第 5 章部分课后习题作业参考

3.

（1） $\vdash (A \to \exists vB) \to \exists v(A \to B)$

只需证 $A \to \neg\forall v\neg B \vdash \neg\forall v\neg(A \to B)$，反证法证之。

1) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg(A \to B)$ 前提

2) $\forall v\neg(A \to B) \to \neg(A \to B)$ 定理

3) $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg(A \to B)$ 1)2） r_{mp}

4) $\neg A \to (A \to B)$ 定理

5) $\neg(A \to B) \to A$ 4)逆否

6） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash A$ 3)5） r_{mp}

7） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash A \to \neg\forall v\neg B$ 前提

8） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg\forall v\neg B$ 6)7） r_{mp}

9) $B \to (A \to B)$ 公理

10) $\neg(A \to B) \to \neg B$ 9)逆否

11） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \neg B$ 3)10） r_{mp}

12） $A \to \neg\forall v\neg B; \forall v\neg(A \to B) \vdash \forall v\neg B$ 11） 全称推广（v 在 A 中无自由出现）

13) $A \to \neg\forall v\neg B \vdash \neg\forall v\neg(A \to B)$，8)12)及反证法定理

/////////////////////////

(2) $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists vB)$

证明：根据前件交换只需证 $\vdash A \to (\exists v(A \to B) \to \exists vB)$

只需证 $\vdash A \to (\neg\forall v\neg(A \to B) \to \neg\forall v\neg B)$

1） $(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

2） $A \to ((A \to B) \to B)$ 1）前件交换

3） $((A \to B) \to B) \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ 定理

4） $A \to (\neg B \to \neg(A \to B)$ 2）3）传递

5） $\forall v(A \to (\neg B \to \neg(A \to B))$ 4）全称推广//注意使用条件

6） $\forall vA \to \forall v(\neg B \to \neg(A \to B))$ 5）+公理+r_{mp}

7） $A \to \forall vA$ 公理（v 在 A 无自由出现）

8） $A \to \forall v(\neg B \to \neg(A \to B))$ 7）6）传递

9） $\forall v(\neg B \to \neg(A \to B)) \to (\forall v \neg B \to \forall v \neg(A \to B))$ 公理

10） $A \to (\forall v \neg B \to \forall v \neg(A \to B))$ 8）9）传递

11） $(\forall v \neg B \to \forall v \neg(A \to B)) \to (\neg \forall v \neg(A \to B) \to \neg \forall v \neg B)$ 定理

12） $A \to (\neg \forall v \neg(A \to B) \to \neg \forall v \neg B)$ 10）11）传递

即 $A \to (\exists v(A \to B) \to \exists vB)$

/////////////////////////////////

(3) $\vdash (\forall vB \to A) \to \exists v(B \to A)$ 1

证明：只需证$\vdash (\neg A \to \exists v \neg B) \to \exists v(\neg A \to \neg B)$ //替换原理，等价变换//

而由上述题 3.（1）知此结论成立。当然也可以直接用（1）中的方法来证明。//

///

(4) $\vdash \exists v(B \to A) \to (\forall vB \to A)$

证明：只需证$\vdash \exists v(\neg A \to \neg B) \to (\neg A \to \exists v \neg B)$ //替换原理，等价变换//

则根据上题 3.（2）可知成立。//

///

//上述各证明题大家也可以尝试我们习题上介绍的其他方法。//

(5) 若$\vdash A \to B$，则$\vdash \forall vA \to \forall vB$

证明：

1） $A \to B$ 假设的定理

2） $\forall u(A \to B)$，1）全称推广

3） $\forall u(A \to B) \to (\forall uA \to \forall uB)$ 公理

4） $\forall uA \to \forall uB$ 2）3） r_{mp}

/////////////////////

(6) $A \to B \models \forall uA \to \forall uB$ 未必成立，从而 $A \to B \vdash \forall uA \to \forall uB$ 不真。

证明：举例说明该逻辑蕴涵不一定成立：
令个体域 $D = N$
$A: u < u+1$，
$B: u < 100$
则对 $u = 10$ 的指派下，公式 $A \to B$ 为真，

但此时公式 $\forall uA \to \forall uB$ 为假，故 $A \to B \models \forall uA \to \forall uB$ 不成立。

当然也就有 $A \to B \vdash \forall uA \to \forall uB$ 不成立，否则根据 FC 合理性知有：

$A \to B \models \forall uA \to \forall uB$ 成立，矛盾。

///
4.

