刚体定轴转动的转动定律：

$$\boxed{\underline{M} = \underline{J\beta}}$$

所有的外力对转轴的力矩的代数和

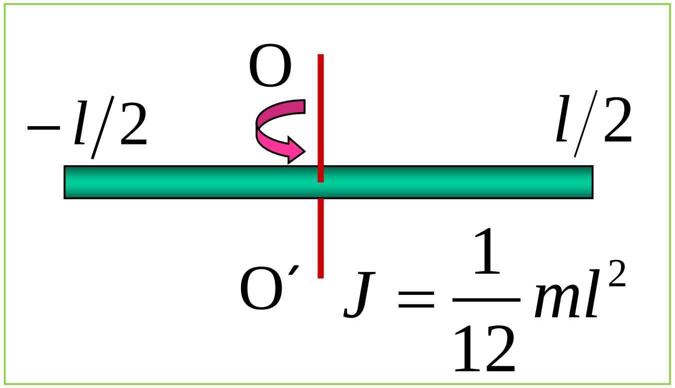
刚体对 转轴的转动惯量和角加速度

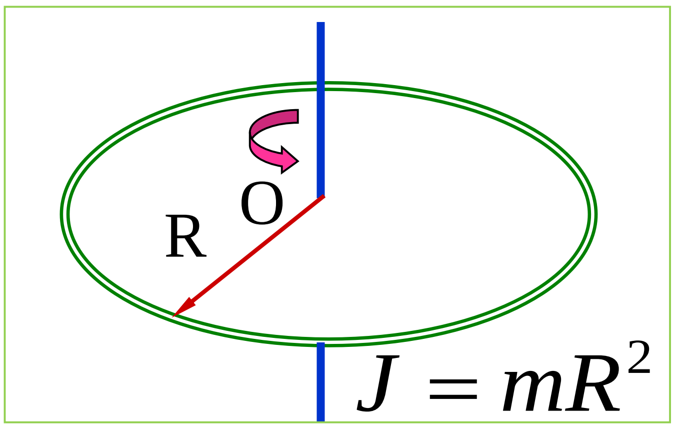
定义：刚体的转动惯量(*moment of interia*)

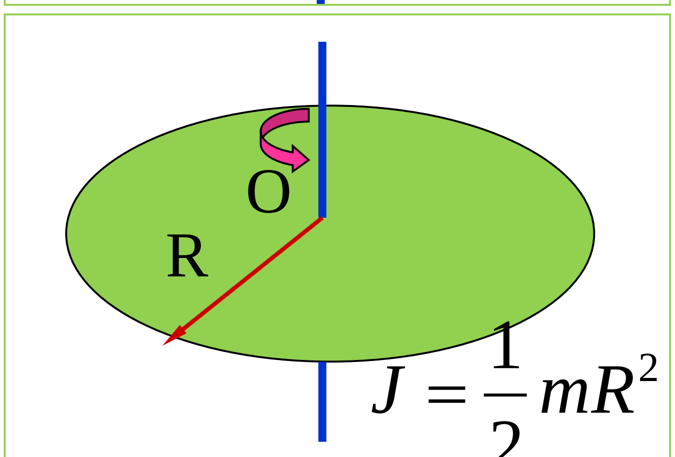
$$J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$$

