第 1 章　线性规划

Linear Programming

1.1　一般线性规划问题及数学模型

1.1.1　问题的提出

例：某企业计划生产甲、乙两种产品，该两种产品均需经A、B、C、D四种不同设备上加工，按工艺资料规定，在各种不同设备上的加工时间及设备加工能力、单位产品利润如表中所示。问:如何安排产品的生产计划,才能使企业获利最大?

设备 / 产品	A	B	C	D	单位利润
甲产品	2	1	4	0	2
乙产品	2	2	0	4	3
加工能力	12	8	16	12	

建立模型：

设 产品的产量　　甲——x_1件，乙——x_2件，则

目标(objective)：　Max　$z=2x_1+3x_2$

限制条件
(subject to)：

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2 \le 12 \\ x_1+2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\quad x_2 \ge 0 \end{cases}$$

1.1.2 线性规划问题的一般数学模型

1. 相关概念

（1）决策变量：模型中要求解的未知量，简称变量。

（2）目标函数：模型中要达到的目标的数学表达式。

（3）约束条件：模型中的变量取值所需要满足的一切限制条件。

此三项内容称为模型结构的三要素。

2. 线性规划模型的一般要求

（1）变　　量：取值连续；

（2）目标函数：线性表达式；

（3）约束条件：线性的等式或者不等式。

3． 线性规划问题的一般表示方法

（1）一般式：

$$\max z=c_1x_1+c_2x_2+\cdots\cdots+c_nx_n$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n\leqslant b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n\leqslant b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots\cdots+a_{mn}x_n\leqslant b_m \\ x_1,x_2,\cdots\cdots,x_n\geqslant 0 \end{cases}$$

s.t.---subject to

(2) 和式：　$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i & (i=1,2,\cdots\cdots,m) \\ x_j \ge 0 & (j=1,2,\cdots\cdots,n) \end{cases}$$

其中：c_j---------表示目标函数系数
a_{ij}---------表示约束条件系数
b_i ---------表示约束右端项

（3） 矩阵: $\max z=CX$

$$\text{s.t.}\begin{cases} AX\leqslant b \\ X\geqslant 0 \end{cases}$$

（4） 向量: $\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$

$$\text{s.t}\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\leqslant b \\ x_j\geqslant 0 \qquad (j=1,2,\cdots\cdots,n) \end{cases}$$

4.　线性规划模型的标准形式

（1）变量：所有变量均$x_j \geqslant 0$

（2）目标函数：为取“max”形式

（3）约束条件：全部约束方程均为“=”连接

（4）约束右端项：$b_i \geqslant 0$

非标准形式情况有

✫变量：　$x_j \leqslant 0$,或x_j无约束

✫目标函数：min

✫约束条件：“$\leqslant$”或“$\geqslant$”

✫约束右端项：　$b_i < 0$

5．LP模型的标准化：

（1）变量：若　$x_j \le 0$

若　x_j无约束

（2）目标函数：当 min　z　时，

则　令 $z' = -z$，等价于求 max（z'），而 $z_{min} = -(-z)_{max}$

（3）约束方程：当“≤”时，

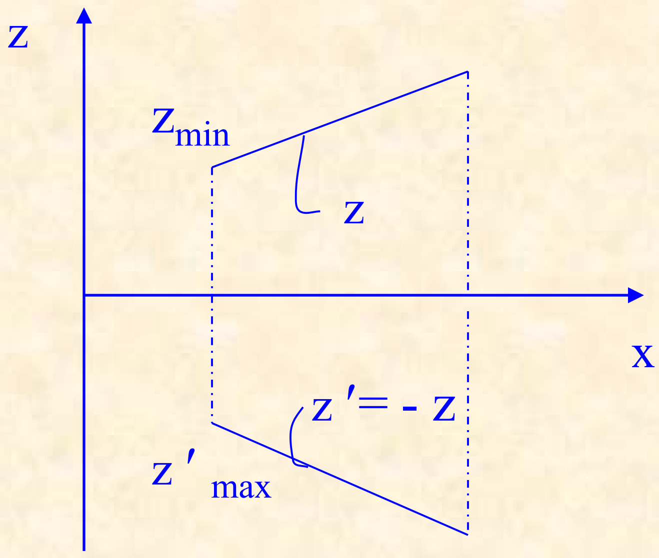
引进松弛（slack）变量$+x_s$；

当“≥”时，

引进剩余（surplus）变量 $-x_s$；

（4）约束右端项：当 $b_i < 0$，

则不等式两端同乘（- 1）



例：将下述LP模型标准化：

obj. Min $z=2x_1-x_2+3x_3$

st.
$$\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3 \le 6 \\ 3x_1-2x_2+x_3 = 4 \\ 2x_1-x_2-3x_3 \ge 5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2\text{无符号限制},\ x_3 \le 0 \end{cases}$$

解：设 $z'=-z$, $x_2=x_2'-x_2''$, $x_2' \ge 0$, $x_2'' \ge 0$, $x_3=-x_3'$, $x_3' \ge 0$ ， $x_4 \ge 0$, $x_5 \ge 0$, 则有

obj. Max $z'=-2x_1+(x_2'-x_2'')+3x_3'$

st.
$$\begin{cases} x_1+2(x_2'-x_2'')-4x_3'+x_4=6 \\ 3x_1-2(x_2'-x_2'')-x_3'=4 \\ 2x_1-(x_2'-x_2'')+3x_3'-x_5=5 \\ x_1 \ge 0,\ x_2' \ge 0,\ x_2'' \ge 0,\ x_3' \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0 \end{cases}$$

复习思考题：

1. 什么是模型结构的三要素？
2. 什么是线性规划模型？能举出线性规划模型的例子吗？
3. LP模型中目标函数系数、约束条件系数、约束右端项的含义指的是什么？通常以什么符号表示？
4. LP模型的一般表示方法有几种形式？能否写出这些形式？
5. 什么是线性规划模型的标准形式？为何提出标准形式？你能否把一个线性规划模型的非标准形式转化为标准形式？

1.1.3 简单线性规划模型的建立

步骤：

（1）分析问题：确定决策内容、要实现的目标以及所受到的限制条件。

（2）具体构造模型：选择合适的决策变量、确定目标函数的表达式、约束条件的表达式，分析各变量取值的符号限制。

例1：某工厂在生产过程中需要使用浓度为80%的硫酸100 吨，而市面上只有浓度为30%，45%，73%，85%，92%的硫酸出售，　每吨的价格分别为400、700、1400、1900和2500元。　问：采用怎样的购买方案，才能使所需总费用最小？

例2：设有下面四个投资机会：

甲：在三年内，投资人应在每年年初投资，每年每元投资可获利0.2元，每年取息后可重新将本息用于投资。

乙：在三年内，投资人应在第一年年初投资，每两年每元投资可获利0.5元，两年后取息，取息后可重新将本息用于投资。这种投资最多不得超过20,000元。

丙：在三年内，投资人应在第二年年初投资，两年后每元投资可获利0.6元。这种投资最多不得超过15,000元。

丁：在三年内，投资人应在第三年年初投资，一年后每元投资可获利0.4元。这种投资最多不得超过10,000元。

假定在这三年为一期的投资中，每期的开始有30,000元资金可供使用，问：采取怎样的投资计划，才能在第三年年底获得最大收益？

例3：合理下料问题：

要制作100套钢筋架子，每套含2.9米、2.1米、1.5米的钢筋各一根。已知原料长7.4米，问：如何下料，使用料最省？

长度 \ 下料数 \ 方案	I	II	III	IV	V
2.9米	1	2		1	
2.1米			2	2	1
1.5米	3	1	2		3
合计(米)	7.4	7.3	7.2	7.1	6.6
料头(米)	0	0.1	0.2	0.3	0.8

例4：有A、B两种产品，都需要经过前、后两道化学反应过程。每种产品需要的反应时间及其可供使用的总时间如表示。

每生产一个单位产品B的同时，会产生2个单位的副产品C，且不需外加任何费用。副产品C的一部分可以出售盈利，其余的只能加以销毁。

副产品C每卖出一个单位可获利3元，但是如果卖不出去，则每单位需销毁费用2元。预测表明，最多可售出5个单位的副产品C。

要求确定使利润最大的生产计划。

产品 过程	A	B	可利用时间
前道过程	2	3	16
后道过程	3	4	24
单位利润	4	10	

例5：一家昼夜服务的饭店，24小时中需要的服务员数如下表所示。每个服务员每天连续工作8小时，且在时段开始时上班。问：最少需要多少名服务员？试建立该问题的线性规划模型。

起讫时间	服务员人数
2----6 时	4
6---10 时	8
10--14 时	10
14--18 时	7
18--22 时	12
22---2 时	4

建立线性规划模型要求：

（1）要求决策的量是可以连续取值的可控量，或者是可以简化为连续取值的变量；

（2）要求所解决的问题的目标可用数值指标描述，并且能表示成线性函数；

（3）存在着多种决策方案可供选择；

（4）决策所受到的限制条件可用线性的等式或者不等式表示。

1.1.4 线性规划问题解的有关概念

设模型

$$\max z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i & (i=1,2,\cdots\cdots,m)\\ x_j\geqslant 0 & (j=1,2,\cdots\cdots,n)\end{cases}$$

