第六章　　图与网络分析

- 图是一种模型，如公路、铁路交通图，通讯网络图等。

- 图是对现实的抽象，以点和线段的连接组合表示。

§6.1 图的基本概念和模型

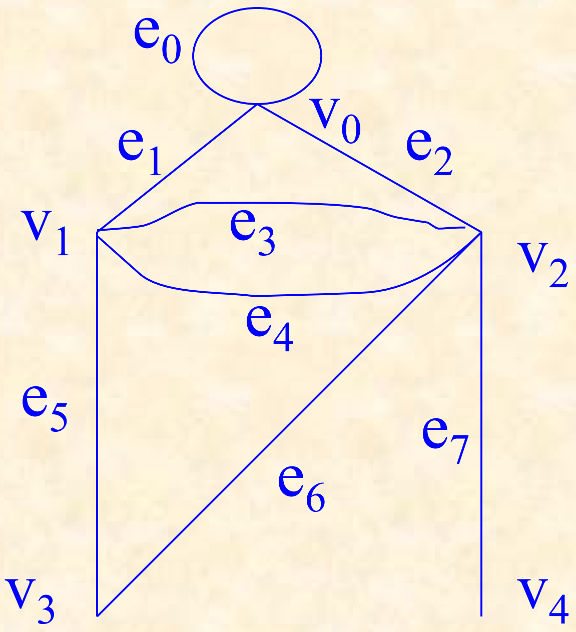
一、概念

（1）图：点V和边E的集合，用以表示对某种现实事物的抽象。记作 $G=\{V,E\}$， $V=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$，$E=\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$

点：表示所研究的事物对象；
边：表示事物之间的联系。

（2）若边e的两个端点重合，则称e为环。

（3）多重边：若某两端点之间多于一条边，则称为多重边。



（4）简单图：无环、无多重边的图称为简单图。

（5）链：点和边的交替序列，其中点可重复，但边不能重复。

（6）路：点和边的交替序列，但点和边均不能重复。

（7）圈：始点和终点重合的链。

（8）回路：始点和终点重合的路。

（9）连通图：若一个图中，任意两点之间至少存在一条链，称这样的图为连通图。

（10）子图，部分图：设图G1=｛V1,E1｝, G2={V2,E2}, 如果有$V1 \subseteq V2$，$E1 \subseteq E2$，则称G1是G2的一个子图；若V1=V2，$E1 \subseteq E2$，则称G1是G2的一个部分图。

（11）次：某点的关联边的个数称为该点的次，以$d(v_i)$表示。

二、图的模型

例：有甲、乙、丙、丁、戊、己六名运动员报名参加A、B、C、D、E、F六个项目的比赛。如表中所示，打“√”的项目是各运动员报名参加比赛的项目。问：六个项目的比赛顺序应如何安排，才能做到使每名运动员不连续地参加两项比赛？

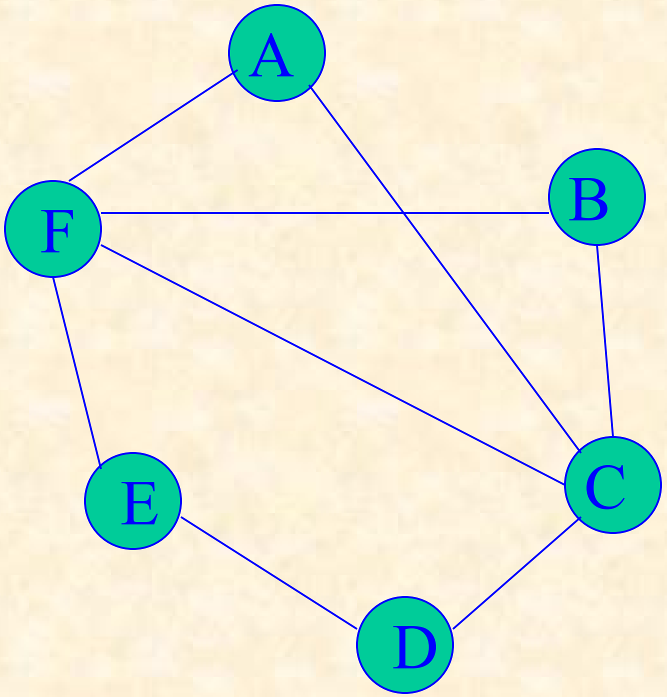
人＼项目	A	B	C	D	E	F
甲				√		√
乙	√	√		√		
丙			√		√	
丁	√				√	
戊		√			√	
己		√		√		

建立模型：

解：项目作为研究对象，排序。

设 点：表示运动项目。

边：若两个项目之间无同一名运动员参加。



顺序：

A—C—D—E—F—B

A—F—E—D—C—B

A—C—B—F—E—D

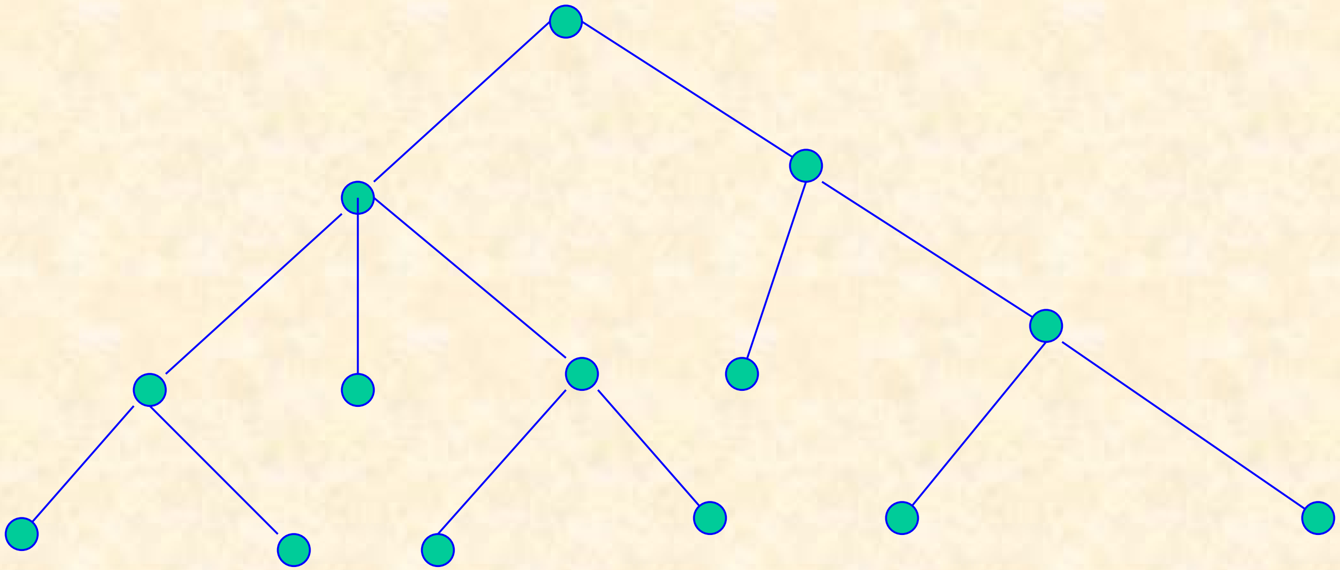
A—F—B—C—D—E

§6.2 树图和图的最小部分树

一、树图的概念

（1）树图：

无圈的连通图称为树图，简称为树。记为T（V，E）



（2）树图的性质

性质1：任何树中必存在次为1的点。

反证法：若各点次均不为1，因树中不存在孤立点，则必对所有节点的次， 均有$d(v_i)\geq 2$，

即$d(v_1)\geq 2\rightarrow d(v_2)\geq 2\rightarrow d(v_3)\geq 2\rightarrow\cdots\cdots$

