Отчёт по лабораторной работе на тему :
Интерполяция и среднеквадратичное приближение

1. Создать таблицу значений функции $f(x)$, разбив отрезок $[0, 6]$ на n равных частей точками x_i $(i=\overline{0,n})$. Для полученной таблично заданной в равноотстоящих узлах функции $f(x)$, выполнить следующие действия при $n=6$ и $n=10$:

а) построить интерполяционный многочлен Лагранжа $L_n(x)$, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $L_n(x)$ на одном чертеже);

б) создать таблицу конечных разностей функции $f(x)$ по точкам $(x_i, f(x_i))$, $i=\overline{0,n}$;

в) построить второй интерполяционный многочлен Ньютона $P_n(x)$, проиллюстрировать графически;

г) построить интерполяционный многочлен Ньютона $Np_n(x)$ с помощью функции **InterpolatingPolynomial** пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

д) вычислить значения функции $f(x)$ и всех построенных интерполяционных многочленов $L_n(x)$, $P_n(x)$ и $Np_n(x)$ в точке $x=2{,}4316$;

е) построить график погрешности интерполирования многочленом Ньютона $R_n(x)=|f(x)-Np_n(x)|$ на отрезке $[0, 6]$, найти максимум погрешности $R_n(x)$ на отрезке $[0, 6]$ с помощью функции **FindMaximum** пакета **Mathematica**;

ж) исследовать зависимость погрешности интерполирования $R_n(x)$ от числа узлов интерполяции (степени многочлена n).

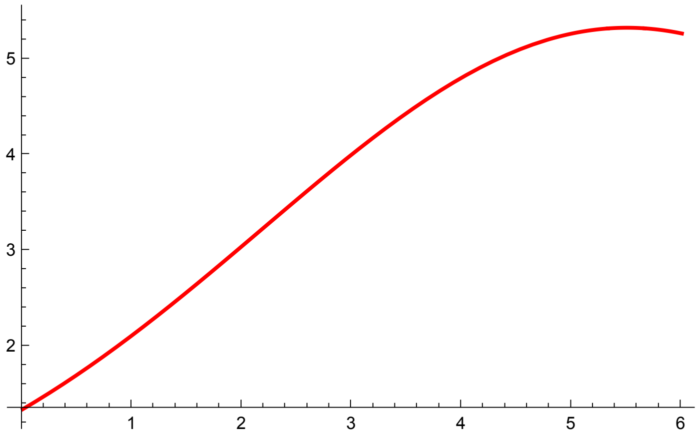
1.1. $f(x)=5\exp\left(-\frac{1}{18}x^2+\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}\right)-2\sin\sqrt{x}$.

```
f[x_] := 5 Exp[-(1 / 18 x^2 + 1 / 3 x - 1 / 2)] - 2 Sin[Sqrt[x]] // N
a = 0; b = 6; n1 = 6; n2 = 10; h1 = (b - a) / n1; h2 = (b - a) / n2;
```

In[257]:=

```
graph = Plot[f[x], {x, a, b}, PlotStyle → {Red, Thick}]
```
[график функции [стиль графика [кра··· [жирный

Out[257]=



In[258]:=

```
points1 = Table[{a + i * h1, f[a + i * h1]}, {i, 0, n1}] // N
points2 = Table[{a + i * h2, f[a + i * h2]}, {i, 0, n2}] // N
Clear[i]
```
[таблица значений [чи
[таблица значений [чи
[очистить

Out[258]=

{{0., 1.34892}, {1., 2.12517}, {2., 3.05716}, {3., 4.01571}, {4., 4.81643}, {5., 5.27481}, {6., 5.27481}}

Out[259]=

{{0., 1.34892}, {0.6, 1.7913}, {1.2, 2.30217}, {1.8, 2.86347}, {2.4, 3.44694}, {3., 4.01571}, {3.6, 4.52771}, {4.2, 4.94061}, {4.8, 5.21758}, {5.4, 5.33267}, {6., 5.27481}}

In[261]:=

$$PLn1[x\_] = \prod_{i=0}^{n1} (x - points1[[i+1, 1]])$$

$$PLn2[x\_] = \prod_{i=0}^{n2} (x - points2[[i+1, 1]])$$

```
Clear[i]
```
[очистить

Out[261]=

(-6. + x) (-5. + x) (-4. + x) (-3. + x) (-2. + x) (-1. + x) (0. + x)

Out[262]=

(-6. + x) (-5.4 + x) (-4.8 + x) (-4.2 + x) (-3.6 + x) (-3. + x) (-2.4 + x) (-1.8 + x) (-1.2 + x) (-0.6 + x) (0. + x) | Null

In[263]:=

```
Ln1[x_] =
 Sum[points1[[i + 1, 2]] × PLn1[x] / ((x - points1[[i + 1, 1]]) PLn1'[points1[[i + 1, 1]]]),
 сумма
   {i, 0, n1}] // Simplify
                 упростить
Ln2[x_] =
 Sum[points2[[i + 1, 2]] × PLn2[x] / ((x - points2[[i + 1, 1]]) PLn2'[points2[[i + 1, 1]]]),
 сумма
   {i, 0, n2}] // Simplify
                 упростить
Clear[i]
очистить
```

Out[263]=

$$1.34892 + 0.677865\,x + 0.0993773\,x^2 + 0.00410019\,x^3 - 0.0052918\,x^4 + 0.000177097\,x^5 + 0.0000187873\,x^6$$

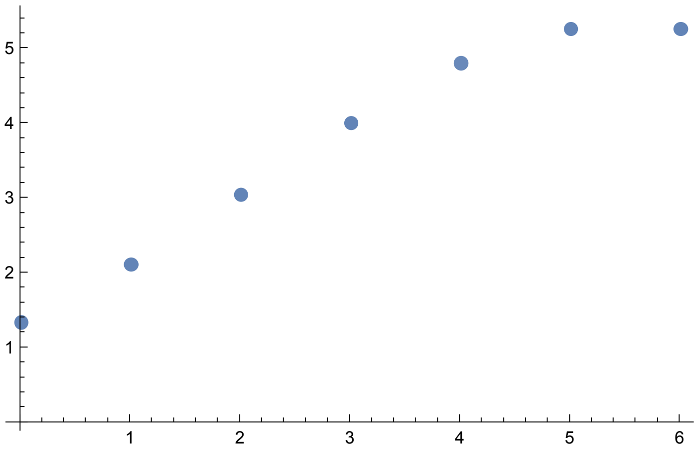
Out[264]=

$$\Big(\big(1.34892 + 0.674466\,x + 0.10728\,x^2 - 0.00251663\,x^3 - 0.00279565\,x^4 - 0.000207773\,x^5 + 0.0000155243\,x^6 + 5.74302\times10^{-6}\,x^7 + 6.27748\times10^{-8}\,x^8 - 9.22089\times10^{-8}\,x^9 + 4.81649\times10^{-9}\,x^{10}\big)$$
$$\big((-6.+x)(-5.4+x)(-4.8+x)(-4.2+x)(-3.6+x)(-3.+x)(-2.4+x)(-1.8+x)(-1.2+x)(-0.6+x)(0.+x)\mid \text{Null}\big)\Big) \Big/$$
$$\Big((-6.+x)(-5.4+x)(-4.8+x)(-4.2+x)(-3.6+x)(-3.+x)(-2.4+x)(-1.8+x)(-1.2+x)(-0.6+x)(0.+x)\ \text{Alternatives}^{(1,0)}[0.,\text{Null}]\Big)$$

In[266]:=

```
graphF1 = ListPlot[points1, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}]
          диаграмма разброса д⋯  стиль графика  темнее  размер точки
```

