第八章　　动态规划

Dynamic Programming

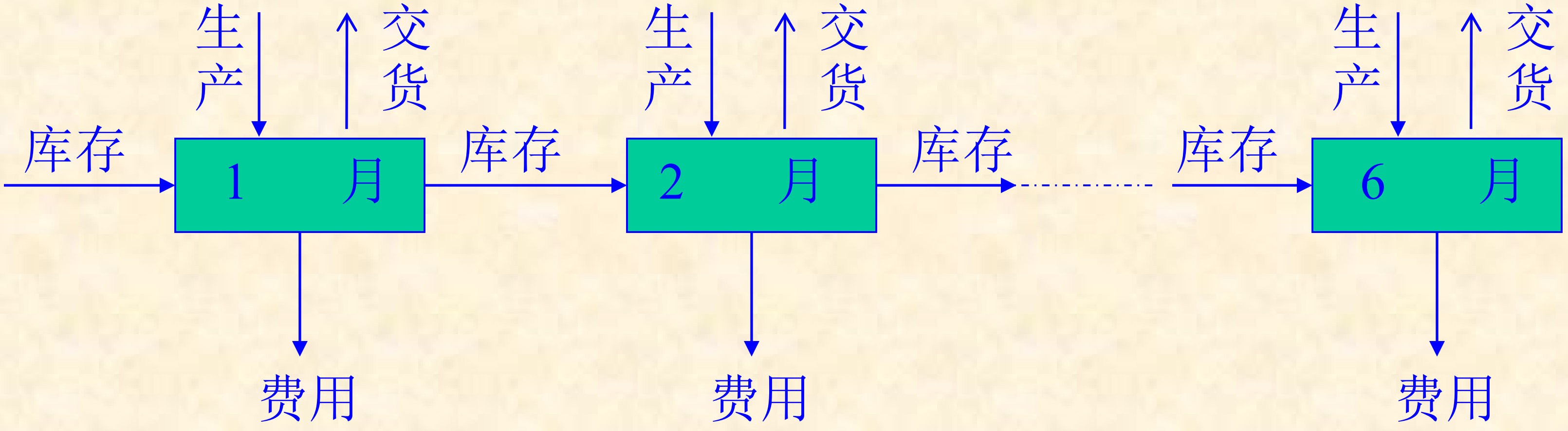
动态规划（DP）是运筹学的一个分支，解决多阶段决策问题的一种方法。1951年美国数学家贝尔曼（R . Bellman）等提出“最优化原理”，创建动态规划学科。主要应用于工程技术、经济、工业生产、最优控制等问题。

8.1　多阶段决策问题

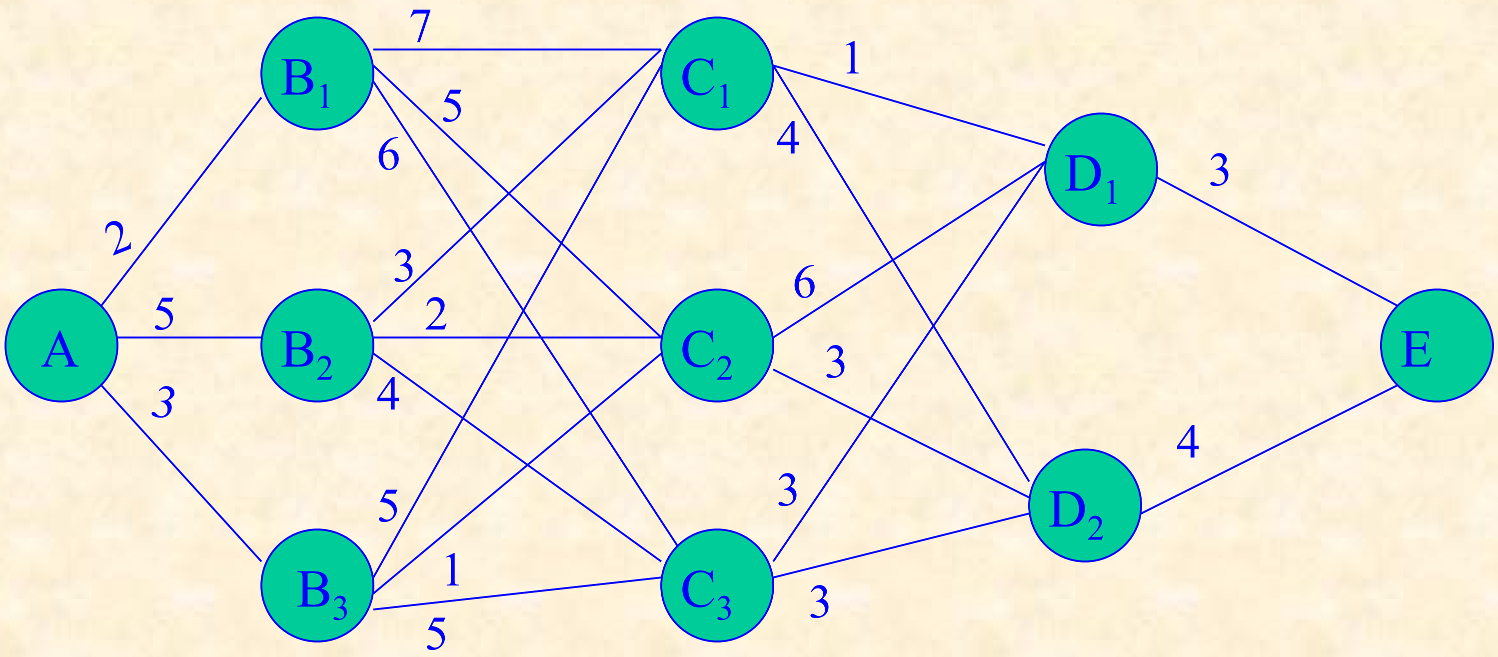
例1：某工厂根据合同要求在未来半年中需提供货物数量如表中所示，表中数字为月底交货数量。该厂的生产能力为每月400件，其仓库的存货能力为3百件。已知每百件货物的生产费用为10千元，在进行生产的月份，工厂要支出固定费用4千元，仓库保管费用为每百件货物每月1千元，假定开始及6月底交货后均无存货，试问每个月应该生产多少件产品，才能既满足交货任务又使总费用最小？

