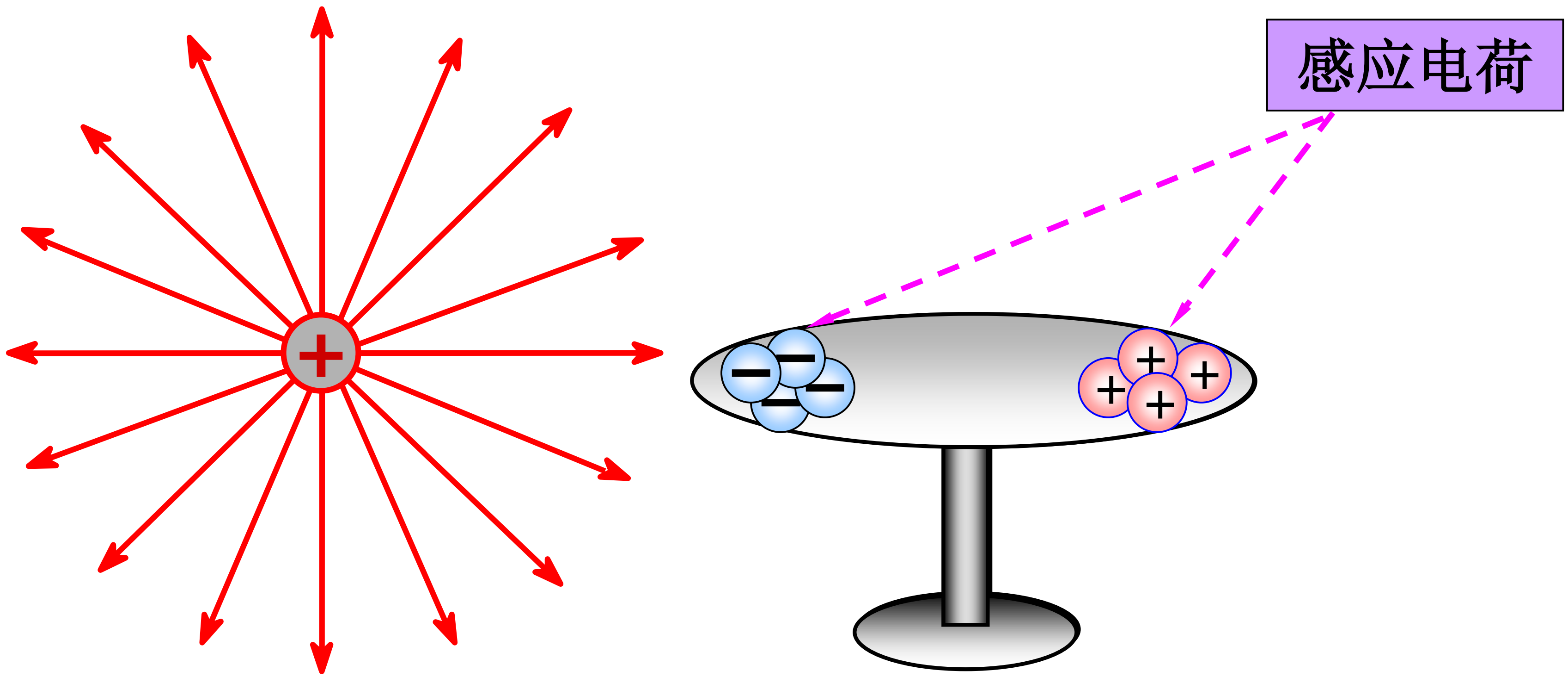
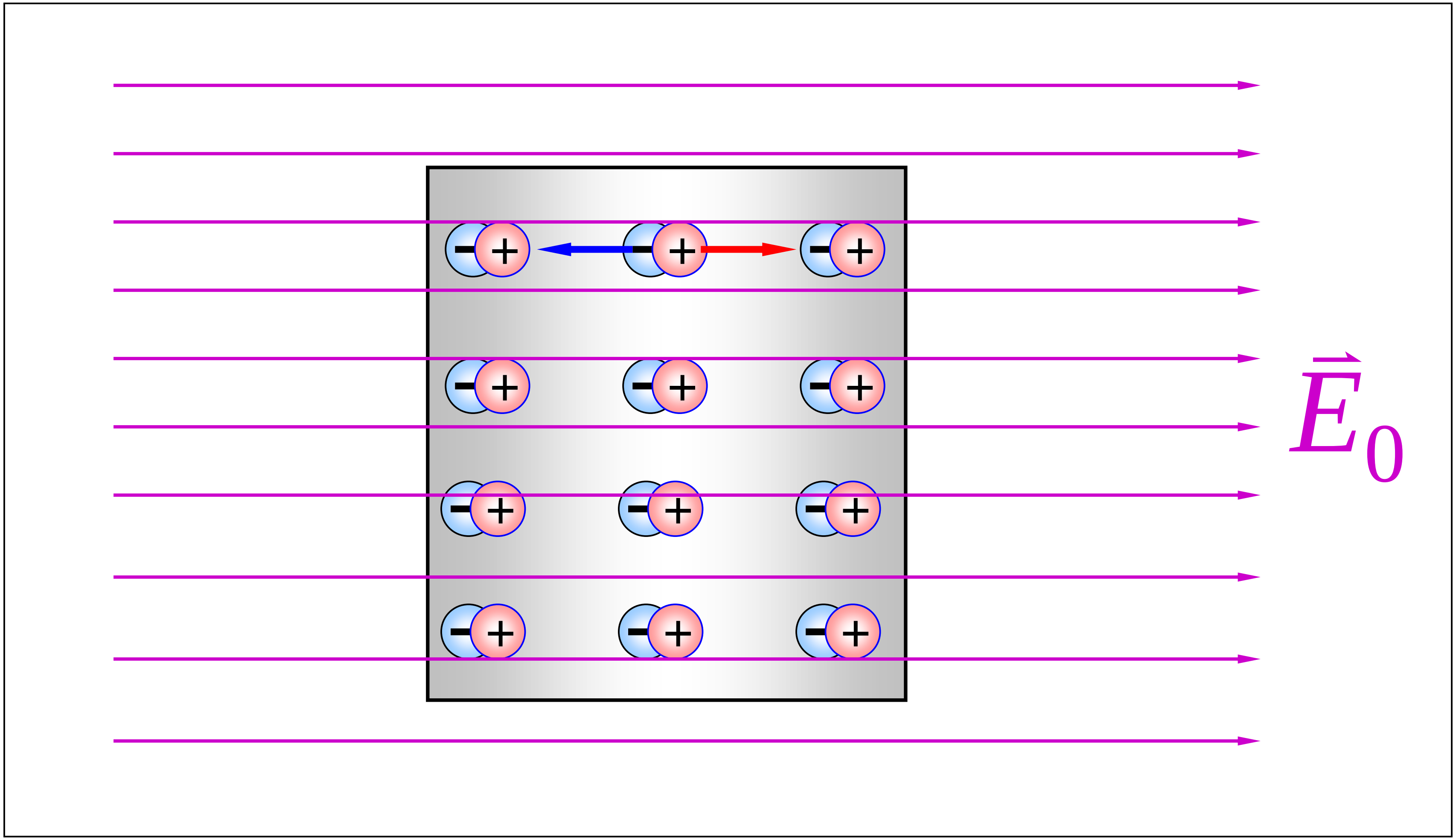
§5 静电场中的导体 电容

