§4 电势

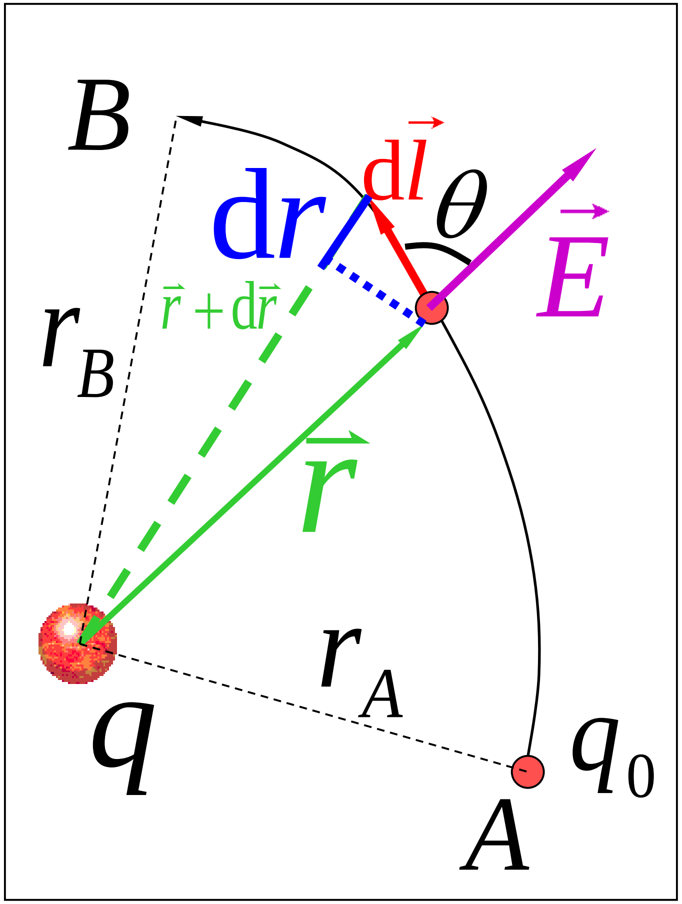
一、静电场力所做的功

1. 点电荷的电场

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = q_0\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\vec{r}_0\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \mathrm{d}l\cos\theta = \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}A = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$



$$A = \int_A^B \mathrm{d}A = q_0\int_A^B \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right) = -\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_B}-\frac{1}{r_A}\right)$$

—— A 仅与 q_0 的始末位置有关，与路径无关。

2. 任意电荷的电场（视为点电荷的集合）

$$\vec{E} = \sum_i \vec{E}_i \qquad A = q_0 \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \sum_i q_0 \int \vec{E}_i \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

结论：静电场力做功与路径无关, 静电场力是保守力。

二、电势能

静电场力所做的功应该等于电荷电势能增量的负值。

$$A_{AB} = \int_A^B q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -(W_B - W_A) = -\Delta W$$

令 $W_{B \to \infty} = 0$ 　　则 $W_A = \int_A^\infty q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

试验电荷 q_0 在电场中某点的电势能，在数值上就等于把它从该点移到零势能处静电场力所作的功。

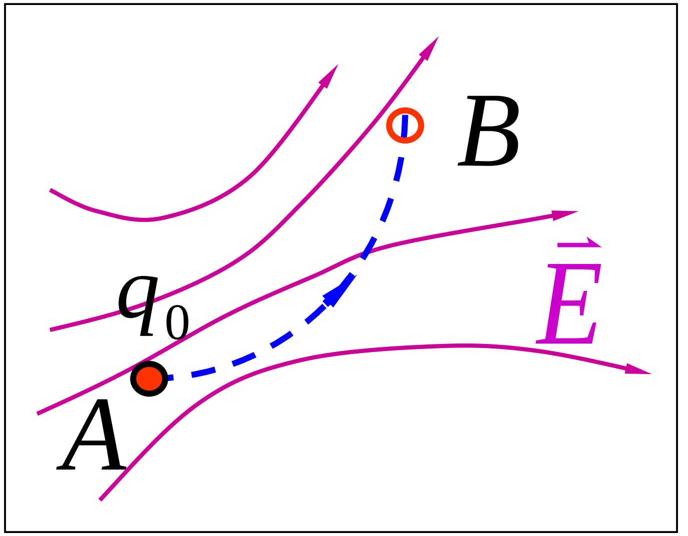
电势能的大小是相对的，电势能的差是绝对的。

三、电势

$$\int_A^B q_0\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -(W_B - W_A)$$

$$\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = -\left(\frac{W_B}{q_0} - \frac{W_A}{q_0}\right)$$

——此积分大小与 q_0无关



定义电势： $\boxed{U = \dfrac{W}{q_0}}$ 则： $U_A = \dfrac{W_A}{q_0}$ $U_B = \dfrac{W_B}{q_0}$

$$\boxed{U_A - U_B = \int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}}$$ （A、B两点之间电势差）

——将单位正电荷从 A 移到 B 静电场力所做的功。

令 $U_B = 0$ 则$U_A = \int_A^{零电势点} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$ （A点的电势）

关于电势的说明：

（1）单位：V（伏特）； $1V=\dfrac{1J}{1C}$

（2）电势零点的选择：有限带电体以无穷远为电势零点。

（实际问题中常常选择地球为零电势体）

令 $U_{B\to\infty}=0$ 则 $U_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$

（3）电势的物理意义：把单位正试验电荷从点 A 移到无穷远时，静电场力所作的功。

（4）静电场力的功 $A_{AB}=q_0\left(U_A-U_B\right)$

（5） 电势差是绝对的，电势大小是相对的.

例 点电荷电场中试验电荷的电势能和电势

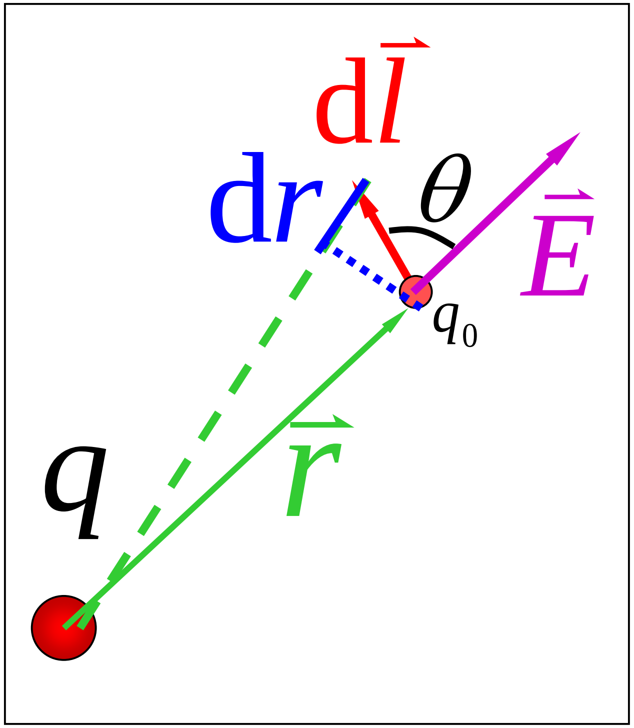
$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

