第 2 章 线性规划的对偶理论

Duality 对偶

Dual Problem 对偶问题

Dual Linear Programming
对偶线性规划

Dual Theory 对偶理论

2.1 问题的提出

例1：甲企业计划生产I、II两种产品，该两种产品均需经A、B、C、D四种不同设备加工，按工艺资料规定，在各种不同设备上的加工时间及设备加工能力、单位产品利润如表中所示。问：如何安排产品的生产计划，才能使企业获利最大?

设备 产品	A	B	C	D	单位利润
I 产品 II 产品	2 2	1 2	4 0	0 4	2 3
加工能力	12	8	16	12	

设 企业生产甲产品为X_1件， 乙产品为X_2件，则

$$\max \quad z = 2X_1 + 3X_2$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} 2X_1 + 2X_2 \le 12 \\ X_1 + 2X_2 \le 8 \\ 4X_1 \le 16 \\ 4X_2 \le 12 \\ X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0 \end{cases}$$

例2：甲企业生产甲、乙两种产品，该两种产品均需 经A、B、C、D 四种不同设备加工，按工艺资料规定，在各种不同设备上的加工时间及设备加工能力、单位产品利润如表中所示。现有乙企业提出要全部租用甲企业设备。问：最低出价为多少时才能租下甲企业的设备?

设备 产品	A	B	C	D	单位利润
I 产品 II 产品	2 2	1 2	4 0	0 4	2 3
加工能力	12	8	16	12	

设第i种资源价格为y_i（ i=1, 2, 3, 4,）， 则有

$$\min \quad w = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_i \geq 0, \ (i=1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

1.最大生产利润模型

设 企业生产甲产品为x_1件，
乙产品为x_2件，则

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 & y_1 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 & y_2 \\ 4x_1 \le 16 & y_3 \\ 4x_2 \le 12 & y_4 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

2.资源最低售价模型

设第i种资源价格为y_i,（ i=1, 2, 3, 4,）
则有

$$\min \quad w = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 3 \\ y_i \ge 0,\ (i=1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

(原问题) <=========> (对偶问题)

2.2 原问题与对偶问题的关系

一般表示式：

原问题： max $z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \text{----} + c_n x_n$

s.t

$$
\begin{cases}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \text{----} + a_{1n} x_n \le b_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \text{----} + a_{2n} x_n \le b_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \text{----} + a_{mn} x_n \le b_m \\
x_j \ge 0, \quad j=1, 2, \text{----}, n
\end{cases}
$$

对偶问题： min $w = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \text{----} + b_m y_m$

s.t

$$
\begin{cases}
a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + \text{----} + a_{m1} y_m \ge c_1 \\
a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + \text{----} + a_{m2} y_m \ge c_2 \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + \text{----} + a_{mn} y_m \ge c_n \\
y_i \ge 0, \quad (i=1, 2, \cdots, m)
\end{cases}
$$

典式模型对应对偶结构矩阵表示

原问题

（1） $\max \ z = CX$

$$\text{s.t} \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$\Longleftrightarrow$

对偶问题

$\min \ w = Yb$

$$\text{s.t} \begin{cases} YA \ge C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

对偶模型其他结构关系

（2）若模型为

$$\max\ z = CX$$
$$s.t\begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

变形 →

$$\max\ z = CX$$
$$s.t\begin{cases} -AX \leq -b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题 → 对偶变量Y′

$$\text{Min}\ \ w=Y'(-b)$$
$$st.\begin{cases} Y'(-A) \geq C \\ Y' \geq 0 \end{cases}$$

令 Y=- Y′ →

$$\boxed{\begin{aligned} &\min\ \ w = Yb \\ &s.t\begin{cases} YA \geq C \\ Y \leq 0 \end{cases} \end{aligned}}$$

（3）$\max\ z = CX$

$$\text{s.t}\ \begin{cases} AX \le b \\ X \le 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow[\text{变形}]{\text{设}X=-X'}$

$\max = -CX'$

$$\text{st.}\ \begin{cases} -AX' \le b \\ X' \ge 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$\min\quad w = Yb$

$$\text{s.t}\ \begin{cases} -YA \ge -C \\ Y \ge 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{则有}}$

