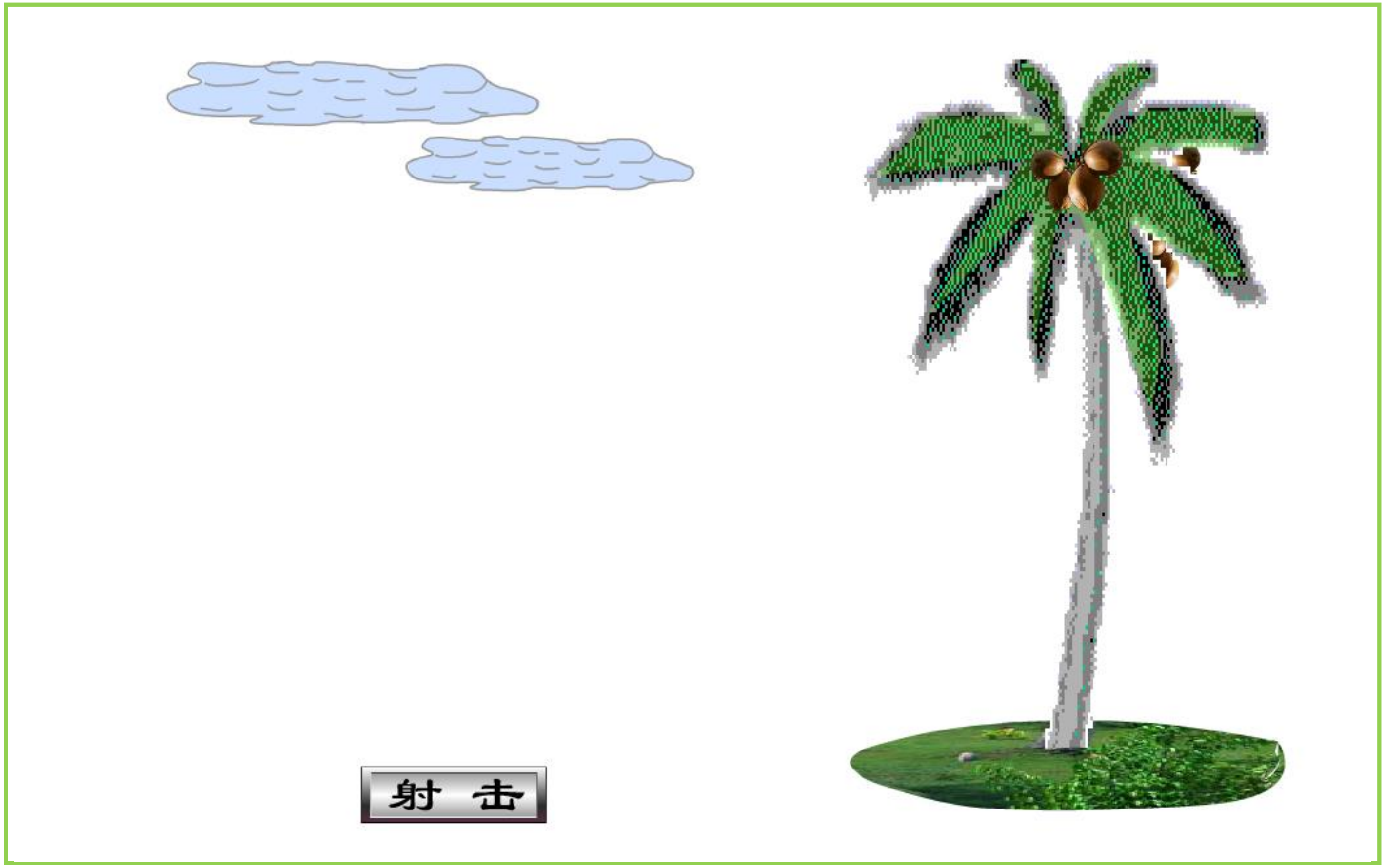
质点运动学两类基本问题

1. 由质点的运动方程可以求得质点在任一时刻的位矢、速度和加速度；

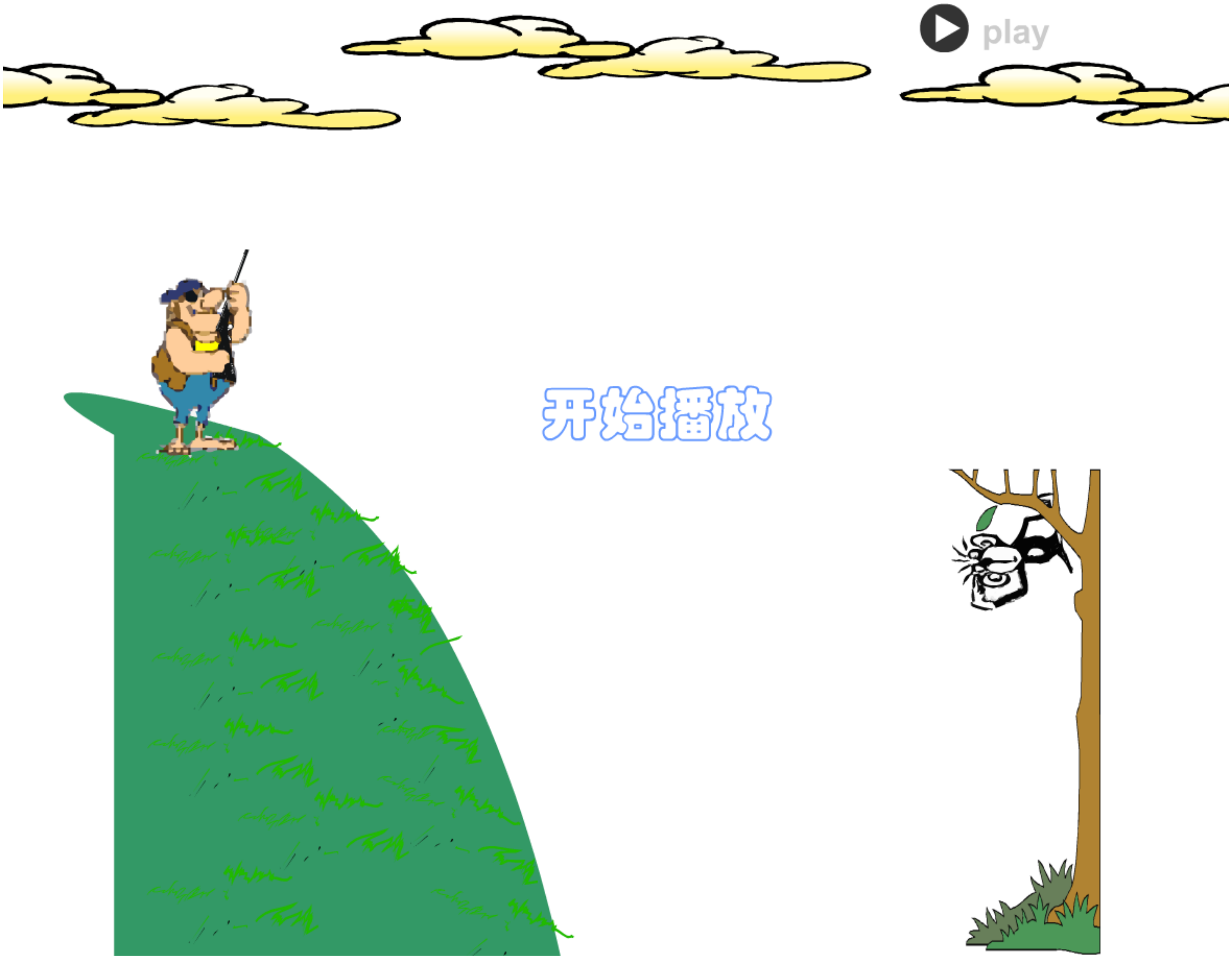
2. 已知质点的加速度以及初始条件（即：初始速度和初始位置），可求质点速度及其运动方程。

$$\vec{r}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{v}(t) \underset{\text{积分}}{\overset{\text{求导}}{\rightleftarrows}} \vec{a}(t)$$

