大学物理习题课

——力学部分

一、质点运动学

二、质点动力学

三、刚体力学

一、质点运动学

质点的运动

运动的绝对性、相对性，选择参考系，建立坐标系，选择计时零点

描述运动的物理量

位矢：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

速度：$\vec{v} = \mathrm{d}\vec{r} / \mathrm{d}t$

加速度：$\vec{a} = \mathrm{d}\vec{v} / \mathrm{d}t$

角位移：$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

角速度：$\omega = \mathrm{d}\theta / \mathrm{d}t$

角加速度：$\beta = \mathrm{d}\omega / \mathrm{d}t$

线量与角量的关系

$v = R\omega \quad a_t = R\beta \quad a_n = R\omega^2$

描述运动的方法

解析法

运动函数：$\vec{r} = \vec{r}(t)$

直角坐标系中：

$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

微分 积分

速度：$\vec{v} = \vec{v}(t)$

微分 积分

加速度：$\vec{a} = \vec{a}(t)$

质点运动问题的求解

注意：矢量性、瞬时性、相对性

几种常见的运动

加速度：$\vec{a} = \vec{a}(t)$

匀速直线运动
$\vec{a} = 0$
$(a_\tau = 0)$
$(a_n = 0)$

匀变速直线运动
$\vec{a} \neq 0$
$(a_\tau = \text{const})$
$(a_n = 0)$

匀速圆周运动
$\vec{a} \neq 0$
$(a_\tau = 0)$
$(a_n = v^2 / R \neq 0)$

变速圆周运动
$\vec{a} \neq 0$
$(a_\tau = \mathrm{d}v / \mathrm{d}t \neq 0)$
$(a_n = v^2 / R \neq 0)$

曲线运动
$\vec{a} \neq 0$
$(a_\tau = \mathrm{d}v / \mathrm{d}t)$
$(a_n = v^2 / \rho)$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t$$
$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \tfrac{1}{2}\vec{a}t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a(r - r_0)$$

$\Longleftrightarrow$

匀变速圆周运动
$$\omega = \omega_0 + \beta t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\beta t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$$

斜抛运动
$$x = (v_0 \cos\theta)t$$
$$y = (v_0 \sin\theta)t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

二. 质点动力学

1. 牛顿运动定律

牛顿运动定律

第一定律

惯性

力

第二定律

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t},\ \vec{p} = m\vec{v}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

第三定律

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

解题步骤

关键是加速度

① 认物体
② 看运动
③ 分析力
④ 列方程
⑤ 求解、讨论

质点运动微分方程

$$\vec{F} = \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a}$$

$$= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

直角坐标系分量式

$$\begin{cases} F_x = ma_x \\ F_y = ma_y \\ F_z = ma_z \end{cases}$$

$$F_n = ma_n$$

概括为：“四个什么”
什么物体，在什么力作用下，
对什么参考系，作什么运动。

二. 质点动力学

2. 力对物体的累积效应

力的空间累积效应

力的功

$$dA = \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

动能

$$E_k = \frac{1}{2} m v^2$$

保守力作功

$$\oint_L \vec{F}_{保} \cdot d\vec{r} = 0$$

势能

机械能

质点的动能定理

$$A = E_{kB} - E_{kA} = = \Delta E_k$$

质点系的动能定理

$$A_{总} = E_{kB} - E_{kA} = = \Delta E_k$$

质点系的功能定理

$$A_{外力} + A_{非保守内} = E - E_0 = \Delta E$$

系统机械能守恒

$$E_k + E_p = E_{k0} + E_{p0}$$

条件：$A_{外力} + A_{非保守内} = 0$

力的时间累积效应

力的冲量

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt$$

动量

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

质点的动量定理

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

质点系动量定理

$$\vec{I} = \int_0^t \vec{F} dt = \vec{p}_2 - \vec{p}_1$$

系统动量守恒

$$\sum_i m_i \vec{v}_i = \sum_i m_i \vec{v}_{i0}$$

条件：$\sum_i \vec{F}_i = 0$

三. 刚体力学

刚体的运动

- 刚体的平动
- 刚体的定轴转动
- 平动+转动

刚体的定轴转动

定轴转动运动学

- 角位置 $\theta(t)$
- 角位移 $\Delta\theta$
- 角速度 $\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$
- 角加速度 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt}$
- 匀变速转动
  $\omega = \omega_0 + \beta t$
  $\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
  $\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$
- 线量与角量的关系
  $v = R\omega \quad a_t = R\beta \quad a_n = R\omega^2$

定轴转动动力学

- 力矩 $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$
- 转动惯量 $J = \int r^2 \, dm$
- 转动定理 $M = J\beta$

定轴转动功能关系

- 力矩的功 $A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta$
- 转动动能 $E_k = \frac{1}{2} J\omega^2$
- 动能定理
  $A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega d\omega$
  $= \frac{1}{2} J\omega_2^2 - \frac{1}{2} J\omega_1^2$

角动量定理 角动量守恒

- 冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt$
- 角动量 $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$
  $= J\vec{\omega}$
- 角动量定理
  $\int_{t_1}^{t_2} \vec{M} dt = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$
  $= J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1$
- 角动量守恒
  条件：$\vec{M} = 0$
  $J\vec{\omega}$=衡量

质点运动与刚体定轴转动的对照

质点运动		刚体定轴转动	
速度 加速度	$\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$	角速度 角加速度	$\omega=\frac{d\theta}{dt}$ $\alpha=\frac{d\omega}{dt}=\frac{d^2\theta}{dt^2}$
力	$\vec{F}$	力矩	$\vec{M}$
质量	m	转动惯量	J
动量	$\vec{P}=m\vec{v}$	角动量	$L=J\omega$
运动定律	$\vec{F}=m\vec{a}$	转动定律	$M=J\alpha$
动量定理	$d\vec{p}=\vec{F}dt$ $\int\vec{F}dt=\vec{p}-\vec{p}_0$	角动量定理	$dL=Mdt$ $\int Mdt=J_2\omega_2-J_1\omega_1$
功	$dA=\vec{F}\cdot d\vec{r}$	力矩的功	$dA=Md\theta$
功率	$P=\vec{F}\cdot\vec{v}$	力矩的功率	$P=M\omega$
动能	$E_K=\frac{1}{2}mv^2$	转动动能	$E_K=\frac{1}{2}J\omega^2$
动能定理	$\int\vec{F}\cdot d\vec{r}=\frac{1}{2}mv^2-\frac{1}{2}mv_0^2$	动能定理	$\int Md\theta=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2$

动量守恒定律 $\mathbf{F}^{ex}=0$

$$\sum m_i v_i = \text{恒量}$$

角动量守恒定律：$\mathbf{M}^{ex}=0$

$$\sum J\omega = \text{恒量}$$

机械能守恒定律

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非}} = 0$$

$$E_k + E_p = \text{恒量}$$

机械能守恒定律

$$A_{\text{外}} + A_{\text{非}} = 0$$

$$E_{k\text{转}} + E_{k\text{平}} + E_p = \text{恒量}$$

题型以及例题

刚体转动定律以及牛顿第二运动定律的应用

刚体定轴转动的动能定律、机械能守恒以及角动量守恒的应用

第1题. 判断下列说法的正误:

（1）不受外力作用的系统，其动量和动能 必然同时守恒。

【答】 错。 （若$W_{内}\neq 0$，则 E_k 不守恒）

（2）内力都是保守力的系统，当它所受的合外力为零时，它的机械能必然守恒。

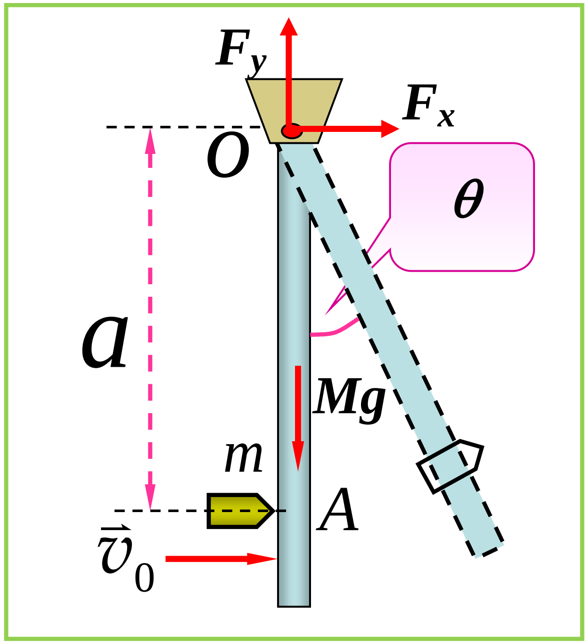
【答】 错。

（合外力为零时，外力功的和不一定为零）

（3）只有保守内力的系统，它的动量和机械能 必然都守恒。

【答】 对。（只有$F_{保内}$，即$W_{外}=0$，$W_{内非}=0$）

例1 匀质杆：长为l、质量M，可绕水平光滑固定轴O转动，开始时杆竖直下垂。质量为m的子弹以水平速度υ_o射入杆上的A点，$a=2l/3$，并嵌在杆中，求:(1)子弹射入后瞬间杆的角速度；(2)子弹射入杆的过程中（设经历时间为Δt），杆的上端受轴的水平和竖直分力各多大？（3）若要使杆的上端不受水平力作用，子弹的入射位置应在何处（该位置称为打击中心）；(4)杆能转过的最大角度θ。



分析 (1) 竖直位置碰撞：杆+子弹。

动量不守恒，机械能不守恒；

外力：重力、轴O处的力，

——均不对转轴产生力矩；角动量守恒。

(2) 杆+子弹以碰撞获得的共同角速度上摆，

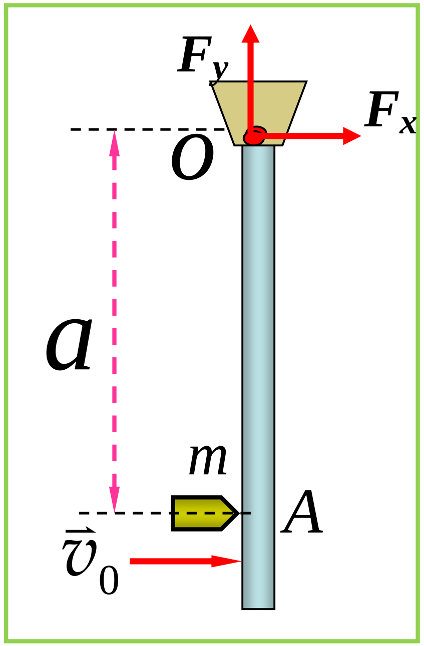
——机械能守恒。

求:(1)子弹射入后瞬间杆的角速度;

