

ch2.5节点电压法

杨旭强

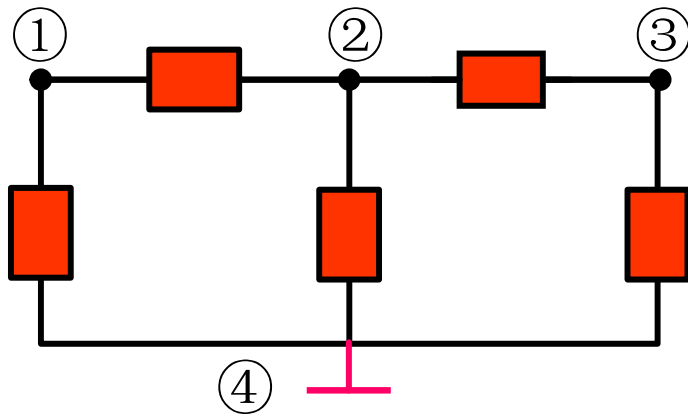
哈尔滨工业大学电气工程系



2.5 节点电压法

基本要求：透彻理解节点电压的概念、熟练掌握节点电压法的原理和列写规则。

1. 节点电压：任选一点作为参考点，其它各点与参考点之间的电压称为该点的节点电压或节点电位。



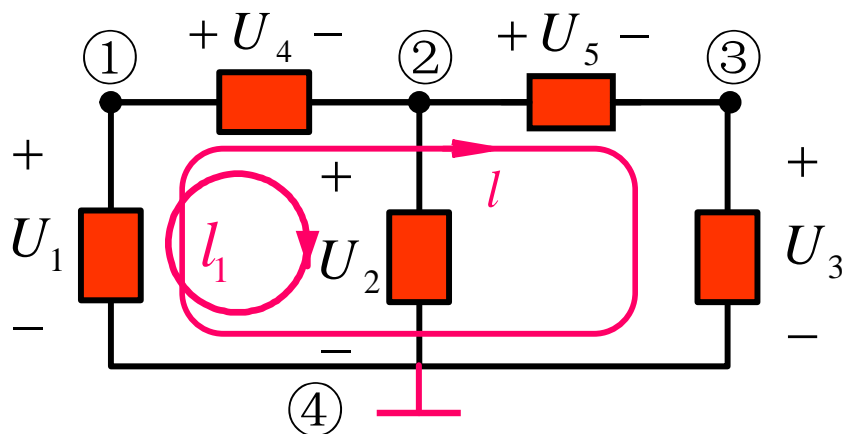
①, ②, ③的节点电压表示为

$$U_{n1} \quad U_{n2} \quad U_{n3}$$

节点电压的特点：

1) 节点电压具有单值性，与路径无关

2.5 节点电压法



2) 任意两点之间的电压可表达成这两个节点电压之差。

$$U_4 = U_1 - U_2 = U_{n1} - U_{n2}$$

$$U_5 = U_2 - U_3 = U_{n2} - U_{n3}$$

3) 用节点电压表示支路电压时，自动满足KVL方程。

$$-U_1 + U_4 + U_5 + U_3 = 0$$

$$-U_{n1} + (U_{n1} - U_{n2}) + (U_{n2} - U_{n3}) + U_{n3} = 0$$

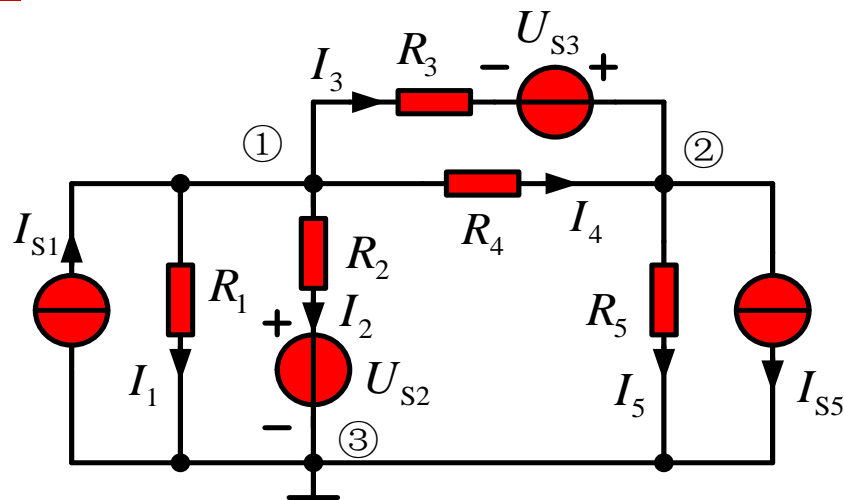
2. 节点电压法：以n-1个独立的节点电压为待求量，对该n-1个节点列写KCL方程求解电路的方法。

