1.ª SECÇÃO — CIÊNCIAS E TÉCNICAS — NÚMERO 7

MATEMÁTICA E COSMOLOGIA

Conceitos Fundamentais da Matemática

por BENTO DE JESUS CARAÇA

Vol. II

SUMÁRIO

Estudo matemático das leis naturais: I Ciência e lei natural; II Conceito de função ■ Pequena digressão técnica ■ Equações algébricas e números complexos ■ Excursão histórica e filosófica

18

5$00

1

CONCEITOS
FUNDAMENTAIS
DA MATEMÁTICA

BIBLIOTECA COSMOS
Direcção do Prof. Bento de Jesus Caraça
(da Universidade Técnica de Lisboa)

N.º 18 1.ª Secção — Núm.º 7 — Ciências e Técnicas
a) Matemática e Cosmologia

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA

Por BENTO DE JESUS CARAÇA

Vol. II

BIBLIOTECA NACIONAL

COSMOS
Rua da Emenda, 111-2.º
LISBOA

COMPRA
292699

51
S.A
37 17

Composição: *Edições Cosmos* — R. da Emenda, 111-2.º
Impressão: *Gráfica Lisbonense* — Rua da Rosa, 238 LISBOA

M.Ub. 232283 ps.

CAPÍTULO I

Estudo matemático das leis naturais

I — Ciência e lei natural

1. — Objecto da ciência No capítulo IV do vol. I (pág. 80 e seg.) vimos como o homem, na sua necessidade de *lutar* contra a Natureza e no seu desejo de a *dominar,* foi levado, naturalmente, à observação e estudo dos fenómenos, procurando descobrir as suas *causas* e o seu *encadeamento.*

Os resultados dêsse estudo, lentamente adquiridos e acumulados, vão constituindo o que, no decurso dos séculos da vida consciente da Humanidade, se pode designar pelo nome de *Ciência.* O *conhecimento científico* distingue-se, portanto, do conhecimento *vulgar* ou *primário,* no facto essencial seguinte: êste satisfaz-se com o resultado imediato do fenómeno — uma pedra abandonada no ar, cai; uma leve pena de ave, abandonada no ar, paira ou sobe —; aquêle faz a pregunta *porquê?* e procura uma resposta que dê uma explicação aceitável pelo nosso entendimento.

O objectivo final da Ciência é, portanto, a formação de um *quadro ordenado e explicativo* dos fenómenos naturais, (1) — fenómenos do mundo físico e do mundo humano, individual e social.

2. — Exigências Duas são as exigências fundamentais a que êsse quadro explicativo deve satisfazer:

---

(1) No parág. 9, pág. 19, se encontra a noção precisa de *fenómeno natural.*

1.ª — *Exigência de compatibilidade.* As razões são as que demos no parág. 5 do cap. III (vol. I, pág. 65) — obediência ao princípio de *acôrdo da razão consigo própria.*

2.ª — *Exigência de acôrdo com a realidade.* Os homens pedem à Ciência que lhes forneça um meio, não só de conhecer, mas de *prever* fenómenos — quanto maior fôr a possibilidade de previsão, maior será o domínio dêles sôbre a Natureza; quem sabe prever sabe melhor defender-se e, além disso, pode provocar a repetição, para seu uso, dos fenómenos naturais. A Ciência deve ser considerada, acima de tudo, como um *instrumento forjado pelos homens,* instrumento *activo de penetração no desconhecido.*

E' evidente que, se as previsões fornecidas pelo quadro explicativo não forem confirmadas pela realidade, êsse quadro pode satisfazer altamente a primeira exigência, mas nunca poderá ser o instrumento de que os homens necessitam.

Entendamo-nos bem. A Ciência não tem, *nem pode ter,* como objectivo descrever a realidade *tal como ela é.* Aquilo a que ela aspira é a construir quadros racionais de *interpretação* e *previsão;* a legitimidade de tais quadros dura enquanto durar o seu acôrdo com os resultados da observação e da experimentação.

Em nenhum momento, o homem de ciência pode dizer que *atingiu* a *essência última* da realidade; o mais que pode desejar é dar uma descrição, uma *imagem,* que satisfaça às duas exigências fundamentais.

A História da Ciência está cheia de exemplos de renovação e substituïção de quadros explicativos, tornados insuficientes por deixarem de satisfazer à segunda exigência; a todo o momento, a actividade teórica (construção de quadros) e a actividade prática (observação e experimentação) estão, não só colaborando, mas em *acção-recíproca,* que faz que nenhum

esquema interpretativo esteja isento da substância real que o alimenta, que nenhuma experiência esteja desacompanhada da actividade racional que a inspira e orienta.

E é esta acção-recíproca, tantas vezes desconhecida ou desdenhada por certos homens de ciência e certos filósofos, que vai a todo o momento tecendo a Ciência, fazendo dela êsse maravilhoso instrumento humano, instrumento de luta, sempre incompleto, constantemente aperfeiçoado.

3. — As duas características fundamentais

A *Realidade* que a inteligência dos homens se esforça por compreender, o Mundo, no seu sentido mais largo, apresenta-se com duas características essenciais:

1.ª — *Interdependência.* Tôdas as coisas estão relacionadas umas com as outras; o Mundo, tôda esta *Realidade* em que estamos mergulhados, é um organismo vivo, uno, cujos compartimentos comunicam e participam, todos, da vida uns dos outros.

Olhemos, por exemplo, coisa tão simples como o crescimento duma pequena erva num campo, e examinemos, com cuidado, as coisas de que depende: temos, em primeiro lugar, a constituïção geológica do solo, a quantidade de calor recebida do sol, etc., coisas que não podem perceber-se desligadas da situação da terra no sistema solar, e dêste no Universo; é, por conseqüência, todo o problema cosmológico. Em segundo lugar, sôbre o crescimento da pequena planta influem as condições climatéricas da região, e estas dependem de tôda a complexidade de fenómenos atmosféricos e marinhos, actividade das manchas solares, etc.. Temos, ainda, a acção exercida pelos outros organismos vegetais e animais — ¿há, próximo da pequena erva, outras plantas? quais? e animais? de que natureza?

¿concorrendo para a sua destruïção ou para a sua conservação? ¿é a região habitada pelo homem? se é, ¿que interêsse tem êle pela pequenina planta? ¿que animais cria êle que a possam prejudicar ou favorecer? porquê? ¿que condições de fertilidade proporciona êle ao solo? ¿que regime de cultura exerce? porquê? ¿quais são as condições de trabalho da região?

Como se vê, uma vez examinada a questão com um pouco de cuidado, começam a aparecer as dependências, a ligar-se os problemas;—problema cosmológico, problema físico, problema económico, problema social, tocam-se e entrelaçam-se no mais ínfimo detalhe do organismo universal.

2.ª—*Fluência.* O mundo está em permanente evolução; tôdas as coisas, a todo o momento, se transformam, tudo *flue,* tudo *devém.* Isto, que é a afirmação fundamental do filósofo *Heraclito* de Efeso (vol. I, pág. 83 e seg.) foi, posteriormente, reconhecido por grandes pensadores e pode ser verificado por qualquer de nós, seja qual fôr aquêle objecto em que fixemos a nossa atenção. ¿Pois não é verdade que tudo está sujeito a uma mesma lei de nascimento, vida e morte, que, por sua vez, vai originar outros nascimentos?

Isto é evidente para os sêres do mundo animal; é-o ainda para os do mundo vegetal, mas parece falso para os objectos do mundo mineral.

No entanto, basta observar com atenção, tomando o recúo conveniente; notar como até as coisas mais estáveis se alteram com o tempo: como o ferro envelhece com a ferrugem, como a rocha se desagrega e se torna areia, como as próprias montanhas mudam de forma pela erosão, como os rios mudam de leito, as margens dos continentes ganham e perdem em luta com o mar. Tudo está numa permanente agitação e, por graus insensíveis, evolucionando de forma que a Terra não é, neste instante, a mesma que era há momentos, e será

daqui a uns momentos diferente da que é agora. De tal modo que nem a própria frase «o que é agora» tem significado real; — durante o tempo que ela levou a pronunciar, ou a escrever, o processo de evolução actuou e a Terra transformou-se. E evolucionando assim, ela participa ainda doutra evolução mais larga; girando em tôrno do sol, ela entra na vida de outro organismo — o sistema solar — com a sua evolução própria que condiciona a de cada um dos seus componentes. E assim, do mesmo modo, de grau em grau de complexidade e de extensão; do sistema solar à Via Láctea, desta ao Universo, considerado como conjunto de ilhas galácticas.

De modo que, do extremo superior ao inferior da escala, do movimento prodigioso de *expansão* do Universo, ao movimento, não menos prodigioso, das partículas constituintes do átomo, — tudo flue, tudo devém, tudo é, a todo o momento, *uma coisa nova.*

Êste princípio do permanente rejuvenescimento tem preocupado os pensadores de todos os tempos e provocado as atitudes mais contraditórias.

Uns, aceitando-o como um dado real, uma característica fundamental da Natureza, fazem dêle a base de partida do seu esfôrço na compreensão do real. Outros, aterrorizados pelo sentimento de instabilidade que êle provoca, instabilidade que nada poupa, do mundo físico ao mundo social, reagem, procurando substituir o mundo real do *devir,* por um mundo artificial da *permanência.*

A História do Pensamento está cheia desta luta gigantesca, luta de que traçámos, no cap. IV do vol. I, um dos primeiros episódios.

Não é objecto dêste livrinho a descrição completa das fases posteriores dessa luta, mas a ela teremos que nos referir ainda para esclarecimento de certos problemas.

Por agora, vamos seguir o fio dos raciocínios que fazem objecto directo dêste capítulo: — o estudo matemático das leis naturais.

4. — Dificuldades Comecemos por observar que as duas características fundamentais que apontámos — interdependência e fluência — nos colocam em sérios embaraços ao pretendermos empreender o estudo de qualquer facto natural.

Se tudo depende de tudo, ¿como fixar a nossa atenção num objecto particular de estudo? ¿temos que estudar tudo ao mesmo tempo? ¿mas qual é o cérebro que o pode fazer?

Por outro lado, se tudo *devém*, ¿como encontrar, no mundo movente da fluência, os factos, os sêres, os próprios objectos do nosso estudo?

Veremos, no decorrer dêste trabalho, como os homens de ciência conseguiram encontrar os métodos de investigação que permitem fazer o estudo da realidade fluente.

Agora, vamos ocupar-nos do primeiro grupo de preguntas: — as referentes à interdependência.

5. — Noção de isolado Na impossibilidade de abraçar, num único golpe, a totalidade do Universo, o observador (1) *recorta, destaca*, dessa totalidade, um conjunto de sêres e factos, abstraindo de todos os outros que com êles estão relacionados.

A um tal conjunto daremos o nome de *isolado;* um *isolado* é, portanto, uma *secção* da realidade, nela

(1) Entenderemos aqui o têrmo *observador* num sentido muito largo: todo aquêle — homem de ciência, agricultor, literato — que, num dado momento, empreende um estudo qualquer.

recortada arbitràriamente. E' claro que o próprio facto de tomar um *isolado* comporta um êrro inicial — afastamento de todo o resto da realidade ambiente, — êrro que necessàriamente se vai reflectir nos resultados do estudo. Mas é do bom-senso do observador recortar o seu *isolado* de estudo, de modo a compreender nêle todos os factores dominantes, isto é, todos aquêles cuja acção de interdependência influe sensìvelmente no fenómeno a estudar. Que nem sempre isso se consegue, a história da Ciência e a vida de todos os dias oferecem múltiplos exemplos. Quantas vezes, na observação de um certo fenómeno ou no decurso duma dada acção, surge um facto inesperado. ¿Que quere dizer — *inesperado?* Que o *isolado* não fôra convenientemente determinado, que um factor dominante estava ignorado e se revelava agora. ¿Será preciso acrescentar que no aparecimento do *inesperado* reside um dos motivos principais do progresso no conhecimento da realidade, porque, obrigando a uma melhor determinação do *isolado*, exige um mais cuidado exame das condições iniciais?

Muitas vezes, o estudo encaminha-se de modo que há necessidade de tomar um *isolado* como elemento constitutivo de um outro mais largo.

Por exemplo, após ter tomado como *isolado* cada um dos órgãos duma árvore e estudado a sua fisiologia particular, constitue-se um *isolado* superior — árvore e terreno — no qual se estudará a vida fisiológica da árvore. Por sua vez, a árvore pode ser tomada como uma unidade dum novo *isolado* mais largo — uma floresta, — esta como unidade dum outro mais largo ainda — a flora duma certa região etc. Quere dizer, para a recomposição dum certo compartimento da Realidade, é necessário constantemente construir *cadeias*, e a cada élo da cadeia corresponde um *nível* de *isolado*.

6. — Noção de qualidade

No cap. VI do vol. 1.º (pág. 120) tivemos já ocasião de definir o conceito de *qualidade,* o que fizemos da maneira seguinte: «ao conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com os outros sêres dum agregado, chamaremos as qualidades dêsse ser».

Temos agora que dar maior precisão a êsse conceito, porque êle importa grandemente para o que vai seguir-se.

Sejam A e B dois componentes dum *isolado;* entre êles existem relações de interdependência. Consideremos uma dessas relações; nela podemos distinguir dois *sentidos:* um de A para B, e outro de B para A; diremos, do primeiro sentido, que tem *antecedente* A e *conseqüente* B, do segundo, que tem *antecedente* B e *conseqüente* A; distingui-los-emos respectivamente pelas notações: *sentido de relação* $A \rightarrow B$ e *sentido de relação* $B \rightarrow A$.

Por exemplo, suponhamos que A e B são duas espécies animais, das quais B se alimenta de A. Nesta relação, o sentido $A \rightarrow B$ implica para o conseqüente B uma fonte de *conservação,* e o sentido $B \rightarrow A$ implica para o conseqüente A uma fonte de *destruïção.*

A relação é uma, simplesmente os seus dois sentidos teem significados distintos para os respectivos conseqüentes.

Pode acontecer que os dois sentidos duma mesma relação tenham o mesmo significado; diremos então que se trata duma *relação simétrica.*

Por exemplo: de acôrdo com a lei de gravitação de *Newton,* entre dois corpos c e c', de massas m e m', desenvolve-se uma fôrça atractiva cuja intensidade é proporcional ao produto $m.m'$; aqui, os dois sentidos $c \rightarrow c'$ e $c' \rightarrow c$ teem o mesmo significado — desenvolvimento duma acção atractiva.

Definição de qualidade: — Sejam A, B, ··· L *componentes dum isolado; ao conjunto de tôdas as relações* A → B, ··· A → L *dá-se o nome de qualidades de* A *em relação a* B, ··· L.

Desta definição resultam algumas conseqüências importantes:

1.ª — Dados dois objectos A e B, entre êles existem sempre relações de interdependência; a cada uma delas corresponde uma qualidade de A em relação a B, e uma qualidade de B em relação a A; se a relação fôr *simétrica,* cada uma das duas qualidades que dela resultam diz-se também *simétrica.* Por exemplo, a qualidade atractiva existente entre duas massas quaisquer *m* e *m'* é simétrica; é também simétrica a *qualidade de equivalência* entre dois conjuntos (vol. 1.º, cap. I, parág. 8 e 14).

2.ª — Não se pode falar de *qualidades intrínsecas* dum ser ou objecto, de qualidades que residam no *objecto-em-si.* As qualidades são relações orientadas; se os conseqüentes mudam, mudam as relações. Por exemplo, uma fôlha de amoreira tem, para a árvore, a qualidade de ser um órgão de respiração, para o bicho da sêda, a de ser um meio de nutrição, para o homem, a de ser verde, de poder servir de meio económico, etc..

3.ª — E' indispensável que o leitor se familiarize com a idéia de plasticidade e fluência da noção de qualidade, que se compenetre bem desta verdade fundamental — *a isolado novo, qualidades novas.* E' preciso sempre, quando se consideram as qualidades dum ser, pensar no isolado a que êle pertence, *pensar no seu contexto;* só em relação ao contexto é que as qualidades teem significado.

Assim como há níveis de isolado (parág. 5), assim há também *níveis de qualidade;* o leitor tem alguns

exemplos no cap. VI do vol. I (pág. 119), e com facilidade encontra muitos outros.

7.—Noção de quantidade

Há qualidades que não são susceptíveis de admitir graus diferentes de intensidade, isto é, qualidades a respeito das quais se não podem fazer juízos de *mais que, maior, menos que, menor.*

Por exemplo, uma circunferência não é mais nem menos circular que outra; duas rectas, em geometria euclideana, não podem ser mais ou menos paralelas — ou são paralelas ou são concorrentes.

Do mesmo modo, dados dois movimentos que, em relação a um sistema de referência, são rectilíneos e uniformes, não se pode dizer de um dêles que é mais ou menos rectilíneo e uniforme que o outro.

Para outras qualidades, porém, o caso passa-se de maneira diferente; vejamos dois exemplos:

Exemplo a) João, António e Manuel são três indivíduos a respeito dos quais, pelo conhecimento que temos do seu comportamento em situações semelhantes, consideramos João como mais corajoso que António e António como mais corajoso que Manuel. A qualidade *coragem,* que João, António e Manuel teem em relação a *nós, observadores,* admite graduações de intensidade, as quais respeitam a transitividade, — se temos João como mais corajoso que António e António como mais corajoso que Manuel, temos evidentemente João como mais corajoso que Manuel.

Exemplo b) Consideremos um corpo c em movimento e seja v a sua velocidade em cada ponto da trajectória [1]. Esta qualidade — velocidade do móvel c —

[1] Só no vol. III será definido com rigor o que se entende por velocidade num ponto; para a compreensão do que se diz aqui, basta, porém, a noção intuïtiva que tôda a gente tem do significado duma frase como esta: — o combóio passou pela gare de X... a 70 km. à hora.

é susceptível de intensificação, de aumentar ou diminuir, como tôda a gente sabe.

Pois bem,—*daquelas qualidades, como as dos exemplos a) e b), a respeito das quais se podem fazer os juízos de mais que, menos que, maior que, menor que, diremos que admitem variação segundo a quantidade.*

A *quantidade* aparece-nos assim como um *atributo da qualidade* e é sempre neste sentido que usaremos o têrmo neste livrinho. Na linguagem corrente êle é por vezes tomado como sinónimo de *número;*—quando se diz: uma grande quantidade de pessoas, quere significar-se: um grande número de pessoas.

Na linguagem científica e filosófica, o têrmo *quantidade* é empregado, muitas vezes, com sentidos diferentes. *Aristóteles* definiu quantidade como «aquilo que é divisível em dois ou mais elementos integrantes, dos quais cada um é, por natureza, uma coisa una e determinada». (1)

Freqüentemente, toma-se quantidade como «aquilo que é objecto de medida» ou, pelo menos, aquilo que, por natureza, admite ser medido, ainda que se não possa representá-lo efectivamente por um número. (2)

O sentido que aqui usaremos e que acima estabelecemos, é, como o leitor, vê, diferente.

Consideramos a quantidade como um *atributo* da qualidade e não como um *objecto;* nem sequer exigimos que haja possibilidade de *medir* para falarmos em quantidade. No exemplo *b),* a quantidade (da velocidade) pode ser medida; tem sentido o falar-se duma velocidade dupla, tripla, de outra; mas no exemplo *a)* não se dá isso—a qualidade *coragem* admite uma variação segundo a quantidade, mas essa variação não é traduzível em números; tem sentido o dizer-se que

(1) Metafísica Δ 13, 1020 a.
(2) Vocabulário filosófico de *A. Lalande,* artigo *Quantité.*

João é mais corajoso que António mas não que a coragem de João é dupla da de António.

De-resto, o poder ou não traduzir-se em números uma variação de quantidade é uma questão que depende, acima de tudo, do grau de conhecimento momentâneo dos homens; não é, de modo nenhum, uma questão que possa pôr-se em absoluto. O progresso das ciências de observação permite em certa altura *medir* o que antes se sabia apenas que variava segundo a quantidade.

¿O que é necessário para que se possa medir uma variação de quantidade?(1) — Que cada estado possa ser obtido, por adição, a partir de outros estados, e que essa adição seja comutativa e associativa.(2) Tomando então um dêsses estados, convenientemente escolhido, para *unidade*, a medição faz-se comparando cada estado com aquêle que se tomou como unidade; veja o leitor o que dissemos a pág. 40 e seg. do vol. I a propósito da medição de segmentos e interprete-o dentro dêstes elementos teóricos gerais que estamos agora apresentando.

Como imediatamente se verifica, a possibilidade de medição existe, no estado actual do nosso conhecimento, no caso do exemplo b) e não existe no do exemplo a).

Em resumo, a *quantidade é um atributo da qualidade* e, como tal, *só em relação a ela pode ser considerada*. A questão de saber se a variação de quantidade é ou não susceptível de medida não tem significado absoluto mas apenas significado *histórico;* — num dado momento, em determinado estado de avanço das ciências da Natureza, pode aprender-se a medir o que até aí era impossível.

---

(1) V. Pierre Duhem, *La Théorie Physique*, pág. 163.
(2) Vol. 1.º, cap. I, pág. 27-28.

8. — Transformação da quantidade em qualidade

Aos homens interessa, como atrás dissemos, (parág. 1) construir um *quadro explicativo* dos fenómenos naturais. Em que consiste?

Tomemos um certo *isolado* de estudo; arrastado na fluência de tôdas as coisas, êle transforma-se — cada um dos seus componentes *devêm* a todo o instante uma coisa nova. Alterando-se constantemente os elementos constitutivos, alteram-se as suas relações, isto é, as suas *qualidades*, e o *isolado* aparece a todo o momento com qualidades novas.

Rigorosamente, deveríamos dizer que a cada momento temos um *isolado novo*, mas, pelo mesmo acto arbitrário que nos levou já a *recortá-lo* do seio da Realidade (acto justificado pela necessidade e comodidade de estudo), diremos que o isolado *evoluciona* e que os diferentes estados observados correspondem, não a isolados novos, mas a diferentes *fases de evolução* do isolado inicial. Este modo de ver é, naturalmente, condicionado e limitado pela própria natureza da evolução — pode chegar uma certa altura em que o isolado apresente qualidades de tal modo diferentes que não haja vantagem ou possibilidade de o considerar o mesmo. Vai aqui muito do bom-senso do observador e das conveniências do seu estudo.

O aparecimento de qualidades novas no decurso da evolução de um isolado, ou a sua transformação noutro com estrutura qualitativa diferente, põe em evidência a ligação íntima, já acima assinalada, entre os conceitos de qualidade e quantidade.

Consideremos um corpo em queda livre no ar: por exemplo, uma pedra abandonada sem velocidade inicial no alto duma tôrre. Mostra a observação que o movimento da pedra é, a princípio, uniformemente ace-

lerado(1) mas que a resistência do ar exerce sôbre ela uma acção de freio cada vez mais intensa, de modo que, a certa altura, o movimento se torna uniforme, isto é, a velocidade não aumenta mais, conserva-se constante. (Seja dito de passagem que é devido a isto que se torna possível o uso de paraquedistas na guerra moderna).

Analisemos êste facto à luz dos princípios que temos vindo a expor.

Temos um isolado — terra-pedra — no qual existem, entre outras, estas duas qualidades: a) *movimento acelerado* da pedra em relação à terra, por virtude da acção da gravidade; b) *resistência do ar* opondo-se à queda. A *quantidade* de cada uma destas qualidades varia durante a queda, e essas qualidades são tais que o aumentar da quantidade de resistência do ar provoca a diminuïção da quantidade de velocidade de queda; pode, portanto, dizer-se que a intensificação da quantidade da resistência do ar *contraria* a qualidade *movimento acelerado*. Chega um momento — é a experiência que o mostra — em que a intensificação da quantidade de resistência do ar atinge um nível tal que o movimento deixa de ser acelerado para passar a ser uniforme; daí em diante, a velocidade, que vinha a aumentar *cada vez menos*, passa a ser constante. Nesse momento, a qualidade movimento acelerado desapareceu e surgiu outra — *movimento uniforme*.

Vê-se, portanto, como a intensificação duma quantidade, que contraria uma qualidade estrutural dum isolado, pode chegar a destruir essa qualidade e a fazer surgir uma qualidade nova. É com êste significado

(1) Movimento em que a velocidade é crescente e proporcional ao tempo; se a queda se realizasse no vácuo, a relação entre a velocidade e o tempo seria $v = 9{,}81 \,.\, t$. (t medido em segundos, v em metros).

que se fala na *transformação da quantidade em qualidade.* O ponto (empregando aqui o têrmo ponto como indicativo dum conjunto de condições) em que essa transformação se dá, chama-se *ponto crítico* da evolução do isolado.

A vida quotidiana oferece-nos a todo o momento exemplos de transformações destas. A ebulição da água, o rompimento duma membrana ou chapa a que se faz suportar um pêso crescente, para não falar já da multidão de factos que a história nos apresenta — formação e dissolução de agregados políticos, etc., — são fenómenos nos quais em dado momento foi atingido o *ponto crítico* em que a quantidade se transformou numa qualidade nova.

9. — Noção de lei À evolução dum isolado, chamaremos daqui em diante um *fenómeno natural.*

Fenómenos naturais são, portanto, o movimento dos corpos, a vaporização da água sob a acção do calor, a passagem duma corrente eléctrica num condutor, a germinação duma semente, o exercício de direitos políticos pelos cidadãos, etc..