解 (1) 杆+子弹：竖直位置碰撞，角动量守恒：

$$m\upsilon_o \frac{2l}{3} = [\frac{1}{3}Ml^2 + m(\frac{2l}{3})^2]\omega$$

解得 $$\omega = \frac{6m\upsilon_o}{l(3M+4m)}$$



(2) 子弹射入杆的过程中（设经历时间为Δt），杆的上端受轴的水平和竖直分力分别为 F_x ,F_y

水平方向上满足动量定理

$$F_x\Delta t = P_2 - P_1 = M\frac{L\omega}{2} + md\omega - mv_0$$

得杆的上端受轴的水平分力为 $F_x = \left(M\frac{L\omega}{2} + md\omega - mv_0 \right) \Big/ \Delta t$

竖直方向忽略子弹的重量，由动量定理得

$$(F_y - M\omega^2\frac{L}{2} - Mg)\Delta t = 0$$

得杆的上端受轴的竖直分力为 $F_y = M\omega^2\frac{L}{2} + Mg$

（3）若要使杆的上端不受水平力作用，子弹的入射位置应在何处（该位置称为打击中心）？

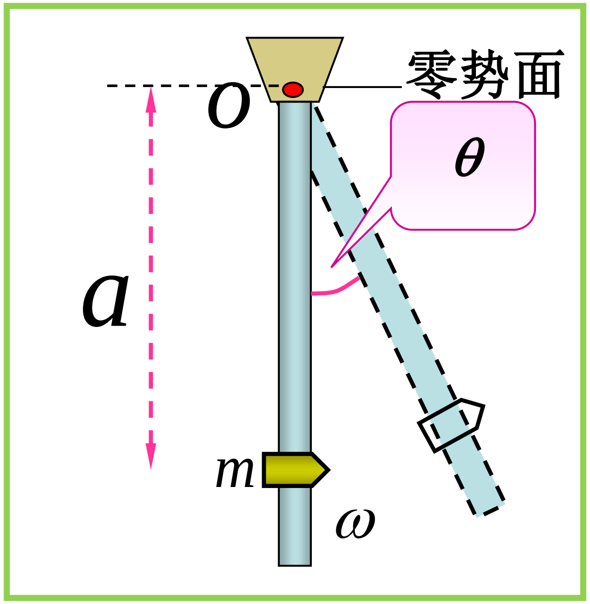
若要使杆的上端不受水平力作用，子弹的入射位置应满足

$$M\frac{L\omega}{2} + md\omega - mv_0 = 0$$

得子弹的入射位置 $d = \frac{2}{3}L$

(4) 杆在转动过程中，(杆+子弹+地球) 机械能守恒：

$$\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3}Ml^2+m\left(\frac{2l}{3}\right)^2\right]\omega^2-Mg\frac{l}{2}-mg\frac{2l}{3}=-Mg\frac{l}{2}\cos\theta-mg\frac{2l}{3}\cos\theta$$



由前 $\omega=\dfrac{6m\upsilon_o}{l(3M+4m)}$

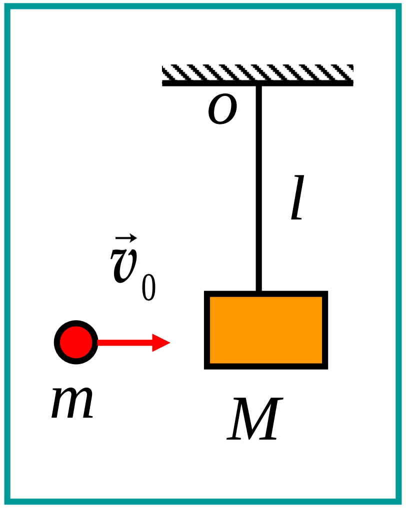
由此得：

$$\cos\theta=1-\frac{\left(m\upsilon_o\frac{2l}{3}\right)^2}{2\left[\frac{1}{3}Ml^2+m\left(\frac{2l}{3}\right)^2\right]\left(Mg\frac{l}{2}+mg\frac{2l}{3}\right)}$$

$E_k=\dfrac{1}{2}J\omega^2$—转动动能 $E_k=\dfrac{1}{2}m\upsilon^2$—平动动能

注意　区分两类冲击摆

(1)



质点 ⟷ 质点　柔绳无切向力

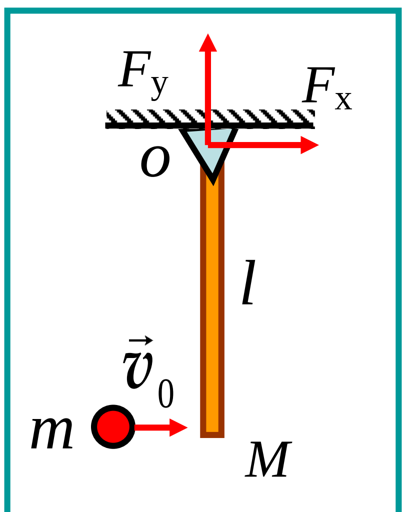
- 水平方向：$F_x = 0$，p_x 守恒

$$m v_0 = (m + M) v$$

- 对 o 点：$\vec{M} = 0$，$\vec{L}$ 守恒

$$m v_0 l = (m + M) v l$$

(2)



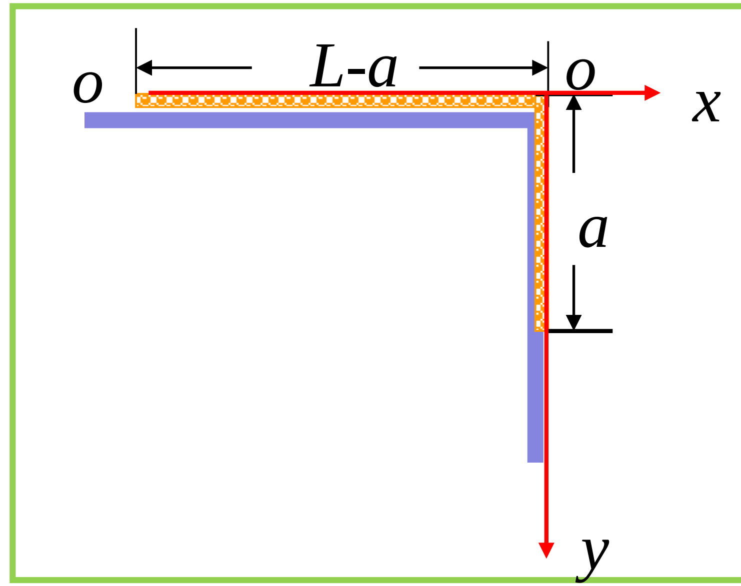
质点 ⟷ 定轴刚体（不能简化为质点）

轴作用力不能忽略，动量不守恒，但对 o 轴合力矩为零，角动量守恒

$$mv_0 l = (ml^2 + \frac{1}{3}Ml^2) \cdot \omega$$

$$v = \omega l$$

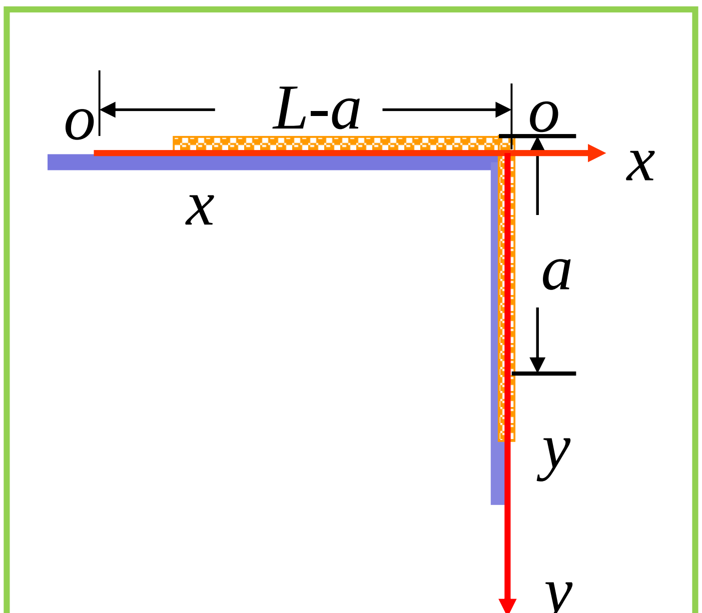
例 长为 L ，质量为 m 的匀质链条，置于水平桌面上，链条与桌面之间的摩擦系数为μ，下垂部分的长度为 a 。链条由静止开始运动，求在链条滑离桌面的过程中，重力和摩擦力所作的功和链条离开桌面时的速率。



解: （1）重力所作的功:

链条下端在y时，重力所作元功

$$dA_p = \frac{m}{L} ygdy$$



链条下端由位置 a 滑至 L，重力所作的功为

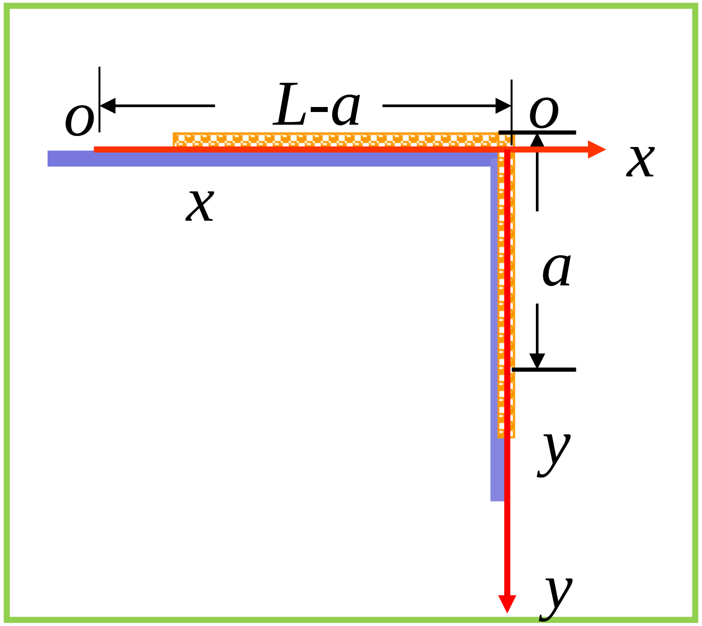
$$A_p = \int_a^L \frac{m}{L} ygdy = \frac{mg}{2L} y^2 \Big|_a^L$$

$$= \frac{1}{2L} mg(L^2 - a^2)$$

求重力和摩擦力所作的功和链条离开桌面时的速率。

（2）链条左端在 **x** 时，摩擦力所作元功

$$dA_f = -\mu \frac{m}{L}(L-a-x)g\,dx$$



链条左端由坐标原点**o** 滑至**(L-a)**处，摩擦力所作的功为

$$A_f = \int_0^{L-a} -\frac{\mu m g}{L}(L-a-x)\,dx$$

$$= -\frac{\mu m g}{L}\left[(L-a)x - \frac{1}{2}x^2\right]\Bigg|_0^{L-a}$$

$$= -\frac{\mu m g}{2L}(L-a)^2$$

$$A_p = \frac{1}{2L} mg(L^2 - a^2) \qquad A_f = -\frac{\mu mg}{2L}(L-a)^2$$

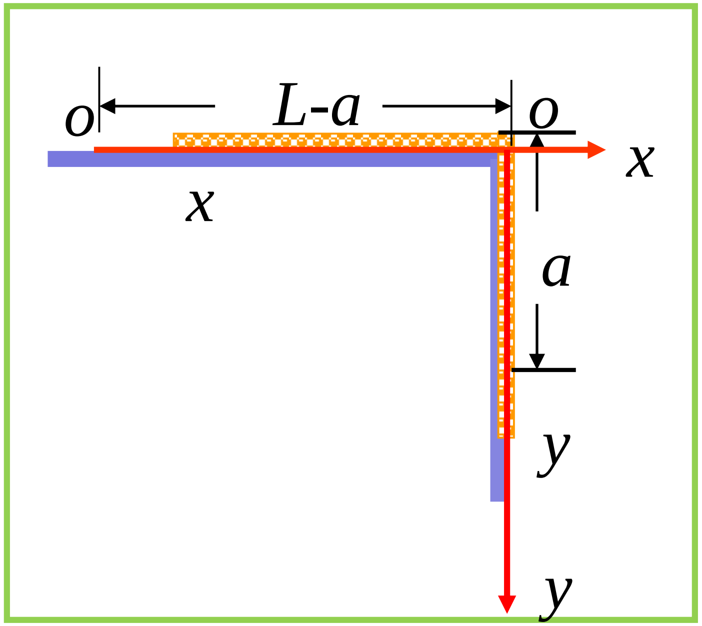
(3) 根据动能定理

$$A_p + A_f = \frac{1}{2}mv^2 - 0$$

$$\frac{mg}{2L}(L^2 - a^2) - \frac{\mu mg}{2L}(L-a)^2 = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v^2 = \frac{g}{L}\left[(L^2 - a^2) - \mu(L-a)^2\right]$$

$$v = \sqrt{\frac{g}{L}\left((L^2 - a^2) - \mu(L-a)^2\right)}$$



例. 如图所示，一根均质柔绳，单位长度的质量为λ，盘绕在一张光滑的水平桌子上。设在$t=0$时，$y=0$，$v=0$。

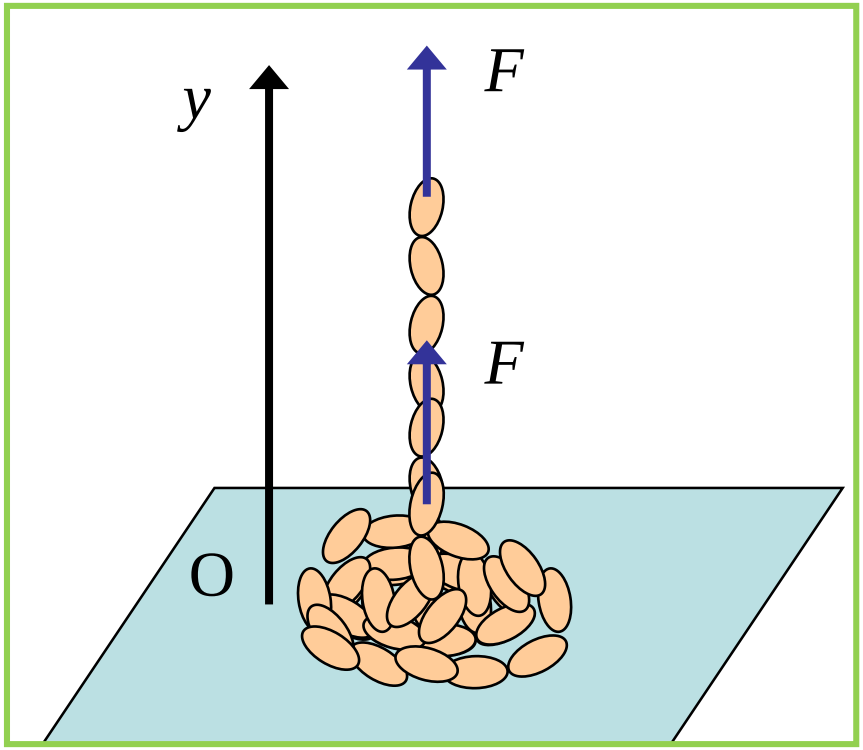
(1). 以恒定的加速度a，竖直向上提绳。当提起的高度为y时，作用在绳端的力为多少?

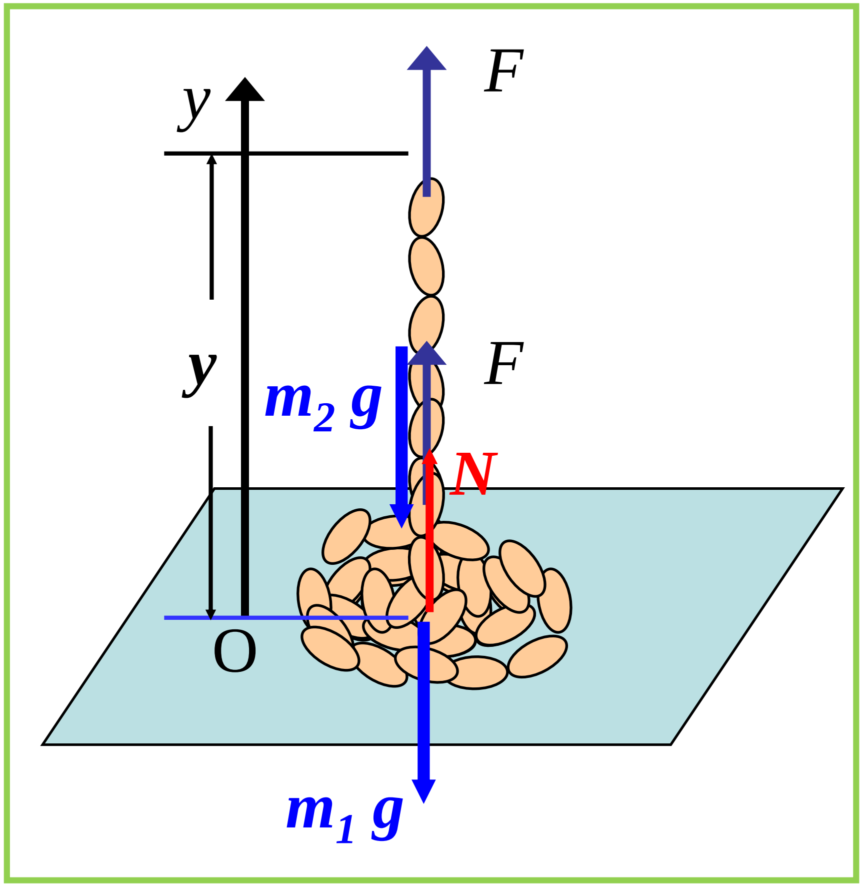
(2). 以一恒定的速 率v竖直向上提绳子时，当提起高度为 y 时，作用在绳端的力又是多少?

(1) 已知：$t=0$时，$y=0$ $v=0$

$\vec{a}=\text{const}$ 求高度 y 时，$\vec{F}=?$

(2) $v=\text{const}$ 求高度 y 时，$\vec{F}=?$





解：以链条整体作为研究 对象。以地面为参照系建立坐标Oy

分析：因力等于动量的变化

链条动量的变化只是被拉起来的部分，在桌面上的部分动量总是为零。故有：(N与m_1g 抵消)