(1) $\forall x(A \to B) \vdash\dashv A \to \forall xB$，且 x 在 A 中无自由出现。

证明：先证 $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$

只需证： $\forall x(A \to B), A \vdash \forall xB$

1) $\forall x(A \to B), A \vdash \forall x(A \to B)$ 前提

2） $\forall x(A \to B) \to (A \to B)$ 定理

3） $\forall x(A \to B), A \vdash A \to B$ 1)2） r_{mp}

4） $\forall x(A \to B), A \vdash A$ 前提

5） $\forall x(A \to B), A \vdash B$ 3)4） r_{mp}

6） $\forall x(A \to B), A \vdash \forall vB$， 5)全称推广

7） $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall xB$

再证 $A \to \forall xB \vdash \forall x(A \to B)$

1) $\forall xB \to B$ 定理

2） $A \to (\forall xB \to B)$ 1)加前件

3) $(A\to\forall xB)\to(A\to B)$　2)+公理

4) $A\to\forall xB\vdash A\to B$　3)演绎定理

5) $A\to\forall xB\vdash\forall x(A\to B)$，全称推广

////////////////////

(2) $\forall x(A\to B)\dashv\vdash\exists xA\to B$，且 x 在 B 中无自由出现。

证明：只需证 $\forall x(\neg B\to\neg A)\dashv\vdash\neg B\to\forall x\neg A$，由于 x 在 $\neg B$ 中无自由出现，故直接由 4.（1）题的结论即可。

//////////////////////////

(3) $\forall x(A\wedge B)\dashv\vdash\forall xA\wedge\forall xB$

只需证：$\forall x\neg(A\to\neg B)\dashv\vdash\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)$

先证 $\forall x\neg(A\to\neg B)\vdash\neg(\forall xA\to\neg\forall xB)$　//反证法

1) $\forall x\neg(A\to\neg B)$，$\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall x\neg(A\to\neg B)$　前提

2) $\forall x\neg(A\to\neg B)\to\neg(A\to\neg B)$　定理

3) $\forall x\neg(A\to\neg B)$，$\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\neg(A\to\neg B)$

4) $\neg A\to(A\to\neg B)$　定理

$\neg B\to(A\to\neg B)$　公理

5) $\neg(A\to\neg B)\to A$

$\neg(A\to\neg B)\to B$　4)+逆否

6) $\forall x\neg(A\to\neg B)$，$\forall xA\to\neg\forall xB\vdash A$

$\forall x\neg(A\to\neg B)$，$\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\neg B$　3)5) r_{mp}

7) $\forall x\neg(A\to\neg B)$，$\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall xA$

$\forall x\neg(A\to\neg B)$，$\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall x\neg B$　6)全称推广

8) $\forall x\neg(A\to\neg B)$，$\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\forall xA\to\neg\forall xB$　前提

9) $\forall x\neg(A\to\neg B)$，$\forall xA\to\neg\forall xB\vdash\neg\forall xB$　7）8）r_{mp}

10) $\forall x\neg(A\rightarrow\neg B)\vdash\neg\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)$ 7)9)反证法

再证 $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash\ \forall x\neg(A\rightarrow\neg B)$

1） $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)$ 前提

2） $\neg\forall xA\rightarrow(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)$

$\neg\forall xB\rightarrow(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)$

3） $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\rightarrow\forall xA$

$\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\rightarrow\forall xB$ 2)+逆否

4） $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash\forall xA$

$\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash\forall xB$ 否 1)3） r_{mp}