Em virtude desta definição, explicar um fenómeno é explicar a evolução dum isolado.

Essa evolução manifesta-se pela alteração das qualidades dos componentes do isolado; logo, *explicar um fenómeno é dar o porquê da alteração das qualidades.* Mas, êsse porquê ¿como atingi-lo? ¿Pode o homem estar certo de nalgum instante ter alcançado a *essência íntima* das coisas (para empregar, por um momento, a linguagem da metafísica)? Tarefa vã! As coisas revelam-se-nos pelas suas relações connosco — nada mais podemos atingir que isso!

O trabalho do cientista é, portanto, o de observar e descrever os fenómenos e ordenar os resultados da

sua observação num *quadro explicativo* — construção intelectual — coerente, e cujas conseqüências e previsões sejam confirmadas pela observação e experimentação.

A observação mostra que há certos fenómenos que apresentam *regularidades,* isto é, comportamento idêntico, desde que as condições iniciais sejam as mesmas.

A existência de regularidades é extremamente importante porque permite a *repetição* e *previsão,* desde que se criem as condições iniciais convenientes; ora, *repetir* e *prever* é fundamental para o homem na sua tarefa essencial de dominar a Natureza. Tôda a *técnica* se baseia nisso, e o leitor que pense um momento na possibilidade e utilidade dessa técnica na vida corrente — de um extremo ao outro da aparelhagem técnica, da enxada ao ciclotrão — verificará sem trabalho que tal possibilidade e utilidade se baseiam nestas duas coisas essenciais: repetir os fenómenos tantas vezes quantas seja preciso, prever os seus resultados.

Daqui resulta que uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Natureza é a *procura de regularidades* dos fenómenos naturais.

Definição: — Chamaremos lei natural a tôda a regularidade de evolução dum isolado.

Com esta definição, e do que anteriormente se disse, fica estabelecido que o quadro explicativo que os homens procuram construir deve assentar sôbre leis naturais, e que na sua procura e ordenação deve consistir o objectivo essencial da Ciência.

10. — Diferentes tipos de lei Estamos de posse do conceito de lei; percebe-se que, conforme a natureza do isolado e da sua evolução, possa haver dois tipos fundamentais de lei:

lei qualitativa—aquela que diz respeito a variação de qualidade;

lei quantitativa—aquela que diz respeito a variação de quantidade.

Que estes dois tipos não podem ser rìgidamente separados, é evidente em virtude do que foi dito nos parágrafos 7 e 8; *a utilidade da distinção está em que a lei acentua, por vezes, um ou outro aspecto da Realidade.* Freqüentemente, mesmo, a lei põe em evidência a ligação íntima da qualidade e quantidade, de modo tal que se não pode classificá-la em nenhum dos dois tipos; diremos então que se trata duma lei *qualitativa-quantitativa* (em rigor, tôdas o são).

Vejamos alguns exemplos de leis:

I. — Cada planeta descreve em tôrno do sol uma elipse, da qual o sol ocupa um dos focos *(1.ª lei de Kepler)*(1).

II. — Para todo o gás existe uma temperatura, chamada temperatura crítica, acima da qual êle não pode ser liquefeito; logo que a temperatura desça abaixo da temperatura crítica, o gás pode liquefazer-se, submetendo-o a uma pressão conveniente.

III. — Entre dois corpos de massas m e m' desenvolve-se uma fôrça atractiva que é directamente proporcional ao produto das duas massas e inversamente proporcional ao quadrado das distâncias dos dois corpos *(lei da gravitação de Newton)* (2).

IV. — Tôda a necessidade tende a provocar as reacções próprias a dar-lhe satisfação *(1.ª lei da psicologia funcional de Claparède).*

V. — Para todo o corpo, em queda livre no vácuo, as

(1) *João Kepler*, astrónomo que pode ser considerado como um dos precursores da astronomia moderna (1571-1630).

(2) *Isaac Newton* (1642-1727); físico e matemático, uma das figuras dominantes da ciência moderna.

alturas de queda são directamente proporcionais aos quadrados dos tempos de queda *(lei da queda dos graves)*.

Destas cinco leis naturais, a primeira e quarta podem ser consideradas como leis qualitativas, a terceira e quinta como leis quantitativas, com as restrições que acima pusemos à classificação. Quanto à segunda, ela fornece o tipo do que chamámos lei qualitativa-quantitativa — a manutenção da qualidade estado gasoso está dependente de variações quantitativas de pressão e temperatura, e o objectivo da lei é, precisamente, acentuar essa ligação, determinando as condições sob as quais a quantidade (de pressão) se pode transformar em qualidade nova (estado líquido).

11. — ¿Primado da qualidade ou da quantidade?

A Realidade existe, independente da nossa vontade. Mergulhados na fluência universal e tendo necessidade, para fins humanos, de a explicar, lançamos, sôbre ela, tôda uma teia de leis — regularidades dos fenómenos tais como se nos revelam.

A tonalidade geral dessas leis, o tipo dominante delas, ¿é qualitativo ou quantitativo? ¿A qual dos dois damos o primado para a *explicação?* A história da Ciência dá a esta pregunta uma resposta nítida — *à medida que a Realidade se vai conhecendo melhor, o primado tende a pertencer ao tipo quantitativo.*

Não é que a Ciência, no seu avanço, tenda a pôr de parte a *qualidade,* e isso seria, mesmo, absurdo, uma vez que as qualidades traduzem as relações de interdependência dos sêres uns com os outros (parág. 6) e a *interdependência* é, precisamente, uma das características essenciais da Realidade (parág. 3). Mas a Ciência não se ocupa apenas de *descrever,* empreende a tarefa de *explicar* e, nesta, há um facto que se

impõe com fôrça cada vez maior — *para obter a explicação das variações de qualidade há que aprofundar o estudo das variações de quantidade.*

A segunda lei que demos como exemplo no parágrafo 10 oferece-nos uma ilustração flagrante disto. Durante muito tempo, os físicos não encontravam explicação para o facto seguinte: — a maioria dos gases podia liquefazer-se por um aumento conveniente de pressão, mas outros, denominados então gases refractários ou *permanentes* (oxigénio, hidrogénio, azoto e alguns outros), suportavam as maiores pressões sem se liquefazerem. Só em 1863, *Andrews* mostrou a existência, para cada gás, de uma *temperatura crítica,* acima da qual não se podia obter a liquefação. Ora, dava-se a circunstância de que, para os gases de que já se obtivera a liquefação, essa temperatura era relativamente alta (15,°7 para o anidrido sulfuroso, por exemplo), e, por êsse motivo, às temperaturas a que normalmente se operava estavam criadas as condições de liquefação. Para os gases refractários, porém, a temperatura crítica é extremamente baixa (—119° para o oxigénio, —147° para o azoto, —240° para o hidrogénio) e, portanto, só abaixo dessas temperaturas êles podem ser liquefeitos por aumento de pressão. ¿Vê o leitor como só uma variação de quantidade (temperatura) permitiu dar uma *explicação* do fenómeno — alteração de qualidade — até aí misterioso?

Exemplos como êste oferece-nos a história da Ciência em abundância.

Mas há mais...

12. — O perigo do verbalismo

É tão fácil pôr um nome a uma coisa! arranjar um rótulo, para encobrir a nossa ignorância! E tão generalizada a tendência, em certas épocas históricas, para elevar os rótulos à categoria de explicação!

O físico francês *Pierre Duhem*, referindo-se, no seu belo livro *A teoria física*, à querela entre os cientistas de espírito moderno do Renascimento e os filósofos tradicionais da Escolástica, diz: «*Aquilo de que os filósofos do Renascimento acusavam, acima de tudo, os filósofos escolásticos era de inventarem uma qualidade nova cada vez que um fenómeno novo lhes chamava a atenção; de atribuírem a uma virtude particular cada efeito que não tinham nem estudado nem analisado; de imaginarem que tinham dado uma explicação onde se tinham limitado a pôr um nome e de transformarem assim a ciência num calão pretensioso e inútil*».

E dá um exemplo célebre de explicação... verbalista. «*A luz, ou antes, a iluminação é um movimento luminar de raios compostos de corpos luminosos que enchem os corpos transparentes e que são movidos luminarmente por outros corpos luminosos*». (1)

¿Está o leitor vendo? Mas há mais...

13. — Um exemplo célebre

O fenómeno do movimento dos corpos foi daqueles que primeiro atraíram as atenções dos pensadores, como dissemos no cap. IV do vol. 1.º; lá mostrámos como êsse problema esteve intimamente ligado à evolução da matemática e da filosofia na Grécia clássica. Apontámos também, embora ao de leve, como circunstâncias determinadas, principalmente de carácter político e social, induziram na ciência grega posterior ao século IV a. C. *o horror do movimento*. (2)

¿Quere isto dizer que êle foi pôsto totalmente de parte? De modo nenhum! Procurou-se dar dêle uma explicação que o relegasse para o museu das múmias

(1) Duma carta dirigida a *Pascal* pelo jesuíta *Padre Noel*, antigo professor de *Descartes* no colégio de la Flèche.

(2) V. o cap IV dêste volume.

e o tornasse conseqüentemente inofensivo, embora existente. E como há sempre um filósofo para cada tarefa, por mais retorsa e macabra, êsse filósofo surgiu, na pessoa de *Aristóteles*.

Aristóteles, que aliás conseguiu realizações interessantes em alguns domínios do pensamento, deu do movimento uma definição e uma teoria qualitativa tão subtis (1) que conseguiu torná-las totalmente incompreensíveis a êste pobre ente — o homem de-todos-os--dias e de-todos-os-lugares — que, com trabalho e sangue, muito sofrimento e algumas alegrias, um pouco de capacidade de entendimento e grande dose de ilusão, vai encontrando, às apalpadelas, o seu caminho nesta maravilhosa realidade de trevas e luz em que está mergulhado.

Só duma coisa parece ter-se esquecido *Aristóteles* — de observar o movimento! O que foi origem dum percalço de vulto — afirmar (*Física*, livro IV 216 a) que «*a experiência mostra que os corpos, cuja fôrça é maior, seja em pêso, seja em ligeireza, tôdas as outras condições iguais quanto às figuras, atravessam mais depressa um espaço igual e na proporção que as grandezas (pêso ou ligeireza) teem entre si*, afirmação que equivale a esta — *os corpos caem com velocidades proporcionais aos pesos* — e que a Física experimental mais tarde havia de desmentir totalmente. (2)

14. — Primado da explicação quantitativa

O leitor pode ver, pelos exemplos que apresentamos, como é grande o perigo de deslisar no abuso da explicação qualitativa. Os construtores da Ciência moderna, do

(1) Vide *Física* de *Aristóteles*, livro III.

(2) Por Obra de *Galileo* (1564-1642), o fundador da Física moderna e o verdadeiro iniciador do método experimental em Ciência.

Renascimento em diante, apercebendo-se dêsse perigo, deram rumo novo à barca da Ciência, dedicando-se à *observação* e *experimentação,* procurando *medir,* tentando explicar por variações de quantidade, tecendo uma teia de leis quantitativas.

O novo rumo da barca da Ciência está cheio de triunfos. No cap. IV dêste livrinho trataremos mais demoradamente dêste assunto, mas queremos dar, desde já, um exemplo frisante. A 1.ª lei de *Kepler* (parág. 10) é uma lei *qualitativa;* pois muito bem: essa lei e as outras duas leis de *Kepler* (estas quantitativas) estão englobadas, como se demonstra sem grande dificuldade, na lei da gravitação de *Newton* (parág. 10, III), que é o tipo perfeito da lei quantitativa. (1)

Por tôda a parte, em todos os ramos do conhecimento, há esta tendência para o quantitativo, para a medida, (2) de modo tal que pode afirmar-se que o estado *pròpriamente científico* de cada ramo só começa quando nêle se introduz a *medida* e o estudo da variação quantitativa como explicação da evolução qualitativa. E' o que está acontecendo nos nossos dias a uma ciência em formação — a psicologia — e a uma outra que desponta — a sociologia; ambas se estão emancipando da descrição verbal e procurando atingir, lentamente, a idade da adolescência científica.

Com o significado e as restrições referidos no comêço do parág. 10, podemos portanto falar, plenamente, *no primado da lei quantitativa no seio da Ciência Moderna.*

---

(1) Essa demonstração é uma parte da obra de *Newton, Princípios matemáticos da filosofia natural,* um dos maiores monumentos científicos de todos os tempos.

(2) Inclusivé na geometria, para explicar as formas das figuras (coisa essencialmente qualitativa). Vide cap. IV.

2.º — Conceito de função

15. — Intervenção da Matemática

No vol. I viu-se, em vários exemplos, como os conceitos matemáticos surgem, uma vez que sejam postos problemas de interêsse capital, prático ou teórico: — é o número natural, surgindo da necessidade da contagem, o número racional, da da medida, o número real, para assegurar a compatibilidade lógica de aquisições diferentes.

E' natural, portanto, esperar que, de coisa tão importante para o entendimento e explicação da Realidade como é a *lei quantitativa,* surja também o conceito matemático próprio para o seu estudo; esperar que aqui, ainda, a necessidade crie o instrumento. Assim acontece de-facto.

O leitor, instruído pelos exemplos anteriores, não esperará, de-certo, que êsse instrumento tenha saído dum jacto, pronto e acabado, que aos cientistas se tenha apresentado a questão assim: — temos aqui uma multidão de leis quantitativas, vamos criar o instrumento próprio de estudo. Muito longe disso! Deu-se uma gestação lenta em que necessidade e instrumento inter-actuaram, ajudando-se e esclarecendo-se mùtuamente. No cap. IV veremos alguma coisa sôbre as condições históricas dessa gestação e evolução; as páginas que seguem conteem apenas um *esquema* de como a questão pode ser vista hoje.

16. — Surge o instrumento matemático

Suponhamos que temos que estudar uma variação de quantidade; seja, para fixar idéias, a variação quantitativa de espaço e tempo no fenómeno da queda dos graves no vácuo. Suponhamos realizadas as condições físicas necessárias — o isolado conveniente — e procuremos a *regularidade* do fenó-

meno: a *lei quantitativa.* ¿Que fazemos? Medimos as alturas de queda em intervalos de tempo iguais, e estudamos depois a variação dessas alturas de queda: é claro que, quanto mais pequenos forem os intervalos de tempo em que fazemos as medições, melhor se conhecerá a variação. Suponhamos que se fizeram as medições de segundo em segundo e que se encontraram os valores seguintes:

tempos (em segundos)	0	1	2	3	4	5	...
espaços (em metros)	0	4,9	19,6	44,1	78,4	122,5	...

Não é, evidentemente, nesta simples tabela que se encontra tôda a regularidade, a *lei quantitativa;* mas ela dá uma primeira idéia dessa lei. ¿Em que consiste, no fundo, esta tabela? Em duas sucessões, dois conjuntos, de números — o dos *tempos,* que representaremos por conjunto *t*, e o dos *espaços*, que representaremos por conjunto *e* — postos em correspondência um com o outro, correspondência essa da qual podemos afirmar que *é unívoca*(1) *no sentido de t para e,* visto que não podemos, evidentemente, conceber um movimento de queda em que, ao fim dum certo tempo, o mesmo corpo tenha percorrido dois espaços diferentes. ¿Onde está a lei quantitativa de que aquela tabela nos dá apenas uma primeira aproximação? — A lei está na forma como essa correspondência do conjunto *t* ao conjunto *e* se realiza; se a correspondência mudar, mudarão os conseqüentes — aqui os espaços — mudará, por conseqüência, a variação, mudará a lei.

¿Em que consiste, então, afinal, a lei? — Na forma de correspondência dos dois conjuntos. Se, por con-

(1) V. Vol. I, cap. I, pag. 14 e 15.

seqüência, queremos estudar leis quantitativas, *temos que criar um instrumento matemático cuja essência seja a correspondência de dois conjuntos.*

¿Está o leitor notando que novamente nos aparece, no seio desta questão vital para a Ciência, aquêle maravilhoso instrumento da *correspondência* que nos surgiu logo no conceito de número natural e não mais nos abandonou ao longo de todo o vol. I? ¡Como tudo isto, afinal, é simples!

17. — Noção de variável Estamos de posse da idéia fundamental do instrumento a criar; de que se trata agora é de, com os materiais colhidos, fazer a *montagem* do instrumento e aperfeiçoá-lo.

O instrumento consiste na correspondência de dois conjuntos de números; a primeira coisa a fazer, para o tornar fàcilmente manejável, é arranjar uma representação simbólica para os conjuntos; de contrário, teríamos sempre que estar pegados a tabelas de resultados particulares e não obteríamos a generalidade conveniente.

Essa representação simbólica consegue-se introduzindo o conceito de *variável,* o que se faz da forma seguinte: Seja (E) um conjunto *qualquer* de números, conjunto finito ou infinito, e convencionemos representar qualquer dos seus elementos por um símbolo, por ex: x. *A êste símbolo, representativo de qualquer dos elementos do conjunto* (E), *chamamos variável.*

Quando dizemos, por exemplo: seja (E) o conjunto dos números reais do intervalo (0,1), e seja x a sua *variável*, ¿que queremos significar? Que o símbolo x, sem coincidir *individualmente* com nenhum dos números reais dêsse intervalo, é susceptível de os representar a todos; é, afinal, o símbolo da *vida*

colectiva do conjunto, vida essa que se nutre da vida individual de cada um dos seus membros, *mas não se reduz a ela.*

A variável é, portanto, uma entidade que, dizendo respeito a um nível [1] de isolado — o conjunto — superior ao do número, é, ela própria, de uma natureza superior. Isto é perfeitamente compreensível dentro do quadro geral de idéias que esboçámos nos primeiros parágrafos dêste capítulo; no entanto, o carácter contraditório do conceito — a variável *é e não é* cada um dos elementos do conjunto — deu origem a que a sua introdução na Ciência seja relativamente recente. Pelo seu carácter essencial — síntese do *ser e não-ser* — ela sai fora daquele quadro de idéias que quere ver na Realidade uma *permanência* e irrompe ligada à corrente de pensamento que, expressa ou tàcitamente, vê na *fluência* a primeira das suas características.

Uma variável é o que fôr determinado pelo conjunto numérico que ela representa — a sua *substância,* o seu *domínio,* como daqui em diante diremos.

Dois casos particularmente importantes são aquêles em que:

a) O domínio é o conjunto dos números reais compreendidos entre dois números reais a e b dados, ou, como correntemente se diz: o conjunto dos números reais do intervalo (a,b); a variável x diz-se então *variável real contínua,* [2] ou simplesmente *variável real.*

b) O domínio é o conjunto infinito dos números naturais 1, 2, 3, $\cdots$; utilizaremos, neste caso, o símbolo n e designaremos a variável por *variável inteira.*

---

(1) V. parág. 5, pág. 11.

(2) Porque o conjunto dos números reais é o equivalente aritmético do contínuo geométrico. Vide, vol. I, pág. 108 e seg.

De um outro caso muito importante falaremos adiante (cap. III, parág. 22).

18. — Noção de função Voltemos ao exemplo do parágrafo 16; a lei da queda dos graves consiste na correspondência do conjunto dos tempos (antecedentes) ao conjunto dos espaços; estamos agora em condições de criar o instrumento matemático cuja essência seja essa correspondência. Seja t a *variável* do conjunto dos tempos e e a *variável* do conjunto dos espaços; a lei consiste na existência duma dada correspondência entre t e e, correspondência de que sabemos que é unívoca no sentido $t \rightarrow e$. Diremos que a *variável* e é função da *variável* t e escreveremos simbòlicamente $e = f(t)$; à *variável* t, antecedente da correspondência, chamaremos *variável independente;* à *variável* e chamaremos *variável dependente.*

Assim, o conceito de *função* aparece-nos, no campo matemático, como o instrumento próprio para o estudo de leis.

Repare bem o leitor em que, quando nós dizemos que $e = f(t)$, dizemos mais qualquer coisa do que o que está na tabela do parágrafo 16; nesta, estão apenas indicados *alguns* pares de valores da correspondência, ao passo que na afirmação $e = f(t)$ está implicado que a *qualquer* valor de t corresponde um valor (e um só) de e. Por aqui pode começar a ver-se já a fôrça latente que êste novo instrumento traz em si.

Vamos resumir e fixar o que está dito numa definição, a que nos reportaremos daqui em diante.

Definição: — Sejam x *e* y *duas variáveis representativas de conjuntos de números; diz-se que* y *é função de* x, *e escreve-se*

1) $$y = f(x)$$

se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido $x \rightarrow y$. *A* x *chama-se variável independente, a* y *variável dependente.*

Para indicar que y é função de x, usaremos também escrever simplesmente $y(x)$; para representar aquêle valor b de y que corresponde a um valor particular a de x, escreve-se $b = f(a)$ ou $b = y(a)$, conforme se usou a representação $y = f(x)$ ou $y(x)$.

19. — Modos de definição

Encarando agora o conceito de função do ponto de vista pròpriamente matemático, pondo de parte a origem concreta do conceito, põe-se a questão seguinte: ¿como se estabelece a correspondência da variável independente para a dependente? ¿por que maneira podemos determinar qual o valor b de y que corresponde ao valor a de x? Por outras palavras, ¿como se define cada função particular $y(x)$? ¿como se dá, em cada caso, a lei da correspondência (vol. 1.º, cap. I, parág. 6, pág. 14)? Vamos ver que há várias maneiras de o fazer.

20. — Definição analítica

Consiste êste modo de definição em dar um conjunto de operações de modo tal que, por meio delas, se possa fazer corresponder a cada valor a de x um valor b de y. Demos, por exemplo, a igualdade

2) $$y = 4,9 . x^2 .$$

Efectuando as operações indicadas no segundo membro, vemos que esta igualdade faz efectivamente corresponder a *cada* valor de x *um* valor de y; por exemplo, a $x=1 \rightarrow y=4,9$, a $x=2 \rightarrow y=19,6$, a $x=3 \rightarrow y=44,1$, a $x=\frac{1}{2} \rightarrow y=1,225$, etc..

Portanto, a expressão analítica do segundo membro de 2) define uma função $y(x)$.

Como o leitor fàcilmente verifica, essa expressão analítica permite construir a tabela do parágrafo 16 e, além disso, dá a possibilidade de obter o valor de y correspondente a qualquer outro valor real de x.

Dado, por exemplo, a x o valor $a=\frac{3}{2}$, ela dá-nos para y o valor $b=4,9 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2=11,025$; pois muito bem, dentro do grau de aproximação que as medidas comportam, é 11,025 m. a altura de queda de um grave no vácuo, durante $\frac{3}{2}$ segundos. E como isto se dá para quaisquer valores de x (representando tempos) e os correspondentes valores de y (representando espaços), diremos que a *igualdade 2) é a tradução analítica ou a lei matemática do fenómeno da queda dos graves no vácuo.*

Temos assim uma cadeia: lei quantitativa — função — sua definição analítica, cadeia em que está sintetizada a conexão da Matemática com as ciências da Natureza.

Repare bem o leitor: o conceito de *função* não se confunde com o de *expressão analítica;* — esta é apenas *um* modo de estabelecer a correspondência das duas variáveis. Por outras palavras, pode dizer-se que uma igualdade como 2), em que figura y igualado a uma

expressão analítica em x, contém uma *lei matemática* ligando as duas variáveis; essa lei matemática define a correspondência que existe entre x e y e faz portanto que y seja função de x. A lei matemática constitue, portanto, o terreno de que a função se vai nutrir. Mas, na definição que demos (parág. 18), não está dito que seja êste o único terreno em que a função possa enraïzar, e já vamos ver que há outro não menos próprio. Tudo isto nos leva a concluir que não devemos confundir *função* com *expressão analítica;* e, no entanto, estas duas idéias andam constantemente confundidas na linguagem e na escrita dos matemáticos! O leitor só muito raramente encontrará, na pena dum matemático, uma frase como esta — seja a função $y(x)$, cuja definição analítica é $y = 4,9x^2$; o matemático escreverá mais simplesmente — seja a função $y = 4,9 \cdot x^2$.

Êrro! dirá o leitor. Sim, êrro; mas seja o leitor indulgente para com o matemático. O matemático é um ser humano, com os mesmos defeitos e as mesmas limitações dos outros sêres humanos. Um dêsses defeitos é a indolência que o faz sacrificar à rotina; houve um tempo — vai para século e meio ou dois séculos — em que a noção de função, ainda não suficientemente depurada, se assimilava inteiramente à de expressão analítica; de então para cá, ficou a maneira de dizer, que não corresponde hoje ao estado de evolução do conceito.

Vamos agora mostrar como se pode satisfazer à definição do parágrafo 18 sem falar em expressões analíticas.

21. — Sistemas de referência

No que vai seguir-se, tratar-se-á de *interpretação geométrica de conjuntos de números.* Esta idéia não é nova para o leitor; no vol. 1.º lidámos

demoradamente com ela e foi até dêsse lidar que saiu a construção do conjunto de números reais.