（1）可行解：满足所有约束方程和变量符号限制条件的一组变量的取值。

（2）可行域：全部可行解的集合称为可行域。

（3）最优解：使目标函数达到最优值的可行解。

（4）基：设A为线性规划模型约束条件系数矩阵（$m \times n$，$m<n$），而B为其$m\times m$子矩阵，若$|B|\neq 0$，则称B为该线性规划模型的一个基。

（5）基变量：基中每个向量所对应的变量称为基变量。

（6）非基变量：模型中基变量之外的变量称为非基变量。

（7）基本解（基解）：令模型中所有非基变量$X_{非基}=0$后，由模型约束方程组

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i=1,2,\cdots\cdots,m)$$ 得到的一组解。

（8）基本可行解（基可行解）：在基本解中，同时又是可行解的解称为基本可行解。

（9）可行基：对应于基本可行解的基称为可行基。

例：$\text{Max } z=2x_1+3x_2$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1+x_2\le 3 \\ x_1+2x_2\le 4 \\ x_1,x_2\ge 0 \end{cases}$$

标准化 $\Longrightarrow$

$\text{Max } z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$

$$\text{st.}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \\ x_1, x_2, x_3, x_4\ge 0 \end{cases}$$

可行解：$X=(0，0)^T$，$X=(0，1)^T$，$X=(1/2，1/3)^T$ 等。

设 $A=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$，令 $B=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_4 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$ ——基变量，则 $|B|=1\neq 0$,

令 $x_1=x_2=0$，则 $x_3=3$, $x_4=4$，$X=(0,0,3,4)^T$ ——基本可行解

令 $B=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$，则 $|B|=-1\neq 0$,

令 $x_2=x_4=0$，则 $x_3=-1$, $x_1=4$，$X=(4,0,-1,0)^T$ ——非基本可行解

复习思考题：

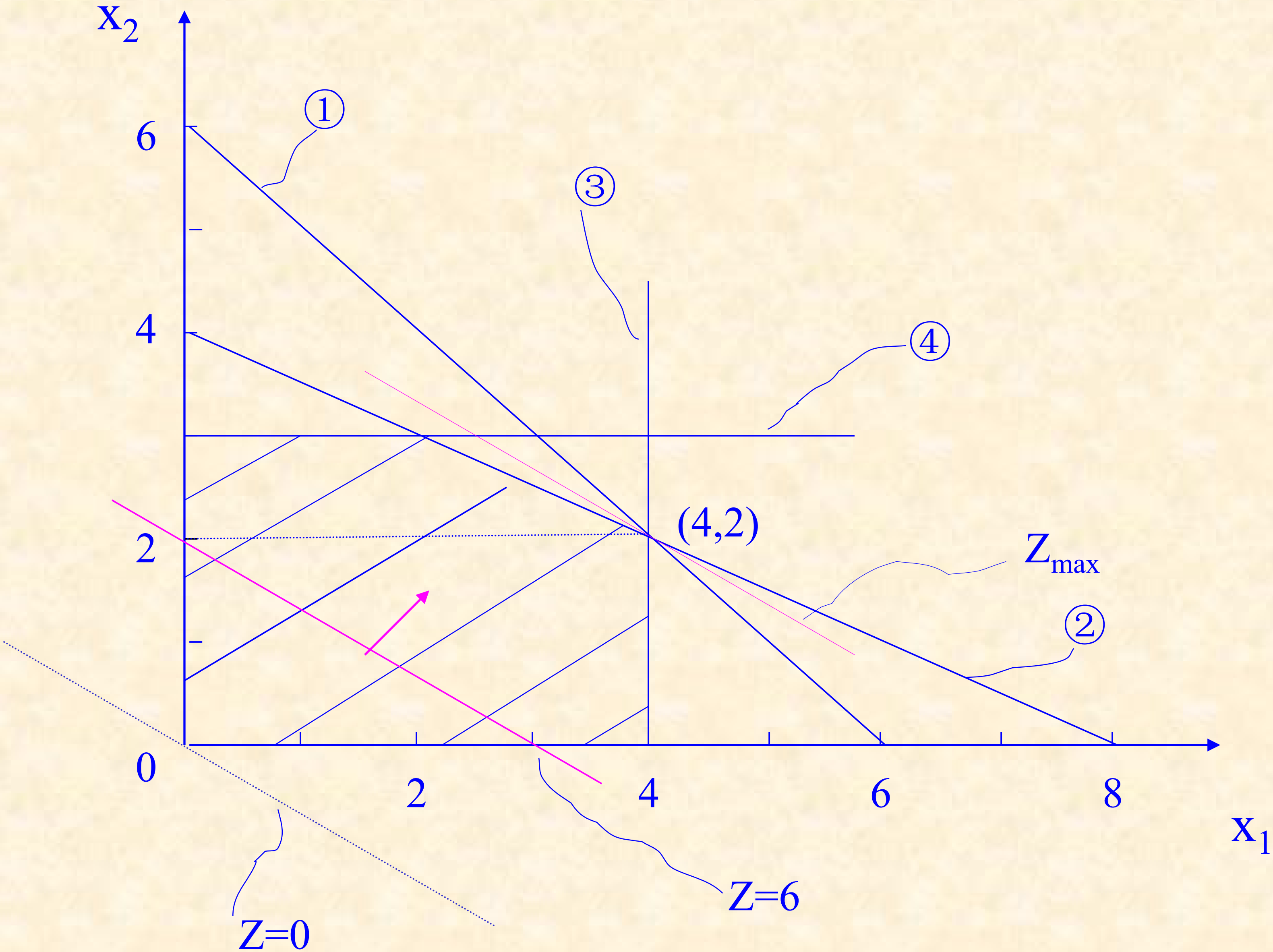
1. 可行解和可行域有怎样的关系？
2. 一个标准化LP模型，最多可有多少个基？
3. 基本解是如何定义的？怎样才能得到基本解？
4. 可行解、基本解、基本可行解三者之间有什么关系？在LP模型中是否一定存在？
5. 什么是可行基？

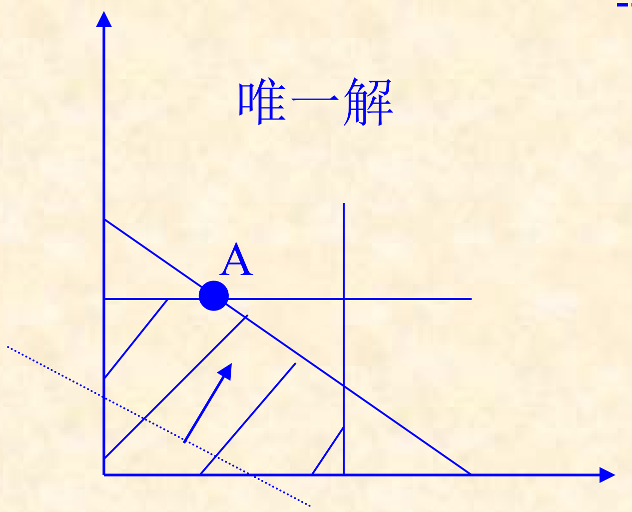
1.2　线性规划问题的图解方法

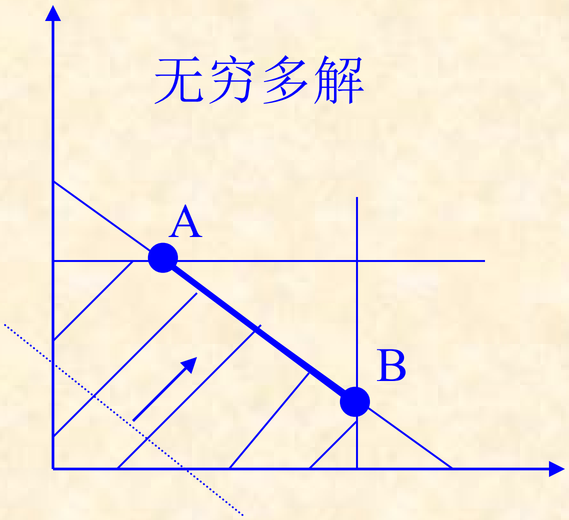
*　利用作图方法求解。

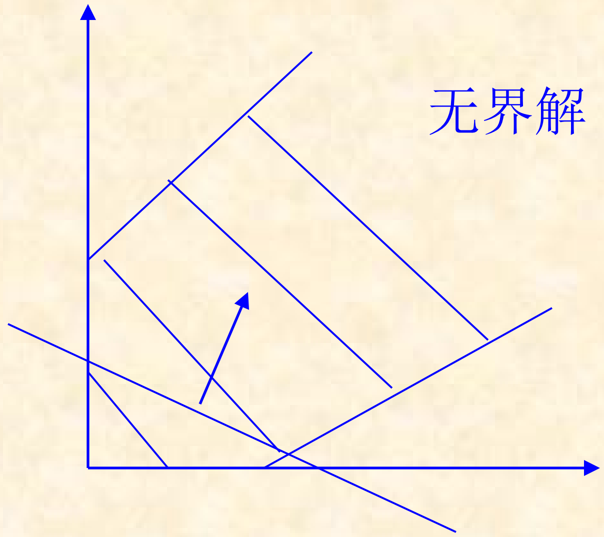
例：$\max z=2x_1+3x_2$

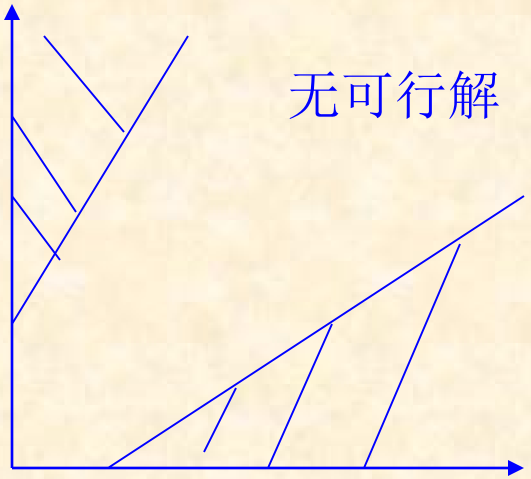
$$
\text{s.t}\quad \begin{cases} 2x_1+2x_2\le 12 & \text{----------①} \\ x_1+2x_2\le 8 & \text{----------②} \\ 4x_1\le 16 & \text{----------③} \\ 4x_2\le 12 & \text{----------④} \\ x_1\ge 0,\quad x_2\ge 0 \end{cases}
$$


