BIBLIOTECA COSMOS

1.ª SECÇÃO — CIÊNCIAS E TÉCNICAS — NÚM.º 1

MATEMÁTICA E COSMOLOGIA

Conceitos Fundamentais da Matemática

por BENTO DE JESUS CARAÇA

Vol. I

SUMÁRIO

O problema da contagem ■ O problema da medida ■ Crítica do problema da medida ■ Um pouco de história ■ O campo real e a anatomia do infinito ■ Números relativos

2

2$50

por Bento de Jesus Caraça

Conceitos Fundamentais da Matemática

BIBLIOTECA COSMOS
Direcção do Prof. Bento de Jesus Caraça
(da Universidade Técnica de Lisboa)

N.º 2 1.ª Secção — Núm.º 1 — Ciências e Técnicas
a) Matemática e Cosmologia

CONCEITOS FUNDAMENTAIS DA MATEMÁTICA

Por BENTO DE JESUS CARAÇA

Vol. 1

$\int$

COSMOS
Rua do Loreto, 50-1.º
LISBOA

Composição: *Edições Cosmos* — R. do Loreto, 50, 1.º
Impressão: *Gráfica Lisbonense* — Rua da Rosa, 238
LISBOA

PREFÁCIO

Duas atitudes em face da Ciência

A Ciência pode ser encarada sob dois aspectos diferentes. Ou se olha para ela tal como vem exposta nos livros de ensino, como coisa criada, *e o aspecto é o de um todo harmonioso, onde os capítulos se encadeiam em ordem, sem contradições. Ou se procura acompanhá-la no seu desenvolvimento progressivo, assistir à maneira como* foi sendo elaborada, *e o aspecto é totalmente diferente — descobrem-se hesitações, dúvidas, contradições, que só um longo trabalho de reflexão e apuramento consegue eliminar, para que logo surjam outras hesitações, outras dúvidas, outras contradições.*

Descobre-se ainda qualquer coisa de mais importante e mais interessante:—no primeiro aspecto, a Ciência parece bastar-se a si própria, *a formação dos conceitos e das teorias parece obedecer só a necessidades* interiores; *no segundo, pelo contrário, vê-se tôda a influência que o ambiente da vida social exerce sôbre a criação da Ciência.*

A Ciência, encarada assim, aparece-nos como um organismo vivo, *impregnado de* condição humana, *com* *as suas fôrças e as suas fraquezas e subordinado às grandes necessidades do homem na sua luta pelo* entendimento *e pela* libertação; *aparece-nos, enfim, como um grande capítulo da vida humana social.*

A atitude que será aqui adoptada

Será esta a atitude que aqui tomaremos. A Matemática é geralmente considerada como uma ciência à-parte, desligada da realidade, vivendo na penumbra do gabinete, um gabinete fechado, onde não entram os ruídos do mundo exterior, nem o sol, nem os clamores dos homens. Isto, só em parte é verdadeiro.

Sem dúvida, a Matemática possui problemas próprios, *que não teem ligação imediata com os outros problemas da vida social. Mas não há dúvida também de que os seus fundamentos mergulham,* tanto como os de outro qualquer ramo da ciência, *na vida real, uns e outros entroncam na mesma* madre.

Mesmo quanto aos seus problemas próprios, *raramente acontece, se êles são de facto daqueles grandes* *problemas que põem em jôgo a sua essência e o seu desenvolvimento, que êles não interessem também, e profundamente, a corrente geral das ideias.*

O leitor encontrará a justificação dêstes pontos de vista nos capítulos que se seguem. Neste primeiro volume estão agrupados aqueles conceitos básicos que dizem respeito à noção de quantidade; *num segundo volume serão estudados os que teem por tema as noções de* lei, *de* evolução *e de* classificação.

Lisboa, Junho de 1941.

CAPÍTULO I

O problema da contagem

1.º — Números naturais

1. — A contagem, operação elementar da vida individual e social

Tôda a gente sabe como as necessidades da vida corrente exigem que, a cada momento, se façam contagens — o pastor para saber se não perdeu alguma cabeça do seu rebanho, o operário para saber se recebeu todo o salário que lhe é devido, a dona de casa ao regular as suas despesas pelo dinheiro de que dispõe, o homem de laboratório ao determinar o número exacto de segundos que deve durar uma experiência — a todos se impõe constantemente, nas mais variadas circunstâncias, a realização de contagens.

Se o homem vivesse isolado, sem vida de relação com os outros homens, a necessidade da contagem diminuiria, mas não desapareceria de todo; a sucessão dos dias, a determinação aproximada das quantidades de alimentos com que se sustentar e aos seus, pôr-lhe-iam problemas que exigiriam contagens mais ou menos rudimentares.

Mas, à medida que a vida social vai aumentando de intensidade, isto é, que se tornam mais desenvolvidas as relações dos homens uns com os outros, a contagem impõe-se como uma necessidade cada vez mais importante e mais urgente. ¿Como pode, por exemplo, supôr-se a realização de uma transacção comercial sem que um não saiba contar os géneros que compra, o outro o dinheiro que recebe? ¿Como pode, com mais forte razão, pensar-se num mercado, numa feira, onde ninguém soubesse contar?

Sempre que aos homens se põe um problema do qual depende a sua vida, individual ou social, êle acaba sempre por resolvê-lo, melhor ou pior.

Pregunta-se portanto — ¿como resolveram os homens o problema da necessidade da contagem?

2. — Os números naturais

A resposta a esta pregunta é a seguinte: — pela criação dos *números naturais*

1) *1, 2, 3, 4, 5, 6, ...*

¿Por quantos séculos se arrastou a criação dêstes números? É impossível dizê-lo; mas pode afirmar-se com segurança que o homem primitivo de há 20.000 ou mais anos não tinha dêstes números o mesmo conhecimento que temos hoje.

Últimamente, teem sido estudados com cuidado certos agrupamentos de povos, existentes na África e na Austrália. Êsses povos, em estado muito atrasado de civilização, permitem-nos fazer uma ideia da maneira como os primitivos que viveram há alguns milhares de anos se achavam em relação a esta questão. Os resultados gerais dêsse estudo podem resumir-se da seguinte maneira:

1.° — A ideia de número natural não é um produto puro do pensamento, independentemente da experiência; os homens não adquiriram primeiro os números naturais para depois contarem; pelo contrário, os números naturais foram-se formando lentamente pela prática diária de contagens. A imagem do homem, criando duma maneira completa a ideia de número, para depois a aplicar à prática da contagem, é cómoda mas falsa.

2.° — Esta afirmação é comprovada pelo que se passa ainda hoje em alguns povos. Há tribos da África Central que não conhecem os números além de 5 ou 6 [1]; há outras que vão até 10.000. Ora, facto essencial — *o maior ou menor conhecimento dos números está ligado com as condições de vida económica dêsses povos;* quanto mais intensa é a sua vida de relação, quanto mais freqüentes e activas são as trocas comerciais dentro e fora da tribo, maior é o conhecimento dos números.

3. — Factores humanos

Não são apenas as condições da vida social que influem no conhecimento dos números naturais; actuam nêles também *condições humanas individuais.*

Em primeiro lugar, a maneira como a contagem se faz; para pequenas colecções de objectos, é habitual contar-se *pelos dedos,* e êste facto teve grande influência no aparecimento dos números; ¿não é verdade que o nome *dígito,* que designa os números naturais de 1 a 9, vem do latim *digitus* que significa dedo? Mas há mais: — a base do nosso sistema de nu-

(1) — **Estão, assim, próximas das crianças nos primeiros anos de vida; para elas tudo quanto passe além de 3 é —** ***muitos.***

meração é 10, número de dedos das duas mãos [1]. Nos povos primitivos de hoje, essa influência é tão grande que em certos nomes de números figuram partes do corpo humano — alguns dizem *duas mãos* em vez de 10, *um homem completo* em vez de 20 (significando que, depois de esgotar os dedos das mãos, se conta com os dos pés), etc.. Noutros, ainda, nem sequer existem nomes de números — quando se quere exprimir uma quantidade, fazem-se gestos com as mãos.

4. — Põe a vida primitiva outros problemas?

Os povos primitivos mais atrasados que hoje se conhecem teem uma vida social tão pouco desenvolvida que, para os problemas que se lhes põem, bastam os números naturais.

E só quando o nível de civilização vai aumentando e, em particular, quando o regime de propriedade se vai estabelecendo, que aparecem novos problemas — determinações de medidas de comprimentos, áreas, etc., — os quais exigem a introdução de novos números. Trataremos disso no capítulo seguinte.