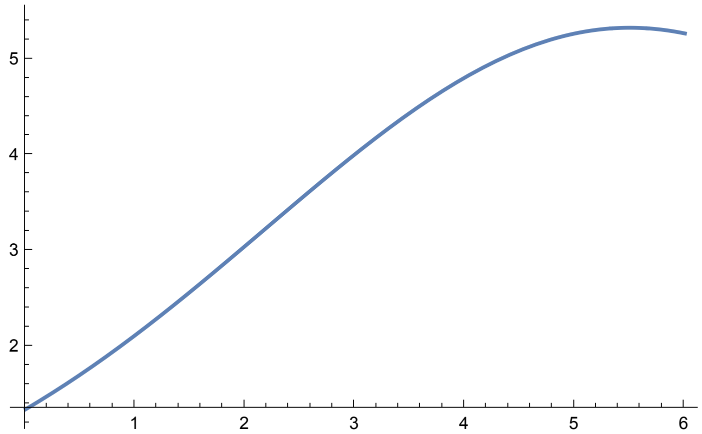
Out[266]=



In[267]:=

```
graphLn1 = Plot[Ln1[x], {x, a, b}]
```
график функции

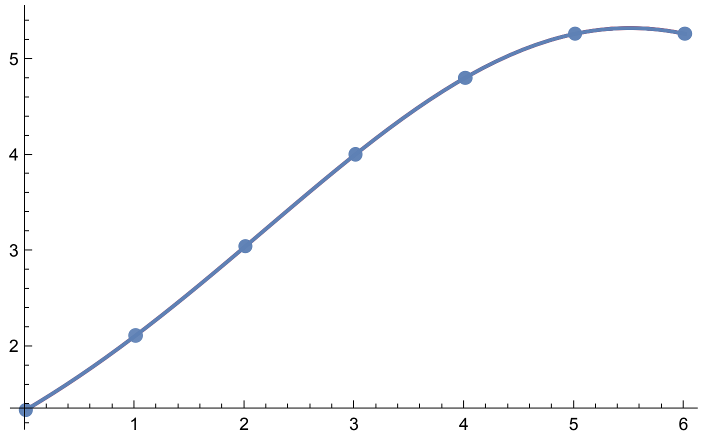
Out[267]=



In[268]:=

```
Show[graph, graphF1, graphLn1]
```
показать

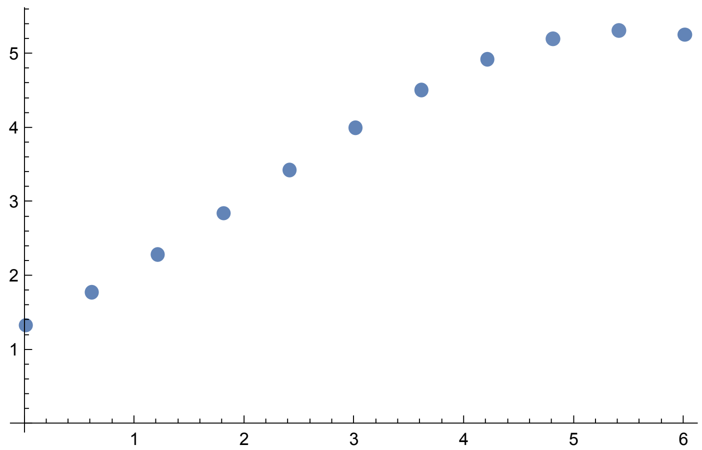
Out[268]=



In[269]:=

```
graphF2 = ListPlot[points2, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}]
```
диаграмма разброса д⋯ стиль графика темнее размер точки

Out[269]=



In[270]:=

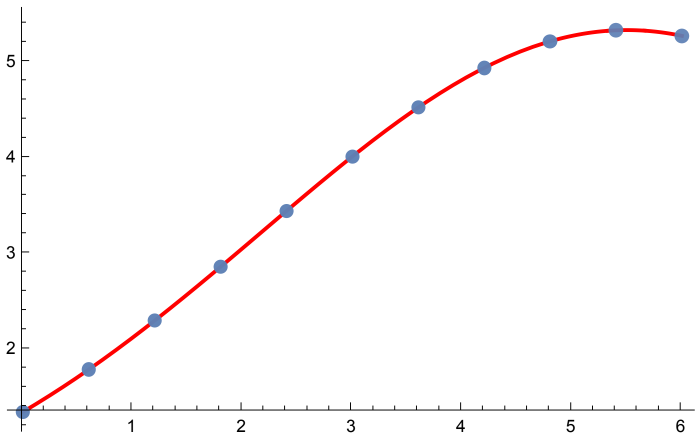
```
graphLn2 = Plot[Ln2[x], {x, a, b}];
```
график функции

In[271]:=

In[272]:=

```
Show[graph, graphF2, graphLn2]
показать
```

Out[272]=



In[273]:=

```
TableDif1 = Table[0, {i, 0, n1}, {j, 0, n1}];
            таблица значений
For[i = 1, i ≤ n1 + 1, i++,
цикл ДЛЯ
  For[j = 1, j ≤ n1 + 1, j++, If[(i + j) > n1 + 2, TableDif1⟦i, j⟧ = ""];]];
  цикл ДЛЯ                     условный оператор
For[i = 1, i ≤ n1 + 1, i++, TableDif1⟦i, 1⟧ = points1⟦i, 2⟧]
цикл ДЛЯ
For[j = 2, j ≤ n1 + 1, j++,
цикл ДЛЯ
  For[i = 1, i ≤ n1 + 2 - j, i++,
  цикл ДЛЯ
   TableDif1⟦i, j⟧ = TableDif1⟦i + 1, j - 1⟧ - TableDif1⟦i, j - 1⟧]];
MatrixForm[TableDif1]
матричная форма
Clear[i, j]
очистить
```

Out[277]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 1.34892 & 0.776247 & 0.155748 & -0.129194 & -0.0551918 & 0.0550687 & 0.0135268 \\ 2.12517 & 0.931995 & 0.0265542 & -0.184386 & -0.000123106 & 0.0685956 & \\ 3.05716 & 0.958549 & -0.157832 & -0.184509 & 0.0684725 & & \\ 4.01571 & 0.800718 & -0.342341 & -0.116037 & & & \\ 4.81643 & 0.458377 & -0.458377 & & & & \\ 5.27481 & 0. & & & & & \\ 5.27481 & & & & & & \end{pmatrix}$$

In[279]:=

```
TableDif2 = Table[0, {i, 0, n2}, {j, 0, n2}];
            таблица значений
For[i = 1, i ≤ n2 + 1, i++,
цикл ДЛЯ
  For[j = 1, j ≤ n2 + 1, j++, If[(i + j) > n2 + 2, TableDif2[[i, j]] = ""];]];
  цикл ДЛЯ                    условный оператор
For[i = 1, i ≤ n2 + 1, i++, TableDif2[[i, 1]] = points2[[i, 2]]]
цикл ДЛЯ
For[j = 2, j ≤ n2 + 1, j++,
цикл ДЛЯ
  For[i = 1, i ≤ n2 + 2 - j, i++,
  цикл ДЛЯ
   TableDif2[[i, j]] = TableDif2[[i + 1, j - 1]] - TableDif2[[i, j - 1]]]];
MatrixForm[TableDif2]
матричная форма
Clear[i, j]
очистить
```

Out[283]//MatrixForm=

1.34892	0.442379	0.068488	-0.018056	-0.0101992	0.00157223	0.00186256
1.7913	0.510867	0.050432	-0.0282552	-0.00862693	0.00343479	0.00152096
2.30217	0.561299	0.0221768	-0.0368821	-0.00519214	0.00495575	0.000753728
2.86347	0.583476	-0.0147053	-0.0420743	-0.000236395	0.00570948	-0.00030075
3.44694	0.568771	-0.0567796	-0.0423107	0.00547308	0.00540872	-0.00139845
4.01571	0.511991	-0.0990903	-0.0368376	0.0108818	0.00401027	
4.52771	0.412901	-0.135928	-0.0259558	0.0148921		
4.94061	0.276973	-0.161884	-0.0110637			
5.21758	0.115089	-0.172947				
5.33267	-0.0578584					
5.27481						

In[285]:=

$$q1[x\_] = \frac{x - \text{points1}[[n1 + 1, 1]]}{h1};$$

$$q2[x\_] = \frac{x - \text{points2}[[n2 + 1, 1]]}{h2};$$

In[287]:=

```
P1[x_] =
 Sum[(TableDif1[[n1 + 1 - p, p + 1]] / Factorial[p]) * Product[(q1[x] + k - 1), {k, 1, p}], {p, 0, n1}] //
 сумма                                  факториал
  Simplify
  упростить
P2[x_] =
 Sum[(TableDif2[[n2 + 1 - p, p + 1]] / Factorial[p]) * Product[(q2[x] + k - 1), {k, 1, p}], {p, 0, n2}] //
 сумма                                  факториал
  Simplify
  упростить
```

Out[287]=

$$1.34892 + 0.677865\, x + 0.0993773\, x^2 + 0.00410019\, x^3 - 0.0052918\, x^4 + 0.000177097\, x^5 + 0.0000187873\, x^6$$

