

ch4.5 阻抗和导纳

杨旭强

哈尔滨工业大学电气工程系



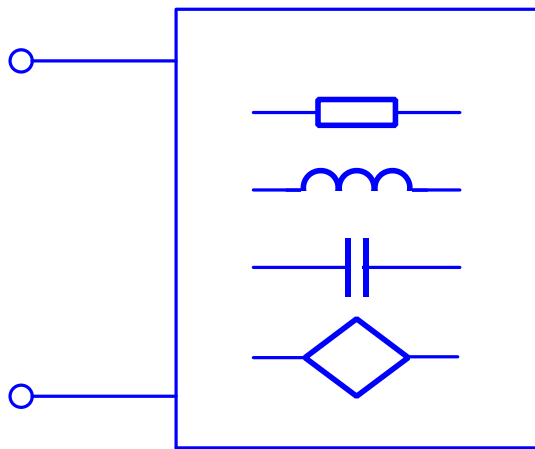
4.5 阻抗和导纳

基本要求：透彻理解阻抗和导纳的概念及引入阻抗和导纳的理论意义。

直流电路中无源一端口网络（仅由线性电阻和受控源组成的电路）对外可以等效成

电阻 R

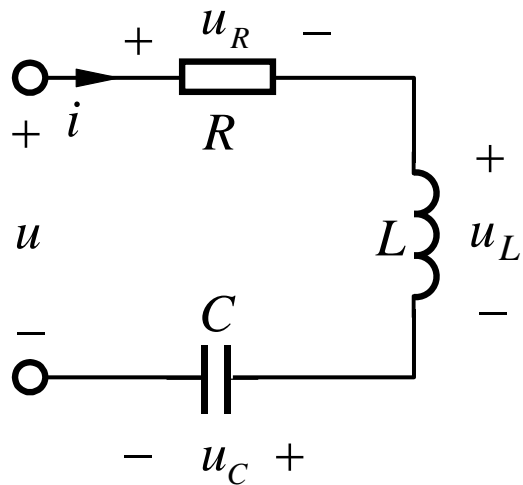
不含独立源的线性交流一端口网络：



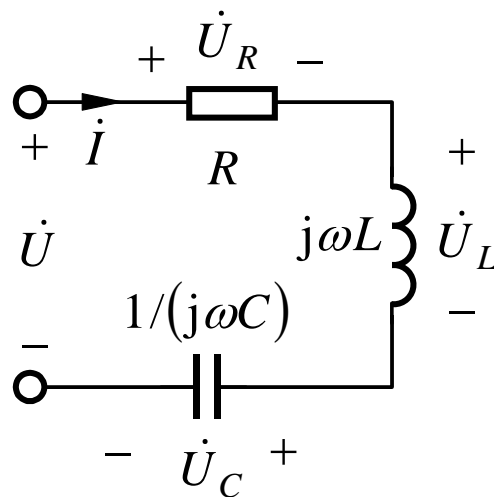
对外的等效电路是什么？

4.5 阻抗和导纳

1. 阻抗



时域模型



相量模型

根据KVL的相量形式，端口电压相量方程为

$$\begin{aligned}\dot{U} &= \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = R\dot{I} + j\omega L\dot{I} + \frac{1}{j\omega C}\dot{I} \\ &= [R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C})]\dot{I} = Z\dot{I}\end{aligned}$$

阻抗

4.5 阻抗和导纳

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = Z \dot{I} \longrightarrow \text{相量形式的欧姆定律}$$

Z 与 RLC 的关系:

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j(X_L + X_C) = R + jX = |Z| \angle \varphi$$