5. — O símbolo zero

O homem civilizado de hoje, mesmo com conhecimentos matemáticos que não vão além da instrução primária, começaria a sucessão 1) (pág. 10) não pelo *1* mas por *zero*, e escrevê-la-ia assim:

2) $\quad 0, 1, 2, 3, 4, \ldots.$

---

[1] — Teem sido usadas outras bases, mas, quási sempre, números múltiplos de 10. E, no entanto, a base ideal seria 12, porque se presta melhor que 10 a sub-divisões. 10 tem apenas *dois* divisores diferentes dêle: 2 e 5; 12 tem *quatro*: 2, 3, 4, 6.

Ao primitivo, de hoje ou dos tempos pré-históricos, não ocorre, porém, o considerar o *zero* como um número; por isso, não chamaremos ao *zero* um número *natural* e à sucessão 2) chamaremos *sucessão dos números inteiros.*

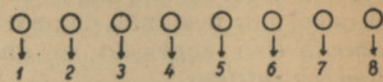
A criação de um símbolo para representar o *nada* constituíu «um dos actos mais audazes do pensamento, uma das maiores aventuras da razão».(1) É de criação relativamente recente (talvez pelos primeiros séculos da era cristã) e foi devido às exigências da numeração escrita. Todos conhecem o princípio em que essa numeração se baseia e qual é o papel que nela desempenha o símbolo zero. Uma coisa em que nem tôda a gente repara é que essa numeração constitue uma autêntica maravilha que permite, não só escrever muito simplesmente os números, como efectuar as operações—¿o leitor já experimentou, por exemplo, fazer uma multiplicação, ou uma divisão, em numeração romana? E, no entanto, já antes dos romanos tinha florescido a civilização grega onde viveram alguns dos espíritos matemáticos mais penetrantes de todos os tempos; e a nossa actual numeração é muito posterior a todos êles.

6.—A idea de correspondência. Suponhamos que uma pessoa, de posse do conhecimento dos números naturais, quere contar uma colecção de objectos; como procede?

Aponta para um dos objectos e diz: *um;* aponta outro e diz: *dois,* e vai procedendo assim até esgotar

(1) — J. Pelseneer. — Esquisse du progrès de la pensée mathématique.

os objectos da colecção; se o *último* número pronunciado fôr *oito,* dizemos que a colecção tem *oito* objectos (fig. 1).



(fig. 1)

Por outras palavras, podemos dizer que a contagem se realiza *fazendo corresponder sucessivamente, a cada objecto da colecção, um número da sucessão natural* 1). Encontramo-nos assim em face da *operação de «fazer corresponder»,* uma das operações mentais mais importantes, e que na vida de todos os dias utilizamos constantemente.

Esta operação de «fazer corresponder» baseia-se na *ideia de correspondência* que é; sem dúvida, uma das ideias basilares da Matemática.

A *correspondência* ou *associação mental* de dois entes — no exemplo dado, os objectos e os números (fig. 1) — exige que haja um *antecedente* (no nosso exemplo, o objecto) e um *conseqüente* (no nosso exemplo, o número); a maneira pela qual o pensar no antecedente desperta o pensar no conseqüente chama-se *lei da correspondência.*

7. — Classificação das correspondências

A ideia de correspondência é tão importante que nos vamos demorar um pouco no seu estudo; êle facilitar-nos-á enormemente a compreensão de certas questões que aparecerão adiante, como seja a questão dos irracionais, o conceito de função, etc.

Numa sala encontram-se seis pessoas — três Antónios, dois Josés, um João. É claro que o pensar em cada uma dessas pessoas desperta-nos imediatamente o pensar no seu nome próprio; temos, por conseqüência, aqui uma correspondência: *homem* (antecedente) → *nome-próprio* (conseqüente).

Por outro lado, o pensar num determinado nome-próprio desperta o pensar na pessoa ou pessoas com êsse nome, e temos a correspondência: *nome-próprio* (antecedente) → *homem* (conseqüente).

¿Em que diferem estas duas correspondências? Em terem trocados os papeis do antecedente e conseqüente; sempre que duas correspondências estão nestas condições, dizem-se *recíprocas* uma da outra.

Consideremos a correspondência *homem* → *nome-próprio;* todo o antecedente tem conseqüente (a não ser que na sala se encontrasse alguma criança ainda não registada); uma correspondência em que isto se dê chama-se *completa.*

¿Quantos conseqüentes correspondem a cada antecedente? um só; tôda a correspondência completa nestas condições diz-se *unívoca* ou *um-a-um.*

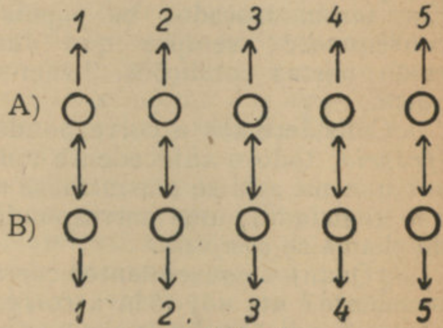
Consideremos agora a correspondência recíproca *nome-próprio* → *homem.* Esta correspondência é completa (se considerarmos a mesma colecção acima mencionada) mas não é *unívoca* — há antecedentes (António, José) aos quais corresponde mais de um conseqüente; tôda a correspondência completa em que isto se dê chama-se *um-a-vários.*

8. — As correspondências biunívocas; equivalência

Pode acontecer que uma correspondência seja *unívoca* e a sua recíproca também; se isso se der, a correspondência chama-se *biunívoca.* Exemplo: numa sala encontram-se seis homens com as respectivas espôsas; a correspondência *marido* → *espôsa* é completa e unívoca, a correspondência recíproca *espôsa* → *marido* é também completa e unívoca — a correspondência é *biunívoca*.

Sempre que duas colecções de entidades se podem pôr em correspondência biunívoca, elas dizem-se equivalentes.

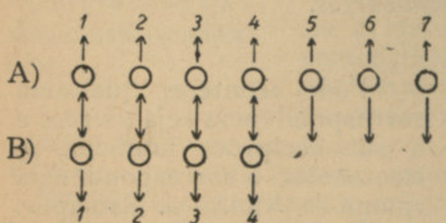
Vejamos como a equivalência intervém directamente na contagem. Suponhamos duas colecções de objectos A) e B) e procuremos estabelecer entre elas uma correspondência. Se elas se encontram no caso representado na fig. 2, há equivalência, e isso quere dizer que, se se tivesse feito separadamente a contagem de cada uma delas, se obtinha o mesmo número. Isto é — *a equivalência de duas colecções de objectos significa igualdade de quantidade, melhor, igualdade de número de objectos.*



(fig. 2)

9. — **Prèvalência**

Suponhamos agora que se dava o caso representado na fig. 3.



(fig. 3)

Não há equivalência entre as colecções A) e B); a correspondência A) → B) não é completa — o número de objectos de A) é maior que o de B).

Por outro lado, verificamos que B) se pode pôr em correspondência biunívoca com uma parte de A), isto é: B) é equivalente a uma parte de A), sem que A) seja equivalente a nenhuma parte de B); a colecção A), neste caso, diz-se *prèvalente* a B).

Assim, enquanto a equivalência se traduz pela *igualdade*, a prèvalência traduz-se pela *desigualdade*— o número de objectos de A) é maior que o de B) — e êste estudo pode resumir-se assim: *o todo não é equivalente à parte, o todo é prèvalente à parte;* na linguagem vulgar, estas afirmações enunciam-se assim: *o todo é maior que a parte;* mas, devido a razões que só adiante podemos esclarecer, é melhor conservar o primeiro enunciado.

10.—Princípio de extensão

Viu-se atrás como a operação da contagem, repetida por muitos milhares de anos, acabou por levar à criação dos números naturais e, viu-se que a extensão do seu conhecimento depende do grau de civilização e da intensidade da vida social do homem.

Assim, a ideia que tem do número natural o homem civilizado de hoje é mais completa, mais geral do que aquela que tem o homem primitivo; é mesmo diferente da que tinha o filósofo da Grécia antiga, a mais elevada e bela civilização da Antigüidade, separada de nós por pouco mais de 20 séculos.

Para o primitivo, e mesmo para o filósofo antigo, os números estavam impregnados de Natureza — a Natureza em cuja labuta o homem adquiriu todos os seus conhecimentos — os números estavam ligados às coisas de que êles se serviam para contar.