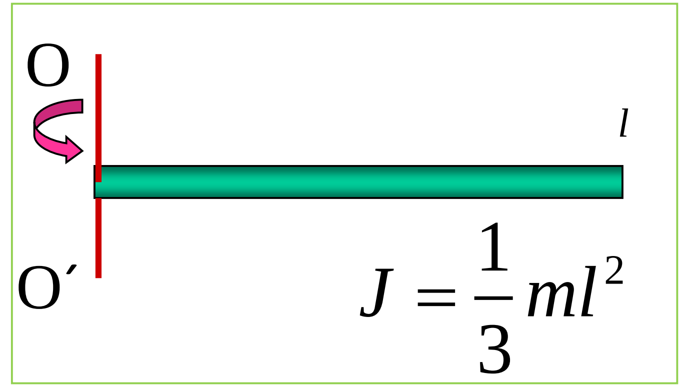
$$J = \int r^2 \, \mathrm{d}m$$

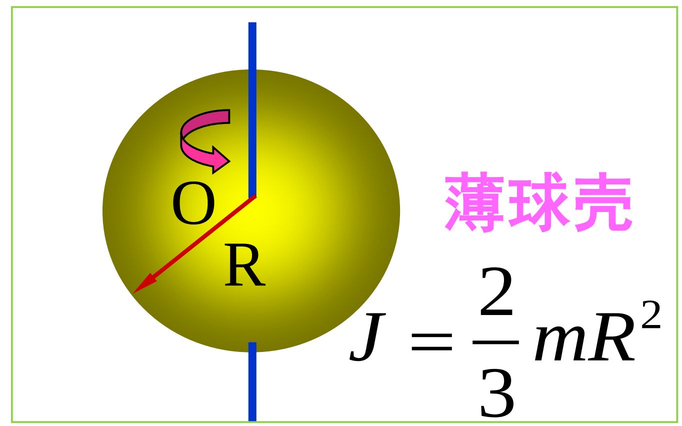
一些均匀刚体的转动惯量

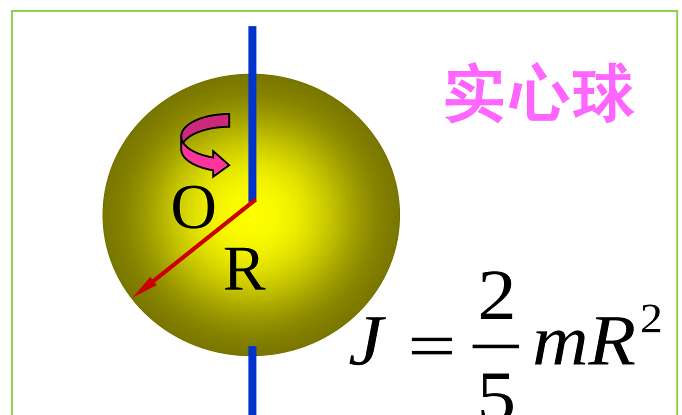




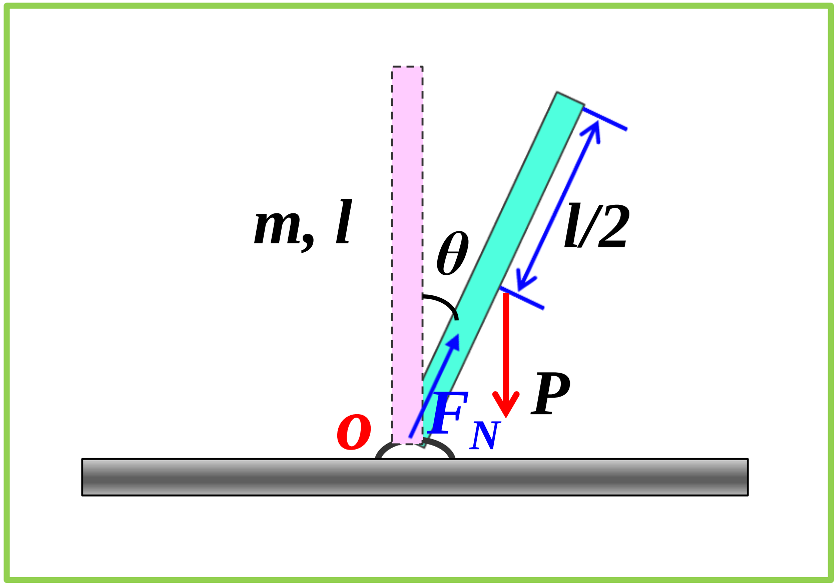








例2 一长为 l 质量为 m 匀质细杆竖直放置，其下端与一固定铰链 O 相接，并可绕其转动。由于此竖直放置的细杆处于非稳定平衡状态，当其受到微小扰动时，细杆将在重力作用下由静止开始绕铰链 O 转动。试计算细杆转动到与竖直线成 θ 角时的角加速度和角速度。

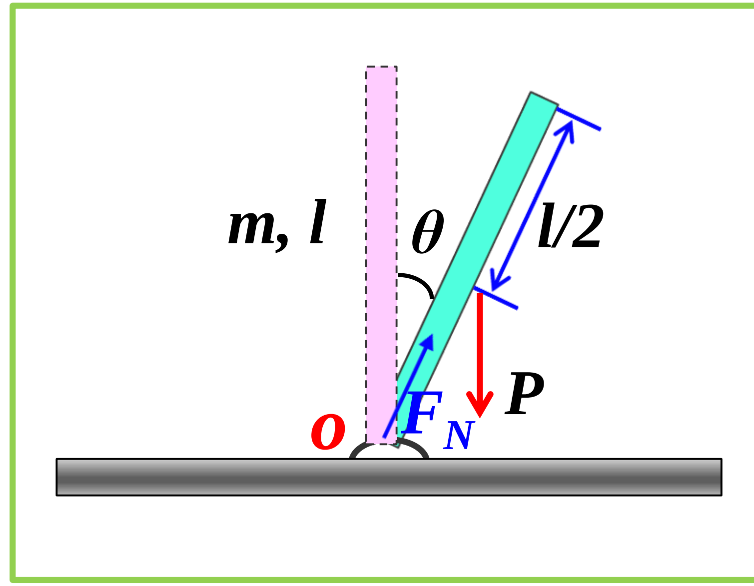


解： 细杆受重力和铰链对细杆的约束力 $\vec{F}_{\mathrm{N}}$ 作用，由转动定律得

$$\frac{1}{2}mgl\sin\theta = J\beta$$

式中 $J = \frac{1}{3}ml^2$ 得：$\beta = \frac{3g}{2l}\sin\theta$

得： $\beta=\dfrac{3g}{2l}\sin\theta$



由角加速度的定义：

$$\beta=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}\theta}$$

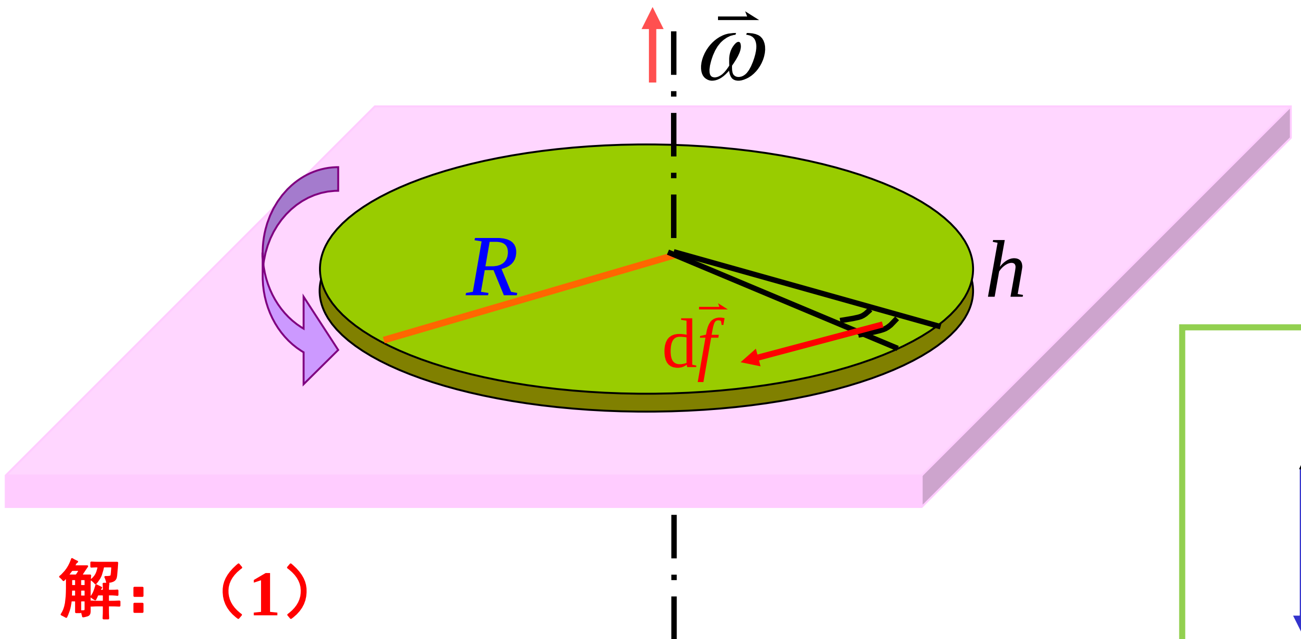
$$\omega\mathrm{d}\omega=\beta\mathrm{d}\theta=\frac{3g}{2l}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

