

第六章 图与网络分析

- 图是一种模型，如公路、铁路交通图，通讯网络图等。
- 图是对现实的抽象，以点和线段的连接组合表示。

§ 6.1 图的基本概念和模型

一、概念

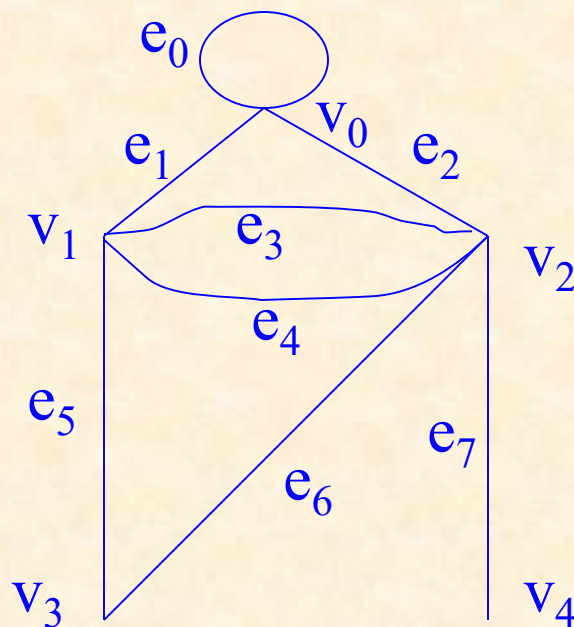
- (1) 图：点 V 和边 E 的集合，用以表示对某种现实事物的抽象。记作 $G = \{V, E\}$, $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$,
 $E = \{e_1, e_2, \dots, e_m\}$

点：表示所研究的事物对象；

边：表示事物之间的联系。

- (2) 若边 e 的两个端点重合，则称 e 为环。

- (3) 多重边：若某两端点之间多于一条边，则称为多重边。



- (4) 简单图：无环、无多重边的图称为简单图。
- (5) 链：点和边的交替序列，其中点可重复，但边不能重复。
- (6) 路：点和边的交替序列，但点和边均不能重复。
- (7) 圈：始点和终点重合的链。
- (8) 回路：始点和终点重合的路。
- (9) 连通图：若一个图中，任意两点之间至少存在一条链，称这样的图为连通图。
- (10) 子图，部分图：设图 $G_1 = \{V_1, E_1\}$ ， $G_2 = \{V_2, E_2\}$ ，如果有 $V_1 \subseteq V_2$ ， $E_1 \subseteq E_2$ ，则称 G_1 是 G_2 的一个子图；若 $V_1 = V_2$ ， $E_1 \subseteq E_2$ ，则称 G_1 是 G_2 的一个部分图。
- (11) 次：某点的关联边的个数称为该点的次，以 $d(v_i)$ 表示。

二、图的模型

例：有甲、乙、丙、丁、戊、己六名运动员报名参加A、B、C、D、E、F六个项目的比赛。如表中所示，打“√”的项目是各运动员报名参加比赛的项目。问：六个项目的比赛顺序应如何安排，才能做到使每名运动员不连续地参加两项比赛？

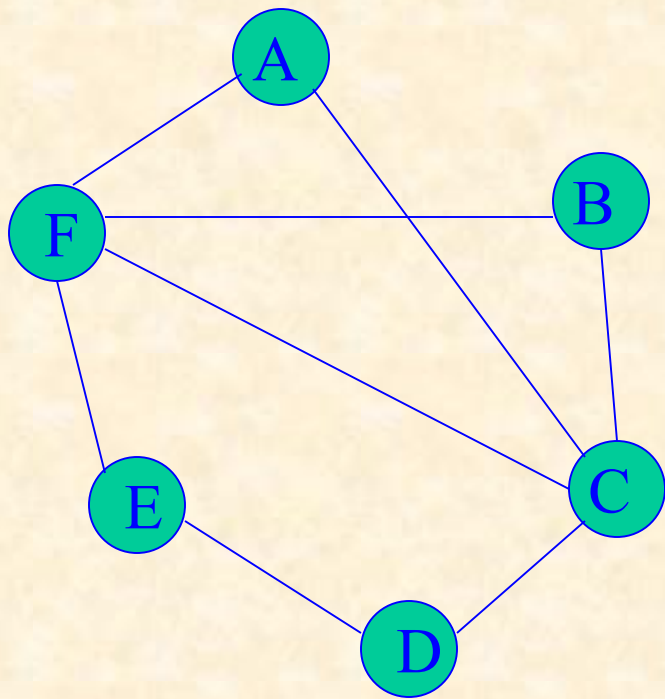
项目 人	A	B	C	D	E	F
甲				√		√
乙	√	√		√		
丙			√		√	
丁	√				√	
戊		√			√	
己		√		√		

建立模型：

解：项目作为研究对象，排序。

设 点：表示运动项目。

边：若两个项目之间无同一运动员参加。



顺序：

A—C—D—E—F—B

A—F—E—D—C—B

A—C—B—F—E—D

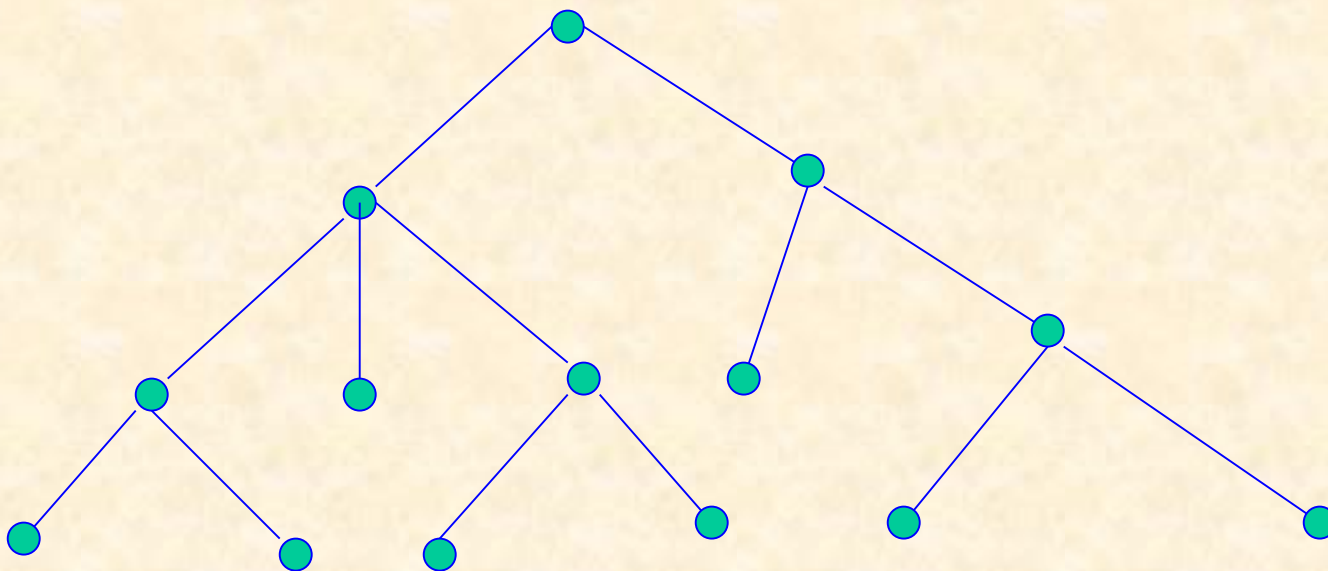
A—F—B—C—D—E

§ 6.2 树图和图的最小部分树

一、树图的概念

(1) 树图:

无圈的连通图称为树图，简称为树。记为 $T(V, E)$



(2) 树图的性质

性质1: 任何树中必存在次为1的点。

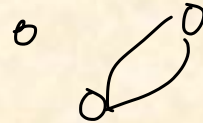
反证法: 若各点次均不为1, 因树中不存在孤立点, 则必对所有节点的次, 均有 $d(v_i) \geq 2$,

即 $d(v_1) \geq 2 \rightarrow d(v_2) \geq 2 \rightarrow d(v_3) \geq 2 \rightarrow \cdots$

而点数有限, 故必推至前述某一点 v_i , 从而形成圈结构, 与树图定义矛盾。

(2) 树图的性质

性质2: 具有 n 个顶点的树的边数恰好为 $n-1$ 条。



归纳法: $n=2$ 时, 1条边; $n=3$ 时, 2条边, 性质成立。

设 $n=k$ 时, 有 $k-1$ 条边成立,

则可新增1个点、一条边后仍可为树图, 故性质成立。

(3) 树图的性质

性质3: 任何具有 n 个点、 $n-1$ 条边的连通图必为树图。

反证法: 若有 n 个点、 $n-1$ 条边的连通图不为树图, 则必形成圈。

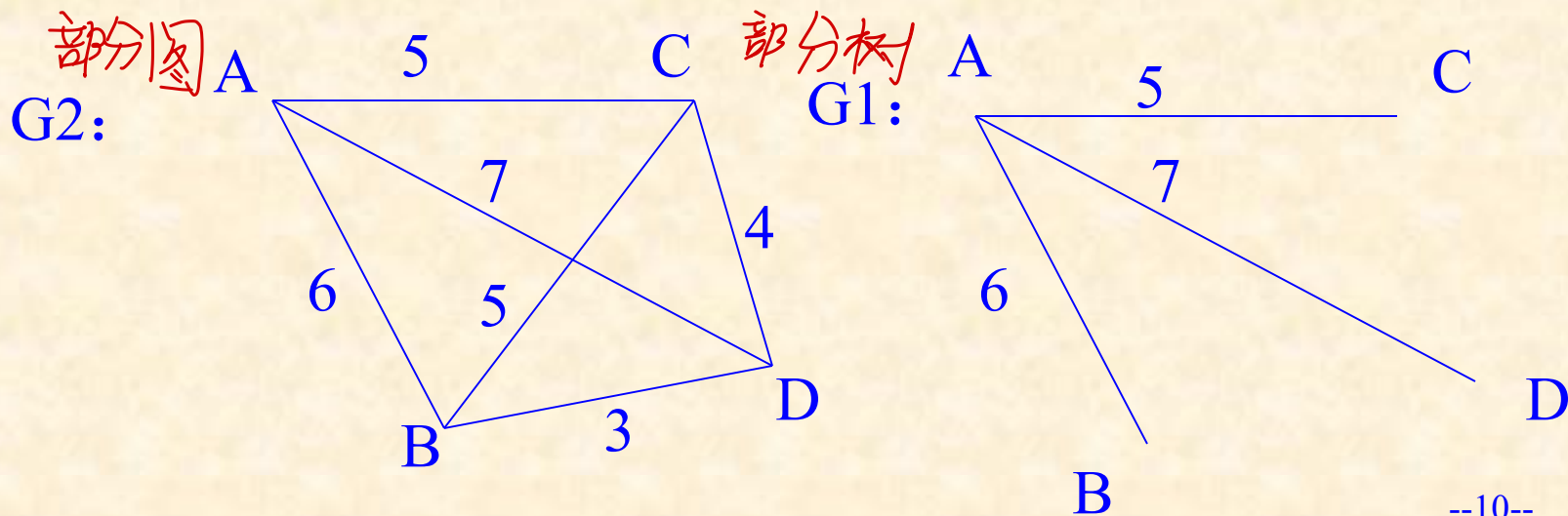
不妨从图中减掉多余的边 (不减点) 而使之形成树图, 则所形成的树图有少于 $n-1$ 条边, 与性质2矛盾。

(3) 树的特性:

- ① 树是边数最多的无圈连通图。在树中任加一条边，就会形成圈。
- ② 树是边数最少的连通图。在树中任减一条边，则不连通。

二、图的最小部分树:

1. 图的部分树: 若 G_1 是 G_2 的一个部分图, 且为树图, 则称 G_1 是 G_2 的一个部分树。



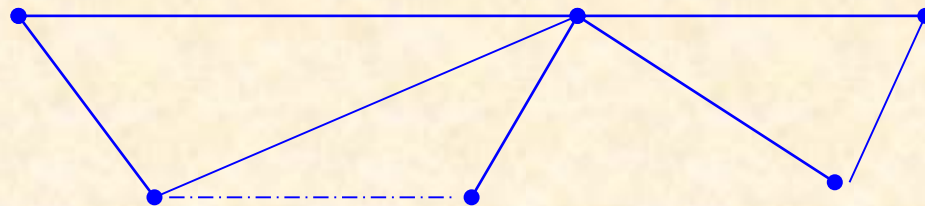
2. 图的最小部分树：树枝总长为最短的部分树称为图的最小部分树。

树枝：树图中的边称为树枝。

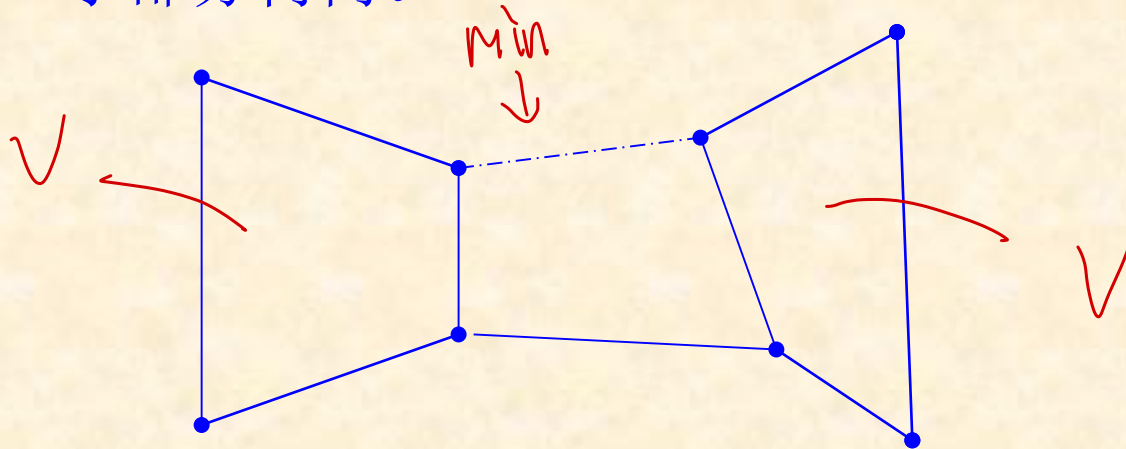
三、最小部分树的求法

定理1：图中任一个点 i ，若 j 是与 i 相邻点中距离最近的点，则边 $[i, j]$ 一定在其最小部分树内。

反证法：

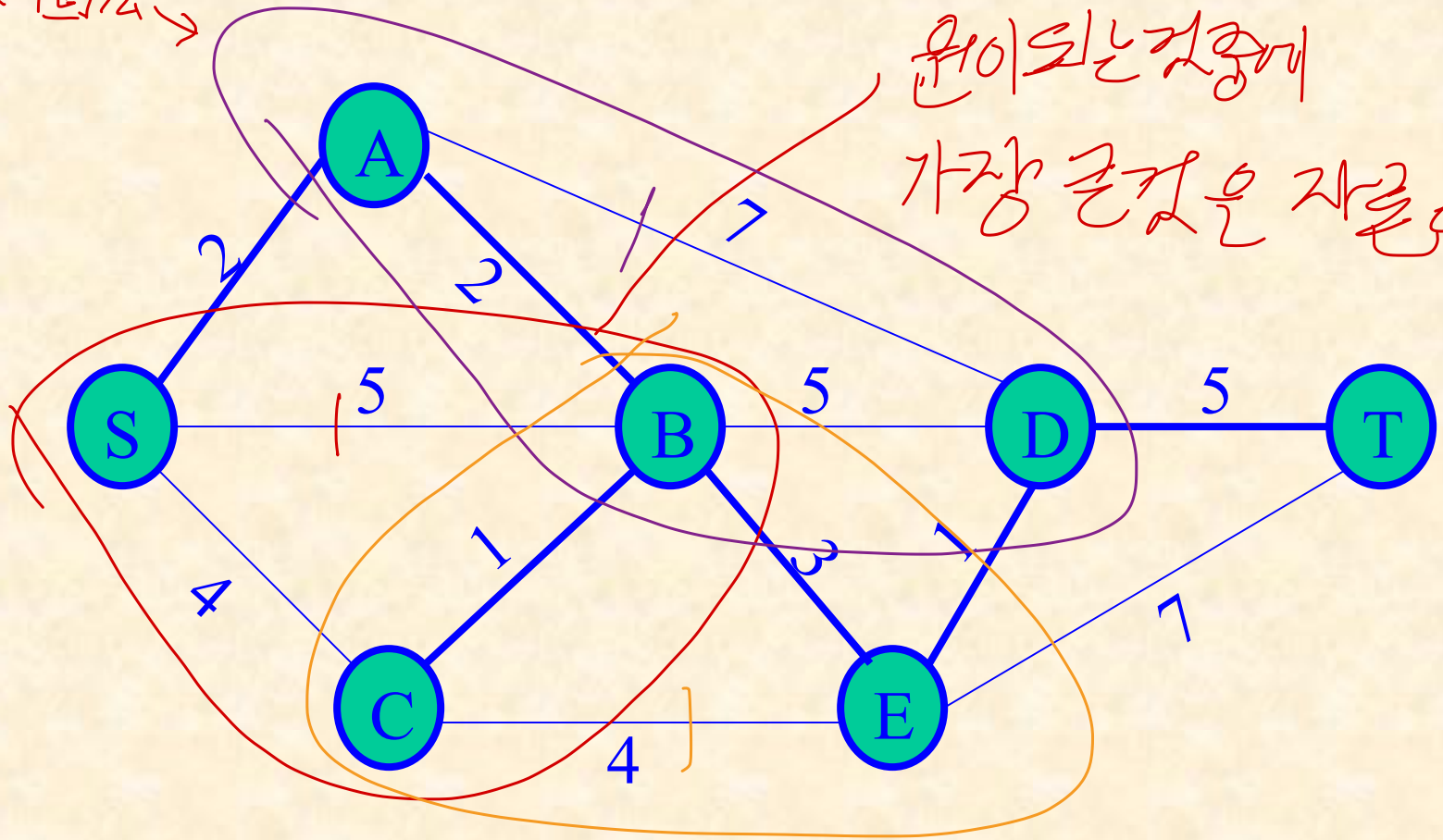


推论：将图中所有的点分成 V 和 \bar{V} 两个集合，则两个集合之间连线最短的一个边一定包含在最小部分树内。



例：要在下图所示的各个位置之间建立起通信网络，试确定使总距离最佳的方案。

破圈法 →

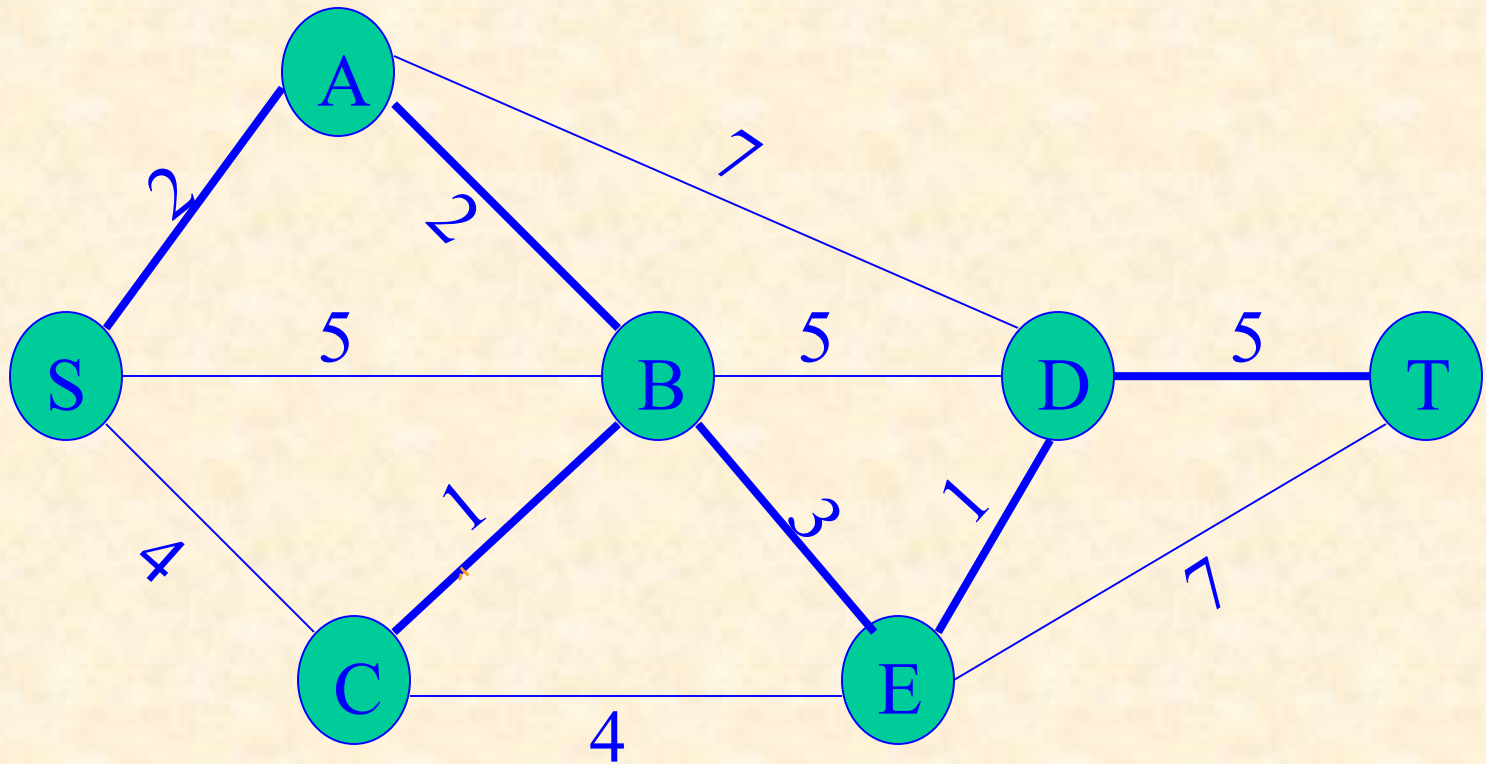


最小部分树长 $L_{\min}=14$

1. 避圈法: 将图中所有的点分 V 为 \bar{V} 两部分, 성분이 가장 작은 것 분리
- V ——最小部分树内点的集合
- \bar{V} ——非最小部分树内点的集合 * V 와 \bar{V} 를 구별.
- (1) 任取一点 v_i 加粗, 令 $v_i \in V$,
 - (2) 取 \bar{V} 中与 V 相连的边中一条最短的边 (v_i, v_j) ,
加粗 (v_i, v_j) , 令 $v_j \in V$
 - (3) 重复(2), 至所有的点均在 V 之内。

2. 破圈法:

- (1) 任取一圈, 去掉其中一条最长的边,
- (2) 重复, 至图中不存在任何的圈为止。



最小部分树长 $L_{\min}=14$

复习思考题

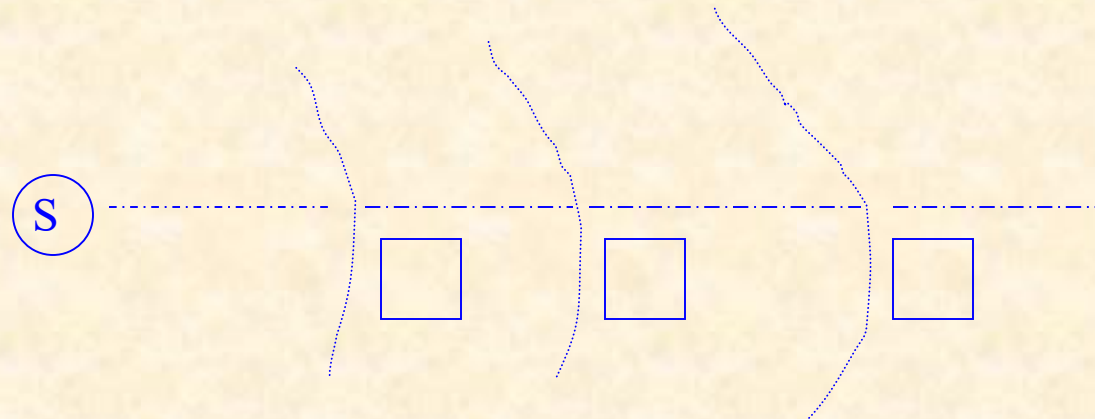
1. 什么是图的模型？其构成要素有哪些？
2. 树图的定义及其性质？
图 X
3. 最小部分树的概念和求法？
避，破
4. 哪些背景下的问题可以归结为树图模型求解？
不同项目的比赛 等等

