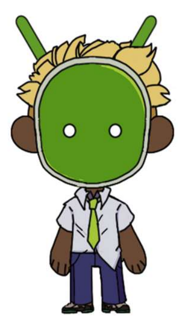
Discrete Mathematics

ModCom Freshy mystery 2024

Lecture Content



Number Theory

ทฤษฎีจำนวน ชวนปวดหัว

Divisibility and Modular Arithmetic

การหารลงตัว (Divisibility)

หากเรามีจำนวนเต็ม a และจำนวนเต็ม b โดยที่ a จะต้องไม่เป็น 0 เราจะกล่าวได้ว่า a หาร b ลงตัว (a divides b) หรือ b หารด้วย a ลงตัว (b is divisible by a) ก็ต่อเมื่อ เราจะต้องสามารถหาจำนวนเต็ม c ซึ่งทำให้

$$b = ac$$

เช่น 6 หาร 18 ลงตัว เนื่องจาก เราสามารถหาจำนวนเต็ม c ที่ทำให้ 18 = 6c ได้

(c = 18/6 = 3)

4 หาร 15 ไม่ลงตัว เนื่องจาก เราไม่สามารถหาจำนวนเต็ม c ที่ทำให้

15 = 4c ได้ *(c = 15/4 = 3.25)*

โดย เราจะใช้สัญลักษณ์ $a \mid b$ เพื่อบ่งบอกว่า a หาร b ลงตัว

สมบัติของการหารลงตัว (Properties of Divisibility)

** กำหนดให้ตัวแปรทุกตัวเป็น**จำนวนเต็มทั้งหมด**

สมบัติที่ 1 หากตัวตั้ง (ตัวถูกหาร) มี a เป็นตัวประกอบแล้ว a จะสามารถหารตัวตั้งได้ลงตัว

สมบัติที่ 2 หาก $a \mid b$ แล้ว $a \mid bc$

บทพิสูจน์ (ใช้นิยามของการหารลงตัวและสมบัติข้อที่ 1)

เนื่องจาก $a \mid b$ แสดงว่า จะต้องมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $b = ma$

จาก bc เราสามารถแทนค่า $b = ma$ ได้เป็น $bc = (ma)c = a(mc)$

ซึ่งเราจะพบว่า $a \mid a(mc)$ ตามสมบัติข้อที่ 1

ดังนั้น $a \mid bc$

<u>สมบัติที่ 3</u> หาก $a \mid b$ และ $\mathrm{b} \mid c$ แล้ว $a \mid c$

บทพิสูจน์ (ใช้นิยามของการหารลงตัวและสมบัติข้อที่ 1)

เนื่องจาก $a \mid b$ แสดงว่า จะต้องมีจำนวนเต็ม m ที่ทำให้ $b = ma$

เนื่องจาก $\mathrm{b} \mid c$ แสดงว่า จะต้องมีจำนวนเต็ม n ที่ทำให้ $c = nb$

เมื่อทำการแทนค่า $b = ma$ ลงใน $c = nb$ จะได้

$$c = nb = n(ma) = a(mn)$$

ซึ่งเราจะพบว่า $a \mid a(mn)$ ตามสมบัติข้อที่ 1

ดังนั้น $a \mid c$

<u>สมบัติที่ 4</u> หาก $a \mid b$ และ $a \mid c$ แล้ว $a \mid b \pm c$

สำหรับใครที่ว่าง สามารถทดลองพิสูจน์สมบัติข้อนี้ด้วยตัวเองได้เลยนะครับ!

ข้อควรระวัง สมบัติที่กล่าวมา **บทกลับจะไม่เป็นจริงเสมอไป**

ตัวอย่างโจทย์

จงหาค่าของ a ที่เป็นจำนวนเต็มบวก ซึ่งทำให้ a หาร a + 4 ได้ลงตัว

The Division Algorithm

ในระดับชั้นมัธยมศึกษา เราอาจเคยได้ยินมาว่า การหารของตัวเลข 2 จำนวนใด ๆ สามารถเขียนได้อยู่ในรูปของ

ตัวตั้ง (ตัวถูกหาร) = ตัวหาร x ผลหาร + เศษ

โดยในครั้งนี้ เราจะมาศึกษานิยามของการในลักษณะนี้กันบ้าง โดย

เมื่อกำหนดให้ a เป็นจำนวนเต็มใด ๆ แล้วให้ d เป็นจำนวน**เต็มบวก** แล้ว เราจะสามารถเขียนการหารของ a และ d $(a \div d)$ ได้ในรูปแบบ ดังนี้

$$a = dq + r$$

โดยที่ q เป็นผลจากการหารของ $a \div d$ (ไม่รวมเศษ)

r เป็นเศษจากการหารของ $a \div d$ ซึ่ง $0 \leq r < d$

ฟังก์ชันที่เกี่ยวข้องกับกับการหาร

$\boldsymbol{a\ div\ d}$ เป็นฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการหาผลหารของ $a \div d$

หรือกล่าวได้ว่า $q = \lfloor a \div d \rfloor = \boldsymbol{a\ div\ d}$

$\boldsymbol{a\ mod\ d}$ เป็นฟังก์ชันที่ใช้สำหรับการหาเศษจากการหารของ $a \div d$

หรือกล่าวได้ว่า $r = \boldsymbol{a\ mod\ d}$

ตัวอย่างโจทย์

จงหา**ผลหาร**และ**เศษจากการหาร** 2567 ด้วย 38

ตัวอย่างโจทย์

จงหา**ผลหาร**และ**เศษจากการหาร** -34 ด้วย 3

ข้อควรระวัง ในการเขียนโปรแกรม การหาเศษจากการหารจำนวนที่**ตัวตั้งเป็นจำนวนติดลบ** จะใช้วิธีที่แตกต่างกับแนวทางของ Number Theory

ตัวอย่างโจทย์

จงพิสูจน์ว่าถ้า a เป็นจำนวนที่ 3 หาร**ไม่ลงตัว** แล้ว 3 จะหาร (a+1)(a+2) ลงตัว

เนื่องจาก a เป็นจำนวนที่ 3 หารไม่ลงตัว แสดงว่า เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ของ 3 หาร a ได้เป็น ____

แทนค่าของ a ด้วย ลงใน (a+1)(a+2) จะได้ ____________________________

กรณีที่ 1 เศษจากการหารเป็น 1

กรณีที่ 2 เศษจากการหารเป็น 2

ดังนั้น ____

ตัวอย่างโจทย์

จงพิสูจน์ว่าถ้า a เป็นจำนวนเต็มบวกแล้ว 4 จะหาร $a^2 + 2$ ไม่ลงตัว

จำนวนเต็มบวกเราสามารถจำแนกได้เป็น**จำนวนคู่**และ**จำนวนคี่** โดยที่

จำนวนคู่ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ 2k ได้

จำนวนคี่ จะสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของ 2k – 1 ได้

**** k เป็นจำนวนเต็มบวกใด ๆ**

เนื่องจากปัญหาในข้อนี้กำหนดให้ a สามารถเป็นจำนวนเต็มใด ๆ ก็ได้ ดังนั้น วิธีในการตรวจสอบที่อาจเหมาะสมที่สุดจึงเป็นการตรวจสอบด้วย**จำนวนคู่**และ**จำนวนคี่** โดยที่

