一. 基础概念的定义

一个博弈包括：
- **玩家集$\boldsymbol{N}$**：玩家的有限集合
- 每个玩家i都有**策略集$\boldsymbol{A_i}$**，表示他可以选择的策略的集合
- 每个玩家i都有**收益函数$\boldsymbol{u_i}$**：$A_1 \times A_2 \times ... A_N \rightarrow R$，表示在一组策略下它的收益

此外，有如下定义：
- **博弈结果**：$a = (a_1, a_2, ..., a_N)$，是一组策略构成的元组
- **博弈结果空间**：$A = A_1 \times A_2 \times ... A_N$，则$a \in A$
- ***对手策略***：$a_{-i} = (a_1, ..., a_{i-1}, a_{i+1} ..., a_N)$，*则*$a = (a_i, a_{-i})$

用集合$G = \{N, \{A_i\}_{i=1}^N, \{u_i\}_{i=1}^N\}$来描述一个**策略式博弈**

二. 分类

- **策略式博弈**(静态博弈/单步博弈)：它是一次博弈（所有玩家同时做策略选择，知道对手可选的策略，不知道对手具体会选哪一个策略，非合作）
- **扩展式博弈**(动态博弈/多步博弈)：在一个博弈中，各参与人与策略的选择和行动不仅有先后顺序，而且后选择、后行动的博弈方在自己选择行动之前，可以看到前面的过程

三. 主要内容

1. 策略式博弈

- 当对手策略选定的时候，我会调整自己的策略，使得自己收益在几种策略选择中是最大的，这时的策略称为“**最优反应**”
- 如果每个人的策略都是“最优反应”，那么就会形成一种稳定的局面，这时的博弈结果就是**纳什均衡**
- **纳什均衡(Nash equilibrium)**是博弈结果$a^* = (a_1^*, a_2^*, ..., a_N^*)$，使得对于每个玩家$i$都有：

  $$u_i(a_i^*, a_{-i}^*) \geq u_i(a_i, a_{-i}^*)$$

  (对手策略选定的时候，自己最优)

  纳什均衡**简写为：NE**
- 求解**纳什均衡**就是寻找**最优反应**

  玩家$\boldsymbol{i}$关于对手策略a_{-i}的**最优反应**：

  $B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(b_i, a_{-i}) \text{ for all } b_i \in A_i\}$

  同时满足所有人的最优反应的博弈结果，就是纳什均衡。也就是对于 $\forall i$，满足$a_i^* \in B_i(a_{-i}^*)$的博弈结果。

- 每个玩家可选的策略也叫**纯策略**，有的时候并不能找到一个纯策略的纳什均衡，最常见的就是石头剪刀布。这个时候就需要引入**——混合策略**，也就是在纯策略上加入概率
- **存在性：纳什定理**
- 定理**内容**：**有限的**策略式博弈一定存在**混合策略**纳什均衡

  (有限指：有限的玩家，每个玩家都有有限种纯策略)

- **严格占优于**：a_i和$a_i^{'}$是一个玩家的两种纯策略，若对于所有$a_{-i} \in A_{-i}$，

  $u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i^{'}, a_{-i})$，则称策略 a_i**严格占优于**$a_i^{'}$
- **弱占优于**：a_i和$a_i^{'}$是一个玩家的两种纯策略，若对于所有$a_{-i} \in A_{-i}$，

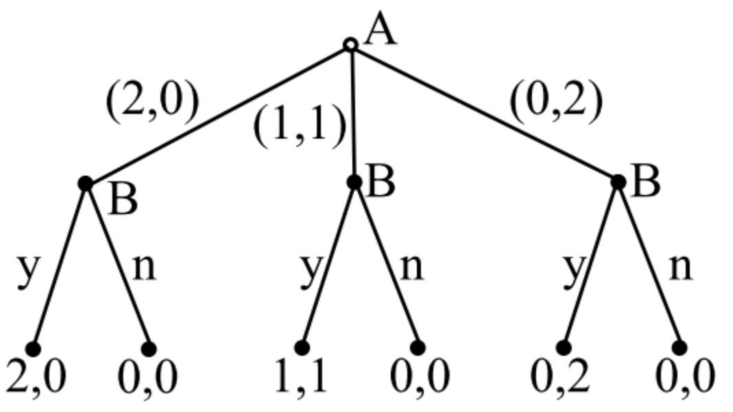
  $u_i(a_i, a_{-i}) \geq u_i(a_i^{'}, a_{-i})$，且对于某些$a_{-i} \in A_{-i}$，$u_i(a_i, a_{-i}) > u_i(a_i^{'}, a_{-i})$，则称策略 a_i**弱占优于**$a_i^{'}$
- **严格占优策略**：如果a_i严格占优于玩家i其他所有策略，则称a_i是严格占优策略
- **弱占优策略**：如果a_i*弱*占优于玩家i其他所有策略，则称a_i是弱占优策略
- 严格占优就是收益**高于**其他策略；弱占优就是收益**不低于**其他策略，且**有时高于**其他策略
- **理性化**：迭代消除被严格占优的策略直到没有被严格占优的策略

