电磁学

内 容 总 结

第七章 静电学

一、基本概念

1. 电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0}$$

- 点电荷的电场强度

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\vec{r}_0$$

- 连续分布带电体的电场强度

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{\mathrm{d}q}{r^2}\vec{r}_0$$

2. 电通量

$$\mathrm{d}\Phi_\mathrm{e} = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \qquad \Phi_\mathrm{e} = \int_S \mathrm{d}\Phi_\mathrm{e} = \int_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

3. 电势：

$$U_p = \frac{A}{q_0} = \int_p^{(0)} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 电势差

$$\Delta U = U_A - U_B = \int_A^B \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$$

- 点电荷的电势

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- 连续分布电荷的电势

$$U_P = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

电场强度与电势的关系

$$\vec{E} = -\nabla U = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}n}\vec{n}_0$$

$$= -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}\right)$$

4. 电势能：

$$W_a = \int_a^{(0)} q\vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l} = qU_a$$

二、基本规律

1. 真空中的静电场

$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\vec{r}_0 \\ \vec{E} &= \vec{F}/q_0 \\ \vec{E} &= \sum \vec{E}_i\end{aligned}\right] \to \vec{E} = \sum_i \frac{q_i \vec{r}_{0i}}{4\pi\varepsilon_0 r_i^2} \to \left[\begin{aligned}&\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0} \\ &\oint_L \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{l} = 0\end{aligned}\right.$$

$$\boldsymbol{U_P} = \int_{(\boldsymbol{P})}^{(\boldsymbol{P}_0)} \vec{\boldsymbol{E}}\cdot \mathrm{d}\vec{\boldsymbol{l}}$$ **+电荷守恒定律**

(1). 求静电场的方法：

求 $\vec{E}$

- 场强叠加法
- 高斯定理法 $\displaystyle\oint_S \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{s} = \frac{\sum q_{内}}{\varepsilon_0}$
- 补偿法

求 U

- 场强积分法： $\displaystyle U_p = \int_{(P)}^{(P_0)} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{l}$,

  （E 分段，积分也要分段）

- 叠加法： $U = \sum_i U_i$（零点要同）；

  $\displaystyle U = \int_q \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 r}$， （$U_\infty = 0$）。

(2). 几种典型电荷分布的 $\vec{E}$ 和 U

点电荷（?）

均匀带电球面（?）

均匀带电球体（?）

均匀带电无限长直线（?）

均匀带电无限大平面（?）

均匀带电细圆环轴线上一点（?）

无限长均匀带电圆柱面（?）

均匀带电球面：

$$\begin{cases} 0 & (r < R) \\ E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (r > R) \end{cases}$$

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R} & (r \le R) \\ U = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r} & (r > R) \end{cases}$$

均匀带电球体：

$$\begin{cases} E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Qr}{R^3} & (r < R) \\ E = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2} & (r > R) \end{cases}$$

均匀带电半径为***R***的细圆环轴线上一点：

$$E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qx}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{(x^2+R^2)^{1/2}}$$

无限长均匀带电平面两侧：

$$E=\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$$

无限长均匀带电直线：

$$E=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

2. 导体的静电平衡

静电平衡---导体内部和表面无电荷定向移动

导体表面场强垂直表面

推论：静电平衡时, 导体是个等势体，导体表面是个等势面.

有导体存在时静电场的分析与计算

电场 ⇄ 导体上的电荷重新分布

相互影响

利用：静电场的基本规律（高斯定理和环路定理）

静电场的叠加原理

电荷守恒定律

导体的静电平衡条件

电容：表征导体和导体组静电性质的一个物理量

孤立导体的电容 $C = \dfrac{Q}{U}$

孤立导体球的电容 $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

电容器的电容

$$C = \frac{Q}{U_A - U_B} = \frac{Q}{\Delta U}$$

平行板电容器

$$C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{d}$$

同心球形电容器

$$C = 4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R_1 R_2 / (R_2 - R_1)$$

同轴柱形电容器

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r L}{\ln R_2 / R_1}$$

3. 静电场中的电介质

电介质对电场的影响 $\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}'$

电位移矢量 $\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$

有电介质时的高斯定理： $\oint_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = q_0 = \sum_i q_{0i}$

在解场方面的应用,在具有某种对称性的情况下,可以首先由高斯定理解出:

思路 $\vec{D} \Rightarrow \vec{E}$

4. 静电场的能量

电容器的能量：

$$W=\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}=\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}QU \quad \left(U=U_A-U_B\right)$$

静电场的能量密度

$$\omega_e=\frac{1}{2}\varepsilon E^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0\varepsilon_r E^2$$

$$=\frac{1}{2}DE=\frac{1}{2}\vec{D}\cdot\vec{E}$$ 对任意电场都适合

静电场的能量 $W_e=\int_V \omega_e dV$

稳恒磁场与电磁相互作用

一、 磁感应强度 $\vec{B}$ 的计算

1) 叠加法或积分法： 电流元的磁场分布 $\mathrm{d}\vec{B}=\dfrac{\mu_0 I\mathrm{d}\vec{l}\times\hat{r}_0}{4\pi r^2}$

2) 应用安培环路定理： $\boxed{\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum_{(L)} I_{i内}}$

3) 典型磁场：

长直导线的磁场: $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi r}(\cos\theta_1-\cos\theta_2)$ **（有限长）**

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$ **（无限长）**

$$B=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}$$ **（半限长）**

圆电流轴线上： $$B=\frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(x^2+R^2)^{3/2}}$$ **（方向沿轴线方向）**

圆电流中心： $$\boxed{B=\frac{\mu_0 I}{2R}}$$

圆弧电流中心（θ为圆心角）： $$B=\frac{\mu_0 I\theta}{4\pi R}$$

载流圆柱体： $$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}\cdot r,(r\le R)$$

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi}\cdot\frac{1}{r},(r\ge R)$$

$$B=0\quad(r=0)$$

通电螺线管： $\boxed{B=\mu_0 nI}$ （无限长管内任一点）

$$B=\frac{1}{2}\mu_0 nI$$ （半限长面中心处）

无限大均匀载流平面：

$$B=\frac{\mu_0}{2}i$$ i **为线电流密度**

二、磁场的性质

1. 高斯定理：$\oiint_S \vec{B}\cdot d\vec{s}=0,$ $\nabla\cdot\vec{B}=0$ **无源场；**

2. 安培环路定理：$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum_{(L包围)} I$ $\nabla\times\vec{B}=\mu_0\vec{j}$ **有旋场；**

三、 磁场力

1. 运动电荷受力: $\boxed{\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}}$

2. 电流元受力: $\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$ $\vec{F} = \int_L I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$

3. 载流线圈受磁力矩: $\boxed{\vec{M} = I\vec{S} \times \vec{B} = \vec{m} \times \vec{B}}$

磁矩: $\boxed{\vec{m} = I\vec{S}}$

(N匝 $\vec{m} = NI\vec{S}$)