令 $W_\infty = 0$

$$W=\int_r^\infty \frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

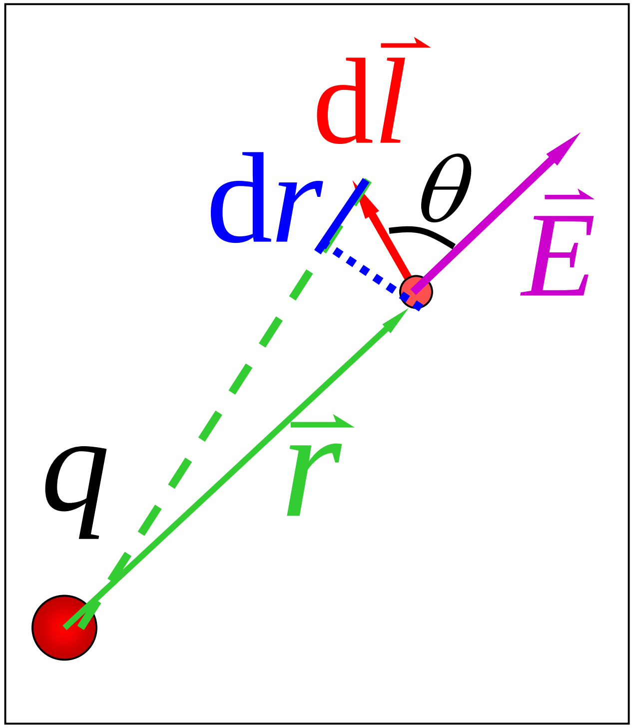
$$=\int_r^\infty \frac{q_0 q\,\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$\boxed{W=\frac{q_0 q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$



点电荷的电势

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \qquad \text{令}\ U_\infty=0$$



$$U=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty \frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

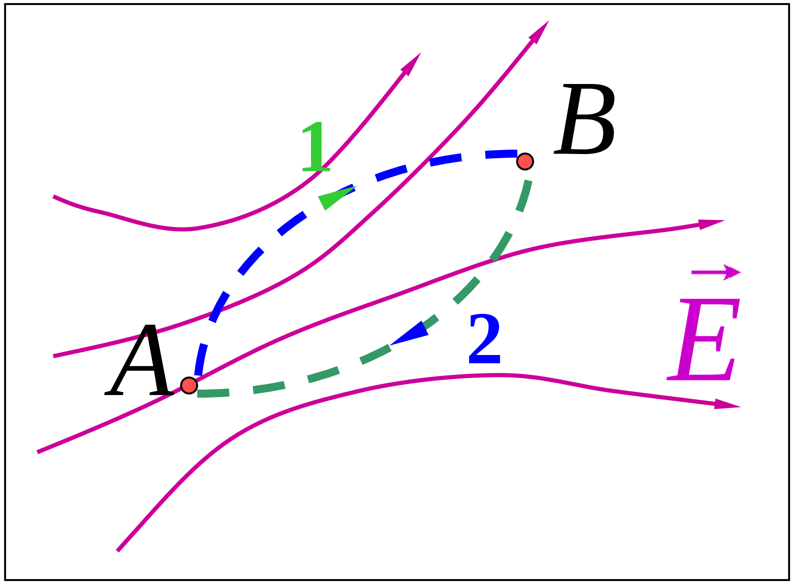
$$\boxed{U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

——球对称性

四、静电场的环路定理

$$q_0 \int_{A1B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = q_0 \int_{A2B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$q_0 \left(\int_{A1B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} + \int_{B2A} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} \right) = 0$$

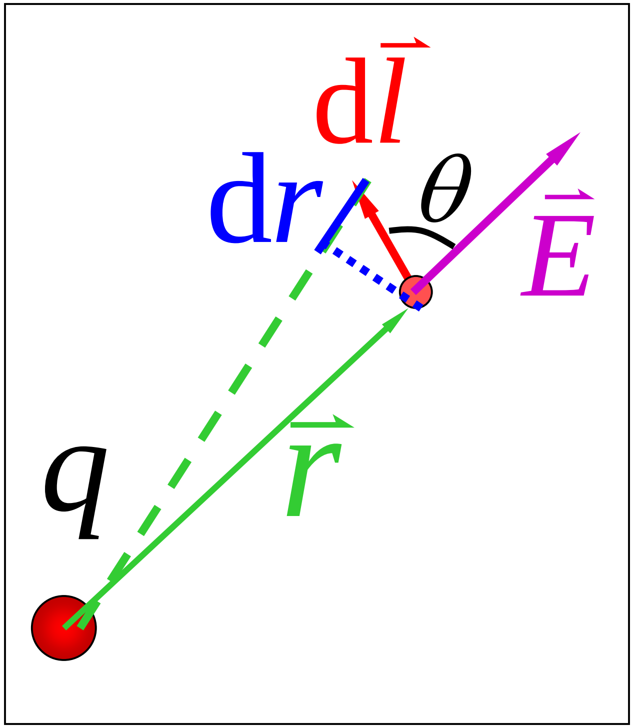


$$\boxed{\oint \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0}$$ ⇒ 静电场是保守场

六、电势的计算

1. 点电荷的电势

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \qquad 令\ U_\infty=0$$



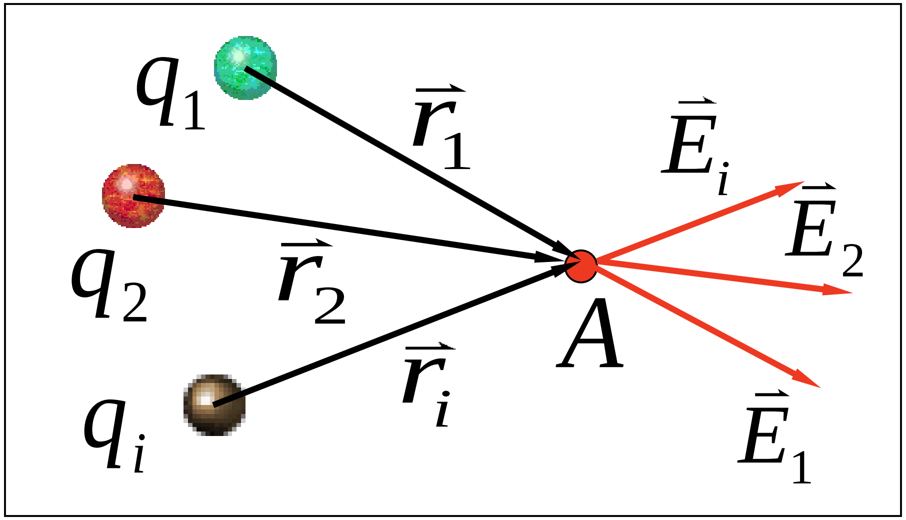
$$U=\int_r^\infty \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^\infty\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$\boxed{U=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

