§3 真空中的高斯定理

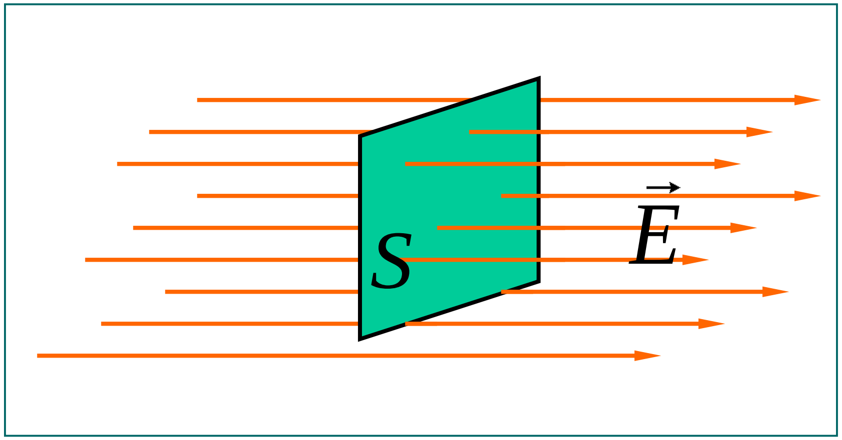
一、电场线（电力线）

静止带电体所激发的静电场中，各点电场强度的大小和方向是确定的，可以用曲线形式表示出来——

规定：（1）曲线上每一点切线方向为该点电场强度方向；

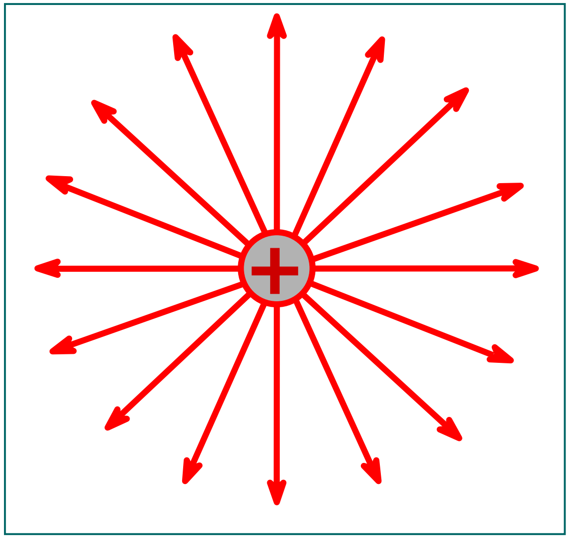
（2）某点附近邻域内，通过垂直于电场方向单位面积的电力线根数代表该点电场强度的大小。

