

学号：_____ 姓名：_____ 教师：时红艳

2018 春大学物理 C 作业五

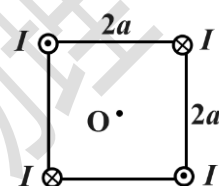
第七章 稳恒磁场

一、选择题

1. 下面关于电流密度的描述正确的是： [B]

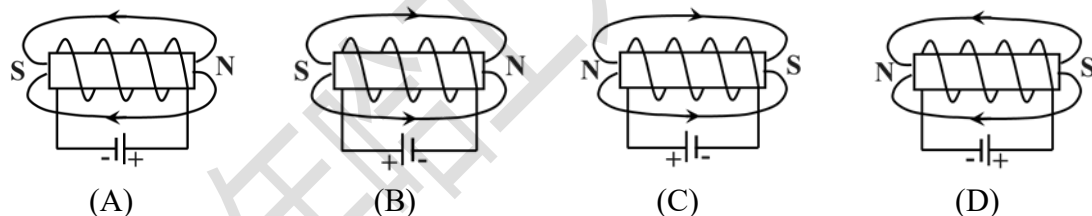
- (A) 电流密度的大小为单位时间垂直穿过单位面积的电荷量；
- (B) 电流密度的大小为单位时间穿过垂直于电流方向单位面积的电荷量；
- (C) 电流密度的大小为单位时间通过任一横截面的电荷量；
- (D) 电流密度的方向为载流子运动的方向。

2. 四条皆垂直于纸面的载流细长直导线，每条中的电流皆为 I ，这四条导线被纸面截得的断面如图所示，它们组成边长为 $2a$ 的正方形的四个顶角，电流方向如图所示，则正方形中心 O 点磁感强度的大小与 $\frac{\mu_0 I}{\pi a}$ 的比值为 [C]



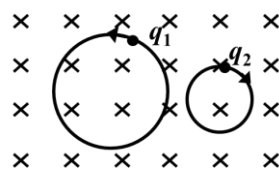
- (A) 2; (B) 1.41; (C) 0; (D) 1

3. 图示为载流铁芯螺线管，其中哪个图画得正确（即电源的正负极、铁芯的磁性、磁力线方向相互不矛盾） [C]



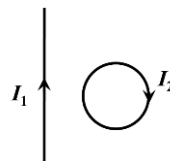
4. 如图所示，两个带电量相同 ($|q_1|=|q_2|$) 的具有相同速率的带电粒子在均匀磁场中做圆周运动，下列选项中正确的是 [A]

- (A) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$; $m_1 > m_2$ 。
- (B) $q_1 > 0$, $q_2 < 0$; $m_1 < m_2$ 。
- (C) $q_1 > 0$, $q_2 > 0$; $m_1 > m_2$ 。
- (D) $q_1 < 0$, $q_2 > 0$; $m_1 < m_2$ 。



5. 如图，无限长载流直导线与圆形载流线圈在同一平面内，若长直导线固定不动，则载流圆形线圈将 [B]

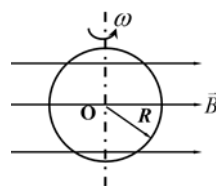
- (A) 离开长直导线平移。
- (B) 向着长直导线平移。
- (C) 不动。
- (D) 转动。



6. 有一半径为 R 、电荷线密度为 λ 的均匀带电圆环，以角速度 ω 绕其一直径旋转。现将转动圆环置入匀强磁场中，磁感强度 \vec{B} 与转轴垂直，则圆

环受到的磁力矩大小为

[A]



- (A) $\frac{\pi\lambda\omega BR^3}{2}$ (B) $\frac{\pi\lambda\omega BR^3}{4}$ (C) $\frac{\pi\lambda\omega BR^4}{2}$ (D) $\lambda\pi\omega BR^3$

二、填空题

7. 在真空中，将一根无限长载流导线在一平面内弯成如图所示的形状，并通以

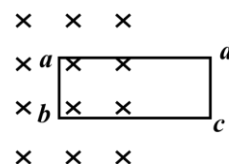
电流 I ，则圆心 O 点的磁感应强度 B 的值为: $\frac{\mu_0 I}{4a}$ 。



