学号：________________　　姓名：_______________　　教师：时红艳

2018 春大学物理 C　作业四

第六章 静电场

一、选择题

1. 在静电场中，有关静电场的电场强度与电势之间的关系，下列说法中正确的是:

[C]

(A) 场强大的地方电势一定高；　　(B) 场强相等的各点电势一定相等；

(C) 场强为零的点电势不一定为零；　　(D) 场强为零的点电势必定是零。

2. 半径为 r 的均匀带电球面 1，带电量为 q；其外有一同心的半径为 R 的均匀带电球面 2，带电量为 Q，则此两球面之间的电势差为:

[A]

(A) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o}(\dfrac{1}{r}-\dfrac{1}{R})$；　(B) $\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_o}(\dfrac{1}{R}-\dfrac{1}{r})$；　(C) $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_o}(\dfrac{q}{r}-\dfrac{Q}{R})$；　(D) $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o r}$

3. 已知一高斯面所包围的体积内电量代数和 $\sum q_i = 0$，则可肯定:

[C]

(A) 高斯面上各点场强均为零；　(B) 穿过高斯面上每一面元的电通量均为零；

(C) 穿过整个高斯面的电通量为零；(D) 以上说法都不对。

4. 如图所示，闭合曲面 S 内有一点电荷 q，P 为 S 面上一点，在 S 面外 A 点有一点电荷 q'，若将 q' 移至 B 点，则

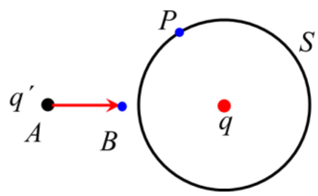
[B]

(A) 穿过 S 面的电通量改变，P 点的电场强度不变；

(B) 穿过 S 面的电通量不变，P 点的电场强度改变；

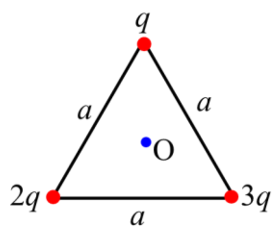
(C) 穿过 S 面的电通量和 P 点的电场强度都不变；

(D) 穿过 S 面的电通量和 P 点的电场强度都改变。



5. 如图所示，边长为 a 的等边三角形的三个顶点上，放置着三个正的点电荷，电量分别为 q、$2q$、$3q$。若将另一正点电荷 $\boldsymbol{Q}$ 从无穷远处移到三角形的中心 O

处，外力所作的功为:　　　　　　　　[　C　]

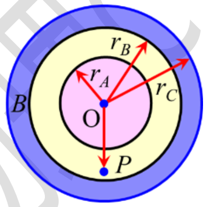


(A) $\dfrac{2\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_o a}$；　　　　(B) $\dfrac{4\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_o a}$；

(C) $\dfrac{6\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_o a}$；　　　　(D) $\dfrac{8\sqrt{3}qQ}{4\pi\varepsilon_o a}$

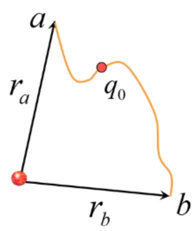
二、填空题

6. 一带电量为 q、半径为 r_A 的金属球 A，与一原先不带电、内外半径分别为 r_B 和 r_C 的金属球壳 B 同心放置，如图。则图中 P 点的电场强度 $\vec{E}=\underline{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{e}_r}$，如果用导线将 A、B 连接起来，则 A 球的电势 $U=\underline{\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r_C}}$。(设无穷远处电势为零)



7. 一平行板电容器，两板间充满各向同性均匀电介质，已知相对介电常数为 ε_r。若极板上的自由电荷面密度为 σ，则介质中电位移的大小 $D=\sigma$，电场强度的大小：$E=\underline{\dfrac{\sigma}{\varepsilon_r\varepsilon_0}}$。

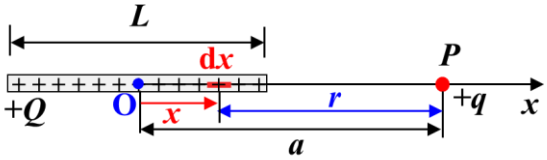
8. 如图所示，在带电量为 q 的点电荷的静电场中，将一带电量为 q_0 的试验电荷从 a 点经任意路径移动到 b 点，外力所作的功 $\underline{A_1=\dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{r_b}-\dfrac{1}{r_a})}$；电场力所作的功 $\underline{A_2=\dfrac{qq_0}{4\pi\varepsilon_0}(\dfrac{1}{r_a}-\dfrac{1}{r_b})}$。