月　份	1	2	3	4	5	6
交货数量（百件）	1	2	5	3	2	1

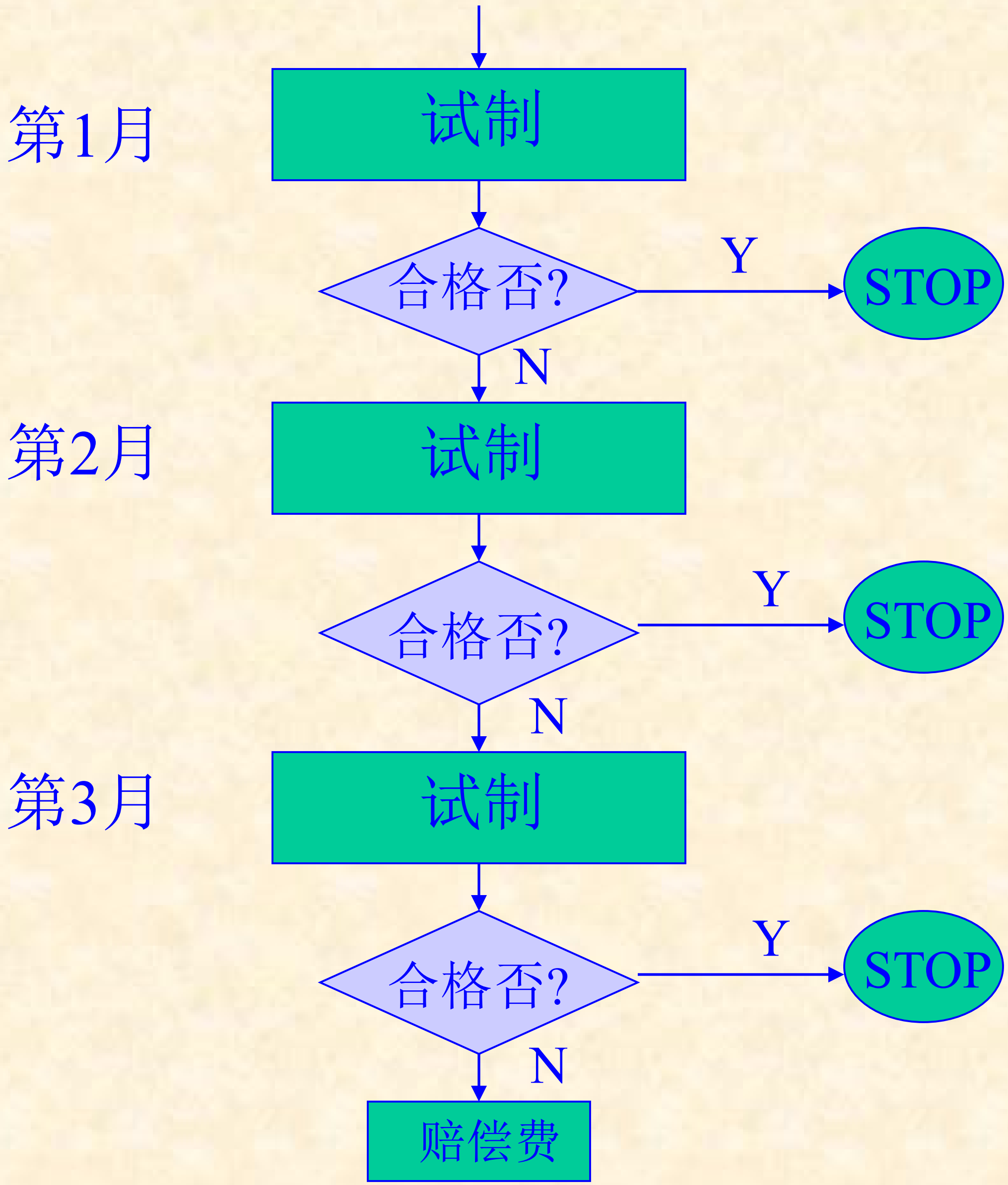
决策过程设计：



例2：由A至E需经B、C、D，问如何行走，路程最短？



例3：公司承担一种新产品试制任务，合同要求三个月内交出一台合格的样品，否则将负担1500元的赔偿费。试制时投产一台成功的概率为1/3，投产一批的准备费用为250元，每台试制费用为100元。若投产一批后全部不合格，可再投产一批试制，但每投产一批需要一个月的周期。问每批应该投产多少台，可使总的费用（包括可能发生的赔偿费用）期望值最小？


第1月
试制
合格否?
Y
STOP
N
第2月
试制
合格否?
Y
STOP
N
第3月
试制
合格否?
Y
STOP
N
赔偿费

多阶段决策问题的界定：

① 决策过程可划分为若干个互相联系的阶段；

② 在每个阶段分别对应着一组可以选取的决策；

③ 当每个阶段决策选定以后，活动过程也随之确定。

♣ 多阶段决策问题表现出明显的时序性，体现出“动态”的特点，是动态规划研究的主要对象。某些静态问题，当采用动态规划的方法求解时，也会使问题的处理变得简单。

8.2 动态规划的基本概念和数学模型

一、动态规划的基本概念

（1）阶段（stage）：指一个活动过程需要做出决策的步数。

k——阶段变量。

（2）状态（state）：某阶段初始状况。既是本阶段决策的出发点，又是上一阶段决策产生的结果。是动态规划中各阶段信息的传递点和结合点。 x_k——第k阶段状态变量。

特征：

① 反映研究对象的演变特征；

② 包含到达这个状态前的足够信息，并具有无后效性；或称决策的相互独立性；

③ 状态变量具有可知性，当决策确定后，到达的状态是可以测知的。

♣ 描述状态所必须使用的变量数，称动态规划的维数。

（3）决策（decision）：指在某阶段从给定的状态出发，决策者从面临的若干种不同的方案中所做出的选择。

决策变量$u_k(x_k) \in D_k(x_k)$——允许决策集合，$u_k(x_k)$取值范围。

要点： ① 决策变量是对活动过程控制的手段；
② 决策变量取值可以是连续型的，也可以是离散型的；
③ 允许决策集合相当于可行域。

（4）策略（policy）与子策略（subpolicy）：各阶段决策组成的序列总体称为策略；从某一阶段开始到过程最终的决策序列称为子策略。

n 阶段策略可记为 $\{u_1(x_1), u_2(x_2), \ldots, u_n(x_n)\}$，
子策略可记为 $\{u_k(x_k), u_{k+1}(x_{k+1}), \ldots, u_n(x_n)\}$。

（5）状态转移律：状态参数变化的规律。从第k阶段的某一状态值x_k出发，当决策变量u_k的取值确定之后，下一阶段的状态值x_{k+1}按某种规律$T(x_k, u_k)$确定。

第k+1阶段状态是第k阶段状态x_k和变量u_k的函数 $x_{k+1} = T(x_k, u_k)$，又称状态转移方程。

说明： ① 当x_k , u_k确定后， x_{k+1} 取值唯一确定，则为确定性多阶段决策问题；

②当x_k , u_k确定后， x_{k+1} 取值为具有某种概率分布的随机变量，则称为随机性多阶段决策问题。

（6）指标函数：决策所产生的效益的度量函数。分如下的几类：

① $v_k\ (x_k, u_k)$ ——阶段指标函数。

② $V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \ldots, x_n, u_n)$ ——过程指标函数。