5） $\forall xA\rightarrow A$
$\forall xB\rightarrow B$

6) $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash A$

$\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash B$

7） $A\rightarrow(B\rightarrow\neg(A\rightarrow\neg B))$ 定理

//此结论证明较简单参见教材 3.1.18。//

8） $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash\ \neg(A\rightarrow\neg B)$ 6）7） r_{mp}

//注：证明此结论也可以不调用 3.1.18 的解决方案：

//一是证 $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash\ \neg(A\rightarrow\neg B)$ 的时候用反证法。

// $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB),\ (A\rightarrow\neg B)\vdash$ 互反，此结论由上述第 6）7）步即可看出。

//二是转化为证 $\vdash\neg\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\rightarrow\ \neg(A\rightarrow\neg B)$，逆否变形即可。

9） $\neg(\forall xA\rightarrow\neg\forall xB)\vdash\ \forall x\neg(A\rightarrow\neg B)$ 8）全称推广

//
(4)

由(3)题结论有: $\forall x(\neg A\wedge\neg B)\dashv\vdash\forall x\neg A\wedge\forall x\neg B$

从而 $\neg\forall x(\neg A\wedge\neg B)\dashv\vdash\neg(\forall x\neg A\wedge\forall x\neg B)$

即 $\exists x\neg(\neg A\wedge\neg B)\vdash\dashv\neg\forall x\neg A\vee\neg\forall x\neg B)$ 　　//替换原理

即 $\exists x(A\vee B)\vdash\dashv\exists xA\vee\exists xB$

//////////////////////////////

(5)

证明：$P(Oscar)\not\vee G(Oscar)$

$$=(P(Oscar)\vee G(Oscar))\wedge(\neg P(Oscar)\vee\neg G(Oscar))$$

记 $\tau=\{P(Sam),G(Clyde),L(Clyde,Oscar),$

$P(Oscar)\vee G(Oscar),\neg P(Oscar)\vee\neg G(Oscar),L(Oscar,Sam)$

//因为 $A\wedge B\to A$，$A\wedge B\to B$（已证定理），这里为了方便就直接拆开用了//

需证 $\tau\vdash\exists x\exists y(G(x)\wedge P(y)\wedge L(x,y))$，考虑反证法：

记 $\tau'=\tau\bigcup\{\forall x\forall y(\neg G(x)\vee\neg P(y)\vee\neg L(x,y))\}$

$$=\tau\bigcup\{\forall x\forall y(L(x,y)\to(G(x)\to\neg P(y)))\}$$

$$=\tau;\forall x\forall y(L(x,y)\to(G(x)\to\neg P(y)))$$

1) $\tau'\vdash\forall x\forall y(L(x,y)\to(G(x)\to\neg P(y)))$

2) $\tau'\vdash L(Clyde,Oscar)\to(G(Clyde)\to\neg P(Oscar)))$ 　1）+全称消去的公理+r_{mp}

3) $\tau'\vdash L(Clyde,Oscar)$

4) $\tau'\vdash G(Clyde)\to\neg P(Oscar)$

5) $\tau'\vdash G(Clyde)$

6) $\tau'\vdash\neg P(Oscar)$

7) $\tau'\vdash L(Oscar,Sam)\to(G(Oscar)\to\neg P(Sam)))$ 　1）+全称消去的公理+r_{mp}

8) $\tau'\vdash L(Oscar,Sam)$

9) $\tau'\vdash G(Oscar)\to\neg P(Sam)$

10) $\tau'\vdash P(Sam)\to\neg G(Oscar)$

11) $\tau' \vdash P(Sam)$

12) $\tau' \vdash \neg G(Oscar)$

13) $\tau' \vdash P(Oscar) \vee G(Oscar)$

14) $\tau' \vdash \neg G(Oscar) \to P(Oscar)$

15) $\tau' \vdash P(Oscar)$

16) $\tau \vdash \neg \forall x \forall y(L(x,y) \to (G(x) \to \neg P(y)))$，6)15)反证法

即 $\tau \vdash \exists x \exists y(G(x) \wedge P(y) \wedge L(x,y))$

//

(6)

