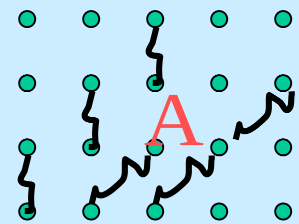
第十章　波　动

§1 波的产生和传播

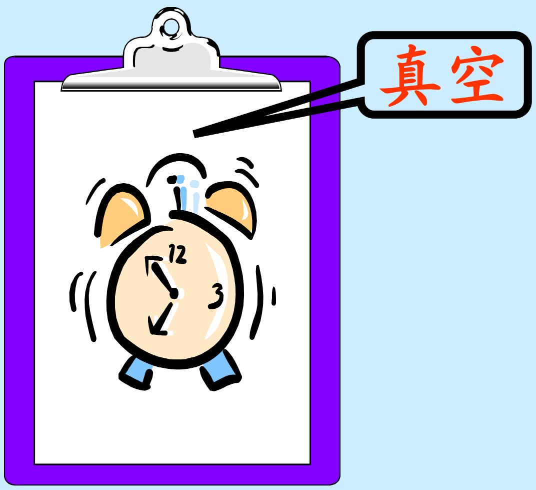
一、波的产生



振源A振动通过
弹性力传播开去

1. 机械波产生的条件

波源　媒质

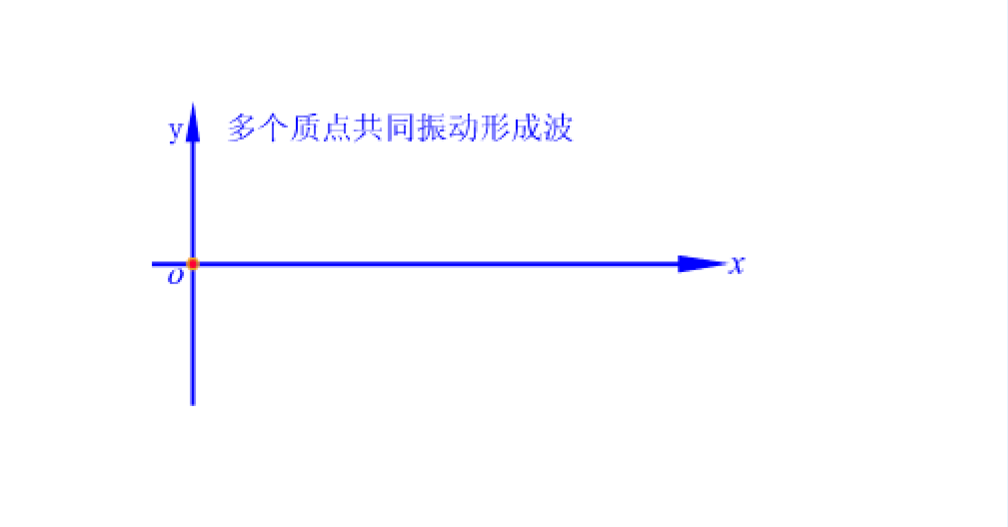


2. 电磁波

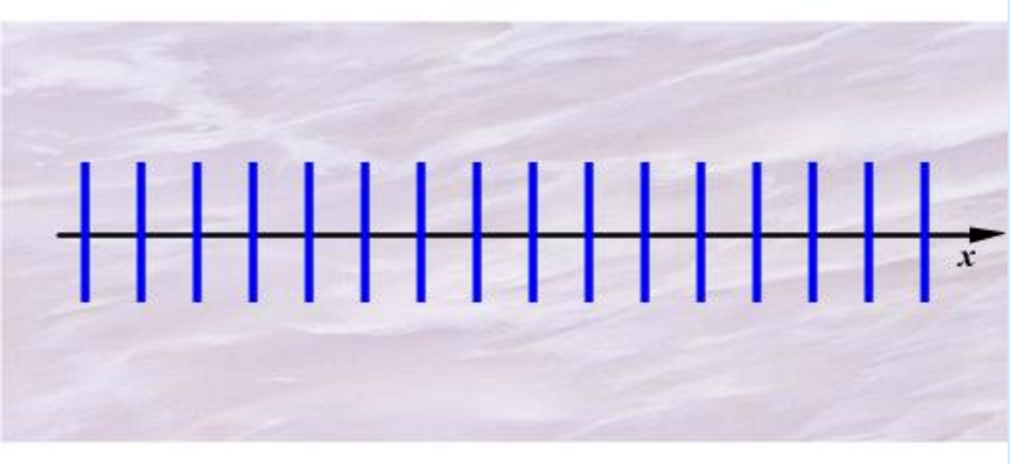
只需波源
可在真空中传播

二、波的分类

横波：各质元振动方向与波传播方向垂直

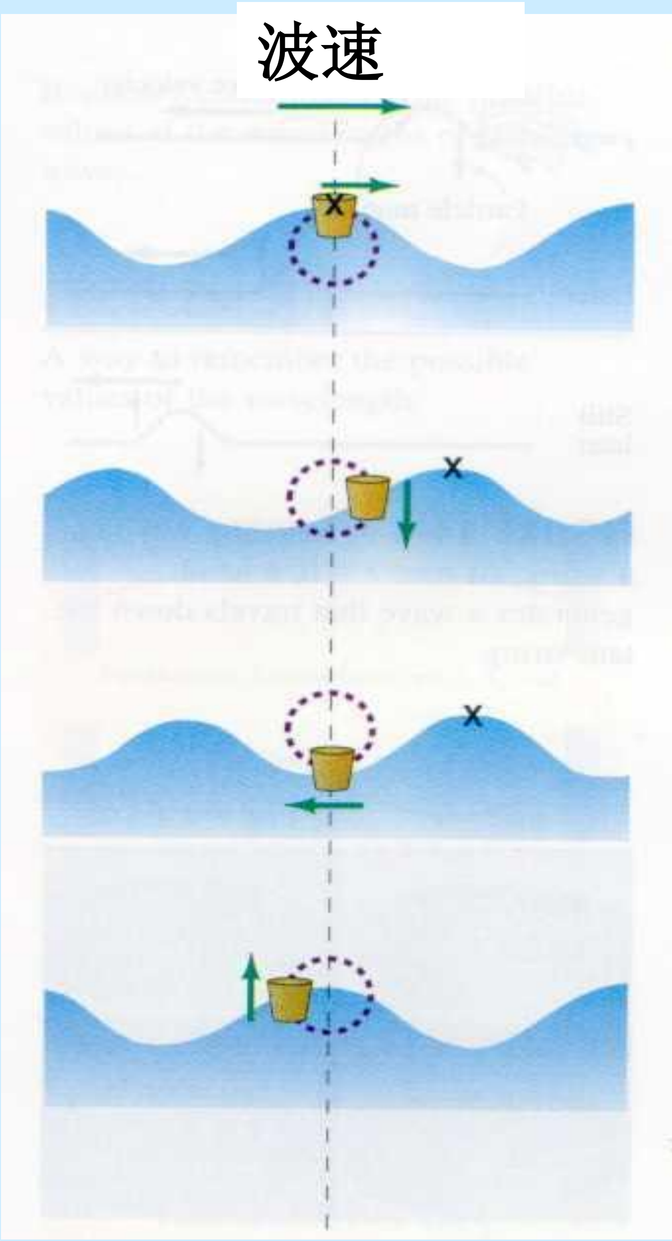


纵波：各质元振动方向与波传播方向一致



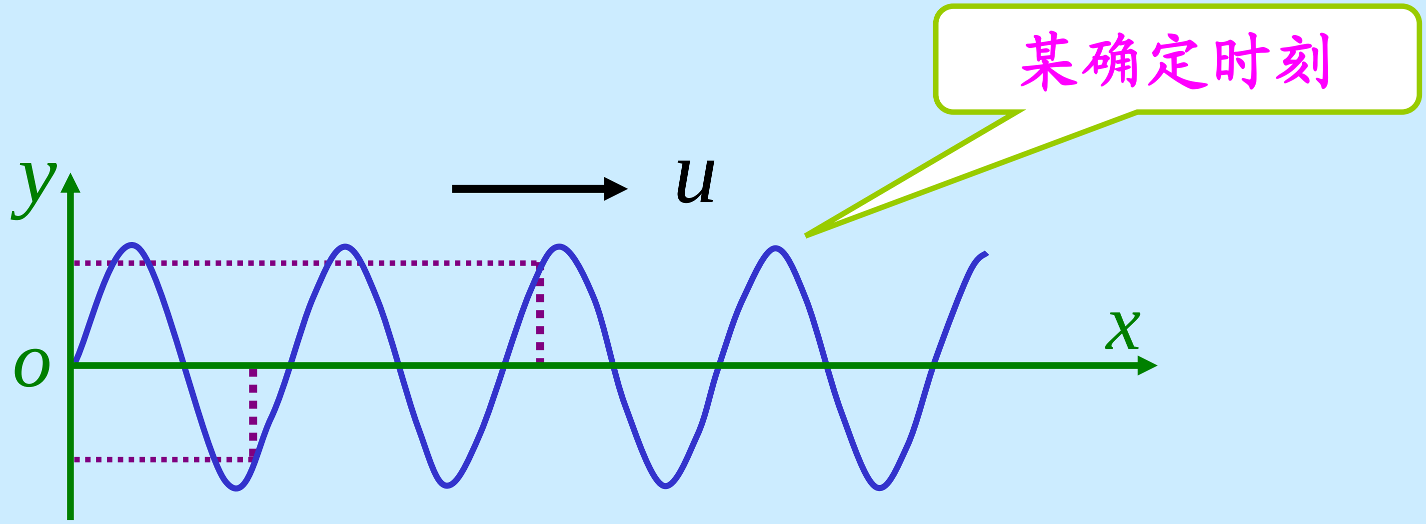
水表面的波既非横波又非纵波——在水的表面张力和重力共同作用下形成的。

地震波为横波与纵波的混合波，破坏力更强的是其中的横波成分。



波形图:

某时刻各点**振动的位移** ***y*** (广义：任一物理量)与相应的平衡**位置坐标** ***x*** 的关系曲线



——上述波形图既可以表示横波，也可以表示纵波。

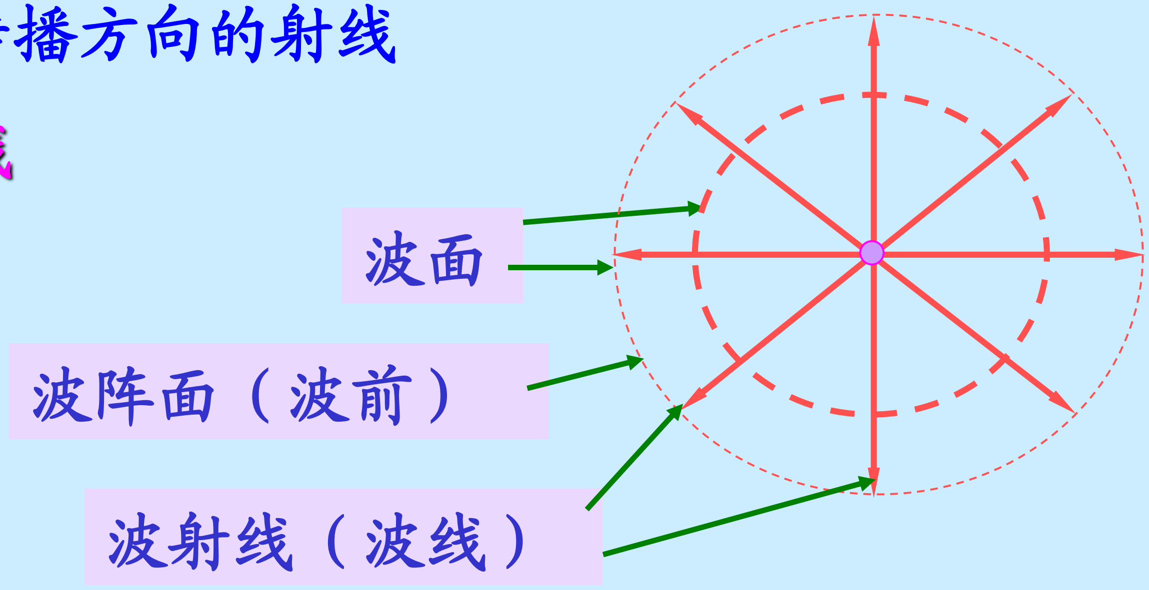
2. 波面与波线

波面：某时刻，同一波源向外传播的波到达的空间各点连成的面（**同相位面**）

波阵面：某时刻，传播在最前面的波面（又称**波前**）

波射线：描述波传播方向的射线

简称**波线**



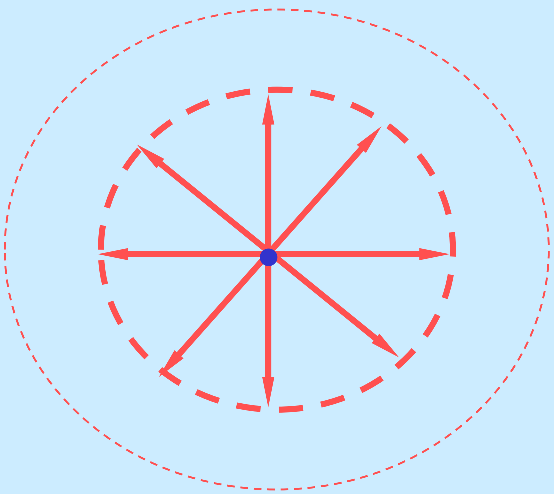
- 波射线垂直于波面
- 波射线是波的能量传播方向

在各向同性介质中——

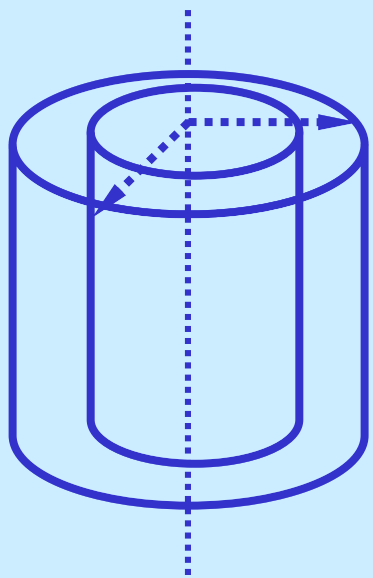
点源：波面是球面 所以称为**球面波**

线源：波面是柱面 所以称为**柱面波**

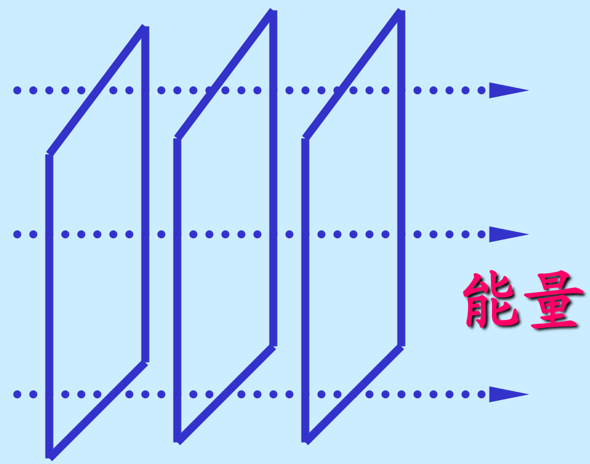
面源：波面是平面 所以称为**平面波**



球面波

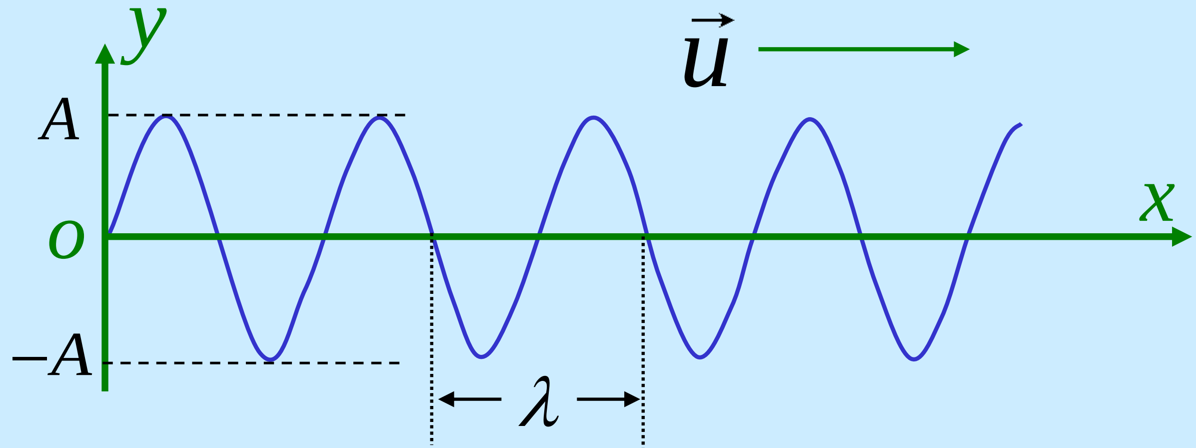


柱面波



平面波

三、描述波的物理量



振幅: A 单位: m 或 cm

周期: T 单位: s

频率: ν 单位: Hz 1Hz=1/1s $\nu = 1/T$

波长: λ 单位: m 、cm 、μm 或 nm

波速: u 单位: m/s $u = \lambda/T = \lambda\nu$ ——由媒质的性质决定

固体内: 横波 $u = \sqrt{G/\rho}$ 纵波 $u = \sqrt{E/\rho}$

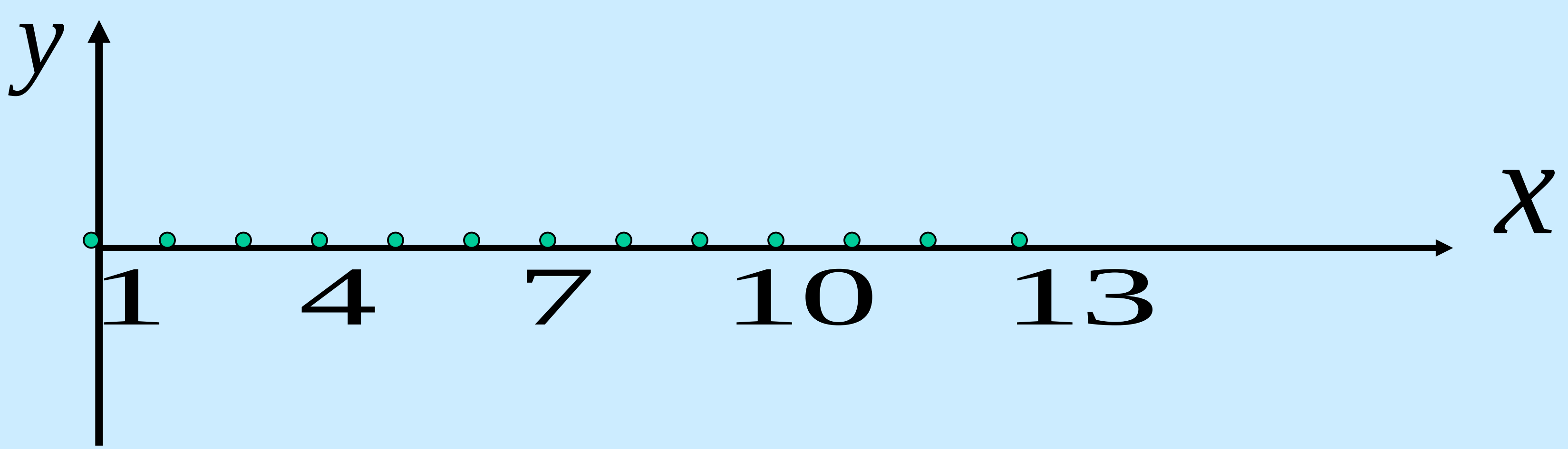
§2 平面简谐波

平面波：波面是平面的波(一维、能量不损失)