Para o homem civilizado de hoje, o número natural é um ser puramente aritmético, desligado das coisas reais e independente delas — é uma pura conquista do seu pensamento. Com esta atitude, o homem de hoje, esquecido da humilde origem histórica do número, e elevando-se (ou julgando elevar-se) acima da realidade imediata, concentra-se nas suas possibilidades de pensamento e procura tirar delas o maior rendimento. Não é aqui o lugar de discutir o fundamento filosófico de tal atitude. Verifiquemos, no entanto, como um dado real, que não pode ser pôsto de lado, que *o homem tem tendência a generalizar e estender tôdas as aquisições do seu pensamento, seja qual fôr o caminho pelo qual essas aquisições se obteem, e a procurar o maior rendimento possível dessas generalizações, pela exploração metódica de tôdas as suas conseqüências.*

Todo o trabalho intelectual do homem é, no fundo, orientado por certas *normas*, certos *princípios*. Àquêle princípio em virtude do qual se manifesta a tendência que acabamos de mencionar, daremos o nome de *princípio de extensão.*

No estudo que nos está ocupando encontraremos outros princípios; por agora, vamos ver já uma aplicação importantíssima do princípio de extensão a uma das questões mais discutidas de tôda a *história da Ciência.*

11. — O primeiro contacto com a noção de infinito

Voltemos à sucessão dos números inteiros

2) $0, 1, 2, 3, 4, \ldots$

¿O que querem dizer, nesta sucessão, os três pontos colocados depois da última vírgula? Êsses três pontos — sinal da *reticência matemática* — querem dizer que não estão lá escritos todos os números inteiros; faltam números inteiros. Quantos?

Pôr esta pregunta é o mesmo que pôr esta: ¿onde acaba a sucessão dos números inteiros? ou ainda: ¿qual é o maior número inteiro, o número inteiro além do qual não pode pensar-se que exista mais algum?

A resposta depende, evidentemente, da pessoa a quem fôr feita a pregunta. Se fôr a uma criança de três anos, ou a um primitivo dos mais atrasados que hoje existem, *o maior número* não irá além de 5 ou 6; se fôr a um primitivo dos menos atrasados, já andará por uns milhares. ¿E se fôr a um homem civilizado, a um representante da cultura média de hoje? Eis como êsse homem, afastado da origem histórica do número, pensará: «naquela sucessão, eu passo dum número para o seguinte juntando-lhe uma unidade; por meio desta operação mental elementar — *juntar uma unidade* — eu passo do *1* para o *2*, do *2* para o *3* e vou tão longe quanto quiser; se me derem um número n, por maior que seja, eu posso sempre efectuar sôbre êle a mesma operação mental e obter um número maior — $n+1$ — logo, para mim, não há número inteiro maior que todos os outros. Importa-me pouco que a certa altura esteja já construindo, com a minha operação mental elementar, números tão grandes que não tenha possibilidade prática de considerar colecções que êsses números sirvam para contar; importa-me pouco; eu, da realidade prática, tirei a ideia dos primeiros números e a da operação elementar de passagem de um ao seguinte; agora, vou tirar tôdas as conseqüências dessa ideia e dessa operação; o meu pensamento não vê barreira para aplicação da operação elementar; por outras palavras, aceita, não pode deixar de aceitar, a *possibilidade de repetição ilimitada do acto mental — juntar uma unidade*».

Eis como raciocina o homem de hoje; para êle, de posse do conceito geral de número inteiro, não há número maior que os outros. Êste facto exprime-se por qualquer dos seguintes enunciados, equivalentes: a) *a sucessão dos números inteiros é ilimitada;* b) *dado um número inteiro, por maior que seja, existe sempre outro maior;* c) *há uma infinidade de números inteiros.* Para dar bem a ideia de que a sucessão dos números é ilimitada, ela escrever-se-á daqui por diante assim:

3) $$0, 1, 2, 3, \ldots n, \ldots$$

Estamos à porta do *domínio do infinito;* preparemo-nos para o *salto no desconhecido.*

12. — Definição de conjunto

A palavra *conjunto* há-de ser empregada várias vezes nesta exposição e vamos, por isso, dar, desde já, o seu significado. Num certo momento olhamos para uma sala, por exemplo, uma sala de espectáculo, onde está um agrupamento de pessoas; é claro que essas pessoas são, uma a uma, entidades determinadas e gozam em comum da propriedade de, no momento de que falamos, *estarem* nessa sala; qualquer pessoa que nesse momento passe na rua, não goza dessa propriedade.

Portanto, se falarmos no *conjunto de pessoas que estão dentro da sala* referimo-nos a qualquer coisa de bem determinado e tal que, dada uma pessoa qualquer, podémos averiguar com rigor se ela pertence ou não ao conjunto de que se falou.

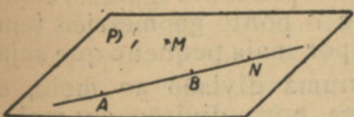
Definição. Em geral, dizemos que *é dado um conjunto de certos elementos* quando: *a)* êles são, de si, entidades determinadas; *b)* além disso, há a possibilidade de averiguar se um elemento qualquer, dado ao acaso, pertence ou não ao conjunto.

Por exemplo: temos o direito de falar no conjunto dos *números inteiros* e, pelo que vimos acima, *êsse* *conjunto é infinito* ou, por outras palavras, *tem uma infinidade de elementos.*

13. — Existem outros conjuntos infinitos?

Em face da definição que acabamos de dar de conjunto ¿terá existência a entidade *conjunto de pontos de uma recta?*

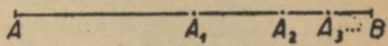
Seja (fig. 4) no plano P a recta definida pelos dois pontos A e B. Sabe-se que a geometria considera a *recta* como figura só com uma dimensão — *comprimento* — e o *ponto* como não tendo *extensão,* portanto com dimensões nulas; sabe-se, ainda mais, que dois pontos A e B determinam uma recta e só uma — qualquer outro ponto da recta está *alinhado* com os dois pontos A e B.



(fig. 4)

Pois bem; admitindo tudo isto, tem significado real o falar-se no *conjunto dos pontos da recta,* visto que, dado um ponto qualquer, podemos averiguar sempre se êle está ou não alinhado com A e B — se estiver, pertence ao conjunto: é o caso do ponto N da fig. 4; se não estiver, não pertence: é o caso do ponto M.

Ponhamos agora a seguinte questão — ¿*quantos pontos tem a recta*? Consideremos dois pontos A e B, quaisquer, que determinam sôbre a recta um *segmento* $\overline{AB}$; dividamos êsse segmento ao meio — obtém-se o ponto A_1; dividamos $\overline{A_1B}$ ao meio — obtém-se A_2; dividamos $\overline{A_2B}$ ao meio — obtém-se A_3 etc., *até onde?* ¿onde pára a possibilidade de prosseguir na divisão ao meio? Se encararmos a questão do ponto de vista prático, ela pára na altura em que obtemos segmentos tão pequenos que já não há instrumentos com precisão suficiente para levar mais longe a divisão.



(fig. 5)

Mas ponhamos a questão do ponto de vista teórico, à luz do ***princípio de extensão***; só é possível uma de duas coisas — ou o ponto geométrico é um pequeno corpúsculo com dimensões, embora muito pequenas, e a operação de divisão ao meio termina quando se obtiver um segmento de comprimento igual ao comprimento do corpúsculo; ou o ponto geométrico tem comprimento *zero* e então, por mais pequeno que seja o segmento $\overline{A_nB}$ obtido numa divisão ao meio, é sempre possível *pensar* uma nova divisão ao meio. Neste caso, o acto mental de divisão ao meio pode repetir-se ilimitadamente, e teremos sôbre o segmento $\overline{AB}$ uma infinidade de pontos A_1, A_2,... A_n,... — *teremos um novo conjunto infinito.*

¿Qual das duas coisas devemos aceitar? Por agora, não podemos dar as razões que nos levam a uma escolha, mas o leitor pode ficar sabendo desde já que a primeira hipótese se choca com dificuldades de tal ordem que tem que ser abandonada[1]; resta a segunda — *o conjunto dos pontos da recta é infinito.*

Mais: se olharmos para a fig. 5, verificamos que, sôbre o segmento $\overline{AB}$, além da infinidade de pontos A_1, A_2,... A_n,... *há mais infinidades de pontos* — entre A e A_1, podemos fazer o mesmo raciocínio que

---

[1] Ver a justificação no capítulo 4.º; (parágrafo 13 e seguintes). Lá será vista a enorme importância filosófica e histórica que esta questão tem.

fizemos entre A e B; entre A_1 e A_2 o mesmo, etc. Encontramo-nos, por conseqüência, em face de um infinito de natureza diferente do infinito da sucessão *3)* (pág. 20).

¿ Será possível comparar êstes diferentes *tipos de infinito?* A questão é delicada, mas podemos ver alguma coisa dela; vamos dar os primeiros passos no domínio encantado do infinito.

