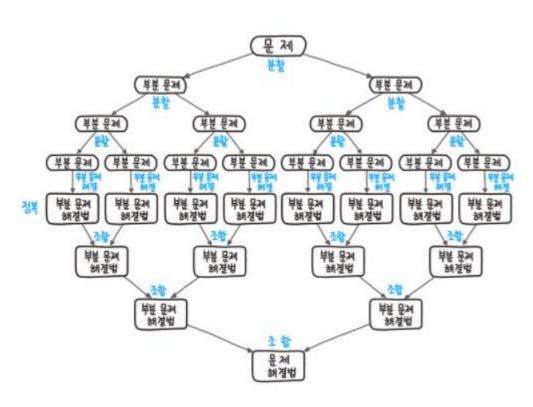
청년 AI 아카데미 19기 알고리즘 실습

재귀





분할 정복



Bottom up!!

- 1. 문제를 굉장히 간단한 수준까지 하위 문제로 분할한다.
- 2. 하위 문제를 해결한다.
- 3. 하위 문제에 대한 결과를 원래 문제에 대한 결과로 정복(합병)한다.



Today

- 재귀 함수
 - 피보나치 수열의 n번째 항 구하기
 - 하노이 탑
- 분할 정복
 - 이진 탐색
 - $n^k \mod m$ 효율적으로 계산하기



피보나치 수열의 n번째 항을 계산합니다.

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 1$$

$$F(3) = F(1) + F(2) = 1 + 1 = 2$$

...

$$F(N) = F(N-1) + F(N-2)$$

재귀 함수(Recursive Function)를 이용하여 구현하여 봅시다.



재귀 함수 구현 시 Tip

- 1. 재귀 함수가 무엇을 하는 함수인지 명확하게 정의합니다.
- 함수 이름이 의미가 있을수록 좋습니다.
- 함수가 지니는 매개변수들, 함수가 무엇을 반환하는지 등이 정의 안에 전부 녹아 있어야 합니다. Ex> def Sum(a,b) #자연수 a부터 b까지의 합을 반환하는 함수

4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9

Sum(4,9)





- 2. 재귀 함수가 함수 내에서 호출이 된다면, 그것은 올바른 답을 준다고 가정하고, 함수를 재귀적 으로 구성합니다.
- 예를 들어 현재 구현 중인 Sum(a,b) 함수를 봅시다.
- Sum(a,b-1)은 a부터 b-1까지의 합을 반환하므로, Sum(a,b) = b + Sum(a,b-1)입니다.
- 아직 Sum(a,b-1)를 구현하지 않았지만, **구현했다고 가정**합니다.

$$4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$$

$$Sum(4,9) = Sum(4,8) + 9$$

$$\rightarrow$$
 Sum(4,8) = Sum(4,7) + 8

$$\rightarrow$$
 Sum(a,b) = Sum(a,b-1) + b





3. 재귀 함수엔 명확한 종료 조건이 반드시 있다.

PAV인공지능연구원

- 재귀 함수는 자기 자신을 부르는 함수이므로, 종료 조건이 없다면 무한히 수행됩니다.
- 따라서 함수 내에 종료 조건이 존재하고, 이는 가장 단순한 경우입니다.

Ex> Sum(a,b) 함수 내에서, if a == b: return a #a부터 a까지의 합은 a

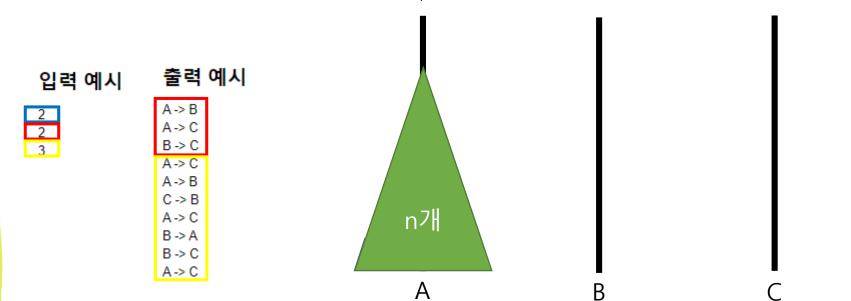
PAI인공지능연구원

```
def Fibo(n): # Fibo(n)은 피보나치 수열의 n번째 항을 반환하는 함수
    if n <= 2:
         return 1
    return Fibo(n-1) + Fibo(n-2)
                                     F(4)
t = int(input())
for _ in range(t):
                                          F(3)
                               F(2)
    n = int(input())
    print(Fibo(n))
                                       F(2)
                       시간복잡도 O(n)보다
                       크므로 비효율적!!
```

3개의 기둥 A, B, C가 있고, A에 있는 n개의 무게가 다른 원판을 C로 옮기고 싶습니다. 아래와 같은 규칙에 따라 원판을 이동시킬 수 있습니다.

- 원판은 한 번에 한 개씩만 제일 위에 있는 원판만 이동할 수 있습니다.
- 원판은 항상 무거운 것이 아래에 있어야 합니다. (시작 상태에서도 마찬가지)

A에서 C로 최소 횟수로 이동시킬 때, 이동하는 방식을 출력하는 프로그램을 작성합니다.



