§3 功　动能定理

力的空间累积效应: $\vec{F}$ 对 $\vec{r}$ 积累 ⟶ A，动能定理。

一、功 (*Work*)

　　力对质点所做的功为力在质点位移方向的分量与位移大小的乘积。（功是标量，过程量）

1. 恒力所做的功

$$A = F\cos\theta\left|\Delta\vec{r}\right| = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$$

2. 变力所做的功

$$A = \int_A^B \vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B F\cos\theta\mathrm{d}s$$

➢质点合力的功 = 分力的功的代数和

$$A = \int\sum\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum\int\vec{F}_i\cdot\mathrm{d}\vec{r} = \sum_i A_i$$

3. 功率(*power*)

平均功率 $$\bar{P} = \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

瞬时功率 $$P = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$P = Fv\cos\theta$$

等于力在速度方向的分量和速度大小的乘积。

功率的单位：瓦特（W） $1\mathrm{W} = 1\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$ $1\mathrm{kW} = 10^3\,\mathrm{W}$

例 如图所示，一质点在几个力的作用下，沿半径为 R 的圆周运动，其中一个力是恒力 F_0，方向始终沿 x 轴正方向，即

$$\vec{F}_0 = F_0\vec{i}$$

当质点从 A 点沿逆时针方向走过 3/4 圆周到达 B点时，$\vec{F}_0$ 所做的功为 ______________________________

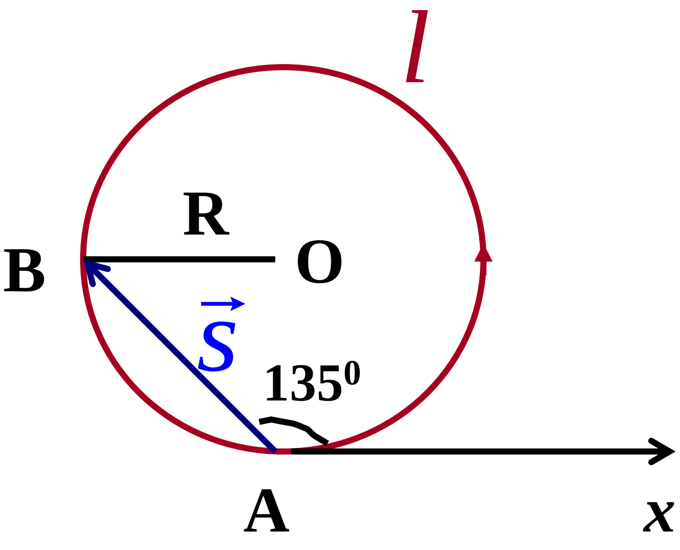
解：

$$dA = \vec{F}_0 \cdot d\vec{r}$$

$$A = \int_l \vec{F}_0 \cdot d\vec{r} = \vec{F}_0 \cdot \left(\int_l d\vec{r}\right)$$

$$= \vec{F}_0 \cdot \vec{S} = F_0 S \cos\alpha$$

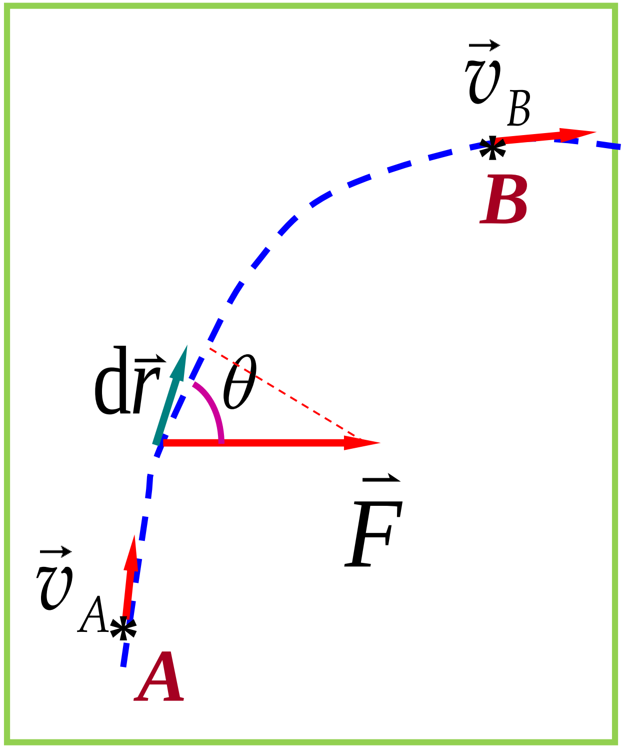
$$= F_0 \cdot \sqrt{2} R \cos 135^0 = -F_0 R$$



二、质点的动能定理
(*Theorem of Kinetic Energy*)

合力对质点做功为：

$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int F_\tau\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|=\int F_\tau\mathrm{d}s$$



由牛顿第二定律可得：

$$F_\mathrm{t}=ma_\tau=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$A=\int_{v_A}^{v_B}m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}s$$

$$=\int_{v_A}^{v_B}mv\mathrm{d}v=\frac{1}{2}mv_B^2-\frac{1}{2}mv_A^2$$

定义：动能（*Kinetic Energy* 状态函数）——

$$\boxed{E_\mathrm{k}=\frac{1}{2}mv^2}$$

动能定理(*Theorem of Kinetic Energy*)