Que fizemos? Tomámos um *sistema de referência,* muito simples, constituído *(Fig. 1)* por uma recta em que, a partir dum ponto O, *arbitrário,* denominado *origem,* se tomam dois sentidos: um *convencionado* positivo, de O para a *direita,* outro negativo, de O para a *esquerda;* a recta assim *orientada* chama-se *eixo.*

(Fig. 1)

Tomado ainda, arbitràriamente, um segmento $\overline{OP}$ como unidade, o conjunto dos números reais relativos pode pôr-se em correspondência biunívoca com o conjunto dos pontos da recta, para o que basta fazer corresponder a cada número real a aquêle ponto único A, para a direita de O se a é positivo, para a esquerda se é negativo, tal que o comprimento do segmento $\overline{OA}$ seja $|a|$. Abreviadamente pode dizer-se — faz-se corresponder a a aquêle ponto único A tal que a *medida algébrica* de $\overline{OA}$ seja a. Recìprocamente, a todo o ponto A faz-se corresponder aquêle número relativo que, com a mesma unidade $\overline{OP}$, é igual à medida algébrica de $\overline{OA}$; assim se assegura, como sabemos, a biunivocidade da correspondência.

Agora, porém, o problema é um pouco mais complicado — temos, não só que interpretar simultâneamente dois conjuntos de números mas, ainda, arranjar maneira de, nessa interpretação, podermos representar também a correspondência das suas variáveis respectivas. Isso consegue-se, duma maneira simples, [1] com um sistema de referência denominado *cartesiano* por ter

[1] Entre outras, porque há outros sistemas de referência.

sido usado pela primeira vez por *René Descartes* (1) (em latim *Cartesius)* na primeira metade do séc. XVII.

22. — O sistema cartesiano de referência

Consiste êle no seguinte. Sejam, no plano, *(Fig. 2)* duas rectas concorrentes que, por comodidade, se tomam perpendiculares entre si, e orientadas como a figura indica — uma vez orientado o *eixo Ox* como na fig. 1, toma-se para sentido positivo do outro eixo aquêle sentido tal que o semi-eixo positivo *Ox* se pode levar à coincidência com o semi-eixo positivo *Oy* por uma rotaçãode 90° feita no *sentido directo* ou *positivo* (contrário ao sentido do movimento dos ponteiros dum relógio).

(Fig. 2)

Pôsto isto, nós podemos tomar cada um dos eixos para cada uma das variáveis — sôbre o eixo *Ox* interpretamos geomètricamente aquêle conjunto de números reais que é o *domínio* da variável x, e sôbre o eixo *Oy* aquêle conjunto de números reais que é o *domínio* de y. As duas variáveis aparecem-nos assim representadas, ou interpretadas, independentemente uma da outra, e nós podemos, além disso, utilizar o plano definido pelos dois eixos para fazer construções geométricas que definam correspondências entre as duas variáveis, isto é, construções que definam funções $y(x)$. Como?

(1) Matemático e principalmente filósofo (1596-1650). A sua obra filosófica marca uma era na história da filosofia. Da sua importância na Matemática falaremos adiante.

23. — Definição geométrica duma função

Seja *(Fig. 3)* um sistema de referência cartesiano e uma curva (C) que não seja cortada em mais de um ponto por uma paralela ao eixo Oy.

Essa curva permite definir uma função $y(x)$, para o que basta fazer o seguinte:

Seja P um ponto qualquer da curva e tiremos, por êle, perpendiculares aos eixos, as quais os encontram nos pontos A e B; sejam a e b os números reais (relativos) iguais, respectivamente, às medidas algébricas de $\overline{OA}$ e $\overline{OB}$. Suponhamos feita uma construção análoga para *cada* ponto da curva e façamos corresponder a cada número a o número b obtido pela construção indicada. Fica assim definida uma correspondência do conjunto dos a — variável x — ao conjunto dos b — variável y — fica, portanto, definida uma função $y(x)$.

(Fig. 3)

Trata-se, de-facto, duma função no sentido da definição do parágrafo **18**, visto que, como impusemos à curva a condição de só ser cortada num ponto por cada paralela ao eixo Oy, a correspondência é *unívoca* no sentido $x \rightarrow y$: a cada a corresponde apenas um b.

Vê o leitor que, assim, definimos uma função $y(x)$ tão bem como no parág. **20**; lá, o *instrumento* de definição era uma *expressão analítica*, aqui, é uma *curva*. Em cada um dos casos, a função não se confunde com o instrumento que serviu para a definir.

Esta mesma questão pode ser encarada, como

vamos ver, de um outro ponto de vista. Para isso, vamos dar uma noção prévia, muito importante — a de *coordenadas*.

24.—Coordenadas cartesianas Voltemos ao sistema cartesiano de referência, definido no parágrafo **22**, e sejam a e b dois números reais, um pertencente ao *domínio* da variável x, outro ao *domínio* da variável y. Marquemos, sôbre os eixos respectivos, *(Fig. 4)* os pontos A e B que lhes correspondem, isto é, os pontos A e B tais que $\overline{OA} = a$, $\overline{OB} = b$ (medidas algébricas).

Tiremos por A e B perpendiculares aos eixos e seja M o seu ponto de encontro; ao par (a, b) façamos corresponder o ponto M. Como imediatamente se verifica pela própria construção, esta correspondência é *unívoca* no sentido $(a, b) \rightarrow M$, isto é, a cada par (a, b) corresponde um ponto M e um só.

(Fig. 4)

Reciprocamente, a cada ponto M' do plano podemos fazer corresponder um par (a', b') e um só; basta por M' tirar perpendiculares aos eixos, *(Fig. 4)* determinar as medidas algébricas a' e b' dos segmentos $\overline{OA'}$ e $\overline{OB'}$, respectivamente, e fazer corresponder a M' o par de números reais (a', b').

Temos assim, por uma construção geométrica simples, a possibilidade de estabelecer uma correspondência *biunívoca* (vol. 1.º pág. 15-16) entre *par* de números reais e *ponto* do plano. Esta correspondência

generaliza imediatamente aquela que no vol. 1.º (pág. 120-121) foi estabelecida entre a recta e o conjunto dos números reais (relativos). Lá, mostrou-se que *a cada ponto da recta corresponde um número real e recìprocamente;* agora vê-se que *a cada ponto do plano corresponde um par de números reais, e recìprocamente.* Daqui em diante, chamaremos aos números (a, b) as *coordenadas cartesianas* do ponto M, *a abscissa* e b *ordenada;* ao conjunto dos dois eixos (sistema cartesiano de referência), *eixos coordenados;* ao eixo Ox, eixo das *abscissas;* ao eixo Oy, eixo das *ordenadas;* ao ponto O, *origem das coordenadas.* Sempre que quisermos indicar que o ponto M tem coordenadas (a, b) — abscissa a e ordenada b — escreveremos, como fizemos na fig. 4, $M(a, b)$.

Pois bem, a construção que acabamos de fazer permite encarar sob outro aspecto o problema das relações do conceito de *função* com o de *curva.* ¿De que maneira?

25.—Imagem geométrica duma função

Seja $y = f(x)$ uma função definida não geomètricamente — definida por uma expressão analítica ou pelo enunciado directo da correspondência entre x e y.

Seja como fôr, pelo simples facto de se tratar de uma $y(x)$, sabemos que a cada valor a da variável x corresponde *um* valor b de y. O que dissemos no parágrafo anterior permite-nos construir *(Fig. 5)* o ponto $M(a, b)$. Feita uma construção análoga para

(Fig. 5)

cada par de valores das duas variáveis, obtemos no plano um conjunto de pontos.

A êsse conjunto de pontos chamaremos *imagem geométrica* ou *representação geométrica* da função $y(x)$.

Assim, de tôda a função, seja qual fôr o modo como é definida, nós podemos sempre construir uma *imagem geométrica,* e essa imagem é um conjunto de pontos do plano.

— Uma curva, dirá o leitor apressado.

— Mais de-vagar. O conceito de *curva* tem uma larga história que vale a pena ser contada porque ela foca alguns dos motivos mais íntimos da história da Ciência. Contaremos resumidamente essa história no cap. IV, mas podemos dizer desde já ao leitor que houve uma altura em que curva e imagem geométrica duma função se consideraram como sinónimos; melhor, em que se tomou como idéia mais geral de curva o conjunto de pontos da imagem geométrica de uma função $y(x)$.

Cedo apareceram, porém, as dificuldades. Consideremos, por exemplo, a função assim definida:

$$x<0 \rightarrow y=-1, \quad x=0 \rightarrow y=0, \quad x>0 \rightarrow y=+1.$$

Trata-se, de-facto, de uma função no sentido da definição dada no parágrafo 18 — o domínio da variável x é o conjunto de todos os números reais; o domínio da variável y é o conjunto dos três números $-1, 0, +1$, e a correspondência $x \rightarrow y$ é unívoca (não o é a sua recíproca, mas isso não é exigido na definição). A imagem geométrica desta função é constituída *(Fig. 6)* pelas duas semi-rectas paralelas ao eixo Ox, menos os pontos -1 e $+1$, e pelo ponto O.

Uma semi-recta que não acaba, outra que não começa e um ponto entre as duas! ¿É esta figura uma

curva no sentido intuitivo do têrmo — figura obtida pelo movimento contínuo (1) dum ponto? Não!

O leitor poderá pensar que casos como êste são de excepção e que, *em geral*, a imagem geométrica duma função coincide com uma *curva*, no sentido corrente do têrmo. Não é assim, porém. O que é geral é darem-se casos, como o apontado; aquelas funções cujas imagens são curvas no sentido corrente, formam, entre a multidão de tôdas as funções $y(x)$, um agrupamento ínfimo — são elas, portanto, que constituem a *excepção!*

(Fig. 6)

(Fig. 7)

Pois muito bem, é entre estas que se encontram as funções mais importantes, pelo menos do ponto de vista das aplicações. E', por exemplo, uma delas a função (já nossa conhecida, parág. 20) de definição analítica $y = 4,9x^2$.

Se a representarmos geomètricamente, encontraremos a curva da fig. 7, cuja parte para a direita de Oy pode

(1) Para o entendimento desta frase apela-se apenas para o significado corrente de «movimento contínuo». A noção de continuïdade há-de ser estudada mais tarde (vol. III).

ser considerada como a tradução geométrica da lei da queda dos graves no vácuo.

E' ainda nesse agrupamento ínfimo que se encontram muitas outras funções cujas definições analíticas são leis matemáticas de importantes fenómenos naturais.

26.—O importante e o excepcional Esta idéia — que o *importante* se encontra entre o *excepcional* — aparece, à primeira vista, como um pouco desconcertante. A visão de um Universo em que o *fundamental* para o seu entendimento se ache entre o *excepcional,* entre o produto do *acaso,* não pode deixar de causar um profundo sentimento de decepção.

Repare, porém, o leitor no seguinte. Dissemos atrás que «a Ciência não tem, *nem pode ter,* como objectivo, descrever a realidade *tal como ela é*» (parág. 2), mas apenas «construir quadros racionais de interpretação e previsão» (parág. 2), «lançar sôbre a realidade fluente uma teia de leis, regularidades, como elas se nos revelam, dos fenómenos naturais» (parág. 11).

¿Que quere dizer, dentro dêste modo de ver, que o importante se encontra entre o excepcional?

Apenas isto:—que os instrumentos que nós criamos (aqui o conceito de função) para a interpretação da realidade, ultrapassam, por vezes, em possibilidades *racionais* (não quere dizer em *adaptação à realidade*), as necessidades que originaram o seu aparecimento. A Natureza mostra-nos um seu *aspecto,* determinado pelas qualidades das coisas em relação a nós. Forjamos o instrumento e as malhas do quadro interpretativo para o estudo dêsse aspecto, e a nossa actividade racional é levada em seguida, pelo *princípio de extensão* (vol. I, pág, 17), a tirar dêle tôdas as conseqüências racionais, tôdas as possibilidades lógicas. ¿Que admira

que a certa altura desapareça o acôrdo que existia junto da fonte da criação, e que aquilo que é *possível*, para a nossa lógica, não encontre a contra-partida de *existência?* O leitor deve ter sempre presente, a êste respeito, estas palavras de Jean Perrin:

Tôda a noção acaba por perder a sua utilidade, a sua própria significação, à medida que nos afastamos das condições experimentais em que ela teve a sua origem.(1)

Adiante teremos necessidade de voltar a esta idéia. Por agora, vamos ainda chamar a atenção do leitor para um aspecto extremamente interessante dos problemas que estamos estudando.

27. — Leis analíticas e leis geométricas

Está adquirido que de tôda a função $y(x)$ se pode construir uma imagem geométrica. Suponhamos que a função fôra definida por uma expressão analítica — a imagem geométrica da função é a tradução, no campo geométrico, daquela lei analítica que a expressão analítica implica.

Por exemplo, o fenómeno da queda dos graves no vácuo é *regulado*, no campo analítico, pela lei matemática 20,2) $y=4,9x^2$; é igualmente regulado, no campo geométrico, pela curva da fig. 7, visto que, tanto a expressão analítica, como a curva definem, afinal, a mesma função $y(x)$.

Quere dizer, o conceito de função permite estabelecer uma correspondência entre as leis matemáticas e as leis geométricas, entre as expressões analíticas e os lugares geométricos (conjuntos de todos os pontos que gozam de uma mesma propriedade). Para estabelecer essa correspondência não há mais que, a cada *expressão* analítica, fazer corresponder aquêle *lugar*

(1) *Espace et Temps* — Actualités Scientifiques et Industrielles, Hermann, 1940.

que define a mesma função que ela. A expressão analítica, ou, melhor, a igualdade $y =$ *expressão analítica* chama-se *equação* do lugar que lhe corresponde; assim: $y = 4{,}9.x^2$ é a equação da curva da fig. 7.

28. — A grande unificação

Veja bem o leitor o que há de importante nesta nova relação — *tradução de leis analíticas em leis geométricas.*

Em primeiro lugar, o facto de se obter assim uma *unificação* dos dois campos — geométrico e analítico — que, durante perto de vinte séculos, se tinham considerado separados em compartimentos estanques — o campo geométrico dizendo respeito à *qualidade,* o analítico à *quantidade,* com o *primado* do primeiro sôbre o segundo. Nesta unificação, realizada de há três séculos para cá, reside um dos factos mais dramáticos, mais importantes e mais profundos da história do Conhecimento; no capítulo IV nos ocuparemos dêle com um pouco mais de vagar.

Em segundo lugar, o facto de ser o próprio conceito de função, instrumento de estudo das *correspondências,* que vai agora servir de elemento definidor dessa nova correspondência, de *motivo de unificação* dos dois campos.

¿Está o leitor vendo a potencialidade extraordinária dêste conceito? Neste livrinho não podemos mais que levantar uma ponta do véu sôbre o domínio encantado das possibilidades que êle nos oferece.

E' o que faremos nos dois capítulos seguintes, em duas ligeiras excursões — uma pelo domínio da técnica, outra pelo da História.

CAPÍTULO II

Pequena digressão técnica

1.º — Observações preliminares

1. — Uma questão prévia

Neste capítulo, encontraremos algumas funções definidas por igualdades em que figuram expressões analíticas que envolvem as variáveis. O leitor deve recordar-se do que dissemos no parágrafo 20 do cap. I sôbre a distinção entre os conceitos de função e expressão analítica. Para quem tenha sempre presente essa distinção, não há inconveniente em usar a linguagem abreviada a que lá se faz referência. Fica, portanto, entendido, duma vez para sempre, que tôdas as vezes que dissermos, por exemplo: «seja a função $y = x^3 + 1$» entendemos: «seja a função $y(x)$ cuja definição analítica é $y = x^3 + 1$».

2.—Definições explícita e implícita

Acontece às vezes que a expressão analítica que define a função não envolve apenas a variável independente, como no exemplo acima, mas sim as duas, num certo conjunto de operações.

Seja, por exemplo, a igualdade

$$1) \qquad 2xy - 1 = 0.$$

Pela primeira propriedade da *adição* (volume 1.º pág 27), pode escrever-se $2xy - 1 + 1 = 0 + 1$ ou seja $2xy = 1$. Daqui, pela primeira propriedade da *multiplicação* (Vol. 1.º pág. 28), obtem-se, multiplicando ambos os membros por $\frac{1}{2x}$, $2xy \cdot \frac{1}{2x} = \frac{1}{2x}$, ou seja

(pelas propriedades comutativa e associativa da multiplicação), $y \cdot \left(2x \cdot \frac{1}{2x}\right) = \frac{1}{2x}$. E como $2x \cdot \frac{1}{2x} = 1$ e $y \cdot 1 = y$, tem-se finalmente $y = \frac{1}{2x}$.

Esta nova igualdade estabelece uma correspondência entre as duas variáveis, unívoca no sentido $x \rightarrow y$; ela define, portanto, y como função de x.

Tôdas as vezes que uma função $y(x)$ seja definida como neste exemplo [igualdade 1)], diremos que ela é definida *implìcitamente* ou que é uma *função implícita;* por contraposição, diremos que uma função é *explícita* quando fôr definida como no exemplo do parág. 1.

O que distingue, portanto, as duas formas de definição é o facto de o conjunto *inicial* de operações recair só sôbre a variável independente (definição explícita) ou sôbre as duas (definição implícita). Quando se consegue fazer (o que nem sempre é possível) (1) o que fizemos neste exemplo, isto é, tirar da primeira igualdade outra em que as operações recaem só sôbre a variável independente, diz-se que se *explicitou* a função.

3. — O conjunto das leis operatórias Neste exemplo e no anterior, fizemos certas operações sôbre as variáveis; pode preguntar-se: ¿que operações são legítimas? ¿qual é a aparelhagem operatória de que podemos dispor?

A êste respeito observemos o seguinte. As variáveis com que temos de trabalhar são símbolos representativos de conjuntos de números; por conse-

(1) A definição *implícita* duma função é mais delicada do que a *explícita* e levanta problemas que aqui não podem ser tratados.

qüência, elas hão-de possuir aquelas propriedades operatórias que os seus domínios lhes determinarem. Suponhamos, por exemplo, que x, y, z, são três variáveis reais (cap. I, parág. 17); ¿que significado tem a operação $x+y$? Êste:—que a *qualquer* número do domínio de x se adicionou *qualquer* número do domínio de y; ora, a adição de dois números goza da propriedade comutativa (vol. 1.º, pág. 28), portanto, em geral, é $x+y=y+x$. Por um raciocínio análogo, verificamos que $x+(y+z)=(x+y)+z$, $x(y+z)=$ $=xy+xz$, etc., isto é, *as operações sôbre as variáveis gozam do conjunto de leis operatórias que no vol. 1.º estabelecemos para os números.*

Esta observação tem uma importância enorme porque nos coloca, de um golpe, numa situação vantajosa — transporta, para o limiar do estudo das funções, uma bagagem de instrumentos de valor inapreciável, e com a qual já estamos familiarizados.

2.º — Algumas funções importantes

4. — Polinómios inteiros

Chama-se *polinómio inteiro* em x a tôda a expressão analítica da forma

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n \tag{2}$$

onde $a_0, a_1, \cdots a_n$, denominados *coeficientes* do polinómio, são números reais (1) quaisquer, e n, chamado grau do polinómio, é um número *inteiro* e *positivo*. São, por conseqüência, polinómios inteiros, as expressões $y=2x^4+5x^2-1$, $y=\sqrt{2}\cdot x^3+\frac{1}{\sqrt{5}}x-\frac{1}{3}$, o primeiro

(1) Vide generalização, no parág. 22, do cap. III.

de grau 4, o segundo de grau 3, mas já não o é a expressão $y = x^{-2} + x^3 + 1$, visto aparecer nela o expoente negativo -2.

Como se vê, o que caracteriza o polinómio é o facto de as operações que incidem sôbre a variável x serem apenas—adição algébrica, multiplicação, potenciação de expoente inteiro e positivo (que é um produto).

Mas isto não basta; *é preciso acrescentar que essas operações sejam em número finito*, o que está implícito na igualdade 2). Só mais tarde [1] poderemos dizer qual a necessidade e importância desta observação.

O nome *polinómio inteiro* usa-se indistintamente para designar a expressão analítica 2) e a função definida pela igualdade

3) $$y = P(x).$$

A tôda a igualdade da forma

4) $$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0,$$

obtida igualando um polinómio inteiro a *zero*, chama-se uma *equação algébrica;* o grau do polinómio diz-se *grau* da equação.

Por exemplo:

5) $$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

é uma equação algébrica de *grau* 3.

A todo o número a que, posto em lugar de x, transforma a equação numa identidade, isto é, tal que

6) $$P(a) \equiv 0$$

---

[1] Vide, no vol. 3.º, o capítulo que se refere à noção de *série*.

chama-se uma *raiz* da equação 4) ou um *zero* do polinómio 2).

A equação 5) tem as raízes 1, 2, 3, visto que $1-6+11-6\equiv 0$, $2^3-6.2^2+11.2-6=8-24+22-6\equiv 0$; $3^3-6.3^2+11.3-6=27-54+33-6\equiv 0$.

Adiante, no cap. III, nos ocuparemos de algumas das propriedades das equações algébricas.

5. — Funções racionais Dá-se êste nome a tôda a função cuja definição analítica pode reduzir-se ao quociente de dois polinómios inteiros em x

$$7) \qquad R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

São funções racionais, por ex: $y=x^{-1}=\frac{1}{x}$, $y=\frac{x-1}{x+1}$, etc. Da definição resulta que as operações que incidem sôbre a variável independente são: adição algébrica, multiplicação, divisão — as chamadas *operações racionais* — aplicadas um número finito de vezes.

6. — Funções algébricas A tôda a função $y(x)$ que possa ser definida *implìcitamente* (parág. 2) como raiz duma equação algébrica da forma

$$8) \quad P_0(x).y^n+P_1(x).y^{n-1}+\cdots+P_{n-1}(x).y+P_n(x)=0$$

onde $P_0(x),\cdots P_n(x)$ são polinómios inteiros em x, chama-se uma *função algébrica* de x.

São, em particular, algébricas tôdas as funções racionais, visto que a função [7)] $y=\frac{P(x)}{Q(x)}$ se pode

definir como raiz da equação $Q(x).y - P(x) = 0$ que é da forma 8) — basta fazer nela $n = 1, P_0(x) = Q(x)$, $P_1(x) = -P(x)$.

As funções algébricas não racionais dizem-se *irracionais*. E' irracional, por exemplo, esta função: $y = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}$. Com efeito, ela é raiz (veja o leitor porquê) da equação $(x+1).y^3 - (x-1) = 0$, a qual se obtem de 2) fazendo $n = 3$, $P_0(x) = x + 1$, $P_1(x) = P_2(x) = 0$, $P_3(x) = -(x-1)$. Ela é, portanto, algébrica, e como não é racional, visto que sôbre x incide uma operação não racional — a radiciação — é uma função irracional.

7. — Funções circulares

Seja *(Fig. 8)* uma circunferência de centro O e de raio $\overline{OA} = r$ e sejam $\overline{A'A}$ e $\overline{B'B}$ dois diâmetros perpendiculares. Tomemos o ponto A como origem de arcos sôbre a circunferência, e convencionemos tomar como positivos os arcos no sentido da seta (sentido directo) e como negativos os arcos no sentido contrário (sentido retrógrado) — o arco $ABA'M'$ é positivo, o arco $AB'M'$ é negativo.

(Fig. 8)

A cada arco corresponde um *ângulo ao centro*, isto é, aquêle ângulo cujo vértice está no centro da circunferência e cujos lados passam pelas extremidades do arco — ao arco AM corresponde o ângulo a. Diz-se,

então, que o ângulo *a subtende* o arco AM; um ângulo ao centro será considerado positivo ou negativo conforme fôr positivo ou negativo o arco que êle subtende.

Utilizaremos, no que vai seguir-se, a medida dos ângulos ao centro em *radianos*. Chama-se *radiano* aquêle ângulo ao centro tal que o arco que lhe corresponde (que êle subtende) tem um comprimento igual ao raio r da circunferência. Como o perímetro da circunferência é $C=2\pi r$ (vol. 1.º, pág. 106), isto é, vale 2π *raios*, o ângulo ao centro *total* vale 2π *radianos*, visto que a cada *raio* (em arco) corresponde um *radiano* (em ângulo). Por outro lado, êsse ângulo *total* vale *quatro rectos*, ou seja 360°; logo, tem-se, entre a medida em graus e a medida em radianos, a seguinte correspondência:

graus	0	45	90	135	180	270	360
radianos	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π.

Seja então, com as convenções estabelecidas, o ângulo ao centro a e o seu arco correspondente AM e tiremos por M uma perpendicular ao diâmetro $\overline{A'A}$.

Chama-se *seno* do ângulo a, e representa-se por *sen a*, ao quociente do segmento $\overline{PM}$ (orientado, *sempre com origem em P*, qualquer que seja a posição de M) pelo raio r:

9) $$sen\, a = \frac{\overline{PM}}{r}.$$

Chama-se *coseno* do mesmo ângulo, e representa-se por *cos a*, ao quociente do segmento $\overline{OP}$ (orientado, *sempre com origem em O)* pelo raio r:

10) $$cos\, a = \frac{\overline{OP}}{r}.$$

E' claro que, conforme o quadrante em que a extremidade do arco se encontra, assim o *seno* e *coseno* são positivos ou negativos.

