第八章 稳恒磁场

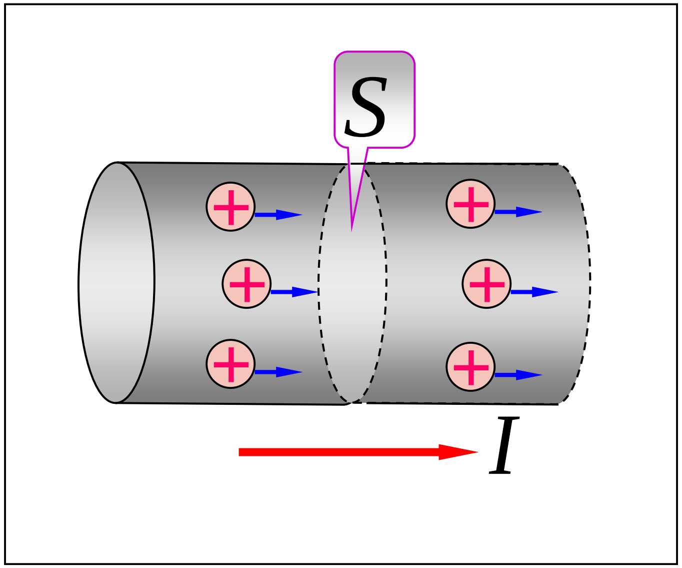
——稳恒电流激发的磁场

§1 电流与电动势

一、电流

单位时间内通过截面S 的电量。

$$I = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

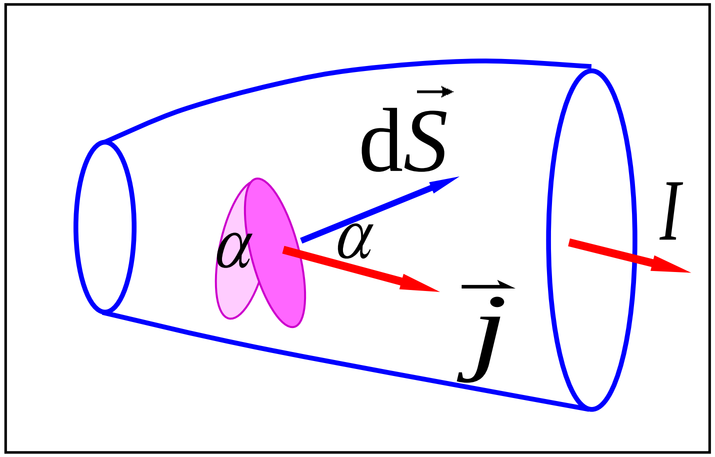


电流单位：A（安培）

$$1\mathrm{A} = 10^3\mathrm{mA} \quad = 10^6\mu\mathrm{A}$$

二、电流密度

单位时间内过该点附近垂直于正电荷运动方向的单位面积的电荷。



$$j = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S\cos\alpha} \qquad \mathrm{d}I = \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\boxed{I = \int_S \vec{j}\cdot\mathrm{d}\vec{S}}$$

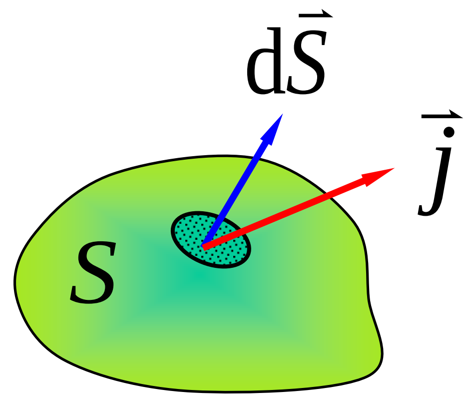
——电流密度矢量沿正电荷运动方向。

三、 稳恒电流

单位时间内通过闭合曲面向外流出的电荷，等于此时间内闭合曲面里电荷的减少量。

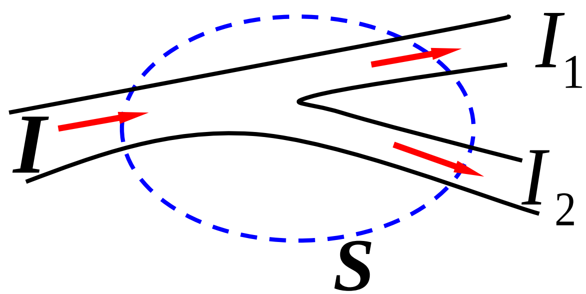
$$\oint_S \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\mathrm{d}q_{\mathrm{int}}}{\mathrm{d}t}$$

电荷守恒定律



若闭合曲面 *S* 内的电荷不随时间而变化，导体内流有恒定电流

$$\frac{\mathrm{d}q_{int}}{\mathrm{d}t} = 0 = \oint_s \vec{j}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$



或： $-I + I_1 + I_2 = 0$

1）稳恒电流的电路必须闭合

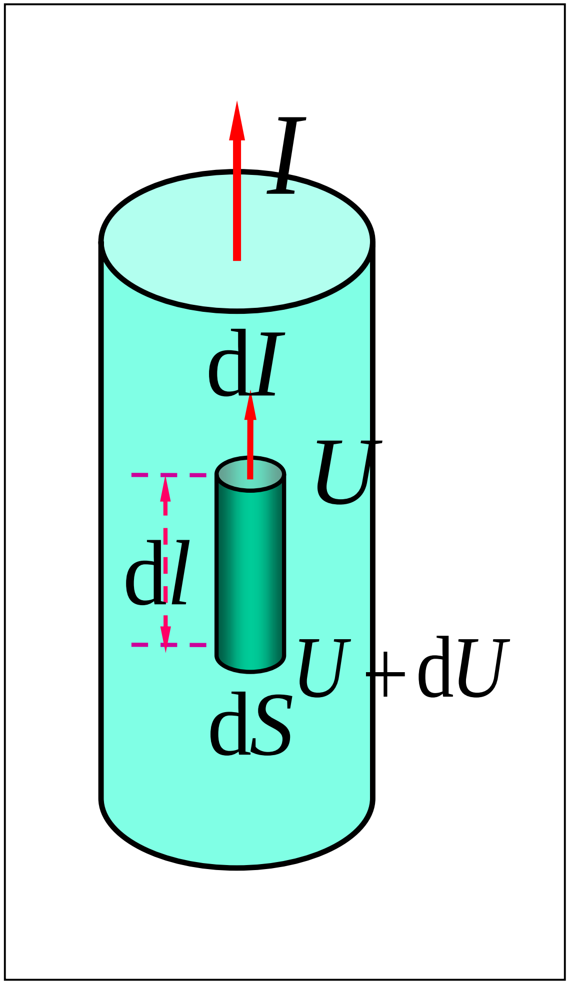
2）对一段无分支的稳恒电路 其各横截面的电流强度相等

四、欧姆定律

电流 $I=\dfrac{U}{R}$

电阻 $R=\rho\dfrac{l}{S}$ ，

ρ 是电阻率， 电导率 $\sigma=\dfrac{1}{\rho}$



$$\mathrm{d}I=j\mathrm{d}S=\frac{E\mathrm{d}l}{\rho\dfrac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}S}}=\frac{E\mathrm{d}S}{\rho}=\sigma E\mathrm{d}S$$

