程式人《十分鐘系列》

用十年也搞不懂

Cantor 奇幻的集合論世界

陳鍾誠

2016 年 11 月 17 日

話說

- 《集合論》是數學裡最基礎的東西！

集合論非常簡單

- 基本上就是一個籃子放一堆東西！
- 然後找找《籃子裡面有沒有那個東西》
  …

舉例而言

- 假如 A={3, 7, 11}
  - 那麼 3 就是 A 的元素
  - 但是 5 不是 A 的元素

然後

- 集合可以進行《聯集、交集、差集》等運算！

非常的簡單

但是、鄉民說

- 工程師雖然常常有點宅，
  但他們都還算正常人！

而那些

- 最厲害的數學家也很宅，
  但幾乎都不是正常人！

在集合論裏

- 也有一些不正常的數學家發現了不正常的定理！

話說

- 好的數學家帶你上天堂

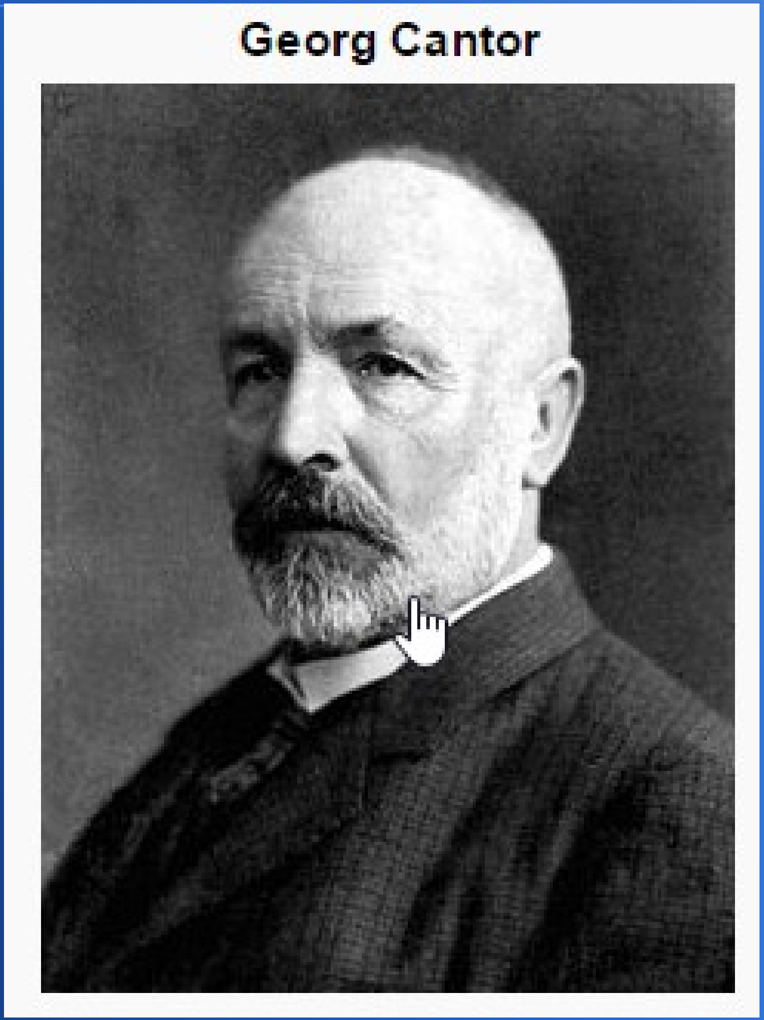
  最好的數學家帶你見閻王！

現在

- 就讓我們來看一個《最好的數學家》...

那個數學家的名字是

- Georg Cantor ...



https://en.wikipedia.org/wiki/Georg_Cantor

翻成中文是

- 格奧爾格・費迪南德・路德維希・菲利普・康托爾

  Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor

1845 年 3 月 3 日

- 康托爾出生於俄國聖彼得堡，他的父親是丹麥商人，母親是俄國音樂家。

康托爾上大學的時候

- 在柏林大學曾受到著名數學家《魏爾斯特拉斯》的教導...

魏爾斯特拉斯是誰？

如果你學微積分的時候

- 數學老師有教你《極限的定義》那些事情...

