

# I 君的商店

清华大学 吕欣

2019 年 1 月

# 题意

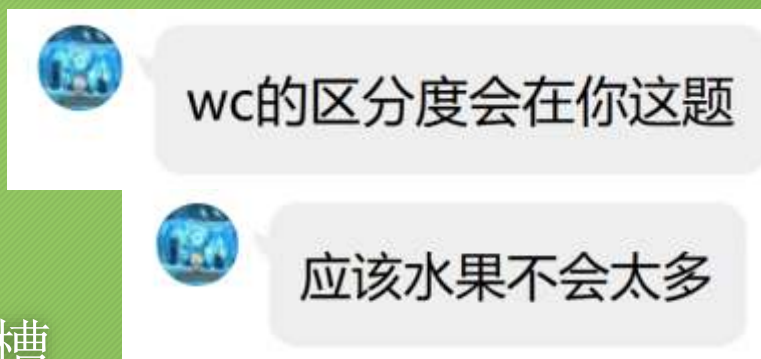
- 令全集为  $U = \{0, 1, \dots, N - 1\}$ ，有一个非空子集  $X \subseteq U$ ，现在已知  $|X|$  的奇偶性。
- 每次可以传入两集合  $S, T$ ，交互库计算并返回  $|X \cap S|$  和  $|X \cap T|$  哪个更大（相同的时候任意返回一个）
  - 定义这样的一次询问代价为  $|S| + |T|$
- 在给定的总代价限制下，找到集合  $X$

# 得分情况



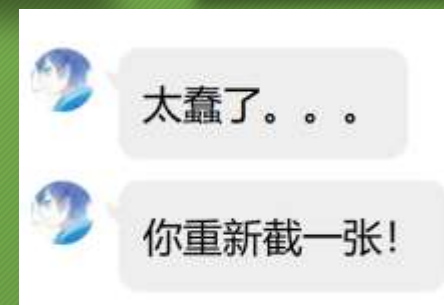
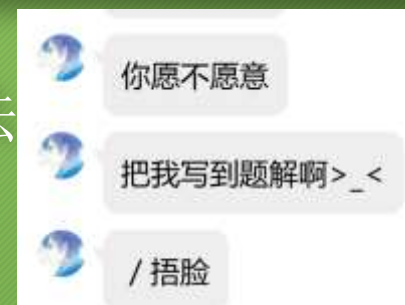
# 出题人的吐槽

- 刚开考就被某T姓选手提出若干种疯狂 hack 的算法



- 乱搞能力大赛

- 出题人同僚的吐槽



- 为什么会这样呢.....第一次参与冬令营命题，第一次出交互题，两件快乐的事情重合在一起。而这两份快乐，又给我带来更多的快乐。得到的，本该是像梦境一般幸福的时间.....但是，为什么，会变成这样呢？

# 吐槽

- 从前没有、以后再也不会有这么简单的 WC 第 3 题了
- 希望大家畅所欲言



# 子任务 1

- $N \leq 5, M = 100$
- 手玩测试点
- 玩着玩着就找到标准算法

## 子任务 2

- $N \leq 10^3, M = 10^6$
- 定义元素的代价函数  $f(x) = [x \in X]$
- 每次传入两单元素集  $\{x\}, \{y\}$ , 可以得到关于  $f(x)$  和  $f(y)$  的一个非严格大小关系
- 依此大小关系将元素排成一条链, 并知道链尾必为 1。 “粗略地” 二分出 01 的分界点, 根据奇偶性判断中间位置的元素值



## Remark: 怎样二分

- 对于一个有序的  $y_1 \leq y_2 \leq \dots \leq y_k$ , 我们知道  $y_k$  是 1, 想在其中二分出 0/1 分界点
- 比较好的做法是, 二分出一个位置  $i$  使得:
  - $y_i + y_{i+1} \geq y_k$
  - $y_i + y_{i-1} \leq y_k$
- 这样, 只有  $y_i$  是不定的, 使用奇偶性判定它的值。



## 子任务 3

- $N \leq 10^5, M = 100$ 。  $\forall i < j < k, ans[i] = ans[k]$  蕴含  $ans[i] = ans[j]$
- 容易发现  $1, 2 \dots N-1$  中，代价为 0 和 1 的元素分别是连续一段
- 也就是  $000\dots111\dots$  或者  $111\dots000\dots$
- 比较两端点的元素确定序列是上述两类中的哪种，然后二分

## 子任务 4

- $N \leq 10^4, M = 2 \times 10^5$
- 按照子任务 2 的思路，可以设计一种比较  $f(x), f(y)$  的非严格比较器
- 使用一种高效排序算法将  $f(*)$  排序，然后二分



## 子任务 5

- $N \leq 5 \times 10^4$ ,  $M = 350100 \approx 7N + 100$
- 使用  $2N$  的代价寻找序列的最大值，它一定是 1（怎么做？）
- 任取两不同元素  $x, y$ ，做以下比较： $(\{x\}, \{y\})$  和  $(\{x, y\}, \{1\})$
- 若  $x + y \leq 1$ ， $x, y$  中的较小值一定为 0；
- 若  $x + y \geq 1$ ， $x, y$  中的较大值一定为 1。
- 无论何种情形，可以用 5 的代价确定一个元素，总代价  $7N$

## 子任务 6

- $N = 10^5, M = 500100 \approx 5N + 100$
- 注意到子任务 5 的做法中用  $2N$  的代价寻找最大值很浪费。这个数据范围启发我们优化掉这个过程。
- 任取  $a, x, y$ , 做询问  $(\{x, y\}, \{a\})$  和  $(\{x\}, \{y\})$ , 不妨设  $x \leq y$
- 若  $x + y \leq a$ , 那么必有  $x = 0$ , 这样可以确定一个值
- 若  $x + y \geq a$ , 那么  $a = 1$  蕴含  $y = 1$ , 也就是  $a \leq y$ 。那么我们用  $y$  作为新的 `a` 和其他元素做此过程直到发现  $y$  比其他某元素更小



## cont'd

- 把上述过程一直做下去，最后我们得到的是：
- 一个未确定元素  $z$ ，一些必定为 0 的元素  $\{x_i\}$ 。
- 以及一条链：  $y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_k$
- $\max(z, y_k)$  必定为 1，用它二分出  $y$  中的 01 分界点。
- 根据  $K$  的奇偶性和一些额外的操作，确定  $z$  和分界点的取值。
- 总询问代价  $5N + 3 \log N$

# end

- 是不是很简单？
- 如果有渐进更优的做法，欢迎和我讨论，有精美礼品相送
- [lyuxin1999@qq.com](mailto:lyuxin1999@qq.com)