Metode Matriks Balikan

- Misalkan A^{-1} adalah matriks balikan dari A. Sistem persamaan lanjar $Ax = b$ dapat diselesaikan sebagai berikut:

$$Ax = b$$

$$A^{-1} Ax = A^{-1} b$$

$$I x = A^{-1} b \qquad (A^{-1} A = I)$$

$$x = A^{-1} b$$

- Cara penyelesaian dengan mengalikan matriks A^{-1} dengan b itu dinamakan **metode matriks balikan**.

- **Contoh**: Selesaikan sistem persamaan lanjar

$$
\begin{aligned}
x_1 - x_2 + 2x_3 &= 5 \\
3x_1 \quad + x_3 &= 10 \\
x_1 \quad + 2x_3 &= 5
\end{aligned}
$$

dengan metode matriks balikan.

Penyelesaian:

$$
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]
\begin{array}{c} R_2 - 3R_1 \\ \sim \\ R_3 - R_1 \end{array}
\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]
$$

$$
\sim \ldots \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0.4 & -0.2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -0.2 & 0.6 \end{array}\right]
$$

$$\longleftarrow \; A^{-1} \; \longrightarrow$$

Solusinya adalah $x = A^{-1} b$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.4 & -0.2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -0.2 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 + 4 - 1 \\ -5 + 0 + 5 \\ 0 - 2 + 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

Metode Dekomposisi LU

- Jika matriks *A non-singular* maka ia dapat difaktorkan (diuraikan atau di-dekomposisi) menjadi matriks segitiga bawah *L* (*lower*) dan matriks segitiga atas *U* (*upper*):

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Sebagai contoh, matriks 3×3 di bawah ini difaktorkan menjadi :

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 6 & -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Sekali *A* difaktorkan menjadi *L* dan *U*, kedua matriks tersebut dapat digunakan untuk menyelesaikan *Ax* = *b*.

Metode penyelesaian SPL dengan cara ini dikenal dengan nama **metode dekomposisi *LU***.

Metode ini dinamakan juga **metode pemfaktoran segitiga** (*triangular factorization*).

- Tinjau sistem persamaan lanjar

$$Ax = b$$

- Faktorkan A menjadi L dan U sedemikian sehingga

$$A = LU$$

- Jadi,

$$Ax = b$$

$$LU\,x = b$$

- Misalkan

$$Ux = y$$

maka

$$Ly = b$$

Untuk memperoleh $y_1, y_2, \ldots, y_n$, kita menggunakan teknik penyulihan maju (*forward substitution*) :

$$Ly = b \quad \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \ldots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{bmatrix} \rightarrow$$

diperoleh $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dengan teknik penyulihan maju

Dan untuk memperoleh solusi SPL, $x_1, x_2, \ldots, x_\mathrm{n}$, kita menggunakan teknik penyulihan mundur (*backward substitution*):

$$Ux = y \quad \rightarrow \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \ldots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \ldots & u_{2n} \\ \ldots & & & & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ : \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ : \\ y_n \end{bmatrix} \longrightarrow$$

diperoleh $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dengan teknik penyulihan mundur

- Jadi, langkah-langkah menghitung solusi SPL dengan metode dekomposi *LU* dapat diringkas sebagai berikut:

  1. Bentuklah matriks *L* dan *U* dari *A*
  2. Pecahkan $Ly = b$, lalu hitung *y* dengan teknik penyulihan maju
  3. Pecahkan $Ux = y$, lalu hitung *x* dengan teknik penyulihan mundur

- Terdapat dua metode untuk memfaktorkan *A* atas *L* dan *U*:

  1. Metode *LU* Gauss.
  2. Metode reduksi Crout.

Pemfaktoran dengan Metode LU Gauss

Misalkan matriks A berukuran 4×4 difaktorkan atas L dan U,

$$A = LU$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

Di sini kita menggunakan simbol m_{ij} ketimbang l_{ij}, karena nilai l_{ij} berasal dari faktor pengali (m_{ij}) pada proses eliminasi Gauss. Langkah-langkah pembentukan L dan U dari matriks A adalah sebagai berikut:

1. Nyatakan A sebagai $A = IA$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ & & & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

2. Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U. Tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

3. Setelah seluruh proses eliminasi Gauss selesai, matriks I menjadi matriks L, dan matriks A di ruas kanan menjadi matriks U.