阻抗

电阻

电抗

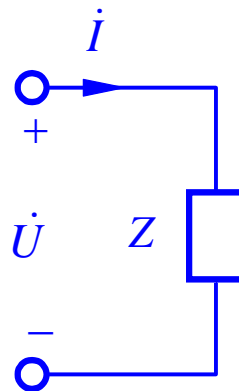
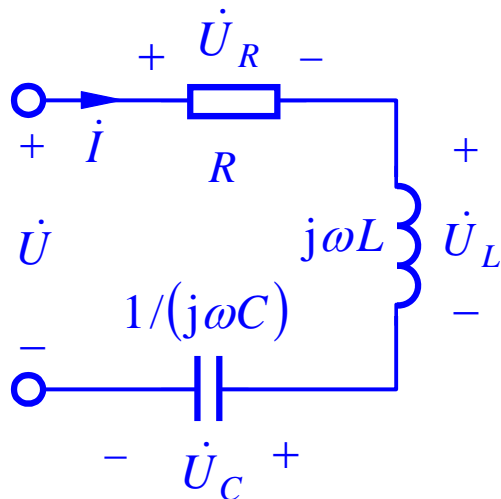
$$X = X_L + X_C$$

阻抗模

$$|Z| = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2}$$

阻抗角

$$\varphi = \arctan \frac{X_L + X_C}{R}$$



4.5 阻抗和导纳

Z 与端口 UI 关系: $Z = \frac{\dot{U}}{\dot{I}} = \frac{U \angle \psi_u}{I \angle \psi_i} = \frac{U}{I} \angle (\psi_u - \psi_i) = |Z| \angle \varphi$

$$\frac{U}{I} = |Z| \quad \psi_u - \psi_i = \varphi \quad \varphi = \arctan \frac{X_L + X_C}{R}$$

$X_L > |X_C|$ 时阻抗角 $\varphi > 0$

电压 u 超前于电流 i , R 、 L 、 C 串联电路呈现感性;

$X_L < |X_C|$ 时阻抗角 $\varphi < 0$

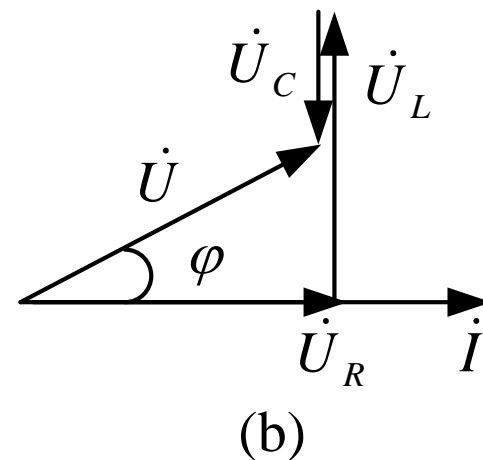
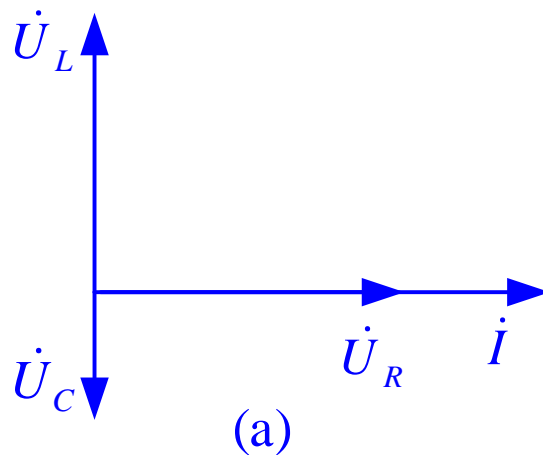
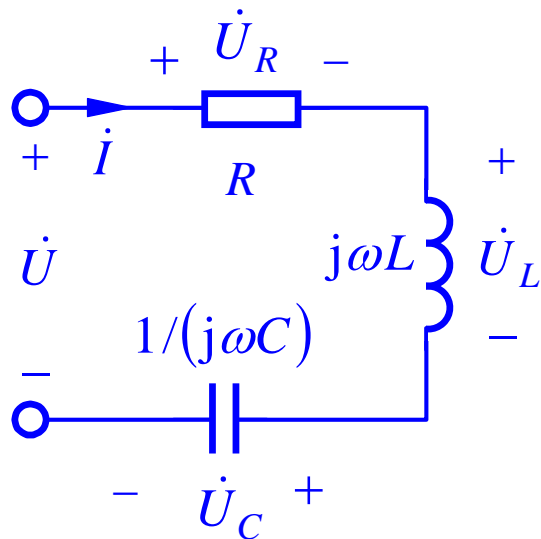
电压 u 滞后于电流 i , R 、 L 、 C 串联电路呈现容性;