14. — Correspondência no infinito

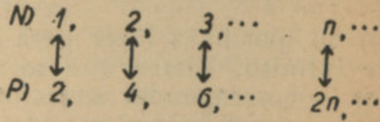
A nossa operação da *contagem* vai ainda fornecer-nos o modêlo (mas agora só o modêlo) do que há a fazer para comparar os vários tipos de infinito. Vimos que se realiza uma contagem fazendo corresponder objectos a números; vejamos se será possível estender a ideia de correspondência aos conjuntos infinitos. Nada mais fácil; pela correspondência, a cada elemento vem associado outro pelo pensamento; não há mais que supôr que esta operação —*fazer corresponder a*— se pode repetir indefinidamente. Ora, se já aceitámos, duas vezes, a possibilidade de repetição ilimitada dum acto mental ¿ porque não a admitir agora?

Assentemos, portanto, em que se estende a conjuntos infinitos a noção de correspondência e vamos transportar para êles, tanto quanto possível, as coisas já adquiridas, em especial a noção de *equivalência,* tão importante, como vimos, na contagem das colecções finitas — *se, entre os elementos de dois conjuntos infinitos, puder estabelecer-se uma correspondência biunívoca, êsses dois conjuntos dizem-se equivalentes.*

15.—Primeiras conseqüências do salto no desconhecido

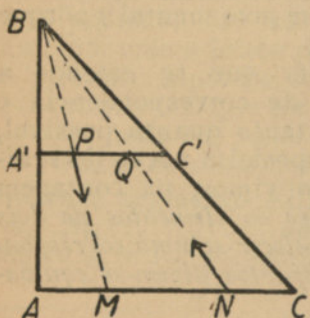
As definições que acabamos de dar são as mais naturais possível porque são as que saíram directamente de coisa tão simples e tão ligada à vida real diária do homem como a operação da contagem. Vamos ver, no entanto, que, no domínio do infinito, elas nos vão trazer surpresas.

1.º Exemplo: — Consideremos o conjunto dos números naturais *N)* *1, 2, ... n, ...* e o conjunto dos números *pares P)* *2, 4, 6, ... 2n, ...*. São ambos conjuntos infinitos, e entre êles pode estabelecer-se uma correspondência biunívoca, como mostra a fig. 6 — a cada nùmero de *N)* corresponde um número de *P)* e um só — o seu dôbro; a cada número de *P)* corresponde um número de *N)*, e um só — a sua metade.



(fig. 6)

Quere isto dizer que *P) e N) são equivalentes*; mas *P)* é *uma parte* de *N)* logo, *em conjuntos infinitos o todo e a parte podem ser equivalentes,* o que não se dava no finito (pág. 17).



(fig. 7)

2.º Exemplo: — Seja (fig. 7) o triângulo rectângulo BAC e tiremos a meio de $\overline{AB}$ uma paralela $\overline{A'C'}$ a $\overline{AC}$; sabe-se, da geometria, que o segmento $\overline{A'C'}$ tem de comprimento metade do segmento $\overline{AC}$.

Pois, a-pesar disso, o conjunto, infinito, de pontos de $\overline{A'C'}$ é equivalente ao conjunto, infinito, de pontos de $\overline{AC}$. Para o verificar, basta estabelecer, entre êsses dois conjuntos, uma correspondência biunívoca, do modo seguinte: a cada ponto P de $\overline{A'C'}$ faz-se corresponder o ponto M (único) de $\overline{AC}$ em que $\overline{AC}$ é encontrado pela recta BP; a cada ponto N de $\overline{AC}$ faz-se corresponder o ponto Q (único) em que $\overline{A'C'}$ é encontrado pela recta NB.

Os dois conjuntos são, portanto, equivalentes; mas $\overline{A'C'}$ tem de comprimento metade de $\overline{AC}$ — *o todo pode ser equivalente à parte.*

Verificamos, portanto, e isto tem a maior importância, que a simples aceitação da possibilidade de repetição ilimitada de um acto mental — base do conceito de infinito — exige o abandono de certas verdades fundamentais cuja evidência a vida de todos os dias impõe.

Que o homem, deslumbrado pelas possibilidades do seu pensamento, se afaste da realidade imediata, aceita-se; que êle pretenda fazer jogar, em cheio, o *princípio de extensão,* óptimo; mas que esteja sempre atento às conseqüências, às vezes as mais surpreendentes e chocantes, que êsses vôos trazem consigo. E tudo é de aceitar, de braços abertos, se conduzir, como é o caso aqui (será visto isso mais tarde), a uma melhor compreensão da realidade.

16. — Pode fazer-se uma anatomia do infinito?

Voltemos à questão posta atrás — a comparação dos vários tipos de infinito, em especial o tipo do conjunto dos números inteiros, a que chamaremos *tipo do numerável*, e o do conjunto dos pontos da recta, a que chamaremos *tipo do contínuo*.

A questão, posta em termos de rigor, será naturalmente esta — ¿os dois tipos serão de facto distintos do ponto de vista da equivalência, ou não? Por outras palavras, ¿existirá, ou não, uma correspondência biunívoca entre os dois conjuntos? Se existir, o tipo do contínuo será equivalente ao tipo do numerável; se não existir, tratar-se-á, de facto, de dois tipos distintos de infinito.

Antes de mais ¿a questão pode, de facto, resolver-se? é possível fazer uma *anatomia* do infinito? Até aqui fizemos comparações *dentro de cada um dos dois tipos*, mas ainda não entre um tipo e outro, e será naturalmente êste o objectivo mais importante de tal anatomia. A esta questão prévia responde-se — *pode* — e o instrumento é ainda a mesma noção de correspondência.

Mas, quanto aos resultados, deixamos agora a questão em aberto; no cap. 5.º diremos mais alguma coisa sôbre ela.

2.º — Operações

17. — As operações da Aritmética

Todos conhecem, desde os elementos de Aritmética estudados na instrução primária, as quatro operações, chamadas *operações fundamentais*: adição, subtracção, multiplicação, divisão. A estas há que juntar mais três que se lhes ligam imediatamente; são: a potenciação, a radiciação e a logaritmação.

Estas *sete* operações podem agrupar-se no seguinte quadro, que adiante será explicado:

GRAUS	DIRECTAS	INVERSAS
1.º	Adição	Subtracção
2.º	Multiplicação	Divisão
3.º	Potenciação	Radiciação Logaritmação

18. — A operação da adição

É a operação mais simples e da qual tôdas as outras dependem. A ideia de *adicionar* ou *somar* está já incluída na própria noção de número natural — ¿o que é a operação elementar de passagem de um número ao seguinte, senão a operação de somar a um número uma unidade? Pois bem, somar a um número a, dado, outro número b, é efectuar, a partir de a, b passagens sucessivas pela operação elementar.

Nomes. — Ao número a dá-se o nome de *adicionando;* a b, o de *adicionador;* aos dois, em conjunto, o de *parcelas.*

Símbolo. — A soma de a com b representa-se por $a + b$.

Papéis. — Na soma, o adicionando representa um papel *passivo;* o adicionador, um papel *activo.*

Propriedades.

1.º grupo.

1.ª — *unicidade* $\quad a = a',\ b = b',\ \rightarrow\ a + b = a' + b'$

2.ª — prop. *monotónica* $b > b' \rightarrow a + b > a + b'$
3.ª — prop. *modular* $a + 0 = a$

2.º grupo.

4.ª — prop. *comutativa* $a + b = b + a$
5.ª — prop. *associativa* $a + (b + c) = (a + b) + c$ (1).

19. — A operação da multiplicação

Símbolo — $a \times b$ ou $a.b$.

Definição. — A multiplicação define-se como uma soma de parcelas iguais

$$4)\qquad a.b = \overbrace{b + b + \ldots + b}^{(a)}.$$

Nomes. — Ao número *b*, parcela que se repete, chama-se *multiplicando*; ao número *a*, número de vezes que *b* aparece como parcela, chama-se *multiplicador*; aos dois, em conjunto, dá-se o nome de *factores*; ao resultado, o de *produto*.

Papéis. — O multiplicando desempenha um papel *passivo*; o multiplicador, um papel *activo*.

Propriedades.

1.º grupo.

1.ª — *unicidade* $a = a',\ b = b' \rightarrow a.b = a'.b'$
2.ª — prop. *monotónica* $b > b' \rightarrow a.b > a.b'$
3.ª — *anulamento* $a.0 = 0$; recìprocamente, se o produto é nulo, deve anular-se, pelo menos, um dos factores.
4.ª — prop. *modular* $a.1 = a$

(1) A colocação do parêntesis significa que se considera a soma efectuada.

2.º grupo.

5.ª — prop. *comutativa* $a.b = b.a$
6.ª — prop. *associativa* $a.(b.c) = (a.b).c$
7.ª — prop. *distributiva* $a.(b + c) = a.b + a.c$ (1).

20. — A operação da potenciação *Símbolo* — a^n.