$$
\left[\begin{array}{ccccc|c}
a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} & b_3 \\
\vdots & & & & & \vdots \\
a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} & b_n
\end{array}\right]
\longrightarrow
\left[\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & 0 \ldots & 0 & b_1' \\
0 & 1 & 0 \ldots & 0 & b_2' \\
0 & 0 & 1 \ldots & 0 & b_3' \\
\vdots & & & & \vdots \\
0 & 0 & 0 \ldots & 1 & b_n'
\end{array}\right]
$$

Solusinya:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= b_1' \\
x_2 &= b_2' \\
\ldots & \quad \ldots \\
x_n &= b_n'
\end{aligned}
$$

Seperti halnya metode eliminasi Gauss, tatancang *pivoting* dan penskalaan juga dapat diterapkan pada metoda ini untuk memperkecil galat pembulatan.

- Contoh:

10 (*LU* Gauss naif)

$$A = \begin{matrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{matrix}$$

Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U, dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - (^{-2}/_4)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (^1/_4)R_1 \end{matrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix}$$

Tempatkan $m_{21} = -2/4 = 0.5$ dan $m_{31} = 1/4 = 0.25$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A,

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 1.25 & 6.25 \end{bmatrix} \underset{\sim}{R_3 - (^{1.25}/_{-2.5})R_2} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 1.25/-2.5 = -0.5$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -0.5 & 1 & 0 \\ 0.25 & -0.5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -1 \\ 0 & -2.5 & 4.5 \\ 0 & 0 & 8.5 \end{bmatrix} \quad \blacksquare$$

- Contoh:

(*LU* Gauss dengan tata-ancang *pivoting*)

Faktorkan matriks A berikut

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

lalu pecahkan sistem $Ax = b$.

Penyelesaian:

Eliminasikan matriks A di ruas kanan menjadi matriks segitiga atas U, dan tempatkan faktor pengali m_{ij} pada posisi l_{ij} di matriks I.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} R_2 - (2)R_1 \\ \sim \\ R_3 - (^1/_1)R_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Tempatkan $m_{21} = 2$ dan $m_{31} = 1/1 = 1$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A. Dalam hal ini ada *pivoting* karena calon *pivot* bernilai 0, sehingga baris kedua dipertukarkan dengan baris ketiga:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada matriks L, kecuali elemen diagonalnya

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{2} & 1 & 0 \\ \boxed{-1} & m_{32} & 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \boxed{-1} & 1 & 0 \\ \boxed{2} & m_{32} & 1 \end{bmatrix}$$

Jangan lupa mempertukarkan juga $R_2 \Leftrightarrow R_3$ pada vektor b,

$$b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \quad R_2 \Leftrightarrow R_3 \quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Teruskan proses eliminasi Gauss pada matriks A:

$$R_3 - ({}^0/_2)R_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & \mathbf{2} & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = U$$

Tempatkan $m_{32} = 0/2 = 0$ ke dalam matriks L:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Jadi,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1 , y_2, dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ -y_1 + y_2 &= 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\ 2y_1 + 0y_2 + y_3 &= 5 \quad \rightarrow \quad y_3 = 5 - 2y_1 = 3 \end{aligned}$$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$\begin{array}{lll} 3x_3 & = 3 & \rightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 0x_3 & = 2 & \rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 & \rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

Jadi, solusi sistem persamaan lanjar di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$.

Pertukaran baris untuk matriks yang berukuran besar diperlihatkan oleh matriks di bawah ini:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix} \underset{(*)}{R_5 \Leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \\ 0 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 & b_6 \\ 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \\ 0 & 0 & 0 & e_4 & e_5 & e_6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_5 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & f_4 & f_5 & f_6 \end{bmatrix}$$

Maka, baris ke-5 dan baris ke-4 pada matriks L juga harus dipertukarkan:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & 1 & 0 & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & x & 1 & 0 \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1 \end{bmatrix} \underset{(*)}{R_5 \Leftrightarrow R_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ m_{31} & m_{32} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ m_{51} & m_{52} & m_{53} & 1 & 0 & 0 \\ m_{41} & m_{42} & m_{43} & x & 1 & 0 \\ m_{61} & m_{62} & m_{63} & x & x & 1 \end{bmatrix}$$

Pemfaktoran dengan Metode Reduksi Crout

- Meskipun metode *LU* Gauss dikenal paling baik untuk melakukan dekomposisi *LU*, terdapat metode lain yang digunakan secara luas, yaitu metode reduksi Crout
- Nama lain: **metode reduksi Cholesky** atau **metode *Dolittle***

