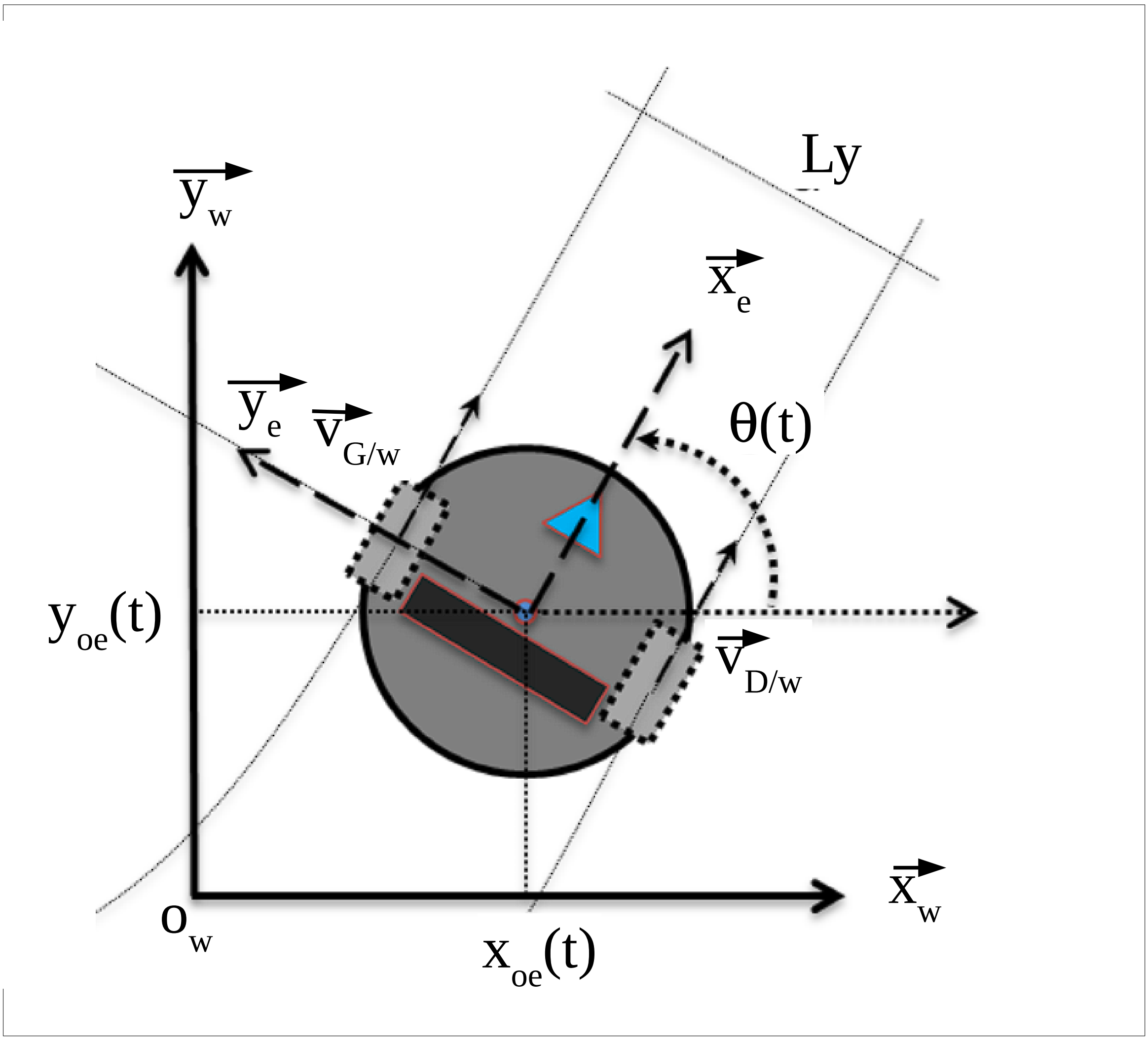

MODELES GEOMETRIQUES :