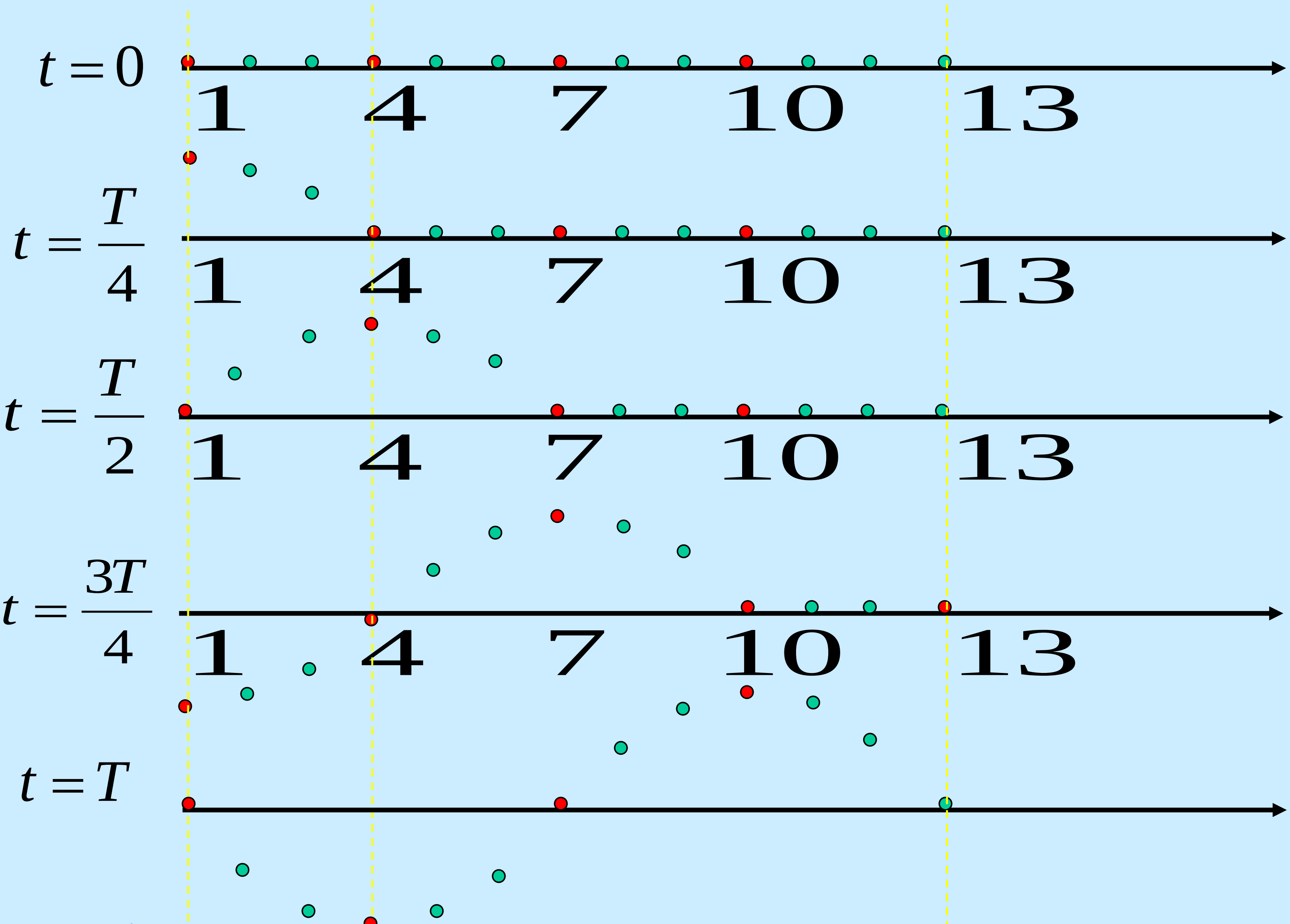
简谐波：波动传播到的各点均作简谐振动的波

一、平面波的传播

以下以绳上横波为例，说明传播特征。



无外界干扰时，各质点均处在自己的平衡位置处。



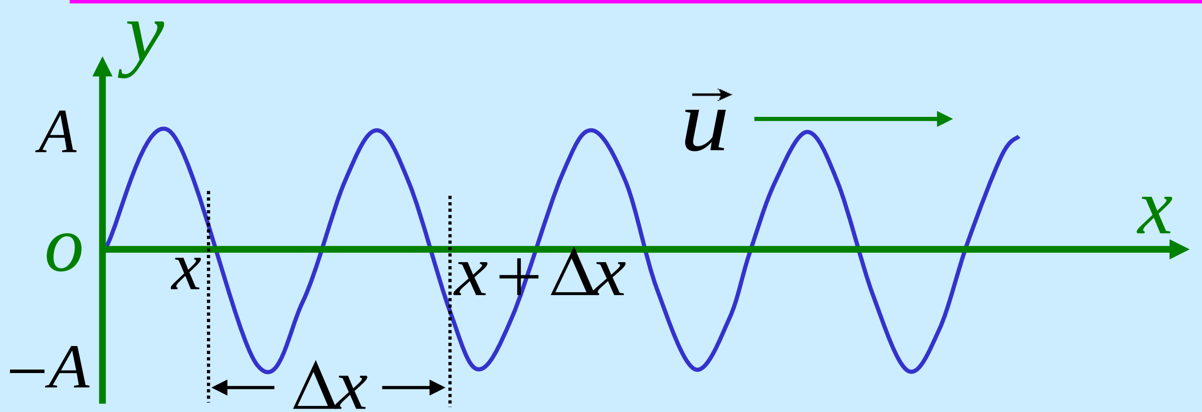
当第1个质点振动1个周期后，它的最初的振动相位传到第13个质点，即：第1个质点领先第13点 2π 相位。

- 波是**振动状态（能量）**的传播，不是媒质质点的传播，各媒质质点均在自己的平衡位置附近作振动。

- **同时**看波线上各点沿传播方向，各点相位依次落后。

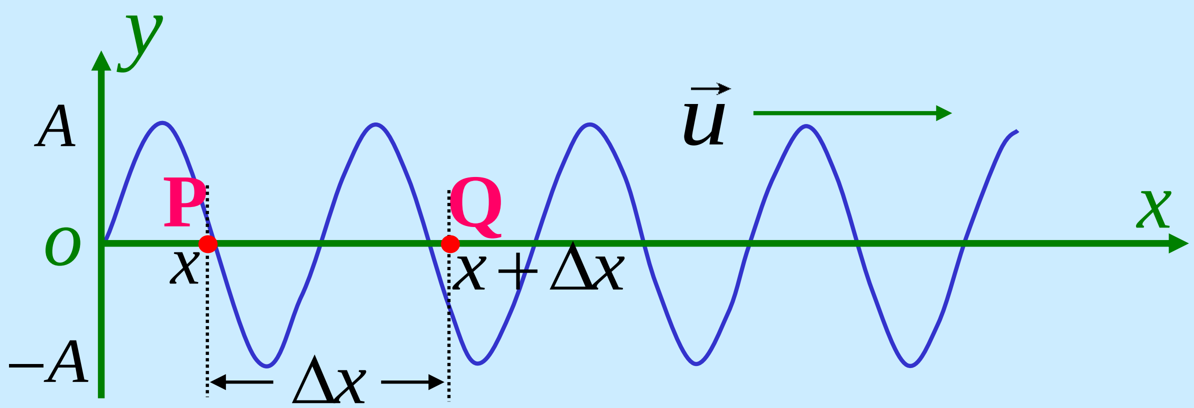
- 相距一个波长两点相位差是**2π**。如第13点和第1点，或说振动时间差1个**周期**，则相位差为**2π**。

$$\boxed{\text{相距 } \Delta x = \lambda \text{ 两点的相位差 } \Delta\varphi = 2\pi}$$



- 相距 Δx 的任意两点的相位差 $$\boxed{|\Delta\varphi| = \frac{2\pi}{\lambda}|\Delta x|}$$

二、平面简谐波波函数（余弦表达式）

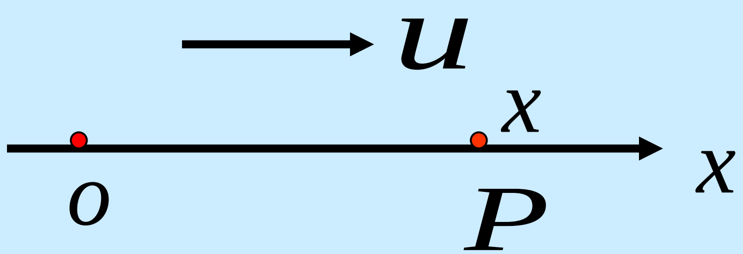


在波线后部 Q 点处 t 时刻的振动，是前部 P 点在

$$t-\frac{\Delta x}{u}=t-\frac{\Delta x}{\lambda}T$$ 时刻的振动

即 Q 点的振动落后于 P 点。

当波沿x轴正向传播时， P点的振动落后于O点



$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

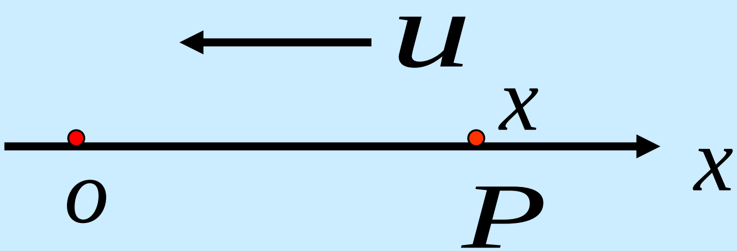
$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right]$$

- 当波的传播方向与x轴反向时，P点的振动超前于O点



$$y_O = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

$$y = A\cos\left[\omega\left(t + \frac{x}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\nu t + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[2\pi\left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right]$$

说明:

1. $y = A\cos\left(\omega t - \dfrac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$ 波沿x轴**正**向传播

$y = A\cos\left(\omega t + \dfrac{2\pi}{\lambda}x + \varphi_0\right)$ 波沿x轴**负**向传播

2. 角波数（简称波数)

波数：单位长度内含的波长数目（波长倒数）$k = 1/\lambda$

角波数：2π长度内含的波长数目（简称波数）$k = 2\pi/\lambda$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$ 亦称为**波矢的大小**

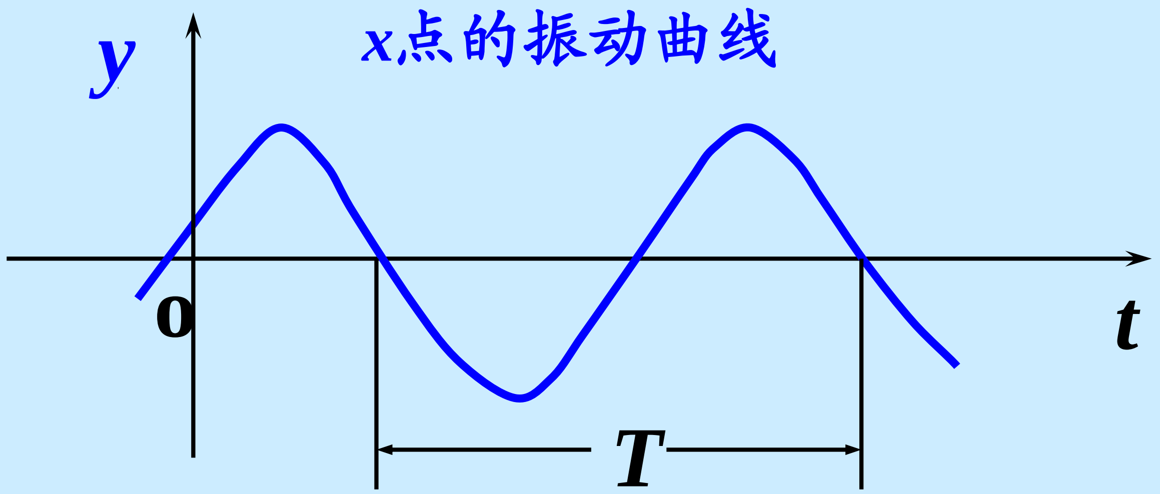
平面谐波一般表达：$y = A\cos(\omega t \mp kx + \varphi)$

负（正）号代表向 x 正（负）向传播的简谐波。

3. 波函数的物理意义

- **当坐标 x 确定**，波动方程变成 $y-t$ 关系，表示 x 点的振动，以与 x 轴同向传播的平面简谐波为例

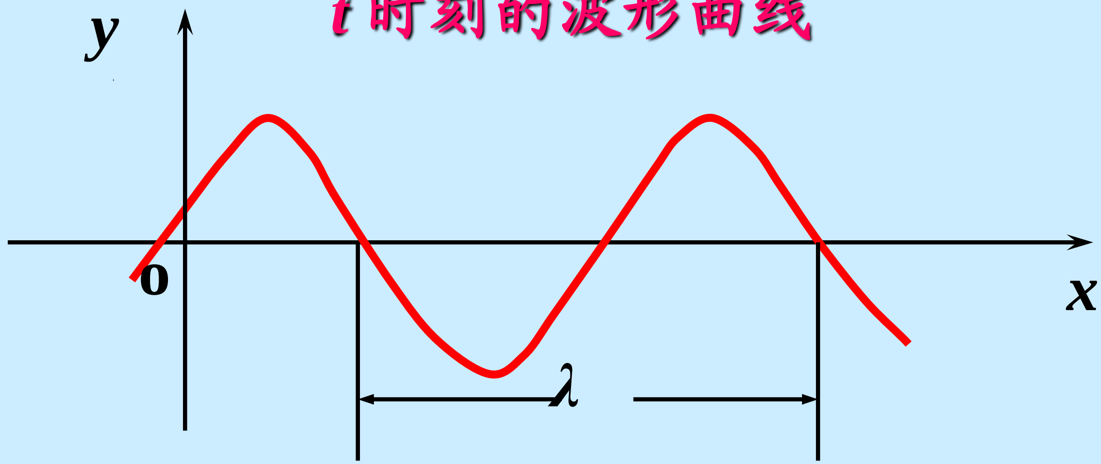
$$y = A\cos\left[\omega t + \left(\varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)\right]$$



- **当时刻 *t* 确定**，波动方程变成 ***y- x*** 关系　表达了 ***t*** 时刻空间各点位移分布——**波形图 (波形定格照片)**，以与 ***x*** 轴同向传播的平面简谐波为例

$$y = A\cos\left[-\frac{2\pi}{\lambda}x + \left(\omega t + \varphi_0\right)\right]$$

