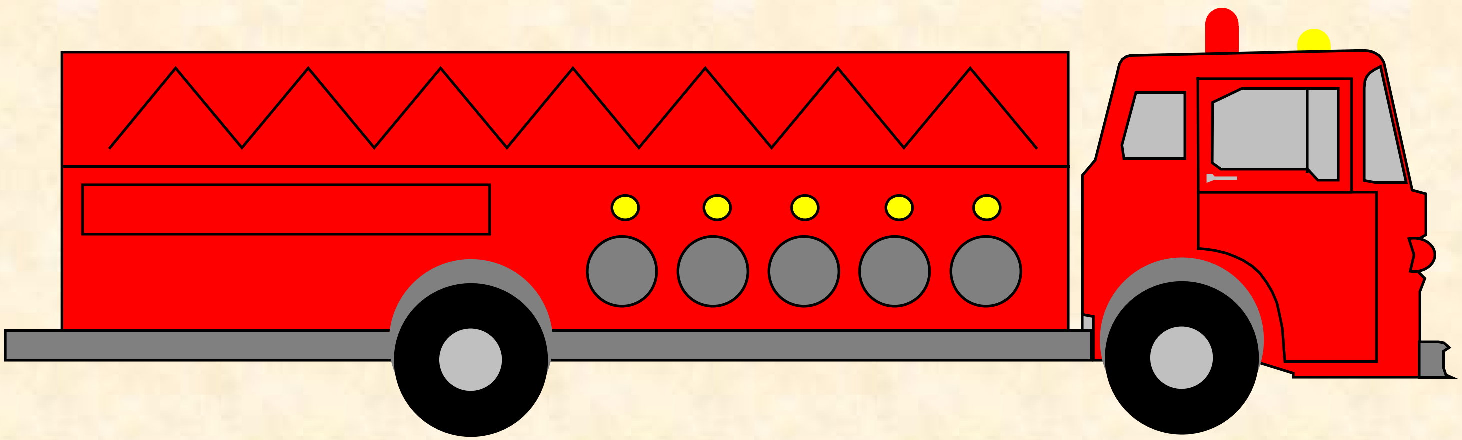
第三章　　运输问题

Transportation　problem



3.1　运输问题的典例和数学模型

一、典例：

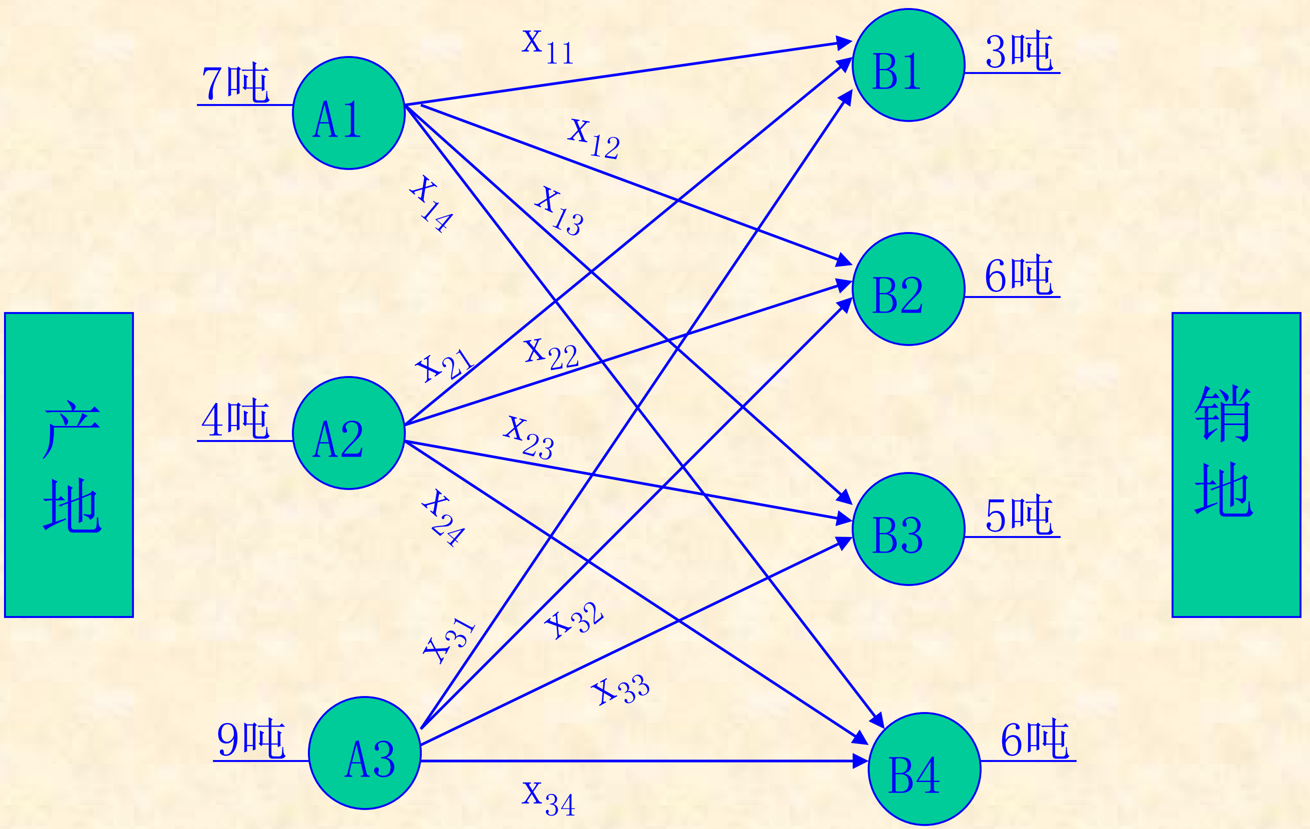
某食品公司经营糖果业务，公司下设三个工厂A1、A2、A3，四个销售门市部B1、B2、B3、B4。已知每天各自的生产量、销售量及调运时的单位运输费用情况。问：如何调运可使总费用最小？

