und $x_0 \leqslant x_1$ also $x_0 = x_1$.

Bemerkung:

Laut der Definition muss das Maximum nicht notwendigerweise existieren.

Beispiel - $a < b$:

- $[a, b]$, Maximum $= b$
- (a, b), kein Maximum
- (a, ∞), kein Maximum
- $\left\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \dots\right\}$, kein Maximum
- $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$, Maximum $= 1$

Definition 2.2.3: Obere Schranke

Sei $X \in \mathbb{K}$. Ein Element $a \in \mathbb{R}$ heißt **obere Schranke für** X falls $x \leqslant a \ \forall x \in X$ gilt. Wir sagen X ist nach oben beschränkt, falls es eine obere Schranke für X gibt.

Theorem 2.2.2

- Falls $X \subseteq \mathbb{K}$ ein Maximum $x_0 \in X$ besitzt, dann ist x_0 eine obere Schranke.
- Ist $a \in \mathbb{K}$ eine obere Schranke für X und $b \geqslant a$, dann ist auch b eine obere Schranke für X.

Theorem 2.2.3

Sei $X \subseteq \mathbb{K}$ nicht leer und nach oben beschränkt. Dann besitzt die (nichtleere) Menge

$$A = \{a \in \mathbb{K} \mid a \text{ ist obere Schranke für } X\}$$

ein Minimum $a_0 \in A$.

Definition 2.2.4: Supremum

a_0, die **kleinste obere Schranke** für X wird ebenfalls **Supremum** von X gennant.

$$a_0 = \min\{a \in \mathbb{R} \mid x \leqslant a \ \forall x \in X\}$$

Beweis:

Nach Hypothesen auf X ist A nicht leer, und es gilt $x \leqslant a$ für alle $x \in X$ und alle $a \in A$. Nach dem Vollständigkeitsaxiom existiert ein $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $x \leqslant a_0 \leqslant a \ \forall x \in X, a \in A$

- $x \leqslant a_0$ bedeutet, dass a_0 eine obere Schranke für X ist, also $a_0 \in A$
- $a_0 \leqslant a$ bedeutet, das a_0 das Minimum von A ist.

$\square$

Beispiel:

$X = (-\infty, 2) A = [2, \infty)$

Theorem 2.2.4

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{K}$ nicht leer, nach oben beschränkt.

1. Sei $c \in \mathbb{K}$ und schreibe $X + c = \{x + c \mid x \in X\}$. Dann gilt $\sup(X + c) = \sup(X) + c$
2. Schreibe $X + Y = \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$. Dann gilt: $\sup(X + Y) = \sup(X) + \sup(Y)$
3. Sei $c \in \mathbb{K}_{\geqslant 0}$ und scheibe $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ und $X, Y \subseteq \mathbb{K}_{\geqslant 0}$. Dann gilt: $\sup(XY) = \sup(X) * \sup(Y)$

Beweis:

1. offensichtlich

2. Seien $x_0 = \sup(X), y_0 = \sup(Y)$. $\forall z = x + y \in X + Y : z \leqslant x_0 + y_0$ also ist $x_0 + y_0$ eine obere Schranke. Also gilt auf jeden Fall: $\sup(X + Y) \leqslant \sup(X) + \sup(Y)$. Angenommen es handelt sich um $<$. Dann gibt es eine Zahl $\varepsilon > 0$ mit $x + y \leqslant x_0 + y_0 - \epsilon \; \forall x \in X, y \in Y$ Folgt über Umwege ↯

3. analog

□

Wir haben $\sup(X)$ definiert für Teilmengen $X \subseteq \mathbb{K}$, die nicht leer und nach oben beschränkt sind. Wir definieren:

Definition 2.2.5

- $\sup(\emptyset) = -\infty$
- $\sup(X) = \infty$ falls X nicht nach oben beschränkt ist.

Bemerkung:

Ist keine Gleichheit sondern ist eigentlich ein Makro für die Aussage: X ist nicht nach oben beschränkt.

2.2.2 Archimedisches Prinzip

Theorem 2.2.5: Archimedisches Prinzip (A)

Sei $x \in \mathbb{K}$. Dann existiert eine eindeutige ganze Zahl n mit $n \leqslant x < n + 1$.

Beweis:

Angenommen $x \geqslant 0$. Betrachte die Menge

$$0 \in E = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \leqslant x\} \subseteq \mathbb{K}$$

die nicht leer ist, und per Definition nach oben beschränkt (durch x). Sei $s = \sup(E) \leqslant x$. Somit ist $s - 1$ **nicht** obere Schranke für E. Also existiert $n_0 \in E$ mit $s - 1 < n_0$, also $s < n_0 + 1$. Es gilt somit:

$$m \leqslant s < n_0 + 1 \text{ also } m \leqslant n_0 \; \forall m \in E$$

Also ist n_0 das Maximum von E (und auch das Supremum). Also $n_0 + 1 \notin E \Rightarrow n_0 + 1 > x$. Zusammenfassend:

$$n_0 \leqslant x < n_0 + 1$$

. Wir gehen analog für $x \leqslant 0$ vor.

Eindeutigkeit: Sei $m_0 \in \mathbb{Z}$ mit $m_0 \leqslant x < m_0 + 1$.

$$\begin{aligned} n_0 \leqslant x < m_0 + 1 &\Rightarrow n_0 \leqslant m_0 \\ m_0 \leqslant x < n_0 + 1 &\Rightarrow m_0 \leqslant n_0 \\ &\Rightarrow m_0 = n_0 \end{aligned}$$

□

Korollar 2.2.5 (1)

Sei $x \in \mathbb{K}, x > 0$. Dann existiert $n \in \mathbb{Z}, n > 0$ mit $0 < \frac{1}{n} < x$.

Beweis:

Nach dem archimedischen Prinzip existiert ein $n \in \mathbb{Z}$ mit $n > \frac{1}{x}$, also $0 < \frac{1}{n} < x$. □

Theorem 2.2.6

Vollständigkeit $\Rightarrow$ Archimedisches Prinzip

Archimedisches Prinzip $\not\Rightarrow$ Vollständigkeit

Beweis - Gegenbeispiel:

V ist falsch für $K = \mathbb{Q}$:

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant x \text{ und } x^2 \leqslant 2\}$$

$$Y = \{y \in \mathbb{Q} \mid 0 \leqslant y \text{ und } y^2 \geqslant 2\}$$

Es gilt: $x \leqslant y \ \forall x \in X y \in Y$ aber $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. A ist dennoch wahr für $\mathbb{Q}$. □

Beispiel:

A: Es existiert ein **eindeutiges** $c \in \mathbb{K}$ mit $c^3 = 7$.
In jedem angeordneten Körper gilt: $x \leqslant y \Leftrightarrow x^3 \leqslant y^3$

- Eindeutigkeit:
  Seien $c, d \in K$ mit $c^3 = 7$ und $d^3 = 7$.
  Falls $c < d$ dann gilt $c^3 < d^3 \Rightarrow 7 < 7$ ↯
  Analog für $c > d$.
  Es bleibt nur $c = d$

- Existenz:
  Betrachte: $X = \{x \in \mathbb{K} \mid x^3 \leqslant 7\}, Y = \{y \in \mathbb{K} \mid y^3 \geqslant 7\}$
  Dann gilt: $x \leqslant y \ \forall x \in X, y \in Y$ und es existiert nach V ein $c \in \mathbb{K}$ mit $x \leqslant c \leqslant y \ \forall x, y \in \mathbb{K}$.

Behauptung: $c^3 = 7$

Beweis - $\mathcal{A}\!\!\mathcal{A}$

Angenommen $c^3 > 7$
Idee: $\exists \delta > 0 : (c-\delta)^3 > 7$. Dann gilt $(c-\delta) \in Y$ und $c - \delta < c$. Aber $c :\leqslant y$
$\lightning$
Wir nehmen $\varepsilon = c^3 - 7 > 0$, $\delta = \min\left(1, \frac{\varepsilon}{2(c^3+1)}\right)$ $\square$

2.2.3 Dezimalbruchentwicklung

Sei $a_0, a_1, a_2, ...$ eine Folge ganzer Zahlen mit $a_0 \geqslant 0, a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ für alle $n \geqslant 1$. Setze

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} *10^{-k} a_k \qquad X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Wir schreiben $c = a_0, a_1 a_2 a_3 ...$ für $\sup(X)$.
Dieses Element $c \in \mathbb{K}$ ist auch $\inf(Y)$ mit

$$Y = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \qquad y_n = \sum_{k=0}^{n} a_k * 10^{-k} + 10^{-n}$$

Definition 2.2.6

Sei $x \in \mathbb{K} \backslash \{0\}$. Wir schreiben $\lfloor x \rfloor$ für die eindeutige ganze Zahl mit

$$\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$$

- $\lfloor x \rfloor$ ist 'x abgerundet' oder der ganzzahlige Teil von x.
- $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ heißt der gebrochene Anteil von x.

Bemerkung - **Konstruktion:**

Sei $x \in \mathbb{K}, x \geqslant 0$.
Definiere:

$$\begin{aligned}
a_0 &= \lfloor x \rfloor \\
a_1 &= \lfloor 10 * x \rfloor - 10 * \lfloor x \rfloor \\
a_1 &= \lfloor 100 * x \rfloor - 10 * \lfloor 10 * x \rfloor \\
&\dots \\
a_n &= \lfloor 10^n * x \rfloor - 10 * \lfloor 10^{n-1} * x \rfloor
\end{aligned}$$

Theorem 2.2.7

Es gilt $a_n \in \{0, 1, ..., 9\}$ für $n \geqslant 1$ und

$$x = a_0, a_1 a_2 a_3 ... = \sup \left(\left\{ \sum_{k=0}^{n} 10^{-k} * a_k \mid n \in \mathbb{N} \right\} \right)$$

Beweis:

Nachrechnen und abschätzen. □

2.2.4 Dichte

Theorem 2.2.8

$\mathbb{K}$ ist nicht abzählbar. (Es gibt keine Bijektion zwischen $\mathbb{K}$ und $\mathbb{N}$)

Beweis:

Es genügt zu zeigen, dass eine injektive Abbildung $\Gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \hookrightarrow \mathbb{K}$ existiert. (der Pfeil mit Haken symbollisiert eine injektive Abbildung.)

- Wir konstruieren Γ wie folgt: zu $A \subseteq \mathbb{N}$ betrachte die Folge $a_0, a_1, a_2, ...$ gegeben durch

  $$a_n = 1_A(n) = \begin{cases} 1 \text{ für } n \in A \\ 0 \text{ für } n \notin A \end{cases}$$

  Setze $\Gamma(A) = a_0, a_1 a_2, ...$, dessen Dezimalbruchentwicklung durch a_n gegeben ist.

- Diese Abbildung $\Gamma : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ ist injektiv:
  Seien $A, B \subseteq \mathbb{N}, A \neq B$. Gilt $A \neq B$, so ist $A \Delta B$ nicht leer. Sei $m \in A \Delta B$ das kleinste Element. Angenommen $m \in A, m \notin B$. Dann gilt $\Gamma(A) > \Gamma(B)$ oder $\Gamma(A) < \Gamma(B)$. Also gilt insbesondere: $\Gamma(A) \neq \Gamma(B)$

□

Definition 2.2.7: Dichtheit

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{K}$ heißt **dicht** (dense) in $\mathbb{K}$ falls für jedes $x \in \mathbb{K}$ und jedes $\delta > 0$ gilt:

$$B(x, \delta) \cap X \neq \emptyset$$

Bemerkung:

Durch die Benutzung von $B(x, \delta)$ lässt sich diese Definition auch auf $\mathbb{C}$ erweitern.

Theorem 2.2.9

$\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ ist dicht.

Beweis:

Sei $x \in \mathbb{K}, \delta > 0$. Wir müssen zeigen $\mathbb{Q} \cap (x-\delta, x+\delta) \neq \emptyset$
Wir definieren $a = x - \delta, b = x + \delta$ also ist $a < b$. Nach dem Korollar zum archimedischen Prinzip existiert $m \in \mathbb{Z}, m > 0$ mit

$$0 < \frac{1}{m} < b - a$$

Ebenso existiert nach dem archimedischen Prinzip ein $n \in \mathbb{Z}$ mit

$$\begin{array}{rcccccl}
 & n-1 & \leqslant & ma & \leqslant & n & \\
\Rightarrow & \frac{n-1}{m} & \leqslant & a & \leqslant & \frac{n}{m} & \mid \frac{1}{m} < b-a \\
\Rightarrow & \frac{n}{m} & \leqslant & a + \frac{1}{m} & \leqslant & a+b-a & = b \\
 & a & \leqslant & \frac{n}{m} & \leqslant & b &
\end{array}$$

Somit ist gezeigt, dass $\mathbb{Q} \cap [a,b] \neq \emptyset$.

Bemerkung:

Wir unterscheiden hier nicht zwischen strikten und normalen Ordnungsrelationen weil es das Endergebnis nicht beeinflusst. $[a,b] \in (a,b)$

□

Definition 2.2.8: Häufungspunkt

Sei $A \subseteq \mathbb{K}$. Eine reelle Zahl $x \in \mathbb{K}$ heißt **Häufungspunkt** von A, falls $\forall \delta > 0$ ein $a \in A$ existiert, mit

$$0 < |x - a| < \delta$$

Bemerkung - informell:

Es gibt Elemente $a \neq x$ beliebig nahe an x.

Das Gegenteil eines Häufungspunktes ist ein **isolierter Punkt**

Bemerkung:

Theorem 2.2.10

$$A \subseteq \mathbb{K} \text{ ist dicht } \Leftrightarrow \text{ jedes } x \in \mathbb{K} \text{ ist Häufungspunkt von } A$$

Theorem 2.2.11

Sei $A \subseteq \mathbb{K}$ eine unendliche und beschränkte (nach oben und unten) Teilmenge. Dann existiert ein Häufungspunkt von A.

Beweis:

Seien $a, b \in \mathbb{K}$ und $A = [a, b]$. Betrachte die Menge

$$X = \{x \in \mathbb{K} | (-\infty, y) \cap A \text{ endlich}\}$$

Es gilt: $\begin{cases} a \in X & \text{weil } (-\infty, a) \cap A = \emptyset \\ b \notin X & \text{weil } (-\infty, b) \cap A = A \backslash \{b\} \textbf{ unendlich} \end{cases}$

$X \neq \emptyset$ ist also nach oben beschränkt. Setze $x_0 = \sup(X)$.

Behauptung: x_0 ist Häufungspunkt von A.

Sei $\delta > 0$ beliebig. Nach Definition von x_0 gilt:

- $(-\infty, x_0 - \delta) \cap A$ ist endlich
- $(-\infty, x_0 + \delta) \cap A$ ist unendlich
- $[x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cup A$ ist unendlich
- $((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cup A) \backslash \{x_0\}$ ist nicht leer.

Sei $a \in ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cup A) \backslash \{x_0\}$. Dann gilt:

$$0 < |a - x_0| < \delta$$

was zu beweisen war. (HP gesucht) $\square$

Theorem 2.2.12: Schachtelungsprinzip

Sei $\mathcal{F}$ eine nichtleere Familie von abgeschlossenen beschränkten Teilmengen von $\mathbb{K}$ mit

1. $\emptyset \notin \mathcal{F}$
2. $F_1, F_2 \in \mathcal{F} \Rightarrow F_1 \cup F_2 \in \mathcal{F}$

Dann gilt:

$$\bigcap_{F \in \mathcal{F}} F \neq \emptyset$$

Beweis:

$$s := \sup(\{\inf(F) \mid F \in \mathcal{F}\})$$

1. Behauptung: $s \in F \; \forall F \in \mathcal{F}$
   $s \in \mathbb{K}$: Sei $F_0 \in \mathcal{F}$. Da F_0 beschränkt ist, gilt $F_0 \subseteq [a, b]$.
   Falls $\{\inf(F) \mid F \in \mathcal{F}\}$ nach oben unbeschränkt ist, dann existiert $F_1 \in \mathcal{F}$ mit $\inf(F_1) \geqslant b + 1, F_1 \subseteq [b + 1, \infty)$.
   $\Rightarrow F_0 \cap F_1 = \emptyset \in \mathcal{F}$ falsch
   $\Rightarrow s \in \mathbb{K}$
2. Behauptung: Sei $F_0 \in \mathcal{F}$ dann gilt: $s \in F_0$
   Annahme: $s \notin F_0$.

Da F_0 abgeschlossen ist $\exists \delta > 0$ mit $(s - \delta, s + \delta) \cap F_0 \neq \emptyset$

$\square$

Korollar 2.2.12 (1): Intervallschachtelungsprinzip

Sei $\mathcal{I} = \{I_0, I_1, I_2, ...\}$ eine Familie von beschränkten abgeschlossenen und nichtleeren Intervallen, mit:

$$... \subseteq I_2 \subseteq I_1 \subseteq I_0$$

Dann gilt:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{I}_n \neq \emptyset$$

Bemerkung:

Nur wahr, wenn alle drei Grundbedingungen erfüllt sind.

2.3 Reelle Zahlen

Definition 2.3.1: Reelle Zahlen

Wir nennen **Körper von reellen Zahlen** jeden geordneten und vollständigen Körper.

Bemerkung - Notation:

- $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und $(\mathbb{R}, 0, 1, +, *, \leqslant)$
- $\mathbb{R}_{\geqslant 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geqslant 0\}$
- $\mathbb{R}_{>0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$
- $K^S(K^*) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$

Bemerkung:

Alle bereits gezeigten Konsequenzen der Vollständigkeit sind also insbesondere für $\mathbb{R}$ gültig.

Beispiel - Überprüfung auf Dezimalbrüche in $\mathbb{R}$:

Betrachte $\sqrt{2} = 1,414213562373095...$
Mit $a(n)$ der n-ten Ziffer: $a : \mathbb{N} \to \{0, 1, ..., 9\}$.
Für $n \in \mathbb{N}$ schreiben wir:

$$x_n = a(0) + 10^{-1} * a(1) + 10^{-2} * a(2) + ... + 10^{-n} * a(n) = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k} a(k) \in K$$

Es gilt also : $x_0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant ...x_n \in K$

$$y_n = a(0) + 10^{-1} * a(1) + 10^{-2} * a(2) + ... + 10^{-n} * (a(n) + 1) = \sum_{k=0}^{n} 10^{-k} a(k) \in K$$

Es gilt also : $y_0 \geqslant y_1 \geqslant y_2 \geqslant y_3 \geqslant ...y_n \in K$

$$X = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq K \text{ und } y = \{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq K$$

Man kann zeigen: $x \leqslant y \; \forall x \in X, y \in Y$

$$\Rightarrow \; \exists c \in K \text{ mit } x_n \leqslant c \leqslant y_n \; \forall n \in N$$

In diesem Fall mit $c = a(0), a(1)a(2)a(3)....$
Die Eindeutigkeit von c folgt aus dem archimedischen Prinzip: $x_n \leqslant c \leqslant y_n$

$$\begin{aligned}
0 \leqslant c - x_n \quad &\leqslant y_n - x_n &= \frac{1}{10^n} \\
0 \leqslant d - x_n \quad &\leqslant y_n - x_n &= \frac{1}{10^n} \mid \text{ Zahl } d \neq c \text{ die das auch erfüllt} \\
0 \leqslant |c - d| \quad &\leqslant \frac{2}{10^n} & \mid \; \forall n \in \mathbb{N} : |a + b| \leqslant |a| + |b| (\text{Dreiecksungleichung})
\end{aligned}$$

Hier wirkt das archimedische Prinzip:

$$\Leftrightarrow |c - d| = 0 \Leftrightarrow c - d = 0 \Leftrightarrow c = d$$

Definition 2.3.2: $\overline{\mathbb{R}}$

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

nennen wir ‘erweiterte Zahlengerade’. Wir deklarieren:

Theorem 2.3.1: Ordnungsrelation

$$-\infty < x < \infty \; \forall x \in \mathbb{R}$$

Das bedeutet, dass $\overline{\mathbb{R}}$ ein Maximum $(+\infty)$ und ein Minimum $(-\infty)$ besitzt.

Theorem 2.3.2

Für $(\overline{\mathbb{R}}, 0, 1, +, \cdot)$ können wir keinen Körper definieren.

Beweis:

Inverse Elemente für $+\infty$ und $-\infty$? □

Theorem 2.3.3

Für **jede** Teilmenge $X \subseteq \overline{\mathbb{R}}$ ist $\sup(X)$ definiert, als die kleinste obere Schranke von X.

2.3.1 Intervalle

Definition 2.3.3: Intervalle

Seien $\mathbb{R}$ ein Körper reeller Zahlen und $a, b \in \mathbb{R}$. Die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ heißen **Intervalle**:

- $[a, b] = \{x \in R \mid a \leqslant x \leqslant b\}$ (beschränkt, abgeschlossen)

  Bemerkung:

  - $a = b \Rightarrow [a, b] = \{a\} = \{b\}$
  - $b < a \Rightarrow [a, b] = \emptyset$

- $[a, b) = \{x \in R \mid a \leqslant x < b\}$ (beschränkt, halboffen)
- analog: $(a, b]$
- $(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$ (beschränkt, offen)
- $[a, \infty) = \{x \in R \mid a \leqslant x\}$
- $(a, \infty) = \{x \in R \mid a < x\}$
- analog: $(-\infty, a]$ und $[-\infty, a]$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Es gibt eine eideutige Funktion $f \colon \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit der Eigenschaft

$$f(x)^2 = x$$

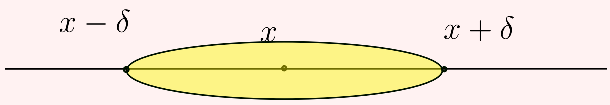
Das heißt, $f(x)$ ist die Quadratwurzel von x. (Übliche Notation: $f(x) = \sqrt{x}$)

Definition 2.3.4: Umgebung

Sei $x \in \mathbb{R}$ eine reelle Zahl und $\delta \in \mathbb{R}, \delta > 0$. Wir nennen das offene Intervall

$$(x - \delta, x + \delta) = B(x, \delta)$$

die (offene) δ-**Umgebung** von x.

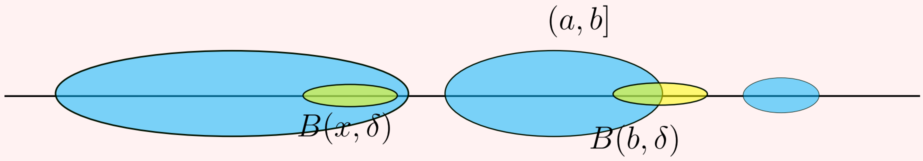


B steht für Ball.

Definition 2.3.5

Sei X eine Teilmenge von $\mathbb{R}$. X ist:

- **offen** in $\mathbb{R}$, falls für jedes Element $x \in X$ ein $\delta \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ existiert, mit $B(x, \delta) \subseteq X$
- **abgeschlossen** in $\mathbb{R}$, falls das $\mathbb{R} \backslash X \subseteq \mathbb{R}$ offen ist.



Beispiel:

- Offen:
  - Offene Intervalle sind offen, insbesondere $\emptyset, \mathbb{R}$
  - Vereinigungen offener Teilmengen sind offen
  - Endliche Durchschnitte offener Mengen sind offen.
- Abgeschlossen:
  - Abgeschlossene Intervalle
  - $\mathbb{R}$
  - $\emptyset$
  - Durchschnitte abgeschlossener Teilmengen sind abgeschlossen
  - Endliche Vereinigungen abgeschlossener Teilmengen sind abgeschlossen

Bemerkung:

Auf dem Bild ist das Intervall $I = (a, b]$ abgeschlossen also kann man keinen Ball um b bilden, weil $b + \delta \notin I\ \forall \delta > 0$

2.4 Komplexe Zahlen

Definition 2.4.1: Komplexe Zahlen

Wir schreiben $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ und

$$1_{\mathbb{C}} = (1, 0) \in \mathbb{C}$$

$$0_{\mathbb{C}} = (0, 0) \in \mathbb{C}$$

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}; (a, b), (c, d) \mapsto (a + c, c + d)$$

$$* : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}; (a, b), (c, d) \mapsto (ac - bd, ad + bc)$$

Theorem 2.4.1

Die Menge $\mathbb{C}$ zusammen mit $0, 1, +, *$ wie definiert, ist ein **Körper**.

Beweis - Körperaxiome überprüfen:

- Addition:
  1. NE: $(a,b)+(0,0)=(0,0)+(a,b)=(a,b)$ ✓
  2. AG: $((a,b)+(b,c))+(e,f)=(a+c+e,b+d+f)=(a,b)+((c,d)+(e,f))$ ✓
  3. KG: $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$ ✓
  4. IE: $(a,b)+(-a,-b)=(0,0)$ ✓
- Multiplikation:
  1. NE: $(a,b)+(1,0)=(1,0)+(a,b)=(a,b)$ ✓
  2. AG: $((a,b)(b,c))(e,f)=(a,b)(ce-df,cf+de)=(ace-adf-bcf-bde,acf+ade+bce-bdf)=\ldots=(a,b)((b,c)(e,f))$ ✓
  3. KG: $(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(c,d)(a,b)$ (gilt dank KG) ✓
  4. IE: Sei $(a,b)\in\mathbb{C},(a,b)\neq(0,0)$. Dann gilt $a^2+b^2>0$.
     $(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)=\left(\frac{a^2}{a^2+b^2}+\frac{b^2}{a^2+b^2},-\frac{ab}{a^2+b^2}+\frac{ab}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$ ✓
- DG: $(a,b)((c,d)+(e,f))=(a,b)(c+e,d+f)=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be)=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)=(a,b)(c,d)+(a,b)(e,f)$ ✓

□

Bemerkung - Notation:

Wir schreiben für eine reelle Zahl x auch 'x' für die komplexe Zahl $(x,0)$.
Wir schreiben $i=(0,1)$, also

Definition 2.4.2

$$a+bi=(a,b)$$

$(=((a,0)+(b,0)(0,1)))$
Damit die oben definierten Rechenregeln erfüllt sind, setzen wir:

$$i^2=-1$$

Beispiel:

$$\frac{1}{5+2i}=\frac{5-2i}{25+4}=\frac{5}{29}-\frac{2i}{29}$$

Beweis:

$$(5+2i)(5-2i)\frac{1}{29} = (25+4)\frac{1}{29} = 1$$

$\square$

Definition 2.4.3: Komplexe Konjugation

Die **Komplexe Konjugation** ist die Abbildung

$$\bar{\cdot} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, a+bi \mapsto a-bi$$

Wir schreiben $\overline{a+bi} = a-bi$

Lemma 2.4.1

Für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $z\overline{z} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ und $z\overline{z} = 0 \Leftrightarrow z = 0$
2. $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$
3. $\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}$
4. $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \overline{z}$

Beweis:

1. $z\overline{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 + b^2$ (Und das ist ungleich 0)
2. Ausmultiplizieren
3. analog
4. Das Konjugieren ist eine Spiegelung entlang der imaginären Achse, man erkennt also graphisch, dass nur $x \in \mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ gespiegelt wird.

$\square$

Definition 2.4.4

Sei $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Wir nennen

- $Re(z) = a = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ den Realteil von z
- $Im(z) = b = \frac{1}{2}(z - \overline{z})$ den Imaginärteil von z
- $|z| = \sqrt{z \cdot \overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2} \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ den Betrag/Norm von z

Definition 2.4.5: Abstand

Für $z, w \in \mathbb{C}$ interpretieren wir $|z - w|$ als Abstand oder Distanz von z nach w. Es gilt:

$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

Theorem 2.4.2: Dreiecksungleichung ($\mathbb{C}$)

Seien $z, w \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$|z-w| = |z+w| \leqslant |z| + |w|$$

Bemerkung:

Die Verwendung von $|z+w|$ oder $|z-w|$ ist äquivalent, da man auch einfach $-w$ verwenden kann, und es gilt: $|-w| = |w|$

Beweis:

It's gonna be Legen ... wait for it.. dary!
Für reelle Zahlen $0 \leqslant x$ und $0 \leqslant y$ gilt:

$$x \leqslant y \Leftrightarrow x^2 \leqslant y^2$$

Da die Beträge reelle Zahlen sind, genügt es, $|z+w|^2 \leqslant (|z|+|w|)^2$ zu zeigen.
Wir schreiben

$$z = x_1 + iy_1 \qquad w = x_2 + iy_2$$

und zeigen vorbereitend:

Theorem 2.4.3: Cauchy-Schwarz (CS)

$$x_1x_2 + y_1y_2 \leqslant |z||w|$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
(x_1x_2 + y_1y_2)^2 &\leqslant (x_1x_2 + y_1y_2)^2 + (x_1x_2 - y_1y_2)^2 \\
&\quad \text{man kann immer etwas postives addieren} \\
&= (x_1x_2)^2 + 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2 + (x_1x_2)^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + (y_1y_2)^2 \\
&= (x_1^2 + y_1^2)(x_2^2 + y_2^2) \\
&= |z|^2|w|^2
\end{aligned}$$

□

Eigentliche Rechnung:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2 &= (x_1 + x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2 \\
&= x_1^2 + x_2^2 + y_1^2 + y_2^2 + 2(x_1x_2 + y_1y_2) \\
&\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|z||w| \\
&= (|z| + |w|)^2
\end{aligned}$$

□

Definition 2.4.6: Kreisscheibe

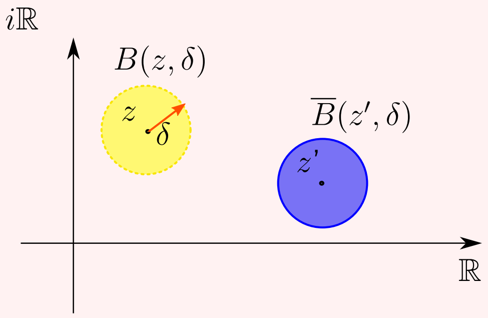
Sei $z \in \mathbb{C}, \delta \geqslant 0$.

$$B(z,\delta) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z-w| < \delta\} \subseteq \mathbb{C}$$

bezeichne die **offene Kreisscheibe** mit Zentrum z, Radius δ. (ohne Rand)

$$\overline{B}(z,\delta) = \{w \in \mathbb{C} \mid |z-w| \leqslant \delta\} \subseteq \mathbb{C}$$

bezeichne die **abgeschlossene Kreisscheibe** mit Zentrum z, Radius δ.

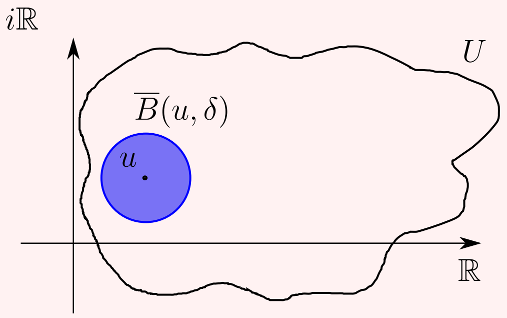


Definition 2.4.7

- Eine Teilmenge $U \subseteq \mathbb{C}$ heißt **offen** falls $\forall u \in U$ ein $\delta > 0$ existiert mit $B(u,\delta) \subseteq U$

  Bemerkung - informell:

  Jeder Punkt von U liegt im Inneren von U, das heißt kein Punkt ist ein Randpunkt.



- Wir nennen $F \subseteq \mathbb{C}$ abgeschlossen, falls $\mathbb{C} \backslash F$ offen ist.

  Bemerkung - informell:

  F enthält alle Seine Randpunkte.

Beispiel:

Offen in $\mathbb{C}$ sind:

- offene Kreisscheiben

- beliebige Vereinigungen offener Teilmengen
- Durchschnitte endlich vieler offener Teilmengen

Bemerkung:

Offen und abgeschlossen schließen einander nicht aus. Eine Teilmenge kann gleichzeitig offen und abgeschlossen sein:

$$\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1 \text{ oder } (Re(z) \geqslant 0 \text{ und } |z| \leqslant 1)\}$$

2.5 Modelle und Eindeutigkeit

2.5.1 Existenz und Eindeutigkeit

Theorem 2.5.1

Seien $\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}$ vollständig angeordnete Körper. Es existiert eine eindeutige Abbildung $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $\Phi(0) = 0$ und $\Phi(x + y) = \Phi(x) + \Phi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
2. $\Phi(1) = 1$ und $\Phi(x * y) = \Phi(x) * \Phi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$
3. Für $x \leqslant y$ gilt $\Phi(x) \leqslant \Phi(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$

Diese Abbildung ist **bijektiv**

Bemerkung:

Das bedeutet, dass jede Aussage in $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{S}$ analog reformuliert werden. Und auch anders herum. Die beiden Körper sind also im Grunde genommen **identisch**.
NB: es handelt sich hier um einen Körperisomorphismus.

Beweis:

- $\Phi(0) = 0, \Phi(1) = 1, \Phi(2) = 2, ..., \Phi(n) = n \ \forall n \in \mathbb{Z}$ folgt aus der Kompabilität mit der Addition.
- $\Phi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{\Phi(a)}{\Phi(b)} \ \forall a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$
  $\Rightarrow$ Falls Φ existiert, so gilt $\Phi\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}$ für alle $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$
- Aus (3) folgt: Für $X \subseteq \mathbb{R}, X \neq \emptyset$ nach oben beschränkt folgt:

$$\Phi(\sup(X)) = \sup(\Phi(X))$$

Falls Φ mit $(1, 2, 3)$ existiert, dann ist Φ eindeutig. Nämlich gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$x = \sup\left(\left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}, \frac{a}{b} \leqslant x\right\}\right)$$

Folgt: Notwendigerweise gilt für $x \in \mathbb{R}$:

$$\Phi(x) = \sup\left(\left\{\frac{a}{b} \,\middle|\, \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{S}, \frac{a}{b} \leqslant x\right\}\right) \in \mathbb{S}$$

Die Menge, deren Supremum wir betrachten ist $\subseteq \mathbb{S}$.
Definiere $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}$ durch obige Vorschrift.
Zu zeigen:

- Die Abbildung erfüllt (1),(2),(3).
  Übung oder siehe Skript.
- Φ ist bijektiv:
  Wir tauschen die Rollen von $\mathbb{R}, \mathbb{S} \Rightarrow$ $\exists$eine eindeutige Abbildung $\Psi : \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ mit (1),(2),(3). Betrachte $\Psi \circ \Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Diese Abbildung erfüllt (1),(2),(3):

  Bemerkung:

  Einfach zu zeigen.

  Wir wissen, dass $id : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls (1),(2),(3) erfüllt.
  Aus der eben bewiesenen Eindeutigkeit folgt $\Psi \circ \Phi = id_{\mathbb{R}}$ und $\Phi \circ \Psi = id_{\mathbb{S}}$.
  Hierraus folgt, dass es eine Bijektion zwichen $\mathbb{R}$ und $\mathbb{S}$ existiert.

$\square$

2.5.2 Modelle

Mögliche Konstruktionen von $\mathbb{R}$:

1. Dezimalbrüche. (umständlich, Sonderfälle)
2. Mengenlehre + Axiomatische Geometrie
3. ...
4. Dedekindschnitte (R. Dedekind, 1858, @ETH)

Definition 2.5.1

Ein Dedekind-Schnitt ist eine Teilmenge $C \in \mathbb{Q}$ mit der Eigenschaft: $\exists n \in \mathbb{Z}$ mit $x \leqslant n \; \forall x \in C$
und $x \in C$ und $y \in \mathbb{Q}$: $y \leqslant x \Rightarrow y \in C$
und C hat kein maximales Element (aber ein Supremum)

Beispiel:

$$C = \left\{x \in \mathbb{Q} \mid x < \frac{3}{4}\right\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\}$$

Wir denken uns C als die 'reelle Zahl $\sup(C)$' (existiert eigentlich noch nicht.)
Wir definieren $(0, 1, +, \cdot)$ auf der Menge aller Dedekindschnitte $\mathbb{D}$:
(Der Körper, den wir erhalten ist, eindeutig, da eine Bijektion zwischen allen möglichen Darstellungen existiert.)

- $0 \in \mathbb{D}$ ist $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0\}$
- $1 \in \mathbb{D}$ ist $\{x \in \mathbb{Q} \mid x < 1\}$
- $C, D \in \mathbb{D} : C + D = \{x + y \mid x \in C, y \in D\}$
- $C \cdot D$ ähnlich.
- $C \leqslant D \Leftrightarrow C \subseteq D$

Kapitel 3

Reellwertige Funktionen

Ab jetzt sind **die** Reellen Zahlen $\mathbb{R}$ der eindeutige oben definierte (und eigentlich schon bekannte) Körper.

3.1 Allgemeines

Definition 3.1.1

Sei X eine Menge. Eine reellwertige Funktion auf X ist eine Funktion $X \to \mathbb{R}$.

$$\mathcal{F}(X) = \text{ die Menge aller reellwertigen Funktionen auf } X$$

(auch geschrieben als: $\mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ oder $\mathbb{R}^X$).

Definition 3.1.2

Sind f, g reellwertige Funktionen auf X, so definiere

- $f + g =$ die Funktion $(f + g)(x) = f(x) + g(x)\ \forall x \in X$
- $f * g =$ die Funktion $(f * g)(x) = f(x) * g(x)\ \forall x \in X$
- $c * g =$ die Funktion $(cf)(x) = c * f(x)\ \forall x \in X$ mit $c \in \mathbb{R}$
- $\dfrac{f}{g} =$ die Funktion $\dfrac{f}{g}(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}\ \forall x \in X$ falls $g(x) \neq 0\ \forall x \in X$

Definition 3.1.3

Wir schreiben außerdem:

- $f \leqslant g$ falls $f(x) \leqslant g(x)\ \forall x \in X$
- $f \geqslant 0$ falls $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in X$

Definition 3.1.4

Sei $c \in \mathbb{R}$. Die konstante Funktion mit Wert c auf X ist die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

$$f(x) = c \; \forall x \in X$$

Definition 3.1.5: Beschränktheit

Wir sagen $f : X \to \mathbb{R}$ sei nach oben beschränkt, falls

$$\exists M \in \mathbb{R} : f(x) \leqslant M \; \forall x \in X \text{ (also } f \leqslant M)$$

Analog für nach unten beschränkt.
f heißt **beschränkt**, falls f nach oben und unten beschränkt ist. In diesem Fall nimmt f Werte in einem Intervall $[-M, M]$ an, für $M \in \mathbb{R}$ genügend groß.

Definition 3.1.6

Falls $X \subseteq \mathbb{R}$, dann sprechen wir von **reellwertigen Funktionen in 'einer Variable'**.

Bemerkung:

Der Begriff der Variable stammt aus dem 19. Jahrhundert und wir wollen nicht weiter darauf eingehen.

Beispiel:

Definition 3.1.7: Polynomfunktion

Sei $X \in \mathbb{R}$. Sei $\mathcal{P} \in \mathbb{R}[T] : \mathcal{P}(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + ... + a_n T^n$.
Wir nennen die zu $\mathcal{P}$ assoziierte **Polynomfunktion** auf X die Funktion:

$$f : X \to \mathbb{R}; x \mapsto a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n$$

Wir erhalten eine Abbildung

$$\mathbb{R}[T] \to \mathcal{F}(X); \mathcal{P} \mapsto f$$

Diese Abbildung ist kompatibel mit $+, \cdot$, Skalarmultiplikation. Im Allgemeinen ist diese Abbildung weder injektiv noch surjektiv.

Bemerkung:

Die Menge aller reellwertigen Funktionen auf einer Menge X $\mathcal{F}(X)$ bildet einen Vektorraum.
Die beschränkten Funktionen bilden einen Unterraum. (Element eines Unterraumes $+$ anderes Element) bleibt im Unterraum.
Die monotonen Funktionen dagegen nicht.

Theorem 3.1.1

Die Abbildung ist nur dann injektiv, wenn X unendlich ist.
Vorüberlegung: Wenn X nicht unendlich ist, dann ist die Abbildung nicht injektiv.

Definition 3.1.8: Monotonie

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$. Wir sagen f sei...

- monoton steigend, falls $x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)\ \forall x, y \in X$
- streng monoton steigend, falls $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\ \forall x, y \in X$

Analog für monoton oder streng monoton fallend.
Wir sagen, dass f monoton ist, wenn f monoton steigend oder monoton fallend ist.

Beispiel:

- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \lfloor x \rfloor$ ist monoton steigend, aber nicht streng
- $f : \mathbb{R}_{\leqslant 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist streng monoton fallend
- $f : \mathbb{R}_{\geqslant 0} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist streng monoton steigend
- $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ ist weder noch

Definition 3.1.9

Sei X eine Menge und $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. $x_0 \in X$ heißt

- Nullstelle von f falls $f(x_0) = 0$
- Maximum von f falls $f(x_0) \geqslant f(x)\ \forall x \in X$
- Analog für Minimum.
- Extremum von f falls x_0 entweder ein Maximum oder Minimum von f ist.

3.2 Stetigkeit

Definition 3.2.1: Stetigkeit

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$, $X \neq \emptyset$. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ sei **stetig** an der Stelle x_0, falls:

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Alternativ: Siehe Skript Rave.
Wir nennen f stetig auf X, falls f in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.

Bemerkung - informell:

Wenn x und y einander nahe sind, sind auch $f(x)$ und $f(y)$ einander nahe.

Bemerkung:

$\mathcal{C}(X) =$ Menge aller stetigen Funktionen auf X. (C steht für continuous)
Alternativ: $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}), \mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$ (mit der Potenz als Anzahl der stetigen Ableitungen).

Beispiel:

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$

- $f(x) = c \; \forall x \in X$
  Sei $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = 1$.
  Falls $x, x_0 \in X$ mit $|x - x_0| < \delta$, dann gilt:
  $$|f(x) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon$$
- $f(x) = x$
  Sei $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$. Wir wählen $\delta = \varepsilon > 0$.
  $$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Theorem 3.2.1: Stetigkeit von zusammengesetzten Funktionen

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$, $f, g : X \to \mathbb{R}$. Sind f und g stetig an der Stelle x_0, so sind auch

- $f + g$
- $f * g$
- $c * g$

stetig an der Stelle x_0.
Insbesondere sind Summen und Produkte stetige Funktionen wiederum stetig.

Bemerkung:

Das bedeutet, dass stetige Funktionen einen Unterraum von $\mathcal{P}(X)$ bilden.

Beweis:

Seien f, g stetig bei x_0.

- $f + g$: Sei $\varepsilon > 0$
  Es gilt: $\exists \delta > 0$ mit $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ (oder kleiner jeder anderen beliebigen Zahl.)
  Und: $\exists \eta > 0$ mit $|x - x_0| < \eta \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$
  Wir setzen $\mu = \min(\{\delta, \eta\})$

Jetzt gilt, da $|x_0 - x| < \mu$:

$$\begin{aligned}|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| &= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \\ &\text{Dreiecksungleichung:} \\ &\leqslant |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\end{aligned}$$

- $f * g$:

  Vorüberlegung:

  $$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| &= |f(x_0)g(x_0) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x)g(x)| \\ &\leqslant |f(x_0)||g(x_0) - g(x)| + |g(x)||f(x_0) - f(x)|\end{aligned}$$

  Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta_1, \delta_2 > 0$ mit

  - $|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2 * (1 + |g(x_0)|)}$
  - $|x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2 * (1 + |f(x_0)|)}$

  Setze $\delta = \min(\{\delta_1, \delta_2\})$

  Für $x \in X$ ... whoopsie!

□

Korollar 3.2.1 (1)

Polynomfunktionen $f : X \to \mathbb{R}$ sind stetig.

Beweis:

Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = x$ ist stetig.

$$\mathcal{P}(x) = c_n * f(x)^n + c_{n-1} * f(x)^{n-1} * \ldots * c_0$$

ist stetig da sie nur aus Produkten und Summen von stetigen Funktionen besteht. □

Beispiel:

Das Beispiel von $\sqrt[3]{7}$ verwendet die Stetigkeit von $x \mapsto x^3$.

Theorem 3.2.2

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to Y$, $g : Y \to \mathbb{R}$ Funktionen. Sei $x_0 \in X$ und $y_0 = f(x_0)$.
Ist f stetig bei x_0 und g stetig bei y_0, so ist $g \circ f$ stetig bei x_0.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Die Funktion g ist stetig bei y_0 also existiert ein $\eta > 0$ mit $|y - y_0| < \eta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$. Fixiere so ein $\eta > 0$. Die Funktion f ist stetig bei x_0 also existiert $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta$$

Zusammenfassend:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \eta \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

$\square$

Bemerkung:

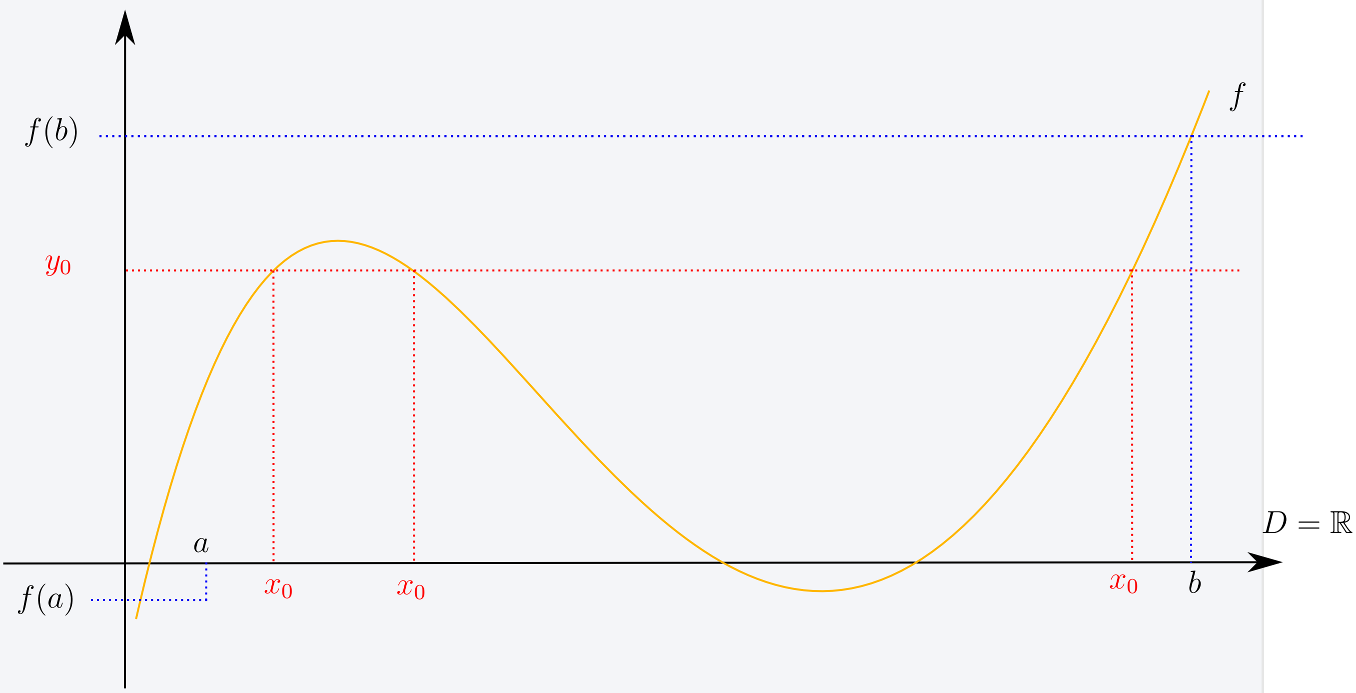
Sei $X = \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann ist $f : X \mapsto \mathbb{R}$ mit $f = sgn(x)$ oder $\frac{1}{x}$ stetig.

Außerdem: Für $f : X \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ ist $x \mapsto \dfrac{1}{f(x)}$ ebenfalls stetig.

Theorem 3.2.3: Zwischenwertsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Seien $a \leqslant b \in \mathbb{R}$ mit $[a, b] \subseteq D$.

$$\forall y_0 \in \mathbb{R} : f(a) \leqslant y_0 \leqslant f(b)\ \exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) = y_0$$



Bemerkung:

Die analoge Aussage mit $f(b) \leqslant y_0 \leqslant f(a)$ gilt ebenfalls.
Die Aussage mit $\exists! x_0 \in [a, b]$ ist falsch.

Beweis:

Betrachte $\mathcal{X} = \{x \in [a,b] \mid f(x) \leqslant y_0\}$. Setze $x_0 = sup(X) \in [a,b] \subseteq D$.
Behauptung: $f(x_0) = y_0$
$\mathbb{A}$: Angenommen...

- $f(x_0) < y_0$. Dann gilt $x_0 \neq b, x_0 < b$
  Setze $\varepsilon = y_0 - f(x_0)$. Es existiert $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < y_0 - f(x_0) = \varepsilon$$

  Wähle $x \in [a,b]$ mit $x_0 < x < x_0 + \delta$:

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) \leqslant f(x_0) + |f(x) - f(x_0)| < f(x_0) + y_0 - f(x_0) = y_0$$

  Also $x \in X$, $x > x_0$, $x_0 = sup(X)$ ↯
  $\Rightarrow f(x_0) \geqslant y_0$

- $f(x_0) > y_0$. Dann gilt $x_0 \notin X, x_0 > a$
  Es existiert $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < f(x_0) - y_0 (= \varepsilon)$$

  Wähle $x \in [a,b]$ mit $x_0 - \delta < x < x_0$:

$$f(x) = f(x_0) + f(x) - f(x_0) \geqslant f(x_0) - |f(x) - f(x_0)| > f(x_0) - f(x_0) + y_0 = y_0$$

  Also $x \notin X$Aber die Wahl von x war beliebig:
  $(x_0 - \delta, x_0) \cap X = \emptyset$ und $(x_0 - \delta, x_0] \cap X = \emptyset$
  Also ist $x_0 - \delta$ obere Schranke für X. $\Rightarrow x_0 \leqslant x_0 - \delta$ ↯
  $\Rightarrow f(x_0) \leqslant y_0$

Also folgt: $f(x_0) = y_0$. □

Bemerkung - (Übung):

Theorem 3.2.4

Eine Teilmenge $I \subseteq \mathbb{R}$ ist ein Intervall, wenn und nur wenn für alle $a, b \in I$ und alle $x \in \mathbb{R}$

$$a \leqslant x \leqslant b \Rightarrow x \in I$$

gilt.

Korollar 3.2.4 (1)

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ stetig. Für jedes Intervall I mit $I \subseteq D$ ist das Bild $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ auch wieder ein Intervall.

Theorem 3.2.5: Umkehrabbildung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig und streng monoton, und setze $\mathcal{I} = f(I)$.
Dann ist $f : I \to \mathcal{I}$ bijektiv, und die zu f inverse Funktion $f^{-1} = g : \mathcal{I} \to I$ ist streng monoton und stetig.

Beweis:

Wir nehmen an:

- f ist streng monoton steigend
- I ist hat mehr als nur 1 Element (also auch nicht leer)

Wir müssen Folgendes beweisen:

- $f : I \to \mathcal{I}$ bijektiv.
  Surjektiv per Definition von $\mathcal{I}$
  Injektiv weil streng monoton. $(x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2))$
- Die Umgehrfunktion g ist streng monoton.
  Es gilt für $y_1, y_2 \in \mathcal{I}$ mit $y_1 < y_2$. Wir setzen: $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$.

$$\begin{aligned} x_1 < x_2 \quad &\Leftrightarrow \quad f(x_1) < f(x_2) \\ \Leftrightarrow \quad g(y_1) < g(y_2) \quad &\Leftrightarrow \quad y_1 < y_2 \end{aligned}$$

- Stetigkeit: Sei $y_0 \in \mathcal{I}$, zeige g stetig bei y_0.
  Sei $\varepsilon > 0$. Setze $x_0 = g(y_0)$. Definiere Intervalle

$$U = I \cap (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq I$$

$$V = f(U) \subseteq \mathcal{I}$$

  Der Zwischenwertsatz erlaubt uns zu sagen, dass V ein Intervall ist.
  Behauptung: (*) $\exists \delta > 0 : (y_0 - \delta, y_0 + \delta) \cap \mathcal{I} \subseteq V$.

  - Falls x_0 kein Randpunkt von I ist, so existieren $x_-, x_+ \in I$ mit

$$x_0 - \varepsilon < x_- < x_0 < x_+ < x_0 + \varepsilon$$

    Es folgt:

$$(y_- =) f(x_-) < y_0 < f(x_+) (= y_+) \in \mathcal{I}$$

    Für $\delta = \min(\{y_0 - y_-, y_+ - y_0\})$. $\Rightarrow$ (*) für δ
  - Ähnlich für x_0 als Randpunkt

  (*) $\Leftrightarrow$ $\forall y \in \mathcal{I}, y = f(x) : |y - y_0| < \delta \Rightarrow |x - x_0| < \varepsilon$

$$|y - y_0| < \varepsilon$$

□

3.3 Reellwertige Funktionen auf kompakten Intervallen

Definition 3.3.1: Kompaktheit

Ein Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ heißt **kompakt** falls I abgeschlossen und beschränkt ist (: $[a, b]$)

Bemerkung:

Später werden wir die Aussage formulieren, dass ein Intervall genau dann kompakt ist, wenn es abgeschlossen und beschränkt ist.
Konkret gilt: $I = \emptyset$ oder $I = [a, b]$ mit $a \leqslant b$

Theorem 3.3.1

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist f beschränkt. Das heißt:

$$\exists M \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} : |f(x)| \leqslant M \; \forall x \in [a, b]$$

Beweis:

Betrachte

$$X = \{x \in [a, b] \mid f|_{[a,x]} \text{ ist beschränkt}\}$$

Wir nennen: $a \in X, X \subseteq [a, b]$, und setzen $x_0 = \sup(X) \in [a, b]$. f ist stetig bei x_0, also existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1 \; \forall x \in [a, b]$$

Setze:

$$t_0 = \max(\{x_0 - \delta, a\}) \qquad t_1 = \min(\{x_0 + \delta, b\})$$

Also gilt:

$$(t_0, t_1) = (a, b) \cap B(x_0, \delta)$$

Da $x_0 - \delta$ nicht eine obere Schranke für X ist, existiert $x_1 \in X$ mit

$$x_0 - \delta < x_1 < x_0$$

Also ist $f|_{[a,x_1]}$ beschränkt, das heißt $\exists M \in \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ mit

$$|f(x)| \leqslant M \; \forall x \in [a, x_1]$$

Es gilt $x_1 \geqslant \max(\{a, x_0 - \delta\}) = t_0$, also

$$[a, t_1] = [a, x_1] \cup (t_0, t_1) \cup \{t_1\}$$

Setze: $M_0 = \max(\{M, |f(x_0) + 1, |f(t_1)|\})$. Dann gilt:

$$|f(x)| \leqslant M_0 \; \forall x \in [a, t_1]$$

Also $t_1 \in X$. Aber $t_1 \geqslant x_0$ und per Definition $t_1 \leqslant x_0 \Rightarrow t_1 = x_0$.
Dies ist nur dann möglich, wenn $x_0 = t = b \Rightarrow b \in X$ □

Theorem 3.3.2

Seien $a \leqslant b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig. Dann nimmt f ihr Maximum und Minimum auf $[a, b]$ an. Das heißt:

$$\exists x_0 \in [a, b] : f(x_0) \geqslant f(x) \; \forall x \in [a, b]$$

Beispiel - Gegenbeispiel:

$$f : (0, 1) \to \mathbb{R}, f(x) = x$$

Ist zwar beschränkt aber besitzt kein Maximum.

Beweis:

siehe OneNote □

Bemerkung - Vorausschau:

Definition 3.3.2

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ (später sogar $\mathbb{R}^n$) heißt **kompakt**, falls jede stetige Funktion auf X beschränkt ist.

Theorem 3.3.3

Beschränkte und abgeschlossene Intervalle sind kompakt.
Die Umkehrung gilt auch.

Allgemeiner:

Theorem 3.3.4: Heine-Borel

Eine Teilmenge $X \in \mathbb{R}$ ist kompakt $\Leftrightarrow X$ ist abgeschlossen und beschränkt.

Definition 3.3.3: Gleichmäßige Stetigkeit

Sei $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen f **gleichmäßig stetig** (uniformly continuous) falls

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \; \forall x, x_0 \in X$$

Bemerkung:

Achtung: stetig ist unterschiedlich von gleichmäßig stetig:

- Stetigkeit:

$$\forall x_0 \in X \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \; \forall x \in X$$

- Regelmäßige Stetigkeit:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \; \forall x, x_0 \in X$$

Beispiel:

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2$ ist stetig.
Angenommen, f ist gleichmäßig stetig, $\varepsilon > 1$. $\exists \delta > 0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < 1 \; \forall x, x_0 \in \mathbb{R}$$

Insbesondere für $x_0 \geqslant 0$ und $x = x_0 \frac{1}{2} \delta$

Theorem 3.3.5

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist f gleichmäßig stetig.

Bemerkung:

Alternive Definition der Kompaktheit.

Beweis:

Siehe OneNote. □

Definition 3.3.4: Lipischitz-Stetigkeit

Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ heißt **Lipschitz-stetig**, falls

$$\exists L > 0 : |f(x_1) - f(x_2)| < L \cdot |x_1 - x_2|$$

L heißt Lipschitz-Konstante für f.

Bemerkung - alternative Schreibweise:

$$|x_1 - x_2| < \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \; \forall \varepsilon > 0$$

Theorem 3.3.6

Lipschitz-Stetigkeit $\Rightarrow$ gleichmäßige Stetigkeit $\Rightarrow$ Stetigkeit

Beispiel:

Die Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist nicht Lipschitz-stetig, dafür aber gleichmäßig stetig, da sie über einem kompakten Intervall definiert ist.
Als Übung nachrechnen.

Kapitel 4

Integration

4.1 Grundidee

Wir möchten Flächeninhalte im $\mathbb{R}^2$ definieren. Hierzu verwenden wir folgende Funktion:

Definition 4.1.1

$$I : \mathcal{F}([a,b]) \to \mathbb{R}$$
$$f \mapsto I(f) = \int_a^b f(x)dx$$

Um die intuitiven Eigenschaften der Flächen zu erhalten, müssen wir folgende Bedingungen stellen:

- $I(f+g) = I(f) + I(g) \qquad f, g \in \mathcal{F}([a,b])$
- $I(c * f) = c * I(f) \qquad c \in \mathbb{R}$
- $I(g) \leqslant I(f)$ falls $g \leqslant f$
- $I(\mathbb{1}_{[a,b]}) = b - a$

Das geht leider nicht für alle Funktionen auf $[a,b]$. Wir schränken daher unsere Auswahl auf $\mathcal{I}([a,b])$, die bestmögliche Klasse von Funktionen, die alle Eigenschaften widerspruchsfrei erfüllen.
Für dieses Kapitel gilt die Annahme:

$$a, b \in \mathbb{R}; a < b \Rightarrow [a,b] \neq \emptyset$$

4.2 Treppenfunktionen

Definition 4.2.1: Zerlegung

Eine **Zerlegung** von $[a,b]$ sind endlich viele Elemente

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$$

Theorem 4.2.1

$$[a,b] = \{x_0\} \cup (x_0, x_1)\{x_1\} \cup ...(x_{n-1}, x_n) \cup \{x_n\}$$

Wir nennen $x_0, ...$ Trennungspunkte.
Eine Zerlegung $y_0, .., y_n$ von $[a,b]$ heißt **Verfeinerung** von $x_0, ..., x_n$, falls

$$\forall i \in \{0, ..., n\} \; \exists j \in \{0, ..., m\} \text{ mit } y_j = x_i$$

Definition 4.2.2: Treppenfunktion

Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, falls eine Zerlegung $x_0, ..., x_n$ von $[a,b]$ existiert, so dass

$$f|_{(x_i, x_{i+1})}$$

konstant ist, für alle $i = 0, ..., n-1$.
f ist Treppenfunktion bezüglich dieser Zerlegung.
Ist f eine Treppenfunktion bezüglich $x_0, ..., x_n$, so ist sie ebenfalls eine Treppenfunktion bezüglich jeder Verfeinerung von $x_0, ..., x_n$. Wir nennen den konstanten Wert von f auf (x_i, x_{i+1}) **Konstanzwert** von f

Definition 4.2.3

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion bezüglich der Zerlegung von $x_0, ..., x_n$ mit Konstanzwerten $c_i = f((x_i, x_{i+1}))$ für $i = 1, 2, ..., n$.
Wir schreiben

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) * c_i$$

Bemerkung:

- Diese Notation ist willkürlich und beliebig tauschbar.
- Ist f Treppenfunktion bezüglich einer anderen Zerlegung $z_0, ..., z_k$ mit Konstanzwerten $b_0, ..., b_k$, so gilt:
$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) * c_i = \sum_{j=1}^{k} (z_j - x_{j-1}) * b_j$$
Man kann beide Zerlegungen nochmal zerlegen und einfach eine neue Zerlegung nehmen, die beide Trennungspunkte enthält.
- Der Wert von f an Trennungspunkten ist irrelevant.
- Treppenfunktionen sind beschränkt.

- Summen von Treppenfunktionen und $c * f$ mit $c \in \mathbb{R}$ und f einer Treppenfunktion sind wiederum Treppenfunktionen. Das bedeutet:

  Die Menge aller Treppenfunktionen $\mathcal{T}([a,b]) \subseteq \mathcal{F}([a,b])$ ist ein Vektorraum.

Theorem 4.2.2

Die Abbildung $I : \mathcal{T}([a,b]) \to \mathbb{R}$ mit $f \mapsto I(f)$ (Integral von a nach b von f) erfüllt:

- $I(f+g) = I(f) + I(g) \qquad f, g \in \mathcal{T}([a,b])$
- $I(c * f) = c * I(f) \qquad c \in \mathbb{R}$
- $I(g) \leqslant I(f)$ falls $g \leqslant f$
- $I(\mathbb{1}_{[a,b]}) = b - a$

4.3 Definition des Riemann-Integrals

Bemerkung:

Wir behandeln genau genommen das **Darboux-Integration**, die aber unter das Riemann-Integral fällt. Letzteres ist ausführlicher aber zur Nachlese wird das Darboux-Integral empfohlen.

Definition 4.3.1: Riemann-Integrierbarkeit

Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Setze

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_a^b u dx \,\middle|\, u \text{ Treppenfunktion, } u \leqslant f \right\}$$

$$\mathcal{O}(f) = \left\{ \int_a^b o dx \,\middle|\, o \text{ Treppenfunktion, } o \leqslant f \right\}$$

Bemerkung:

f muss beschränkt sein, weil wir sonst keine Treppenfunktionen definieren können, die größer oder kleiner als f sind.

- Wir nennen eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ **Riemann-integrierbar**, falls $\sup(\mathcal{U}(f)) = \inf(\mathcal{O}(f))$
- Wir definieren:

  $$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \sup(\mathcal{U}(f)) \\ &= \inf(\mathcal{O}(f)) \end{aligned}$$

  für Riemann-integrierbare Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$.
- $\mathcal{R}([a,b) =$ Menge aller Riemann-integrierbarer Funktionen auf $[a,b]$.

Bemerkung:

- Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und o, u Treppenfunktion mit $u \leqslant f \leqslant o$. Es gilt:

$$\int_a^b u dx \leqslant \int_a^b o dx \text{ also auch } \sup(\mathcal{U}(f)) \leqslant \inf(\mathcal{O}(f))$$

Bemerkung:

Ist f Riemann-integrierbar, so wird diese Ungleichung zur Gleichheit.

- Falls $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion ist, so gilt: $u \leqslant f \leqslant o$ für $u = f = o$ also

$$sup(\mathcal{U}(f)) = \int_a^b f(x)dx = \inf(\mathcal{O}(f)$$

(mit dem Integral für Treppenfunktionen definiert.)
Folgt: f ist integrierbar: $f \in \mathcal{R}([a, b)$ und es gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

(mit jeweils der Definition für Treppenfunktionen und der Definition für allgemeine Funktionen)
Das bedeutet, dass das Riemann-Integral ebenfalls für Treppenfunktionen definiert ist.

- Es gibt beschränkte Funktionen, die nicht Riemann-integrierbar sind: $\mathcal{R}([a, b) \subsetneq \mathcal{F}([a, b])$

Beispiel:

$$f : [0, 1] \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Es gilt: $u \leqslant f \leqslant o$ und $\int_0^1 ud(x) \leqslant 0$ und $\int_0^1 od(x) \geqslant 1$ (weil Q kompakt ist, aber $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ ebenfalls). Es gilt also $sup(\mathcal{U}(f)) < \inf(\mathcal{O}(f))$.

- Nützliche Umformulierung der Definition:

Definition 4.3.2

Eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar, falls $\forall \varepsilon > 0 \; \exists$ Treppenfunktionen mit $u \leqslant f \leqslant o$ und $\int_a^b o - u < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} f \text{ ist Riemann-integrierbar } &\Leftrightarrow \sup(\mathcal{U}(f)) = inf(\mathcal{O}(f)) \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \alpha \in \mathcal{U}(f) \text{ und } \beta \in \mathcal{U}(f) \text{ mit } \beta - \alpha < \varepsilon \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists \text{ Treppenfunktionen } u \leqslant f \leqslant o \text{ mit} \\ &\quad \alpha = \int_a^b u dx \quad \beta = \int_a^b o dx \end{aligned}$$

- Betrachte $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1 & x = \frac{1}{2} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$

  f ist integrierbar, $\int_0^1 f(x)dx$

4.4 Integrationsgesetze

Theorem 4.4.1: Linearität des Riemann-Integrals

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha f + \beta g$ Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b \alpha f + \beta g dx = \alpha \int_a^b f dx + \beta \int_a^b g dx$$

Bemerkung:

Das bedeutet in anderen Worten, dass $\mathcal{R}([a, b)$ ein Vektorraum ist und, dass die Abbildung

$$\mathcal{R}([a, b) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \int_a^b f dx$$

linear ist.

Beweis:

f, g beschränkt $\Rightarrow \alpha f + \beta g$ beschränkt...
lang und monoton, möglicherweise nicht relevant. Siehe Skript $\square$

Theorem 4.4.2

Sind $f \leqslant g$ Riemann-integrierbar, so gilt:

$$\int_a^b f dx \leqslant \int_a^b g dx$$

Beweis:

Ist u eine Treppenfunktion, $u \leqslant f$, so gilt: $u \leqslant g$ also $\int_a^b u dx \in \mathcal{U}(f)$. Folgt $\mathcal{U}(f) \subseteq \mathcal{U}(g)$. Also auch

$$\sup(\mathcal{U}(f)) \leqslant \sup(\mathcal{U}(g)) \text{ folgt } \int_a^b f dx \leqslant \int_a^b g dx$$

$\square$

Theorem 4.4.3: Dreiecksungleichung (Integrale)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist $|f| : x \mapsto |f(x)|$ ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt die Dreiecksungleichung:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leqslant \int_a^b |f(x)| dx$$

4.5 Integration monotoner Funktionen

Mmmh, I might have slept in here...

4.6 Integration stetiger Funktionen

Kapitel 5

Folgen und Grenzwerte

5.1 Metrische Räume

Definition 5.1.1: Metrische Räume

Ein Paar (X, d) ist ein **metrischer Raum**, wenn X eine Menge ist und d eine Distanzfunktion oder Metrik ist:
$d : X \times X \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$, mit folgenden Eigenschaften

- Definitheit: $d(x, y) \geqslant 0, d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- Symmetrie: $d(x, y) = d(y, x)$
- Dreiecksungleichung: $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$

Beispiel:

1. $X \subseteq \mathbb{R}, d(x, y) = |x - y|$
2. $X \subseteq \mathbb{C} = \mathbb{R}^2, d(x, y) = |x - y|$
   im Detail: $d(a + bi, c + di) = \sqrt{(a - c)^2 + (b - d)^2}$
   Größte Schwierigkeit: Punkt 3 beweisen (Cauchy-Schwarz)
3. Betrachte einen kombinatorischen zusammenhängenden Graphen $\mathcal{G}$. Sei X die Menge aller Punkte von $\mathcal{G}$ und $d(x, y)$ der kürzeste Weges von x nach y.
4. Sei $X = \mathbb{R}^2$ Frankreich, mit Origo Paris. Bildhaft: Um mit dem Zug von a nach b zu kommen gibt es 2 Möglichkeiten, entweder b liegt auf dem Weg von a nach Paris, oder eben nicht. Im ersten Fall steigt man einfach vor Paris aus, im zweiten Fall muss man nach Paris, um dann umzusteigen.
   Das ist die SNCF-Metrik:
   $$d(x, y) = \begin{cases} |x| + |y| \text{ falls } x, y \text{ nicht kollinear} \\ |x - y| \text{ falls } x, y \text{ kollinear} \end{cases}$$
5. Die Manhattan-Metrik: $\mathbb{R}^2 = X$, $d(x, y) = d(\binom{x_1}{x_2}, \binom{y_1}{y_2}) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2|$
6. $X = \mathcal{C}([a, b]) \qquad a \leqslant b \qquad f, g \in X$
   $$d(f, g) = \max(\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [a, b]\})$$

Die Definitheit und Symmetrie ergeben sich, die Dreiecksungleichung kann als Übung gemacht werden.

7. Analog: $X = \mathcal{C}([a,b])$

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

$$\tilde{d}(f,g) = \sqrt{\int_a^b (|f(x) - g(x)|)^2 dx}$$

Definition 5.1.2: Ball

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $x_0 \in X$, $r \geqslant 0$ reell. Wir nennen die Teilmenge

$$B(x_0, r) = \{x \in X \mid d(x_0, x) < r\}$$

offener Ball mit Zentrum x_0, Radius r.

Bemerkung:

Für allgemeine Räume sind Radius und Zentrum nicht eindeutig bestimmt.

Beispiel:

$$X = \{x_0, x_1\} \qquad d(x_0, x_1) = 1$$

$B(x_0, 1) = B(x_1, 2) = X$

Definition 5.1.3: Beschränktheit

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir sagen A sei **beschränkt**, falls eine reelle Zahl $R \geqslant 0$ existiert mit $d(x,y) \leqslant R$ für $x, y \in A$.

Bemerkung:

Ist $x_0 \in X$, so ist $A \subseteq X$ beschränkt $\Leftrightarrow$ $\exists R \geqslant 0$ mit $a \subseteq B(x_0, R)$.

Definition 5.1.4

Sei (X,d) ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir sagen A sei **offen** (in X), falls $\forall x_0 \in A \; \exists \delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subseteq A$.
Wir nennen $B \subseteq X$ abgeschlossen in X, falls $X \backslash B$ offen in X ist.

Bemerkung:

Theorem 5.1.1

Die Teilmengen $\emptyset, X$ von X sind offen.
Für $x_0 \in X, r > 0$ ist $B(x_0, r) \subseteq X$ offen.

Beweis:

Sei $x_1 \in B(x_0, r)$. Setze $\delta = r - d(x_0, x_1)$. Dann gilt $B(x_1 - \delta) \subseteq B(x_0, r)$.
Sei $x \in B(x_1, \delta)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} d(x, x_0) &\leqslant d(x, x_1) + d(x_1, x_0) && \text{Dreiecksungleichung} \\ &< \delta + d(x_1, x_0) \\ &< r - (x_1, x_0) + d(x_1, x_0) = r \end{aligned}$$

$\Rightarrow x \in B(x_0, r)$ $\square$

Theorem 5.1.2

Sei (X, d) ein metrischer Raum.

1. Jede Vereinigung offener Teilmengen von X ist offen.
2. Jeder endlicher Durchschnitt offener Teilmengen von X ist offen.

Beweis:

Sei $(U_i)_{i \in I}$ eine Familie offener Teilmengen von X.