Dalam membahas metode reduksi Crout, tinjau matriks 3×3 berikut:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{3,2} & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{2,2} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Karena $LU = A$, maka hasil perkalian L dan U itu dapat ditulis sebagai

$$LU = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ l_{21}u_{11} & l_{21}u_{12} + u_{22} & l_{21}u_{13}+u_{23} \\ l_{31}u_{13} & l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} & l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} \end{bmatrix} = A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Dari kesamaan dua buah matriks $LU = A$, diperoleh

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13} \qquad \} \text{ Baris pertama } U$$

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_1 = a_{21} \quad &\rightarrow \quad l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}} \\ l_{31}u_{11} = a_{31} \quad &\rightarrow \quad l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}} \end{aligned}\right\} \text{Kolom pertama } L$$

$$\left.\begin{aligned} l_{21}u_{12} + u_{22} = a_{22} \quad &\rightarrow \quad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} \\ l_{21}u_{13} + u_{23} = a_{23} \quad &\rightarrow \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} \end{aligned}\right\} \text{ Baris kedua } U$$

$$l_{31}u_{12} + l_{32}u_{22} = a_{32} \rightarrow \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}$$ Kolom kedua L

$$l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + u_{33} = a_{33} \rightarrow \quad u_{33} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23}) \quad \}$$ Baris ketiga U

Kita perhatikan ada urutan pola teratur dalam menemukan elemen-elemen *L* dan *U*, yaitu:

(1)elemen-elemen baris pertama dari *U*
(2)elemen-elemen baris pertama dari *L*
(3)elemen-elemen baris kedua dari *U*
(4)elemen-elemen baris kedua *L*
(5)…
(6)elemen-elemen baris ke-*k* dari *U*
(7)elemen-elemen baris ke-*k* dari *L*

Rumus umum menghitung *u* dan *l* untuk sistem dengan matriks *A* yang berukuran 3×3 dapat ditulis sebagai berikut:

$$u_{pj} = a_{pj} - \sum_{k=1}^{p-1} l_{pk}\, u_{kj}, \qquad \begin{array}{l} p = 1, 2, 3, \ldots., n \\ j = p, p+1, \ldots., n \end{array} \qquad \text{(P.4.13)}$$

dan

$$l_{iq} = \frac{a_{iq} - \sum_{k=1}^{q-1} 1_{ik}\, u_{kq}}{u_{qq}} \quad , \quad \begin{array}{l} q = 1, 2, 3, \ldots., n\text{-}1 \\ i = q+1, q+2, \ldots., n \\ \text{dengan syarat } u_{qq} \neq 0 \end{array} \qquad \text{(P.4.14)}$$

Contoh: Selesaikan

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= 5 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

dengan metode dekomposisi *LU*, yang dalam hal ini *L* dan *U* dihitung dengan metode reduksi Crout.

Penyelesaian:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Diperoleh:

$$\begin{aligned} u_{11} &= a_{11} = 1 \\ u_{12} &= a_{12} = 1 \\ u_{13} &= a_{13} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} l_{21} &= a_{21}/u_{11} = 2/1 = 2 \\ l_{31} &= a_{31}/u_{11} = -1/1 = -1 \end{aligned}$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 2 - 2 \cdot 1 = 0$$

Karena u_{qq} tidak boleh nol, lakukan pertukaran baris, baik untuk matriks A maupun untuk vektor b:

<u>Matriks A</u> <u>Vektor b</u>

$$R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad R_2 \Leftrightarrow R_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Hitung kembali nilai l_{21} , l_{31} , dan u_{22} (Perhatikan bahwa nilai u_{11}, u_{12}, u_{13} tidak berubah)

$$l_{21} = a_{21}/u_{11} = -1/1 = -1$$
$$l_{31} = a_{31}/u_{11} = 2/1 = 2$$

$$u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12} = 1 - (-1)(1) = 1 + 1 = 2$$
$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13} = 1 - (-1)(-1) = 1-1 = 0$$

$$l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}} = \frac{2 - 2(1)}{2} = 0$$

Diperoleh L dan U sebagai berikut,

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ dan } b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

Berturut-turut dihitung y dan x sebagai berikut:

$$Ly = b \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

y_1, y_2, dan y_3 dihitung dengan teknik penyulihan maju:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 \\ -y_1 + y_2 &= 1 \quad \rightarrow \quad y_2 = 1 + y_1 = 1 + 1 = 2 \\ 2y_1 + 0y_2 + y_3 &= 5 \quad \rightarrow \quad y_3 = 5 - 2y_1 = 3 \end{aligned}$$

$$Ux = y \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

x_1, x_2, dan x_3 dihitung dengan teknik penyulihan mundur:

$$\begin{array}{lll} 3x_3 & = 3 & \rightarrow x_3 = 1 \\ 2x_2 + 0x_3 & = 2 & \rightarrow x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 & = 1 & \rightarrow x_1 = 1 \end{array}$$

Jadi, solusi sistem persamaan lanjar di atas adalah $x = (1, 1, 1)^T$.

