

第八章 动态规划

Dynamic Programming

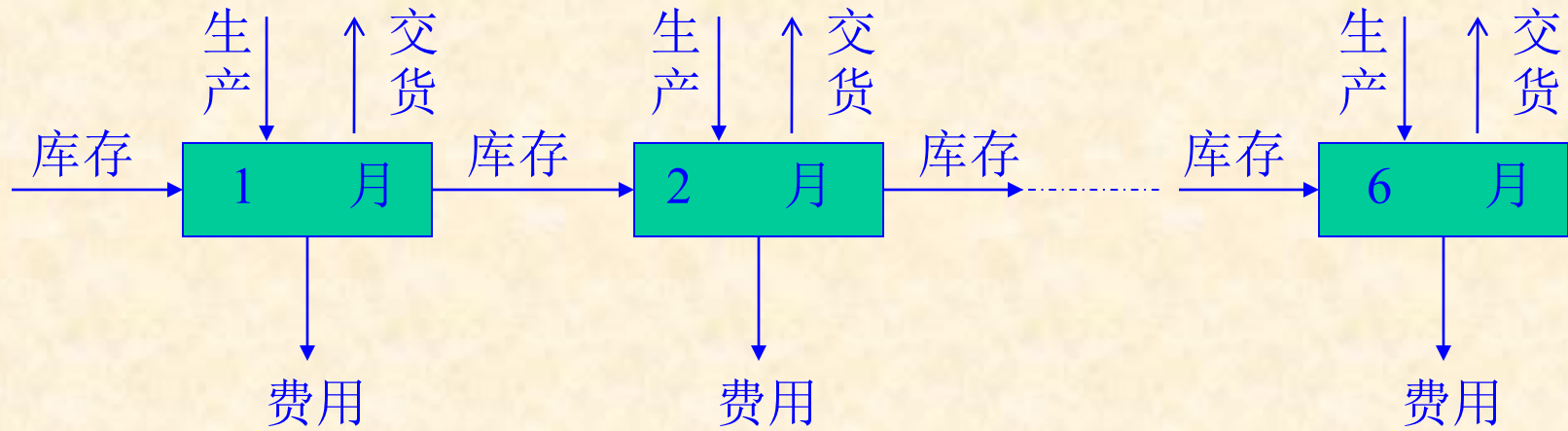
动态规划（DP）是运筹学的一个分支，解决多阶段决策问题的一种方法。1951年美国数学家贝尔曼（R. Bellman）等提出“最优化原理”，创建动态规划学科。主要应用于工程技术、经济、工业生产、最优控制等问题。

8.1 多阶段决策问题

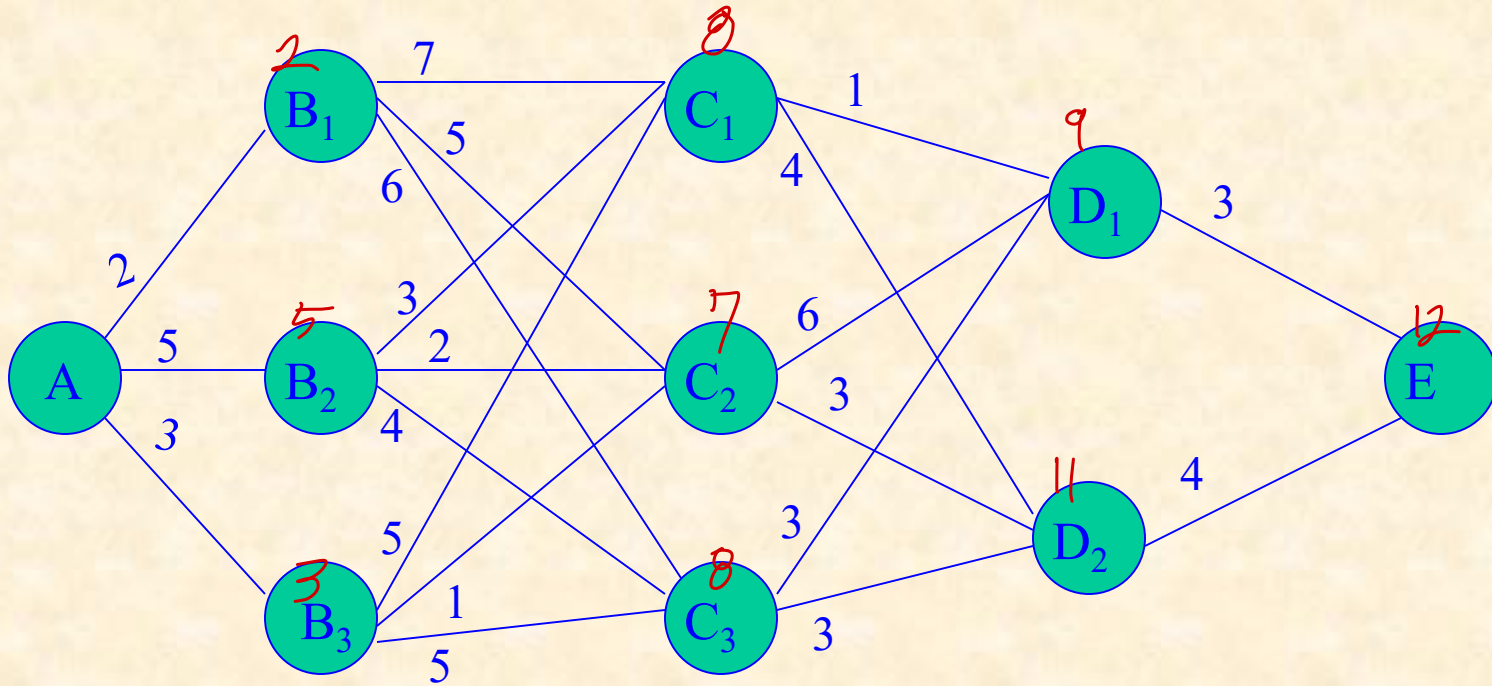
例1：某工厂根据合同要求在未来半年中需提供货物数量如表中所示，表中数字为月底交货数量。该厂的生产能力为每月400件，其仓库的存货能力为3百件。已知每百件货物的生产费用为10千元，在进行生产的月份，工厂要支出固定费用4千元，仓库保管费用为每百件货物每月1千元，假定开始及6月底交货后均无存货，试问每个月应该生产多少件产品，才能既满足交货任务又使总费用最小？

| 月 份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 交货数量（百件） | 1 | 2 | 5 | 3 | 2 | 1 |

