

第 2 章 线性规划的对偶理论

Duality 对偶

Dual Problem 对偶问题

Dual Linear Programming
对偶线性规划

Dual Theory 对偶理论

2.1 问题的提出

例1：甲企业计划生产I、II两种产品，该两种产品均需经 A、B、C、D 四种不同设备加工，按工艺资料规定，在各种不同设备上的加工时间及设备加工能力、单位产品利润如表中所示。问：如何安排产品的生产计划，才能使企业获利最大？

设 备 产 品	A	B	C	D	单位利润
I 产品	2	1	4	0	2
II 产品	2	2	0	4	3
加工能力	12	8	16	12	

设 企业生产甲产品为 X_1 件， 乙产品为 X_2 件， 则

$$\begin{array}{ll}\max & z = 2 X_1 + 3 X_2 \\ \text{s.t} & \left\{ \begin{array}{l} 2 X_1 + 2 X_2 \leq 12 \\ X_1 + 2 X_2 \leq 8 \\ 4 X_1 \leq 16 \\ 4 X_2 \leq 12 \\ X_1 \geq 0, X_2 \geq 0 \end{array} \right.\end{array}$$

例2：甲企业生产甲、乙两种产品，该两种产品均需经 A、B、C、D 四种不同设备加工，按工艺资料规定，在各种不同设备上的加工时间及设备加工能力、单位产品利润如表中所示。现有乙企业提出要全部租用甲企业设备。问：最低出价为多少时才能租下甲企业的设备？

设 备 产 品	A	B	C	D	单位利润
I 产 品	2	1	4	0	2
II 产 品	2	2	0	4	3
加工能力	12	8	16	12	

y_1

y_2

y_3

y_4

设第*i*种资源价格为 y_i ($i=1, 2, 3, 4,$) , 则有

$$\min \quad w = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

$$\text{s.t} \quad \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_i \geq 0, (i=1, 2, 3, 4) \end{cases}$$

1.最大生产利润模型

生产问题

设企业生产甲产品为 x_1 件，
乙产品为 x_2 件，则

$$\begin{aligned} \max \quad & z = \overbrace{2}^{C_B} x_1 + 3 x_2 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 & y_1 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 & y_2 \\ 4x_1 \leq 16 & y_3 \\ 4x_2 \leq 12 & y_4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

(原问题)

<=====>

2.资源最低售价模型

资源的出售

设第 i 种资源价格为 y_i , ($i=1, 2, 3, 4$)
则有

$$\begin{aligned} \min \quad & w = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4 \\ \text{s.t.} \quad & \begin{cases} 2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2 \\ 2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3 \\ y_i \geq 0, (i=1, 2, 3, 4) \end{cases} \end{aligned}$$

(对偶问题)

2.2 原问题与对偶问题的关系

一般表示式:

原问题:

[illegible]

对偶问题:

[illegible]

典式模型对应对偶结构矩阵表示

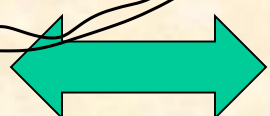
原问题

$$(1) \quad \max \quad z = C X$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} A X \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题

$$\min \quad w = Y b$$
$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} Y A \geq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

$Y^T b$
 $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$
 $A^T Y \geq C$



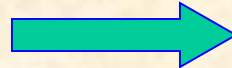
对偶模型其他结构关系

(2) 若模型为

$$\max z = C X$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} AX \geq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

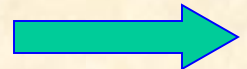
变形



$$\max z = C X$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -AX \leq -b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题

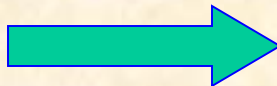


对偶变量 Y'

$$\text{Min } w = Y' (-b)$$

$$\text{st.} \begin{cases} Y' (-A) \geq C \\ Y' \geq 0 \end{cases}$$

令 $Y = -Y'$

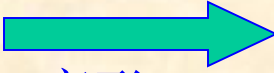


$$\min w = Y b$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} YA \geq C \\ Y \leq 0 \end{cases}$$

$$(3) \max z = C X$$

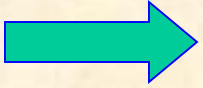
$$\text{s.t.} \begin{cases} AX \leq b \\ X \leq 0 \end{cases}$$

设 $X = -X'$

变形

$$\max = -CX'$$

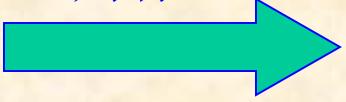
$$\text{st.} \begin{cases} -AX' \leq b \\ X' \geq 0 \end{cases}$$

$$\min w = Y b$$


$$\text{s.t.} \begin{cases} -YA \geq -C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

则有

$$\min w = Y b$$


$$\text{s.t.} \begin{cases} YA \leq C \\ Y \geq 0 \end{cases}$$

对偶问题典式:

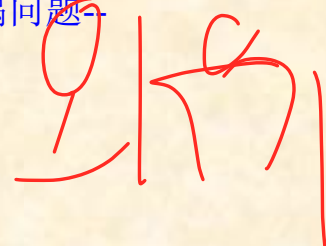
用矩阵形式表示:

$$\begin{array}{ll} (1) \quad \max \quad z = C X & \min \quad w = Y b \\ \text{s.t.} \quad AX \leq b & \text{s.t.} \quad YA \geq C \\ \quad \quad X \geq 0 & \quad \quad Y \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (2) \quad \max \quad z = C X & \min \quad w = Y b \\ \text{s.t.} \quad AX \geq b & \text{s.t.} \quad YA \geq C \\ \quad \quad X \geq 0 & \quad \quad Y \leq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\begin{array}{ll} (3) \quad \max \quad z = C X & \min \quad w = Y b \\ \text{s.t.} \quad AX \leq b & \text{s.t.} \quad YA \leq C \\ \quad \quad X \leq 0 & \quad \quad Y \geq 0 \end{array} \quad \Longleftrightarrow$$

原问题与对偶问题关系表



原问题(对偶问题)	对偶问题(原问题)
目标函数系数	约束右端项
约束右端项	目标函数系数
约束条件系数列向量 A	约束条件系数行向量 A^T
变量个数	约束条件个数
\max 变量 x_j : $x_j \geq 0$ x_j 无约束 $x_j \leq 0$	\min 约束方程 i : \geq $=$ \leq
约束方程: \leq $=$ \geq	变量 y_i : $y_i \geq 0$ y_i 无约束 $y_i \leq 0$

复习思考题

1. 怎样理解对偶现象？
2. 对偶模型的对偶关系是什么？
3. 如何从经济上理解对偶模型？
4. 互为对偶怎样理解？
5. 对偶变量的意义是什么？

2.3 对偶问题的基本性质

$$\text{Max } z = CX$$

$$\text{s t. } AX \leq b$$

$$X \geq 0$$

$$\text{Min } w = Yb$$

$$\text{s t. } YA \geq C$$

$$Y \geq 0$$

(1) 弱对偶性:

若 X^0 ——原问题可行解, Y^0 ——对偶问题可行解

$$\text{则 } CX^0 \leq Y^0 b$$

证明: $\because Y^0 \geq 0, AX^0 \leq b, \therefore Y^0 AX^0 \leq Y^0 b,$

而 $Y^0 A \geq C, \therefore CX^0 \leq Y^0 AX^0,$

$$\therefore CX^0 \leq Y^0 AX^0 \leq Y^0 b$$

(2) 最优性:

若 X^0 ——原问题可行解, Y^0 ——对偶问题可行解, 且
 $CX^0 = Y^0 b$

则 X^0 ——原问题最优解, Y^0 ——对偶问题最优解

证明: 设 X^* ——原问题最优解, Y^* ——对偶问题最优解

则 $CX^0 \leq CX^* \leq Y^* b \leq Y^0 b$

但 $CX^0 = Y^0 b$, $\therefore CX^0 = CX^* = Y^* b = Y^0 b$

$\therefore X^0 \Rightarrow X^*$, $Y^0 \Rightarrow Y^*$

即 X^0 ——原问题最优解, Y^0 ——对偶问题最优解

证毕。

(3) 无界性 “ ∞ ”에 대한 해는 존재하지 않는다 X

若原问题最优解无界，则对偶问题无可行解

证：有性质1， $C X^0 \leq Y^0 b$ ，当 $C X^0 \rightarrow \infty$ 时，则不可能存在 Y^0 ，使得 $C X^0 \leq Y^0 b$ 。

注：逆定理不成立，即

如果原问题（对偶问题）无可行解，那么对偶问题（或原问题）“解无界”不成立。

(4) 强对偶性 (对偶定理)

若原问题有最优解, 则对偶问题一定有最优解,

且有 $Z_{\max} = W_{\min}$

证: 由 $\sigma = C - C_B B^{-1} A \leq 0$ 令 $C_B B^{-1} = Y^*$, 得 $Y^* A \geq C$

$\begin{cases} -Y^* = -C_B B^{-1} \leq 0, & Y^* \geq 0 \end{cases}$

证: 由 $\sigma = C - C_B B^{-1} A \leq 0$ 令 $C_B B^{-1} = Y^*$, 得 $Y^* A \geq C$

$\begin{cases} -Y^* = -C_B B^{-1} \leq 0, & Y^* \geq 0 \end{cases}$

这只是一个可行解。

因此, Y^* 是对偶问题的可行解,

$$CX^* = C_B (B^{-1} b) = C_B B^{-1} b = Y^* b$$

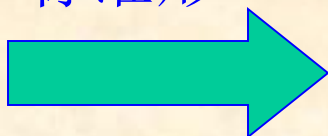
$\therefore Y^*$ 是对偶问题的最优解。

LP模型矩阵变换:

$$\text{Max } z=CX$$

$$\text{st. } \begin{cases} AX \leq b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

