极限概念问题

有界性

$$\text{若}\ \exists\ M>0,\ \forall\ x\in I\ ,|f(x)|\le M\text{，则称}\ f(x)\ \text{在}\ I\ \text{上有界}$$

保号性

三角恒等式

$$\arctan x+\arctan\frac{1}{x}=\frac{\pi}{2} \tag{1}$$

一元函数的导数概念问题

导数要求在 `邻域` 内有定义

1. 增量Δx 可正、可负，即要有左导数和右导数且相等
2. $f(x_0)$ 必须出现，若缺少，则不能保证连续

连续和可导之大纠纷

正确结论

1. 可导的充分条件：左导，右导存在且相等
2. 可导一定连续
3. 连续不一定可导

x_0处可导 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ 存在 $\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-f(x_0)]=0$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$

可导，那么 $f(x)$ 在点 x 处连续. 连续

续不是可导的充分条件.

$\Rightarrow$ x_0处连续.

通过图片中的式子，将可导和连续紧密的联系在一起了

可微：$\Delta y=dy+O(\Delta x)=f'(x)\Delta x+O(\Delta x)$,微分是对函数的增量的近似，线性近似！

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=A \Longleftrightarrow g(x)=A+\alpha\text{（其中}\lim_{x\to x_0}\alpha=0\text{）} \tag{1}$$

$$\lim_{x\to x_0} g(x)=0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_0}|g(x)|=0 \tag{2}$$

单调性与导数大纠纷

$f'(x)\geq 0+$仅在有限个点取等 $\Longrightarrow f(x)$单调递增

单调性

不能由单点处的导数符号判断该点邻域内的单调性

$f(x)$连续 $+ f'(0)>0+$ 导函数连续 $\Longrightarrow f(x)$在该邻域内单调递增

证明如下

$$\begin{gathered}
f(x)\text{连续}+f'(0)>0+\text{导函数连续}\\
\Longrightarrow \text{存在0的一个小邻域，可以使得}f'(x)\text{在该邻域不编号}\\
\Longrightarrow f'(0)=\lim_{x\to 0}f'(x)>0,\text{由保号性}\Longrightarrow\text{存在0的一个小邻域使得}f'(x)>0\\
\text{结论：}\Longrightarrow f(x)\text{在该邻域内单调递增}
\end{gathered}$$

极值

前提：在邻域内有定义（不一定连续，或 连续但不可导）

所以要考虑驻点和导数不存在的