——合力对质点所作的功数值上等于该质点动能的增量。

$$\boxed{A = E_{\mathrm{kB}} - E_{\mathrm{kA}} = = \Delta E_k}$$

注意：

功和动能都与 参考系有关；动能定理仅适用于惯性系 。

例 1 一质量为1.0kg 的小球系在长为1.0m 细绳下端，绳的上端固定在天花板上。起初把绳子放在与竖直线成 30°角处，然后放手使小球沿圆弧下落。试求绳与竖直线成 10°角时小球的速率。

解：

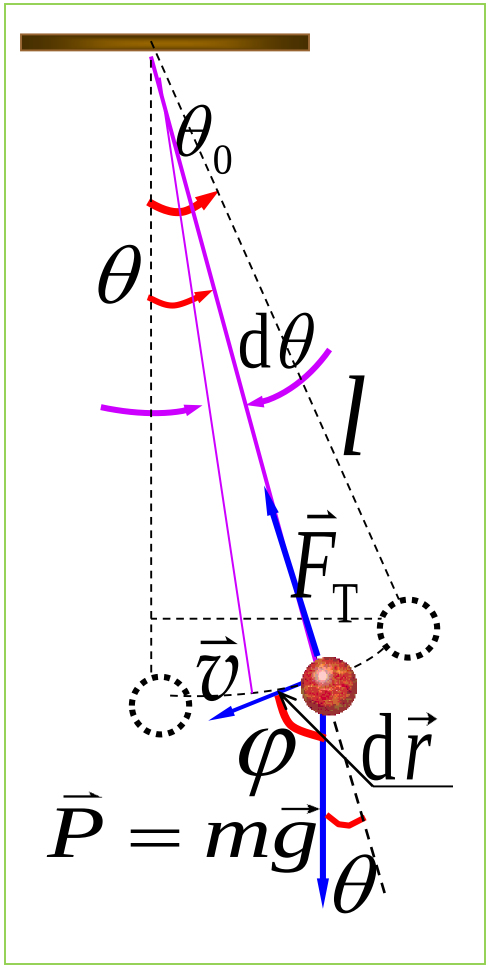
$$\mathrm{d}A=\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\vec{F}_{\mathrm{T}}\cdot\mathrm{d}\vec{r}+\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$=\vec{P}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-mgl\,\mathrm{d}\theta\cos\varphi$$

$$=-mgl\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

$$A=-mgl\int_{\theta_0}^{\theta}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta$$

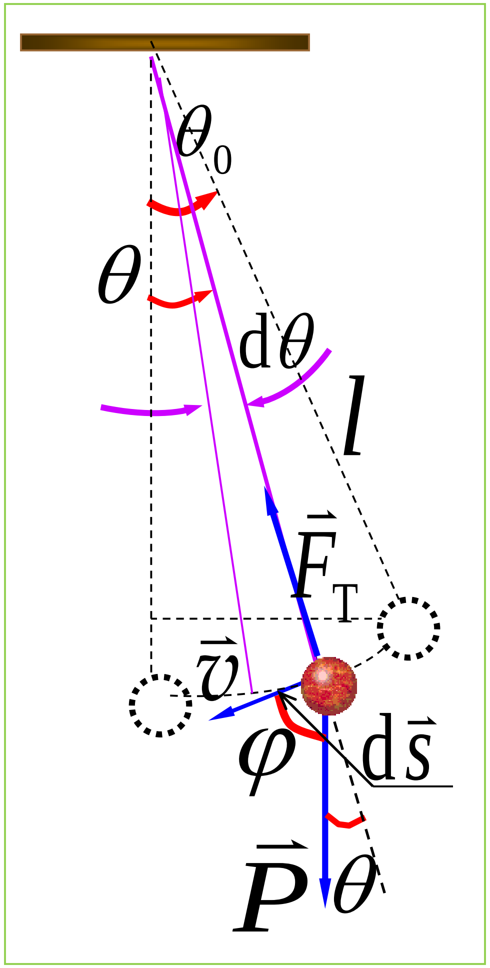
$$=mgl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$



$$m = 1.0\text{kg} \qquad l = 1.0\text{m}$$

$$\theta_0 = 30^\circ \qquad \theta = 10^\circ$$

$$A = mgl(\cos\theta - \cos\theta_0)$$



由动能定理

$$A = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

得 $$v = \sqrt{2gl(\cos\theta - \cos\theta_0)}$$

$$= 1.53\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

§4 势能(*Potential Energy*)