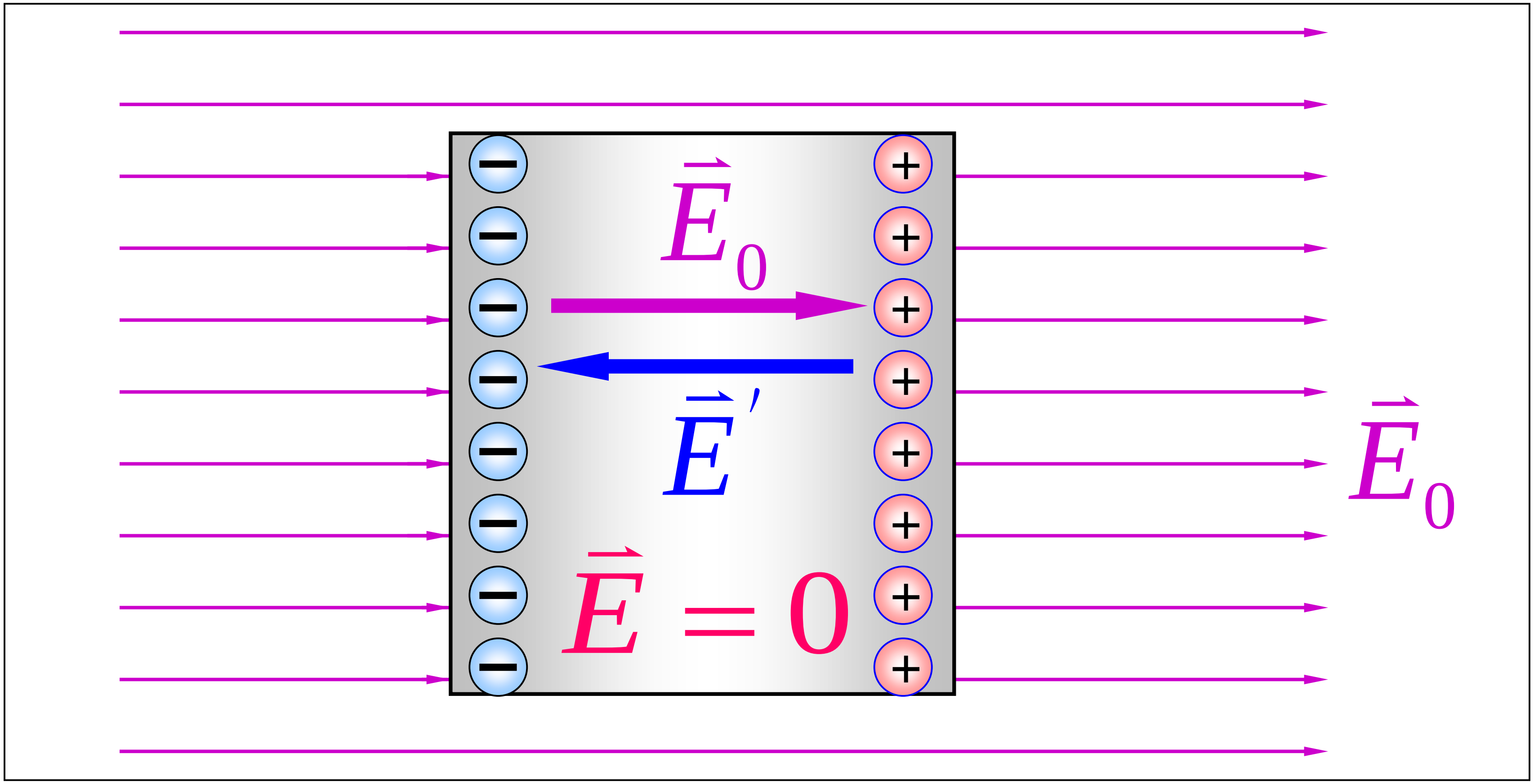
一、静电感应 静电平衡条件

1. 静电感应





$\vec{E}_0$



$$\vec{E}=\vec{E}_0+\vec{E}'=0$$

导体内电场强度

外电场强度

感应电荷电场强度

2. 静电平衡条件

导体内部没有电荷的宏观定向运动，称导体处于静电平衡。

（1）导体内部任何一点处的电场强度为零；

（2）导体表面处的电场强度的方向，都与导体表面垂直。

——推论： ➢ 导体是等势体。

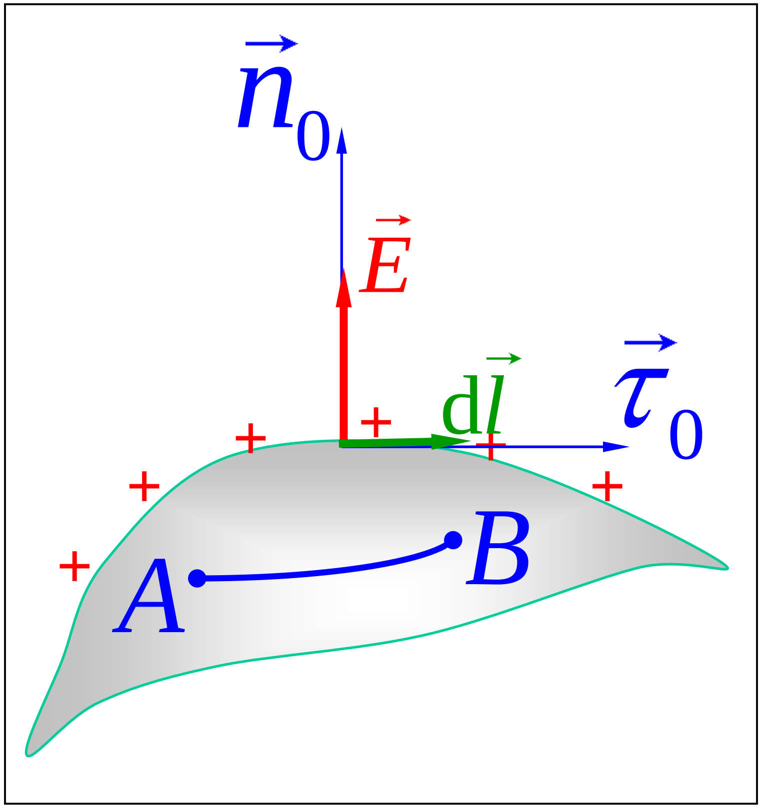
➢ 导体表面是等势面

$$\because \vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{l}$$

$$\therefore \mathrm{d}U = -\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$

➢ 导体内部各处电势相等

$$U_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0$$



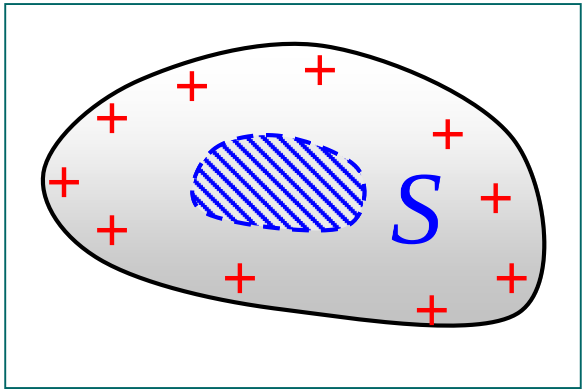
二、静电平衡时导体上电荷的分布

1. 实心导体

结论：　导体内部无电荷

$\because \vec{E}=0$　即 $0=\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$

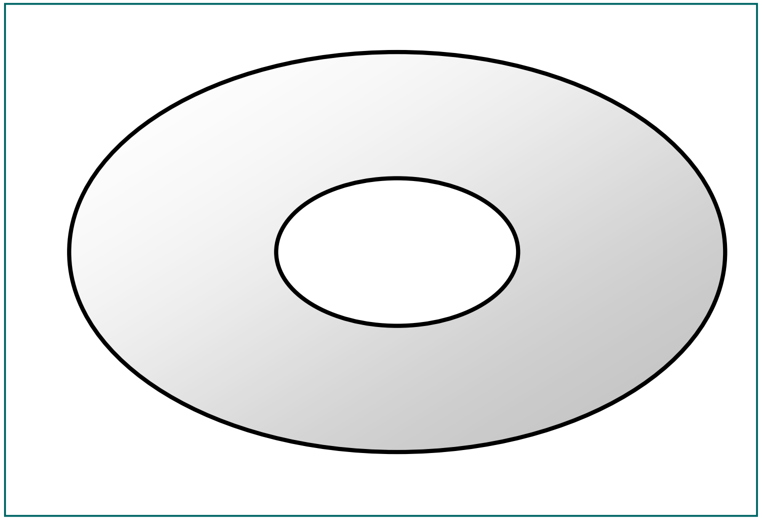
$\therefore q=0$



2. 空腔导体

- 空腔内无电荷

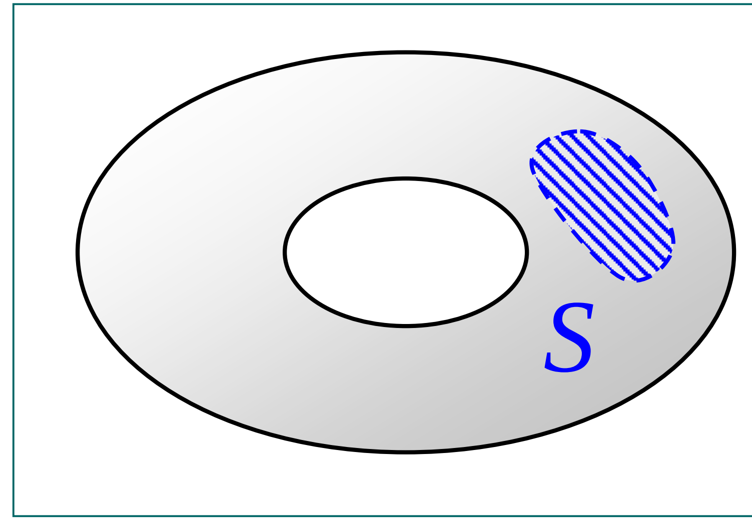
结论：　电荷只能分布在空腔的外表面上（内表面无电荷）



➢ 对于空腔导体内，有

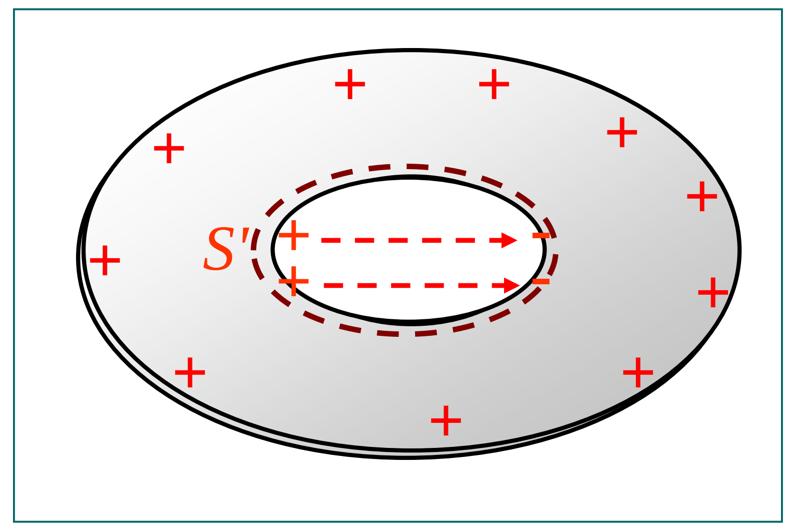
$$\because \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \therefore \sum q_i =0$$

