

第7章 频率特性和谐振现象

哈尔滨工业大学电气工程系



7.2 串联谐振电路

为什么一队士兵在坚固的桥上整齐地走会导致桥坍塌？

物体、人体都有固有频率，当外界频率与固有频率相同时，会发生共振(Resonance)。



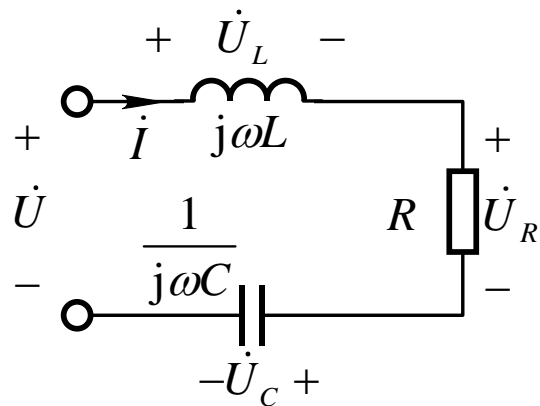
7.2 串联谐振电路

基本要求：了解谐振的定义；明确串联谐振条件；掌握串联谐振特点，并熟练应用。

主要内容

- 一、谐振的定义
- 二、 RLC 串联电路发生谐振的条件
- 三、 RLC 串联电路的谐振曲线
- 四、 RLC 串联电路谐振时的特点

一、谐振的定义

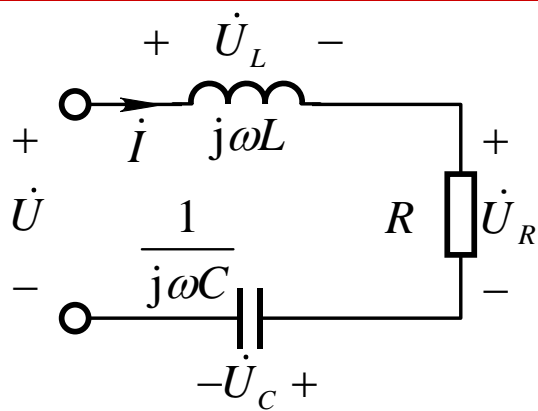


$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

对于任何含有电感和电容的一端口电路，在一定的条件下可呈现电阻性，其端口电压与电流同相位，则称此一端口电路发生谐振。

*RLC*串联电路中发生的谐振称为串联谐振。

二、 RLC 串联电路发生谐振的条件



$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

$$\text{Im}[Z] = 0 \Rightarrow \omega L = \frac{1}{\omega C}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{或} \quad L_0 = \frac{1}{\omega_0^2 C} \quad \text{或} \quad C_0 = \frac{1}{\omega_0^2 L}$$

