Chapter 4

正则语言的性质

4.1 证明语言的非正则性

4.1.1 泵引理 (Pumping Lemma)

这里给出正则语言的一个必要条件, 即"泵引理". 如果一个语言是正则的, 则一定满足泵引理.

示例

$L_{01} = \{0^n1^n | n \geq 0\}$ 是否是正则语言?

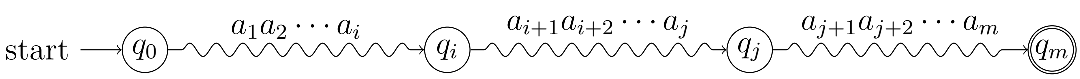
定理 1. *(正则语言的泵引理) 若语言 L 是正则的, 则存在一个正整数 (常数) N, 对于任何 $w \in L$, 只要 $|w| \geq N$, 则可以把 w 分为三部分 $w = xyz$ 使得*

(1) $y \neq \varepsilon$; (或 $|y| > 0$)

(2) $|xy| \leq N$;

(3) 对任何 $k \geq 0$, 有 $xy^kz \in L$.

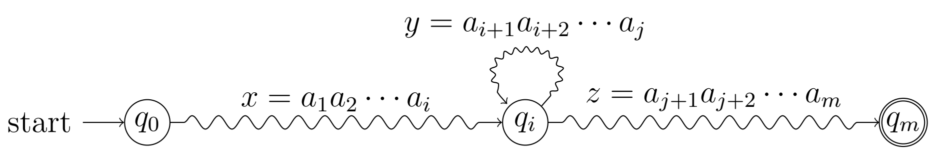
证明. 如果 L 是正则的, 则存在 DFA A, $L = \mathbf{L}(A)$. 设 A 有 n 个状态, 对于长度不小于 n 的串 $w = a_1a_2 \cdots a_m$ $(m \geq n)$, 定义 $q_i = \hat{\delta}(q_0, a_1a_2 \cdots a_i)$ $(i = 1, \cdots, n)$, q_0 是开始状态. 当 A 输入 w 的前 n 个字符时, 经过的状态分别是 $q_0, q_1, \cdots, q_n$ 共 $n+1$ 个, 根据鸽巢原理, 一定有两个状态相同, 即有满足 $0 \leq i < j \leq n$ 的两个状态 $q_i = q_j$.



则 w 可以被分为三个部分:

$$x = a_1a_2 \cdots a_i$$
$$y = a_{i+1}a_{i+2} \cdots a_j$$
$$z = a_{j+1}a_{j+2} \cdots a_m$$

如果从 q_i 出发, 输入 y, 会到达 q_j, 而因为 $q_i = q_j$, 当输入 $y^k (k \geq 0)$, 始终会回到 q_i. 所以当 DFA A 输入 xy^kz 时, 由 q_0 始终会达到 q_m. 那么, 如果 $xyz \in \mathbf{L}(A)$, 有 $xy^kz \in \mathbf{L}(A)$ 对所有 $k \geq 0$ 成立.



又因为 $i < j$ 所以 $y \neq \varepsilon$(即 $|y| > 0$), 并且因为 i 和 j 取自 w 的前 n 个字符, 所以 $|xy| \leq n$. □

解释: 任何从开始状态到接受状态的路径, 如果长度超过 n, 一定会经过 $n+1$ 个状态, 必定有一个重复状态, 因此会形成一个循环 (loop); 那么, 这个循环可以被重复多次, 还会到达接收状态.

泵引理中的 N, 是正则语言固有存在的, 可以近似的看做是状态的个数.

泵引理可以用来确定特定语言不在给定语言类 (正则语言) 中. 但是它们不能被用来确定一个语言在给定类中, 因为满足引理是类成员关系的必要条件, 但不是充分条件.

4.1.2 泵引理的应用

$\{0^n x 1^n \mid n \geq 1, x \in \{0,1\}^*\}$

示例

证明 L_{eq} ={w | w 由数量相等的 0 和 1 构成} 不是正则的.

(思考: 能否使用 L_{eq} 的一个子集 $L_{01} = \{0^n1^n|n \geq 0\}$ 说明 L_{eq} 不是正则的?)

不能

证明. 假设 L_{eq} 是正则的, 则一定存在正整数 N, 对任何 $w \in L_{eq}(|w| \geq N)$ 满足泵引理.