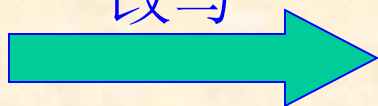
标准形



$$\text{Max } z=CX$$

$$\text{st. } \begin{cases} AX + X_s = b \\ X \geq 0 \end{cases}$$

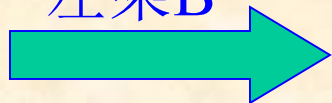
改写



$$\text{Max } z=C_B X_B + C_N X_N + 0X_S$$

$$\text{st. } \begin{cases} BX_B + NX_N + IX_S = b, & |B| \neq 0, & \therefore B^{-1} \text{存在} \\ X_B, X_N, X_S \geq 0 \end{cases}$$

左乘 B^{-1}



$$\text{Max } z=C_B X_B + C_N X_N + 0X_S$$

$$\text{st. } \begin{cases} B^{-1}BX_B + B^{-1}NX_N + B^{-1}I X_S = B^{-1} b \\ X_B, X_N, X_S \geq 0 \end{cases}$$

$$(X_B + B^{-1}NX_N + B^{-1} X_S = B^{-1} b)$$

单纯形法的矩阵描述:

初始表	C_B	C_N	c_j	0
	X_B	X_N	x_j	X_S
0 X_S b	B	N	p_j	I
σ	C_B	C_N	c_j	0

⋮

最终表						
C_B	X_B	b'	I	N'	p_j'	B^{-1}
σ			0	σ_N	σ_j	σ_S

songshi 变量

songshi 变量

$$\begin{cases} X_B = b' = B^{-1} b \\ N' = B^{-1} N \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sigma_N = C_N - C_B B^{-1} N \leq 0 \\ \sigma_S = -C_B B^{-1} \leq 0 \\ \sigma = C - C_B B^{-1} A \leq 0 \end{cases}$$

(5) 互补松弛性

资源出

生产 (资源的使用情况)

若 $y_i^* > 0$,

则

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i$$

\geq

\leq

若 $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* < b_i$, 则 $y_i^* = 0$

意思: 没有使用完

影子价格 = 0

$$\text{证: } \because \sum_{j=1}^n c_j x_j^* = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) x_j^* = \sum_{i=1}^m b_i y_i^*$$

$$\therefore \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} y_i^* \right) x_j^* - \sum_{i=1}^m b_i y_i^* = 0 \quad \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i \right) y_i^* = 0$$

$$\therefore \text{当 } y_i^* > 0, \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i = 0, \quad \text{即 } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* = b_i$$

$$\text{当 } \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^* - b_i < 0, \quad y_i^* = 0$$

(5) 互补松弛性

性质5的应用:

该性质给出了已知一个问题最优解求另一个问题最优解的方法, 即已知 Y^* 求 X^* 或已知 X^* 求 Y^*

$$\begin{cases} Y^* X_s = 0 \\ Y_s X^* = 0 \end{cases} \quad \leftarrow \text{互补松弛条件}$$

由于变量都非负, 要使求和式等于零, 则必定每一分量为零, 因而有下列关系:

若 $Y^* \neq 0$, 则 X_s 必为0; 若 $X^* \neq 0$, 则 Y_s 必为0

利用上述关系, 建立对偶问题 (或原问题) 的约束线性方程组, 方程组的解即为最优解。

(5) 互补松弛性

例2.4 已知线性规划

$$\max z = 3x_1 + 4x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 16 \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, 3 \end{cases}$$



的最优解是 $X^* = (6, 2, 0)^T$, 求其对偶问题的最优解 Y^* 。

解：写出原问题的对偶问题，即

$$\min w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 \geq 3 \\ 2y_1 + 2y_2 \geq 4 \\ y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1, y_2 \geq 0 \end{cases}$$

标准化



$$\min w = 10y_1 + 16y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 - y_3 = 3 & y_1 = 1 \\ 2y_1 + 2y_2 - y_4 = 4 & y_2 = 1 \\ y_1 + y_2 - y_5 = 1 \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0 \end{cases}$$

(5) 互补松弛性

例2.5 已知线性规划

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 - x_2 + 2x_3 \\ \begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ -x_1 + x_2 - x_3 \leq 6 \\ x_1 \leq 0, x_2 \geq 0, x_3 \text{无约束} \end{cases} \end{aligned}$$



的对偶问题的最优解为 $Y^* = (0, -2)$ ，求原问题的最优解。

解: 对偶问题是

$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_2 \leq -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 \text{无约}, y_2 \leq 0 \end{cases}$$

标准化



$$\max w = 4y_1 + 6y_2$$

$$\begin{cases} -y_1 - y_2 - y_3 = 2 \\ y_1 + y_2 + y_4 = -1 \\ y_1 - y_2 = 2 \\ y_1 \text{无约}, y_2 \leq 0, y_3, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

(6) 单纯形表中的对应关系

$$\max \quad z = 2x_1 + 3x_2$$

s.t

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12$$

$$x_1 + 2x_2 \leq 8$$

$$4x_1 \leq 16$$

$$4x_2 \leq 12$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0$$

$$\min \quad w = 12y_1 + 8y_2 + 16y_3 + 12y_4$$

s.t

$$2y_1 + y_2 + 4y_3 + 0y_4 \geq 2$$

$$2y_1 + 2y_2 + 0y_3 + 4y_4 \geq 3$$

$$y_i \geq 0, i=1, 2, 3, 4$$

이점原问题的.

