第三章 刚体的定轴转动

§1 刚体、刚体的运动

一、刚体(*rigid body*)

在外力作用下，形状和大小都不发生变化的物体。

说明：（1）理想化模型。

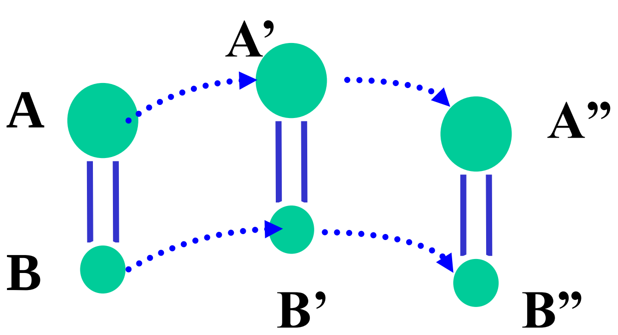
（2）质点组或质元组。

（3）具有相对性。

二、刚体的运动

刚体的运动包括平动、转动、滚动 。

1. 平动(*translation*) 刚体中所有点的运动轨迹都保持完全相同。



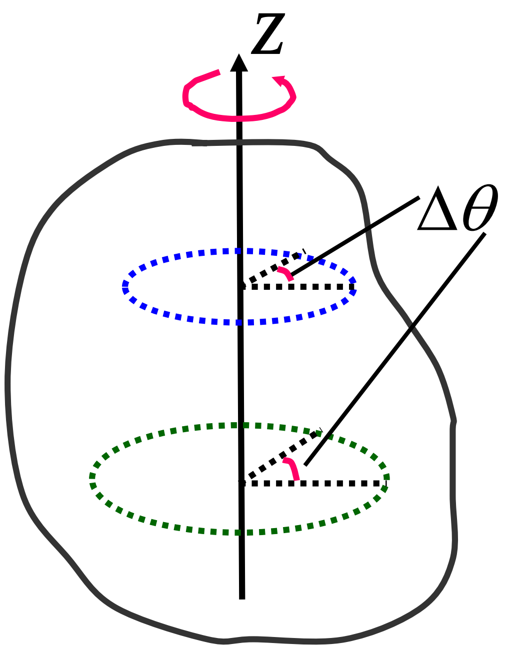
任意质元运动都代表整体运动。

2. 转动(*rolation*)

组成刚体的各质点都绕同一直线做圆周运动。

这条线为**转轴**。

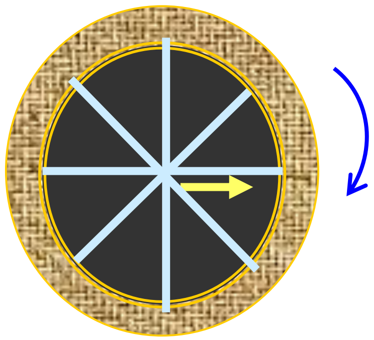
定轴转动(*fixed-axis rotation*)：若转轴相对于给定的参考系在空间固定不动，则称**刚体**做**定轴转动**。



