HIT CS&E

第二章 数学基础

骆吉洲
计算机科学与技术学院

HIT CS&E

提纲

2.1 计算复杂性函数的阶
2.2 递归方程

HIT CS&E

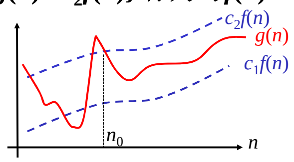
2.1 计算复杂性函数的阶

2.1.1 同阶函数集合
2.1.2 低阶函数集合
2.1.3 高阶函数集合
2.1.4 严格低阶函数集合
2.1.5 严格高阶函数集合
2.1.6 函数阶的性质

HIT CS&E

2.1.1 同阶函数集合

定义2.1.1 (同阶函数集合) $\Theta(f(n))=\{g(n) \mid \exists c_1, c_2>0, n_0, \forall n>n_0, c_1 f(n) \le g(n) \le c_2 f(n)\}$ 称为与$f(n)$同阶的函数集合。



- 若$g(n)\in\Theta(f(n))$, 则称$g(n)$与$f(n)$同阶
- $g(n)\in\Theta(f(n))$常记为 $g(n) = \Theta(f(n))$
- $f(n)$是极限非负的，否则$\Theta(f(n))$定义为空集
  即：$f(n)$在n充分大之后必取非负值

HIT CS&E

Example

例1 证明: $f(n)=an^2+bn+c= \Theta(n^2)$ $(a>0)$

证明: 令$c_1=a/4$, $c_2=7a/4$, $n_0 =2\cdot\max\{|b|/a, \sqrt{|c|/a}\}$
则，$n>n_0$后有 $c_1n^2 \le an^2+bn+c \le c_2n^2$

$an^2+bn+c \le c_2n^2$

$\Leftrightarrow an^2+bn+c \le an^2+ (a/2)n^2 + (a/4)n^2$

$\Leftrightarrow 0 \le an/2[n-2b/a]+ (a/4)(n^2-4c/a)$

$an^2+bn+c \ge c_1n^2$

$\Leftrightarrow an^2+bn+c \ge (a/4)n^2$

$\Leftrightarrow an/2[n+2b/a]+ (a/4)(n^2+4c/a) \ge 0$

HIT CS&E

Example

例2 证明: $6n^3 \ne \Theta(n^2)$

反证. 如果存在$c_1,c_2>0$，n_0使得当$n\ge n_0$时，有

$c_1 \le 6n^3 \le c_2 n^2$

于是，当$n>c_2/6$时，必有

$n \le c_2/6$

这与n的取值范围矛盾。

例3 对于任意常数$c>0$有 $c= \Theta(n^0)= \Theta(1)$

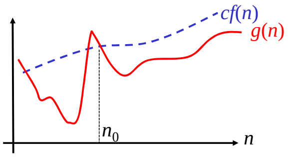
取$c_1=c/2$, $c_2=3c/2$, $n_0=1$, 则$n>n_0$后有

$c_1n^0 \le c \le c_2n^0$

HIT CS&E

2.1.2 低阶函数集合

定义2.1.2 (低阶函数集) $O(f(n))=\{g(n) \mid \exists c>0, n_0, \forall n>n_0 有 0 \le g(n) \le cf(n)\}$ 称为比$f(n)$低阶的函数集合



- 若$g(n) \in O(f(n))$, 则称$f(n)$是$g(n)$的上界
- $g(n) \in O(f(n))$常记为 $g(n) = O(f(n))$
- 如果$f(n)=O(n^k)$, 则称$f(n)$是多项式有界的

HIT CS&E

Example

例1 $f(n) = \Theta(g(n)) \Rightarrow f(n) = O(g(n))$

$\Theta(g(n)) \subseteq O(g(n))$

例2 证明: $n=O(n^2)$

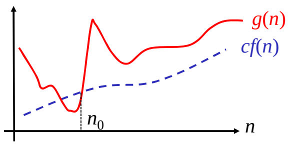
证明：令$c=1, n_0=1$,

则$n \ge n_0$后, 恒有 $0 \le n \le cn^2$

HIT CS&E

2.1.3 高阶函数集合

定义2.1.3 (高阶函数集) $\Omega(f(n))=\{g(n) \mid \exists c>0, n_0, \forall n>n_0 有 0 \le cf(n) \le g(n)\}$ 称为比$f(n)$高阶的函数集合



