

第五章

目标规划

Goal Programming

线性规划：单一目标

目标规划：多目标(Multiple-objectives)
考虑优先次序、综合规划

5.1 问题的提出和数学模型

目标规划

一、引例：某企业生产I、II两种产品，其生产的参数如表中所示。在制定生产计划时要考虑如下内容：

(1) 依据市场反馈信息，I产品出现滞销，预测表明，两种产品的生产比例大致保持1:1为宜；

(2) 设备能力尚有机动的余地，B设备必要时可以加班，但希望加班时间愈少愈好；A设备较为重要，所以既希望能力能够被充分利用，同时又尽量少加班；

(3) 企业将利润指标定为12元，并力求超过。

企业认为，在上述考虑的目标中，利润要求最为重要；产量比例次之；A设备的重要性是B设备的三倍。

试建立该问题的数学模型。

二、建立模型

设 x_1 ——I产品的产量

x_2 ——II产品的产量

设备 产品	A	B	C	D	利润
I	2	1	4	0	2
II	2	2	0	4	3
加工能力	12	8	16	12	

원래 함수

$$(1) \quad x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0$$

$$(2) \quad B: \quad x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 8$$

$$A: \quad 2x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 12$$

$$C: \quad 4x_1 \leq 16$$

$$D: \quad 4x_2 \leq 12$$

$$(3) \quad 2x_1 + 3x_2 + d_4^- - d_4^+ = 12$$

$$2x_1 + 2x_2 \leq 12$$

목적 함수와 실제 값이 같을 때,

$$\min (d_1^- + d_1^+)$$

$$\min d_2^+$$

초과하지 않으려면

$$\min (d_3^- + d_3^+)$$

절대約束

$$\min d_4^-$$

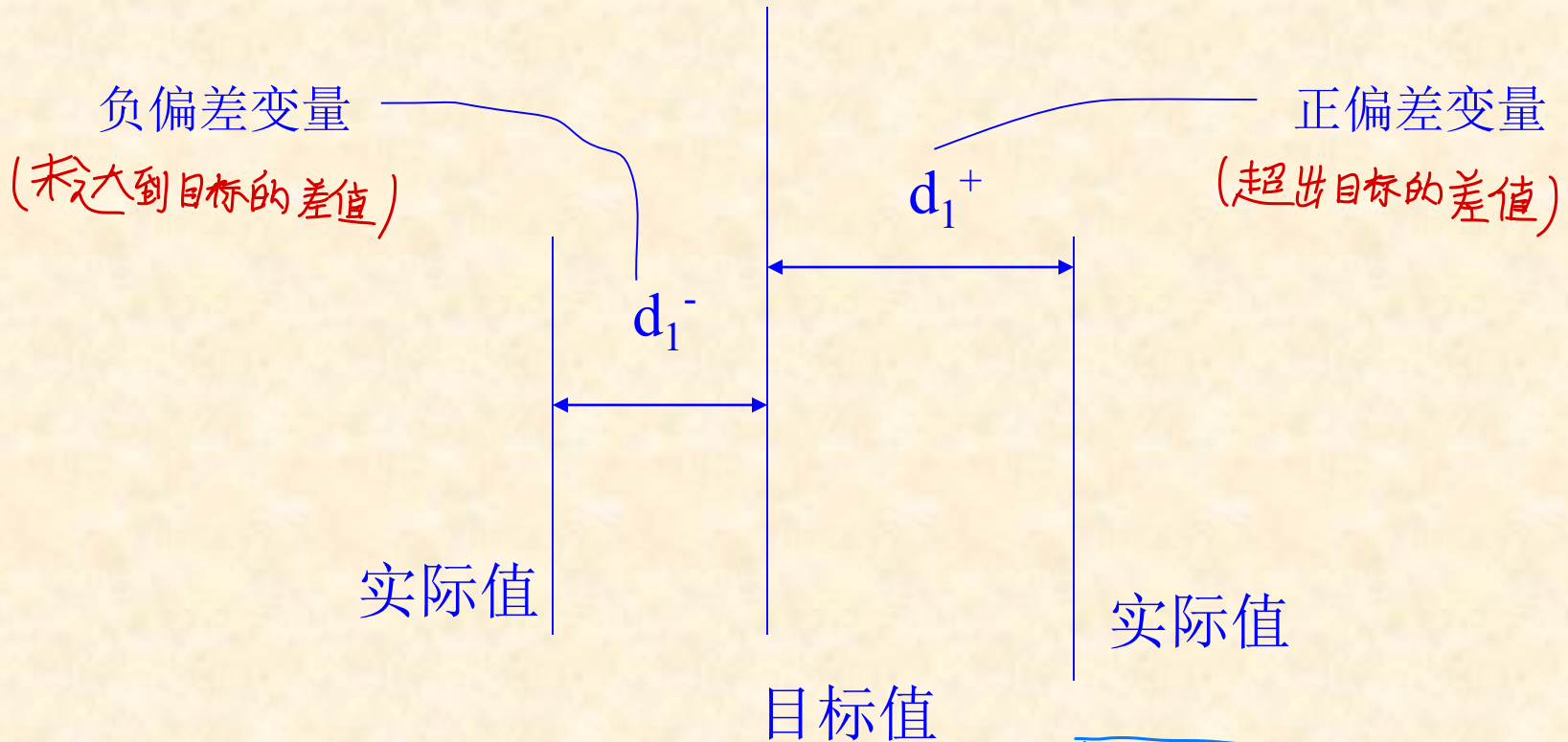
초과

조건에 맞춰 쓰기

P₂

← 애가 작은 수로
3P₃
↓
가파로 ↓

우선순위



$\therefore d_1^- \geq 0, d_1^+ \geq 0$

$\therefore d_1^- \cdot d_1^+ = 0$

← 不加惩罚 → 加到主

目标值控制
ex 超过 d^-
不超过 d^+
实际值 = 目标值 + $d^- - d^+$

목표 계획법