1. Setze $U = \bigcup_{i \in I} U_i$. Zeige U ist offen.
   Sei $x_0 \in U$. Dann existiert $i \in I$ mit $x_0 \in U_i$. U_i ist offen $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subseteq U_i$.
   Also $B(x_0, \delta) \subseteq U_i \subseteq U$. $\Rightarrow U$ ist offen.
2. Seien $U_1, U, 2, .., U_n$ offene Teilmengen von X, setze $U = \bigcap_{i=1}^{N} U_i$. Sei $x_0 \in U$.
   Es gilt $x_0 \in U_i \ \forall i \leqslant N$. Für jedes i existiert $\delta_i > 0$ mit $B(x_0, \delta_i) \subseteq U_i$.
   Setze $\delta = min(\{\delta_1, ..., \delta_N\} > 0$.
   Dann gilt $B(x_0, \delta) \subseteq B(x_0, \delta_i) \subseteq B(x_0, \delta_i) \subseteq U_i \ \forall i$, also $B(x_0, \delta) \subseteq \bigcap_{i=1}^{N} U_i = U$

$\square$

Bemerkung:

$A = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) = B(x_0, \delta) \subseteq \mathbb{R}$ kann offen sein.
Muss aber nicht als $A \subseteq \mathbb{C}$ offen sein!

5.1.1 Stetigkeit in metrischen Räumen

Definition 5.1.5: Stetigkeit

Seien $(X, dX), (Y, dY)$ metrische Räumen und $f : X \to Y$.

- Wir sagen f sei **stetig** falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \ \forall x \in X$$

  f ist stetig (auf X) falls f in jedem Punkt $x_0 \in X$ stetig ist.

Ist $x \subseteq \mathbb{R}$ und $Y = \mathbb{R}$ mit der Standardmetirk ..., so erhalten wir den bekannten Stetigkeitsbegriff.

- Wir sagen f sei **gleichmäßig stetig** falls

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : d_X(x_1, x_2) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon \, \forall x_1, x_2 \in X$$

- Wir sagen f sei **Lipschitz-stetig** falls

$$\exists L \geqslant 0 : d_Y(f(x_1), f(x_2)) < L * d_X(x_1, x_2)$$

L ist die Lipschitzkonstate für f

Definition 5.1.6: Isometrie

Wir nennen $f : X \to Y$ **Isometrie** falls

$$d_Y(f(x_1), f(x_2)) = d_X(x_1, x_2) \, \forall x_1, x_2 \in X$$

Theorem 5.1.3

Isometrie $\Rightarrow$ Lipschitz $\Rightarrow$ ...

Theorem 5.1.4

Seien (X, d) und (Y, d) metrische Räume und $f : X \to Y$. Dann sind äquivalent:

1. f ist stetig.
2. $\forall U \subseteq Y$ mit U offen ist $f^{-1} \subseteq X$ offen.

Beweis:

Die Funktion f ist stetig falls (per Definition)

$$\forall x_0 \in X, \, \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(x_0)) < \varepsilon \, \forall x \in X$$

Das heißt: $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$

- $1 \Rightarrow 2$:
  Sei f stetig, $U \subseteq Y$ offen. Zu zeigen: $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen. Sei $x_0 \in f^{-1}(U)$, also $f(x_0) \in U$.
  U ist offen $\Rightarrow$ $\exists \varepsilon > 0$ mit $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq U$.
  f stetig $\Rightarrow$ $\exists \delta > 0$ mit $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \epsilon) \subseteq U$
  also
  $$B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(U) \Rightarrow f^{-1} \text{ offen}$$

- $2 \Rightarrow 1$:
  Sei $x_0 \in X, \varepsilon > 0$. Betrachte $B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq Y$ (ist bewiesenermaßen offen). Also ist

das Urbild $f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq X$ ebenfalls offen und enthält notwendigerweise x_0. Das bedeutet, es existiert also ein $\delta > 0$ mit $B(x_0, \delta) \subseteq f^{-1}(B(f(x_0), \varepsilon) \subseteq X$.
Folgt $f(B(x_0, \delta)) \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$. Also ist f stetig.

□

5.2 Folgen

Definition 5.2.1: Folge

Sei X eine Menge. Eine **Folge** in X ist eine Funktion

$$x : \mathbb{N} \to X$$

. Schreibweise:

- Wir schreiben x_n für $x(n)\epsilon$ für $n \in \mathbb{N}$.
- Wir schreiben $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ für die Funktion x.
- Wir sagen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sei **konstant** falls x eine konstante Funktion ist.
- Das Bild der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist $x(\mathbb{N}) = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$

Definition 5.2.2: Grenzwert

Es sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X.
Ein Element $a \in X$ heißt **Grenzwert** oder **Limes** von (x_n) falls

$$\forall \varepsilon : \ \exists N \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, a) < \varepsilon$$

Beispiel:

- $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$. Betrachte $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $x_n = n$.

  Diese Folge hat keinen Grenzwert. $\forall a \in \mathbb{R}$ ist a nicht ein Grenzwert der Folge.

  Beweis:

  Sei $a \in \mathbb{R}$. Angenommen a sei ein Grenzwert, dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\forall n \geqslant N : d(a, x_n) = |a - x_n| < \varepsilon = \frac{1}{2}$

  Insbesondere ist $|a - x_n| < \frac{1}{2}$ und $|a - (N + 1)| < \frac{1}{2}$. Das widerspricht der Dreiecksungleichung. □

- $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $x_n = \frac{(-1)^n}{n!} \left(= 1, -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{6}, \ldots \right)$

  Diese Folge hat genau einen Grenzwert $a = 0$.

- $X = \mathcal{C}([0, 1])$ (die Menge aller Stetigen Funktionen auf diesem Intervall), $d(f, g) =$

$\int_0^1 |f - g| dx$.

Betrachte die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gegeben durch $c_n = \dfrac{1}{n+2}$. Diese Folge hat einen Grenzwert: $g = (konstant = 1) = 1_{[0,1]}$.

Beweis:

$$d(f_n, g) = \int_0^1 |f_n - g| dx = \int_0^1 \left| \frac{1-n-2}{n-2} \right| dx = \frac{1}{n+2}$$

Dieser Wert ist laut archimedischem Prinzip kleiner als jeder beliebiger Positiver Wert, also ist g ein Grenzwert. □

Aber ist dieser Grenzwert der einzige?

Theorem 5.2.1

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Sind $a, b \in X$ Grenzwerte dieser Folge, so gilt $a = b$.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. a ist Grenzwert $\Rightarrow$ $\exists N$ mit $n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, a) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

b ist Grenzwert $\Rightarrow$ $\exists M$ mit $n \geqslant M \Rightarrow d(x_n, b) < \dfrac{\varepsilon}{2}$

Für $n \geqslant \max(\{N, M\})$ gilt dann: $d(a, b) \leqslant d(x_n, a) + d(x_n, b) < \varepsilon$

Daraus folgt, dass $d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$ □

Definition 5.2.3

Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ heißt

- konvergent, falls ein Grenzwert $a \in X$ für diese Folge existiert. Wir schreiben:

$$a = \lim_{n\to\infty} x_n$$

- beschränkt, wenn ihr Bild $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq X$ beschränkt ist.

Theorem 5.2.2

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in (X, d). Ist die Folge konvergent, so ist sie beschränkt.

Beweis:

Wir zeigen $\exists R \geqslant 0$ mit $x_n \in B(x_0, R)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Setze $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit $d(x_n, a) < 1$ (frei gewählt).

Sei $R \in \mathbb{R}$ mit $R \geqslant d(x_0, x_n)$ für $0 \leqslant n < N$ und $R \geqslant d(x_0, a) + 1$.

Jetzt gilt: $x_n \in B(x_0, R)$ für $0 \leqslant n < N$ und für $n \geqslant N$ gilt:

$$d(x_0, x_n) \leqslant d(x_0, a) + d(a, x_n) < d(x_0, a) + 1 \leqslant R$$

Also $x_n \in B(x_0, R)$ □

Definition 5.2.4: Häufungspunkt

Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Ein Element $a \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \ \forall N \in \mathbb{N} : \ \exists n \in \mathbb{N} : d(x_n, a) < \varepsilon$$

Beispiel:

$X = \mathbb{C}$, setze $x_n = i^n + \frac{1}{2^n}$. (ohne den Bruch wäre das 1, i, -1, -i, 1...)
Die Punkte $\{1, i, -1, -i\}$ sind alle Häufungspunkte der Folge.

Bemerkung - Warnung:

Häufungspunkte einer Folge sind im Allgemeinen nicht dasselbe wie Häufungspunkte des Bildes $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$

Beispiel:

$X = [0, 1]$ und d die Standardmetrik. Sei $x_n = n\sqrt{2} - \lfloor n\sqrt{2} \rfloor$.

Theorem 5.2.3

Jedes Element $a \in [0, 1]$ ist ein Häufungspunkt dieser Folge.

Theorem 5.2.4

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergierende Folge in (X, d) mit Grenzwert $a \in X$.
Dann ist a der einzige Häufungspunkt dieser Folge.

Beweis:

Aus den Definitionen folgt: a ist ein Häufungspunkt der Folge. Sei $b \in X$ ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists N \in \mathbb{N} : d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} \ \forall n \geqslant N$$

Da b ein Häufungspunkt ist, gilt: $\exists m \geqslant N : d(x_m, b) < \frac{\varepsilon}{2}$. Jetzt folgt

$$\begin{aligned} d(a, b) &\leqslant d(a, x_m) + d(x_m, b) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

$\Rightarrow d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$ □

Definition 5.2.5: Teilfolge

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in einer Menge X. (Die Metrik spielt hier keine Rolle). Eine Folge $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ in X heißt **Teilfolge** von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ falls eine streng monoton steigende Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ existiert, mit

$$y_k = x_{f(k)} \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Beispiel:

$$y_k = x_{2k} : x_0, x_2, x_4, \ldots$$

Theorem 5.2.5

Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in (X, d), $a \in X$. Sind äquivalent:

1. a ist ein Häufungspunkt von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$
2. Es existiert eine konvergierende Teilfolge $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit Grenzwert a

Beweis:

- $1) \Rightarrow 2)$

  Angenommen $a \in X$ ist Häufungspunkt. Also existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $d(a, x_0) \leqslant 1$.

  Es existiert ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $n_1 \geqslant n_0 + 1$ und $d(a, x_{n_1}) < \frac{1}{2}$.

  Es existiert ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $n_2 \geqslant n_1 + 1$ und $d(a, x_{n_2}) < \frac{1}{4}$.

  Es existiert ein $n_3 \in \mathbb{N}$ mit $n_3 \geqslant n_2 + 1$ und $d(a, x_{n_3}) < \frac{1}{8}$.

  ... (induktiv)

  Es existiert ein $n_k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geqslant n_{k-1} + 1$ und $d(a, x_{n_k}) < \dfrac{1}{2^k}$.

  Wir konstruieren jetzt rekursiv die Folge $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ mit $y_k = x_{n_k}$. Dies ist eine Teilfolge von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $d(y_k, a) < 2^{-k}$. Die Folge $(y_k)_{k=0}^{\infty}$konvergiert mit Grenzwert a.

- $2) \Rightarrow 1)$

  Sei $(y_k)_{k=0}^{\infty}$ eine konvergierende Teilfolge mit Grenzwert a. Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$. Setze $y_k = x_{f(k)}$ für $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ streng monoton.

  Da f streng monoton ist, gilt insbesondere $f(k) \geqslant k \; \forall q \in \mathbb{N}$ und

  $$\exists K \in \mathbb{N} : k \geqslant K \Rightarrow d(y_k, a) < \varepsilon$$

  Wähle $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geqslant K$ und $k \geqslant N$ und setze $n = f(k)$. Dann gilt $n \geqslant N$ und $D(a, x_n) = d(a, y_k) \leqslant \varepsilon$

$\square$

Theorem 5.2.6

Es seien (X, d) und (Y, d) metrische Räume, $f : X \to Y$. Sind äquivalent:

1. f ist stetig
2. Ist $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente Folge in X mit Grenzwert $a \in X$ so ist $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergent mit Grenzwert $f(a)$.

Bemerkung:

- Dieses Theorem wir im Allgemeinen **nicht** zum Beweis der Stetigkeit benutzt.
- Es kann allerdings als Gegenbeweis verwendet werden, da es genügt, ein Gegenbeispiel zu finden.
- Wir werden es vor Allem zur Berechnung von Grenzwerten verwenden.

Beweis:

- $1) \Rightarrow 2)$
  Sei f stetig, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent, Grenzwert $a \in X$. Sei $\varepsilon > 0$
  f ist stetig bei a: $\exists \delta > 0 : d(x, a) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(a)) < \varepsilon$ *
  $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ kovergiert gegen a: $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $n \geqslant N \Rightarrow d(x_n, a) < \delta$ **
  Für $n \geqslant N$ gilt also wegen * und ** $d(f(x_n), f(a)) < \varepsilon$.
  $\Rightarrow f(a)$ ist Grenzwert der Folge $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$.
- $\neg 1) \Rightarrow \neg 2)$
  Angenommen f sei nicht stetig in einem Punkt $a \in X$. Also

  $$\exists \varepsilon > 0 : \; \forall \delta > 0 : \; \exists x \in X : d(a, x) < \delta \text{ und } d(f(a), f(x)) > \varepsilon$$

  Wir wählen wür jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $d(x_n, a) < 2^{-n}$ und $d(f(x_n), f(a)) > \varepsilon$.
  Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in X konvergiert gegen a.
  Die Folge $(f(x_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert **nicht** gegen $f(a)$ (denn die Distanz zu $f(a)$ ist immer größer als ε)

$\square$

5.2.1 Cauchy-Folgen

Definition 5.2.6: Cauchy-Folgen

Sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Wir nennen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine **Cauchy-Folge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 : \; \exists N \in \mathbb{N} : d(x_n, x_m) < \varepsilon \; \forall n, m \geqslant N$$

Bemerkung:

Es wird nicht nach einem Grenzwert verlangt.

Theorem 5.2.7

Jede konvergente Folge ist eine Cauchy-Folge.

Beweis:

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergent mit Grenzwert $a \in X$. Sei $\varepsilon > 0$, dann existiert $N \in \mathbb{N}$ mit $d(a, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geqslant N$.
Also gilt für alle $n, m \geqslant N$

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leqslant d(x_n, a) + d(a, x_m) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Im Allgemeinen gilt: nicht jede Cauchy-Folge konvergiert.

Beispiel:

Betrachten wir $X = (0, 1)$ mit d üblich: $d(x, y) = |x - y|$ und die Folge $x_n = 10^{-n}$. Diese Folge konvergiert **nicht** (denn $0 \notin X$) aber ist eine Cauchy-Folge.

Beispiel:

Definiere: $F_0 = 0, F_1 = 1$ und rekursiv: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, die Fibonacci-Folge. Ebenfalls definiere eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{Q}$ durch $x_n = \frac{F_n}{F_n + 1}$. Diese konvergiert nicht, ist jedoch eine Cauchy-Folge.

In $\mathbb{R}$ konvergiert dieselbe Folge gegen $a = \Phi = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} = 1, 6...$

Definition 5.2.7: Vollständigkeit

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **vollständig** falls jede Cauchy-Folge in X konvergiert.

Beispiel:

- Aus den vorherigen Beispielen folgt: $X = (0, 1)$ und $X = \mathbb{Q}$ sind nicht vollständig.

  Bemerkung:

  Es ist üblich, $\mathbb{R}$ als die Vervollständigung von $\mathbb{Q}$ zu konstruieren.

- Die Räume $\mathbb{R}, \mathbb{C}$ sind vollständig (wird allerdings später behandelt)

Theorem 5.2.8: Banach'scher Fixpunktsatz

Sei (X, d) ein nichtleerer, vollständiger metrischer Raum, und sei $T : X \to X$ eine Abbildung mit der Eigenschaft

$$\forall 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 : d(T(x), T(y)) \leqslant d(x, y) * \lambda$$

Bemerkung:

Das bedeutet dass diese Abbildung Lipschitz-stetig sein muss mit einer Lipschitzkonstante, die kleiner als 1 ist.

Dann existiert ein eindeutiges $a \in X$ mit $T(a) = a$

Bemerkung:

Dient beispielsweise bei der Lösung von Differentialgleichungen der Bestimmung einer eindeutigen Lösung.

Beweis:

- Eindeutigkeit:
  Gilt $T(a) = a$ und $T(b) = b$, so gilt:

  $$d(a, b) = d(T(a), T(b)) \leqslant d(a, b) * \lambda \Rightarrow d(a, b) = 0 \Rightarrow a = b$$

- Existenz:
  Wähle $x_0 \in X$ und betrachte die Folge $x_0, x_1 = T(x_0), .., x_n = T(x_{n-1})$.
  Behauptung:

  1. Diese Folge ist eine Cauchy-Folge, also konvergiert sie da X vollständig ist.
  2. Für $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ gilt $T(a) = a$

  1. Sei $\varepsilon > 0$. Betrachte zu $n \in \mathbb{N}$:

     $$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &\leqslant d(x_{n-1}, x_n) * \lambda \leqslant d(x_{n-2}, x_{n-1}) * \lambda^2 \leqslant \ldots \\ &\leqslant d(x_0, x_1) * \lambda^n \end{aligned}$$

     Denn $x_n = T(x_{n-1})$ und der Faktor zwischen den Distanzen per Definition.
     Für $N \in \mathbb{N}$ ...

Ein eleganterer Beweis ist später aufgeführt. □

5.3 Folgen reeller und komplexer Zahlen

Es handelt sich hier um Spezialfälle eines metrischen Raums. Zur Distanz können wir jetzt $+$ und * verwenden und Ungleichungen aufstellen. Dies erlaubt uns detaillierte Aussagen.
Zusätzlich zur Metrik d auf $\mathbb{R}$ ($d(x, y) = |x - y|$) haben wir $(+, *, \leqslant)$. Wir können von nun an Folgen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ addieren und multiplizieren:

Theorem 5.3.1

- $(x_n)_{n=0}^{\infty} + (y_n)_{n=0}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=0}^{\infty}$

- $(x_n)_{n=0}^{\infty} * (y_n)_{n=0}^{\infty} = (x_n * y_n)_{n=0}^{\infty}$
- $\alpha * (x_n)_{n=0}^{\infty} = (\alpha * x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$

Theorem 5.3.2

Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergente Folgen in $\mathbb{R}$. Dann gilt:

1. $(x_n + y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und es gilt:
   $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) + \lim\limits_{n\to\infty}(y_n)$
2. $(x_n * y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert und es gilt:
   $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n * y_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n) * \lim\limits_{n\to\infty}(y_n)$
3. Angenommen $x_n \neq 0\ \forall n$ und $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)_{n=0}^{\infty} \neq 0$. Dann konvergiert $(x_n^{-1})_{n=0}^{\infty}$ und es gilt:
   $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n^{-1}) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)^{-1}$

Beweis:

1. Setze $a = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ und $b = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Sei $\varepsilon > 0$. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit:
   $|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ und $|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $n \geqslant N$
   Dann gilt für $n \geqslant N$ auch:
   $$|(x_n + y_n) - (a + b)| = |x_n - a + y_n - b| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$
   Oder:
   Die Abbildung $s : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $s(x, y) = x + y$ ist stetig, und die Folge $(x_n, y_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}^2$ konvergiert gegen (a, b).
   Folgenkriterium für Stetigkeit: Die Folge $s(x_n, y_n)_{n=0}^{\infty} = (x_n + y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert ebenfalls, mit Grenzwert $s(a, b) = a + b$
2. Die Abbildung $m : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch $m(x, y) = xy$ ist stetig. Es folgt die selbe Überlegung wie in 1.
3. Die Abbildung $i : \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $i(x) = x^{-1}$ ist stetig.

$\square$

Korollar 5.3.2 (1)

Die Menge aller konvergenten Folgen in $\mathbb{R}$ bildet einen Vektorraum bezüglich der gegebenen Addition und Skalarmultiplikation.
Die Abbildung $\{\text{Konvergente Folgen in } \mathbb{R}\} \to \mathbb{R}$ mit $(x_n)_{n=0}^{\infty} \mapsto \lim\limits_{n\to\infty}(x_n)$ ist wohldefiniert und linear.

Theorem 5.3.3

Seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergierende Folgen in $\mathbb{R}$ mit Grenzwerten $a = \lim x_n$ und $b = \lim y_n$.

1. Gilt $a < b$, so existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$x_n < y_n \; \forall n \geqslant N$$

> **Bemerkung:**
>
> Die Umkehrung dieser Aussage gilt **nicht**. Es kann sein, dass alle Werte einer Folge immer echt kleiner als die Werte der anderen sind, aber dass die Grenzwerte beider Folgen gleich sind.

2. Existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $x_n \leqslant y_n$ für $n \geqslant N$ so gilt $a \leqslant b$.

Beweis:

1. Setze $\varepsilon = \dfrac{b-a}{3} > 0$. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ und } |y_n - b| < \varepsilon \; \forall n \geqslant N$$

$\Rightarrow x_n \leqslant y_n$ Siehe Foto

2. Das ist die Negation von (1).

□

Lemma 5.3.1: Sandwich-Kriterium

Es seien $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ und $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ Folgen in $\mathbb{R}$. Angenommen:

- $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n \; \forall n (n \geqslant N)$
- $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a \in \mathbb{R}$

Dann konvergiert $(y_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $\lim y_n = a$

... oder auch als das Sammich-Kriterium bekannt (c.f Urbandictionnary).

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$|x_n - a| < \varepsilon \text{ und } |z_n - a| < \varepsilon \; \forall n \geqslant N$$

Dann gilt auch $|y_n - a| < \varepsilon$ weil $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ nach umgekehrter Dreiecksungleichung. Siehe Foto. □

Beispiel:

Betrachte die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit $x_0 = 1$ und $x_n = \sqrt[n]{n}$ für $n \geqslant 1$.
Behauptung: Diese Folge konvergiert gegen 1.
Definiere $y_n = x_n - 1 \geqslant 0$

Trick:
$$n = (1+y_n)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y_n^k \geqslant \binom{n}{2} y_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} y_n^2$$

$\Rightarrow 0 \leqslant y_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}} := z_n$ für $n \geqslant 2$.
Jetzt gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} 0 = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Dies muss für z_n mit dem archimedischen Prinzip und der Stetigkeit der Wurzelfunktion definiert werden. (x^2 ist stetig und monoton also ist $\sqrt{x}$ stetig also ist $\lim y_n = \lim \sqrt{\frac{2}{n-1}}$.)

Definition 5.3.1

Eine Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$ heißt monoton steigend, falls $x_n \leqslant x_m$ für alle $n \leqslant m$ in $\mathbb{N}$
Bei strengen Ordnunungsrelationen sprechen wir von strenger Monotonie.
Analog für fallend.

Bemerkung:

Spezialfall der Definition der Monotonie für Funktionen.

Theorem 5.3.4

Sie $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monotone und beschränkte Folge. Dann konvergiert diese Folge.

Beweis:

Setze $a = sup\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Angenommen $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ sei monoton steigend. (oder anders herum falls wir nach inf suchen).
Sei $\varepsilon > 0$. Dann $\exists N \in \mathbb{N}$ mit $|x_N - a| < \varepsilon$ und außerdem $x_n \leqslant a$. Für alle $n \geqslant N$ gilt dann $x_N \leqslant x_n \leqslant a$ (erste Ungleichung wegen Monotonie, 2. wegen Definition von sup)
Also $|x_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geqslant N$ □

Definition 5.3.2: Limsup

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Für $k \in \mathbb{N}$ setze

$$s_k = \sup(\{x_n \mid n \geqslant k\})$$

Wir definieren:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \lim_{k\to\infty} s_k$$

Analog:

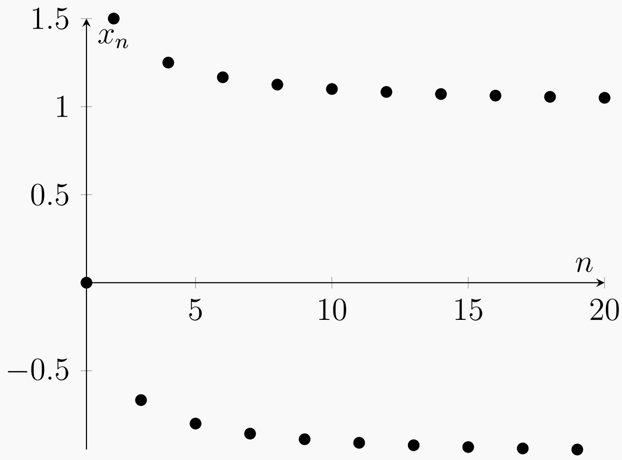
$$t_k = \inf(\{x_n \mid n \geqslant k\})$$

Wir definieren:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \lim_{k\to\infty} t_k$$

Beispiel:

Betrachte die Folge $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ gegeben durch $x_n = (-1)^n + \dfrac{1}{n}$.



Für die einzelnen Werte ist also:

n	1	2	3	4	5	6	...
x_n	0	$1+\frac{1}{2}$	$-1+\frac{1}{3}$	$1+\frac{1}{4}$	$-1+\frac{1}{5}$	$1+\frac{1}{6}$	...
s_n	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{2}$	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{4}$	$1+\frac{1}{6}$	$1+\frac{1}{6}$	...
t_n	-1	-1	-1	-1	-1	-1	...

Es folgt:

$$\limsup x_n = \lim s_n = 1 \qquad \liminf x_n = \lim t_n = -1$$

Theorem 5.3.5

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$, mit $a = \limsup_{n\to\infty} x_n$.
Dann gilt für alle $\varepsilon > 0$:

- $\{n \mid x_n > a + \varepsilon\}$ ist endlich
- $\{n \mid x_n > a - \varepsilon\}$ ist unendlich

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$, setze $s_n = \sup(\{x_k \mid k \geqslant n\})$ für $n \in \mathbb{N}$. Diese Folge ist monoton fallend und konvergiert gegen a. Es existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$a \leqslant s_N < a + \varepsilon$$

Folgt: $x_k < a + \varepsilon \ \forall k \geqslant N$ also $\Rightarrow \{k \mid x_k > a + \varepsilon\} \subseteq \{0, 1, ..., N\}$ ist endlich.

Sei jetzt $N \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann gilt $s_n \geqslant a$, das heißt:

$$\sup\{x_k \mid k \geqslant N\} \geqslant a$$

$\Rightarrow$ $\forall \varepsilon > 0 \, \exists k \geqslant N$ mit $a - \varepsilon \leqslant x_k (< a + \varepsilon)$
$\Rightarrow$ $\{k \mid x_k \geqslant a - \varepsilon\}$ ist unendlich (sonst bestünde ein Widerspruch zur Aussage über sup mit der Voraussetzung: N beliebig.) □

Korollar 5.3.5 (1)

Jede beschränkte Teilfolge in $\mathbb{R}$ besitzt einen Häufungspunkt.

Beweis:

Ist $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge, so ist $a = \limsup x_n$ ein Häufungspunkt:

$$\forall \varepsilon > 0 : \{k \mid a - \varepsilon \leqslant x_k \leqslant a + \varepsilon\} \text{ ist unendlich also insbesondere nicht leer}$$

□

Korollar 5.3.5 (2)

Jede beschränkte Folge in $\mathbb{R}$ besitzt eine konvergente Teilfolge.

Theorem 5.3.6

Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$ konvergiert.

Beweis:

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Also ist x_n beschränkt. Also hat sie eine konvergente Teilfolge mit Grenzwert a. Dies ist auch der Grenzwert der Folge.
Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Dann ist x_n beschränkt. Nach Korollar existiert eine konvergente Teilfolge $(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ mit Grenzwert $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_{n_k}$.
Behauptung: $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen a.
Sei $\varepsilon > 0$.
Zur Wiederholung:

Definition 5.3.3: Cauchy-Folge

$$\exists N : |x_n - x_m| < \varepsilon \; \forall n, m \geqslant N$$

a ist Grenzwert von x_{n_k}: $\exists k \in \mathbb{N}$ mit $n_k \geqslant N$ und $|x_{n_k} - a| < \varepsilon$.
Für alle $n \geqslant N$ gilt also:

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon \text{ und } |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

Dreiecksungleichung:

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Kosmetik: Wir tauschen ε mit $\frac{\varepsilon}{2}$ $\square$

Bemerkung:

Dieser Beweis ist auch für Cauchy-Folgen in egal welchem metrischen Raum möglich. (und ähnlich)

Definition 5.3.4: Uneigentliche Grenzwerte

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$. Als Konvention schreiben wir

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Leftrightarrow \forall R \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : x_n \geqslant R\ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall R \in \mathbb{R}\ \exists N \in \mathbb{N} : x_n \leqslant R\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Beispiel:

- $x_n = n : \lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$
- $x_n = (-1)^n n$ erfüllt keine der beiden Aussagen.

Wir erweitern auf die komplexen Zahlen:

Theorem 5.3.7

Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{C}$. $z_n = x_n + iy_n$. $x_n = Re(z_n), y_n = Im(z_n)$. Dann gelten folgende Äquivalenzen:

1. $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen $c = a + bi \Leftrightarrow \begin{cases} x_n \text{ konvergiert gegen } a \\ y_n \text{ konvergiert gegen } b \end{cases}$
2. $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist beschränkt $\Leftrightarrow x_n$ und y_n sind beschränkt.
3. $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchy $\Leftrightarrow x_n$ und y_n sind Cauchy.

Korollar 5.3.7 (1)

Jede Cauchy-Folge in $\mathbb{C}$ konvergiert.

Beweis - Theorem:

1. z_n konvergiert gegen $a + bi = c$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow |z_n - c| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow |y_n - b| < \varepsilon$$

$$\Leftrightarrow x_n \to a \quad y_n \to b$$

Siehe Foto

2. Analog

3. Analog

□

5.4 Die Exponentialfunktion

Theorem 5.4.1

Sei $x \in \mathbb{R}$ Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ in $\mathbb{R}$, gegeben durch:

$$a_n = (1 + \frac{x}{n})^n$$

konvergiert und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n > 0$$

Beweis:

Erstaunlich tricky, kommt gleich. □

Definition 5.4.1: Exponentialfunktion

Für $x \in \mathbb{R}$, schreibe:

$$\exp(X) = \lim_{n\to\infty} a_n$$

Wir nennen $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ **Exponentialfunktion**.

Theorem 5.4.2

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ ist

- stetig,
- streng monoton steigend,
- bijektiv

Es gilt:

- $\exp(0) = 1$
- $\exp(x + y) = \exp(x) * \exp(y)\ \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\exp(-x) = \exp(x)^{-1}$

Theorem 5.4.3: Logarithmus

Die Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ besitzt eine eindeutig bestimmte Umkehrfunktion

$$\log : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$$

Diese Funktion heißt **natürlicher Logarithmus** und erfüllt:

- $\log(1) = 0$
- $\log(a * b) = \log(a) + \log(b) \; \forall a, b \in \mathbb{R}_{>0}$
- $\log(a^{-1}) = -\log(a) \; \forall a \in \mathbb{R}_{>0}$

Lemma 5.4.1: Bernoulli-Ungleichung

Sei $a \in \mathbb{R}$, $a \geqslant -1$. Dann gilt:

$$(1 + a)^n \geqslant 1 + n * a \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Beweis:

Für $n = 0$ ist das klar. Induktion:
Angenommen die Ungleichung

$$(1 + a)^k \geqslant 1 + k * a$$

stimmt für $k = 0, 1, 2, ..., n - 1$...

$$\begin{aligned} (1 + a)^n = & \quad (1 + a)^{n-1}(1 + a) \\ \geqslant & \quad (1 + (n - 1)a)(1 + a) \quad \mid \text{ hier wird verwendet, dass } a \geqslant -1 \\ & \quad \text{(anderenfalls würde sich die Gleichung umdrehen)} \\ & = 1 + na + (n - 1)a^2 \\ & \geqslant 1 + na \end{aligned}$$

Also stimmt die Ungleichung auch für $k = n$ □

Beweis - erstes Theorem über die Exponentialfunktion:

Sei $x \in \mathbb{R}$ und sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 \geqslant 1$ und $n_0 \geqslant -x$. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n=n_0}^{\infty}$.
Behauptung: Diese Folge ist monoton wachsend (I) und beschränkt (II).

- Monotonie:

$$\begin{aligned} 1 &\overset{?}{\leqslant} \frac{a_{n+1}}{a_n} \\ &= \frac{\left(1 + \frac{x}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n} = \left(\frac{n + x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{(n + 1)(x + n)}\right)^{n+1} \end{aligned}$$

Bemerke, dass für $n \geqslant n_0$:

$$\frac{x}{(n+1)(x+n)} \leqslant \frac{x+n}{(n+1)(x+n)} \leqslant \frac{1}{1+n} \leqslant 1$$

Also:

$$a = \frac{-x}{(n+1)(x+n)} \geqslant -1$$

Aus der Bernoulli-Ungleichung folgt:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{n+x}{n}\right)(1+a)^{n+1} \geqslant \left(\frac{n+x}{n}\right)(1+n*a) = \left(\frac{n+x}{n}\right)\left(1 - \frac{x}{x+n}\right) = 1$$

Es folgt die Monotonie der Folge.

- Für $x \leqslant 0$ gilt:

$$0 < \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1$$

Also ist die Folge beschränkt. Außerdem gilt

$$0 < \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant 1$$

weil für n_0 bereits $\left(1 + \dfrac{x}{n_0}\right)^{n_0} > 0$ ist.

Für $x \geqslant 0$:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = \left(1 - \frac{x^2}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$

Folgt:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n$$

Mit $\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n = b_n$ gilt: $0 < \lim_{n\to\infty} b_n^{-1} \leqslant 1$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = \exp(-x)^{-1}$.

Folgt:

$$\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \leqslant \exp(-x)\ \forall n \geqslant n_0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \geqslant \left(1 + \frac{x}{n_0}\right)^{n_0} > 0$$

Somit wäre auch die Beschränktheit bewiesen.

□

Beweis - Konsequenzen:

- Es gilt:

$$\exp(0) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1$$

- Für $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\exp(-x) * \exp(x) &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n * \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^n}{n^2}\right)^n\end{aligned}$$

Für $n \geqslant |x|$ gilt mit Bernoulli-Ungleichung ($a = -\frac{x^2}{n}$)

$$1 \geqslant \left(1-\frac{x^n}{n^2}\right)^n \geqslant 1 - n * \frac{x^2}{n^2} = 1 - \frac{x^2}{n}$$

Sandwich: $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \frac{x^2}{n} =$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x^n}{n^2}\right)^n = 1$$

$$\Leftrightarrow \exp(-x) * \exp(x) = 1 \Leftrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

- Für die Gleichung $\exp(x)^{-1}\exp(y)^{-1}\exp(x+y) = 1$ betrachten wir:

$$\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n}\right)\left(1-\frac{x+y}{n}\right) = 1 + \frac{c_n}{n^2}$$

mit

$$c_n = -(x+y)^2 - xy + xy\frac{x+y}{n}$$

Es gilt: $-(x^2+y^2) - xy \leqslant 0$ und falls $x \neq 0 \vee y \neq 0 \Rightarrow < 0$.
Angenommen $x \neq 0 \vee y \neq 0 \Rightarrow -(x^2+y^2) - xy < 0$ also $c_n < 0$ für n groß genug.
Insbesondere gilt: $\frac{c_n}{n^2} \geqslant -1$ für n groß genug.
Aus der Bernoulli-Ungleichung folgt:

$$1 \leqslant \left(1+\frac{c_n}{n}\right) \leqslant \left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n \leqslant 1$$

Sandwich:

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n = 1$$

Also:

$$\begin{aligned}\frac{\exp(x+y)}{\exp(x)\exp(y)} &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right) * \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{y}{n}\right) * \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x+y}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)\left(1-\frac{y}{n}\right)\left(1-\frac{x+y}{n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{c_n}{n^2}\right)^n \\ &= 1\end{aligned}$$

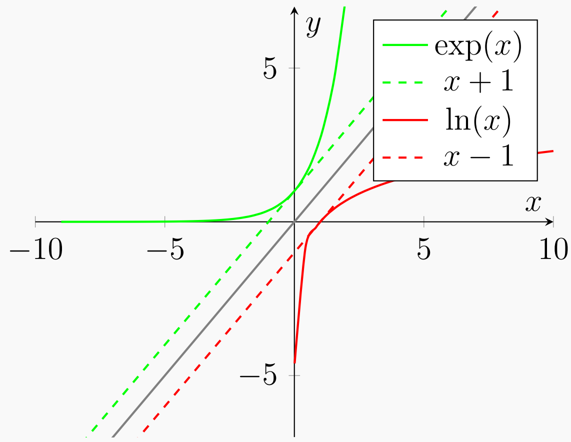
- Stetigkeit:
  Bemerke:
  $$\exp(x) \geqslant x+1 \; \forall x \in \mathbb{R}$$
  Für $x \geqslant -1$ gilt $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geqslant 1+x$ nach BU. Für $x \leqslant -1$ gilt $\exp(x) > 0 \geqslant x+1$.
  - Stetigkeit bei $x_0 = 0$. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $\delta = \min\left\{\varepsilon, 1 - \frac{1}{1+\varepsilon}\right\}$.
    Es gilt $\delta < 1$ und $\frac{1}{1-\delta} \leqslant 1+\varepsilon$.
    Für $x \in (-\delta, 0]$ gilt
    $$1-\varepsilon < 1-\delta < 1+x \leqslant \exp(x) \leqslant 1$$
    $$\Rightarrow |\exp(x) - \exp(0)| < \varepsilon$$
    Für $x \in [0, \delta)$ gilt $-x \in (-\delta, 0]$ also
    $$1-\delta \leqslant \exp(-x) \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant \exp(x) \leqslant \frac{1}{1-\delta} \leqslant 1+\varepsilon$$
    Also
    $$|\exp(x) - \exp(0)| < \varepsilon \; \forall x \in (-\delta, \delta)$$
  - Sei $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig: $f(x) = \exp(x - x_0) * \exp(x_0)$. f ist stetig bei $x_0 = x$ weil $\exp()$ bei 0 stetig ist und $\exp(x_0)$ eine Konstante ist und weil $x \mapsto x - x_0$ stetig ist. Dadurch ist die Verknüpfung beider Funktionen ebenfalls stetig.
    $$f(x) = \exp(x) \Rightarrow \exp(x) \text{ ist Ebenfalls stetig}$$
- Monotonie:
  Für $x > 0$ gilt $\exp(x) \geqslant x+1 > 1 = \exp(0)$.
  Für $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x > y$ gilt dann:
  $$\exp(x) = \exp(y) * \exp(x-y) > \exp(y)$$
  Weil $\exp(x-y)$ auf jeden Fall > 1
  Es folgt strenge Monotonie.
- Bijektivität:
  - Injektivität: Folgt aus Monotonie.
  - Surjektivität: Sei $a \in \mathbb{R}_{>0}$.
    $x_0 := -a^{-1}$ und $x_1 = a$
    Folgt: $\exp(x_0) < a < \exp(x_1)$

□

Bemerkung - Anhang:

2 Feststellungen:

- $\exp(x) \geqslant x + 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$
- $\log(x) \leqslant x - 1 \ \forall x \in \mathbb{R}_{>0}$



5.4.1 Die natürliche Zahl e

Definition 5.4.2

- $\exp(1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$
- $\exp(-1) = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n =: e^{-1}$

Wir nennen e die Euler'sche Konstante, und benutzen diese als Basis des natürlichen Logarithmus.

$$e = 2,71828182...$$

Theorem 5.4.4

- $\exp(2) = \exp(1+1) = e^2$
- $\exp(3) = \exp(1+1+1) = e^3$
- $\exp(n) = ... = e^n \ \forall \in \mathbb{Z}$

Allgemein: Für $x = \frac{q}{p}$ mit $p, q \in \mathbb{Z}, q \geqslant 1$ gilt:

$$\exp(x) = \exp\left(\frac{p}{q}\right) = \exp\left(\frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q}\right) = \exp\left(\frac{1}{q}\right)^p = \sqrt[q]{e^p} = e^{p/q}$$

$$\exp\left(\frac{1}{q}\right)^q = \exp\left(\frac{1}{q} + ... + \frac{1}{q}\right) = \exp(1) = e$$

Definition 5.4.3

Für $x \in \mathbb{R}$ schreiben wir: $e^x := \exp(x)$.

- $\exp(\log(2)) = 2$
- $\exp(2\log(2)) = 4$
- $\exp(n\log(2)) = 2^n$
- $2^x = \exp(x\log(2))$

Allgemeiner gilt: Für $a > 0, x \in \mathbb{R}$:

$$a^x = \exp(x\log(a))$$

Daraus folgt, dass a^x stetig ist, denn sie ist eine Verknüpfung stetiger Funktionen.

Bemerkung:

Sei $x \in \mathbb{R}$, $a > 0$

$$a^x = \lim_{n\to\infty} \sqrt[q_n]{a^{p_n}}$$

für jede beliebige Folge $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n=0}^{\infty}$ in $\mathbb{Q}$ mit $\lim \frac{p_n}{q_n} = x$.

Grund: a^x ist stetig.

Bemerkung:

Wir verwenden $\log$, den natürlichen Logarithmus, auch geschrieben als $\ln$.

5.5 Grenzwerte von Funktionen

Es sei $D \subseteq \mathbb{R}$ (Definitionsmenge) und $x_0 \in \mathbb{R}$. Angenommen $x_0 \in D$ oder x_0 ist ein Häufungspunkt von D.

Beispiel - typisch:

- $D = (0,1)$ also: $x_0 \in [0,1]$
- $D = \left\{\frac{1}{n} \middle| n \geqslant 1, n \in \mathbb{N}\right\}$ also: $x_0 \in D$ oder $x_0 = 0$
- $D = \mathbb{R}^x = \mathbb{R}\backslash 0$ also $x_0 \in \mathbb{R}$

Definition 5.5.1: Grenzwert

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ (Definitionsmenge) und $x_0 \in \mathbb{R}$. Angenommen $x_0 \in D$ oder x_0 ist ein Häufungspunkt von D. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine reelle Zahl a heißt **Grenzwert von f bei x_0** falls

$$\forall \varepsilon < 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$$

Beispiel:

- $D = (0,1), x_0 = 0.\ f : D \to \mathbb{R}, f(x) = x^2.\ a = \frac{1}{2}$ ist kein Grenzwert $a = 0$ ist es.
- $D = \mathbb{R}$ und $f(x) = sig(x)^2 = \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$. $a = 1$ ist kein Grenzwert, denn für beispielsweise $\varepsilon = \frac{1}{3}$ gilt: $f(0) = 0$ aber $|f(0) - a| = 0 \not< \varepsilon$. f hat keinen Grenzwert bei x_0

  Bemerkung:

  Durch die ältere Definition mit $x \neq x_0$, wäre auch bei $x_0 = 0$ ein Grenzwert obwohl f nicht stetig ist. Wir verwenden allerdings die neue Definition. Die alte wird allerdings oftmals noch in der Literatur vorgefunden.
- $D = \mathbb{R}\backslash 0,\ f(x) = 1$ konstant. $x_0 = 0$ ist ein Häufungspunkt von D. Hier gilt: $a = 1$ ist Grenzwert von f bei x_0.

Bemerkung:

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ (Definitionsmenge) und $x_0 \in \mathbb{R}$. Angenommen $x_0 \in D$ oder x_0 ist ein Häufungspunkt von D. Sei $f : D \to \mathbb{R}$. Falls es einen Grenzwert a von f bei x_0 gibt, dann ist dieser Grenzwert eindeutig bestimmt und wir schreiben:

$$a = \lim_{x \to x_0} f(x)$$

Bemerkung - Variante:

Angenommen $x_0 \in D$. Betrachte die Einschränkung von f auf $D\backslash\{x_0\}$, also $f^* : D\backslash\{x_0\} \to \mathbb{R}$. Schreibe

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} f(x) \text{ für } \lim_{x \to x_0} f^*(x)$$

falls dieser Grenzwert existiert.

Bemerkung:

Theorem 5.5.1

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, x_0 ein HP von D und $x_0 \notin D$. Sei $f : D \to \mathbb{R}$. a ist Grenzwert von f bei x_0 genau dann wenn:

$$\bar{f} : D \cup \{x_0\} \to \mathbb{R}, \bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & x \in D \\ a & x = x_0 \end{cases}$$

stetig bei x_0 ist.

Beweis:

Angenommen $a = \lim_{x \to x_0} f(x)$ ist Grenzwert von f. Die Funktion $\bar{f}$ ist stetig bei x_0:

$$\forall \varepsilon < 0 \, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\bar{f}(x) - \bar{f}(x_0)| < \varepsilon \; \forall x \in D \cup \{x_0\}$$

$\Leftrightarrow \; \forall \varepsilon < 0 \, \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon$, was der Definition der Stetigkeit von f entspricht. □

Theorem 5.5.2

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ (Definitionsmenge) und $x_0 \in \mathbb{R}$. Folgende Aussagen sind äquivalent für $x_0 \in D$:

1. Die Funktion f ist stetig bei x_0
2. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} = f(x_0)$
3. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
4. Für jede Folge $(y_n)_{n=0}\infty$ in D mit Grenzwert $x_0 = \lim\limits_{n \to \infty} y_n$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(y_n) = f(x_0)$$

Theorem 5.5.3

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$, sei $f : D \to E$, so dass $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ existiert und $a \in E$ gilt. Sei $g : E \to \mathbb{R}$ eine Funktion, die bei $a \in E$ stetig ist. Dann gilt:

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(a)$$

Beweis:

Sei $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in D mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = x_0$. Dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} f(z_n) = a \in E$$

Die Funktion g ist stetig bei $a \in E$, also konvergiert

$$\lim_{n \to \infty} g(f(z_n)) = g(a)$$

nach dem Folgenkriterium für Stetigkeit.
Also: Für jede Folge $(z_n)_{n=0}^{\infty}$ in D mit $\lim\limits_{n \to \infty} z_n = x_0$ gilt:

$$\lim_{n \to \infty} g(f(z_n)) = g(a)$$

Also gilt

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(a)$$

□

Beispiel:

$D = (0,1)$, $f : D \to \mathbb{R}$ gegebenen durch $f(x) = \dfrac{1}{x(1-x)}$.
Die Aussage

$$\lim_{x \to 2} f(x)$$

ist sinnlos.
$\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ existiert ebenfalls nicht. (es gibt keine reelle Zahl, die die Bedingung des Grenzwerts erfüllt.) Bzw. $= \infty$

5.5.1 Arten von Grenzwerten

Definition 5.5.2: Uneigentliche Grenzwerte

Wir schreiben

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

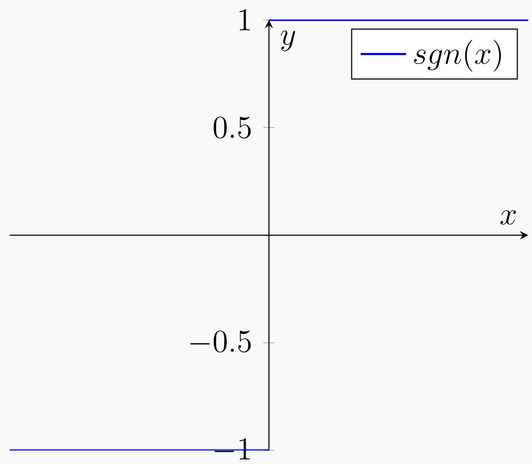
Für

$$\forall M \in \mathbb{R}\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > M\ \forall x \in D$$

Analog für $-\infty$

Beispiel - diverse Grenzwerte:

- $D = \mathbb{R}, f : D \to \mathbb{R}, f(x) = x^3$
  $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = f(3) = 27$ weil f stetig stetig.
  $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \infty$, denn $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists R \in \mathbb{R} : x > R \Rightarrow f(x) > M\ \forall x \in D$
- $D = \mathbb{R}, f : D \to \{-1, 1\}, f(x) = sgn(x)$



$\lim\limits_{\substack{x \to 0\\ x>0}} = 1$, der rechtsseitige Grenzwert

- Alle weiteren Möglichkeiten siehe Skript, 6.4 Abbildung 6.110 (S. 150.)

Definition 5.5.3: Einseitiger Grenzwert

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}} = a$$

bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \wedge x > x_0 \Rightarrow |f(x) - a| < \varepsilon\ \forall x \in D$$

Wir nennen dies den **rechtsseitigen Grenzwert** der Funktion.
Analog definieren wir den linksseitigen Grenzwert.

Bemerkung:

Der Fall mit $x \geqslant x_0$ ist ein anderer Fall! Dieser hatt möglicherweise eine andere Validität.

Beispiel:

Sei $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^x = \exp(x\log(x))$
Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?

Berechne zuerst $\lim\limits_{y\to\infty} y\exp(-y) = \lim\limits_{y\to\infty} \dfrac{y}{\exp(y)}$.

Behauptung:

$$\lim_{y\to\infty} y\exp(-y) = 0$$

$$\Leftrightarrow\ \forall \varepsilon > 0\ \exists R \in \mathbb{R} : y > R \Rightarrow |y\exp(-y)| < \varepsilon$$

Es gilt: $\exp(z) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n \geqslant \left(1 + \dfrac{z}{2}\right)^2$ für $z > 0$.
Folgt für $y > 0$ die Abschätzung

$$0 \leqslant \frac{y}{\exp(y)} \leqslant \frac{y}{.\left(1 + \frac{y}{2}\right)^2}$$

Deshalb folgt wegen des Sandwich-Kriteriums

$$0 \leqslant \lim_{y\to\infty} \frac{y}{\exp(y)} \leqslant 0$$

Behauptung: $\lim\limits_{x\to 0} x\log(x) = 0$.

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit $y\exp(-y) < \varepsilon$ für alle $y > \dfrac{1}{\delta}$. Für $x \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $x < \exp\left(\dfrac{-1}{\delta}\right)$ gilt (Behauptung)

$$|x\log(x)| < \varepsilon$$

Setze $y = -\log(x)$. Dann gilt $y > \dfrac{1}{\delta}$ also $|y\exp(-y)| < \varepsilon$ also $|-\log(x)x| < \varepsilon$ (was zu zeigen war).

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig bei $x_0 = 0$. Also:

$$\lim_{x \to 0} \exp(x \log(x)) = \exp(0) = 1$$

5.5.2 Landau-Symbole

Streng genommen handelt es sich nur um eine Notation.

Definition 5.5.4: Landau-Symbole

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f, g : d \to \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$ mit $x_0 \in D$ oder x_0 ist ein Häufungspunkt von D. (Auch $x_0 \in \{-\infty, \infty\}$). Wir schreiben

- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ (großes Landau-O) für $x \to x_0$, falls $\delta > 0$, $M > 0$ existieren mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leqslant M|g(x)| \; \forall x \in D$$

- $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$ für $x \to -\infty$ bedeutet

$$\exists R \in \mathbb{R}, M > 0 : |f(x)| \leqslant M|g(x)| \text{ für } x \in D, x < R$$

  Für $+\infty$ würden sich die Beduingungen zu $x > R$ verändernn.

- $f(x) = o(g(x))$ (kleines Landau-o) für $x \to x_0$ bedeutet

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 : |f(x)| \leqslant \varepsilon |g(x)| \text{ für } x \in D \wedge |x - x_0| < \delta$$

Theorem 5.5.4

Falls $g(x) \neq 0$ für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$, dann gilt:

$$f(x) = o(g(x)) \text{ für } x \to x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Beispiel:

- $D = \mathbb{R}$, $x_0 = 0$, $f(x) = 1 + x$, $g(x) = \exp(x)$.

  $|x| < \delta \Rightarrow |f(x)| < M|g(x)|$.

  Konkret: Für $|x| < 1$ gilt: $x + 1 < 3\exp(x)$

  Allgemein gilt: $1 + x = \mathcal{O}(\exp(x))$ für $x \to x_0$

  Aber auch: $1 + x + x^2 = \mathcal{O}(\exp(x))$ für $x \to x_0$

Bemerkung:

Hier erkennt man die Gefahr dieser Notation: sie ist nicht eindeutig und das $=$ ist nicht wörtlich zu nehmen. (Es ist nicht transitiv.)

5.6 Normen und Konvergenz in Vektorräumen

Bemerkung:

Sei nachfolgend K entweder der Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$. Sei V ein Vektorraum über K.

Bemerkung - Neue Definition der Exponentialfunktion:

Bisherige Definition:

$$\exp(x) := \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Für $n \geqslant 1$ betrachte die stetige Funktion $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$. Jetzt können wir definieren:

$$\exp = \lim_{n\to\infty} f_n$$

Jetzt gilt

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exp(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

Definition 5.6.1: Norm

Eine **Norm** auf V ist eine Abbildung $||.|| : V \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften.

1. Definitheit: $||v|| \geqslant 0 \; \forall v \in V$ und
$$||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$$
2. Homogenität:
$$\forall v \in V \; \forall \alpha \in K : ||\alpha v|| = |\alpha| ||v||$$
3. Dreiecksungleichung:
$$||v + w|| \leqslant ||v|| + ||w||$$

Wir nennen $(V, ||.||)$ einen normierten Vektorraum.

Beispiel:

$V = K$. Dann ist der Betrag $|.| : V \to \mathbb{R}$ eine Norm.

Definition 5.6.2: Induzierte Metrik

Sei $(V, ||.||)$ ein normierter Vektorraum. Die von $||.||$ **induzierte Metrik** auf V ist:

$$d : V \times V \to \mathbb{R}$$
$$v, w \mapsto d(v, w) = ||v - w||$$

Bemerkung:

Theorem 5.6.1

Dieses d ist tatsächlich eine Metrik.

Beweis:

- Positive Definitheit:

$$d(v, w) = ||v - w|| \geqslant 0 \; \forall v, w \in V$$

$$d(v, w) = 0 \Leftrightarrow ||v - w|| = 0 \Leftrightarrow v - w = 0 \Leftrightarrow v = w \text{ (Vektorraumaxiome)}$$

- Symmetrie:

$$d(v, w) = ||v - w|| = | - 1|||v - w|| = ||(-1)(v - w)|| = ||v - w|| = d(w, v)$$

- Dreiecksungleichung:
  Seien $v, w, z \in V$

$$d(v, z) = ||v - z|| = ||v - w + w - z|| \leqslant ||v - w|| + ||w - z|| = d(v, w) + d(w, z)$$

$\square$

Beispiel:

$$K = \mathbb{R},\ V = \mathbb{R}^n,\ v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix},\ w = \begin{pmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}$$

- Setze für v:

$$||v||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| = |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

  Dann ist $||.||_1 : V \to \mathbb{R}$ eine Norm.

Beweis:

- Positive Definitheit ✓
- Symmetrie ✓
- Dreiecksungleichung: Seien v und w:

$$||v+w||_1 = \sum |x_i + y_i| \leqslant \sum |x_i| + |y_i| = ||v||_1 + ||w||_1 \checkmark$$

□

Diese Norm auf $\mathbb{R}^n$ heißt **1-Norm**.

- Setze für v:

$$||v_2|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

Auch $||.||_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Norm.

Beweis:

Beweis der Dreiecksungleichung ist mühsam und kann als Übung erfolgen. □

Diese Norm heißt **2-Norm**, sie wird auch als Euklidische Norm oder Standardnorm bezeichnet.

- Setze für v

$$||v||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$$

Auch $||.||_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist eine Norm. Sie heißt **Maximumsnorm** oder ∞-Norm oder $\sup$-Norm.

Bemerkung:

Die von $||.||_1$ induzierte Metrik ist die Manhattan-Metrik.

Theorem 5.6.2

Allgemein kann man für eine reelle Zahl $p \geqslant 1$ schreiben:

$$||v||_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}$$

Man kann zeigen: $||.||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Norm ist. Name: p-Norm.

Beispiel:

Seien $a < b \in \mathbb{R}$. Sei $V = C([a,b])$ der Vektorraum aller stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.

- Für $f \in V$ setze:
$$||f||_1 = \int_a^b |f(x)| dx$$
Dann ist $||.||_1 : V \to \mathbb{R}$ eine Norm. Sie heißt 1-Norm oder L^1-Norm.

Beweis:

Definitiheit?
Homogenität: folgt aus der Linearität des Integrals ✓
Dreiecksungleichung: bereits bewiesen ✓ □

- Setze für $f \in V$
$$||f||_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$
Dann ist $||.||_2 : V \to \mathbb{R}$ eine Norm. Sie heißt 2-Norm oder L^2-Norm.

Beweis:

Der Beweis der Dreiecksungleichung erfolgt später über einen allgemeinen Beweis. □

- Setze für $f \in V$
$$||f||_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$$

Theorem 5.6.3

Allgemein definiert
$$||f||_p = \sqrt[p]{\int_a^b |f(x)|^p dx}$$
eine Norme auf V, gennant p-Norm oder L^p-Norm.

Bemerkung:

L^x-Normen stehen für **Lebesgue Normen**, erdacht von Henry Lebesgue.

Definition 5.6.3

Sei V ein K-Vektorraum. Seien $||.||_1$ und $||.||_2$ Normen auf V. Wir sagen $||.||_1$ und $||.||_2$ sind **äquivalent**, falls $\exists A, B \in \mathbb{R}_{>0}$ mit:

- $||v||_1 \leqslant A||v||_2$
- $||v||_2 \leqslant B||v||_1$

für alle $v \in V$ existiert.

Bemerkung:

Sobald V ein nicht-trivialer Vektorraum ist, ergibt sich wegen der Definitheit der Norm, dass $A, B > 0$ sind.

Beispiel:

- Auf $\mathbb{R}^n = V$ betrachte:
  - $||v||_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$
  - $||v||_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\}$

  In jedem Fall gilt: $||v||_\infty \leqslant 1||v||_1$. Außerdem erkennt man: $||v||_1 \leqslant n||v||_\infty$

  Bemerkung:

  Wir werden sehen, dass auf dem $\mathbb{R}^n$ alle Normen äquivalent sind.

- Auf $V = \mathcal{C}([a, b])$ betrachte:
  - $||f||_1 = \int_a^b |f(x)|dx$ mit $f \in V$
  - $||f||_\infty = \max\{|f(x)| \mid x \in [a, b]\}$

  Es gilt: (optimistischerweise)

$$||f||_1 \leqslant (b-a)||f||_\infty$$
$$||f||_\infty \leqslant ?||f||_1$$

  Vermutung: Nicht konstruierbar. Beweis erfolgt in Kürze.

Theorem 5.6.4

Sei V ein K-Vektorraum, seien $||.||_1$ und $||.||_2$ Normen auf V. Dann sind folgende Aussagen äquivalent: (TFAE)

1. $||.||_1$ und $||.||_2$ sind äquivalent.
2. Die Identitätsabbildung $V_{||.||_1} \to V_{||.||_2}$ ist stetig, und genauso $V_{||.||_2} \to V_{||.||_1}$.
3. Eine Teilmenge $U \subseteq V$ ist offen bezüglich der von $||.||_1$ induzierten Metrik genau dann, wenn sie oggen bezüglich der von $||.||_2$ induzierten Metrik ist.
4. Eine Folge $(v_n)_{n=0}^\infty$ in V konvergiert nach $w \in V$ bezüglich $||.||_1$ genau dann, wenn V_N gegen w bezüglich $||.||_2$ konvergiert.

   Bemerkung:

   Dies ist besonders nützlich bei Grenzwertbestimmung. Man kann einen Grenzwert über eine beliebige äquivalente Norm berechnen, also insbesondere der, die bei der Rechnung am besten passt.

Beweis:

- $2 \Leftrightarrow 3$ entspricht der topologischen Charakterisierung von Stetigkeit.
- $2 \Leftrightarrow 4$ Folgenkriterium für Stetigkeit.
- $1 \Rightarrow 4$ Sei $A \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $||v||_1 \leqslant A||v||_2$. Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in V, die bezüglich $||v||_2$ gegen $w \in V$ konvergiert.
  Sei $\varepsilon > 0$. $\exists N \in \mathbb{N}$ mit:
  $$\begin{aligned} n \geqslant N \Rightarrow ||v_n - w||_2 &< \varepsilon \frac{1}{A} \\ \Leftrightarrow A||v_n - w||_2 &< \varepsilon \\ \Rightarrow ||v_n - w||_1 &< \varepsilon \end{aligned}$$
  Diese Aussage können wir auch anders herum für B zeigen. Damit haben wir insgesamt aber nur die Hinrichtung.
- $3 \Rightarrow 1$ Betrachte $U = \{v \in V \mid ||v||_2 < 1\} = B(0,1)$ bezüglich $||.||_2$.
  Die Menge U ist offen bezüglich beider Normen. Insbesondere gilt $0 \in U$.
  $$\exists \delta > 0 : \{v \in V \mid ||v||_1 < \delta\} \subseteq U = \{v \in V \mid ||v||_2 < 1\}$$
  Also kann man sagen:
  $$||v||_1 < \delta \Rightarrow ||v||_2 < 1 \; \forall v \in V$$
  $$||v||_1 \leqslant ||v||_2 \frac{1}{\delta} (= A)$$
  In die andere Richtung erhalten wir wieder B.
  Sei $v \in V$, $v \neq 0$, $v = \alpha w$ für:
  $$\alpha = \frac{||v||_1}{\delta} \qquad w = \frac{\delta}{||v||_1} v \qquad ||w||_1 \leqslant \delta$$
  $\Rightarrow$ (Hypothese) $||w||_2 \leqslant 1$
  $||v||_2 = ||\alpha w||_2 = \alpha ||w||_2 \leqslant \alpha = \dfrac{||v||_1}{\delta}$

$\square$

Zurück zum obigen Beispiel:

Beispiel:

Wir wollen zeigen, dass beide Normen nicht äquivalent sind, also beispielsweise, dass Folgen existieren, die für eine Norm konvergieren, aber für die andere nicht.
Betrachte: $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ die Folge in $V = \mathcal{C}([0,1])$ siehe Foto oder: (fn linear wachsend bis 2^{-n} und ab dann konstant 1). Sei $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ konstant mit Wert 1.s
Behauptung:
$$\lim_{n\to\infty} f_n = g \text{ bezüglich } ||.||_1$$

Beweis:

$$||f_n - g||_1 = \int_0^1 |f_n - g| dx = 2^{-(n+1)}$$

□

aber es gilt:

$$||f_n - g||_\infty = 1 \; \forall n$$

Also konvergiert f_n nicht gegen g.
$\Rightarrow ||.||_1$ und $||.||_\infty$ sind nicht äquivalent.

5.6.1 Skalare Normen

Definition 5.6.4: Skalarprodukt

Sei V ein K-Vektorraum. **Ein** Skalarprodukt auf V ist eine Abbildung

$$V \times V \to K$$
$$(v, w) \mapsto < v, w >$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Sesquilinearität: $\forall \alpha, \beta \in K, v_1, v_2, w_1, w_2, w, v$ gilt:

$$< \alpha v_1 + \beta v_2, w >= \alpha < v_1, w > + \beta < v_2, w >$$

$$< v, \alpha w_1 + \beta w_2 >= \overline{\alpha} < v, w_1 > + \overline{\beta} < v, w_2 >$$

   Für $K = \mathbb{C}$. Für $\mathbb{R}$ ist die komplexe Konjugation überflüssig.

2. Symmetrie: $< v, w >= \overline{< w, v >}$

3. Definitheit (insbesondere positive Definitiheit): $\forall v \in V$:

$$< v, v > \in \mathbb{R}_{\geqslant 0} \text{ und } < v, v >= 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Beispiel:

$V = \mathcal{C}([a, b]), < f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$
Linearität, Symmetrie ✓.
Definitheit: $< f, f >= \int_a^b |f(x)|^2 dx$ Konsequenzen sind die der Definitheit.

Theorem 5.6.5

$$||f||_2 = \sqrt{< f, f >}$$

Theorem 5.6.6: Cauchy-Schwarz

Sei V ein K-Vektorraum, $< .,. >$ ein Skalarprodukt auf V. Für $v \in V$ schreibe $||v|| = \sqrt{< v, v >}$.
Dann gilt:

$$| < v, w > | \leqslant ||v|| \cdot ||w|| \; \forall v, w \in V$$

Beweis:

ObdA $v \neq 0, w \neq 0$.

Setze $\alpha =< v, w > \dfrac{1}{||w||^2}$

$$\begin{aligned} 0 \leqslant ||v - \alpha w||^2 &=< v - \alpha w, v - \alpha w > \\ &=< v, v > -\alpha < w, v > -\overline{\alpha} < v, w > +\alpha\overline{\alpha} < w, w > \\ &= ||v||^2 - 2\frac{| < v, w > |^2}{||w||^2} + \frac{| < v, w > |^2}{||w||^4}||w||^2 \end{aligned}$$

Folgt:

$$||v||^2 \geqslant \frac{| < v, w > |^2}{||w||^2}$$

□

Bemerkung:

Diese Relation ist eine Gleichheit $\Leftrightarrow$ v,w kollinear (also $v = \alpha w$)

Theorem 5.6.7

Sei V ein K-Vektorraum, $< .,. >$ ein Skalarprodukt auf V. Dann definiert die Funktion

$$v \mapsto ||v|| := \sqrt{< v, v >}$$

eine Norm auf V.

Beweis:

Same procedure as last time, Miss Sophie? Same procedure as **every** time, James! Definitheit, Homogenität, Dreiecksungleichung.

- $||v|| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{< v, v >} = 0 \Leftrightarrow < v, v >= 0 \Leftrightarrow = 0$
- Seien $\alpha \in K$, $v \in V$

$$\begin{aligned} ||\alpha v|| &= \sqrt{< \alpha v, \alpha v >} \\ &= \sqrt{\alpha\overline{\alpha} < v, v >} \\ &= \sqrt{|\alpha|^2 < v, v >} \\ &= |\alpha| \cdot ||v|| \end{aligned}$$

- Seien $v, w \in V$.

$$\begin{aligned}
||v+w||^2 &=< v+w, v+w > \\
&= ||v||^2 + < v, w > + < w+v > + ||w||^2 \\
&= ||v||^2 + 2Re(< v, w >) + ||w||^2 \text{ denn vw und wv sind komplex konjugiert} \\
&\leqslant ||v||^2 + 2| < v, w > | + ||w||^2 \\
&\leqslant ||v||^2 + 2||v|| \cdot ||w|| + ||w||^2 \text{ diese Umformung erfolgt über CS} \\
&= (||v|| + ||w||)^2
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow ||v+w|| \leqslant ||v|| + ||w||$$

□

Beispiel - Anwendung:

$$V = \mathcal{C}([a,b]), ||f||_2 = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$$

$||f||_2$ definiert also eine Norm auf V. Grund:

$$< f, g >= \int_a^b f(x)\overline{g(x)} dx$$

definiert ein Skalarprodukt.

Theorem 5.6.8

Sei $V = K^d$, $d \geqslant 0$.
Eine Folge $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert bezüglich der 1-Norm $\Leftrightarrow$ sie konvergiert koordinatenweise.

Beweis:

Schreibe $\pi_j : V \to K$ für die lineare Abbildung $\pi_j(v) = x_j, v = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_j \end{pmatrix}$.

$(v_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert koordinatenweise $\Leftrightarrow$ $(\pi_j(v_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert für alle $1 \leqslant j \leqslant d$
Angenommen $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert nach $w \in V$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : ||v_n - w|| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : \sum_{j=1}^{d} |\pi_j(v_n - w)| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : |\pi_j(v_n) - \pi_j(w)| < \varepsilon\ \forall n \geqslant N$$

$$\Rightarrow (\pi_j(v_n))_{n=0}^{\infty} \text{ konvergiert gegen } \pi_j(w)$$

Angenommen $(\pi_j(v_n))_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gegen w_j für $j = 1, 2, ..., d$. Setze $w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \dots \\ w_d \end{pmatrix}$ also

$\pi_j(w) = w_j$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : |\pi_j(v_n) - \pi_j(w)| < \varepsilon \frac{1}{d}\ \forall n \geqslant N$$

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N : ||v_n - w||_1 < d\varepsilon \frac{1}{d} = \varepsilon\ \forall n \geqslant N$$

□

Theorem 5.6.9: Heine-Borel

Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine bezüglich der 1-Norm beschränkte Folge in K^d. Dann besitzt $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine bezüglich der 1-Norm konvergente Unterfolge, also eine Häufungspunkt.

Bemerkung:

Wir erweitern dies in Kürze auf beliebige Normen.

Beweis:

Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ beschränkt. Dann ist $(\pi_j(v_n))_{n=0}^{\infty}$ eine beschränkte Folge in K. Ersetze $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ durch eine Unterfolge, so dass $(\pi_j(v_n))_{n=0}^{\infty}$ weiterhin konvergiert. Selbes für $\pi_2, \pi_3 \ldots$. Dies entspricht einer Unterfolge, die koordinatenweise koordinatenweise konvergiert.
$\Rightarrow$ es handelt sich um eine konvergente Unterfolge. □

Theorem 5.6.10

Sei V ein endlichdimensionaler K-Vektorraum. Alle Normen auf V sind zueinander äquivalent.

Beweis:

Vorbemerkung: Ist $(V, ||.||)$ ein normierter Vektorraum, so ist $||.|| : V \to \mathbb{R}$ stetig.
Grund: Für $v_0 \in V$ gilt:

$$||v - v_0|| < \varepsilon \Rightarrow |||v|| - ||v_0||| < \varepsilon = \delta$$

Sei V endlichdimensional, $e_1, \ldots, e_d$ eine Basis von V. Sei $||.||$ eine beliebige Norm auf V. Setze

$$||v||_1 = \sum_{i=1}^{d} |x_i| \text{ für } v = x_1 e_1 + \ldots + x_d e_d$$

Das definiert eine Norm auf V.
Behauptung: $\exists A, B$ mit:

$$||v|| \leqslant A||v||_1$$

$$||v||_1 \leqslant B||v||$$

Für $v = x_1e_1 + ... + x_de_d$ gilt

$$\begin{aligned} ||v|| = \left|\left|\sum_{i=1}^d x_ie_i\right|\right| &\leqslant \sum_{i=1}^d |x_i|||e_i|| \\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^d |x_i|\right) \cdot \underbrace{\max\{||e_1||, ..., ||e_d||\}}_{A} \\ &= A||v||_1 \end{aligned}$$

Setze

$$S = \{v \in V \mid ||v||_1 = 1\} \text{ und } \delta = \inf\{||v|| \mid v \in S\}$$

Sei $(v_n)_{n=0}^\infty$ eine Folge in S mit

$$\lim_{n\to\infty} ||v_n|| = \delta$$

Die Folge $(v_n)_{n=0}^\infty$ ist $||.||_1$-beschränkt. Heine-Borel besagt also, dass eine konvergente Teilfolge existiert.
Ersetze $(v_n)_{n=0}^\infty$ durch eine solche Teilfolge.

$$w = \lim_{n\to\infty} v_n \text{ (bezüglich } ||.||_1) \quad \delta = \lim_{n\to\infty} ||v_n|| \text{ in } \mathbb{R}$$

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow ||v_n - w||_1 < \frac{\varepsilon}{A} \Rightarrow ||v_n - w|| < \varepsilon$$

$$w = \lim_{n\to\infty} v_n \text{ bezüglich } ||.||$$

Nach Vorbemerkung gilt:

$$||w|| = \lim_{n\to\infty} ||v_n|| = \delta \text{ in } \mathbb{R}$$

$$||w||_1 = \lim_{n\to\infty} ||v_n||_1 = 1$$

Also $w = \lim\limits_{n\to\infty} v_n$ bezüglich $||.||_1$
Folgt:

$$||w||_1 \neq 0 \Rightarrow w \neq 0 \Rightarrow ||w|| \neq 0 \Rightarrow \delta > 0$$

Sei $B := \frac{1}{\delta}$
Für $v \in V, v \neq 0$ gilt:

$$\frac{1}{||v||_1} v \in S$$

also

$$0 < \delta \leqslant \left|\left|\frac{1}{||v||_1} v\right|\right| = \frac{||v||}{||v||_1} \Rightarrow ||v||_1 \leqslant B||v|| \;\forall v \in V$$

□

Korollar 5.6.10 (1)

jede beschränkte Folge in einem endlichdimensionalen K-Vektorraum besitzt eine konvergente Unterfolge (bezüglich einer beliebigen Norm).

Korollar 5.6.10 (2)

Sei V eine endlichdimensionaler K-Vektorraum. Jede Cauchy-Folge in V konvergiert (bezüglich einer beliebigen Norm).
Oder auch: $(V, ||.||)$ ist vollständig.