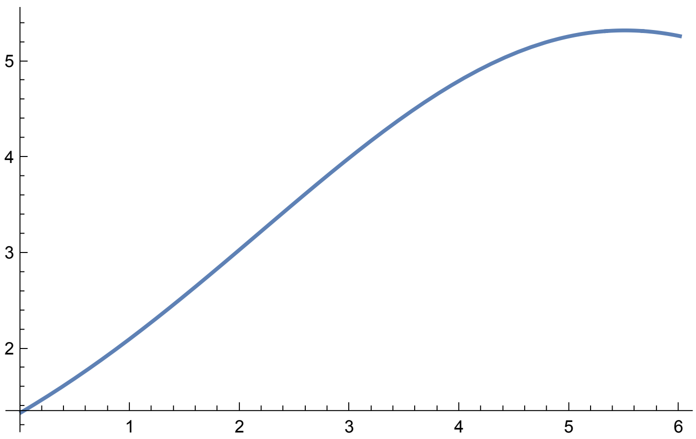
Out[288]=

$$1.34892 + 0.674466\, x + 0.10728\, x^2 - 0.00251663\, x^3 - 0.00279565\, x^4 - 0.000207773\, x^5 + 0.0000155243\, x^6 + 5.74302 \times 10^{-6}\, x^7 + 6.27748 \times 10^{-8}\, x^8 - 9.22089 \times 10^{-8}\, x^9 + 4.81649 \times 10^{-9}\, x^{10}$$

In[289]:=

```
graphP1 = Plot[P1[x], {x, a, b}]
          график функции
```

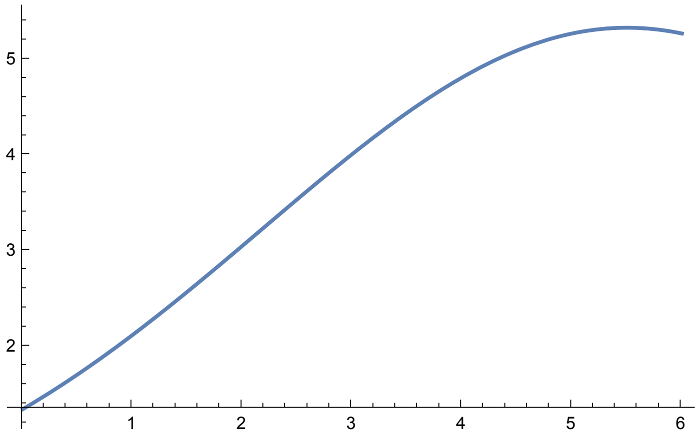
Out[289]=



In[290]:=

```
graphP2 = Plot[P2[x], {x, a, b}]
```
график функции

Out[290]=



In[291]:=

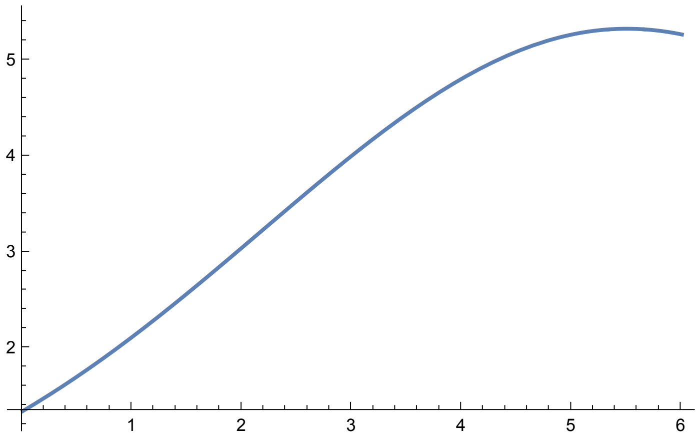
```
NP1[x_] = InterpolatingPolynomial[points1, x];
```
интерполяционный многочлен

```
NP2[x_] = InterpolatingPolynomial[points2, x];
```
интерполяционный многочлен

In[292]:=

```
graphNP1 = Plot[NP1[x], {x, a, b}]
```
график функции

Out[292]=

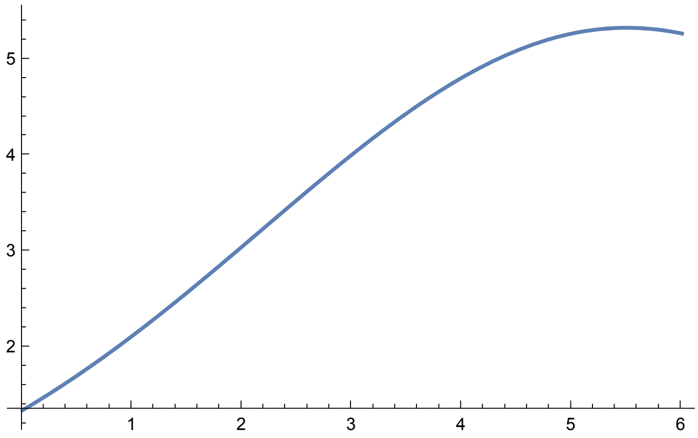


In[293]:=

```
Set[graphNP1, Plot[NP1[x], {x, a, b}]]
```

присвоить/задать график функции

Out[293]=

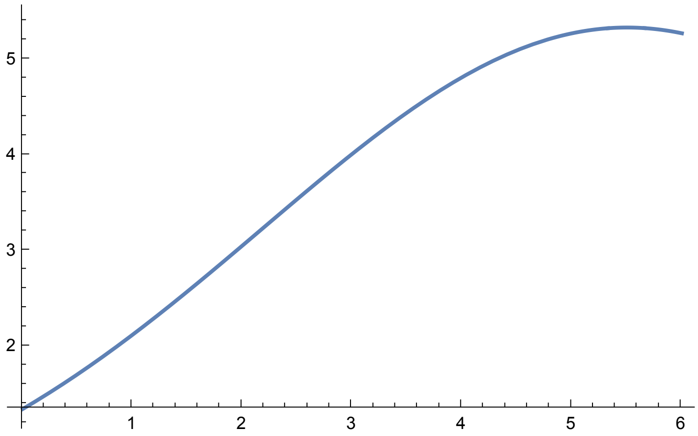


In[294]:=

```
graphNP2 = Plot[NP2[x], {x, a, b}]
```

график функции

Out[294]=



In[295]:=

```
x1 = 2.4316;
Ln1[x1]
Ln2[x1]
P1[x1]
P2[x1]
NP1[x1]
NP2[x1]
Clear[x1]
```
очистить

Out[296]=

3.47769

Out[297]=

$$\frac{1.07816\ (3.22551\ |\ \mathrm{Null})}{\mathrm{Alternatives}^{(1,0)}[0.,\ \mathrm{Null}]}$$

Out[298]=

3.47769

Out[299]=

3.47762

Out[300]=

3.47769

Out[301]=

3.47762

In[303]:=

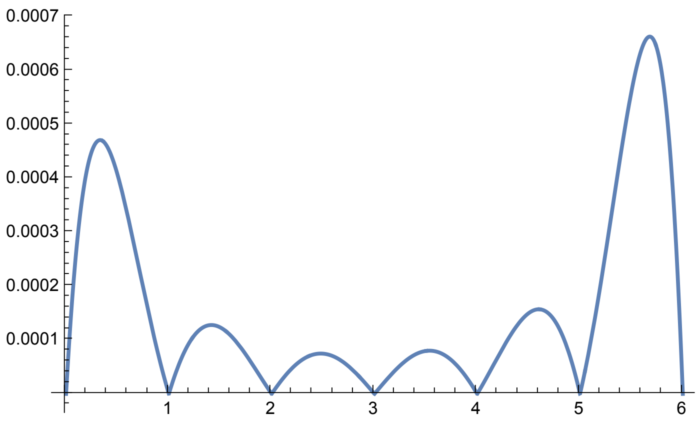
```
R1[x_] = Abs[f[x] - NP1[x]];
```
абсолютное значение

```
R2[x_] = Abs[f[x] - NP2[x]];
```
абсолютное значение

In[305]:=

```
graphR1 = Plot[R1[x], {x, a, b}]
```
график функции

Out[305]=

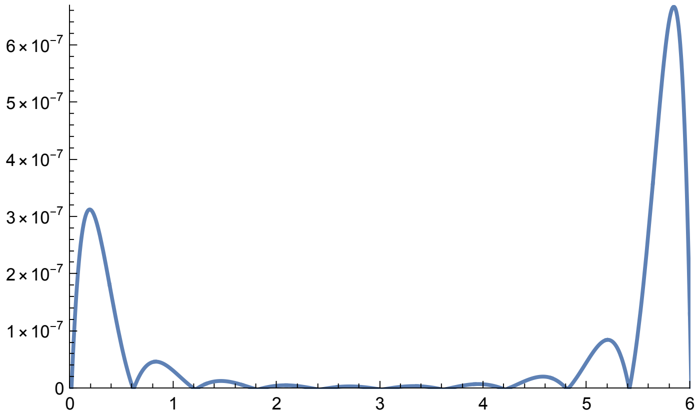


In[306]:=

```
graphR2 = Plot[R2[x], {x, a, b}, PlotRange → {{0, 6}, {0, 0.00000067}}]
```

