Cálculo II

Sesión 9: Longitud de arco.
Sesión integradora unidad 3

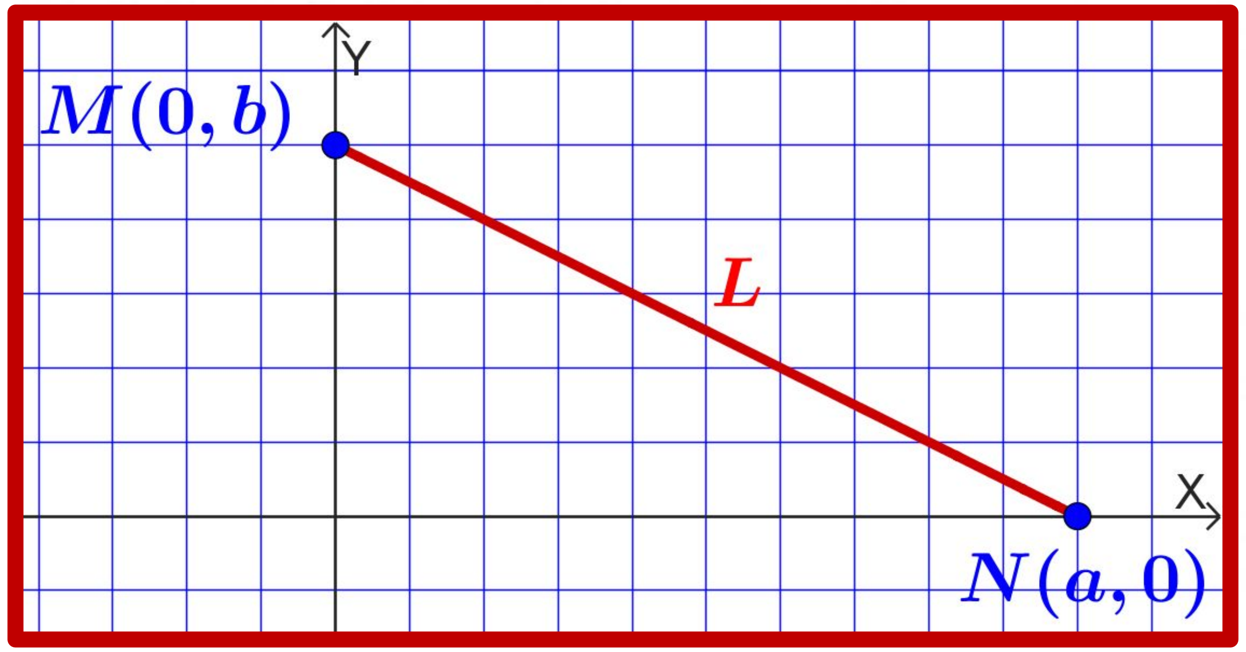
Universidad Tecnológica del Perú

Universidad Tecnológica del Perú

Consultas sobre el tema anterior

- ¿La medida del área interior a $r = 4cos(\theta)$ es $4\pi\, u^2$?

- ¿La medida del área interior a $r = 1 + cos(\theta)$ se calcula mediante la integral $A = \int_0^{\pi} [1 + cos(\theta)]^2$?



Teorema de Pitágoras

$$L = \sqrt{a^2 + b^2}$$

LOGRO DE SESIÓN

Al finalizar la sesión, el estudiante aplica la integral definida en el cálculo de áreas y longitud de curva, para la solución de problemas relacionados al campo de la ingeniería y otras disciplinas.

Universidad Tecnológica del Perú

Saberes previos: Derivadas

❑ La derivada de la función $f(x) = \sqrt{x}$

$$f(x) = x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

❑ La derivada de la función $f(x) = x^{3/2}$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{1/2}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$$

Universidad Tecnológica del Perú

Utilidad de la longitud de arco

Los cables de alta tensión se caracterizan por su material aislante y por que sus conductores son capaces de transportar altas tensiones de corriente eléctrica. En el tendido de los cables, se generan forma curvas, cuya longitud se diseña mediante la longitud de arco.

UTP Universidad Tecnológica del Perú

LONGITUD DE ARCO EN COORDENADAS CARTESIANAS

Sea $f:[a,b] \to R$ una función con derivada continua en $[a,b]$, entonces la longitud de arco de la curva $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ se obtiene mediante.