8. 一电量为 q 的带电粒子以角速度 ω 作半径为 R 的匀

速率圆周运动，在圆心处产生的磁感应强度 $B = \frac{\mu_0 q \omega}{4\pi R}$ 。

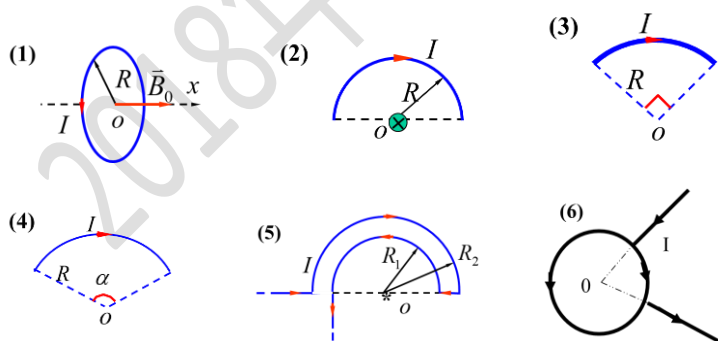
9. 匀强磁场的磁感强度大小为 0.6T ，方向为垂直纸面向里。一矩形线圈 $abcd$ 的面积为 0.4m^2 ，共 100 匝。开始， \vec{B} 与线圈平面垂直，且线圈有 $1/2$ 面积在磁场中，如图所示。当线圈绕 cd 边旋转 60° 角时，线圈中的磁通量为 60 Wb。



10. 稳恒磁场中的安培环路定理的数学表达式为 $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$ ，式中回路方向与电流正负之间的关系为 电流方向与回路绕向满足右手定则时为正，相反时为负。

三、计算题

11. (7-1 题) 求图中各种情况下圆心 O 处的磁感应强度。

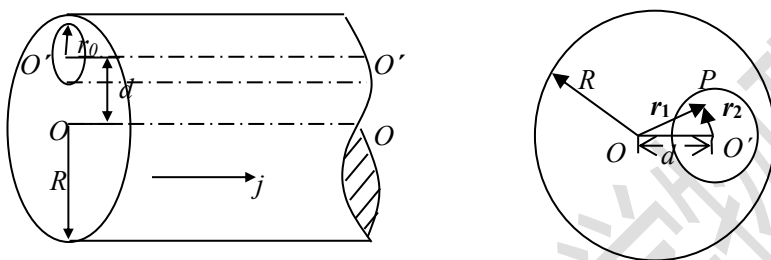


答: (1) $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R}$; (2) $B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R}$; (3) $B_0 = \frac{\mu_0 I}{8R}$;

(4) $B_0 = \frac{\mu_0 I}{2R} \frac{\alpha}{2\pi}$; (5) $B_0 = \frac{\mu_0 I}{4R_2} - \frac{\mu_0 I}{4R_1} - \frac{\mu_0 I}{4\pi R_1}$; (6) $B_0 = 0$ 。

12. (7-4) 一半径为 R 的无限长导体圆柱，在离轴线 d 处，挖掉半径为 r_0 ($r_0 < d$) 的无限长小圆柱，两圆柱的轴线互相平行，余下部分沿轴向流过均匀的电流密度。
(1) 求大圆柱轴线上的磁感应强度；(2) 求空圆柱轴线上的磁感应强度；(3) 证明挖空部分有均匀磁场。

分析 本体可采用补偿法，将本题中的空心圆柱电流假想为电流密度为 j ，半径为 R 的实心圆柱电流与电流密度为 $-j$ 的半径为 r_0 的实心圆柱电流的叠加，叠加的结果即为原载流空心圆柱体。空心圆柱体在任一点的磁感应强度为这两个载流实心圆柱体分别在此处磁感应强度的矢量和。



