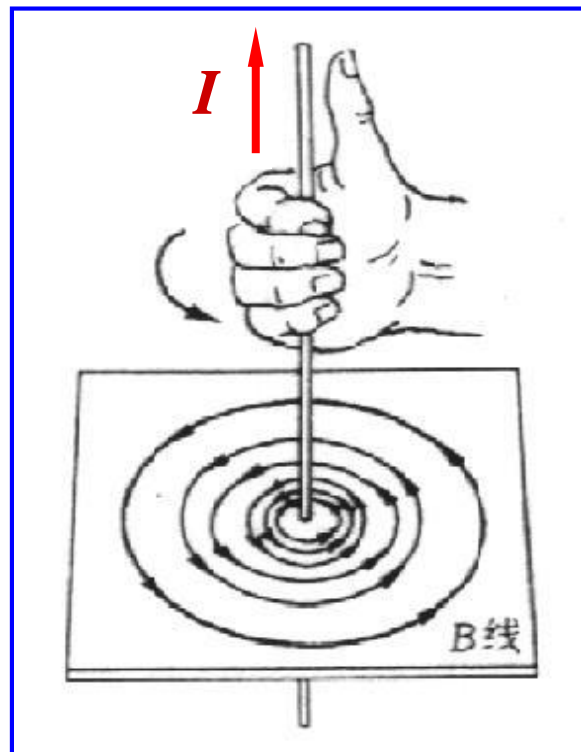
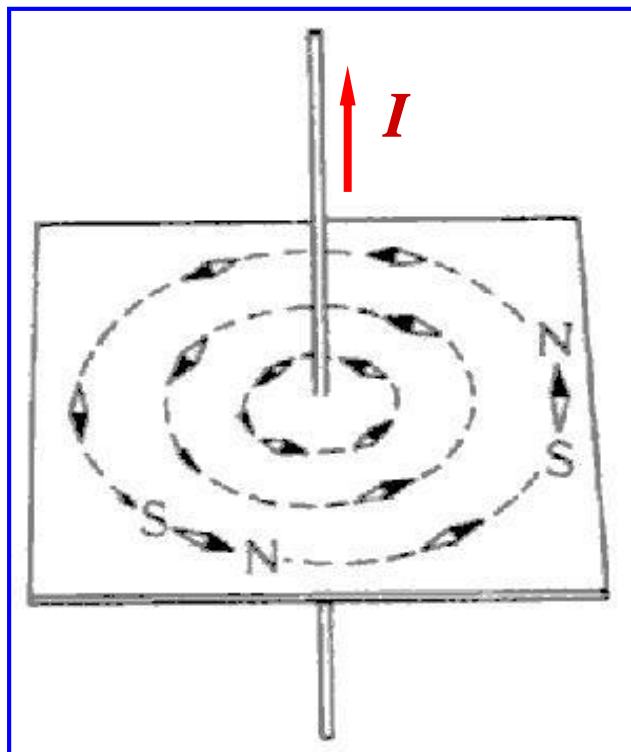
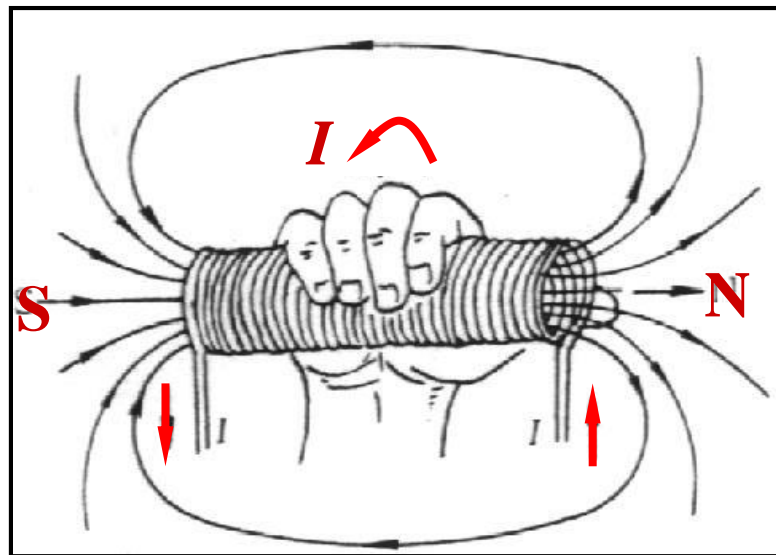
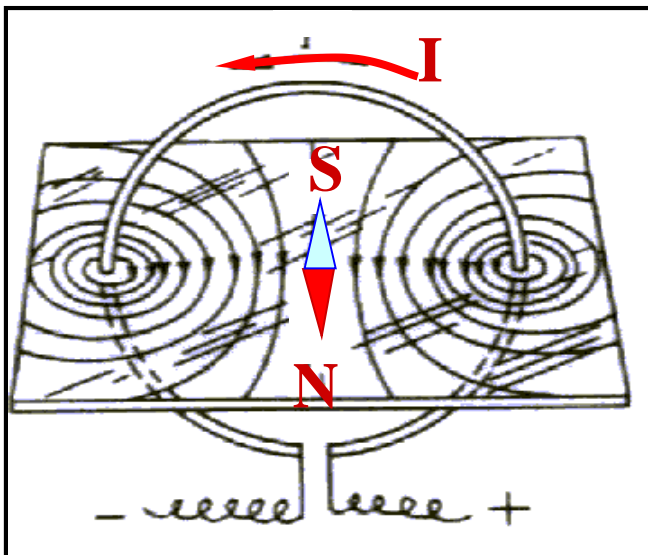


三、磁场的高斯定理

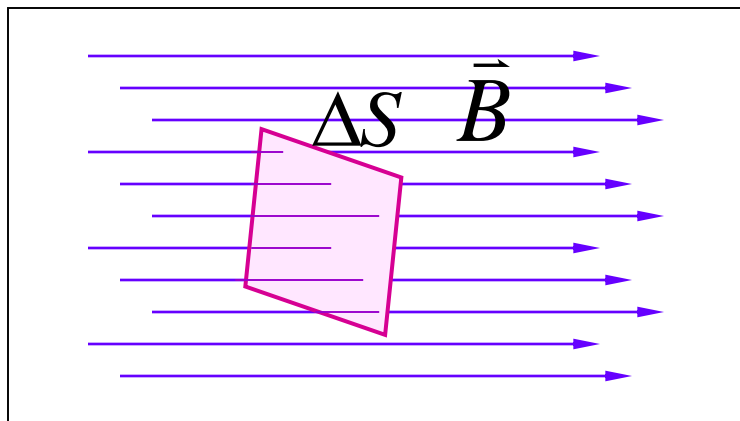
1. 磁力线（磁感应线）

规定：曲线上每一点的**切线方向**表示该点的磁感强度的**方向**，曲线的**疏密程度**表示该点的磁感强度的**大小**。





2. 磁通量 磁场的高斯定理



磁通量：通过垂直于磁感应强度方向的某个面的磁力线数为通过此曲面的磁通量。用 Φ_m 表示。

郑复光对地磁现象的解释

郑复光《费隐与知录》（1819年开始，1842年刊出）

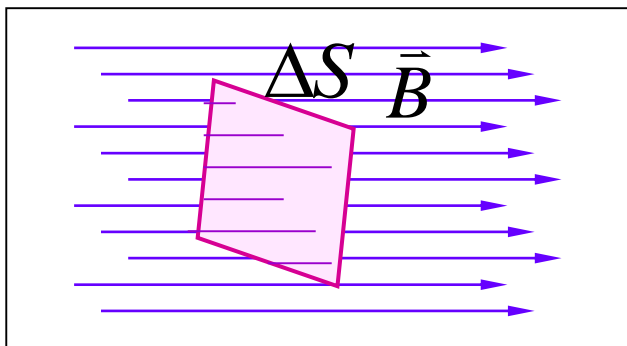
“铁能指南，何以中国偏东而西洋人又谓在大浪山东则指西，在大浪山西则指东。惟正在大浪山则指南，其说信乎？”

