**注意：此题目供同学复习课堂内容，和期末考试没有直接关联**

**习题3**

1. 设有n个物品，第i个物品的价值是vi、重量是wi, 假设物品可以任意分割，给定一个背包，其能容纳最大重量为C，求该背包能容纳物品的最大价值。要求写出伪代码并分析算法正确性和复杂性。

2. 有6种硬币，面值是1分, 2分, 5分, 1角，5角，1元，给定一个钱数n，求出一个硬币组合，要求面值总和为n且硬币个数最少，假设每种硬币个数无限。要求写出伪代码并分析算法正确性和时间复杂性。

3. 存放于磁带上文件需要顺序访问。故假设磁带上依次存储了n个长度分别是L[1],….,L[n]的文件，则访问第k个文件的代价为 http://img1.ph.126.net/Z2_UhZuT4BHOPIOOWZ4VHQ==/6608496991004599045.png。现给定n个文件的长度L[1],….,L[n]，并假设每个文件被访问的概率相等，试设计一个算法输出这n个文件在磁带上的存储顺序使得平均访问代价最小。。答案要求包含以下内容：（1）证明问题具有贪心选择性；（2）证明问题具有优化子结构；（3）给出算法并分析算法的时间复杂度。

4. 设有n个正整数，将它们连接成一排，组成一个最大的多位整数。

例如：n=3时，3个整数13，312，343，连成的最大整数为34331213。

又如：n=4时，4个整数7，13，4，246，连成的最大整数为7424613。

输入是n个正整数，输出是这n个正整数连成的最大多位整数，要求用贪心法求解该问题。答案要求包含以下内容：（1）证明问题具有贪心选择性；（2）证明问题具有优化子结构；（3）写出算法伪代码并分析算法的时间复杂度。

5. 设x1, x2, …., xn是实数轴上的n个点，若用单位长度的闭区间覆盖这些点，至少需要多少单位长度闭区间？

6. 考虑下述最小生成树算法，初始时，G中的每个顶点被视为一个单结点的树，不选择任何边，在每一步，为每棵树选择一条最小权的边e，是的e只有一个顶点在T中，如果必要的话，出去所选边的备份，当只得到一棵树或者所有边都被选中了，那么终止算法。证明算法的正确性并且求出算法的最大步数。

7.  G=(V, E)是一个具有n个顶点m条边的连通图，且可以假设边的代价为正且各不相同，设，定义T的瓶颈边是T中代价最大的边，G的一个生成树T是一棵最小瓶颈生成树，如果不存在G的生成树T’是的它具有代价更小的瓶颈边。问:(1)G的每棵最小瓶颈树一定是G的一棵生成树吗？证明或者给出反例; (2) G的每棵生成树都是G的最小瓶颈树吗？证明或者给出反例。

8.  给定n个自然数d1, d2, …, dn, 设计算法，在多项式时间确定是否存在一个无向图G，使它的结点度数准确地就是d1, d2, …, dn， 要求G中在任意两个结点之间至多有一条边，且不存在一个结点到自身的边。

9. 考虑一种特殊的0-1背包问题，有n个物品，每个物品价值和重量都相等，背包能容纳的最大重量是C, 回答下列问题:

若物品的重量(价值)分别是1, 2, …,2n, 证明该0-1背包问题可以用贪心法求解并写出该贪心法。

请写出一个物品重量(价值)序列，使得上述贪心法无法得到最优解。

10. 考虑下述“逆贪心”算法，输入是连通有权无向图G,用邻接表描述



(1). 该算法的最坏运行时间是多少？在什么情况下发生?

(2). 证明这个算法可以找到G的最小生成树。

11. 给定一个城市集合，一些城市之间由高速公路连接，这些城市和城市之间的高速公路构成了一个无向图G = (V, E)，每条边e=(u, v)∈E表示一条城市u到v的高速公路，e上的权重le表示该高速公路的长度。一辆车需要从城市s到达城市t，但该车的油箱存油最多能走L公里，每个城市有一个加油站，但是城市之间没有加油站，因此，只有当le<L的时候，才能走e对应的高速公路。回答下列问题:

(1) 设计一个时间复杂性O(E)的算法，判定是否这辆车能够从城市s走到城市t。

(2) 如果准备买一辆新车，需要知道保证车从城市s成功走到城市t最少要用多大的油箱，请设计时间复杂性为O((|V | + |E|) log |V |)的算法解决该问题。

12. 要为将即将到来的哈尔滨世界博览会设计和生产*n*个不同的展品，每一个项目首先用CAD软件设计，然后送到外面加工厂加工，第*i*个展品的设计时间为*di*，加工时间为*fi*. 加工厂能力很强，可以同时加工*n*个展品，所以对于每件展品，只要设计结束就可以立刻开始加工。但是，只有一位设计师，所以需要确定产品设计的顺序，以最快时间完成所有*n*件展品的设计和加工。

比如，完成了第一件展品的设计，可以将其交给加工厂，然后立刻开始第二件展品的加工。当完成第二件展品的设计时，可以将其交给加工厂而不需要考虑是否第一件展品已经加工完成。

设计多项式贪心算法求解此问题，分析时间复杂度，并证明其正确性。