§5 角动量　角动量守恒定律

力矩的时间累积效应 ⟹ 冲量矩、角动量、角动量定理。

一、质点的角动量定理和角动量守恒定律

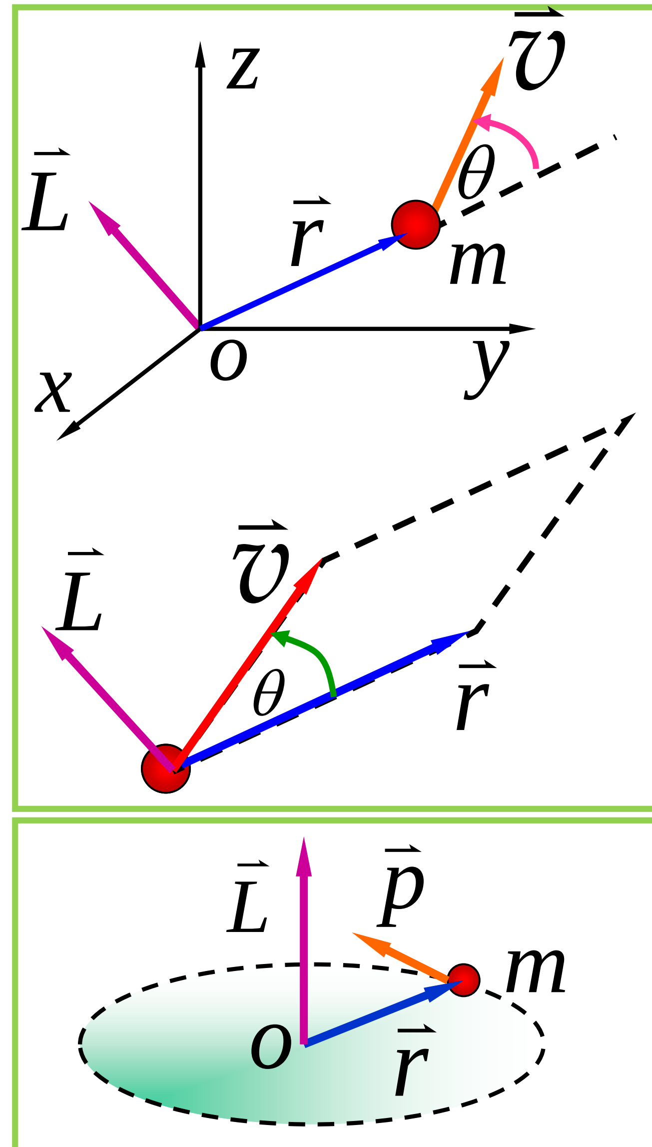
1. 质点的角动量

质点相对于原点的角动量

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

大小 $L = rmv\sin\theta$

$\vec{L}$ 的方向符合右手法则。



➢ 质点以角速度 ω 作半径为 r 的圆运动，相对圆心的角动量

$$\vec{L} = mr^2\vec{\omega} = J\vec{\omega}$$

2. 质点的角动量定理

$$\boxed{\vec{L}=\vec{r}\times\vec{p}} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{F} \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=?$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{r}\times\vec{p})=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}\times\vec{p}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}=\vec{v}, \quad \vec{v}\times\vec{p}=0 \qquad \therefore \frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=\vec{r}\times\vec{F}$$

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}}$$

——作用于质点的合力对**参考点** O 的力矩，等于质点对该点 O 的**角动量**随时间的**变化率**。

$$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}=\vec{M}$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=\vec{L}_2-\vec{L}_1$$

冲量矩 $\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t$

质点的角动量定理：对同一参考点 O，质点所受的冲量矩等于质点角动量的增量。

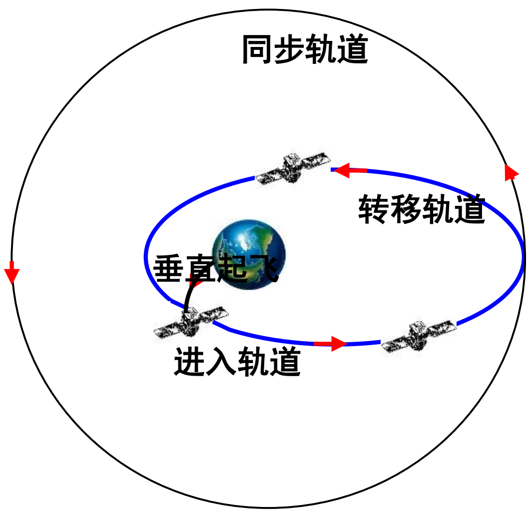
3. 质点的角动量守恒定律

$$\vec{M}=0 \Longrightarrow \vec{L}=\text{恒矢量}$$

——质点所受对参考点 O 的合力矩为零时，质点对该参考点 O 的角动量为一恒矢量。

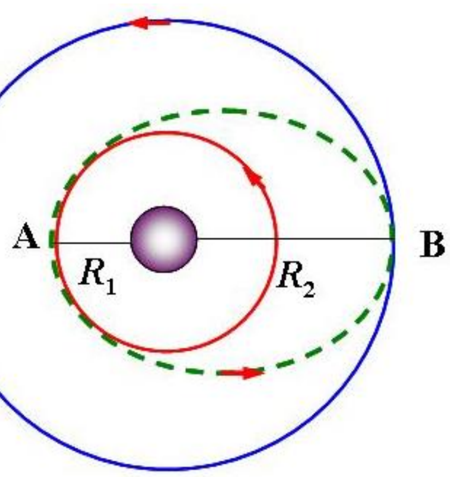
***自然界的普适规律。

例1. 发射地球同步卫星时航天器的运行轨道示意图。试问航天器在转移轨道中A点和B点的速率分别为多大？



解： 设航天器到达A点后，必须加速到 υ_A 才能沿椭圆轨道运动到B点，υ_B 为航天器沿椭圆轨道运行时到达B点的速度。

有心力作用下，角动量和机械能守恒



$$m\upsilon_A R_1 = m\upsilon_B R_2$$

$$\frac{1}{2}m\upsilon_A^2 - \frac{GM_e m}{R_1} = \frac{1}{2}m\upsilon_B^2 - \frac{GM_e m}{R_2}$$

解得：

$$\upsilon_A = \sqrt{\frac{2GR_2M_e}{R_1(R_1+R_2)}} \qquad \upsilon_B = \sqrt{\frac{2GR_1M_e}{R_2(R_1+R_2)}}$$