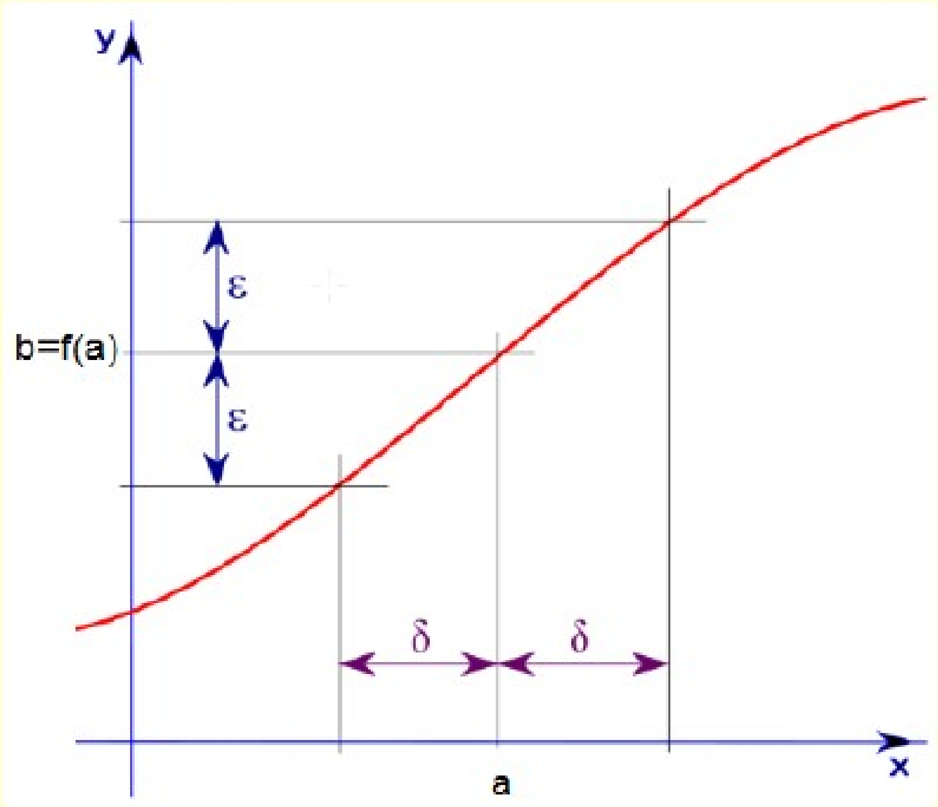
也就是有 ε 和 δ 的那些東東

極限的定義

如果在 x 趨近於 a 時 f(x) 可以「任意接近」 b ，那我們就說 f(x) 趨近於 a 時的極限為 b，其數學符號定義如下。

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

以上定義中的「任意接近」(arbitrarily close to) 的數學意義是：對於任何 $\epsilon > 0$，都存在一個 $\delta > 0$ 使得在 $0 < |x - a| < \delta$ 的情況下會滿足 $|f(x) - b| < \epsilon$ ，如下圖所示。



所以如果您想證明 f(x) 在 x=a 的極限存在，只要證明可以「任意接近」就行了。也就是找出滿足 $|f(x) - b| < \epsilon$ 的 δ 條件，並證明這個條件存在就行了。

那就是

- 《魏爾斯特拉斯》

搞出來的了！

卡爾·魏爾斯特拉斯

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass
(Weierstraß)

出生	1815年10月31日 普魯士王國威斯伐倫省埃尼格爾洛
逝世	1897年2月19日（81歲） 普魯士王國布蘭登堡省柏林
研究領域	數學
機構	柏林工業大學

https://en.wikipedia.org/wiki/Karl_Weierstrass

問題是

- 《魏爾斯特拉斯》為甚麼要搞出這個有 ε 和 δ 的東東！

喔！

- 那個答案很簡單
- 就是因為發明微積分的人，包含《萊布尼茲》和《牛頓》，他們自己都搞不清楚《無限小》到底是甚麼東東！

牛頓版的無限小

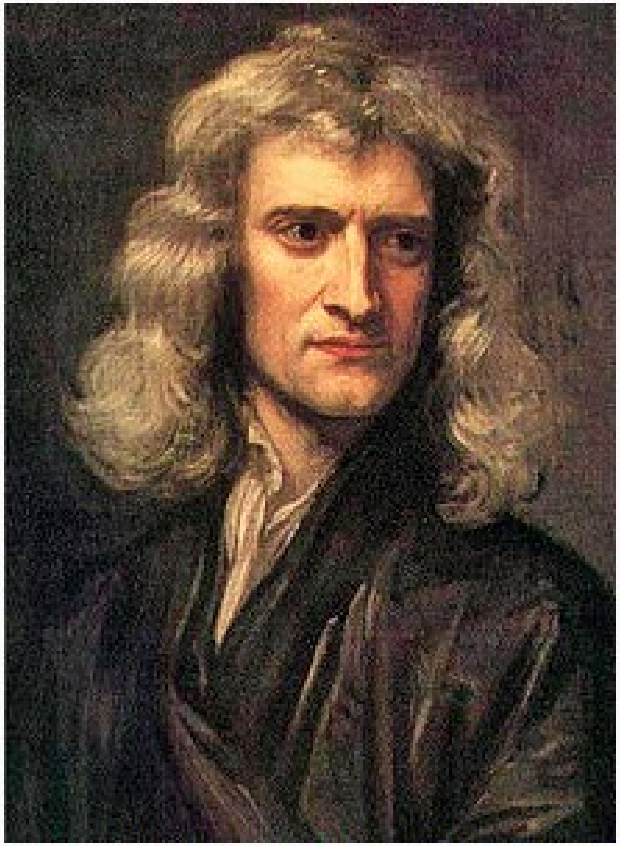
- 叫做流數術(Method of Fluxions)

https://en.wikipedia.org/wiki/Method_of_Fluxions

牛頓在流數術中說

- ... 是為了去了解這個量的比值，並不是在他們消失之前，也不是在消失之後，而是在它們消失之剎那的比值...

Sir Isaac Newton



Portrait of Newton in 1689 by Godfrey Kneller

牛頓的話來自《天才之旅》一書 ：http://www.taaze.tw/sing.html?pid=11100319907

然後萊布尼茲說

- 它將是充分條件，當我們談及《無窮小量》，我們既了解這個量...相當小...
- 既使任何人想要將無窮小視為終極之事物...是可以辦到的...即使他認為這種事情是完全不可能的；
- 它仍是足夠單純地可用來做計算的工具，如同數學家保留虛根而獲得的極大的用處...