x_2
6
4
2
0
①
③
④
(4,2)
Z_{max}
②
2
4
6
8
x_1
Z=6
Z=0


唯一解
A


无穷多解
A
B


无界解


无可行解

$$\begin{cases} 2x_1+2x_2\le 12 \\ x_1+2x_2\le 8 \\ 4x_1\le 16 \\ 4x_2\le 12 \end{cases} \xrightarrow{\text{标准化}} \begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3=12 \\ x_1+2x_2+x_4=8 \\ 4x_1+x_5=16 \\ 4x_2+x_6=12 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

令 $x_1=x_2=0$，$X=(0,0,12,8,16,12)^T$

令 $x_1=x_6=0$，$X=(0,3,6,2,16,0)^T$

令 $x_4=x_6=0$，$X=(2,3,2,0,8,0)^T$

令 $x_4=x_5=0$，$X=(4,2,0,0,0,4)^T$

令 $x_3=x_5=0$，$X=(4,2,0,0,0,4)^T$

令 $x_3=x_4=0$，$X=(4,2,0,0,0,4)^T$

令 $x_2=x_5=0$，$X=(4,0,4,2,0,12)^T$

令 $x_1=x_3=0$，$X=(0,6,0,-4,-16,-12)^T$

令 $x_1=x_4=0$，$X=(0,4,4,0,16,-4)^T$

令 $x_3=x_6=0$，$X=(3,3,0,-1,4,0^T$

令 $x_6=x_5=0$，$X=(4,3,-2,-2,0,0)^T$

令 $x_2=x_3=0$，$X=(6,0,0,2,-8,-12)^T$

令 $x_2=x_4=0$，$X=(8,0,-4,0,-16,12)^T$

令 $x_1=x_5=0$，$X=?$

令 $x_2=x_6=0$，$X=?$

步骤：（1）作平面直角坐标系，标上刻度；
（2）作出约束方程所在直线，确定可行域；
（3）作出一条目标函数等值线，判定优化方向；
（4）沿优化方向移动，确定与可行域相切的点，确定最优解，并计算最优值。

讨论一：LP模型求解思路：
（1）若LP模型可行域存在，则为一凸集合；
（2）若LP模型最优解存在，则其应在其可行域顶点上找到；
（3）顶点与基本解、基本可行解的关系：

讨论二：模型求解时，可得到如下几种解的状况：
（1）唯一最优解：只有一点为最优解点，简称唯一解；
（2）无穷多最优解：有许多点为最优解点，简称无穷多解；
（3）无界最优解：最优解取值无界，简称无界解；
（4）无可行解：无可行域，模型约束条件矛盾。

复习思考题：

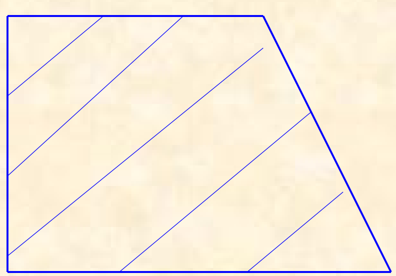
1. LP模型的可行域是否一定存在?
2. 图解中如何去判断模型有唯一解、无穷多解、无界解和无可行解？
3. LP模型的可行域的顶点与什么解具有对应关系？
4. 由图解过程能否构想一个多维LP模型的求解思路？

1.3　单纯形法的基本原理（Simplex Method）

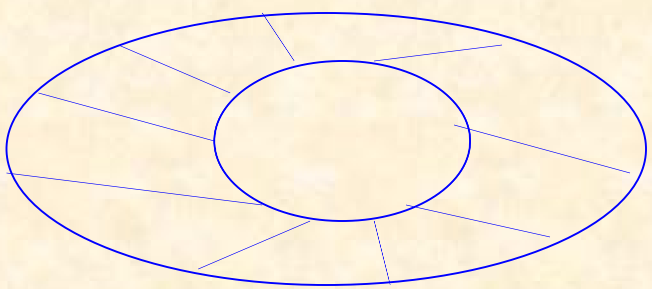
1.3.1　两个概念：

（1）凸集：对于集合C中任意两点连线上的点，若也在C内，则称C为凸集。

或者， *任给$X_1 \in C$，$X_2 \in C$，$X = \alpha X_1 + (1-\alpha) X_2 \in C$　$(0<\alpha<1)$，则C为凸集。*



凸集

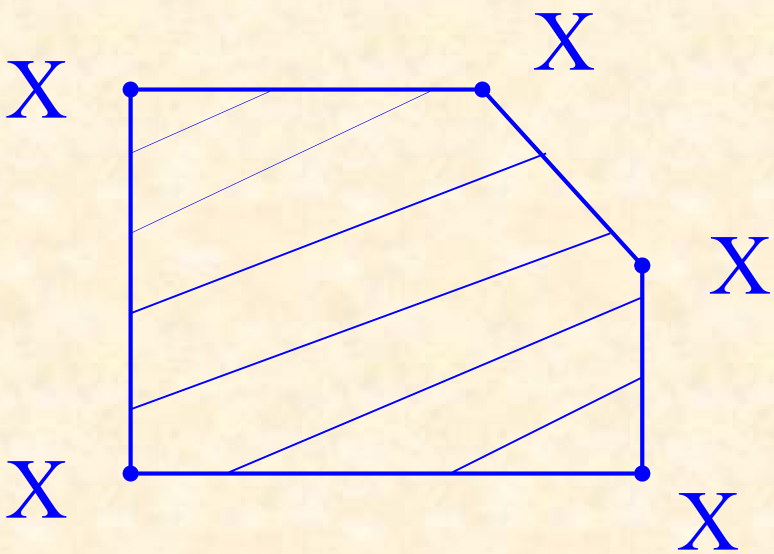


非凸集

（2）顶点：凸集中不成为任意两点连线上的点，称为凸集顶点。

或者，

设C为凸集，对于$X \in C$，不存在任何$X_1 \in C$，$X_2 \in C$，且$X_1 \neq X_2$，使得$X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2 \in C$，　$(0<\alpha<1)$，则X为凸集顶点。



1.3.2 三个基本定理：

定理1： 若LP模型存在可行解，则可行域为凸集。

证明：设 $\max z=CX$

$$\text{st.}\quad \begin{cases} AX=b \\ X\geq 0 \end{cases}$$

并设其可行域为C，若X_1、X_2为其可行解，且$X_1\neq X_2$，

则 $X_1\in C$，$X_2\in C$， 即$AX_1=b$，$AX_2=b$，$X_1\geq 0$，$X_2\geq 0$，

又 X为X_1、X_2连线上一点，即 $X=\alpha X_1+(1-\alpha)X_2$， $(0<\alpha<1)$，

$\therefore AX=\alpha AX_1+(1-\alpha)AX_2=\alpha b+(1-\alpha)b=b$，$(0<\alpha<1)$，且 $X\geq 0$，

$\therefore X\in C$，

$\therefore$ C为凸集。

引理： LP模型的可行解$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)^T$为基本可行解的充要条件是X的正分量所对应的系数列向量线性独立。

证：

（1）必要性：X基本可行解⇒X的正分量所对应的系数列向量线性独立

可设$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k, 0, 0, \cdots\cdots, 0)^T$，若X为基本可行解，显然，由基本可行解定义可知$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$所对应的系数列向量$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$应该线性独立。

（2）充分性：X的正分量所对应的系数列向量线性独立⇒ X为基本可行解

若A的秩为m，则X的正分量的个数$k \le m$；

当$k=m$时，则$x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$的系数列向量$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$恰好构成基，

∴ X为基本可行解。

当$k<m$时，则必定可再找出$m-k$个列向量与$P_1, P_2, \cdots\cdots, P_k$一起构成基，

∴ X为基本可行解。

定理2：LP模型的基本可行解对应其可行域的顶点。

证：用反证法 **X非基本可行解⇔X非凸集顶点**

（1）必要性：X非基本可行解⇒ X非凸集顶点

不失一般性，设$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_m, 0, 0, \cdots\cdots, 0)^T$，为非基本可行解，

∵ X为可行解，

∴ $\sum_{j=1}^{n} p_j x_j = b$， 即 $\sum_{j=1}^{m} p_j x_j = b \quad \cdots\cdots(1)$

又 X是非基本可行解， ∴ $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_m$线性相关，即有

$\delta_1 P_1 + \delta_2 P_2 + \cdots\cdots + \delta_m P_m = 0$， 其中$\delta_1$，$\delta_2$，……，$\delta_m$不全为0，两端同乘$\mu \neq 0$，得