而点数有限，故必推至前述某一点v_i，从而形成圈结构，与树图定义矛盾。

（2）树图的性质

性质2：具有n个顶点的树的边数恰好为n-1条。

归纳法：n=2时，1条边； n=3时，2条边，性质成立。

设 n= k 时，有k-1条边成立，

则可新增1个点、一条边后仍可为树图，故性质成立。

（3）树图的性质

性质3：任何具有n个点、n-1条边的连通图必为树图。

反证法：若有n个点、n-1条边的连通图不为树图，则必形成圈。

不妨从图中减掉多余的边（不减点）而使之形成树图，则所形成的树图有少于n-1条边，与性质2矛盾。

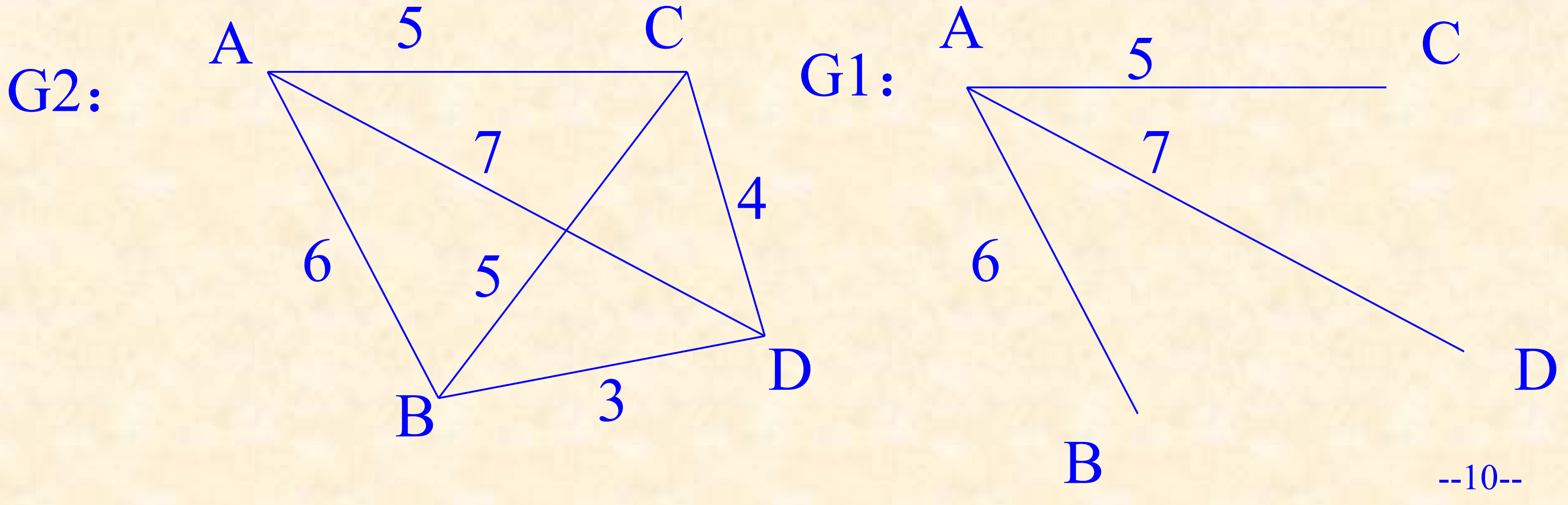
（3）树的特性：

① 树是边数最多的无圈连通图。在树中任加一条边，就会形成圈。

② 树是边数最少的连通图。在树中任减一条边，则不连通。

二、图的最小部分树：

1. 图的部分树：若G1是G2的一个部分图，且为树图，则称G1是G2的一个部分树。



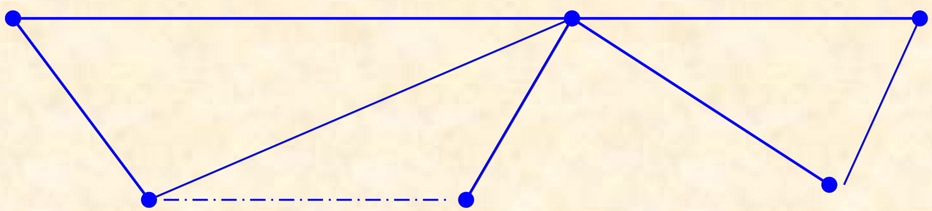
2．图的最小部分树：树枝总长为最短的部分树称为图的最小部分树。