4. 磁力(矩) 的功: $W = I\Delta\phi_m = I(\phi_{m2} - \phi_{m1})$

四、 磁介质

磁介质中的高斯定理： $$\oiint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oiint_s (\vec{B}_0 + \vec{B}')\cdot d\vec{s} = 0$$

磁介质中的安培环路定理： $$\boxed{\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = \sum_{(L包围)} I_{传}}$$

各向同性均匀介质中： $$\boxed{\vec{B} = \mu_r \mu_0 \vec{H} = \mu \vec{H}}$$

电磁感应

1. 感应电动势

法拉第电磁感应定律 $\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$ （楞次定律和符号规则）

动生电动势 $\varepsilon_i = \displaystyle\int_{(a)}^{(b)} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ （搞清两个夹角）

感生电动势 $\varepsilon_i = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_m}{\mathrm{d}t} = -\displaystyle\iint_S \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \int_L \vec{E}_k \cdot \mathrm{d}\vec{l}$

$\vec{E}_K$：感生电场（非保守场）

2. 自感和互感

$$\begin{cases} L = \dfrac{\psi}{i} \\ \varepsilon_L = -L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ W_m = \dfrac{1}{2}Li^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} M = \dfrac{\psi_{12}}{i_2} = \dfrac{\psi_{21}}{i_1} \\ \varepsilon_{12} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ \varepsilon_{21} = -M\dfrac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \end{cases}$$

3. 磁场能量

$$\mathrm{w}_m = \frac{1}{2}\vec{B}\cdot\vec{H} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu_0\mu_r} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2}\mu_0\mu_r H^2,$$

各向同性

$$\boldsymbol{W_m = \int_V w_m \,\mathrm{d} v}$$

电磁波理论

1. 两个假说

涡旋电场

$$\oint_L \vec{E}_R \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

位移电流

$$I_d = \int_S \vec{j}_d \cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$$

$$\vec{j}_c = \gamma \vec{E}$$

2、麦克斯韦方程组

- 静电场高斯定理

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_{S内} q_{0i}$$

- 电场环流定理

$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\iint_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

- 磁场高斯定理

$$\oiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

$\vec{E}$

- 安培环路定理

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_c + I_d$$

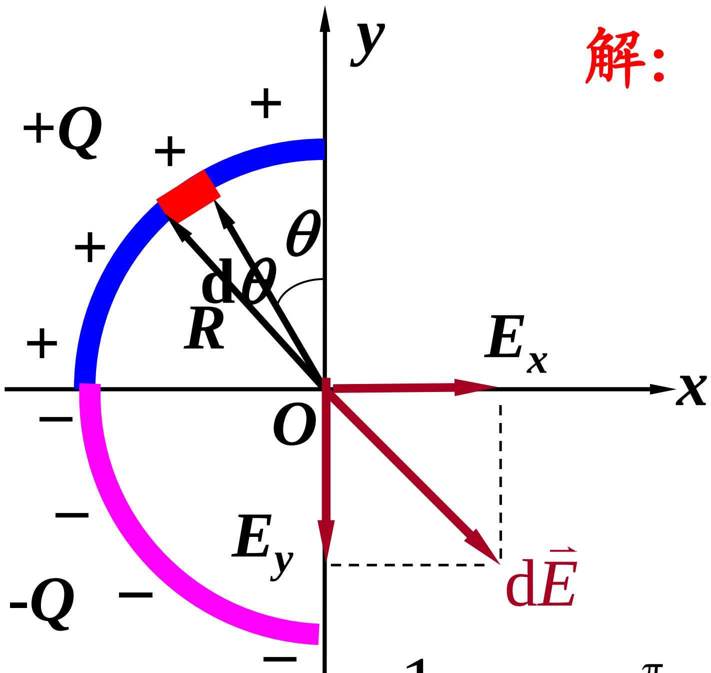
$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

例1 一个细玻璃棒弯成半径为R的半圆形，沿其上半部分均匀分布有电量$+Q$，沿其下半部分均匀分布有电量$-Q$，如图所示。试求圆心O处的电场强度。



解:

$$\mathrm{d}q=\lambda R\mathrm{d}\theta=\frac{2Q}{\pi R}R\mathrm{d}\theta=\frac{2Q}{\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q}{R^2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}E_x=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q}{R^2\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta$$

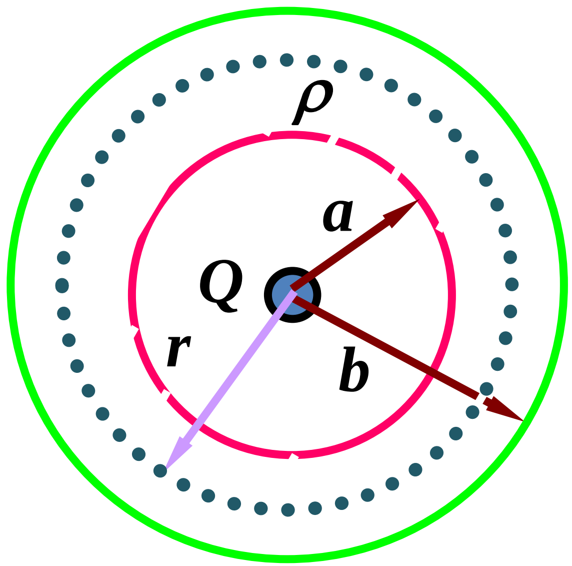
$$\mathrm{d}E_y=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{2Q}{R^2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore E_x=\int\mathrm{d}E_x=\frac{1}{2\pi^2R^2\varepsilon_0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}Q\sin\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-Q)\sin\theta\mathrm{d}\theta\right)=0$$

$$E_y=\int\mathrm{d}E_y=-\frac{1}{2\pi^2R^2\varepsilon_0}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}Q\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}(-Q)\cos\theta\mathrm{d}\theta\right)=\frac{-Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}$$

$$\Rightarrow\vec{E}=-\frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0R^2}\vec{j}$$

例2：有一带电球壳,内外半径分别为 a和b,电荷体密度$\rho=A/r$,在球心处有一点电荷Q,证明当$A=Q/(2\pi a^2)$时,球壳区域内的场强E的大小与 r 无关.