——球对称性

2. 电势的叠加原理



点电荷系 $\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i$

$$U_A=\int_A^{\infty}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\int_A^{\infty}\sum_i \vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$=\sum_i \int_A^{\infty}\vec{E}_i\cdot \mathrm{d}\vec{l}=\sum_i U_i$$

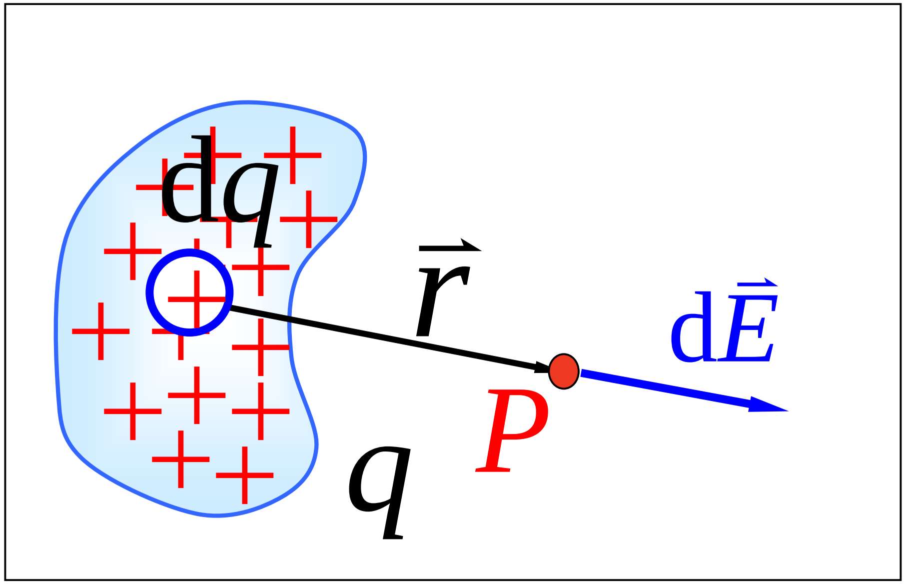
对于点电荷—— $\boxed{U_i=\dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

对于点电荷系—— $\boxed{U_A=\sum_i U_{iA}=\sum_i \dfrac{q_i}{4\pi\varepsilon_0 r_i}}$

3. 连续分布电荷的电势

$$\mathrm{d}U=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$U_P=\int \mathrm{d}U=\int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$



求电势的方法

- 利用 $U_P=\int \mathrm{d}U=\int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

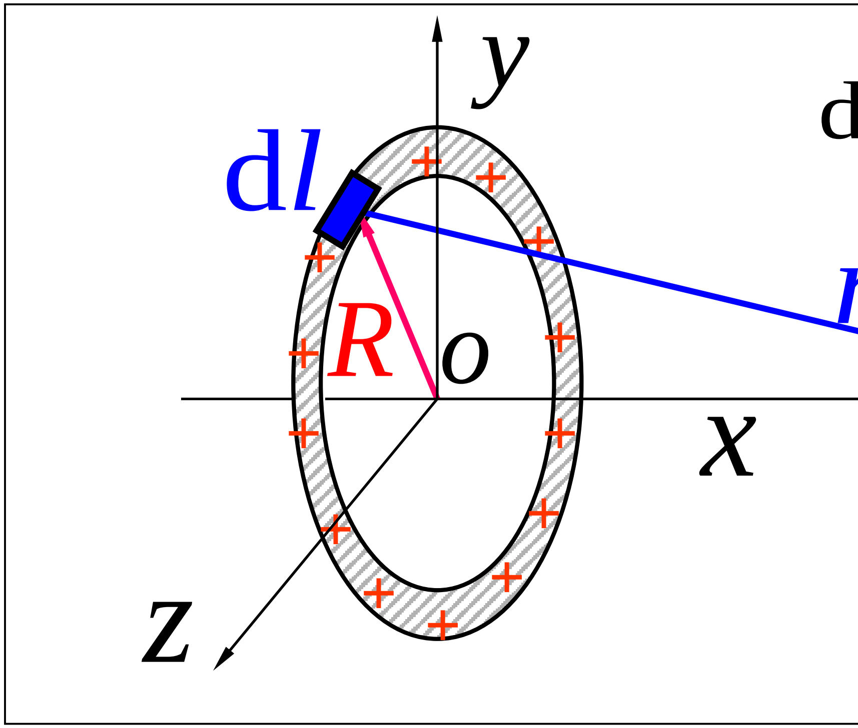
  ——这一结果已选无限远处为电势零点。

- 若已知在积分路径上 $\vec{E}$ 的函数表达式，

  则 $$U_A=\int_A^{U=0\text{点}} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

例1 正电荷 q 均匀分布在半径为 R 的细圆环上。求圆环轴线上距环心为 x 处点 P 的电势。

解： $\lambda = q/2\pi R$ $\quad \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}l = \dfrac{q\mathrm{d}l}{2\pi R}$



$$\mathrm{d}U_P = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\lambda \mathrm{d}l}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

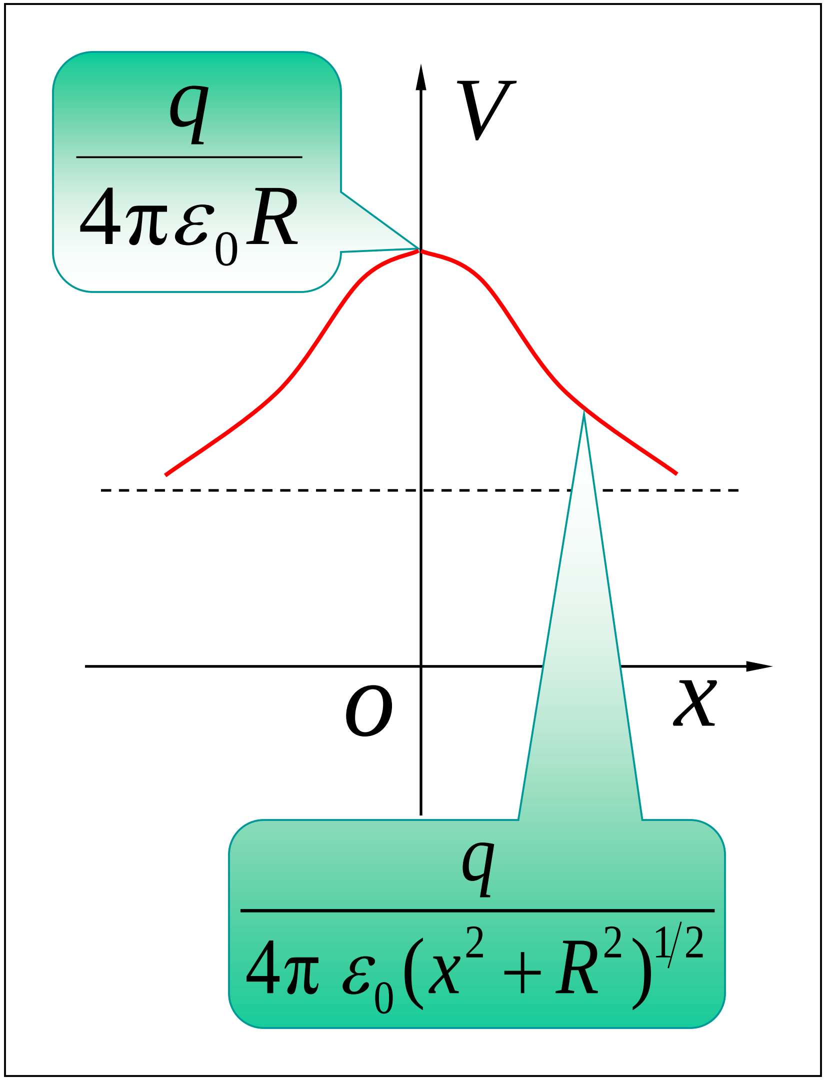
$$U_P = \int_{(q)} \mathrm{d}U_p = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_0^{2\pi R}\mathrm{d}l = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

