

## 第七章 计划评审方法和关键路线法

PERT: Program Evaluation and Review Technique

PERT方法——网络计划技术

CPM: Critical Path Method

关键路线法——网络计划优化

## 7.1 PERT网络图

### 一、基本概念：

(1) 作业：又称工序、任务，一种消耗资源的行为，用箭线（弧）表示。（ $i, j$ ）

如一个建筑工程项目，可经过



(2) 事件：又称事项，作业开始或者结束点的标志。通常事件本身不消耗资源，在网络图上常以带编号的圆圈表示。

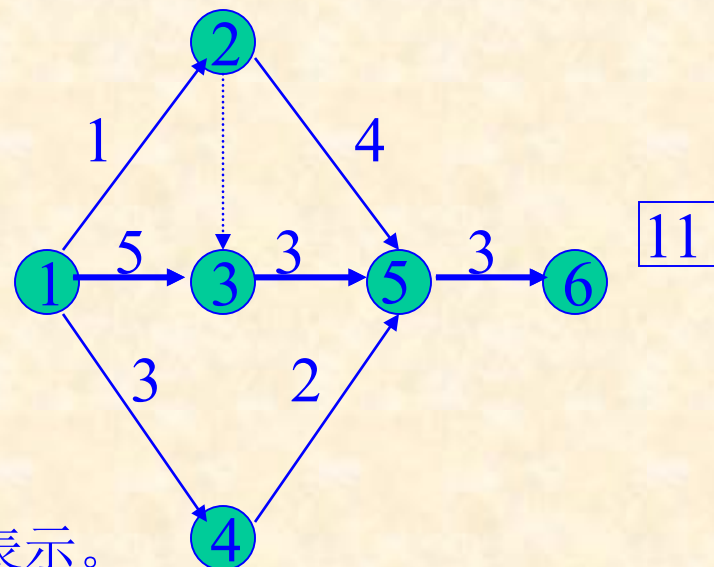
(3) 路线：网络图中把最开始的事件和最终结束的事件用各项作业连接起来的一条路。

## 二、相关概念

(1) 紧前作业：在某项作业之前完成的各项作业。

(2) 紧后作业：在某项作业之后完成的各项作业。

(3) 虚作业：用来表示相邻工序之间的衔接关系，实际上并不存在的虚设工序。以虚箭线  $i \cdots \rightarrow j$  表示。



(4) 起点事件：某项作业的开始点。

(5) 终点事件：某项作业的结束点。

(6) 路长：完成某条路线上各项作业的累计时间。

(7) 关键路线：累计时间最长的路线称为关键路线。

(8) 工期：完成整个工程所需的最少时间。即关键路线上需要的时间。

### 三、绘制PERT网络图的规则和一些注意事项

#### 1. 方向，时序，节点编号

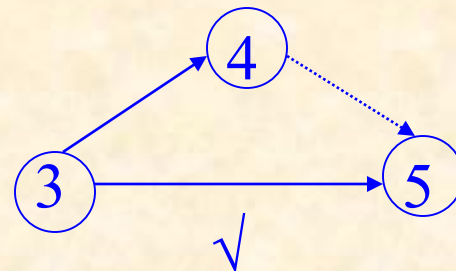
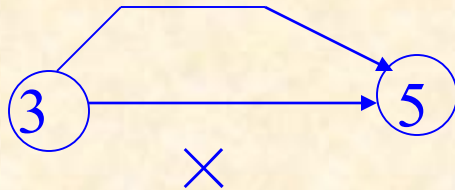
◎ PERT为有向图，采取从左到右，从上到下的规则绘制（按时间顺序号）。