Gottfried Wilhelm Leibniz

Portrait by Christoph Bernhard Francke

萊布尼茲的話來自《天才之旅》一書：http://www.taaze.tw/sing.html?pid=11100319907

於是有位柏克萊主教看不下去了

- 他跳出來說：

那麼這些流數是甚麼呢？它們是漸漸消失的無窮小增量，那麼這些漸漸消失的無窮小增量又是甚麼呢？他們既非有限量，也非無窮小量，更非空無一物，我們可否稱之為失去量的鬼魂呢...？

George Berkeley

Portrait of Berkeley by John Smybert, 1727

Born	12 March 1685 County Kilkenny, Ireland
Died	14 January 1753 (aged 67) Oxford, England
Nationality	Irish

柏克萊主教的話來自《天才之旅》一書：http://www.taaze.tw/sing.html?pid=11100319907

於是偉大的柯西只好跳出來澄清

- 當某個歸屬於特定變數的值，逼近於一個固定值，而能隨心所欲地使其變小而致終止，此終止值即稱為所有其他值的極限！

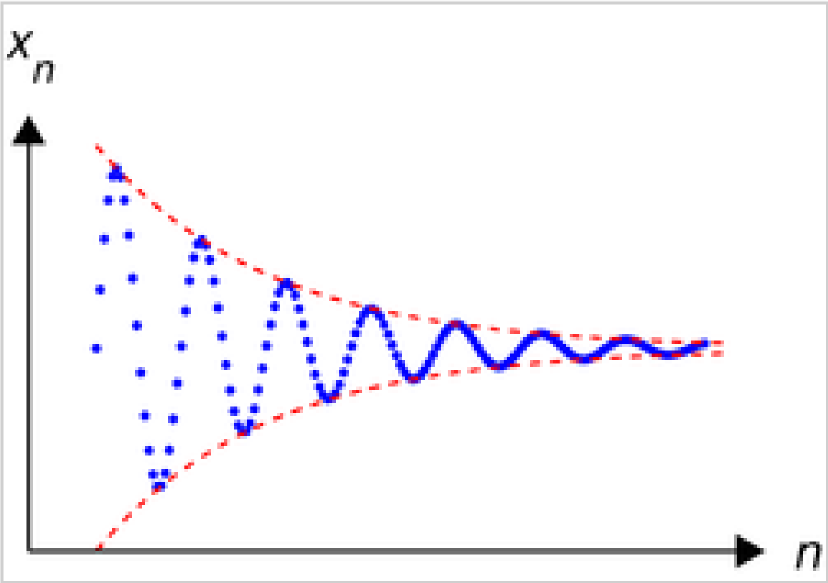
Augustin-Louis Cauchy

Cauchy around 1840. Lithography by Zéphirin Belliard after a painting by Jean Roller.

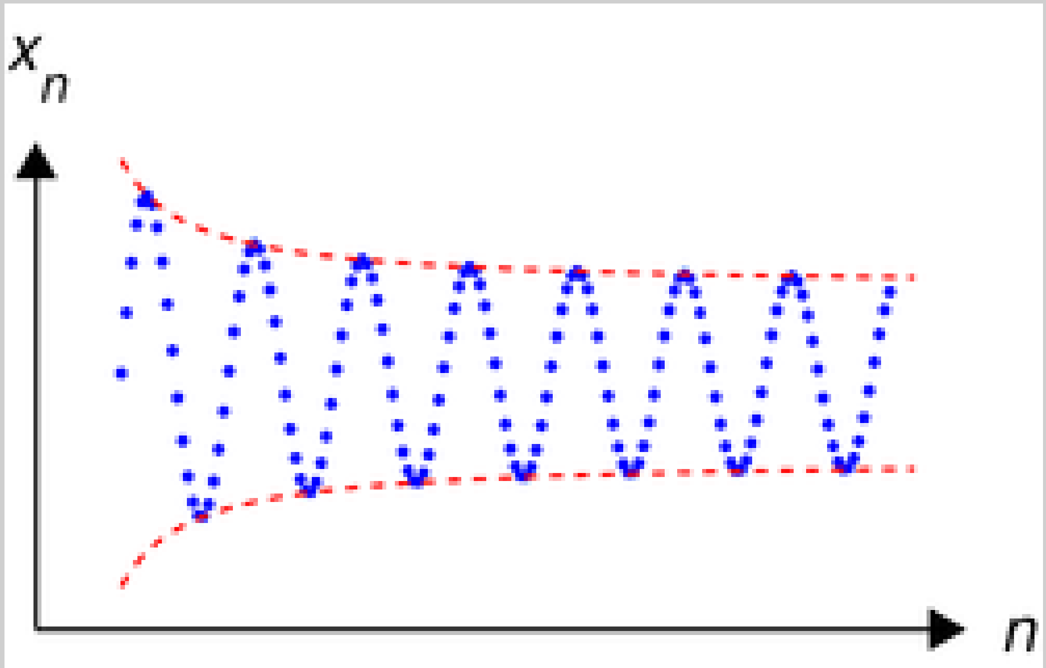
Born	21 August 1789 Paris, France
Died	23 May 1857 (aged 67) Sceaux, France
Nationality	French

