§5 动量与动量守恒定律

一、动量、冲量、质点的动量定理

对质点： $\vec{F}=\dfrac{d\vec{p}}{dt}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\vec{F}\cdot dt = d\vec{p} = dm\vec{v}}$

微分形式

力的时间积累：

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt=\int_{\vec{v}_1}^{\vec{v}_2}d(m\vec{v}) \Rightarrow \boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1}$$

积分形式

力的冲量(*impules*)： $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}dt$

单位:N·s

♦过程量，反映力的时间积累效应。

♦矢量, 方向沿动量增量的方向。

作用于质点某段时间内合力的冲量等于质点动量的增量

----质点的动量定理

$$\boxed{\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}$$

直角坐标系内的分量形式——

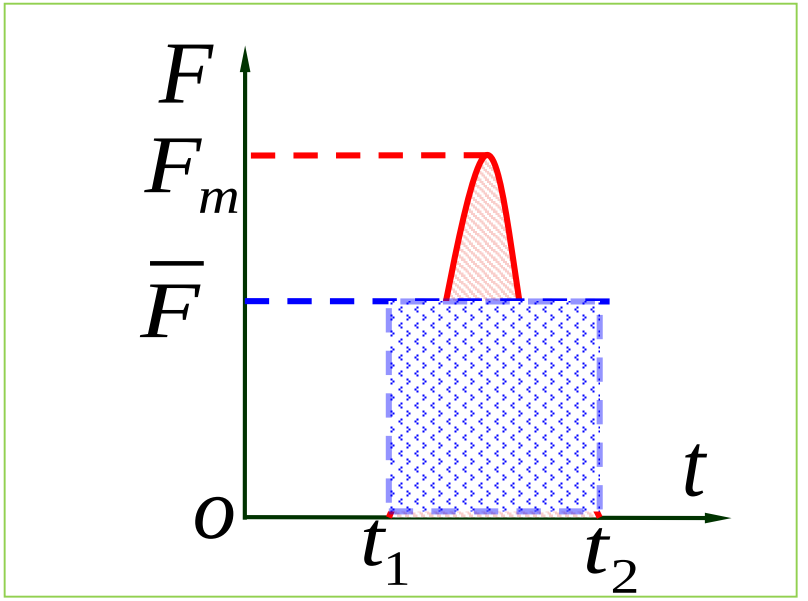
$$\vec{I}=I_x\vec{i}+I_y\vec{j}+I_z\vec{k}\quad\begin{cases} I_x=\int_{t_1}^{t_2}F_x\mathrm{d}t=mv_{2x}-mv_{1x}\\ I_y=\int_{t_1}^{t_2}F_y\mathrm{d}t=mv_{2y}-mv_{1y}\\ I_z=\int_{t_1}^{t_2}F_z\mathrm{d}t=mv_{2z}-mv_{1z}\end{cases}$$

特点：相对性，单个质点

动量定理是牛顿第二定律变形，但又不同于牛顿第二定律（瞬时作用规律）。

$$\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=m\vec{v}_2-m\vec{v}_1$$

若一恒力的冲量与相同时间内一变力的冲量相等。则该恒力称为这一变力的**平均冲力**。



$$\overline{\vec{F}}=\frac{\int_{t_1}^{t_2}\vec{F}\mathrm{d}t}{t_2-t_1}=\frac{m\vec{v}_2-m\vec{v}_1}{t_2-t_1}$$

在 $\Delta\vec{p}$ 一定时，Δt 越小，则 $\overline{F}$ 越大。

* 动量定理常应用于碰撞问题

例如：人从高处跳下、飞机与鸟相撞、打桩等碰撞事件中，作用时间很短，冲力很大。

船行“八面风”