◎ 事件（节点）编号：箭头大于箭尾，通常按工艺流程顺序、事件时间顺序（开始或结束）编号。还可留空号，便于修改。

一般，最初事件为1或0。

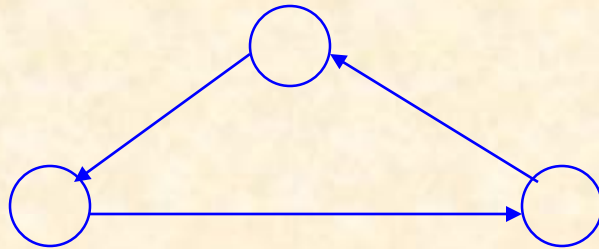
#### 2. 相邻事件间只能有一条弧

◎ 为避免多义性，两点之间只能有一条弧表示一项作业。对有相同开始和结束事件的两项以上作业，引进虚作业表示。

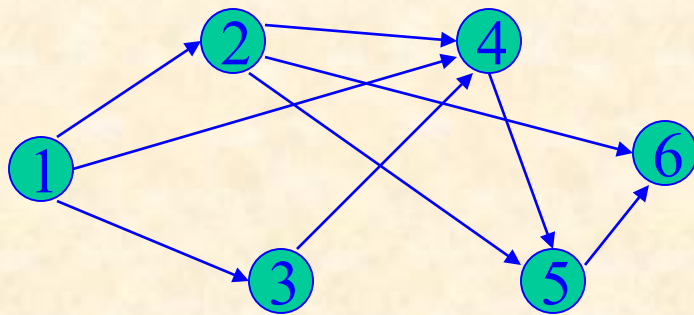


### 3. PERT中不能出现回路

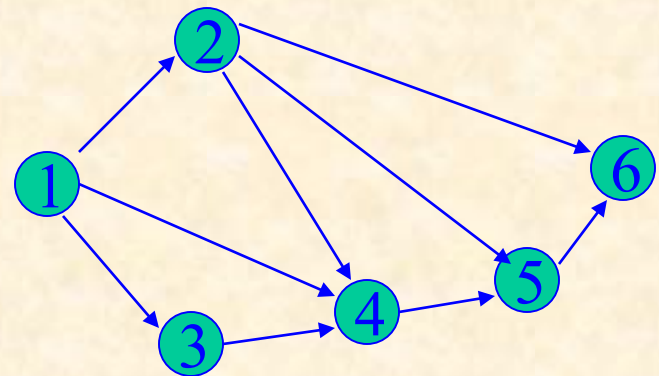
◎ 回路意味着循环，导致回路上组成的作业永不会结束。



### 4. 避免弧的交叉 为美观、易读。



(×)

