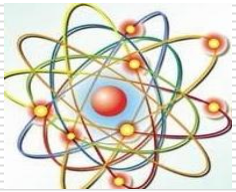
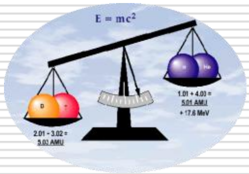




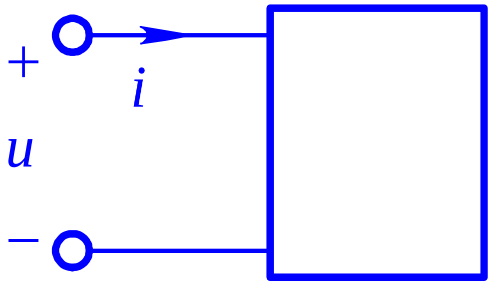
ch 4.7 正弦电流电路的功率

杨旭强
哈尔滨工业大学电气工程系

4.7 正弦电流电路的功率

基本要求：了解正弦电路瞬时功率的特点；透彻理解平均功率、无功功率、视在功率、功率因数、复功率的定义及计算；掌握*RLC* 元件功率的特点。

1. 瞬时功率



一端口网络的端口电压、电流分别为

$$u=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u)$$

$$i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$$

则一端口网络输入的瞬时功率为

$$p=ui=2UI\cos(\omega t+\psi_u)\cos(\omega t+\psi_i)$$

$$=UI\cos(\psi_u-\psi_i)+UI\cos(2\omega\, t+\psi_u+\psi_i)$$

4.7 正弦电流电路的功率

$$p = \underbrace{UI\cos(\psi_u - \psi_i)}_{①} + \underbrace{UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)}_{②}$$

$UI\cos(\psi_u - \psi_i) \geq 0$

实际吸收的能量

交换的能量，在一个周期内的平均值等于零

2. 平均功率

平均功率：一端口网络吸收的瞬时功率在一个周期内的平均值，常说的交流电路功率是指平均功率，可得

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = UI\cos(\psi_u - \psi_i) = UI\lambda$$