- **反应函数**：当收益为策略的多元连续函数时，每个博弈方 针对其他博弈方所有策略的最优反应所构成的函数

2. **扩展式博弈**

- **特点**：每一步没有收益，只有最后一步，才有收益。扩展式博弈相较于策略式博弈，多了玩家的**序列信息**，以及**每个点**上的**策略集**
- 扩展式博弈的表示形式：**博弈树**
- 玩家i的**纯策略**的**集合**是玩家i的结点上的策略集的笛卡尔积

  例子：最后通牒博弈



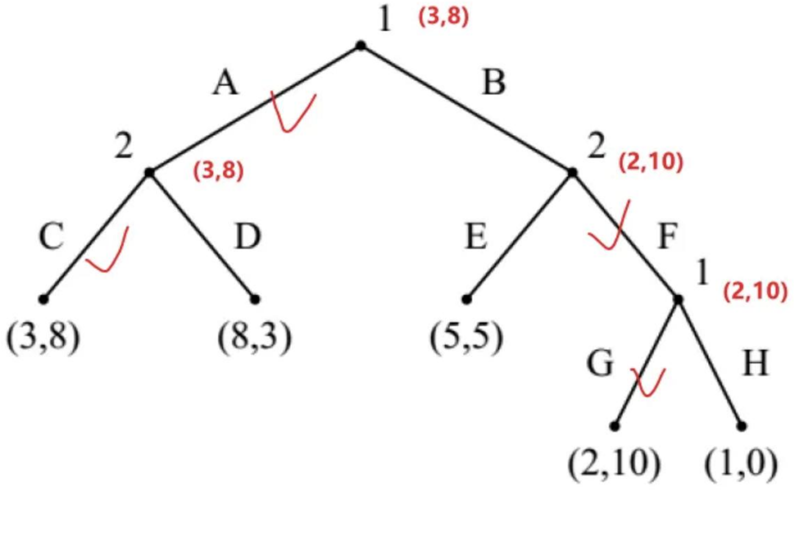
  - 玩家A的纯策略：$\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$
  - 玩家B的纯策略：$\{yyy, yyn, yny, ynn, nyy, nyn, nny, nnn\}$

- **Kuhn定理**：每一个具有完全信息的有限扩展式博弈至少有一个**纯策略纳什均衡(PSNE)**
- **子博弈完美纳什均衡(Subgame Perfect Equilibrium)**
  如果在每个**子博弈**(博弈树的子树)都是纳什均衡，那么它就是子博弈完美均衡
- **定理**：每一个完全信息扩展式博弈都有子博弈完美均衡

- 寻找子博弈完美均衡(SPE)的方法：**逆向归纳**
- **步骤**
  1.从**最末端**的非叶子结点开始(从最后的子博弈开始)，计算**NE**(此时对于这个非叶子结点的玩家，相当于寻找他的最优收益)。用这个收益，替代这个子博弈**根结点**。
  2.重复第1步，直到**根节点**

  通过逆向归纳构造的策略博弈集等价于SPE的集合

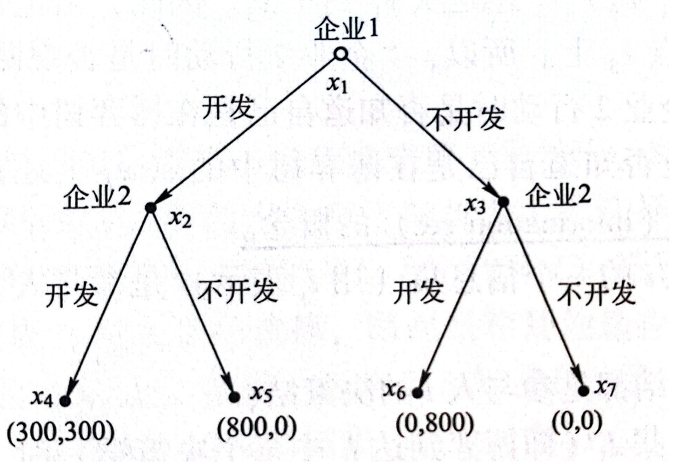
- 例子：



  得到SPE：(AG, CF)