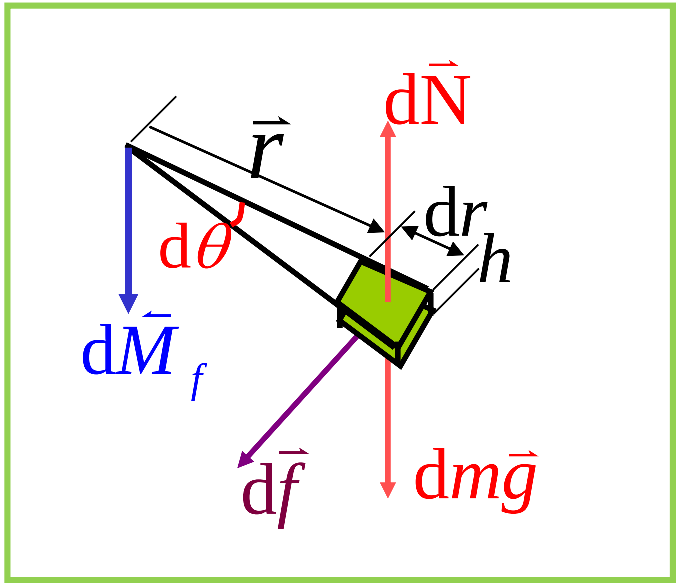
代入初始条件积分：

$$\int_0^{\omega}\omega\mathrm{d}\omega=\frac{3g}{2l}\int_0^{\theta}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

得：$\omega=\sqrt{\dfrac{3g}{l}(1-\cos\theta)}$

例3　一质量为 m 半径为 R 厚 h 的匀质圆盘水平放置在一个固定的桌面上，圆盘与桌面的摩擦系数为 μ ，匀质圆盘可绕过其圆心的轴转动。设初始 $t_0=0$ 时刻圆盘角速度为 ω_0 ，求：（1）圆盘由于受到摩擦阻力作用所产生的角加速度，（2）从初始时刻算起，当圆盘停住转动时转过了多少圈？





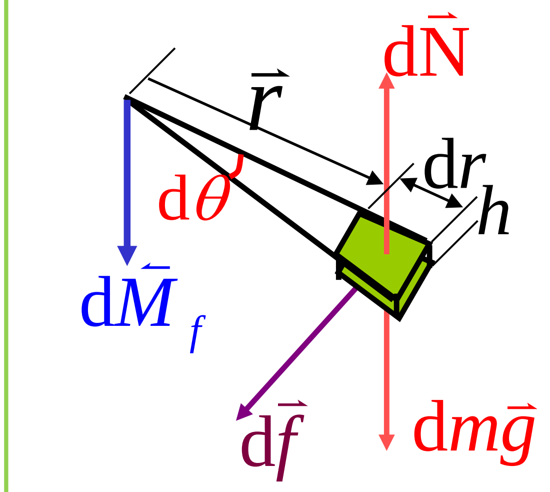
解：（1）

$$\rho=\frac{m}{\pi R^2 h}$$

$$\mathrm{d}V=r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}rh$$

$$\mathrm{d}m=\rho\mathrm{d}V=\rho hr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h} \qquad \mathrm{d}m = \rho h r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$



$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}mg = \rho g h r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}N = \mu \rho g h r \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\vec{M}_f = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{f}$$

$$\mathrm{d}M_f = -r\mathrm{d}f = -\mu \rho g h r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

$$M_f = \int_{(\mathrm{m})} \mathrm{d}M_f = -\mu \rho g h \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta = -\frac{2}{3}\mu m g R$$

$$\boxed{\begin{aligned} M_f &= J\beta \\ J &= \frac{1}{2} m R^2 \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \beta = -\frac{4\mu g}{3R}$$