PAI인공지능연구원

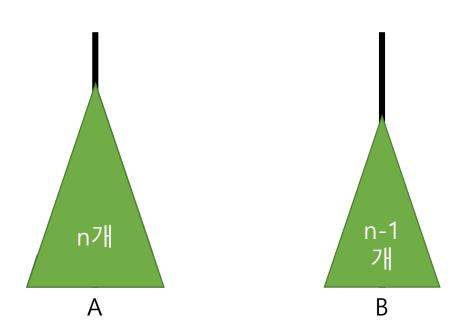
STECH

9

1. 재귀 함수의 정의 Hanoi(start,mid,end,n) #n개의 원판을 strat에서 mid를 거쳐 end로 이동하는 방식을 출력하는 함수

2. 재귀 호출을 어떤 식으로 할 수 있을까요?

Hanoi(A,C,B,n-1)



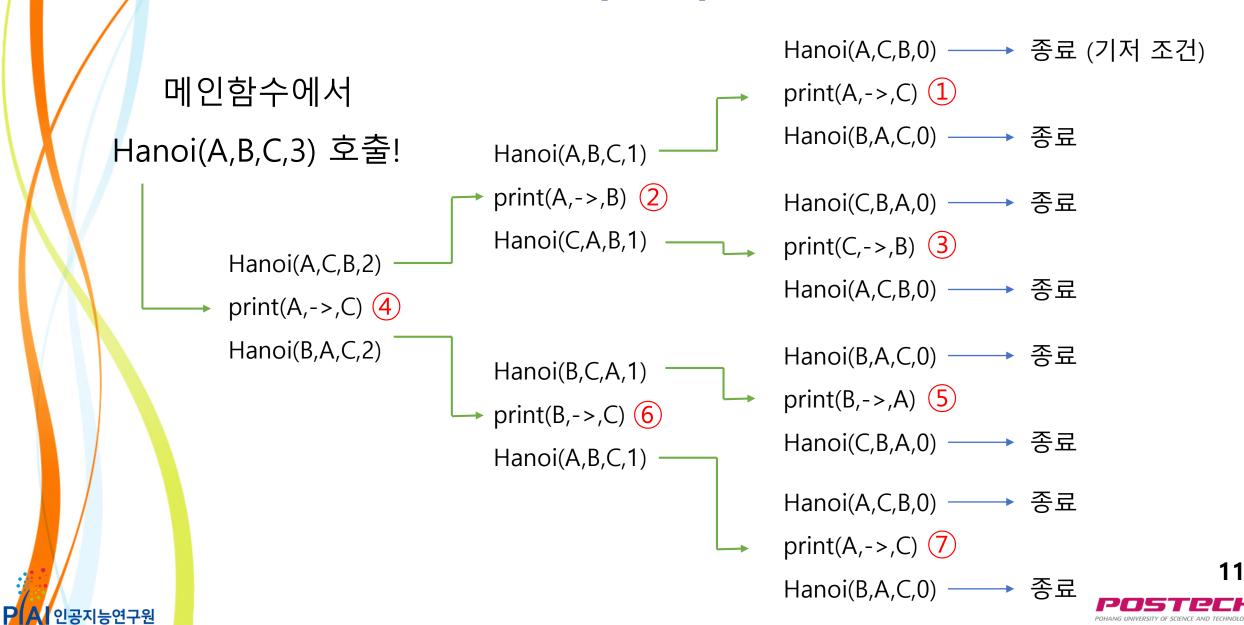
Hanoi(A,C,B,n-1) print(A,->,C) Hanoi(B,A,C,n-1)

A,B,C의 위치에 주의!!

3. 종료 조건: 가장 기본적인 수행 n이 0이라면, 어떠한 실행도 하지 않고 함수를 종료한다.



10



```
def Hanoi(n,start,mid,end): #n개 고리를 start에서 end로 옮기는 함수 if n == 0:
    return
    Hanoi(n-1,start,end,mid) #n-1개 고리를 start에서 mid로 옮김 print(start,'->',end) #남은 1개를 start에서 end로 옮김 Hanoi(n-1,mid,start,end) #mid로 옮긴 n-1개 고리를 end로 옮김 t = int(input()) for _ in range(t):
    n = int(input())
    Hanoi(n,'A','B','C')
```

【인공지능연구원

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 (리스트 인덱스)

End=8

5 9 10 12 16 18 21 27 29

리스트: [21 11 18]

출력: []

주어진 리스트에 21이 들어 있는지 확인하는 방법?

- 1. 리스트의 앞부터 차례대로 탐색 O(n)
- 2. 이진탐색 O(log n) [단, 리스트가 정렬되어 있을 때!] ->굉장히 유용 ex: 검색시스템

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 (리스트 인덱스)

End=8

į	5	9	10	12	16	18	21	27	29

리스트: [21 11 18]

출력: []



(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 (리스트 인덱스)

End=8

5 9 10 12 16 18 21 27 2



리스트: [21 11 18]

Median(중앙값) = (0+8)/2 =4

출력: []

16 < 21 오른쪽을 탐색!



