第9章 机械振动

引言

一切物体都处于不停的运动中。

所有的运动分为两类：无序运动（气体分子的热运动）

有序运动

有序运动中---周期性运动。

周期性运动现象：系统或物体经过一个周期后又回到原来状态。

振动是一种重要的周期性运动形式。

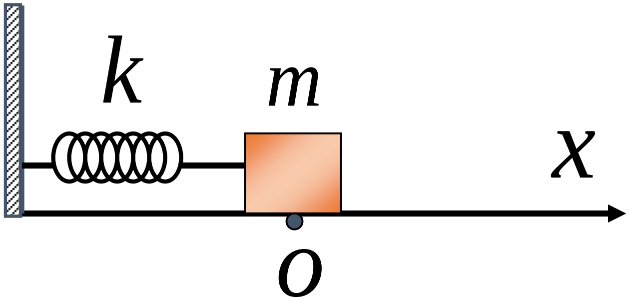
振动的狭义定义（机械振动）：物体在某一确定位置做往复运动。

振动的广义定义：任何物理量（如位移、速度、电流、电场强度、磁场强度等等），围绕某一定值做周期性变化。

振动理论是研究周期性现象的基本理论，它是许多学科的基础，如：声学、电磁学、光学等等。

大学物理研究两种最常见的振动：机械振动，电磁振动。

一、简谐振动



以弹簧谐振子为例

设弹簧原长为坐标原点

由牛顿第二定律 $\sum F_x = ma_x$ $\quad -kx = m\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$

整理得

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

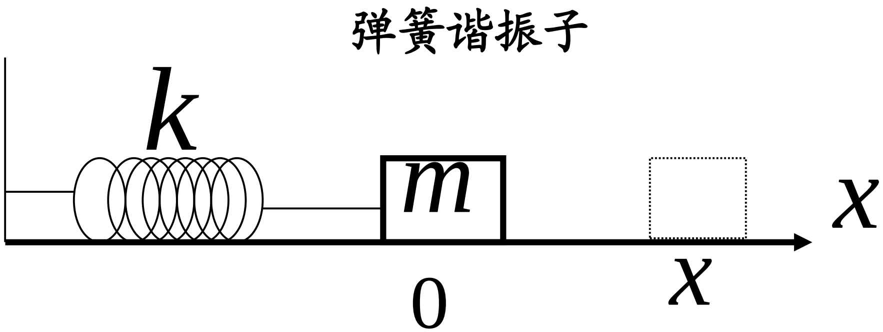
令 $\omega^2 = \dfrac{k}{m}$

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \omega^2 x = 0$$

方程的解 $x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$

简谐振动方程

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$



特征量:

x 位移 单位: m

A 振幅 单位: m, cm 最大位移; 由初始条件决定

ν 频率 单位: Hz 1Hz=1/1s

T 周期 单位: s $T = 1/\nu$

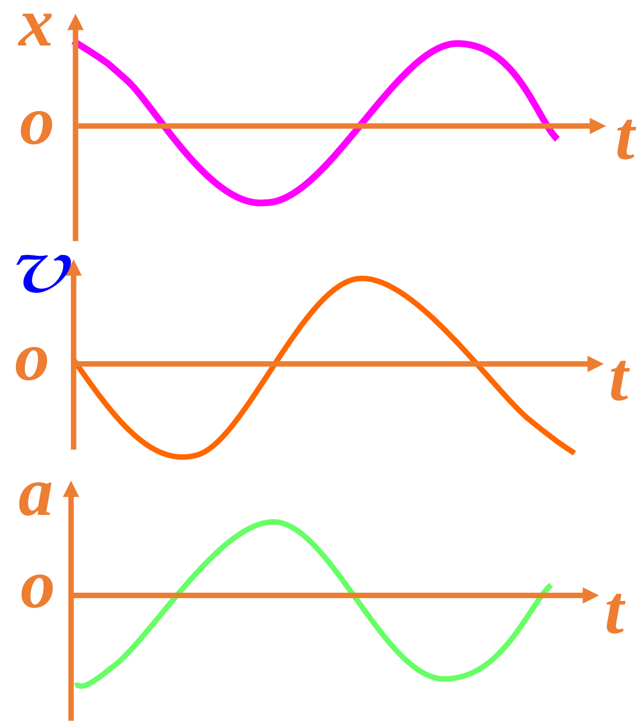
ω 圆频率(角频率) 单位: rad s^{-1} $\omega = 2\pi\nu$

$\omega t + \varphi_0$ 相位(位相 或 周相) 单位: rad

φ_0 初相位(初位相) 单位: rad

——取决于时间零点的选择

二、简谐运动的速度及加速度



$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = \frac{\mathrm{d}\ x}{\mathrm{d}\ t} = -A\omega\sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$v = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

