数字媒体技术

第2章 信号处理技术与信息论基础(6学时)

刘绍辉

计算机科学与技术学院 哈尔滨工业大学

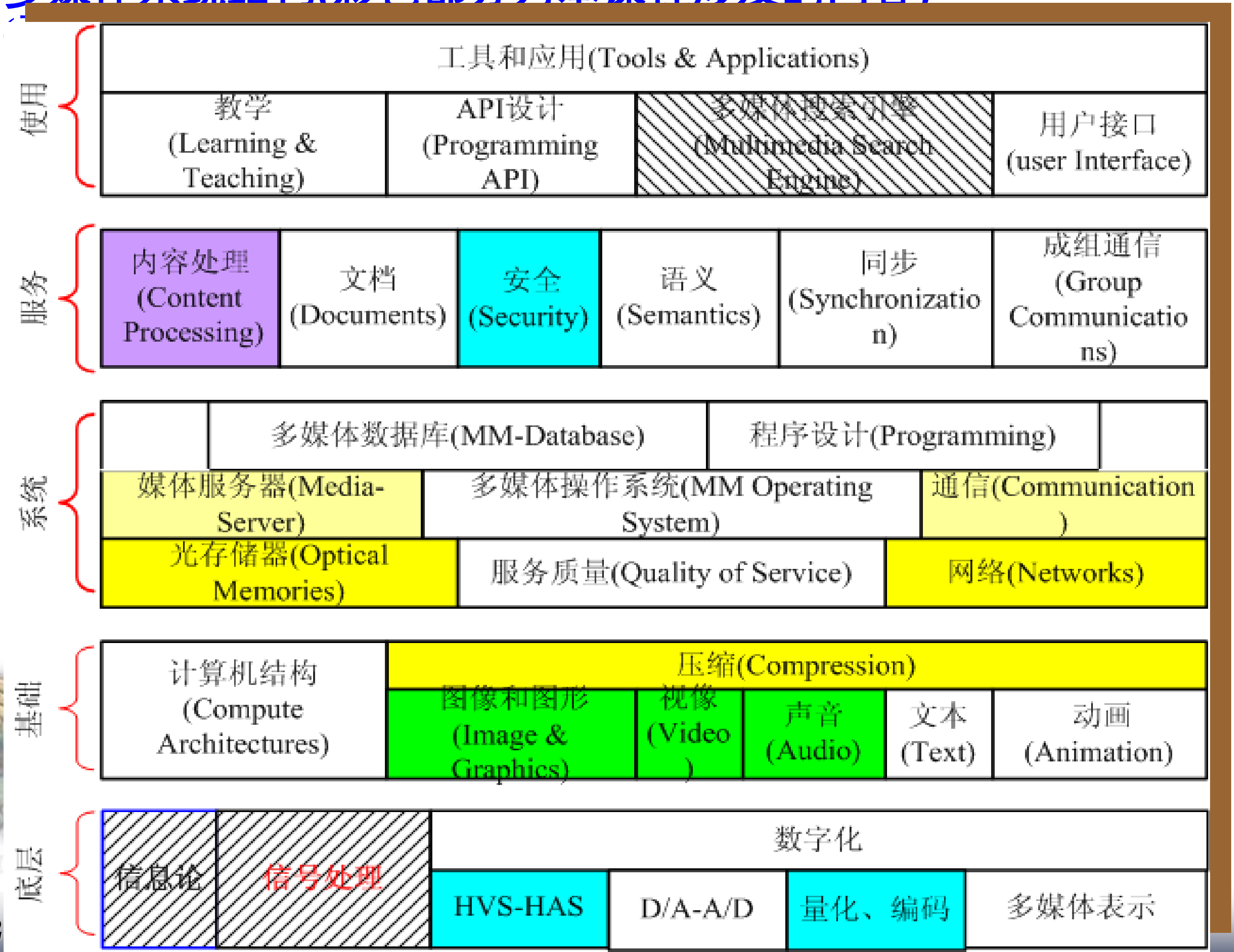
shliu@hit.edu.cn

2021年春季

第2章 信号处理技术与信息论基础

2.0 引言

◆ 多媒体系统结构(彩色部分为本课程涉及的内容)

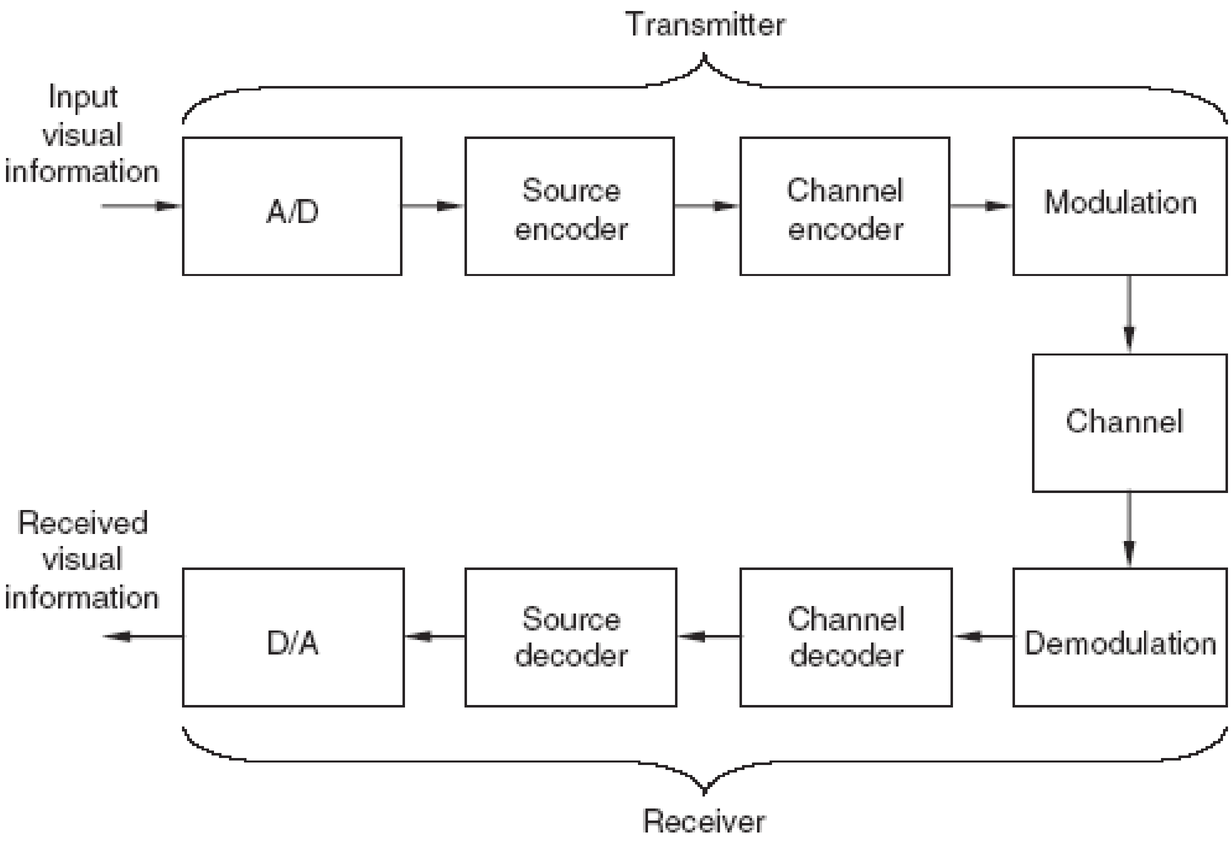


2.0 引言(续1)

- **信息论**
  - 基础
- **信号处理**
  - 手段、方法
- **通信与网络**
  - 传输

2.0 引言(续2)

◆视觉通信系统模型



2.0 引言(续3)

◆模拟 vs. 数字

➢模拟

- ✓Media represented using <u>real</u> values
- ✓Sound pressure in the air (example)
- ✓Electronic representation of sound from a microphone

➢数字

- ✓Media represented using discrete values (integers, quantized numbers, floating point representations)
- ✓May be infinite, but for a fixed range finite.

2.0 引言(续4)

- **现实世界是模拟的**
  - 光的强度
  - 声音的传送
  - 照片
  - 电话
- **数字信号出现很晚**

2.0 引言(续5)

- **数字信号怎么来的**
  - 从模拟信号转换过来的
  - 目前PC机上的基本都是数字信号，如PC上图像的像素，MP3音乐
- **问题**
  - 模拟和数字的是否等价?
  - **as good, sufficient, better, prettier, slimmer, less filling?**

2.0 引言(续6)

◆几个小问题

- MP3的采样率?128kbps代表什么？CD的比特率大概是多少？kbps与kBps有区别吗？
- 如何确定采样率，有什么准则？
- 通过数字化的信号与原始信号有区别吗？

2.1 信号与系统

◆信号

- ➢人们相互问迅、发布新闻、传递数据：要把某些消息借一定形式的信号传送出去
- ➢定义是消息的表现形式，消息则是信号的具体内容

◆消息

- ➢有时也称为信息
- ➢如何度量？---信息论

$f(t_k)$

2.1 信号与系统(续1)

◆信号传输与信号处理

➢信号传输

- ✓烽火台
- ✓火炬传递信息
- ✓奴隶剃头传递信息
- ✓鸣金收兵
- ✓电信号：**1837**，**F.B.Morse**发明电报，**1876**年，**A.G.Bell**发明电话，**1901**年**G.Marconi**等发明无线电通信
  - ●电信号：随时间而变化的电压或电流，电荷，线圈的磁通，空间的电磁波…
  - ●电信号与非电信号可以方便的进行转换

➢信号处理

- ✓对信号进行某种加工或变换：削弱信号中的多余内容；滤除混杂的噪声和干扰；或者将信号换成容易分析与识别的形式，便于估计和选择它的特征参量

2.1 信号与系统(续2)

◆系统

- 由若干相互作用和相互依赖的事物组合而成的具有特定功能的整体
  - ✓狭义：无线电电子学领域：通信系统，控制系统，计算机系统，指挥系统->宇宙航行系统
  - ✓广义：包括各种物理系统和非物理系统，人工系统和自然系统
    - 物理系统：通信，电力，机械
    - 非物理系统：政治结构，经济组织，生产管理，社交网络
    - 人工系统：计算机网，交通运输
    - 自然系统：原子核，太阳系，动物的神经组织

◆系统工程学

- 将系统理论应用于系统工程设计，以期使较复杂的系统最佳地满足预定的需求

2.2 信号、系统的描述及其分类

2.2 信号、系统的描述及其分类

2.2.1 如何描述

2.2.2 信号分类

2.2.3 系统与系统模型

2.2.4 系统的分类

2.2.5 系统分析方法

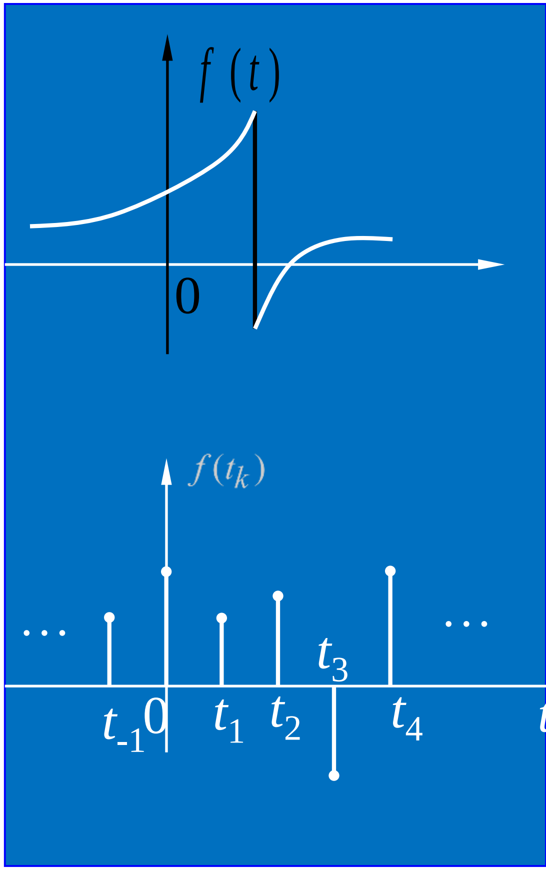
2.2 信号、系统的描述及其分类

◆信号的描述

- ➢ 信号描述的基本方法：写出它的数学表达式，是时间的函数，绘出函数的图像称为信号的波形

◆信号的分类

- ➢ 确定性 vs 随机信号
  - ✓信号可表示为一确定的时间函数
  - ✓实际信号往往具有不可预知的不确定性：噪声，干扰
    - ● 随机信号分析



- ➢ 周期信号 vs 非周期信号(傅立叶级数vs傅立叶变换)
  - ✓依一定时间间隔周而复始，无始无终的信号 $f(t)=f(t+nT)$
  - ✓如果T趋近于无穷，则成为非周期信号
- ➢ 连续时间信号 vs 离散时间信号
  - ✓时间取值的连续性与离散性
  - ✓连续信号的幅值可连续—模拟信号

