

### 第 3 章课后部分习题参考解答

1.

$$(1) \vdash \neg(A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

$$\textcircled{1} (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{定理 1}$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow B) \quad \textcircled{1} \text{定理 6}$$

$$\textcircled{3} (A \rightarrow (A \rightarrow B)) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \textcircled{2} + A2 + r_{mp}$$

////////////////////////////////////

$$(2) \neg A \vdash A \rightarrow B$$

$$\textcircled{1} \neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A) \quad A1$$

$$\textcircled{2} \neg A \quad \text{前提}$$

$$\textcircled{3} \neg B \rightarrow \neg A \quad \textcircled{1} \textcircled{2} r_{mp}$$

$$\textcircled{4} (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B) \quad A3$$

$$\textcircled{5} (A \rightarrow B) \quad \textcircled{3} \textcircled{4} r_{mp}$$

////////////////////////////////////

$$(4) \vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\}$$

$$\textcircled{1} (B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)] \quad \text{定理 5}$$

$$\textcircled{2} A \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{1} \text{加前件}$$

$$\textcircled{3} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{2} A_2 r_{mp}$$

$$\textcircled{4} \{A \rightarrow [(D \rightarrow B) \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad A_2$$

$$\textcircled{5} [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (D \rightarrow B)] \rightarrow [A \rightarrow (D \rightarrow C)]\} \quad \textcircled{3} \textcircled{4} \text{传递}$$

////////////////////////////////////

$$(5) \vdash [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

$$1) (B \rightarrow C) \rightarrow [(C \rightarrow D) \rightarrow (B \rightarrow D)] \quad \text{定理}$$

$$2) [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

同理上题的证明

$$3) [A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}$$

2) 前件交换

4)

$$(C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (C \rightarrow D)] \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\}\} \quad 3) \text{加前件}$$

$$5) (C \rightarrow D) \rightarrow \{[A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad 4) A_2 + A_1 + r_{mp}$$

$$6) [A \rightarrow (B \rightarrow C)] \rightarrow \{(C \rightarrow D) \rightarrow [A \rightarrow (B \rightarrow D)]\} \quad 5) \text{前件交换}$$

////////////////////////////////////

$$(7) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$1) [B \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)]\} \text{传递}$$

$$2) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow [B \rightarrow (B \rightarrow A)] \quad 1) +A1+rmp$$

$$3) (B \rightarrow A) \rightarrow (B \rightarrow A) \quad \text{定理}$$

$$4) B \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \quad 3) \text{前件交换}$$

$$5) [B \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 4) +A2+rmp$$

$$6) [(A \rightarrow B) \rightarrow (B \rightarrow A)] \rightarrow (B \rightarrow A) \quad 2) 5) + \text{传递}$$

//也可以考虑调用定理 14 来做。//

////////////////////////////////////

$$(9) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$$

$$1) [\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A)\} \quad \text{定理}$$

$$2) \neg A \rightarrow (A \rightarrow B) \quad \text{定理}$$

$$3) [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow (\neg A \rightarrow A) \quad 1) 2) rmp$$

$$4) (\neg A \rightarrow A) \rightarrow A \quad \text{定理}$$

$$5) [(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A \quad 3) 4) \text{传递}$$

//这里也可以运用定理 14 来证明形如  $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$  的结论。//

////////////////////////////////////

$$(10) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$$

- 1)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow \{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\}$  传递
- 2)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A$  9 题已证
- 3)  $(C \rightarrow A) \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow A] \rightarrow A\}$  2) 加前件
- 4)  $\{(C \rightarrow A) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow A]\} \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  3)  $+A2+rm_p$
- 5)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(C \rightarrow A) \rightarrow A]$  1) 4) 传递

////////////////////////////////////

$$(11) \vdash [(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$$

- 1)  $\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)$  已证定理
- 2)  $A \rightarrow [\neg C \rightarrow (C \rightarrow B)]$  1) 加前件
- 3)  $\neg C \rightarrow [A \rightarrow (C \rightarrow B)]$  2) 前件交换
- 4)  $[A \rightarrow (C \rightarrow B)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$   $A_2$
- 5)  $\neg C \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)]$  3) 4) 传递
- 6)  $[(A \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  定理
- 7)  $\neg C \rightarrow [\neg(A \rightarrow B) \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  5) 6) 传递
- 8)  $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  7)  $A_2 + r_{mp}$
- 9)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow B)]$  定理
- 10)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)]$  9) 8) 传递
- 11)  $[\neg C \rightarrow \neg(A \rightarrow C)] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  定理
- 12)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow [(A \rightarrow C) \rightarrow C]$  10) 11) 传递

//本题采用了教材上证明定理 14 的证明思想。下面的 (12) (13) 题采用了相同的处理方法。//

////////////////////////////////////

$$(12) \vdash \{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$$

- 1)  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]$  定理

2)  $\{\neg(A \rightarrow B) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$  定理

