Discrete Probability

ความน่าจะเป็น เห็นแล้วจะเป็นลม

TOPICS

- Introduction to Probability 01
- Probability Theory 02
- Conditional Probability 03
- Bayes' Theorem 04

Introduction to Probability

Probability of an Event

ความน่าจะเป็น (Probability) คือ วิธีการทางคณิตศาสตร์ซึ่งใช้เพื่ออธิบายความไม่แน่นอนของ**เหตุการณ์** เพื่อวัดความเป็นไปได้ที่จะเกิดเหตุการณ์นั้น ๆ

หัว 50%

ก้อย 50%

Probability of an Event

Keywords:

การโยนหัวก้อย , การทอยลูกเต๋า

- **การทดลองสุ่ม (random experiment)** กระบวนการที่ให้ผลลัพธ์บางอย่าง
- **ปริภูมิตัวอย่าง (sample space** หรือบางครั้งเรียกว่า **universe)** คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม

  {หัว, ก้อย} , {1, 2, 3, 4, 5}
- **เหตุการณ์ (event)** คือ เซตใด ๆ ที่เป็นซับเซตของปริภูมิตัวอย่าง กล่าวคือ เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม

  {หัว}, {ก้อย}, {หัว, ก้อย}

  {1}, {2}, ..., {1, 2}, {1, 3, 5}, ...

Terminology

เช่น H = หัว , T = ก้อย

เมื่อ *E* เป็นเหตุการณ์ใด ๆ เราจะแทนความน่าจะเป็นที่ ***E*** จะเกิดขึ้นด้วยสัญลักษณ์

$$p(E)$$

โดยที่ $0 \leq p(E) \leq 1$ เสมอ

$$\left.\begin{aligned} p(H) &= 0.5 \\ p(T) &= 0.5 \end{aligned}\right\} = 50\%$$

Laplace's Definition

นิยาม

ถ้า ***S*** คือ sample space ของเหตุการณ์ทั้งหมด (จากการทดลองสุ่มหนึ่ง) และ ***E*** คือเหตุการณ์ใน ***S*** เราสามารถสรุปได้ว่า

$$P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

โดย $|E|$ คือ จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดในเหตุการณ์ ***E***

และ $|S|$ คือ จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดใน sample space ***S***

Laplace's Definition

Example Problem

B R

กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีฟ้าทั้งหมด 4 ลูก ลูกบอลสีแดงอยู่ 5 ลูก แล้ว ความน่าจะเป็นในการหยิบลูกบอลสีแดงเป็นเท่าใด

↳ เหตุการณ์ E

$$S = \{B_1, B_2, B_3, B_4, R_1, \ldots, R_5\} \rightarrow |S| = 9$$

$$E = \{R_1, \ldots, R_5\} \rightarrow |E| = 5$$

$$\therefore P(E) = \frac{|E|}{|S|} = \frac{5}{9} \approx 55.56\% \ \#$$

Laplace's Definition

Example Problem

จงหาความน่าจะเป็นของการทอยลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน โดยที่ผลลัพธ์ของหน้าลูกเต๋ารวมกันแล้วได้ 7 พอดี → E

2 \ 1	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$|S| = 36$

$|E| = 6$

$\therefore p(E) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \simeq 16.67\%$ #

Probability of Complements

เมื่อ *E* แทนเหตุการณ์ใด ๆ เรามักจะใช้สัญลักษณ์

$$p(\neg E) = p(\bar{E}) = p(E')$$

แทนเหตุการณ์ที่ *E* <u>ไม่เกิดขึ้น</u>

โดยเราสามารถหาความน่าจะเป็นที่ *E* จะไม่เกิดขึ้นได้จาก

$$p(\neg E) = 1 - p(E)$$

Probability of Complements

Example Problem

จงหาความน่าจะเป็นของการทอยลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน โดยที่ผลลัพธ์ของหน้าลูกเต๋ารวมกันแล้ว***ไม่***เป็น 7