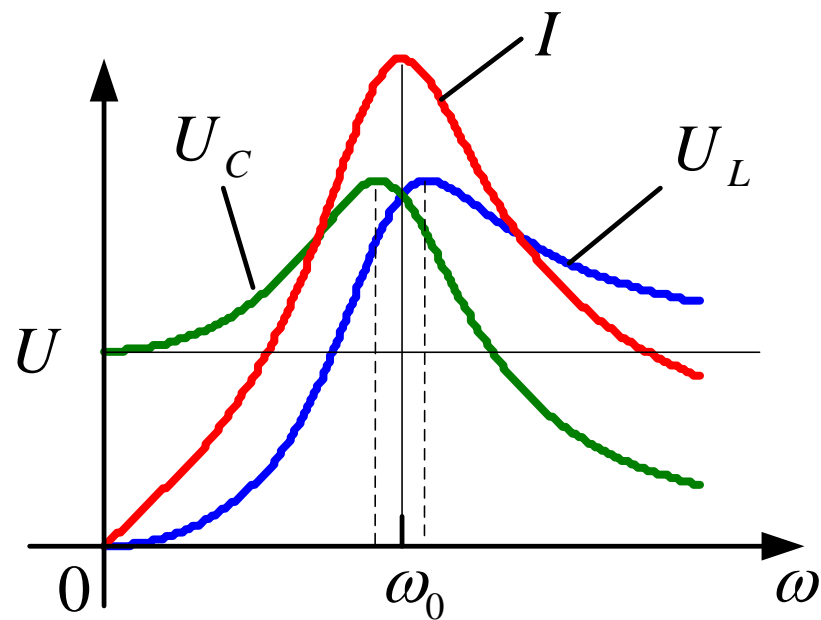
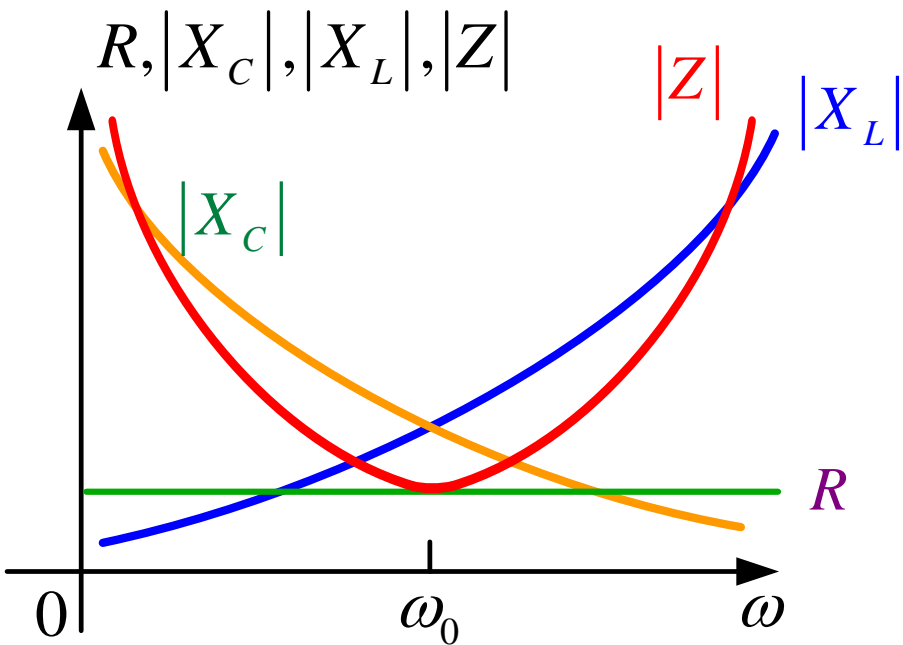
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{称为} RLC \text{串联电路的谐振角频率}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{称为} RLC \text{串联电路的谐振频率}$$

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{称为} RLC \text{串联电路的特性阻抗}$$

$$Q = \frac{\rho}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{R\omega_0 C} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{称为} RLC \text{串联电路的品质因数}$$

三、 RLC 串联电路的谐振曲线



四、 RLC 串联电路谐振时的特点

1. 谐振时的阻抗

$$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + jX$$

$$\omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} \quad \text{感抗与容抗作用相抵消}$$

$$Z(\omega_0) = R \quad \text{电路呈纯阻性，阻抗模最小}$$

2. 谐振时的电流

$$I(\omega_0) = \frac{U}{|Z|} = \frac{U}{R}$$

在电源电压有效值一定的条件下，电流达到最大值。

四、*RLC*串联电路谐振时的特点

3. 谐振时的电压

$$\dot{U}_R(\omega_0) = R\dot{I}(\omega_0) = \dot{U}$$

$$\dot{U}_L(\omega_0) = j\omega_0 L\dot{I}(\omega_0) = j\rho\dot{I}(\omega_0)$$

$$\dot{U}_C(\omega_0) = \frac{1}{j\omega_0 C}\dot{I}(\omega_0) = -j\rho\dot{I}(\omega_0)$$