$$U_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

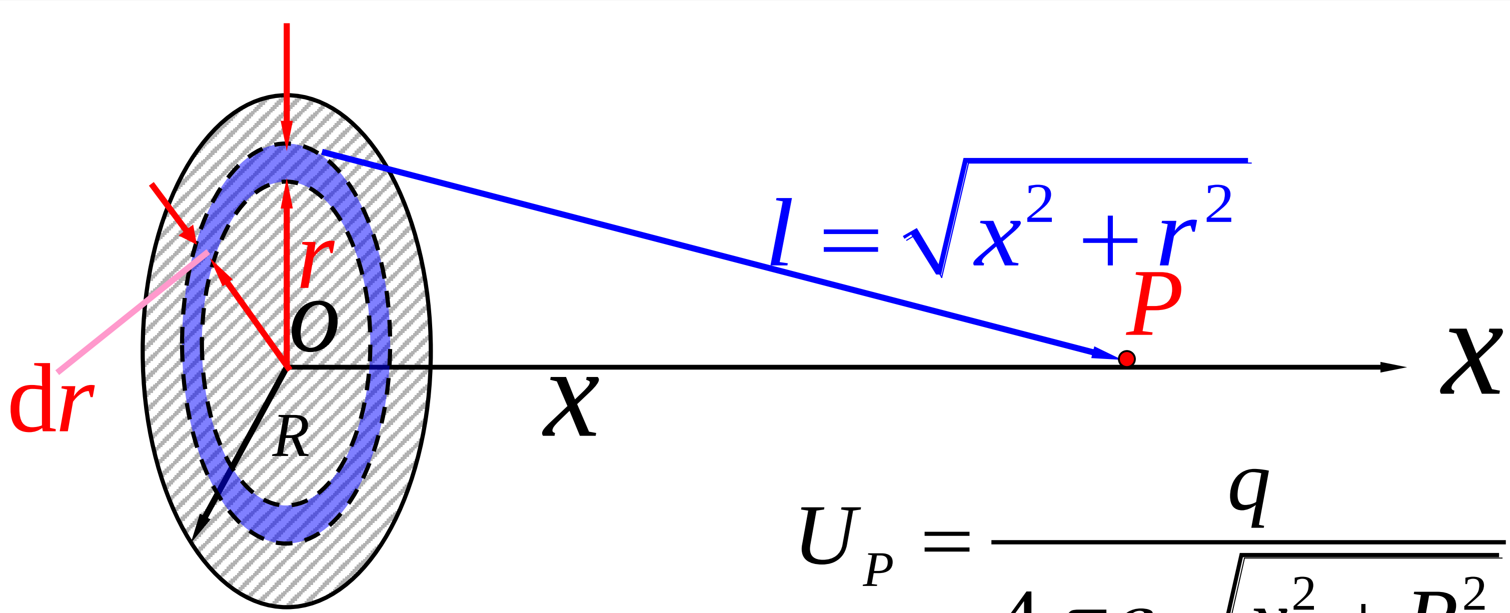
讨 论：

若 $x=0$，$\quad U_0 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$

若 $x \gg R$，$\quad U_P = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 x}$



例2 求均匀带电薄圆盘轴线上的电势。



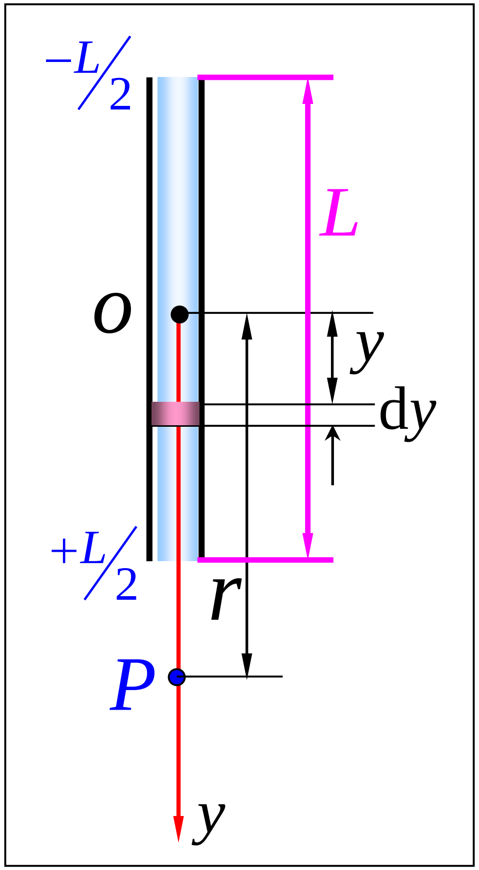
$$U_P=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+R^2}}$$

解： $\mathrm{d}q=\sigma 2\pi r\mathrm{d}r$

$$\mathrm{d}U_p=\frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma\pi r\mathrm{d}r}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{x^2+r^2}}$$

$$U_P=\int_{(q)}\mathrm{d}U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R\frac{\sigma 2\pi r\mathrm{d}r}{\sqrt{x^2+r^2}}=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left(\sqrt{x^2+R^2}-x\right)$$