- 若$g(n) \in \Omega(f(n))$, 则称$f(n)$是$g(n)$的下界
- $g(n) \in \Omega(f(n))$常记为 $g(n) = \Omega(f(n))$

HIT CS&E

定理2.1 $f(n)=\Theta(g(n)) \Leftrightarrow f(n)=O(g(n))$且$f(n)=\Omega(g(n))$

证明：$\Rightarrow$. 由$f(n)=\Theta(g(n))$知，$\exists\, c_1, c_2>0, n_0>0$, 当$n \ge n_0$时

$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

易知 $f(n)=O(g(n))$ 且 $f(n)=\Omega(g(n))$

$\Leftarrow$. 由$f(n)=\Omega(g(n))$知，$\exists\, c_1>0, n_1>0$, 当$n \ge n_1$时

$c_1 g(n) \le f(n)$

由$f(n)=O(g(n))$知，$\exists\, c_2>0, n_2>0$, 当$n \ge n_2$时

$f(n) \le c_2 g(n)$

取$n_0=\max\{n_1, n_2\}>0$, 当$n \ge n_0$时

$c_1 g(n) \le f(n) \le c_2 g(n)$

即： $f(n)=\Theta(g(n))$

HIT CS&E

例 $p(n)=\sum_{i=0}^{d} a_i n^i = \Theta(n^d) \qquad (a_d>0)$

证明：$\sum_{i=0}^{d} a_i n^i \le (d+1)\max_{i=0}^{d}\{a_i\}n^i \quad \Rightarrow p(n)=O(n^d)$

取n_0是 $\frac{a_d}{2}n^d+\sum_{i=0}^{d-1} a_i n^i=0$ 的最大根 ，则$n \ge n_0$时

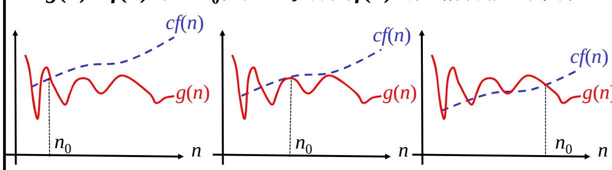
$p(n)= \frac{a_d}{2}n^d+\left(\frac{a_d}{2}n^d+\sum_{i=0}^{d-1} a_i n^i\right) \ge \frac{a_d}{2}n^d$

$\Rightarrow p(n)=\Omega(n^d)$

HIT CS&E

2.1.4 严格低阶函数集合

定义2.1.4 (严格低阶函数集) $o(f(n))=\{g(n) \mid \forall c>0, \exists n_0, 0 \le g(n) < cf(n)对n \ge n_0恒成立\}$ 称为$f(n)$的严格低阶函数集合



c逐步变小时，n_0相应地变化

- 若$g(n) \in o(f(n))$, 则称$f(n)$是$g(n)$的严格上界
- $g(n) \in o(f(n))$常记为 $g(n)=o(f(n))$

HIT CS&E

例1 证明：$2n = o(n^2)$

证明：对$\forall c>0$, 欲使$2n<cn^2$必有$2/c<n$
于是，$\forall c>0$, 取$n_0=2/c$,当$n\ge n_0$必有$2n<n^2$

例2 证明：$2n^2 \ne o(n^2)$

证明：当$c=1$时,对$\forall n_0$, $2n^2<cn^2$在$n\ge n_0$都不成立

HIT CS&E

命题2.1. $f(n)=o(g(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}=0$

证明：$f(n)=o(g(n))$

$\Leftrightarrow \forall c>0, \exists n_0$,使得 $0\le f(n)<cg(n)$对$n\ge n_0$恒成立

$\Leftrightarrow \forall c>0, \exists n_0$,使得 $0\le \frac{f(n)}{g(n)}<c$对$n\ge n_0$恒成立

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}=0$ 且$f(n)\ge 0, g(n)>0$

HIT CS&E

2.1.5 严格高阶函数集合

定义2.1.4 (严格高阶函数集) $\omega(f(n))=\{g(n)|\forall c>0, \exists n_0$, $0\le cf(n)<g(n)$对$n\ge n_0$恒成立$\}$ 称为$f(n)$的严格高阶函数集合