กรณีที่ 1 ตรวจสอบในกรณีที่ a เป็นจำนวนคู่

กรณีที่ 2 ตรวจสอบในกรณีที่ a เป็นจำนวนคี่

ดังนั้น ____

โจทย์เพิ่มเติมสำหรับฝึกฝน

จงพิสูจน์ว่า ถ้า a และ b เป็นจำนวนเต็มบวก และ a หาร b ลงตัวแล้ว แสดงว่า a จะต้องเป็นจำนวนคี่และ b จะต้องเป็นจำนวนคู่

Congruence Relation

จากเรื่องที่ผ่านมา เมื่อเศษจากการหารจำนวน 2 จำนวนด้วยจำนวนเต็มหนึ่งมีค่าเท่ากัน หรือกล่าวอีกแบบ คือ

$$a \ \mathbf{mod}\ m \ = \ b \ \mathbf{mod}\ m$$

เราจะสามารถระบุได้ว่า **a เป็น congruent กับ b modulo m**

โดยเราจะเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $a \equiv b \ (mod\ m)$

ข้อควรระวัง สังเกตว่า หากเป็นการเขียนฟังก์ชันเพื่อหาเศษจากการหาร เราจะใช้ **mod** ที่เป็นตัวหนา แต่หากพูดถึงความเป็น congruence จะใช้ mod ที่ไม่เป็นตัวหนา

และจากความสัมพันธ์ที่เราทราบว่า $a \ \mathbf{mod}\ m \ = \ b \ \mathbf{mod}\ m$

เราจึงสามารถสร้างนิยามอีกแบบหนึ่งให้กับ $a \equiv b \ (mod\ m)$ ได้ นั่นคือ

$$\boxed{a \equiv b(mod\ m) \ \text{ก็ต่อเมื่อ} \ m \mid a - b}$$

ตัวอย่างโจทย์

จงทดสอบว่า 125 congruent กับ 5 modulo 6 หรือไม่

คุณสมบัติเพิ่มเติมของการหา Modulo

1. $(a+b) \ \mathbf{mod} \ m = \big((a \ \mathbf{mod} \ m) + (b \ \mathbf{mod} \ m)\big) \ \mathbf{mod} \ m$
2. $(ab) \ \mathbf{mod} \ m = \big((a \ \mathbf{mod} \ m) \times (b \ \mathbf{mod} \ m)\big) \ \mathbf{mod} \ m$

คุณสมบัติพิเศษที่ช่วยลัดขั้นตอนในการทำ Congruent

เมื่อ $a \equiv b(mod\ m)$ แล้ว

$ac \equiv bc(mod\ m)$ จะเป็นจริงไปด้วย

**** c เป็นจำนวนเต็ม**

ตัวอย่างโจทย์

กำหนดให้ $a \equiv 11 \ (\text{mod } 19)$

และ $b \equiv 3 \ (\text{mod } 19)$

จงหาค่าของ c ที่ทำให้ $c \equiv 7a + 3b \ (\text{mod } 19)$ โดยที่ $0 \leq c < 19$

ถ้าเปลี่ยนขอบเขตของ c เป็น $19 < c < 38$ ค่าของ c จะเป็นเท่าใด ?

The Representation of Number

โดยปกติแล้ว ตัวเลขที่ใช้กันในระบบคณิตศาสตร์ เราจะสามารถนำ**เลขโดด**ในแต่ละตำแหน่งมาระบุได้ว่า ตัวเลขใดเป็นตัวเลขหลักหน่วย, สิบ, ร้อย, พัน, หมื่น, แสน, ...

แน่นอนว่า เมื่อเราสามารถกล่าวได้ว่าตัวเลขหนึ่งจะมีตัวเลขในแต่ละหลักเป็นเลขอะไรได้แล้ว เราก็สามารถที่จะเขียนกระจายการคูณของตัวเลขดังกล่าวออกมาได้เช่นกัน

$$
\begin{aligned}
6945 &= 6 \times 1000 + 9 \times 100 + 4 \times 10 + 5 \\
&= 6 \times 10^3 + 9 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 10^0
\end{aligned}
$$

ซึ่งการกระจายในลักษณะนี้ เราจะเรียกตัวเลขในระบบนี้ว่า **"เลขฐาน 10"**

ในการแสดงเลขฐานต่าง ๆ เราจะแสดงชุดตัวเลขในฐานนั้น ๆ เรียงกันอยู่ในวงเล็บและห้อยเลขฐานกำกับไว้ด้านหลัง (ยกเว้นเลขฐาน 10 ที่มักจะละวงเล็บและไม่กำกับเลขห้อยเอาไว้)

$$
\begin{aligned}
n &= (a_k a_{k-1} a_{k-2} \cdots a_2 a_1 a_0)_b \\
&= a_k b^k + a_{k-1} b^{k-1} + \cdots + a_2 b^2 + a_1 b + a_0
\end{aligned}
$$

โดยที่ n เป็นตัวเลขในระบบเลขฐาน 10

และ b ใช้บ่งบอกว่าเป็นตัวเลขชุดใหม่เป็นเลขฐานใด

ตัวอย่างโจทย์

จงแปลงตัวเลขต่อไปนี้ให้อยู่ในรูปของเลขฐาน 10

$(635)_5$ = ________________________________

= ________________________________

$(DE2)_{16}$ = ________________________________

= ________________________________

ในกรณีที่ตัวเลขแต่ละหลักเป็นตัวอักษร A, B, C, D, E, F, ... ตัวเลขหลักนั้นจะมีค่าเท่ากับ 10, 11, 12, 13, 14, 15, ... ตามลำดับ

*** ตัวอักษรที่ใช้จำเป็นจะต้องเป็นตัวอักษรตัวพิมพ์ใหญ่เท่านั้น

โจทย์เพิ่มเติมสำหรับฝึกฝน

จงหาค่าของ a ที่ทำให้ $(ABa)_{12} = (22a00)_5$

ตัวอย่างโจทย์ การแปลงจากเลขฐาน 10 ให้เป็นเลขฐาน b

จงแปลงค่าของ 425 ให้อยู่ในรูปของเลขฐาน 8

ตัวอย่างโจทย์ การแปลงจากเลขฐาน 2 ให้เป็นเลขฐาน 2^n

จงแปลงค่าของ $(11111010101100)_2$ ให้อยู่ในรูปของเลขฐาน 8

GCD and LCM

Great Common Divisor (GCD) หรือตัวหารร่วมมาก (ห.ร.ม.) คือการหาจำนวนเต็มที่มากที่สุด ที่หารทั้ง a และ b ได้ลงตัว โดยเราสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนการหา gcd ของ a และ b ได้เป็น $gcd(a, b)$

Least Common Multiplier (LCM) หรือตัวคูณร่วมน้อย (ค.ร.น.) คือการหาจำนวนเต็มที่น้อยที่สุด ที่ทั้ง a และ b สามารถหารจำนวนดังกล่าวได้ โดยเราสามารถเขียนสัญลักษณ์แทนการหา lcm ของ a และ b ได้ $lcm(a, b)$

ตัวอย่างโจทย์

จงหา $gcd(2^3 3^5 5^7, 2^5 11^2)$

จงหา $lcm(2^3 3^5 5^7, 2^5 11^2)$

ข้อควรระวัง การทำวิธีนี้ ตัวเลขที่คูณกันควรจะมีฐานเป็นจำนวนเฉพาะ เช่น $gcd(4^2 9^2, 2^3 3^4)$ ควรจะแปลงเป็นจำนวนเฉพาะ คือ $gcd(2^4 3^4, 2^3 3^4)$ ก่อน