2.2 信号、系统的描述及其分类(续1)

- ✓离散时间信号的幅值连续，称为抽样信号
- ✓离散时间信号的幅值也是离散的，称为数字信号

➢ 能量受限信号 Vs 功率受限信号

➢ 调制信号，载波信号，已调信号…

◆典型的连续信号

➢ 指数信号，$f(t)=Ke^{at}$,单边指数衰减信号

➢ 正弦信号，f(t)=Ksin(omega*t+theta)

➢ 复指数信号

➢ Sa(t)函数(抽样函数)：Sa(t)=sint/t

◆奇异信号

➢ 单位斜变信号

➢ 单位阶跃信号

➢ 单位冲击信号

$$\delta(t)=\begin{cases}0 & t\neq 0\\ \infty & t=0\end{cases} \quad 和 \quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)dt=1$$

2.2 信号、系统的描述及其分类(续2)

◆系统模型

- 模型是系统物理特性的数学抽象，以数学表达式或具有理想特性的符号组合图形来表征系统特性

◆系统分类

- 连续时间系统 vs 离散时间系统
  - ✓连续时间系统的数学模型是微分方程
  - ✓离散时间系统的数学模型是差分方程
- 即时系统 vs 动态系统
  - ✓即时系统：系统输出与历史无关，模型为代数方程
  - ✓动态系统:模型为微分或差分方程
- 集总参数系统 vs 分布参数系统
  - ✓集总参数元件: 常微分方程
  - ✓分布参数元件:偏微分方程，考虑空间位置

2.2 信号、系统的描述及其分类(续3)

- ➢ 线性系统 vs 非线性系统
  - ✓线性：具有叠加性和均匀性
- ➢ 时变系统 vs 时不变系统
  - ✓系统参数不随时间变化

◆ **一般线性性与时变性组合，有四种系统**

◆ **系统模型的求解方法**

- ➢ 时间域方法
  - ✓时域特性
- ➢ 变换域方法
  - ✓频域特性

2.2 信号、系统的描述及其分类(续4)

- 信号理论：信号分析、信号处理、信号综合
- 系统理论：系统分析、系统综合
- 信号分析与系统分析是一个统一的整体：
  - 从信号传输的角度来看：信号通过系统时，在系统的传递特性作用下，信号的时间特性和频率特性会发生相应的变化，从而变成了新的信号。
  - 从系统响应的角度来看：系统的主要作用是对信号进行处理与传输。在输入信号的激励下，系统必然会作出相应的反响，其外在的表现形式就是会有一个对应的输出（响应）。 综合上述两个方面，可以看出：对信号的分析与对系统的分析是密不可分的。
  - 从数学的角度来看：时域分析中信号与系统的特性都可以表示为时间的函数，对它们也都可以用变换域的方法进行分析，只不过是各自变换域函数的物理意义不同而已。

2.2 信号、系统的描述及其分类(续5)

◆信号分析：

研究信号的表示、性质和特征。

◆系统分析：

给定系统，已知输入，求输出。研究系统的特征和功能。

◆系统综合：

给定输入，为了获得预期的输出，要求设计系统。

◆注意

➢大多数系统是线性时不变系统

➢许多非线性系统和时变系统经过适当处理后，可以近似地化为线性时不变系统来分析。

2.2 线性系统-卷积

◆定义：函数f,g的卷积$f*g(n)$为：

$$(f*g)(n)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)g(n-\tau)d\tau$$

◆对应的离散形式为

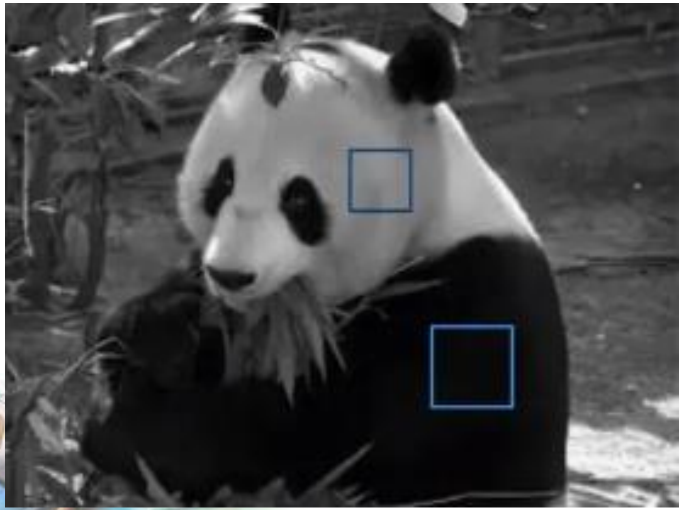
$$(f*g)(n)=\sum_{\tau=-\infty}^{\infty}f(\tau)g(n-\tau)$$

◆从公式的直观理解上，卷积相当于将函数g在横轴上对折-“卷”，然后平移卷后的函数到n再与f对应点相乘相加-“积”的过程！

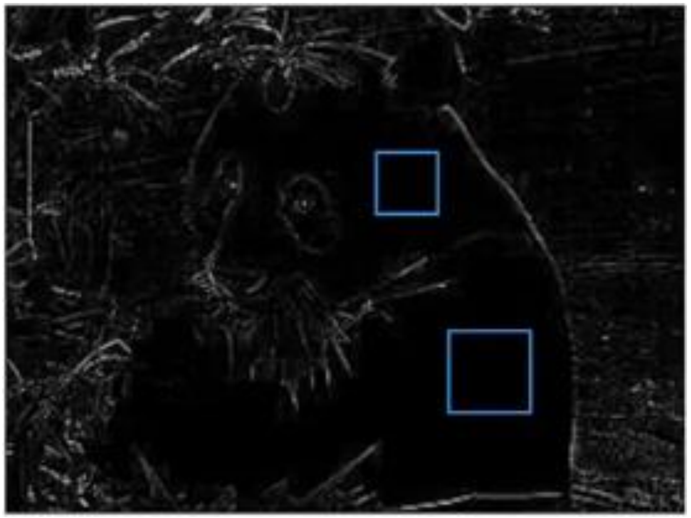
◆积的过程是一种全局过程！涉及到当前点n的周围的值！

2.2 线性系统-卷积

◆卷积往往可以描述为系统的响应，这种积分运算常用来描述线性时不变系统的而输入和输出的关系：即输出可以通过输入和一个表征系统特性的函数（冲激响应函数）进行卷积运算得到。

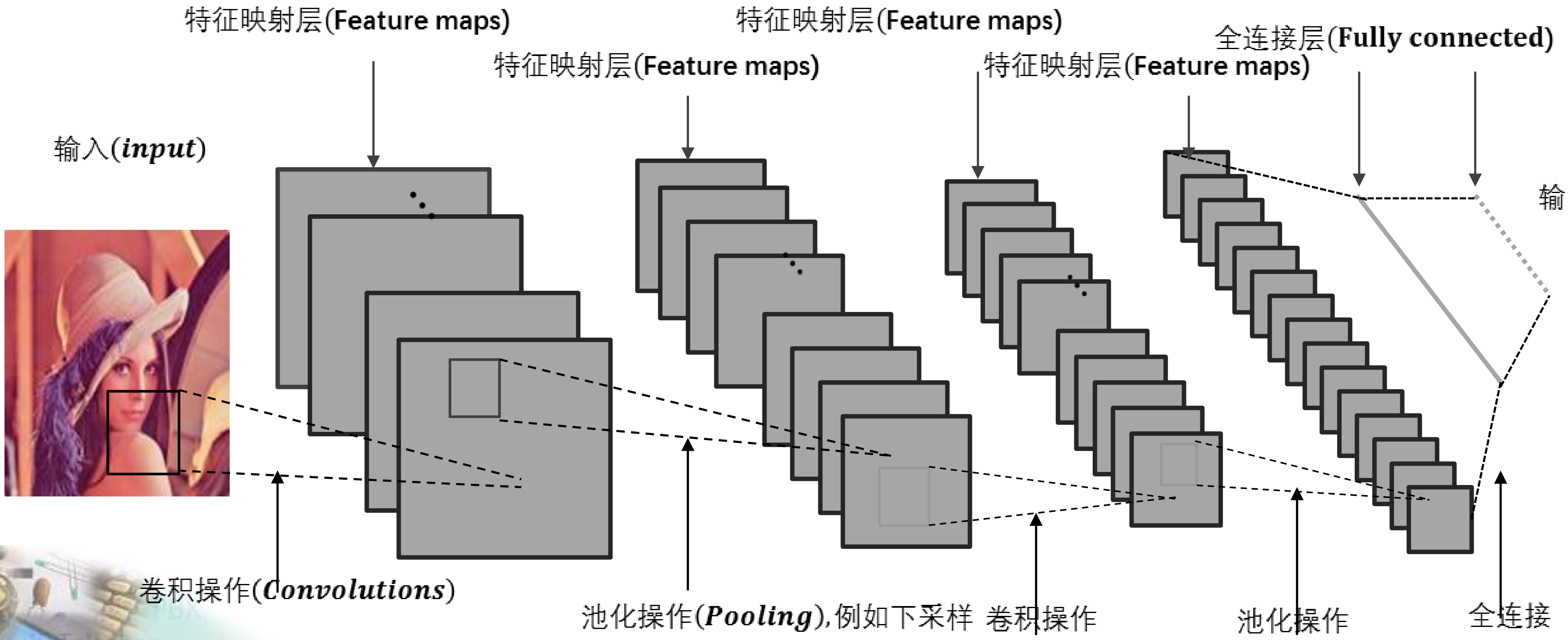


0	-1	0
-1	4	-1
0	-1	0



2.2 线性系统-卷积

◆深度学习中的卷积



2.2线性时不变系统

- 指系统的输入和输出关系是否是线性的，而线性是指满足如下关系：
- 激励(输入）信号$x_1(n)$,和$x_2(n)$,系统用T表示，则满足$T[ax_1(n)+bx_2(n)]=aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]$, a,b为任意常数
- 时不变系统
  - 若$T[x(n)]=y[n]$, 则$T[x(n-n_0)]=y[n-n_0]$,表明系统的参数不随时间变化，不管输入信号作用时间的先后，输出信号响应的形状相同，仅仅在时间上做了平移。也表明序列$x[n]$是先进行移位后变换，还是先进行变换后移位，并不影响其输出，是等价的.
- 上述线性和时不变性组合即为前面提到的线性时不变系统

2.2线性时不变系统

◆线性时不变系统(Time-invariant Linear System)可以用单位脉冲响应来表示

◆$y(t)=\int_{\tau}^{\infty} g(\tau)u(t-\tau)d\tau$,知道输入$u(t)$,系统参数，就可以求出输出

◆注意，如果系统满足：$y(n)=ax(n)+b$这是否时线性系统

2.2 线性系统-傅里叶变换-非周期连续信号

◆ 输入信号为非周期连续信号$x(t)$,其傅里叶变换定义为：

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=F(x(t))$$

◆ 上式左端采用$j\omega$的表示，则可以表示为输入$x(t)$的拉普拉斯变换在$s=j\omega$点的取值：

$$X(s)|_{s=j\omega}=X(j\omega)$$

◆ 其逆变换可写为：

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

◆ 如果将角频率ω表示为$\omega=2\pi f$的形式，则上述正反变换公式可进一步表示为：

$$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$$

$$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$$

非周期连续信号，其频谱也是非周期连续信号

2.2 线性系统-傅里叶变换-卷积定理

◆定理：信号$f(t)$的傅里叶变换为$F(\omega)$,表示为$f(t) \leftrightarrow F(\omega)$,信号$g(t)$的傅里叶变换为$G(\omega)$,表示为$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$,则有：$f(t) * g(t) \leftrightarrow F(\omega)G(\omega)$

◆证明：$\mathcal{F}\{[f(t) * g(t)]\} = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} g(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, G(\omega)e^{-j\omega\tau}d\tau = G(\omega)\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\, e^{-j\omega\tau}d\tau = F(\omega)G(\omega)$,证毕!

◆定理：$f(t)g(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}F(\omega) * G(\omega)$,频域卷积定理!