2.5 节点电压法

节点电压方程的列写规则：

1) 以节点③为参考点，节点①、②的KCL方程为

$$\left. \begin{aligned} I_1 + I_2 + I_3 + I_4 &= I_{S1} \\ -I_3 - I_4 + I_5 &= -I_{S5} \end{aligned} \right\}$$



节点电压法示例

2) 用节点电压表示各个支路电流

$$\begin{aligned} \frac{U_{n1}}{R_1} + \frac{U_{n1} - U_{S2}}{R_2} + \frac{U_{n1} - U_{n2} + U_{S3}}{R_3} + \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_4} &= I_{S1} \\ -\frac{U_{n1} - U_{n2} + U_{S3}}{R_3} - \frac{U_{n1} - U_{n2}}{R_4} + \frac{U_{n2}}{R_5} &= -I_{S5} \end{aligned}$$

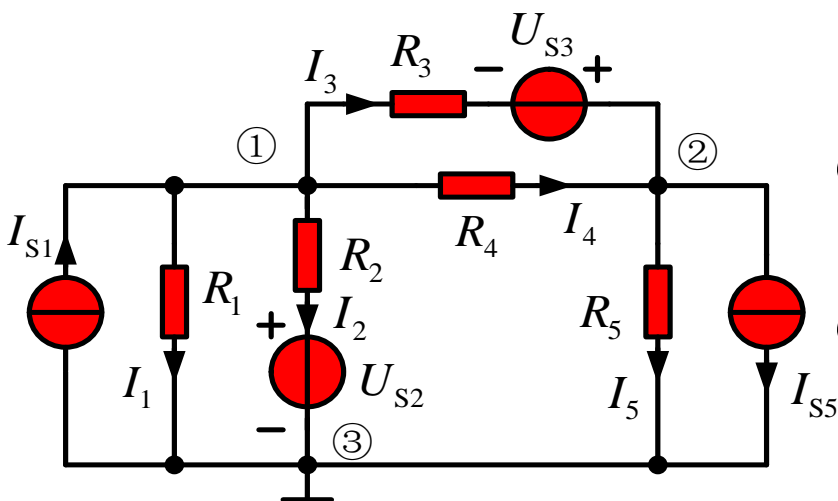
2.5 节点电压法

进行整理

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) U_{n1} - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) U_{n2} &= I_{S1} + \frac{U_{S2}}{R_2} - \frac{U_{S3}}{R_3} \\ - \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right) U_{n1} + \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) U_{n2} &= -I_{S5} + \frac{U_{S3}}{R_3} \end{aligned} \right\}$$

3. 标准形式

$$\left. \begin{aligned} G_{11} U_{n1} + G_{12} U_{n2} &= \sum_{\text{节点1}} I_{Sk} + \sum_{\text{节点1}} G_k U_{Sk} \\ G_{21} U_{n1} + G_{22} U_{n2} &= \sum_{\text{节点2}} I_{Sk} + \sum_{\text{节点2}} G_k U_{Sk} \end{aligned} \right\}$$



节点电压法示例

2.5 节点电压法

推广之：

$$\begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \cdots & G_{1(n-1)} \\ G_{21} & G_{22} & \cdots & G_{2(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G_{(n-1)1} & G_{(n-1)2} & \cdots & G_{(n-1)(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{n1} \\ U_{n2} \\ \vdots \\ U_{n(n-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_1 I_S + \sum_1 G U_S \\ \sum_2 I_S + \sum_2 G U_S \\ \vdots \\ \sum_{n-1} I_S + \sum_{n-1} G U_S \end{bmatrix}$$

节点电导矩阵

节点
电压
向量

节点
源电
流向
量

2.5 节点电压法

规则小结:

1 $G_{11} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$, $G_{22} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5}$ 分别是与节点①、②

直接相连的各支路电导之和，称为节点①、②的自导。

2 $G_{12} = -(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4})$, $G_{21} = -(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4})$ 是直接联接在节点①、②