生产量：A1——7吨，　A2 —— 4吨，　A3 —— 9吨

销售量：B1 —— 3吨，B2 —— 6吨，B3 —— 5吨，B4 —— 6吨

产地 \ 单位运价 \ 销地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	3	10
A2	1	9	2	8
A3	7	4	10	5

调运示意图


产地
7吨
4吨
9吨
A1
A2
A3
x11
x12
x13
x14
x21
x22
x23
x24
x31
x32
x33
x34
B1
B2
B3
B4
3吨
6吨
5吨
6吨
销地

二、建立模型

设　　x_{ij}——第i产地到第j销地之间的调运量，则有

$$\text{Min}\quad z=\sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}c_{ij}\cdot x_{ij}$$

产量限制
$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}=7 \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}=4 \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}=9 \end{cases}$$

销量限制
$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}+x_{31}=3 \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}=6 \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}=5 \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}=6 \end{cases}$$

$x_{ij}\geq 0$, (i=1, 2, ---, 3； j=1, 2, ---, 4)

一般模型表示：

设有个m产地、n个销地，其中第i个产地的产量为a_i，第j个销地的销量为b_j，且 $\sum a_i=\sum b_j$。若第i个产地到第j个销地每调运单位物资的运费为c_{ij}，则使总费用最少的调运模型为：

$$\text{Min} \quad z = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} \cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i & (i = 1,2,\ldots,m) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j = 1,2,\ldots,n) \\ x_{ij} \geq 0 & (i = 1,2,\ldots,m;\ j = 1,2,\ldots,n) \end{cases}$$

三、模型的特点

1. 变量数：m×n个

2. 约束方程数：m+n个

   最大独立方程数：m+n-1

3. 系数列向量结构：

$$P_{ij}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\ \\ \text{——第i个分量}\\ \\ \text{——第m+j个分量}\\ \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccccccccccc} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n}, & \cdots, & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} \end{array} \\
\begin{array}{c} i=1 \\ i=2 \\ \vdots \\ i=m \\ \hline j=1 \\ j=2 \\ \vdots \\ j=n \end{array} &
\left(\begin{array}{ccccccccccccc}
1 & 1 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\
\hdashline
1 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & 0 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 1 & \cdots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 1
\end{array}\right)
\end{array}$$

复习思考题

1. 运输模型按数学特点属于哪类模型？
2. 什么是产销平衡运输问题？
3. 产销平衡运输模型有哪些特点？
4. 产销平衡运输模型是否一定有最优解？
5. 为什么产销平衡运输模型会有一个模型不独立？

3.2　运输问题的表上作业算法

表上作业法步骤：　初始方案→最优性检验→改进方案

一、初始方案的确定

1. 最小元素法

2. Vogel法

二、最优性检验

1. 闭回路法

2. 位势法

三、方案改进方法

在闭回路内改进。

产销平衡表

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	(1)	(2)	4	3	7
A2	3	(1)	1	(-1)	4
A3	(10)	6	(12)	3	9
销量	3	6	5	6	

单位运价表

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	3	10
A2	1	9	2	8
A3	7	4	10	5