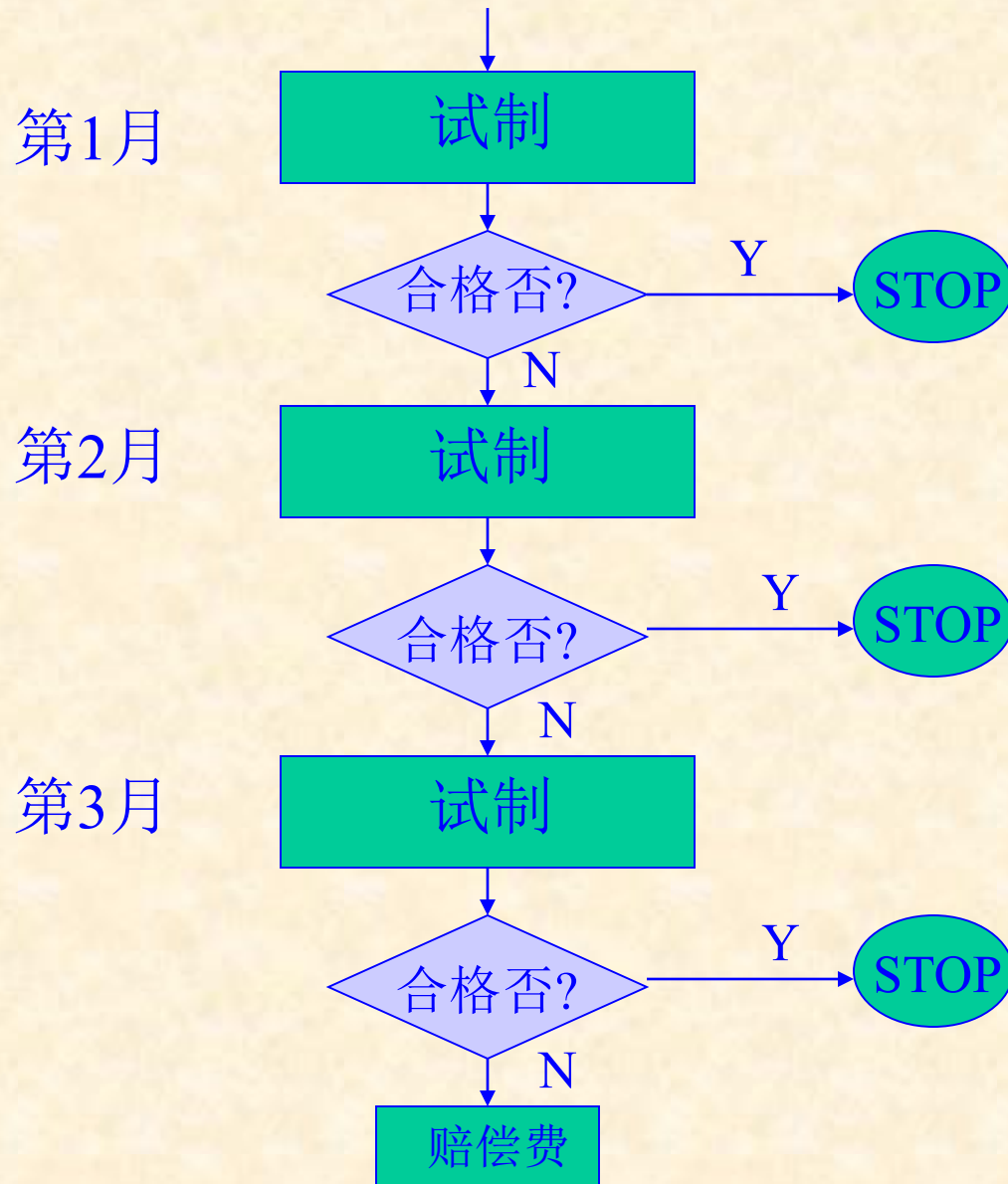
决策过程设计：



例2：由A至E需经B、C、D，问如何行走，路程最短？



例3： 公司承担一种新产品试制任务，合同要求三个月内交出一台合格的样品，否则将负担1500元的赔偿费。试制时投产一台成功的概率为 $1/3$ ，投产一批的准备费用为250元，每台试制费用为100元。若投产一批后全部不合格，可再投产一批试制，但每投产一批需要一个月的周期。问每批应该投产多少台，可使总的费用（包括可能发生的赔偿费用）期望值最小？



多阶段决策问题的界定：

- ① 决策过程可划分为若干个互相联系的阶段；
- ② 在每个阶段分别对应着一组可以选取的决策；
- ③ 当每个阶段决策选定以后，活动过程也随之确定。

♣ 多阶段决策问题表现出明显的时序性，体现出“动态”的特点，是动态规划研究的主要对象。某些静态问题，当采用动态规划的方法求解时，也会使问题的处理变得简单。

8.2 动态规划的基本概念和数学模型

一、动态规划的基本概念

- (1) 阶段 (stage)：指一个活动过程需要做出决策的步数。
k——阶段变量。
- (2) 状态 (state)：某阶段初始状况。既是本阶段决策的出发点，又是上一阶段决策产生的结果。是动态规划中各阶段信息的传递点和结合点。
 x_k ——第k阶段状态变量。

特征：

- ① 反映研究对象的演变特征；
- ② 包含到达这个状态前的足够信息，并具有无后效性；或称决策的相互独立性；
- ③ 状态变量具有可知性，当决策确定后，到达的状态是可以测知的。

♣ 描述状态所必须使用的变量数，称动态规划的维数。

(3) 决策 (decision)：指在某阶段从给定的状态出发，决策者从面临的若干种不同的方案中所做出的选择。

决策变量 $u_k(x_k) \in D_k(x_k)$ ——允许决策集合， $u_k(x_k)$ 取值范围。

要点： ① 决策变量是对活动过程控制的手段；
② 决策变量取值可以是连续型的，也可以是离散型的；
③ 允许决策集合相当于可行域。

(4) 策略 (policy) 与子策略 (subpolicy)：各阶段决策组成的序列总体称为策略；从某一阶段开始到过程最终的决策序列称为子策略。

n 阶段策略可记为 $\{u_1(x_1), u_2(x_2), \dots, u_n(x_n)\}$ ，
子策略可记为 $\{u_k(x_k), u_{k+1}(x_{k+1}), \dots, u_n(x_n)\}$ 。

(5) 状态转移律：状态参数变化的规律。从第k阶段的某一状态值 x_k 出发，当决策变量 u_k 的取值确定之后，下一阶段的状态值 x_{k+1} 按某种规律 $T(x_k, u_k)$ 确定。

第k+1阶段状态是第k阶段状态 x_k 和变量 u_k 的函数 $x_{k+1} = T(x_k, u_k)$ ，
又称状态转移方程。

说明： ① 当 x_k, u_k 确定后， x_{k+1} 取值唯一确定，则为确定性多阶段决策问题；
② 当 x_k, u_k 确定后， x_{k+1} 取值为具有某种概率分布的随机变量，则称为随机性多阶段决策问题。

(6) 指标函数：决策所产生的效益的度量函数。分如下的几类：

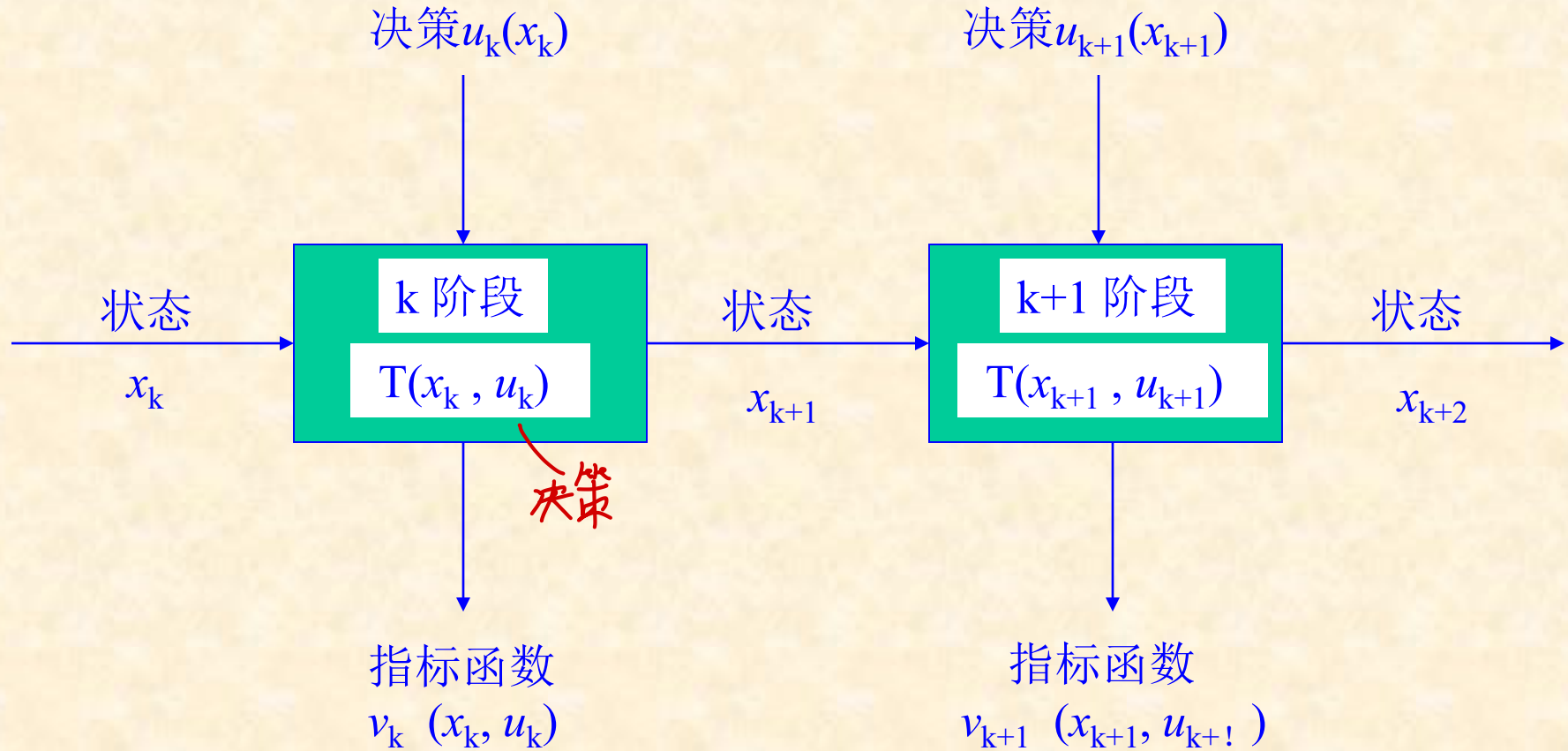
- ① $v_k(x_k, u_k)$ ——阶段指标函数。
 - ② $V_{k,n}(x_k, u_k, x_{k+1}, u_{k+1}, \dots, x_n, u_n)$ ——过程指标函数。
 - ③ $f(x_k) = \text{opt } V_{k,n}$ ——最优指标函数，只与 x_k 有关。
- Opt——optimize，可以是max，或者min。

