《具体数学》选讲

Scape

北京大学

2019 年 1 月 25 日

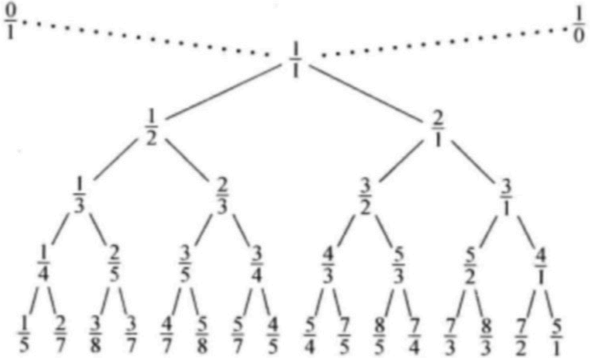
给大家准备了一点小礼物。
里面有三个问题，第一个上来回答的同学可以获得 Steam 上的以撒 Afterbirth+ 游戏一份。

Stern-Brocot Tree

Stern-Brocot 树是一种存入所有既约分数的一种构造方式。

它从 $(0,1),(1,0)$ 起始，每次下一层在两个相邻分数 $\frac{m}{n},\frac{m'}{n'}$ 之间插入 $\frac{m+m'}{n+n'}$，并把新生成的树插入下一层中。

它可以用一个二叉树来表示，如下图。



性质一

在这个构造的每一个阶段的相邻分数 $\frac{m}{n}, \frac{m'}{n'}$，有 $m'n - mn' = 1$。
用归纳法不难证明。

每个有理数的存在性证明

若 $\frac{a}{b}$ 不在任意一层序列中，则对于每一层构造找到最接近 $\frac{a}{b}$ 的两个分数 $\frac{m}{n} < \frac{a}{b} < \frac{m'}{n'}$，则有

$$an - bm \geq 1, bm' - an' \geq 1$$

。

于是：

$$(an - bm)(m' + n') + (bm' - an')(m + n) \geq m + n + m' + n'$$

即得：

$$a + b \geq m + n + m' + n'$$

而右端可以无限大，产生矛盾。证毕。

每个有理数的唯一性证明

二叉树的每一个节点的左子树的节点都是严格小于这个节点的值，右子树的节点都是严格大于这个节点的值，故每个数在这个二叉树存在性唯一。

性质三

对于 Stern-Brocot 树的每一层，有 $\sum \frac{1}{mn} = 1$。

证明

用一个 LR 序列表示树上的每个数。(L 表示向左走，R 表示向右走。)
那么不难发现对于任意的 S，令 $f(S)$ 表示 $\frac{1}{mn}$，那么有
$f(S) = f(LS) + f(RS)$。
归纳法即证毕。

51nod 1517

有一个递推：

$$F(n) = \begin{cases} 1, & \text{if } n < 0 \\ F(n-1) + F(n - \sqrt{a}), & \text{if } n \geq 0, \end{cases}$$

这个递推中存在 2 个未知量：n 和 a，给出这两个变量的值，便可以计算 $F(n)$ 的值。

在此之前，Noder 学习了一些简单的线性递推知识，他希望利用已经掌握的知识，来解决这个问题。经过一段时间思考，找到了这样一个思路：

定义 $G(n) = G(n-x) + G(n-y)$（x，y 为正整数），并且 $F(n) = G(x*n)$，然后就转为了他所熟悉的线性递推，FFT、多项式求 Mod 等大招都可以利用起来。经过一段时间的摸索，Noder 掌握了一些技巧，可以找到非常合适的 x，y 使得递推 G 可以比较准确的计算对应的 $F(n)$。同时 Noder 也发现，不论找到多么精巧的 x，y，当需要计算很大的 n 时，$G(x*n)$ 的值和相应的 $F(n)$ 会并不相等。

对于 Noder 来说，找到合适的 $x\ y$ 并不容易，所以他只考虑在一定的范围内进行查找，找出能够计算最大的 $F(n)$ 而不产生误差的一对 $x\ y$。

给出 a 的值以及 $x\ y$ 的取值范围，我们假设 Noder 可以找到这个取值范围内的 $x\ y$ 的最优解（$G(n)$ 可以计算最大的 $F(n)$，且不产生误差），那么你来告诉 Noder，他所能够找到的这对 $x\ y$，在计算 $F(n)$ 的第几项时，就会产生误差?