график функции · отображаемый диапазон графика

Out[306]=



In[307]:=

```
FindMaximum[R1[x], {x, 0, 5}]
```

найти максимум

```
FindMaximum[R2[x], {x, 0, 6}]
```

найти максимум

```
Clear[points1, points2, TableDif1, TableDif2]
```

очистить

Out[307]=

{0.000471242, {x → 0.331536}}

Out[308]=

$\{3.15084 \times 10^{-7}, \{x \to 0.175193\}\}$

In[310]:=

```
t[i_, n_] = Cos[Pi * (2 * i + 1) / (2 n + 2)]
```

ко··· · число пи

$$\mathrm{Cos}\left[\frac{1}{22}\ (1 + 2\ i)\ \pi\right]$$

2. Создать таблицу значений функции $f(x)$ (1.1 – 1.16), разбив отрезок $[0, 6]$ на n частей неравноотстоящими точками x_i вида $x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \cdot t_i$, где t_i – корни многочлена Чебышёва $T_{n+1}(t)$ $(i = \overline{0,n})$. Для полученной таблично заданной функции $f(x)$, выполнить следующие действия при $n = 6$ и $n = 10$:

а) создать таблицу разделенных разностей функции $f(x)$ по точкам $(x_i, f(x_i))$, $i = \overline{0,n}$;

б) построить интерполяционный многочлен Ньютона $Pnr_n(x)$ для неравноотстоящих узлов, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $Pnr_n(x)$ на одном чертеже);

в) построить интерполирующую функцию $Intf_n(x)$ с помощью функции **Interpolation** пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

г) вычислить значения функции $f(x)$ и построенных интерполяционных многочленов $Pnr_n(x)$ и $Intf_n(x)$ в точке $x = 2{,}4316$;

д) найти максимумы абсолютных погрешностей интерполирования функции $f(x)$ многочленом Ньютона $Pnr_n(x)$ и функцией $Intf_n(x)$ на отрезке $[0, 6]$ с помощью функции **FindMaximum** пакета **Mathematica**.

In[311]:=

```
points1 = Table[{((a + b) / 2) + ((b - a) / 2) * t[i, n1],
            таблица значений
    f[((a + b) / 2) + ((b - a) / 2) * t[i, n1]]}, {i, 0, n1}] // N
                                                          численное приближение
points2 = Table[{((a + b) / 2) + ((b - a) / 2) * t[i, n2],
            таблица значений
    f[((a + b) / 2) + ((b - a) / 2) * t[i, n2]]}, {i, 0, n2}] // N
                                                          численное приближение
```

Out[311]=

```
{{5.96946, 5.28191}, {5.7289, 5.3224}, {5.26725, 5.32197},
 {4.62192, 5.15135}, {3.8452, 4.71069}, {3., 4.01571}, {2.1548, 3.20802}}
```

Out[312]=

```
{{5.96946, 5.28191}, {5.7289, 5.3224}, {5.26725, 5.32197}, {4.62192, 5.15135},
 {3.8452, 4.71069}, {3., 4.01571}, {2.1548, 3.20802}, {1.37808, 2.46458},
 {0.732751, 1.8989}, {0.271104, 1.53959}, {0.0305357, 1.36962}}
```

In[313]:=

```
TableDif1 = Table[0, {i, 0, n1}, {j, 0, n1}];
            таблица значений
For[i = 1, i ≤ n1 + 1, i++,
цикл ДЛЯ
  For[j = 1, j ≤ n1 + 1, j++, If[(i + j) > n1 + 2, TableDif1[[i, j]] = ""];]];
  цикл ДЛЯ                    условный оператор
For[i = 1, i ≤ n1 + 1, i++, TableDif1[[i, 1]] = points1[[i, 2]]];
цикл ДЛЯ
For[j = 2, j ≤ n1 + 1, j++,
цикл ДЛЯ
  For[i = 1, i ≤ n1 + 2 - j, i++,
  цикл ДЛЯ
   TableDif1[[i, j]] = (TableDif1[[i + 1, j - 1]] - TableDif1[[i, j - 1]]) /
     (points1[[i + j - 1, 1]] - points1[[i, 1]])]];
MatrixForm[TableDif1]
матричная форма
Clear[i, j]
очистить
```

Out[317]//MatrixForm=

5.28191	-0.168309	-0.241011	-0.00223777	0.00518418	0.000340687	-0.0000495
5.3224	0.000932663	-0.237995	-0.0132503	0.00417252	0.000529681	
5.32197	0.264387	-0.213036	-0.0246367	0.00227939		
5.15135	0.567335	-0.157178	-0.0317312			
4.71069	0.822266	-0.0788936				
4.01571	0.955627					
3.20802						

In[319]:=

```
TableDif2 = Table[0, {i, 0, n2}, {j, 0, n2}];
            таблица значений
For[i = 1, i ≤ n2 + 1, i++,
цикл ДЛЯ
  For[j = 1, j ≤ n2 + 1, j++, If[(i + j) > n2 + 2, TableDif2[[i, j]] = ""];]];
  цикл ДЛЯ                     условный оператор
For[i = 1, i ≤ n2 + 1, i++, TableDif2[[i, 1]] = points2[[i, 2]]];
цикл ДЛЯ
For[j = 2, j ≤ n2 + 1, j++,
цикл ДЛЯ
  For[i = 1, i ≤ n2 + 2 - j, i++,
  цикл ДЛЯ
   TableDif2[[i, j]] = (TableDif2[[i + 1, j - 1]] - TableDif2[[i, j - 1]]) /
     (points2[[i + j - 1, 1]] - points2[[i, 1]])]];
MatrixForm[TableDif2]
матричная форма
Clear[i, j]
очистить
```

Out[323]//MatrixForm=

5.28191	-0.168309	-0.241011	-0.00223777	0.00518418	0.000340687	-0.000(
5.3224	0.000932663	-0.237995	-0.0132503	0.00417252	0.000529681	-0.000(
5.32197	0.264387	-0.213036	-0.0246367	0.00227939	0.000596578	0.0000
5.15135	0.567335	-0.157178	-0.0317312	-0.0000408049	0.000501538	0.0000
4.71069	0.822266	-0.0788936	-0.0315988	-0.00199137	0.000299594	0.0000
4.01571	0.955627	-0.00093548	-0.0254008	-0.00306215	0.000089215	
3.20802	0.957145	0.0566544	-0.0170445	-0.00332707		
2.46458	0.876579	0.0887611	-0.00997691			
1.8989	0.778323	0.102205				
1.53959	0.706553					
1.36962						

In[325]:=

$$\text{P1[x\_]} = \text{Sum}\left[(\text{TableDif1[[1, p]]}) * \prod_{k=1}^{p-1} (x - \text{points1[[k, 1]]}), \{p, 1, n1 + 1\}\right] \text{ // Simplify}$$

сумма — упростить

$$\text{P2[x\_]} = \text{Sum}\left[(\text{TableDif2[[1, p]]}) * \prod_{k=1}^{p-1} (x - \text{points2[[k, 1]]}), \{p, 1, n2 + 1\}\right] \text{ // Simplify}$$

сумма — упростить

Out[325]=

$$1.19716 + 0.945187\,x - 0.0923954\,x^2 + 0.0757776\,x^3 - 0.0200051\,x^4 + 0.00174935\,x^5 - 0.0000495439\,x^6$$

```
1.3489224911292106` + 0.6744626314213413` x + 0.10729178502073082` x^2 -
 0.002532950663635635` x^3 - 0.0027845587978359452` x^4 -
 0.00021154096149478206` x^5 + 0.000015986956353261102` x^6 +
 5.828073897837489`*^-6 x^7 + 2.636183745811167`*^-8 x^8 -
 8.760806540560899`*^-8 x^9 + 4.609012356339063`*^-9 x^10
```

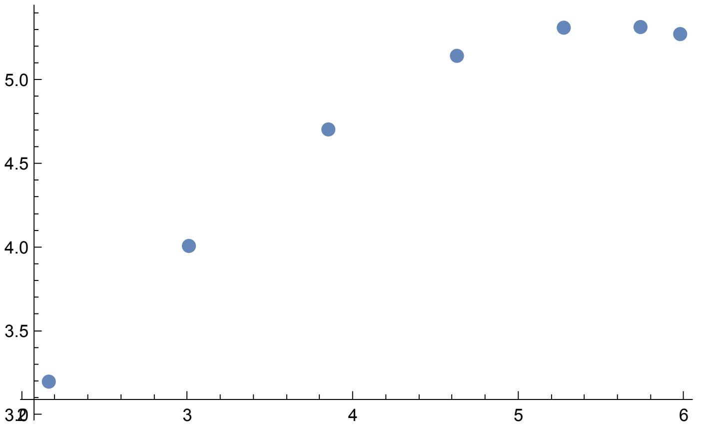
3. Сравнить результаты заданий 1 и 2 для равноотстоящих и неравноотстоящих узлов и сделать выводы о зависимость погрешности интерполирования от числа узлов и их расположения на отрезке.