E = รวมกันได้ 7

$$p(\neg E) = 1 - p(E)$$

$$= 1 - \frac{1}{6}$$

$$= \frac{5}{6} \simeq 83.33\,\%$$

#

Principle of Inclusion-Exclusion

ในบางครั้งเหตุการณ์บางเหตุการณ์ที่เราสนใจอาจมาในรูปแบบของเงื่อนไข โดยสามารถเกิดเงื่อนไขที่ 1 หรือเงื่อนไขที่ 2 ก็ได้โดยหากเกิดเหตุการณ์เช่นนี้ (เหตการณ์ ที่ 1 หรือ 2) เราจำเป็นจะต้องใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

union = หรือ

intersect = และ

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

โดยที่ $p(E_1 \cup E_2)$ คือความน่าจะเป็นที่ ***E1 หรือ E2*** จะเกิดขึ้น

$p(E_1 \cap E_2)$ คือความน่าจะเป็นที่ ***E1 และ E2*** จะเกิดขึ้น (พร้อม ๆ กัน)

Principle of Inclusion-Exclusion

Example Problem

จงหาความน่าจะเป็นของการทอยลูกเต๋า 2 ลูก พร้อมกัน โดยที่มีลูกเต๋าอย่างน้อย 1 ลูกที่มีผลลัพธ์เป็น 3 หรือผลรวมของหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 6

$\rightarrow E_1$ $\rightarrow \cap$

$\rightarrow E_2$

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$|E_1| = 11$

$|E_2| = 5$

$|E_1 \cap E_2| = 1$

$$P(E_1 \cup E_2) = \frac{11}{36} + \frac{5}{36} - \frac{1}{36}$$

$$= \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$$

$$\approx 41.67\,\%$$ #

Probability Theory

Probability Theory

เมื่อ ***S*** แทน sample space ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ของการทดลองสุ่ม แล้วจะได้ว่าความน่าจะเป็นของผลลัทธ์ทั้งหมดใน ***S*** รวมกันจะมีค่าเท่ากับ 1

$$\sum_{s \in S} p(s) = 1$$

Probability Theory

Example Problem

ในการโยนสุ่มหัวก้อย ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลลัพธ์เป็น ***H*** (หัว) และ ***T*** (ก้อย) ควรมีค่าเป็นเท่าใด ถ้าเหรียญที่ใช้ในการโยนสุ่มมีความเที่ยงตรง

① $p(H) + p(T) = 1$

② $p(H) = p(T)$

$2p(H) = 1$

$p(H) = p(T) = \frac{1}{2}$ #

Probability Theory

Example Problem

จากคำถามข้อที่แล้ว ความน่าจะเป็นของ ***H*** และ ***T*** ควรมีค่าเป็นเท่าไหร่ ถ้าเหรียญ**ไม่เที่ยงตรง**และมีโอกาสที่จะออกหัวมากกว่าก้อยเป็นสองเท่า

① $p(H) + p(T) = 1$

② $p(H) = 2p(T)$

$3p(T) = 1$

$p(T) = \frac{1}{3}$ #

$p(H) + \frac{1}{3} = 1$

$p(H) = \frac{2}{3}$ #

Conditional Probability

Conditional Probability

E โดยที่ F เกิดขึ้น

นิยาม

ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ ***"E ภายใต้เหตุการณ์ F"*** (***"E given F"***) สามารถหาได้จาก

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{P(F)}$$

Conditional Probability

Example Problem

ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน โดยที่มีลูกอย่างน้อยหนึ่งคนที่เป็นลูกชาย → F
จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนของครอบครัวนี้เป็นลูกชาย → E
(กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่ลูกจะเป็นเพศหญิงและเพศชายมีค่าเท่ากัน และเพศของลูกคนหนึ่งไม่ส่งผลต่อเพศของลูกอีกคนหนึ่ง)

$E = \{BB\}$ $E \cap F = \{BB\}$

$F = \{BB, BG, GB\}$

$S = \{BB, BG, GB, GG\}$

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

$$= \frac{1/\cancel{4}}{3/\cancel{4}} = \frac{1}{3} \#$$

Conditional Probability

Example Problem

F

คุณได้ทำการทอยลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน และได้ผลรวมของหน้าลูกเต๋าเป็น 7 จงหาความน่าจะเป็นที่มีลูกเต๋าอย่างน้อย 1 ลูกที่ทอยออกหน้าเลข 3 → E