假如可以计算的 n 的范围 $\geq 10^{18}$，输出 -1。

一共 $T \leq 50000$ 组数据,$a \leq 10^9, \max X, \max Y \leq 10^{18}$。

Solution

首先可以考虑怎么算这个 $F(n)$。
其实就是一个爬楼梯，每次要么 -1，要么 $-\sqrt{a}$，一直减到 < 0。
不难发现如果如果 $\lfloor k\sqrt{a} \rfloor \neq \lfloor k\frac{y}{x} \rfloor$ ，那么就有了误差。
所以其实就是要找一个 $\sqrt{a}$ 的有理逼近。

Solution

如果得到的有理逼近是小于 $\sqrt{a}$ 的，那么根据上述结论，可以发现在 $n = x$ 时便会出现第一次误差，所以答案会是 $MaxX$。
如果得到的有理逼近是等于 $\sqrt{a}$ 的，那么不会有误差。
如果得到的有理逼近是大于 $sqrta$ 的，那么会找到这样的 k，使得 $n = \lfloor \sqrt{a} \rfloor + 1 = \lfloor k\frac{y}{x} \rfloor$，并在此处产生误差。

Solution

考虑在 Stern-Brocot 树上的无理逼近。直接类似二分地在树上走就可以了。
但是直接走层数可能是 $O(n)$ 级别的。
但是考虑转弯的次数最多是 $O(\log n)$ 级别的，每次二分一下拐点可以做到 $O(\log^2 n)$。

SnackDown2019 Election Bait

波尔国政府正在举行大选，参选政党有 A 和 B。大选采用电子投票系统，投票结果全天滚动直播。但国民不知道的是，这一切都都是走个形式而已：AB 两党已经达成合作，会让大众以为 A 党到结束前都领先，但最后被 B 党反超。获得多数票的党派胜出，不会有平票。

政府会舍弃所有不是内定的人投的票。他们会派 N 个大巴车队，编号为 $1 \sim N$，载着内定的投票人。第 i 个车队有 V_i 辆大巴。一个车队里的所有大巴核载人数是固定的：编号为奇数的车队的大巴核载 X 人，且会为 A 党投票；偶数车队的大巴核载 Y 人，会为 B 党投票。

车队按照编号顺序到达，随后车上的人们按顺序依次投票（同时最多有一人投票）。每辆大巴会等待车上的所有人投票完成后，将他们载回到出发地。在大巴离开之时，必须满足 A 党的的票多于 B 党。只有一个例外：最后一辆大巴离开时，B 党的票必须多于 A 党。

已知 A 党只能提供核载人数不超过 C_1 的大巴，B 党则不超过 C_2。请确定 X 和 Y 的值，或指出无解。如果有多组解，输出任意一组即可。

$N \le 10^6$

Solution

考虑一下其实就是一系列限制，最后可以写成。

$$\frac{a}{b} < \frac{X}{Y} < \frac{c}{d}$$

的形式。

那就只要找 $\frac{a}{b}$ 与 $\frac{c}{d}$ 在 Stern-Brocot 树上的 LCA 即可。

超几何函数的定义

超几何函数是关于 z 的且带有 $m+n$ 个参数的幂级数：

$$F(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_m;z)=\sum_{k\geq 0}\frac{a_1^{\overline{k}}\cdots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}}\cdots b_n^{\overline{k}}}\frac{z^k}{k!}$$

举几个例子

$$F(1;1;z)=\sum_{k\geq 0}\frac{z^k}{k!}=e^z$$

$$F(a,1;1;z)=\sum_{k\geq 0}a^{\overline{k}}\frac{z^k}{k!}=\sum_{k\geq 0}\binom{a+k-1}{k}z^k=\frac{1}{(1-z)^a}$$

$$\begin{aligned}\ln(1+z)&=zF(1,1;2,-z)\\&=z\sum_{k\geq 0}\frac{k!k!}{(k+1)!}\frac{(-z)^k}{k!}\\&=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\frac{z^4}{4}+\cdots\end{aligned}\tag{1}$$