$$\frac{\mathrm{d}(m_2 v)}{\mathrm{d}t} = F - \lambda y g \cdots (1)$$

$$\frac{\mathrm{d}(\lambda y v)}{\mathrm{d}t} = F - \lambda y g \cdots (2)$$

$$\therefore F = \lambda(yg + v^2 + ya) \cdots (3)$$

$$\therefore F = \lambda(yg + v^2 + ya) \cdots (3)$$

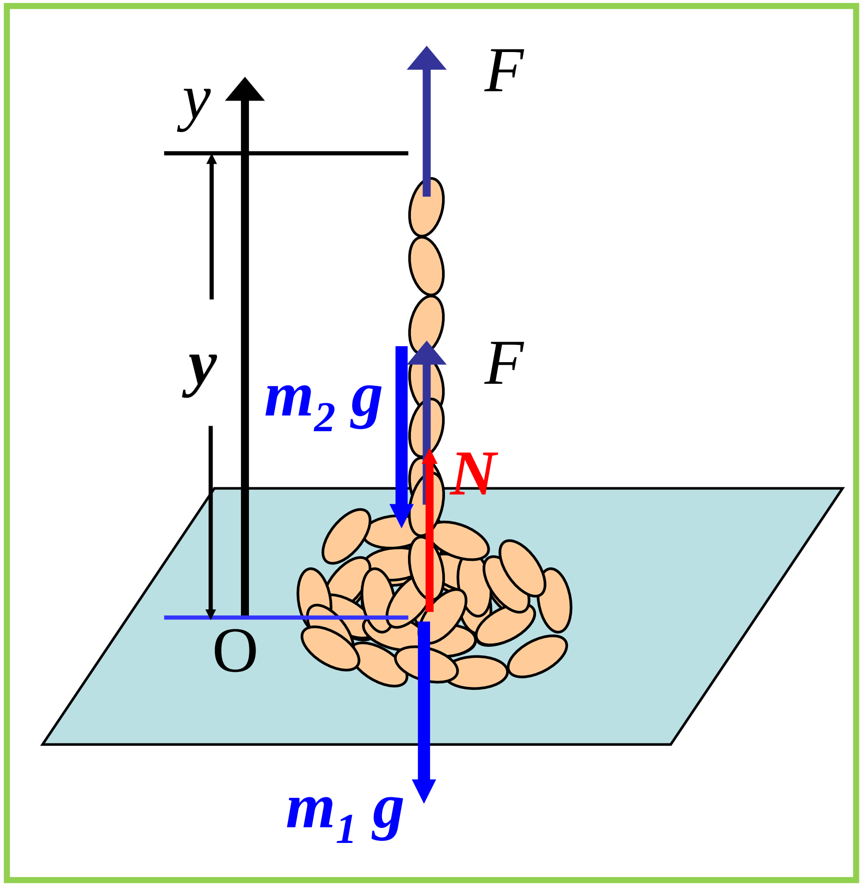
讨论：

(1) $a = const \quad v^2 = 2ay$

$$F = \lambda(g + 3a)y$$

(2) $v = const \quad a = o$

$$F = \lambda(yg + v^2)$$



解法二： 将绳子分为落地和未落地两部分，

分别受地面作用力 $\vec{f}_2$，$\vec{f}_1$

未落地部分长z， 下落速度 $v=\dfrac{dz}{dt}=-\sqrt{2g(l-z)}$

紧靠地面的质元 dm 与地面相碰, 动量由

v dm 变为零. 设该质元受到的支持力为 f_1,

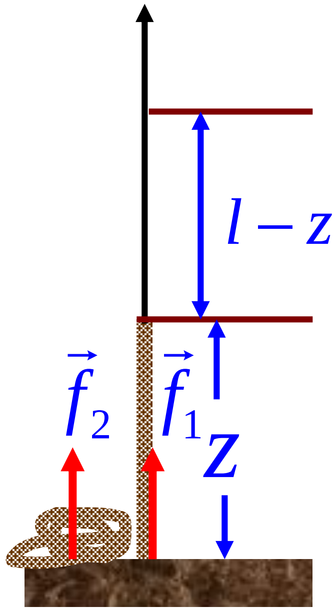
则根据质点的动量定理有:

$$\underline{(f_1-gdm)dt=0-(vdm)}$$

$$f_1=-v\frac{dm}{dt}=-v\left(-vdt\frac{m}{l}\right)\frac{1}{dt}=\frac{mv^2}{l}=2mg\left(1-\frac{z}{l}\right)$$

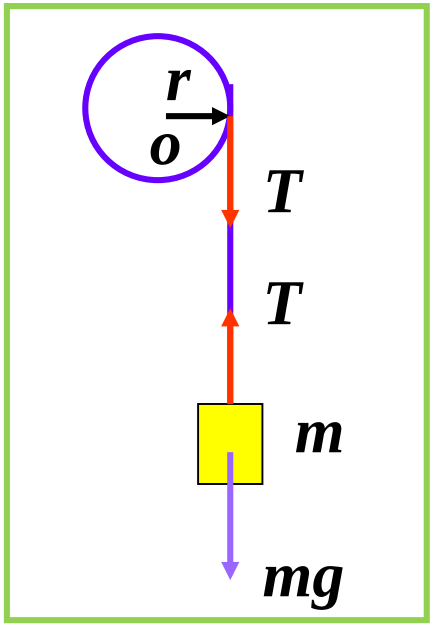
已落地部分所受到支持力为 $f_2=(l-z)\dfrac{m}{l}g$

$$f=f_1+f_2=3mg\left(1-\frac{z}{l}\right)$$



例 一质量为 m 的物体悬于一条轻绳的下端，绳的另一端绕在一轮轴的轴上，如图所示。轴水平且垂直于轮轴面，其半径为 r，整个装置加在光滑的固定轴承之上。当物体从静止释放后，在时间 t 内下降了一段距离 s 。试求整个轮轴的转动惯量.

解：对滑轮，滑轮所受力距，并根据转动定律



$$Tr = J\beta,$$

滑轮的转动惯量 $J = \dfrac{Tr}{\beta} \quad \cdots(1)$

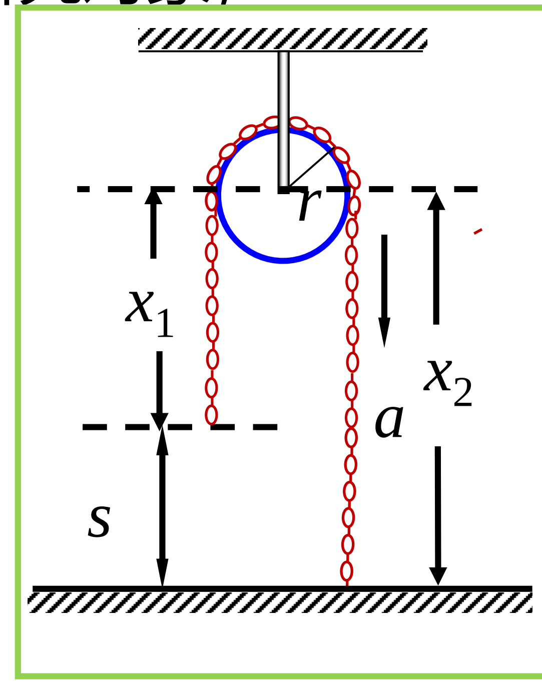
对重物： $mg - T = ma = m\beta r \cdots(2)$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\beta r t^2 \cdots(3)$$

由(1),(2),(3) 得 $J = mr^2 \cdot (\dfrac{t^2 g}{2s} - 1)$

例 质量为M的匀质圆盘，可绕通过盘中心且垂直于盘的固定光滑轴转动，绕过盘的边缘挂有质量为m，长为l的匀质柔软绳索。设绳与圆盘间无相对滑动，试求当圆盘两侧绳长之差为s时，绳的加速度的大小。

解：选长度为x_1 x_2的两段绳和绕着绳的盘为研究对象，设a为绳的加速度，β为盘的角加速度，r为盘的半径，ρ为绳的线密度，且绳与盘切点处的张力分别为T_1, T_2



$$\begin{cases} x_2\rho g - T_2 = x_2\rho a \\ T_1 - x_1\rho g = x_1\rho a \\ (T_2 - T_1)r = \left(\dfrac{M}{2} + \pi r\rho\right)r^2\alpha \\ a = \beta r \quad \rho = m/l \\ l = \pi r + x_1 + x_2 \\ s = x_2 - x_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad a = \frac{smg}{(m + M/2)l}$$

(解二）对右边绳： $(\rho\cdot\frac{l+s}{2})g-T_2=(\rho\cdot\frac{l+s}{2})a\cdots(1)$

对左边绳： $T_1-(\rho\cdot\frac{l-s}{2})g=(\rho\cdot\frac{l-s}{2})a\cdots(2)$

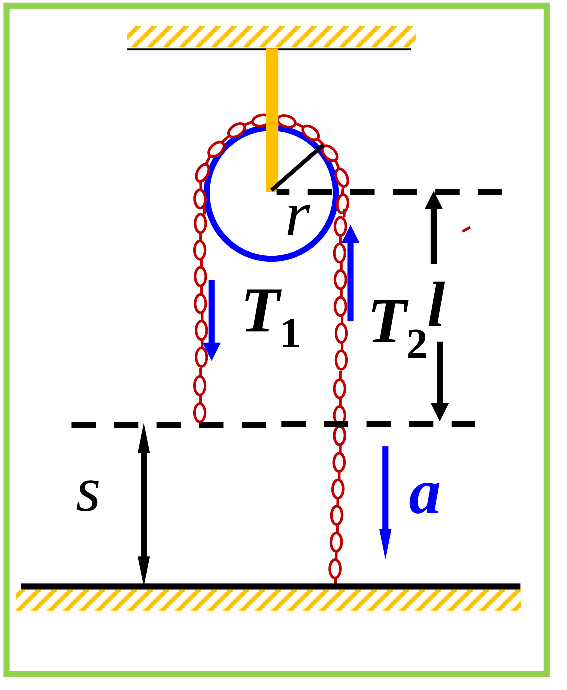
对滑轮： $T_2R-T_1R=\frac{1}{2}MR^2\cdot\frac{a}{R}\cdots(3)$

解方程组得

$$T_2=\rho\frac{l+s}{2}(g-a)$$

$$T_1=\rho\frac{l-s}{2}(g+a)$$

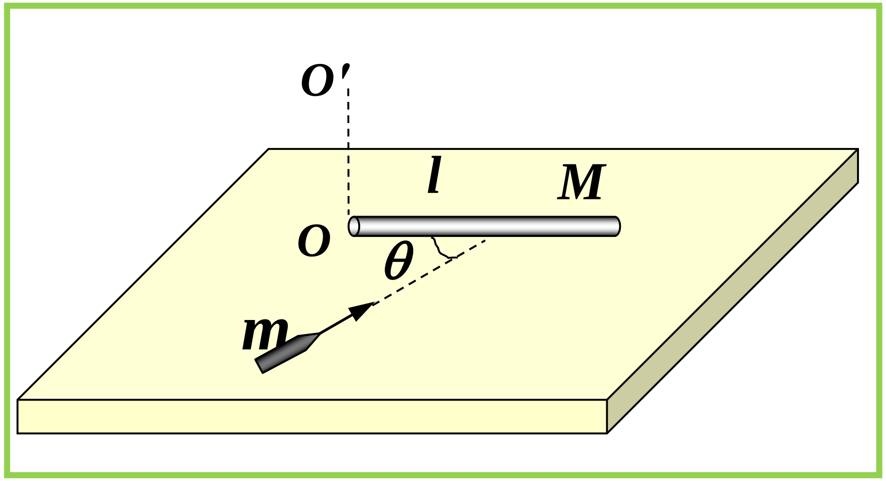
$$a=\frac{smg}{(m+M/2)l}$$



例 水平桌面上有一长l=1.0m，质量M=3.0kg的匀质细杆，细杆可绕通过端点O的竖直轴OO′转动，杆与桌面之间的摩擦系数μ=0.20。开始时杆静止，有一颗子弹质量m=20g，沿水平方向以v=400，且与杆成θ=30°的速度射入杆的中点并留在杆内。试求：（1）子弹射入后，细杆开始转动的角速度；（2）子弹射入后，细杆的角加速度；（3）细杆转动多大角度后停下来。