例3 求长为 L 的均匀带电 q 直线延长上一点 P 的电势。



解： $\lambda = \dfrac{q}{L}$ $\quad \mathrm{d}q = \lambda \mathrm{d}y$

令 $U_\infty = 0$

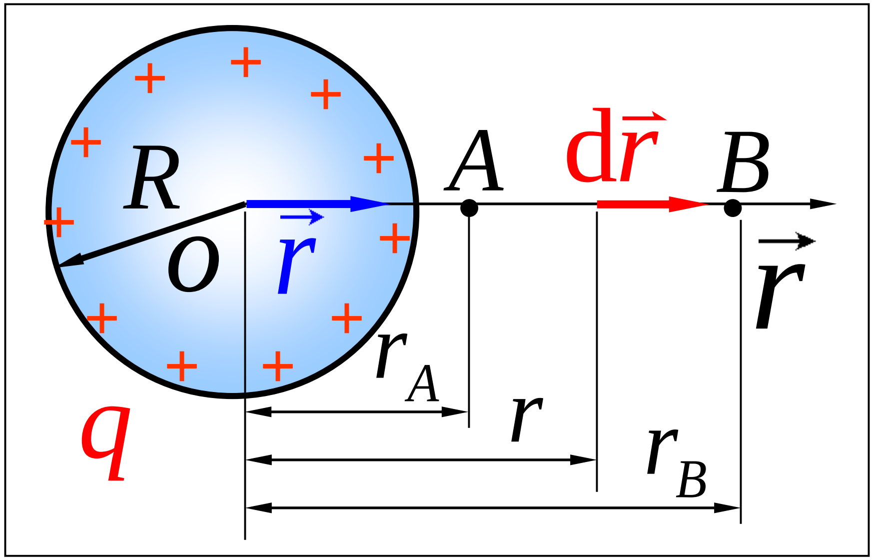
$$\mathrm{d}U = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)} = \frac{\lambda \mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)}$$

$$U = \int \mathrm{d}U = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\lambda \mathrm{d}y}{4\pi\varepsilon_0 (r-y)}$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{\mathrm{d}y}{r-y} \quad = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r + \frac{L}{2}}{r - \frac{L}{2}}$$

例4 真空中，有一带均匀带电球壳，带电量为 q ，半径为R。试求（1）球壳外任意点的电势；（2）球壳内任意点的电势；（3）球壳外两点间的电势差；（4）球壳内两点间的电势差。

解：



$$\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \end{cases}$$

（1）$r > R$ 时

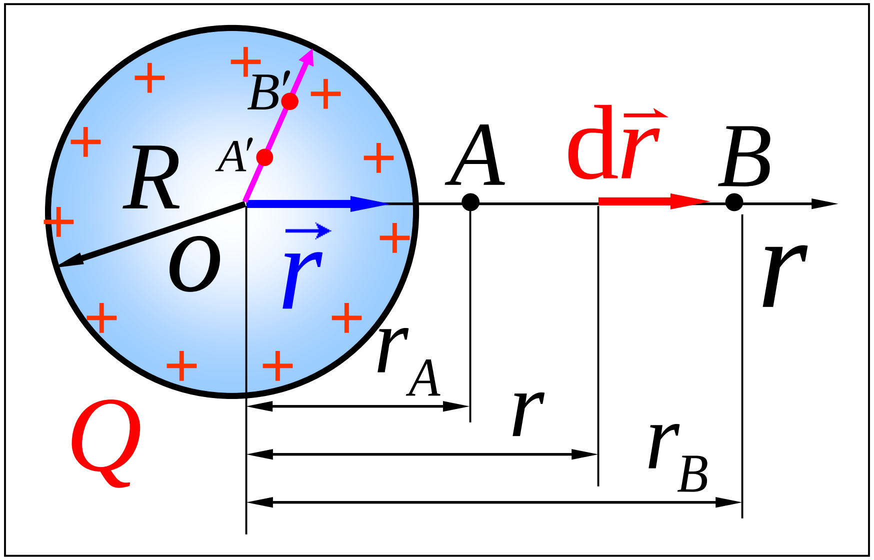
$$U_{外}(r) = \int_r^{\infty} \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{1}{r^2}\vec{r}_0 \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{\infty}\frac{\mathrm{d}r}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

（2）$r<R$ 时

$$U_{内}(r)=\int_r^R \vec{E}_1\cdot d\vec{r}+\int_R^\infty \vec{E}_2\cdot d\vec{r}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

（3）$r>R$



$$U_A-U_B=\int_{r_A}^{r_B}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{\vec{r}_0\cdot d\vec{r}}{r^2}$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_A}^{r_B}\frac{dr}{r^2}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A}-\frac{1}{r_B}\right)$$

（4）$r<R$ $\quad U_{A'}-U_{B'}=\int_{r_{A'}}^{r_{B'}}\vec{E}_1\cdot d\vec{r}=0$

"无限长"带电直导线的电势

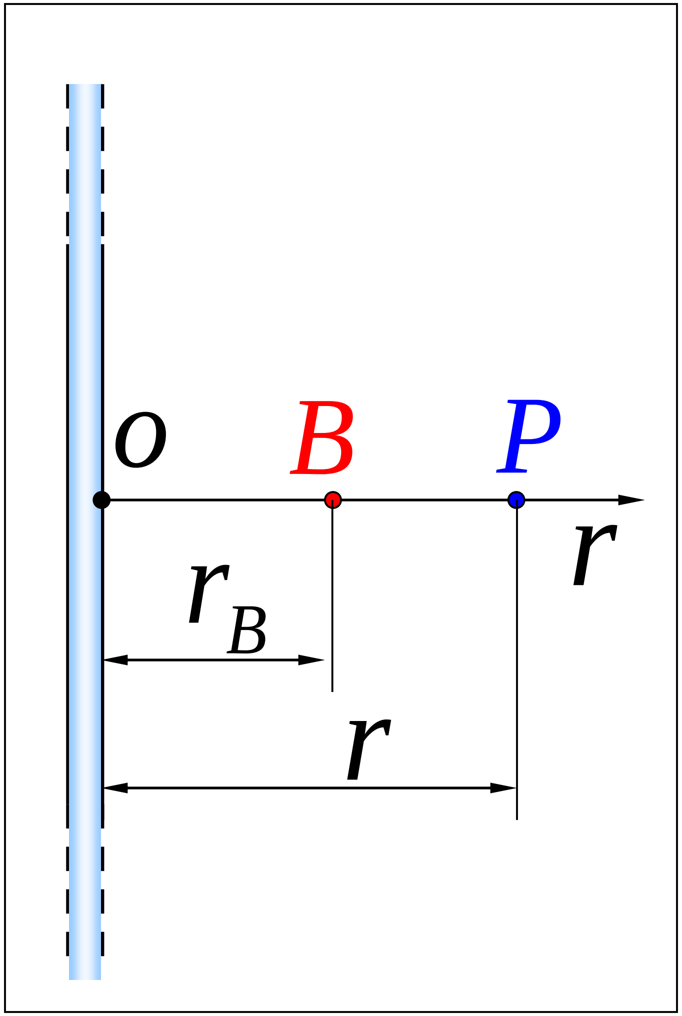
解 能否选 $\varphi_\infty = 0$ ？

$$\varphi_P = \int_{PB} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} + \varphi_B$$