角加速度： $$\boxed{\beta = -\frac{4\mu g}{3R}}$$

（2）从初始时刻算起，当圆盘停住转动时转过了多少圈？

$$0-\omega_0^2 = 2\beta\Delta\theta \qquad \Delta\theta = \frac{3R\omega_0^2}{8\mu g}$$

$$n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$$

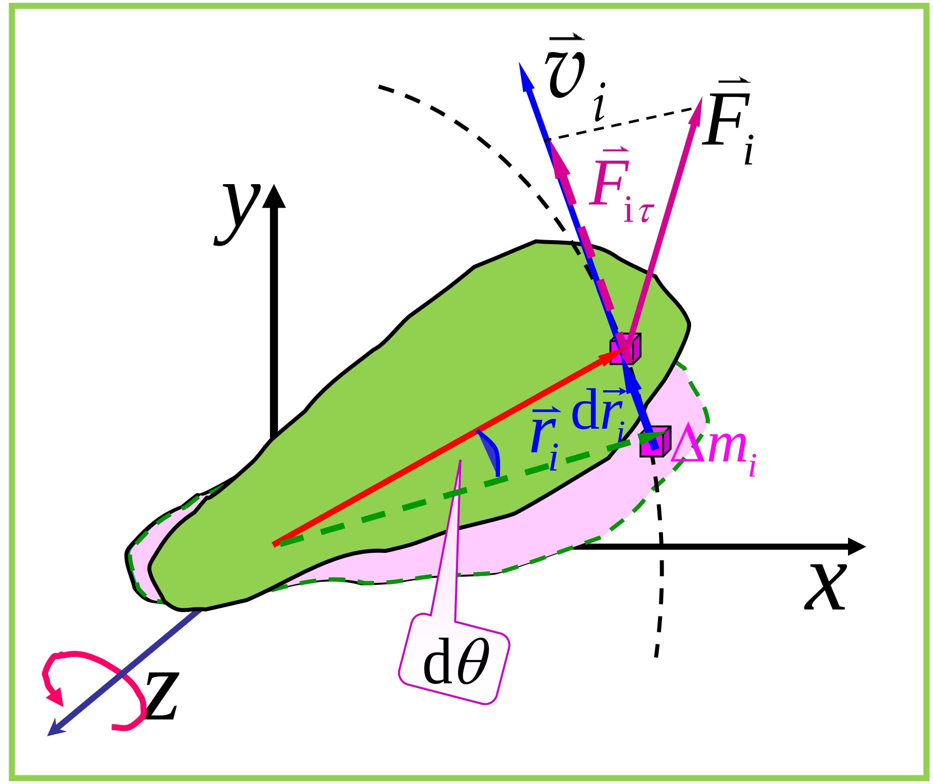
质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\beta t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$

§4 刚体定轴转动的动能定理

一、力矩作功

----力矩的空间积累作用

当刚体在外力作用下作定轴转动时，考虑质元 Δm_i 外力所作的元功为：



$$\mathrm{d}A_i = \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\vec{r}_i = F_{i\tau}\mathrm{d}s_i$$

$$= F_{i\tau} r_i \mathrm{d}\theta \quad = M_i \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A = \sum_i \mathrm{d}A_i = \sum_i M_i \mathrm{d}\theta = M\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}A = \vec{M} \cdot \mathrm{d}\vec{\theta}$$

力矩的功

$$\boxed{A = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta}$$

力矩的功率

$$P=\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}=\frac{M\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=M\omega$$

$$\boxed{P=M\omega}$$

比较：

$$\begin{cases} A=\int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}\rightarrow \text{力的功} \\ A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta\rightarrow \text{力矩的功} \end{cases}$$

$$\begin{cases} P=\vec{F}\cdot\vec{v}\rightarrow \text{力的功率} \\ P=M\omega\rightarrow \text{力矩的功率} \end{cases}$$

二、转动动能

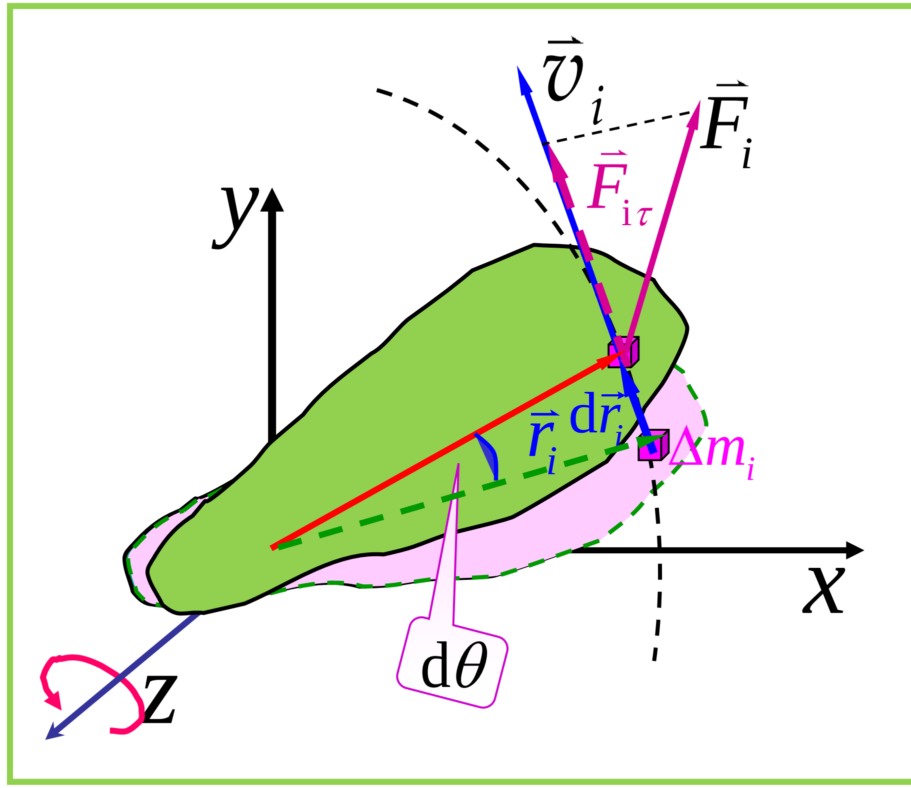
质元 Δm_i 动能：

$$E_{ki}=\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

刚体转动动能：

$$E_k=\sum_i E_{ki}=\sum_i\frac{1}{2}\Delta m_i v_i^2$$

$$=\frac{1}{2}(\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega^2 \quad =\frac{1}{2}J\omega^2$$



$$\boxed{E_k=\frac{1}{2}J\omega^2}$$ ← 刚体转动动能

比较：
$$\begin{cases}\text{平动动能} \quad E_k=\dfrac{1}{2}mv^2\\ \text{转动动能} \quad E_k=\dfrac{1}{2}J\omega^2\end{cases}$$