解 (1) 将子弹和细杆作为一个系统，由子弹击中细杆前后系统角动量守恒得

$$mv\frac{l}{2}\sin\theta + 0 = \left(\frac{1}{3}Ml^2 + m\frac{l}{4}^2\right)\omega_0$$



得细杆开始转动的角速度

$$\omega_0 = \frac{mv\frac{l}{2}\sin\theta}{\left(\frac{1}{3}Ml^2 + m\frac{l}{4}^2\right)} = 2.0\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$$

（2）子弹射入后，细杆的角加速度；

细杆受到的摩擦力矩为 $$K=\int_0^l \frac{Mgx\mu \mathrm{d}x}{l}+\frac{mgul}{2}=\frac{g\mu l}{2}(M+m)$$

根据刚体定轴转动定律 $$K=\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l^2}{4}\right)\beta$$

可求得细杆的角加速度为

$$\beta=\frac{\frac{g\mu l}{2}(M+m)}{\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l^2}{4}\right)}=3.0\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

(3) 设细杆转动θ后停下来，则

$$\theta=\frac{\omega_0^2}{2\beta}=0.67\,\mathrm{rad}$$

例 用绳系一小球使它在光滑的水平面上做匀速率圆周运动，其半径为 r_0 ，角速度为 ω_0 。现通过圆心处的小孔缓慢地往下拉绳使半径逐渐减小。求当半径缩为r时小球的角速度。

解：选取平面上绳穿过的小孔O为原点。

因为绳对小球的的拉力 沿绳指向小孔，则力 对 O 点的力矩：

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}=0$$

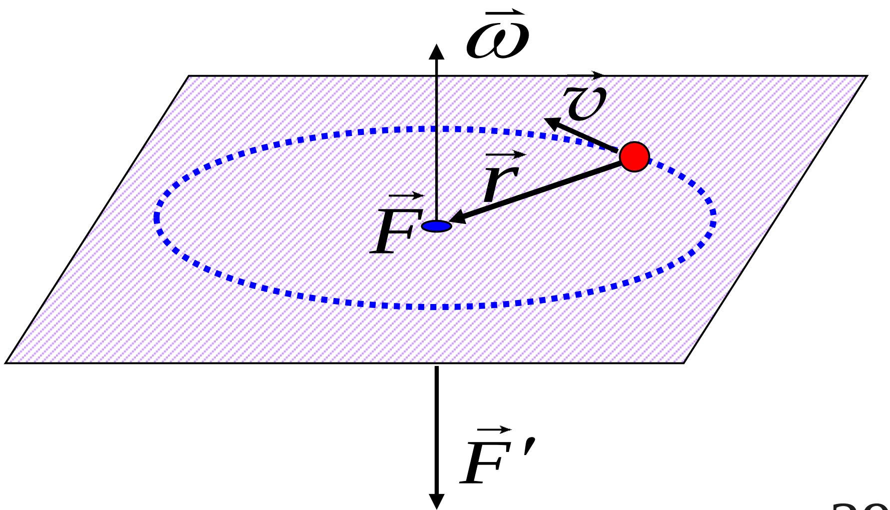
所以小球对 O 点的角动量守恒。

$$r_0 m v_0 = r m v$$

$$\because v = r\omega,\ \ v_0 = r_0\omega_0$$

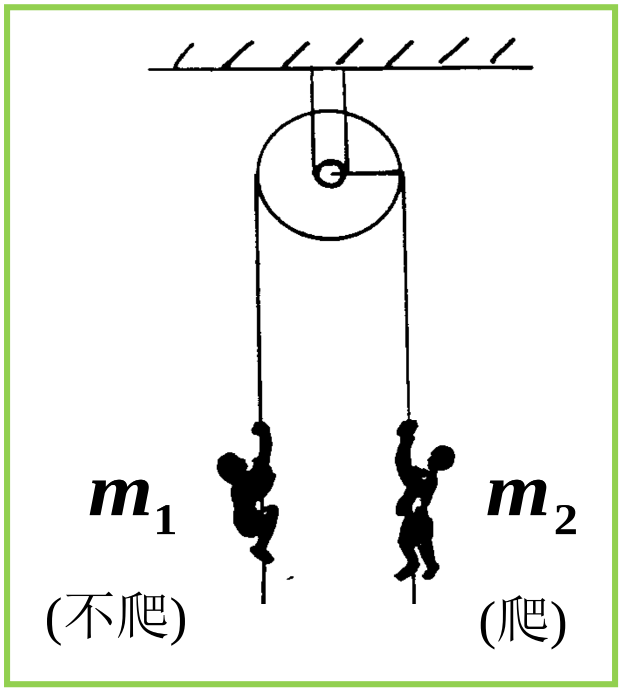
$$m r_0^{\ 2}\omega_0 = m r^2\omega$$

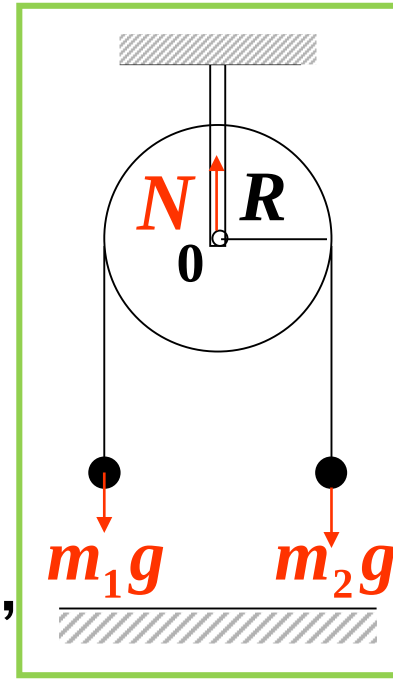
$$\therefore \omega = \frac{r_0^{\ 2}}{r^2}\omega_0$$



例3 两个同样重的小孩，各抓着跨过滑轮的轻绳的一端如图，他们起初都不动，然后右边的小孩用力向上爬绳，另一个小孩仍抓住绳子不动。忽略滑轮的质量和轴的摩擦。

问：哪一个小孩先到达滑轮？





解：设滑轮半径为R，两小孩的质量分别为m_1、m_2，

$m_1 = m_2$

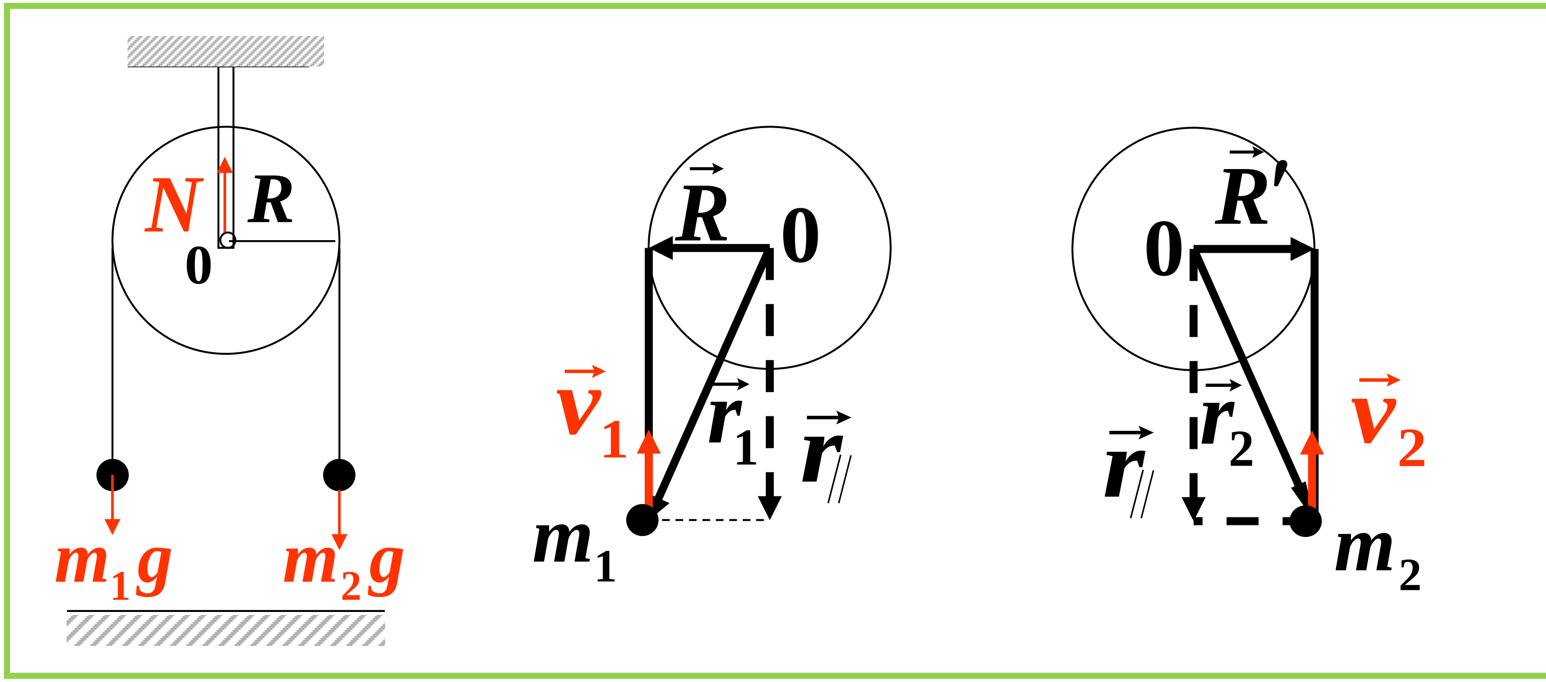
把小孩看成质点，以滑轮中心为“固定点”，

对“m_1+m_2+轻绳+滑轮”系统：

外力： $m_1\vec{g}$，$m_2 g$，$\vec{N}$ 质量相等

条件： $\vec{M}_{外} = 0$ 所以角动量守恒

设两小孩分别以 $\vec{v}_{1,}\vec{v}_2$ 速度上升。设角动量以指向纸内为正。



$$\vec{L}_1 = \vec{r}_1 \times m_1 \vec{v}_1 = m_1(\vec{R} + \vec{r}_{\|}) \times \vec{v}_1 = m_1 \vec{R} \times \vec{v}_1$$ （指向纸内）