二、刚体定轴转动的角动量定理和角动量守恒定律

1. 刚体定轴转动的角动量

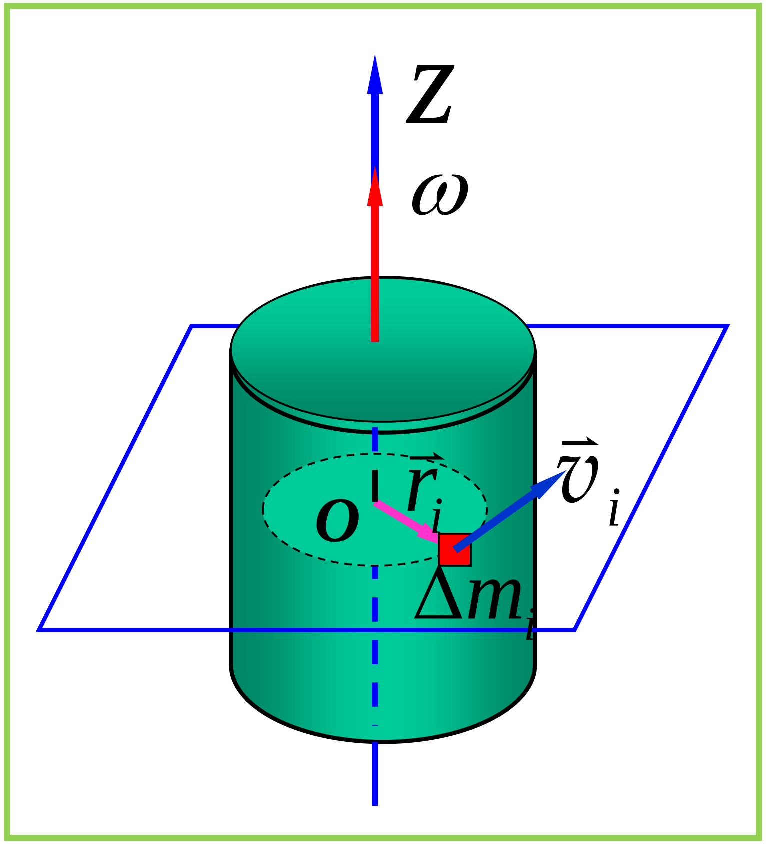
$$L_i = \Delta m_i r_i v_i = \Delta m_i r_i^2 \omega$$

$$L = \sum_i L_i$$

$$= \sum_i \Delta m_i r_i v_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\omega$$

$$\boxed{L = J\omega}$$

$$\boxed{\vec{L} = J\vec{\omega}}$$



——描述刚体定轴转动的状态。

$\vec{L}$、J、$\vec{\omega}$ 应该具有同轴性。

2. 刚体定轴转动的角动量定理

$$\vec{M}=J\vec{\beta}=J\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}(J\vec{\omega})}{\mathrm{d}t}$$

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=J\vec{\omega}_2-J\vec{\omega}_1}$$

****对于非刚体而言，定轴转动的角动量定理可以表述为**

$$\boxed{\int_{t_1}^{t_2}\vec{M}\mathrm{d}t=J_2\vec{\omega}_2-J_1\vec{\omega}_1}$$

3. 刚体定轴转动的角动量守恒定律

若 $\vec{M}=0$ ，则 $\vec{L}=J\vec{\omega}=$常量

讨论：

- 守 恒条件 $M=0$

  若 J 不变，ω 不变；若 J 变，ω 也变，但 $L=J\omega$ 不变。

- 内力矩不改变系统的角动量。

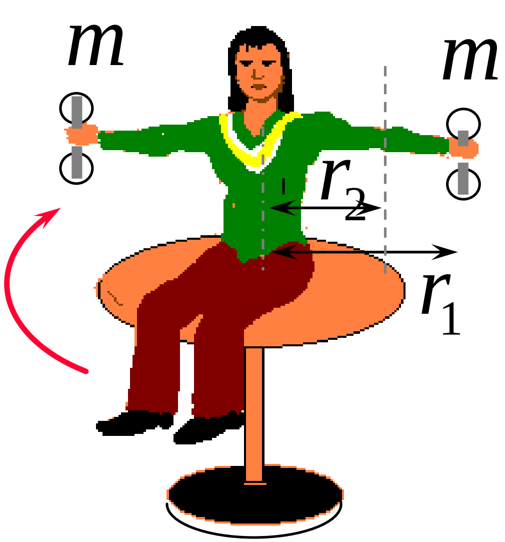
- 在冲击等问题中，$\because M_{内} >> M_{外}$ $\quad \therefore L \approx$ 常量