Para o ângulo a', por exemplo, tem-se

$$sen\, a' = \frac{\overline{P'M'}}{r}, \quad cos\, a' = \frac{\overline{OP'}}{r}.$$

O leitor obtém, sem dificuldade, os resultados que vão no quadro seguinte

	0	1.º quad.	$\frac{\pi}{2}$	2.º quad.	π	3.º quad.	$\frac{3\pi}{2}$	4.º quad.	2π
seno	0	pos.	+1	pos.	0	neg.	−1	neg.	0
coseno	+1	pos.	0	neg.	−1	neg.	0	pos.	+1

Com base nas construções feitas e nas igualdades 9) e 10), podemos agora definir as funções *sen x* e *cos x*, do modo seguinte: seja x a variável real representativa do conjunto dos valores dos ângulos (medidos em *radianos*, por exemplo); a cada valor de x façamos corresponder o número real que a igualdade 9) determina; seja y a variável dêsse conjunto de números reais—y é (cap. I, parág. 18) função de x que representamos pela notação $y = sen\, x$. Do mesmo modo definimos a função $y = cos\, x$.

Na figura junta *(Fig. 9)* estão as imagens geométricas das duas funções *sen x* e *cos x* —em abscissas puseram-se as medidas dos ângulos em ra-

(Fig. 9)

dianos; a parte para a esquerda do eixo OY diz respeito a ângulos negativos — as definições dão-se da mesma maneira, atendendo a que os ângulos negativos teem origem em A (Fig. 8) e são contados no sentido retrógrado: assim, o ângulo $-\frac{\pi}{2}$ corresponde ao arco $\widehat{AB'}$ (Fig. 8), o ângulo $-\pi$ ao arco $\widehat{AB'A'}$, o ângulo $-\frac{3\pi}{2}$ ao arco $\widehat{AB'A'B}$.

As imagens geométricas das duas funções não se limitam ao que está representado na fig. 9; elas prolongam-se indefinidamente para a direita e para a esquerda, reproduzindo periòdicamente o trôço do intervalo $(0,2\pi)$. Com efeito, das definições resulta que, sendo a um ângulo compreendido entre 0 e 2π, se tem

11) $\quad sen\,(a+2\pi)=sen\,a\,,\ \ cos\,(a+2\pi)=cos\,a$ (1)

donde, para n inteiro qualquer,

12) $\quad sen\,(a+2n\pi)=sen\,a\,,\ \ cos\,(a+2n\pi)=cos\,a\,.$

Exprime-se êste facto dizendo que as funções $sen\ x$ e $cos\ x$ são *periódicas* e teem o *período* 2π.

Entre as funções $sen\ x$ e $cos\ x$ existem relações importantes. Vamos referir-nos a duas.

Das definições, 9) e 10), resulta que $sen^2 a + cos^2 a = \frac{\overline{PM}^2}{r^2} + \frac{\overline{OP}^2}{r^2} = \frac{\overline{PM}^2 + \overline{OP}^2}{r^2}$; mas da Fig. 8 tem-se que [*Teorema de Pitágoras*, (vol. I, pág. 63)

(1) Basta notar que, se ao ângulo a da figura 8 somarmos 2π, se obtém o ângulo (correspondente ao arco $ABA\,B'AM$) $a+2\pi$, com a mesma origem A e a mesma extremidade M que o ângulo a.

aplicado ao triângulo rectângulo OPM] $PM^2 + OP^2 = OM^2 = r^2$ logo é

13) $$sen^2 a + cos^2 a = 1.$$

A segunda relação diz respeito a ângulos *complementares,* isto é, ângulos cuja soma é $\frac{\pi}{2}$ radianos (um recto). Seja *(Fig. 10)* o ângulo $a = A\hat{O}M$ e o seu complementar $b = M\hat{O}B$. Por definição, é $sen\ a = \frac{\overline{PM}}{r}$, $cos\ a = \frac{\overline{OP}}{r}$.

(Fig. 10)

Marquemos, sôbre $\overline{OA}$, o segmento $\overline{OQ'} = \overline{PM}$ e sôbre $\overline{OB}$ o segmento $\overline{OP'} = \overline{OP}$; construamos sôbre estes segmentos os rectângulos $OQ'M'P'$ e $OPMQ$. É' evidente que êles são iguais e que M' está sôbre a circunferência, de modo que o triângulo (2) $OQ'M'$ é rectângulo e igual ao triângulo (1) OQM (são metades de rectângulos iguais). Dos elementos da geometria sabe-se que, *em triângulos iguais, a lados iguais se opõem ângulos iguais;* logo, o ângulo $Q'\hat{O}M'$ que no triângulo (2) se opõe a $\overline{Q'M'}$ é igual ao ângulo $M\hat{O}Q = M\hat{O}B = b$ que, no triângulo (1), se opõe a $\overline{QM} = \overline{Q'M'}$.

Tem-se, portanto, para seno e coseno do ângulo $b = M\hat{O}B$ que, como acabamos de ver, é igual a $A\hat{O}M'$

$$sen\, b = \frac{\overline{Q'M'}}{r} = \frac{\overline{OP'}}{r} = \frac{\overline{OP}}{r} = cos\, a$$

$$cos\, b = \frac{\overline{OQ'}}{r} = \frac{\overline{OQ}}{r} = \frac{\overline{PM}}{r} = sen\, a$$

isto é, *o seno dum ângulo é igual ao coseno do seu complementar*. Isto pode exprimir-se pelas igualdades (uma vez que, se x e y são complementares, é $x + y = \frac{\pi}{2}$, donde $y = \frac{\pi}{2} - x$)

14) $$sen\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = cos\, x, \qquad cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = sen\, x.$$

8. — Uma aplicação importante

Consideremos o triângulo *rectângulo* BAC (fig. 11) de ângulos $A = \frac{\pi}{2}$ (radianos), B e C, e lados a (hipotenusa), b e c (catetos). Supondo traçada uma circunferência de centro C e raio $\overline{CB} = a$, as definições 9) e 10) do parág. **7** dão

$$sen\, C = \frac{\overline{AB}}{\overline{CB}} = \frac{c}{a}, \qquad cos\, C = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \frac{b}{a} \quad \text{donde}$$

(Fig. 11)

15) $$c = a\, sen\, C, \qquad b = a\, cos\, C.$$

Notando agora que os ângulos B e C são comple-

mentares[1] e tendo em conta as relações 14) do parág. 7, tem-se

16) $$c = a \cos B \qquad b = a \operatorname{sen} B,$$

isto é, *num triângulo rectângulo, qualquer cateto é igual ao produto da hipotenusa pelo seno do ângulo oposto ou pelo coseno do ângulo adjacente.*

São inúmeras as aplicações que, na vida corrente, se fazem destas relações e de outras mais gerais que se referem a triângulos não rectângulos — determinações de distâncias de lugares inacessíveis, levantamento de cartas topográficas etc..

Vamos dar, como exemplo, uma das aplicações mais antigas e mais interessantes.

9. — Um problema célebre *Aristarco de Samos* foi um astrónomo e matemático que viveu no século III a. C.. Grande foi o seu engenho e penetração em coisas tocando a Geometria e o sistema do mundo.

Aristarco foi, que se saiba, o primeiro homem que lançou a hipótese audaciosa de que era o Sol, e não a Terra, que ocupava o centro do mundo, hipótese hoje ultrapassada, mas que desempenhou um papel de primeira plana na história da Ciência. Teve pouca sorte a antecipação genial de *Aristarco;* contra ela se ligaram, em côro quási unânime, geómetras e astrónomos. Uns e outros se agarravam à idéia de que a Terra, habitação do homem, devia, por necessidade racional e por determinação dos deuses, ocupar o lugar central no Universo. O caso complicou-se de maneira tal, sôbre uma questão à primeira vista de

(1) Porque a soma dos três ângulos do triângulo è 2 rectos (π radianos) e o ângulo A è igual a 1 recto, logo $\hat{B} + \hat{C} = 1$ recto $\left(\frac{\pi}{2} \text{ radianos}\right)$.

natureza puramente científica, inseriram-se com tal fôrça os preconceitos morais e psicológicos dos homens que, alguns séculos mais tarde, se declarou digno de maldição todo aquêle que pretendesse «mover a Terra e pôr o céu em repouso». E, dêste modo, tudo entrou na ordem: a astronomia atrasou-se 18 séculos e a *Aristarco* ficou reservada a glória póstuma de *Copérnico da antigüidade.*

Um dos problemas a que *Aristarco* dedicou maior atenção foi o da determinação da distância da Terra ao Sol. A solução, um prodígio de engenho para o seu tempo, é, em linhas gerais, a seguinte:

Notou que, quando a Lua está em quarto crescente, o triângulo TLS da Fig. 12 (observador na *Terra*, centro da *Lua* e *Sol)* é rectângulo em L; nestas condições, se se conhecer a distância TL (da Terra à Lua) e o ângulo em S, determinar-se-á a distância TS (da Terra ao Sol); com efeito, da formula 15 do parág. 8 resulta $TL = TS . sen\, S$ donde $TS = TL \cdot \frac{1}{sen\, S}$. Pois muito bem, *Aristarco* calculou que $\overline{TS}$ está compreendido entre 18 vezes e 20 vezes TL, o que equivale a dar para $\frac{1}{sen\, S}$ um valor numérico entre 18 e 20. Efectivamente, *Aristarco* tomou $S = 3^\circ$ e é de-facto $\frac{1}{sen\, 3^\circ} = 19{,}11$.

(Fig. 12)

O raciocínio é perfeito e espanta como êle determinou certas outras relações que correspondem a verdadeiros cálculos de senos.

Numa coisa, porém, o seu trabalho falhou — na determinação do ângulo S; o seu valor efectivo é aproximadamente 10,′ muito diferente dos 3° que tomou; a imperfeição dos instrumentos do seu tempo justifica sobejamente êste êrro de observação, que não de raciocínio. Para $S = 10'$ tem-se $\frac{1}{sen\, 10'} = 343{,}775$, donde $\overline{TS} = 343{,}775.\ \overline{TL}$.

10. — Funções transcendentes No parág. 6 dêste capítulo definimos função algébrica e vimos alguns exemplos.

A tôdas as funções da variável real x que não sejam algébricas dá-se o nome de *funções transcendentes*. São transcendentes, por exemplo, as funções circulares, que acabamos de estudar.

Existem muitas outras funções transcendentes; de algumas nos ocuparemos mais tarde (vol. III).

11. — Sucessões numeráveis. Tôdas as funções consideradas até aqui, teem por variável independente a variável real x. Vamos agora considerar as funções da *variável inteira n* (cap. I parág. 17).

Numa função dessas, o domínio (conjunto dos valores da variável independente) é a sucessão dos números naturais n) 1, 2, 3, $\cdots$; o conjunto dos valores da variável dependente é, portanto, *numerável* (vol. I, pág. 26 e 108 e seg.). A correspondência

de um a outro pode ser indicada do modo seguinte

$$\begin{array}{lcccccc} n) & 1, & 2, & 3, & \cdots & n, & \cdots \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ a_n) & a_1, & a_2, & a_3, & \cdots & a_n, & \cdots \end{array}$$

onde os índices apostos à letra a indicam precisamente qual o valor da função que corresponde a um dado valor da variável. Ao conjunto dos valores da função

17) $$a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$$

dá-se o nome de *sucessão numerável*, e a a_n o de *têrmo geral* da sucessão. Com esta definição, tanto monta falar em *sucessão numerável* como em *função de variável inteira*, e para indicar êsse facto escreveremos

18) $$a_n = f(n).$$

Nas sucessões numeráveis mais simples (e mais importantes) é dada a lei analítica da correspondência, isto é, é dada uma expressão analítica que define o têrmo geral da sucessão; para obter os termos, individualmente, não há mais que dar a n os valores 1, 2, $\cdots$. Seja, por exemplo, dada a sucessão de têrmo geral $a_n = \frac{n+1}{2^n}$; tem-se $a_1 = \frac{1+1}{2} = 1$, $a_2 = \frac{2+1}{2^2} = \frac{3}{4}$, $a_3 = \frac{3+1}{2^3} = \frac{1}{2}, \cdots$.

CAPÍTULO III

Equações algébricas e números complexos

I — Equações algébricas

1. — O problema fundamental

Definimos já *equação algébrica;* é (cap II, parág. 4) tôda a igualdade da forma

$$1) \qquad a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0;$$

n, número *inteiro* e *positivo,* chama-se *grau* da equação; à variável x chama-se *incógnita* e aos números $a_0, a_1, \cdots a_n$, *coeficientes* da equação. Sabemos já também o que se entende por *raiz* da equação: é todo o número α tal que

$$2) \qquad a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \alpha + a_n \equiv 0.$$

Pois bem, o *problema fundamental* da teoria das equações algébricas é a *determinação das suas raizes,* ou seja, a *resolução* da equação. Este problema, que está longe de ser simples, tão pouco simples que até há pouco mais de cem anos permaneceu envolto em denso mistério, divide-se em dois: 1.º — ¿a equação 1) tem raízes? quantas? 2.º — se tem, ¿como determiná-las?

Vamos ver alguma coisa dêstes problemas, começando pelas equações algébricas mais simples — as do 1.º grau.

2. — Equações do 1.º grau

Uma equação algébrica de grau 1 é da forma

$$3) \qquad ax + b = 0, \quad a \neq 0$$

e resolve-se fàcilmente. Com efeito, da 1.ª propriedade da adição (vol. 1.º pág. 27, depois generalizada) resulta que, se somarmos a ambos os membros da igualdade o número $-b$, ela não se altera; a equação dada equivale, portanto, a esta $ax+b-b=0-b$, ou seja, aplicando propriedades bem conhecidas, $ax=-b$. Da 1.ª propriedade da multiplicação (vol. 1.º pág. 28, generalizada depois) resulta agora que, sem alterar a igualdade, se podem multiplicar ambos os membros por $\frac{1}{a}$,(1) logo tem-se $a.\frac{1}{a}x=-b.\frac{1}{a}$ ou seja, por ser $a.\frac{1}{a}=1$,

4) $$x=-\frac{b}{a}.$$

Das operações feitas resulta que êste número $-\frac{b}{a}$, posto em lugar de x na equação 3), a transforma numa identidade, logo êle é raiz da equação; e não há mais nenhuma, visto que as operações efectuadas estabelecem a equivalência entre as igualdades 3) e 4).

Ficamos assim sabendo que *tôda a equação do 1.º grau,* $ax+b=0$, tem uma e uma só raiz,

$$\alpha=-\frac{b}{a}.$$

3.—Al-jebr w'al mûqâbalah O leitor reparou de-certo em que as duas passagens fundamentais, na resolução que acabamos de fazer, são as seguintes:

(1) Visto que se supôs expressamente $a \neq 0$; caso contrário, a operação não seria permitida, porque $\frac{1}{0}$ *não é nenhum número.*

1.ª de $ax + b = 0$ para $ax = -b$

2.ª de $ax = -b$ para $x = -\frac{b}{a}$

e em que elas são conseqüências directas das leis elementares da Aritmética.

Estas duas operações—passagem de um têrmo de um membro para outro e divisão de ambos os membros por um mesmo número (diferente de zero)—são de um emprêgo corrente na teoria e prática de equações e tão corrente que uma delas acabou por dar o nome a um capítulo importante da Matemática. Vamos ver como.

No século VII da nossa era, levantou-se, em face de uma Europa desorganizada e inconsistente, uma potência aguerrida e ameaçadora, o mundo árabe que a revolução religiosa e social de *Mahomet* organizava e atirava para um destino mundial. Em poucas dezenas de anos, constituíu-se um império que abrangia todo o norte de África, a Península Ibérica, a Síria, a Arábia, a Pérsia e parte do Turquestão; limitado a ocidente pelo Atlântico, as suas fronteiras iam, a Oriente, até para lá do Indo.

Não cabe aqui a descrição da vida dêste império que, alguns séculos depois, se afundava por não ter construído armadura interna que agüentasse tão grande corpo. Interessa-nos, porém, em alto grau, o papel que êsse império desempenhou na história da civilização. É que, estendendo-se no Oriente pelas terras que séculos antes haviam feito parte de outro grande império efémero—o império de *Alexandre o Grande*—êle foi ali beber os restos sobreviventes da cultura grega e trouxe-os à Europa com a qual manteve estreito contacto durante muito tempo.

Aventura estranha e maravilhosa foi esta, que

a cultura grega, ou o que dela restava passado o século III a. C., para se transmitir à Europa não tivesse seguido o caminho normal — o império romano — e tivesse antes dado esta grande volta pela Índia, pela Pérsia e pelo norte de África. Estranha aventura essa que necessitou o concurso de grandes deslocações de povos — de milhares de quilómetros de extensão — em busca de uma ilusão de glória para alguns, de bem-estar para a maioria, deslocações conduzidas, a mil anos de distância, por dois grandes agitadores de povos — *Alexandre* e *Mahomet*.

Mas é sempre assim; a cultura e a Ciência, produtos humanos, acompanham os homens e forjam-se nas suas lutas, nas suas marchas inquietas para fugir ao sofrimento e buscar uma vida melhor.

No começo do século IX, um árabe, Mohammed ibn Mûsâ al-Khowârizmi, bibliotecário do Califa segundo parece, e homem viajado dentro do Império, escreveu um tratado a que chamou *Al-jebr w'al mûqâbalah* que foi o inspirador de todos os tratados posteriores até aos primeiros tempos do Renascimento. Esse tratado, que é o autêntico traço de ligação entre a matemática indú (e, através dela, dos restos de matemática grega que tinham chegado à Índia) e a Europa ¿de que se ocupava? Da resolução de equações do 1.º e 2.º grau e das regras a que obedecia essa resolução; da maneira de fazer certas operações; e da resolução de alguns problemas.

Pois muito bem; uma dessas regras de resolução, a mais importante de-certo, por dar nome ao tratado — *Al-jebr* — que se pode talvez traduzir por — *restituïção* — corresponde exactamente à primeira operação que acima mencionámos — passagem de um têrmo de um membro para outro, com troca de sinal.

Tão grande foi a influência do tratado e tão freqüente a aplicação da regra, que o seu nome — *al-jebr*

— acabou por designar tudo quanto diz respeito a equações; êsse nome passou às linguas europeias com pequenas modificações — *álgebra, algèbre,* etc.... E aqui tem o leitor como uma simples operação pode vir a designar todo um ramo duma ciência e se prende, pela sua origem, a um dos capítulos mais importantes da História das Religiões e da Civilização.

4. — Equações do 2.º grau

Uma equação algébrica do 2.º grau é da forma geral

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a \neq 0. \tag{5}$$

Já sabemos resolver esta equação num caso muito particular — aquêle em que a equação se reduz a

$$x^2 - m = 0 \tag{6}$$

ou (al-jebr!) $x^2 = m$. Neste caso, por definição de *radiciação* (vol. 1.º pág. 33 e 126), tem-se $x = \pm\sqrt{m}$, e são portanto estas: $x_1 = +\sqrt{m}$ e $x_2 = -\sqrt{m}$, as raízes da equação.

Se a equação não está neste caso particular, todo o trabalho de resolução consiste em transformá-la de modo a conseguir a forma 6). Vejamos como.

Substituamos, em 5), a variável x pela variável y, ligada com ela pela relação

$$x = \frac{y - b}{2a} = \frac{-b + y}{2a}. \tag{7}$$

E' claro que vamos obter outra equação, cujas raízes, se existirem, estarão ligadas com as de 5) pela relação 7); substituindo, temos $a \cdot \left(\frac{y-b}{2a}\right)^2 +$

$+ b \cdot \frac{y-b}{2a} + c = 0$, donde [vol. 1.º pág. 57, fórmula 19]

$a \cdot \frac{(y-b)^2}{(2a)^2} + b \cdot \frac{y-b}{2a} + c = 0$.

Multiplicando ambos os membros desta igualdade por $(2a)^2$ (2.ª operação do parágrafo 3) obtém-se

$$a \,.\, (y-b)^2 + b \,.\, (y-b) \,.\, 2a + c \,.\, (2a)^2 = 0\,;$$

efectuando operações e notando que

$$(y-b)^2 = (y-b) \,.\, (y-b) = y \,.\, (y-b) - b \,.\, (y-b) = \\ = y^2 - by - (by - b^2) = y^2 - 2by + b^2$$

e que

$$(2a)^2 = 2a \,.\, 2a = 4a^2\,,$$

vem

$$a \,.\, (y^2 - 2by + b^2) + 2ab \,.\, (y-b) + 4a^2 c = 0$$

ou dividindo por a,

$$y^2 - 2by + b^2 + 2b \,.\, (y-b) + 4ac = 0\,,$$

ou seja

$$y^2 - 2by + b^2 + 2by - 2b^2 + 4ac = 0\,.$$

Daqui resulta, por ser $-2by + 2by = 0$ e $+b^2 - 2b^2 = -b^2$,

$$y^2 - b^2 + 4ac = 0\,,$$

ou seja (al-jebr!) $y^2 = b^2 - 4ac$. Esta é uma equação do 2.º grau em y, da forma 6) com $m = b^2 - 4ac$; tem, portanto, duas raízes $y_1 = +\sqrt{b^2 - 4ac}$ e $y_2 = -\sqrt{b^2 - 4ac}$.

Entrando agora com estes valores de y na relação 7) teem-se as duas raízes da equação 5), $x_1 = \frac{-b + y_1}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + y_2}{2a}$, isto é,

8) $x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

que se podem escrever conjuntamente sob a forma

9) $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

5.—Um pequeno embaraço

¿E se a expressão que figura debaixo do radical (o chamado *descriminante)*

10) $$m = b^2 - 4ac$$

fôr negativa? Nesse caso, a radiciação não é possível (vol 1.º pág. 126) e, por conseqüência, a expressão das raízes 9) não tem significado.

Aos algebristas antigos, gregos, hindús, e árabes, não tinha passado despercebido êste caso embaraçoso.

Mas sempre que êle se dava, o problema concreto que tinha dado origem à equação via-se que era um problema sem solução; o algebrista interpretava o descriminante negativo como querendo dizer que o problema não tinha solução; arrumava o caso dizendo que a equação não tinha, nesse caso, raízes e dormia sossegado, porque essa interpretação estava de acôrdo com a realidade e as necessidades da prática.

6.—Equações do 3.º grau

Passaram, sôbre a resolução das equações do 2.º grau, muitos séculos sem que se soubesse como resolver as do 3.º.

11) $$a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3 = 0.$$

Foi já em pleno Renascimento, no primeiro quartel do século XVI, que os algebristas italianos, herdeiros directos da cultura que os árabes tinham recolhido no Oriente (1), obtiveram, com êxito, a sua resolução.

Eis, a traços muito largos, os resultados gerais dêsse estudo (que, a princípio, se fêz apenas em casos particulares), empregando a linguagem e a forma de escrita de hoje.

Por meio da transformação $x = \frac{y - a_1}{3\,a_0}$ reduz-se a equação 11) à forma

12) $$y^3 + ay + b = 0$$

e esta, após um artifício conveniente, mais longo e mais trabalhoso do que para as equações do 2.º grau, prova-se que é resolvida pela fórmula

13) $$y = \sqrt[3]{-\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27}}}.$$

Como o leitor vê, a questão complica-se, porque as fórmulas de resolução se tornam, à medida que o grau aumenta, cada vez menos manejáveis.

Esta complicação atinge porém, em graus diferentes, o matemático teórico e o prático — o primeiro procura, antes de tudo, as possibilidades e, dentro

(1) As cidades marítimas italianas, Veneza principalmente, mantiveram desde muito cedo relações comerciais com o Oriente (império bizantino) e o norte de Africa; essas relações intensificaram-se progressivamente a partir do séc. XI.

delas, por um critério de *estética*, ama a *simplicidade;* o segundo, por um critério de *economia de trabalho*, procura processos expeditos de cálculo. Em face da fórmula 13), é, por conseqüência, o prático o mais atingido.

Mas em breve havia de surgir um facto mais importante e mais grave que atingiria igualmente um e outro.

7.—Um grande embaraço Ponhamos o seguinte problema: seja v o volume dum cubo de aresta x, e v' o de um paralelipípedo rectângulo cuja área da base é 3 e cuja altura é igual à aresta do cubo; determinar x de modo tal que seja $v = v' + 1$.

Como $v = x^3$ e $v' = 3x$, o problema leva imediatamente à seguinte equação $x^3 = 3x + 1$, ou seja $x^3 - 3x - 1 = 0$, que é da forma 12). Temos neste caso, $a = -3$, $b = -1$, $-\frac{b}{2} = \frac{1}{2}$, $\frac{b^2}{4} = \frac{1}{4}$, $\frac{a^3}{27} = -\frac{27}{27} = -1$, $\frac{b^2}{4} + \frac{a^3}{27} = \frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$ e, portanto, a fórmula de resolução 13) dá para raiz da equação,

$$14) \qquad x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}.$$

A resolução do problema depende, como se vê, do cálculo de $\sqrt{-\frac{3}{4}}$; mas *esta raiz não existe,* como vimos no vol. 1.º, pág. 125-126.