说明：为便于计算，指标函数应具有递推性。

(7) 边界条件：对过程最终状态时的效益值表示。即

当 $k=n+1$ 时， $f(x_{n+1}) = ?$

上述基本概念可用下述图示某性表示：



动态规划概念模型示意图

二、最优化原理与动态规划的数学模型

贝尔曼（R.Bellman）原理：作为整个过程的最优策略具有这样性质：无论过去的状态和决策如何，对前面所形成的状态而言，余下的诸决策必构成最优策略。

动态规划的基本方程（递推方程）：

当 $V_{k,n} = \sum_{i=k}^n v_i(x_i, u_i),$

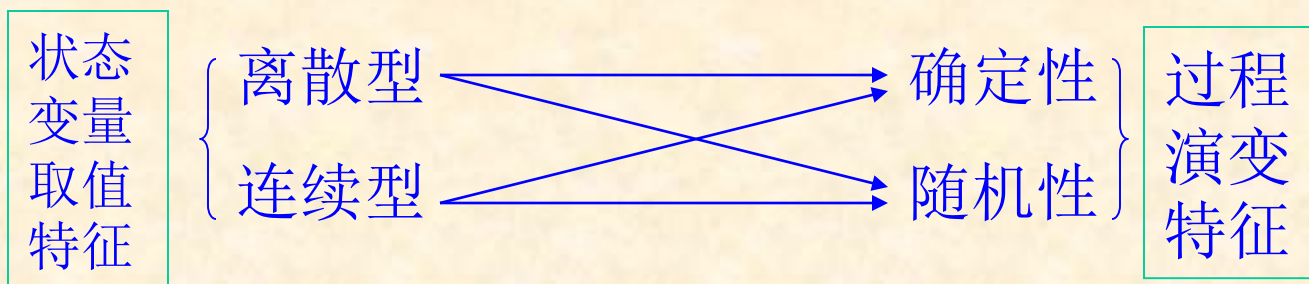
$$f_k(x_k) = \text{opt}_{u_k(x_k) \in D_k(x_k)} \{ v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

当 $V_{k,n} = \prod_{i=k}^n v_i(x_i, u_i),$

$$f_k(x_k) = \text{opt}_{u_k(x_k) \in D_k(x_k)} \{ v_k(x_k, u_k) \cdot f_{k+1}(x_{k+1}) \}$$

状态转移关系

三、动态规划模型的基本分类



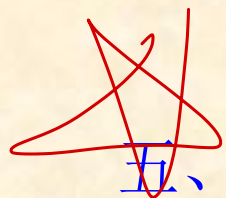
☞ 若阶段数固定，则为定期型；

☞ 若阶段数不固定，则称为不定期型

四、动态规划问题的模型表述

动态规划模型属于算法类模型，故借助于对其相关概念的定义来表述。内容如下：

- (1) 阶段数： $k=1,2,\cdots,n$
- (2) 状态变量： x_k ——？
- (3) 决策变量： u_k ——？，允许决策集合 $D(x_k)$
- (4) 状态转移律： $x_{k+1}=T(x_k, u_k)$
- (5) 阶段指标函数： $v_k(x_k, u_k)$ ——？
- (6) 基本方程： $f_k(x_k)=?$
- (7) 边界条件： $f_{n+1}(x_{n+1})=?$



五、动态规划问题的逆序算法

1. 建立模型：

(1) 阶段数： $k=1,2,3,4$

(2) 状态变量： x_k ——第 k 阶段的位置点。

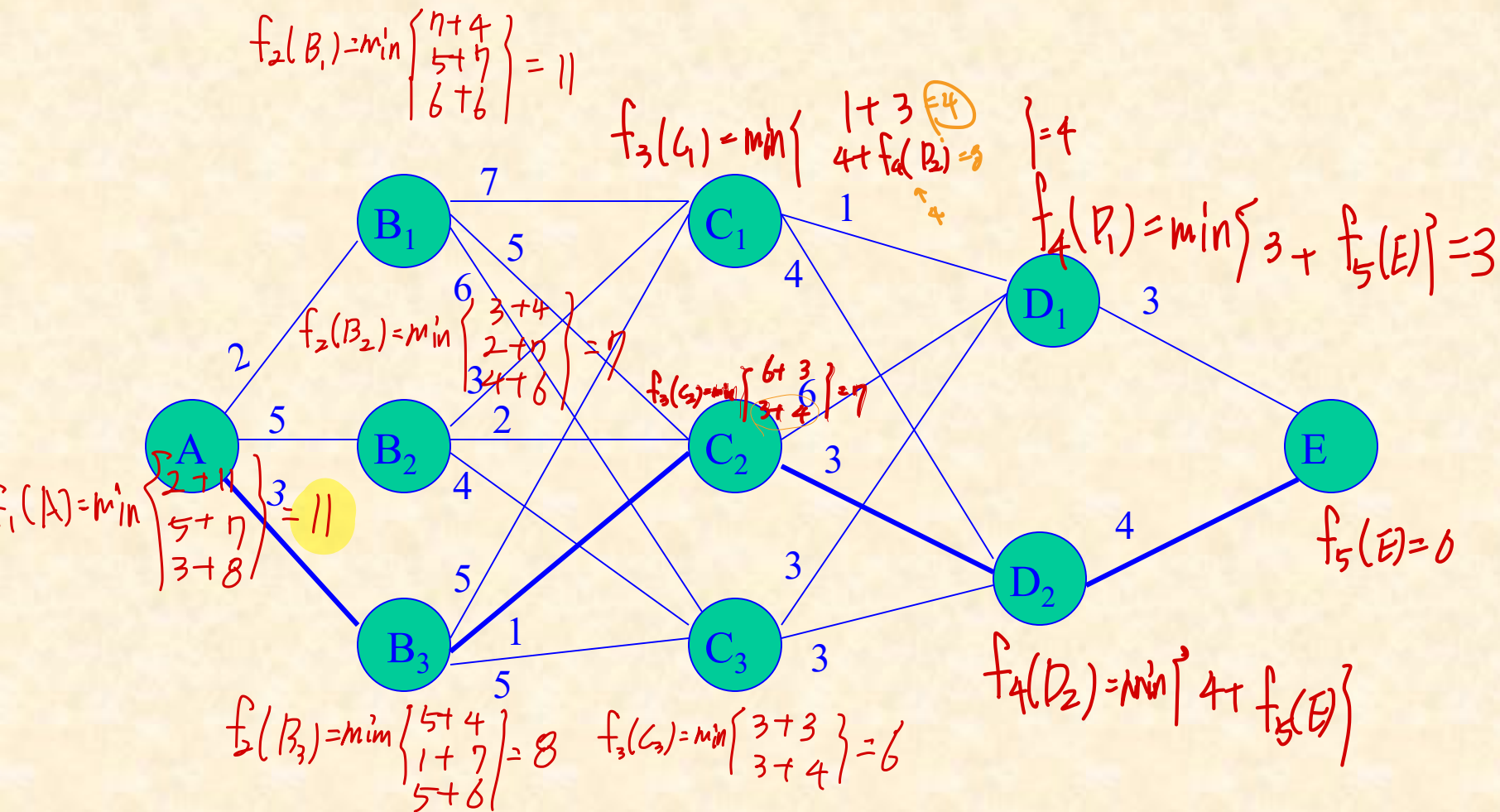
(3) 决策变量： u_k ——第 k 阶段选择的行走路线，
允许决策集合 $D(x_k)$ —— x_k 位置时可选择的线路集合。

(4) 状态转移律： $x_{k+1}=T(x_k, u_k)$ ——采取 u_k 决策后，位置变化的规律。

(5) 阶段指标函数： $v_k(x_k, u_k)$ ——选择 u_k 决策后产生的距离。

(6) 基本方程： $f_k(x_k)=\min\{v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$

(7) 边界条件： $f_5(x_5=E)=0$



$A - B_3 - C_2 - D_2 - E$

2. 逆序求解

1) $k=4$, 由递推方程知 $f_4(x_4)=\min\{v_4(x_4, u_4) + f_5(x_5)\}$,

而 $f_5(x_5)=0$ 为边界条件

$$\begin{aligned} \therefore f_4(x_4=D_1) &= \min \left\{ \overline{D_1 E} + f_5(x_5) \right\} = 3, \quad u_4^*(D_1) = D_1 E \\ f_4(x_4=D_2) &= \min \left\{ \overline{D_2 E} + f_5(x_5) \right\} = 4, \quad u_4^*(D_2) = D_2 E \end{aligned}$$

2) $k=3$, $f_3(x_3)=\min\{v_3(x_3, u_3) + f_4(x_4)\}$,

$$f_3(x_3=C_1) = \min \left\{ \begin{array}{c} \overline{C_1 D_1} + f_4(D_1) \\ \overline{C_1 D_2} + f_4(D_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{c} 1+3 \\ 4+4 \end{array} \right\} = 4, \quad u_3^*(C_1) = C_1 D_1$$

$$f_3(x_3=C_2) = \min \left\{ \begin{array}{c} \overline{C_2 D_1} + f_4(D_1) \\ \overline{C_2 D_2} + f_4(D_2) \end{array} \right\} = \min \left\{ \begin{array}{c} 6+3 \\ 3+4 \end{array} \right\} = 7, \quad u_3^*(C_2) = C_2 D_2$$

$$f_3(x_3=C_3)=\min \left\{ \begin{array}{c} \overline{C_3D_1}+f_4(D_1) \\ \overline{C_3D_2}+f_4(D_2) \end{array} \right\} =\min \left\{ \begin{array}{c} 3+3 \\ 3+4 \end{array} \right\} =6, \quad u_3^*(C_3)=C_3D_1$$