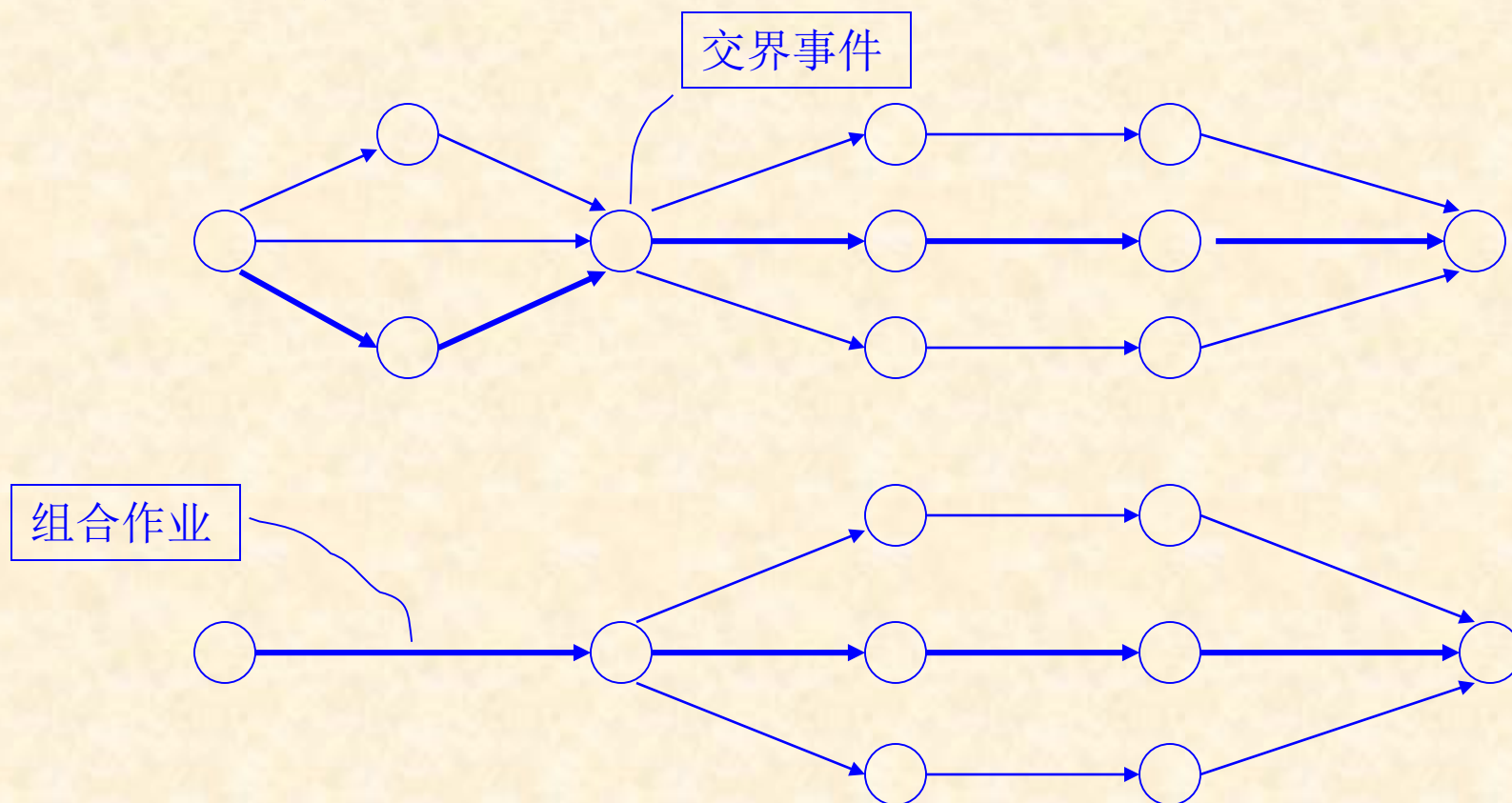


(√)

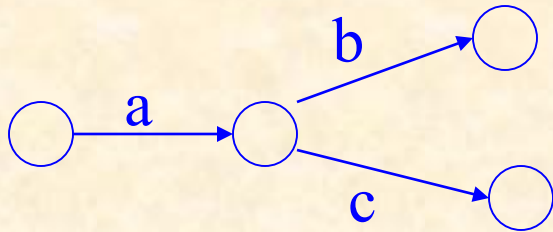
## 5. 简化与合并

◎ 简化：将网络图上一组作业简化成组合作业。

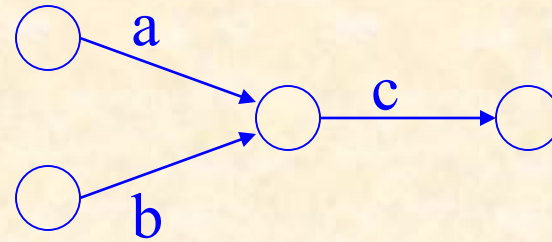
◎ 合并：把若干个局部网络图归并成一个网络图，其中的共同事件称为交界事件，它是网络图之间的连接桥梁。