(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

새 Start=5 기존 Start=0 End=8 16 18 21 27 29

PAO인공지능연구원

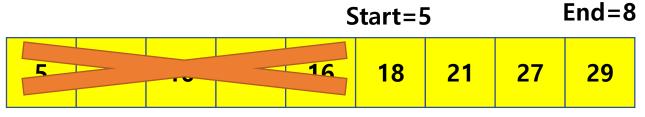
리스트: [21 11 18]

출력: []

(새 Start) = 5 → index가 5보다 작은 원소들은 탐색하지 않아도 됨!

16

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.





리스트: [21 11 18]

Median(중앙값) = (5+8)//2 =6 출력: [6]

왼쪽을 탐색! List[6] = 21

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 End=8

5	9	10	12	16	18	21	27	29

Median=4

왼쪽을 탐색! 16 > 11

리스트: [21 11 18]

출력: [6]



(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=0 End=3

5 9 10 12 16 -- 29

리스트: [21 11 18]

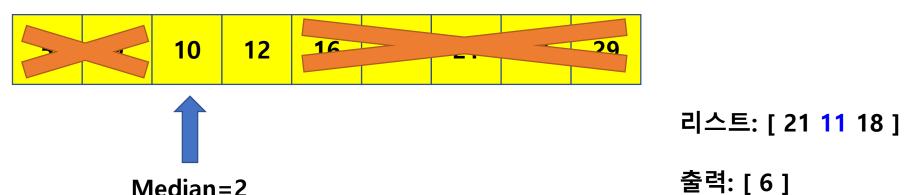
Median=1 출력: [6]

9 < 11 오른쪽을 탐색!

PAV인공지능연구원

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

Start=2 End=3

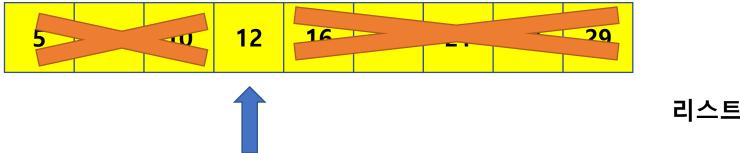


오른쪽 탐색! 10 < 11

PAI인공지능연구원

Median=2

(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.



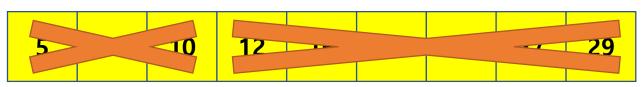
Median=3 왼쪽 탐색! 12 > 11 리스트: [21 11 18]

출력: [6]



(1) 정렬된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

End=2 Start=3



존재하지 않음. -1 리턴

리스트: [21 11 18]

출력: [6-1]



(1) <mark>정렬</mark>된 리스트와, (2) 찾고자 하는 원소들을 담은 리스트가 주어집니다.

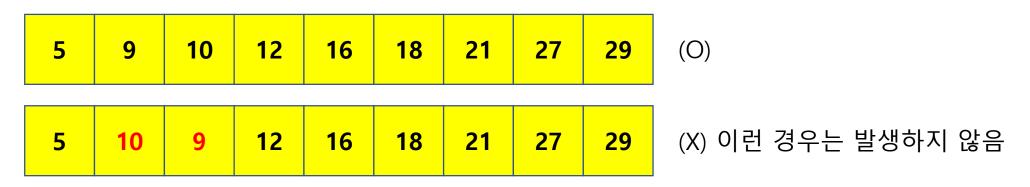
5	9	10	12	16	18	21	27	29	
---	---	----	----	----	----	----	----	----	--

리스트: [21 11 18]

최종 결과 출력: [6-15]



Note: 각 테스트 케이스마다, 첫번째 줄로 주어지는 리스트는 항상 오름차순으로 정렬돼 있음



그렇기에, 중앙값을 기준으로 왼쪽 부분이나 오른쪽 부분 하나만 재귀적으로 조사하면 됨!

Note: 각 테스트 케이스마다, 첫번째 줄로 주어지는 리스트는 항상 오름차순으로 정렬돼 있음

5	9	10	12	16	18	21	27	29	(O)
5	10	9	12	16	18	21	27	29	(X) 이런 경우는 발생하지 않음

하지만, 두번째 줄로 주어지는 리스트는 그렇지 않을 수도 있음!

리스트: [9 21 18] (〇)

리스트: [9 18 21] (O) 문제 없음

03. 이진 탐색 [반복문]

print(*answer)

PAV인공지능연구원

```
t = int(input())
for _ in range(t):
    data = list(map(int,input().split()))
    query = list(map(int,input().split()))
    answer = []
    for q in query:
        left = 0
        right = Len(data)-1
        while left <= right:</pre>
            mid = (left + right) // 2
            if data[mid] == q:
                break
            elif data[mid] > q:
                right = mid - 1
            elif data[mid] < q:</pre>
                left = mid +1
        if left > right:
                                                 A = [1, 2, 3]
            answer.append(-1)
                                                 print(A) → [1,2,3] 출력
        else:
                                                 print(*A) → 1,2,3 출력
            answer.append(mid)
```