$$\dot{U}_L(\omega_0) + \dot{U}_C(\omega_0) = 0$$

***LC*串联谐振部分相当于短路**

$$U_L(\omega_0) = U_C(\omega_0) = \rho I(\omega_0) = \rho \frac{U}{R} = QU$$

电压谐振

四、 RLC 串联电路谐振时的特点

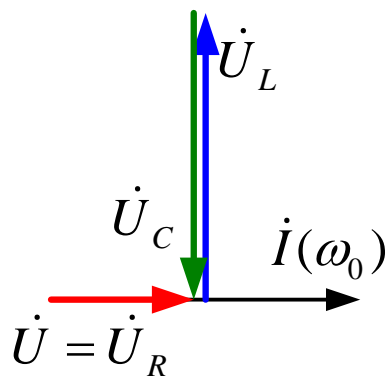
4. 谐振时的无功功率

$$Q(\omega_0) = Q_L(\omega_0) + Q_C(\omega_0) = \omega_0 L I^2(\omega_0) - \frac{1}{\omega_0 C} I^2(\omega_0)$$

$$Q(\omega_0) = 0$$

电感吸收的无功功率等于电容发出的无功功率，
电路吸收的总无功功率等于零。

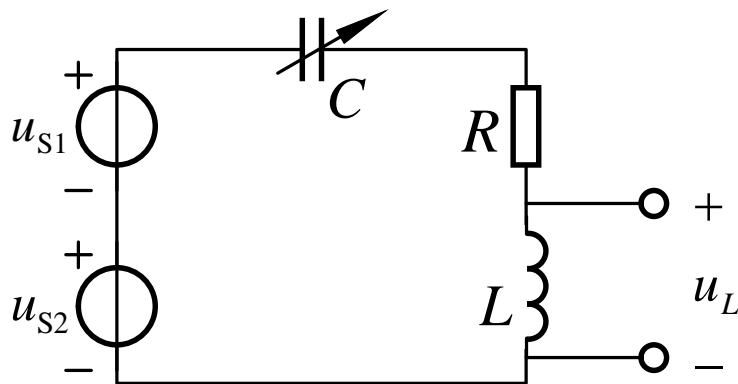
5. 谐振时的相量图



【补充7.5】

某收音机接收等效电路如图所示。已知 $R = 6\Omega$, $L = 300\mu\text{H}$
两广播电台信号分别为
$$\begin{cases} U_{S1} = 1.5\text{mV} & f_1 = 540\text{kHz} \\ U_{S2} = 1.5\text{mV} & f_2 = 600\text{kHz} \end{cases}$$

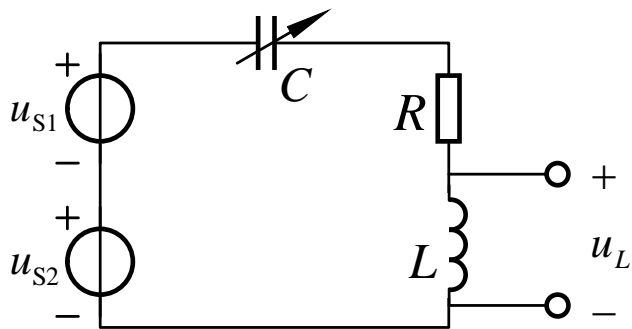
- (1) 要接收 u_{S1} 信号, 求电容 C 值和品质因数 Q ;
- (2) 保持 C 值不变, 分别计算 u_{S1} 和 u_{S2} 单独作用时的电流值及在电感 L 上的输出电压值。



【补充7.5】

某收音机接收等效电路如图所示。已知 $R = 6\Omega$, $L = 300\mu\text{H}$
两广播电台信号分别为 $\begin{cases} U_{s1} = 1.5\text{mV} & f_1 = 540\text{kHz} \\ U_{s2} = 1.5\text{mV} & f_2 = 600\text{kHz} \end{cases}$

(1) 要接收 u_{s1} 信号, 求电容 C 值和品质因数 Q ;