$$\Rightarrow \quad L_1 = m_1 R v_1$$

$$\vec{L}_2 = \vec{r}\vec{r}_2 \times m_2 \vec{v}_2 = m_2(\vec{R}' + \vec{r}_{\|}) \times \vec{v}_2 = m_2 \vec{R}' \times \vec{v}_2$$

$$\Rightarrow \quad L_2 = -m_2 R v_2$$ （指向纸外）

系统的角动量守恒： $$L_1 + L_2 = 0$$

（启动后） （启动前）

$$m_1 R v_1 - m_2 R v_2 = 0$$

$$m_1 v_1 = m_2 v_2$$

$$\because m_1 = m_2$$

$$\therefore v_1 = v_2$$ 爬与不爬，两小孩同时到达滑轮！

思考： 有人说该系统动量守恒，对不对？ 不对。

有人说该系统机械能守恒，对不对？ 不对。

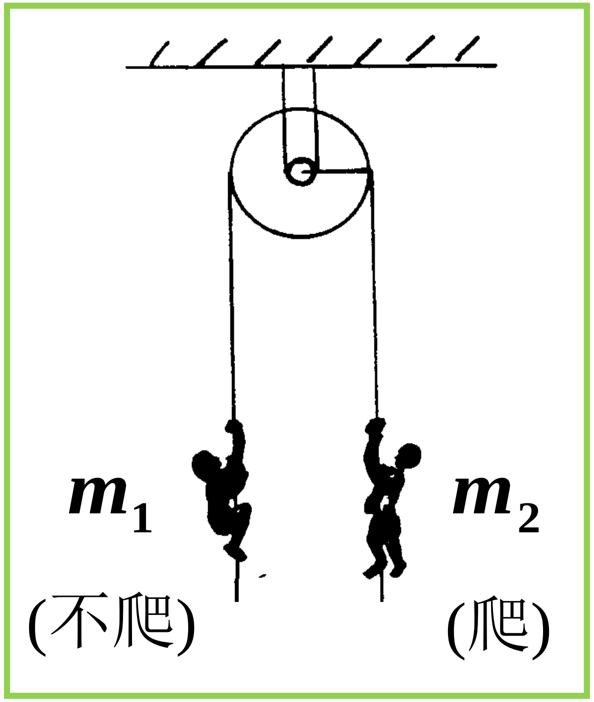
讨论 若 $m_1 \neq m_2$ 此时系统的角动量也不守恒了，会出现什么情况？

（1）设 $m_1 > m_2$（右边爬绳的是较轻的小孩）

系统所受的合外力矩为

$$M_{外} = (m_1 - m_2)gR \neq 0$$

思考： $\vec{M}_{外}$的方向是什么？



角动量定理 $\vec{M}_{外} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}$

（仍以朝向纸内为正）

$\mathrm{d}\vec{L}$的方向朝向纸外 （为负）

初始时小孩未动，$\vec{L} = 0$ 。

现在 $L = \mathrm{d}L = \left(m_1 v_1 - m_2 v_2\right)R < 0$

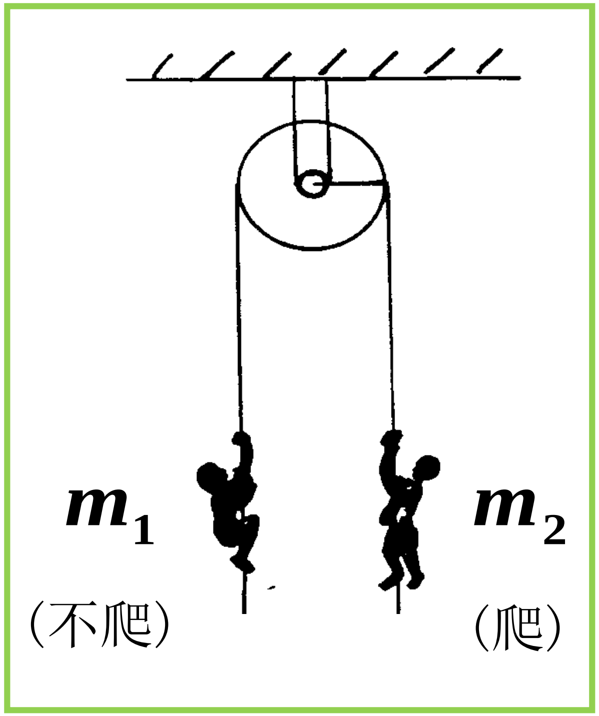
$$\therefore m_1 v_1 < m_2 v_2$$

$$m_1v_1 < m_2v_2$$

$$\because m_1 > m_2 \quad \therefore v_1 < v_2$$

即质量为 m_2（轻的、爬的）小孩先到。

（2）设 $m_2 > m_1$（右边爬绳的小孩较重）



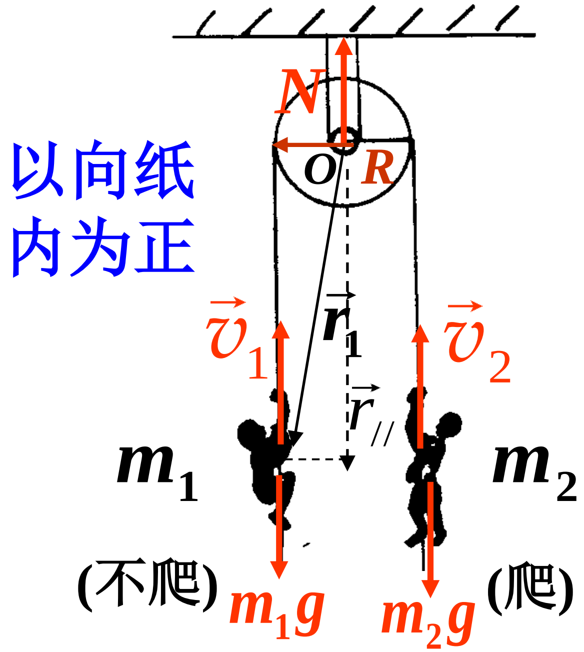
同理可得， $m_1v_1 > m_2v_2$

$$\because m_2 > m_1 \quad \therefore v_2 < v_1$$

即质量为 m_1（轻的、不爬的）小孩先到。

总之， 轻的小孩总是先到，
爬绳的小孩不一定先到。

若 $\boldsymbol{m_1 \neq m_2}$，会出现什么情况？



系统所受的合外力矩为

$$M_{外} = (m_2 - m_1)gR \neq 0$$

系统总角动量 $L = (m_1 v_1 - m_2 v_2)R$

初始时小孩未动， $L_0 = 0$。

由角动量定理 $M_{外} = \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$

若 $m_1 > m_2$： $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} < 0, \quad \therefore L < 0$

有 $m_1 v_1 - m_2 v_2 < 0, \quad \therefore v_1 < v_2$ 轻的升得快；

若 $m_1 < m_2$： $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} > 0, \ \therefore L > 0$

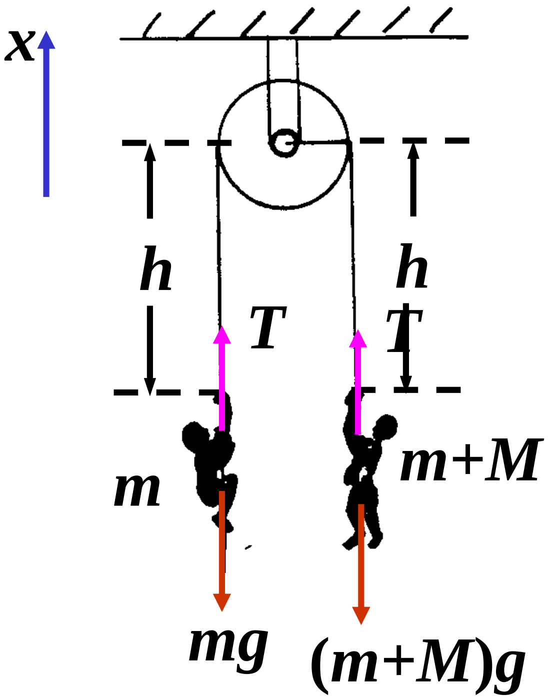
则 $m_1 v_1 - m_2 v_2 > 0, \quad \therefore v_1 > v_2$ 轻的升得快。

当较轻的人爬到滑轮处，较重的人离滑轮还有多高的距离？

若开始时离滑轮的距离均为 ***h*** 。

设 ***m***：较轻人的质量，

m+M ： 较重人的质量。



由牛顿第二定律，得

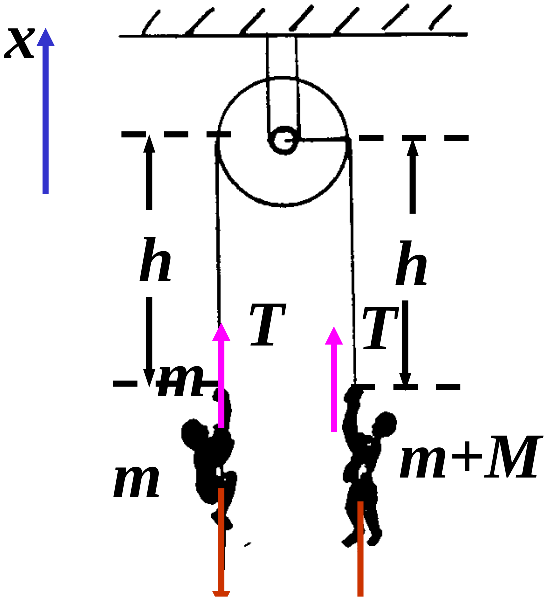
$$T - mg = ma_1 = m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}$$

$$T - (m+M)g = (m+M)a_2 = (m+M)\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}$$

整理得

$$Mg = \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}m - \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}(m+M)$$

$$Mg = \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2} m - \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}(m+M)$$



对 *t* 积分

$$Mgt = m\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} - (m+M)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

再对 *t* 积分

$$\int_0^t Mgt\mathrm{d}t = \int_{-h}^{0} m\mathrm{d}x_1 - \int_{-h}^{-l}(m+M)\mathrm{d}x_2$$