Estamos no mesmo caso que o apontado no parág. 5 para as equações do 2.º grau, dirá o leitor; a

não existência de $\sqrt{-\frac{3}{4}}$ quere apenas dizer que o nosso problema é impossível. Mais de-vagar! o nosso problema não é impossível; ora vejamos: quando a aresta x do cubo é muito pequena, o volume $v = x^3$ é também pequeno e menor que a soma $3x + 1$, mas, à medida que x aumenta, v vai-se aproximando de $v' + 1 = 3x + 1$, e chega mesmo a ultrapassá-lo; por exemplo, para $x = 1$ é $v = 1$ e $v' + 1 = 4$, mas para $x = 2$ é já $v = 2^3 = 8$ e $v' + 1 = 3.2 + 1 = 7$. Conclue-se dêste raciocínio que deve haver uma altura em que os dois volumes se igualem e o valor de x para o qual isso se der é raiz da equação do problema: $x^3 = 3x + 1$. Esta deve, portanto, ter uma raiz. (1)

¿Que concluir daqui? Que a posição cómoda assinalada no final do parág. 5 não é já possível; as necessidades do cálculo ultrapassam-na; o nosso instrumento de cálculo — *conjunto dos números reais* — não chega; há uma raíz e êle não permite calculá-la; *há que ir mais além.*

Que essa necessidade imperiosa tenha sido posta em relêvo pelas eqüações do 3.º gráu, e não pelas do 2.º (nas quais, porém, o facto da impossibilidade analítica já aparecera muitos séculos antes), mostra bem que o progresso da Matemática se não realiza sempre em obediência a um plano lógico de desenvolvimento interno, mas, muitas vezes, pelas pressões exteriores, que a obrigam a procurar, às apalpadelas, o seu caminho.

---

(1) Podemos afirmar que essa raiz está compreendida entre 1,8 e 1,9 visto que para $x = 1{,}8$ é $v = 5{,}832 < v' + 1 = 6{,}4$ e para $x = 1{,}9$ é já $v = 6{,}859 > v' + 1 = 6{,}7$.

2 — Números complexos

8. — Posição do problema Encontramo-nos na mesma situação em que por várias vezes nos achámos no 1.º vol. — perante uma incapacidade do instrumento analítico em face duma operação. Semelhantes incapacidades foram, até aqui, resolvidas com recurso ao método de *negação da negação*. E' êsse método que aqui vamos ainda usar. ¿De que se trata? ¿em que consiste agora a negação? No seguinte: seja a um número real, qualquer; não existe $\sqrt{-a^2}$, isto é, não existe nenhum número real x tal que $x^2 = -a^2$.

¿Como negar esta negação? criando um símbolo novo que satisfaça, se possível, às leis habituais do cálculo, e por meio do qual se possa exprimir $\sqrt{-a^2}$ ou, o que é o mesmo, que torne possível a igualdade $x^2 = -a^2$. Isto é o que diz o método; trata-se agora de lhe dar realização, que vamos procurar que seja tão simples quanto possível.

9. — A unidade imaginária Consegue-se isso criando o símbolo i — *unidade imaginária* — obedecendo às condições seguintes:

1.ª — O símbolo i satisfaz ao maior número possível das leis operatórias habituais.

2.ª — Satisfaz ainda à seguinte lei

$$15) \qquad i^2 = -1.$$

Verifiquemos se o nosso objectivo imediato foi de-facto conseguido. Temos $-a^2 = a^2 . (-1) = a^2 i^2$ (2.ª condição) logo, se fizermos $x = ai$ temos (1.ª condição)

$x^2 = (ai)^2 = a^2 . i^2 = -a^2$; da igualdade $x^2 = -a^2$ tiramos portanto $x = ai = \sqrt{-a^2}$.

Conseguimos, por conseqüência, o que pretendíamos: *negar a não existência da raiz,* obter uma expressão simbólica dela — $x = ai$ — expressão simbólica que se conseguiu pela introdução da nova entidade — unidade imaginária, i.

É claro que i não é nenhum número real, nem pode ser; se houvesse algum número real que satisfizesse à igualdade 15) não se teria verificado a impossibilidade da radiciação, não teria sido, por conseqüência, necessário criar um novo campo numérico.

10. — O campo complexo e a sua base

Aos números da forma bi — produto de um número real b pela unidade imaginária i — costuma dar-se o nome de *imaginários puros.* Aos números mais gerais, da forma

16) $$a + bi$$

onde a e b são números reais, chamaremos *números complexos;* a a chama-se *parte real* e a b *coeficiente de i.* Ao conjunto de todos os números complexos dá-se o nome de *campo complexo.*

O campo complexo contém o campo real porque, para $b = 0$, os números complexos reduzem-se à sua *parte real a.*

Assim, a simples criação da unidade i deu origem a um novo campo numérico — o campo complexo — que generaliza o campo real. Êste novo campo pode considerar-se como obtido a partir de duas unidades:

1.ª — *a unidade real: 1,* da qual, por meio da adição, depois pela divisão e mais tarde pela operação de corte, se tiram todos os números reais;

2.ª — *a unidade imaginária: i,* da qual resultam,

por multiplicação por um número real os imaginários puros e depois por adição com um número real, os complexos.

Ao conjunto das duas unidades $(1, i)$ chama-se *base do campo complexo.*

11.—Construção Definir número complexo não basta. É preciso proceder à estruturação efectiva do campo, examinar com cuidado as conseqüências das definições já dadas, procurar se, porventura, será preciso introduzir outras novas, deduzir as propriedades; em suma, *tomar posse* do novo instrumento e adquirir o manejo das suas possibilidades.

Uma observação domina todo êste trabalho — impusemos (parág. 9), como primeira condição, ao símbolo i o satisfazer ao maior número possível das leis operatórias habituais; vamos, por conseqüência, tratá-lo como a qualquer número, ou variável e, quando fôr preciso, recorrer à segunda condição: $i^2 = -1$. Assim se podem estudar tôdas as propriedades do campo complexo.

Para a adição teremos, por exemplo, $(2+3i)+(1-5i)=2+3i+1-5i=2+1+3i-5i=3+(3-5)i=3-2i$; em geral

17) $$(a+bi)+(c+di)=a+bi+c+di=(a+c)+(b+d)i.$$

Para o produto virá $(2+3i).(1-5i)=2(1-5i)+3i(1-5i)=2-10i+3i-15i^2=2-7i-15i^2=2-7i-15.(-1)=17-7i$, e, em geral, $(a+bi).(c+di)=a(c+di)+bi(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2=ac+(ad+bc)i+bd.(-1)$, logo

18) $$(a+bi).(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

Para calcular uma potência, pôr-se-á, por definição, se o exponte fôr inteiro e positivo,

$$19) \qquad (a+bi)^n = \overline{(a+bi).(a+bi).\cdots.(a+bi)}^{\,n}$$

e, se fôr inteiro e negativo,

$$20) \qquad (a+bi)^{-n} = \frac{1}{(a+bi)^n}$$

definições inteiramente análogas às que foram dadas no campo real (vol. 1.º pág. 29 e 124).

Ora, facto capital, prova-se sem grande dificuldade que tôdas estas operações gozam das mesmas propriedades *formais* (vol. 1.º pág. 35) que as operações dos mesmos nomes do campo real.

¿E quanto às outras propriedades? ¿às que dizem respeito a variações de valor? Essas dependerão, naturalmente, dos critérios que se estabelecerem para *maior que* e *menor que*.

Ora, dá-se a circunstância de que em *nenhum* problema em que interveem os números complexos houve até hoje necessidade de considerar tais critérios. *Onde não há necessidade não há criação* e, portanto, não há que falar, no campo complexo, naquelas propriedades que dizem respeito a *maior que* e *menor que*.

Quanto às operações inversas, definem-se, ainda, da mesma maneira e os cálculos não são difíceis, excepto para a radiciação. Esta continua a dar-nos que fazer. Se quisermos, por exemplo, determinar $\sqrt{1+2i}$ poremos, por definição, $\sqrt{1+2i} = x+yi$, com $(x+yi)^3 = 1+2i$ (vol. 1.º pág. 33).

Mas, ¿como determinar $x+yi$? Se o leitor se der ao trabalho de calcular $(x+yi)^3$, encontrará $(x+yi)^3 =$

$= x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i$ e, como êste complexo tem de ser igual a $1 + 2i$, deverá ser

$$\begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 1 \\ 3x^2y - y^3 = 2; \end{cases}$$

quere dizer, a determinação da raiz $x + yi$ está dependente da resolução conjunta destas duas equações, dêste *sistema de equações*, como se diz em linguagem matemática. Ora essa resolução, sem ser impossível, é, no entanto, muito trabalhosa e não é, por conseqüência, própria para o cálculo efectivo da raiz.

Mas, desde que o índice da raiz aumente, as coisas pioram — *em geral* a resolução é impossível e a raiz não pode calcular-se.

Mais uma vez encontramos a *radiciação* a impedir-nos o caminho; a radiciação — *último reduto da impossibilidade!*

12. — Resistências Deixemos, por agora, esta dificuldade e retomemos o fio das considerações feitas nos parág. **8** a **10**.

A generalização a que nêles procedemos está de tal modo na linha das generalizações anteriores feitas no campo real — tanto do ponto de vista da origem, como do método — que, ao homem de hoje, nada há nela que provoque repugnância ou dificuldade de aceitação. Não se deu, porém, o mesmo com os algebristas do século XVI. Sugestionados pelo aspecto, que consideravam artificioso e fora das possibilidades numéricas, da igualdade 15), consideraram os novos números como mero expediente de cálculo, sem lhes conferirem *dignidade numérica*. Êste modo de ver arreigou-se de tal modo no espírito dos algebristas que, já no século XVII, *Descartes* usou, para designar os novos números, o nome de *imaginários*.

Para bem perceber êste modo de encarar as coisas, basta lembrar que, nessa altura, ainda os números negativos, e muito menos os irracionais, não tinham adquirido a *dignidade numérica*. Na sua *Geometria*, livro cuja data de publicação — 1637 — marca o início duma época na história da Matemática, *Descartes* chama, às raízes negativas das equações, *raízes falsas* e aos números irracionais *números surdos*. (1)

De tôdas as surprêsas que a história das Matemáticas nos apresenta, a menor não é certamente esta — que, antes de os números negativos serem considerados como verdadeiros *números*, já eram conhecidas e praticadas quási tôdas as regras operatórias sôbre os números complexos, coisa que parece simplesmente absurda, uma vez que os números complexos resultam de raízes quadradas de números negativos.

A razão é esta — que os matemáticos se resignavam ao *formalismo*, consentindo em criar e usar aquelas regras convenientes para efectuar um cálculo que fornecesse um resultado desejado; mas daí a considerarem todos os símbolos sôbre que operavam como *números*, ia uma grande distância, aquela distância que separa um simples expediente de *manipulação*, do cuidado, mais profundo, de *compreensão*.

Distância que, no entanto, acabou por ser percorrida, logo que se conseguiu uma realização *visual* dos números complexos. Como?

13. — Representação geométrica dos complexos

Já no declinar do séc. XVIII, em 1797, um topógrafo norueguês, *Caspar Wessel*, entregou à *Academia Dinamarquêsa de Ciências e Letras* uma Memória, publicada em 1799,

(1) Ainda hoje, na pena de alguns autores anglo-saxónicos, se encontra a designação números *surdos*, por números irracionais.

Sôbre a representação analítica da Direcção onde, pela primeira vez, foi apresentada uma representação geométrica dos números complexos. ¿Em que consiste uma tal representação? Seja (fig. 13) *Oxy* um sistema de eixos, orientado como o sistema cartesiano de referência (cap. 1.º parág. 22); seja $a+bi$ um complexo qualquer e M o ponto do plano de coordenadas (a, b) (cap. 1.º pág. 38); façamos corresponder ao complexo $a+bi$ o ponto M. Seja agora, reciprocamente, M' um ponto qualquer do plano, de coordenadas (a', b'); façamos corresponder ao ponto M' o complexo $a'+b'i$. Estabelecemos, assim, uma correspondência biunívoca entre *número complexo* e *ponto do plano,* correspondência esta que generaliza, duma maneira elegante, aquela correspondência estudada no vol. 1.º, entre *número real* e *ponto da recta.*

(Fig. 13)

Mas, dirá o leitor, não há aqui nada de novo, além da idéia de coordenadas cartesianas; esta representação está implícita na construção cartesiana de 1637!

Ha; há qualquer coisa de novo e de arrojado; na representação de *Wessel,* que acabamos de descrever, é tomado expressamente um eixo para lugar de imaginários — todos os complexos da forma $0+bi$, isto é, todos os *imaginários puros,* teem representação sôbre o eixo Oy e, por consequência, êste eixo aparece aqui como lugar dos imaginários puros. A representação de *Wessel* vai, portanto, muito além, neste ponto de vista, da simples representação cartesiana.

Compreende-se agora que, uma vez conseguida

uma *realização visual* que, ainda por cima, é uma generalização directa da dos números reais, os símbolos $a+bi$ não tardassem a adquirir direitos de cidadania no campo matemático. Foi o que realmente aconteceu, mesmo assim com algumas peripécias, das quais a mais importante foi o esquecimento total, durante um século, a que foi votado o trabalho de *Wessel*. Mas, alguns anos depois, em 1806, *Jean Robert Argand* criava, por si, a mesma representação, cuja glória, indevida, ficou ligada ao seu nome durante muitas dezenas de anos.

14. — Uma relação inesperada

Consideremos ainda a representação geométrica de *Wessel* (fig. 14):

No triângulo rectângulo OAM tem-se (cap. II, parág. 8, fórmulas 15 e 16) $\overline{OA}=a=r.\cos\theta$, $\overline{AM}=$ $=b=r.\operatorname{sen}\theta$, onde $r=\overline{OM}=\sqrt{a^2+b^2}$; tira-se daqui $a+bi=r.\cos\theta+r.\operatorname{sen}\theta.i$, logo, todo o complexo se pode escrever sob a forma

21) $$a+bi=r(\cos\theta+i.\operatorname{sen}\theta).$$

Mostra esta relação que o complexo $a+bi$ pode ser definido pelo número r, que se chama o seu *módulo*, e pelo ângulo θ, que se chama *argumento*. Em particular, todo o número real é representado sôbre o eixo Ox e é, portanto, um complexo com argumento *zero* (n.º real *positivo*) ou π (n.º real *negativo*); todo o número imaginário puro bi é represen-

(Fig. 14)

tado sôbre o eixo Oy e tem, por conseqüência, argumento $\frac{\pi}{2}$ (se b é positivo) ou $\frac{3\pi}{2}$ (se é negativo) *(Figura 14)*.

E assim nos surgem, inesperadamente, as funções circulares a estabelecer uma íntima conexão entre a essência analítica dum complexo e a sua representação geométrica.

Para o estudo das propriedades do campo complexo, que deixámos esboçado no parág. 11, dispomos agora, além dos instrumentos que lá usámos, ainda da sua representação geométrica e da relação 21). Com tantos instrumentos o estudo não deve ser difícil! Não o é de-facto, mas não valeria a pena fazê-lo se nada viéssemos a obter de novo. Felizmente, não se dá isso; o uso da relação 21) permite-nos abordar, desta vez com sucesso, o estudo duma operação que até agora se tem furtado a um tratamento geral que a torne sempre possível.

15. — O último reduto da impossibilidade Seja $a + bi = r(\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta)$ um complexo qualquer e n um número inteiro e positivo; por definição, a raiz de índice n do complexo será outro complexo $x(\cos y + i.\operatorname{sen} y)$ tal que $[x(\cos y + i.\operatorname{sen} y)]^n = r(\cos\theta + i.\operatorname{sen}\theta)$. Um raciocínio simples mostra que a raiz $\sqrt[n]{a+bi} = x(\cos y + i.\operatorname{sen} y)$ se determina pela igualdade, dita, talvez impròpriamente, *fórmula de Moivre:*

$$22)\qquad \sqrt[n]{a+bi} = \sqrt[n]{r}.\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i.\operatorname{sen}\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$$

onde k é um inteiro qualquer. Mas esta fórmula diz-nos ainda mais, após uma discussão cuidada —

que o segundo membro tem n, *(nunca menos, nem mais de n)*, determinações, que se obteem dando, a k, n valores inteiros consecutivos, por exemplo os valores $0, 1, 2, \cdots n-1$.

Quere isto dizer, afinal, que *todo o número, real ou complexo, tem n raízes de índice n — caíu o último reduto da impossibilidade!* Compare o leitor êste resultado, belo na sua simplicidade, ao quadro da pág. 126 do vol. I. Que diferença!

De acôrdo com o resultado que acabamos de enunciar, o número 1, por exemplo, tem três raízes cúbicas, quatro raízes quartas, etc.. O cálculo, feito com a ajuda da fórmula 22), fornece os seguintes resultados:

raízes cúbicas de 1: $1, \quad \dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \quad \dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

raízes quartas de 1: $1, \quad i, \quad -1, \quad -i.$

O leitor pode fàcilmente verificar estes resultados, fazendo as elevações convenientes a potências; para as raízes quartas, tem-se imediatamente $1^4 = 1$, $i^4 = i^2 . i^2 = (-1).(-1) = 1$, $(-1)^4 = 1$, $(-i)^4 = i^4 = 1$.

16. — Novas perspectivas De cada vez que se faz uma creação, abrem-se naturalmente perspectivas; desta vez são elas duma vastidão enorme. Os números complexos veem tornar possível a unificação de certos resultados que, sem êles, ficariam sempre reduzidos a restos dispersos no campo real. Ponhamos, por exemplo, esta questão que o leitor porventura se terá posto já a si mesmo e que resulta do quadro da pág. 126 do vol. I — ¿que razão profunda haverá para que o número 16 possua o privilégio de ter duas

raízes quartas, 2 e -2, e o número -16 nenhuma? A' única resposta que podíamos dar no campo real (e que não é explicação nenhuma) — há dois números cuja quarta potência é $+16$ e nenhum cuja quarta potência seja -16 — podemos agora substituir esta: não há privilégio nenhum; *ambos teem quatro raízes quartas;* para o número 16, duas são reais e duas complexas, para o número -16 são tôdas complexas.

Factos como êste (há muitos outros que aqui não podemos apresentar) tornam inteiramente justa esta afirmação de um matemático — *o caminho entre duas verdades do campo real passa, muitas vêzes, pelo campo complexo.*

E como a tarefa essencial da Ciência é, não apenas registar os factos, mas, principalmente, descobrir os caminhos que vão de uns a outros, isto bastaria para que a criação do campo complexo fôsse bem vinda na Matemática!

3.º — Interacção

17. — O teorema fundamental da Álgebra Os números complexos saíram, como vimos nos parágrafos 8 a 10, da teoria das equações algébricas. Veja-se agora como elas reagem sôbre essa teoria, isto é, quais são as conseqüências que, para as equações, resultam da criação do campo complexo.

Voltemos ao exemplo do parág. 7. Viu-se lá que a equação $x^3 = 3x + 1$ tem a raiz

$$x = \sqrt[3]{\frac{1}{2} + \sqrt{-\frac{3}{4}}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - \sqrt{-\frac{3}{4}}}$$

Mas, como $-\frac{3}{4} = (-1) \cdot \frac{3}{4} = (-1) \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 =$

$= i^2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$, tem-se $\sqrt{-\frac{3}{4}} = i\frac{\sqrt{3}}{2}$ logo a raiz pode escrever-se sob a forma

$$23) \qquad \sqrt[3]{\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}}.$$

Efectuados os cálculos com a ajuda da fórmula 22) do parág. 15, notando que essa fórmula dá, como lá se disse, três valores para cada radical cúbico e combinando êsses valores convenientemente (1), chega-se à conclusão de que satisfazem à equação os três seguintes valores de x: $x_1 = 2 . \cos 20^\circ = 1,88$, $x_2 = -2 . \cos 40^\circ = -1,532$, $x_3 = -2 . \cos 80^\circ = -0,348$.

A equação tem *uma raiz verdadeira* e *duas falsas* diria, à *Descartes*, um algebrista do séc. XVII; a equação tem *três raízes reais*, uma *positiva* e *duas negativas*, diz, mais avisado, o algebrista moderno que adquiriu o conceito geral de número.

Deparamos assim com êste resultado notável — os complexos foram criados para se conseguir obter *uma* raiz que se sabia que existia; êles não só permitiram determiná-la, como revelaram a existência de mais duas! Simplesmente, essas, por serem negativas, não conveem ao problema concreto — determinação do comprimento duma aresta — e, por isso, estavam escondidas na equação.

Uma discussão da fórmula de resolução 13) do parág. 6 leva à seguinte conclusão — *tôda a equação do 3.º grau tem três raízes.*

Este resultado, junto aos anteriormente conhecidos — as equações do 1.º grau teem uma raiz; as do 2.º,

(1) Isso exige uma discussão um pouco extensa que não pode ser feita aqui.

duas—sugere esta questão ¿quantas raízes tem uma equação algébrica de grau *n*?

A resposta está num dos resultados mais importantes da Algebra—*tôda a equação algébrica de grau* n *tem* n *raízez.*

Esta resposta foi pressentida por alguns matemáticos do comêço do século XVII—entre êles *Girard* e *Descartes*—e veio a ser estabelecida com rigor pelo final do século XVIII, como conseqüência duma outra propriedade, o chamado *teorema fundamental da Algebra—tôda a equação algébrica tem uma raiz, real ou complexa.*

Do aparecimento dos complexos ao estabelecimento dêstes resultados vão mais de dois séculos—dois séculos de trabalho duro, em que alguns resultados pressentidos pela intuïção foram confirmados, e outros não.

Vamos falar, a traços muito largos, de um dêstes últimos, que constitue um autêntico drama da história da Matemática, drama até pela vida das pessoas que nêle desempenharam os primeiros papéis.

18.—O problema da resolução algébrica

Repare o leitor nas fórmulas de resolução de equações algébricas que até aqui encontrámos [parág. 2, 4); parág. 4, 9); parág. 6, 13)]. A complicação das fórmulas cresce com o grau; do primeiro grau para o segundo surgem radicais; o índice dos radicais e o número de radiciações a efectuar aumentam do 2.º para o 3.º grau; no entanto, elas apresentam uma característica comum—*é que as raízes veem expressas analìticamente nos coeficientes com a ajuda das operações de adição algébrica, multiplicação, divisão e radiciação, aplicadas um número finito de vezes.*

¿Manter-se-á esta característica para as equações de grau *n*, qualquer? Pôr esta questão é pôr o problema

da *resolubilidade algébrica*, ou melhor, da *resolubilidade por meio de radicais*.

A intuïção diz que a resposta deve ser afirmativa e o facto de, logo na primeira metade do século XVI, se ter conseguido a resolução das equações do 4.º grau e ela obedecer aos moldes apontados, mais aferrou os algebristas a essa convicção. Todo o período que decorre daí até ao fim do século XVIII é um longo período de tentativas e de insucessos para estender às equações de grau superior a 4 a resolução por meio de radicais. A equação do 5.º grau resiste como um baluarte inexpugnável.

Tanto fracasso junto acaba por despertar esta idéia—¿estaremos porventura correndo atrás duma quimera? Mesmo ao morrer do século XVIII, um matemático italiano — *Paolo Ruffini* — anunciou a demonstração de que a equação do 5.º grau não pode resolver-se por meio de radicais; a validade da demonstração suscitou porém dúvidas.

Poucos anos mais tarde, no primeiro quartel do século XIX, um matemático norueguês, um dos mais puros génios matemáticos de todos os tempos, tocado igualmente pela garra da inteligência e da desgraça — morre obscuramente (à beira da glória!) aos 27 anos numa aldeia da Noruega — *Niels Abel*, deu a demonstração efectiva de que a equação do 5.º grau se não pode resolver por meio de radicais.

Resolvida, duma maneira inesperada, esta questão, restava achar resposta para esta outra—¿quais as razões porque até ao grau 4 há resolubilidade por meio de radicais e no 5.º não há? ¿e do grau 5 em diante? Era, em suma, o problema do enquadramento dêstes resultados parcelares num quadro geral; sempre a mesma preocupação do cientista—enquadrar materiais dentro de esquemas explicativos, cada vez mais gerais.

Foi outro jovem, contemporâneo de Abel, igual a êle em precocidade, em génio e em desgraça, se bem que o seu oposto em estrutura sentimental, *Evariste Galois*, quem respondeu completamente a esta questão. Deu um critério geral para averiguar, dada uma equação algébrica, se ela admite, ou não, resolução por meio de radicais. Ora, *dêsse critério resulta que até ao grau 4 a equação é, e daí para cima em geral não é,* (1) *resolúvel por meio de radicais.*

Estava conseguido o objectivo. Mas, daqui resulta agora uma questão alarmante ¿não se podem, então, resolver equações de grau superior a 4? ¿não há maneira de calcular as suas raízes? Não é assim; há processos para calcular as raízes de *qualquer* equação algébrica com a aproximação que se quiser. Esses processos aplicam-se mesmo às equações de graus 3 e 4 porque são muito mais cómodos do que o emprêgo das fórmulas de resolução.

Os métodos de resolução aproximada—de *resolução numérica*, como se lhes chama—aplicam-se também com sucesso a *equações transcendentes*, isto é, a equações obtidas igualando a zero uma expressão analítica em que figuram funções transcendentes, por exemplo a equacão $sen\, x = x$.

19. — Resultados novos sôbre um problema antigo

Consideremos uma equação de grau maior que 4 e de coeficientes inteiros, por exemplo $x^7 - x^6 - 1 = 0$.