——电荷只能分布在表面上



➢ 对于空腔的内表面，有

$$\because \oint_{S'} \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=0 \qquad \therefore \sum q_i =0$$



➢ 若内表面带等量异号的电荷，则有

$$U_{AB}=\int_{AB}\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}\neq 0$$

——与“静电平衡状态的导体是等势体”相矛盾，故空腔的内表面不带电。

空腔内有电荷

结论：当空腔内有电荷$+q$时，内表面因静电感应出现等量异号的电荷q，外表面同时出现等量同号的感应电荷q。

$$\because \quad \oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$

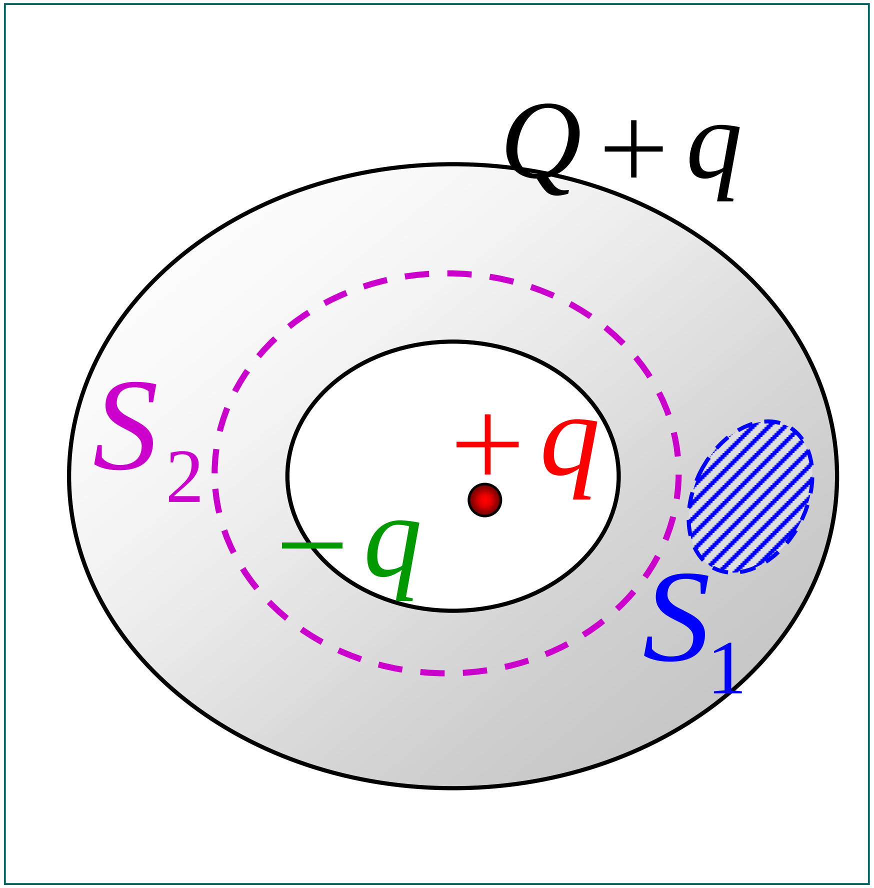
$$\therefore \quad \sum q_i = 0$$

——电荷只能分布在表面上。

内表面上有电荷吗？

$$\because \quad \sum q_i = q_{内} + q = 0$$

$$\therefore \quad q_{内} = -q$$



3. 导体表面电场强度与电荷面密度的关系

结论：导体表面附近某处的电场强度大小与该处表面电荷面密度成正比。

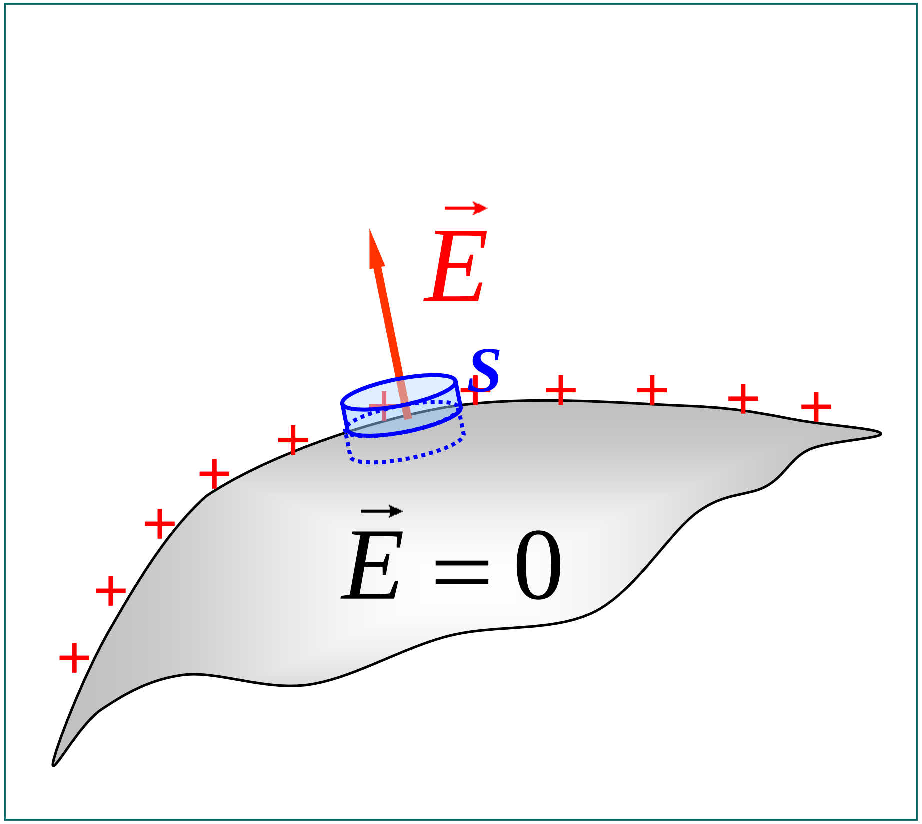
作圆柱形高斯面 S，使其一个底在导体内。

$$\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma S_{底}}{\varepsilon_0}$$

σ 为表面电荷面密度

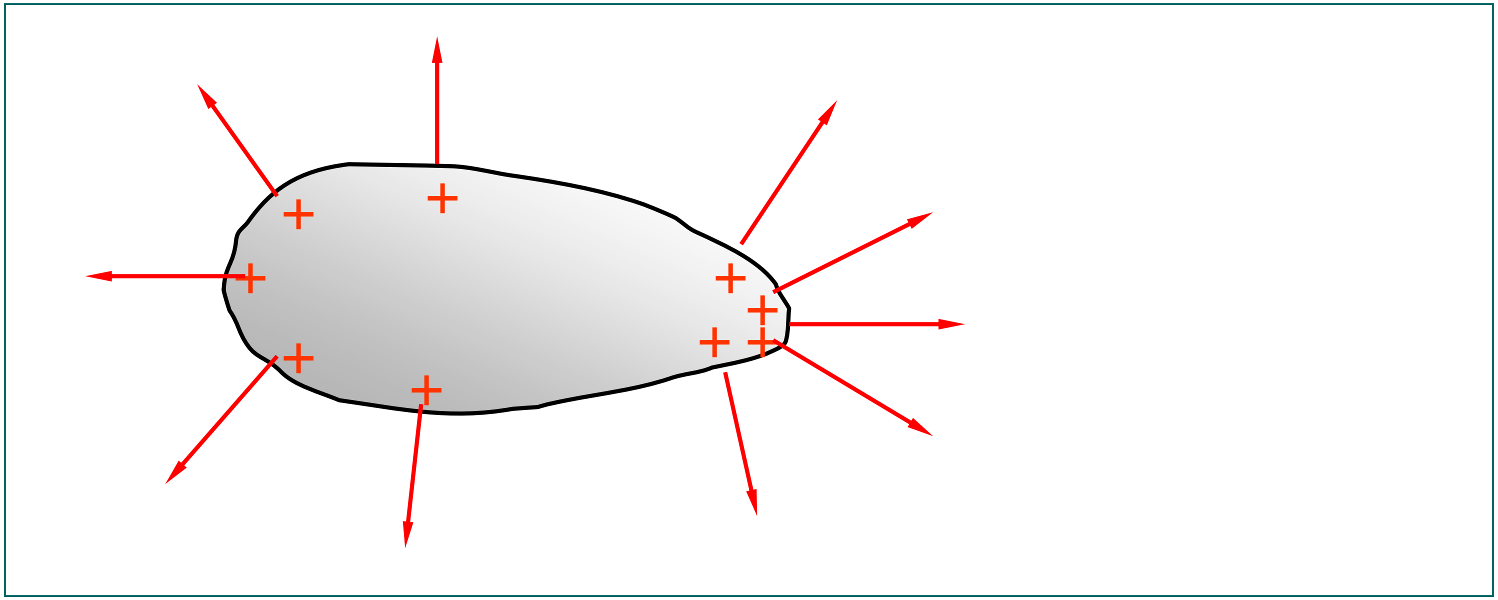
$$E S_{底} = \frac{\sigma S_{底}}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad \boxed{E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$