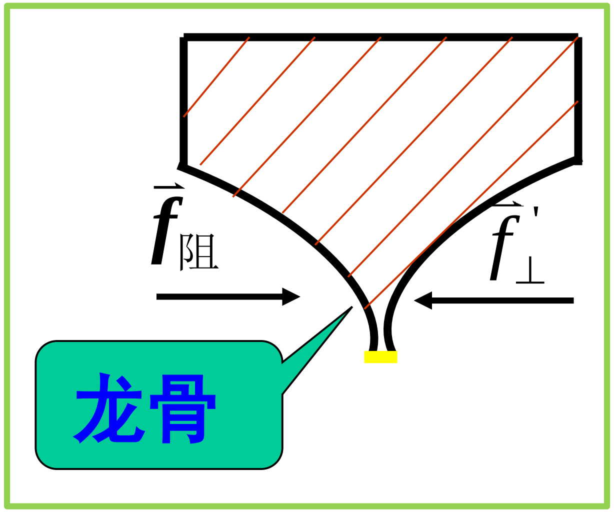
“好船家会使八面风”。请分析逆风行舟的道理

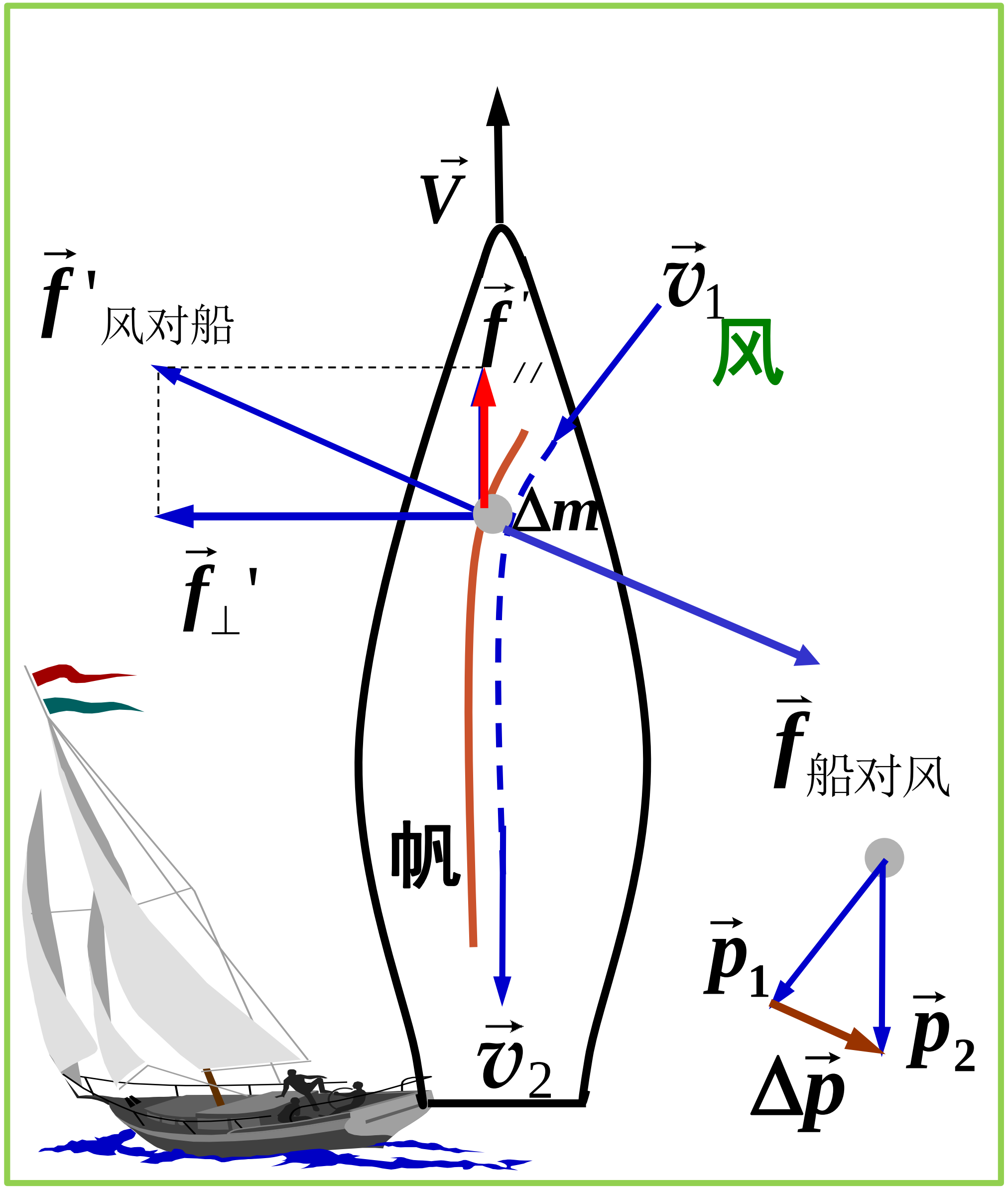
$$\vec{f}_{船对风}\cdot\Delta t=\vec{p}_2-\vec{p}_1=\Delta\vec{p}$$

