First of ALL

维度：

向量：

无外乎两种方法，一：矩阵的方法，二：向量的方法（矩阵分块），向量组

无外乎两种矩阵，A 和 $\lambda E-A$

无外乎是四种概念：行列式，秩，特征值，特征向量

无外乎是两种向量组：$Ax=0$ 和 $Ax=b$

行列式

基本性质

$$
\begin{gathered}
|A^T|=|A| \\
|kA|=k^n|A| \\
|A^*|=|A|^{n-1} \\
|A^{-1}|=|A|^{-1} \\
|A|=\prod\lambda \\
|AB|=|A||B| \\
|A||B|=|AB|
\end{gathered}
$$

数字型

- 展开公式
- 逐行相加
- 爪型行列式
- 三行对角线
- 两线一星

抽象型

- 行列式性质恒等变形，拆项
- 列向量
- 特征值，相似
- 矩阵公式，法则恒等变形，E恒等变形：加减号，如 $A+B^{-1}$,利用单位矩阵恒等变形， $EA+B^{-1}E=(B^{-1}B)A+B^{-1}(A^{-1}A)$

应用

特征多项式

观察法，加加减减凑出 $\lambda-a$ 的公因式

克拉默法则

矩阵的秩

A中非零子式的最高阶数

$r(A)=r$

- 矩阵的秩=行秩=列秩
- 存在r阶子式不为零，任意r+1阶子式为0

证明$|A|=0$

- $Ax=0$ 有非零解
- 反证法，用 A^{-1} 找矛盾
- $r(A)<n$
- 特征值乘积
- $|A|=-|A|$

常用公式

$$
\begin{gathered}
r(A)=r(A^T), r(A^TA)=r(A) \\
r(A+B) \leq r(A)+r(B) \\
r(AB) \leq r(A), r(AB) \leq r(B) \\
r(A) \leq r(A,B), r(B) \leq r(A,B)
\end{gathered}
$$

特征值

定义：$A\alpha=\lambda\alpha$

上三角，下三角，对角矩阵的特征值就是矩阵主对角线上的元素

特征向量 非零

1. 不同特征值的特征向量线性无关
2. k 重特征值至多有 k 个线性无关的特征向量
3. $|A|=\prod\lambda$
4. $tr(A)=\sum\lambda$
5. 若 $r(A)=1$,则 $\lambda_1=tr(A), \lambda_j=0$

矩阵

单位矩阵

利用可逆矩阵，对单位矩阵进行变形

初等矩阵

单位矩阵经过一次初等变换所得到的的矩阵

碰到矩阵可以简化计算 =w= ，初等矩阵在左边（PA）就是做初等行变换，在右边（AQ）就是初等列变换

初等矩阵均可逆，其可逆是同类型的初等矩阵，（对单位矩阵做一个逆操作即可 ）

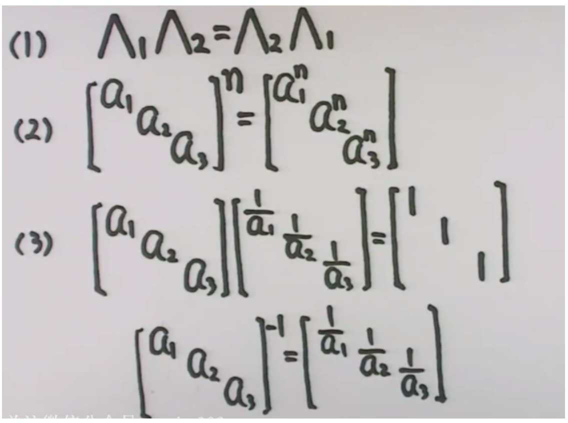
给抽象矩阵，且带下标可设出初等矩阵，将抽象矩阵表示出来

分块矩阵

列向量，行向量展开

列向量 * 行向量 $\rightarrow$ matrix A

行向量* 列向量 $\rightarrow$ number = tr(A)



伴随矩阵

核心公式：$AA^* = A^*A = |A|E$

求A^* 的方法

1. 直接法：用定义（不要丢正负号，不要排错队，第i行第j列的元素为 A_{ji} ）
2. 间接法： $A^* = |A| \cdot A^{-1}$
3. 二阶矩阵求伴随：主对角线元素对换，副对角线元素变号

常用公式

$$AA^* = A^*A = |A|E$$
$$A^* = |A|A^{-1}$$
$$r(A^*) = \begin{cases} n & r(A) = n \\ 1 & r(A) = n-1 \ \text{可联系}n-1\text{阶子式记忆} \\ 0 & r(A) < n-1 \end{cases}$$

可逆矩阵

1. $|A| \neq 0$
2. $r(A) = n$
3. A 的列向量线性无关
4. 0 不是 A 的特征值

常用公式

$$(A^{-1})^{-1}=A$$
$$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$$
$$(A^n)^{-1}=(A^{-1})^n$$
$$(kA)^{-1}=\frac{1}{k}A^{-1}$$
$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}A^*$$
$$(A+B)^{-1}\text{没公式，常利用单位矩阵等价替换}$$

转置矩阵

常用公式

$$(A^T)^T=A$$
$$(A+B)^T=A^T+B^T$$
$$(AB)^T=B^TA^T$$
$$(A^2)^T=(A^T)^2$$
$$(kA)^T=kA^T$$

实对称矩阵

1. 可相似对角化
2. 不同特征值的特征向量必 正交
3. k 重特征值必有 k 个线性无关的特征向量

正交矩阵

（α,β）= 0，则称 α 与 β 正交

$AA^T=A^TA=E$

1. $A^T = A^{-1}$
2. $|A| = 1$或$A = -1$
3. 每个列（行）向量都是单位向量
4. 列（行）向量两两正交

1.

线性方程组

$AB = 0$

说明$AX = 0$有解B，B属于$AX = 0$的解空间

$AX = 0$的解空间的维数等于$n - R(A)$

所以$R(B) \leq n - R(A)$

即$R(A) + R(B) \leq n$

相似

$$
\begin{aligned}
A \sim B & \qquad \Longrightarrow A^n \sim B^n \\
A \sim B & \qquad \Longleftrightarrow A + kE \sim B + kE \\
A \sim B, B \sim C & \qquad \Longrightarrow A \sim C
\end{aligned}
$$

A	λ	α
$kA+E$	$k\lambda+1$	α
$A+kE$	$\lambda+k$	α
A^{-1}	$\frac{1}{\lambda}$	α
A^*	$\frac{\|A\|}{\lambda}$	α
A^n	λ^n	α
$B=P^{-1}AP$	λ	$P^{-1}\alpha$

可以相似，但不一定能相似对角化

可相似对角化的充分条件

1. 实对称矩阵
2. 有n个不同的特征值
3. k重特征值 λ_k ，$n-r(\lambda_kE-A)==k$
4. special: $r(A)=1$ ，直接写特征多项式 / 特征值

相似的必要条件

秩，迹，行列式，特征多项式，特征值都相等

1. $r(A)=r(B)$
2. $|A|=|B|$
3. $|\lambda E-A|=|\lambda E-B|$
4. $tr(A)=tr(B)$