Bemerkung:

Prähilbertraum (Vektorraum $+$ Skalarprodukt) $+$ Vollständigkeit $=$ Hilbert-Raum
Normierter Vektorraum $+$ Vollständigkeit $=$ Banach-Raum

Kapitel 6

Reihen

Definition 6.0.1

Sei $(v_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ (alternativ in einem normierten Vektorraum $(v, ||.||)$) und $A \in \mathbb{R}$ (bzw. in V).

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n = A \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} v_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow \left\| \sum_{k=0}^{n} v_k - A \right\| < \varepsilon$$

bedeutet, (per Definition), dass $\sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n = A$

Bemerkung:

Eine Reihe ist außerdem per Definition die Summe aller Partialsummen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{N\to\infty} \underbrace{\sum_{n=1}^{N} a_n}_{s_n}$$

Theorem 6.0.1

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

Lemma 6.0.1

Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen und $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) = \alpha \sum_{k=1}^{\infty} a_k + \beta \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

Insbesondere bilden konvergente Reihen einen Vektorraum über $\mathbb{C}$ und der Wert der Reihe stellt eine lineare Abbildung auf diesem Vektorraum nach $\mathbb{C}$ dar.

6.1 Konvergenz von Reihen

Theorem 6.1.1: Majoranten-/Minorantenkriterium

Seien $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen mit der Eigenschaft $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ für alle$k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} b_k$$

und insbesondere gelten die Implikationen

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ konvergent } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ konvergent}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \text{ divergent } \Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} b_k \text{ divergent}$$

Diese beiden Implikationen treffen auch dann zu, wenn $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ nur für alle hinreichend großen $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Theorem 6.1.2: Verdichtungskriterium

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen. Dann gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergiert } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n} \text{ konvergiert}$$

Theorem 6.1.3: Leibnitz-Kriterium

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen, die gegen Null konvergiert. Dann konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k$ und es gilt

$$\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k a_k \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k a_k \leqslant \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k a_k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Theorem 6.1.4: Cauchy-Kriterium

Die Reihe komplexer Zahlen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergiert genau dann, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass für $n \geqslant m \geqslant N$

$$\left|\sum_{k=m}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

erfüllt ist.

Beweis:

Siehe Skript. □

6.1.1 Absolute Konvergenzkriterien

Definition 6.1.1: Absolute Konvergenz

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n \text{ konvergiert absolut } \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} |v_n| \text{ konvergiert}$$

Bemerkung:

Wenn v_n insbesondere nach oben beschränkt ist.

Theorem 6.1.5: Cauchy's Wurzelkriterium

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen und

$$\alpha = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

Dan gilt

$$\alpha < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ konvergiert absolut.}$$

$$\alpha > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ divergiert.}$$

Beweis:

Angenommen $\alpha < 1$. Dann gilt:

$$\exists n \in \mathbb{N} : \sup_{k\geqslant n} \sqrt[k]{|a_k|} < q = \frac{1+\alpha}{2} < 1$$

Und somit $|a_k| < q^k \; \forall k \geqslant n$. Die Reihe konvergiert somit absolut nach dem Majorantenkriterium (und der Eigenschaft der geometrischen Reihe). Falls $\alpha > 1$ gilt, so gib es eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ mit $\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > 1$ für alle k. Daraus folgt aber $|a_{n_k}| > 1$, und insbesondere ist $(a_n)_n$ keine Nullfolge und die entsprechende Reihe divergiert. $\square$

Korollar 6.1.5 (1): D'Alembert's Quotientenkriterium

Sei $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n \neq 0 \; \forall n$. Setze

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

- Falls $\rho < 1$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut.

- Falls $\rho > 1$, dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nicht absolut. (aber sie divergiert nicht notwendigerweise und kann auch konvergieren.)

Beweis:

- Angenommen $\rho < 1$. Sei $\lambda \in (\rho, 1)$, also $\rho < \lambda < 1$.
  Dann $\exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leqslant \lambda$ (Definition des limsup!).
  Folgt: $|a_{N+1}| \leqslant \lambda |a_n| \Leftrightarrow |a_{N+2}| \leqslant \lambda^2 |a_n| \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow |a_{N+k}| \leqslant \lambda^k |a_n|$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| &= \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| + \sum_{k=0}^{\infty} |a_{N+k}| \\ &\leqslant \sum_{n=0}^{N-1} |a_n| + |a_N| \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \\ &< \infty\end{aligned}$$

  Der endliche Teil der Summe konvergiert sowieso, der 2. Teil auch, denn $\lambda < 1$.

- (Falls $\rho > 1$, gilt: $\exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow |a_{n+1} \leqslant |a - n|s$.
  Insbesondere: $|a_{N+k}| \geqslant |a_N| > 0$, also $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$.
  Folgt: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergiert.)

□

Beispiel:

Sei $a_n = \begin{cases} 10^{-n} n \text{ gerade} \\ 2 \cdot 10^{-n} n \text{ ungerade} \end{cases}$
Also gilt:

$$\limsup \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 2 > 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{10^{2k}}$$

Theorem 6.1.6

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine absolut konvergierende Reihe (in $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ oder jeglichem $(V, ||.||)$). Sei $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine Bijektion. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$ ebenfalls absolut und es gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\varphi(n)}$$

Beweis:

- Absolute Konvergenz: Sei $\varepsilon > 0$, dann $\exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant m \geqslant N \Rightarrow \sum_{k=m}^{n} |a_k| < \varepsilon$.

  Sei $M \in \mathbb{N}$, so dass $n \geqslant M \Rightarrow \varphi(n) \geqslant N$.
  Für $n \geqslant m \geqslant M$ gilt dann:

$$\sum_{k=m}^{n} |a_{\varphi(n)}| \leqslant \sum_{k=N}^{l} |a_k| < \varepsilon$$

  mit $l = \max\{\varphi(m), \varphi(m+1), ..., \varphi(n)\}$

- Selbes Argument für die Gleichheit der Grenzwerte (wird dem Leser als Übung gelassen).

□

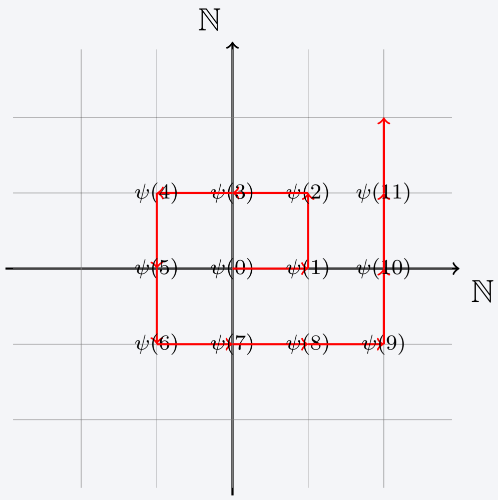
Korollar 6.1.6 (1)

Seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ absolut konvergierend uns sei $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ eine Bijektion: $\psi(n) = (\phi(n), \eta(n))$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{\phi(n)} b_{\eta(n)}$$

Beweis:

Wir betrachten folgende (spezielle) Bijektion $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ Es gilt: $\psi(0) = (0,0), \psi(1) = (1,0), \psi(2) = (1,1), \psi(3) = (0,1), \psi(4) = (-1,1), ...$ Man formt also wachsende Quadrate:



Sei $\varepsilon > 0$ und sei $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{k=N} |a_k| < \varepsilon \text{ und } \sum_{k=N}^{\infty} |b_k| < \varepsilon$$

Jetzt gilt:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|\right)\cdot\left(\sum_{l=0}^{\infty}|b_l|\right)=\left(\underbrace{\sum_{k=0}^{N-1}|a_k|}_{=A}+\underbrace{\sum_{k=N}^{\infty}|a_k|}_{=\alpha}\right)\cdot\left(\underbrace{\sum_{l=0}^{N-1}|b_l|}_{=B}+\underbrace{\sum_{l=N}^{\infty}|b_l|}_{=\beta}\right)$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1}|a_k|\cdot|b_l|+\alpha B+\beta A+\alpha\beta$$

$$=\sum_{n=0}^{(N-1)^2-1}|a_{\varphi(n)}|\cdot|b_{\eta(n)}|+\underbrace{\alpha B+\beta A+\alpha\beta}_{\to 0 \text{ mit } \varepsilon\to 0}$$

Ist $\psi' : \mathbb{N}\to\mathbb{N}^2$ eine beliebige Bijektion, so gilt: $\psi'=\psi\circ\omega$ für eine Bijektion $\omega:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, $\omega=\psi^{-1}\psi'$.
Also kann der Umformungssatz angewendet werden. □

Beispiel:

- Komplex:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n)}{n^2}$$

- Machbar:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

$$\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{2^{n+1}}}{\frac{n}{2^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)2^n}{n\cdot 2^n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}$$

$\rho<1\Rightarrow$ die Reihe konvergiert absolut.

Berechnung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2^n}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)}_{n \text{ Mal}}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{2^{n-p}}\right)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{p+q=n}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{2^q}$$

$$=\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{2^p}\cdot\frac{1}{2^q}$$

$$=\underbrace{\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{2^p}}_{=(1/2)/(1-1/2)}\cdot\underbrace{\sum_{q=0}^{\infty}\frac{1}{2^q}}_{=2}$$

$$=2$$

6.2 Potenzreihen

Definition 6.2.1: Potenzreihe

Sei K ein Körper. Eine Potenzreihe (formale Potenzreihe) mit Koeffizienten in K ist eine Folge $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ in K, geschrieben als:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_k T^k$$

mit T als 'Variable'.
Wir schreiben $K[\![T]\!]$ für die Menge aller formalen Potenzreihen.Für die Polynome $K[T]$ gilt $K[T] \subseteq K[\![T]\!]$
Außerdem gilt:

- $0 = \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot T^k$
- $1 = 1 + \sum_{k=0}^{n} 0 \cdot T^k$
- $+$ (lästig)
- * (lästig)

...$K[\![T]\!]$ ist ein **Ring**. (aber kein Körper, weil das multiplikative Inverse im Allgemeinen nicht existiert)

Bemerkung:

Im Folgenden betreiben wir reelle Analysis, also werden wir $K = \mathbb{R}$ oder $K = \mathbb{C}$ wählen. Damit werden diese Polynome zu Reihen.

Definition 6.2.2: Konvergenzradius

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ und definiere

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \quad \in [0, \infty] \cup \{\infty\}$$

Der Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot T^n$ ist

$$R = \begin{cases} \infty \text{ falls } \rho = 0 \\ \frac{1}{\rho} \text{ falls } \rho > 0, \rho \neq \infty \\ 0 \text{ falls } \rho = \infty \end{cases} \quad \in [0, \infty]$$

Beispiel:

- $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$, also $a_n = 1 \; \forall n \in \mathbb{N}$
  $\rho = \limsup \sqrt[n]{|1|} = 1, R = \frac{1}{1} = 1$
- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} T^n$
  $\rho = \limsup \sqrt[n]{|(n!)^{-2}|} = 0, R = \infty$

Bemerkung:

Theorem 6.2.1

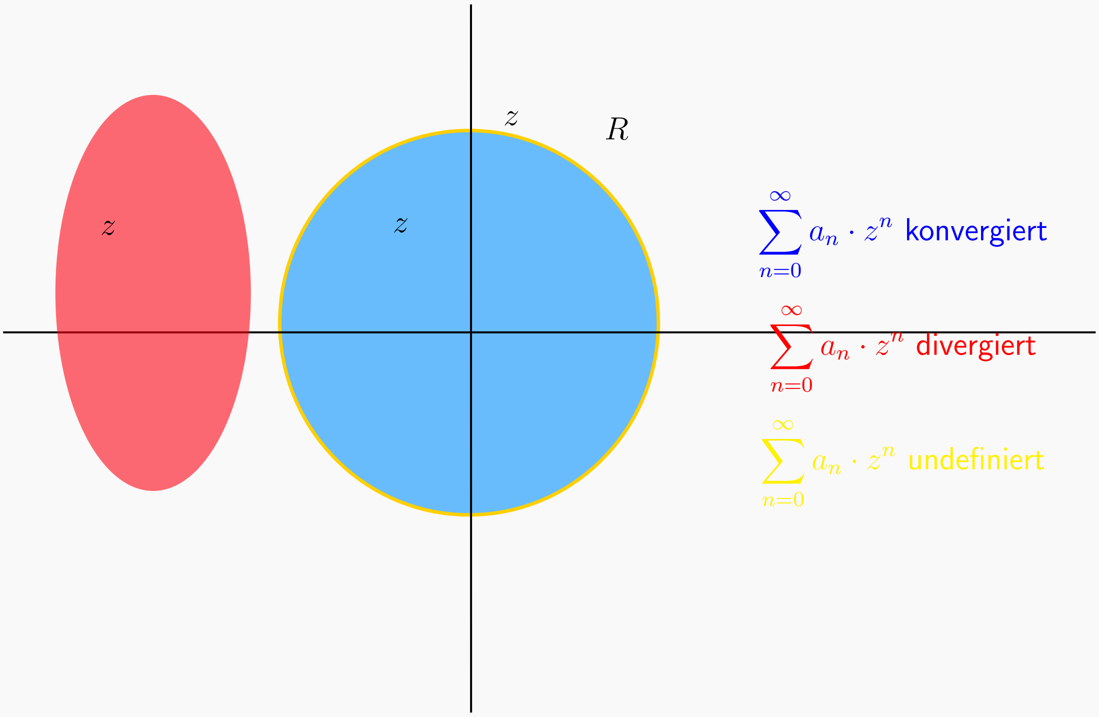
Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot T^n$ eine formale Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und sie $z \in \mathbb{C}$: $|z| < R$. Dann konvergiert $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot z^n$ absolut.

Beweis:

Grund dafür ist **Cauchy's Wurzelkriterium**:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot z^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n| \cdot |z^n|} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} \cdot |z| = |z| \cdot \rho < 1$$

□



Lemma 6.2.1

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n T^n$ eine Potenzreihe mit $a_n \neq 0 \; \forall n \in N$. Der Konvergenzradius R ist gegeben durch

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{a_{n+1}}$$

falls dieser Grenzwert exisitiert.

Beweis:
Aufgabe. □

Beispiel:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n}, \text{ also } a_n = \frac{1}{n}$$

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1, R = 1$$

- $z = -1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergiert
- $z = 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert
- $z = i \Rightarrow$ divergiert (kann unter Verwendung des Leibnitzkriteriums für Re und Im gezeigt werden.)

Lemma 6.2.2

Seien $D \subseteq \mathbb{R}$, $f_n : D \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $f : D \to \mathbb{R}$.
Angenommen f_n ist stetig $\forall n$ und $\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}$ mit

$$||f_n - f||_\infty < \varepsilon \; \forall n \geqslant N$$

d.h. $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ bezüglich $||.||_\infty$.
Dann ist f **stetig**. Man sagt $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert gleichmäßig gegen f.

Bemerkung:

Diese Behauptung kann analog auf $\mathbb{C}$ erweitert werden.

Beweis:

- Stetigkeit von f: Sei $x_0 \in D$, $\varepsilon > 0$. Es existiert also ein $n \in \mathbb{N} : ||f - f_n|| < \underbrace{\varepsilon \cdot \frac{1}{3}}_{\text{Kosmetik}}$.

  Das heißt $|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \; \forall x \in D$

f_n ist stetig:

$$\exists \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Folgt: für $x \in D$ mit $|x - x_0| < \delta$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant \underbrace{|f(x) - f_n(x)|}_{\leqslant \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(x) - f_n(x_0)|}_{\leqslant \varepsilon/3} + \underbrace{|f_n(x_0) - f(x_0)|}_{< \varepsilon/3} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

□

Theorem 6.2.2

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Sei $r > 0$, $r < R$, und schreibe $D = B(0, r) \subseteq \mathbb{C}$ und definiere $f_n : D \to \mathbb{C}$ durch

$$f_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k \quad \text{stetig da Polynomfunktion}$$

Für $z \in D$ definiere:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k \quad \text{konvergiert absolut}$$

Dann gilt:
Die Folge $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert **gleichmäßig** gegen f. Insbesondere gilt: f ist stetig.
Ausgeschrieben:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : n \geqslant N \Rightarrow \left| f(z) - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cdot z^k \right| < \varepsilon \; \forall z \in D$$

Beweis:

Für $z \in D$ konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \cdot r^k$. Also:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} : \sum_{k=N}^{\infty} |a_k| \cdot r^k < \varepsilon$$

Folgt:

$$\forall z \in D : \left| f(z) - \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot z^k \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k \cdot z^k \right| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot |z^k| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k| \cdot r^k < \varepsilon$$

□

6.3 Integration von Reihen

6.3.1 Potenzreihen

Lemma 6.3.1

Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $a < b$. Seien $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge stetiger Funktionen auf $[a, b]$, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ bezüglich $||.||_\infty$. Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f dx$$

Bemerkung:

Dank der spezifischen Hypothesen des Lemmas kann man anschaulich die Grenzwerte vertauschen (das Integral ist der Grenzwert der Treppenfunktionen).

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$.

$$\begin{aligned} &\exists N \in \mathbb{N} : ||f - f_n||_\infty < \varepsilon \; \forall n \geqslant N \\ \Leftrightarrow\; &|f(x) - f_n(x) < \varepsilon \; \forall x \in [a, b], n \geqslant N \\ \Rightarrow\; &\int_a^b |f(x) - f_n(x)| dx \leqslant \varepsilon \cdot (b - a) \\ \Rightarrow\; &\left| \int_a^b f_n dx - \int_a^b dx \right| < \varepsilon \cdot (b - a) \end{aligned}$$

Zur kosmetik können wir Anfangs $\varepsilon/(b - a)$ wählen. □

Korollar 6.3.0 (1)

Sei $\sum_{n=0}^{n} a_n \cdot T^n \in \mathbb{R}[\![T]\!]$ eine Potenzreihe mit konvergenzradius $R > 0$. Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $-R < a < b < R$.
Definiere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ (bewiesenermaßen stetig)}$$

Definiere $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} a_n x^{n+1} \text{ (bewiesenermaßen stetig)}$$

Dann gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Beweis:

Setze $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. f_n ist eine Polynomfunktion also insbesondere stetig und es gilt $(f_n)_{n=0}^{\infty} \to f$ (konvergiert) gleichmäßig.
Folgt dank Lemma:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n dx = \int_a^b f(dx) \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \int_a^b x^k dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{k+1} b^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{b^k}{k+1} - \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{a^k}{k+1} \\
&= F(b) - F(a)
\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Das bedeutet, dass wir eine Funktion integrieren können, sobald wir sie als Potenzreihe darstellen können.

Theorem 6.3.1: Abel'scher Grenzwertsatz

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ mit Konvergenzradius $R > 0, R \in \mathbb{R}$.

Angenommen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ konvergiert. Dann gilt

$$\lim_{\substack{t\to R \\ t<R}} \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$

Mit anderen Worten: Die Funktion $f : (-R, R]$ definiert durch

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

ist stetig (bei R).

Beweis:

Wir ersetzen a_n durch $a_n \cdot R^n$ und können damit annehmen, $R = 1$ Für $0 \leqslant t < 1$ setze $f(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Also $f : [0,1) \to \mathbb{C}$ ist stetig.

Betrachte

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-t} f(t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{(a_0 + a_1 + \ldots + a_n)}_{=A_n} t^n \end{aligned}$$

$$A = \lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot 1^n$$

Ziel: $\lim\limits_{\substack{t\to 1\\ t<1}} f(t) = A$.

Sei $\varepsilon > 0$. Setze $b_n = A_n - A$

$$\begin{aligned} f(t) &= (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n \\ &= (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} (b_n + A) t^n \\ &= (1-t)\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n + \underbrace{(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} A t^n}_{=A} \end{aligned}$$

Es existiert $N \geqslant 0$ mit $n \geqslant N \Rightarrow |b_n| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} |f(t) - A| &\leqslant \underbrace{\left|(1-t)\sum_{n=0}^{N} b_n t^n\right|}_{:=P(t)} + \left|(1-t)\sum_{n=N+1}^{\infty} b_n t^n\right| \\ &\leqslant |P(t)| + \underbrace{(1-t)\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon t^n}_{=\varepsilon} \end{aligned}$$

$$|f(t) - A| \leqslant |P(t)| + \varepsilon \text{ (weil } P \text{ stetig und } P(1) = 0)$$

Also:

$$\exists \delta > 0 : t \in (1-\delta, 1) \Rightarrow |P(t)| < \varepsilon$$

Folgt: Für $t \in (1-\delta, 1)$ gilt $|f(t) - A| < 2\varepsilon \Rightarrow f(t)$ konvergiert gegen A.

Bemerkung:

Die Kosmetik, um auf ε zu kommen wird dem Leser überlassen.

□

6.4 Exponentialfunktion (2. Ansatz)

Definition 6.4.1: Exponentialreihe

Wir bezeichnen die formale Potenzreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} \quad \in \mathbb{C}[\![T]\!]$$

als **Exponentialreihe**.
Diese hat folgende Eigenschaften:

Theorem 6.4.1

$$\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n!}} = 0 \Rightarrow R = \infty$$

$$\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ konvergiert absolut für alle } z \in \mathbb{C}$$

$$\text{Die Funktion } f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ ist stetig}$$

Theorem 6.4.2

Sei $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\exp(t) = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{t}{n}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

Beweis:

Klassische Beweisskizze im Skript.
Zu zeigen: $f(t)$ erfüllt die Funktionalgleichungen der Exponentialfunktion.

- $f(0) = 1$ ✓
- $f(x + y) = f(x)f(y)$ Nachrechnen (Kombinatorik) ✓
- $f(-x) = f(x)^{-1}$ HOW?
- $f(t) > 0 \ \forall t \in \mathbb{R}$ ✓
- Zeige: $f(t) \geqslant 1 + t$

  Für $t \geqslant 0$ gilt: $f(t) = 1 + \frac{t^1}{1!} + \underbrace{\dots}_{\geqslant 0} \Rightarrow f(t) \geqslant 1 + t$

  Für $T \in (-1, 0)$ gilt: $f(t) = 1 + \frac{t}{1} + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} + \dots \Rightarrow$ (Leibniz) $1 + t \leqslant f(t) (\leqslant 1 + t + \frac{t^2}{2})$

$$\Rightarrow f = \exp$$

□

Bemerkung:

Wir haben somit die Definition unserer Funktion von $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ausgeweitet. Für $t \in \mathbb{R}$ erhalten wir die bekannten Eigenschaften, für $t \in \mathbb{C}$ erhalten wir neue Eigenschaften (hint: Trigonometrie).

Korollar 6.4.2 (1)

Für $a < b \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_a^b \exp(x)dx = \exp(b) - \exp(a)$$

Theorem 6.4.3

Seien $z, w \in \mathbb{C}$, dann gilt:

1. $\exp(z + w) = \exp(z) \cdot \exp(w)$
2. $|\exp(z)| = \exp(Re(z))$

Insbesondere gilt: $|\exp(i \cdot t)| = 1 \; \forall t \in \mathbb{R}$

Beweis:

1.

$$\begin{aligned}
\exp(z) \cdot \exp(w) &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{w^p}{p!} \cdot \sum_{q=0}^{\infty} \frac{z^q}{q!} \\
&= \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} \frac{w^p}{p!} \cdot \frac{z^q}{q!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{p=0}^{\infty} \frac{w^p z^{n-p}}{p!(n-p)!} \cdot \frac{n!}{n!}}_{=\frac{1}{n!} \sum_{p=0}^{\infty} w^p z^{n-p} \binom{n}{p} = \frac{1}{n!}(w+z)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(w+z)^n}{n!} \\
&= \exp(w + z)
\end{aligned}$$

2. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\exp(\overline{z}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} \\
&= \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} \\
&= \overline{\exp(z)}
\end{aligned}$$

Außerdem:

$$\begin{aligned}
|\exp(z)|^2 &= \exp(z)\exp(\overline{z}) \\
&= \exp(z + \overline{z}) \\
&= \exp(2 \cdot Re(z)) \\
&= \exp(Re(z))^2
\end{aligned}$$

$\square$

6.4.1 Trigonometrische Funktionen

Definition 6.4.2

Für $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir:

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$$

$\sin, \cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ sind stetig (ebenfalls für $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)

Theorem 6.4.4

Es gilt $\forall z \in \mathbb{C}$:

- $\cos(-z) = \cos(z)$
- $\sin(z) = -\sin(z)$

Theorem 6.4.5

Sei $z \in \mathbb{C}$. Dann gilt

- $\exp(i \cdot z) = \cos(z) + i \cdot \sin(z)$
- $\sin(z) = \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i}$
- $\cos(z) = \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2}$

Insbesondere gilt für $z, w \in \mathbb{C}$:

- $\sin(z + w) = \sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)$
- $\cos(z + w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$

Beweis:

- Zusammenhang sin,cos, exp:

$$\begin{aligned}
\exp(iz) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(iz)^n}{n!} &= 1 + \frac{iz}{!} + \frac{-z^2}{2!} + \frac{-iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= \cos(z) + i\sin(z)
\end{aligned}$$

- Alternative Darstellung von sin, cos:

$$\begin{aligned}\exp(iz) - \exp(-iz) &= \cos(z) + i\sin(z) - (-\cos(-z) - i\sin(-z)) \\ &= i\sin(z) + i\sin(z) \\ &= 2i\sin(z)\end{aligned}$$

Analog für $\cos$ kommt man auf die zweite Darstellung beider Funktionen.

- Additionstheoreme:

$$\begin{aligned}\cos(z+w) + i\sin(z+w) &= \exp(iz+iw) \\ &= \exp(iz)\cdot\exp(iw) \\ &= (\cos(z)+i\sin(z))(\cos(w)+i\sin(w)) \\ &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w) \\ &+ i(\sin(z)\cos(w) + \cos(z)\sin(w)) \\ &= \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)\end{aligned}$$

Es lässt sich somit folgern:

Theorem 6.4.6: Kreisgleichung

$$1 = cos(0) = cos(z)^2 + \sin(z)^2$$

$\square$

Theorem 6.4.7

Es existiert genau eine reelle Zahl $\pi \in (0,4)$ mit $\sin(\pi) = 0$. Für diese Zahl gilt:

$$\exp(2\pi i) = 1$$

Oder in **schön**:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Beweis:

Für $x \in (0,2)$ sind die Folgen

$$\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}\right)_{n=0}^{\infty} \text{ und } \left(\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\right)_{n=0}^{\infty}$$

monoton fallend mit Grenzwert 0.
Also können wir beide mit Partialsummen abschätzen.
Folgt:

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < \frac{x}{1} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \text{ und } 1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

für $x \in (0,2)$.
Wir wissen:

- $\frac{1}{\sqrt{2}} < 1 - \frac{1}{6} < \sin(1)$
- $\sin(0) = 0$

Also existiert laut Zwischenwertsatz ein $p \in (0,1)$ mit $\sin(p) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.
Setze $\pi = 4p$.

Laut Kreisgleichung gilt: $\cos(p) = \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ (, was koherent ist mit der Aussage, das $\cos(x) > 0$ für $x \in (0,1)$).
Jetzt gilt folgendes:

- $\exp(ip) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$
- $\exp(i\pi) = \exp(4ip) = \frac{(1+i)^4}{4} = -1 = \underbrace{\cos(\pi)}_{=-1} + i \underbrace{\sin(\pi)}_{=0}$
- $\exp(2i\pi) = \left(\frac{(1+i)}{\sqrt{2}}\right)^8 = (-1)^2 = 1$

Sei $\omega \in (0,4)$ mit $\sin(\omega) = 0$. Da $\sin(x) > 0$ für $x \in (0,2)$, gilt $\omega \in (2,4)$. Setze:

$$r = \begin{cases} \pi - \omega & 2 < \omega \leqslant \pi \\ & \omega - \pi 2 < \pi \leqslant \omega \end{cases}$$

Dann gilt: $r \in [0,2)$ und laut Additionstheorem:

$$\pm \sin(r) = \sin(\pi - \omega) = \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} \cos(-\omega) + \cos(\pi) \underbrace{\sin(-\omega)}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow r = 0 \Rightarrow \pi = \omega$$

$\square$

Korollar 6.4.7 (1)

$\forall z \in \mathbb{C}$ gilt

- $\sin\left(z + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(z)$
- $\sin(z + \pi) = -\sin(z)$
- $\sin(z + 2\pi) = \sin(z)$

Gilt analog für $\cos$

Beweis:

Folgt aus den Additionstheoremen und der Eigenschaft $\sin(\pi) = 0, \exp(i\pi) = -1$ $\square$

6.4.2 Polarkoordinaten

Theorem 6.4.8

Für jedes $z \in \mathbb{C}^*$ existieren eindeutige reelle Zahlen $r \in (0, \infty)$ und $\theta \in [0, 2\pi)$ mit

$$z = \exp(r + i\theta) = \exp(r) \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Hierbei bezeichnet θ das **Argument** von z.

Beweis:

OBdA gilt $|z| = 1$ weil sowieso $r = \log(|z|)$.(Wieso? Weil $|\exp(r + i\theta)| = \exp(r)$)
Angenommen $Im(z) \geqslant 0$. Dann gilt $Re(z) \in [-1, 1]$. Wir wissen $\cos(0) = 1, \cos(\pi) = -1$.
Also existiert $\theta \in [0, \pi]$ mit $\cos(\theta) = Re(z)$.

$$1 = |z| = \underbrace{Re(z)^2}_{=\cos(\theta)^2} + \underbrace{Im(z)^2}_{=\sin(\theta)^2}$$

$$\Rightarrow \sin(\theta) = Im(z) \Rightarrow \exp(i\theta) = z$$

Selbiges gilt für $Im(z) < 0$.
Eindeutigkeit von θ:
$\exp(i\theta) = \exp(i\rho) \quad \theta, \rho \in [0, 2\pi)$
$\exp(i(\theta - \rho)) = 1 \Rightarrow \sin(\theta - \rho) = 0$ also $\theta - \rho \in \{-\pi, 0, \pi\}$

$$\exp(i\pi) = \exp(-i\pi) = -1 \Rightarrow \theta - \rho = 0 \Rightarrow \theta = \rho$$

$\square$

Bemerkung - Folgerung:

Theorem 6.4.9

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ ist surjektiv.

$\exp : \mathbb{R} \times [0, 2\pi)i \to \mathbb{C}$ ist bijektiv.

$\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^x$ ist nicht injektiv, also nicht bijektiv.

Theorem 6.4.10

1. $\exp(0) = 1$
2. $\exp(2\pi i) = 1$
3. $\exp(z) = \exp(z + 2k\pi i)\ \forall k \in \mathbb{Z}$

Theorem 6.4.11

Die zu

$$\exp : \mathbb{R} \times [0, 2\pi]_i \to \mathbb{C}^*$$

inverse Funktion nennt man **Hauptzweig des komplexen Logarithmus**

$$\log : \mathbb{C}^X \to \mathbb{R} \times [0, 2\pi]_i$$

Bemerkung - Warnung:

Es gilt aber im Allgemeinen nicht mehr:

$$\log(ab) = \log(a) + \log(b)$$

Kapitel 7

Differentialrechnung

Bemerkung:

Im Moment beschränken wir uns auf reellwertige Funktionen in einer Variable (also $\mathbb{R}^1 \to \mathbb{C}$), definiert auf offenen Intervallen.

7.1 Ableitung und Ableitungsregeln

Definition 7.1.1: Differenzierbarkeit

Seien $a < b \in \mathbb{R}$, sei $f : (a,b) = D \to \mathbb{C}$ eine Funktion und $x_0 \in (a,b)$. Wir sagen f sei **differenzierbar** bei x_0 falls der Grenzwert

$$f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existiert.
Wir sagen f sei differenzierbar auf (a,b) falls f in jedem Punkt $x_0 \in (a,b)$ differenzierbar ist.
In diesem Fall nennen wir $f' : (a,b) \to \mathbb{C}$ die Ableitung von f.

Bemerkung:

Diese Definition ist nur dann sinnvoll, wenn D ein Intervall ist und x_0 ein Häufungspunkt von D ist. Deshalb gehen wir im Folgenden davon aus.

Bemerkung:

Die Erweiterung der Definition von $\mathbb{R}$ auf $\mathbb{C}$ ist einfach, denn es genügt, den Real- und Imaginärteil von f separat zu betrachten.

Bemerkung:

Theorem 7.1.1

Ist f bei $x_0 \in D$ differenzierbar, so ist f stetig bei x_0.
Diese Aussage lässt sich verallgemeinern:

$$f \text{ ist differenzierbar} \Rightarrow f \text{ ist stetig}$$

Beweis:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ x\neq x_0}} |f(x)-f(x_0)| = \underbrace{\lim_{x\to x_0} |x-x_0|}_{=0} \cdot \underbrace{\lim_{x\to x_0} \frac{|f(x)-f(x_0)|}{|x-x_0|}}_{=|f'(x_0)|} = 0$$

□

Bemerkung - alternative Notationen:

- $\dfrac{d}{dx} f(x)$
- $\dfrac{d}{dx} f$
- Df, df
- f_x
- $f^{(1)}$
- Und auch die links- und rechtsseitigen Ableitungen mit $x < x_0$ und $x > x_0$.

Beispiel:

- Nein, den Fall $ax + b$ werde ich ganz sicher nicht abschreiben...
- $D = \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{C}$, $c \in \mathbb{C}$ gegeben durch: $f(x) = \exp(c \cdot x)$.

  Wähle $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{\exp(cx_0+ch)-\exp(cx_0)}{h} \\ &= \exp(cx_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{\exp(ch)-1}{h} \\ &= \exp(cx_0) \cdot \lim_{h\to 0} \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ch)^n}{n!} \\ &= \exp(cx_0) \cdot \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(ch)^n}{n!} \\ &= \exp(cx_0) \cdot \lim_{h\to 0} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{n!} h^{n-1} \\ & \underbrace{\text{Konvergenzradius} = \infty}_{\text{stetige Funktion von } h} \\ &= \exp(cx_0) \cdot c \end{aligned}$$

- $D = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $f : D \to \mathbb{C}$ gegeben durch: $f(x) = \frac{1}{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{x_0+h} - \frac{1}{x_0}}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{-(x_0+h)+x_0}{(x_0+h)x_0 h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-1}{(x_0+h)x_0} \\ &= -\frac{1}{x_0^2} \end{aligned}$$

Theorem 7.1.2

$$(\exp(c\cdot x_0))' = \exp(cx_0)\cdot c$$

Konsequenz (Sonderfall $c = i$):

$$(\sin(x))' = \cos(x) \quad (\cos(x))' = -\sin(x)$$

Theorem 7.1.3

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$. Dann sind $f+g$ und $f\cdot g$ ebenfalls differenezierbar bei x_0 und es gilt:

- $(f+g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
- Leibnitz-Regel: $(f\cdot g)'(x_0) = f'(x_0)\cdot g(x_0) + f(x_0)\cdot g'(x_0)$

Beweis:

- Additivität von Grenzwerten.
- Auch hier kommt uns die Additivität entgegen:

$$\begin{aligned} (f\cdot g)'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x) + f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \frac{f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x-x_0} \\ &= \lim_{x\to x_0} \underbrace{g(x)}_{\to g(x_0)} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} + \lim_{x\to x_0} \underbrace{f(x_0)}_{\text{konstant}} \frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \\ &= g(x_0)f'(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \end{aligned}$$

□

Bemerkung - Konsequenz:

$f(x) = x$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f'(x) = 1$.
Sei $g(x) = x^2 = f \cdot f$, also gilt: $f'(x) = (f \cdot f)'(x) = f'f + ff' = 2ff' = 2x$.
Allgemeiner gilt für $h(x) = x^n, n \geqslant 0$: $h'(x) = n \cdot x^{n-1}$ (Induktion).

Noch allgemeiner gilt:

Theorem 7.1.4

Sei $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gegeben durch:

$$P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit $a_n \in \mathbb{C}$, dann gilt:

$$P'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

Außerdem nützlich:

Theorem 7.1.5: Kettenregel

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ offen. Seien $f : D \to E$, $g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Die Funktion

$$(g \circ f) = g(f) : D \to \mathbb{R}$$

ist differenzierbar und es gilt:

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

Beweis:

Wichtig, also live verfolgt. Siehe Skript. $\square$

Beispiel:

Sei $f : D \to \mathbb{R}\backslash\{0\}$ differenzierbar. Dann ist $h : D \to \mathbb{R}$ gegeben durch $h(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ ebenfalls differenzierbar und es gilt

$$h'(x) = \left(\frac{1}{f}\right)(x) = -\frac{1}{f(x)^2} f'(x)$$

Allgemeiner folgt:

Theorem 7.1.6: Quotientenregel

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar an der Stelle $x_0 \in D$ und sei $g(x_0) \neq 0$. Dann ist $h(x) =$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ ebenfalls differenezierbar bei x_0 und es gilt:

$$h'(x_0) = \left(\frac{f(x_0)}{g(x_0)}\right)' = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Theorem 7.1.7: Inversenregel

Seien $D, E \subseteq \mathbb{R}$ offen und $f : D \to E$ bijektiv und differenzierbar. Sei $g = f^{-1} : E \to D$ stetig. Ist $x_0 \in D$, so dass $f'(x_0) \neq 0$, so ist g bei $f(x_0) = y_0$ ableitbar, und es gilt:

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Beweis:

$$g'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

□

Beispiel:

$D = \mathbb{R},\ E = \mathbb{R}_{>0},\ f : D \to E,\ f(x) = \exp(x) \Rightarrow g(y) = \log(y).$
Sei $x_0 = \exp(x_0) \in \mathbb{R}_{>0}$ und $x_0 = \log(y_0)$

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{\exp(\log(y_0))} = \frac{1}{y_0}$$

$\Rightarrow \log'(y) = \frac{1}{y}$

Definition 7.1.2: Glatte Funktionen

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ohne isolierte Punkte. Dann bezeichnen wir

$$\mathcal{C}(D) = C^0(D)$$

als alle stetigen reellwertigen Funktionen auf D,

$$\mathcal{C}^1(D)$$

als den Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen auf D, deren Ableitung stetig ist. (diese Funktionen nennen wir stetig differenzierbar).
Für $n \geqslant 1$ definiere rekursiv:

$$\mathcal{C}^n(D)$$

den Vektorraum aller differenzierbaren Funktionen f auf D mit $f' \in C^{n-1}(D)$.

$$\mathcal{C}^\infty(D) = \bigcap_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}^n(D)$$

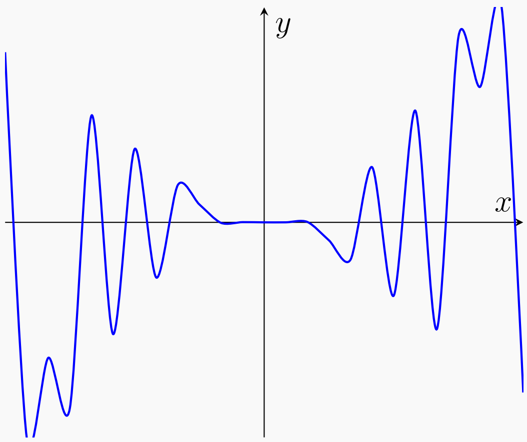
Wir nennen $f \in \mathcal{C}^\infty(D)$ **glatte Funktion**.

Beispiel:

- $\exp$
- $\sin, \cos$
- $\log$
- Polynome
- $f(x) = 0$ (Neutrales Element des Vektorraums)

sind glatt.
Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$



Diese Funktion ist differenzierbar auf ganz $\mathbb{R}$ aber **nicht** von Klasse C^1, d.h. f' ist nicht stetig.
Für $x \neq 0$ gilt:

$$f'(x) = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^2 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2} = 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) + \ cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to 0} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

f'' existiert nicht!

7.2 Hauptsätze der Differentialrechnung

7.2.1 Extrema

Definition 7.2.1: Lokale Maxima

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Wir nennen $x_0 \in D$ **lokales Maximum** von f falls

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x) \leqslant f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$$

x_0 heißt **isoliertes lokales Maximum** falls

$$\exists \varepsilon > 0 : f(x) < f(x_0)\ \forall x \in (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \cap D$$

Theorem 7.2.1

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $x_0 \in D$ ein lokales Maximum oder Minimum von f. Dann gilt mindestens eine der folgenden Aussagen:

1. X_0 ist ein Randpunkt von D
2. f ist nicht ableitbar bei x_0
3. f ist ableitbar bei x_0 und $f'(x) = 0$

Beweis:

Angenommen 1 und 2 sind falsch: Also existiert x_0 im Inneren von D, und $f'(x_0)$ existiert, außerdem ist x_0 ein lokales Extremum.

$$\begin{aligned} f'(x_0) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \neq x_0}} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{x - x_0}_{>0}} \leqslant 0 \\ &= \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} \frac{\overbrace{f(x) - f(x_0)}^{\leqslant 0}}{\underbrace{x - x_0}_{<0}} \geqslant 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

7.2.2 Mittelwertsatz

Wir haben verschiedene Formulierungen:
Satz von Rolle:

Theorem 7.2.2: Mittelwertsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ ableitbar, $a < b \in D$ mit $f(a) \leqslant f(b)$. Dann existiert

$x \in (a, b)$ mit $f'(x) = 0$.

Beweis:

Da $[a, b]$ kompakt ist und f stetig ist, nimmt f ihr Maximum x_2 auf $[a, b]$ an.
Falls $x_1 \in (a, b)$, dann ist x_1 ein lokales Maximum und es folgt $F'(x_1) = 0$.
Selbes falls $x_2 \in (a, b)$.
Falls $x_1, x_2 \in \{a, b\}$, dann gilt $f(x_1) = f(x_2)$ also ist f konstant und es gilt: $f'(x) = 0 \ \forall x \in (a, b)$ □

Korollar 7.2.2 (1): Mittelwertsatz

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ ableitbar, $a < b \in D$. Dann existiert $x \in (a, b)$ mit

$$f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

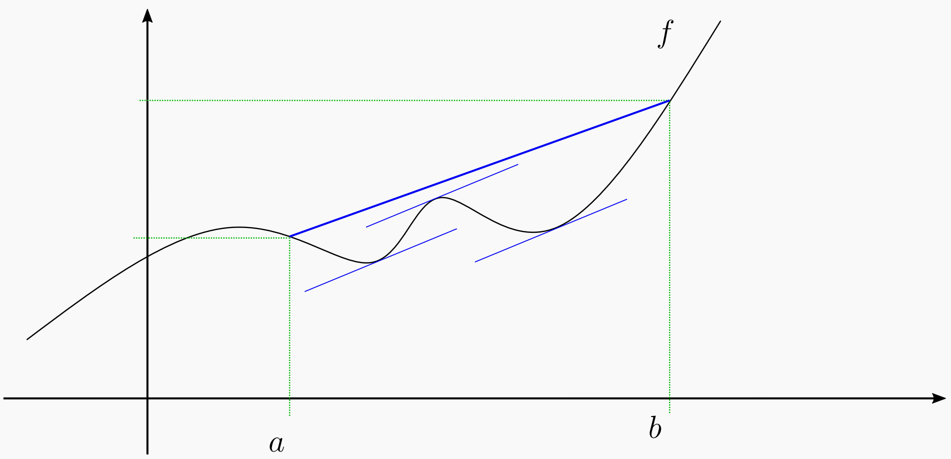
Beweis:

Definiere $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch $g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$.
$f(a) = g(a)$; $g(b) = f(a)$.
Laut Satz von Rolle existiert ein $x \in (a, b)$ mit $g'(x) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$$

Bemerkung:

Anschaulich: Betrachte die Gerade durch $f(a)$ und $f(b)$. Zwischen a und b gibt es x, wo die Steigung von $f(x)$ gleich der dieser Durchschnittsgeraden sind.



□

Und wir haben Cauchys Version:

Korollar 7.2.2 (2): Mittelwertsatz

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann existiert $x \in (a, b)$ mit:

$$g'(x)(f(b) - f(a)) = f'(x)(g(b) - g(a))$$

Beweis:

Definiere $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = g(x)(f(b) - f(a)) - f(x)(g(b) - g(a))$$

Dann gilt $F(a) = F(b)$ und also existiert $x \in (a, b)$ mit $F'(x) = 0$ □

Korollar 7.2.2 (3)

Sei $D \in \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ ableitbar it $f'(x) = 0\ \forall x \in D$. Dann ist f konstant.

Bemerkung:

Gilt nur auf einem **Intervall**! Das heißt zum Beispiel nicht auf Vereinigungen von disjunkten Intervallen.

7.2.3 Korollare und Kurvendiskussion

Theorem 7.2.3: Monotonie

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : D \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Dann gilt:

$$f \text{ ist monoton steigend} \Leftrightarrow f'(x) \geqslant 0\ \forall x \in D$$

Beweis:

- $\Rightarrow$: f monoton steigend

$$\Rightarrow f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant 0$$

- $\Leftarrow$: ist f nicht monoton steigend, so gilt

$$\exists a < b \in D : f(a) > f(b) \Rightarrow \ \exists x \in (a, b) : f'(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} < 0$$

  was ein Widerspruch ist.

□

Bemerkung:

Dieser Satz gilt nicht für strenge Monotonie: $f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, aber $f'(x) \not> 0 \; \forall x \in D$. Es gilt also keine Äquivalenz. Die Folgerung vom Vorzeichen der Ableitung auf die Monotonie ist durchaus möglich.

Korollar 7.2.3 (1)

Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ ist genau dann konstant, wenn sie differenzierbar ist und $f'(x_0) = 0 \; \forall x_0 \in I$ gilt.

Definition 7.2.2: Konkavität und Konvexität

Sei $i \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Dann heißt f **konvex**, falls $\forall a < b \in I$ und $\forall t \in (0, 1)$ folgende Ungleichung gilt:

$$f((1-t)a + tb) \leqslant (1-t)f(a) + tf(b)$$

- Eine Funktion g heißt **konkav**, wenn $f = -g$ konvex ist.
- Man spricht von strenger Konvexität oder Konkavität, wenn eine strikte Ungleichung vorliegt.

Theorem 7.2.4

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann ist f genau dann (streng) konvex, wenn f' (streng) monoton wachsend ist.

Korollar 7.2.4 (1)

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ 2 Mal differenzierbar. Falls $f''(x) \geqslant 0 \; \forall x \in I$ ist, dann ist f konvex. Bei einer strengen Ungleichung liegt strenge Konvexität vor.

Lemma 7.2.1: Jensen'sche Ungleichung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion. Seien $n \in \mathbb{N}$, $x_1, x_2, ..., x_n \in I$ und $t_1, t_2, ..., t_n \in [0, 1]$ mit $\sum\limits_{k=1}^{n} t_k = 1$. Dann gilt:

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} t_k x_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} t_k f(x_k)$$

Beweis:

Per Induktion, siehe Skript. □

7.2.4 L'Hôpital

Theorem 7.2.5: Rêgle de L'Hôpital

Sei $D = (a, b)$ ein Intervall, $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar mit $g(x) \neq 0$ und $g'(x) \neq 0 \; \forall x \in (a, b)$. Es gelte:

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0 \text{ und } \lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A$$

Dann gilt:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Bemerkung:

Diese Technik funktioniert auch für Funktionen, die gegen $\pm\infty$ gehen, da man einfach die Inverse Funktion verwenden und entsprechend den inversen Grenzwert berechnet.

Beweis:

Setze f, g auf $[a, b)$ fort durch $f(a) = g(a) = 0$. Sei $\varepsilon > 0$.

$$\exists \delta > 0 : \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \in (A - \varepsilon, A + \varepsilon) \; \forall \xi \in (a, a + \delta)$$

Für $x \in (a, a + \delta)$ gilt nach Mittelwertsatz von Cauchy:

$$\exists \xi \in (a, b) : \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

Kapitel 8

Differentialrechnung und Integralrechnung (Riemann)

8.1 Fundamentalsätze

Theorem 8.1.1: Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $a \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Definiere $F : I \to \mathbb{R}$ durch

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

(falls $x < a$)
Dann ist F stetig differenzierbar und es gilt:

$$F'(x) = f(x)$$

- Diese Funktion F nennen wir **Stammfunktion** von f.
- Jede stetige Funktion $f : i \to \mathbb{R}$ besitzte eine Stammfunktion (aber nicht notwendigerweise genau eine).
- 2 Stammfunktionen von f unterscheiden sich durch eine Konstante.
- Für eine beliebige Stammfunktion gilt:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt + C$$

Bemerkung - allgemeine Darstellung:

$$\int f(x)dx = F + C$$

$$\underbrace{F = \int f(x)dx + C}_{F'=f}$$

Korollar 8.1.1 (1)

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ stetig, F eine Stammfunktion von f. Dann gilt:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Beweis:

$$\exists C \in \mathbb{R} : F(x) = \int_a^x f(t)dt + C \; \forall x \in I$$

Jetzt gilt:

$$F(a) = \underbrace{\int_a^a f(t)dt}_{=0} + C \Rightarrow C = F(a)$$

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt + F(a) \Leftrightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

□

Bemerkung:

$$F = \int f(t)dt \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b = F \mid_a^b$$

Korollar 8.1.1 (2)

Sei

$$f(T) \sum_{n=0}^{\infty} a_n T^n$$

eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$. Somit ist

$$f : (-R, R) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

eine stetige Funktion. Die Funktion f ist differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n x^{n-1}$$

Bemerkung:

Also gilt $f \in C^\infty$.

Beweis:

Setze

$$g(T) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}T^n \in \mathbb{R}[\![T]\!]$$

Konvergenzradius von g:

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} = \limsup_{n\to\infty} 1 \cdot \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \frac{1}{R}$$

Folgt:

$$g : (-R, R) \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ist stetig. Also gilt:

$$\int_0^x g(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x n a_n t^{n-1} dt = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n t^n]_0^x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = f(x) - \underbrace{f(0)}_{a_0}$$

$$\Rightarrow g = f + C \Leftrightarrow f' = g$$

□

Beispiel:

Wir wollen zeigen:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(2)$$

Betrachte hierfür:

$$f : (-1, 1) \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \cdot x^n$$

f ist stetig differenzierbar und es gilt

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n x^{n-1} \\ &= \frac{-1}{1+x} \end{aligned}$$

Wir wissen: $\log(y)' = \frac{1}{y}$ für $y > 0$. Also $(-\log(1+x))' = \frac{-1}{1+x}$.
Folgt:

$$f(x) = -\log(1+x) + C$$

Aus der Funktionsdefinition folgt: $f(0) = 0$ aber auch $= -\log(1+0) + C = 0 + C \Rightarrow C = 0$

$$\Rightarrow -\log(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n \ \forall x \in (-1, +1)$$

Die Funktion $x \to -\log(1+x)$ ist stetig auf $(-1,+1]$ und die Reihe $\sum \frac{(-1)^n}{n} 1^n$ konvergiert. Jetzt folgt laut abel'schem Grenzwertsatz:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\log(1+1) = -\log(2)$$

8.2 Integrationsmethoden

Theorem 8.2.1: Eigenschaften des Integrals

- Invertieren der Intergrationsgrenzen

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- Additivität

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- Linearität

$$\int_a^b r * f(x)dx = r * \int_a^b f(x)dx$$

- Abschnittweise Integration

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

Theorem 8.2.2: Partielle Integration

Es seien $f, g : I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, und F, G ihre jeweiligen Stammfunktionen. Dann gilt:

$$\int f(x)'g(x)dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)dx$$

Oder, ohne die Voraussetzung der Differenzierbarkeit an f und g:

$$\int Fgdx = FG - \int fGdx$$

Beweis:

Durch Ableiten erhält man wieder:

$$Fg = fG + Fg - fG$$

□

Beispiel:

Berechne:

$$\int \underbrace{x}_{F} \underbrace{\exp(x)}_{g} \, dx$$

Setze: $f(x) = 1$, $G(x) = \exp(x)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\int x \exp(x) dx &= F(x)G(x) - \int 1 \exp(x) dx \\ &= x \exp(x) x - \exp(x) + C \\ &= (x-1)\exp(x)\end{aligned}$$

Beispiel:

Berechne:

$$\int \log(x) dx$$

Setze: $f(x) = (\log(x))' = \frac{1}{x}$, $G(x) = x$ Also ist

$$= \log(x)x - \int \frac{1}{x} x dx = x(\log(x) - 1) + C$$

Kann auch durch ableiten nachgeprüft werden.

Theorem 8.2.3: Substitution

Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f : I \to J$, $G : J \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g = G'$ und f, G stetig differenzierbar.

$$G(f(x))' = g(f(x)) \cdot f'(x) \text{ (Kettenregel)}$$

Folgt:

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int G(f(x))' dx = G(f(x)) + C$$

Mit $u = f(x)$ kann man schreiben

$$\int g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int g(u) du$$

Für bestimmte Integrale muss man die Anpassung der Intergrationsgrenzen beachten:

$$\int_a^b g(f(x)) \cdot f'(x) dx = \int_{f(a)}^{f(b)} g(u) du$$

Beispiel:

- $\int \frac{x}{1+x^2}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(2x)dx$. Also gilt:
  - $u = 1 + x^2$
  - $u' = 2x$
  - $g(u) = \frac{1}{u}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2}(2x)dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}du = \frac{1}{2}\log(u) = \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

$$\int_a^b \frac{x}{1+x^2}dx = \left[\frac{1}{2}\log(u)\right]_{a^2+1}^{b^2+1} = \left[\frac{1}{2}\log(1+x^2)\right]_a^b$$

- $\int \sqrt{r^2 - x^2}dx$. Substitution:
  - $x = r\sin(\vartheta) = f(\vartheta)$
  - $dx = df(\vartheta) = r\cos(\vartheta)d\vartheta$
  - $g(x)$ bleibt weiterhin: $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2}dx &= \int \underbrace{\sqrt{r^2 - \underbrace{r^2 sin(\vartheta)}_{f(\vartheta)}^2}}_{g(f(\vartheta))} \cdot \underbrace{r\cos(\vartheta)}_{f'(\vartheta)} d\vartheta \\ &= r^2 \int \cos(\vartheta)^2 d\vartheta \\ &= r^2 \int \frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}d\vartheta\end{aligned}$$

Durch erneute Substitution $\varphi = 2\vartheta$, $d\vartheta = 2d\vartheta$ erhält man:

$$\begin{aligned}r^2 \int \frac{1+\cos(2\vartheta)}{2}d\vartheta &= \frac{r^2}{2}\int \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(\varphi)d\varphi \\ &= \frac{r^2}{4}\left(\int 1d\varphi + \int \cos(\varphi)d\varphi\right) \\ &= \frac{r^2}{4}(\varphi + \sin(\varphi)) \\ &= \frac{r^2}{4}(2\vartheta + \sin(2\vartheta))\end{aligned}$$

Jetzt gilt $\vartheta = \arcsin(1/r)$ also folgt:

$$\begin{aligned}\int \sqrt{r^2 - x^2}dx &= \frac{r^2}{4}(2\vartheta + \sin(2\vartheta)) \\ &= \frac{r^2}{4}(2\arcsin(x/r) + \sin(2\arcsin(x/r))) \\ &= \frac{r^2}{4}(2\arcsin(x/r) + \frac{1}{2}x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}) + C\end{aligned}$$

Theorem 8.2.4

Integrale der Form $\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx$ mit P, Q Polynomen konkret berechnen. Im Allgemeinen kann eine beliebige Funktion und insbesondere ihr Integral nicht mit den uns bekannten Funktionen **nicht** nicht berechnet werden.

Beispiel:

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2)dt$$

Ist stetig und somit auf jeden Fall integrierbar, kann aber nicht konkret berechnet werden. Probieren wir trotzdem:

$$S(1) = \int_0^1 \sin(t^2)dt$$

- $\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$
- $\sin(x^2) = x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^10}{120} - \frac{x^14}{7!} + \ldots$

Also:

$$\begin{aligned} s(1) &= \int_0^1 \left(x^2 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^10}{120} - \frac{x^14}{7!} + \ldots\right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{42}t^7 + \frac{1}{1320}t^11 - \frac{1}{7! \cdot 15}t^15 + \ldots\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600} + \ldots \end{aligned}$$

jetzt kann man mit beliebiger Präzision abschätzen:

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} > S(1) > \frac{1}{3} - \frac{1}{42} + \frac{1}{1320} - \frac{1}{75600}$$

8.2.1 Trigonometrische Identäten

Theorem 8.2.5: Wichtige Winkel

Grad	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
Radian	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\theta$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\theta$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	

Theorem 8.2.6: Additionstheoreme

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \\
\sin(x-y) &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y) \\
\cos(x+y) &= \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \\
\cos(x-y) &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y) \\
\tan(x+y) &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \\
\tan(x-y) &= \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}
\end{aligned}$$

Theorem 8.2.7: Pythagoräische Identäten

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
1 + \tan^2 x &= \sec^2 x \\
1 + \cot^2 x &= \csc^2 x
\end{aligned}$$

Theorem 8.2.8: Halbwinkelidentität

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} \\
\cos\left(\frac{x}{2}\right) &= \pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \\
\tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1-\cos x}{\sin x} \\
&= \frac{\sin x}{1+\cos x}
\end{aligned}$$

Theorem 8.2.9: Doppelwinkelidentität

$$\begin{aligned}
\sin(2x) &= 2\sin x \cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x - 1 \\
&= 1 - 2\sin^2 x \\
\tan(2x) &= \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}
\end{aligned}$$

Theorem 8.2.10: Summe-zu-Produkt Identät

$$\sin(x) + \sin(y) = 2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\sin(x) - \sin(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) + \cos(y) = 2\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\cos(x) - \cos(y) = -2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$
$$\tan(x) + \tan(y) = \frac{\sin(x+y)}{\cos x \cos y}$$
$$\tan(x) - \tan(y) = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}$$

Theorem 8.2.11: Produkt-zu-Summe Identät

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{1}{2}\big[\cos(x-y) - \cos(x+y)\big]$$
$$\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big[\cos(x-y) + \cos(x+y)\big]$$
$$\sin(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\big[\sin(x+y) + \sin(x-y)\big]$$
$$\tan(x)\tan(y) = \frac{\tan x + \tan y}{\cot x + \cot y}$$
$$\tan(x)\cot(y) = \frac{\tan x + \cot y}{\cot x + \tan y}$$

Theorem 8.2.12: Reziprokenidentität

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

Theorem 8.2.13: Kofunktionsidentität

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$
$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cot x$$
$$\cot\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \tan x$$
$$\sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \csc x$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sec x$$

Theorem 8.2.14: Potenzverringerungsidentität

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$$
$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$
$$\tan^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x}$$

8.3 Uneigentliche Integrale

Nachfolgend werden wir versuchen zu berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \qquad \int_0^1 \log(x) dx$$

Definition 8.3.1

Seio $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall mit Endpunkten $a < b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ stetig (also lokal integrierbar). Wir sagen $\int_a^b f(x)dx$ konvergiert, falls für ein beliebiges $c \in I$ die Grenzwerte

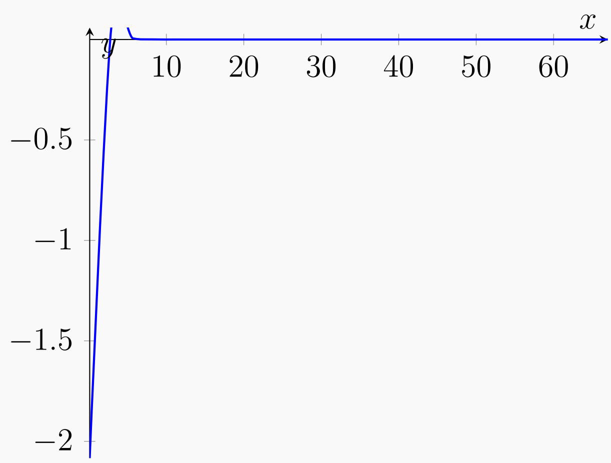
$$A = \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} \int_x^c f(t)dt \qquad B = \lim_{\substack{x \to b \\ x < b}} \int_c^x f(t)dt$$

existieren. In diesem Fall schreibt man

$$\int_a^b f(x)dx = A + B$$

Beispiel:

Sei $f(x) = \log(x)e^{-x}$.



Wir wollen berechnen:

$$\int_0^\infty \frac{\log(x)}{e^x} dx$$

Zunächst berechnen wir:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \log(x) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} \int_t^1 \log(x) dx \\
&= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} [x \log(x) - x]_0^1 \\
&= -1 - \lim_{\substack{t \to 0 \\ t>0}} (t \log(t) - t) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Theorem 8.3.1

Sei $f : [0, \infty] \to \mathbb{R}$ monoton fallend, $f \geqslant 0$. Dann gilt:

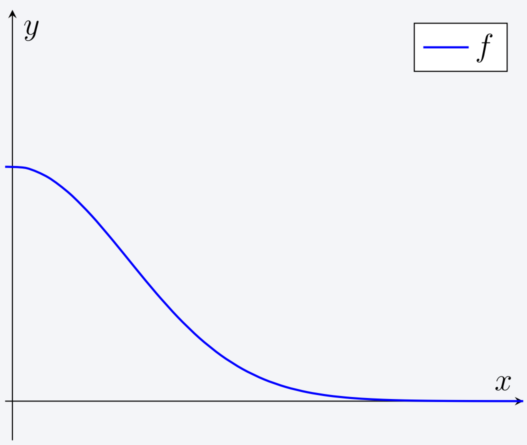
$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant \int_0^\infty f(x)dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} f(n)$$

Insbesondere gilt:

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \text{ konvergiert} \Leftrightarrow \int_0^\infty f(x)dx \text{ konvergiert}$$

Beweis:

f ist der Form:



und nach oben beschränkt durch den Wert $f(0)$.
Sei $N \in \mathbb{N}$, definiere $u : [0, N] \to \mathbb{R}$ durch $u(x) = f(\lceil x \rceil)$. Dann gilt: $u \leqslant f$ (weil f monoton fallend). Jetzt folgt:

$$\sum_{n=1}^{N} f(n) = \int_0^N u(x)dx \leqslant \int_0^N f(x)dx$$

Mit Grenzwert $N \to \infty$ folgt $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n) \leqslant \int_0^\infty f(x)dx$.
Für die zweite Ungleichung betrachte $o(x) = f(\lfloor x \rfloor)$ □

Beispiel:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \quad f(x) = \frac{1}{x+1}$$

$$\int_0^\infty f(x) = \lim_{b\to\infty} [\log(x+1)]_0^b = \lim_{b\to\infty} (\log(b)) - 1 = \infty$$

Nach dem Satz gilt aber:

$$\int_0^\infty f(x)dx \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Beispiel - zu uneigentlichen Integralen generell:

Sei $\Gamma : (0, \infty) :\to \mathbb{R}$ die Funktion gegeben durch

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \cdot \exp(-x)dx$$

Zunächst müssen wir zeigen, dass dieses Integral für alle postiven s konvergiert.

$$\int_a^b \underbrace{x^{s-1}}_{f} \underbrace{\exp(-x)}_{G} dx = \left[\frac{1}{s} x^s \exp(-x)\right]_a^b + \frac{1}{s} \int_a^b \underbrace{x^s \exp(-x)}_{stetig} \quad s > 0, 0 < a < b < \infty$$

Also existiert $a \to 0$ als Grenzwert:

$$\int_0^b x^{s-1} \exp(-x)dx = \frac{1}{s} b^s \exp(-b) + \frac{1}{s} \int_0^b x^s \exp(-x)dx$$

Es gibt $R > 0$ mit $\exp(x) \geqslant x^{-s+2}$ $\forall x \geqslant \mathbb{R}$ also $\exp(-x) \leqslant x^{-s+2}$, folgt:

$$\lim_{b\to\infty} \int_a^b x^s \exp(-x)dx \leqslant \int_a^R x^s \exp(-x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_R^b x^{-2}dx$$

Jetzt möchten wir ein par Werte berchnen:

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty x^{s-1} \exp(-s)dx \\
&= 0 + \frac{1}{s} \int_0^\infty x^s \exp(-x)dx \\
&= \frac{1}{s} \Gamma(s+1)
\end{aligned}$$

Also allgemein:

Theorem 8.3.2

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s+1)$$

Jetzt gilt:

- $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$
- $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6$
- ...
- $\Gamma(n) = (n-1)!$

8.4 Taylorreihen

8.4.1 Vorüberlegung

$$\log(x+1) = \int \frac{1}{x+1} dx = \int \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{(-1)^n x^n}{n+1}$$

für $x \in (-1, 1)$.
Sei $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ eine Funktion gegeben durch eine Reihe

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

mit Konvergenzradius $> R$. Dann gilt: $a_0 = f(0)$. Außerdem

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Also gilt: $f'(0) = (0+1)a_1 = a_1$
Weiterhin:

$$f''(0) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Also gilt: $f''(0) = 2(2-1)a_2 = 2a_2$ und allgemein gilt: $a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)$.
Als Konsequenz halten wir fest:

Theorem 8.4.1

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \text{ für } x \text{ klein genug} \Leftrightarrow a_n = b_n \ \forall n$$

Definition 8.4.1: Taylor-Notation

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in D$ fix. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ von Klasse C^n. Setze

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

Und für $f \in C^\infty$:

$$L(T) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} T^k \in \mathbb{R}[\![T]\!]$$

Nenne P_n die n-te **Taylor-Approximation** an f bei x_0, und $L(T)$ die **Taylor-Reihe** von f bei x_0.

Bemerkung:

Die Tailor-Reihen stellen somit die optimale polynomiale Annäherung einer beliebigen Funktion dar.

Bemerkung:

Man hätte P_n alternativ auch definieren können als:

$$P_n(x) = \text{ Die eindeutig bestimmte Polynomfunktion vom Grad } n \text{ mit}$$

$$P_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_9)\ \forall k \leqslant n$$

8.4.2 Taylor-Approximation

Theorem 8.4.2: Taylor-Approximation

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in D$ fix. Sei $f : D \to \mathbb{R}$ von Klasse C^{n+1}. Dann gilt, für **alle** $x \in D$

$$f(x) = P_n(x) + \int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t) \frac{(x-t)^n}{n!} dt$$

Der zweite Term $R_n = f - P_n$, das Restglied, ist ein Fehlerterm und ist die Kernaussage des Satzes.

Beweis:

Induktion und partielle Integration:

- $n = 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_0(x) + \int_0^x f^{(1)} t \frac{1}{0!} dt \\ &= f(x_0) + \int_0^x f'(t) dt \end{aligned}$$

✓

- Angenommen, der Satz gilt für $n-1$:

$$\begin{aligned} f(x) &= P_{n-1}(x) + \int_{x_0}^{x} f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt \\ &= \underbrace{P_{n-1}(x) + \left[f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right]_{x_0}^{x}}_{P_n(x)} + \underbrace{\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}\frac{(x-t)^n}{n!}dt}_{R_n(x)} \end{aligned}$$

□

Korollar 8.4.2 (1): Taylor-Abschätzung

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $f : I \to \mathbb{R}$ von Klasse C^{n+1}. Sei $\delta > 0$ und setze

$$M = \sup\{|f^{(n+1)}(t)| \mid t \in [x_0-\delta, x_0+\delta]\}$$

Dann gilt für $x \in [x_0-\delta, x_0+\delta]$:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant \frac{M \cdot |x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!} = \underbrace{\mathcal{O}((x-x_0)^{n+1})}_{\text{für } x\to x_0}$$

Beweis:

Angenommen $x_0 \leqslant x$:

$$\begin{aligned} |f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}\frac{(x-t)^n}{n!}dt\right| \\ &\leqslant \int_{x_0}^{x} \left|f^{(n+1)}\frac{(x-t)^n}{n!}\right| dt \\ &\leqslant M\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!}dt = M\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!} \end{aligned}$$

Für den Fall $x_0 > x$, gilt:

$$\begin{aligned} \left|\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}\frac{(x-t)^n}{n!}dt\right| &\leqslant \int_{x}^{x_0} \left|f^{(n+1)}\frac{(x-t)^n}{n!}\right| dt \\ &= -\int_{x_0}^{x} \left|f^{(n+1)}\frac{(x-t)^n}{n!}\right| dt \\ &\leqslant -M\int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} = M\frac{(x_0-x)^{n+1}}{(n+1!)} \end{aligned}$$

Folgt:

$$|f(x) - P_n(x)| = |R_n(x)| \leqslant M\frac{|x_0-x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

□

Definition 8.4.2: Analytische Funktionen

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : I \to \mathbb{R}$ eine glatte Funktion. Wir sagen, f sei **analytisch** falls für jedes $x_0 \in I$ ein $\delta > 0$ existiert mit

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

für alle $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$

Bemerkung:

Das entspricht der Aussage: $f(x) = \lim_{n\to\infty} P_n(x)$, also $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$

Bemerkung:

Theorem 8.4.3

Sei $f : (-R, R) \to \mathbb{R}$ gegeben durch eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Dann ist f analytisch.

Also zum Beispiel $\sin, \cos, \exp, \ldots$ und alle daraus zusammengesetzten Funktionen.

Beweis:

Betrachte $x_0 \in (-R, R)$ und $\delta > 0$, so dass $[x_0 - \delta, x_0 + \delta] \subseteq (-R, R)$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0 + x_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_0^{n-k} (x - x_0)^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\underbrace{\sum_{n=k}^{\infty} a_n \binom{n}{k} x_0^{n-k}}_{b_k} \right) (x - x_0)^k \\
&\text{Umordnung möglich weil die Reihen absolut} \\
&\text{konvergieren, wegen der Wahl von } x_0 \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k
\end{aligned}$$

□

Bemerkung - Rigidität/Starrheit analytischer Funktionen:

Theorem 8.4.4

Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f, g : I \to \mathbb{R}$ analytisch. Angenommen es existiert ein $x_0 \in I$, $\delta > 0$ mit $f(x) = g(x)\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.
Dann gilt

$$f(x) = g(x)\ \forall x \in I$$

Beweis:

Setze $s = \sup\{x \in I \mid x \geqslant x_0, f(x) = g(x)\}$ also $s \in I$ und $f(s) = g(s)$ (weil f und g stetig sind) und sogar $f(x) = g(x)\ \forall x \in (x_0, s]$.
Betrachte die Tailor-Reihen für $x \in (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{k} a_n (x - s)^n \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{k} b_n (x - s)^n$$

Man berechnet nun:

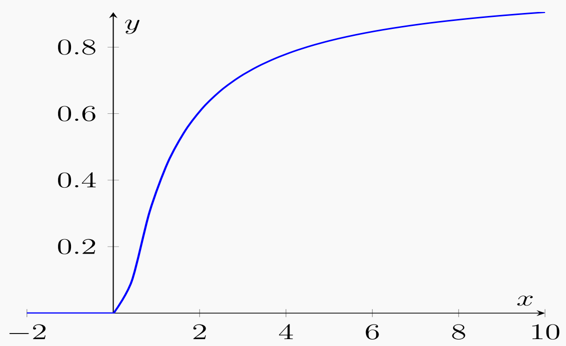
$$a_n = \frac{f^{(n)}(s)}{n!} \qquad b_n = \frac{g^{(n)}(s)}{n!}$$

Berechne die Ableitungen 'von links': wegen $f(x) = g(x)$ für $x_0 \leqslant x \leqslant s : a_n = b_n$.
Folgt: $f(x) = g(x)\ \forall x \in [x_0, s] \cup (s - \varepsilon, s + \varepsilon)$ also $x \in [x_0, s + \varepsilon)$. Somit entsteht ein Widerspruch zur Definition von s. $\square$

Beispiel:

Wir schreiben $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für die Funktion gegeben durch:

$$\Psi(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) & x > 0 \\ 0 & x \leqslant 0 \end{cases}$$



Behauptung Ψ ist **glatt.**

Für $x > 0$ gilt: $\Psi'(x) = \dfrac{1}{x^2} \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

Für $x \leqslant 0$ gilt: $\Psi'(x) = 0$

Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Psi'(x) = \lim_{x\to 0 x>0} \frac{\exp\left(-\frac{1}{x}\right)}{x^2} = \lim_{y\to\infty} y^2 \exp(-y) = 0$$

Für $x > 0$ gilt: $\Psi''(x) = \left(-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^4}\right) \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$

Es gilt

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \Psi''(x) = P(y) \cdot \exp(-y) = 0$$

Induktiv: $\Psi^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ für $x > 0$.

$$\Psi^{(n+1)}(x) = \left[\underbrace{\left(P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)' + P_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{1}{x^2}}_{P_{n+1}(1/x)}\right] \cdot \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$$

Folgt: Ψ ist nicht analytisch.