柯西的話來自《天才之旅》一書：http://www.taaze.tw/sing.html?pid=11100319907

而這也是柯先生發明柯西數列的原因



一個柯西序列 (x_n) 的繪圖，使用藍色，x_n 相對於 n。如果包含這個序列的空間是完備的，則這個序列的「最終目標」也就是極限存在。



非柯西的一個序列。這個序列的元素不能隨著序列前進而相互靠近。

但問題是

- 《牛頓、萊布尼茲、柯西》的話，你覺得夠數學嗎？

- 柏克萊主教消失的幽靈，是否還繼續存在呢？

這時候

- 魏爾斯特拉斯

  跳出來說話了！

Karl Theodor Wilhelm Weierstrass (Weierstraß)

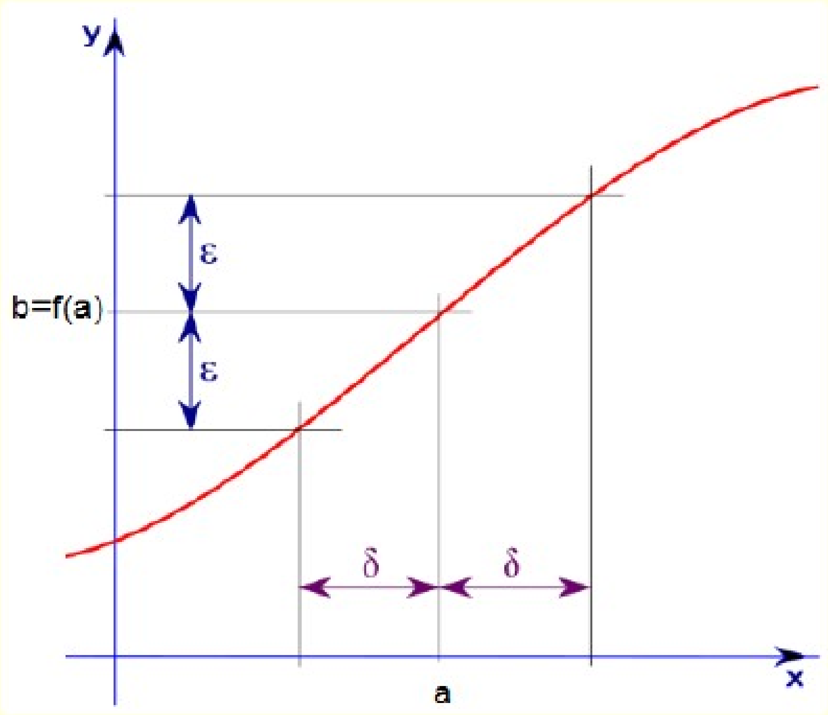
魏爾斯特拉斯說

- 所謂的極限就是：

如果在 x 趨近於 a 時 f(x) 可以「任意接近」 b ，那我們就說 f(x) 趨近於 a 時的極限為 b，其數學符號定義如下。

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

以上定義中的「任意接近」(arbitrarily close to) 的數學意義是：對於任何 $\epsilon > 0$，都存在一個 $\delta > 0$ 使得在 $0 < |x - a| < \delta$ 的情況下會滿足 $|f(x) - b| < \epsilon$ ，如下圖所示。



所以如果您想證明 f(x) 在 x=a 的極限存在，只要證明可以「任意接近」就行了。也就是找出滿足 $|f(x) - b| < \epsilon$ 的 δ 條件，並證明這個條件存在就行了。

然後柏克萊主教說

- 那個《魏爾斯特拉甚麼的》，你說的那麼數學我聽不懂，請說人話 ...

於是魏爾斯特拉斯說

- 請回家學數學 ...

結果是

- 魏爾斯特拉斯完勝柏克萊主教

從此

- 微積分就有了《嚴格的數學基礎》

從微積分開始

- 無窮小的幽靈就如影隨形

而且

- 把無窮小取 $1/\varepsilon$ 就會變成無窮大 ...

而那個年輕的康托爾

- 正在柏林大學，向魏爾斯特拉斯學習數學 ...

康托爾想著

- 如果集合的元素有無限多個，那會怎麼樣呢？

康托爾又想

- 我的老師搞出了 ε 和 δ 的東東
- 那我可以用無窮大集合搞出甚麼東東呢？

所以

- 康托爾就開始搞《無窮大集合》的《集合論》

對於有限集合

- 像是
  - {1, 2, 3}
  - {7, 4, 5}

我們可以計算集合大小！

兩者大小都是 3

原因是

- 兩個集合可以一對一對應
  - $\{1, 2, 3\}$
  - $\{7, 4, 5\}$

這樣的話

- 對於無窮集合而言，我們也可以如法炮製...

怎麼如法炮製呢？

像是

- 自然數 N 和偶數可以一對一對應
  - {1, 2, 3, …}
  - {2, 4, 6, …}

所以《自然數和偶數》有同樣的《基數》

我們稱這個基數為 N0

那《整數集合 Z 》的基數呢？

康托爾說

- 這還不簡單：
  - $N=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\cdots\}$
  - $Z=\{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3\cdots\}$

這樣不就對上了嗎？

好像有點道理！

這樣的話

- 那有理數 Q 應該就沒辦法對上了吧？
- 有理數就是可以寫成《分數 q/p》的那種數！

康托爾說

- NO, NO, NO !

你看、我們只要這樣對就行了

p/q	1	2	3	4	5	....
1	1/1 [1]	1/2 [2]	1/3 [5]	1/4 [10]	1/5	....
2	2/1 [4]	2/2 [3]	2/3 [6]	2/4 [11]	2/5	....
3	3/1 [9]	3/2 [8]	3/3 [7]	3/4	3/5	....
4	....					
5	....					