功率因数角 φ

功率因数

4.7 正弦电流电路的功率

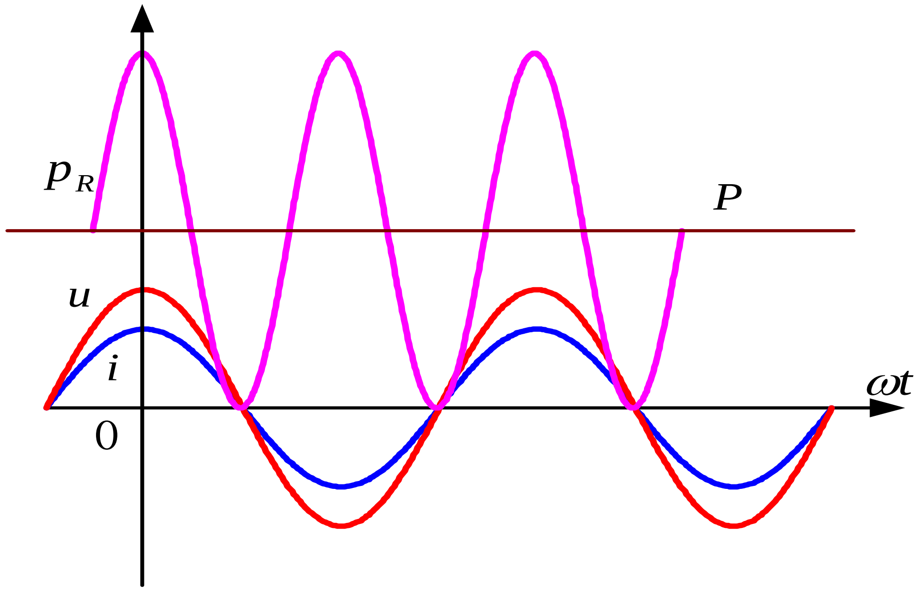
常见元件*R*、*L*、*C* 的功率（几种特殊的一端口）

(1) 电阻*R*　其上*u*与 *i* 同相，即 $\psi_u - \psi_i = 0$ 则瞬时功率

$$p_R = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

$$= UI[1 + \cos 2(\omega t + \psi_i)]$$

电阻上*u*、*i* 和*p*的波形 (初相为零)。



4.7 正弦电流电路的功率

① $p_R \geq 0$，正值电阻总是吸收功率

② 电阻的平均功率为

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t = P_R = \frac{1}{T}\int_0^T UI[1+\cos 2(\omega t+\psi_i)]\mathrm{d}t$$

