

## 第一章 质点运动学

## 一、选择题

1. 一运动质点在某瞬时位于矢径  $\vec{r}(x, y)$  的端点处, 其速度大小为

(A)  $\frac{dr}{dt}$     (B)  $\frac{d\vec{r}}{dt}$     (C)  $\frac{d|\vec{r}|}{dt}$     (D)  $\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$

[ D ]

2. 质点作曲线运动,  $\vec{r}$  表示位置矢量,  $\vec{v}$  表示速度,  $\vec{a}$  表示加速度,  $S$  表示路程,  $a_t$  表示切向加速度, 下列表达式中,

(1)  $dv/dt=a$ ,    (2)  $dr/dt=v$ ,    (3)  $dS/dt=v$ ,    (4)  $|d\vec{v}/dt|=a_t$

(A) 只有(1)、(4)是对的    (B) 只有(2)、(4)是对的

(C) 只有(2)是对的    (D) 只有(3)是对的

[ D ]

3. 质点作半径为  $R$  的变速圆周运动时的加速度大小为 ( $v$  表示任一时刻质点的速率)

(A)  $\frac{dv}{dt}$     (B)  $\frac{v^2}{R}$     (C)  $\frac{dv}{dt} + \frac{v^2}{R}$     (D)  $\sqrt{\left(\frac{dv}{dt}\right)^2 + \left(\frac{v^2}{R}\right)^2}$

[ D ]

## 二、填空题

4. 质点沿半径为  $R$  的圆周运动, 运动学方程为  $\theta=3+2t^2$  (SI), 则  $t$  时刻质点的法向加速度大小为  $a_n = \underline{16Rt^2 \text{ m/s}^2}$ ; 角加速度  $\beta = \underline{4 \text{ rad/s}^2}$ 。

5. 一质点从静止出发沿半径  $R=1 \text{ m}$  的圆周运动, 其角加速度随时间  $t$  的变化规律是  $\beta=12t^2-6t$  (SI), 则质点的角速度  $\omega = \underline{4t^3-3t^2 \text{ rad/s}}$ ; 切向加速度  $a_t = \underline{12t^2-6t \text{ m/s}^2}$ 。

## 三、计算题

6. (教材 1-2 题) 一质点在  $Oxy$  平面内运动, 其运动方程为  $x=2t, y=12-2t^2$ , (SI 单位)。试求: 质点的运动轨迹以及质点的速度和加速度。

**分析** 本题属于运动学的第一类问题, 已知运动方程求质点运动的速度、加速度、位置矢量。本题只需由运动方程的分量式分别求出速度、加速度的分量, 再由运动合成算出速度和加速度的大小和方向。

**解** 根据质点的运动方程  $x=2t, y=12-2t^2$  得质点的运动轨迹为

$$y=12-2t^2=12-2\left(\frac{x}{2}\right)^2=12-\frac{x^2}{2}$$

(2) 设  $x$  方向的速度为  $v_x$ ,  $y$  方向的速度为  $v_y$ , 则

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = -4t$$

所以质点的速度为  $\boldsymbol{v} = 2\vec{i} - 4t\vec{j}$

设  $x$  方向的加速度为  $a_x$ ,  $y$  方向的加速度为  $a_y$ , 则

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = 0$$
$$v_y = \frac{dy}{dt} = -4t \quad a_y = \frac{dv_y}{dt} = -4$$

所以加速度为  $\boldsymbol{a} = -4\vec{j}$

7. (教材 1-6 题) 一艘正在沿直线行驶的汽艇, 在发动机关闭后, 其加速度方向与速度方向相反, 满足  $dv/dt = -kv^2$ , 式中  $k$  是常数。试证明汽艇在关闭发动机关后又行驶  $x$  距离时的速度为  $v = v_0 e^{-kx}$ , 其中  $v_0$  是关闭发动机时的速度。

**分析** 本题是属于质点运动学的第二类问题, 已知加速度表达式, 求速度、位移矢量。处理此类问题, 只需在给定初始条件下采用积分求解。

**解**  $v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dv} \frac{dv}{dt} = \frac{dx}{dv} (-kv^2)$

分离变量积分得

$$\int_0^x -k dx = \int_{v_0}^v \frac{dv}{v}$$
$$v = v_0 e^{-kx}$$

8. (教材 1-7 题) 一质点在  $xOy$  平面内运动, 其运动方程为  $\vec{r} = a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}$ ,

其中  $a, b, \omega$  均为大于零的常量。(1) 试求质点在任意时刻的速度; (2) 证明质点运动的轨道为椭圆; (3) 证明质点的加速度恒指向椭圆中心。

**分析** 本题属于运动学的第一类问题, 已知运动方程求质点运动的速度、加速度、轨迹。

**解** (1) 由速度的定义得质点在任意时刻的速度为

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = -a\omega \sin \omega t \vec{i} + b\omega \cos \omega t \vec{j}$$

(2) 由已知可得  $t$  时刻  $x$  轴、 $y$  轴的坐标分别为

$$x = a \cos \omega t$$

$$y = b \sin \omega t$$

所以质点运动的轨迹方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

(3) 由加速度的定义得质点在任意时刻的加速度为

$$\begin{aligned} \vec{a} &= \frac{d\vec{v}}{dt} = -a\omega^2 \cos \omega t \vec{i} - b\omega^2 \sin \omega t \vec{j} \\ &= -\omega^2 (a \cos \omega t \vec{i} + b \sin \omega t \vec{j}) = -\omega^2 \vec{r} \end{aligned}$$

显然质点加速度  $a$  的方向与矢径  $r$  方向相反，即指向椭圆圆心。

9. (教材 1-11 题) 一质点沿半径为  $R$  的圆周按规律  $s = v_0 t - bt^2/2$  运动， $v_0$ 、 $b$  都是常量。求：(1) 任意  $t$  时刻的总加速度；(2)  $t$  为何值时总加速度在数值上等于  $b$ ？(3) 当加速度达到  $b$  时，质点已沿圆周运行了多少圈？

**分析** 在自然坐标中，由给定运动方程  $s=s(t)$ ，对时间  $t$  求一阶、二阶导，即得质点沿曲线运动的速率  $v$  和切向加速度  $a_\tau$ ，而法向加速度为  $a_n = v^2/R$ 。总的加速度为  $\vec{a} = a_n \vec{e}_n + a_\tau \vec{e}_\tau$ 。

质点  $t$  时间内通过的路程  $\Delta s = s_t - s_0$ ，圆周长为  $2\pi R$ ，质点所转的圈数即可求得。

**解** (1) 质点作圆周运动的速率为

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

切向加速度和法向加速度分别为

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = -b, \quad a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

$$\text{总加速度大小为 } a = \sqrt{a_n^2 + a_\tau^2} = \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + R^2 b^2}}{R}$$

其方向与切线方向的夹角为

$$\theta = \arctan \frac{a_n}{a_\tau} = \arctan \left[ -\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb} \right]$$

或写出矢量形式：

$$\vec{a} = a_n \vec{e}_n + a_\tau \vec{e}_\tau$$

$$(2) \text{ 由题意得 } a = b, \text{ 即 } \frac{\sqrt{(v_0 - bt)^4 + R^2 b^2}}{R} = b$$

解得

$$t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 当加速度达到  $b$  时，质点运动的路程为

$$\Delta s = s_t - s_0 = v_0 t - \frac{1}{2} b t^2 = \frac{v_0^2}{b} - \frac{v_0^2}{2b} = \frac{v_0^2}{2b}$$

质点沿圆周运行的圈数为  $n = \frac{\Delta s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi b R}$

2018年哈尔滨工业大学物理(C)