三、刚体绕定轴转动的动能定理

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\beta\mathrm{d}\theta=\int_{\theta_1}^{\theta_2} J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\theta=\int_{\omega_1}^{\omega_2} J\omega\mathrm{d}\omega$$

$$\boxed{A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta=\frac{1}{2}J\omega_2^2-\frac{1}{2}J\omega_1^2}$$

——合外力矩对绕定轴转动的刚体所作的功数值上等于刚体转动动能的增量，称为刚体绕定轴转动的动能定理。

四、刚体的重力势能

任取一质元其重力势能为

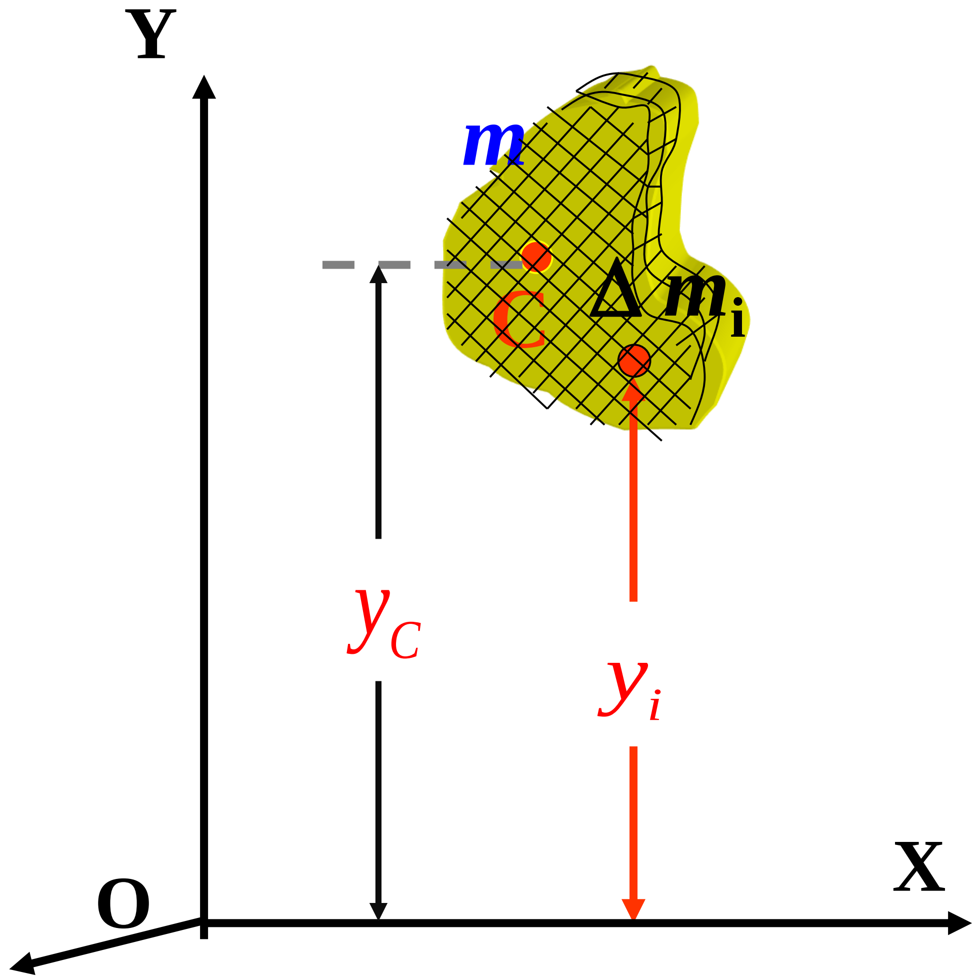
$$\Delta m_i g y_i$$

$$E_p = \sum \Delta m_i g y_i$$

$$= m \frac{\sum \Delta m_i y_i}{m} g$$

刚体的重力势能为

$$E_p = mgy_C$$



五、机械能与机械能守恒

刚体与质点组成的系统，机械能包括：

机械能 = 势能 + 平动动能 + 转动动能

机械能守恒条件：$W_{外} + W_{非保内} = 0$ 时

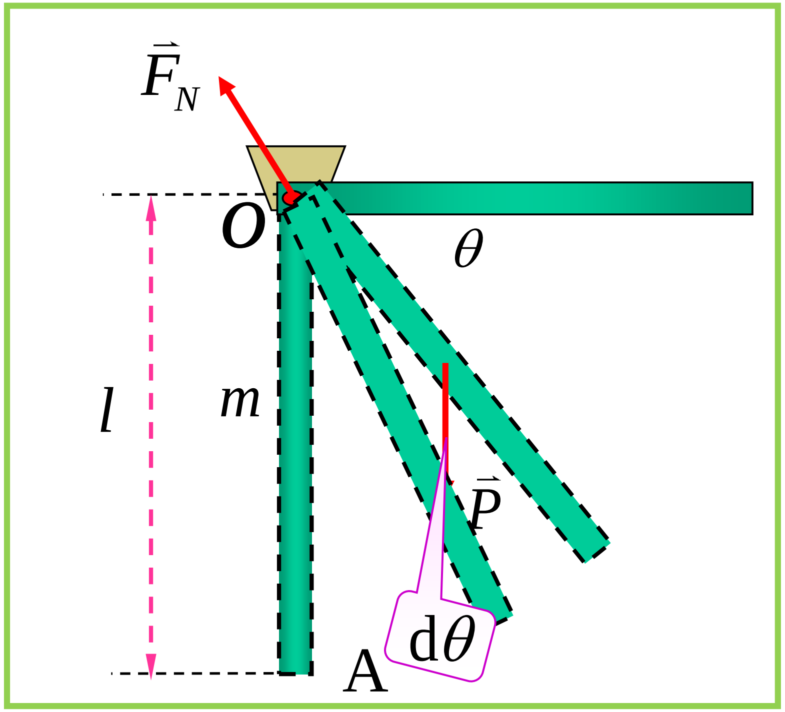
$$\left.\begin{array}{l}\text{机械能 = 势能+平动动能+转动动能 = 恒量} \\ E = \sum (mgh_c + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2) = \text{恒量}\end{array}\right\}$$