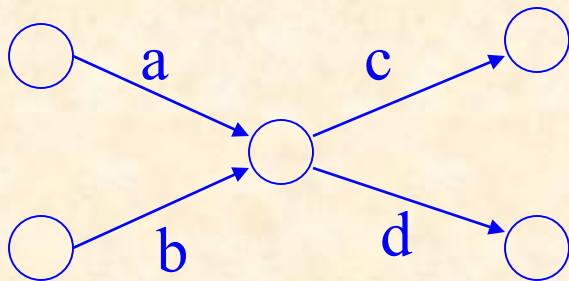
## 四、作业之间的关系在PERT图中的表示方法



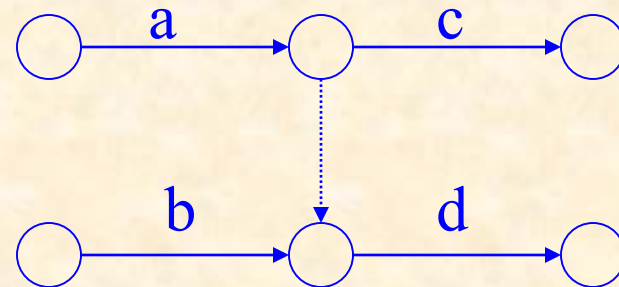
b、c 在 a 结束后开始



c 在 a、b 结束后开始



c、d 在 a、b 结束后开始



c 在 a 结束后开始，  
d 在 a、b 结束后开始



## 7.2 PERT 网络图时间的计算

### 一、有关时间的概念及表示

① 作业时间 $t_{ij}$ ：完成某项作业（i, j）所需要的时间。

▲ ② 作业最早开始时间 $t_{ES}$ ：某项作业最早可能开始的时间。它受其紧前作业（最早）结束时间的限制。

③ 作业最早结束时间 $t_{EF}$ ：某项作业最早可能结束的时间。

$$t_{EF}(i,j) = t_{ES}(i,j) + t_{ij}$$

▲ ④ 作业最迟结束时间 $t_{LF}$ ：在不延误整个工期情况下，某项作业被允许最迟结束的时间。

⑤ 作业最迟开始时间 $t_{LS}$ ：在不延误工期情况下，某项作业最迟必须开始的时间。

$$t_{LS}(i,j) = t_{LF}(i,j) - t_{ij}$$



## ⑥ 时差

**总时差 $R_{ij}$** ：网络上(i, j)作业可利用的时差总数，即作业可推迟开工的最多时间。

$$R_{ij}=t_{LF}-t_{ES}-t_{ij}=t_{LF}-t_{EF}=t_{LS}-t_{ES}$$

总时差为0的作业组成的路(始点至终点间)构成关键路线。

**自由时差 $F_{ij}$** ：(i, j) 作业在不影响紧后作业最早开始条件下，可推迟开工的最大幅度，又称单项时差。

$$F_{ij}=t_{ES}(j,k)-t_{EF}(i,j)=t_{ES}(j,k)-t_{ES}(i,j)-t_{ij}$$

注：某项作业使用了总时差，可能会减少其后续作业的总时差；自由时差不会影响其后续作业的总时差和自由时差。

## 二、PERT网络图计算的范例

例：如下为一铸件制造过程，计算各项时间和工期，找出关键路线。

序号	作业内容	计划完成时间(h)	紧前作业
1	型砂准备	2	—
2	造型	4	1
3	砂型烘干	4	2
4	芯砂准备	4.7	—
5	芯骨浇铸	7.2	—
6	芯骨装配	2	5
7	造4个1号泥芯	6.2	4, 6
8	造4个2号泥芯	4	4, 6
9	2号泥芯干燥	4.3	8

## 画PERT图时应注意以下几点：

- (1) 先绘作业及空圈，节点标号在最后进行；
- (2)  $t_{ij}$  通常标在箭线的上方；
- (3) 观察有共同节点的作业：若某项作业有共同的紧前作业，则其紧前作业可形成同一节点。
- (4) 最初事件、最终事件：无紧前作业的箭尾是最初事件；没成为紧前作业（无紧后作业）的箭头为最终事件。