3) $k=2$, $f_2(x_2)=\min\{v_2(x_2, u_2) + f_3(x_3)\}$,

$$f_2(x_2=B_1)=\min \left\{ \begin{array}{c} \overline{B_1C_1}+f_3(C_1) \\ \overline{B_1C_2}+f_3(C_2) \\ \overline{B_1C_3}+f_3(C_3) \end{array} \right\} =\min \left\{ \begin{array}{c} 7+4 \\ 5+7 \\ 6+6 \end{array} \right\} =11, \quad u_2^*(B_1)=B_1C_1$$

$$f_2(x_2=B_2)=\min \left\{ \begin{array}{c} \overline{B_2C_1}+f_3(C_1) \\ \overline{B_2C_2}+f_3(C_2) \\ \overline{B_2C_3}+f_3(C_3) \end{array} \right\} =\min \left\{ \begin{array}{c} 3+4 \\ 2+7 \\ 4+6 \end{array} \right\} =7, \quad u_2^*(B_2)=B_2C_1$$

$$f_2(x_2=B_3)=\min \left\{ \begin{array}{l} \overline{B_3}C_1+ f_3(C_1) \\ \overline{B_3}C_2+ f_3(C_2) \\ \overline{B_3}C_3+ f_3(C_3) \end{array} \right\} =\min \left\{ \begin{array}{l} 5+4 \\ 1+7 \\ 5+6 \end{array} \right\} =8, \quad u_2^*(B_3)=B_3C_2$$

$$4) \quad k=1, \quad f_1(x_1)=\min \{v_1(x_1, u_1) + f_2(x_2)\},$$

$$f_1(x_1=A)=\min \left\{ \begin{array}{l} \overline{A}B_1+ f_2(B_1) \\ \overline{A}B_2+ f_2(B_2) \\ \overline{A}B_3+ f_2(B_3) \end{array} \right\} =\min \left\{ \begin{array}{l} 2+11 \\ 5+7 \\ 3+8 \end{array} \right\} =11, \quad u_1^*(A)=AB_3$$

∴ 最优策略: $A \text{---} B_3 \text{---} C_2 \text{---} D_2 \text{---} E$,

最短距离: $f(A) = 11$

8.3 离散确定性动态规划问题的模型与求解

例4：某一警卫部队共有12支巡逻队，负责4个要害部门A、B、C、D的警卫巡逻。对每个部位可分别派出2~4支巡逻队，并且由于派出巡逻队数的不同，各部位在一段时期内可能造成的预期损失如表中所示。问：如何分派，可使总的预期损失为最小？

各 部 位 预 期 损 失 表

| 部位 预期损失 队数 | | | | |
|------------------|----|----|----|----|
| | A | B | C | D |
| 2 | 18 | 38 | 24 | 34 |
| 3 | 14 | 35 | 22 | 31 |
| 4 | 10 | 31 | 21 | 25 |

解：

把对每一个部位派出巡逻队数量的决策，看成是一个阶段，可归结成4个阶段的决策问题。

一、建立模型

- (1) 阶段变量: $k=1, 2, 3, 4$ ABC1)
- (2) 状态变量: x_k ——第 k 阶段可用于分配的巡逻队数量;
- (3) 决策变量: u_k ——第 k 阶段派出的巡逻队数量;
允许决策集合 $D(x_k)=\{2, 3, 4\}$
- (4) 状态转移律: $x_{k+1}=x_k-u_k$;
- (5) 阶段指标函数: $v_k(u_k)$ ——预期损失函数, 如表示;
- (6) 基本方程: $f_k(x_k)=\min\{v_k(u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$
- (7) 边界条件: $f_5(x_5)=0$

第一个阶段 | 2
二 " \uparrow 阶段
三 " \uparrow 阶段

$x_1 \rightarrow x_2 \rightarrow x_3 \rightarrow x_4$ $L=13$

9 现有 8 名青工, 要分配给 3 个采矿队, 每队限最多分 5 名, 每个采矿队增加不同青工后产量增加如下表, 如何分配才能使产量增加最大? 试建立其动态规划求解模型。 (10 分)

| 采矿队 \ 增加青工数 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|-------------|---|----|----|----|----|------|
| 第一采矿队 | 0 | 16 | 25 | 30 | 32 | 33 |
| 第二采矿队 | 0 | 10 | 14 | 16 | 17 | 17.5 |
| 第三采矿队 | 0 | 12 | 17 | 21 | 22 | 22.5 |

解: 根据题意, 原问题用动态规划求解模型为:

- (1) 按作业班组分为 3 阶段, $k=(1, 2, 3, 4)$, $k=4$ 为终了阶段;
- (2) x_k : 第 k 阶段初拥有待分配新工人数;
有: $X_1=\{8\}$, $X_2=\{8, 7, 6, 5, 4, 3\}$, $X_3=\{5, 4, 3, 2, 1, 0\}$, $X_4=\{0\}$ 。
- (3) u_k : 第 k 阶段分配给第 k 作业班组的新工人数;
有: $U_1=\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, $U_2=\{0, 1, 2, \dots, x_2\} (x_2 \leq 5)$; $U_3=\{x_2-5, \dots, 5\} (x_2 > 5)$, $U_4=\{x_3\}$ 。
- (4) 状态转移方程: $x_{k+1} = x_k - u_k$;
- (5) 阶段指标: 见表, 如: $d_2(3, 2) = 14$; $d_3(2, 1) = 12$;
- (6) 递推方程: $f_k(x_k) = \max_{u_k \in U_k} \{d_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$;
- (7) 边界条件: $f_4(x_4) = 0$ 。

二、逆序算法求解

| $x_4 \backslash u_4$ | 2 | 3 | 4 | $f_4(x_4)$ | $u_4^*(x_4)$ |
|----------------------|----|----|----|------------|--------------|
| 2 | X | X | X | X | 2 |
| 3 | X | X | X | X | 3 |
| 4 | 34 | X | X | 34 | 4 |
| 5 | 31 | 34 | X | 31 | 4 |
| 6 | 25 | 31 | 34 | 25 | 4 |

1) $k=4$, 对D部位, $f_4(x_4) = \min\{v_4(u_4) + f_5(x_5)\}$, 而 $f_5(x_5) = 0$,

依题意, $2 \leq x_4 \leq 12 - 6 = 6$, 列表计算如下:

决策变量 u_4 在 2, 3, 4 中取值

| x_4 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|--------------|----|----|----|----|----|
| $f_4(x_4)$ | 34 | 31 | 25 | 25 | 25 |
| $u_4^*(x_4)$ | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 |

2) $k=3$, 对C部位, $x_4 = x_3 - u_3$

$f_3(x_3) = \min\{v_3(u_3) + f_4(x_4)\} = \min\{v_3(u_3) + f_4(x_3 - u_3)\}$,

而 $\max\{12-8, 2+2\} \leq x_3 \leq 12-4=8$, 列表计算如下:

↑
+2
↑
状态

| x_3 \ u_3 | $v_3(u_3) + \overset{f_4(x_4)}{f_4(x_3 - u_3)}$ | | | $f_3(x_3)$ | $u_3^*(x_3)$ |
|---------------|---|--------------|--------------|------------|--------------|
| | 2 | 3 | 4 | | |
| 4 | 24+34 | — | — | 58 | 2 |
| 5 | 24+31 | 22+34 | — | 55 | 2 |
| 6 | 24+25 | 22+31 | 21+34 | 49 | 2 |
| 7 | 24+25 | 22+25 | 21+31 | 47 | 3 |
| 8 | 24+25 | 22+25 | 21+25 | 46 | 4 |

3) $k=2$, 对B部位, $x_3 = x_2 - u_2$

$$f_2(x_2) = \min \{v_2(u_2) + f_3(x_3)\} = \min \{v_2(u_2) + f_3(x_2 - u_2)\},$$

而 $\max\{12-4, 6\} \leq x_2 \leq 12-2=10$, 列表计算如下:

| $x_2 \backslash u_2$ | $v_2(u_2) + f_3(x_2 - u_2)$ | | | $f_2(x_2)$ | $u_2^*(x_2)$ |
|----------------------|-----------------------------|--------------|--------------|------------|--------------|
| | 2 | 3 | 4 | | |
| 8 | 38+49 | 35+55 | 31+58 | 87 | 2 |
| 9 | 38+47 | 35+49 | 31+55 | 84 | 3 |
| 10 | 38+46 | 35+47 | 31+49 | 80 | 4 |

4) $k=1$, 对A部位, $x_2 = x_1 - u_1$, $x_1 = 12$

$f_1(x_1) = \min\{v_1(u_1) + f_2(x_2)\} = \min\{v_1(u_1) + f_2(x_1 - u_1)\}$, 列表计算:

| $x_1 \backslash u_1$ | $v_1(u_1) + f_2(x_1 - u_1)$ | | | $f_1(x_1)$ | $u_1^*(x_1)$ |
|----------------------|-----------------------------|-------|--------------|------------|--------------|
| | 2 | 3 | 4 | | |
| 12 | 18+80 | 14+84 | 10+87 | 97 | 4 |

最优策略: A—4支, B—2支, C—2支, D—4支; 最小损失为97。

例5:

某企业现有5千万元资金可用于三个项目A、B、C的技术改造建设。项目利润的预期年增长额与投资的规模有关，如表示。问如何确定投资计划，可使利润的预期年增长额最大？

| 项目利润预期年增长额 | | | | | 单位：万元 |
|------------|---|------|------|------|-------|
| 项 目 \ 投资额 | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 |
| A | 0 | 15 | 34 | 42 | 56 |
| B | 0 | 18 | 35 | 45 | 58 |
| C | 0 | 20 | 37 | 48 | 60 |