2 运动的叠加——斜抛运动

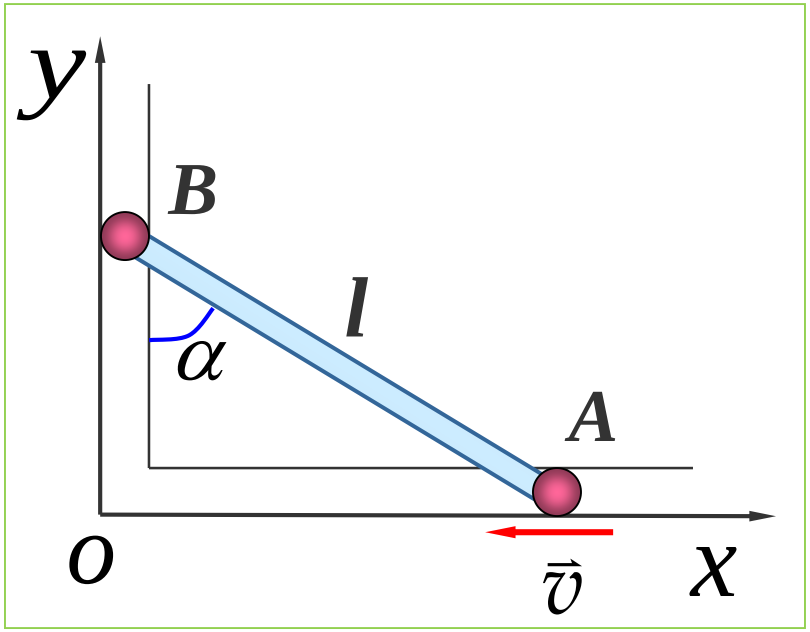


当子弹从枪口射出时，椰子刚好从树上由静止自由下落. 试说明为什么子弹总可以射中椰子？


play
开始播放

例2 如图所示，A、B 两物体由一长为 l 的刚性细杆相连，A、B 两物体可在光滑轨道上滑行。如物体A以恒定的速率v 向左滑行，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，物体B的速率为多少？

解 建立坐标系如图，



物体A 的速度

$$\vec{v}_A = v_x \vec{i} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{i} = -v\vec{i}$$

物体B 的速度

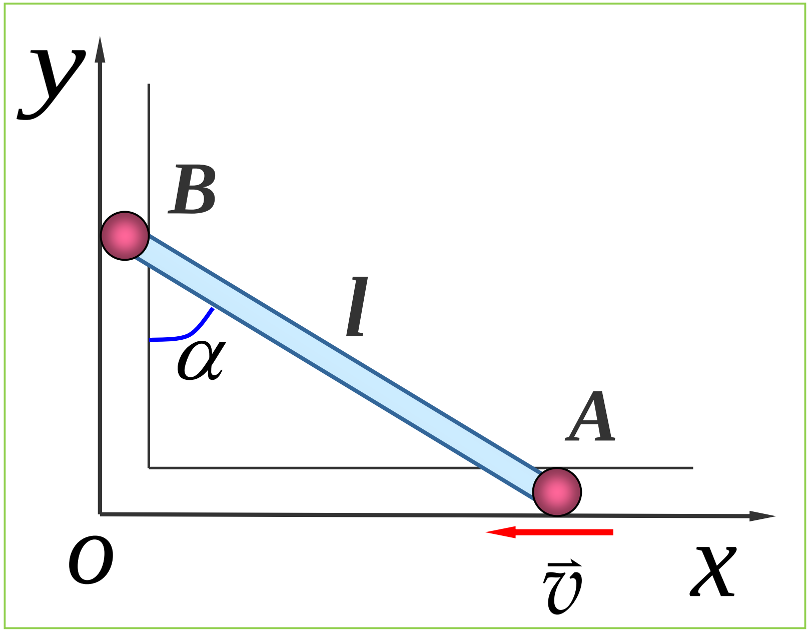
$$\vec{v}_B = v_y \vec{j} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

OAB为一直角三角形，刚性细杆的长度 l 为一常量

$$x^2 + y^2 = l^2$$

两边求导得

$$2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$$



即： $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

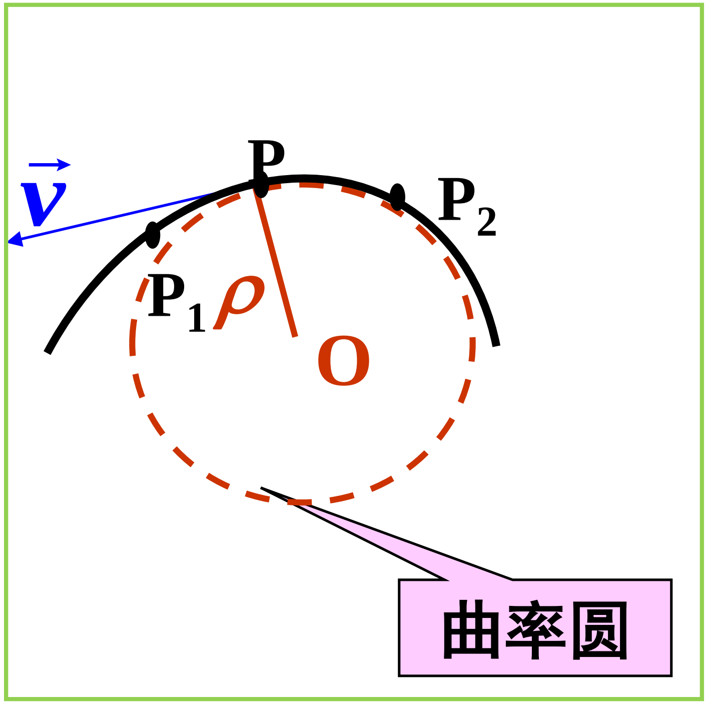
$$\vec{v}_B = -\frac{x}{y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{j}$$

$$\because \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v, \quad \tan\alpha = \frac{x}{y} \qquad \therefore \vec{v}_B = v\tan\alpha\,\vec{j}$$

$\vec{v}_B$ 沿 y 轴正向，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，$v_B = 1.73v$

§3 圆周运动(*circular motion*)