In[327]:=

```
graphF1 = ListPlot[points1, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}]
```

диаграмма разброса д··· стиль графика темнее размер точки

Out[327]=



In[328]:=

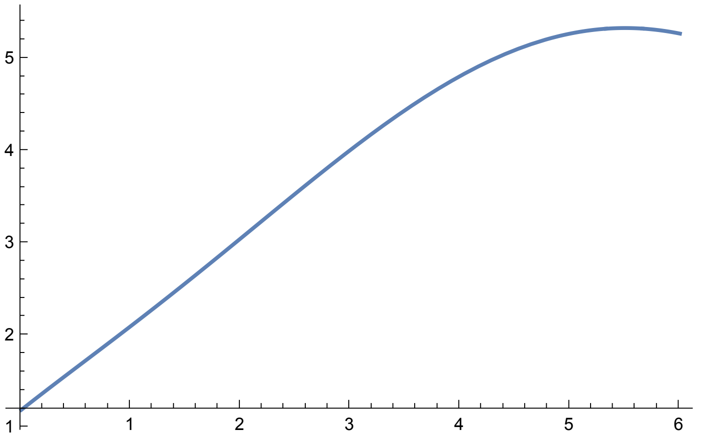
In[329]:=

In[330]:=

```
graphP1 = Plot[P1[x], {x, a, b}]
```

график функции

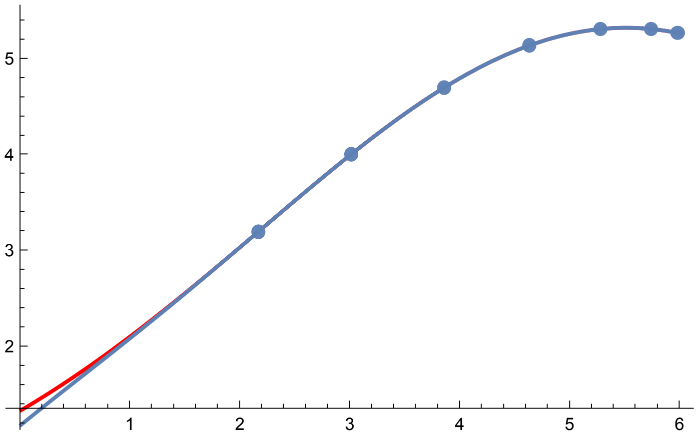
Out[330]=



In[331]:=

```
Show[graph, graphF1, graphP1]
```
показать

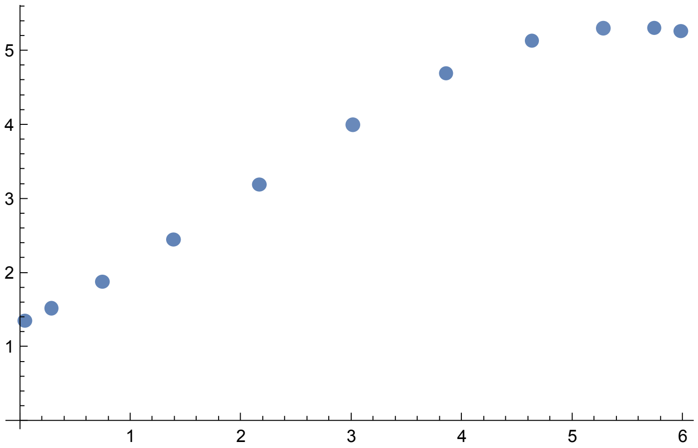
Out[331]=



In[332]:=

```
graphF2 = ListPlot[points2, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}]
```
диаграмма разброса д··· стиль графика темнее размер точки

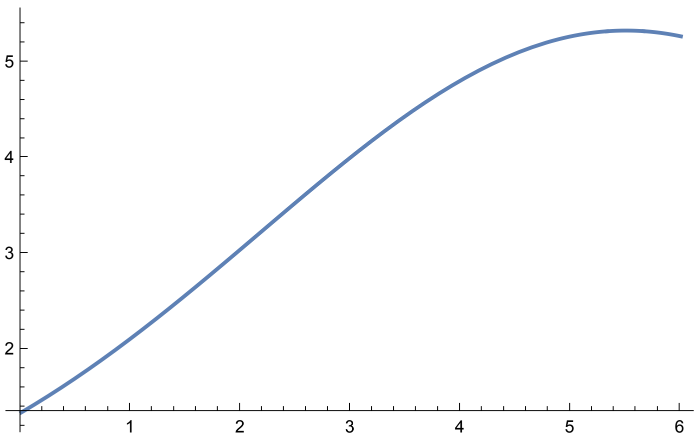
Out[332]=



In[333]:=

```
graphP2 = Plot[P2[x], {x, a, b}]
```
график функции

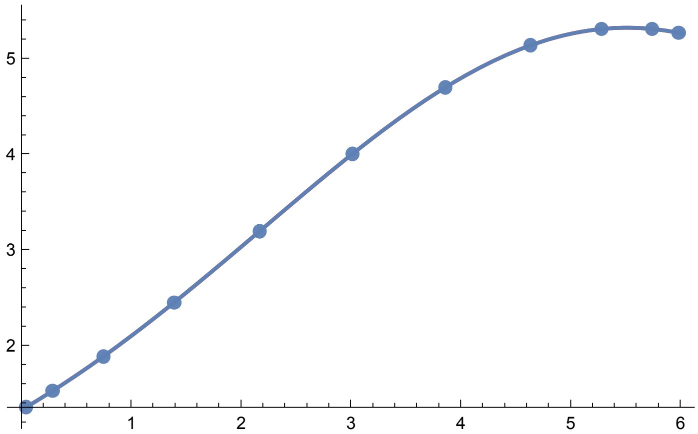
Out[333]=



In[334]:=

```
Show[graph, graphF2, graphP2]
```
показать

Out[334]=



In[335]:=

```
IntF1 = Interpolation[points1];
```
интерполировать

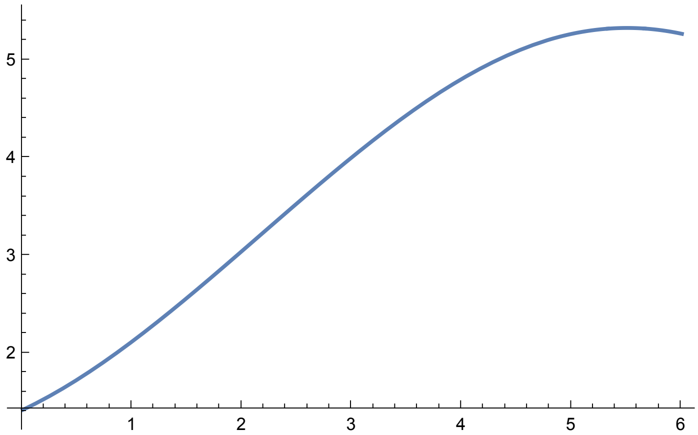
```
IntF2 = Interpolation[points2];
```
интерполировать

In[337]:=

```
graphIntF1 = Plot[IntF1[x], {x, a, b}]
```
график функции

InterpolatingFunction: Input value {0.000122571} lies outside the range of data in the interpolating function. Extrapolation will be used.

Out[337]=



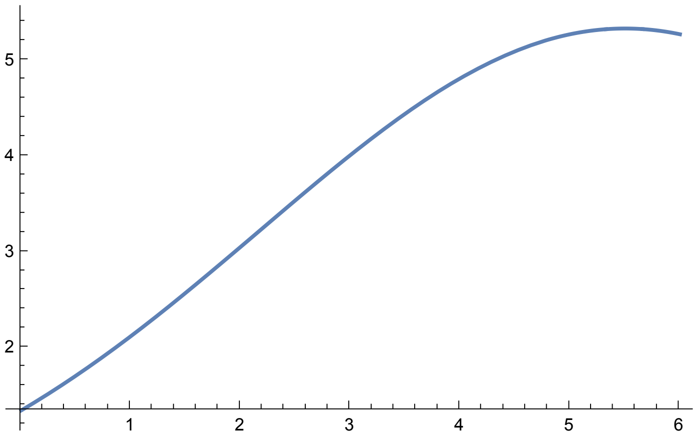
In[338]:=

```
graphIntF2 = Plot[IntF2[x], {x, a, b}]
```

график функции

InterpolatingFunction: Input value {0.000122571} lies outside the range of data in the interpolating function. Extrapolation will be used.