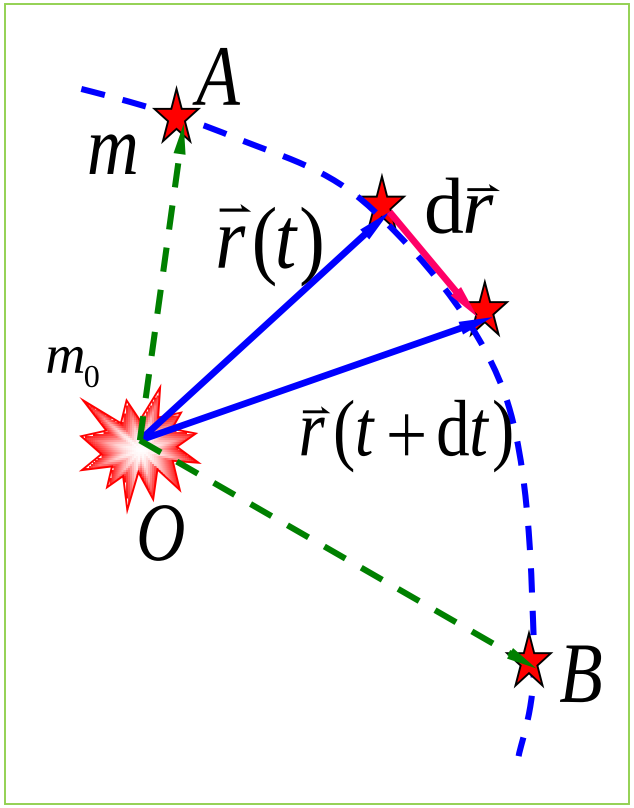
一、万有引力、重力、弹性力作功的特点

1.万有引力作功

以m_0为参考系，m的位置矢量为 $\vec{r}$ 。

m_0对m的万有引力为

$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m_0 m}{r^3}\vec{r}}$$



m 由 A 点移动到 B 点时，$\vec{F}$ 作功为

$$A = \int \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_A^B -G\frac{m_0 m}{r^3}\vec{r}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

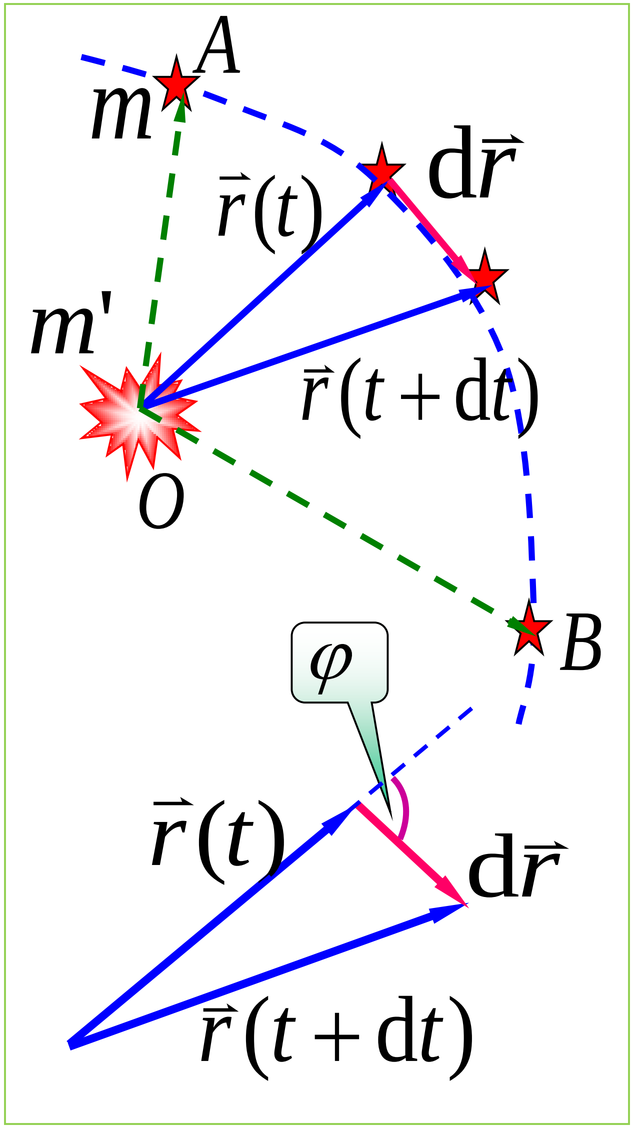
$$A=\int\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=\int_A^B -G\frac{m'm}{r^3}\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}$$

$$\vec{r}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=r\left|\mathrm{d}\vec{r}\right|\cos\varphi=r\mathrm{d}r$$

$$A=\int_{r_A}^{r_B}-G\frac{m'm}{r^2}\mathrm{d}r$$

$$A=-\left[(-G\frac{m'm}{r_B})-(-G\frac{m'm}{r_A})\right]$$

$$A=\oint -G\frac{m'm}{r^2}\mathrm{d}r=0$$



2. 重力作功

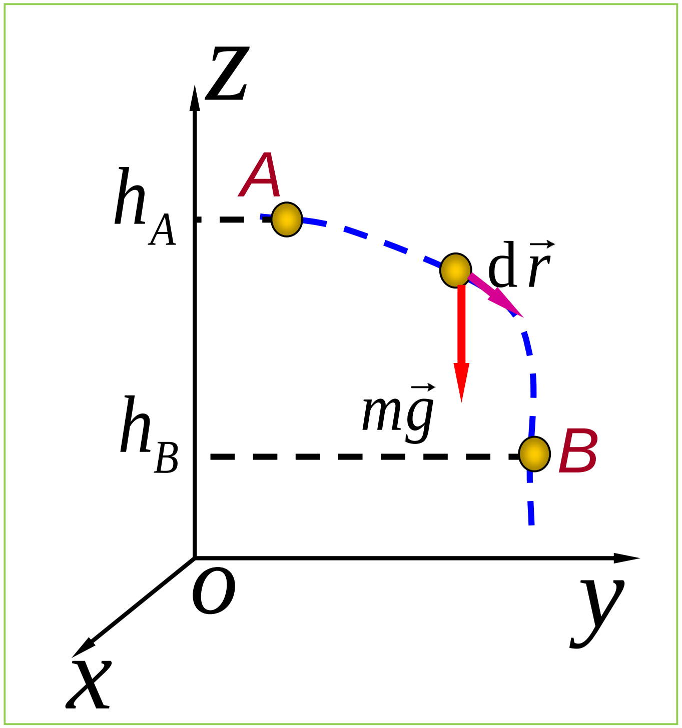
$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{k}}$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}x\vec{i} + \mathrm{d}y\vec{j} + \mathrm{d}z\vec{k}$$