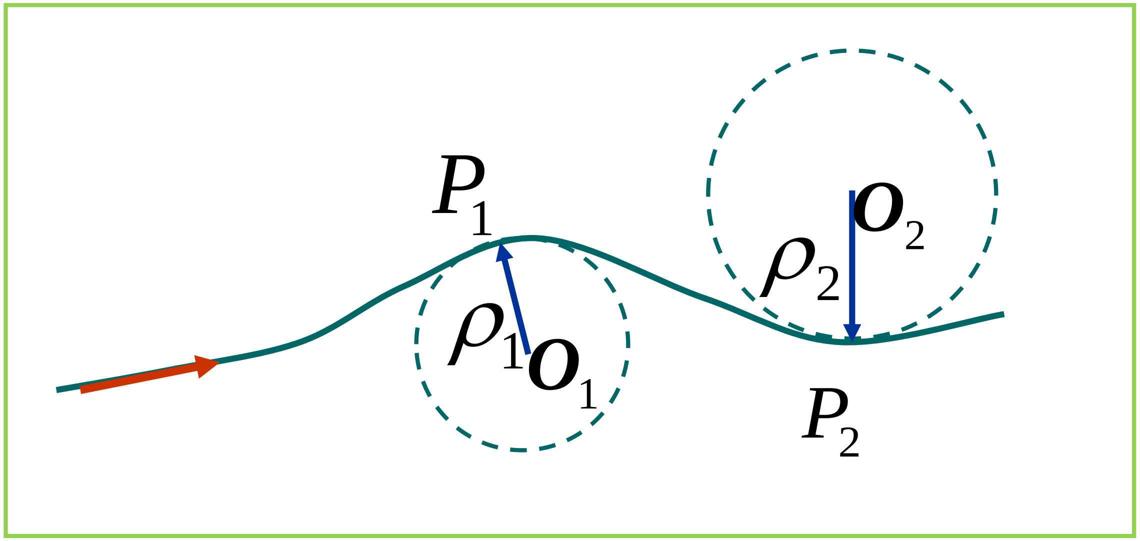
曲线运动轨迹上任一点 P都相应有一个曲率圆。（密切圆，密接圆）



当 P_1、P_2 无限靠近 P 时，该三点就决定了这曲率圆。

ρ ----**曲率半径，** $\rho = \dfrac{ds}{d\theta}$

O ----瞬时曲率中心

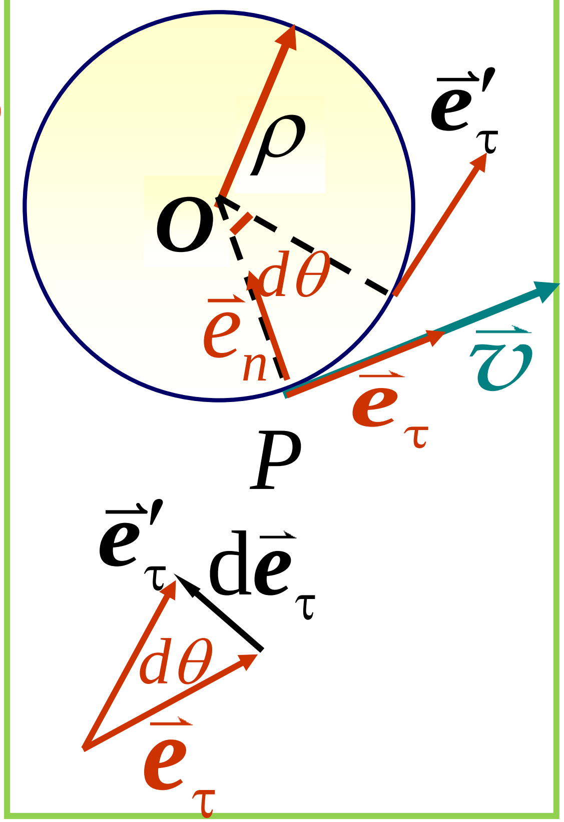


一、一般曲线运动的描述

在自然坐标系中 $\vec{v} = v\vec{e}_\tau$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(v\vec{e}_\tau\right) = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + v\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = ?$$



$$\because\ \mathrm{d}\vec{e}_\tau \perp \vec{e}_\tau$$

与 $\vec{e}_n$ 同向

$$\therefore \mathrm{d}\vec{e}_\tau = \left|\vec{e}_\tau\right|\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_n = \mathrm{d}\theta\,\vec{e}_n$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\tau}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{e}_n = \frac{\mathrm{d}s}{\rho\,\mathrm{d}t}\vec{e}_n = \frac{v}{\rho}\vec{e}_n$$

$$\therefore \vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau + \frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

$\vec{e}_\tau$:切向单位矢量

$\vec{e}_n$:法向单位矢量

结论：

$$\vec{a}=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau+\frac{v^2}{R}\vec{e}_n=a_\tau\vec{e}_\tau+a_n\vec{e}_n=\vec{a}_\tau+\vec{a}_n$$

$$a_\tau=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

反映 速度大小改变的加速度。

$\vec{a}_\tau$:切向加速度

$a_\tau>0\cdots$ $\vec{a}_\tau$与$\vec{v}$同向， 加速

$a_\tau<0\cdots$ $\vec{a}_\tau$与$\vec{v}$反向， 减速

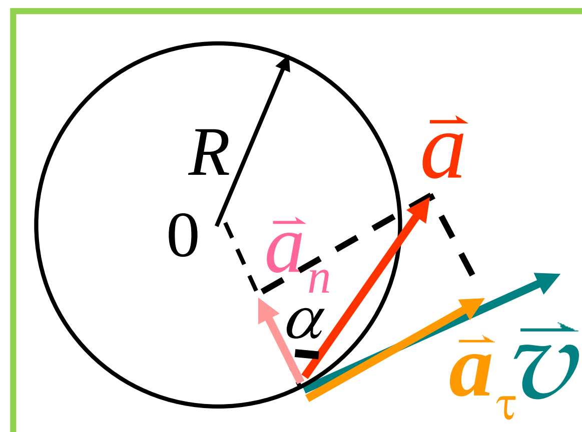
$$a_n=\frac{v^2}{R}$$

反映 速度方向改变的加速度。

$\vec{a}_n$:法向（向心）加速度

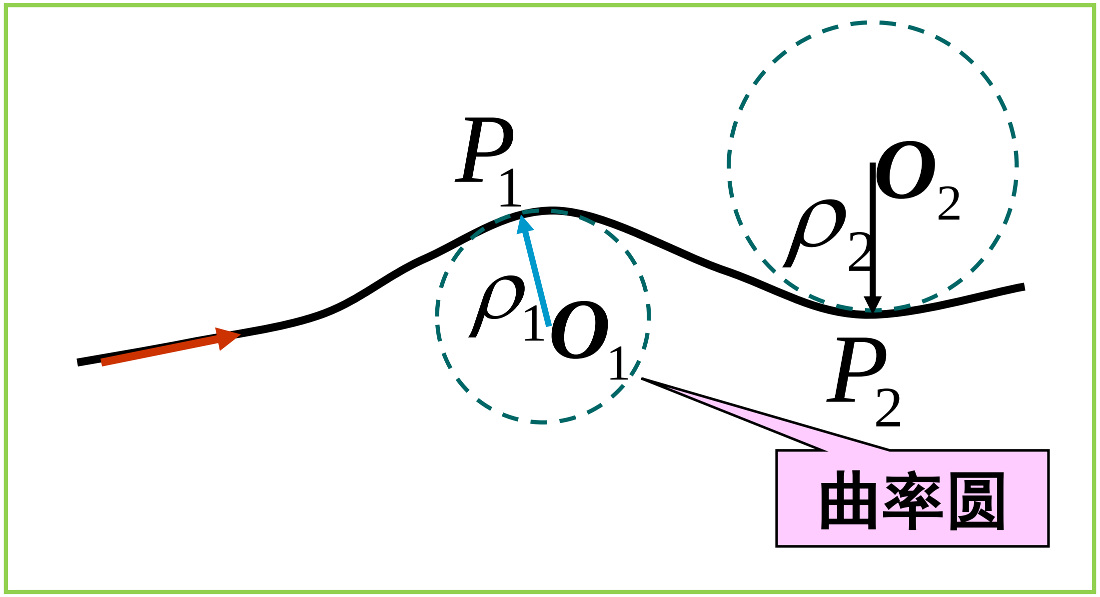
$$\begin{cases} a=\sqrt{a_\tau^{\ 2}+a_n^{\ 2}} \\ \alpha=\operatorname{ant}^{-1}\dfrac{a_\tau}{a_n} \end{cases}$$

