第一篇 力学 (*mechanics*)

力学---研究物体的机械运动

两种基本运动形式：

1. 平动--- 任意两点间的连线
   恒保持平行的运动形式

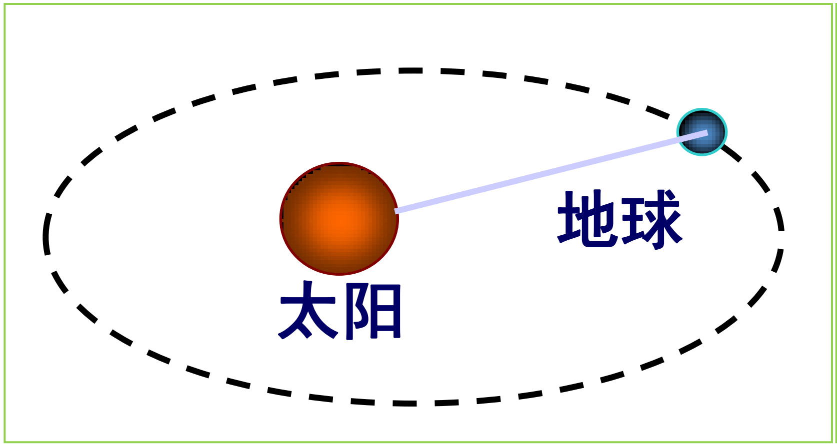
2．定轴转动---各点绕同一固定轴作圆周运动的运动形式

两个基本模型：

1. 质点--把实际物体看成只有质量而无大小
   形状的力学研究对象。

注意：

- 物体能否抽象为质点，视具体情况而定.



地—日平均间距：

1.53×10^8 km

地球半径：

6.373×10^3 km

- 不能看成质点的物体可看成质点的集合----质点系

2. 刚体---任何情况下大小形状都不发生变化的力学研究对象

第一章 质点运动学(*kinematics*)

本章内容

1 质点运动的描述

2 加速度为恒矢量的质点运动

3 圆周运动

4 相对运动

第一章 质点运动学(*kinematics*)

§1 描述质点运动的基本概念与基本物理量

一、描述质点运动的基本概念

1 参考系

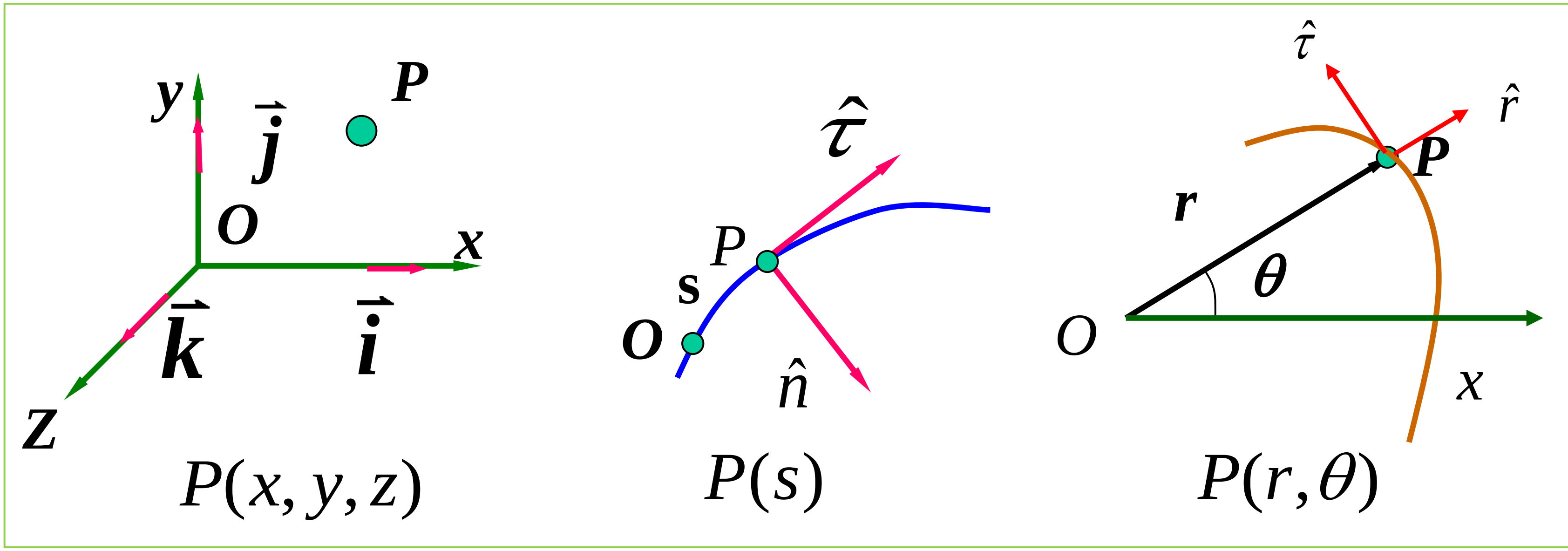
为描述物体的运动而选择的标准物叫做**参考系**。

运动描述的**相对性**

2 坐标系（Coordinate System）

固结在参考系上的一组有刻度的射线、曲线或角度。

——常用的坐标系



直角坐标系　　自然坐标系　　极坐标系

3 质点(particle)

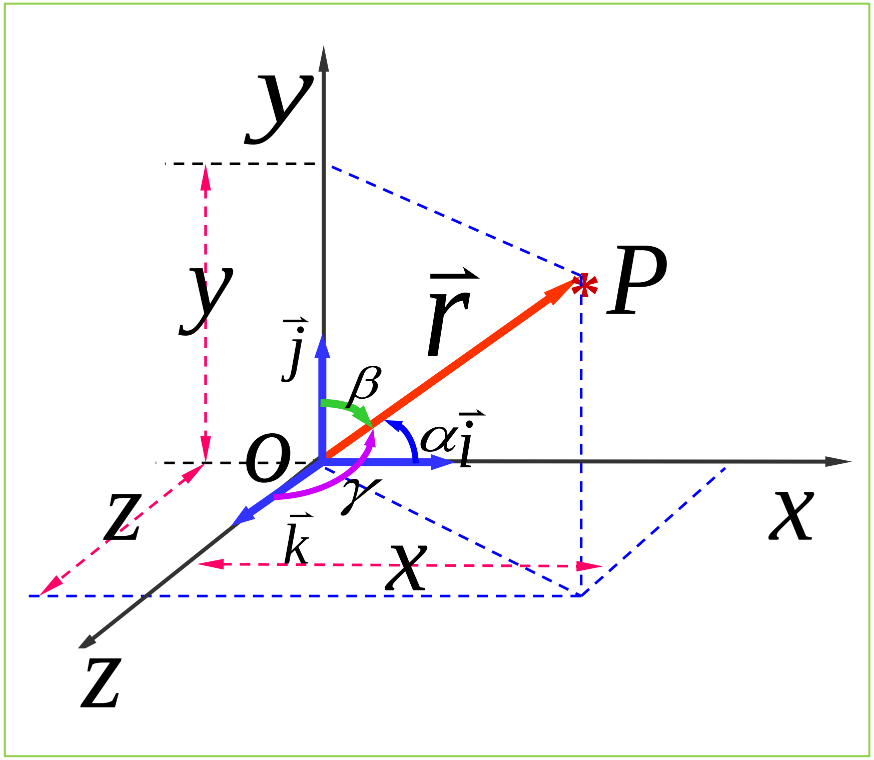
研究某一物体的运动，若不涉及物体的转动和形变，物体可作一个具有质量的点（即**质点**）来处理。