$\min\quad w = Yb$

$$\text{s.t}\quad \begin{matrix} YA \le C \\ Y \ge 0 \end{matrix}$$

对偶问题典式：

用矩阵形式表示：

（1） $\max\ z = CX$ <==========> $\min\ w = Yb$

$$\begin{aligned} &\text{s.t}\ AX \le b \\ &X \ge 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\text{s.t}\ YA \ge C \\ &Y \ge 0 \end{aligned}$$

（2） $\max\ z = CX$ <==========> $\min\ w = Yb$

$$\begin{aligned} &\text{s.t}\ AX \ge b \\ &X \ge 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\text{s.t}\ YA \ge C \\ &Y \le 0 \end{aligned}$$

（3） $\max\ z = CX$ <==========> $\min\ w = Yb$

$$\begin{aligned} &\text{s.t}\ AX \le b \\ &X \le 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} &\text{s.t}\ YA \le C \\ &Y \ge 0 \end{aligned}$$

原问题与对偶问题关系表

原问题(对偶问题)	对偶问题(原问题)
目标函数系数 约束右端项 约束条件系数列向量 A 变量个数	约束右端项 目标函数系数 约束条件系数行向量 A^T 约束条件个数
max 变量 x_j : $x_j \geq 0$ x_j 无约束 $x_j \leq 0$	min 约束方程 i : $\geq$ $=$ $\leq$
约束方程: $\leq$ $=$ $\geq$	变量 y_i : $y_i \geq 0$ y_i 无约束 $y_i \leq 0$

复习思考题

1. 怎样理解对偶现象？
2. 对偶模型的对偶关系是什么？
3. 如何从经济上理解对偶模型？
4. 互为对偶怎样理解？
5. 对偶变量的意义是什么？

2.3 对偶问题的基本性质

$$\begin{aligned} &\text{Max } z = CX \\ &s\,t.\ AX \le b \\ &\qquad X \ge 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} &\text{Min } w = Y b \\ &s\,t.\ YA \ge C \\ &\qquad Y \ge 0 \end{aligned}$$

(1) 弱对偶性：

若 X^0——原问题可行解，Y^0——对偶问题可行解

则 $CX^0 \le Y^0 b$

证明： $\because Y^0 \ge 0$， $AX^0 \le b$， $\therefore Y^0 AX^0 \le Y^0 b$，

而 $Y^0 A \ge C$， $\therefore CX^0 \le Y^0 AX^0$，

$\therefore CX^0 \le Y^0 AX^0 \le Y^0 b$

（2）最优性：

若 X^0——原问题可行解，Y^0——对偶问题可行解，且 $CX^0 = Y^0 b$

则 X^0——原问题最优解， Y^0——对偶问题最优解

证明：设 X^*——原问题最优解， Y^*——对偶问题最优解

则 $CX^0 \le CX^* \le Y^* b \le Y^0 b$

但 $CX^0 = Y^0 b$， $\therefore CX^0 = CX^* = Y^* b = Y^0 b$

$\therefore X^0 \Rightarrow X^*$， $Y^0 \Rightarrow Y^*$

即 X^0——原问题最优解， Y^0——对偶问题最优解

证毕。

（3）无界性

若原问题最优解无界，则对偶问题无可行解

证：有性质1，$CX^0 \le Y^0 b$，当 $CX^0 \to \infty$ 时，则不可能存在Y^0，使得 $CX^0 \le Y^0 b$。

注：逆定理不成立，即

如果原问题（对偶问题）无可行解，那么对偶问题（或原问题）“解无界”不成立。

（4）强对偶性（对偶定理）

若原问题有最优解，则对偶问题一定有最优解，

且有 $z_{max} = w_{min}$

证： 由 $\sigma = C - C_B B^{-1} A \le 0$ 令 $C_B B^{-1} = Y^*$，

$$\begin{cases} \text{得} \quad Y^* A \ge C \\ -Y^* = -C_B B^{-1} \le 0, \quad\quad Y^* \ge 0 \end{cases}$$

因此， Y^*是对偶问题的可行解，

又 $CX^* = C_B(B^{-1}b) = C_B B^{-1} b = Y^* b$

$\therefore$ Y^*是对偶问题的最优解。

LP模型矩阵变换：

$$\text{Max} \quad z=CX \qquad \text{st.} \begin{cases} AX \le b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{标准形}}$

$$\text{Max} \quad z=CX \qquad \text{st.} \begin{cases} AX + X_s = b \\ X \ge 0 \end{cases}$$

