质点运动学

质点的运动

运动的绝对性、相对性，选择参考系，建立坐标系，选择计时零点

描述运动的物理量

位矢：$\vec{r}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$

位移：$\Delta\vec{r}=\vec{r}_2-\vec{r}_1$

速度：$\vec{v}=d\vec{r}/dt$

加速度：$\vec{a}=d\vec{v}/dt$

角位移：$\Delta\theta=\theta_2-\theta_1$

角速度：$\omega=d\theta/dt$

角加速度：$\beta=d\omega/dt$

线量与角量的关系

$v=R\omega \quad a_t=R\beta \quad a_n=R\omega^2$

描述运动的方法

解析法

运动函数：$\vec{r}=\vec{r}(t)$

直角坐标系中：

$\vec{r}=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$

速度：$\vec{v}=\vec{v}(t)$

加速度：$\vec{a}=\vec{a}(t)$

匀变速运动的基本公式

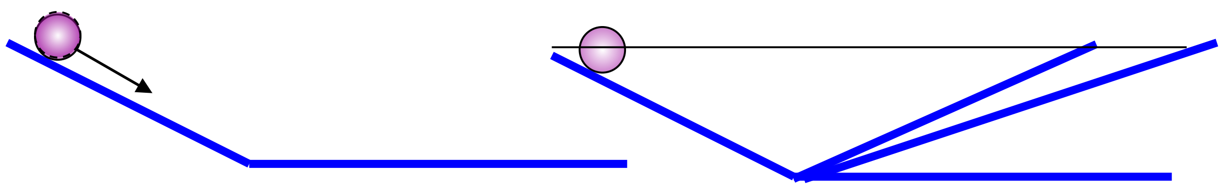
匀变速直线运动	匀变速圆周运动
$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(r - r_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$

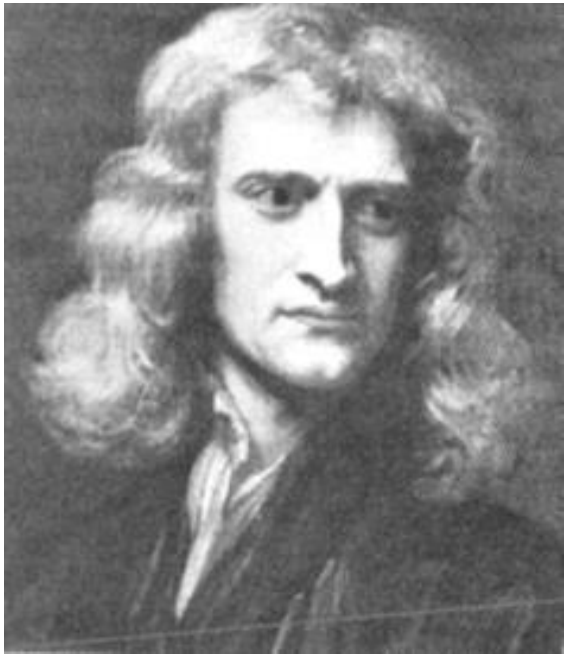
第二章 质点动力学(*dynamics*)

（1564—1642）
意大利

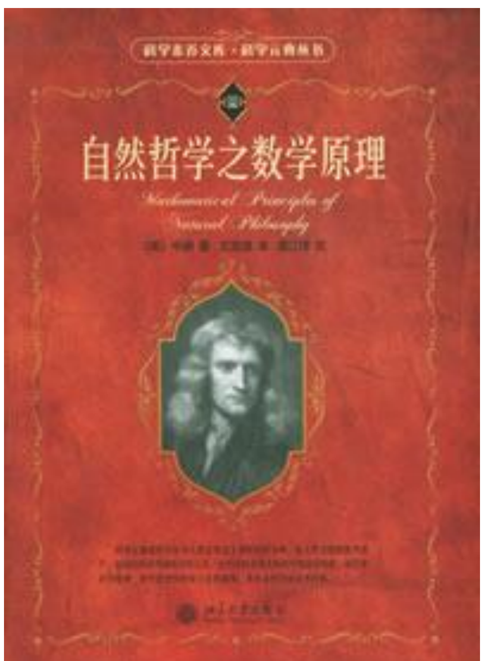
贡献： 把有目的的试验和逻辑推理和谐地结合在一起，构成了完整的科学研究方法。

爱因斯坦： “伽利略的发现以及它所应用的科学推理方法，是人类思想史上最伟大的成就之一，标志着物理学的真正开端。”





Issac Newton（1642－1727）



牛顿——英国物理学家，经典物理学的奠基人。他对力学、光学、热学、天文学和数学等学科都有重大发现，其代表作《自然哲学之数学原理》是力学的经典著作。牛顿是近代自然科学奠基时期具有集前人之大成的伟大贡献的科学家。

恩格斯说：“牛顿由于发现了万有引力定律而创立了天文学，由于进行光的分解而创立了科学的光学，由于创立了二项式定理和无限理论而创立了科学的数学，由于认识了力学的本性而创立了科学的力学。”

§1 牛顿运动定律

一、牛顿第一定律(惯性定律)

任何物体都要保持其静止或匀速直线运动状态，直到它受到其他物体的作用力迫使它改变原来的运动状态 。

★ 力 $\vec{F}=0$ 时，$\vec{v}=$恒矢量。

三个重要概念：

- 惯　性
- 力
- 惯性系 —— 第一定律在其中成立的参考系。

静止或匀速直线运动状态----平衡状态

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

二、牛顿第二定律

某时刻质点动量对时间的变化率等于该时刻作用在质点上的合力。

动量定义式 $\vec{p} = m\vec{v}$

$$\vec{F} = \sum \vec{F}_i(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{p}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}m\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

★ 当m为常量时， $\boxed{\sum \vec{F}_i(t) = m\vec{a}(t)}$

惯性质量

★ 满足力的叠加原理：

即： $$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \cdots$$

$$\vec{a} = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \vec{a}_3 + \cdots$$

★ 在直角坐标系中：

$$\begin{cases}\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\\ \vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\end{cases}$$

$$\begin{cases}F_x=ma_x\\ F_y=ma_y\\ F_z=ma_z\end{cases}$$

★ 在自然坐标系中：

$$\begin{cases}\vec{F}=F_\tau\vec{\tau}+F_n\vec{n}\\ \vec{a}=a_\tau\vec{\tau}+a_n\vec{n}\end{cases}$$