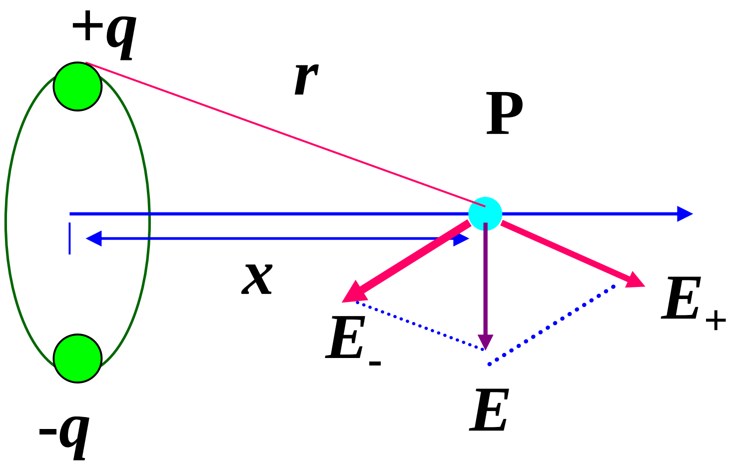
令 $\varphi_B = 0$

$$\varphi_P = \int_r^{r_B} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_r^{r_B} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\vec{e}_r\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{r_B}{r}$$



无穷远处的电势为*a*。E=? U=?



$$E = 2\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\frac{R}{r} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qR}{(R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$U_p - a = \int_p^\infty \vec{E}\cdot d\vec{l} = \int_p^\infty E dx\cos 90^0 = 0$$

$$\therefore U_p = a$$

$$U_{+q} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + a \qquad U_{-q} = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r} + a$$

$$U_p = U_{+q} + U_{-q} = 2a \quad ? \; ? \; ?$$

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ 的条件是无穷远处电势为零。

七、电场强度与电势的关系

1. 等势面

空间电势相等点的集合所成曲面称为等势面。

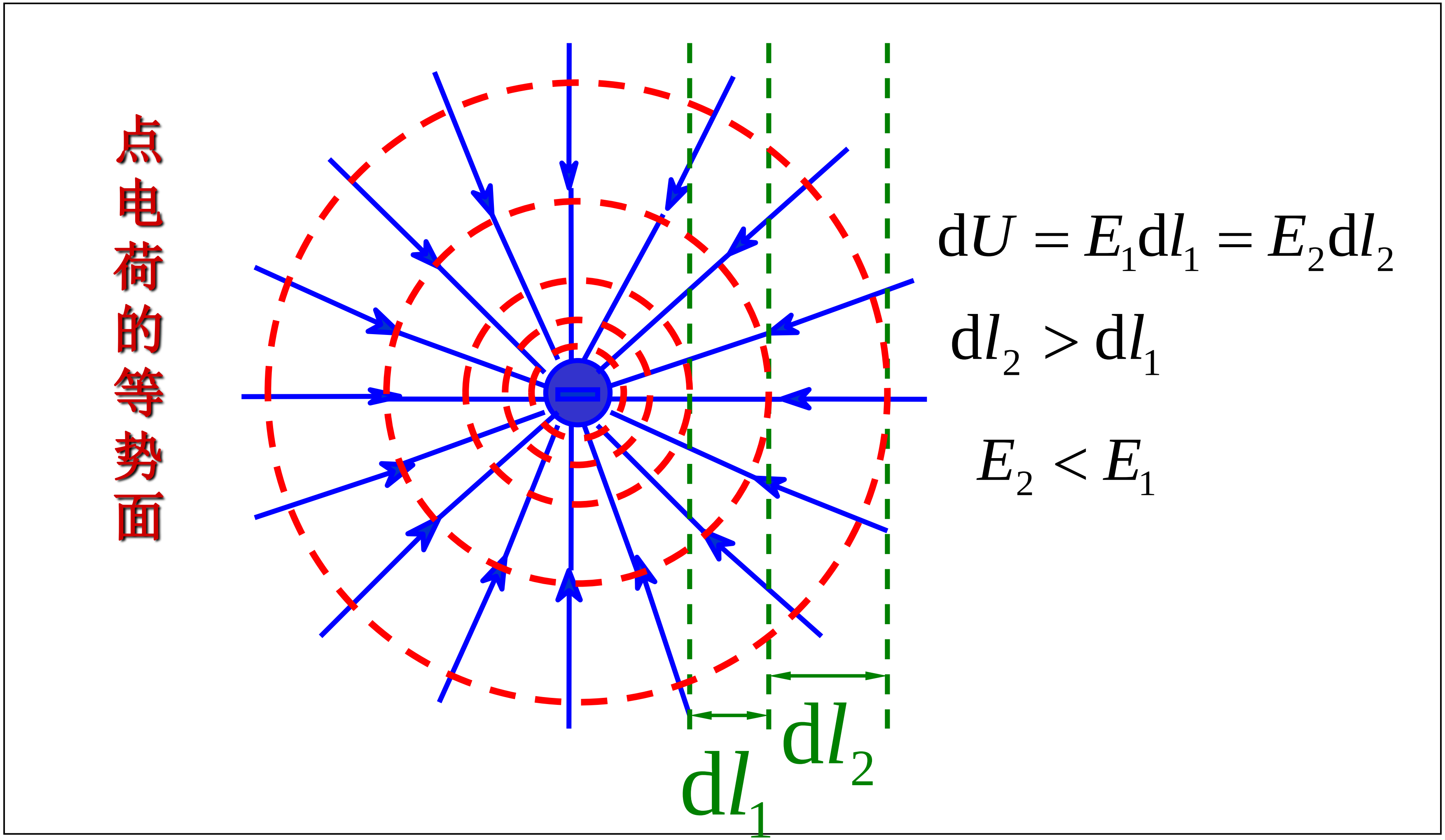
性质：

- 在静电场中，电荷沿等势面移动时，电场力不做功；

$$A_{ab} = q_0(U_a - U_b) = \int_a^b q_0 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