다수의 목표가 존재하는 문제 상황을 체계적으로 해결할 수 있는 기법

• 변수 (의사결정 변수, 편차 변수)

• 목적함수: \cdot 항상 \min

\cdot 바람직하지 않은 편차 변수들의 합을 최소화

• 제약조건 (시스템 제약조건, 목표 제약조건)

통제 \times

통제 \circ

\cdot 고려하는 여러가지 목표는 목적함수로 표현되는 것이 아니라 적절한 변환을 통해 제약조건의 형태로 표현

• 편차 변수 d^- , d^+
미달분, 초과분

左 \geq 右 \rightarrow 미달분이 바람직 \times

" \leq " \rightarrow 초과분이 "

" $=$ " \rightarrow 미달, 초과 둘다 "

{ 우선순위 계획법: 우선순위배정 예 $p_1 d_1^+ + p_2 d_2^+ \dots$
가중치 계획법: 가중치 부여 예 5:3:2 等等

目标规划模型如下：

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & z = P_1 d_4^- + P_2 (d_1^- + d_1^+) + 3P_3 (d_3^- + d_3^+) + P_3 d_2^+ \\
 \text{St.} \quad & \left\{ \begin{array}{l}
 x_1 - x_2 + d_1^- - d_1^+ = 0 \quad \text{-----} \quad \textcircled{1} \\
 x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ = 8 \quad \text{-----} \quad \textcircled{2} \\
 2x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 12 \quad \text{-----} \quad \textcircled{3} \\
 4x_1 \leq 16 \quad \text{-----} \quad \textcircled{4} \\
 4x_2 \leq 12 \quad \text{-----} \quad \textcircled{5} \\
 2x_1 + 3x_2 + d_4^- - d_4^+ = 12 \quad \text{-----} \quad \textcircled{6} \\
 x_1, x_2 \geq 0, d_i^-, d_i^+ \geq 0, (i=1,2,3,4)
 \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