นอกจากนี้ การหา GCD และ LCM ยังคงมีความสัมพันธ์เพิ่มเติม นั่นคือ

$$ab = gcd(a, b) \times lcm(a, b)$$

ตัวอย่างโจทย์

ถ้า a = 12 และ b = 18 จงหาค่าของ **gcd(a,b)** และ **lcm(a,b)** และตรวจสอบว่าความสัมพันธ์ **ab = gcd(a,b) × lcm(a,b)** เป็นจริง

Euclidian Algorithm

Euclidean Algorithm เป็นการหา gcd รูปแบบหนึ่ง ที่นิยมอย่างมากในการใช้หาคำตอบในกรณีที่เราจะต้องเขียนโปรแกรมคอมพิวเตอร์ โดยหลักการสำคัญของการทำ Euclidean Algorithm คือ

สมมติให้เราต้องการหา gcd(a, b) โดยที่ $a > b$ เราจะนำ b มาหาร a ซึ่งจะเขียนได้อยู่ในรูปของ

$$a = bq + r$$

โดยที่ **q** เป็นผลหาร และ **r** เป็นเศษจากการหาร

1. ในกรณีที่ r ไม่เป็น 0 (หรือเป็นการหารที่ไม่ลงตัว) เราจะได้ว่า gcd(a,b) = gcd(b,r)
2. ในกรณีที่ r เป็น 0 (หรือเป็นการหารที่ลงตัว) เราจะได้ว่า gcd(a,b) = b

ตัวอย่างโจทย์

จงหา **gcd(1071, 462)** โดยใช้ Euclidean Algorithm

Counting

หลักการนับ นับตลอด นับ!!!

Counting

ในเหตุการณ์ (Event) ใด ๆ ก็ตาม มักจะสามารถเกิดรูปแบบหรือวิธีได้แตกต่างกัน ในบทนี้ เราจึงจะศึกษาถึงการหาจำนวนวิธีหรือจำนวนรูปแบบที่สามารถเกิดขึ้นได้ ภายใต้เงื่อนไขต่าง ๆ ที่เราสนใจ

เมื่อเราพูดถึงจำนวนวิธีหรือจำนวนรูปแบบของเหตุการณ์หนึ่ง เราจะใช้สัญลักษณ์แทนด้วย

$$|E| \text{ หรือ } n(E)$$

ตัวอย่างโจทย์

หากนักสืบคนหนึ่งต้องการเดินทางไปยังเมืองหนึ่ง โดยนักสืบคนนี้มีวิธีเดินทางอยู่หลายเส้นทางด้วยกัน ได้แก่

1. การเลือกใช้รถประจำทาง ซึ่งเลือกได้ 3 คัน คือ รถประจำทางสาย 111, 222 และ 333 ตามลำดับ
2. การใช้รถไฟฟ้า โดยเลือกได้ 2 สายคือ สายสีฟ้าและสายสีเขียว การ
3. การเดินทางด้วยทางเรือ (ได้เพียง 1 เส้นทาง)

นักสืบคนนี้จะมีวิธีเดินทางไปยังอีกเมืองหนึ่งได้ทั้งหมดกี่วิธี

$|E| =$ ____

The Product Rule

กฎการคูณ (Product Rule)

ในเหตุการณ์ใด ๆ ก็ตาม ที่สามารถแบ่งออกมาเป็นหลายขั้นตอนได้ เราจะนำจำนวนวิธีที่สามารถทำได้ในแต่ละขั้นตอนมา**คูณกัน** เพื่อให้ได้จำนวนวิธีหรือรูปแบบทั้งหมดของเหตุการณ์ที่เราสนใจ

ตัวอย่างโจทย์

ตู้นิรภัยหนึ่งเก็บทองเอาไว้จำนวนมาก โดยรหัสที่ใช้ในการปลดล็อคตู้นิรภัยนี้มีทั้งหมด 5 หลัก โดยที่ หลักที่ 1 – 3 เป็นตัวอักษรภาษาอังกฤษตัวพิมพ์ใหญ่ที่ไม่ซ้ำกันในทุกตำแหน่ง และอีก 2 หลักต่อมาคือตัวเลขตั้งแต่ 0 – 9 (สามารถใช้ตัวเลขซ้ำกับหลักอื่นได้) จงหาว่าตู้นิรภัยนี้จะมีรหัสผ่านที่เป็นไปได้กี่รูปแบบ

______ ______ ______ ______ ______

จากปัญหาในข้อนี้ สามารถแบ่งขั้นตอนได้ทั้งหมด 5 ขั้นตอน นั่นคือ

ขั้นตอนที่ 1 ระบุรหัสผ่านหลักที่ 1 สามารถระบุได้ทั้งหมด ________________ รูปแบบ

ขั้นตอนที่ 2 ระบุรหัสผ่านหลักที่ 2 โดยที่ ______________________________________
สามารถระบุได้ทั้งหมด ________________ รูปแบบ

ขั้นตอนที่ 3 ระบุรหัสผ่านหลักที่ 3 โดยที่ ______________________________________
สามารถระบุได้ทั้งหมด ________________ รูปแบบ

ขั้นตอนที่ 4 ระบุรหัสผ่านหลักที่ 4 สามารถระบุได้ทั้งหมด ________________ รูปแบบ

ขั้นตอนที่ 5 ระบุรหัสผ่านหลักที่ 5 สามารถระบุได้ทั้งหมด ________________ รูปแบบ

ดังนั้น ตู้นิรภัยนี้ จะมีรหัสผ่านทั้งหมด ____________________________________ รูปแบบ

Factorial

แฟกทอเรียล (Factorial)

แฟกทอเรียล (Factorial) เป็นเครื่องหมายการดำเนินการทางคณิตศาสตร์ โดย $n!$ จะให้ผลลัพธ์เป็นผลคูณตั้งแต่ 1 จนถึง n (n จะต้องเป็นจำนวนเต็มบวกและ 0 เท่านั้น)

$$n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 2 \times 1$$

โดยเครื่องหมายแฟกทอเรียลนี้ มักจะใช้บอก**จำนวนวิธีหรือจำนวนรูปแบบของการสลับสิ่งต่าง ๆ แบบอิสระในแนวเส้นตรง**

ตัวอย่างโจทย์

หากตำรวจสามารถจับผู้ร้ายได้ 5 คน คือ นาย A, B, C และ D ตามลำดับ และต้องการจะถ่ายรูปของผู้ร้ายทั้ง 4 นี้ยืนเรียงกัน ตำรวจจะมีวิธีการจัดแถวของผู้ร้ายได้ทั้งหมดกี่วิธี

______ ______ ______ ______

จากปัญหาในข้อนี้ สามารถแบ่งขั้นตอนได้ทั้งหมด 4 ขั้นตอน นั่นคือ

ขั้นตอนที่ 1 จัดผู้ร้ายคนที่ 1 ลงในตำแหน่งที่ 1 ได้ทั้งหมด ____________________ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดผู้ร้ายคนที่ 2 ลงในตำแหน่งที่ 2 ได้ทั้งหมด ____________________ วิธี