$$= UI = RI^2 = GU^2$$

纯电阻 $P = UI\cos 0^{\circ} = UI$ 即 $\lambda = 1$

4.7 正弦电流电路的功率

(2) 电感*L*，其上电压 *u* 比电流 *i* 越前90°，即

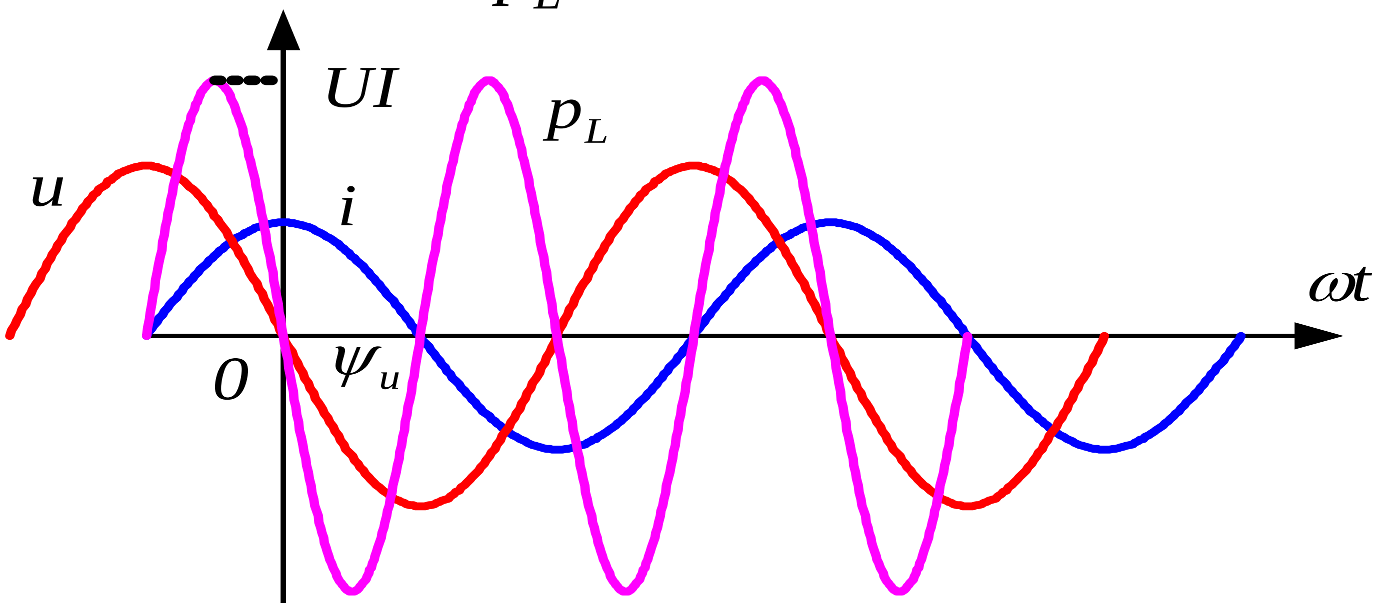
$$\psi_u - \psi_i = 90^\circ$$

瞬时功率 $p_L = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$

$$= UI\cos 90^\circ + UI\cos\left(2\omega t + 2\psi_i + 90^\circ\right)$$

$$= -UI\sin 2(\omega t + \psi_i)$$

电感上u、i和 p_L的波形



4.7 正弦电流电路的功率

结论：

① 电感吸收瞬时功率是时间的正弦函数，其角频率为 2ω 。

② p_L在一个周期内的平均值等于零，即它输入的平均功率为零，表明在一个周期内电感吸收与释放的能量相等，是无损元件。

纯电感 $P = UI\cos 90^\circ = 0$即 $\lambda = 0$

4.7 正弦电流电路的功率

(3) 电容*C*，此时端口电压*u*比电流*i* 滞后 90°，

$$\psi_u - \psi_i = -90^\circ$$ 。

$$p_C = UI\cos(\psi_u - \psi_i) + UI\cos(2\omega t + \psi_u + \psi_i)$$

$$= UI\cos(-90^\circ) + UI\cos\left(2\omega t + 2\psi_i - 90^\circ\right)$$

$$= UI\sin 2(\omega t + \psi_i)$$

结论:

① 电容吸收瞬时功率是时间的正弦函数，其角频率为 2ω 。

② p_C在一个周期内的平均值等于零，即它输入的平均功率为零，表明在一个周期内电容吸收与释放的能量相等，是无损元件。

$$\text{纯电容} P = UI\cos(-90^\circ) = 0 \text{即} \quad \lambda = 0$$

4.7 正弦电流电路的功率

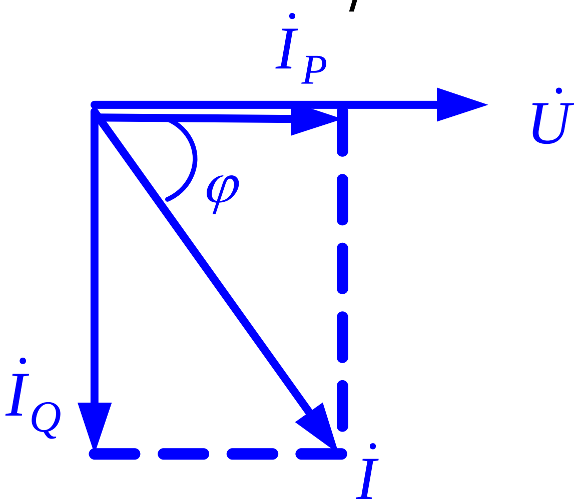
结论：在正弦电流电路中，同相位的电压与电流产生平均功率，且等于其有效值之积；而相位正交的电压与电流不产生平均功率。

$$P=\frac{1}{T}\int_0^T p\mathrm{d}t=UI\cos(\psi_u-\psi_i)=UI\lambda$$

推广：对于任意一端口（以感性一端口为例）

$$P=UI\cos\varphi=UI_P$$

感性一端口相量图



电流的有功分量

$$I_P=I\cos\varphi$$

电流的无功分量

$$I_Q=I\sin\varphi$$

4.7 正弦电流电路的功率

3. 无功功率

定义无功功率

$$Q = UI\sin\varphi$$

当阻抗为感性时，电压 ***u*** 越前于电流 ***i***，$Q>0$ 代表感性无功功率

当阻抗为容性时，电压 ***u*** 滞后于电流 ***i***，$Q<0$代表容性无功功率

电感和电容的无功功率分别为

$$Q_L = UI\sin 90^\circ = UI = I^2\omega L = I^2 X_L = U^2/(\omega L) = -U^2 B_L$$

$$Q_C = UI\sin(-90^\circ) = -UI = -I^2/(\omega C) = I^2 X_C = -U^2\omega C = -U^2 B_C$$