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx}$$

LONGITUD DE ARCO EN CARTESIANAS

Universidad Tecnológica del Perú

Calcule la longitud de arco de la curva $y = 2x^{3/2}$, donde $x \epsilon [0, 6]$.

Considere que cada unidad del plano cartesiano mide 1 m.

- Longitud de curva

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

- Derivada

$$\frac{dy}{dx} = 2\left(\frac{3}{2}\right)x^{1/2} = 3x^{1/2}$$

- Reemplazo en la integral

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + (3x^{1/2})^2}\, dx$$

$$L = \int_0^6 \sqrt{1 + 9x}\, dx$$

Respuesta:

La longitud de curva mide $30,14$ m

LONGITUD DE ARCO EN CARTESIANAS

Una placa de acero se diseña mediante la región encerrada por las gráficas de las funciones $f(x) = -0,5x^2 + 12$ y $g(x) = x^2 + 6$. Además, la periferia de la placa se cubre con una cinta adhesiva. Calcule la longitud de la cinta.

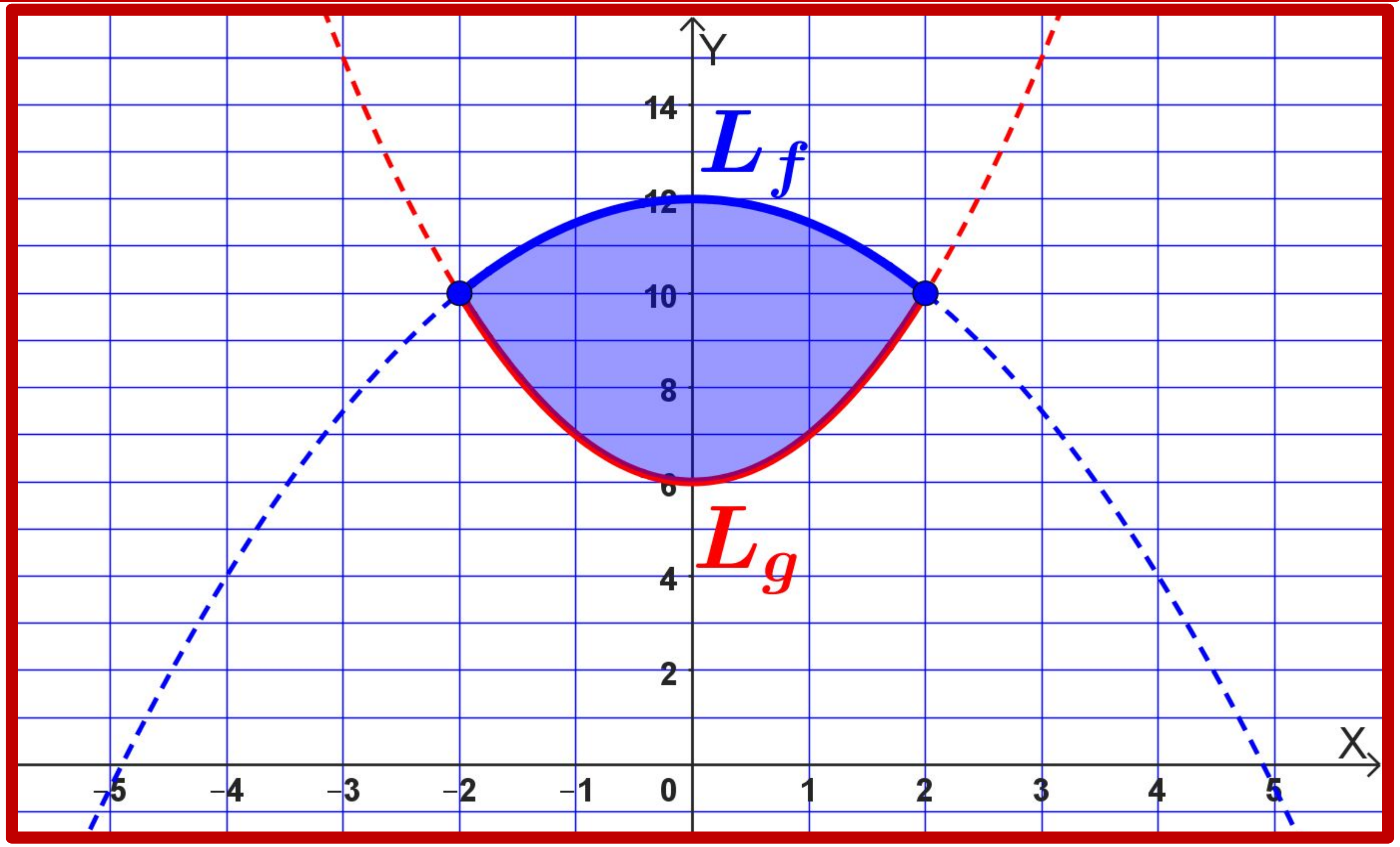
- **Intersección de gráficas:**

$$f(x) = g(x)$$

$$-0,5x^2 + 12 = x^2 + 6$$

$$6 = \frac{3}{2}x^2$$

$$x = -2 \quad , \quad x = 2$$



LONGITUD DE ARCO EN CARTESIANAS

Universidad Tecnológica del Perú

- Longitud de curva

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

- Derivadas

$$f'(x) = -x$$

$$g'(x) = 2x$$

- Reemplazo en la integral

$$L_f = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (-x)^2}dx \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + x^2}dx = 5,92$$

$$L_g = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + (2x)^2}dx = \int_{-2}^{2} \sqrt{1 + 4x^2}dx = 9,29$$

$$L_f + L_g = 5,92 + 9,29 = 15,21$$

Respuesta:

La longitud de la cinta mide $15,21$ u

LONGITUD DE ARCO DE UNA CURVA DADA POR ECUACIONES PARAMÉTRICAS

Dadas las ecuaciones paramétricas:

$$\boldsymbol{L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\,dt}$$

Calcule la longitud de arco de la curva dada por las ecuaciones paramétricas $x = e^{-t}cos(t)$, $y = e^{-t}sen(t)$ donde $t \epsilon \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

- **Longitud de curva**

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

- **Derivada**

$$x'(t) = -e^{-t}cos(t) - e^{-t}sen(t) , \qquad y'(t) = -e^{-t}sen(t) + e^{-t}cos(t)$$