$\forall c>0, \exists n_0$, $0\le cf(n)<g(n)$对$n\ge n_0$恒成立

$\Leftrightarrow$ $\forall c>0, \exists n_0$, $0\le f(n)<(1/c)g(n)$对$n\ge n_0$恒成立

$\Leftrightarrow$ $\forall c>0, \exists n_0$, $0\le f(n)<cg(n)$对$n\ge n_0$恒成立

命题2.2 $g(n)=\omega(f(n)) \Leftrightarrow f(n)=o(g(n))$

命题2.3. $g(n)=\omega(f(n)) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{g(n)}{f(n)}=\infty$

HIT CS&E

Example

例1 证明：$n^2/2 = \omega(n)$

证明：$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2/2}{n} = \infty$

例2 证明：$n^2/2 \ne \omega(n^2)$

证明：$\lim_{n\to\infty} \frac{n^2/2}{n^2} \ne \infty$

HIT CS&E

2.1.6 函数阶的性质

A.传递性

(a) $f(n)=\Theta(g(n)) \wedge g(n)=\Theta(h(n)) \Rightarrow f(n)=\Theta(h(n))$

(b) $f(n)=O(g(n)) \wedge g(n)=O(h(n)) \Rightarrow f(n)=O(h(n))$

(c) $f(n)=\Omega(g(n)) \wedge g(n)=\Omega(h(n)) \Rightarrow f(n)=\Omega(h(n))$

(d) $f(n)=o(g(n)) \wedge g(n)=o(h(n)) \Rightarrow f(n)=o(h(n))$

(e) $f(n)=\omega(g(n)) \wedge g(n)=\omega(h(n)) \Rightarrow f(n)=\omega(h(n))$

证明：利用定义易得（练习）。

HIT CS&E

2.1.6 函数阶的性质(续)

B.自反性

(a) $f(n)=\Theta(f(n))$

(b) $f(n)=O(f(n))$

(c) $f(n)=\Omega(f(n))$

C.对称性

(a) $f(n)=\Theta(g(n))$ iff $g(n)=\Theta(f(n))$

D.反对称性

(a) $f(n)=O(g(n))$ iff $g(n)=\Omega(f(n))$

(b) $f(n)=o(g(n))$ iff $g(n)=\omega(f(n))$

HIT CS&E

注意

!

- 并非所有函数都是可比的
- 存在函数$f(n)$,$g(n)$ 使得：$f(n)\neq O(g(n))$
  $f(n)\neq \Omega(g(n))$
  - 例如，$f(n)=n$　$g(n)=n^{1+\sin n}$

HIT CS&E

2.2 递归方程

- 递归方程：递归方程是使用小的输入值来描述一个函数的方程或不等式.
- 递归方程例：Merge-sort算法的复杂性方程
  $T(n)=\theta(1)$　　if n=1
  $T(n)=2T(n/2)+\theta(n)$　if n>1.
  $T(n)$的解是$\theta(n\log n)$

HIT CS&E

求解递归方程的三个主要方法

- 迭代方法:
  - 把方程转化为一个和式
  - 然后用估计和的方法来求解.
- 替换方法:
  - 先猜测方程的解,
  - 然后用数学归纳法证明.
- Master方法:
  - 求解型为$T(n)=aT(n/b)+f(n)$的递归方程