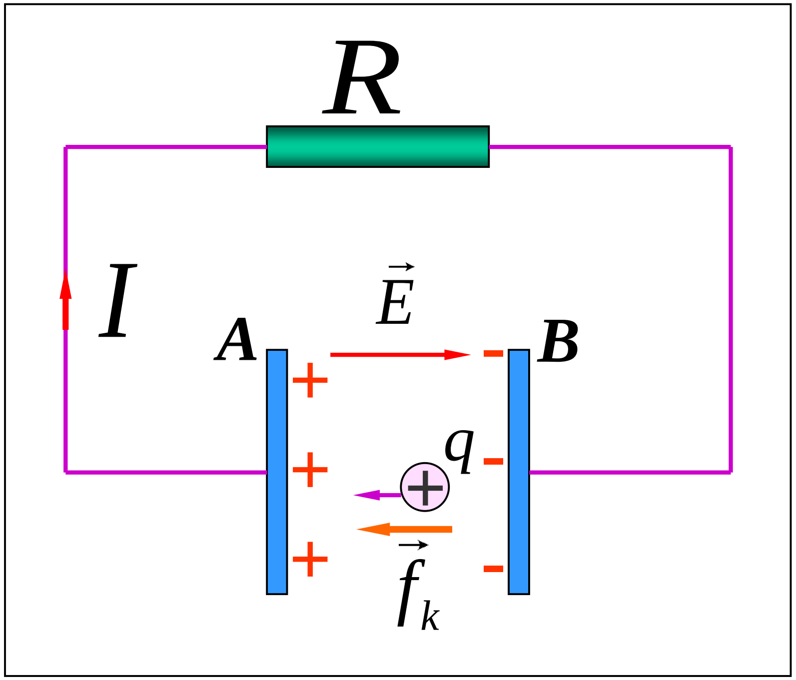
$$j=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}=\sigma E$$

欧姆定律的微分表达式： $\boxed{\vec{j}=\sigma\vec{E}}$

五、电源电动势

电源：提供非静电力的装置。

非静电力：能不断分离正负电荷，并使正电荷逆静电场方向运动。



$\vec{f}_k$ ——非静电力，维持回路中具有稳定的电流。

非静电力驱动电荷 q 由 B 极板运动到 A 极板所做的功：

$$A_{BA} = \int_B^A \vec{f}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

定义：**非静电场场强** $\vec{E}_k$ 为单位正电荷所受的非静电力。

即： $\vec{E}_k = \dfrac{\vec{f}_k}{q}$ 　　或： $\vec{f}_k = q\vec{E}_k$

$$A_{BA} = q\int_{B}^{A} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

定义：电动势为非静电力驱动单位正电荷由 ***B*** 极板运动到 ***A*** 极板所做的功。

即：$$\mathcal{E} = \frac{A_{BA}}{q}$$

则：$$\mathcal{E} = \frac{A_{BA}}{q} = \frac{q\int_{B}^{A} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}}{q} = \int_{B}^{A} \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 对于闭合回路，电动势的定义式为单位正电荷绕闭合回路运动一周，非静电力所做的功。

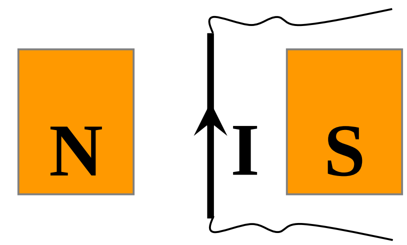
$$\mathcal{E} = \oint \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

