§3.3一阶谓词演算形式系统

[本节主要内容]

1)一阶谓词演算形式系统的组成:
  包括一阶语言及一阶理论 ;
2)FC的基本定理;

§3.3.1一阶谓词演算形式系统组成

与命题演算形式系统(PC)的组成相似，一阶谓词演算形式系统的组成也主要包括字符集及形成规则、公理、推理规则及定理推导等几部分。

我们将字符集及形成规则称为一阶谓词演算形式系统的一阶语言，将公理、推理规则及定理推导等理论部分称为一阶谓词演算形式系统的一阶逻辑。

一、一阶语言

1. 字符集：

个体变元：$x, y, z, u, v, w, \cdots$

个体常元：a, b, c, d, e

n元函词：$f^{(n)}, g^{(n)}, h^{(n)}, \cdots$

n元谓词：$P^{(n)}, Q^{(n)}, R^{(n)}, \cdots$

真值联结词：$\neg, \rightarrow$

量词：$\forall, \exists$ ； 括号:（ , ）

2. 形成规则：即项和谓词公式的定义.

二、一阶逻辑

1. 公理：下列公理模式及其全称化均为公理。

$AX1.1 \quad A \to (B \to A)$

$AX1.2 \quad (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$

$AX1.3 \quad (\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$

$AX2 \quad \forall vA \to A_t^v$(项$t$对$v$可代入)

$AX3 \quad \forall v(A \to B) \to (\forall vA \to \forall vB)$

$AX4 \quad A \to \forall vA$($v$在$A$中无自由出现)

2. 推理规则：分离规则 (r_{mp})

即若有结论 A 及 $A \to B$ 成立

则必有结论 B成立.

可用形式化序列表示为：A，$A \to B$，B

3. 定理：是FC中的重要内容，
包括所有的推理结论及其推理过程。

§3.3.2 FC的基本定理

定理1 $\vdash_{FC} \forall vA \to A$

定理2 $\vdash A \to \neg\forall v\neg A$

或 $\vdash A \to \exists vA$

定理3 $\vdash \forall vA \to \exists vA$

定理4(全称推广)

对FC中任意的公式 A ，变元 v

若 $\vdash A$ 则 $\vdash \forall v A$

例1 若 $\vdash A \to B$

且变元 v 在 B 中无自由出现

则 $\vdash \exists v A \to B$

全称推广定理扩充到一般的情形：

定理5 FC中任意的公式集Γ，公式 A 及变元 V，且 V不在Γ的任一公式里自由出现。

若$\Gamma \vdash A$则 $\Gamma \vdash \forall v A$

例2 $\exists x \neg A \to \forall x B \vdash \forall x(\neg A \to B)$

定理6（演绎定理）

对FC中任意公式集 Γ 和公式 A, B，

$\Gamma \cup \{A\} \vdash B$（或简记为 $\Gamma; A \vdash B$ ）

当且仅当 $\Gamma \vdash A \to B$

例3 $\forall x(A \to B) \vdash A \to \forall x B$

变元 X 在 A 中无自由出现。

定理7 $\Gamma; A \vdash \neg B$当且仅当$\Gamma; B \vdash \neg A$

定理8(反证法)

若FC的公式集$\Gamma \cup \{A\}$不一致，则$\Gamma \vdash \neg A$

例4 $\forall x \neg A \to \exists x B \vdash \exists x(\neg A \to B)$

定理9

对FC中任意公式集 Γ 和公式 A, B，

且变元 v 不在 Γ 的任一公式里自由出现。

则 $\Gamma; A \vdash B$ 蕴涵 $\Gamma; \forall v A \vdash B$ 及

$\Gamma; \forall v A \vdash \forall v B$

定理10(存在消除)

对FC中任意公式集 Γ 和公式 A, B，且变元 v 不在 Γ 的任一公式里及公式 B 里自由出现，则由 $\Gamma \vdash \exists v A$ 及 $\Gamma; A \vdash B$ 可推出 $\Gamma \vdash B$

例5 $\vdash \exists v(A \to B) \to (A \to \exists v B)$

v 在公式 A 里无自由出现。

定理11（替换原理）

设 A, B 为FC的公式，且满足 $A \vdash\dashv B$

A 是 C 的子公式，D 是将公式 C

中若干个（未必全部）A 的出现换为公式 B

所得的公式，则 $C \vdash\dashv D$

例6 $\forall x(A \to B) \vdash (\exists x A \to \exists x B)$

定理12(改名定理)

在FC中，若 A' 是 A 的改名式，且 A' 改用的变元不在 A 中出现，则 $A \vdash\dashv A'$

例7 设 A 为FC的公式，则有：

$$\forall u \forall v A \vdash\dashv \forall v A_v^u$$