1:1
产量比例
A
13

0.8

P_i ——优先级系数， i 越小，则级别越高。

三、模型的特点

- (1) 引进偏差变量，表示实际值与目标值之间的差距。

其中， d_i^- 表示负偏差，体现实际值低于目标的大小； d_i^+ 表示正偏差，体现实际值高于目标的大小。

- (2) 约束分两种形式：

系统约束——刚性约束，严格限制；可以不出现；

目标约束——柔性约束，弹性限制。必须存在。

- (3) 目标函数只出现偏差变量，而不含决策变量。

- (4) 模型引进优先级系数的概念。

作业

1181000503

尹俊英

5.4 嘉州市准备在下一年度预算中购置一批救护车。已知购置一辆的费用为20万元。救护车用于两个郊区县，各分配 x_A 、 x_B 辆。A县救护站从接到电话到救护车出动的响应时间为 $(40 - 3x_A)$ min，B县的响应时间为 $(50 - 4x_B)$ min。该市确定如下优先级目标：

P_1 ：用于购置救护车费用不超过400万元；

P_2 ：A县的响应时间不超过5 min；

P_3 ：B县的响应时间不超过5 min。

要求：(a) 建立目标规划模型并求出满意解；

(b) 若对优先级目标作出调整： $P_1 \rightarrow P_3$ ， $P_2 \rightarrow P_1$ ， $P_3 \rightarrow P_2$ ，重建模型并找出新的满意解。

a.

$$\min Z = P_1 d_1^+ + P_2 d_2^+ + P_3 d_3^+$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 20x_A + 20x_B + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ 40 - 3x_A + d_2^- - d_2^+ = 5 \\ 50 - 4x_B + d_3^- - d_3^+ = 5 \\ x_A, x_B, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i=1,2,3) \end{cases}$$

b. $\min Z = P_1 d_2^+ + P_2 d_3^+ + P_3 d_1^+$

$$\begin{cases} 20x_A + 20x_B + d_1^- - d_1^+ = 400 \\ 40 - 3x_A + d_2^- - d_2^+ = 5 \\ 50 - 4x_B + d_3^- - d_3^+ = 5 \\ x_A, x_B, d_i^-, d_i^+ \geq 0 \quad (i=1,2,3) \end{cases}$$