$$\left|\vec{E}\right| = E = \mathrm{d}N / \mathrm{d}S_{\perp}$$

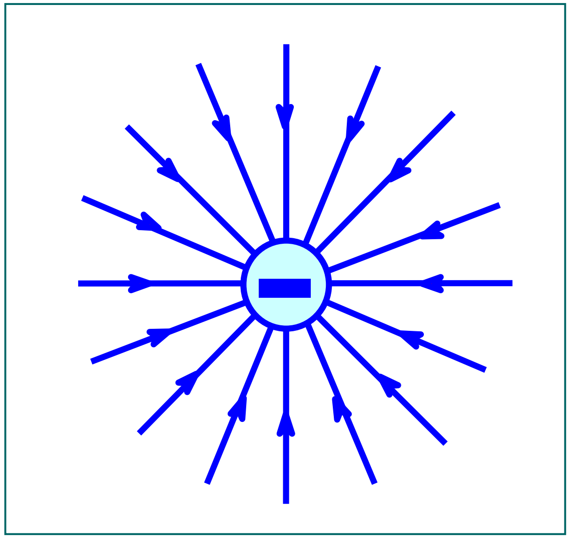


点电荷的电场线

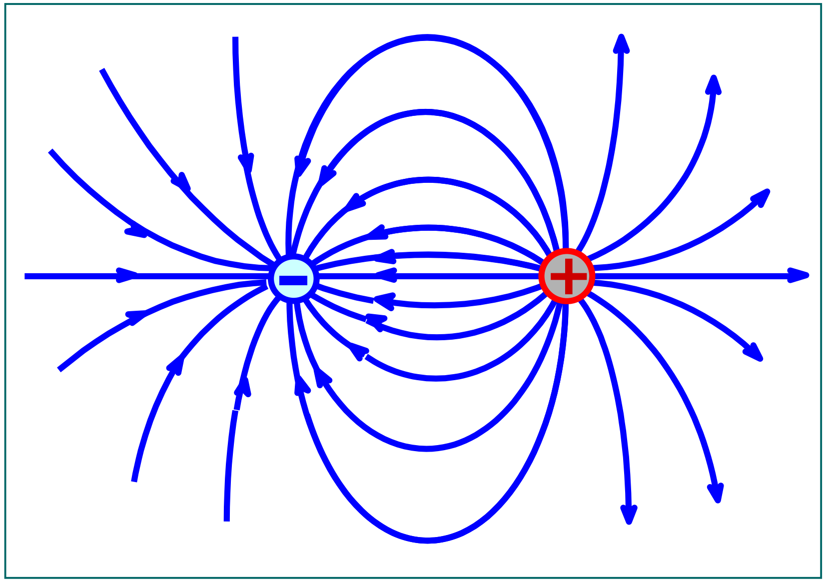
正点电荷



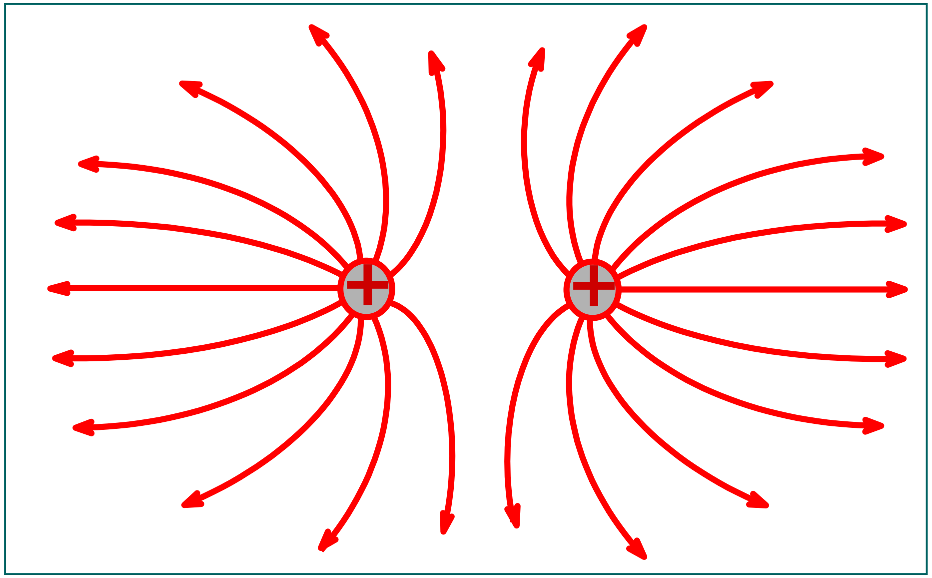
负点电荷



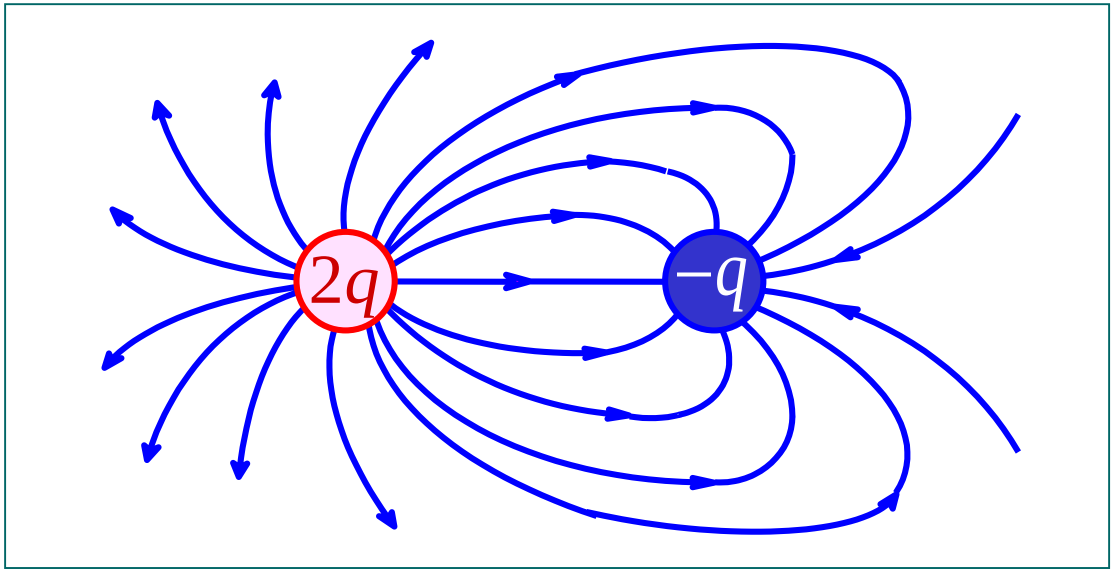
等量异号点电荷的电场线



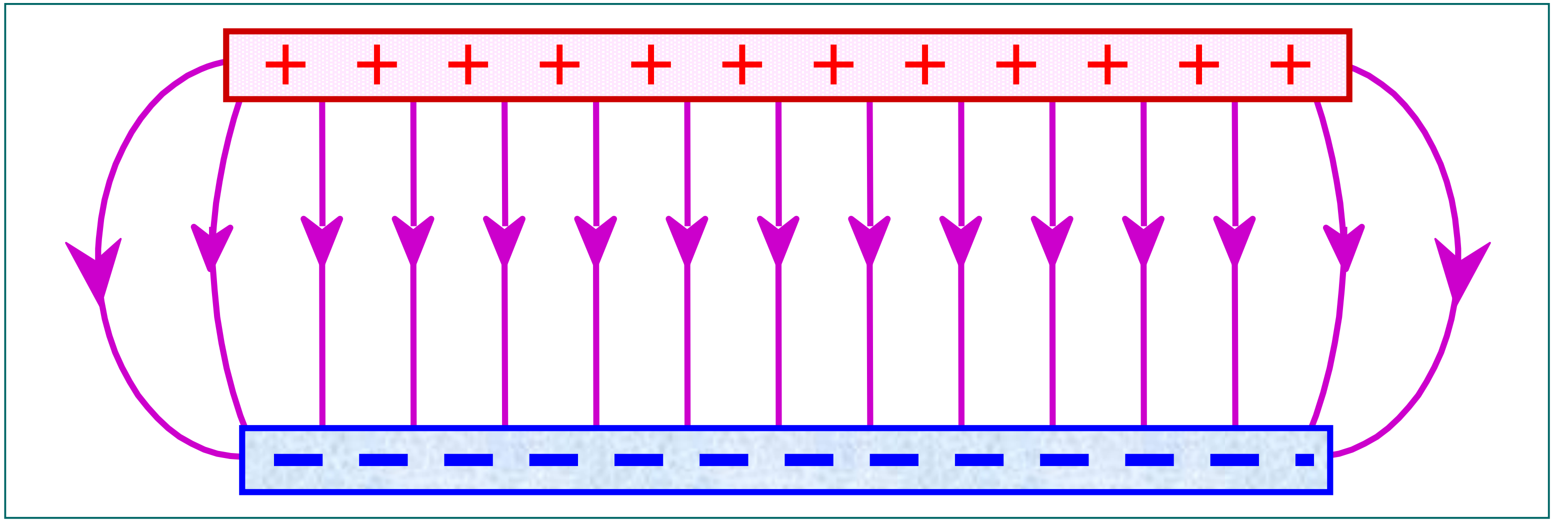
等量正点电荷的电场线



非等量异号点电荷的电场线



带电平行板电容器的电场线



电力线的特性：

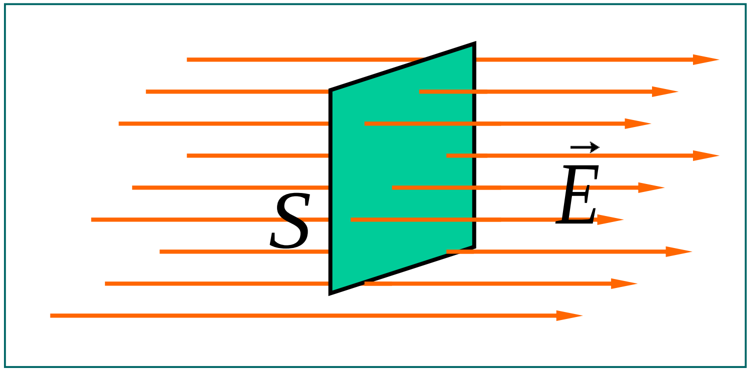
（1）始于正电荷，止于负电荷（或来自无穷远，去向无穷远）；

（2）电场线不相交；

（3）静电场电场线不闭合。

二、电通量

电场中通过某一面积的电力线数称为通过这个面的电通量“Φ_e ”。



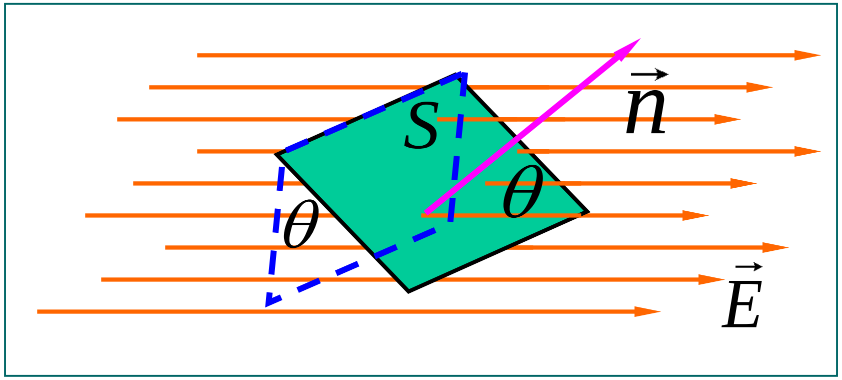
单位：$\mathrm{Nm^2}C^{-1}$或者 Vm

- 匀强电场，$\vec{E}$ 垂直平面

$$\Phi_e = ES$$

- 均匀电场，$\vec{E}$与平面夹角 θ

$$\Phi_e = \vec{E} \cdot \vec{S} = ES\cos\theta$$



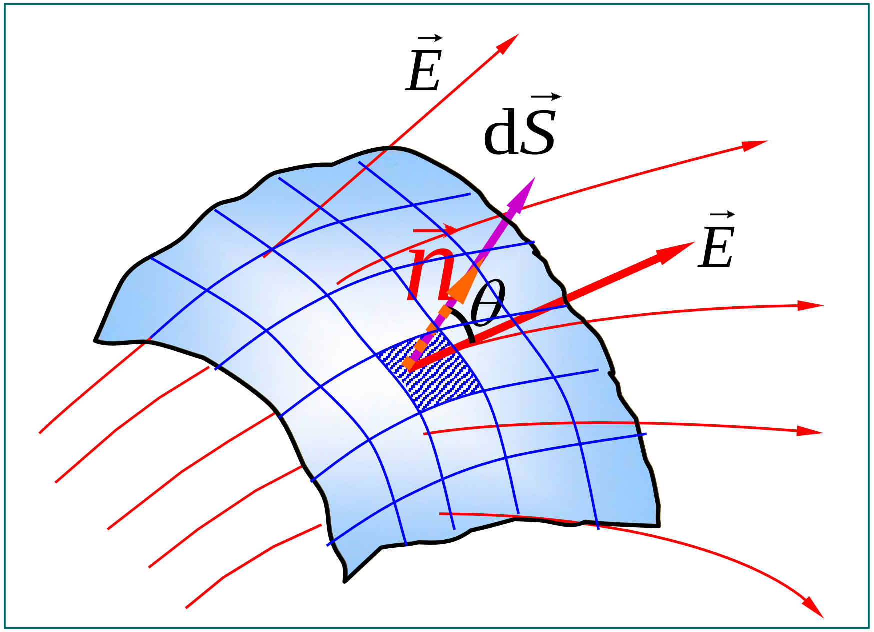
非均匀电场强度电通量

$$\mathrm{d}\vec{S} = \mathrm{d}S \cdot \vec{n}$$

$$\mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = E\mathrm{d}S\cos\theta$$

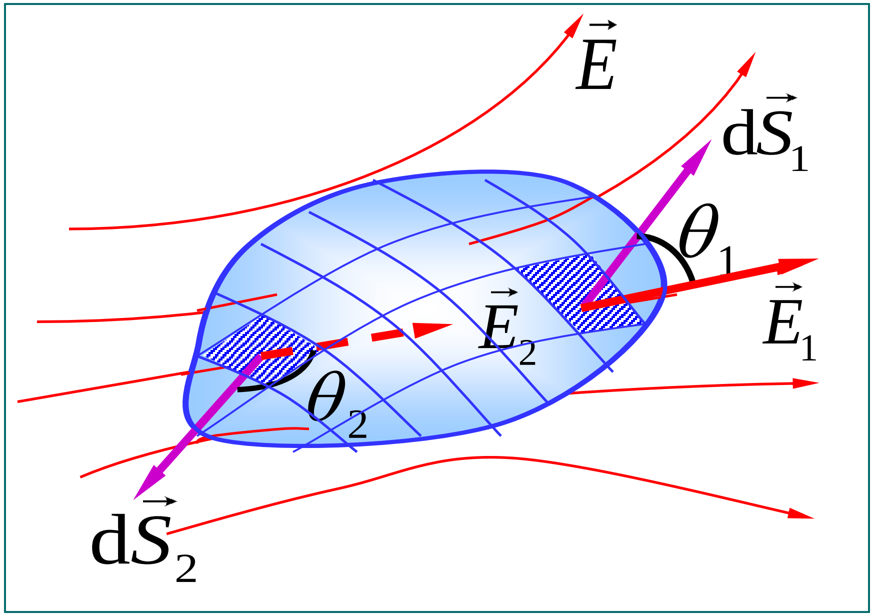
$$\mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp} = \mathbf{d}\boldsymbol{S}\,\mathbf{cos}\,\boldsymbol{\theta}$$

$$\boldsymbol{E} = \frac{\mathbf{d}\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{e}}}{\mathbf{d}\boldsymbol{S}_{\perp}}$$



$$\theta_1 < \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}1} > 0$$

$$\theta_2 > \frac{\pi}{2}, \quad \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}2} < 0$$



