

# Отчёт по 5 лабораторной работе

1. Найти приближенные значения производных первого и второго порядков функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , используя: а) функцию **D** системы **Mathematica**;

б) формулы численного дифференцирования  $y'_i \approx \frac{1}{h} \left( \Delta y_i - \frac{1}{2} \Delta^2 y_i + \frac{1}{3} \Delta^3 y_i \right)$

и  $y''_i \approx \frac{1}{h^2} (\Delta^2 y_i - \Delta^3 y_i)$  для шага  $h_1 = 0,1$  и шага  $h_2 = 0,01$ . Сравнить полученные значения.

1.1.  $f(x) = \operatorname{tg} \ln 3x$ ,  $x_0 = 2,13$ .

1.2.  $f(x) = 2 \sin \sqrt[3]{x+1}$ ,  $x_0 = 4,71$ .

(\*A) \*)

(\*Определение функции f(x) \*)

f[x\_] := Tan[Log[3 x]]  
tan... натуральный логарифм

(\*Точка x0, где нужно найти производные\*)

x0 = 7.17;

D[f[x], x]  
дифференцировать

Out[ ]:=

$$\frac{\operatorname{Sec}[\operatorname{Log}[3 x]]^2}{x}$$

In[ ]:= D[f[x], {x, 2}]  
дифференцировать

Out[ ]:=

$$-\frac{\operatorname{Sec}[\operatorname{Log}[3 x]]^2}{x^2} + \frac{2 \operatorname{Sec}[\operatorname{Log}[3 x]]^2 \operatorname{Tan}[\operatorname{Log}[3 x]]}{x^2}$$

In[ ]:= (\*Производная первого порядка в точке\*)

In[ ]:= d11 = D[f[x], x] /. x -> x0  
дифференцировать

Out[ ]:=

0.140217

**(\*Производная второго порядка в точке\*)**

```
In[*]:= d21 = D[f[x], {x, 2}] /. x -> x0
          |дифференцировать
```

```
Out[*]:=
-0.0224193
```

```
In[*]:=
```

**(\*Б\*)**

**(\*Задаём шаг\*)**

```
h = 0.1;
```

**(\*Сетка четырёх значений y[i] на интервале[x0-h,x0+3h]\*)**

```
y = Table[f[x0 + i h], {i, -1, 3}]; (*x[-1] до x[3]*)
    |таблица значений
```

**(\*Вычисляем конечные разности\*)**

```
Δy = Table[y[[i + 1]] - y[[i]], {i, 1, Length[y] - 1}]; (*Первая разность*)
    |таблица значений |длина
```

```
Δ2y = Table[Δy[[i + 1]] - Δy[[i]], {i, 1, Length[Δy] - 1}]; (*Вторая разность*)
    |таблица значений |длина
```

```
Δ3y = Table[Δ2y[[i + 1]] - Δ2y[[i]], {i, 1, Length[Δ2y] - 1}]; (*Третья разность*)
    |таблица значений |длина
```

**(\*Формулы для производных\*)**

```
pr1 = (Δy[[2]] - 1 / 2 Δ2y[[1]] + 1 / 3 Δ3y[[1]]) / h (*y'*)
```

```
pr2 = (Δ2y[[1]] - Δ3y[[1]]) / h^2 (*y''*)
```

```
Out[*]:=
0.140277
```

```
Out[*]:=
-0.0236073
```

```
In[*]:= (*Абсолютная погрешность*)
```

```
{Abs[d11 - pr1], Abs[d21 - pr2]}
  |абсолютное знач... |абсолютное значени
```

```
Out[*]:=
{0.0000597097, 0.00118799}
```

```

In[*]:=
    Δy
    Δ2y
    Δ3y

Out[*]=
    {0.0141359, 0.0139116, 0.0136992, 0.0134978}

Out[*]=
    {-0.00022426, -0.000212447, -0.000201367}

Out[*]=
    {0.0000118133, 0.0000110799}

In[*]:= (*Задаём шаг*)
    h = 0.01;

    (*Сетка значений y[i] на интервале [x0-h, x0+3h] *)
    y = Table[f[x0 + i h], {i, -1, 3}]; (*x[-1] до x[3] *)
    |таблица значений

    (*Вычисляем конечные разности*)
    Δy = Table[y[[i + 1]] - y[[i]], {i, 1, Length[y] - 1}]; (*Первая разность*)
    |таблица значений |длина
    Δ2y = Table[Δy[[i + 1]] - Δy[[i]], {i, 1, Length[Δy] - 1}]; (*Вторая разность*)
    |таблица значений |длина
    Δ3y = Table[Δ2y[[i + 1]] - Δ2y[[i]], {i, 1, Length[Δ2y] - 1}]; (*Третья разность*)
    |таблица значений |длина

    (*Формулы для производных*)
    pr1 = (Δy[[2]] - 1 / 2 Δ2y[[1]] + 1 / 3 Δ3y[[1]]) / h (*y'*)
    pr2 = (Δ2y[[1]] - Δ3y[[1]]) / h^2 (*y'')

Out[*]=
    0.140218

Out[*]=
    -0.022541

In[*]:= (*Абсолютная погрешность*)
    {Abs[d11 - pr1], Abs[d21 - pr2]}
    |абсолютное знач... |абсолютное значени

Out[*]=
    {6.08459 × 10-7, 0.000121626}