上式表明 $\frac{\ln(1+z)}{z}$ 是个超几何函数，但是显然 $\ln(1+z)$ 不是超几何函数，因为超几何函数在 $z=0$ 的取值总是 1。

超几何函数的特征

什么样的级数是超几何的？不妨来看看相邻项的比值。

$$F(a_1,\cdots,a_n;b_1,\cdots,b_m;z)=\sum_{k\geq 0} t_k$$

，即 $t_k=\frac{a_1^{\overline{k}}\cdots a_m^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k}}\cdots b_n^{\overline{k}}}\frac{z^k}{k!}$
其中 $t_0=1$，而其他项比值为:

$$\begin{aligned}\frac{t_{k+1}}{t_k} &= \frac{a_1^{\overline{k+1}}\cdots a_m^{\overline{k+1}}}{a_1^{\overline{k}}\cdots a_m^{\overline{k}}}\frac{b_1^{\overline{k}}\cdots b_n^{\overline{k}}}{b_1^{\overline{k+1}}\cdots b_n^{\overline{k+1}}} \\ &= \frac{(k+a_1)\cdot(k+a_m)z}{(k+b_1)\cdots(k+b_n)(k+1)}\end{aligned} \tag{2}$$

不难发现，相邻项的比值是关于 k 的有理函数。

例一

假定给出一个无穷级数，其相邻项的比值为：

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{k^2+7k+10}{4k^2+1}$$

将分子分解为 $(k+2)(k+5)$，分母分解为 $4(k+i/2)(k-i/2)$。因分母缺少因子 $(k+1)$，故改写为：

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{(k+2)(k+5)(k+1)(\frac{1}{4})}{(k+i/2)(k-i/2)(k+1)}$$

从而该无穷级数为：

$$\sum_{k\geq 0} t_k = t_0 F(2,5,1;i/2,-i/2;1/4)$$

广义阶乘与 Γ 函数

对 $F(a,b;c;z)$ 而言，当 c 是零或者负整数的时候，该超几何函数就没有意义。所以可以定义广义阶乘：

$$\frac{1}{z!} = \lim_{n->\infty} \binom{n+z}{n} n^{-z}$$

可以证明该极限对任意复数 z 存在，且当 z 是负整数时取值为 0。还有另一个有趣的定义。

$$z! = \int_0^{\infty} t^z e^{-t} dt, \mathcal{R}_z > -1$$

这个公式仅当 z 的实部大于 -1 时存在，但是可以用 $z! = z(z-1)!$ 拓展到所有负数（负整数除外）。

广义阶乘与 Γ 函数

类似地还有 Γ 函数：$\Gamma(z+1)=z!$。且有：

$$(-z)!\Gamma(z)=\frac{\pi}{\sin \pi z}$$

当 z 和 w 是任意复数时，可以用下式定义广义阶乘幂：

$$z^{\overline{w}}=\frac{\Gamma(z+w)}{\Gamma(z)}$$

一些小应用

让我们来看看超几何函数一点点小应用。

例三

求

$$\sum_{k\geq 0}\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$$

任何超几何学者都能一眼看出这是$F(1,-m;-n;1)$的参数，查表可得：

$$F(1,-m;-n;1)=\frac{(n+1)^{\underline{m}}}{n^{\underline{m}}}=\frac{n+1}{n-m+1}$$

例四

求

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1}$$

任何超几何学者都能一眼看出这是$F(n+1,-n;2;1)$的参数，查表可得：

$$F(n+1,-n;2;1)=\frac{1}{\Gamma(1-n)\Gamma(2+n)}$$

当$n=0$时，答案为1；当$n\geq 1$时，根据之前对$\frac{1}{z!}$的定义，答案为0。

例五

求

$$\sum_{k\geq 0}\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}\frac{(-1)^k}{k+1+m}$$