取 $w = 0^N1^N$, 则显然 $w \in L_{eq}$; 又因为 $|w| = 2N > N$,

那么有 $w = xyz$, 且 $|xy| \leq N$, $|y| > 0$; 那么 y 一定是 0^m $(m = |y| > 0)$;

根据泵引理 $xy^2z \in L_{eq}$, 但是 $xy^2z = 0^{N+m}1^N$, 则显然 $xy^2z \notin L_{eq}$;

因此与假设矛盾, 所以 L_{eq} 一定不是正则的. □

示例

证明 $L = \{0^i1^j \mid i > j\}$ 不是正则的.

证明. 假设 L 是正则的, 则一定存在正整数 N, 对任何 $w \in \mathbf{L}(|w| \geq N)$ 满足泵引理.

取 $w = 0^{N+1}1^N$, 所以 $w \in L$; 因为 $|w| = 2N + 1 > N$,

那么有 $w = xyz$, 且 $|xy| \leq N$, $|y| > 0$, 这里设 $|y| = m$, 那么有 $m > 0$;

根据泵引理 $xy^kz \in L$ $(k > 0)$; 但是当 $k = 0$ 时, $xy^kz = xz = 0^{N+1-m}1^N$, 而 $N + 1 - m \leq N$, 所以 $xz \notin L$;

因此与假设矛盾, 所以 L 一定不是正则的. □

示例 2^n. n^2. n^3. n是素数

证明 $L = \{a^{n!} \mid n > 0\}$ 不是正则的.

取 $w = a^{N!}$, 当 $|y| = m$ 时, 则 $|xy^2z| = N! + m$, 而 $0 < m < N$, 所以 $N! < |xy^2z| = N! + m < N! + N! < N \cdot N! + N! = (N+1)!$, 即 $|xy^2z|$ 不是阶乘数.

注意: 对于有限的语言, 比如 $\emptyset$, $\{00, 11\}$, $\{0^n1^n \mid 0 \leq n \leq 100\}$ 泵引理如何解释.

4.1.3 泵引理只是必要条件

“正则语言的泵引理”是正则语言的必要条件, 即“正则 $\Rightarrow$ 泵引理成立”, 所以“$\neg$ 泵引理成立 $\Rightarrow$ $\neg$ 正则”. 但是否有与正则语言等价的条件呢, 有, 即“Myhill-Nerode Theorem”.

示例

下面的语言, 每个串都可以应用泵引理, 却不是正则的

$$\{\$a^nb^n \mid n \geq 1\} \cup \{\$^k w \mid k \neq 1, w \in \{a, b\}^*\}$$

后一部分是正则的, 因此可以应用泵引理. 而前一部分不是正则的, 但每个串都可以利用 \$ 符号泵到后一部分中.

4.2 正则语言的封闭性

如果语言类在某些特定的运算下保持封闭, 称为这个语言类的封闭性 *(closure property)*. 正则语言的封闭性: 正则语言类中, 从某些语言经过某些运算, 得到某个语言 L, 并保持 L 还是正则的.

4.2.1 布尔运算下的封闭性

定理 2. *正则语言在并, 连接和克林闭包运算下保持封闭.*

证明. 由正则表达式的定义得证. □

定理 3. *正则语言在补运算下封闭. 即: 如果 L 是字母表 Σ 上的正则语言, 即 $L \subseteq \Sigma^*$, 则 $\overline{L} = \Sigma^* - L$ 也是正则的.*

证明. 设 DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ 识别 L, 即 $L = \mathbf{L}(A)$. (注意 A 对不接受的输入要有 *dead state*.) 那么构造 DFA $B = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q - F)$, 则 $\overline{L} = \mathbf{L}(B)$. 因为任何 $w \notin L$, $\hat{\delta}(q_0, w) \notin F$. □

示例

证明 L_{neq} =$\{w \mid w$ 由数量不相等的 0 和 1 构成$\}$ 不是正则的.

由泵引理很难直接证明 L_{neq} 不是正则的, 无论如何取 w, 都无法将其打断为 $w = xyz$ 形式, 并利用 y 产生不属于 L_{neq} 的串.

而 $L_{neq} = \overline{L_{eq}}$, 而 L_{eq} 不是正则的很容易证明 (当然, 前面已经证明), 所以 L_{neq} 不是正则的.