无功功率的单位为乏，**var**

4.7 正弦电流电路的功率

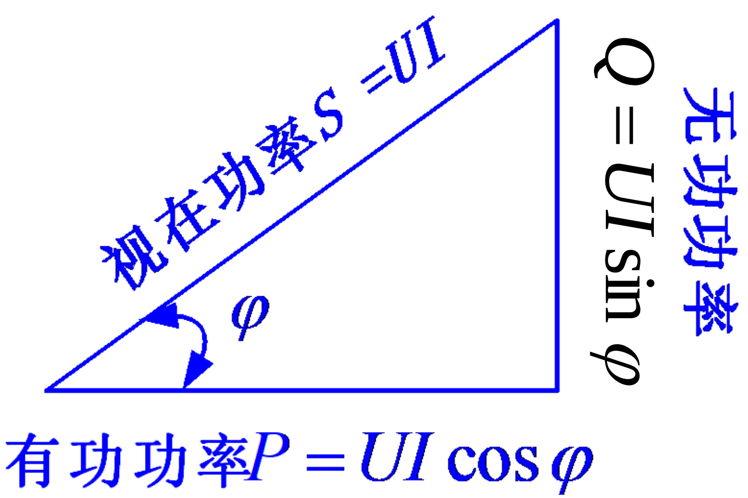
无功功率 有功功率

$$Q = UI\sin\varphi \qquad P = UI\cos\varphi$$

4 视在功率

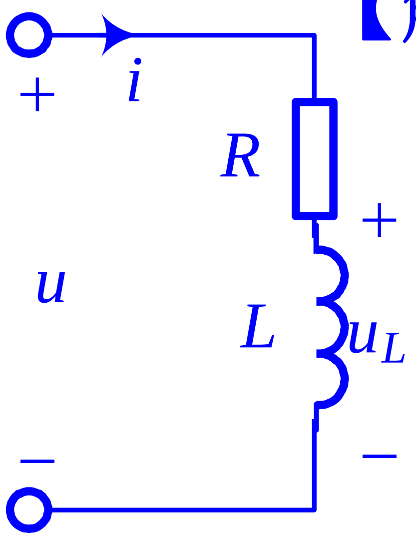
$$S = UI = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

表示电气设备容量，单位伏安（V·A）



[例4.14]

在工频条件下测得某线圈的端口电压、电流和功率分别为**100V**、**5A**和**300W**。求此线圈的电阻、电感和功率因数。



【解】$$\lambda = \cos\varphi = \frac{P}{UI} = \frac{300\text{W}}{100\text{V} \times 5\text{A}} = 0.6$$

$$\varphi = \arccos 0.6 = 53.1°$$

$$|Z| = \frac{U}{I} = \frac{100\text{V}}{5\text{A}} = 20\Omega$$

线圈电阻、感抗和电感分别为：

$$R = |Z|\cos\varphi = 20\Omega \times 0.6 = 12\Omega$$

$$X_L = |Z|\sin\varphi = 20\Omega \times 0.8 = 16\Omega$$

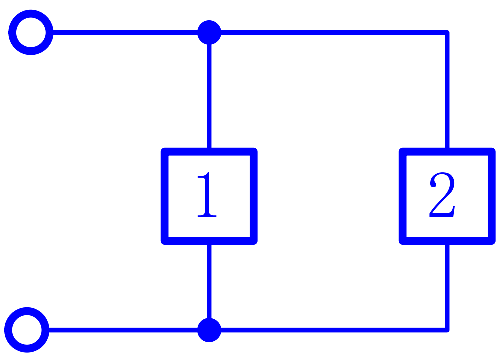
$$L = \frac{X_L}{\omega} = \frac{16\Omega}{2\pi \times 50\text{s}^{-1}} = 51\text{mH}$$

[补充4.15]

已知图示电路中负载1和2的平均功率、功率因数分别为

$P_1 = 80\,\mathrm{W}$, $\lambda_1 = 0.8$ (感性)和 $P_2 = 30\,\mathrm{W}$, $\lambda_2 = 0.6$(容性)。