③ $f(x_k)=\text{opt}\ V_{k,n}$ ——最优指标函数，只与x_k有关。

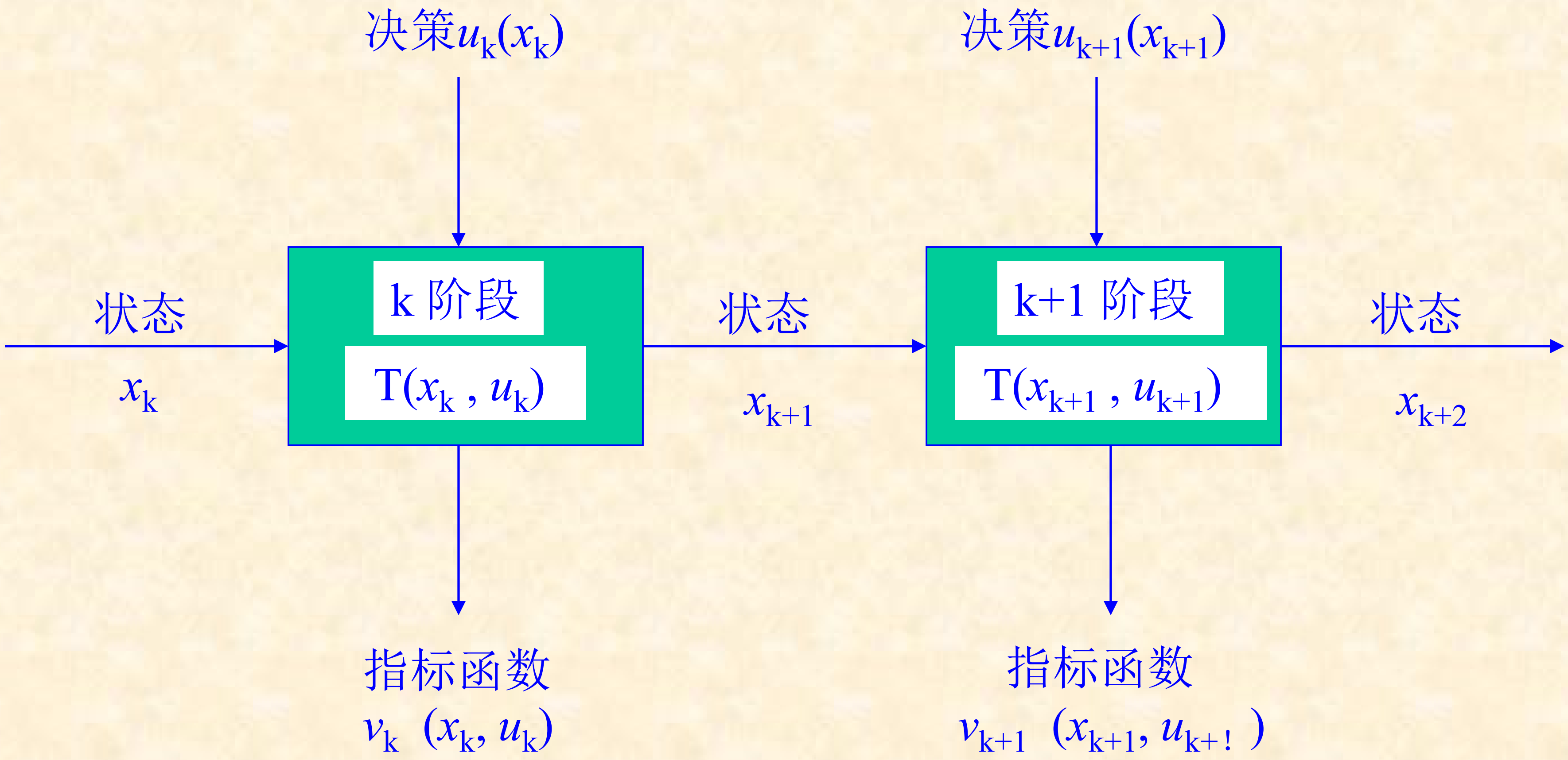
Opt——optimize，可以是max，或者min。

说明：为便于计算，指标函数应具有递推性。

（7）边界条件：对过程最终状态时的效益值表示。即

当 k=n+1时，$f(x_{n+1})=?$

上述基本概念可用下述图示某性表示：



动态规划概念模型示意图

二、最优化原理与动态规划的数学模型

贝尔曼（R.Bellman）原理：作为整个过程的最优策略具有这样性质：无论过去的状态和决策如何，对前面所形成的状态而言，余下的诸决策必构成最优策略。

动态规划的基本方程（递推方程）：

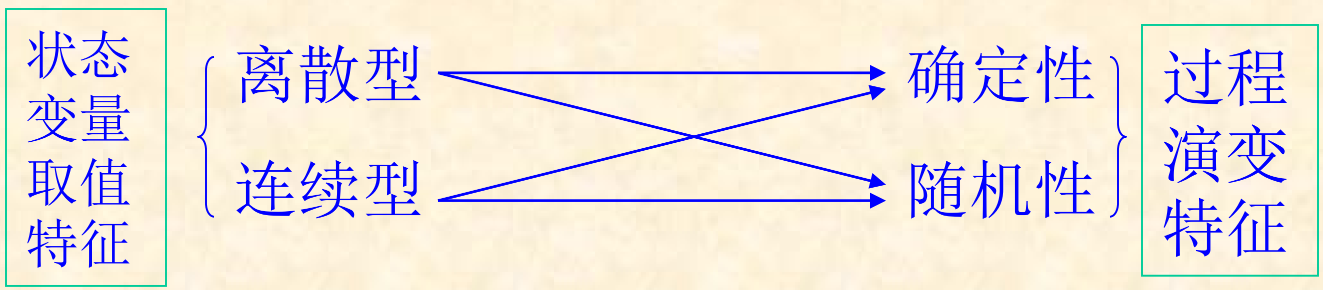
当 $$V_{k,n}=\sum_{i=k}^{n} v_i(x_i,u_i),$$

$$f_k(x_k)=\underset{u_k(x_k)\in D_k(x_k)}{\mathrm{opt}}\{v_k(x_k,u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

当 $$V_{k,n}=\prod_{i=k}^{n} v_i(x_i, u_i),$$

$$f_k(x_k)=\underset{u_k(x_k)\in D_k(x_k)}{\mathrm{opt}}\{v_k(x_k,u_k)\cdot f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

三、动态规划模型的基本分类



- 若阶段数固定，则为定期型；
- 若阶段数不固定，则称为不定期型

四、动态规划问题的模型表述

动态规划模型属于算法类模型，故借助于对其相关概念的定义来表述。内容如下：

（1）阶段数：$k=1,2,\cdots,n$

（2）状态变量：x_k——？

（3）决策变量：u_k——？，允许决策集合$D(x_k)$

（4）状态转移律：$x_{k+1}=T(x_k, u_k)$

（5）阶段指标函数：$v_k(x_k, u_k)$——？

（6）基本方程：$f_k(x_k)=?$

（7）边界条件：$f_{n+1}(x_{n+1})=?$

五、动态规划问题的逆序算法

1. 建立模型：

（1）阶段数：k=1,2,3,4

（2）状态变量：x_k——第k阶段的位置点。

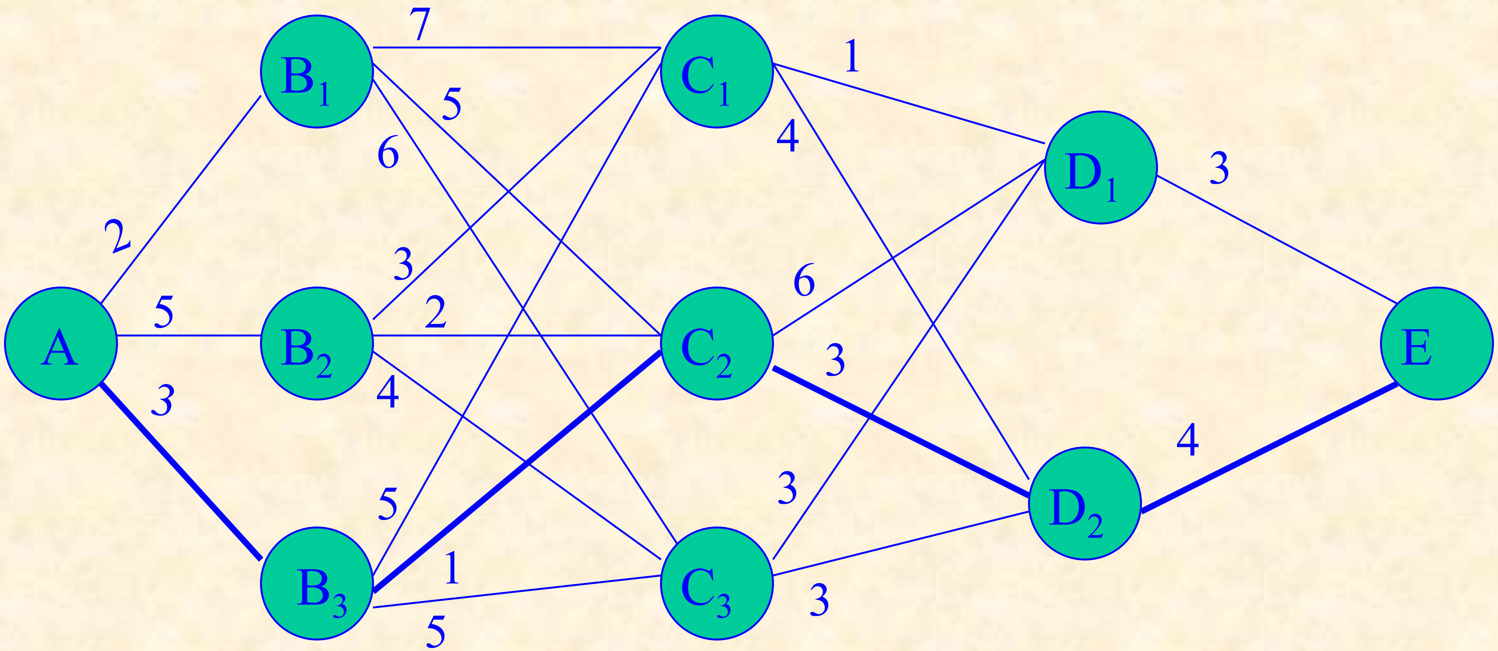
（3）决策变量：u_k——第k阶段选择的行走路线，
允许决策集合$D(x_k)$——x_k位置时可选择的线路集合。