定理 4. *正则语言在交运算下封闭.*

证明 1. 由 $L_1 \cap L_2 = \overline{\overline{L_1} \cup \overline{L_2}}$ 得证. □

证明 2. 设 DFA $A_1 = (Q_1, \Sigma, \delta_1, q_1, F_1)$ 和 DFA $A_2 = (Q_2, \Sigma, \delta_2, q_2, F_2)$ 分别识别 L_1 和 L_2, 则构造 DFA B

$$B = (Q_1 \times Q_2, \Sigma, \delta, [q_1, q_2], F_1 \times F_2)$$

其中

$$\delta([p_1, p_2], a) = [\delta(p_1, a), \delta(p_2, a)]$$

还需证明构造是否正确, 即 $\mathbf{L}(B) = L_1 \cap L_2$, 此处略. □

示例

$L_{01} = \mathbf{L}\{0^*1^*\} \cap L_{eq}$ 若已知 L_{01} 是非正则的和 0^*1^* 是正则的, 这可以说明 L_{eq} 是非正则的. (为什么又可以用 L_{eq} 的子集说明 L_{eq} 非正则了?)

定理 5. *正则语言在差运算下封闭. 如果 L 和 M 是正则语言, 那么 $L - M$ 也是正则的.*

证明. 因为 $L - M = L \cap \overline{M}$, 得证. □

4.2.2 反转 (Reverse)

如果串 $w = a_1a_2\cdots a_n$, 称 $a_na_{n-1}\cdots a_1$ 为 w 的反转 (*reverse*), 用 w^R 表示. 例如 $00110^R = 01100$, $\varepsilon^R = \varepsilon$. 如果 L 是一个语言, 则定义 $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$.

定理 6. *如果 L 是正则的, 那么 L^R 也是正则的.*

证明. 我们证明命题 "正则表达式 E, $L = \mathbf{L}(E)$, 则存在正则表达式 E^R 使得 $(\mathbf{L}(E))^R = \mathbf{L}(E^R)$".

由正则表达式的定义, 对 E 的结构进行归纳:

首先, 如果 E 分别是 ε, $\emptyset$ 或 a, 则分别对它们去反转, $\varepsilon^R = \varepsilon$, $\emptyset^R = \emptyset$ 和 $a^R = a$, 所以分别都存在 E^R 且 $(\mathbf{L}(E))^R = \mathbf{L}(E^R)$.

其次, 对 E 所有可能三种递归的结构, 有:

(1) 如果 E 的结构是 $E = E_1 + E_2$, 则由归纳假设, 存在 E_1^R 和 E_2^R 分别有 $(\mathbf{L}(E_1))^R = \mathbf{L}(E_1^R)$ 和 $(\mathbf{L}(E_2))^R = \mathbf{L}(E_2^R)$, 那么构造 $E^R = E_1^R + E_2^R$ 则 $\mathbf{L}(E^R) = \mathbf{L}(E_1^R) \cup \mathbf{L}(E_2^R) = (\mathbf{L}(E_1))^R \cup (\mathbf{L}(E_1))^R = (\mathbf{L}(E_1) \cup \mathbf{L}(E_2))^R = (\mathbf{L}(E))^R$;

(2) 如果 E 的结构是 $E = E_1E_2$, 则构造 $E^R = E_2^RE_1^R$; 而任意两个串 w_1 和 w_2, 有 $(w_1w_2)^R = w_2^Rw_1^R$, 反之亦然, 因此有 $(\mathbf{L}(E_1E_2))^R = \mathbf{L}(E_2^RE_1^R)$;

(3) 如果 E 的结构是 $E = E_1^*$, 则构造 $E^R = (E_1^R)^*$; 因为任意 $w \in \mathbf{L}(E_1^*)$, 可以看做是 n 个串 $w_i \in \mathbf{L}(E_1)(i = 1, 2, \ldots, n)$ 的连接, 即 $w = w_1w_2\cdots w_n$, 则 $w^R = w_n^Rw_{n-1}^R\cdots w_1^R$, 而其中 $w_i^R \in \mathbf{L}(E_1^R)$, 所以 $w^R \in \mathbf{L}((E_1^R)^*)$, 反之亦然, 所以 $(\mathbf{L}(E_1^*))^R = \mathbf{L}((E_1^R)^*)$.