“西说既非身亲姑可不论，而中国偏东，京都五度、金陵三度，既见诸书确然无疑。而偏则各地不同。从仪象志图悟得各顺其地脉也。地脉根两极南北，如植物出土皆指天顶，但不能稍曲焉。又地脉之根止有地心一线其处最直，而渐及地面不无稍曲。针为地脉牵掣故偏亦甚微”

- (1) 明确赋予了地脉以确切的物理的力学的性能。
- (2) 地脉是可以超越大地之体而在地球附近空间中存在的。
- (3) 将地脉抽象为无数曲线组成的曲线族。

地脉就是就是根于地球两极而在地球的体内体外都存在的封闭的曲线族，而这些曲线又能对磁针施以力的作用。

2. 磁通量 磁场的高斯定理



磁通量：通过垂直于磁感应强度方向的某个面的磁力线数为通过此曲面的磁通量。用 Φ_m 表示。

$$dS_{\perp} = dS \cos \theta$$

$$d\vec{S} = dS \vec{n}$$

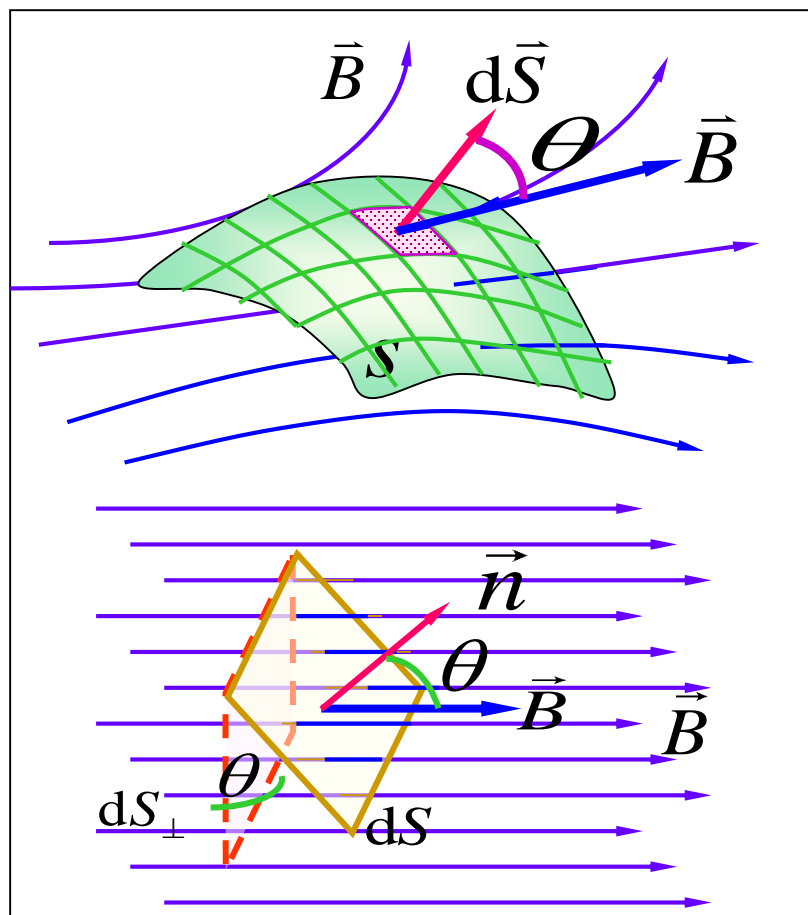
$$d\Phi_m = B dS_{\perp} = B dS \cos \theta$$

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\Phi_m = \int_{(S)} d\Phi_m = \int_{(S)} \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

单位：韦伯 (Wb)

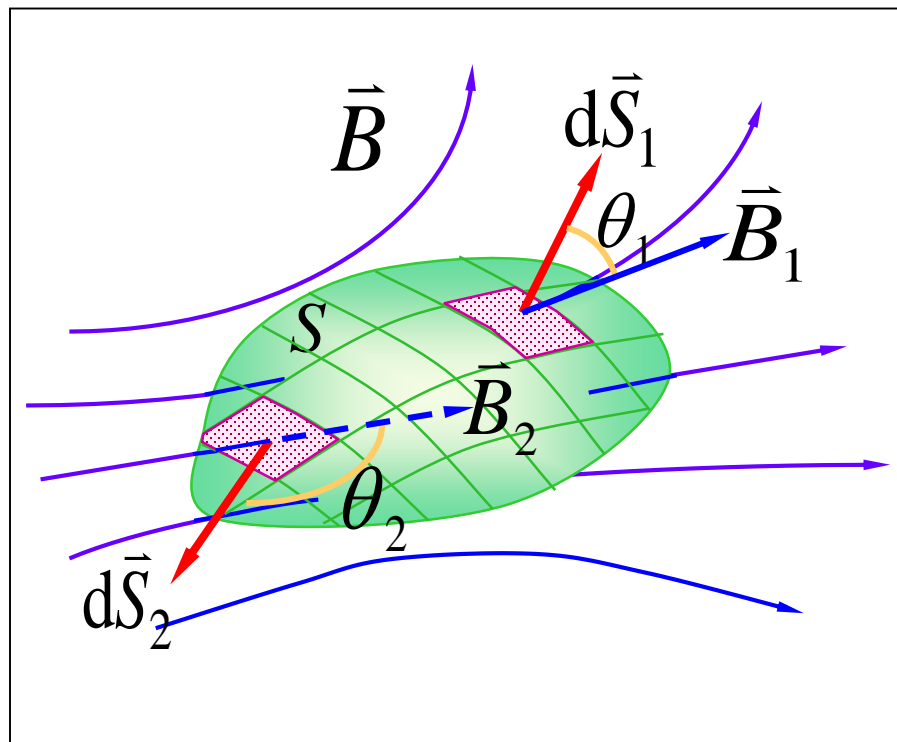
$$1\text{Wb} = 1\text{T} \times 1\text{m}^2$$



$$\Phi_{in} = \int d\Phi_2 = \int \vec{B}_2 \cdot d\vec{S}_2 < 0$$

$$\Phi_{out} = \int d\Phi_1 = \int \vec{B}_1 \cdot d\vec{S}_1 > 0$$

进入闭合曲面 S 的磁力线根数（磁通量）和流出闭合曲面 S 的磁力线根数相等。



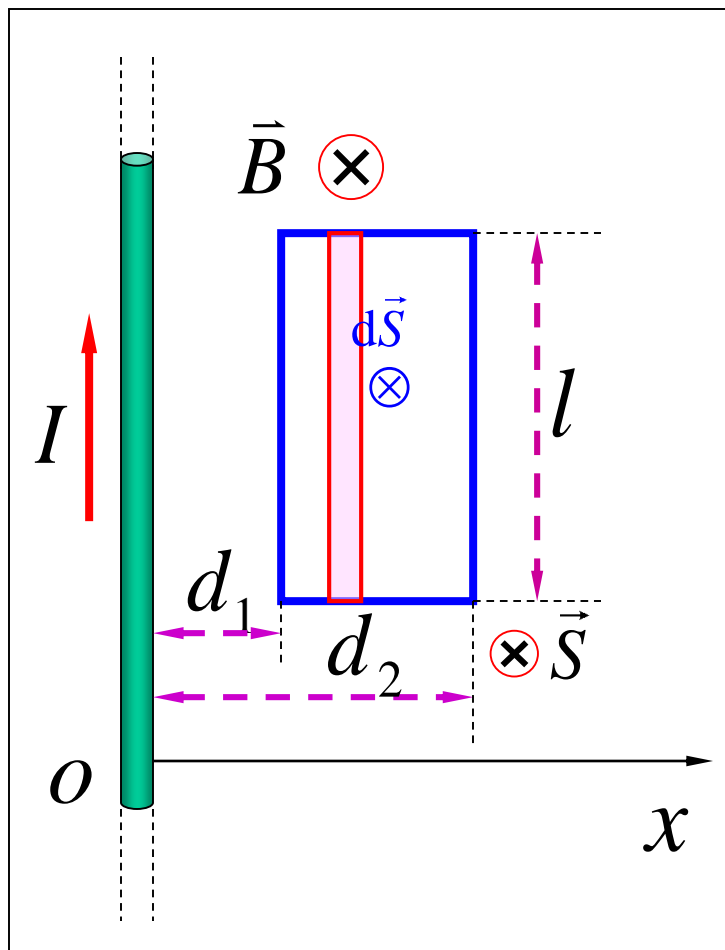
$$\Phi_{in} + \Phi_{out} = 0 = \oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