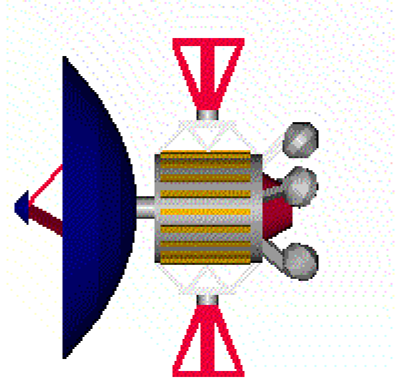
刚体的一般运动（如：运行的车轮），

可以描述为：随某点(基点)的平动 +

过该点的定轴转动。

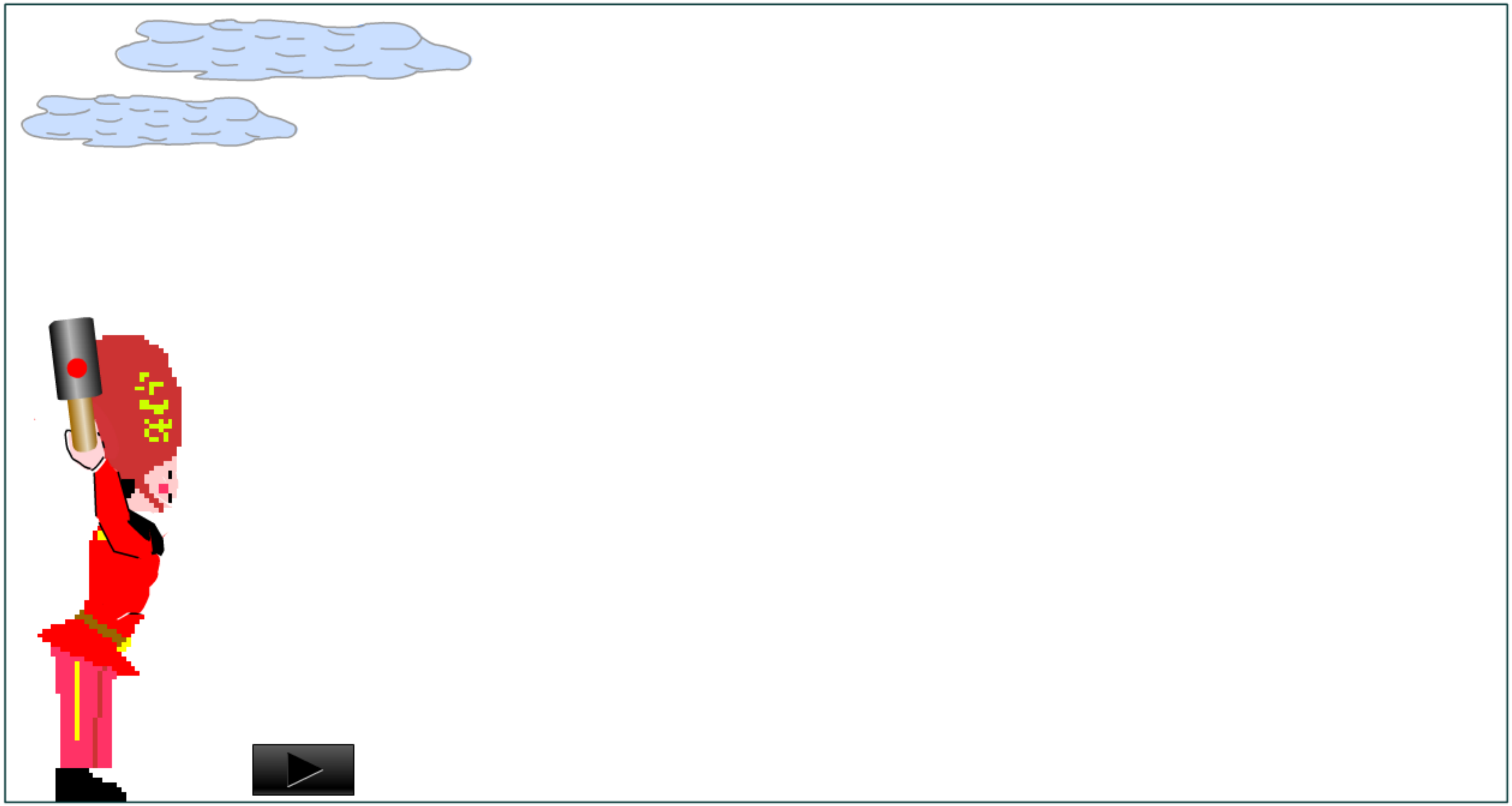


转动的例子——



3. 刚体的滚动

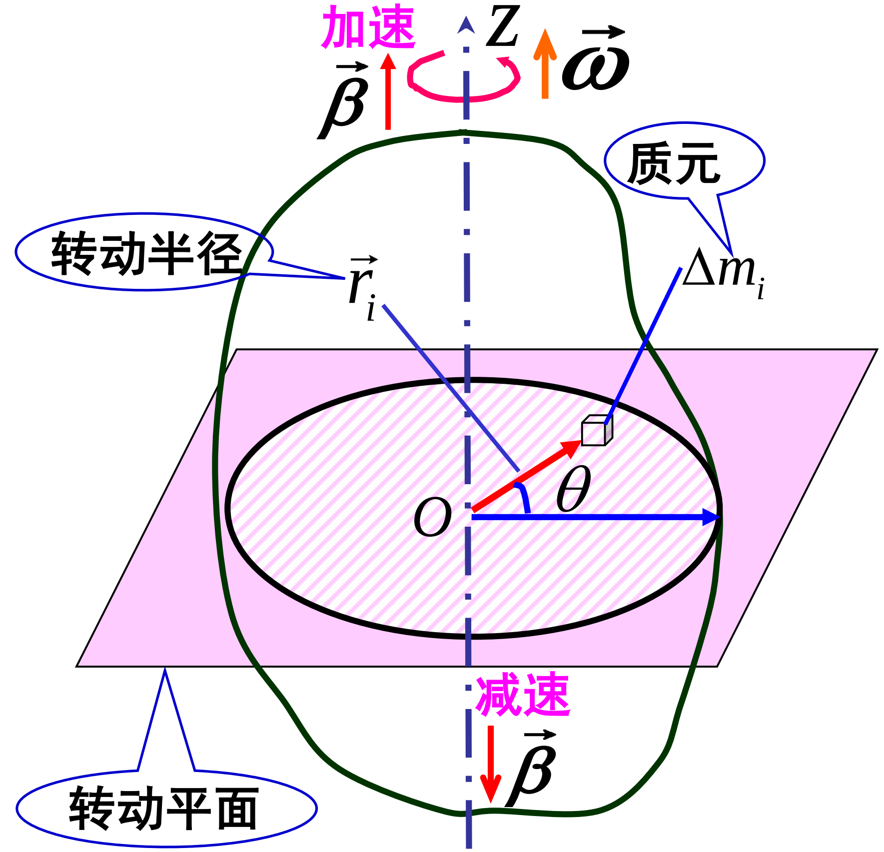
刚体的一般运动 = 质心的平动 + 绕质心的转动



§2 刚体定轴转动的描述

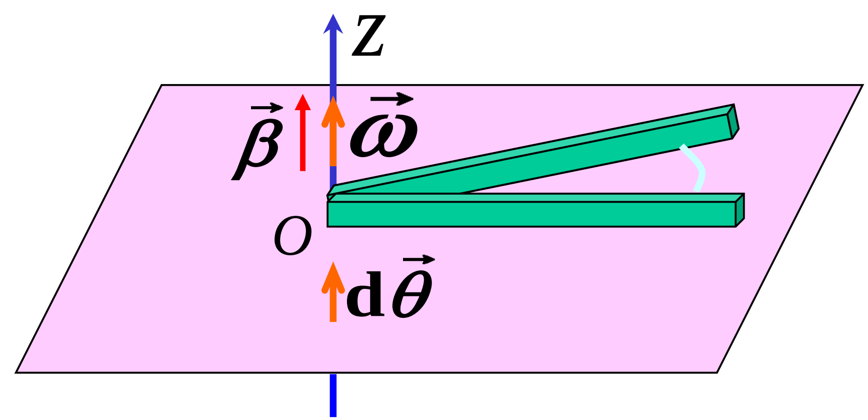
一、 定轴转动的描述

（1）研究刚体定轴转动的——转动平面、质元、转动半径。



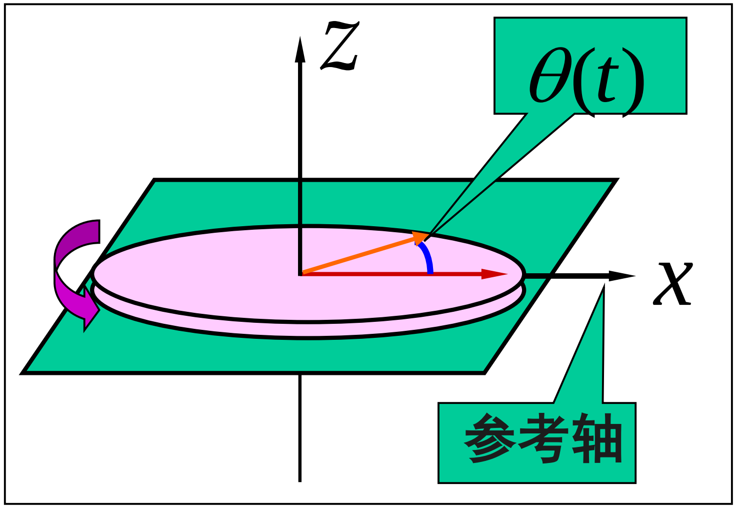
（2）刚体上所有质元都具有相同的角位移 $d\vec{\theta}$、相同的角速度 $\vec{\omega}$、相同的角加速 $\vec{\beta}$ 。

（3）运动描述仅需一维坐标 。



二、刚体转动的角速度和角加速度

1. 角位置 $\theta = \theta(t)$



2. 角位移的大小

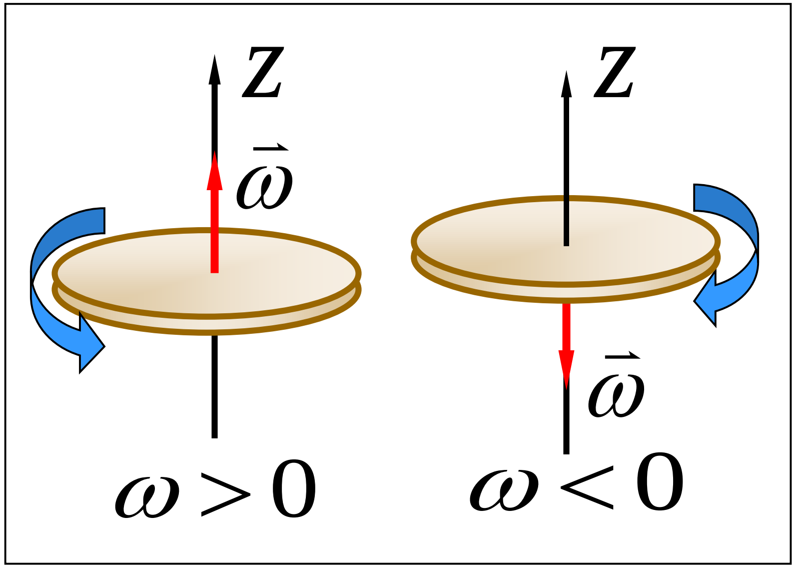
$$\Delta\theta = \theta(t+\Delta t) - \theta(t)$$

约定： $\vec{r}$ 沿逆时针方向转动 $\theta > 0$

$\vec{r}$ 沿顺时针方向转动 $\theta < 0$

3. 角速度的大小 $\omega = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$

刚体**定轴**转动（一维转动）的转动方向可以用角速度的正负来表示。



4. 角加速度的大小 $\beta = \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}$

5. 匀变速转动公式

当刚体绕定轴转动的角速度为恒量时，刚体做匀速转动 。

当刚体绕定轴转动的角加速度为恒量时，刚体做匀变速转动 。匀变速转动的角加速度为恒量。

刚体匀变速转动与质点匀变速直线运动公式对比

质点匀变速直线运动	刚体绕定轴作匀变速转动
$v = v_0 + at$	$\omega = \omega_0 + \beta t$
$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$	$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \beta t^2$
$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\beta(\theta - \theta_0)$