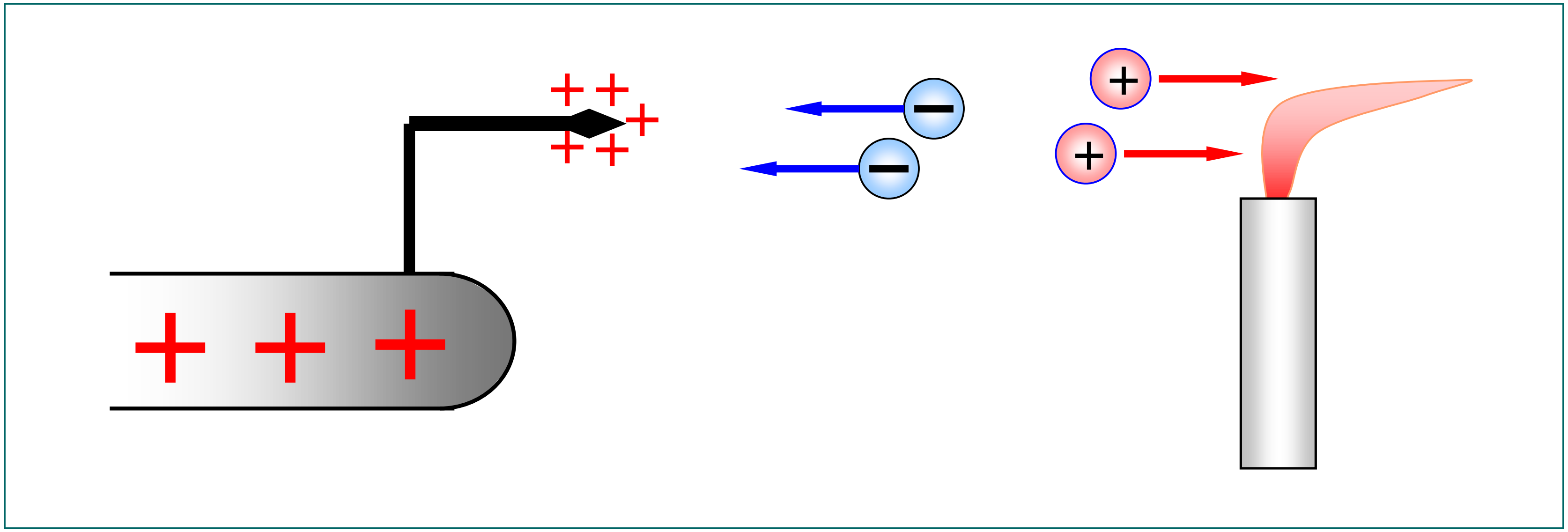
4. 导体表面电荷密度与导体表面曲率的关系

$$\sigma \sim \frac{1}{\rho}$$



- 导体表面电荷分布密度与导体表面的曲率半径成反比。

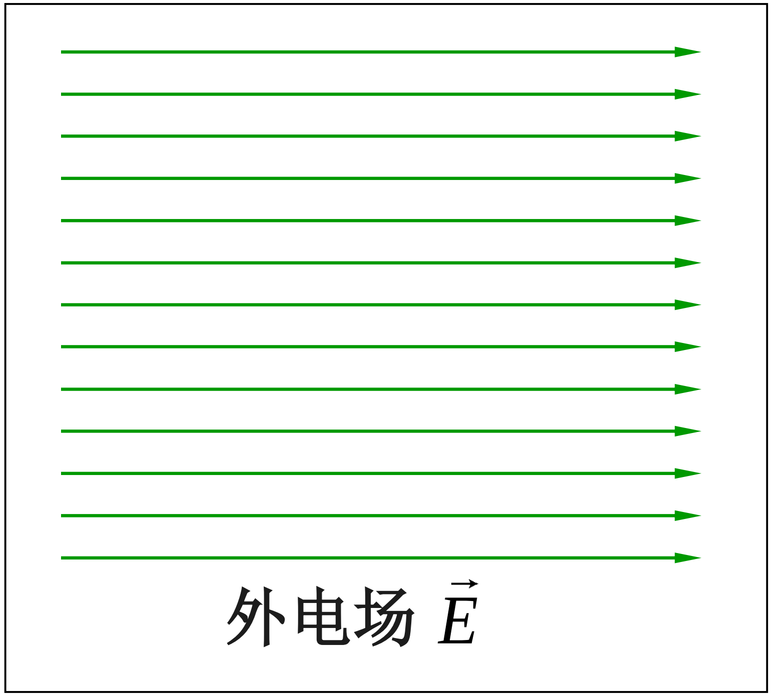
尖端放电现象

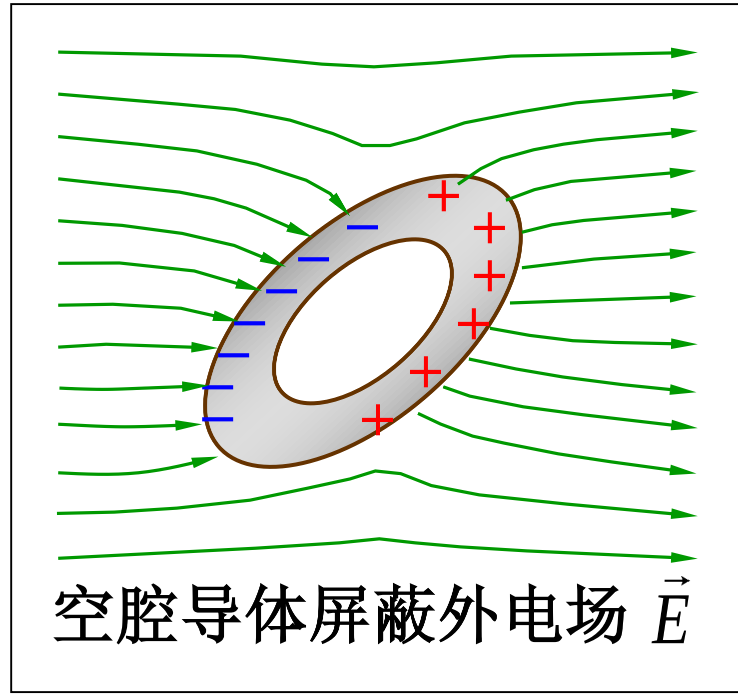


尖端放电现象的利用：　　避雷针

5. 静电屏蔽

（1）屏蔽外电场



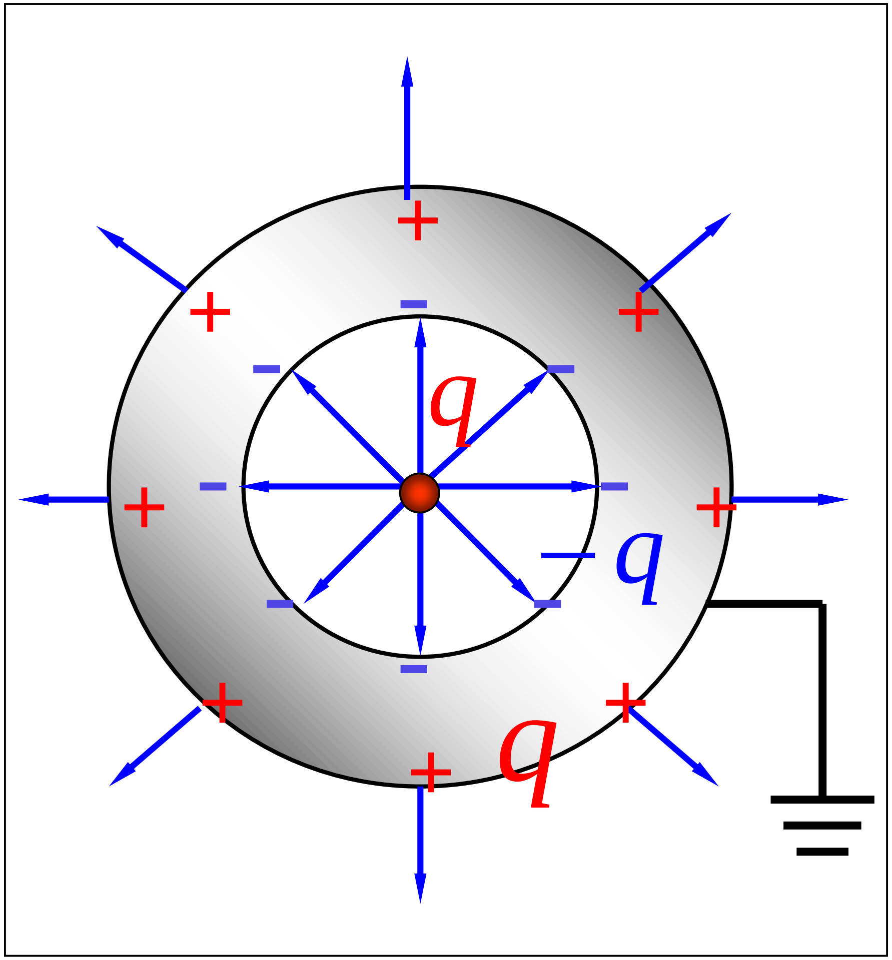


结论：空腔导体可以屏蔽外电场，使空腔内物体不受外电场影响。此时，整个空腔导体和腔内的电势处处相等。

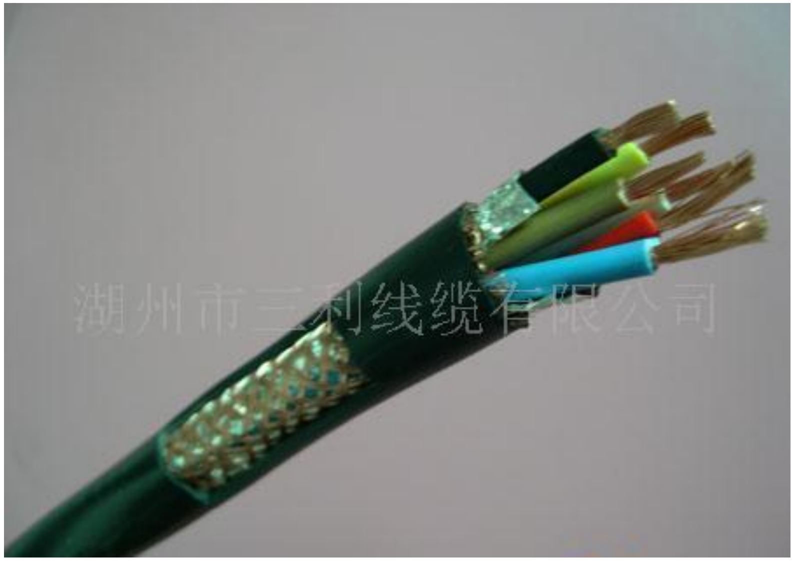
（2）屏蔽腔内电场

结论：接地空腔导体将使外部空间不受空腔内的电场影响。

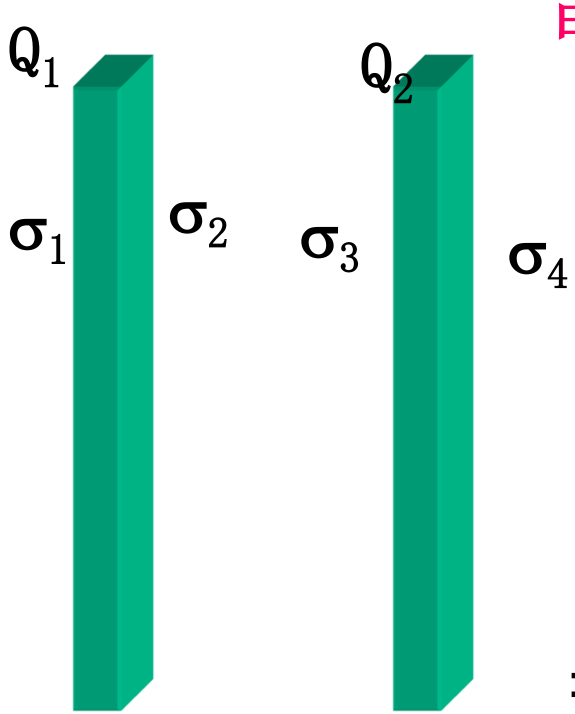
——接地导体电势为零。



静电屏蔽的应用



例. 二平行等大的导体板，面积S的线度比板的厚度、两板间的距离大很多，两板分别带电Q_1、Q_2，求两板各表面的电荷分布。



电荷守恒：$\sigma_1 S + \sigma_2 S = Q_1 = q_1 + q_2$

$$\sigma_3 S + \sigma_2 S = Q_2 = q_3 + q_4$$

静电平衡条件：