$\mu\delta_1 P_1 + \mu\delta_2 P_2 + \cdots\cdots + \mu\delta_m P_m = 0$，……（2）

由 (1)+(2)得　$(x_1+\mu\delta_1)P_1+(x_2+\mu\delta_2)P_2+\cdots\cdots+(x_m+\mu\delta_m)P_m=b$

由 (1)−(2)得　$(x_1-\mu\delta_1)P_1+(x_2-\mu\delta_2)P_2+\cdots\cdots+(x_m-\mu\delta_m)P_m=b$

令$X_1=(x_1+\mu\delta_1,\ x_2+\mu\delta_2,\ \cdots\cdots,\ x_m+\mu\delta_m,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)^T$

$X_2=(x_1-\mu\delta_1,\ x_2-\mu\delta_2,\ \cdots\cdots,\ x_m-\mu\delta_m,\ 0,\ \cdots\cdots,\ 0)^T$

取μ充分小,使得 $x_j\pm\mu\delta_j\geq 0$，　则 X_1、X_2均为可行解，

但 $X=0.5X_1+(1-0.5)X_2$，　∴ X是X_1、X_2连线上的点，

∴　X非凸集顶点。

（2）充分性： X非凸集顶点⇒ X非基本可行解

设$X=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_r, 0, 0, \cdots\cdots, 0)^T$为非凸集顶点，则必存在Y、Z两点，使得

$X=\alpha Y+(1-\alpha)Z$，$(0<\alpha<1)$，且Y、Z为可行解

或者　$x_j=\alpha y_j+(1-\alpha)z_j$　$(0<\alpha<1)$，　$(j=1, 2, \cdots\cdots, n)$，　$y_j\geq 0$，$z_j\geq 0$

∵　$\alpha>0$，$1-\alpha>0$，当$x_j=0$，　必有$y_j=z_j=0$

∴　$\sum_{j=1}^{n} p_j y_j=\sum_{j=1}^{r} p_j y_j=b \quad \cdots\cdots(1)$

$\sum_{j=1}^{n} p_j z_j=\sum_{j=1}^{r} p_j z_j=b \quad \cdots\cdots(2)$

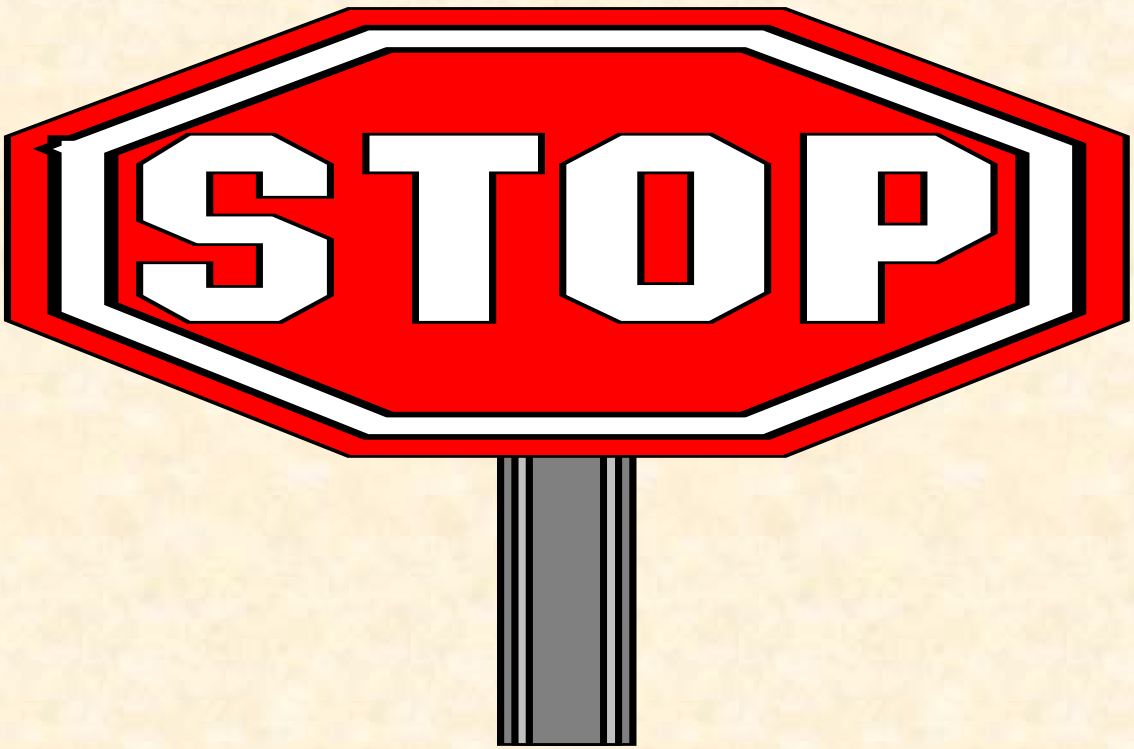
，(1)－(2)，得　$\sum_{j=1}^{r}(y_j-z_j)p_j=0$

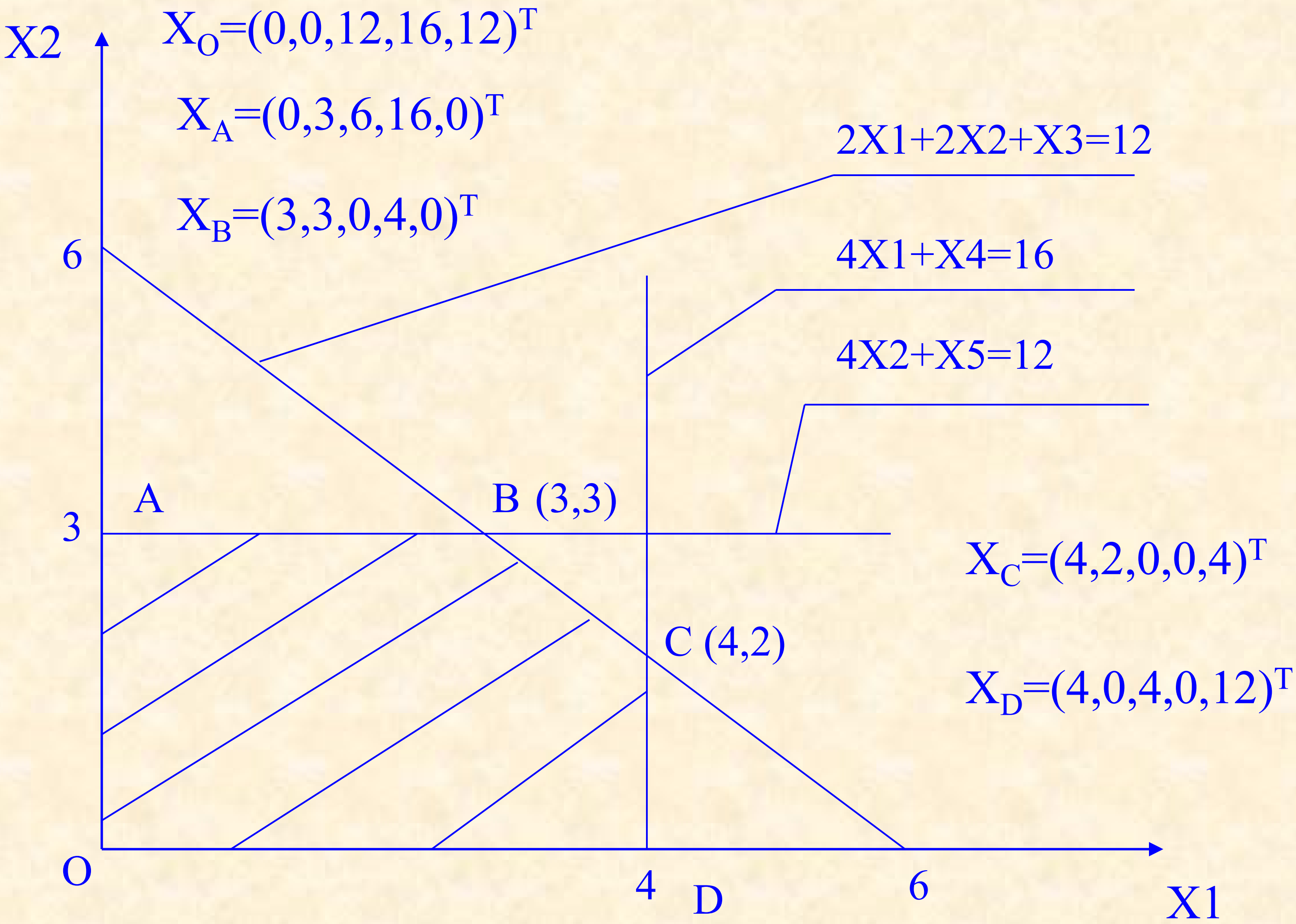
即　$(y_1-z_1)P_1+(y_2-z_2)P_2+\cdots\cdots+(y_r-z_r)P_r=0$

∵ Y、Z为不同两点，∴ y_j-z_j不全为0，

∴ $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_r$线性相关，

∴ X非基本可行解。





X2
$X_O=(0,0,12,16,12)^T$
$X_A=(0,3,6,16,0)^T$
$X_B=(3,3,0,4,0)^T$
2X1+2X2+X3=12
4X1+X4=16
4X2+X5=12
6
A
B (3,3)
3
$X_C=(4,2,0,0,4)^T$
C (4,2)
$X_D=(4,0,4,0,12)^T$
O
4
D
6
X1