3)  $\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)$  1) 2)  $r_{mp}$

4)  $\neg D \rightarrow \{\neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow (A \rightarrow B)\}$  3) 加前件

5)  $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)]$  4)  $A_2 + r_{mp}$

6)  $(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)$  定理

7)  $\neg D \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  6) 加前件

8)  $[\neg D \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  7)  $A_2 + r_{mp}$

9)  $\{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\} \rightarrow [\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)]$  5) 8) 传递

10)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow C]\}$  定理

11)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow \{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\}$  10) 9) 传递

12)  $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$   $A_2$

13)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)] \rightarrow$

$\{[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]\}$  传递

14)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg B)]$  定理

15)  $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)]$  13) 14)  $r_{mp}$

16)  $[(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$   $A_3$

17)  $(B \rightarrow D) \rightarrow [(\neg D \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  16) 加前件

18)  $[(B \rightarrow D) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  17)  $A_2 + r_{mp}$

19)  $[(\neg D \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg D \rightarrow \neg A)] \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  15) 18) 传递

20)  $\{\neg D \rightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  12) 19) 传递

21)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow C] \rightarrow D\} \rightarrow [(B \rightarrow D) \rightarrow (A \rightarrow D)]$  11) 20) 传递

////////////////////////////////////

(13)  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$

- 1)  $[\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)] \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)\}$  定理
- 2)  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理
- 3)  $[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow (\neg A \rightarrow B)$  1) 2)  $r_{mp}$
- 4)  $\neg A \rightarrow \{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\}$  3) 前件交换
- 5)  $\{[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow B\} \rightarrow \{\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]\}$  定理
- 6)  $\neg A \rightarrow \{\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]\}$  4) 5) 传递
- 7)  $\neg C \rightarrow \{\neg A \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$  6) 加前件
- 8)  $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{\neg C \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$  7)  $A_2 + r_{mp}$
- 9)  $\{\neg C \rightarrow [\neg B \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \rightarrow$   
 $\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$   $A_2$
- 10)  $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\}$  8) 9) 传递
- 11)  $[\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]] \rightarrow [[(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]$   $A_3$
- 12)  $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \{[\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]] \rightarrow$   
 $[[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  11) 加前件
- 13)  $\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [\neg C \rightarrow \neg[(A \rightarrow B) \rightarrow B]]\} \rightarrow$   
 $\{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  12)  $A_2 + r_{mp}$
- 14)  $(\neg C \rightarrow \neg A) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  10) 13) 传递
- 15)  $(A \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg A)$  定理
- 16)  $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  14) 15) 传递
- 17)  $(\neg C \rightarrow \neg B) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  16) 前件交换
- 18)  $(B \rightarrow C) \rightarrow (\neg C \rightarrow \neg B)$  定理
- 19)  $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [[ (A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C]\}$  17) 18) 传递

20)  $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(A \rightarrow B) \rightarrow B] \rightarrow C\}$  19) 前件交换

////////////////////////////////////

(14)  $\vdash (A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C\}$

1)  $(B \rightarrow C) \rightarrow \{(A \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C\}$

由上题的已证结论

2)  $(A \rightarrow C) \rightarrow \{(B \rightarrow C) \rightarrow [(B \rightarrow A) \rightarrow A] \rightarrow C\}$  1) 前件交换

////////////////////////////////////

//上述各题的证明方法都不唯一，大家也可以用习题课上讲述的其他处理方案做一下。//

2.

(1)

只需证:  $B \rightarrow A \vdash \neg A \rightarrow \neg B$

只需证:  $B \rightarrow A \vdash \neg\neg B \rightarrow \neg\neg A$

只需证:  $B \rightarrow A, \neg\neg B \vdash \neg\neg A$

1)  $\neg\neg B \rightarrow B$  定理

//这里也可以不调用该定理，可以把书上的  $\neg\neg B \vdash B$  演绎代码代入即可。

2)  $\neg\neg B$  前提

3)  $B$  1)2)  $r_{mp}$

4)  $B \rightarrow A$  前提

5)  $A$  3)4)  $r_{mp}$

6)  $A \rightarrow \neg\neg A$  定理

//同上也可以不调用，只需先证  $\neg\neg\neg A \vdash \neg A$ ，显然上述已证。

7)  $\neg\neg A$  6)7)  $r_{mp}$

(2)

只需证:  $A \rightarrow B, B \rightarrow C, A \vdash C$ ，显然。

(3)

只需证:  $(A \rightarrow B) \rightarrow A \vdash A$

①  $\neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理

②  $(A \rightarrow B) \rightarrow A$  前提

③  $\neg A \rightarrow A$  ①②传递

④  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  定理

⑤  $A$

(4)

只需证:  $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A$

①  $B \rightarrow (A \rightarrow B)$

②  $B$

③  $A \rightarrow B$

④  $\neg(A \rightarrow B) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow A)$  定理

⑤  $\neg(A \rightarrow B)$  前提

⑥  $A$

////////////////////////////////////

3.