Definição. — A potencia a^n define-se como um produto de factores iguais

$$5) \qquad a^n = \overbrace{a.a. \ldots a}^{(n)}$$

Nomes. — Ao número *a*, factor que se repete, chama-se *base*; ao número *n*, número de vezes que *a* figura como factor, chama-se *expoente*; ao resultado chama-se *potência*.

Papéis. — A base desempenha um papel *passivo*, o expoente um papel *activo*.

Propriedades.

1.º grupo.

1.ª — *unicidade* $a = b,\ n = m \rightarrow a^n = b^m$

2.ª — prop. *monotónica* $\begin{cases} n > m,\ a > 1 & \rightarrow a^n > a^m \\ a > b & \rightarrow a^n > b^n \end{cases}$

2.º grupo.

3.ª — prop. *multiplicativa* $a^m.a^n = a^{m+n}$
4.ª — prop. *distributiva* $(a.b)^n = a^n.b^n$
5.ª — . . . . $(a^m)^n = a^{mn}$.

(1) Sôbre o papel dos parêntesis, vidé a nota do fundo da pág. 28.

21. — As operações inversas Em relação a cada uma das operações anteriores, pode pôr-se o seguinte problema — dado o *resultado* da operação e um dos *dados*, determinar o outro dado.

Pôr êste problema, é pôr o problema da *inversão* das operações, e aquelas novas operações que resolvem o problema, para cada caso, chamam-se *operações inversas* das primeiras.

Vamos ver o que se passa com cada uma delas.

Adição. — A inversão consiste em — *dada a soma e uma das parcelas, determinar a outra.* Deveria haver duas operações inversas, conforme se pedisse o *adicionando* ou o *adicionador*, mas, *em virtude da propriedade comutativa* da adição, os papéis das duas parcelas podem trocar-se, e as duas inversas fundem-se numa só, que se chama *subtracção.*

Multiplicação. — A inversão consiste em — *dado o produto e um dos factores, determinar o outro.* Deveria também haver duas inversas, mas que se fundem numa só — *divisão* — em virtude da propriedade comutativa do produto.

Potenciação. — A inversão consiste em — *dada a potência e um dos dados, base ou expoente, determinar o outro.* Agora há, de facto, duas inversas, porque não existe comutatividade na potenciação; por exemplo:

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25;$$
$$2^5 = 2.2.2.2.2 = 32.$$

Aquela inversa pela qual, dada a potência e o expoente, se determina a base chama-se *radiciação;* aquela pela qual, dada a potência e a base, se determina o expoente chama-se *logaritmação.*

Vamos estudar ràpidamente cada uma das inversas.

22.—A operação da subtração

Símbolo — a-b.

Definição.—Em virtude da definição dada acima, a subtração é a operação pela qual se determina um número *c* que, somado com *b*, dá *a*:

6) $$a - b = c \longleftrightarrow c + b = a:$$

Nomes.—Ao número *a* dá-se o nome de ***diminuendo*** ou ***aditivo***; a *b* o de ***diminuidor*** ou ***subtractivo***; a *c* o de ***resto*** ou ***diferença.***

Possibilidade.—Para que a operação seja possível, é necessário que o ***aditivo*** seja maior que o ***subtrativo*** ou, pelo menos, igual a êle: $a \geq b$.

Propriedades.

1.º grupo.

1.ª—***unicidade*** $a = a', b = b' \rightarrow a - b = a' - b'$

2.ª—prop. ***monotónica*** $\begin{cases} a > a' \rightarrow a - b > a' - b \\ b > b' \rightarrow a - b < a - b' \end{cases}$

3.ª—prop. ***modular*** $a - 0 = a$

4.ª— . . . . $a - a = 0$.

2.º grupo.

5.ª— . . . . $a + (b - c) = (a + b) - c$

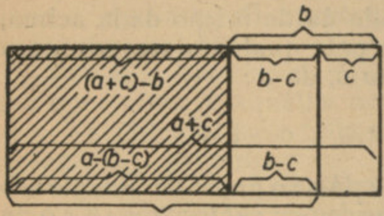
6.ª— . . . . $a - (b + c) = (a - b) - c$

7.ª— . . . . $a - (b - c) = (a + c) - b$

8.ª— . . . . $(a + c) - (b + c) = a - b$

9.ª— . . . . $(a - c) - (b - c) = a - b$.

A justificação de cada uma destas propriedades está na definição dada de subtracção e nas propriedades da adição; mas podem também dar-se ilustrações geométricas simples; por exemplo: para a 7.ª propriedade, tem-se a fig. 8 na qual se vê que o rectângulo sombreado mede simultâneamente:



(fig. 8)

$(a+c)-b$ e $a-(b-c)$.

Com a operação da subtracção, completa-se agora a propriedade 7.ª da multiplicação, juntando-lhe a seguinte:

$$a.(b-c) = a.b - a.c.$$

23. — A operação da divisão

Símbolo — $a:b$ ou $\frac{a}{b}$.

Definição. — Pela definição dada em (21), tem-se

7) $$a:b = c \leftarrow b.c = a.$$

Nomes. — Ao número *a* chama-se *dividendo;* ao número *b*, *divisor;* ao número *c*, *cociente;* a divisão é, portanto, a operação pela qual, dado o dividendo e o divisor, se determina um terceiro número, *cociente*, que, multiplicado pelo divisor, dá o dividendo.

Possibilidade.—Para que a operação seja possível, deve o dividendo ser *múltiplo* do divisor; caso contrário, não existe número inteiro *c* que satisfaça a $c.b=a$; é o caso, por exemplo, de 7:3 — não há inteiro cujo produto por 3 dê 7.

Neste caso, existe então um quarto número *r* — *resto* — tal que é verificada a igualdade

8) $$a = b.c + r$$

(no exemplo dado, é $r=1 \rightarrow 7 = 2.3 + 1$).

Propriedades.

1.º grupo.

1.ª — *unicidade* . . . . $a = a', \; b = b' \rightarrow a:b = a':b'$

2.ª — prop. *monotónica* $\begin{cases} a > a' \rightarrow a:b > a':b \\ b > b' \rightarrow a:b < a:b' \end{cases}$

3.ª — prop. *modular* . $a:1 = a$

4.ª — . . . . $a:a = 1.$

2.º grupo.

5.ª — prop. *distributiva* $\begin{cases} (a+b):c = a:c + b:c \\ (a-b):c = a:c - b:c \end{cases}$

6.ª — . . . . $\begin{cases} (a:b).c = a:(b:c) = (c:b).a \\ (a:b):c = a:(b.c) = (a:c):b \end{cases}$

7.ª — . . . . $\begin{cases} a:b = (a.c):(b.c) \\ a:b = (a:c):(b:c) \end{cases}$

8.ª — . . . . $(a.c):(b.d) = (a:b).(c:d).$

Tôdas estas divisões se supõem possíveis no sentido da definição 7).

Com a introdução da operação de divisão completam-se agora as propriedades da potenciação, juntando:

à propriedade 3.ª . . . . . . $a^m : a^n = a^{m-n}$

à propriedade 4.ª . . . . . . $(a:b)^n = a^n : b^n.$

24. — A operação da radiciação *Símbolo* — $\sqrt[n]{a}$ (que se lê: *raiz de índice n de a).*

Definição. — Pela definição dada em **21**, tem-se que a radiciação é a operação pela qual, dado um número *a* e um número *n*, se determina um novo número $b = \sqrt[n]{a}$, tal que seja $a = b^n$:

9) $a = b^n \rightarrow b = \sqrt[n]{a}$ *(determinação da base)*

Nomes.—Ao número *a* chama-se *radicando*; ao sinal $\sqrt{\ }$ chama-se sinal de *radical*; ao número *n* chama-se *índice do radical*; ao número *b* chama-se *raiz*.

Possibilidade.—A operação só é possível quando *a* seja uma potência de expoente *n* de outro número. Por exemplo, é possível $\sqrt{4}$ mas não $\sqrt{5}$. Reparando em quais são aqueles números que são *quadrados*— 1, 4, 9, 16, 25, ...—aqueles que são *cubos*—1, 8, 27, 64, ...—quartas potências, etc., vê-se que o *caso mais geral é o da impossibilidade da radiciação.*

Propriedades.

1.º grupo.

1.ª—*unicidade* . . . . $a = b,\ n = m \rightarrow \sqrt[n]{a} = \sqrt[m]{b}$

2.ª—prop. *monotónica* $\begin{cases} a > b & \rightarrow \sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b} \\ n > m & \rightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[m]{a} \end{cases}$

3.ª . . . . $\sqrt[n]{1} = 1$

2.º grupo.

4.ª—prop. *distributiva* $\begin{cases} \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \\ \sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} \end{cases}$

5.ª— . . . . $\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}$

6.ª— . . . . $\sqrt[n]{a^p} = \sqrt[n \cdot q]{a^{p \cdot q}} = \sqrt[n : q]{a^{p : q}}$

7.ª— . . . . $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n \cdot p]{a}$.