树枝：树图中的边称为树枝。

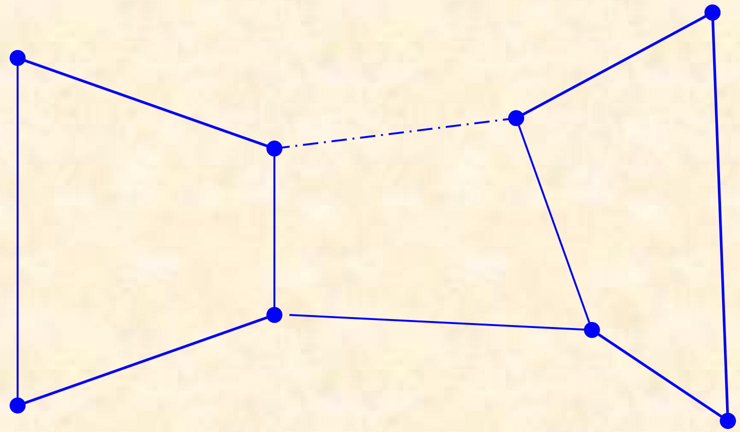
三、最小部分树的求法

定理1：图中任一个点i，若j是与i相邻点中距离最近的点，则边[i，j]一定在其最小部分树内。

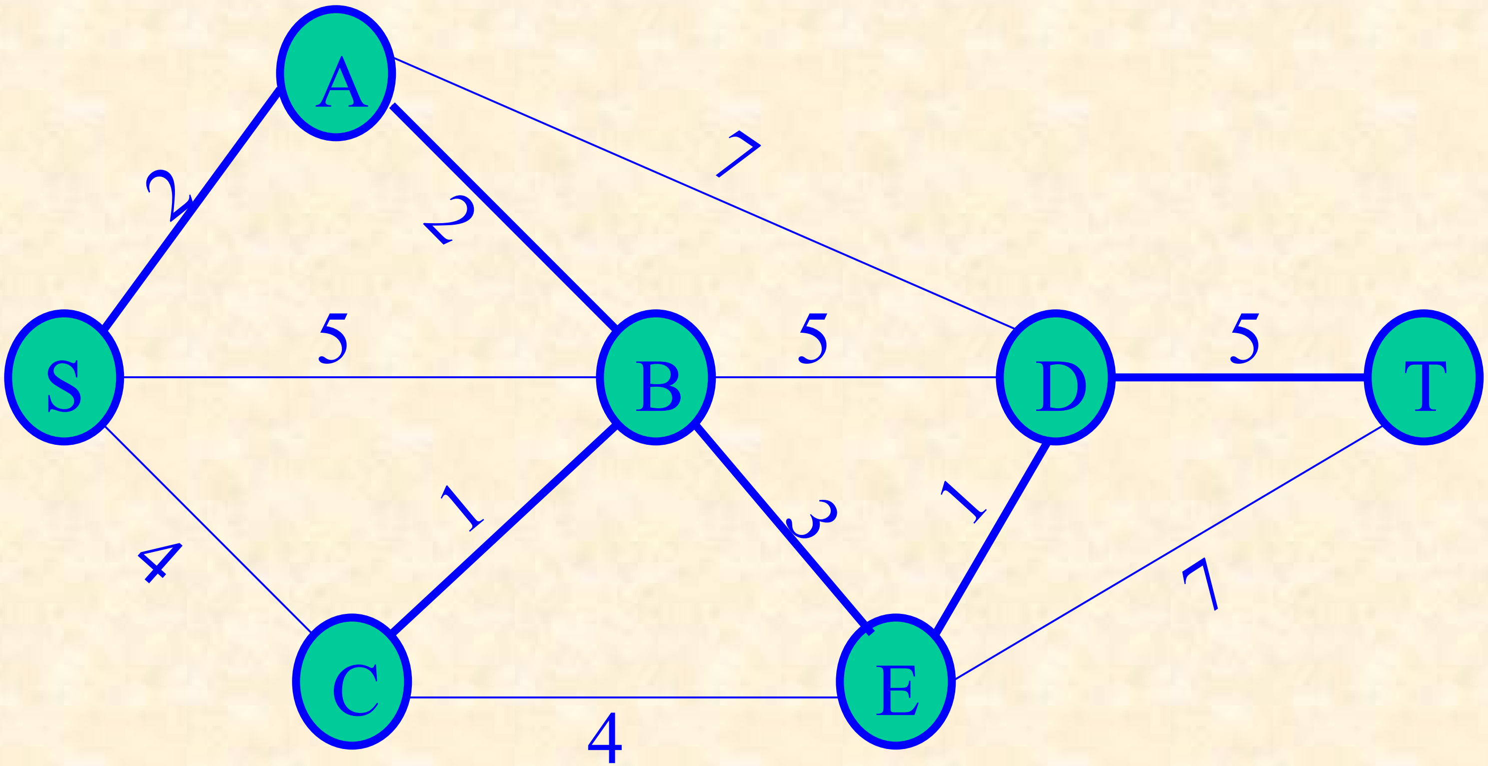
反证法：



推论：将图中所有的点分成V和$\overline{V}$两个集合，则两个集合之间连线最短的一个边一定包含在最小部分树内。



例：要在下图所示的各个位置之间建立起通信网络，试确定使总距离最佳的方案。



最小部分树长L_{min}=14

1. 避圈法：将图中所有的点分V为$\overline{V}$两部分，

V——最小部分树内点的集合

$\overline{V}$——非最小部分树内点的集合

(1) 任取一点v_i加粗，令$v_i \in V$，

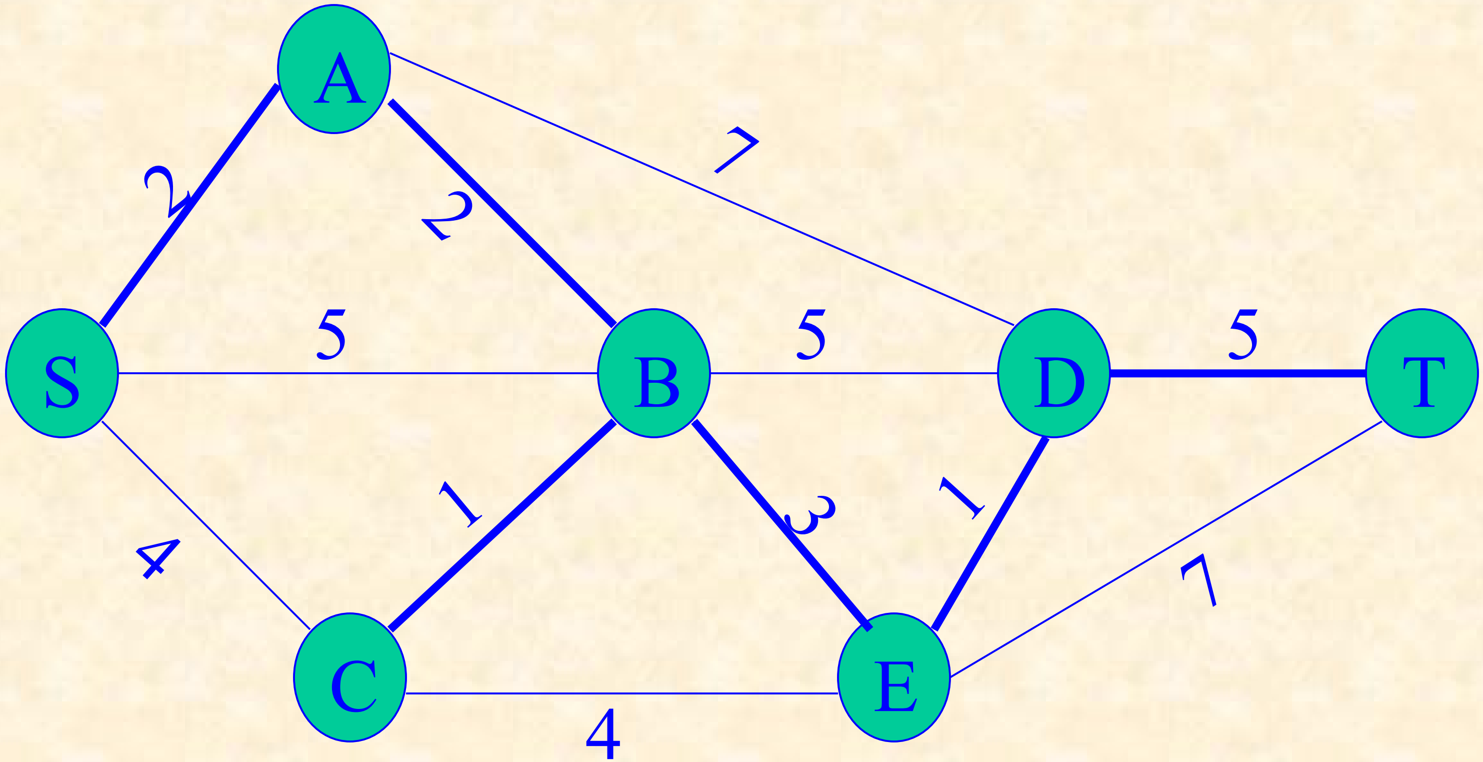
(2) 取$\overline{V}$中与V相连的边中一条最短的边(v_i,v_j)，加粗(v_i,v_j)，令$v_j \in V$