◆证明跟上述过程类似

◆注：定理应用范围非常广泛，全景图生成，目标匹配。

2.2 线性系统-傅里叶变换-周期连续信号，离散非周期频谱（选学）

- 周期信号$x_T(t)=x_T(t+T)$,周期为T,其傅里叶级数展开为：

$$a_n=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-jn\omega_0 t}dt,(n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

- 逆变换为：

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n e^{jn\omega_0 t}$$

- 其离散频谱也可以表示为：
- $X(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n\delta(\omega-n\omega_0)$
- 与前面类似，若角频率$\omega=2\pi f$表示,并令$X[n]=a_n$，则有：

$$X[n]=\frac{1}{T}\int_T x_T(t)e^{-j2\pi nf_0 t}dt,\ x_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X[n]e^{j2\pi nf_0 t}$$

- 频谱为：

$$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X[n]\delta(f-nf_0)$$

这里基频为$f_0=\frac{1}{T}$,或$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$

2.2 线性系统-傅里叶变换-非周期离散信号，连续周期频谱（选学）

- 连续信号的采样序列，即离散信号的傅里叶变换，假设采样信号频率为$F=\Omega/2\pi$,两个连续样本$x[m]$与$x[m+1]$之间的的时间间隔为采样周期$t_0=\frac{1}{F}=2\pi/\Omega$,离散信号可写为：

$$x(t)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\delta(t-mt_0)$$

- 其频谱为：

$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-mt_0)e^{-j\omega t}dt=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]\,e^{-j\omega mt_0}$$

- 显然，周期$\Omega=2\pi F=2\pi/t_0$.逆变换为:

$$x[m]=\frac{1}{\Omega}\int_{\Omega}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega mt_0}d\omega\ (m=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

- 若令$\omega=2\pi f,\Omega=2\pi F$，则有：

$$X_F(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j2\pi fmt_0}，\ x[m]=\frac{1}{F}\int_F X_F(f)e^{j2\pi fmt_0}df$$

- 尤为特殊的情况是令$t_0=1$,即$F=\frac{1}{t_0}=1,\Omega=\frac{2\pi}{t_0}=2\pi$，前向变换为：

$$X\left(e^{j\omega}\right)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[x]e^{-j\omega m}$$

2.2 线性系统-傅里叶变换-非周期离散信号，连续周期频谱（选学）

- 而其频谱表示为$e^{j\omega}$的函数，正好可以认为是$x[m]$的Z变换在点$z=e^{j\omega}$处的取值：

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}}=X(e^{j\omega})$$

- 其逆变换为：

$$x[m]=\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega m}d\omega$$

- 这种情况下，输入为非周期的离散信号，输出为连续周期频谱

2.2 线性系统-傅里叶变换-周期离散信号，离散周期频谱（选学）

- 假设在每个周期T上的周期离散信号有$N=\frac{T}{t_0}$个样本，则在频域每个周期上也有N个傅里叶系数：
- $\frac{\Omega}{\omega_0}=\frac{F}{f_0}=\frac{\frac{1}{t_0}}{\frac{1}{T}}=\frac{T}{t_0}=N$
- 由于输入和输出都是周期离散的，因此这是唯一可以在数字计算机上执行的傅里叶变换形式。其前向变换为：

$$X[n]=\frac{1}{T}\sum_{m=0}^{N-1}x[m]e^{-j2\pi nmf_0t_0}(n=0,1,\cdots,N-1)$$

- 逆变换为：

$$x[m]=\frac{1}{F}\sum_{n=0}^{N-1}X[n]e^{j2\pi nmf_0t_0}(m=0,1,\cdots,N-1)$$

- 由于$t_0f_0=\frac{t_0}{T}=\frac{1}{N}$，并且$TF=T\left(\frac{1}{t_0}\right)=1/N$，上述公式也可写为：

$$X[n]=\frac{1}{T}\sum_{m=0}^{N-1}x[m]e^{-\frac{j2\pi nm}{N}}，\quad x[m]=\frac{1}{F}\sum_{n=0}^{N-1}X[n]e^{j2\pi nm/N}$$

2.2 线性系统-傅里叶变换-周期离散信号，离散周期频谱（选学）

- 若进一步定义$w_N \triangleq 1/\sqrt{N}\, e^{-\frac{j2\pi}{N}}$
- 则DFT离散傅里叶变换可逆变换IDFT可以分别表示为

$$X[n] = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-\frac{j2\pi nm}{N}} = \sum_{m=0}^{N-1} w_N^{mn} x[m], (n = 0, 1, \cdots, N-1)$$

$$x[m] = \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{j2\pi nm/N} = \sum_{n=0}^{N-1} w_n^{-mn} X[n], (m = 0, 1, \cdots, N-1)$$

- 其计算每个$X[n]$要求O(N)阶乘法和加法操作，所有N个系数则需要O(N^2)阶操作，若采用快速傅里叶变换(FFT),其复杂性可降低至O($\mathrm{Nlog_2N}$)阶

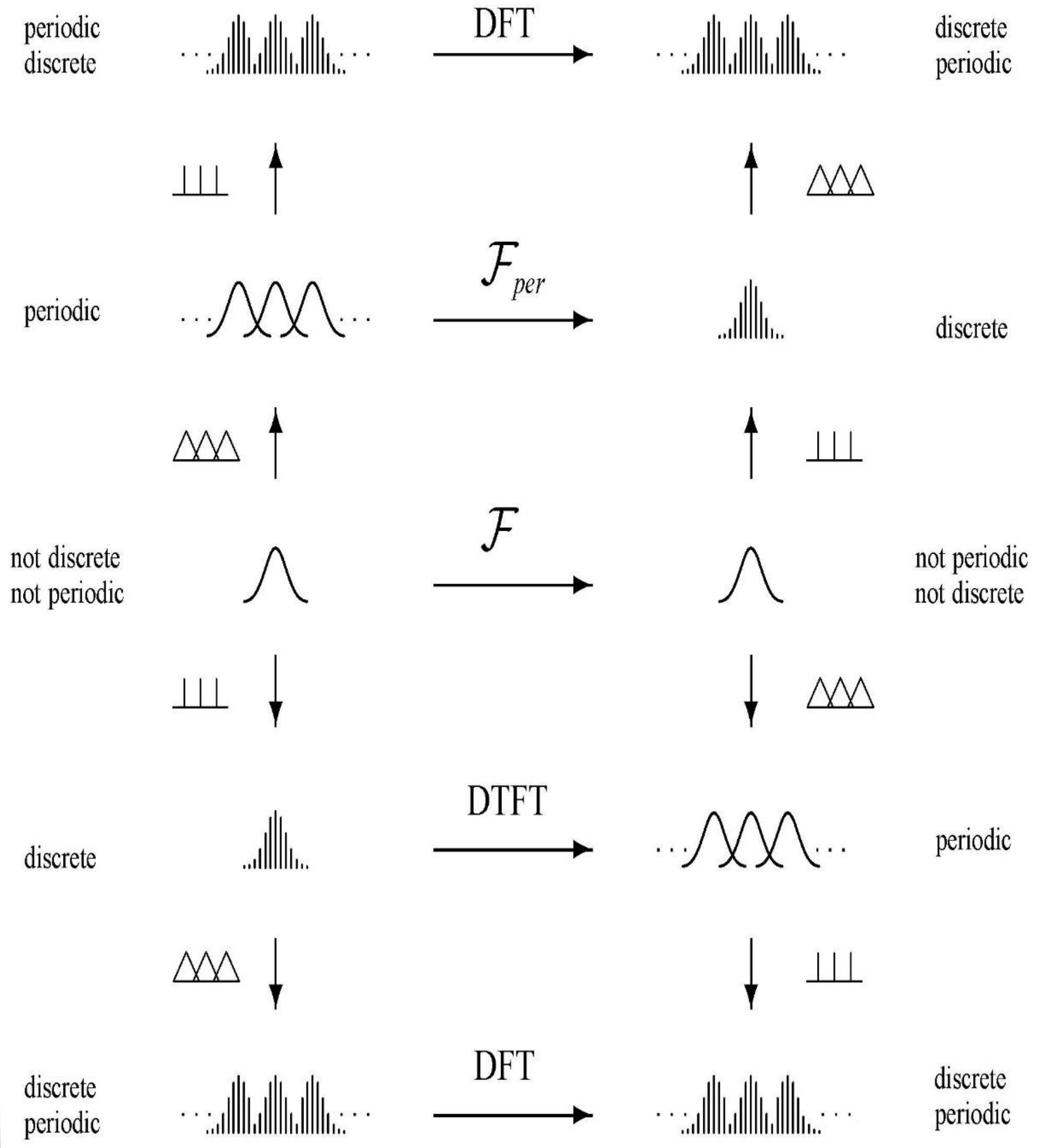
2.2 线性系统-傅里叶变换（选学）

◆上述四种类型的傅里叶变换形式总结如下：

I	Continuous, Non-periodic	Non-periodic, Continuous
	$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty} X(f)e^{j2\pi ft}df$	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j2\pi ft}dt$
II	Discrete (t_0), Non-periodic	Periodic ($F=1/t_0$), Continuous
	$x[m]=\int_F X_F(f)e^{j2\pi fmt_0}df/F$	
	$x[m]=\int_F X_F(f)e^{j2\pi fmt_0}df/F$	$X_F(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x[m]e^{-j2\pi fmt_0}$
III	Continuous, Periodic (T)	Non-periodic, Discrete ($f_0=1/T$)
	$x_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]e^{j2\pi nf_0t}$	$X[n]=\int_T x_T(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt/T$
		$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} X[n]\delta(f-nf_0)$
IV	Discrete (t_0), Periodic (T)	Periodic ($F=1/t_0$), Discrete ($f_0=1/T$)
	$x_T[m]=\sum_{n=0}^{N-1} X[n]e^{j2\pi nm/N}$	$X_F[n]=\sum_{m=0}^{N-1} x[m]e^{-j2\pi mn/N}$
	$x_T(t)=\sum_{m=0}^{N-1} x[m]\delta(t-mt_0)$	$X_F(f)=\sum_{n=0}^{N-1} X[n]\delta(f-nf_0)$
	$T/t_0=N$	$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$

2.2 线性系统-傅里叶变换-直观理解（选学）

I	Continuous, Non-periodic	Non-periodic, Continuous
	$x(t)=\int_{-\infty}^{\infty}X(f)e^{j2\pi ft}df$	$X(f)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j2\pi ft}dt$
II	Discrete (t_0), Non-periodic	Periodic ($F=1/t_0$), Continuous
	$x[m]=\int_F X_F(f)e^{j2\pi fmt_0}df/F$	
	$x[m]=\int_F X_F(f)e^{j2\pi fmt_0}df/F$	$X_F(f)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x[m]e^{-j2\pi fmt_0}$
III	Continuous, Periodic (T)	Non-periodic, Discrete ($f_0=1/T$)
	$x_T(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X[n]e^{j2\pi nf_0t}$	$X[n]=\int_T x_T(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt/T$
		$X(f)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}X[n]\delta(f-nf_0)$
IV	Discrete (t_0), Periodic (T)	Periodic ($F=1/t_0$), Discrete ($f_0=1/T$)
	$x_T[m]=\sum_{n=0}^{N-1}X[n]e^{j2\pi nm/N}$	$X_F[n]=\sum_{m=0}^{N-1}x[m]e^{-j2\pi mn/N}$
	$x_T(t)=\sum_{m=0}^{N-1}x[m]\delta(t-mt_0)$	$X_F(f)=\sum_{n=0}^{N-1}X[n]\delta(f-nf_0)$
	$T/t_0=N$	$\int_{-\infty}^{\infty}x(\tau)y(t-\tau)d\tau$



2.2 线性系统-离散傅里叶变换（选学）

- 信号如果是周期为T: $x(t)=x(t+T)$,则其频谱是离散的（区间频谱间隔为$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$, 或$f_0=\frac{1}{T}$)
- 信号如果是离散的,采样间隔为t_0,则其频谱是周期的（频谱周期为$\Omega=\frac{2\pi}{t_0}$或$F=\frac{1}{t_0}$)
- 信号如果是离散周期的，采样间隔为t_0,周期为T,则其频谱也是离散周期的(离散的频谱间隔为$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$,周期为$\Omega=\frac{2\pi}{t_0}$)
- 如果在时域周期T内有N个样本点：$N=\frac{T}{t_0}$,则在频域周期Ω内也有N个频谱点：$\frac{\Omega}{\omega_0}=\frac{\mathrm{F}}{\mathrm{f}_0}=\frac{1}{\mathrm{t}_0}/\frac{1}{\mathrm{T}}=\frac{\mathrm{T}}{\mathrm{t}_0}=\mathrm{N}$
- 并且$f_0t_0=\frac{t_0}{T}=\frac{1}{N}$, $TF=\frac{T}{t_0}=N$

2.2 线性系统-离散傅里叶变换（选学）

- 周期离散信号的傅里叶变化推导如下
- 输入信号$x_T(t)$,然后通过梳状函数$comb(t)$将其离散化为$x(t)=x_T(t)comb(t)=x_T(t)\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta(t-mt_0)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_T(mt_0)\delta(t-mt_0)$
- 由于$x(t)$也是周期性的，其n^{th} 个傅里叶系数为：