원래 함수의 决策变量

원래 함수의 바지

$c_j \rightarrow$	2	3	0	0	0	0
$C_B \quad X_B \quad b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0 x_3 0	0	0	1	-1	-0.25	0
2 x_1 4	1	0	0	0	0.25	0
0 x_6 4	0	0	0	-2	0.5	1
3 x_2 2	0	1	0	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$	0	0	0	-1.5	-0.125	0

$-y_5$

$-y_6$

$-y_1$

$-y_2$

$-y_3$

$-y_4$

쌍대 문제의 바지

쌍대 문제의 决策变量

$$y_2 = 1.5$$

$$y_3 = 0.125$$

$$y_4 = 0$$

$$y_1 = 0$$

复习思考题

1. 弱对偶性揭示什么关系?
原问题目标函数不会超过对偶问题目标函数
2. 最优性揭示什么关系?
如果两个目标值相等, 那么这两个解都最有可行
3. 如何从经济上理解无界性?
原: 生产问题, 怎么样进行生产, 生产决策可以选值 / 这种产品我一定生产, 我的目标函数可以无限增加
4. 强对偶性揭示什么关系?
原问题有最优解, 对偶也一定有最优解, 目标函数相等
5. 什么叫互补松弛性?
某一个资源的初始价格如果是大于0的话, 那么它的原问题当中的约束条件就变成等式
6. 单纯形表中的对偶关系是怎样的?

原 \rightarrow 无解 = 对偶 \rightarrow 无可行解

作业 | 20200422)

L181000503

尹峻炎

$$(b) \max z = 5x_1 + 6x_2 + 3x_3$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5 \\ -x_1 + 5x_2 - x_3 \geq 3 \\ 4x_1 + 7x_2 + 3x_3 \leq 8 \\ x_1 \text{ 无约束}, x_2 \geq 0, x_3 \leq 0 \end{cases}$$

解) $\min w = 5r_1 + 3r_2 + 8r_3$

$$\text{s.t. } \begin{cases} r_1 - r_2 + 4r_3 = 5 \\ 2r_1 + 5r_2 + 7r_3 \geq 6 \\ 2r_3 - r_2 + 3r_3 \leq 3 \end{cases}$$

$$r_1 \text{ 无约束 } r_2 \leq 0, r_3 \geq 0$$

外部 \Rightarrow 市场价格
企业内部 y_i (价格)

2.4 影子价格(Shadow price)

선형 계획법에서의 시스템 분석 수법의 하나. 시스템에서 어느 제약 조건을 변화했다고 가정할 때 다른 제약 조건을 만족하면서 어디까지 비용을 절감할 수 있는가를 분석하고, 이러한 분석을 진행시켜 각 조건을 만족하는 최저 비용을 찾아내는 방법.

★ 取决于企业对资源使用的状况，受生产任务、产品结构差异、管理效率等因素影响。

★ 边际利润的概念：增加单位资源对利润的贡献。

★ 对资源使用决策的参考依据：买进、卖出

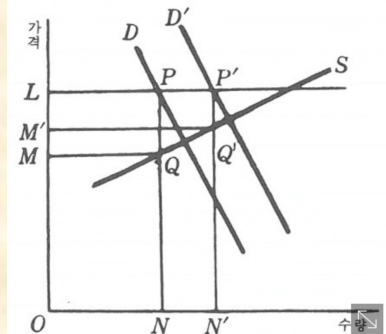
★ 对资源使用状况的估算：互补松弛性

★ 机会成本： $\sigma_j = c_j - C_B B^{-1} p_j = c_j - Y p_j = c_j - \sum a_{ij} y_i$
 $\sum a_{ij} y_i$ 为生产 x_j 而放弃其他产品生产的利润。

★ 制定内部结算价格的参考

최적의 가격
 $Z = CX \pm W = \sum b_i$
 ↑
 数量

재화의 가격이 그 재화의 기회비용을 올바르게 반영하는 가격을 말한다. 가격통제나 독점적 행동 등의 이유로 가격이 자유롭게 움직이지 못하고 어떤 점에 고정될 경우, 이 고정된 가격을 완전경쟁 하에서 성립될 경쟁가격과 비교할 때 이 개념이 발생한다. 완전경쟁에서의 균형분석을 경직가격(rigid price) 내지 타성적 가격(conventional price)이 존재하는 경우에도 적용하려 할 때에 잠재가격이라는 개념의 발생이유가 있는 것이다.