(3) 重复(2)，至所有的点均在V之内。

2. 破圈法：

(1) 任取一圈，去掉其中一条最长的边，

(2) 重复，至图中不存在任何的圈为止。



最小部分树长$L_{min}=14$

复习思考题

1. 什么是图的模型？ 其构成要素有哪些？

2. 树图的定义及其性质？

3. 最小部分树的概念和求法？

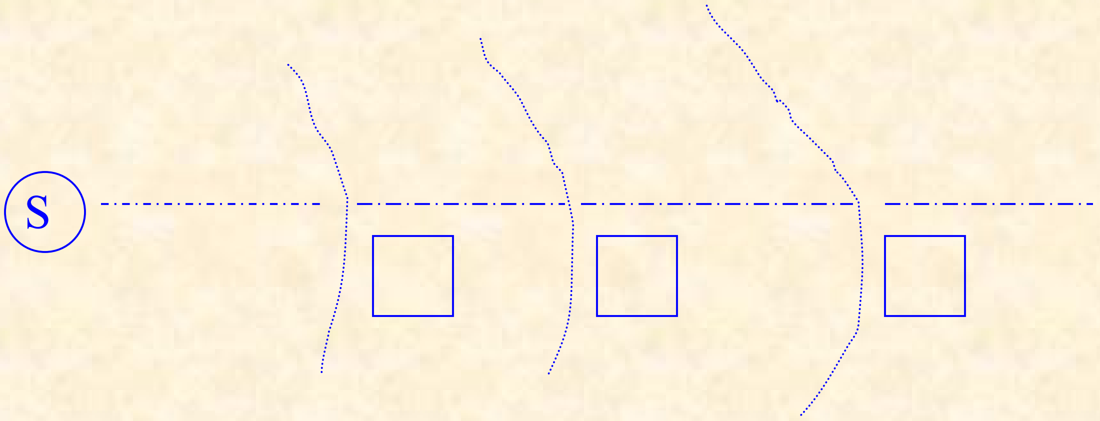
4. 哪些背景下的问题可以归结为树图模型求解？

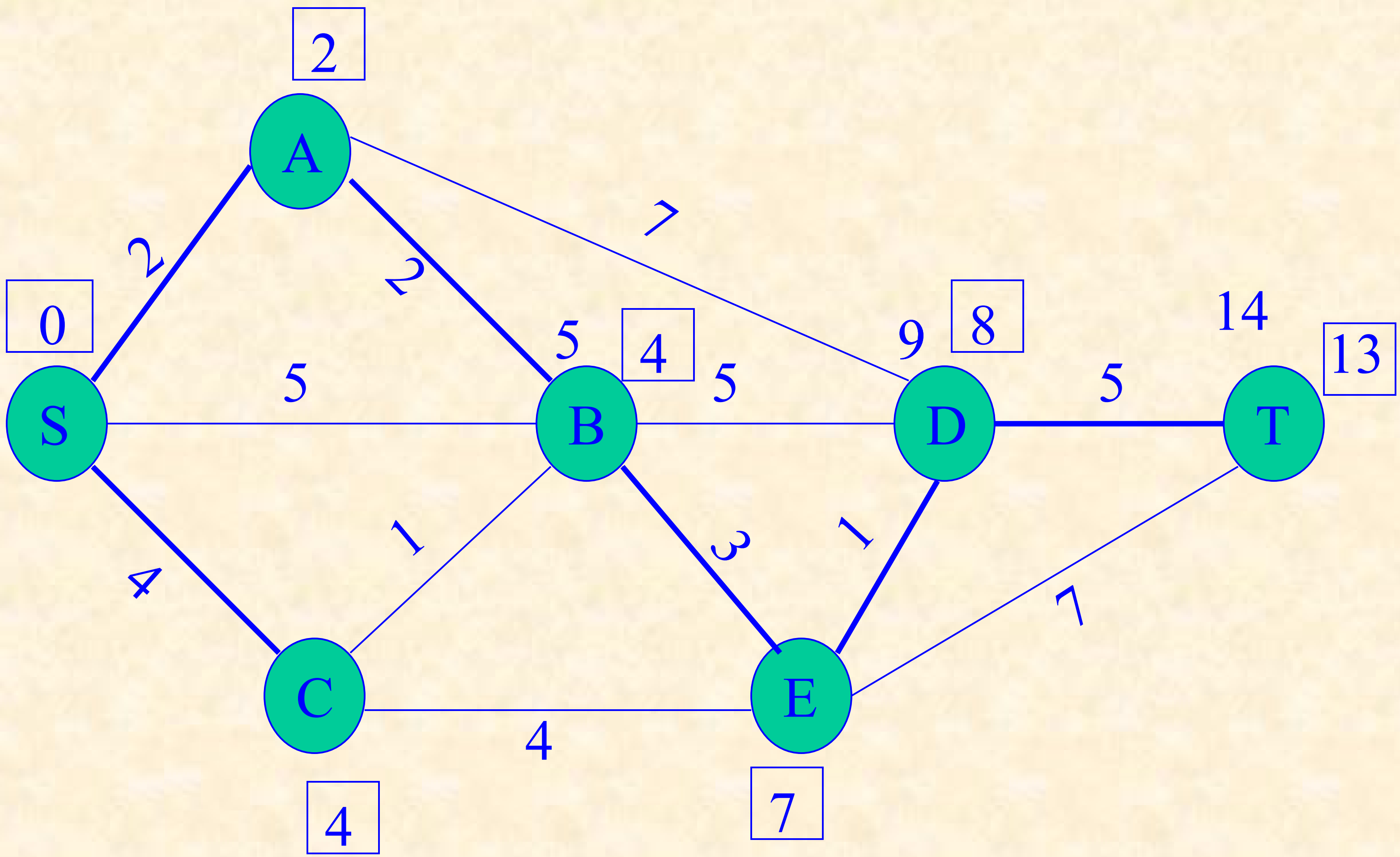
§6.3 最短路问题

1．求某两点间最短距离的D（Dijkstra）氏标号法

在图示的网络图中，从给定的点S出发，要到达目的地T。问：选择怎样的行走路线，可使总行程最短？

方法：Dijkstra（D氏）标号法——按离出发点的距离由近至远逐渐标出最短距离和最佳行进路线。





最短路线：S → A→B → E → D → T

最短距离：L_{min}=13

2. 求任意两点间最短距离的矩阵算法

(1) 构造任意两点间直接到达的最短距离矩阵$D^{(0)} = [\, d_{ij}^{(0)} \,]$

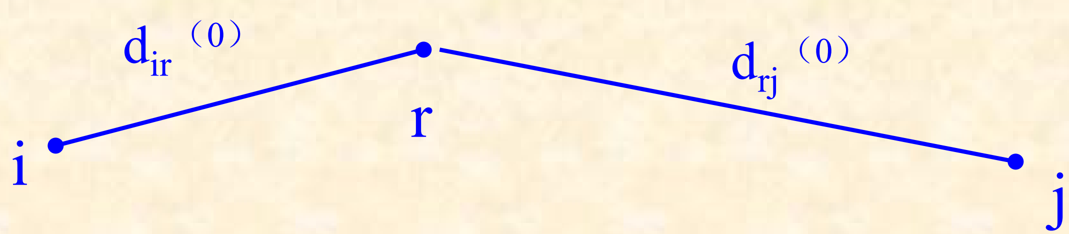
$$
D^{(0)} = \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 5 & 4 & \infty & \infty & \infty \\
2 & 0 & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty \\
5 & 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & \infty \\
4 & \infty & 1 & 0 & \infty & 4 & \infty \\
\infty & 7 & 5 & \infty & 0 & 1 & 5 \\
\infty & \infty & 3 & 4 & 1 & 0 & 7 \\
\infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 7 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

(2) 构造任意两点间直接到达、或者最多经过1个中间点到达的最短距离矩阵$D^{(1)} = [\, d_{ij}^{(1)} \,]$

其中 $d_{ij}^{(1)} = \min\limits_{r} \{ d_{ir}^{(0)} + d_{rj}^{(0)} \}$， 例如

$$d_{SE}^{(1)} = \min \{d_{SS}^{(0)} + d_{SE}^{(0)}, d_{SA}^{(0)} + d_{AE}^{(0)}, d_{SB}^{(0)} + d_{BE}^{(0)}, d_{SC}^{(0)} + d_{CE}^{(0)}, d_{SD}^{(0)} + d_{DE}^{(0)}, d_{SE}^{(0)} + d_{EE}^{(0)}, d_{ST}^{(0)} + d_{TE}^{(0)} \} = 8$$

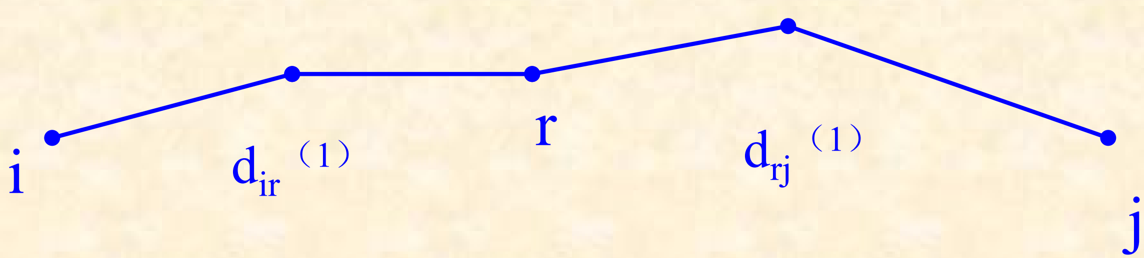
$$D^{(1)} = \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 9 & 8 & \infty \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 7 & 5 & 12 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 5 & 4 & 11 \\ 9 & 7 & 4 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ \infty & 12 & 10 & 11 & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$



(3) 构造任意两点间最多可经过3个中间点到达的最短距离矩阵 $D^{(2)} = [\, d_{ij}^{(2)} \,]$

其中 $d_{ij}^{(2)} = \min\limits_{r} \{ d_{ir}^{(1)} + d_{rj}^{(1)} \}$

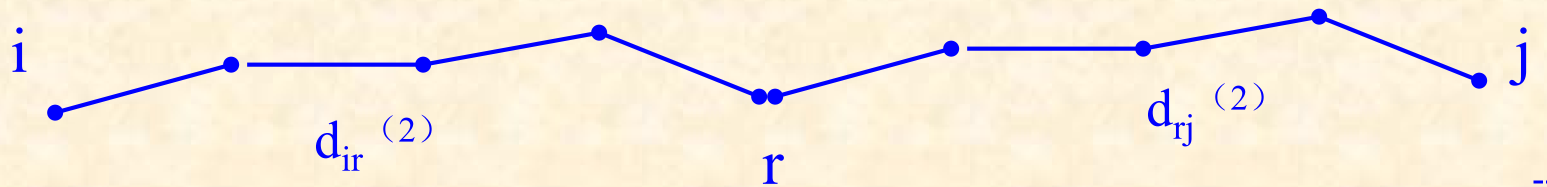
$$
D^{(2)} = \begin{array}{c} \\ S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 4 & 4 & 8 & 7 & 14 \\
2 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 & 11 \\
4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\
4 & 3 & 1 & 0 & 5 & 4 & 10 \\
8 & 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 5 \\
7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 6 \\
14 & 11 & 9 & 10 & 5 & 6 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$



(4) 构造任意两点间最多可经过7个中间点到达的最短距离矩阵 $D^{(3)}=[d_{ij}^{(3)}]$

其中 $d_{ij}^{(3)}=\min\limits_{r}\{d_{ir}^{(2)}+d_{rj}^{(2)}\}$

$$D^{(3)}=\begin{array}{c}\\ S\\ A\\ B\\ C\\ D\\ E\\ T\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{ccccccc} S & A & B & C & D & E & T\end{array}\\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 8 & 7 & 13\\ 2 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 & 11\\ 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 9\\ 4 & 3 & 1 & 0 & 5 & 4 & 10\\ 8 & 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 5\\ 7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 6\\ 13 & 11 & 9 & 10 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$



说明：

1） D（k）经过的中间点数量

设$D^{(0)} = [d_{ij}^{(0)}]$为网络中两点间直接距离，则对于

$D^{(k)} = [d_{ij}^{(k)}]$，其中$d_{ij}^{(k)} = \min\{d_{ir}^{(k-1)} + d_{rj}^{(k-1)}\}$，

k=1，2，3，……，最多可经过2^k-1个中间点：其数列为

{1，3，7，15，31，……，2^k-1，……}

2）收敛条件：

① 当$D^{(k+1)} = D^{(k)}$时，计算结束；

② 设网络中有p个点，即有p-2个中间点，

则 $2^{k-1}-1 < p-2 \le 2^k-1 \Rightarrow k-1 < \log_2(p-1) \le k$

$\therefore K < \log_2(p-1)+1$，

∴计算到 $k=\lg(p-1)/\lg 2 +1$时，收敛，计算结束。

例：有7个村镇要联合建立一所小学，已知各村镇小学生的人数大致为S—30人， A—40人，B—20人，C—15人，D—35人，E—25人， T—50人。问：学校应建在那一个地点，可使学生总行程最少？

