Математический Анализ
Расчетно-графическая работа 3
«Производная и исследование функции»
Вариант 1

Выполнили:
Казарин Андрей Максимович,
Фищенко Кирилл Дмитриевич,
Расшивалов Кирилл Антонович

Преподаватель:
Шиманская Галина Станиславовна
МАТ АН ПИиКТ 11.2

5 Января 2024

1 номер

Задача: На сколько изменится объём шара, если его радиус изменится на величину ΔR? С какой относительной погрешностью допустимо измерить радиус шара, чтобы его объём можно было определить с точностью до одного процента?

Проведите исследование:
1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
2) Решите задачу аналитически, применяя понятие дифференциала и приближая точное изменение её линейной частью.
3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Обратите внимание, чтобы график отражал данные физически корректно. Сравните его с аналитическим решением.
4) Запишите ответ.

Решение:
1) Новый радиус $R_H = \Delta R + R_C$, на сколько увеличится объем V(шара)? Относительная погрешность δV для измерения R шара, чтобы объем V с точностью до 1%

$$V_C = \frac{4}{3}\pi R_C^3$$

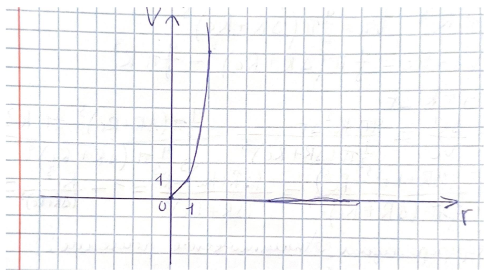
$$V_H = \frac{4}{3}\pi(\Delta R + R_C)^3$$

$$\Delta V = V_H - V_C = \frac{4}{3}\pi(\Delta R + R_C)^3 - \frac{4}{3}\pi R_C^3$$

$$\Delta V = 4\pi R^2 \Delta r$$

$$\delta V = \frac{\Delta V}{V_C} = \frac{4\pi R^2 \Delta r}{\frac{4}{3}\pi(\Delta R + R_C)^3} = \frac{\frac{4}{3}\pi(\Delta R + R_C)^3 - \frac{4}{3}\pi R_C^3}{\frac{4}{3}\pi(\Delta R + R_C)^3} = \frac{(\Delta R + R_C)^3 - R_C^3}{(\Delta R + R_C)^3} = 1 - \frac{R_C^3}{(\Delta R + R_C)^3} = 0.01$$

2) Расчитать объем шара можно по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$. Мы можем найти частную производную объема по радиусу. $V' = 4\pi R^2 \Rightarrow \frac{\delta V}{\delta r} = 4\pi R^2$. Далее с её использованием выведем формулу для абсолютной (ΔV) и относительной (δV) погрешностей объема $\Delta V = 4\pi r^2 \Delta r \Rightarrow$ объем изменился на величину Δr. Теперь выразим из формулы объема радиус. $R = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$. Для вычисления относительной погрешности объем будем использовать формулу $\delta V = \frac{\Delta V}{V} = \frac{3\Delta r}{R} = 0.01 \Rightarrow \Delta r = \frac{R*0.01}{3}$ - минимальное значение изменения радиуса

3) 

4) Ответ: объем шара ихменится на величину $\frac{4}{3}\pi((\Delta R+R_C)+R_C^3)$, максимальная погрешность вычисления объема $\frac{R_C+0.01}{3}$

2 номер

Задача: Проектируется канал оросительной системы с прямоугольным сечением, равным 6,5 кв. метров. При каких линейных размерах сечения на облицовку стенок канала пойдет наименьшее количество материала?