- 质点具有**理想性**、**抽象性**和**相对性**的特点。

二、位置矢量 运动方程 位移

1 位置矢量(position vector)

确定质点P某一时刻的空间位置的物理量称**位置矢量**，简称**位矢** $\vec{r}$ 。



直角坐标系中：

$$\vec{r} = \overrightarrow{OP} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

位矢 $\vec{r}$ 的值为

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

位矢 $\vec{r}$ 的方向余弦

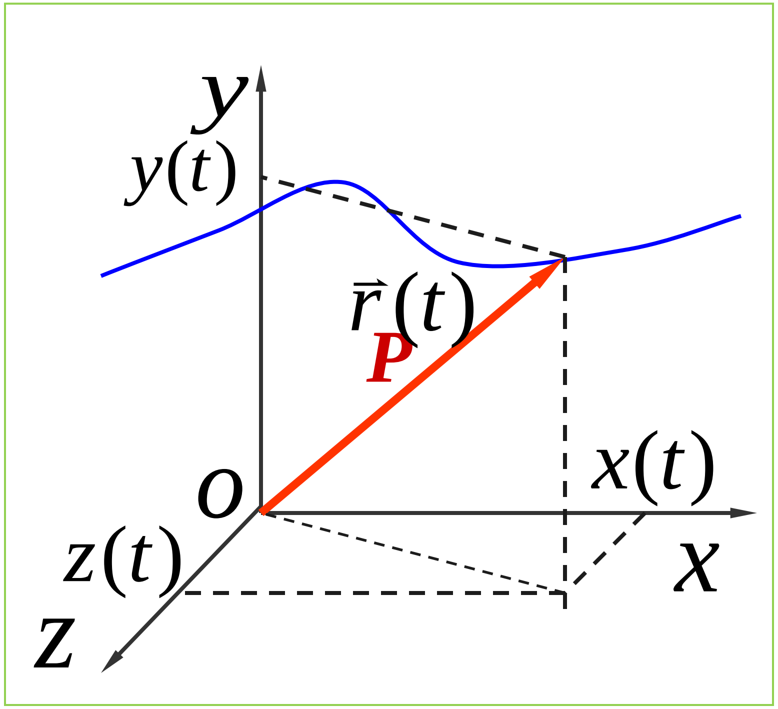
$$\begin{cases} \cos\alpha = x/r \\ \cos\beta = y/r \\ \cos\gamma = z/r \end{cases}$$

2 运动方程：表示质点位置和时间的函数关系

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

（运动函数）

分量式
$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

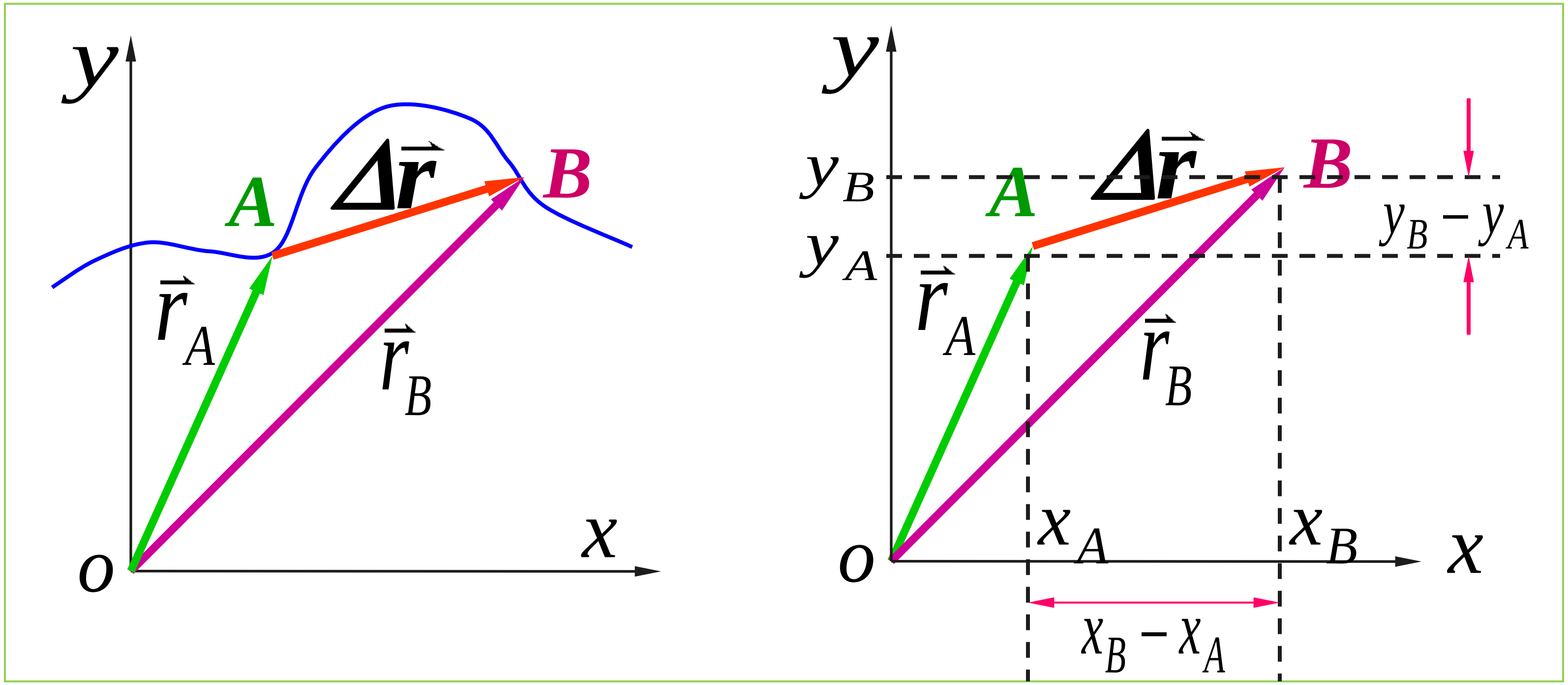


从中消去参数 t 得轨迹方程

$$f(x, y, z) = 0$$

物体的运动方程和轨迹方程与坐标系的选择有关

3　位移(displacement)



$$\because \quad \vec{r}_B = \vec{r}_A + \Delta\vec{r} \qquad\qquad \therefore \quad \Delta\vec{r} = \vec{r}_B - \vec{r}_A$$

经过时间间隔 Δt 后，由始点 A 指向终点 B 的有向线段 $\overrightarrow{AB}$ 称为点 A 到 B 的位移矢量$\Delta\vec{r}$ 。 **位移矢量**也简称**位移**。