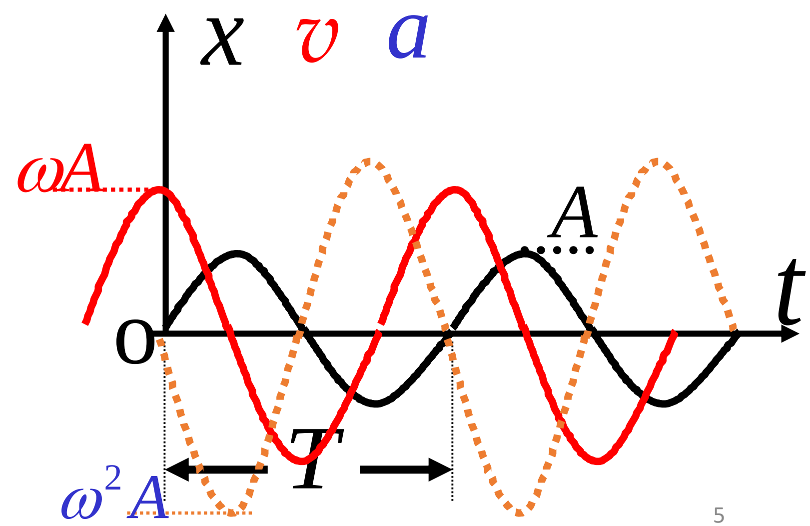
$$v_m = A\omega$$

$$a = \frac{\mathrm{d}\ v}{\mathrm{d}\ t} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$= -\omega^2 x$$

$$a = A\omega^2\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi)$$

$$a_m = A\omega^2$$



$$x_1 = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A\cos(\omega t + \varphi_2)$$

相位差： $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 > 0$　　x_1 的振动超前于 x_2 的振动

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 < 0$　　x_1 的振动落后于 x_2 的振动

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = 0$　　x_1 与 x_2 的振动同相位

$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = \pi$　　x_1 与 x_2 的振动反相位

三、初始条件决定简谐振动的振幅和初相位

由初始条件 x_0 和 v_0 有:

$$x_0 = A\cos\varphi_0$$

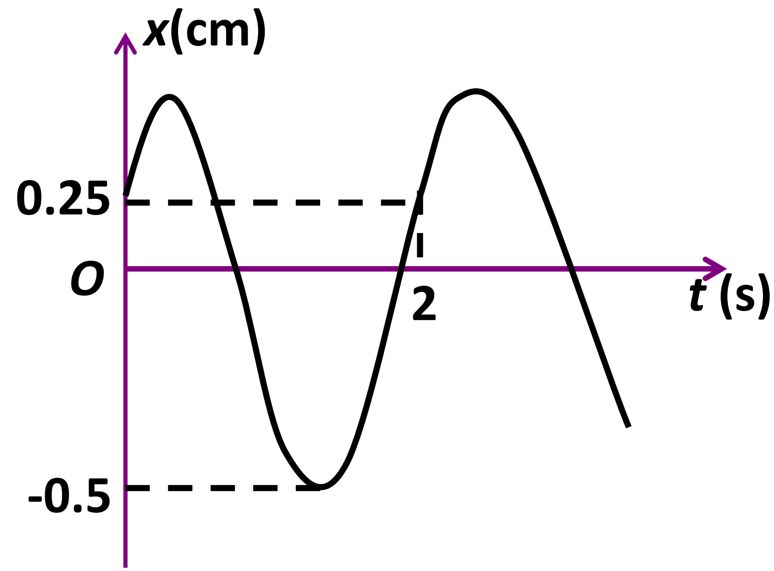
$$v_0 = -\omega A\sin\varphi_0$$

解方程组可得:

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\varphi_0 = tg^{-1}\frac{-v_0}{\omega\, x_0}$$

例1　如图，求振动方程。



解：　由图可知

$$A = 0.5cm \quad T = 2s$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \pi(1/s)$$

初始条件：　$x_0 = A\cos\varphi_0 = 0.5\cos\varphi_0 = 0.25(\mathrm{cm})$

$$\cos\varphi_0 = 0.5 \qquad \varphi_0 = \pm\frac{\pi}{3}$$

初始条件：　$v_0 > 0 \quad v_0 = -\omega A\sin\varphi_0 > 0 \quad \sin\varphi_0 < 0$

$$\therefore \quad \varphi_0 = -\frac{\pi}{3} \qquad x = 0.5\cos(\pi t - \frac{\pi}{3})$$ (cm)