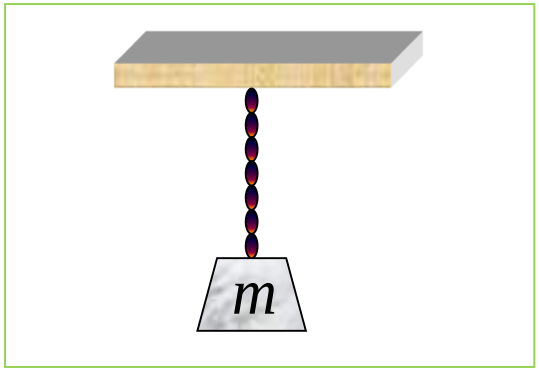
$$\begin{cases}F_\tau=ma_\tau\\ F_n=ma_n\end{cases}$$

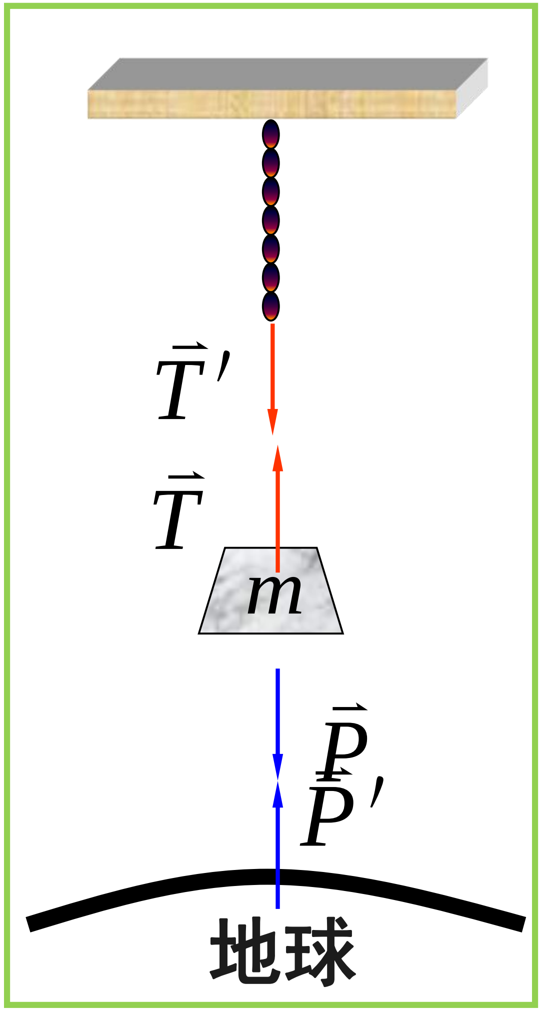
★ 瞬时关系、实验定律、仅适用于惯性系。

三、牛顿第三定律

“每一种作用都有一个相等的反作用；或者，两个物体的相互作用总是相等的，而且指向相反。”

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$





★ 实验定律、适用于任何参照系。

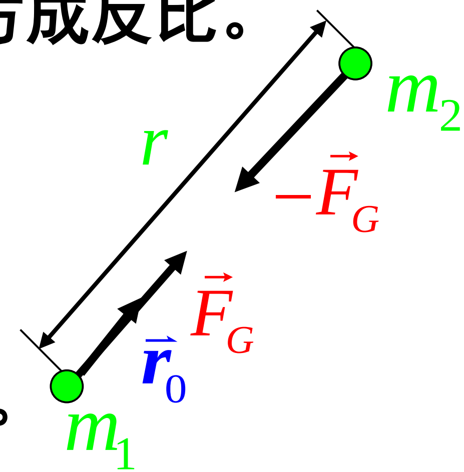
物体的内力不会改变整体的运动状态！

思考题：
1. 我们为什么能在地面上行走？
2. 汽车行驶的动力是发动机的牵引力吗？
3. 在接近真空的宇宙空间里，航天器是如何转变方向的？

四、研究物体受力的常见种类

1. 万有引力(*gravitational force*)

任何两个质点都具有相互吸引的作用，引力的大小与它们的质量乘积成正比，与它们的距离的平方成反比。



$$\vec{F}_G = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\vec{r}_0$$

$G = 6.67\times10^{-11}\,\mathrm{N.m^2/kg^2}$　为引力常数。

公式中的质量为引力质量，是物体间相互吸引性质的量度,与惯性质量意义不同。

实验证明：同一物体的引力质量与惯性质量相等的

万有引力是通过引力场来传递的——引力场 。

★ **重力** **(*gravity*)** **重力就是地球对其表面附近物体的引力作用，即**

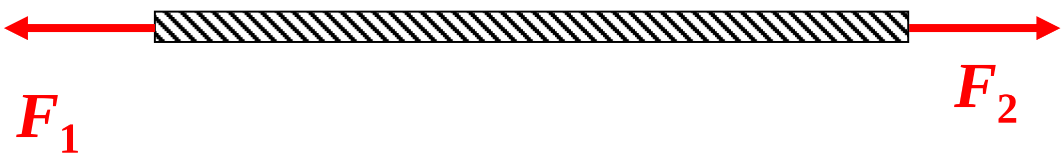
$$mg = G\frac{M_E m}{R^2}$$

地面上的重力加速度的理论公式： $g = \dfrac{GM_E}{R^2} \approx 9.80\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$

2. 弹性力(*elastic force*)： **如压力、支撑力、张力、弹簧弹性力等。**

弹簧弹性力 $f = -kx$

绳中的张力（**tension**)



通过任一点，相邻两部分绳子相互作用的拉力

3. 摩擦力(*friction force*)