----与法向的夹角



☞一般曲线运动

$$\vec{a}=a_\tau\vec{e}_\tau+a_n\vec{e}_n=\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{e}_\tau+\frac{v^2}{\rho}\vec{e}_n$$

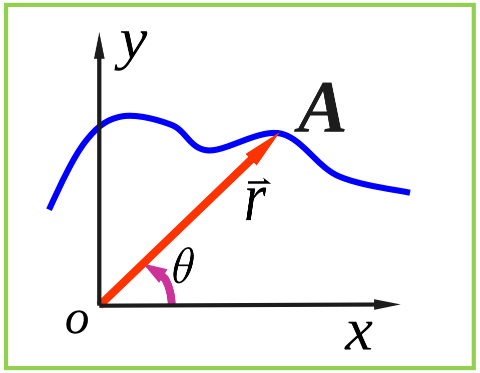


(1) 曲线运动的法向加速度指向瞬时曲率中心

(2) $\vec{a}$ 总是指向曲线凹的一侧

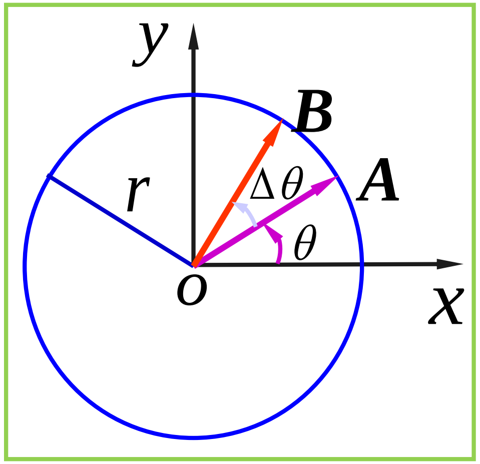
二、圆周运动的角速度和角加速度

极坐标下，圆周运动$r \equiv R$，包含质点运动信息的只有θ。 ——一个变量！



1 角位移(*angular displacement*)

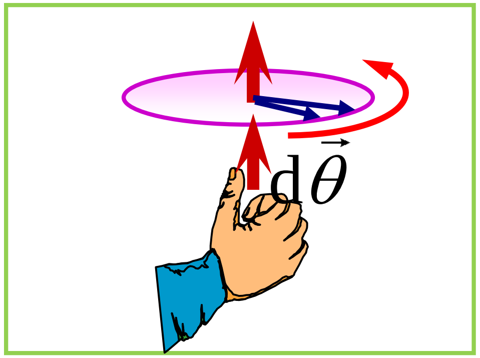
微小角位移矢量



角坐标（角位置）$\theta(t)$

角位移 $\Delta\theta = \theta(t_B) - \theta(t_A)$

当$\Delta t \to o$ 时，$d\vec{\theta}$ 为微小角位移矢量



单位：弧度（rad）

2　圆周运动的角速度(*angular velocity*)

平均角速度

$$\bar{\omega}=\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{\theta_B-\theta_A}{\Delta t}$$

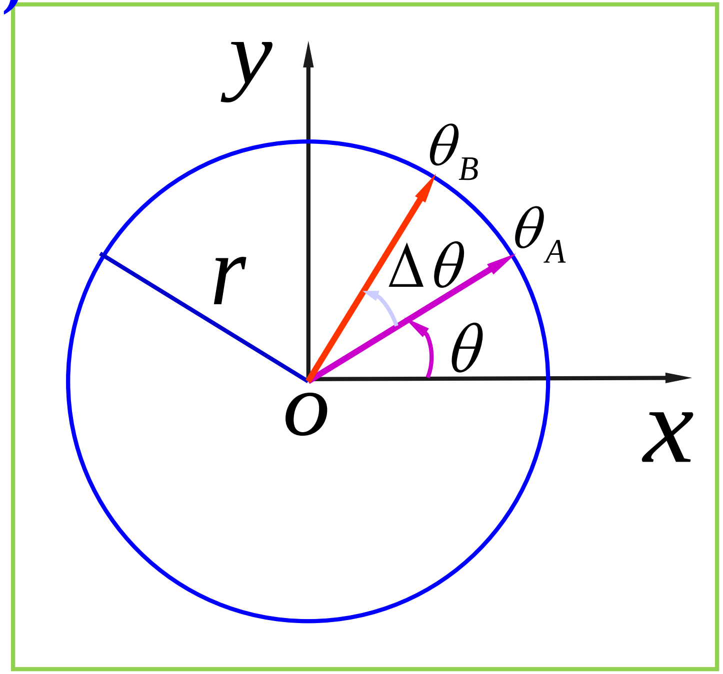
瞬时角速度大小（角速度）

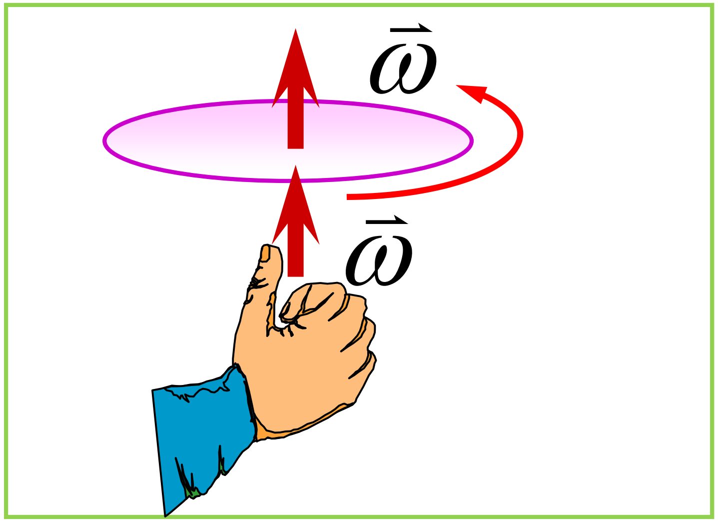
$$\omega=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}=\frac{d\theta}{dt}$$

角速度矢量 $\vec{\omega}$ 与微小角位移矢量 $d\vec{\theta}$ 同方向。

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\theta}}{dt}$$

单位：弧度/秒（rad·s^{-1}）





3 圆周运动的角加速度(*angular acceleration*)