之间的诸支路电导之和并带一负号，称为节点①、②间的互导。

3 $\sum_{\text{节点1}} I_{Sk}$, $\sum_{\text{节点2}} I_{Sk}$ 表示与节点①、②相连的电流源电流

代数 and, 当电流流入节点时取“+”号；否则取“−”号；

2.5 节点电压法

4 $\sum_{\text{节点1}} G_k U_{Sk}$, $\sum_{\text{节点2}} G_k U_{Sk}$ 分别是与节点①、②相连的电压

源与串联电导乘积的代数和，当电压源正极性端指向节点时，取“+”号；否则取“-”号。

3、4分别称为节点①、②的注入电流或节点源电流。

2.4 节点电压法

列写节点电压方程的列写步骤：

1、适当的选取参考节点，设变量

2、按节点法标准形式，填写左边的自导和互导

要点：自导：自己节点全部支路电导之和，永为正

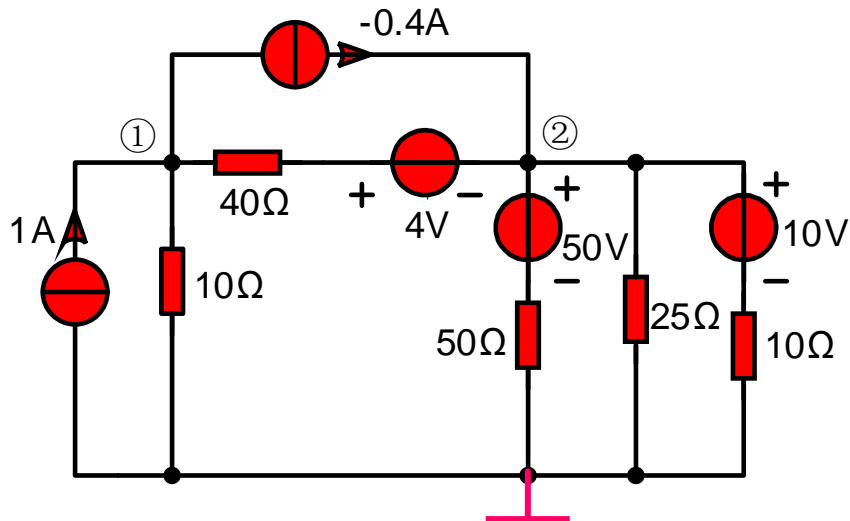
互导：相邻节点公用支路电导之和，永为负，
且一般沿主对角线对称

3、填写方程右边为注入节点源电流的代数和；即
满足左边电导流出电流的代数和=右边注入源电流
之代数和

4、如有必要适当补充方程

2.5 节点电压法

【例题2.12】求图示电路的节点电压法。



解:选定参考点, 给其余节点编号, 按一般规则列节点电压法方程

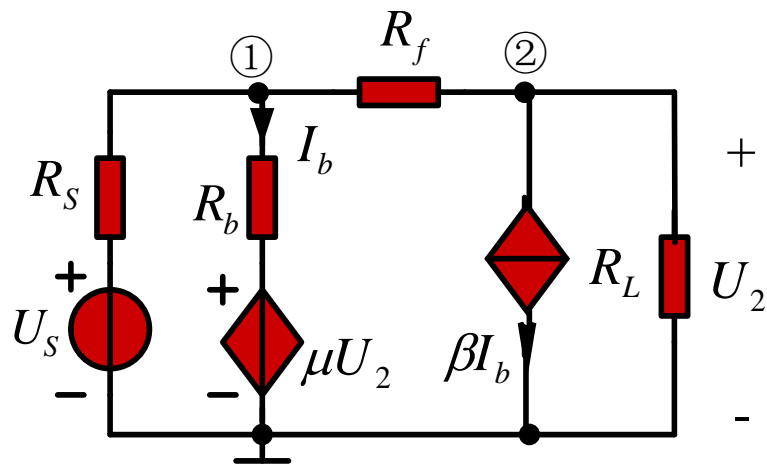
$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{40\Omega} \right) U_{n1} - \frac{1}{40\Omega} U_{n2} = 1A + 0.4A + \frac{4V}{40\Omega} \\
 & -\frac{1}{40\Omega} U_{n1} + \left(\frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{50\Omega} + \frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{10\Omega} \right) U_{n2} = -0.4A - \frac{4V}{40\Omega} + \frac{50V}{50\Omega} + \frac{10V}{10\Omega} \\
 & \begin{cases} 0.125S \times U_{n1} - 0.025S \times U_{n2} = 1.5A \\ -0.025S \times U_{n1} + 0.185S \times U_{n2} = 1.5A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{n1} = 14V \\ U_{n2} = 10V \end{cases}
 \end{aligned}$$