§ 2 磁场与磁感应强度矢量

一、 电磁相互作用

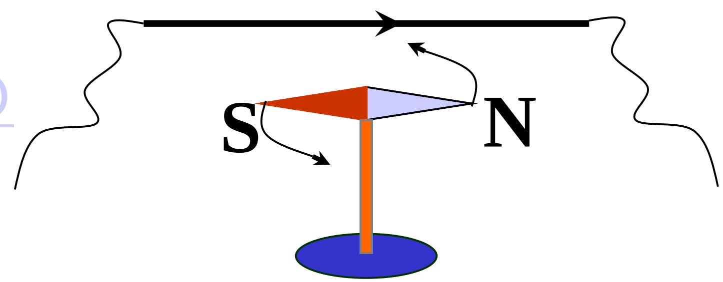
磁现象：

1. 磁体与磁体（磁极、磁力）

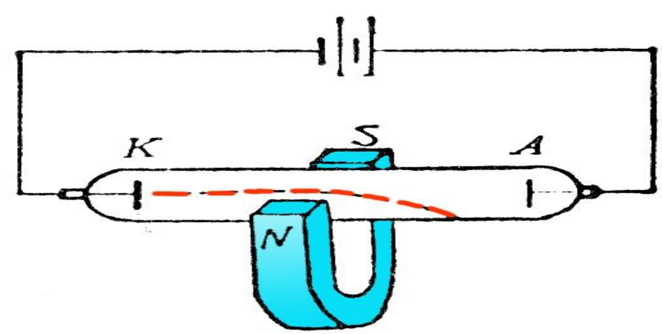


2. 磁体对电流

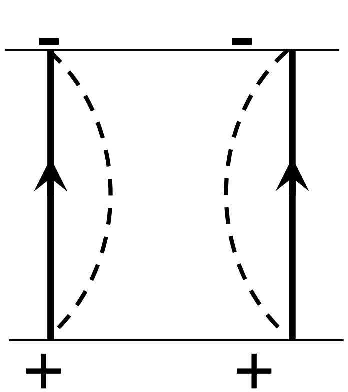
3. 电流对磁体（1820年奥斯特实验）

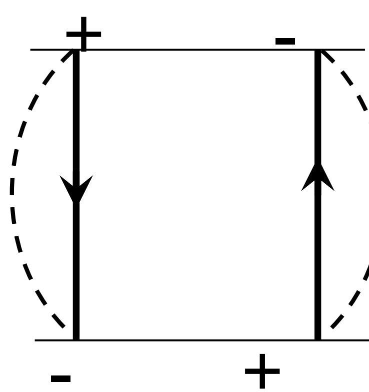


4. 磁体对运动电荷



5. 电流对电流



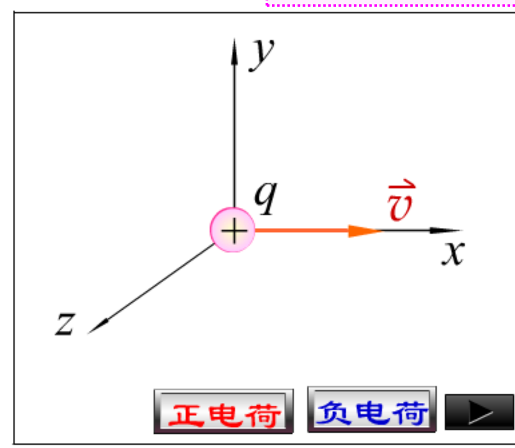


二、磁 场

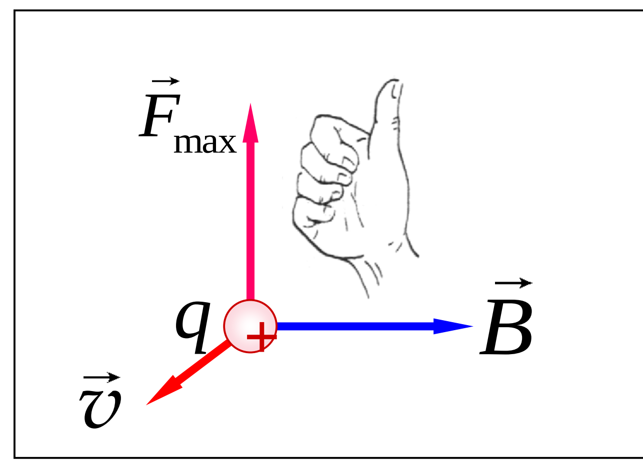
运动电荷 / 磁 体 ⇄ 磁场 ⇄ 磁 体 / 运动电荷

三、磁感强度矢量 $\vec{B}$ 的定义

带电粒子在磁场中运动受到力的作用



磁感强度 $\vec{B}$ 的定义： 当正电荷垂直于特定方向运动时，受力 $\vec{F}_{\max}$ ，将 $\vec{F}_{\max}\times\vec{v}$ 方向定义为该点 $\vec{B}$ 的方向。



磁感强度大小 $B=\dfrac{F_{\max}}{qv}$

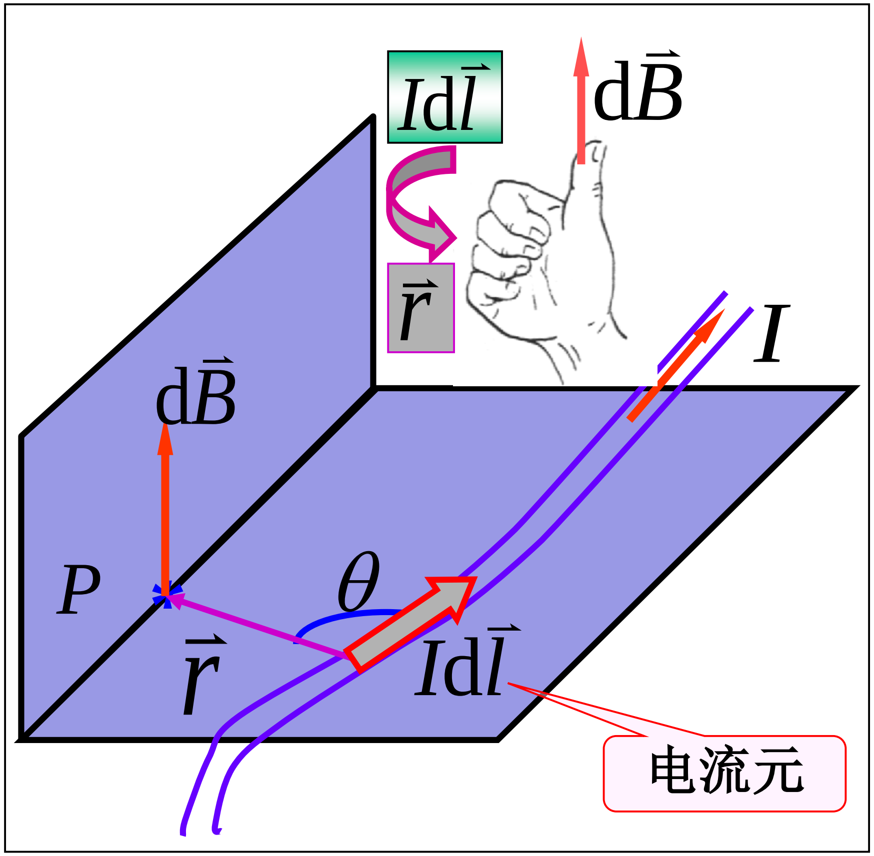
单位:**特斯拉（T）** $1\mathrm{T}=1\mathrm{N}\cdot\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{m}^{-1}$

运动电荷在磁场中受力： $\vec{F}=q\vec{v}\times\vec{B}$ ——洛仑兹力

§ 3 毕奥—萨伐尔定律

一、毕奥—萨伐尔定律

——电流元在空间产生的磁场



$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}}{r^3}$$

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l\sin\theta}{r^2}$$

$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{N\cdot A^{-2}}$ ——真空磁导率

$\theta=\vec{r}\,\hat{}\,\mathrm{d}\vec{l}$

- 任意载流导线在点 P 处的磁感强度:

$$\vec{B}=\int_{(L)}\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_{(L)}\frac{\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}$$