因此, 命题成立, 因此 L^R 也是正则语言. □

也可以通过 L 的 DFA 构造 L^R 的 ε-NFA 证明.

4.2.3 同态 (Homomorphism)

设 Σ 和 Γ 为两个字母表, 首先, 定义同态为函数 $h : \Sigma \mapsto \Gamma^*$, 即每个字符 $a \in \Sigma$, 在 h 的作用下, 替换为 Γ 上的一个串. 其次, 扩展同态函数为 $h : \Sigma^* \mapsto \Gamma^*$, 如果 Σ^* 中的串 $w = a_1a_2\cdots a_n$, 则 $h(w) = h(a_1)h(a_2)\cdots h(a_n)$. 再扩展 h 到语言, 若 L 是字母表 Σ 上一个语言, 则 $h(L) = \{h(w) \mid w \in L\}$.

示例

设 $\Sigma = \{0, 1\}$, $\Gamma = \{a, b\}$, 若同态函数为 $h(0) = ab$, $h(1) = \varepsilon$, 则串 0011 在 h 的作用下 $h(0011) = h(0)h(0)h(1)h(1) = abab\varepsilon\varepsilon = abab$.

对于正则表达式, 则定义 $h(E)$ 为, 将 E 中的每个符号替换后得到的表达式, 即:

$$\begin{array}{ll} h(\emptyset)=\emptyset & h(rs)=h(r)h(s) \\ h(\varepsilon)=\varepsilon & h(r+s)=h(r)+h(s) \\ h(a)=h(a) & h(r^*)=(h(r))^* \end{array}$$

示例

续上例, 语言 $L=1^*0+0^*1$, 在上例的同态 h 的作用下, 那么 $h(1^*0+0^*1)=(h(1))^*h(0)+(h(0))^*h(1)=(\varepsilon)^*(ab)+(ab)^*(\varepsilon)=(ab)^*$.

定理 7. 如果 L 是字母表 Σ 上的正则语言, h 是 Σ 上的一个同态, 则 $h(L)$ 也是正则的.

证明. 设 E 是正则表达式, 往证: $h(\mathbf{L}(E))=\mathbf{L}(h(E))$.

对 E 的结构进行归纳, 首先, $\mathbf{L}(\varepsilon)=\varepsilon$, $\mathbf{L}(\emptyset)=\emptyset$, 以及若 $E=a$, $(a\in\Sigma)$, 则 $h(\mathbf{L}(E))=h(\mathbf{L}(a))=h(\{a\})=\{h(a)\}=\mathbf{L}(h(E))$, 所以对 ε, $\emptyset$ 和 $\forall a\in\Sigma$ 命题成立.

对 E 可能的三种递归结构, 分别有:

(1) 如果 $E=F+G$:

$$\begin{array}{rcll} h(\mathbf{L}(E)) & = & h(\mathbf{L}(F)\cup\mathbf{L}(G)) & \text{正则表达式定义} \\ & = & h(\mathbf{L}(F))\cup h(\mathbf{L}(G)) & h\ \text{作用在每个集合的串上} \\ & = & \mathbf{L}(h(F))\cup\mathbf{L}(h(G)) & \text{归纳假设} \\ & = & \mathbf{L}(h(F)+h(G)) & \text{正则表达式的定义} \\ & = & \mathbf{L}(h(F+G)) & h(E)\ \text{的定义, 仅替换} \\ & = & \mathbf{L}(h(E)) & \end{array}$$

(2) 如果 $E=FG$:

$$\begin{array}{rcll} h(\mathbf{L}(E)) & = & h(\mathbf{L}(F)\mathbf{L}(G)) & \text{正则表达式的定义} \\ & = & h(\mathbf{L}(F))h(\mathbf{L}(G)) & \heartsuit \\ & = & \mathbf{L}(h(F))\mathbf{L}(h(G)) & \text{归纳假设} \\ & = & \mathbf{L}(h(F)h(G)) & \text{正则表达式的定义} \\ & = & \mathbf{L}(h(FG)) & h(E)\ \text{的定义, 仅替换字符} \\ & = & \mathbf{L}(h(E)) & \end{array}$$

$\heartsuit$: $h(a_1\cdots a_nb_1\cdots b_m)=h(a_1)\cdots h(b_m)=h(a_1\cdots a_n)h(b_1\cdots b_m)$

(3) 如果 $E=F^*$

略. (提示: 任意 $w\in F^*$ 可以看做 $w=w_1w_2\cdots w_n$, 其中 $w_i\in F$.)