## 计算时应注意：

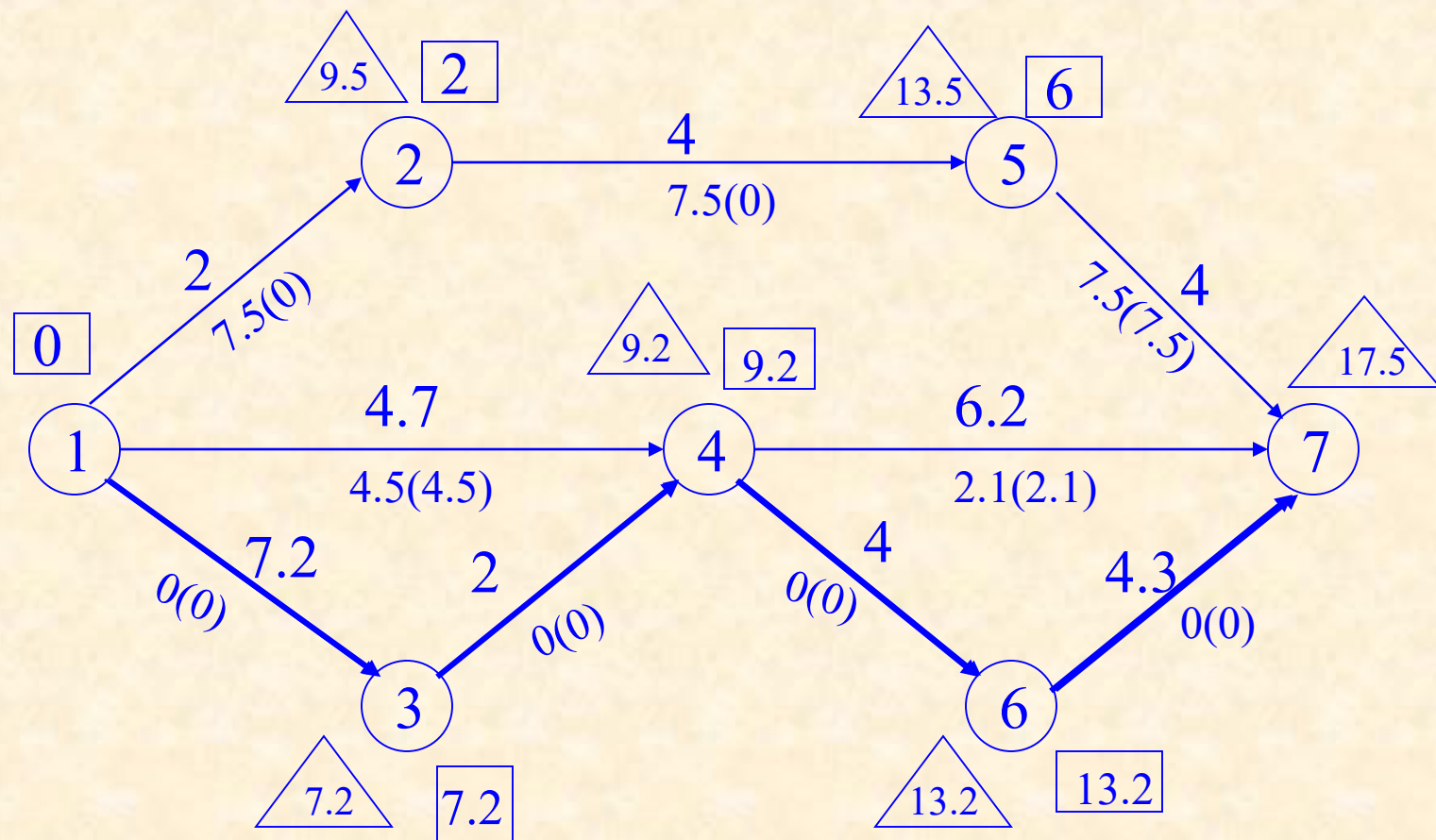
- (1) 先计算 $t_{ES}$ ，从最初事件向后推算，有共同紧前作业的 $t_{ES}$ 相同；
- (2) 再计算 $t_{LF}$ ，由最终事件向前推算，有共同紧后作业的 $t_{LF}$ 相同；
- (3)  $R_{ij}$ 、 $F_{ij}$ 在图上标注（通常在箭线的下方）：

$$R_{ij} = t_{LF} - t_{ES} - t_{ij} = t_{LF} - t_{EF} = t_{LS} - t_{ES}$$

$$F_{ij} = t_{ES}(j, k) - t_{EF}(i, j) = t_{ES}(j, k) - t_{ES}(i, j) - t_{ij}$$

- (4) 其他参数，通过列表算出。

注：在图上标注时，可视为标注节点事件的 $t_{ES}$ 、 $t_{LF}$ 。



□ —  $t_{ES}$ , △ —  $t_{LF}$  ,  $R_{ij}$  ( $F_{ij}$ )