$\xrightarrow{\text{改写}}$

$$\text{Max} \quad z=C_BX_B+C_NX_N+0X_S$$

$$\text{st.} \begin{cases} BX_B+NX_N+IX_S=b\text{，} \\ X_B,X_N,X_S \ge 0 \end{cases} \quad |B|\neq 0\text{，} \qquad \therefore B^{-1}\text{存在}$$

$\xrightarrow{\text{左乘}B^{-1}}$

$$\text{Max} \quad z=C_BX_B+C_NX_N+0X_S$$

$$\text{st.} \begin{cases} B^{-1}BX_B+ B^{-1}NX_N+ B^{-1}I\,X_S= B^{-1}\,b \\ X_B,X_N,X_S \ge 0 \end{cases}$$

（$X_B+ B^{-1}NX_N+ B^{-1}\,X_S= B^{-1}\,b$）

单纯形法的矩阵描述：

初始表

				C_B	C_N	c_j	0
				X_B	X_N	x_j	X_S
0	X_S	b		B	N	p_j	I
	σ			C_B	C_N	c_j	0

⋮

最终表

C_B	X_B	b'	I	N'	p_j'	B^{-1}
	σ		0	σ_N	σ_j	σ_S

$$\begin{cases} X_B = b' = B^{-1} b \\ N' = B^{-1} N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N \le 0 \\ \sigma_S = -C_B B^{-1} \le 0 \\ \sigma = C - C_B B^{-1} A \le 0 \end{cases}$$

（5）互补松弛性

若 $y_i^* > 0$，则 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$

若 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* < b_i$，则 $y_i^* = 0$

证：$\because \sum_{j=1}^{n} c_j x_j^* = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^*$

$\therefore \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i^* \right) x_j^* - \sum_{i=1}^{m} b_i y_i^* = 0$ $\quad \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i \right) y_i^* = 0$

$\therefore$ 当 $y_i^* > 0$，$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i = 0$，即 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i$

当 $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* - b_i < 0$，$y_i^* = 0$

（5）互补松弛性

性质5的应用：

该性质给出了已知一个问题最优解求另一个问题最优解的方法，即已知Y＊求X＊或已知X＊求Y＊

$$\begin{cases} Y^* X_s = 0 \\ Y_s X^* = 0 \end{cases}$$

⟸ 互补松弛条件

由于变量都非负，要使求和式等于零，则必定每一分量为零，因而有下列关系：

若$Y^* \neq 0$，则X_s必为0；若$X^* \neq 0$，则Y_s必为0

利用上述关系，建立对偶问题（或原问题）的约束线性方程组，方程组的解即为最优解。

（5）互补松弛性

例2.4 已知线性规划

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 16 \\ x_j \ge 0, j = 1,2,3 \end{cases}$$

的最优解是X * =(6,2,0)^T,求其对偶问题的最优解Y * 。

解：写出原问题的对偶问题，即

$$\min\ w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \ge 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \ge 4 \\ y_1 + y_2 \ge 1 \\ y_1, y_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{标准化}}$$

$$\min\ w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 = 3 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 \\ y_1 + y_2 - y_5 = 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \ge 0 \end{cases}$$

（5）互补松弛性

例2.5 已知线性规划

$$\min z = 2x_1 - x_2 + 2x_3$$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \le 6 \\ x_1 \le 0, x_2 \ge 0, x_3\text{无约束} \end{cases}$$

的对偶问题的最优解为Y * =(0,-2)，求原问题的最优解。

解: 对偶问题是

$$\max w = 4y_1 + 6y_2 \qquad\qquad \max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \ge 2 \\ y_1 + y_2 \le -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1\text{无约，}\ y_2 \le 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{标准化}} \begin{cases} -y_1 - y_2 - y_3 = 2 \\ y_1 + y_2 + y_4 = -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1\text{无约}, y_2 \le 0, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

（6）单纯形表中的对应关系

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$\min \quad w = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \ge 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \ge 3 \\ y_i \ge 0,\ i=1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	0	0	0	1	- 1	- 0.25	0
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0
0	x_6	4	0	0	0	- 2	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0	0.5	- 0.125	0
c_j-z_j			0	0	0	- 1.5	- 0.125	0
			$-y_5$	$-y_6$	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$