解： 对每个项目的投资决策可看作是一个阶段，故归结为三阶段的动态规划问题。

一、建立动态规划模型

(1) 阶段变量： $k=1, 2, 3$

(2) 状态变量： x_k ——第 k 阶段可用于分配的资金数量；

(3) 决策变量： u_k ——第 k 阶段投资数量；

允许决策集合 $D(x_k)=\{u_k | 0 \leq u_k \leq x_k\}$

(4) 状态转移律： $x_{k+1}=x_k-u_k$ ；

(5) 阶段指标函数： $v_k(u_k)$ ——预期利润年增长额函数，如表示；

(6) 基本方程： $f_k(x_k)=\max\{v_k(u_k)+f_{k+1}(x_{k+1})\}$

(7) 边界条件： $f_4(x_4)=0$

二、逆序算法求解

1) $k=3$, 对C项目, $f_3(x_3) = \max\{v_3(u_3) + f_4(x_4)\}$, 而 $f_4(x_4) = 0$,

依题意, $0 \leq x_3 \leq 5000$, $0 \leq u_3 \leq x_3$, 列表计算如下:

| x_3 | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 5000 |
|--------------|---|------|------|------|------|------|
| $f_3(x_3)$ | 0 | 20 | 37 | 48 | 60 | 60 |
| $u_3^*(x_3)$ | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | 4000 |

2) $k=2$, 对B项目, $x_3 = x_2 - u_2$

$$f_2(x_2) = \max\{v_2(u_2) + f_3(x_3)\} = \max\{v_2(u_2) + f_3(x_2 - u_2)\},$$

而 $1000 \leq x_2 \leq 5000$, $0 \leq u_2 \leq x_2$, 列表计算如下:

| $x_2 \backslash u_2$ | $v_2(u_2) + f_3(x_2 - u_2)$ | | | | | $f_2(x_2)$ | $u_2^*(x_2)$ |
|----------------------|-----------------------------|--------------|--------------|-------|-------|------------|--------------|
| | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | | |
| 1000 | 0+20 | 18+0 | —— | —— | —— | 20 | 0 |
| 2000 | 0+37 | 18+20 | 35+0 | —— | —— | 38 | 1000 |
| 3000 | 0+48 | 18+37 | 35+20 | 45+0 | —— | 55 | 1000,2000 |
| 4000 | 0+60 | 18+48 | 35+37 | 45+20 | 58+0 | 72 | 2000 |
| 5000 | 0+60 | 18+60 | 35+48 | 45+37 | 58+20 | 83 | 2000 |

3) $k=1$, 对A项目, $x_2 = x_1 - u_1$,

$$f_1(x_1) = \max \{v_1(u_1) + f_2(x_2)\} = \max \{v_1(u_1) + f_2(x_1 - u_1)\},$$

而 $x_1 = 5000$, $0 \leq u_1 \leq 4000$, 列表计算如下:

| $x_1 \backslash u_1$ | $v_1(u_1) + f_2(x_1 - u_1)$ | | | | | $f_1(x_1)$ | $u_1^*(x_1)$ |
|----------------------|-----------------------------|-------|--------------|-------|-------|------------|--------------|
| | 0 | 1000 | 2000 | 3000 | 4000 | | |
| 5000 | 0+83 | 15+72 | 34+55 | 42+38 | 56+20 | 89 | 2000 |

∴ 最优策略有两组，分别为：

(1) 对A项目投资2千万元，对B项目投资1千万元，对C项目投资2千万元；

(2) 对A项目投资2千万元，对B项目投资2千万元，对C项目投资1千万元。

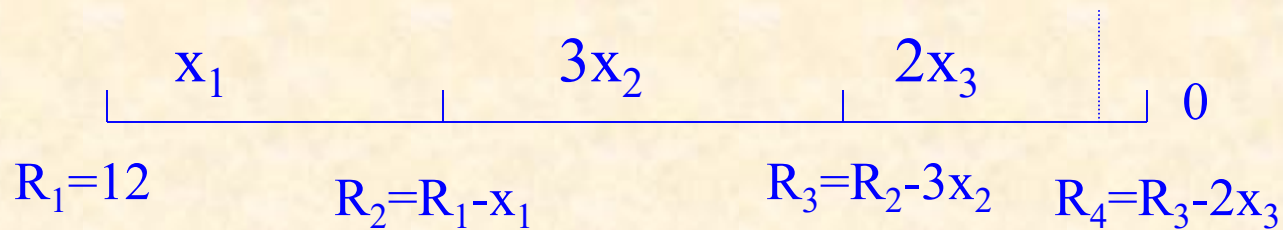
最大年利润增长额为89万元。

8.4 连续确定性动态规划问题的模型与求解

例6：用动态规划的方法求解下述非线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max z &= \prod_{i=1}^3 i \cdot x_i \\ \text{s.t. } &\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解：可归结为三个阶段的动态规划问题，每阶段确定一个变量的数值。其求解过程如下：



一、建立模型

(1) 阶段变量: $k=1, 2, 3$

(2) 状态变量: R_k ——第 k 阶段可用于分配的右端项数量;

(3) 决策变量: x_k ——第 k 阶段选取的变量数值;

允许决策集合 $D(R_k)=\{0 \leq x_1 \leq R_1, 0 \leq x_2 \leq R_2/3, 0 \leq x_3 \leq R_3/2\}$;

(4) 状态转移律: $R_2=R_1-x_1$; $R_3=R_2-3x_2$; $R_4=R_3-2x_3$;

(5) 阶段指标函数: $v_k(x_k)=k \cdot x_k$;

(6) 基本方程: $f_k(R_k)=\max\{v_k(x_k) + f_{k+1}(R_{k+1})\}$

(7) 边界条件: $f_4(R_4)=0$

二、逆序求解

$$1) \quad k=3, \quad f_3(R_3) = \max_{0 \leq x_3 \leq R_3/2} \{v_3(x_3) \cdot f_4(R_4)\} = \max_{0 \leq x_3 \leq R_3/2} \{3x_3 \cdot 1\} = 3R_3/2,$$

$$\therefore x_3^* = R_3/2$$

$$2) \quad k=2, \quad R_3 = R_2 - 3x_2;$$

$$f_2(R_2) = \max_{0 \leq x_2 \leq R_2/3} \{v_2(x_2) \cdot f_3(R_3)\} = \max_{0 \leq x_2 \leq R_2/3} \{2x_2 \cdot 3R_3/2\} = \max_{0 \leq x_2 \leq R_2/3} \{2x_2 \cdot 3(R_2 - 3x_2)/2\}$$

$$\text{设 } S_1 = 2x_2 \cdot 3(R_2 - 3x_2)/2; \quad \text{令}$$

$$\frac{dS_1}{dx_2} = 3R_2 - 18x_2 = 0, \quad \text{得 } x_2^* = R_2/6$$

$$\therefore f_2(R_2) = R_2^2/4$$

3) $k=1$, $R_2=R_1-x_1=12-x_1$;

$$f_1(R_1) = \max_{0 \leq x_1 \leq R_1} \{v_1(x_1) \cdot f_2(R_2)\} = \max_{0 \leq x_1 \leq 12} \{x_1 \cdot R_2^2/4\} = \max_{0 \leq x_1 \leq 12} \{x_1 \cdot (12-x_1)^2/4\}$$

设 $S_2 = x_1 \cdot (12-x_1)^2/4$; 令

$$\frac{dS_2}{dx_1} = x_1^2 - 16x_1 + 48 = 0, \quad \text{得 } x_1^* = 4, \quad \text{或 } x_1^* = 12$$

若 $x_1^* = 4$, $f_1(R_1) = 64 \Rightarrow$ 最大值;

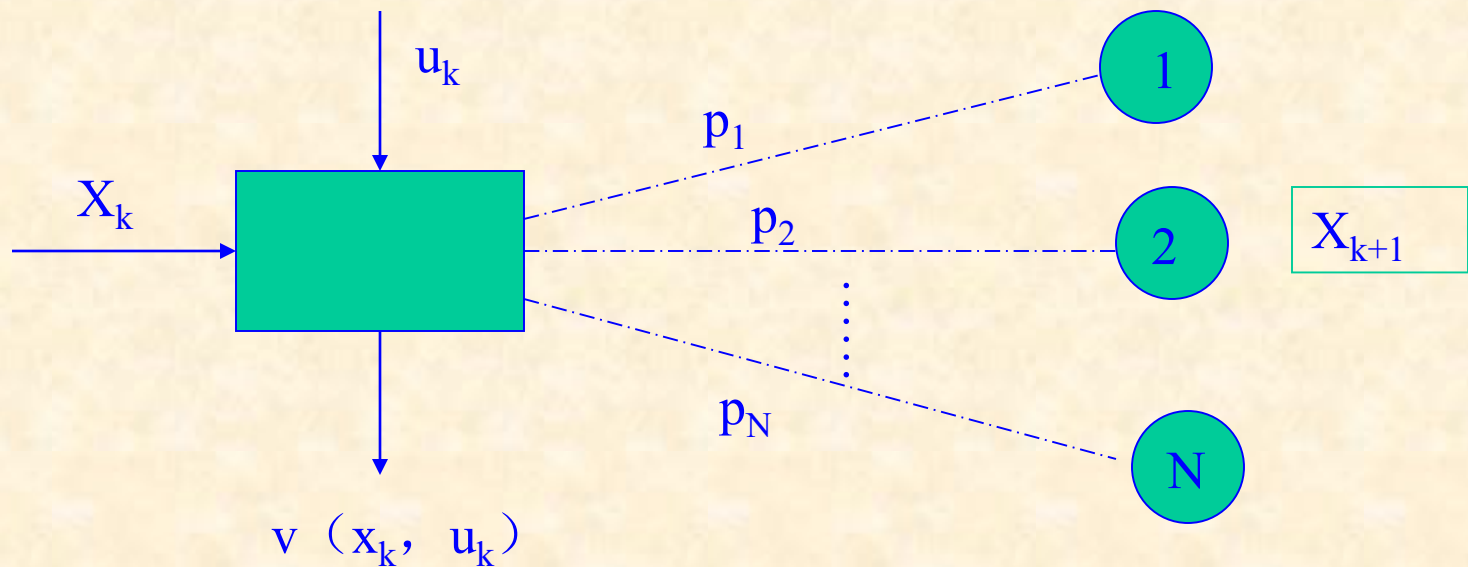
若 $x_1^* = 12$, $f_1(R_1) = 0 \Rightarrow$ 最小值;