定理3： 若LP模型有最优解，则一定存在一个基本可行解为最优解。

证： 设 $X^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots, x_n^0)^T$ 是线性规划模型的一个最优解，

$$z^0=z_{max}=CX^0$$

若X^0非基本可行解，即非顶点，只要取δ充分小，

则必能找出$X^1=X^0-\delta\geq 0$，$X^2=X^0+\delta\geq 0$，即X^1、X^2为可行解，

$$z^1=CX^1=CX^0-C\delta=z_{max}-C\delta，z^2=CX^2=CX^0+C\delta=z_{max}+C\delta$$

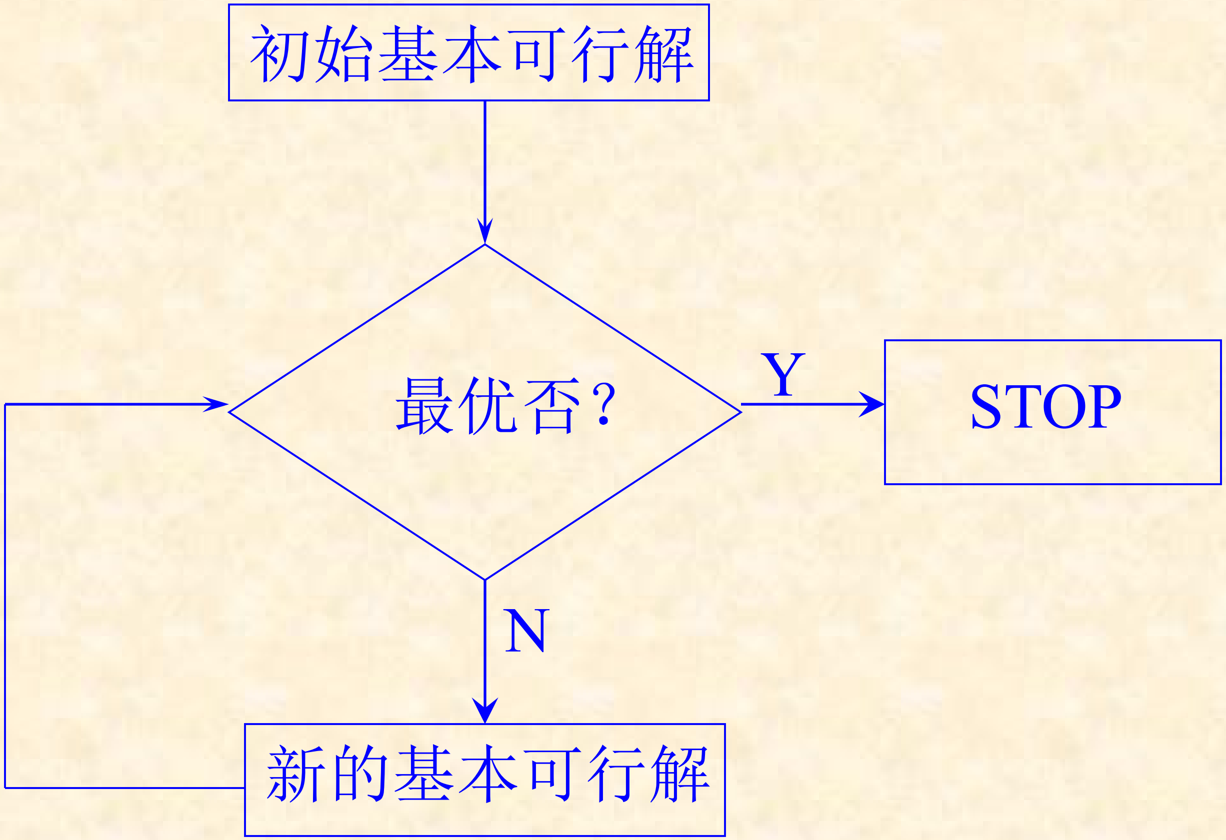
$\because$ $z^0=z_{max}\geq z^1$，$z^0=z_{max}\geq z^2$，

$\therefore$ $z^1=z^2=z^0$，即 X^1、X^2也为最优解，

若X^1、X^2仍不是顶点，可如此递推，直至找出一个顶点为最优解。

从而，必然会找到一个基本可行解为最优解。

单纯形法的计算步骤：



1．初始基本可行解的确定：

设模型

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\le b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\ge 0 & (j=1,2,\cdots,n)\end{cases}\xrightarrow{\text{化标准形}}$$

$$\max z=\sum_{j=1}^{n}c_j x_j+\sum_{I=1}^{m}0\cdot x_{si}$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j+x_{si}=b_i & (i=1,2,\cdots,m)\\ x_j\ge 0,\quad x_{si}\ge 0 & (j=1,2,\cdots,n;\ i=1,2,\cdots,m)\end{cases}$$

∴ 初始基本可行解 $X=(\underbrace{0,0,\cdots\cdots,}_{n\text{个}0}0,\ b_1,b_2,\cdots\cdots,b_m)^T$，

2．从一个基本可行解向另一个基本可行解转换

不失一般性，设基本可行解$X^0=(x_1^0, x_2^0, \cdots\cdots, x_m^0, 0, \cdots\cdots, 0)^T$，前m个分量为正值，秩为m，其系数矩阵为

$$
\begin{array}{cccccccccc}
P_1 & P_2 & \cdots\cdots & P_m & P_{m+1} & \cdots\cdots & P_j & \cdots\cdots & P_n & b \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
1 & 0 & \cdots\cdots & 0 & a_{1,m+1} & \cdots\cdots & a_{1j} & \cdots\cdots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots\cdots & 0 & a_{2,m+1} & \cdots\cdots & a_{2j} & \cdots\cdots & a_{2n} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & a_{m,m+1} & \cdots\cdots & a_{mj} & \cdots\cdots & a_{mn} & b_m
\end{pmatrix}
$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{n} p_j x_j^0 = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i^0 = b \quad \cdots\cdots(1)$$

又P_1 $P_2 \ldots\ldots P_m$为一个基，任意一个非基向量P_j可以以该组向量线性组合表示，即

$$P_j = a_{1j}P_1 + a_{2j}P_2 + \cdots\cdots + a_{mj}P_m \quad ，即 P_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i \ ,$$

移项，两端同乘θ>0，有 $\theta(P_j - \sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i) = 0 \quad \cdots\cdots\cdots(2)$

$$(1)+(2)：\quad \sum_{i=1}^{m}(x_i^0 - \theta a_{ij})P_i + \theta P_j = b,$$

取θ充分小，使所有$x_i^0 - \theta a_{ij} \geq 0$，从而

$$X^1 = (x_1^0 - \theta a_{1j}, x_2^0 - \theta a_{2j}, \cdots\cdots, x_m^0 - \theta a_{mj}, 0, \cdots\cdots, \theta, \cdots\cdots, 0)^T$$

也是可行解。

当取 $\theta = \min\limits_{i}\left\{\dfrac{x_i^0}{a_{ij}} \middle| a_{ij} > 0\right\} = \dfrac{x_L^0}{a_{lj}}$，则$X^1$的前m个分量至少有一个为0（如 x_L^1）。

∴ P_1，$P_2, \cdots\cdots, P_{L-1}$，$P_{L+1}, \cdots\cdots$ P_m，P_j线性无关。

∴ X^1 也为基本可行解。

3. 最优解的判别

依题义

$$z^0=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^0 =\sum_{i=1}^{m} c_i x_i^0$$

$$z^1=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j^1 =\sum_{i=1}^{m} c_i (x_i^0-\theta a_{ij}) + c_j \theta$$

$$=\sum_{i=1}^{m} c_i x_i + \theta (c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}) = z^0 + \theta \sigma_j$$

因θ>0，所以有如下结论：

(1) 对所有j，当 $\sigma_j \le 0$，有$z^1 \le z^0$，即z^0为最优值，X^0为最优解；

(2) 对所有j，当$\sigma_j \le 0$，但存在某个非基变量$\sigma_k=0$，则对此P_k作为新基向量得出的解X^1，应有$z^1 = z^0$，故z^1 也为最优值，从而 X^1为最优解，且为基本可行解，

∴ X^0、X^1连线上所有的点均为最优解，因此该线性规划模型具有无穷多解；

(3) 若存在某个$\sigma_j > 0$，但对应$a_{ij} \le 0$，则因当 $\theta \to \infty$时，有$z^1 \to \infty$，

∴ 该线性规划模型具有无界解。

复习思考题：

1. 单纯形法的基本原理对你有何启示?