$$\vec{f}\,'_{风对船}=-\vec{f}_{船对风}$$

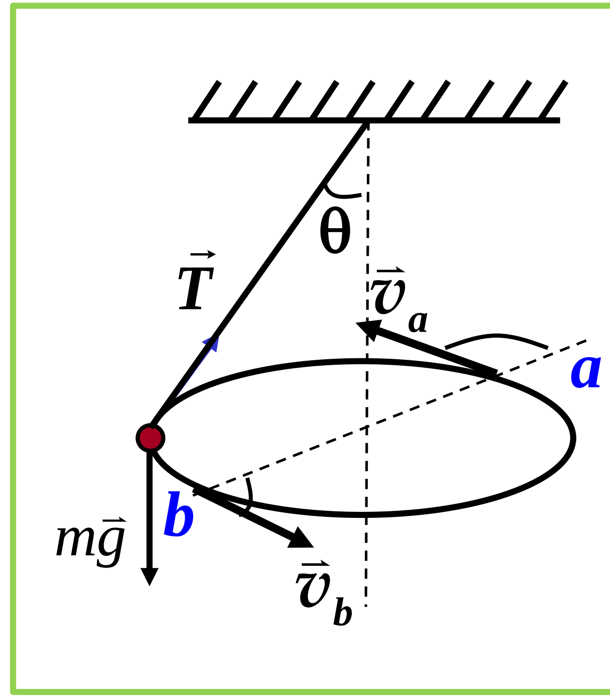
$\vec{f}\,'_{//}$ 为船前进的推动力

$\vec{f}\,'_{\perp}$ 与水的阻力相平衡





例1：圆锥摆匀速圆周运动　当质点从*a* 点绕行半周到*b*点，求此过程中重力、绳中张力的冲量。



解：重力的冲量（恒力的冲量）

$$\vec{I}_P = \int_0^t -mg\vec{k}\mathrm{d}t = -mg\frac{\pi R}{v}\vec{k}$$

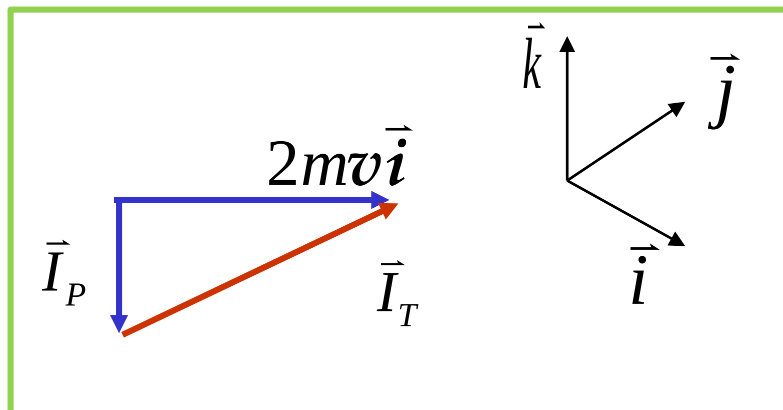
求张力的冲量（变力的冲量）

用动量定理

$$\vec{I}_P + \vec{I}_T = m\vec{v}_b - m\vec{v}_a = 2mv\vec{i}$$

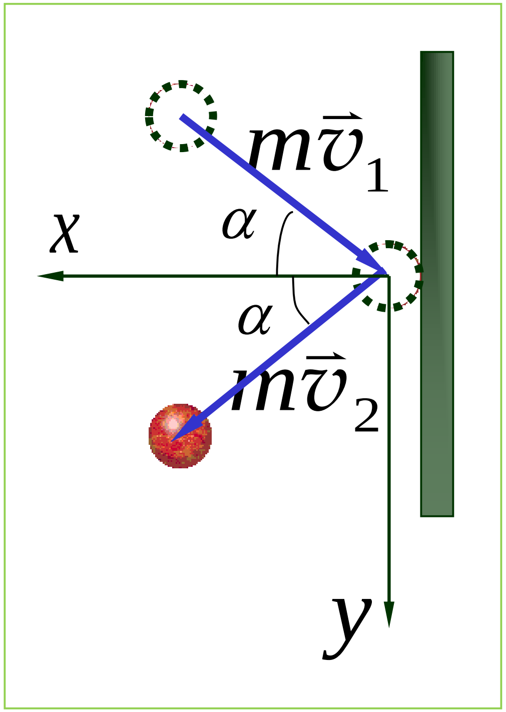
$$\vec{I}_T = 2mv\vec{i} - \vec{I}_P =$$

$$= 2mv\vec{i} + mg\frac{\pi R}{v}\vec{k}$$



例2 一质量为0.05kg、速率为10m·s^{-1}的刚球,以与钢板法线呈45°角的方向撞击在钢板上,并以相同的速率和角度弹回来。设碰撞时间为0.05s.**求**在此时间内钢板所受到的**平均冲力** $\overline{F}$。

解： 建立如图坐标系, 由动量定理得



$$\overline{\vec{F}}\Delta t=\int \vec{F}\mathrm{d}t=\Delta\vec{p}$$

$$\overline{F}_x\Delta t=mv_{2x}-mv_{1x}$$

$$=2mv\cos\alpha$$

$$\overline{F}_y\Delta t=mv_{2y}-mv_{1y}$$

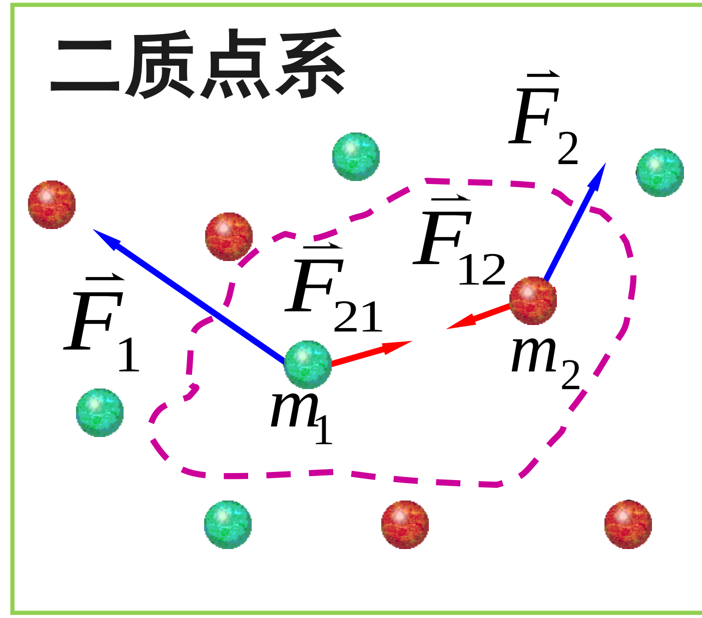
$$=mv\sin\alpha-mv\sin\alpha=0$$

$$\overline{F}=\overline{F}_x=\frac{2mv\cos\alpha}{\Delta t}=14.1\mathrm{N}$$

$$\vec{F}_{板}=-\vec{F}=-14.1\mathrm{N}$$

方向沿 x 轴反向。

二、质点系的动量定理



对于二质点系统：

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_{21})\mathrm{d}t = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{10}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_2+\vec{F}_{12})\mathrm{d}t = m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{20}$$