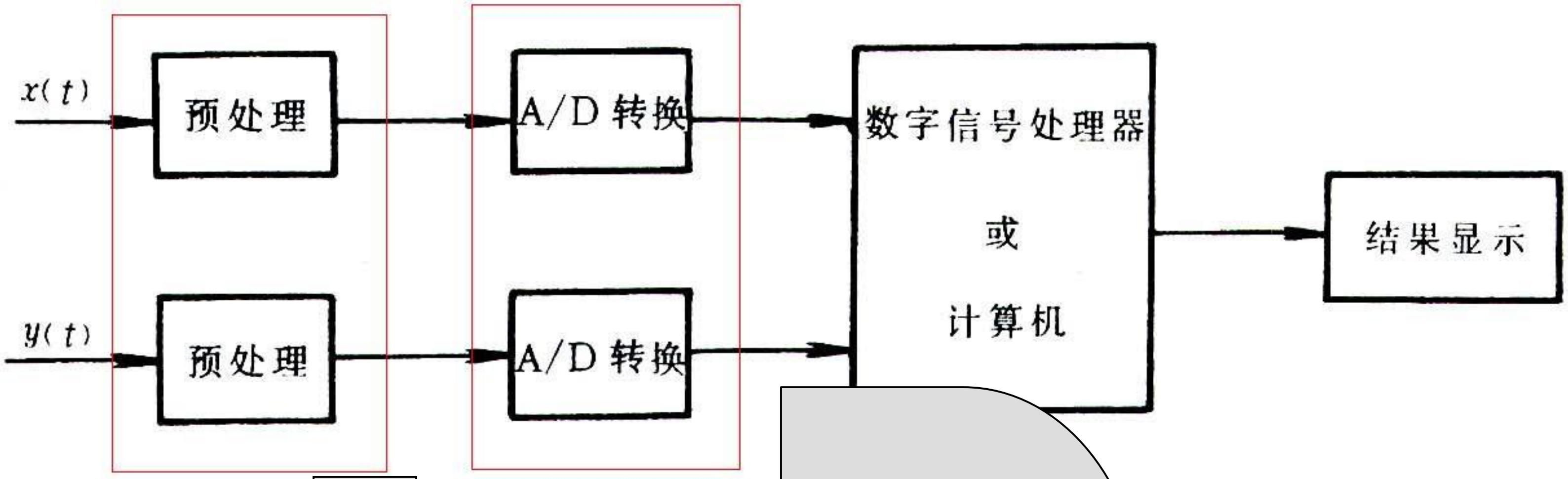
$$X[n]=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-j2\pi nf_0t}dt=$$

$$\frac{1}{T}\int_T \left[\sum_{m=-\infty}^{\infty}x_T(mt_0)\delta(t-mt_0)\right] e^{-j2\pi nf_0t}dt=$$

$$\frac{1}{T}\sum_{m=0}^{N-1}x_T(mt_0)\int_T \delta(t-mt_0)e^{-j2\pi nf_0t}dt=\frac{1}{T}\sum_{m=0}^{N-1}x_T(mt_0)e^{-j2\pi nf_0mt_0}=$$

$$\frac{1}{T}\sum_{(m=0)}^{(N-1)}x[m]e^{-\frac{j2\pi nm}{N}}\ (n=0,1,\cdots,N-1)$$

2.3 连续时间信号-数字信号处理的基本步骤



1）电压幅值调理，以适宜采样。
2）滤波，以提高信噪比。
3）隔离信号中的直流分量。
4）调制解调。

模拟信号经采样、量化并转化为二进制

2.3 连续时间信号-信号数字化出现的问题

◆数字信号处理：模拟信号 → 数字信号

采样和截断

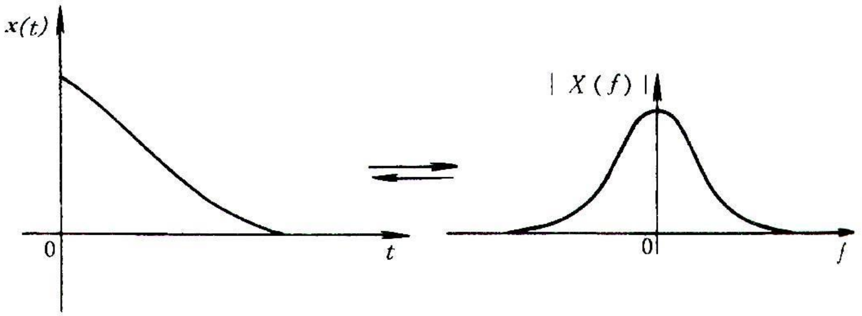


图 5-2　原模拟信号及其幅频谱

采样是用一个等时距的周期脉冲序列（或采样函数）s(t)去乘原模拟信号x(t)。时距T_s称为采样间隔，$1/T_s=f_s$称为采样频率

2.3 连续时间信号-典型的多媒体信号的采样

◆音频信号的采样

- Speech（语音）：400hz-3500hz, 8k采样率，最新的Codec2可以压缩到700bit/s
- 22.05Khz（FM广播），44.1khz（CD)，48khz
- WAV格式的音频文件大小：44.1khz（采样率）×16bit（采样精度）×2（双声道）×播放时长
- GSM:6.5kbps, WCDMA &TD: AMR: 6.6kbps, CDMA2000: 8kbps, 8.55kbps

◆图像信号的采样

- 图像的采样频率必须大于或等于源图像最高频率分量的两倍
- 640*480分辨率的图像，表示由640*480=307200个像素点组成

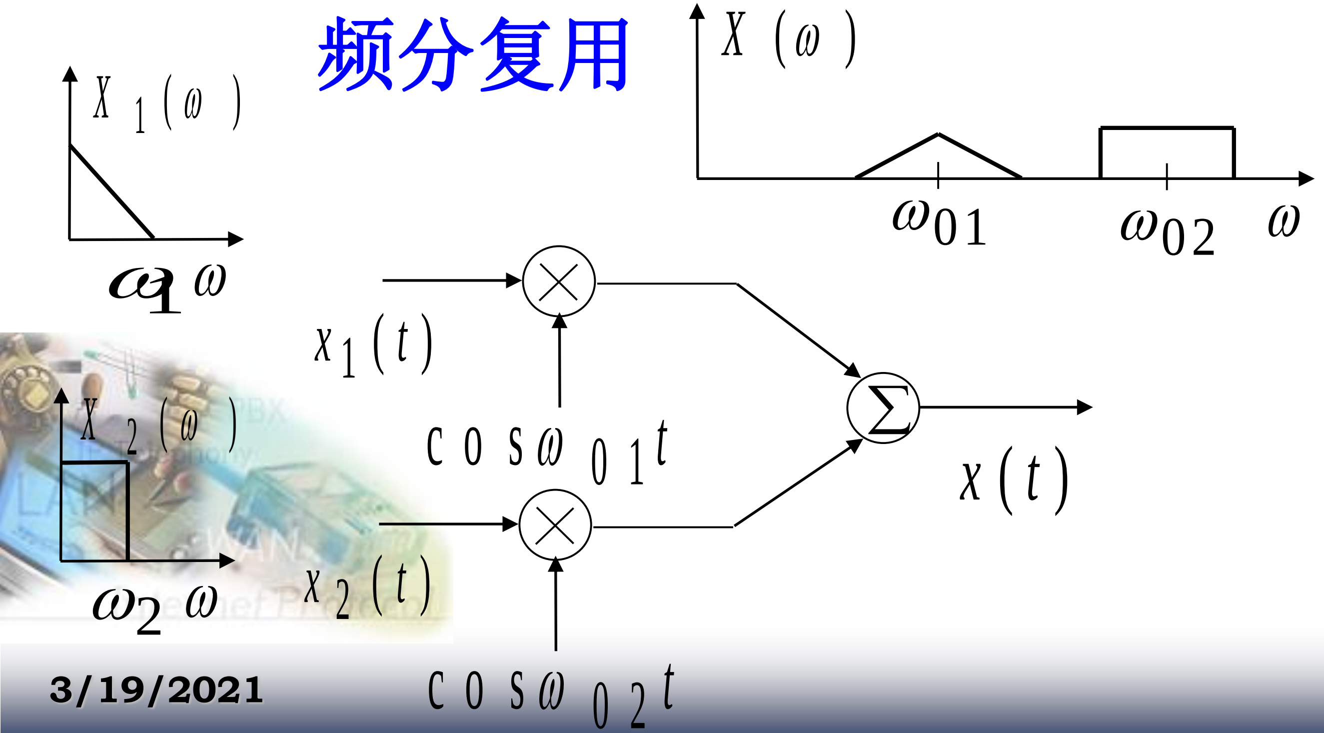
◆视频信号的采样，标清（SDTV)

- NTSC制式：525行，858点/行，30帧/秒，(720*480)，采样率=?