若 $x_1^* = 0$, $f_1(R_1) = 0 \Rightarrow$ 最小值;

从而 $x_1^* = 4$, $x_2^* = 4/3$, $x_3^* = 2$ 为最优策略。

8.5 离散随机性动态规划模型与求解

特征：当某一阶段的决策确定之后，其下一阶段的状态不是一个确定的值，而是具有某种概率分布的随机变量。



说明:

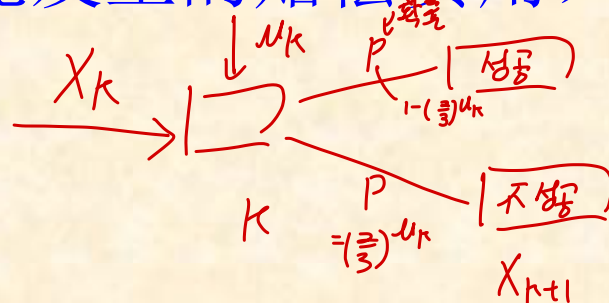
- 1) 从 x_k 出发, 当选定 u_k 时, 则 x_{k+1} 服从 p_i 的概率分布;
- 2) 动态规划的基本方程 (和式) 以期望值作为目标, 即

$$\begin{aligned} f_k(x_k) &= \text{opt} \{E \{v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\} \} \\ &= \text{opt} \{v_k(x_k, u_k) + \sum_{i=1}^N p_i \cdot f_{k+1}(x_{k+1} = \textcircled{i}) \} \end{aligned}$$

- 3) 边界值依实际情况而定。

研究下述问题：

某公司承担一种新产品试制任务，合同要求三个月内交出一台合格的样品，否则将负担1500元的赔偿费。试制时投产一台成功的概率为 $1/3$ ，投产一批的准备费用为250元，每台试制费用为100元。若投产一批后全部不合格，可再投产一批试制，但每投产一批需要一个月的周期。问每批应该投产多少台，可使总的费用（包括可能发生的赔偿费用）期望值最小？



解:

一、建立模型

- (1) 阶段: $k=1, 2, 3$, 每批的试制周期为一个月, 可作为一个阶段, 而合同期为三个月, 故归结为三个阶段决策的动态规划问题;
- (2) 状态变量: 决策的前提为是否存在合格品, 故选作为状态变量,

$$\text{设 } x_k = \begin{cases} 0 & \text{——存在一台以上合格品,} \\ 1 & \text{——尚未有一台合格品,} \end{cases}$$

- (3) 决策变量: u_k ——第 k 阶段投入试制数量;

允许决策集合 $D(x_k=0) = \{0\}$, $D(x_k=1) = \{0, 1, 2, \dots, N\}$

- (4) 状态转移律: $p(x_{k+1}=1) = (2/3)^{u_k}$; $p(x_{k+1}=0) = 1 - (2/3)^{u_k}$;

(5) 阶段指标函数: $v_k(u_k)$ —当选取决策为 u_k 时, 发生的试制费用,

$$v_k(u_k) = \begin{cases} 250+100 u_k & (u_k > 0) \\ 0 & (u_k = 0) \end{cases}$$

(6) 基本方程: $f_k(x_k) = \min \{E\{v_k(u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}\}$

$$f_k(x_k=0) = 0$$

$$\begin{aligned} f_k(x_k=1) &= \min \{v_k(u_k) + (2/3)^{u_k} \cdot f_{k+1}(x_{k+1}=1) + [1 - (2/3)^{u_k}] \cdot f_{k+1}(x_{k+1}=0)\} \\ &= \min \{v_k(u_k) + (2/3)^{u_k} \cdot f_{k+1}(1)\} \end{aligned}$$

(7) 边界条件:
$$\begin{cases} f_4(x_4=0)=0 \\ f_4(x_4=1)=1500 \end{cases}$$

二、逆序求解

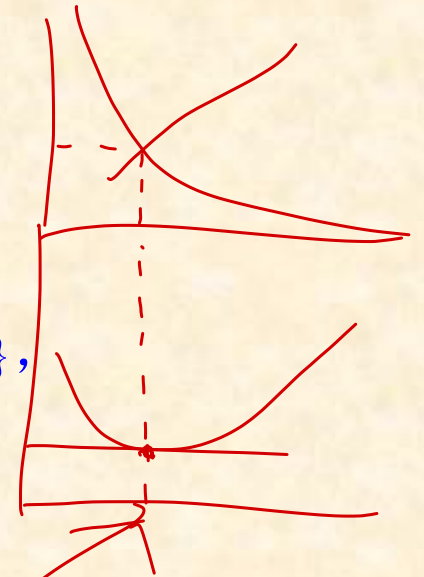
1) $k=3$, $f_3(x_3=0)=0$

$f_3(x_3=1)=\min\{v_3(u_3)+\underbrace{(2/3)^{u_3} \cdot f_4(x_4=1)}_{1500 \times (\frac{2}{3})^{u_3}}\},$

列表计算如下:

| $x_3 \backslash u_3$ | $v_3(u_3) + (2/3)^{u_3} \cdot 1500$ | | | | | | | $f_3(x_3)$ | u_3^* |
|----------------------|-------------------------------------|------|------|-----|------------|-----|-----|------------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 0 | 0 | | | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 1500 | 1350 | 1117 | 994 | 946 | 948 | 981 | 946 | 4 |

$250 + 100u_k$



2) $k=2$, $f_2(x_2=0)=0$

$f_2(x_2=1)=\min\{v_2(u_2)+(2/3)^{u_2} \cdot f_3(x_3=1)\},$

列表计算如下：

| $x_2 \backslash u_2$ | $v_2(u_2) + (2/3)^{u_2} \cdot 946$ | | | | | | | $f_2(x_2)$ | u_2^* |
|----------------------|------------------------------------|-----|-----|------------|-----|-----|-----|------------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 0 | 0 | | | | | | | 0 | 0 |
| 1 | 946 | 981 | 870 | 830 | 837 | 874 | 933 | 830 | 3 |

3) $k=1$, $f_1(x_1=1) = \min\{v_1(u_1) + (2/3)^{u_1} \cdot f_2(x_2=1)\}$,

列表计算如下:

| $x_1 \backslash u_1$ | $v_1(u_1) + (2/3)^{u_1} \cdot 830$ | | | | | | | $f_1(x_1)$ | u_1^* |
|----------------------|------------------------------------|-----|-----|------------|-----|-----|-----|------------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | | |
| 1 | 830 | 903 | 819 | 796 | 814 | 859 | 923 | 796 | 3 |

\therefore 最优策略为: 第一个月投入3台; 若无合格品, 第二个月仍投入3台; 若还无合格品, 则第三个月投入4台。这样可使总的期望费用最小, 为796元。

8.6 多维的动态规划模型与求解

例7：用动态规划方法求解下述模型

$$\begin{aligned} \text{Max } z &= 3x_1 + 5x_2 \\ \text{S.t } &\begin{cases} x_1 \leq 4 \\ 2x_2 \leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

解：这是一个LP模型，包括两个决策变量和三个约束方程，即共有三种资源，所以需要由三个变量来描述其状态，从而可归结成2个阶段、3个状态变量的动态规划问题。

一、建立模型

- (1) 阶段变量: $k=1, 2$, 每个决策变量取值划分为一个阶段;
- (2) 状态变量: R_{ik} ——第 k 阶段可用于分配的第 i 行右端项数量;
- (3) 决策变量: x_k ——第 k 阶段决策变量的取值;

允许决策集合 $D(R_{ik})$;

- (4) 状态转移律: $R_{12}=R_{11}-x_1$; $R_{22}=R_{21}=12$; $R_{32}=R_{31}-3x_1$;
- (5) 阶段指标函数: $v_k(R_{ik}, x_k)=c_k \cdot x_k$; 即

$$v_1(x_1)=3 \cdot x_1 ; \quad v_2(x_2)=5 \cdot x_2 ;$$

- (6) 基本方程: $f_k(R_{ik})=\max\{v_k(R_{ik}, x_k)+f_{k+1}(R_{i,k+1})\}$
- (7) 边界条件: $f_3(R_{i3})=0$