试求各负载的无功功率、视在功率以及两并联负载的总平均功率、无功功率、视在功率和功率因数。



【解】 负载1和2的功率因数角分别为

$$\varphi_1 = \arccos\lambda_1 = 36.86^\circ ,$$

$$\varphi_2 = \arccos\lambda_2 = -53.13^\circ$$

负载1、2的视在功率和无功功率分别为

$$S_1 = P_1 / \lambda_1 = 80\,\mathrm{W}/0.8 = 100\,\mathrm{VA} \quad S_2 = P_2 / \lambda_2 = 30\,\mathrm{W}/0.6 = 50\,\mathrm{VA}$$

$$Q_1 = S_1 \sin\varphi_1 = 60\,\mathrm{var} \qquad Q_2 = S_2 \sin\varphi_2 = -40\,\mathrm{var}$$

[补充4.15]

平均功率和无功功率分别守恒，

两并联负载的总平均功率 $P = P_1 + P_2 = 110\text{W}$

无功功率 $Q = Q_1 + Q_2 = 20\,\text{var}$

视在功率

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 111.8\text{VA}$$

功率因数

$$\lambda = P / S = 0.98$$

5 功率因数的提高

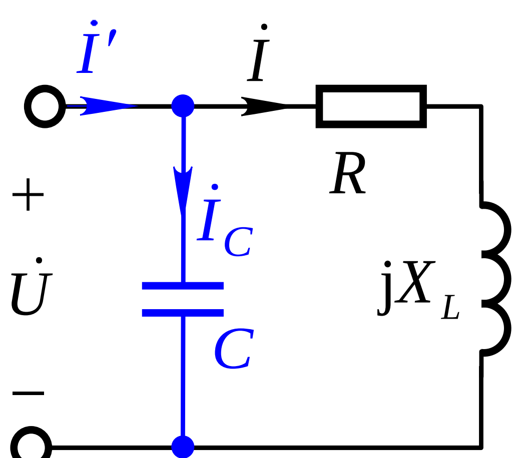
提高功率因数的意义：

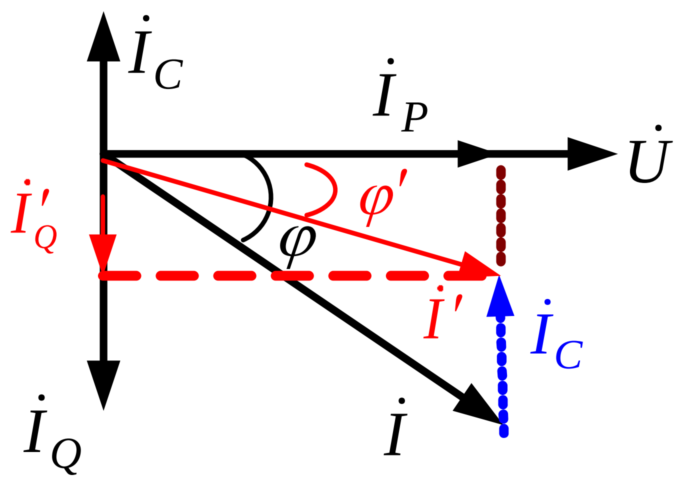
① 通过减少线路电流来减小线路损耗；

② 提高发电设备利用率。

原理：利用电场能量与磁场能量的相互转换，或者说利用容性无功与感性无功的相互补偿，来减少电源输出电流的无功分量，从而减小电源的无功功率。

原则：确保负载正常工作。



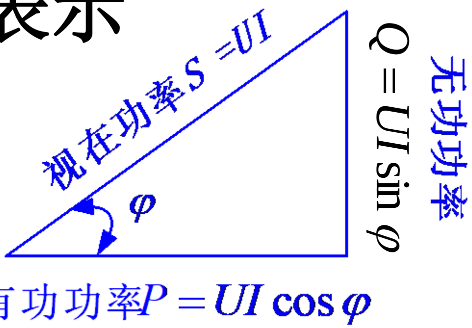


6 复功率

设一端口网络的端口 分别用相量表示

电压 $u=\sqrt{2}U\cos(\omega t+\psi_u)$ $\dot{U}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}$