（4）状态转移律：$x_{k+1}=T(x_k,\ u_k)$——采取u_k决策后，位置变化的规律。

（5）阶段指标函数：$v_k(x_k,\ u_k)$——选择u_k决策后产生的距离。

（6）基本方程：$f_k(x_k)=\min\{v_k(x_k,\ u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$

（7）边界条件：$f_5(x_5=E)=0$


A
B1
B2
B3
C1
C2
C3
D1
D2
E
2
5
3
7
5
6
3
2
4
5
1
5
1
4
6
3
3
3
3
4

2. 逆序求解

1）k=4，由递推方程知 $f_4(x_4)=\min\{v_4(x_4, u_4)+f_5(x_5)\}$，

而 $f_5(x_5)=0$ 为边界条件

$$\therefore \begin{aligned} &f_4(x_4=D_1)=\min\{\overline{D_1E}+f_5(x_5)\}=3, \quad u_4^*(D_1)=D_1E \\ &f_4(x_4=D_2)=\min\{\overline{D_2E}+f_5(x_5)\}=4, \quad u_4^*(D_2)=D_2E \end{aligned}$$

2）k=3，$f_3(x_3)=\min\{v_3(x_3, u_3)+f_4(x_4)\}$，

$$f_3(x_3=C_1)=\min\begin{Bmatrix} \overline{C_1D_1}+f_4(D_1) \\ \\ \overline{C_1D_2}+f_4(D_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 1+3 \\ 4+4 \end{Bmatrix}=4, \quad u_3^*(C_1)=C_1D_1$$

$$f_3(x_3=C_2)=\min\begin{Bmatrix} \overline{C_2D_1}+f_4(D_1) \\ \\ \overline{C_2D_2}+f_4(D_2) \end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix} 6+3 \\ 3+4 \end{Bmatrix}=7, \quad u_3^*(C_2)=C_2D_2$$

$$f_3(x_3=C_3)=\min\begin{Bmatrix}\overline{C_3D_1}+f_4(D_1)\\ \overline{C_3D_2}+f_4(D_2)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}3+3\\ 3+4\end{Bmatrix}=6，\ u_3^*(C_3)=C_3D_1$$

3）k=2， $f_2(x_2)=\min\{v_2(x_2，u_2)+f_3(x_3)\}$，

$$f_2(x_2=B_1)=\min\begin{Bmatrix}\overline{B_1C_1}+f_3(C_1)\\ \overline{B_1C_2}+f_3(C_2)\\ \overline{B_1C_3}+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}7+4\\ 5+7\\ 6+6\end{Bmatrix}=11，\ u_2^*(B_1)=B_1C_1$$

$$f_2(x_2=B_2)=\min\begin{Bmatrix}\overline{B_2C_1}+f_3(C_1)\\ \overline{B_2C_2}+f_3(C_2)\\ \overline{B_2C_3}+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}3+4\\ 2+7\\ 4+6\end{Bmatrix}=7，\ u_2^*(B_2)=B_2C_1$$

$$f_2(x_2=B_3)=\min\begin{Bmatrix}\overline{B_3C_1}+f_3(C_1)\\ \overline{B_3C_2}+f_3(C_2)\\ \overline{B_3C_3}+f_3(C_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}5+4\\ 1+7\\ 5+6\end{Bmatrix}=8，\ u_2^*(B_3)=B_3C_2$$

4）k=1， $f_1(x_1)=\min\{v_1(x_1, u_1)+f_2(x_2)\}$，

$$f_1(x_1=A)=\min\begin{Bmatrix}\overline{AB_1}+f_2(B_1)\\ \overline{AB_2}+f_2(B_2)\\ \overline{AB_3}+f_2(B_3)\end{Bmatrix}=\min\begin{Bmatrix}2+11\\ 5+7\\ 3+8\end{Bmatrix}=11，\ u_1^*(A)=AB_3$$

∴ 最优策略：A——B_3——C_2——D_2——E，

最短距离：f（A）=11

8.3 离散确定性动态规划问题的模型与求解

例4：某一警卫部队共有12支巡逻队，负责4个要害部门A、B、C、D的警卫巡逻。对每个部位可分别派出2~4支巡逻队，并且由于派出巡逻队数的不同，各部位在一段时期内可能造成的预期损失如表中所示。问：如何分派，可使总的预期损失为最小？

各 部 位 预 期 损 失 表

队数 \ 预期损失 \ 部位	A	B	C	D
2	18	38	24	34
3	14	35	22	31
4	10	31	21	25

解：

把对每一个部位派出巡逻队数量的决策，看成是一个阶段，可归结成4个阶段的决策问题。

一、建立模型

（1）阶段变量：k=1, 2, 3, 4

（2）状态变量：x_k——第k阶段可用于分配的巡逻队数量；

（3）决策变量：u_k——第k阶段派出的巡逻队数量；

允许决策集合$D(x_k)=\{2, 3, 4\}$

（4）状态转移律：$x_{k+1}=x_k-u_k$ ；

（5）阶段指标函数：$v_k(u_k)$——预期损失函数，如表示；

（6）基本方程：$f_k(x_k)=\min\{v_k(u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$

（7）边界条件：$f_5(x_5)=0$

二、逆序算法求解

1）k=4，对D部位， $f_4(x_4)=\min\{v_4(u_4)+f_5(x_5)\}$， 而 $f_5(x_5)=0$，

依题意，$2 \le x_4 \le 12-6=6$，列表计算如下：

x_4	2	3	4	5	6
$f_4(x_4)$	34	31	25	25	25
$u_4^*(x_4)$	2	3	4	4	4

2）k=3，对C部位， $x_4=x_3-u_3$

$$f_3(x_3)=\min\{v_3(u_3)+f_4(x_4)\}=\min\{v_3(u_3)+f_4(x_3-u_3)\},$$

而 $\max\{12-8，2+2\} \le x_3 \le 12-4=8$，列表计算如下：

x_3 \ u_3	$v_3(u_3)+f_4(x_3-u_3)$			$f_3(x_3)$	$u_3^*(x_3)$
	2	3	4		
4	***24+34***	—	—	58	2
5	***24+31***	22+34	—	55	2
6	***24+25***	22+31	21+34	49	2
7	24+25	***22+25***	21+31	47	3
8	24+25	22+25	***21+25***	46	4

3）k=2，对B部位， $x_3=x_2-u_2$

$$f_2(x_2)=\min\{v_2(u_2)+f_3(x_3)\}=\min\{v_2(u_2)+f_3(x_2-u_2)\}，$$

而 $\max\{12-4，6\}\le x_2\le 12-2=10$，列表计算如下：

x_2 \ u_2	$v_2(u_2)+f_3(x_2-u_2)$			$f_2(x_2)$	$u_2^*(x_2)$
	2	3	4		
8	***38+49***	35+55	31+58	87	2
9	38+47	***35+49***	31+55	84	3
10	38+46	35+47	***31+49***	80	4

4）k=1，对A部位， $x_2=x_1-u_1$， $x_1=12$

$f_1(x_1)=\min\{v_1(u_1)+f_2(x_2)\}=\min\{v_1(u_1)+f_2(x_1-u_1)\}$，列表计算：

x_1 \ u_1	$v_1(u_1)+f_2(x_1-u_1)$			$f_1(x_1)$	$u_1^*(x_1)$
	2	3	4		
12	18+80	14+84	***10+87***	97	4