8.5 Numerische Methoden

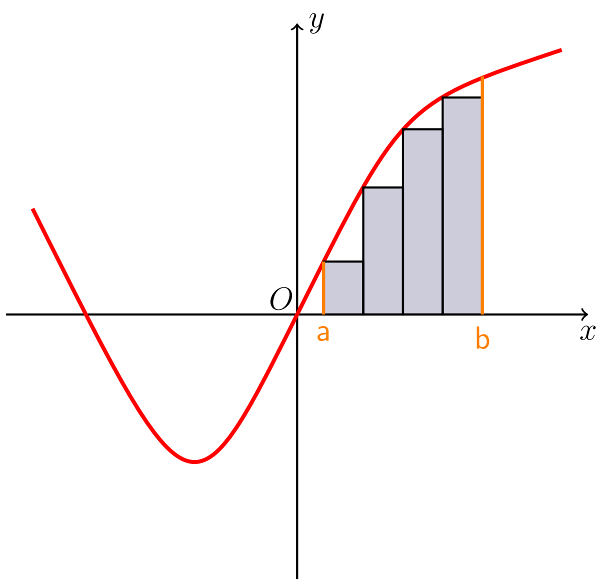
8.5.1 Newton-Cotes Verfahren

Wir wollen

$$\int_a^b f(x)dx$$

numerisch berechnen, für gegebene a, b und f (stetig).

Sei $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Setze $x_k = a + \frac{b-a}{n} k$ also $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.



$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(x_k) + F_1$$

Theorem 8.5.1: Quadraturformeln

Seien $a < b$ reell, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Setze $x_k = a + \frac{b-a}{n}k$, $h = \frac{b-a}{n}$

1. Rechteckregel: Ist f stetig differenzierbar, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = h(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})) + F_1$$

mit $|F_1| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2n} \cdot ||f''||_\infty$.

2. Trapezregel: Ist f von Klasse C^2, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}(f(x_0) + 2f(x_1) + 2f(x_2) + ... + 2f(x_{n-1}) + f(x_n)) + F_2$$

mit $|F_2| \leqslant \frac{(b-a)^3}{6n^2} \cdot ||f''||_\infty$ (schon deutlich geringer).

3. Simpson-Regel: Ist f von Klasse C^4 und n gerade, so gilt:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(f(x_0)+4f(x_1)+2f(x_2)+4f(x_3)+2f(x_4)+...+4f(x_{n-1})+f(x_n))+F_3$$

mit $|F_3| \leqslant \frac{(b-a)^5}{45n^4}||f^{(4)}||_\infty$.

Bemerkung:

Diese Verfahren funktionnieren für alle glatten Funktionen, also insbesondere auch für **nicht-analytische** Funktionen (,die keine Taylor-Entwicklung haben).

Beweis:

Siehe Skript. Insb 1, 2 als gute Wiederholung.
Dies wird ausführlich in der Vorlesung über numerische Methoden behandelt. □

Beispiel:

Berechne

$$\int_0^1 \sin(t^2)dt$$

bis auf 2 Nachkommastellen (im Dezimalsystem, duh).
Benutzen wir die Trapezregel: $b - a = 1$, $n \geqslant 1$

- $f(t) = \sin(t^2)$
- $f'(t) = 2t\cos(t^2)$
- $f''(t) = 2\cos(t^2) - 4t^2\sin(t^2)$

Ohne große Berechnung können wir zumindest abschätzen, dass $||f''||_\infty \leqslant 6$ ist, und das reicht schon locker aus.

$$\int_0^1 \sin(t^2)dt = \frac{1}{2n}\left(\sin(0) + 2\sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + 2\sin\left(\frac{4}{n^2}\right) + \sin(1)\right) + F_2$$

$$|F_2| \leqslant \frac{1^3}{6n^2} \cdot 6 = \frac{1}{n^2}$$

Für eine Präzision bis auf 1 Hunderstel wählen wir: $n = 10$

Kapitel 9

Topologische Grundbegriffe

9.1 Topologische Räume

Definition 9.1.1: Topologie

Ein **topologischer Raum** ist ein geordnetes Paar (X, τ) bestehend aus einer Menge X und einer Familie von Teilmengen τ von X, die den folgenden 3 Axiomen genügt.

1. $\emptyset \subseteq X$ ist offen und $X \subseteq X$ ist offen.
2. Beliebige Vereinigungen von offenen Mengen sind offen.
3. Endliche Durchschnitte von offenen Mengen sind offen.

1. $\emptyset, X \in \tau$
2. $U_1, U_2 \in \tau \Rightarrow U_1 \cap U_2 \in \tau$
3. $\mathcal{U} \subseteq \tau \Rightarrow \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U \in \tau$

Wir nennen die Familie τ eine **Topologie** auf X und Teilmengen $U \subseteq X$, die zur Familie τ gehören **offene** Mengen.
Wir nennen...

- eine Teilmenge $F \subseteq X$, deren Komplement offen ist, eine **abgeschlossene** Teilmenge.
- eine Teilmenge $V \subseteq X$ **Umgebung** von x, falls eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ mit $x \in U$ und $U \subseteq V$ existiert.
- eine Teilmenge V eine **offene Umgebung** von x, falls V offen ist.
- eine Teilmenge V eine **abgeschlossene Umgebung** von x, falls V abgeschlossen ist.

Beispiel:

- $\mathcal{P}(X)$ für eine Beliebige Menge X ist eine Topologie. Sie heißt diskrete Topologie auf X, bezüglich ihr sind alle Teilmengen von X offen. (Sie sind alle in τ enthalten.)
- $\tau = \{\emptyset, X\}$ ist ebenfalls eine Topologie, nämlich die triviale, oder indiskrete Topologie.
- Die Klasse aller Mengen, die jeweils nur x enthalten, für alle Elemente aus X definiert eine Topologie auf X.

Definition 9.1.2: Induzierte Topologie

Sei X ein topologischer Raum, sei $Y \subseteq X$ eine Teilmenge. Wir nennen

$$\tau|_Y = \{Y \cap U \mid U \subseteq X \text{ offen } \}$$

die auf Y **induzierte Topologie**. (U offen $\Leftrightarrow U \in \tau$)
$V \subseteq Y$ ist offen (für die induzierte Topologie) genau dann wenn eine offene Teilmenge $U \subseteq X$ existiert, mit $V = Y \cap U$. Allgemeiner nennen wir in diesem Fall $V \subseteq Y$ **relativ offen**.

Beispiel:

$X = \mathbb{R}^3$, $Y = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ (die Kugeloberfläche).
Hier wird (selbstverständlicherweise) die Standardtopologie verwendet. Diese Teilmenge $Y \subseteq X$ ist nicht offen (es lassen sich keine offenen Bälle um alle Punkte legen).
Bezüglich anderer Topologien kann die Antwort anders ausfallen.

$$V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0\}$$

ist in Y offen, in X aber weiterhin nicht, also relativ offen.
Beweis: $V = Y \cap \underbrace{\{(x, y, z) \mid z > 0\}}_{\text{offen in } \mathbb{R}^3}$

Definition 9.1.3: Umgebung

Sei X ein topologischer Raum, $x \in X$. Eine Teilmenge $W \subseteq X$ heißt **Umgebung** von x, falls eine Teilmenge $U \subseteq X$ existiert mit $x \in U \subseteq W$.
Ist W offen, so ist W eine Umgebung von x.

Definition 9.1.4

Sei X ein topologischer Raum, $Y \subseteq X$.

- Das **Innere** von Y ist

$$\begin{aligned}\mathring{Y} &= \{x \in Y \mid Y \text{ ist eine Umgebung von } x\} \\ &= \{x \in Y \mid \ \exists U \in x \text{ offen mit } x \in U \subseteq Y\}\end{aligned}$$

Bemerkung - Alternative Definition:

$$\bigcup_{\substack{U \text{ offen} \\ U \subseteq Y}} U = \left(\overline{Y^C}\right)^C$$

Theorem 9.1.1

$\mathring{Y}$ ist offen.

- Der **Abschluss** von Y ist

$$\overline{Y} = \{x \in X \mid W \cap Y \neq \emptyset \, \forall \text{ Umgebungen } W \text{ von } x\}$$

Bemerkung - Alternative Definition:

$$\overline{Y} = \left((\mathring{Y^C}) \right)^C = \bigcap_{\substack{A \text{ abgeschlossen} \\ \text{mit } Y \subseteq A}} A$$

Lemma 9.1.1

Sei (X, τ) ein topologischer Raum, $Y \subseteq M \subseteq X$ Unteraume und τ_M eine induzierte Topologie.

Für $\overline{Y^M}$, den Abschluss von Y bezüglich M gilt:

$$\overline{Y^M} = \overline{Y} \cap M$$

- Der **Rand** von Y ist

$$\partial Y = \overline{Y} \backslash \mathring{Y} = X \backslash \left(\mathring{Y} \cup (\mathring{Y})^C \right)$$

Beispiel:

$X = \mathbb{R}$, $Y = (0, 1]$. Dann gilt:

$$\mathring{Y} = (0, 1) \quad \overline{Y} = [0, 1] \quad \partial Y = \{0, 1\}$$

Beweis - der Äquivalenz der Definitionen von Abschluss:

$$x \in (\mathring{Y^C}) \Leftrightarrow \exists U \text{ offen } : x \in U \text{ und } U \cap Y \neq 0$$
$$x \notin (\mathring{Y^C}) \Leftrightarrow \forall U \text{ offen } : x \in U \text{ und } U \cap Y \neq 0$$
$$\Leftrightarrow x \in \left((\mathring{Y^C}) \right)^C$$

□

Beweis - des Lemmas:

$$
\begin{aligned}
& x \in M \cap \overline{Y^M} \\
\Leftrightarrow & \exists U \in \tau : x \in U \text{ und } U \cap Y = \emptyset \text{ und } x \in M \\
\Leftrightarrow & x \in U \cap M \text{ und } (U \cap M) \cap Y = \emptyset \\
\Leftrightarrow & x \in \left(\overline{Y^M}\right)^C \\
\Rightarrow & \overline{Y^M} = \overline{Y} \cap M
\end{aligned}
$$

□

9.1.1 Stetige Abbildungen

Definition 9.1.5: Homöomorphismus

Seien (X, τ) und (X, σ) topologische Räume. Eine **stetige Abbildung** von (X, τ) nach (X, σ) ist eine Abbildung $f : X \to Y$ so, dass für jede offene Teilmenge $U \subseteq Y$ das Urbild $f^{-1}(U) \subseteq X$ offen ist.
Eine bijektive, stetige Abbildung, deren Inverses ebenfalls stetig ist, heißt **Homöomorphismus**.

Theorem 9.1.2

Seien X, Y und Z topologische Räume.

- Die Identitätsabbildung $id_X : X \to X$ ist stetig.
- Sind $f : X \to Y$ und $g : Y \to Z$ stetig, so ist die Verknüpfung $g \circ f : X \to Z$ ebenfalls stetig.
- Ist $f : X \to Y$ stetig und bijektiv, so ist die Umkehrabbildung $f^{-1} : Y \to X$ im Allgemeinen **nicht** stetig.

Theorem 9.1.3

Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ eine Teilmenge, und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. Für jedes $x_0 \in \mathbb{R}$ und jedes $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$ so, dass
$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \ \forall x \in D$$
2. Für jede offene Teilmenge $U \subseteq \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(U) \subseteq D$ offen, für die von der Standardtopologie auf $\mathbb{R}$ induzierten Topologie auf D.

Beweis:
Siehe Skript. □

9.1.2 Folgenkonvergenz in topologischen Räumen

Definition 9.1.6

Sei X ein topologischer Raum, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge un X.

- Ein Punkt $a \in X$ heißt **Grenzwert** der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, falls:

$$\forall \text{ Umgebung } W \text{ von } a\ \exists N \in \mathbb{N} : x_n \in W\ \forall n > N$$

- Ein Punkt $a \in X$ heißt **Häufungspunkt** der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$, falls:

$$\forall \text{ Umgebung } W \text{ von } a\ \forall N \in \mathbb{N} :\ \exists n \geqslant N : x_n \in W$$

Definition 9.1.7: Hausdorff'sche topologische Räume

Ein topologischer Raum X heißt **Hausdorff'sch**, falls für alle $x, y \in X$ mit $x \neq y$ Umgebungen w von x und V von y existieren mit

$$W \cap V = \emptyset$$

Beispiel:

- Die Standardtopologie ist Hausdorff'sch.
- Jeder metrische Raum, als Topologie aufgefasst, ist Hausdorff'sch.

Theorem 9.1.4

Sei X ein Hausdorff'scher topologischer Raum, $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Dann hat $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ höchstens einen Grenzwert $a \in X$. Wir schreiben

$$a = \lim_{n \to \infty} x_n$$

Beweis:

Seien x und $y \in X$ Grenzwerte von $(x_n)_{n=0}^{\infty}$. Sei V eine Umgebung von x, U eine Umgebung von y. Dann existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass:

$$n \geqslant N \Rightarrow x_n \in V$$

$$n \geqslant N \Rightarrow x_n \in U$$

Daraus folgt, dass $U \cap V \neq 0$, also laut der Definition des Hausdorff'schen Raums: $x = y$. $\square$

Definition 9.1.8: Folgenstetigkeit

Eine Abbildung $F : X \to Y$ zwischen Hausdorff'schen topologischen Räumen heißt **folgenstetig** falls für jede konvergente Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in X mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)_{n=0}^{\infty} = f(x)$.

Bemerkung - Warnung:

$$\text{stetig} \begin{array}{c} \Rightarrow \\ \not\Leftarrow \end{array} \text{folgenstetig}$$

9.1.3 Topologie und metrische Räume

Theorem 9.1.5

Jeder metrische Raum induziert eine Topologie.

Beispiel - Veranschaulichung:

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die von d induzierte Topologie hat als offene Mengen, Mengen der Form U mit

$$\forall x \in U \; \exists \varepsilon > 0 : B_\varepsilon(x) \subseteq U$$

9.2 Kompaktheit

Definition 9.2.1: Überdeckung

Sei X ein topologischer Raum. Eine **offene Überdeckung** von X ist eine Familie offener Mengen $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ mit $U_i \subseteq X$ offen, so dass

$$\bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i = X$$

gilt.
Wir sagen, dass für eine Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ die Familie $(U_j)_{j\in\mathcal{J}}$ eine **Teilüberdeckung** ist, falls

$$\bigcup_{j\in\mathcal{J}} U_j = X$$

gilt. Wir nenn diese Überdeckung **endlich**, falls $\mathcal{J}$ endlich ist.

Beispiel:

Die Menge aller offenen Teilmengen von X ist eine Überdeckung.
Die Menge X ist eine Überdeckung von X.

Definition 9.2.2: Kompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt **kompakt**, falls **jede** offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung hat.

Bemerkung:

Dies kann in der Regel von Hand nicht nachgeprüft werden, wir brauchen also andere Werkzeuge.

Beispiel - Gegenbeispiele:

- $X = \mathbb{R}$. Setze $U_n = B(n,1) = (n-1, n+1)$. Jetzt ist $(U_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ ist eine offene Überdeckung, hat aber offensichtlich keine endliche Teilüberdeckung.

  $\Rightarrow \mathbb{R}$ ist nicht kompakt.

- $X = (0,1) \subseteq \mathbb{R}$. Setze $U_n = \left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right)$ für $n \geqslant 3$

  $$\bigcup_{n=3}^{\infty} U_n = (0,1) = X$$

  hat keine endliche Teilüberdeckung.

  $\Rightarrow (0,1)$ ist nicht kompakt. (Wir zeigen später, dass aber $[0,1]$ es ist.)

Bemerkung:

Ist X ein topologischer Raum, so heißt $A \subseteq X$ kompakt, falls A als eigenständiger topologischer Raum (mit der von X induzierten Topologie) kompakt ist.
Das heißt: A ist kompakt, wenn für jede Familie offener Mengen $(U_i)_{i\in\mathcal{I}}$ in X mit

$$A \subseteq \bigcup_{i\in\mathcal{I}} U_i$$

eine endliche Teilmenge $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ existiert mit:

$$A = \bigcup_{j\in\mathcal{J}} U_j$$

Theorem 9.2.1: Schachtelungsprinzip

Sei X ein topologischer Raum. Dann ist X kompakt genau dann, wenn das folgende **Schachtelungsprinzip** gilt:
Sei $\mathcal{A}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X, so dass

$$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \neq \emptyset$$

für alle $A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt:

$$\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A \neq \emptyset$$

Beweis:

- kompakt $\Rightarrow$ Schachtelung

  Sei $\mathcal{A} = (A_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie abgeschlossener Teilmengen von X mit

  $$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \emptyset$$

  Setze $U_i = X \backslash A_i \subseteq X$ offen. Es gilt

  $$\bigcap_{i \in \mathcal{I}} U_i = X$$

  X kompakt: $\exists \mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ endlich mit

  $$\bigcup_{j \in \mathcal{J}} U_j = X \Leftrightarrow \bigcap_{j \in \mathcal{J}} A_j = \emptyset$$

- Schachtelung $\Rightarrow$ kompakt

  In die andere Richtung lesen.

$\square$

Korollar 9.2.1 (1)

Ist X kompakt und $A \subseteq X$ abgeschlossen, so ist A kompakt.

Theorem 9.2.2

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zu topologischen Räumen, und sei $A \subseteq X$ kompakt. Dann ist $f(A) \subseteq Y$ kompakt.

Beweis:

Sei $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie offener Mengen in Y mit

$$f(A) \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} U_i$$

f ist stetig $\Rightarrow V_i := f^{-1}(U_i) \subseteq X$ ist offen. Es gilt

$$A \subseteq \bigcup_{i \in \mathcal{I}} V_i$$

Es existiert $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ endlich mit

$$A \subseteq \bigcup_{j \in \mathcal{J}} V_j$$

$$\Rightarrow f(A) \subseteq \bigcup_{j \in \mathcal{J}} U_j$$

$\square$

Definition 9.2.3: Folgenkompaktheit

Ein topologischer Raum X heißt **folgenkompakt**, falls jede Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ in X eine konvergente Teilfolge besitzt.
Ein metrischer Raum $(X.d)$ heißt (folgen)kompakt, falls X als topologischer Raum (τ von d induziert) (folgen)kompakt ist.

Definition 9.2.4: Beschränktheit von metrischen Räumen

Ein metrischer Raum (X, d) heißt **beschränkt**, falls

$$\exists R > 0 : d(x, y) \leqslant R \; \forall x, y \in X$$

Wir nennen (X, d) **total beschränkt** falls für jedes $r > 0$ endlich viele $x_1, ..., x_n \in X$ existieren, mit

$$X = \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r)$$

Bemerkung:

Insbesondere sind kompakte Intervalle total beschränkt.

Definition 9.2.5: Lebesgue-Zahl

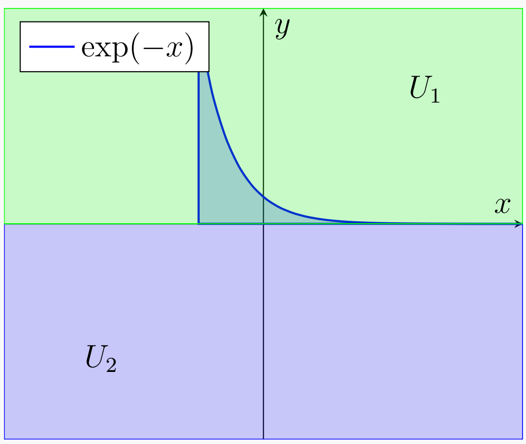
Sei (X, d) ein metrischer Raum, $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von X. Eine reelle Zahl $\lambda > 0$ heißt **Lebesgue-Zahl** zu dieser Überdeckung, falls für alle $x \in X$ ein $i \in \mathcal{I}$ existiert, mit $B(x, \lambda) \subseteq U_i$.

Beispiel:

Sei $X = \mathbb{R}^2$. Betrachte:

$$U_1 = \{(x, y) \mid y > 0\}$$

$$U_2 = \{(x, y) \mid y < \exp(-x)\}$$



Eine Lebesgue-Zahl existiert hier nicht.

Theorem 9.2.3

Sei X ein **metrischer Raum**. Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

1. X ist kompakt.
2. X ist folgenkompakt.
3. Jede unendliche Teilmenge von X hat einen Häufungspunkt.
4. Jede stetige, reellwertige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ ist beschränkt.
5. Jede stetige Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ nimmt ihr Maximum und Minimum auf X an.
6. X ist total beschränkt und jede offene Überdeckung von X besitzt eine Lebesgue-Zahl.
7. X ist total beschränkt und vollständig.

Bemerkung:

Diese Aussagen ergeben im Allgemeinen nur für metrische Räume einen Sinn, für topologische Räume können wir diese Aussagen gar nicht erst treffen; sie setzen eine Metrik voraus. (Beispielsweise Cauchy-Folgen.)

Beweis - Vorausschau:

I $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (7) \Rightarrow (3)$

II $(4) \Leftrightarrow (5) \Leftrightarrow (3)$

III $(6) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)(\Rightarrow (5)) \Rightarrow (6)$

□

Umsetzung:

Beweis - Teil I:

- $(3) \Rightarrow (2)$

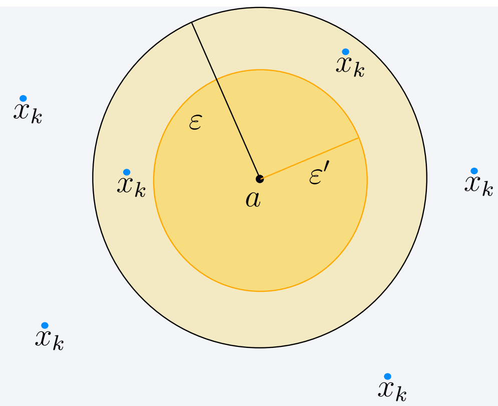
  Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in X. Betrachte $D = \{x_n \mid n \geqslant 0\}$. Ist D endlich, so hat $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine konstante Teilfolge, also einen Häufungspunkt. Ist D unendlich, so hat D einen Häufungspunkt $a \in X$.

  Behauptung: a ist Häufungspunkt der Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$.

  Sei $\varepsilon > 0$, $N \in \mathbb{N}$ und zeige:

  $$\exists n \geqslant N : d(a, x_n) < \varepsilon$$

  Wähle $\varepsilon' \leqslant \varepsilon$ und $d(x_k, a) > \varepsilon'$ für alle $k = 0, 1, 2, ..., N$ mit $x_k \neq a$.



$D \cap B(a, \varepsilon')$ ist undenlich.

$\exists n \in \mathbb{N}$ mit $x_n \in B(a, \varepsilon')$ und $x_n \neq a$. Dann muss $n \geqslant N$. Also $\exists n \geqslant N : d(a, x_n) < \varepsilon' < \varepsilon$.

- $(2) \Rightarrow (7)$

  X vollständig: Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Cauchy-Folge in X. Nach Voraussetzung hat diese Folge einen Häufungspunkt und konvergiert also. (Jede Folge, die eine konvergente Teilfolge hat, konvergiert.)

  X total beschränkt: $\not\!A$ Angenommen, X sei nicht total beschränkt:

$$\exists r > 0 : \; \forall \text{ endliche Teilmenge } F \subseteq X : \bigcup_{x \in F} B(x, r) \subsetneq X$$

  Wähle $x_0 \in X$, wähle $x_1 \in X \backslash B(x_0, r)$. Verfahre n-Mal analog: $x_n \in X \backslash (B(x_0, r) \cup B(x_1, r) \cup ... \cup B(x_{n-1,r}))$ Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ hat keinen Häufungspunkt, weil $\forall n > m \geqslant 0 : d(x_n, x_m) > r$. Also gilt (2) nicht: ↯

- $(7) \Rightarrow (3)$

  Sei $D \subseteq X$ unendlich. Wir konstruieren eine Cauchy-Folge in D mit paarweise verschiedenen Gliedern. Der Grenzwert dieser Folge ist dann ein Häufungspunkt von D.

  X ist toal beschränkt: $\exists F_0 \subseteq X$ endlich mit

$$X = \bigcup_{x \in F_0} B(x, 1)$$

  Es existiert $y_0 \in F_0$ mit $D_0 = D \cap B(y_0, 1)$ unendlich.

  Es existiert auch $F_1 \subseteq X$ ebenfalls endlich mit

$$X = \bigcup_{x \in F_1} B(x, 2^{-1})$$

Es existiert $y_1 \in F_1$ mit $D_0 = D \cap B(y_1, 2^{-1})$ unendlich.

y_0	$D_0 = B(y_0, 1) \cap D$	*unendlich*	$x_0 \in D_0$
y_1	$D_1 = B(y_1, 2^{-1}) \cap D_0$	*unendlich*	$x_1 \in D_1$
y_2	$D_2 = B(y_2, 2^{-2}) \cap D_1$	*unendlich*	$x_2 \in D_2$
	...	...	

$$d(x_0, x_1) \leqslant 1 \quad d(x_1, x_2) \leqslant \frac{1}{2} \quad d(x_2, x_3) \leqslant \frac{1}{4} \quad \dots \quad d(x_n, x_m) \leqslant 2^{-n+1}$$

Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ ist Cauchy.

□

Beweis - Teil II:

- $(4) \Rightarrow (5)$ (Die Rückrichtung ist offensichtlich)

  Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Setze $M = \sup\{f(x) \mid x \in X\}$. $\not\exists$ Angenommen $f(x) < M \; \forall x \in X$. Dann gilt:

  $$g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \text{ ist wohldefiniert und stetig auf} X$$

  g ist nach Voraussetzung beschränkt, also $\exists S \in \mathbb{R} : g(x) \leqslant S \; \forall x \in X$

  $$\begin{aligned} f(x) &\leqslant M - \frac{1}{S} \\ \Leftrightarrow \sup\{f(x) \mid x \in X\} &\leqslant M - \frac{1}{S} \\ &< M = \sup\{f(x) \mid x \in X\} \end{aligned}$$

  $$\Rightarrow -\frac{1}{S} = 0 \Leftrightarrow -1 = 0 \lightning$$

- $(5) \Rightarrow (3) (\Leftrightarrow \neg(3) \Rightarrow \neg(5))$

  Angenommen $D \subseteq X$ sei unendlich und ohne Häufungspunkte. Sei $\eta : X \to \mathbb{R}$ die Funktion

  $$\eta(x) = \sup\{\delta > 0 \mid |B(x, \delta) \cap D| \leqslant 1\}$$

  Die Menge D hat keine Häufungspunkte also gilt $\eta(x) > 0 \; \forall x \in X$.

  Behauptung: η ist stetig. Seien $x_1, x_2 \in X$. Setze $r = \eta(x_1) - d(x_1, x_2)$. Falls $r > 0$, dann gilt:

  $$B(x_2, r) \subseteq B(x_1 n \eta(x_1))$$

  Folgt: $\eta(x_2) \geqslant r = \eta(x_1) - d(x_1, x_2)$ (gilt trivialerweise auch für $r \leqslant 0$). Besser gesagt:

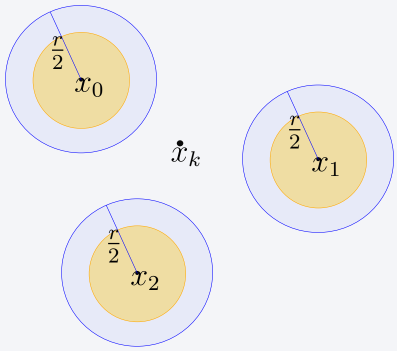
  $$|\eta(x_1) - \eta(x_2)| \leqslant d(x_1, x_2) \quad \text{aus Symmetrie}$$

  $$\Rightarrow \eta \text{ stetig}$$

  Aus (5) folgt außerdem: $\exists r > 0 : \eta(x) \geqslant r \; \forall x \in X$.

Sei $x_0, x_1, \dots$ eine Folge verschiedener Elemente aus D. Definiere $f : X \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x) = \begin{cases} n \cdot \left(\frac{1}{4}r - d(x, x_n)\right) & \text{falls} \quad x \in B\left(x_2, \frac{r}{4}\right) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Die Funktion f ist stetig aber nicht beschränkt: $f(x_n) = \frac{1}{4}r \cdot n$

$(3) \Rightarrow (5)$

$A\!\!\!\forall f : X \to \mathbb{R}$ sei nach oben unbeschränkt und stetig. Es existiert für $n \in \mathbb{N}$ ein $x_n \in X$ mit $f(x_n) \geqslant m$. Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ hat keinen Häufungspunkt.

Hätte sie einen, so hätte sie eine konvergente Teilfolge. f angewandt auf diese konvergente Teilfolge ergäbe wieder eine konvergente Folge. Diese wäre per Voraussetzung aber nicht beschränkt. $\lightning$

$\square$

Beweis - Teil III:

- $(6) \Rightarrow (1)$

  Sei $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von X.

  $$(\ \exists \lambda > 0 : \ \forall x \in X \ \exists i \in \mathcal{I} : B(x, \lambda) \subseteq U_i)$$

  Es existieren endlich viele $x_1, \dots, x_n$ mit:

  $$X = \bigcup_{k=1} B(x_k, \lambda)$$

  Wähle $i_k \in \mathcal{I}$ mit $B(x_{k_i}, \lambda) \subseteq U_{i_k}$. Dann gilt:

  $$X = \bigcup_{k=1} U_{i_k}$$

- $(1) \Rightarrow (4) \Leftrightarrow (2), (5)$

  Sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig.

  $$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{f^{-1}((-n, n))}_{offen}$$

Aus (1) folgt $X = f^-1((-n, n))$ für ein $n \in \mathbb{N}$ (groß genug).

$$\Rightarrow f \text{ beschränkt}$$

- $(2), (5) \Rightarrow (6)$

  Existenz eine Lebesgue-Zahl.

  Sei $(U_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine offene Überdeckung von X. Betrachte $\eta : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch:

  $$\eta(x) = \sup\{\delta > 0 \mid \exists i \in \mathcal{I} \text{ mit } B(x, \delta) \subseteq U_i\}$$

  Es gilt $\eta(x) > 0\ \forall x \in X$. Die Funktion η ist stetig.

  Nach (5) gilt dann: $\eta(x) \geqslant r$ für ein $r > 0$. Dann ist $\lambda = \frac{r}{2}$ eine Lebesgue-Zahl.

  Angenommen X sei nicht total beschränkt: $\exists r > 0$, so dass X nicht eine Vereinigungen endlich vieler Bälle mit Radius r ist. Wähle rekursiv:

  $$x_0 \in X \quad x_1 \in X \backslash B(x_0, r) \quad \dots \quad x_n \in X \backslash (B(x_0, r) \cup \dots \cup B(x_{n-1}, r))$$

  Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ hat keinen Häufungspunkt, da $d(x_n, x_m) \geqslant r\ \forall n \neq m$

□

Theorem 9.2.4

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Ist X kompakt, so ist f gleichmäßig stetig.

Beweis:

Sei $\varepsilon > 0$. Es genügt, ein $\delta > 0$ zu konstruieren, dass die Bedingung der gleichmäßigen Stetigkeit erfüllt:
Da f stetig ist, existiert für jedes $x \in X$ ein $\delta_x > 0$ mit

$$d(x, x') < \delta_x \Rightarrow d(f(x), f(x')) < \frac{\varepsilon}{2}$$

also auch:

$$f(B(x, \delta_x)) \subseteq B\left(f(x), \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Es gilt:

$$X = \bigcup_{x \in X} B\left(x, \frac{\delta_x}{2}\right)$$

ist eine offene Überdeckung von X.
X kompakt: $\exists x_1, \dots, x_n \in X$ mit

$$X = \bigcup_{i=1}^{n} B\left(x, \frac{\delta_{x_i}}{2}\right)$$

Setze $\delta := \min\left\{\frac{\delta_{x_1}}{2}, \frac{\delta_{x_2}}{2}, \dots, \frac{\delta_{x_n}}{2}\right\}$
Überprüfe, dass δ der Voraussetzung genügt:

Seien $x, x' \in X$ mit $d(x,x') < \delta$. Also $\exists i \in \{1, ..., n\}$ mit $x \in B(x_i, \frac{\delta_{x_i}}{2})$. Dann gilt $x' \in B(x_i, \delta_{x_i})$.

$$\begin{aligned} d(f(x), f(x')) &\leqslant d(f(x), f(x_i)) + d(f(x_i), f(x')) \\ &\leqslant \frac{\epsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Theorem 9.2.5

Sei X ein metrischer Raum, $A \subseteq X$ eine Teilmenge.

A kompakt $\Rightarrow A$ **beschränkt** und **abgeschlossen**

Beweis:

Nach dem vorherigen Satz (Teil $(1) \Leftrightarrow (7)$) ist A total beschränkt (also insbesondere beschränkt) und vollständig. Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in A, $x \in X$ mit $x = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Da $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ konvergiert ist die Folge Cauchy, also existiert $a \in A$ mit $a = \lim\limits_{n \to \infty} x_n$. Folgt $a = x \in A$ und somit ist A nach dem Folgenkriterium für Abgeschlossenheit abgeschlossen. □

Nun können wir endlich richtig zeigen:

Theorem 9.2.6: Heine-Borel

Sei $n \geqslant 0$. Eine Teilmenge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt genau dann, wenn A beschränkt **und** abgeschlossen ist.

Korollar 9.2.6 (1)

Abgeschlossene und beschränkte Intervalle sind kompakt.

Beweis:

Ist A kompakt, dannn folgt: A beschränkt und abgeschlossen. (siehe oben)
Ist umgekehrt A beschränkt und abgeschlossen, dann lässt sich zeigen: A ist folgenkompakt $\Leftrightarrow$ kompakt, dank dem obigen Satz.
Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in A. Diese kann aufgefasst werden als eine Folge im $\mathbb{R}^n$, die beschränkt ist. Die Folge hat also einen Häufungspunkt in $\mathbb{R}^n$, bezeichnet als x. Es gilt:

$$x = \lim_{k \to \infty} x_{n_k}$$

$(x_{n_k})_{k=0}^{\infty}$ ist eine Folge in A. Da $A \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen folgt: $x \in A$. Folgt A folgenkompakt $\Leftrightarrow A$ kompakt. □

Dieser Satz stellt ein mächtiges Werkzeug für uns dar: Er wird uns bei sehr vielen weiteren Beweisen hilfreich sein:

Theorem 9.2.7: Fundamentalsatz der Algebra

Jedes nicht-konstante Polynom $f \in \mathbb{C}[T]$ hat eine Nullstelle in $\mathbb{C}$, also $\exists z_0 \in \mathbb{C} : f(z_0) = 0$

Beweis:

Gilt trivialerweise $f(0) = 0$, so sind wir fertig. Im Folgenden nehmen wir also an, $f(0) \neq 0$. Also

$$M := 2|f(0)| > 0$$

Da f nicht konstant ist, existiert $R \geqslant 1$ mit $f(z) > M \ \forall z \in \mathbb{C} : |z| > R$.
Die Menge $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leqslant R\}$ ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt (HB).
Die Funktion $A \to \mathbb{R}$, $z \mapsto |f(z)|$ ist stetig und nimmt also ihr Minimum auf A an:

$$\exists z_0 \in A : |f(z_0)| \leqslant |f(z)| \ \forall z \in A$$

Für $z \in \mathbb{C} \backslash A$ gilt:

$$f(z) \geqslant M = 2|f(0)| \geqslant 2|f(z_0)|$$

Also $|f(z)| \geqslant |f(z_0)| \ \forall z \in \mathbb{C}$.
Behauptung: z_0 ist Nullstelle von f.
Ersetze f durch $f(z - z_0)$ um oBdA. zu sagen: $z_o = 0$. Also $|f(z)| \geqslant |f(0)| \ \forall z \in \mathbb{C}$.
Wir müssen zeigen: $f(0) = 0$. $\not\!\!A$ Angenommen, dies sei nicht der Fall: Schreibe

$$f(T) = a_0 + a_1 T + a_2 T^2 + ... + a_n T^n \quad n = deg(f) \geqslant 1$$

mit $a_n \neq 0$ und $a_0 = f(0) \neq 0$. Wir setzen

$$z = r \cdot e^{i\varphi} = r \cdot \exp(i\varphi) \quad r = |z| > 0, z \neq 0$$

Also wird f zu

$$f(z) = a_0 + a_1 \cdot r \cdot e^{i\varphi} + a_2 \cdot r \cdot e^{i2\varphi} + ... + a_n \cdot r \cdot e^{in\varphi}$$

Sei $l \in \{1, 2, ..., n\}$ **minimal** mit $a_l \neq 0$. Für ein fixes φ gilt:

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_0 + a_l \cdot r^l \cdot e^{il\varphi}| + \mathcal{O}(r^{l+1}) \quad \text{für } r \to 0 \\ &= |a_0| \cdot \left| 1 + \frac{a_l}{a_0} \cdot r^l \cdot e^{il\varphi} \right| + \mathcal{O}(r^{l+1}) \end{aligned}$$

Schreibe $\frac{a_l}{a_0} = s \cdot e^{i\psi}$ und wähle $\varphi = \dfrac{-\psi + \pi}{l}$: Dann gilt: $e^{i(l\varphi + \psi)} = e^{i\pi} = -1$.

$$\begin{aligned} |f(z)| = f(r \cdot e^{i\varphi})| &= |a_0| \cdot |1 + s \cdot e^{i\psi} \cdot r^l \cdot e^{il\varphi}| + \mathcal{O}(r^{l+1}) \\ &= |a_0| \cdot |1 - s \cdot r^l| + \mathcal{O}(r^{l+1}) \\ &\leqslant |a_0| \underbrace{-|a_0| \cdot s \cdot r^l + \mathcal{O}(r^{l+1})}_{<0 \text{ für } r \to 0} < |a_0| = |f(0)| \lightning \end{aligned}$$

□

Beispiel:

Sei $n \geqslant 0$, $S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid ||x|| = 1\}$
Sei $f : S^n \to S \to S^n$ stetig und bijektiv. Dann ist $f^{-1} : S^n \to S^n$ stetig.
Schreibe $g := f^{-1}$. Sei $U \subseteq S^n$ offen. zeige: $g^{-1}(U)$ ist offen.
$A = S^n \backslash U$ ist abgeschlossen und beschränkt in $\mathbb{R}^n$. Folgt $f(A) \subseteq \mathbb{R}^n$ ist kompakt und also insbesondere abgeschlossen.
Also ist $f(U) = g^{-1}$ offen.

9.3 Zusammenhangsbegriffe

Topologisch:

Definition 9.3.1: Zusammenhang

Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, falls $\emptyset$ und X die einzigen Teilmengen von X sind, die offen **und** abgeschlossen sind.

Alternativ:

Definition 9.3.2

X ist zusammenhängend, falls für alle $U_1, U_2 \subset X$ offen, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$, $U_1 \cup U_2 = X$ gilt:

$U_1 = \emptyset$ und $U_2 = X$ oder $U_2 = \emptyset$ und $U_1 = X$

Definition 9.3.3

Wir nennen eine Teilmenge $A \subseteq X$ zusammenhängend, falls A als eigenständiger Raum (mit der von X induzierten Topologie) zusammenhängend ist.

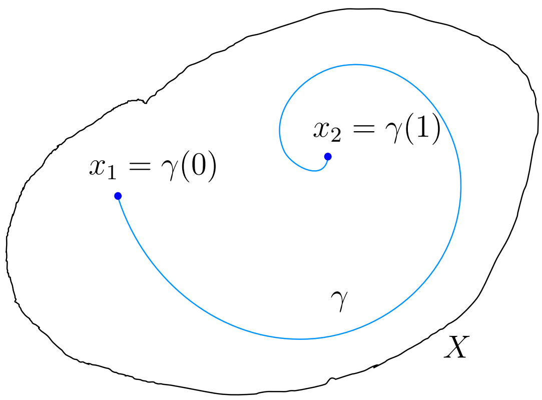
Definition 9.3.4

Eine Teilmenge $A \subseteq X$, die offen und abgeschlossen und zusammenhängend ist, heißt **Zusammenhangskomponente** von X.

Geometrisch:

Definition 9.3.5: Zusammenhang

Ein topologischer Raum X heißt **zusammenhängend**, falls für alle $x_1, x_2 \in X$ eine stetige Funktion $\gamma : [0,1] \to X$ mit $\gamma(0) = x_1$ und $\gamma(1) = x_2$ existiert. Wir nennen γ einen Pfad oder Weg von x_1 nach x_2.



Bemerkung:

Im Allgemeinen sind diese Aussagen nicht gleichwertig: Weg-Zusammenhang impliziert Zusammenhang, aber nicht anders herum.

Theorem 9.3.1

Sein X ein topologischer Raum, $Y_1, Y_2 \subseteq X$ zusammenhängende Teilmengen mit $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Dann ist $Y_1 \cup Y_2$ zusammenhängend.

Beweis:

Sei $A \subseteq Y_1 \cup Y_2$ offen, abgeschlossen und nicht leer.

$$\begin{aligned} A \cap Y_1 &\subseteq Y_1 & \text{oBdA. } A \cap Y_1 \neq \emptyset \\ \Rightarrow A \cap Y_1 &= Y_1 & \text{also } Y_1 \subseteq A \\ \Rightarrow A \cap Y_2 &\neq \emptyset & A \cap Y_2 \subseteq Y_2 \neq \emptyset \\ \Rightarrow Y_2 &\subseteq A \\ \Rightarrow A &= Y_1 \cup Y_2 \end{aligned}$$

□

Diese Aussage können wir auch geometrisch formulieren und beweisen:

Theorem 9.3.2

Sei X ein topologischer Raum, $Y_1, Y_2 \subseteq X$ weg-zusammenhängend, $Y_1 \cap Y_2 \neq \emptyset$. Dann ist $Y_1 \cup Y_2$ weg-zusammenhängend.

Beweis:

Seien $x_1, x_2 \in Y_1, Y_2$- Gilt $x_1, x_2 \in Y_1$, so existiert ein Weg von x_1 nach x_2 in $Y_1 \subseteq Y_1 \cup Y_2$.
Analog, wenn $x_1, x_2 \in Y_2$.
Falls $x_1 \in Y_1, x_2 \in Y_2$, dann wähle $x_3 \in Y_1 \cap Y_2$. Sei γ_1 ein Pfad in Y_1 von x_1 nach x_3 und γ_2 ein Pfad in Y_2 von x_2 nach x_3.
Setze

$$\gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(2t) & \text{für} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ \gamma_2(2t-1) & \text{für} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Dasd ist ein wohldefinierter Pfad von x_1 nach x_2. □

Theorem 9.3.3

Eine Teilmenge $X \subseteq \mathbb{R}$ ist zusammenhängend genau dann, wenn X ein Intervall ist.

Beweis:

Falls $X = \emptyset$ ✓. Also wählen wir $X \neq \emptyset$.
Falls X kein Intervall ist, dann existieren $X_1 < y < x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1, x_2 \in X$, $y \notin X$. Definiere $x \in U_1 = (-\infty, y) \cap X = (-\infty, y] \cap X$. (offen, abgeschlossen und $\neq \emptyset$) $x \in U_1 = (y, \infty) \cap X = [y, \infty) \cap X$. (offen, abgeschlossen und $\neq \emptyset$)

$$U_1 \cap U_2 \neq \emptyset \quad U_1 \cup U_2 = X$$

Ist $X \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $U_1, U_2 \subseteq X$ offen, abgeschlossen und nicht leer mit: $X = U_1 \cup U_2$.
(Zeige nun $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$)
Wähle $x_1 \in U_2$, $x_2 \in U_2$, oBdA. $x_1 < x_2$. Da X ein Intervall ist, folgt: $[x_1, x_2] \subseteq X$.

$U_1 \cap [x_1, x_2] \subseteq [x_1, x_2]$ abgeschlossen, nicht leer.

$$\Rightarrow s := \sup(U_1 \cap [x_1, x_2]) \in U_1$$

$U_1 \cap [x_1, x_2) \subseteq [x_1, x_2)$ abgeschlossen, nicht leer.

$$\Rightarrow s' := \sup(U_1 \cap [x_1, x_2)) \notin U_1$$

$$\Rightarrow s = s' \in U_1 \notin U_1 \lightning$$

$\square$

Bemerkung - Bessere Definition des Intervalls:

Ein Intervall ist eine zusammenhängende Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Theorem 9.3.4

Seien X, Y topologische Räume, $f : X \to Y$ stetig. Ist $A \subseteq X$ zusammenhängend, dann ist $f(A) \subseteq Y$ ebenfalls zusammenhängend.

Beweis:

Nehme oBda. an: $A = X$ und f surjektiv.
Angenommen Y sei nicht zusammenhängend: Es existieren $U_1, U_2 \subseteq Y$ offen, abgeschlossen, nicht leer, $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ und $U_1 \cup U_2 = Y$.
Dann gilt:

$$X = \underbrace{f^{-1}(U_1)}_{\text{offen und abgeschlossen, } \neq \emptyset} \cup \underbrace{f^{-1}(U_2)}_{\text{offen und abgeschlossen, } \neq \emptyset}$$

$$f^{-1}(U_1) \cap f^{-1}(U_2) = \emptyset$$

$\square$

Korollar 9.3.4 (1): Zwischenwertsatz

Aussage bekannt.

Beweis:

Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$. (zz: $F(\mathcal{I})$ ist wieder ein Intervall)
$\mathcal{I}$ Intervall $\Rightarrow$ $\mathcal{I}$ zusammenhängend $\Rightarrow$ $f(\mathcal{I})$ zusammenhängend $\Rightarrow$ $f(\mathcal{I})$ ist ein Intervall. $\square$

Theorem 9.3.5

Sei X ein Weg-zusammenhängender topologischer Raum. Dann ist X zusammenhängend.

Beweis:

Angenommen X Weg-zusammenhänged und $x = U_1 \cup U_2$, $U_1, U_2 \subseteq X$ offen, disjunkt, nicht-leer. Wähle $x_1 \in U_1, x_2 \in U_2$ une einen Pfad $\gamma : [0,1] \to X$ von x_1 nach x_2.

$$0 \in \gamma^{-1}(U_1) \subseteq [0,1] \text{ offen } \neq \emptyset \quad 1 \in \gamma^{-1}(U_2) \subseteq [0,1] \text{ offen } \neq \emptyset$$

sind disjunkt und $\gamma^{-1}(U_1) \cup \gamma^{-1}(U_2) = [0,1]$

$$\Rightarrow [0,1] \text{ nicht zusammenhängend } \lightning$$

$\square$

Theorem 9.3.6

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Dann ist U Weg-zusammenhängend.

Beweis:

Sei $x_0 \in U$ und definiere $G \subseteq U$ als

$$G = \{x \in U \mid \exists \text{ Pfad von } x_0 \text{ nach } x\}$$

Falls G offen und abgeschlossen, dann folgt $G = U$.
G ist offen: Sei $x \in G$, $x \in U$ (offen). $\Rightarrow$ $\exists r > 0 : B(x,r) \subseteq U$. Ist $y \in B(x,r)$, dann existiert ein Pfad von x nach y.
Also existiert ein Pfad von x_0 nach y, $y \in G$. Also $B(x,r) \subseteq G$, folgt G offen.
Selbes Argument $\Rightarrow U \backslash G$ ist offen. $\square$

Definition 9.3.6: Homotopie

Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to X$ Pfade. $x_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$, $x_1 = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$. Eine **Homotopie** oder **Deformation** von γ_0 nach γ_1 ist eine stetige Abbildung:

$$\begin{aligned} h : [0,1] \times [0,1] &\to X \\ h(t,0) &= \gamma_0(t) \\ h(t,1) &= \gamma_1(t) \\ h(0,s) &= x_0 \\ h(1,s) &= x_1 \\ t \mapsto h(t,s) &= \gamma_s(t) \end{aligned}$$

Definition 9.3.7: Einfacher Zusammenhang

Eine Raum X heißt **einfach zusammenhängend**, falls es für alle Pfade γ_0, γ_1 mit $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und $\gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ eine Homotopie von γ_0 nach γ_1 gibt.

Kapitel 10

Mehrdimensionale Differentialrechnung

Sei $U \in \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m, m, n \geqslant 1$ und sei $||.||$ die euklidische Norm.

10.1 Die Ableitung und Ableitungsregeln

Definition 10.1.1: Differenzierbarkeit

Die Funktion $f : U \to \mathbb{R}^m$ heißt bei $x_0 \in U$ **differenzierbar**, falls eine lineare Abbildung $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ existiert, so dass

$$\lim_{n\to 0} \frac{||f(x_0 + h) - f(x_0) - L(h)||}{||h||} = 0$$

In diesem Fall heißt L die **totale Ableitung** von f an der Stelle x_0. Wir schreiben

$$L = (Df)(x_0)$$

f heißt (in U) differenzierbar, falls f bei jedem $x_0 \in U$ differenzierbar ist.

Bemerkung:

- Die Ableitung Df nennt man auch Differential oder Tangentialabbildung.
- L ist durch die obige Bedingung eindeutig bestimmt.
- f differenzierbar $\Rightarrow$ f stetig
- Die Ableitung von $f : U \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist ein Sonderfall mit $L(h) \in \mathbb{R}$:

  $$f'(x_0) = \lim_{n\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

  Es gilt dann: $L : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, L(h) = f'(x_0) \cdot h$ (um wieder die allgemeine Bedingung mit $= 0$ zu erhalten)
- Beachte, dass $(Df)(x_0)$ jetzt eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ist (und nicht mehr nur ein numerischer Wert). Wir schreiben zum Beispiel

  $$Df(\underbrace{x_0}_{\in\mathbb{R}^n})(\underbrace{h}_{\in\mathbb{R}^n \text{ beliebig}}) \in \mathbb{R}^m$$

  Genauso gilt: $Df : U \to Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, $x \mapsto$ ein bestimmter Homomorphismus.

Das bedeutet, $Df(x)$ kann als Matrix dargestellt werden:

$$F = (f)_{ji} = (\partial_j \cdot f_i(x))$$

- Ist f bei $x_0 \in U$ differenzierbar, so können wir schreiben

$$f(x_0 + h) = \underbrace{f(x_0) + Df(x_0)(h)}_{\text{affine lineare Funktion}} + R(h)$$

mit $R(h) := f(x_0 + h) - f(x_0) - Df(x_0)(h)$, einem Restterm, der erfüllt

$$\lim_{n \to 0} \frac{||R(h)||}{||h||} = 0 \text{ also } ||R(h)|| = o(||h||)$$

Definition 10.1.2: Richtungsableitung

Die Ableitung von $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ in Richtung eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$ an der Stelle $x_0 \in U$ ist

$$(\partial_v f)(x_0) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_0 + sv) - f(x_0)}{s} \in \mathbb{R}^m \quad s \in \mathbb{R}$$

falls der Limes existiert.
Ist v der j-te kanonische Basisvektor, so nennt man

$$(\partial_{e_j} f)(x_0) =: \partial_j f(x_0) =: \partial_{x_j} f(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

die **partielle Ableitung** von f bezüglich der j-ten Koordinate.

Beispiel:

$$f(x, y, z) = x(y^2 + \sin(z))$$

- $\partial_x f(x, y, z) = \partial_1 f(x, y, z) = y^2 + \sin(z)$
- $\partial_y f(x, y, z) = \partial_2 f(x, y, z) = 2xy$
- $\partial_z f(x, y, z) = \partial_3 f(x, y, z) = x \cdot \cos(z)$

Theorem 10.1.1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^m$ bei x_0 differenzierbar. Dann existiert die Ableitung von f in Richtung v für jedes $v \in \mathbb{R}^n$ und es gilt:

$$(\partial_v f)(x_0) = (Df)(x_0) \cdot v$$

Beweis:

Nach der Definition der Ableitung gilt

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0)(h) + R(h) \quad \text{mit } ||R|| = 0(||h||)$$

Setze $h = sv$, dann folgt

$$\begin{aligned}(\partial_v f)(x_0) &= \lim_{s\to 0} \frac{f(x_0+sv)-f(x_0)}{s} \\ &= \lim_{s\to 0} \frac{(Df)(x_0)(sv)+R(sv)}{s} \\ &= Df(x_0)(v) + \lim_{s\to 0} \frac{R(sv)}{s} \\ &= Df(x_0)(v)\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung:

Insbesondere ist die Matrix der linearen Abbildung $(Df)(x_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bezüglich der kanonischen Basen gegeben durch:

$$\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \partial_1 f(x_0) & \partial_2 f(x_0) & \dots & \partial_n f(x_0) \\ | & | & & | \end{pmatrix} \overset{*}{=} \begin{pmatrix} \partial_1 f_1(x_0) & \partial_2 f_1(x_0) & \dots & \partial_n f_1(x_0) \\ \partial_1 f_2(x_0) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(x_0) & \partial_2 f_m(x_0) & \dots & \partial_n f_m(x_0) \end{pmatrix}$$

$* : f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$ Diese Matrix nennt man **Jakobi-Matrix** von f bei x_0.

Spezialfall: $m = 1$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$. f wird zu $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und differenzierbar. Schreibe

$$grad\, f(x) = \nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$$

Also ist

$$\begin{aligned}Df(x)(v) &= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x)\cdot v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(x)\cdot v_n \\ &=< grad\, f(x), v > \overset{CS}{\leqslant} ||grad\, f(x)|| \cdot ||v||\end{aligned}$$

Es herrscht Gleichheit, falls $v = \lambda \cdot grad\, f(x)$ für ein $\lambda > 0$. Der 'Größte Anstieg' von f ist in Richtung $grad\, f(x)$.

Beispiel - $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$:

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \quad f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2^2 + \sin(x_3)$$

Berechne die Ableitung bei $x_0 = (1, -2, 3)$.

- $\partial_1 f(x) = \dfrac{\partial f((x_1,x_2,x_3))}{\partial x_1} = x_2^2 \Rightarrow \partial_1 f(x_0) = 4$
- $\partial_2 f(x) = \dfrac{\partial f((x_1,x_2,x_3))}{\partial x_2} = 2x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \partial_2 f(x_0) = 2\cdot 1 \cdot (-2) = -4$

- $\partial_3 f(x) = \dfrac{\partial f((x_1, x_2, x_3))}{\partial x_3} = \cos(x_3) \Rightarrow \partial_3 f(x_0) = \cos(3)$

$$\Rightarrow Df(x_0) = \begin{pmatrix} 4 & -4 & \cos(3) \end{pmatrix} \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$$

Beispiel - $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$**:**

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \quad g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \cdot x_2 \\ x_1 - 3x_2^3 \\ 3x_1 \cdot x_2^2 \end{pmatrix}$$

Berechne die Ableitung bei $x_0 = (1, 1)$

- $g_1(x) = x_1 \cdot x_2$, also $Dg_1(x) = (x_2, x_1) \Rightarrow Dg_1(x_0) = (1, 1)$
- $g_2(x) = x_1 - 3x_2^3$, also $Dg_2(x) = (x_1, 9x_2^2) \Rightarrow Dg_2(x_0) = (1, -9)$
- $g_3(x) = (3x_2^2, 6x_1 \cdot x_2^2)$, also $Dg_3(x) = 6x_1 x_2 \Rightarrow Dg_3(x_0) = (3, 6)$

$$\Rightarrow Dg(x_0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Lemma 10.1.1

Sei

$$f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix} : U \subseteq \mathbb{R}^n \text{ (offen) } \to \mathbb{R}^m$$

Es bezeichne$\pi_j : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ die Projektion auf die j-te Komponente. f ist bei $x_0 \in U$ differenzierbar genau dann, wenn die Komponente $f_j = \pi_j \circ f$ für jedes $j = 1, ..., m$ bei x_0 differenzierbar ist.
Dann gilt:

$$\pi_j \circ Df(x_0) = D(\pi_j \circ f)(x_0)$$

Beweis:

Angenommen $f_j := \pi_j \circ f$ ist für jedes j bei x_0 differenzierbar. Es giht also eine lineare Funktion $L_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und einen Resterm $R_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f_j(x_0 + h) = f_j(x_0) + L_j(h) + R_j(h)$$

(es gilt $R_j = o(||x||)$ für $x \to 0$). Wir können dann schreiben

$$f(x_0+h) = \begin{pmatrix} f_1(x_0+h) \\ \vdots \\ f_m(x_0+h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1(x_0) \\ \vdots \\ f_m(x_0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} L_1(h) \\ \vdots \\ L_m(h) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1(h) \\ \vdots \\ R_m(h) \end{pmatrix}$$

Es filt also auch global

$$f(x_0+h) = f(x_0) + L(h) + R(h)$$

In diesem Ausdruck ist L weiterhin linear und es ist wieder $R_j = o(||x||)$ für $x \to 0$. Also ist f differenzierbar und die zu zeigende Formel gilt sofort.
Ist umgekehrt f bei x_0 differenzierbar, so gilt die Formel wieder über selbige Rechnung. □

Theorem 10.1.2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$. Falls für jedes $j = 1, ..., n$ die partielle Ableitung

$$\partial_j f = \begin{pmatrix} \partial_j f_1 \\ \vdots \\ \partial_j f_m \end{pmatrix}$$

auf ganz U existiert **und** stetig ist, so ist f auf ganz U differenzierbar.

Beweis:

Wegen des Lemmas können wir oBda. $m = 1$ annehmen.
Außerdem können wir (ebenfalls oBdA.) annehmen, dass $0 \in U$ und wir Differenzierbarkeit bei $x_0 = 0$ zeigen wollen. Ferner können wir oBdA. annehmen, dass $f(x_0) = 0$. Dann gilt für kleine $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in U$:

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1, ..., x_n) \\ &= f(x_1, ..., x_n) - f(0, x_2, ..., x_n) \\ &+ f(0, x_2, ..., x_n) - f(0, 0, x_3, ..., x_n) \\ &\vdots \\ &+ f(0, ..., 0, x_n) - f(0, 0, ..., 0) \end{aligned}$$

Die Funktion $k : [0, x_j] \to \mathbb{R}$ durch $k(t) = f(0, ..., 0, x_j, x_{j+1}, ..., x_n)$ ist nach Hyptothese stetig differenzierbar: Die Ableitung entsorucht gerade der j-ten partiellen Ableitung von f. Nach dem Mittelwertsatz existiert also ein Zwischenpunkt $\xi_j \in [0, x_j]$ so, dass

$$\partial_j f(0, ..., 0, \xi_j, x_{j+1}, ..., x_n) = f(0, ..., 0, x_j, x_{j+1}, ..., x_n) - f(0, ..., 0, 0, x_{j+1}, ..., x_n)$$

Für eine beliebige Wahl solcher Zwischenpunkte ξ_j haben wir dann

$$\begin{aligned} f = &\partial_1 f(\xi_1, x_2, x_3, ..., x_n) \cdot x_1 \\ &+ \partial_2 f(0, \xi_2, x_3, ..., x_n) \cdot x_2 \\ &+ ... \\ &+ \partial_n f(0, 0, 0, ..., \xi_n) \cdot x_n \end{aligned}$$

Wir wollen nun zeigen, dass $L : (v_1, ..., v_n) \mapsto \partial_1 f(0) \cdot v_1 + ... + \partial_n f(0) \cdot v_n$ der Ableitung $Df(0)$ entspricht. Hierfür schätzen wir ab:

$$\begin{aligned} R(x) &:= f(x) - L(x) \\ &= f(0 + x) - f(0) - L(x) \\ &= (\partial_1 f(\xi_1, x_2, x_3, ..., x_n) - \partial_1 f(0)) \cdot x_1 \\ &+ (\partial_2 f(0, \xi_2, x_3, ..., x_n) - \partial_2 f(0)) \cdot x_2 \\ &+ \vdots \\ &+ (\partial_n f(0, 0, ..., 0\xi_n) - \partial_n f(0)) \cdot x_n \end{aligned}$$

Nach Annahmen und weil $\frac{|x_j|}{||x||} <\leqslant 1$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt

$$\lim x \to 0 \frac{R(x)}{||x||} = 0$$

Das bedeutet nun, dass f bei $x_0 = 0$ differenzierbar ist und dass die Ableitung $Df(0) = L$ ist. $\square$

Theorem 10.1.3: Kettenregel

Es seien $n, m, k \geqslant 1$ und seien $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen. Seien $f : U \to V$, $g : V \to \mathbb{R}^k$ Funktionen. Sei $x_0 \in U$.
Ist f bei x_0 differenzierbar und g bei $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar, dann ist $g \circ f$ bei x_0 differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} Df(x_0) :&\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \\ Dg(y_0) :&\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k \\ D(g \circ f)(x_0) :&Dg(f(x_0)) \circ Df(x_0) \end{aligned}$$

Bemerkung - Erinnerung:

- Sei $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ eine lineare Abbildung. Schreibe (für die Operator-Norm)

$$||L||_{op} = \sup\{\underbrace{||L(v)||}_{\in \mathbb{R}^m} \mid v \in \mathbb{R}^n \text{ mit } \underbrace{||v||}_{\in \mathbb{R}^n} = 1\}$$

Diese existiert nach Heine-Borel. ($L(v)$ ist stetig und $||v|| = 1$ stellt eine abgeschlossene, beschränkte Teilmenge dar.) Es gilt

$$||L(v)|| \leqslant ||L||_{op} \cdot ||v|| \; \forall v \in \mathbb{R}^n$$

- Landau-Notation:

$$x = o(y) \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{x}{y} = 0$$

Beweis:

Es gilt

$$f(x_0 + x) = f(x_0) + L(x) + R(x) \qquad L = Df(x_0) \quad \underbrace{R(x) = o(||x||)}_{\text{für } x \to 0}$$

$$g(y_0 + y) = g(y_0) + M(y) + S(y) \qquad M = Dy(y_0) \quad S(y) = o(||y||)$$

Definiere nun: $y := f(x_0 + x) - f(x_0) = L(x) + R(x)$. Nun gilt

$$\begin{aligned} g(f(x_0 + x)) &= g(y_0 + y) \\ &= g(y_0) + M(y) + S(y) \\ &= g(f(x_0)) + \underbrace{M(L(x)) + M(R(x))}_{\text{aufgeteilt weil } M \text{ linear ist}} + S(L(x) + R(x)) \end{aligned}$$

Behauptung: $T(x) = M(R(x)) + S(L(x) + R(x))$.
Wir müssen also zeigen: $T(x) = o(||x||)$.

$$||M(R(x))|| \leqslant ||M||_{op} \cdot ||\underbrace{R(x)}_{o(||x||)}|| = o(||x||)$$

Zweiter Term: $S(y) = o(||y||)$ bedeutet $\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0$ mit

$$||y|| < \delta \Rightarrow ||S(y)|| < \varepsilon ||y||$$

Für $y = L(x) + R(x)$:

$$\begin{aligned} ||y|| &\leqslant ||L(x)|| + ||R(x)|| \\ &\leqslant ||L|| \cdot ||x|| + o(||x||) \end{aligned}$$

Für $C := ||L|| + 1$ gilt $\exists \eta > 0$

$$||y|| \leqslant C \cdot ||x|| \quad \text{für } ||x|| \leqslant \eta$$

Für $||x|| < \eta$ gilt dann

$$\begin{aligned} ||S(L(x) + R(x))|| &\leqslant \varepsilon \cdot ||L(x) + R(x)|| \\ &\leqslant C \cdot \varepsilon \cdot ||x|| \\ &= o(||x||) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T(x) = o(||x||)$$

□

Beispiel:

- $n = m = k = 1.$

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & f(x) &= x^2 \\ g &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad & g(y) &= \sin(y) \end{aligned}$$

Setze $x_0 = 2$.

$$\begin{aligned} Df(x_0) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ 1 &\mapsto f'(x_0) = 4 \\ v &\mapsto 4v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dg(y_0) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ 1 &\mapsto g'(y_0) = \cos(4) \\ w &\mapsto \cos(4) \cdot w \end{aligned}$$

Es gilt $g(f(x)) = \sin(x^2)$, folgt:

$$\begin{aligned} D(g \circ f)(x_0) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ 1 &\mapsto 4\cos(4) \end{aligned}$$

$$M(L(v)) = M(4v) = \cos(4) \cdot 4v$$

- $n = m = k = 2$

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad & f(x, y) &= (xy + 2x^2 + \sin(y), 2y) \\ g &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad & g(s, t) &= (\exp(s \cdot t), \pi) \end{aligned}$$

Setze $(x_0, y_0) = (0, 0)$, also $(s_0, t_0) = f(x_0, y_0) = (0, 0)$

$$\begin{aligned} Df(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \cdot v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Dg(s_0, t_0) : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 \\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} &\mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &\mapsto \frac{\partial g}{\partial y}(s_0, t_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ v &\mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot v \end{aligned}$$

Nur 0 an der Stelle (s_0, t_0).

- Sei $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $g : U \to \mathbb{R}^m$ differenzierbar. In dem Fall gilt für $t_0 \in \mathcal{I}$

$$\begin{aligned} Df(t_0) : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^n \\ 1 &\mapsto (f_1'(t_0), ..., f_n'(t_0)) = f'(t_0) \\ Dg(x_0) : \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^m \end{aligned}$$

Für $x_0 = f(t_0)$ kann man jetzt schreiben

$$D(g \circ f)(t_0) = Dg(x_0) \circ f(t_0)$$

$$D(g \circ f)(t_0)(1) = Dg(x_0)(Df(t_0)(1)) = Dg(x_0)(f'(t_0))$$

Konkretes Beispiel:

$$\begin{aligned} \gamma : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}^2 \qquad && \gamma(t) = (t, t^2) \\ g : \mathbb{R}^2 &\to \mathbb{R}^2 && g(x, y) = (xy, \sin(y)) \end{aligned}$$

Theorem 10.1.4: Mittelwertsatz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ mit $x_0 + t \cdot h \in U$ für alle $t \in [0, 1]$. Dann existiert ein $t_0 \in (0, 1)$ mit

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = Df(\xi_0)(h) \qquad \xi_0 = x_0 + t_0 \cdot h$$

Beweis:

Betrachte $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}$ gegen durch $\gamma(t) = f(x_0 + t \cdot h)$. Die Funktion γ ist differenzierbar auf $(0, 1)$ also insbesondere stetig. Hier gilt der bekannte, 1-dimensionale Mittelwertsatz:

$$\exists t_0 \in (0, 1) : \gamma(1) - \gamma(0) = \gamma'(t_0)$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \quad f(x_0 + h - f(x_0)) &= D\gamma(t_0)(1) \\ &= Df(x_0 + t_0 \cdot h) \cdot (Dg(t_0)(1)) \\ &= Df(\xi_0)(h) \end{aligned}$$

$(g(t) := x_0 + th)$ □

Korollar 10.1.4 (1)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und ammenhängend und sei $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

$$Df(x) = 0 \; \forall x \in U \Leftrightarrow f \text{ ist konstant}$$

Beweis:

Wähle $x_0 \in U$ und setze

$$U' = \{x \in U \mid f(x) = f(x_0)\} \subseteq U$$

Zeige U' offen und abgeschlossen $\Rightarrow U' = U$.
U' ist abgeschlossen: Denn f ist stetig.
U' ist offen: Sei $x \in U'$. Da $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen ist, existiert $r > 0$ mit $B(x, r) \subseteq U$. Sei $y = x+h$ ein Element von $B(x, r)$. Nach dem Mittelwertsatz existiert $\xi_0 = x + t_0 \cdot h$ mit

$$f(y) - f(x) = \underbrace{Df(\xi_0)(h)}_{=0} \Rightarrow f(y) = f(x) \Rightarrow y \in U'$$

Folgt $U' \subseteq U$ offen und abgeschlossen und nicht leer, also $U' = U$. □

Definition 10.1.3: Lokale Lipschitz-Stetigkeit

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$. Wir sagen f sei **lokal Lipschitz**, falls für jeden Punkt $x_0 \in U$ eine offene Umgebung U_0 von x_0 existiert, so dass $f|_{U_0}$ Lipschitz-stetig ist.

Beispiel:

Jede stetig differenzierbare Funktion in einer Variable ist lokal Lipschitz.
Als Gegenbeispiel ist $f(x) = \sqrt{|x|}$.

Theorem 10.1.5

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Dann

1. ... ist f lokal Lipschitz.
2. ..., falls Df beschränkt und U konvex ist, dann ist f Lipschitz.

Beweis:

Aussage (2):
Dass Df beschränkt ist, bedeutet

$$\exists M \in \mathbb{R} : ||Df(x)||_{op} \leqslant M \ \forall x \in U$$

(Die Operator-Norm ist stellvertretend gewählt, denn auf einem endlich-dimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorraum, wie dem der Homomorphismen, sind alle Normen äquivalent)
Es gilt dann für alle $x, y \in U$:

$$x + t \cdot (y - x) \in U \ \forall t \in [0, 1]$$

da U konvex ist. Dank dem Mittelwertsatz gilt folgende Aussage

$$\begin{aligned} & f(y) - f(x) = Df(\xi_0)(y-h) \\ \Leftrightarrow \quad & ||f(y) - f(x)|| = ||Df(\xi_0)(y-h)|| \\ & \leqslant M \cdot ||y-x|| \end{aligned}$$

Folgt f ist Lipschitz mit Konstante M.
Aussage (1):
Bemerke: Zu $x \in U\ \exists r > 0 : \overline{B(x,r)} \subseteq U$. Der abgeschlossene Ball $\overline{B(x,r)}$ ist kompakt (weil beschränkt). Setze

$$M = \max\{||Df(y)||_{op} \mid y \in \overline{B(x,r)}\}$$

(wohldefiniert, dank Heine-Borel)

$$\Rightarrow f|_{B(x,r)} : B(x,r) \to \mathbb{R} \text{ ist Lipschitz mit Konstante } M$$

□

10.2 Höhere Ableitungen und Tailor-Approximation

Vorbedingungen: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^m$ stetig differenzierbar.

$$Df : U \to Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)(\sim \mathbb{R}^{n \cdot m})$$

falls Df differenzierbar ist, so ist

$$D(Df) : U \to Hom(\mathbb{R}^n, Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$$

Der Vektorraum $Hom(\mathbb{R}^n, Hom(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ (mit Dimension $n^2 \cdot m$) ist der Vektorraum aller Bilinearen Abbildungen $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

Bemerkung - allgemein:

$$Hom(V, Hom(V,W)) = Bil^*(V \times V, W) \qquad V, W \text{ Vektorräume}$$

*: 2 Variablen, linear für jede Variable, wenn die andere festgehalten wird.

$$\begin{gathered} D(Df) = D^2 f : U \to Bil(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \\ \vdots \\ D^n f : U \to n - lin(\mathbb{R}^n \times ... \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \end{gathered}$$

Definition 10.2.1: Klassen stetig differenzierbarer Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ stetig. Sei $d \geqslant 0$. Wir sagen f sei von Klasse C^d falls für alle $i_1, i_2, ..., i_d \in \{1, 2, ..., n\}$

$$\partial_{i_d} ... \partial_{i_2} \partial_{i_1} f(x)$$

existiert und stetig als Funktion von x ist.
Schreibe $C^d(U, \mathbb{R}^m)$ für den Vektorraum aller Funktionen $f : U \to \mathbb{R}^m$ von Klase d.

Glatte Funktionen erfüllen:

$$\bigcap_{d=0}^{\infty} C^d(U,\mathbb{R}^m) =: C^\infty(U,\mathbb{R}^m)$$

Theorem 10.2.1: Satz von Schwarz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^d(U,\mathbb{R}^m)$. Dann gilt

$$\partial_j\partial_k f(x) = \partial_k\partial_j f(x)$$

$\forall x \in U,\ \forall j,k \in \{1,2,...,n\}$.

Bemerkung:

Die Aussage gilt nur unter Voraussetzung der Stetigkeit an beide Ableitungen.