**列表计算有关参数：**按起点事件序号由小到大顺序排列；相同起点事件按终点事件序号由小到大顺序。

时间 作业(i,j)	$t_{ES}$	$t_{ij}$	$t_{EF}$	$t_{LF}$	$t_{ij}$	$t_{LS}$	$R_{ij}$	$F_{ij}$
	①	②	③=①+②	④	⑤	⑥=④-⑤	⑦	⑧
(1,2)	0	2	2	9.5	2	7.5	7.5	0
(1,3)	0	7.2	7.2	7.2	7.2	0	0	0
(1,4)	0	4.7	4.7	9.2	4.7	4.5	4.5	4.5
(2,5)	2	4	6	13.5	4	9.5	7.5	0
(3,4)	7.2	2	9.2	9.2	2	7.2	0	0
(4,6)	9.2	4	13.2	13.2	4	9.2	0	0
(4,7)	9.2	6.2	15.4	17.5	6.2	11.3	2.1	2.1
(5,7)	6	4	10	17.5	4	13.5	7.5	7.5
(6,7)	13.2	4.3	17.5	17.5	4.3	13.2	0	0

## 7.3 关键路线法(CPM)和网络计划的优化

### 一、关键路线的意义

- ☆ 关键路线上作业时间总和即为完成整个工程所需的最少时间(工期);
- ☆ 关键路线上各项作业对整个工程起关键作用;
- ☆ 一个PERT网络图上的关键路线可能多于一条。

### 二、网络计划的优化

- ☆ 指通过某些措施缩短整个工期;
- ☆ 优化的目标是使费用增加最少。通常缩短工期是要增加费用的。

例：上例中，若使工期在15小时内结束，且已知为完成各项工作的最短工作时间和比原计划缩短1小时所需增加的费用，如表示。问：计划应如何调整，可使全部作业能在15小时内完成，而增加的费用最少？

作业内容	计划时间(h)	可缩短时间(h)	增加费用(元/小时)
芯骨浇铸 (1, 3)	7.2	3.0	5
芯骨装配 (3, 4)	2	1	4
造2号芯 (4, 6)	4	3	3
2号芯烘干 (6, 7)	4.3	1.5	6
芯砂准备 (1, 4)	4.7	1.2	2
造1号芯 (4, 7)	6.2	2.2	2.5



解： 思路：要缩短工期，必先找出关键路线，再找关键路线上最小边际费用处，缩短作业时间，逐渐调整至满足工期需要。

步骤：

- (1) 找关键路线上边际最少费用的作业
- (2) 计算该作业上要缩短的时间 $\Delta t$

$$\Delta t = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{工期需要} \\ \text{缩短} \\ \text{该作业最} \\ \text{多可缩短} \\ \text{出现新关} \\ \text{键路线} \end{array} \right\}$$