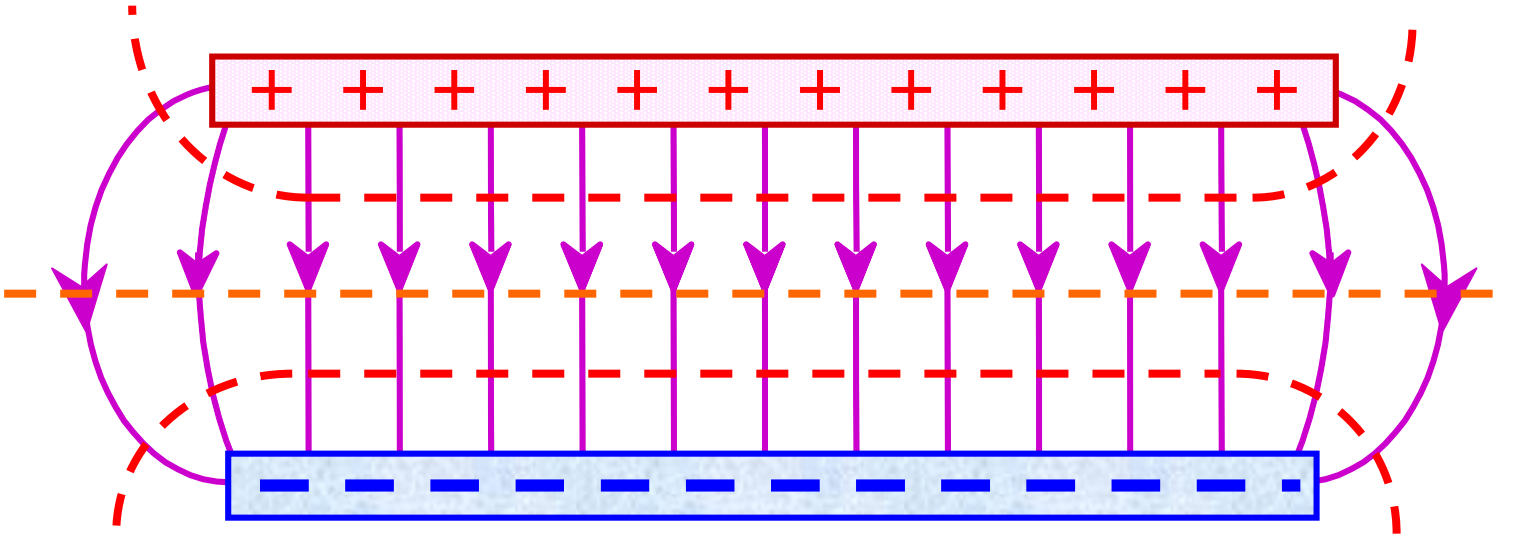
- 在静电场中，电场强度 $\vec{E}$ 总是与等势面垂直的，即电场线是和等势面正交的曲线簇；