2.5 对偶单纯形法

由于单纯表中同时反映原问题与对偶问题的最优解，故可以从求对偶问题最优解角度求解LP模型。

例：

$$\begin{aligned} \min z &= 2x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

标准化

\Rightarrow

$$\begin{aligned} \max z' &= -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4 \\ \text{s.t. } &\begin{cases} (x_1 + x_2 - x_3) = 3 \cdot (-1) \\ (x_1 + 2x_2 - x_4) = 4 \cdot (-1) \\ x_j \geq 0, (j=1,2,3,4) \end{cases} \end{aligned}$$

$$\max z' = -2x_1 - 3x_2 + 0x_3 + 0x_4$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} \text{s.t. } &\begin{cases} -x_1 - x_2 + x_3 = -3 \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -4 \\ x_j \geq 0, (j=1,2,3,4) \end{cases} \end{aligned}$$

Handwritten notes:

$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 = 3 \\ &-(x_1 + 2x_2 - x_4) = -4 \end{aligned}$$

列单纯表计算:

对偶问题无可行解 $G_j \geq 0$

$C_j \rightarrow$			-2	-3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	-3	-1	-1	1	0
0	x_4	-4	-1	[-2]	0	1
$c_j - z_j$			-2	-3	0	0
0	x_3	-1	[-1/2]	0	1	-1/2
-3	x_2	2	1/2	1	0	-1/2
$c_j - z_j$			-2 - (-3) = 1	0	0	-3/2
-2	x_1	2	1	0	-2	1
-3	x_2	1	0	1	1	-1
$c_j - z_j$			0	0	-1	-1

상대문제 진입/퇴출
정확한 순서.

1. b값이 마이너스 중
가장 작음.

2. 이 때에 x_4 행에

x_1 x_2
-2 -3
-1 -1

양대 H 작은 값은

결과 진입

找到原问题的最优解

原问题的最优解 $(2, 1, 0, 0)^T$

对偶问题的最优解 $(1, 1, 0, 0)^T$

对偶单纯形法步骤:

1. 列初始单纯形表, 使得所有检验数 $\sigma_j \leq 0$; 意味着: 对偶问题有可行解
2. 出基变量: 取 $\min \{b_i < 0\} = b_l$ ← 行号是 l $\rightarrow x_{(l)}$
3. 入基变量: $\min \left\{ \frac{c_j - z_j}{-a_{lj}} \mid \underbrace{a_{lk} < 0} \right\} = \rightarrow x_k$ ← $\frac{c_j - z_j}{-a_{lj}}$ 选个
4. 主元素: $[a_{lk}]$
5. 迭代: 同单纯形法, 新单纯表中 p_k 化为单位向量

说明:

- 1⁰ 使用对偶单纯形法时, 初始表中检验数必须全部为 $\sigma_j \leq 0$, 即使得其对偶问题为可行解,
- 2⁰ 为便于说明, 这里采取从原问题角度叙述迭代步骤。

复习思考题

1. 如何定义影子价格？
2. 影子价格的经济意义有哪些？
3. 机会成本与财务成本有什么不同？
4. 为何提出对偶单纯形法？
5. 对偶单纯形法的计算原理是什么？
6. 对偶单纯形法的应用条件是什么？



2.6 灵敏度分析

1. 灵敏度分析的概念：

当某一个参数发生变化后，引起最优解如何改变的分析。

可以改变的参数有：

b_i ——约束右端项的变化，通常称资源的改变；

c_j ——目标函数系数的变化，通常称市场条件的变化；

p_j ——约束条件系数的变化，通常称工艺系数的变化；

其他的变化有：增加一种新产品、增加一道新的工序等。

2. 分析原理:

借助最终单纯形表，将变化后的结果按下述基本原则反映到最终表中去。

$$(1) \ b_i \text{变化:} \quad (b + \Delta b)' = B^{-1} (b + \Delta b) \\ = \underbrace{B^{-1} b}_{\text{原来的}} + \underbrace{B^{-1} \Delta b}_{\text{变化量}} = b' + B^{-1} \Delta b$$

$$(2) \ p_j \text{变化:} \quad (p_j + \Delta p_j)' = B^{-1} (p_j + \Delta p_j) \\ = B^{-1} p_j + B^{-1} \Delta p_j = p_j' + B^{-1} \Delta p_j$$

(3) c_j 变化: 直接反映到最终表中，计算检验数。

(4) 增加一个约束方程: 直接反映到最终表中。

(5) 增加新产品: 仿照 p_j 变化。

3. 计算示例:

例: 已知某线性规划模型及最终的单纯表如下:

$$\Delta b \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

max $z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3$ 问: (1) 若 b_2 增加8个单位, 最优解如何变化?

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ x_1 + 2x_2 \leq 8 \\ 4x_1 \leq 16 \\ 4x_2 \leq 12 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

(2) 若 c_2 还可增加2个单位, 最优解如何改变?