最优策略：A—4支，B—2支，C—2支，D—4支；最小损失为97。

例5：

某企业现有5千万元资金可用于三个项目A、B、C 的技术改造建设。项目利润的预期年增长额与投资的规模有关，如表示。问如何确定投资计划，可使利润的预期年增长额最大？

项目利润预期年增长额 单位：万元

投资额 项目	0	1000	2000	3000	4000
A	0	15	34	42	56
B	0	18	35	45	58
C	0	20	37	48	60

解：　对每个项目的投资决策可看作是一个阶段，故归结为三阶段的动态规划问题。

一、建立动态规划模型

（1）阶段变量：$k=1, 2, 3$

（2）状态变量：x_k——第k阶段可用于分配的资金数量；

（3）决策变量：u_k——第k阶段投资数量；

允许决策集合$D(x_k)=\{u_k | 0 \le u_k \le x_k\}$

（4）状态转移律：$x_{k+1}=x_k-u_k$ ；

（5）阶段指标函数：$v_k(u_k)$——预期利润年增长额函数，如表示；

（6）基本方程：$f_k(x_k)=\max\{v_k(u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$

（7）边界条件：$f_4(x_4)=0$

二、逆序算法求解

1）k=3，对C项目， $f_3(x_3)=\max\{v_3(u_3)+f_4(x_4)\}$，而 $f_4(x_4)=0$，

依题意，$0\le x_3\le 5000$，$0\le u_3\le x_3$，列表计算如下：

x_3	0	1000	2000	3000	4000	5000
$f_3(x_3)$	0	20	37	48	60	60
$u_3^*(x_3)$	0	1000	2000	3000	4000	4000

2）k=2，对B项目， $x_3=x_2-u_2$

$$f_2(x_2)=\max\{v_2(u_2)+f_3(x_3)\}=\max\{v_2(u_2)+f_3(x_2-u_2)\}，$$

而 $1000\le x_2\le 5000$，$0\le u_2\le x_2$，列表计算如下：

x_2 \ u_2	$v_2(u_2)+f_3(x_2-u_2)$					$f_2(x_2)$	$u_2^*(x_2)$
	0	1000	2000	3000	4000		
1000	***0+20***	18+0	——	——	——	20	0
2000	0+37	***18+20***	35+0	——	——	38	1000
3000	0+48	***18+37***	***35+20***	45+0	——	55	1000,2000
4000	0+60	18+48	***35+37***	45+20	58+0	72	2000
5000	0+60	18+60	***35+48***	45+37	58+20	83	2000

3）k=1，对A项目， $x_2 = x_1 - u_1$，

$$f_1(x_1) = \max\{v_1(u_1) + f_2(x_2)\} = \max\{v_1(u_1) + f_2(x_1 - u_1)\},$$

而 $x_1 = 5000$， $0 \le u_1 \le 4000$，列表计算如下：

x_1 \ u_1	$v_1(u_1)+f_2(x_1-u_1)$					$f_1(x_1)$	$u_1^*(x_1)$
	0	1000	2000	3000	4000		
5000	0+83	15+72	***34+55***	42+38	56+20	89	2000

∴ 最优策略有两组，分别为：

（1）对A项目投资2千万元，对B项目投资1千万元，对C项目投资2千万元；

（2）对A项目投资2千万元，对B项目投资2千万元，对C项目投资1千万元。

最大年利润增长额为89万元。

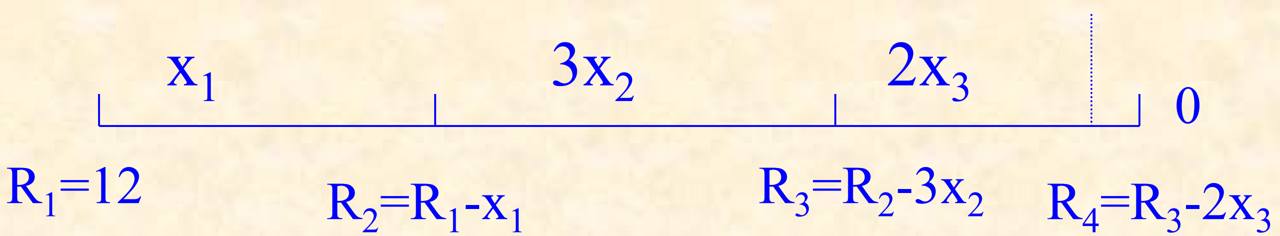
8.4 连续确定性动态规划问题的模型与求解

例6：用动态规划的方法求解下述非线性规划问题：

$$\max z = \prod_{i=1}^{3} i \cdot x_i$$

$$\text{s.t}\quad \begin{cases} x_1+3x_2+2x_3 \le 12 \\ x_1、x_2、x_3 \ge 0 \end{cases}$$

解：可归结为三个阶段的动态规划问题，每阶段确定一个变量的数值。其求解过程如下：



一、建立模型

（1）阶段变量：$k=1, 2, 3$

（2）状态变量：R_k——第k阶段可用于分配的右端项数量；

（3）决策变量：x_k——第k阶段选取的变量数值；

允许决策集合$D(R_k)=\{0\le x_1\le R_1, 0\le x_2\le R_2/3, 0\le x_3\le R_3/2\}$；

（4）状态转移律：$R_2=R_1-x_1$ ； $R_3=R_2-3x_2$ ； $R_4=R_3-2x_3$ ；

（5）阶段指标函数：$v_k(x_k)=k\cdot x_k$ ；

（6）基本方程：$f_k(R_k)=\max\{v_k(x_k)\cdot f_{k+1}(R_{k+1})\}$

（7）边界条件：$f_4(R_4)=1$

二、逆序求解

1）k=3， $f_3(R_3) = \max_{0 \le x_3 \le R_3/2} \{v_3(x_3) \cdot f_4(R_4)\} = \max_{0 \le x_3 \le R_3/2} \{3x_3 \cdot 1\} = 3R_3/2$，

∴ $x_3^* = R_3/2$

2）k=2， $R_3 = R_2 - 3x_2$；

$$f_2(R_2) = \max_{0 \le x_2 \le R_2/3} \{v_2(x_2) \cdot f_3(R_3)\} = \max_{0 \le x_2 \le R_2/3} \{2x_2 \cdot 3R_3/2\} = \max_{0 \le x_2 \le R_2/3} \{2x_2 \cdot 3(R_2 - 3x_2)/2\}$$

设 $S_1 = 2x_2 \cdot 3(R_2 - 3x_2)/2$； 令

$$\frac{dS_1}{dx_2} = 3R_2 - 18x_2 = 0，$$ 得 $x_2^* = R_2/6$

∴ $f_2(R_2) = R_2^2/4$

3）$k=1$， $R_2=R_1-x_1=12-x_1$；

$$f_1(R_1)=\max_{0\le x_1\le R_1}\{v_1(x_1)\cdot f_2(R_2)\}=\max_{0\le x_1\le R_1}\{x_1\cdot R_2^2/4\}=\max_{0\le x_1\le 12}\{x_1\cdot(12-x_1)^2/4\}$$