ขั้นตอนที่ 3 จัดผู้ร้ายคนที่ 3 ลงในตำแหน่งที่ 3 ได้ทั้งหมด ____________________ วิธี

ขั้นตอนที่ 4 จัดผู้ร้ายคนที่ 4 ลงในตำแหน่งที่ 4 ได้ทั้งหมด ____________________ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีการจัดผู้ร้ายทั้งหมด ________________________________ วิธี

หรือเขียนเป็นแฟคทอเรียลได้เป็น ____________________ วิธี

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการถ่ายรูปนักเรียนทั้งหมด 15 คนซึ่งยืนเรียงกันในแนวหน้ากระดาน จะมีวิธีการจัดแถวนักเรียนทั้งหมด _____________ วิธี

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการสลับตัวอักษรจากคำว่า CPE38 โดยที่ 3 ตัวหน้าจะต้องเป็นตัวอักษรเสมอ และ 2 ตัวหลังจะต้องเป็นตัวเลขเสมอ เช่น PEC83 CEP38 จะสามารถสลับได้ทั้งหมดกี่วิธี

______ ______ ______ ______ ______

จากปัญหาในข้อนี้ สามารถแบ่งขั้นตอนได้ทั้งหมด 2 ขั้นตอน นั่นคือ

ขั้นตอนที่ 1 จัดเรียงตัวอักษร C P และ E ลงในตำแหน่งที่ 1 2 และ 3

ได้ทั้งหมด ______________ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 จัดเรียงตัวเลข 3 และ 8 ลงในตำแหน่งที่ 4 และ 5

ได้ทั้งหมด ______________ วิธี

ดังนั้น จะสามารถสลับตัวอักษรได้ทั้งหมด ____________________ วิธี

The Sum Rule

กฎการบวก (Sum Rule)

ในเหตุการณ์ใด ๆ ก็ตาม ที่เราจะต้องพิจารณาถึงเงื่อนไขหรือกรณีที่ไม่สามารถทำร่วมกันได้ เราจะต้องนำจำนวนวิธีที่คิดได้ในแต่ละกรณีมา**บวกกัน** จึงจะได้รูปแบบทั้งหมดของเหตุการณ์ที่สนใจ

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการเลือกซื้ออาหารและเครื่องดื่มจากร้าน A หรือร้าน B ร้านใดร้านหนึ่ง โดยร้าน A มีอาหารให้เลือกซื้อ 3 ชนิด และเครื่องดื่มอยู่ 5 ชนิด และร้าน B มีอาหารให้เลือกซื้อ 6 ชนิด และเครื่องดื่มอยู่ 6 ชนิดเช่นเดียวกัน จงหาว่าจะมีวิธีการเลือกซื้ออาหารและเครื่องดื่มอยู่ทั้งหมดกี่วิธี

ปัญหาในข้อนี้ จะต้องแบบออกเป็น **2 กรณี** นั่นคือ

กรณีที่ 1 เลือกซื้อของจากร้าน A

ในการซื้ออาหารและเครื่องดื่มจากร้าน A สามารถทำได้ทั้งหมด ________________ วิธี

กรณีที่ 2 เลือกซื้อของจากร้าน B

ในการซื้ออาหารและเครื่องดื่มจากร้าน B สามารถทำได้ทั้งหมด ________________ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีการเลือกซื้ออาหารและเครื่องดื่มได้ทั้งหมด ______________________ วิธี

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการสลับตัวอักษร CPE38 โดยสามารถสลับได้ 2 รูปแบบ คือ

1. สลับโดยให้ตัวเลขอยู่หัวและท้ายเท่านั้น เช่น 3CPE8 8PEC3 เป็นต้น
2. สลับโดยให้ตัวเลข 3 อยู่ตรงกลาง นอกนั้นสลับที่อย่างไรก็ได้ เช่น CP3E8 P83EC

จากรูปแบบที่สามารถสลับได้นี้ จะสามารถสลับตัวอักษรได้กี่รูปแบบ

ปัญหาในข้อนี้สามารถแบ่งออกได้เป็น **2 กรณี**

กรณีที่ 1 สลับโดยให้ตัวเลขอยู่หัวและท้ายเท่านั้น

ขั้นตอนที่ 1 ____

จะสามารถทำได้ทั้งหมด ______________ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ____

จะสามารถทำได้ทั้งหมด ______________ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีการสลับทั้งหมด ______________________________ วิธี

กรณีที่ 2 สลับโดยให้ตัวอักษรตัวเลข 3 อยู่ตรงกลาง

ขั้นตอนที่ 1 ____

จะสามารถทำได้ทั้งหมด ______________ วิธี

ขั้นตอนที่ 2 ____

จะสามารถทำได้ทั้งหมด ______________ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีการสลับทั้งหมด ______________________________ วิธี

ดังนั้น จะมีวิธีการสลับตัวอักษรทั้งหมด __________________________ วิธี

The Subtraction Rule

ในหลาย ๆ เหตุการณ์ อาจเกิดการแบ่งกรณีเป็นจำนวนมาก ซึ่งทำให้การคิดคำนวณเป็นไปได้ยาก หรืออาจใช้เวลายาวนาน ในหลาย ๆ ครั้ง เราจึงอาจเลี่ยงการคำนวณหาวิธีและรูปแบบของเหตุการณ์ที่เราสนใจ และไป**คำนวณเหตุการณ์ที่เราไม่สนใจแทน**

กำหนดให้ S แทนเหตุการณ์ทั้งหมดที่สามารถเกิดขึ้นได้

E แทนเหตุการณ์ที่เราสนใจ

$\bar{E}$ หรือ $\neg E$ แทนเหตุการณ์ที่**เราไม่สนใจ**

จะได้ $$|E| = |S| - |\neg E|$$

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการสร้าง bit string ที่มีความยาวทั้งหมด 32 ตัวอักษร โดยจะต้องไม่เป็น 0 ทั้งหมด และ 1 ทั้งหมด

Bit String หมายถึง ชุดข้อความที่แต่ละตัวอักษรจะเป็นไปได้เพียงแค่ 0 และ 1 เท่านั้น เช่น 0011 11000 11111000 1111111 000000

ปัญหาในข้อนี้หากเราสามารถลดขั้นตอนของการคำนวณได้ โดยการหา**จำนวน Bit String ที่เป็นไปได้ทั้งหมด** แล้วจึงนำมาหักออกด้วย **จำนวน Bit String ที่เป็น 0 และ 1 ทั้งหมด**

จำนวน Bit String ที่เป็นไปได้ทั้งหมด มีอยู่ทั้งหมด ______________________ รูปแบบ

จำนวน Bit String ที่เป็น 0 และ 1 ทั้งหมด มีอยู่ทั้งหมด ___________________ รูปแบบ

ดังนั้น bit string ที่มีความยาวทั้งหมด 32 ตัวอักษร โดยจะต้องไม่เป็น 0 ทั้งหมด และ 1 ทั้งหมด มีทั้งหมด ___________________________ รูปแบบ