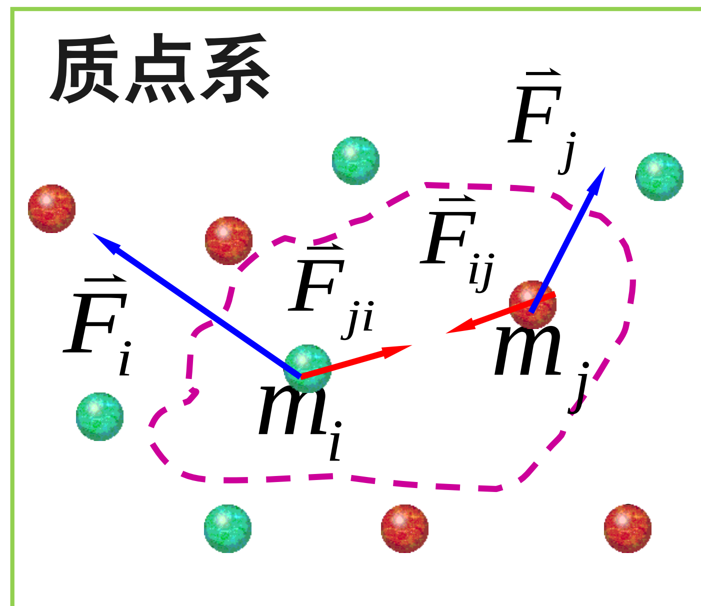
因为内力 $\vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}=0$ ，故

$$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_1+\vec{F}_2)\mathrm{d}t = (m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2)-(m_1\vec{v}_{10}+m_2\vec{v}_{20})$$

推广到多质点系统，则有

对质点 i：$\int_{t_1}^{t_2}(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij})\mathrm{d}t = \Delta\vec{p}_i$

对质点系：$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i(\vec{F}_i+\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ij})\mathrm{d}t = \sum_i\Delta\vec{p}_i$



$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\sum_i\vec{F}_i\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n}m_i\vec{v}_{i0}}$$

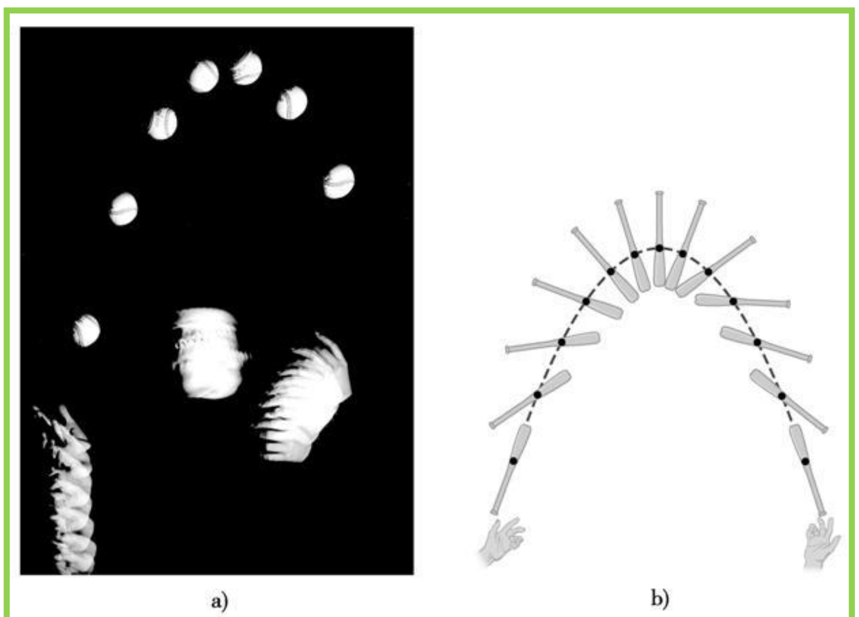
$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\sum_i \vec{F}_i \mathrm{dt} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0}}$$

质点系的动量：

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i = m\frac{\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i}{m} = m\vec{v}_C$$

质点系动量定理：作用于系统的合外力的冲量等于系统动量的增量。

$$\boxed{\vec{I} = \vec{p} - \vec{p}_0}$$



质点系的质心：

1. 运动中，好像物体的所有质量都集中在该点；

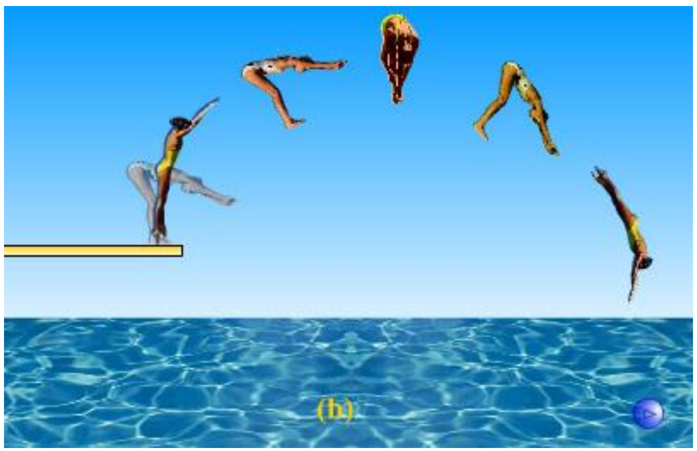
2. 作用在物体上的力好像都作用在该点。

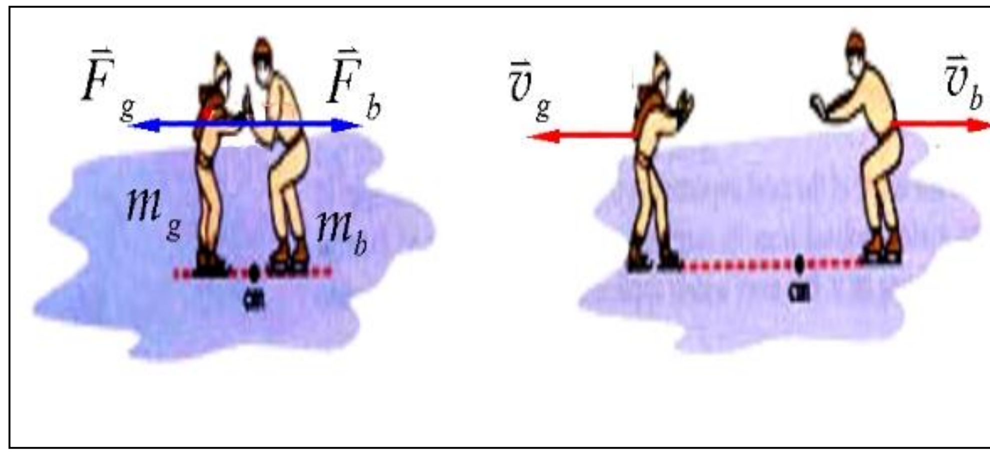
质心位置： $\vec{r}_c = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{r}_i$