Beispiel - 2-fache Ableitung einer reellwertigen Funktion in 2 Variablen:

$$f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x,y) = e^{x^2+y^2}$$

$$Df(x,y): \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto 2xe^{x^2+y^2}v_1 + 2ye^{x^2+y^2}v_2$$

oder anders dargestellt:

$$\nabla f(x,y) = \left(2xe^{x^2+y^2}, 2ye^{x^2+y^2}\right)$$

Jetzt gilt für die 2. Ableitung

$$D(\nabla f)(x,y): \mathbb{R}^2 \to Hom(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}) \sim \mathbb{R}^2$$

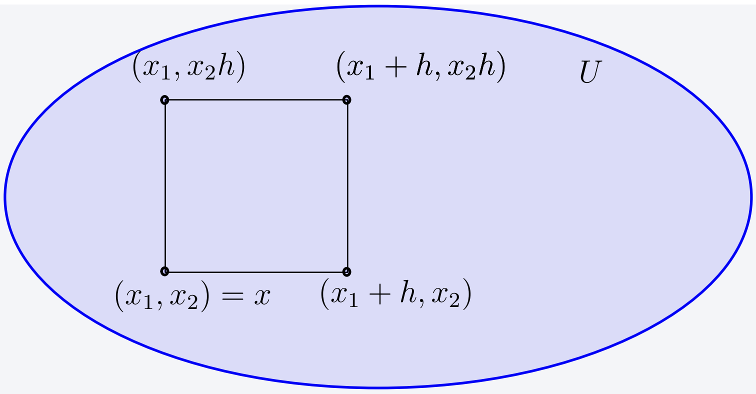
$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} & 4xye^{x^2+y^2} \\ 4xye^{x^2+y^2} & 2e^{x^2+y^2} + 4x^2e^{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

Beweis:

ObdA. können wir annehmen

$$n=2 \quad m=1 \quad k=1 \quad j=2$$

(betrachte einfach eine Funktion, die auf Untermengen eingeschränkt wurde) Fixiere $x \in U$ und $h \in \mathbb{R}^+$ klein genug:



$$F(h) = f(x_1 + h, x_2 + h) - f(x_1, x_2 + h) - f(x_1 + h, x_2) + f(x_1, x_2)$$

Betrachte $\varphi(t) = f(x_1 + th, x_2 + h) - f(x_1 + th, x_2)$
Nach dem Mittelwertsatz gilt: $\exists \xi_1 \in (0, 1)$ mit

$$\begin{aligned} F(h) &= \varphi(1) - \varphi(0) \\ &= \varphi'(\xi_1) \\ &= (\partial_1 f(x + \xi_1 \cdot h, x_2 + h) - \partial_1 f(x_1 + \xi_1 \cdot h, x_2)) \cdot h \\ &= \psi(1) - \psi(0) \end{aligned}$$

$$\psi(t) = \partial_1 f(x_1 + \xi_1 \cdot h, x_2 + t \cdot h) \cdot h$$

Es gilt wieder nach dem Mittelwertsatz $\exists \xi_2 \in (0, 1)$ mit

$$F(h) = \psi(1) - \psi(0) \quad = \psi'(\xi_2) = \partial_2 \partial_1 f(x_1 + \xi_1 \cdot h, x_2 + \xi_2 \cdot h) \cdot h^2$$

Wir gehen genau gleich in die andere Richtung vor: $\exists \eta_1, \eta_2 \in (0, 1)$ mit

$$F(h) = \partial_1 \partial_2 f(x_1 + \eta_1 \cdot h, x_2 + \eta_2 \cdot h) \cdot h^2$$

Folgt:

$$\partial_1 \partial_2 f(x_1 + \eta_1 \cdot h, x_2 + \eta_2 \cdot h) = \partial_2 \partial_1 f(x_1 + \xi_1 \cdot h, x_2 + \xi_2 \cdot h)$$

Mit $\lim\limits_{h \to 0}$ folgt:

$$\partial_1 \partial_2 f(x_1, x_2) = \partial_2 \partial_1 f(x_1, x_2)$$

□

Bemerkung - Reformulierung:

$$\partial_j \partial_k f(x) = D^2 f(x)(e_j, e_k) = D^2 f(x)(e_k, e_j) = \partial_k \partial_j f(x)$$

Mit linearer Algebra folgt allgemein:

$$D^2 f(x)(v, w) = D^2 f(x)(w, v)$$

Die Bilineare Abbildung

$$D^2 f(x) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$

ist symmetrisch.

Allgemeiner

Theorem 10.2.2

Ist $f \in \mathcal{C}^d(U, \mathbb{R}^m)$ so ist

$$D^d f(x) : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{d\text{-Mal}} \to \mathbb{R}^m$$

ist symmetrisch.

Theorem 10.2.3: Taylor-Entwicklung

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ von Klasse C^{d+1}, $x \in U$, $h \in \mathbb{R}^n$ so, dass $x+t\cdot h \in U$ $\forall t \in [0,1]$. Dann gilt

$$f(x+h) = f(x) + \sum_{k=1}^{d} \frac{1}{k!} D^k f(x)(\underbrace{h, h, \dots, h}_{k\text{-Mal}}) + \int_0^1 \frac{(1-t)^d}{d!} D^{d+1} f(x+t\cdot h)(h, \dots h)dt$$

Beweis:

Da U offen ist $\exists \delta > 0$ mit $x + t \cdot h \in U$ $\forall t \in I = (-\delta, 1+\delta)$. Betrachte

$$\varphi : I \to \mathbb{R}$$
$$\varphi(t) = f(x + t \cdot h)$$

von Klasse $\mathcal{C}^{d+1}$.
Schreibe die Taylor-Entwicklung für φ:

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \sum_{k=1}^{d} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} + \int_0^1 \varphi^{(d+1)}(t) \frac{(1-t)^d}{d!} dt$$

- $\varphi'(t) = \partial_h f(x + t \cdot h) = Df(x + t \cdot h)(h)$
- $\varphi'(0) = \partial_h f(x) = Df(x)(h)$
- $\varphi''(0) = D(Df(x + t \cdot h)(h))|_{t=0}(h) = D^2 f(x)(h, h) = \partial_h \partial_h f(x)$
- $\vdots$ Induktion
- $\varphi^{(k)}(0) = D^k f(x)(h, h, \dots, h)$

Setzt man dies in die Taylor-Entwicklung von φ ein, so erhält man die gesuchte Formel aus dem Satz. □

10.3 Extremwerte

Bemerkung - Erinnerung:

Ein Punkt $x \in U$ heißt lokales Maximum von $f : U \to \mathbb{R}$, falls $\exists r > 0 : f(y) \leqslant f(x)$ $\forall y \in$

$B(x, r)$.
Ein Punkt x heißt isoliertes lokales Minimum, falls $\exists r > 0 : f(y) < f(x)\ \forall x \in B(x, r) \backslash \{x\}$

Theorem 10.3.1: Extremwert merhdimensionaler Funktionen

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar, $x_0 \in U$ ein lokales Maximum von f. Dann gilt

$$Df(x_0) = 0$$

Beweis:

Für $t > 0$ klein genug gilt $\left\{\begin{matrix} f(x_0) - f(x_0 + t \cdot e_j) \geqslant 0 \\ f(x_0) - f(x_0 - t \cdot e_j) \geqslant 0 \end{matrix}\right\}$. Nach Grenzwertbildung sieht man:

$$\begin{aligned} \partial_j f(x_0) = Df(x_0)(e_j) &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x_0) - f(x_0 + t \cdot e_j)}{-t} \leqslant 0 \\ &= \lim_{\substack{t \to 0 \\ t > 0}} \frac{f(x_0) - f(x_0 - t \cdot e_j)}{t} \geqslant 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für beliebige Basisvektoren $\Rightarrow Df(x_0) = 0$ $\square$

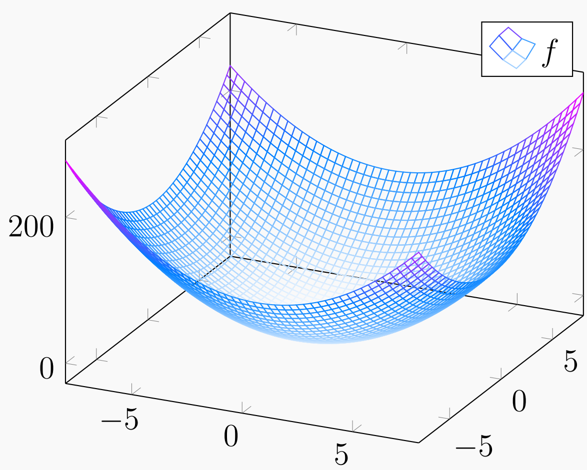
Definition 10.3.1: Hesse-Matrix

Sei $f : U \to \mathbb{R}$ von Klasse $\mathcal{C}^2$. Die Hesse-Matrix von f an der Stelle $x_0 \in U$ ist die $n \times n$-Matrix $H(x_0)$ mit den Einträgen

$$(h)_{ij}(x_0) = D^2 f(x_0)(e_i, e_j) = \partial_i \partial_j f(x_0)$$

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad f(x, y) = 20 \cdot x \cdot \sin(y) + 2x^2 + 2y^2$$



Berechne nun

$$H(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 4 & 20\cos(y_0) \\ 20\cos(y_0) & -20 \cdot x_0 \cdot \sin(y_0) + 4 \end{pmatrix}$$

Die bilineare Abbildung $D^2 f(x_0, y_0) : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ist in H einkodiert.
Beispielsweise wird

$$H(0,0) = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

Außerdem gilt:

$$D^2 f(x_0, y_0)(v, w) =< v, H(x_0, y_0) \cdot w >$$

Definition 10.3.2: Definitheit

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch (beispielsweise die Hesse-Matrix).
Wir sagen A sei **positiv definit** falls alle Eigenwerte von A positiv sind. (sie sind alle reell, wird in LA gezeigt.)
Analog ist A **negativ definit** falls alle Eigenwerte von A negativ sind.
Ansonsten ist A **indefinit**.

Theorem 10.3.2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f \in \mathcal{C}^2(U, \mathbb{R}^2)$ und $x_0 \in U$ mit $DF(x_0) = 0$. Sei $H(x_0)$ die Hesse Matrix von f.

- Ist $H(x_0)$ positiv definit, so ist x_0 ein isoliertes Minimum.
- Ist $H(x_0)$ negativ definit, so ist x_0 ein isoliertes Maximunm.
- Ist $H(x_0)$ nicht singuläre (kein Eigenwert ist $= 0$) und indefinit, so ist x_0 nicht ein lokales Extremum.

Theorem 10.3.3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}$ von Klassen C^2 und $x_0 \in U$ mit $Df(x_0) = 0$. Sei H die Hesse-Matrix von f bei x_0: $h_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f(x_0)$.

1. Ist H positiv definit, so ist x_0 ein isoliertes lokales Minimum.
2. Ist H negativ definit, so ist x_0 ein isoliertes lokales Maximum.
3. Ist H indefinit und nicht sigulär, so ist x_0 kein lokales Extremum.

Bemerkung:

Definitheit bedeutet, dass alle Eigenwerte der Matrix H je alle positiv oder negativ sind.

Beweis:

1. H positiv definit $\Leftrightarrow \underbrace{< h, Hh >}_{Q(h)} + > 0\ \forall h \in \mathbb{R}^n$.

   Achtung: $A(\alpha h) = \alpha^2 Q(h)\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \forall h \in \mathbb{R}^n$: Q ist eine quadratische Form (also insb. nicht linear)

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &= \frac{1}{2} D^2 f(x_0)(h,h) + \mathcal{O}(||h||^3) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{||h||^2}_{Kompensation} \left[Q\left(\frac{h}{||h||}\right) + R(h) \right] \end{aligned}$$

   mit $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{R(h)}{||h||} = 0$ $Q : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ist stetig, S^{n-1} ist kompakt.

$$\exists c > 0 : Q(v) > c\ \forall v \in S^{n-1} \quad \text{also} \quad Q(h) > c \cdot ||h||^2\ \forall h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$$

   Es existiert $\delta > 0$ mit $\frac{||R(h)||}{||h||} < \frac{c}{2}\ \forall h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, ||h|| < \delta$.

$$\begin{aligned} f(x_0+h) - f(x_0) &\geqslant \frac{1}{2}||h||^2 \left(c - \frac{c}{2}\right) = \frac{c}{4}||h||^2 \\ &> 0 \text{ für } h \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}, ||h|| < \delta \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow f(x_0+h) > f(x_0) \Rightarrow x_0 \text{ist eine isoliertes lokales Minimum}$$

2. Analog

3. Analog

□

Beispiel:

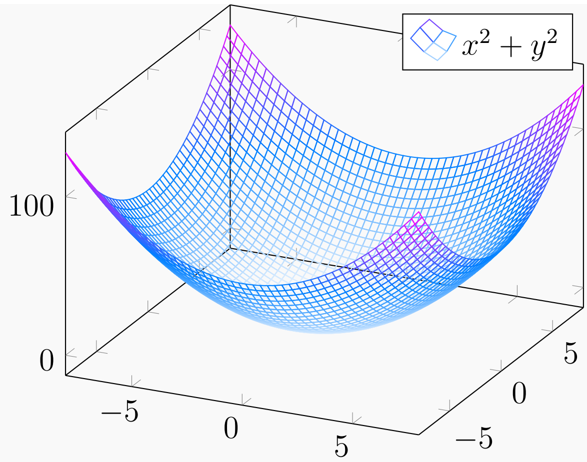
$$f : U = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x_0, y_0) = (0,0)$$

1. $f(x,y) = x^2 + y^2$ also $Df(x_0, y_0) = 0$. Allgemein:

$$Df(x_0,y_0) : \left\{ \begin{array}{ccc} e_1 & \mapsto & \frac{\partial}{\partial x} f(x_0,y_0) = 2x_0 \\ e_2 & \mapsto & \frac{\partial}{\partial y} f(x_0,y_0) = 2y_0 \end{array} \right\}$$

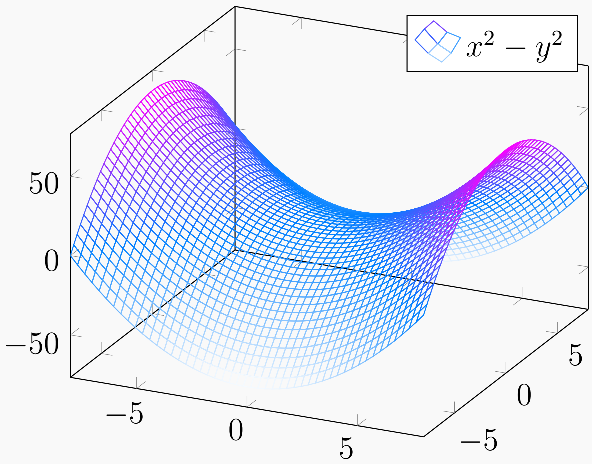
$$H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

   ist positiv definit: $< (u,v), H(u,v) >= 2u^2 + 2v^2$.



2. Für $g = -f$ erhält man $H = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

3. $f(x,y) = x^2 - y^2$, also $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ ist indefinit.



10.3.1 Zusammenhänge

$$f(x_0 + h) = \underbrace{f(x_0)}_{konstant} + \underbrace{Df(x_0)(h)}_{linear} + \frac{1}{2}\underbrace{D^2f(x_0)(h,h)}_{quadratisch} + \dots$$

Definition 10.3.3: Totaler Grad

Sei $n \geqslant 1$. Der **totale Grad** eines Polynoms $P(T_1, \dots, T_n) \in \mathbb{R}[T_1, \dots, T_n]$ mit

$$P((T_1, \dots, T_n) = \sum_{k_1, \dots, k_n} a_{k_1, k_2, \dots, k_n} T_1^{k_1} \cdot T_2^{k_2} \cdot \dots \cdot T_n^{k_n}$$

ist $\max\{k_1 + \dots + k_n \mid a_{k_1 \dots k_n} \neq 0\}$.
Schreibe hierfür $deg(P)$.
Wir sagen P sei **homogen** vom Grad d, falls

$$k_1 + \dots + k_n \neq d \Rightarrow a_{k_1 k_2 \dots k_n} = 0$$

P homogen von Grad $d \Leftrightarrow P(\lambda T_1, ..., \lambda T_n) = \lambda^n P(T_1, ..., P_n)$

Beispiel:

- $deg(x + 2xy + 6x^2y^4) = 6 (= 2 + 4)$
- $x^3 + x^2y + zxy$ ist homogen vom Grad 3

Bemerkung:

Die d-te Taylorentenwicklung entspricht einer Reihe homogener Polynome totalen Grades $\leqslant d$. Eine Alternative Definition wäre so also möglich.

Beispiel - $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \cos(x \cdot y) + \sin(x) + \cos(x) \\ &= \underbrace{1 - \frac{(xy)^2}{2!} + \frac{(xy)^4}{4!} - \frac{(xy)^6}{6!} + ...}_{\cos(xy)} + \underbrace{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + ...}_{\sin(x)} + \underbrace{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - ....}_{\cos(x)} \\ &= 2 + x - \frac{1}{2}x^2y^2 - \frac{1}{6}x^3 + ... - \frac{1}{2}x^2.... \end{aligned}$$

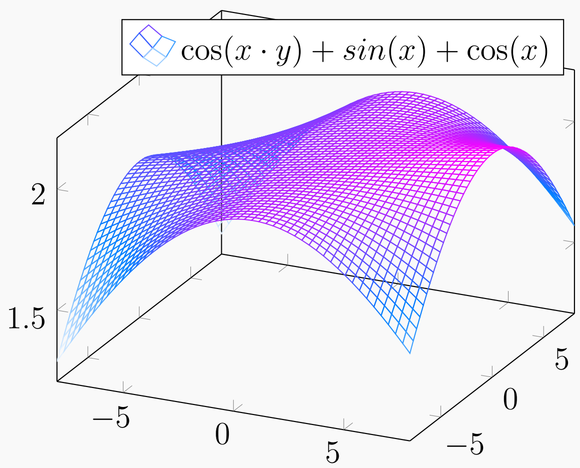
Taylor:

$$f(0 + (x,y)) = \underbrace{f(0)}_{2} + \underbrace{Df(0)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}_{x} + \underbrace{\frac{1}{2}D^2f(0)\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)}_{\frac{1}{2}x^2} + ...$$

NR:

$$Df(0) : \begin{cases} e_1 & \mapsto & \frac{\partial}{\partial x} f(0) = 1 \\ e_2 & \mapsto & \frac{\partial}{\partial y} f(0) = 0 \\ \binom{x}{y} & \mapsto & x \end{cases}$$

$$D^2 f(0) \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = H$$



10.4 Parameterintegrale

Setup: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$ (also kompakt)

$$f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$$

Also als Form $f(x,t)$ mit x als Parameter, und t als Integrationsvariable.
Gesucht ist

$$F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

mit $F : U \to \mathbb{R}$

Theorem 10.4.1

In dieser Situation gilt:

$$f \text{ stetig } \Rightarrow F \text{ stetig}$$

Falls für alle $k = 1, 2, ..., n$ die partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_k} f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ existiert und stetig ist, dann ist F, gegeben durch

$$F : U \to \mathbb{R} \quad F(x) = \int_a^b f(x,t)dt$$

stetig differenzierbar und es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F(x) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(x,t)dt$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst, dass F stetig ist (bei $x_0 \in U$): Sei $\varepsilon > 0$, $r > 0$ klein genug, so dass der Ball $\overline{B(x_0, r)} \subseteq U$.
Die Teilmenge $K = \overline{B(x_0, r)}$ von $U \times [a,b]$ ist kompakt (HB).
Also ist $f|_K : K \to \mathbb{R}$ ist gleichmäßig stetig (weil f stetig ist). Also

$$\exists \delta > 0 : |f(x_0, t) - f(x,t)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

für alle $x \in B(x_0, \delta)$ und für alle $t \in [a,b]$.
Folgt: (für $x \in B(x_0, \delta)$)

$$\begin{aligned} |F(x_0) - F(x)| &= \left| \int_a^b f(x_0, t) - f(x,t)dt \right| \\ &\leqslant \int_a^b \underbrace{|f(x_0,t) - f(x,t)|}_{\leqslant \frac{\varepsilon}{b-a}} dt \\ &\leqslant \varepsilon \end{aligned}$$

Nun zeigen wir die Differenzierbarkeit von F bei x_0:
Wir wenden den Mittelwertsatz auf $h \mapsto f(x_0 + h \cdot s \cdot e_k \cdot t)$ für ein $s \in (-r, r) \backslash \{0\}$.

Es existiert $\xi \in (0,1)$ mit

$$\frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0 + \xi, s \cdot e_k \cdot t) = \frac{f(x_0 + h \cdot s \cdot e_k \cdot t) - f(x_0, t)}{s}$$

Da $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ gleichmäßig stetig auf K ist, existiert $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta \in (0, r)$ mit

$$\left| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0, t) - \frac{\partial}{\partial x_k} f(x, t) \right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \;\forall x \in B,\; \forall t \in [a, b]$$

Wir zeigen nun, dass dieser Ausdruck, der Ableitung aus dem Satz entspricht, so wie $s \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{F(x_0 + s \cdot e_k) - F(x_0)}{s} - \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0, t) dt \right| \\
&= \left| \int_a^b \frac{f(x_0 + s \cdot e_k, t) - f(x_0)}{s} - \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0, t) dt \right| \\
&= \left| \int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0 + \xi \cdot e_k, t) - \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0, t) dt \right| \\
&\leqslant \int_a^b \underbrace{\left| \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0 + \xi \cdot e_k, t) - \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0, t) \right|}_{< \frac{\varepsilon}{b-a} \text{ für } |s| < \delta} dt \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Folgt: $\frac{\partial}{\partial x_k} F(x_0)$ existiert und ist gleich

$$\int_a^b \frac{\partial}{\partial x_k} f(x_0, t) dt$$

Die Stetigkeit folgt aus der anfänglichen Überlegung. □

Beispiel - Bessel-Funktion:

$$\mathcal{J}_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \underbrace{\cos(x \cdot \sin(t) - nt)}_{f(x,t)} dt \quad n \in \mathbb{Z}$$

(glatt in x und t). Hier kann beispielsweise $x \in \mathbb{C}$.
Für schwingende Körper, insbesondere Instrumente, gilt eine Differentialgleichung:

$$x^2 u''(x) + x u'(x) + (x^2 - n^2) \cdot u(x) = 0 \qquad n \in \mathbb{N}$$

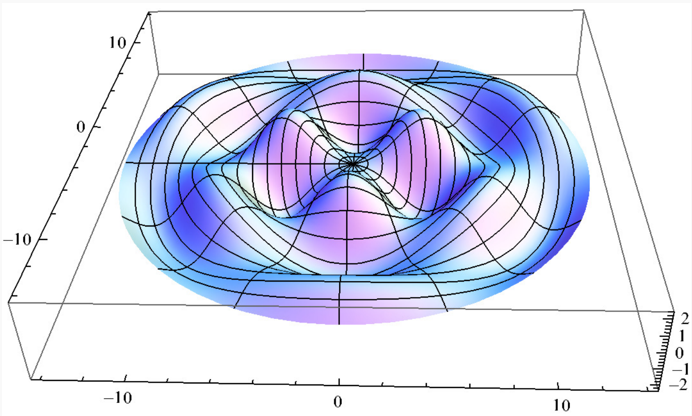
$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_n'(x) &= \frac{\partial \mathcal{J}_n(x)}{\partial x} = -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) \cdot \sin(x \cdot \sin(t) - nt) dt \\
\mathcal{J}_n''(x) &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^2(t) \cdot \sin(x \cdot \sin(t) - nt) dt
\end{aligned}$$

Jetz folgt

$$
\begin{aligned}
x^2\mathcal{J}_n''(x) + (x^2-n^2)\mathcal{J}_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\underbrace{-x^2\cdot\sin^2(t)+x^2}_{=x^2\cos^2(t)} - n^2)\cdot\cos(x\cdot\sin(t)-nt)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{(x\cdot\cos(t)-n)}_{:=g}\underbrace{(x\cdot\cos(t)+n)\cdot\cos(x\cdot\sin(t)-nt)}_{=\frac{\partial}{\partial t}\sin(x\sin(t)-nt:=f')}dt \\
&= \underbrace{\frac{1}{\pi}\Big[(x\cos(t)+n)\sin(x\sin(t)-nt)\Big]_0^\pi}_{g\cdot f} \\
&\quad + \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \underbrace{(x\sin(t))\sin(x\sin(t)-nt)dt}_{g'\cdot f} \\
&= 0 - x\cdot\mathcal{J}_n'(x)
\end{aligned}
$$

Sei $j_{n,m} > 0$ die m-te Nullstelle von $\mathcal{J}_n(x)$. Es gilt: die Grundfrequenz $= j_{0,1}$.
Das Bild für die Kreismembran hat dann für

$$
j_{n,m} \to \begin{cases} n \text{ konzentrische Knotenlinien} \\ m \text{ Durchmesser} \end{cases}
$$



Hier ist $n = 3$ und $m = 3$. Man erkennt, drei mal 3 konzentrische 'Hügel'.

Zur Berechnung der Nullstellen, betrachten wir die Taylor-Entwicklung

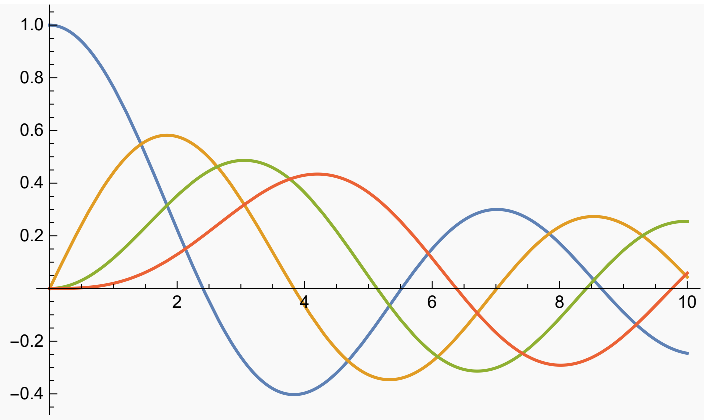
$$
\mathcal{J}_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \frac{x^m}{m!}
$$

$$
\frac{\partial^m}{\partial x^m}\mathcal{J}_n(x) = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^m(t)\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}(x\sin(t)-nt)dt
$$

Also

$$
a_m = \frac{\partial^m}{\partial x^m}\mathcal{J}_{n(0)} = \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \sin^m(t)\begin{cases}\sin(nt)\\ \cos(nt)\end{cases} dt
$$

$$
\mathcal{J}_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)m}{m!(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m+2}
$$



Die 4 ersten Bessel-Funktionen.

Glatte Funktionen konstruieren

Beispiel - Grundproblem:

Wir haben $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine stetige Funktion. Wir möchten hierzu $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ finden/konstruieren mit

1. $\tilde{f}$ glatt
2. $\tilde{f} - f$ beliebig klein: $|\tilde{f}(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \; \forall x \in [a, b]$

Definition 10.4.1: Träger

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig. Der **Träger** von f (support) ist

$$\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \neq 0\} = supp(f)$$

Die Funktion f hat einen kompakten Träger genau dann, wenn

$$f(x) = 0 \; \forall x \in \mathbb{R} : |x| > R$$

für ein $R >> 0$.

Definition 10.4.2: Faltung

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und sei $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ebenfalls stetig mit kompaktem Träger.
Die **Faltung** (convolution) von f mit ψ ist die Funktion $\psi * f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$(\psi * f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y) f(y) dy$$

Das ist ein eigentliches Integral falls ψ einen kompakten Träger hat,also falls $supp(\psi) \subseteq [-R, R]$:

$$\int_{-R-|x|}^{R+|x|} \psi(x-y) f(y) dy$$

Theorem 10.4.2

$$\psi * f = f * \psi$$

Beweis:

$$\begin{aligned}(\psi * f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(\underbrace{x-y}_{z}) f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z) f(x-z) dz \\ &= (f * \psi)(x)\end{aligned}$$

□

Bemerkung:

Somit ist die Operation der Faltung kommutativ, assoziativ, linear in beiden Variablen (also bilinear).

Theorem 10.4.3

Ist f stetig und ψ glatt, so ist $\psi * f$ glatt, und es gilt

$$\frac{\partial}{\partial x}(\psi * f)(x) = \frac{\partial}{\partial x} \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \psi'(x-y) f(y) dy = (\psi' * f)(x)$$

Definition 10.4.3: Glättungskern

Wir nennen eine Funktion $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

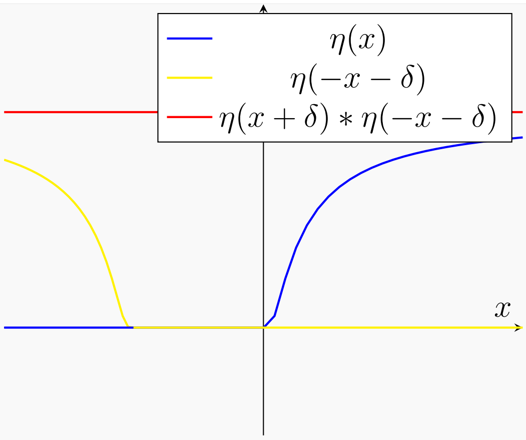
1. ψ ist glatt
2. $supp(\psi) \subseteq [-\delta, \delta]$
3. $\psi(x) \geqslant 0 \; \forall x \in \mathbb{R}$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx = 1$

Glättungskern.

Beispiel:

$$\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \eta(x) = \begin{cases} 0 \text{ für } x \leqslant 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \text{ für } x > 0 \end{cases}$$

ist glatt.



Bemerkung - Warnung:

Ist ψ ein Glättungskern mit $supp(\psi) \subseteq [-\delta, \delta]$, dann ist $\psi' := 2\psi(2x)$ ebenfalls ein Glättungskern mit $supp(\psi') \subseteq \left[-\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$. Allgemein kann man bilden:

$$\psi_n = 2^n \cdot \psi(2^n \cdot x) \qquad supp(\psi_n) \subseteq \left[-\frac{\delta}{2^n}, \frac{\delta}{2^n}\right]$$

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $a < b$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$ mit

$$|y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x-y)| < \varepsilon \ \forall x \in [a, b]$$

Sei ψ ein Glättungskern mit $supp(\psi) \subseteq [-\delta, \delta]$
Dann gilt für alle $x \in [a, b]$:

$$\begin{aligned}
|(\psi * f)(x) - f(x)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y) f(y) dy - f(x) \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x-y) f(y) dy - \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) f(x) dy \right| \\
&= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y)(f(x-y) - f(x)) dy \right| \\
&\leqslant \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(y)| \cdot \underbrace{|f(x-y) - f(x)|}_{\leqslant \varepsilon} dy \\
&\leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

Die Annäherung an ε ist möglich, wenn die Grenzen $-\infty, \infty$ zu $-\delta, \delta$ werden.
Setzen wir nun $f_n = \psi_n * f$ und $\psi_n(x) = 2^n \psi(2^n x)$, so konvergiert $(f_n)_{n=0}^{\infty}$ gleichmäßig gegen f auf jedem kompakten Intervall.

10.5 Wegintegrale

Setup: $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. $\gamma : [a, b] \to U$ stetig differenzierbar.
Sei $\gamma(t)$ die Position zur Zeit $t \in [a, b]$ und $\gamma'(t)$ der Geschwindigkeitsvektor $\in \mathbb{R}^n$. Also ist $||\gamma'(t)||$ die Geschwindigkeit.

$$\int_a^b ||\gamma'(t)|| dt = \text{ Länge von } \gamma$$

ist $f: U \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion,

$$\int_a^b f(\gamma(t)) \cdot ||\gamma'(t)||dt$$

Ist γ stückweise differenzierbar

$$a \leqslant t_1 < t_2 < ... < t_n \leqslant b : \gamma|_{[t_i, t_{i+1}]} \text{ stetig differenzierbar}$$

dann ergeben die obigen Begriffen weiterhin Sinn.

Definition 10.5.1: Vektorfeld

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Ein (stetiges, differenzierbares, glattes [insert attribute here]) **Vektorfeld** auf U ist eine (stetige, differenzierbare, glatte [insert same attribute]) Funktion $F: U \to \mathbb{R}^n$.
Sei $\gamma : [a, b] \to U$ stetig differenzierbar und $F: U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

$$\int_\gamma F dt = \int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt$$

Terminologie:
Eine stetige, orientierungserhaltende Reparameterisierung von $\gamma : [a, b] \to U$ ist eine Verknüpfung

$$\gamma \circ \psi \quad \text{mit} \quad [c, d] \xrightarrow{\psi} [a, b] \xrightarrow{\gamma} U$$

Mit ψ stetig, $\psi(c) = a$, $\psi(d) = b$.

Theorem 10.5.1: Arbeitsintegral

Das **Arbeitsintegral** (x) ändert sich nicht durch orientierungserhaltende Reparameterisierungen.

Beweis:

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\psi} F dt &= \int_c^d < F(\gamma(\psi(t))), \underbrace{(\gamma \circ \psi)'(t)}_{\gamma'(\psi(t))\psi'(t)} > dt \\
&= \int_c^d < F(\gamma(\psi(t))), (\gamma(\psi))(t) > \cdot \psi'(t) dt \\
&= \int_a^b < F(\gamma(s)), \gamma'(s) > ds
\end{aligned}$$

□

Definition 10.5.2: Potential

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $\gamma : [a, b] \to U$ stückweise stetig differenzierbar (also an endlich vielen Punkten nicht differenzierbar.)

$$\int_\gamma F dt \sim \int \vec{F} d\vec{s} \text{ bedeutet } \int_a^b < F(\gamma(t)), \gamma(t) > dt$$

Eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ heißt **Potential** von F, falls

$$F = grad(f)$$

Ist f ein Potential, so ist auch $f + c$ für $c \in \mathbb{R}$. Ist U zusammenhängend, so ist jedes weitere Potential von F derselben Form.

Theorem 10.5.2

Sei f ein Potential für F. Dann gilt

$$\int_\gamma F dt = f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))$$

für jeden differenzierbaren Pfad $\gamma[0,1] \to U$.
Dies entspricht der aus der Physik bereits bekannten Wegunabhängigeit für konservative Felder.

Beweis:

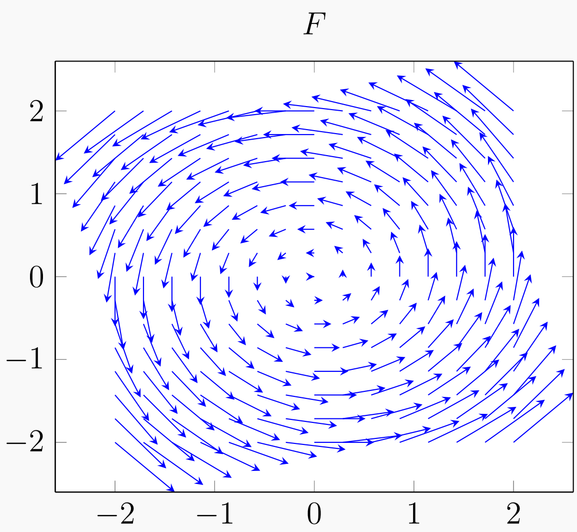
Bemerke zunächst: $F(x) = grad(f)(x) = Df(x)$ also $\Rightarrow < grad(f)(x), v >= Df(x)(v)$. Nun gilt

$$\begin{aligned}\int_\gamma F dt &= \int_0^1 < grad(f)(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \\ &= \int_0^1 Df(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) dt \\ &= \int_0^1 (f \circ \gamma)' dt \\ &= f(\gamma(1)) - f(\gamma(0))\end{aligned}$$

□

Beispiel:

$$U = \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = (-y, x)$$



Sei nun $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(t) = (t,t)$ und betrachte insbesondere den Pfad von $(0,0)$ nach $(1,0)$ nach $(1,1)$. Es gilt

$$\int_\gamma F dt = \int_0^1 \underbrace{< (-t,t),(1,1) >}_{0} dt = 0$$

was nicht besonders verwunderlich ist.

Betrachte nun $\gamma(t) = \begin{cases} (2t,0) 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ (1,2t-1) \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$

$$\int_\gamma F dt = \int_0^{\frac{1}{2}} \underbrace{< (0,2t),(2,0) >}_{0} dt + \int_{\frac{1}{2}}^1 \underbrace{< (-2t+1,1),(0,2) >}_{2} dt$$
$$= 1$$

Da die Beiden Arbeitsintegrale nicht übereinstimmen gilt: F hat **kein** Potential.

Definition 10.5.3: Konservative Vektorfelder

Ein stetiges Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}^n$ nennen wir **konservativ**, falls für alle Wege $\gamma, \varphi : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = \varphi(0)$ und $\gamma(1) = \varphi(1)$ gilt

$$\int_\gamma F dt = \int_\phi F dt$$

Theorem 10.5.3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend. Sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld.

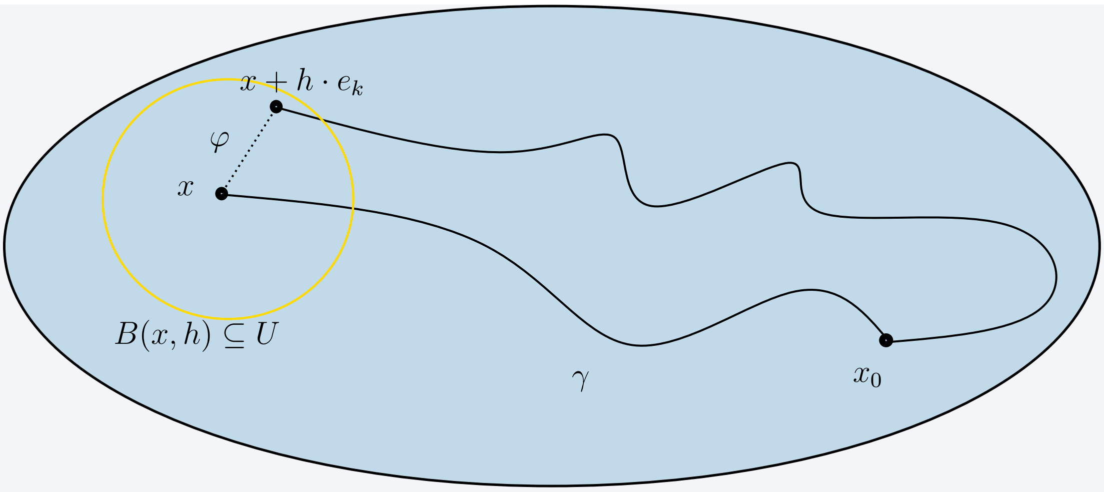
$$F \text{ ist konservativ } \Leftrightarrow F \text{ hat ein Potential}$$

Beweis:

Die eine Richtung wurde bereits oben gezeigt.
Sei nun F konservativ. Wähle $x_0 \in U$ und definiere

$$f(x) = \int_{\gamma(x)} F dt \qquad f : U \to \mathbb{R}^n$$

Für einen Pfad $\gamma : [0,1] \to U$ mit $\gamma(0) = x_0$ und $\gamma(1) = x$



Behauptung: $grad(f) = F$, also $\frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = F_k(x) =< F(x), e_k > \ \forall x \in U$

$$f(x + h \cdot e_k) - f(x) =$$

Wähle nun einen Pfad φ von x nach $x + h \cdot e_k$, also $\varphi(t) = h + t \cdot h \cdot e_k$. Nun gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h\cdot e_k) - f(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_0^1 < F(\varphi(t)), \varphi'(t) > dt \\
&= \lim_{h\to 0} \int_0^1 < F(x + the_k), \cancel{h} \cdot e_k > dt \\
&= \int_0^1 < F(x), e_k > dt \\
&=< F(x), e_k >
\end{aligned}$$

□

Korollar 10.5.3 (1): Integrabilitätsbedingung

Es sei $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein konservatives Vektorfeld der Klass $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$\frac{\partial}{\partial x_k} F_j(x) = \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(x)$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_k} F_j(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_j} f(x) \\
&= \text{(Satz von Schwarz)} \\
\frac{\partial}{\partial x_j} F_k(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x)
\end{aligned}$$

□

Beispiel:

Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $F : U \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y) = (e^x, \sin(y))$$

Existiert jetzt ein $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin(y)$$

? Ja, offensichtlich

$$f(x) = e^x - \cos(y)$$

Und man sieht, dass die Integrabilitätsbedingung gilt.

Beispiel:

Sei $U = \mathbb{R}^2$ und $F : U \to \mathbb{R}^2$ das Vektorfeld gegeben durch

$$F(x, y) = \left(yx^2, \sin\left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right)\right)$$

- $\dfrac{\partial}{\partial x} f(x, y) = yx^2$
- $\dfrac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \sin\left(\dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}\right)$

Notwendig hierfür ist die Integrabilitätsbedingung:

$$f(x, y) = \int_\gamma F dt \text{ mit } \gamma(0) = (0, 0) \quad \gamma(1) = (x, y)$$

Prüfe

$$\frac{\partial}{\partial y} F_1(x, y) = x^2$$

$$\frac{\partial}{\partial x} F_2(x, y) = \frac{-2 \cdot 2x}{1 + x^2 + y^2} \cos\left(\frac{1}{1 + x^2 + y^2}\right)$$

Also existiert keine Lösung.

Theorem 10.5.4: Globaler Integrationssatz (Beispiel)

Ist $F : U \to \mathbb{R}^n$ von Klasse $\mathcal{C}^2$ und sind $\gamma, \phi : [0, 1] \to U$ Pfade mit $\gamma(0) = \varphi(0)$ und $\gamma(1) = \varphi(1)$.
Erfüllt F die Integrabilitätsbedingung, so gilt

$$\int_\gamma F dt = \int_\varphi F dt \Leftrightarrow \varphi \text{ ist homotop zu } \gamma$$

Korollar 10.5.4 (1)

Ist U einfach zusammenhängend, dann ist F **konservativ**.

Lemma 10.5.1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex und $F : U \to \mathbb{R}$ ein Vektorfekd der Klasse $\mathcal{C}^1$ mit der Integrabilitätsbedingung. Dann ist F konservativ.

Beweis - des Lemmas:

Nehme oBdA an: $x_0 \equiv 0 \in \mathbb{R}^n$. Wir definieren eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) = \int_0^1 < F(t \cdot x), x > dt$$

(also über einen Pfad, in diesem Fall die gerade Linie)
Wir wollen nun zeigen, dass f ein Potential für F ist. Hierzu berechnen wir vorbereitend:

$$\begin{aligned}
\partial_h F_j(x) = DF_j(x)(h) =< grad[F_j(x)], h > \quad & h \in \mathbb{R}^n \\
= \sum_{k=1}^n \partial_k F_j(x) \cdot h_k & \\
= \sum_{k=1}^n \partial_j F_k(x) \cdot h_k &
\end{aligned}$$

Die letzte Gleichheit gilt dank der Integrabilitätsbedingung.
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\partial_j f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \int_0^1 \sum_{k=1}^n F_k(t \cdot x) \cdot x_k dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_j} F_k(t \cdot x) \cdot x_k dt \\
&= \int_0^1 \sum_{k=1}^n (t \cdot \partial_j F_k(t \cdot x) \cdot x_k) + F_j(t \cdot x) dt \\
&\overset{s.o.}{=} \int_0^1 t \cdot \underbrace{\partial_x F_j(t \cdot x)}_{\frac{\partial}{\partial t} F_j(t \cdot x)} + F_j(t \cdot x) dt \\
&= \int_0^1 t \cdot \partial_x F_j(t \cdot x) dt + \int_0^1 F_j(t \cdot x) dt \\
&= \Big[t \cdot F_j(t \cdot x) \Big]_0^1 - \int_0^1 F_j(t \cdot x) dt + \int_0^1 F_j(t \cdot x) dt \\
&= F_j(x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow grad(f) = F$$

□

Vorbereitung des Beweises des globalen Integrationssatzes

Definition 10.5.4: Zurückgezogenes Vektorfeld

Sei $\varphi : V \to U$ von Klasse $\mathcal{C}^1$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^m$ offen, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen.

$$\varphi^* : \{\text{stetige VF auf } U\} \to \{\text{stetige VF auf } V\}$$

sei gegeben durch

$$(\varphi^* F)(x) = \sum_{k=1}^{m} \underbrace{< \partial_k \varphi(x), F(\varphi(x)) >}_{k\text{-te Komponente von } \varphi^* F} \cdot e_k \ \forall x \in V, \ \forall \text{Vektorfelder } F : U \to \mathbb{R}^n$$

φ^* ist das **zurückgezogen Vektorfeld** zu φ

Theorem 10.5.5

Sei φ^* wie in der obigen Definition.

1. φ^* ist linear.
2. φ^* ist funktioral: Für
$$W \overset{\psi}{\to} V \overset{\varphi}{\to} U$$
gilt: $(\varphi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \varphi^*$

   Bemerkung:

   Also gilt insbesondere: $(id \circ \varphi)^* = \varphi^*$

3. Sei $\gamma : [0,1] \to V$ stetig differenzierbar und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig
$$\int_\gamma \varphi^* F dt = \int_{\varphi \circ \gamma} F dt$$
4. Ist F von Klasse $\mathcal{C}^p$, φ von Klasse $\mathcal{C}^{p+1}$, so ist $\varphi^* F$ von Klasse $\mathcal{C}^p$
5. Ist Fvon Klasse $\mathcal{C}^1$, φ von Klasse $\mathcal{C}^2$. Falls F die Integrabilitätsbedingung, so erfüllt $\varphi^* F$ sie ebenfalls.

Beweis:

Siehe Skript, insbesondere bis Punkt 3. □

Nun beweisen wir endlich den globalen Integrationssatz (also das eine Beispiel von ihm).

Beweis - Illegal:

Setup wie gewohnt: $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^n$ von Klasse $\mathcal{C}^1$ erfüllt die Integrabilitätsbedingung. Seien $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ stückweise stetig differenzierbar mit $x_0 = \gamma_0(0) = \gamma_1(0)$ und

$x_1 = \gamma_0(1) = \gamma_1(1)$ und $\gamma_0 \overset{htp}{\simeq} \gamma_1$. Also existiert eine Homotopie von γ_0 nach γ_1:

$$\begin{array}{ccc} H : [0,1]^2 & \to & U \\ H(0,t) = \gamma_0(t) & & H(1,t) = \gamma_1(t) \\ H(s,t) = X_0 & & H(s,1) = x_1 \end{array}$$

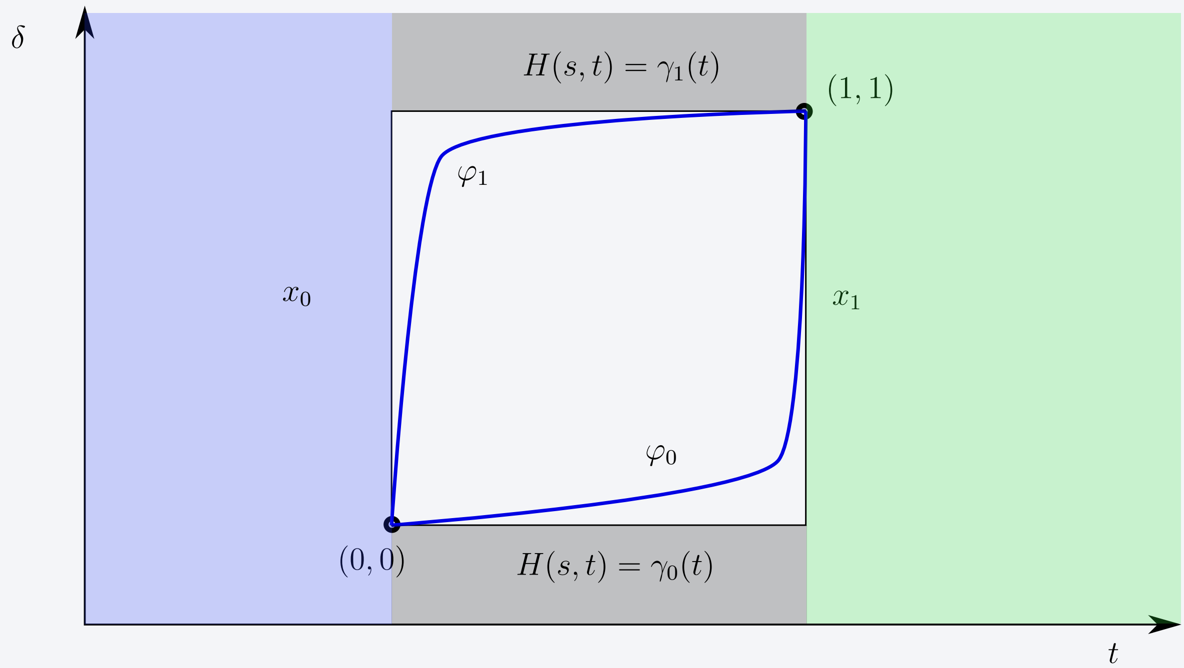
$$\begin{aligned} \int_{\gamma_0} F dt &= \int_{H\circ\varphi_0} F dt \\ &= \int_{\varphi_0} H^* F dt \quad \text{erfüllt laut 5) die Integrabilitätsbedingung} \\ (Lemma) &= \int_{\varphi_1} H^* F dt \\ &= \int_{H\circ\varphi_1} F dt \\ &= \int_{\gamma_1} F dt \end{aligned}$$

Leider falsch, denn:

1. Wir betrachten einen nicht-offenen Definitionsbereich von H: $[0,1]^2$ hier sind Differenzierbarkeit und Pfade am Rand noch gar nicht definiert worden.
2. H ist stetig, aber nicht $\in \mathcal{C}^2$

□

Beweis - Probleme behoben:



1. Wir dehnen den Definitionsbereich von H auf $\mathbb{R}^2$ aus: $H : \mathbb{R}^2 \to U$ ist gleichmäßig stetig und hat ein kompaktes Bild.

2. Für $N \in \mathbb{N}$ konstruieren wir $H_N : \mathbb{R}^2 \to U$ mit $(N \to \infty)$

$$||H - H_N||_\infty \longrightarrow 0$$

H_N von Klasse $\mathcal{C}^\infty$.

Wähle einen Glättunfskern η mit $supp(\eta) \subseteq (-1, 1)$

$$\eta_N(u) = 2^N \eta(2^{-N} u)$$

Benutze diesen Kern um H zu glätten:

$$H_N(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} \eta_N(v) \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \eta_N(u) H(x - u, y) du dv$$

(Glättung nach beiden Variablen).

$||H_N - H||_\infty \to 0$ weil H gleichmäßig stetig.

Jetzt gilt:

$$\int_{H_N \circ \gamma_0} F dt = \int_{H_N \circ \gamma_1} F dt$$

Hier haben wir nur eine Annäherung an γ_0 und γ_1. Es gilt aber

$$H_N \circ \gamma_0 = \int_0^1 < F(Hn(\varphi_0(t))), (H_n \circ \varphi)'(t) > dt \longrightarrow \int_{\gamma_0} F dt$$

(für $N \to \infty$)

Die Grenzwertbildung ist mit dem Integral vertauschbar wegen der gleichmäßigen Stetigkeit. Man geht analog für γ_1 vor.

□

Kapitel 11

Anfänge der Differentialgeometrie

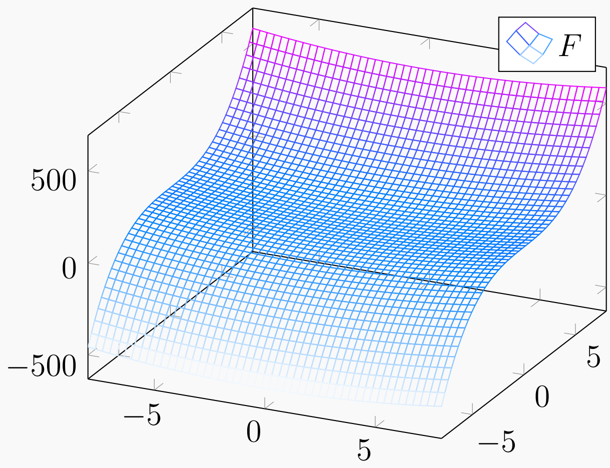
11.1 Implizite Funktionen

Beispiel:

Wir wollen $x^2 = y^3 - y$ 'nach y auflösen', also eine Aussage der Form $y = f(x)$.

$$F(x, y) = y^3 - y - x^2 \quad F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

Die obige Gleichung zu lösen bedeutet die Nullstellen von F zu finden.



(Man sieht eine in x-Richtung angedeutete Parabel)
Folgendes Problem: die Menge $M = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ definiert keinen Funktionsgraphen.

Allgemein betrachten wir $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$. Wir behalten aber die Notation $F(x, y) = 0$, wobei x und y Vektoren sind, und die Null ebenfalls.
Dies aufzulösen entspricht eienem System von m Gleichungen in $n + m$ Variablen (und wir wollen nach n Komponenten auflösen).

Theorem 11.1.1: Satz der impliziten Funktion

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $(x_0, y_0) \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^n$ stetig mit folgenden Hypothesen:

1. $F(x_0, y_0) = 0$
2. Die partiellen Ableitungen $\frac{\partial}{\partial y_k} F : U \to \mathbb{R}^m$ existieren und sind stetig.

3. Die Matrix
$$A = \left(\frac{\partial}{\partial y_k} F_j(x_0, y_0)\right)_{k,j} \in M(m, \mathbb{R})$$
ist invertierbar.

Dann existieren $r > 0$, $s > 0$ und eine stetige Funktion $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$ so, dass

$$\forall (x, y) \in B(x_0, r) \times B(y_0, s) : F(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x)$$

Angenommen $F \in \mathcal{C}^d$, $d \geqslant 1$, dann ist $f \in \mathcal{C}^d$ und es gilt:

$$Df(x) = -(D_y F(x, f(x)))^{-1} \circ (D_x F(x, f(x)))$$

Bemerkung:

Hier bedeutet $D_x F(x_1, y_1)$: die totale Ableitung der Funktion $x \mapsto F(x, y_1)$ am Punkt x_1 (analog für $D_y F$).

Bemerkung:

Testen wir, ob diese Formel sinnvoll ist:

$$Df(x) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

$$D_y F(x, f(x)) : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m \quad D_x F(x, f(x)) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

Beweis:

OBdA gilt $U = B_N \times B_m$ mit $B_n = B(x_0, r_0)$ und $B_m = B(y_0, s_0)$. Für ein fixes $x \in B_n$ schreibe
$$B(x_0, r) \to B(y_0, s) \quad F_x(y) = F(x, y)$$
Die Matrix A ist die Jacobi-Matrix von F_{x_0} im Punkt y_0 entsprechend $DF_{x_0}(y_0)$. Weiter definieren wir für das fixe $x \in B_n$ die Hilfsfunktion

$$T_x : B_m \to \mathbb{R}^m \quad T_x(y) = y - A^{-1} \cdot F_x(y)$$

Bemerke $F(x, y) = 0 (\Leftrightarrow A^{-1} \cdot F_x(y) = 0) \Leftrightarrow T_x(y) = y$

Theorem 11.1.2

$\exists r > 0, s > 0 :\ \forall x \in B(x_0, r)$ sich die Funktion T_x zu einer Lipschitz-Kontraktion $T_x : \overline{B(y0, r)} \to \overline{B(y_0, r)}$ einschränkt.

Beweis:

Die Abbildung $B_n \times B_m \to Hom(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ (versehen mit Operator-Norm ist er sogar eine metrischer Raum), gegeben durch $x, y \mapsto DT_x(y)$ ist stetig.
Für x_0, y_0 gilt

$$DT_{x_0}(y_0) = id_m - A^{-1} \cdot A = 0$$

Es existieren also $r > 0, s > 0$ mit

$$\begin{matrix} x \in B(x_0, r) \\ y \in B(y_0, s) \end{matrix} \Rightarrow ||DT_x(y)|| \leqslant \frac{1}{2}$$

Für $x \in B(x_0, r)$, $y_1, y_2 \in B(y_0, s)$ setze $\gamma(t) = (1-t)y_1 + ty_2$.
Rechne

$$\begin{aligned} ||T_x(y_1) - T_x(y_2)|| &= ||(T_x \circ \gamma)(1) - (T_x \circ \gamma)(0)|| \\ &= \left|\left| \int_0^1 (T_x \circ \gamma)'(t)dt \right|\right| \\ &\overset{dg}{\leqslant} \int_0^1 ||DT_x(\gamma(t))(y_2 - y_1)||dt \\ &\leqslant \int_0^1 \underbrace{||DT_x(\gamma(t))||_{op}}_{\leqslant \frac{1}{2}} \cdot ||y_2 - y_1||dt \\ &\leqslant \frac{1}{2} \cdot ||y_2 - y_1|| \end{aligned}$$

Ist das Bilt von $T_X : \overline{B(y_0, r)} \to \mathbb{R}^m$ in $\overline{B(y_0, r)}$ enthalten?
F ist stetig und $F(x_0, y_0) = 0$,also $T_{x_0}(y_0) = y_0$. Für $x \in B(x_0, r)$ mit $r > 0$ klein genug gilt

$$||T_x(y_0) - y_0|| \leqslant \frac{s}{2}$$

Folgt:

$$\begin{aligned} ||T_x(y) - y_0|| &= ||T_x(y) - T_x(y_0) + T_x(y_0) - y_0|| \\ &\leqslant \underbrace{||T_x(y) - T_x(y_0)||}_{\leqslant \frac{1}{2}s} + \underbrace{||T_x(y_0) - y_0||}_{\leqslant \frac{1}{2}} \\ &\leqslant s \end{aligned}$$

□

Der Ball $\overline{B(y_0, s)}$ ist beschränkt, abgeschlossen also kompakt also vollständig. Folgt dank Banach'schem Fixpunktsatz:

$$\forall x \in \overline{B(x_0, r)}\ \exists! y \in \overline{B(y_0, s)} : T_x(y) = y$$

Setze $f : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(y_0, s)} \quad f(x) = y$.
Stetigkeit von f: (ebenfalls Banach.)

$$\Omega := \{g : \overline{B(x_0, r)} \to \overline{B(y_0, s)} \mid g \text{ ist stetig}\}$$
$$||g_1 - g_2||_\infty = \max\{|g_1(x) - g_2(x)| \mid x \in \overline{B(x_0, r)}\}$$

Dieser Raum ist **vollständig**.

$$\begin{array}{rcll} \tilde{T}:\Omega & \to & \Omega & \\ \tilde{T}(g)(x) & = & g(x) - A^{-1}\cdot F(x,g(x)) & \in \overline{B(y_0,s)} \end{array}$$

Für $g_1, g_2 \in \Omega$ gilt

$$||\tilde{T}(g_1) - \tilde{T}(g_2)||_\infty = \max ||\tilde{T}(g_1) - \tilde{T}(g_2)|| \leqslant \frac{1}{2}||g_1(x) - g_2(x)|| = \frac{1}{2}||g_1 - g_2||$$

$$\Rightarrow \tilde{T} \text{ ist eine Lipschitz-Kontraktion}$$

Sei $\tilde{f}$ der eindeutige Fixpunkt von $\tilde{T}$:

$$\tilde{T}\tilde{f} = \tilde{f} \Rightarrow T_x(\tilde{f}(x)) = \tilde{f}(x)\ \forall x$$

Also ist $f = \tilde{f} \Rightarrow f$ ist stetig. □

Beweis - Wohldefiniertheit der Gleichung DF:

Nach Annahme ist $A = D_yF(x_0, y_0) = D_yF(x_0, f(x_0))$ invertierbar.
Die Funktion $x \mapsto det(D_yF(x, f(x)))$ ist stetig. Außerdem gilt $x_0 \mapsto det(A) \neq 0$.
Folgt, dass $D_yF(x, f(x))$ invertierbar ist, für $x \in B(x_0, r)$ für r klein genug.
Dieses kleine r können wir für verschiedene x_0 betrachten und so insgesamt einen Ball mit dem größeren r aus der Aussage konstruieren. □

Beweis - Gleichheit für $d = 1$:

Notation:

- $x \in B(x_0, r)$ fix
- $A_x = D_yF(x, f(x))$ (also $A_{x_0} = A$)
- $a = ||A_x^{-1}||_{op}$
- $L_x = -A_x^{-1} \cdot D_xF(x, f(x))$ (rechte Seite der zu beweisenden Formel)
- $b = ||L_x||_{op}$

Für $h \in \mathbb{R}^n$ klein genug so, dass $x + h \in B(x_0, r)$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
||f(x+h) - f(x) - L_x(h)|| &\overset{zz}{\leqslant} \alpha(h) \cdot ||h|| \text{ mit } \alpha(h) = o(1) \\
&\leqslant ||f(x+h) - f(x) + A_x^{-1} \cdot D_x F(x, f(x)) \cdot h|| \\
&\leqslant a \cdot ||D_x F(x, f(x))(h) + \underbrace{D_y F(x, f(x))}_{A_x}(f(x+h) - f(x))|| \\
&= a \cdot ||DF(x, f(x))(h, f(x) + h - f(x))|| \\
&= a \cdot ||\underbrace{F(x+h, f(x+h))}_{0} \\
&- \qquad \underbrace{F(x, f(x))}_{0} - DF(x, f(x))(h, f(x) + h - f(x))|| \\
&\leqslant \alpha(h) \cdot ||(h, f(x+h) - f(x))|| \\
&\text{mit } \alpha(h) = o(1) \text{ also } \alpha \to 0 \text{ (für } h \to 0)
\end{aligned}$$

ZZ: $||f(x+h) - f(x)|| \leqslant c \cdot ||h|| \Leftrightarrow \alpha(h)(1+c) \cdot ||h||$.
Nebenrechnung:

$$\begin{aligned}
||f(x+h) - f(x)|| &\leqslant ||f(x+h) - f(x) - L_x(h) + L_x(h)|| \\
&\leqslant ||f(x+h) - f(x) - L_x(h)|| + ||L_x(h)|| \\
&\leqslant \alpha(h)(||h|| + ||f(x+h) - f(x)||) + b \cdot ||h||
\end{aligned}$$

Wählt man h klein genug, gilt: $\alpha(h) < \frac{1}{2}$.

$$(1 - \alpha(h)) \cdot ||f(x+h) - f(x)|| \leqslant (\alpha(h) + b) \cdot ||h|| \Leftrightarrow ||f(x+h) - f(x)|| \leqslant \underbrace{2\left(\frac{1}{2} + b\right)}_{c} \cdot ||h||$$

Es folgt die gewünschte Abschätzung. $\square$

Beweis - für $d \geqslant 1$ (Induktion):

Ist F von Klasse $\mathcal{C}^2$, gilt

$$Df(x) = -(D_y F(x, f(x)))^{-1} \circ (D_x F(x, f(x)))$$

Zu zeigen: $Df(x) \in \mathcal{C}^1$ also die Jakobi-Matrix hat Einträge in $\mathcal{C}^1$.

- $D_x F(x, y)$ ist eine Matrix mit Einträgen von Klasse $\mathcal{C}^1$
- $D_x F(x, f(x))$ ist eine Matrix mit Einträgen von Klasse $\mathcal{C}^1$
- $D_y F(x, f(x))$ ist eine Matrix mit Einträgen von Klasse $\mathcal{C}^1$

Folgt, dass $Df(x)$ eine Matrix mit Einträgen aus $\mathcal{C}^1$ ist. $\Rightarrow f \in \mathcal{C}^2$.
Analog: ist F von Klasse $\mathcal{C}^d$, so gilt:
... $\Rightarrow Df(x)$ hat Einträge der Klasse $\mathcal{C}^{d-1} \Rightarrow f \in \mathcal{C}^d$ $\square$

Beispiel:

$$U = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^2 \sim (\underbrace{x_1, x_2, x_3}_{x}, \underbrace{y_1, y_2}_{y}) \quad m = 2, n = 3$$

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2^2 + x_3^3 + y_1 + y_2^2 + x_1 y_1 \\ x_1 + x_2 + \sin(x_3) + 7\sin(y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x,y) \\ F_2(x,y) \end{pmatrix}$$

Setze $(x_0, y_0) = (0,0)$.
Also gilt:

$$D_y F(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_i(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 1 + x_1 & 2y_2 \\ 0 & 7\cos(y_2) \end{pmatrix}$$

$$A := D_y F(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

$$D_x F(x,y) = \left(\frac{\partial}{\partial y} F_i(x,y)\right) = \begin{pmatrix} 1 + y_1 & 2x_2 & 3x_3^2 \\ 1 & 1 & \cos(x_3) \end{pmatrix}$$

$$B := D_x F(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} f : B(0,r) &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto (f_1(x_1,x_2,x_3), f_2(x_1,x_2,x_3)) \\ f(0) &= 0 \end{aligned}$$

$$Df(0) = -(DyF(x_0, f(x_0)))^{-1} \circ D_x F(x_0, f(x_0)) = A^{-1} \cdot B = -\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Explizite Berechnung von f (idR nicht möglich)

$$y_2 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{7}(-x_1 - x_2 - \sin(x_3)\right)$$

also

$$y_1 = -\frac{1}{1 + x_1} \cdot (-x_1 - x_2^2 - x_3^3 - \sin^{-1}(\ldots)^2)$$

Also:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(x_1, x_2, x_3)$$

Jetzt gilt

$$Df(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & -\frac{1}{7} \end{pmatrix}$$

Theorem 11.1.3: Satz der inversen Funktion

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^n$ von Klasse $\mathcal{C}^d$ mit $d \geqslant 1$. Sei $x_0 \in U$ mit $Df(x_0)$ invertierbar. Dann existieren offene Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von $y_0 := f(x_0)$ so, dass sich f zu einer Bijektion

$$f|_{U_0} : U_0 \to V_0$$

einschränkt.
Die zu $f|_{U_0}$ inverse Funktion $g : V_0 \to U_0$ ist von Klasse $\mathcal{C}^d$ und es gilt:

$$Dg(y) = (Df(x))^{-1} \; \forall x \in U \text{ und } y = f(x)$$

(alternativ $\forall y \in V_0$ und $x = g(y)$)

Beweis:

Betrachte $F : U \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ gegeben durch

$$F(\underbrace{x}_{\in U}, \underbrace{y}_{\in \mathbb{R}^n}) = f(x) - y$$

Wir wollen nach x auflösen. Da

$$D_x F(x_0, y_0) = Df(x_0)$$

invertierbar ist, können wir den Satz der impliziten Funktion anwenden. Es existieren also $r > 0, s > 0$ und $g : B(y_0, r) \to B(x_0, s)$ mit $y(y_0) = x_0$ und

$$F(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = g(y) \; \forall x, y \in B(x_0, s) \times B(y_0, r)$$

Setze $V_0 = B(y_0, r)$ und $U_0 = g(V_0) = f^{-1}(v_0)$ (also offen mit $x_0 \in U_0$).
Außerdem gilt (immer noch laut dem Satz der impliziten Funktion), dass $g \in \mathcal{C}^d$ und dass

$$Dg(y) = -(DxF(g(y), y))^{-1} \circ D_y F(g(y), y)$$

Setze nun $g(y) = x$ und $y = f(x)$. Dann gilt

- $(DxF(g(y), y))^{-1} = Df(x)^{-1}$
- $D_y F(g(y), y) = -id$

Also ist

$$Dg(y) = Df(x)^{-1}$$

□

Beispiel - 'Kugelkoordinaten':

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$(r, \vartheta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ r\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Berechnen wir:

$$
\begin{aligned}
Df(r,\vartheta,\vartheta) &= \begin{pmatrix} | & | & | \\ \partial_r f & \partial_\vartheta f & \partial_\varphi \\ | & | & | \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)\cos(\varphi) & r\cos(\vartheta)\cos(\varphi) & -r\sin(\vartheta)\sin(\varphi) \\ \sin(\vartheta)\sin(\varphi) & r\cos(\vartheta)\sin(\varphi) & r\sin(\vartheta)\cos(\varphi) \\ \cos(\vartheta) & -r\sin(\vartheta) & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Ist diese Abbildung invertierbar?

$$det(Df(r,\vartheta,\varphi)) = r\sin(\vartheta)$$

Also ist Df invertierbar bei $r \neq 0$ und $\vartheta \neq k \cdot \pi$

Beispiel:

Wir betrachten

$$
\begin{aligned}
F &: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\
F(x,y) &= x^2 + y^3 - y
\end{aligned}
$$

Nullstellen von F: Bild, hehe: Wir wählen als Beispiel: $y_0 = 0.75$ also $y_0 - y_0^3 = \frac{21}{64}$ und $x_0 = \sqrt{\frac{21}{64}}$

$$
\begin{aligned}
D_yF(x_0,y_0) &= 3y_0^2 - 1 \in \mathbb{R} \\
&= \frac{3 \cdot 3^2}{4^2} - 1 = \frac{11}{16} \neq 0
\end{aligned}
$$

Es existiert $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$ mit $f(x_0) = y_0$ und $F(x,y) =\Leftrightarrow y = f(x)$.

$$
\begin{aligned}
Df(x_0)(1) := f'(x_0) &= -(D_yF(x_0,y_0))^{-1} \circ D_xF(x_0,y_0) \\
&= -\frac{16}{11} \cdot 2\sqrt{\frac{21}{64}} \\
&= \frac{-32\sqrt{21}}{88}
\end{aligned}
$$

Beispiel:

Eher ein Gegenbeispiel:

$$
\begin{aligned}
f &: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\
f(x) &= x^3
\end{aligned}
$$

ist bijektiv und von Klasse $\mathcal{C}^\infty$ aber ihr Inverses $g(y) = \sqrt[3]{y}$ ist nicht einmal von Klasse $\mathcal{C}^1$

Definition 11.1.1: Diffeomorphismen

Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Eine Abbildung $f : U \to v$ heißt **Diffeomorphismus** falls

- f bijektiv ist

- f von Klasse $\mathcal{C}^1$ ist
- ihr Inverses auch von Klasse $\mathcal{C}^1$ ist

Beispiel:

$$f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$$
$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

Ist surjektiv. Es gilt

$$det(Df(x_{1,2})) = 2(x_1^2 + x_2^2) \neq 0$$

Allerding ist f nicht injektiv: $f(x_1, x_2) = f(-x_1, -x_2)$

Theorem 11.1.4: Satz von Hadamard-Caccioppoli

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $f : U \to \mathbb{R}^n$ von Klasse $\mathcal{C}^d$ und injektiv. Angenommen $Df(x)$ sei für jeden Punkt $x \in U$ invertierbar. Dann ist $V = f(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und f ein $\mathcal{C}^d$-Diffeomorphismus mit

$$(Df^{-1})(y) = (Df(x))^{-1}$$

für alle $x \in U$ und $y = f(x) \in V$.

Bemerkung:

Diese Aussage ist eigentlich sogar ein Korollar zum Satz der inversen Funktion. Die Aussage zur Inversen der Ableitung ist dabei äquivalent formuliert.

Beweis:

Zuerst zeigen wir, dass $V = f(U)$ offen ist. Sei für $x_0 \in U$ $y_0 = f(x_0)$. Da $Df(x_0)$ invertierbar ist, wenden wir den Satz der inversen Funktion an und bekommen offene Umgebungen U_0 von x_0 und V_0 von y_0 so, dass $f|_{U_0} : U_0 \to V_0$ ein $\mathcal{C}^d$-Diffeomorphismus ist.
Insbesondere ist $V_0 = f(U_0) \subseteq f(U) = V$ und also V offen, da x_0 und somit $y_0 \in V$ beliebig waren.
Des Weiteren haben wir

$$(f|_{U_0})^{-1} : V_0 \to U_0 \Leftrightarrow f^{-1}|_{V_0} : V_0 \to U_0$$

($f^{-1} : V \to U$ existiert wegen der Voraussetzung der Injektivität.) Also ist $f^{-1}|_{V_0}$ auch in $\mathcal{C}^d$.
Da y_0 beliebig war und die stetige Differenzierbarkeit lokal gilt, gilt nun allgemein: $f^{-1} \in \mathcal{C}^d$.
Also ist $f : U \to V$ ein $\mathcal{C}^d$-Diffeomorphismus. $\square$

11.2 Teilmannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^n$

Wir betrachten den 'euklidischen $\mathbb{R}^n$', also $\mathbb{R}^n$ zusammen mit dem Standardskalarprodukt und also auch einer Norm und einer Metrik.