二、毕奥—萨伐尔定律应用举例

例1 求有限长载流直导线外的磁场。

解：

$$\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}$$

$\mathrm{d}\vec{B}$方向均沿 z 轴的负方向

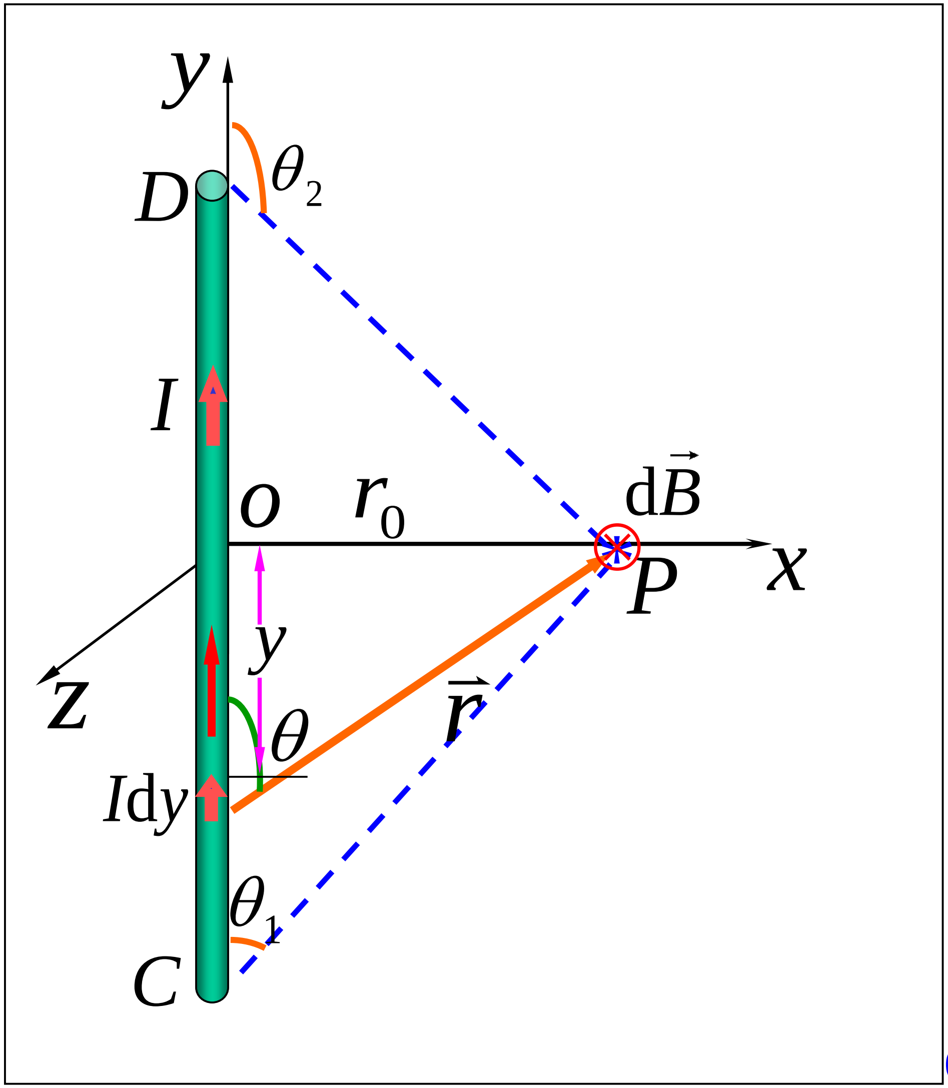
$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}y\sin\theta}{r^2}$$

$$r=r_0/\sin\theta$$

$$-y=r_0\,\mathrm{ctg}\,\theta$$

$$\mathrm{d}y=r_0\mathrm{d}\theta/\sin^2\theta$$

$$\mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$



$$B=\int_C^D \mathrm{d}B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}\int_{\theta_1}^{\theta_2}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

$$=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$ $\vec{B}$ 的方向沿 z 轴的负方向。

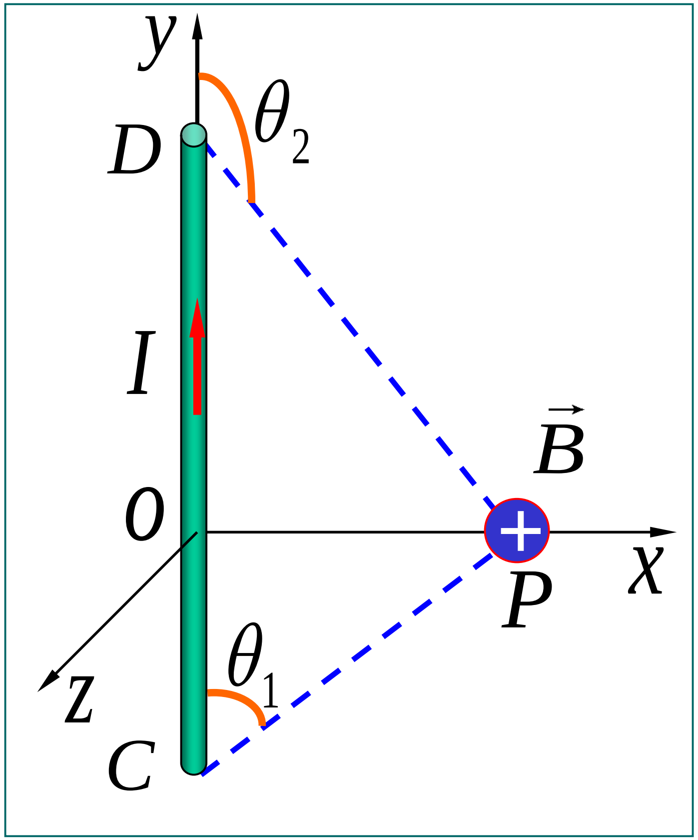
讨论：

（1）P点在载流长直导线的中垂线上

$$\theta_1+\theta_2=\pi \quad \cos\theta_2=-\cos\theta_1$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$$=\frac{\mu_0 I}{2\pi r_0}\cos\theta_1$$

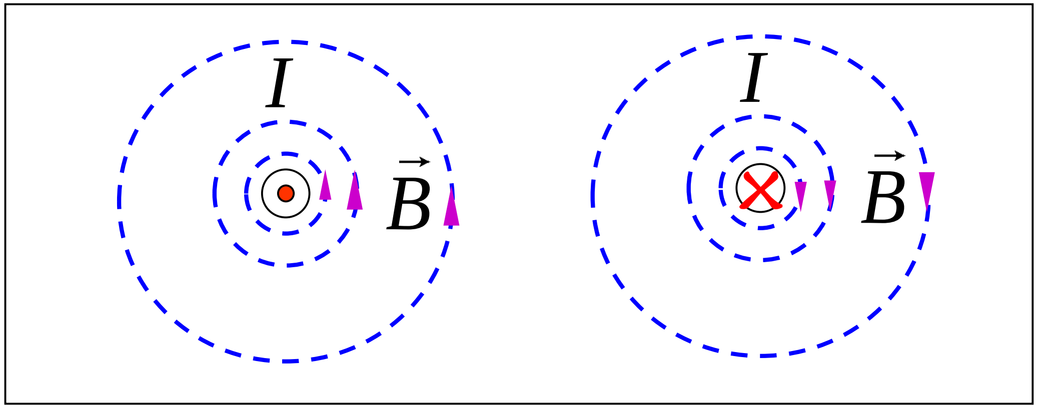


（2）无限长载流长直导线的磁场

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r_0}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$$

$$\theta_1\to 0,\quad \theta_2\to \pi$$

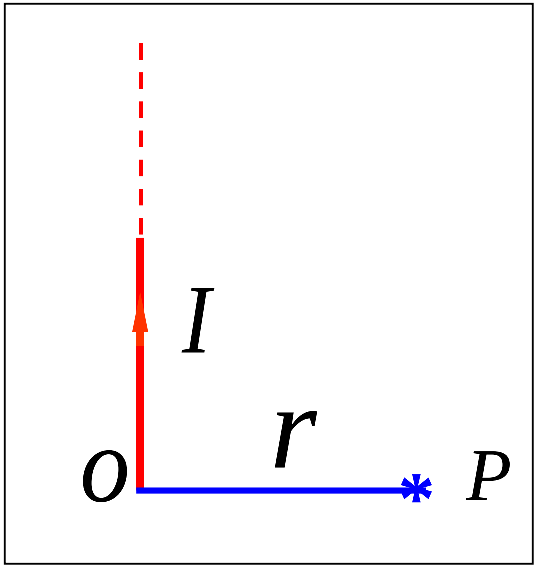
$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}}$$