磁场高斯定理：通过任意闭合曲面的磁通量必等于零。
（磁场是**无源场**）

例 如图载流长直导线的电流为 I ，试求通过矩形面积的磁通量。

解： 先求 \vec{B} ，对变化的磁场给出 $d\Phi$ 后积分求 Φ



$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \quad \vec{B} // \vec{S}$$

$$d\Phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B dS$$

$$d\Phi_m = B dS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx$$

$$\Phi_m = \int_S d\Phi_m = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \int_{d_1}^{d_2} \frac{dx}{x}$$

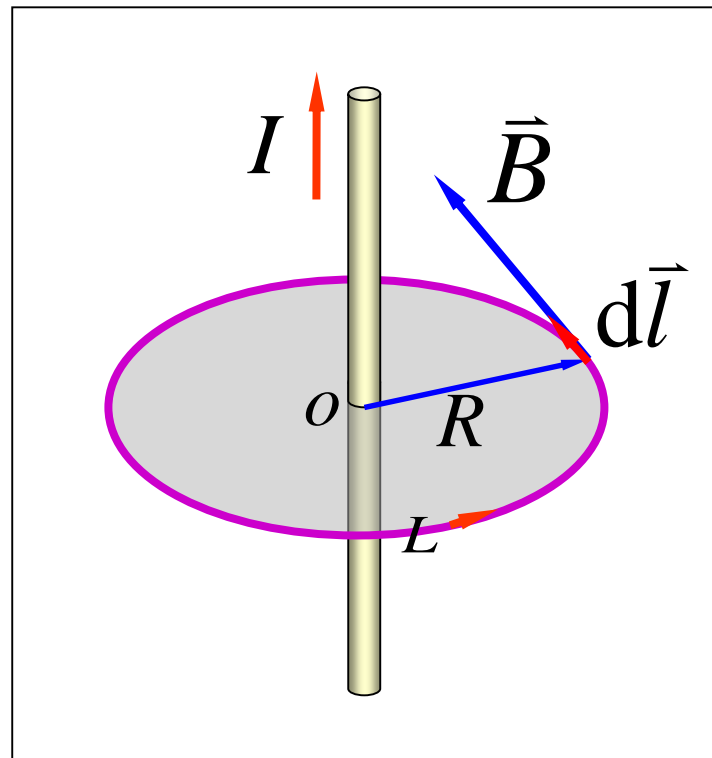
$$\Phi = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{d_2}{d_1}$$

§ 4 安培环路定理

对于载流长直导线外，若选某一条磁力线为闭合回路，则

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint_L |\vec{B}| \cdot |d\vec{l}| \cos 0 \neq 0$$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = ?$$



一、安培环路定理 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i$

真空中磁感应强度沿任一闭合回路的线积分，数值上等于该闭合回路所包围的所有电流的代数和乘以真空磁导率。与回路的形状和回路外的电流无关。

以长直导线为例，证明上述定理：

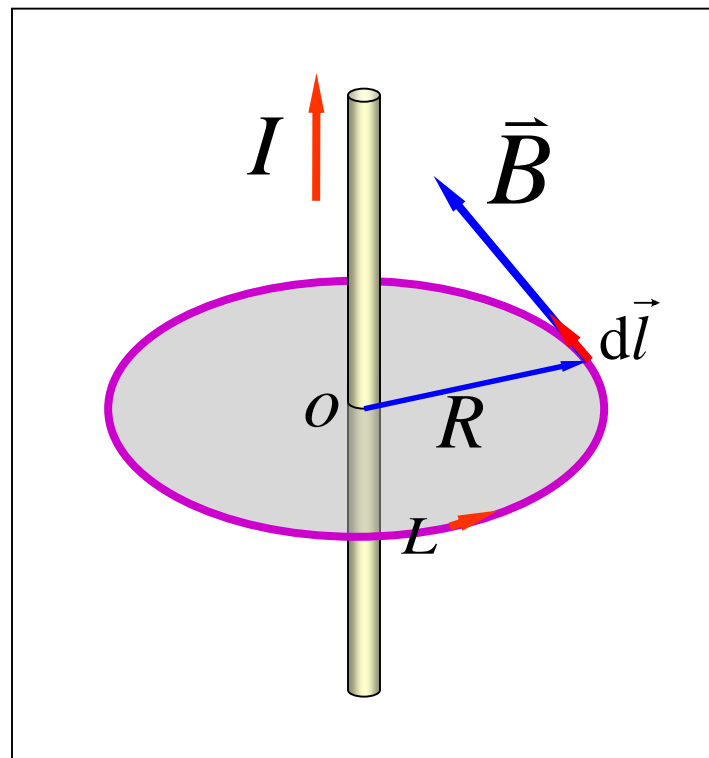
(1) 单根载流长直导线

设闭合回路 L 为圆形回路

(L 与 I 成右螺旋)

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

$$\begin{aligned}\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \oint_L \frac{\mu_0 I}{2\pi R} |d\vec{l}| \\ &= \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \oint_L |d\vec{l}| = \mu_0 I\end{aligned}$$



若回路绕向化为逆向时，则

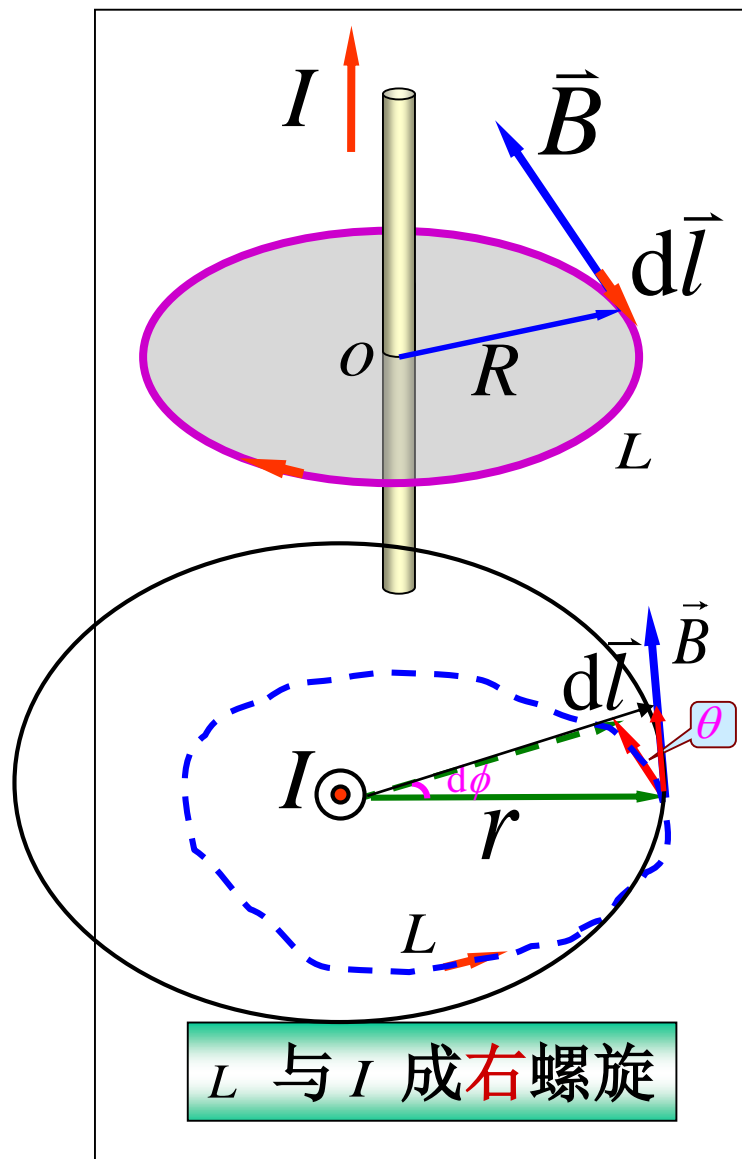
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = -\mu_0 I$$