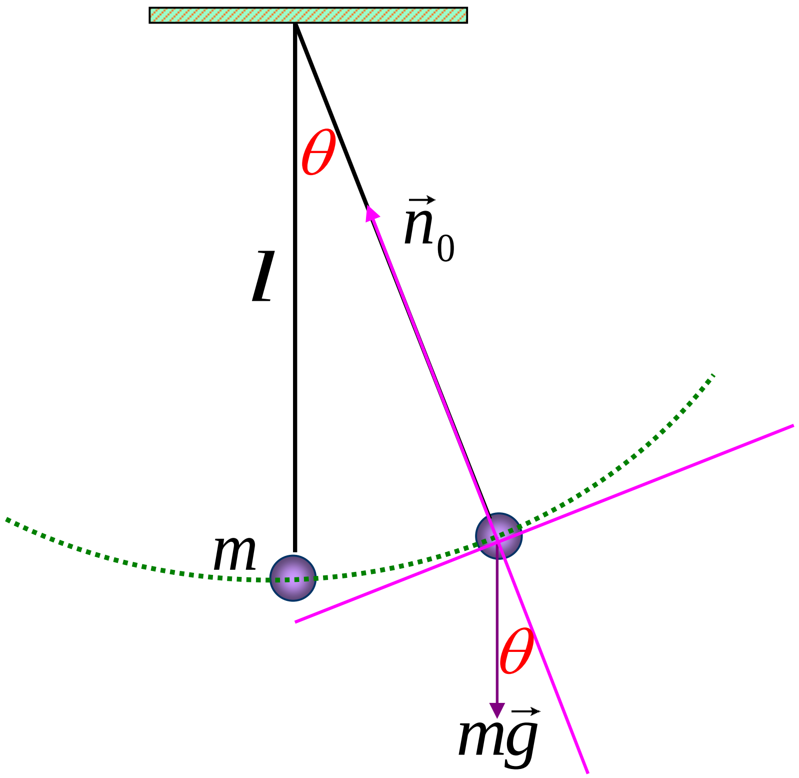
四、单摆

$$\sum F_{\tau} = ma_{\tau}$$

$$-mg\sin\theta = ma_{\tau}$$

$$= ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$

$$-g\sin\theta = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}$$



$$l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+g\sin\theta=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$$

$$\because \theta<5^\circ, \therefore \sin\theta=\theta$$

设： $\omega^2=\dfrac{g}{l}$

有： $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2\theta=0}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{l}}=2\pi\nu$$

$$\nu=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

五、简谐振动的描述

1. 解析法

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

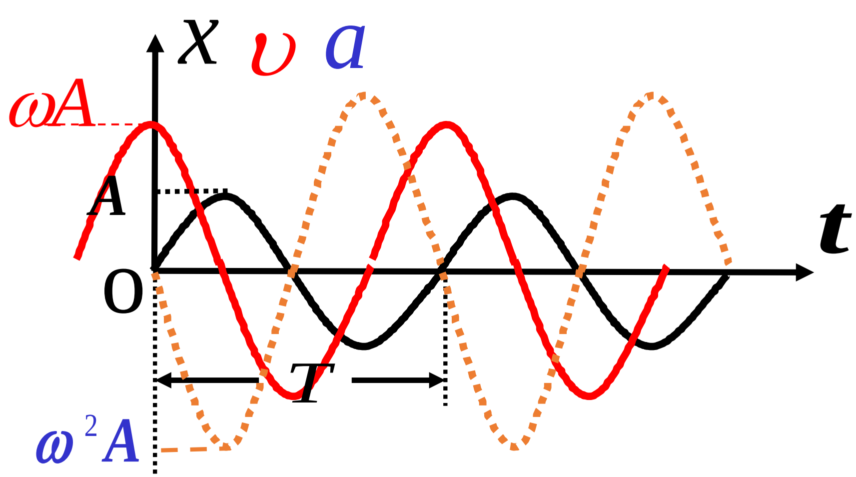
$$\upsilon = \dot{x} = -\omega A\sin(\omega t + \varphi_0) = \omega A\cos(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2})$$ υ 比 x 超前 $\pi/2$

$$a = \ddot{x} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = \omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0 + \pi) = -\omega^2 x$$ a和x反相

复数表示法

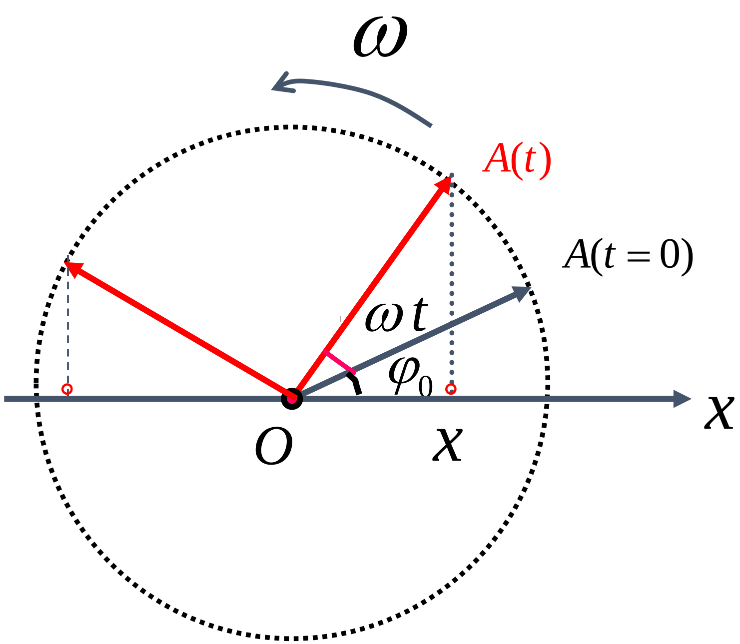
$$z = Ae^{j(\omega t+\varphi)} \qquad x = \mathrm{Re}\, z$$