Out[338]=



In[339]:=

```
x1 = 2.4316;
P1[x1]
P2[x1]
IntF1[x1]
IntF2[x1]
```

Out[340]=

3.47774

Out[341]=

3.47762

Out[342]=

3.47789

Out[343]=

3.47792

In[344]:=

```
RnP1[x_] = Abs[f[x] - P1[x]]; // Simplify
```

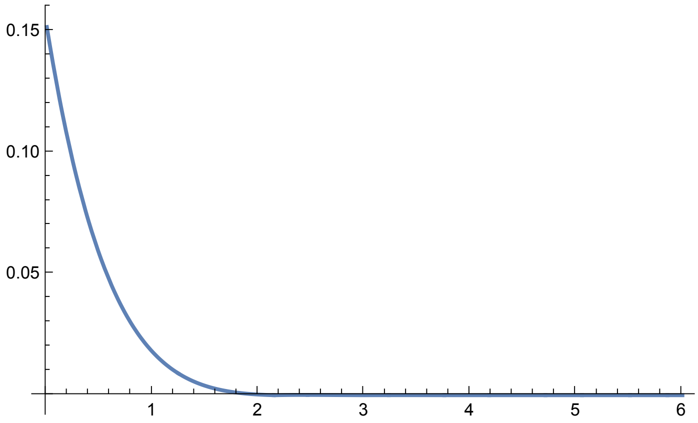
абсолютное значение упростить

In[345]:=

```
graphErrp1 = Plot[RnP1[x], {x, a, b}, PlotRange → Full]
```

график функции | отображаемы·· | в полно

Out[345]=



In[346]:=

```
maxErrP1 = FindMaximum[{RnP1[x], 0 ≤ x ≤ 6}, x]
```

найти максимум

Out[346]=

$\{0.151766, \{x \to 3.25748 \times 10^{-7}\}\}$

In[347]:=

```
RnIntF1[x_] = Abs[f[x] - IntF1[x]] // Simplify;
```

абсолютное значение | упростить

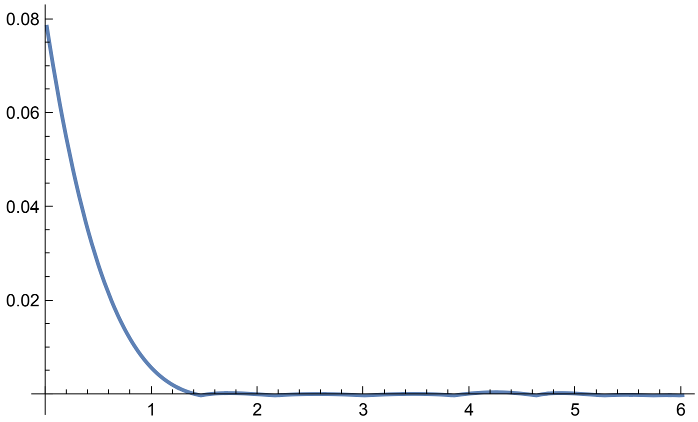
In[348]:=

```
graphErrI1 = Plot[RnIntF1[x], {x, a, b}, PlotRange → Full]
```

график функции | отображаемы·· | в полно

InterpolatingFunction: Input value {0.000122571} lies outside the range of data in the interpolating function. Extrapolation will be used.

Out[348]=



In[349]:=

```
maxErrIntF1 = FindMaximum[{RnIntF1[x], 0 ≤ x ≤ 6}, x]
```
найти максимум

InterpolatingFunction: Input value {0.599994} lies outside the range of data in the interpolating function. Extrapolation will be used.

InterpolatingFunction: Input value {0.600006} lies outside the range of data in the interpolating function. Extrapolation will be used.

InterpolatingFunction: Input value {0.599994} lies outside the range of data in the interpolating function. Extrapolation will be used.

General: Further output of InterpolatingFunction::dmval will be suppressed during this calculation.

Out[349]=

$\{0.0786489, \{x \to 6.11543 \times 10^{-7}\}\}$

In[350]:=

$$f[x\_] := Sqrt[3] * Exp\left[\frac{-x^2}{22} + \frac{x}{2} - \frac{1}{4}\right] // N$$

квадрат··· показательная функция численное приближе

```
a = 0; b = 6; n = 10; h = (b - a) / n;
points = Table[{a + i * h, f[a + i * h]}, {i, 0, n}] // N
```
таблица значений чи

Out[352]=

```
{{0., 1.34892}, {0.6, 1.7913}, {1.2, 2.30217},
 {1.8, 2.86347}, {2.4, 3.44694}, {3., 4.01571}, {3.6, 4.52771},
 {4.2, 4.94061}, {4.8, 5.21758}, {5.4, 5.33267}, {6., 5.27481}}
```

In[353]:=

```
listC = Table[0, {k, 0, n}];
        таблица значений
Matrix = Table[0, {n - 1}, {n - 1}];
         таблица значений
Do[
оператор цикла
  If[i ≠ 1, Matrix[[i, i - 1]] = h];
  условный оператор
  Matrix[[i, i]] = 4 h;
  If[i ≠ n - 1, Matrix[[i, i + 1]] = h], {i, 1, n - 1}];
  условный оператор
Matrix // MatrixForm // N
          матричная форма  численное приближение
```

$$B = \text{Table}\left[3\left(\frac{\text{points}[[i, 2]] - \text{points}[[i-1, 2]]}{h} - \frac{\text{points}[[i-1, 2]] - \text{points}[[i-2, 2]]}{h}\right),\right.$$

таблица значений

$$\left.\{i, 3, n+1\}\right] // N;$$

численное приближение

```
B // MatrixForm // N
     матричная форма  численное приближение
```

Out[356]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 2.4 & 0.6 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0.6 & 2.4 & 0.6 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.6 & 2.4 & 0.6 & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0.6 & 2.4 & 0.6 & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0.6 & 2.4 & 0.6 & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0.6 & 2.4 & 0.6 & 0. & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.6 & 2.4 & 0.6 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.6 & 2.4 & 0.6 \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0. & 0.6 & 2.4 \end{pmatrix}$$

Out[358]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0.34244 \\ 0.25216 \\ 0.110884 \\ -0.0735267 \\ -0.283898 \\ -0.495452 \\ -0.679639 \\ -0.809418 \\ -0.864737 \end{pmatrix}$$

In[359]:=

```
X = LinearSolve[Matrix, B];
    решить линейные уравнения
For[i = 1, i ≤ n - 1, i++,
цикл ДЛЯ
 listC[[i + 1]] = X[[i]]]
MatrixForm[listC]
матричная форма
```

Out[361]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0.126507 \\ 0.0647068 \\ 0.0349328 \\ -0.0196315 \\ -0.0789515 \\ -0.137726 \\ -0.195896 \\ -0.211421 \\ -0.307452 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In[362]:=

```
listA = Table[0, {i, 1, n}];
        таблица значений
listB = Table[0, {i, 1, n}];
        таблица значений
listD = Table[0, {i, 1, n}];
        таблица значений
For[i = 1, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
 listA[[i]] = points[[i + 1, 2]]]
For[i = 1, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
 listB[[i]] = (points[[i + 1, 2]] - points[[i, 2]])/h + 2/3 * h * listC[[i + 1]] + 1/3 * h * listC[[i]]]
For[i = 1, i ≤ n, i++,
цикл ДЛЯ
 listD[[i]] = (listC[[i + 1]] - listC[[i]])/(3 h)]
G = Table[{listA[[i]] + listB[[i]] (x - points[[i + 1, 1]]) +
    таблица значений
     listC[[i + 1]] (x - points[[i + 1, 1]])^2 + listD[[i]] (x - points[[i + 1, 1]])^3,
    points[[i, 1]] ≤ x ≤ points[[i + 1, 1]]}, {i, 1, n}]; // Simplify
                                                            упростить
```

