实验报告

刘羽昌 BA23001055

March 25, 2025

1 问题

使用 5 阶 WENO 有限体积和有限差分方法求解双曲守恒律方程

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad x \in [a,b].$$

2 网格剖分

定义半格点 $a = x_{1/2} < \cdots < x_{N+1/2} = b$, 单元 $I_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}]$, 单元中心 $x_i = (x_{i-1/2} + x_{i+1/2})/2$, 单元长度 $\Delta x_i = x_{i+1/2} - x_{i-1/2}$. 不失一般性, 我们考虑均匀网格, $\Delta x = \Delta x_i$.

3 有限体积方法

有限体积方法更新每个单元上的单元平均值

$$\bar{u}_i := \frac{1}{\Delta x}\int_{I_i} u_h(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

更新格式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bar{u}_i = -\frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}).$$

其中 $\hat{f}_{i+1/2} = \hat{f}(u^-_{i+1/2}, u^+_{i+1/2})$ 是数值流通量, 两侧极限值由 WENO 重构得到

$$u^-_{i+1/2} = \Phi_{\mathrm{WENO5}}(\bar{u}_{i-2}, \bar{u}_{i-1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i+1}, \bar{u}_{i+2}),$$

$$u^+_{i+1/2} = \Phi_{\mathrm{WENO5}}(\bar{u}_{i+3}, \bar{u}_{i+2}, \bar{u}_{i+1}, \bar{u}_i, \bar{u}_{i-1}),$$

这里 Φ_{WENO5} 表示 WENO 重构算子.

4 有限差分方法

有限差分方法更新每个单元中心处的点值 u_i. 更新格式为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_i = -\frac{1}{\Delta x}(\hat{f}_{i+1/2} - \hat{f}_{i-1/2}).$$

数值流通量 $\hat{f}_{i+1/2}$ 通过通量分裂方法得到: 令

$$f^{\pm}(u)=\frac{1}{2}(f(u)\pm\alpha u),$$

这里 α 是全局最大波速, 随后利用 WENO 重构得到

$$\hat{f}^{-}_{i+1/2}=\Phi_{\mathrm{WENO5}}(f^{+}_{i-2},f^{+}_{i-1},f^{+}_{i},f^{+}_{i+1},f^{+}_{i+2}),$$

$$\hat{f}^{+}_{i+1/2}=\Phi_{\mathrm{WENO5}}(f^{-}_{i+3},f^{-}_{i+2},f^{-}_{i+1},f^{-}_{i},f^{-}_{i-1}),$$

最后让 $\hat{f}_{i+1/2}=\hat{f}^{+}_{i+1/2}+\hat{f}^{-}_{i+1/2}$.

5 时间离散

以有限差分为例, 记数值解 $u_h=(u_1,\cdots,u_N)$, 将上面得到的半离散格式记作

$$\frac{\mathrm{d}u_h}{\mathrm{d}t}=\mathcal{L}_h(\mathbf{u}_h),$$

我们在时间上统一使用三阶 SSP Runge-Kutta 格式

$$\begin{aligned}
u^1 &= u_h^n+\Delta t\cdot\mathcal{L}_h\left(u_h^n\right),\\
u^2 &= \frac{3}{4}u_h^n+\frac{1}{4}u^1+\frac{1}{4}\Delta t\cdot\mathcal{L}_h\left(u^1\right),\\
u_h^{n+1} &= \frac{1}{3}u_h^n+\frac{2}{3}u^2+\frac{2}{3}\Delta t\cdot\mathcal{L}_h\left(u^2\right).
\end{aligned}$$

6 数值结果

这里以 Burgers 方程

$$u_t+\left(\frac{u^2}{2}\right)_x=0,\quad u(x,0)=0.5+\sin x,\quad x\in[0,2\pi]$$

为例, 使用周期边界条件. 首先我们运行到终止时刻 $T=0.6$ 查看格式的精度, 有限体积方法和有限差分方法的结果分别如表 1和表 2中所示, 可以看到都得到了预期的 5 阶精度.

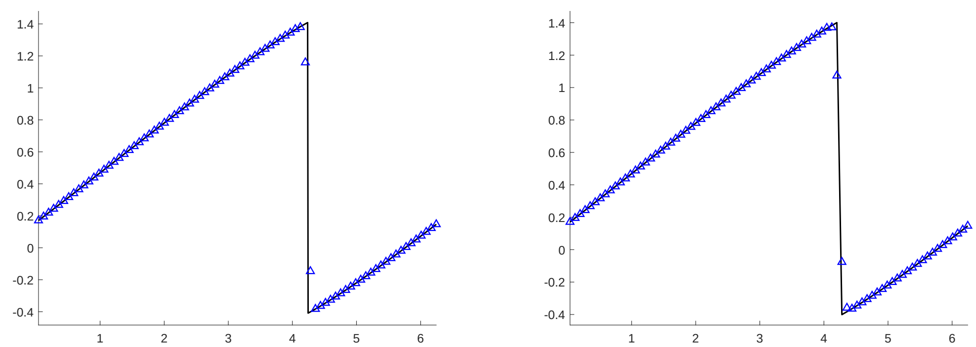
Table 1: 有限体积方法, $T=0.6$ 时刻的误差.

N	L^2 Error	Order
10	2.30E-02	–
20	5.54E-03	2.05
40	6.23E-04	3.15
80	3.77E-05	4.05
160	1.58E-06	4.57
320	5.24E-08	4.92

接下来我们用 $N=80$ 个网格运行到 $T=2.2$ 时刻, 此时解出现间断, 计算结果如图 1所示, 可以看到两种格式都很好地捕捉到了间断并且没有明显的数值振荡.

Table 2: 有限差分方法, $T = 0.6$ 时刻的误差.

N	L^2 Error	Order
10	6.44E-02	–
20	2.41E-02	1.42
40	2.31E-03	3.38
80	1.27E-04	4.19
160	4.39E-06	4.85
320	1.31E-07	5.07



(a) 有限体积格式.

(b) 有限差分格式.

Figure 1: $T = 2.2$ 时刻的计算结果. 蓝色: 数值解, 黑色: 真解.

7 程序使用说明

初值和终止时间设定在 init_data.m 中. main.m 为主程序. auto.m 是自动计算精度的程序, 在运行 auto.m 前需要将 main.m 中的 Nx=80 一行注释掉.

要得到精度结果, 在 init_data.m 中设置 tend=0.6, 运行 auto.m 即可.

要得到间断时的结果, 在 init_data.m 中设置 tend=2.2, 运行 main.m 即可.