设 $S_2=x_1\cdot(12-x_1)^2/4$； 令

$$\frac{dS_2}{dx_1}=x_1^2-16x_1+48=0,$$ 得 $x_1^*=4$， 或 $x_1^*=12$

若 $x_1^*=4$， $f_1(R_1)=64$ $\Rightarrow$最大值；

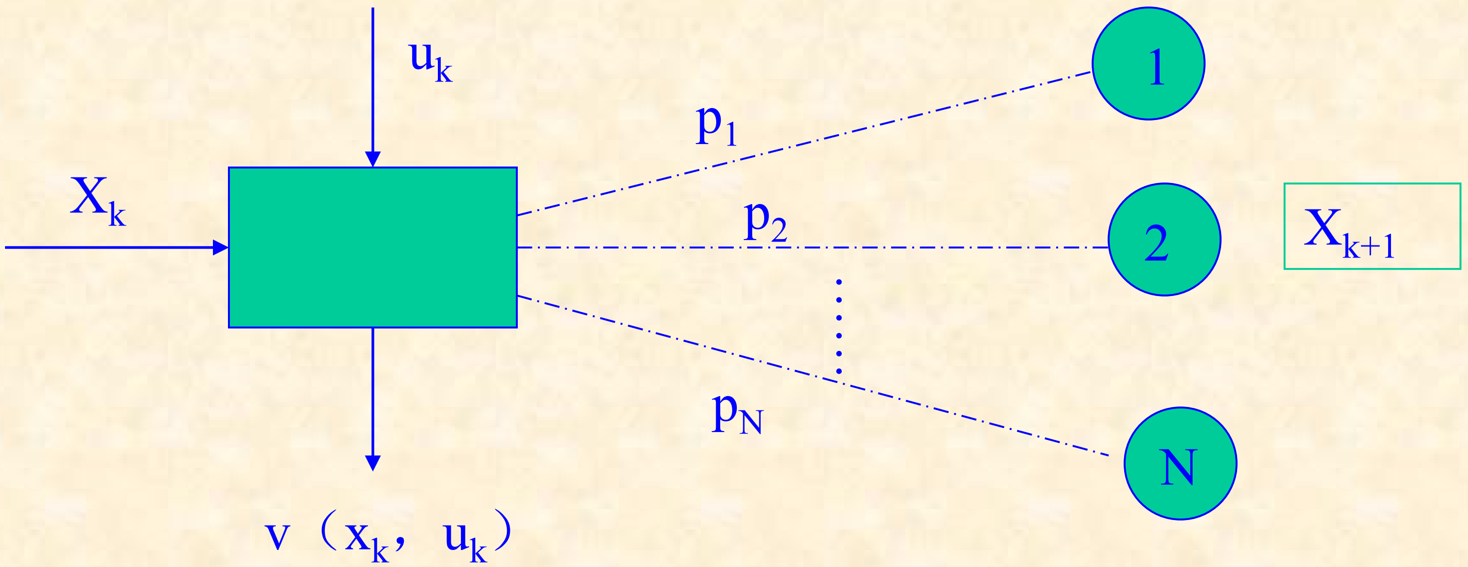
若 $x_1^*=12$， $f_1(R_1)=0$ $\Rightarrow$最小值；

若 $x_1^*=0$， $f_1(R_1)=0$ $\Rightarrow$最小值；

从而 $x_1^*=4$， $x_2^*=4/3$， $x_3^*=2$ 为最优策略。

8.5 离散随机性动态规划模型与求解

特征：当某一阶段的决策确定之后，其下一阶段的状态不是一个确定的值，而是具有某种概率分布的随机变量。



说明：

1）从x_k出发，当选定u_k时，则x_{k+1}服从p_i的概率分布；

2）动态规划的基本方程（和式）以期望值作为目标，即

$$f_k(x_k) = \text{opt}\ \{E\ \{v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}\ \}$$

$$= \text{opt}\ \{v_k(x_k, u_k) + \sum_{i=1}^{N} p_i \cdot f_{k+1}(x_{k+1} = i)\ \}$$

3）边界值依实际情况而定。

研究下述问题：

某公司承担一种新产品试制任务，合同要求三个月内交出一台合格的样品，否则将负担1500元的赔偿费。试制时投产一台成功的概率为1/3，投产一批的准备费用为250元，每台试制费用为100元。若投产一批后全部不合格，可再投产一批试制，但每投产一批需要一个月的周期。问每批应该投产多少台，可使总的费用（包括可能发生的赔偿费用）期望值最小？

解：

一、建立模型

（1）阶段：k=1, 2, 3，每批的试制周期为一个月，可作为一个阶段，而合同期为三个月，故归结为三个阶段决策的动态规划问题问题；

（2）状态变量：决策的前提为是否存在合格品，故选作为状态变量，

$$\text{设}\quad x_k=\begin{cases}0\text{——存在一台以上合格品，}\\1\text{——尚未有一台合格品，}\end{cases}$$

（3）决策变量：u_k——第k阶段投入试制数量；

允许决策集合$D(x_k=0)=\{0\}$，$D(x_k=1)=\{0, 1, 2,\cdots\cdots,N\}$

（4）状态转移律：$p(x_{k+1}=1)=(2/3)^{u_k}$； $p(x_{k+1}=0)=1-(2/3)^{u_k}$；

（5）阶段指标函数：$v_k(u_k)$—当选取决策为u_k时，发生的试制费用，

$$v_k(u_k) = \begin{cases} 250+100\,u_k & (u_k > 0) \\ 0 & (u_k = 0) \end{cases}$$

（6）基本方程：$f_k(x_k) = \min\{E\{v_k(u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}\}$

$$f_k(x_k = 0) = 0$$

$$f_k(x_k = 1) = \min\{v_k(u_k) + (2/3)^{u_k} \cdot f_{k+1}(x_{k+1} = 1) + [1 - (2/3)^{u_k}] \cdot f_{k+1}(x_{k+1} = 0)\}$$

$$= \min\{v_k(u_k) + (2/3)^{u_k} \cdot f_{k+1}(1)\}$$

（7）边界条件：

$$\begin{cases} f_4(x_4 = 0) = 0 \\ f_4(x_4 = 1) = 1500 \end{cases}$$

二、逆序求解

1）k=3， $f_3(x_3=0)=0$

$f_3(x_3=1)=\min\{v_3(u_3)+(2/3)^{u_3}\cdot f_4(x_4=1)\}$，

列表计算如下：

x_3 \ u_3	$v_3(u_3)+(2/3)^{u_3}\cdot 1500$							$f_3(x_3)$	u_3^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	1500	1350	1117	994	***946***	948	981	946	4

2）k=2， $f_2(x_2=0)=0$

$$f_2(x_2=1)=\min\{v_2(u_2)+(2/3)^{u_2}\cdot f_3(x_3=1)\},$$

列表计算如下：

x_2 \ u_2	$v_2(u_2)+(2/3)^{u_2}\cdot 946$							$f_2(x_2)$	u_2^*
	0	1	2	3	4	5	6		
0	0							0	0
1	946	981	870	***830***	837	874	933	830	3

3）k=1， $f_1(x_1=1)=\min\{v_1(u_1)+(2/3)^{u_1}\cdot f_2(x_2=1)\}$，

列表计算如下：

u_1 \ x_1	$v_1(u_1)+(2/3)^{u_1}\cdot 830$							$f_1(x_1)$	u_1^*
	0	1	2	3	4	5	6		
1	830	903	819	***796***	814	859	923	796	3

∴ 最优策略为：第一个月投入3台；若无合格品，第二个月仍投入3台；若还无合格品，则第三个月投入4台。这样可使总的期望费用最小，为796元。

8.6 多维的动态规划模型与求解

例7：用动态规划方法求解下述模型

$$\text{Max } z=3x_1+5x_2$$

$$\text{S.t}\quad \begin{cases} x_1\le 4 \\ 2x_2\le 12 \\ 3x_1+2x_2\le 18 \\ x_1,\ x_2\ge 0 \end{cases}$$