刚体与质点组成系统的机械能守恒定律

例1 一长为 l ，质量为 m 的杆可绕支点O*在竖直平面内*转动，杆在轴承处的摩擦不计 。让杆自水平位置自由释放，如图所示。求直杆转到竖直位置时杆端A速度。

解： 重力矩所做的元功为：

$$\mathrm{d}A = M\mathrm{d}\theta = mg\frac{l}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$



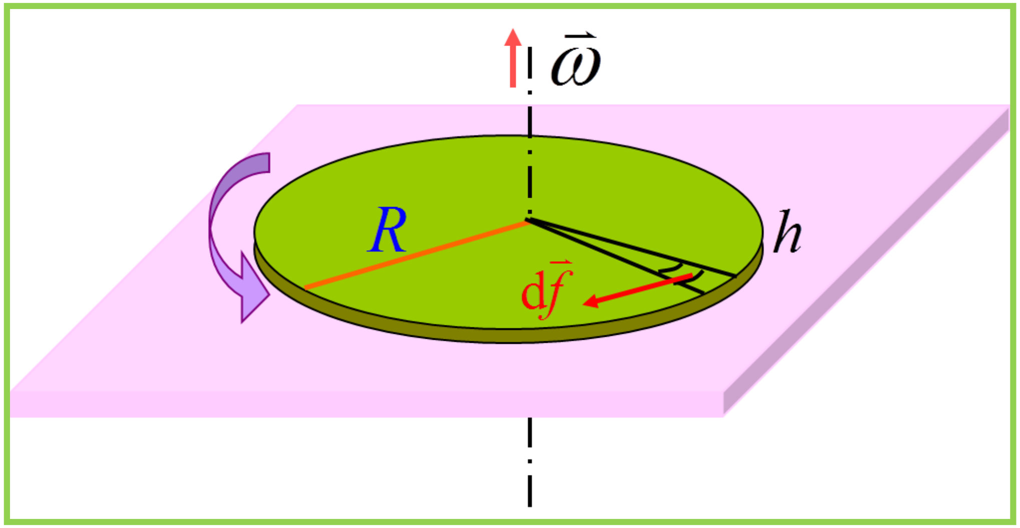
由定轴转动的动能定理有：

$$A=\int \mathrm{d}A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} mg\frac{l}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}J\omega^2$$

$$J = \frac{1}{3}ml^2$$

$$\therefore v = l\omega = \sqrt{3gl}$$

例2 一质量为 m 半径为 R 厚 h 的匀质圆盘水平放置在一个固定的桌面上，圆盘与桌面的摩擦系数为 μ ，匀质圆盘可绕过其圆心的轴转动。设初始 $t_0=0$ 时刻圆盘角速度为 ω_0，求：圆盘受到摩擦阻力矩所做的功。



解：由于

$$M=-\frac{2}{3}\mu mgR$$

$$\Delta\theta=\frac{3R\omega_0^2}{8\mu g}$$

所以

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2}M\mathrm{d}\theta=M\Delta\theta=-\frac{2}{3}\mu mgR\cdot\frac{3R\omega_0^2}{8\mu g}=-\frac{mR^2\omega_0^2}{4}$$

$$A=\frac{1}{2}J\omega^2-\frac{1}{2}J\omega_0^2=-\frac{1}{2}J\omega_0^2=-\frac{1}{2}\frac{1}{2}mR^2\omega_0^2=-\frac{mR^2\omega_0^2}{4}$$

§5 角动量　角动量守恒定律

力矩的时间累积效应 ⟹ 冲量矩、角动量、角动量定理。

一、质点的角动量定理和角动量守恒定律

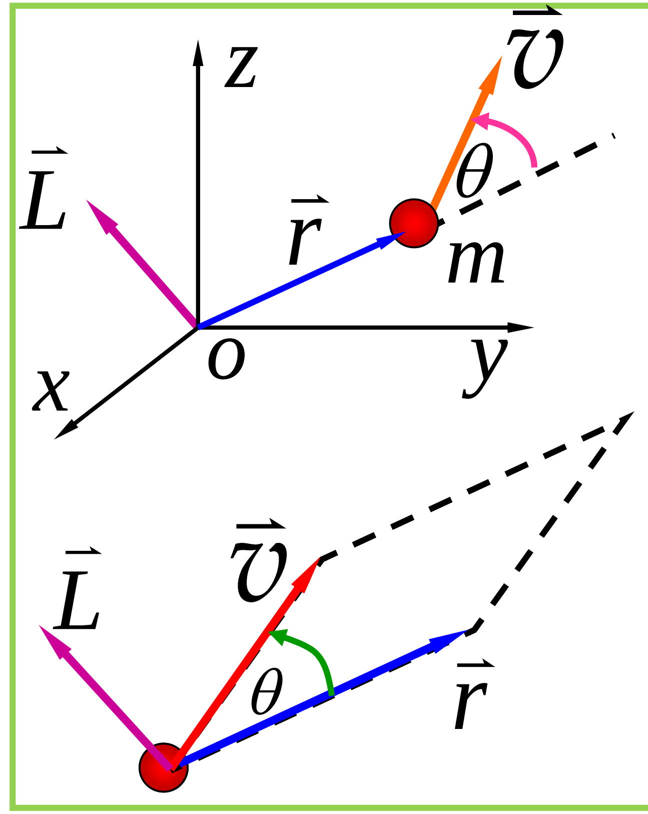
1. 质点的角动量

质点相对于原点的角动量

$$\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}=\vec{r}\times m\vec{v}$$