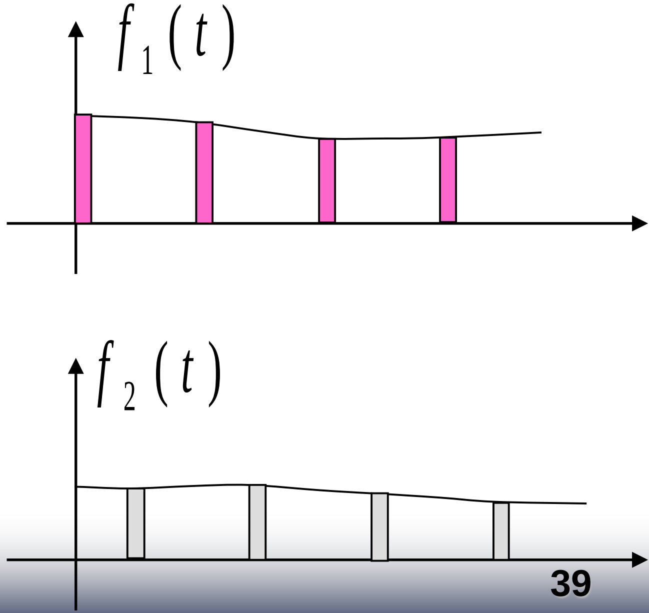
调制定理：把信号搬移到不同的频段来实现频分多路通信。（频分复用）

取样定理（抽样定理）：利用连续信号在等时间间隔上的瞬时值（样本值）来表示和恢复原信号，实现时分复用。也是连续信号与离散信号之间相互转换的理论依据。

频分复用



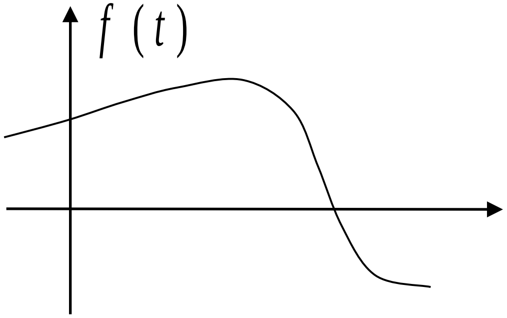
时分复用

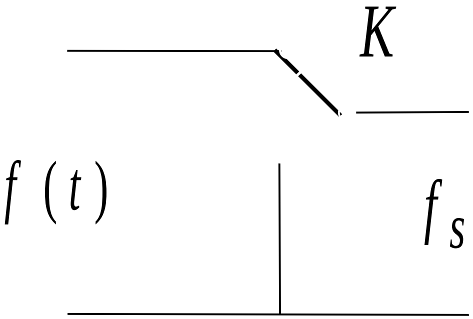


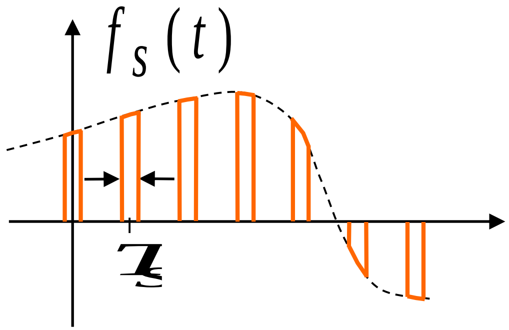
2.3 连续时间信号-**时域取样**

抽样：利用取样脉冲序列 $s(t)$从连续时间信号 $f(t)$中抽取一系列离散的样值的过程。

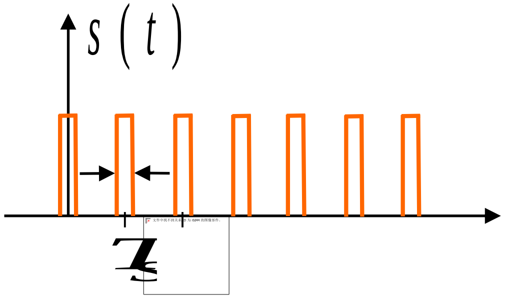
取样后得到的离散信号称之为**取样信号**。





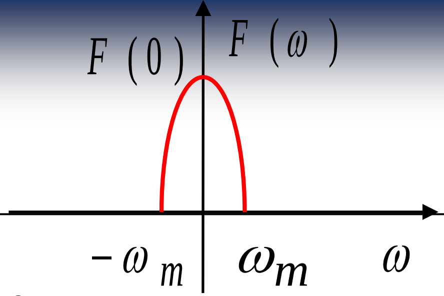


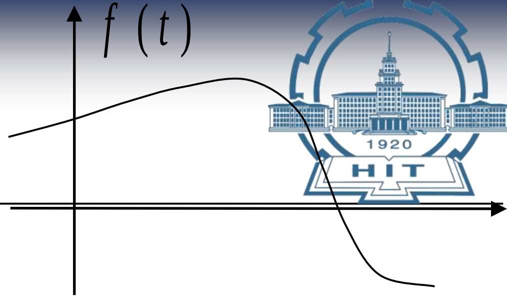
取样脉冲序列也称为开关函数



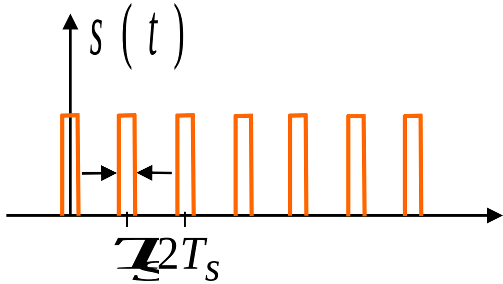
自然取样函数

$$f_s(t) = f(t) \cdot s(t)$$

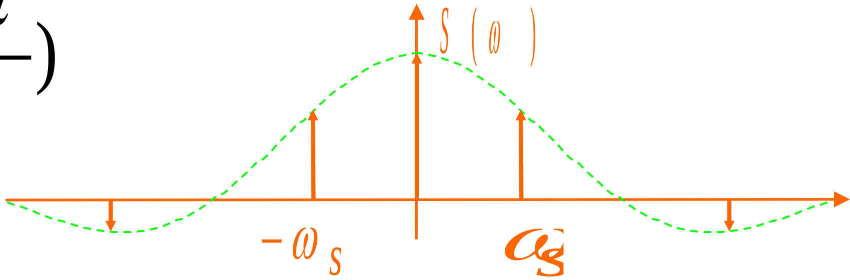




$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_s t} \leftrightarrow S(\omega) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n \delta(\omega - n\omega_s)$$

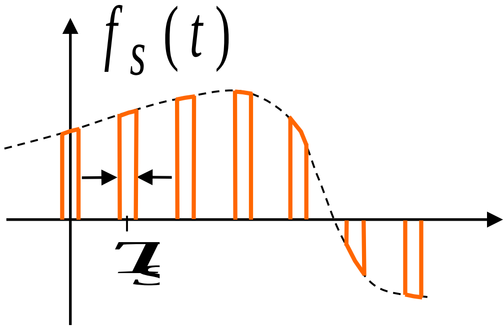


其 中 $\omega_s = \dfrac{2\pi}{T_s}$ $\qquad F_n = \dfrac{\tau}{T_s} Sa(\dfrac{n\omega_s\tau}{2})$

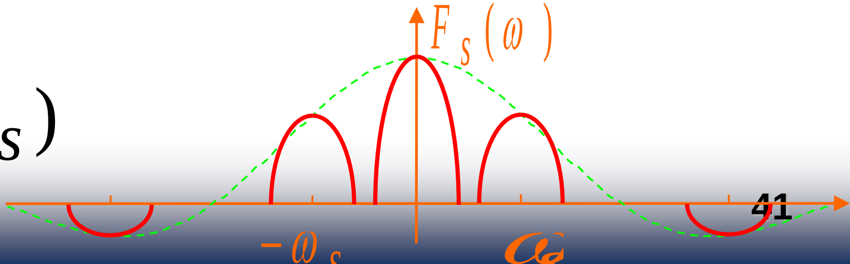


由频域卷积定理

$$F_s(\omega) = \frac{1}{2\pi} F(\omega) * S(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n F(\omega - n\omega_s)$$

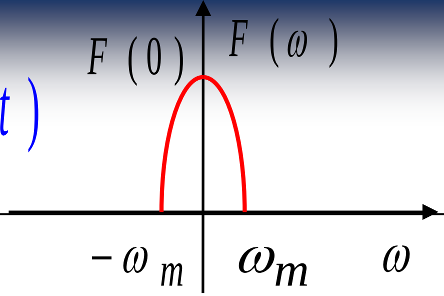


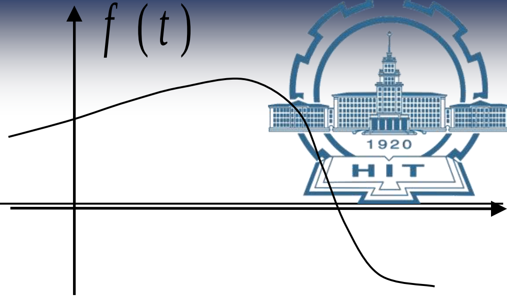
$$= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Sa(\frac{n\omega_s\tau}{2}) F(\omega - n\omega_s)$$



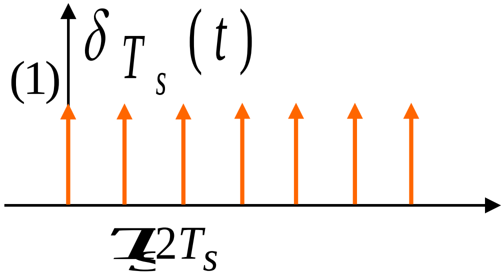
理想取样

$$s(t) = \delta_{T_s}(t)$$

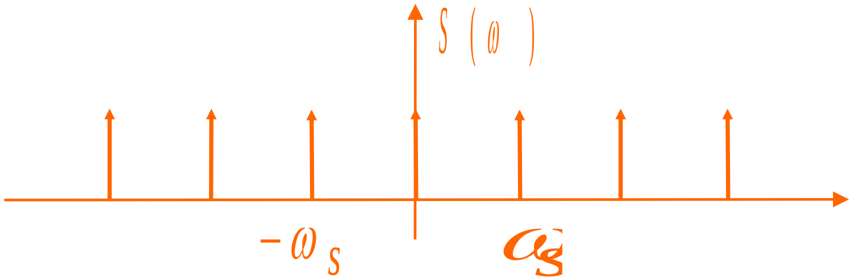




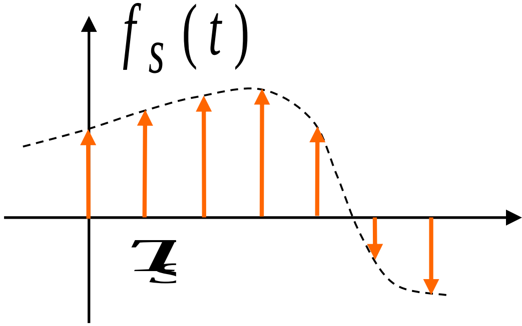
$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s)$$



$$S(\omega) = \omega_s \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_s) = \omega_s \delta_{\omega_s}(\omega)$$

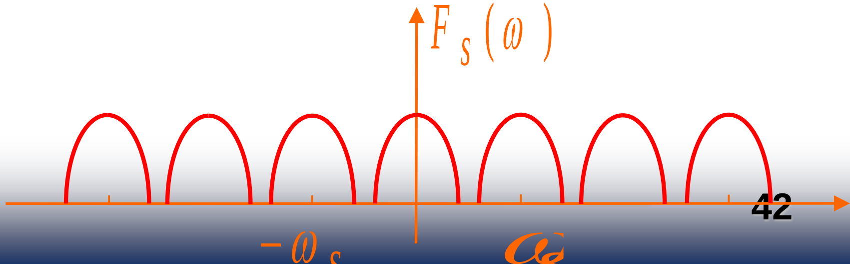


$$f_s(t) = f(t) \cdot \delta_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t - nT_s)$$



$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s)$$

$$F_s(\omega) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(\omega - n\omega_s)$$



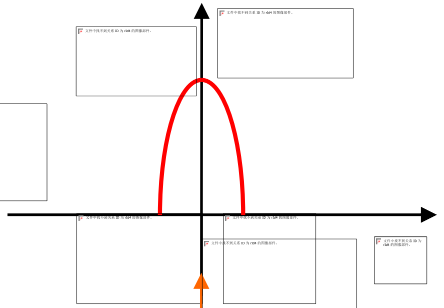
2.3 连续时间信号-**时域取样定理**

一个在 频谱区间( )以外为零的频带有限信号(带限信号) ，可以唯一地由其均匀时间间隔 上的取样值 确定。

当取样频率 大于或等于信号带宽的两倍时，可以从 中恢复原信号。

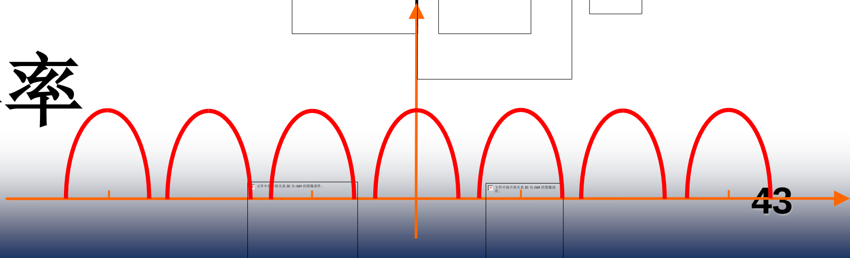
可见，取样定理必须满足两个条件：

1. 必须为带限信号，即在 时，其频谱



2. 取样频率不能过低，必须满足

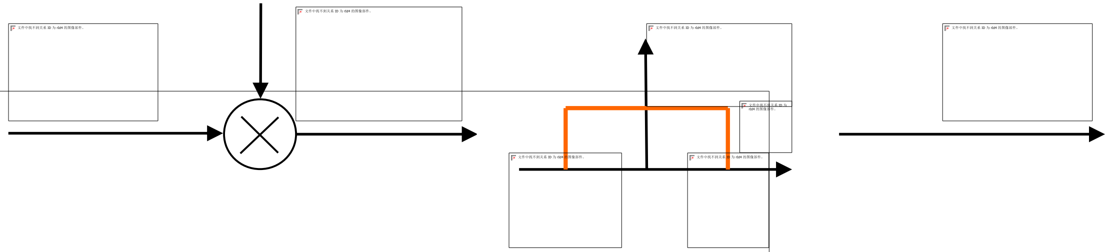
定义 为奈奎斯特取样率



2.3 连续时间信号-**信号的恢复**

从频域的角度来看，可以通过理想低通滤波器从取样信号　　中恢复原来的连续信号　。

从时域的角度分析：



这里

$$f_S(t) = f(t)\delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_S)\delta(t - nT_S)$$

故

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)\delta(t - nT_s) * Sa(\omega_m t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_s)Sa[\omega_m(t - nT_s)]$$

得 $$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_S)Sa[\omega_m t - n\pi] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_S)Sa[\pi f_S(t - n\pi)]$$