- 角动量守恒定律是自然界的一个基本定律。

- 有许多现象都可以用角动量守恒来说明。
  - 跳水运动员跳水

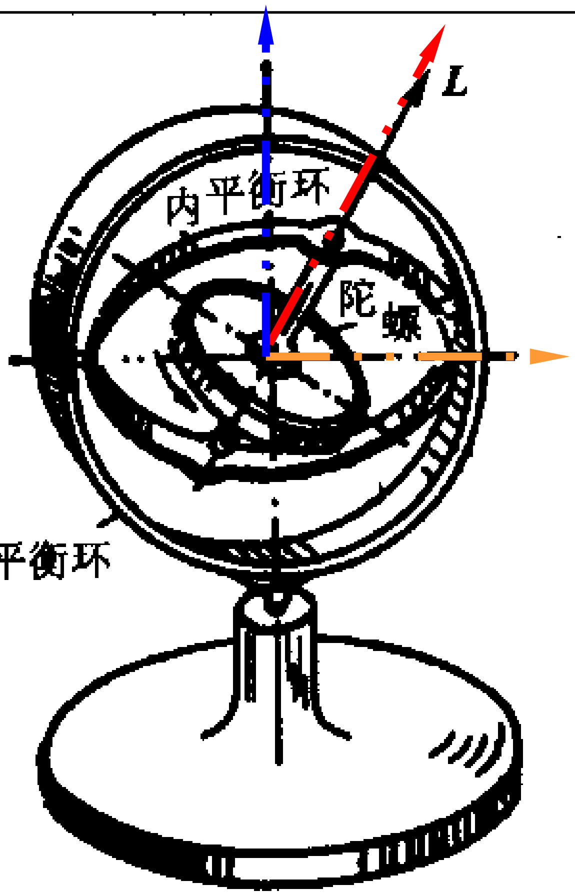
- 花样滑冰

- 茹可夫斯基凳



- 舞蹈中的角动量守恒现象

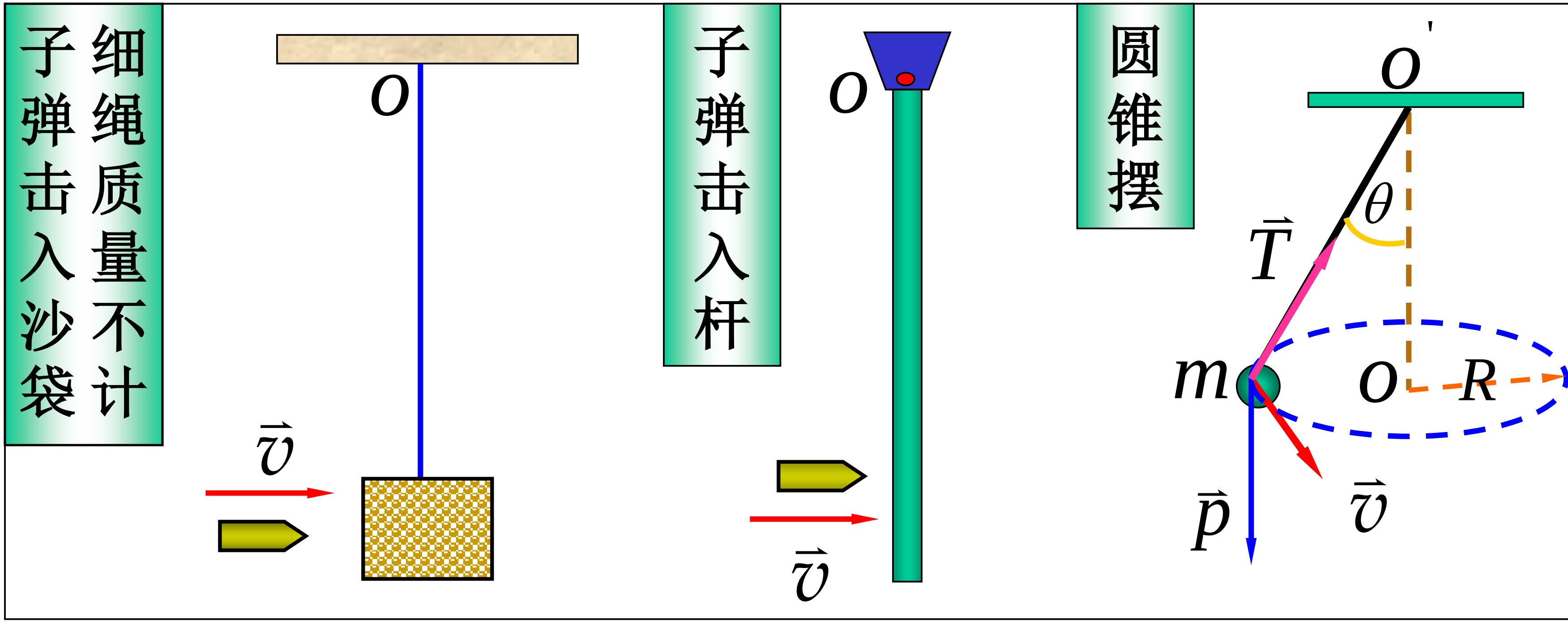
角动量守恒定律在技术中的应用



惯性导航仪（陀螺）

被 中 香 炉

讨 论：



以子弹和沙袋为系统

动量守恒；

角动量守恒；

机械能不守恒。

以子弹和杆为系统

动量不守恒；

角动量守恒；

机械能不守恒 。

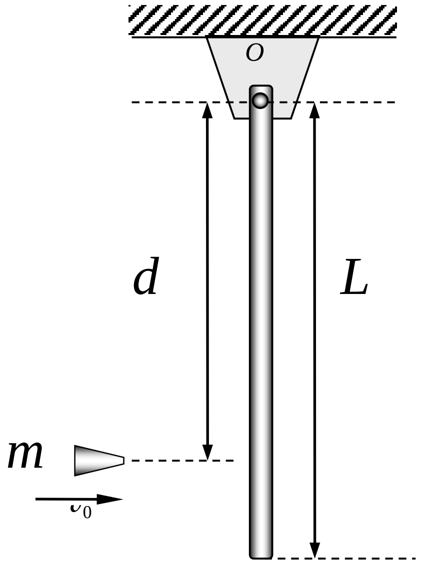
圆锥摆系统

动量不守恒；

角动量守恒；

机械能守恒 。

1. 一长为L，质量为M的匀质细杆，可绕通过一端的水平轴O转动，开始时杆自由悬挂。一质量为m的子弹，以水平速度v_0射入杆中而不复出，入射点离O点的距离为d。试问：
（1）子弹射入杆后杆所获得的角速度；（2）子弹射入杆的过程中（设经历时间为Δt），杆的上端受轴的水平和竖直分力各多大？（3）若要使杆的上端不受水平力作用，子弹的入射位置应在何处（该位置称为打击中心）？



解 (1) 将子弹和细杆作为一个系统，根据角动量守恒有

$$mv_0 d + 0 = \left(\frac{1}{3}ML^2 + md^2\right)\omega$$

求得子弹射入杆后的角速度

$$\omega = \frac{3mv_0 d}{ML^2 + 3md^2}$$

(2) 子弹射入杆的过程中（设经历时间为Δt），杆的上端受轴的水平和竖直分力分别为 F_x F_y

水平方向上满足动量定理

$$F_x \Delta t = P_2 - P_1 = M\frac{L\omega}{2} + md\omega - mv_0$$

得杆的上端受轴的水平分力为

$$F_x = \left(M\frac{L\omega}{2} + md\omega - mv_0\right) \Big/ \Delta t$$

竖直方向忽略子弹的重量，由动量定理得

$$(F_y - M\omega^2\frac{L}{2} - Mg)\Delta t = 0$$

得杆的上端受轴的竖直分力为

$$F_y = M\omega^2 \frac{L}{2} + Mg$$

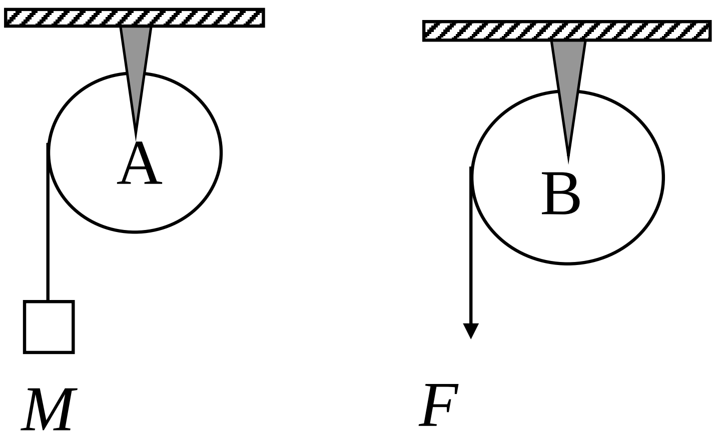
（3）若要使杆的上端不受水平力作用，子弹的入射位置应在何处（该位置称为打击中心）？