(*sliding friction force*) 滑动摩擦力 $f = \mu N$

(*static friction force*) 静摩擦力 $f_0 = \mu_0 N$ $f_0 \geq f$

一般情况 $\mu \approx \mu_0$

与相对运动或相对运动趋势方向相反

4. 流体阻力（粘滞力）

相对速率较小时 $f_d = kv$

*k*与物体的大小，形状和流体的性质有关

相对速率较大时 $f_d = kv^2$

物体在空气中，阻力 $f_d = \dfrac{1}{2} C\rho A v^2$

§2 牛顿运动定律的应用

两类问题

已知运动求力
已知力求运动

关键是加速度 $\vec{a}$

解题的基本思路

（1）确定研究对象，并且进行受力分析；

对于连带运动，进行隔离物体受力分析，画受力图。

（2）选取适当的坐标系；

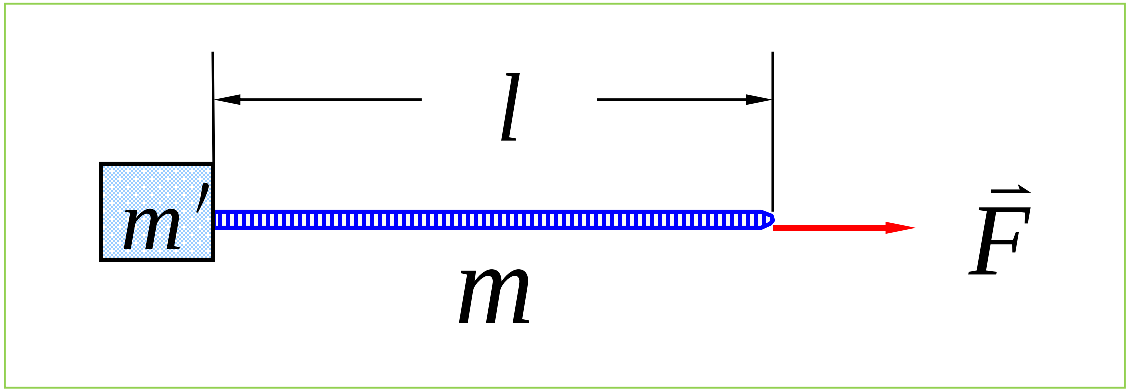
（3）列动力学方程（一般用分量式）；

（4）利用其它的条件列补充方程；

（5）求出文字解；

其后带入数据计算结果（注意统一单位制）。

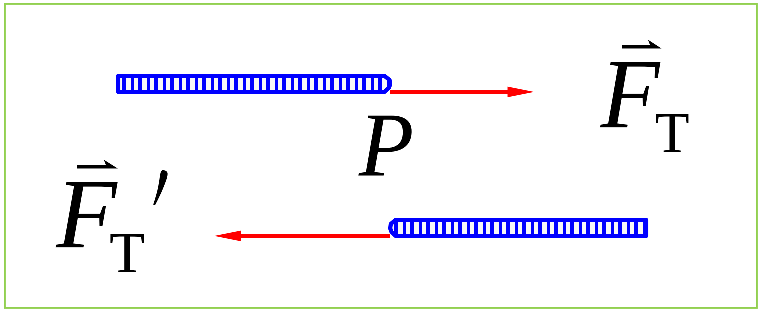
例1 质量为 m 、长为 l 的柔软细绳，一端系着放在光滑桌面上质量为 m' 的物体，如图所示．在绳的另一端加如图所示的力 $\vec{F}$ 。绳被拉紧时会**略有伸长**（形变），一般**伸长甚微，可略去不计**。 现设绳的长度不变，质量分布是均匀的。求：（1）绳作用在物体上的力；（2）绳上任意点的张力 。



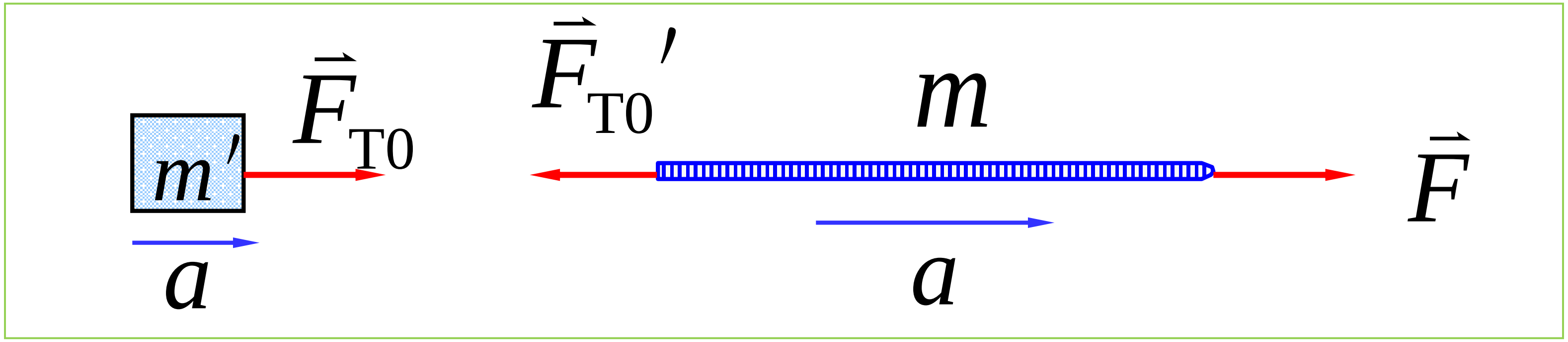
解 设想在点 P 将绳分为两段

其间张力 $\vec{F}_{\mathrm{T}}$ 和 $\vec{F}_{\mathrm{T}}'$ 大小

相等，方向相反，



（1）绳作用在物体上的力



$$\begin{cases} F_{\mathrm{T0}} = F_{\mathrm{T0}}' \\ F_{\mathrm{T0}} = m'a \\ F - F_{\mathrm{T0}}' = ma \end{cases}$$

？？

$$a = \frac{F}{m' + m}$$

$$F_{\mathrm{T0}} = \frac{m'}{m' + m} F$$

（2）绳上任意点的张力

$$\mathrm{d}m = m\mathrm{d}x / l$$

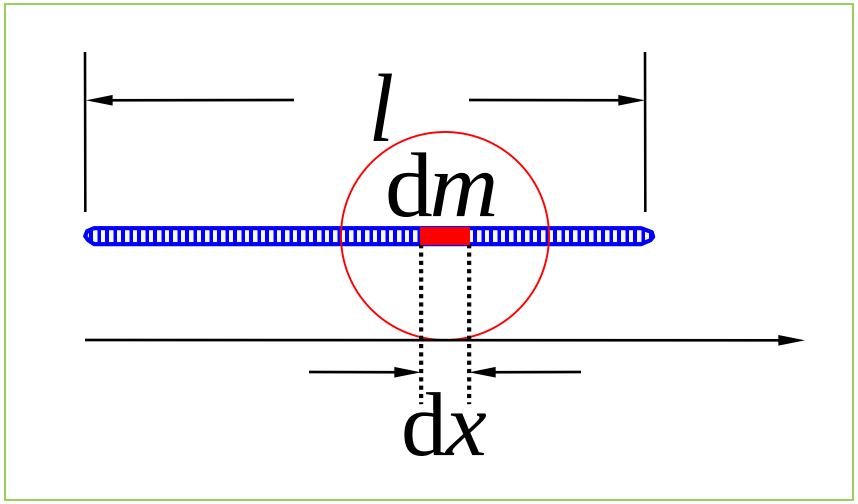
$$(F_{\mathrm{T}} + \mathrm{d}F_{\mathrm{T}}) - F_{\mathrm{T}}$$

