



## § 3.4 一阶谓词形式系统的语义

---

一阶语言中的个体常元、变元、项、函词、谓词等属于语法范畴的字符串，并没有实际的意义。一阶语言的语义就是对这些字符串赋予一定的意义，即对个体常元、函词、谓词进行指称，对变元取值的指派，对量词的意义的规定。一阶语言的语义是一个数学结构，包括论域  $D$  及对函词、谓词进行指称的解释  $I$  即赋予字符串特定的意义。

**例1** 对FC中的公式  $A = \forall x P(f(x, a), x)$

令论域  $D = R$  为实数域;

常元  $a = 0$

二元谓词  $P(x, y) : x = y$

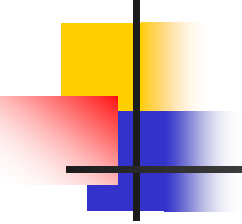
二元函词  $f(x, a) = x + a$

则此时公式  $A = \forall x (x + 0 = x)$

## 1. 解释 $I$ 的组成:

一个解释就是一个映射  $I$ ，它指称一阶语言中的常元、函词、谓词为：

- 1) 对任一常元  $a$  指定为论域  $D$  中的一个个体  
记为  $I(a)$ ，简记为  $\bar{a}$
- 2) 对每一  $n$  元函词  $f^{(n)}$  指定为  $D$  上一个  $n$  元函数，记为  $I(f^{(n)})$ ，简记为  $\bar{f}^{(n)}$
- 3) 对每一  $n$  元谓词  $P^{(n)}$  指定为  $D$  上一个  $n$  元关系，记为  $I(P^{(n)})$ ，简记为  $\bar{P}^{(n)}$



---

2. 结构：对字符串形式的公式赋予特定意义的一个二元组 $\langle D, I \rangle$ 称为结构，记为  $U = \langle D, I \rangle$

将全体结构的集合记为  $T$

**例2** 对FC中的公式  $A = \exists x P(f(x, a), y)$

令论域  $D = N$  为自然数域;

常元  $a = 1$

二元谓词  $P(x, y) : x < y$

二元函词  $f(x, a) = x + a$

则此时公式  $A = \exists x (x + 1 < y)$



### 3. 指派 $S$

---

一阶谓词演算中的指派是对个体变元指定为论域  $D$  中的个体作为其取值,

即为映射  $s : \{v_1, v_2, v_3, \dots\} \rightarrow D$

即对任一变元  $v_i$  有  $s(v_i) \in D$

指派  $S$  可扩展为从项集合到个体域的映射  $\bar{S}$

即对任意的项  $t$  :

$$\bar{S}(t) = \begin{cases} s(v) & \text{当 } t \text{ 为变元 } v \text{ 时} \\ \bar{a} & \text{当 } t \text{ 为常元 } a \text{ 时} \\ \bar{f}^{(n)}(\bar{S}(t_1), \dots, \bar{S}(t_n)) & \text{当 } t \text{ 为 } n \text{ 元函词 } f^{(n)}(t_1, \dots, t_n) \end{cases}$$

#### 4. 记号 $\models_U A[s]$

称公式  $A$  在结构  $U = \langle D, I \rangle$  及指派  $S$  下真值取值为真，记为  $\models_U A[s]$

反之则记为  $\not\models_U A[s]$

$\models_U A$  则表示在结构  $U$  中，

对一切可能的指派  $S$ ， $A$  均为真

$\models A$  或  $\models_T A$  则表示公式  $A$  在任何结构中均为真，即  $A$  永真





## 5. $\models_U A[s]$ 的严格定义

---

1) 当  $A$  为原子公式  $P^{(n)}(t_1, \dots, t_n)$  时

$$\models_U A[s] \text{ iff } \langle \bar{s}(t_1), \dots, \bar{s}(t_n) \rangle \in \bar{P}^{(n)}$$

2) 当  $A$  为公式  $\neg B$  时

$$\models_U A[s] \text{ iff } \not\models_U B[s]$$

3) 当  $A$  为公式  $B \rightarrow C$  时

$$\models_U A[s] \text{ iff } \not\models_U B[s] \text{ 或 } \models_U C[s]$$

4) 当  $A$  为公式  $\forall v B$  时

$$\models_U A[s] \text{ iff 对每一个 } d \in D \text{ 有:}$$

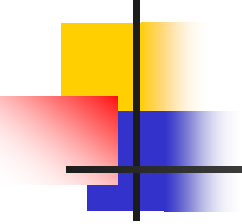
$$\models_U B[s(v \mid d)]$$

另对使用联结词  $\vee, \wedge$  和量词  $\exists$  时  
作规定如下：

$$1) \models_U B \vee C[s] \text{ iff } \models_U B[s] \text{ 或 } \models_U C[s]$$

$$2) \models_U B \wedge C[s] \text{ iff } \models_U B[s] \text{ 且 } \models_U C[s]$$

$$3) \models_U \exists v B[s] \text{ iff 存在 } d \in D \text{ 使得} \\ \models_U B[s(v \mid d)]$$



---

例3 证明  $\models_U \neg \forall v \neg B[s]$   
iff  $\models_U \exists v B[s]$

**例4** 设论域  $D = N$  为自然数集

一元函词  $\bar{f}(x) = x + 1$  即  $N$  上的后继函数；

二元谓词  $\bar{P}(x, y) : x \leq y$

即  $N$  上的“小于等于”二元关系；

常元  $\bar{a} = 0$

则在此结构  $U$  下有如下结论：

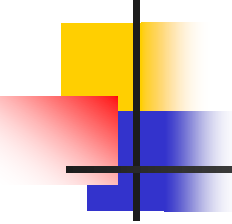
1) 当公式  $A = P(a, f(x))$  时

则有  $\models_U A$

2) 当公式  $A = P(f(x), a)$  时  
则有  $\models_U A$

3) 当公式  $A = \forall x \exists y P(f(x), y)$  时  
则有  $\models_U A$

4) 当公式  $A = \exists y P(f(y), y)$  时  
则有  $\models_U A$



---

**例5** 证明对FC的公理  $A$  ,  
在所有的语义结构里均真, 即有  $\models_T A$

## 6. FC的逻辑蕴涵与逻辑等价的定义

设  $\Gamma$  为  $FC$  的公式集,  $B$  为  $FC$  的公式,  
若对任意使得  $\Gamma$  中每个公式均为真的结构  
 $U$  及指派  $s$ , 也使得  $B$  为真, 即有  $\models_U B[s]$   
则称  $\Gamma$  逻辑蕴涵  $B$ , 记为  $\Gamma \models B$ .  
若  $\Gamma = \{A\}$ , 则有  $A \models B$ , 称作  $A$  逻辑蕴涵  $B$ .  
若同时还有  $B \models A$ , 则称  $A$  逻辑等价  $B$ .