(3) 若引进一个新变量 (产品) y , 其目标函数系数为 $c_y = 5$, 系数列向量为 $p_y = [3 \ 2 \ 6 \ 3]^T$, 问最优解是否会改变?

$$C_2 = 3 + (2) = 5$$

$$B^{-1}$$

$$\text{最初 } B^{-1} [3, 2, 6, 3]$$

$c_j \rightarrow$	2	5	0	0	0	0	
$C_B \quad X_B \quad b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
0 x_3 0	0	0	1	-1	-0.25	0	3
2 x_1 4	1	0	0	0	0.25	0	2
0 x_6 4	0	0	0	-2	0.5	1	6
5 x_2 2	0	1	0	0.5	-0.125	0	3
$c_j - z_j$	0	0	0	-1.5	-0.125	0	

$B^{-1} = \text{Songshi bimling}$

--第2章 对偶问题--

解: (1)

$$B^{-1} \Delta b = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0 & 0.25 & 0 \\ 0 & -2 & 0.5 & 1 \\ 0 & 0.5 & -0.125 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \\ -16 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \therefore (b + \Delta b)' &= B^{-1} b + B^{-1} \Delta b = b' + B^{-1} \Delta b \\ &= [0 \ 4 \ 4 \ 2]^T + [-8 \ 0 \ -16 \ 4]^T = [-8 \ 4 \ -12 \ 6]^T \end{aligned}$$

\therefore 利用对偶单纯形法继续 求最优解。

(2) 当 c_j 变化时, $\sigma' = C' - C_B' B^{-1} A$, 列出单纯形表, 重新求出检验数, 如表中所示:

$$\begin{aligned} (3) \text{ 增加 } y \text{ 时, } \sigma_y &= c_y - C_B B^{-1} p_y = 5 - (0 \ 1.5 \ 0.125 \ 0) \begin{matrix} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{matrix} [3 \ 2 \ 6 \ 3]^T \\ &= 1.25 > 0 \end{aligned}$$

\therefore 选择 y 作入基变量, $p_y' = B^{-1} p_y = [-0.5 \ 1.5 \ 2 \ 0.25]^T$

继续迭代:

원래 문제에 저기가 --第2章 对偶问题--

右端项变化分析单纯形表: (-)가 있으면 不可行, 이때 쌍대 심플렉스

返回

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	-8	0	0	1	-1	-0.25	0
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0
0	x_6	-12	0	0	0	[-2]	0.5	1
3	x_2	6	0	1	0	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	0	-1.5	-0.125	0
0	x_3	-2	0	0	1	0	[-0.5]	-0.5
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0
0	x_4	6	0	0	0	1	-0.25	-0.5
3	x_2	3	0	1	0	0	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	0	0	-0.5	-0.75
0	x_5	4	0	0	-2	0	1	1
2	x_1	3	1	0	0.5	0	0	-0.25
0	x_6	7	0	0	-0.5	1	0	-0.25
3	x_2	3	0	1	0	0	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	-1	0	0	-0.25

C_j 变化分析单纯形表:

$c_j \rightarrow$			2	5	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
0	x_3	0	0	0	1	-1	-0.25	0
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0
0	x_6	4	0	0	0	-2	[0.5]	1
5	x_2	2	0	1	0	0.5	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	0	-2.5	0.125	0
0	x_3	2	0	0	1	-2	0	0.5
2	x_1	2	1	0	0	1	0	-0.5
0	x_5	8	0	0	0	-4	1	2
5	x_2	3	0	1	0	0	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	0	-2	0	-0.25

返回

增加新产品（变量y）变化分析单纯形表：

指：生产一单位的y种产品
利润会增加1.25

$c_j \rightarrow$			2	3	0	0	0	0	5
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y
0	x_3	0	0	0	1	-1	-0.25	0	-0.5
2	x_1	4	1	0	0	0	0.25	0	1.5
0	x_6	4	0	0	0	-2	0.5	1	[2]
3	x_2	2	0	1	0	0.5	-0.125	0	0.25
$c_j - z_j$			0	0	0	-1.5	-0.125	0	1.25
0	x_3	1	0	0	1	-1.5	-0.125	0.25	0
2	x_1	1	1	0	0	1.5	-0.125	-0.75	0
5	y	2	0	0	0	-1	0.25	0.5	1
3	x_2	1.5	0	1	0	0.75	-0.1875	-0.125	0
$c_j - z_j$			0	0	0	-0.25	-0.4375	-0.625	0

作业

L181000503

尹峻熒

$$(b) \min z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 10 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