(2) 单根载流长直导线对任意形状的回路

$$\vec{B} \cdot d\vec{l} = B |d\vec{l}| \cos \theta$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} r d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \oint_L d\phi = \mu_0 I$$



(3) 电流在回路之外

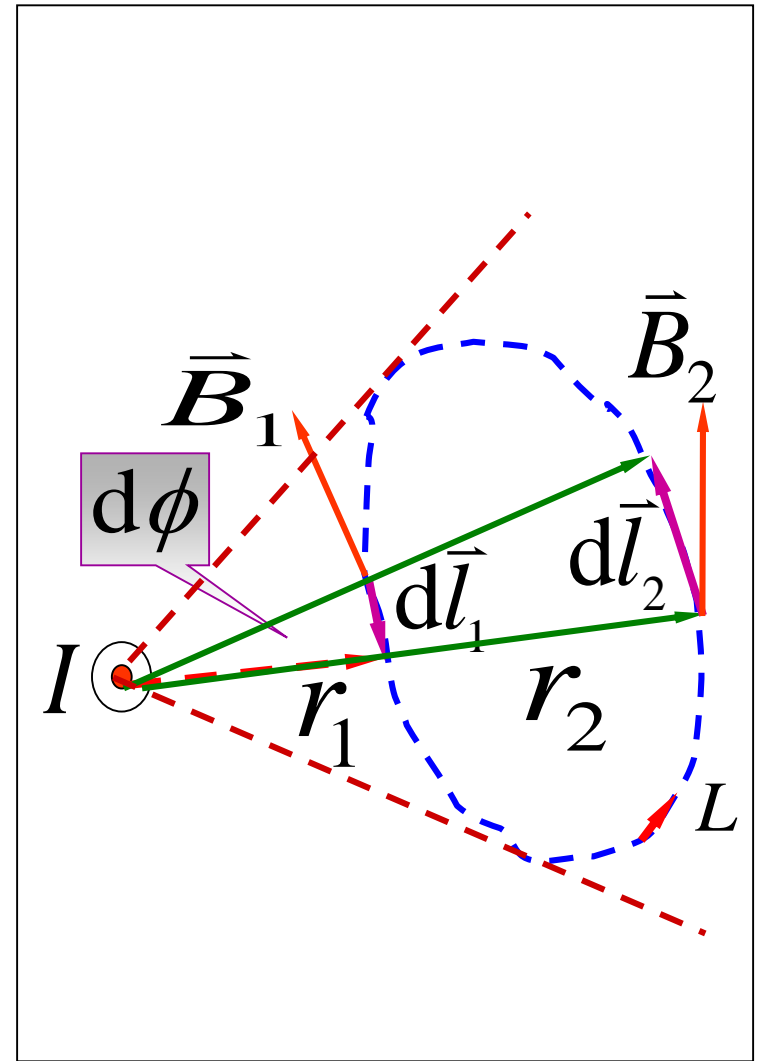
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_1}, \quad B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2}$$

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 = -\frac{\mu_0 I}{2\pi r_1} r_1 d\phi = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

$$\vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi r_2} r_2 d\phi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} d\phi$$

$$\vec{B}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \vec{B}_2 \cdot d\vec{l}_2 = 0$$

$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = 0$$



(4) 多根电流情况

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \cdots + \vec{B}_n + \vec{B}_{n+1} + \cdots + \vec{B}_{n+m}$$

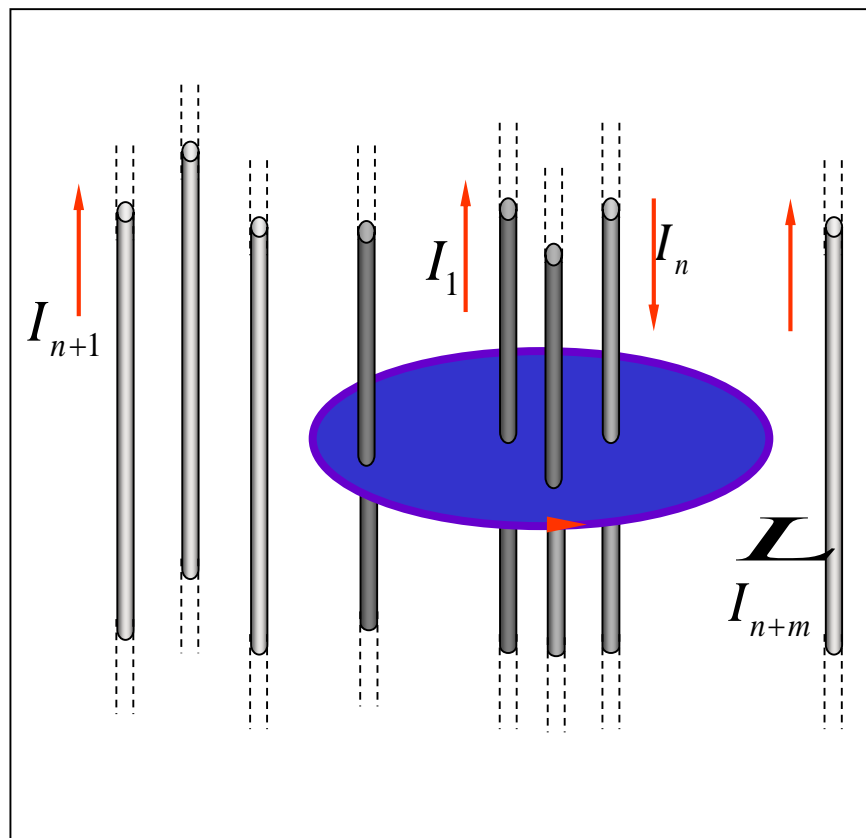
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint_L (\vec{B}_1 + \cdots + \vec{B}_n + \vec{B}_{n+1} + \cdots + \vec{B}_{n+m}) \cdot d\vec{l}$$

$$= \oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_n \cdot d\vec{l}$$

$$+ \oint_L \vec{B}_{n+1} \cdot d\vec{l} + \cdots + \oint_L \vec{B}_{n+m} \cdot d\vec{l}$$

$$= \mu_0 (I_1 + \cdots + I_n) + 0 + \cdots + 0$$



➤ 安培环路定理

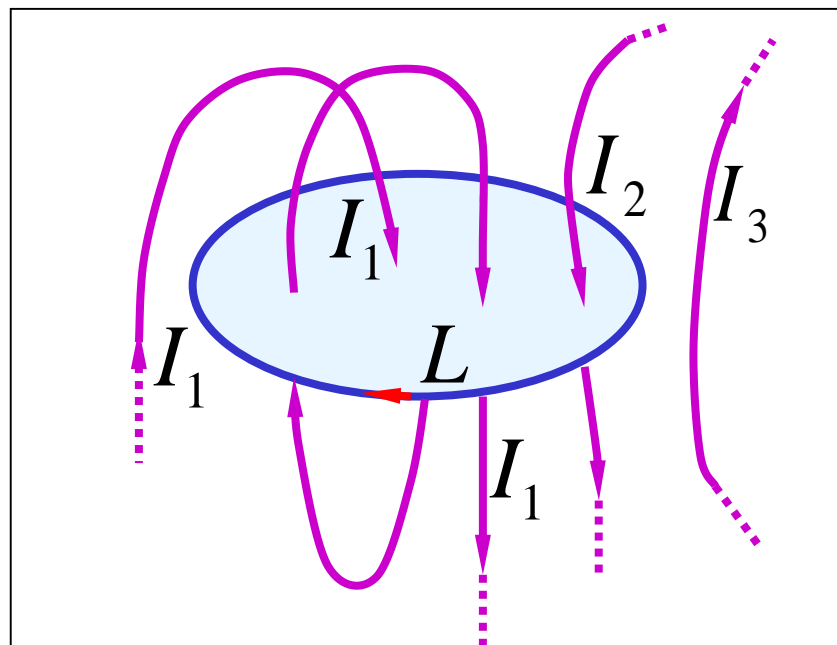
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L \text{ 内}} I_i$$