其中$t_0=\frac{1}{m+1}$，而相邻项的比值为：

$$\frac{t_{k+1}}{t_k}=\frac{-\binom{n+k+1}{2k+2}\binom{2k+2}{k+1}(k+1+m)}{\binom{n+k}{2k}\binom{2k}{k}(k+2+m)}=\frac{(k+n+1)(k-n)(k+1+m)}{(k+1)(k+1)(k+2+m)}$$

显然这是$\frac{1}{m+1}F(n+1,m+1,-n;1,m+2;1)$的参数。根据Saalschutz恒等式，代入$a=n+1,b=m+1,c=1$：

$$\text{左式}=\frac{1}{m+1}\frac{m^{\underline{n}}n^{\underline{n}}}{(-1)^{\underline{n}}(m+n+1)^{\underline{n}}}=(-1)^n m^{\underline{n}}m^{\underline{-n-1}}=\text{右式}$$

超几何函数的微分理论

(1):

$$\frac{d}{dz}F(a_1,\cdots,a_m;b_1,\cdots,b_m;z)=\frac{a_1\cdots a_m}{b_1\cdots b_n}F(a_1+1,\cdots,a_m+1;b_1+1,\cdots,b_n+1,z)$$

定义 $\vartheta=z\frac{d}{dz}$

(2):

$$(\vartheta+a_1)\cdots(\vartheta+a_m)F=a_1\cdots a_mF(a_1+1,\cdots,a_m+1;b_1,\cdots,b_n;z)$$

(3):

$$(\vartheta+b_1-1)\cdots(\vartheta+b_n-1)F=(b_1-1)\cdots(b_n-1)F(a_1,\cdots,a_m;b_1-1,\cdots,b_n-1;z)$$

超几何函数的微分理论

结合求导公式，可得:

(4):

$$D(\vartheta+b_1-1)\cdots(\vartheta+b_n-1)F=(\vartheta+a_1)\cdots(\vartheta+a_m)F$$

将上式展开:

(5):

$$z^{n-1}(\beta_n-z\alpha_n)F^{(n)}(z)+\cdots+(\beta_1-z\alpha_1)F'(z)-\alpha_0F(z)=0$$

定理: 任何形如 (5) 式的微分方程都可以分解成 ϑ 算子这样的项，给出形如 (4) 式的微分方程。故这类微分方程的解都可以用超几何函数表示。

差分的定义

$$\Delta^0 f(x) = f(x)$$

$$\Delta^n f(x) = \Delta^{n-1} f(x+1) - \Delta^{n-1} f(x)$$

差分的定义

定义 $Ef(x) = f(x+1)$

不难发现:

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= Ef(x) - f(x) \\
&= (E-1)f(x) \\
\Delta^n f(x) &= (E-1)^n f(x) \\
&= \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}E^k f(x) \\
&= \sum_{k\geq 0}\binom{n}{k}(-1)^{n-k}f(x+k)
\end{aligned} \tag{3}$$

牛顿级数的定义

将多项式写成二项式系数和的形式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{d} C_k \binom{x}{k}$$

。

不难发现，系数 C_k 可以表达成：

$$C_n=\Delta^n f(0)$$

也就可以得到类似离散意义下的泰勒级数：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{d} \Delta^k f(0) \binom{x}{k}$$

小应用

证明：对于任意一个 k 次多项式 $f(x)$，都存在一个相应的 k 次多项式 $g(x)$，使得：

$$q^n g(n) - g(0) = \sum_{i=0}^{n-1} q^i f(i)$$

$$2^n g(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} f(i)$$

$$(q+1)^n g(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} f(i) q^i$$

证明 1

归纳 $+$ 多项式差分易证。

证明 2,3

把多项式写成若干个组合数相加的结果 (也就是牛顿级数)。
考虑 $\sum \binom{n}{i} q^i \binom{i}{k}$，其中 k 是多项式次数，也就是一个常数。
$\binom{n}{i} q^i \binom{i}{k}$ 表示 n 个东西里面选 i 个再选 k 个，且前 i 个有 q 种选法。
如果考虑先选 k 个，那么就是 $\binom{n}{k}(q+1)^{n-k}$
因为 k 是常数，所以 $\binom{n}{k}(q+1)^{-k}$ 是一个关于 n 的 k 次多项式。
也就是说存在一个 k 次多项式 $g(n)$ 使得 $(q+1)^n g(n) = \sum_{i=1}^{n} q^i \binom{n}{i} f(i)$。