Проведите исследование:
1) Составьте математическую модель задачи: введите обозначения, выпишите данные, составьте уравнение (систему уравнений), содержащее неизвестное.
2) Решите задачу аналитически, применяя необходимое и достаточное условия экстремума.
3) Сделайте графическую иллюстрацию к решению задачи. Учтите на графике, что реальные физические величины имеют естественные ограничения на свои значения. Сверьтесь с аналитическим решением.
4) Запишите ответ.
Решение:
1)Площадь прямоугольника обозначим S и найдем её по формуле $S = ab$, по условию $S = 6.5m^2 \Rightarrow ab = 6.5$. Обозначим одну сторону буквой a, вторую сторону буквой b - это будут наши начальные измерения оросительной системы. Буквами c и f обозначим новые стороны и учтем, что $cf = 6.5$, а $2c + 2f$ должно быть минимальным. Получаем следующую систему:

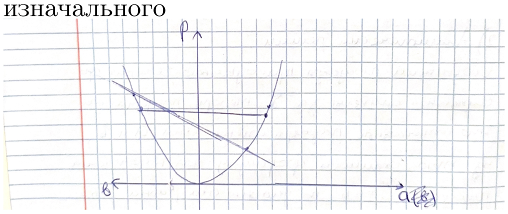
$$\begin{cases} ab = 6.5 \\ cf = 6.5 \\ 2c + 2f = min \end{cases}$$

Обозначим площадь прямоугольного сечения оросительной системы за S.], теперь представим что изначальные размеры стенок были a и b, из этого запишем формулу для нахождения площиди $S = ab$, по условию она равна 6.5. Теперь нам нужно подобрать такое изменение начальных стенок, чтобы площадь осталась прежней (равной 6.5), но при этом периметр был минимальным. Возьмем начальные значения $a = 5$ и $b = 1.3$, и возьмем изменения этих размерностей и обозначим за C_1 и C_2 получим уравнение:

$$(5 - C_1)(1.3 - C_2) = 6.5$$

$$6.5 - 1.3C_1 - 5C_2 + C_1C_2 = 6.5$$

Нам необходимо минимизировать $1.3C_1 - 5C_2 + C_1C_2$, значит максимизируем $1.3C_1 + 5C_2 - C_1C_2$. Через производную найдем, что $C_1 = 2.45$, а $C_2 = -1.25$ $\Rightarrow a = 5 - 2.45 = 2.55$ и $b = 1.3 - (-1.25) = 2.55$. Проверим $S = ab = 2.55^2 \approx 6.5$, теперь рассмотрим периметр $P = 2 \cdot 2.55 = +2 \cdot 2.55 = 10.2$, что меньше изначального