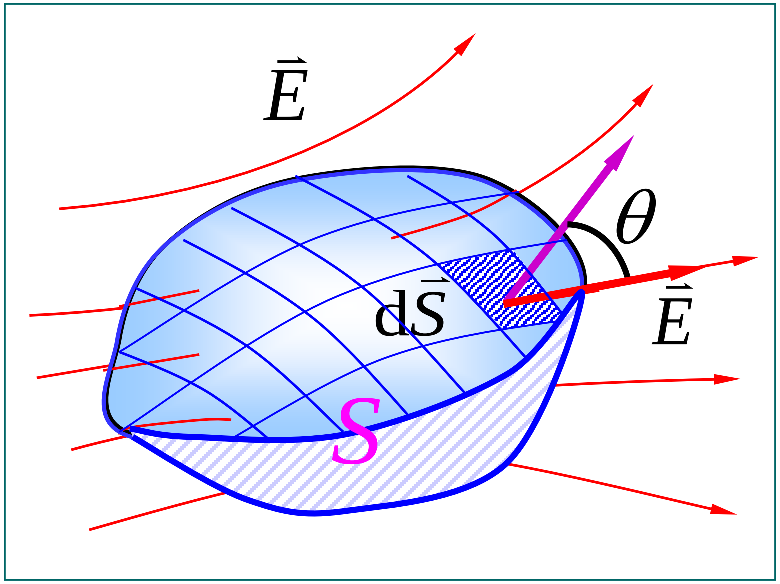
$$\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \mathrm{d}\Phi_{\mathrm{e}} = \int_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \int_S E\cos\theta\,\mathrm{d}S$$

- 通过闭合曲面的通量

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oiint E\,dS\cos\theta$$

S 为闭合曲面



三、真空中的高斯定理

在真空中，通过任一闭合曲面的电通量，等于该曲面所包围的所有电荷的代数和除以真空介电常数ε_0 。与闭合曲面外电荷无关。

$$\boxed{\Phi_e = \oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i=1}^{n} q_i}$$

说明：

（1）高斯定理描述了静电场的基本性质，说明静电场是**有源场**。

（2）闭合曲面称为高斯面。

（3）$\sum_{i=1}^{n} q_i$ 仅仅表示高斯面内的电荷的代数和。

（4）仅高斯面内的电荷对通过高斯面的电通量有贡献。

（5）高斯面上的 $\vec{E}$ 与高斯面内外所有电荷有关。

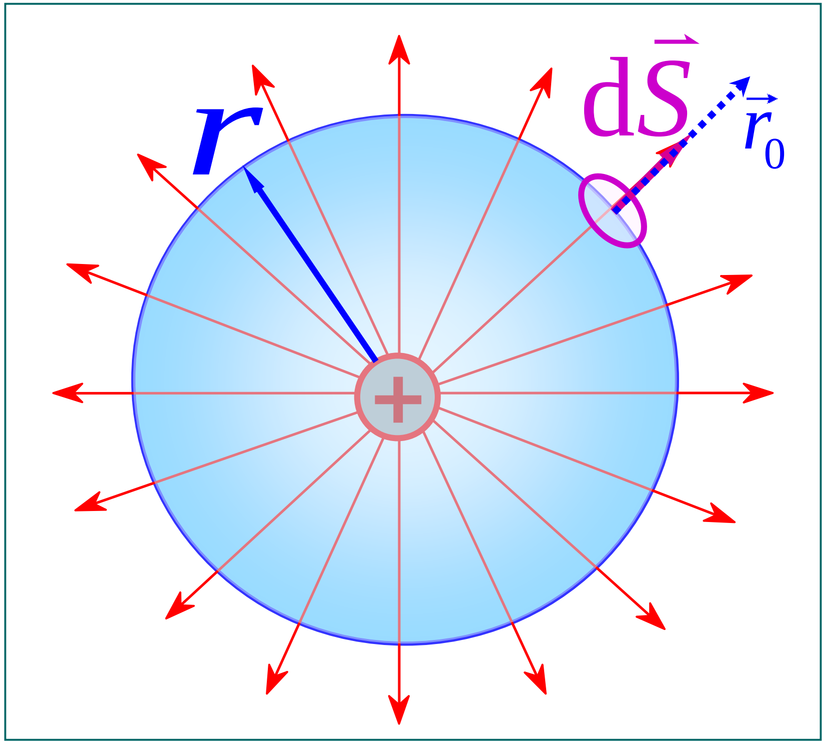
***下面从**点电荷和点电荷系**出发证明高斯定理。

（1）点电荷位于球面中心

$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

$$\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

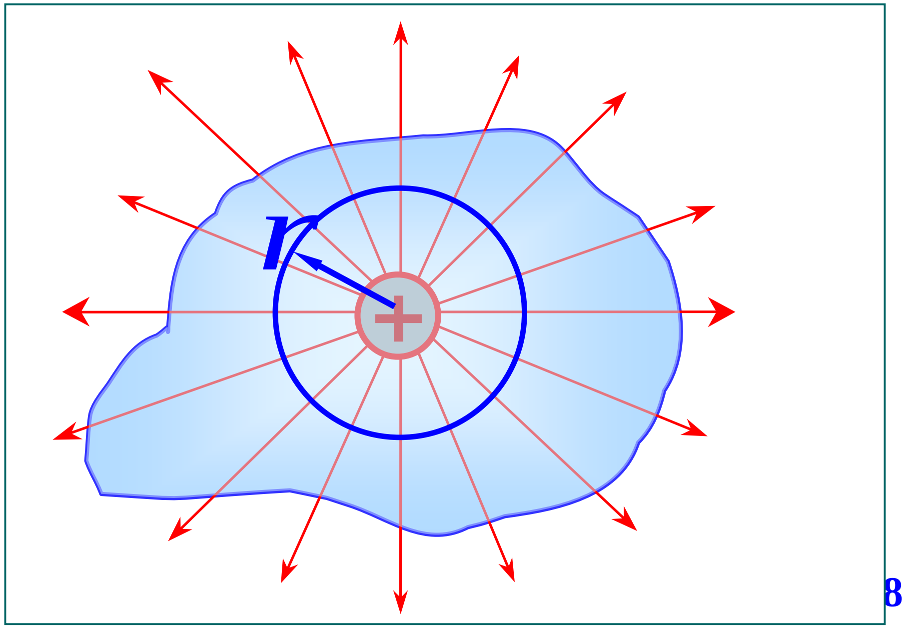
$$=\oiint_S \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S=\frac{q}{\varepsilon_0}$$



（2）点电荷在任意封闭曲面内

总可以在封闭曲面内做一个以点电荷为球心的球面，由于电力线的连续性，穿出球面和穿出封闭曲面的电通量相等，仍然有：

$$\Phi_e=\frac{q}{\varepsilon_0}$$



（3）点电荷在闭合曲面外

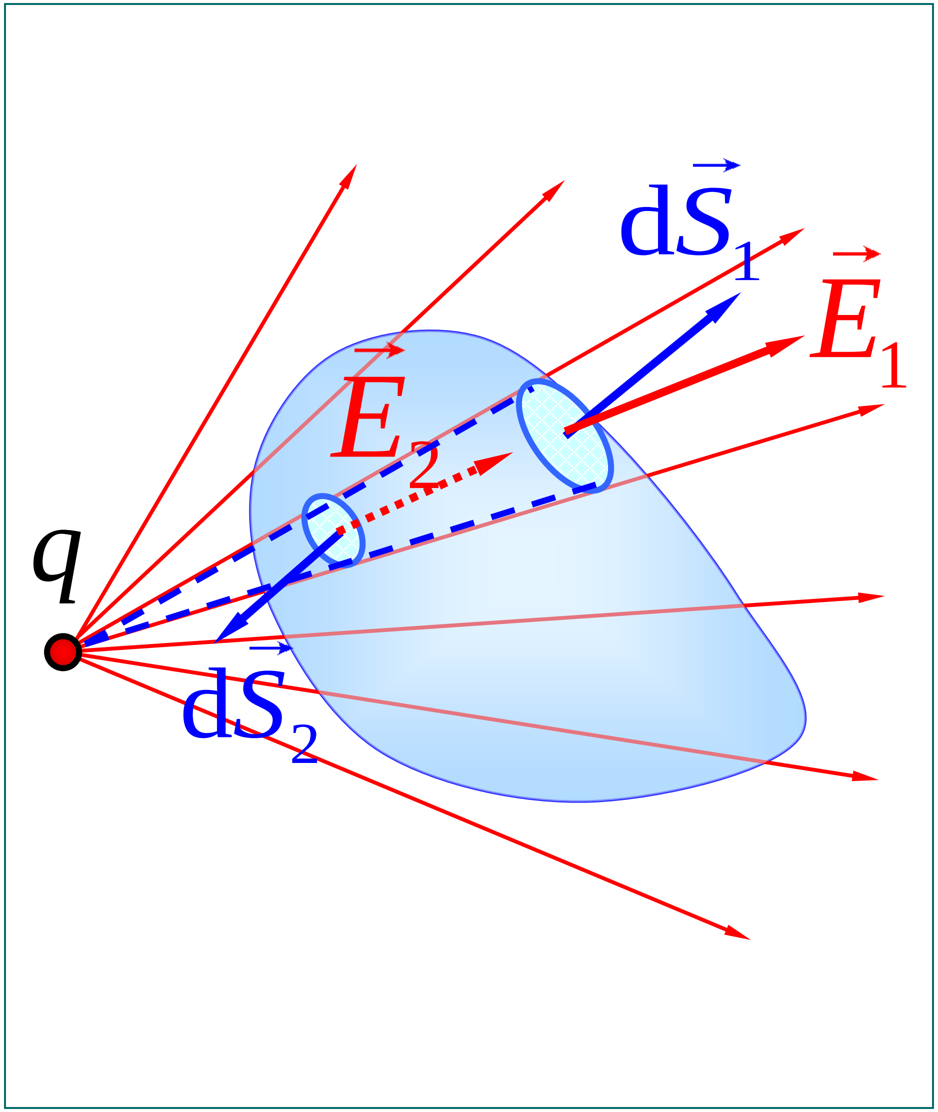
$$\mathrm{d}\Phi_1 = \vec{E}_1 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_1 > 0$$