2. 单纯形法首先确定初始解的意义是什么？

3. 单纯形法计算中基可行解的转换是怎样实现的？

4. 检验数为何能够判断解的最优性？

5. 如何判断一个可行解是否为基可行解？

1.4　单纯形法的计算及示例

1.4.1 单纯形法计算步骤---顶点寻优

例： $\max z=2x_1+3x_2$ 　标准化 ⇒ 　$\max z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2\le 3 \\ x_1+2x_2\le 4 \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \\ x_j\ge 0,\ (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

（1）初始基本可行解的选择：-----坐标原点处

令 $x_1=x_2=0$,由

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_3=3-(x_1+x_2) \\ x_4=4-(x_1+2x_2) \end{cases}$$

解得　$X=(0,0,3,4)^T$

（2）是否为最优解的判定:------计算检验数

若　$x_1\uparrow 1$, 则 $x_3\downarrow 1$, $x_4\downarrow 1$, $\sigma_1=2-(0\times 1+0\times 1)=2$

$\sigma_j=\triangle z=c_j-z_j=c_j-\sum c_i a_{ij}$，称 σ_j为检验数。

若 $x_2\uparrow 1$, 则 $x_3\downarrow 1, x_4\downarrow 2$, $\sigma_2=3-(0\times 1+0\times 2)=3$

****** 当所有检验数均有 $\sigma_j \le 0$时，则为最优解。******

（3）找新的顶点（基本可行解）：

直观看，$x_2\uparrow 1$, 则 $z\uparrow 3$，∴ 应找A点，即增加x_2。

x_2 可增加多少？需要保证 $x_3=3-(x_1+x_2)\ge 0$

$x_4=4-(x_1+2x_2)\ge 0$，

∴ $x_2=\min(3/1, 4/2)$，从而

$x_3=1-(x_1/2-x_4/2)$

$x_2=2-(x_1/2+x_4/2)$

令 $x_1=x_4=0$，则新的基本可行解为 $X=(0，2，1，0)^T$

重复上述过程，直至所有检验数 $\sigma_j\le 0$。

若　$x_1\uparrow 1$，则 $x_3\downarrow 1/2$, $x_2\downarrow 1/2$, $\sigma_1= 2-(0\times 1/2+3\times 1/2)=1/2$

若　$x_4\uparrow 1$，则 $x_3\downarrow -1/2$, $x_2\downarrow 1/2$, $\sigma_4= 0-(0\times(-1/2)+3\times 1/2)=-3/2$

继续迭代：

找新的顶点（基本可行解）：

若 $x_1\uparrow 1$，则 $z\uparrow 1/2$，∴ 应找B点，即增加 x_1。

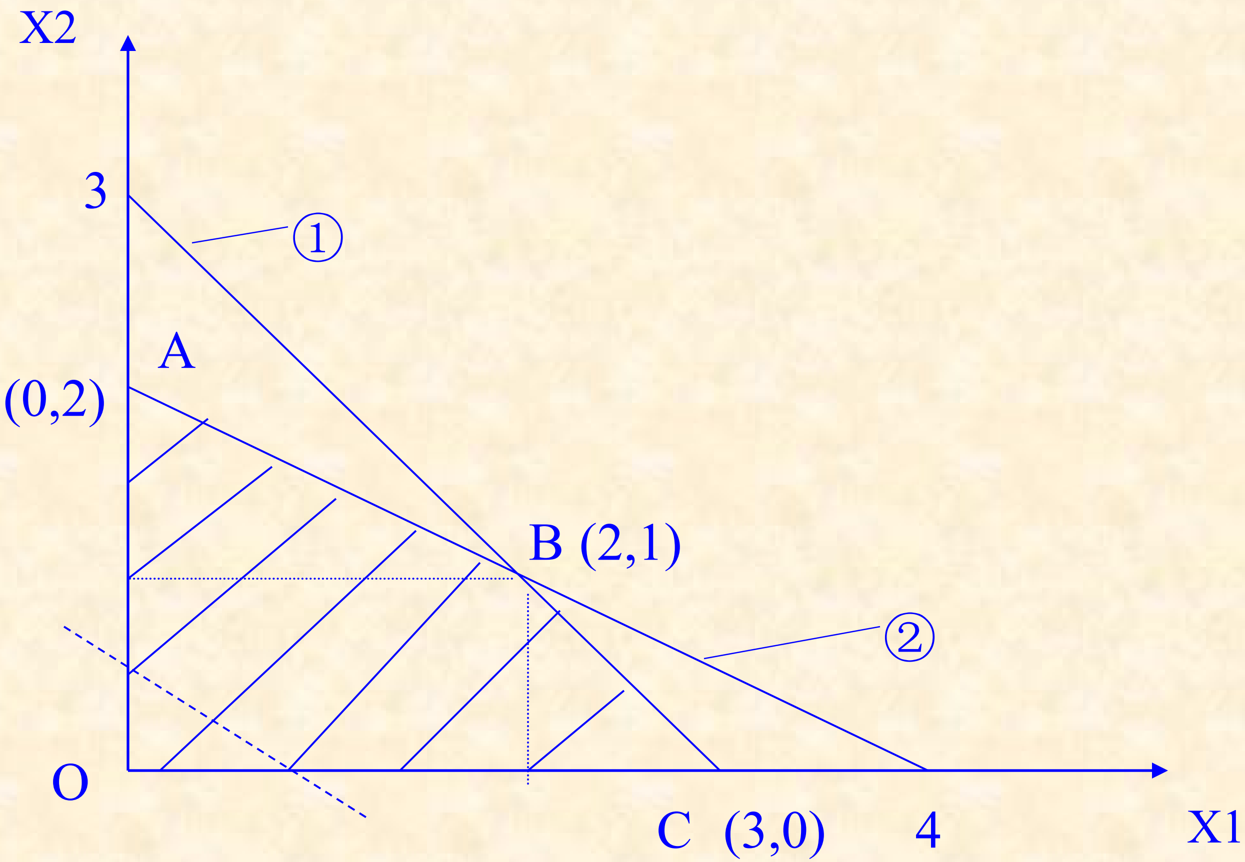
x_1 可增加多少？需要保证 $\begin{cases} x_3=1-(x_1/2-x_4/2)\geq 0 \\ x_2=2-(x_1/2+x_4/2)\geq 0, \end{cases}$

∴　$x_1 = \min(2, 4)$，从而

$$\begin{cases} x_1=2-(2x_3-x_4) \\ x_2=1-(-x_3+x_4), \end{cases}$$

则新的基本可行解为 $X=(2, 1, 0, 0)^T$

$\sigma_3 = -1$, $\sigma_4 = -1$,　　　$z_{max}=7$


X2
3
①
A
(0,2)
B (2,1)
②
O
C (3,0)
4
X1

1. 4. 2 单纯形法计算：

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	θ_i
0	x_3	3	1	1	1	0	3/1=3
0	x_4	4	1	[2]	0	1	4/2=$\boxed{2}$
$c_j - z_j$			2	$\boxed{3}$	0	0	
0	x_3	1	[1/2]	0	1	-1/2	$\boxed{2}$
3	x_2	2	1/2	1	0	1/2	4
$c_j - z_j$			$\boxed{1/2}$	0	0	-3/2	
2	x_1	2	1	0	2	-1	
3	x_2	1	0	1	-1	1	
$c_j - z_j$			0	0	-1	-1	

单纯形法计算过程总结：

（1）化标准形，列初始单纯形表；

（2）计算检验数：$\sigma_j = \triangle z = c_j - z_j = c_j - \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}$

（3）最优性判断：当所有检验数均有 $\sigma_j \leq 0$时，则为最优解。否则迭代求新的基本可行解。

> 注：当所有检验数 $\sigma_j \leq 0$时，若存在非基变量检验数为0时，则有无穷多解，否则只有唯一最优解。

（4）迭代：

入基变量：取$\max\{\sigma_j > 0\} = \sigma_k \rightarrow x_k$

出基变量：取$\min\{\theta_i = b_i / a_{ik} \mid a_{ik} > 0\} = \theta_{(l)} \rightarrow x_{(l)}$

主元素：　$[a_{lk}]$

新单纯表：p_k=单位向量

复习思考题：

1. 单纯型表与模型图解有怎样的对应关系？
2. 检验数的经济含义？
3. 如果目标函数标准型用min，怎样判断模型最优解？
4. 由图解过程能否构想一个多维LP模型的求解思路？
5. 若约束方程有“≥”和“=”结构，单纯形法能用吗？

1.5 单纯形法进一步讨论

1．大M法

例： $\min z=2x_1+3x_2$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2\geq 3 \\ x_1+2x_2 = 4 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases}$$

标准化 $\Rightarrow$

$\max z=-2x_1-3x_2+0x_3$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2-x_3=3 \\ x_1+2x_2=4 \\ x_j\geq 0,\ (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

引进人工变量，及M——非常大正系数，模型转变为

$\max z=-2x_1-3x_2+0x_3-Mx_4-Mx_5$

$$\text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2\qquad +x_5=4 \\ x_j\geq 0,\ (j=1,2,3,4,5) \end{cases}$$

这种处理方法称为大M法，以下则可完全按单纯形法求解。

	$C_j \rightarrow$		-2	-3	0	-M	-M	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-M	x_4	3	1	1	-1	1	0	3/1=3
-M	x_5	4	1	[2]	0	0	1	4/2= $\boxed{2}$
	$c_j - z_j$		-2+2M	$\boxed{-3+3M}$	-M	0	0	
-M	x_4	1	[1/2]	0	-1	1	-1/2	$\boxed{2}$
-3	x_2	2	1/2	1	0	0	1/2	4
	$c_j - z_j$		$\boxed{-1/2+M/2}$	0	-M	0	3/2-M/2	
-2	x_1	2	1	0	-2	2	-1	
-3	x_2	1	0	1	1	-1	1	
	$c_j - z_j$		0	0	-1	1-M	1-M	

说明：

当所有$\sigma_j \leq 0$，但存在人工变量$x_{人} \neq 0$，则可以判定该模型无可行解。

采用大M法求解线性规划模型时，如果模型中各个系数与M的值非常接近时，若手工计算时，不会出现任何问题。如果利用计算机程序求解，则大M表现为一个较大的数字，由于综合计算的影响，导致检验数出现符号误差，引起判断错误，从而使大M方法失效。在这种情况下，可采用下面的两阶段法进行计算。