```

(\*Сравнение результатов численного дифференцирования для шагов  $h1=0.1$  и  $h2=0.01$  показывает, что уменьшение шага приводит к уменьшению погрешности вычисления.\*)

2. а) Вычислить с помощью формулы *второго порядка точности* и составить таблицу приближенных значений  $y'_i$  производной функции  $f(x)$  на отрезке  $[-1, 3]$  с шагом  $h = 0,2$ .
- б) Изобразить на одном чертеже (на отрезке  $[-1, 3]$ ) график функции  $f'(x)$ , полученной с помощью функции **D** пакета **Mathematica**, и точки

$(x_i, y'_i)$ , соответствующие приближенным значениям производной, найденные в пункте а.

2.1.  $f(x) = \text{sh}(\ln \text{ch } x)$ .

2.2.  $f(x) = (\log_2(x+4))^{\sqrt[3]{2x+5}}$ .

(\*22222222222222222222\*)

(\*Провекри трижды дефференцирования\*)

In[\*]:= (\*Функция трижды дифференцируема\*)

f[x\_] := Sinh[Log[Cosh[x]]];  
гиперболический синус на гиперболический косинус

In[\*]:= D[f[x], {x, 3}]  
дифференцировать

Out[\*]=

$$4 \sinh[x] - \frac{3}{2} \text{sech}[x] (2 \cosh[x]^2 + 2 \sinh[x]^2) \tanh[x] + \\ 3 \cosh[x] \sinh[x] (-\text{sech}[x]^3 + \text{sech}[x] \tanh[x]^2) + \\ \frac{1}{2} (-1 + \cosh[x]^2) (5 \text{sech}[x]^3 \tanh[x] - \text{sech}[x] \tanh[x]^3)$$

```
In[*]:= a = -1;
b = 3;
h = 0.2;
dataPr = N[Table[{a + i * h, (f[a + (i + 1) * h] - f[a + (i - 1) * h]) / (2 * h)}, {i, 0, 20}]]
[... таблица значений
```

```
Out[*]:=
{{-1., -0.835793}, {-0.8, -0.69139}, {-0.6, -0.542088}, {-0.4, -0.37772},
{-0.2, -0.195081}, {0., 0.}, {0.2, 0.195081}, {0.4, 0.37772},
{0.6, 0.542088}, {0.8, 0.69139}, {1., 0.835793}, {1.2, 0.988688},
{1.4, 1.1639}, {1.6, 1.37461}, {1.8, 1.63363}, {2., 1.95415}, {2.2, 2.35075},
{2.4, 2.84035}, {2.6, 3.44321}, {2.8, 4.18383}, {3., 5.09213}}
```

```
In[*]:= a = -1; b = 3; h = 0.2;
```

```
In[*]:= (*Формула второго порядка точности*)
fPrime[x_] := (f[x + h] - f[x - h]) / (2 h)
```

```
(*Генерация таблицы приближённых значений
производных на отрезке от -1 до 3 с шагом 0.2*)
```

```
table = Table[{x, fPrime[x]}, {x, -1, 3, 0.2}];
таблица значений
```

```
TableForm[table]
табличная форма
```

```
Out[*]//TableForm=
-1.      -0.835793
-0.8      -0.69139
-0.6      -0.542088
-0.4      -0.37772
-0.2      -0.195081
0.         0.
0.2       0.195081
0.4       0.37772
0.6       0.542088
0.8       0.69139
1.         0.835793
1.2       0.988688
1.4       1.1639
1.6       1.37461
1.8       1.63363
2.         1.95415
2.2       2.35075
2.4       2.84035
2.6       3.44321
2.8       4.18383
3.         5.09213
```