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0} = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_1 + Q_2}{2S} \qquad \sigma_2 = -\sigma_3 = \frac{Q_1 - Q_2}{2S}$$

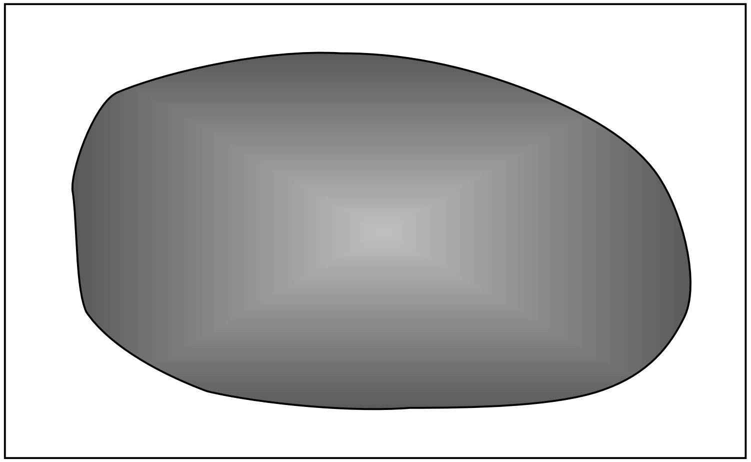
$$\Rightarrow \begin{cases} q_1 = q_4 = \dfrac{Q_1 + Q_2}{2} \\ q_2 = -q_3 = \dfrac{Q_1 - Q_2}{2} \end{cases}$$

当 $Q_1 = Q_2$ 时，$q_1 = q_4 = Q$，$q_2 = -q_3 = 0$

当 $Q_1 = -Q_2$ 时，$q_1 = q_4 = 0$，$q_2 = -q_3 = Q$

三、孤立导体的电容

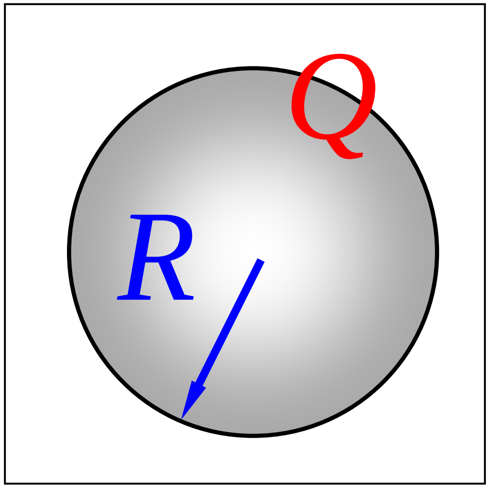
$$\boxed{C=\frac{Q}{U}}$$



单位：法拉（F）

$$1\text{F}=1\text{C/V}\qquad 1\text{F}=10^{6}\,\mu\text{F}=10^{12}\,\text{pF}$$

例如：孤立的导体球的电容



$$C=\frac{Q}{U}=\frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}=4\pi\varepsilon_0 R$$