$X_L = |X_C|$ 时阻抗角 $\varphi = 0$

电压 u 与电流 i 同相, R 、 L 、 C 串联电路呈现阻性。

4.5 阻抗和导纳

相量图

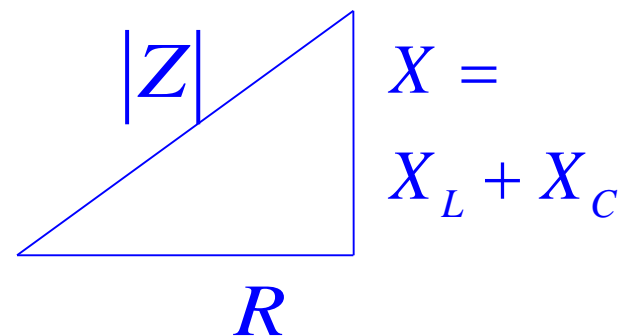
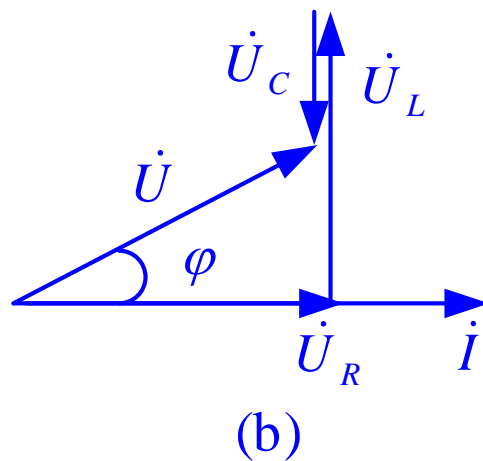
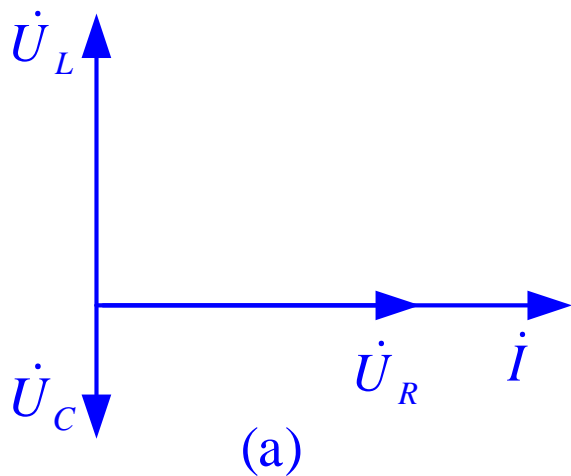


$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

R 、 L 、 C 串联电路电压相量图组成直角三角形，它与阻抗三角形相似。

4.5 阻抗和导纳



$$\dot{U}_R = R\dot{I}$$

$$\dot{U}_L = j\omega L\dot{I} = jX_L\dot{I}$$

$$\dot{U}_C = \frac{1}{j\omega C}\dot{I} = jX_C\dot{I}$$

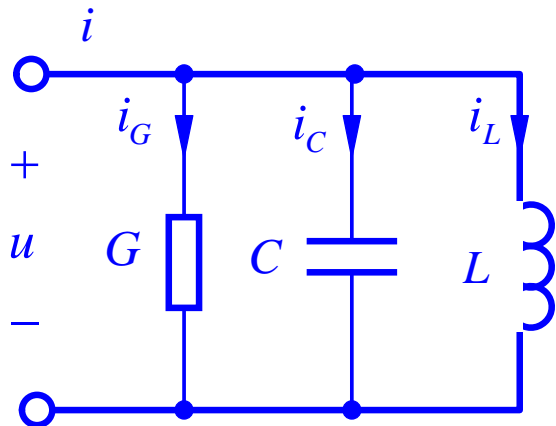
$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C$$