三、 刚体上某一质元的运动

$$d\vec{r}_i = d\vec{\theta} \times \vec{r}_i$$

$$\left|d\vec{r}_i\right| = ds_i = r_i d\theta$$

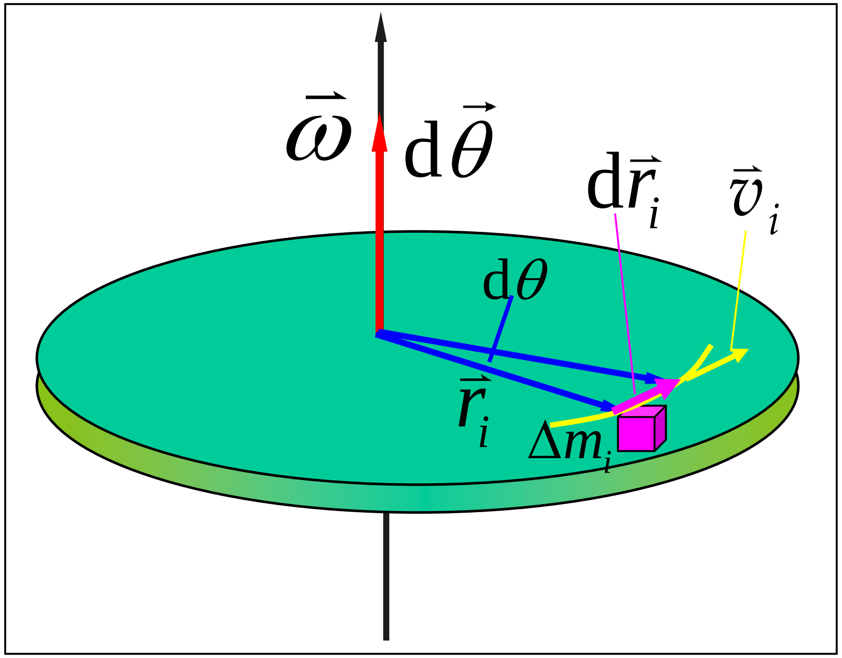
$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$$

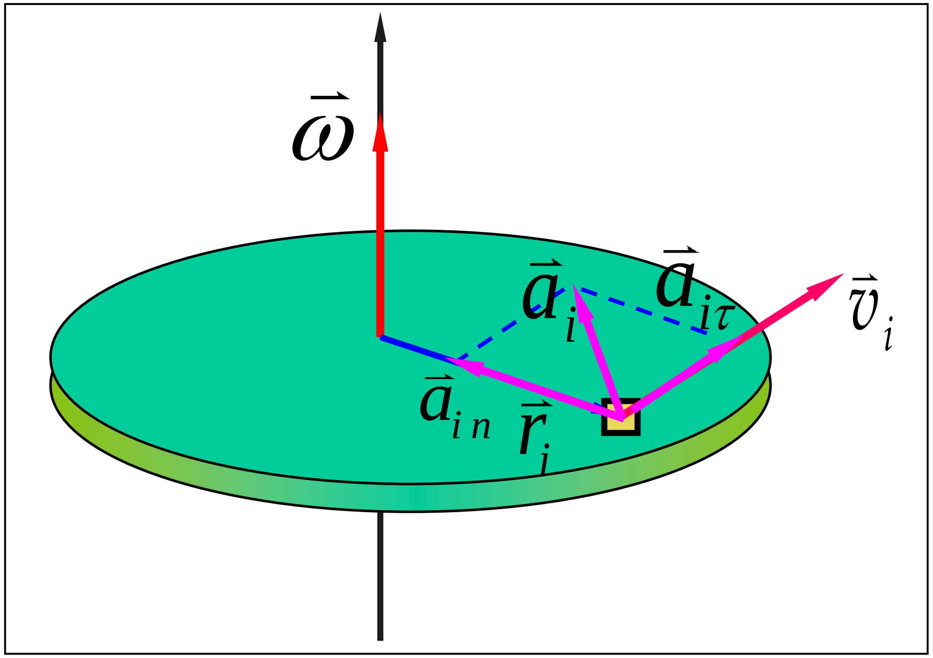
$$v_i = r_i \omega = v_{i\tau}$$

$$\vec{a}_i = a_{i\tau}\vec{\tau}_0 + a_{in}\left(-\vec{r}_0\right)$$

$$a_{i\tau} = \frac{dv_i}{dt} = r_i \beta$$

$$a_{in} = v_i\omega = \omega^2 r_i = \frac{v_i^2}{r_i}$$





§3 刚体定轴转动的转动定律

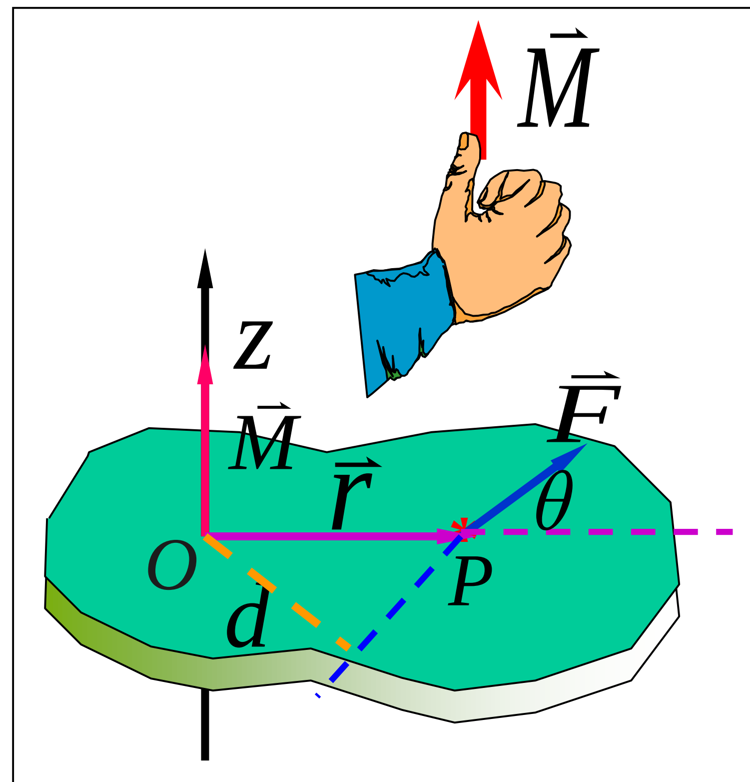
质点动力学问题 ⟸ $\vec{F}=m\vec{a}$

刚体动力学问题 ?

一、力矩(*moment of force*)