(1)

1)  $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$  定理

2)  $\neg A \rightarrow (\neg B \rightarrow (B \rightarrow A))$  1)加前件

3)  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (\neg A \rightarrow (B \rightarrow A))$  2)+A2

4)  $(\neg A \rightarrow (B \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$  A2

5)  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A))$  3)4)传递

6)  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$  定理

7)  $(\neg A \rightarrow B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow A) \rightarrow A)$  6)加前件

8)  $((\neg A \rightarrow B) \rightarrow (\neg A \rightarrow A)) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$  7)+A2

9)  $(\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow ((\neg A \rightarrow B) \rightarrow A)$  5)8)传递

////////////////////////////////////

4.

(1)

①  $A \rightarrow (B \rightarrow C)$  假设定理

②  $B \rightarrow (A \rightarrow C)$  ①前件交换

③  $B$                       假设定理

④  $(A \rightarrow C)$               ②③  $r_{mp}$

(2)

①  $\Gamma; \neg A \vdash B$     已知

②  $\Gamma; \neg A \vdash \neg B$     已知

③  $\neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$     定理

④  $\Gamma; \neg A \vdash A$     ①②③  $r_{mp}$

⑤  $\Gamma \vdash \neg A \rightarrow A$     ④ 演绎定理

⑥  $(\neg A \rightarrow A) \rightarrow A$     定理

⑦  $\Gamma \vdash A$     ⑤⑥  $r_{mp}$

//这里也可以用演绎定理和上面 3. (1) 的结论来证。//

////////////////////////////////////

6.

(1)

①  $\neg A \rightarrow A, \neg A \vdash \neg A$               公理

②  $\neg A \rightarrow A, \neg A \vdash \neg A \rightarrow A$     公理

③  $\neg A \rightarrow A, \neg A \vdash A$               ①②  $\rightarrow$  消去

④  $\neg A \rightarrow A, A \vdash A$               公理

⑤  $\neg A \rightarrow A \vdash A$     ③④ 假设消除

////////////////////////////////////

(3)

先证  $((A \vee B) \rightarrow C) \rightarrow (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$

①  $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A$     公理

②  $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A \vee B$     ①  $\vee$  引入

③  $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash A \vee B \rightarrow C$     公理

④  $((A \vee B) \rightarrow C), A \vdash C$     ②③  $\rightarrow$  消去



⑤  $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash A \rightarrow C$  ④  $\rightarrow$  引入

⑥  $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash B \rightarrow C$  同理可得

⑦  $((A \vee B) \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$  ⑤⑥  $\wedge$  引入

再证  $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$

只需证:  $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash C$

①  $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash A$  公理

②  $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash A \rightarrow C$  公理+ $\wedge$  消除

③  $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; A \vdash C$  ①②  $\rightarrow$  消去

④  $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B; B \vdash C$  同理可得

⑤  $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash A \vee B$  公理

⑥  $A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C), A \vee B \vdash C$  ③④⑤  $\vee$  消除

////////////////////////////////////

(5)

先证  $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge \neg B$

1)  $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  PC 已证定理

2)  $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg A$  公理

3)  $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash A \rightarrow B$  1) 2)  $\rightarrow$  消除

4)  $\neg(A \rightarrow B), \neg A \vdash \neg(A \rightarrow B)$  公理

5)  $\neg(A \rightarrow B) \vdash \neg\neg A$  3) 4)  $\neg$  引入

6)  $\neg(A \rightarrow B) \vdash A$  5)  $\neg\neg$  消除

7)  $\neg(A \rightarrow B), B \vdash B \rightarrow (A \rightarrow B)$  ND 中已证定理

8)  $\neg(A \rightarrow B), B \vdash B$  公理

9)  $\neg(A \rightarrow B), B \vdash A \rightarrow B$  7) 8)  $\rightarrow$  消除

10)  $\neg(A \rightarrow B), B \mid \neg(A \rightarrow B)$  公理

11)  $\neg(A \rightarrow B) \mid \neg B$  9) 10)  $\neg$ 引入

12)  $\neg(A \rightarrow B) \mid A \wedge \neg B$  6) 11)  $\wedge$ 引入

13)  $\mid \neg(A \rightarrow B) \rightarrow A \wedge \neg B$  12)  $\rightarrow$ 引入

再证:  $\mid (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$

1)  $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \mid A \wedge \neg B$  公理

2)  $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \mid A$  1)  $\wedge$ 消除

3)  $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \mid A \rightarrow B$  公理

4)  $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \mid B$  2) 3)  $\rightarrow$ 消除