2．两阶段法：

例：

$$\min z=2x_1+3x_2 \quad \text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2\ge 3 \\ x_1+2x_2=4 \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0\end{cases} \quad \overset{\text{标准化}}{\Rightarrow} \quad \max z=-2x_1-3x_2+0x_3 \quad \text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2-x_3=3 \\ x_1+2x_2=4 \\ x_j\ge 0,\ (j=1,2,3,4)\end{cases}$$

（1）第一阶段，构造判断是否存在可行解的模型：

obj: $\max w=-x_4-x_5$

$$\text{s.t}\quad \begin{cases} x_1+x_2-x_3+x_4=3 \\ x_1+2x_2+x_5=4 \\ x_j\ge 0,\ (j=1,2,3,4,5)\end{cases}$$

用单纯形法求解，若 $w_{max}=0$ ，表明该模型有可行解，则可进入第二阶段，求原模型最优解。

$C_j \rightarrow$			0	0	0	-1	-1	θ_i
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
-1	x_4	3	1	1	-1	1	0	3/1=3
-1	x_5	4	1	[2]	0	0	1	4/2=$\boxed{2}$
$c_j - z_j$			2	$\boxed{3}$	-1	0	0	
-1	x_4	1	[1/2]	0	-1	1	-1/2	$\boxed{2}$
0	x_2	2	1/2	1	0	0	1/2	4
$c_j - z_j$			$\boxed{1/2}$	0	-1	0	-3/2	
0	x_1	2	1	0	-2	2	-1	
0	x_2	1	0	1	1	-1	1	
$c_j - z_j$			0	0	0	-1	-1	

（2）第二阶段，将原目标函数引入最终单纯形表，继续迭代：

$$\max z = -2x_1 - 3x_2 + 0x_3$$

$C_j \rightarrow$			-2	-3	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3
-2	x_1	2	1	0	-2
-3	x_2	1	0	1	1
$c_j - z_j$			0	0	-1

复习思考题：

1. 大M法和两阶段法用来解决什么问题？
2. 大M的作用是什么？
3. 两阶段法第一阶段解决什么问题？
4. 什么情况下模型需引入人工变量？
5. 人工变量作用机理是什么？

1. 6　单纯形法的矩阵描述

单纯形法迭代过程可用矩阵变换描述如下：　设

$$\max z=CX \qquad \text{st}\begin{cases} AX\le b \\ X\ge 0 \end{cases} \xrightarrow[A=[\,B \quad N\,]]{A\text{分块}} \max z=C_BX_B+C_NX_N+0X_S \qquad \text{st}\begin{cases} BX_B+NX_N+IX_S=b \\ X_B,X_N,X_S\ge 0 \end{cases}$$

式中，　B——最终表中基对应的矩阵，

N——初始表与最终表中均为非基对应的矩阵，

I—— 单位矩阵

约束方程两端同乘B^{-1}，则可得如下表达式：

$$\max z=C_BX_B+C_NX_N+0X_S$$

$$\text{st}\begin{cases} B^{-1}BX_B+B^{-1}NX_N+B^{-1}X_S=B^{-1}b \\ X_B,X_N,X_S\ge 0 \end{cases}$$

——对应最终单纯形表的模型

用单纯形表表示如下：

初始表	X_B	X_N	X_S
$X_S = b$	B	N	I
$c_j - z_j$	σ_B	σ_N	$0, \cdots\cdots, 0$

⋮

最终表	X_B	X_N	X_S
$X_B = b'$	I	N'	B^{-1}
$c_j - z_j$	$0, \cdots\cdots, 0$	σ_N'	σ_S'

表中，

$$\begin{cases} b' = B^{-1}b \\ N' = B^{-1}N \\ \text{或者 } P_j' = B^{-1}P_j \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_N' = C_N - C_B B^{-1} N \\ \text{或者 } \sigma_j' = C_j - C_B B^{-1} P_j \\ \sigma_S' = -C_B B^{-1} \end{cases}$$

*** 单纯形法计算的改进——改进单纯形法步骤***

(1) 化标准形： 令B^{-1}_{old} =I， D =I， B^{-1}_{new} =D B^{-1}_{old} =I，

$X_B = B^{-1}_{new}\, b$，

(2) 求检验数：$\sigma_N = C_N - C_B B^{-1}_{new} N$， $\sigma_S = -C_B B^{-1}_{new}$

(3) 最优性判别：

① 所有$\sigma \le 0$，$X_{人} \neq 0$，无可行解；

② 所有$\sigma \le 0$，$X_{人} = 0$，存在 $\sigma_N = 0$，无穷多解；

③ 所有$\sigma \le 0$，$X_{人} = 0$，不存在$\sigma_N = 0$，唯一解；

④ 否则(存在$\sigma > 0$)，转(4)，

(4) 取$\sigma_{max} \to x_k$，为换入变量，

计算$P_k' = B^{-1}_{new} P_k$，若 $\{ P_k' \} \le 0 \to$无界解,

否则，计算$\theta_i = \{ b_i / a_{ik} \mid a_{ik} > 0 \}$，取$\theta_{min} \to x_L$为换出变量，

（5）$B^{-1}_{new} \rightarrow B^{-1}_{old}$，

令 $D = \begin{array}{c} \qquad\qquad\quad x_L \qquad\qquad \\ \begin{pmatrix} 1 & \cdots\cdots & -a_{1k}/a_{Lk} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & 1/a_{Lk} & \cdots\cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots\cdots & -a_{mk}/a_{Lk} & \cdots\cdots & 1 \end{pmatrix} \end{array}$

计算 $B^{-1}_{new} = D\,B^{-1}_{old}$，

$b' = B^{-1}_{new} b$

转(2)。

注：D矩阵为基所在单位矩阵中出基变量所在列以上述列向量P_k'代换。

实例演算如下：

例： $\max z=2x_1+3x_2$ 标准化 $\max z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$

s.t $x_1+x_2\le 3$ $\Rightarrow$ s.t $x_1+x_2+x_3=3$

$x_1+2x_2\le 4$ $x_1+2x_2+x_4=4$

$x_1\ge 0,\ x_2\ge 0$ $x_j\ge 0,\ (j=1,2,3,4)$

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & b \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|cc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 4 \end{array}\right]$$

$B^{-1}{}_{old}$

(1) 初始解：

$B^{-1}{}_{old}=I$， $B^{-1}{}_{new}=DB^{-1}{}_{old}=I$， $X_B=(x_3,\ x_4)^T=B^{-1}{}_{new}b=(3，4)^T$,

$\sigma_N=(\sigma_1，\sigma_2)=C_N-C_BB^{-1}{}_{new}N=(2，3)$，

计算 $P_2'=B^{-1}{}_{new}P_2=(1，2)^T$， $\therefore$ 入基变量： $\sigma_{max}\rightarrow x_2$ ，

出基变量： $\theta_i=\{b_i/a_{i2}\,|a_{i2}>0\}=(3，2)$， $\theta_{min}\rightarrow x_4$ ，

(2) 第二次计算：

$$B^{-1}_{new} \to B^{-1}_{old}, \quad P_2' = (1,\ 2)^T \quad D = \begin{array}{cc} x_3 & x_4 \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1}_{new} = D\, B^{-1}_{old} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$X_B = (x_3,\ x_2)^T = B^{-1}_{new}\, b = (1,\ 2)^T$,

$$\sigma_N = (\sigma_1,\ \sigma_4) = C_N - C_B B^{-1} N = (2,\ 0) - (0,\ 3)\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (1/2,\ -3/2),$$

∴ 换入变量： $\sigma_{max} \to x_1$，

计算 $P_1' = B^{-1}_{new}\, P_1 = (1/2,\ 1/2)^T$,

∴ 换出变量： $\theta_i = \{\, b_i / a_{i1} \mid a_{i1} > 0 \} = (2,\ 4)$， $\theta_{min} \to x_3$，

(3) 第三次计算：

$$B^{-1}_{new} \to B^{-1}_{old}, \quad P_2' = (1/2,\ 1/2)^T, \qquad D = \begin{array}{c} \begin{matrix} x_3 & x_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$$B^{-1}_{new} = D\,B^{-1}_{old} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$X_B = (x_1,\ x_2)^T = B^{-1}_{new}\, b = (2,\ 1)^T,$$

$$\sigma_N = (\sigma_3,\ \sigma_4) = C_N - C_B B^{-1} N = (0,\ 0) - (2,\ 3)\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= (-1,\ -1),$$

所有$\sigma \le 0$，故为最优解，

$X_B = (x_1,\ x_2)^T = (2,\ 1)^T$, $z_{max} = 7$

例　用单纯形法解目标规划问题时，有如下二个单纯形表，试把表中数字补全。

$C_j \rightarrow$					0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	3			1	0
0	x_4				0	1
$c_j - z_j$						

⋮

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
	x_1				2	-1
	x_2	1			-1	1
$c_j - z_j$					-1	-1

解：

$$\sigma_S=(-1,\ -1)=(\sigma_3,\ \sigma_4)=C_S-C_B B^{-1}=-(c_1,\ c_2)\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=-(2c_1-c_2,\ -c_1+c_2)$$

$$\therefore \begin{cases}c_1=2\\ c_2=3\end{cases}$$

又　$b'=B^{-1}b$，

$$\begin{bmatrix}b_1'\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6-b_2\\ -3+b_2\end{bmatrix}\qquad \therefore \begin{cases}b_1'=2\\ b_2\ =4\end{cases}$$

$$\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}2a_{11}-a_{21} & -2a_{12}-a_{22}\\ -a_{11}+a_{21} & -a_{12}+a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad a_{11}=1,\quad a_{12}=1,\quad a_{21}=1,\quad a_{22}=2$$