- 规定：电场中任意两相邻等势面之间的电势差相等，即等势面的疏密程度同样可以表示场强的大小。

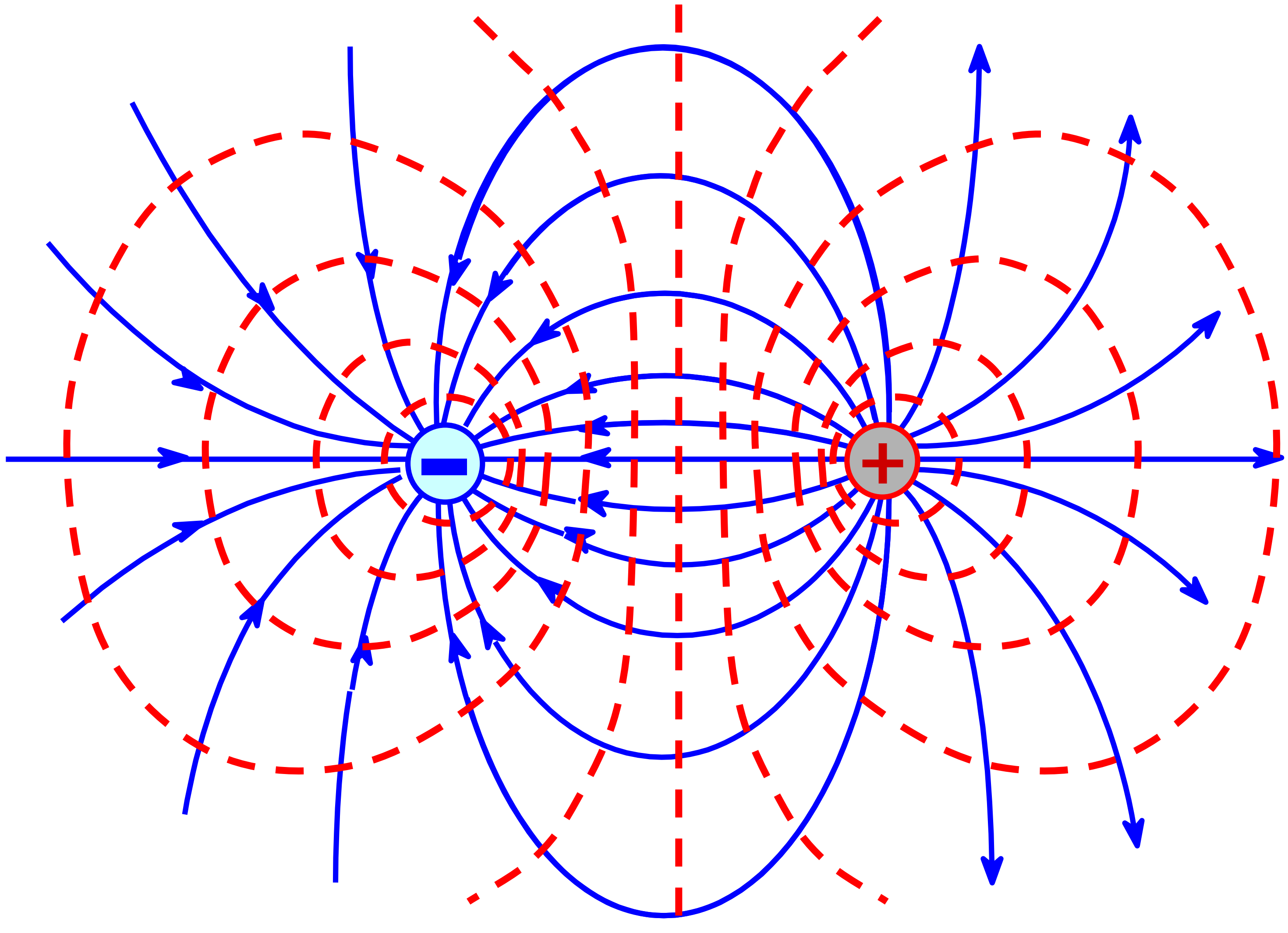


电场强度的方向就是电势降落的方向。

两平行带电平板的电场线和等势面



一对等量异号点电荷的电场线和等势面



2. 电场强度与电势的微分关系（了解）

$\mathrm{d}\vec{n}$ 的正向为电势增加的方向。

等势面一、二的电势分别为U_1、U_2。

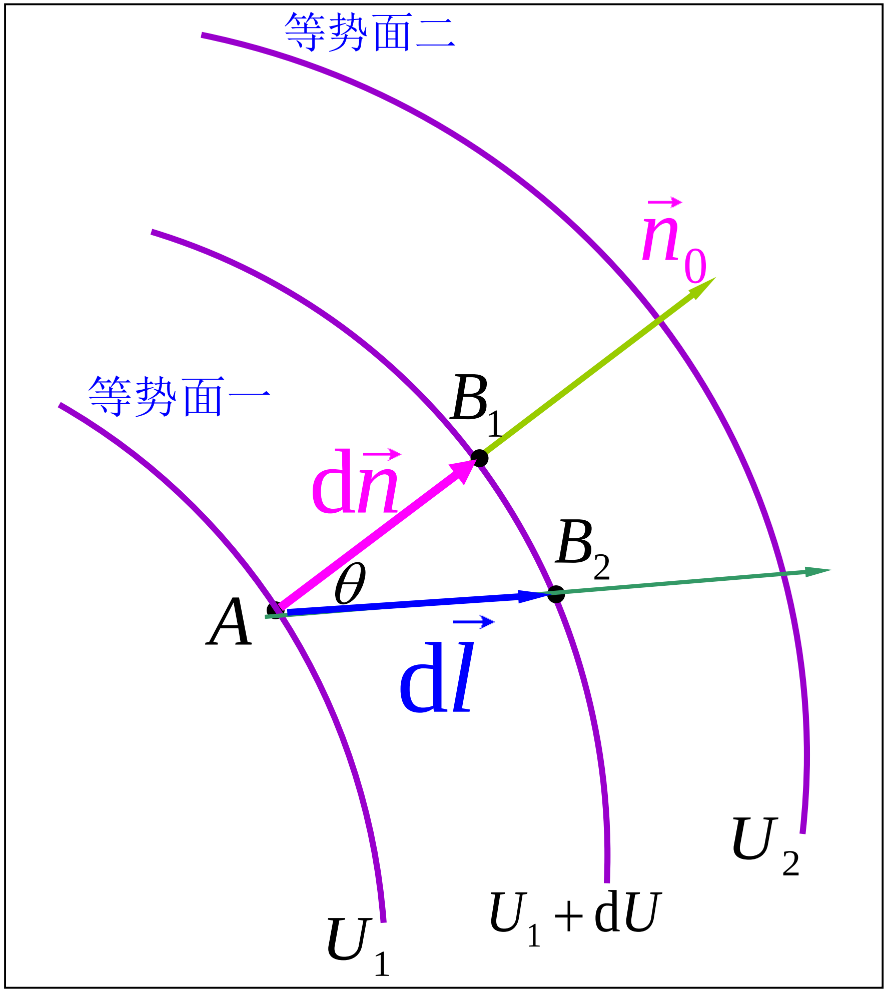
$$\mathrm{d}\vec{n} = \mathrm{d}n \cdot \vec{n}_0$$

$$\because U_1 - U_2 = \int_1^2 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore U_2 - U_1 = -\int_1^2 \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

$$= -\int_1^2 E \,\mathrm{d}l \cos\theta$$

$$\therefore \mathrm{d}U = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = -E \,\mathrm{d}l \cos\theta$$



$$\mathrm{d}U = -\vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l} = -E\,\mathrm{d}l\cos\theta$$

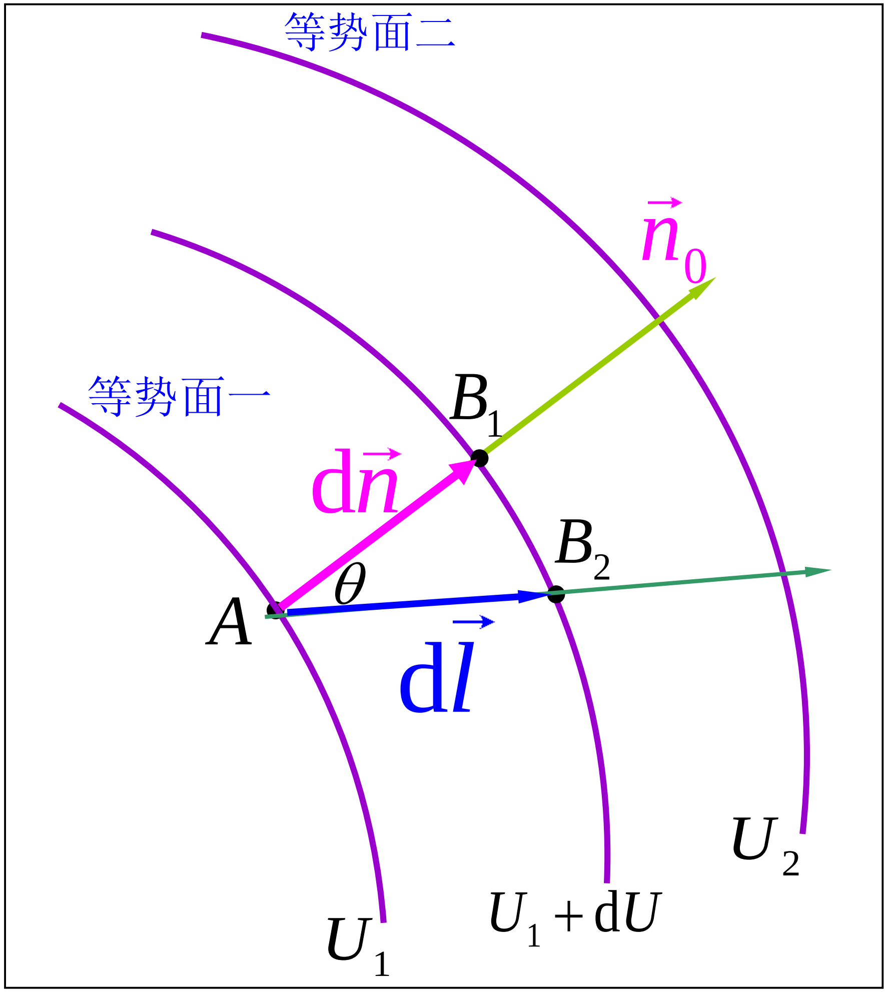
$$\because \mathrm{d}l\cos\theta = \mathrm{d}n$$

$$\therefore \mathrm{d}U = -E\,\mathrm{d}n$$

$$\therefore E = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}$$

即： $$\boxed{\vec{E} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}_0}$$

或： $$\boxed{\vec{E} = -\nabla U}$$



——静电场中某点的电场强度等于该点的电势梯度的负值。

说明：

（1）空间某点电场强度的大小取决于该点邻域内电势 U 的空间变化率。

（2）电场强度的方向恒指向电势减小的方向。

- 直角坐标系中

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right) = -\mathrm{grad}\, U$$

$$\vec{E} = -\nabla U$$

（3）电场线与等势面处处正交。

（即：在等势面上移动电荷，电场力不做功。）

（4）等势面密处电场强度大；等势面疏处电场强度小。

求 $\vec{E}$ 的三种方法
$\begin{cases} \text{利用微元叠加方法；} \\ \text{利用高斯定理；} \\ \text{利用电势与电场强度的关系。} \end{cases}$