初始方案要求：

1）m+n-1个数字格；

2）不形成全部以数字格为顶点的闭回路

A2	3	(2)	(1)	1	4
A3	(9)	6	(12)	3	9
销量	3	6	5	6	

Vogel法：

产销平衡表

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1			5	2	7
A2	3			1	4
A3		6		3	9
销量	3	6	5	6	

产地 \ 销地	B1	B2	B3	B4	行两最小元素之差			
A1	3	11	3	10	0	0	0	7
A2	1	9	2	8	1	1	1	6
A3	7	4	10	5	1	2	-	-
列两最小元素之差	2	5	1	3				
	2	-	1	3				
	2	-	1	2				
	-	-	1	2				

位势法:

位势表:

销地 产地	B1	B2	B3	B4	行位势
A1	(3)	(9)	3	10	1
A2	1	(7)	(1)	8	-1
A3	(-2)	4	(-2)	5	-4
列位势	2	8	2	9	

单位运价表

销地 产地	B1	B2	B3	B4
A1	3	11	3	10
A2	1	9	2	8
A3	7	4	10	5

1. 数字格处上添上对应的运价;

2. 计算行位势和列位势;

令$u_1=1$，则依$c_{ij}=u_i+v_j$　计算各u_i和v_j

3. 计算空格处位势;

$\lambda_{ij}=u_i+v_j$

4. 计算空格处检验数:

$\sigma_{ij}=c_{ij}-\lambda_{ij}$

检验数表

产地\销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	(0)	(2)	5	2	7
A2	3	(2)	(1)	1	4
A3	(9)	6	(12)	3	9
销量	3	6	5	6	

例：表上作业法求解

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	7	6	4	5
A2	2	4	3	2	2
A3	4	3	8	5	3
销量	3	3	2	2	

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	7	6	4	5
A2	2	4	3	2	2
A3	4	3	8	5	3
销量	3	3	2	2	

特殊情况处理说明：
1. 确定初始方案过程中，填一个数字后行和列上产销量同时满足要求，则在该行或列可分配位置填0后，做直线覆盖该行和列的运价；

销地 / 产地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	1	0	2	2	5
A2	2	(-2)	(-2)	(−1)	2
A3	(5)	3	(6)	(5)	3
销量	3	3	2	2	

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	7	6	4	5
A2	2	4	3	2	2
A3	4	3	8	5	3
销量	3	3	2	2	

特殊情况处理说明：

2. 方案调整时，若闭回路调整量为0，则做0量调整；

3. 方案调整时，若出现两个以上数字格同时调整为0，则选择其中任一位置为空格，其余填数字0；

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	1	0	2	2	5
A2	2	(-2)	(-2)	(-1)	2
A3	(5)	3	(6)	(5)	3
销量	3	3	2	2	

产地＼销地	B1	B2	B3	B4	产量
A1	3	0	0	2	5
A2	(2)	(0)	2	(1)	2
A3	(5)	3	(6)	(5)	3
销量	3	3	2	2	

☆ 表上作业法说明：

1．初始方案即为基本可行解

1）有数字格顶点个数

2）不形成全部以数字格为顶点闭回路

2．检验数计算：　$\sigma_{ij} = c_{ij} - C_B B^{-1} p_{ij}$

3．改进方案

1）基本要求

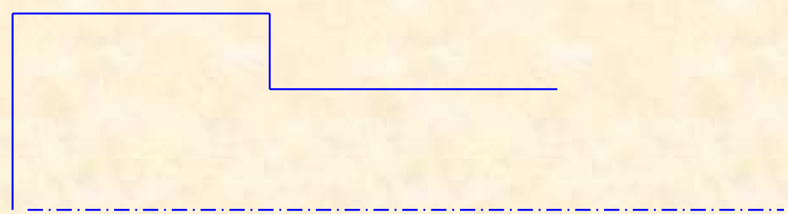
2）入基变量　$\min\{\sigma_{ij} \mid \sigma ij < 0\}$

3）出基变量　$\min\{\theta_{ij}\} = \left\{ \dfrac{x_{ij}{}^{o}}{p_{ij}} \mid p_{ij} > 0 \right\}$

定理：运输问题中，一组变量$\{x_{ij}\}$对应的列向量$\{p_{ij}\}$线性相关的充要条件是存在以$\{x_{ij}\}$为顶点的闭回路。

证：

1）充分性：存在$\{x_{ij}\}$为顶点闭回路$\Rightarrow$$\{p_{ij}\}$线性相关



2）必要性：　$\{p_{ij}\}$线性相关$\Rightarrow$存在$\{x_{ij}\}$为顶点闭回路

复习思考题

1. 表上作业法使用的条件是什么？
2. 表上作业法中的调运方案应满足什么条件？
3. Vogel法比最小元素法有什么优点？
4. 表上作业法检验数的经济含义是什么？
5. 为什么说表上作业法的计算原理与单纯形法是一致的？

