§3.2　自然语句形式化

引言：使用谓词逻辑来描述和推理以自然语句表达的问题，首先需要形式化。该形式化的过程即先将问题分解成一些原子谓词，引入谓词符号，进而使用量词、函词、逻辑联结词来构成合式公式。

例1　1. 任意的有理数都是实数。

2. 有的实数是有理数。

P(x)：x是有理数

R(x)：x是实数

则：

$$1.\ \forall x\left[P(x)\to R(x)\right]$$

$$2.\ \exists x\left(R(x)\wedge P(x)\right)$$

例2 1）人终究会死的；

2）苏格拉底是人；

3）所以苏格拉底终究会死的。

$M(x): x$是人， $D(x): x$是要死的

则： $1)\forall x(M(x) \to D(x))$

$2)M($苏格拉底$)$

$3)D($苏格拉底$)$

例3 1）所有实数的平方都是非负的；

2）-3是一个实数；

3）所以-3的平方是非负的。

R(x):x是实数

N(x):x是非负的

f(x):x的平方

则：

$$1)\ \forall x(R(x) \to N(f(x)))$$

$$2)\ R(-3)$$

$$3)\ N(f(-3))$$

例3

并非所有在哈尔滨工作的人都是哈尔滨人.

$w(x)$: x是在哈尔滨工作的人

$H(x)$: x是哈尔滨人

则：

$$\neg\forall x\big(w(x)\to H(x)\big)$$

例4 过平面上的两个不同点，有且仅有一条直线通过。

$D(x): x$为平面上的点.

$G(x): x$为平面上的直线.

$L(x, y, z): z$通过x, y.

$E(x, y): x$与y相等.

$$\forall x \forall y \{D(x) \wedge D(y) \wedge \neg E(x, y) \rightarrow$$

$$\exists z \{G(z) \wedge L(x, y, z) \wedge$$

$$\forall u [G(u) \wedge L(x, y, u) \rightarrow E(u, z)]\}\}$$

例5 大学里的学生不是本科生就是研究生。有的学生是高材生。John不是研究生，但是高材生。则如果John是大学里的学生必是本科生。

$S(x): x$是大学里的学生；$B(x): x$是本科生

$G(x): x$是研究生； $P(x): x$是高材生.

则：

$$1. \forall x\left[S(x) \to B(x) \veebar G(x)\right]$$

$$2. \exists x(S(x) \land P(x))$$

$$3. \neg G(John) \land P(John)$$

$$4. S(John) \to B(John)$$

例6 Sam, Clyde和Oscar是大象：

1) Sam是粉红色；

2) Clyde是灰色的且喜欢Oscar；

3) Oscar是粉红色或者是灰色(但不是两种颜色)且喜欢Sam；

则存在一个灰色大象喜欢一个粉红色大象.

1) $P(Sam)$

2) $G(Clyde) \wedge L(Clyde, Oscar)$

3) $[P(Oscar) \veebar G(Oscar)] \wedge L(Oscar, Sam)$

4) $\exists x \exists y [G(x) \wedge P(y) \wedge L(x, y)]$

例7 每个自然数不是偶数就是奇数。
自然数为偶数当且仅当它能被2整除。
并不是所有的自然数都能被2整除。
所以有的自然数为奇数。

$$1)\ \forall x\left[N(x)\rightarrow\big(E(x)\mathbin{\bar{\vee}}O(x)\big)\right]$$

$$2)\ \forall x\left[N(x)\rightarrow(E(x)\leftrightarrow G(x))\right]$$

$$3)\ \neg\forall x\left[N(x)\rightarrow G(x)\right]$$

$$4)\ \exists x\left[N(x)\wedge O(x)\right]$$