Bemerkung:

Mannigfaltigkeiten - Meta:
($\sim$ Kurve oder Fläche im $\mathbb{R}^n$, zum Beispiel eine Kugeloberfläche)
Höherdimensional: Begriff der Varietät.

Bemerkung - Voraussetzung:

Nachfolgend sind alle Funktkionen und Diffeomorphismen, die wir behandeln immer implizit von Klasse $\mathcal{C}^\infty$

Definition 11.2.1: Mannigfaltigkeit

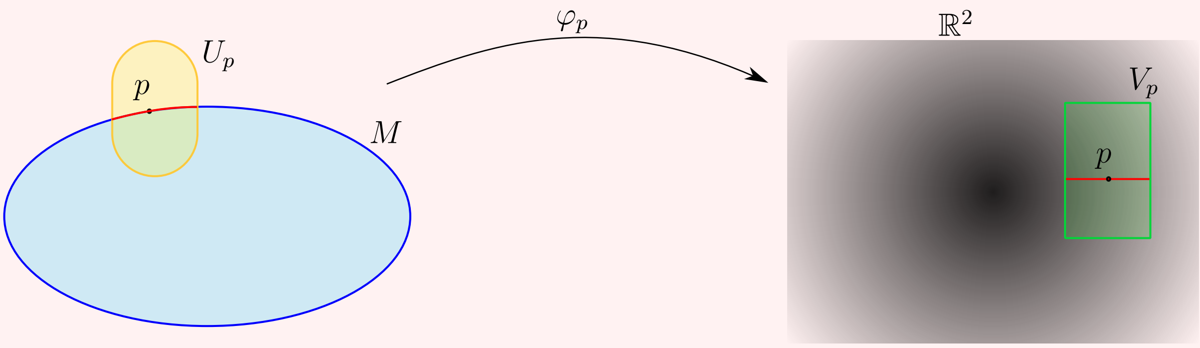
Seien $a \leqslant k \leqslant n$ und sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$. Wir sagen M sei ein k-dimensionale **Mannigfaltigkeit** falls zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p von $p \in \mathbb{R}^n$ und ein Diffeomorphismus

$$\varphi_p : U_p \to V_p \subseteq \mathbb{R}^n$$

existiert, mit der Eigenschaft

$$\varphi^{-1}(V_p \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}) = U_p \cap M$$

$$(\Leftrightarrow \varphi(U_p \cap M) = V_p \cap \mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k})$$



$$\mathbb{R}^2 \quad n = 2 \quad k = 1$$

Wir nennen

- $\varphi_p : U_p \to V_p$ eine Karte (um p)
- $\varphi^{-1} : V_p \to U_p$ eine Parametrisierung (um p)

Eine Familie von Karten $(U_i, V_i, \varphi_i)_{i \in \mathcal{I}}$ nennen wir **Atlas** falls jeder Punkt von M im Definitionsbereich einer Karte liegt.

Beispiel:

$$\underbrace{\mathbb{R}^k \times \{0\}}_{M} \subseteq \mathbb{R}^n$$

ist eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit.

Allgemeiner:

Theorem 11.2.1

Jeder k-dimensionaler linearer Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit.

Beispiel - Graphen von glatten Funktionen (wichtig):

Sei $n = k + m$, sei $U \subseteq \mathbb{R}^k$ offen und sei $f : U \to \mathbb{R}^m$ glatt.

$$M = Graph(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in U\} \subseteq U \times \mathbb{R}^m \subseteq \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m (= \mathbb{R}^n)$$

ist eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$.
Karte:

$$\varphi : U \times \mathbb{R}^m \to U \times \mathbb{R}^m$$
$$(x, y) \mapsto (x, f(x) - y)$$
$$\varphi^{-1}(x, y) = (x, -f(x) - y)$$

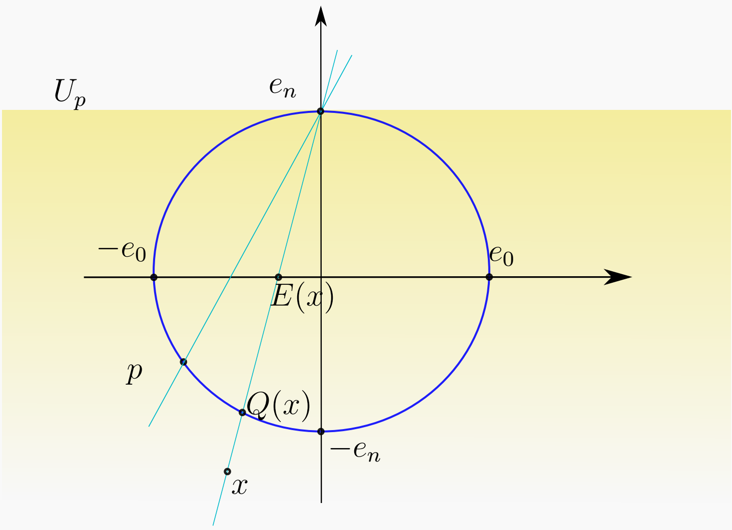
weil $\varphi^{-1}(\varphi(x, y)) = \varphi^{-1}(x, f(x) - y) = (x, f(x) - (f(x) - y)) = (x, y)$ Also ist φ ein Diffeomorphismus und M ist eine Teilmannigfaltigkeit. (Sonderfall weil nur von einer einzigen Karte abgedeckt.)

Beispiel - Einheitssphäre:

$$M := \left\{ (x_0, x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \sum_{i=0}^{n} x_i^2 (= ||x||) = 1 \right\} = \mathbb{S}^n$$

Für $p \neq e_n$ können wir folgende Karte konstruieren:

$$U_p \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \quad U_p = \{(x_0, ..., x_n) \mid x_n < 1\} \quad V_p)U_p$$



zu jedem $x \in U$ existiert genau eine Gerade durch e_n und x. Schreibe $E(x)$ für den eindeutigen Schnittpunkt mit der Ebene $x_n = 0$ und $Q(x)$ für den Schnittpunkt mit $\mathbb{S}^n = M$.

Setze $\varphi(x) = (x - e_n) \cdot \dfrac{||E(x) - e_n||}{||Q(x) - e_n||} + e_n$ (stereographische Projektion)

Beispiel:

$$M = \{x, y \mid x^2 + y^3 - y = 0\}$$

Definiert eine Teilmannigfaltigkeit, die bis auf Variablenvertauschung auch auf kleinen Umgebungen einen Funktionsgraphen beschreibt.

Dies Motiviert Folgendes:

Theorem 11.2.2

Eine Teilmenge $M \subseteq \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit, wenn zu jedem Punkt $p \in M$ eine offene Umgebung U_p von p in $\mathbb{R}^n$, eine glatte Funktion $f_p : \tilde{U}_p \to \mathbb{R}^{n-k}$ auf $\tilde{U}_p \subseteq \mathbb{R}^k$ und eine Permutation $\sigma \in \mathcal{S}_n$ existieren, so dass:

$$M \cap U_p = P_\sigma(Graph(f_p))$$

mit

$$P_\sigma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$
$$P_\sigma(e_i) = e_{\sigma(i)}$$

Beweis:

Angenommen $M \subseteq \mathbb{R}^n$ sei eine k-dimensionale Teilmannigfaltigkeit und sei $p \in M$. Sei $\varphi_p : U_p \to V_p$ eine Karte um p (existiert nach Hypothese) mit $\varphi_p(0) = 0$. Definiere für $\varepsilon > 0$ klein genug

$$\psi : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \to M \subseteq \mathbb{R}^n$$
$$\psi(y_1, ..., y_k) = \varphi_p^{-1}(y_1, ..., y_k, 0, 0, ..., 0)$$

Also gilt $D\psi(0) =$ die Einschränkung von $D\varphi_p^{-1}$ auf $\mathbb{R}^k \times \{0\}^{n-k}$. Wir können auch schreiben

$$D\psi(0) = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(0)\right)_{i,j} \in M(n \times k)$$

Diese Matrix hat Rang k und ist also auch injektiv.

Nach Umordnen ist $\left(\dfrac{\partial \psi_i}{\partial y_j}(0)\right)_{1 \leqslant i,j \leqslant k}$ invertierbar.

Definiere

$$g : (-\varepsilon, \varepsilon)^k \to \mathbb{R}^k$$
$$y \mapsto (\psi_1(y), ..., \psi_k(y))$$

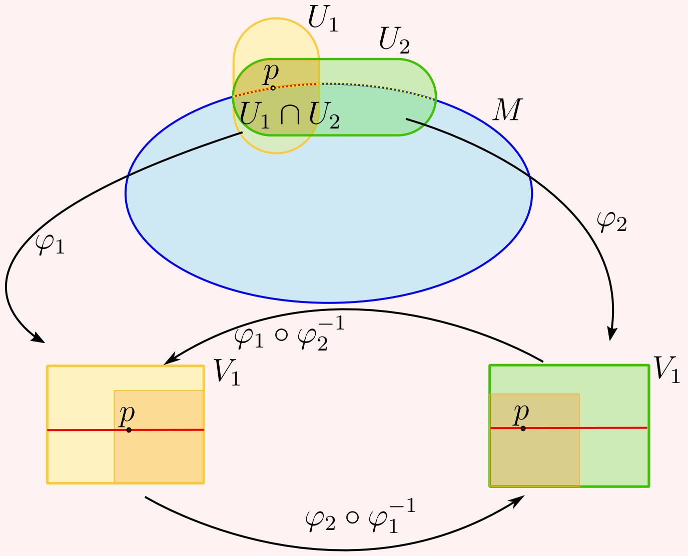
$Dg(0)$ ist invertierbar. Es existiert also eine Umgebung $U \subseteq (-\varepsilon, \varepsilon)^k$ von 0 so, dass $g|_U : U \to g(U)$ ein Diffeomorphismus ist.

Betrachte jetzt $f := \psi \circ (g|_U)^{-1} : \underbrace{g(U)}_{\subseteq \mathbb{R}^k} \to M$.

Für $1 \leqslant i \leqslant k$ und $y \in g(U)$ gilt: $f_i(y) = \psi_i(g|_U{}^{-1}(y)) = y_i$.

Man kann auch schreiben: $f = (id, f_p) = (y_1, ..., y_k, f_p(y_{k+1}), ..., f_p(y_n))$. Also ist das Bild von f, $M \cap U_p$ gleich dem Graphen von f_p.
Für die Rückrichtung betrachte man das obige Beispiel. Dort haben wir gezeigt: der Graph einer glatten Funktion ist für einen beliebigen Punkt lokal eine Teilmannigfaltigkeit, also auch global. □

Definition 11.2.2: Kartenwechsel



$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \to \varphi_2(U_1 \cap U_2)$$

ist ein Diffeomorphismus und schränkt sich zu

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}^k \to \varphi_2(U_1 \cap U_2) \cap \mathbb{R}^k$$

ein.
Man nennt $\varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ einen **Kartenwechsel** (Transition of maps).

11.3 Niveaumengen

Definition 11.3.1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^m$ glatt. Dann ist

$$M = \{x \in U \mid F(x) = c\}$$

eine **Niveaumenge**.
Eine einfache Verschiebung ermöglicht diese einfacher zu berechnende Darstellung:

$$M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$$

Ist diese Menge M eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$?
Die Dimension von M sollte $n - m$ sein.

Beispiel:

- $U = \mathbb{R}^2 \quad F(x,y)x^2 + y^3 - y$
- $U = \mathbb{R}^n \quad F(x) = x_1^2 + ... + x_n^2 - 1$
  Also ist M die $n-1$-dimensionale Einheitssphäre
- $U = \mathbb{R}^2 \quad F(x,y) = x \cdot y.$
  Also ist M die Vereinigung der Koordinatenachsen. M ist aber nicht eine Teilmannigfaltigkeit.

Theorem 11.3.1: Satz vom konstanten Rang

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$ glatt. Setze $M = \{x \in U \mid F(x) = 0\}$. Falls für alle $p \in M$ die Ableitung

$$DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

surjektiv, so ist M eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^n$ von Dimension $n - m$.

Bemerkung:

In Matrizensprache muss also $DF(p)$ Rang m haben.

Beweis:

Annahme: $0 < m \leqslant n$ (der entgegengesetzte Fall ist trivial: Die Matrix kann nicht vollen Rang haben, das aufzulösende Gleichungssystem ist unterbestimmt).
Sei $p \in M$. Die Jakobi-Matrix

$$DF(p) = \begin{pmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{pmatrix} \in M(m \times n, K)$$

hat Rang m. Nach Umordnen der Variablen $x_1, ..., x_n$ können wir annehmen, dass der $m \times m$-Block invertierbar ist.
Benenne die Variablen nun $x_1, ..., x_k, y_1, ..., y_m$ mit $k = n - m$. Jetzt kann man schreiben: $F(x,y)$ und $D_y F(p)$ ist invertierbar (mit $p = x_0, y_0$).
Nach dem Satz der impliziten Funktion existieren $r > 0$, $s > 0$, $f : B(x_0, r) \to B(y_0, s)$ mit

$$F(x,y) = 0 \Leftrightarrow y = f(x) \; \forall x \in B(x_0, r), y \in B(y_0, s)$$

Setze $U_p = B(x_0, r) \times B(y_0, s) \subseteq \mathbb{R}^n$. Nun ist U_p eine offene Umgebung von p und $M \cap U_p = Graph(f)$. $\square$

Definition 11.3.2: Kritischer Punkt

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$ glatt (von Klasse $\mathcal{C}^1$). Ein Punkt $x \in U$ heißt **kritischer Punkt** für F, falls

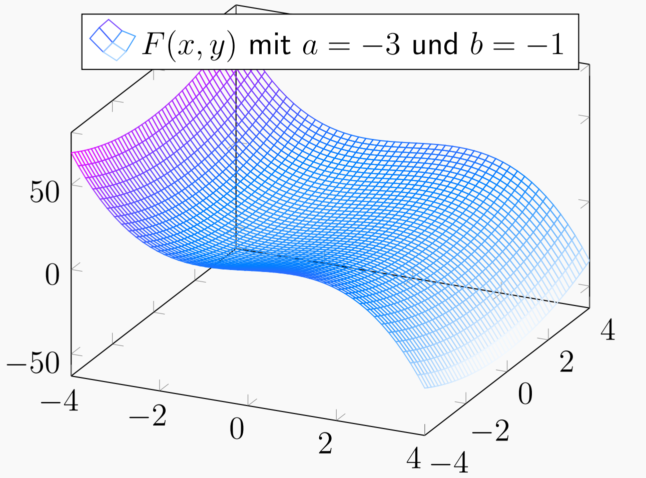
$$Rang(DF(x)) < \min(n, m)$$

Andernfalls heißt x **regulär**.
Für einen kritischen Punkt x nenen wir $F(x)$ einen **kritischen Wert**.

Beispiel:

$$U = \mathbb{R}^2 \qquad \begin{gathered} F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ F(x, y) = y^2 - (x^3 + ax + b) \end{gathered} \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

(Weiherstrass-Gleichung einer elliptischen Kurve)



Ist $M = \{(x, y) \mid F(x, y) = 0\}$ eine Teilmannigfaltigkeit?

$$DF(x, y) = \begin{pmatrix} -3x^2 - a & 2y \end{pmatrix} \in M(2 \times 1, \mathbb{R}) = grad(F)(x, y)$$

Kritische Punkte sind $\{(x, y) \mid DF(x, y) = 0\} = \left\{ \left(\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}, 0 \right) \right\}$ falls $a \leqslant 0$ und $\emptyset$ sonst.

Folgt: Falls $a > 0$ oder falls $a \leqslant 0$ und $\left(\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}, 0 \right) \notin M$, dann ist M eine Teilmannigfaltigkeit. Der Punkt $\left(\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}, 0 \right)$ ist $\in M$, falls $\pm\sqrt{\frac{-a}{3}}$ eine Wurzel von $x^3 + ax + b$ ist. Mit anderen Worten, falls $x^3 + ax + b$ eine doppelte Nullstelle hat.
Beispiel: $y^2 - (x^3 - 3x + 2)$ oder $y^2 - x^3$

Beispiel:

Sei $A \in M(n \times n, \mathbb{R})$ symmetrisch. $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \quad Q(x) =< x, Ax >= x^T Ax$

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(x) = 0, x \neq 0\}$$

ist eine Quadrik.

$$Q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k}Q(x) &= \sum_{j=1}^{n} a_{kj}x_j + \sum_{i=1}^{n} a_{ik}x_i \\ &= 2\cdot\sum_{j=1} a_k j x_j \\ &= 2x^T Ax\end{aligned}$$

Also ist $DQ(x) = 2\cdot x^T A = grad(Q)(x)$. Folgt, dass falls A invertierbar ist, so ist der einzige kritische Punkt von Q der Punkt $0 \in \mathbb{R}^n$ und somit M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $n-1$

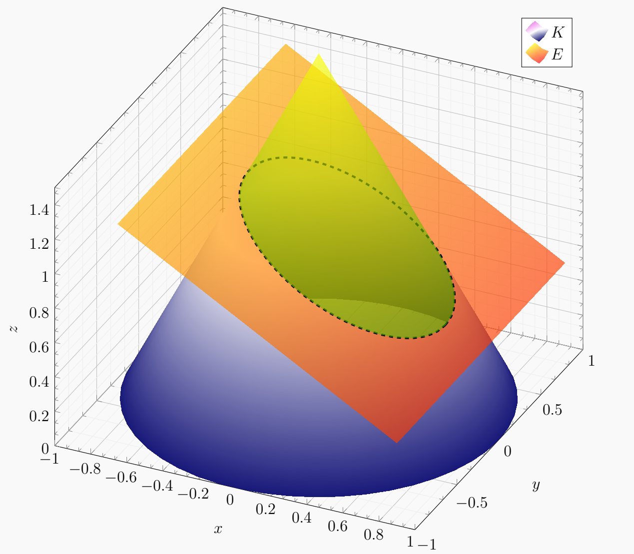
Beispiel - Kegelschnitte:

$$r, s \in \mathbb{R}, s > 0 \quad (a,b,c) \neq (0,0,0)$$

$$K : x^2 + y^2 = sz^2$$

$$E : ax + by + cz = r$$

Betrachte den Schnitt $K \cap E$



Wir verwenden

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$F(x,y,z) = (x^2 + y^2 - sz^2, ax + by + cz - r)$$

Unsere Frage, ob $K \cap E$ eine Mannigfaltigkeit ist, lässt sich zurückführen auf die Frage, ob

$$M := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid F(x,y,z) = 0\}$$

eine Mannigfaltigkeit ist.

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -2sz \\ a & b & c \end{pmatrix}$$

Wir wissen schon einmal $(a,b,c) \neq 0$, also hat die Matrix zumindest Rang 1.

$$Rang < 1 \Leftrightarrow \ \exists \lambda \in \mathbb{R} : \begin{cases} x = \lambda a \\ y = \lambda b \\ -sz = \lambda c \end{cases}$$

Also prüfen wir:

$$(x, y, z) = \left(\lambda a, \lambda b, -\frac{\lambda c}{s}\right) \in M(1 \times 3)$$

$\lambda = 0 \quad r = 0$ oder $\lambda \neq 0 \Rightarrow r = 0$ und E liegt am Kegel an. (und eine Mannigfaltigkeit, aber das kann uns der Satz des konstanten Rangs nicht sagen.)

11.4 Tangentialräume

Definition 11.4.1: Tangentialraum

Es sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit, $p \in M$. Der **Tangentialraum** von M an p ist

$$T_pM = \{\gamma'(0) \mid \gamma : (-\delta, +\delta) \to M \text{ differenzierbar }, \gamma(0) = p, \delta > 0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Elemente von T_pM nennt man **Tangentialvektoren** und

$$TM = \{(p, v) \mid p \in M, v \in T_pM\} \subseteq M \times \mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

nennt man **Tangentialbündel** von M.

Bemerkung:

$$0 \in T_pM$$

betrachte hierfür einfach den Pfad $\kappa = p$ (konstant).
Später werden wir sogar sehen, dass T_pM ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist:

$$v \in T_pM \Rightarrow \lambda \cdot v \in T_pM \ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Wir können allerdings noch nicht sagen, ob gilt

$$v_1, v_2 \in T_pM \Rightarrow v_1 + v_2 \in T_pM$$

Bemerkung:

$$\begin{aligned} \pi : TM &\to M \\ (p, v) &\mapsto p \end{aligned}$$

ist die kanonische Projektion, und wir haben eine umgekehrte Abbildung:

$$\begin{aligned} 0_M : M &\to TM \\ p &\mapsto (P, 0) \end{aligned}$$

die wir Nullschnitt nennen.

Definition 11.4.2: Vektorfeld

Eine Abbildung $s : M \to TM$ mit $\pi \circ s = id_M$ heißt **Schnitt** oder auch **Vektorfeld** von M.

$$\begin{aligned} s : M &\to TM \\ p &\mapsto (p, v) \end{aligned}$$

Nachfolgend verwenden wir folgende Notation.

$$\mathbb{R}^k = \mathbb{R}^k \times \{0\} \subseteq \mathbb{R}^n$$

Theorem 11.4.1

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Teilmannigfaltigkeit, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen. Sei $\psi : V \to U$ ein Diffeomorphismus mit $\psi(\mathbb{R}^k \cap V) = U \cap M$. (also wäre ψ^{-1} eine Karte).
Dann ist die Abbildung

$$\begin{aligned} T\psi : (V \cap \mathbb{R}^k) \times \mathbb{R}^k &\to T(U \cap M) \\ T\psi(y, h) &= (\psi(y), D\psi(y)(h)) \end{aligned}$$

wohldefiniert und eine Bijektion. Insbesondere gilt für $p = \psi(y)$

$$T_pM = Im(D\psi(y) : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n)$$

Da $D\psi$ eine lineare Abbildung ist, ist T_pM insbesondere ein linearer Unterraum der Dimension k von $\mathbb{R}^n$.

Beweis:

Da $V \cap \mathbb{R}^k$ offen in $\mathbb{R}^k$ ist (relativ offen), existiert zu jedem $y \in V \cap \mathbb{R}^k$ ein $\delta > 0$ so, dass

$$\begin{aligned} \gamma : (-\delta, \delta) &\to V \cap \mathbb{R}^k \\ t &\mapsto y + th \end{aligned}$$

wohldefiniert ist. Es gilt dann: $\gamma(0) = y$ und $\gamma'(0) = h$.
Damit ist $\psi \circ \gamma$ ein Pfad im M mit $(\psi \circ \gamma)(0) = \psi(y)$ und

$$\begin{aligned} (\psi \circ \gamma)'(0) &= D\psi(\gamma(0)) \cdot \gamma'(0) \\ &= D\psi(y)(h) \in T_{\psi(y)}M \end{aligned}$$

$$\Rightarrow T\psi \text{ ist wohldefiniert}$$

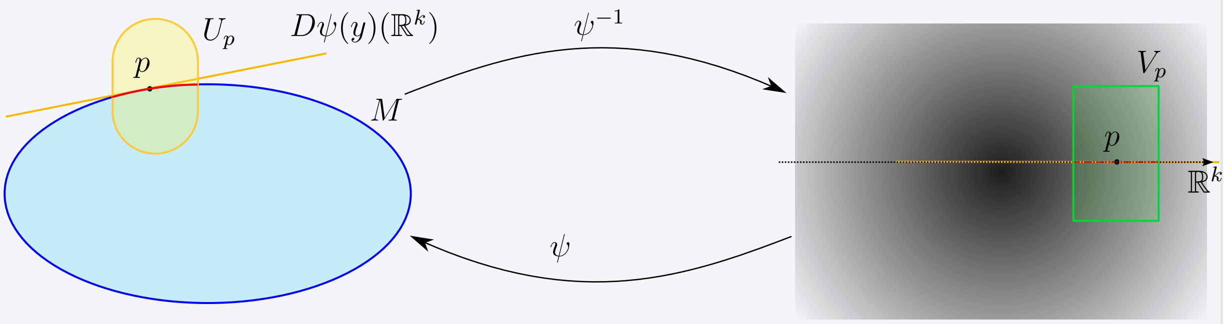
- $T\psi$ injektiv: Weil ψ injektiv ist und $D\psi(y)$ injektiv ist für alle $y \in \mathbb{R}^k$.
- $T\psi$ surjektiv: Sei $p = \psi(y) \in M$ und $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ mit $\gamma(0) = p$ und $v = \gamma'(0) \in T_pM$.

Betrachte $\psi^{-1} \circ \gamma$, einen Pfad in $\mathbb{R}^k \cap V$.

$$\begin{aligned} h := (\psi^{-1} \circ \gamma)'(0) &= D\psi^{-1}(p)(v) \\ &= (D\psi(y))^{-1}(v) \end{aligned}$$

Also gilt: $D\psi(y)(h) = v$ und es folgt $T\psi(y, h) = (p, v)$. Also ist ψ surjektiv.

Nochmal eine zusammenfassende Beweisskizze: Wir können die Teilmannigfaltigkeit in eine lineare Untermenge des $\mathbb{R}^k$ überführen, und dann dort unsere Aussagen zeigen und sie anschließend wieder zurück auf M anzuwenden. Das ist möglich weil ψ als Diffeomorphismus bijektiv ist.



□

Theorem 11.4.2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $F : U \to \mathbb{R}^m$ glatt und $M := F^{-1}(0)$. Angenommen $DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sei surjektiv für alle $p \in M$ (also ist M eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k = n - m$). Dann gilt

$$T_pM = \ker(DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m)$$

Beweis:

T_pM und $\ker(DF(p)n$ sind k-dimensionale lineare Unterräume des $\mathbb{R}^n$. Es genügt also Inklusion des Einen im Anderen zu zeigen.
Wir schauen uns $T_pM \subseteq \ker(DF(p)$ an: Sei $\gamma : (-\delta, \delta) \to M$ mit $\gamma(0) = p$.

$$DF(p)(\gamma'(0)) = \underbrace{(F \circ \gamma)}_{\equiv 0}'(0) = 0$$

Also $\gamma'(0) \in \ker(DF(p)$ □

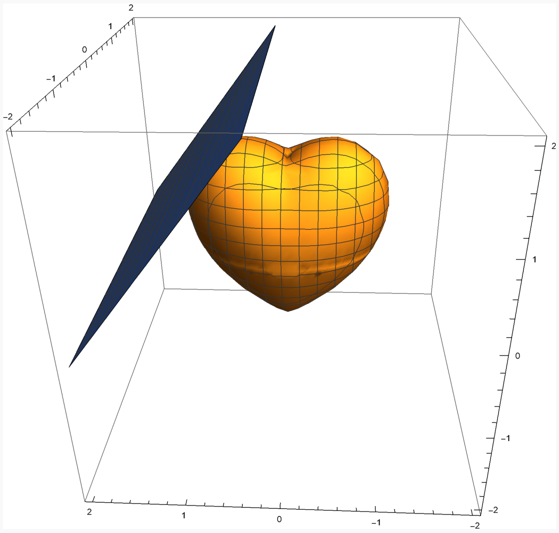
Beispiel:

$$U = \mathbb{R}^3 \qquad \begin{cases} F : U \to \mathbb{R} \\ F(x, yz) = (2x^2 + y^2 + z^2 - 1)^3 - \dfrac{1}{10}x^2z^3 - y^2z^3 \end{cases}$$

Seien $M = F^{-1}(0)$ und $p = (0,1,1) \in M$. Dann ist

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x(2x^2+y^2+z^2-1)^2 - \frac{1}{5}xz^3 \\ 6y(2x^2+y^2+z^2-1)^2 - 2yz^3 \\ 6z(2x^2+y^2+z^2-1)^2 - \frac{3}{10}x^2z^2 - 3y^2z^2 \end{pmatrix} \Rightarrow DF(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Also gilt: $\ker(DF(p)) = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle$ und man kann zeichnen:



Ist das nicht süß?

Beispiel:

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid \underbrace{x^2+y^2 = z}_{A}, \quad \underbrace{y+y+z=1}_{B}\}$$

$A)$ Die Parabel $x^2 = z$ um die z-Achse rotiert.

$B)$ Ebene durch $\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)$ und $\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

Betrachte

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2+y^2-z \\ y+y+z-1 \end{pmatrix}$$

Also ist $M = F^{-1}(0)$

$$DF(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$Rang(DF(x,y,z)) < 2 \Leftrightarrow x = y = -\dfrac{1}{2}$ und z beliebig. Aber dieser kritische Punkt $\notin M$ für alle $z \in \mathbb{R}$.

Also ist M eine Mannigfaltigkeit und

$$\begin{aligned} T_pM &= \ker(DF(p))\ \forall p \in M \\ p &:= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right) \in M \\ DF(p) &= \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ -\sqrt{-2}-1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \end{aligned}$$

Beispiel:

$$SL_2 = \left\{ A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \middle| det(A) = ad - bc = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

also anders dargestellt

$$M = \{x \in \mathbb{R}^4 \mid F(x) = x_1x_4 - x_2x_3 - 1 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^4$$

Wie sonst auch berechnen wir also
Sei $p = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \equiv (1,0,0,1)$, die Einheitsmatrix. Nun berechnen wir

$$DF(x) = (x_4, -x_3, -x_2, x_1)$$

und es gilt

$$DF(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \quad 0 \neq M$$

also ist M eine Mannigfaltigkeit.

$$\begin{aligned} T_pM &= \ker(DF(p)) = \ker((1\,0\,0\,1)) \\ &= \left\langle \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right) \right\rangle \end{aligned}$$

In der Matrizensprache ergibt das

$$T_{id}SL_2 = \langle \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) \rangle = \{A \in M(2 \times 2, \mathbb{R}) \mid tr(A) = 0\}$$

11.5 Extremwertprobleme

Sei $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Versuchen wir das Maximum von $f|_M$ zu finden.
Beispiel: $M = \mathcal{S}^{n-1} \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Polynomial.

Definition 11.5.1: Normalenraum

Sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension k. Sei $p \in M$. Wir nennen

$$N_pM = (t_pM)^\perp = \{w \in \mathbb{R}^n \mid < w, v >= 0 \; \forall v \in T_pM\}$$

den $(n-k)$-dimensionalen **Normalenraum** von M in p.
Wir nennen $w \in N_pM$ einen **Normalenvektor** von M bei p.
Das **Normalenbündel** von M ist

$$\{(p, w) \mid p \in M \text{ und } w \in N_pM\}$$

Bemerkung:

Auch hier existiert eine kanonische Projektion

$$\begin{aligned} \pi : NM &\to M \\ (p, w) &\mapsto p \end{aligned}$$

Bemerkung:

Ist M als Niveaumenge gegeben, etwa $M := F^{-1}(0)$, $F : U \to \mathbb{R}^n$ so definiert, dass 0 ein regulärer Wert von F ist.
Sei p ein Element von M, dann ist

$$DF(p) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$$

surjektiv und $T_pM = \ker DF(p)$.
Konkret ist

$$DF(p) = \left(\frac{\partial}{\partial x_j} F_i(p) \right)_{i,j} \in M(n \times m, \mathbb{R})$$

und $v \in T_pM \Leftrightarrow DF(p)(v) = 0 \Leftrightarrow A \cdot v = 0 \Leftrightarrow < grad\, F_i(p), v >= 0 < m \; \forall i$.
Folgt $grad\, F_i(p) \in N_pM$
Da $DF(p)$ Rang m hat, bilden die Vektoren

$$\{grad\, F_i(p) \mid i = 1, 2, ..., m\}$$

eine Basis von N_pM.

Beispiel:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^3 &\to \mathbb{R} \\ F(x, y, z) &= e^{xyz} + x + y^2 + z^3 - 1 \end{aligned}$$

Sei $M = F^{-1}(0)$ und $p = (0, 0, 0) \in M$.

$$DF(p) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und man erkennt
$$N_pM = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right) \right\rangle \quad T_pM = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$$

Beispiel:

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z \\ x + y + z - 1 \end{pmatrix}$$

$F^{-1} = 0$ und $p = (x_0, y_0, z_0) \in M$. Also:

$$DF(p) = \begin{pmatrix} 2x_0 & 2y_0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

und
$$N_pM = \left\langle \left(\begin{smallmatrix}2x_0\\2y_0\\-1\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}1\\1\\1\end{smallmatrix}\right) \right\rangle$$

Theorem 11.5.1

Sei $M \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Mannigfaltigkeit mit U offen und $f : U \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $p \in M$. Falls p ein lokales Extremum von $f|_M$ ist, so gilt

$$grad\, f(p) \in N_pM$$

Beweis:

Sei $v \in T_pM$ beliebig. Zu zeigen: $< grad\, f(p), v >= 0$.
Sei $\gamma : (-1,1) \to M$ ein Pfad, also $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$. Dann ist 0 ein lokales Extremum von $f \circ \gamma : (-1,1) \to \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} 0 = (f \circ \gamma)'(0) &= Df(\gamma(0))(\gamma'(0)) \\ &= Df(p)(v) \\ &=< grad\, f(p), v > \end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung - Strategie:

Hiermit können wir sehr oft loakle Extrema von $f : U \to \mathbb{R}$ auf einer Teilmenge M finden.

1. Berechne N_pM für alle (fast alle) $p \in M$
2. Finde alle $p \in M$ mit $grad\, f(p) \in N_pM$ (LGS). Diese Punkte p sind Kandidaten für lokale Extrema.
3. Alle Punkte $p \in M$, an denen N_pM nicht definiert ist, oder f nicht differenzierbar ist, sind auch Kandidaten.

4. Entscheide ad-hoc, ob und welche Kandidaten Extrema sind.

Beispiel:

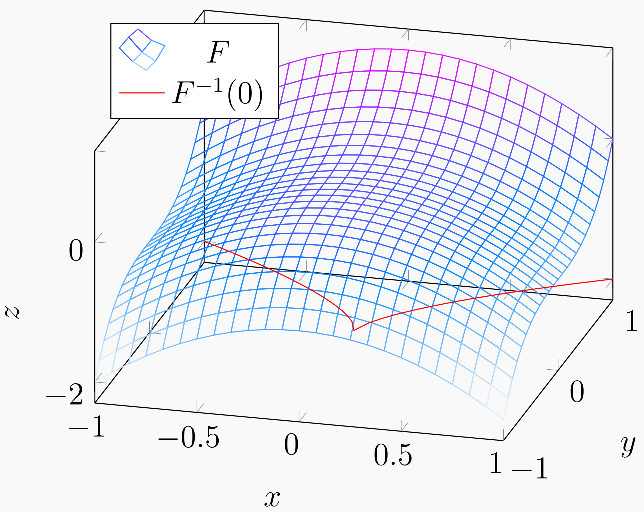
$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leqslant 1, |y| \leqslant 1, x^2 = y^3\}$$

also ist

$$M = K \backslash \{(0,0), (1,1), (-1,1)\}$$

eine Mannigfaltigkeit, gegeben durch die Nullstellen von

$$\begin{aligned} (-1,1)^2 \backslash \{0\} &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto y^3 - x^2 \end{aligned}$$



Finde alle lokalen Extrema der Funktion $f(x, y) = 4y - 3x$ auf K.
Wir wenden also jetzt unsere Strategie an:

1. Für $p = (x_0, y_0)$ gilt $DF(p) = \begin{pmatrix} -2x_0 & 3y_0^2 \end{pmatrix}$.

   Für $p \in M$ spannt $\begin{pmatrix} -2x_0 \\ 3y_0^2 \end{pmatrix}$ den Raum N_pM auf.

2. Es gilt $grad\, f(p) = \begin{pmatrix} -3 & 4 \end{pmatrix}$

Um Punkte p mit $grad\, f(p) \in N_pM$ zu finden, lösen wir

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2x_0 \\ 3y_0^2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das Gleichungssystem

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} 3 &= -2\lambda x_0 \\ 4 &= 3\lambda y_0 \end{aligned}\right\} \dfrac{4}{3} = \dfrac{3y_0^2}{2x_0} \Rightarrow x_0 = \dfrac{9}{8} y_0^2 \\ x_0^2 = y_0^3 \end{cases}$$

Jetzt haben wir

$$0 = x_0^2 - y_0^3 = \left(\frac{9}{8}y_0^2\right)^2 - y_0^3 = \left(\frac{9^2}{8^2}y_0 - 1\right) y_0^3$$

$$\Rightarrow y_0 = \frac{9^2}{8^2} \quad x_0 = \frac{9^3}{8^3} \quad p = \left(\frac{9^2}{8^2}, \frac{9^3}{8^3}\right)$$

Für unsere 4 Kandidaten rechnen wir aus:

- $f(0,0) = 0$ also ein globales Minimum
- $f(1,1) = 1$ also ein lokales Minimum
- $f(-1,1) = 7$ also ein globales Maximum
- $f(p) = 4 \cdot \frac{9^3}{8^3} - 3 \cdot \frac{9^2}{8^2} \sim 1,053$ also ein lokales Maximum

Definition 11.5.2: Lagrange Multiplikatoren

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^n$ mit 0 als regulärem wert und $M = F^{-1}(0)$ eine Mannigfaltigkeit der Dimension $k = n - m$. Sei $\varphi : U \to \mathbb{R}$ von Klasse $\mathcal{C}^1$. Die zu f, F assozieerte **Lagrange-Funktion** ist

$$L : U \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$$
$$L(x, \lambda) = f(x) - < \lambda, F(x) >$$

$\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_m)$ sind die **Lagrange-Multiplikatoren**.

Theorem 11.5.2

In der obigen Situation gilt: Ist $p \in U$ ein lokales Extremum von f auf M, dann existiert $\lambda \in \mathbb{R}^n$ mit

1. $\frac{\partial}{\partial x_i} L(p, \lambda) = 0 \quad i = 1, 2, ..., n$
2. $\frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(p, \lambda) = 0 \quad i = 1, 2, ..., n$

oder kompakt

$$DL(p, \lambda) = 0$$

Beweis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda_i} L(p, \lambda) &= \frac{\partial}{\partial \lambda_i} \left(f(x) - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l F_l(x) \right) \\ &= -F_i(p) \\ 2) \ \Leftrightarrow F(p) &= 0 \end{aligned}$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f(p) - \sum_{l=1}^{m} \lambda_l F_l(p) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(p) - \sum_{l=1}^{m} \lambda \frac{\partial}{\partial x_i} F(p)$$

$$grad\, f(p) = \sum_{l=1}^{m} \lambda_l \cdot grad\, F_l(p)$$
$$\Leftrightarrow grad\, f(p) \in N_pM$$

□

11.5.1 Satz von Lagrange

Gegeben sind $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^m$ mimt 0 als regulärem Wert. Wir definieren $M := F^{-1}(0)$. Sei $f : U \to \mathbb{R}$ und wir wollen die Extrema von $f\mid_M$ finden.

Theorem 11.5.3: Methode von Lagrange

Ist $p \in M$ mit $grad\, f(p) \in N_pM$, dann ist p ein Kandidat für ein lokales Extremum von $f|_M$.

Beweis:

$$grad\, f(p) \in N_pM \Leftrightarrow grad\, f(p) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \cdot grad\, F_i(p)$$

$\lambda_i \in \mathbb{R}$ sind die Lagrange-Multiplikatoren □

Beispiel:

Finde das Maximum von
$$f(x, y, z) = e^{xyz}$$
auf
$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = z, x + y + z = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$$
Wir definieren
$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$
$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 - z \\ x + y + z - 1 \end{pmatrix}$$
und man erkennt, dass $M = F^{-1}(0)$.
Da die Ableitung von F immer surjektiv ist, für alle Werte $p \in M$, ist M eine Teilmannigfaltigkeit von $\mathbb{R}^3$.

$$grad\, f(x, y, z) = \begin{pmatrix} yz \cdot e^{xyz} & xz \cdot e^{xyz} & xy \cdot e^{xyz} \end{pmatrix}$$
und
$$DF(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
Also ist unser Gleichungssystem:

$$(yz, xz, xy) \cdot e^{xyz} = \lambda(2x, 2y, -1) + \mu(1, 1, 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x + y + z = 1 \\ yz \cdot e^{xyz} = 2\lambda x + \mu \\ xz \cdot e^{xyz} = 2\lambda y + \mu \\ xy \cdot e^{xyz} = -\lambda + \mu \end{cases}$$

Es genügt dann (hem hem), das Gleichungssystem zu lösen.

Beispiel:

Finde $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) \in SL_2(\mathbb{R})$ so dass die Frobemius-Norm $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ minimal ist.
Betrachte $M : \{(x_1, ..., x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \underbrace{x_1x_4 - x_2x_3 - 1}_{F(x)} = 0\}$
und $f(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = ||x||_F^2$.

$$grad\, f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 2x_4 \end{pmatrix} = 2x$$

$$grad\, F(x) = \begin{pmatrix} x_4 & -x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten das folgende Gleichungssystem.

$$\begin{cases} x_1x_4 - x_2x_3 - 1 = 0 \\ 2x_1 = \lambda \cdot x_4 \\ 2x_2 = -\lambda \cdot x_3 \\ 2x_3 = -\lambda \cdot x_2 \\ 2x_4 = \lambda \cdot x_1 \end{cases}$$

Man erkennt, dass $\lambda^2 = 1$ also $\lambda = \pm 1$.

$$\lambda = 1 \Rightarrow x = (t, s, -s, t) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ -b & a \end{smallmatrix}\right)$$

$$\lambda = 1 \Rightarrow x = (t, s, s, -t) \rightsquigarrow \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & -a \end{smallmatrix}\right) \notin M$$

Wir betrachten wieder die Determinantenvoraussetzung

$$F(x) = F(t, s, -s, t) = t^2 + s^2 - 1 = 0$$

$\Rightarrow$ ist $x \in M$ ein lokales Extremum von f, so gilt

$$x = (t, s, -s, t) : t^2 + s^2 = 1 \text{ also } t = \cos(\varphi), s = \sin(\varphi)$$

$$f(x) = t^2 + s^2 + s^2 + t^2 = 2$$

Also ist die Lösung:

$$\min\{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}\} = \sqrt{2}$$

Es wird angenommen von Matrizen der Form $\left(\begin{smallmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{smallmatrix}\right)$, den orthogonalen 2×2 Matrizen.

Beispiel:

2 disjunkte Mengen

$$M_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 1\}$$

$$M_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-5)^2 + (y-5)^2 + (z-5)^2 = 1\}$$

Wir suchen die Punkte p_1 und p_2 respektive in M_1 und M_2 so, dass die Distanz minimal wird.
Wir betrachten $M_1 \times M_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6$ und die Funktion $f : \mathbb{R}^6 \to \mathbb{R}$ durch $f(x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2$.
$M_1 \times M_2$ ist die Nullstellenmenge der Funktion

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^6 &\to \mathbb{R}^2 \\ (x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) &\mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2 - 1 \\ (x_2-5)^2 + (y_2-5)^2 + (z_2-5)^2 - 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir wollen das Minimum von $f|_M$ finden

$$\begin{aligned} grad\, f(x_1, ... z_2) &= 2\begin{pmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 & -(x_1 - x_2) & -(y_1 - y_2) & -(z_1 - z_2) \end{pmatrix} \\ &\in M(1 \times 6, \mathbb{R}) \end{aligned}$$

$$DF(x_1, ... z_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 6y_1 & 6z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(x_2-5) & 2(y_2-5) & 2(z_2-5) \end{pmatrix}$$

Ergibt folgendes Gleichungssystem

$$\begin{cases} x_1^2 + 3y_1^2 + 3z_1^2 = 1 \\ (x_2-5)^2 + (y_2-5)^2 + (z_2-5)^2 = 1 \\ 2(x_1 - x_2) = 2\lambda_1 x_1 + \lambda_2 \cdot 0 \\ 2(y_1 - y_2) = 6\lambda_1 y_1 + \lambda_2 \cdot 0 \\ 2(z_1 - z_2) = 6\lambda_1 z_1 + \lambda_2 \cdot 0 \\ -2(x_1 - x_2) = \lambda_1 0 + 2\lambda_2(x_2 - 5) \\ -2(y_1 - y_2) = \lambda_1 0 + 2\lambda_2(y_2 - 5) \\ -2(z_1 - z_2) = \lambda_1 0 + 2\lambda_2(z_2 - 5) \end{cases}$$

Aus geometrischen Überlegungen wissen wir, dass wir genau eine Lösung erhalten. Um das anfängliche Problem zu lösen müssen wir dann noch $d(p_1, p_2)$ berechnen mit $p_1 = (x_1, y_1, z_1)$ und $p_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Kapitel 12

Mehrdimensionale Integration

Beispiel - Grundproblem:

Definiere $vol(X) \in \mathbb{R}^+$ für $x \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt.
Wir setzen folgende Eigenschaften voraus:

$$vol(\emptyset) = 0 \quad X \subseteq Y \Rightarrow vol(X) \leqslant vol(Y)$$

Folgt:

- X und Y disjunkt $\Rightarrow vol(X \cup Y) = vol(X) + vol(Y)$
- $vol([0,1]^3) = 1$
- Ist $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine Translation oder Rotation oder Isometrie, so gilt: $vol(X) = vol(\varphi(X))$

Theorem 12.0.1: Banach-Tarski

Setze $B = \overline{B(0,1)} \subseteq \mathbb{R}^3$ $(vol(B) > 1)$.
Es existieren disjunkte Teilmengen $X_1, ..., X_5$ von B mit $X_1 \cup ... \cup X_5 = B$ mit

$$\varphi_1 X_1 \cup \varphi_2 X_2 \cup \varphi_3 X_3 = B \text{ für Isometrien } \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$$
$$\varphi_4 X_4 \cup \varphi_5 X_5 = B \text{ für Isometrien } \varphi_4, \varphi_5$$

Bemerkung:

Naive Idee:

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)dxdy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)dx \right) dy$$

$$\downarrow$$

Riemann-Integration (Analysis II)

$$\downarrow$$

Lebesgue-Integration (Maß und Integral, später)

Um unser Integral über mehrere Dimensionen zu definieren, konstruieren wir uns Bausteine, die wir dann Verfeinern. Wir fangen wie im 1-dimensionalen Fall mit Rechtecken an:

12.1 Das Riemnann-Integral für Quader

Definition 12.1.1: Quader

Wir nennen ein mehrdimensionales Produkt von Intervallen ein **Quader**.
Mit Intervallen $I_k \subseteq \mathbb{R}$ gilt

$$Q = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n \subseteq \mathbb{R}^n$$

Üblicherweise setzen wir voraus, dass alle I_k beschränkt sind, und $\neq 0$. Wir setzen aber nichts voraus für die Offenheit der Intervalle.

Definition 12.1.2: Zerlegung

Eine Zerlegung des abgeschlossenen Quaders

$$Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n]$$

ist die Vorgabe einer Zerlegung von $[a_k, b_k]$ $\forall k \leqslant n$

$$a_k = x_{k,0} < x_{k,1} < ...x_{k,l(k)} = b_k$$

Definition 12.1.3: Adresse

Unser Quader ist nun zerlegt und wir schreiben für die Teilquader

$$Q_\alpha = \prod_{k=1}^{n} [x_{\alpha_k - 1}, x_{\alpha_k}]$$

Wir nennen α die Adresse des Teilquaders, sie ist eindeutig.
Unser Anfangsqauder ist nun die Vereinigung über alle Adressen

$$Q = \bigcup_\alpha Q_\alpha$$

Definition 12.1.4: Volumen

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein beschränkter Quader mit $Q = I_1 \times ... \times I_n$.

$$vol(Q) = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)...(b_n - a_n)$$

mit $a_k := \inf I_k$ und $b_k := \sup I_k$

Bemerkung:

Ist Q_α eine Zerlegung von Q, so gilt:

$$vol(Q) = \sum_\alpha vol(Q_\alpha)$$

Definition 12.1.5

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Quader eine Treppenfunktion auf Q ist eine beschränkte Funktion $Q \to \mathbb{R}$ so, dass eine Zerlegung $(Q_\alpha)_\alpha$ von Q existiert, mit

$$f|_{\mathring{Q}_\alpha} \text{ ist konstant } \forall \alpha$$

Wir schreiben $TF(Q)$ für die Menge der Treppenfunktionen auf Q.

Definition 12.1.6

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener und beschränkter Quader. Das Integral ist definiert als die Funktion

$$\int_Q dx : TF(Q) \to \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \sum_\alpha c_\alpha \cdot vol(Q_\alpha) = \int_Q f dx = \int_Q f dx_1 dx_2 ... dx_n$$

für eine Zerlegung $(Q_\alpha)_\alpha$ von Q so, dass $F|_{\mathring{Q}_\alpha}$ konstant ist, mit Wert c_α.

Bemerkung:

$TF(Q)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $\int_Q dx$ ist eine lineare Abbildung.
Sind f, g Treppenfunktionen mit $f \leqslant g$, so gilt

$$\int_Q f dx \leqslant \int_Q g dx$$

und

$$\left| \int_Q f dx \right| \leqslant \int_Q |f| dx$$

Definition 12.1.7: Riemann-Integrierbarkeit (mehrdimensional)

Sei $f : Q \to \mathbb{R}$ beschränkt, $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen. Wir definieren

$$\mathcal{U}(f) = \left\{ \int_Q u dx \middle| u \in TF(Q), u \leqslant f \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

$$\mathcal{O}(f) = \left\{ \int_Q o dx \middle| u \in TF(Q), f \leqslant o \right\} \subseteq \mathbb{R}$$

Es gilt $\sup \mathcal{U}(f) \leqslant \mathcal{O}(f)$.

Wir sagen f sei **Riemann-integrierbar**, falls $\sup \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$. Wir schreiben dann

$$\int_Q f(dx) := \sup \mathcal{U}(f) = \mathcal{O}(f)$$

Wir schreiben $\mathcal{R}(Q)$ für die Menge aller Riemann-integrierbaren Funktionen $f : Q \to \mathbb{R}$.

Theorem 12.1.1

$\mathcal{R}(Q)$ ist ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $TF(Q) \subseteq \mathcal{R}(Q)$.

$$\int_Q dx : \mathcal{R}(Q) \to \mathbb{R}$$

ist linear, monoton.

- $f \leqslant g \Rightarrow \int_Q f dx \leqslant \int_Q g dx$
- $\left|\int_Q f dx\right| \leqslant \int_Q |f| dx$

Beweis:

Wie für Integrale in einer einzigen Variable. □

Theorem 12.1.2

Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn für alle $\varepsilon > 0$ Treppenfunktionen $u \leqslant f \leqslant o$ existieren, mit

$$\int_Q (o - u) dx < \varepsilon$$

Bemerkung:

Ist $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, und $(Q_\alpha)_\alpha$ eine Zerlegung von Q, so ist $f|_{Q_\alpha}$ integrierbar und es gilt

$$\int_Q f dx = \sum_\alpha \int_{Q_\alpha} f|_{Q_\alpha} dx$$

was der Intervalladditivität in einer Variable entspricht.

Definition 12.1.8: Nullmengen

Eine Teilmenge $N \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Lebesgue-Nullmenge**, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists (Q_k)_{k=1,2,\ldots} \text{ (abzählbar) } : \begin{cases} 1) N \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \\ 2) \sum_{k=1}^{\infty} vol(Q_k) < \varepsilon \end{cases}$$

Wir sagen, dass eine Aussage A über Punkte des $\mathbb{R}^n$ **fast überall** wahr ist, falls

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid \neg A(x)\}$$

eine Nullmenge ist.

Lemma 12.1.1

Teilmengen von Lebesgue-Nullmengen sind Lebesgue-Nullmengen.
Abzählbare Vereinigungen von Lebesgue-Nullmengen sind Lebesgue-Nullmengen.

Beweis:

Die Aussage für Teilmengen ist klar.
$N = \bigcup_{l=1}^{\infty} N_l$ mit N_l eine Lebesgue-Nullmenge. Sei $\varepsilon > 0$. Wähle Quader $(Q_{l,k})_{k=1}^{\infty}$, offene Quader mit $N_L \subseteq \bigcup_{k=0}^{\infty} Q_{l,k}$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} vol(Q_{l,k}) < w^{-l} \cdot \varepsilon$.
Dann ist $(Q_{l,k})_{l,k}$ eine abzählbare Familie offener Quader,

$$N \subseteq \bigcup_{l,k} Q_{l,k}$$

und es gilt

$$\sum_{l,k=1}^{\infty} vol(Q_{l,k}) \leqslant \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \cdot \varepsilon \leqslant \varepsilon$$

□

Theorem 12.1.3

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathring{X} \neq \emptyset$. Dann ist X keine Lebesgue-Nullmenge.

Beweis:

Ist $\mathring{X} \neq \emptyset$, so können wir einen abgeschlossenen (und beschränkten) Quader $Q \subseteq \mathring{X} \subseteq X$ konstruieren mit $vol(Q) > 0$. OBdA gilt: $X = Q$.
A.A. Angenommen Q sei eine Lebesgue-Nullmenge. Dann existieren offene Quader $(Q_k)_{k=1,2,\ldots}$ mit $Q \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} vol(q_k) < \frac{vol(Q)}{2}$.
Es gilt (weil Q kompakt), dass

$$Q \subseteq \bigcup_{k=1}^{N} Q_k$$

$Q \cap Q_k$ ist ein Teilquader von Q:
Für eine genügend feine Zerlegung von Q gilt:

$$\overline{Q \cap Q_k} = \text{ endliche Vereinigung von Teilquadern } Q_\alpha$$

$$\begin{aligned} vol(Q) &= \sum_\alpha vol(q_\alpha) \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n \overbrace{\sum_{\substack{\alpha \text{ mit} \\ Q_\alpha \subseteq Q \cap Q_k}} vol(Q_\alpha)}^{\leqslant vol(Q_k)} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^n vol(Q_k) \\ &< \frac{vol(Q)}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ ↯ da $vol(Q) > 0$. □

Theorem 12.1.4

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ ein abgeschlossener und beschränkter Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann ist

$$Graph(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in Q\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^n$$

eine Nullmenge.

Beweis:

Da Q beschränkt ist, gilt:

$$-M \leqslant f(x) \leqslant M \quad M \in \mathbb{R}\, \forall x \in Q$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach Hypothese existieren $u, o \in TF(Q)$ mit $u \leqslant f \leqslant o$ und $\int_Q (o-u)dx < \varepsilon$. Sei $(Q_\alpha)_\alpha$ eine Zerlegung von Q mit u und o konstant auf $\mathring{Q}_\alpha$ mit Wert jeweils c_α und d_α.

$$\sum_\alpha (d_\alpha - c_\alpha) \cdot vol(Q_\alpha) < \varepsilon$$

Definiere $P_\alpha := \mathring{Q}_\alpha \times (c_\alpha, d_\alpha) \subseteq \mathbb{R}^n$. Es gilt

$$Graph(f) \subseteq \overbrace{\bigcup_\alpha P_\alpha}^{\sum_\alpha vol(P_\alpha) < \varepsilon} \cup \underbrace{\bigcup_\alpha \partial Q_\alpha \times [-M, M]}_{Nullmenge}$$

□

Theorem 12.1.5: Lebesgue-Kriterium

Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ ein abgeschlossener und beschränkter Quader. Eine beschränkte Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn sie fast überall stetig ist.

$$N = \{x \in Q \mid f \text{ nicht stetig bei } x\} \text{ ist eine Nullmenge}$$

Korollar 12.1.5 (1)

Stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar.

Beweis:

Technisches Hilfsmittel:

Definition 12.1.9: Oszillationsmaß

Sei $f: Q \to \mathbb{R}$ beschränkt. Für $x \in Q$, $\delta > 0$ schreibe

$$\omega(f, x, \delta) := \sup\{f(y) \mid y \in B_\infty(x, \delta)\} - \inf\{f(y) \mid y \in B_\infty(x, \delta)\}$$

B_∞: Ball bezüglich $||.||_\infty$, also ein Würfel mit Zentrum x, achsenparallel, offen, mit Kantenlänge $= 2\delta$.
Für $\delta' < \delta$ gilt: $\omega(f, x, \delta') \leqslant \omega(f, x, \delta)$.
Wir bezeichnen

$$\omega(f, x) := \lim_{\delta \to \infty} \omega(f, x, \delta)$$

als das **Oszillationsmaß** von f bei x.

Bemerkung:

$\omega(f, x) = 0 \Leftrightarrow f$ stetig bei x

Lemma 12.1.2

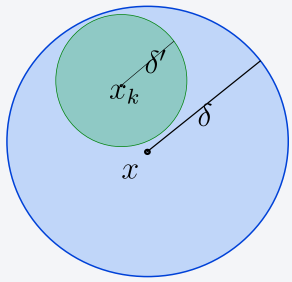
Sei $\eta > 0$. Die Menge

$$N_\eta = \{x \in Q \mid \omega(f, x) \geqslant \eta\} \subseteq Q$$

ist abgeschlossen.

Beweis - Folgenkriterium:

Sei $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ eine Folge in N_η mit Grenzwert $x \in Q$. Zu zeigen: $x \in N_\eta$.
Sei $\delta > 0$, dann existiert k groß genug und δ' genügend klein so, dass $x_k \in B(x, \delta)$ und $B(x_k, \delta') \subseteq B(x, \delta)$.



$$\begin{aligned}
\eta \leqslant \omega(f, x_k) &\leqslant \omega(f, x_k, \delta') \\
&= \sup\{f(y) \mid y \in B_\infty(x_k, \delta')\} - \inf\{f(y) \mid y \in B_\infty(x_k, \delta')\} \\
&\leqslant \sup\{f(y) \mid y \in B_\infty(x, \delta)\} - \inf\{f(y) \mid y \in B_\infty(x, \delta)\} \\
&\leqslant \omega(f, x, \delta)
\end{aligned}$$

Folgt: $\omega(f, x) = \lim\limits_{\delta \to 0} \omega(f, x, \delta) \geqslant \eta$.
$\Rightarrow x \in N_\eta$ $\square$

Lemma 12.1.3

Sei $K \subseteq Q$ kompakt, $\eta > 0$ mit $\omega(f, x) \leqslant \eta \ \forall x \in K$. Dann existiert $\forall \varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit $\omega(f, x, \delta) < \eta + \varepsilon$ für alle $x \in K$.

Beweis:

$\not{A}$ Angenommen, die Aussage sei falsch, also $\exists \varepsilon > 0$ so, dass für alle $\delta > 0$ ein $x \in K$ existiert mit $\omega(f, x, \delta) > \eta + \varepsilon$. Insbesondere

$$\forall n \in \mathbb{N} \ \exists x_n \in K : \omega(f, x_n, 2^{-n}) > \eta + \varepsilon$$

Es existieren x_n^- und $x_n^+ \in B(x_n, 2^{-n})$ mit $f(x_n^+) - f(x_n^-) > \eta + \frac{\varepsilon}{2}$. Die Folge $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ mit Grenzwert x. Auch $(x_n^-)_{n=0}^{\infty}$ und $(x_n^+)_{n=0}^{\infty}$ konvergieren gegen x.
Also $\forall \delta > 0 \ \exists n \in \mathbb{N} : x_n^-, x_n^+ \in B(x_n, 2^{-n})$. Folgt

$$\begin{aligned}
\omega(f, x, \delta) &= \sup\{f(y) \mid y \in B_\infty(x, \delta)\} - \inf\{f(y) \mid y \in B_\infty(x, \delta)\} \\
&\geqslant f(x_n^+) - f(x_n^-) \\
&> \eta + \frac{\varepsilon}{3}
\end{aligned}$$

Folgt $\omega(f, x) > \eta$ ↯ $\square$

Nun zum eigentlichen Beweis:

- $\Rightarrow$: f ist Riemann-integrierbar $\Rightarrow N = \{x \in Q \mid \omega(f, x) > 0\}$ ist Nullmenge.

Seien $\varepsilon, \eta > 0$.

$$\exists u \leqslant f \leqslant o \in TF(Q) : \int_Q (o-u)dx < \varepsilon \cdot \eta \tag{1}$$

Sei $(Q_\alpha)_\alpha$ eine Zerlegung von Q mit u und o konstant mit Wert jeweils c_α und d_α auf $\mathring{Q}_\alpha$

$$(1) \Leftrightarrow \sum_\alpha (d_\alpha - c_\alpha) \cdot vol(Q_\alpha) < \varepsilon \cdot \eta$$

NR: $A(\eta) = \{\alpha \mid d_\alpha - c_\alpha \geqslant \eta\}$. Folgt:

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha \in A(\eta)} vol(Q_n) &\leqslant \sum_{\alpha \in A(\eta)} \eta^{-1}(d_\alpha - c_\alpha) \cdot vol(Q_\alpha) \\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

Betrachte die Menge $N_\eta = \{x \in Q \mid \omega(f,x) \geqslant \eta\}$ aus dem ersten Lemma. Sie ist abgeschlossen. Für $\alpha \notin A(\eta)$ und $x \in \mathring{Q}_\alpha$ existiert $\delta > 0$ mit $B(x,\delta) \subseteq \mathring{Q}_\alpha$, und dann gilt

$$\omega(f,x) \leqslant \omega(f,x,\delta) \leqslant \sup(f(\mathring{Q}_\alpha)) - \inf(f(\mathring{Q}_\alpha)) \leqslant d_\alpha - c_\alpha < \eta$$

Für $x \in N_\eta$ gilt

$$\begin{cases} x \in \mathring{Q}_\alpha \text{ für ein } \alpha \in A(\eta) \\ x \in \partial Q_\alpha \text{ für irgendein } \alpha \end{cases}$$

Bedeutet: $N_\eta \subseteq \bigcup_{\alpha \in A(\eta)} \mathring{Q}_\alpha \cup \bigcup_\alpha \partial Q_\alpha$

$$\Rightarrow N_\eta \text{ ist eine Nullmenge } \forall \eta > 0$$

Also

$$N = \{x \in Q \mid \omega(f,x) > 0\} = \bigcup_{j=1}^\infty \{x \in Q \mid \omega(f,x) > 2^{-j}\} = \bigcup_{j=1}^\infty N_{2^{-j}}$$

- $\Leftarrow$: N ist Nullmenge $\Rightarrow$ f ist integrierbar.

  Im Skript.

$\square$

Unser Ziel ist nun, die Integration auf einen allgemeineren Definitionsbereich auszuweiten.

12.2 Riemann-Integration über Jordan-messbaren Mengen

Definition 12.2.1: Jordan-Messbarkeit

Eine beschränkte Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **Jordan-messbar** falls für einen (jeden) Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $B \subseteq Q$ die charakteristische Funktion $\mathbb{1}_B : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

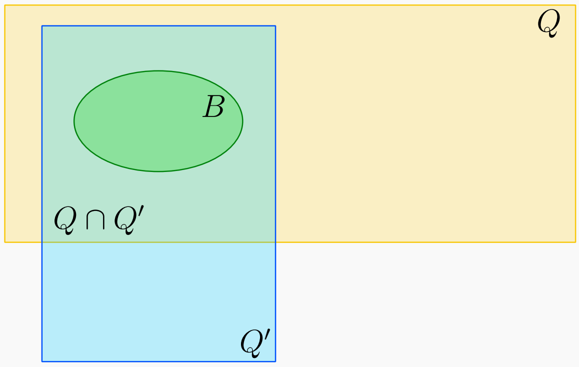
Dann schreiben wir

$$vol(B) = \int_Q \mathbb{1}_B dx$$

für das Volumen, oder Jordan-Maß von B.

Bemerkung:

Diese Definition ist Unabhängig von der Wahl von Q.



Bemerkung:

Achtung: Jordan-Messbarkeit $\neq$ Lebesgue-Messbarkeit

Korollar 12.2.0 (2)

Seien $B, B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt. Dann gilt

1. B ist Jordan-messbar $\Leftrightarrow$ ∂B ist eine Lebesgue-Nullmenge.
2. Sind B_1, B_2 Jordan-messbar, dann auch $B_1 \cup B_2$ und $B_1 \cap B_2$ und es gilt:

$$vol(B_1) + vol(B_2) = vol(B_1 \cup B_2) - vol(B_1 \cap B_2)$$

Beweis:

1. Folgt aus dem Lebesgue-Kriterium, da $\mathbb{1}_B$ genau bei ∂B unstetig ist.
2. Folgt aus $\partial(B_1 \cup B_2) \subseteq \partial B_1 \cup \partial B_2$ und $\partial(B_1 \cap B_2) \subseteq \partial B_1 \cup \partial B_2$ und der Tatsache, dass

$$\mathbb{1}_{B_1} + \mathbb{1}_{B_2} = \mathbb{1}_{B_1 \cup B_2} + \mathbb{1}_{B_1 \cap B_2}$$

und aus der Linearität des Integrals.

□

Definition 12.2.2

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B \to \mathbb{R}$ beschränkt. Wir sagen, dass f Riemann-integrierbar ist auf B, falls für einen (jeden) Quader Q mit $B \subseteq Q$ die Funktion

$$f_! : Q \to \mathbb{R} \quad f_!(x) = \begin{cases} f(x) & x \in B \\ 0 & x \notin B \end{cases}$$

integrierbar ist.
Wir schreiben

$$\int_B f dx := \int_Q f_! dx$$

Bemerkung:

Dieses Integral ist unabhängig von der Wahl von Q.

Theorem 12.2.1

Für das eben definierte Integral $\int_B - dx$ gilt offensichtlich

- Linearität
- Monotonie
- Dreiecksungleichung

Sie gelten weil wir eine Funktion auf Quadern betrachten, die für Punkte $\notin B$ den Wert 0 annimmt. Für Qauader haben wir die obigen Eigenschaften schon gezeigt.

Theorem 12.2.2

Sind $B_1, B_2 \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B_1 \cup B_2 \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann sind $f|_{B_1}, f|_{B_2}$ ebenfalls Riemann-integrierbar und es gilt

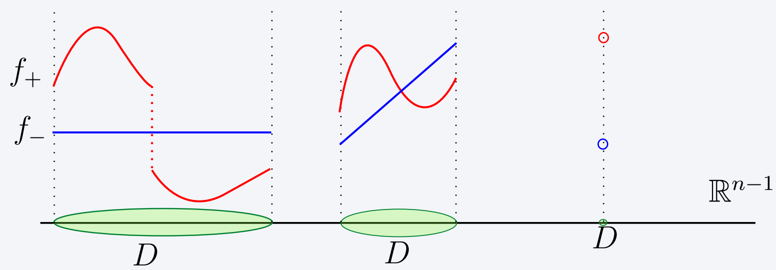
$$\int_{B_1 \cup B_2} f dx = \int_{B_1} f|_{B_1} dx + \int_{B_2} f|_{B_2} dx - \int_{B_1 \cap B_2} f dx$$

Theorem 12.2.3

Sei $D \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ Jordan-messbar und $f_-, f_+ : D \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar.

$$B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in D \wedge f_-(x) \leqslant y \leqslant f_+(x)\}$$

ist Jordan-messbar.



B ist somit die Fläche zwischen f_- und f_+.

Des Weiteren

$$\partial B \subseteq (\underbrace{\partial D}_{Nullmenge} \times \mathbb{R}) \cup (\underbrace{N}_{Nullmenge} \times \mathbb{R}) \cup \underbrace{Graph\, f_+}_{Nullmenge} \cup \underbrace{Graph\, f_-}_{Nullmenge}$$

mit $N := \{x \in D \mid f_+$ oder f_- nicht stetig bei $x\}$

Theorem 12.2.4: Satz von Fubini

Seien $P \subseteq \mathbb{R}^n$ und $Q \subseteq \mathbb{R}^m$ beschränkte und abgeschlossene Quader. Sei $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Für $x \in P$ setze $f_x(y) = f(x, y)$ (also $f_x : Q \to \mathbb{R}$).

Bemerkung - Warnung:

f_x ist im Allgemeinen **nicht** Riemann-integrierbar!

Wir setzen weiter $F_-(x) = \sup \mathcal{U}(f_x)$ und $F_+(x) = \inf \mathcal{O}(f_x)$. (Es gilt, dass $\inf \leqslant \sup$ und bei Gleichheit haben wir Riemann-Integrierbarkeit.)
Nun sind die Aussagen des Satzes:

1. Es existiert eine Nullmenge $N \subseteq P$ mit $x \notin N \Rightarrow F_-(x) = F_+(x)$, also f_x Riemann-integrierbar.

2. Die Funktionen F_- und F_+ sind beide Riemann-integrierbar auf Q und es gilt:

$$\int_{B \times Q} f d(x, y) = \int_P F_-(x) dx = \int_Q F_+(x) dx$$

Wir schreiben

$$\int_{P \times Q} f d(x, y) = \int_P \underbrace{\left(\int_Q f(x, y) dy \right)}_{\text{existiert für fast alle } x} dx$$

Beweis:

Dieser Beweis wird später behandelt. □

Beispiel:

Betrachten wir $P = [0, 1] = Q$ und

$$f : P \times Q \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls} \quad x = \frac{1}{2}, y \in \mathbb{Q} \\ 0 & \qquad \text{sonst} \end{cases}$$

Also haben wir $f_x : [0, 1] \to \mathbb{R}$ und speziell gilt: $f_{1/2} = \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$ (nicht integrierbar).
Allerdings gilt

$$0 = \int_{[0,1]^2} f(x, y) d(x, y) = \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 f(x, y) dy}_{F(x)} dx$$

Wieder ist $F(1/2) = \int_0^1 f(1/2, y) dy$ nicht Riemann-integrierbar.

Dank dem Satz von Fubini ist das aber kein Problem.

Korollar 12.2.4 (1)

Sei $Q = [a_1, b_1] \times ... \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : Q \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt

$$\int_Q f dx = \int_{a_1}^{b_1} ... \int_{a_n}^{b_n} f(x, 1, ..., x_n) dx_n ... dx_1$$

falls alle Parameterintegrale existieren. Ansonsten kann man Ober- oder Untersummen betrachten, wie im Satz von Fubini.

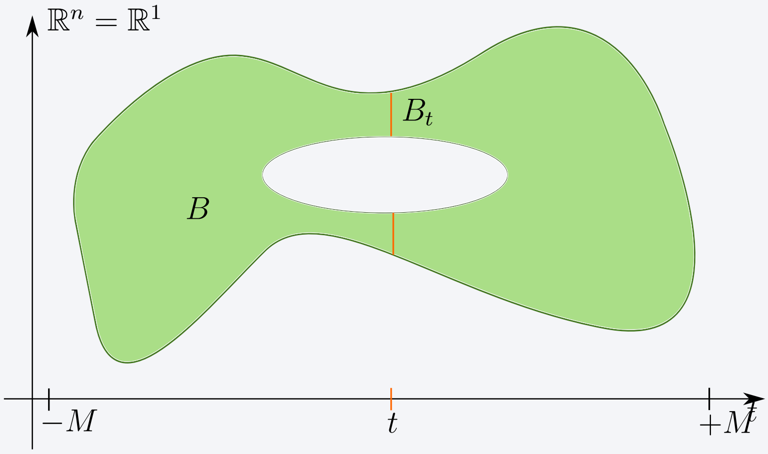
Beweis:

Man wende den Satz von Fubini n-Mal an. □

Korollar 12.2.4 (2): Prinzip von Cavalieri

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ Jordan-messbar. Für $t \in \mathbb{R}$ setze $B_t = \{(x, t) \mid x \in B\}$ und

$$vol(B) = \int_{-M}^{+M} vol(B_t) dt$$



Beweis:

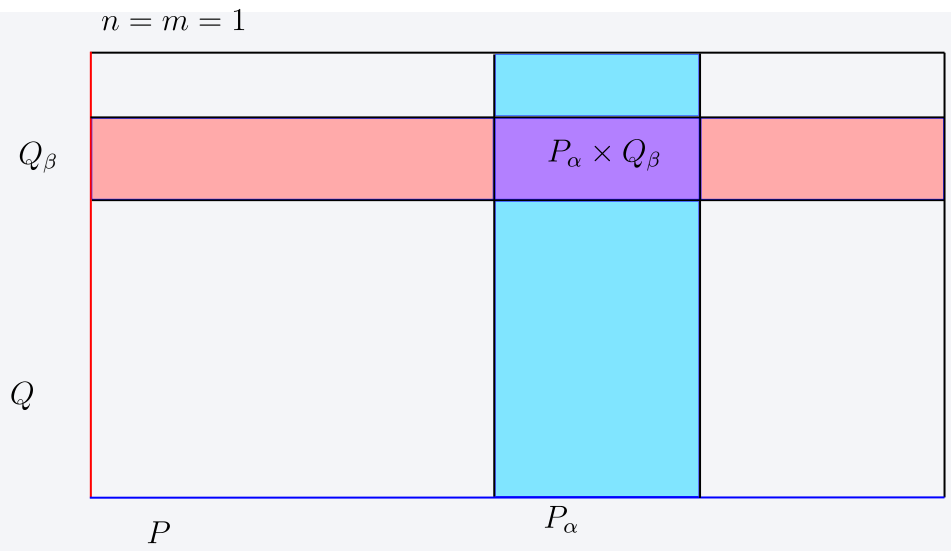
Vorbereitung 1)

Eine Zerlegung von $P \times Q$ ist einfach eine Zerlegung von jeweils P und Q.

$$(P_\alpha)_\alpha, (Q_\beta)_\beta \leftrightarrow (P_\alpha \times Q_\beta)_{(\alpha,\beta)}$$

Es gilt dann

$$vol(P_\alpha) \cdot vol(Q_\beta) = vol(P_\alpha \times Q_\beta)$$



Vorbereitung 2)

Sei $h : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine (beliebige) Treppenfunktion bezüglich $(P_\alpha \times Q_\beta)_{(\alpha,\beta)}$ mit Konstanzwert $c_{(\alpha,\beta)}$ auf $(P_\alpha \overset{\circ}{\times} Q_\beta)$.