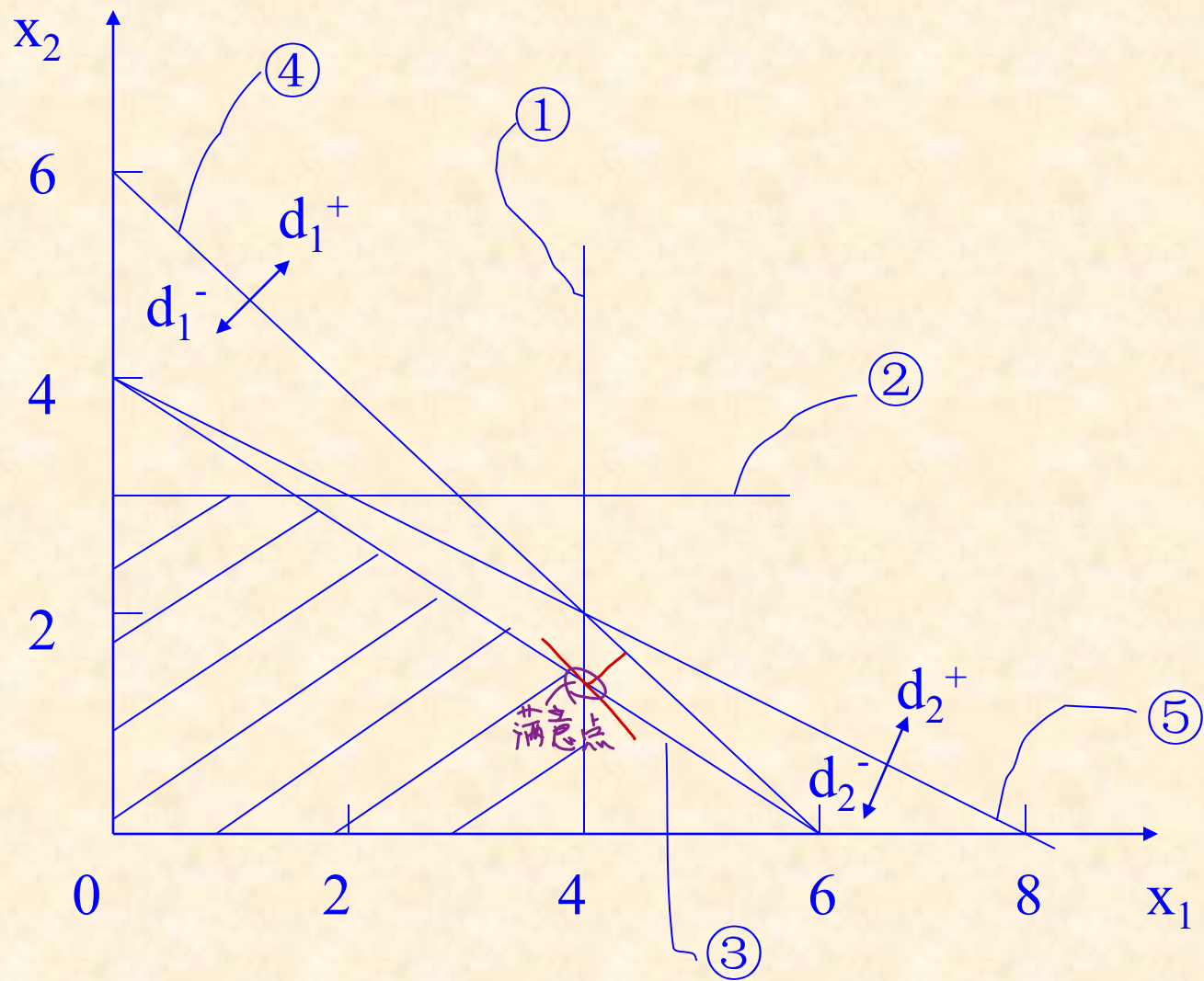
5.2 目标规划模型的图解分析

- ① 作平面直角坐标系；
- ② 作出系统约束所在直线；
- ③ 作出目标约束所在直线，标出偏差方向；
- ④ 按优先级次序，确定满意解。

例：有目标规划模型如下，用图解分析求解

$$\text{Min } z = P_1(d_1^- + d_1^+) + P_2(d_2^- + d_2^+)$$

$$\text{St. } \left\{ \begin{array}{ll} 4x_1 & \leq 16 & \text{-----} & \textcircled{1} \\ & 4x_2 & \leq 12 & \text{-----} & \textcircled{2} \\ & 2x_1 + 3x_2 & \leq 12 & \text{-----} & \textcircled{3} \\ & 2x_1 + 2x_2 + d_1^- - d_1^+ & = 12 & \text{-----} & \textcircled{4} \\ & x_1 + 2x_2 + d_2^- - d_2^+ & = 8 & \text{-----} & \textcircled{5} \\ & x_1, x_2 \geq 0, d_i^-, d_i^+ \geq 0, & (i=1,2,3) & & \end{array} \right.$$



5.3 目标规划的单纯形法

目标规划的单纯形法与线性规划单纯形法类似。

最优性判定准则：

- (1) 所有检验数均 ≥ 0 ，则该表为最优解表；
- (2) 若某行具有负值检验数，但负检验数列较高优先级中具有正检验数，则该表为最优解表。

例:

$$\text{Min } z = P_1 d_1^- + P_1 d_2^+ + P_2 d_3^-$$

St.

$$x_1 + d_1^- - d_1^+ = 10$$

$$2x_1 + x_2 + d_2^- - d_2^+ = 40$$

$$3x_1 + 2x_2 + d_3^- - d_3^+ = 100$$

$$x_1, x_2 \geq 0, d_i^-, d_i^+ \geq 0, (i=1,2,3)$$

$$C_j - C_B \cdot Z_{Bj}$$

$C_j \rightarrow$			0	0	p_1	0	0	p_1	p_2	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
p_1	d_1^-	10	[1]	0	1	-1	0	0	0	0
0	d_2^-	40	2	1	0	0	1	-1	0	0
p_2	d_3^-	100	3	2	0	0	0	0	1	-1
$C_j - Z_j$		p_1	-4	0	0	1	0	1	0	0
		p_2	-3	-2	0	0	0	0	1	1
0	x_1	10	1	0	1	-1	0	0	0	0
0	d_2^-	20	0	1	-2	2	1	-1	0	0
p_2	d_3^-	70	0	2	-3	3	0	0	1	-1
$C_j - Z_j$		p_1	0	0	1	0	0	1	0	0
		p_2	0	-2	3	-3	0	0	1	1

