

# § 3.3一阶谓词演算形式系统

# [本节主要内容]

- 1)一阶谓词演算形式系统的组成:包括一阶语言及一阶理论;
- 2)FC的基本定理;



# § 3. 3. 1一阶谓词演算形式系统组成

与命题演算形式系统(PC)的组成相似, 一阶谓词演算形式系统的组成也主要 包括字符集及形成规则、公理、推理 规则及定理推导等几部分。 我们将字符集及形成规则称为一阶谓词 演算形式系统的一阶语言,将公理、推理 规则及定理推导等理论部分称为一阶谓词 演算形式系统的一阶逻辑。

# 一、一阶语言

# 1. 字符集:

个体变元:  $X, y, Z, u, v, w, \cdots$ 个体常元: a,b,c,d,en元函词:  $f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}, \cdots$ n元谓词:  $P^{(n)}$ ,  $Q^{(n)}$ ,  $R^{(n)}$ , ... 真值联结词: 一, 一 量词: ∀、∃; 括号:(,)

2. 形成规则: 即项和谓词公式的定义.

## 二、一阶逻辑

1. 公理: 下列公理模式及其 全称化均为公理。

$$AX1.1 \quad A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

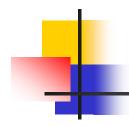
$$AX1.2 \quad (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$AX1.3 \quad (\neg A \rightarrow \neg B) \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$AX2$$
  $\forall vA \rightarrow A_t^v (项t对v可代入)$ 

$$AX3 \quad \forall v(A \rightarrow B) \rightarrow (\forall vA \rightarrow \forall vB)$$

$$AX4$$
  $A \rightarrow \forall vA(v在A$ 中无自由出现)



2. 推理规则: 分离规则  $(r_{mp})$ 

即若有结论 A 及  $A \rightarrow B$  成立则必有结论 B成立.

可用形式化序列表示为: A ,  $A \rightarrow B$  , B

3. 定理:是FC中的重要内容, 包括所有的推理结论及其推理过程。

# § 3.3.2 FC的基本定理

定理1 
$$\left| -_{FC} \right| \forall vA \rightarrow A$$

定理2 
$$|-A \rightarrow \neg \forall v \neg A|$$
 或  $|-A \rightarrow \exists v A|$ 

定理3 
$$|-\forall vA \rightarrow \exists vA$$

## 定理4(全称推广)

对FC中任意的公式 A ,变元 V 若|-A 则  $|-\forall vA$ 

例1 若  $-A \rightarrow B$ 且变元 V在B中无自由出现 则  $-\exists vA \rightarrow B$ 

# 全称推广定理扩充到一般的情形:

定理5 FC中任意的公式集 $\Gamma$ ,公式A 及变元V,且V不在 $\Gamma$ 的任一公式里自由出现。 若 $\Gamma | -A 则 \Gamma | - \forall vA$ 

例2  $\exists x \neg A \rightarrow \forall x B | \neg \forall x (\neg A \rightarrow B)$ 

## 定理6(演绎定理)

对FC中任意公式集  $\Gamma$ 和公式 A,B,  $\Gamma \cup \{A\} \mid -B$ (或简记为  $\Gamma;A \mid -B$ ) 当且仅当  $\Gamma \mid -A \rightarrow B$ 

例3  $\forall x(A \rightarrow B) | -A \rightarrow \forall xB$  变元  $\mathcal{X}$  在 A 中无自由出现。

定理7  $\Gamma$ ; A 一一B 当且仅当  $\Gamma$ ; B 一一A

#### 定理8(反证法)

若FC的公式集 $\Gamma$  $\bigcup$ {A}不一致,则 $\Gamma$  $\bigcap$ - $\bigcap$ A

例4  $\forall x \neg A \rightarrow \exists x B | \neg \exists x (\neg A \rightarrow B)$ 

## 定理9

对FC中任意公式集 $\Gamma$ 和公式A,B,且变元V不在 $\Gamma$ 的任一公式里自由出现。则 $\Gamma;A-B$ 蕴涵 $\Gamma;\forall vA-B$ 及 $\Gamma;\forall vA-B$ 

# 定理10(存在消除)

对FC中任意公式集 $\Gamma$ 和公式A,B,且变元V不在 $\Gamma$ 的任一公式里及公式B里自由出现,则由 $\Gamma$ - $\exists vA$ 及 $\Gamma;A$ -B可推出 $\Gamma$ -B

例5  $-\exists v(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \exists vB)$ V在公式 A 里无自由出现。

#### 定理11(替换原理)

设 A, B为FC的公式,且满足 $A \vdash B$   $A \not\in C$  的子公式,D是将公式 C 中若干个(未必全部) A 的出现换为公式 B 所得的公式,则  $C \vdash\mid D$  例6  $\forall x(A \to B) \mid -(\exists xA \to \exists xB)$ 

## 定理12(改名定理)

在FC中,若 A'是 A 的改名式,且 A' 改用的变元不在 A 中出现,则  $A \mid\mid A'$ 

例7 设A为FC的公式,则有:

$$\forall u \forall v A - \forall v A_v^u$$