三、计算题

9. (6-1 题)在长为 L 的细棒上，电量 Q 均匀分布，一带电量 $q\,(q>0)$ 的点电荷被放在细棒的延长线上距细棒中心 O 距离为 a 的点 P 处，求带电细棒对该点电荷的作用力。

分析 这实际是计算连续分布带电体电场强度的问题，计算出细棒在 P 点的电场强度也就知道了细棒对该点电荷的作用力。细棒上电荷可以看成是均匀分布在一维的直线上。如图建立坐标系，在直线上任取一线元 dx，其电荷为 $\mathrm{d}q=Q\mathrm{d}x/L$，它在点 P 处的电场强度为 $\mathrm{d}\vec{E}=\dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r$，整个带电细棒在 P 点的



电场强度为 $\vec{E}=\int \mathrm{d}\vec{E}$ 。

解 由以上分析可知，点 P 点处的电场场强

$$E=\int_{-L/2}^{L/2}\frac{Q\mathrm{d}x}{4\pi\varepsilon_0\left(l-x\right)^2L}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 L}\left(\frac{1}{l-\frac{L}{2}}-\frac{1}{l+\frac{L}{2}}\right)=\frac{Q}{\pi\varepsilon_0(4l^2-L^2)}$$

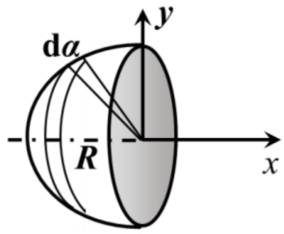
电场强度的方向沿 x 轴。

所以点电荷所受到的力为

$$F=Eq=\frac{qQ}{\pi\varepsilon_0(4l^2-L^2)}$$

10. (6-3 题) 求半径为 R，面电荷密度为σ 的均匀带电半球面球心 O 处的电场强度?

分析 本题仍然是一个连续带电体电场强度问题，解题的关键就是如何取电荷元。可以将均匀带电半球面看成一系列的平行细圆环组成，所有细圆环在半球面球心 O 处的电场强度方向都相同，将所有带电圆环在 O 处的电场强度积分即可求得球心 O 处的电场强度。



解 取如图所示在球面上任一细圆环所带的电荷为

$$\mathrm{d}q=\sigma\,\mathrm{d}s=\sigma\cdot 2\pi R\sin\alpha\cdot R\mathrm{d}\alpha$$

带电量 dq 的细圆环在 O 点的场强为

$$\mathrm{d}\vec{E}=\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}\hat{\boldsymbol{i}}$$

利用几何关系 $x=R\cos\alpha$，$x^2+r^2=R^2$ 统一积分变量有

$$\mathrm{d}E=\frac{x\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0(x^2+r^2)^{3/2}}=\frac{R\cos\alpha}{4\pi\varepsilon_0 R^3}2\pi R^2\sigma\sin\alpha\mathrm{d}\alpha=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cos\alpha\sin\alpha\mathrm{d}\alpha$$

积分得球心 O 处的电场强度

$$E=\int\mathrm{d}E=\int_0^{\pi/2}\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sin\alpha\cos\alpha\mathrm{d}\alpha=\frac{\sigma}{4\varepsilon_0}$$

11. （6-4 题）半径为 R 的无限长均匀带电直圆筒面上，沿轴线单位长度的带电量为λ，求其内外电场强度的分布，并画出 E-r 曲线。

分析 无限长均匀带电直圆筒的电荷分布具有圆柱对称性，轴线就是圆柱空间的对称中心。可选择与有限长度的同轴圆柱面为高斯面，采用高斯定理求解其电场强度的分布要简洁方便。