安培环路定理：真空的稳恒磁场中，磁感应强度 \vec{B} 沿任一闭合路径的线积分，等于该闭合路径所包围的所有电流的代数和 $\sum I_i$ 乘以真空磁导率 μ_0 。

说明：电流 I 正负的规定： I 与 L 成右螺旋时， I 为正；反之为负。

例：

$$\oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l}$$
$$= \mu_0 (I_1 - I_1 + I_1 + I_2)$$
$$= \mu_0 (I_1 + I_2)$$



二、安培环路定理的应用

- 解题步骤：
- 进行磁场分布的对称性分析；
 - 根据磁场分布的对称性选择合适的闭合回路；
 - 应用安培环路定理进行计算。

合适的闭合回路（安培环路）的选择：

(1) 当回路经由所求磁场时，使得回路上各点的磁感应强度

$$B = \text{const.} \quad \vec{B} // d\vec{l}$$

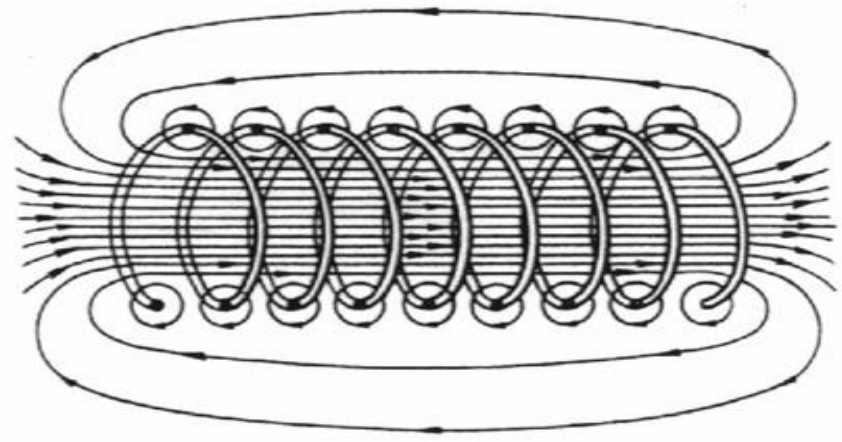
(2) 当回路经由非所求磁场时，使得回路上各点的磁感应强度

$$\vec{B} = 0 \quad \vec{B} \perp d\vec{l}$$

度，或；

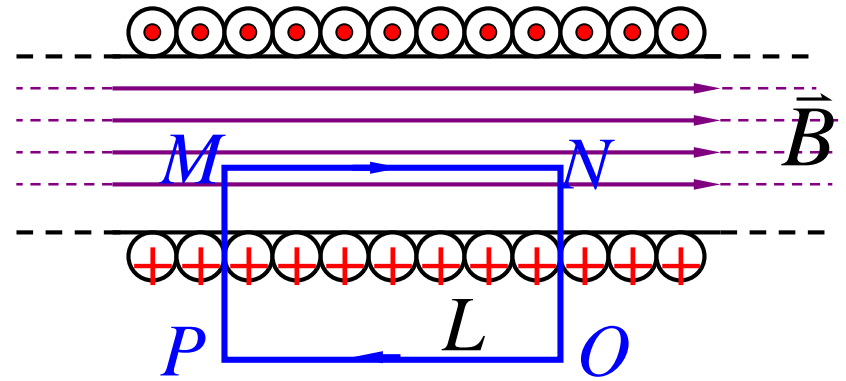
例1 求长直密绕螺线管内磁场。

解：（1）对称性分析：螺旋管内为均匀场，方向沿轴向，外部磁感强度趋于零，即 $B \cong 0$ 。



（2）选回路 L 。

磁场 \vec{B} 的方向与电流 I 成右螺旋。



$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \int_{MN} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{NO} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{OP} \vec{B} \cdot d\vec{l} + \int_{PM} \vec{B} \cdot d\vec{l}$$

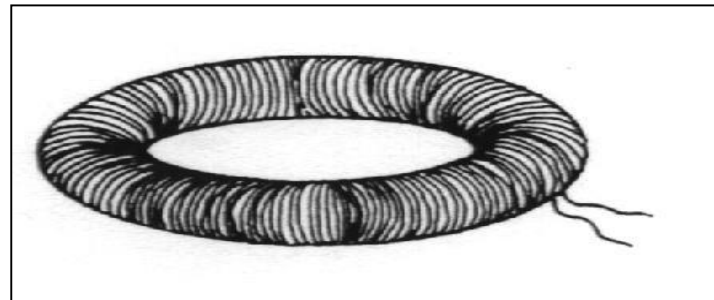
$$B \cdot \overline{MN} = \mu_0 n \overline{MNI}$$