Prova-se que esta equação tem *uma* raiz real, positiva, e 6 raízes complexas. Essa raiz real é irracio-

(1) A não ser para certas equações cujos coeficientes satisfazem a relações particulares; por exemplo, a equação do 6.º grau $x^6 - 1 = 0$ é resolúvel por radicais.

nal, como vamos ver. Suponhamos que não era: haveria uma fracção irredutível $\frac{p}{q}$ tal que $\left(\frac{p}{q}\right)^7 - \left(\frac{p}{q}\right)^6 - 1 \equiv 0$ ou seja $\frac{p^7}{q^7} - \frac{p^6}{q^6} - 1 \equiv 0$, donde, multiplicando ambos os membros por q^7, $p^7 - p^6 \cdot q - q^7 \equiv 0$, ou $p^7 \equiv p^6 \cdot q + q^7$.

Esta igualdade pode ainda escrever-se

$$p^7 \equiv q\,(p^6 + q^6)$$

e mostra que q é divisor de p^7 (o cociente da divisão é $p^6 + q^6$). Mas, por uma propriedade que o leitor encontra em qualquer livro de Aritmética, o inteiro q, primo com p, não pode ser divisor de p^7, logo a igualdade é impossível e não existe, portanto, raiz $\frac{p}{q}$.

Daqui tiram-se duas conseqüências importantes.

1.ª — *A equação dada não tem raízes fraccionárias,* logo, a sua raiz real só pode ser inteira ou irracional.

Ora inteira não é, porque para $x = 1$ obtém-se no primeiro membro -1, e, substituindo x por qualquer outro número inteiro e positivo, o primeiro membro vem sempre positivo. A raiz real é, portanto irracional.

Generalizando o raciocínio que fizemos sôbre esta equação, prova-se fàcilmente que *dada uma equação algébrica de coeficientes inteiros e com coeficiente do 1.º têrmo unidade:* $x^n + a_1 x_1^{\,n-1} + \cdots + a_n = 0$, *as suas raízes racionais, se existirem, são necessàriamente inteiras.*

Daqui resulta uma maneira muito simples de estabelecer a irracionalidade de certos números; tomemos, por exemplo, o número $a = \sqrt[3]{5}$; êste número é raiz da equação $x^3 - 5 = 0$, como imediatamente resulta da própria definição de radiciação. Ora esta equação está

no caso anterior e não tem, portanto, raízes fraccionárias; raízes inteiras também não tem, como se verifica fàcilmente, logo, as raízes reais que houver (1) só podem ser irracionais.

2.º — Vimos que a raiz real da equação $x^7 - x^6 - 1 = 0$ é irracional; mas, como o grau é superior a 4, essa raiz não pode exprimir-se (a não ser que os coeficientes satisfizessem a qualquer relação particular) em combinação finita de operações racionais e radiciações sôbre os coeficientes. Quere dizer, aquêle número irracional não é como os números $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{5}}$ por exemplo; é um número não exprimível por meio de radicais sôbre números inteiros, e isto vem lançar uma luz nova e imprevista sôbre a natureza dos números irracionais. Efectivamente, como o leitor viu no vol 1.º (cap. III), as irracionalidades surgiram por virtude da impossibilidade da radiciação e até ao século XIX uma coisa considerou-se sempre como sinónima da outra. Pois muito bem, da teoria das equações surge êste facto fundamental — *as possibilidades da irracionalidade ultrapassam de largo as da radiciação!* E' um novo domínio do desconhecido que se abre!

20. — Classificando a irracionalidade As coisas vão mais longe ainda. Um estudo completo (que não podemos fazer aqui) do campo real leva aos resultados seguintes:

1.º — Há uma primeira classe de números reais — os chamados *números algébricos* — que são aquêles que

(1) Há apenas uma, precisamente $\sqrt[5]{5}$; as outras duas são complexas, como resulta da aplicação da fórmula 22) do parág. 15.

podem ser definidos como raízes duma equação algébrica de coeficientes inteiros. Pertencem a esta classe:

a) os números racionais, visto que $x = \frac{p}{q}$ é raiz da equação $qx - p = 0$;

b) os números que são combinações finitas de operações racionais e radiciações sôbre números inteiros, tais como $\sqrt{2}, \sqrt[5]{5}, \sqrt[5]{2} + \sqrt[4]{1 + \sqrt{7}}$ etc..

c) os números irracionais que, por serem raízes de equações (gerais) de grau superior a 4 e de coeficientes inteiros, não pertencem à categoria a) ou b).

2.º — Há uma segunda classe de números reais — aquêles que são irracionais e não algébricos; são chamados *números transcendentes*. E' transcendente, por exemplo, o número π com que travámos conhecimento no vol. 1.º (pág. 106 e segs.).

3.º — Tanto a primeira classe como a segunda são infinitas, a primeira do *tipo do numerável* e a segunda do *tipo do contínuo* (vol. 1.º, pág. 109 e segs.).

21. — O que cabe no intervalo (0, 1)

Estes resultados chamam de novo a nossa atenção para as relações entre o *denso* e o *contínuo*, abordadas no vol. 1.º. Olhemos para o intervalo (0, 1), conjunto dos números reais $0 \leq x \leq 1$; os números *racionais* (r) dêsse intervalo formam um conjunto *denso*, e a simples intuïção diz-nos que êles preenchem todo o intervalo.

No entanto, os desenvolvimentos a que acabamos de referir-nos permitem afirmar que nesse intervalo cabe, além de

1.º — A infinidade (numerável) dos números (r), ainda:

2.º — A infinidade (numerável) das raízes quadradas dos mesmos números (r) (porque elas são números reais, em geral irracionais, compreendidos entre *zero* e *um*).

3.º — A infinidade (numerável) das raízes cúbicas dos mesmos números.

4.º — A infinidade (numerável) das razíes quartas e a das raízes quintas... a das raízes de índice n, qualquer, dos mesmos números (r).

5.º — A múltipla infinidade (numerável) de tôdas as combinações racionais de números das alíneas anteriores e que conduzam a números menores que 1, por exemplo $\sqrt{\frac{1}{2}+\sqrt[5]{\frac{1}{3}}}$.

6.º — A infinidade (numerável) de todos os números algébricos menores que 1 e não compreendidos nas alíneas anteriores.

7.º — E, depois de tudo isto, não passámos sequer do numerável! No intervalo (0, 1) cabe ainda uma outra infinidade, doutro tipo, de números — a infinidade (contínua) dos números transcendentes, positivos e menores que 1.

Que possibilidades racionais nos oferecem os conceitos com que temos vindo a trabalhar! que caminho andado desde a descoberta das incomensurabilidades, nos tempos recuados de Pitágoras!

A irracionalidade, de começo tida como destruïdora da harmonia do Universo, acabou por ser metida nos quadros gerais do campo numérico, classificada. Foram necessários, para isso, não menos de 25 séculos; mas a própria demora testemunha da grandeza da obra. Para a conseguir foi necessário, entre outras coisas, o desenvolvimento que a teoria das equações algébricas tomou a partir de século XVI

e êste só foi possível com a criação dos números complexos. Mais uma prova daquela grande verdade que atrás citámos — *o caminho para o real passa muitas vezes pelo complexo!*

22.—Continua a abertura de perspectivas Não se faz idéia, à primeira vista, da quantidade e importância de domínios novos que a criação dos complexos permite abrir. A noção de complexo e a noção de infinito são dois dos principais instrumentos da Matemática moderna, e, no emprêgo generalizado dêsses instrumentos, reside talvez a sua maior diferença em relação à Matemática antiga. Tendo trazido o leitor, através duma curta digressão técnica, até às fronteiras desta construção grandiosa, detemo-nos aqui. O servir-lhe de cicerone em tais domínios é missão de outros que não dêste livrinho de vulgarização. Antes, porém, de retomarmos a nossa excursão, por outras regiões, queremos dizer-lhe que as noções de *variável* e *função* (cap. I, parág. 17 e 18) se estendem imediatamente ao campo complexo, como é óbvio; a variável complexa pode representar-se pelo símbolo $z = x + iy$ onde x e y representam conjuntos de números reais. Se x e y forem variáveis *reais contínuas*, então $z = x + iy$ chamar-se-á variável complexa contínua ou simplesmente *variável complexa*. O seu domínio é, geomètricamente, o conjunto de todos os pontos de uma certa região do plano, como, por exemplo, no caso da fig. 15.

(Fig. 15)

O conceito de função de variável complexa permite generalizar a definição de

polinómio inteiro dada no parág. 4 do cap. II. Chamaremos, em geral, polinómio inteiro à expressão analítica

$$24) \qquad P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$$

onde n é inteiro e positivo, $z = x + iy$ é a variável complexa e $a_0, a_1 \cdots a_n$ números quaisquer, *reais ou complexos*. A tôda a equação $P(z) = 0$ continua a chamar-se *equação algébrica;* coisa curiosa, os resultados gerais dos parág. 17 e 18 dêste capítulo sôbre a teoria das equações algébricas manteem-se intactos.

Mais tarde, no vol. 3.º, teremos de nos referir a alguns resultados da teoria das funções de variável complexa. Por agora, vamos à contemplação de outros panoramas.

CAPÍTULO IV

Excursão histórica e filosófica

1.—Retomando o fio... No cap. IV do vol. 1.º (pág. 80 e seg.) fizemos um estudo rápido de alguns problemas que, na Grécia antiga, se levantaram em relação com o conceito de número.

Vimos então como surgiram algumas grandes concepções filosóficas — o *devir* heracliteano, a *ordenação matemática* dos pitagóricos, a *imobilidade eterna* dos eleatas — e como elas se chocaram.

Aludimos ainda, ao de leve, às condições psicológicas e sociais que acompanharam essa evolução (pág. 100-102). Não vamos agora entrar em largas explanações sôbre a mesma questão, mas temos que a retomar. O assunto que ao longo de todo êste livrinho nos tem ocupado — o conceito de função — exige-o para inteira clarificação do seu significado na história da civilização ocidental.

2. — Problemas Pelos meados do século v a. C., a Grécia encontrava-se a braços com um conjunto de problemas duma importância enorme. Acabara de sair vitoriosamente da *prova de fogo* que para ela representara a ameaça de conquista persa e daí resultara esta consequüência de grande alcance — as cidades gregas, até aí isoladas, constituindo estados inteiramente autónomos, haviam sido obrigadas, em face dessa ameaça, a aproximarem-se, a concertarem-se numa política de defesa

comum. Estava, por êste motivo, posto às cidades gregas o seguinte problema político: ¿iria continuar a política de aproximação? ¿iria essa política levar à constituïção de um Estado único, atingindo-se uma *unidade* que superasse a multidão das autonomias parcelares?

A êste problema, que, para cada cidade, era um problema *externo,* juntava-se o problema *interno* de cada uma ¿tinha cada uma das cidades de per si atingido uma situação de estabilidade? ou, pelo menos, ¿tinha em alguma, ou algumas, sido atingido o equilíbrio dos diferentes factores económicos e sociais interiores, equilíbrio êsse que permitisse o lançar-se no empreendimento exterior de impulsionar a unificação?

Tais problemas, cuja importância o seu próprio enunciado revela, eram dominados por êste outro ¿existia na Grécia o elemento necessário de aglutinação das parcelas políticas? ¿existia alguma classe de interêsses cosmopolitas que servisse de elemento actuante para a soldagem dessas parcelas e passagem a uma unidade política mais vasta, *isolado* social superior?

3. — Insuficiências A esta última pregunta a História responde — não; não existia uma tal classe. Houve, é certo, elementos importantes para a sua formação nas cidades em comunicação directa com o mar e que tiraram, portanto, do comércio e artesanato uma das suas fontes de riqueza; mas, mesmo nessas cidades — Atenas à frente de tôdas — se desenvolvia por essa altura uma luta agitada entre a *terra* e o *mar:* a *terra,* o elemento tradicional, fechado, dominado por uma aristocracia limitada nos seus interêsses e nos seus horizontes, e

o *mar*, o elemento de comunicação de povos, o elemento cosmopolita e renovador por excelência.

De modo que temos, em linhas gerais, a situação seguinte: na Grécia continental interior, uma aristocracia da terra impondo pela fôrça uma estratificação social rígida mas constantemente ameaçada de se subverter, e consumindo nessa tarefa tôdas a suas energias; na Grécia marítima uma aristocracia da terra com êsse problema e mais o da luta de todos os dias com a classe comercial e dos artesãos.

Em resumo — ausência de classe social de unificação política, ausência de equilíbrio interior em qualquer das cidades; insuficiências que condenaram a Grécia ao fraccionamento político, a que só uma fôrça exterior havia de pôr têrmo: o imperialismo macedónico primeiro, o imperialismo romano mais tarde.

Todo o período que vai do fim da ameaça persa à conquista macedónica — pouco mais dum século — é gasto em lutas das cidades umas com as outras. Cada uma das mais importantes — Atenas, Sparta, Tebas — pretende realizar a unificação política em seu benefício; o imperialismo militar aparece a pretender impor o que uma insuficiência orgânica não permite — o resultado é um afundamento geral.

4. — Conseqüências intelectuais

É neste ambiente, neste *contexto*, que vai desenrolar-se a evolução da Ciência e da Cultura gregas. Em que termos?

As grandes escolas filosóficas a que nos referimos no vol. I.º nascem, *tôdas*, fora do continente grego, nas colónias da Ásia Menor ou da Itália, colónias de civilização comercial. Pelos meados do século V, Atenas, por virtude do papel que representara na luta contra o invasor, torna-se a metrópole da cul-

tura grega; esta vai lá evolucionar, condicionada pela luta interna e externa a que acabamos de fazer referência, luta dominada pelo antagonismo *terra-mar*.

A situação apresentava-se em Atenas nitidamente favorável ao *mar:* a classe dos comerciantes e artesãos, adquire pêso económico e audácia crescentes e é tomada de uma enorme febre de saber—as concepções das grandes escolas descem ao povo que tende a apropriar-se delas; aparecem e multiplicam-se homens duma feição nova—os *sofistas*—homens que tomam a profissão de ensinar e democratizar a cultura.

Mas, a breve trecho se desenha uma reacção contra êste estado de coisas, reacção que vai atingir não só o rumo da evolução da Ciência como também a extensão da sua expansão popular.

5.—A mudança de navegação

Sócrates (1) e, principalmente, *Platão* (2), são os filósofos dêsse rumo novo. ¿Em que consiste êle? Numa aristocratização do saber; no desviar a atenção das coisas externas ao homem para a centrar nas internas, morais e psicológicas; no tema da *virtude* em plano superior ao do *bem-estar terreno;* na introdução sistemática dum princípio *espiritual* na explicação científica, em substituïção das tentativas de explicação materialista; em suma, na tendência para o abandono da realidade sensível, da realidade fluente, e para o refúgio no seio do espiritualismo, onde se pode construir, à vontade, uma *permanência* que abrigue dos vendavais da transformação...

E' o próprio *Platão* que nos dá conta dessa mudança

(1) Ateniense (470-399 a. C.).

(2) Ateniense (428-347 a. C.); de uma das mais nobres famílias de Atenas. Pelo lado do pai a sua ascedência ia, dizia-se, até ao deus *Poseidon*.

de rumo ao mostrar-nos no diálogo *Fedon*, o seu mestre *Sócrates* discorrendo àcêrca da desilusão que a leitura de *Anaxágoras* (1) lhe provocara. Ouçamo-lo: (2)

«Eis que um dia ouvi a leitura dum livro que era, dizia-se, de Anaxágoras e onde se falava assim: «é em última análise o Espírito que tudo ordenou, é êle que é a causa de tôdas as coisas». Uma tal coisa alegrou-me; pareceu-me que havia vantagem em fazer do Espírito uma causa universal; se assim é, pensei eu, êsse Espírito ordenador que justamente realiza a ordem universal, deve também dispôr cada coisa em particular da melhor maneira possível...

. . . . . .

Não havia mais que revelar-mo-lo e estava pronto a não desejar outra espécie de causalidade!

. . . . . .

Com que ardor me agarrei à leitura! Lia-o o mais de-pressa que podia, a-fim-de me instruir, o mais ràpidamente possível, do melhor e do pior.

Pois bem! adeus oh! maravilhosa esperança! Quanto mais lia mais me afastava dela. Com efeito, ao avançar na leitura, vejo um homem que não faz nada do Espírito, que lhe não distribue nenhum papel nas causas particulares da ordem das coisas, que, pelo contrário, alega a êsse propósito, acções do ar, do éter, da água e muitas outras explicações desconcertantes. (3)

. . . . . .

Visto que a causa me tinha fugido, visto que não pudera nem descobri-la por mim nem aprende-la com

---

(1) Natural de *Clazoméne*, no litoral da Ásia Menor (500-428). Exerceu grande influência intelectual em Atenas.

(2) *Fedon*, 97 b) e seg.

(3) Na filosofia de *Anaxágoras*, com efeito, a acção do Espírito limita-se ao impulso inicial; no resto procuram-se explicações mecânicas.

outro, para me pôr à sua procura tinha que «mudar de navegação».

Ao longo do *Fedon* e em passagens de outras obras suas, *Platão* explica o fundamento e a essência do rumo novo. Trata-se de adquirir a verdade. Como? ¿analisando a realidade exterior sensível, e tirando dela critérios de verdade? Não!

«Receei-me de me tornar completamente cego da alma dirigindo os meus olhos para as coisas e esforçando-me por entrar em contacto com elas por cada um dos meus sentidos. Pareceu-me indispensável refugiar-me do lado das idéias e procurar ver nelas a verdade das coisas. (1)

6. — As Formas ou Idéias

Para dar realização a esta atitude mental, *Platão* construiu um sistema filosófico — a teoria das *Formas* ou *Idéias* — de que dá no *Fedon* os traços fundamentais.

Sócrates expõe e *Simmias* fornece-lhe as respostas e pausas necessárias: (2) *«Quando é que, portanto, retomou Sócrates, a alma atinge a verdade? Não há dúvida que quando ela procura encarar qualquer questão com a ajuda do corpo, êle a engana radicalmente.*

— Dizes a verdade.

— ¿Não é, por conseqüência, verdade que é no acto de raciocinar que a alma, se alguma vez o consegue, vê manifestar-se plenamente a realidade dum sêr?

— Sim.

— E sem dúvida, ela raciocina nas condições óptimas precisamente quando nenhuma perturbação lhe advém de lado nenhum, nem do ouvido, nem da vista, nem duma

---

(1) *Fedon*, 99 e.
(2) *Fedon*, 65 b e seg

dôr, nem dum prazer, mas quando, pelo contrário, ela está o mais possível isolada em si própria, mandando passear o corpo, e quando, quebrando tão radicalmente quanto puder, tôda a relação, todo o contacto com êle, ela aspira ao real.

— E' exactamente assim!

— ¿Não é verdade que é nesse estado que a alma do filósofo faz ao máximo abstracção do corpo e lhe foge, enquanto procura isolar-se em si própria?

— Manifestamente!

— Mas ¿que dizer disto agora, Simmias? ¿Afirmamos nós a existência de qualquer coisa que seja «justo» em si, ou negamo-la?

— Afirmamo-la, evidentemente, por Zeus!

— E também, não é verdade, ae qualquer coisa que seja «belo» e «bom»?

— Como não?

— Mas, evidentemente, ¿nunca viste com os teus olhos nenhuma coisa dêsse género?

— Claro que não.

— ¿Mas então, é porque a apreendeste por qualquer outro sentido diferente daqueles de que o corpo é o instrumento? Ora, aquilo de que falei, é para tudo, assim para «grandeza», «saúde», «fôrça» e para o resto também, é, numa palavra e sem excepção, a sua realidade: o que, precisamente, cada uma dessas coisas é. ¿Portanto é por meio do corpo que se observa o que ha nelas de mais verdadeiro? ¿Ou, pelo contrário, o que se passa não é, antes, que aquêle de entre nós que melhor e mais exactamente se tiver preparado a pensar em si mesma cada uma das coisas que encara e toma como objecto, é êsse que deve aproximar-se mais daquilo que é conhecer cada uma delas?

— E' absolutamente certo.

— E, portanto, êsse resultado, ¿quem o realizará na sua maior pureza senão aquêle que no mais alto grau

possível usar, para se aproximar de cada coisa, só do pensamento, sem recorrer, no acto de pensar, nem à vista nem a qualquer outro sentido, sem arrastar consigo nenhum em companhia do raciocínio? ¿aquêle que, por meio do pensamento em si mesmo e por si mesmo, e sem mistura, se atirar à caça das realidades, de cada uma em si mesma também e por si mesma e sem mistura? ¿e isso depois de se ter, o mais possível, desembaraçado dos olhos, dos ouvidos, e, para bem dizer, do corpo inteiro, pois que é êle que perturba a alma e a impede de adquirir verdade e pensamento, tôdas as vezes que ela se põe em relação com êle? ¿Não é verdade, Simmias, que é êsse, se alguém o pode fazer no mundo, que atingirá o real?

—Impossível, Sócrates, de falar com maior verdade!»

Fizemos esta longa citação para pôr o leitor em contacto com a raíz do pensamento de *Platão*—a realidade não está nas coisas sensíveis, está nas *Idéias* ou *Formas:* bom, belo, justo, grandeza, fôrça, etc.; as coisas sensíveis não são mais que imagens ou cópias das *Formas;* a verdade não pode portanto adquirir-se pelo exame, por meio dos sentidos, dó universo exterior sensível, mas apenas pelo pensamento puro, pela actividade da *alma* isolada do corpo; êste não faz mais do que perturbá-la, impedi-la de pensar.

7.—A fluência e a permanência

Como está bem de ver-se, um tal sistema deve encontrar, no seu choque com a realidade de todos os dias, dificuldades grandes. O próprio *Platão* as reconheceu e deixou na sua obra traços dessa peocupação. No *Parménides*, um diálogo que deve pertencer à maturidade de *Platão*, êle discute precisamente o problema da existência das Formas *separadas*, pondo em cena, desta vez, o velho filósofo

Parménides de Elea, o seu discípulo *Zenão*, e *Sócrates*, um *Sócrates* jovem que apenas ensaia os primeiros passos na Filosofia. Após uma longa discussão à volta das dificuldades citadas, discussão onde, coisa curiosa e instrutiva, elas se não resolvem, *Parménides* declara: (1) *Imagina, pelo contrário, Sócrates, que se persiste em negar a existência das Formas dos sêres, atendendo a tôdas as dificuldades expostas por nós ou a outras semelhantes, e em recusar que haja, para cada realidade, uma Forma precisa. Não haverá mais para onde dirigir o pensamento, pois que se não quis que a forma específica de cada sêr guarde identidade permanente; e isso será aniquilar a própria virtude da dialética. Eis aquilo de que tu pareces ter-te apercebido, acima de tudo.*

— Dizes a verdade, teria concordado Sócrates.

— ¿Que farás tu então da filosofia? ¿para onde te hás-de voltar se não tens resposta para estas questões?

— Não tenho nenhuma em vista, que saiba, pelo menos de momento».

Esta passagem tem uma importância enorme porque nos põe em face da grande preocupação de *Platão*, o objectivo final da sua filosofia — *obter qualquer coisa que guarde identidade permanente* e à qual o pensamento se possa prender; se a realidade sensível é *fluente* e, portanto, o contrário do permanentemente idêntico, voltemos-lhe as costas e refugiemo-nos, como acima vimos, (parág. 5) «*do lado das idéias*».

¡Dilema implacável em que *Platão* se debate! — ou as *Idéias* com tôdas as dificuldades e as conseqüências que delas resultam (entre as quais esta, necessária: que só se pode bem filosofar, só se atinge plenamente a verdade depois de morto), ou isso, ou o

(1) *Parménides* 135 *b* e *c*.

vendaval da *fluência*, da *transformação*, com tôdas as suas conseqüências, implacáveis também...

De que êste era, de-facto, o seu grande objectivo, abundam os testemunhos. Vamos dar ao leitor mais dois. O primeiro, ainda do próprio *Platão:* (1) «*¿ Não dizíamos nós ainda isto há pouco? que a alma por vezes emprega o corpo para o exame de uma ou outra questão, por intermédio da vista, do ouvido ou de outro sentido; porque quando o exame se faz por intermédio dum sentido é o corpo que é o instrumento. Então dizíamos nós, a alma é arrastada pelo corpo na direcção daquilo que jàmais guarda a sua identidade; ela própria se perde, se perturba, a cabeça anda-lhe à roda como se estivesse bêbeda:* (2) *é porque está em contacto com coisas dessa espécie.*

— *Absolutamente!*

— *Quando, pelo contrário, ela está em si mesma neste exame, ela vôa na direcção do que é puro, que possue sempre a existência, que não morre, que se comporta sempre da mesma maneira; por virtude do seu parentesco com êle* (3), *é sempre junto dêle que ela vem tomar o lugar ao qual lhe dá direito tôda a realização da sua existência em si mesma e por si mesma; deixa de vagabundear e, na vizinhança dos sêres descritos, conserva, ela também, sempre a sua identidade e a sua mesma maneira de ser. E' porque está em contacto com coisas dessa espécie*».

O outro testemunho é de *Aristóteles*. Ao passar, na *Metafísica*, em revista as teorias dos filósofos anteriores, refere-se assim ao seu mestre *Platão* de cuja doutrina filosófica mais tarde se separou, nalguns

---

(1) *Fedon* 79 *c* e *d*.