HIT CS&E

2.2.1 迭代方法

方法：

循环地展开递归方程，
把递归方程转化为和式，
然后可使用求和技术解之

HIT CS&E

例1.$T(n)=2T(n/2)+cn$

$=2^2T(n/2^2)+cn+cn$

$=2^3T(n/2^3)+cn+cn+cn$

$=\ldots$

$=2^kT(n/2^k)+knc$

$=2^kT(1)+knc$　　　$n=2^k$

$=nT(1)+cn\log n$

$=\Theta(n\log n)$

例2 $T(n)=n+3T\left(\left\lfloor n/4\right\rfloor\right)$

$$
\begin{aligned}
&= n+3\left(\left\lfloor n/4\right\rfloor+3T\left(\left\lfloor n/16\right\rfloor\right)\right)\\
&= n+3\left(\left\lfloor n/4\right\rfloor+3\left(\left\lfloor \frac{n}{16}\right\rfloor+3T\left(\left\lfloor n/64\right\rfloor\right)\right)\right)\\
&= n+3\left\lfloor n/4\right\rfloor+9\left\lfloor \frac{n}{16}\right\rfloor+27T\left(\left\lfloor n/64\right\rfloor\right)\\
&= n+3\left\lfloor n/4\right\rfloor+3^2\left\lfloor \frac{n}{4^2}\right\rfloor+3^3\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3}\right\rfloor\right)+\ldots\ldots+3^i T\left(\left\lfloor n/4^i\right\rfloor\right)
\end{aligned}
$$

$\boxed{令\ \frac{n}{4^i}=1\Rightarrow 4^i=n\Rightarrow i=\log_4 n}$

$$
\begin{aligned}
&= n+3\left\lfloor n/4\right\rfloor+3^2\left\lfloor \frac{n}{4^2}\right\rfloor+3^3\left(\left\lfloor \frac{n}{4^3}\right\rfloor\right)+\ldots\ldots+3^{\log_4 n}T(\lfloor 1\rfloor)\\
&\le \sum_{i=0}^{\log_4 n}3^i\, n/4^i+O(n)\le n\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^i=n\times\frac{1}{1-\frac{3}{4}}=4n=O(n)
\end{aligned}
$$

HIT CS&E

2.2.2 替换法

方法：

1. 变量代换, 将方程转换成已知方程
2. 先根据方程的形式猜测解
   然后用数学归纳法证明

HIT CS&E

变量代换

例1. $T(n)=2T(n/2+17)+n$

令$n=m+34$,则

$T(m+34)=2T(m/2+34)+m+34$

令$T(m+34)=S(m)$,则

$S(m)=2S(m/2)+m+34$

$S(m)=\Theta(m\log m)$

$T(n)=\Theta(n\log n)$

HIT CS&E

例2. $T(n)=2T(n^{1/2})+\log n$

令$n=2^m$,则

$T(2^m)=2T(2^{m/2})+m$

令$T(2^m)=S(m)$,则

$S(m)=2S(m/2)+m$

$S(m)=\Theta(m\log m)$

$T(n)=\Theta(\log n \log\log n)$

HIT CS&E

先猜后证

例3. $T(n)=2T(n/2+17)+n$

由于 $n/2$ 与$n/2+17$ 在n充分大之后相近

故猜$T(n/2) \approx T(n/2+17)$ 在n充分大后成立

故

$T(n) \approx 2T(n/2)+n$

故原始方程的解$T(n)=\Theta(n\log n)$

再用数学归纳法证明

HIT CS&E

猜测方法 I：

猜测上下界，减少不确定性范围

例4. $T(n)=2T(n/2)+n$

解.首先证明$T(n)=\Omega(n)$, $T(n)=O(n^2)$

然后逐渐降低上界、提高下界

$\Omega(n)$的一个高阶函数是$n\log n$

$O(n^2)$的一个低阶函数是$n\log n$

HIT CS&E

细微差别的处理

- 问题：猜测正确，数学归纳法的归纳步似乎证不出来
- 解决方法:从猜测结论中减去一个低阶项，可能方法就能用了

HIT CS&E

例5. $T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor) + T(\lceil n/2 \rceil)+1$

解一.猜测$T(n)=O(n)$，往证$T(n)\le cn$

证：$T(n) \le c\lfloor n/2 \rfloor + c\lceil n/2 \rceil+1 = cn+1 \ne cn$

常数c固定时无法得出$T(n) \le cn$

解二.猜测$T(n)=O(n)$，往证$T(n)\le cn-b$

证：假设$m<n$时$T(m)\le cm-b$

$$T(n) = T(\lfloor n/2 \rfloor)+ T(\lceil n/2 \rceil)+1$$
$$\le c\lfloor n/2 \rfloor-b+\lceil n/2 \rceil-b+1$$
$$= cn-b +(1-b)$$
$$\le cn-b \qquad \text{（只要}b\ge 1\text{）}$$