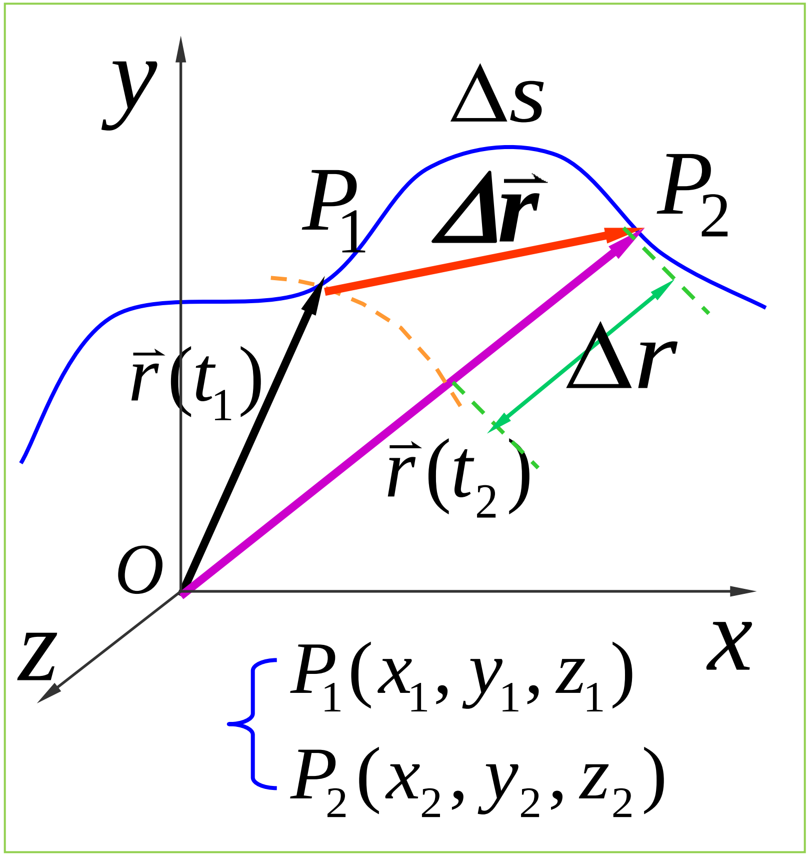
$$\Delta\vec{r} = (x_B - x_A)\vec{i} + (y_B - y_A)\vec{j} + (z_B - z_A)\vec{k}$$

位移的大小为 $|\Delta\vec{r}| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$

位移的物理意义

（A） 确切反映物体在空间位置的变化, 与路径无关，只决定于质点的始末位置。

（B） 反映了运动的矢量性和叠加性。



$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}$$

$$\left|\Delta\vec{r}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

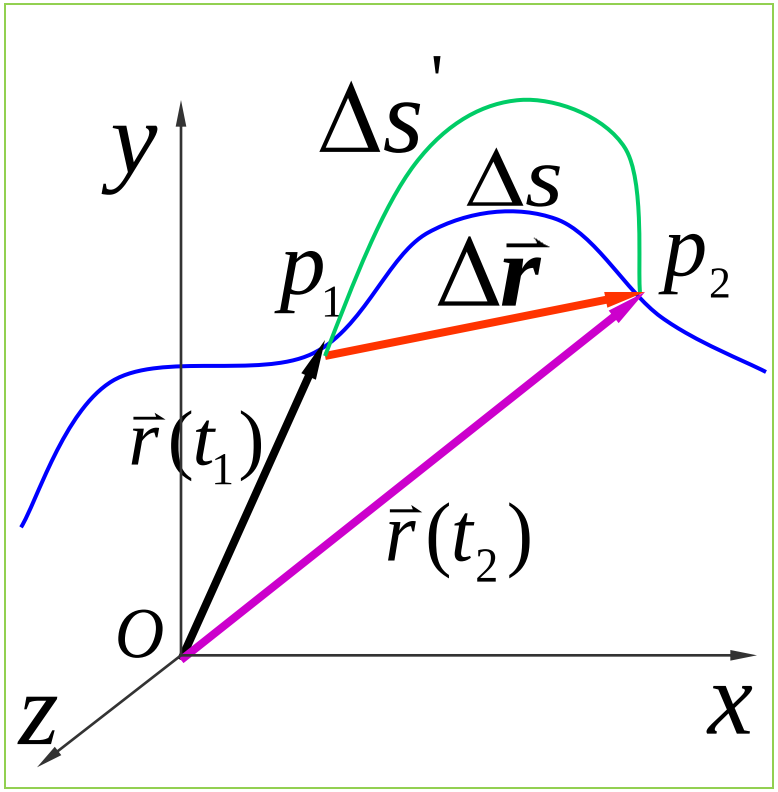
注意

$$\left|\Delta\vec{r}\right| \neq \Delta r$$

位矢长度的变化

$$\Delta r = \sqrt{x_2^{\ 2} + y_2^{\ 2} + z_2^{\ 2}} - \sqrt{x_1^{\ 2} + y_1^{\ 2} + z_1^{\ 2}}$$

讨论： **位移与路程**



（**A**）P_1P_2 两点间的路程是不唯一的；而位移是唯一的。

（**B**） 一般情况，位移大小不等于路程。 $|\Delta\vec{r}| \neq \Delta s$

（**C**）什么情况 $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$?

不改变方向的直线运动； $|\Delta\vec{r}| = \Delta s$

$\Delta t \to 0,\quad |\mathrm{d}\vec{r}| = \mathrm{d}s$

（**D**）位移是矢量，路程是标量。

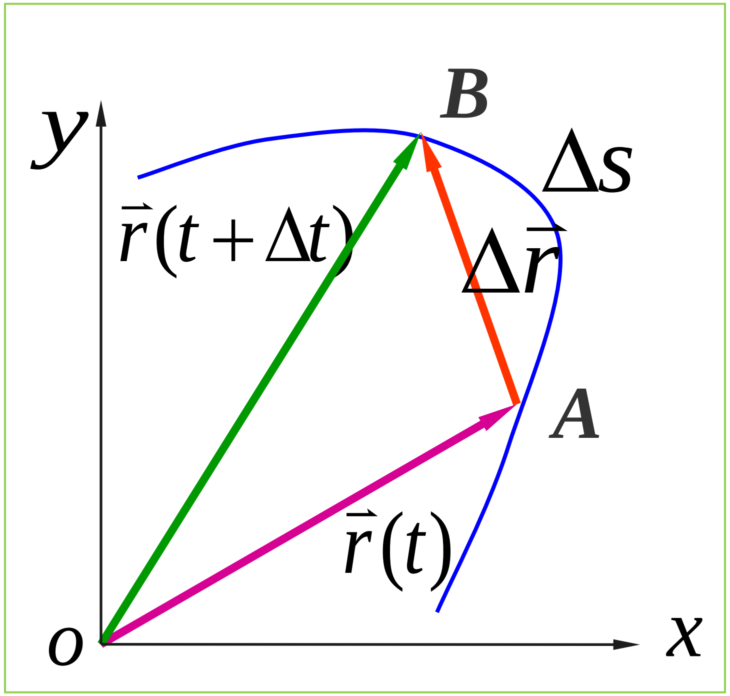
三、速度(*velocity*)

1 平均速度(*average velocity*)

Δt 时间内，质点的平均速度

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

平均速度 $\overline{\vec{v}}$ 与 $\Delta \vec{r}$ 同方向。



若质点在三维空间中运动:

$$\overline{\vec{v}} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\vec{k}$$

或 $\overline{\vec{v}} = \overline{v}_x \vec{i} + \overline{v}_y \vec{j} + \overline{v}_z \vec{k}$

2 瞬时速度(*instantaneous velocity*)