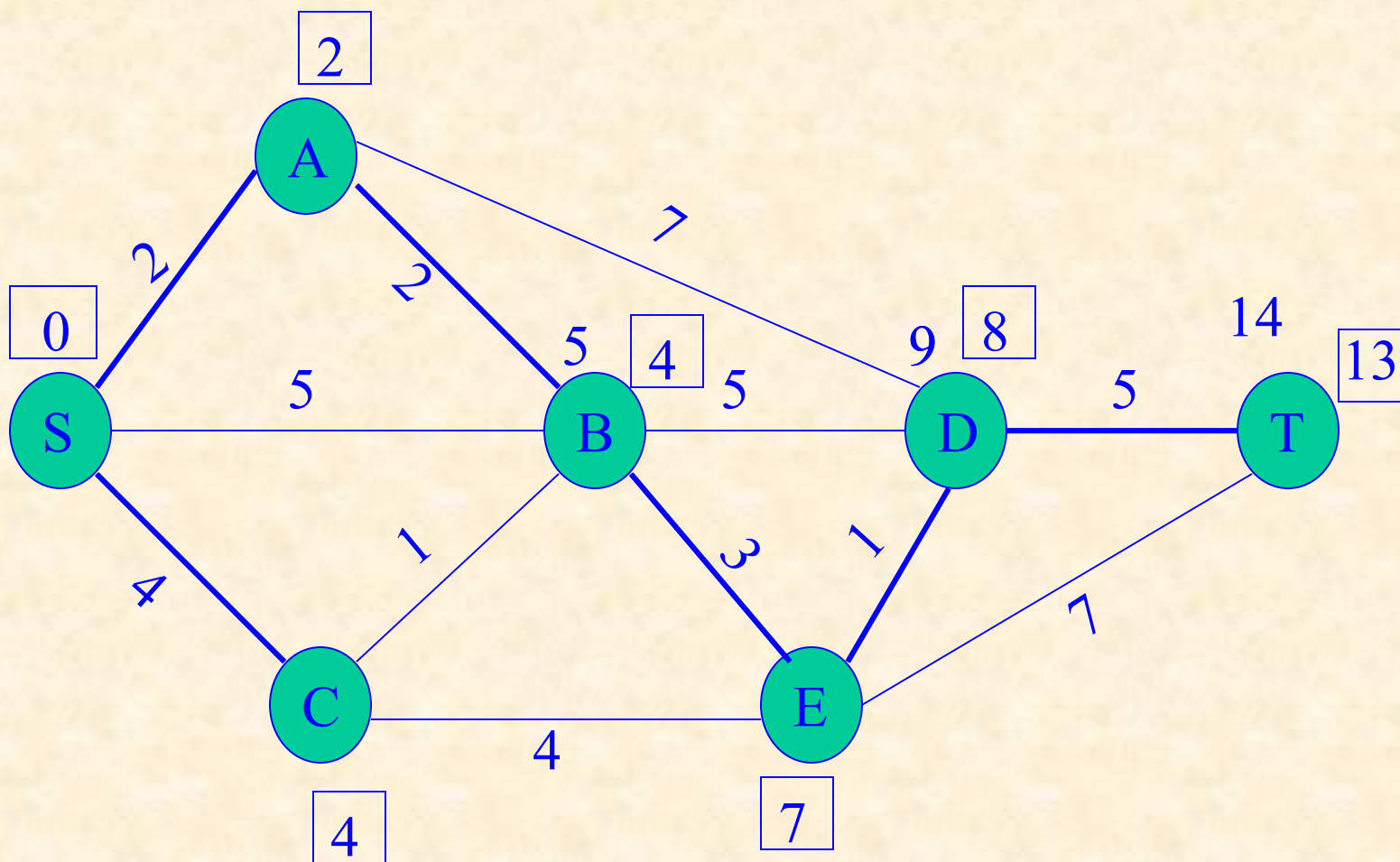
§ 6.3 最短路问题

1. 求某两点间最短距离的D（Dijkstra）氏标号法

在图示的网络图中，从给定的点S出发，要到达目的地T。问：选择怎样的行走路线，可使总行程最短？

方法：Dijkstra（D氏）标号法——按离出发点的距离由近至远逐渐标出最短距离和最佳行进路线。



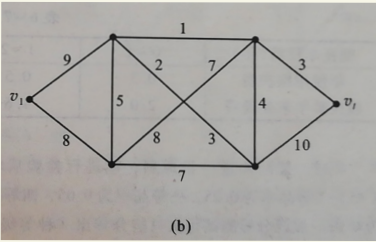


最短路线: $S \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow T$

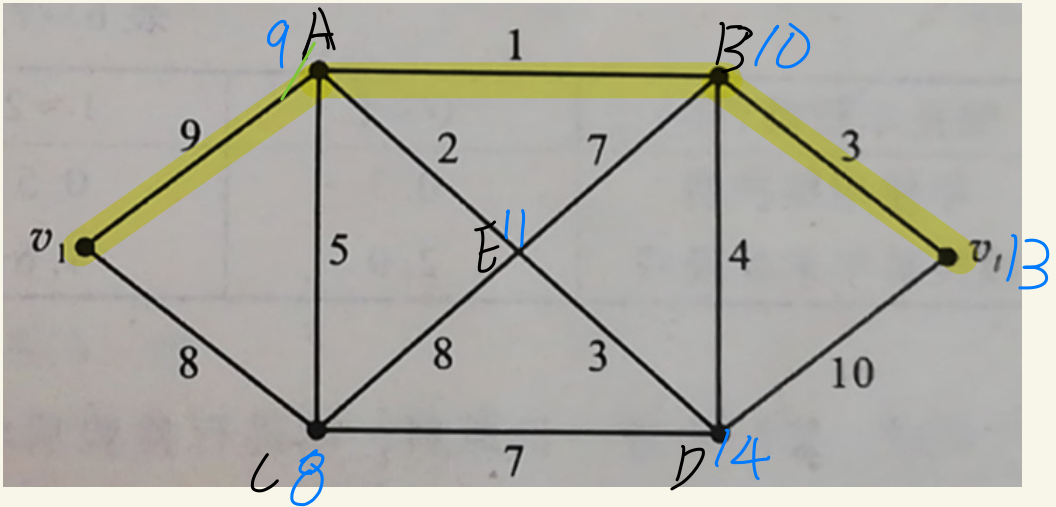
最短距离: $L_{\min}=13$

作业

L181000503 尹俊英



解)



最短路线: $v_1 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow v_2$

最短距离: 13

2. 求任意两点间最短距离的矩阵算法

(1) 构造任意两点间直接到达的最短距离矩阵 $D^{(0)} = [d_{ij}^{(0)}]$

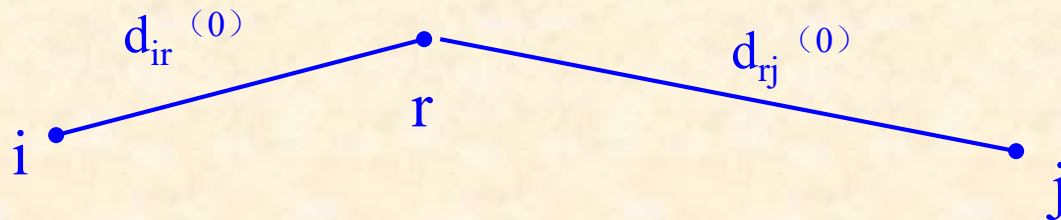
$$D^{(0)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & A & B & C & D & E & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 & 4 & \infty & \infty & \infty \\ 2 & 0 & 2 & \infty & 7 & \infty & \infty \\ 5 & 2 & 0 & 1 & 5 & 3 & \infty \\ 4 & \infty & 1 & 0 & \infty & 4 & \infty \\ \infty & 7 & 5 & \infty & 0 & 1 & 5 \\ \infty & \infty & 3 & 4 & 1 & 0 & 7 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 5 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

(2) 构造任意两点间直接到达、或者最多经过1个中间点到达的最短距离矩阵 $D^{(1)} = [d_{ij}^{(1)}]$

其中 $d_{ij}^{(1)} = \min_r \{ d_{ir}^{(0)} + d_{rj}^{(0)} \}$, 例如

$$d_{SE}^{(1)} = \min \{ d_{SS}^{(0)} + d_{SE}^{(0)}, d_{SA}^{(0)} + d_{AE}^{(0)}, d_{SB}^{(0)} + d_{BE}^{(0)}, d_{SC}^{(0)} + d_{CE}^{(0)}, \\ d_{SD}^{(0)} + d_{DE}^{(0)}, d_{SE}^{(0)} + d_{EE}^{(0)}, d_{ST}^{(0)} + d_{TE}^{(0)} \} = 8$$

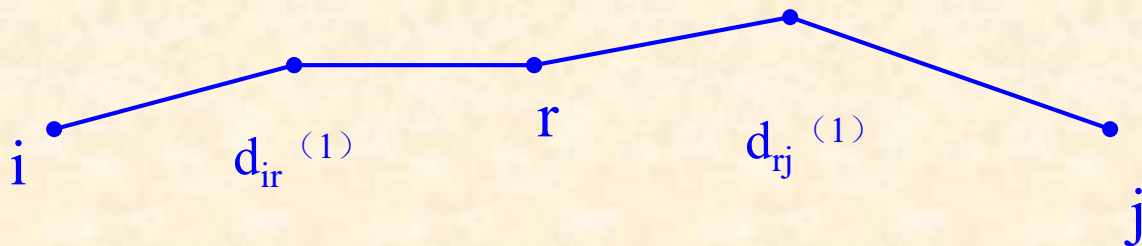
$$D^{(1)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & A & B & C & D & E & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{matrix} & \left(\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 4 & 4 & 9 & 8 & \infty \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 7 & 5 & 12 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 10 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 5 & 4 & 11 \\ 9 & 7 & 4 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 8 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ \infty & 12 & 10 & 11 & 5 & 7 & 0 \end{array} \right) \end{matrix}$$



(3) 构造任意两点间最多可经过3个中间点到达的最短距离矩阵 $D^{(2)} = [d_{ij}^{(2)}]$

其中 $d_{ij}^{(2)} = \min_r \{ d_{ir}^{(1)} + d_{rj}^{(1)} \}$

$$D^{(2)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & A & B & C & D & E & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 8 & 7 & 14 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 & 11 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 5 & 4 & 10 \\ 8 & 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ 14 & 11 & 9 & 10 & 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$



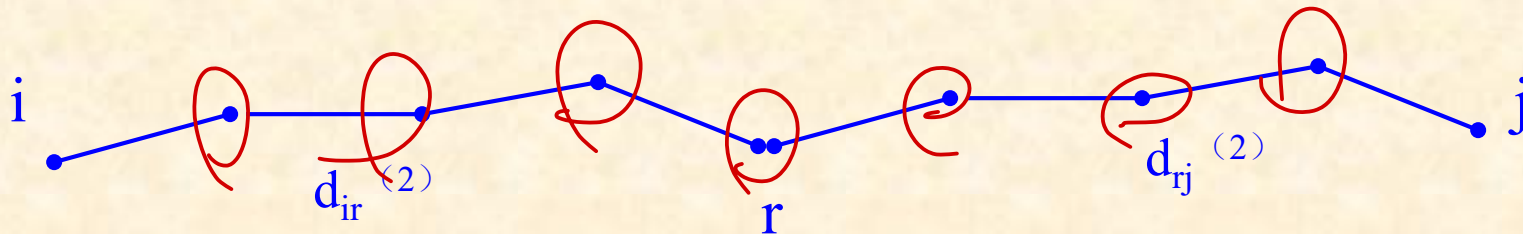
(4) 构造任意两点间最多可经过7个中间点到达的最短距离矩阵 $D^{(3)} = [d_{ij}^{(3)}]$

其中 $d_{ij}^{(3)} = \min_r \{ d_{ir}^{(2)} + d_{rj}^{(2)} \}$

$$D^{(3)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} S & A & B & C & D & E & T \end{matrix} \\ \begin{matrix} S \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ T \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & 4 & 8 & 7 & 13 \\ 2 & 0 & 2 & 3 & 6 & 5 & 11 \\ 4 & 2 & 0 & 1 & 4 & 3 & 9 \\ 4 & 3 & 1 & 0 & 5 & 4 & 10 \\ 8 & 6 & 4 & 5 & 0 & 1 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 4 & 1 & 0 & 6 \\ 13 & 11 & 9 & 10 & 5 & 6 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Handwritten notes in red:

$$2^{k-1} =$$

$$2^{k-1} =$$


说明:

1) $D^{(k)}$ 经过的中间点数量

设 $D^{(0)} = [d_{ij}^{(0)}]$ 为网络中两点间直接距离, 则对于

$$D^{(k)} = [d_{ij}^{(k)}], \text{ 其中 } d_{ij}^{(k)} = \min \{d_{ir}^{(k-1)} + d_{rj}^{(k-1)}\},$$

$k=1, 2, 3, \dots$, 最多可经过 2^k-1 个中间点: 其数列为

$$\{1, 3, 7, 15, 31, \dots, 2^k-1, \dots\}$$

2) 收敛条件:

① 当 $D^{(k+1)} = D^{(k)}$ 时, 计算结束;

② 设网络中有 p 个点, 即有 $p-2$ 个中间点,

则 $2^{k-1}-1 < p-2 \leq 2^k-1 \Rightarrow k-1 < \log_2(p-1) \leq k$

ex) $15 \leq p-2 \leq 31$
 $17 \leq p \leq 33$

$$\therefore K < \log_2(p-1) + 1,$$

\therefore 计算到 $k = \lg(p-1)/\lg 2 + 1$ 时, 收敛, 计算结束。

例：有7个村镇要联合建立一所小学，已知各村镇小学生的人数大致为S—30人，A—40人，B—20人，C—15人，D—35人，E—25人，T—50人。问：学校应建在那一个地点，可使学生总行程最少？

解：

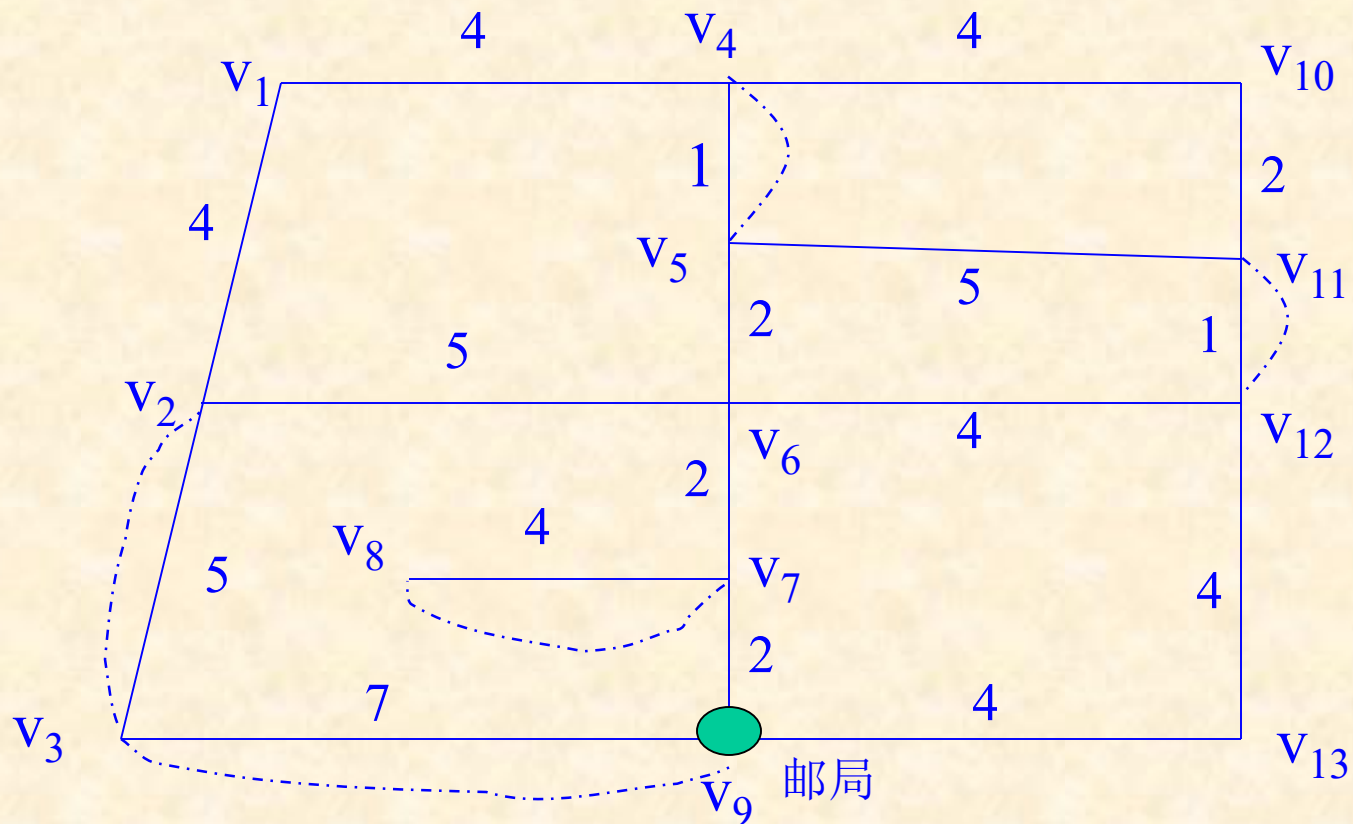
	S	A	B	C	D	E	T	人数
S	0	2	4	4	8	7	13	30
A	2	0	2	3	6	5	11	40
B	4	2	0	1	4	3	9	20
C	4	3	1	0	5	4	10	15
D	8	6	4	5	0	1	5	35
E	7	5	3	4	1	0	6	25
T	13	11	9	10	5	6	0	50

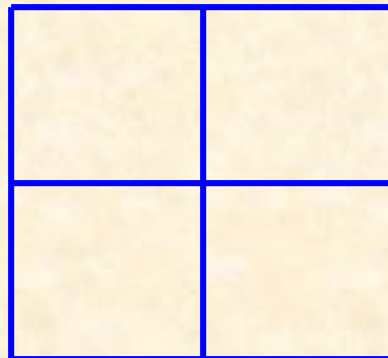
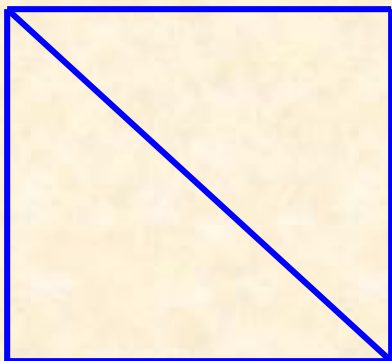
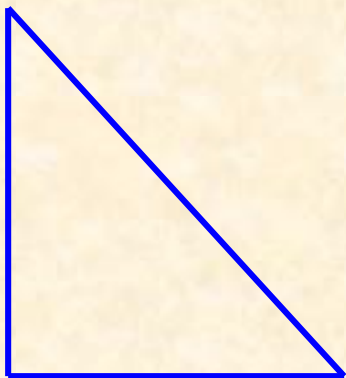
$$= [1325 \quad 1030 \quad 880 \quad 1035 \quad 910 \quad 865 \quad 1485]^T$$