【解】

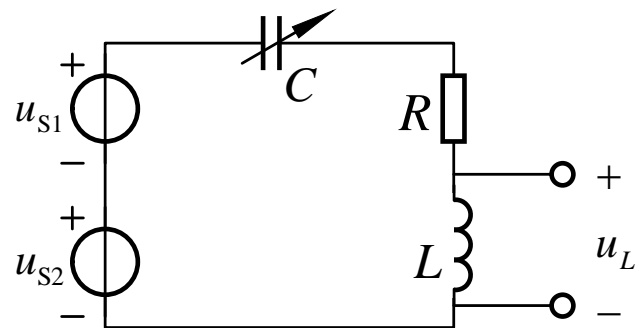
$$C = \frac{1}{(2\pi f_1)^2 L} = \frac{1}{(2 \times 3.14 \times 540 \times 10^3)^2 \times 300 \times 10^{-6}} = 290\text{pF}$$

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{2 \times 3.14 \times 540 \times 10^3 \times 300 \times 10^{-6}}{6} = 169.6$$

【补充7.5】

某收音机接收等效电路如图所示。已知 $R = 6\Omega$, $L = 300\mu\text{H}$
两广播电台信号分别为 $\begin{cases} U_{S1} = 1.5\text{mV} & f_1 = 540\text{kHz} \\ U_{S2} = 1.5\text{mV} & f_2 = 600\text{kHz} \end{cases}$

(2) 保持 C 值不变, 分别计算 u_{S1} 和 u_{S2} 单独作用时的电流值及在电感 L 上的输出电压值。



【解】当信号 u_{S1} 作用时谐振, 故

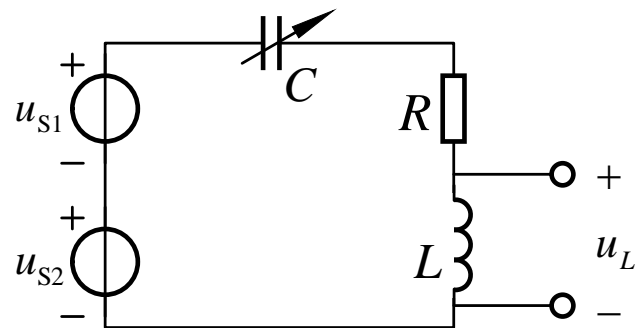
$$I_1 = I_0 = \frac{U_{S1}}{R} = \frac{1.5 \times 10^{-3}}{6} = 250\mu\text{A}$$

$$U_{L1} = QU_{S1} = 169.6 \times 1.5 \times 10^{-3} = 254.4\text{mV}$$

【补充7.5】

某收音机接收等效电路如图所示。已知 $R = 6\Omega$, $L = 300\mu\text{H}$
两广播电台信号分别为 $\begin{cases} U_{S1} = 1.5\text{mV} & f_1 = 540\text{kHz} \\ U_{S2} = 1.5\text{mV} & f_2 = 600\text{kHz} \end{cases}$

(2) 保持 C 值不变, 分别计算 u_{S1} 和 u_{S2} 单独作用时的电流值及在电感 L 上的输出电压值。



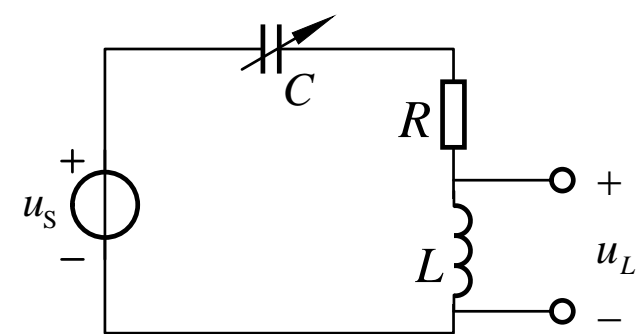
【解】当信号 u_{S2} 作用时电路处于失谐状态, 故

$$I_2 = \frac{U_{S2}}{\sqrt{R^2 + \left(\omega_2 L - \frac{1}{\omega_2 C}\right)^2}} = 6.93\mu\text{A}$$

$$U_{L2} = \omega_2 L I_2 = 2\pi \times 600 \times 10^3 \times 0.3 \times 10^{-3} \times 6.93 \times 10^{-6} = 7.84\text{mV}$$