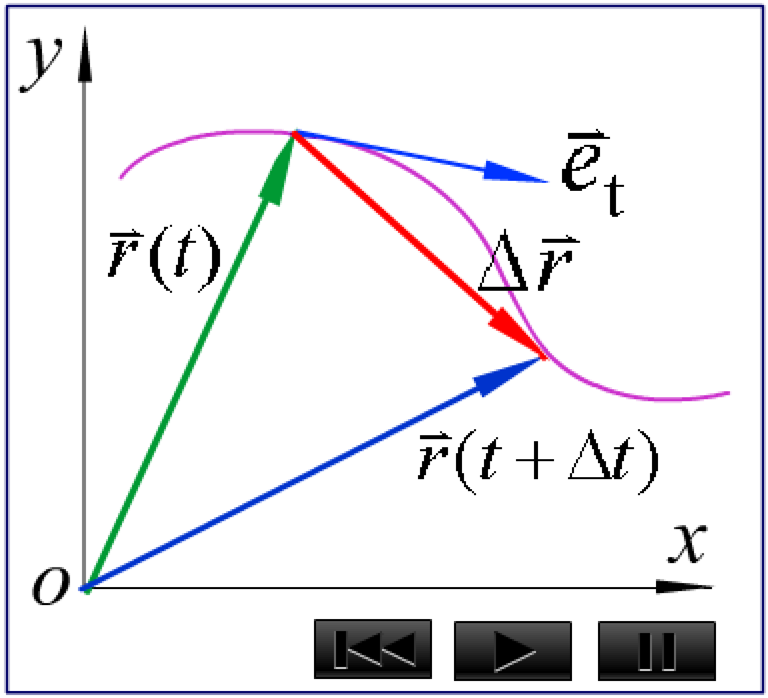
当 $\Delta t \to 0$时平均速度的极限值叫做瞬时速度，简称速度。

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

质点在某一点的速度方向就是沿该点曲线的切线方向。

2 瞬时速度(*instantaneous velocity*)

$$\vec{v}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$



在三维空间中

$$\vec{v}=\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\right)$$

$$=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

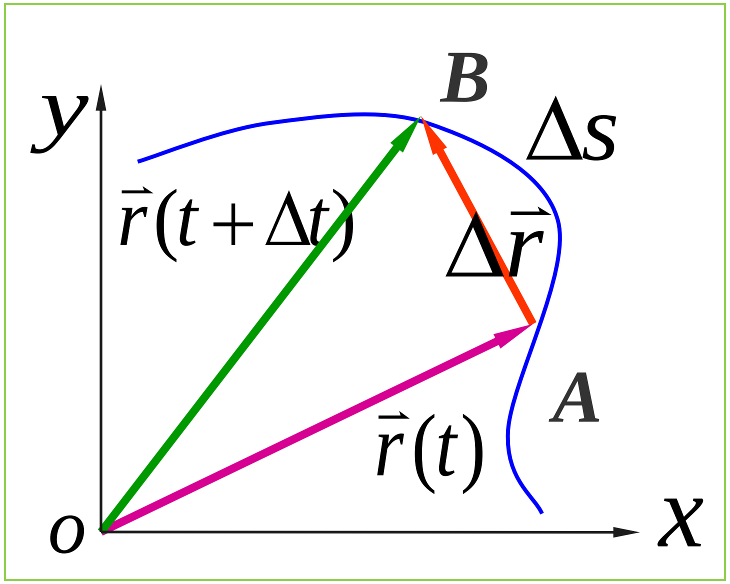
$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}+v_z\vec{k}$$

瞬时速率(*instantaneous speed*)：速度 $\vec{v}$ 的大小称为速率

$$v=|\vec{v}|=\sqrt{(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2+(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t})^2}\qquad \because\ \vec{v}=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\hat{\tau}\qquad \therefore\ v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

平均速率 $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$

瞬时速率 $v = \dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$



思考题:

一运动质点在某瞬时的矢径为 $\vec{r}(x, y)$，其速度大小为 ______ ?

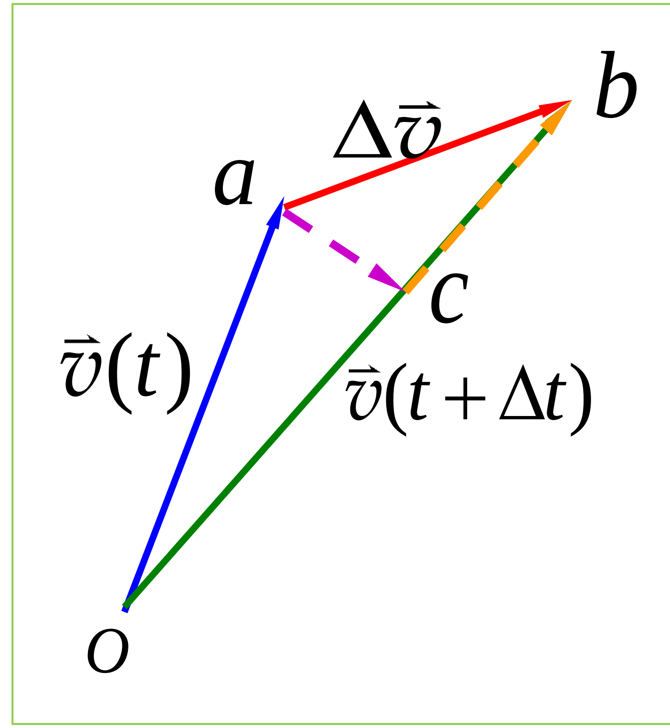
（A） $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ （B） $\dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

（C） $\dfrac{\mathrm{d}|\vec{r}|}{\mathrm{d}t}$ （D） $\sqrt{(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t})^2 + (\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t})^2}$

讨论： $\left|\Delta\vec{v}\right| \neq \Delta v$ 吗？

$$\Delta\vec{v}=\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)$$

$$\left|\Delta\vec{v}\right|=\left|\vec{v}(t+\Delta t)-\vec{v}(t)\right|$$



在Ob上截取 $\overline{Oc}=\overline{Oa}$

有 $\Delta v=\overline{cb}$

$$\Delta\vec{v}=\overrightarrow{cb}+\overrightarrow{ac}=\Delta\vec{v}_{\mathrm{n}}+\Delta\vec{v}_{\tau}$$

$\Delta\vec{v}_{\tau}=\overrightarrow{cb}$ 速度大小变化

$\Delta\vec{v}_{n}=\overrightarrow{ac}$ 速度方向变化

例 1 设质点的运动方程为 $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$,

其中 $x(t)=t+2\ (\mathrm{SI})$, $y(t)=0.25t^2+2\ (\mathrm{SI})$.

求(1) $t=3\ \mathrm{s}$ 时的速度；(2)轨迹方程及轨迹曲线。

解 （1）由题意可得速度分量分别为

$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=1$$

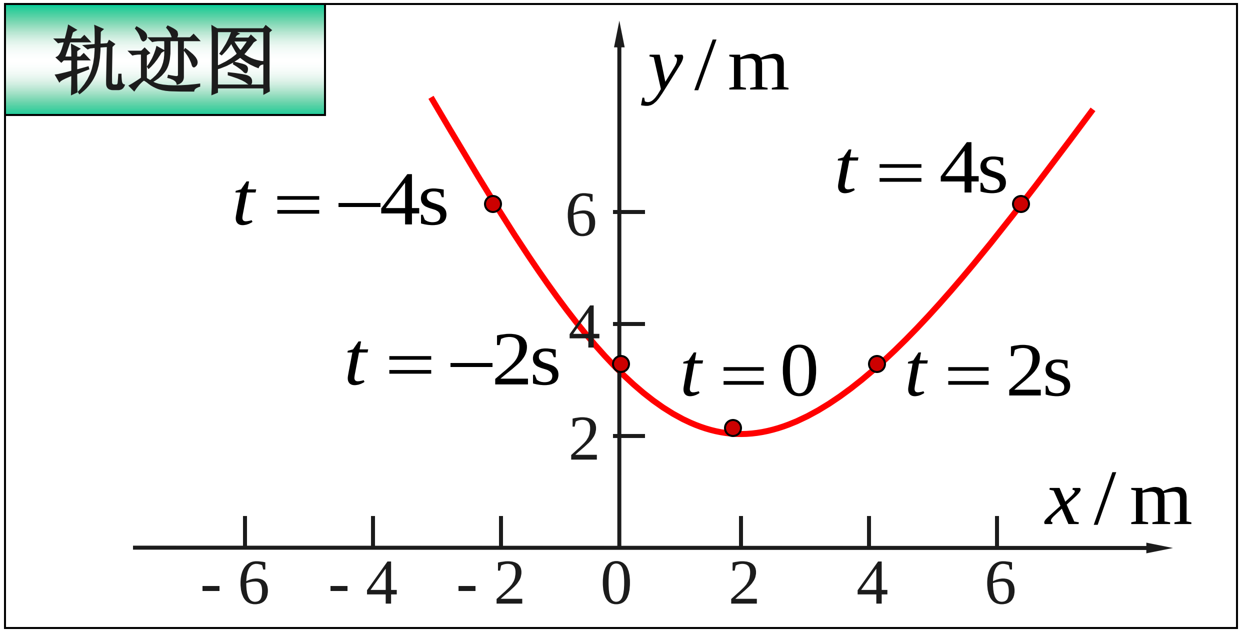
$$v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=0.5t$$