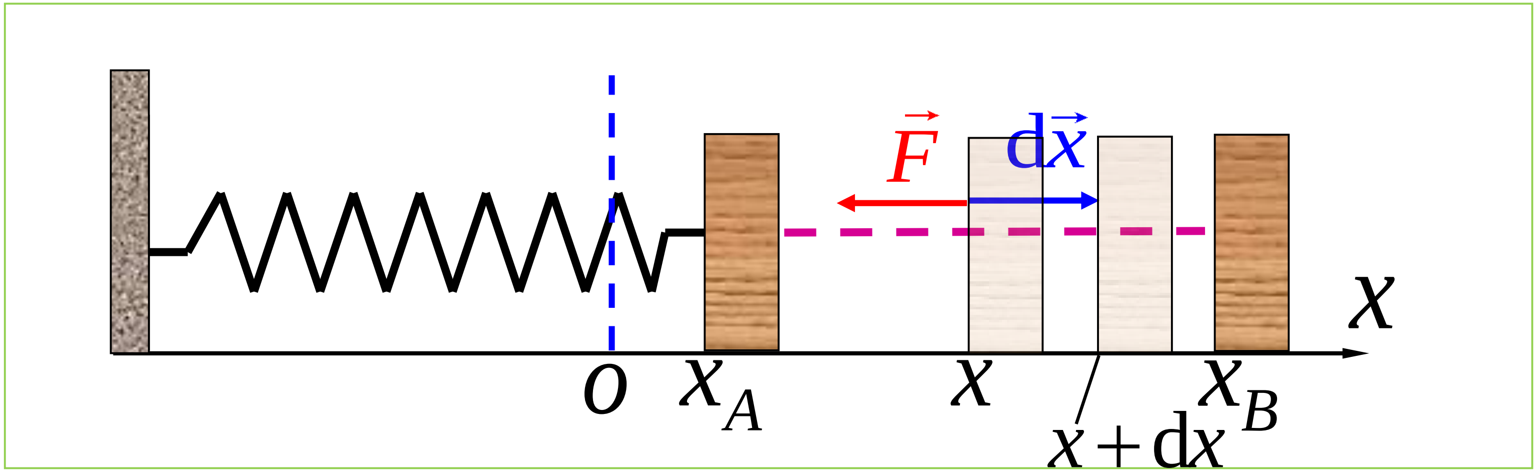
$$A = \int_A^B \vec{P}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{h_A}^{h_B} -mg\mathrm{d}z$$

$$= -(mgh_B - mgh_A)$$

$$A = \oint -mg\mathrm{d}z = 0$$



3. 弹性力作功



$$\boxed{\vec{F}=-kx\vec{i}}\qquad \mathrm{d}\vec{x}=\mathrm{d}x\vec{i}$$

$$A=\int_{x_A}^{x_B}\vec{F}\cdot\mathrm{d}\vec{x}=\int_{x_A}^{x_B}-kx\mathrm{d}x$$

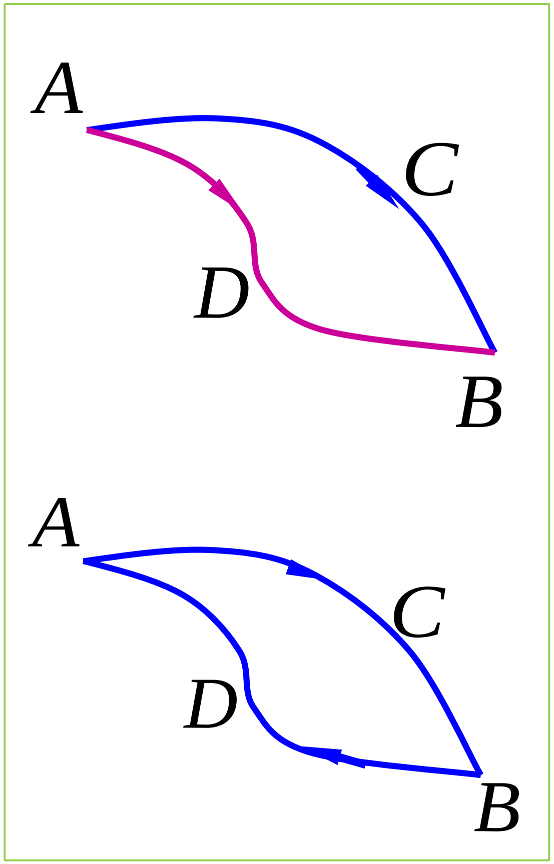
$$A=-(\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2)\qquad A=\oint-kx\mathrm{d}x=0$$