若要使杆的上端不受水平力作用，子弹的入射位置应满足

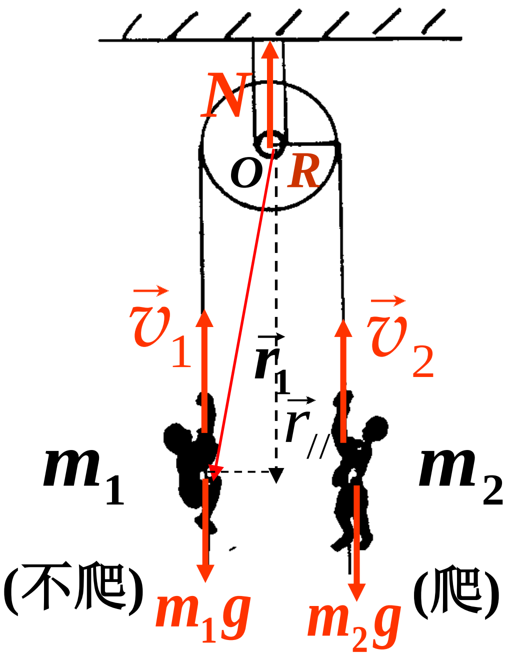
$$M\frac{L\omega}{2} + md\omega - mv_0 = 0$$

得子弹的入射位置 $d = \frac{2}{3}L$

2. 如图所示，A、B为两个相同的滑轮，A滑轮挂一个质量为*M*的物体，B滑轮受到拉力*F*，而且*F*=*Mg*，不计滑轮轴的摩擦，比较这两个滑轮的角加速度的大小.



3.如图所示，一轻绳绕过一轻滑轮，两个质量相同的人分别抓住轻绳的两端。设开始时，两人处在同一高度。此时右边的人从静止开始上爬，而左边的人抓住绳子不动，如不计轮轴的摩擦，哪个人先到达滑轮？



解：人、滑轮、绳子组成的系统，只受到重力矩作用。质量相等，系统角动量守恒。设任意时刻两人相对于地面的速度分别为υ_1和υ_2

设角动量以指向纸内为正。

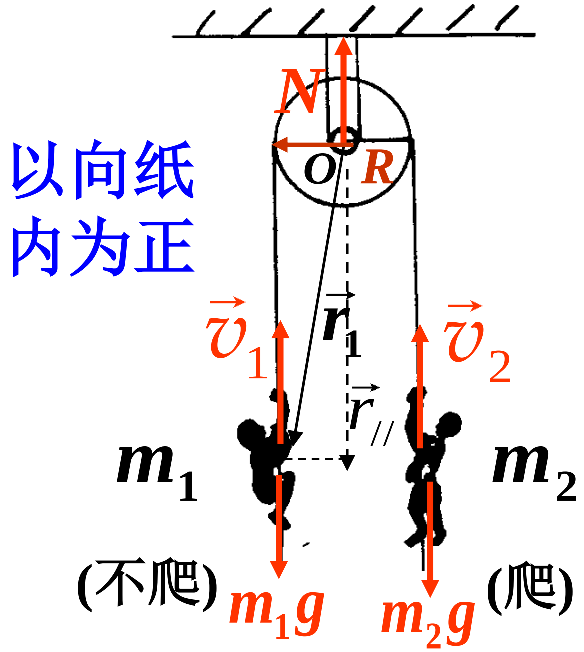
$$0 = m_1 R\upsilon_1 - m_2 R\upsilon_2$$

$$\because m_1 = m_2 \quad \therefore \upsilon_1 = \upsilon_2$$

爬与不爬，两小孩同时到达滑轮！

若 $m_1 \neq m_2$，会出现什么情况？

若 $\boldsymbol{m_1} \neq \boldsymbol{m_2}$，会出现什么情况？



系统所受的合外力矩为

$$M_{外} = (m_2 - m_1)gR \neq 0$$

系统总角动量 $L = (m_1 v_1 - m_2 v_2)R$

初始时小孩未动， $L_0 = 0$ 。

由角动量定理 $M_{外} = \dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t}$

若 $m_1 > m_2$: $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} < 0, \quad \therefore L < 0$

有 $m_1 v_1 - m_2 v_2 < 0, \quad \therefore v_1 < v_2$ 轻的升得快；

若 $m_1 < m_2$: $\dfrac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}t} > 0, \therefore L > 0$

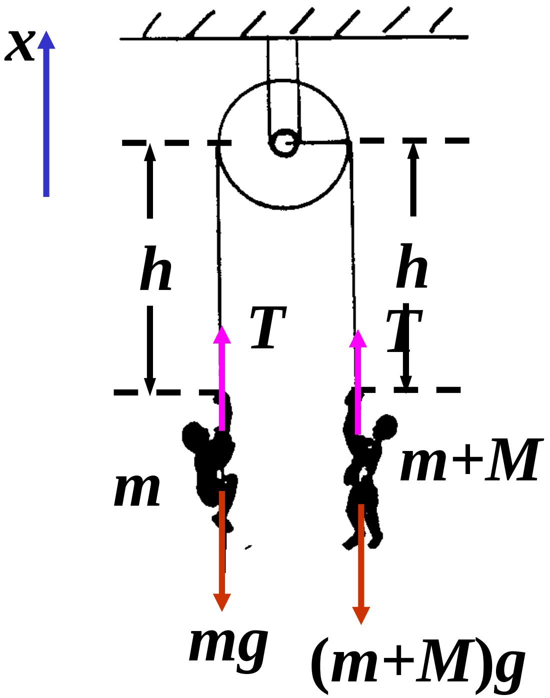
则 $m_1 v_1 - m_2 v_2 > 0, \quad \therefore v_1 > v_2$ 轻的升得快。

当较轻的人爬到滑轮处，较重的人离滑轮还有多高的距离？

若开始时离滑轮的距离均为 h 。

设 m：较轻人的质量，

$m+M$ ： 较重人的质量。



由牛顿第二定律，得

$$T - mg = ma_1 = m\frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}$$

$$T - (m+M)g = (m+M)a_2 = (m+M)\frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}$$

整理得

$$Mg = \frac{\mathrm{d}^2 x_1}{\mathrm{d}t^2}m - \frac{\mathrm{d}^2 x_2}{\mathrm{d}t^2}(m+M)$$

$$Mg=\frac{\mathrm{d}^2x_1}{\mathrm{d}t^2}m-\frac{\mathrm{d}^2x_2}{\mathrm{d}t^2}(m+M)$$