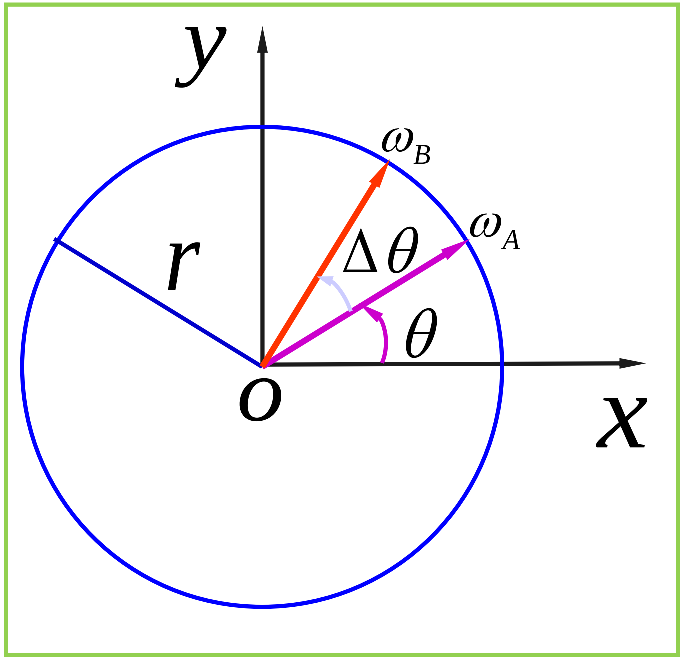
平均角加速度

$$\bar{\beta}=\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\omega_B-\omega_A}{\Delta t}$$

瞬时角加速度大小（角加速度）

$$\beta=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\omega}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$$

单位：弧度/秒^2（$\mathrm{rad\cdot s^{-2}}$）



角加速度矢量 $\vec{\beta}$ 的方向与角速度矢量的变化有关：当角速度增加时，$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\omega}$ 同方向；当角速度减小时，$\vec{\beta}$ 与 $\vec{\omega}$ 反方向。

$$\vec{\beta}=\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}$$

4 圆周运动的角量和线量的关系

$$\mathrm{d}s = AB = r\mathrm{d}\theta = |\mathrm{d}\vec{r}|$$

$$\mathrm{d}\vec{r} = \mathrm{d}\vec{\theta} \times \vec{r}$$

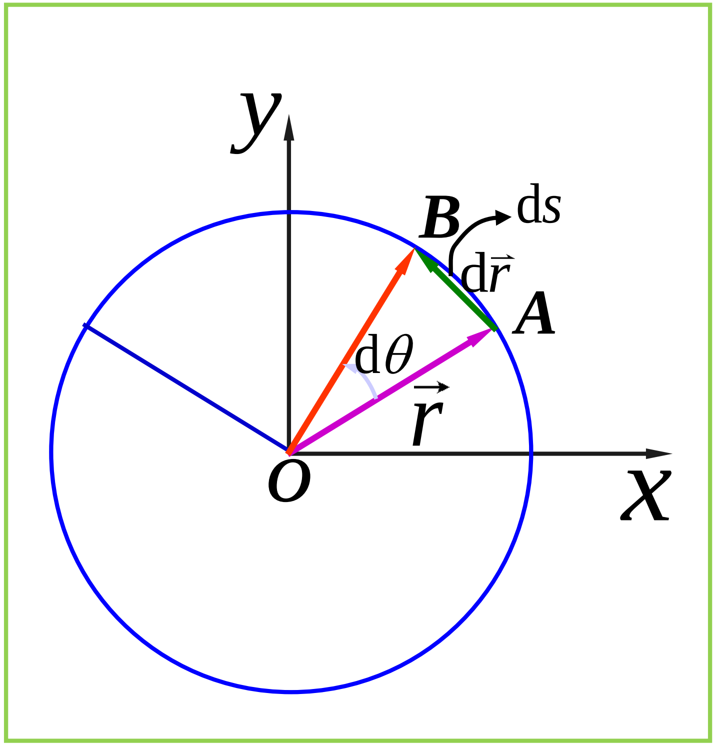
上式两侧除以 $\mathrm{d}t$ 有：

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

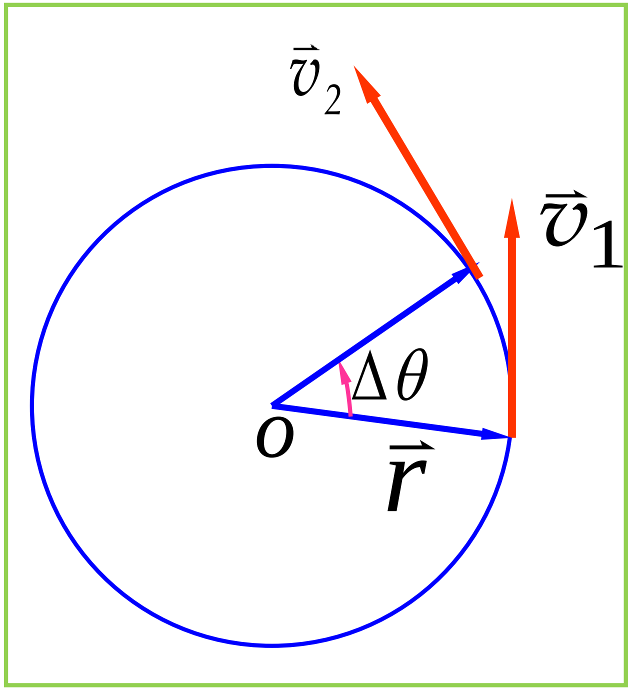
$$\because \quad \vec{\omega} \perp \vec{r}$$

$$\therefore \quad v = r\omega = v_\tau$$

v_τ 称为切向速度的大小。



三、圆周运动的加速度



1 匀速率圆周运动的加速度

质点作匀速率圆周运动时，$\omega = const.$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$= \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} + \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$$

$$= \vec{\omega}\times\frac{\left(\mathrm{d}\vec{\theta}\times\vec{r}\right)}{\mathrm{d}t} \quad = \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$$

$$= \vec{\omega}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{r}\right) - \vec{r}\left(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega}\right) \quad = -\omega^2\,\vec{r}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_n = -\omega^2\,\vec{r} = r\omega^2\left(-\vec{r}_0\right) = \frac{v^2}{r}\left(-\vec{r}_0\right)$$ ——称为法向加速度。

$\vec{r}_0 = \hat{r}$ 称为径向单位方向矢量 。

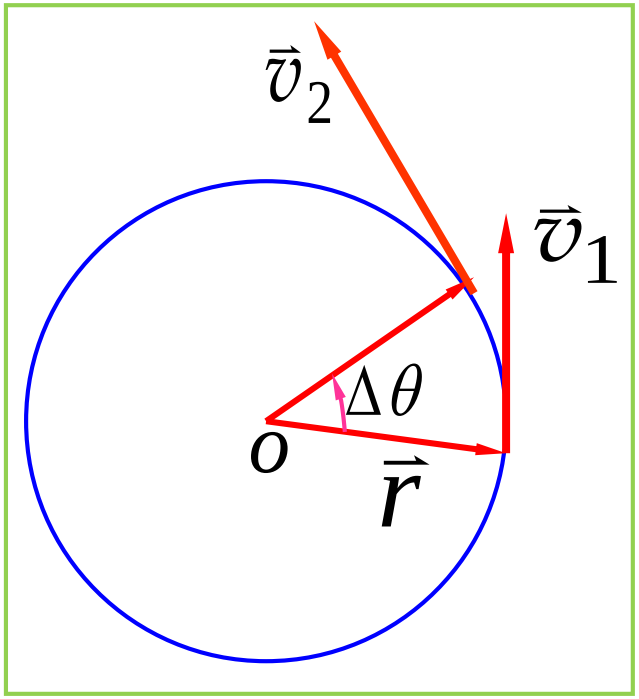
2 变速率圆周运动的加速度

质点作变速率圆周运动时，$\omega \neq const.$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{\omega}\times\vec{r}) = \vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r}$$

$$\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{a}_n = -\omega^2\,\vec{r} = r\omega^2\,(-\vec{r}_0) = \frac{v^2}{r}(-\vec{r}_0) = v\,\omega(-\vec{r}_0)$$