有效值的关系

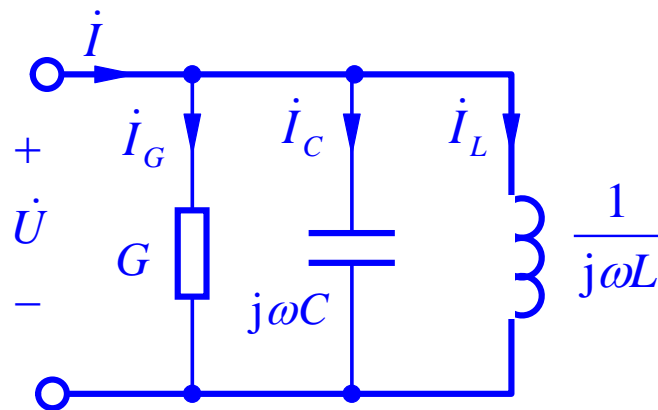
$$U = \sqrt{U_R^2 + (U_L - U_C)^2}$$

4.5 阻抗和导纳

2. 导纳



(a)



(b)

将 GCL 并联电路的时域模型变换成相量模型

KCL方程相量形式

$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L = G\dot{U} + j\omega C\dot{U} + \frac{1}{j\omega L}\dot{U} = [G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})]\dot{U}$$

$$Y = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + j(B_C + B_L) = G + jB = |Y| \angle \varphi_Y$$

导纳

电导

容纳

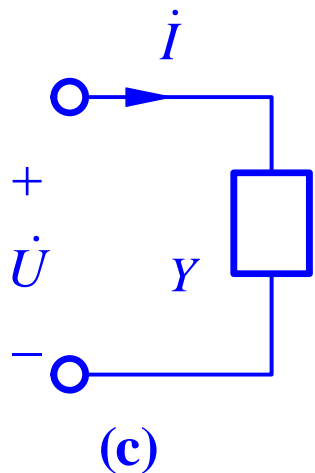
感纳

电纳

导纳角

4.5 阻抗和导纳

*GCL*并联等效



$$Y = G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L}) = G + j(B_C + B_L) = G + jB = |Y| \angle \varphi_Y$$

$$|Y| = \sqrt{G^2 + (B_C + B_L)^2} \quad \varphi_Y = \arctan \frac{B_C + B_L}{G}$$

$$\dot{I} = [G + j(\omega C - \frac{1}{\omega L})] \dot{U} = Y \dot{U} \quad \longrightarrow \quad \text{欧姆定律另一相量形式}$$

$$Y = \frac{\dot{I}}{\dot{U}} = \frac{I \angle \psi_i}{U \angle \psi_u} = \frac{I}{U} \angle (\psi_i - \psi_u) = |Y| \angle \varphi_Y$$