2. 曲线法



六、 旋转矢量法描述

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$



旋转矢量的运动图像：

径矢的半径为：A

角速度为：ω

初角度为：φ_0

在*x*轴的投影为cos形式

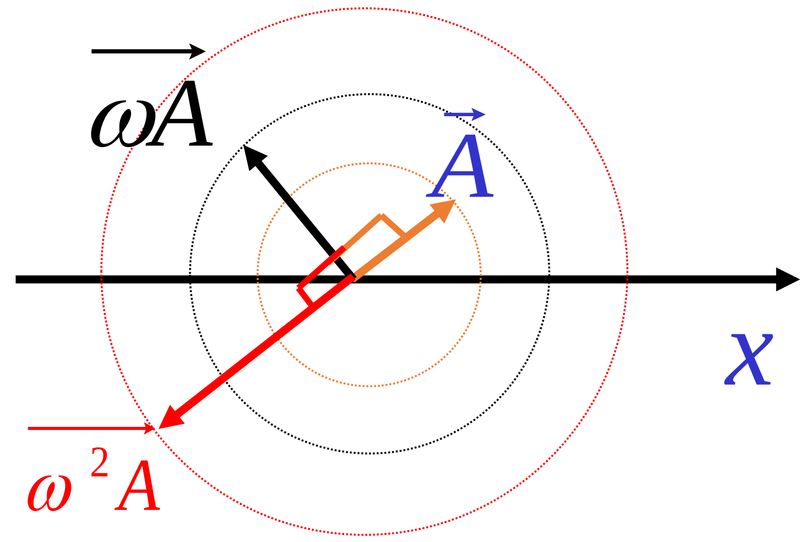
特征量	旋转矢量	运动表达式	
A	矢量的长度	振幅	初始条件决定
φ_0	初角度	初相位	初始条件决定
ω	角速度	角频率	系统特性决定
cos	X轴的投影	方程函数形式	
$\omega t+\varphi_0$	t时刻的角位移	t时刻振动状态	
T(周期)	转一周的时间	完成一次完整振动时间	
ν（频率）	一秒内转的圈数	一秒内振动次数	

表示简谐振动有三种方法：解析法（三角函数），振动曲线，旋转矢量）

$$x = A\cos\left(\omega t + \varphi_0\right)$$

$$v = A\omega\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$a = A\omega^2\cos\left(\omega t + \varphi_0 + \pi\right)$$



由图看出：

$$\left.\begin{array}{l}\text{速度超前位移}\\ \text{加速度超前速度}\end{array}\right\}\frac{\pi}{2}$$

位移与加速度

$\Delta\varphi = \pi$ 称两振动反相

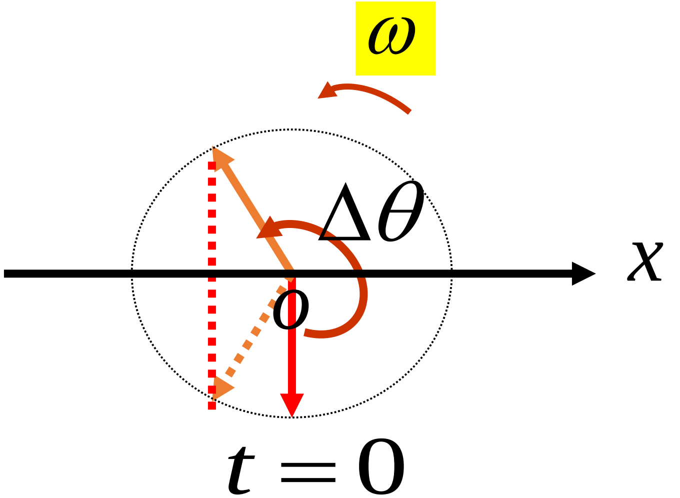
例：质量为m的质点和劲度系数为k的弹簧组成的弹簧谐振子，

$t=0$时，质点过平衡位置且向正方向运动。

求：物体运动到负的二分之一振幅处时所用的**最短时间**

解：设t时刻到达末态

由已知画出$t=0$时刻的旋矢图



再画出末态的旋矢图

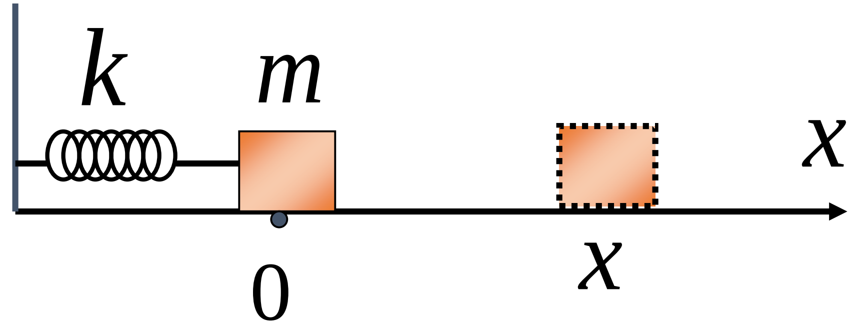
由题意选蓝实线所示的位矢

设始末态位矢夹角为$\Delta\theta$

$$\Delta\theta=\omega t$$

得 $$t=\frac{\Delta\theta}{\omega}=\frac{7\pi}{6\omega}=\frac{7\pi}{6\sqrt{k/m}}$$