$t=3\ \mathrm{s}$ 时速度为 $\vec{v}=1.0\vec{i}+1.5\vec{j}\left(\mathrm{m\cdot s^{-1}}\right)$

（2） 运动方程 $\begin{cases} x(t) = t + 2 \\ y(t) = 0.25t^2 + 2 \end{cases}$

由运动方程消去参数 t 可得轨迹方程为

$$y = \frac{1}{4}x^2 - x + 3$$

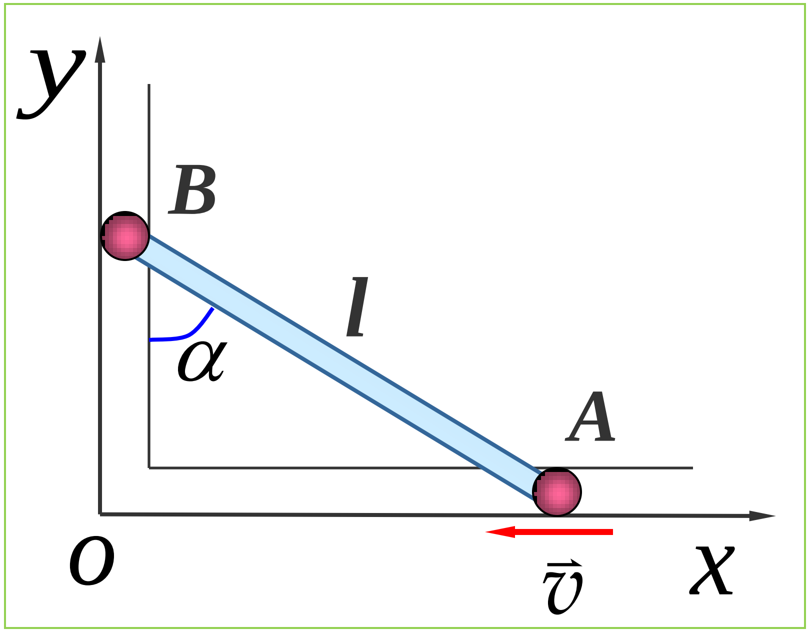


例2 如图所示，A、B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A、B 两物体可在光滑轨道上滑行。如物体A以恒定的速率 v 向左滑行，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，物体B的速率为多少？

解 建立坐标系如图，

物体A 的速度

$$\vec{v}_A = v_x \vec{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -v\vec{i}$$



物体B 的速度

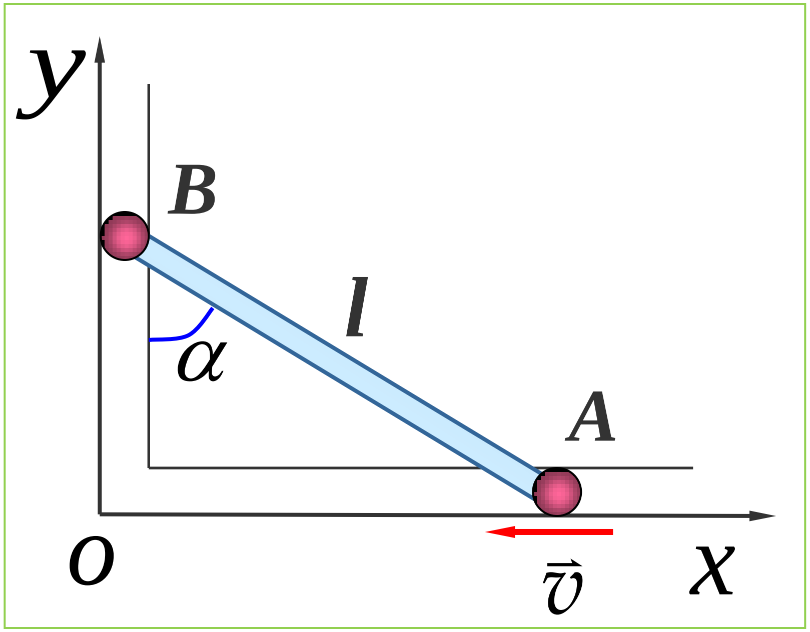
$$\vec{v}_B = v_y \vec{i} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

OAB为一直角三角形，刚性细杆的长度 l 为一常量

$$x^2 + y^2 = l^2$$

两边求导得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$



即： $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{v}_B = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v, \quad \tan\alpha = \frac{x}{y} \qquad \therefore \vec{v}_B = v\tan\alpha\,\vec{j}$$

$\vec{v}_B$ 沿 y 轴正向，当 $\alpha = 60^\circ$时，$v_B = 1.73v$

四、加速度(*acceleration*) ——速度矢量的变化率

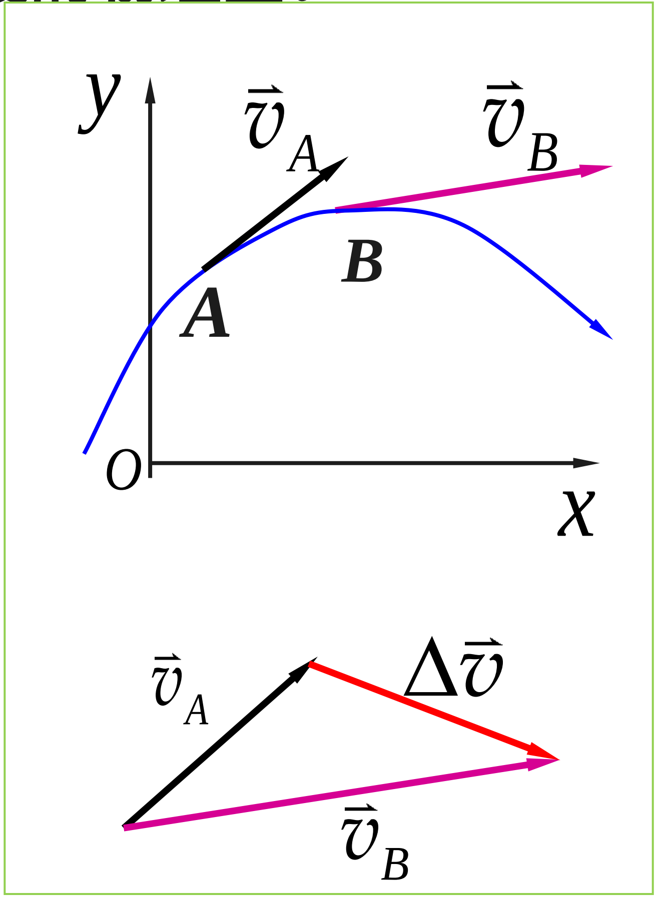
——反映速度变化快慢的物理量。

1 平均加速度

单位时间内的速度增量即平均加速度

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$\bar{\vec{a}}$ 与 $\Delta\vec{v}$ 同方向。