Für α und $x \in \mathring{P}_\alpha$ ist die Funktion $h_x : Q \to \mathbb{R}$ mit $h_x(y) = h(x,y)$ eine Treppenfunktion bezüglich $(Q_\beta)_\beta$.

Es gilt

$$C_\alpha := \int_Q h_x(y)dy = \sum_\beta c_{(\alpha,\beta)} \cdot vol(Q_\beta) \text{ für } x \in \mathring{P}_\alpha$$

Wir bekommen zwei Treppenfunktionen auf P gegeben durch

$$H_+(x) = \inf(\mathcal{O})(h_x) \quad H_-(x) = \sup(\mathcal{U})(h_x)$$

die beide Treppenfunktionen (auf P bezüglich $(P_\alpha)_\alpha)$) sind mit Konstanzwerten C_α.

$$\begin{aligned}
\int_{P\times Q} h(x,y)d(x,y) &= \sum_{(\alpha,\beta)} c_{(\alpha,\beta)} \cdot vol(P_\alpha \times Q_\beta) \\
&= \sum_\alpha \sum_\beta c_{(\alpha,\beta)} \cdot vol(Q_\alpha) \cdot vol(Q_\beta) \\
&= \sum_\alpha C_\alpha \cdot vol(P_\alpha) \\
&= \int_P H_+(x)dx
\end{aligned}$$

Bemerkung:

Sind $g \leqslant h$ Treppenfunktionen auf $P \times Q$, dann gilt:

$$G_- \leqslant H_- \qquad G_+ \leqslant H_+$$

Wir haben also bis jetzt gezeigt, dass der Satz von Fubini wahr ist für Treppenfunktionen. Nun müssen wir ihn noch verallgemeinern:

Sei $F : P \to \mathbb{R}$ mit $F_- \leqslant F \leqslant F_+$. Sei $\varepsilon > 0$ und $o, u : P \times Q \to \mathbb{R}$ Treppenfunktionen mit

$$u \leqslant f \leqslant o \text{ und } \int_{P\times Q} (o-u) d(x,y) < \varepsilon$$

Nach Vorbereitung 2) gilt: $U_- \leqslant F_- \leqslant F \leqslant F_+ \leqslant O_+$.
U_- und O_+ sind Treppenfunktionen auf P:

$$\begin{aligned}\int_P (O_+ - U_-) dx &= \int_P O_+ dx - \int_P U_- dx \\ &= \int_{P\times Q} o dx - \int_{P\times Q} u dx \\ &= \int_{P\times Q} (o-u) d(x,y) < \varepsilon\end{aligned}$$

Es folgt, dass F Riemann-integrierbar ist und es gilt

$$\int_P F dx = \int_{P\times Q} f d(x,y)$$

Das entspricht der Aussage 2) des Satzes.
Zu 1): Betrachte $g(x) = F_+(x) - F_-(x) \geqslant 0$ (also Riemann-integrierbar). Es gilt

$$\int_P g(dx) dx = 0$$

Nach dem Lebesgue-Kriterium ist

$$N = \{x \in P \mid g \text{ nicht stetig bei } x\}$$

eine Nullmenge.
Ist g stetig bei x_0, so gilt $g(x_0) = 0$, andernfalls wäre $g(x_0) > 0$ und es existiert $\delta > 0$ mit $g(x) > \frac{1}{2} g(x_0)$ $\forall x \in P$ mit $||x - x_0|| < \delta$. Dann ist aber das Integral von g nicht null.

$$\begin{aligned}F_+(x) \neq F_-(x) &\Leftrightarrow g(x) > 0 \\ &\Rightarrow g \text{ nicht stetig bei } x \\ &\Leftrightarrow x \in N\end{aligned}$$

Für alle Punkte $x \in P \backslash N$ kann man folgern

$$\int_P g d(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = F_+(x) - F_-(x) = 0 \Leftrightarrow F_+(x) = F_-(x)$$

□

In der Praxis gilt $F_+(x) = F_-(x)$ für **alle** $x \in P$ und es folgt:

$$\int_P \int_Q f(x,y) dy dx$$

Beispiel - $B(0,1) = B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$**:**

Warum gilt nun $\pi = vol(B)$?
Es gilt erst einmal

$$vol(B) = \int_B 1 d(x,y) = \int_Q \mathbb{1}_B d(x,y)$$

Die Unstetigkeitsstellen von $\mathbb{1}_B$ ist gerade $\partial B = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und ist eine Nullmenge. Also ist das Integral wohldefiniert.
Für $Q = [-1,1]^2$ haben wir

$$\int_Q \mathbb{1}_B d(x,y) = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbb{1}_B dydx \text{ (Satz von Fubini)}$$

Für ein fixes $x \in [-1,1]$ gilt

$$\mathbb{1}_B(x,y) = \begin{cases} 1 \text{ falls } |y| \leqslant \sqrt{1-x^2} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

Also

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbb{1}_B dydx &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 dydx \\ &= \int_{-1}^1 2\sqrt{1-x^2} dx \\ &= 4 \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx \\ &\text{Substitution: } x = \sin(t) \quad dx = \cos(t)dt \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos^2(t) dt \\ &= 4 \cdot \left[\frac{t + \cos(t)\sin(t)}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \pi \end{aligned}$$

Beispiel - $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ||x|| \leqslant 1\}$**:**

Hier gilt auch ∂B_n ist die Einheitsspäre und also eine Nullmenge. Also ist B_n Jordan-messbar.
Bemerke: Ist $C \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-messbare Teilmenge und $\lambda \in \mathbb{R}$, dann ist $\lambda C = \{\lambda x \mid x \in C\}$ auch Jordan-messbar und es gilt: $vol(\lambda C) = |\lambda|^n \cdot vol(c)$.

$$\begin{aligned}
vol(B_n) = \int_{[-1,1]^n} \mathbb{1}_{B_n} dx &= \int_{-1}^{1} \int_{[-1,1]^{n-1}} \mathbb{1}_B(t,y) dy dt \\
&= \int_{-1}^{1} vol(B(0, \sqrt{1-t^2})) dt \\
&= \int_{-1}^{1} vol(B_{n-1}) \cdot (\sqrt{1-t^2})^{n-1} \text{ Streckungsformel} \\
&= vol(B_{n-1}) \cdot 2 \int_0^1 \sqrt{1-t^2}^{n-1} dt \\
&\text{Substitution: } t = \sin(x) \Rightarrow dt = \cos(x) dx \\
&= vol(B_{n-1}) \cdot 2 \underbrace{\int_0^{\pi/2} \cos^n(t) dt}_{I_n} \\
&\vdots \\
\Leftrightarrow vol(B_n) &= \begin{cases} \dfrac{\pi^k}{k!} & n = 2k \quad (gerade) \\ \dfrac{2k!(4\pi)^k}{(2k+1)!} & n = 2k+1 \quad (ungerade) \end{cases}
\end{aligned}$$

Also haben wir

n	$vol(B_n)$
1	2
2	π
3	$\frac{4}{3}\pi$
4	$\frac{1}{2}\pi^2$
$\vdots$	$\vdots$
30	$\frac{\pi^15}{15!} \simeq 0$

Nach einem anfänglichen Wachstum geht das Volumen exponentiell gegen 0.

12.3 Mehrdimensionale Substitution

Definition 12.3.1: Kompakter Träger

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$.
Träger von f sind

$$supp\,(f) = \overline{\{x \in U \mid f(x) \neq 0\}} \subseteq U$$

(im Allgemeinen nicht das gleiche wie der Abschluss von f in $\mathbb{R}^n$).
Wir sagen f hat **kompakten Träger**, falls $supp\,(f)$ kompakt ist.
Hat f kompakten Träger, so ist $supp\,(f)$ beschränkt und damit ist $f(x) = 0\ \forall x \in U \backslash Q$ für Q einen genügend großen Quader.

$$\int_U f dx = \int_{Q \cap U} f|_{Q \cap U} dx$$

falls $U \cap Q$ Jordan-messbar ist, und $f|_{Q \cap U}$ integrierbar ist.

Skript 13.55:
Für uneigentliche Integrale können wir auch die Substitutionsregel formulieren, diese ändert sich dadurch nur geringfügig:

Theorem 12.3.1: Substitutionsregel

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : X \to Y$ ein $\mathcal{C}^1$-Diffeomorphismus. Sei $f : Y \to \mathbb{R}$ mit kompaktem Träger und integrierbar.
Dann ist die Funktion

$$\begin{aligned} \Phi^* f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(\Phi(x)) \cdot |\det D\Phi(x)| \end{aligned}$$

auf X integrierbar, hat kompakten Träger und es gilt:

$$\int_X \Phi^* f(x) dx = \int_Y f(y) dy$$

Beweis:
In 2 Schritten:

1. Seien $X, Y = \mathbb{R}^n$ und $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ linear. Dank linearer Algebra und Fubini gilt: Jede Matrix kann also Produkt $P \cdot S \cdot T$ mit einer unteren und einer oberen Dreiecksmatrix und einer Permutationsmatrix. Die Integrale können dann mit dem Satz von Fubini einzeln ausgewertet werden.

   Also sind Volumen invariant unter Rotation oder Translation. (diese Transformationen haben nämlich Determinante $= 1$).

2. Im allgemeinen Fall machen wir viele Abschätzunge, insbesondere:

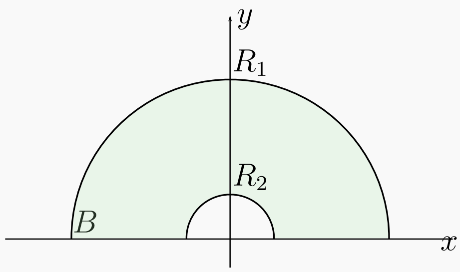
   $$\Phi \simeq D\Phi(x_0) \text{ (in einer kleinen Umgebung von } x_0)$$

   Der Beweis ist allerdings lang, und wir sparen ihn uns.

$\square$

Beispiel - as seen in Physik:

$$0 < R_0 < R_1 \text{ fix} \quad B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0, R_0 \leqslant \sqrt{x^2 + y^2} \leqslant R_1\}$$



Nun wollen wir den Schwerpunkt s von B finden, ausgehend von einer homogenen Dichte ρ.

Offensichtlich muss für s gelten: $y_s = 0$.

$$s = \frac{1}{vol(B)} \int_B x d(x,y)$$

Es bietet sich ein Wechsel zu Polarkoordinaten an:

$$\begin{aligned} \Phi &: X \to Y \\ (r,\varphi) &\mapsto (r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \end{aligned}$$

Nun schränken wir ein $X = (0,\infty) \times (-\pi,\pi) \Rightarrow Y = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0) | x \leqslant 0\}$

$$D\Phi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -r\sin(\varphi) & r\cos(\varphi) \end{pmatrix}$$

Definiere

$$\begin{aligned} f &: Y \to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} x & \text{falls} \quad (x,y) \in B \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Nun können wir schreiben

$$\int_B x d(x,y) = \int_Y f(x,y) d(x,y)$$

f erfüllt die Bedingungen des Satzes: $supp(f) = B$ - kompakt. Also ist

$$s = \int_B x d(x,y) = \int_Y f d(x,y) = \int_X \Phi^* f(r,\varphi) d(r,\varphi)$$

Wir haben:

$$\begin{aligned} \Phi^* f(r,\varphi) &= f(\Phi(r,\varphi)) \cdot |\det D\Phi(r,\varphi)| \\ &= f(r\cos(\varphi), r\sin(\varphi)) \cdot |r| \\ &= \begin{cases} r^2\cos(\varphi) & R_0 \leqslant r \leqslant R_1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \end{aligned}$$

Zurück zu s:

$$\begin{aligned} vol(B) \cdot s = ... &= \int_{(R_0,R_1)\times(-\pi,\pi)} r^2 \cos(\varphi) d(r,\varphi) \\ &= \int_{R_0}^{R_1} \int_{-\pi}^{\pi} r^2 \cdot \cos(\varphi) d\varphi dr \\ &= 2 \cdot \frac{1}{3}(R_1^3 - R_0^3) \\ vol(b) &= \frac{\pi}{2}(R_1^2 - R_0^2) \\ \Rightarrow s &= \frac{4}{3\pi} \frac{R_1^3 - R_1^3}{R_1^2 - R_0^2} \end{aligned}$$

Beispiel - Wahrscheinlichkeitstheorie:

Wir nehmen einen zufällig ausgewählten Punkt $p \in S^3 = \{p \in \mathbb{R}^3 \mid ||p|| \leqslant 1\}$. Gilt

$$P(||p|| \leqslant 0.5) \leqslant 0.6 \cdot P(0.5 < ||p|| \leqslant 1)$$

Wir übersetzen:

$$E := \frac{1}{vol(B)} \int_B ||x|| dx$$

ist der erwartete Abstand eines zufälligen Punktes $x \in S^3$ zum Ursprung.
Kugelkoordinaten:

$$\begin{aligned} \Phi : X &\to Y \\ (r, \vartheta, \varphi) &\mapsto (r \sin(\vartheta) \cos(\varphi), r \sin(\vartheta) \sin(\varphi), r \cos(\vartheta)) \end{aligned}$$

$$X = (0, \infty) \times (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \Rightarrow Y = \mathbb{R}^3 \backslash ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbb{R})$$
$$\det D\Phi(r, \vartheta, \varphi) = |...| = r^2 \sin(\vartheta) > 0$$

Wir setzen

$$f(x) = \begin{cases} ||x|| x \in B \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\Phi^* f(r, \vartheta, \varphi) = f(\Phi(r, \vartheta, \varphi)) \cdot |\det D\Phi(r, \vartheta, \varphi)| = r \cdot r^2 \cdot \sin(\vartheta)$$

Dann können wir berechnen

$$\begin{aligned} \int_B ||x|| dx &= \int_Y f(x) dx \\ &\overset{Satz}{=} \int_X \phi^* f d(r, \vartheta, \varphi) \\ &\overset{Fubini}{=} \int_0^1 \int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi r^3 \sin(\vartheta) d\varphi d\vartheta dr \\ &= 2\pi \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{1}{4} = \pi \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\pi}{\frac{4}{3}\pi} = \frac{3}{4}$$

Problem: $supp(f)$ ist auf Y nicht kompakt.
Die Lösung wäre, f in einer (kleinen) Umgebung um die Unstetigkeitsstelle(n) auf null zu setzen. Dann bekämen wir einen kompakten Träger und könnten den Grenzwert der Größe der Umgebung bilden und letzten Endes das selbe Ergebnis bekommen. Das ist dann auch die Motivation der folgenden Definition.

Definition 12.3.2: Ausschöpfung

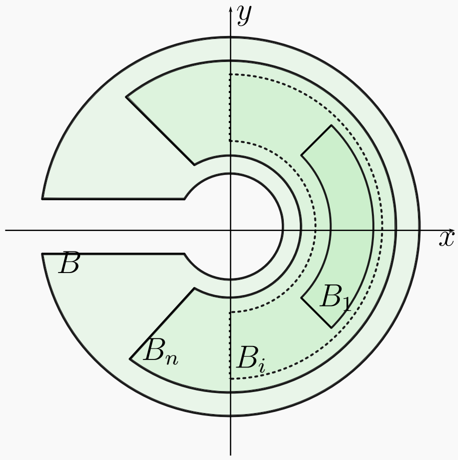
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ (beliebig). Eine **Ausschöpfung** von B ist eine Folge von Jordan-messbaren Mengen $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq ...$ mit

$$B = \bigcup_{k=0}^{\infty} B_k$$

Beispiel:

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid R_0^2 \leqslant x^2 + y^2 \leqslant R_1^2 \wedge y = 0 \Rightarrow x > 0\}$$

ist nicht kompakt.
Und dann können wir graphisch B_k bilden:



Beispiel:

$\mathbb{R}^n$ ist ausschöpfbar: $B_k = [-k,k]^n$. (aber nicht Jordan-messbar.)

Theorem 12.3.2

Jede offene Teilmenge von $\mathbb{R}^n$ hat eine Ausschöpfung.

Beweis:

Übung. □

12.4 Uneigentliche Integrale

Definition 12.4.1: Uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ausschöpfbar, $f : B \to \mathbb{R}$. Wir sagen f sei **uneigentlich Riemann-integrierbar**, mit Integral $I \in \mathbb{R}$:

$$\int_B f dx = I$$

falls für **jede** Ausschöpfung $B_0 \subseteq B_1 \subseteq \ldots$ von B

$$I = \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f|_{B_k} dx \text{ und } f|_{B_k} \text{ integrierbar } \forall k$$

Bemerkung:

Wir haben hier also ein schönes Kriterium, welches wir aber konkret nie anwenden können. Wir werden also noch weitere Hilfsmittel finden.

Theorem 12.4.1

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar und $f : B \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Sei $B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \subseteq \ldots$ eine Ausschöpfung von B. Dann gilt

1. $\lim\limits_{k\to\infty} vol(B_k) = vol(B)$
2. $\lim\limits_{k\to\infty} \int_{B_k} f dx = \int_B f dx$

Beweis:

1. Die Folge $(vol(B_k))_{k=0}^{\infty}$ ist monoton steigend und beschränkt durch $vol(B)$, also existiert
$$\lim_{k\to\infty} vol(B_k) \leqslant vol(B)$$
Bemerke: ∂B_k und ∂B sind Lebesgue-Nullmengen und abgeschlossen in $\mathbb{R}^n$ und beschränkt, also auch kompakt. ∂B_k und ∂B sind also Jordan-messbar mit Volumen $= 0$.
$$vol(B) = vol(\mathring{B}) = vol(\overline{B})$$
$$vol(B_k) = vol(\mathring{B}_k) = vol(\overline{B_k})$$
Die Menge
$$N := \partial B \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \partial B_k$$
ist eine Lebesgue-Nullmenge.
Sei $\varepsilon > 0$. Es existieren also offene Quader $(Q_m)_{m=0}^{\infty}$ mit
$$N \subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} Q_m \quad \text{und} \quad \sum_{m=0}^{\infty} vol(Q_m) < \varepsilon$$
Die Menge $\overline{B}$ ist kompakt nach Heine-Borel.
$$\overline{B} = \partial B \cup B = \underbrace{\partial B \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \partial B_k}_{N} \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathring{B}_k$$
$$\subseteq \bigcup_{m=0}^{\infty} Q_m \cup \bigcup_{k=0}^{\infty} \mathring{B}_k$$

Also haben wir eine offene Überdeckung von B, und da B kompakt ist, existieren also $M, K \in \mathbb{N}$ mit

$$\overline{B} = \bigcup_{m=0}^{M} Q_m \cup \mathring{B}_K$$

Jetzt gilt

$$\begin{aligned} vol(B) = vol(\overline{B}) &\leqslant \sum_{m=0}^{M} vol(Q_m) + vol(\mathring{B}_K) \\ &\leqslant \varepsilon + vol(B_K) \end{aligned}$$

Also folgt $1)$.

2. Wir verwenden ε und K weiter und es gilt

$$\left| \int_B f dx - \int_{B_K} f dx \right| = \left| \int_{B \backslash B_K} f dx \right| \leqslant \int_{B \backslash B_k} |f| dx \leqslant ||f||_\infty \cdot vol(B \backslash B_K) \leqslant ||f||_\infty \cdot \varepsilon$$

□

Theorem 12.4.2

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ausschöpfbar und $f : B \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$. Falls für **eine** Ausschöpfung $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ von B der Grenzwert

$$I = \lim_{k \to \infty} \int_{B_k} f dx$$

existiert, so ist f uneigentlich Riemann-integrierbar mit Integral I.

Beweis:

Sei $(A_l)_{l=0}^{\infty}$ eine weitere Ausschöpfung von B. Zu zeigen

$$\lim_{l \to \infty} \int_{A_l} f dx = \lim_{k \to \infty} \int_{B_k} f dx$$

Auf jeden Fall ist $(A_l \cap B_k)_{k=0}^{\infty}$ ist eine Ausschöpfung von A_l und Jordan-messbar. Das heißt:

$$\int_{A_l} f dx \overset{Theorem}{=} \lim_{k \to \infty} \int_{A_l \cap B_k} f dx \leqslant \lim_{k \to \infty} \int_{B_k} f dx = I$$

Es folgt

$$\lim_{l \to \infty} \int_{A_l} f x \leqslant \lim_{k \to \infty} \int_{B_k} f dx$$

Durch Vertauschung von A und B erhält man die umgekehrte Ordnungsrelation, und die sich ergebende Gleichheit entspricht der Aussage des Satzes. □

Bemerkung:

Ist B ausschöpfbar und $f : B \to \mathbb{R}$, so ist f uneigentlich Riemann-integrierbar, falls

$$f_+(x) = \max(\{f(x), 0\}) \quad f_+(x) = \max(\{-f(x), 0\})$$

Riemann-integrierbar sind.
Es gilt dann

$$f = f_+ - f_-$$

Bemerkung - Warnung:

Das uneigentliche Riemann-Integral ist **nicht** mit dem uneigentlichen Integral in einer Variable kompatibel.

Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \lim_{R\to\infty} \left(\int_0^R \frac{\sin(x)}{x} dx - \int_0^{-R} \frac{\sin(x)}{x} dx \right)$$

existiert.
Aber:

$$f_+(x) = \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{falls } \frac{\sin(x)}{x} \geqslant 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist nicht uneigentlich Riemann-integrierbar.

Für uneigentliche Integrale können wir auch die Substitutionsregel formulieren, diese ändert sich dadurch nur geringfügig:

Theorem 12.4.3: Substitutionsregel

Seien $X, Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $\Phi : X \to Y$ ein Diffeomorphismus und $f : Y \to \mathbb{R}$ uneigentlich Riemann-integrierbar.
Dann ist

$$\begin{aligned} \Phi^* f : X &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(\Phi(x)) \cdot |\det(D\Phi(x))| \end{aligned}$$

uneigentlich Riemann-integrierbar und es gilt

$$\int_X \Phi^* f dx = \int_Y f dy$$

Beweis:

OBdA nehmen wir an $f \geqslant 0$ (also $f = f_+ - f_-$). Sei $(B_k)_{k=0}^{\infty}$ eine Ausschöpfung von Y durch kompakte Jordan-messbare Mengen. Dann ist $\Phi^{-1}(B_k)$ eine Ausschöpfung von X.

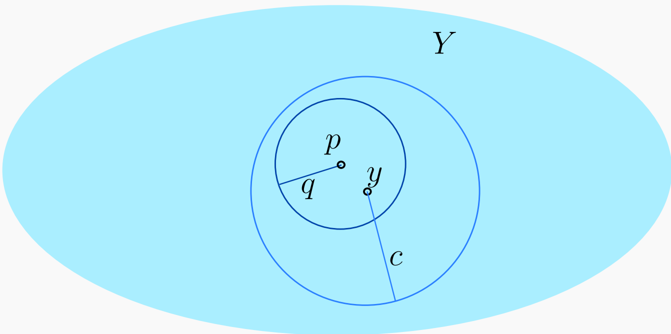
Wir haben dann

$$\begin{aligned}
\int_Y f dy &= \lim_{k\to\infty} \int_{B_k} f|_{B_k} dx \\
&= \int_Y \mathbb{1}_{B_k} f dy \qquad \mathbb{1}_B f \text{ hat kompakten Träger in } Y \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X \Phi^*(\mathbb{1}_B f) dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_X \mathbb{1}_{\Phi^{-1}(B_k)} \Phi^* f dx \\
&= \lim_{k\to\infty} \int_{\Phi^{-1}(B_k)} \Phi^* f dx \\
&= \int_X \Phi^* f dx
\end{aligned}$$

□

Beispiel - einer Ausschöpfung:

Sei $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $y \in Y$. Also existiert immer eine offene Kreisscheibe mit Radius r um y:



Wir sertzen außerdem

- $p \in \mathbb{Q}^n \cap Y$ mit $||p - y|| < \frac{r}{3}$
- die Kreisscheibe um p mit Radius $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ und $||p-q|| < q < \frac{r}{3}$, also $y \in B(p, q) \subseteq Y$

Die Menge aller Bälle

$$\{B(p,q) \mid p \in \mathbb{Q}^n \wedge q \in \mathbb{Q} \wedge \overline{B(p,q)} \subseteq Y\}$$

ist abzählbar.
Wir zählen ab: $K_0, K_1, ...K_n = \overline{B(p_n, q_n)}$ und setzen:

$$\begin{array}{ccccccccc}
B_0 & \subseteq & B_1 & \subseteq & B_2 & \subseteq & \dots & \subseteq & B_n \\
= & & = & & = & & & & = \\
K_0 & & K_0 \cap K_1 & & K_0 \cap K_1 \cap K_2 & & \dots & & K_= \cap \dots \cap K_n
\end{array}$$

B_n ist Jordan-messbar und kompakt und es gilt

$$\bigcup_{n=0}^{\infty} B_n = Y$$

Beispiel - Anwendung:

Wir wollen Folgendes berechnen:

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} e^{-t^2} dt$$

Es existiert (und ist notwendigerweise positiv?)
Statdessen berechnen wir 'einfach' I^2:

$$\begin{aligned}
I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{(-x^2+y^2)} dy\, dx \\
&\overset{Fubini}{=} \int_{\mathbb{R}^2} e^{(-x^2+y^2)} dy\, dx \\
&x = r\cdot\cos(\varphi), y = r\cdot \in (\varphi) \qquad \Rightarrow r\cdot d\varphi\, dr \\
&= \int_0^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2} \cdot r\, d\varphi\, dr \\
&\overset{Fubini}{=} 2\pi \int_0^{\infty} r\cdot e^{-r^2} dr \\
&// \left(e^{-r^2}\right)' = -2r\cdot e^{-r^2} \\
&\overset{Fundamentalsatz}{=} \pi \cdot \left[e^{-r^2}\right]_0^{\infty} \\
&= \pi\cdot(1-0) = \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$$

Kapitel 13

Hauptsätze der mehrdimensionalen Integralrechnung

13.1 In 2 Dimensionen

Wir treffen folgende Aussagen prototypisch für höhere Dimensionen.

13.1.1 Divergenz

Beispiel - Luftfluss durch das HG (2D oder 3D):

Wir definieren uns den Fluss f als Skalarprodukt zwischen dem Normalenvektor auf eine Wand und dem Luftfluss. Dann gilt für den Gesamtfluss:

$$F = \int_{\partial HG} f = \int_{HG} \text{Quellenstärke}$$

Allgemein betrachten wir:
F, ein Vektorfeld auf $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $B \subseteq U$ kompakt mit glattem Rand ∂B.

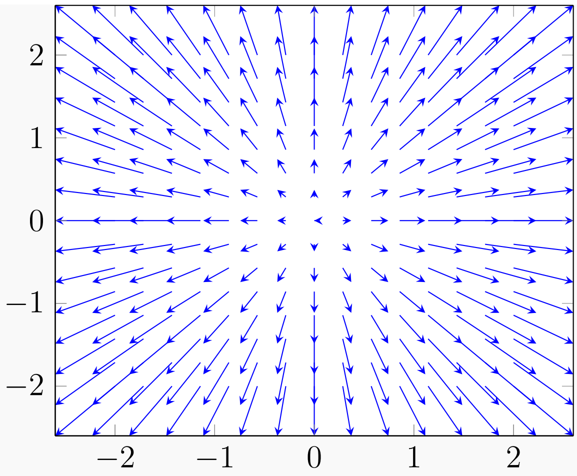
Definition 13.1.1: Divergenz

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenziebares Vektorfeld. Die **Divergenz** (Quellenstärke) von F ist die Funktion

$$\begin{aligned} div(F) &: U \to \mathbb{R} \\ (x) &\mapsto tr(DF(x)) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} F_i \end{aligned}$$

Beispiel:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x) = x$$

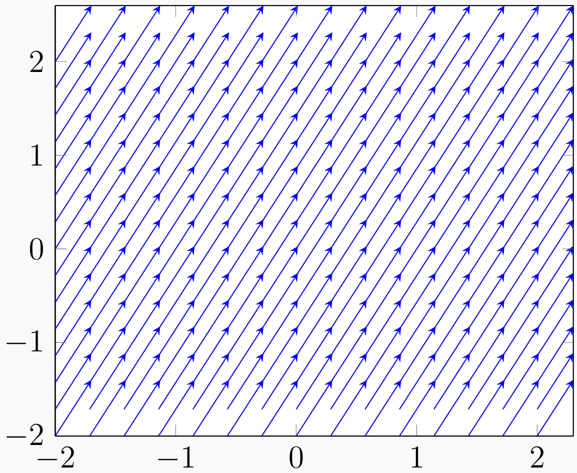


Wir haben also

$$div(F(x)) = tr(id : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2) = tr(E_2) = 2 = \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x) + \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(x) = 1 + 1$$

Wir können auch haben:

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad F(x) = (1, 2)$$



Hier gilt

$$DF(x) = 0 \Rightarrow div(F) = 0$$

Nun wollen wir also ein Integral über den Rand, einer Jordan-messbaren Menge berechnen. Wir werden uns in den Dimensionen hocharbeiten:

Definition 13.1.2: Flussintegral

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ (stückweise) stetig differenziebar.
Wir nehmen uns $n_\gamma(t) = (\gamma_2'(t), -\gamma_1'(t))$ und nennen dies den **Normalenvektor** an den Pfad γ an der Stelle t. Dieser hat eine eindeutige Richtung.
Sei nun $F : U \to \mathbb{R}^2$ stetig. Das **Flussintegral** von F durch γ ist

$$\int_\gamma F dn_\gamma = \int_a^b < F(\gamma(t)), n\gamma(t) > dt = \int F \times \gamma dt$$

Bemerkung:

Es gilt offensichtlich, dass $< v, n_\gamma(t) >= v \times \gamma(t)$, aber wir werden diese Darstellung nicht weiter verwenden.

Skizzenmäßig wollen wir zeigen.

Theorem 13.1.1

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq U$ beschränkt, zusammenhängend und mit glattem Rand und sei weiter $F : U \to \mathbb{R}^2$ von Klasse $\mathcal{C}^1$.

$$\int_B div(F(x))dx = \underbrace{\int_{\partial B} F dn}_{Flussintegral} = \int_\gamma f dn_\gamma$$

für eine Kurve $\gamma : [a, b] \to U$, die ∂B parametrisiert.
(glatt, wassisdas?)

Das ist weiterhin unkonkret, und in Teilen schlecht definiert, aber erlaubt uns zumindest, manche elementaren Fälle darzustellen. (zum Beispiel den Rand eines 2D-Rechtecks). Wir können schon einmal festhalten:

Theorem 13.1.2

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^2$ von Klasse $\mathcal{C}^1$. Sei $B = [a, b] \times [c, d] \subseteq U$ ein Rechteck. Dann gilt

$$\int_B div(F(x))dx = \int_{\partial B} F dn$$

Beweis:

Der Rand von B ist parametrisiert (?) durch die Kurve γ, die sich aus den folgenden 4 Kurven zusammensetzt:

$$\gamma : \begin{cases} \gamma_u : [a, b] \to U & \gamma_u(t) = (t, c) \\ \gamma_r : [c, d] \to U & \gamma_r(t) = (b, t) \\ \gamma_o : [a, b] \to U & \gamma_o(t) = (a + b - t, d) \\ \gamma_l : [c, d] \to U & \gamma_l(t) = (a, c + d - t) \end{cases} \Rightarrow n_\gamma : \begin{cases} n_{\gamma_u}(t) = (0, -1) \\ n_{\gamma_r}(t) = (1, 0) \\ n_{\gamma_o}(t) = (0, 1) \\ n_{\gamma_l}(t) = (-1, 0) \end{cases}$$

Also ist das Flussintegral:

$$\underbrace{\int_a^b < F(t, c), (0, -1) > dt}_{\gamma_u, n_{\gamma_u}} + \underbrace{\int_c^d < F(b, t), (1, 0) > dt}_{\gamma_r, n_{\gamma_r}}$$

$$+ \underbrace{\int_a^b < F(a + b - t, d), (0, 1) > dt}_{\gamma_o, n_{\gamma_o}} + \underbrace{\int_a^b < F(a, c + d - t), (-1, 0) > dt}_{\gamma_l, n_{\gamma_l}}$$

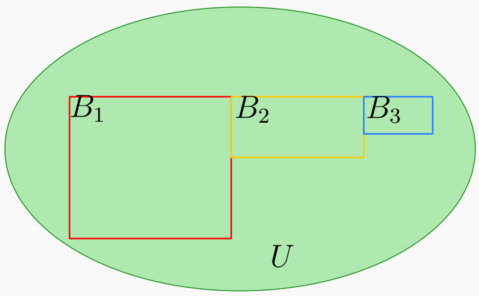
Nun formen wir um mit der Substitution: $a + b - t \rightsquigarrow t$ und $c + d - t \rightsquigarrow t$:

$$
\begin{aligned}
&= \int_a^b F_2(t,d) - F_2(t,c)dt + \int_c^d F_1(b,t) - F_1(a,t)dt \\
&\overset{Hauptsatz}{=} \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(t,y)dydt + \int_a^b \int_c^d \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x,t)dxdt \\
&\overset{Fubini}{=} \int_B \frac{\partial}{\partial x_1} F_1(x,y) + \frac{\partial}{\partial x_2} F_2(x,y)d(x,y) \\
&= \int_B div(F)dx
\end{aligned}
$$

□

Bemerkung:

Damit sind die meisten Mengen weiterhin außer Reichweite, aber wir können immerhin auch zusammengesetzte Rechtecke betrachten:



Für $B := B_1 \cup B_2 \cup B_3$ gilt

$$\int_B div(F) = \int_{B_1} div(F) + \int_{B_2} div(F) + \int_{B_3} div(F)$$

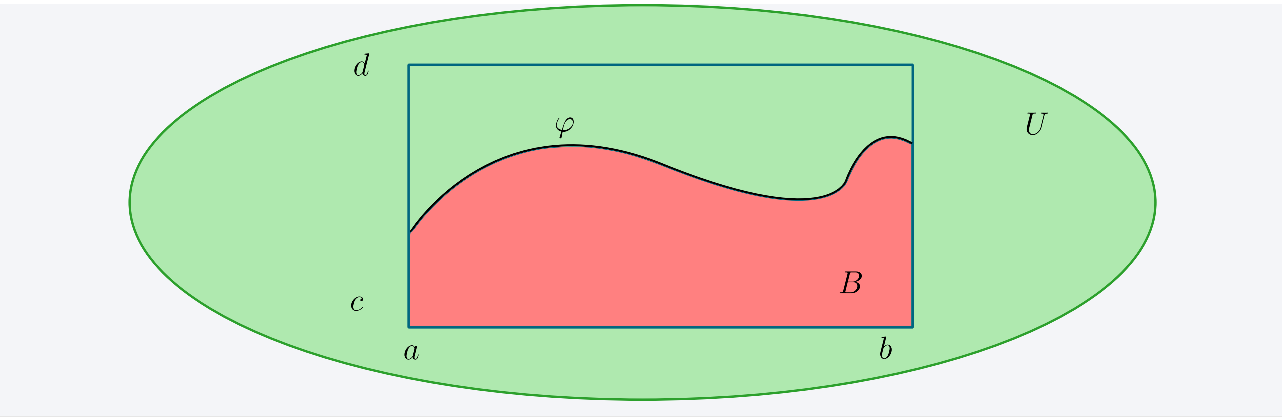
Außerdem müssen wir betrachten, dass die Raänder sich gegenseitig auscanceln (sie zeigen jeweils im Mathematisch positiven Sinne um das Rechteck herum):

$$\int_{\partial B} = \int_{\partial B_1} + \int_{\partial B_2} + \int_{\partial B_3}$$

Theorem 13.1.3

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $F : U \to \mathbb{R}^2$ von Klasse $\mathcal{C}^1$ und $Q = [a,b] \times [c,d] \subseteq U$. Sei $\varphi : [a,b] \to [c,d]$ stetig differenziebar mit beschränkter Ableitung.
Für $B := \{(x,y) \in \mathbb{Q} \mid y \leqslant \varphi(x)\}$ gilt

$$\int_B div(F(x)) = \int_{\partial B} F dn$$



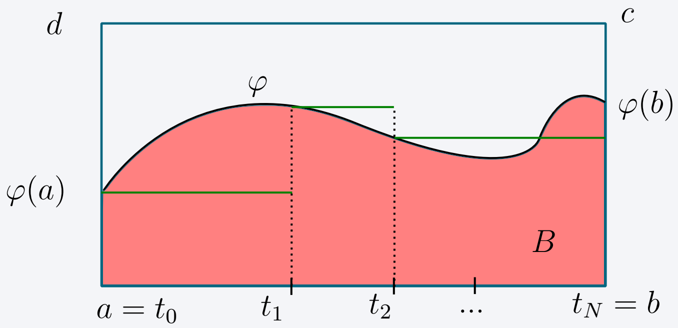
Beweis:

∂B ist parametrisiert durch 4 Pfade: $\gamma_u, \gamma_l, \gamma_r$ wie für Rechtecke und

$$\gamma_o(t) = (a + b - t, \varphi(a + b - t)) \quad \text{für } t \in [a, b]$$

also haben wir $n_{\gamma_o}(t) = (-\varphi'(a + b - t), 1)$

$$\int_{\partial B} F dn = \underbrace{-\int_a^b F_2(t, c) dt}_{unten} + \underbrace{\int_c^{\varphi(b)} F_1(b, t) dt}_{rechts} \underbrace{- \int_a^b F_1(t, \varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt + \int_a^b F_2(t, \varphi(t)) dt}_{oben}$$
$$\underbrace{- \int_c^{\varphi(a)} F_1(a, t) dt}_{links}$$



Wir nehmen die Maschenweite $\delta > 0$ klein. Wir unterteilen $A = \bigcup_{i=1}^{N} A_i$ und wenden eine ganze Menge Abschätzungen an:

$$\int_B div(F(x)) = \int_{\partial B} F dn \Leftrightarrow \left| \int_B div(F(x)) - \int_{\partial B} F dn \right| \leqslant \varepsilon = 0$$

$$\left|\int_B div(F(x)) - \int_{\partial B} Fdn\right| = \left|\int_B div(F(x)) - \int_A div(F(x)) - \int_{\partial B} Fdn + \int_A div(F(x))\right|$$

$$\text{weil } \int_A div(F(x)) = \int_{\partial A} Fdn$$

$$\overset{DUG}{\leqslant} \underbrace{\left|\int_B div(F(x)) - \int_A div(F(x))\right|}_{\leqslant vol(A\Delta B)\cdot ||div(F)||_\infty} + \underbrace{\left|\int_{\partial B} Fdn + \int_A div(F(x))\right|}$$

$$\leqslant vol(A\Delta B)\cdot ||div(F)||_\infty +$$

$$\leqslant \varepsilon \cdot M +$$

Ok ich gebe auf... etc. etc. etc... □

Bemerkung:

Die Aussage des Satzes gilt auch für Bereiche B: Im Allgemeinen können wir nämlich die meisten Mengen als Graphen darstellen. Diese müssen wir nur noch adäquat definieren.

Definition 13.1.3: Glatt berandeter Bereich

Eine abgeschlossene Teilmenge $B \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt **glatt berandeter Bereich**, falls es zu jedem Punkt $p \in B$ eine Umgebung U von $p \in \mathbb{R}^n$ und einen Diffeomorphismus $\varphi : U \to V \subseteq \mathbb{R}^n$ mit

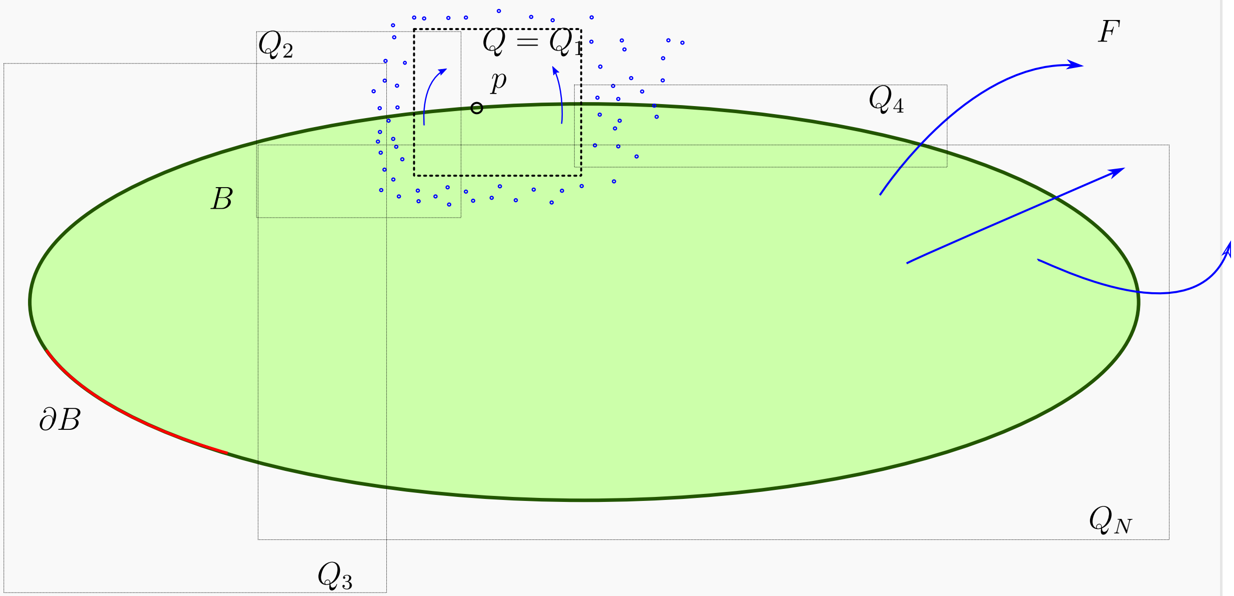
$$\varphi(U \cap B) = \{y \in V \mid y_n \leqslant 0\}$$

existiert.
Der Rand von B ist somit eine Teilmannigfaltigkeit von Dimension $n-1$

Beispiel - Motivierung:

Sei folgende Menge B und ein Punkt $P \in \partial B$. Wir wollen F bei ∂B berechnen. Für

$$F = \begin{cases} F(x) & \text{falls} \quad x \in Q \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$



Nun haben wir

$$\int_B div(F)dx = \int_{\partial B} Fdn$$

aber auch:

$$= \int_{B\cap Q} div(F)dx = \int_{\partial B\cap Q} Fdn = \int_{\partial(B\cap Q)} Fdn$$

Schreibe nun F als $F_1 + F_2 + ... + F_N$ mit $supp(F_i) \subsetneq Q_i$. Dann gilt

$$\int_B div(F)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_B div(F_i)dx = \int_{B\cap Q_i} F_i dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B\cap Q_i} F_i dn = \int_{\partial B} Fdn$$

Angenommen wir finden $\eta_1, ..., \eta_N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ glatt, mit $supp(\eta_i) \subseteq Q_i$ und $\eta_1 + ... + \eta_N = 1$ in einer Umgebung von B, dann kann man schreiben: $F_i = \eta_i \cdot F$.

Theorem 13.1.4

Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt, sei $U_1, ..., U_N$ eine offene Überdeckung von K. Dann existieren glatte Funktionen $\eta_0, \eta_1, ..., \eta_N : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ mit

1. $supp(\eta_0) \subseteq \mathbb{R}^n \backslash K$
2. $supp(\eta_i) \subseteq U_i$ für $1 \leqslant i \leqslant N$
3. $\eta_0 + \eta_1 + ...\eta_N = 1$

Beweis:

Setze $U_0 = \mathbb{R}^n \backslash K$. Definiere Abstandsfunktionen

$$d_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$$
$$d_i(x) = \inf\{||x - y|| \mid y \in \mathbb{R}^n \backslash U_i\}$$

Konkret bedeutet das: $d_i(x) \geqslant 0$ für $x \in U_i$ und $d_i(x) = 0$ sonst.
Sei $\lambda > 0$ eine Lebesgue-Zahl zur Überdeckung $U_0, ..., U_N$ von $\mathbb{R}^n$. Setze

$$\tilde{h}_i(x) = \min\left\{0, d_i(x) - \frac{\lambda}{2}\right\} \quad i \leqslant N$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ existiert $i \leqslant N$ mit $h_i(x) > 0$. Also ist

$$H(x) := \tilde{h}_0(x) + ... + \tilde{h}_N(x) > 0$$

Setze

$$h_i : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$$
$$h_i(x) = \frac{\tilde{h}_i(x)}{H(x)}$$

und dann gilt

$$supp(h_i)+B\left(0,\frac{\lambda}{4}\right) \subseteq U_i \quad \text{und} \quad h_0+\ldots+h_N=1$$

ABER: diese h_i sind nicht glatt, und können deshalb nicht als η aus dem Satz fungieren. Dies benötigt noch etwas Vorarbeit:
Glücklicherweise ist h_i so definiert, so dass der Träger in U_i einen 'Puffer' hat (in grün nachgetragen). Also können wir h_i glätten:
Sei $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_{\geqslant 0}$ glatt, mit

$$supp(\psi) \subseteq B\left(0,\frac{\lambda}{4}\right) \quad \text{und} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \psi(x)dx = 1$$

und setze $\eta_i(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \cdot h_i(x-y)dy$, die Glättung in jeder Variablen.
Also ist

1. η_i glatt
2. $supp(\eta_i) \subseteq U_i$
3. $$\begin{aligned}\sum_{i=0}^N \eta_i &= \sum_{i=0}^N \psi \cdot h_i \\ &= \psi \cdot \sum_{i=0}^N h_i \\ &= \psi \cdot 1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \psi(y) \cdot 1dy \\ &= 1\end{aligned}$$

□

Bemerkung - Zusammenhang zwischen tr und div:

Sei $F : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein Vektorfeld der Klasse $\mathcal{C}^1$. Wir hatten definiert

$$divF(x) = tr\,DF(x) = \sum_{i=1}^n \partial_i F_i(x)$$

Wenn wir den 2D Fall betrachten, haben wir $F(x) = (F_1(x), F_2(x))$ (horizontal und vertikal). Bilden wir nun die Ableitung unseres reorientierten Vektorfeldes haben wir:

$$DF(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(x) & \partial_2 F_1(x) \\ \partial_2 F_1(x) & \partial_2 F_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_1 F_1(x) & 0 \\ 0 & \partial_2 F_2(x) \end{pmatrix}$$

Wenn wir nun die Quellenstärke des Eingeschlossenen Quadrats finden wollen, müssen wir die Differenz ziwschen dem eingehenden und dem ausgehenden Fluss berechnen. Das können wir nun komponentenweise. Und wir erhalten: $\partial_1 F_1(x) + \partial_2 F_2(x) = tr\,DF(x)$.

Definition 13.1.4: Parametrisierung des Randes

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ (ohne Voraussetzung) mit Rand $\partial B = \overline{B} \backslash \mathring{B}$.
Eine **(reguläre, positiv orientierte) Parametrisierung des Randes von** B ist eine **endliche** Kollektion von Kurven

$$\gamma_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{R}^2 \quad k \leqslant N$$

mit folgenden Eigenschaften:

1. Überdeckend:
$$\bigcup_{k=1}^{N} \gamma_k([a_k, b_k]) = \partial B$$

2. Nicht überschneidend:

   Für $t \in [a_k, b_k]$ und $s \in [a_l, b_l]$ soll gelten
$$\gamma_k(t) = \gamma_l(s) \Rightarrow \begin{cases} k = l \\ \text{oder} \\ l \neq k \quad \text{und } t \in \{a_k, b_k\} \text{ und } s \in \{a_l, b_l\} \end{cases}$$

3. Aufeinanderfolgend:
$$\forall k \leqslant N \ \exists! l \leqslant N : \gamma_k(b_k) = \gamma_l(a_l)$$

4. Regularität:
$$\gamma_k'(t) \neq 0 \ \forall t \in (a_k, b_k)$$

5. Orientierung:
$$\forall t \in [a_k, b_k] : \gamma_k(t) - \varepsilon \cdot n_\gamma(t) \in \mathring{B} \ \forall \varepsilon > 0 \text{ klein genug}$$

Dies existiert für glatt berandete Bereiche immer.
Notation:
Ist $B \subseteq U$ kompakt und $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen. Dann schreibe für $F : U \to \mathbb{R}^2$ von Klasse $\mathcal{C}^1$:

$$\int_{\partial B} F dt = \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k} F dt = \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k}^{b_k} < F(\gamma_k(t)), \gamma_k'(t) > dt \quad \text{(Arbeitsintegral)}$$

$$\int_{\partial B} F dn = \sum_{k=1}^{N} \int_{\gamma_k} F dn = \sum_{k=1}^{N} \int_{a_k}^{b_k} < F(\gamma_k(t)), n_{\gamma_k}(t) > dt \quad \text{(Flussintegral)}$$

für eine positiv orientierte, reguläre Parametrisierung des Randes.

Theorem 13.1.5

Diese Integrale sind unabhängig von der Parametrisierung.

Beweis:

Für Arbeitsintegrale haben wir diese Aussage bereits gezeigt.

Für das Flussintegral betrachten wir

$$I = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad I^2 = -id \qquad I^T = -I$$

Es gilt also:

$$I \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x \end{pmatrix} \qquad I \cdot \gamma'(t) = n_\gamma(t) \qquad < v, Iw >= - < Iv, w >$$

Also hat man

$$\begin{aligned} \int_\gamma F dn &= \int_a^b < F(\gamma(t)), n_\gamma(t) > dt \\ &= \int_a^b < F(\gamma(t)), I \cdot \gamma'(t) > dt \\ &= -\int_a^b < I \cdot F(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \\ &= \int_\gamma (I \cdot F) dt \end{aligned}$$

□

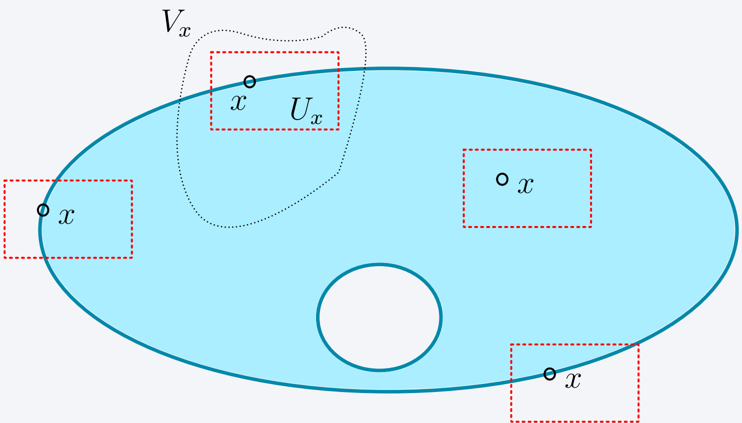
Theorem 13.1.6

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^2$ offen, $B \subseteq U$ glatt berandet und kompakt und $F : U \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld der Klasse $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} F dn = \int_B div(F) dx$$

Beweis:

Wähle zu jedem $x \in B$ eine Karte $U_x \xrightarrow{\varphi_x} V_x$ mit $\varphi_x(U_x \cap B) = V_X \cap \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \leqslant 0\}$



OBdA ist U_x ein Rechteck und $B \cap U_x$ der Bereich unter dem Graphen einer Funktion. B kompakt bedeutet, dass wir nur endlich viele Karten betrachten müssen, weil $U_1, ..., U_N$ B bereits überecken. Sei $\eta_0, ..., \eta_N$ eine glatte Zerlegung der eins, bezüglich dieser Überdeckung.

Setze $F_i = \eta_i \cdot F$

$$\int_B div(F)dx = \sum_{i=0}^{N} \int_B div(F_i)dx$$

weil $supp(F_0) \cap B = \emptyset$:

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_B div(F_i)dx$$

weil $supp(F_i) \subseteq U_i$:

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i \cap B} div(F_i)dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B \cap U_i} F_i dx$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \int_{\partial B} F_i dx$$

$$= \sum_{i=0}^{N} \int_{\partial B} F_i dx$$

$$= \int_{\partial B} F dn$$

□

Bemerkung:

Der Satz gilt auch für Bereiche $B \subseteq \mathbb{R}^2$, die 'endlich viele Ecken' haben. Also, die fast überall glatt sind.

Beispiel - Epizykloide:

$$B \subseteq \mathbb{R}^2 \text{ kompakt} \qquad \partial B \text{ parametrisierbar}$$

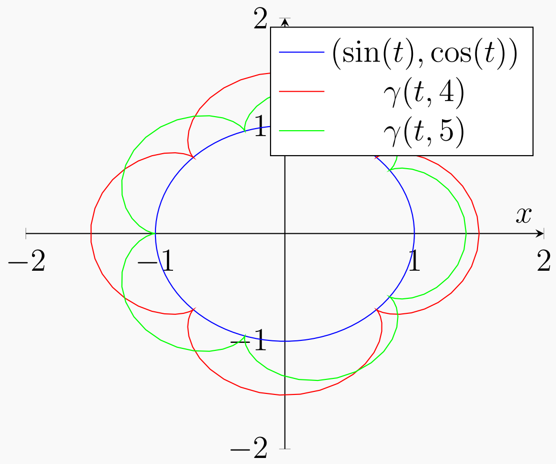
$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad F(x) = x \quad DF(x) = id \quad div(F(x)) = 2$$

Also hat man:

$$2 \cdot vol(B) = \int_B div(F)dx = \int_a^b < \gamma(t), n_\gamma(t) > dt$$
$$= \int_a^b \gamma_1(t)\gamma_2'(t) - \gamma_2(t)\gamma - 1'(t)dt$$

Wir betrachten konkret: (für $m \in \mathbb{N}$)

$$\gamma(t) = \left(1 + \frac{1}{m}\right) \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \cdot \begin{pmatrix} \cos((m+1)t) \\ \sin((m+1)t) \end{pmatrix}$$



Und man erhält

$$vol(B) = \frac{1}{2}v \int_0^{2\pi} \frac{(m+1)^2}{m^2} + \frac{m+1}{m^2} + \underbrace{\alpha \cdot \cos(t)\cos((m+1)t) + \beta \cdot \sin(t)\sin((m+1)t)}_{\Rightarrow 0}\, dt$$
$$= \pi \cdot \frac{(m+1)(m+2)}{m^2}$$

13.1.2 Rotation

Theorem 13.1.7: Satz von Green

Sei $B \subseteq U \subseteq \mathbb{R}^2$ glatt berandet und sei $F : U \to \mathbb{R}^2$ von Klasse $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$\int_{\partial B} F dt = \int_B div(-I \cdot F)dx := \int_B rot(F)dx$$

(Also ist $rot(F)(x) = \partial_2 F_1(x) - \partial_1 F_2(x)$)

Beweis:

$$-I \cdot F = (-F_2 \quad F_1) \qquad div(-I \cdot F) = -\partial_1 F_2 + \partial_2 F_1 = rot(F)$$

□

Definition 13.1.5: Rotationsfreies Vektorfeld

Ein Vektorfeld $F : U \to \mathbb{R}$ heißt **rotationsfrei**, falls

$$rot(F) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \partial_2 F_1 = \partial_1 F_2 \quad \Leftrightarrow \quad F \text{ erfüllt die Integrabilitätsbedingung}$$

13.2 Oberflächenintegrale

13.2.1 Flächen (im $\mathbb{R}^3$)

Wir betrachten im Folgenden spezielle Fälle:

1. $B \subseteq \mathbb{R}^3$ glatt berandet und kompakt. Dann hat B eine Oberfläche ∂B. Wir betrachten dann Felder oder Flüsse auf $U \supset B$.
2. Eine Fläche mit Rand in $\mathbb{R}^3$ und dann Felder und Flüsse auf ebendieser Fläche.

Zur Erinnerung

Definition 13.2.1: Teilmannigfaltigkeit

Teilmannigfaltigkeiten von $\mathbb{R}^3$ der Dimension 2 sind: $X \subseteq \mathbb{R}^3$ mit

$$\forall p \in X\ \exists \text{ eine Karte } \varphi : U \to V \mid \varphi(U \cap X) = V \cap \mathbb{R}^2$$

Sei $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i \subseteq \mathbb{R}^3)_{i \in I}$ ein Atlas von X.
Nenne

$$\begin{array}{cccc} \alpha_{ij} : & \varphi(U_i \cap U_j) & \xrightarrow{\varphi_j \circ \varphi_i^{-1}} & \varphi_j(U_i \cap U_j) \\ & \subseteq & & \subseteq \\ & V_i & & V_j \end{array}$$

Transitionsabbildung.

Definition 13.2.2

Eine zweidimensionale, reelle Mannigfaltigkeit ist ein topologischer Raum X zusammen. mit

1. einer offenen Überdeckung $(U_i)_{i \in I}$ von X.
2. einem Homöomorphismus $\varphi_i : U_i \to V_i \subseteq \mathbb{R}^2$ (offen) für jedes $i \in I$

so, dass alle Transitionsabbildungen

$$\alpha_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

glatt (/ differenzierbar) sind.
(*) Oft stellt man eine weitere Bedingung, die Zweitabzählbarkeit. Wir gehen darauf nicht weiter ein, weil sie im Rest der Vorlesung immer erfüllt ist.

Definition 13.2.3

Sei X eine 2-dimensionale reelle Teilmannigfaltigkeit. Eine Funktion $f : X \to \mathbb{R}^n$ heißt glatt $\mathcal{C}^\infty$, falls für jede Karte $U \xrightarrow{\varphi} V \subseteq \mathbb{R}^2$ von X die Verknüpfung $V \xrightarrow{\varphi^{-1}} U \xrightarrow{f} \mathbb{R}^n$ glatt ist.
Diese Definition können wir beliebig erweitern (siehe Nachtrag in grün).

Eine Mannigfaltigkeit X mit Atlas $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i)_{i \in I}$ können wir uns als

$$X = \bigcup \left(\coprod v_i \right) /_{\alpha_{ij}(x) = x}$$

vorstellen. (also, als (disjunkter) Vereinigung aller Karten, die wir an einem gemeinsamen Punkt zusammengeklebt haben. Das ist eine Äquivalenzrelation).
Ist X aus einer Teilmannigfaltigkeit des $\mathbb{R}^3$ entstanden, so erhalten wir Abbildungen $\varphi_i^{-1} : V_i \to U_i \subseteq \mathbb{R}^3$, die mit der Verklebung (siehe oben) kompatibel sind.

Bemerkung - (salopp):

Wir betrachten U_i als relativ offene Teilmenge einer Teilmannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$. Diese können wir über φ_i mit V_i, einer Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ (aber im $\mathbb{R}^3$) betrachten, also so etwas wie eine Projektion. Wenn wir V_i jetzt als 3-dimensional betrachten, dann gibt uns φ_i^{-1} auch eine 'dicke' Teilmenge U_i zurück, die aus Der Teilmannigfaltigkeit heraussteht. Per Voraussetzung ist φ_i ein Diffeomorphismus und die Jakobi-Matrix hat vollen Rang. Insbesondere auch jede Untermatrix, so wie die der Einschränkung auf die ursprüngliche, 'flache' Teilmenge.
In diese, Fall hat die Ableitung $D\varphi_i^{-1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ vollen Rang $(= 2)$ und ist also injektiv.

Definition 13.2.4: Immersion

Sei X eine 2-dimensionale reelle Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i \subseteq \mathbb{R}^2)_{i\in I}$. Eine **Immersion** von X nach $\mathbb{R}^3$ ist eine injektive, abgeschlossene Abbildung $X \overset{h}{\hookrightarrow} \mathbb{R}^3$ so, dass für jedes $i \in I$ und $x \in V_i$

$$D(h \circ \varphi_i^{-1})(x)$$

injektiv ist.

Theorem 13.2.1

Ist $h : X \to \mathbb{R}^3$ eine Immersion, dann ist $h(x) \subseteq \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit.

Beweis:

Sei $p \in h(x)$. Da $h : X \to h(X)$ ein Homöomorphismus ist, existiert eine Karte $U_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i$ um p und eine offene Umgebung U_p von p in $\mathbb{R}^3$ von p mit $h(X) \cap U_p = h(U_i) \cap U_p$.
Definiere $v_1 = D(h \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x_0)) \cdot e_1$ und $v_2 = D(h \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x_0)) \cdot e_2$.
Behauptung: Diese Vektoren bilden eine Basis des Tangentialraums an $h(X)$ im Punkt p.
Beweis: Lineare Unabhängigkeit gilt, da $D(h \circ \varphi_i^{-1})(-)$ injektiv ist. Außerdem sind sie tatsächlich im Tangentialraum:

$$\gamma_1(t) = (h \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x_0) + t \cdot e_1) \quad \Rightarrow v_1 = \gamma_1'(0)$$

$$\gamma_2(t) = (h \circ \varphi_i^{-1})(\varphi_i(x_0) + t \cdot e_2) \quad \Rightarrow v_2 = \gamma_2'(0)$$

Setze $n(p) = v_1 \times v_2$ (also der Normalenvektor).
Schreibe

$$\Phi : V_i \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$$
$$(v, t) \mapsto (h \circ \varphi_i^{-1})(v) + t \cdot n(p)$$

Nun wollen wir zeigen, dass Φ ein Diffeomorphismus in einer Umgebung von $(\varphi(x_0), 0)$ ist. Es genügt zu zeigen, dass $D\Phi(\varphi_i(x_0), 0)$ invertierbar ist, denn dann gilt laut Satz der impliziten

Funktion, dass φ in einer kleinen Umgebung diffeomorph ist.

$$D\Phi(v,t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial v_1}\Phi(v,t) & \frac{\partial}{\partial v_2}\Phi(v,t) & \frac{\partial}{\partial t}\Phi(v,t) \end{pmatrix}$$

mit $(v,t) = (\varphi_i^{-1}(x_0), 0)$ gilt:

$$= \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & n(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_1 \times v_2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \Phi(\varphi_i^{-1}(x_0), 0) \neq 0$$

□

Definition 13.2.5: Orientierung

Sei X eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit mit Atlas $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i \subseteq \mathbb{R}^2)_{i \in I}$. Wir sagen, der Atlas sei **orientiert**, falls für jede Transitionsabbildung

$$\alpha_{ij} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \to \varphi_j(U_i \to U_j)$$

gilt:

$$\det D\alpha_{ij}(x) > 0$$

X ist **orientierbar**, falls so ein Atlas existiert.

Beispiel - $X = \mathcal{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$**:**

Definiere die Pole

$$U_1 = S_2 \backslash \{(0,0,1)\} \qquad U_2 = S_2 \backslash \{(0,0-1)\}$$

mit einer jeweiligen stereographischen Projektion:

$$\begin{array}{cccc} \varphi_1 : & U_1 & \to & V_1 = \mathbb{R}^2 \\ & \varphi_1(x) & = & \left(\frac{x_1}{1-x_3}, \frac{x_2}{1-x_3}\right) \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} \varphi_2 : & U_2 & \to & V_2 = \mathbb{R}^2 \\ & \varphi_2(x) & = & \left(\frac{x_1}{1+x_3}, \frac{-x_2}{1+x_3}\right) \end{array}$$

Außerdem gilt

$$U_1 \cap U_2 = \mathcal{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\} \cup (0,0-1)\} \Rightarrow \varphi_1(U_1 \cap U_2) = \varphi_2(IU_1 \cap U_2) = \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$$

und wir haben

$$\alpha_{12} : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$$

$$\alpha_{12}(y) = \frac{y}{||y||^2} = \begin{pmatrix} \frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2} & \frac{-y_2}{y_1^2 + y_2^2} \end{pmatrix}$$

Natürlich haben wir auch $\alpha_{21} = \alpha_{12}^{-1}$ und trivialerweise $\alpha_{11} = \alpha_{22} = id$ Wir prüfen also nur für α_{12}:

$$D\alpha_{12} = \frac{1}{||y||^4} \cdot \begin{pmatrix} -y_1^2 + y_2^2 & -2y_1 \cdot y_2 \\ +2y_1 \cdot y_2 & -(y_1^2 - y_2^2) \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(D\alpha_{12}) = +\frac{1}{||y||^2} ↯$$

Also passen wir an (in grün) und finden, was wir wollen.

Theorem 13.2.2

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ eine 2-dimensionale Teilmannigfaltigkeit. Folgende Aussagen sind äquivalent

1. X besitzt einen orientierbaren Atlas
2. Es existiert ein normiertes, stetiges Normalenfeld auf X, also einen Schnitt $h : X \to NX$, welcher stetig ist und es muss gelten $||n(p)|| = 1 \; \forall p \in X$

Beweis - Ursprünglich ÜA:

- $1) \Rightarrow 2)$. Sei $(U_i \xrightarrow{\varphi_i} V_i \subseteq \mathbb{R}^2)_{i \in I}$ ein orientierter Atlas mit φ_i^{-1} hat vollen Rang.

  Definiere für $p \in U_i$:

$$v_1(p) = D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(p))(e_1) \qquad v_1(p) = D\varphi_i^{-1}(\varphi_i(p))(e_2)$$

  und $n(p) = \dfrac{v_1(p) \times v_2(p)}{||v_1(p) \times v_2(p)||}$.
  Sei U_j eine weitere Karte um p. Dann hätten wir w_1, w_2 ähnlich definiert wie v_1, v_2. Schließlich hat man (dank der Transitionsabbildung α_{ij}): $\varphi_i^{-1} = \varphi_j^{-1} \circ \alpha_{ij}$ und mit $A = D\alpha_{ij}(\varphi_i(p))$ gilt dank Kettenregel $(v_1, v_2) = (w_1, w_2) \cdot A$. Schließlich ist:

$$v_1 \times v_2 = (w_1 \times w_2)\dot{d}etA \qquad (detA > 0)$$

  Also sind $w_1 \times w_2$ und $v_1 \times v_2$ gleichorientiert und also $n(p)$ eindeutig.

- $2) \Rightarrow 1)$. Gleiche Rechnung

□

Korollar 13.2.2 (1)

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ glatt berandet. Dann ist $\partial B = X$ orientierbar.
Genauer: Es existiert genau ein normiertes, stetiges Normalenfeld $n : X \to NX$ mit

$$p + \varepsilon \cdot n(p) \notin B$$

$$p - \varepsilon \cdot n(p) \in \mathring{B}$$

für alle $\varepsilon > 0$ klein genug

Beweis:

Betrachte ∂B als $f(X)$. Also haben wir $g(x_1, x_2, x_3) = x_3 - f(x_1, x_2) = g(p)$. Dies ist in B kleiner null, auf ∂B gleich null, und außerhalb größer.
Dann liefert $n(p) = \dfrac{grad(g(p))}{||grad(g(p))||} = \dfrac{(-\partial_1 f(x), \partial_2 f(x), 1)}{(\partial_1 f(x))^2 + (\partial_2 f(x))^2 + 1}$ besagtes Normalenfeld.

□

13.2.2 Oberflächenintegrale

Definition 13.2.6: Oberflächenintegral

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Fläche, $f : X \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls X einen Atlas mit nur einer Karte hat

$$\varphi : X \to V \subseteq \mathbb{R}^2$$

oder anders gesagt, wenn X mit nur einer Menge V in $\mathbb{R}^2$ parametrisiert werden kann: $\psi = \varphi^{-1} : V \to X \subseteq \mathbb{R}^3$, dann setze

$$\int_X f\, dA := \int_V f(\psi(x)) \cdot ||\partial_1 \psi(x) \times \partial_2 \psi(x)|| dx$$

für das **Oberflächenintegral** über X.
Allgemein ist $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i \in I}$ ein endlicher Atlas von X, so setze

$$\int_X f\, dA = \sum_{i \in I} \int_{V_i} \eta_i\, f(\psi(x)) \cdot ||\partial_1 \psi_i(x) \times \partial_2 \psi_i(x)|| dx$$

wobei $(\eta_i)_{i \in I}$ eine Zerlegung der Eins auf X ist, mit $supp(\eta_i) \subseteq U_i$

Bemerkung:

Falls X durch Kartenbereiche $U_1, ..., U_N$ abgedeckt ist, bis auf eine Vereinigung vpn Punkten und Kurven, mit $U_1, ..., U_N$ disjunkt, dann ist

$$\int_X f\, dA = \sum_{i=1}^{N} \int_{U_i} f|_{U_i} dA$$

Bemerkung:

Angenommen $X \subseteq \mathbb{R}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$ sei offen und 'flach'. Sei $\varphi : X \to V$ eine Karte, $\psi : V \to X$ mit $V \subseteq \mathbb{R}^2$. Dann ist φ diffeomorph und $\psi = \varphi^{-1}$ auch. Also ist

$$\int_X f\, dA = \int_V f(\psi(x)) \cdot ||\partial_1 \psi(x) \times \partial_2 \psi(x)|| dx \quad (*)$$

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \psi_3(x) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \partial_1 \psi(x) = \begin{pmatrix} \partial_1 \psi_1(x) \\ \partial_1 \psi_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \\ \partial_2 \psi(x) = \begin{pmatrix} \partial_2 \psi_1(x) \\ \partial_2 \psi_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases} \Rightarrow \partial_1 \psi(x) \times \partial_2 \psi(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \det D\psi(x) \end{pmatrix}$$

$$(*) = \int_V f(\psi(x)) \cdot || \det D\psi(x)|| dx = \int_X f dx$$

Die Substitutionsregel bewirkt also, dass sich das Integral für verschiedene Parametrisierungen nicht verändert, also unter Transitionsabbildungen invariant bleibt.

13.3 In 3 Dimensionen

Wie auch schon im 2-dimensionalen Fall, wollen wir zunächst Begriffe wie Fluss definieren.

Definition 13.3.1: Flussintegral

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^3$ eine orientierte Fläche mit orientiertem Atlas $(\varphi_i : U_i \to V_i)_{i\in I}$ und $\psi_i = \varphi_i^{-1}$. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von X und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld.
Schreibe

$$\int_X F\,dn := \sum_{i\in I} \int_{V_i} < \eta_i \cdot F(\psi_i(x)), \partial_1\psi(x) \times \partial_2\psi(x) > dx$$

für das **Flussintegral** über X, wobei $(\eta_i : X \to \mathbb{R})_{i\in I}$ eine Zerlegung der Eins mit $supp(\eta_i) \subseteq U_i$ und $\sum\limits_{i\in I} \eta_i = 1$.
Diese Definition ist davon abhängig, dass der Atlas orientiert ist. Bei einer Veränderung der Orientierung, bekommt das Integral ein minus.