刚体绕 Oz 轴旋转，力 $\vec{F}$ 作用在刚体上点 P，且在转动平面内。

$\vec{r}$ 为由点O 到力的作用点 P 的径矢。



$\vec{F}$ 对转轴 Z 的力矩

$$M=Fr\sin\theta=Fd$$

$$d=r\sin\theta:\text{力臂}$$

$$\vec{M}=\vec{r}\times\vec{F}$$

讨论：

（1）若力 $\vec{F}$ 不在转动平面内，

$$\vec{F} = \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{//}$$

其中 $\vec{F}_{\perp}$ 对转轴的力矩为零，

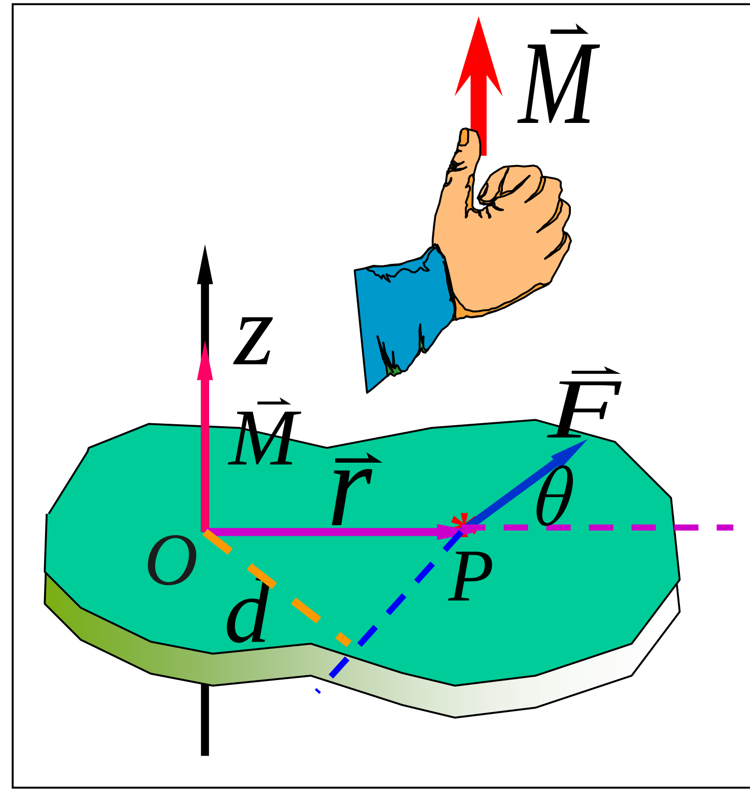
故 $\vec{F}$ 对转轴的力矩为

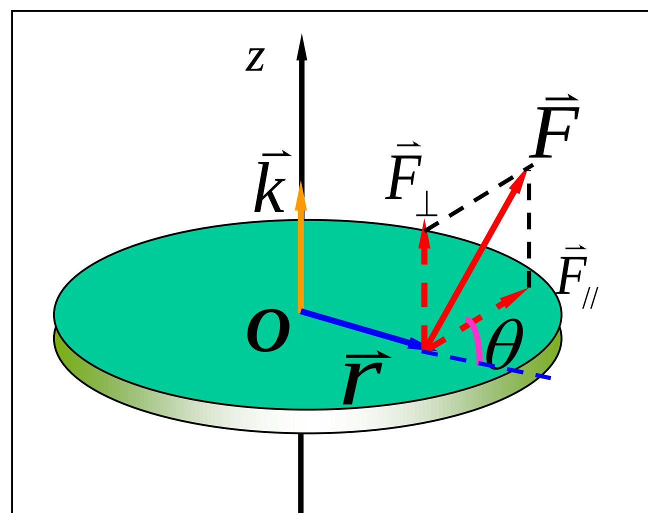
$$\vec{M}_z = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M_z = rF_{//}\sin\theta$$

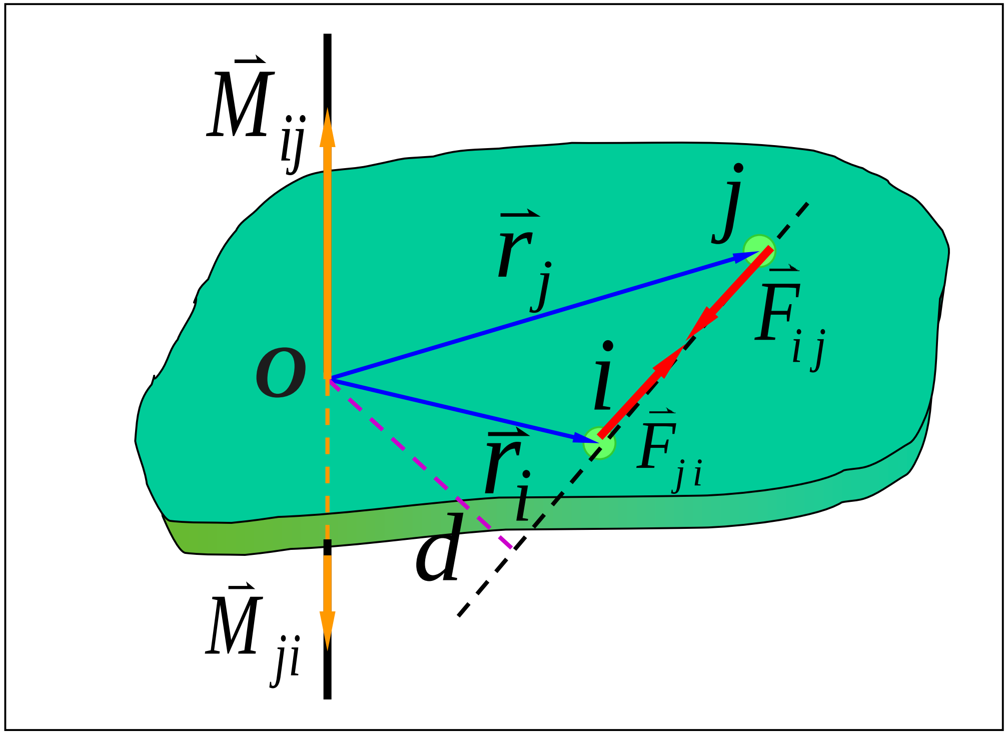
（2）合力矩等于各分力矩的矢量和。

$$\vec{M} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2 + \vec{M}_3 + \cdots$$





（3）刚体内作用力和反作用力的力矩互相抵消。



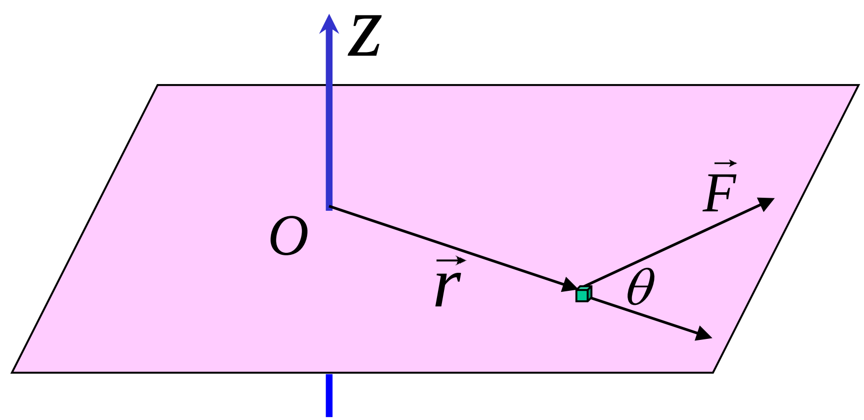
$$\vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}$$

刚体内质点间的内力对转轴的合力矩为零，即合内力矩为零。

（4）对于质点

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$M = |\vec{r}||\vec{F}|\sin\theta$$



二、转动定律

设 $\vec{F}_i$ 和 $\vec{f}_i$ 分别为作用于质元 Δm_i 上的外力和内力在转动平面内的分量。

根据牛顿第二定律：

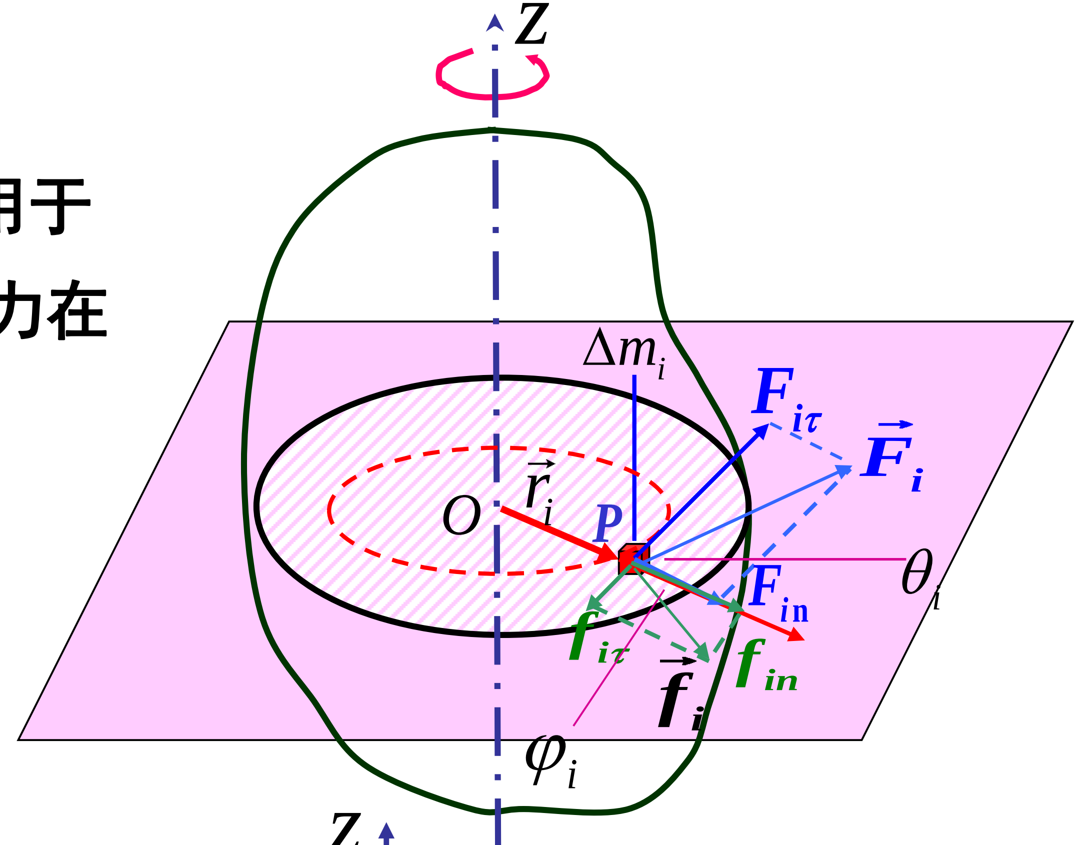
$$\vec{F}_i + \vec{f}_i = \Delta m_i \vec{a}_i$$