- (3) 改进网络图，寻找新的关键路线。
- (4) 重复上述过程，至满足工期要求。计算累计增加费用。

本例中，关键路线上有(1,3)，(3,4)，(4,6)，(6,7)四项作业，边际费用最小的作业为(4,6)[3元]，需缩短的时间为：

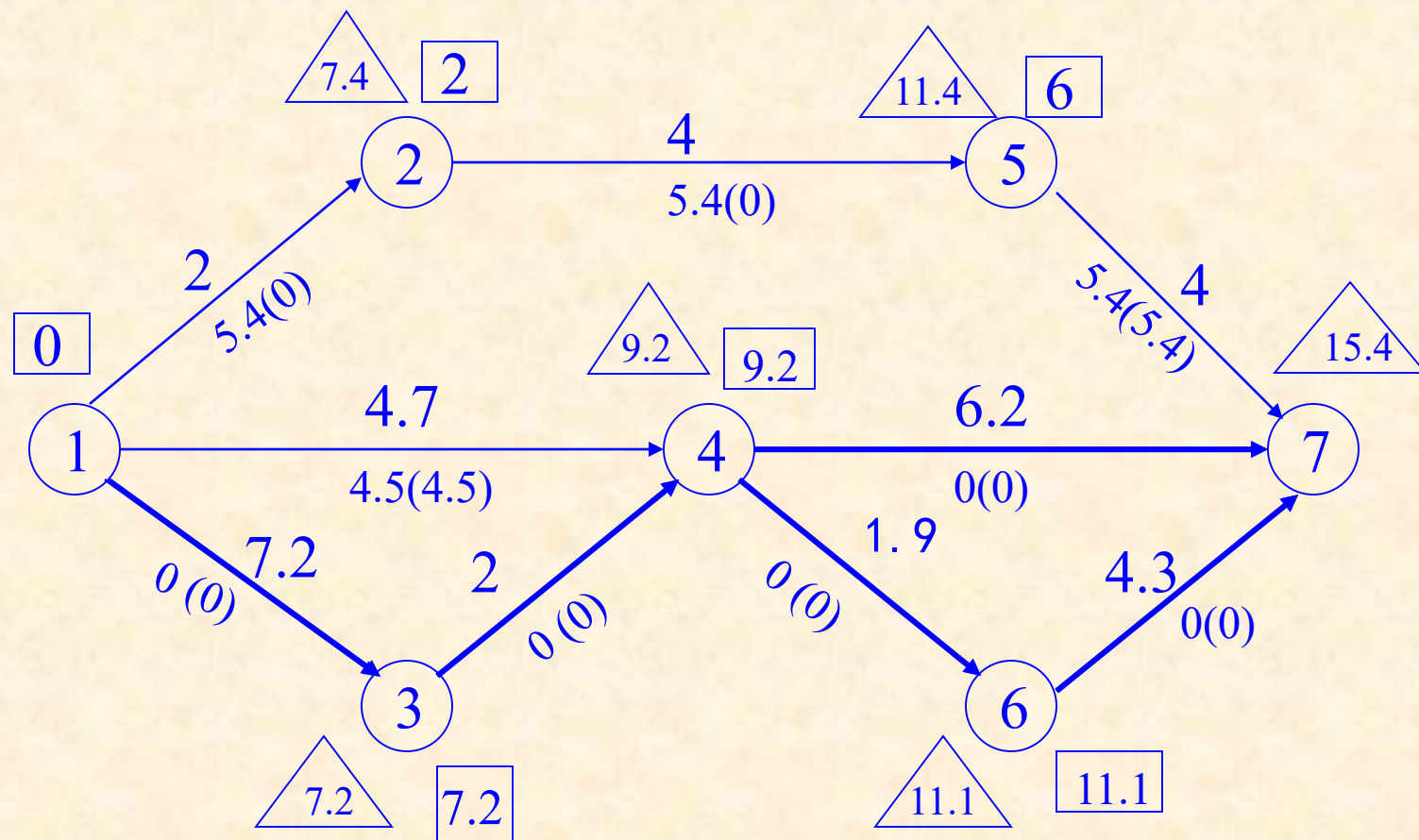
$$\Delta t = \min \left\{ \begin{array}{l} \text{工期需要缩短} \\ \text{该作业最多可缩短} \\ \text{出现新关键路线} \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{l} 2.5 \\ 3 \\ 2.1 \end{array} \right\} = 2.1$$