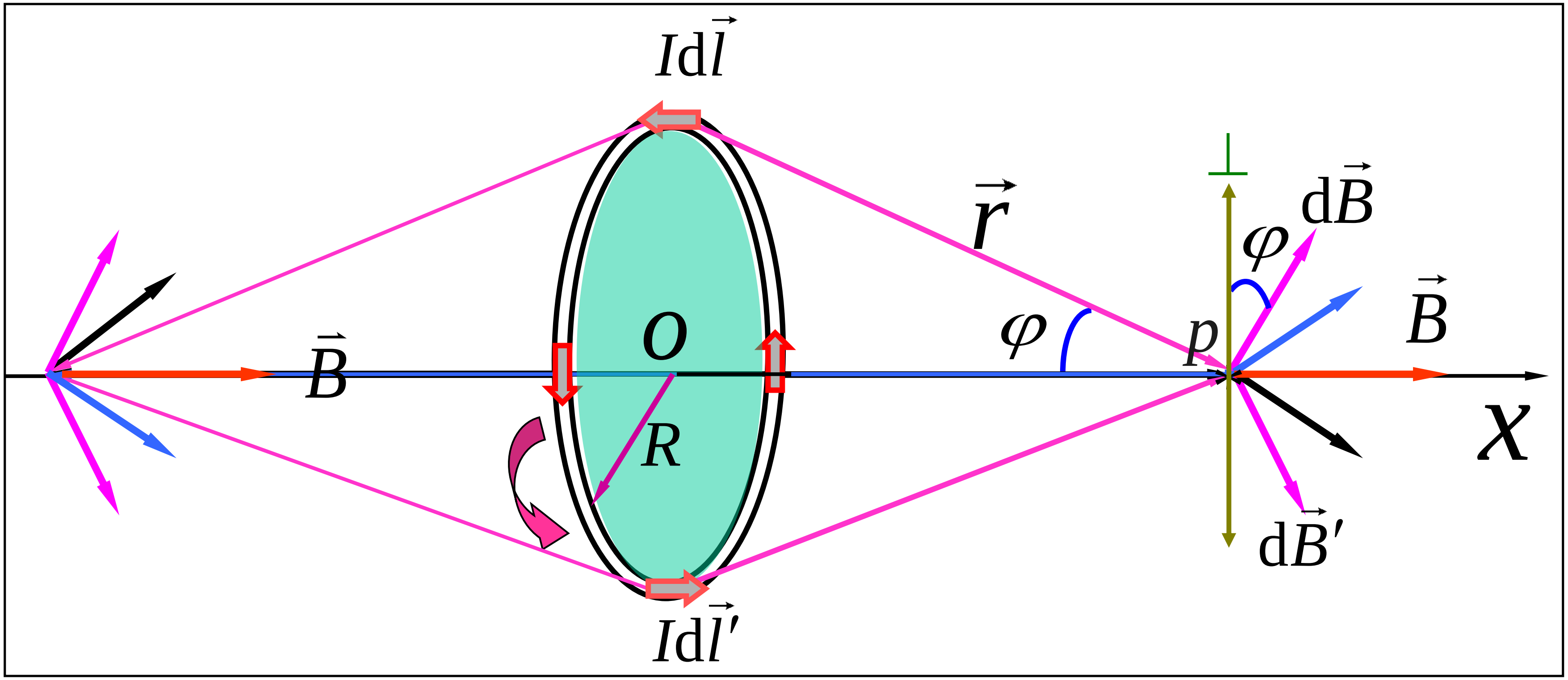
（3）半无限长载流长直导线的磁场

$$\theta_1\to \frac{\pi}{2},\quad \theta_2\to \pi$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}}$$



例2 真空中，半径为R 的载流导线，通有电流 I，称圆电流。**求**其轴线上一点 p 的磁感强度的大小和方向。



解：

$$\boxed{\mathrm{d}\vec{B}=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}\vec{l}\times\vec{r}_0}{r^2}}\qquad \mathrm{d}B=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}$$

根据对称性分析知：$B_{\perp}=0,\quad B_x=\int\mathrm{d}B_x$

$$\mathrm{d}B_x = \mathrm{d}B\cos\alpha$$

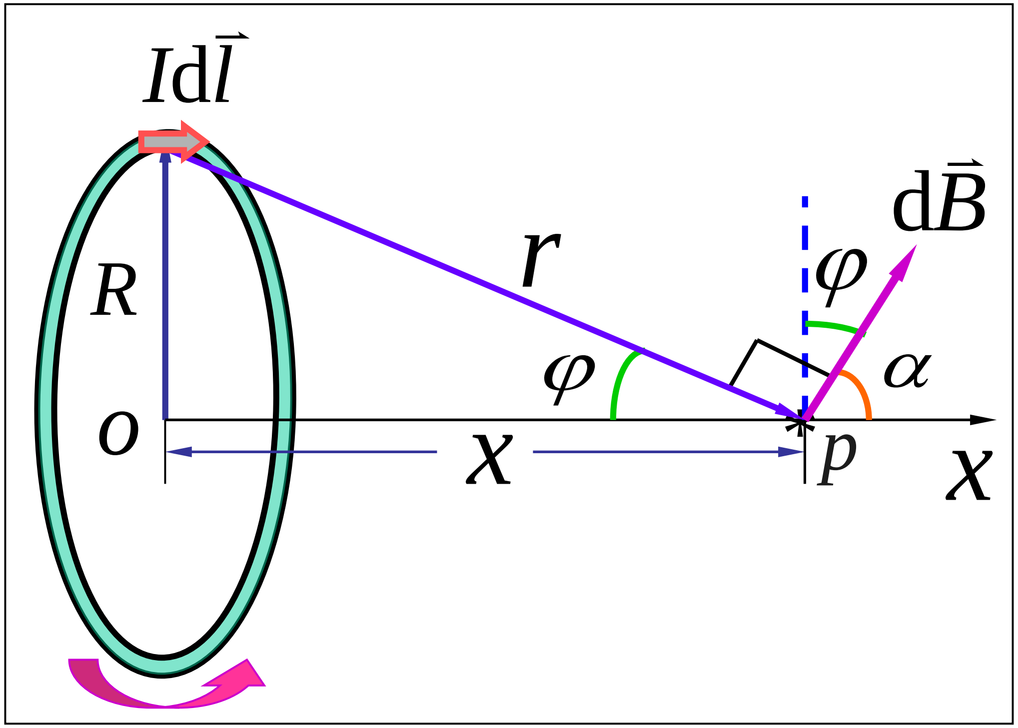
$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\mathrm{d}l}{r^2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \sin\varphi = R/r$$

