大学物理习题课

——————相对论、早期量子论、量子力学初步

狭义相对论基础

1. 狭义相对论的两个基本假设

相对性原理: 在一切惯性参考系中，物理学定律都具有相同的表达形式。一切物理规律对所有惯性系都是等价的。

光速不变原理: 在所有的惯性系中,光在真空中沿各个方向的速率都相同，均为c.

2. 洛伦兹变换 ① 洛仑兹坐标变换式

正变换

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} x = \dfrac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2} x}{\sqrt{1 - v^2 / c^2}} \end{cases}$$

② 洛伦兹速度变换式

正变换

$$\begin{cases} u'_x = \dfrac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{u_x - v}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \\ u'_y = \dfrac{\mathrm{d}y'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{u_y \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \\ u'_z = \dfrac{\mathrm{d}z'}{\mathrm{d}t'} = \dfrac{u_z \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 - \dfrac{v}{c^2} u_x} \end{cases}$$

逆变换

$$\begin{cases} u_x = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u'_x + v}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \\ u_y = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u'_y \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \\ u_z = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{u'_z \sqrt{1 - v^2 / c^2}}{1 + \dfrac{v}{c^2} u'_x} \end{cases}$$

3. 狭义相对论的时空观

(1). 同时性的相对性

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\frac{v}{c^2}(x_2' - x_1')}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{-\frac{v}{c^2}(x_2 - x_1)}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

(2). 时间延缓 (运动的时钟变慢)

$$\tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} > \tau_0$$

(3). 长度收缩 (运动的尺收缩)

$$L = L_0\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < L_0$$

4. 狭义相对论动力学　　动量 能量 质能关系

(1). 动量： $\vec{P} = m\vec{v} = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}\vec{v}$　　$m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}$

(2). 能量：

静能: $\mathrm{E}_0 = m_0 c^2$

总能： $\mathrm{E} = mc^2 = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} c^2$　　**质能方程**

动能： $E_k = E - E_0 = mc^2 - m_0 c^2$

(3). 能量和动量的关系　　$\mathrm{E}^2 = P^2 c^2 + m_0^2 c^4$

例1. k 惯性系中观测者记录两事件的空间间隔和时间间隔分别是 x_2-x_1=600m 和 t_2-t_1=8×10^{-7} s ，为了使两事件对 k\` 系来说是同时发生的，$k$\` 系必须以多大速度相对于 k 系沿 x 轴方向运动？

解：已知 k 系中： $\Delta t = t_2 - t_1 = 8\times 10^{-7} s,$

$$\Delta x = x_2 - x_1 = 600m$$

由洛伦兹变换可知

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

为了使在 k\` 系中看来是同时发生的，需使 $\Delta t' = 0$

即

$$0 = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$v = \frac{\Delta t}{\Delta x}c^2 \rightarrow v = 1.2\times 10^8 m/s$$

例.在惯性系 *k* 中，有两个事件同时发生在 *x* 轴上相距 1000m 的两点，而在另一惯性系 k`（沿 x 轴方向相对于 k 运动）中测得这两个事件发生的地点相距2000m， 求在 k` 系中测得这两个事件的时间间隔。

解答提示

在 k 系中： $\Delta t = 0,\ \Delta x = 1000\text{m}$

在 k `系中： $\Delta x' = 2000\text{m}$

由 $\Delta t' = \dfrac{\Delta t - \dfrac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdots (1)$ $\quad \Delta x' = \dfrac{\Delta x - v\Delta t}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \cdots (2)$

由（2）式可得 $v = \dfrac{\sqrt{3}}{2}c$

代入（1），得 k` 系中两事件的时间间隔

$$\Delta t' = 5.77 \times 10^{-6}(s)$$

狭义相对论　练习题

1. 一宇航员要到离地球为 5 光年的星球去旅行，如果宇航员希望把这路程缩短为 3 光年，则他所乘的火箭相对地球的速度应是（ c 表示真空中光速）

$(A)\ \dfrac{1}{2}c.$　　　　$(B)\ \dfrac{3}{5}c.$

$(C)\ \dfrac{4}{5}c.$　　　　$(D)\ \dfrac{9}{10}c.$

解:　$l = l_0\sqrt{1 - v^2/c^2},$

据题意　$l = 3ly,\quad l_0 = 5ly,$　　$\therefore 3 = 5\sqrt{1 - v^2/c^2}$

$$v = \frac{4}{5}c.$$

答案：(C)

2. 在某地发生两件事，静止位于该地的甲测得时间间隔为4s，若相对甲做匀速直线运动的乙测得时间间隔为5s，则乙相对于甲的运动速度是（c 表示真空中光速）

$(A)\ \frac{4}{5}c.$ $(B)\ \frac{3}{5}c.$

$(C)\ \frac{1}{5}c.$ $(D)\ \frac{2}{5}c.$

解：据题意，原时为 $\tau_0 = 4s,$

由时间延缓效应 $\tau = \dfrac{\tau_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$