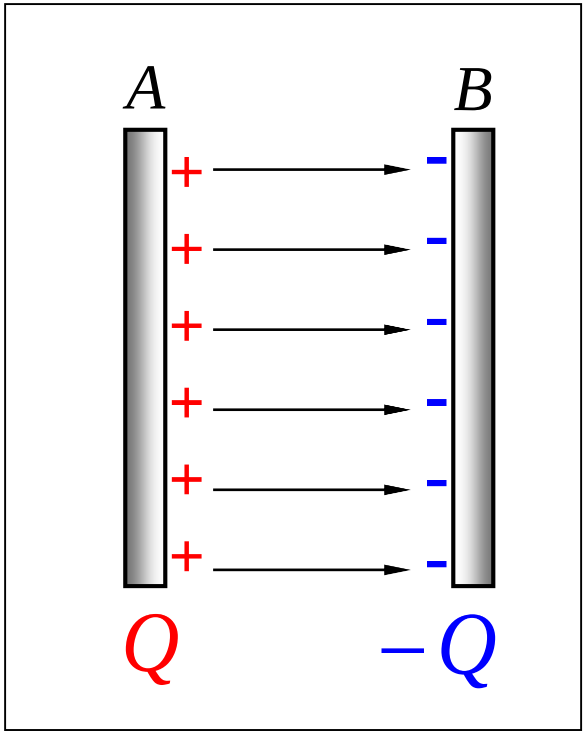
- 若是地球大小，$R=6.4\times10^{6}\,\text{m}$，则

$$C\approx 7\times10^{-4}\,\text{F}$$ ——很小！

四、电容器

电容器由两个导体极板构成，串接在电路中，彼此带有等量异号的电荷。

以 —||— 符号表示。



电容器的电容

$$C=\frac{Q}{U_A-U_B}=\frac{Q}{\Delta U}$$

$$\Delta U=\int_A^B \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

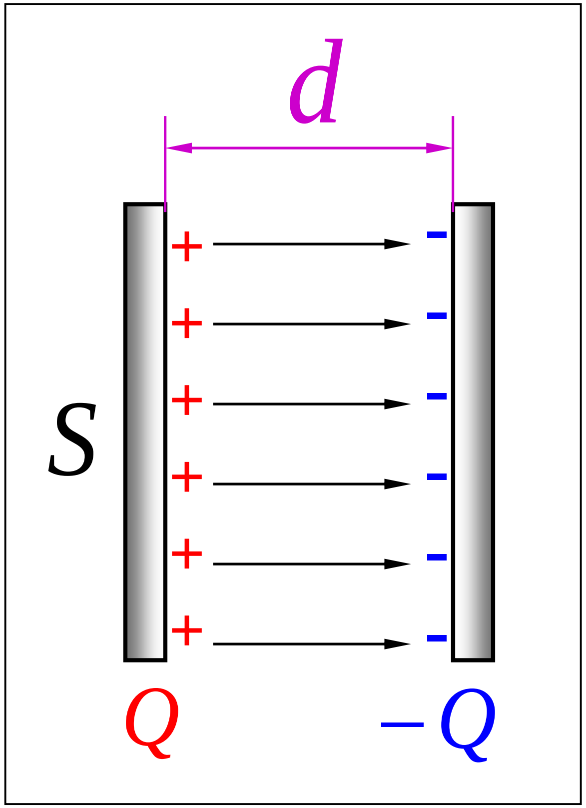
电容器电容的大小仅与导体的形状、相对位置、其间的电介质有关。与所带电荷量无关。

五、电容器电容的计算

1. 平板电容器

两带电平板间的电场强度

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$



两带电平板间的电势差

$$U = Ed = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

平板电容器电容

$$\boxed{C = \frac{Q}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}}$$

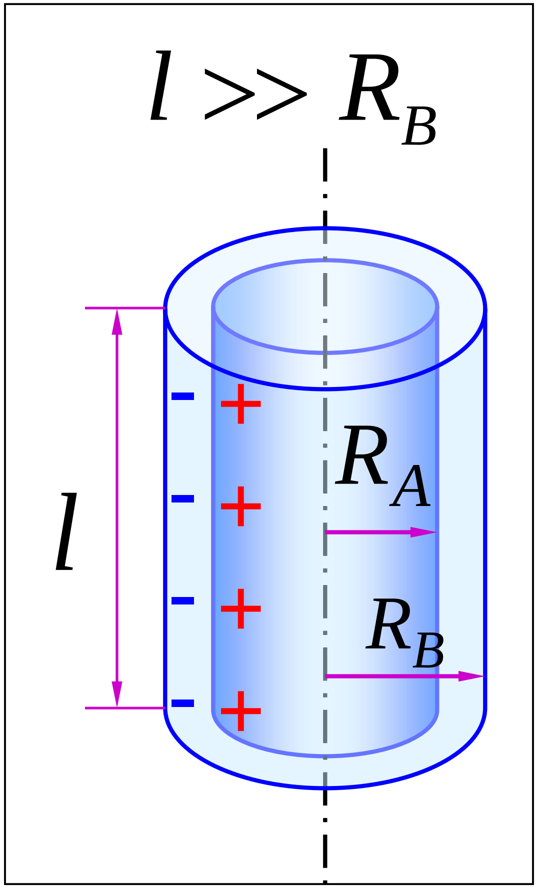
2. 圆柱形电容器

设两导体圆柱面单位长度上分别带电 $\pm\lambda$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r},\quad (R_A<r<R_B)$$

$$\Delta U=\int_{R_A}^{R_B}\frac{\lambda\mathrm{d}r}{2\pi\varepsilon_0 r}=\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 l}\ln\frac{R_B}{R_A}$$

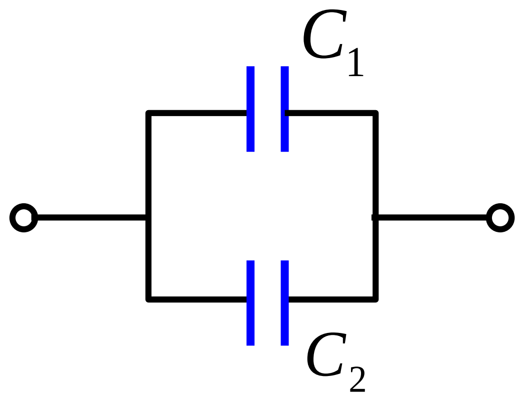
$$\boxed{C=\frac{Q}{\Delta U}=\left(2\pi\varepsilon_0 l\right)\Big/\ln\frac{R_B}{R_A}}$$



六、电容器的串联和并联

1.电容器的并联

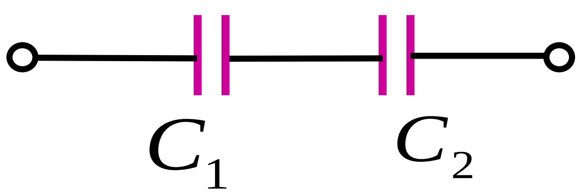
$$C=\sum_{i=1}^{n}C_i$$



$$C=C_1+C_2$$

2.电容器的串联

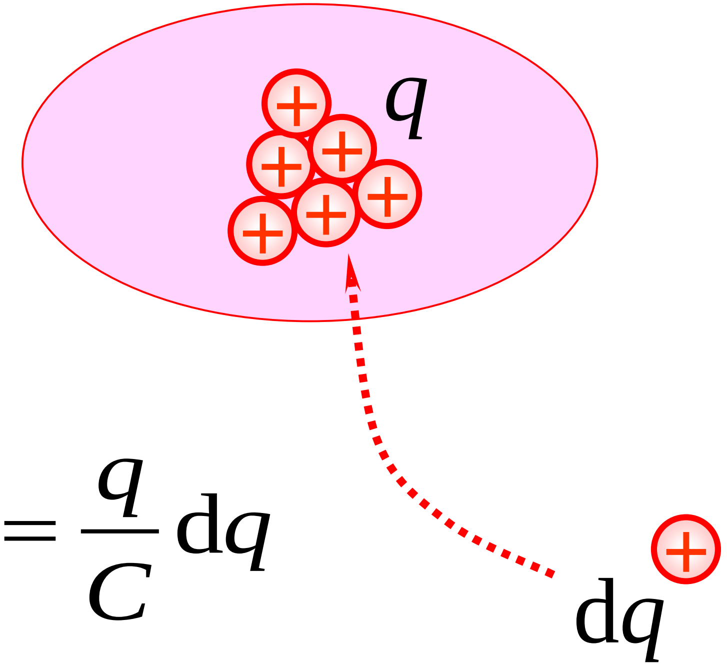
$$\frac{1}{C}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{C_i}$$



$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}$$

§ 7 静电场的能量

一、孤立导体的静电能



$$U_\infty = 0$$

则外力克服静电场力做功为：

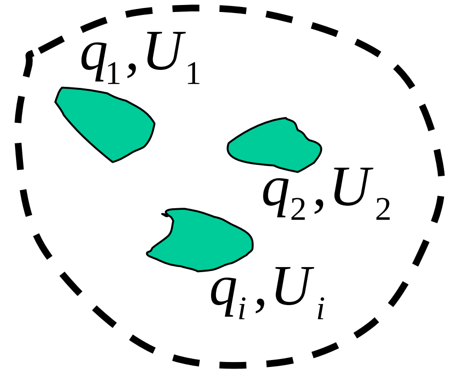
$$\mathrm{d}A = (U - U_\infty)\,\mathrm{d}q = U\mathrm{d}q = \frac{q}{C}\mathrm{d}q$$

$$A = \frac{1}{C}\int_0^Q q\mathrm{d}q = \frac{Q^2}{2C}$$

外力做功转化为静电场储存的能量：

静电能： $$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}QU = \frac{1}{2}CU^2$$