$$\frac{I}{U} = |Y| \quad \psi_i - \psi_u = \varphi_Y$$

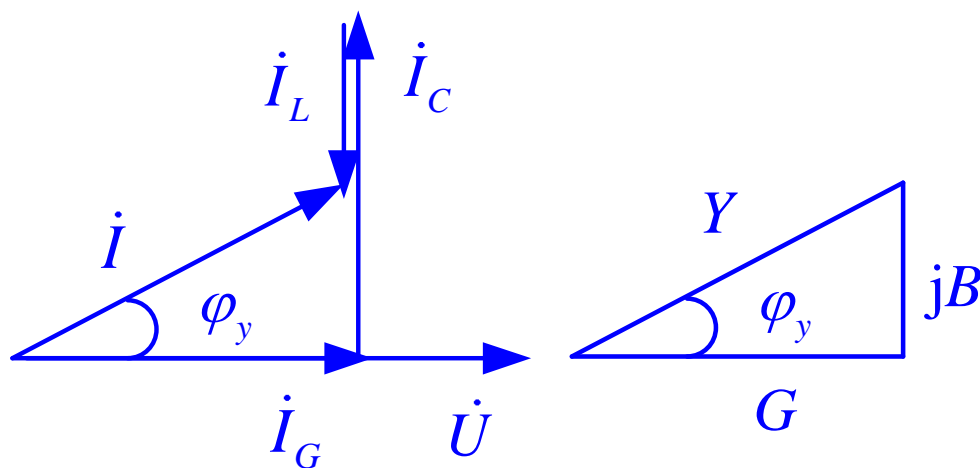
4.5 阻抗和导纳

$|B_L| > B_C$ 时 $\varphi_Y < 0$

端口电流滞后于电压，
 GCL 并联电路呈现感性；
 GCL 并联电路的相量图

$|B_L| < B_C$ 时 $\varphi_Y > 0$

端口电流超前于电压，
 GCL 并联电路呈现容性。



$$\dot{I} = \dot{I}_G + \dot{I}_C + \dot{I}_L$$

$$I = \sqrt{I_G^2 + (I_C - I_L)^2}$$

阻抗与导纳之间的关系 $Z = \frac{1}{Y}$

阻抗和导纳是相量吗？

[书例4.7]

电阻 $R=15\ \Omega$ 、电感 $L=12\text{mH}$ 的线圈与 $C=5\ \mu\text{F}$ 的电容器相串联，接在电压 $u=100\cos 5000t\ \text{V}$ 的电源上。求电流 i 、电容器端电压 u_C 和线圈端电压 u_W 。

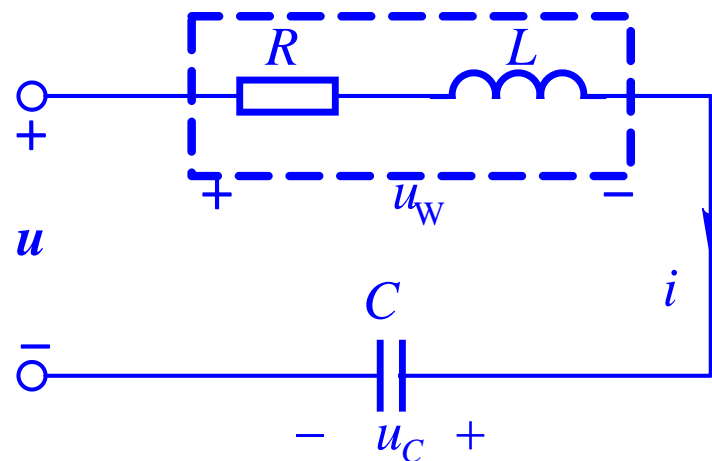
【解】 R 、 L 、 C 串联阻抗为

$$\begin{aligned} Z &= R + j(\omega L - \frac{1}{\omega C}) = 15\Omega + j[5000 \times 12 \times 10^{-3} - \frac{1}{5000 \times 5 \times 10^{-6}}]\Omega \\ &= 25\angle 53.1^\circ \Omega = (15 + j20)\Omega \end{aligned}$$

电流相量和瞬时表达式分别为

$$\dot{I}_m = \frac{\dot{U}_m}{Z} = \frac{100\angle 0^\circ \text{V}}{25\angle 53.1^\circ \Omega} = 4\angle -53.1^\circ \text{A}$$

$$i = 4\cos(\omega t - 53.1^\circ) \text{A}$$



[书例4.7]

电容电压相量和瞬时表达式

$$\dot{U}_{C_m} = jX_C \dot{I}_m = -j40 \times 4 \angle -53.1^\circ = 160 \angle -143.1^\circ \text{ V}$$