证: $\oint \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\cdot 4\pi r^2 = (Q+\int \rho dV)/\varepsilon_0$

$$\int \rho dV = \int_a^r \frac{A}{r} 4\pi r^2 dr = 2\pi A(r^2 - a^2)$$

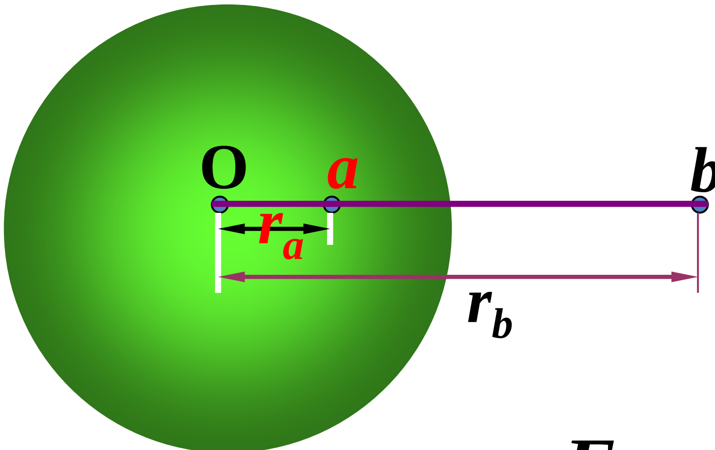
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} + \frac{A}{2\varepsilon_0} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2}$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} - \frac{Aa^2}{2\varepsilon_0 r^2} = 0$$

$$\therefore A = \frac{Q}{2\pi a^2}$$

例3. 正电荷均匀分布在半径为R的球形体积中,电荷体密度为ρ，求球内a 点与球外b点的电势差。

解： 根据高斯定理 $\oiint_s \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho dV$



球内距球心 r 处的场强：

$$E_1=\frac{4\pi r^3\rho/3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r \quad \vec{E}_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}$$

球外距球心 r 处的场强：

$$E_2=\frac{4\pi R^3\rho/3}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \quad \vec{E}_2=\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}$$

$$\therefore U_{ab}=\int_{r_a}^{R}\vec{E}_1\cdot d\vec{r}+\int_{R}^{r_b}\vec{E}_2\cdot d\vec{r}=\int_{r_a}^{R}\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}\cdot d\vec{r}+\int_{R}^{r_b}\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^3}\vec{r}\cdot d\vec{r}$$

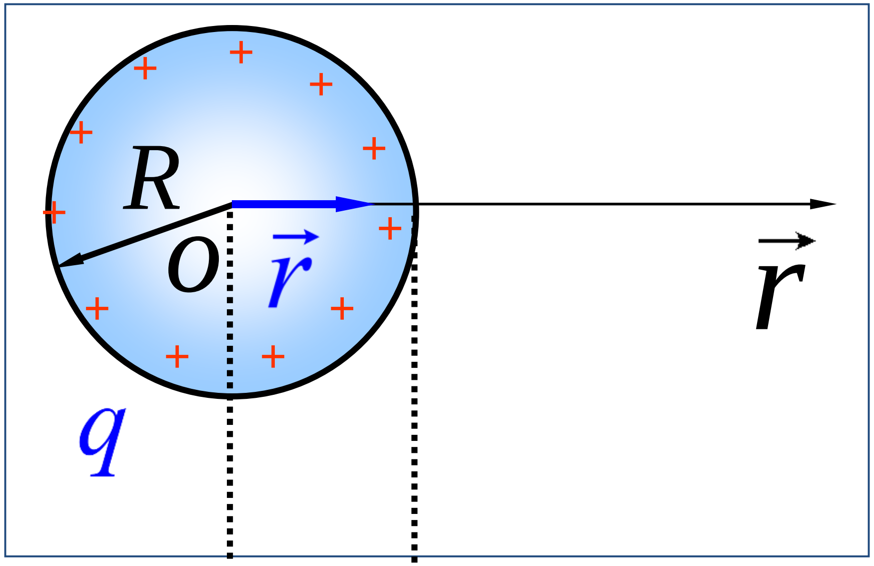
$$=\frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2-r_a{}^2-\frac{2R^3}{r_b})$$

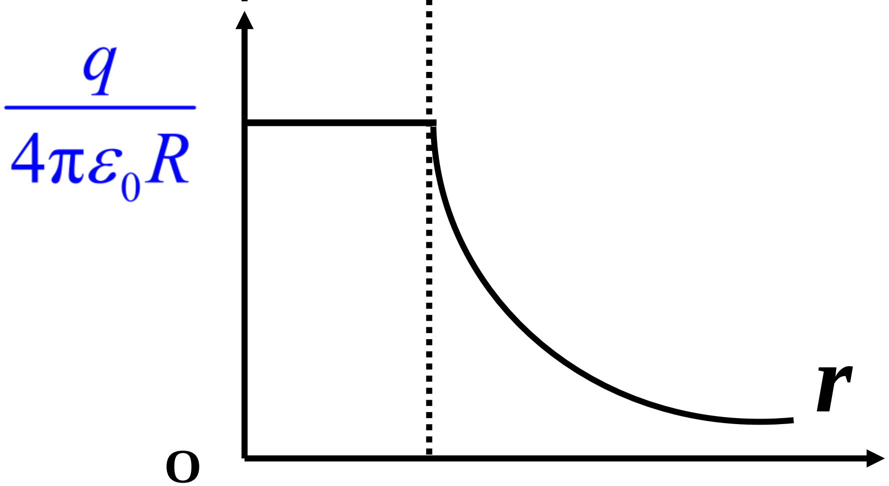
例4：两个同心的均匀带电球面，半径分别为 R_1=5.0cm, R_2=20.0cm,已知内球面的电势为 U_1 =60V, 外球面的电势 U_2 = -30V 。求：（1）求内，外球面上所带电量？（2）在两个球面之间何处的电势为零？

$$\begin{cases} r < R, & \vec{E}_1 = 0 \\ r > R, & \vec{E}_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \end{cases}$$

$$U = \int \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{r}$$

$$\begin{cases} r < R, & U_1 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ r > R, & U_2 = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} \end{cases}$$





解：（1）以 q_1 和 q_2 分别表示内外球面所带电量。

由电势叠加原理:

$$U_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{R_1}+\frac{q_2}{R_2}\right)=60V \qquad U_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1+q_2}{R_2}=-30V$$

带入给出的 R_1 和 R_2 值联立解上两式可得:

$$q_1=6.7\times10^{-10}C \qquad q_2=-1.3\times10^{-9}C$$

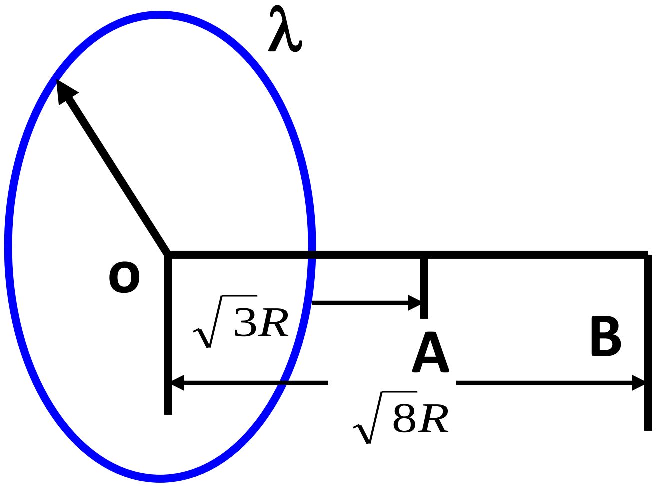
（2）设该点半径为*r*,由:

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q_1}{r}+\frac{q_2}{R_2}\right)=0$$

由此可得:

$$r=\frac{q_1}{-q_2}R_2=\frac{6.7\times10^{-10}}{1.3\times10^{-9}}\times20=10cm$$

例5 半径为R的带电圆环，电荷线密度为λ，轴线上A，B两点，与圆心的距离为 $\overline{OA}=\sqrt{3}R,\ \overline{OB}=\sqrt{8}R$ 一质量为m,电量为q 的粒子从A点运动到B点，求此过程中电场力的功。



解1: 设无穷远为电势零点

$$U_A=\frac{\lambda 2\pi R}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{R^2+3R^2}}=\frac{\lambda}{4\varepsilon_0}$$

$$U_B=\frac{\lambda}{6\varepsilon_0}$$

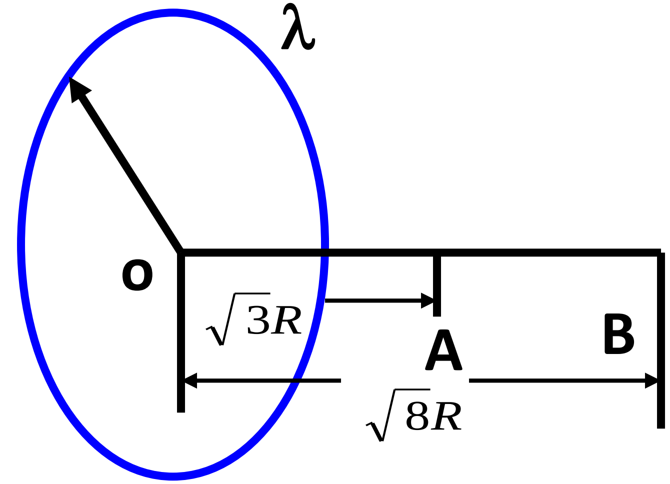
则q由A到B，电场力做功为：

$$A_{A\to B}=q(U_A-U_B)=\frac{q\lambda}{12\varepsilon_0}$$

解2：轴线上任一点的场强为

$$E=\frac{\lambda 2\pi R x}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}}$$

$$A=q\int_A^B E\cdot \mathrm{d}l=q\int_{\sqrt{3}R}^{\sqrt{8}R}\frac{\lambda 2\pi R x}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$$



例6 长为 L 载有电流 I_2 的导线与电流为 I_1 的长直导线 放在同一平面内（如图），**求**作用在长为 L 的载流导线上的磁场力。

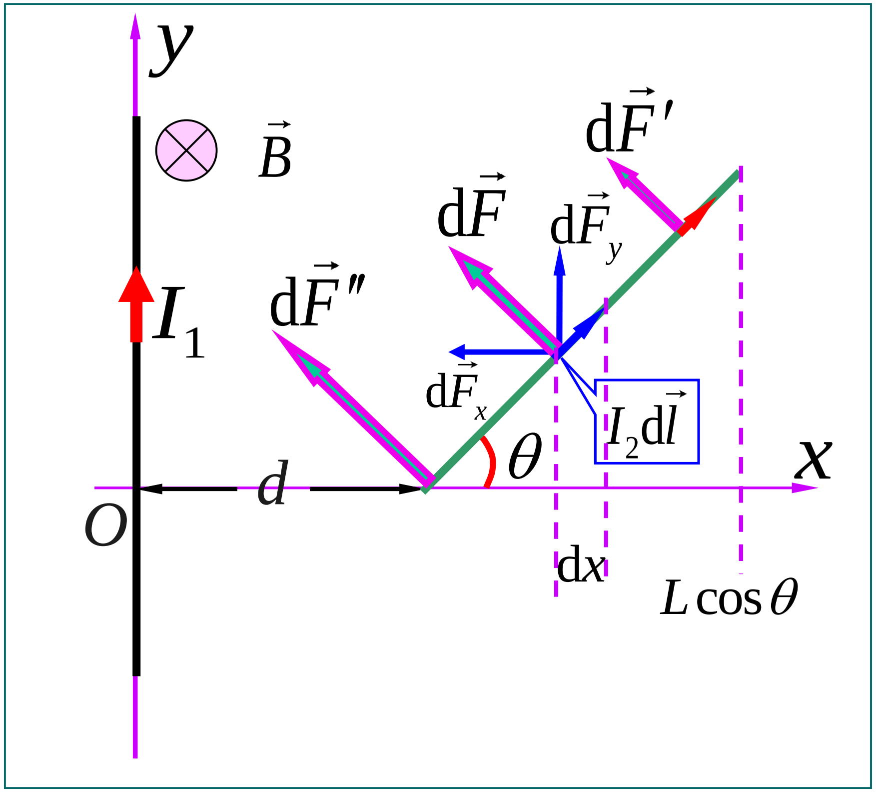
解： $\mathrm{d}\vec{F} = I_2 \mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}$ $\mathrm{d}F = I_2 B \mathrm{d}l$

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$\mathrm{d}F = BI_2 \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I_2 \mathrm{d}l}{2\pi x}$$

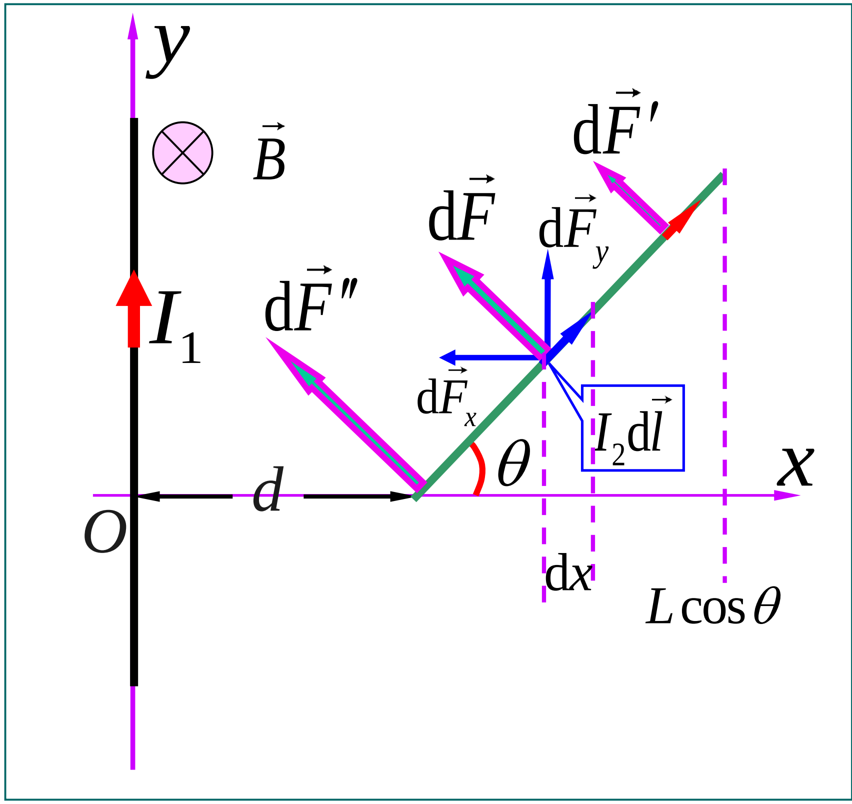
$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}l \cos\theta$$

$$\mathrm{d}F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi \cos\theta} \frac{\mathrm{d}x}{x}$$



$$F=\int_{(L)}\mathrm{d}F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\theta}\int_d^{d+L\cos\theta}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi\cos\theta}\ln\left(\frac{d+L\cos\theta}{d}\right)$$