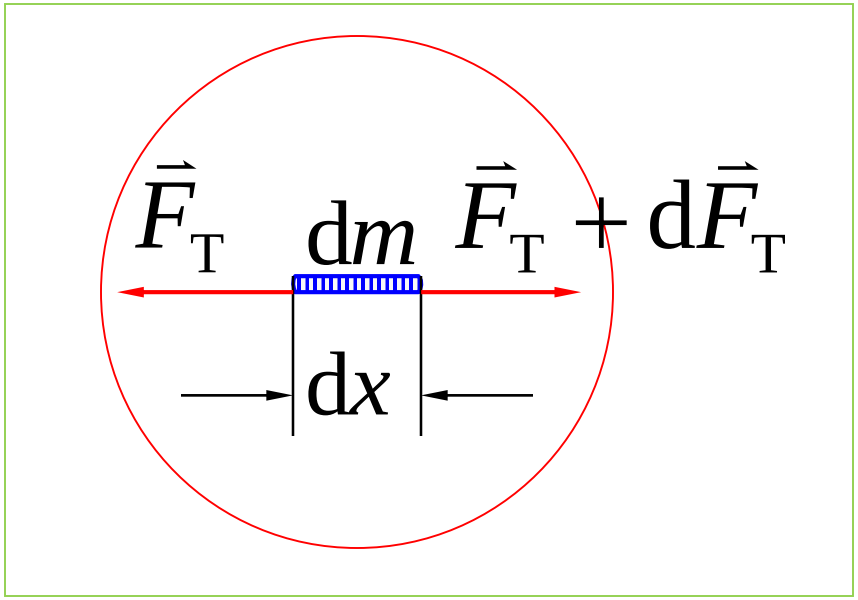
$$= (\mathrm{d}m)a = \frac{m}{l} a \mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = \frac{mF}{(m' + m)l} \mathrm{d}x$$

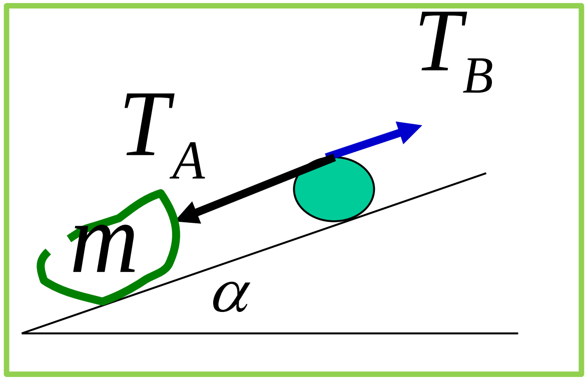
$$\int_{F_{\mathrm{T}}}^{F} \mathrm{d}F_{\mathrm{T}} = \frac{mF}{(m' + m)l} \int_{x}^{l} \mathrm{d}x$$