(\*Функция трижды дифференцируема\*)

```
f[x_] := Sinh[Log[Cosh[x]]];
```

гиперболический синус

```
In[ ]:= (*Вычисление производной функции с помощью D*)
```

дифференцировать

```
pr[x_] := D[f[x], x]
```

дифференцировать

(\*Генерация точек для приближенной производной\*)

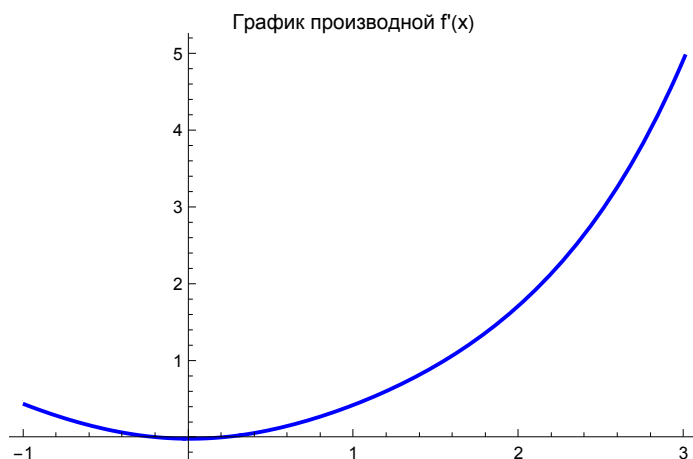
```
points = Table[{x, fPrime[x]}, {x, -1, 3, 0.2}];
```

таблица значений

```
In[ ]:= Plot[f[x], {x, -1, 3}, PlotStyle → Blue, PlotLabel → "График производной f'(x)"]
```

график функции стиль графика синий пометка графика

Out[ ]:=

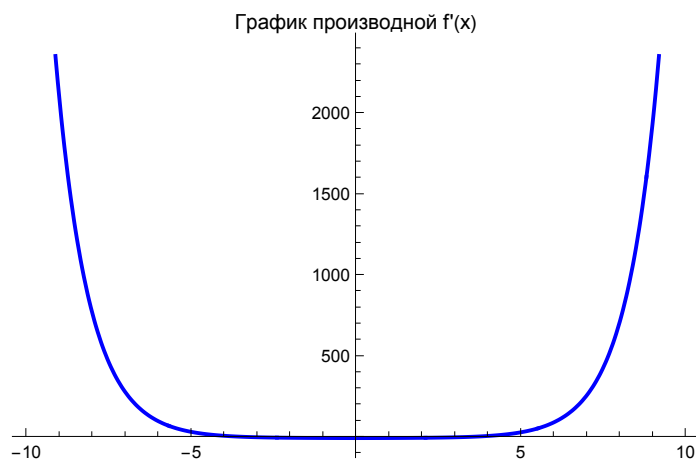


In[ ]:=

```
Plot[f[x], {x, -10, 10}, PlotStyle -> Blue,
  график функции      стиль графика  синий
  PlotLabel -> "График производной f'(x)"
  пометка графика
```

(\*Пример функции\*)