二、保守力和非保守力

万有引力、重力、弹性力都具有如下特点：

1. 任意两点间做功与路径无关,仅与初末位置有关

$$\int_{ACB}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{ADB}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$



2. 沿任意闭合回路做功为 0,即

$$\int_{ACB}\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_{BDA}\vec{F}\cdot d\vec{r}=0$$

$$\therefore \quad \oint_{L}\vec{F}_{保}\cdot d\vec{r}=0$$

保守力(*conservative force*): 力所作的功与路径无关，仅决定于相互作用质点的始末相对位置。

例：大多数定向力和有心力都是保守力

非保守力：力所作的功与路径有关 。（例：摩擦力）

三、势能(*Potential Energy*)

重力功

$$A=-(mgh_B-mgh_A)$$

引力功

$$A=-\left[(-G\frac{m'm}{r_B})-(-G\frac{m'm}{r_A})\right]$$

弹力功

$$A=-(\frac{1}{2}kx_B^2-\frac{1}{2}kx_A^2)$$

重力势能

$$E_\mathrm{p}=mgh$$

引力势能

$$E_p=-G\frac{m'm}{r}$$

弹性势能

$$E_\mathrm{p}=\frac{1}{2}kx^2$$

保守力的功

$$A=\int_A^B \vec{F}_{保}\cdot\mathrm{d}\vec{r}=-(E_{pB}-E_{pA})=-\Delta E_P$$

若选 B 为计算势能参考点, 取$E_{pB}=0$

系统在任一位形时的势能等于它从此位形沿任意路径改变至势能零点时保守力所做的功。

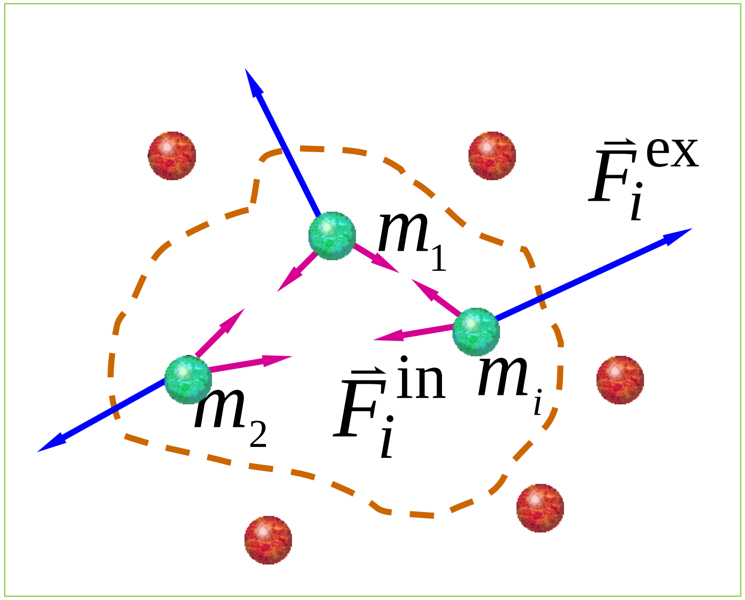
讨论：

- 势能是位置的函数。 $E_{\mathrm{p}} = E_{\mathrm{p}}(x, y, z)$
- 势能具有相对性，势能大小与势能零点的选取有关 。
- 势能是属于系统的。属于相互作用的质点共有的.
- 势能计算 $$\boxed{E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}} = -A = -\int_{初}^{末} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

令 $E_{\mathrm{p0}} = 0$ $$\boxed{E_{\mathrm{p}}(x, y, z) = \int_{(x,y,z)}^{E_{\mathrm{p0}}=0} \vec{F}_{保} \cdot \mathrm{d}\vec{r}}$$

§5 机械能守恒定律

一、质点系的动能定理



质点系：由两个或两个以上的质点构成的系统。

质点系内质点受力：内力+外力

对于 N 个质点构成的质点系，其中第 i 个质点所受内力与外力所做的总功为：

$$A_i = A_{i内力} + A_{i外力}$$

内力功　外力功

根据质点的动能定理有：

$$A_{i内力} + A_{i外力} = E_{ki} - E_{ki0} \qquad i = 1, 2, 3, \cdots\cdots, \mathrm{N}$$

对质点系，有

$$\sum_i A_{i外力}+\sum_i A_{i内力}=\sum_i E_{\mathrm{k}i}-\sum_i E_{\mathrm{k}i0}=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k}0}$$

质点系动能定理：所有外力对质点系做的功和内力对质点系做的功的代数和数值上等于质点系动能的增量。即

$$A_{内力}+A_{外力}=E_{\mathrm{k}}-E_{\mathrm{k}0}$$

➢内力可以改变质点系的动能。

二、质点系的功能原理

质点系动能定理 $A_{\text{外力}} + A_{\text{内力}} = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k0}}$

$$A_{\text{内}} = \sum_i A_{i\text{内}} = A_{\text{保守内}} + A_{\text{非保守内}}$$

$$A_{\text{保守内}} = -\left(\sum_i E_{\mathrm{p}i} - \sum_i E_{\mathrm{p}i0}\right) = -\left(E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}}\right)$$