对 t 积分

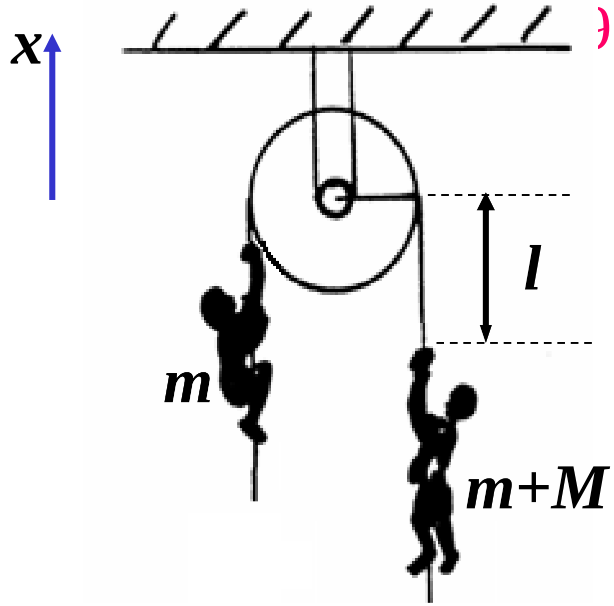
$$Mgt=m\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}-(m+M)\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

再对 t 积分

$$\int_0^t Mgt\mathrm{d}t=\int_{-h}^{0}m\mathrm{d}x_1-\int_{-h}^{-l}(m+M)\mathrm{d}x_2$$

解得 $$l=\frac{M}{m+M}(h+\frac{1}{2}gt^2)$$

即是较重的人离滑轮的距离。



4、一质量为 m 的物体悬于一条轻绳的下端，绳的另一端绕在一轮轴的轴上，如图所示。轴水平且垂直于轮轴面，其半径为 r，整个装置加在光滑的固定轴承之上。当物体从静止释放后，在时间 t 内下降了一段距离 s 。试求整个轮轴的转动惯量.

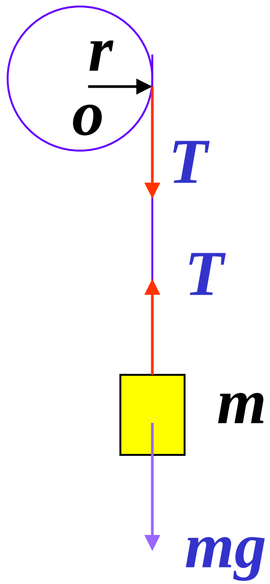
解：对滑轮，滑轮所受力距，并根据转动定律

$$Tr = J\beta,$$

滑轮的转动惯量 $J = \dfrac{Tr}{\beta} \quad \cdots(1)$

对重物： $mg - T = ma = m\beta r \cdots(2)$

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}\beta r t^2 \cdots(3)$$

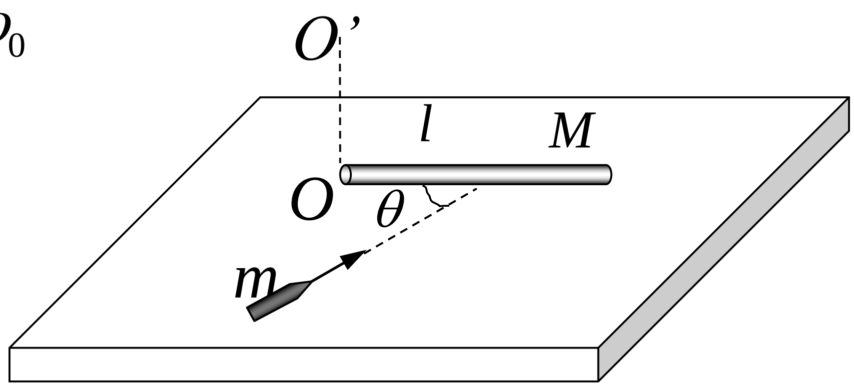


由(1), (2), (3) 得 $J = mr^2 \cdot (\dfrac{t^2 g}{2s} - 1)$

5. 水平桌面上有一长l=1.0m，质量M=3.0kg的匀质细杆，细杆可绕通过端点O的竖直轴OO´转动，杆与桌面之间的摩擦系数μ=0.20。开始时杆静止，有一颗子弹质量m=20g，沿水平方向以v=400，且与杆成θ=30° 的速度射入杆的中点并留在杆内。试求：（1）子弹射入后，细杆开始转动的角速度；（2）子弹射入后，细杆的角加速度；（3）细杆转动多大角度后停下来。

解 (1) 将子弹和细杆作为一个系统，由子弹击中细杆前后系统角动量守恒得

$$mv\frac{l}{2}\sin\theta+0=\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l}{4}^2\right)\omega_0$$



题5-11图

得细杆开始转动的角速度

$$\omega_0=\frac{mv\frac{l}{2}\sin\theta}{\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l}{4}^2\right)}=2.0\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$$

（2）子弹射入后，细杆的角加速度;

细杆受到的摩擦力矩为 $$K=\int_0^l \frac{Mgx\mu \mathrm{d}x}{l}+\frac{mg\mu l}{2}=\frac{g\mu l}{2}(M+m)$$

根据刚体定轴转动定律 $$K=\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l^2}{4}\right)\beta$$

可求得细杆的角加速度为 $$\beta=\frac{\frac{g\mu l}{2}(M+m)}{\left(\frac{1}{3}Ml^2+m\frac{l^2}{4}\right)}=3.0\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-2}$$