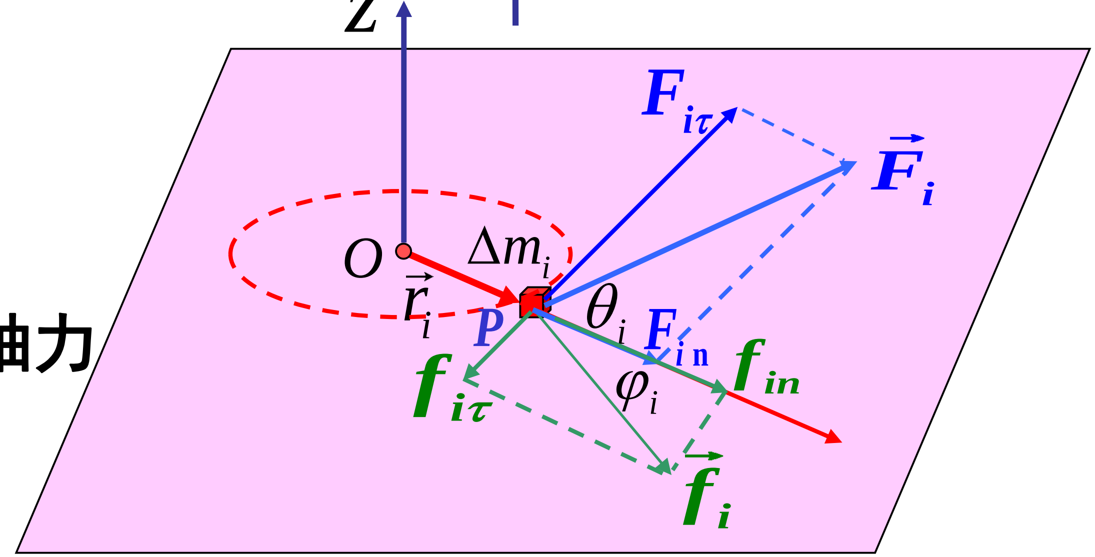
自然坐标系下的分量式：

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i a_{i\tau}$$

$$F_{in} + f_{in} = \Delta m_i a_{in}$$

法向分量 $\vec{F}_{in}$ 和 $\vec{f}_{in}$ 对转轴力矩为零。

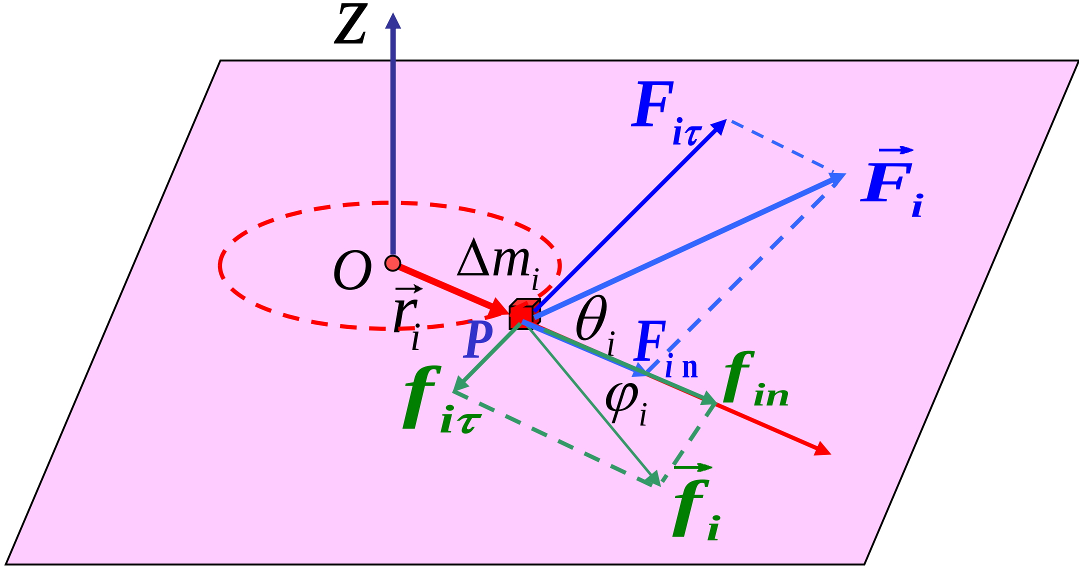




自然坐标系下的分量式：

$$F_{i\tau} + f_{i\tau} = \Delta m_i a_{i\tau}$$

$$F_{in} + f_{in} = \Delta m_i a_{in}$$



切向分量式两端同乘 r_i ，

$$(F_{i\tau} + f_{i\tau})r_i = \Delta m_i r_i a_{i\tau}$$

$$= \Delta m_i r_i^2 \beta$$

$i = 1, 2, 3, \cdots\cdots$ 直至取遍整个刚体。

$$\sum_i F_{i\tau} r_i + \sum_i f_{i\tau} r_i = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$$

作用于刚体内每一质元上的内力矩的矢量和为零，即

$$\sum_i f_{i\tau} r_i = 0$$

外力矩的矢量和 $M = \sum_i F_{i\tau} r_i$ 则 $M = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$

$$M = (\sum_i \Delta m_i r_i^2)\beta$$

定义：刚体的转动惯量(*moment of interia*) $J = \sum_i \Delta m_i r_i^2$

则有：$M = J\beta$ 即：$\boxed{\vec{M} = J\vec{\beta}}$

所有的外力对z 轴的力矩的代数和

刚体对 z 轴的转动惯量和角加速度

刚体定轴转动的转动定律：刚体定轴转动的角加速度与它所受的合外力矩成正比，与刚体的转动惯量成反比。

1. $\vec{M} = J\vec{\beta}$ 与 $\vec{F} = m\vec{a}$ 地位相当，m反映质点的平动惯性，J反映刚体的转动惯性。

2. 合外力矩、转动惯量和角加速度均**相对于同一转轴**。

3. 对定轴转动，力矩和角加速度只有两个方向，可用<u>正负号表示方向</u>。

三、转动惯量

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2$$

- 物理意义：刚体转动惯性的量度。

- 对于质量离散分布刚体的转动惯量

$$J=\sum_i \Delta m_i r_i^2=\Delta m_1 r_1^2+\Delta m_2 r_2^2+\cdots\cdots$$

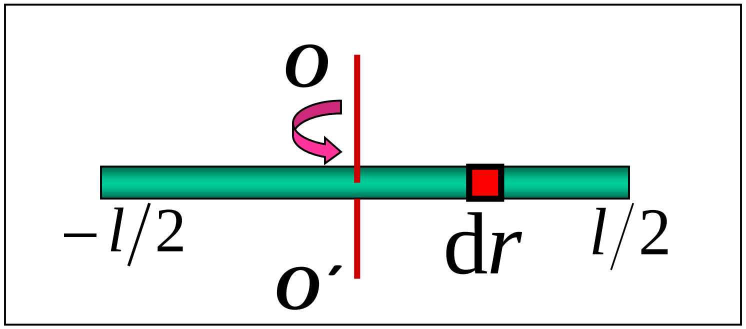
- 质量连续分布刚体的转动惯量

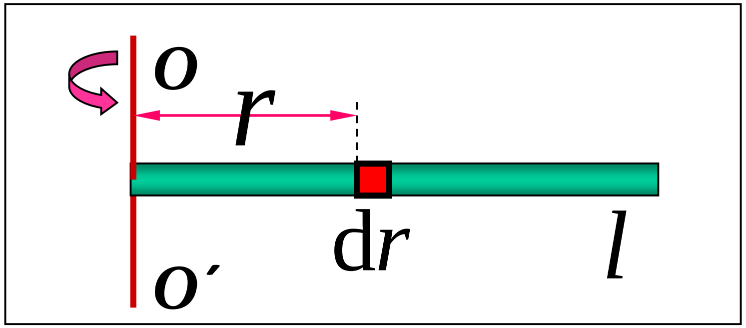
$$\boxed{J=\lim_{\Delta m_i\to 0}\sum_i \Delta m_i r_i^2=\int r^2 dm}$$