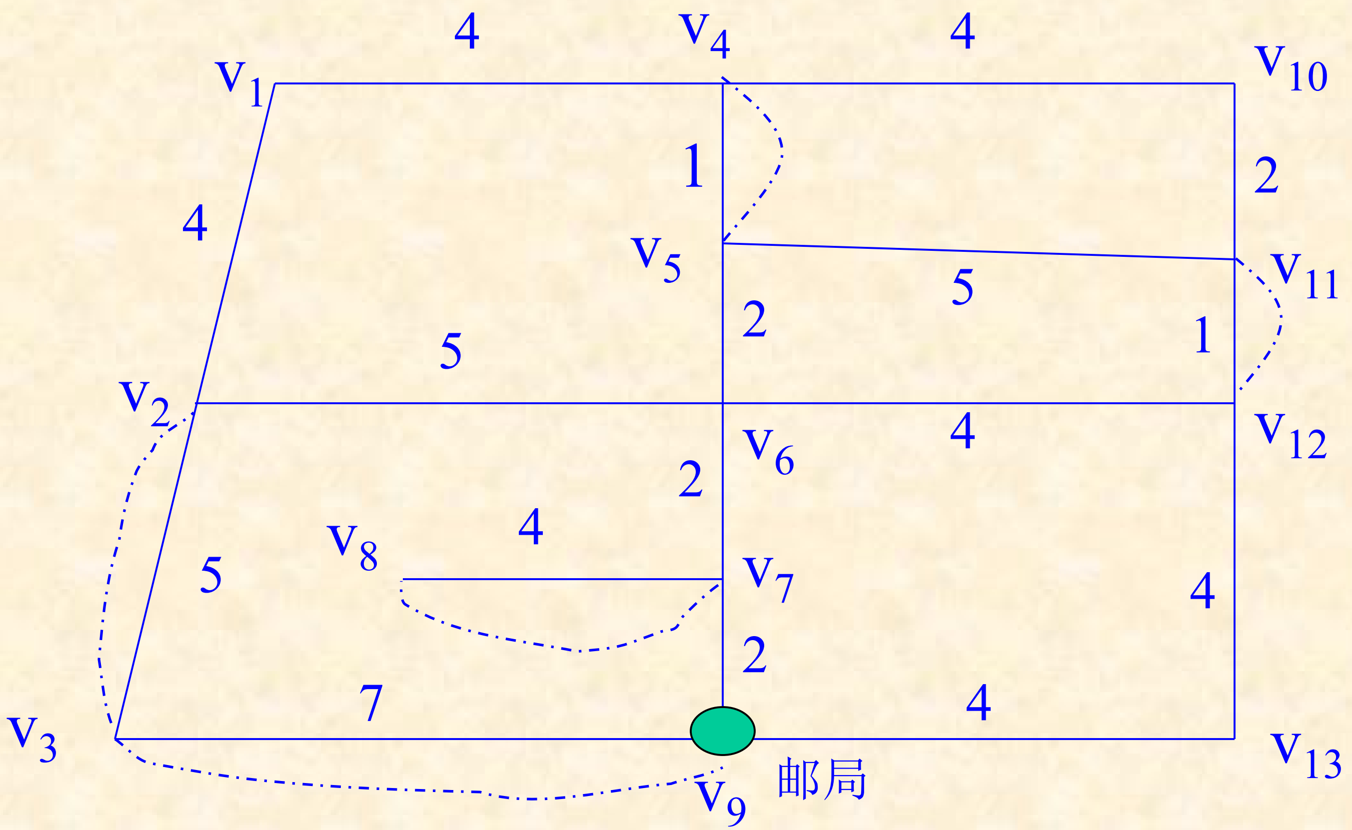
解：

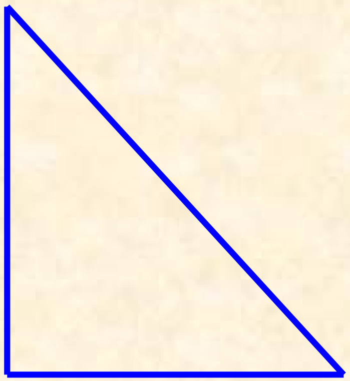
$$L=\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} S & A & B & C & D & E & T \end{matrix} \\
\begin{matrix} S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{matrix} &
\begin{pmatrix}
0 & 2 & 4 & 4 & 8 & 7 & 13 \\
2 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 & 11 \\
4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\
4 & 3 & 1 & 0 & 5 & 4 & 10 \\
8 & 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 5 \\
7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 6 \\
13 & 11 & 9 & 10 & 5 & 6 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{c}
\text{人数} \\
\begin{pmatrix} 30 \\ 40 \\ 20 \\ 15 \\ 35 \\ 25 \\ 50 \end{pmatrix}
\end{array}$$

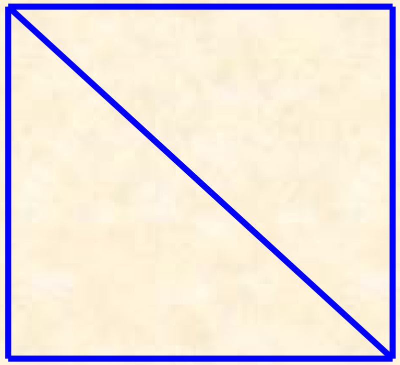
$$=[1325\ \ 1030\ \ 880\ \ 1035\ \ 910\ \ 865\ \ 1485]^T$$

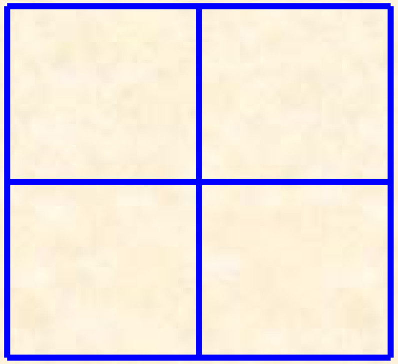
§6.4 中国邮路问题

问题：一名邮递员从邮局出发，试选择一条最短的投递路线？









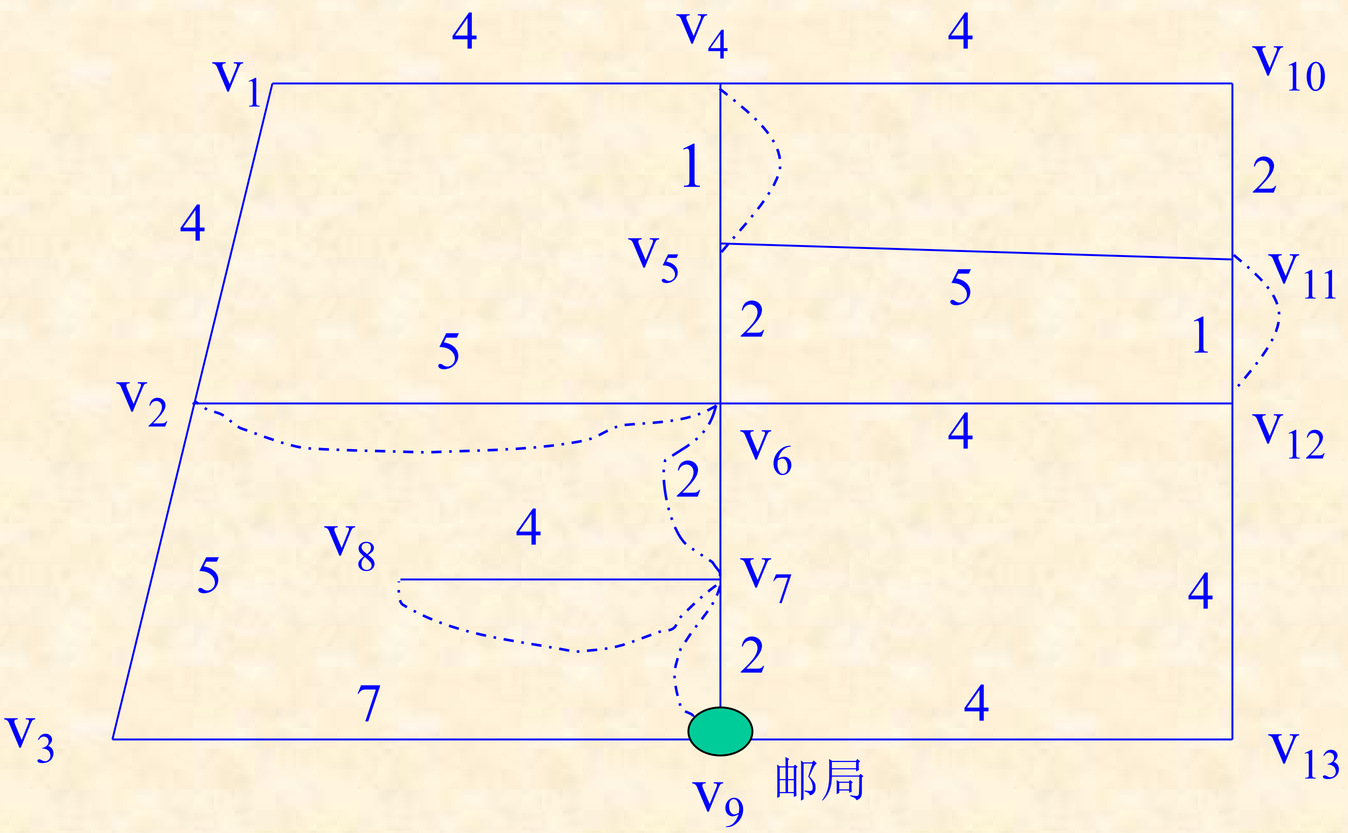
奇点：图中次为奇数的点称为奇点。

偶点：图中次为偶数的点称为偶点。

结论：最短投递路线应具有下述特征：

(1) 若图中所有的点均为偶点，则可不重复走遍所有街道；

(2) 重复走的路线长度应不超过所在回路总长度的一半。



投递距离：L=60+15=78

复习思考题

1. 最短路的概念?

2. Dijkstra标号法与矩阵算法各自用来处理什么问题?

3. 求最小部分树的闭圈法或者破圈法是否可以用来求解最短路问题?

4. 哪些问题会用到最短路模型?

5. 中国邮路问题的描述

6. 中国邮路模型与最短路模型描述的问题有何区别?