p_1 이 더 중요하니까 먼저 6을 0으로 만들

$C_j \rightarrow$			0	0	p_1	0	0	p_1	p_2	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+	d_3^-	d_3^+
0	x_1	20	1	1/2	0	0	1/2	-1/2	0	0
0	d_1^+	10	0	1/2	-1	1	1/2	-1/2	0	0
p_2	d_3^-	40	0	1/2	0	0	-3/2	3/2	1	-1
$c_j - z_j$		$p_1 \geq 0$	1			1				
		p_2	-1/2			3/2			1	
0	x_1	10	1	0	1	-1	0	0	0	0
0	x_2	20	0	1	-2	2	1	-1	0	0
p_2	d_3^-	30	0	0	1	-1	-2	2	1	-1
$c_j - z_j$		p_1	1 ≥ 0			1 ≥ 0				
		p_2	-1			1	2	-2	1	

$p_1, -p_2 = 0$ $2p_1 - p_2 = 0$

5.4 目标规划模型的实际应用

例1： 某计算机公司欲制定购买年度所需的计算机芯片（chip集成电路块）的策略。公司选择的供应商有三家，芯片按质量的差异可分为一级、二级和三级，一级最好，三级最低。在本年度里，公司估计可需要一级芯片5000块，二级芯片3000块，三级芯片1000块。来自每个供应商的芯片构成情况如表示（芯片成组供应，100块为一组），公司年度采购芯片的预算为28000元。若公司没获得足够的各级芯片，它还需要额外零散购买缺少的芯片，价格为一级芯片10元，二级芯片6元，三级芯片4元。若采购资金超过预算，则超额部分将承担30%的融资费，所以应使融资费尽可能的少。公司欲使用目标规划模型来帮助决策，优先考虑的顺序为：

芯片组等级数量构成及价格

- (1) 预算要求；
- (2) 一级芯片的需求量；
- (3) 二级芯片的需求量；
- (4) 三级芯片的需求量。

供应商 \ 等级	一级	二级	三级	每组价格
供应商A	60	20	20	400
供应商B	50	35	15	300
供应商C	40	20	40	250

模型:

设 x_j ——购买第 j 个供应商芯片组数

约束方程:

一级芯片: $60x_1+50x_2+40x_3+d_1^--d_1^+=5000$

二级芯片: $20x_1+35x_2+20x_3+d_2^--d_2^+=3000$

三级芯片: $20x_1+15x_2+40x_3+d_3^--d_3^+=1000$

预算要求: $400x_1+300x_2+250x_3+10d_1^--6d_2^--4d_3^--d_4^--d_4^+=28000$

目标函数:

$$\text{Min } z = P_1d_4^++P_2d_1^--P_3d_2^--P_4d_3^--$$

变量符号限制:

$$x_j \geq 0 \quad (j=1,2,3), d_i^- \geq 0, \quad d_i^+ \geq 0 \quad (i=1,\cdots,4)$$

5.5 目标规划的灵敏度分析

☆ 一般只做 c_j 、 b_i 的变化分析

☆ 只能用单纯形法分析计算

复习思考题

1. 为何提出目标规划问题? 다제 목적함수
2. 目标规划模型的特点是什么? d^-, d^+
3. 目标规划的图解分析与线性规划?
4. 解目标规划单纯形法与解线性规划单纯形法有什么不同?
5. 目标规划的灵敏度分析通常都做那些内容?

本章知识点

1. 目标规划模型的结构特点
2. 目标规划问题的建模思路
3. 目标规划模型的图解分析法
4. 目标规划模型的单纯形法
5. 目标规划的灵敏度分析内容