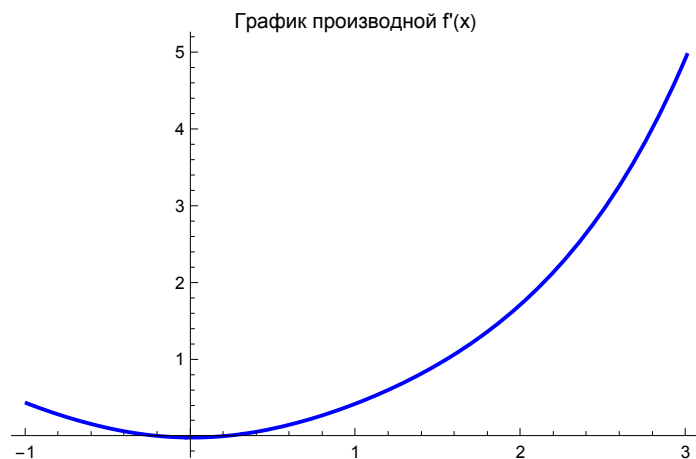
Out[ ]:=



In[ ]:= f[x\_] := Sinh[Log[Cosh[x]]];  
 гип... на... гиперболический косинус

```
Plot[f[x], {x, -1, 3}, PlotStyle -> Blue, PlotLabel -> "График производной f'(x)"
  график функции      стиль графика  синий  пометка графика
```

Out[ ]:=



In[ ]:= (\*Вычисление аналитической производной\*)

```
fPrime[x_] = D[f[x], x]
             дифференцировать
```

Out[ ]:=

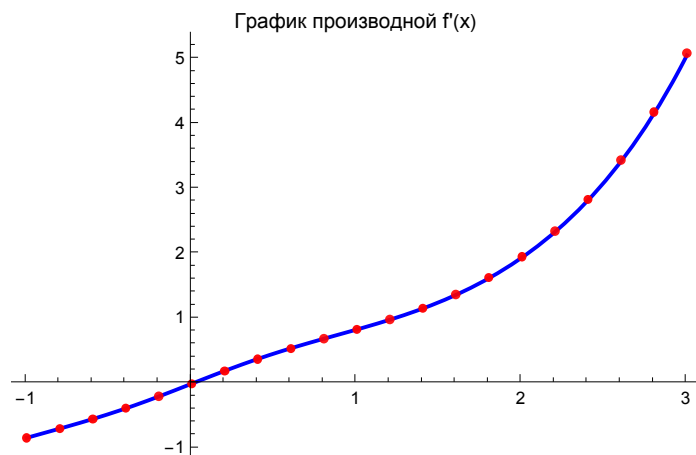
$$\text{Sinh}[x] - \frac{1}{2} (-1 + \text{Cosh}[x]^2) \text{Sech}[x] \text{Tanh}[x]$$

```

In[ ]:= Show[Plot[fPrime[x], {x, -1, 3}, PlotStyle → Blue,
  \[пояснение\] \[график функции\] \[стиль графика\] \[синий\]
  PlotLabel → "График производной f'(x)", ListPlot[table,
  \[пометка графика\] \[диаграмма разброса данных\]
  PlotStyle → {Red, PointSize[Medium]}, PlotLabel → "Приближенные значения"]]
  \[стиль графика\] \[красный\] \[размер точки\] \[средний\] \[пометка графика\]

```

Out[ ]:=

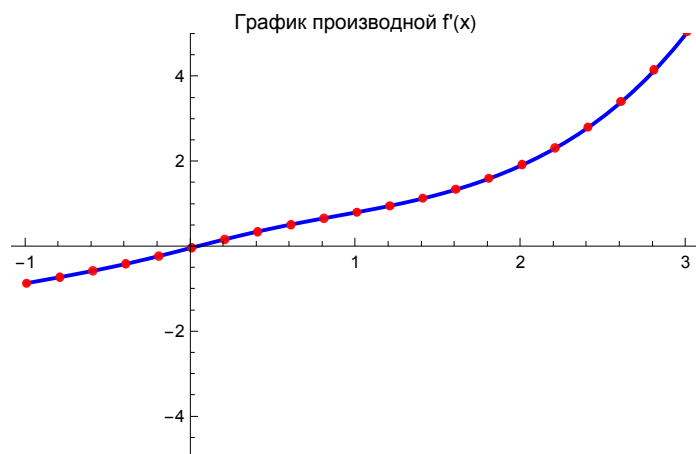


```

In[ ]:= Show[Plot[fPrime[x], {x, -1, 3}, PlotStyle → Blue,
  \[пояснение\] \[график функции\] \[стиль графика\] \[синий\]
  PlotLabel → "График производной f'(x)", PlotRange → {Automatic, {-5, 5}},
  \[пометка графика\] \[отображаемый\] \[автоматический\]
  ListPlot[table, PlotStyle → {Red, PointSize[Medium]},
  \[диаграмма разбросов\] \[стиль графика\] \[красный\] \[размер точки\] \[средний\]
  PlotLabel → "Приближенные значения"]]
  \[пометка графика\]

```

Out[ ]:=





3. Вычислить определенный интеграл: **а)** по формуле средних прямоугольников; **б)** по формуле трапеций. В обоих случаях использовать двойной просчет при  $n_1 = 8$  и  $n_2 = 10$  для уточнения значения интеграла по Ричардсону.