$$\mathrm{d}\Phi_2 = \vec{E}_2 \cdot \mathrm{d}\vec{S}_2 < 0$$

$$\left|\mathrm{d}\Phi_1\right| = \left|\mathrm{d}\Phi_2\right|$$

$$\mathrm{d}\Phi_1 + \mathrm{d}\Phi_2 = 0$$

$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = 0$$



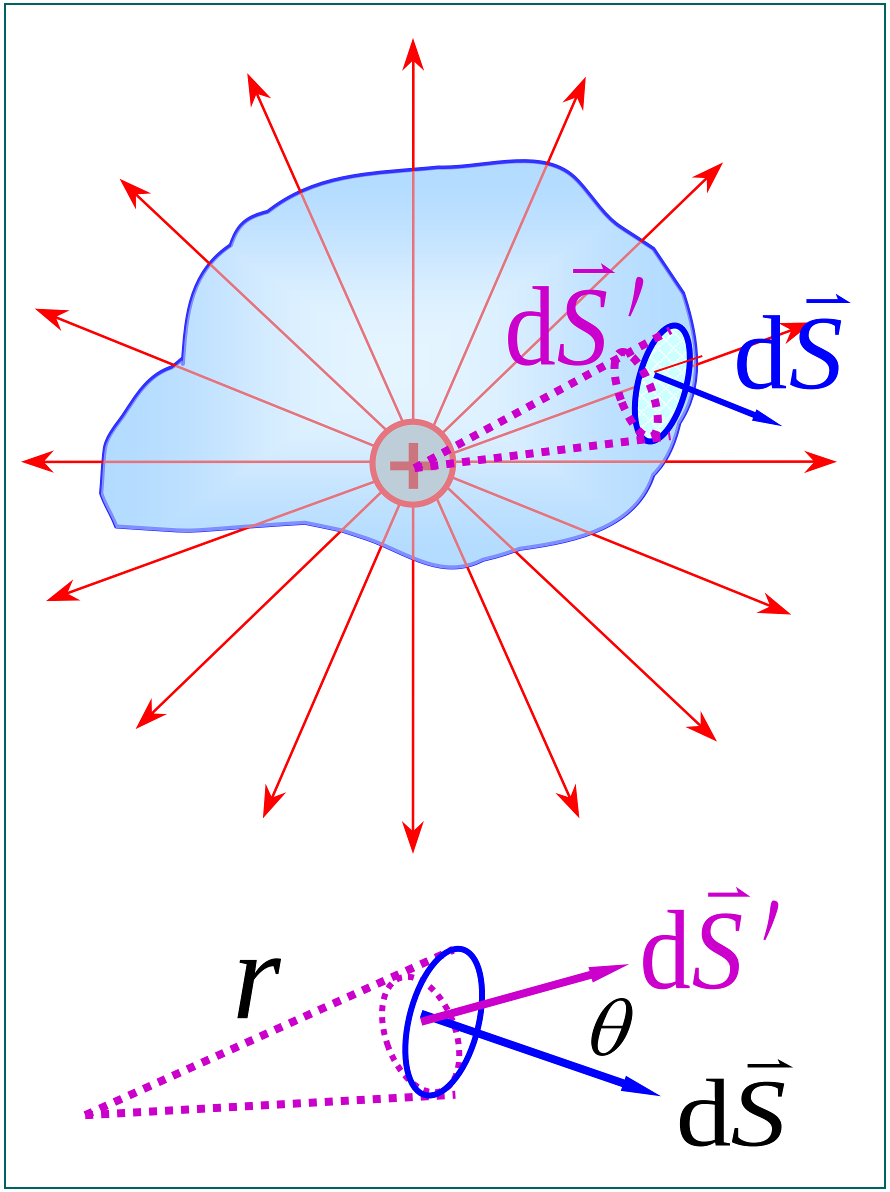
——也可以严格证明“点电荷在任意封闭曲面内”的情形。

$$\mathrm{d}\Phi_e = \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\mathrm{d}S\cos\theta$$

$$= \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\mathrm{d}S'}{r^2}$$

其中立体角 $\mathrm{d}\Omega = \dfrac{\mathrm{d}S'}{r^2}$

$$\Phi_e = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\oint\mathrm{d}\Omega = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

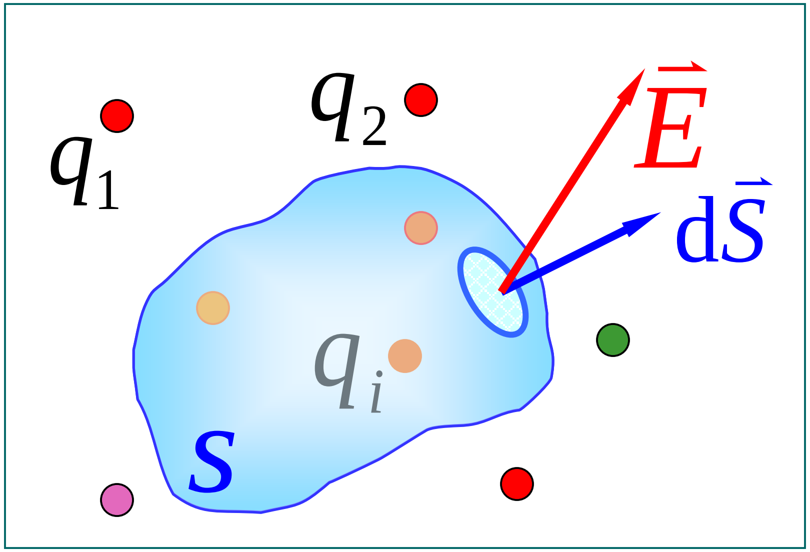


（4）由多个点电荷构成的点电荷系产生的电场中

$$\vec{E}=\vec{E}_1+\vec{E}_2+\vec{E}_3+\cdots=\sum_i \vec{E}_i$$

$$\Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_i \Phi_{ei}$$

$$=\sum_{i(内)}\Phi_{ei}+\sum_{i(外)}\Phi_{ei}$$



$$\because \sum_{i(外)}\Phi_{ei}=0$$

$$\therefore \Phi_e=\oiint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S}=\sum_{i内}\Phi_{ei}=\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{i(内)}q_i$$

高斯定理：

$$\Phi_e = \oint\!\!\!\oint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_{i(内)}$$