二、导体组的静电能

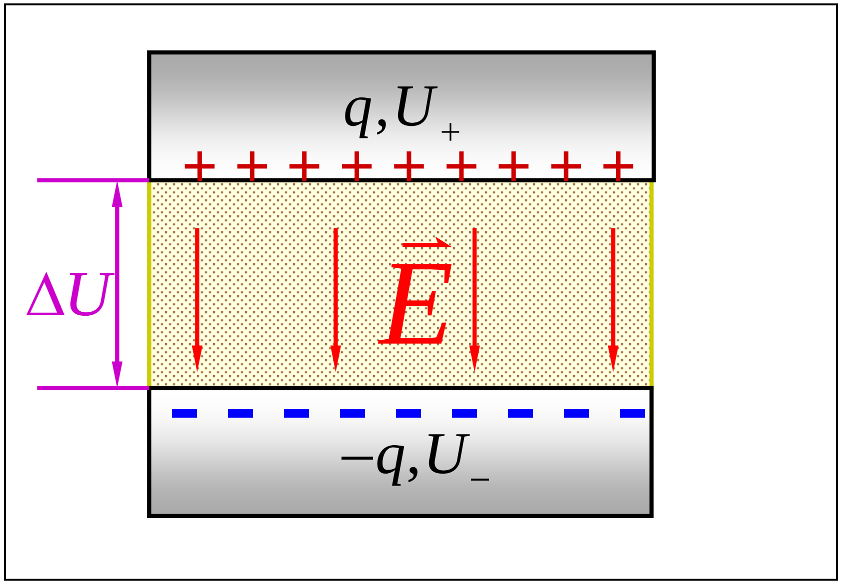


带电导体组 $i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, N$

$$W_e = \sum_{i=1}^{N} W_{ei} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i U_i$$

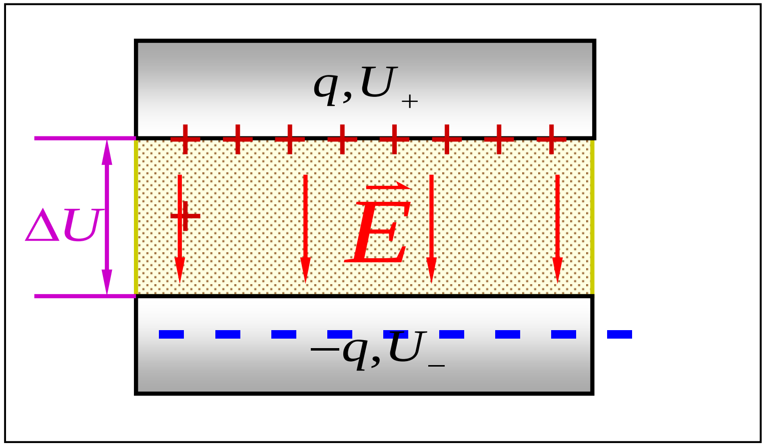
电容器的电能

$$W_e = \frac{1}{2}\left(qU_+ + (-q)U_-\right)$$
$$= \frac{1}{2}q\left(U_+ - U_-\right)$$
$$= \frac{1}{2}q\Delta U$$



三、静电场的能量密度

以平板电容器为例：



$$W_e = \frac{1}{2} q \Delta U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 S d$$

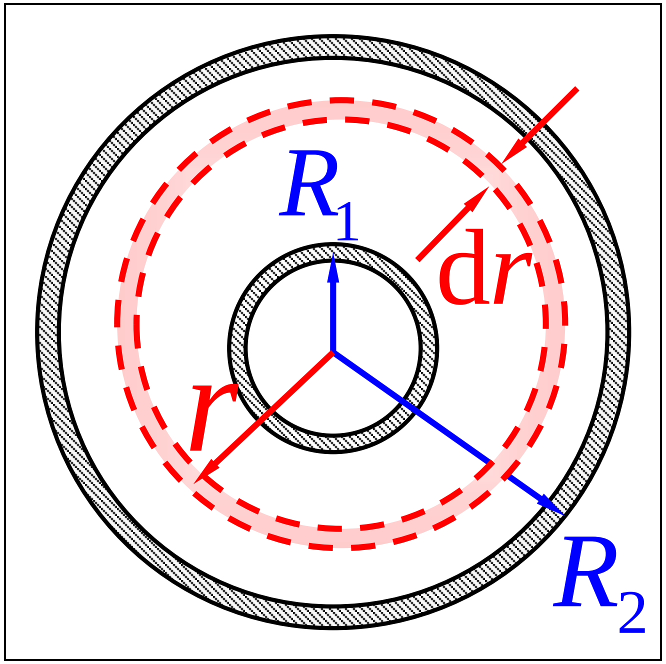
能量密度 $$\boxed{w_\mathrm{e} = \frac{W_e}{Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2}$$

电场空间所存储的能量

$$\boxed{W_e = \int_V w_\mathrm{e} \mathrm{d}V = \int_V \frac{1}{2} \varepsilon E^2 \mathrm{d}V}$$

例1　如图所示，球形电容器的内、外半径分别为 R_1 和 R_2，所带电荷为 $\pm Q$。问此电容器贮存的电场能量为多少？

解：$\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\vec{r}_0 \quad (R_1 > r > R_2)$



$$\mathrm{d}V = 4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$w_\mathrm{e} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0 r^4}$$

$$\mathrm{d}W_\mathrm{e} = w_\mathrm{e}\mathrm{d}V = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}r$$

$$W_e = \int \mathrm{d}W_e = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mathrm{d}r}{r^2}$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\dfrac{R_2R_1}{R_2-R_1}}$$