3.1.  $\int_{0,7}^{1,5} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 6}}{3x + \sqrt{x^2 + 0,6}} dx.$

3.2.  $\int_{1,4}^{2,2} \frac{\sqrt{0,8x + 1}}{0,4 + \sqrt{2x^2 + 1,3}} dx.$

(\*Вычисление аналитической производной\*)

```
fPrime[x_] = D[f[x], x]
```

дифференцировать

(\*Параметры задачи\*)

```
a = -1; b = 3; h = 0.2;
```

```
xi = Range[a, b, h]; (*Узлы сетки*)
```

диапазон

(\*Вычисление приближенных значений производной ЕСТЬ ВЫШЕ\*)

```
centralDiff[x_] := (f[x + h] - f[x - h]) / (2 h)
```

(\*Вычисление точных значений производной на узлах сетки\*)

```
exactDerivatives = fPrime[xi];
```

(\*Вычисление приближенных значений на узлах сетки\*)

```
approxDerivatives2 = Table[centralDiff[x], {x, xi[[2 ;; -2]]}];
```

таблица значений

```
approxDerivatives2 = Prepend[approxDerivatives2, (f[xi[[2]]] - f[xi[[1]]]) / h];
```

добавить в начало

(\*Левая разность\*)

```
approxDerivatives2 = Append[approxDerivatives2, (f[xi[[-1]]] - f[xi[[-2]]]) / h];
```

добавить в конец

(\*Правая разность\*)

(\*Построение графика\*)

```
Show[Plot[fPrime[x], {x, a, b}, PlotStyle → Blue,
```

пик... график функции стиль графика синий

```
PlotLabel → "График производной f'(x)", PlotRange → All],
```

пометка графика отображаемы... всё

```
ListPlot[Transpose[{xi, exactDerivatives}],
```

диаграмм... транспозиция

```
PlotStyle → {Red, PointSize[Medium]}, PlotRange → All, PlotMarkers → {"●", 7}],
```

стиль графика кра... размер точки средний отображаемы... всё маркеры на графике

```
ListPlot[Transpose[{xi, approxDerivatives}], PlotStyle →
```

диаграмм... транспозиция стиль графика

```
{Green, PointSize[Medium]}, PlotRange → All, PlotMarkers → {"●", 7}]]
```

зелёный размер точки средний отображаемы... всё маркеры на графике

Out[ ]=

$$\text{Sinh}[x] - \frac{1}{2} \left( -1 + \text{Cosh}[x]^2 \right) \text{Sech}[x] \text{Tanh}[x]$$

**Transpose:** The first two levels of

```
{{-1., -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1., 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2., 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3.},
```

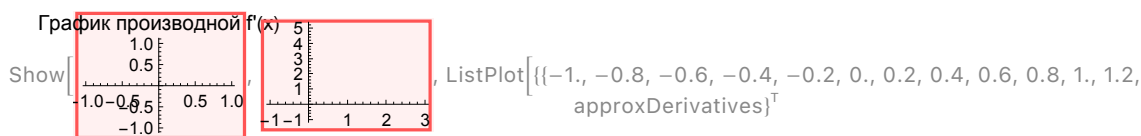
approxDerivatives} cannot be transposed.