最少

§ 6.4 中国邮路问题

问题：一名邮递员从邮局出发，试选择一条最短的投递路线？



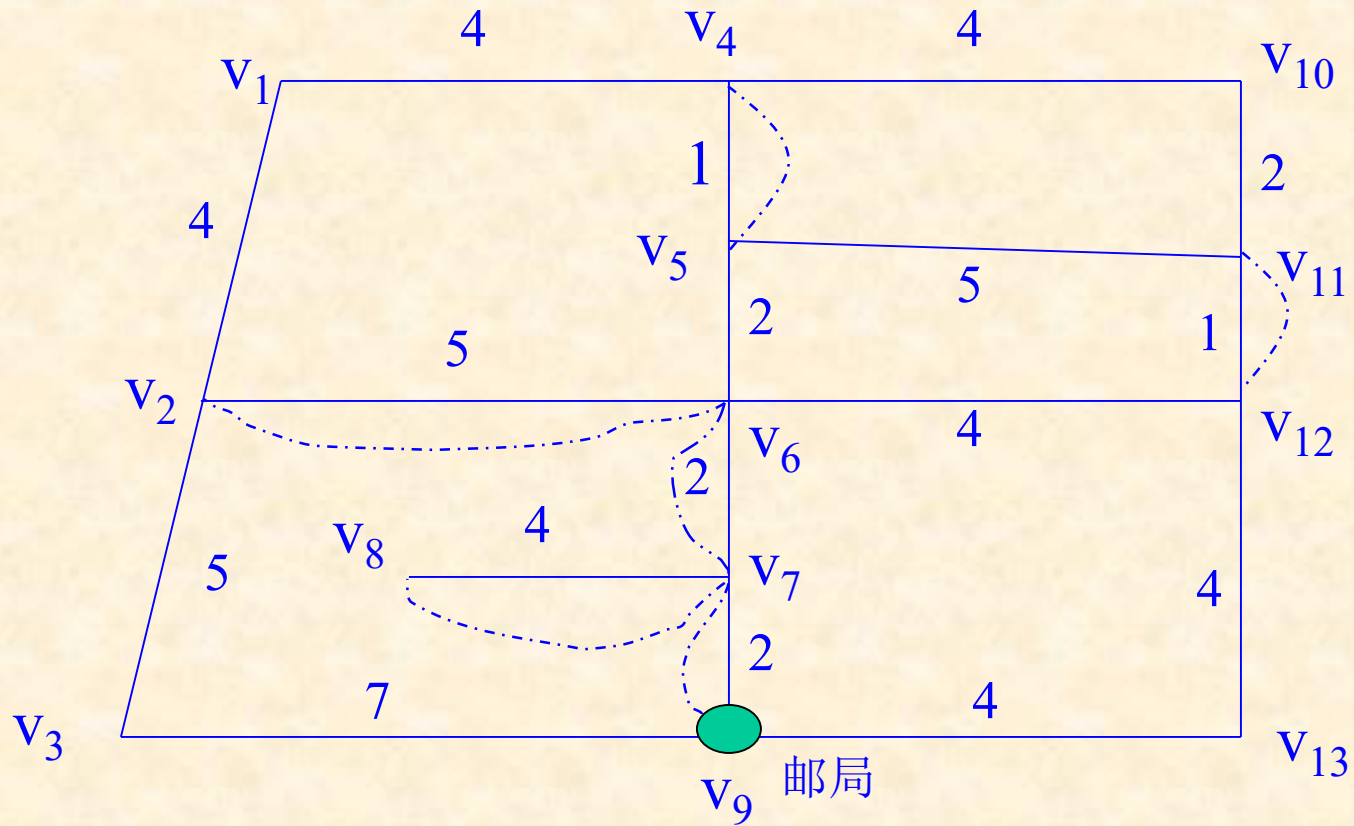


奇点：图中次为奇数的点称为奇点。

偶点：图中次为偶数的点称为偶点。

结论：最短投递路线应具有下述特征：

- (1) 若图中所有的点均为偶点，则可不重复走遍所有街道；
- (2) 重复走的路线长度应不超过所在回路总长度的一半。



投递距离: $L=60+15=78$

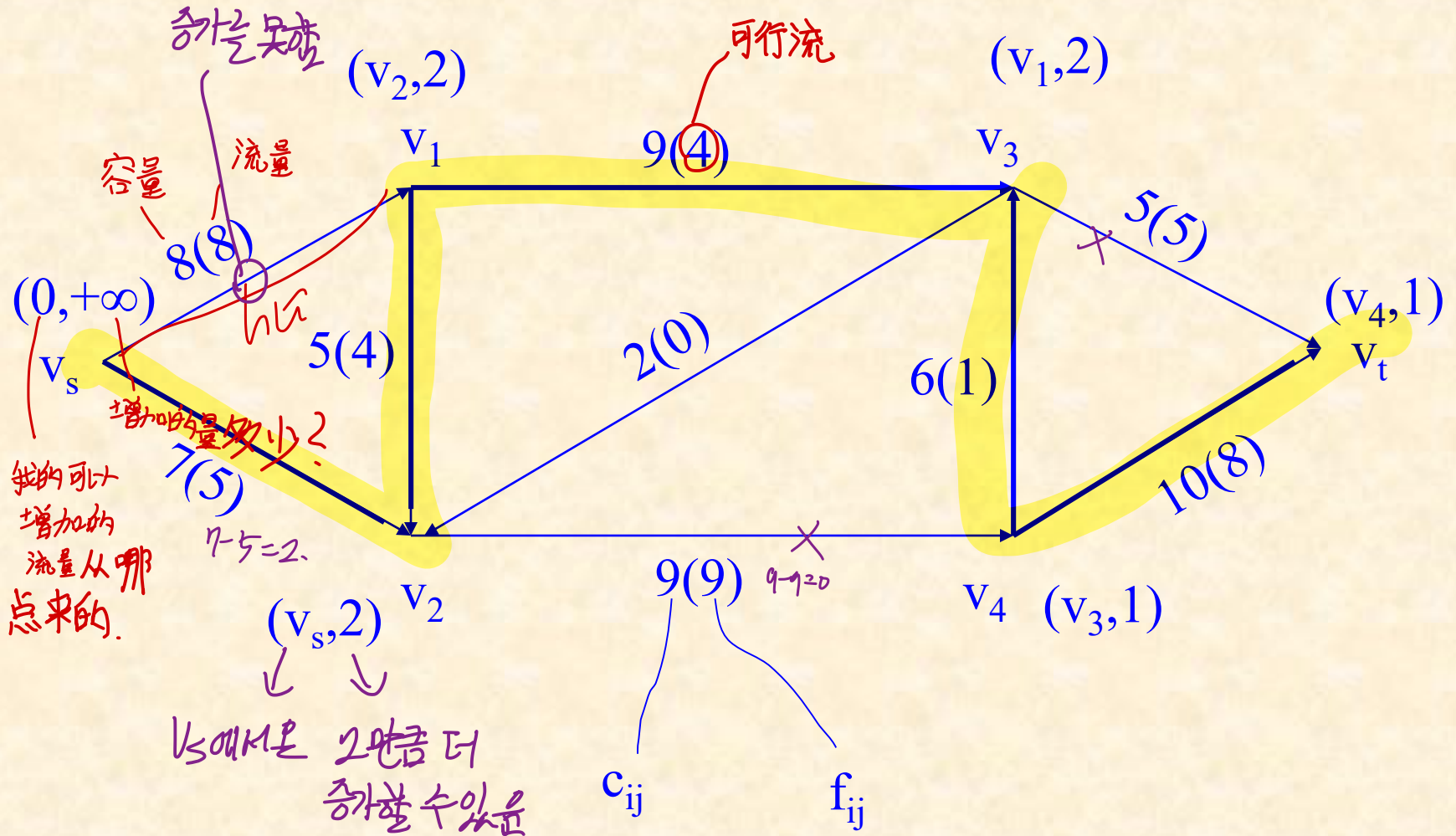
复习思考题

1. 最短路的概念？
2. Dijkstra标号法与矩阵算法各自用来处理什么问题？
3. 求最小部分树的闭圈法或者破圈法是否可以用来求解最短路问题？
4. 哪些问题会用到最短路模型？
5. 中国邮路问题的描述
6. 中国邮路模型与最短路模型描述的问题有何区别？

§ 6.5 网络最大流问题

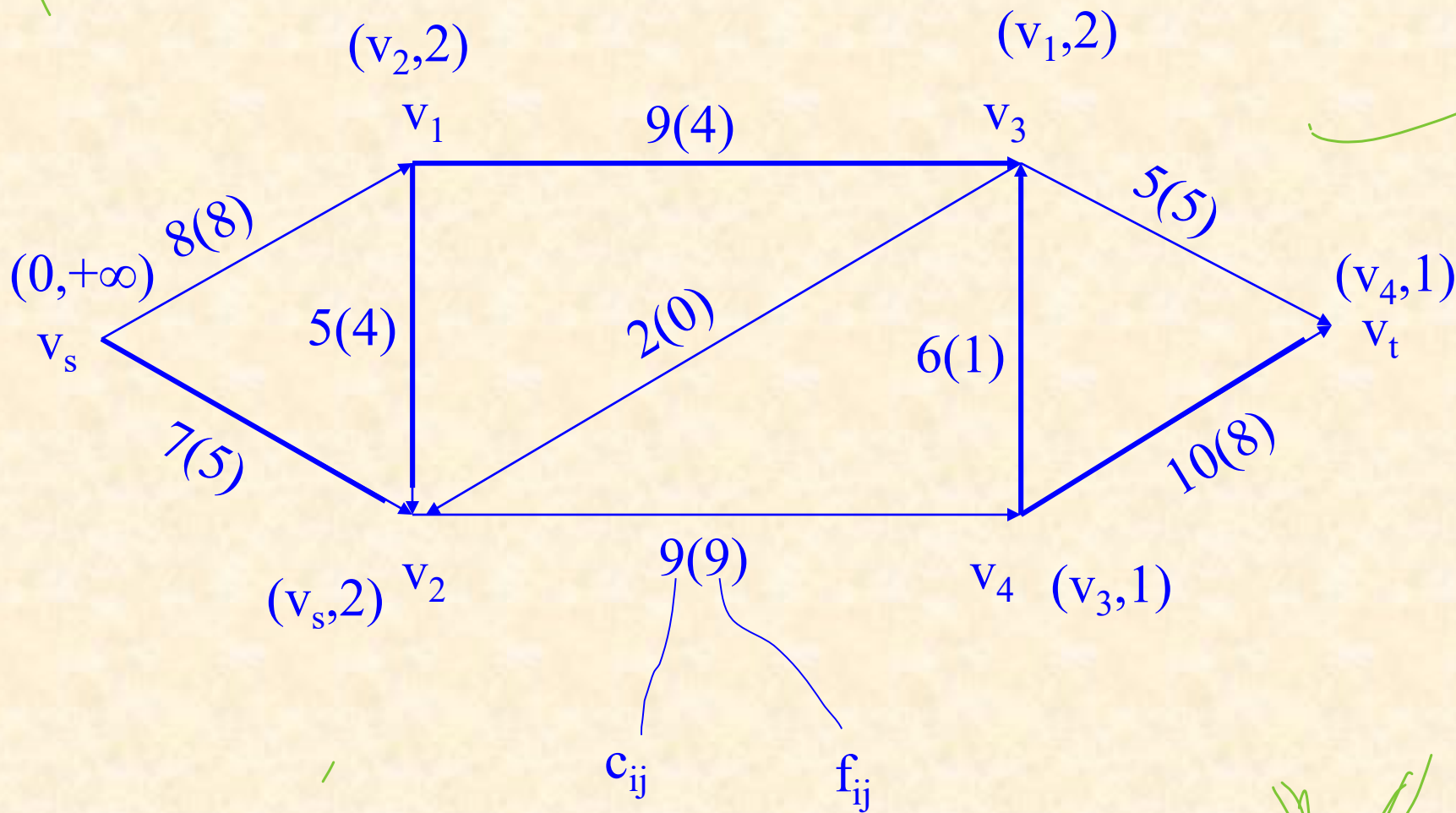
一、网络最大流中有关概念

- (1) 有向图：含有以箭头指示方向的边的网络图。
- (2) 弧：有向图上的边称为弧。用 (v_i, v_j) 表示。
- (3) 弧的容量：弧上通过负载的最大能力，简称容量。以 c_{ij} 表示。
- (4) 流：加在网络每条弧上的一组负载量，以 f_{ij} 表示。
- (5) 可行流：能够通过网络的负载量，通常应满足两个条件：
 - ① 容量限制条件：对所有的弧， $0 \leq f_{ij} \leq c_{ij}$
 - ② 中间点平衡条件：对任何一个中间点，流入量=流出量
- (6) 发点、收点、中间点：流的起源点称发点，终到点称收点，其余的点称中间点。
- (7) 最大流：能够通过网络的最大流量。
- (8) 割集：一组弧的集合，割断这些弧，能使流中断。简称割。



최대 흐름

2



(9) 割的容量：割集中各弧的容量之和。

(10) 最小割：所有割集中容量之和为最小的一个割集。

(11) 前向弧 μ^+ ：一条发点到收点链中，由发点指向收点的弧，又称正向弧。

(12) 后向弧 μ^- ：一条发点到收点链中，由收点指向发点的弧，又称逆向弧。

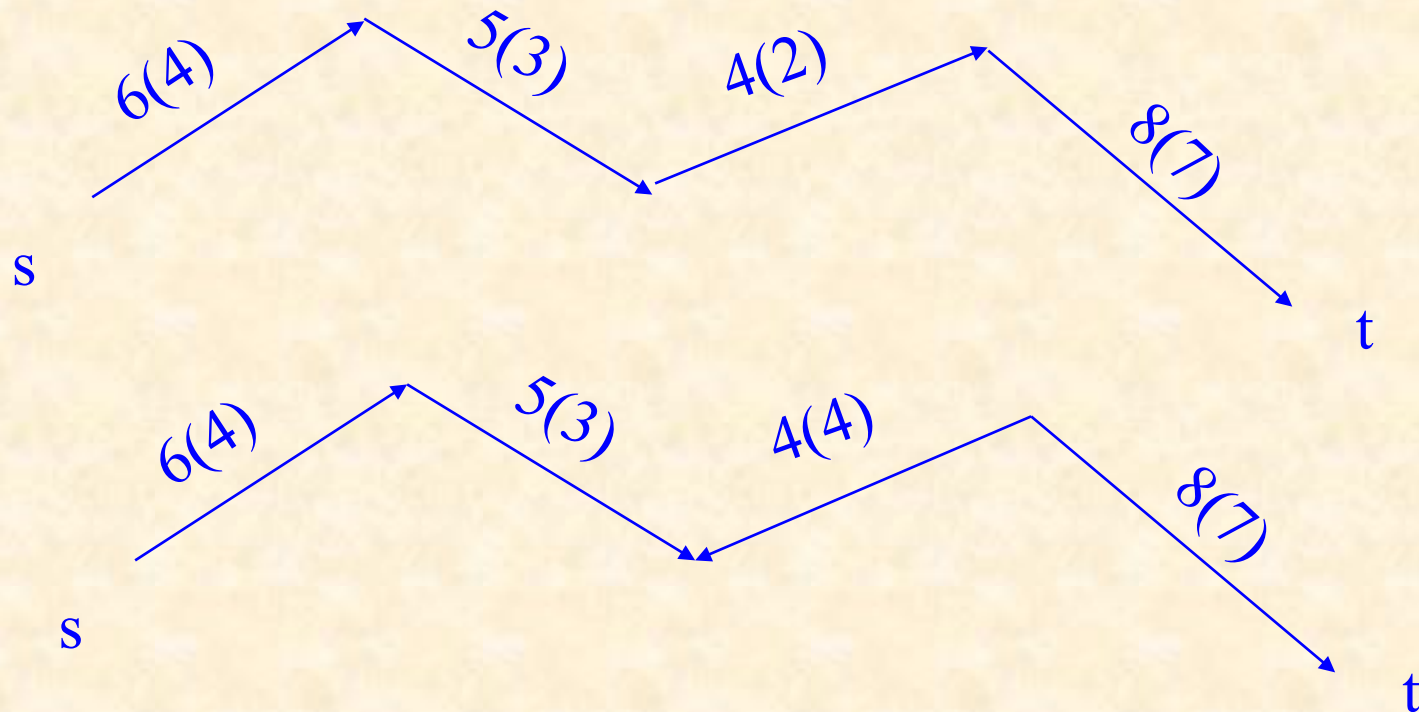
(13) 增广链：由发点到收点之间的一条链，如果在前向弧上满足流量小于容量，即 $f_{ij} < c_{ij}$ ，后向弧上满足流量大于0，即 $f_{ij} > 0$ ，则称这样的链为增广链。

二、两个定理

定理：网络的最大流量等于它的最小割集的容量。

定理：当网络中不存在任何增广链时，则网络达到最大流状态。

设有如下增广链：



结论：该网络没有达到最大流状态。

三、网络最大流的标号算法(Ford-Fulkerson标号算法)

基本思想：寻找增广链，改善流量分布；再重复，直到不存在任何增广链为止。

步骤：

① 给始点标号：(0, $+\infty$)

② 从已标号点*i*出发，看与其相关联的未标号点*j*上的弧，

对 μ^+ ，若有 $0 \leq f_{ij} < c_{ij}$ ，则可对*j*点标号，记(*i*, $\varepsilon(j)$)，

其中 $\varepsilon(j) = \min\{\varepsilon(i), \overset{\substack{\text{流量} \quad \text{容量}}}{c_{ij} - f_{ij}}\}$

对 μ^- ，若有 $0 < f_{ji} \leq c_{ji}$ ，也可对*j*点标号，记(*i*, $\varepsilon(j)$)，

其中 $\varepsilon(j) = \min\{\varepsilon(i), \overset{\substack{\text{标号的流量} \\ \text{弧可改量}}}{f_{ji}}\}$ (V₀ 21)

(注：若有多个可标号点，可任选其中之一。)