26

03. 이진 탐색 [재귀 함수]

```
def binary(data,left,right,q): #data의 Left:right 범위 내에서 q의 위치를 반환하는 함수
   if left > right: # 없는 경우의 중간
       return -1
   mid = (left + right) // 2 # 중간 위치의 값 설정
   if data[mid] == q: # 현재 중앙에 있는 값이 맞는 경우의 조건
       return mid
   # 문제분할: q와 data[mid]의 관계에 따라 부분문제를 호출
   if data[mid] > q:
       subproblem = binary(data,left,mid-1,q)
   elif data[mid] < q:</pre>
       subproblem = binary(data,mid+1,right,q)
   # 분할된 문제들을 합쳐서 따로 행하는 것이 없음
   return subproblem
t = int(input())
for in range(t):
   data = list(map(int,input().split()))
   query = list(map(int,input().split()))
   answer = []
   for q in query:
       answer.append(binary(data, 0, Len(data)-1,q))
   print(*answer)
```

PIAI인공지능연구원

27

03. 이진 탐색 [라이브러리]

import bisect

PAI인공지능연구원

```
def find(1,x):
    i = bisect.bisect_left(1,x)
    if i != len(1) and l[i] := x:
        return i
    return -1
t = int(input())
for _ in range(t):
    data = list(map(int,input().split()))
    query = list(map(int,input().split()))
    answer = [find(data,x) for x in query]
    print(*ans)
```

$04. n^k \mod m$ 효율적으로 계산하기

 n^k 를 12345678로 나눈 나머지를 계산합니다.

Ex) $2^5 \% 12345678 = 32$ $10^7 \% 12345678 = 10000000$ $10^8 \% 12345678 = 1234576$ $1^{89195} \% 12345678 = 1$ $8949156^0 \% 12345678 = 1$ $0^{123456} \% 12345678 = 0$

Python에서는 int 범위 이상의 큰 수를 자동으로 다루지만, 자리수가 많아지면 오래 걸리기 때문에 위의 식을 활용해야 합니다! (cf. C++: Overflow)

Hint1: ab % x = ((a % x) * (b % x))% x

9*9을 5로 나눈 나머지 = 1 = (9를 5으로 나눈 나머지)*(9을 5으로 나눈 나머지) 를 5으로 나눈 나머지

Hint2: $X^{a}X^{b} = X^{(a+b)}$

Hint3: $X^{2b} = X^b * X^b$ & $X^{2b+1} = X^b * X^b * X$





$04. n^k \mod m$ 효율적으로 계산하기

PIAI인공지능연구원

```
#Power(n, k, m): n^k를 m으로나눈 나머지를 반환하는 함수
def Power(n,k,m):
    if k == 0:
        return 1
    if k == 1:
        return n
    half = Power(n,k//2,m)
    if k % 2 == 0:
        return (half*half)%m
    else:
        return (half*half*n)%m
t = int(input())
for _ in range(t):
    n,k,m = map(int,input().split())
    print(Power(n,k,m))
                                                          30
```



이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=0 End=8

5	9	10	12	16	18	21	27	29	



Mid(중간) = (0+8) // 2 = 4

리스트: [21 22 38]

출력: []

if List[mid] = = target:
 output.append(target)
elif List[mid] < target:
 start = mid + 1
elif List[mid] > target:
 end = mid

 List[Start-1]
 왼쪽의 원소들은 정답이 될 수

 없지만, List[Start-1]는 정답이 될 수 있음

List[End] 오른쪽의 원소들은 정답이 될 수 없지만, List[End]는 정답이 될 수 있음

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=0 End=8

5 9 10 12 16 18 21 27 2	29
-------------------------	----

Mid=4

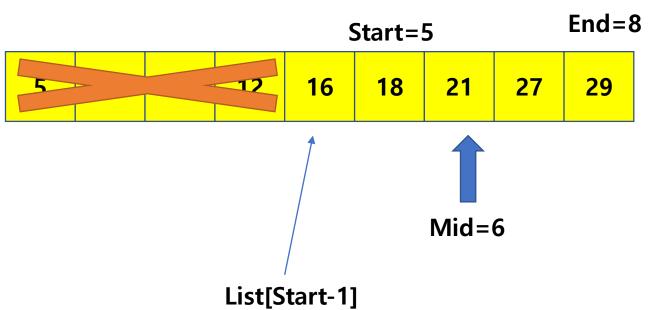
16 < 21 오른쪽을 탐색!

리스트: [21 22 38]

출력: []



이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!



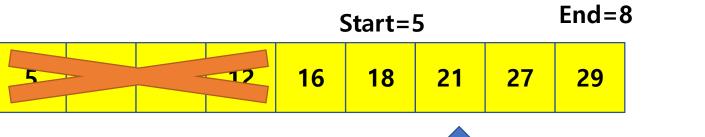
리스트: [21 22 38]

출력: []





이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!





Mid=6

탐색 완료!

PAV인공지능연구원

List[mid] = 21

값을 그대로 리턴!

리스트: [21 22 38]

출력: [21]

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=0 End=8

5	9	10	12	16	18	21	27	29

리스트: [21 22 38]

출력: [21]



이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!