复习思考题

1. 弱对偶性揭示什么关系？
2. 最优性揭示什么关系？
3. 如何从经济上理解无界性？
4. 强对偶性揭示什么关系？
5. 什么叫互补松弛性？
6. 单纯形表中的对偶关系是怎样的？

2.4 影子价格(Shadow price)

★ 取决于企业对资源使用的状况，受生产任务、产品结构差异、管理效率等因素影响。

★ 边际利润的概念：增加单位资源对利润的贡献。

★ 对资源使用决策的参考依据：买进、卖出

★ 对资源使用状况的估算：互补松弛性

★ 机会成本： $\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} p_j = c_j - Y p_j = c_j - \Sigma a_{ij} y_i$,

$\Sigma a_{ij} y_i$ 为生产 x_j 而放弃其他产品生产的利润。

★ 制定内部结算价格的参考

2.5 对偶单纯形法

由于单纯表中同时反映原问题与对偶问题的最优解，故可以从求对偶问题最优解角度求解LP模型。

例：

$$\min z=2x_1+3x_2 \quad \text{s.t} \begin{cases} x_1+x_2\geq 3 \\ x_1+2x_2 \geq 4 \\ x_1\geq 0,\ x_2\geq 0 \end{cases} \quad \overset{\text{标准化}}{\Rightarrow} \quad \max z'=-2x_1-3x_2+0x_3+0x_4 \quad \text{s.t} \begin{cases} x_1+x_2-x_3=3 \\ x_1+2x_2-x_4=4 \\ x_j\geq 0,\ (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \max z'=-2x_1-3x_2+0x_3+0x_4 \quad \text{s.t} \begin{cases} -x_1-x_2+x_3=-3 \\ -x_1-2x_2+x_4=-4 \\ x_j\geq 0,\ (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

列单纯表计算：

$C_j \rightarrow$			-2	-3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-3	-1	-1	1	0
0	x_4	-4	-1	[-2]	0	1
$c_j - z_j$			-2	-3	0	0
0	x_3	-1	[-1/2]	0	1	-1/2
-3	x_2	2	1/2	1	0	-1/2
$c_j - z_j$			-1/2	0	0	-3/2
-2	x_1	2	1	0	-2	1
-3	x_2	1	0	1	1	-1
$c_j - z_j$			0	0	-1	-1

对偶单纯形法步骤：

1.列初始单纯形表，使得所有检验数$\sigma_j \le 0$；

2.出基变量：取$\min\{b_i<0\} = b_l \longrightarrow x_{(l)}$

3.入基变量：$\min\{\frac{c_j - z_j}{a_{lj}} \mid a_{lk}<0\} = \longrightarrow x_k$

4.主元素：　$[a_{lk}]$

5.迭代：同单纯形法，新单纯表中p_k化为单位向量

说明：

1^0 使用对偶单纯形法时，初始表中检验数必须全部为$\sigma_j \le 0$，即使得其对偶问题为可行解，

2^0 为便于说明，这里采取从原问题角度叙述迭代步骤。

复习思考题

1．如何定义影子价格？

2．影子价格的经济意义有哪些？

3．机会成本与财务成本有什么不同？

4．为何提出对偶单纯形法？

5．对偶单纯形法的计算原理是什么？

6．对偶单纯形法的应用条件是什么？

2.6 灵敏度分析

1．灵敏度分析的概念：

当某一个参数发生变化后，引起最优解如何改变的分析。

可以改变的参数有：

b_i——约束右端项的变化，通常称资源的改变；

c_j——目标函数系数的变化，通常称市场条件的变化；

p_j——约束条件系数的变化，通常称工艺系数的变化；

其他的变化有：增加一种新产品、增加一道新的工序等。

2．分析原理：

借助最终单纯形表，将变化后的结果按下述基本原则反映到最终表中去。

（1）b_i变化： $(b+\triangle b)' = B^{-1}(b+\triangle b)$
$= B^{-1}b + B^{-1}\triangle b = b' + B^{-1}\triangle b$

（2）p_j变化： $(p_j+\triangle p_j)' = B^{-1}(p_j+\triangle p_j)$
$= B^{-1}p_j + B^{-1}\triangle p_j = p_j' + B^{-1}\triangle p_j$