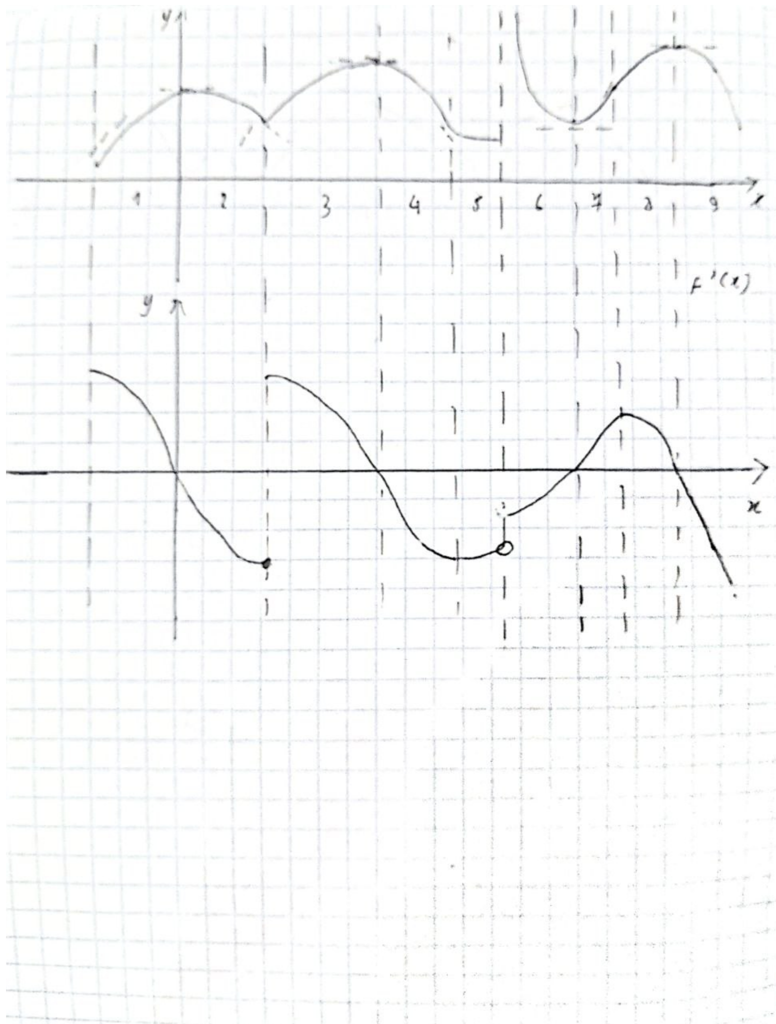


По графику можно сказать, что чем ближе значения a и b друг к другу, тем меньше периметр
Ответ: $a = 2.55$ и $b = 2.55$

3 номер

По графику функции постройте график её первой производной. Подробно прокомментируйте, почему он так выглядит, ссылаясь на изученные теоремы. График исполняется на листе бумаги от руки, фотографируется и вставляется в отчёт. Обратите внимание на контрастность и чёткость (воспользуйтесь редактором изображений)

Решение:



1-й промежуток: Так как функция возрастает до точки максимума, в которой угловой коэффициент касательной равен 0, то значение производной больше 0, в точке минимума значение производной равно 0
2-й промежуток: Так как функция убывает от точки максимума до точки стыка другого графика,то значение производной в точке максимума равно 0, после нее меньше 0
3-й промежуток: Так как функция возрастает от точки стыка до точки максимума,то значение производной в точке максимума равно 0, после нее больше 0, так как два графика пересекаются точка закрашена (нестрого принадлежит)
4-й промежуток: Так как функция убывает от точки максимума до точки перегиба, в которой угловой коэффициент касательной будет минимальным, то значение производной в точке максимума равно 0, после нее меньше 0,

в точке перегиба функции значение производной будет минимальным
5-й промежуток: Так как функция убывает от точки перегиба до точки в которой производной не существует то значение производной в точке перегиба функции то же, что в конце прошлого промежутка, после нее меньше 0, в точке в которой производной не существует - выколотая точка
6-й промежуток: Так как функция убывает (после точки в которой производной не существовало), на графике при сравнении угловых коэффициентов производная будет находиться выше (т.к начало другого графика) до точки минимума, в которой угловой коэффициент касательной равен 0, то значение производной меньше 0, в точке минимума значение производной равно 0
7-й промежуток: Так как функция возрастает от точки минимума до точки перегиба, в которой угловой коэффициент касательной будет максимальным, то значение производной в точке минимума равно 0, после нее больше 0, в точке перегиба функции значение производной будет максимальным
8-й промежуток: Так как функция возрастает от точки перегиба до точки максимума, в которой угловой коэффициент касательной равен 0, то значение производной в точке перегиба функции то же, что в конце прошлого промежутка, после нее больше 0, в точке максимума значение производной равно 0
9-й промежуток: Так как функция убывает от точки максимума до конца промежутка, где значение функции стремится к. бесконечности то значение производной в точке максимума равно 0, после меньше 0 и стремится к бесконечности при x стремящемся к концу промежутка

4 номер

Даны функции $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ и $g(x) = 5x\sqrt[3]{(x-1)^2}$. Проведите поочерёдно их полные исследования:

1. Найдите область определения функции
2. Проверьте, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и укажите, как эти свойства влияют на вид графика функции
3. Исследуйте функцию на нулевые значения и найдите промежутки ее знакопостоянства
4. Исследуйте функцию с помощью первой производной: найдите интервалы монотонности и экстремумы функции
5. Исследуйте функцию с помощью второй производной: найдите интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции.
6. Проверьте наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции
7. Найдите точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найдите значения функции в некоторых дополнительных точках

8. Постройте эскиз графика на основе проделанного исследования (от руки на листе бумаги – скан листа бумаги в хорошем качестве нужно вставить в отчёт). Отметьте на графике все результаты исследования: формулу функции, асимптоты и их уравнения, экстремумы и точки экстремума, перегибы и точки перегиба, точки пересечения графика с координатными осями.