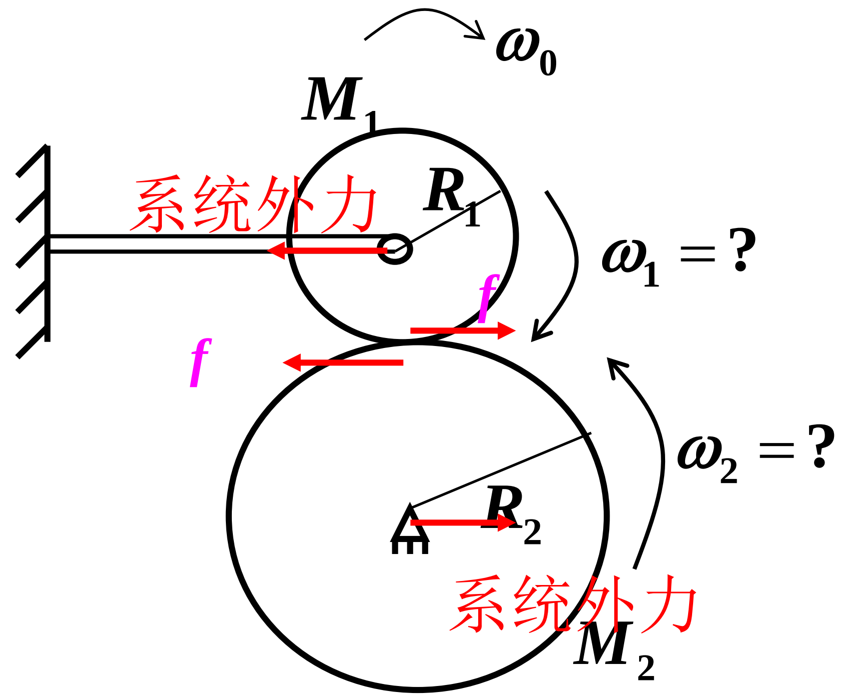
(3) 设细杆转动θ后停下来，则

$$\theta=\frac{\omega_0^2}{2\beta}=0.67\,\mathrm{rad}$$

6. 已知两个匀质圆盘质量分别为M_1、M_2，半径为R_1、R_2，开始时轮Ⅰ以ω_0转动。

求：两轮无相对滑动时

$$\omega_1 = ? \quad \omega_2 = ?$$



解：

(两轮无相对滑动时$v_1 = v_2$)

$$\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$$

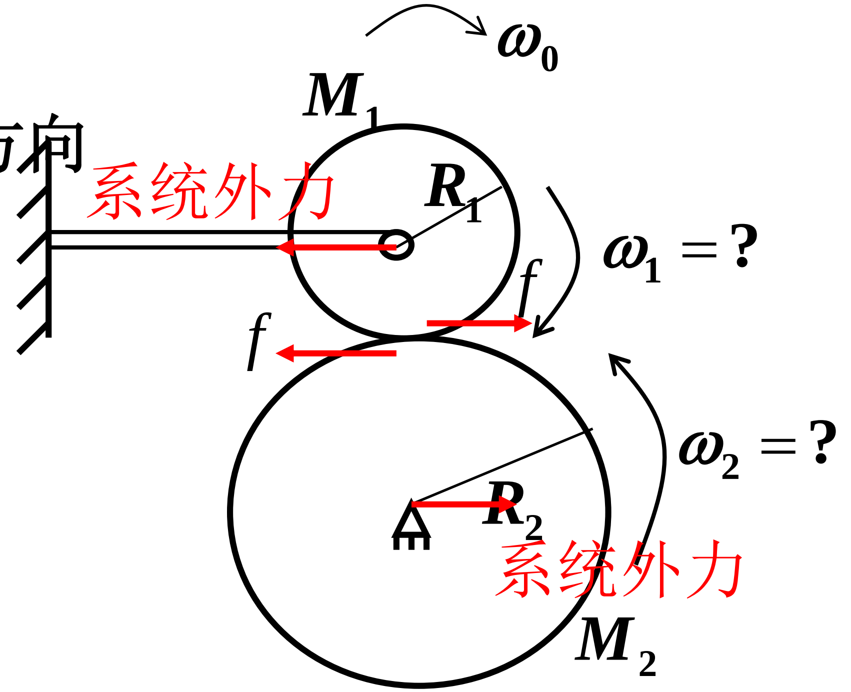
能否用角动量守恒?

$$J_1\omega_0 = J_1\omega_1 - J_2\omega_2$$

合外力矩不为0

角动量不守恒!

角动量定理 规定纸面向内为正方向



$$\underline{-fR_1\Delta t = J_1\omega_1 - J_1\omega_0}$$

$$\underline{-fR_2\Delta t = -J_2\omega_2}$$

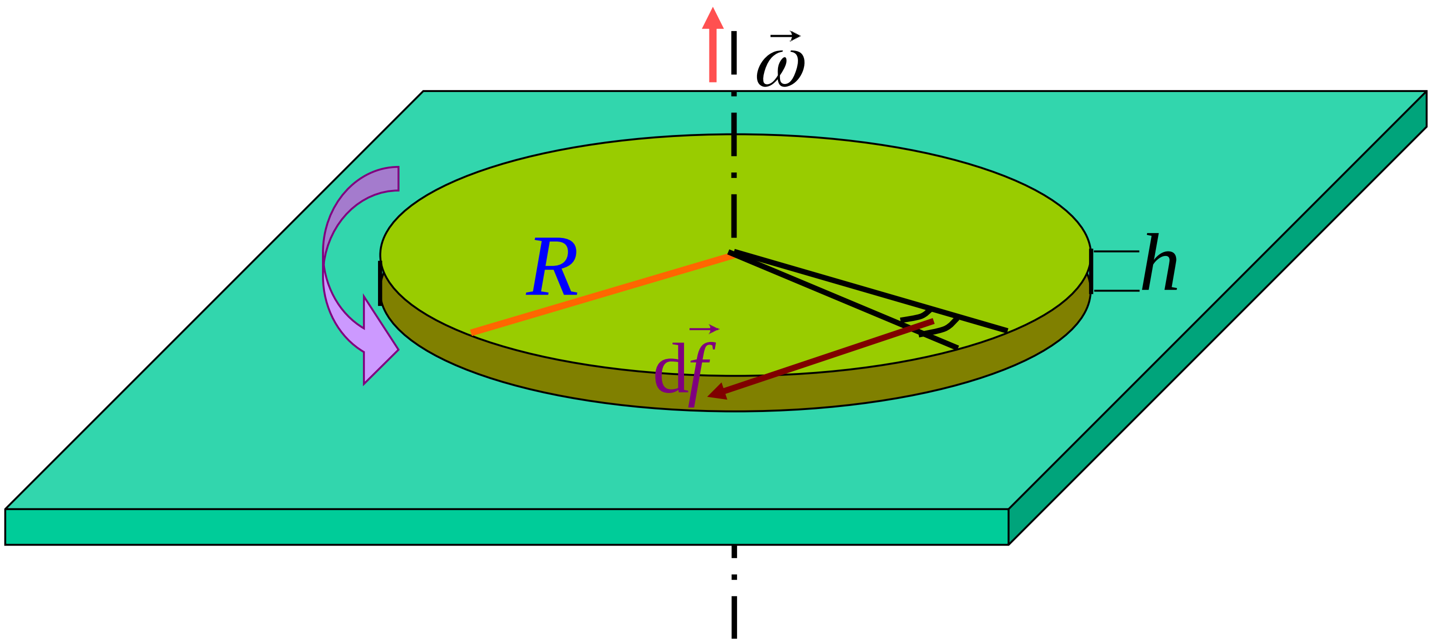
$$\underline{\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2}$$

$$J_1 = \frac{1}{2}M_1R_1^2 \qquad J_2 = \frac{1}{2}M_2R_2^2$$

可解得 $\omega_1 = \dfrac{M_1}{M_1+M_2}\omega_0$ $\qquad \omega_2 = \dfrac{R_1M_1}{R_2(M_1+M_2)}\omega_0$