可见，任意信号可以分解为无穷多个取样函数的代数和。

能量信号$f(t)$的总能量与取样值$f(nT_s)$的关系：

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t)dt = T_s \sum f^2(nT_s)$$

时域采样

时域截断

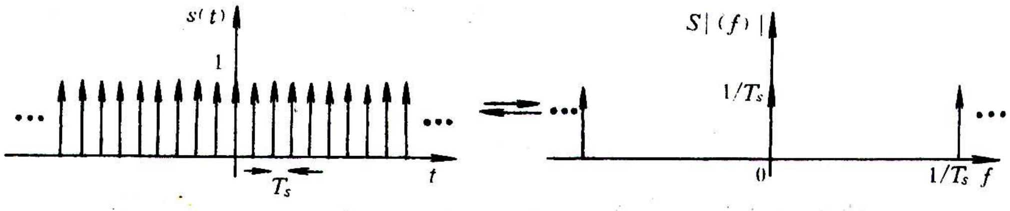


图 5-3　采样函数及其幅频谱

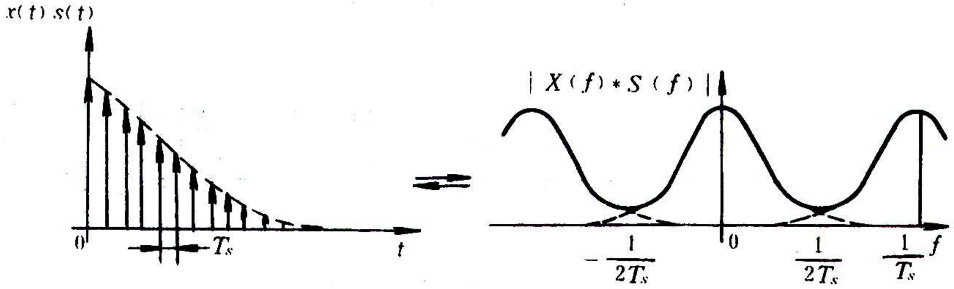


图 5-4　采样后信号及其幅频谱

图 5-5　时窗函数及其幅频谱

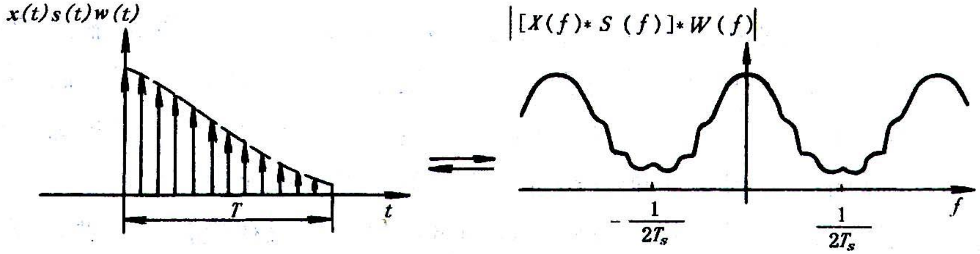


图 5-6　有限长离散信号及其幅频谱

2.3 连续时间信号-频域采样

◆频域采样形成频域函数离散化，相应地把其时域函数周期化了

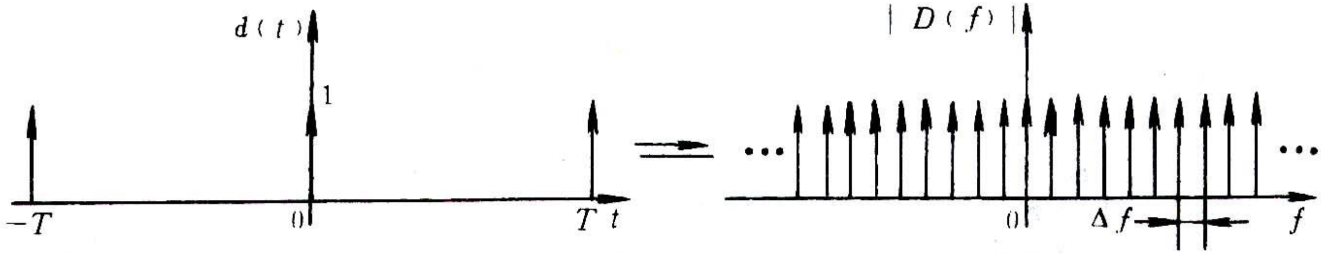


图 5-7 频域采样函数及其时域函数

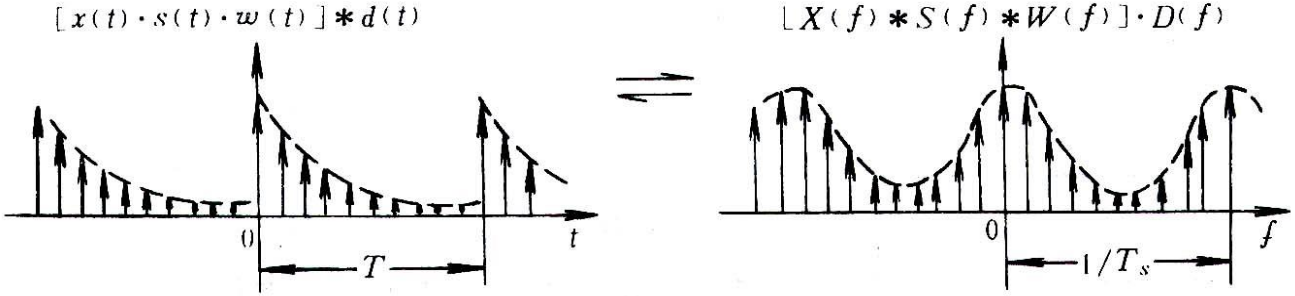


图 5-8 DFT 后的频谱及其时域函数 $x(t)_p$

信号数字化出现的问题——时域采样

- ◆采样是把连续时间信号变成离散时间序列的过程，大部分为等间距地取点。而从数学处理上看，则是用采样函数去乘连续信号。
- ◆依据 FT的卷积特性：时域相乘就等于频域做卷积
- ◆依据δ函数的卷积特性：频域作卷积就等于频谱的周期延拓
- ◆长度为T的连续时间信号x(t)，从t=0点开始采样，得到离散时间序列x(n)为

文件中找不到关系 ID 为 rId4 的图像部件。

信号数字化出现的问题——时域采样(续1)

$$x(n) = x(nT_s) = x(n/f_s) \qquad n = 0,1,2\cdots N-1$$

$$x(nT_s) = x(t)\big|_{t=nT_s}$$

$T_s \rightarrow$ 采样间隔；

$N \rightarrow$ 序列长度，$N = T/T_s$

$f_s \rightarrow$ 采样频率，$f_s = 1/T_s$

注意：采样间隔的选择是个重要的问题！

过小 → 工作量会很大

过大 → 丢失有用信息

信号数字化出现的问题——时域采样(续2)

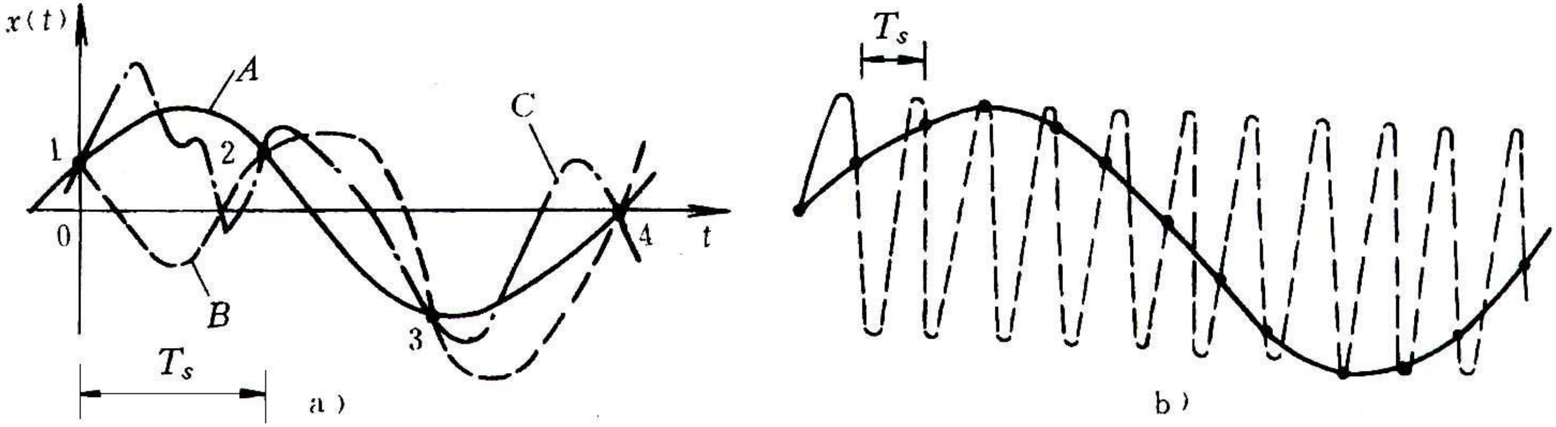


图 5-9　混叠现象

由于采样频率过低造成的混叠现象

信号数字化出现的问题——混叠

◆**定义：** 在频域中，如果平移距离过小，平移后的频谱就会有一部分相互交叠，从而使新合成的频谱与原频谱不一致，因而无法准确地恢复原时域信号，这种现象称为混叠。

$$s(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)\Longleftrightarrow S(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{r}{T_s}\right)$$

$$x(t)s(t)\Longleftrightarrow X(f)*S(f)$$

$$X(f)*S(f)=X(f)*\frac{1}{T_s}\sum_{r=-\infty}^{\infty}\delta\left(f-\frac{r}{T_s}\right)$$

$$=\frac{1}{T_s}\sum_{r=-\infty}^{\infty}X\left(f-\frac{r}{T_s}\right)$$

注意：将原频谱X(f)依次平移1/Ts个采样脉冲对应的频域序列点上，然后全部叠加而成

信号数字化出现的问题——混叠(续1)

◆混叠产生原因

- 采样频率fs太低
- 原模拟信号不是有限带宽的信号，即 $f_h \to \infty$

◆措施

- 对非有限带宽的模拟信号，在采样之前先通过模拟低通滤波器滤去高频成分，使其成为带限信号。这种处理称为抗混叠滤波预处理。
- 满足采样定理

$$f_s > 2f_h$$

信号数字化出现的问题——采样定理

◆采样定理：为了不产生频率混叠，应使采样频率大于带限信号的最高频率的2倍，即

$$f_s > 2f_h$$

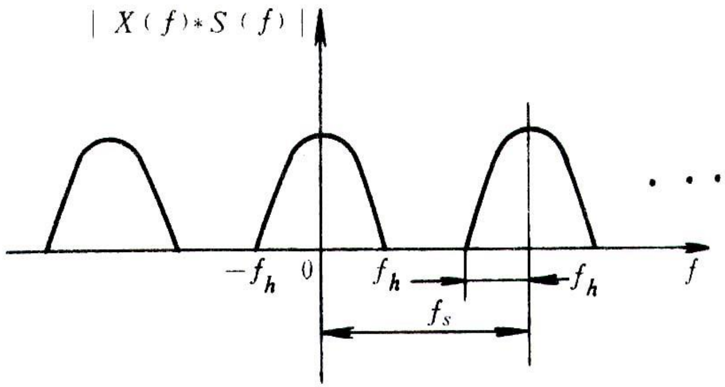


图 5-10 不产生混叠的条件

注意：在实际工作中，考虑实际滤波器不可能有理想的截止特性，在其截止频率 fc 之后总有一定的过渡带，通常取 $f_s = (3 \sim 4) f_c$

信号数字化出现的问题——频域采样、时域周期延拓

- 频域采样：是使频率离散化，在频率轴上等间距地取点的过程。而从数学处理上看，则是用采样函数去乘连续频谱。
- 依据 FT的卷积特性——频域相乘就等于时域做卷积
- 依据δ函数的卷积特性——时域作卷积就等于时域波形的周期延拓
- *频域离散化，无疑已将时域信号“改造”成周期信号*
- 频域采样和时域采样相似，在频域中用脉冲序列乘信号的频谱函数。

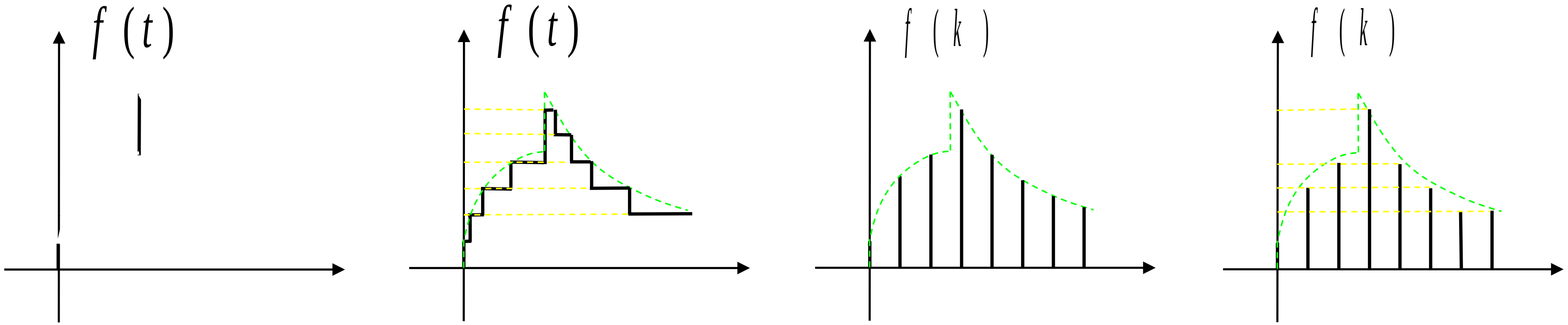
离散信号与系统

- **离散时间系统**
  - 传输和处理离散时间信号的系统
  - 数字计算机、数字通信系统、数字控制系统
  - 精度高、抗干扰能力强、可集成化程度高
- **与连续时间系统的联系与区别**
  - 数学模型：差分方程
  - 分析方法：时域、频域、Z域分析法
  - 系统响应：零输入响应、零状态响应
- **离散信号与系统的时域分析**
  - 信号和系统的整个分析过程都在离散时间域内进行