Решение:
Область определения — множество, на котором задаётся функция. В каждой точке этого множества значение функции должно быть определено.
$f(x)$: Знаменатель дроби накладывает ограничение $x^2 \neq 0 \Rightarrow x \neq 0$. Значит $D(f) = (-\infty; +\infty)\backslash\{0\}$
$g(x)$: Единственное, что может накладывать ограничения на область определения в данной функции - корень, но он нечетной степени, так что никаких ограничений на $D(g)$ он не накладывает. Значит $D(g) = (-\infty; +\infty)$

Нечётная функция — функция, меняющая значение на противоположное при изменении знака независимой переменной
Чётная функция — функция, не изменяющая своего значения при изменении знака независимой переменной
Для проверки четности функций сравним их значения при подстановке аргумента $-x$, вместо x
$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ подставим $-x$: $f(-x) = \frac{-x^3+4}{(-x)^2} = \frac{-x^3+4}{x^2}$. Как мы видим из результатов, $f(x) \neq f(-x)$ и $f(x) \neq -f(-x)$, значит функция не четная и не нечетная.
$g(x) = 5x\sqrt[3]{(x+1)^2}$ подставим $-x$: $g(-x) = -5x\sqrt[3]{(-x+1)^2}$. Как мы видим из результатов, $g(x) \neq g(-x)$ и $g(x) \neq -g(-x)$, значит функция не четная и не нечетная.

Исследуем функции на периодичность и найдем промежутки знакопостоянства
Периодическая функция — функция, повторяющая свои значения через некоторый регулярный интервал аргумента, то есть не меняющая своего значения при добавлении к аргументу некоторого фиксированного ненулевого числа на всей области определения.

$$f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$$

$$\frac{x^3+4}{x^2} = 0$$

$$x = -\sqrt[3]{4}$$

Нуль функции $f(x)$ достигается при $x = -\sqrt[3]{4}$. Так как функция имеет лишь 1 аргумент, при котором уравнение $f(x) = 0$ имеет смысл, мы можем сказать, что функция не периодичная.
Итак, у нас есть 2 промежутка: $(-\infty; -\sqrt[3]{4}]$ и $[-\sqrt[3]{4}; +\infty)\backslash\{0\}$. Чтобы узнать знаки на них, необходимо подставить любое значение из промежутков как

аргументы к этой функции и посмотреть на его знак.

$$f(-10) = \frac{(-10)^3 + 4}{(-10)^2} = -\frac{996}{100}$$

Делаем вывод, что на промежутке $(-\infty; -\sqrt[3]{4}]$ наша функция принимает не положительные значения

$$f(10) = \frac{(10)^3 + 4}{10^2} = \frac{1004}{100}$$

Делаем вывод, что на промежутке $[-\sqrt[3]{4}; +\infty) \backslash \{0\}$ наша функция принимает не отрицательные значения Выполним те же действия для функции $g(x)$

$$g(x) = 5x\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$$\begin{cases} 5x = 0 \\ \sqrt[3]{(x-1)^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 1 \end{cases}$$

Нуль функции $g(x)$ достигается при $x \in \{0; 1\}$. Так как функция имеет лишь 2 аргумента, при которых уравнение $g(x) = 0$ имеет смысл, мы можем сказать, что функция не периодичная.
Итак, у нас есть 3 промежутка: $(-\infty; x_1]$ и $[x_1; x_2]$ и $[x_2; +\infty)$. Чтобы узнать знаки на них, необходимо подставить любое значение из промежутков как аргументы к этой функции и посмотреть на его знак.