总结：

（1）高斯面上的电场强度为所有内外电荷的总电场强度。

（2）高斯面一定为封闭曲面。

（3）穿进高斯面的电场强度通量为正，穿出为负。

（4）仅高斯面内的电荷对高斯面的电通量有贡献。

（5）静电场是有源场。

四、高斯定理的应用

- 求电通量；
- 求电场强度。

——用高斯定理求解静电场的场强，要求静电场的分布必须具有一定的对称性。

解题步骤：

- 进行电场分布的**对称性分析**；
- 根据电场分布的对称性选择**合适的高斯面**；
- 应用高斯定理进行计算。

合适的高斯面的选择：

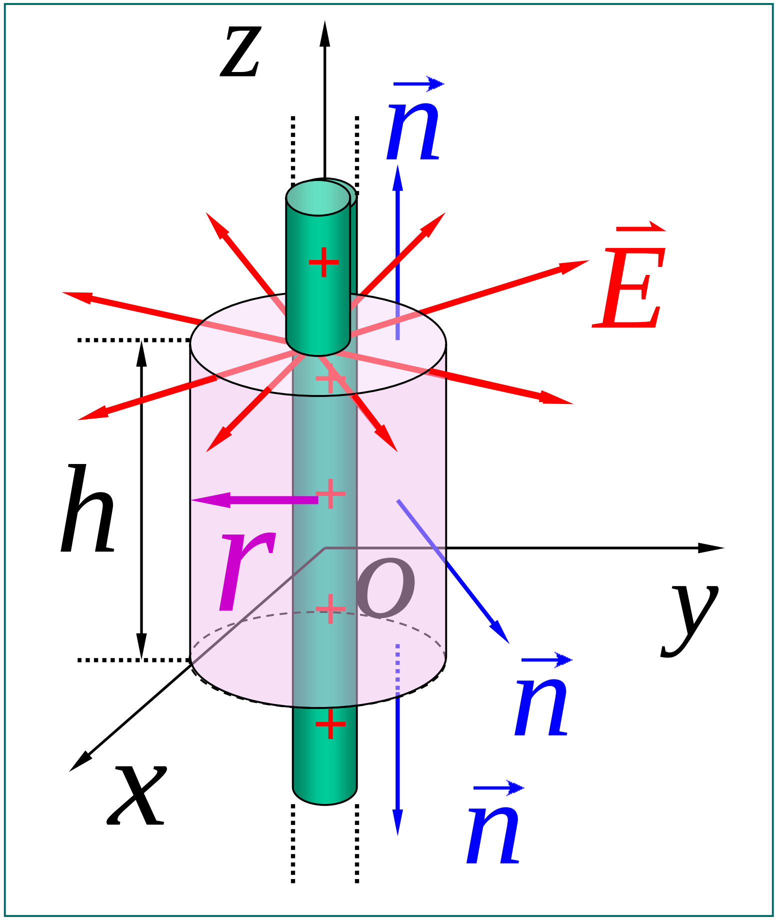
（1）使得所选高斯面上各点的场强大小相等，且 $\vec{E} // \mathrm{d}\vec{S}$ ；

（2）使得所选高斯面某些点满足上述条件，而其它部分或者 $\vec{E} \perp \mathrm{d}\vec{S}$，或者 $\vec{E} = 0$ 。

例1 无限长均匀带电直线，单位长度上的电荷即电荷线密度为 λ，求距直线为 r 处的电场强度。

解：电场分布具有柱对称性，带电体轴线即为对称轴。

选取闭合的柱形高斯面，侧面上各点电场强度大小相等，且平行于侧面各处的法线；上下底面的法线与场强方向垂直。



$$\Phi_e = \oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{n} q_{i(\text{内})}$$

$$\oiint_S \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} = \iint_{S(\text{侧面})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S(\text{上底})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S} + \iint_{S(\text{下底})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

$$= \iint_{S(\text{侧面})} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$$

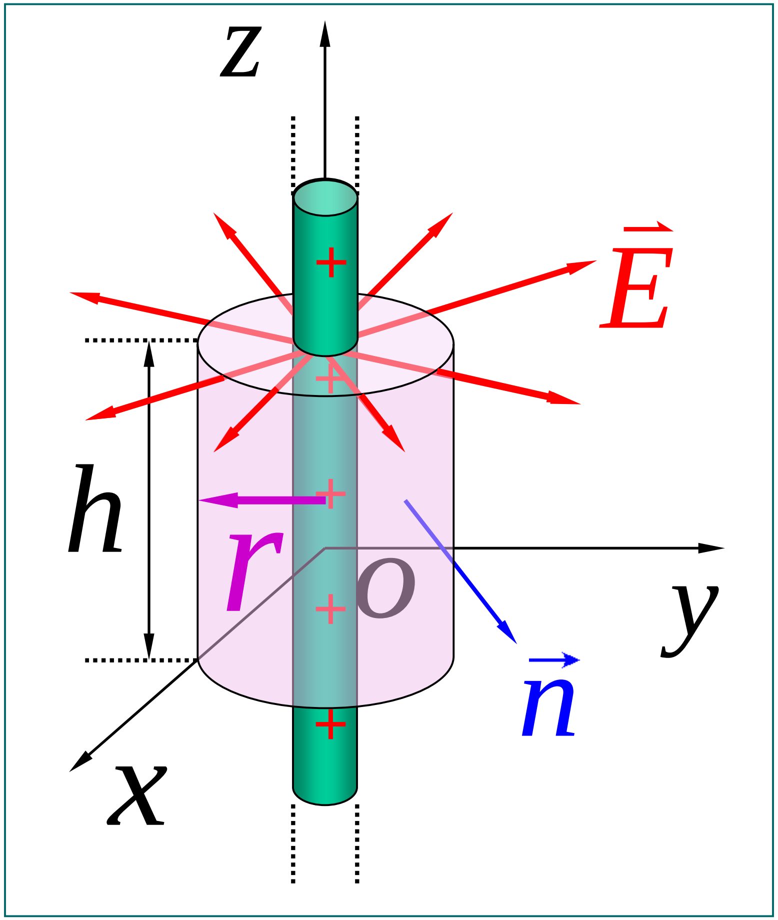
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S(\text{侧面})} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \iint_{S(\text{侧面})} E dS = E 2\pi rh$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad 2\,\pi rhE = \frac{\lambda h}{\varepsilon_0}$$

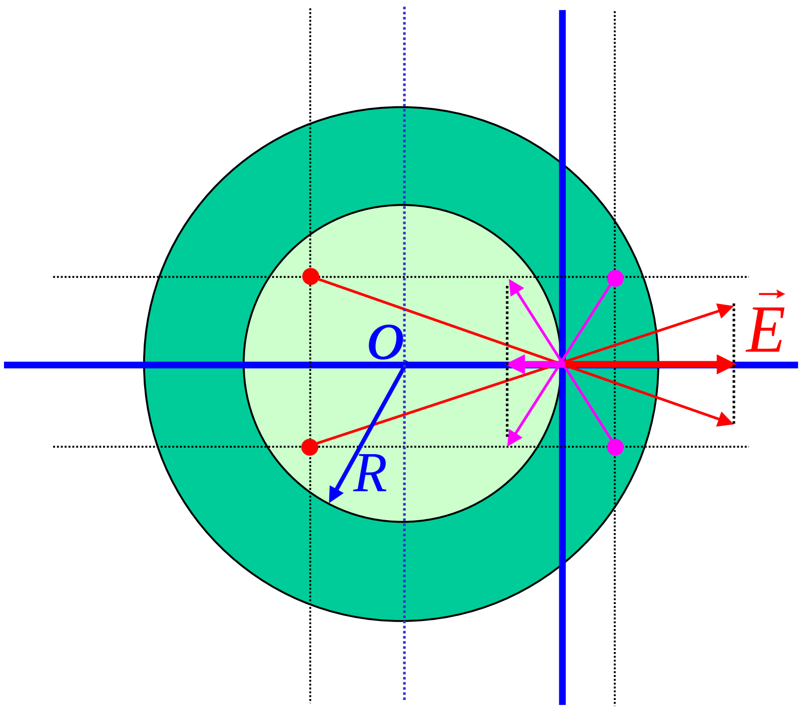
$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\,\varepsilon_0 r}} \qquad \boxed{r > R}$$

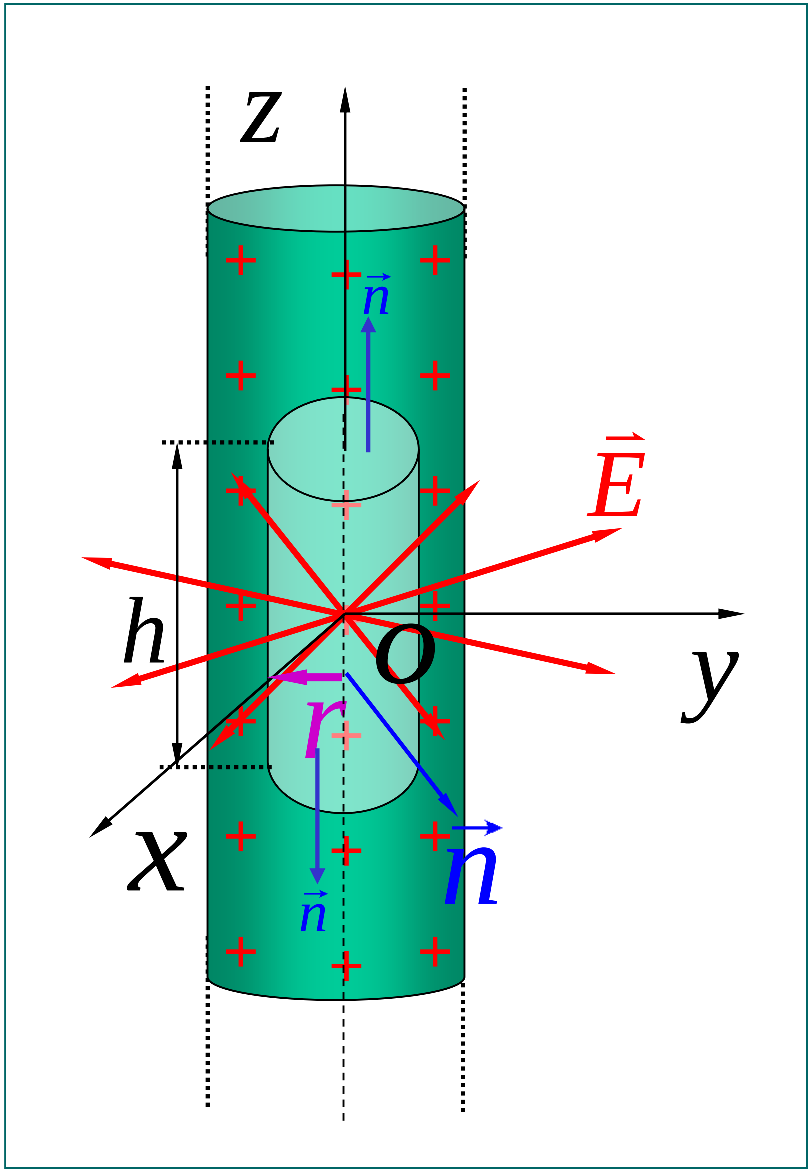
$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\,\pi\varepsilon_0 r}\vec{r}_0}$$