$$F_{\mathrm{T}} = (m' + m\frac{x}{l}) \frac{F}{m' + m}$$





例2 有一艘m=2000t的船正在下水，沿着坡度为1/20的光滑轨道由静止开始向下滑行，由于紧急原因，需要制动，如何实现？



$T_B = mg\sin\alpha \approx mg\,tg\alpha = 100t$ 在座的哪个人行？

绞盘可以使人通过绳子用很小的力拉住很大张力作用下的物体

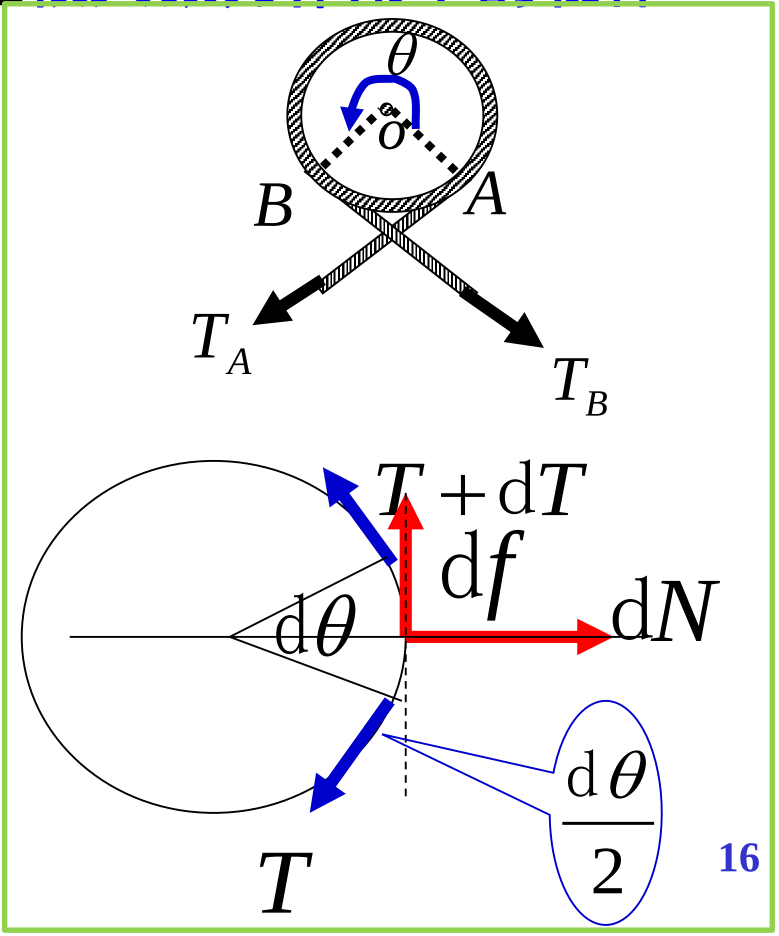
设T_A、μ、θ 试求人拉绳子的力T_B

解：任取一质量元dm

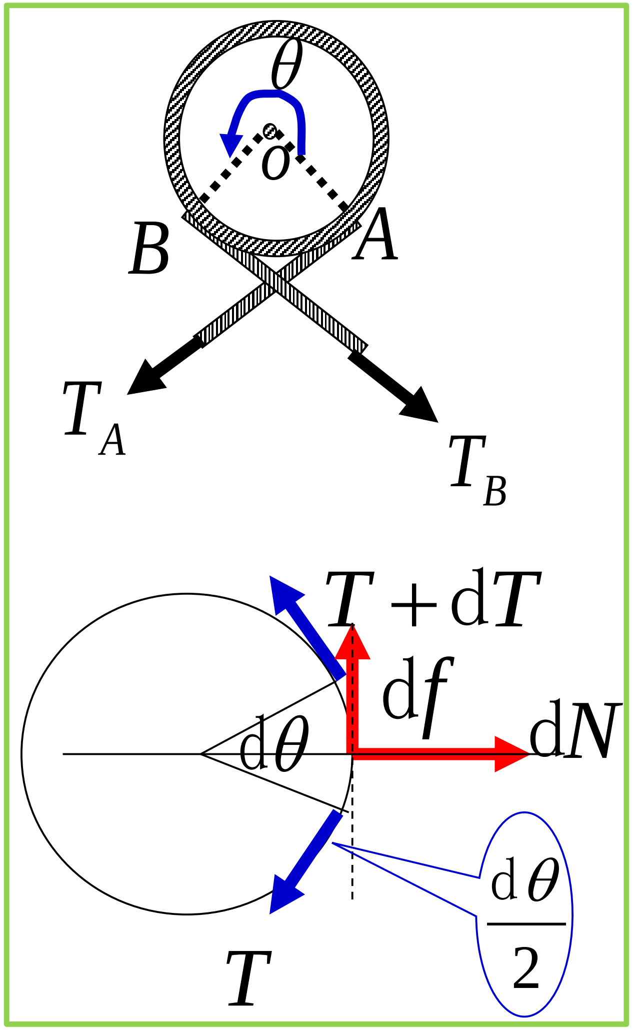
$$(T+\mathrm{d}T)\sin(\frac{\mathrm{d}\theta}{2})+T\sin(\frac{\mathrm{d}\theta}{2})-\mathrm{d}N=0$$

$$\mathrm{d}f+(T+\mathrm{d}T)\cos(\frac{\mathrm{d}\theta}{2})-T\cos(\frac{\mathrm{d}\theta}{2})=0$$

$$\left.\begin{aligned} &T\mathrm{d}\theta-\mathrm{d}N=0 && (1)\\ &\mathrm{d}f=-\mathrm{d}T && (2)\\ &\mathrm{d}f=\mu\mathrm{d}N && (3)\end{aligned}\right\}\mu T\mathrm{d}\theta=-\mathrm{d}T$$



$$T\mathrm{d}\theta - \mathrm{d}N = 0 \quad (1)$$
$$\mathrm{d}f = -\mathrm{d}T \quad (2)$$
$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}N \quad (3)$$
$$\mu T\mathrm{d}\theta = -\mathrm{d}T$$



分离变量 $$\frac{\mathrm{d}T}{T} = -\mu \mathrm{d}\theta$$

分别积分 $$\int_{T_A}^{T_B} \frac{\mathrm{d}T}{T} = \int_0^\theta -\mu \mathrm{d}\theta$$

结果 $$T_B = T_A e^{-\mu\theta}$$

讨论 $\theta \uparrow \quad \mu \uparrow \longrightarrow T_B \downarrow$

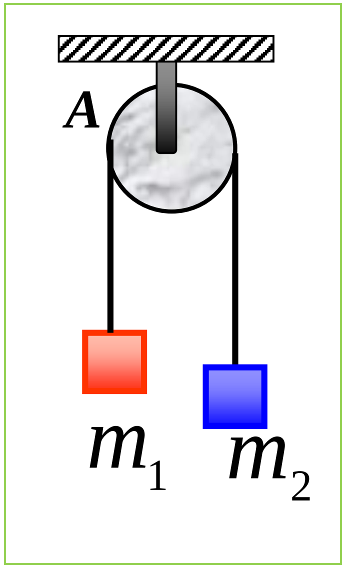
若： $\mu = 0.25 \quad \theta = 5\times 2\pi \quad T_B = T_A e^{-\mu\theta} = 100 e^{-0.25\times 10\pi} = 39\text{kg力}$

在座的哪个人不能做到？

靠静摩擦实现用小力拉大力。绳子质量不能忽略(粗绳)

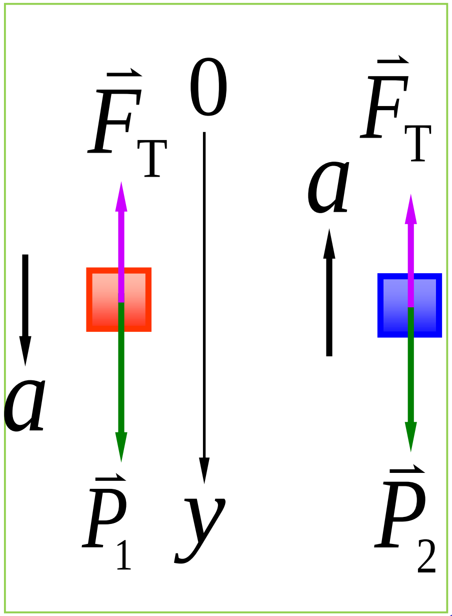
例3 阿特伍德机

（1）如图所示滑轮和绳子的质量均不计，滑轮与绳间的摩擦力以及滑轮与轴间的摩擦力均不计。且 $m_1 > m_2$。求重物释放后，物体的加速度和绳的张力，A点所承受的力。



解 以地面为参考系

画受力图、选取坐标如图

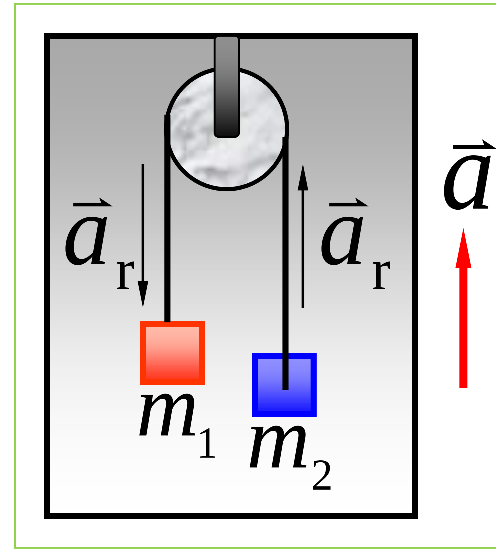


$$\begin{cases} m_1 g - F_{\mathrm{T}} = m_1 a \\ m_2 g - F_{\mathrm{T}} = -m_2 a \end{cases}$$