Beispiel - $X = \mathcal{S}^2 \subseteq \mathbb{R}^3$**:**

$$\varphi_1 : \mathcal{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\} \to \mathbb{R}^2 \qquad \varphi_2 : \mathcal{S}^2 \backslash \{(0,0,-1)\} \to \mathbb{R}^2$$

die stereographischen Projektionen, die wir bereits kennen. Also ist

$$\psi_1 = \varphi_1^{-1} \Rightarrow \psi_1(y) = \begin{pmatrix} \frac{2y_1}{y_1^2+y_2^2+1} & \frac{2y_2}{y_1^2+y_2^2+1} & \frac{y_1^2+y_2^2-1}{y_1^2+y_2^2+1} \end{pmatrix} \quad \mathbb{R}^2 \to \mathcal{S}^2 \backslash \{(0,0,1)\}$$

Die andere Projektion betrachten wir gar nicht mehr, da wir bereits mit der ersten bis auf einen Punkt alles abdecken, was für das Integral also vollkommen ausreicht.

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}^2} f\,dA &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\psi_1(y)) \cdot ||\partial_1\psi(y) \times \partial_2\psi(y)||dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} f(\psi_1(y)) \cdot \frac{4}{(1+y_1^2+y_2^2)^2} dy \end{aligned}$$

Jetzt haben wir mit Fubini:

$$\begin{aligned} vol(X) &= \int_X \mathbb{1} dA \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(1+y_1^2+y_2^2)^2} dy_1\,dy_2 \\ &= 4\pi \end{aligned}$$

Beispiel - $X = \partial B \quad B = [0,1]^3$**:**

Wir betrachten $X \subseteq U$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$.
Zunächst parametrisieren wir die Ränder durch

$$\begin{gathered} \psi : V = (0,1)^2 \to X \\ (y_1, y_2)(1, y_1, y_2) \end{gathered}$$

Also ist $n(p) = \partial_1\psi_r \times \partial_2\psi_r = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Also ist

$$\begin{aligned} \int_X F dn &= \int_0^1 + \int_0^1 < F(1, y_1, y_2), n(p) > dy_1\, dy_2 + 5 \text{ Weitere} \\ &= \int_0^1 F_1(1, y_1, y_2) dy_1\, dy_2 + 5 \text{ Weitere} \end{aligned}$$

So wollen wir motivieren:

13.3.1 Der Divergenzsatz

Theorem 13.3.1: Satz von Gauss

Sei $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ein kompakter, glatt berandeter Bereich mit ∂B orientiert durch Außennormalen. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Umgebung von B und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld der Klasse $\mathcal{C}^1$. Dann gilt

$$\int_B div(F) dx = \int_{\partial B} F dn$$

Beweis:

Wir betrachten nun B als den Bereich unter einem Graphen.
Für $Q = [a, b] \times [c, d]$ betrachte $\varphi : W \to [h, \infty)$ stetig und glatt auf Q dann hätten wir

$$B = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in Q \wedge h \leqslant z \leqslant \varphi(x, y)\}$$

Der 'obere' Teil der Fläche ist parametrisiert durch

$$\begin{aligned} \psi : (a, b) \times (c, d) &\to \partial B \\ (x, y) &\mapsto (x, y, \varphi(x, y)) \end{aligned}$$

Also haben wir

$$\partial_x\psi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x\varphi \end{pmatrix} \quad \partial_y\psi = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y\varphi \end{pmatrix} \Rightarrow \partial_x\psi \times \partial_y\psi = \begin{pmatrix} -\partial_x\varphi \\ -\partial_y\varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun verwenden wir folgenden, essenziellen Trick, wir schreiben F um:

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ 0 \\ F_3(x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_2(x) \\ 0 \end{pmatrix} := F_{(1)} + F_{(2)}$$

Es genügt, den Divergenzsatz für beide Felder separat zu zeigen.
Dies wird aus Zeitgründen aber dem Leser überlassen. Siehe Skript. □

Beispiel - $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 9 \wedge 0 \leqslant z \leqslant 2\}$ **(ein Zylinder):**

Streng genommen sind wir gar nicht im Setup des Satzes, weil B gar nicht glatt berandet ist. Aber solange wir jede kleine Umgebung um einen Puntk als Funktionsgraph auffassen können, geht alles in Ordnung.

Wir betrachten $F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^3 \\ y^3 \\ z^2 \end{pmatrix}$ und haben also $div(F) = 3x^2 + 3y^2 + 2z$

Nun berechnen wir die Divergenz direkt

$$\int_B div(F) d(x,y,z) = \int_X \Phi^* div(F) \cdot |\det D\Phi| d(r,\vartheta,z)$$

$$\text{mit folgender Substitution:} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\vartheta) \\ r\sin(\vartheta) \\ z \end{pmatrix} = \Phi(r,\vartheta,z)$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (3r^2\cos^2(\vartheta) + 3r^2\sin^2(\vartheta) + 2z) \cdot |r| dr d\vartheta dz$$

$$= \int_0^2 \int_0^{2\pi} \int_0^3 (3r^2 + 2z) \cdot |r| dr d\vartheta dz$$

$$\vdots$$

$$= 279\pi$$

Gehen wir nun über das Flussintegral, so müssen wir 3 Teile berechnen: Den Fluss durch jeweils...

1. Die oberere Kreisscheibe
2. Die untere Kreisscheibe
3. Den vertikalen Rand

Hierzu betrachen wir

- Oben:

$$\psi : (0,3) \times (0,2\pi) \to \partial B$$
$$(r,\vartheta) \mapsto (r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta), 2)$$

(also mit fixem $z = 2$).

$$\partial_1\psi \times \partial_2\psi = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -r\sin(\vartheta) \\ r\cos(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

Folglich haben wir für den Fluss oben

$$\int_0^3 \int_0^{2\pi} < F(\psi(r,\theta)), \partial_1\psi \times \partial_2\psi > d\vartheta\, dr = \int_0^3 \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} (r\cos(\vartheta))^3 \\ (r\sin(\vartheta))^3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \right\rangle d\vartheta\, dr$$
$$= \int_0^3 \int_0^{2\pi} 4r d\vartheta dr = 36\pi$$

- Unten:
$$\psi : (0,3) \times (0,2\pi) \to \partial B$$
$$(r,\vartheta) \mapsto (r\cos(\vartheta), r\sin(\vartheta), 0)$$

  (Achtung, die Orientierung ist genau falsch herum)

  Danach kommen wir auf die selbe Rechnung zurück.

- Vertikale Fläche:
$$\psi : (0,2\pi) \times (0,3) \to \partial B$$
$$(\vartheta, z) \mapsto (3\cos(\vartheta), 3\sin(\vartheta), z)$$

  So ist das 'Rohr' parametrisiert, allerdings ohne die Naht bei 2π, wobei diese Naht nicht zum Volumen beiträgt und uns somit nicht weiter interessiert.

$$\partial_1\psi \times \partial_2\psi = \begin{pmatrix} -3\sin(\vartheta) \\ 3\cos(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cos(\vartheta) \\ 3\sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

  Um die Orientierung von $n(p) = \partial_1\psi \times \partial_2\psi$ zu bekommen (und das Vorzeichen) möglicherweise entsprechend zu ändern, müssen wir $n(p)$ nur an einem Punkt auswerte, da es aufgrund der Stetigkeit unsererer Projektion nur eine Orientierung gibt. Für die Stelle $(0,0,0)$ erhalten wir eine Orientierung nach außen, wie gewünscht.

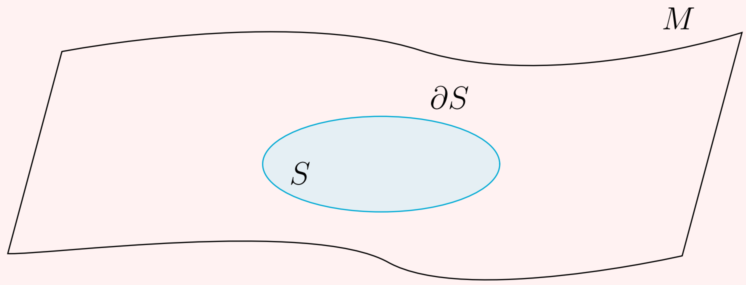
$$\int_0^{2\pi} \int_0^2 \left\langle \begin{pmatrix} 27\cos(\vartheta)^3 \\ 27\sin(\vartheta)^3 \\ z^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3\cos(\vartheta) \\ 3\sin(\vartheta) \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle dz\, d\vartheta = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} 81\cos(\vartheta)^4 + 81\sin(\vartheta)^4 dz\, d\vartheta$$
$$\vdots$$
$$= 243\pi$$

Zusammengezählt erhalten wir 279π, wie bereits berechnet.

13.3.2 Der Satz von Stokes

Definition 13.3.2: Fläche mit Rand

Sei eine Teilmenge einer 2-dimensionalen Teilmannigfaltigkeit $M \subseteq \mathbb{R}^3$ so, dass der Rand von S relativ in M eine eindimensionale Mannigfaltigkeit ist. Diese Menge bezeichnen wir als **abgeschlossene Fläche mit Rand** $S \subseteq \mathbb{R}^3$.



Für diese Flächen haben wir nun die Verallgemeinerung in $\mathbb{R}^3$ des Satzes von Green:

Theorem 13.3.2: Satz von Stokes

Sei U eine offene Umgebung von S in $\mathbb{R}^3$ und $F : U \to \mathbb{R}^3$ ein $\mathcal{C}^1$-Vektorfeld.

$$\int_S rot(F) dn = \int_{\partial S} F dt$$

Bemerkung:

$$rot(F) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ -\partial_1 F_1 + \partial_3 F_1 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_2 \end{pmatrix} = \sum_{\sigma \in A^3} e_{\sigma(1)} \cdot (\partial_{\sigma(2)} F_{\sigma(3)} - \partial_{\sigma(3)} F_{\sigma(2)})$$

A^3 sind alle Permutationen auf 3 Elementen.
Unser Vektorfeld erfüllt die Integrabilitätsbedingungen genau dann, wenn $rot(F) = 0$.
Also kann man die Rotation als Maß dafür sehen, wie sehr F diese Bedingungen nicht erfüllt.

Beweis:

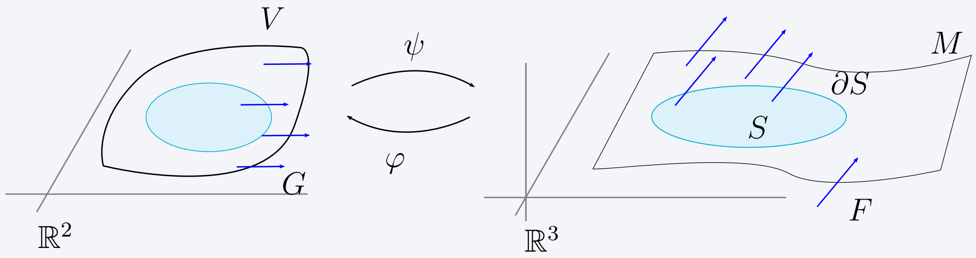
Sei $\varphi : M \to V \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Karte von M, dann ist $\psi = \varphi^{-1} : V \to M \subseteq \mathbb{R}^3$ eine Parametrisierung von M.
Zum Vektorfeld F setze $G = \psi^* F$ das zurückgezogene Vektorfeld auf V.

$$G(x) = \begin{pmatrix} < F(\psi(x)), \partial_1 \psi(x) > \\ < F(\psi(x)), \partial_2 \psi(x) > \end{pmatrix}$$

genau genommen ist G sogar die Projektion auf den Tangentialraum (also alles in 2D). Dies geschieht entlang beider Basisvektoren: $\partial_{1,2}\psi(x)$.
Berechne:

$$rot(G) = \partial_1 \psi(x) - \partial_2 \psi(x) = ... =< rot(F) \circ \psi, \partial_1 \psi \times \partial_2 \psi >$$

Jetzt sind wir wieder im Setup des Satzes von Green:
Sei $\gamma : [a, b] \to \partial B$ eine Parametrisierung des Randes

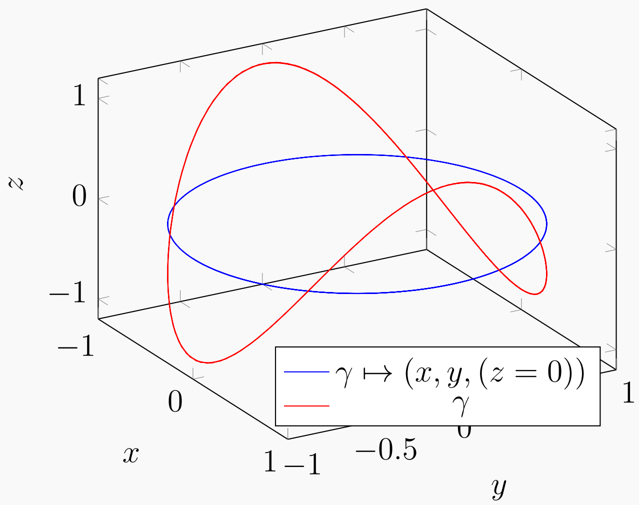


$$
\begin{aligned}
\int_S rot(F)dn &\overset{def}{=} \int_B < rot(F(\psi(x))), \partial_1\psi \times \partial_2\psi > dx \\
&= \int_B rot(G)dx \\
&= \int_{\partial B} G\,dt \\
&= \int_a^b < G(\gamma(t)), \gamma'(t) > dt \\
&= \int_a^b \left\langle \begin{pmatrix} < F\circ\psi\circ\gamma, \partial_1\psi\circ\gamma > \\ < F\circ\psi\circ\gamma, \partial_2\psi\circ\gamma > \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma_1' \\ \gamma_2' \end{pmatrix} \right\rangle dt \\
&= \int_a^b \sum_{j=1}^3 (F\circ\psi\circ\gamma)\cdot((\partial_1\psi_j\circ\gamma)\gamma_1' + (\partial_2\psi_j\circ\gamma)\gamma_2')\,dt \\
&= \int_a^b < F\circ\psi\circ\gamma, (\psi\circ\gamma)' > dt \\
&= \int_{\partial S} F dt
\end{aligned}
$$

□

Beispiel:

$$
\begin{aligned}
\gamma : [0, 2\pi] &\to \mathbb{R}^3 \\
\vartheta &\mapsto (\cos(\vartheta), \sin(\vartheta), \cos(\vartheta)^2 - \sin(\vartheta)^2)
\end{aligned}
$$



Wissen schonmal, dass γ geschlossen ist, weil $\gamma(0) = \gamma(2\pi)$.

Weiter betrachten wir:

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} yz + \cos(x) \\ xz + \sin(y) \\ 2xy \end{pmatrix}$$

Wir berechnen

$$\int_\gamma F dt = \int_0^{2\pi} < F(\gamma_(\vartheta)), \gamma'(\vartheta) > d\vartheta$$
$$= \int_0^{2\pi} \left\langle \begin{pmatrix} \sin(\vartheta)(\cos(\vartheta)^2 - \sin(\vartheta)^2) + \cos(\cos(\vartheta)) \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin(\vartheta) \\ \cos(\vartheta) \\ \vdots \end{pmatrix} \right\rangle d\vartheta$$

was wir leider nicht mehr berechnen können.
Betrachten wir diese Kurve doch lieber als den Rand einer Fläche. Dann sagt der Satz von Stokes:
Das Arbeitsintegral von F entlang γ lässt sich auch ausdrücken als das Integral von $rot(F)$ auf einer Fläche, deren Rand γ ist.
Es bietet sich an die Mannigfaltigkeit $M := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2\}$ zu betrachten, und daraus die Fläche

$$S := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid z = x^2 - y^2 \wedge x^2 + y^2 \leqslant\}$$

zu nehmen. (M ist also die Fortsetzung von S).

$$\int_\gamma F dt \overset{Stokes}{=} \int_S rot(F) dn$$
$$\psi : \mathbb{R}^2 \to M \subseteq \mathbb{R}^3 \quad \psi(x, y) = (x, y, x^2 - y^2)$$
$$rot(F(x, y, z)) = \begin{pmatrix} \partial_2 F_3 - \partial_3 F_2 \\ -\partial_1 F_3 + \partial_3 F_1 \\ \partial_1 F_2 - \partial_2 F_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - x \\ -2y + y \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= \int_B < rot(F)(\psi(x, y)), \partial_1\psi \times \partial_2\psi > d(x, y)$$

mit $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1\}$

$$= \int_B \left\langle \begin{pmatrix} x \\ -y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2y \end{pmatrix} \right\rangle d(x, y)$$
$$\overset{elegant}{=} \int_B \det \begin{pmatrix} x & 1 & 0 \\ -y & 0 & 1 \\ 0 & 2x & -2y \end{pmatrix} d(x, y)$$
$$= \ldots$$

lang, **aber** berechenbar

Kapitel 14

Gewöhnliche Differentialgleichungen

14.1 Einleitung

Definition 14.1.1

Wir suchen eine (unbekannte) Funktion u, die reell- oder verktorwertig ist und folgenden 2 Bedingungen genügt:

1. Sie erfüllt Differentialgleichung(en), das heißt Gleichungen zwischen u, Ableitungen von u und vorgegebenen Funktionen.
2. Sie erfüllt Nebenbedingungen (genannt Anfangs- oder Randbedingungen), das heißt spezielle Werte von u und ihren Ableitungen.

Als **gewöhnlich** bezeichnen wir Differentialgleichungen, die wir mit u als Funktion in einer Variablen lösen können.
Dem gegenüber sind **partielle** Differentialgleichungen solche, die durch Funktionen in mehreren Variablen gelöst werden.

Beispiel - Allgemein:

Betrachten wir

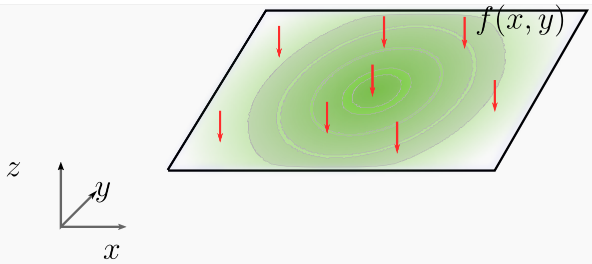
$$t \cdot u''(t) = \cos(t) \cdot U(t)^2 \tag{*}$$

$$u(0) = 0 \qquad u'(0) = 1$$

dann müssen wir erst entscheiden, in welchem Lösungsraum wir uns mit diesem Problem beschäftigen wollen. Wir könnten beispielsweise nach Lösungen in $\mathcal{C}^2((-\pi, \pi))$ suchen.
Genauer haben wir dann in $(*)$ eine **nichtlineare**, gewöhnliche Differentialgleichung.

Beispiel - Die biharmonische Gleichung:

Wir betrachten eine elastische Platte, auf die wir mit einer Kraft einwirken (also existiert ein Kraftfeld).



Für $u(x,y)$, der Höhe der Platte bei $(x,y) \in B$, gilt:

$$u_{xxxx} + 2 \cdot u_{xxyy} + uyyyy := \frac{\partial^4}{\partial x^4} u + \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u + \frac{\partial^4}{\partial y^4} = -f(x,y) \qquad (*)$$

Zudem haben wir Randbedingungen: $U(x,y) = 0 \; \forall (x,y) \in \partial B$
Alternative Schreibweise: $\delta^2 u = -f$ oder $\nabla^4 u = -f$.
Wir können zu $(*)$ sagen, dass die Gleichung **linear** in u ist. Somit haben wir eine **lineare** partielle Differentialgleichung vom Grad 4.
Zudem ist sie **homogen** im Spezialfall $f = 0$ und sonst inhomogen.

Beispiel - Ricatti-Gleichung:

Für u, eine Funktion in einer Variablen:

$$u'(x) = a_0(x) + a_1(x) \cdot u(x) + a_2(x) \cdot u(x)^2$$

Als Differentialgleichung ist die Gleichung gewöhnlich, aber nicht linear, erster Ordnung. Sie ist wichtig in der Kontroll-/Transporttheorie.

Eng verwandt ist

Beispiel - Bernoull-Gleichung:

Ein Gleichung der Form

$$y' + Py = Qy^n$$

Achtung: hier ist y eine Funktion: $y = y(x)$

Beispiel - Minimalflächengleichung (Lagrange, 1762):

Wir betrachten c, eine 1-dimensionale Mannigfaltigkeit im $\mathbb{R}^3$ (also konkret geschlossene Kurven). Nun suchen wir die Fläche F mit $\partial F = c$, deren Fläche minimal ist.
Lokal können wir diese Minimalfläche als Graph einer Funktion $u = u(x,y)$ schreiben, die erfüllt

$$(1 + u_x^2) u_{yy} - 2 u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2) u_{xx} = 0$$

Hier ist also eine partielle, nichtlineare Differentialgleichung.

Beispiel:

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : U \to \mathbb{R}^n$ ein Vekorfeld. Betrachten wir $u(t)$ als die Position eines Partikels, das von F beeinflusst wird. Wir setzen $u(0) = x_0 \in U$ (Anfangsbedingung).

Wir haben

$$u'(t) = F(u(t)) \tag{*}$$

Diese Differentialgleichung ist **autonom**, da F nicht von t abhängt.
Für $n = 2$ und $F(x, y) = (y, -x)$ dann vereinfacht sich $(*)$ zum folgenden System

$$\begin{cases} u_1' = u_2 \\ u_2' = -u_1 \end{cases} \Leftrightarrow u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot u(t)$$

Ist F zeitabhängig, also $F : I \times U \to \mathbb{R}^3$ mit I, einem Intervall, so bekommen wir:

$$u'(t) = F(t, u(t))$$

Diese Differentialgleichung ist nicht autonom.

14.2 Differentialgleichungssysteme

Wir betrachten $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und haben dazu dann den Ring $\mathcal{C}^\infty(U)$.

Definition 14.2.1: Lineare Differentialoperatoren

Eine lineare Abbildung

$$\begin{aligned} L : \mathcal{C}^\infty(U) &\to \mathcal{C}^\infty(U) \\ u &\mapsto \sum_\alpha a_\alpha \cdot \partial_1^{\alpha_1} \partial_2^{\alpha_2} \ldots \partial_n^{\alpha_n} \cdot u \end{aligned}$$

nennt man **linearen Differentialoperator**.
(wir haben $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in K^n_{\geqslant 0}$ und $a_\alpha \in \mathcal{C}^\infty(U)$ mit Koeffizienten $(a_\alpha)_\alpha$)
Eine homogene Gleichung ist dann der Form $L \cdot u = 0$, und in inhomogen erhält man $L \cdot u = b$.

Bemerkung:

Wenn wir algebraisch $\mathcal{C}^\infty(U)$ als Vektorraum auffassen, dann wird L zu einem Vektorraumisomorphismus und es gilt:

$$L \cdot u = 0 \Leftrightarrow u \in \ker(L)$$

$$L \cdot u = f \Leftrightarrow f \in \mathrm{im}(L)$$

Lieber suchen wir aber nach dem Quotientenraum $\mathcal{C}^\infty(U)/\mathrm{im}(L) := \mathrm{coker}(L)$.

Man nennt f **Störfunktion**.

Beispiel - Laplace-operator:

$$\Delta u = \sum_{i=1}^n \partial_i \partial_i u$$

Also für $u = u(x, y)$:

$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u$$

Wir können auch schreiben

$$\Delta u = tr(D^2 u)$$

Dieser Operator tritt beispielsweise in Wärmetransferproblemen auf.

Genauer betrachten wir:

14.2.1 Algebraische Überlegungen zu Differentialgleichungen

Definition 14.2.2: Differentialring

Ein **Differentialring** (oder eine Differentialalgebra) ist ein kommutativer Ring R zusammen mit einer Abbildung $\partial : R \to R$, die erfüllt

- $\partial(a + b) = \partial(a) + \partial(b)$
- $\partial(a \cdot b) = \partial(a) \cdot b + a \cdot \partial(b)$

Beispiel:

- $R = \mathcal{C}^\infty(I)$ mit $I \subseteq \mathbb{R}$, einem Intervall und $\partial a := a'$
- $R = \mathbb{C}[t]$ mit $\partial P = P'$ (also $\partial 1 = 0$ und $\partial t = 1$)
- $R = \mathbb{C}[\![t]\!]$ (Potenzreihen) mit $\partial \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n \cdot a_n t^{n-1}$

Statt $\mathbb{C}$ können wir auch andere Körper verwenden, insbesondere auch eindliche Körper F_p.

Wir können ein System also als vektorwertige Funktion auffassen mit einem Matrix-artigen Linearoperator und uns nun Problemen wachsender Komplexität zuwenden:

14.3 Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten

$$L \cdot u = 0 \quad L \cdot u = a_d u^{(d)} + ... + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u \tag{*}$$

mit $a_d \in \mathcal{C}^\infty(I)$.

Schreibe dann

- $u_0 = u$
- $u_1 = u'$
- $u_2 = u''$
- $\vdots$
- $u_{d-1} = u^{(d-1)}$

Dann können wir folgende Relationen aufstellen

- $u_1 = u_0'$
- $u_2 = u_1'$
- $\vdots$
- $u_{d-1} = u_{d-2}'$

Wir fassen lesbarer zusammen, als Matrix. Falls $a_d = 1$:

$$\begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{d-1} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \dots & \dots & -a_{d-1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_{d-1} \end{pmatrix}$$

Also erhalten wir zu $(*)$ **äquivalent**

$$u' = A \cdot u$$

Wieso? Es existiert eine bijektion zwischen beiden Lösungsräumen. (Diese ist sogar kanonisch?)

14.3.1 Konstante Koeffizienten

Sei unser Differentialoperator

$$L := \partial^d + a_{d-1}\partial^{d-1} + ... + a_2\partial^2 + a_1\partial + a_0$$

Also haben wir für eine Funktion u:

$$Lu = u^{(d)} + a_{d-1}u^{(d-1)} + ... + a_2u'' + a_1u' + a_0u$$

mit $a_0, ..., a_{d-1} \in \mathbb{C}$, $L \in \mathbb{C}[\partial]$.
Äquivalent zu $Lu = 0$ ist das Differentialgleichungssystem $u' = Au$ für A die **Begleitmatrix** von L (also $\in M(d \times d, \mathbb{C})$).
Wir erkennen, dass dies von einer Exponentialfunktion erfüllt wird, also setzen wir:

$$u(t) = \exp(A \cdot t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} t$$

und es gilt weiterhin $u'(t) = A \cdot u(t)(++)$.
Also ist Jede Spalte von $U(t)$ eine Lösung von $(*)$. Auch jede Linearkombination (mit Koeffizienten in $\mathbb{C}$) erfüllt dies. Konkret entspräche das der Multiplikation der Matrix mit einem Vektor:

$$\forall x = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^d : u*(t) := u(t) \cdot x \textbf{ erfüllt } u*'(t) = Au*(t)$$

Wir fassen zusammen:

Theorem 14.3.1

Das Differentialgleichungs-Problem

$$u' = A \cdot u \qquad u(0) = x$$

mit $A \in M(d \times d, \mathbb{C})$ und $r \in \mathbb{C}^d$ hat eine Lösung in jedem der Ringe

$$\mathbb{C}^\infty(\mathbb{R}), \mathbb{C}^\infty(-1, 1), ..., \mathbb{C}[\![t]\!], ...$$

Diese Lösung ist dann gegeben durch:

$$u(t) = \exp(A \cdot t) \cdot x$$

In diesen Differentialringen ist dies sogar die **einzige Lösung**.

Beweis:

Sei $v(t)$ eine Lösung von $v' = A \cdot v$ mit $v(0) = x$. Wir setzen

$$w(t) := \exp(-A \cdot t) \cdot v(t)$$

$$w(t)' = -A \cdot \exp(-A \cdot t) \cdot v(t) + \exp(-A \cdot t) \cdot A \cdot v(t) = 0$$

Außerdem indentifizieren wir $w \equiv x$, also $w(0) = x$.
Dann finden wir

$$\begin{aligned} v(t) &= \exp(A \cdot t) \underbrace{\exp(-A \cdot t) \cdot v(t)}_{x} \\ &= u(t) \end{aligned}$$

Also war unsere anfängliche Lösung eindeutig. □

Beispiel:

Wir betrachten

$$L \cdot u = 0 \text{ mit } L \cdot u = u'' + u \Leftrightarrow u'' = -u$$

Äquivalent ist die Formulierung (in 2D)

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad u' = A \cdot u \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Also haben wir $u(t) = \exp(A \cdot t)$.
Nun ist A diagonalisierbar mit

$$A = SDS^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Also können wir umschreiben

$$\begin{aligned} u(t) = S \cdot \exp(D \cdot t) \cdot S^{-1} &= S \cdot \begin{pmatrix} \exp(i \cdot t) & 0 \\ \exp(i \cdot t) & 0 \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} -\sin(t) & \cos(t) \\ -\cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Beispiel:

Wir nehmen jetzt

$$L \cdot u = u''' - 3u'' + 3u' - u$$

Äquivalent können wir formulieren:

$$u' = A \cdot u = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot u$$

Hier berechnen wir die Jordan-Normalform:

$$A = SJS^{-1} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Schließlich erhält man

$$\begin{aligned} u(t) = \exp(A \cdot t) &= S \cdot \exp(J \cdot t) \cdot S^{-1} \\ &= S \cdot \begin{pmatrix} e^t & t \cdot e^t & t^2 \cdot e^t \\ 0 & e^t & t \cdot e^t \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \cdot S^{-1} \end{aligned}$$

14.3.2 Inhomogene gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir betrachten das Problem

$$L \cdot u = f$$

(mit L, einem Differentialoperator vom Grad d) mit Koeffizienten in $\mathcal{C}^\infty$.
Besonders lukrativ sind die beiden folgenden Methoden:

1. Variablenseparation
2. Variaton der Konstanten

Wir behandeln nachfolgend beide

1. Die Variablenseparation eignet sich für den Spezialfall: $u' = f$

   Wir setzen $u' = f(t) \cdot g(u)$ (also genauer $u'(t) = f(t) \cdot g(u(t))$) und formen um:

$$\begin{aligned} u' &= f(t) \cdot g(u) \\ \Leftrightarrow \frac{u'}{g(u)} &= f(t) \\ \Leftrightarrow \int \frac{u'}{g(u)} dt &= \int f(t) dt + C \\ \text{für } F : F' = f \text{ und } G : G' &= 1/g \\ \Leftrightarrow G(u(t)) &= F(t) + C \\ (\Leftrightarrow u'(t) \cdot u(t)/g(u) &= f(t)) \\ \Leftrightarrow u(t) &= G^{-1}(F(t) + C) \end{aligned}$$

Beispiel - 15.26 im Skript:

Wir haben:

$$\sqrt{1-t^2} \cdot u'(t) - u^2(t) = 1 \qquad u(0) = 0$$

Also haben wir

$$u'(t) = \frac{1+u^2}{\sqrt{1-t^2}} = f(t) \cdot g(u)$$

mit $f(t) = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad g(u) = 1 + u^2$

$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \frac{u'}{1+u^2} &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \\
\Leftrightarrow \int \frac{u'}{1+u^2} dt &= \int \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt + C \\
\Leftrightarrow \arctan(u(t)) &= \arcsin(t) + C \\
\Leftrightarrow u(t) &= \tan(\arcsin(t) + C) \\
NB: C &= 0 \\
\Rightarrow u(t) &= \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}
\end{aligned}$$

Jetzt können wir einschränken auf Beispielsweise $u \in \mathcal{C}^\infty((-1,1))$.

2. Die Variaton der Konstanten ist für den allgemeineren Fall:

$$L \cdot u = u^{(d)} + a_{d-1}u^{(d-1)} + ... + a_2 u'' + a_1 u' + a_0 u$$

mit Koeffizienten $a_0, ..., a_{d-1}$, die nicht unbedingt konstant sind.

Nun wollen wir erneut das Problem $L \cdot u = f$ lösen.

Wir nehmen an, dass das homogene Problem Lösungen $v_1, ..., v_d$ hat, die eine Basis von $\ker(L)$ bilden.

Dann ist die Allgemeine Lösung eine Linearkombination:

$$v = c_1 v_1 + ... + c_d v_d \quad c_i \in \mathbb{C}$$

Dann ist unser Ansatz, anstatt c_i $c_i(t)$ zu betrachten (also nicht mehr als Konstante). Also

$$u(t) =_1 (t) + v_1(t) + ... + c_d(t) = \sum_{i=1}^{d} c_i(t) v_i(t) \tag{*}$$

mit $c_i \in C^\infty$.

Wir haben die Bedingungen:

$$\sum_{i=1}^{d} c_i'(t) v_i^j = 0 \ \forall 0 \leqslant j \leqslant d-2 \tag{**}$$

$$\sum_{i=1}^{d} c_i'(t) v_i^{(d-1)} = f \tag{***}$$

Leiten wir (*) ab, liefert das:

$$\begin{aligned}
u' &= \sum_{i=1}^{d}(c_i' v_i + c_i v_i') \stackrel{**}{=} \sum_{i=0}^{d} c_i v_i' \\
&\vdots \\
u^{(j)} &= \sum_{i=1}^{d} c_i v_i^{(j)} \ \forall 0 \leqslant j \leqslant d-1 \\
u^{(d)} &= \sum_{i=1}^{d}(c_i' v_i^{d-1} + c_i v_i^{(d)}) \\
&= f + \sum_{i=1}^{d} c_i v_i^{(d)}
\end{aligned}$$

Jetzt haben wir:

$$\begin{aligned}
L \cdot u &= u^{(d)} + \sum_{i=1}^{d-1} a_j u^{(j)} \\
&= f + \sum_{i=1}^{d} c_i v_i^{(d)} + \sum_{i=1}^{d-1} a_j \cdot \sum_{i=1}^{d} c_i v_i^{(j)} \\
&= f + \sum_{i=1}^{d} c_i \underbrace{\left(v_i^{(d)} + \sum_{j=0}^{d-1} a_j v_i^j \right)}_{L \cdot v_1 = 0} \\
&= f \checkmark
\end{aligned}$$

In Matrizenform ergeben (**) und (***)

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_d \\ v_1' & v_2' & \dots & v_d' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ v_1^{(d-1)} & v_2^{(d-1)} & \dots & v_d^{(d-1)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_1' \\ c_2' \\ \vdots \\ c_d' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f \end{pmatrix}$$

Mit der Kramer'schen Regel haben wir $w = \det(V_i^{(j)})$, $w_k = \det(v_i^{(j)})$ mit k-ter Spalte ersetzt durch f) und schließlich:

$$c_k' = \frac{2_k}{w} \Rightarrow c_k = \int \frac{w_k}{w} dt$$

Definition 14.3.1: Wronski-Matrix

w nennen wir die **Wronski-Determinante** und die linke Matrix W ist die Wronski-Matrix.

Beispiel:

Wir haben

$$\underbrace{u'(t) + a(t) \cdot u(t)}_{L \cdot u} = f(t)$$

Wir lösen zunächst das homogene Problem mit

$$\begin{aligned} v' + av &= 0 \\ \Leftrightarrow v'(t) &= -a(t) \cdot v(t) \\ \Leftrightarrow \frac{v'(t)}{v(t)} &= -a(t) \\ \Leftrightarrow \int \frac{v'(t)}{v(t)} dt &= -\int a(t) dt \\ \Leftrightarrow \log(v(t)) &= -A(t) + C \\ \Leftrightarrow v(t) &= C' \cdot \exp(-A(t)) \end{aligned}$$

Für diese homogene Lösung setzen wir nun allgemein

$$u(t) = c(t) \cdot \exp(-A(t))$$

also:

$$\begin{aligned} u'(t) &= c'(t) \cdot \exp(-A(t)) - c(t) \cdot a(t) \cdot \exp(-A(t)) \\ &= \underbrace{c'(t) \cdot \exp(-A(t))}_{f} - a(t) \cdot u(t) \end{aligned}$$

also:

$$c = \int f \cdot f(t) \cdot \exp(A(t)) dt$$

Beispiel:

Sie jetzt

$$u + u'' = t^2$$

Homogen haben wir: $v(t) = a \cdot \sin(t) + b \cdot \cos(t)$ Also ist allgemein

$$u(t) = a(t) \cdot \sin(t) + b(t) \cdot \cos(t)$$

Betrachte Wronski:

$$\begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix}$$

also gilt, weil $W^{-1} = W$:

$$\begin{pmatrix} a'(t) \\ b'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(t) & \cos(t) \\ \cos(t) & -\sin(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t^2 \cdot \cos(t) \\ -t^2 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Und es gilt:

$$a(t) = (t^2 - 2) \cdot \sin(t) + 2t \cdot \cos(t) + 2\sin(t)$$

oder ähnlich (als Beispiel).

und $b(t)$ ähnlich, und dann sind wir fertig.

Bis jetzt haben wir also Differentialgleichungen betrachtet, die sich als Linearkombination der Ableitungen von u darstellen ließen, allerdings ohne Voraussetzung an den maximalen Grad. (also waren es bis jetzt lineare DGLs mit Rang n). Jetzt wollen wir die Voraussetzung der Linearität aufgeben, aber zumindest den Grad beschränken (um eine allgemeine Lösung formulieren zu können).

14.4 Allgemeine Differentialgleichungen erster Ordnung

14.4.1 Der Satz von Picard-Lindelöf

Wir betrachten das Problem

$$u'(t) = F(t, u(t))$$

mit u, einer Funktion mit Werten aus $\mathbb{R}^d$. Also ist F eine Funktion in $d+1$ Variablen, mit Werten in $\mathbb{R}^d$
Wir setzen $u(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^d$. Als AWP:

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Theorem 14.4.1: Satz von Picard-Lindelöf

Sei $d \geqslant 1$, $U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ offen mit $(t_0, x_0) \in U$ und $F : U \to \mathbb{R}^d$ stetig.
Hypothese: 'F ist lokal Lipschitz im Ort'.
Que? Für alle $(t_1, x_1) \in U$ existiert $\varepsilon > 0,\ L > 0$ mit

$$(t, x_2), (t, x_3) \in B((t_1, x_1), \varepsilon) \cap U \Rightarrow ||F(t, x_2) - F(t, x_3)|| \leqslant L \cdot ||x_2 - x_3||$$

Wörtlich: Für jeden Punkt in U (Zeit + Ort) gilt: Sind zwei Punkte zur selben Zeit nahe an einem ersten Punkt (nahe in Zeit und Ort), dann ist der Abstand (Raum) zwischen dem Bild der beiden Punkte kleiner als die Lipschitz-Konstante.

> **Bemerkung:**
>
> Diese Hypothese ist erfüllt, falls F von Klasse $\mathcal{C}^1$ ist.

Dann existiert ein Intervall $I = (a, b)$ mit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ mit $t_0 \in I$ und eine diffenzierbare Funktion $u : I \to \mathbb{R}^d$, die eindeutig bestimmt ist durch folgende Eigenschaften:

1. $(u, u(t)) \in U$ für alle $t \in I$ **und** $u'(t) = F(t, u(t))$ für alle $t \in I$ **und** $u(t_0) = x_0$.
2. Ist $J \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall für $t_0 \in J$ und $v : J \to \mathbb{R}^d$ so, dass $1)$ für v gilt, dann ist $J \subseteq I$ und $v = u|_J$
3. Die Grenzwerte $\lim\limits_{t \to a}(t, u(t))$ und $\lim\limits_{t \to b}(t, u(t))$ existieren in U **nicht**.

Korollar 14.4.1 (1)

Sei $d \geqslant 1$, $a_0, ..., a_{d-1} \in \mathcal{C}^0(d, \mathbb{R})$ für $D \subseteq \mathbb{R}$ offen. Seien $t_0 \in D$, $x_0 \in \mathbb{R}^d$. Dann existiert eine maximales offenes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit $t_0 \in I$ zusammen mit $u : I \to \mathbb{R}^d$ eindeutig bestimmt durch

$$\begin{cases} u^{(d)} + a_{d-1}u^{(d-1)} + ... + a_1 u' + a_0 u = 0 \\ \begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \\ \vdots \\ u^{(d-1)}(t_0) \end{pmatrix} = x_0 \end{cases}$$

Insbesondere gilt: $dim(\ker(L)) = d$

Beweis - des Korollars:

Setze $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \\ -a_0 & -a_1 & ... & -a_{d-1} \end{pmatrix}$, die Begleitmatrix von L.

Also ist

$$\begin{cases} L \cdot u = 0 \\ \begin{pmatrix} u(t_0) \\ u'(t_0) \\ \vdots \\ u^{(d-1)}(t_0) \end{pmatrix} = x_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u' = A \cdot u \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Setze nun $F(t,x) = A(t) \cdot x$ also $u' = Au \Leftrightarrow u'(t) = F(t, u(t))$.
F ist lokal Lipschitz im Ort. Damit sind wir genau im Setup von Picard-Lindelöf. Also ist die Lösung eindeutig bestimmt. □

Beweis - des Theorems:

Zunächst zeigen wir **lokale Existenz und Eindeutigkeit:**

Theorem 14.4.2

Seien $R > 0, t_0 \in \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}^d$ und $F : (t_0 - r, t_0 + r) \times B(x_0, r) \to \mathbb{R}^d$.
Hypothese: Es existieren $C > 0, L > 0$ mit

$$||F(t,x)|| \leqslant C \qquad ||F(t,x_1) - F(t,x_2)|| \leqslant L \cdot ||x_1 - x_2||$$

Dann gilt:

$$\forall 0 < \delta < \min\left(\frac{r}{2C}, \frac{r}{2L}\right) \; \exists! u : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \to B(x_0, r) \text{ mit:}$$

$$\begin{cases} u(t_0) = x_0 \\ u'(t) = F(t, u(t)) \; \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \end{cases} \qquad (*)$$

Beweis:

Wähle $\delta > 0$ wie in der Proposition, setze $I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. Das Problem $(*)$ ist äquivalent zu

$$u(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))ds$$

Der normierte Vektorraum $\mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d), ||.||_\infty$ ist vollständig. Die Teilmenge

$$V := \{f : I \to \mathbb{R}^d \mid f \text{ stetig}, ||f(t) - x_0|| \leqslant r \ \forall t \in I\}$$

ist eine abgeschlossene Teilmenge dieses Vektorraums und damit ebenfalls vollständig. Definiere

$$T : V \to \mathcal{C}(I, \mathbb{R}^d) \quad (Tu)(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} F(s, u(s))ds$$

Nun suchen wir einen Fixpunkt von T. Wir wollen Banach anwenden, also zeigen, dass T eine Kontraktion ist.
Behauptung: $u \in V \Rightarrow Tu \in V$. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
||(Tu)(t) - x_0|| &= \left|\left|\int_{t_0}^{t} F(s, u(s))ds\right|\right| \\
&\leqslant \left|\int_{t_0}^{t} ||F(s, u(s))||ds\right| \\
&\leqslant |t_0 - t| \cdot C \\
&\leqslant \delta \cdot C \\
&\leqslant \frac{1}{2} r
\end{aligned}$$

Also ist $T : V \to V$, also:
Behauptung: $||Tu_1 - Tu_2||_\infty \leqslant \frac{1}{2}||u_1 - u_2 \ \forall u_1, u_2 \in V$.

$$\begin{aligned}
||Tu_1(t) - Tu_2(t)|| &= \left|\left|\int_{t_0} F(s, u(s)) - F(s, u_2(s))ds\right|\right| \\
&\leqslant \left|\int_{t_0} ||F(s, u_1(s)) - F(s, u_2(s))||ds\right| \\
&\overset{Hyp.}{\leqslant} \left|\int_{t_0} L \cdot ||u_1(s) - u_2(s)||ds\right| \\
&\leqslant L \cdot \delta \cdot ||u_1 - u_2||_\infty \\
&\leqslant \frac{1}{2}||u_1 - u_2||
\end{aligned}$$

Es folgt aus dem Banach'schen Fixpunktsatz: $\exists! u \in V$ mit $T \cdot u = u$. $\square$

Nun zeigen wir allgemeiner:
Eindeutigkeit: Seien $u_1 : I_1 \to \mathbb{R}^d$ und $u_2 : I_2 \to \mathbb{R}^d$ beides Lösungen des Differentialgleichungsproblem

$$\begin{cases} u'(t) = F(t, u(t)) \\ u(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Zeige: $u_1|_I = u_2|_I$ für $I = I_1 \cap I_2$. Wir gehen topologisch vor:
Definiere $S \subseteq I$ mit

$$S := \{t \in I \mid u_1(t) = u_2(t)\}$$

Also ist $t_0 \in S$ und $S \neq \emptyset$.
S ist abgeschlossen, weil u_1 und u_2 stetig sind:

$$S = (u_1 - u_2)^{-1}(0)$$

Also ist das Urbild von $\mathbb{R}\backslash\{0\}$ unter der stetigen Funktion offen, und das Komplement also abgeschlossen.
S is offen: Sei $t_1 \in S$ und setze $x = u_1(t) = u_2(t)$. Nach dem Hilfstheorem existiert eine eindeutige Funktion $v : (t_1 - \delta, t_1 + \delta) \to \mathbb{R}^d$ mit (für $\delta > 0$ klein)

$$\begin{cases} v'(t) = F(t, v(t)) \\ v(t_1) = x_1 \end{cases}$$

Also ist

$$u_1|_{(t_1-\delta, t_1+\delta)} = v = u_2|_{(t_1-\delta,t_1+\delta)}$$

Es folgt: $(t_1 - \delta, t_1 + \delta) \subseteq S \Rightarrow S = I \Rightarrow u_1|_I = u_2|_I$.
Maximale Lösung: Wir betrachten die Familie $\mathcal{J}$ aller Paare (J, v) mit $v : J \to \mathbb{R}^d$ einer Lösung der Differentialgleichungs-Problems ($t_0 \in J$). Mit der Inklusion als Ordnungsrelation haben wir:

$$(J_1, v_1) \leqslant (J_2, v_2) \text{ falls } J_1 \subseteq J_2, v_1 = v_2|_{J_1}$$

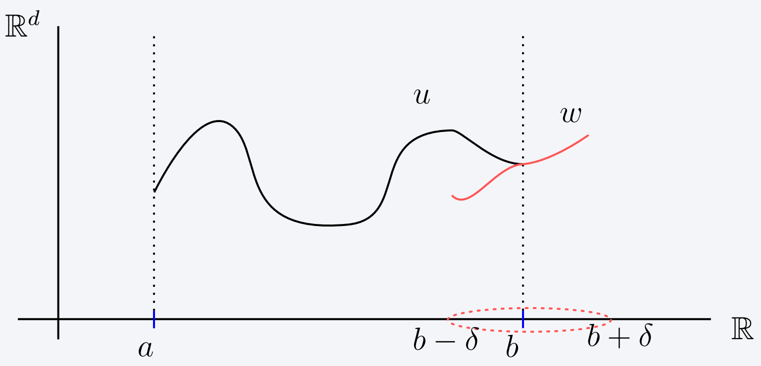
Definiere $(I, u) \in \mathcal{J}$ durch

$$I := \bigcup_{(J,v)\in\mathcal{J}} J \quad \text{und} \quad u(t) := v(t) \text{ für ein ein } (J, v), t \in J$$

Das ist wohldefiniert wegen der Eindeutigkeit (s.o.). Zudem ist (I, u) maximal in $\mathcal{J}$.
Nicht-Existenz des Grenzwertes: $\not{A}$- Angenommen

$$\lim_{t\to b}(t, u(t)) = (b, u_b) \in U \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$$

existiert.
Für den Fall $d = 1$ können wir zeichnen:



Nach dem Hilfstheorem existiert $\delta > 0$ und eine eindeutige Funktion $w : (b-\delta, b+\delta) \to \mathbb{R}^d$ die erfüllt

$$\begin{cases} w'(t) = F(t, w(t)) \\ w(b) = u_b \end{cases}$$

Definiere $v : (a, b+\delta) \to \mathbb{R}^d$ durch

$$v(t) = \begin{cases} u(t) \text{ falls } & t < b \\ w(t) \text{ falls } & t \geqslant b \end{cases}$$

Behauptung: v ist von Klasse $\mathcal{C}^1$ und erfüllt:

$$\begin{cases} v'(t) = F(t, v(t)) \\ v(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Die zweite Bedingung ist durch die Definition von u klar.
Für die erste Bedingung sehen wir, dass v stetig ist, insbesondere bei $t = b$, da $\lim_{t\to b} u(t) = u_b = w(b)$. Für $t < b$ oder $t > b$ gilt per Voraussetzung: $v'(t) = F(t, v(t))$. Wichtig ist genau die Stelle bei b.
Für $t < b$ gilt: $(u' =)v'(t) = F(t, v(t))$ stetig, auch bis $t = b$.
Für $t > b$ gilt: $(w' =)v'(t) = F(t, v(t))$.
Zeigen wir, dass beide Ableitungen (links- und rechtsseitig) übereinstimmen, so haben wir die Behauptung gezeigt. Wir haben:

Lemma 14.4.1

Seien $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall und $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit

1. f ist diffenzierbar auf (a, b)
2. $f'(t) = g(t)$ für alle $t \in (a, b)$

Dann ist f bei b linksseitig diffenzierbar und es gilt

$$f'(b) = g(b)$$

Beweis - Übung 15.35:

Die linksseitige Ableitung ist

$$\begin{aligned} f'(b) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(b) - f(b-h)}{h} \\ &\overset{Mittelwertsatz}{=} \lim_{h\to 0} f'(\zeta_h) \\ &= \lim_{h\to 0} g(\zeta_h) \\ &\overset{Stetigkeit}{=} g(b) \end{aligned}$$

mit ζ_h, einem Punkt zwischen $b - h$ und b. □

Zusammenfassend betrachten wir also die zusammengesetzte Funktion aus u und w, und zeigen, dass sie dem Differentialgleichungs-Problem genügt. Diese ist also wieder größer als die vorher gefundene, was der (bereits bewiesenen) Maximalität widerspricht. Also existiert der Grenzwert nicht. □

14.4.2 Beispiele

Beispiel - Gegenbeispiel:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (t, x) &\mapsto 3 \cdot |x|^{2/3} \end{aligned}$$

Also ist $d = 1$. Wir wollen Die Differentialgleichung

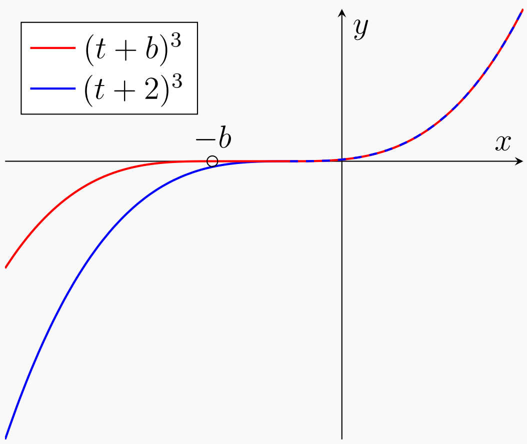
$$u'(t) = F(t, u(t)) = 3u(t)^{2/3} \qquad u(0) = 8$$

Wir rechnen über Variablenseparation:

$$\begin{aligned} \frac{u'}{3u^{2/3}} &= 1 \\ \Leftrightarrow \int \frac{u'}{3u^{2/3}} dt &= \int 1 dt = t + C \\ Subs. \quad s &= u(t) \\ \Leftrightarrow \int dfrac13s^{2/3} ds &= t + C \\ \Leftrightarrow s^{1/3} &= u^{1/3} = t + C \\ \Leftrightarrow u(t) &= (t + C)^3 \end{aligned}$$

Wir prüfen und erkennen, dass dies der Differentialgleichung genügt. Offensichtlich ist $C = 2$. Betrachten wir nun aber:

$$u(t) = \begin{cases} (t+2)^3 & t \geqslant -2 \\ 0 & -b \leqslant t \leqslant -2 \\ (t+b)^3 & t \leqslant -b \end{cases}$$



Diese Lösungen sind allesamt linear unabhängig, was zeigt, dass der Satz von Picard-Lindelöf hier eindeutig nicht greift.

Another one please?

14.5 Partielle Differentialgleichungen

Nun betrachten wir (das deutlich komplexere) Problem: **Die quasilineare PDE in 2 Variablen**. (partial differential equation)
Wir suchen nun eine unbekannte Funktion $u = u(x, y)$ mit

$$F(x, y, u, u_x, u_y) = 0$$

Also ist F eine Funktion in 5 Variablen, und muss linear in den beiden partiellen Ableitungen sein. Wir könnten auch schreiben

$$a(x, y, u) \cdot u_x + b(x, y, u) \cdot u_y = c(x, y, u) \Leftrightarrow a(x, y, u) \cdot u_x + b(x, y, u) \cdot u_y - c(x, y, u) = 0$$

Schreiben wir nun:

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} a(x, y, z) \\ b(x, y, z) \\ c(x, y, z) \end{pmatrix}$$

Nun ist

$$n(x, y, z) = \begin{pmatrix} ux \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}$$

ein Normalenvektor an den Graphen von u im Punkt (x, y, z). Wir können auch sagen

$$n(x, y, z) = grad(u(x, y) - z)$$

Unser Differentialgleichung wird zu

$$< F(x, y, u), n(x, y, u) >= 0$$

Der Graph von u fließt entlang dem Vekorfeld F, also:
Für alle (x, y, z) im Graphen von u (Fläche in $\mathbb{R}^3$) ist $F(x, y, z)$ Tangential an den Graphen.

Theorem 14.5.1: Cauchy-Kovalerskaya

Sei $F = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \\ c \end{smallmatrix}\right)$ ein Vektorfeld auf (einer offenen Menge in) $\mathbb{R}^3$ mit $a(x, y, z) \neq 0$. Dann hat die Differentialgleichung

$$\begin{cases} a \cdot u_x + b \cdot u_y = c \\ \qquad u(0, y) = f(y) \end{cases}$$

(f von Klasse $\mathcal{C}^1$)
eine **eindeutige** Lösung für kleine x. (also $|x| < T(y)$).

14.5.1 Allgemeine partielle Differentialgleichungen

Königsklasse der DGLs, wir besitzen noch nicht die nötigen Werkzeuge, um mit ihnen umzugehen. Sie bieten meistens genug Stoff für eine Dokorarbeit, als einzelne Gleichung.
Wir betrachten lediglich ein Beispiel 'aus dem Alltag' und kratzen so erst an der Oberfläche eines riesigen Teilgebiets der Mathematik.

Beispiel - Isoperimetrische Probleme:

Folgende einfache Frage: Welche ist die flach berandete Fläche mit dem größten Volumen bei fixem Umfang?
Betrachten wir das Problem nur im 2-dimensionalen, so ist die Antwort: Der Kreis. Aber wieso?
Behandelt wurden Beweise:

1. ...von Steiner, als geometrische Intuition. Der Beweis stellt sich allerdings als logisch falsch verankert heraus.

2. ...über ??? Es treten die Euler-Lagrange Sätze auf, die sich unter diesen speziellen Bedingungen 'relativ' einfach lösen lassen.

3. ...über Fourier-Analyse. Betrachten wir den Vektorraum der periodischen Funktionen in $\mathbb{C}$ (also, die auf $[0, 1\pi]$ eine Schleife bilden), so können wir den Umfang im Verhältnis zur Fläche minimieren. Auch das entspricht einer Differentialgleichung, die sich dank der Fourier-Koeffizienten drastisch kürzt.

Diese Beweise lassen sich wohl schwer erweitern und deshalb betrachten wir noch den Ansatz über geometrische Integration, der sich letzten Endes auf das Nadelproblem von Bouffon zurückführen lässt (wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine geworfene Nadel über der Naht eines aus Rechtecken bestehenden Bodens liegen bleibt?). Aus sicherer Quelle gilt, dass man mit diesen Überlegegungen auch in verschiedenen Räumen auf Lösungen kommt.

Begriffsverzeichnis

Anmerkungen

So endet mein Mitschrieb der Vorlesung Analysis I und II bei Professor Jossen. (Studienjahr 2019/2020). Sie wurde nach bestem Gewissen geschrieben und korrigiert, es besteht jedoch **keine Gewähr auf Vollständigkeit und Richtigkeit**.

Dieses Dokument wurde **nicht** im Ziele der Propagation und Vervielfältigung verfasst. Es ist **nicht** adäquat strukturiert und dokumentiert, und nicht zum eigenständigen Lernen geeignet.

Allerhöchstens kann es als Begleitmaterial oder Referenz verwendet werden, und dies nur unter der Voraussetzung, dass der Leser den Aufwand betreiben möchte, alle Lücken und Unkorrektheiten als Übungsmaterial zu betrachten.

Man kann dies also als eine Warnung des Stils der MIT-Lizenz auffassen:


```
Attribution-ShareAlike 4.0 International

=======================================================================

Creative Commons Corporation ("Creative Commons") is not a law firm and
does not provide legal services or legal advice. Distribution of
Creative Commons public licenses does not create a lawyer-client or
other relationship. Creative Commons makes its licenses and related
information available on an "as-is" basis. Creative Commons gives no
warranties regarding its licenses, any material licensed under their
terms and conditions, or any related information. Creative Commons
disclaims all liability for damages resulting from their use to the
fullest extent possible.

Using Creative Commons Public Licenses

Creative Commons public licenses provide a standard set of terms and
conditions that creators and other rights holders may use to share
original works of authorship and other material subject to copyright
and certain other rights specified in the public license below. The
following considerations are for informational purposes only, are not
exhaustive, and do not form part of our licenses.

    Considerations for licensors: Our public licenses are
    intended for use by those authorized to give the public
    permission to use material in ways otherwise restricted by
    copyright and certain other rights. Our licenses are
    irrevocable. Licensors should read and understand the terms
    and conditions of the license they choose before applying it.
```

```
    Licensors should also secure all rights necessary before
    applying our licenses so that the public can reuse the
    material as expected. Licensors should clearly mark any
    material not subject to the license. This includes other CC-
    licensed material, or material used under an exception or
    limitation to copyright. More considerations for licensors:
    wiki.creativecommons.org/Considerations_for_licensors

    Considerations for the public: By using one of our public
    licenses, a licensor grants the public permission to use the
    licensed material under specified terms and conditions. If
    the licensor's permission is not necessary for any reason--for
    example, because of any applicable exception or limitation to
    copyright--then that use is not regulated by the license. Our
    licenses grant only permissions under copyright and certain
    other rights that a licensor has authority to grant. Use of
    the licensed material may still be restricted for other
    reasons, including because others have copyright or other
    rights in the material. A licensor may make special requests,
    such as asking that all changes be marked or described.
    Although not required by our licenses, you are encouraged to
    respect those requests where reasonable. More considerations
    for the public:
    wiki.creativecommons.org/Considerations_for_licensees

=======================================================================

Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International Public
License

By exercising the Licensed Rights (defined below), You accept and agree
to be bound by the terms and conditions of this Creative Commons
Attribution-ShareAlike 4.0 International Public License ("Public
License"). To the extent this Public License may be interpreted as a
contract, You are granted the Licensed Rights in consideration of Your
acceptance of these terms and conditions, and the Licensor grants You
such rights in consideration of benefits the Licensor receives from
making the Licensed Material available under these terms and
conditions.


Section 1 -- Definitions.

  a. Adapted Material means material subject to Copyright and Similar
     Rights that is derived from or based upon the Licensed Material
     and in which the Licensed Material is translated, altered,
     arranged, transformed, or otherwise modified in a manner requiring
     permission under the Copyright and Similar Rights held by the
     Licensor. For purposes of this Public License, where the Licensed
```

```
   Material is a musical work, performance, or sound recording,
   Adapted Material is always produced where the Licensed Material is
   synched in timed relation with a moving image.

b. Adapter's License means the license You apply to Your Copyright
   and Similar Rights in Your contributions to Adapted Material in
   accordance with the terms and conditions of this Public License.

c. BY-SA Compatible License means a license listed at
   creativecommons.org/compatiblelicenses, approved by Creative
   Commons as essentially the equivalent of this Public License.

d. Copyright and Similar Rights means copyright and/or similar rights
   closely related to copyright including, without limitation,
   performance, broadcast, sound recording, and Sui Generis Database
   Rights, without regard to how the rights are labeled or
   categorized. For purposes of this Public License, the rights
   specified in Section 2(b)(1)-(2) are not Copyright and Similar
   Rights.

e. Effective Technological Measures means those measures that, in the
   absence of proper authority, may not be circumvented under laws
   fulfilling obligations under Article 11 of the WIPO Copyright
   Treaty adopted on December 20, 1996, and/or similar international
   agreements.

f. Exceptions and Limitations means fair use, fair dealing, and/or
   any other exception or limitation to Copyright and Similar Rights
   that applies to Your use of the Licensed Material.

g. License Elements means the license attributes listed in the name
   of a Creative Commons Public License. The License Elements of this
   Public License are Attribution and ShareAlike.

h. Licensed Material means the artistic or literary work, database,
   or other material to which the Licensor applied this Public
   License.

i. Licensed Rights means the rights granted to You subject to the
   terms and conditions of this Public License, which are limited to
   all Copyright and Similar Rights that apply to Your use of the
   Licensed Material and that the Licensor has authority to license.

j. Licensor means the individual(s) or entity(ies) granting rights
   under this Public License.

k. Share means to provide material to the public by any means or
   process that requires permission under the Licensed Rights, such
   as reproduction, public display, public performance, distribution,
```

```
   dissemination, communication, or importation, and to make material
   available to the public including in ways that members of the
   public may access the material from a place and at a time
   individually chosen by them.

  l. Sui Generis Database Rights means rights other than copyright
     resulting from Directive 96/9/EC of the European Parliament and of
     the Council of 11 March 1996 on the legal protection of databases,
     as amended and/or succeeded, as well as other essentially
     equivalent rights anywhere in the world.

  m. You means the individual or entity exercising the Licensed Rights
     under this Public License. Your has a corresponding meaning.


Section 2 -- Scope.

  a. License grant.

       1. Subject to the terms and conditions of this Public License,
          the Licensor hereby grants You a worldwide, royalty-free,
          non-sublicensable, non-exclusive, irrevocable license to
          exercise the Licensed Rights in the Licensed Material to:

            a. reproduce and Share the Licensed Material, in whole or
               in part; and

            b. produce, reproduce, and Share Adapted Material.

       2. Exceptions and Limitations. For the avoidance of doubt, where
          Exceptions and Limitations apply to Your use, this Public
          License does not apply, and You do not need to comply with
          its terms and conditions.

       3. Term. The term of this Public License is specified in Section
          6(a).

       4. Media and formats; technical modifications allowed. The
          Licensor authorizes You to exercise the Licensed Rights in
          all media and formats whether now known or hereafter created,
          and to make technical modifications necessary to do so. The
          Licensor waives and/or agrees not to assert any right or
          authority to forbid You from making technical modifications
          necessary to exercise the Licensed Rights, including
          technical modifications necessary to circumvent Effective
          Technological Measures. For purposes of this Public License,
          simply making modifications authorized by this Section 2(a)
          (4) never produces Adapted Material.
```

```
    5. Downstream recipients.

         a. Offer from the Licensor -- Licensed Material. Every
            recipient of the Licensed Material automatically
            receives an offer from the Licensor to exercise the
            Licensed Rights under the terms and conditions of this
            Public License.

         b. Additional offer from the Licensor -- Adapted Material.
            Every recipient of Adapted Material from You
            automatically receives an offer from the Licensor to
            exercise the Licensed Rights in the Adapted Material
            under the conditions of the Adapter's License You apply.

         c. No downstream restrictions. You may not offer or impose
            any additional or different terms or conditions on, or
            apply any Effective Technological Measures to, the
            Licensed Material if doing so restricts exercise of the
            Licensed Rights by any recipient of the Licensed
            Material.

    6. No endorsement. Nothing in this Public License constitutes or
       may be construed as permission to assert or imply that You
       are, or that Your use of the Licensed Material is, connected
       with, or sponsored, endorsed, or granted official status by,
       the Licensor or others designated to receive attribution as
       provided in Section 3(a)(1)(A)(i).

b. Other rights.

    1. Moral rights, such as the right of integrity, are not
       licensed under this Public License, nor are publicity,
       privacy, and/or other similar personality rights; however, to
       the extent possible, the Licensor waives and/or agrees not to
       assert any such rights held by the Licensor to the limited
       extent necessary to allow You to exercise the Licensed
       Rights, but not otherwise.

    2. Patent and trademark rights are not licensed under this
       Public License.

    3. To the extent possible, the Licensor waives any right to
       collect royalties from You for the exercise of the Licensed
       Rights, whether directly or through a collecting society
       under any voluntary or waivable statutory or compulsory
       licensing scheme. In all other cases the Licensor expressly
       reserves any right to collect such royalties.
```

```
Section 3 -- License Conditions.

Your exercise of the Licensed Rights is expressly made subject to the
following conditions.

  a. Attribution.

       1. If You Share the Licensed Material (including in modified
          form), You must:

            a. retain the following if it is supplied by the Licensor
               with the Licensed Material:

                 i. identification of the creator(s) of the Licensed
                    Material and any others designated to receive
                    attribution, in any reasonable manner requested by
                    the Licensor (including by pseudonym if
                    designated);

                ii. a copyright notice;

               iii. a notice that refers to this Public License;

                iv. a notice that refers to the disclaimer of
                    warranties;

                 v. a URI or hyperlink to the Licensed Material to the
                    extent reasonably practicable;

            b. indicate if You modified the Licensed Material and
               retain an indication of any previous modifications; and

            c. indicate the Licensed Material is licensed under this
               Public License, and include the text of, or the URI or
               hyperlink to, this Public License.

       2. You may satisfy the conditions in Section 3(a)(1) in any
          reasonable manner based on the medium, means, and context in
          which You Share the Licensed Material. For example, it may be
          reasonable to satisfy the conditions by providing a URI or
          hyperlink to a resource that includes the required
          information.

       3. If requested by the Licensor, You must remove any of the
          information required by Section 3(a)(1)(A) to the extent
          reasonably practicable.

  b. ShareAlike.
```

```
    In addition to the conditions in Section 3(a), if You Share
    Adapted Material You produce, the following conditions also apply.

      1. The Adapter's License You apply must be a Creative Commons
         license with the same License Elements, this version or
         later, or a BY-SA Compatible License.

      2. You must include the text of, or the URI or hyperlink to, the
         Adapter's License You apply. You may satisfy this condition
         in any reasonable manner based on the medium, means, and
         context in which You Share Adapted Material.

      3. You may not offer or impose any additional or different terms
         or conditions on, or apply any Effective Technological
         Measures to, Adapted Material that restrict exercise of the
         rights granted under the Adapter's License You apply.


Section 4 -- Sui Generis Database Rights.

Where the Licensed Rights include Sui Generis Database Rights that
apply to Your use of the Licensed Material:

  a. for the avoidance of doubt, Section 2(a)(1) grants You the right
     to extract, reuse, reproduce, and Share all or a substantial
     portion of the contents of the database;

  b. if You include all or a substantial portion of the database
     contents in a database in which You have Sui Generis Database
     Rights, then the database in which You have Sui Generis Database
     Rights (but not its individual contents) is Adapted Material,

     including for purposes of Section 3(b); and
  c. You must comply with the conditions in Section 3(a) if You Share
     all or a substantial portion of the contents of the database.

For the avoidance of doubt, this Section 4 supplements and does not
replace Your obligations under this Public License where the Licensed
Rights include other Copyright and Similar Rights.


Section 5 -- Disclaimer of Warranties and Limitation of Liability.

  a. UNLESS OTHERWISE SEPARATELY UNDERTAKEN BY THE LICENSOR, TO THE
     EXTENT POSSIBLE, THE LICENSOR OFFERS THE LICENSED MATERIAL AS-IS
     AND AS-AVAILABLE, AND MAKES NO REPRESENTATIONS OR WARRANTIES OF
     ANY KIND CONCERNING THE LICENSED MATERIAL, WHETHER EXPRESS,
     IMPLIED, STATUTORY, OR OTHER. THIS INCLUDES, WITHOUT LIMITATION,
     WARRANTIES OF TITLE, MERCHANTABILITY, FITNESS FOR A PARTICULAR
```

```
   PURPOSE, NON-INFRINGEMENT, ABSENCE OF LATENT OR OTHER DEFECTS,
   ACCURACY, OR THE PRESENCE OR ABSENCE OF ERRORS, WHETHER OR NOT
   KNOWN OR DISCOVERABLE. WHERE DISCLAIMERS OF WARRANTIES ARE NOT
   ALLOWED IN FULL OR IN PART, THIS DISCLAIMER MAY NOT APPLY TO YOU.

  b. TO THE EXTENT POSSIBLE, IN NO EVENT WILL THE LICENSOR BE LIABLE
     TO YOU ON ANY LEGAL THEORY (INCLUDING, WITHOUT LIMITATION,
     NEGLIGENCE) OR OTHERWISE FOR ANY DIRECT, SPECIAL, INDIRECT,
     INCIDENTAL, CONSEQUENTIAL, PUNITIVE, EXEMPLARY, OR OTHER LOSSES,
     COSTS, EXPENSES, OR DAMAGES ARISING OUT OF THIS PUBLIC LICENSE OR
     USE OF THE LICENSED MATERIAL, EVEN IF THE LICENSOR HAS BEEN
     ADVISED OF THE POSSIBILITY OF SUCH LOSSES, COSTS, EXPENSES, OR
     DAMAGES. WHERE A LIMITATION OF LIABILITY IS NOT ALLOWED IN FULL OR
     IN PART, THIS LIMITATION MAY NOT APPLY TO YOU.

  c. The disclaimer of warranties and limitation of liability provided
     above shall be interpreted in a manner that, to the extent
     possible, most closely approximates an absolute disclaimer and
     waiver of all liability.


Section 6 -- Term and Termination.

  a. This Public License applies for the term of the Copyright and
     Similar Rights licensed here. However, if You fail to comply with
     this Public License, then Your rights under this Public License
     terminate automatically.

  b. Where Your right to use the Licensed Material has terminated under
     Section 6(a), it reinstates:

       1. automatically as of the date the violation is cured, provided
          it is cured within 30 days of Your discovery of the
          violation; or

       2. upon express reinstatement by the Licensor.

     For the avoidance of doubt, this Section 6(b) does not affect any
     right the Licensor may have to seek remedies for Your violations
     of this Public License.

  c. For the avoidance of doubt, the Licensor may also offer the
     Licensed Material under separate terms or conditions or stop
     distributing the Licensed Material at any time; however, doing so
     will not terminate this Public License.

  d. Sections 1, 5, 6, 7, and 8 survive termination of this Public
     License.
```

```
Section 7 -- Other Terms and Conditions.

  a. The Licensor shall not be bound by any additional or different
     terms or conditions communicated by You unless expressly agreed.

  b. Any arrangements, understandings, or agreements regarding the
     Licensed Material not stated herein are separate from and
     independent of the terms and conditions of this Public License.


Section 8 -- Interpretation.

  a. For the avoidance of doubt, this Public License does not, and
     shall not be interpreted to, reduce, limit, restrict, or impose
     conditions on any use of the Licensed Material that could lawfully
     be made without permission under this Public License.

  b. To the extent possible, if any provision of this Public License is
     deemed unenforceable, it shall be automatically reformed to the
     minimum extent necessary to make it enforceable. If the provision
     cannot be reformed, it shall be severed from this Public License
     without affecting the enforceability of the remaining terms and
     conditions.

  c. No term or condition of this Public License will be waived and no
     failure to comply consented to unless expressly agreed to by the
     Licensor.

  d. Nothing in this Public License constitutes or may be interpreted
     as a limitation upon, or waiver of, any privileges and immunities
     that apply to the Licensor or You, including from the legal
     processes of any jurisdiction or authority.


=======================================================================

Creative Commons is not a party to its public licenses.
Notwithstanding, Creative Commons may elect to apply one of its public
licenses to material it publishes and in those instances will be
considered the ‘Licensor.’ The text of the Creative Commons public
licenses is dedicated to the public domain under the CC0 Public Domain
Dedication. Except for the limited purpose of indicating that material
is shared under a Creative Commons public license or as otherwise
permitted by the Creative Commons policies published at
creativecommons.org/policies, Creative Commons does not authorize the
use of the trademark "Creative Commons" or any other trademark or logo
of Creative Commons without its prior written consent including,
without limitation, in connection with any unauthorized modifications
```

```
to any of its public licenses or any other arrangements,
understandings, or agreements concerning use of licensed material. For
the avoidance of doubt, this paragraph does not form part of the public
licenses.

Creative Commons may be contacted at creativecommons.org.
```