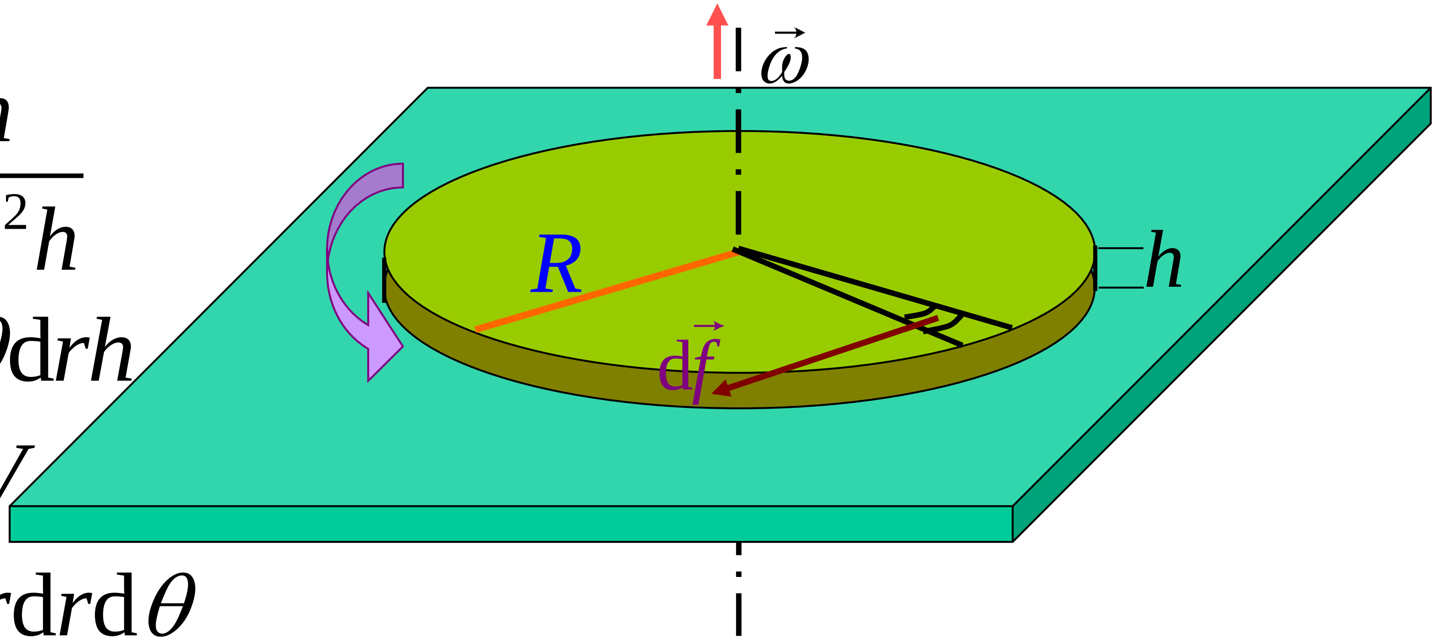
注意：判断刚体组系统角动量是否守恒时，必须是各刚体绕同一转轴转动。

7、 一长质量为 m 半径为 R 厚 h 的匀质圆盘水平放置在一个固定的桌面上，圆盘与桌面的摩擦系数为 μ ，匀质圆盘可绕过其圆心的轴转动。设初始 $t_0 = 0$ 时刻圆盘角速度为 ω_0 ，求：（1）圆盘由于受到摩擦阻力作用所产生的角加速度，（2）从初始时刻算起，当圆盘停止转动时转过了多少圈？



解：（1）

$$\rho = \frac{m}{\pi R^2 h}$$



$$\mathrm{d}V = r\mathrm{d}\theta \mathrm{d}rh$$

$$\mathrm{d}m = \rho \mathrm{d}V$$

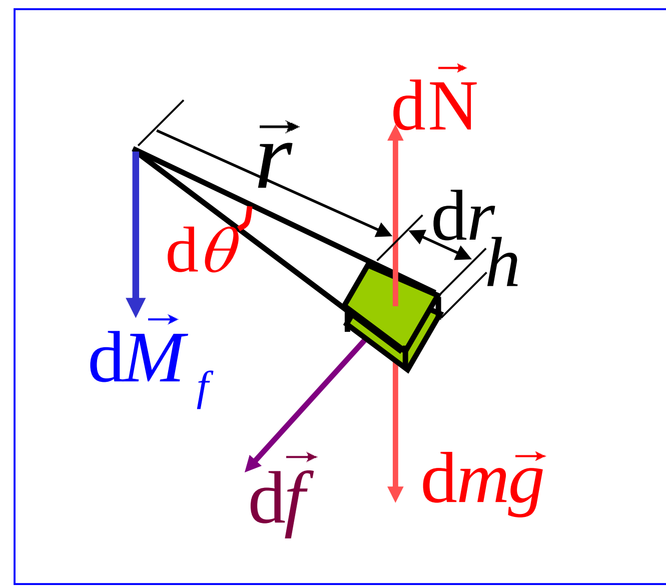
$$\mathrm{d}m = \rho hr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}N = \mathrm{d}mg = \rho ghr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}f = \mu \mathrm{d}N = \mu\rho ghr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{d}\vec{M}_f = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{f}$$