3.3 产销不平衡运输问题及其应用

一、产销不平衡问题

1.产>销

$$\text{Min}\quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i & (i=1,2,\dots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=1,2,\dots,n) \\ x_{ij} \ge 0 & (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n) \end{cases}$$

$$\Rightarrow$$

$$\text{Min}\quad z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}+\sum_{i=1}^{m} 0\cdot x_{i,\,n+1}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i & (i=1,2,\dots,m) \\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j & (j=1,2,\dots,n,n+1) \\ x_{ij} \ge 0 & (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n,n+1) \end{cases}$$

产＞销问题单位运价表

产地＼销地	B1	B2	----	Bn	B_{n+1}	产量
A1	C_{11}	C_{12}	----	C_{1n}	0	a_1
A2	C_{21}	C_{22}	----	C_{2n}	0	a_2
⋮	⋮	⋮	----	⋮	⋮	⋮
Am	C_{m1}	C_{m2}	----	C_{mn}	0	a_m
销量	b_1	b_2	----	bn	$\Sigma a_i - \Sigma b_j$	

2.销>产

$$\text{Min } z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i & (i=1,2,\dots,m)\\ \sum_{i=1}^{m} x_{ij}\le b_j & (j=1,2,\dots,n)\\ x_{ij}\ge 0 & (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)\end{cases}$$

$$\Longrightarrow$$

$$\text{Min } z=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\cdot x_{ij}+\sum_{j=1}^{n}0\cdot x_{m+1,j}$$

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=a_i & (i=1,2,\dots,m,m+1)\\ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij}= b_j & (j=1,2,\dots,n)\\ x_{ij}\ge 0 & (i=1,\dots,m,m+1;\ j=1,\dots,n)\end{cases}$$

销＞产问题单位运价表

销地 / 产地	B1	B2	----	Bn	产量
A1	C_{11}	C_{12}	----	C_{1n}	a_1
A2	C_{21}	C_{22}	----	C_{2n}	a_2
⋮	⋮	⋮	----	⋮	⋮
Am	C_{m1}	C_{m2}	----	C_{mn}	a_m
A_{m+1}	0	0	----	0	$\Sigma b_j - \Sigma a_i$
销量	b_1	b_2	----	b_n	

二、应用模型

例一：某工厂按合同规定必须于当年的每个季度末分别提供10、15、25、20台同一规格的柴油机。已知该厂的生产能力及生产每台柴油机的成本如表示。又如果生产出来的柴油机当季不交货，每台每积压一个季度需要存储维护费用0.15万元。要求在完成合同的情况下，做出使全年生产费用最小的决策。

季度	生产能力（台）	单位成本（万元/台）
Ⅰ	25	10.8
Ⅱ	35	11.1
Ⅲ	30	11.0
Ⅳ	10	11.3

模型：

设　x_{ij}——第i季度生产，用于第j季度交货的数量。

$$\text{obj.}\quad \min\quad z=\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4} c_{ij}\, x_{ij}$$

供应：

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}\le 25 \\
\text{II} & x_{22}+x_{23}+x_{24}\le 35 \\
\text{III} & x_{33}+x_{34}\le 30 \\
\text{IV} & x_{44}\le 10 \\
 & x_{ij}\ge 0\ ,(i=1,\cdots,4;j=1,\cdots,4)
\end{array}$$

需求：

$$\begin{array}{ll}
\text{I} & x_{11}=10 \\
\text{II} & x_{12}+x_{22}=15 \\
\text{III} & x_{13}+x_{23}+x_{33}=25 \\
\text{IV} & x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}=20
\end{array}$$

单位费用表：

单位：万元

供应＼需求	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
Ⅰ	10.8	10.95	11.10	11.25
Ⅱ	M	11.10	11.25	11.40
Ⅲ	M	M	11.00	11.15
Ⅳ	M	M	M	11.30

例二：

　　某餐馆承办宴会，每晚连续举行，共举行五次。宴会上需用特殊的餐巾，根据参加的人数，预计每晚的需要量为：第一天1000条，第二天700条，第三天800条，第四天1200条，第五天1500条，五天之后，所有的餐巾作废。宴会中用过的餐巾经过洗涤处理后可以重复使用，这样可以降低使用成本。已知每条新餐巾需要1元的费用，送洗时可选择两种方式：快洗仅需要一天时间，每条洗涤费用为0.2元，慢洗需要两天时间，每条洗涤费用0.1元。问：如何安排，可使总费用最低？