§2 简谐振动的能量



以弹簧谐振子为例:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$v = -A\omega\sin(\omega t + \varphi)$$

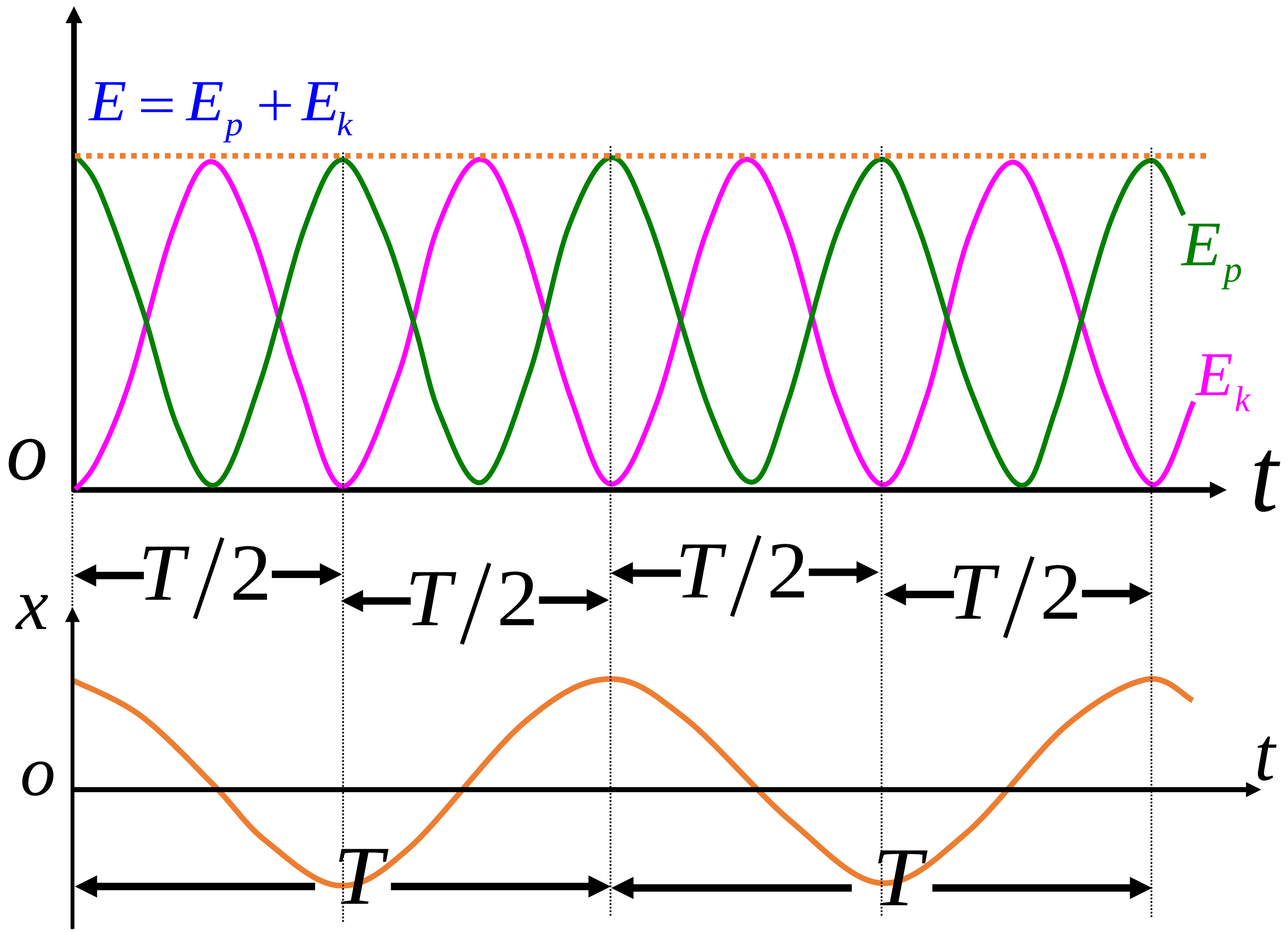
$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2\sin^2(\omega t + \varphi) \qquad m\omega^2 = k$$

$$= \frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t + \varphi)$$

$$E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega^2$$

简谐振动系统动能、势能及总的机械能曲线



§3 简谐振动的合成

当一个物体同时参与几个谐振动时就需考虑振动的合成问题。

——两个振动方向相同、频率相同简谐振动的合成

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 &= A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{aligned}\right\}$$ 线性叠加 $x = x_1 + x_2$