- Jika diamati elemen segitiga bawah pada matriks *U* semuanya bernilai nol, sehingga ruang yang tidak terpakai itu dapat dipakai untuk menyimpan elemen matriks *L*.
- Elemen diagonal matriks *L* seluruhnya 1, jadi tidak perlu disimpan (*default*). Dengan demikian, penyimpanan elemen *L* dan *U* pada satu matriks dapat menghemat penggunaan memori.
- Selain itu, matriks *A* hanya dipakai sekali untuk memperoleh *L* dan *U*, sesudah itu tidak dipakai lagi.
- Dengan demikian, setelah *L* dan *U* diperoleh, elemennya dapat dipindahkan ke dalam *A*.
- Karena alasan ini, maka metode dekomposisi *LU* dinamakan juga metode kompaksi memori.

Determinan

- Metode eliminasi Gauss dapat diterapkan untuk menghitung determinan matriks $n \times n$.
- Determinannya dapat dihitung setelah ia ditransformasi menjadi matriks segitiga atas U.
- Dua hukum penting determinan:

Hukum 1: det(BC) = det(B) $\times$ det(C)

Hukum 2: det(M) = hasil kali semua elemen diagonal M jika M adalah matriks segitiga atas atau matriks segitiga bawah.

Kasus 1: Bila eliminasi Gauss tidak menerapkan tatancang *pivoting*.

- Jika *pivoting* tidak diterapkan, determinan matriks A adalah:

$$
\begin{aligned}
\det(A) &= \det(LU) \\
&= \det(L) \times \det(U) \\
&= \det(U) \\
&= u_{11}\, u_{22}\, u_{33} \ldots u_{nn}
\end{aligned}
$$

- yang dalam hal ini $\det(L) = 1$ sebab semua elemen diagonal L adalah satu.

Kasus 2: Bila eliminasi Gauss menerapkan tatancang *pivoting*.

- Tatancang *pivoting* mengakibatkan pertukaran baris. Dekomposisi *LU* dengan *pivoting* setara dengan mengerjakan dua proses terpisah berikut:
  1. Transformasikan matriks A menjadi matriks A' dengan cara permutasi baris-baris matriks (sama dengan mengalikan A dengan matriks permutasi P),

     $A' = PA$ atau setara dengan $A = P^{-1} A'$

  2. Dekomposisi A' menjadi *LU* tanpa *pivoting*

     $A' = LU$

- Dari (1) dan (2), L dan U dihubungkan dengan A oleh

$$A = P^{-1} A' = P^{-1} LU$$

- Determinan A dapat ditulis sebagai

$$\begin{aligned} \det(A) &= \det(P^{-1}) \times \det(L) \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times 1 \times \det(U) \\ &= \det(P^{-1}) \times \det(U) \\ &= \alpha \det(U) \end{aligned}$$

yang dalam hal ini $\alpha = \det(P^{-1}) = -1$ atau 1 bergantung pada apakah *pivoting* sejumlah bilangan ganjil atau genap.

- Jika *pivoting* dilakukan sejumlah *p* kali, maka α dapat ditulis sebagai:

$$\alpha = (-1)^p$$

- α bernilai 1 untuk *p* genap dan -1 untuk *p* ganjil. Karena itu,

$$\det(A) = (-1)^p \det(U) = (-1)^p\, u_{11}\, u_{22}\, u_{33} \ldots u_{nn}$$

- Contoh: Hitung determinan matriks *A* berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Penyelesaian:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 4 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_2 - {}^{4}/_{2}\, R_1 \\ R_3 - {}^{-2}/_{2}\, R_1 \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} R_3 - {}^{6}/_{-2}\, R_2 \\ \\ \end{matrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}$$

Tidak ada proses *pivoting* selama eliminasi Gauss, maka

$\det(A) = (2)\,(-2)\,(-5) = 20$