信息集

- 参与人i的一个信息集是决策点的一个集合，满足两个条件：
  1. I_i中的每个决策点都是参与人i的决策点；
  2. 当博弈到达信息集I_i时参与人知道自己是在信息集I_i中的决策点上，但不知道自己究竟在哪个决策点上

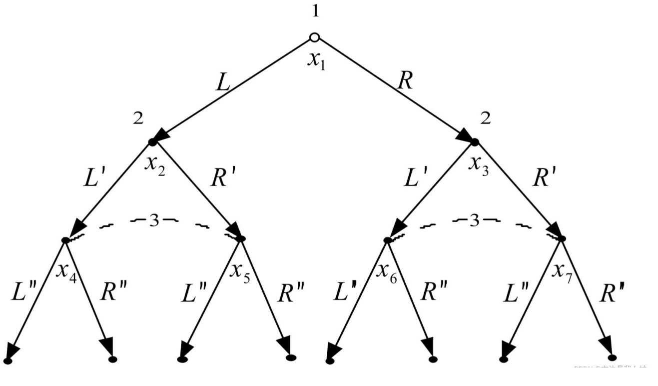


说明：
1. 如果企业2不知道企业1的行动，那么其信息集为$I_2(\{x_2,x_3\})$；
2. 如果企业2知道企业1的行动，那么其信息集为$I_2(\{\ \{x_2\},\{x_3\}\ \})$；
3. 单结信息集实际上参与人也知道了自己在哪一个决策点上

- **不同信息集情形下的博弈树**(虚线连接的为信息集相同的决策点)