思考：若求 $r < R$ 空间内的电场强度分布，如何求？

求内部电场分布时的对称性分析





$$E = \frac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2}\vec{r}_0$$

$r < R$

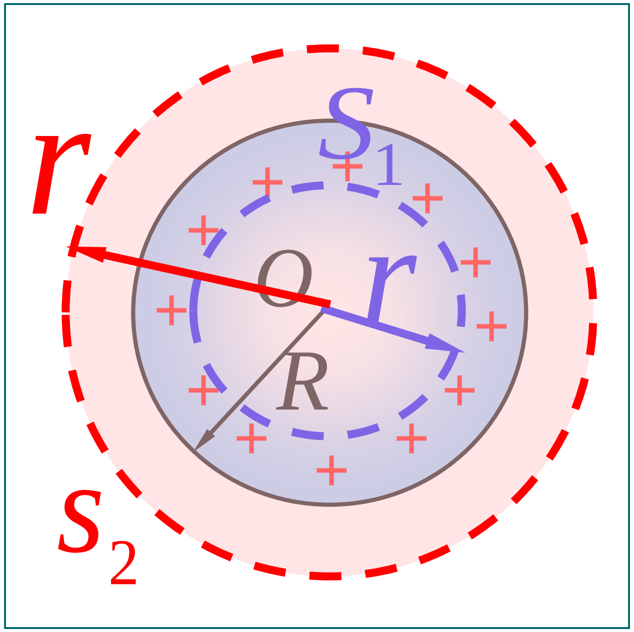
例2 一半径为 R，均匀带电 Q 的薄球壳。

求：球壳内外任意点的电场强度。

解（1） $0 < r < R$

$$\oiint_{S1} \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$$

$$\boxed{\vec{E} = 0}$$

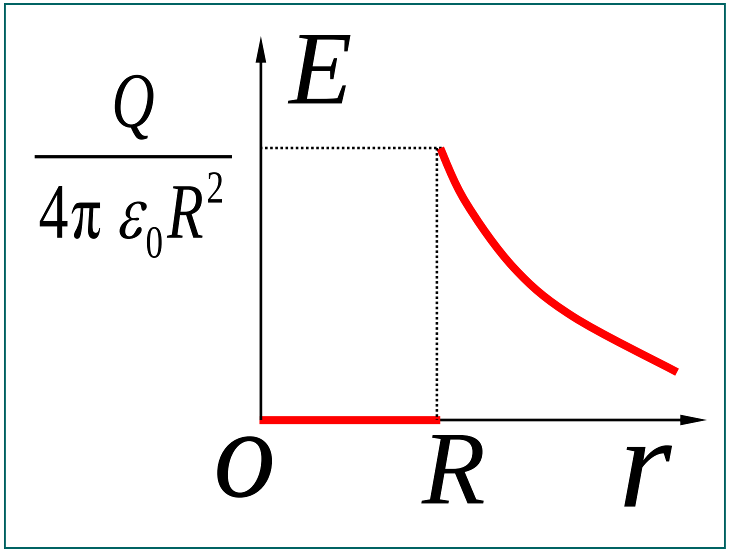


（2） $r > R$

$$\oiint_{S2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\oiint_{S2} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{S2} E dS = 4\pi r^2 E$$

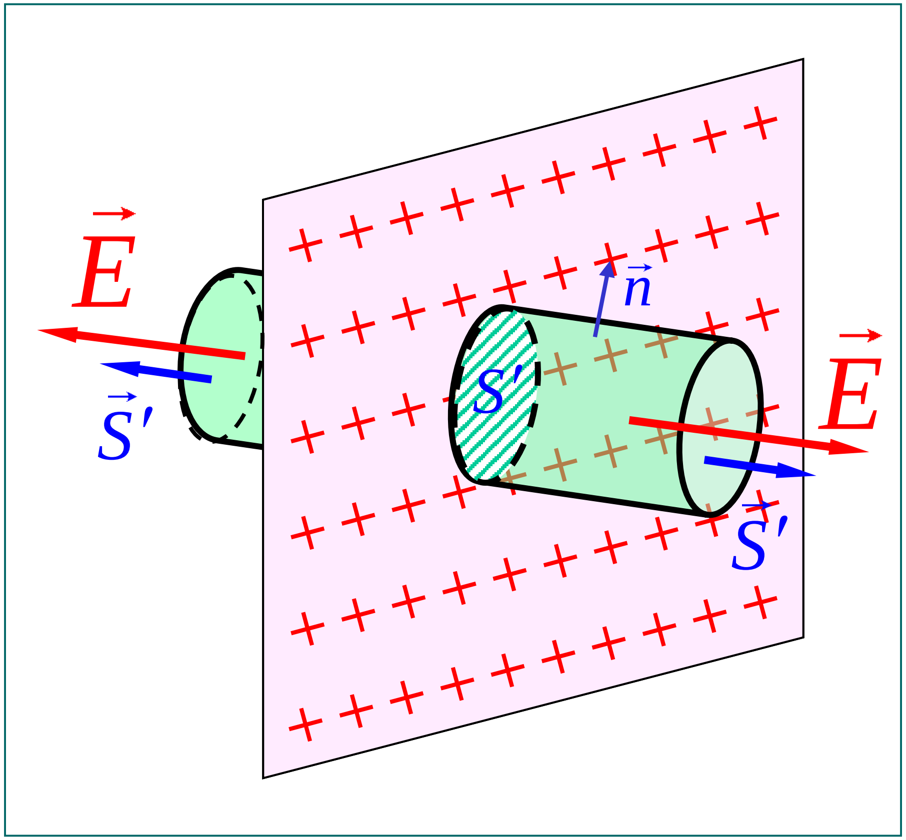
$$E = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$



例3 无限大均匀带电平面，单位面积上的电荷，即电荷面密度为 σ，求距平面为 r 处的电场强度。

解：通过对称性分析可知，$\vec{E}$ 垂直平面，若平面带正电，则场强方向外指；反之，场强方向内指。

选取闭合的柱形高斯面

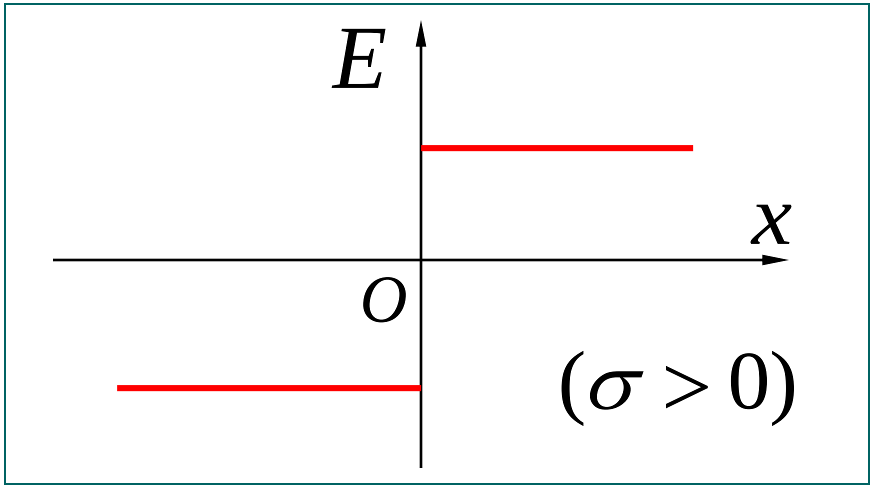


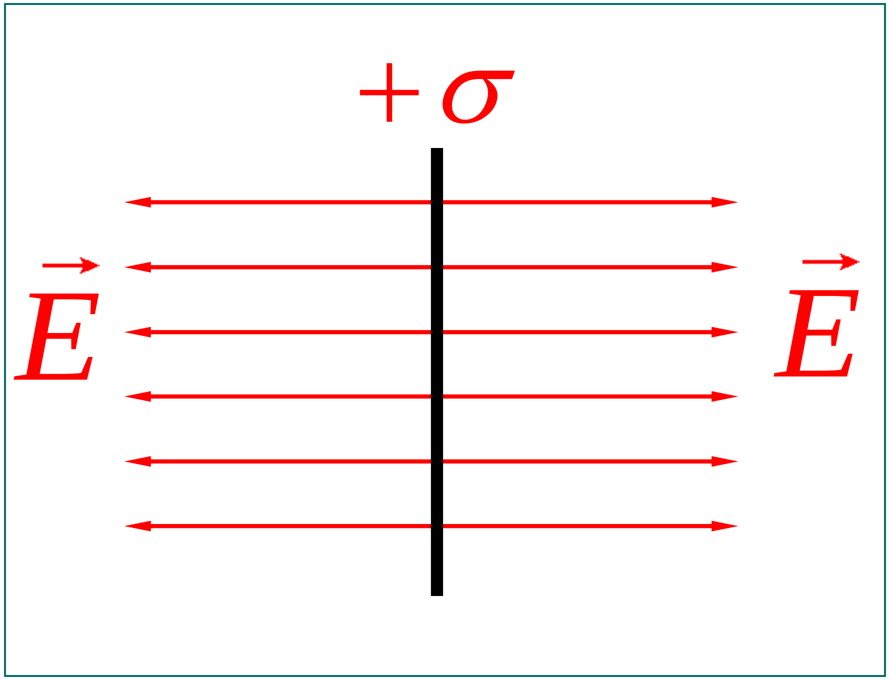
$$\oint\!\!\!\oint_S \vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{S} = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