25. — A operação da logaritmação

Símbolo. — $\log_b a$ (que se lê *logaritmo de a na base b*)

Definição. — Pelo que se disse em **21**, a logaritmação é a operação por meio da qual, dado um número *a* e um número *b*, se determina um terceiro número $n = \log_b a$ tal que seja $a = b^n$:

10) $a = b^n \rightarrow n = \log_b a$ *(determinação do expoente; comparar com 9).*

Possibilidade. — A operação só é possível quando *a* é uma potência de base *b*; por exemplo, é possível $\log_7 49$, visto que $49 = 7^2$, mas não $\log_3 20$; *o caso mais geral é o da impossibilidade.*

Propriedades.

1.° grupo.

1.ª — *unicidade* . . . . $a = a'$, $b = b' \rightarrow \log_b a = \log_{b'} a'$
2.ª — prop. *monotónica* $a > a' \rightarrow \log_b a > \log_b a'$
3.ª — . . . . $\log_a a = 1$.

2.° grupo.

4.ª — . . . . $\log_b (a.c) = \log_b a + \log_b c$
5.ª — . . . . $\log_b (a:c) = \log_b a - \log_b c$
6.ª — . . . . $\log_b (a^n) = n . \log_b a$.

26. — Propriedades formais

Em tôdas as operações, as propriedades que classificámos no 2.° grupo desempenham um papel muito diferente das do 1.° grupo. Enquanto estas dizem respeito à maneira como os resultados variam quando os dados variam, as do 2.° grupo mostram as várias *formas* pelas quais os dados podem ser combinados sem alterar os resultados. Por isso, às propriedades do 2.º grupo se chama *propriedades formais*.

No cálculo aritmético e algébrico elas são duma aplicação constante e quem as conhecer bem, principalmente as da soma e produto, tem a chave do cálculo algébrico. Por exemplo, em obediência à propriedade distributiva da multiplicação, escreve-se a igualdade $2(x^2 + y^2 - 4x + 1) = 2x^2 + 2y^2 - 8x + 2$.

Duma maneira geral, pode afirmar-se que as propriedades formais das sete operações constituem o conjunto das *leis operatórias* do cálculo.

27. — O zero como dado operatório A introdução do *zero* como dado provoca por vezes perturbações nas operações, tais como atrás foram definidas e estudadas. Êssas perturbações podem ser de duas naturezas — ou, em face da definição, a colocação do zero num dos dados conduz a uma impossibilidade; ou então está-se em face duma operação possível, mas que a definição dada não abrange.

Está no primeiro caso, por exemplo, a divisão $a : 0$ — há *impossibilidade*, visto que o cociente, se existisse, seria um número c tal que $c \cdot 0 = a$; ora $c \cdot 0 = 0$ como se sabe [19 prop. 3ª].

Está no segundo caso, o produto $0 \cdot a$; efectivamente, sabemos que $a \cdot 0 = \overbrace{0 + 0 + \ldots + 0}^{(a)}$ mas ¿ que significado tem, em face da definição de produto [19, 4)] uma multiplicação em que *zero* seja multiplicador, isto é, uma soma de *zero* parcelas, cada uma delas igual a a? Nenhum!

Encontra-se no mesmo caso a potência a^0; em face da definição [20, 5)] a^0 não tem significado — não há produtos com *nenhum factor*.

No entanto, reparemos bem, não são casos de impossibilidade; são apenas casos que as definições dadas não abrangem. ¿Convirá deixá-los assim e não atribuir significado a $0.a$ e a a^0? De modo nenhum — *o princípio de extensão* leva-nos a procurar uma definição; no decorrer dum cálculo algébrico pode anular-se um expoente, pode anular-se um factor multiplicador; como será incómodo ter de renunciar a continuar o cálculo para se não estar a operar esterilmente sôbre símbolos sem significado! Mas ¿como dar as definições novas?

28. — Princípio de economia

É claro que as novas definições, uma vez que não estamos obrigados pelas antigas, (que não são aplicáveis) podem ser dadas *como quisermos*. Mas não é menos claro que *convém* que essas novas definições saiam, *o menos possível*, dos moldes das antigas, para que a introdução delas no cálculo se faça com o menor dispêndio possível de energia mental, não só no dar da definição, como nas suas conseqüências futuras.

Esta directriz corresponde a um princípio geral de *economia do pensamento* que nos leva, seja nos actos elementares da labuta diária, seja nas construções mentais mais elevadas, a preferir sempre, de dois caminhos que levam ao mesmo fim, o mais simples e mais curto.

No caso que nos está ocupando, ¿o que é que devemos *economizar?* Nós possuímos um conjunto de *leis operatórias*, formado pelas propriedades formais das operações — é a generalidade da aplicação dêsse conjunto que devemos conservar. Quere dizer, *convém* *que as novas definições sejam dadas de modo tal que as leis formais das operações lhes sejam ainda aplicáveis.*

Êste princípio é conhecido pelo nome de *princípio da permanência das leis formais,* ou princípio de Hankel, e não é mais, como vimos, que a aplicação particular, na Matemática, do *princípio geral de economia do pensamento.*

29. — Duas aplicações do princípio de economia

Vamos ver, à luz do que acabamos de dizer, que definições devemos dar de $0.a$ e a^0.

Comecemos por $0.a$. Sabemos, por um lado, que a operação da multiplicação é comutativa e, por outro lado, que $a.0=0$; logo, se queremos conservar esta lei formal — comutatividade — a definição *a dar* deve ser tal que $0.a = a.0 = 0$; tomamos, portanto, como nova definição

$$\text{11)} \qquad 0.a=0.$$

Vejamos agora a potência a^0. Sabemos que a potenciação goza da propriedade multiplicativa $a^m.a^n=a^{m+n}$; *se queremos manter esta lei formal,* a entidade a definir $X=a^0$ deve *vir a ser* tal que o produto $X.a^n$ se efectue segundo ela; isto é, deve *vir a ser* tal que $a^0.a^n=a^{0+n}$; mas $0+n=n$, logo *deve ser* $a^0.a^n=a^n$ e esta igualdade exige que seja $a^0=1$. A manutenção da lei *exige* portanto que seja

$$\text{12)} \qquad a^0=1$$

e é esta a definição que tomamos.

O leitor verifica fàcilmente que com as definições 11) e 12) são mantidas as restantes leis formais da multiplicação e da potenciação.

30. — As operações inversas e o princípio de extensão

Vimos que tôdas as operações inversas apresentam casos de impossibilidade, por vezes mesmo mais freqüentes que os de possibilidade.

Aplicações sucessivas do *princípio de extensão* levarão a reduzir tôdas essas impossibilidades; para isso é preciso criar novos campos numéricos; é o que faremos nos capítulos seguintes, pondo em evidência as necessidades de ordem prática ou teórica que, de cada vez, obrigaram a uma nova extensão.

CAPÍTULO II

O problema da medida

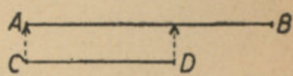
1.º — Construção do Campo Racional

1. — A operação da medição

Medir e contar são as operações cuja realização a vida de todos os dias exige com maior freqùência.

A dona de casa ao fazer as suas provisões de roupas, o engenheiro ao fazer o projecto duma ponte, o operário ao ajustar um instrumento de precisão, o agricultor ao calcular a quantidade de semente a lançar à terra de que dispõe, tôda a gente, nas mais variadas circunstâncias, qualquer que seja a sua profissão, tem necessidade de *medir*. Mas o que é — *medir?* Todos sabem em que consiste o *comparar* duas grandezas da mesma espécie — dois comprimentos, dois pêsos, dois volumes, etc.

Para comparar, por exemplo, os comprimentos dos segmentos de recta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$ (fig. 9), aplicam-se um sôbre o outro, fazendo coincidir dois extremos — no caso da figura, os extremos A e C; feita essa operação, vê-se que o ponto D cai entre A e B e o resultado da comparação expri-



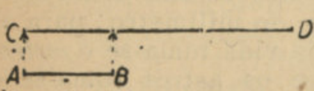
(fig. 9)

me-se dizendo que *o comprimento de* $\overline{AB}$ *é maior que o de* $\overline{CD}$ ou que *o comprimento de* $\overline{CD}$ *é menor que o de* $\overline{AB}$. Êste simples resultado — comprimento *maior* ou *menor que* — não chega, porém, na maioria dos casos. Pede-se, em geral, uma resposta a esta pregunta — *¿quantas* vezes cabe um comprimento noutro? Mas isto não é tudo ainda; se não houver um têrmo de comparação único para tôdas as grandezas de uma mesma espécie, tornam-se, se não impossíveis, pelo menos extremamente complicadas as operações de troca que a vida social de hoje exige.