【例题2.13】 列出图示电路的节点电压方程。

解：1. 对节点①、②列出节点电压方程

$$\left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_f}\right)U_{n1} - \frac{1}{R_f}U_{n2} = \frac{U_s}{R_s} + \frac{\mu U_2}{R_b}$$

$$-\frac{1}{R_f}U_{n1} + \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_L}\right)U_{n2} = -\beta I_b$$



2 把受控电源的控制量用节点电压来表示

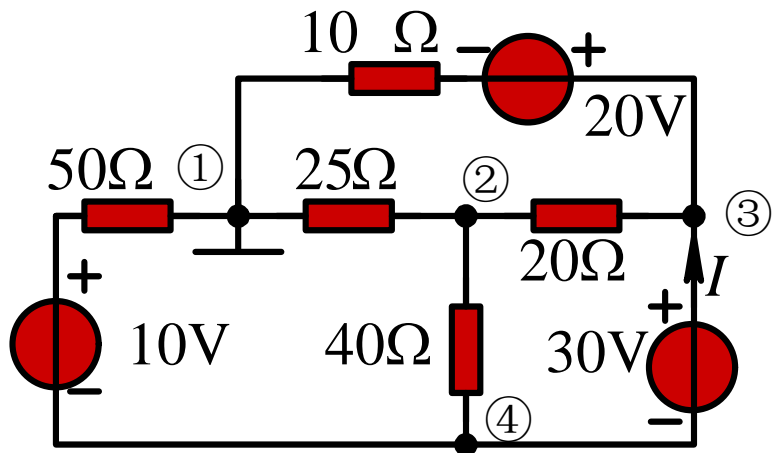
$$U_2 = U_{n2}, \quad I_b = \frac{U_{n1} - \mu U_2}{R_b}$$

3 对方程进行整理：

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_f}\right)U_{n1} - \left(\frac{1}{R_f} + \frac{\mu}{R_b}\right)U_{n2} &= \frac{U_s}{R_s} \\ -\left(\frac{1}{R_f} + \frac{\beta}{R_b}\right)U_{n1} + \left(\frac{1}{R_f} + \frac{1}{R_L} - \frac{\beta\mu}{R_L}\right)U_{n2} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

2.5 节点电压法

【例题2.14】列出图示电路对应不同参考点的节点电压方程，并计算 25Ω 电阻消耗的功率。



解：将未知电流 I 设为变量列入KCL方程中。

$$\text{节点②: } \left(\frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{20\Omega} + \frac{1}{40\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{20\Omega}U_{n3} - \frac{1}{40\Omega}U_{n4} = 0$$

$$\text{节点③: } -\frac{1}{20\Omega}U_{n2} + \left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega}\right)U_{n3} = I + \frac{20\text{V}}{10\Omega}$$

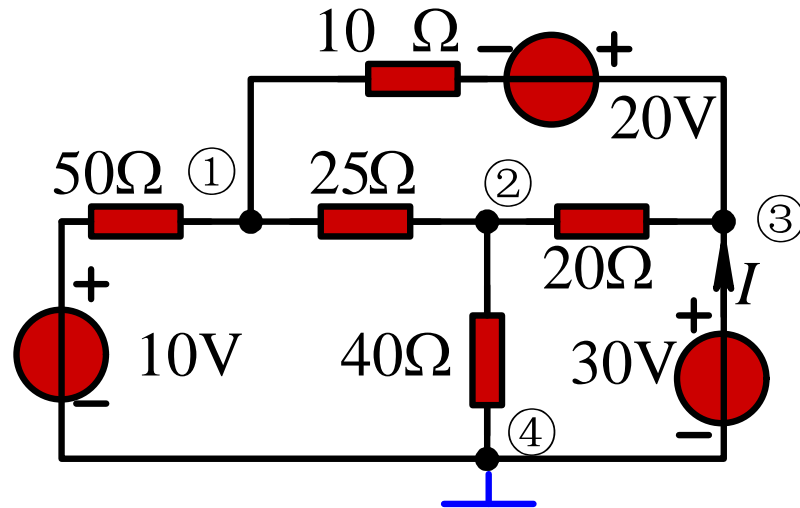
$$\text{节点④: } -\frac{1}{40\Omega}U_{n2} + \left(\frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{50\Omega}\right)U_{n4} = -I - \frac{10\text{V}}{50\Omega}$$