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内}} - \left(E_{\mathrm{p}} - E_{\mathrm{p0}}\right) = E_{\mathrm{k}} - E_{\mathrm{k0}}$$

$$A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内}} = (E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}) - (E_{\mathrm{k0}} + E_{\mathrm{p0}})$$

机械能(*mechanical energy*) $E = E_{\mathrm{k}} + E_{\mathrm{p}}$

$$\boxed{A_{\text{外力}} + A_{\text{非保守内}} = E - E_0 = \Delta E}$$

质点系的功能原理：质点系机械能的增量等于外力和非保守内力作功之和。

三、机械能守恒定律(*law of conservation of mechanical energy*)

由质点系的功能原理： $A_{外力}+A_{非保守内}=E-E_0$

当 $A_{外力}+A_{非保守内}=0$ 时，有 $E=E_0$

机械能守恒定律：只有保守内力作功的情况下，质点系的机械能守恒（不变和相互转换）。

即 $E_k+E_p=E_{k0}+E_{p0}$ 或 $\boxed{\Delta E_k=-\Delta E_p}$

机械能守恒定律是一个 普适的定律。

研究守恒定律的**意义**在于：不究过程细节而能对系统的状态下结论，这是各个守恒定律的特点和优点 。

过山车——机械能守恒的应用

四、能量守恒定律

亥姆霍兹（1821—1894），德国物理学家和生理学家。于1874年发表了《论力（现称能量）守恒》的演讲，首先系统地以数学方式阐述了自然界各种运动形式之间都遵守能量守恒这条规律。可以说亥姆霍兹是能量守恒定律的创立者之一。

能量守恒定律：对于一个与自然界无任何联系的系统来说，系统内各种形式的能量是可以相互转换的，但是不论如何转换，能量既不能产生，也不能消灭。

（1）能量是系统**状态**的函数；

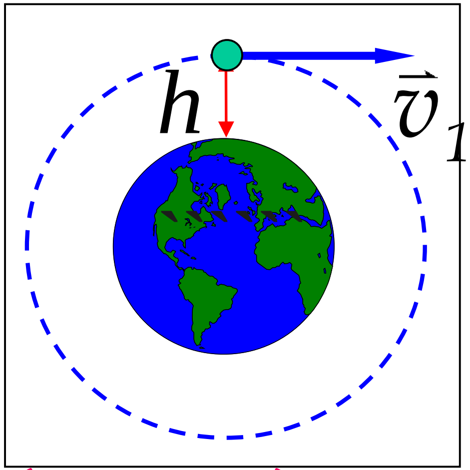
（2）系统能量不变，但各种能量形式可以互相**转化**；

（3）能量的变化常用**功**或者**热**来量度；

（4）生产斗争和科学实验的经验总结。

机械能守恒的应用 宇宙速度

第一宇宙速度



能使物体绕地球作匀速圆周运动，成为地球的卫星的最小发射速度υ_1。

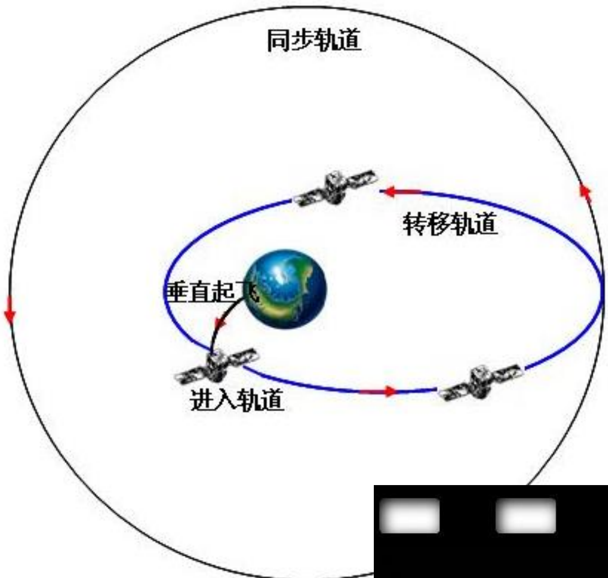
在地面发射卫星时的机械能 $E_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2 + \left(-G\frac{M_e m}{R_e}\right)$