É, portanto, necessário:

1.º — Estabelecer um *estalão* único de comparação para tôdas as grandezas da mesma espécie; êsse estalão chama-se *unidade* de medida da grandeza de que se trata — é, por exemplo, o *centímetro* para os comprimentos, o *grama-pêso* para os pêsos, o *segundo* para os tempos, etc.

2.º — Responder à pregunta — quantas vezes? — acima posta, o que se faz dando um número que exprima o resultado da comparação com a unidade.



(fig. 10)

Êsse número chama-se a *medida* da grandeza em relação a essa *unidade*.

Por exemplo, na fig. 10, o resultado da comparação exprime-se dizendo que no segmento $\overline{CD}$ cabe *três* vezes a unidade $\overline{AB}$, ou que a medida de $\overline{CD}$, *tomando* $\overline{AB}$ *como unidade*, é *três*.

Há, portanto, no problema da medida, três fases e três aspectos distintos — *escolha* da unidade; *comparação* com a unidade; *expressão* do resultado dessa comparação por um número.

2. — Interdependência dos aspectos O primeiro e o terceiro aspectos do problema estão intimamente ligados e cada um dêles condiciona o outro. Essa interdependência é bem visível se os considerarmos pela ordem acima posta — escolha → expressão numérica; mas ela joga também na ordem inversa.

A escolha da unidade faz-se sempre em obediência a considerações de *carácter prático*, de *comodidade*, de *economia*.

Seria tão incómodo tomar como unidade de comprimento de tecidos para vestuário a *légua*, como tomar para unidade de distâncias geográficas o milímetro. ¿E como se traduz essa exigência de comodidade? nisto — que a expressão numérica da medição não dê números maus de enunciar e dos quais se não faça portanto uma ideia clara (1).

Podemos, portanto, afirmar:

1.º — Em princípio, a unidade pode escolher-se como se quiser, mas, na prática, o número que há de vir a obter-se como resultado da medição, condiciona a escolha da unidade. Isso depende da natureza das medições que hajam de fazer-se. Para medições de dimensões nas células toma-se o *mícron* — milésima parte do milímetro; para as necessidades correntes da vida toma-se o *metro;* para as distâncias entre os astros toma-se o *ano-luz* ou seja

$365 \times 24 \times 3.600 \times 300.000$ quilómetros etc., etc.

2.º — Uma mesma grandeza tem, portanto, tantas *medidas* quantas as *unidades* com que a medição se faça.

---

(1) — ¿**Está-se vendo, por exemplo, o que seria uma pessoa pedir numa loja a décima milésima parte de uma légua de fazenda?**

Se, com a unidade u, uma grandeza tem medida m, com outra unidade $u' = u : k$ a mesma grandeza tem medida $m' = m.k$.

3. — A operação da medição, a propriedade privada e o Estado

Á primeira vista pode parecer que o aspecto de que estamos tratando — o número que se obtém como resultado da medição — é de somenos importância. Mas é um grande êrro supô-lo. Um homem possue um bocado de terra; vejamos a quantidade de circunstâncias em que êsse aspecto intervém:

a) Em todas as relações, de base económica, existentes entre o possuidor e a terra — para calcular a quantidade de semente a semear, o tempo que a terra leva a lavrar, etc., é necessário saber a sua *área*.

b) Em relações de indivíduo para indivíduo, com base na terra possuída — todo o contracto de venda de que a terra seja objecto exige, entre outras coisas, uma determinação tão apròximada quanto possível da sua área.

c) Em relações do indivíduo para o Estado, com base na terra possuída — o imposto depende, como se sabe, da área da propriedade, além de outros elementos.

Em todas estas relações, que abrangem, por assim dizer, tôda a actividade económica do possuidor da terra, é necessária a determinação cuidadosa de áreas, as quais dependem, segundo regras que a Geometria ensina, da medida de certas dimensões.

4. — E assim nasceu a geometria...

Heródoto — *o pai da História* — historiador grego que viveu no século V antes de Cristo, ao fazer a história dos Egípcios no livro II

(Euterpe) das suas *Histórias,* refere-se dêste modo às origens da Geometria:

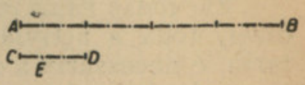
«Disseram-me que êste rei (Sesóstris) tinha repartido todo o Egipto entre os egípcios, e que tinha dado a cada um uma porção igual e rectangular de terra, com a obrigação de pagar por ano um certo tributo. Que se a porção de algum fôsse diminuída pelo rio (Nilo), êle fôsse procurar o rei e lhe expusesse o que tinha acontecido à sua terra. Que ao mesmo tempo o rei enviava medidores ao local e fazia medir a terra, a fim de saber de quanto ela estava diminuída e de só fazer pagar o tributo conforme o que tivesse ficado de terra. Eu creio que foi daí que nasceu a Geometria e que depois ela passou aos gregos».

Como se vê, as relações do indivíduo para com o Estado, com base na propriedade, impuseram cêdo (Sesóstris viveu provàvelmente há perto de 4.000 anos) a necessidade da expressão numérica da medição...

5. — Sub-divisão da unidade

Há, por vezes, vantagem em sub-dividir a unidade de medida num certo número de partes iguais; vejamos o que acontece à expressão numérica da medição.

Suponhamos o caso da fig. 11. O segmento $\overline{AB}$, medido com a unidade $\overline{CD} = u$, mede 4. Se dividirmos a unidade $\overline{CD}$ em 3 partes iguais e tomarmos para nova unidade o segmento $u' = \overline{CE}$, temos a considerar os seguintes dois aspectos do problema:



(fig 11)

1.º — A medida de $\overline{AB}$ tomando como unidade $u' = \overline{CE}$ é 12, o que está de acôrdo com o que dissemos no final do parágrafo 2 dêste capítulo.

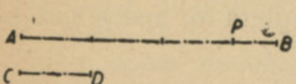
2.° — Quanto à medida de $\overline{AB}$ com a unidade $u = \overline{CD}$, tanto monta dizer que $\overline{AB}$ vale quatro unidades *u*, como dizer que $\overline{AB}$ vale 12 das terças partes $u' = \overline{CE}$ de *u*. Portanto, o resultado da medição com a unidade *u* tanto pode ser expresso pelo número 4 como pela razão [1] dos dois números 12 e 3, isto é, pelo cociente 12:3, ou $\frac{12}{3}$.

Em geral, se uma grandeza, medida com a unidade *u*, mede *m*, e sub-dividirmos *u* em *n* partes iguais, a medida da mesma grandeza, com a mesma unidade *u*, exprime-se pela razão dos dois números M e n, onde $M = m.n$ é o número de vezes que a nova unidade cabe na grandeza a medir. Aritmèticamente êste facto traduz-se na igualdade

$$m = (m.n):n \text{ ou } m = \frac{m.n}{n}.$$

6. — Um caso, freqüente, em que é necessária a sub-divisão

Só por acaso a unidade se contém um número exacto de vezes na grandeza a medir. O caso da fig. 11 é um caso de excepção; o mais freqüente é o caso da fig. 12 — aplicada a unidade sôbre $\overline{AB}$, sobeja uma porção, $\overline{PB}$, de grandeza, inferior à unidade. ¿Como fazer para *exprimir ainda numèricamente a medição de* $\overline{AB}$ *com a mesma unidade* $\overline{CD}$?



(fig. 12)

Dividamos $\overline{CD}$ num número de partes iguais suficiente para que cada uma delas caiba um número exacto

(1) — *Razão* de dois números é sinónimo de cociente dêsses dois números.

de vezes em $\overline{AB}$ — no caso da figura, dividimos $\overline{CD}$ em *três* partes iguais e a nova unidade coube *onze* vezes em $\overline{AB}$. Então:

1.º — A medida de $\overline{AB}$ *em relação à nova unidade* é 11.

2.º — ¿Que pode dizer-se da medida de $\overline{AB}$ *em relação à antiga unidade* $\overline{CD}$? Se quizermos seguir o caminho anterior — *princípio de economia* — dizemos que *essa medida é dada pela razão dos dois números 11 e 3.* Mas essa razão não existe em números inteiros, visto que 11 não é *divisível* por 3.

7. — O dilema Estamos em face dum dilema. Uma de duas:

a) Ou renunciamos a exprimir numèricamente a medição de $\overline{AB}$ com a unidade $\overline{CD}$, o que, além de incómodo, levanta novas questões — ¿se podemos exprimir a medida em relação à nova unidade e não em relação à antiga será porque aquela terá algum privilégio especial? qual? porquê?

b) Ou desejamos poder exprimir sempre a medida por um número — *princípio de extensão* — e então temos que reconhecer que o instrumento numérico até aqui conhecido — o conjunto dos números inteiros — é insuficiente para tal e há que completá-lo, aperfeiçoá-lo nesse sentido. Como?