$$g(-10) = 5 \cdot (-10) \cdot \sqrt[3]{(-10-1)^2} = -50 \cdot \sqrt[3]{121} \approx -247.3$$

Делаем вывод, что на промежутке $(-\infty; 0]$ наша функция принимает не положительные значения

$$g(0.5) = 5 \cdot 0.5 \cdot \sqrt[3]{(0.5-1)^2} = \frac{5}{2} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \approx 1.6$$

Делаем вывод, что на промежутке $[0; 1]$ наша функция принимает не отрицательные значения

$$g(10) = 5 \cdot 10 \cdot \sqrt[3]{(10-1)^2} = 50 \cdot \sqrt[3]{81} \approx 216.3$$

Делаем вывод, что на промежутке $[1; +\infty)$ наша функция принимает не отрицательные значения

Производная функции — понятие дифференциального исчисления, характеризующее скорость изменения функции в данной точке
Для исследования функций на интервалы монотонности необходимо анализировать их первую производную

$$f(x) = \frac{x^3 + 4}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{8}{x^3}$$
$$f'(x) > 0$$
$$1 - \frac{8}{x^3} > 0$$
$$\frac{x^3 - 8}{x^3} > 0$$
$$x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$$

Итак, $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty) : f'(x) > 0$ Так же рассмотрим производную функции на промежутке $(0; 2)$

$$x \in (0; 2) : f'(x) < 0$$

Заметим, что при $x \in (0; 2)$ $f'(x) < 0$, но при $x \in (2; +\infty)$ $f'(x) > 0$ $\Rightarrow$ абсцисса точки перегиба равна 2, так же эта точка является точкой экстремума на промежутке $(0; +\infty)$.
Выполним те же действия для функции $g(x)$

$$g(x) = 5x\sqrt[3]{(x-1)^2}$$
$$g'(x) = \frac{25x - 15}{3\sqrt[3]{x-1}}$$
$$g'(x) > 0$$
$$\frac{25x - 15}{3\sqrt[3]{x-1}} > 0$$
$$x \in (-\infty; \frac{3}{5}) \cup (1; +\infty)$$

Так же рассмотрим производную функции на промежутке $[\frac{3}{5}; 1]$

$$x \in [\frac{3}{5}; 1] : g'(x) < 0$$

Отсюда делаем вывод, что точки с абсциссами $\frac{3}{5}$ и 1 являются точками экстремума.

Найдем точки перегиба и интервалы выпуклости/вогнутости функций

$$f'(x) = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$
$$f''(x) = \frac{24}{x^4} \neq 0$$

У $f(x)$ нет точек перегиба. Исследуем вторую производную на знаки на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

$$f''(x) = \frac{24}{x^4}$$

$$\frac{24}{x^4} > 0 \Rightarrow$$

функция вогнута не всей области определения

$$g'(x) = \frac{25x - 15}{3\sqrt[3]{x-1}}$$

$$g''(x) = \frac{50x - 60}{9(x-1)\sqrt[3]{x-1}}$$

$$\frac{50x - 60}{9(x-1)\sqrt[3]{x-1}} = 0$$

$$x \in \{1; \frac{6}{5}\}$$

Исследуем вторую производную на знаки на промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

$$f''(x) = \frac{24}{x^4}$$

$$\frac{24}{x^4} > 0$$

Верно при любых значениях x, значит функция вогнута не всей области определения

Найдем асимптоты для графиков наших функций
Функция $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$ не определена в точке с абсциссой $x = 0$. Определим значение предела функции при значениях аргумента стремящихся к 0.

$$\lim_{x \to 0}(\frac{x^3+4}{x^2}) = \lim_{x \to 0}(x + \frac{4}{x^2}) = +\infty$$