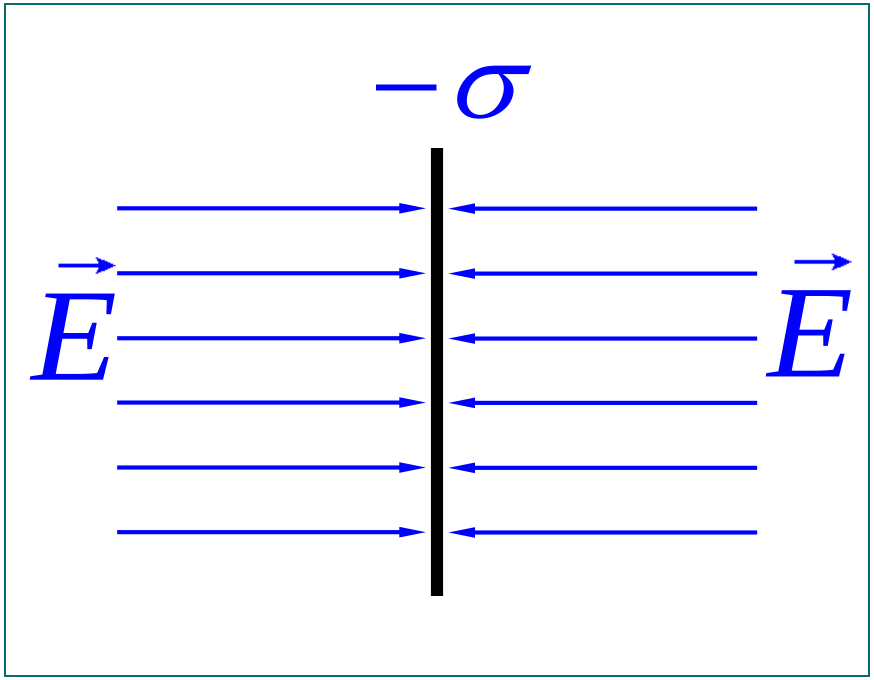
$$2S'E = \frac{\sigma S'}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

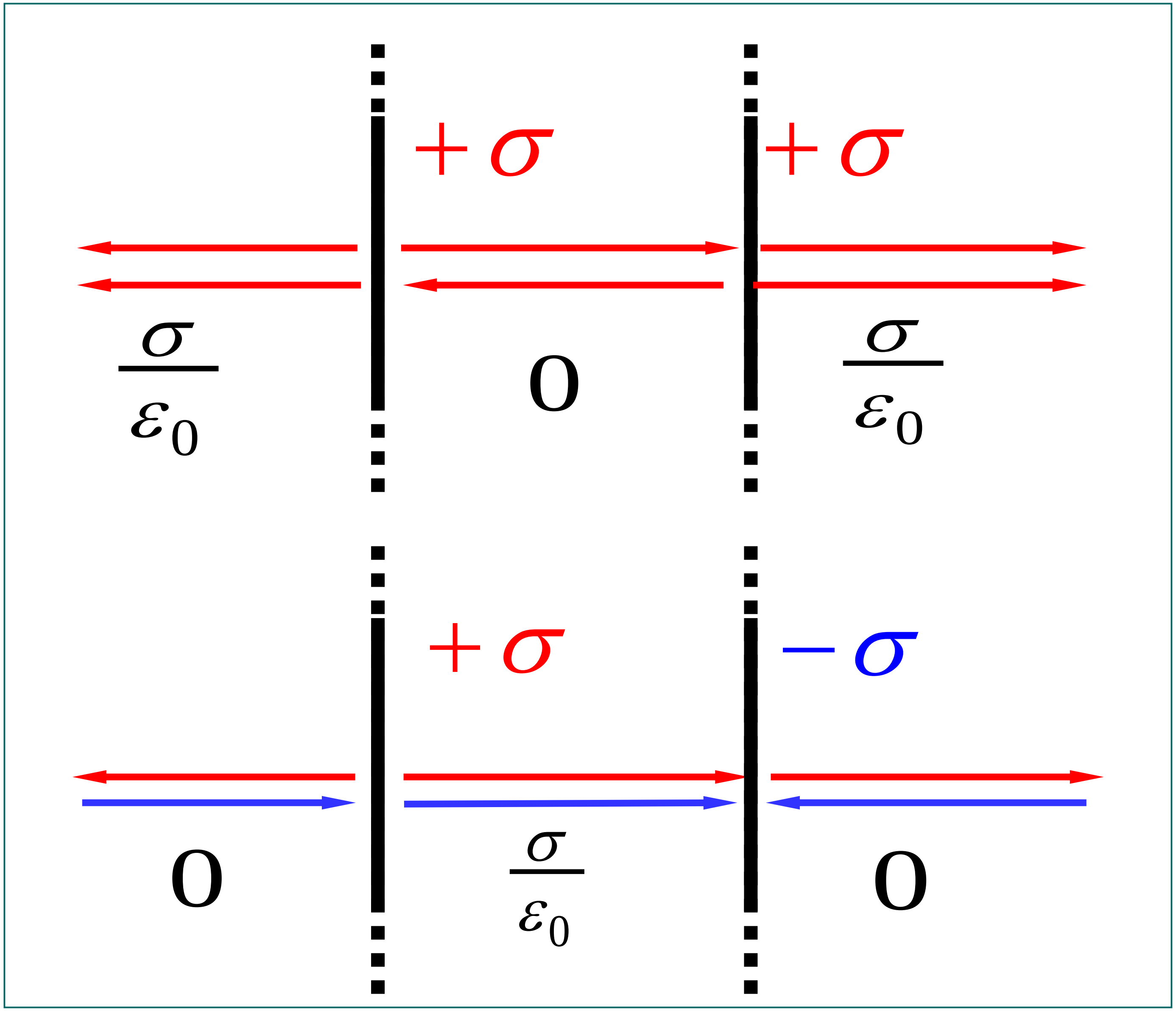
$$\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\vec{n}$$



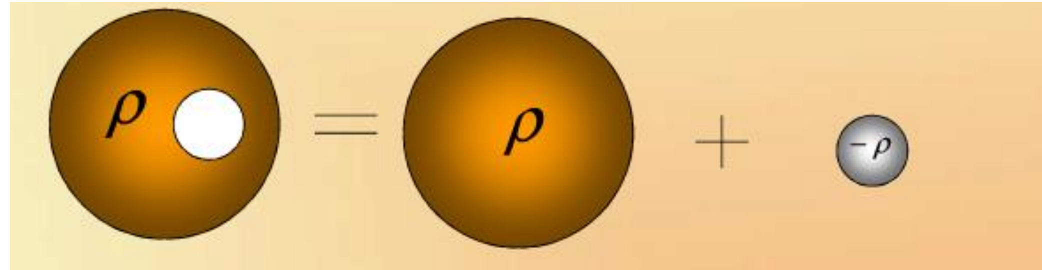




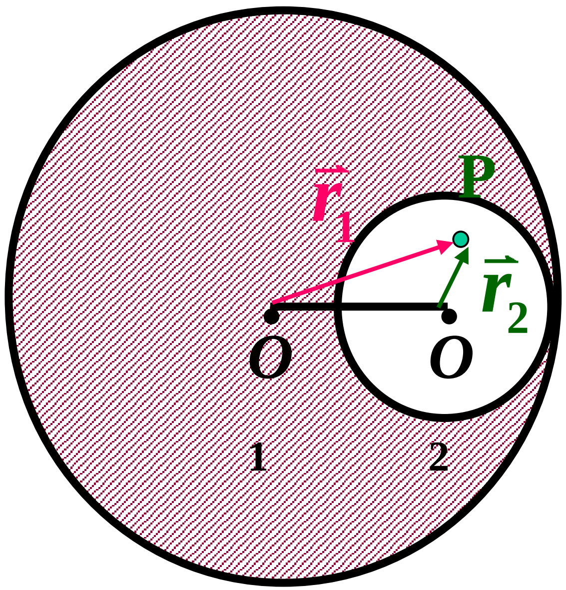
思考：多个无限大均匀带电平面间的电场叠加问题。



证明： 电荷体密度为ρ的均匀带电球体中挖出一个球形空洞内的电场为均匀场。



$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r$$



球体无洞时：

$$\vec{E}_1 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1$$

洞位置带-ρ的球体内：

$$\vec{E}_2 = -\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

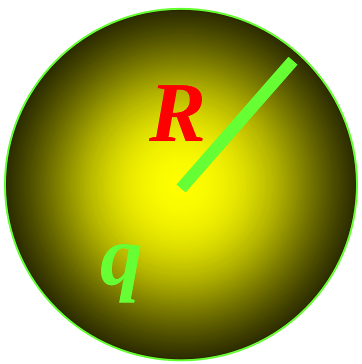
由迭加原理得：

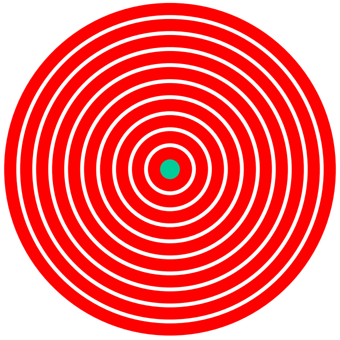
$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$$