HIT CS&E

避免陷阱

例6. $T(n) = 2T(\lfloor n/2 \rfloor) + n$

解.猜测$T(n) = O(n)$，下面用数学归纳法证明$T(n) \le cn$

证：$T(n) \le 2c\lfloor n/2 \rfloor +n \le cn+n = O(n)$　　错！！！

错在哪里？

- 过早使用$O(n)$记号而掉进陷阱
- $O(n)$记号要在证明$T(n) \le cn$后才能使用
- 由$T(n) \le cn+n$ 无法得出 $T(n) \le cn$
- 因为$cn+n\le cn$ 对任意非负常数均不成立

HIT CS&E

2.2.3 Master method

目的

求解型如 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$的方程

- $a\ge 1$, $b>1$是常数
- $f(n)$是正函数

方法

记住三种情况，不用纸笔即可求解上述方程

HIT CS&E

Master 定理

定理2.2.1 (Master定理) 设$a\ge 1,b>1$是常数, $f(n)$是函数,$T(n)$是定义在非负整数集上的函数且 $T(n) = aT(n/b) + f(n)$. $T(n)$可如下求解

(1) $f(n) = O(n^{\log_b a-\varepsilon})$, $\varepsilon>0$是常数, 则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$

(2) $f(n) = \Theta(n^{\log_b a})$, 则 $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n)$

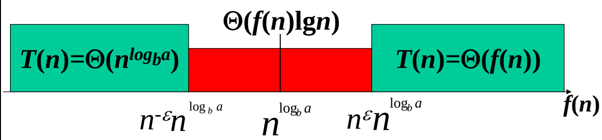
(3) $f(n) = \Omega(n^{\log_b a+\varepsilon})$, $\varepsilon>0$是常数, 且存在常数$c<1$使得 $af(n/b)<cf(n)$对充分大的n成立，则 $T(n) = \Theta(f(n))$

HIT CS&E

直观理解

$f(n)$的阶与$n^{\log_b a}$的阶相比较，会出现三种情况

- $n^{\log_b a}$的阶较高，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a})$
- $f(n)$的阶较高，则$T(n)=\Theta(f(n))$
- 二者同阶，则 $T(n)=\Theta(n^{\log_b a}\log n)$



对于红色部分，Master定理无能为力

HIT CS&E

注意

为了应用Master定理

- $n^{\log_b a}$的阶较高时，需要高出一个多项式

即：存在常数$\varepsilon>0$使得 $f(n) = O\left(\dfrac{n^{\log_b a}}{n^{\varepsilon}}\right)$

- $f(n)$的阶较高时，需要高出一个多项式

即：存在常数$\varepsilon>0$使得 $f(n) =\Omega(n^{\varepsilon}\cdot n^{\log_b a})$

HIT CS&E

Master定理的使用

例1. $T(n) = 9T(n/3) + n$

解. $a=9$, $b=3$, $f(n)=n$, $n^{\log_b a} = n^2$

因 $f(n) = n = O(n^{\log_b a-1})$, $\varepsilon=1$

$\therefore$ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}) = \Theta(n^2)$

例2. $T(n) = T(2n/3) + 1$

解. $a=1$, $b=3/2$, $f(n)=1$, $n^{\log_b a} = n^{\log_{3/2} 1} = n^0 = 1$

因 $f(n) = 1 = \Theta(n^{\log_b a})$

$\therefore$ $T(n) = \Theta(n^{\log_b a}\log n) = \Theta(\log n)$

HIT CS&E

Master定理的使用(续)

例3. $T(n) = 3T(n/4) + n\log n$

解. $a=3$, $b=4$, $f(n)=n\log n$, $n^{\log_b a} = n^{\log_4 3} = n^{0.793}$

因 $f(n) = n\log n = \Omega(n^{\log_b a+1-\log_b a})$, $\varepsilon=1-\log_b a$

又 $af(n/b) = 3(n/4)\log(n/4) \le (3/4)n\log n$, $c=3/4$

$\therefore$ $T(n) = \Theta(f(n)) = \Theta(n\log n)$

例4. $T(n) = 2T(n/2) + n\log n$

解. $a=2$, $b=2$, $f(n)=n\log n$, $n^{\log_b a} = n^{\log_2 2} = n$, $f(n)=\omega(n)$

又 $f(n)=n\log n=o(n^{\log_b a+\varepsilon})$ $\forall\ \varepsilon>0$

$\therefore$ Master定理不适用于求解该方程