质点系动量定理： $$\int_{t_1}^{t_2}\sum_i \vec{F}_i \mathrm{d}t=\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_i-\sum_{i=1}^{n} m_i\vec{v}_{i0}==m\vec{v}_C$$

◆内力只能改变系统内各个质点的动量， 不影响质心的运动。

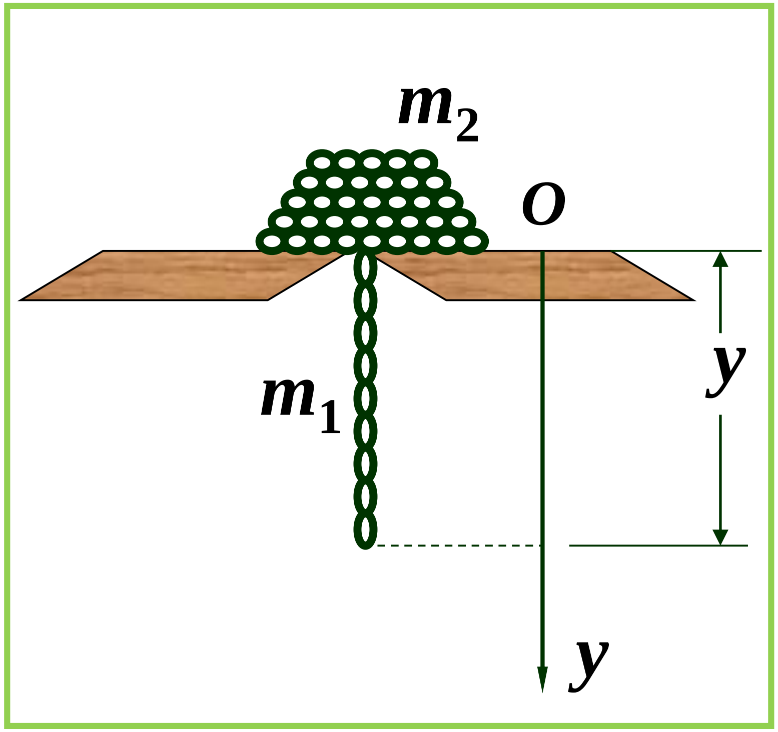
不影响系统的总动量。





例3 一柔软链条长为l，单位长度的质量为λ链条放在桌上，桌上有一小孔，链条一端由小孔稍伸下，其余部分堆在小孔周围. 由于某种扰动，链条因自身重量开始落下。求**链条下落速度与落下距离之间的关系**。设链与各处的摩擦均略去不计，且认为链条软得可以自由伸开。

解：以竖直悬挂的链条和桌面上的链条为一系统，建立如图坐标。



$$F = m_1 g = \lambda y g$$

由**质点系动量定理**得

$$F\mathrm{d}t = \mathrm{d}p = \mathrm{d}(\lambda y v)$$

$$\therefore \quad \lambda y g \mathrm{d}t = \lambda \mathrm{d}(y v)$$

$$y g = \frac{\mathrm{d}(y v)}{\mathrm{d}t}$$

$$yg = \frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t}$$

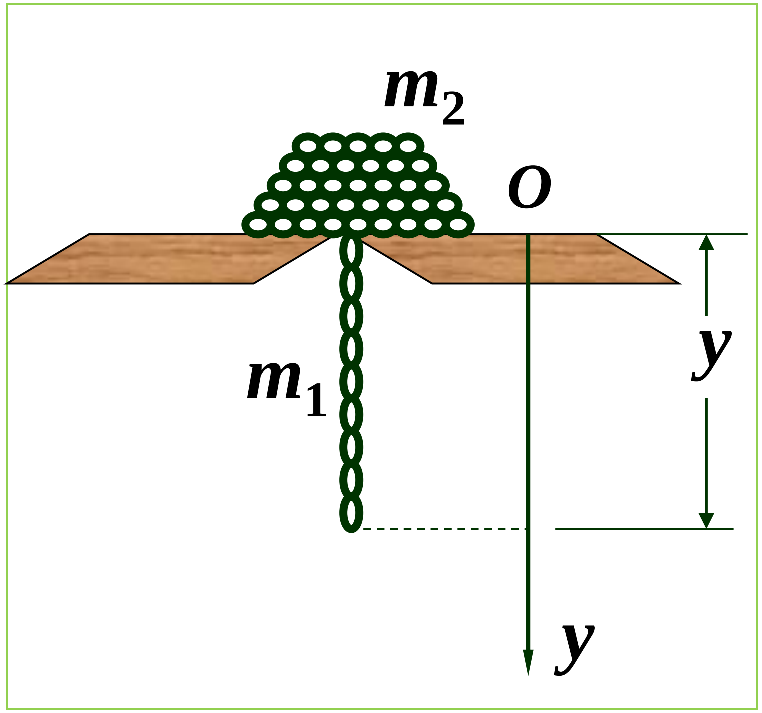
两边同乘以 $y\,\mathrm{d}y$ 则

$$y^2 g\mathrm{d}y = y\mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}(yv)}{\mathrm{d}t} = yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$g\int_0^y y^2\,\mathrm{d}y = \int_0^{yv} yv\,\mathrm{d}(yv)$$

$$\frac{1}{3}gy^3 = \frac{1}{2}(yv)^2$$

$$v = \left(\frac{2}{3}gy\right)^{1/2}$$



三、动量守恒定律

质点系动量定理 $\vec{I}=\int_{t_1}^{t_2}\sum \vec{F}_i \mathrm{d}t=\sum_i \vec{p}_i-\sum_i \vec{p}_{i0}$