***t* 时刻的波形曲线**



（空间周期）

4. 波动传播到的各点媒质质元的振动速度和加速度

- 以沿 x 轴正向传播的平面简谐波为例

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

$$v = -A\omega\sin\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

$$a = -A\omega^2\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$

三、波动方程的微分形式

√ 各向同性，无色散介质内，一维波动方程

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{u^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}}$$

介质中的波速

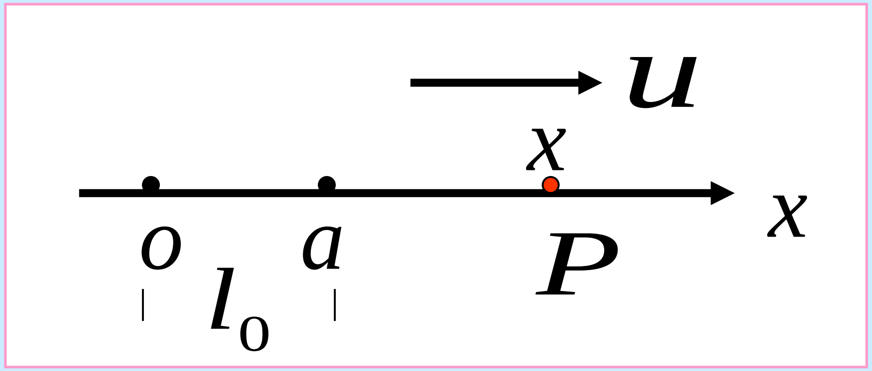
√ 解的形式之一 —— 特解:

$$y = A\cos(\omega t - kx)$$ ——平面简谐波

例1 已知：波沿着x轴的正方向传播，波源a 的振动形式为

$$y = A\cos(\omega t + \varphi_0)$$

求：波函数的表达式



解：任意一点 P 坐标为 x

解法一： P 点相位落后于波源 a 的振动相位 $\dfrac{2\pi}{\lambda}\left|\overline{Pa}\right|$

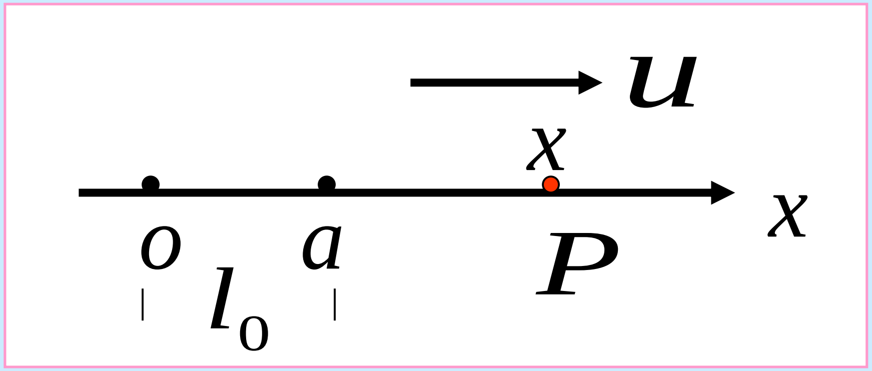
所以就在 a 点振动表达式的基础上改变相位因子就得到了 P 的振动表达式

$$y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}\left|\overline{Pa}\right|\right]$$

$$\boxed{y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(x - l_0)\right]}$$

解法二:

时间落后



$$y = A\cos\left[\omega\left(t - \frac{\left|\overline{Pa}\right|}{u}\right) + \varphi_0\right]$$

$$= A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{\omega}{u}(x - l_0)\right]$$

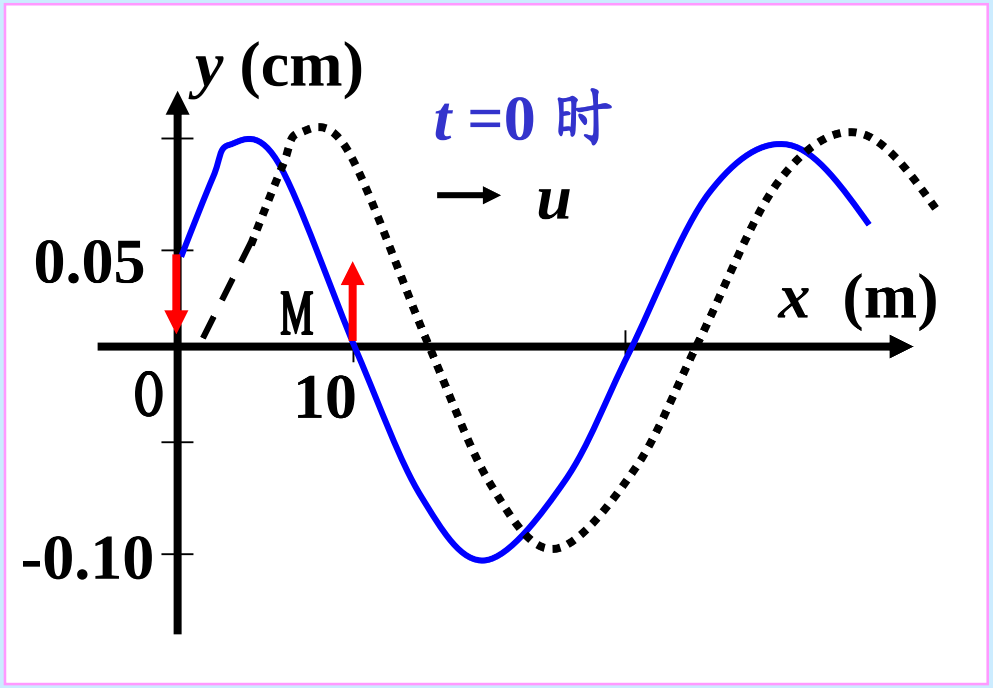
$$\boxed{y = A\cos\left[\omega t + \varphi_0 - \frac{2\pi}{\lambda}(x - l_0)\right]}$$

例2 正向波在t =0时的波形图，波速u=1200m/s。

求：波函数和波长

解：

$$y = A\cos\left[\omega\left(t-\frac{x}{u}\right)+\varphi_0\right]$$



由图 $A = 0.10(cm)$

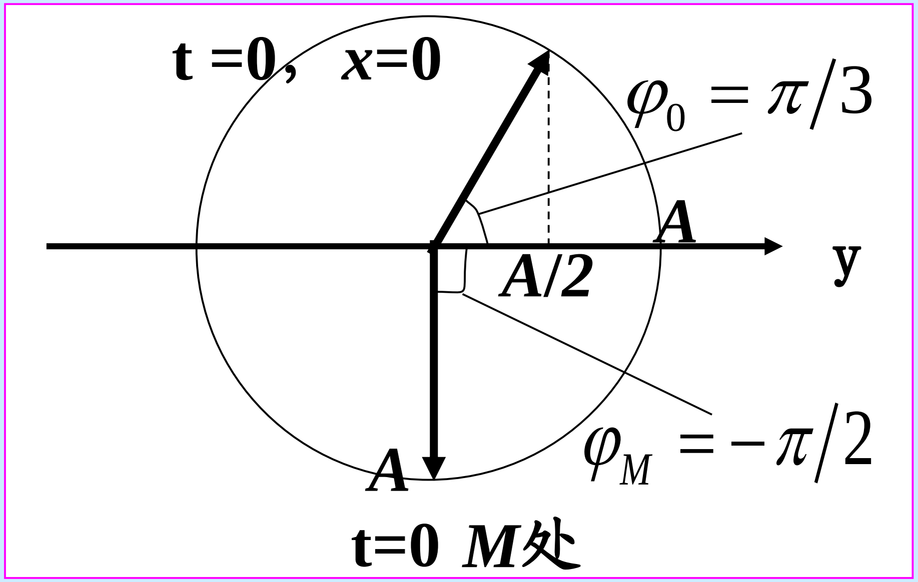
如何确定：ω, φ_0

由初始条件：$y_0 = A/2, v_0 < 0$

$\rightarrow$ $\varphi_0 = \pi/3$

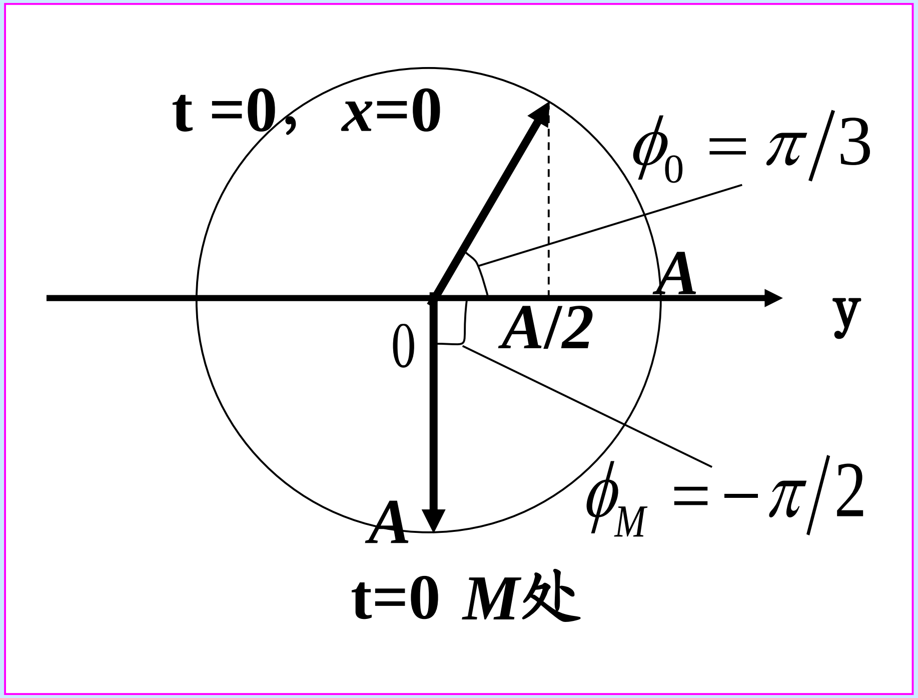
*M*点状态 $y_M = 0, v_M > 0$

$\rightarrow$ $\varphi_M = -\pi/2$



M 点与O点的相位差:

$$\Delta\varphi=\varphi_0-\varphi_M=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}=\frac{5\pi}{6}$$



M 点与0点的时间差:

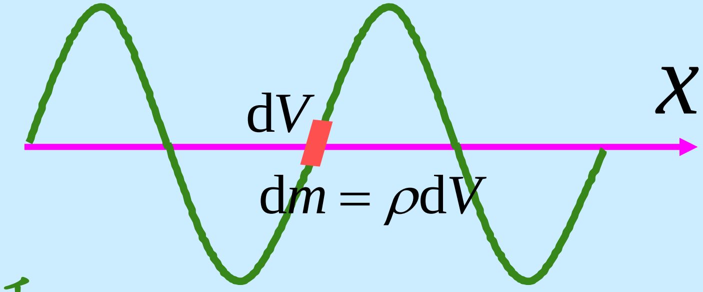
$$\Delta t=\frac{\overline{OM}}{u}=\frac{10}{1200}s=\frac{1}{120}s$$

则: $\omega=\dfrac{\Delta\varphi}{\Delta t}=100\pi$ $\qquad \lambda=uT=u\dfrac{2\pi}{\omega}=24(m)$

$$y=0.10\cos\left[100\pi\left(t-\frac{x}{1200}\right)+\frac{\pi}{3}\right]$$

四、波的能量、能流

1. 波的能量:



$$\left.\begin{array}{l}\text{每个质元振动所具有的动能}\\ \text{每个质元形变所具有的势能}\end{array}\right\}\text{之和}$$