（3）c_j变化：直接反映到最终表中，计算检验数。

（4）增加一个约束方程：直接反映到最终表中。

（5）增加新产品：仿照p_j变化。

3．计算示例：

例：已知某线性规划模型及最终的单纯表如下：

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

$$\text{s.t} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 4x_1 \le 16 \\ 4x_2 \le 12 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

问：（1）若b_2增加8个单位，最优解如何变化？

（2）若c_2还可增加2个单位，最优解如何改变？

（3）若引进一个新变量（产品）y，其目标函 数系数为 $c_y=5$，系数列向量为$p_y=[3\ \ 2\ \ 6\ \ 3]^T$，问最优解是否会改变？

		$c_j \longrightarrow$	2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	0	0	0	1	-1	-0.25	0
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0
0	x_6	4	0	0	0	-2	0.5	1
3	x_2	2	0	1	0	0.5	-0.125	0
		$c_j - z_j$	0	0	0	-1.5	-0.125	0

解：（1）

$$B^{-1}\triangle b=\begin{pmatrix}1 & -1 & -0.25 & 0\\ 0 & 0 & 0.25 & 0\\ 0 & -2 & 0.5 & 1\\ 0 & 0.5 & -0.125 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\8\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-8\\0\\-16\\4\end{pmatrix}$$

$\therefore$（b+△b）$'$ $=B^{-1}b+B^{-1}\triangle b=b'+B^{-1}\triangle b$

$=[0\ \ 4\ \ 4\ \ 2]^T+[-8\ \ 0\ \ -16\ \ 4]^T=[-8\ \ 4\ \ -12\ \ 6]^T$

$\therefore$ 利用对偶单纯形法继续求最优解。

（2）当c_j变化时，$\sigma'=C'-C_B'B^{-1}A$，列出单纯形表，重新求出检验数，如表中所示：

（3）增加y时， $\sigma_y=c_y-C_B B^{-1}p_y=5-(0\ \ 1.5\ \ 0.125\ \ 0)[3\ \ 2\ \ 6\ \ 3]^T$
$=1.25>0$

$\therefore$ 选择y作入基变量， $p_y'=B^{-1}p_y==[-0.5\ \ 1.5\ \ 2\ \ 0.25]^T$

继续迭代：

右端项变化分析单纯形表：

返回

$c_j \longrightarrow$			2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	-8	0	0	1	-1	-0.25	0
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0
0	x_6	-12	0	0	0	[-2]	0.5	1
3	x_2	6	0	1	0	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	0	-1.5	-0.125	0
0	x_3	-2	0	0	1	0	[-0.5]	-0.5
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0
0	x_4	6	0	0	0	1	-0.25	-0.5
3	x_2	3	0	1	0	0	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	0	0	-0.5	-0.75
0	x_5	4	0	0	-2	0	1	1
2	x_1	3	1	0	0.5	0	0	-0.25
0	x_6	7	0	0	-0.5	1	0	-0.25
3	x_2	3	0	1	0	0	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	0	-0.25

C_j变化分析单纯形表：

	$c_j \longrightarrow$		2	5	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	0	0	0	1	-1	-0.25	0
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0
0	x_6	4	0	0	0	-2	[0.5]	1
5	x_2	2	0	1	0	0.5	-0.125	0
	$c_j - z_j$		0	0	0	-2.5	0.125	0
0	x_3	2	0	0	1	-2	0	0.5
2	x_1	2	1	0	0	1	0	-0.5
0	x_5	8	0	0	0	-4	1	2
5	x_2	3	0	1	0	0	0	0.25
	$c_j - z_j$		0	0	0	-2	0	-0.25

返回

增加新产品（变量y）变化分析单纯形表：

$c_j \longrightarrow$			2	3	0	0	0	0	5
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
0	x_3	0	0	0	1	-1	-0.25	0	-0.5
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0	1.5
0	x_6	4	0	0	0	-2	0.5	1	[2]
3	x_2	2	0	1	0	0.5	-0.125	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	0	-1.5	-0.125	0	1.25
0	x_3	1	0	0	1	-1.5	-0.125	0.25	0
2	x_1	1	1	0	0	1.5	-0.125	-0.75	0
5	y	2	0	0	0	-1	0.25	0.5	1
3	x_2	1.5	0	1	0	0.75	-0.1875	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	0	-0.25	-0.4375	-0.625	0