Principle of Inclusion – Exclusion

ในหลาย ๆ เหตุการณ์ เราอาจสนใจในกรณีที่สามารถเกิดขึ้นได้ 2 เงื่อนไข เมื่อนำทั้ง 2 กรณีมาบวกกันด้วย Sum Rule แล้ว อาจเกิดกรณีที่ทับซ้อนกันได้ ซึ่งหากเกิดกรณีที่ทับซ้อนกันจะต้อง**ลบกรณีที่ทับซ้อนกันออกด้วย**

$$|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$$

โดยที่ $E \cup F$ หมายถึง จำนวนวิธีหรือรูปแบบที่จะเกิดเหตุการณ์ E หรือ F

$E \cap F$ หมายถึง จำนวนวิธีหรือรูปแบบที่จะเกิดเหตุการณ์ E และ F พร้อมกัน

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการสลับตัวอักษร CPE38 โดยสามารถสลับได้ 2 รูปแบบ คือ

1. สลับโดยให้ตัวเลขอยู่หัวและท้ายเท่านั้น เช่น 3CPE8 8PEC3 เป็นต้น
2. สลับโดยให้ตัวอักษร E อยู่ตรงกลาง นอกนั้นสลับที่อย่างไรก็ได้ เช่น C8EPC 8PEC3

จากรูปแบบที่สามารถสลับได้นี้ จะสามารถสลับตัวอักษรได้กี่รูปแบบ

ให้ E แทนเหตุการณ์ "สลับโดยให้ตัวเลขอยู่หัวและท้ายเท่านั้น"

F แทนเหตุการณ์ "สลับโดยให้ตัวอักษร E อยู่ตรงกลาง นอกนั้นสลับที่อย่างไรก็ได้"

ปัญหาในข้อนี้ เราจะพบว่า ทั้ง 2 เหตุการณ์นั้น จะสามารถเกิดเหตุการณ์ที่ซ้ำกันได้ นั่นคือ

$E \cap F$ แทนเหตุการณ์ ____

คำนวณ จำนวนวิธีในการสลับโดยให้ตัวเลขอยู่หัวและท้ายเท่านั้น

คำนวณ จำนวนวิธีในการสลับโดยให้ตัวอักษร E อยู่ตรงกลาง นอกนั้นสลับที่อย่างไรก็ได้

คำนวณ จำนวนวิธีในการสลับโดยให้ตัวอักษร E อยู่ตรงกลาง และตัวเลขอยู่หัวและท้าย

ดังนั้น จำนวนวิธีในการสลับทั้งหมด คือ ____ วิธี

The Division Rule

ในหลาย ๆ เหตุการณ์ อาจมีเงื่อนไขบางอย่างที่ทำให้จำนวนวิธีที่ได้ในหลาย ๆ รูปแบบถูกมองว่าวิธีเดียวกัน ซึ่ง<u>หากมีจำนวน n กรณีที่ถูกมองว่าเป็นวิธีเดียวกัน เราจะต้อง**หารจำนวนวิธีทั้งหมดที่คำนวณได้ออกด้วย n**</u>

<u>การสลับที่ในแนววงกลม</u>

สมมติว่ามีคนอยู่ 5 คนคือ A B C D และ E เราทราบว่า ถ้า 5 คนนี้ยืนเรียงกันในแนวเส้นตรง จะมีวิธีการสลับที่ได้ทั้งหมด $5!$ วิธี ทว่า หากเรานำมาจัดเรียงในรูปแบบของวงกลมแล้ว เราจะพบว่าวิธีต่อไปนี้ทั้งหมด 5 วิธี จะถูกนับเป็นวิธีเดียวกัน

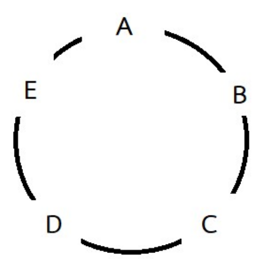
A B C D E

B C D E A

C D E A B

D E A B C

E A B C D



หมายความว่า หากเรามีสิ่งของที่ต้องการสลับในแนววงกลมอยู่ทั้งหมด **n** สิ่ง เราจะมองว่าทุก ๆ **n** วิธีเป็นวิธีเดียวกัน ทำให้การจัดเรียงสิ่งของในแนววงกลม จะสามารถทำได้ ดังนี้

$$
\begin{aligned}
|\, E \,| = \frac{n!}{n} &= \frac{n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times3\times2\times1}{n} \\
&= (n-1)\times(n-2)\times(n-3)\times\cdots\times3\times2\times1 \\
&= (n-1)!
\end{aligned}
$$

ตัวอย่างโจทย์

ครอบครัวหนึ่งมีสมาชิกทั้งหมด 5 คน โดยครอบครัวนี้ได้ไปทานอาหารที่ร้านอาหารแห่งหนึ่งซึ่งมีโต๊ะเป็นรูปวงกลม ครอบครัวนี้จะมีวิธีในการนั่งรอบโต๊ะนี้ทั้งหมดกี่วิธี

____ วิธี

<u>การสลับของซ้ำในแนวเส้นตรง</u>

สมมติว่าเรามีลูกบอลอยู่ 5 ลูก โดยแบ่งออกเป็นสีเขียว 1 ลูก (กำหนดให้เป็น G) และสีฟ้า 3 ลูก สีแดง 1 ลูก (กำหนดให้เป็น R) ถ้าเรามองว่าลูกบอลสีฟ้าทุกลูกมีลักษณะที่แตกต่างกันทั้งหมด (กำหนดให้เป็น B1 B2 B3) ตามลำดับ เราจะสามารถจัดวางลูกบอลนี้ในแนวเส้นตรงได้ทั้งหมด $5!$ วิธี

แต่เมื่อไรก็ตามที่เรามองว่าลูกบอลสีฟ้าทั้ง 3 ลูกมีลักษณะเหมือนกันทุกประการ นั่นหมายความว่า วิธีต่อไปนี้ทั้งหมด จะนับว่าเป็นวิธีเดียวกัน

R G B1 B2 B3　　R G B2 B1 B3　　R G B3 B1 B2

R G B1 B3 B2　　R G B2 B3 B1　　R G B3 B2 B1

โดยจะถูกมองว่าเป็น R G B B B ทั้งหมด ซึ่งวิธีที่ซ้ำกันทั้งหมดนี้ จะเกิดจากการที่ลูกบอลสีฟ้า 3 ลูก สามารถสลับตำแหน่งได้ทั้งหมด $3!$ วิธี

หมายความว่า หากเรามีสิ่งของที่ต้องการสลับในแนวเส้นตรงอยู่ **n** สิ่ง โดยมีสิ่งของที่ซ้ำกัน เราจะสามารถหาจำนวนวิธีทั้งหมดได้ ดังนี้

$$|\,E\,| = \frac{n!}{m_1!\,m_2!\,m_3!\,\ldots}$$

โดยที่ m_1, m_2, m_3, ... หมายถึงสิ่งของที่ซ้ำกัน (ถูกมองว่าเหมือนกัน)

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการสร้างคำใหม่จากการสลับตัวอักษร COMCAMP จะสามารถสร้างได้ทั้งหมดกี่คำ (รวมคำว่า COMCAMP ด้วย)

