Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования БГУИР

Факультет информационных технологий и управления
Кафедра интеллектуальных информационных технологий

Отчёт по лабораторной работе на тему:
Решение систем линейных алгебраических уравнений

Выполнил: Астахов А. С.

Проверил: Степанова Т. С.

Минск 2024

. Даны матрицы $A=(a_{ij})$ и $B=(b_i)$, $i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,7}$. Используя средства пакета **Mathematica** (функции **Norm**, **Inverse**, **LinearSolve**):

а) найти число обусловленности матрицы A в норме-максимум $\|\cdot\|_\infty$;

б) решить точную систему линейных уравнений $AX=B$;

в) решить три возмущенные системы вида $AX=B+\Delta B$, увеличив значение правой части последнего уравнения системы $AX=B$ последовательно на 0,01%; 0,1% и на 1%;

г) найти прогнозируемую предельную относительную погрешность решения каждой возмущенной системы;

д) найти относительную погрешность решения каждой возмущенной системы; сделать вывод о зависимости относительной погрешности от величины возмущения и числа обусловленности матрицы A.

Выполнить задание для двух случаев:

1) $a_{ij}=\begin{cases}1, & i>j,\\ i+1, & i=j,\\ 2, & i<j,\end{cases}$ $b_i=2ki-i^2$; **2)** $a_{ij}=\dfrac{1}{i+j-1}$ $b_i=3i-2k$,

где $i=\overline{1,7}$, $j=\overline{1,7}$, k – номер вашего варианта.

```
n = 7;
k = 3;

A = Table[If[i > j, i + j, 2 k i - i^2], {i, 1, n}, {j, 1, n}];
B = Table[2 k - i, {i, 1, n}];

condMax = Norm[A, Infinity] Norm[Inverse[A], Infinity];
Xexact = LinearSolve[A, B];

perturbations = {0.0001, 0.001, 0.01};
Bperturbed =
  Table[ReplacePart[B, {n -> B[[n]] (1 + p)}], {p, perturbations}];
Xperturbed = Table[LinearSolve[A, Bp], {Bp, Bperturbed}];
relativeErrors =
  Table[Norm[Xp - Xexact, Infinity]/Norm[Xexact, Infinity], {Xp,
    Xperturbed}];
maxRelativeError = condMax*Max[perturbations];

A2 = Table[1/(i + j - 1), {i, 1, n}, {j, 1, n}];
B2 = Table[3 i - 2 k, {i, 1, n}];

condMax2 = Norm[A2, Infinity] Norm[Inverse[A2], Infinity];
Xexact2 = LinearSolve[A2, B2];

Bperturbed2 =
  Table[ReplacePart[B2, {n -> B2[[n]] (1 + p)}], {p, perturbations}];
Xperturbed2 = Table[LinearSolve[A2, Bp], {Bp, Bperturbed2}];
relativeErrors2 =
  Table[Norm[Xp - Xexact2, Infinity]/Norm[Xexact2, Infinity], {Xp,
    Xperturbed2}];
maxRelativeError2 = condMax2*Max[perturbations];

(*Вывод результатов*)
```

```
Print["Результаты для первой системы:"];
Print["число обусловленности: ", condMax];
Print["Решения: ", Xexact];
Print["Результаты возмущения:"];
Print[Xperturbed];

Print["\nРезультаты для второй системы:"];
Print["Число обусловленности: ", condMax2];
Print["Решение: ", Xexact2];
Print["Результаты возмущения:"];
Print[Xperturbed2];

{{1005.02,-47124.8,517868.,-2.24787*10^6,4.52661*10^6,-4.24121*10^6,1.49412*10^6},
{1167.18,-53935.6,585976.,-2.5203*10^6,5.03742*10^6,-4.69072*10^6,1.64396*10^6},
{2788.8,-122044.,1.26706*10^6,-5.24462*10^6,1.01455*10^7,-9.18585*10^6,3.14234*10^6}}
```

2. Решить методом прогонки трехдиагональную систему, составить таблицу прогоночных коэффициентов L_i, M_i, $i=\overline{1,5}$.

2.1. $$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 5, \\ 2x_1 + 10x_2 + 4x_3 = 18, \\ 5x_2 + 20x_3 + 3x_4 = -50, \\ 4x_3 + 10x_4 - x_5 = 30, \\ 2x_4 - 3x_5 = -2. \end{cases}$$