以平面简谐波为例，波函数（$\varphi_0=0$）为:

$$y=A\cos\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right) \qquad v=-A\omega\sin\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$\mathrm{d}E_k=\frac{1}{2}\mathrm{d}m\,v^2=\frac{1}{2}\rho\mathrm{dV}\,A^2\omega^2\sin^2\left(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

可以证明: $\mathrm{d}E_k=\mathrm{d}E_p$ $\qquad$ $\boxed{\mathrm{d}E=\mathrm{d}E_k+\mathrm{d}E_p}$

能量密度：　波传播所经历媒质中单位体积内的能量

$$w = \frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{dV}} = \rho A^2\omega^2 \sin^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

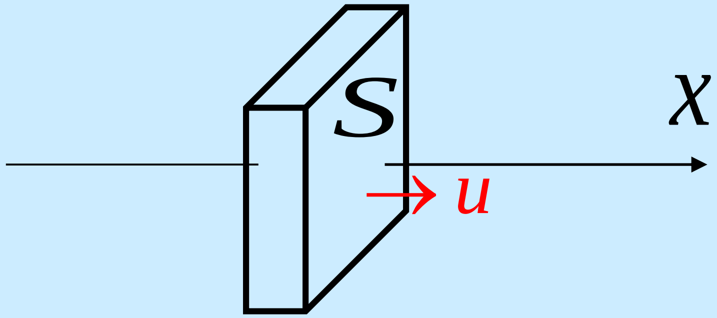
平均能量密度：

$$\bar{w} = \frac{1}{T/2}\int_0^{T/2} w\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\rho A^2\omega^2$$

2. 波的能流

能流(瞬时功率)

——单位时间内通过垂直于波传播方向某一面积的能量



$$P = \Delta E/\Delta t$$

$$P = wuS$$ 单位：瓦特（W）

平均能流 $\overline{P} = \overline{w}Su$

对于平面简谐波 $\overline{P} = \overline{w}Su = \frac{1}{2}\rho u A^2 \omega^2 S$

3. 能流密度(功率密度)——波的强度

——单位时间内通过垂直于波传播方向单位面积的平均能量。即通过单位面积的平均能流。(也称**波的强度**)

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{w}u$$

单位：**W m^{-2}**

对于平面简谐波 $I = \overline{w}u = \frac{1}{2}\rho u A^2 \omega^2$

- **能流密度(波的强度)为矢量，其方向与波速相同**

讨论: 1. 对于任意的简谐波

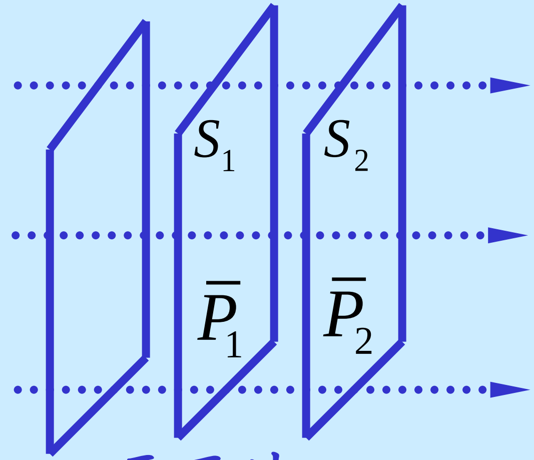
$$\mathrm{d}E, w, P, I, \propto A^2, \omega^2$$

2. 对于同一种媒质，波的相对波强

$$I = A^2$$

五、平面简谐波和球面简谐波的传播振幅

1. 平面简谐波的传播振幅



平面波

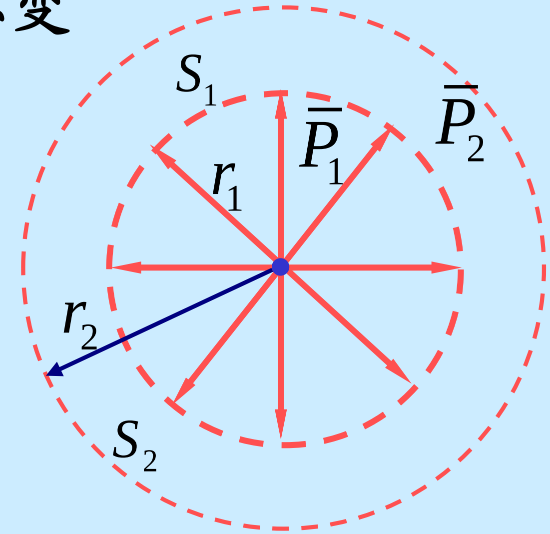
$$\bar{P}_1=\frac{1}{2}\rho u A_1^{\ 2}\omega^2 S_1 \qquad \bar{P}_2=\frac{1}{2}\rho u A_2^{\ 2}\omega^2 S_2$$

$$\because \bar{P}_1=\bar{P}_2 \quad \therefore\ A_1^{\ 2}S_1=A_2^{\ 2}S_2$$

$$\because S_1=S_2 \qquad \therefore\ A_1=A_2$$

——平面简谐波传播过程中振幅保持不变

2. 球面简谐波的传播振幅



球面波

$$\bar{P}_1=\frac{1}{2}\rho u A_1^{\ 2}\omega^2 S_1 \qquad \bar{P}_2=\frac{1}{2}\rho u A_2^{\ 2}\omega^2 S_2$$

$$\because \bar{P}_1=\bar{P}_2 \quad \therefore\ A_1^{\ 2}S_1=A_2^{\ 2}S_2$$

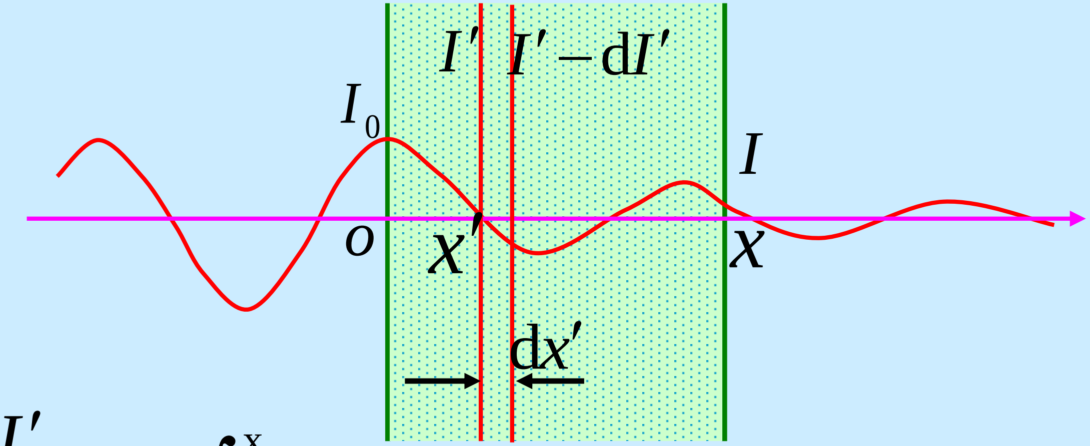
$$\therefore\ A_1^{\ 2}4\pi r_1^{\ 2}=A_2^{\ 2}4\pi r_2^{\ 2}$$

$$\therefore\ A_1^2 r_1^2 = A_2^2 r_2^2 \qquad \therefore\ A_1 r_1 = A_2 r_2 \qquad \therefore\ \frac{A_2}{A_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

设： $\left.\begin{array}{ll} r_1 = 1 & A_1 = A_0 \\ r_2 = r & A_2 = A \end{array}\right\} \qquad \therefore\ A = \dfrac{A_0}{r}$

——球面简谐波传播过程中振幅随距离而减小。

五、波的吸收



$$-\mathrm{d}I' = \alpha I' \mathrm{d}x'$$

α 为吸收系数

$$\frac{\mathrm{d}I'}{I'} = -\alpha \mathrm{d}x' \qquad \int_{I_0}^{I} \frac{\mathrm{d}I'}{I'} = -\alpha \int_0^{x} \mathrm{d}x'$$

$$I = I_0 e^{-\alpha x}$$

§3 惠更斯原理 波的衍射

一、惠更斯原理

- 1678年惠更斯提出的惠更斯原理，利用简洁的作图法定性解决了波的传播问题。

- 在研究光的衍射等问题时，菲涅尔利用叠加的概念对惠更斯原理做了重要发展，称惠更斯－菲涅尔原理。

- 基尔霍夫将惠更斯－菲涅尔原理加以数学描述，发展成“光传播”的重要计算手段，即基尔霍夫方程。

包迹（包络线）：一条曲线和一族曲线的每一条都相切，则这条曲线称为这族曲线的包迹（或包络线）。

惠更斯原理:

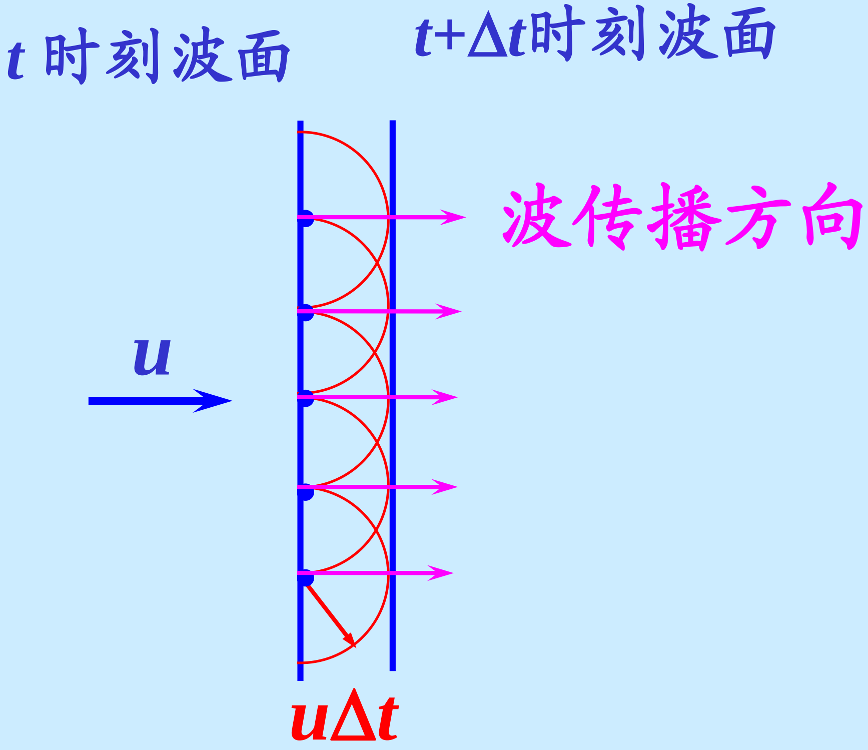
波动传播到的任一点都可以看成是产生次级子波的波源，在其后的某一时刻，这些次级子波的包迹（包络线）就决定了新的波阵面。