Changement de coordonnées : <= 2 repères affines mis en jeu

Repère ‘world’ w : origine O_w , axes : $\vec{x}_w, \vec{y}_w$,

Repère ‘essieu’ e : origine O_e , axes : $\vec{x}_e, \vec{y}_e$,

établissement des équations permettant de passer des coordonnées d’un vecteur $\vec{V}$ ***ou d’un point P d’un repère à l’autre :*** ${}^w\vec{V}={}^wR_e.{}^e\vec{V}$

CAS GENERAL :

> **notation :**
> La lettre en haut à gauche précise le repère , cette quantité se lit :
> ‘’V exprimé dans le repère **e**‘’

[1] Soit un vecteur $\vec{V}$ dont on connaît les coordonnées ${}^e\vec{V}=\begin{bmatrix} v_{xe}\\ v_{ye}\end{bmatrix}$ dans un repère **e**,

alors: $${}^e\vec{V}=\begin{bmatrix} v_{xe}\\ v_{ye}\end{bmatrix} \Leftrightarrow \underbrace{\vec{V}=\vec{x}_e.v_{xe}+\vec{y}_e.v_{ye}}_{\text{equ. vectorielle E}} \Leftrightarrow \underbrace{{}^w\vec{V}={}^w\vec{x}_e.v_{xe}+{}^w\vec{y}_e.v_{ye}}_{\text{E exprimée dans rep. w}} = \underbrace{\begin{bmatrix}{}^w\vec{x}_e, {}^w\vec{y}_e\end{bmatrix}}_{{}^wR_e} . \underbrace{\begin{bmatrix}v_{xe}\\ v_{ye}\end{bmatrix}}_{{}^eV} = {}^wR_e.{}^e\vec{V}$$

rep. e dans rep. w

et donc ses coordonnées ${}^w\vec{V}$ dans le repère **w** s’écrivent : ${}^w\vec{V}={}^wR_e.{}^e\vec{V}$

[2] soit un point ***P*** dont on connaît les coordonnées ^{e}***P*** dans le repère **e**,

alors : $$\underbrace{{}^w\overrightarrow{O_wP}}_{{}^wP} = \underbrace{{}^w\overrightarrow{O_wO_e}+{}^w\overrightarrow{O_eP}}_{\text{loi de chasles}} = \underbrace{{}^w\overrightarrow{O_wO_e}}_{{}^wO_e} + \overbrace{{}^wR_e.\underbrace{{}^e\overrightarrow{O_eP}}_{{}^eP}}^{{}^w\overrightarrow{O_eP}} = {}^wR_e.{}^eP+{}^wO_e$$

et donc ses coordonnées ^{w}**P** dans le repère **w** s’écrivent : ${}^wP={}^wR_e.{}^eP+{}^wO_e$

> **Résumé :** pour tous repères affines *w* et *e*
> pour tout vecteur $\vec{V}$:
> $${}^w\vec{V}={}^wR_e.{}^e\vec{V}$$
> pour tout point *P* :
> $${}^wP={}^wR_e.{}^eP+{}^wO_e$$

Expressions de ^wR_e et ^wO_e: passage de coords essieu au coords world

Coordonnées des axes du Repère Essieu suivant les axes du repère monde : matrice ^wR_e

$$\underbrace{\vec{x}_e(t)=\vec{x}_w.\cos(\theta(t))+\vec{y}_w.\sin(\theta(t))}_{\text{équation vectorielle}} \Leftrightarrow \underbrace{{}^w\vec{x}_e(t)}_{\vec{x}_e \text{ exprimé dans le repère w}} = \underbrace{\begin{bmatrix}\cos(\theta(t))\\ \sin(\theta(t))\end{bmatrix}}_{\text{coords de } \vec{x}_e \text{ suivant } \vec{x}_w,\vec{y}_w}$$

$$\underbrace{\vec{y}_e(t)=-\vec{x}_w.\sin(\theta(t))+\vec{y}_w.\cos(\theta(t))}_{\text{équation vectorielle}} \Leftrightarrow \underbrace{{}^w\vec{y}_e(t)}_{\vec{y}_e \text{ exprimé dans le repère w}} = \underbrace{\begin{bmatrix}-\sin(\theta(t))\\ \cos(\theta(t))\end{bmatrix}}_{\text{coords de } \vec{y}_e \text{ suivant } \vec{x}_w,\vec{y}_w}$$