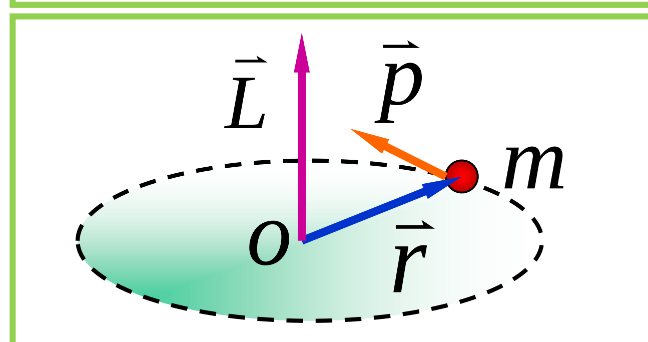
大小 $L=rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则。



➢ 质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量

$$\vec{L}=mr^2\vec{\omega}=J\vec{\omega}$$



2. 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}, \quad \vec{v}\times\vec{p}=0 \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}}$$

——作用于质点的合力对**参考点** O 的力矩，等于质点对该点 O 的**角动量**随时间的**变化率**。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$

质点的角动量定理：对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

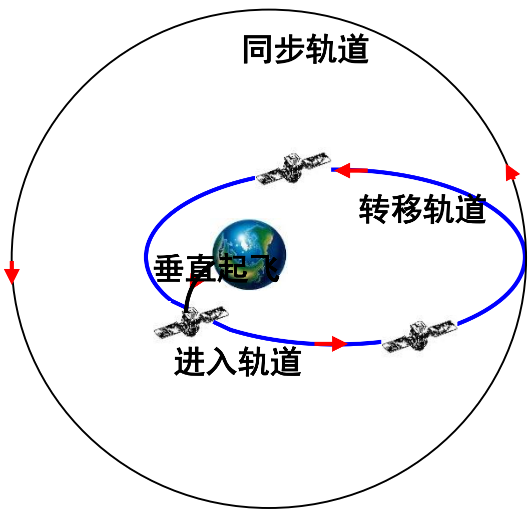
3. 质点的角动量守恒定律

$$\vec{M}=0 \longrightarrow \vec{L}=\text{恒矢量}$$

——质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量。

*****自然界的普适规律。**

例1. 发射地球同步卫星时航天器的运行轨道示意图。试问航天器在转移轨道中A点和B点的速率分别为多大？

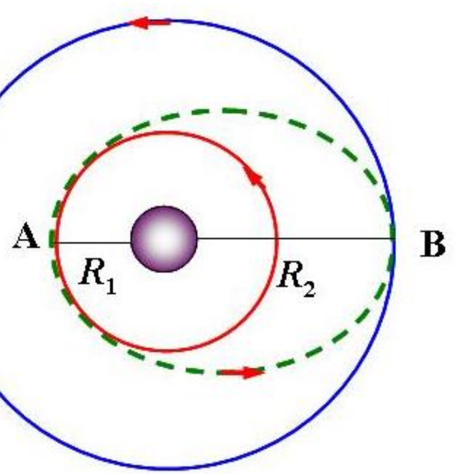


解： 设航天器到达A点后，必须加速到 υ_A 才能沿椭圆轨道运动到B点，υ_B 为航天器沿椭圆轨道运行时到达B点的速度。

有心力作用下，角动量和机械能守恒

$$m\upsilon_A R_1 = m\upsilon_B R_2$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_A^2 - \frac{GM_e m}{R_1} = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{GM_e m}{R_2}$$



解得：

$$\upsilon_A = \sqrt{\frac{2GR_2 M_e}{R_1(R_1+R_2)}} \qquad \upsilon_B = \sqrt{\frac{2GR_1 M_e}{R_2(R_1+R_2)}}$$

二、 刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1. 刚体定轴转动的角动量

$$L_i = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i$$

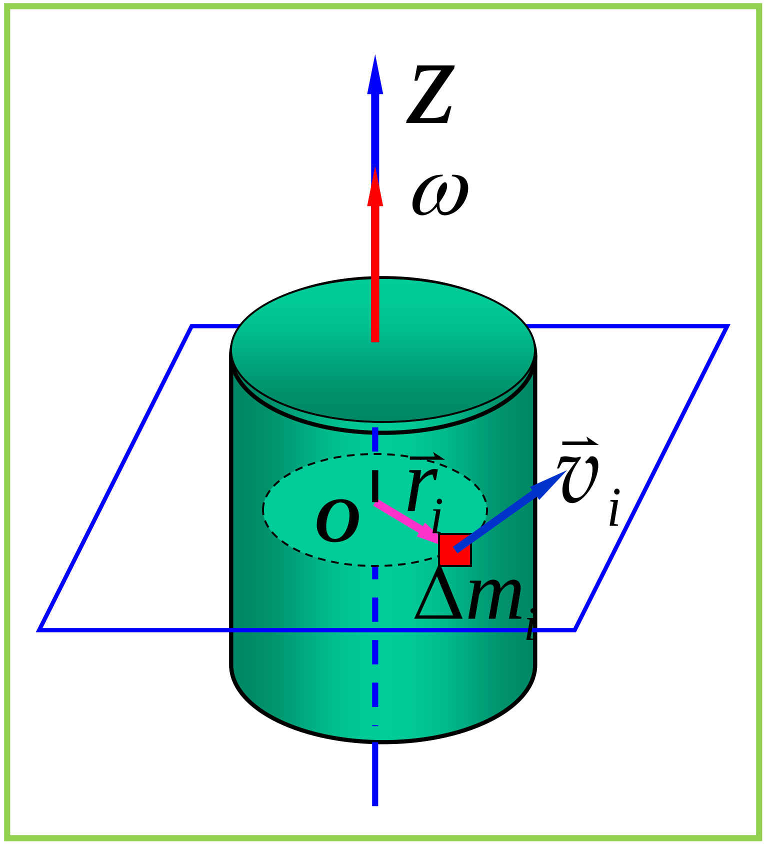
$$= \sum_i \Delta m_i r_i v_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L = J\omega}$$