$$B = \mu_0 n I$$

无限长载流螺线管内部磁场处处相等，外部磁场为零。

例2 求载流螺绕环内的磁场。

解：(1) 对称性分析；环内 \vec{B} 线为同心圆，环外 \vec{B} 为零。



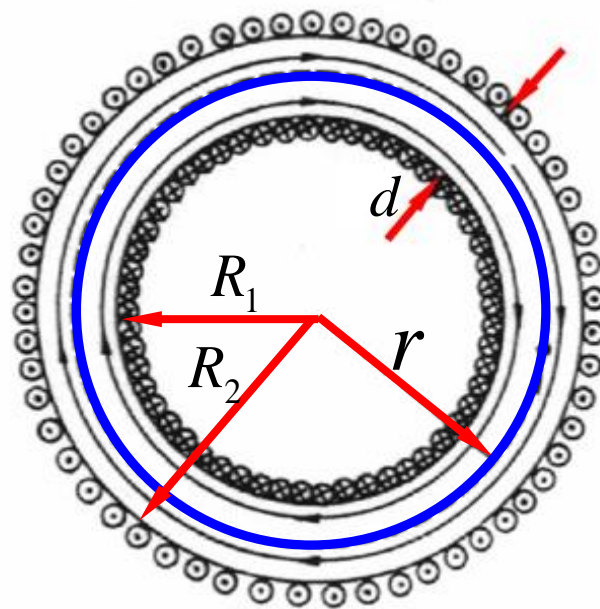
(2) 选择合适的闭合回路——
顺时针方向旋转的同心圆。

$$R_1 < r < R_2$$

$$\int_{(L)} \vec{B} \cdot d\vec{l} = B 2\pi r = \mu_0 N I$$

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

$$\text{令 } n = N / (2\pi r) \quad B = \mu_0 n I$$



当 $r \gg d$ 时，螺绕环内可视为均匀场。

例3 无限长载流圆柱体的磁场

解：➤对称性分析

➤选则合适的闭合回路

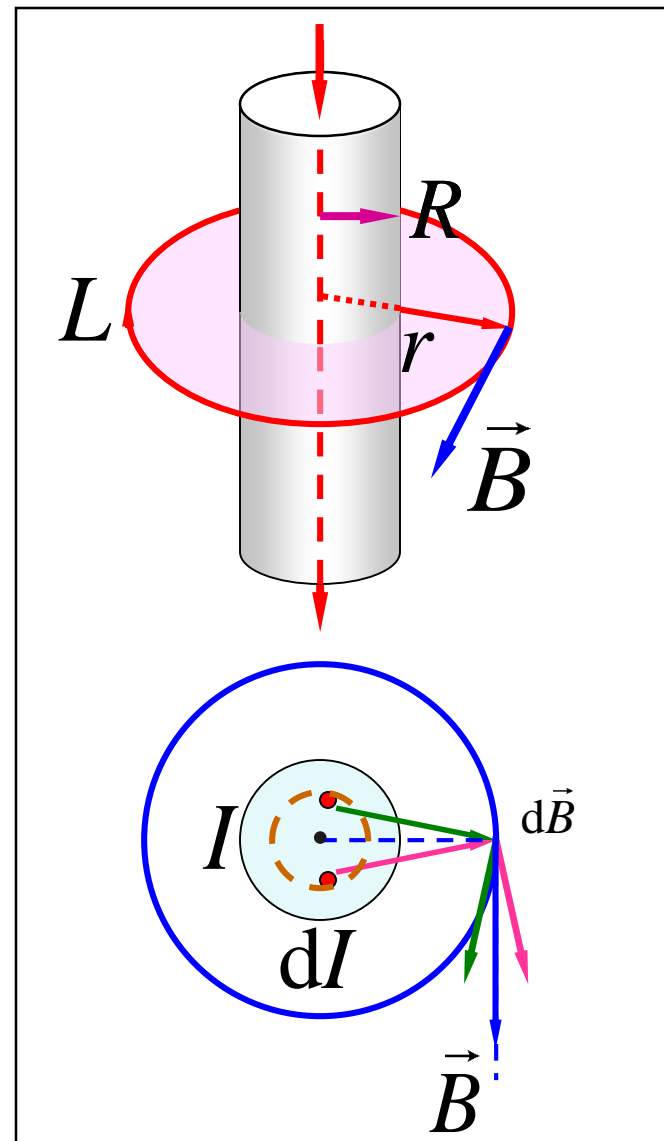
$$r > R \quad \oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i$$

$$2\pi r B = \mu_0 I \quad B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$0 < r < R$$

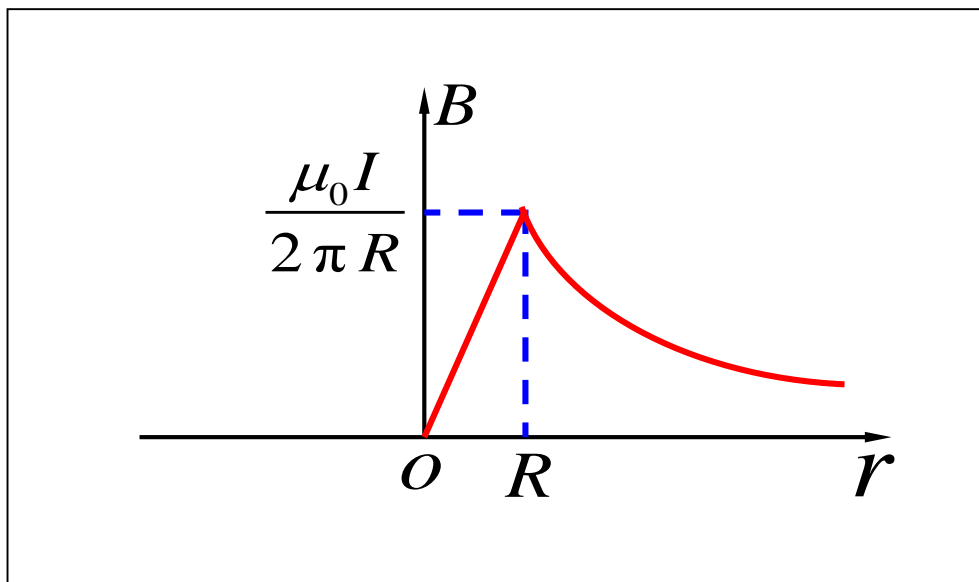
$$\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum_{L\text{内}} I_i = \mu_0 \int_{L\text{内}} dI$$

$$2\pi r B = \mu_0 \frac{r^2 I}{R^2} \quad B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$



\vec{B} 的方向与 I 成右螺旋

$$\left\{ \begin{array}{ll} r > R, & B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ 0 < r < R, & B = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} \end{array} \right.$$



补充：带电粒子在磁场中的运动

运动电荷在稳恒磁场中受力

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

匀强磁场中

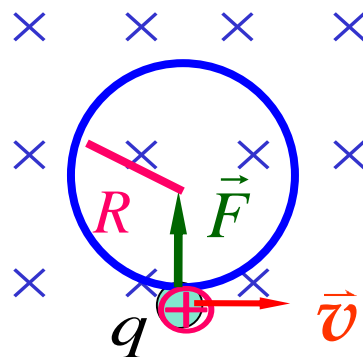
1. 若 $\vec{v} \parallel \vec{B}$, 磁场对粒子的作用力为零, 粒子仍将以 \vec{v} 作匀速直线运动。