$$u_C = 160 \cos(\omega t - 143.1^\circ) \text{ V}$$

线圈看成 RL 串联，其阻抗

$$Z_W = R + j\omega L = (15 + j60)\Omega = 62 \angle 76^\circ \Omega$$

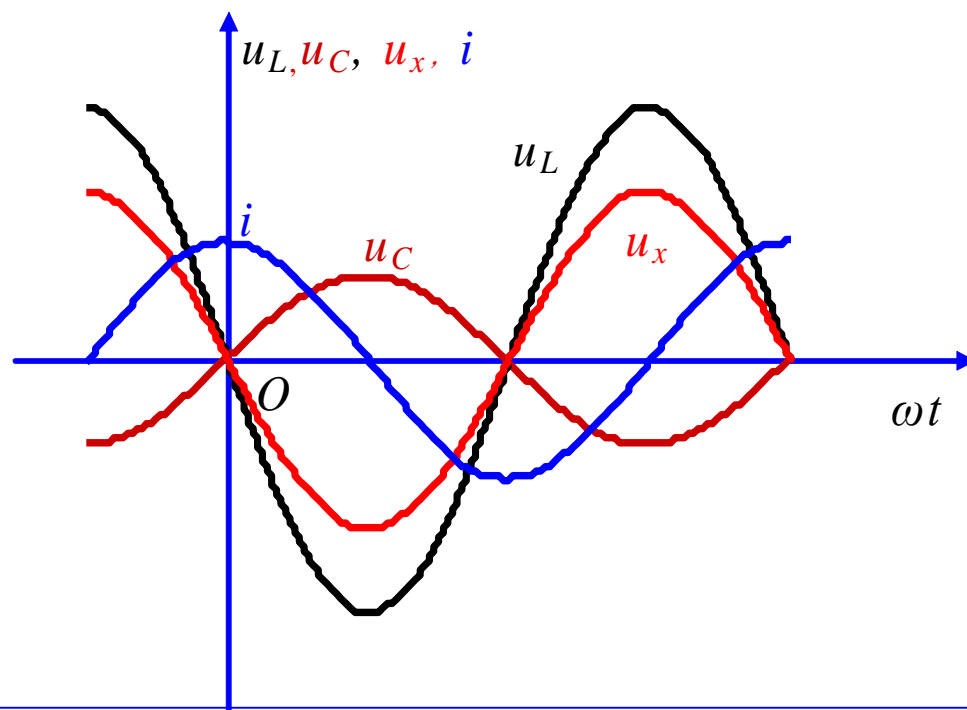
线圈电压相量和瞬时表达式

$$\dot{U}_m = Z_W \dot{I}_m = 62 \angle 76^\circ \times 4 \angle -53.1^\circ = 248 \angle 22.9^\circ \text{ V}$$

$$u_W = 248 \cos(\omega t + 22.9^\circ) \text{ V}$$

[书例4.7]

*RLC*串联电路的波形



说明：以 i 为参考正弦量， u_L 比 i 超前 90° ， u_C 比 i 滞后 90° 。将电感和电容串联部分的电压称为电抗电压，用 $u_X = u_L + u_C$ 来表示。 u_L 和 u_C 相位相反，电抗电压 u_{mX} 的振幅 u_X 应等于 u_L 和 u_C 振幅之差。

4.5 阻抗和导纳

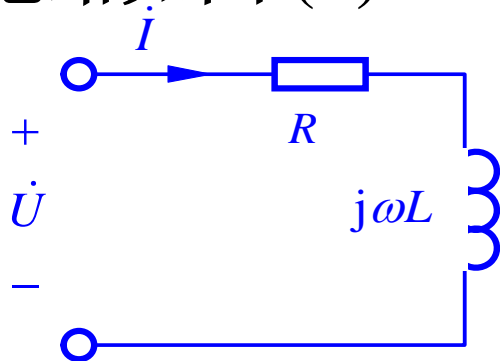
若 $Z = R + j\omega L$

$$\text{则 } Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{R + j\omega L} = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} - j \frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} = G + jB$$