리스트: [21 22 38]

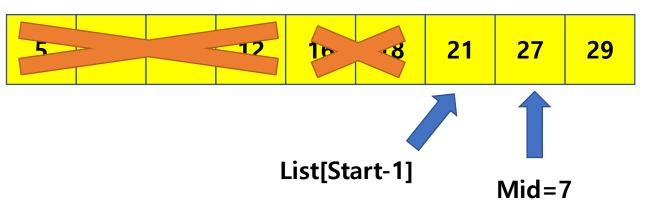
출력: [21]

21 < 22 오른쪽을 탐색!

직전의 21과 비슷하게, 22를 찾는 과정이 진행됨. 여기서...

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=7 End=8



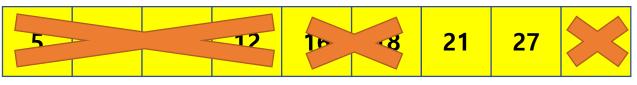
리스트: [21 22 38]

출력: [21]

27 > 22 왼쪽을 탐색!

37

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!





리스트: [21 22 38]

출력: [21]





이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

Start=End=7





리스트: [21 22 38]

출력: [21 21]

남은 선택지는 2개밖에 없음.(21과 27)

22-21 < 27-22이므로, 정답은 21

이전 문제인 이진 탐색과 비슷, 하지만 **가장 가까운 원소**를 찾아야 함!

5	9	10	12	16	18	21	27	29
---	---	----	----	----	----	----	----	----

리스트: [21 22 38]

출력: [21 21 29]

38은 가장 큰 원소인 29보다도 크므로, 정답은 29





ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 1: 반복문]

```
def binary2(1, x):
       #x가 첫번째 값보다 작거나 마지막 값보다 큰 경우를 미리 확인
       if
       if
       start=0
       end=len(1)-1
       while start<end:
          mid = (start+end)//2
          if
 9
          elif
10
11
          else:
       #위에서 return이 없었다면 l[end-1] < x < l[end]가 항상 성립
12
       #두 값중 x와 더 가까운 값 반환
13
14
       if
15
       else:
16
17  t = int(input())
18 for _ in range(t):
19
      1 = list(map(int,input().split()))
20
       q = list(map(int,input().split()))
       ans = [binary2(1, x) for x in q]
21
22
       print(*ans)
```

PAI인공지능연구원

ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 2: 재귀함수]

PAI인공지능연구원

```
def binary(1,s,e,x):
                                #x가 첫번째 값보다 작거나 마지막
        if
                                값보다 큰 경우를 미리 확인
        if
       if s>=e: #s가 e 보다 크거나 같은 경우가 의미하는 바는??
           if
           else:
       mid = (s+e)//2
                                               # |[mid]와 x가 같은경우:
       if 1[mid]==x:
                                               # |[mid]> x인 경우:
       elif 1[mid]>x:
       else: return
10
                                               # |[mid] < x인 경우:
11
    t = int(input())
    for _{\rm in} range(t):
    1 = list(map(int,input().split()))
14
15
       q = list(map(int,input().split()))
       ans = [binary(1,0,len(1),x)] for x in q
16
17
       print(*ans)
```

ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 3: 라이브러리 사용]

import bisect

• • • •

i = bisect_left(l,x)

위의 구문을 통해 정렬된 리스트 I에서 x라는 값이 들어갈 위치를 찾을 수 있습니다. 이때 bisect_left 함수는 x와 같은 값들이 있을 때 그 중 가장 작은 인덱스를 반환하며 bisect_right 함수는 가장 큰 인덱스를 반환합니다.

 $bisect_left: \ l[i-1] < x < = l[i] \ if \ i! = 0 \ , \qquad bisect_right: \ l[i] < = x < l[i+1] \ if \ i! = len(l) - 1$



ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 3: 라이브러리 사용]

import bisect

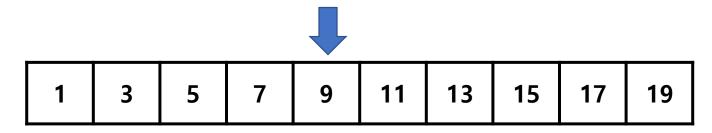
••••

PAI인공지능연구원

i = bisect_left(l,x)

위의 구문을 통해 정렬된 리스트 I에서 x라는 값이 들어갈 위치를 찾을 수 있습니다. 이때 bisect_left 함수는 x와 같은 값들이 있을 때 그 중 가장 작은 인덱스를 반환하며 bisect_right 함수는 가장 큰 인덱스를 반환합니다.