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$p(E|F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)} = \frac{\cancel{2}^{1}/\cancel{36}}{{}_{3}\cancel{6}/\cancel{36}}$$

$$= \frac{1}{3}$$

Bayes' Theorem

Bayes' Theorem

Bayes' theorem เป็นในทฤษฎีที่สำคัญมากในทฤษฎีความน่าจะเป็น โดยสามารถใช้ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ “ไม่สามารถสังเกตุได้” โดยใช้ข้อมูลจากความน่าจะเป็นที่ “สามารถสังเกตุได้” ในการคำนวณ

หรือสามารถกล่าวให้เข้าใจอย่างง่ายได้ว่า Bayes's theorem คือ สูตรคำนวณที่ใช้สำหรับคำนวณ “ย้อนกลับ” ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$$p(E|F) \rightarrow p(F|E)$$

Thomas Bayes (1701-1761)

Bayes' Theorem

<u>Bayes' theorem</u>: กำหนดให้ ***E*** และ ***F*** เป็นเหตุการณ์จาก sample space ***S*** โดยที่ ***p(E)*** และ ***p(F)*** ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า

$$p(F|E) = \frac{p(E|F)p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\neg F)p(\neg F)}$$

Bayes' Theorem

Example Problem

สมมติว่ามีโรคระบาดเกิดขึ้น โดยที่ 1 คนใน 100,000 คนจะติดเชื้อโรคนี้ โดยนักวิจัยได้ทำการสร้างเครื่องตรวจสำหรับโรคนี้ขึ้นมา โดยพบว่าหากนำไปใช้กับผู้ที่ติดเชื้อแล้วจะให้ผลตรวจเป็นบวก (ให้ผลว่าติดเชื้อ) ได้ถูกต้อง 99% ในขณะที่หากนำไปตรวจกับผู้ที่ไม่ได้ติดเชื้อแล้วพบว่าจะมีโอกาสตรวจได้ผลเป็นลบ (ให้ผลว่าไม่ได้ติดเชื้อ) ได้ถูกต้อง 95% จงหา...

- ความน่าจะเป็นที่บุคคลจะติดเชื้อ โดยที่บุคคลนั้นตรวจได้ผลเป็นบวก
- ความน่าจะเป็นที่บุคคลจะไม่ติดเชื้อ โดยที่บุคคลนั้นตรวจได้ผลเป็นลบ

