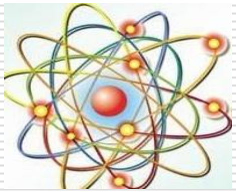
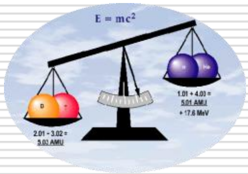




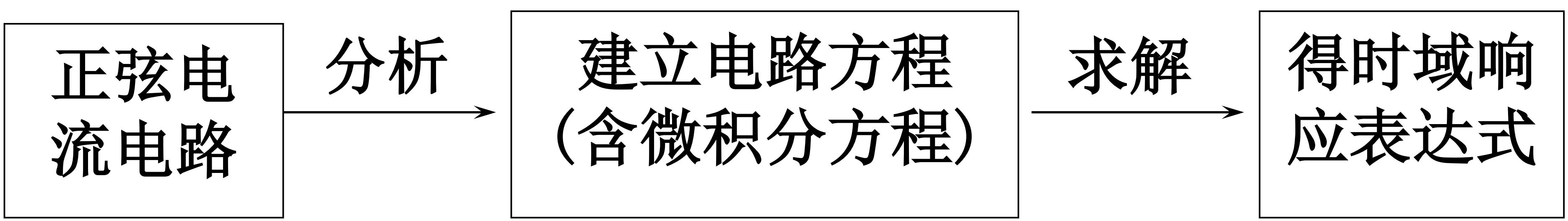
ch4.2 正弦量的相量表示法

杨旭强
哈尔滨工业大学电气工程系

4.2 正弦量的相量表示法

基本要求：掌握正弦量的相量表示法原理、相量运算规则及相量图。

正弦电路电压、电流随时间按正弦规律变化。在含有电感和(或)电容的正弦电路中，元件方程中含有微积分形式。因此，在时域内对正弦电路进行分析时，需要建立含微积分的电路方程。



时域分析过程示意图

4.2 正弦量的相量表示法

思考：正弦函数微积分或几个同频率正弦函数相加减的结果仍是同频率正弦量。能否用一种简单的数学变换方法以避免繁琐的三角函数运算？

正弦量有三要素

正弦稳态电路各量角频率相同

仅有两个要素幅值和初相位需确定

相量分析法

4.2 正弦量的相量表示法

1. 复数的表示法

实部　　虚部

设*A*是一个复数，可表示为

直角坐标式　　$A = a_1 + \mathrm{j}a_2$

模　　辐角

极坐标式　　$A = |A|\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} = |A|(\cos\theta + \mathrm{j}\sin\theta)$

简写为　　$A = |A|\angle\theta$

可得

$$a_1 = |A|\cos\theta \qquad |A| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$a_2 = |A|\sin\theta \qquad \theta = \arctan(a_2/a_1)$$

[例题4.2]

把复数分别化为直角坐标式。

$$A_1 = 10\angle 150^\circ, A_2 = 10\angle -180^\circ, A_3 = 1\angle 90^\circ, A_4 = 1\angle -90^\circ$$

【解】

$$A_1 = 10\angle 150^\circ = 10\cos 150^\circ + \mathrm{j}10\sin 150^\circ \approx -8.66 + \mathrm{j}5$$