$\mathrm{d}m$ ：质量的微元

- 对质量线分布的刚体：$\mathrm{d}m=\lambda \mathrm{d}l$　λ 为质量线密度
- 对质量面分布的刚体：$\mathrm{d}m=\sigma \mathrm{d}S$　σ 为质量面密度
- 对质量体分布的刚体：$\mathrm{d}m=\rho \mathrm{d}V$　ρ 为质量体密度

例1 一质量为 m 、长为 l 的均匀细长棒，求通过棒中心并与棒垂直的轴的转动惯量。





解 设棒的线密度为 λ，取一距离转轴 OO' 为 r 处的质量元

$$\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}r$$

$$\mathrm{d}J = r^2 \mathrm{d}m = \lambda r^2 \mathrm{d}r$$

$$J = \lambda \int_{-l/2}^{l/2} r^2 \mathrm{d}r = \frac{1}{12} \lambda l^3$$

$$= \frac{1}{12} m l^2$$

**如转轴过端点垂直于棒

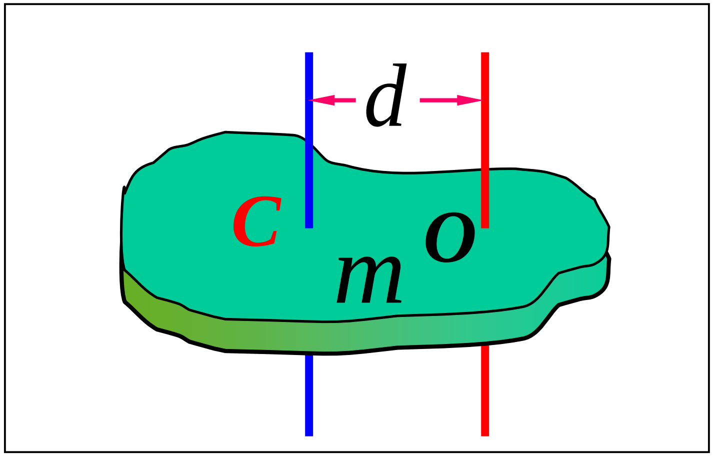
$$J = \lambda \int_0^l r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \frac{1}{3} m l^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m(\frac{1}{2} l)^2$$

平行轴定理

质量为 m 的刚体，如果对其质心轴的转动惯量为 J_C，则对任一与该轴平行，相距为 d 的转轴的转动惯量为

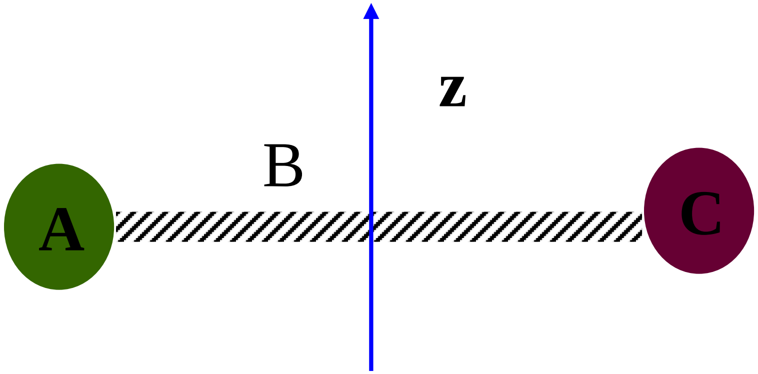
$$J_O = J_C + md^2$$



故通过质心轴的转动惯量最小

转动惯量叠加定理

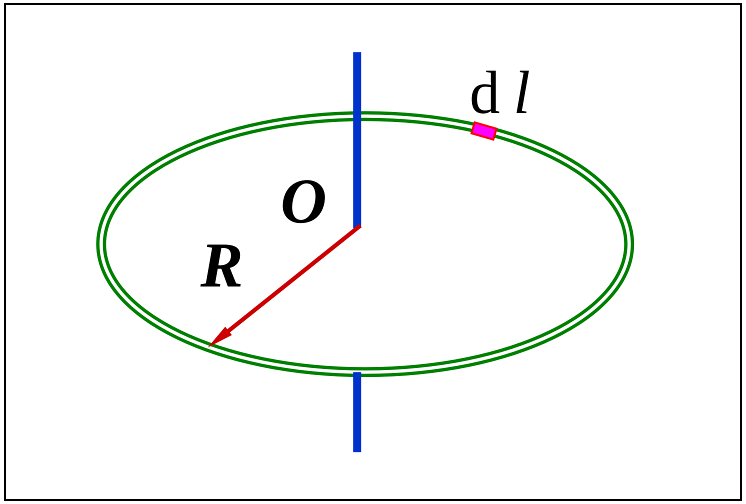
$$J_z = J_A + J_B + J_C$$



例2 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆环，求通过环中心 O 并与环所在平面垂直的轴的转动惯量 。