2.7 参数线性规划

1. 概念：研究目标函数值随某一参数变化的规律及最优解相应的变化。

2. 算法：先令变化量$\theta=0$，再考察随着θ的增加引起解的变化情况。

3. 最后，画出目标值随θ的变化所形成的曲线。

例：有如下线性规划模型：

$$\max z=2x_1+3x_2$$
$$\text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2\le 3 \\ x_1+2x_2 \le 4+\theta \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0 \ (\theta \ge 0) \end{cases}$$

（1）当θ =0 时的最优解；

（2）当θ>0时，z 值的变化规律。

解：先令z=0，有下述模型的标准形

$$\max z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$$
$$\text{s.t}\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \\ x_j \ge 0,\ (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

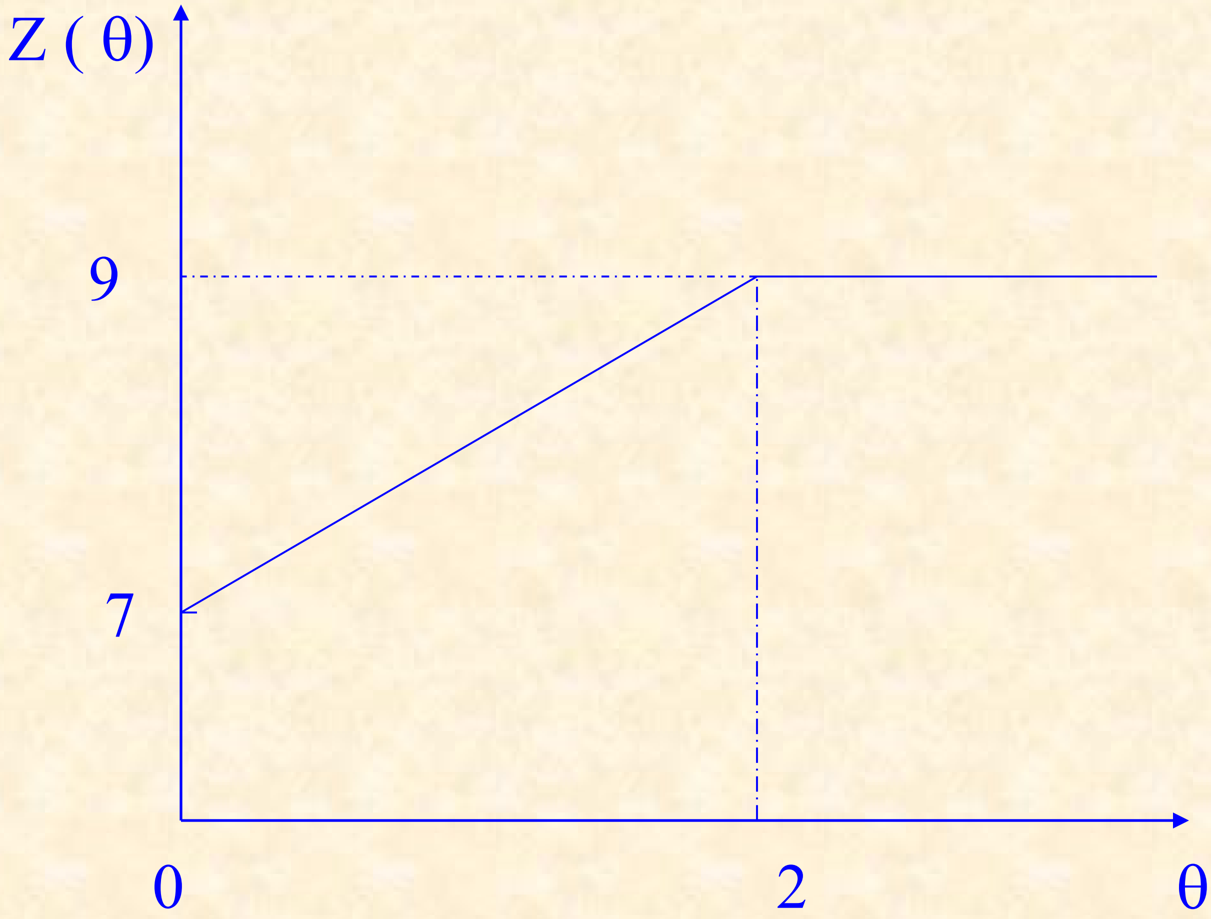
利用单纯形法求解：

$C_j \rightarrow$			2	3	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	1	1	1	0	
0	x_4	4	1	[2]	0	1	
$c_j - z_j$			2	$\boxed{3}$	0	0	
0	x_3	1	[1/2]	0	1	-1/2	
3	x_2	2	1/2	1	0	1/2	
$c_j - z_j$			$\boxed{1/2}$	0	0	-3/2	
2	x_1	2	1	0	2	-1	
3	x_2	1	0	1	-1	1	（θ =0）
$c_j - z_j$			0	0	-1	-1	

当$\theta>0$时， $\Delta b' = B^{-1}\cdot\Delta b = B^{-1}\cdot(0 \quad \theta)^T = (-\theta \quad \theta)^T$，继续迭代如下：（对偶单纯形法）

$C_j \rightarrow$			2	3	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
2	x_1	$2-\theta$	1	0	2	[-1]	（$0\le\theta\le 2$）
3	x_2	$1+\theta$	0	1	-1	1	
$c_j - z_j$			0	0	-1	-1	
0	x_4	$\theta-2$	-1	0	-2	1	
3	x_2	3	1	1	1	0	（$\theta>2$）
$c_j - z_j$			-1	0	-3	0	

其变化曲线如下：


Z(θ)
9
7
0
2
θ

复习思考题

1. 灵敏度分析的概念是什么？
2. 为何要进行灵敏度分析？
3. 参数分析解决什么问题？
4. 各项参数的变化可能会引起哪些结果改变？
5. 敏感度分析与参数规划依据的是什么原理？