若标号中断，则得到最大流状态，否则，重复②，继续标号，至收点得到标号，转③。

③ 当收点得到标号，则沿标号得到的增广链进行流量调整：

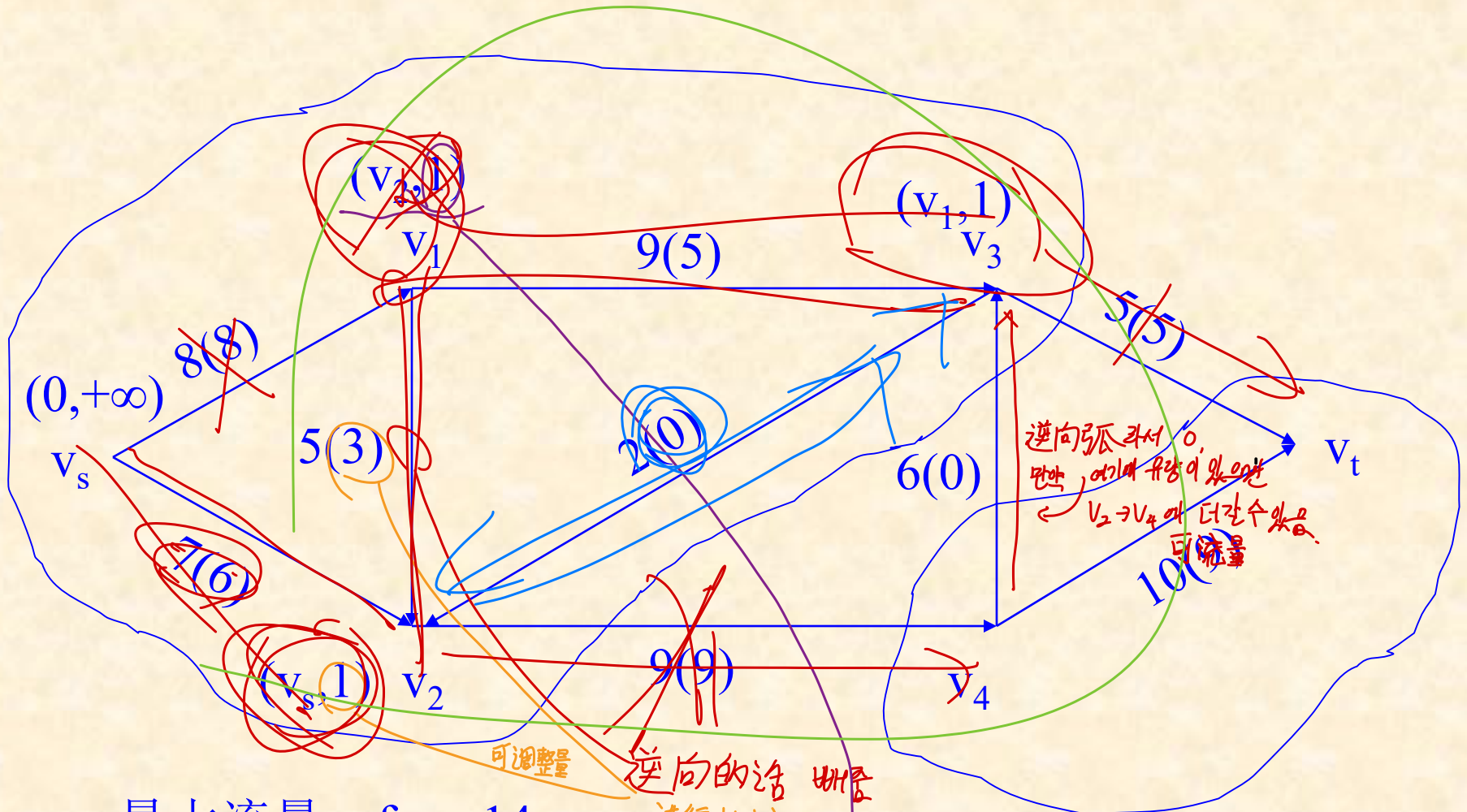
$$\text{对 } \mu^+, f'_{ij} = f_{ij} + \varepsilon(t)$$

$$\text{对 } \mu^-, f'_{ij} = f_{ij} - \varepsilon(t)$$

其余弧上的流量不变。

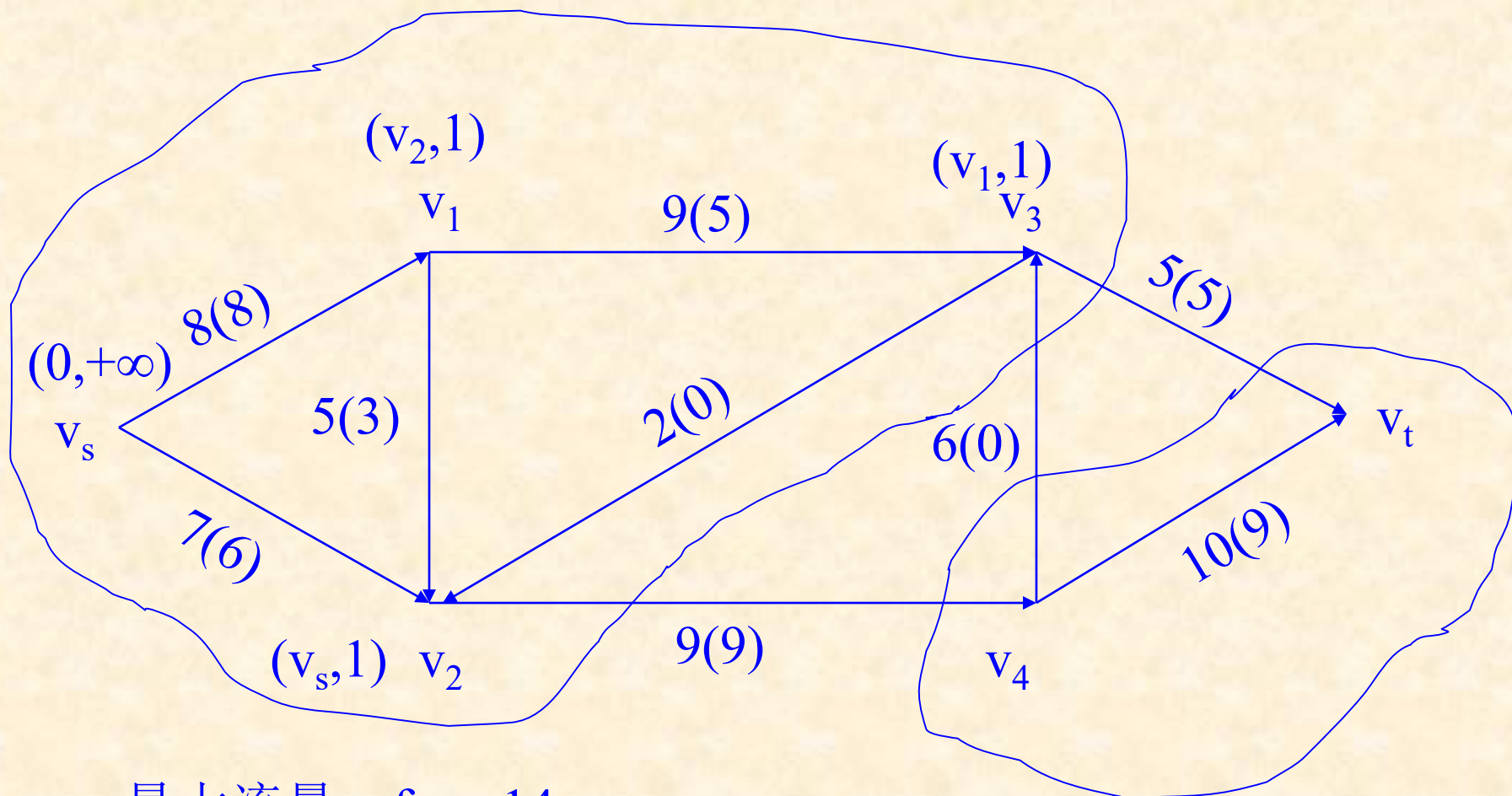
④ 重复上述过程。

⑤ 最小割集：已标号点集合与未标号点集合相连接的弧中，流量=容量的弧。



最大流量: $f_{\max} = 14$

最小割集: $\{(v_3, v_t), (v_2, v_4)\}$
min cut set.



最大流量: $f_{\max}=14$

最小割集: $\{(v_3, v_t), (v_2, v_4)\}$

复习思考题

1. 网络最大流模型概念？
2. 网络最大流定义是什么？
3. 什么是最小割集？与最大流有什么关系？
4. 增广链的含义是什么？
1. 增广链 찾기
2. 流量调整
if) 增广链은 무엇인가?
그것이 바로 최대流.
4. Ford-Folkerson标号法的基本思想是什么？

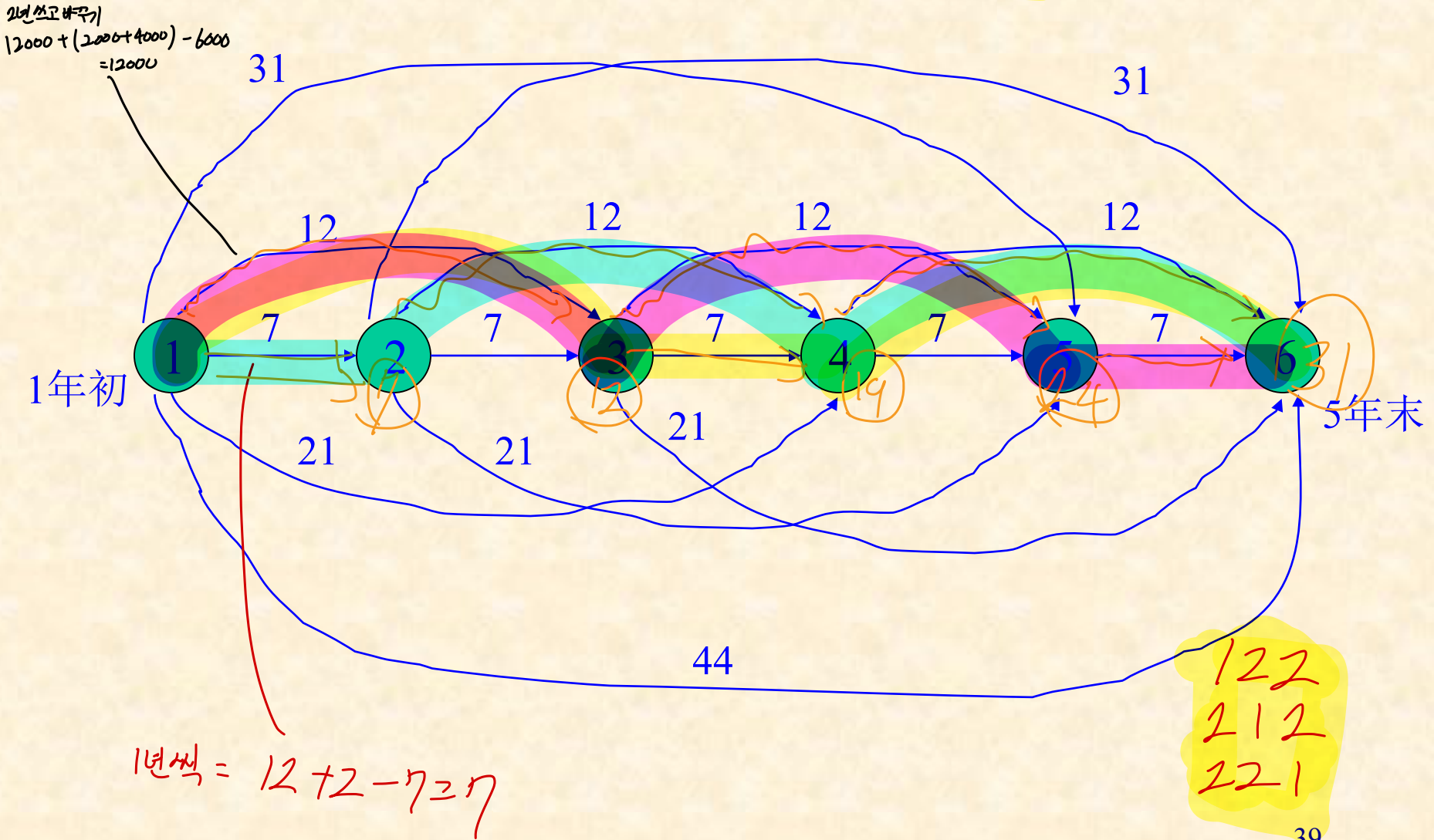
§ 6.6 网络模型的实际应用

例1：王经理花费12000元购买了一台微型车，以后年度的维护费用取决于年初时汽车的役龄，如表示。为避免使用旧车带来较高的维护费用，王经理可选择卖掉旧车，购买新车使用的方案，旧车的预计收入如表示。为简化计算，假定任何时刻购买新车都需花费12000元，王经理的目标是使净费用最小（购置费+维护费-卖旧车收入）。