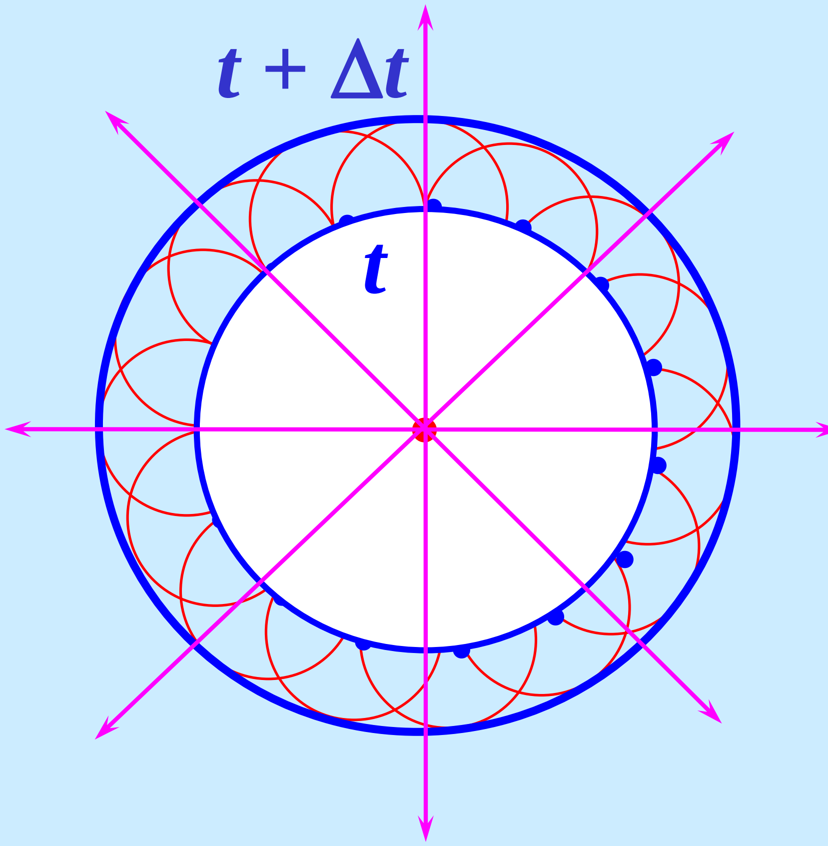
✓**子波**：波面上任一点都是新的振源，发出的波称为子波;

✓**子波面的包络线**（新波面）—— t 时刻各子波波面的公共切面（包络面），就是该时刻的新波面。

✓**作用**：已知一波面就可求出任意时刻的波面。

例：　波在各向同性介质中传播

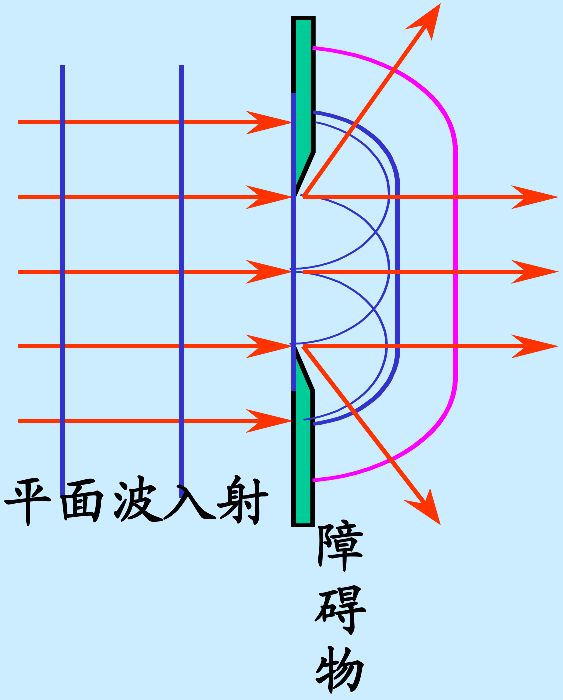


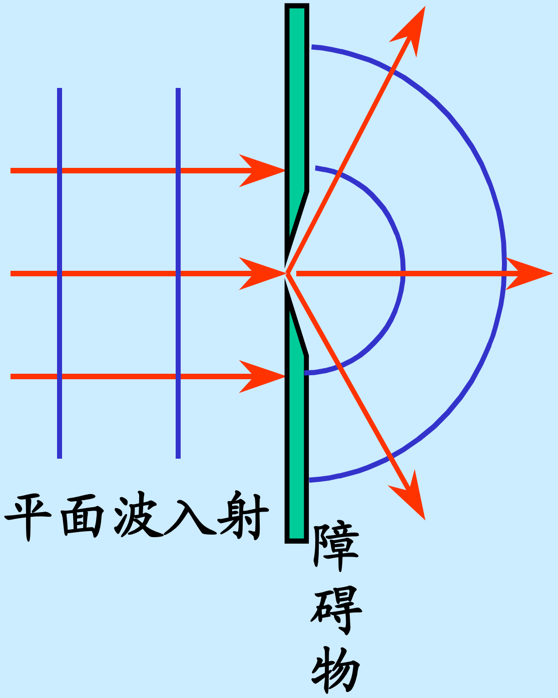


二、波的衍射

衍射——波传播遇到障碍物时，发生偏离原来直线传播方向的现象。（波面破损或畸变）

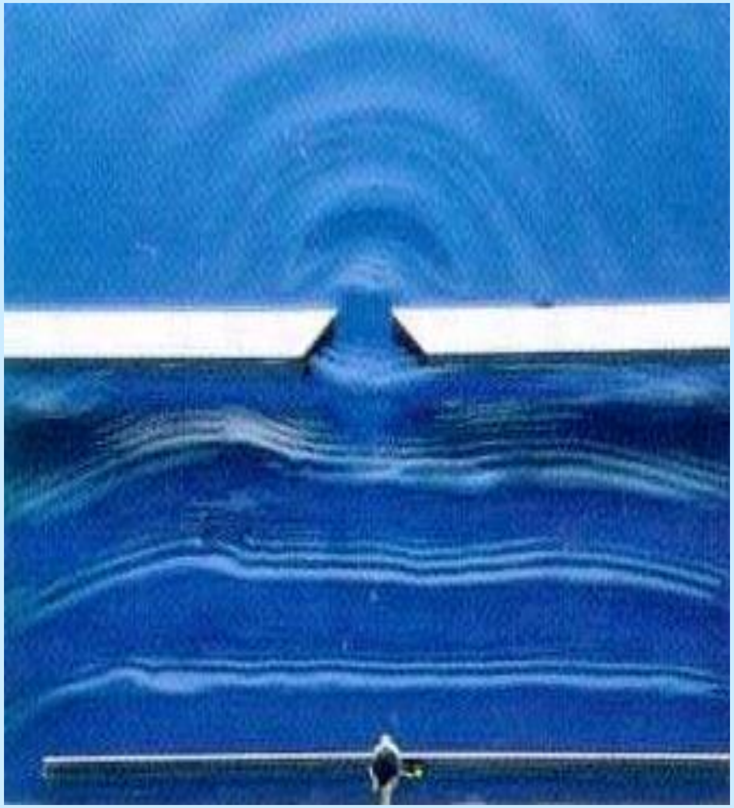
- 衍射是波动的直接证据之一
- 一切波动都具有衍射现象



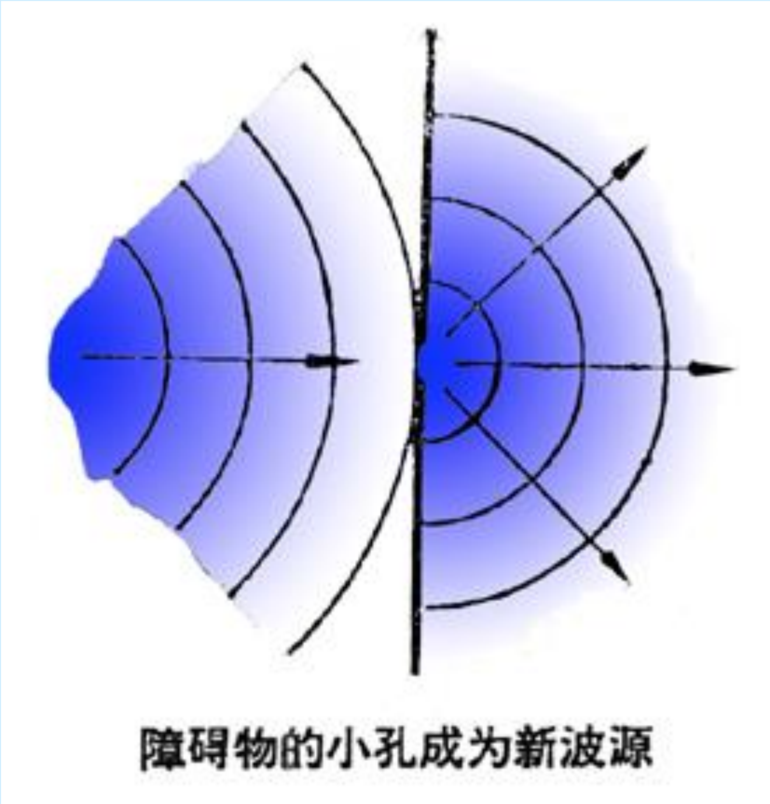


平面波经小孔衍射成球面波

衍射是否明显决定于障碍物（包括孔、缝）的线度与波长的比较。对一定波长的波： 线度小的障碍物衍射现象明显； 线度大的障碍物衍射现象不明显。



水波通过窄缝时的衍射



§4波的干涉

一. 波的独立传播原理与波的叠加原理

波的独立传播原理:

——几列波同时在一介质中传播，每列波都将独立地保持自己原有的特性传播，就象在各自的路程中，没有遇到其它波一样，这称为波传播的独立性。

波的叠加原理:

——在波相遇的区域内，任一点的合振动是各列波在该点分振动的矢量和。

- 强度较小时，相应的波动方程为线性时才成立；当强度甚大时，各列波之间相互影响明显，叠加原理失效。

二、波的干涉

1. 干涉现象

——满足一定条件的两列波相遇时，某些点的振动始终加强，某些点的振动始终减弱的现象。

水面两列波的干涉

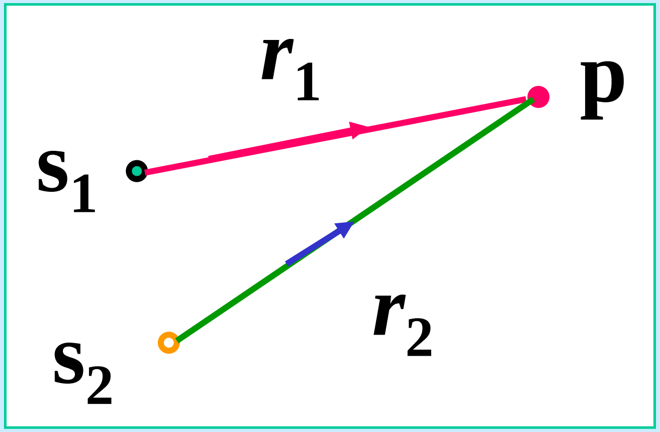
2. 相干条件

频率相同
振动方向相同
有恒定相位差

——满足相干条件的两列波称为**相干波**;

——满足相干条件的两波源称为**相干波源**。

3. 相干波的干涉



相干波源s_1 和 s_2 振动方程:

$$y_{10} = A_{10}\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y_{20} = A_{20}\cos(\omega t + \varphi_2)$$

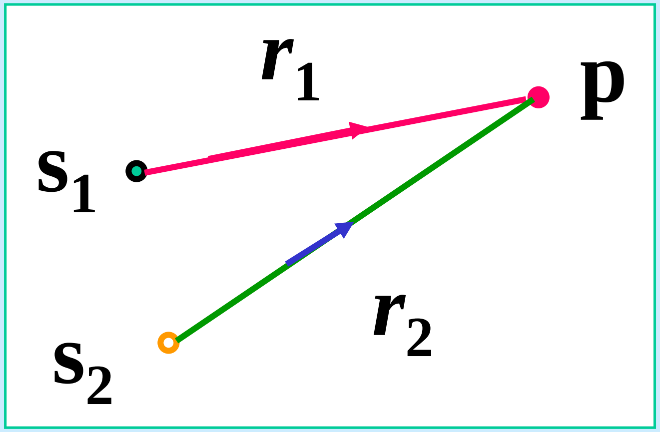
P 点振动方程

$$y_1 = A_1\cos\left(\omega t + \varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) \qquad y_2 = A_2\cos\left(\omega t + \varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right)$$

$$\therefore y = y_1 + y_2 = A\cos(\omega t + \varphi)$$

式中 $$\varphi = tg^{-1}\frac{A_1\sin\left(\varphi_1 - \frac{2\pi}{\lambda} r_1\right) + A_2\sin\left(\varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right)}{A_1\cos\left(\varphi_1 - \frac{2\pi_1}{\lambda} r_1\right) + A_2\cos\left(\varphi_2 - \frac{2\pi}{\lambda} r_2\right)}$$