§6.5 网络最大流问题

一、网络最大流中有关概念

(1) 有向图：含有以箭头指示方向的边的网络图。

(2) 弧：有向图上的边称为弧。用（v_i,v_j）表示。

(3) 弧的容量：弧上通过负载的最大能力，简称容量。以c_{ij}表示。

(4) 流：加在网络每条弧上的一组负载量，以f_{ij}表示。

(5) 可行流：能够通过网络的负载量，通常应满足两个条件：

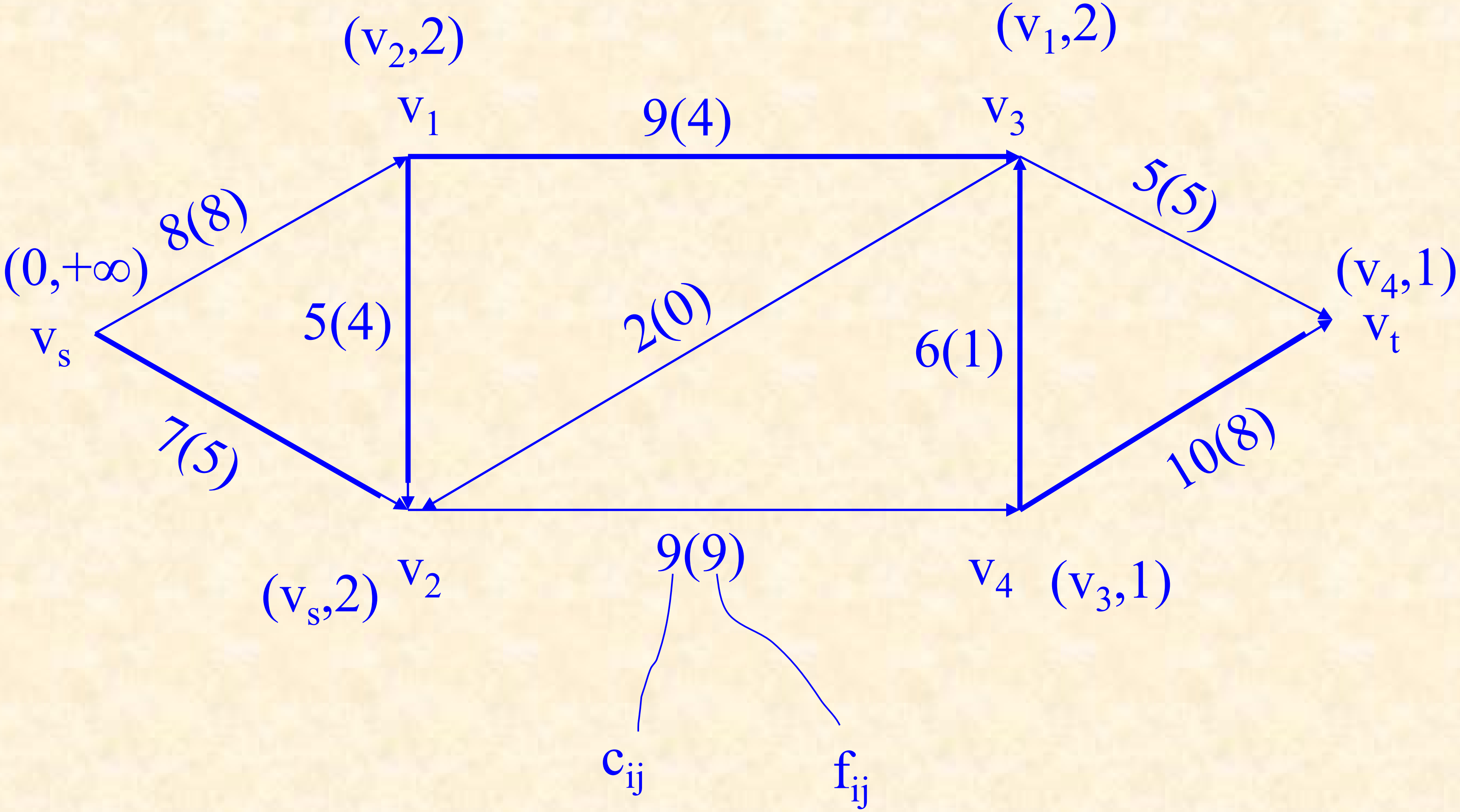
① 容量限制条件：对所有的弧，$0 \le f_{ij} \le c_{ij}$

② 中间点平衡条件：对任何一个中间点，流入量=流出量

(6) 发点、收点、中间点：流的起源点称发点，终到点称收点，其余的点称中间点。

(7) 最大流；能够通过网络的最大流量。

(8) 割集：一组弧的集合，割断这些弧，能使流中断。简称割。


(v2,2)
v1
9(4)
v3
(v1,2)
8(8)
5(5)
(0,+∞)
vs
5(4)
2(0)
6(1)
(v4,1)
vt
7(5)
10(8)
v2
(vs,2)
9(9)
v4
(v3,1)
cij
fij

⑼ 割的容量：割集中各弧的容量之和。

⑽ 最小割：所有割集中容量之和为最小的一个割集。

⑾ 前向弧μ^+：一条发点到收点链中，由发点指向收点的弧，又称正向弧。

⑿ 后向弧μ^-：一条发点到收点链中，由收点指向发点的弧，又称逆向弧。

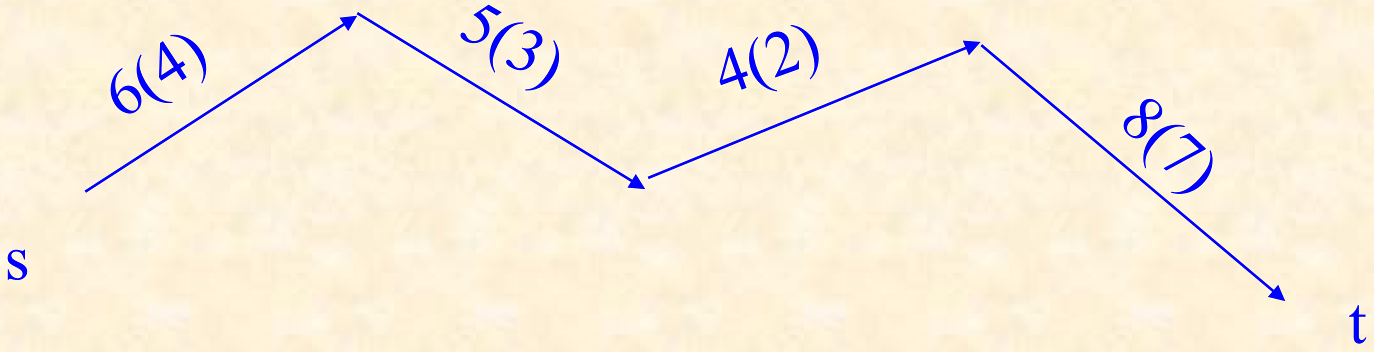
⒀ 增广链：由发点到收点之间的一条链，如果在前向弧上满足流量小于容量，即$f_{ij}<c_{ij}$，后向弧上满足流量大于0，即$f_{ij}>0$，则称这样的链为增广链。

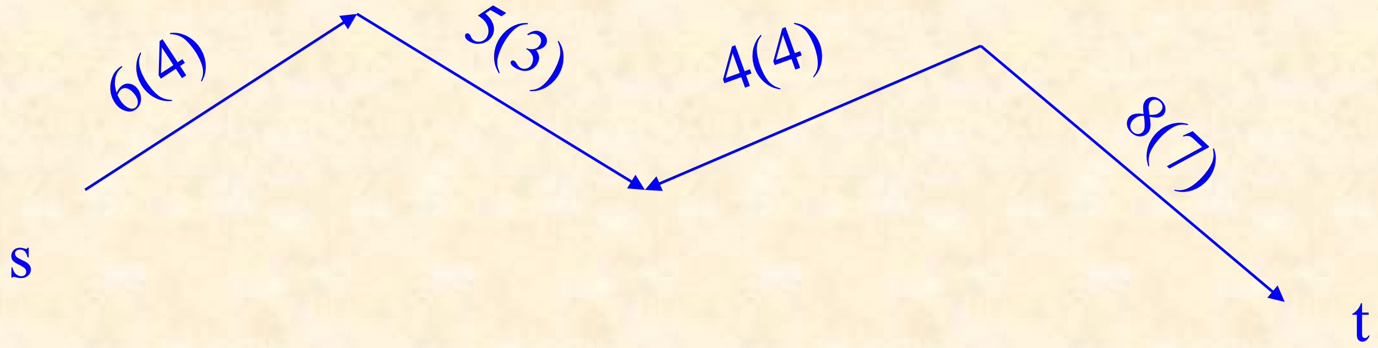
二、两个定理

定理：网络的最大流量等于它的最小割集的容量。

定理：当网络中不存在任何增广链时，则网络达到最大流状态。

设有如下增广链：





结论：该网络没有达到最大流状态。

三、网络最大流的标号算法(Ford-Fulkerson标号算法)

基本思想：寻找增广链，改善流量分布；再重复，直到不存在任何增广链为止。

步骤：

① 给始点标号：（0，$+\infty$）

② 从已标号点i出发，看与其相关联的未标号点j上的弧，

对μ^+，若有$0 \le f_{ij} < c_{ij}$，则可对j点标号，记（$i, \varepsilon(j)$），

其中 $\varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i), c_{ij} - f_{ij}\}$

