行列式

基本性质

$$|A^T| = |A|$$
$$|kA| = k^n|A|$$
$$|A^*| = |A|^{n-1}$$
$$|A^{-1}| = |A|^{-1}$$
$$|A| = \prod \lambda$$
$$|AB| = |A||B|$$
$$|A||B| = |AB|$$

数字型

- 展开公式
- 逐行相加
- 爪型行列式
- 三行对角线
- 两线一星

抽象型

- 行列式性质恒等变形，拆项
- 列向量
- 特征值，相似
- 矩阵公式，法则恒等变形，E恒等变形：加减号，如 $A+B^{-1}$,利用单位矩阵恒等变形， $EA+B^{-1}E=(B^{-1}B)A+B^{-1}(A^{-1}A)$

应用

特征多项式

观察法，加加减减凑出 $\lambda-a$ 的公因式

克拉默法则

矩阵的秩

A中非零子式的最高阶数

$r(A)=r$

- 矩阵的秩=行秩=列秩
- 存在r阶子式不为零，任意r+1阶子式为0

证明$|A|=0$

- $Ax=0$ 有非零解
- 反证法，用 A^{-1} 找矛盾
- $r(A)<n$
- 特征值乘积
- $|A|=-|A|$

常用公式

$$r(A)=r(A^T),r(A^TA)=r(A)$$
$$r(A+B)\le r(A)+r(B)$$
$$r(AB)\le r(A),r(AB)\le r(B)$$

矩阵

单位矩阵

利用可逆矩阵，对单位矩阵进行变形

初等矩阵

单位矩阵经过一次初等变换所得到的的矩阵

碰到矩阵可以简化计算 =w= ，初等矩阵在左边（PA）就是做初等行变换，在右边（AQ）就是初等列变换

初等矩阵均可逆，其可逆是同类型的初等矩阵，（对单位矩阵做一个逆操作即可 ）

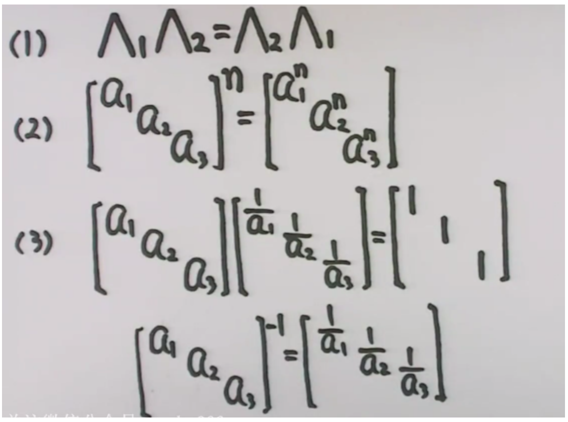
给抽象矩阵，且带下标可设出初等矩阵，将抽象矩阵表示出来

分块矩阵

列向量，行向量展开

列向量 * 行向量 $\rightarrow$ matrix A

行向量* 列向量 $\rightarrow$ number = tr(A)



伴随矩阵

核心公式：$AA^*=A^*A=|A|E$

求A^* 的方法

1. 直接法：用定义（不要丢正负号，不要排错队，第i行第j列的元素为 A_{ji} ）
2. 间接法： $A^*=|A|\cdot A^{-1}$
3. 二阶矩阵求伴随：主对角线元素对换，副对角线元素变号

常用公式

$$AA^*=A^*A=|A|E$$
$$A^*=|A|A^{-1}$$
$$r(A^*)=\begin{cases}n & r(A)=n\\ 1 & r(A)=n-1 \text{ 可联系}n-1\text{阶子式记忆}\\ 0 & r(A)<n-1\end{cases}$$

可逆矩阵

1. $|A|\neq 0$
2. $r(A)=n$
3. A 的列向量线性无关
4. 0 不是 A 的特征值

常用公式

$$(A^{-1})^{-1} = A$$
$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$$
$$(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$$
$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$$
$$(A+B)^{-1}\text{没公式，常利用单位矩阵等价替换}$$

转置矩阵

常用公式

$$(A^T)^T = A$$
$$(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$(AB)^T = B^T A^T$$
$$(A^2)^T = (A^T)^2$$
$$(kA)^T = kA^T$$

正交矩阵

（α, β）＝ 0，则称 α 与 β 正交

$AA^T = A^T A = E$

1. $A^T = A^{-1}$
2. $|A| = 1$或$A = -1$
3. 每个列（行）向量都是单位向量
4. 列（行）向量两两正交

线性方程组

$AB = 0$

说明$AX = 0$有解B，B属于$AX = 0$的解空间

$AX = 0$的解空间的维数等于$n - R(A)$

所以$R(B) \leq n - R(A)$

即$R(A) + R(B) \leq n$