【补充7.6】

RLC 串联电路中，已知电感 $L = 320\mu\text{H}$ ，若要求电路的谐振频率覆盖中波无线电广播频率(从550kHz到1.6MHz)。试求可变电容 C 的变化范围。



【解】 谐振时 $\omega L = \frac{1}{\omega C}$

$$C = \frac{1}{\omega^2 L} = \frac{1}{4\pi^2 f^2 L}$$

当 $f = 550\text{kHz}$ 时 $C \approx 262\text{pF}$

当 $f = 1.6\text{MHz}$ 时 $C \approx 31\text{pF}$

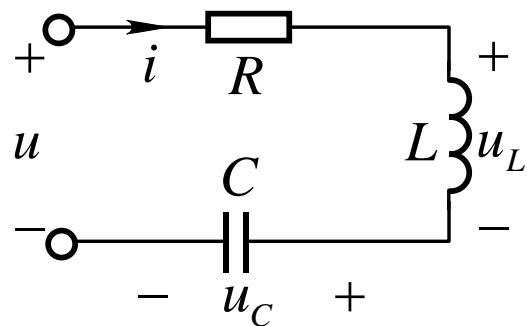
所以可变电容 C 的变化范围应为 $31 \sim 262\text{pF}$

【补充7.7】

图示电路，已知 $u = 0.1\sqrt{2}\cos\omega t$ V， $\omega = 10^4$ rad/s 时电流 i 的有效值最大为1A，此时 $U_L = 10$ V

(1)求 R 、 L 、 C 及品质因数 Q 。

(2)求电流 i 和电压 u_L 、 u_C 。



【解】电路发生谐振时，有

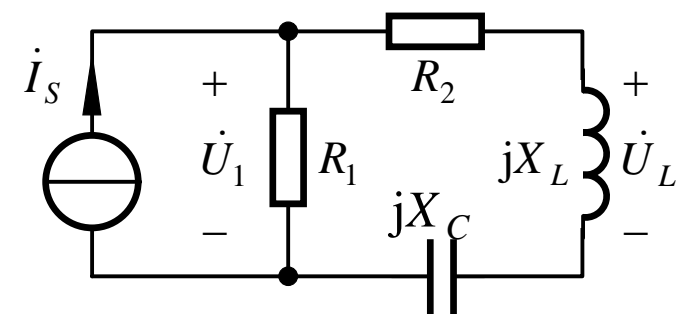
$$\left. \begin{aligned} \omega &= 1/\sqrt{LC} = 10^4 \text{ rad/s} \\ I &= U/R = 1\text{A} \\ Q &= U_L/U = \omega L/R = 100 \end{aligned} \right\} \text{解得} \begin{cases} R = 0.1\Omega \\ L = 1\text{mH} \\ C = 10\mu\text{F} \end{cases}$$

根据谐振特点，则

$$\begin{cases} i = \sqrt{2} \cos \omega t \text{ A} \\ u_L = 10\sqrt{2} \cos(\omega t + 90^\circ) \text{ V} \\ u_C = 10\sqrt{2} \cos(\omega t - 90^\circ) \text{ V} \end{cases}$$

【补充7.8】

设图示电路处于谐振状态，其中 $I_s = 1\text{A}$ ， $R_1 = |X_C| = 100\Omega$
 $U_1 = 50\text{V}$ 。求电压 U_L 和电阻 R_2 。



【解】因为电路处于谐振状态，电感电容串联相当于短路，则有

$$R_1 // R_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{U_1}{I_s} = 50\Omega$$

解得 $R_2 = 100\Omega$

电路处于谐振状态，则

$$X_L = |X_C| = 100\Omega$$

得到 $U_L = \frac{1}{2} I_s X_L = 50\text{V}$