2 瞬时加速度（加速度）

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}$$

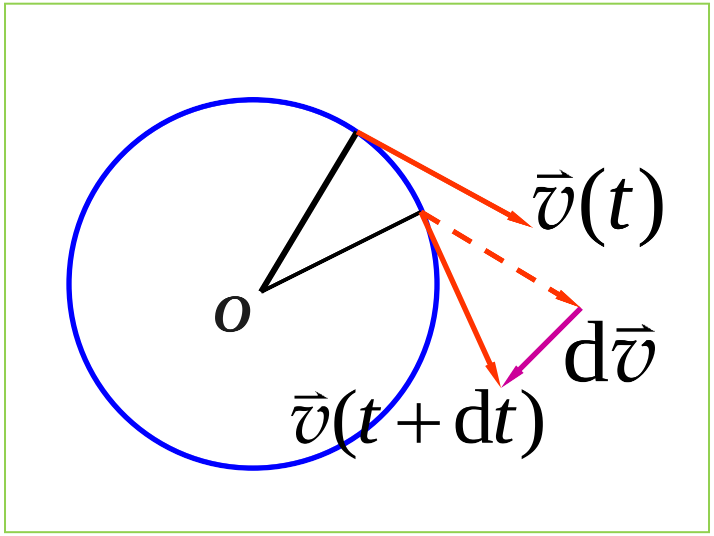
质点作三维运动时加速度为

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\vec{k}$$

$$= \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{i} + \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}\vec{j} + \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}\vec{k}$$

加速度大小 $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

讨论： 问 $\left|\vec{a}\right| = a \neq \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ 吗？



例 匀速率圆周运动

因为 $v(t) = v(t+\mathrm{d}t)$

所以 $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \equiv 0$$

而 $$\left|\vec{a}\right| = a \neq 0$$

所以 $$a \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

质点运动学两类基本问题

1. 由质点的运动方程可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

2. 已知质点的加速度以及初始条件（即：初始速度和初始位置），可求质点速度及其运动方程。

$$\vec{r}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$

第二类问题：

加速度为恒矢量时质点的运动方程

初始条件 $(t=0)$ $\begin{cases} \vec{r}_0 \\ \vec{v}_0 \end{cases}$

已知一质点作平面运动，其加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量, 有

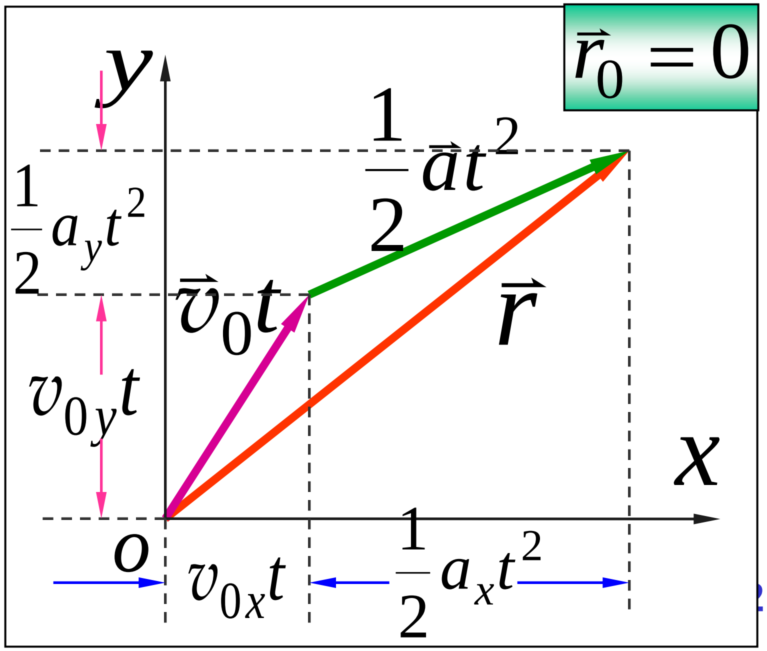
$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{\vec{v}_0}^{\vec{v}}\mathrm{d}\vec{v}=\int_0^t \vec{a}\,\mathrm{d}t$$

积分可得 $\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$

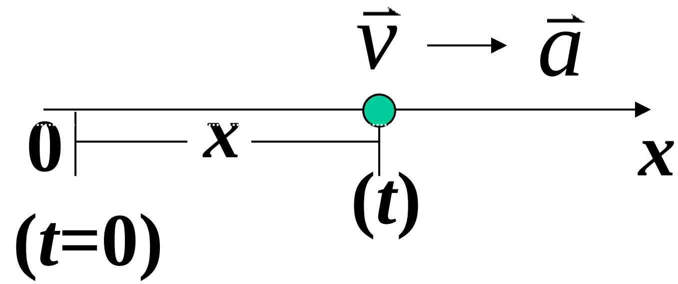
$$\mathrm{d}\vec{r}=\vec{v}\,\mathrm{d}t$$

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}}\mathrm{d}\vec{r}=\int_0^t(\vec{v}_0+\vec{a}t)\mathrm{d}t$$

积分可得 $\vec{r}-\vec{r}_0=\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$



例 匀加速直线运动



已知一质点作一直线运动，

其加速度 $\vec{a}$ 为恒矢量，

已知：a 和 初始条件 (t=0) $\begin{cases} x_0 \quad (x_0 = 0) \\ v_0 \end{cases}$ 求：$x(t) = ?$ $v(t) = ?$