(2) O' termo figura com tôda a sua crueza, no texto: *methyousa*, de *methysko* — *embebedar-se*.

(3) Aquilo que é *puro, eterno* e *idêntico*.

pontos importantes [1]: «*Desde a sua juventude,* Platão, *tendo sido amigo de* Crátilo *e familiar com as opiniões de* Heraclito, *segundo as quais tôdas as coisas sensíveis estão num fluxo perpétuo e não podem ser objecto de conhecimento,* [2] *conservou-se fiel a esta opinião. Por outro lado,* Sócrates, *cujas lições incidiram exclusivamente sôbre as coisas morais e não sôbre a Natureza inteira, tinha contudo, nêste domínio, procurado o universal e sido o primeiro a fixar o pensamento sôbre as definições.* Platão *seguiu o seu ensino mas foi levado a pensar que êsse universal devia existir em realidades duma ordem diferente da dos sêres sensíveis; não pode existir, com efeito, julgava êle, uma definição comum dos objectos sensíveis individuais, daqueles pelo menos que estão em perpétua transformação. A tais realidades deu então o nome de Idéias...*» [3]

Como se vê, o testemunho do discípulo e contemporâneo concorda com o dos textos citados — a doutrina de *Platão* sai da de *Heraclito* por oposição a ela; o seu objectivo essencial é criar uma *permanência* racional, mansão artificial duma pureza e duma verdade artificiais.

8. — Outras características

Não é aqui o lugar, evidentemente, de fazer uma exposição e uma crítica minuciosas do sistema filosófico de *Platão.* Mas êle importa-nos grandemente pelas suas conseqüências; vamos, por isso, fixar a nossa atenção sôbre duas

---

(1) *Metafísica,* A 6, 987 b.

(2) Não conheço nenhum fragmento de *Heraclito* onde essa impossibilidade seja afirmada.

(3) *Aristóteles* insiste, noutra passagem (Metafísica, M 4): «A doutrina das *Idéias* foi, nos seus fundadores, a conseqüência dos argumentos de *Heraclito* sôbre a verdade das coisas, ...».

DOZ

das suas características, além daquela que acabamos de acentuar.

A primeira é a natureza *idealista* dêsse sistema. Recorde o leitor o que dissemos a pág. 95 do vol. 1.º sôbre o debate entre *idealismo* e *materialismo* e verá que *Platão* enfileira ao lado dos idealistas, ao lado do seu mestre espiritual *Parménides*. Mais, pode afirmar-se que é *Platão* o pai do idealismo, por ser o construtor do primeiro *sistema* desta natureza. *Parménides* não fizera mais que pôr o problema, pelo menos naqueles textos que hoje se conhecem dêle.

A segunda é o carácter de *elite* do sistema de *Platão*.

A apreensão da verdade, tal como êle a entende, exige um esfôrço, uma elevação espiritual (em sua opinião) que está fora do alcance do homem vulgar. Isto, que paira como um véu sôbre tôda a sua criação, é afirmado expressamente numa passagem do *Timeo*, uma das suas últimas obras e onde, portanto, se pode encontrar o resultado mais elaborado do seu pensamento: (1) «*Se a intelecção e a opinião verdadeira são dois géneros distintos,* (2) *êsses objectos invisíveis existem em si; são as Idéias que não podemos perceber pelos sentidos, mas sòmente pelo intelecto.*

...Ora devemos afirmar que a intelecção e a opinião são duas coisas distintas porque teem origens distintas e comportam-se de maneiras diferentes.

...E' preciso dizer ainda que na opinião todo o homem participa, e que na intelecção, pelo contrário, os deuses teem parte, mas, dos homens, uma pequena categoria sòmente.»

E' suficientemente claro, não é verdade?

---

(1) *Timeo* 51 d e seg.

(2) Repare o leitor na semelhança com o pensamento de *Parménides* (vol. 1.º pág. 95).

9. — Conseqüências Se temos demorado o leitor com tôdas estas citações é porque o sistema filosófico de *Platão* tem uma importância enorme na história do pensamento e é preciso, portanto, conhecer ao menos a sua base. Nascido num momento de crise da civilização grega, como mostrámos atrás, êle imprimiu à sua super-estrutura uma orientação que havia de ter as mais largas repercussões sôbre o movimento histórico seguinte. E' uma grande vaga nascida dos problemas duma crise social e cujo movimento alteroso se prolonga até nós.

Não é que o sistema filosófico de *Platão* seja aceite na sua inteireza por todos os filósofos posteriores; muito longe disso. Alguns discutem-no, rejeitam a sua teoria das Idéias; entre estes conta-se logo o seu discípulo mais célebre, *Aristóteles*, que na *Metafísica* critica duramente a teoria das Idéias. Mas há no pensamento de *Platão* qualquer coisa de mais importante, de mais fundo, qualquer coisa de que a teoria das Idéias é um instrumento — a defesa contra a fluência e o carácter aristocrático do sistema — e isso fica.

O pensamento grego dominante aparece invadido pelo horror da *transformação*, e daí resulta o horror do *movimento*, do *material*, do *sensível*, do *manual*. O homem de elite rejeita o *manual*, o mecânico, e exalta o *bem* e a *virtude*, de cuja procura faz o fim máximo do homem.

Nisto, que é fundamental, concordam *Platão* e *Aristóteles*, noutras coisas tão divididos e opostos...

São de *Aristóteles* estas afirmações que provam o que acabamos de dizer: (1)

E' preciso, portanto, ensinar aos jovens apenas os conhecimentos úteis que lhe não venham a impôr um

(1) *Política*, V, II, 1.

género de vida sórdido e mecânico. Ora, deve considerar-se como mecânica tôda a arte, tôda a ciência que torna incapaz dos exercícios e dos actos da virtude os corpos dos homens livres ou a sua alma ou a sua inteligência. Eis porque chamamos mecânicas tôdas as artes que alteram as disposições naturais do corpo e todos os trabalhos que são mercenários; porque não deixam aos pensamentos nem liberdade nem elevação».

Noutra passagem da mesma obra,(1) *Aristóteles* diz:

«Não é, portanto, bom que o homem de bem, nem o homem de Estado, nem o bom cidadão aprendam estas espécies de trabalhos (os trabalhos das artes mecânicas) que só conveem aos que estão destinados a obedecer; a menos que se sirvam apenas algumas vezes para sua própria utilidade. Doutra maneira uns deixam de ser senhores e outros perdem a condição de escravos».

Ainda uma outra passagem para vincar bem o que afirmámos:(2)

«...visto que estamos examinando qual é a constituïção política mais perfeita e que esta constituïção é a que contribue melhor para a felicidade da cidade; e, por outro lado, pois que se disse anteriormente que a felicidade não poderia existir sem a virtude; é visível que num Estado perfeitamente governado e composto de cidadãos que são homens justos no sentido absoluto da palavra, e não relativamente a um sistema dado, os cidadãos não devem exercer nem as artes mecânicas nem as profissões mercantis; porque êste género de vida tem qualquer coisa de vil e é contrário à virtude.

Também não devem, para serem verdadeiramente cidadãos, dedicar-se à agricultura, porque teem neces-

---

(1) *Politica* III, II, 9.
(2) *Politica* IV, VIII, 2.

sidade de ócios para fazerem nascer a virtude na alma e para preencherem os deveres civis».

Não é só dos escritos dêste ou daquele filósofo que transpira o horror do mecânico e do manual. Esta concepção invadiu de tal maneira a vida grega que na pena de *Plutarco*, (cuja opinião merece o crédito que lhe conferem, por um lado o seu senso crítico, e, por outro, o recúo de alguns séculos que o deixa julgar sem a paixão do momento e, portanto, separar o essencial do acessório) encontramos a seguinte passagem (entre outras) para nós hoje um pouco surpreendente: (1)

«...muitas vezes, ao apreciar uma obra desprezamos o obreiro, como nas composições dos perfumes e nas tinturas de púrpura: porque nos deleitamos com umas e com outras e, contudo, temos os perfumistas e os tintureiros como pessoas vis e mecânicas. Respondeu muito bem Antístenes a um que lhe dizia que Isménias era um excelente tocador de flauta «também acho, mas, a-pesar disso, homem que não vale nada, porque, se assim não fôsse, não seria um tão excelente tocador de flauta». Vem a-propósito dizer que Filipe, rei da Macedónia, disse uma vez a seu filho Alexandre-o-Grande que tinha cantado muito bem num festim, e como homem que entendia muito de música: «¿Não tens vergonha de cantar tão bem? porque basta que um rei empregue por vezes os seus ócios a ouvir cantar os cantadores e já faz muita honra às Musas em querer algumas vezes ouvir os obreiros de tal arte quando êles se despicam a quem cantará melhor».

Mas quem exerce de-facto alguma arte baixa e vil, produz em testemunho contra si próprio o trabalho que empregou em coisas inúteis, para provar que foi preguiçoso em aprender as honestas e úteis. E não houve

(1) Vida de *Péricles*, I.

jamais jovem de bom coração e gentil natureza que, ao olhar a imagem de Júpiter, que está na cidade de Pisa, desejasse ser Fídias, nem Policleto ao ver a de Juno que está em Argos, nem que desejasse ser Anacreonte, ou Filémon, ou Arquilóquio por ter alguma vez sentido prazer em ler as suas obras...»

Está o leitor vendo? nem Fídias!

10. — Conseqüências matemáticas Julgámos indispensável fazer esta exposição, um pouco longa, para que o leitor esteja em condições de bem apreender o porquê de alguns aspectos do pensamento matemático na antigüidade.

A ciência e filosofia gregas, lendo pela cartilha de *Platão*, impuzeram-se, a partir do dobrar do século v para o iv a. C., duas limitações: — rejeição do *devir* como base duma explicação racional do mundo; rejeição do *manual* e do *mecânico* para fora do domínio da cultura.

Estas duas limitações vão pesar duramente sôbre as possibilidades de construção matemática, obrigando o pensamento helénico a uma queda vertical, numa altura em que pareciam estar criadas as condições para uma ascensão vertiginosa. Elas representam uma autêntica auto-condenação à estirilidade, como vamos ver.

¿Está o leitor recordado do que dissemos no parág. 17 do 1.º cap. sôbre a essência do conceito de *variável?* ¿da sua natureza contraditória, de síntese do *ser e não ser?* ¿Como poderia um tal conceito surgir na Grécia post-socrática, dominada por uma doutrina filosófica que, como mostrámos atrás, rejeitava a *contradição*, o *devir* e procurava, em tudo, *aquilo que guarda permanentemente a sua identidade?* Não! a *variável*, porque o é, *não guarda a sua identidade*, ultrapassa o lago tranqüilo mas estéril da *permanência*.

Daqui resulta imediatamente a incapacidade da ciência grega para construir o conceito de função (cap. 1.º parág. 18) e, por conseqüência, para abordar o estudo quantitativo dos fenómenos naturais. O mais que poderia fazer era um estudo meramente qualitativo, com todos os seus perigos, de certos aspectos da realidade.

E aqui tem o leitor um exemplo, possìvelmente o mais importante de todos, de como a Matemática, do mesmo modo que tôda a construção humana, depende do conjunto de condições sociais em que os seus instrumentos teem de actuar. Subordinação que a não humilha, antes a engrandece.

11. — O ideal de ordenação matemática

Chegados a esta altura da exposição preguntar-se-há: ¿perderam-se então tôdas as esperanças numa *ordenação matemática* do Cosmos? ¿Essa maravilhosa aventura, nascida ingènuamente nos primeiros pitagóricos — «*tôdas as coisas teem um número e nada se pode compreender sem o número*» (1) — e logo batida duramente pela crítica eleática, pode considerar-se, pelo menos provisòriamente, terminada? Não é assim. A despeito de tudo, das contradições não resolvidas da incomensurabilidade, o ideal da *ordenação matemática* não desaparece e brilha ainda com fôrça em *Platão* e depois dêle. Simplesmente, essa *ordenação matemática* tem, necessàriamente, que perder a feição quantitativa e refugiar-se nos domínios do qualitativo.

E' o que, de-facto, acontece. A matemática grega, no seu período áureo, é uma matemática essencialmente qualitativa, em que o *número* cede o passo à *figura*, à *forma*. ¿Como não devia ser assim? ¿Não é a figura,

(1) Vide vol. 1.º pág. 86.

a forma — o triângulo, a circunferência, a elipse — eminentemente apta a *guardar sempre a sua identidade?*

Nisto — no *primado da figura* e conseqüente *degradação do número* — reside um dos aspectos principais da matemática grega.

E', a este respeito, altamente instrutiva a leitura do *Timeo*, um dos últimos diálogos de *Platão*, como atrás dissemos, e no qual êle pretendeu dar um sistema do mundo. Ora ¿que vemos nós no *Timeo*? uma tentativa para explicar os elementos e as suas transformações por meio de figuras geométricas. *Platão* começa por afirmar que(1) «*todos os triângulos tiram o seu princípio de dois tipos de triângulos*» rectângulos, um isósceles e outro escaleno.

Dêstes últimos, procura *o mais belo* e afirma que é aquêle triângulo rectângulo entre cujos catetos b e c existe a relação $b^2 = 3c^2$; com dois dêstes triângulos pode formar-se um triângulo equilátero, como se vê na fig. 16.

(Fig. 16)

Quanto às razões pelas quais é êste triângulo *o mais belo*, o nosso filósofo limita-se a dizer que seria muito trabalhoso demonstrá-lo... (2), opinião com a qual não vejo inconveniente em concordar.

Em seguida dá-nos a chave de todo o mistério:(3) «*Escolhamos portanto dois triângulos com os quais são constituídos os corpos do*

(1) *Timeo* 53 *d*.
(2) *Timeo* 54 *b*.
(3) *Timeo* 54 *b* e *c*.

fogo e de todos os outros elementos: um é isósceles, o outro tem sempre o quadrado do seu lado (cateto) maior, triplo do quadrado do mais pequeno. E agora, precisemos o que foi dito acima. Os quatro elementos (terra, água, ar e fogo) tinham-nos parecido nascer sempre recìprocamente uns dos outros, mas era uma falsa aparência. Com efeito, os quatro géneros nascem mas é dos triângulos de que acabamos de falar».

Ora aí está... o nosso filósofo conseguiu o seu objectivo! escamotear a transformação, o *devir* (falsa aparência!) pondo, entre nós e êle, a figura geométrica —o ser que guarda a identidade! ¿Está suficientemente claro?

A seguir descreve os poliedros regulares e mostra como êles podem ser gerados a partir de triângulos; depois—cúmulo da fantasia!—atribue a cada elemento um poliedro regular: «*A' terra atribuamos a figura cúbica. Porque a terra é a mais difícil de mover das quatro espécies e é de todos os corpos o mais tenaz. E é muito necessário que o que tem tais propriedades tenha recebido, ao nascer, bases mais sólidas...* (1)», à água atribue o *icosaedro,* ao ar o *octaedro* e ao fogo o *tetraedro.*

Feitas estas atribuïções, *Platão* declára: (2) «*tôdas estas figuras convém concebê-las tão pequenas que em cada género nenhuma possa ser vista individualmente. Pelo contrário, quando se agrupam, as massas que formam são visíveis. E, pelo que toca às relações numéricas que dizem respeito ao seu número, aos seus movimentos e outras propriedades, deve considerar-se sempre que o Deus, na medida em que o ser da necessidade se deixava expontâneamente persuadir, as realizou por tôda a parte*

(1) *Timeo* 55 *e*.
(2) *Timeo* 56 *c*.

de maneira exacta e assim harmonizou matemàticamente os elementos».

Vê-se, portanto, que o ideal da ordenação matemática não desapareceu, êle continúa a palpitar; simplesmente, além do elemento místico que vemos nesta última passagem, a ordenação matemática está subordinada às relações de figuras geométricas — a aritmética cedeu o passo à geometria, a figura ascendeu ao primeiro plano.

Nos *Elementos* de *Euclides,* um dos monumentos matemáticos mais importantes de todos os tempos, há traços pronunciados desta mesma influência.

12. — Geometria e Mecânica Tôdas estas considerações chamam a nossa atenção para o problema seguinte: — ¿que é, para o geómetra antigo, uma *curva?* E' intuitivo o considerar-se uma curva como gerada pelo movimento de um ponto, e já fizemos (parág. 25, cap. 1.º) referência a isso. Mas ¿para o geómetra grego, seria porventura o processo *dinâmico* de descrição suficientemente *digno* para gerar figuras geométricas — aqueles sêres que *guardam a sua identidade?* Tudo quanto dissémos atrás nos leva a suspeitar que assim *não* deve ser. Movimento e transformação são coisas tão intimamente ligadas que uma atitude mental que rejeita uma deve, lògicamente, banir também a outra.

Se a figura aparece como um biombo que nos defende da fluência (v. o parág. anterior) ¿como pode a figura admitir em si, na sua geração, o movimento?

Poderá o leitor julgar que isto é uma simples conjectura, feita hoje, sôbre o que pensariam os geómetras gregos formados na escola de *Platão,* mas abundam as provas de que assim era de-facto.

Vamos apresentar duas.

Plutarco, a cujo testemunho temos recorrido mais

de uma vez, diz-nos na *Vida de Marcelo, XXI*: «*...essa arte de inventar e construir instrumentos e máquinas, que se chama a mecânica, ou orgânica, tão amada e apreciada por tôda a espécie de gentes, foi primeiramente posta em relêvo por Arquitas e por Eudóxio em parte para tornar agradável e embelezar um pouco a ciência da geometria por esta coisa graciosa, e em parte também para alicerçar e fortificar, por exemplos de instrumentos materiais e sensíveis, algumas proposições geométricas, de que se não podem achar as demonstrações intelectivas por razões indubitáveis e necessárias, como é a proposição que ensina a achar duas linhas médias proporcionais, a qual não se pode achar por razão demonstrativa e, contudo, é um princípio e fundamento necessário a muitas coisas que dizem respeito à pintura. Um e outro reduziram-na à manufactura de alguns instrumentos que se chamam mesolábios e mesógrafos que servem para achar estas linhas médias proporcionais, tirando certas linhas curvas e secções secantes e oblíquas. Mas depois, tendo-se Platão encolerizado contra êles, fazendo-lhes vêr que êles corrompiam a dignidade do que havia de excelente na Geometria, fazendo-a descer das coisas intelectivas e incorporais às coisas sensíveis e materiais ao fazer-lhe usar de matéria corporal em que é preciso vilmente e baixamente empregar obra da mão; desde êsse tempo, digo, a mecânica, ou arte dos engenheiros, veio a ser separada da geometria e, sendo longamente tida em desprezo pelos filósofos, tornou-se uma das artes militares*».

O segundo testemunho está separado dêste por 16 séculos e encontra-se no comêço do livro 2.º da *Geometria* de *Descartes* (1637): «*Os antigos notaram muito justamente que entre os problemas de Geometria uns são planos, outros sólidos, outros lineares, isto é, que uns podem ser construídos usando apenas rectas e círculos, enquanto outros não o podem ser senão empre-*

gando, pelo menos, alguma secção cónica; nem enfim os outros, a não ser que se empregue alguma outra linha mais composta. Mas espanto-me de que êles não tenham distinguido diversos graus entre estas linhas mais compostas e não compreendo a razão pela qual lhes chamaram mecânicas e não geométricas. Porque se se diz que é por causa de ser necessário usar máquinas para as descrever, então dever-se-ia rejeitar pela mesma razão os círculos e as rectas, visto que só se podem traçar no papel com um compasso e uma régua, que se podem também chamar máquinas».

Como o leitor vê, estes dois textos completam-se e confirmam inteiramente o que atrás dissémos sôbre a exclusão do movimento dos domínios da Geometria. Mas encontram-se com facilidade outras confirmações; por exemplo, no carácter *estático* das definições dadas nos *Elementos* de *Euclides*. Ele não define *recta* como o caminho mais curto entre dois pontos, mas sim como a figura que *repousa igualmente em relação aos seus pontos* (definição 4). Não define a circunferência como a linha descrita por um ponto que se move num plano conservando-se a uma distância fixa dum ponto dêsse plano, mas como a *figura plana formada por uma só linha tal que todos os segmentos de recta tirados para ela de um ponto situado dentro são iguais entre si* (def. 15).

13. — Resumo Podemos concluir brevemente as considerações até aqui feitas do modo seguinte.

Vimos como determinada situação e evolução social da Grécia, do século v para cá, impôs, na superestrutura intelectual dessa sociedade, a adopção de uma corrente de idéias da qual resultaram no domínio da matemática as conseqüências principais seguintes:

a) incapacidade de conceber o conceito de variável e, portanto, o de função; daí:

b) abandono do estudo quantitativo dos fenómenos naturais e refúgio nas concepções qualitativas; paralelamente:

c) primado da figura sôbre o número e conseqüente degradação dêste; logo:

d) separação da geometria e da aritmética, o que fará dizer mais tarde a *Descartes: «...o escrúpulo que faziam os antigos em usar dos têrmos da aritmética na geometria, que não podia proceder senão de que êles não viam claramente as suas relações, causava muita obscuridade e embaraço na maneira pela qual êles se exprimiam»*,

e) exclusão, do seio da Geometria, de tudo quanto lembrasse o movimento, o mecânico e o manual; donde

f) um conceito estreito de curva, limitado à recta, circunferência e cónicas;

g) tendência para fugir de tudo aquilo que viesse ligado às concepções quantitativas e dinâmicas; em particular do conceito de infinito, não porque se banisse da filosofia tal conceito mas porque se renunciou a abordar um estudo quantitativo dêle e se passou a eliminá-lo sistemàticamente dos raciocínios matemáticos; da Matemática grega veio-nos um método de raciocínio — *o método de exaustão* — que não tem outro objectivo.

Estas características vão manter-se durante quási duas dezenas de séculos na Europa. O seu reinado só devia terminar quando uma sociedade nova, dominada por uma classe nova, portadora de interêsses e problemas novos, impusesse à filosofia e à ciência um rumo diferente.

14. — As cidades da Europa medieval

A partir do século XI, começam a aparecer na Europa sintomas duma transformação profunda. O facto fundamental que dá origem a essa transformação, e sem o qual nada se pode perceber da

história subseqüente da Europa, é o aparecimento, fixação e desenvolvimento das primeiras cidades.

Limitadas primeiro às regiões costeiras mediterrânicas e bálticas, de onde mais fàcilmenie se podia fazer o comércio com o Oriente, começaram pouco a pouco a espalhar-se pelo Continente, primeiro estabelecendo a ligação das duas regiões citadas, depois alastrando, numa rêde de malhas cada vez mais apertadas.

As cidades vieram trazer um elemento novo à economia europeia, até aí confinada nos limites estreitos duma economia agrária de pequenas unidades — os domínios — bastando-se a si próprias. Elas passaram a constituir núcleos de atracção e aglutinação onde as necessidades crescentes do comércio de longo trânsito impuzeram a fixação, em escala cada vez maior, de população tirada aos domínios rurais — pequenos comerciantes e pequenos artesãos, necessários para prover o aglomerado urbano de produtos alimentares e manufacturados.

Uma vez posto em marcha êste processo de deslocação da sociedade existente, êle não pára mais. A cidade adquire cada vez maior pêso como unidade económica e política e seguem-se alguns séculos duma luta crua e heróica em que as cidades afrontam os poderes constituídos — senhores feudais, reis ou imperadores — e procuram a criação duma ordem política que sirva os seus interêsses.

Ligado ao aparecimento das cidades está o aparecimento na Europa de um tipo novo de homem, o comerciante, muito diferente do tipo até aí existente — os seus horizontes são mais rasgados, os seus interêsses encontram-se espalhados por lugares muito afastados do continente, as suas condições psicológicas endurecem e ganham em audácia no exercício duma profissão em que os fracos ou os amantes da vida tranqüila e sedentária não teem lugar.

O desenvolvimento das cidades leva, portanto, à criação duma classe de indivíduos que, pelas suas condições individuais e sociais, em tudo se opõe às classes até então dominantes.

Dá-se, na Europa medieval, um conflito análogo ao que se dera na Grécia antiga — o conflito entre a terra e o mar — e em que uma das partes está representada também pelas cidades comerciais e industriais. Mas a situação é agora muito diferente — essas cidades de tipo comercial e industrial penetram pelo continente, vão enraízar no próprio seio da sociedade agrária, enquanto na Grécia se haviam limitado às regiões da costa. Como conseqüência, desenvolve-se e ganha pêso crescente na Europa uma classe social — a classe burguesa — que não só há-de conquistar a autonomia das suas cidades, como deve mais tarde, porque os seus interêsses cosmopolitas o exigem, promover a fusão delas em unidades políticas mais largas — as novas unidades nacionais.

Existe agora, por conseqüência, o que faltara à sociedade antiga (parág. 3).

15. — Nova mudança de navegação

Todo êste complicado processo a que acabamos de fazer alusão e de que referimos apenas o agente fundamental, leva os homens a uma atitude mental nova. As necessidades do comércio e da indústria exigem um estudo do mundo exterior tal como êle se nos apresenta, com as suas propriedades e os seus processos de transformação.

Um filósofo que desfruta tranqüilamente uma situação privilegeada pode discorrer subtilmente sôbre a natureza metafísica dos elementos e procurar explicá-los por poliedros regulares; o artífice que forja as armas com que a sua cidade se há-de defender do poder tirânico do imperador não tem tempo para tal

— tem que procurar a melhor têmpera do seu aço e para isso tem que estudar as ligas de metais, observar como elas se comportam na sua forja, procurar os materiais com que obtenha nela as temperaturas necessárias.