En regroupant les équations on obtient la matrice $^w\mathbf{R_e}$: repère essieu exprimé suivant le repère monde :

$${}^wR_e=\left[{}^w\vec{x}_e(t),{}^w\vec{y}_e(t)\right]= \underbrace{\begin{bmatrix}\cos(\theta(t)), & -\sin(\theta(t))\\ \sin(\theta(t)), & \cos(\theta(t))\end{bmatrix}}_{\text{coords de } \vec{x}_e,\vec{y}_e \text{ suivant } \begin{bmatrix}\vec{x}_w\\ \vec{y}_w\end{bmatrix}}$$

Coordonnées de l'origine O_e du Repère Essieu suivant les axes du repère monde : vecteur colonne ^wO_e

$$\underbrace{\overrightarrow{O_wO_e}=\vec{x}_w.x_{oe}(t)+\vec{y}_w.y_{oe}(t)}_{\text{équation vectorielle}} \Leftrightarrow \underbrace{{}^wO_e(t)}_{O_e \text{ exprimé dans le repère w}} = \underbrace{\begin{bmatrix}x_{oe}(t)\\ y_{oe}(t)\end{bmatrix}}_{\text{coords du point } o_e \text{ suivant } \vec{x}_w,\vec{y}_w}$$

Expressions de ^eR_w et ^eO_w: passage de coords world au coords essieu,

$^e\mathbf{R_w}$ et $^w\mathbf{R_e}$ sont toujours inverses l'une de l'autre $\quad {}^e\vec{x}={}^eR_w.{}^w\vec{x}={}^eR_w.\underbrace{{}^wR_e.{}^e\vec{x}}_{{}^w\vec{x}}=\overbrace{{}^eR_w.{}^wR_e}^{Id}.{}^e\vec{x}$

Dans ce cas particulier de 2 bases ortho-normées, $^e\mathbf{R_w}$ et $^w\mathbf{R_e}$ sont également transposées l'une de l'autre, ce qui facilite le calcul de $^e\mathbf{R_w}$

et donc : $${}^eR_w=\left[{}^e\vec{x}_w,{}^e\vec{y}_w\right]={}^wR_e^{\,T}= \underbrace{\begin{bmatrix}\cos(\theta(t)), & \sin(\theta(t))\\ -\sin(\theta(t)), & \cos(\theta(t))\end{bmatrix}}_{\text{coords de } \vec{x}_w,\vec{y}_w \text{ suivant } \begin{bmatrix}\vec{x}_e\\ \vec{y}_e\end{bmatrix}}$$

Coordonnées de l'origine O_w du Repère Essieu suivant les axes du repère monde : vecteur colonne ^eO_w

formule générale : $\;{}^eO_w={}^e\overrightarrow{O_eO_w}=-{}^e\overrightarrow{O_wO_e}=-{}^eR_w.{}^w\overrightarrow{O_wO_e}=-{}^eR_w.{}^wO_e$

cas de ce robot :

$${}^eO_w=-{}^eR_w.{}^wO_e=-\begin{bmatrix}\cos(\theta(t)), & \sin(\theta(t))\\ -\sin(\theta(t)), & \cos(\theta(t))\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}x_{oe}(t)\\ y_{oe}(t)\end{bmatrix}$$

RESUME : CHANGEMENTS DE COORDONNEES POUR LE KOBUKI

1- les quantités : ${}^wR_e=\begin{bmatrix}\cos(\theta(t)), & -\sin(\theta(t))\\ \sin(\theta(t)), & \cos(\theta(t))\end{bmatrix}$, ${}^wO_e=\begin{bmatrix}x_{oe}(t)\\ y_{oe}(t)\end{bmatrix}$ permettent de définir les coordonnées dans le repère *w* d'un vecteur $\vec{V}$ ou d'un point *P* connaissant leurs coordonnées dans le repère essieu *e :*