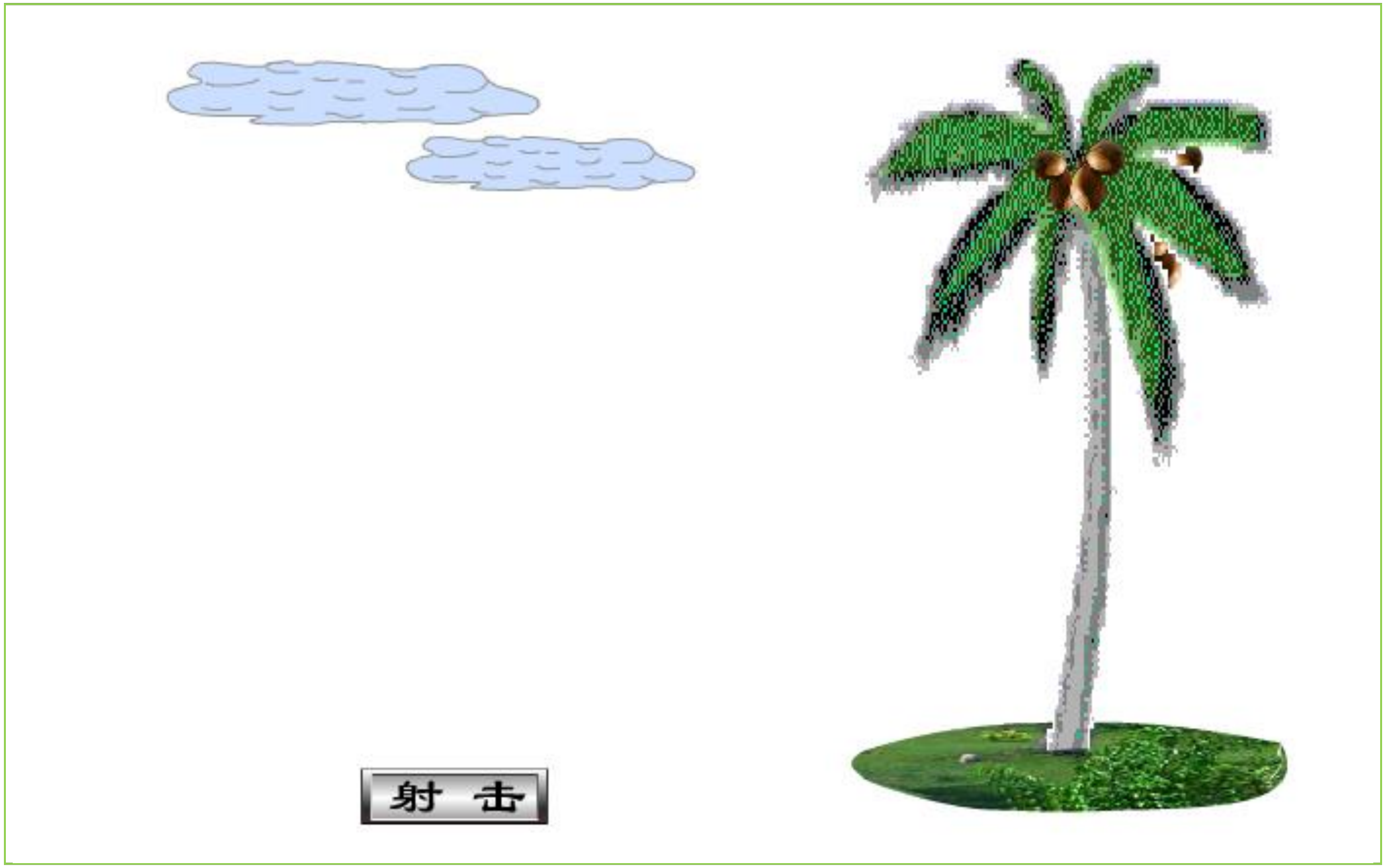
解：

$$a = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{v_0}^{v} \mathrm{d}v = \int_0^t a\,\mathrm{d}t \longrightarrow \boxed{v = v_0 + at}$$

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \qquad \int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x = \int_0^t (v_0 + at)\mathrm{d}t$$

$$\longrightarrow x = \boxed{x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2}$$

例 运动的叠加——斜抛运动

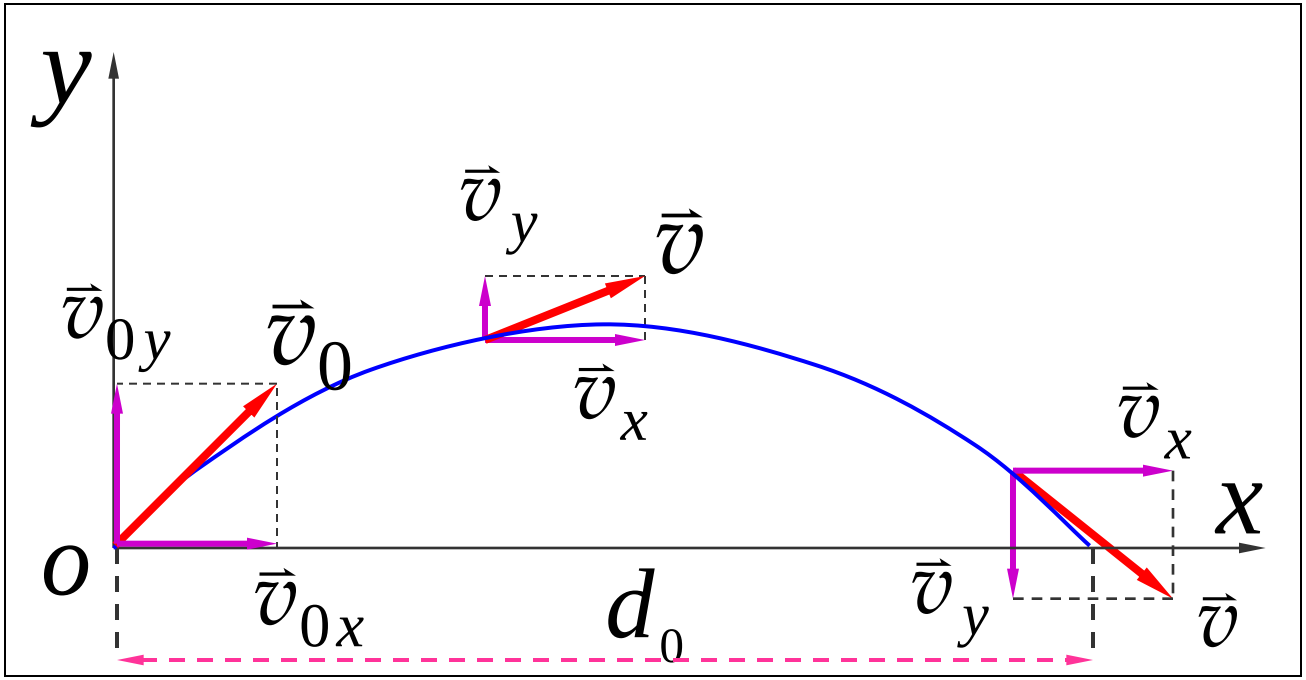


当子弹从枪口射出时，椰子刚好从树上由静止自由下落．试说明为什么子弹总可以射中椰子？

求斜抛运动的轨迹方程和最大射程

已知 $a_x = 0$ $a_y = -g$， $t = 0$ 时 $x_0 = y_0 = 0$

$$v_{0x} = v_0 \cos\alpha \qquad v_{0y} = v_0 \sin\alpha$$



$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = v_0 \cos\alpha \cdot t \qquad y = v_0 \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

消去方程中的参数 t 得轨迹：$y = x\tan\alpha - \dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x^2$

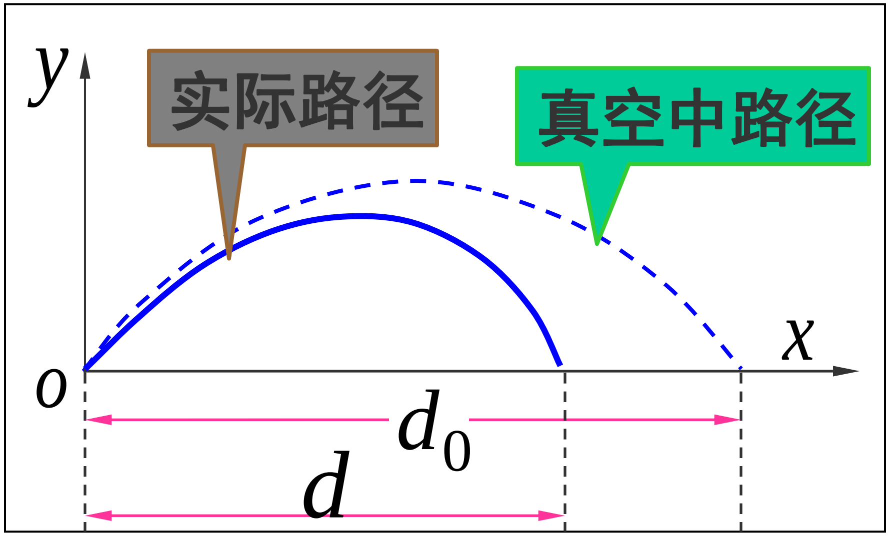
求最大射程

$$d_0 = \frac{2v_0^2}{g}\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\frac{\mathrm{d}d_0}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{2v_0^2}{g}\cos 2\alpha = 0$$

$$\alpha = \pi/4$$

最大射程 $d_{0\mathrm{m}} = v_0^2 / g$



由于空气阻力，实际射程小于最大射程。

☞抛体运动的矢量分析

$$v_x = v_0 \cos\theta$$
$$v_y = v_0 \sin\theta - gt$$

速度的矢量形式为

$$\vec{v} = (v_0 \cos\theta)\vec{i} + (v_0 \sin\theta - gt)\vec{j}$$

即 $$\vec{v} = [(v_0 \cos\theta)\vec{i} + (v_0 \sin\theta)\vec{j}] - gt\,\vec{j}$$