——法向加速度。



$$\frac{\mathrm{d}\vec{\omega}}{\mathrm{d}t}\times\vec{r} = \vec{\beta}\times\vec{r} = r\beta\vec{\tau}_0 = \vec{a}_\tau$$

$\vec{\tau}_0 = \hat{\tau}$ 称为切向单位方向矢量 。

$$\vec{a}_\tau = r\beta\vec{\tau}_0 = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0$$

——切向加速度。

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\vec{\tau}_0 + \frac{v^2}{r}(-\vec{r}_0) = r\beta\vec{\tau}_0 + r\omega^2(-\vec{r}_0)$$

切向加速度 （速度大小变化引起）

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = r\beta$$

法向加速度 （速度方向变化引起）

$$a_\mathrm{n} = v\omega = \omega^2 r = \frac{v^2}{r}$$

圆周运动加速度 $\vec{a} = a_\tau\vec{\tau}_0 + a_n(-\vec{r}_0)$

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_\mathrm{n}^2} = \sqrt{(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t})^2 + (\frac{v^2}{r})^2} \neq \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\vec{a} = a_\tau \vec{\tau}_0 + a_n(-\vec{r}_0)$$

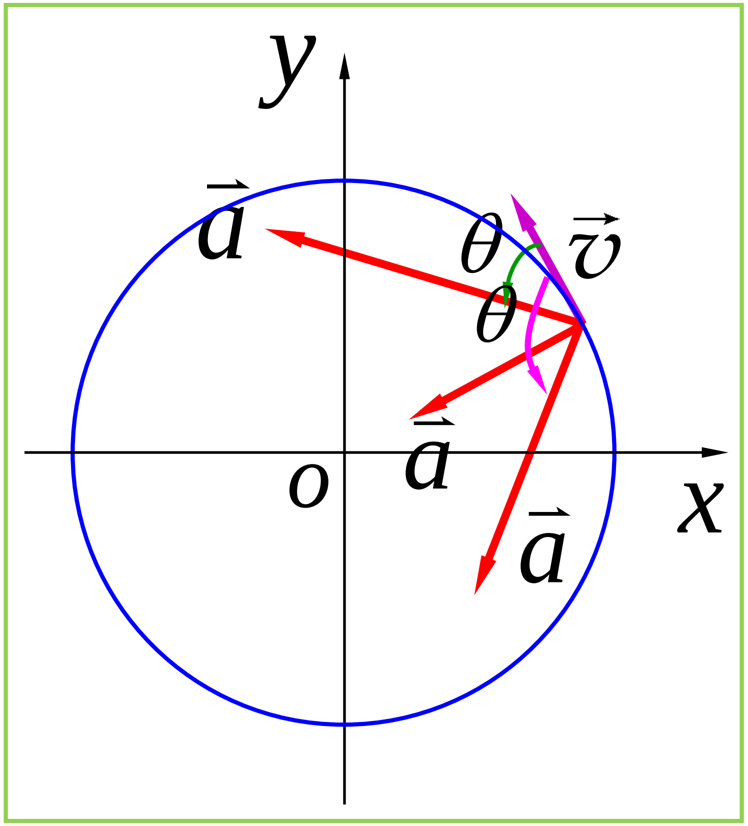
$$\theta = \tan^{-1}\frac{a_{\rm n}}{a_\tau}$$

$$\because a_{\rm n} > 0 \quad \therefore 0 < \theta < \pi$$

切向加速度

$$a_\tau = \frac{{\rm d}v}{{\rm d}t} = r\beta$$

$$a_\tau \begin{cases} >0,\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2},\ v\ \text{增大} \\ =0,\ \theta=\dfrac{\pi}{2},\ v\equiv\text{常量} \\ <0,\ \dfrac{\pi}{2}<\theta<\pi,\ v\ \text{减小} \end{cases}$$



说明：

1. 匀速率圆周运动：速率 υ 和角速度 ω 都为常量 。

$$a_\tau = 0 \qquad a = a_{\mathrm{n}} = r\omega^2 = \upsilon^2 / r$$

2. 匀变速率圆周运动

$$\beta = const.$$

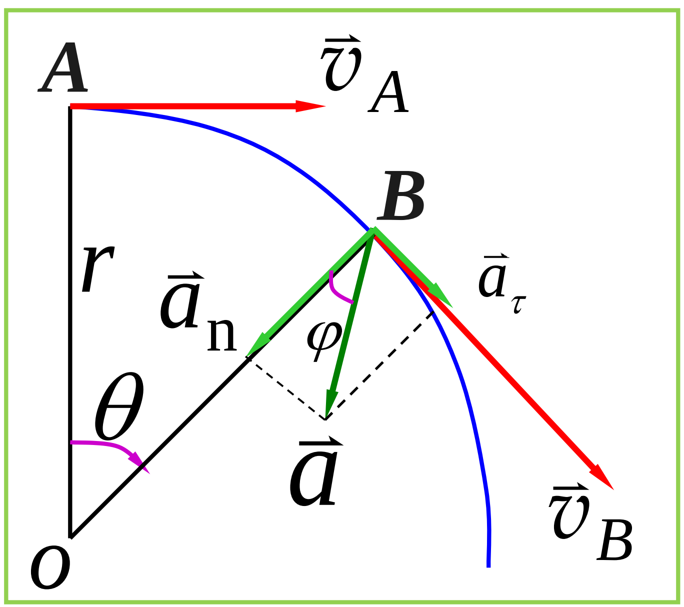
如 $t=0$ 时， $\theta=\theta_0, \omega=\omega_0$

$$\begin{cases} \omega=\omega_0+\beta t \\ \theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2 \\ \omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0) \end{cases}$$

匀变速直线运动

$$\begin{cases} \upsilon=\upsilon_0+at \\ x=x_0+\upsilon_0 t+\frac{1}{2}at^2 \\ x^2=x_0^2+2a(x-x_0) \end{cases}$$

例 如图一超音速歼击机在高空 A 时的水平速率为 1940 km/h，沿近似于圆弧的曲线俯冲到点 B，其速率为 2192 km/h，所经历的时间为 3s，设圆弧 $\widehat{AB}$ 的半径约为 3.5km，且飞机从A 到B 的俯冲过程可视为匀变速率圆周运动，若不计重力加速度的影响，求：(1) 飞机在点B 的加速度；(2)飞机由点A 到点B 所经历的路程 。