In[369]:=

```
S[x_] = Piecewise[G]
        кусочно-заданная
```

1.791301602733251\` + 0.7879011486388656\` (-0.6\` + x) + 0.1265067154340377\` $(-0.6` + x)^2$ + 0.07028150857446538\` $(-0.6` + x)^3$	0.\` ≤ x ≤ 0.6\`
2.3021687164931626\` + 0.9026292422614036\` (-1.2\` + x) + 0.06470677393685895\` $(-1.2` + x)^2$ - 0.034233300831765966\` $(-1.2` + x)^3$	0.6\` ≤ x ≤ 1.2\`

```
 0.0345333300831765966` (-1.2` + x)
2.8634678264948015` + 0.962413001123272` (-1.8` + x) +            1.2` ≤ x ≤ 1.8`
 0.03493282416625509` (-1.8` + x)^2 -
 0.01654108320589103`5 (-1.8` + x)^3
3.4469437281193267` + 0.971593811376329` (-2.4` + x) -            1.8` ≤ x ≤ 2.4`
 0.019631473744493404` (-2.4` + x)^2 -
 0.030313498839304717` (-2.4` + x)^3
4.015714283224617` + 0.9124440370204902` (-3.` + x) -             2.4` ≤ x ≤ 3.`
 0.078951483515238` (-3.` + x)^2 - 0.032955560983746995` (-3.` + x)^3
4.527705211178085` + 0.7824374558355016` (-3.6` + x) -            3.` ≤ x ≤ 3.6`
 0.1377261517930764` (-3.6` + x)^2 -
 0.03265259348768801` (-3.6` + x)^3
4.940605835847711` + 0.5822639027529719` (-4.2` + x) -            3.6` ≤ x ≤ 4.2`
 0.1958964366778063` (-4.2` + x)^2 -
 0.03231682493596105` (-4.2` + x)^3
5.217578560969526` + 0.33787368210981833` (-4.8` + x) -           4.2` ≤ x ≤ 4.8`
 0.21142059772744984` (-4.8` + x)^2 -
 0.008624533916468637` (-4.8` + x)^3
5.332667589863274` + 0.026550138885569133` (-5.4` + x) -          4.8` ≤ x ≤ 5.4`
 0.30745197431296545` (-5.4` + x)^2 -
 0.0533507647697309` (-5.4` + x)^3
5.274809199359503` - 0.15792104570221005` (-6.` + x) +            5.4` ≤ x ≤ 6.`
 0.1708066523960919` (-6.` + x)^3
0                                                                  True
```

4. Используя таблицу значений функции $f(x)$ в равноотстоящих точках отрезка $[0, 6]$, полученной в задании 1 при $n = 10$, выполнить следующие действия:

а) построить интерполяционный кубический сплайн дефекта 1 $S_3(x)$ для функции $f(x)$, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $f(x)$ и $S_3(x)$ на одном чертеже);

б) выполнить интерполяцию сплайном $Sf(x)$ с помощью функции ***Interpolation***[*data*, ***Method->"Spline"***], проиллюстрировать графически;

в) построить интерполяционный кубический сплайн *Spl* с помощью функции ***SplineFit***[*data*,***Cubic***] (предварительно загрузить пакет сплайн-

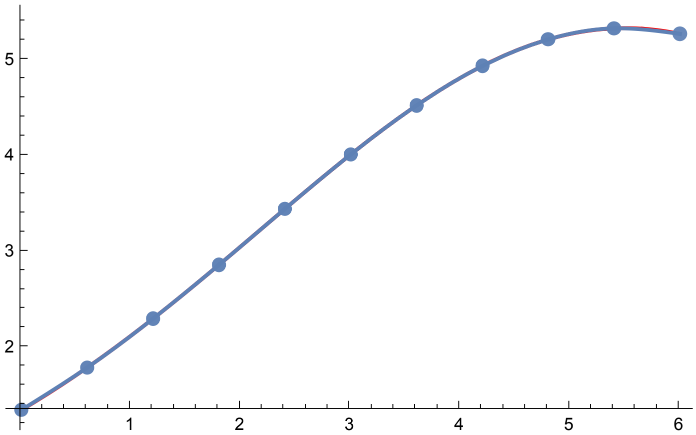
интерполяции командой ***Needs***["***Splines`***"]), проиллюстрировать графически (для построения графика сплайна *Spl* использовать функцию **ParametricPlot**);

г) вычислить значения функции $f(x)$ и построенных интерполяционных сплайнов $S_3(x)$, $Sf(x)$ и Spl в точке $x = 2{,}4316$.

In[370]:=

```
graphF = ListPlot[points, PlotStyle → {Darker, PointSize[0.02]}];
         диаграмма разброса ⋯ стиль графика   темнее    размер точки
graphS = Plot[S[x], {x, a, b}];
         график функции
Show[graph, graphF, graphS]
показать
```

Out[372]=



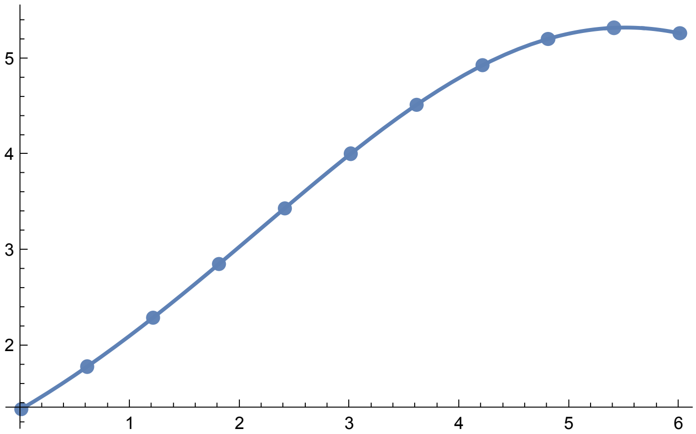
In[373]:=

```
Sf[x_] = Interpolation[points, x, Method → "Spline"];
         интерполировать               метод
```

In[374]:=

```
graphSf = Plot[Sf[x], {x, a, b}];
          график функции
Show[graphSf, graphF]
показать
```

Out[375]=



In[376]:=

```
Needs["Splines`"]
необходимо
```

In[377]:=

```
Spl = SplineFit[points, Cubic];
```

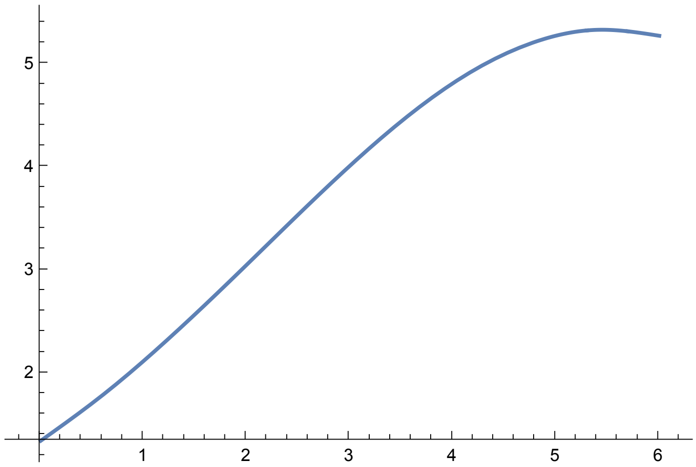
In[378]:=

```
t[x] = (x - a) / h;
graphSpl = ParametricPlot[Spl[t], {t, 0, n}];
```
график параметрически заданной области на пл

In[380]:=

```
Show[graphSpl]
```
показать

Out[380]=



In[381]:=

```
x1 = 2.4316;
S[x1]
Sf[x1]
Last[Spl[(x1 - a)/h]]
```
последний

Out[382]=

3.47763

Out[383]=

3.47762

Out[384]=

3.47763

In[385]:=

```
m1 = 1;
SummaA[k_, l_] :=
 If[(k + l) ≠ 2, Sum[(points⟦t + 1, 1⟧) ^ (k + l - 2), {t, 0, n}], Sum[1, {t, 0, n}]]
```
условный опера⋯ сумма сумма

In[387]:=

```
listA1 = Table[SummaA[i, j], {i, 1, m1 + 1}, {j, 1, m1 + 1}]; // N
```
таблица значений чи

```
MatrixForm[listA1]
```
матричная форма

Out[388]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 11 & 33. \\ 33. & 138.6 \end{pmatrix}$$

In[389]:=

```
SummaB[k_] :=
 If[k ≠ 1, Sum[points[[t + 1, 2]] * ((points[[t + 1, 1]]) ^ (k - 1)), {t, 0, n}],
 условный⋯ сумма
  Sum[points[[t + 1, 2]], {t, 0, n}]]
  сумма
```

In[390]:=

```
listB1 = Table[SummaB[i], {i, 1, m1 + 1}]; // N
            таблица значений                   чи

MatrixForm[listB1]
матричная форма
```

$$\begin{pmatrix} 41.061885079537355` \\ 151.85135385115655` \end{pmatrix}$$

5. Используя таблицу значений функции $f(x)$ в равноотстоящих точках отрезка $[0, 6]$, полученной в задании 1 при $n = 10$, выполнить следующие действия:

а) аппроксимировать с помощью метода наименьших квадратов функцию $f(x)$ многочленом первой степени $Q_1(x)$, проиллюстрировать графически (изобразить точки $(x_i, f(x_i))$ и график функции $Q_1(x)$ на одном чертеже);

б) аппроксимировать с помощью метода наименьших квадратов функцию $f(x)$ многочленом второй степени $Q_2(x)$, проиллюстрировать графически;

в) найти многочлены наилучшего среднеквадратичного приближения третьей и четвертой степеней ($Q_3(x)$ и $Q_4(x)$) с помощью функции **Fit** пакета **Mathematica**, проиллюстрировать графически;

г) вычислить значения функции $f(x)$ и построенных многочленов $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ и $Q_4(x)$ в точке $x = 2{,}4316$;

д) сравнить результаты, полученные в пунктах а, б и в, изобразив на одном чертеже точки $(x_i, f(x_i))$ и графики функций $Q_1(x)$, $Q_2(x)$, $Q_3(x)$ и $Q_4(x)$.