设：卫星环绕地球运行所需要的最小速度 υ

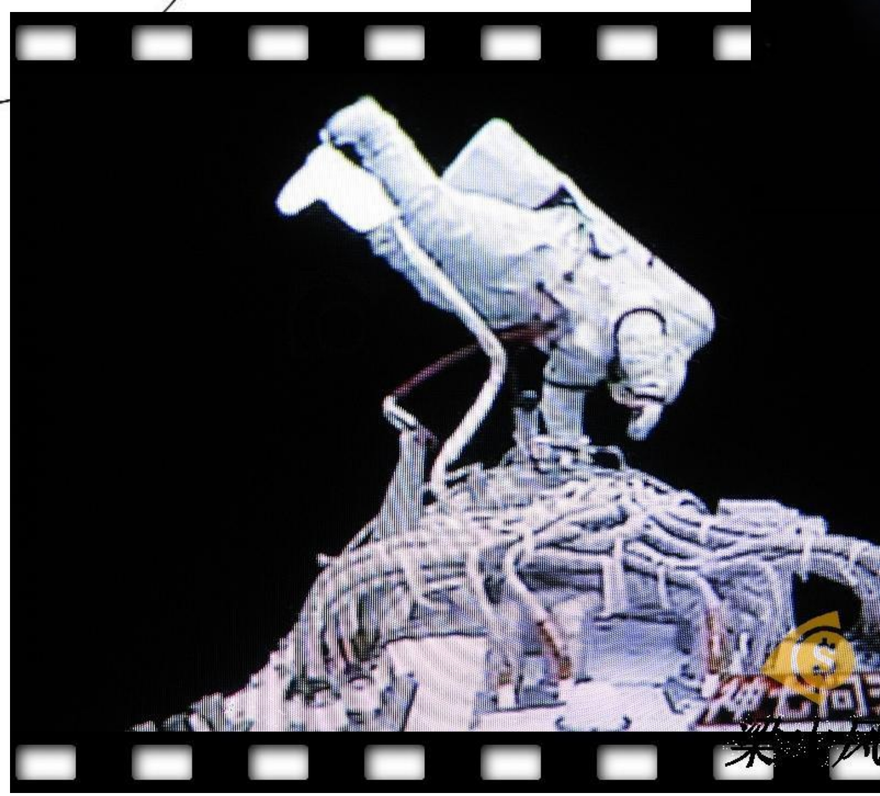
$$E = \frac{1}{2}m\upsilon^2 + \left(-G\frac{M_e m}{R_e + h}\right) = E_0 \qquad G\frac{M_e m}{(R_e + h)^2} = \frac{m\upsilon^2}{R_e + h}$$

$$\Rightarrow \upsilon_1 = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}\left(1 - \frac{R_e}{2(R_e + h)}\right)} = \sqrt{2gR_e\left(1 - \frac{R_e}{2(R_e + h)}\right)} \quad \left(g = \frac{GM_e}{R_e^2}\right)$$

当 $h = 0$ $\qquad \upsilon_1 = \sqrt{gR_e} \approx 7.9 \ \ km/s$



2008.09.25
21:00 发射
(343km，8km/s)



神舟七号

2008.09.27
16:41 翟志刚出舱
（第29圈）

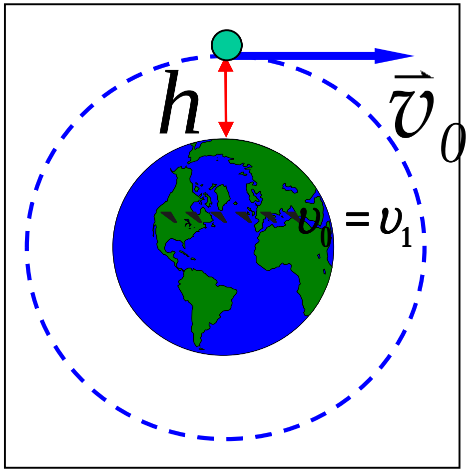
第二宇宙速度（逃逸速度）

脱离地球引力，成为太阳的行星所需要的最小速度 υ_2

$\upsilon_0 = \upsilon_2$

系统：物体和地球,只有保守内力做功

机械能守恒



$$E = \frac{1}{2}m\upsilon_\infty^2 + \left(-G\frac{M_e m}{\infty}\right) = E_0$$

$$E_0 = \frac{1}{2}m\upsilon_0^2 + \left(-G\frac{M_e m}{R_e}\right)$$

$$\therefore \quad \upsilon_0^2 = \upsilon_\infty^2 + G\frac{2M_e}{R_e}$$

在太阳引力作用下绕太阳做椭圆轨道运动

当 $\upsilon_\infty = 0, E = 0$ $\Rightarrow$ $\upsilon_2 = \upsilon_0 = \sqrt{\dfrac{2GM_e}{R_e}}$ $\quad \left(g = \dfrac{GM_e}{R_e^2}\right)$

$$= \sqrt{2gR_e} \approx 11.2 \ \ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