${}^w\vec{V}={}^wR_e.{}^e\vec{V}$, ${}^wP={}^wR_e.{}^eP+{}^wO_e$

Cela permet de représenter le robot dans le repère monde, connaissant sa position et son orientation

2- les quantités $^{e}R_{w}=\begin{bmatrix}\cos(\theta(t)), & \sin(\theta(t))\\ -\sin(\theta(t)), & \cos(\theta(t))\end{bmatrix}$, $^{e}O_{w}=\begin{bmatrix}-\cos(\theta(t)).x_{oe}(t)-\sin(\theta(t)).y_{oe}(t)\\ \sin(\theta(t)).x_{oe}(t)-\cos(\theta(t)).y_{oe}(t)\end{bmatrix}$

permettent de définir les coordonnées dans le repère *e* d'un vecteur $\vec{V}$ ou d'un point *P* connaissant leurs coordonnées dans le repère *w :* $^{e}\vec{V}={}^{e}R_{w}.{}^{w}\vec{V}$, $^{e}P={}^{e}R_{w}.{}^{w}P+{}^{e}O_{w}$

Cela permet de déterminer les coordonnées dans le repère essieu, de points dont on connaît les coordonnées dans le repère monde. En particulier cela permet de simuler la mesure de la caméra embarquée ou du capteur d'écart entre l'essieu et la trajectoire à suivre.

MODELE CINEMATIQUE : (vitesse et vitesse angulaire)

vitesse de l'origine du repère essieu

La vitesse d'un point *P* par rapport à un repère *w* est le vecteur $\vec{V}$ de coordonnées dans le repère w égales aux dérivées par rapport au temps des coordonnées de *P* dans le repère w

$\underbrace{\vec{V}_{P/w}}_{\text{vecteur vitesse de P/ au repère w}}$ est telle que : $^{w}\vec{V}_{P/w}=\frac{d\ {}^{w}P}{dt}$

la vitesse de l'origine O_e du repère essieu par rapport au repère *w* a donc pour coordonnées dans le repère *w*:

$$^{w}\overrightarrow{V_{oe/w}}=\frac{d\,{}^{w}O_{e}}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{d\,x_{oe}(t)}{dt}\\ \frac{d\,y_{oe}(t)}{dt}\end{bmatrix}$$

hypothèse de non glissement, vitesse tangentielle vx(t) : si on suppose que les roues ne glissent pas sur le sol, alors cette vitesse est colinéaire à l'axe $\vec{x}_e$ du repère essieu

ses coordonnées dans le repère essieu s'écrivent donc sous la forme :

$^{e}\overrightarrow{V_{oe/w}}=\begin{bmatrix}v_x(t)\\ 0\end{bmatrix}$, où *vx(t)* est la vitesse tangentielle de l'origine de l'essieu par rapport au repère *w*

On peut donc exprimer également les coordonnées de la vitesse dans le repère monde directement en fonction de *vx(t)* ,

$$^{w}\overrightarrow{V_{oe/w}}={}^{w}R_{e}.{}^{e}\overrightarrow{V_{oe/w}}=\begin{bmatrix}\cos(\theta(t)).vx(t)\\ \sin(\theta(t)).vx(t)\end{bmatrix}$$

Cette 2ème expression permettra d'estimer les coordonnées de l'origine du repère essieu dans le repère monde en fonction de $\theta(t), vx(t)$, après intégration :

$$^{w}O_{e}(t)=\begin{bmatrix}x_{oe}(t)\\ y_{oe}(t)\end{bmatrix}=\int_{0}^{t}\frac{d\,{}^{w}O_{e}}{dt}.dt+\begin{bmatrix}x_{oe}(0)\\ y_{oe}(0)\end{bmatrix}\text{ , avec }\frac{d\,{}^{w}O_{e}}{dt}=\begin{bmatrix}\frac{d\,x_{oe}(t)}{dt}=\cos(\theta(t)).vx(t)\\ \frac{d\,y_{oe}(t)}{dt}=\sin(\theta(t)).vx(t)\end{bmatrix}$$