解 (1) 由分析可知，半径为 R 的载流圆柱体在 OO 轴上产生的 $B_1=0$ ；半径为 r_0 的载流圆柱体在 OO 轴上产生的磁感应强度由安培环路定理得

$$\oint \vec{B}_0 \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_i$$

$$B_0 2\pi d = \mu_0 \pi r_0^2 j$$

所以有

$$B_0 = \frac{\mu_0 r_0^2}{2d} j$$

方向垂直于纸面向外。

大圆柱轴线上的磁感应强度 $B = B_0 = \frac{\mu_0 r_0^2}{2d} j$ ，方向垂直于纸面向外。

(2) 同理由安培环路定理得，半径为 R 的载流圆柱体在 $O'O$ 轴上产生的磁感应强度为

$$B_1' = \frac{\mu_0 d}{2} j$$

方向垂直于纸面向外。

半径为 r_0 的实心载流圆柱体在 $O'O$ 轴上产生的磁感应强度为 $B_0' = 0$ ，

故空圆柱轴线上的磁感应强度 $B' = B_1' = \frac{\mu_0 d}{2} j$

(3) 如图所示，设 P 点为空心圆柱内的任意一点，设 $O'P=r_2$ ， $OP=r_1$ ，

$-j$ 电流在 P 点产生的磁感应强度 B_2 按照安培环路定理为

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}_2$$

同理 j 电流在 P 点产生的磁感应强度 B_1' 为

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{r}_1$$

所以 P 点的磁感应强度为

$$\vec{B}_P = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{2} \vec{j} \times \vec{d}$$

其中 \vec{d} 为由 OO 轴到 $O'O$ 轴垂直距离的指向。

故空心部分为大小和方向均不变的均匀磁场，得证。

13. (7-5 题) 半径为 R 的均匀带电球面的电势为 U ，带电球面绕其直径以角速度 ω 转动，求球心处的磁感应强度。

分析 带电球面绕其直径以角速度 ω 转动，相当于形成一个球面电流，球面电流在空间会形成磁场。球面电流可以看作由一组圆电流构成，各圆电流在球心处的磁感应强度矢量和即为球心处的磁感应强度。

解 由题可知球面所带电量

$$q = 4\pi\epsilon_0 RU$$

球面的电荷面密度

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2} = \frac{\epsilon_0 U}{R}$$

如图 10-19 所示，在球面上取一细圆环，细圆环所带电量为

$$dq = \sigma \cdot 2\pi R \sin \theta \cdot R d\theta$$

带电球面绕其直径以角速度 ω 转动，细圆环上形成的圆电流为

$$dI = \frac{\omega}{2\pi} dq = \omega \epsilon_0 U R \sin \theta d\theta$$

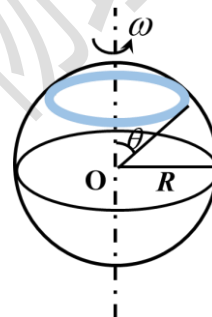
该细圆环电流在球心处的磁场大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI (R \sin \theta)^2}{2(R^2 \sin^2 \theta + R^2 \cos^2 \theta)^{3/2}} = \frac{1}{2} \mu_0 U \omega \epsilon_0 \sin^3 \theta d\theta$$

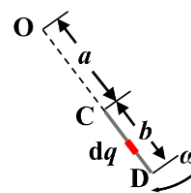
方向满足右手螺旋定则，沿其转轴向上方向。由于各圆电流在其球心处的磁场方向相同，故球心处的磁感应强度大小为

$$B = \int dB = \frac{1}{2} \omega U \epsilon_0 \mu_0 \int_0^\pi \sin^3 \theta d\theta = \frac{2}{3} \omega U \epsilon_0 \mu_0$$

方向沿其转轴向上。



14. (7-9 题) 均匀带电刚性细杆 CD ，电荷线密度为 λ ，绕垂直于图面的轴 O (O 点在细杆 CD 的延长线上) 以角速度 ω 匀速转动，求



- (1) O 点的磁感应强度 B_O ;
- (2) 磁矩 m ;
- (3) 若 $a \gg b$ ，求 B_O 及 m 。

分析 均匀带电刚性细杆 CD 绕垂直于图面的轴 O (O 点在细杆 CD 的延长线上) 以角速度 ω 匀速转动可以等效为一组同心圆电流，各圆电流在 O 点的磁感应强度矢量和即为 O 点的磁感应强度。而磁矩 $m = ISe_n$ 。