$$\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega}}$$

——描述刚体定轴转动的状态。

$\vec{L}$、J、$\vec{\omega}$ 应该具有同轴性。



2. 刚体定轴转动的角动量定理

$$\vec{M} = J\vec{\beta} = J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(J\vec{\omega})}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = J\vec{\omega}_2 - J\vec{\omega}_1}$$

****对于非刚体而言，定轴转动的角动量定理可以表述为**

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}\mathrm{d}t = J_2\vec{\omega}_2 - J_1\vec{\omega}_1}$$

3. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $\vec{M}=0$ ，则 $\vec{L}=J\vec{\omega}=$常量

讨论：

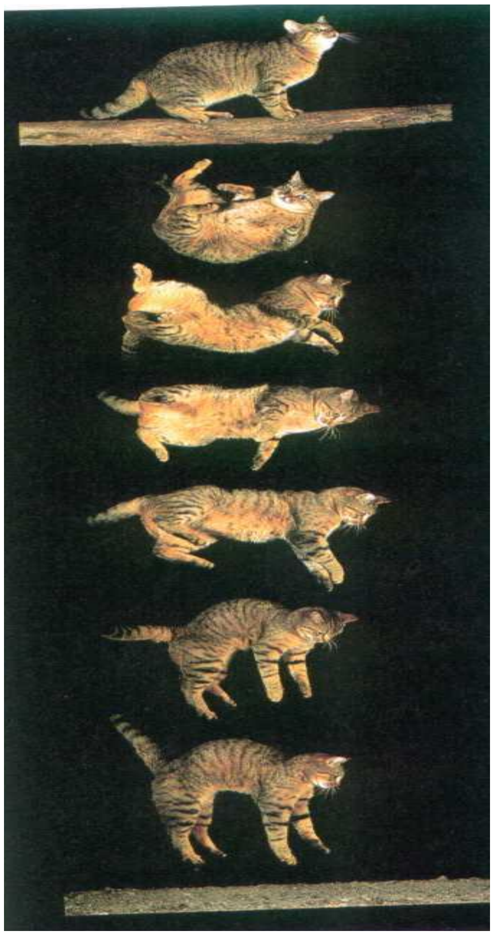
- 守 恒条件 $M=0$

  若 J 不变，ω 不变；若 J 变，ω 也变，但 $L=J\omega$ 不变。

- 内力矩不改变系统的角动量。
- 在冲击等问题中，$\because M_{内}>>M_{外}$ $\therefore L\approx$常量
- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律。

- 有许多现象都可以用角动量守恒来说明。

  - 跳水运动员跳水

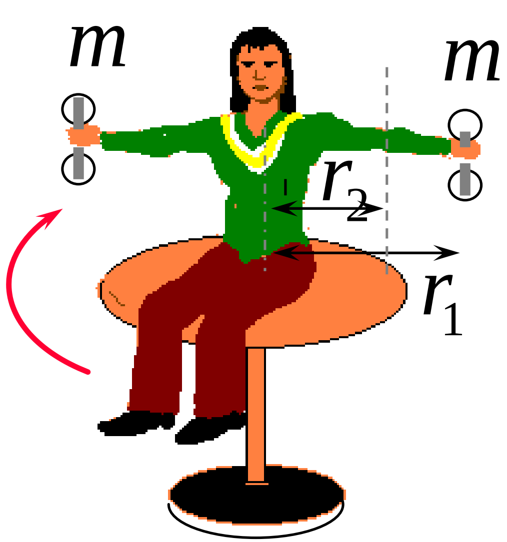


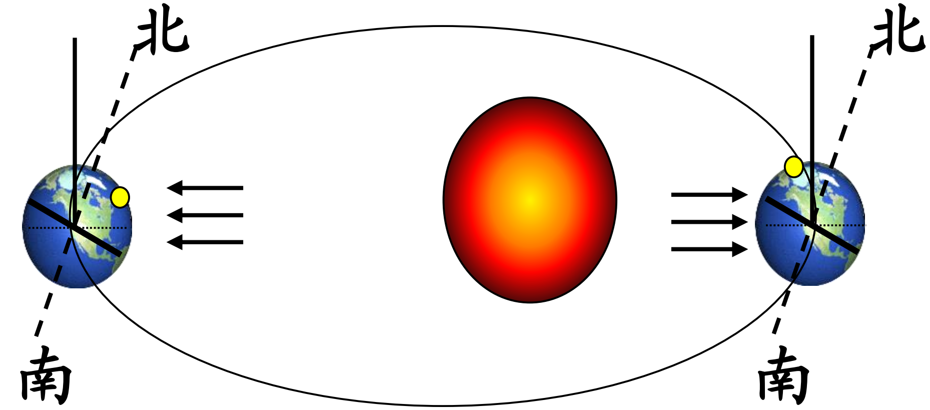
猫尾巴的功能

为什么直升飞机的尾翼要安装螺旋桨?

- 花样滑冰

- 茹可夫斯基凳





角动量守恒使地球自转轴的方向在空间保持不变，因而产生了季节变化.