解) 标准化

$$\max z = -5x_1 - 2x_2 - 4x_3$$

$$\text{s.t. } \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 - x_5 = 10 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$$

$$\therefore (1, \frac{1}{3}, 0, 0, \frac{1}{3})^T$$

C_j		-5	-2	-4	0	0
$C_B X_B b$		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
0 x_4	-4	-3	-1	-2	+1	0
0 x_5	10	-6	-3	-5	0	+1
G_j		-5	-2	-4	0	0
0 x_4	$-\frac{2}{3}$	-1	0	$-\frac{1}{3}$	+1	$-\frac{1}{3}$
-2 x_2	$\frac{10}{3}$	2	1	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$
G_j		-1	0	$-\frac{2}{3}$	0	$+\frac{2}{3}$
-5 x_1	$\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{3}$	-1	$+\frac{1}{3}$
-2 x_2	2	0	1	1	2	-1
G_j		0	0	$\frac{1}{3}$	-1	$-\frac{1}{3}$
		$-x_3$	$-x_4$	$-x_5$	$-x_1$	$-x_2$

이제 OK (시험 범위 X)

2.7 参数线性规划

1. 概念：研究目标函数值随某一参数变化的规律及最优解相应的变化。
2. 算法：先令变化量 $\theta=0$ ，再考察随着 θ 的增加引起解的变化情况。
3. 最后，画出目标值随 θ 的变化所形成的曲线。

例：有如下线性规划模型：

$$\max z=2x_1+3x_2$$

$$\text{s.t } \begin{cases} x_1+x_2 \leq 3 \\ x_1+2x_2 \leq 4 + \theta \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0 \quad (\theta \geq 0) \end{cases}$$

(1) 当 $\theta=0$ 时的最优解；

(2) 当 $\theta>0$ 时， z 值的变化规律。

解：先令 $z=0$ ，有下述模型的标准形

$$\max z=2x_1+3x_2+0x_3+0x_4$$

$$\text{s.t } \begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ x_1+2x_2+x_4=4 \\ x_j \geq 0, (j=1,2,3,4) \end{cases}$$

利用单纯形法求解：

$C_j \rightarrow$			2	3	0	0	
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	
0	x_3	3	1	1	1	0	
0	x_4	4	1	[2]	0	1	
$c_j - z_j$			2	3	0	0	
0	x_3	1	[1/2]	0	1	-1/2	
3	x_2	2	1/2	1	0	1/2	
$c_j - z_j$			1/2	0	0	-3/2	
2	x_1	2	1	0	2	-1	
3	x_2	1	0	1	-1	1	($\theta = 0$)
$c_j - z_j$			0	0	-1	-1	

当 $\theta > 0$ 时, $\Delta b' = B^{-1} \cdot \Delta b = B^{-1} \cdot (0 \quad \theta)^T = (-\theta \quad \theta)^T$, 继续迭代如下: (对偶单纯形法)

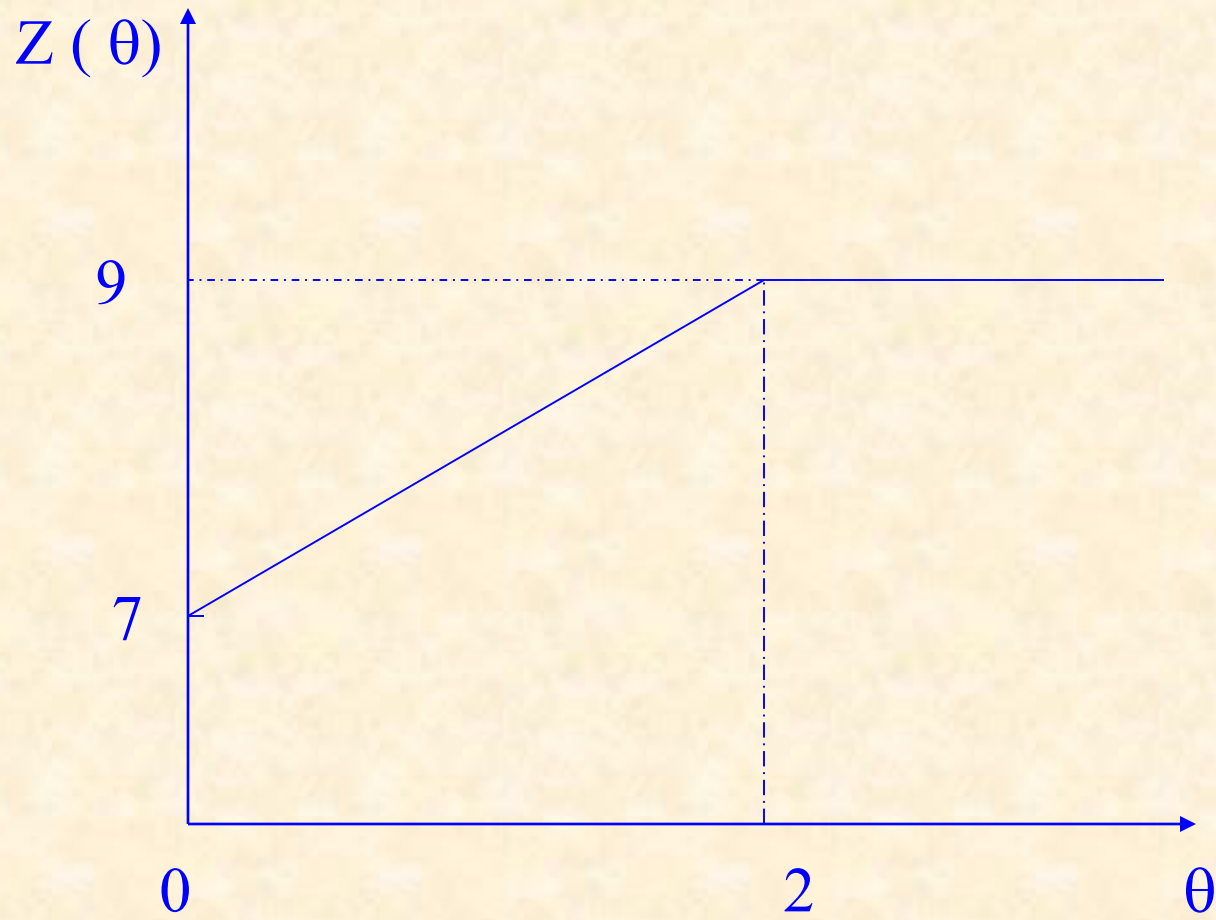
$C_j \rightarrow$			2	3	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
2	x_1	$2 - \theta \geq 0$	1	0	2	$[-1]$
3	x_2	$1 + \theta \geq 0$	0	1	-1	1
$c_j - z_j \leq 0$			0	0	-1	-1
0	x_4	$\theta - 2$	-1	0	-2	1
3	x_2	3	1	1	1	0
$c_j - z_j$			-1	0	-3	0