讨论：（1） $\theta=0$

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\left(\frac{d+L}{d}\right)$$

（2） $\theta=\pi/2$

$$F=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{L}{d}$$

例7 边长为0.2m的正方形线圈，共有50 匝 ，通以电流2A，把线圈放在磁感应强度为 0.05T的均匀磁场中. 问在什么方位时，线圈所受的磁力矩最大？磁力矩等于多少？

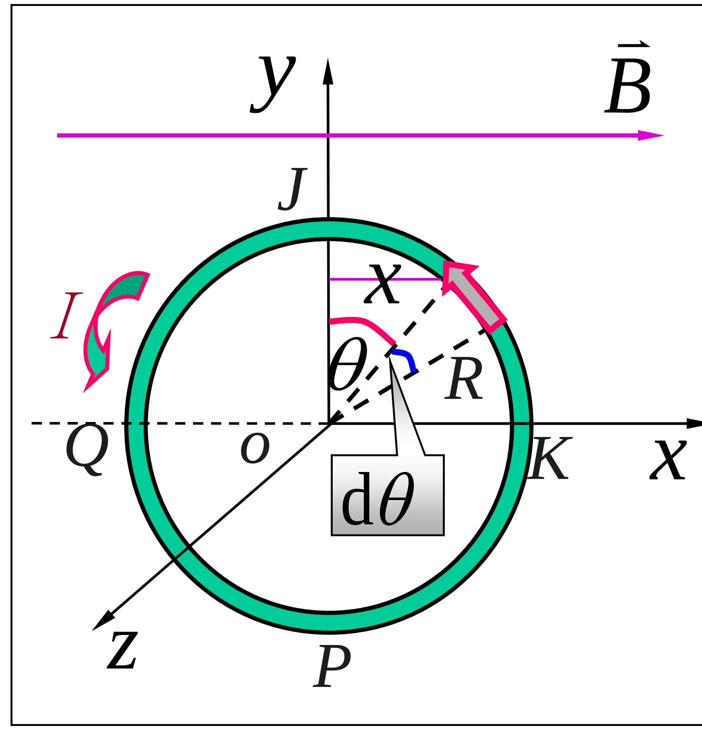
解 $M = NBIS\sin\theta$ 得 $\theta = \dfrac{\pi}{2}, \quad M = M_{\max}$

$$M = NBIS = 50 \times 0.05 \times 2 \times (0.2)^2 \ \mathrm{N \cdot m}$$

$$M = 0.2 \mathrm{N \cdot m}$$

例8 如图半径为0.20m，电流为20A，可绕轴旋转的圆形载流线圈放在均匀磁场中，磁感应强度的大小为0.08T，方向沿 x 轴正向.问线圈受力情况怎样？线圈所受的磁力矩又为多少？

解： 把线圈分为 JQP 和 PKJ 两部分



$$\vec{F}_{JQP} = BI(2R)\vec{k} = 0.64\vec{k}\mathrm{N}$$

$$\vec{F}_{PKJ} = -BI(2R)\vec{k} = -0.64\vec{k}\mathrm{N}$$

以 Oy 为轴，$I\mathrm{d}\vec{l}$ 所受磁力矩大小

$$\mathrm{d}M = x\mathrm{dF} = I\mathrm{d}lBx\sin\theta$$

$$x = R\sin\theta, \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}M = x\mathrm{d}F = I\mathrm{d}lBx\sin\theta$$

$$x = R\sin\theta, \mathrm{d}l = R\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}M = IBR^2\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

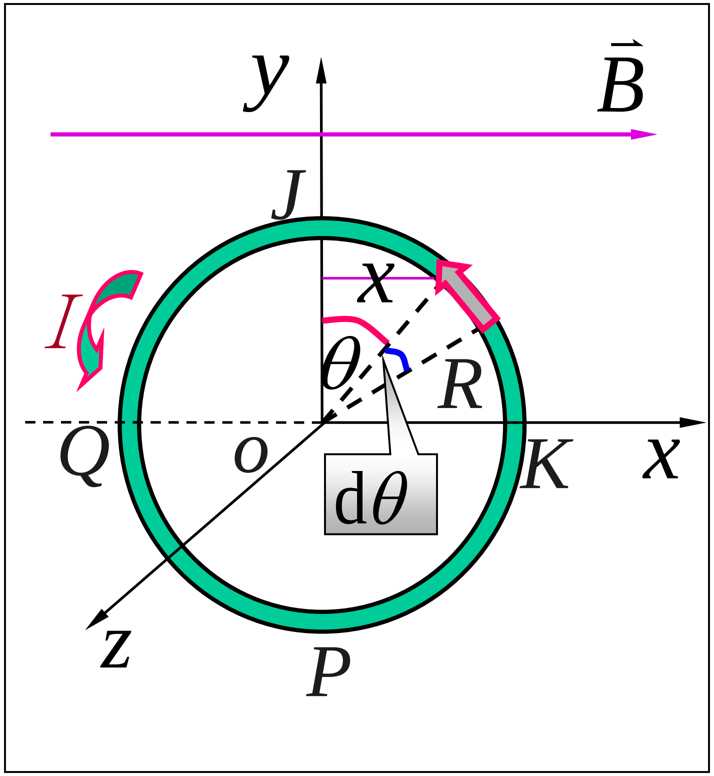
$$M = IBR^2\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta$$

$$M = IB\pi R^2$$

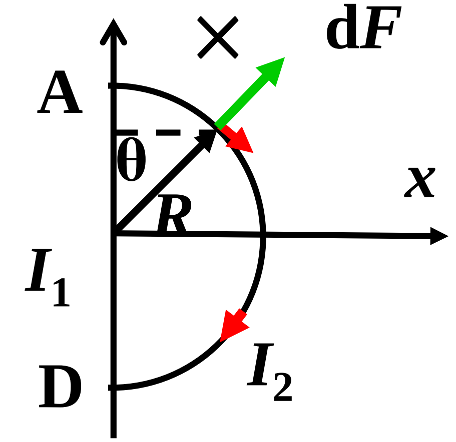
$$\vec{m} = IS\vec{k} = I\pi R^2\vec{k}$$

$$\vec{B} = B\vec{i}$$

$$\vec{M} = \vec{m}\times\vec{B} = I\pi R^2B\vec{k}\times i = I\pi R^2B\vec{j}$$



例9. 半径为R的半圆线圈ACD通有电流I_2，置于电流为I_1的无限长直流电流的磁场中，直线电流I_1恰过半圆的直径，两导线相互绝缘。求半圆线圈受到长直流电流I_1的磁力。