动量守恒定律：

若质点系所受的合外力为零 $\vec{F}=\sum_i \vec{F}_i=0$**，则系统的总动量守恒，即** $\vec{p}=\sum_i \vec{p}_i$ **保持不变。**

说明：

(1) 系统的动量守恒是指系统的总动量不变，系统内任一物体的动量是可变的，各物体的动量均相对于同一惯性参考系。

(2) 力的瞬时作用规律。

$$\vec{F}=\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\quad 若\ \vec{F}=0,\quad 则\ \vec{P}=\vec{C}。$$

(3) 守恒条件：**合外力为零**，即 $\vec{F}_{外} = \sum_i \vec{F}_{i外} = 0$

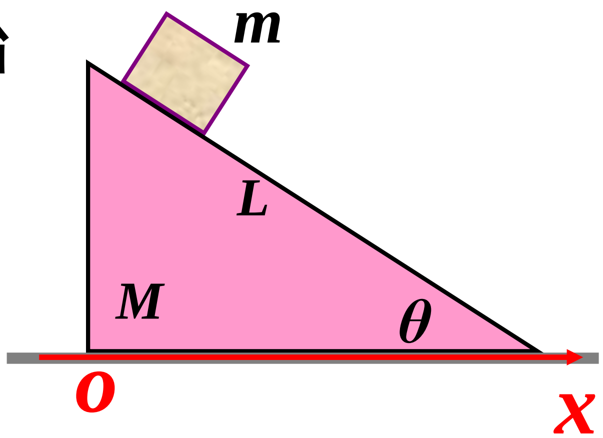
例如在碰撞、打击、 爆炸等问题中，当 $\vec{F}_{外} << \vec{F}_{内}$ 时，可略去外力的作用，近似地认为系统动量守恒 。

(4) 若**某一方向**合外力为零, 则此方向动量守恒 。

$$\begin{cases} 若 \sum F_{ix} = 0, & \sum m_i v_{ix} = 恒量 \\ 若 \sum F_{iy} = 0, & \sum m_i v_{iy} = 恒量 \\ 若 \sum F_{iz} = 0, & \sum m_i v_{iz} = 恒量 \end{cases}$$

(5) 动量守恒定律只在**惯性参考系**中成立，是自然界最普遍，最基本的定律之一 。比牛顿定律更普遍、更基本的定律，宏观和微观领域均适用。(例：中微子的发现）

例4 已知：M，m，θ，L，各接触面光滑初始静止。 **求：** m自顶滑到底时， M的位移。



解： 对于M和m 构成的系统，

地面参考系上建坐标如图

$$\because \sum_i F_{ix} = 0 \qquad \therefore MV_x + mv_x = p_{0x} = 0$$

M 参考系上，m相对速度为 v'_x

由相对运动 $v_x = v'_x + V_x$

解得 $V_x = -\dfrac{mv'_x}{m+M}$ "—"表明位移与x轴反向。

$$\therefore \Delta X = \int_0^t V_x \,\mathrm{d}t = -\frac{m}{m+M}\int_0^t v'_x \,\mathrm{d}t = -\frac{mL\cos\theta}{m+M}$$

火箭工作的基本原理是质点系的动量守恒定律——火箭+喷射气体

火箭在进入运行轨道前，燃料燃烧，质量不断减少，尾部喷射高压气体——变质量系统

火箭前进的动力来自火箭燃料燃烧喷出的气体产生的反冲推力。

我国长征系列火箭升空

四、碰撞(*collision*)