即 $5 = \dfrac{4}{\sqrt{1 - v^2/c^2}},$ $v = \frac{3}{5}c.$

答案：(B)

3. 根据相对论动力学，动能为 1/4 Mev 的电子，其运动速度约等于

$(A)\ 0.1c.$ $(B)\ 0.5c.$

$(C)\ 0.75c.$ $(D)\ 0.85c.$

（ c 表示真空中光速，电子的静能 $m_o\, c^2 = 0.5$ MeV ）

解： $$E_k = mc^2 - m_0c^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2$$

$$\therefore \frac{1}{4} = 0.5\left(\frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - 1\right),$$

$$v = 0.75c.$$

答案：(C)

二. 填空题

1. π^+ 介子是不稳定的粒子，在它自己的参照系中测得平均寿命是 2.6×10^{-8} s , 如果它相对实验室以 0.8c （ c 为真空中光速）的速度运动，那么实验室坐标系中测得的π^+ 介子 的寿命是__________________________.

解:

$$\tau=\frac{\tau_0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}=\frac{2.6\times10^{-8}}{\sqrt{1-0.8^2}}=4.33\times10^{-8}(s)$$

2. α粒子在加速器中被加速，当其质量为静止质量的 5 倍时，其动能为静止能量的 ＿＿4＿＿ 倍。

解：据题意 $m = 5m_0$，

$$E_k = mc^2 - m_0c^2 = 5m_0c^2 - m_0c^2$$

$$= 4m_0c^2 = 4E_0$$

早期量子论、量子力学初步

基本概念

1. 单色辐出度: 单位时间内从热力学温度为T的物体单位表面积发出的波长在λ附近单位波长范围内的电磁波的能量，用 $e(\lambda,T)$ 表示。

2. 辐出度: 单位时间内从热力学温度为T的物体单位表面辐射的各波长电磁波的能量总和。

$$E(T)=\int \mathrm{d}E(T)=\int_0^{\infty} e(\lambda,\mathrm{T})\,\mathrm{d}\lambda$$

3. 黑体:

任何温度下对任何波长的光的吸收比恒等于1的物体

4. 德布罗意波:

与实物粒子相联系的波，又称为物质波或概率波

基本规律

一. 黑体辐射基本规律

1. 斯特藩-玻尔兹曼定律：（黑体）

$$\boxed{E(T)=\int_0^{\infty} e(\lambda,T)\,\mathrm{d}\lambda=\sigma T^4}$$

2. 维恩位移定律:

$$T\lambda_m=b$$

λ_m 辐出度峰值对应波长

3. 普朗克公式及普朗克能量子假说:

$$\boldsymbol{e}(\lambda,\boldsymbol{T})=\frac{2\pi \boldsymbol{hc}^2}{\lambda^5}\frac{1}{\mathrm{e}^{\frac{\boldsymbol{hc}}{\lambda \boldsymbol{kT}}}-1}$$

二. 光电效应 光子的波粒二象性

光子 $E = h\nu$ $p = \dfrac{h}{\lambda}$ $I = Nh\nu$

光电效应的爱因斯坦方程 $$h\nu = A_0 + \frac{1}{2}mv_m^2$$

A_0 金属中电子的逸出功

$\nu_0 = \dfrac{A_0}{h} = \dfrac{U_0}{K}$ 红限频率（截止频率）

$eU_c = \dfrac{1}{2}m\upsilon_m^{\ 2}$ $U_c = K\nu - U_0$ 截止电压

$A_0 = eU_0$

三. 康普顿效应

物理本质：入射光子与自由电子的完全弹性碰撞

能量守恒： $h\nu_0 + m_e c^2 = h\nu + mc^2$

动量守恒： $\dfrac{h\nu_0}{c}\hat{n}_0 = m\mathrm{v}\hat{n}_0$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

$$\Delta\lambda = \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{m_e c}(1 - \cos\theta) = 2\lambda_c \sin^2\frac{\theta}{2}$$

式中康普顿波长： $\lambda_{\mathrm{c}} = h/m_e c = 0.0024\ \mathrm{nm}$.

1. 波长改变量与散射物质无关

2. 原子量较小的物质康普顿效应明显

四. 德布罗意物质波假设

1. 德布罗意假设: 实物粒子具有波粒二象性

2. 德布罗意关系式:

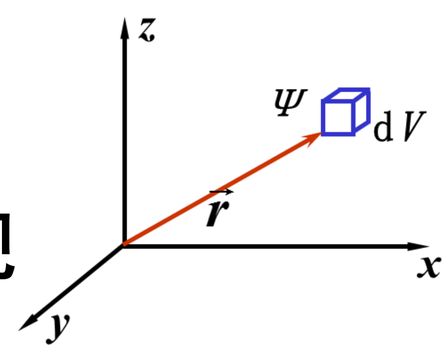
$$\boxed{\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}} \qquad \boxed{\nu = \frac{E}{h} = \frac{mc^2}{h}}$$