证明：$E(x) \veebar O(x) = (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x))$

记 $\tau = \{\forall x(N(x) \to (E(x) \vee O(x)) \wedge (\neg E(x) \vee \neg O(x)))$，

$\forall x(N(x) \to (E(x) \leftrightarrow G(x)))$，$\neg \forall x(N(x) \to G(x))\}$

需证 $\tau \vdash \exists x(N(x) \wedge O(x))$，采用反证法

1) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x))$

2) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash \neg N(x) \vee \neg O(x)$　1）+全称消去的公理+r_{mp}

3) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash N(x) \to \neg O(x)$

4) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash N(x)$

5) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash \neg O(x)$

6) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash \forall x(N(x) \to E(x) \veebar O(x))$

7) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash (N(x) \to E(x) \veebar O(x)$

8) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash E(x) \veebar O(x)$　4）7）r_{mp}

9) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash \neg O(x) \to E(x)$

10) $\tau ; \forall x(\neg N(x) \vee \neg O(x)) ; N(x) \vdash E(x)$

11）$\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash\forall x(N(x)\to(G(x)\leftrightarrow E(x)))$

12）$\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash G(x)\leftrightarrow E(x)$

13）$\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash E(x)\to G(x)$

14）$\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x));N(x)\vdash G(x)$

15）$\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash N(x)\to G(x)$

16）$\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash\forall x(N(x)\to G(x))$

17）$\tau;\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))\vdash\neg\forall x(N(x)\to G(x))$

18）$\tau\vdash\neg\forall x(\neg N(x)\vee\neg O(x))$

即 $\tau\vdash\exists x(N(x)\wedge O(x))$

////////////////////////////////
(7)
证：根据全称推广，只需证：

$\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$，$\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))]\vdash D(y)\to\neg Q(y)$

//根据 $(A\wedge B\to C)\dashv\vdash(A\to(B\to C))$ 及替换原理，这里对第 2 个前提条件做个等价变换，当然也可以在证明里做等价变换//
下面记此处的前提为 τ.

1） $\tau\vdash\exists x[P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))]$，前提

2） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash\forall x\forall y[P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))]$

3） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash P(x)\to(Q(y)\to\neg L(x,y))$，

由 2)+定理+rmp

4） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash P(x)$ （利用已证定理 $A\wedge B\vdash A$）

5） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash Q(y)\to\neg L(x,y)$，3）、4）rmp

6） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash L(x,y)\to\neg Q(y)$

7） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash\forall y(D(y)\to L(x,y))$，同理 4）

8） $\tau,P(x)\wedge\forall y(D(y)\to L(x,y))\vdash D(y)\to L(x,y)$，同理 3）

9） $\tau, P(x) \wedge \forall y(D(y) \rightarrow L(x,y)) \vdash D(y) \rightarrow \neg Q(y)$，6）、8）传递

10） $\tau \vdash D(y) \rightarrow \neg Q(y)$，由 1）、9)及存在消除定理

11） $\tau \vdash \forall y(D(y) \rightarrow \neg Q(y))$，全称推广

////////////////////////////////////

5.

(1) $\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1) \not\models_T \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$

证明：即给出解释和指派使得该逻辑蕴涵不成立。

令 $D = R$， $\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$： $v_1 < 5$

在指派 $s(v_1) = 3$ 下公式 $\mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$ 为真，但是公式 $\forall \mathrm{v}_1 \mathrm{P}_1^{(1)}(v_1)$ 为假。

////////////////////////////////////

(2) $\not\models_T P_1^{(1)}(v_1) \rightarrow \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)$

证明：直接由 1）即可得。

////////////////////////////////////

(3) $\models_\mathrm{T} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \rightarrow \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$

证明： $\models_\mathrm{T} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \rightarrow \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))$

iff 对任意的结构 U 和指派 s，有 $\models_\mathrm{U} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \rightarrow \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$ 成立

iff $\exists d' \in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 或 $\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$ //后面的这个约束变元 v_1 跟前面的 v_1 没关系，完全可以改名为其他变元符号。//