彼此靠近的两个物体之间产生短暂而强烈的相互作用过程，称为**碰撞**。

微观

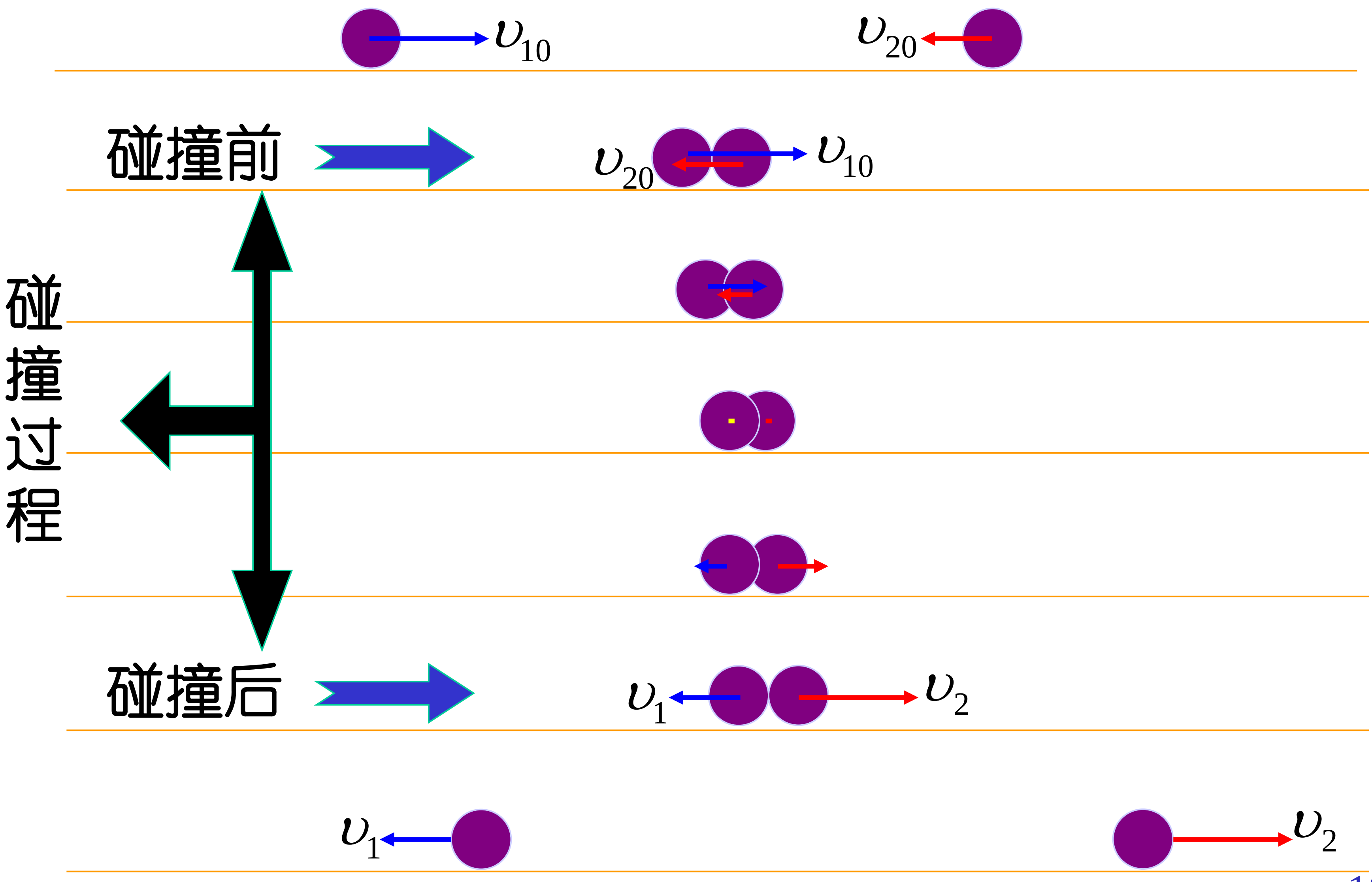
粒子间碰撞是非接触的，双方有很强的相互斥力，迫使它们接触前就偏离原来运动方向而分开，又称散射。

宏观

宏观物体的碰撞是直接接触的，在接触前无相互作用，接触后相互作用强烈。

碰撞过程中，外力作用可以忽略，系统总动量守恒。

碰撞过程示意图：



υ_{10}
υ_{20}
碰撞前
υ_{20}
υ_{10}
碰撞过程
碰撞后
υ_1
υ_2
υ_1
υ_2

约定： 1. 碰撞过程经历的时间忽略不计

2. 碰撞过程中的位移忽略不计

3. 碰撞过程中寻常力忽略不计

正碰：

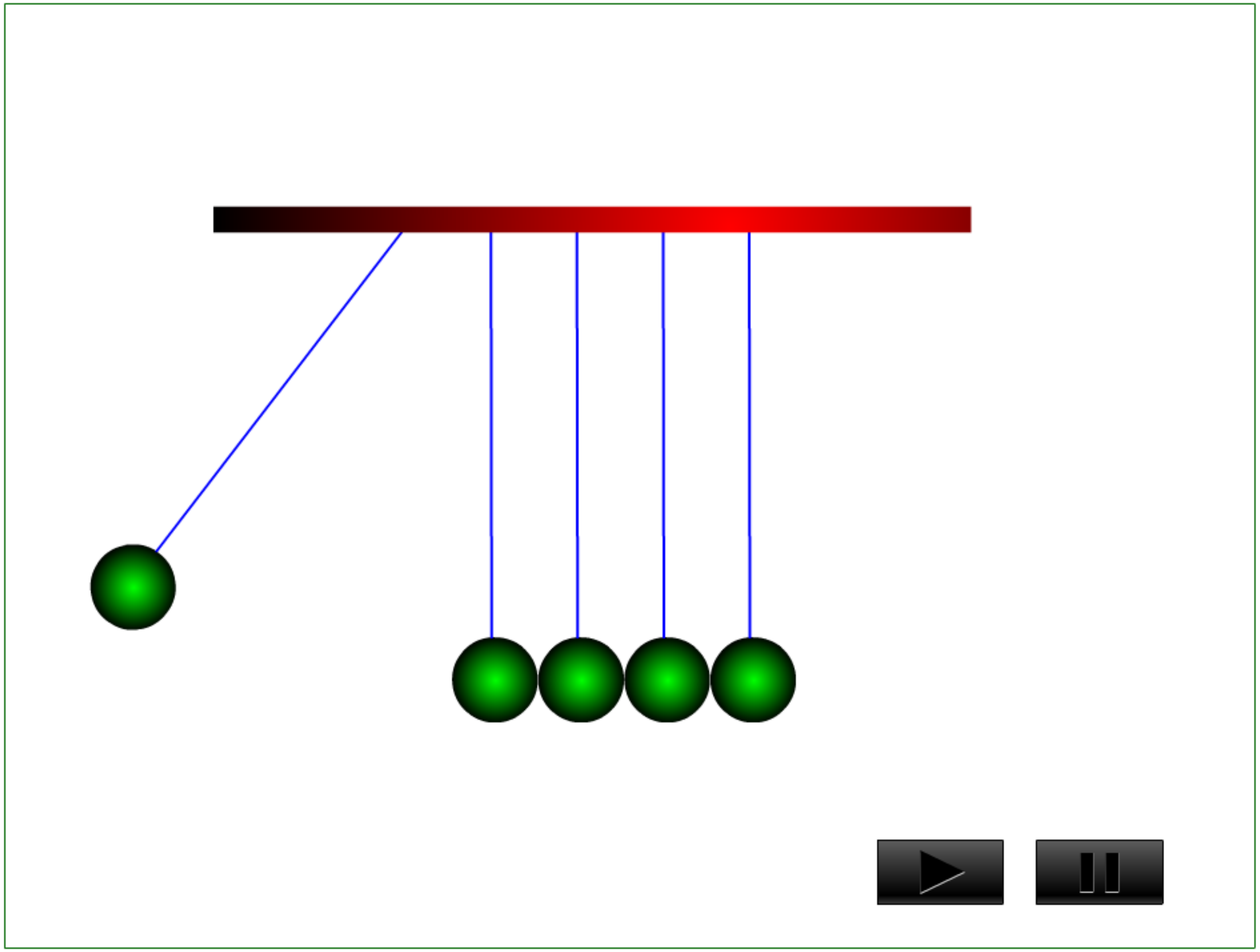
恢复系数 $$e=\frac{v_2-v_1}{v_{10}-v_{20}}$$