$$\mathrm{d}B_x = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR\mathrm{d}l}{r^3}$$

$$B_x = \frac{\mu_0 IR}{4\pi r^3}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}\,l$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{r^3}$$

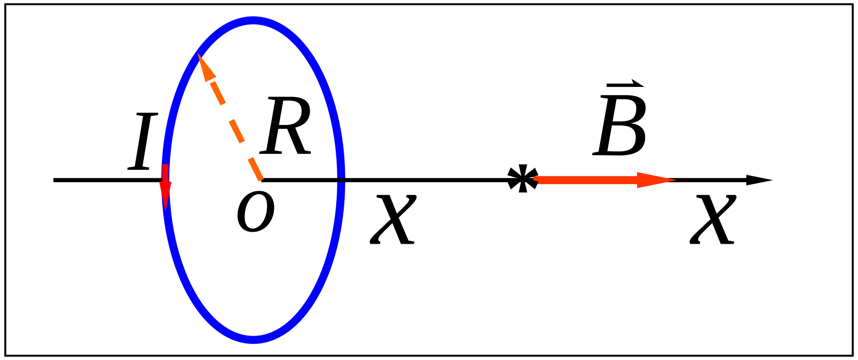


$$r^2 = R^2 + x^2$$

$$B_x = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$\vec{B} = B_x\vec{i}$$

$$\vec{B} = B_x \vec{i}$$



讨论:

（**1**）若 $x = 0$

$$\boxed{B = \frac{\mu_0 I}{2R}}$$

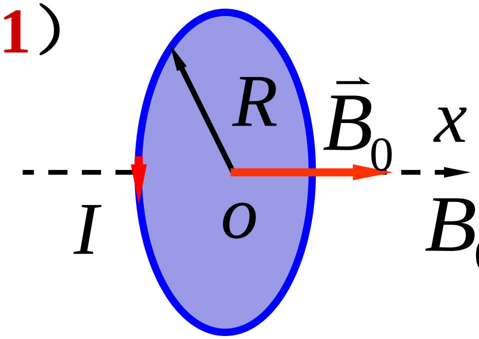
（**2**）$\vec{B} = B_x \vec{i} = \dfrac{\mu_0 I}{2} \dfrac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{I\pi R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \vec{i}$

$\vec{m} = I\vec{S} = I\pi R^2 \vec{i}$ ——称为磁矩

当 $x >> R$ 时： $\vec{B} = B_x \vec{i} = \dfrac{\mu_0}{2\pi} \dfrac{\vec{m}}{x^3}$

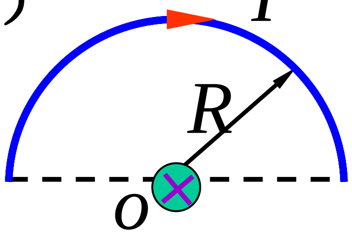
（3）几个特例

（1）



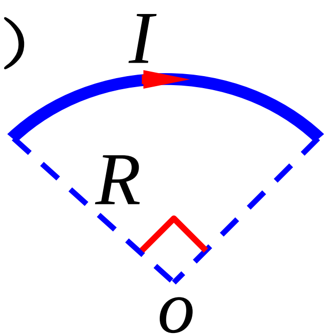
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}$$

（2）



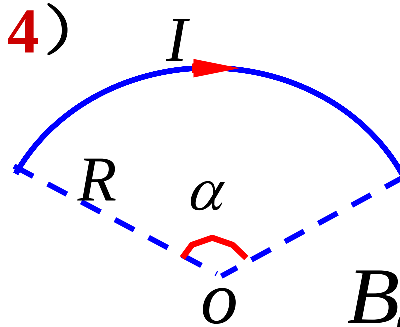
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R}$$

（3）



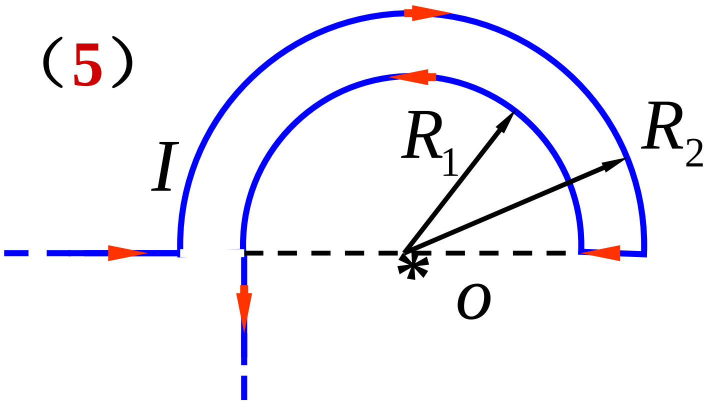
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

（4）



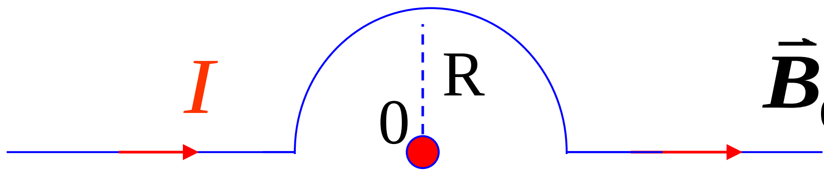
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{2R}\frac{\alpha}{2\pi}$$