复习思考题：

1. 单纯型法矩阵原理的核心要点是什么？
2. 单纯形表的初始表和最终表有怎样的关系单纯形？
3. 任一步的单纯形表与初始表有怎样的关系？
4. “改进单纯形法”改进在什么地方？
5. 改进单纯形法用于手工计算时是否比单纯形法简便？

1.7 线性规划问题的应用案例

例1: 泰和玩具公司，预计2001年里公司的月现金流量如表中所示。负的现金流量表示流出的现金超过流入的现金。为应付它的债务，公司需要在年内提早借款。该公司可有两种借款方式：（1）可在1月份贷到所需要的一年期的长期贷款，从2001年2月份开始，每月需为这笔贷款支付1%的利息，贷款本金必须在2002年1月初归还。（2）公司还可获得短期的银行贷款，月利率为1.5%，公司需在下一个月里归还上一个月初的短期贷款本金与利息。所有的短期贷款必须在2002年1月初归还。在每月末，现金余额可获得0.4%的利息。问：如何制定借款计划，可使公司在2002年1月初获得最大的现金余额？

月份	1 月	2 月	3 月	4 月	5 月	6 月	7 月	8 月	9 月	10 月	11 月	12 月
现金流量 (千元)	-12	-10	-8	-10	-4	5	-7	-2	15	12	-7	45

应解决的问题:

•长期贷款的数量 (L)

•每月短期贷款的数量 (St)

•每月月末的现金余额(Cbt)

•期间最后的现金余额(2002年初现金余额) (Cb13)

•每月所付的长期与短期的贷款利息 (I, It)

•每月获得的上个月末现金余额的利息 (ICt)

月末的现金余额公式:

t月现金余额=（t-1）月现金余额+（t-1）月现金余额利息+t月份的现金流+t月份收到的贷款－t月付长期贷款利息－付（t-1）月短期贷款利息－归还（t-1）月的短期贷款-归还的长期贷款（仅对2002年1月）

模型：

1月（t=1）：$Cb_1=L+S_1+w_1$

w_1=1月份现金流量

$Cb_1\geq 0$

2月（t=2）：$Cb_2=Cb_1+S_2+IC_2+w_2-S_1-I-I_2$

$IC_2=Cb_1\times 0.4\%$，$I=L\times 1\%$，$I_2=S_1\times 1.5\%$

$Cb_2\geq 0$

t月：$Cb_t=Cb_{t-1}+S_t+IC_t+w_t-S_{t-1}-I-I_t$

(t=2,…,12)　$IC_t=Cb_{t-1}\times 0.4\%$，$I=L\times 1\%$，$I_t=S_{t-1}\times 1.5\%$

$Cb_t\geq 0$

2002年1月（t=13）：

$Cb_{13}=Cb_{12}+IC_{13}-L-S_{12}-I-I_{13}$

$IC_{13}=Cb_{12}\times 0.4\%$，$I=L\times 1\%$，$I_{13}=S_{12}\times 1.5\%$

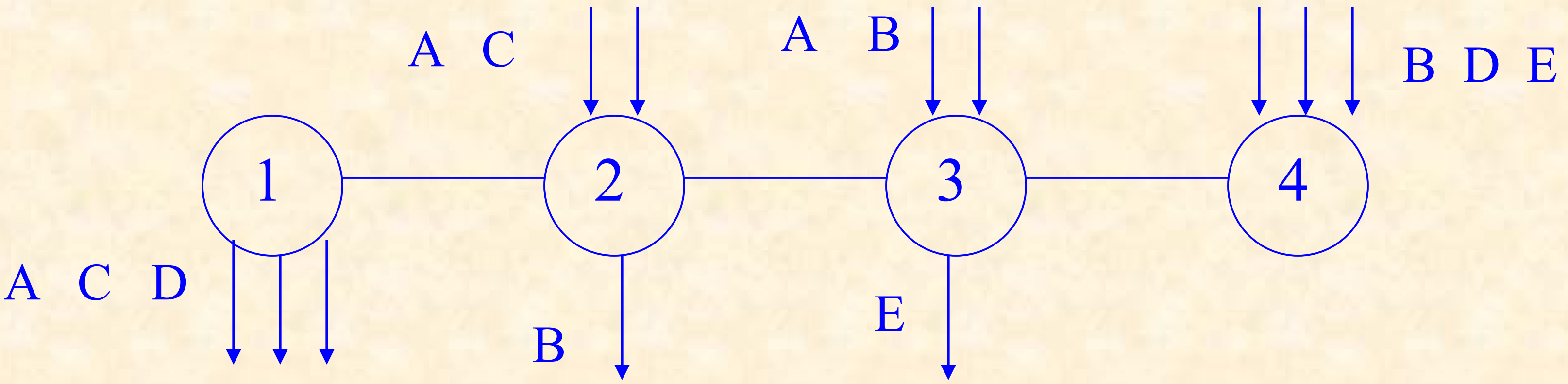
obj.　Max　$z=Cb_{13}$

例2：动态投资问题：

菲克投资公司要确定未来三年的投资策略。目前（时刻1）有10万元资金可供投资使用，且有A、B、C、D、E五个项目可供投资选择，各个项目有关的投资现金流量在表中给出。比如，在项目B上的投资，在时刻2需要1元的现金流出量，在时刻3时有0.5元的回报（现金流入），为了保证公司投资的多元化，要求在任何一个项目上的投资最多不得超过75,000元。没有投到项目上的资金可在资金市场上获得8%的存款利息。来自投资项目上的收益可直接用于再投资，例如，在时刻2来自C项目上的现金流量1.2元可直接投资于项目B。菲克公司不能借款，因此，在任何时刻可用于投资的现金仅限于手中拥有的数额。试确定投资计划，能在时刻4时使手中的现金量最大。

资金流量表

时刻＼项目	A	B	C	D	E
1	-1.0	0	-1.0	-1.0	0
2	0.5	-1.0	1.2	0	0
3	1.0	0.5	0	0	-1.0
4	0	1.0	0	1.9	1.5



建立模型：

设 x_{ij}—在时刻i对j项目的投资额，

F_i—时刻i手中拥有的现金数额，

IF_i—第i时刻获得的利息

投资及收益情况分析表

项目/时刻	F_i	IF_i	A	B	C	D	E
1	F_1	0	$-x_{11}$	0	$-x_{13}$	$-x_{14}$	0
2	F_2	IF_2	$0.5x_{11}$	$-x_{22}$	$1.2x_{13}$	0	0
3	F_3	IF_3	$1.0x_{11}$	$0.5x_{22}$	0	0	$-x_{35}$
4	F_4	IF_4	0	$1.0x_{22}$	0	$1.9x_{14}$	$1.5x_{35}$

例3：外汇交易

外汇交易市场日交易额常常超过100亿美元。分别在现汇市场、期货市场上进行。交易的形式有现汇、现汇期权等。我们现在着眼于现汇市场的讨论。

简单地说，现汇交易就是用一种货币购买一定数量另一种货币的协议。例如，一个英国公司需要预付给一个日本供应商1.5亿日元购货款，设英镑对日元的现钞比价为154.7733 (一英镑兑换154.7733日元)，那么这个英国公司可以利用现汇交易市场以 969,159.41 (1.5亿÷154.7743) 英镑购买1.5亿日元。当日外汇交叉汇率样本如表中所示。

假如英国公司终止了同日本供应商的合同订单，并想把1.5亿日元兑换成英镑，日元对英镑的现钞比价为0.00645，则英国公司可用这1.5亿日元买回967,500 (=1.5亿× 0.00645)英镑。注意到967,500英镑低于原来的969,159.41英镑，其差额是由买卖差价引起的，代表公司的交易费用。偶然的情况也会发生市场价格脱离了一致性的现象，这时候存在着套汇的机会。所谓的“套汇”是指存在着一组这样的交易：经过一系列的交易后，手中的现钞额会大于初始的现钞额，如 1英镑→马克→法郎→日元→英镑，若最后多于1英镑，就说明有套汇的机会。

现问，表中给出的汇率是否存在这种套汇机会？试建立线性规划模型讨论该问题。

交叉汇率表

FROM \ TO	US.$	B.£	F.Fra.	D.Mark	Y.en
US.$	-----	0.63900	5.37120	1.57120	98.8901
B.£	1.56480	-----	8.43040	2.45900	154.7733
F.Fra.	0.18560	0.11860	-----	0.29210	18.4122
D.Mark	0.63610	0.40630	3.42330	-----	62.9400
Y.en	0.01011	0.00645	0.05431	0.01588	-----

问题：

1. 如何看待模型的解？
2. 若最优目标函数值为1，是否说明无套汇机会？为什么？
3. 完整的模型该怎么建？你有什么好方法？
4. 现实中这样的套汇链会存在吗？你如何分析？

本　章　知　识　点

1. 模型结构要素
2. LP模型的要求与表示方法
3. LP模型标准化方法
4. LP问题建模
5. LP模型图解原理
6. 单纯形法基本原理与计算过程
7. LP模型的求解计算，包括大M法及两阶段法
8. 单纯形法的矩阵分析