- $L = \int_a^b \sqrt{[-e^{-t}cos(t) - e^{-t}sen(t)]^2 + [-e^{-t}sen(t) + e^{-t}cos(t)\ ]^2}\, dt$

Universidad Tecnológica del Perú

- Operando:

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2[e^{-2t}.cos^2(t) + e^{-2t}.sen^2(t)]}\, dt$$

$$L = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2e^{-2t}[cos^2(t) + sen^2(t)]}\, dt$$

$$L = \sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-t}dt = 1,12$$

Respuesta: La medida de la longitud de curva $1,12\ u$

Un estudiante de UTP realiza un estudio sobre la forma que adopta un cable de alta tensión entre dos torres consecutivas, las cuales se encuentran en un terreno plano, donde la distancia entre los conectores de ambas torres es 200 metros.

Luego de realizar varias simulaciones se determinó el modelo de la curva según.

$$\boldsymbol{C(x) = 20 + \frac{e^{0,05x} + e^{-0,05x}}{10}}$$

Además, $\boldsymbol{C(x)}$ representa la altura del cable en metros, a $\boldsymbol{x}$ metros del punto medio (en tierra) de ambas torres.

a. Mediante una aplicación digital, grafique la función $\boldsymbol{C(x)}$.

b. Calcule la longitud que debe tener el cable.

c. Calcule la altura de los conectores donde se enganchan los extremos del cable.

Una pieza mecánica se diseña mediante la región encerrada por las gráficas de.

$$\boldsymbol{f(x) = \frac{x^2}{a}} \qquad , \qquad \boldsymbol{g(x) = ax}$$

donde, $\boldsymbol{f(x)}$, $\boldsymbol{g(x)}$ y $\boldsymbol{x}$ se encuentran en cm.

Además, se fabrican en tres tamaños: pequeño $\boldsymbol{a = 2}$, mediano $\boldsymbol{a = 3}$ y grande $\boldsymbol{a = 4}$

a. Mediante una aplicación digital, grafique los tres tipos de piezas.

b. Calcule el perímetro de una de las piezas mecánicas.

Verificación de longitud de curva mediante DESMOS

Conclusiones

- Para calcular la longitud de curva, la función debe ser continua dentro de su dominio.

- La longitud de curva de $y = f(x)$ desde $x = a$ hasta $x = b$ se obtiene mediante

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

- La longitud de curva de las ecuaciones parametrizadas desde $t = a$ hasta $t = b$ se obtiene mediante

$$L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt$$

SESIÓN INTEGRADORA

Universidad Tecnológica del Perú

Universidad
Tecnológica
del Perú