建立模型：

设　x_j—第j天使用新毛巾的数量；y_{ij}—第i天送第j天使用快洗餐巾的数量；z_{ij}—第i天送第j天使用慢洗餐巾的数量；

$$\text{Min}\quad z=\sum x_j+\sum\sum 0.2y_{ij}+\sum\sum 0.1z_{ij}$$

需求约束

第一天：$x_1=1000$

第二天：$x_2+y_{12}=700$

第三天：$x_3+z_{13}+y_{23}=800$

第四天：$x_4+z_{14}+z_{24}+y_{34}=1200$

第五天：$x_5+z_{15}+z_{25}+z_{35}+y_{45}=1500$

供应约束

新购餐巾：$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5\leq 5200$

第一天送洗：$y_{12}+z_{13}+z_{14}+z_{15}\leq 1000$

第二天送洗：$y_{23}+z_{24}+z_{25}\leq 700$

第三天送洗：$y_{34}+z_{35}\leq 800$

第四天送洗：$y_{45}\leq 1200$

$x_j\geq 0$，$y_{ij}\geq 0$，$z_{ij}\geq 0$，（i=1,----,4；j=1,----,5）

产销平衡表

需求 供应	I	II	III	IV	V	VI	产量
新　购	1	1	1	1	1	0	5200
第一天	M	0.2	0.1	0.1	0.1	0	1000
第二天	M	M	0.2	0.1	0.1	0	700
第三天	M	M	M	0.2	0.1	0	800
第四天	M	M	M	M	0.2	0	1200
销　量	1000	700	800	1200	1500	3700	

例三：

有A、B、C三个化肥厂供应四个地区Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ的农用化肥，三个工厂每年各自的产量为A--50万吨，B--60万吨，C--50万吨。四个地区的需求量分别是Ⅰ地区最高50万吨，最低30万吨，Ⅱ地区为70万吨，Ⅲ地区为30万吨以下，Ⅳ地区不低于10万吨。问：如何调运，可使总的调运费用最小？单位调运费用如下表所示。

设 x_{ij}--第i工厂调至第j需求地区的化肥数量

单位运价表　　　　　单位：万元/万吨

产地＼销地	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ	产量
A	16	13	22	17	50
B	14	13	19	15	60
C	19	20	23	—	50
销量	30-50	70	0-30	10-	

产销平衡表

供应＼需求	I′	I″	II	III	IV′	IV″	产量
A	16	16	13	22	17	17	50
B	14	14	13	19	15	15	60
C	19	19	20	23	M	M	50
D	M	0	M	0	M	0	50
销　量	30	20	70	30	10	50	

三、扩大的运输问题

例：在前面的例题中，若既可以从Ai运到Bj，也可以经过中间站T1、T2、T3、T4或者Ai、Bj转运，称扩大的运输问题。

几点说明：

1. 所有的产地、销地、中间站均视作产地、销地；
2. 转运量可定位总的产量之和；
3. 不能出现循环倒运现象，允许自身往自身最多调运一次，运价为$C_{ij}=0$；
4. 实际产地产量为转运量与该产地实际产量之和，实际销地销量为转运量与实际销量之和。

产销平衡表

产＼销	A1	A2	A3	T1	T2	T3	T4	B1	B2	B3	B4	产量
A1	0	1	3	2	1	4	3	3	11	3	10	27
A2	1	0	–	3	5	–	2	1	9	2	8	24
A3	3	–	0	1	–	2	3	7	4	10	5	29
T1	2	3	1	0	1	3	2	2	8	4	6	20
T2	1	5	–	1	0	1	1	4	5	2	7	20
T3	4	–	2	3	1	0	2	1	8	2	4	20
T4	3	2	3	2	1	2	0	1	–	2	6	20
B1	3	1	7	2	4	1	1	0	1	4	2	20
B2	11	9	4	8	5	8	–	1	0	2	1	20
B3	3	2	10	4	2	2	2	4	2	0	3	20
B4	10	8	5	6	7	4	6	2	1	3	0	20
销量	20	20	20	20	20	20	20	23	26	25	26	

复习思考题

1. 产销不平衡运输问题的概念是什么？
2. 对于不平衡运输问题如何运用表上作业法求解？
3. 虚拟产地或销地的作用是什么？
4. 处理扩大的运输问题应遵循哪些原则？

本　章　知　识　点

1. 运输问题模型的结构特点
2. 表上作业法的原理与求解
3. 表上作业法应用于产销不平衡运输问题的求解
4. 产销不平衡模型的应用