解得 $$l = \frac{M}{m+M}\left(h + \frac{1}{2}gt^2\right)$$

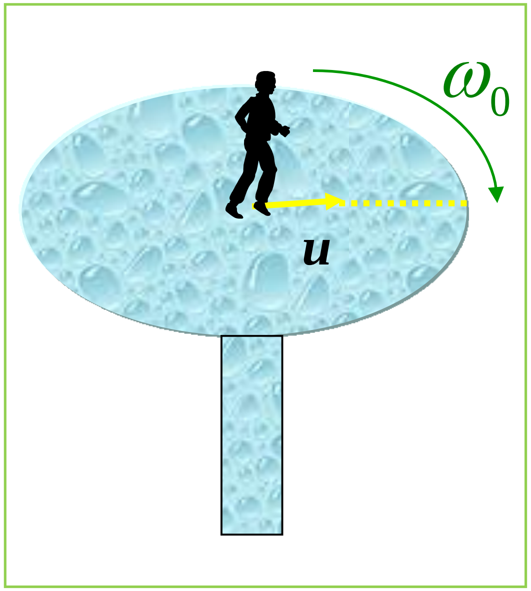
即是较重的人离滑轮的距离。

例 如图所示， 设一转台质量为 M，可绕竖直中心轴转动，初角速度为ω_0。 有一质量为 m 的人以相对于转台的恒定速率 u 沿半径从转台中心向边缘走去，求转台转动的角速度与时间 t 的关系。

解：由**角动量守恒**

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0+0=\frac{1}{2}MR^2\omega+(mr^2)\omega\cdots(1)$$

$$r=ut\cdots(2)$$



把（2）代入（1），得:

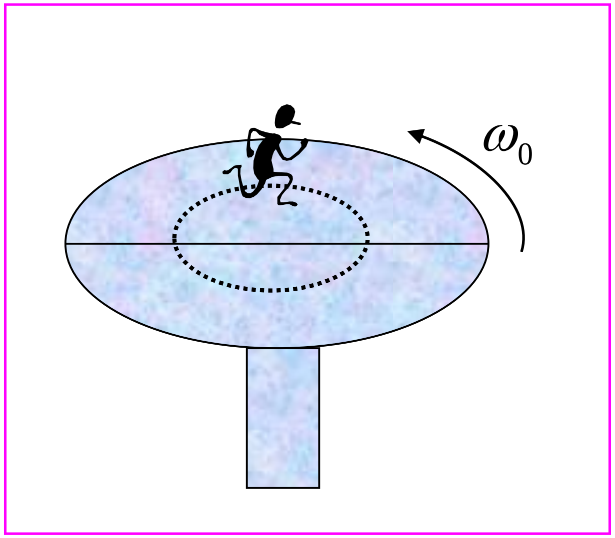
$$\omega=\frac{\omega_0}{1+\dfrac{2mu^2t^2}{MR^2}}$$

例 在半径为 R 的具有光滑竖直固定中心轴的水平圆盘上，有一人静止站立在距转轴为 $R/2$ 处，人的质量 m 是圆盘质量 M 的 1/10，开始时盘载人相对地以角速度 ω_0 匀速转动。如果此人垂直圆盘半径相对于盘以速率 v 沿与盘转动相反方向作圆周运动，已知圆盘对中心轴的转动惯量为 $MR^2/2$.

求：（1）圆盘对地的角速度 ω；（2）欲使圆盘对地静止，人沿着半径为 $R/2$ 的圆周对圆盘的速度 v 的大小和方向。

解：（1）由**角动量守恒**

$$\frac{1}{2}MR^2\omega_0+\frac{1}{4}mR^2\omega_0=\frac{1}{2}MR^2\omega+\frac{1}{4}mR^2\left(\omega-\frac{v}{\frac{R}{2}}\right)$$



解得

$$\omega=\omega_0+\frac{2}{21R}v\cdots(1)$$

（2）若使盘静止，在（1）式中令 $\omega=0$，得

$$v=-\frac{21}{2}\omega_0R$$

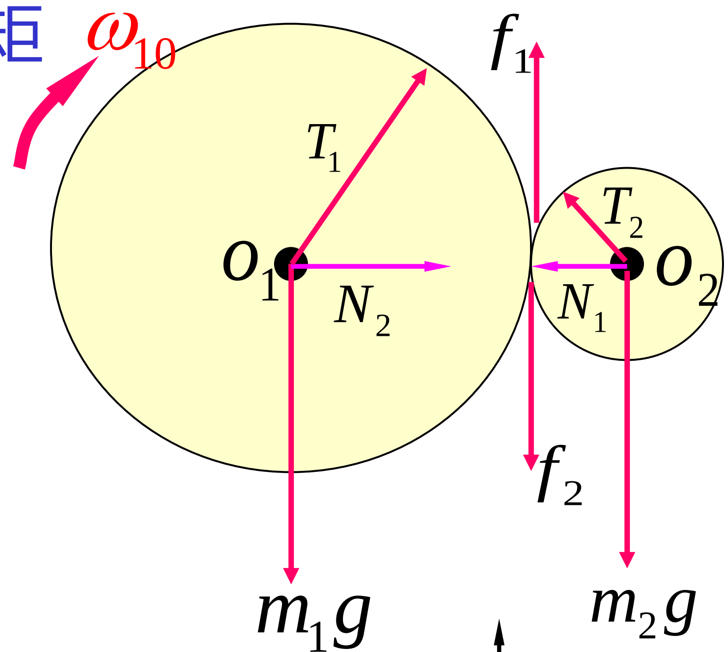
与原设定的速度方向相反，即顺着 ω_0 的方向。

例 两个均质圆盘对各自轴的转动惯量分别为 J_1 和 J_2，半径分别为r_1和r_2，开始时圆盘I以 ω_{10} 的角速度旋转，圆盘II静止，然后使两盘边沿接触．求：当接触点处无相对滑动时，两圆盘的角速度．

解: 以两转盘为系统，分析受力

以O_1点为参考点，系统的外力矩

$$M=(T_{2y}-m_2g)(r_1+r_2)$$



无竖直方向上的运动

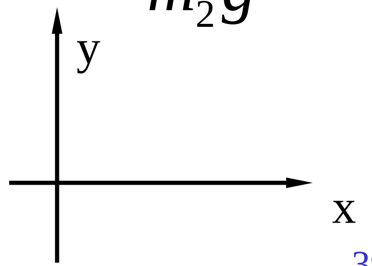
$$T_{2y}+f=m_2g$$

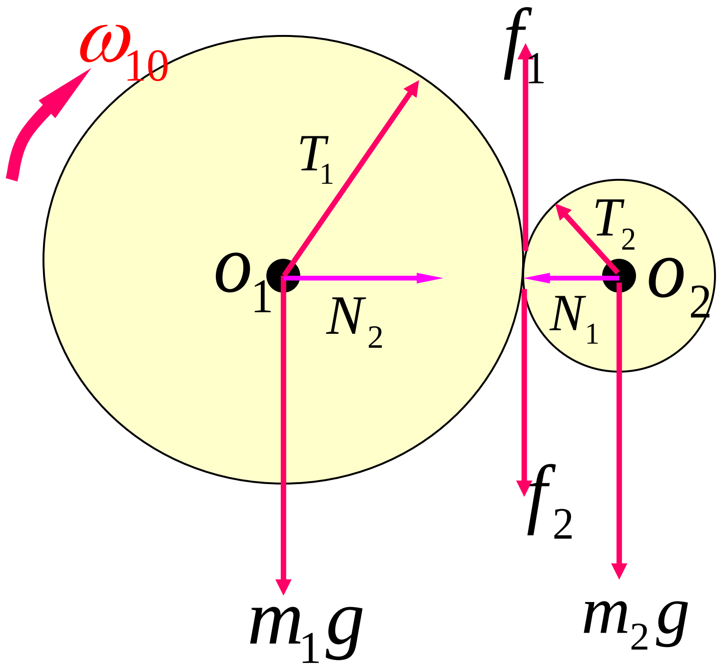
$$\boldsymbol{M=-f(r_1+r_2)\neq 0}$$

作用在系统上的外力矩不为0

系统的角动量不守恒

只能用角动量定律做此题!





对盘 I 设顺时针转动为正向

盘1: $$J_1\frac{d\omega_1}{dt}=-fr_1$$

对盘 II 逆顺时针转动为正向

盘2: $$J_2\frac{d\omega_2}{dt}=fr_2$$

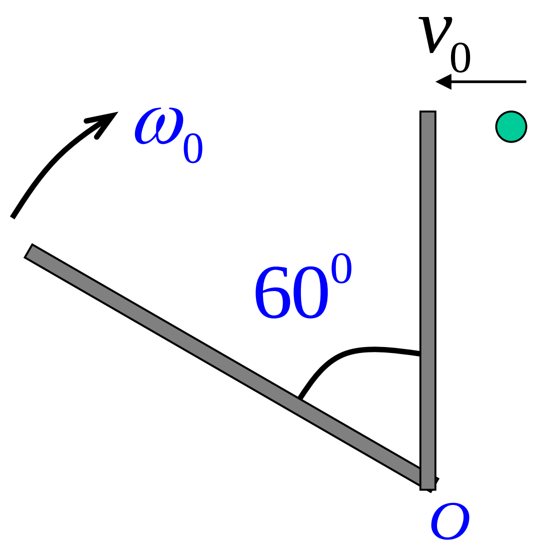
$$\int_{\omega_{10}}^{\omega_1} J_1 r_2 d\omega_1=\int_0^{\omega_2}-J_2 r_1 d\omega_2$$

$$J_1 r_2(\omega_1-\omega_{10})=-J_2 r_1\omega_2$$

不打滑条件: $$r_1\omega_1=r_2\omega_2$$

可解得: $$\omega_1=\frac{J_1 r_2^2\omega_{10}}{J_1 r_2^2+J_2 r_1^2}\qquad \omega_2=\frac{J_1 r_1 r_2\omega_{10}}{J_1 r_2^2+J_2 r_1^2}$$

例　一个质量为 m_1，长为 L 的均匀细杆。一端固定于水平转轴上，开始使细杆在铅直平面内与铅直方向成 60^0 角，并以角速度 ω_0 沿顺时针转动。当细杆转到竖直位置时，有一质量 m_2 的细小油灰团以速度 v_0 水平迎面飞来，并与细杆上端发生完全非弹性碰撞。碰撞后细杆再次转到与铅直方向成 60^0 角时角速度为多大？