Os problemas da navegação, por exemplo, levam a uma investigação cada vez mais cuidadosa dos movimentos dos astros, e, duma maneira geral, exigem um estudo mais rigoroso do movimento, um estudo *quantitativo,* que permita *medir* e *prever.*

Para cada exigência nova que aparece, é uma insuficiência antiga que se descobre, é uma barreira que tem de se derrubar. E ao filósofo antigo, cantonado detrás do desprêzo altivo pelo manual e pelo mecânico, responde o cientista novo, construtor dos seus próprios instrumentos de trabalho, instrumentos que, por vezes, na sua humildade aparente — tal a luneta de *Galileo* — são, na realidade, as alavancas poderosas a cujo impulso derruem duas dezenas de séculos de filosofia estéril.

Não se julgue que esta nova *mudança de navegação* se realiza com facilidade. Fazendo paralelo à luta entre a cidade e a sociedade agrária, desenvolve-se no domínio intelectual a luta entre o filósofo tradicional, súbdito do reinado espiritual platónico-aristotélico, para quem a verdade está no pensamento e nos seus quadros lógicos, e o filósofo novo para o qual ela há-de ser *primeiro* descoberta na Natureza, pela observação e experimentação e depois, mas só depois, elaborada pelo pensamento. Põe-se, portanto, novamente a questão do *primado* — ¿para onde deve êle ir? ¿para a razão ou para a experiência?

Questão escaldante, à qual os filósofos e cientistas da Europa do Renascimento hão-de dar uma resposta que ultrapassa de largo os quadros anteriores do problema.

16. — A caminho do conceito de função

Razão e *experiência* opõem-se a princípio como dois caminhos *contrários* para atingir um fim — *o conhecimento verdadeiro*. O primeiro, tendo a defendê-lo tôda a imensa côrte da filosofia tradicional platónico-aristotélica que, com cambiantes várias, domina as *Escolas* de então; o segundo, acompanhando as necessidades económicas dum mundo que lentamente vai ganhando forma. Surge aqui ou àlém um pensador que a pouco e pouco interpreta essas necessidades e vai firmando o traçado. O mais ilustre de entre êstes pioneiros é o monge franciscano *Rogério Bacon* que, já na segunda metade do séc. XIII, combatia contra a ignorância dos doutores de Paris,(1) afirmando que «*a razão não pode distinguir o sofisma da demonstração a menos que seja controlada nas suas conclusões pelas obras certificadoras da experiência*». Se a experiência a que *Rogério Bacon* alude não é a experiência tal como a entende o cientista moderno, se êle se debate numa multidão de contradições inerentes à época em que vive, não deixa de ter direito, no entanto, a ocupar um lugar na primeira fila daqueles que combateram pelo primado da experimentação.

No dobrar do séc. XV para o XVI, encontramos porém já o problema formulado em têrmos que lhe dão uma feição nova.

Foi um homem extraordinário, a quem parece nada ter sido alheio das preocupações dominantes no seu tempo, do domínio da técnica ao da ciência, da filosofia e das artes — *Leonardo da Vinci* — quem deu

(1) Centro de uma das mais antigas universidades europeias. Um dos capítulos mais interessantes da história da civilização ocidental é precisamente a criação e desenvolvimento das Universidades, acompanhando a formação da Europa nova. Essa história não pode ser contada aqui.

essa formulação precisa. Encontramos nêle, em têrmos vigorosos, a rehabilitação dos sentidos e, conseqüentemente, a condenação da atitude platónica sôbre a *degradação* do corpo em face da aquisição da verdade.

«*Dizem ser mecânico aquêle conhecimento que sai da experiência, e científico o que nasce e acaba na razão, e semi-mecânico o que nasce na ciência e acaba nas operações manuais. Mas a mim me parece que são vãs e cheias de êrro aquelas ciências que não nascem na experiência, mãi de tôda a certeza, ou que não terminam na experiência, isto é, tais que a sua origem, meio ou fim não passa por nenhum dos cinco sentidos. E se nós duvidamos da certeza de cada coisa que passa pelos sentidos, quão mormente devemos duvidar daquelas coisas que são rebeldes aos sentidos, como a essência de Deus e da alma e semelhantes, àcêrca das quais sempre se disputa e contende*». (1)

Mas *Leonardo* não se limita a um simples empirismo como método de aquisição da verdade; a simples experimentação não chega:

«*Nenhuma investigação merece o nome de Ciência se não passa pela demonstração matemática*»; «*nenhuma certeza existe onde não se pode aplicar um ramo das ciências matemáticas ou se não pode ligar com essas ciências*». (2)

Destas citações e de muitas outras que aqui poderíamos fazer, ressalta nìtidamente o pensamento de *Leonardo da Vinci* — observar, investigar a Natureza, o mundo sensível, e submeter os dados dessas observações aos processos matemáticos.

O método é, como se vê, oposto ao que está implícito na filosofia de *Platão;* a sua aplicação leva dentro em pouco a esta conseqüência — o apareci-

(1) *Tratado de Pintura.*
(2) *Tratado de Pintura.*

mento da *lei quantitativa* como entidade fundamental da filosofia da Natureza.

17.—Uma idéia grandiosa que renasce

Repare bem o leitor no que êste método de aquisição da verdade implica, recorde o que dissémos no capítulo I dêste livro sôbre o estudo das leis quantitativas e a necessidade conseqüente do conceito de função e fica de posse dêste facto fundamental — o rumo novo da Ciência, que a nova sociedade determina e vemos formulado nos escritos de *da Vinci*, é o rumo duma *ordenação matemática do Universo*. Mais tarde, na pena de *Newton*, êsse ideal de ordenação será formulado em têrmos lapidares: «*...Os modernos, rejeitadas as formas substanciais e as qualidades ocultas, ocupam-se de referir a leis matemáticas os fenómenos naturais.* (1)

Veja portanto o leitor como, ao cabo de 20 séculos, renasce das cinzas, onde parecia enterrado para sempre, aquêle ideal de *ordenação matemática quantitativa* que víramos despontar com os pitagóricos. ¡Que caminho andado e que diferença! ¡quantas ilusões ingénuas desfeitas! E veja também como só uma transformação orgânica total da sociedade veio a exigir a criação do conceito que havia de fazer renascer êsse ideal.

Da potência dêsse conceito como instrumento matemático, vimos alguma coisa nos caps. II e III. Agora vamos terminar com algumas indicações breves sôbre o seu significado geral e a sua evolução.

18. — De novo a fluência...

A introdução do conceito de função como instrumento necessário para o estudo da nova realidade da ciência — a noção de lei natural —

(1) Princípios matemáticos da filosofia natural.

traz consigo, como não pode deixar de ser, um conjunto de idéias e concepções que lhe estão inerentes.

¿Recorda-se o leitor do que dissemos, no parágrafo 17 do capítulo I, sôbre a natureza do conceito de variável e sua ligação à filosofia da fluência? E' de esperar, portanto, nos construtores novos da Ciência, uma atitude de concordância com essa filosofia. E' o que, de-facto, se dá: «*Olha para a chama e considera a sua beleza. Fecha os olhos e torna a olhar: o que vês não estava lá e o que lá estava já o não encontras*» nos diz *Leonardo da Vinci* (1) numa fórmula elegante que *Heraclito* poderia subscrever.

Dois séculos mais tarde, *Newton* põe nìtidamente a concepção da fluência: «*Considero aqui as quantidades matemáticas, não formadas pela adjunção de partes mínimas, mas descritas por um movimento contínuo. As linhas descritas, e portanto geradas, não por aposição de partes mas pelo movimento contínuo de pontos; as superfícies pelo movimento de linhas; os sólidos pelo movimento de superfícies: os ângulos pela rotação de lados; o tempo por um fluxo contínuo e assim para as outras. Estas gerações teem verdadeiramente lugar na natureza das coisas e revelam-se todos os dias no movimento dos corpos*». (2)

Não se pode ser mais nítido, ¿não é verdade? De resto o próprio nome que *Newton* dá às funções revela bem a sua atitude mental — chama-lhes *fluentes;* o uso do nome *função* só mais tarde se generaliza.

---

(1) Codice F; citado de *Leonardo, Omo sanza lettere,* por G. Fumagalli.

(2) *Isaac Newton.* Tratado da Quadratura das curvas. Introdução.

19. — Primado do número

A mudança de atitude é, como se vê, total em relação ao problema da fluência. E como êste é o problema fundamental, a *mola real* que vai tocar tôdas as outras questões, percebe-se sem dificuldade que vamos encontrar, nestes séculos da criação da Europa e da Ciência moderna, a inversão daquelas características que no parág. 13 apontámos como resumindo os resultados da evolução antiga. A algumas delas, nomeadamente *a)* e *b)*, nos referimos já; de outras, em especial *e)* e *g)*, ocupar-nos-emos no vol. 3.º; vamos referir-nos brevemente às *c)*, *d)* e *f)*.

O número é, em última análise, o que constitue a substância do conceito de variável e, portanto, de função; o papel primacial que esta passa a representar na ciência traz, como conseqüência, o número para a primeira plana da explicação científica; daqui resulta o *primado do número sôbre a figura* e, conseqüentemente, o fim da separação da aritmética e da geometria em compartimentos estanques (veja-se a citação de *Descartes* na alínea d) do parág. 13).

O leitor que esteja recordado do que dissemos nos parág. 21 a 28 do cap. 1.º sôbre as relações do campo analítico e do campo geométrico, dos conceitos de função e de curva, de lei analítica e de lei geométrica, está de posse dos elementos essenciais que o habilitam a julgar esta questão. Lembremos-lhe apenas que é na obra de *Descartes* já citada — *a Geometria* — que se encontra a formulação do *método das coordenadas* que permite estabelecer essas relações e levar à construção dum dos ramos mais importantes da Matemática — a *Geometria Analítica*, de que demos a base nos mesmos parágrafos.

Mas há um ponto que queremos esclarecer ainda: falámos em *primado do número;* portanto, êle deve, não

dizemos sobrepôr-se à figura, mas permitir uma explicação daquilo que lhe é essencial — a sua *forma* (e não apenas as dimensões). Se tal *primado* existe, tratar-se-á então de uma *explicação quantitativa da forma*, precisamente o contrário do que queria o sistema de *Platão*, como vimos pelas citações do *Timeo*. Ora é de-facto isso o que a *Geometria Analítica* permite fazer.

¿Que é a equação duma curva (cap. I, parág. 27)?— uma lei matemática a que satisfazem as coordenadas dos seus pontos. Na equação está tudo, forma e dimensões.

(Fig. 17)

Seja, por exemplo, a circunferência da fig. 17, com centro na origem das coordenadas e seja $\overline{OB}=r$ o seu raio e $P(x,y)$ o ponto *geral* da curva. ¿A que condição analítica satisfaz êle? Por definição de circunferência, deve ser $\overline{OP}=r$ qualquer que seja a posição de $P(x,y)$ sôbre a curva, logo, devemos ter sempre $\overline{OA}^2+\overline{AP}^2=r^2$; mas $\overline{OA}=x$, $\overline{AP}=y$, coordenadas de P, logo é necessàriamente

$$1)\qquad x^2+y^2=r^2$$

a equação da circunferência.

Recìprocamente, se nos derem a equação 1) raciocinamos assim: sei que, para todo o ponto $M(x_0,y_0)$ do plano, é $d=\sqrt{x_0^2+y_0^2}$ a sua distância à origem (como resulta da aplicação do teorema de Pitágoras ao triângulo OQM da fig. 17); portanto, os pontos $P(x,y)$

que satisfazem à equação 1) são todos os pontos tais que o quadrado da sua distância à origem, x^2+y^2, é *constante*(1) e igual a r^2, portanto são todos os pontos cuja distância à origem é constante e igual a r. Mas o conjunto desses pontos é a circunferência de centro na origem e raio r, logo é essa a curva que tem 1) como equação.

Por um raciocínio análogo, apenas um pouco mais complicado, conclue-se que a curva correspondente à equação

$$2) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

é a elipse de semi-eixos $\overline{OA}=a$ e $\overline{OB}=b$ *(fig. 18)*.

¿Vê o leitor como o número (que forma a base da equação) permite explicar a figura na sua forma e dimensões?

(Fig 18)

Mas há mais. Suponhamos que na equação 2) b cresce e se aproxima de a. A cada valor b_i de b corresponde uma elipse com os *semi-eixos* a e b_i. A medida que b_i se aproxima de a, a elipse vai sendo cada vez menos diferente duma circunferência de centro O e raio OA *mas é sempre uma elipse*. Se, no entanto, b atingir, na

(1) O que se não daria se a equação fôsse, por exemplo, $x^2+y^2=x^3$.

sua variação, o valor a, para êsse valor ter-se-á $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1$ donde $x^2+y^2=a^2$, isto é, não se tem já uma elipse mas a circunferência, curva essencialmente diferente na sua *forma*.

¿Está o leitor vendo como uma variação de *qualidade* — a forma duma figura — se explica por uma variação de quantidade? ¿e como êste facto entra naquela lei geral de *passagem da quantidade à qualidade* — a que nos referimos no cáp. 1.º?

O primado do número atinge aqui tôda a profundidade do seu significado!

20. — ¿Que é uma curva? No parág. 25 do cap. 1.º, ao tratarmos da imagem geométrica duma função, encontrámo-nos diante desta questão — ¿que é uma curva?

No presente capítulo tornámos a encontrá-la em duas épocas históricas diferentes e vimos como lhe foram dadas respostas diferentes (parág. 12). De-facto, os geómetras gregos, na sua preocupação de excluir da Geometria tudo o que tocasse o *mecânico*, consideravam como curvas *geométricas* apenas a circunferência e as cónicas. Contra êste ponto de vista insurgiu-se, como vimos, *Descartes*, que, dêsse modo, alargou o conceito de curva, admitindo na Geometria, senão tôdas as curvas descritas mecânicamente, pelo menos algumas delas. Para êle, com efeito, «*a espiral, a quadratriz e outras semelhantes, só pertencem verdadeiramente às mecânicas e não são do número das que penso que devem ser recebidas aqui* (1), *porque as imaginamos descritas por dois movimentos separados e que não teem entre si relação que se possa medir exactamente*».

Com a criação da *Geometria Analítica*, a sorte das

(1) *La Géométrie*, livro 2.º.

curvas passou a estar ligada, como é natural, à das funções que servem para as definir analìticamente, de modo que a breve trecho, foi tomado, como conceito mais geral de curva, *a imagem geométrica duma função real de variável real* $y(x)$.

A definição de curva, difícil no campo pròpriamente geométrico, passou assim para o campo analítico, onde parecia mais simples. O conceito de curva alargou-se dêsse modo extraordinàriamente e, em particular, as curvas rejeitadas por *Descartes* receberam direitos de cidadania na Geometria.

Mas esta nova concepção, à primeira vista satisfatória por dar um conceito geral e simples, revelou-se embaraçosa. Não porque pecasse ainda por estreiteza, como as anteriores, mas, pelo contrário, porque se mostrou larga de mais.

Já nos referimos a isso no parág. **25** do cap. 1.º, onde apresentámos a imagem duma função $y(x)$ (fig. 6, pág. 41) que se afasta muito da noção intuitiva.

Mas o desacôrdo pode ser mais completo ainda. Consideremos a seguinte função $y(x)$ assim definida *(Dirichelet)* no intervalo $(0,1)$: para x racional $\rightarrow y=0$, para x irracional $\rightarrow y=1$. É, evidentemente, uma função, no sentido da definição do parág. **18** do cap. 1.º, uma vez que a todo o valor de x corresponde *um* só valor de y. Procuremos a sua imagem geométrica. ¿Que pode dizer-se a respeito dela?

Se x é racional, por exemplo $\frac{1}{2}$, y é *zero,* portanto o ponto correspondente está sôbre o eixo Ox, no segmento $\overline{OA}$; se x é irracional, por exemplo $\sqrt{0,5}$, y é *um,* logo o ponto correspondente está sôbre o segmento $\overline{BC}$ *(Fig. 19)*. E como há no intervalo $(0,1)$ (em que a função é definida) uma infinidade de números irracionais e outra de racionais, concluímos

que a imagem da nossa função é constituída por uma infinidade de pontos do segmento $\overline{OA}$, *mas não todo o segmento* $\overline{OA}$, e uma infinidade de pontos do segmento $\overline{BC}$, *mas não todo o segmento* $\overline{BC}$. Se unirmos dois pontos quaisquer P e Q da imagem, no segmento $\overline{PQ}$ figura, em qualquer hipótese, uma infinidade de pontos que não pertencem à imagem da função — todos aqueles que tiverem abscissa irracional se P e Q estão sôbre $\overline{OA}$ (porque a êsses correspondem, como a $\sqrt{1/10}$, imagens em $\overline{BC}$); todos aquêles que tiverem abscissa racional se P e Q estiverem sôbre $\overline{BC}$ (porque a êsses correspondem, como a $\frac{1}{2}$, imagens em $\overline{OA}$); todos os pontos entre P e Q se um pertence a $\overline{OA}$, e outro a $\overline{BC}$ (porque y só toma os valores *zero* e *um* e não valores intermediários).

(Fig 19)

Em resumo, a imagem da função é constituída por duas infinidades de pontos desligadas uma da outra e sem nenhum segmento — é, portanto, uma imagem não materializável à vista, não visível! ¿Pode uma tal imagem ser considerada como uma curva?

As dificuldades não param aqui. Se alguma coisa está inerente à nossa noção intuitiva de curva geométrica é o facto de ela constituir uma figura com uma só dimensão. Pois bem, pelo princípio dêste século,

houve quem desse a definição analítica duma curva que passa por todos os pontos dum quadrado — uma curva preenchendo uma área!

Há pouco a imagem não se via, agora vê-se de mais!

Tôdas estas dificuldades mostram, afinal, uma coisa — é que, para o objectivo geométrico da definição de curva, o conceito de função, na sua maior generalidade, é um quadro *largo de mais*. Há que o restringir, que o apertar um pouco, para que as imagens obtidas estejam de acôrdo com a nossa noção intuitiva.

Não temos, por enquanto, os elementos suficientes para poder dizer em que consiste essa restrição do quadro analítico; só o poderemos fazer no volume seguinte.

Mas repare o leitor nisto, que é importante — na necessidade que temos de caminhar, *tateando*, entre o que a intuição nos *dá* a partir da realidade e o que a razão nos *permite* com os instrumentos que forja.

21. — Função, lei e acaso

Uma faceta importante dessa necessidade é posta em evidência por um aspecto da evolução do conceito de função. Esse conceito não teve sempre a generalidade que lhe damos hoje. Surgido, lentamente, da necessidade de estudar leis naturais, êle achou-se, a breve trecho, identificado com a relação analítica que define a correspondência das duas variáveis. No princípio do século XVIII, um matemático ilustre, *João Bernoulli*, definiu função assim: *chama-se aqui função duma grandeza variável a uma quantidade composta de qualquer maneira dessa grandeza variável e de constantes*». Para êle, portanto, a função era a expressão analítica, e êsse ponto de vista preva-

leceu durante muito tempo e impregna ainda a linguagem de hoje. (1)

Reconheceu-se porém que, devido a circunstâncias que não podemos desenvolver aqui, êsse ponto de vista era insuficiente e que havia vantagem em *depurar* o conceito de função pondo em evidência o que nêle havia de essencial — a correspondência das duas variáveis. Chegou-se dêsse modo, pelo final do século XIX, à definição moderna de *Riemmann-Dirichelet* que démos no parág. 18 do cap. I.º

O conceito ganhou assim em generalidade porque se libertou da eventual forma de estabelecer a correspondência das variáveis, mas essa mesma generalidade o obrigou a afastar-se das condições de que nasceu.

Ponhamos a seguinte questão: ¿qual é a função mais geral $y(x)$? o que equivale a preguntar ¿qual é a correspondência mais geral possível entre duas variáveis? Se escolhemos uma lei determinada para a correspondência, imediatamente a particularizamos, de forma que chegamos à conclusão seguinte—a correspondência $x \rightarrow y$ mais geral é aquela em que os valores de y, correspondentes aos de x, são *quaisquer*. Mas, quem diz *quaisquer* diz: *sem lei nenhuma,* diz: *ao acaso;* portanto, a função $y(x)$ mais geral é aquela em que os valores da variável dependente são dados ao acaso.

Estranha conclusão! O conceito de função nasceu do de *lei natural;* ao procurar depurá-lo, generalizá-lo, encontramo-nos com o *acaso,* noção precisamente oposta à de lei! ¿Condenação dos nossos instrumentos de trabalho que, assim, flutuam entre duas noções opostas? Não! Reconhecimento desta verdade fundamental, enunciada por *Gonseth: «lei e acaso são noções*

(1) Vide o que dissémos no parág. 20 do cap. I a êste respeito.

conjugadas que só adquirem todo o seu sentido quando tomadas uma em relação à outra. Nem uma nem outra teem existência autónoma—a sua contradição mútua faz uma parte do seu sentido». (1)

Verdade que é uma conseqüência desta outra—*tôdas as coisas devem ser estudadas em relação com o seu contexto. E' nesse tribunal que devem ser julgados os resultados que os instrumentos analíticos, na sua forma mais geral, permitem adquirir.*

(1) *Science et loi*, pág. 21.

FIM DO VOL. 2.º

BIBLIOTECA NACIONAL

ÍNDICE

Páginas

CAPÍTULO I

Estudo matemático das leis naturais 5
I — Ciência e lei natural. 5
II — Conceito de função 27

CAPÍTULO II

Pequena digressão técnica 45
I — Observações preliminares 45
II — Algumas funções importantes 47

CAPÍTULO III

Equações algébricas e números complexos 60
I — Equações algébricas 60
II — Números complexos 70
III — Interacção 80

CAPÍTULO IV

Excursão histórica e filosófica. 91

Êste volume acabou de se imprimir aos 6 de Junho de 1942 — Foi composto nas oficinas das *Edições Cosmos*, Rua da Emenda, 111-2.º — Foi impresso na *Tip. Silvas, L.da*, Rua D. Pedro V, 120

LISBOA

BIBLIOTECA COSMOS

Sob a direcção do Prof. Bento de Jesus Caraça

(da Universidade Técnica de Lisboa)

PRIMEIROS VOLUMES

★ VOLUMES PUBLICADOS

1.ª Secção: — Ciências e Técnicas

ORGANIZAÇÃO DA MATERIA VIVA — Dr. Luiz Dias Amado
★ BASES DA ALIMENTAÇÃO RACIONAL — Dr. Ferreira de Mira
★ INTRODUÇÃO GEOLÓGICA — Dr. Carlos Torre de Assunção
★ CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA — Dr. Bento de Jesus Caraça
★ O PROBLEMA DO CANCRO — Instituto Português de Oncologia
★ A B C DA GENETICA — Eng.º Sousa da Câmara
★ O SR. TOMPKINS NO PAÍS DAS MARAVILHAS — G. Gamow
ARQUITECTURA DO UNIVERSO — Dr. Manuel Peres
TELEFONIA — Eng.º Paulo Brito Arzuba

2.ª Secção: — Artes e Letras

INTRODUCÇÃO AO ESTUDO DA LITERATURA — Dr. Adolfo Casais Monteiro
★ PEQUENA HISTORIA DA POESIA PORTUGUESA — Dr. João de Barros
HISTORIA POPULAR DA MÚSICA — Prof. Luiz Freitas Branco
MODERNAS TENDÊNCIAS DA EDUCAÇÃO — D. Irene Lisboa
ESBOÇO DA HISTORIA DA PINTURA PORTUGUESA — Adriano Gusmão
★ PROMETEU AGRILHOADO — ÈSQUILO — Notas e tradução de Eduardo Scarlatti
★ ACTIVIDADE DRAMATICA DE GIL VICENTE — Dr. Marques Braga
★ A ARQUITECTURA E A VIDA — Arq. Francisco Keil do Amaral

3.ª Secção: — Filosofia e Religiões

★ O CRISTIANISMO E A MENSAGEM EVANGÉLICA — P.e J. Alves Correia

4.ª Secção: — Povos e Civilizações

★ A CHINA ANTIGA E MODERNA — José de Freitas

5.ª Secção: — Biografias

★ A VIDA E A OBRA DE DARWIN — Dr. Alberto Candeias
DIDEROT — Dr. Agostinho da Silva
★ MACHADO DE CASTRO — Manuel Mendes
S. FRANCISCO DE ASSIS — P.e Manuel Alves Correia
★ ANTERO DE QUENTAL — Manuel Mendes

6.ª Secção: — Epopeias humanas

LUTA CONTRA A MORTE — Dr. Abel Salazar
★ O HOMEM E O LIVRO — M. Iline

7.ª Secção: — Problemas do nosso tempo

O PETROLEO — A. Soares
O CINEMA — Dr. José Gomes Ferreira
★ O PROBLEMA DO TRIGO — Eng.º Henrique Barros

Saída regular de 2 volumes por mês

Preço por volume: Brochado 4$00 — Cartonado 5$00

EDIÇÕES COSMOS

Rua da Emenda, 111-2.º — Tel. 2 2050 — LISBOA

3