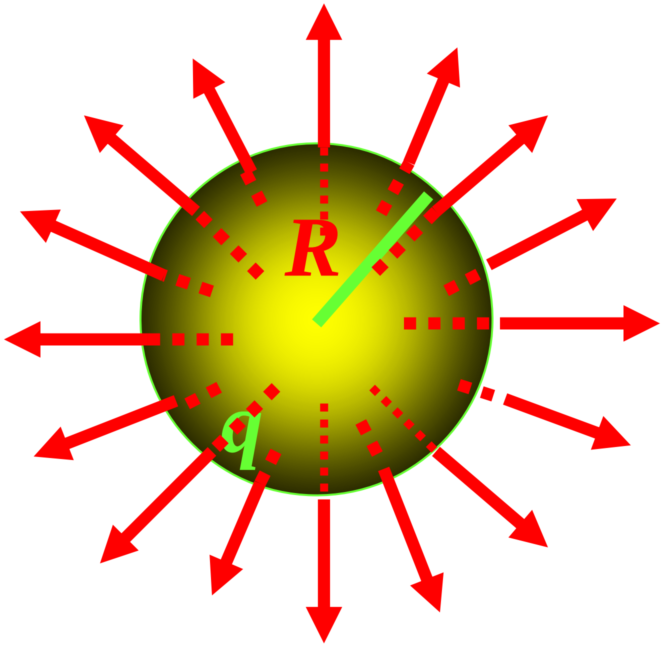
选讲

例4 一半径为 R 、均匀带电 q 的球体，求其电场的分布$\vec{E}(r)$。

解：（1）对称性分析,将球体看成许多薄球壳组成。







结论：球内外都是球对称分布。

选讲

（2）作半径为 r 的球面 $(R \le r < \infty)$

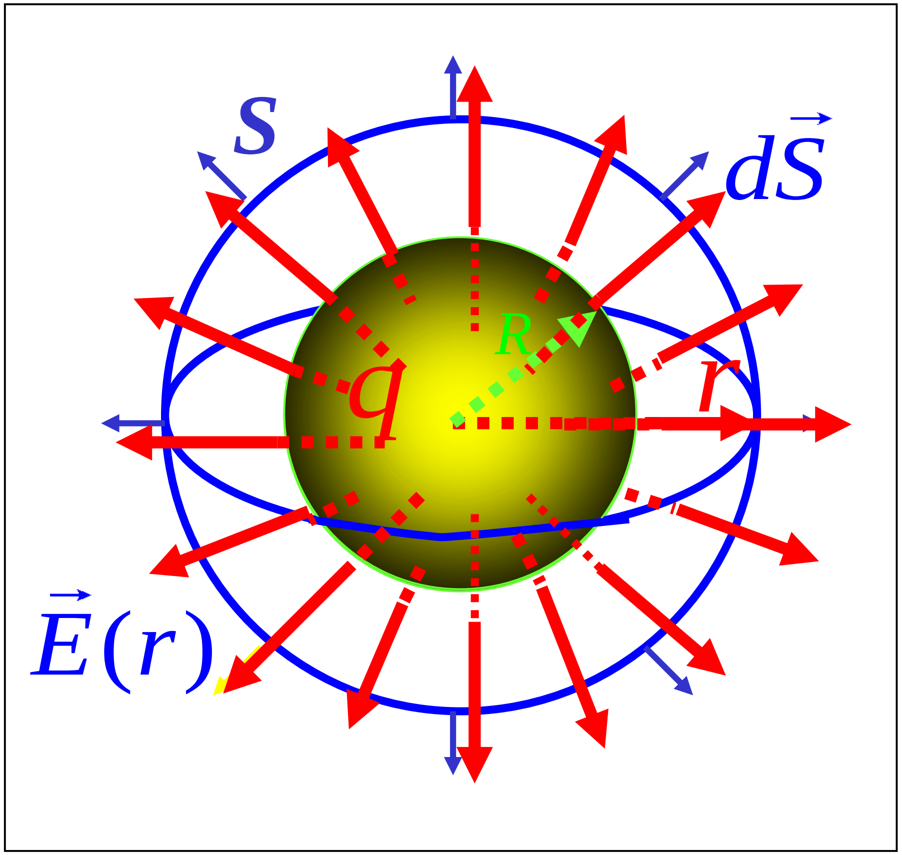
由高斯定理：

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$\oint_S E \cos 0^\circ dS = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{S内} q_i$$

$$E \oint_S dS = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$

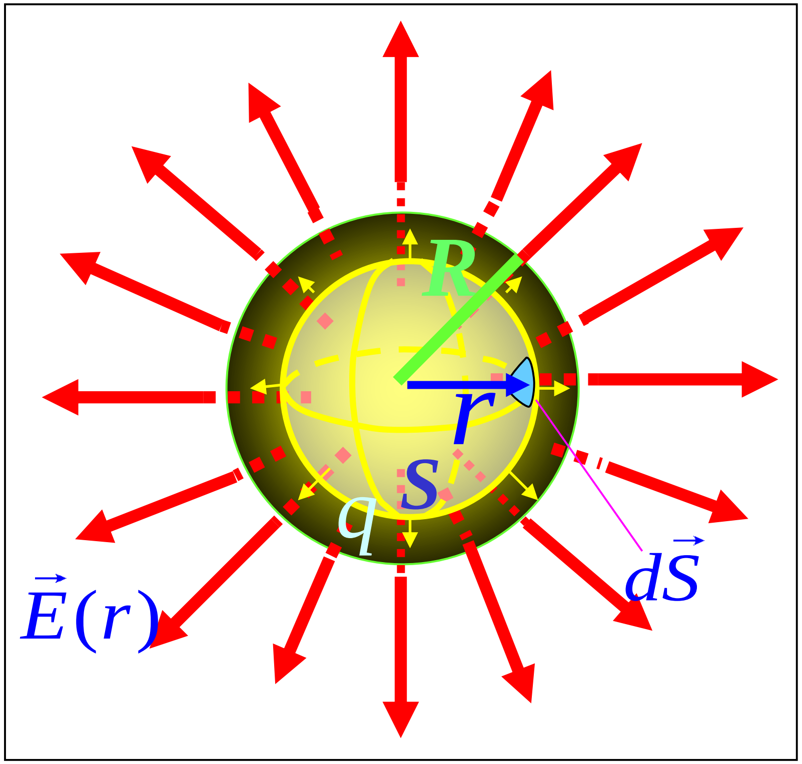
$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} q$$



$$\boxed{\vec{E}(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{r}_0}$$

选讲 （2）作半径为 r 的球面 $(0 \le r < R)$

由高斯定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i$



$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \oint_S E\cos 0^\circ dS$$

$$= E\oint_S dS = E4\pi r^2$$

$$\frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\frac{4}{3}\pi r^3$$

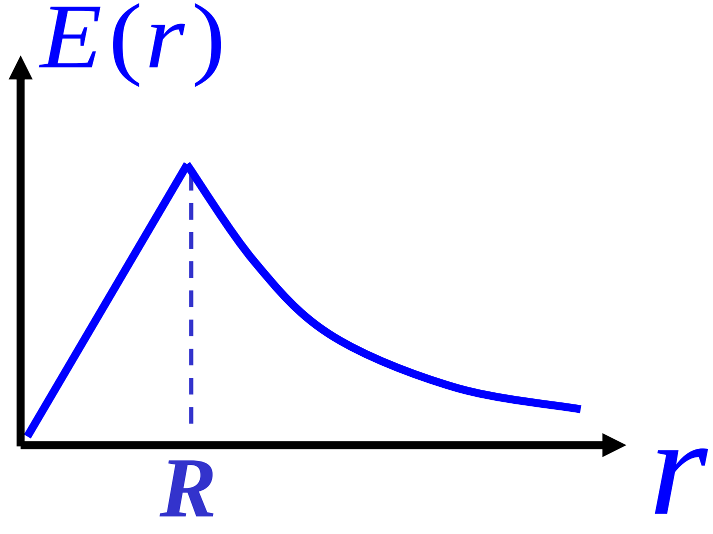
$$\rho = \frac{q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

$$E = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qr}{R^3}$$

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\vec{r}_0 = \frac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}_0}$$

选讲

$$\vec{E}(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0\cdots(R<r<\infty)\\[2ex]\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\vec{r}_0\cdots(0\le r<R)\end{cases}$$



高斯定理应用2：求电通量

5、如图所示，一个带电量为**q**的点电荷位于立方体的A角上，则通过侧面**abcd**的电通量为：

如果放在中心处，则又是多少？

$$\frac{q}{24\varepsilon_0} \qquad \frac{q}{6\varepsilon_0}$$