单位：元

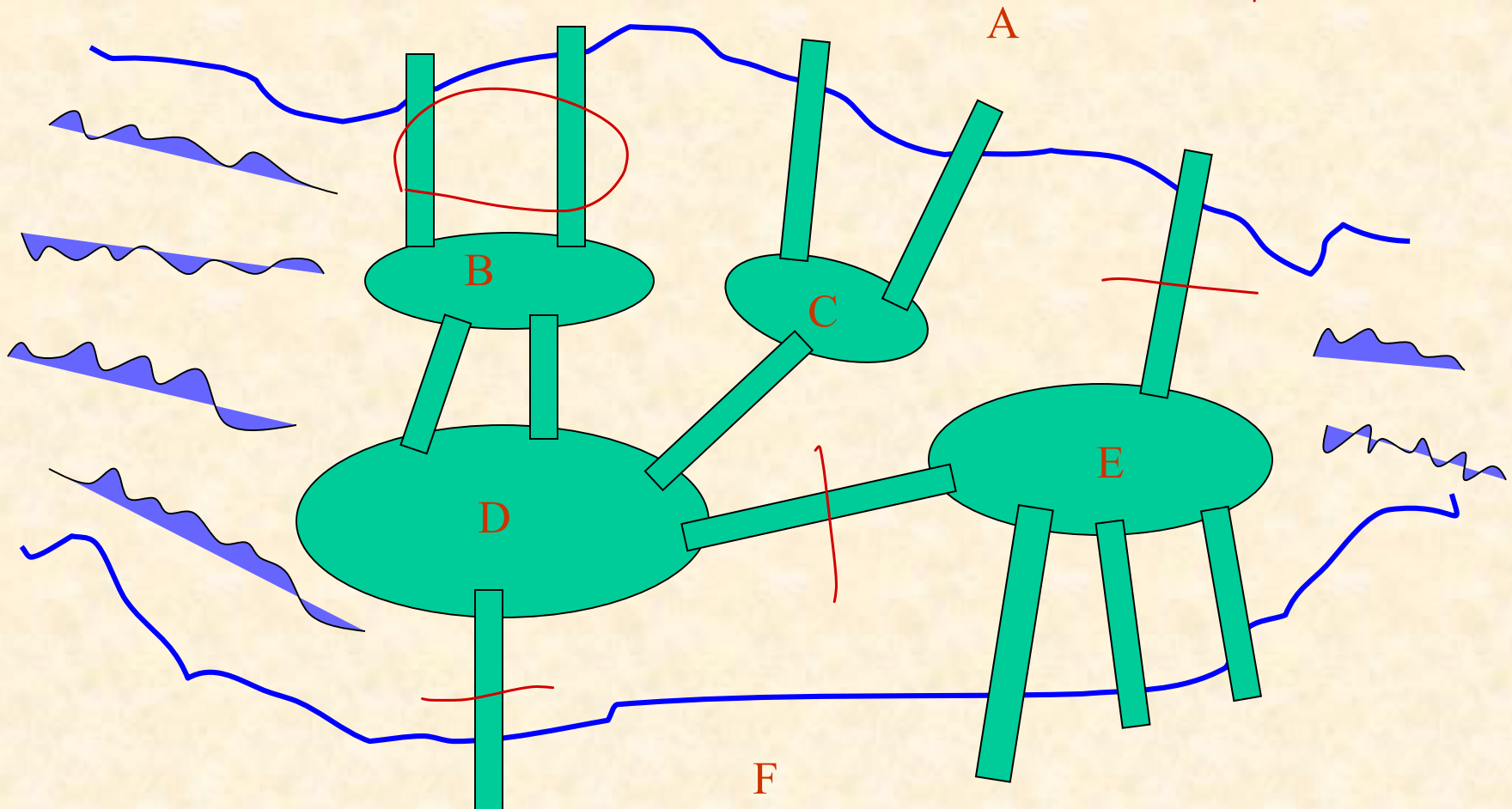
役龄(年)	0	1	2	3	4	5
年维护费	2000	4000	5000	9000	12000	——
预计收入	——	7000	6000	2000	1000	0