二、逆序求解

1) $k=2$,

$$f_2(R_{12}, R_{22}, R_{32}) = \max_{0 \leq x_2 \leq \min\{R_{22}/2, R_{32}/2\}} \{v_2(x_2) + f_3(R_{i3})\}$$

$$= \max_{0 \leq x_2 \leq \min\{R_{22}/2, R_{32}/2\}} \{5 \cdot x_2 + 0\} = \min\{5R_{22}/2, 5R_{32}/2\}$$

$$= \min\{30, 5R_{32}/2\}$$

$$\therefore x_2^* = \min\{6, R_{32}/2\}$$

$$2) \quad k=1, \quad R_{32} = R_{31} - 3x_1 = 18 - 3x_1$$

$$f_1(R_{11}, R_{21}, R_{31}) = \max_{0 \leq x_1 \leq \min\{R_{11}, R_{31}/3\}} \{v_1(x_1) + f_2(R_{12})\}$$

$$= \max_{0 \leq x_1 \leq \min\{4, 6\}} \{3 \cdot x_1 + \min\{30, 5R_{32}/2\}\}$$

$$= \max_{0 \leq x_1 \leq 4} \{3 \cdot x_1 + \min\{30, 5 \times (18 - 3x_1)/2\}\}$$

$$\text{令 } 5 \times (18 - 3x_1)/2 = 30, \quad \text{得 } x_1 = 2,$$

$$\therefore \text{原式} = \max_{0 \leq x_1 \leq 4} \left\{ 3 \cdot x_1 + \begin{cases} 30 & (0 \leq x_1 \leq 2) \\ 5(18 - 3x_1)/2 & (2 \leq x_1 \leq 4) \end{cases} \right\}$$

$$=\max \left\{ \begin{array}{ll} 3 \cdot x_1 + 30 & (0 \leq x_1 \leq 2) \\ 45 - 9x_1/2 & (2 \leq x_1 \leq 4) \end{array} \right\} = 36$$

$$\therefore x_1^* = 2, \text{ 从而 } R_{32} = R_{31} - 3x_1 = 18 - 3x_1 = 12$$

$$\therefore x_2^* = \min \{6, R_{32}/2\} = 6$$

复习思考题

1. 如何理解状态的概念？
2. 状态转移率描述的是什么现象？
3. DP模型与LP、ILP模型有何不同？
4. DP模型结构包含哪些内容？
5. 逆序算法遵从什么原理？
6. DP模型如何划分类别？
7. DP模型处理中最大的障碍是什么？

8.7 案例分析

例1：某工厂根据合同要求在未来半年中需提供货物数量如表中所示，表中数字为月底交货数量。该厂的生产能力为每月400件，其仓库的存货能力为3百件。已知每百件货物的生产费用为10千元，在进行生产的月份，工厂要支出固定费用4千元，仓库保管费用为每百件货物每月1千元，假定开始及6月底交货后均无存货，试问每个月应该生产多少件产品，才能既满足交货任务又使总费用最小？

| 月 份 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|----------|---|---|---|---|---|---|
| 交货数量（百件） | 1 | 2 | 5 | 3 | 2 | 1 |

解：这是具有时间序列的多阶段决策问题，可分为六阶段。

一、建立动态规划模型

(1) 阶段变量: $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$;

(2) 状态变量: x_k ——第 k 阶段初货物的库存数量;

(3) 决策变量: u_k ——第 k 阶段的生产数量;

允许决策集合 $D(x_k)$:

$$\max\{0, d_k - x_k\} \leq u_k \leq \min\left\{\sum_{i=k}^6 d_i - x_k, d_k + h - x_k, H\right\}$$

$$x_k + u_k - d_k \leq h$$

d_i ——第 k 月需求量, h ——库存能力, H ——生产能力;

(4) 状态转移律: $x_{k+1} = x_k + u_k - d_k$

(5) 阶段指标函数: $v_k(x_k, u_k)$ ——第k阶段发生的费用;

$$v_k(x_k, u_k) = \begin{cases} 4 + 1 \cdot x_k + 10u_k & (u_k > 0) \\ 1 \cdot x_k & (u_k = 0) \end{cases}$$

(6) 基本方程: $f_k(x_k) = \min \{v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\}$

(7) 边界条件: $f_7(x_7=0)=0$

二、逆序求解

$$1) \ k=6, \ x_7=x_6+u_6-d_6=0, \ \Rightarrow u_6=d_6-x_6,$$

$$f_6(x_6)=\min\{v_6(x_6, u_6)+f_7(x_7)\},$$

$$\because d_6=1, \ \therefore x_6=0 \text{ 或 } 1, \text{ 而 } f_7(x_7)=0,$$

列表计算:

| $x_6 \backslash u_6$ | $v_6(x_6, u_6)+0$ | | $f_6(x_6)$ | u_6^* |
|----------------------|-------------------|-----------|------------|---------|
| | 0 | 1 | | |
| 0 | — | 14 | 14 | 1 |
| 1 | 1 | — | 1 | 0 |

2) $k=5$, $0 \leq x_6 = x_5 + u_5 - d_5 \leq h$, $f_5(x_5) = \min\{v_5(x_5, u_5) + f_6(x_6)\}$,

$$\max\{0, d_5 - x_5\} \leq u_5 \leq \min\left\{\sum_{i=5}^6 d_i - x_5, d_5 + h - x_5, H\right\}$$

$d_5=2$, $\sum d_i = 3$, $h=3$, $H=4$, 而 $0 \leq x_5 \leq 3$,

列表计算:

| $x_5 \backslash u_5$ | $v_5(x_5, u_5) + f_6(x_5 + u_5 - 2)$ | | | | $f_5(x_5)$ | u_5^* |
|----------------------|--------------------------------------|-------|-------------|-------------|------------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | | |
| 0 | — | — | 24+14 | 34+1 | 35 | 3 |
| 1 | — | 15+14 | 25+1 | — | 26 | 2 |
| 2 | 2+14 | 16+1 | — | — | 16 | 0 |
| 3 | 3+1 | — | — | — | 4 | 0 |

$$3) \quad k=4, \quad 0 \leq x_5 = x_4 + u_4 - d_4 \leq h, \quad f_4(x_4) = \min \{v_4(x_4, u_4) + f_5(x_5)\},$$

$$\max \{0, d_4 - x_4\} \leq u_4 \leq \min \left\{ \sum_{i=4}^6 d_i - x_4, d_4 + h - x_4, H \right\}$$

$$d_4=3, \quad \sum d_i = 6, \quad h=3, \quad H=4, \quad \text{而} \quad 0 \leq x_4 \leq 3,$$

列表计算:

| $x_4 \backslash u_4$ | $v_4(x_4, u_4) + f_5(x_4 + u_4 - 3)$ | | | | | $f_4(x_4)$ | u_4^* |
|----------------------|--------------------------------------|-------|--------------|--------------|-------------|------------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 0 | — | — | — | 34+35 | 44+26 | 69 | 3 |
| 1 | — | — | 25+35 | 35+26 | 45+16 | 60 | 2 |
| 2 | — | 16+35 | 26+26 | 36+16 | 46+4 | 50 | 4 |
| 3 | 3+35 | 17+26 | 27+16 | 37+4 | — | 38 | 0 |

$$4) \quad k=3, \quad 0 \leq x_4 = x_3 + u_3 - d_3 \leq h, \quad f_3(x_3) = \min \{v_3(x_3, u_3) + f_4(x_4)\},$$

$$\max \{0, d_3 - x_3\} \leq u_3 \leq \min \left\{ \sum_{i=3}^6 d_i - x_3, d_3 + h - x_3, H \right\}$$

$$d_3=5, \quad \sum d_i = 11, \quad h=3, \quad H=4, \quad \text{而} \quad 1 \leq x_3 \leq 3,$$

列表计算:

| $x_3 \backslash u_3$ | $v_3(x_3, u_3) + f_4(x_3 + u_3 - 5)$ | | | | | $f_3(x_3)$ | u_3^* |
|----------------------|--------------------------------------|---|--------------|--------------|--------------|------------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 1 | — | — | — | — | 45+69 | 114 | 4 |
| 2 | — | — | — | 36+69 | 46+60 | 105 | 3 |
| 3 | — | — | 27+69 | 37+60 | 47+50 | 96 | 2 |

$$5) \quad k=2, \quad 1 \leq x_3 = x_2 + u_2 - d_2 \leq h, \quad f_2(x_2) = \min \{v_2(x_2, u_2) + f_3(x_3)\},$$

$$\max \{0, d_2 - x_2 + 1\} \leq u_2 \leq \min \left\{ \sum_{i=2}^6 d_i - x_2, d_2 + h - x_2, H \right\}$$

$$d_2=2, \quad \sum d_i = 13, \quad h=3, \quad H=4, \quad \text{而} \quad 0 \leq x_2 \leq 3,$$