**ListPlot:** {{-1., -0.8, -0.6, -0.4, -0.2, 0., 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1., 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2., 2.2, 2.4, 2.6, 2.8, 3.}, is

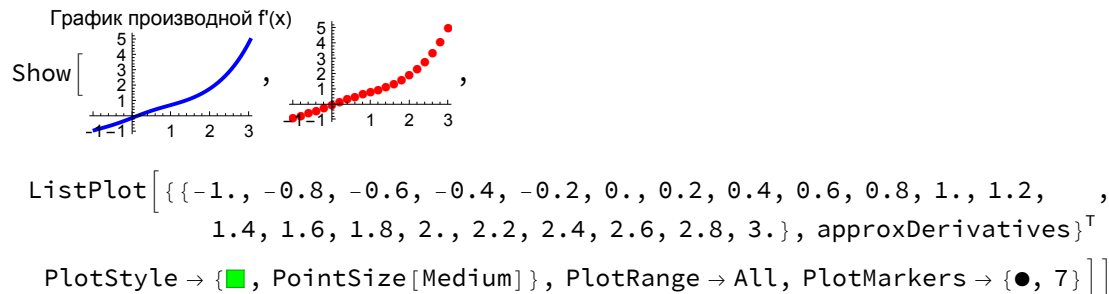
approxDerivatives]<sup>T</sup>

not a list of numbers or pairs of numbers.

⋯ Show: Could not combine the graphics objects in



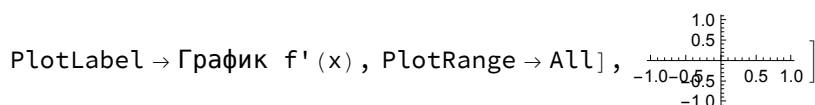
Out[ ]:=



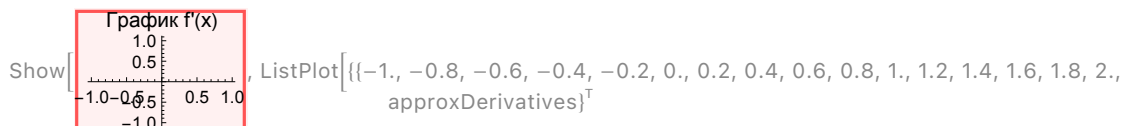
```
In[5]:= Show[Plot[fPrime[x], {x, a, b}, PlotStyle → Blue, PlotLabel → "График f' (x)",
  PlotRange → All], ListPlot[Transpose[{xi, approxDerivatives}],
  PlotStyle → {Red, PointSize[Medium]}, PlotMarkers → {"●", 7}]]
```

⋯ Plot: Limiting value a in {x, a, b} is not a machine-sized real number.

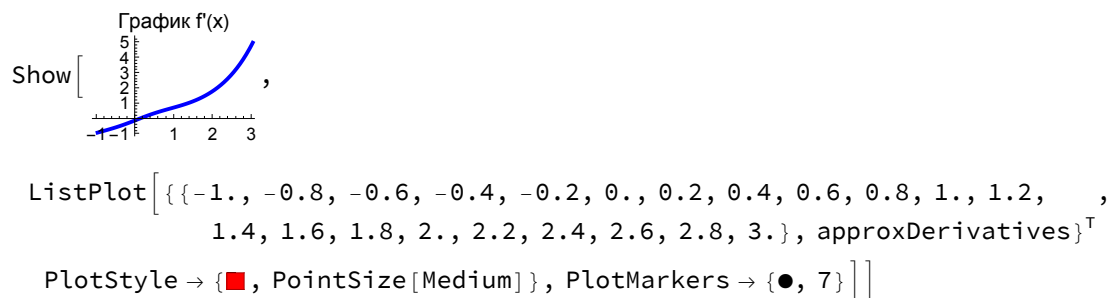
Out[5]= Show[Plot[fPrime[x], {x, a, b}, PlotStyle → Blue,



⋯ Show: Could not combine the graphics objects in



Out[ ]:=



```
int2 = h2 * Sum[f[(a + (i - 1) * h2 + (a + i * h2)) / 2], {i, 1, n2}]
```