解： 设圆环线密度为 λ ，

$$\lambda = \frac{m}{2\pi R}$$



在环上取微元 $\mathrm{d}\,l$

则 $\mathrm{d}m = \lambda \mathrm{d}l$

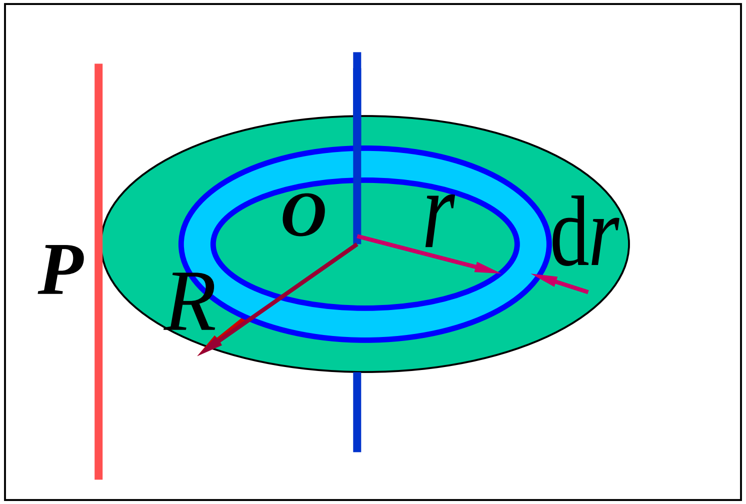
圆环对轴的转动惯量

$$dJ = R^2 \lambda dl$$

$$J = \int_0^{2\pi R} R^2 \lambda \mathrm{d}l = mR^2$$

例3 一质量为 m 、半径为 R 的均匀圆盘，求通过盘中心 O 并与盘面垂直的轴的转动惯量 。

解： 设圆盘面密度为 σ ，在盘上取半径为 r ，宽为 $\mathrm{d}r$ 的圆环



圆环质量 $\mathrm{d}m = \sigma 2\pi\, r\mathrm{d}r$

圆环对轴的转动惯量

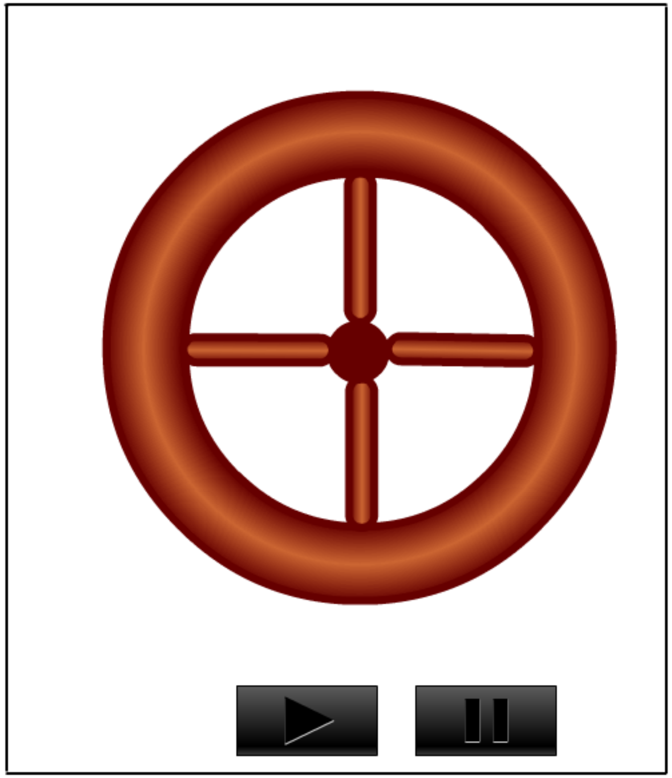
$$\mathrm{d}J = r^2\mathrm{d}m = 2\pi\, \sigma r^3\mathrm{d}r$$

$$J = \int_0^R 2\pi\, \sigma r^3\mathrm{d}r = \frac{\sigma}{2}\pi\, R^4$$

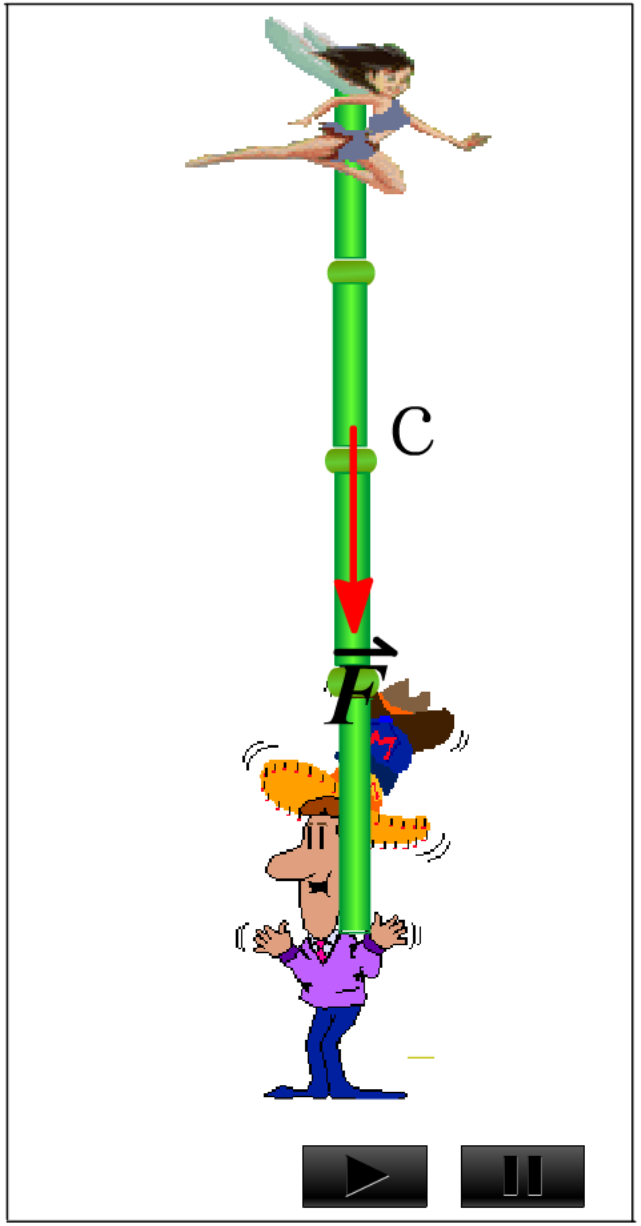
而 $\sigma = m/\pi\, R^2$ 所以 $J = \frac{1}{2}mR^2$

圆盘对 P 轴的转动惯量 $J_P = \frac{1}{2}mR^2 + mR^2$

➢转动惯量的大小取决于刚体的质量、形状及转轴的位置 。



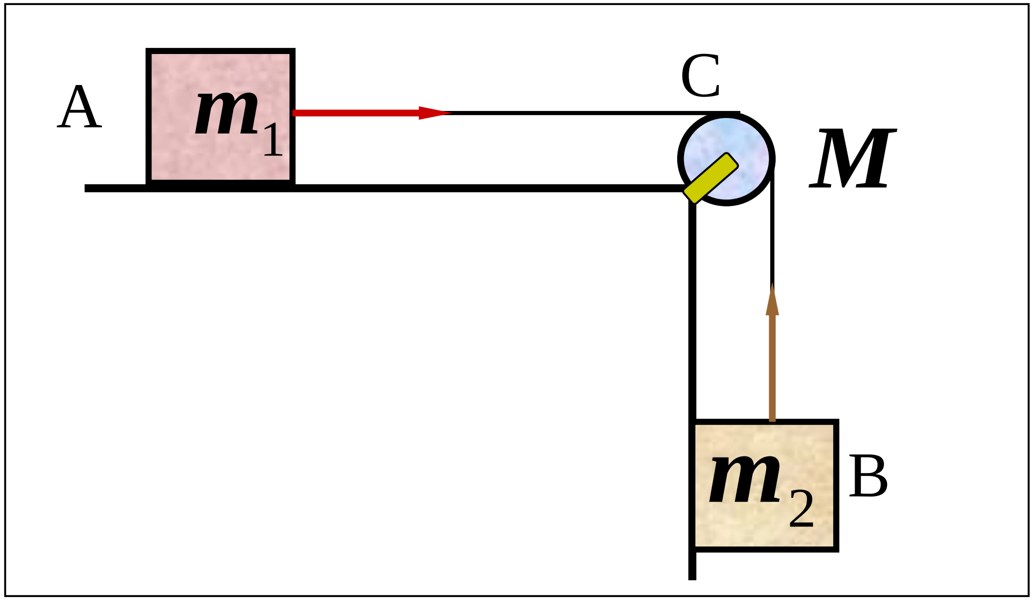
飞轮的质量为什么大都分布于外轮缘?



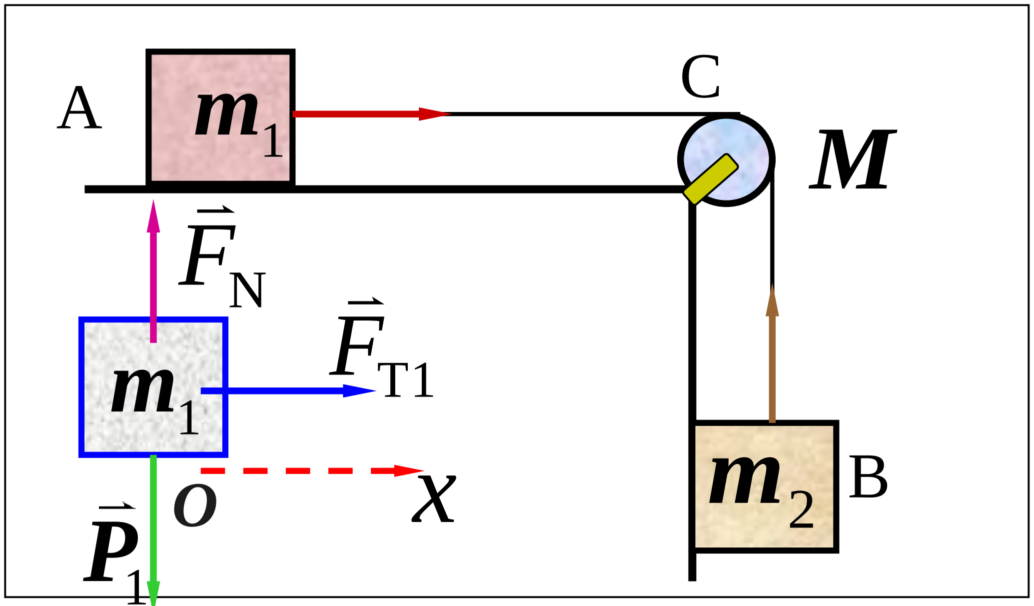
竿子长些还是短些较安全?