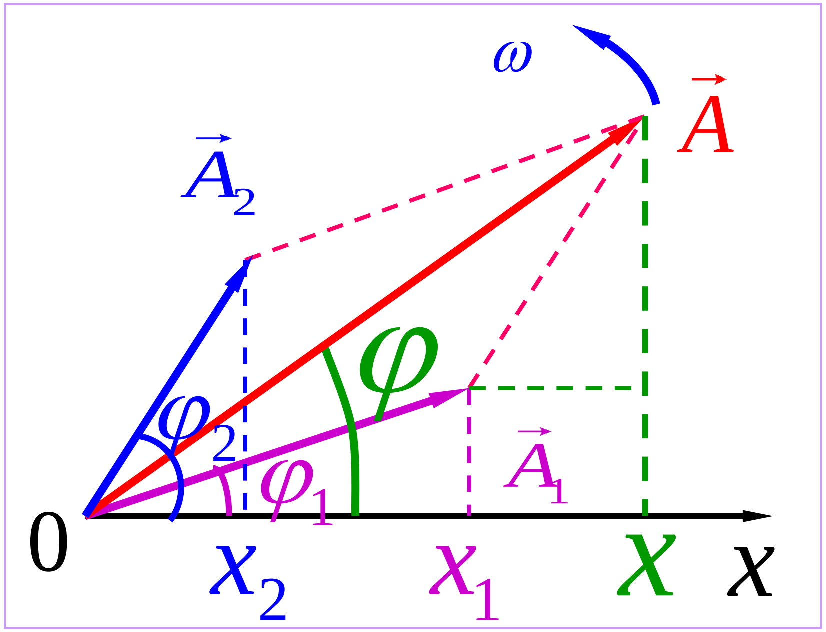
$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t+\varphi)$$

- 两个同方向同频率简谐运动合成后仍为同频率的简谐振动
- 合振动的振幅 $A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$ $\quad \Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$
- 合振动的初相位 $$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}$$

同方向同频率简谐振动的合成的**旋转矢量法**

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2$$



在 t =0 时刻:

在任意 t 时刻:

$$x = A\cos(\omega t+\varphi)$$

$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)} \\ \mathrm{tg}\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2} \end{cases}$$