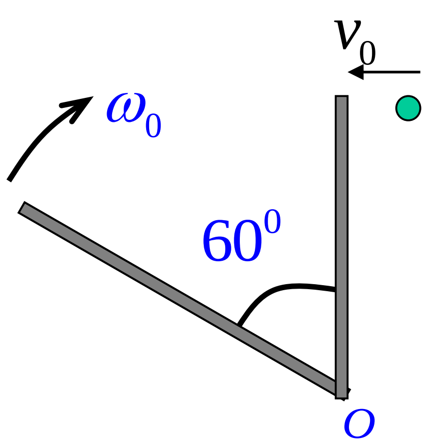


解： 整个运动过程可分为三个阶段。第一阶段，细杆由初始位置转到竖直位置时，取细杆和地球为一系统，设 O 点为重力势能零点。由于转轴的支持力不做功，所以系统的机械能守恒。则有

$$E_1 = \frac{1}{2}J\omega_0^2 + m_1 g\frac{L}{2}\cos 60^0$$

$$E_2 = m_1 g\frac{L}{2} + \frac{1}{2}J\omega_1^2$$

$$J = \frac{1}{3}m_1 L^2$$



由 $E_1 = E_2$ 得

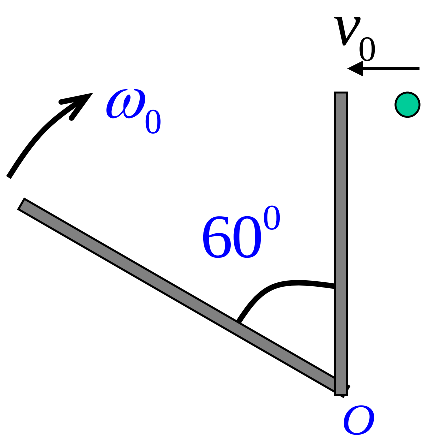
$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{3g}{2L}}$$

第二阶段，细杆在铅直位置与油灰团发生完全非弹性碰撞。取细杆与油灰团为一系统，在碰撞过程中所受的合外力矩为零，所以系统的角动量守恒。设顺时针方向为正方向，于是有

$$J\omega_1 - m_2 v_0 L = (J + m_2 L^2)\omega_2$$

$$\omega_2 = \frac{J\omega_1 - m_2 v_0 L}{J + m_2 L^2}$$

$$= 12.5\ \mathrm{s}^{-1}$$

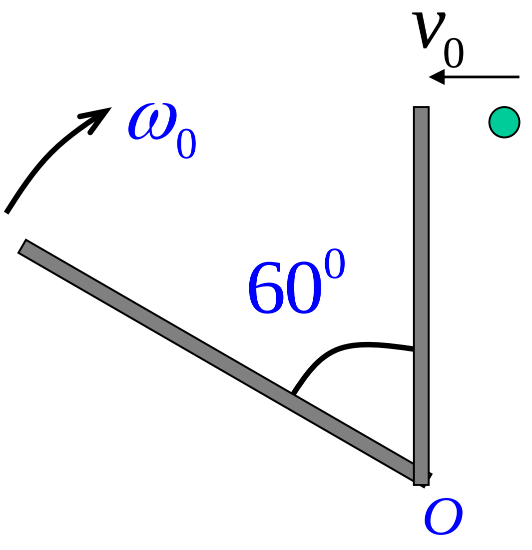


因为 $\omega_2 > 0$ ，所以碰撞完毕后两物体沿角速度 ω_1 的方向转动。

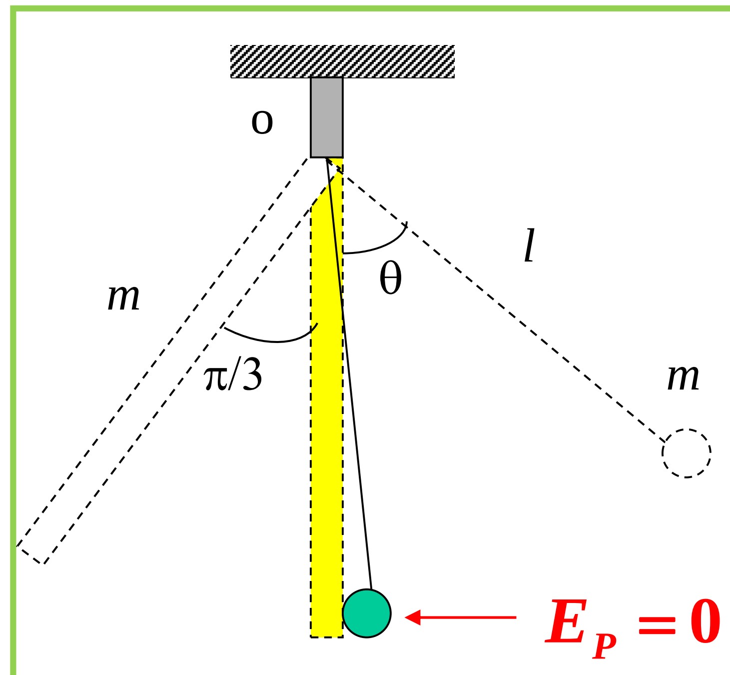
第三阶段，取细杆、油灰团和地球为一系统，因转轴的支持力不做功，所以系统的机械能守恒

$$\frac{1}{2}(J+m_2L^2)\omega_2^2+m_1g\frac{L}{2}+m_2gL$$
$$=\frac{1}{2}(J+m_2L^2)\omega_3^2+m_1g\frac{L}{2}\cos 60^0+m_2gL\cos 60^0$$

$$\omega_3=13.1\,\mathrm{s}^{-1}$$



例 质量 m长 l 的均匀细杆可绕通过其上端的水平光滑固定轴 O 转动，质量也是 m 的小球用长度也是 l 的轻绳系于上述 O 轴上。设细杆静止在竖直位置，将小球在垂直于O 轴的平面内拉开角度为θ ，然后使其自由下摆与杆端发生弹性碰撞，结果使杆产生$\pi/3$ 的偏角。求： $\theta=?$



解: 小球下摆过程:

系统：小球+地球

条件：只有保守力 作功

所以$E_{机}$守恒

$$mgl(1-\cos\theta)=\frac{1}{2}mv^2 \quad \cdots(1)$$

◆ 碰撞过程：

系统：小球+杆

（动量守恒？答：不守恒！）

条件：小球和杆的重力（外力）

对O 轴几乎无力矩，

有轴力（外力），但也无力矩。

$M_{外}=0$，系统角动量守恒

$$mvl = mv'l + \left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega \quad \ldots(2)$$

即小球动量矩 $\left(J'\omega' = ml^2\frac{v'}{l} = mv'l\right)$

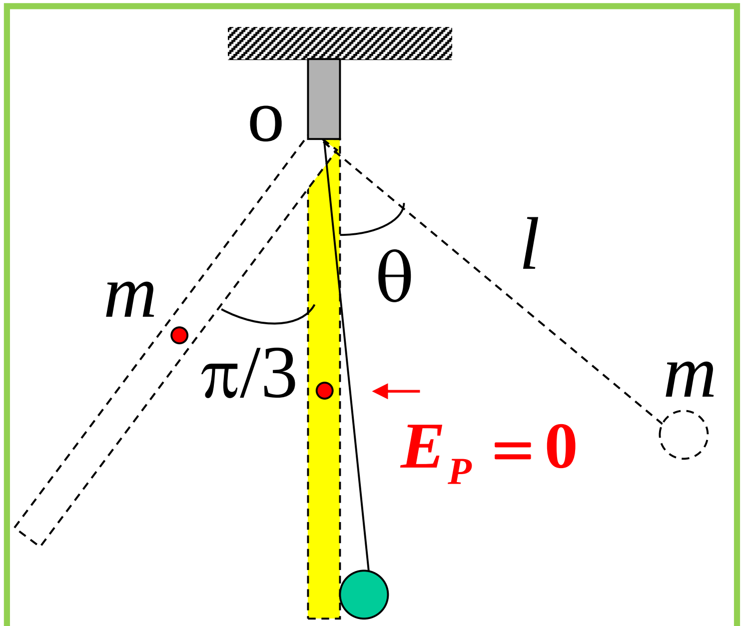
◆ 杆上摆过程： 由E机守恒可得

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 = mg\frac{l}{2}\left(1-\cos\frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots(3)$$

四个未知数，三个方程，还应找一个方程。

题意：弹性碰撞，所以动能守恒

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}ml^2\right)\omega^2 \quad \cdots(4)$$



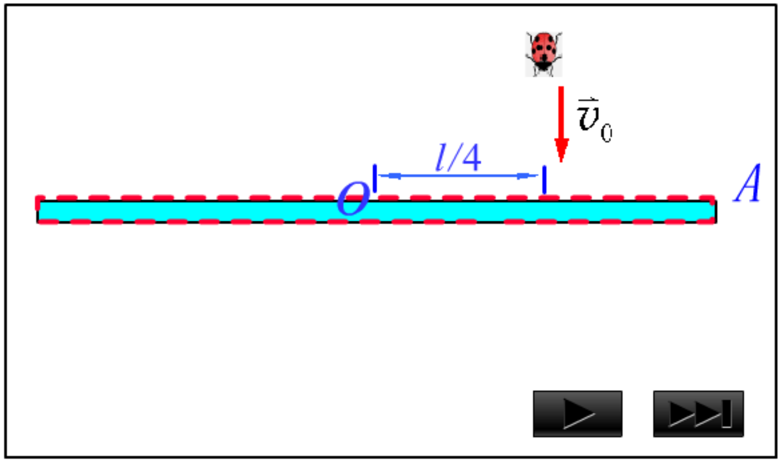
联立可以解得

$$\cos\theta = \frac{2}{3}$$

$$\theta = \cos^{-1}\frac{2}{3} = 48.2^0$$

例 长为l 的均匀细杆。当杆静止于水平位置时，有一只小虫以速率v_0垂直落在距点O为 $l/4$ 处，并背离点O 向细杆的端点A 爬行.设小虫与细杆的质量均为m.

问: 欲使细杆以恒定的角速度转动，小虫应以多大速率向细杆端点爬行?



解: 碰撞瞬间， 内力矩 >>外力矩

角动量守恒

$$mv_0\frac{l}{4}=[\frac{1}{12}ml^2+m(\frac{l}{4})^2]\omega$$

$$\omega=\frac{12}{7}\frac{v_0}{l}$$

由角动量定理 $$M=\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\omega)}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}t}$$

$$mgr\cos\theta=\omega\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{1}{12}ml^2+mr^2)=2mr\omega\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$$

$$\theta=\omega t$$

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=\frac{g}{2\omega}\cos\omega t=\frac{7lg}{24v_0}\cos(\frac{12v_0}{7l}t)$$