喂喂喂

- 康托爾老兄，你把 1/1, 2/2, 3/3 對到了不同數上，可是他們都是1 阿！

康托爾

- 喔！那修改一下跳掉就好了！
- 不修也沒關係，因為 $A \leq B$ 且 $B \leq A$ 的話，那就只剩 $A=B$ 的情況了阿！

我

- 這樣說好像也是對啦！

這樣的話

- 所有的無限大集合，不是就都一樣大了嗎？

康托爾

- 我原本也以為是一樣，但是我後來發現自己錯了 …
- 《實數的集合》就比《自然數集合》更大 ...

為何《實數集合》比《自然數》更大？

康托爾

- 這個嘛？其實只要 0 到 1 之間的實數集合就《比自然數集合更大了》
- 證明的關鍵得讓我們回到一對一對應這個概念上來看！

假如 0 到 1 之間的實數

- 可以和自然數一對一對應
- 那麼我們就可以把實數列一個表，從一列到無窮....

那個實數表像這樣

$r_1 = 0.5105110\ldots$

$r_2 = 0.4132043\ldots$

$r_3 = 0.8245026\ldots$

$r_4 = 0.2330126\ldots$

$r_5 = 0.4107246\ldots$

$r_6 = 0.9937838\ldots$

$r_7 = 0.0105135\ldots$

$\ldots$

這樣的話，我們可以

把對角線的元素用《底線加**粗體**》標示出來

$$r_1 = 0.\underline{\mathbf{5}}105110\ldots$$

$$r_2 = 0.4\underline{\mathbf{1}}32043\ldots$$

$$r_3 = 0.82\underline{\mathbf{4}}5026\ldots$$

$$r_4 = 0.233\underline{\mathbf{0}}126\ldots$$

$$r_5 = 0.4107\underline{\mathbf{2}}46\ldots$$

$$r_6 = 0.99378\underline{\mathbf{3}}8\ldots$$

$$r_7 = 0.010513\underline{\mathbf{5}}\ldots$$

$$\ldots$$

然後、我們就可以找到

- 很多你所漏列的實數
- 只要該實數，小數後第 i 個數字和第 i 個實數的對角線上元素不同就好了啊！

$r_1 = 0.\underline{5}105110\ldots$

$r_2 = 0.4\underline{1}32043\ldots$

$r_3 = 0.82\underline{4}5026\ldots$

$r_4 = 0.233\underline{0}126\ldots$

$r_5 = 0.4107\underline{2}46\ldots$

$r_6 = 0.99378\underline{3}8\ldots$

$r_7 = 0.010513\underline{5}\ldots$

$\ldots$

所以

- 不管你怎麼列，你永遠都會漏掉很多 0 到 1 之間的實數
- 所以《0 到 1 之間的實數集合》比《自然數集合》更大！

既然

- 自然數集合是《可數無窮大》
- 那麼我們可以說：0 到 1 之間實數集合是《不可數無窮大》！

這樣的話

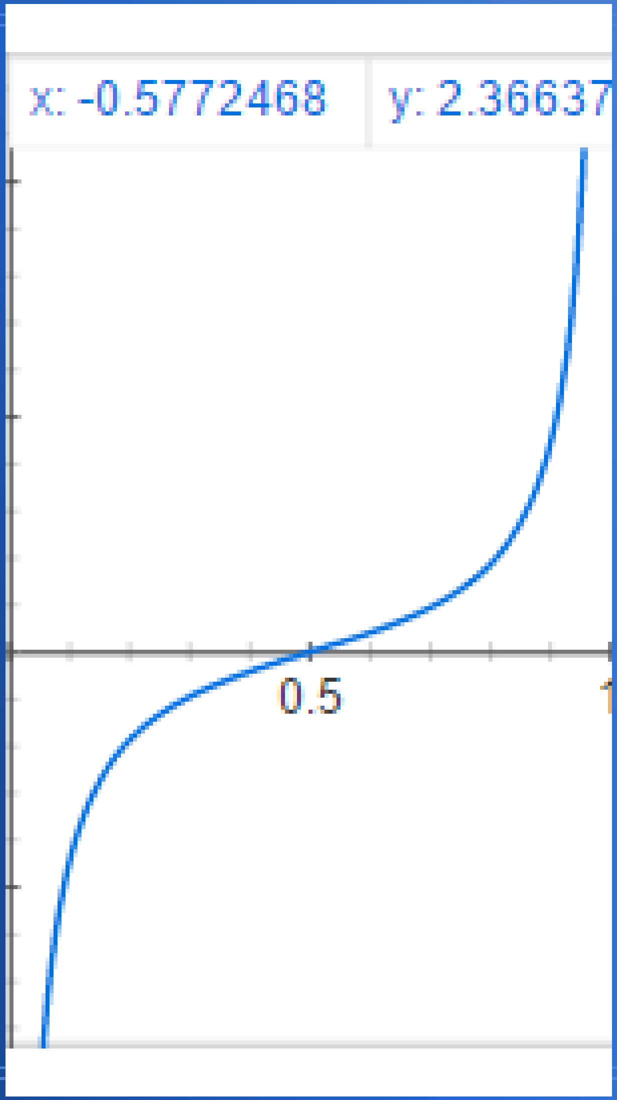
- 那還有沒有比
  《0到1之間實數集合更大的集合》呢？
- 像是《0 到 100 之間的實數集合》
  或是《所有實數形成的集合》
  應該比《0到1之間實數集合》更大吧！