解: (1) 在 CD 上任取一线元 dr ，它距 O 点的距离为 r ，其上带电量 $dq = \lambda dr$ ，当 CD 转动时， dq 形成圆形电流，电流强度为

$$dI = \frac{\omega dq}{2\pi} = \frac{\lambda \omega}{2\pi} dr$$

此电流在 O 点的磁感应强度大小为

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \frac{dr}{r}$$

方向垂直纸面向里。

故带电线段 CD 旋转时在 O 点的总磁感应强度为

$$B_0 = \int dB = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \int_a^{a+b} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

方向为垂直纸面向里。

- (2) 旋转的带电线元 dr 的磁矩大小为

$$dm = \pi r^2 dI = \frac{\lambda \omega}{2} r^2 dr$$

方向为垂直纸面向里，故转动的带电线段 CD 的总磁矩大小为

$$m = \int dm = \int_a^{a+b} \frac{\lambda \omega}{2} r^2 dr = \frac{\lambda \omega}{6} [(a+b)^3 - a^3]$$

方向为垂直纸面向里。

- (3) 若 $a \gg b$ ，则

$$B_0 = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \ln \frac{a+b}{a} = \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \left(\frac{b}{a} + \dots \right) \approx \frac{\mu_0 \lambda \omega}{4\pi} \frac{b}{a}$$

$$m = \frac{\lambda \omega}{6} [(a+b)^3 - a^3] = \frac{\lambda \omega a^3}{6} \left[\left(1 + \frac{b}{a}\right)^3 - 1 \right] = \frac{\lambda \omega a^3}{6} \left[3 \frac{b}{a} + \dots \right] \approx \frac{1}{2} a^2 \omega \lambda b$$

B_O 、磁矩 m 方向均为垂直纸面向里。

15. (7-11 题) 如图所示, 在通过电流为 I_1 的无限长直线外, 有与它共面的边长为 a 的等边三角形, 通过电流 I_2 。三角形一边与无限长直线的距离为 d , 求等边三角形受的总安培力。

分析 将三角形导线按三个边分别计算, 分别求出三段直导线所受安培力 $\vec{F}_i = \int I d\vec{l} \times \vec{B}$, 等边三角形受的总安培力 $\vec{F} = \sum \vec{F}_i$ 。

解 电流 I_1 在右边产生磁场方向垂直纸面向里, 在 AB 边处产生的磁感应强度大小为

$$B = \mu_0 I_1 / 2\pi d$$

AB 边受到的安培力方向向左, 大小为

$$F_{AB} = I_2 a B = \mu_0 I_1 I_2 a / 2\pi d$$

三角形的三个内角 $\alpha = 60^\circ$, 在 AC 边上的电流元 $I_2 dl$ 所受磁场力为

$$dF = I_2 dl B$$

两个分量分别为 $dF_x = dF \cos \alpha$ 和 $dF_y = dF \sin \alpha$,

与 BC 边相比, 两个 x 分量大小相等, 方向相同; 两个 y 分量大小相等, 方向相反。由于 $dl = dr / \sin \alpha$, 所以有

$$F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \cot \alpha}{2\pi} \int_d^{d+a\sin\alpha} \frac{1}{r} dr = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \sqrt{3}}{6\pi} \ln \frac{d+a\sqrt{3}/2}{d}$$

方向向右。

作用在三角形线圈上的力的大小为

$$F = F_{AB} - 2F_x = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \left(\frac{a}{d} - \frac{2\sqrt{3}}{3} \ln \frac{d+a\sqrt{3}/2}{d} \right)$$

方向向左。

16. (7-15 题) 在半径 $R = 1.0\text{cm}$ 的无限长半圆柱形金属薄片, 自上而下地通有电流 $I = 5.0\text{A}$, 求圆柱轴线上任一点 P 处的磁感应强度。