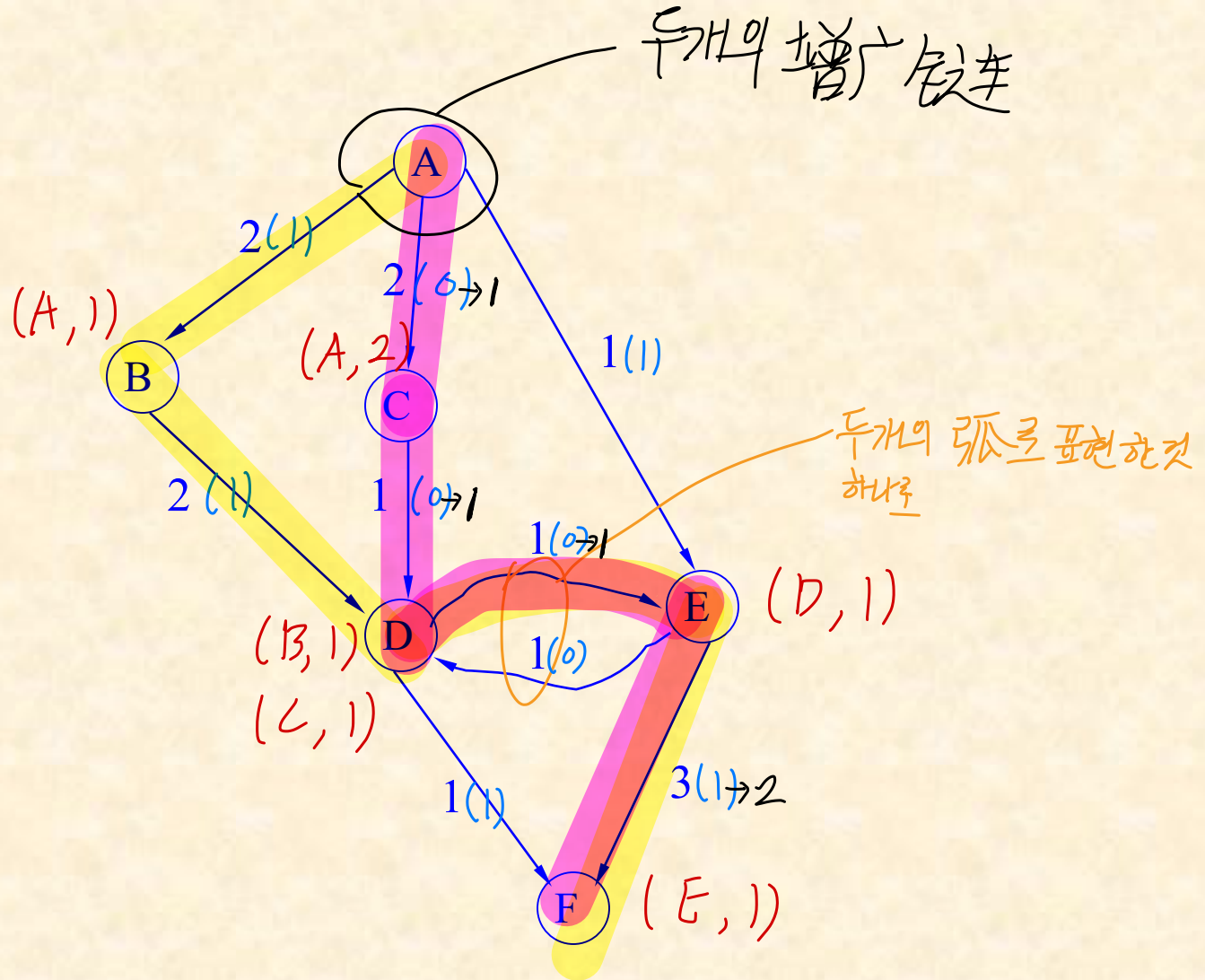
解：用网络图模型描述，归结为最短路问题。

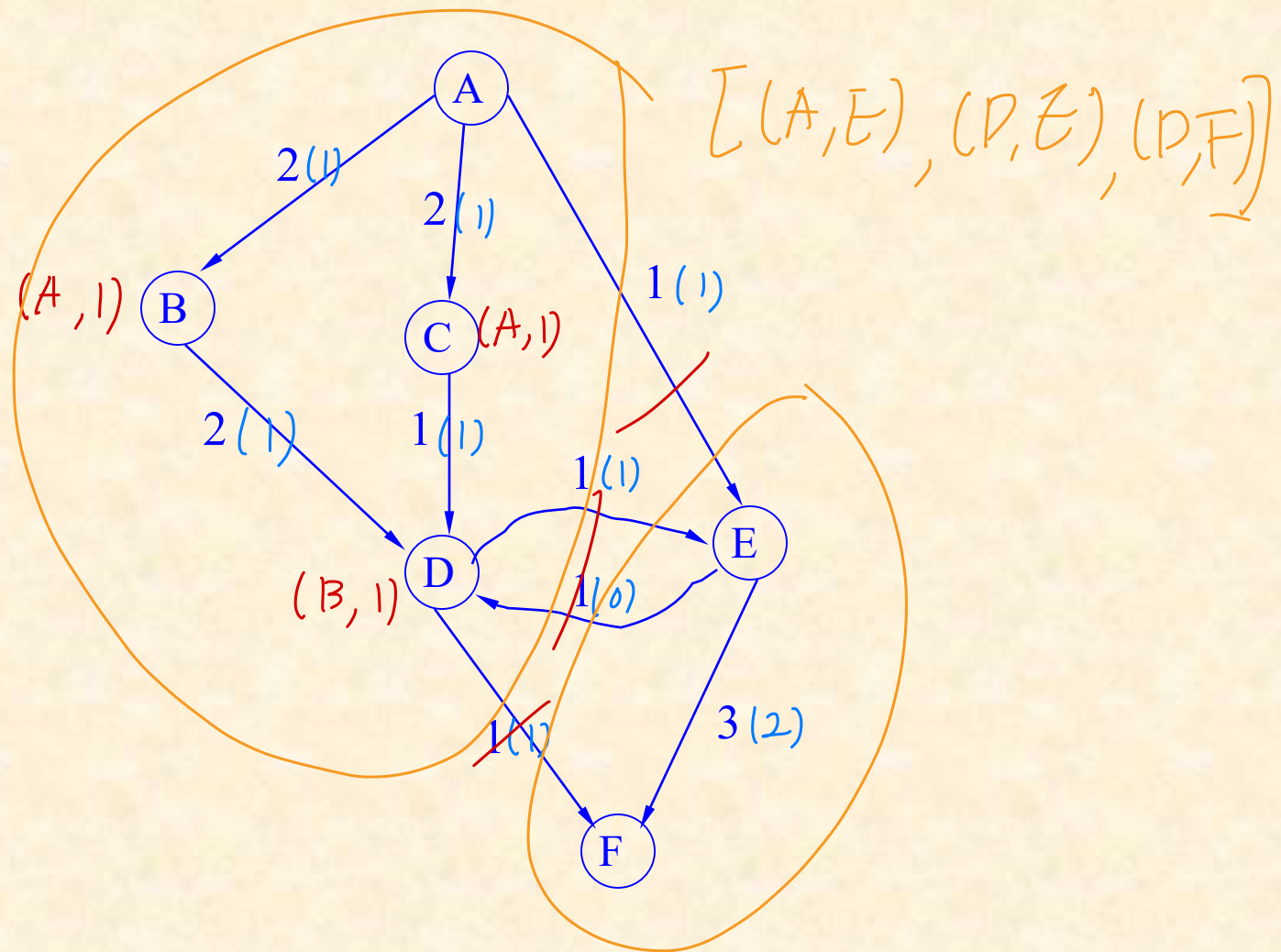


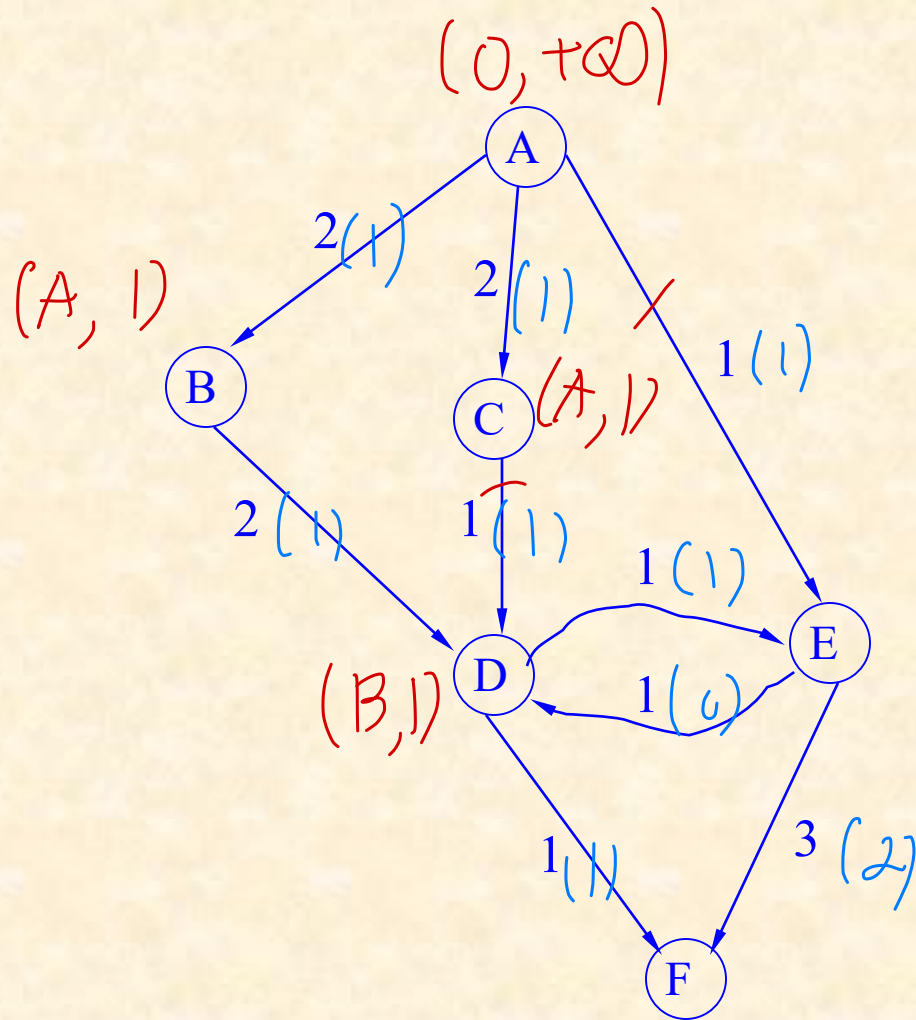
例2：图示岛屿与河岸有数座桥相联，问至少需要炸毁几座桥，可中断两岸的交通？

zhàhuǐ
파괴하다



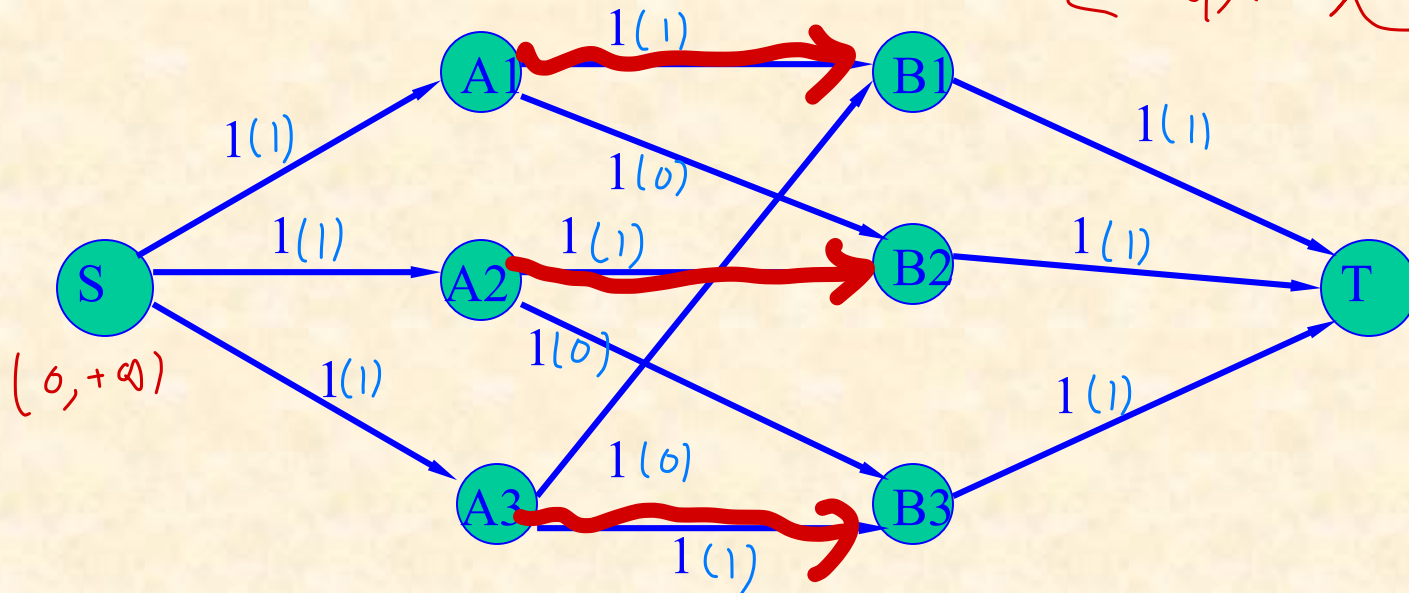






例3：有3根相同的轴A1、A2、A3，另有三根相同的齿轮B1、B2、B3。因为精度不高，不能做到任意的互相配合，其中A1能与B1、B2配合，A2能与B2、B3配合，A3能与B1、B3配合。要求确定合适的配合方案，以得到最多的配合数，将此问题归为网络最大流问题。

← 最合适的方案



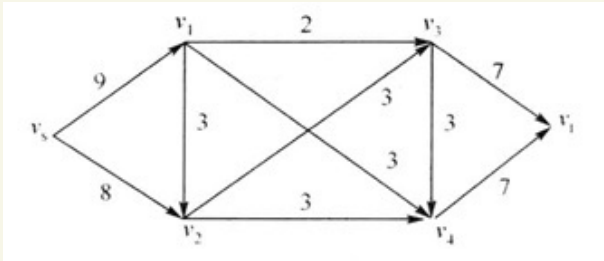
本章知识点

1. 图的概念与模型
2. 树图的概念及最小部分树的定义与求法
3. 最短路中的Dijkstra标号算法与矩阵算法
4. 中国邮路问题的处理
5. 网络最大流问题与Ford-fulkerson标号算法
6. 图模型的实践应用

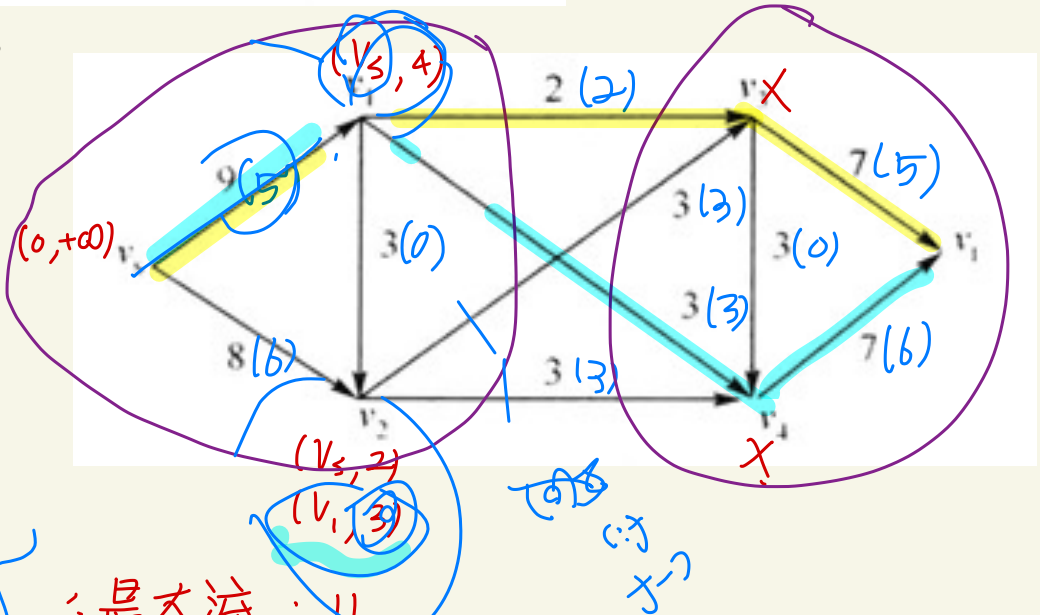
例题变例分析

作业

L181000503
尹睿英

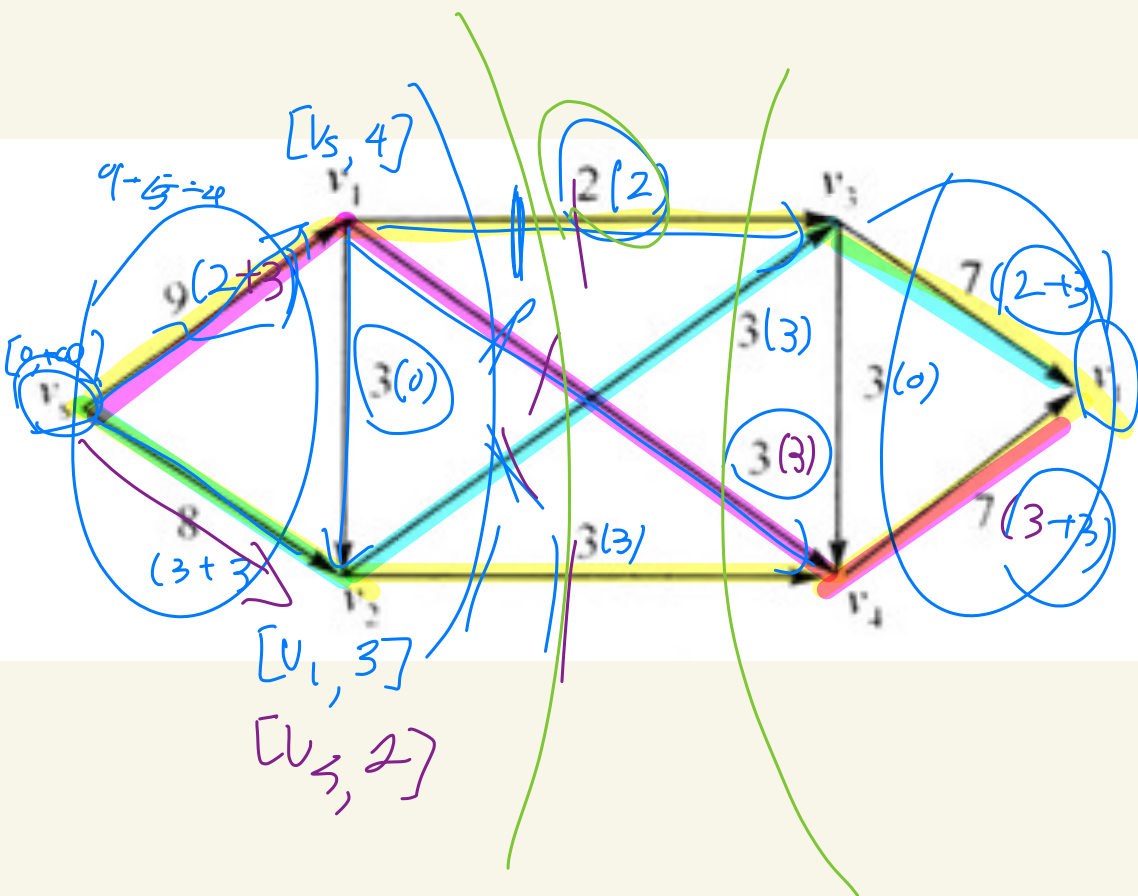


解:



∴ 最大流: 11.

最小割集: $\{(v_1, v_3), (v_1, v_4), (v_2, v_3), (v_2, v_4)\}$



$(v_1, v_3), (v_2, v_4)$