解（1）因飞机作匀变速率运动所以 a_τ 和 β 为常量。

$$a_\tau = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

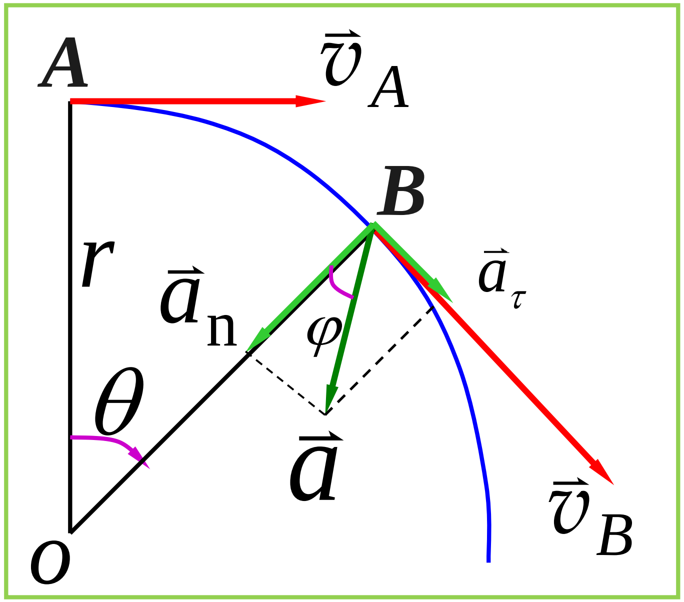
分离变量有 $\int_{v_A}^{v_B} \mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t$

已知： $v_A = 1940\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$ $v_B = 2192\mathrm{km} \cdot \mathrm{h}^{-1}$

$t = 3\mathrm{s}$ $\overset{\frown}{AB} = 3.5\mathrm{km}$

$$\int_{v_A}^{v_B} v\mathrm{d}v = \int_0^t a_\tau \mathrm{d}t \qquad a_\tau = \frac{v_B - v_A}{t} = 23.3\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$$

在点 B 的法向加速度 $a_\mathrm{n} = \dfrac{v_B^2}{r} = 106\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$



在点 B 的加速度

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = 109 m \cdot s^{-2}$$

$\vec{a}$ 与法向之间夹角 φ 为

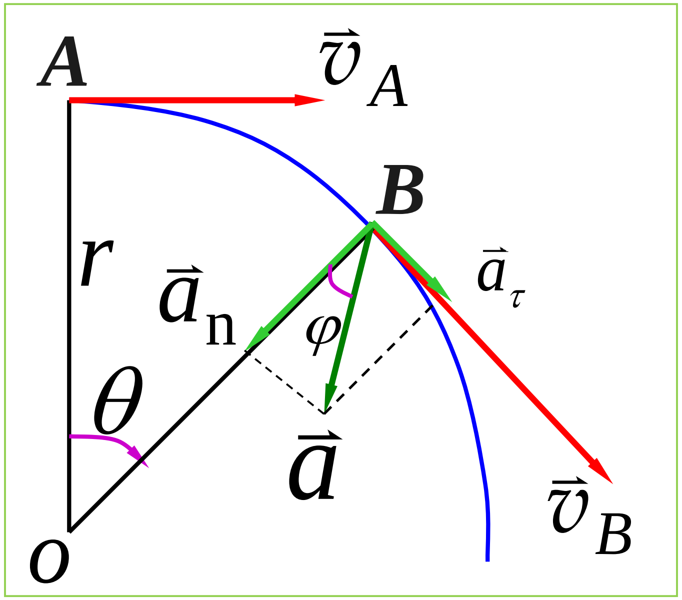
$$\varphi = \arctan \frac{a_\tau}{a_\mathrm{n}} = 12.4^\circ$$

已知：$v_A = 1940\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$　　$v_B = 2192\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$

$t = 3\text{s}$　　$\overset{\frown}{AB} = 3.5\text{km}$

（2）在时间 t 内矢径 $\vec{r}$ 所转过的角度 θ 为

$$\theta = \omega_A t + \frac{1}{2}\beta t^2$$



飞机经过的路程为

$$s = r\theta = v_A t + \frac{1}{2}a_\tau t^2$$

代入数据得

$$s = 1722\text{m}$$

思考：下列说法是否正确?