列表计算：

| $x_2 \backslash u_2$ | $v_2(x_2, u_2) + f_3(x_2 + u_2 - 2)$ | | | | | $f_2(x_2)$ | u_2^* |
|----------------------|--------------------------------------|---------------|---------------|---------------|--------|------------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 0 | — | — | — | 34+114 | 44+105 | 148 | 3 |
| 1 | — | — | 25+114 | 35+105 | 45+96 | 139 | 2 |
| 2 | — | 16+114 | 26+105 | 36+96 | — | 130 | 1 |
| 3 | 3+114 | 17+105 | 27+96 | — | — | 117 | 0 |

$$6) \quad k=1, \quad 0 \leq x_2 = x_1 + u_1 - d_1 \leq h, \quad f_1(x_1) = \min \{v_1(x_1, u_1) + f_2(x_2)\},$$

$$\max \{0, d_1 - x_1\} \leq u_1 \leq \min \left\{ \sum_{i=1}^6 d_i - x_1, d_1 + h - x_1, H \right\}$$

$$d_1=1, \quad \sum d_i = 14, \quad h=3, \quad H=4, \quad \text{而} \quad x_1=0,$$

列表计算：

| $x_1 \backslash u_1$ | $v_1(x_1, u_1) + f_2(x_1 + u_1 - 1)$ | | | | | $f_1(x_1)$ | u_1^* |
|----------------------|--------------------------------------|--------|--------|--------|---------------|------------|---------|
| | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | | |
| 0 | — | 14+148 | 24+139 | 34+130 | 44+117 | 161 | 4 |

∴ 最少费用为161千元， 最优生产计划为：

一月：生产4百件，月末库存3百件； 二月：生产0百件，月末库存1百件；
 三月：生产4百件，月末库存0百件； 四月：生产3百件，月末库存0百件；
 五月：生产3百件，月末库存1百件； 六月：生产0百件，月末库存0百件。

例2：设备更新问题：

某种新设备投入使用的年创收入及平均维修费、更新净费用（减残值）与设备的役龄有关，如表示。试确定今后五年的更新策略，使总收益最大。

单位：万元

| 役龄 t 项 目 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---------------|-----|-----|-----|------|-----|
| 年收入 $r(t)$ | 5 | 4.5 | 4 | 3.75 | 3 |
| 维修费 $s(t)$ | 0.5 | 1 | 1.5 | 2 | 2.5 |
| 更新费 $c(t)$ | — | 1.5 | 2.2 | 2.5 | 3 |

一、建立模型

- (1) 阶段变量: $k=1, 2, 3, 4, 5$, 每年看作一个阶段,
- (2) 状态变量: x_k ——第 k 年初设备已使用过的年限(役龄);
- (3) 决策变量: u_k ——第 k 年初更新设备与否, 为 0—1 变量;

$$u_k = \begin{cases} 0 & \text{——第}k\text{年初更新设备} \\ 1 & \text{——第}k\text{年初不更新设备} \end{cases}$$

- (4) 状态转移律: $x_{k+1} = x_k \cdot u_k + 1$;
- (5) 阶段指标函数: $v_k(x_k, u_k)$ ——第 k 年采取 u_k 决策后的净收益;

$$v_k(x_k, u_k) = r_k(x_k \cdot u_k) - s_k(x_k \cdot u_k) - c_k[x_k \cdot (1 - u_k)]$$

(6) 基本方程:

$$\begin{aligned}f_k(x_k) &= \max \{v_k(x_k, u_k) + f_{k+1}(x_{k+1})\} \\&= \max \{r_k(x_k \cdot u_k) - s_k(x_k \cdot u_k) - c_k[x_k \cdot (1 - u_k)] + f_{k+1}(x_{k+1})\}\end{aligned}$$

(7) 边界条件: $f_6(x_6)=0$

二、逆序求解

1) 当 $k=5$ 时, $f_6(x_6)=0$, $1 \leq x_5 \leq 4$,

$$f_5(x_5) = \max \{r_5(x_5 \cdot u_5) - s_5(x_5 \cdot u_5) - c_5[x_5 \cdot (1 - u_5)] + f_6(x_6)\}$$

列表计算:

| $x_5 \backslash u_5$ | $r_5(x_5 \cdot u_5) - s_5(x_5 \cdot u_5) - c_5[x_5 \cdot (1 - u_5)]$ | | $f_5(x_5)$ | u_5^* |
|----------------------|--|------------|------------|---------|
| | 0 | 1 | | |
| 1 | 3 | 3.5 | 3.5 | 1 |
| 2 | 2.3 | 2.5 | 2.5 | 1 |
| 3 | 2 | 1.75 | 2 | 0 |
| 4 | 1.5 | 0.85 | 1.5 | 0 |

2) 当 $k=4$ 时, $x_5 = x_4 \cdot u_4 + 1$, $1 \leq x_4 \leq 3$,

$$\begin{aligned}
 f_4(x_4) &= \max \{r_4(x_4 \cdot u_4) - s_4(x_4 \cdot u_4) - c_4[x_4 \cdot (1 - u_4)] + f_5(x_5)\} \\
 &= \max \{r_4(x_4 \cdot u_4) - s_4(x_4 \cdot u_4) - c_4[x_4 \cdot (1 - u_4)] + f_5(x_4 \cdot u_4 + 1)\}
 \end{aligned}$$

列表计算:

| $x_4 \backslash u_4$ | $r_4(x_4 \cdot u_4) - s_4(x_4 \cdot u_4) - c_4[x_4 \cdot (1 - u_4)] + f_5(x_4 \cdot u_4 + 1)$ | | $f_4(x_4)$ | u_4^* |
|----------------------|---|----------|------------|---------|
| | 0 | 1 | | |
| 1 | 3+3.5 | 3.5+2.5 | 6.5 | 0 |
| 2 | 2.3+3.5 | 2.5+2 | 5.8 | 0 |
| 3 | 2+3.5 | 1.75+1.5 | 5.5 | 0 |

3) 当 $k=3$ 时, $x_4 = x_3 \cdot u_3 + 1$, $1 \leq x_3 \leq 2$,

$$\begin{aligned}
 f_3(x_3) &= \max \{r_3(x_3 \cdot u_3) - s_3(x_3 \cdot u_3) - c_3[x_3 \cdot (1 - u_3)] + f_4(x_4)\} \\
 &= \max \{r_3(x_3 \cdot u_3) - s_3(x_3 \cdot u_3) - c_3[x_3 \cdot (1 - u_3)] + f_4(x_3 \cdot u_3 + 1)\}
 \end{aligned}$$

列表计算:

| $x_3 \backslash u_3$ | $r_3(x_3 \cdot u_3) - s_3(x_3 \cdot u_3) - c_3[x_3 \cdot (1 - u_3)] + f_4(x_3 \cdot u_3 + 1)$ | | $f_3(x_3)$ | u_3^* |
|----------------------|---|---------|------------|---------|
| | 0 | 1 | | |
| 1 | 3+6.5 | 3.5+5.8 | 9.5 | 0 |
| 2 | 2.3+6.5 | 2.5+5.5 | 8.8 | 0 |

4) 当 $k=2$ 时, $x_3 = x_2 \cdot u_2 + 1$, $x_2 = 1$,

$$\begin{aligned}
 f_2(x_2) &= \max \{r_2(x_2 \cdot u_2) - s_2(x_2 \cdot u_2) - c_2[x_2 \cdot (1 - u_2)] + f_3(x_3)\} \\
 &= \max \{r_2(x_2 \cdot u_2) - s_2(x_2 \cdot u_2) - c_2[x_2 \cdot (1 - u_2)] + f_3(x_2 \cdot u_2 + 1)\}
 \end{aligned}$$

列表计算:

| $x_2 \backslash u_2$ | $r_2(x_2 \cdot u_2) - s_2(x_2 \cdot u_2) - c_2[x_2 \cdot (1 - u_2)] + f_3(x_2 \cdot u_2 + 1)$ | | $f_2(x_2)$ | u_2^* |
|----------------------|---|---------|------------|---------|
| | 0 | 1 | | |
| 1 | 3+9.5 | 3.5+8.8 | 12.5 | 0 |

4) 当 $k=1$ 时, $x_1=0$, $x_2=x_1 \cdot u_1 + 1=1$,

$$\begin{aligned}
 f_1(x_1) &= \max \{r_1(0) - s_1(0) - c_1(0) + f_2(x_2)\} \\
 &= \max \{r_1(0) - s_1(0) + f_2(1)\}
 \end{aligned}$$

列表计算:

| $x_1 \backslash u_1$ | $r_1(x_1 \cdot u_1) - s_1(x_1 \cdot u_1) - c_1[x_1 \cdot (1 - u_1)] + f_2(1)$ | | $f_1(x_1)$ | u_1^* |
|----------------------|---|----------|------------|---------|
| | 0 | 1 | | |
| 0 | —— | 4.5+12.5 | 17 | 1 |

∴ 最优更新策略为：第2、3、4年都更新，第5年不更新。
最大收益为17万元。

本章知识点

1. 多阶段决策问题的概念
2. 动态规划模型的结构
3. 最优化原理
4. 动态规划模型的逆序求解方法
5. 离散确定型动态规划问题建模与求解
6. 连续确定型动态规划问题建模及求解
7. 离散随机型动态规划问题理解
8. 多维动态规划问题分析