2.5 节点电压法

需根据电压源特性列补充方程 $U_{n3} - U_{n4} = 30\text{V}$

要点：1) 将电压源支路的电流设为变量列入方程。
2) 补充电压源两端节点电压之差等于电压源的源电压。

若选择电压源的一端为参考点，则另一端的节点电压便是已知量，问题可以得到简化。



上图以节点④为参考点，则节点③的电压为30V，为已知量

2.5 节点电压法

$$\left(\frac{1}{50\Omega} + \frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{10\Omega}\right)U_{n1} - \frac{1}{25\Omega}U_{n2} - \frac{1}{10\Omega} \times 30V = \frac{10V}{50\Omega} - \frac{20V}{10\Omega}$$

$$-\frac{1}{25\Omega}U_{n1} + \left(\frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{20\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{20\Omega} \times 30V = 0$$

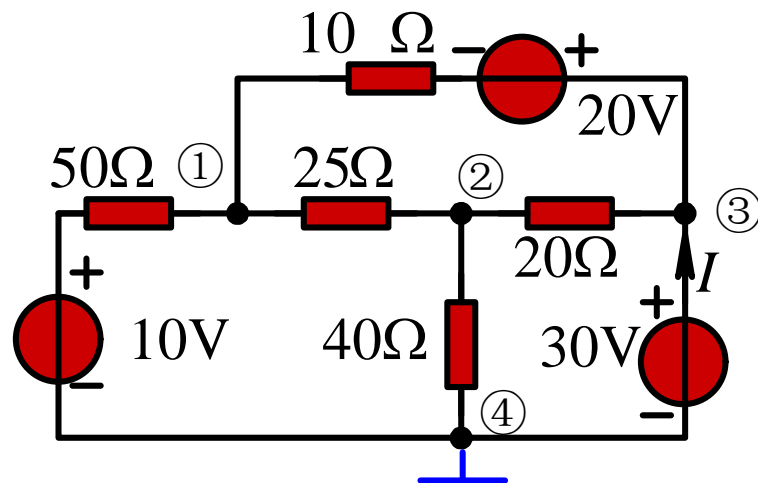
$$-\frac{1}{10\Omega}U_{n1} - \frac{1}{20\Omega}U_{n2} + \left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{20\Omega}\right)U_{n3} - I = \frac{20V}{10\Omega}$$

$$\begin{cases} 0.16U_{n1} - 0.04U_{n2} = 1.2V \\ -0.04U_{n1} + 0.115U_{n2} = 1.5V \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{n1} \approx 11.79V \\ U_{n2} \approx 17.14V \end{cases}$$

25Ω电阻两端电压及消耗功率分别为：

$$U = U_{n1} - U_{n2} \approx -5.35V$$

$$P = \frac{U^2}{25\Omega} \approx 1.14W$$



2.5 节点电压法

【例题2.15】求节点电压及电流源发出的功率。

解： $I_1 + I_2 = 1A$

$$\frac{U_{n1}}{10\Omega} + \frac{U_{n1} - U_{n2} - 20V}{40\Omega} = 1A$$

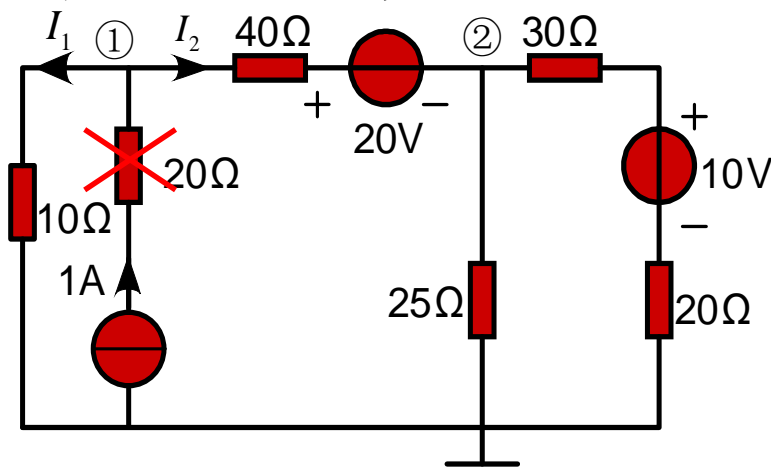
$$\left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{40\Omega}\right)U_{n1} - \frac{1}{40\Omega}U_{n2} = 1A + \frac{20V}{40\Omega}$$