2.4 离散时间信号

离散时间信号的时域描述

模拟信号	量化信号	离散信号	数字信号



时间取值：				
	连续	连续	不连续	不连续
幅度取值：				
	连续	不连续	连续	不连续

2.4 离散时间信号(续1)

1. 离散信号只在离散的时刻上有定义；

2. 离散信号可以看作是（在满足奈奎斯特抽样率的条件下）对连续信号进行理想抽样的结果，此时

文件中找不到关系 ID 为 rId4 的图像部件。
文件中找不到关系 ID 为 rId4 的图像部件。

3. 离散信号在数学上可以表示为数值的序列，为了方便，序列 $f(k)$ 与序列的第 k 个值两者在符号上不加区别；

4. 序列不一定是时间的函数。

2.4 离散时间信号(续2)

离散信号的表示方法

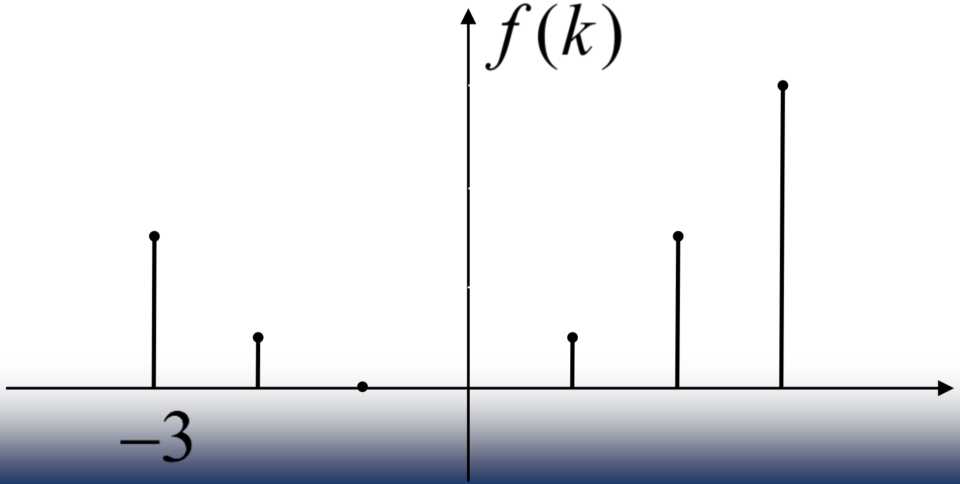
1. 解析式

$$f(k)=\frac{k(k+1)}{2},\quad k=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$$

2. 序列形式

$$f(k)=\{\cdots 3,1,0,\underline{0},1,3,6,\cdots\}$$

3. 图形



2.4 离散时间信号(续3)-序列的分类

1. 双边序列

序列 $f(k)$ 对所有的整数 k 都存在确定的非零值。

2. 单边序列

有始序列（右边序列）： 当$k \le k_1$时，$f(k)=0$

$k_1 \ge 0$的 有 始 序 列 称 为 因 果 序 列

有终序列（左边序列）： 当$k \ge k_2$时，$f(k)=0$

$k_2 \le 0$的 有 终 序 列 称 为 反 因 果 序 列

3. 有限序列

序列 $f(k)$ 仅在 $k_1 \le k \le k_2$ 区间有非零确定值。

2.4 离散时间信号(续3)-离散信号的一些基本运算

1. 序列相加： 两个序列同序号的数值逐项对应相加。

$$f(k) = f_1(k) + f_2(k)$$

2. 序列相乘： 两个序列同序号的数值逐项对应相乘。

$$f(k) = f_1(k) \cdot f_2(k)$$

例：已知序列

$$f_1(k) = \begin{cases} 0 & k < -1 \\ 2^{-k} + 5 & k \ge -1 \end{cases}$$

$$f_2(k) = \begin{cases} 2^{k} & k < 0 \\ k + 2 & k \ge 0 \end{cases}$$

求 $f_1(k) + f_2(k)$ 和 $f_1(k) \cdot f_2(k)$

$$f_1(k)=\begin{cases}0 & k<-1\\ 2^{-k}+5 & k\geq -1\end{cases}\qquad f_2(k)=\begin{cases}2^k & k<0\\ k+2 & k\geq 0\end{cases}$$

解： $$f_1(k)=\begin{cases}0 & k<-1\\ 7 & k=-1\\ 2^{-k}+5 & k\geq 0\end{cases}\qquad f_2(k)=\begin{cases}2^k & k<-1\\ 1/2 & k=-1\\ k+2 & k\geq 0\end{cases}$$

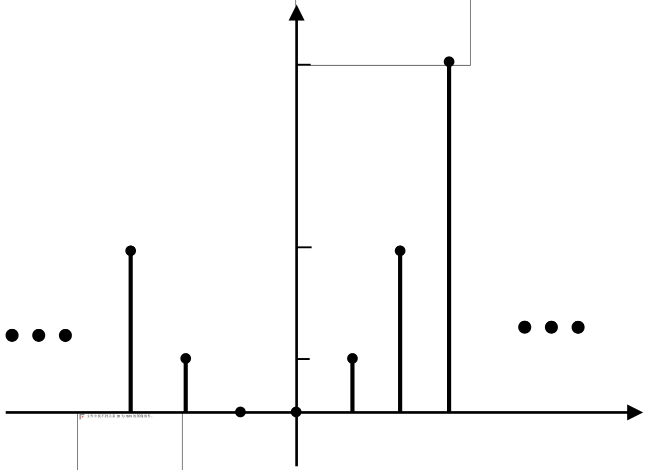
$$f_1(k)+f_2(k)=\begin{cases}2^k & k<-1\\ 15/2 & k=-1\\ 2^{-k}+k+7 & k\geq 0\end{cases}$$

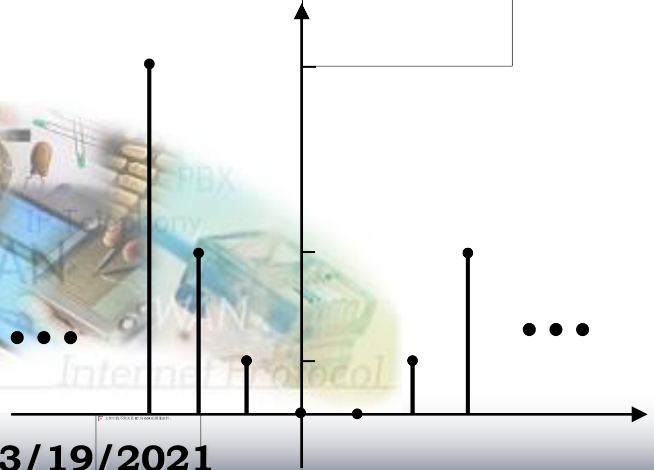
$$f_1(k)\cdot f_2(k)=\begin{cases}0 & k<-1\\ 7/2 & k=-1\\ k2^{-k}+2^{-k+1}+5k+10 & k\geq 0\end{cases}$$

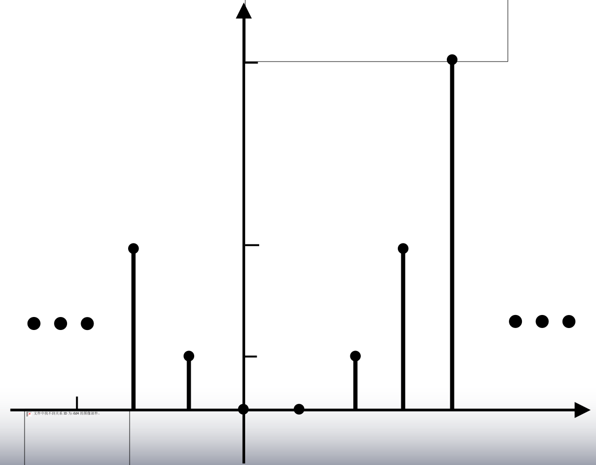
3. 序列移位： $f(k)$ 右移m位成 $f(k-m)$, 左移m位成 $f(k+m)$

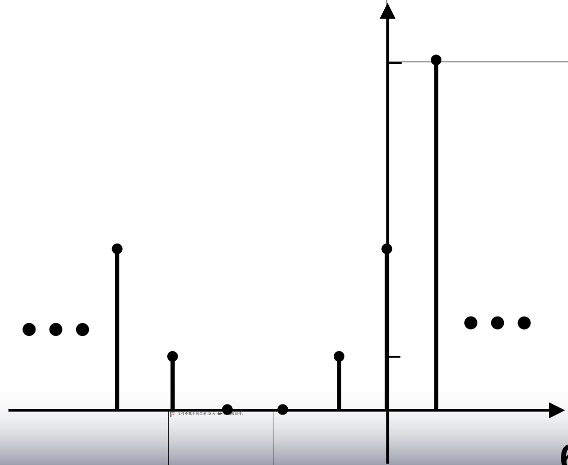
4.序列折迭： $f(-k)$

例： 已知序列









5. 序列差分(对应于连续信号的微分)

一阶前向差分 $\Delta f(k) = f(k+1) - f(k)$

二阶前向差分 $\Delta[\Delta f(k)] = \Delta^2 f(k) = \Delta f(k+1) - \Delta f(k)$

$= f(k+2) - 2f(k+1) + f(k)$

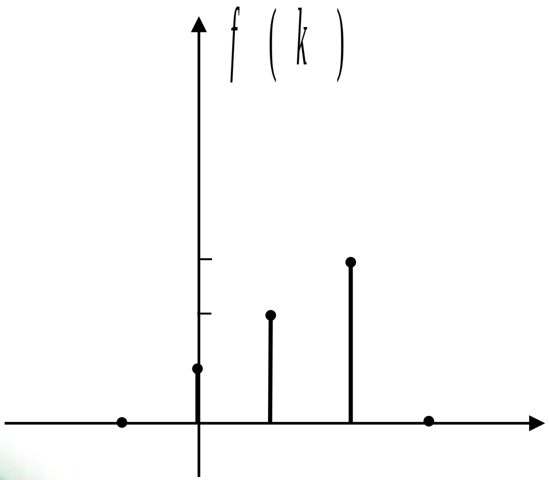
一阶后向差分 $\nabla f(k) = f(k) - f(k-1)$

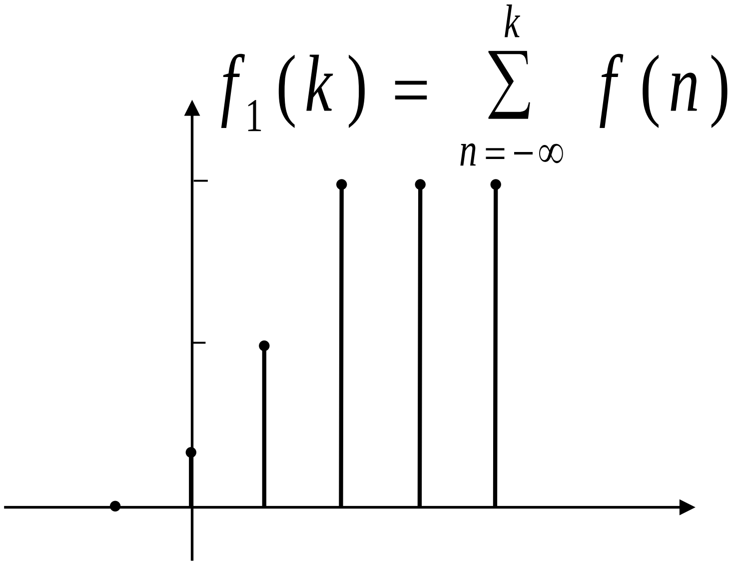
二阶后向差分 $\nabla[\nabla f(k)] = \nabla^2 f(k) = \nabla f(k) - \nabla f(k-1)$