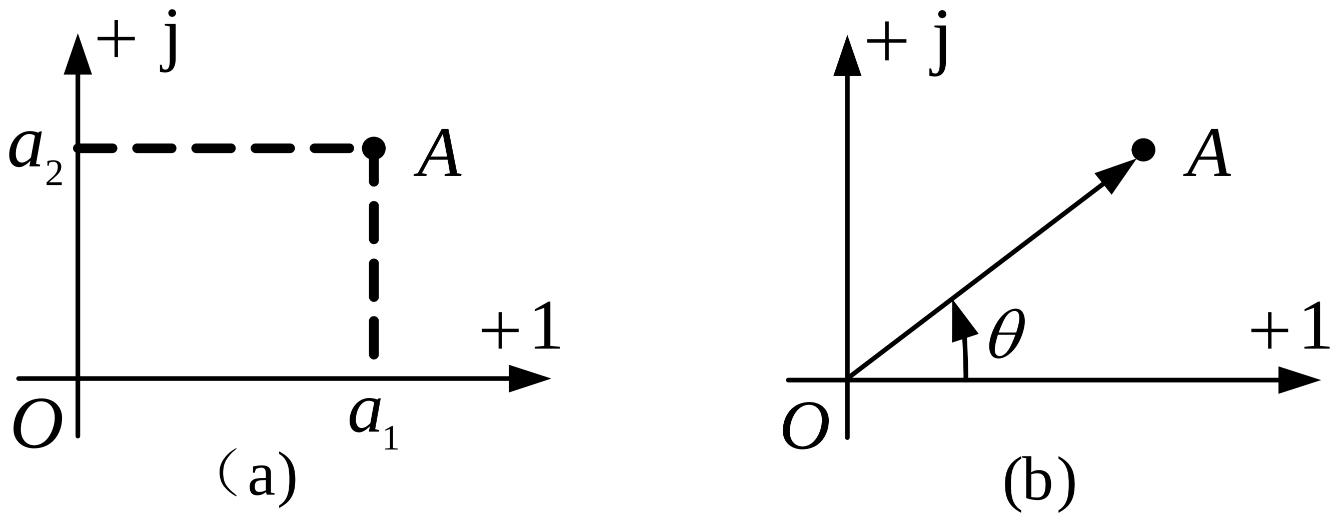
$$A_2 = 10\angle -180^\circ = 10\cos(-180^\circ) + \mathrm{j}10\sin(-180^\circ) = -10$$

$$A_3 = 1\angle 90^\circ = \cos 90^\circ + \mathrm{j}\sin 90^\circ = \mathrm{j}$$

$$A_4 = 1\angle -90^\circ = \cos(-90^\circ) + \mathrm{j}\sin(-90^\circ) = -\mathrm{j}$$

4.2 正弦量的相量表示法

复数*A*还可以用复平面上的点或有向线段表示。



用复平面上的点或有向线段表示复数

2. 正弦量的相量表示

正弦量一般表达式为： $f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)$

设一复数为 $A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$ 根据欧拉公式得

$$A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)+\mathrm{j}A_{\mathrm{m}}\sin(\omega t+\psi)$$

得

$$f(t)=A_{\mathrm{m}}\cos(\omega t+\psi)=\mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}]$$

$$=\mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]=\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

其中 $\dot{A}_{\mathrm{m}}=A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi}=A_{\mathrm{m}}\angle\psi$

最大值相量

正弦量振幅

正弦量初相

4.2 正弦量的相量表示法

$$f(t) = \mathrm{Re}[A_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\psi} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$

一个正弦量 $f(t) = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi)$ 能够唯一地确定其对应的相量 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$

$$f(t) \rightleftharpoons \dot{A}_{\mathrm{m}}$$

反之，若已知 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 和角频率 ω，也能唯一地确定 $\dot{A}_{\mathrm{m}}$ 所代表的正弦量 $f(t) = A_{\mathrm{m}} \cos(\omega t + \psi)$

[书例4.2]

写出代表正弦量的相量 $i_1 = 3\cos\omega t$, $i_2 = 4\cos(\omega t - 150°)$,
$i_3 = -5\cos(\omega t - 60°)$, $i_4 = 6\sin(\omega t + 30°)$.

【解】

$$i_1 \to \dot{I}_{1m} = 3\angle 0^\circ \quad \text{A}$$

$$i_2 \to \dot{I}_{2m} = 4\angle -150^\circ \quad \text{A}$$

$$i_3 = -5\cos(\omega t - 60^\circ) = 5\cos(\omega t - 60^\circ + 180^\circ)$$

$$\to \dot{I}_{3m} = 5\angle 120^\circ \quad \text{A}$$

$$i_4 = 6\sin(\omega t + 30^\circ) = 6\cos(\omega t + 30^\circ - 90^\circ)$$

$$\to \dot{I}_{4m} = 6\angle -60^\circ \quad \text{A}$$

[书例4.3]

已知电压相量$\dot{U}_{1m}$=(3-j4)V，$\dot{U}_{2m}$=(-3+j4)V，$\dot{U}_3$=j4V。写出各电压相量所代表的正弦量（设角频率为ω)。