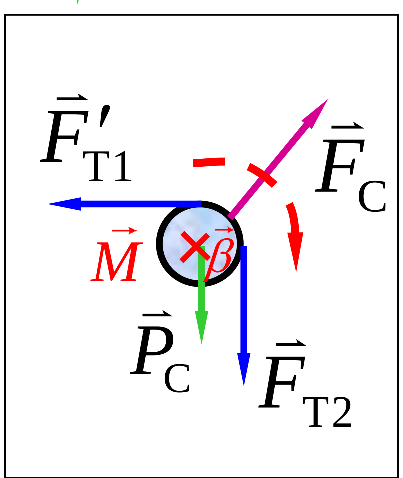
例3 阿特伍德机

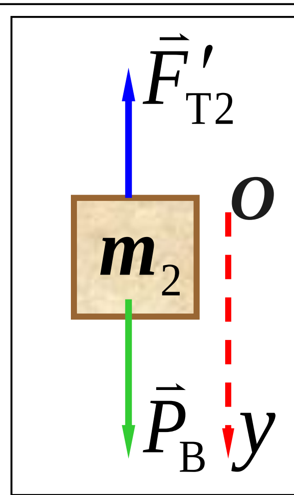
（1）如图所示,不计绳子的质量和滑轮的质量及半径，滑轮与绳间只滚不滑，不计滑轮与轴间的摩擦力。且 $m_1 < m_2$ 。 求重物释放后，物体的加速度和绳的张力。



（2）如图所示,不计绳子的质量，滑轮的质量与半径分别为M和R，滑轮与绳间只滚不滑，不计滑轮与轴间的摩擦力。且$m_1 < m_2$。求重物释放后，物体的加速度和绳的张力。





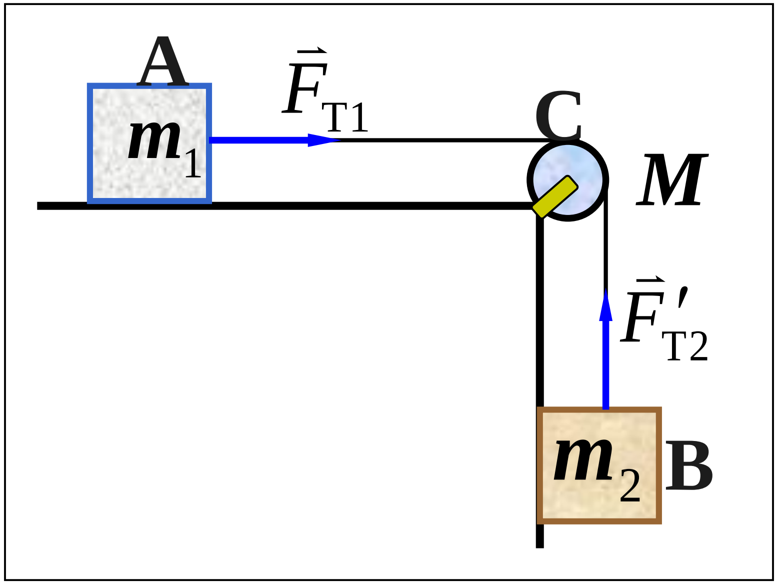


取坐标如图

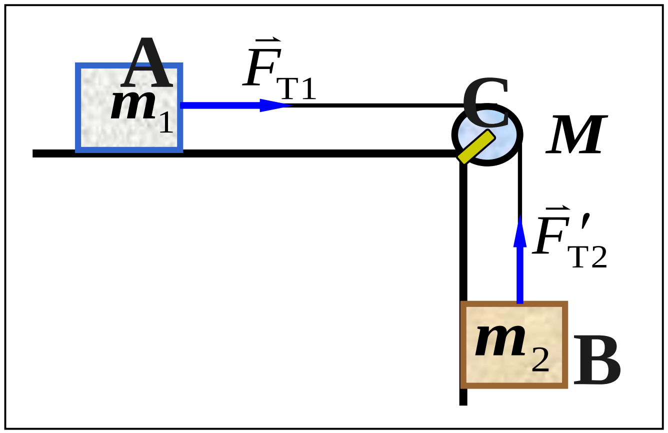
$$\begin{cases} F_{T1} = m_1 a \\ m_2 g - F'_{T2} = m_2 a \\ RF_{T2} - RF'_{T1} = J\beta \\ a = R\beta \\ F_{T1} = F'_{T1}, \quad F_{T2} = F'_{T2} \end{cases}$$

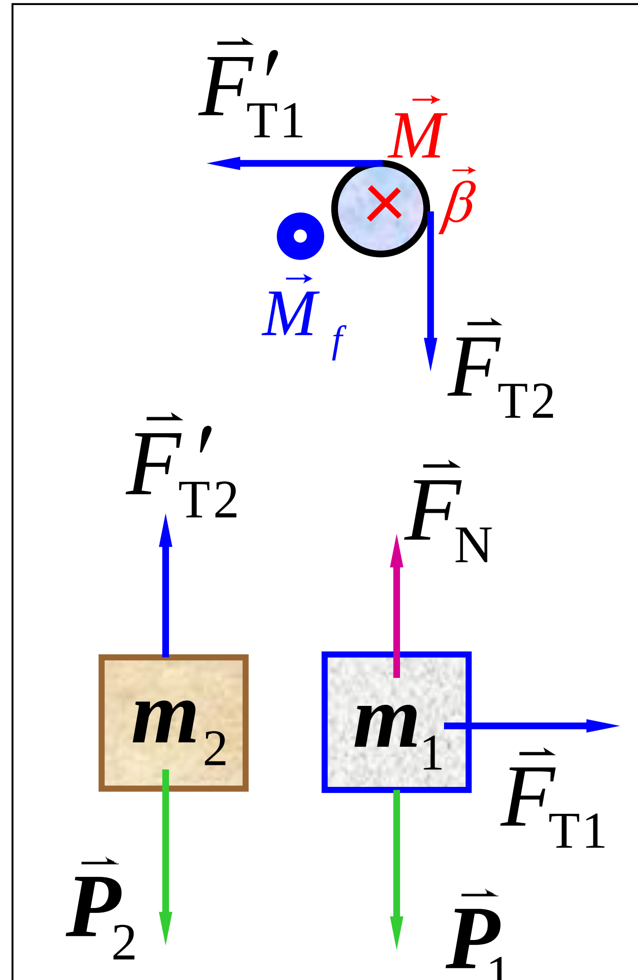
由上述方程组解得：

$$\begin{cases} a = \dfrac{m_2 g}{m_1 + m_2 + M/2} \\ F_{\mathrm{T1}} = \dfrac{m_1 m_2 g}{m_1 + m_2 + M/2} \\ F_{\mathrm{T2}} = \dfrac{(m_1 + M/2) m_2 g}{m_1 + m_2 + M/2} \end{cases}$$



（3）如图所示,不计绳子的质量，滑轮的质量与半径分别为M和R，滑轮与绳间只滚不滑， 若滑轮与轴承间的摩擦力不能忽略，并设它们间的摩擦力矩为M_f 。求重物释放后，物体的加速度和绳的张力。





$$\begin{cases} F_{T1} = m_1 a \\ m_2 g - F_{T2} = m_2 a \\ RF_{T2} - RF_{T1} - M_f = J\beta \\ a = R\beta \end{cases}$$

由上述方程组解得：

$$a=\frac{m_2 g-M_{\mathrm{f}}/R}{m_1+m_2+M/2}$$

$$F_{\mathrm{T1}}=\frac{m_1(m_2 g-M_{\mathrm{f}}/R)}{m_1+m_2+M/2}$$

$$F_{\mathrm{T2}}=\frac{m_2\left[(m_1+M/2)g+M_{\mathrm{f}}/R\right]}{m_1+m_2+M/2}$$