解 由高斯定理$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$求得电场分布，在圆筒内即$r<R$

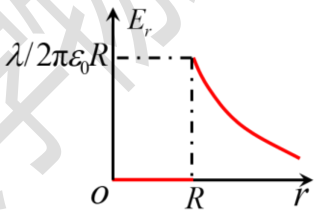
$$\oint_S \vec{E}_1\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q=0\text{，即}\qquad E_1=0$$

当$r\geq R$时，$\oint_S \vec{E}_2\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$，即 $E_2 2\pi rl=\frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$

$$E_2=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

故
$$E=\begin{cases}0 & r<R\\ \lambda/2\pi\varepsilon_0 r & r\geq R\end{cases}$$

所画出 E-r 曲线如下图所示：



12. (6-11 题)半径 R 的带电球体，其体电荷密度$\rho=k/r$ （k 为常数，r 为到球心的距离，$r\leq R$），求该带电球体内外的电场强度及电势的分布。

分析 由于带电球体的电荷分布具有球对称性，因此可取同心球面为高斯面，借助高斯定理求得各区域的电场强度，再根据电势与电场强度的积分关系$U_p=\int_p^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l}$可求得电势分布。

解 由高斯定理求得电场分布，在球体内即 $r\leq R$

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_S q$$

$$E_1(4\pi r^2)=\frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \frac{k}{r}4\pi r^2 dr=\frac{2\pi k}{\varepsilon_0}r^2$$

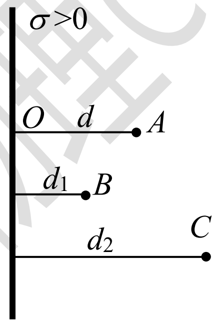
$$\vec{E}_1=\frac{k}{2\varepsilon_0}\hat{e}_r$$

同理，在球体外即 $r>R$

$$E_2 \cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^R \frac{k}{r} 4\pi r^2 \mathrm{d}r = \frac{2\pi k}{\varepsilon_0} R^2$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_2 = \frac{kR^2}{2\varepsilon_0 r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

13. 如图所示，在一个面电荷密度为σ的无限大均匀带电平板的电场中，求：（1）距离平板为 d 的一点 A 与平板之间的电势差；（2）与平板的距离分别为 d_1、d_2 的两点 B、C 之间的电势差（$d_1 < d_2$）；（3）有一质量为 m、带电量为-e 的尘粒，从点 A 自静止开始飞向平板面达到平板时的速度。



分析 无限大均匀带电平板的电荷分布具有对称性，借助高斯定理求得各区域的电场强度，再根据电势与电场强度的积分关系$U_a - U_b = \int_a^b \vec{\boldsymbol{E}} \cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$ 可求得任两点间的电势差。静电场力是保守力，在只有电场力做功的系统中能量守恒。所以带电量为-e 的尘粒从点 A 自静止开始飞向平板面的过程中电场力对其所作的功等于其动能的增加。

解 (1)由高斯定理得,平板外的电场是均匀的,电场强度为

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

所以点 A 与平板之间的电势差为

$$\Delta U_{AO} = -\frac{\sigma d}{2\varepsilon_0}.$$

(2)点 B 与点 C 之间的电势差

$$\Delta U_{BC} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(d_2 - d_1\right).$$

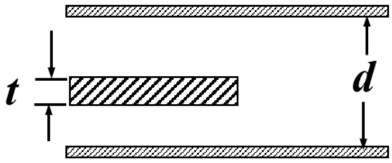
(3)质量为 m、带电量为-e 的尘粒，从点 A 自静止开始飞向平板面达到平板，该尘粒做的功为$A = -e\Delta U_{AO} = \frac{e\sigma d}{2\varepsilon_0}$

使该尘粒从静止加速到速度为v,有

$$A = \frac{1}{2}mv^2$$

代入解得尘粒的速度为 $v = \sqrt{\frac{e\sigma d}{m\varepsilon_0}}$

14. （6-20 题） 计算如图所示电容器的电容，略去边缘效应。极板面积为 S，介质介电常量为ε 。



分析 题中的电容器可以等效为极板面积为 $A/2$ 的两个平板电容器并联。插入电介质的部分, 由于介质界面出现极化电荷, 介质内的电场减弱, 使得这部分的电容器的电容量发生变化, 因而电容器两部分的电荷分布不同。设这两部分极板的面电荷密度分别为σ_1、σ_2，根据高斯定理可以确定各部分的电场强度、电势差, 根据$C=Q/U$ 可以得出各部分的电容。