จากคำว่า COMCAMP เราพบว่า มีตัวอักษร C ซ้ำอยู่ ____ ตัว และ M ซ้ำอยู่ ____ ตัว

ดังนั้น สามารถสร้างคำใหม่ได้ทั้งหมด ______________________________ คำ

Permutation

การเรียงสับเปลี่ยน (Permutation) เป็นการกล่าวถึงวิธีการจัดเรียงสิ่งของในแนวเส้นตรง โดยที่จำนวนสิ่งของกับจำนวนตำแหน่งที่มีอยู่ไม่สัมพันธ์กัน (ไม่เท่ากัน) ซึ่งทำให้ต้องมีการเลือกสิ่งของบางส่วนมาจัดเรียง (ในกรณีที่จำนวนสิ่งของมีมากกว่าจำนวนตำแหน่ง) หรือเลือกสิ่งของไปวางไว้ในบางตำแหน่ง (ในกรณีที่จำนวนสิ่งของมีน้อยกว่าจำนวนตำแหน่ง)

หากเรามีสิ่งของอยู่จำนวน n สิ่งโดยต้องการเลือกนำมาจัดเรียงทั้งหมด r สิ่ง จะสามารถทำได้ดังนี้

$$P_{(n,r)} = {}^{\mathrm{n}}P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการเลือกตัวอักษรจากคำว่า AMONGUS มาจำนวน 3 ตัวอักษรเพื่อนำมาสร้างเป็นคำใหม่ จะสามารถสร้างได้ทั้งหมดกี่คำ

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการเลือกตัวแทนจากฝั่งผู้ชายมาทั้งหมด 3 คนจากทั้งหมด 5 คนเพื่อให้เข้ารับตำแหน่ง A, B และ C และฝั่งผู้หญิงมาทั้งหมด 2 คนจากทั้งหมด 5 คน เพื่อให้เข้ารับตำแหน่ง D และ E จะสามารถทำได้ทั้งหมดกี่วิธี

Combination

การจัดหมู่ (Combination) เป็นการกล่าวถึงวิธีการเลือกสิ่งของมาจำนวนหนึ่งจากทั้งหมด โดยการจัดหมู่จะแตกต่างกับการเรียงสับเปลี่ยนตรงที่ การจัดหมู่จะไม่สนใจตำแหน่งว่าของสิ่งใดจะต้องอยู่ที่ตำแหน่งใด

หากเรามีสิ่งของอยู่จำนวน n สิ่งโดยต้องการเลือกมาทั้งหมด r สิ่ง จะสามารถทำได้ดังนี้

$$\mathrm{C}_{\mathrm{n,r}} = {}^{\mathrm{n}}\mathrm{C}_r = \binom{n}{r} = \frac{{}^{\mathrm{n}}P_r}{r!} = \frac{n!}{(n-r)!\,r!}$$

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการเลือกตัวอักษรจากคำว่า AMONGUS มาจำนวน 3 ตัวอักษร จะสามารถเลือกได้ทั้งหมดกี่วิธี

ตัวอย่างโจทย์

หากต้องการนำดอกไม้ที่ลักษณะเหมือนกันทุกประการจำนวน 3 ดอก ไปวางไว้ในแจกันที่วางเรียงต่อกัน 5 ใบ โดยแจกัน 1 ใบสามารถใส่ดอกไม้ได้เพียง 1 ดอกเท่านั้น จะมีวิธีการวางดอกไม้ทั้งหมดกี่วิธี

Star & Bar Technique

Star & Bar เป็นเทคนิคที่มักจะใช้ในการแบ่งสิ่งของจำนวนหนึ่งที่มีลักษณะเหมือนกันทุกประการเป็นกลุ่มจำนวนหนึ่ง โดยในแต่ละกลุ่มจะมีสิ่งของนั้นอยู่กี่ชิ้นก็ได้ (รวมถึงไม่มีสิ่งของนั้นอยู่ด้วย)

สมมติว่าเรามีขนมอยู่ทั้งหมด 5 ชิ้น ต้องการจะแบ่งให้เด็ก 5 คน เราจะสามารถแบ่งได้หลากหลายวิธี ดังนี้

วิธีที่	**เด็กคนที่ 1**	**เด็กคนที่ 2**	**เด็กคนที่ 3**	**เด็กคนที่ 4**	**เด็กคนที่ 5**
1	*	*	*	*	*
2	* *		* *		*
3		* * * * *			
4			* * *		* *
…	…	…	…	…	…

หลักการในการทำ Star & Bar

1. ให้นำจำนวนสิ่งของทั้งหมดมาวางเรียงต่อกัน *(ในกรณีนี้มีจำนวนทั้งหมด 5 ชิ้น)*

   ● ● ● ● ●

2. หากต้องการแบ่งออกเป็น **n** กลุ่ม ให้นำไม้กั้นจำนวน **n-1** อันไปวางเรียงต่อจากจำนวนสิ่งของเดิม *(ในกรณีนี้มีทั้งหมด 5 คน ให้นำไม้กั้นไปวางเพิ่ม 4 อัน)*

   ● ● ● ● ● ❙ ❙ ❙ ❙

3. จากขั้นตอนที่ 1 และ 2 เราจะพบว่าสิ่งของหรือตำแหน่งรวมกันทั้งหมดเท่ากับ **จำนวนสิ่งของ + (จำนวนกลุ่ม – 1)** ช่อง ซึ่งเราจะต้อง<u>**เลือกวางไม้กั้น**</u>ลงไปทั้งหมด **จำนวนกลุ่ม – 1** ช่อง

   ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___ ___

ดังนั้น จากการเลือกวางไม้กั้นลงไปในช่องว่าง เราจะสามารถเลือกวางได้ทั้งหมด

_______________ วิธี โดยช่องที่เหลือจะกลายเป็นจำนวนสิ่งของโดยอัตโนมัติ

เมื่อเรามีสิ่งของอยู่จำนวน **n** สิ่งที่เหมือนกันทุกประการ และต้องการนำไปจัดกลุ่มทั้งหมด **r** กลุ่ม โดยที่แต่ละกลุ่มจะมีสิ่งของอยู่อย่างน้อย 1 สิ่งหรือไม่มีสิ่งของอยู่เลยก็ได้ จะสามารถทำได้ทั้งหมด $\binom{n+r-1}{r-1} = \binom{n+r-1}{n}$ วิธี

ตัวอย่างโจทย์

มีขนมอยู่ทั้งหมด 5 ชิ้น ต้องการจะแบ่งให้เด็ก 5 คน เราจะสามารถแบ่งได้ทั้งหมดกี่วิธี

ตัวอย่างโจทย์

หากเราทราบว่าตัวเรามีธนบัตรประเทศไทยอยู่จำนวน 5 ใบ แต่ไม่ทราบว่าแต่ละใบมีมูลค่าเท่าใด (มีโอกาสเป็นธนบัตร 20, 50, 100, 500, 1000 บาท ก็ได้) จงหาว่าเราจะมีรูปแบบที่สามารถครอบครองธนบัตรได้ทั้งหมดกี่รูปแบบ

ตัวอย่าง

รูปแบบที่	20	50	100	500	1000
1	1 ใบ	0 ใบ	2 ใบ	2 ใบ	0 ใบ
2	5 ใบ	0 ใบ	0 ใบ	0 ใบ	0 ใบ
3	0 ใบ	3 ใบ	0 ใบ	2 ใบ	0 ใบ
4	1 ใบ	1 ใบ	1 ใบ	1 ใบ	1 ใบ

ตัวอย่างโจทย์

เมื่อ w, x, y, z เป็นจำนวนเต็มบวก โดยที่ $w + x + y + z = 16$ แล้ว จงหาว่าจะมีคำตอบของ (w, x, y, z) ทั้งหมดกี่รูปแบบ