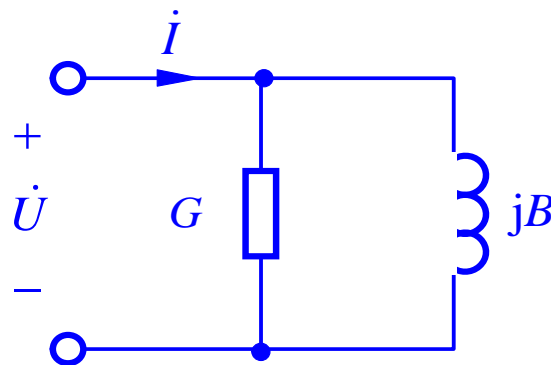
$$G = \frac{R}{R^2 + \omega^2 L^2} \neq \frac{1}{R}$$

$$B = -\frac{\omega L}{R^2 + \omega^2 L^2} \neq \frac{1}{\omega L}$$

等效电路如图 (b)。



(a)



(b)

说明： Y 与 Z 等效是在某一频率下求出的，故等效的 Z 或 Y 与频率有关。

[书例4.8]

GCL 并联电路中 $G=2\text{mS}$, $L=1\text{H}$, $C=1\mu\text{F}$ 。试在频率为 50Hz 和 400Hz 两种情况下求其串联等效电路的参数。

【解】 GCL 并联电路的导纳为 $Y = G + j[\omega C - 1/(\omega L)]$

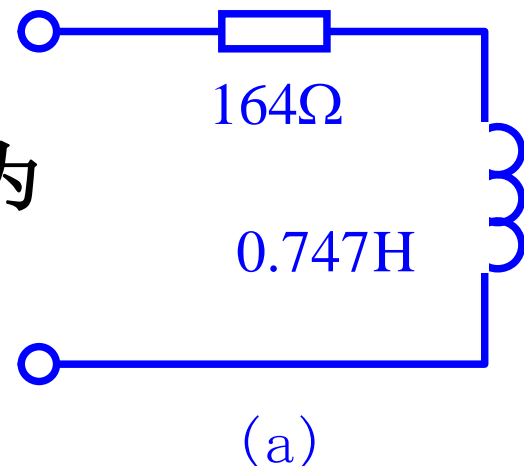
$$\text{其等效阻抗 } Z = \frac{1}{Y} = \frac{1}{G + j[\omega C - 1/(\omega L)]}$$

$$f=50\text{Hz时} \quad \omega = 2\pi f = 100\pi \text{ rad/s}$$

$$Z = \frac{1}{2 \times 10^{-3} \text{ S} + j[100\pi \times 10^{-6} - 1/(100\pi \times 1)] \text{ S}} \approx (164 + j235) \Omega$$

虚部为正，呈电感性，其等效电感为

$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{235 \Omega}{(100\pi) \text{ s}^{-1}} \approx 0.747 \text{ H}$$



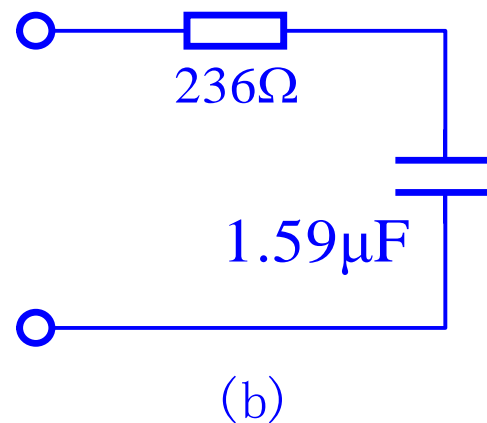
[书例4.8]

$$f=400\text{Hz时 } \omega = 800\pi\text{rad/s}$$

$$Z = \frac{1}{2 \times 10^{-3}\text{S} + \text{j}[800\pi \times 10^{-6} - 1/(800\pi \times 1)]\text{S}} \approx (236 - \text{j}250)\Omega$$

虚部为负，呈电容性质，等效电容为

$$C = -\frac{1}{\omega X_C} = -\frac{1}{(800\pi)\text{s}^{-1} \times (-250)\Omega} \approx 1.59\mu\text{F}$$



一个实际电路在不同频率下的等效电路，不仅其电路参数不同，甚至连元件类型也可能发生改变。这说明经过等效变换求得的等效电路只是在一定频率下才与变换前的电路等效。