例：

某大学教授利用部分业余时间从事咨询工作。现有三个A、B、C企业欲聘请，各自每小时的咨询费用分别为10，12，16元。教授每月可用于外出咨询的时间为40小时，但对每个企业而言，用于准备的时间与咨询所花的时间的比例分别为0.1，0.5，0.8，教授每月可用于准备的时间应不超过24小时。若假定三个企业每月要求的咨询时间可分别达到80，60，20小时。现问：教授应作何种决策，才能使收益最大？

从目前看，教授有许多咨询机会，但可用的外出咨询时间及准备的时间有限，所以可考虑雇用助手（用于帮助准备），但要支付每小时4元的费用，现帮助教授分析一下，它是否该雇用助手，若需雇用，每月应雇用多少时间？

设 用于三个企业咨询的时间分别为A—x_1， B—x_2， C—x_3，

$$\text{Max} \quad z=10x_1+12x_2+16x_3-40\theta$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} x_1+x_2+x_3\le 40 \\ 0.1x_1+0.5x_2+0.8x_3\le 24+\theta \\ x_1\le 80 \\ x_2\le 60 \\ x_3\le 20 \\ x_1\ge 0,\ x_2\ge 0,\ x_3\ge 0 \end{cases}$$

单纯形表：

	$c_j \longrightarrow$		10	12	16	0	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
10	x_1	5	1	0	0	1.25	-2.5	0	0	0.75
12	x_2	15	0	1	0	-0.25	2.5	0	0	-1.75
0	x_6	75	0	0	0	-1.25	2.5	1	0	-0.75
0	x_7	45	0	0	0	0.25	-2.5	0	1	1.75
16	x_3	20	0	0	1	0	0	0	0	1.00
	$c_j - z_j$		0	0	0	- 9.5	-5.0	0	0	-2.5

$$Z_{max} = 550$$

单纯形表：

$c_j \longrightarrow$			10	12	16	-4	0	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	θ	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-4	θ	2	0.4	0	0	1	0. 5	-1.0	0	0	0.3
12	x_2	20	1	1	0	0	1.0	0	0	0	-1
0	x_6	80	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	x_7	40	-1	0	0	0	-1	0	0	1	1
16	x_3	20	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$c_j - z_j$			-0 .4	0	0	0	- 10	-4	0	0	-2.8

$Z_{max} = 552$

本 章 知 识 点

1. 对偶模型中结构要素的对应关系
2. 对偶模型的主要性质
3. 影子价格原理及应用分析
4. 对偶单纯形法的使用
5. 灵敏度分析方法
6. 参数规划方法