解:长直导线产生的磁场由安培环路定理计算

$$\int B\mathrm{d}l = \mu_0 I_1 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

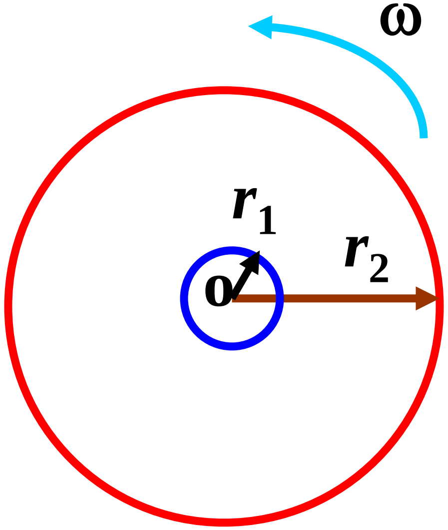
由安培定律计算磁力

$$\mathrm{d}\vec{F} = I_2\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} \Rightarrow \mathrm{d}F = I_2 B\mathrm{d}l = I_2 BR\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore \mathrm{d}F_x = \sin\theta \mathrm{d}F = I_2 \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R\sin\theta} R\sin\theta\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\mathrm{d}\theta$$

$$\therefore F_x = \int \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\mathrm{d}\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2}$$

例10：一半径为r_2电荷线密度为λ的均匀带电圆环，里面有一半径为r_1总电阻为R的导体环，两环共面同心（$r_2>>r_1$），当大环以变角速度$\omega=\omega$（t）绕垂直于环面的中心轴旋转时，求小环中的感应电流。其方向如何？



解：大环中的等效电流：

$$I=\frac{\omega(t)}{2\pi}2\pi r_2\lambda=\omega(t)r_2\lambda$$

此电流在O处产生的磁感应强度大小：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2r_2}=\frac{1}{2}\mu_0\omega(t)\lambda$$

穿过小环的磁通量：

$$\Phi\approx BS=B\pi r_1^2=\tfrac{1}{2}\mu_0\omega(t)\lambda\pi r_1^2$$

电动势：

$$\therefore \varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\tfrac{1}{2}\mu_0 \lambda \pi r_1^2 \frac{d\omega(t)}{dt}$$

感应电流：

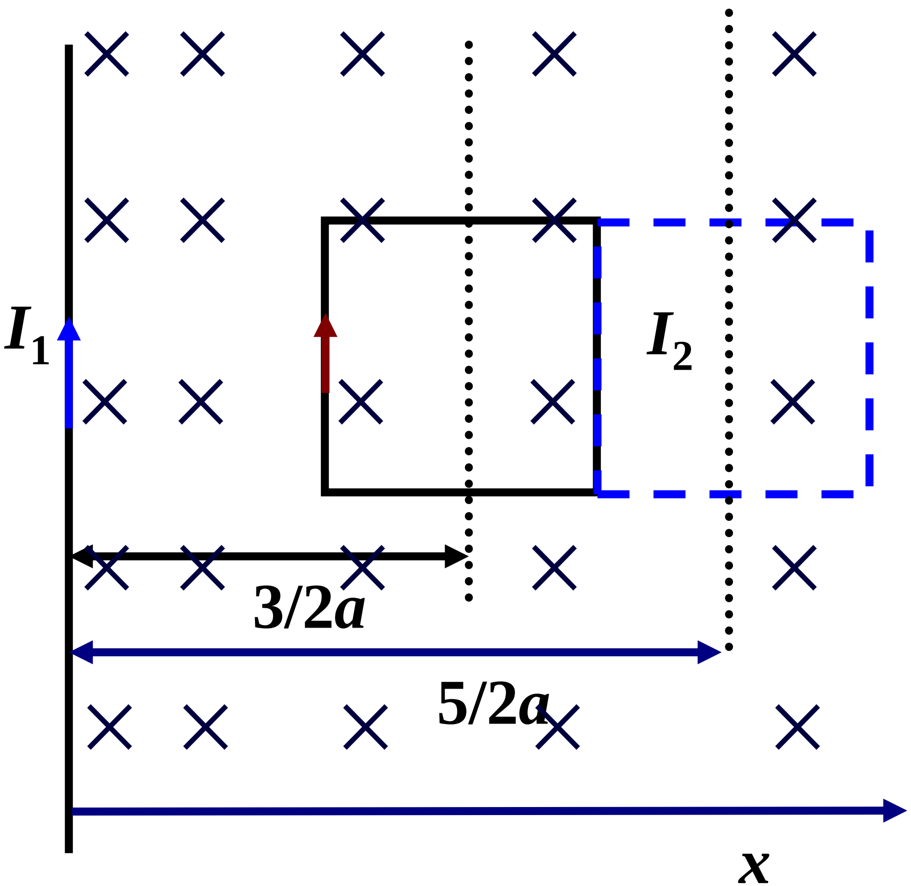
$$i = \frac{\varepsilon_i}{R} = -\frac{\mu_0 \lambda \pi r_1^2}{2R} \frac{d\omega(t)}{dt}$$

方向：

$\frac{d\omega}{dt} > 0$ ***i*为顺时针；**

$\frac{d\omega}{dt} < 0$ ***i*为逆时针；**

例11：一通有电流I_1的长直导线,旁边有一个与它共面通有电流I_2的每边长为a的正方形线圈,线圈的对边和长直导线平行,线圈的中心与长直导线间的距离为$3/2a$,在维持它们的电流不变和保证共面的条件下,将它们的距离从$3/2a$变为$5/2a$,求磁场对线圈所做的功。



解：长直导线周围磁场：

$$B=\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

利用安培力计算公式：

$$\vec{F}=\int I d\vec{l}\times\vec{B}$$

$$F_1=I_2 a\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$$

$$F_2=I_2 a\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+a)}$$

线圈所受的力为左右两边受力的差：

$$F = I_2 a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} - I_2 a \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(x+a)}$$