【解】

$$U_{1m} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5\ \mathrm{V} \qquad \psi_1 = \arctan\frac{-4}{3} = -53.1^\circ$$

$$\dot{U}_{1m} = 5\angle -53.1^\circ\ \mathrm{V} \quad \rightarrow u_1 = 5\cos(\omega t - 53.1^\circ)$$

$$U_{2m} = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = 5\ \mathrm{V} \qquad \psi_2 = \arctan\frac{4}{-3} = 126.9^\circ$$

$$\dot{U}_{2m} = 5\angle 126.9^\circ\ \mathrm{V} \rightarrow u_2 = 5\cos(\omega t + 126.9^\circ)$$

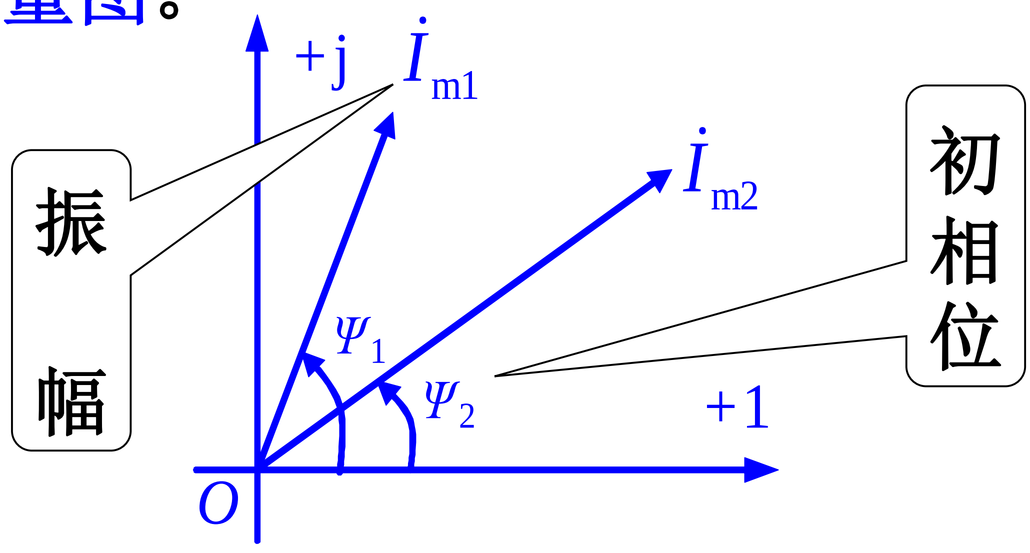
$$\dot{U}_3 = \mathrm{j}4\ \mathrm{V} = 4\angle 90^\circ\ \mathrm{V} \rightarrow u_3 = 4\sqrt{2}\cos(\omega t + 90^\circ)$$