讨论： $$W_e = \frac{Q^2}{2\ C}$$

$$C = 4\pi\ \varepsilon\frac{R_2R_1}{R_2-R_1}$$

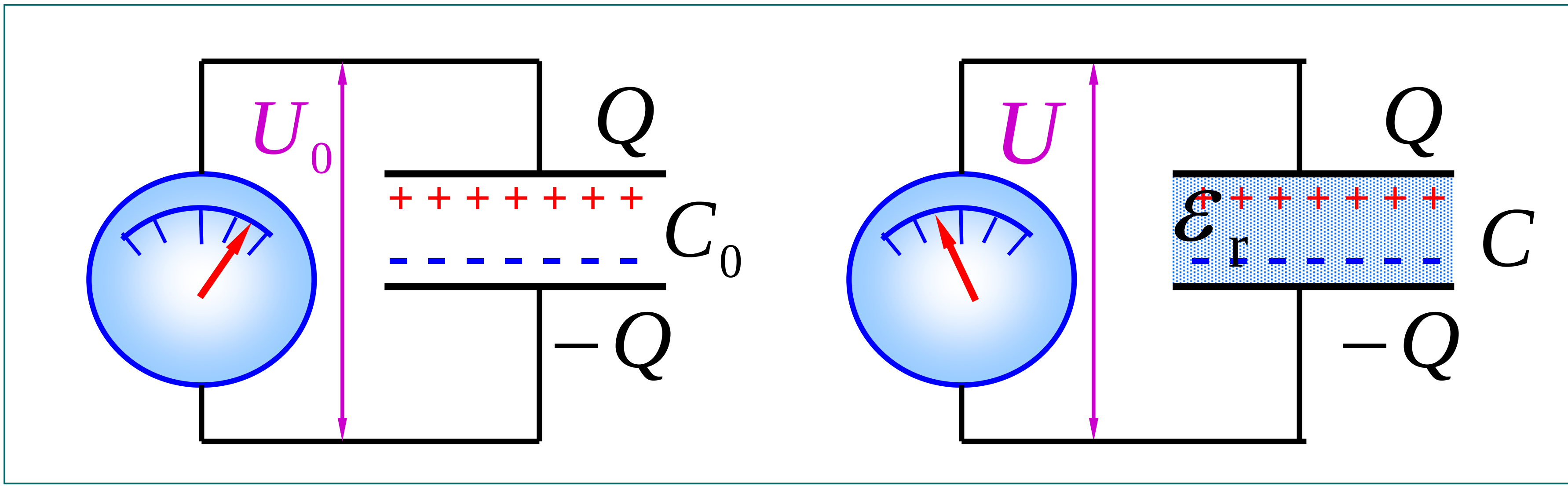
——球形电容器电容

§ 6 电介质对电场的影响

少学时

电介质——绝缘体——”不导电”的物质

一、电介质对电容的影响



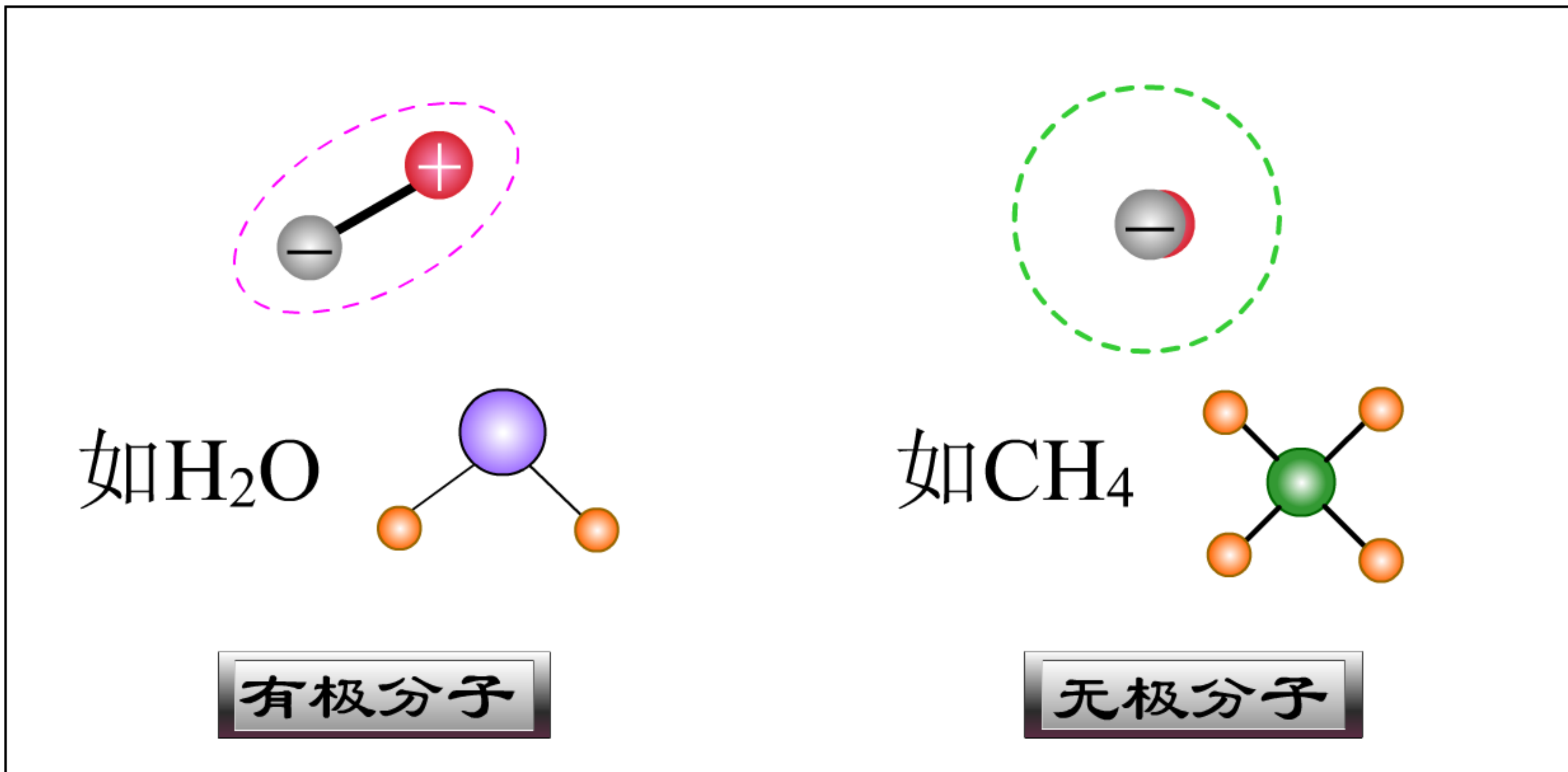
$$U = \frac{1}{\varepsilon_r} U_0 \qquad E = \frac{E_0}{\varepsilon_r} \qquad \boxed{C = \varepsilon_r C_0}$$

相对介电常数 $\varepsilon_r \geq 1$　　介电常数 $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$

二、电介质的极化

无极分子电介质：（氢、甲烷、石蜡等）

有极分子电介质：（水、有机玻璃等）

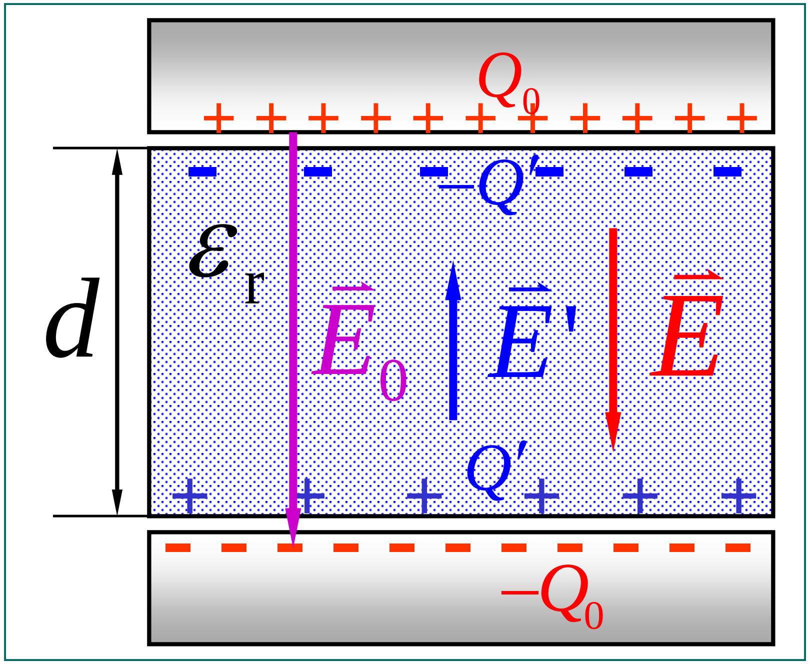


三、电介质中的电场强度

$\vec{E}_0$ ——外电场的电场强度

$\vec{E}'$ ——极化电场的电场强度

$\vec{E}$ ——总电场的电场强度



$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$$

$$E = E_0 - E' = \frac{E_0}{\varepsilon_r}$$

$$E' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} E_0$$

Q_0：导体上的自由电荷

Q'：电介质中的极化电荷

$$\boxed{E_0 = \sigma_0 / \varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = E_0 / \varepsilon_r = \sigma_0 / \varepsilon_0 \varepsilon_r}$$

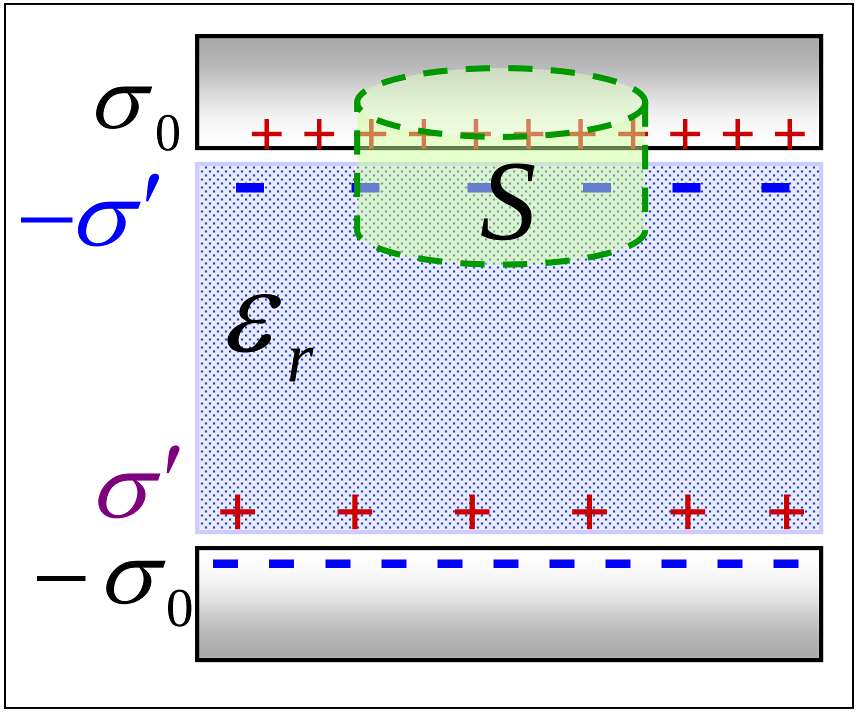
$$\boxed{Q' = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r} Q_0}$$

四、有介质时的高斯定理

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}(Q_0 - Q')$$

$$= \frac{Q_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r}$$

$$\oint_S \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}\cdot d\vec{S} = Q_0$$



定义：电位移矢量

$$\vec{D} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E} = \varepsilon\vec{E}$$

单位：C m^{-2}

有介质时的高斯定理：

$$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_0 = \sum_i Q_{0i}$$