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$



$$\Rightarrow I=I_1+I_2+2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi$$

相位差 $\Delta\varphi=\varphi_1-\varphi_2+\frac{2\pi}{\lambda}\left(r_2-r_1\right)$

讨论:

（1） $\Delta\varphi=\pm 2n\pi \quad n=0,1,2\ldots\ldots$

$A=A_1+A_2$ **相干波干涉加强**

（2） $\Delta\varphi=\pm\left(2n+1\right)\pi \quad n=0,1,2\ldots\ldots$

$A=\left|A_1-A_2\right|$ **相干波干涉减弱**

（3）若 $\varphi_2 = \varphi_1$ 则 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)$

波程差：$\Delta r = r_2 - r_1$ $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta r$

（i）$\Delta\varphi = \pm 2n\pi$ $\Delta r = \pm n\lambda$ $n=0,1,2\ldots\ldots$

$A = A_1 + A_2$ 相干波干涉加强

（ii）$\Delta\varphi = \pm(2n+1)\pi$

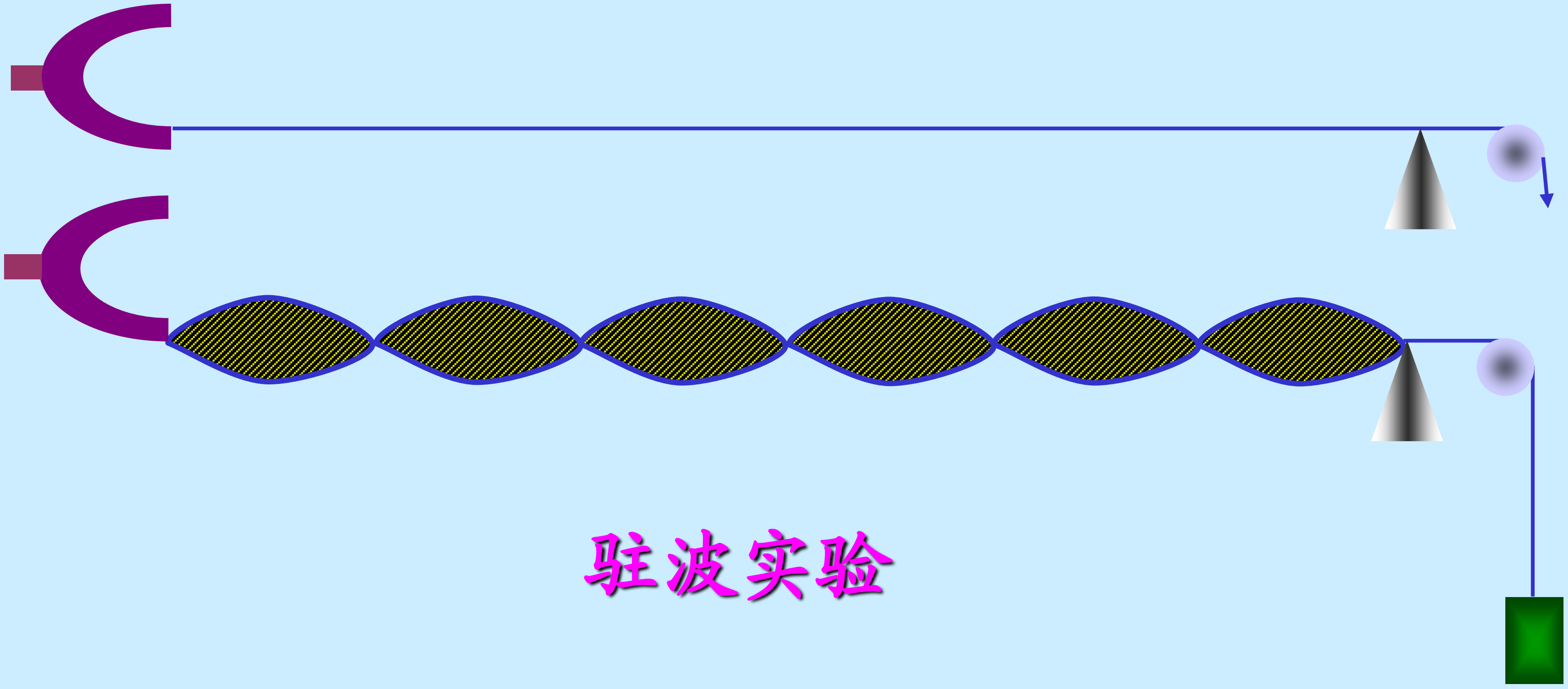
$\Delta r = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{2}$ $n=0,1,2\ldots\ldots$

$A = |A_1 - A_2|$ 相干波干涉减弱

三、驻波

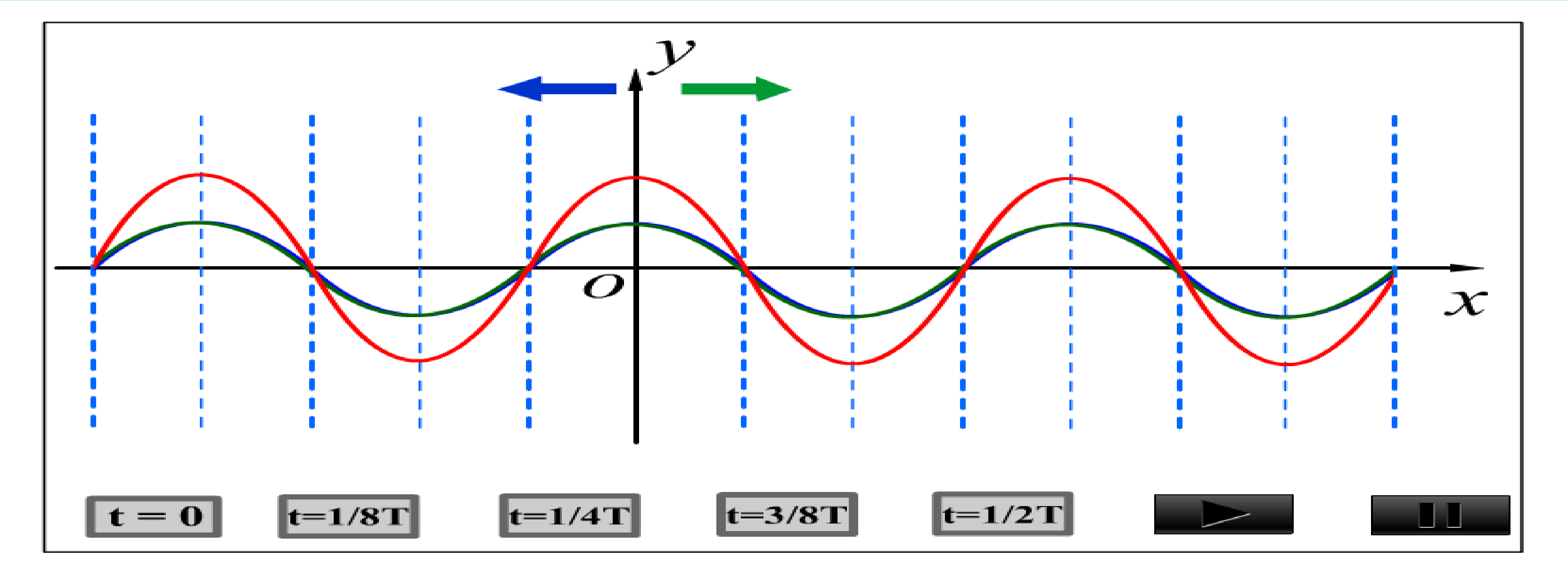
1、驻波的产生

两列相干波，振幅相同，传播方向相反（初位相为 0）叠加而成驻波



驻波实验

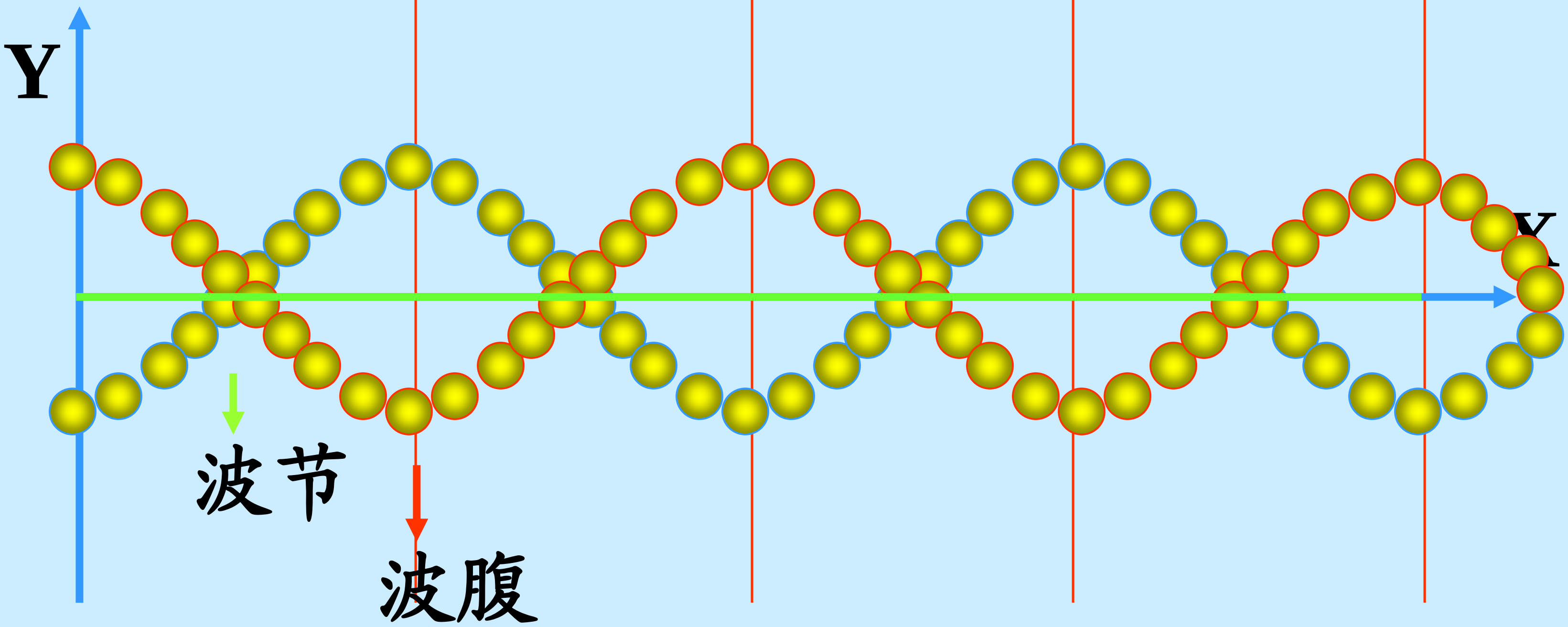
驻波



用波动曲线分析驻波的形成

2-14横驻波.exe

2-16纵驻波1.exe



由两列波叠加形成合成波（驻波），其特点为：

驻波波形固定，有波腹点和波节点

相邻的腹点与腹点，节点与节点间距离为 $\lambda/2$

相邻的节点与腹点间的距离为 $\lambda/4$

2.驻波波动方程

$$y_1 = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x\right) \quad y_2 = A\cos\left(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x\right)$$

$$y = y_1 + y_2 \qquad y = \left(2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right)\cos\omega t$$