解 由分析得电容器可以等效为极板面积为 $A/2$ 两个平板电容器并联, 设定有电介质部分的电容器极板表面的电荷密度为σ_1，另一部分的电容器极板表面的电荷密度为σ_2，高斯定理可得

有电介质部分的电容器的空气介质中的电场强度为

$$E_{空}=\sigma_1/\varepsilon_0$$

有电介质部分的电容器的电介质中的电场强度为

$$E_{介}=\sigma_1/\varepsilon$$

故这部分的电容器的电势差为

$$U_1=\frac{\sigma_1}{\varepsilon}t+\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}(d-t)$$

由此可得这部分的电容器电容为

$$C_1=\frac{\sigma_1 A/2}{U_1}=\frac{\varepsilon\varepsilon_0 A}{2\left[t\varepsilon_0+(d-t)\varepsilon\right]}$$

同理不含介质部分的电容器中的电场强度为

$$E=\sigma_2/\varepsilon_0$$

电势差为 $$U_2=\sigma_2 d/\varepsilon_0$$

电容为 $$C_2=\frac{\sigma_2 A/2}{U_1}=\frac{\varepsilon_0 A}{2d}$$

总电容为

$$C=C_1+C_2=\frac{\varepsilon_0 A(2\varepsilon d-\varepsilon t+\varepsilon_0 t)}{2d\left[t\varepsilon_0+(d-t)\varepsilon\right]}$$

15. 一半径为 R 的导体球，带电量为 Q，置于电容率为 ε 的无限大均匀电介质中，试求电场的能量。

分析 静电场的能量 $W=\iiint \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}V$，所以本题的关键就是确定电位移矢量 $\vec{\boldsymbol{D}}$ 和电场强度 $\vec{\boldsymbol{E}}$。置于无限大均匀电介质中导体球的电场具有球对称性,可采用高斯定理确定电场的分布，进而求出电场的能量。

解 取同心球面为高斯面,由高斯定理有

$$\oint \vec{\boldsymbol{D}}\cdot\mathrm{d}\vec{\boldsymbol{S}}=\sum q_0$$

得当 $r<R$ 时，

$$\vec{\boldsymbol{D}}_1=\vec{\boldsymbol{E}}_1=0$$

当 $r>R$ 时，

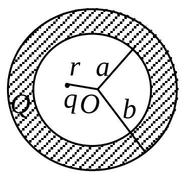
$$\vec{\boldsymbol{D}}_2=\frac{Q}{4\pi r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

$$\vec{\boldsymbol{E}}_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\hat{\boldsymbol{e}}_r$$

故电场的能量

$$W=\iiint \frac{1}{2}\vec{\boldsymbol{D}}\cdot\vec{\boldsymbol{E}}\mathrm{d}V=\int_R^{\infty}\frac{1}{2}\frac{Q}{4\pi\varepsilon r^2}\times\frac{Q}{4\pi r^2}\times 4\pi r^2\mathrm{d}r=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R}$$

16. 如图所示，一内半径为 a、外半径为 b 的金属球壳，带有电荷 Q，在球壳空腔内距离球心 r 处有一点电荷 q。设无限远处为电势零点，试求：(1) 球壳内外表面上的电荷。(2) 球心 O 点处，由球壳内表面上电荷产生的电势。(3) 球心 O 点处的总电势。



解：(1) 由静电感应，金属球壳的内表面上有感生电荷 $-q$，外表面上带电荷 $q+Q$

(2) 不论球壳内表面上的感生电荷是如何分布的，因为任一电荷元离 O 点的距离都是 a，所以由这些电荷在 O 点产生的电势为：

$$U=-\frac{\int \mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_o a}=\frac{-q}{4\pi\varepsilon_o a}.$$

(3) 球心 O 点处的总电势为分布在球壳内外表面上的电荷和点电荷 q 在 O 点产生的电势的代数和

$$U_O=U_q+U_{-q}+U_{Q+q}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o r}-\frac{q}{4\pi\varepsilon_o a}+\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_o b}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_o}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_o b}$$