对μ^-，若有$0 < f_{ji} \le c_{ij}$，也可对j点标号，记（$i, \varepsilon(j)$），

其中 $\varepsilon(j)=\min\{\varepsilon(i), f_{ji}\}$

（注：若有多个可标号点，可任选其中之一。）

若标号中断，则得到最大流状态，否则，重复②，继续标号，至收点得到标号，转③。

③ 当收点得到标号，则沿标号得到的增广链进行流量调整：

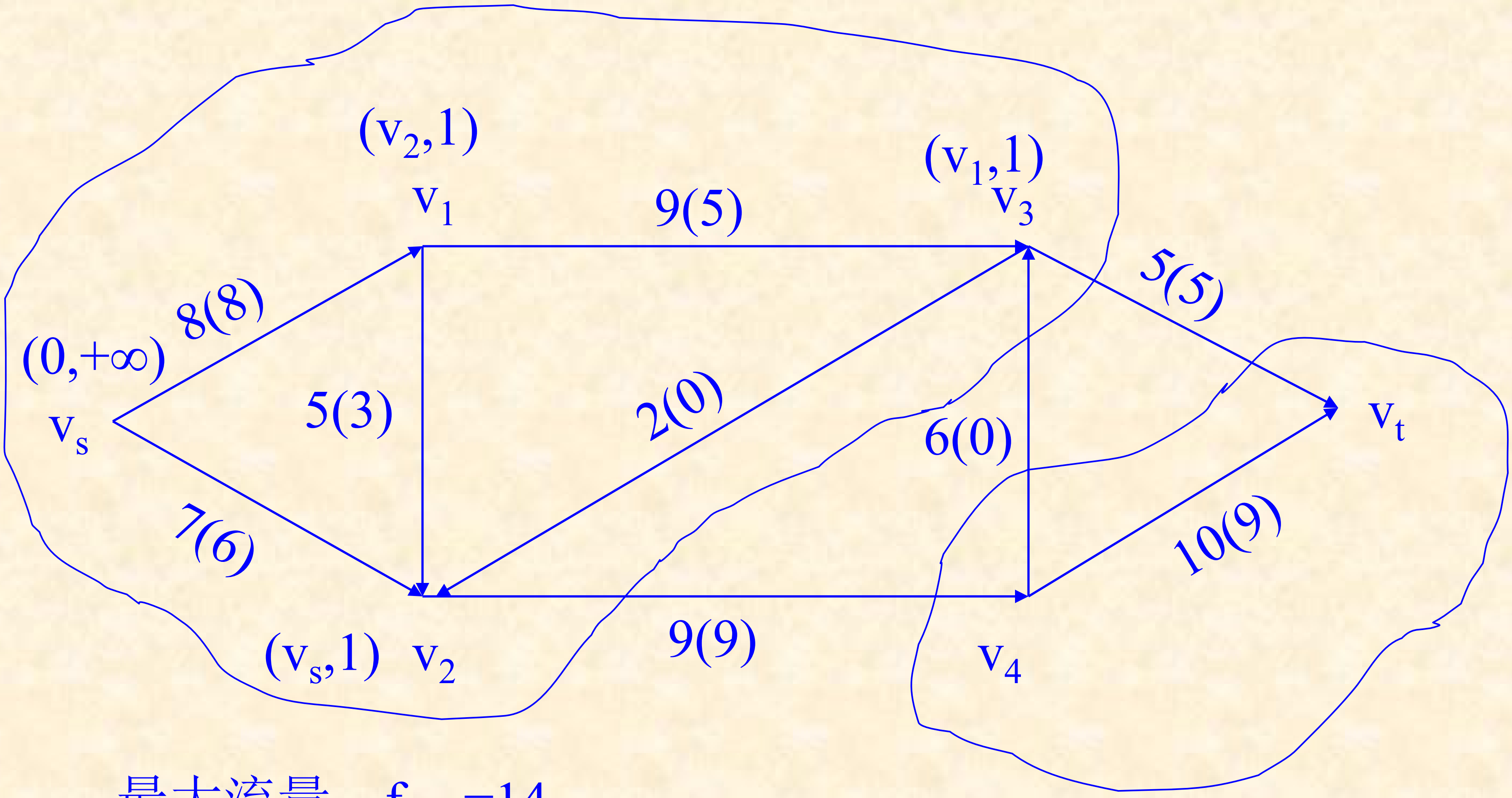
对μ^+，$f'_{ij} = f_{ij} + \varepsilon(t)$

对μ^-，$f'_{ij} = f_{ij} - \varepsilon(t)$

其余弧上的流量不变。

④ 重复上述过程。

⑤ 最小割集：已标号点集合与未标号点集合相连接的弧中， 流量=容量的弧。



最大流量：$f_{max}=14$

最小割集：$\{(v_3, v_t), (v_2, v_4)\}$

复习思考题

1. 网络最大流模型概念？

2. 网络最大流定义是什么？

3. 什么是最小割集？ 与最大流有什么关系？

4. 增广链的含义是什么？

4. Ford-Folkerson标号法的基本思想是什么？

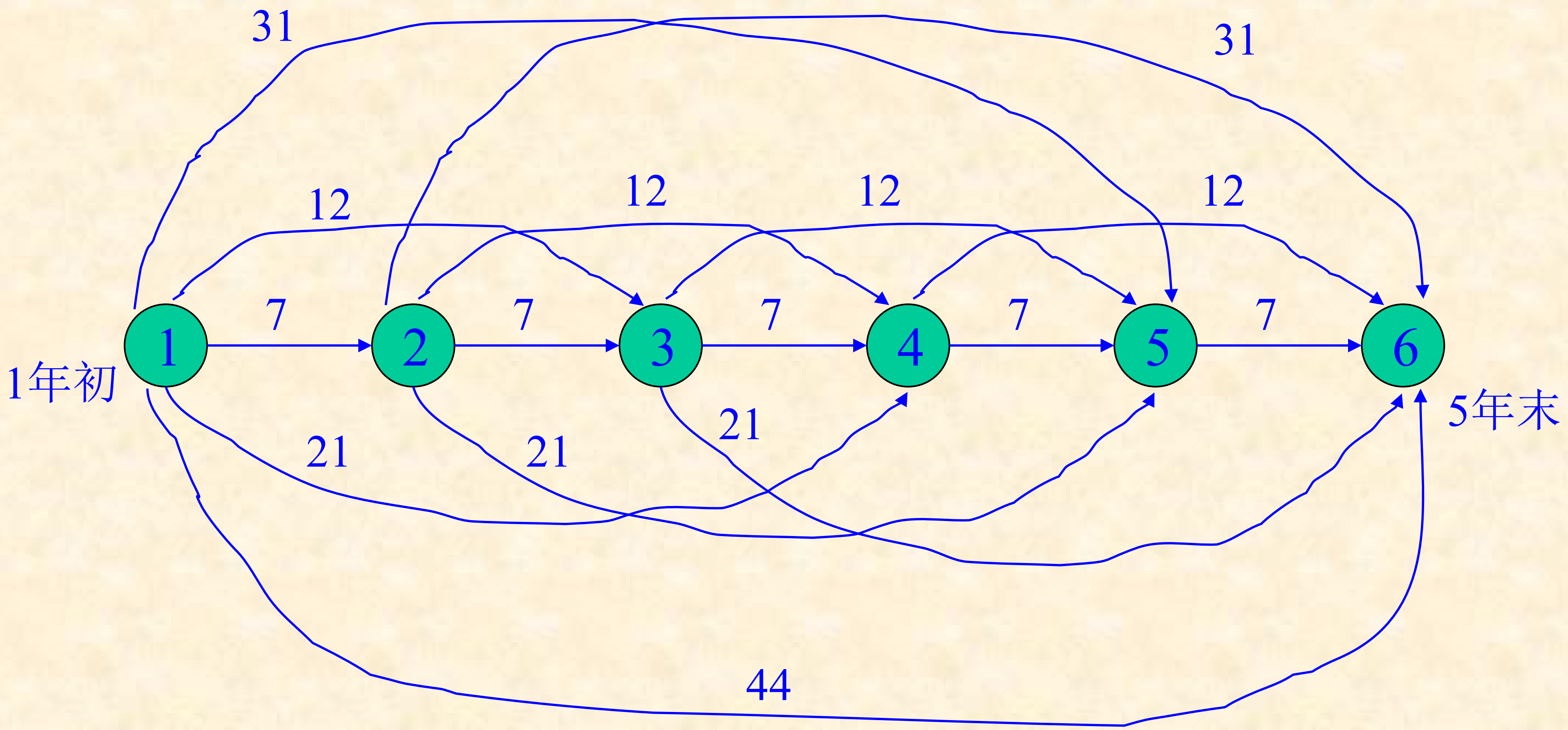
§6.6 网络模型的实际应用

例1：王经理花费12000元购买了一台微型车，以后年度的维护费用取决于年初时汽车的役龄，如表示。为避免使用旧车带来较高的维护费用，王经理可选择卖掉旧车，购买新车使用的方案，旧车的预计收入如表示。为简化计算，假定任何时刻购买新车都需花费12000元，王经理的目标是使净费用最小（购置费+维护费-卖旧车收入）。