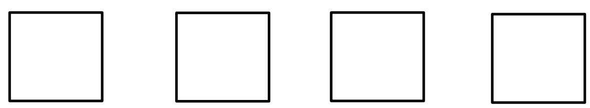
The Pigeonhole Principle

หลักการรังนกพิราบ (Pigeonhole Principle) เป็นหลักการที่เราจะศึกษาว่า เราจะต้องหากลุ่มตัวอย่างอย่างน้อยเท่าใด เพื่อจะทำให้รับประกันได้ว่าเหตุการณ์ที่เราสนใจจะเกิดขึ้น

หลักการสำคัญ คือ เราจะต้องคำนึงถึง**กรณีที่เลวร้ายที่สุดที่สามารถเกิดขึ้นได้** ในการเลือกกลุ่มตัวอย่างมาแล้วยังคงทำให้<u>เรายังไม่ได้สิ่งที่สนใจ</u>

ตัวอย่างโจทย์

หากเรามีกล่องอยู่ทั้งหมด 4 กล่อง เราจะต้องใช้ลูกบอลทั้งหมดกี่ลูก จึงจะมั่นใจได้ว่ามีอย่างน้อย 1 กล่องที่มีลูกบอลอย่างน้อย 2 ลูก



กรณีที่เลวร้ายที่สุดที่สามารถเกิดขึ้นได้ คือ

ดังนั้น จำนวนลูกบอลที่จะทำให้มั่นใจได้ว่ามีอย่างน้อย 1 กล่องที่มีลูกบอลอย่างน้อย 2 ลูกคือ ____________________ ลูก

ตัวอย่างโจทย์

เราจะต้องมีนักเรียนจำนวนทั้งหมดกี่คน จึงจะมั่นใจได้ว่ามีจำนวนนักเรียนอย่างน้อย 3 คน ที่เกิดในวันเดียวกันอย่างน้อย 1 วัน

โจทย์พิเศษ

การ์ดของเกม UNO จะประกอบสีที่ต่างกัน 4 สี คือ สีแดง สีเขียว สีเหลือง และสีน้ำเงิน โดยไพ่แต่ละสี จะประกอบไปด้วยตัวเลข 0 – 9 อย่างละ 2 ใบและมีไพ่พิเศษจำนวน 3 ใบคือ ไพ่แบน ไพ่ย้อนกลับ และไพ่ +2 อย่างละ 2 ใบ นอกจากนี้ยังมีไพ่พิเศษอีก 2 ชนิดคือ +4 และไพ่เปลี่ยนสีอย่างละ 4 ใบ รวมทั้งหมดเป็น 108 ใบ

หากเราสร้างกติกาใหม่ โดยกติกาบอกว่า ในตอนเริ่มเกม ผู้เล่นจะต้องจั่วไพ่จนกว่าจะเจอไพ่เปลี่ยนสีครบ 2 ใบ ถ้าเราเป็นผู้ที่เริ่มจั่วไพ่ก่อน จงหาว่าในกรณีที่เลวร้ายที่สุด เรามีไพ่บนมือจำนวนกี่ใบ

ModCom Freshy mystery 2024

Discrete Probability

ความน่าจะเป็น เห็นแล้วจะเป็นลม

Introduction to Probability

ความน่าจะเป็น (Probability) คือ วิธีการทางคณิตศาสตร์ซึ่งใช้เพื่ออธิบายความไม่แน่นอนของเหตุการณ์ เพื่อวัดความเป็นไปได้ที่จะเกิดเหตุการณ์นั้น ๆ

Keywords (**คำศัพท์**)

1. **การทดลองสุ่ม (Random Experiment)** กระบวนการที่ให้ผลลัพธ์บางอย่าง
2. **ปริภูมิตัวอย่าง (Sample Space** หรือในหลาย ๆ ครั้งถูกเรียกว่า universe) คือ เซตของผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม
3. **เหตุการณ์ (Event)** คือ เซตใด ๆ ที่เป็นสับเซตของปริภูมิตัวอย่าง กล่าวคือ เป็นผลลัพธ์ที่เป็นไปได้จากการทดลองสุ่ม (โดยส่วนใหญ่แล้วจะพูดถึงสิ่งที่เราสนใจ)

เมื่อกำหนดให้ E เป็นเหตุการณ์ใด ๆ ที่เราสนใจ เราจะแทนความน่าจะเป็นที่ E จะเกิดขึ้นด้วยสัญลักษณ์ $P(E)$ โดยที่ $0 \leq P(E) \leq 1$ เสมอ

นิยามของความน่าจะเป็น

ถ้า S คือ sample space ของเหตุการณ์ทั้งหมด (จากการทดลองสุ่มหนึ่ง) และ E คือเหตุการณ์ใน sample space S เราสามารถสรุปได้ว่า

$$P(E) = \frac{n(E)}{n(S)} = \frac{|E|}{|S|}$$

โดยที่ $n(E)$ หรือ $|E|$ คือ จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดในเหตุการณ์

และ $n(S)$ หรือ $|S|$ คือ จำนวนผลลัพธ์ทั้งหมดใน sample space S

ตัวอย่างโจทย์

กล่องใบหนึ่งมีลูกบอลสีฟ้าทั้งหมด 4 ลูก ลูกบอลสีแดงอยู่ 5 ลูก แล้วความน่าจะเป็นในการหยิบลูกบอลสีแดงเป็นเท่าใด

ตัวอย่างโจทย์

จงหาความน่าจะเป็นของการทอยลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน โดยที่ผลลัพธ์ของหน้าลูกเต๋ารวมกันแล้วได้ 7 พอดี

Probability of Complements

เมื่อ E แทนเหตุการณ์ใด ๆ เราจะใช้สัญลักษณ์

$$\neg E \text{ หรือ } \bar{E} \text{ หรือ } E'$$

ซึ่งจะมีความหมายว่า **ไม่เกิดเหตุการณ์ E ขึ้น**

โดยเราสามารถหาความน่าจะเป็นของ E' หรือความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ E ไม่เกิดขึ้นได้ดังนี้

$$p(\neg E) = 1 - p(E)$$

ตัวอย่างโจทย์

จงหาความน่าจะเป็นของการทอยลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน โดยที่ผลลัพธ์ของหน้าลูกเต๋ารวมกันแล้ว**ไม่ได้** 7

Probability of Inclusion-Exclusion

ในบางครั้งเหตุการณ์บางเหตุการณ์ที่เราสนใจอาจมาในรูปแบบของเงื่อนไข โดยสามารถเกิดเงื่อนไขที่ 1 หรือเงื่อนไขที่ 2 ก็ได้

โดยหากเกิดเหตุการณ์เช่นนี้ (เหตุการณ์ที่ 1 หรือ 2) เราจำเป็นจะต้องใช้ความสัมพันธ์ดังนี้

$$p(E_1 \cup E_2) = p(E_1) + p(E_2) - p(E_1 \cap E_2)$$

โดยที่ $p(E_1 \cup E_2)$ หมายถึง ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ E_1 **หรือ** E_2 จะเกิดขึ้น

$p(E_1 \cap E_2)$ หมายถึง ความน่าจะเป็นที่เหตุการณ์ E_1 **และ** E_2 จะเกิดขึ้น

ตัวอย่างโจทย์

จงหาความน่าจะเป็นของการทอยลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน โดยที่มีลูกเต๋าอย่างน้อย 1 ลูกที่มีผลลัพธ์เป็น 3 หรือผลรวมของหน้าลูกเต๋าทั้งสองเป็น 6