定义

$\left[{n \atop k}\right]$ 表示第一类斯特林数。

组合意义为把 n 个数排成 k 个圆排列的方案数。

也可以看成长度为 n 的排列有 k 个排列的方案数。

考虑最后一个数放在了哪，有一个这样的递推式。

$$\left[{n \atop k}\right] = \left[{n-1 \atop k-1}\right] + (n-1)\left[{n-1 \atop k}\right]$$

考虑最后一个圆排列是啥，有一个这样的递推式。

$$\left[{n \atop k}\right] = \sum_{i=1}^{n}(i-1)!\binom{n-1}{i-1}\left[{n-i \atop k-1}\right]$$

定义

$\left\{ {n \atop k} \right\}$ 表示第二类斯特林数。
组合意义为把 n 个数分成 k 个集合的方案数。
考虑最后一个数放在了哪，有一个这样的递推式。

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\} + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}$$

考虑最后一个集合是啥，有一个这样的递推式。

$$\left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{i=1}^{n} \binom{n-1}{i-1} \left\{ {n-i \atop k-1} \right\}$$

证明

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k \tag{4}$$

$$x^n = \sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^{\underline{k}} \tag{5}$$

$$\sum_k \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k \\ m \end{bmatrix} (-1)^{n-k} = [m = n] \tag{6}$$

$$\sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} k \\ m \end{Bmatrix} (-1)^{n-k} = [m = n] \tag{7}$$

证明

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \binom{n}{k} \left\{ {k \atop m} \right\} \tag{6}$$

$$\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_k \binom{k}{m} \left[{k \atop m} \right] \tag{7}$$

证明

关于 (6.15) 的证明是比较简单的，即枚举第 $n+1$ 号元素所在的集合。
关于 (6.16)，我们试图构造一个长度为 n 的排列 p 中选出 k 个循环到有 $k+1$ 个循环的长度为 $n+1$ 的双射。对于一个长度为 n 的排列，我们新增加一个元素 $n+1$ 把没有被选中的循环拼接起来。
如果没有被选取的元素从小到大为 $a_1, a_2, \cdots a_n$，它们对应的元素是 $x_1 = p_{a_1}, x_2 = p_{a_2}, \cdots, x_n = p_{a_n}$，增加循环 $n+1, a_1, a_2, \cdots, a_n, n+1$。

证明

$$m!\left\{ {n \atop m} \right\} = \sum_k \binom{m}{k} k^n (-1)^{m-k} \tag{8}$$

证明

式子左边是把 n 个小球放到 m 个不同的盒子里的方案数。
式子右边本质上是个容斥原理，强制这其中有 $m-k$ 个是空的。

证明

$$\left\{ {n+1 \atop m+1} \right\} = \sum_k \left\{ {k \atop m} \right\} (m+1)^{n-k} \tag{9}$$

$$\left[{n+1 \atop m+1} \right] = \sum_k \left[{k \atop m} \right] n^{\underline{n-k}} \tag{10}$$

证明

对于 (6.20)，本质上就是枚举在 $k+1$ 时填满了 $m+1$ 个集合。
对于 (6.21) 也是类似，枚举在 $k+1$ 时填满了 $m+1$ 个圆排列。

证明

$$\left\{ {n+m+1 \atop m} \right\} = \sum_k k \left\{ {n+k \atop k} \right\} \tag{11}$$

$$\left[{n+m+1 \atop m} \right] = \sum_k (n+k) \left[{n+k \atop k} \right] \tag{12}$$

证明

由他们的递推公式都不难得出这个结论。
本质和二项式的上指标求和相同

祝大家 WC 顺利！