3. 德布罗意波的统计解释: 德布罗意波是概率波

波函数的模方

$$\left|\Psi(\vec{r},t)\right|^2 = \Psi(\vec{r},t)\cdot\Psi^*(\vec{r},t)$$

表示 t 时刻，在 处附近单位体积中发现粒子的概率，称为概率密度。



五. 不确定性关系

粒子位置和动量之间的不确定关系： $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h \qquad \Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

粒子能量和时间之间的不确定关系： $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$

基本问题

1. 热辐射问题
2. 光电效应问题
3. 康普顿效应问题
4. 德布罗意波长的计算
5. 测不准关系的简单应用

例1 当高炉的温度保持在 2500 K 时，计算观察窗发出的辐射的 λ_m 。这个波长是否在可见光范围？如果利用维恩定律为依据的可见光范围光测高温计来测量炉温，其测量范围是多少？

解：由 $$\lambda_m T = b, \therefore \lambda_m = \frac{b}{T} = 1.16(um)$$

在可见光范围 400 ¯760 nm:

当 $\lambda_{m1} = 400nm, T_1 = \dfrac{b}{\lambda_{m1}} = 7.24\times10^3(k)$

当 $\lambda_{m2} = 760nm, T_2 = \dfrac{b}{\lambda_{m2}} = 3.81\times10^3(k)$

可测温度范围：

$$3.81\times10^3 k \sim 7.24\times10^3 k$$

以波长为 λ=4100埃 的单色光照射某一光电池，产生的电子的最大初动能为 E_k=1.0eV，求能使光电池产生电子的单色光最大波长。

解：　由 $h\nu = \frac{1}{2}mv_m^2 + A_0$

$$\therefore \text{逸出功} A_0 = \frac{hc}{\lambda} - \frac{1}{2}mv_m^2 = 3.25\times10^{-19}(\text{J})$$

由红限定义： $h\nu_0 = h\frac{c}{\lambda_0} = A_0$

$\therefore$产生光电子的最大波长为

$$\lambda_0 = \frac{hc}{A_0} = 6.12\times10^{-7}(\text{m})$$

例. 一个波长 $\lambda = 0.5\text{nm}$ 的光子与原子中电子碰撞，碰撞后光子以与入射方向成 150^{o} 角方向反射，求碰撞后光子的波长与电子的速率。

解：由康普顿散射 $\lambda - \lambda_0 = 2\lambda_c \sin^2 \dfrac{\theta}{2}$

碰撞后光子的波长为 $\lambda = \lambda_0 + 2\lambda_c \sin^2 \dfrac{\theta}{2} = 5.045\,\mathring{\text{A}}$

电子的动能等于碰撞前光子的能量减去碰撞后光子的能量

$$E_k = h\nu_0 - h\nu = \frac{hc}{\lambda_0} - \frac{hc}{\lambda} = hc\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0} = mc^2 - m_0c^2$$

由相对论质量关系，可得

$$\frac{m_0c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - m_0c^2 = hc\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0}$$

$$\therefore \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = 1 + (\frac{h}{m_0c}) \cdot \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0} = 1 + \lambda_c\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda\lambda_0} = 1 + 4.335 \times 10^{-5}$$

解得 $1 - \dfrac{v^2}{c^2} = 0.9999,\ v = 2.8 \times 10^6 (\text{m} \cdot \text{s}^{-1})$

设电子和光子的波长均为 0.50nm，试求两者的动量以及能量之比。

解: 电子和光子的波长均为 $\lambda = 0.50$ nm

（1） 光子动量 $p_o = \dfrac{h}{\lambda}$ 电子动量 $p_e = \dfrac{h}{\lambda}$

故动量之比为 $p_o / p_e = 1$

（2） 光子能量（动能）$\varepsilon = h\nu = hc/\lambda$

电子动能为 $E_e = \dfrac{1}{2} m_e v^2 = \dfrac{p_e^2}{2m_e} = \dfrac{h^2}{2m_e\lambda^2}$

动能之比 $\dfrac{E_e}{\varepsilon} = \dfrac{h}{2m_e\lambda c} = 2.4 \times 10^{-3}$

(1)若电子的动能等于它的静能，求电子速度和德布罗意波长？(2)若光子的能量等于一个电子的静能，求光子的频率、波长和动量？

解：(1) 根据相对论，$E_k = mc^2 - m_0c^2$ 由已知，$E_k = m_0c^2$

$$\therefore mc^2 = 2m_0c^2 \Rightarrow m = 2m_0 \quad 而 m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$$

$$\therefore \upsilon = \frac{\sqrt{3}}{2}c \approx 0.866c$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{m\upsilon} = \frac{h}{2m_0\upsilon} = 1.4\times10^{-3}\,\text{nm}$$

$$(2)\ \nu = \frac{E}{h} = \frac{m_0c^2}{h} = 1.24\times10^{20}\,\text{Hz} \qquad \lambda = \frac{c}{\nu} = 2.43\times10^{-3}\,\text{nm}$$

$$p = \frac{E}{c} = \frac{m_0c^2}{c} = 2.73\times10^{-22}\,\text{kg}\cdot\text{m/s}$$