2. 若 $\vec{v} \perp \vec{B}$, 粒子作圆周运动如图

半径 $R = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB}$

$$T = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi m}{qB}$$

频率 $f = \frac{1}{T} = \frac{qB}{2\pi m}$

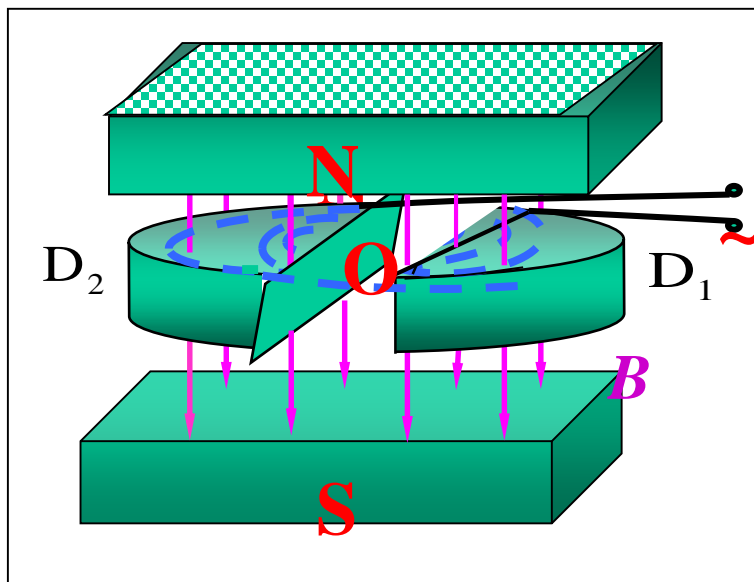


$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

回旋加速器

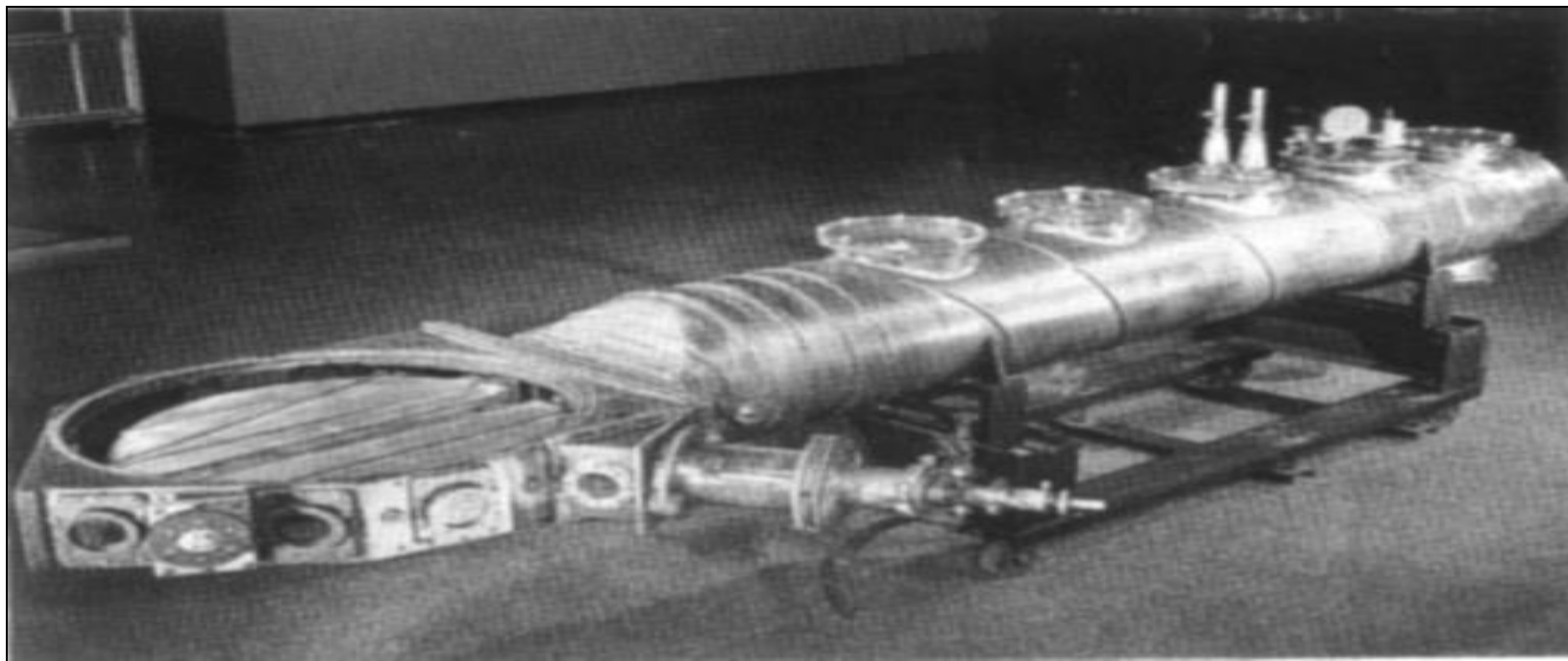


$$f = \frac{qB}{2\pi m}$$

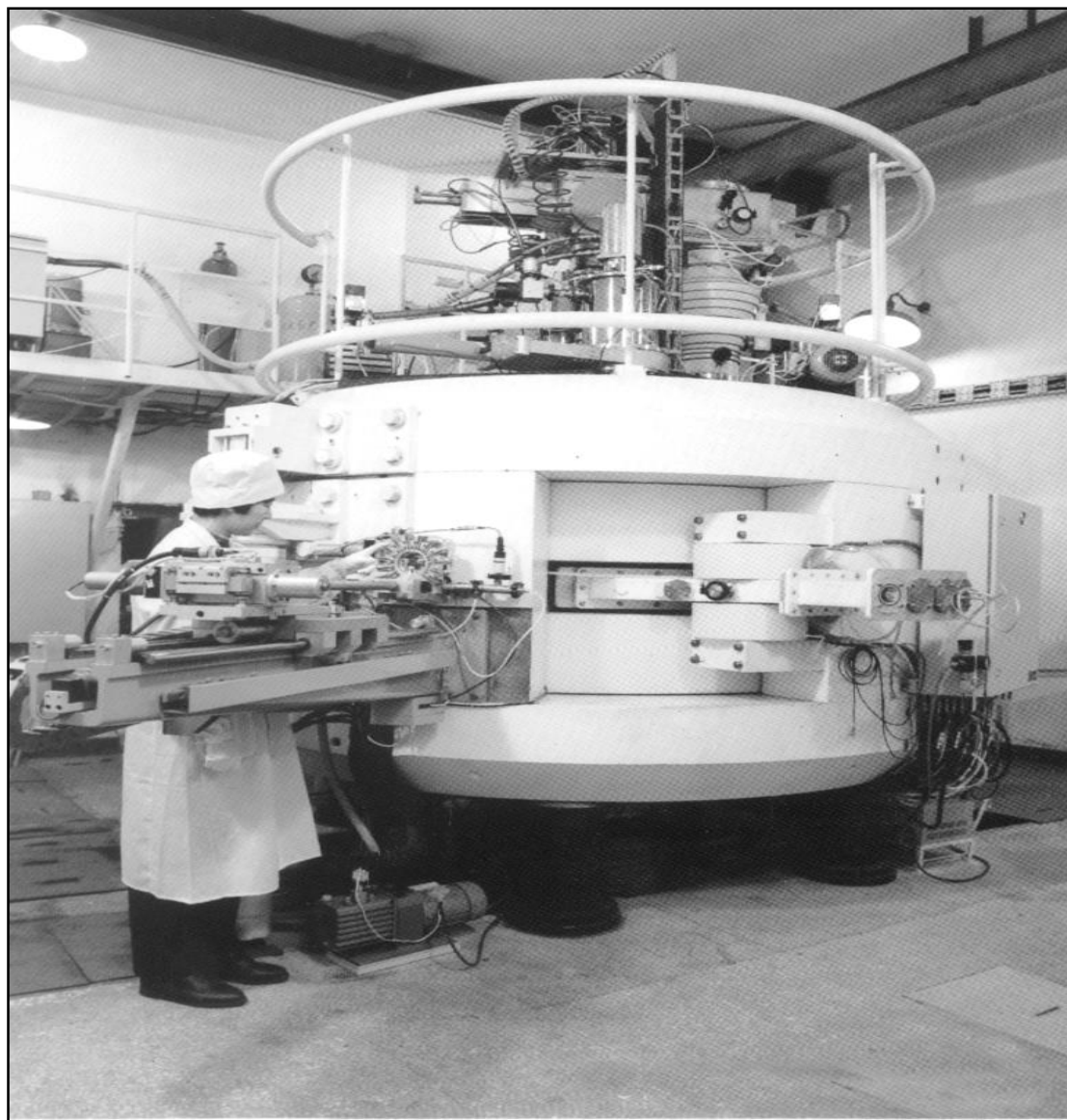
1930年，Earnest O.Lawrence 提出了回旋加速器的理论；
(1939年诺贝尔物理学奖)

1931年，他和他的学生利文斯顿研制出第一台回旋加速器，
这台加速器的磁极直径为10cm，加速电压2kV，将氘离子加速到80keV.