Так как предел равен $+\infty$ вертикальная асимптота задается равенством $x = 0$
Вычислим горизонтальные асимптоты. Для этого определим значения пределов функции при значениях аргумента стремящихся к $+\infty$ и $-\infty$

$$\lim_{x \to +\infty}(\frac{x^3+4}{x^2}) = \lim_{x \to +\infty}(x + \frac{4}{x^2}) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty}(\frac{x^3+4}{x^2}) = \lim_{x \to -\infty}(x + \frac{4}{x^2}) = -\infty$$

Так как значения пределов $+\infty$ и $-\infty$ соответственно, то функция не имеет горизонтальных асимптот
Найдем наклонные асимптоты, которая имеет вид $y = kx + b$. Угловой кофициент k наклонной асимптоты равен $\lim_{x \to \infty}(\frac{A(x)}{x})$, свободный член b равен $\lim_{x \to +\infty}(A(x) - k)$

$$\lim_{x \to +\infty}(\frac{\frac{x^3+4}{x^2}}{x}) = \lim_{x \to +\infty}(1 + \frac{4}{x^3}) = 1$$

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{x^3+4}{x^2}-x)=\lim_{x\to+\infty}(\frac{4}{x^2})=0$$

Наклонная асимптота имеет следующий вид: $y=x$
По аналогии найдем асимптоты для функции $g(x)$
Функция $g(x)=5x\sqrt[3]{(x-1)^2}$ определена при $x\in(-\infty;+\infty)$, значит она не имеет вертикальных асимптот.
Вычислим горизонтальные асимптоты. Для этого определим значения пределов функции при значениях аргумента стремящихся к $+\infty$ и $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}(5x\sqrt[3]{(x-1)^2})=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}(5x\sqrt[3]{(x-1)^2})=-\infty$$

Так как значения пределов $+\infty$ и $-\infty$ соответственно, то функция не имеет горизонтальных асимптот
Найдем наклонные асимптоты, которая имеет вид $y=kx+b$. Угловой кофициент k наклонной асимптоты равен $\lim_{x\to\infty}(\frac{A(x)}{x})$, свободный член b равен $\lim_{x\to+\infty}(A(x)-k)$

$$\lim_{x\to+\infty}(\frac{5x\sqrt[3]{(x-1)^2}}{x})=+\infty$$

Так как предел равен $+\infty$, мы можем сказать, что функция не имеет наклонных асимптот.

Для черчения эскиза графика нам осталось найти точки пересечения графиков функций с координатными осями, если до этого мы не вычислили эти точки ранее
$f(x)$:

$$f(x)=\frac{x^3+4}{x^2}$$

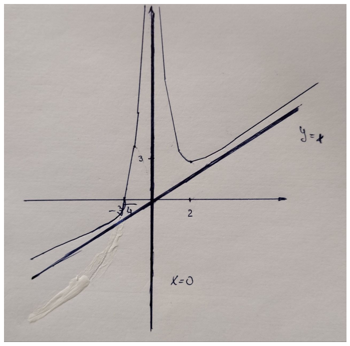
$$0=\frac{x^3+4}{x^2}$$

$x=-\sqrt[3]{4}$, значит график функции пересекает ось $0x$ в точке $(-\sqrt[3]{4};0)$
$g(x)$:

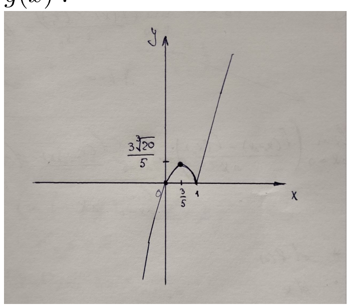
$$g(x)=5x\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$$0=5x\sqrt[3]{(x-1)^2}$$

$x\in\{0;1\}$, значит график функции пересекает ось $0x$ в точках $(0;0)$ и $(1;0)$
Эскиз графиков с их асимптотами:
$f(x)$:



$g(x)$:



Оценочный лист

1. Казарин Андрей Максимович: 33.3% (4 номер и верстка отчета)
2. Фищенко Кирилл Дмитриевич: 33,3% (3 номер)
3. Расшивалов Кирилл Антонович: 33,3% (1, 2 номер)