$(0 \leq \theta \leq 2)$

$(\theta > 2)$

当 $\theta > 2$ 的话

其变化曲线如下:



复习思考题

1. 灵敏度分析的概念是什么？
2. 为何要进行灵敏度分析？
3. 参数分析解决什么问题？
4. 各项参数的变化可能会引起哪些结果改变？
5. 敏感度分析与参数规划依据的是什么原理？

例：

某大学教授利用部分业余时间从事咨询工作。现有三个A、B、C企业欲聘请，各自每小时的咨询费用分别为10，12，16元。教授每月可用于外出咨询的时间为40小时，但对每个企业而言，用于准备的时间与咨询所花的时间的比例分别为0.1，0.5，0.8，教授每月可用于准备的时间应不超过24小时。若假定三个企业每月要求的咨询时间可分别达到80，60，20小时。现问：教授应作何种决策，才能使收益最大？

从目前看，教授有许多咨询机会，但可用的外出咨询时间及准备的时间有限，所以可考虑雇用助手（用于帮助准备），但要支付每小时4元的费用，现帮助教授分析一下，它是否该雇用助手，若需雇用，每月应雇用多少时间？

设 用于三个企业咨询的时间分别为A— x_1 , B— x_2 , C— x_3 ,

$$\text{Max } z=10x_1+12x_2+16x_3-4\theta$$

$$\text{s.t. } \left\{ \begin{array}{l} x_1+x_2+x_3 \leq 40 \\ 0.1x_1+0.5x_2+0.8x_3 \leq 24+\theta \\ x_1 \leq 80 \\ x_2 \leq 60 \\ x_3 \leq 20 \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0 \end{array} \right.$$

考到

$$P_j \quad B^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ -2.5 \\ 2.5 \end{bmatrix}$$

单纯形表:

$c_j \rightarrow$	10	12	16	0	0	0	0	0	0	-1
$C_B \quad X_B \quad b$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	0	0
10 x_1 5	1	0	0	1.25	-2.5	0	0	0.75	2.5	
12 x_2 15	0	1	0	-0.25	2.5	0	0	-1.75	-2.5	
0 x_6 75	0	0	0	-1.25	2.5	1	0	-0.75	-2.5	
0 x_7 45	0	0	0	0.25	-2.5	0	1	1.75	2.5	
16 x_3 20	0	0	1	0	0	0	0	1.00	0	
$c_j - z_j$	0	0	0	-9.5	-5.0	0	0	-2.5		
	$-y_6$	$-y_7$	$-y_8$	$-y_1$	$-y_2$	$-y_3$	$-y_4$	$-y_5$		

$$Z_{max} = 550$$

影子价格

单纯形表：

$c_j \longrightarrow$			10	12	16	-4	0	0	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	θ	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-4	θ	2	0.4	0	0	1	0.5	-1.0	0	0	0.3
12	x_2	20	1	1	0	0	1.0	0	0	0	-1
0	x_6	80	1	0	0	0	0	0	1	0	0
0	x_7	40	-1	0	0	0	-1	0	0	1	1
16	x_3	20	0	0	1	0	0	0	0	0	1
$c_j - z_j$			-0.4	0	0	0	-10	-4	0	0	-2.8

$$Z_{max} = 552$$

本章知识点

1. 对偶模型中结构要素的对应关系
2. 对偶模型的主要性质
3. 影子价格原理及应用分析
4. 对偶单纯形法的使用
5. 灵敏度分析方法
6. 参数规划方法