5)  $A \wedge \neg B, A \rightarrow B \mid \neg B$  1)  $\wedge$ 消除

6)  $A \wedge \neg B \mid \neg(A \rightarrow B)$  4) 5)  $\neg$ 引入

7)  $\mid (A \wedge \neg B) \rightarrow \neg(A \rightarrow B)$  6)  $\rightarrow$ 引入

//////////

(6)

1)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \mid A$  公理

2)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), A \mid A \vee C$  1)  $\vee$ 引入

3)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; C \mid C$  公理

4)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; C \mid A \vee C$  3)  $\vee$ 引入

5)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \mid B$  公理

6)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \mid \neg B$  公理

7)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B; \neg B \mid A \vee C$  5) 6)  $\neg$ 消除

8)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \mid (A \vee B) \wedge (\neg B \vee C)$  公理

9)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \mid \neg B \vee C$  8)  $\wedge$ 消除

10)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C), B \vdash A \vee C$  4) 7) 9)  $\vee$  消除

11)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee B$  8)  $\wedge$  消除

12)  $(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \vdash A \vee C$  2) 10) 11)  $\vee$  消除

13)  $\vdash \neg(A \vee B) \wedge (\neg B \vee C) \rightarrow (A \vee C)$

////////////////////////////////////

7)

先证:  $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow A \wedge (\neg A \vee B)$

①  $A \wedge B \vdash A$  公理+ $\wedge$  消除

②  $A \wedge B \vdash B$  公理+ $\wedge$  消除

③  $A \wedge B \vdash \neg A \vee B$  ②  $\vee$  引入

④  $A \wedge B \vdash A \wedge (\neg A \vee B)$  ①③  $\wedge$  引入

再证:  $\vdash \neg A \wedge (\neg A \vee B) \rightarrow (A \wedge B)$

①  $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A$  公理+ $\wedge$  消除

②  $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash A$  公理+ $\wedge$  消除

③  $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash \neg A$  公理

④  $A \wedge (\neg A \vee B); \neg A \vdash B$  ②③  $\neg$  消除

⑤  $A \wedge (\neg A \vee B); B \vdash B$

⑥  $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash \neg A \vee B$  公理+ $\wedge$  消除

⑦  $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash B$  ④⑤⑥  $\vee$  消除

⑧  $A \wedge (\neg A \vee B) \vdash A \wedge B$  ①⑦  $\wedge$  引入

////////////////////////////////////

(8)

先证  $\vdash B \rightarrow ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A)$

只需证:  $B, A \leftrightarrow B \vdash A$  及  $B, A \vdash A \leftrightarrow B$

1)  $B, A \leftrightarrow B \mid \neg B \rightarrow A$  公理及  $\leftrightarrow$  消除

2)  $B, A \leftrightarrow B \mid \neg B$  公理

3)  $B, A \leftrightarrow B \mid \neg A$  1) 2)  $\rightarrow$  消除

4)  $B, A \mid \neg B \rightarrow (A \rightarrow B)$  已证定理

5)  $B, A \mid \neg B$  公理

6)  $B, A \mid \neg A \rightarrow B$  4) 5)  $\rightarrow$  消除

7)  $B, A \mid \neg B \rightarrow A$  同理 6)

8)  $B, A \mid \neg A \leftrightarrow B$  6) 7)  $\leftrightarrow$  引入

再证  $\mid \neg ((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \rightarrow B$

1)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \mid \neg A$  公理

2)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \mid \neg A \rightarrow (A \leftrightarrow B)$  公理及  $\leftrightarrow$  消除

3)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \mid \neg A \leftrightarrow B$  1) 2)  $\rightarrow$  消除

4)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \mid \neg A \rightarrow B$  3)  $\leftrightarrow$  消除

5)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, A \mid \neg B$  1) 4)  $\rightarrow$  消除

6)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg \neg A \rightarrow (A \rightarrow B)$  定理

7)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg \neg A$  公理

8)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg A \rightarrow B$  6) 7)  $\rightarrow$  消除

9)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg \neg B \rightarrow (B \rightarrow A)$  定理

10)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg \neg B$  公理

11)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg B \rightarrow A$  9) 10)  $\rightarrow$  消除

12)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg A \leftrightarrow B$  8) 11)  $\leftrightarrow$  引入

13)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg (A \leftrightarrow B) \rightarrow A$  公理及  $\leftrightarrow$  消除

14)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg A$  12) 13)  $\rightarrow$  消除

15)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A; \neg B \mid \neg A$  公理

16)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \mid \neg \neg B$  14) 15)  $\neg$  引入

17)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A, \neg A \mid B$   $\neg \neg$  消除

18)  $(A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A \mid B$  5) 17) 假设消除

19)  $\mid \neg((A \leftrightarrow B) \leftrightarrow A) \rightarrow B$  18)  $\rightarrow$  引入