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g \qquad F_{\mathrm{T}} = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$\boldsymbol{F = 2F_{\mathrm{T}} = \frac{4m_1 m_2}{m_1 + m_2} g}$$

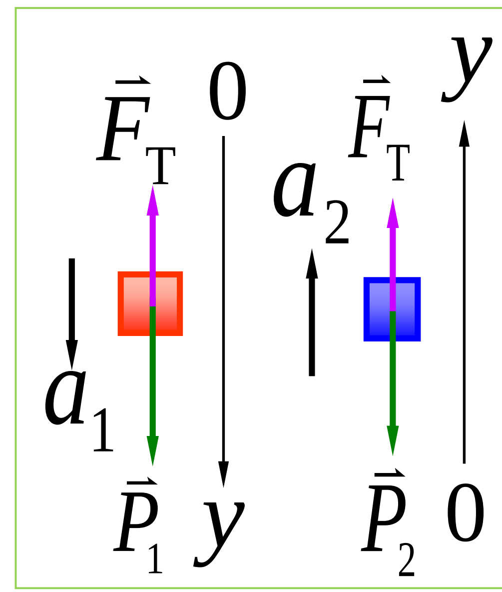
（2）若将此装置置于电梯顶部，当电梯以加速度 $\vec{a}$ 相对地面向上运动时，求两物体的加速度和绳的张力.



解 以地面为参考系

设两物体相对电梯的加速度为 ，$\vec{a}_{\rm r}$

相对于地面的加速度分别为$\vec{a}_1$、$\vec{a}_2$



$$\begin{cases} m_1 g - F_{\rm T} = m_1 a_1 \\ a_1 = a_{\rm r} - a \\ F_{\rm T} - m_2 g = m_2 a_2 \\ a_2 = a_{\rm r} + a \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{\rm r} = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \\ F_{\rm T} = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}(g + a) \end{cases}$$

$$a_1 = \ldots, a_2 = \ldots$$

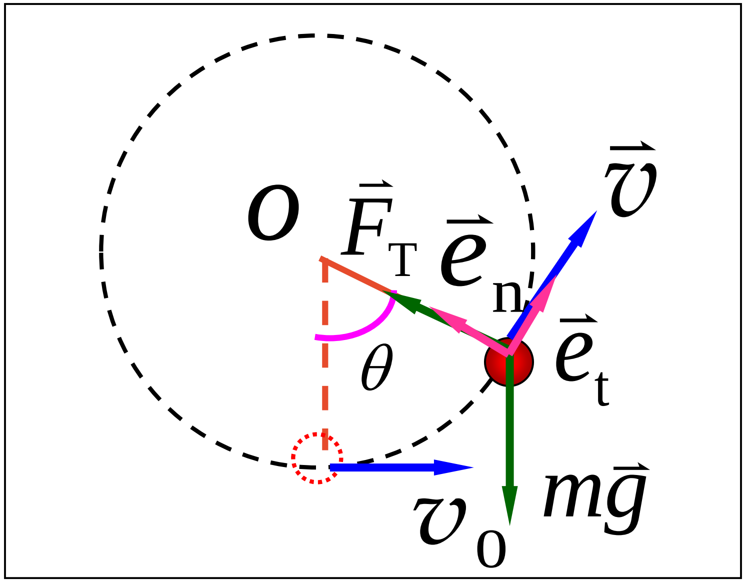
若电梯以相同的加速度下降，结果又如何？

例4 如图长为 l 的轻绳，一端系质量为 m 的小球,另一端系于定点 o， $t=0$ 时小球位于最低位置，并具有水平速度 $\vec{v}_0$ ，求小球在任意位置的速率及绳的张力。

解 $$\begin{cases} F_{\mathrm{T}} - mg\cos\theta = ma_{\mathrm{n}} \\ -mg\sin\theta = ma_{\tau} \end{cases}$$

$$F_{\mathrm{T}} - mg\cos\theta = mv^2 / l$$

$$-mg\sin\theta = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$



$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{l}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}\theta}$$

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2lg(\cos\theta - 1)}$$

$$\int_{v_0}^{v} v\mathrm{d}v = -gl\int_0^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$F_{\mathrm{T}} = m(\frac{v_0^2}{l} - 2g + 3g\cos\theta)$$

§3 功　动能定理

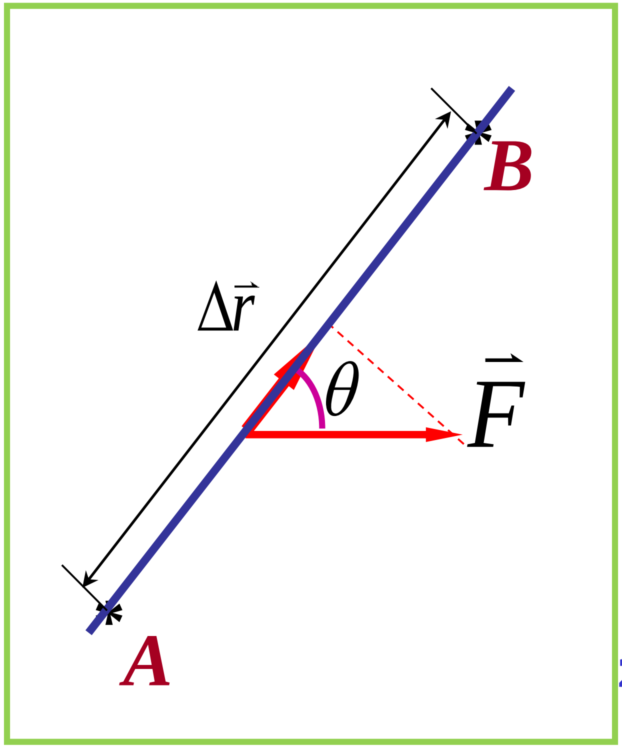
力的空间累积效应: $\vec{F}$ 对 $\vec{r}$ 积累 ⟶ A，动能定理。

一、功 (*Work*)