（5）



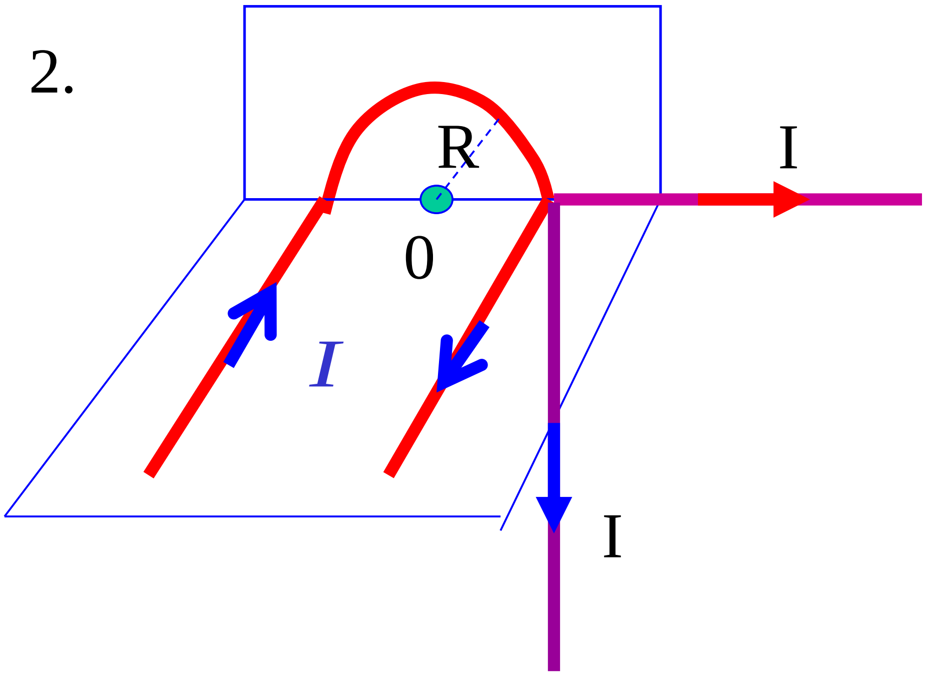
$$B_0=\frac{\mu_0 I}{4R_2}-\frac{\mu_0 I}{4R_1}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$$

1.

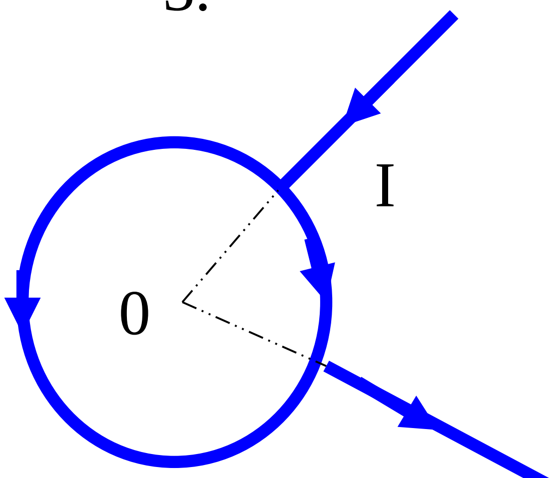


$$\vec{B}_0 = ?$$

2.

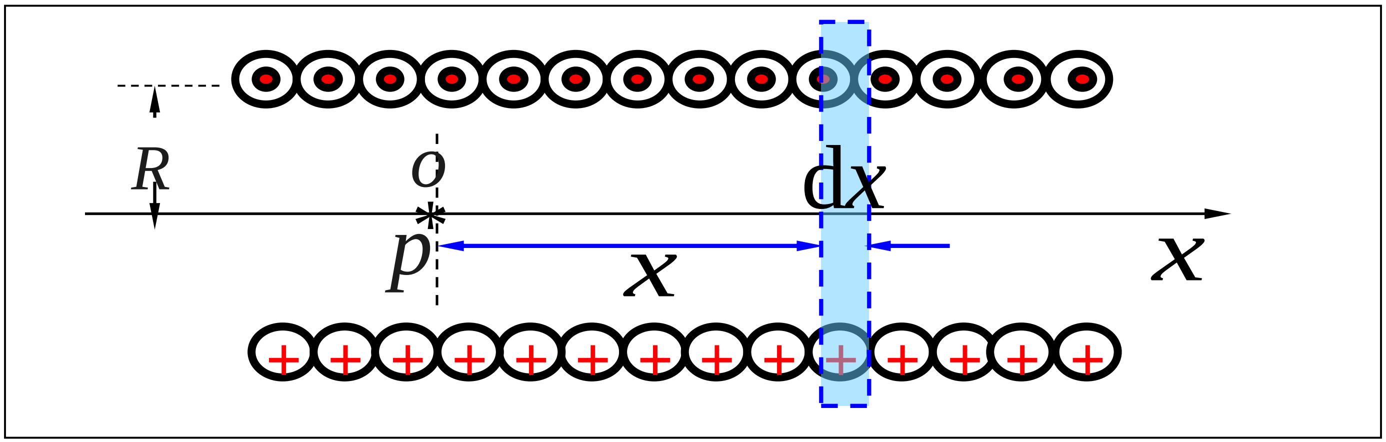


3.



选讲:

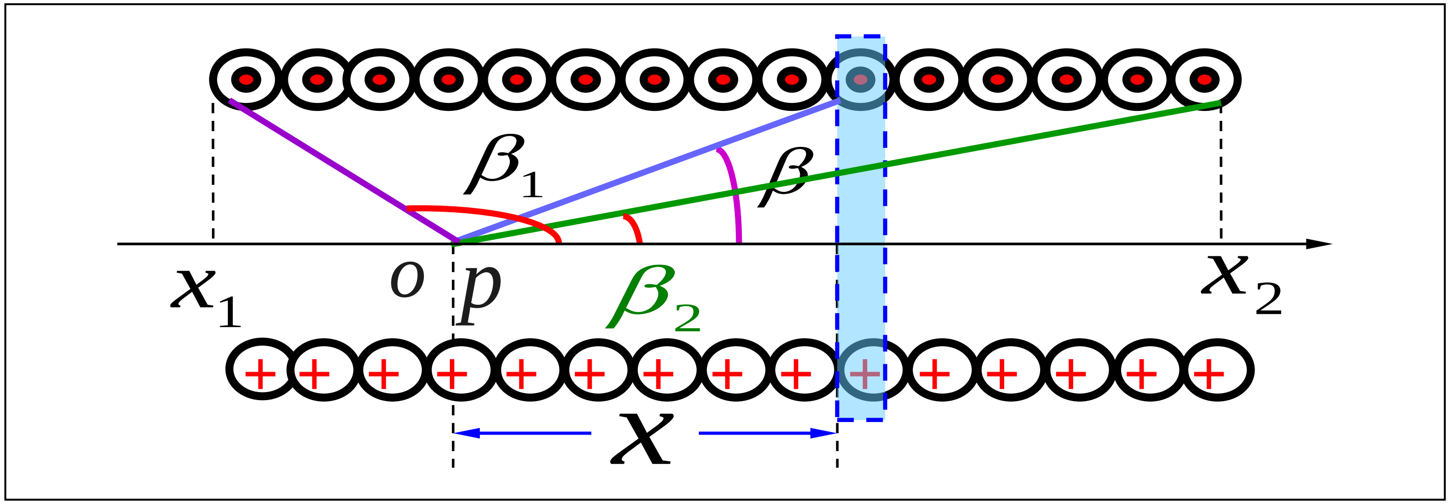
例3 如图所示，有一长为L, 半径为R的载流密绕直螺线管，螺线管的总匝数为N，通有电流I. 设把螺线管放在真空中，求管内轴线上一点处的磁感强度.