--- 逃逸速度 $\upsilon_e = \upsilon_2$

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

--- 逃逸速度 第二宇宙速度

若星球的质量M 越大、半径R 越小，逃逸速度越大，当然其极限为真空中的光速。

逃逸速度达到光速的星球称为黑洞。

史瓦西半径 或 引力半径 r_s

$$\sqrt{\frac{2GM}{r_s}} = c$$

地球史瓦西半径 $$r_s = \frac{2GM_e}{c^2} = 8.86 \times 10^{-3} m$$

太阳史瓦西半径 $$r_s = \frac{2GM_s}{c^2} = 2.95 \times 10^{3} m$$

地球史瓦西半径 $r_s = \dfrac{2GM_e}{c^2} = 8.86\times10^{-3}m$

太阳史瓦西半径 $r_s = \dfrac{2GM_s}{c^2} = 2.95\times10^{3}m$

引力理论：转化为黑洞的只能是质量满足一定条件的恒星

恒星的归宿：

小质量恒星 内部核燃料逐渐耗尽 不发光的星体

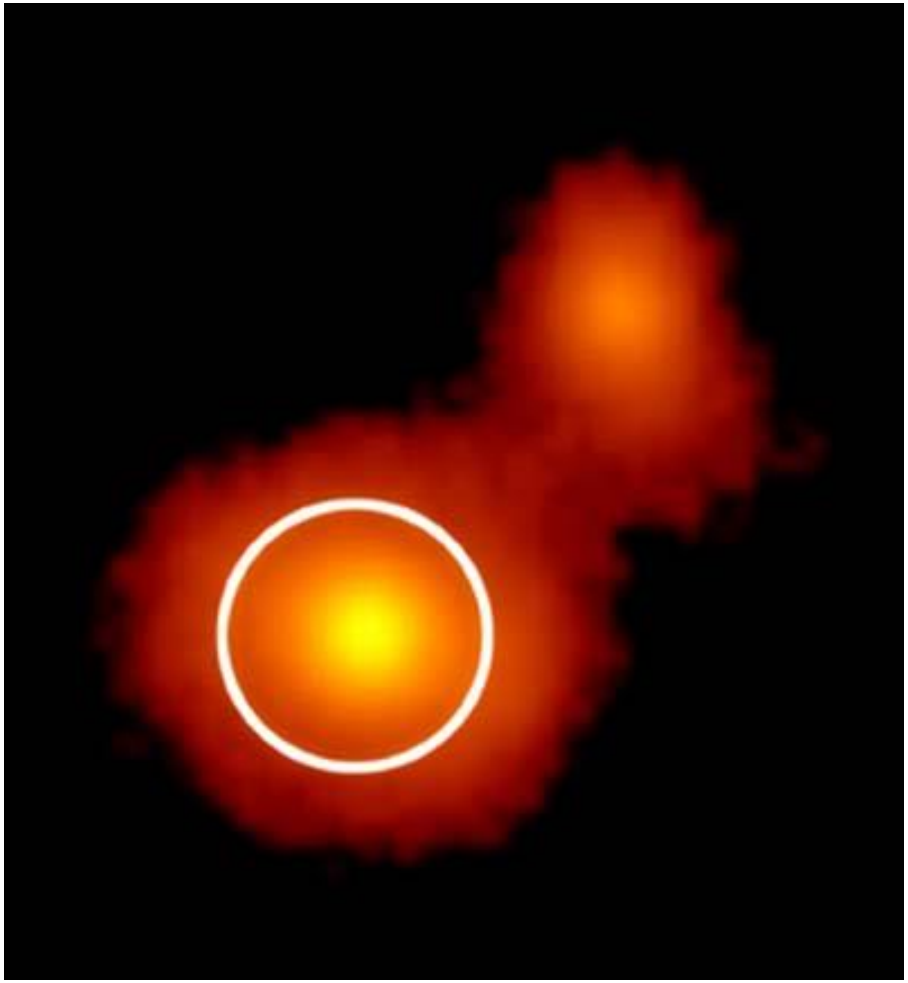
大质量恒星 内部核燃料逐渐耗尽 超新星爆发 抛射外围物质

剩余残骸

$M < 1.4M_s \longrightarrow$ 白矮星

$1.4M_s < M < 3M_s \longrightarrow$ 中子星

$M > 3M_s \longrightarrow$ 黑洞



美联社2004年2月19日报道，欧洲和美国天文学家近日宣布，他们借助X射线太空望远镜，在一个距地球大约7亿光年的星系中观测到了耀眼的X射线爆发。

这是科学家第一次找到超大质量黑洞撕裂恒星的强有力证据。

第三宇宙速度

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR_e}$$

$$\upsilon_2 = \sqrt{2gR_e} = \sqrt{\frac{2GM_e}{R_e}}$$

脱离太阳系所需要的最小速度 υ_3

$$\upsilon_3' = \sqrt{\frac{2GM_S}{r_{e-S}}} \approx 42.2 \ \ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

物体在地球上， 地球相对于太阳的速度约为 29.8 $\mathrm{km \cdot s^{-1}}$

$$\upsilon_3'' = 42.2 \ \ -29.8 = 12.4\mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

脱离地球需要动能为: $\frac{1}{2}m\upsilon_2^2$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_3^2 = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + \frac{1}{2}m\upsilon_3''^2$$

$$\Rightarrow \upsilon_3 = \sqrt{\upsilon_2^2 + \upsilon_3''^2} \approx 16.7 \ \ \mathrm{km \cdot s^{-1}}$$

若: $\upsilon_e = c$ 黑洞

若：$\upsilon_e = c$ 黑洞 引力作用下塌陷

$$\upsilon_1 = \sqrt{gR_e}$$

$$\upsilon_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

当M一定时 收缩到 $R_0 = \dfrac{2GM}{c^2}$

设想 1)把地球变成黑洞

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2\times 6.67\times 10^{-11}\times 5.98\times 10^{24}}{3^2\times 10^{16}} = 8.86mm$$

2)把太阳变成黑洞

$$R_0 = \frac{2GM}{c^2} = \frac{2\times 6.67\times 10^{-11}\times 1.99\times 10^{30}}{3^2\times 10^{16}} = 2.95\times 10^3 m$$ ⟶ 白矮星

3)引力理论：

转化为黑洞的只能是质量满足 $m \geq 2.7m_{\oplus}$ 一定条件的恒星

太阳的质量