$= f(k) - 2f(k-1) + f(k-2)$

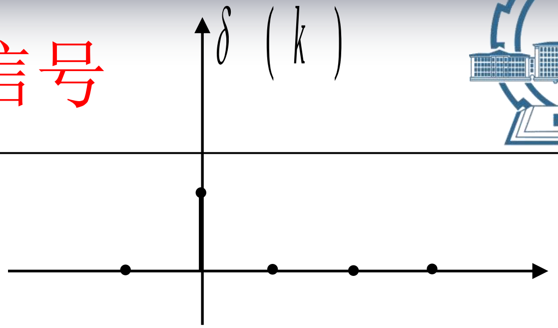
6. 序列的求和（累加） (对应于连续信号的积分)

$$f_1(k) = \sum_{n=-\infty}^{k} f(n)$$



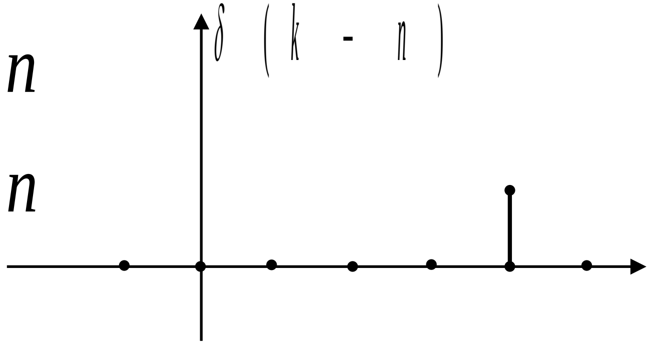


2.4 离散时间信号(续4)-常用的离散信号



1. 单位函数 $\delta(k)$

$$\delta(k)=\begin{cases}1 & k=0\\ 0 & k\neq 0\end{cases}\qquad \delta(k-n)=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$



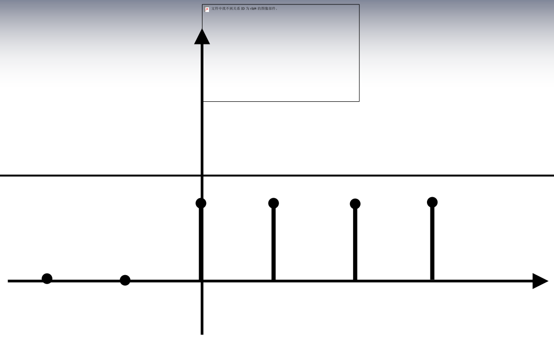
(1) 筛选特性 $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k)\delta(k-n)=f(n)$

(2) 加权特性 $f(k)\delta(k-n)=f(n)\delta(k-n)$

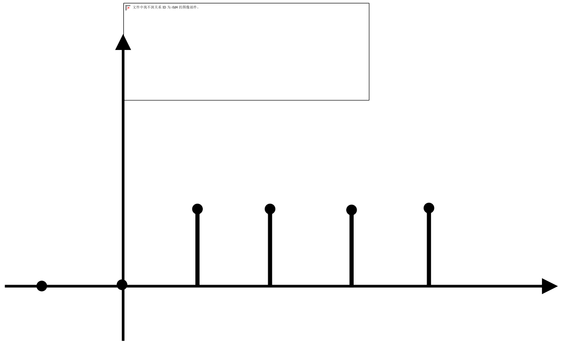
应用此性质，可以把任意离散信号 $f(k)$ 一系列延时单位函数的加权和，即

$$f(k)=\cdots+f(-2)\delta(k+2)+f(-1)\delta(k+1)+f(0)\delta(k)+f(1)\delta(k-1)+\cdots=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(n)\delta(k-n)$$

2. 单位阶跃序列



截取特性



对比：

3. 斜变序列 $x(k)=k\varepsilon(k)$

4. 正弦序列

类似地，还可以定义余弦序列 $x(k)=A\cos(\Omega_0 k+\varphi)$

正弦序列不一定是周期序列

当 $\dfrac{2\pi}{\Omega_0}=N$ 是正整数时，正弦序列为周期序列，且周期为 N。

当 是有理数时，正弦序列为周期序列，且周期为 $N=m\dfrac{2\pi}{\Omega_0}$。

当 是无理数时，正弦序列为非周期序列。

5. 指数序列 $f(k)=Ae^{\beta k}$

其中，A 和 β 可以是实常数，也可以是复数。

(1) 若 A 和 β 均为实数，设 $a=Ae^{\beta}$

则 $f(k)=Aa^{k}$ 为实指数序列；

(2) 若 A=1， $\beta=j\Omega_0$

则 $f(k)=e^{j\Omega_0 k}$ 为虚指数序列；

根据欧拉公式，上式可写成

$$f(k)=e^{j\Omega_0 k}=\cos\Omega_0 k+j\sin\Omega_0 k$$

可见，虚指序列的实部和虚部都是正弦序列。当满足 $\dfrac{2\pi}{\Omega_0}$ 为有理数时，虚指序列才是周期序列。

2.4 离散时间信号(续5)-卷积

$$y_{zs}(k) = x(k) * h(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h(k-n)$$

称为卷积和或离散卷积。可以证明，其代数运算与卷积积分相同，也服从交换律、分配律和结合律。

显 然 $x(k) = x(k) * \delta(k)$

推 广 $x(k) * \delta(k-k_1) = x(k-k_1)$

$$x(k-k_1) * \delta(k-k_2) = x(k-k_1-k_2)$$

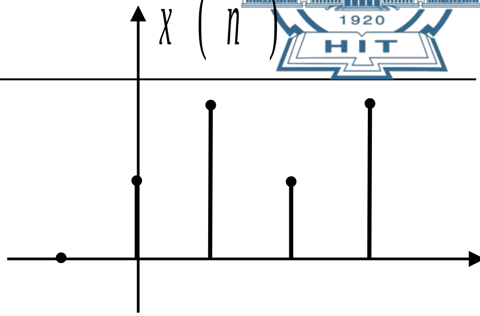
若 $k < k_1$ 时，$x(k) = 0$; $k < k_2$ 时，$h(k) = 0$; 确定求和限的一般公式为

$$y_{zs}(k) = \sum_{n=k_1}^{k-k_2} x(n)h(k-n) \cdot \varepsilon(k-k_1-k_2)$$

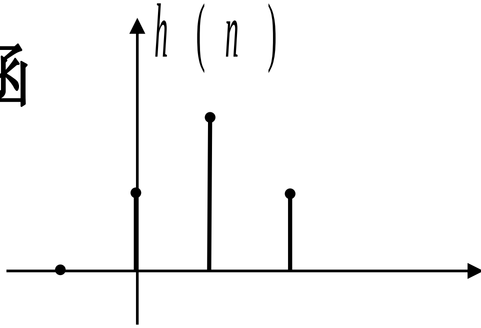
2.4 离散时间信号(续6)-卷积计算

步骤： **1. 换元；2. 折叠** $h(-n)$**；3. 移位** $h(k-n)$**；**

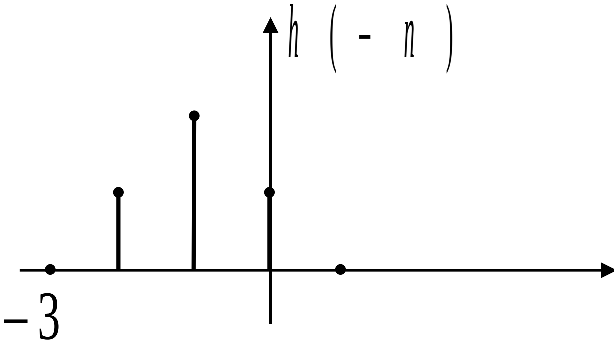
4. 相乘 $x(n)h(k-n)$**； 5. 求和。**



例5－4－1 设激励信号 $x(k)=\{\underline{1},2,1,2\cdots\}$，单位函数响应 $h(k)=\{\underline{1},2,1\}$，试求零状态响应 $y_{zs}(k)$。



解：$y_{zs}(k)=\sum\limits_{n=0}^{k}x(n)h(k-n)$

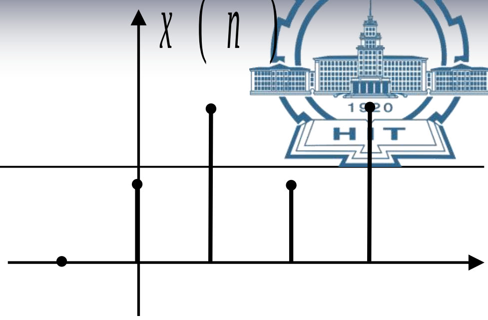


当 $k<0$ 时，$y_{zs}(k)=0$

$$y_{zs}(0)=\sum_{n=0}^{0}x(n)h(0-n)=x(0)h(0)=1\times1=1$$

$$y_{zs}(1)=\sum_{n=0}^{1}x(n)h(1-n)=x(0)h(1)+x(1)h(0)$$

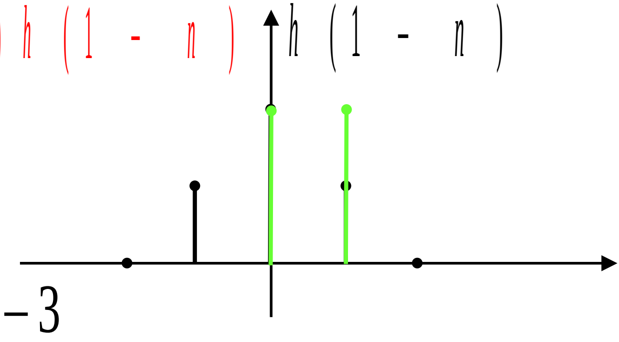
$$=1\times 2+2\times 1=4$$



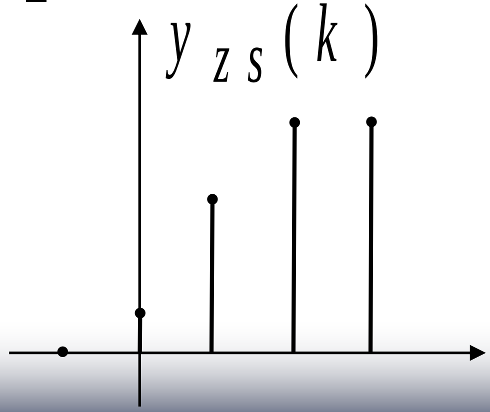
$$y_{zs}(2)=\sum_{n=0}^{2}x(n)h(2-n)$$

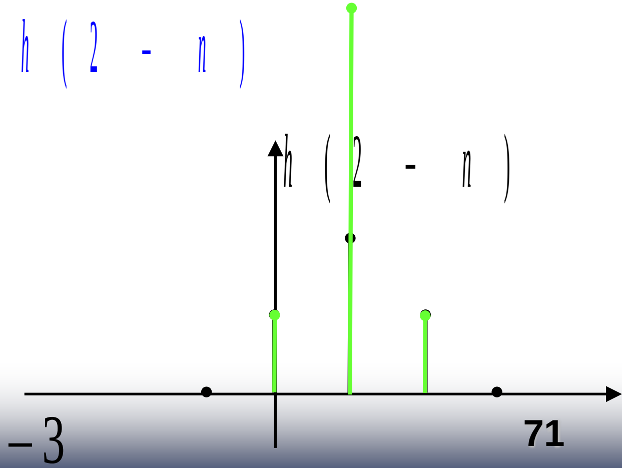
$$=x(0)h(2)+x(1)h(1)+x(2)h(0)$$

$$=1\times1+2\times2+1\times1=6$$



类此，可得 $y_{zs}(k)=\{1,4,6,6\cdots\}$





一维离散的傅立叶变换时:

$$F(u)=\frac{1}{N}\sum_{i=0}^{N-1} f(i)e^{-j2\pi ui/N} \quad \text{其中} \quad u=0,1,2,\cdots,N-1$$

$$f(i)=\sum^{N-1} F(u)e^{j2\pi ui/N} \quad \text{其中} \quad i=0,1,2,\cdots,N-1$$

于是，傅氏变换对:

$$F(u,v)=\frac{1}{MN}\sum_{x=0}^{M-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)e^{-j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中 $\begin{cases} u=0,1,2,\cdots,M-1 \\ v=0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$

$$f(x,y)=\sum_{u=0}^{M-1}\sum_{v=0}^{N-1} F(u,v)e^{j2\pi(\frac{ux}{M}+\frac{vy}{N})}$$

其中 $\begin{cases} x=0,1,2,\cdots,M-1 \\ y=0,1,2,\cdots,N-1 \end{cases}$

二维离散余弦变换还可以写成:

$$C(u,v)=\frac{2E(u)E(v)}{N}\sum_{x=0}^{N-1}\sum_{y=0}^{N-1} f(x,y)[Cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}][Cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}]$$

$$f(x,y)=\frac{2}{N}\sum_{u=0}^{N-1}\sum_{v=0}^{N-1} E(u)E(v)C(u,v)[Cos\frac{(2x+1)u\pi}{2N}][Cos\frac{(2y+1)v\pi}{2N}]$$

其中 $E(u)=E(v)=\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{2} & u=v=0 \\ 1 & \text{其它} \end{cases}$

2.4 离散时间信号-典型的频域变换

- **DFT：离散傅里叶变换**
- **DCT：离散余弦变换**
- **作业：**
  - 读入一段语音信号，对其做离散傅立叶变换和离散余弦变换
  - 读入一幅BMP图像(灰度彩色任意),然后对其做整体的2-d的离散余弦变换和8*8分块的2-d DCT

傅里叶变换之连续与离散