Probability Theory

เมื่อ S แทน sample space ผลลัพธ์ทั้งหมดที่เป็นไปได้ของการทดลองสุ่ม แล้วจะได้ว่าความน่าจะเป็นของผลลัพธ์ทั้งหมดใน S รวมกันจะมีค่าเท่ากับ 1 เสมอ

$$\sum_{s \in S} p(s) = 1$$

ตัวอย่างโจทย์

ในการโยนสุ่มหัวก้อย ความน่าจะเป็นที่จะได้ผลลัพธ์เป็น H (หัว) และ T (ก้อย) ควรมีค่าเป็นเท่าใด ถ้าเหรียญที่ใช้ในการโยนสุ่มมีความเที่ยงตรง (โอกาสออกหัวและก้อยมีค่าเท่ากัน)

ตัวอย่างโจทย์

จากคำถามข้อที่แล้ว ความน่าจะเป็นของ H และ T ควรมีค่าเป็นเท่าไหร่ ถ้าเหรียญ**ไม่เที่ยงตรง**และมีโอกาสที่จะออกหัวมากกว่าก้อยเป็นสองเท่า

Conditional Probability

Conditional Probability หมายถึง ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ใด ๆ ที่เกิดขึ้นภายใต้เหตุการณ์หนึ่ง

ตัวอย่างสถานการณ์

สมมติว่ามีกล่องอยู่ 2 ใบ **กล่องใบแรก**มีลูกบอลสีแดงอยู่ 5 ลูก สีฟ้าอยู่ 2 ลูก และ**กล่องใบที่สอง**มีลูกบอลสีแดงอยู่ 3 ลูก และลูกบอลสีฟ้าอยู่ 4 ลูก

แสดงว่า ความน่าจะเป็นที่จะ<u>หยิบลูกบอลจากกล่องใบแรก</u>ได้ลูกบอลสีแดงเท่ากับ 5/7

ซึ่งสังเกตได้ว่า ความหมายของความน่าจะเป็นนี้ จะคนละความหมายกับคำว่า “ความน่าจะเป็นที่จะหยิบได้ลูกบอลสีแดง<u>**และ**หยิบจากกล่องใบแรก</u>” เนื่องจากหากเรากล่าวเช่นนี้ แสดงว่า sample space ของเราจะสนใจในกรณีที่หยิบลูกบอลจากกล่องใบที่ 2 ด้วย ทำให้เราจะได้ความน่าจะเป็นเท่ากับ 5/14

ในขณะที่ “ความน่าจะเป็นที่จะ<u>หยิบลูกบอลจากกล่องใบแรก</u>ได้ลูกบอลสีแดง” sample space ของเราจะสนใจเฉพาะกรณีที่หยิบลูกบอลจากกล่องใบที่ 1 เท่านั้น

<u>**นิยาม**</u> ความน่าจะเป็นที่จะเกิดเหตุการณ์ “E ภายใต้เหตุการณ์ F” (“E given F”) สามารถหาได้จาก

$$p(E \mid F) = \frac{p(E \cap F)}{p(F)}$$

ตัวอย่างโจทย์

ครอบครัวหนึ่งมีลูกสองคน โดยที่มีลูกอย่างน้อยหนึ่งคนที่เป็นลูกชาย จงหาความน่าจะเป็นที่ลูกทั้งสองคนของครอบครัวนี้เป็นลูกชาย (กำหนดให้ความน่าจะเป็นที่ลูกจะเป็นเพศหญิงและเพศชายมีค่าเท่ากัน และเพศของลูกคนหนึ่งไม่ส่งผลต่อเพศของลูกอีกคนหนึ่ง)

ตัวอย่างโจทย์

คุณได้ทำการทอยลูกเต๋า 2 ลูกพร้อมกัน และได้ผลรวมของหน้าลูกเต๋าเป็น 7 จงหาความน่าจะเป็นที่มีลูกเต๋าอย่างน้อย 1 ลูกที่ทอยออกหน้าเลข 3

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Bayes' Theorem

Bayes' theorem เป็นในทฤษฎีที่สำคัญมากในทฤษฎีความน่าจะเป็น โดยสามารถใช้ในการหาความน่าจะเป็นของเหตุการณ์ที่ "ไม่สามารถสังเกตุได้" โดยใช้ข้อมูลจากความน่าจะเป็นที่ **"สามารถสังเกตุได้"** ในการคำนวณ

หรือสามารถกล่าวให้เข้าใจอย่างง่ายได้ว่า Bayes' theorem คือ สูตรคำนวณที่ใช้สำหรับคำนวณ "ย้อนกลับ" ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข

$$p(E \mid F) \rightarrow p(F \mid E)$$

กำหนดให้ **E** และ **F** เป็นเหตุการณ์จาก sample space **S** โดยที่ **p(E)** และ **p(F)** ไม่เป็นศูนย์ จะได้ว่า

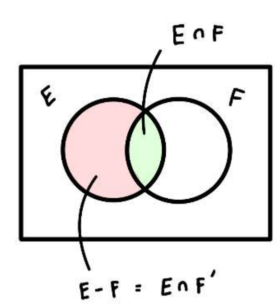
$$p(F \mid E) = \frac{p(E \mid F)\, p(F)}{p(E|F)p(F) + p(E|\neg F)p(\neg F)}$$

หากสังเกตให้ดีแล้ว เราจะพบว่า จริงๆ แล้ว $p(E \mid F)\, p(F) = p(E \cap F)$ ดังนั้น เมื่อลองเปลี่ยนรูปของสมการใหม่ เราจะได้

$$p(F \mid E) = \frac{p(E \cap F)}{p(E \cap F) + p(E \cap \neg F)}$$

ซึ่งก็คือ $p(F \mid E) = \frac{p(E \cap F)}{p(E)}$ นั่นเอง

หมายเหตุ $p(E \cap F) + p(E \cap \neg F) = p(E)$ สามารถอ้างอิงได้จากภาพด้านล่างนี้



ตัวอย่างโจทย์

จงใช้ข้อมูลต่อไปนี้ในการตอบคำถาม

สมมติว่ามีโรคระบาดเกิดขึ้น โดยที่ 1 คนใน 100,000 คนจะติดเชื้อโรคนี้ โดยนักวิจัยได้ทำการสร้างเครื่องตรวจสำหรับโรคนี้ขึ้นมา โดยพบว่าหากนำไปใช้กับผู้ที่ติดเชื้อแล้วจะให้ผลตรวจเป็นบวก (ให้ผลว่าติดเชื้อ) ได้ถูกต้อง 99% ในขณะที่หากนำไปตรวจกับผู้ที่ไม่ได้ติดเชื้อแล้วพบว่าจะมีโอกาสตรวจได้ผลเป็นลบ (ให้ผลว่าไม่ได้ติดเชื้อ) ได้ถูกต้อง 95%

ความน่าจะเป็นที่บุคคลจะติดเชื้อ โดยที่บุคคลนั้นตรวจได้ผลเป็นบวกเป็นเท่าใด

ความน่าจะเป็นที่บุคคลจะไม่ติดเชื้อ โดยที่บุคคลนั้นตรวจได้ผลเป็นลบ