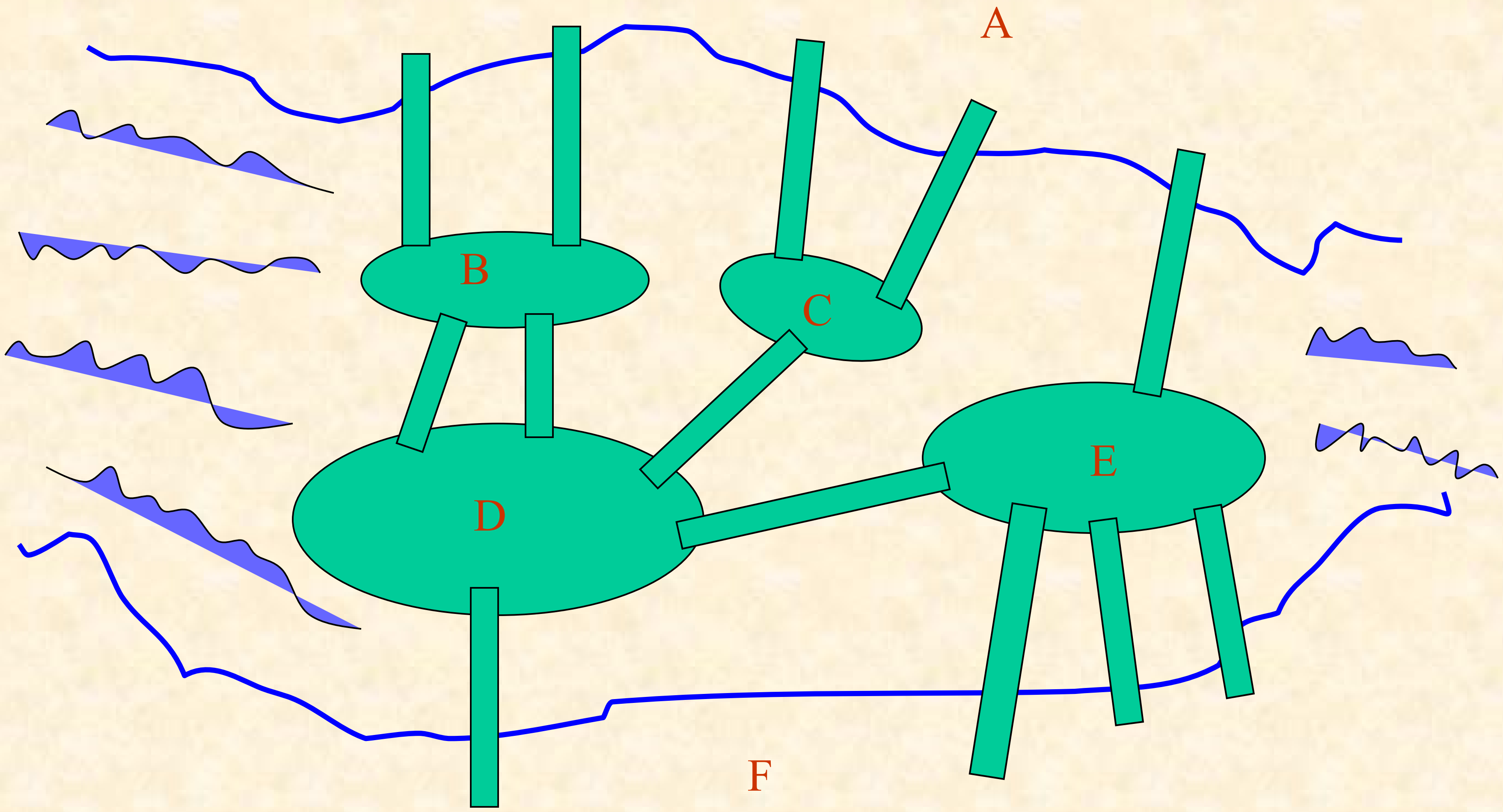
单位：元

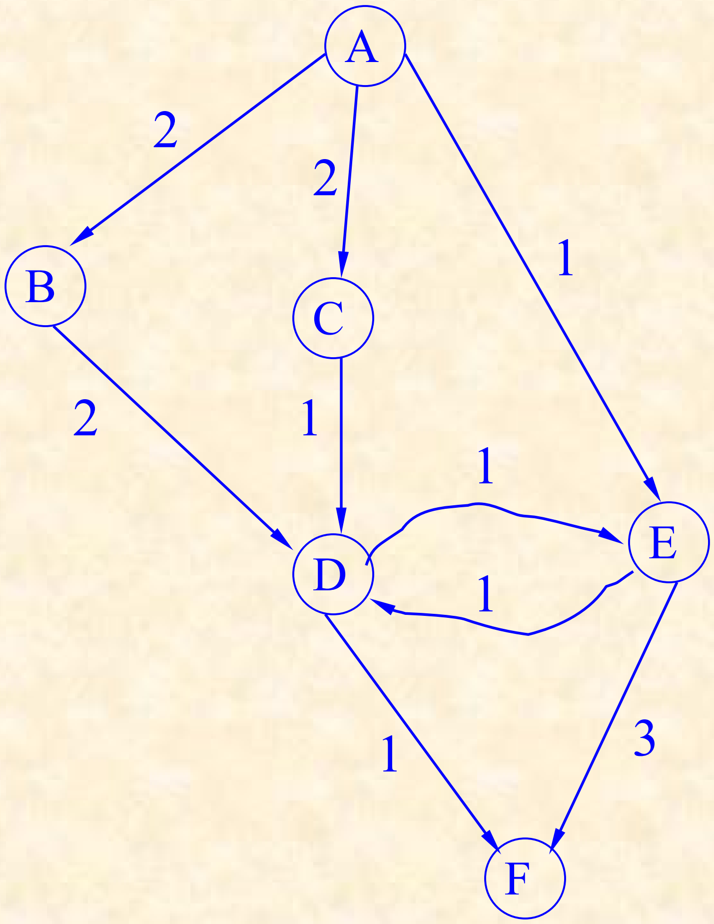
役龄(年)	0	1	2	3	4	5
年维护费	2000	4000	5000	9000	12000	——
预计收入	——	7000	6000	2000	1000	0

解：用网络图模型描述，归结为最短路问题。

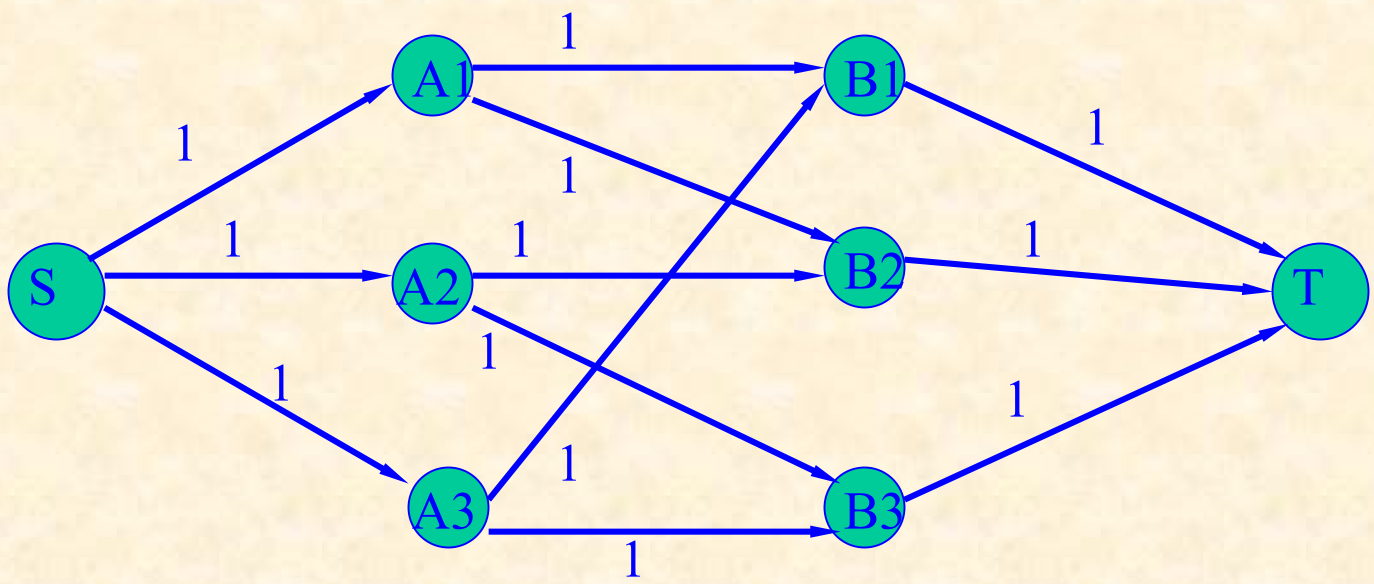


例2：图示岛屿与河岸有数座桥相联，问至少需要炸毁几座桥，可中断两岸的交通？




A
B
C
D
E
F
2
2
1
2
1
1
1
1
3

例3：有3根相同的轴A1、A2、A3，另有三根相同的齿轮B1、B2、B3。因为精度不高，不能做到任意的互相配合，其中A1能与B1、B2配合，A2能与B2、B3配合，A3能与B1、B3配合。要求确定合适的配合方案，以得到最多的配合数，将此问题归为网络最大流问题。



本 章 知 识 点

1. 图的概念与模型
2. 树图的概念及最小部分树的定义与求法
3. 最短路中的Dijkstra标号算法与矩阵算法
4. 中国邮路问题的处理
5. 网络最大流问题与Ford-fulkerson标号算法
6. 图模型的实践应用