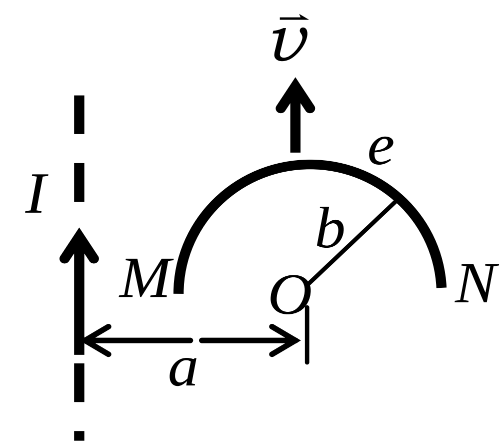
$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+a}\right)$$

磁场对线圈所做的功:

$$\therefore A = \int_a^{2a} F dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2 a}{2\pi} \ln\frac{4}{3}$$

例12：载有电流的I长直导线附近，放一导体半圆环MeN与长直导线共面，且端点MN的连线与长直导线垂直．半圆环的半径为b，环心O与导线相距a．设半圆环以速度 $\vec{v}$ 平行导线平移，求半圆环内感应电动势的大小和方向以及MN两端的电压U_{MN}．

1. 解：引入一条辅助线MN，构成闭合回路$MeNM$, 闭合回路总电动势：



$$\varepsilon_{总} = \varepsilon_{MeN} + \varepsilon_{NM} = 0$$

$$\varepsilon_{MeN} = -\varepsilon_{NM} = \varepsilon_{MN}$$

$$\varepsilon_{MN} = \int_{MN} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \mathrm{d}\vec{l} = \int_{a-b}^{a+b} -v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \mathrm{d}x = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

负号表示电动势的方向与x轴相反.

$$\varepsilon_{MeN} = -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b} \qquad 方向 N \rightarrow M$$

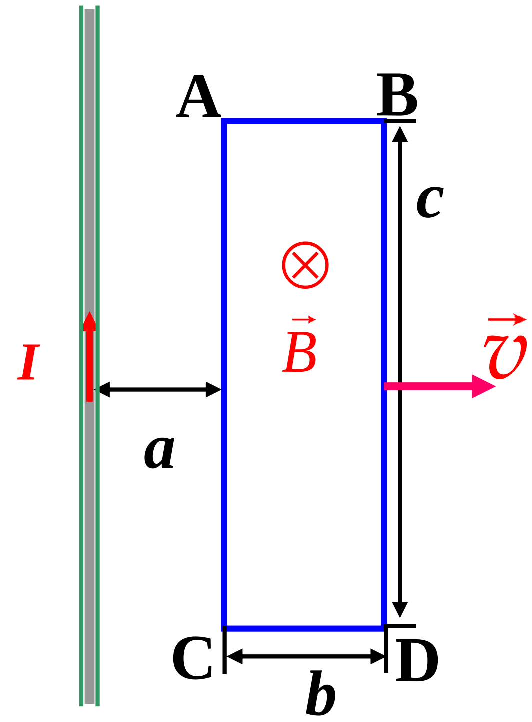
$$U_{MN} = -\varepsilon_{MN} = \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a-b}$$

例13 如图，已知无限长载流直导线中通有电流$I=I(t)$，与其共面的矩形导体线框以速度$\vec{v}$垂直于载流直导线向右运动，求矩形导体线框中的感应电动势$\mathcal{E}_i=?$

解法一:分别考虑动生电动势和感生电动势

$$\mathcal{E}_i=\int_M^N(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\mathrm{d}\vec{l}$$

$$\mathcal{E}_i=Blv$$



$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\qquad B_{\mathrm{AC}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\qquad B_{\mathrm{BD}}=\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$$

AC: $\mathcal{E}_{i1}=vc\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}$ **C→A**

BD: $\mathcal{E}_{i2}=vc\dfrac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}$ **D→B**

$$\mathcal{E}_{i动生}=\mathcal{E}_{i1}-\mathcal{E}_{i2}=vc\frac{\mu_0 I}{2\pi a}-vc\frac{\mu_0 I}{2\pi(a+b)}=vc\frac{\mu_0 I}{2\pi}\frac{b}{a(a+b)}$$

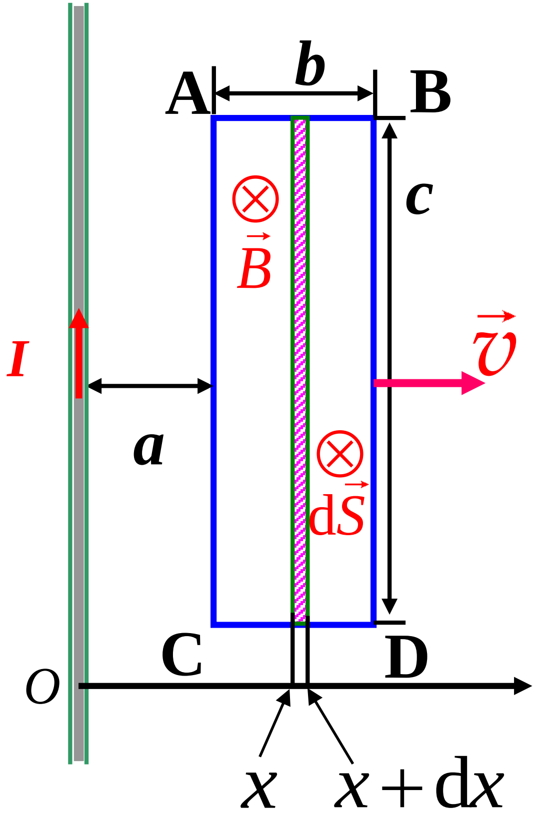
方向:C→A →B →D

矩形框的法线方向为垂直向内（ C→A →B →D ）

$$\mathcal{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\int_S\frac{\mathrm{d}\vec{B}}{\mathrm{d}t}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

$$=-\int_a^{a+b}\frac{\mu_0}{2\pi x}\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\cdot c\,\mathrm{d}x$$

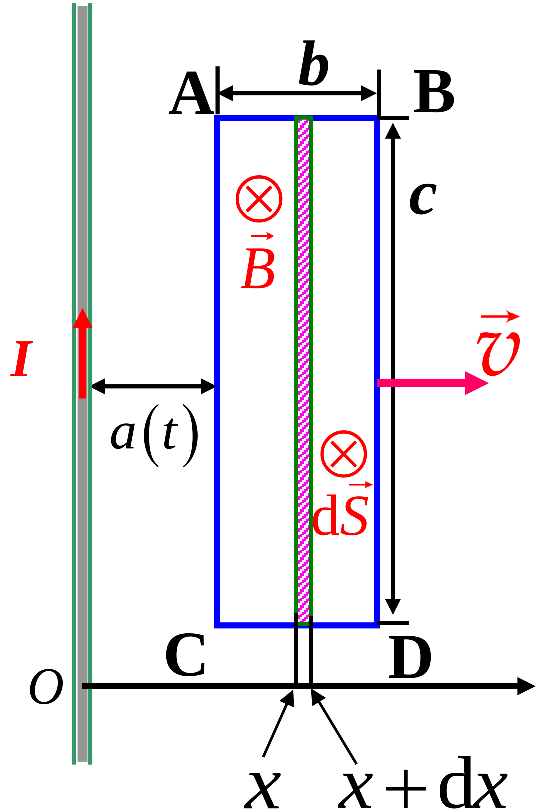
$$=-\left(\frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\right)\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$



$$\mathcal{E}_{i感生}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\left(\frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\right)\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

$$\mathcal{E}_i=vc\frac{\mu_0 I(t)}{2\pi}\frac{b}{a(a+b)}-\left(\frac{\mu_0 c}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\right)\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}$$