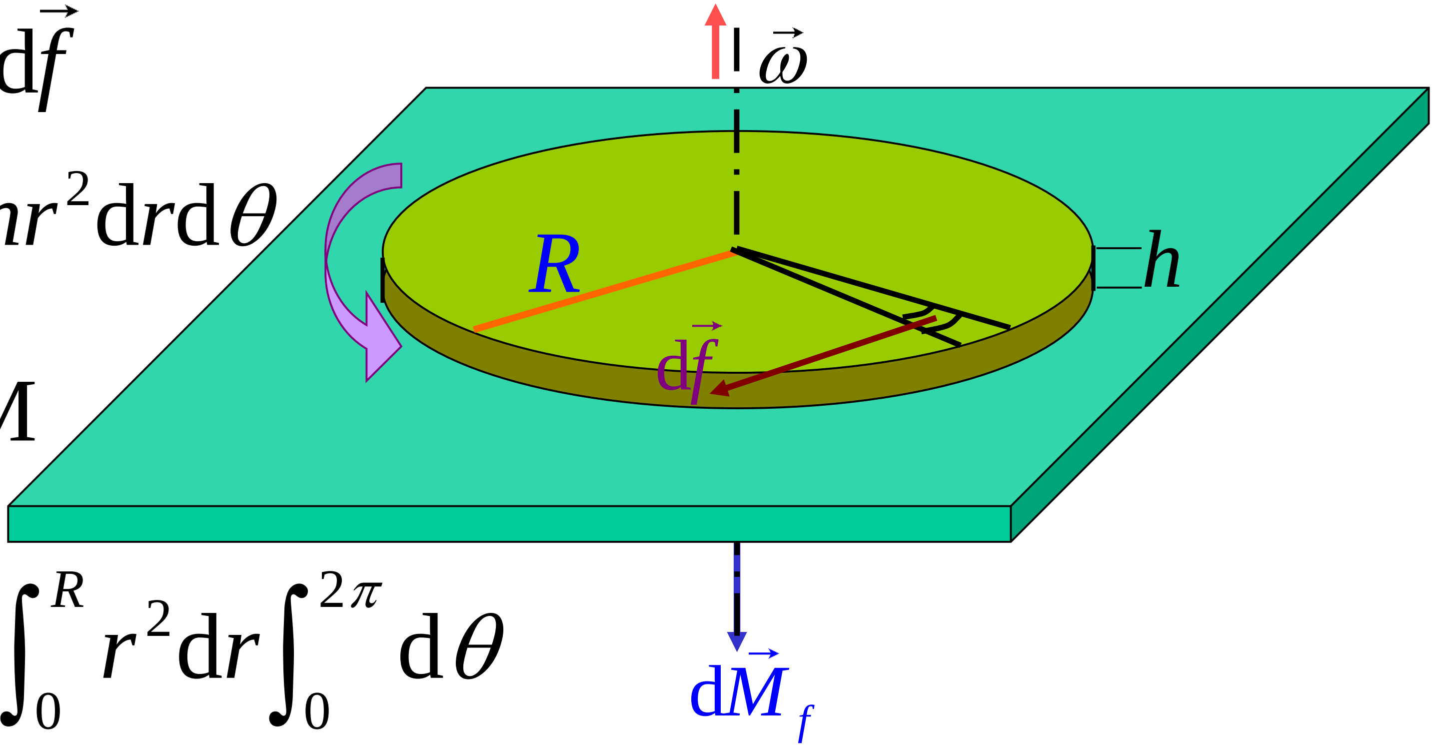
$$\mathrm{dM} = r\mathrm{d}f = \mu\rho ghr^2\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$



$$\mathrm{d}\vec{M}_f = \vec{r} \times \mathrm{d}\vec{f}$$

$$\mathrm{dM} = \mu\rho g h r^2 \mathrm{d}r \mathrm{d}\theta$$

$$\mathrm{M} = \int_{(\mathrm{m})} \mathrm{dM}$$



$$= \mu\rho g h \int_0^R r^2 \mathrm{d}r \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{2}{3}\mu m g R$$

（2） $M = J\beta \qquad \frac{2}{3}\mu m g R = \frac{1}{2} m R^2 \beta \qquad \beta = \frac{4\mu g}{3R}$

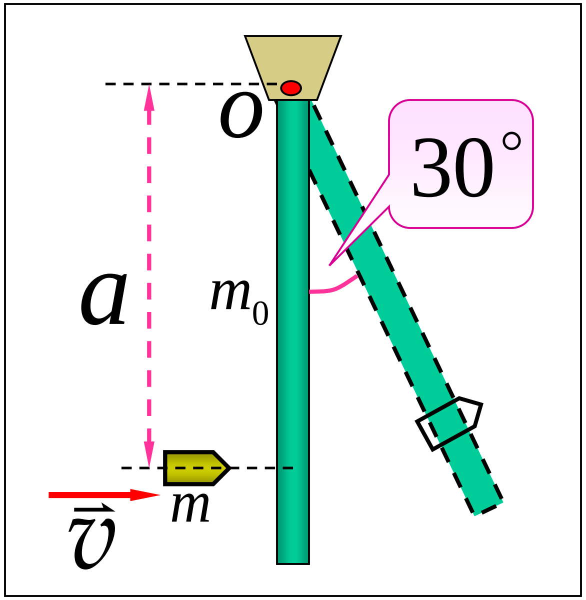
$$0 = \omega_0^2 - 2\beta\Delta\theta \qquad n = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{3R\omega_0^2}{16\pi\mu g}$$

8. 一长为 l ，质量为 m_0 的竿可绕支点O自由转动 。一质量为 m 、速率为 v 的子弹射入竿内距支点为 a 处，使竿的偏转角为30°。问子弹的初速率为多少？

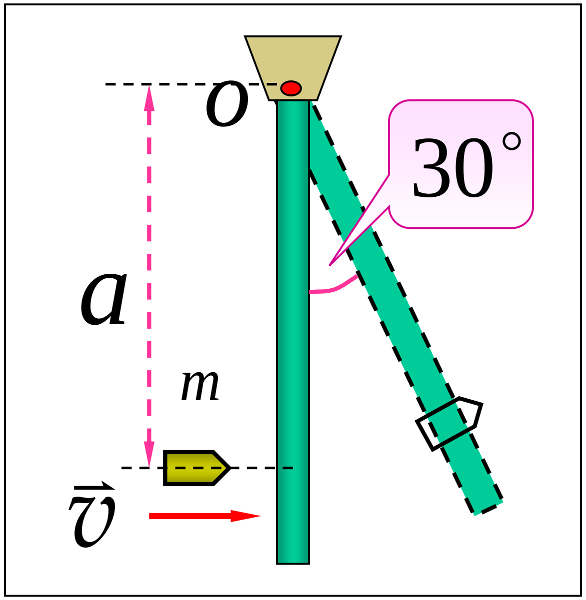
解 把子弹和竿看作一个系统。子弹射入竿的过程系统角动量守恒

$$mva = (\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2)\omega$$

$$\omega = \frac{3mva}{m_0 l^2 + 3ma^2}$$



射入竿后，以子弹、细杆和地球为系统，机械能守恒。



$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}m_0 l^2 + ma^2\right)\omega^2 =$$

$$= mga\left(1-\cos 30^\circ\right) + m_0 g\frac{l}{2}\left(1-\cos 30^\circ\right)$$

$$v = \frac{\sqrt{g\dfrac{(2-\sqrt{3})}{6}(m_0 l + 2ma)(m_0 l^2 + 3ma^2)}}{ma}$$