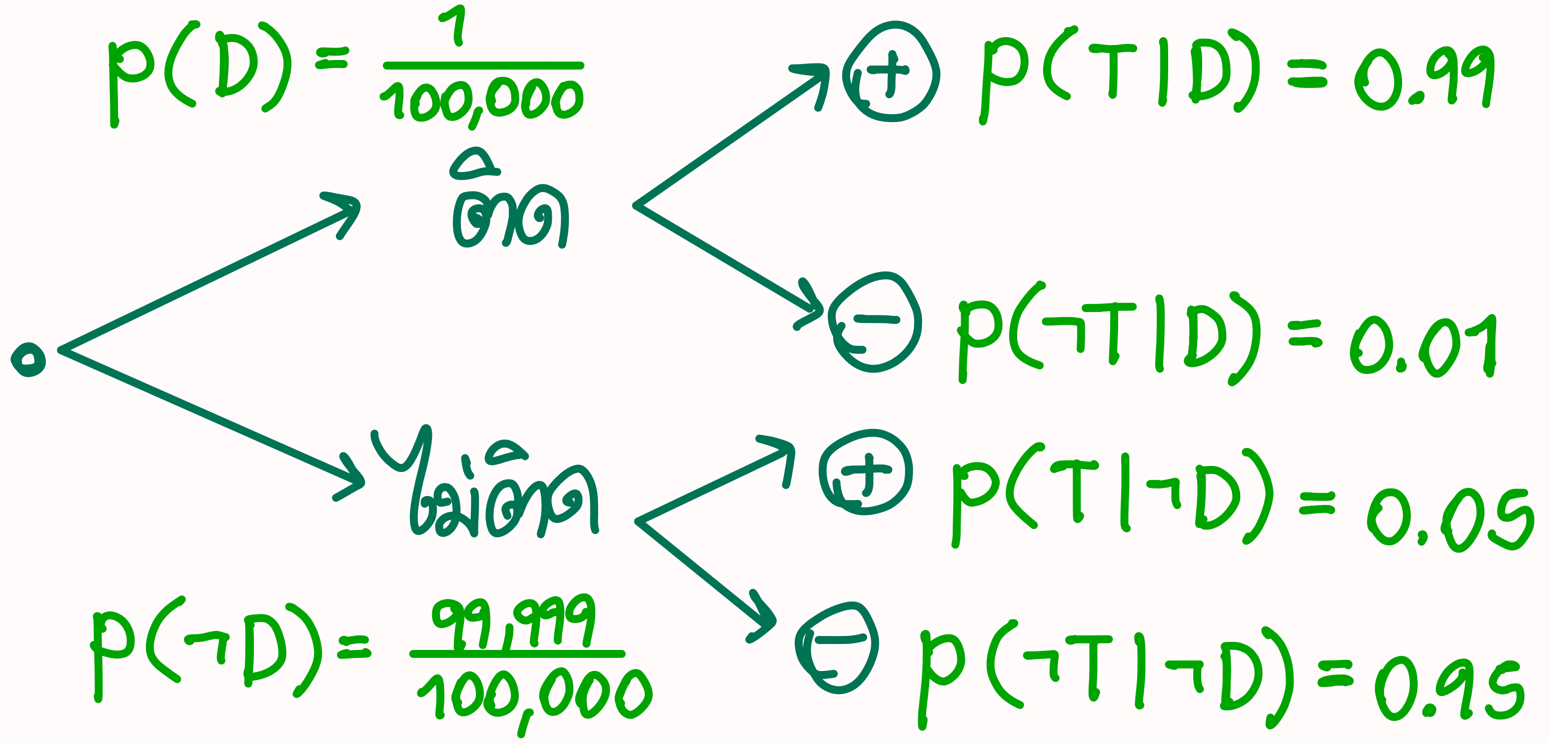
Bayes' Theorem

Example Problem

D T

- ความน่าจะเป็นที่บุคคลจะติดเชื้อ โดยที่บุคคลนั้นตรวจได้ผลเป็นบวก

$$p(D|T) = ?$$



$$p(\overset{D}{F}|\overset{T}{E}) = \frac{p(\overset{T}{E}|\overset{D}{F})p(\overset{D}{F})}{p(E|F)p(F) + p(\underset{T}{E}|\underset{\neg D}{\neg F})p(\underset{\neg D}{\neg F})}$$

$$p(D|T) = \frac{0.99 \times \frac{1}{100,000}}{\left(0.99 \times \frac{1}{100,000}\right) + \left(0.05 \times \frac{99,999}{100,000}\right)}$$

$$\simeq 0.000198$$

$$\simeq 0.02\ \% \ !$$

Bayes' Theorem

Example Problem

- ความน่าจะเป็นที่บุคคลจะไม่ติดเชื้อ โดยที่บุคคลนั้นตรวจได้ผลเป็นลบ

$\neg D$ $\neg T$

$p(\neg D|\neg T) = ?$

$p(D) = \frac{1}{100,000}$ ติด

⊕ $p(T|D) = 0.99$

⊖ $p(\neg T|D) = 0.01$

$p(\neg D) = \frac{99,999}{100,000}$ ไม่ติด

⊕ $p(T|\neg D) = 0.05$

⊖ $p(\neg T|\neg D) = 0.95$

$$p(\overset{\neg D}{F}|\overset{\neg T}{E}) = \frac{p(\overset{\neg T}{E}|\overset{\neg D}{F})p(\overset{\neg D}{F})}{p(E|F)p(F) + p(\underset{\neg T}{E}|\underset{D}{\neg F})p(\underset{D}{\neg F})}$$

$$p(D|T) = \frac{0.95 \times \frac{99,999}{100,000}}{\left(0.95 \times \frac{99,999}{100,000}\right) + \left(0.01 \times \frac{1}{100,000}\right)}$$

≈ 0.9999998947

$\approx 100\%$!