回旋加速器



此加速器可将质子和氘核加速到 1MeV 的能量，
为此1939年劳伦斯获得诺贝尔物理学奖。



我国于
1994年建
成的第一
台强流质
子加速器，
可产生数
十种中短
寿命放射
性同位素。

$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

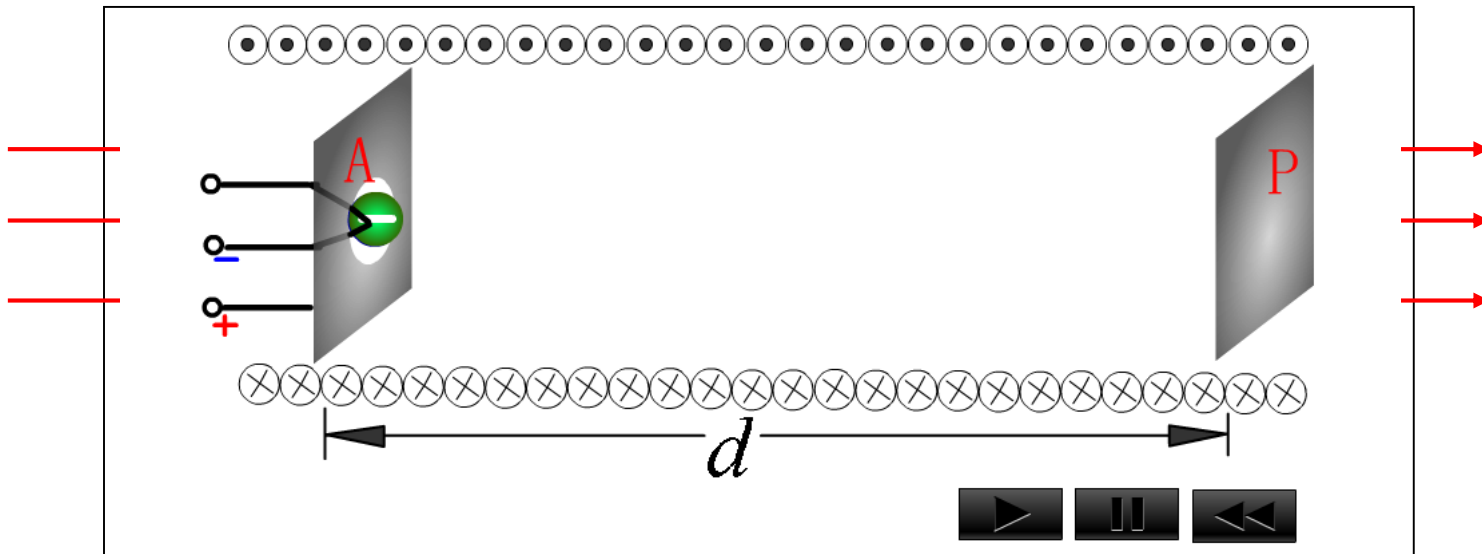
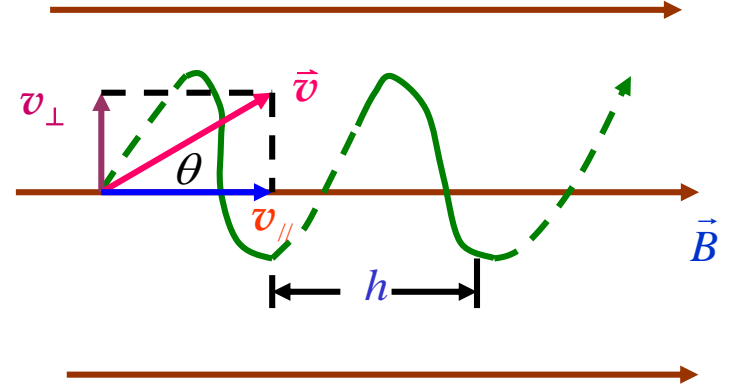
3. 一般情况下， \vec{v} 与 \vec{B} 有一夹角 θ ，

$$v_{\parallel} = v \cos \theta$$

$$v_{\perp} = v \sin \theta$$

螺距：
$$h = v_{\parallel} T = \frac{2\pi m}{qB} v \cos \theta$$

应用： 磁聚焦

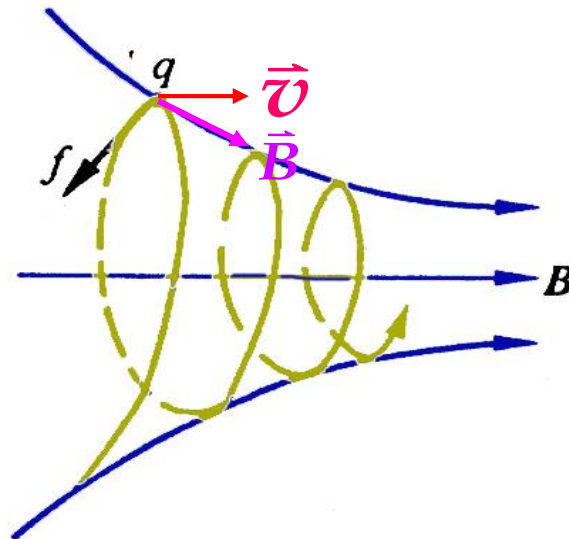


非均匀磁场

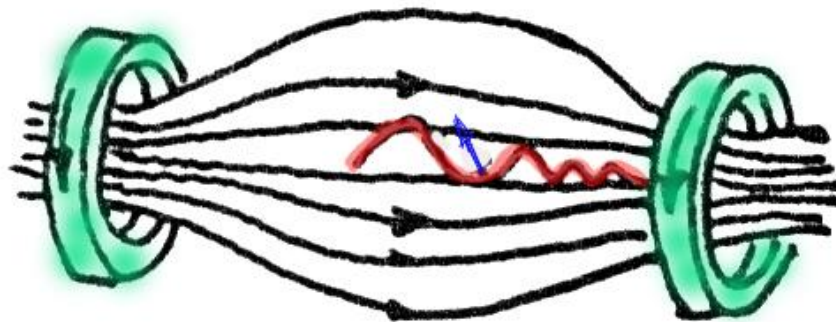
$$\vec{F}_m = q\vec{v} \times \vec{B}$$

$$R = \frac{mv}{qB}$$

$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

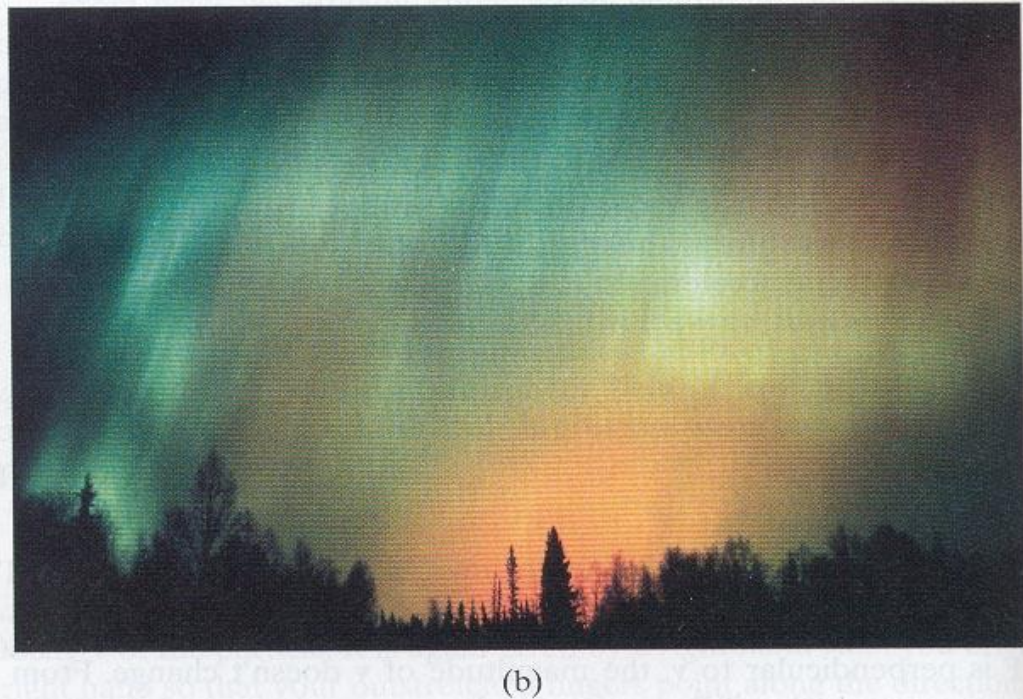
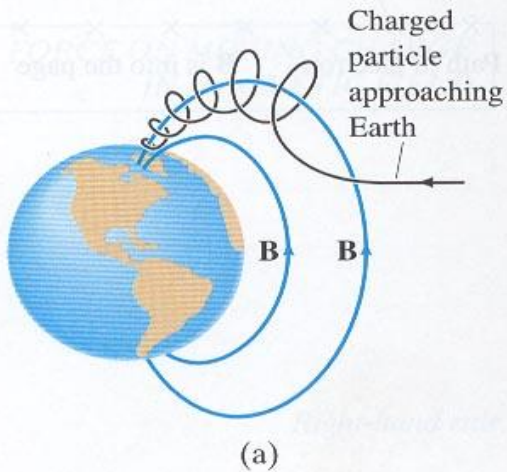


磁镜(磁瓶)



由于地磁场俘获带电粒子而出现的现象

FIGURE 20-19 (a) Diagram showing a charged particle approaching the Earth which is “captured” by the magnetic field of the Earth. Such particles follow the field lines toward the poles as shown. (b) Photo of aurora borealis.



绚丽多彩的极光



在地磁两极附近 由于磁感线与地面垂直 外层空间入射的带电粒子可直接射入高空大气层内 它们和空气分子的碰撞产生的辐射就形成了极光