 $bisect_left: \ l[i-1] < x < = l[i] \ if \ i! = 0 \ , \qquad bisect_right: \ l[i] < = x < l[i+1] \ if \ i! = len(l) - 1$



x = 8 or 9

bisect_left(I,x)==4



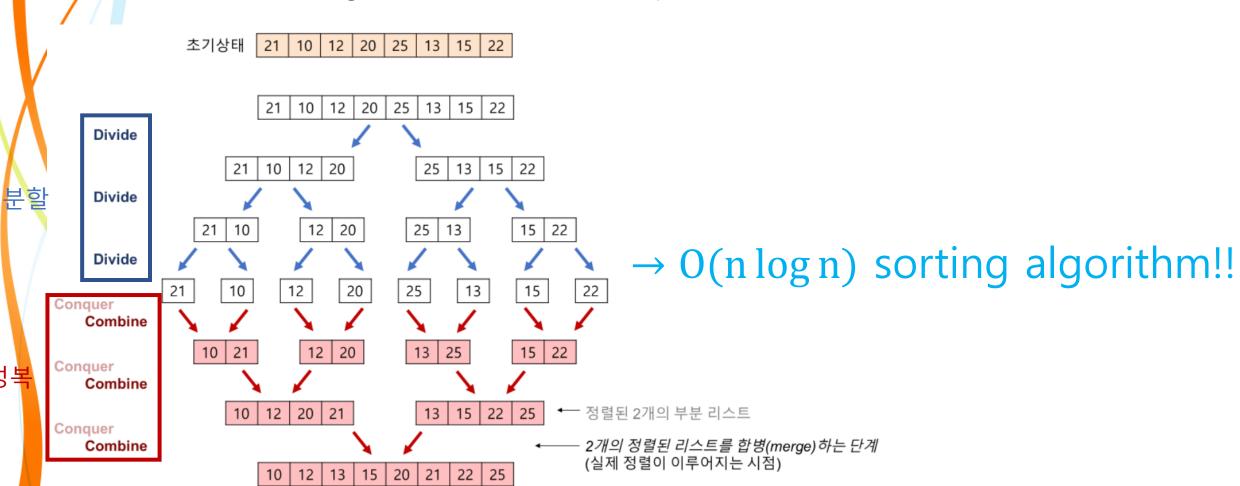


ADD01. 이진 탐색 2 [힌트 3: 라이브러리 사용]

```
import bisect
  def find(1,x):
     i = bisect.bisect_left(1,x)
5 #x가 첫번째 값보다 작거나 같은 경우
     #x가 마지막 값보다 큰 경우
     #L[i-1] < x <= L[i]가 항상 성립하기 때문에
     #두 값 중 x와 더 가까운 값을 찾아 반환한다.
10
11
     if
12
     else:
13
14 t=int(input())
15 for _ in range(t):
q = list(map(int,input().split()))
17
     ans=[find(l,x) for x in q]
18
     print(*ans)
19
```

PAI인공지능연구원

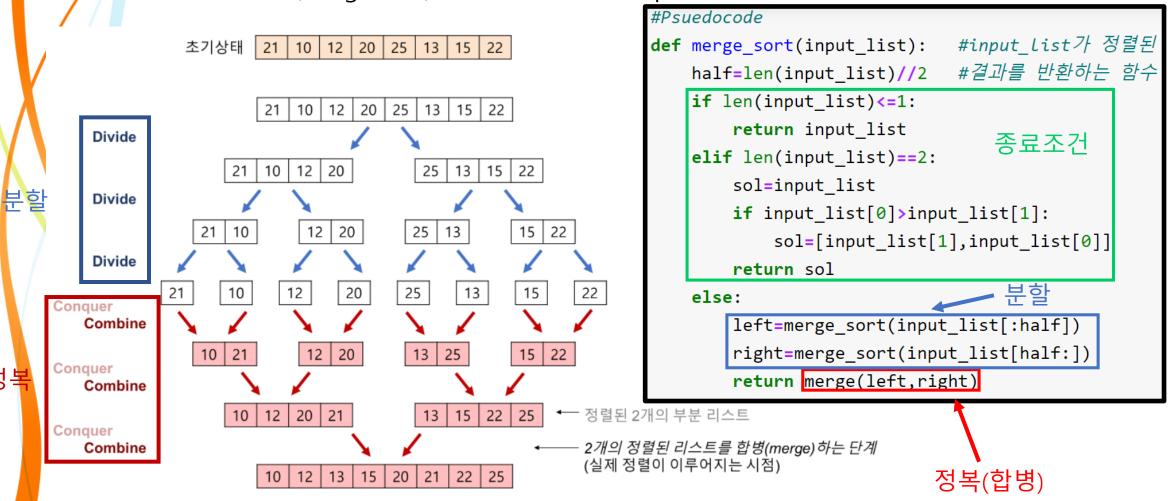
합병 정렬(Merge Sort) -> Divide and Conquer를 이용하여 정렬하는 알고리즘



46

정복

합병 정렬(Merge Sort) -> Divide and Conquer를 이용하여 정렬하는 알고리즘

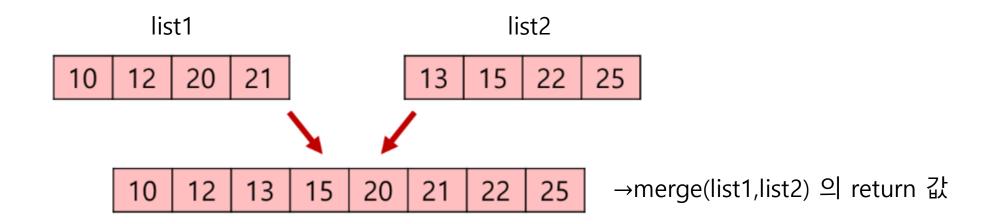


47

정복

PA 인공지능연구원

합병 정렬(Merge Sort) -> Divide and Conquer를 이용하여 정렬하는 알고리즘





정렬된 두 개의 리스트가 주어졌을 때, 두 리스트를 합병하여 정렬한 결과의 각 원소가 두 리스트 중 어떤 리스트에서 가져온 것인지 계산하는 프로그램을 작성하여라.