力对质点所做的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。（功是标量，过程量）

1. 恒力所做的功

$$A = F\cos\theta\left|\Delta\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$



$$0^\circ < \theta < 90^\circ, \quad A > 0$$

$$90^\circ < \theta < 180^\circ, \quad A < 0$$

$$\theta = 90^\circ \quad \vec{F} \perp \Delta\vec{r} \quad A = 0$$

2. 变力所做的功

$$A \approx \sum_{i=1} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \sum_{i=1} F_i \left|\Delta\vec{r}_i\right| \cos\theta_i$$

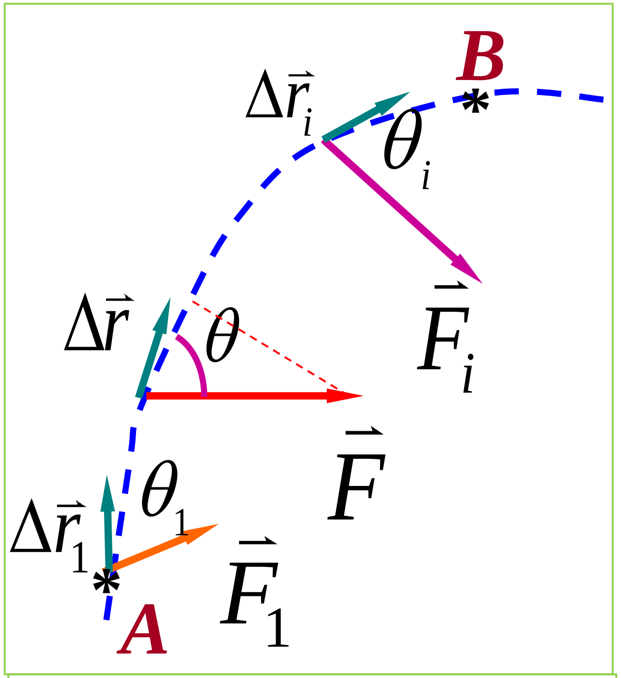
$$A = \lim_{\Delta\vec{r}_i \to 0} \sum_{i=1} \vec{F}_i \cdot \Delta\vec{r}_i = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

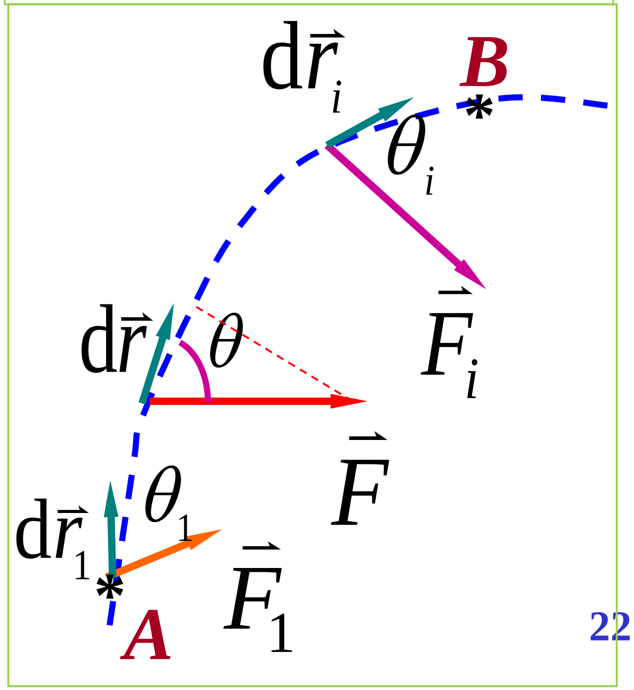
$$\boxed{A = \int_A^B \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F \cos\theta \mathrm{d}s}$$

$$\mathrm{d}s = \left|\mathrm{d}\vec{r}\right|$$

➢元功 $\mathrm{d}A = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F \cos\theta \mathrm{d}s$

$$\boxed{|\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s}$$

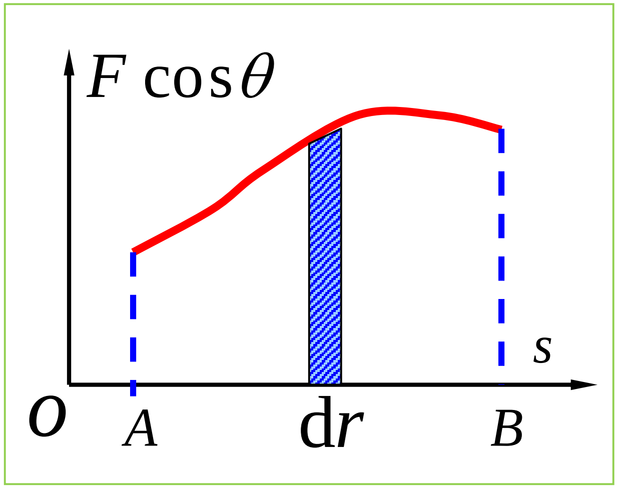




- 变力功的图示法

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = F\mathrm{d}s\cos\theta$$

$$A = \int_{(L)A}^{B} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_{(L)A}^{B} F\cos\theta\mathrm{d}s$$



称为“力沿路径 *L* 的线积分”

- **说明** **功是标量，过程量，可叠加量**

➢质点合力的功 = 分力的功的代数和

$$A=\int\sum\vec{F}_i\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum\int\vec{F}_i\cdot \mathrm{d}\vec{r}=\sum_i A_i$$

$$\begin{cases}\vec{F}=F_x\vec{i}+F_y\vec{j}+F_z\vec{k}\\ \mathrm{d}\vec{r}=\mathrm{d}x\vec{i}+\mathrm{d}y\vec{j}+\mathrm{d}z\vec{k}\end{cases}$$

$$A=\int F_x\mathrm{d}x+\int F_y\mathrm{d}y+\int F_z\mathrm{d}z$$

$$A=A_x+A_y+A_z$$

➢ 功的大小与参照系有关

➢功的单位 $1\mathrm{J}=1\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}$

➢ 做功的三个要素：力、物体、过程

3. 功率(*power*)

平均功率 $$\bar{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

瞬时功率 $$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = Fv\cos\theta$$

功率的单位：瓦特（W） $1\mathrm{W} = 1\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ $1\mathrm{kW} = 10^3\,\mathrm{W}$