未满足工期要求，继续调整。

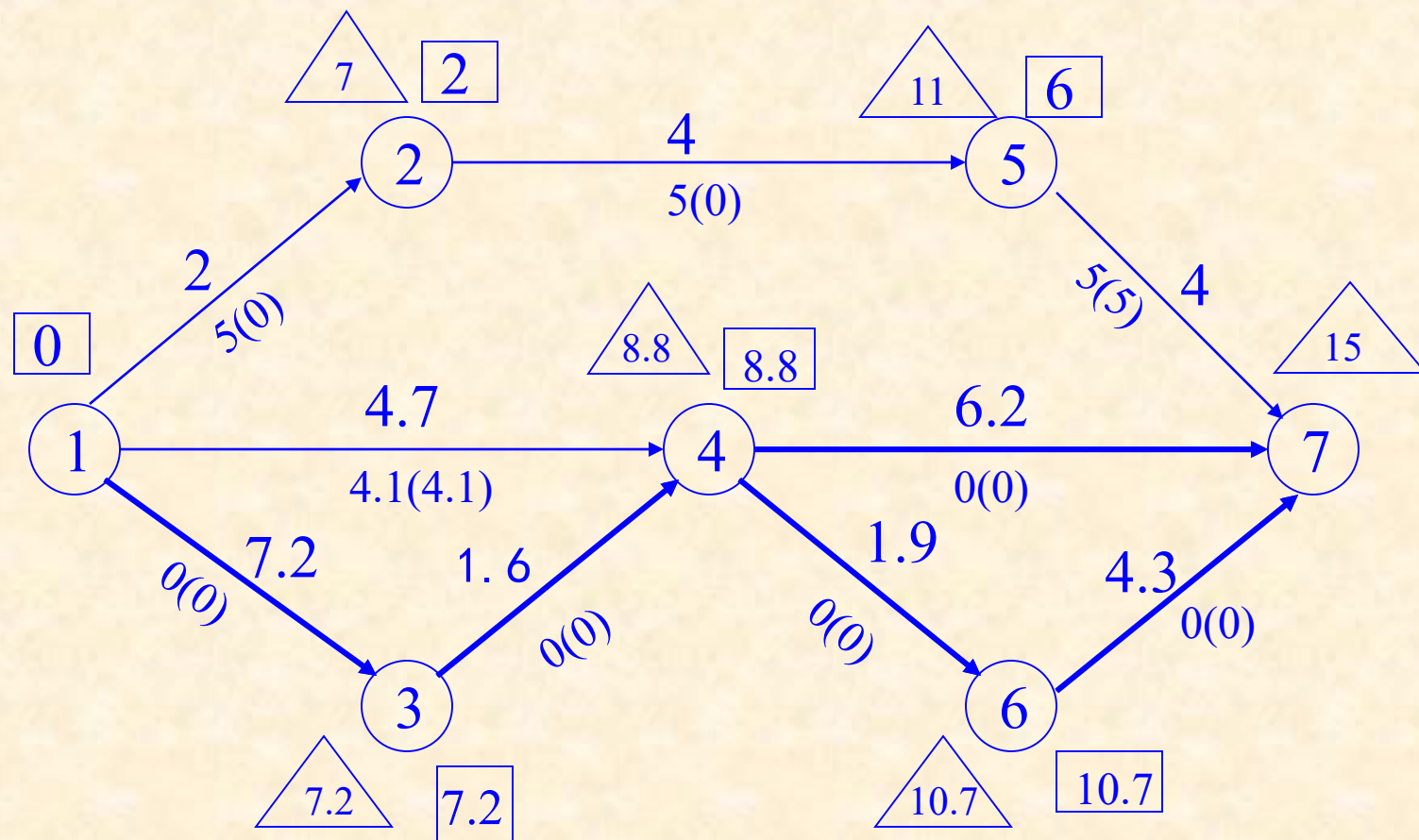
改进网络图后，(4,7)为新增网络图上的关键作业，边际费用最小的作业为(3,4)[4元]，需要缩短时间为：

$$\Delta t = \min \left\{ \begin{array}{l} 0.4 \\ 1 \\ 4.5 \end{array} \right\} = 0.4$$

累计费用： =3×2.1+4×0.4=7.9(元)
------------------------------



(改进之一)



(改进之二)

### 三、缩短PERT网络图上作业时间的途径

1. 检查各项作业计划时间是否合理，如果长，则缩短；
2. 将关键路线上的作业进一步细分，采取多工位或者平行作业的方式；
3. 抽调非关键路线上资源支援关键路线上作业；
4. 重新制定工艺流程方式，用改变网络图结构来实现。

## 复习思考题：

1. PERT网络图是用来分析解决什么问题的？
2. 如何理解作业、事件、路线的含义？如何理解关键路线？
3. 一般PERT网络图分哪两种类型？
4. 画网络图时，为什么两个节点间只能画一条弧？
5. 虚作业有什么作用？
6. 在PERT的时间计算中，最重要的时间参数有哪些？
7. 在缩短工期的优化中，对某项作业缩短的时间是由哪些因素决定的？

## 本章知识点

1. PERT网络计划方法解决的问题对象
2. PERT网络图的绘制原则和方法
3. 网络计划中时间参数的概念及计算
4. 关键路线的定义
5. 网络计划优化解决的问题对象及计算方法