电流 $i=\sqrt{2}I\cos(\omega t+\psi_i)$ $\dot{I}=I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_i}$



复功率：$\tilde{S}=P+\mathrm{j}Q=UI\cos\varphi+\mathrm{j}UI\sin\varphi$

$$=UI\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}=UI\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\psi_u-\psi_i)}=U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi_u}\cdot I\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\psi_i}=\dot{U}\overset{*}{I}$$

即：复功率等于电压相量与电流相量共轭复相量的乘积。
复功率是直接利用电压和电流相量计算的功率。

$$\left|\tilde{S}\right|=\sqrt{P^2+Q^2}=\sqrt{[UI\cos\varphi]^2+[UI\sin\varphi]^2}=UI=S$$

$$\arctan\frac{Q}{P}=\arctan\frac{UI\sin\varphi}{UI\cos\varphi}=\varphi$$

4.7 正弦电流电路的功率

当计算某一阻抗 $Z = R + \mathrm{j}X$ 所吸收的复功率时，将式 $\dot{U} = Z\dot{I}$ 代入得

$$\tilde{S} = \dot{U}\overset{*}{I} = Z\dot{I}\overset{*}{I} = ZI^2 = RI^2 + \mathrm{j}XI^2 = P + \mathrm{j}Q$$

阻抗为感性时，$\mathrm{j}X$ 为正，$\tilde{S}$ 的虚部为正，表示感性无功功率

阻抗为容性时，$\mathrm{j}X$ 为负，$\tilde{S}$ 的虚部为负，表示容性无功功率

4.7 正弦电流电路的功率

任意复杂网络中复功率具有守恒性，即各支路发出的复功率代数和等于零：

$$\sum_{k=1}^{b} \dot{U}_k \overset{*}{I}_k = \sum_{k=1}^{b} P_k + \mathrm{j}\sum_{k=1}^{b} Q_k = 0$$

说明：

实部代数和等于零表明：

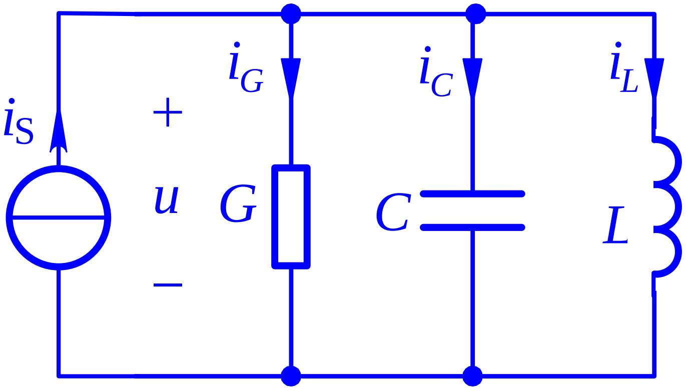
各电源发出的平均功率之和等于各负载吸收的平均功率之和；

虚部代数和等于零表明：

各电源“发出”的无功功率和等于各负载“吸收”的无功功率和。

[补充4.15]

图示电路中I_R=8A，I_L=4A，I_S=10A，X_C=10Ω，求电流源提供的复功率及各负载吸收的复功率，并验证复功率守恒性。



则 $\dot I_R = 8\angle 0^\circ\ \text{A}$，$\dot I_L = 4\angle -90^\circ\ \text{A}$，$\dot I_C = 10\angle 90^\circ\ \text{A}$

$$\dot I_S = \dot I_R + \dot I_L + \dot I_C = (8 + \text{j}6)\text{A}$$

电流源发出复功率

$$\tilde S = \dot U \overset{*}{I}_S = (800 - \text{j}600)\ \text{V}\cdot\text{A}$$