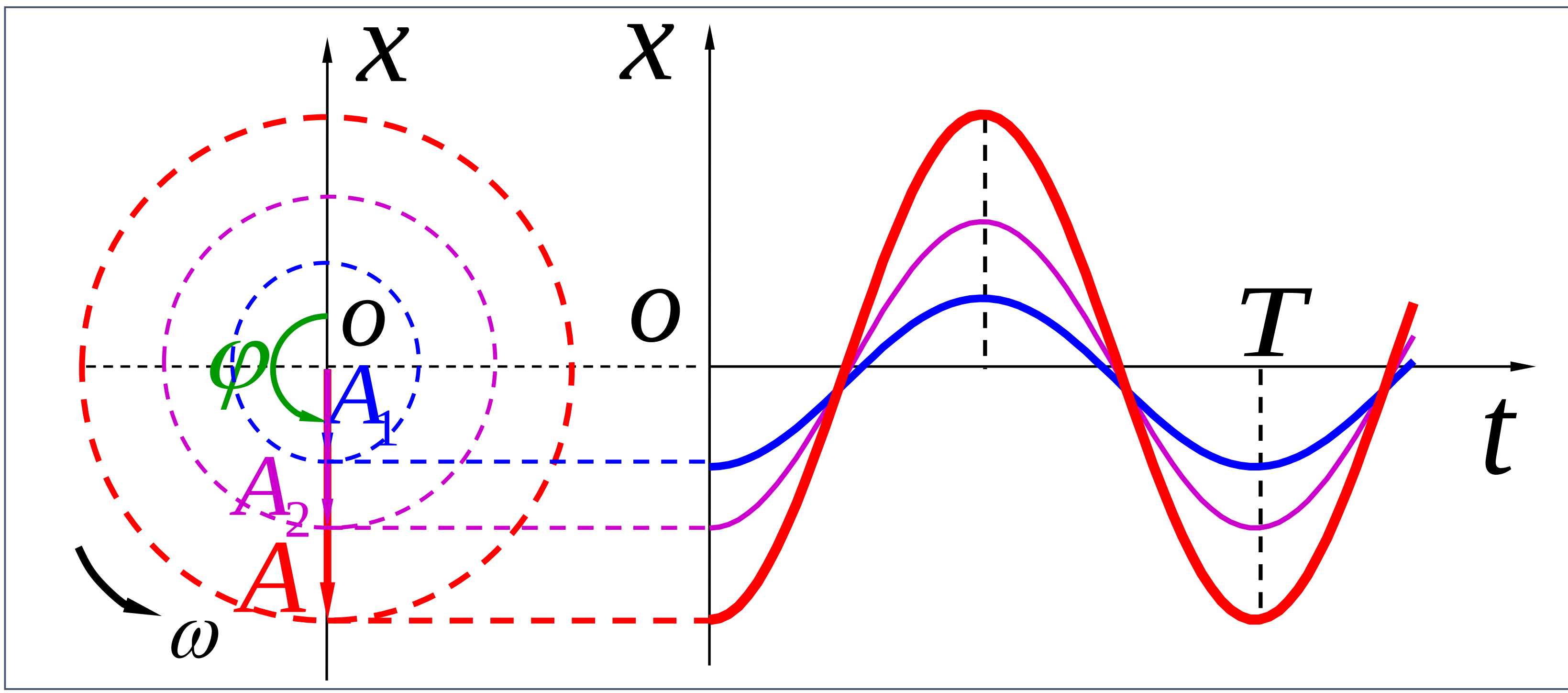
对合成谐振动的讨论

$$x = x_1 + x_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

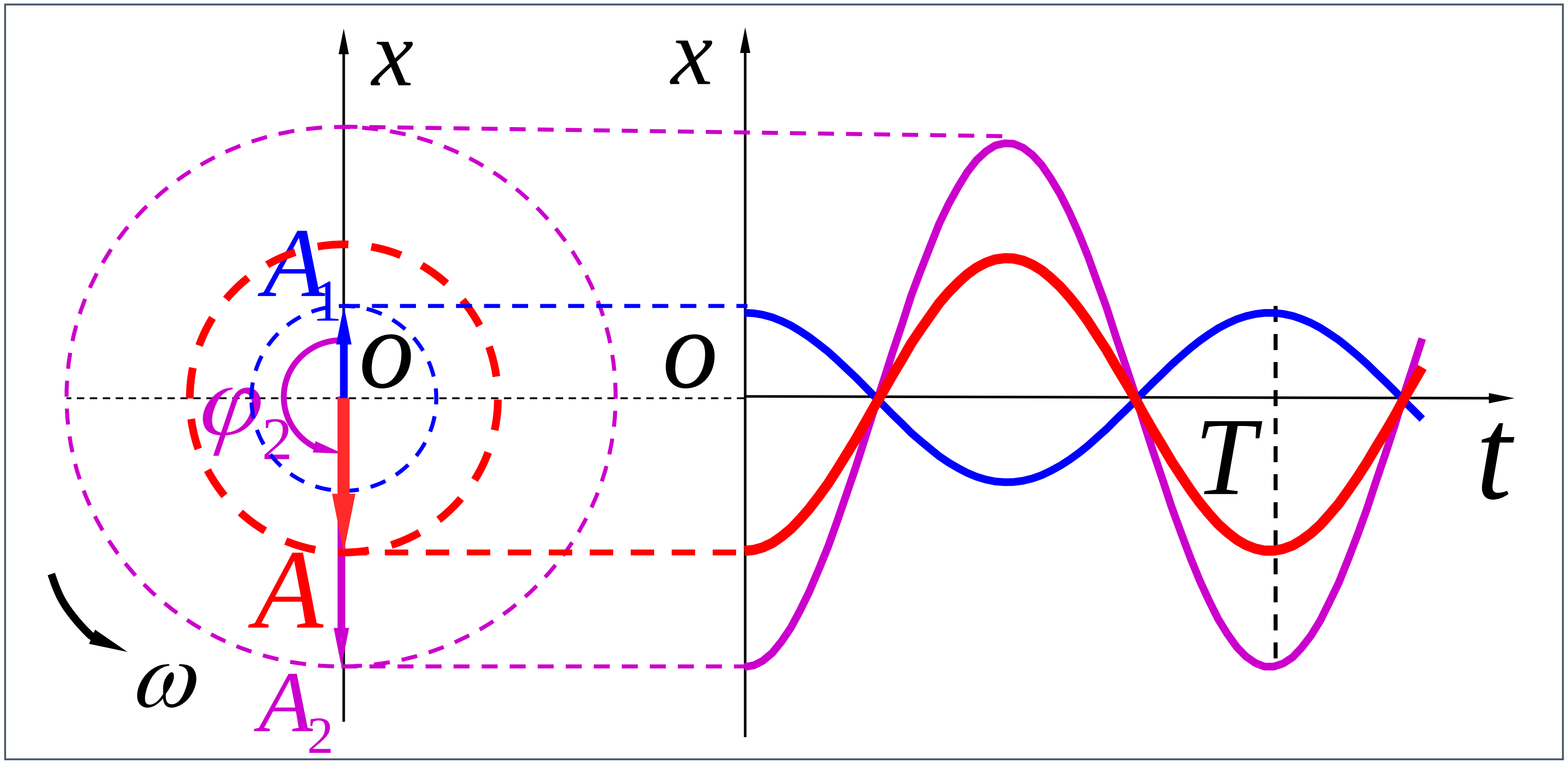
（1）相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi \ (k = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

$$A = A_1 + A_2$$ （同相） 相互加强



（2）相位差 $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = (2k+1)\pi \quad (k = 0, \pm 1, \cdots)$