List 1

1 3 7 11 15

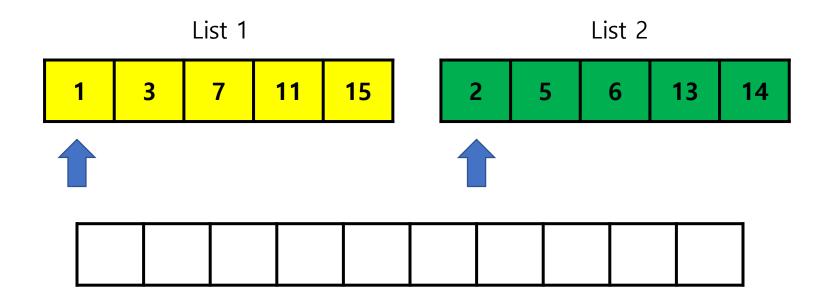
2 5 6 13 14

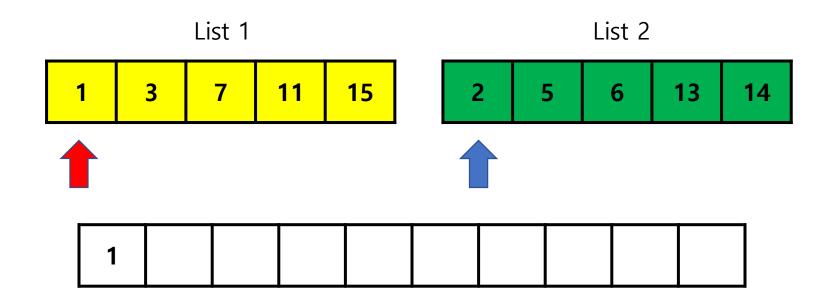
정렬된 두 개의 리스트가 주어졌을 때, 두 리스트를 합병하여 정렬한 결과의 각 원소가 두 리스트 중 어떤 리스트에서 가져온 것인지 계산하는 프로그램을 작성하여라.