(1) 质点作圆周运动时的加速度指向圆心；

(2) 匀速圆周运动的加速度为常量；

(3) 只有法向加速度的运动一定是圆周运动；

(4) 只有切向加速度的运动一定是直线运动。

§4 相对运动

物体运动的轨迹依赖于观察者所处的参考系

在两个相对作直线运动的参考系中，时间和空间的测量是绝对的，与参考系无关。

——绝对时空观

质点在相对作匀速直线运动的两个坐标系中的位移

静系：S 系 $(Oxyz)$

动系：S'系$(O'x'y'z')$

位矢关系：

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{r}'$$

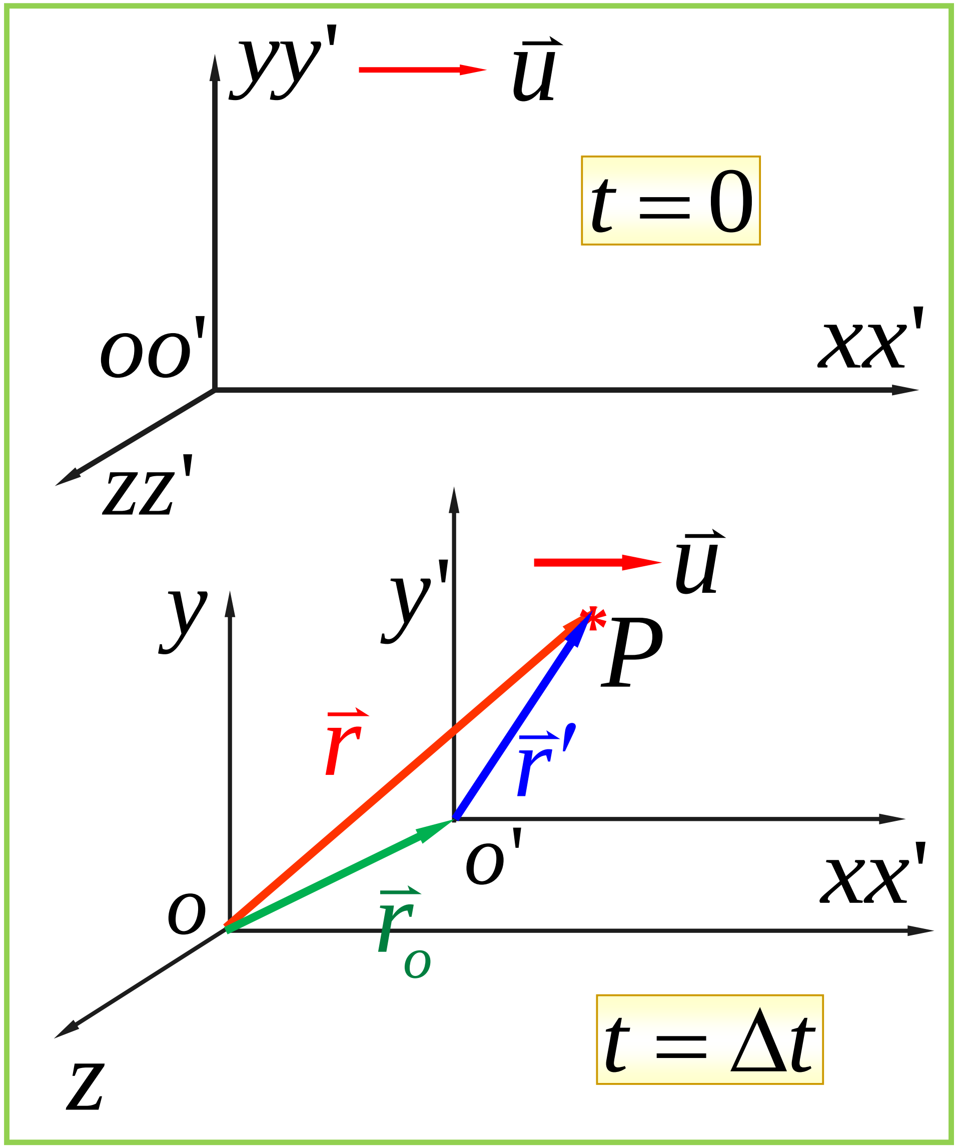
位移关系

$$\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}' + \Delta\vec{r}_0$$

速度变换

$$\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta\vec{r}'}{\Delta t} + \vec{u}$$

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$



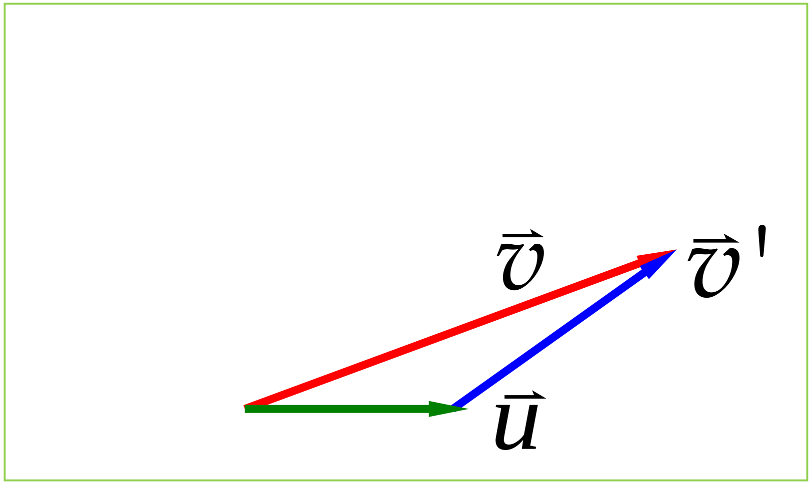
伽利略速度变换

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}}$$

绝对速度 $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t}$

相对速度 $\vec{v}' = \dfrac{\mathrm{d}\vec{r}'}{\mathrm{d}t}$

牵连速度 $\vec{u}$



注意 当 $\vec{u}$ 接近光速时，伽利略速度变换不成立！

加速度关系 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}'}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}$ 若 $\dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t} = 0$，则 $\vec{a} = \vec{a}'$。

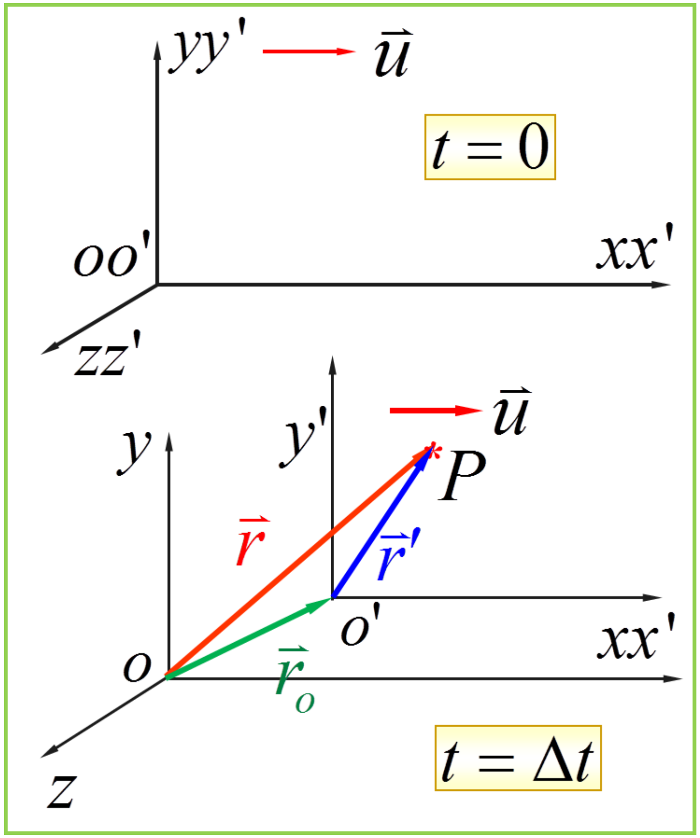
位移关系：$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{\boldsymbol{r}}_0}$

速度关系：$\boxed{\vec{v} = \vec{v}\,' + \vec{u}}$

加速度关系：$\boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}\,'}$

$$\vec{A}_{p\to S} = \vec{A}_{p\to S'} + \vec{A}_{S'\to S}$$

绝对运动 = 相对运动 + 牵连运动



几点说明：

1).以上结论是在绝对时空观下得出的：

只有假定"长度的测量不依赖于参考系"（空间的绝对性），才能给出位移关系式：

$$\boxed{\Delta\vec{r} = \Delta\vec{r}\,' + \Delta\vec{r}_0}$$

只有假定"时间的测量不依赖于参考系"（时间的绝对性），

才能进一步给出关系式：

$$\boxed{\vec{v} = \vec{v}' + \vec{u}} \quad 和 \quad \boxed{\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'}$$

绝对空间、绝对时间的概念
称为"绝对时空观"，或牛顿时空观，
它只适用于低速运动的物体。

2). $\vec{a} = \vec{a}_0 + \vec{a}'$ 只适用于相对运动为平动的情形。

质点运动学

质点的运动

运动的绝对性、相对性，选择参考系，建立坐标系，选择计时零点

描述运动的物理量

位矢：$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

位移：$\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$

速度：$\vec{v} = d\vec{r}/dt$

加速度：$\vec{a} = d\vec{v}/dt$

角位移：$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$

角速度：$\omega = d\theta/dt$

角加速度：$\beta = d\omega/dt$

线量与角量的关系

$v = R\omega \quad a_t = R\beta \quad a_n = R\omega^2$

注意：路程与位移的区别

描述运动的方法

解析法

运动函数：$\vec{r} = \vec{r}(t)$

直角坐标系中：

$\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$

速度：$\vec{v} = \vec{v}(t)$

加速度：$\vec{a} = \vec{a}(t)$

匀变速运动的基本公式

匀变速直线运动	匀变速圆周运动
$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{a}t$	$\omega=\omega_0+\beta t$
$\vec{r}=\vec{r}_0+\vec{v}_0 t+\frac{1}{2}\vec{a}t^2$	$\theta=\theta_0+\omega_0 t+\frac{1}{2}\beta t^2$
$v^2=v_0^2+2a(r-r_0)$	$\omega^2=\omega_0^2+2\beta(\theta-\theta_0)$