解：这是一个LP模型，包括两个决策变量和三个约束方程，即共有三种资源，所以需要由三个变量来描述其状态，从而可归结成2个阶段、3个状态变量的动态规划问题。

一、建立模型

（1）阶段变量：k=1, 2,　每个决策变量取值划分为一个阶段；

（2）状态变量：$R_{i\,k}$——第k阶段可用于分配的第i行右端项数量；

（3）决策变量：x_k——第k阶段决策变量的取值；

允许决策集合$D(R_{i\,k})$；

（4）状态转移律：$R_{12}=R_{11}-x_1$；　$R_{22}=R_{21}=12$；　$R_{32}=R_{31}-3x_1$；

（5）阶段指标函数：　$v_k(R_{i\,k}, x_k)= c_k \cdot x_k$；　即

$$v_1(x_1)=3 \cdot x_1\text{；}\quad v_2(x_2)=5 \cdot x_2\text{；}$$

（6）基本方程：$f_k(R_{i\,k})= \max\{v_k(R_{i\,k}, x_k) + f_{k+1}(R_{i\,k+1})\}$

（7）边界条件：$f_3(R_{i\,3})=0$

二、逆序求解

1）k=2，

$$f_2(R_{12}, R_{22}, R_{32}) = \max_{0\le x_2 \le \min\{R_{22}/2,\, R_{32}/2\}} \{ v_2(x_2) + f_3(R_{i3}) \}$$

$$= \max_{0\le x_2 \le \min\{R_{22}/2,\, R_{32}/2\}} \{5 \cdot x_2 + 0\} = \min\{5R_{22}/2,\, 5R_{32}/2\}$$

$$= \min\{30,\, 5R_{32}/2\}$$

$$\therefore \quad x_2^* = \min\{6,\, R_{32}/2\}$$

2）k=1， $R_{32} = R_{31} - 3x_1 = 18 - 3x_1$

$$f_1(R_{11}, R_{21}, R_{31}) = \max_{0 \le x_1 \le \min\{R_{11}, R_{31}/3\}} \{ v_1(x_1) + f_2(R_{i2}) \}$$

$$= \max_{0 \le x_1 \le \min\{4, 6\}} \{3 \cdot x_1 + \min\{30, 5R_{32}/2\}\}$$

$$= \max_{0 \le x_1 \le 4} \{3 \cdot x_1 + \min\{30, 5 \times (18 - 3x_1)/2\}\}$$

令 $5 \times (18 - 3x_1)/2 = 30$， 得 $x_1 = 2$,

$$\therefore \text{原式} = \max_{0 \le x_1 \le 4} \left\{ 3 \cdot x_1 + \begin{cases} 30 & (0 \le x_1 \le 2) \\ 5(18 - 3x_1)/2 & (2 \le x_1 \le 4) \end{cases} \right\}$$

$$=\max\left\{\begin{array}{ll} 3\cdot x_1+30 & (0\le x_1\le 2) \\ 45-9x_1/2 & (2\le x_1\le 4) \end{array}\right\}=36$$

$\therefore\quad x_1^*=2$，从而 $R_{32}=R_{31}-3x_1=18-3x_1=12$

$\therefore\quad x_2^*=\min\{6, R_{32}/2\}=6$

复习思考题

1. 如何理解状态的概念？
2. 状态转移率描述的是什么现象？
3. DP模型与LP、ILP模型有何不同？
4. DP模型结构包含哪些内容？
5. 逆序算法遵从什么原理？
6. DP模型如何划分类别？
7. DP模型处理中最大的障碍是什么？

8.7 案例分析

例1：某工厂根据合同要求在未来半年中需提供货物数量如表中所示，表中数字为月底交货数量。该厂的生产能力为每月400件，其仓库的存货能力为3百件。已知每百件货物的生产费用为10千元，在进行生产的月份，工厂要支出固定费用4千元，仓库保管费用为每百件货物每月1千元，假定开始及6月底交货后均无存货，试问每个月应该生产多少件产品，才能既满足交货任务又使总费用最小？

月　份	1	2	3	4	5	6
交货数量（百件）	1	2	5	3	2	1

解：这是具有时间序列的多阶段决策问题，可分为六阶段。

一、建立动态规划模型

（1）阶段变量：k=1, 2, 3, 4, 5, 6；

（2）状态变量：x_k——第k阶段初货物的库存数量；

（3）决策变量：u_k——第k阶段的生产数量；

允许决策集合$D(x_k)$：

$$\max\{0,\ d_k - x_k\} \le u_k \le \min\left\{\sum_{i=k}^{6} d_i - x_k,\ \ d_k + h - x_k,\ H\right\}$$

$$x_k + u_k - d_k \le h$$

d_i——第k月需求量，h——库存能力，H——生产能力；

（4）状态转移律：$x_{k+1}=x_k+u_k-d_k$

（5）阶段指标函数：$v_k(x_k，u_k)$——第k阶段发生的费用；

$$v_k(x_k，u_k)=\begin{cases} 4+1\cdot x_k+10u_k & (u_k>0) \\ 1\cdot x_k & (u_k=0) \end{cases}$$

（6）基本方程：$f_k(x_k)=\min\{v_k(x_k, u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$

（7）边界条件：$f_7(x_7=0)=0$

二、逆序求解

1）$k=6$，$x_7=x_6+u_6-d_6=0$， $\Rightarrow u_6=d_6-x_6$，

$$f_6(x_6)=\min\{v_6(x_6,u_6)+f_7(x_7)\},$$

$\because d_6=1$，$\therefore x_6=0$ 或1，而 $f_7(x_7)=0$，

列表计算：

x_6 \ u_6	$v_6(x_6,u_6)+0$		$f_6(x_6)$	u_6^*
	0	1		
0	—	***14***	14	1
1	***1***	—	1	0

2）k=5，$0 \le x_6=x_5+u_5-d_5 \le h$，　$f_5(x_5)=\min\{v_5(x_5,u_5)+f_6(x_6)\}$，

$$\max\{0, d_5-x_5\} \le u_5 \le \min\{\sum_{i=5}^{6} d_i - x_5,\ d_5+h-x_5,\ H\}$$

$d_5=2$，$\sum d_i=3$，$h=3$，$H=4$，　而　$0 \le x_5 \le 3$，

列表计算：

x_5 \ u_5	$v_5(x_5,u_5)+f_6(x_5+u_5-2)$				$f_5(x_5)$	u_5^*
	0	1	2	3		
0	—	—	24+14	***34+1***	35	3
1	—	15+14	***25+1***	—	26	2
2	***2+14***	16+1	—	—	16	0
3	***3+1***	—	—	—	4	0

3）k=4， $0\le x_5=x_4+u_4-d_4\le h$， $f_4(x_4)=\min\{v_4(x_4,u_4)+f_5(x_5)\}$，

$$\max\{0, d_4-x_4\}\le u_4\le \min\{\sum_{i=4}^{6} d_i-x_4,\ d_4+h-x_4, H\}$$

$d_4=3$， $\sum d_i=6$， $h=3$， $H=4$ ， 而 $0\le x_4\le 3$ ，

列表计算：

x_4 \ u_4	$v_4(x_4,u_4)+f_5(x_4+u_4-3)$					$f_4(x_4)$	u_4^*
	0	1	2	3	4		
0	—	—	—	***34+35***	44+26	69	3
1	—	—	***25+35***	35+26	45+16	60	2
2	—	16+35	26+26	36+16	***46+4***	50	4
3	***3+35***	17+26	27+16	37+4	—	38	0

4）k=3， $0\le x_4=x_3+u_3-d_3\le h$ ， $f_3(x_3)=\min\{v_3(x_3,u_3)+f_4(x_4)\}$，

$$\max\{0, d_3-x_3\}\le u_3\le \min\{\sum_{i=3}^{6} d_i-x_3,\ d_3+h-x_3,\ H\}$$

$d_3=5$， $\sum d_i=11$， $h=3$， $H=4$ ， 而 $1\le x_3\le 3$ ，

列表计算：

x_3 \ u_3	$v_3(x_3,u_3)+f_4(x_3+u_3-5)$ 0	1	2	3	4	$f_3(x_3)$	u_3^*
1	—	—	—	—	***45+69***	114	4
2	—	—	—	***36+69***	46+60	105	3
3	—	—	***27+69***	37+60	47+50	96	2

5）k=2， $1\le x_3=x_2+u_2-d_2\le h$， $f_2(x_2)=\min\{v_2(x_2,u_2)+f_3(x_3)\}$，

$$\max\{0,\ d_2-x_2+1\}\le u_2\le \min\{\sum_{i=2}^{6} d_i-x_2,\ \ d_2+h-x_2,\ H\}$$