【解】 $(I_L - I_C)^2 = I_S^2 - I_R^2$

$$I_L - I_C = \pm\sqrt{I_S^2 - I_R^2} = \pm 6\text{A},$$

得$I_C = 10\text{A},\ I_C = -2\text{A}$(舍去)

$$U = X_C I_C = 100\ \text{V}$$

设$\dot U = 100\angle 0^\circ\ \text{A}$

R、L、C 分别吸收复功率

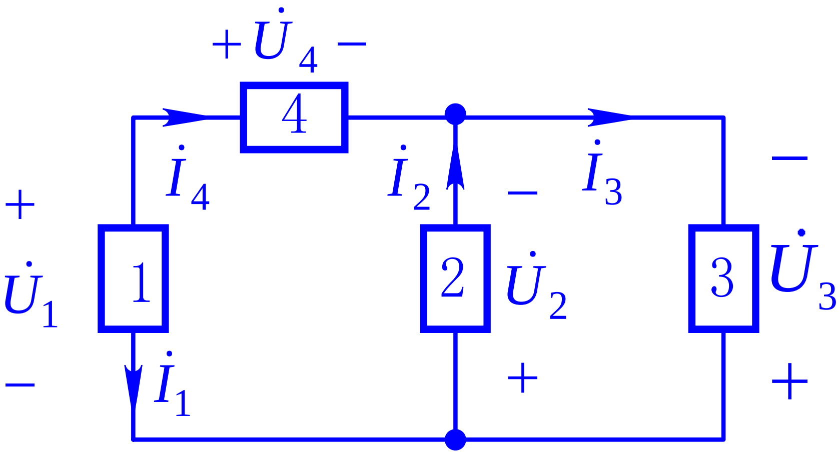
$$\tilde S_R = \dot U \overset{*}{I}_R = 800\ \text{V}\cdot\text{A}$$

$$\tilde S_L = \dot U \overset{*}{I}_L = \text{j}400\ \text{V}\cdot\text{A}$$

$$\tilde S_C = \dot U \overset{*}{I}_C = -\text{j}1000\ \text{V}\cdot\text{A}$$

[例4.16]

图中 $\dot{U}_1=(1+\mathrm{j})\mathrm{V}$，$\dot{U}_2=-\mathrm{j}2\mathrm{V}$，$\dot{I}_3=(1-\mathrm{j})\mathrm{A}$，$\dot{I}_4=(1+\mathrm{j})\mathrm{A}$ ，求各元件功率，并判断其类型



【解】$\dot{U}_3=\dot{U}_2=-\mathrm{j}2\ \ (\mathrm{V})$

$$\dot{U}_4=\dot{U}_1+\dot{U}_2=1-\mathrm{j}(\mathrm{V})$$

$$\dot{I}_1=-\dot{I}_4=-1-\mathrm{j}(\mathrm{A})$$

$$\dot{I}_2=\dot{I}_3-\dot{I}_4=-\mathrm{j}2(\mathrm{A})$$

各元件吸收功率

$$\tilde{S}_1=\dot{U}_1\overset{*}{I}_1=(1+\mathrm{j})(-1+\mathrm{j})=-2\mathrm{W}$$

元件1为电源

$$\tilde{S}_2=\dot{U}_2\overset{*}{I}_2=-\mathrm{j}2\times\mathrm{j}2=4\mathrm{W}$$