分析 可以采用毕-萨定律和磁场叠加原理求解。将载流的无限长半圆形金属薄片看成由许多与轴线平行的无限长直导线组成, 导线宽度为

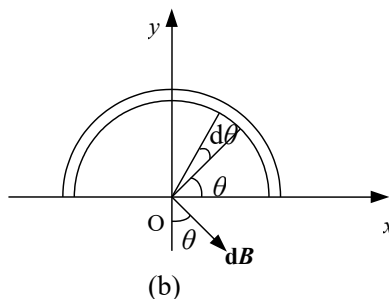
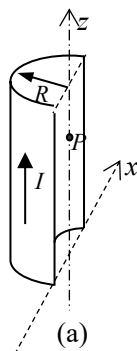
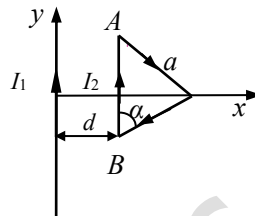
$$dl = R d\theta, \text{ 其上通有的电流为 } dI = \frac{Idl}{\pi R} = \frac{Id\theta}{\pi},$$

这些线电流在轴线上产生的磁感应强度之和即为圆柱轴线上的磁感应强度。

解 将载流的无限长半圆形金属薄片看成由许多无限长的平行直导线组成。对应于宽度为 $dl = R d\theta$ 的无限长直导线的电流

$$dI = \frac{Idl}{\pi R} = \frac{Id\theta}{\pi}$$

它在 P 点产生的磁感应强度的大小为



$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} d\theta$$

其方向是在与轴垂直的 xy 平面内, 与 dI 引向 O 点的半径垂直, 如图所示。由对称性可知, 半圆形电流在 P 处的磁感应强度在 y 方向分量相互抵消, 在 x 方向上相互加强。所以 P 点的磁感应强度大小为

$$B = \int dB_x = \int_0^\pi \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin \theta d\theta = \frac{\mu_0 I}{\pi^2 R} = 6.37 \times 10^{-5} \text{ T}$$

17. 如图所示, 一条任意形状的载流导线位于均匀磁场中, 试证明它所受的安培力等于通以相同电流的载流直导线 ab 所受的安培力。

解: 建立如图所示的直角坐标系, 任意形状导线上电流元表示为: $I d\vec{l} = I dx \vec{i} + I dy \vec{j}$,

磁感应强度: $\vec{B} = -B \vec{k}$

电流元所受到的安培力: $d\vec{F} = I d\vec{l} \times \vec{B}$

$d\vec{F} = I(dx \vec{i} + dy \vec{j}) \times (-B \vec{k})$

$d\vec{F} = IB dx \vec{j} - IB dy \vec{i}$

任意形状的载流导线受到安培力: $\vec{F} = \int_0^{b_x} IB dx \vec{j} - \int_0^{b_y} IB dy \vec{i}$, $\vec{F} = IB b_x \vec{j} - IB b_y \vec{i}$

同理得到载流直导线 ab 所受的安培力:

$\vec{F}' = \int_0^{b_x} IB dx \vec{j} - \int_0^{b_y} IB dy \vec{i}$, $\vec{F}' = IB b_x \vec{j} - IB b_y \vec{i}$

所以: $\vec{F} = \vec{F}'$, 一个在均匀磁场中任意形状的闭合载流回路受到的安培力为零。

18. 螺绕环平均周长 $l=10\text{cm}$ ($R_1 \approx R_2$), 环上线圈 $N=200$ 匝, 线圈中电流 $I=100\text{mA}$,

试求: (1) 管内 H 和 B 的大小;

(2) 若管内充满相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的磁介质, 管内的 B 和 H 的大小。

解: 选取如图所示的环形回路

根据介质中的安培环路定理: $\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I$

$H \cdot 2\pi r = NI$

磁场强度: $H = \frac{NI}{2\pi r}$, $H = 200 \text{ A/m}$, 磁感应强度: $B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$,

$B = 8\pi \times 10^{-5} \text{ T}$

如果管内充满相对磁导率 $\mu_r = 4200$ 的磁介质: 磁场强度: $H = \frac{NI}{2\pi r}$, $H = 200 \text{ A/m}$

磁感应强度: $B = \mu_r \mu_0 H$, $B = \frac{\mu_r \mu_0 NI}{2\pi r}$, $B = 2.26\pi \times 10^{-1} \text{ T}$