1. 完全弹性碰撞 $e=1$ $\Delta E=0$

2. 非完全弹性碰撞 $1>e>0$ $\Delta E=\frac{1}{2}(1-e^2)\mu(v_{10}-v_{20})^2$

3. 完全非弹性碰撞 $e=0$ $\Delta E=\frac{1}{2}\mu(v_{10}-v_{20})^2$

完全弹性碰撞



（五个小球质量全同）

例5 设有两个质量分别为 m_1和 m_2，速度分别为 $\vec{v}_{10}$ 和 $\vec{v}_{20}$ 的弹性小球作对心碰撞，两球的速度方向相同。若碰撞是完全弹性的,求碰撞后的速度 $\vec{v}_1$ 和 $\vec{v}_2$。

解 取初速度方向为正向，由动量守恒定律得

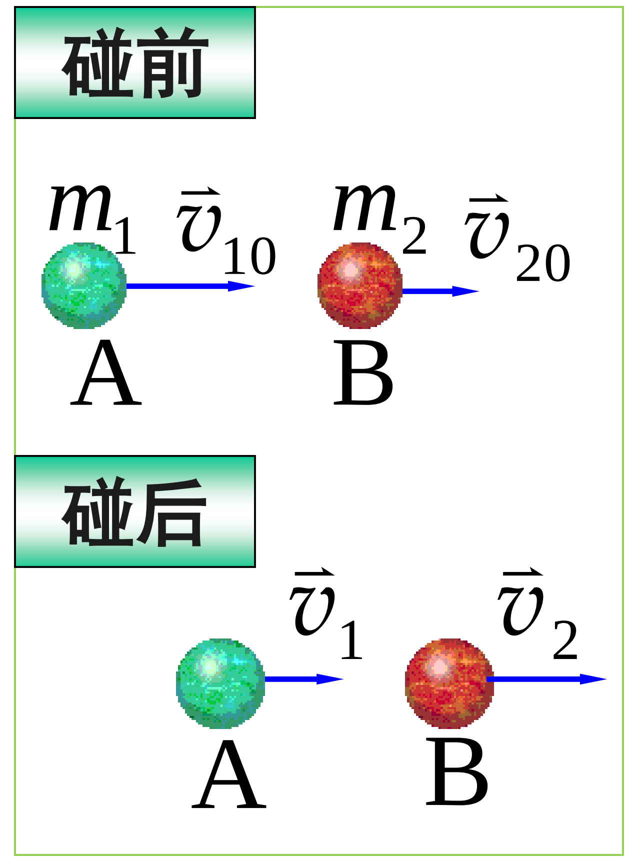
$$m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad (1)$$

$$m_1 (v_{10} - v_1) = m_2 (v_2 - v_{20}) \quad (1)$$

由机械能守恒定律得

$$\frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \quad (2)$$

$$m_1 (v_{10}^2 - v_1^2) = m_2 (v_2^2 - v_{20}^2) \quad (2)$$



$$m_1(v_{10}-v_1)=m_2(v_2-v_{20})\quad (1)$$

$$m_1(v_{10}^2-v_1^2)=m_2(v_2^2-v_{20}^2)\quad (2)$$

联立，解得

$$v_{10}+v_1=v_2+v_{20}\quad (3)$$

代入(1) 解得

$$v_1=\frac{(m_1-m_2)v_{10}+2m_2v_{20}}{m_1+m_2}\quad (4)$$

$$v_2=\frac{(m_2-m_1)v_{20}+2m_1v_{10}}{m_1+m_2}\quad (5)$$

讨论：

（1）若 $m_1=m_2$

则 $v_1=v_{20}$ ，$v_2=v_{10}$

（2）若 $m_2>>m_1$ 且 $v_{20}=0$

则 $v_1\approx -v_{10}$ ，$v_2\approx 0$

（3）若 $m_2<<m_1$ 且 $v_{20}=0$

则 $v_1\approx v_{10}$ ，$v_2\approx 2v_{10}$