振幅 $A' = \left|2A\cos\frac{2\pi}{\lambda}x\right|$

1）当 $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x = \pm 1 \quad A' = 2A$ 称为 波腹

$\because \frac{2\pi}{\lambda}x = \pm n\pi \quad \therefore$ 波腹位置 $\quad x_{腹} = \pm 2n\frac{\lambda}{4}$

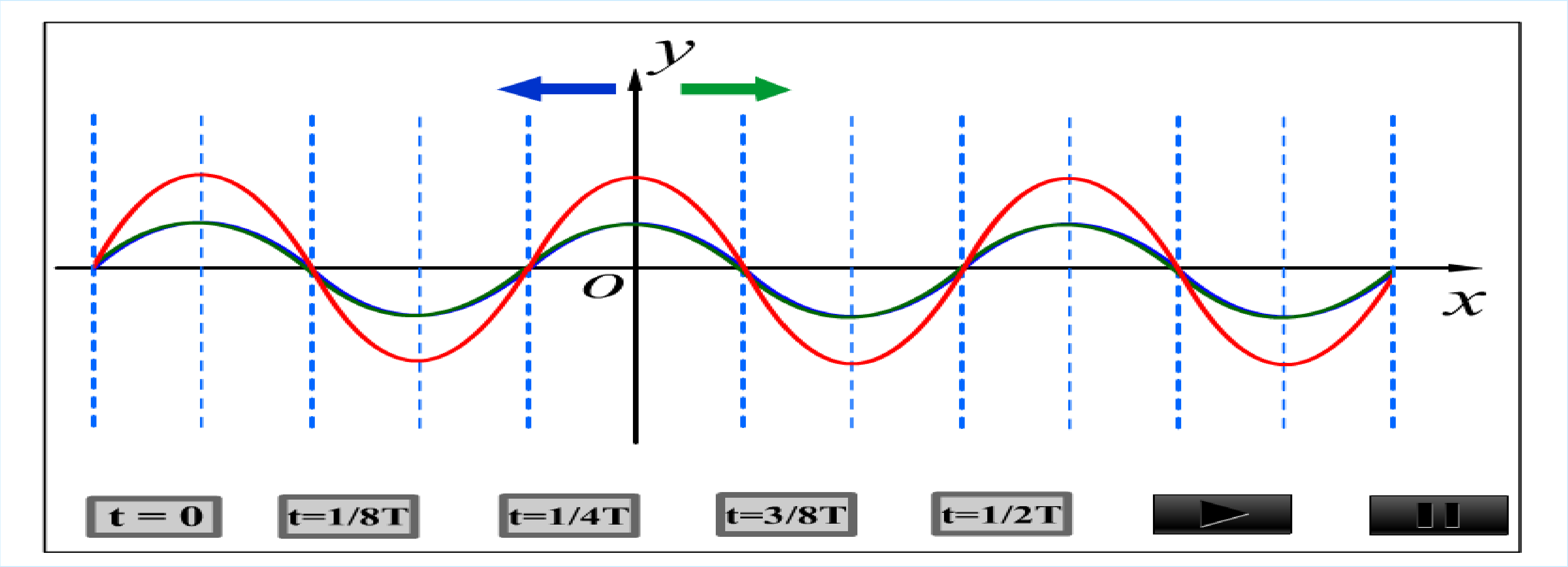
2）当 $\cos\frac{2\pi}{\lambda}x = 0 \quad A' = 0$ 称为 波节

$\because \frac{2\pi}{\lambda}x = \pm(2n+1)\frac{\pi}{2} \quad \therefore$ 波节位置 $\quad x_{节} = \pm(2n+1)\frac{\lambda}{4}$

说明:

✓ 驻波表现为分段振动，同段内各质点振动相位相同，相邻两段的质点振动相位相反。

✓ 驻波能量没有定向传播，能量只是在每一分段之内，进行着动能和势能的转变。



四、半波损失

1. 半波损失定义

——入射波在两种介质分界面处反射时，反射波相对入射波在分界面处有位相 π 的突变，相当于波程差了半个波长，把这种入射波在界面反射时发生的现象称为半波损失。

2. 波密介质与波疏介质

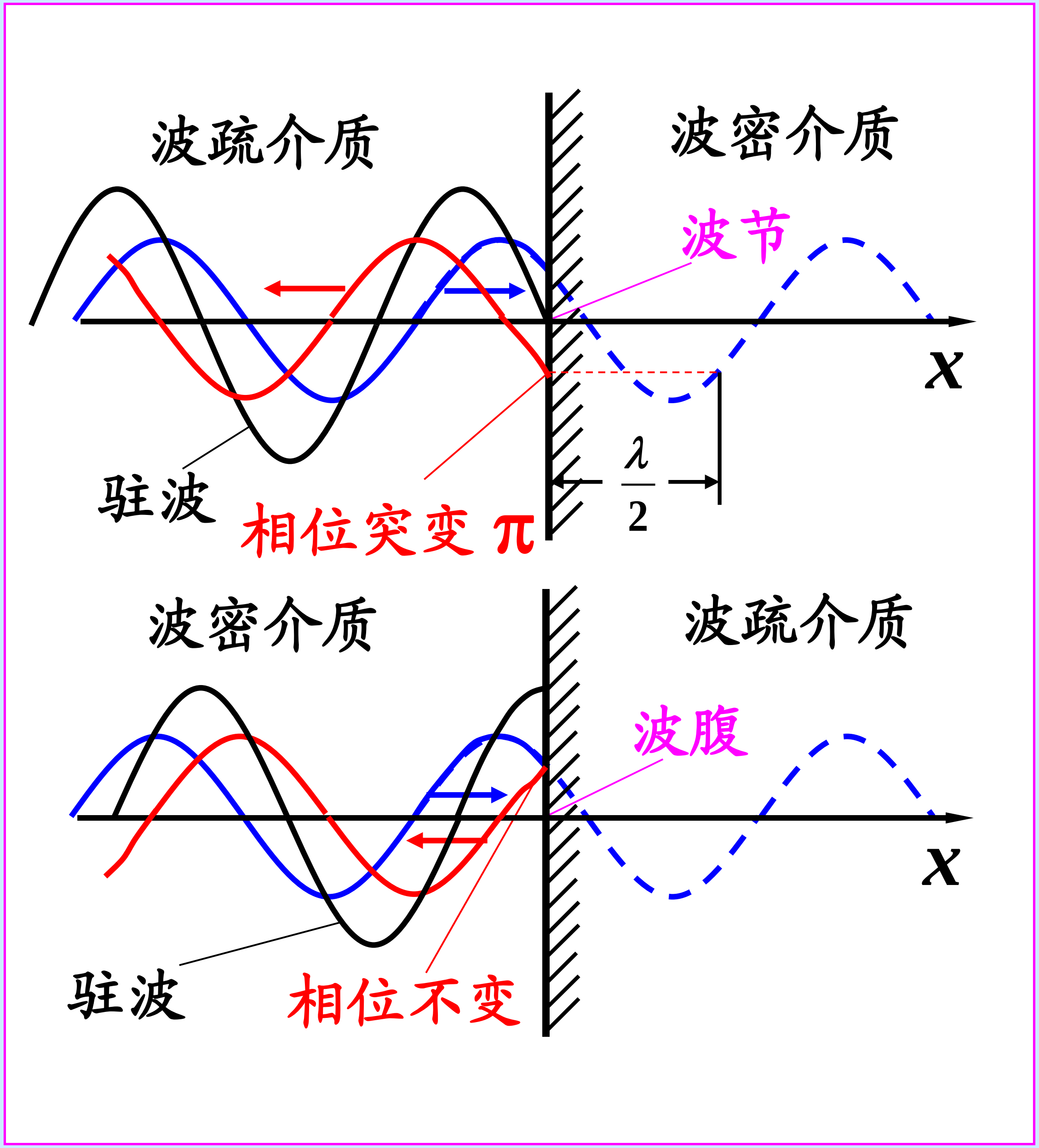
机械波：介质的密度与波速乘积（ρu）较大的介质被称为波密介质，较小的介质被称为波疏介质。

光（电磁波）：光传播速度较小的介质被称为光密介质，光传播速度较大的介质被称为光疏介质。

3. 产生半波损失的条件

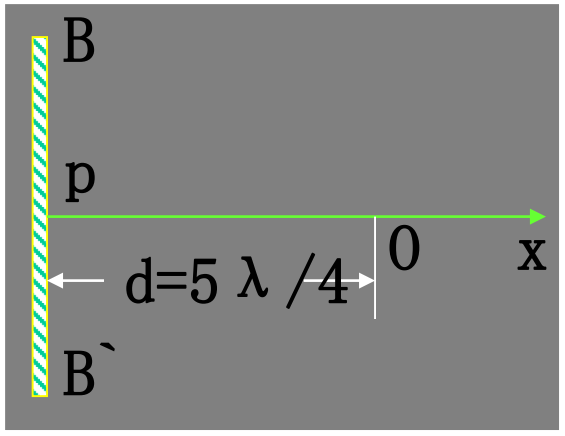
- 波从波疏介质垂直入射到波密介质界面反射时，有半波损失，此时在界面出现波节。

- 当波从波密介质入射到波疏介质界面反射时，无半波损失，此时在界面出现波腹。



例题：如图所示，波源位于0处，由波源向左右两边发出振幅为A，角频率为 ω，波速为u的简谐波。若波密介质的反射面BB` 与点 0 的距离为 d=5λ/4，试讨论合成波的性质。

解： 设 0 为坐标原点，向右为正方向。



自 0 点向右的波: $y_1(x,t)=A\cos(\omega t-\frac{2\pi}{\lambda}x)$

自 0 点向左的波: $y_2(x,t)=A\cos(\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}x)$

反射点 p 处入射波引起的振动:

$$y_{2p}(t)=A\cos\left[\omega t+\frac{2\pi}{\lambda}(-\frac{5}{4}\lambda)\right]=A\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$$

反射波在 p 点的振动（有半波损失）:

$$y_{3p}(t)=A\cos(\omega t+\pi-\frac{\pi}{2})=A\cos(\omega t+\frac{\pi}{2})$$

$$y_1(x,t) = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x) \qquad y_2(x,t) = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

$$y_{3p}(t) = A\cos(\omega t + \pi - \frac{\pi}{2}) = A\cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$$

反射波的波函数

$$y_3(x,t) = A\cos\left[\omega(t - \frac{x + 5\lambda/4}{u}) + \frac{\pi}{2}\right] = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x - \frac{2\pi}{\lambda}\frac{5\lambda}{4} + \frac{\pi}{2})$$

$$y_3(x,t) = A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$$

在 $-\frac{5\lambda}{4} \le x \le 0$, y_2与y_3叠加为驻波：

$$y = y_2 + y_3 = A\cos(\omega t + \frac{2\pi}{\lambda}) + A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda})$$

$$y = 2A\cos(\frac{2\pi}{\lambda}x)\cos\omega t$$

在 $x > 0$, y_1 和 y_3 合成为简谐波：

$$y(x,t) = y_1 + y_3 = 2A\cos(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x)$$