等于力在速度方向的分量和速度大小的乘积。

例 如图所示，一质点在几个力的作用下，沿半径为 R 的圆周运动，其中一个力是恒力 F_0，方向始终沿 x 轴正方向，即

$$\vec{F}_0 = F_0\vec{i}$$

当质点从 A 点沿逆时针方向走过 3/4 圆周到达 B点时，$\vec{F}_0$ 所做的功为 ______________________

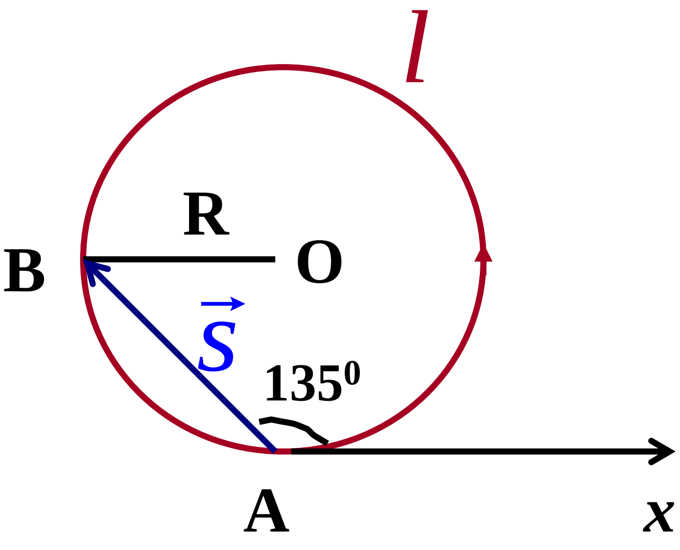
解：

$$dA = \vec{F}_0 \cdot d\vec{r}$$

$$A = \int_l \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = \vec{F}_0 \cdot \left(\int_l d\vec{r}\right)$$

$$= \vec{F}_0 \cdot \vec{S} = F_0 S \cos\alpha$$

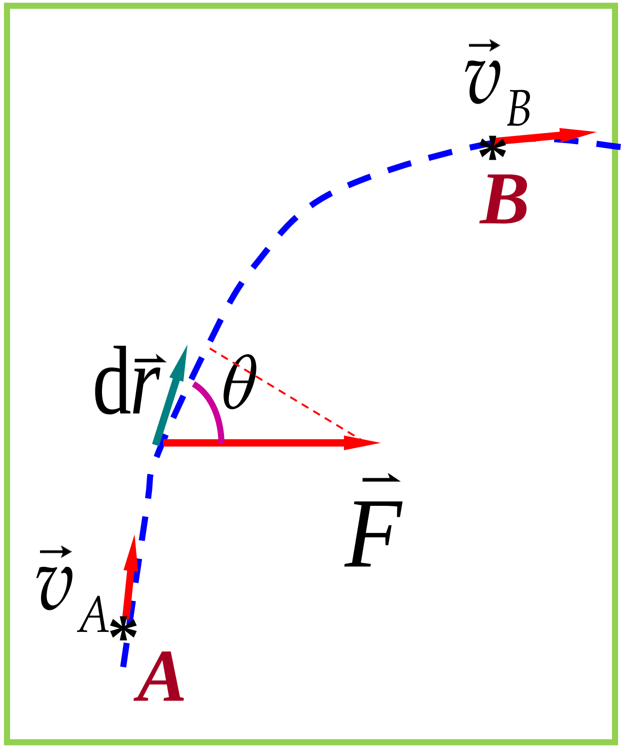
$$= F_0 \cdot \sqrt{2}R\cos 135^0 = -F_0 R$$



二、质点的动能定理
(*Theorem of Kinetic Energy*)

合力对质点做功为：

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int F_{\mathrm{t}}\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\int F_{\mathrm{t}}\mathrm{d}s$$



由牛顿第二定律可得：

$$F_{\mathrm{t}}=ma_{\tau}=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$A=\int_{v_A}^{v_B}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

$$=\int_{v_A}^{v_B}mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

定义：动能（*Kinetic Energy* 状态函数）——

$$\boxed{E_{\mathrm{k}}=\frac{1}{2}mv^2}$$

动能定理(*Theorem of Kinetic Energy*)

——合力对质点所作的**功数值上**等于该质点**动能的增量**。

$$A = E_{\mathrm{kB}} - E_{\mathrm{kA}} = = \Delta E_k$$

注意:

功和动能都与 **参考系**有关；动能定理仅适用于**惯性系** 。

例 1 一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上。起初把绳子放在与竖直线成 30°角处，然后放手使小球沿圆弧下落。试求绳与竖直线成10°角时小球的速率。

解：

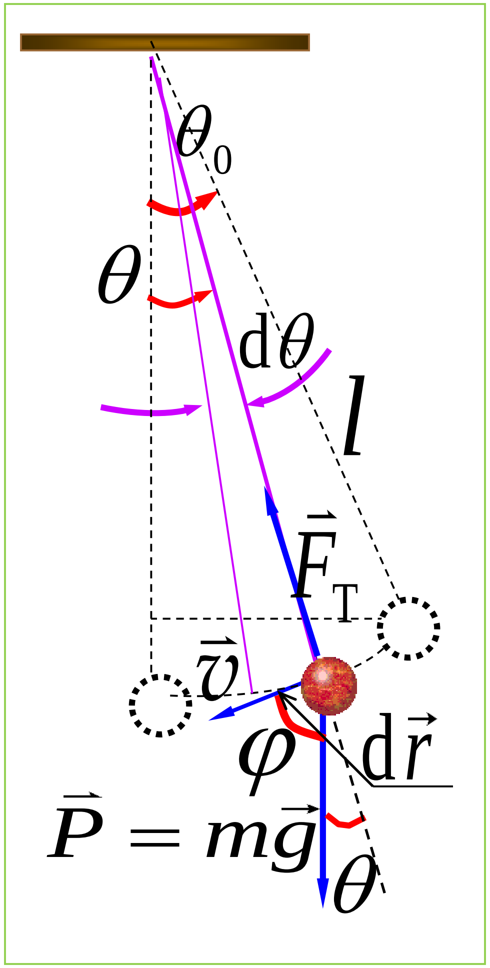
$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{r} + \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = -mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$= -mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$A = -mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$= mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$



$$m = 1.0\text{kg} \qquad l = 1.0\text{m}$$

$$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$$

$$A = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$

由动能定理

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

得 $$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$= 1.53\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$