□

4.2.4 逆同态 (Inverse homomorphism)

若 h 是字母表 Σ 到字母表 Γ 的同态, 并且 L 是 Γ 上的一个语言, 那么使 $h(w)\in L$ 的 w $(w\in\Sigma^*)$ 的集合, 称为语言 L 的 h 逆, 记为 $h^{-1}(L)$, 即

$$h^{-1}(L)=\{w\,|\,h(w)\in L\}$$

定理 8. 如果 h 是字母表 Σ 到字母表 Γ 的同态, L 是 Γ 上的正则语言, 那么 $h^{-1}(L)$ 也是正则语言.

证明. 设接受 L 语言的 DFA $M=(Q,\Gamma,\delta,q_0,F)$, 构造 DFA $M'=(Q',\Sigma,\delta',q_0,F)$, 其中 $\delta'(q,a)=\hat{\delta}(q,h(a))$.

往证 $\hat{\delta}'(q,w)=\hat{\delta}(q,h(w))$. 对 $|w|$ 归纳, 归纳基础:

$$\hat{\delta}'(q,\varepsilon)=q=\hat{\delta}(q,h(\varepsilon))=\hat{\delta}(q,\varepsilon)$$

归纳递推: 若 $w=xa$, 则

$$\begin{aligned}\hat{\delta}'(q,xa) &= \delta'(\hat{\delta}'(q,x),a)\\ &= \delta'(\hat{\delta}(q,h(x)),a)\\ &= \hat{\delta}(\hat{\delta}(q,h(x)),h(a))\\ &= \hat{\delta}(q,h(x)h(a))\\ &= \hat{\delta}(q,h(xa))\end{aligned}$$

所以任意串 w, $\hat{\delta}'(q_0,w)=\hat{\delta}(q_0,h(w))$, 即 w 被 M' 接受当且仅当 $h(w)$ 被 M 接受, 即 M' 是识别 $h^{-1}(L)$ 的 DFA, 因此是正则的. □

4.3 正则语言的判定性质

正则 (或任何) 语言, 典型的 3 个判定问题:

(1) 所描述的语言是否为空?

(2) 某个特定的串 w 是否属于所描述的语言?

(3) 语言的两种描述, 是否实际上描述的是同一语言? (即语言的等价性)

要回答这样的问题, 我们想知道, 具体的算法, 是否存在.

4.3.1 空性, 有穷性和无穷性 (Emptiness, finiteness and infiniteness)

正则语言的空, 有穷和无穷, 可以通过如下定理来判定.

定理 9. *具有 n 个状态的有穷自动机 M 接受的串的集合 S:*

(1) S 是非空的, 当且仅当 M 接受某个长度小于 n 的串;

(2) S 是无穷的, 当且仅当 M 接受某个长度为 m 的串, $n \le m < 2n$.

证明. (1) ($\Rightarrow$) 如果 S 非空, 则 M 接受某个串, w 是 M 接受的串中长度最小的串之一, 那么一定有 $|w|<n$, 因为如果 $|w|\ge n$, 由泵引理 $w=xyz$, 那么 xz 是 M 接受的一个更短的串. ($\Leftarrow$) 显然.

(2) ($\Leftarrow$) 如果 $w\in\mathbf{L}(M)$ 且 $n\le|w|<2n$, 由泵引理, S 是无穷的. ($\Rightarrow$, 反证法) 如果 S 是无穷的, 假设没有任何一个串, 长度是 n 到 $2n-1$; 那么假设 w 是长度 $\ge 2n$ 中最短的串之一, 由泵引理 $w=xyz$, $1\le|y|<n$, 则 $xz\in\mathbf{L}(M)$; 于是, 或者 w 不是长度 $2n$ 及以上最短的, 或者 xz 长度在 n 到 $2n-1$ 之间. 两种情况之下, 都有矛盾. □

定理的第 (1) 部分, 说明存在一个算法, 判断 $\mathbf{L}(M)$ 是否为空: 只需要检查长度小 n 的串, 是否在 $\mathbf{L}(M)$ 中; 第 (2) 部分说明, 存在一个算法, 判断 $\mathbf{L}(M)$ 是否为无穷: 只需要检查长度在 n 到 $2n-1$ 的串, 是否在 $\mathbf{L}(M)$ 中.