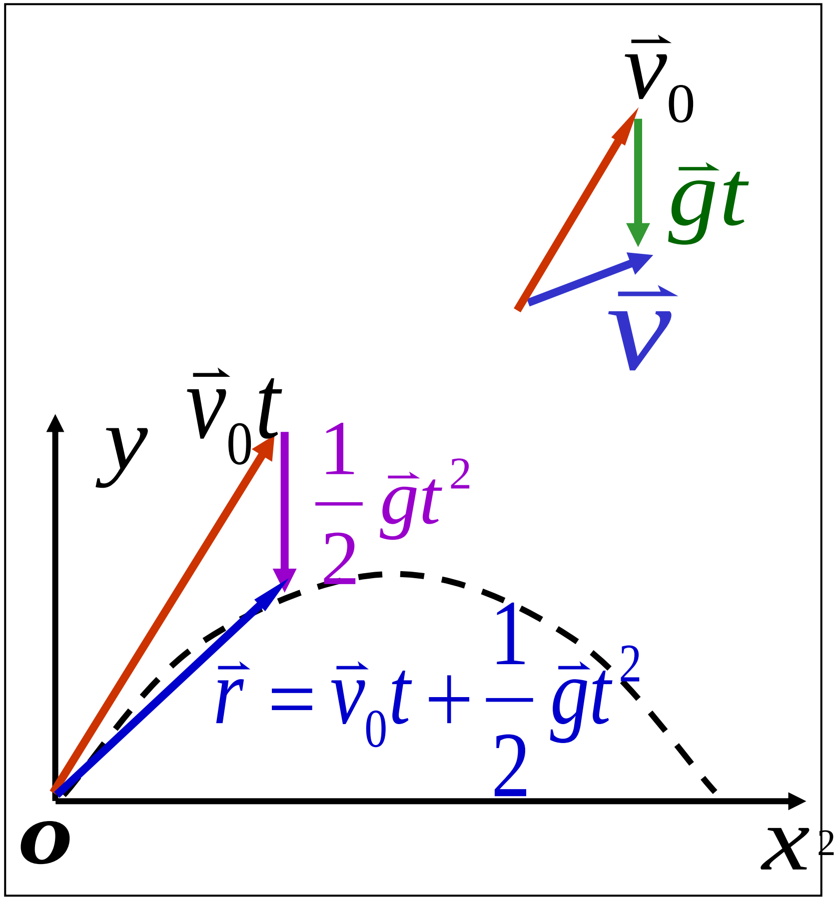
$$\vec{g} = -g\vec{j}$$

$$= \vec{v}_0 + \vec{g}t$$

$$\because \vec{v} = \mathrm{d}\vec{r}/\mathrm{d}t$$

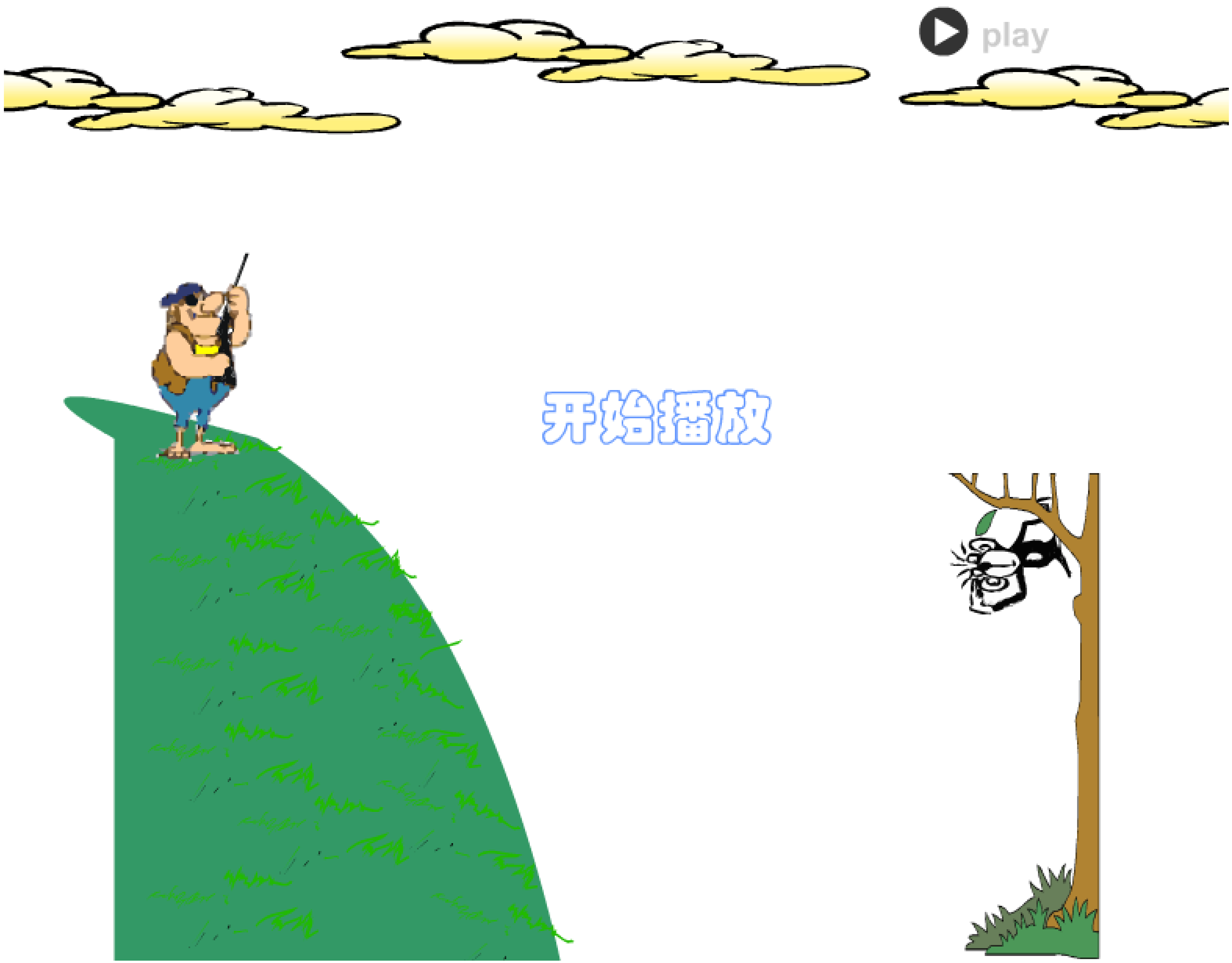
$$\therefore \vec{r} = \int_0^t \vec{v}dt = \int_0^t (\vec{v}_0 + \vec{g}t)dt$$

$$= \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{g}t^2$$



☞初速度方向的匀速直线运动和竖直方向的自由落体运动的叠加

-----归结为直线运动的叠加


play
开始播放