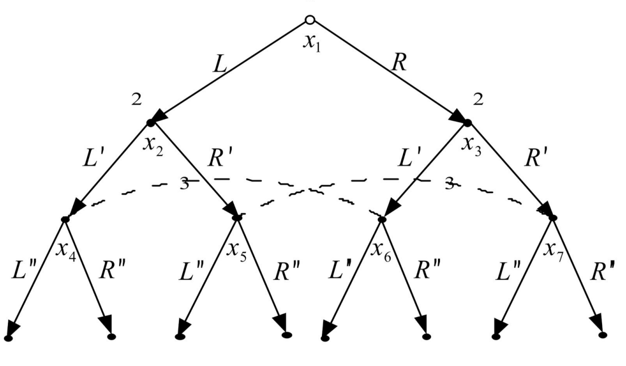
  1. 知道参与人1的选择，不知道参与人2的选择；

  $I_3(\{\ \{x_4,x_5\},\{x_6,x_7\}\ \})$



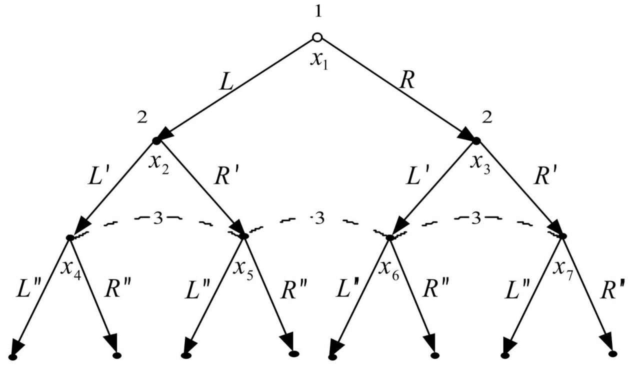
  2. 不知道参与人1的选择，知道参与人2的选择；

  $I_3(\{\ \{x_4,x_6\},\{x_5,x_7\}\ \})$



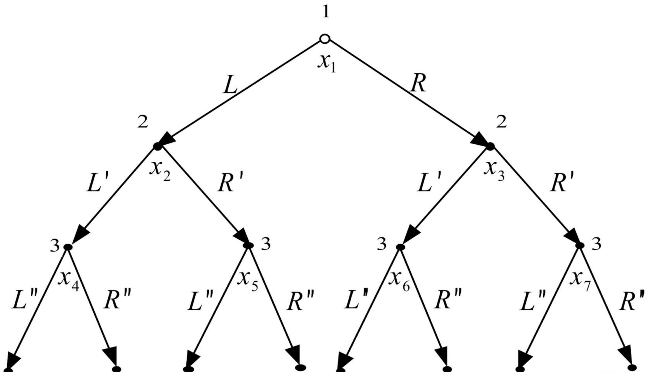
3. 不知道参与人1的选择，不知道参与人2的选择；

$I_3(\{\ \{x_4, x_5\}, \{x_5, x_6\}, \{x_6, x_7\}\ \})$

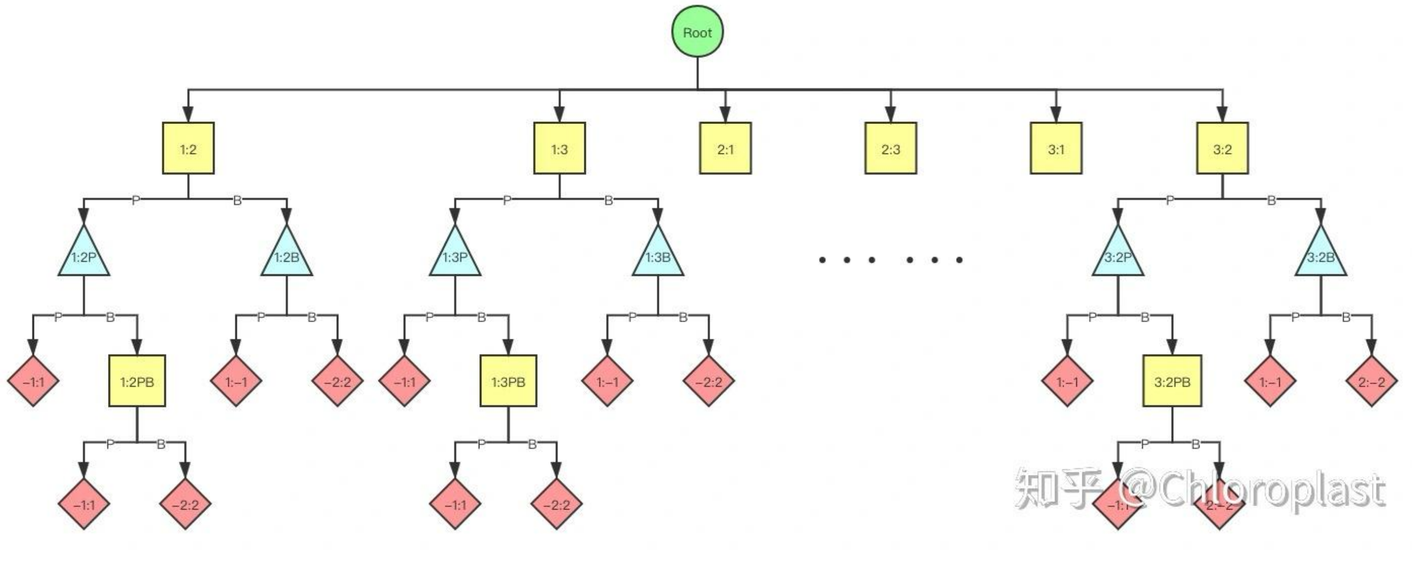


4. 知道参与人1的选择，知道参与人2的选择

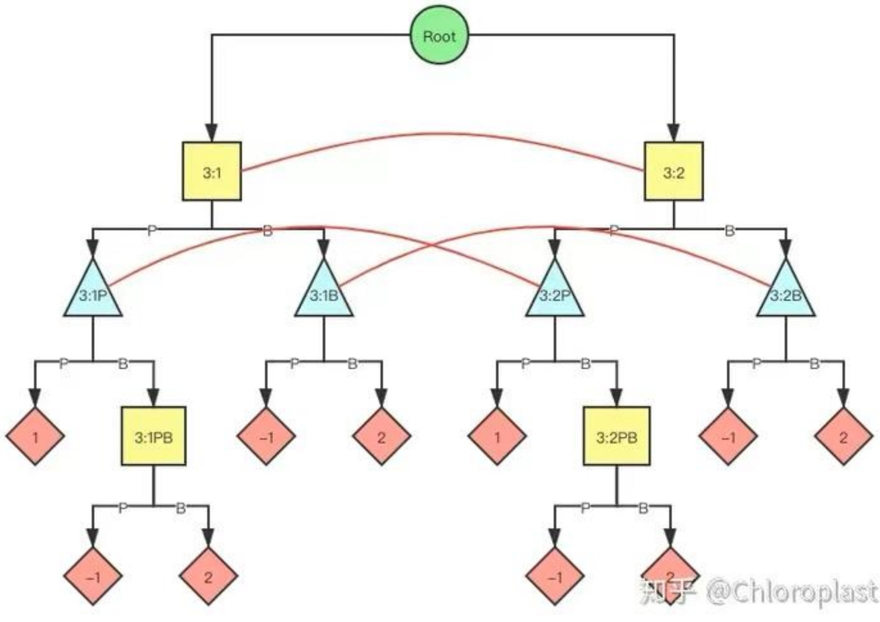
$I_3(\{\ \{x_4\}, \{x_5\}, \{x_6\}, \{x_7\}\ \})$