In[392]:=

```
A1 = LinearSolve[listA1, listB1]
     решить линейные уравнения
```

Out[392]=

```
{1.56125, 0.723881}
```

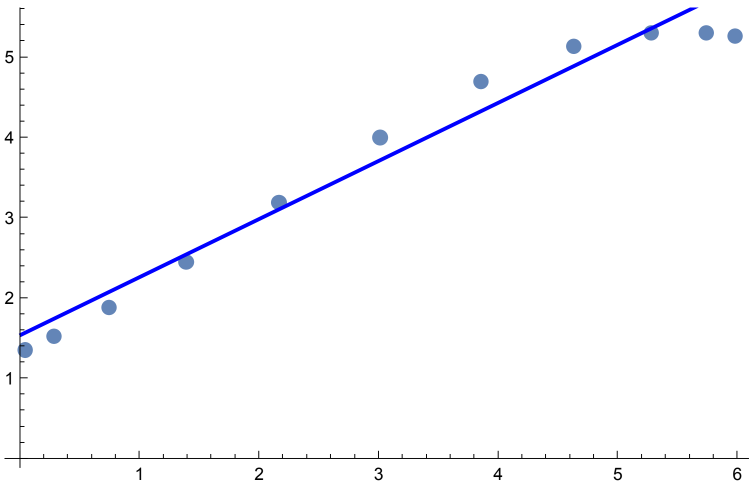
In[393]:=

```
Q1[x_] = Sum[A1[[t + 1]] * x ^ (t), {t, 0, m1}]
            сумма

graphQ1 = Plot[Q1[x], {x, a, b}, PlotStyle → Blue];
             график функции           стиль графика  синий

Show[graphF2, graphQ1]
показать
```

```
1.5612548093106313` + 0.7238812780945578` x
```



1
2
3
4
5
6
1
2
3
4
5

In[396]:=

```
m2 = 2;
listA2 = Table[SummaA[i, j], {i, 1, m2 + 1}, {j, 1, m2 + 1}]; // N
         таблица значений                                           чи
MatrixForm[listA2]
матричная форма
listB2 = Table[SummaB[i], {i, 1, m2 + 1}]; // N
         таблица значений                 численное приближение
MatrixForm[listB2]
матричная форма
A2 = LinearSolve[listA2, listB2];
     решить линейные уравнения
Q2[x_] = Sum[A2[[t + 1]] * x ^ (t), {t, 0, m2}]
         сумма
graphQ2 = Plot[Q2[x], {x, a, b}, PlotStyle → Red];
          график функции             стиль графика  красный
Show[graphF2, graphQ2]
показать
```

Out[398]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 11 & 33. & 138.6 \\ 33. & 138.6 & 653.4 \\ 138.6 & 653.4 & 3283.16 \end{pmatrix}$$

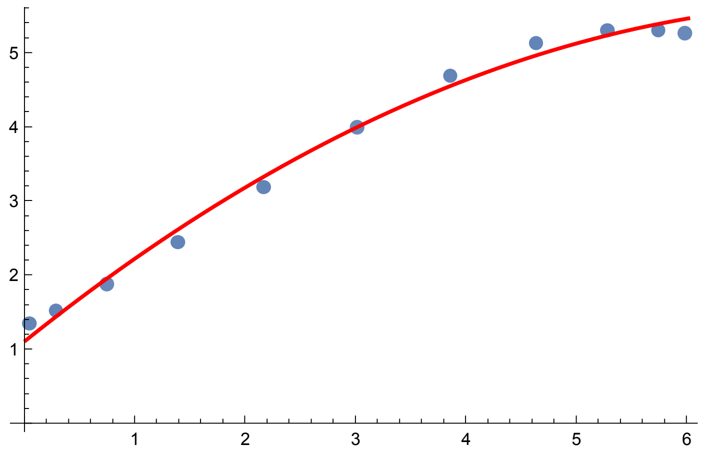
Out[400]//MatrixForm=

$$\begin{pmatrix} 41.0619 \\ 151.851 \\ 680.672 \end{pmatrix}$$

Out[402]=

$1.13864 + 1.19345\,x - 0.0782614\,x^2$

Out[404]=



In[405]:=

```
Q3[x_] = Fit[points, {1, x, x^2, x^3}, x]
         согласовать
Q4[x_] = Fit[points, {1, x, x^2, x^3, x^4}, x]
         согласовать
graphQ3 = Plot[Q3[x], {x, a, b}, PlotStyle → Green];
          график функции      стиль графика  зелёный
graphQ4 = Plot[Q4[x], {x, a, b}, PlotStyle → Yellow];
          график функции      стиль графика  жёлтый
Show[graphF2, graphQ3]
показать
Show[graphF2, graphQ4]
показать
```

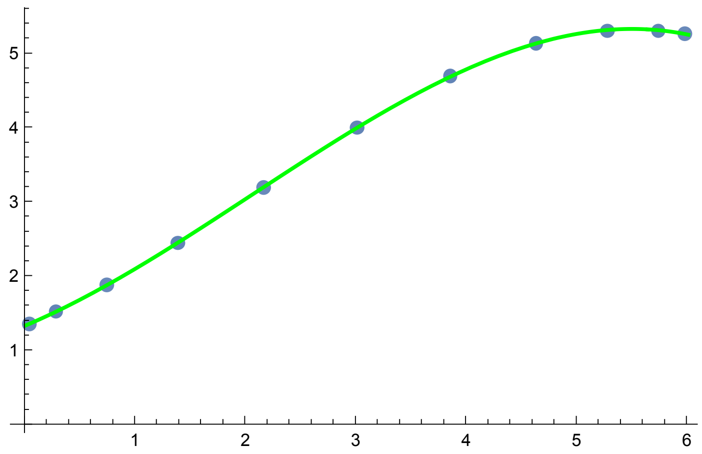
Out[405]=

$1.35204 + 0.628349\, x + 0.168723\, x^2 - 0.0274427\, x^3$

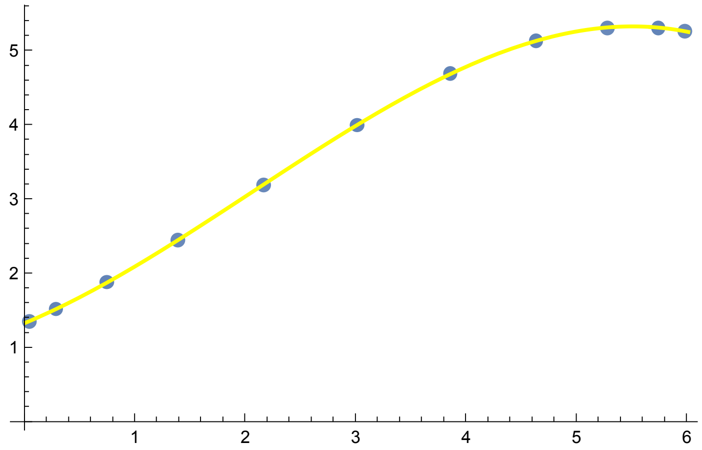
Out[406]=

$1.35348 + 0.619984\, x + 0.175694\, x^2 - 0.0293016\, x^3 + 0.000154904\, x^4$

Out[409]=



Out[410]=



In[411]:=

```
x1 = 2.4316;
f[x1]
Q1[x1]
Q2[x1]
Q3[x1]
Q4[x1]
```

Out[412]=

3.47762

Out[413]=

3.32144

Out[414]=

3.5779

Out[415]=

3.48299

Out[416]=

3.484

In[417]:=

```
Show[graphF2, graphQ1, graphQ2, graphQ3, graphQ4]
```

показать

Out[417]=