$d_2=2$， $\sum d_i=13$， $h=3$， $H=4$， 而 $0\le x_2\le 3$，

列表计算：

x_2 \ u_2	$v_2(x_2,u_2)+f_3(x_2+u_2-2)$					$f_2(x_2)$	u_2^*
	0	1	2	3	4		
0	—	—	—	***34+114***	44+105	148	3
1	—	—	***25+114***	35+105	45+96	139	2
2	—	***16+114***	26+105	36+96	—	130	1
3	***3+114***	17+105	27+96	—	—	117	0

6）k=1， $0\le x_2=x_1+u_1-d_1\le h$ ， $f_1(x_1)=\min\{v_1(x_1,u_1)+f_2(x_2)\}$，

$$\max\{0, d_1-x_1\}\le u_1\le \min\{\sum_{i=1}^{6} d_i-x_1,\ d_1+h-x_1,\ H\}$$

$d_1=1$， $\sum d_i=14$， $h=3$， $H=4$ ， 而 $x_1=0$ ，

列表计算：

x_1 \ u_1	$v_1(x_1,u_1)+f_2(x_1+u_1-1)$					$f_1(x_1)$	u_1^*
	0	1	2	3	4		
0	—	14+148	24+139	34+130	***44+117***	161	4

∴ 最少费用为161千元， 最优生产计划为：

一月：生产4百件，月末库存3百件； 二月：生产0百件，月末库存1百件；
三月：生产4百件，月末库存0百件； 四月：生产3百件，月末库存0百件；
五月：生产3百件，月末库存1百件； 六月：生产0百件，月末库存0百件。

例2：设备更新问题：

某种新设备投入使用的年创收入及平均维修费、更新净费用（减残值）与设备的役龄有关，如表示。试确定今后五年的更新策略，使总收益最大。

单位：万元

项目 \ 役龄 t	0	1	2	3	4
年收入 $r(t)$	5	4.5	4	3.75	3
维修费 $s(t)$	0.5	1	1.5	2	2.5
更新费 $c(t)$	—	1.5	2.2	2.5	3

一、建立模型

（1）阶段变量：k=1, 2, 3, 4, 5， 每年看作一个阶段，

（2）状态变量：x_k——第k年初设备已使用过的年限（役龄）；

（3）决策变量：u_k——第k年初更新设备与否，为 0—1 变量；

$$u_k = \begin{cases} 0\text{——第k年初更新设备} \\ 1\text{——第k年初不更新设备} \end{cases}$$

（4）状态转移律：$x_{k+1}=x_k \cdot u_k+1$；

（5）阶段指标函数：$v_k(x_k, u_k)$——第k年采取u_k决策后的净收益；

$$v_k(x_k, u_k)= r_k(x_k \cdot u_k)-s_k(x_k \cdot u_k)-c_k[x_k \cdot (1-u_k)]$$

（6）基本方程：

$$f_k(x_k)=\max\{v_k(x_k, u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

$$=\max\{r_k(x_k\cdot u_k)-s_k(x_k\cdot u_k)-c_k[x_k\cdot(1-u_k)]+f_{k+1}(x_{k+1})\}$$

（7）边界条件：$f_6(x_6)=0$

二、逆序求解

1）当 k=5 时，$f_6(x_6)=0$，$1\leq x_5\leq 4$，

$$f_5(x_5)=\max\{r_5(x_5\cdot u_5)-s_5(x_5\cdot u_5)-c_5[x_5\cdot(1-u_5)]+f_6(x_6)\}$$

列表计算：

x_5 \ u_5	$r_5(x_5 \cdot u_5) - s_5(x_5 \cdot u_5) - c_5[x_5 \cdot (1-u_5)]$		$f_5(x_5)$	u_5^*
	0	1		
1	3	***3.5***	3.5	1
2	2.3	***2.5***	2.5	1
3	***2***	1.75	2	0
4	***1.5***	0.85	1.5	0

2）当 k=4 时， $x_5 = x_4 \cdot u_4 + 1$ ， $1 \le x_4 \le 3$ ，

$$f_4(x_4) = \max\{r_4(x_4 \cdot u_4) - s_4(x_4 \cdot u_4) - c_4[x_4 \cdot (1-u_4)] + f_5(x_5)\}$$

$$= \max\{r_4(x_4 \cdot u_4) - s_4(x_4 \cdot u_4) - c_4[x_4 \cdot (1-u_4)] + f_5(x_4 \cdot u_4 + 1)\}$$

列表计算：

x_4 \ u_4	$r_4(x_4 \cdot u_4)-s_4(x_4 \cdot u_4)-c_4[x_4 \cdot (1-u_4)]+f_5(x_4 \cdot u_4+1)$		$f_4(x_4)$	u_4^*
	0	1		
1	***3+3.5***	3.5+2.5	6.5	0
2	***2.3+3.5***	2.5+2	5.8	0
3	***2+3.5***	1.75+1.5	5.5	0

3）当 k=3 时， $x_4=x_3 \cdot u_3+1$ ， $1 \le x_3 \le 2$ ，

$$f_3(x_3)=\max\{r_3(x_3 \cdot u_3)-s_3(x_3 \cdot u_3)-c_3[x_3 \cdot (1-u_3)]+f_4(x_4)\}$$

$$=\max\{r_3(x_3 \cdot u_3)-s_3(x_3 \cdot u_3)-c_3[x_3 \cdot (1-u_3)]+f_4(x_3 \cdot u_3+1)\}$$

列表计算：

x_3 \ u_3	$r_3(x_3 \cdot u_3)-s_3(x_3 \cdot u_3)-c_3[x_3 \cdot (1-u_3)]+f_4(x_3 \cdot u_3+1)$		$f_3(x_3)$	u_3^*
	0	1		
1	***3+6.5***	3.5+5.8	9.5	0
2	***2.3+6.5***	2.5+5.5	8.8	0

4）当 k=2 时， $x_3=x_2 \cdot u_2+1$ ， $x_2=1$ ，

$$f_2(x_2)=\max\{r_2(x_2 \cdot u_2)-s_2(x_2 \cdot u_2)-c_2[x_2 \cdot (1-u_2)]+f_3(x_3)\}$$

$$=\max\{r_2(x_2 \cdot u_2)-s_2(x_2 \cdot u_2)-c_2[x_2 \cdot (1-u_2)]+f_3(x_2 \cdot u_2+1)\}$$

列表计算：

x_2 \ u_2	$r_2(x_2 \cdot u_2)-s_2(x_2 \cdot u_2)-c_2[x_2 \cdot (1-u_2)]+f_3(x_2 \cdot u_2+1)$		$f_2(x_2)$	u_2^*
	0	1		
1	***3+9.5***	3.5+8.8	12.5	0

4）当 k=1 时，$x_1=0$， $x_2=x_1 \cdot u_1+1=1$，

$$f_1(x_1) = \max\{r_1(0) - s_1(0) - c_1(0) + f_2(x_2)\}$$

$$= \max\{r_1(0) - s_1(0) + f_2(1)\}$$

列表计算：

u_1 \ x_1	$r_1(x_1 \cdot u_1)-s_1(x_1 \cdot u_1)-c_1[x_1 \cdot (1-u_1)]+f_2(1)$		$f_1(x_1)$	u_1^*
	0	1		
0	——	4.5+12.5	17	1

∴ 最优更新策略为：第2、3、4年都更新，第5年不更新。

最大收益为17万元。

本 章 知 识 点

1. 多阶段决策问题的概念
2. 动态规划模型的结构
3. 最优化原理
4. 动态规划模型的逆序求解方法
5. 离散确定型动态规划问题建模与求解
6. 连续确定型动态规划问题建模及求解
7. 离散随机型动态规划问题理解
8. 多维动态规划问题分析