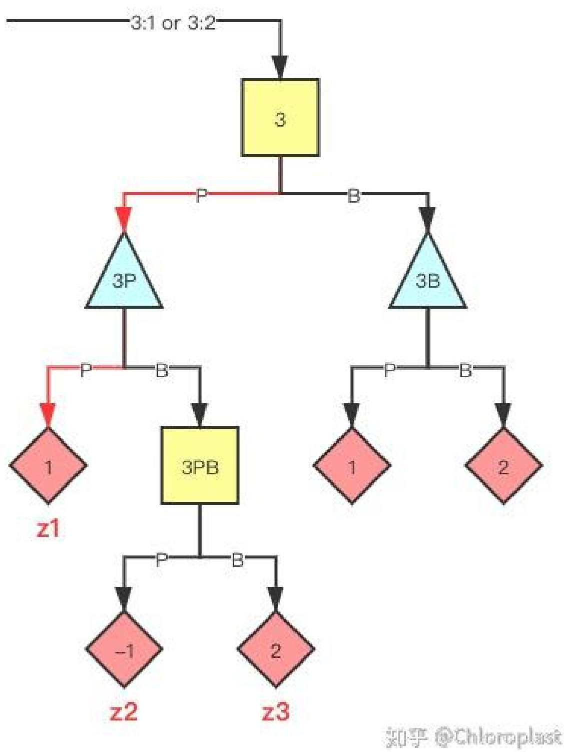
下图为两人kuhn扑克在上帝视角(即同时知晓A和B的手牌)下的完全信息博弈树（黄色节点为玩家A的决策点，蓝色节点为玩家B的决策点，红色节点为终止节点）



现聚焦于最右侧两条分支，红线连接的节点为玩家无法区分的决策点

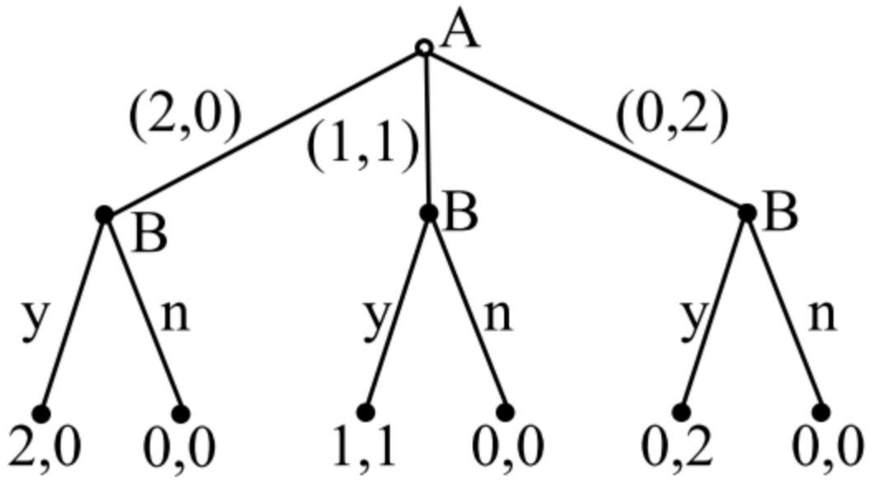


下图为玩家A视角(即非完全信息)下的博弈树



一般情况下，非完全信息博弈树的每一个节点都代表一个信息集
因此，在没有特殊说明的情况下，非完全信息博弈中提及的节点、信息集、状态是等价的，无需区分的

- **完美回忆(Perfect Recall)**：如果玩家i记住自己之前的所有决策则是完美回忆的
  如果所有玩家都是完美回忆的，则该博弈是完美回忆的
- **行为策略**：玩家i的一系列的概率分布函数（等同于强化学习中的policy）
- 在完全信息博弈中，行为策略和混合策略可以相互转化，混合策略可以看作行为策略的联合分布函数



- 玩家A的纯策略：$\{(2,0),(1,1),(0,2)\}$
- 玩家B的纯策略：$\{yyy, yyn, yny, ynn, nyy, nyn, nny, nnn\}$