康托爾

- 非也非也！
- 《0 到 100 之間的實數集合》沒有比《0到1之間實數集合》大喔
- 因為只要用 f(x)=100*x 就可以把《0到1之間實數集合》一對一映射到《0 到 100 之間的實數集合》了！

如果用 $y=\frac{2x-1}{x^2}$ 這個函數

- 可以將 0 到 1 之間的實數集合，映射到所有實數上喔！



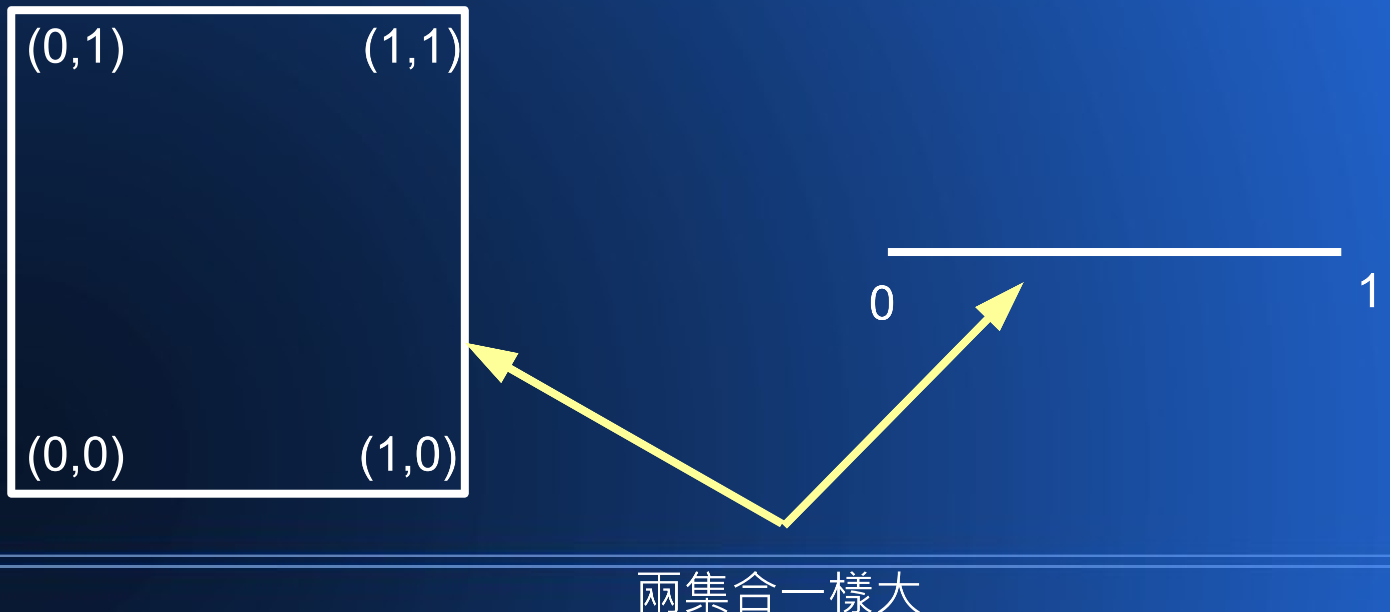
甚至、就算把實數維度變成二維的

- 那個集合大小也只不過

  和實數集合一樣大而已！

更詳細的說

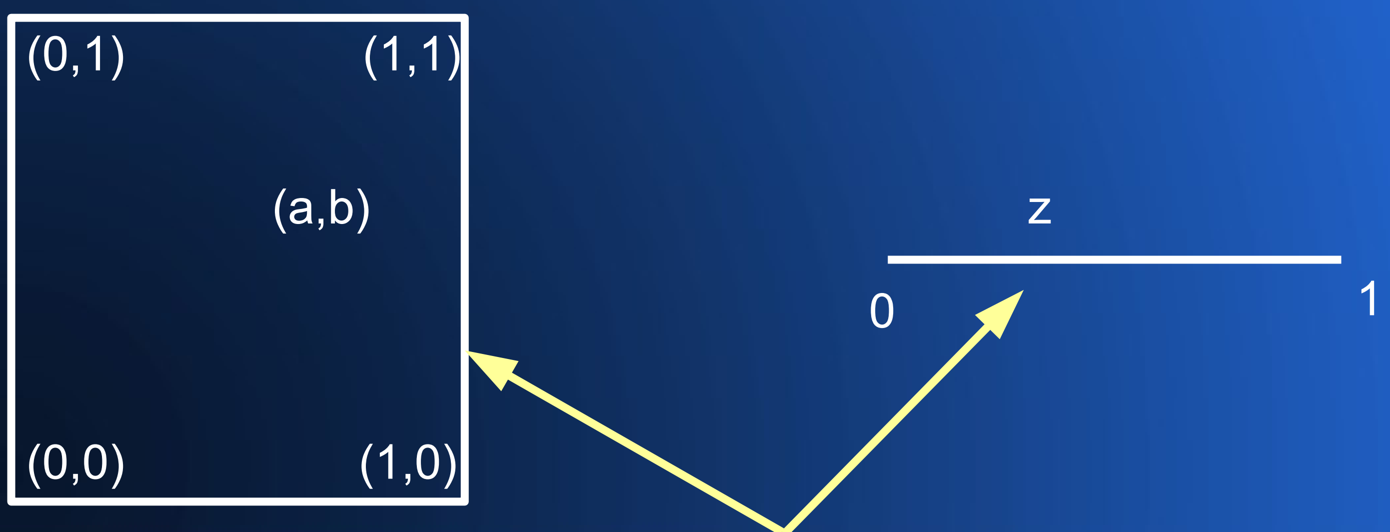
- 一個邊長為 1 的正方形中的實數集合，和 0 到 1 之間的實數集合是一樣大的！