解 由圆形电流磁场公式 $B_1 = \dfrac{\mu_0 I}{2} \dfrac{R^2}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$

$$n = N/L \qquad \mathrm{d}N = n\mathrm{d}x$$

$$\mathrm{d}B = B_1 \mathrm{d}N = \frac{\mu_0 n I}{2} \frac{R^2 \mathrm{d}x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$



$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 nI}{2}\frac{R^2\mathrm{d}x}{\left(R^2 + x^2\right)^{3/2}}$$

$$x = R\cot\beta \qquad \mathrm{d}x = -R\csc^2\beta\mathrm{d}\beta$$

$$\sin\beta = R\Big/\sqrt{R^2 + x^2} = \left(\csc\beta\right)^{-1}$$

$$\mathrm{d}B = -\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{R^3\csc^2\beta\mathrm{d}\beta}{R^3\csc^3\beta} = -\frac{\mu_0 nI}{2}\sin\beta\mathrm{d}\beta$$

$$B = \int_{(L)} dB = -\frac{\mu_0 nI}{2}\int_{\beta_1}^{\beta_2}\sin\beta\,\mathrm{d}\beta = \frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2 - \cos\beta_1\right)$$

$$\boxed{B=\frac{\mu_0 nI}{2}\left(\cos\beta_2-\cos\beta_1\right)}$$

讨论：

（**1**）***P***点位于管内**轴线中点** $\beta_1=\pi-\beta_2$

$$\cos\beta_1=-\cos\beta_2 \qquad \cos\beta_2=\frac{L/2}{\sqrt{\left(L/2\right)^2+R^2}}$$

$$B=\mu_0 nI\cos\beta_2=\frac{\mu_0 nI}{2}\frac{L}{\left(L^2/4+R^2\right)^{1/2}}$$

（**2**）**无限长的**螺线管

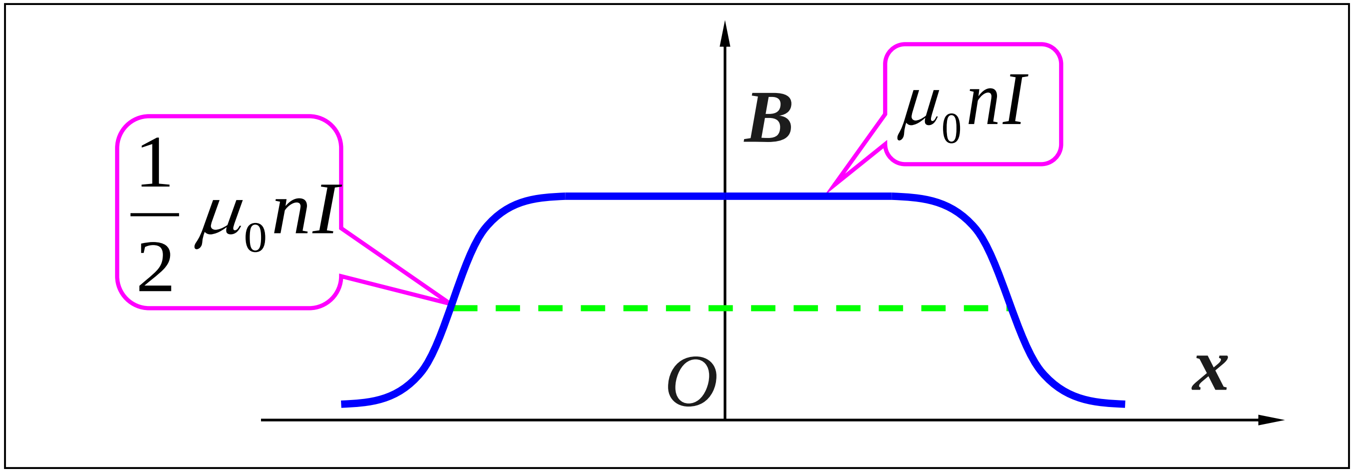
$L>>R$ 即：$\beta_1\to\pi,\ \beta_2\to 0$

则：$\boxed{B=\mu_0 nI}$

（3）半无限长螺线管 $\beta_1=\frac{\pi}{2},\ \beta_2\to 0$

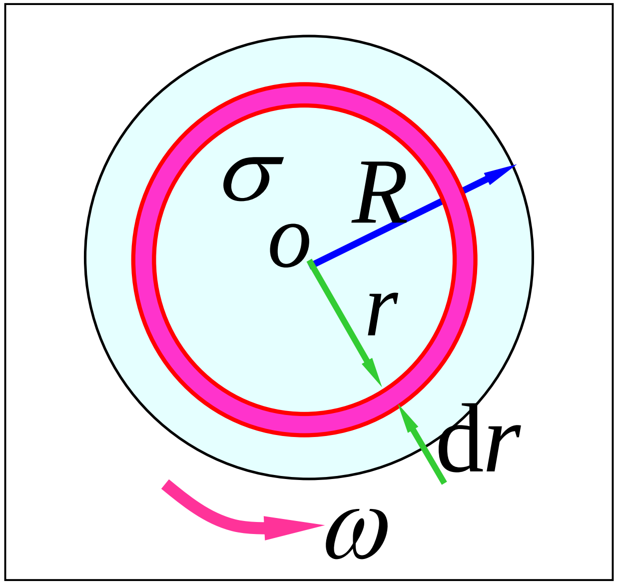
$$\boxed{B=\frac{1}{2}\mu_0 nI}$$

（4）磁感应强度的小的分布



选讲:

例4 半径为 R 的带电薄圆盘的电荷面密度为 σ,并以角速度 ω 绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求圆盘中心的磁感强度。



解: 圆电流的磁场

$$\mathrm{d}I = \frac{\omega}{2\pi}\sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r = \sigma\omega r\mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 \mathrm{d}I}{2r} = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\mathrm{d}r$$

$$\begin{cases} \sigma > 0, & \vec{B} \text{ 向外} \\ \sigma < 0, & \vec{B} \text{ 向内} \end{cases}$$

$$B = \frac{\mu_0\sigma\omega}{2}\int_0^R \mathrm{d}r = \frac{\mu_0\sigma\omega R}{2}$$