сумма



(\*44\*)

```

In[ ]:= (*Табличные данные*)
x = {1.2, 1.3, 1.4, 1.5, 1.6, 1.7, 1.8,
     1.9, 2.0, 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5, 2.6, 2.7, 2.8};
y = {0.1823, 0.2624, 0.3365, 0.4055, 0.4700, 0.5306, 0.5878,
     0.6419, 0.6931, 0.7419, 0.8329,
     0.8755, 0.9163, 0.9555, 0.9933, 0.9933, 1.0296};

In[ ]:= (*Данные для n=8*)
x8 = x[[1 ;; 2]]
y8 = y[[1 ;; 2]]

Out[ ]:=
{1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2., 2.2, 2.4, 2.6, 2.8}

Out[ ]:=
{0.1823, 0.3365, 0.47, 0.5878, 0.6931, 0.8329, 0.9163, 0.9933, 1.0296}

In[ ]:=
(*Данные для n=16*)
x16 = x;
y16 = y;

In[ ]:=
SimpsonRule[x_, y_] := Module[{n, h, oddSum, evenSum}, n = Length[x] - 1;
                               |программный модуль|длина
    h = (x[[-1]] - x[[1]]) / n;
    oddSum = Total[y[[2 ;; -1 ;; 2]]];
             |суммировать
    evenSum = Total[y[[3 ;; -2 ;; 2]]];
             |суммировать
    (h / 3) (y[[1]] + y[[-1]] + 4 oddSum + 2 evenSum) ];

(*Вычисления для n=8 и n=16*)
I8 = SimpsonRule[x8, y8]
I16 = SimpsonRule[x16, y16]

Out[ ]:=
1.09151

Out[ ]:=
1.08327

```

(\*5555555555555555555555\*)

5. Вычислить определенный интеграл с помощью квадратурной формулы Гаусса с  $n$  узлами.

5.1.  $\int_{1,1}^2 \frac{\ln 2x}{4x+1} dx, \quad n=4.$

$$5.2. \int_{1.3}^{2.7} \sqrt{x+1} \sin^2(2x-1) dx, \quad n=6.$$

```
In[ ]:= f[x_] := Log[2 x] / (4 x + 1);
```

```
a = 1.1; b = 2;
```

**(\*Узлы квадратурной формулы Гаусса  
соответствуют корням полинома Лежандра\*)**

```
In[•]:= LegendreP[7, t]
```

$$\text{Out}[*]=\frac{1}{16} \left(-35 t+315 t^3-693 t^5+429 t^7\right)$$

```
In[•]:= sl = NSolve[LegendreP[7, t] == 0, t]
```

```
Out[ #]=
{{t → -0.949108}, {t → -0.741531}, {t → -0.405845},
 {t → 0.}, {t → 0.405845}, {t → 0.741531}, {t → 0.949108}}
```

```
In[•]:= tt = t /. sl
```

```
Out[ ] =
```

```
{-0.949108, -0.741531, -0.405845, 0., 0.405845, 0.741531, 0.949108}
```

**(\*Матрица моментов для нахождения весов\*)**

```
In[4]:= T = Table[If[i == 1, 1, (tt[[j]])i-1], {i, 7}, {j, 7}];
```

MatrixForm[T]  
|матричная форма

```
Out[ ]//MatrixForm=
```

1	1	1	1	1	1	1
-0.949108	-0.741531	-0.405845	0.	0.405845	0.741531	0.949108
0.900806	0.549868	0.16471	0.	0.16471	0.549868	0.900806
-0.854962	-0.407745	-0.0668469	0.	0.0668469	0.407745	0.854962
0.811451	0.302355	0.0271295	0.	0.0271295	0.302355	0.811451
-0.770155	-0.224206	-0.0110104	0.	0.0110104	0.224206	0.770155
0.73096	0.166256	0.0044685	0.	0.0044685	0.166256	0.73096

(\*Правая часть линейной системы содержит коэффициенты разложения в базис полиномов Лежандра\*)

```
In[*]:= B = Table[If[EvenQ[i] == True, 0,  $\frac{2}{i}$ ], {i, 7}] // N
```

```
Out[*]:= {2., 0., 0.666667, 0., 0.4, 0., 0.285714}
```

(\*Решается система  $T \cdot A = B$ \*)

```
In[*]:= A = LinearSolve[T, B]
```

```
Out[*]:= {0.129485, 0.279705, 0.38183, 0.417959, 0.38183, 0.279705, 0.129485}
```

(\*Итоговая формула квадратурной формулы Гаусса\*)

```
In[*]:= int =  $\frac{b-a}{2} * \sum_{i=1}^7 A[i] * f\left[\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2} * tt[i]\right]$ 
```

```
Out[*]:= 0.139416
```