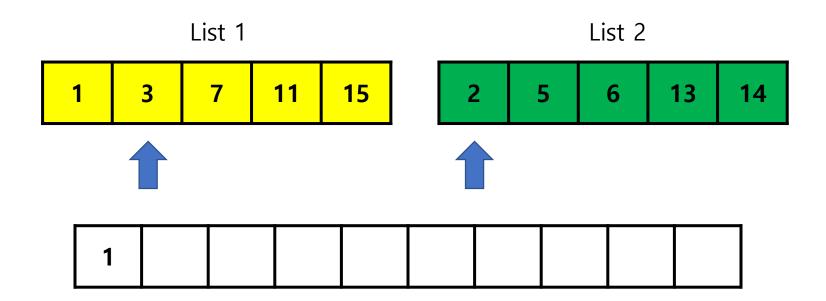
List 1

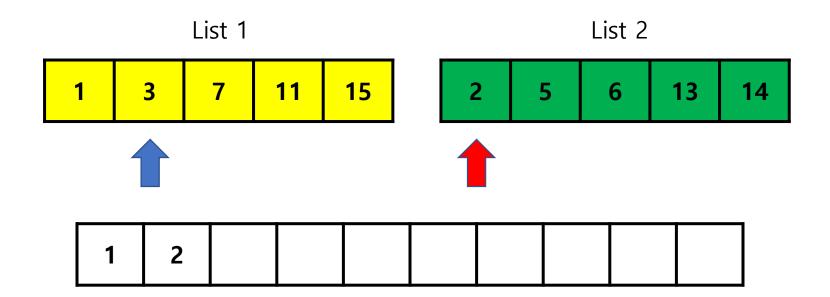
1 3 7 11 15

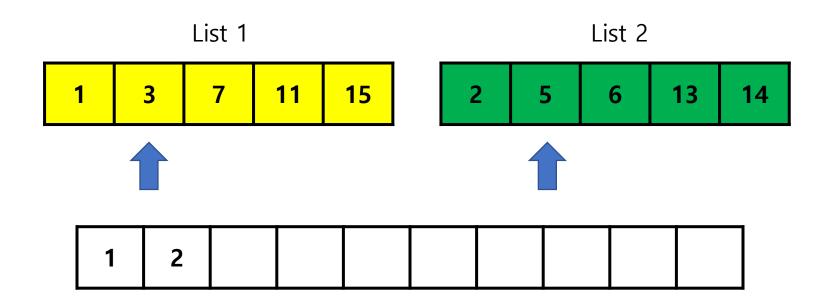
2 5 6 13 14

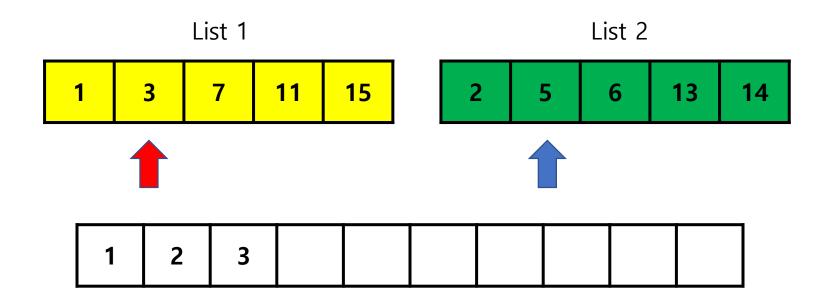


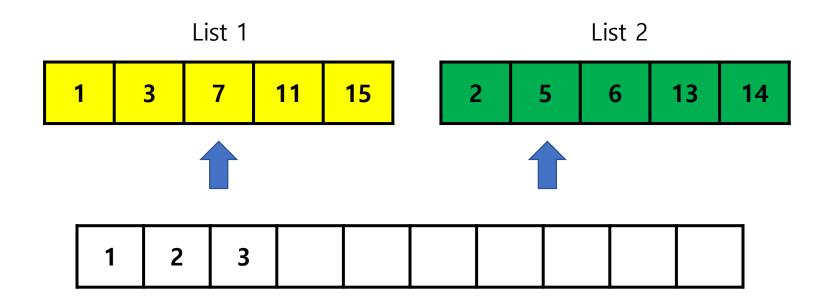


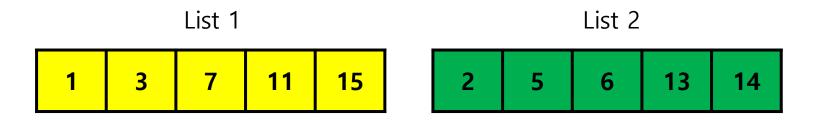




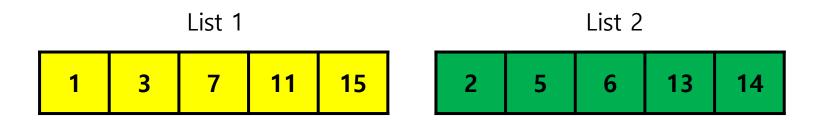


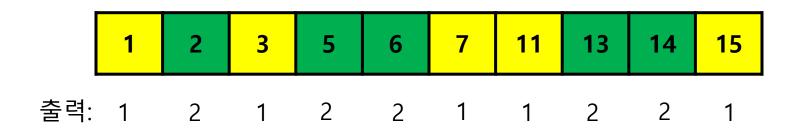






1	2	3	5	6	7	11	13	14	15
---	---	---	---	---	---	----	----	----	----





```
def merge(11,12):
       n = len(11)
       m = len(12)
      i=j=0
       #결과를 저장할 리스트 선언
       ret=[0]*(n+m)
       for k in range(n+m):
          #12의 원소를 모두 사용한 경우 11에서 원소를 뽑는다.
          if
10
11
          #11의 원소를 모두 사용한 경우 12에서 원소를 뽑는다.
12
          elif
13
14
15
          #l1,l2에 각각 적어도 하나의 원소가 남아있다.
16
          #두 값의 크기를 비교하여 어떤 리스트의 원소를 선택할지 결정
17
18
          elif
19
                                        t=int(input())
20
          else
                                        for _ in range(t):
21
22
                                            11 = list(map(int,input().split()))
23
                                            12 = list(map(int,input().split()))
24
       return ret
                                            print(*merge(11,12))
```

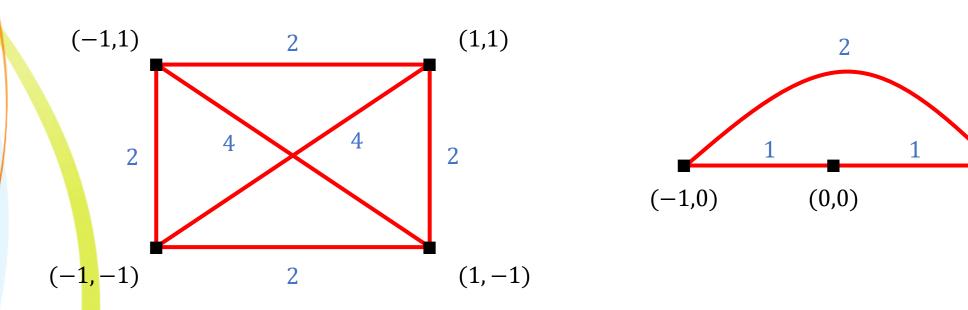


과제1. 도시 도로 정비

- A나라에 도시가 n개 있다고 하자

PAV인공지능연구원

- 각 두 개의 도시마다 두 도시를 잇는 도로가 존재한다.
- 도시 P가 (x_1, y_1) 에 위치하고, 도시 Q가 (x_2, y_2) 에 위치하면 도로 정비하기 위한 비용은 $|x_1 x_2| + |y_1 y_2|$ 이다.
- => 모든 도로를 정비하기 위한 비용 /를 구하는 프로그램을 작성하세요.



(1,0)