4.2 正弦量的相量表示法

关于相量说明

1. 相量是复值常量，而正弦量是时间的余弦函数，相量只是代表正弦量，而不等于正弦量。

2. 按着一定的振幅和相位关系画出若干相量的图形 ——相量图。



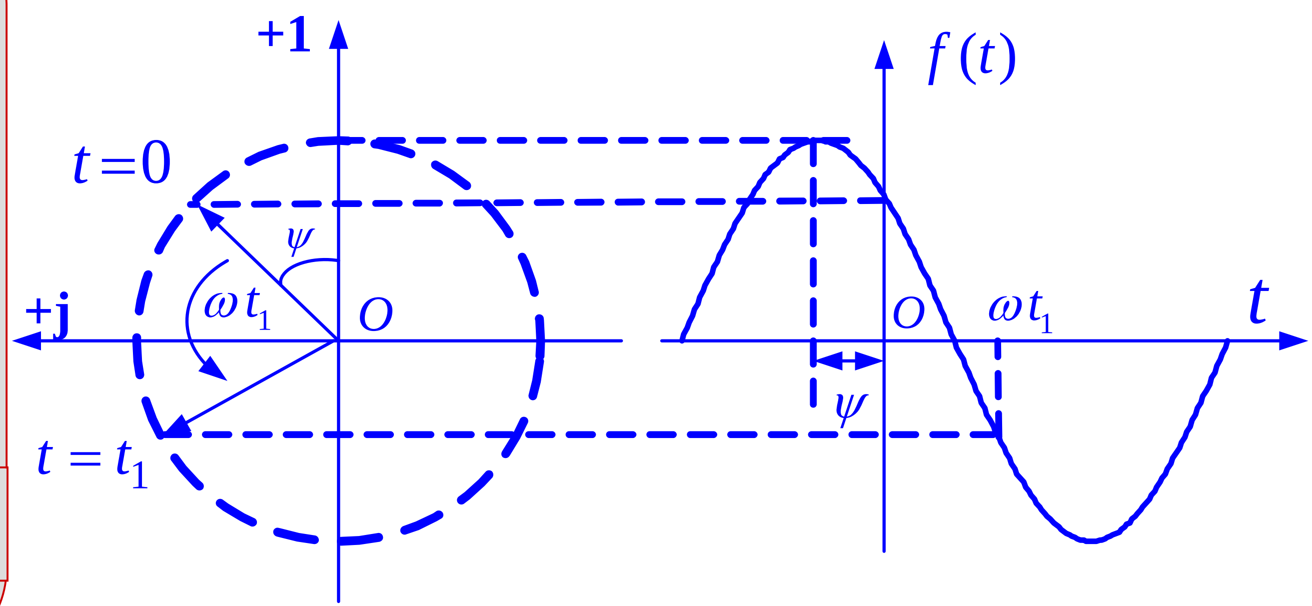
相量图

关于相量说明

3. 复数 $A_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\psi)}$ 的辐角 $\omega t+\psi$ 是随时间均匀递增的，所以这一有向线段将以原点为圆心反时针方向旋转，旋转角速度为 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\omega t+\psi)=\omega$

旋转相量—旋转相量任何时刻在实轴上的投影对应于正弦量在同一时刻的瞬时值。

$\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ → 旋转因子



旋转相量在实轴上的投影对应于正弦波

3. 相量的性质

(1) 惟一性

两个同频率正弦量相等的充要条件是代表这两个正弦量的相量相等。即对于所有的时间*t*，

$$\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}1}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] = \mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$$ 充要条件为 $$\dot{A}_{\mathrm{m}1} = \dot{A}_{\mathrm{m}2}$$

(2) 线性性质

*N*个同频率正弦量线性组合（具有实系数）的相量等于各个正弦量相量的同样的线性组合。设

$f_k(t) = \mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，($b_k$ 为实数)，则

$$\sum_{k=1}^{N} b_k \cdot f_k(t) = \mathrm{Re}[(\sum_{k=1}^{N} b_k \dot{A}_{\mathrm{m}k})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}] \quad \sum_{k=1}^{N} b_k \cdot f_k(t) \rightleftharpoons \sum_{k=1}^{N} b_k \dot{A}_{\mathrm{m}k}$$

3. 相量的性质

(3) 微分性质

正弦量(角频率为ω) 时间导数的相量等于表示原正弦量的相量乘以因子 jω。

设 $f(t)=\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，则 $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)=\mathrm{Re}[\mathrm{j}\omega\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}f(t)\rightleftharpoons \mathrm{j}\omega\dot{A}_{\mathrm{m}}$$

(4) 积分性质

正弦量(角频率为ω) 时间积分的相量等于表示原正弦量的相量除以因子 jω。

设 $f(t)=\mathrm{Re}[\dot{A}_{\mathrm{m}}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，则 $\int f(t)\mathrm{d}t=\mathrm{Re}[\dfrac{\dot{A}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$

$$\int f(t)\mathrm{d}t\rightleftharpoons\frac{\dot{A}_{\mathrm{m}}}{\mathrm{j}\omega}$$

由于采用相量表示正弦量，正弦量的微积分运算变换为乘除 jω 从而简化运算。

4. 相量运算回顾

(1) 加减法

宜用直角坐标形式　规则：实部虚部分别相加减，有分式的先分子分母同时乘以分母的共轭复数再相加减。

(2) 乘除法

宜用极坐标形式　规则：模相乘除，辐角相加减；

如果用直角坐标形式　展开相乘分别合并

[书例4.4]

设电感的磁链为正弦量 $\psi = \mathrm{Re}[\dot{\psi}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$,它所引起的感应电压也是同频率的正弦量 $u = \mathrm{Re}[\dot{U}_{\mathrm{m}} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}]$，写出电压相量和磁链相量的关系。

【解】 当u和ψ的参考方向符合右螺旋定则时

$$u = \frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}t}$$

根据正弦量的相量表示的惟一性和微分规则，与上述微分关系对应的相量关系式为

$$\dot{U}_{\mathrm{m}} = \mathrm{j}\omega \dot{\psi}_{\mathrm{m}} \quad \text{或} \quad \dot{\psi}_{\mathrm{m}} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega} \dot{U}_{\mathrm{m}}$$