1）若 $\exists d' \in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 成立，那么原命题得证。

2） 若不存在 $d' \in D,$ 使得 $\not\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d')]$ 成立， 即对 $\forall d \in D,$ 均有 $\models_U P_1^{(1)}(v_1)[s(v_1|d)]$ 成立，

即有： $\models_U \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1)[s]$ 成立

综合 1）、2）知 $\models_\mathrm{U} \exists v_1(P_1^{(1)}(v_1) \rightarrow \forall v_1 P_1^{(1)}(v_1))[s]$ 成立。

////////////////////

(4) 直接给出一个为真的解释和指派即可。

//

6.

同 5.（4），分别给出为真的解释和指派即可。

//

7.

（1）$\tau;\mathrm{A}|=_{\mathrm{T}}\mathrm{B}$ 当且仅当 $\tau|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}\to\mathrm{B}$

证明：$\Leftarrow$：若 $\tau|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}\to\mathrm{B}$，则需证 $\tau;\mathrm{A}|=_{\mathrm{T}}\mathrm{B}$。

只需证对任意的使得 τ 中的公式 A_i 及公式 A 为真的 U,S 必有 $|=_U B[S]$。

而由 $\tau|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}\to\mathrm{B}$，则必有 $|=_U (A\to B)[S]$，即 $|\neq_U A[S]$ 或 $|=_U B[S]$，而 U,S 使得 A 为真，故必有 $|=_U B[S]$。

$\Rightarrow$：若 $\tau;\mathrm{A}|=_{\mathrm{T}}\mathrm{B}$，则需证 $\tau|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}\to\mathrm{B}$。

只需证对任意的使得 τ 中的公式 A_i 为真的 U,S 必有 $|=_U (A\to B)[S]$。

①若 $|\neq_U A[S]$，则显然有 $|=_U (A\to B)[S]$ 成立。

②若 $|=_U A[S]$，则由 $\tau;\mathrm{A}|=_{\mathrm{T}}\mathrm{B}$ 及在 U,S 的作用下 τ 中的公式 A_i 为真，从而有 $|=_U B[S]$，所以 $|=_U (A\to B)[S]$。

//////////////////////////////

(2) $|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ 当且仅当 $|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$（$v$ 为任一变元）

证明：不妨设变元 v 在 A 中自由出现。

$\Leftarrow$：若 $|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$，需证 $|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}$。

即需证对任意的 U,S 有 $|=_{\mathrm{U}}\mathrm{A}[S(v|d)]$，$\forall d\in D$

由 $|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$ 知对任意的 U,S 有 $|=_{\mathrm{U}}\forall\mathrm{vA}[S]$，即对 $\forall d\in D$ 有：

$|=_{\mathrm{U}}\mathrm{A}[S(v|d)]$

$\Rightarrow$：若 $|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}$，需证 $|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$。

由 $|=_{\mathrm{T}}\mathrm{A}$ 知对任意的 U,S 及对 $\forall d\in D$ 有 $|=_{\mathrm{U}}\mathrm{A}[S(v|d)]$（假设变元 v 在 A 中自由出现），即 $|=_{\mathrm{U}}\forall\mathrm{vA}[S]$，所以 $|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vA}$。

//////////////////////////////

（3）$\forall\mathrm{v}(\mathrm{A}\to\mathrm{B}),\forall\mathrm{vA}|=_{\mathrm{T}}\forall\mathrm{vB}$

证明：只需证对任意的U,S若$\models_U \forall v(A \to B)[S]$且$\models_U \forall vA[S]$，则必有$\models_U \forall vB[S]$。

由$\models_U \forall v(A \to B)[S]$知：对任意$d \in D$，有$\models_U (A \to B)[S(v|d)]$，即有$\not\models_U A[S(v|d)]$或$\models_U B[S(v|d)]$，又由$\models_U \forall vA[S]$知：对任意$d \in D$，有$\models_U A[S(v|d)]$，综上$\models_U B[S(v|d)]$，即$\models_U \forall vB[S]$。