2.2. $$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 7, \\ x_1 + 11x_2 + 2x_3 = 24, \\ 3x_2 + 14x_3 - 6x_4 = -37, \\ 2x_3 + 19x_4 + 7x_5 = -44, \\ x_4 + 5x_5 = 26. \end{cases}$$

```
(*Ввод коэффициентов системы*)
a = {0, 2, 5, 4, 2}; (*Поддиагональ (a2,...,an)*)
b = {4, 10, 20, 10, -3}; (*Главная диагональ (b1,...,bn)*)
c = {-1, 4, 1, -1, 0}; (*Наддиагональ (c1,...,cn-1)*)
d = {5, 18, -50, 30, -2}; (*Свободные члены (d1,...,dn)*)

(*Прямой ход:вычисление L и M*)
n = Length[b];
L = Table[0, {n}];
M = Table[0, {n}];
L[[1]] = -c[[1]]/b[[1]];
M[[1]] = d[[1]]/b[[1]];

For[i = 2, i <= n, i++, denom = b[[i]] + a[[i]]*L[[i - 1]];
  L[[i]] = If[i < n, -c[[i]]/denom, 0];
  M[[i]] = (d[[i]] - a[[i]]*M[[i - 1]])/denom;];

(*Обратный ход:вычисление x*)
x = Table[0, {n}];
x[[-1]] = M[[-1]]; (*Последнее значение*)
For[i = n - 1, i >= 1, i--, x[[i]] = L[[i]]*x[[i + 1]] + M[[i]];];

(*Вывод результатов*)
Print["Решение: ", x];
Print["Коэф. L: ", L];
Print["Коэф: M: ", M];
Коэф: M: {5/4,31/21,-(241/76),4055/929,1424/371}
```

3. Решить систему n-го порядка $AX = B$ методом Якоби и методом Зейделя с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$ при $n = 10$ и $n = 20$. Сравнить число итераций, необходимых для достижения точности ε этими методами. Здесь $A = (a_{ij})$ – матрица с диагональным преобладанием, $B = (b_i)$ – вектор-столбец,

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & i \neq j, \\ 2n, & i = j, \end{cases} \qquad b_i = (2n-1)i + \frac{n(n-1)}{2} + (3n-1)(k-1),$$

где $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$, k – номер вашего варианта.

```
(*Генерация матрицы A и вектора B*)
GenerateMatrixAndVector[n_, k_] :=
 Module[{A, B},
  A = Table[
    If[i == j, 2 n, 1], {i, n}, {j,
     n}];(*Матрица с диагональным преобладанием*)
  B = Table[(2 n - 1) i + (n (n - 1))/2 + (3 n - 1) (k - 1), {i,
     n}];(*Вектор-столбец*){A, B}]

(*Метод Якоби*)
JacobiMethod[A_, B_, eps_] :=
 Module[{n, X, Xnew, iterations, diff}, n = Length[B];
  X = ConstantArray[0, n];
  Xnew = ConstantArray[0, n];
  iterations = 0;
  diff = Infinity;
  While[diff > eps,
   Xnew = Table[(B[[
        i]] - (Sum[A[[i, j]] X[[j]], {j, 1, i - 1}] +
         Sum[A[[i, j]] X[[j]], {j, i + 1, n}]))/A[[i, i]], {i, 1, n}];
   diff = Max[Abs[Xnew - X]];
   X = Xnew;
   iterations++;
   If[iterations > 1000, Print["Jacobi method did not converge."];
    Abort[]];];
  {N[X], iterations}]

(*Метод Зейделя*)
SeidelMethod[A_, B_, eps_] :=
 Module[{n, X, iterations, diff}, n = Length[B];
  X = ConstantArray[0, n];
  iterations = 0;
  diff = Infinity;
  While[diff > eps, diff = 0;
   Do[Module[{oldX = X[[i]]},
     X[[i]] = (B[[
         i]] - (Sum[A[[i, j]] X[[j]], {j, 1, i - 1}] +
          Sum[A[[i, j]] X[[j]], {j, i + 1, n}]))/A[[i, i]];
     diff = Max[diff, Abs[X[[i]] - oldX]];], {i, 1, n}];
   iterations++;
   If[iterations > 1000, Print["Seidel method did not converge."];
    Abort[]];];
  {N[X], iterations}]

(*Основная программа*)
n = 10; (*Размер матрицы*)
k = 1;
```

```
eps = 10^-3; (*Точность*)

(*Генерация матрицы и вектора*)
{A, B} = GenerateMatrixAndVector[n, k];

(*Проверка на диагональное преобладание*)
If[! AllTrue[Table[2 n > Total[Delete[A[[i]], i]], {i, 1, n}], # &],
  Print["Matrix A is not diagonally dominant. Adjust the generation \
logic."]; Abort[]];

(*Решение методом Якоби*)
{JacobiSolution, JacobiIterations} = JacobiMethod[A, B, eps];

(*Решение методом Зейделя*)
{SeidelSolution, SeidelIterations} = SeidelMethod[A, B, eps];

(*Вывод результатов*)
Print["Решение методом Якоби: ", JacobiSolution];
Print["Число итераций методом Якоби: ", JacobiIterations];
Print["Решение методом Зейделя: ", SeidelSolution];
Print["Число итераций методом Зейделя: ", SeidelIterations];
```

Решение методом Якоби:
{0.655332,1.65533,2.65533,3.65533,4.65533,5.65533,6.65533,7.65533,8.65533,9.65533}

Число итераций методом Якоби: 13

Решение методом Зейделя:
{0.655152,1.65515,2.65515,3.65516,4.65516,5.65517,6.65517,7.65518,8.65518,9.65518

Число итераций методом Зейделя: 6