解法二：直接利用法拉第电磁感应定律



$$\Phi=\frac{\mu_0 I(t)c}{2\pi}\ln\frac{a(t)+b}{a(t)}$$

$$\mathcal{E}_i=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mu_0 Ic}{2\pi}\ln\frac{a+b}{a}\right)$$

$$=-\left[\frac{\mu_0 c}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\ln\frac{a+b}{a}\right.$$

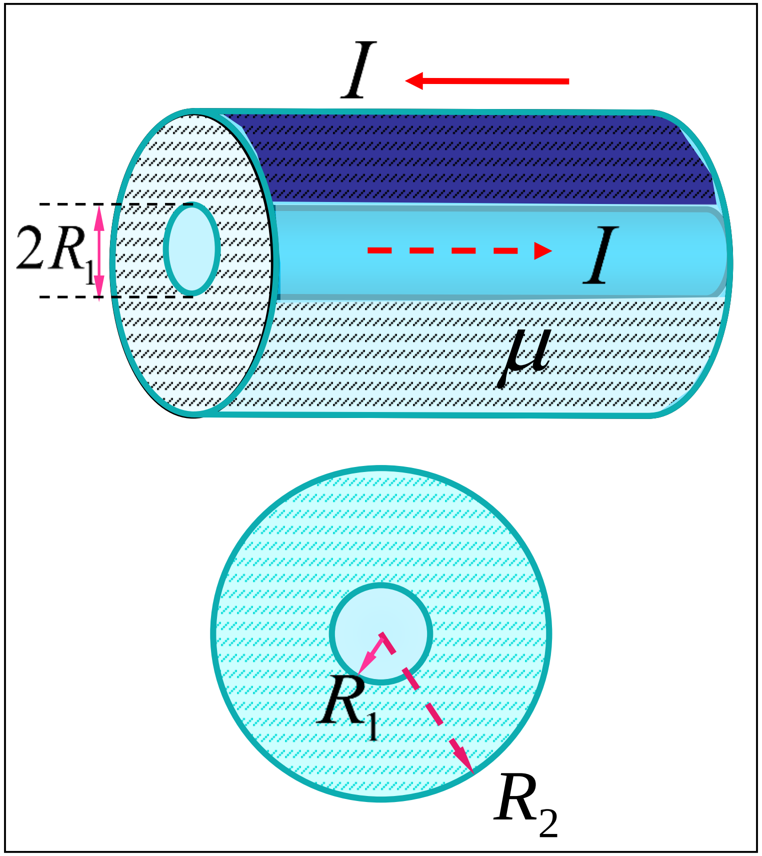
$$\left.+\frac{\mu_0 cI(t)}{2\pi}\frac{a}{a+b}\left(-\frac{b}{a^2}\right)\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}\right]$$

$$=-\frac{\mu_0 c}{2\pi}\frac{\mathrm{d}I(t)}{\mathrm{d}t}\ln\frac{a+b}{a}+\frac{\mu_0 cI(t)}{2\pi}\frac{bv}{a(a+b)}$$

例14 如图同轴电缆，中间充以磁介质，芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反。已知 R_1, R_2, I, μ 。求单位长度同轴电缆的磁能和自感。设金属芯线内的磁场可略。

解：由安培环路定律可求 B 的分布

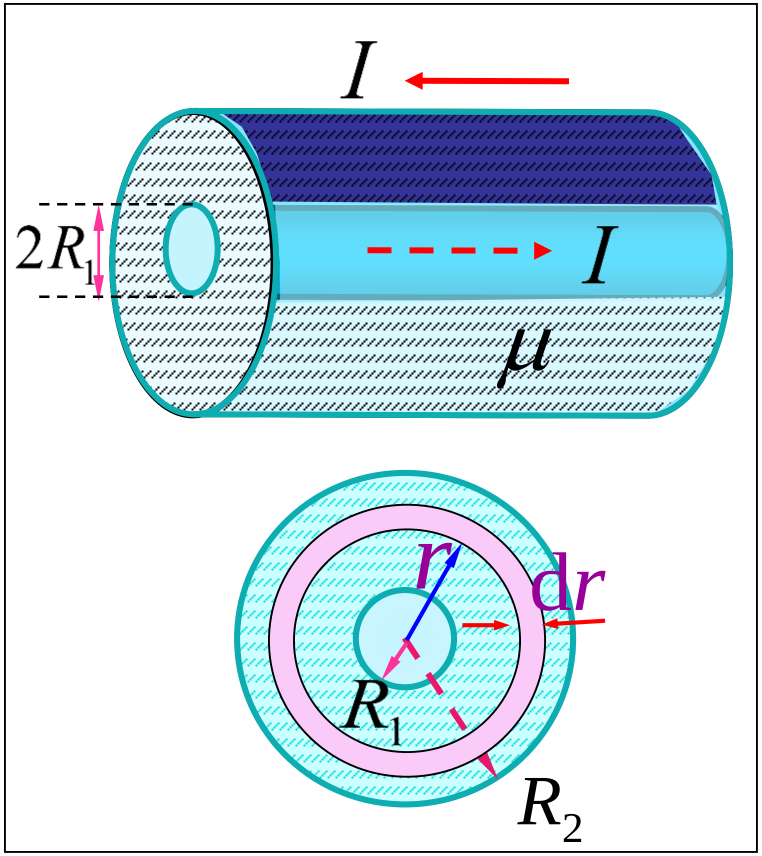
$$
\begin{cases}
B_1 = 0 \quad (r < R_1) \\
B_2 = \dfrac{\mu I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2) \\
B_3 = 0 \quad (r > R_2)
\end{cases}
$$



则 $R_1 < r < R_2$ 范围内：

单位长度的体元 $\mathrm{d}V = 2\pi\, r\mathrm{d}r \cdot 1$ 内：

$$w_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2}\frac{B^2}{\mu} = \frac{1}{2\mu}\left(\frac{\mu I}{2\pi r}\right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$



单位长度壳层体积内：

$$W_{\mathrm{m}} = \int_V w_{\mathrm{m}} \mathrm{d}V = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} \mathrm{d}V$$

$$= \frac{\mu I^2}{4\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mathrm{d}r}{r} = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$\because\ W_{\mathrm{m}} = \frac{1}{2} L I^2 \qquad \therefore\ L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$