$$\left(\frac{1}{10\Omega} + \frac{1}{40\Omega} + \cancel{\frac{1}{20\Omega}}\right)U_{n1} - \frac{1}{40\Omega}U_{n2} = 1A + \frac{20V}{40\Omega}$$

$$-\frac{1}{40\Omega}U_{n1} + \left(\frac{1}{40\Omega} + \frac{1}{25\Omega} + \frac{1}{50\Omega}\right)U_{n2} = \frac{10V}{50\Omega} - \frac{20V}{40\Omega}$$

$$\begin{cases} 0.125S \times U_{n1} - 0.025S \times U_{n2} = 1.5A \\ -0.025S \times U_{n1} + 0.085S \times U_{n2} = 0.5A \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} U_{n1} = 14V \\ U_{n2} = 10V \end{cases}$$

$$U = U_{n1} + 20\Omega \times 1A = 14V + 20V = 34V \Rightarrow P = U \times 1A = 34W$$



2.5 节点电压法

【例题2.16】用节点电压法求 I_1 。

解：

$$\textcircled{1}: \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{0.5\Omega} \right) U_{n1} - \frac{1}{0.5\Omega} U_{n3} = \frac{3\text{V}}{1\Omega} - 1\text{A}$$

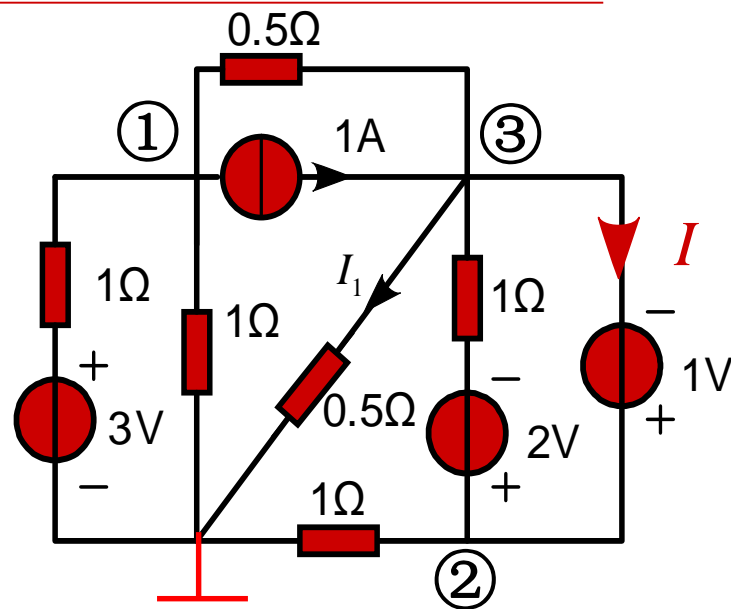
$$\textcircled{2}: \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) U_{n2} - \frac{1}{1\Omega} U_{n3} = \frac{2\text{V}}{1\Omega} + I$$

$$\textcircled{3}: -\frac{1}{0.5\Omega} U_{n1} - \frac{1}{1\Omega} U_{n2} + \left(\frac{1}{0.5\Omega} + \frac{1}{0.5\Omega} + \frac{1}{1\Omega} \right) U_{n3} = 1\text{A} - \frac{2\text{V}}{1\Omega} - I$$

补充

$$U_{n2} - U_{n3} = 1\text{V}$$

$$U_{n1} = 0.625\text{V}, U_{n2} = 1.25\text{V}, U_{n3} = 0.25\text{V}, I_1 = 0.5\text{A}$$