元件2为电阻

$$\tilde{S}_3=-\dot{U}_3\overset{*}{I}_3=-(-\mathrm{j}2)\times(1+\mathrm{j})$$

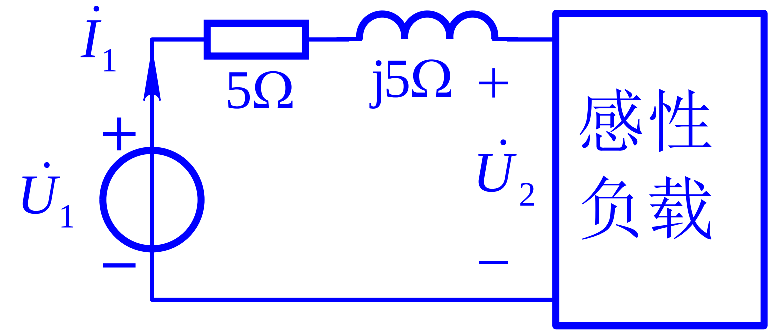
$$=(-2+\mathrm{j}2)\,\mathrm{var}$$ 元件3为电源

$$\tilde{S}_4=\dot{U}_4\overset{*}{I}_4=(1-\mathrm{j})\times(1+\mathrm{j})=-\mathrm{j}2\,\mathrm{var}$$

元件4为电容

[补充4.17]

已知电压U_1=100V，电流I_1=10A，电源输出功率P=500W。求负载阻抗及端电压U_2。



【解】

方法一：

$$\varphi = \arccos\frac{P}{U_1 I_1} = \arccos\frac{500\,\mathrm{W}}{100\mathrm{V}\times 10\,\mathrm{A}} = 60^\circ$$

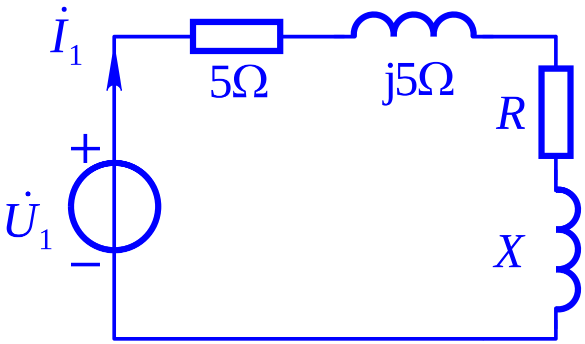
设$\dot{I}_1 = 10\angle 0^\circ\ \mathrm{A}$，则$\dot{U}_1 = 100\angle 60^\circ\ \mathrm{V}$

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_1 - (5\Omega + \mathrm{j}5\Omega)\dot{I}_1 = 36.6\angle 90^\circ\ \mathrm{V}$$

$$Z_\mathrm{L} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 = \mathrm{j}3.66\Omega$$

[补充4.17]

方法二：



$$P = I^2(5\Omega + R) = 10^2(5\Omega + R) = 500\text{W}$$

$$\Rightarrow R = 0$$

$$|Z| = \frac{U_1}{I_1} = \sqrt{(5+R)^2 + (5+X)^2} = \frac{100}{10} \qquad \Rightarrow X = 3.66\Omega$$

$$Z = R + \mathrm{j}X = \mathrm{j}3.66\Omega$$

$$U_2 = I_1|Z| = 3.66\text{V}$$

4.7 正弦电流电路的功率—小结

	瞬时功率	平均功率	无功功率	视在功率	复功率
定义	$p=ui$	$P=UI\cos\varphi$	$Q=UI\sin\varphi$	$S=UI$	$\tilde{S}=\dot{U}\overset{*}{\dot{I}}$
单位	W	W	var	VA	VA
是否守恒	*yes*	*yes*	*yes*	*no*	*Yes*
(ui关联)>0 (ui关联)<0	*吸收* *发出*	*吸收* *发出*	*感性* *容性*	*吸收* *发出*	*吸收* *发出*
R	$p=ui$	$P=UI\cos 0^\circ=$ $UI=RI^2=GU^2$	0	$S=UI=P$	$\tilde{S}=P$
L	$p=ui$	0	$Q=UI\sin 90^\circ$ $=UI=XI^2=-BU^2$	$S=UI=Q$	$\tilde{S}=jQ$
C	$p=ui$	0	$Q=UI\sin(-90^\circ)$ $=-UI=XI^2=-BU^2$	$S=UI=-Q$	$\tilde{S}=jQ$