4.3.2 等价性

定理 10. *存在一个算法, 判定两个有穷自动机是否等价 (是否接受同一语言).*

证明. 设 M_1 和 M_2 是分别接受 L_1 和 L_2 的有穷自动机, 则 $(L_1 \cap \overline{L_2}) \cup (\overline{L_1} \cap L_2)$ 可以被某个有穷自动机接受 M_3 接受; 如果 M_3 接受某个串, 当且仅当 $L_1 \neq L_2$, 由于存在算法判断 M_3 是否空, 因此得证. □

4.4 自动机最小化

4.4.1 状态的等价性

DFA 中, 称两个状态 p 和 q 是等价的, 如果对任意串 $w \in \Sigma^*$ 满足:

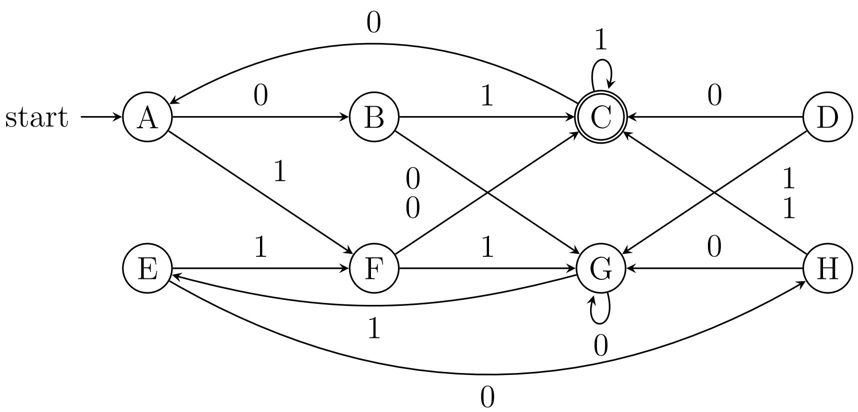
$$\hat{\delta}(p,w) \in F \Leftrightarrow \hat{\delta}(q,w) \in F$$

即, 只要对任何串 w, $\hat{\delta}(p,w)$ 和 $\hat{\delta}(q,w)$ 只需同时在 F 中或同时不在 F 中. 如果两个状态不等价, 则称为可区分的.

4.4.2 填表算法

填表算法递归的发现 DFA 中全部的可区分状态对:
基础: 如果 p 是接受状态而 q 是非接受状态, 则 $[p,q]$ 对是可区分的;
归纳: 如果某个 $a \in \Sigma$, 有 $[r = \delta(p,a), s = \delta(q,a)]$ 是可区分的, 则 $[p,q]$ 是可区分的.

示例



B	×						
C	×	×					
D	×	×	×				
E		×	×	×			
F	×	×	×		×		
G	×	×	×	×	×	×	
H	×		×	×	×	×	×
	A	B	C	D	E	F	G

由于只有 C 是接受状态, 所以 {C}×{A,B,D,E,F,G,H}={[C,A], [C,A], [C,B], [C,D], [C,E], [C,F], [C,G], [C,H]} 都是可区分的; 状态 B,H 通过字符 1 到接受状态, 而 A,D,E,F,G 通过字符 1 都到不接受状态, 因此 {B,H}×{A,D,E,F,G} 都是可区分的; 类似的, 对字符 0, 有 {D,F}×{A,B,E,G,H} 都是可区分的; 其余的再逐个检查即可.

定理 11. *如果不能通过填表算法区分两个状态, 则这两个状态是等价的.*

4.4.3 DFA 最小化

根据填表算法取得的 DFA A 状态间等价性, 将状态集进行划分, 得到不同的块; 利用块构造新的 DFA B, B 的开始状态的为包含 A 初始状态的块, B 的接受状态为包含 A 的接收状态的块, 转移函数为块之间的转移; 则 B 是 A 的最小化 DFA.

注意: 不能使用同样的方法最小化 NFA.

示例

续前例, 化简的 DFA 为