2.5 节点电压法

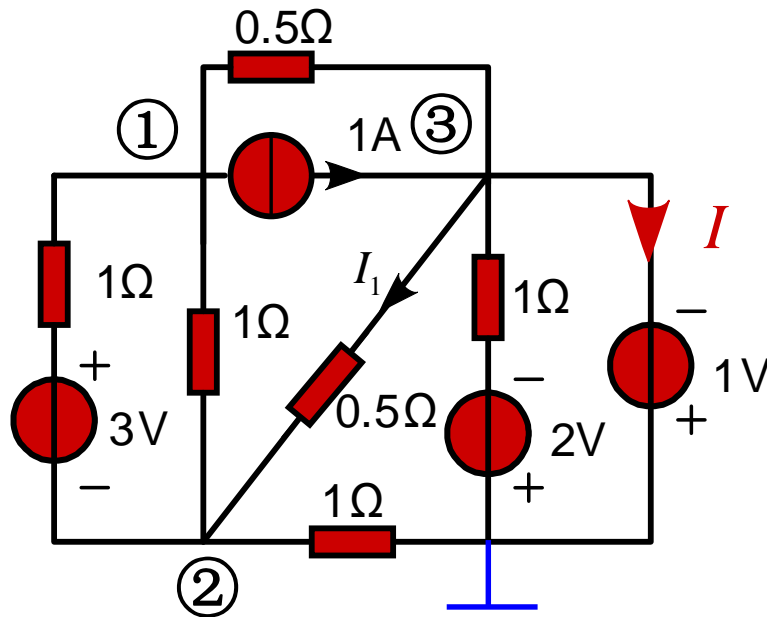
重新编号

$$\textcircled{1}: \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{0.5\Omega}\right)U_{n1} - \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{0.5\Omega}(-1\text{V}) = \frac{3\text{V}}{1\Omega} - 1\text{A}$$

$$\textcircled{2}: -\left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega}\right)U_{n1} + \left(\frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{1\Omega} + \frac{1}{0.5\Omega}\right)U_{n2} - \frac{1}{0.5\Omega}(-1\text{V}) = \frac{-3\text{V}}{1\Omega}$$

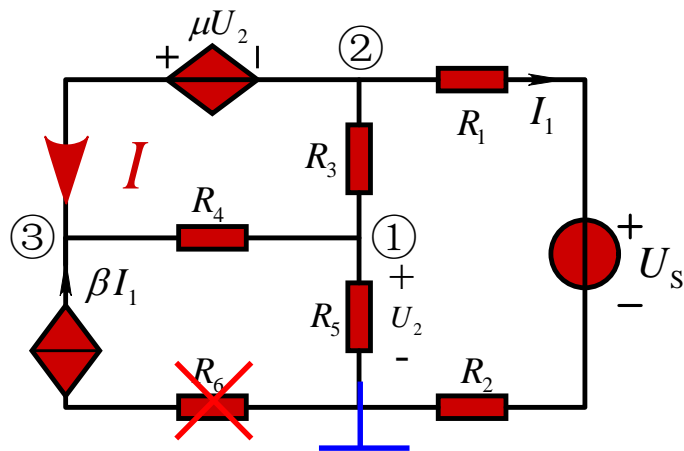
$$U_{n1} = -0.625\text{V}, U_{n2} = -1.25\text{V}, I_1 = 0.5\text{A}$$

参考节点改变之后的各节点电压与原来基准下的相应的节点电压间只差了一个新旧节点之间的电压值



2.5 节点电压法

【例题2.16】列写图示电路的节点电压法方程



补充

$$\begin{cases} U_{n3} - U_{n2} = \mu U_2 \\ I_1 = \frac{U_{n2} - U_s}{R_1 + R_2} \\ U_2 = U_{n1} \end{cases}$$

解:

$$\textcircled{1} \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) U_{n1} - \frac{1}{R_3} U_{n2} - \frac{1}{R_4} U_{n3} = 0$$

$$\textcircled{2} -\frac{1}{R_3} U_{n1} + \left(\frac{1}{R_1 + R_2} + \frac{1}{R_3} \right) U_{n2} = -I + \frac{U_s}{R_1 + R_2}$$

$$\textcircled{3} -\frac{1}{R_4} U_{n1} + \frac{1}{R_4} U_{n3} = I + \beta I_1$$

2.5 节点电压法-小结

牢记节点法的列写步骤，注意体会以下事项：

目的：求解支路电压

方法：用节点电压表示支路电压

本质：KCL

要点：1、尽量把已知的支路电压用上

易犯错误：

- 1、支路电阻参不参与自导和互导
- 2、 U_s 串 R 支路电流与 U_s/R 的关系