因為兩者之間可以一對一對應

- 對應的方法是將座標（a, b）轉為

$$z=0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3...$$



兩集合一樣大

所以

- 任意的（a, b）之間的實數集合，都是一樣大的
- 任意維度的實數集合也都是一樣大的
- 這個集合大小我稱之為《連續統 C》

接著我問

- 康托爾先生，那麼有沒有比實數集合（也就是《連續統C》）更大的集合呢？

康托爾先生

- 有的，《所有實數集合的子集合所形成的集合》，比實數集合更大！
- 更廣義的說：所有 A 的子集合所形成的集合，稱為 PowerSet(A)，都比 A 集合更大！

為甚麼呢？

康托爾

- 我可以證明！

方法如下

- 假如你把 PowerSet(A) 列下來，像是這樣：

A 的元素	PowerSet(A) 的元素
a	{c}
b	{a,b}
c	{a,d,e,...}
d	{}
e	{a,e, f,...}
f	{j,k,….}
...	

那麼、我們可以將集合 A 分成 X, Y 兩份

- X: 對應到的集合包含自己，像是 b, e, . . .
  Y: 對應的集合不包含自己，像是 a, c, d, f. . .

A 的元素	PowerSet(A) 的元素
a	{c}
b	{a,b}
c	{a,d,e,...}
d	{}
e	{a,e, f,...}
f	{j,k,….}
...	

假如 A 和 PowerSet(A) 可以一對一對應

- 那麼對於那個和 B 匹配的 y 而言，到底 y 應不應該是 B 的元素呢？

A 的元素	PowerSet(A) 的元素
a	{c}
b	{a,b}
c	{a,d,e,...}
d	{}
e	{a,e, f,...}
f	{j,k,….}
...	...
y	B

仔細想想你就會發現

- 假如 y 屬於 B，那麼 y 就不應該是 B 的元素，所以 y 不應該屬於 B
- 假如 y 不屬於 B，那麼 y 就應該是 B 的元素，所以 y 應該屬於 B

A 的元素	PowerSet(A) 的元素
a	{c}
b	{a,b}
c	{a,d,e,...}
d	{}
e	{a,e, f,...}
f	{j,k,….}
...	...
y	B

所以就矛盾了！

這代表我們的前提是錯的

- 也就是《假如 A 和 PowerSet(A) 可以一對一對應》這件事情是錯的！
- 換句話說《假如 A 和 PowerSet(A) 是無法一對一對應的》。

而且

- PowerSet(A) 不可能比集合 A 小
  - 因為 A={a, b, c, . . . } 可對應到 {{a}, {b}, {c}, . . . }
- 所以 PowerSet(A) 只能比 A 更大

於是我們

- 可以得到一系列愈來愈大的無限集合
  - $N0 < P[N0] < P[0,1] < P[P[0,1]] < \cdots$
- 而且我康托爾猜測P[N0] 就是連續統C，這個猜測稱為《連續統假設》。

P[0,1] 代表 0 到 1 之間實數集合的 PowerSet 。

看到這裡

- 你應該會發現，所有的推理都很合理，是從《一對一對應》這個簡單概念來的，只是康托爾把這個概念放到無限集合上，一直適用上去而已

問題是

- 你可以接受上述的推論嗎？

對我而言

- 我其實很難接受這樣的推論。

把一對一對應

- 放在有限集合，是理所當然的。

但是一旦放到無限集合上

- 那就很難令人接受了！

像康托爾這樣的做法

- 不只我無法接受！
- 當年和康托爾同時代的數學家們也都很難接受。

像是 Kroncker 就很難接受

利奧波德·克羅內克

維基百科，自由的百科全書

利奧波德·克羅內克（德語：Leopold Kronecker，1823年12月7日－1891年12月29日），德國數學家與邏輯學家，出生於西里西亞利格尼茨（現屬波蘭的萊格尼察），卒於柏林。他認為算術與數學分析都必須以整數為基礎，他曾說：「上帝創造了整數，其餘都是人做的工作」（Bell 1986, 477頁）。這與數學家格奧爾格·康托爾的觀點相互對立。克羅內克是恩斯特·庫默爾的學生和終身摯友。

以克羅內克命名的數學理論包括克羅內克δ、克羅內克積等。

Kronecker–Weber定理說明若$K/\mathbb{Q}$是有理數集$\mathbb{Q}$的有限阿貝爾擴張，則K是的一個分圓域的子域。

Kronecker引理說明：若$(x_n)_{n=1}^{\infty}$是一個實數數列，使得

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = s$$

存在且有限，則對於$0 < b_1 \leq b_2 \leq b_3 \leq \ldots$及$b_n \to \infty$則有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n} b_k x_k = 0$$