$$A = |A_1 - A_2|$$ （反相） 相互削弱



（3）一般情况 $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = $ 其它值

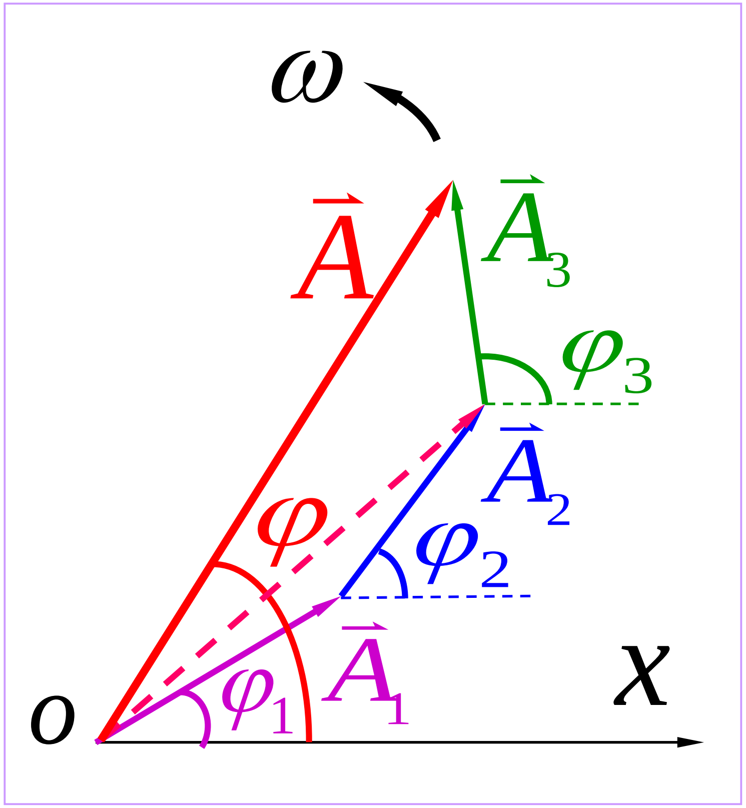
$$|A_1 - A_2| < A < A_1 + A_2$$

多个同方向同频率简谐运动的合成

$$\begin{cases} x_1 = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) \\ x_2 = A_2\cos(\omega t+\varphi_2) \\ \cdots\cdots \\ x_n = A_n\cos(\omega t+\varphi_n) \end{cases}$$

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

$$\boxed{x = A\cos(\omega t+\varphi)}$$



——多个同方向同频率简谐运动合成仍为简谐运动

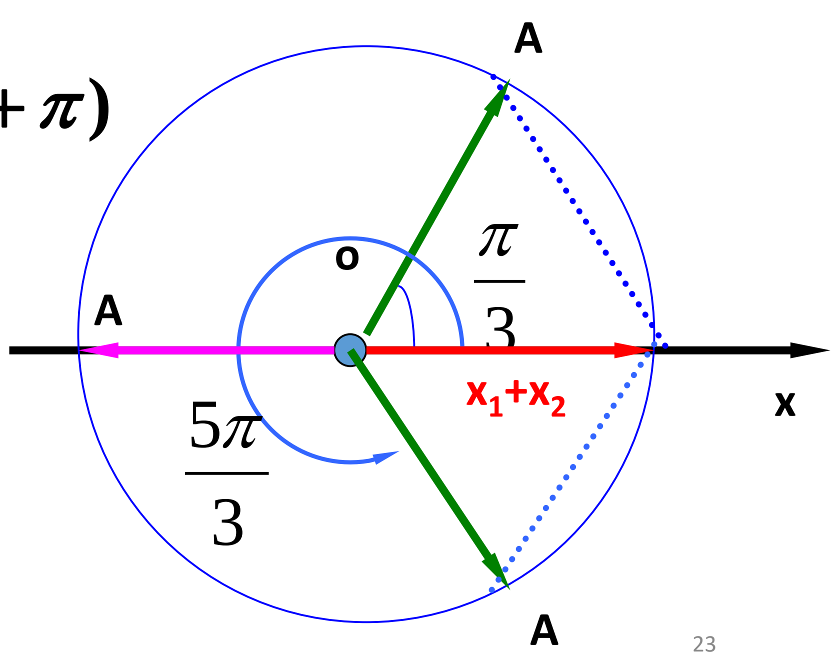
例：已知一质点同时参与了三个简谐振动，$x_1=A\cos(\omega t+\pi/3)$，$x_2=A\cos(\omega t+5\pi/3)$，$x_3=A\cos(\omega t+\pi)$。求其合振动方程。

解法一：

$$
\begin{aligned}
x' &= A\cos(\omega t+\frac{\pi}{3})+A\cos(\omega t+\frac{5\pi}{3}) \\
&= 2A\cos(\omega t+\pi)\cos(\frac{2\pi}{3}) \\
&= -A\cos(\omega t+\pi)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X &= x'+x_3 \\
&= -A\cos(\omega t+\pi)+A\cos(\omega t+\pi) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

解法二：旋转矢量法



$X=0$