但是

- 如果放棄一對一對應可以用在無限集合上
- 那麼我們到底要拿無限集合怎麼辦呢？

在康托爾證明完實數集合不可數之後

- 他的躁鬱症就在 1884 年發作了

1899 年

- 康托爾的兒子魯道夫意外身亡
- 接著，康托爾在 1904, 1907, 1911 年多次進出精神病院
- 並在 1918 年 73 歲時於精神病院去世！

康托爾的《無窮集合論》

- 還有羅素發現的《集合悖論》等等。

羅素悖論：設命題函數$P(x)$表示「$x \notin x$」，現假設由性質P確定一個集合A——也就是說「$A=\{x|x \notin x\}$」。那麼現在的問題是：$A \in A$是否成立？首先，若$A \in A$，則A是A的元素，那麼A不具有性質P，由命題函數P知$A \notin A$；其次，若$A \notin A$，也就是說A具有性質P，而A是由所有具有性質P的類組成的，所以$A \in A$。

- 後來導致了《公理化集合論》的出現

公理化集合論

接受《無窮集合》與《一對一對應》等概念，
但是卻透過第九條的正規公理排除了羅素與康托爾悖論的集合

集合論中其中一套由Skolem最後整理的公理系統，稱為Zermelo-Fraenkel集合論（ZF）。實際上，這個名稱通常不包括歷史上遠比今天具爭議性的選擇公理，當包括了選擇公理，這套系統被稱為ZFC。

1. 外延公理：（Axiom of extensionality）兩個集合相同，若且唯若它們擁有相同的元素。
2. 分類公理：（Axiom schema of specification / axiom schema of separation / axiom schema of restricted comprehension）或稱子集公理，給出任何集合及命題P(*x*)，存在著一個原來集合的子集包含而且只包含使P(*x*)成立的元素。
3. 配對公理：（Axiom of pairing）假如*x*, *y*為集合，那就有另一個集合{*x*,*y*}包含*x*與*y*作為它的僅有元素。
4. 並集公理：（Axiom of union）每一個集合也有一個並集。也就是說，對於每一個集合*x*，也總存在著另一個集合*y*，而*y*的元素也就是而且只會是*x*的元素的元素。
5. 空集公理：存在著一個不包含任何元素的集合，我們記這個空集合為{ }。可由分類公理得出。
6. 無窮公理：（Axiom of infinity）存在著一個集合*x*，空集{ }為其元素之一，且對於任何*x*中的元素*y*，*y* ∪ {*y*}也是*x*的元素。
7. 替代公理：（Axiom schema of replacement）
8. 冪集公理：（Axiom of power set）每一個集合也有其冪集。那就是，對於任何的*x*，存在著一個集合*y*，使*y*的元素是而且只會是*x*的子集。
9. 正規公理：（Axiom of regularity / Axiom of foundation）每一個非空集合*x*，總包含著一元素*y*，使*x*與*y*為不交集。
10. 選擇公理：（Axiom of choice，Zermelo's version）給出一個集合*x*，其元素皆為互不相交的非空集，那總存在著一個集合*y*（*x*的一個選擇集合），包含*x*每一個元素的僅僅一個元素。

第九條的正規公理

- 排除了以自身為元素之集合

所有非空集合 A 中至少有一個這樣的元素 x，它與A 本身的交集為空集。即

$$\forall A, \exists x \in A : A \neq \varnothing \implies x \cap A = \varnothing$$

從這個公理可得出兩個結果，其一為「不存在以自身為元素的集合」，其二為「沒有無限序列 a_n 使得對於所有 i，a_{i+1} 是 a_i 的元素」。

- 因而避開了《康托爾與羅素的悖論》

因為

- 既然康托爾和羅素的那些集合，根本就不是集合的話，那集合論裏就沒有矛盾了阿！

關於數學家的這種解法

- 不知道你是否能接受？

但是除了集合悖論之外

- 康托爾還遺留下了《連續統假設》的問題。
- 這個問題在 1900 年希爾伯特的 23 個數學問題當中被列為第一個問題。

後來在 1940 年

- 哥德爾證明了用《集合論公理》無法反證《連續統假設》是錯的！
- 接著在 1963 年，柯恩證明了《集合論公理》無法證明《連續統假設》是對的！

於是

- 連續統假設就像《歐氏幾何的平行公設》一樣，可以被加入集合論中，或者反過來在加入集合論中，都可以創造出《不矛盾的集合論》。

也就是說

- 集合論可以分為
  - 連續統集合論
  - 非連續統集合論

等兩類，甚至更多類！

在思考這些數學問題的同時

我們得要很小心

小心甚麼？

小心走火入魔

因為

- 《康托爾、哥德爾、圖靈》等三人！

他們一脈相承的

- 都使用了類似《對角證法》的證明法，在數學上做出了驚人的貢獻！

這些貢獻是

- 康托爾的《實數不可數》與《無限集合擴展鏈》
- 哥德爾的《不完備定理》
- 圖靈的《停止問題不可解》！

當他們三人

- 做出這些令人驚訝的貢獻後

結果是

- 康托爾因躁鬱症而死於精神病院
- 哥德爾也因精神問題最後不吃東西而死
- 圖靈則是因同性戀最後吃了有氰化物的蘋果死掉了！

這些數學上的巨人

其實最後都有個悲慘的結局

你

想當偉人嗎？

歡迎加入數學的行列！

歡迎使用對角證法

- 來證明出令人驚訝的定理！

這就是我們今天的

- 十分鐘系列！

我們下回見！

Bye Bye!