8. — O aspecto aritmético da dificuldade Uma vez que se trata de números e de relações entre números, vejamos onde reside a dificuldade, do ponto de vista aritmético. Examinando os casos da fig. 11 e da fig. 12, verifica-se imediatamente que a dificuldade está apenas em que, no segundo, o número 11 não é divisível por 3—existia a razão 12:3 ou $\frac{12}{3}$ e não existe a razão 11:3 ou $\frac{11}{3}$. Em geral, sempre que, feita a sub-divisão da unidade em n partes iguais, uma dessas partes caiba m vezes na grandeza a medir, a dificuldade surge sempre que, e só quando, m não seja divisível por n, isto é, no *caso da impossibilidade da divisão* (cap. 1.º 23).

Se queremos resolver a dificuldade, devemos criar *um novo campo numérico,* de modo a reduzir essa impossibilidade.

9. — Os moldes da creação do novo campo numérico

Podemos resumir, do modo seguinte, as considerações acima feitas:

1.º — O *princípio de extensão* leva-nos a criar novos números por meio dos quais se possa exprimir a medida dos segmentos nos casos da fig. 12.

2.º — A análise da questão mostra que a dificuldade reside na impossibilidade da divisão (exacta) em números inteiros, quando o dividendo não é múltiplo do divisor.

A êstes dois pontos juntemos o

3.º — Se queremos obedecer ao *princípio de economia*, devemos fazer a construção de modo tal que:

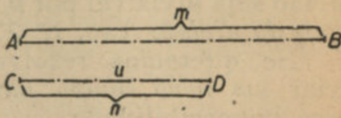
a) com os novos números sejam abrangidas tôdas as hipóteses de medição, quer estejam nos casos da fig. 11 ou da fig. 12;

b) os novos números se reduzam aos números inteiros sempre que o caso da medição a fazer seja análogo ao da fig. 11.

10. — O novo campo numérico

Satisfaz-se a êstes requesitos dando a seguinte *definição:*

Sejam, fig. 13, as duas grandezas $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, em cada uma das quais se contém um número exacto de vezes a grandeza da mesma espécie *u* — $\overline{AB}$ contém *m* vezes e $\overline{CD}$ contém *n* vezes a grandeza *u*. Diz-se, *por definição,* que a medida da grandeza $\overline{AB}$, tomando $\overline{CD}$ como unidade, é o *número* $\frac{m}{n}$, e escreve-se



(fig. 13)

1) $$\overline{AB} = \frac{m}{n} . \overline{CD}$$

quaisquer que sejam os números inteiros *m* e *n* (*n* não nulo); se *m* fôr divisível por *n* (caso da fig. 11), o número $\frac{m}{n}$ coíncide com o número inteiro que é cociente da divisão; se *m* não fôr divisível por *n* (caso da fig. 12), o número $\frac{m}{n}$ diz-se *fraccionário* — ao número *m* chama-se *numerador* e ao número *n* *denominador.*

O número $\frac{m}{n}$ diz-se, em qualquer hipótese, *racional.* Em particular, da igualdade 1) resulta que

2) $$\frac{n}{1} = n$$

visto que, se $\overline{AB} = n.\overline{CD}$, é também $\overline{AB} = \frac{n}{1} . \overline{CD}$, e

3) $$\frac{n}{n} = 1$$

porque as igualdades $\overline{AB} = \overline{AB}$ e $\overline{AB} = \frac{n}{n} . \overline{AB}$ são equivalentes.

11. — O campo racional

Antes de passar adiante, detenhamo-nos um pouco a reflectir sôbre a natureza dos novos números e sôbre a operação mental que levou à sua definição.

Encontramo-nos com um novo campo numérico — o conjunto dos números racionais, ou *campo racional* — que compreende o campo *inteiro* e mais o formado pelos números *fraccionários*; êstes são, de facto, os números novos.

As vantagens obtidas pela sua criação aparecem desde já como sendo as seguintes:

1.° — É possível exprimir *sempre* a medida dum segmento tomando outro como unidade; se, por exemplo, dividida a unidade em 5 partes iguais, cabem 2 dessas partes na grandeza a medir, diz-se que a medida é o *número* $\frac{2}{5}$.

2.° — A divisão de números inteiros m e n pode agora sempre exprimir-se simbòlicamente pelo número racional $\frac{m}{n}$ — o cociente de 2 por 5 é o número *racional fraccionário* $\frac{2}{5}$, o cociente de 10 por 5 é o número *racional inteiro* $\frac{10}{5} = 2$.

As propriedades dêste novo campo numérico serão vistas nos parágrafos seguintes. Por agora, insistamos em que *êle constitui uma generalização do campo inteiro.*

Vejamos qual é a operação mental por meio da qual essa generalização foi conseguida.

12. — A negação da negação

Fixemos a nossa atenção sôbre o aspecto aritmético que esta questão nos apresentou desde o início.

Temos dois números inteiros m e n ($n \neq 0$); êstes dois números estão entre si na seguinte relação aritmética — ou *m* é divisível por *n* ou não é; exprimiremos êste facto dizendo que entre *m* e *n existe a qualidade de m ser ou não divisível por n.*

a) Se a *qualidade* é de *m* ser divisível por *n*, os dois números definem, por meio da operação de divisão, um terceiro número — o seu cociente.

b) Se a *qualidade* é de *m* não ser divisível por *n*, a operação da divisão, combinada com ela, *nega* a existência do número cociente.

Pois muito bem, a essência da nossa definição (parágrafo 10, vêr!) consiste precisamente em *negar essa negação* e, dêsse modo, construir o novo número — o número fraccionário — que veio constituir a parte nova do campo generalizado.

Encontramo-nos assim de posse duma operação mental — *negação da negação* — criadora de generalizações. Havemos de encontrar mais vezes a aplicação desta poderosa operação mental. Como agora, o caminho da generalização compreenderá sempre as seguintes etapas:

1.ª — reconhecimento da existência duma dificuldade;
2.ª — determinação do ponto nevrálgico onde essa dificuldade reside — uma negação;
3.ª — negação dessa negação.

Uma generalização passa sempre, por conseqüência, pelo *ponto fraco* duma construção, e o modo de passagem é a *negação da negação;* tudo está em determinar e isolar, com cuidado, êsse *ponto fraco.*

O campo desta operação não se limita às ciências matemáticas; êle abrange não só as denominadas ciências da natureza como as ciências sociológicas; duma maneira geral, pode dizer-se que — *onde há evolução para um estado superior, é realizada a negação duma negação.*

2.º — Propriedades do Campo Racional

13. — O método de estudo Á definição de número racional, dada nos parágrafos antecedentes, segue-se o estudo das suas propriedades — igualdade, desigualdade, operações; só depois disso ficará completo o conhecimento do *campo racional.*

Para dar as definições necessárias, seremos guiados por dois *fios condutores de raciocínio,* dois *critérios:*

1.º — *A origem concreta* dos números racionais, isto é, o seu significado como expressão numérica de medição de segmentos.

2.º — *O princípio de economia* [cap. 1.º, parág. 28] que se traduz em dois aspectos — *analogia* de definições com as do campo natural; *manutenção* das leis formais das operações.

Os dois critérios completam-se, recorrendo-se ao segundo quando o primeiro forneça um caminho demasiado longo ou não forneça caminho nenhum para a definição a dar.

14. — Ordenação A ordenação do campo racional estabelece-se dando as definições de *igualdade* e *desigualdade.*

O primeiro critério do parág. 13 dá imediatamente as definições necessárias.

15. — Igualdade *Definição.* Dois números racionais $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ dizem-se iguais quando exprimem a medida do mesmo segmento, com a mesma unidade inicial.

Conseqüências. O número $s = \frac{p}{q}$ pode não ter os mesmos numerador e denominador que $r = \frac{m}{n}$, visto que cada uma das *n* partes iguais em que a unidade é dividida (v. fig. 13, pág. 49) pode, por sua vez, ser sub-dividida em *k* partes, sendo *k* qualquer. Feita essa nova sub-divisão, $\overline{CD}$ ficará contendo *n.k* e $\overline{AB}$ *m.k* das novas partes, de modo que a medida será expressa pelo número racional $\frac{m.k}{n.k}$ que, em virtude da definição, deve ser considerado como igual a $\frac{m}{n}$.

Conclue-se daqui que — *dado um número racional* $r = \frac{m}{n}$, *todo o número racional* $s = \frac{p}{q}$ onde $p = m.k$, $q = n.k$, *(k qualquer)*, é *igual* a *r*.

Façamos os produtos *mq* e *pn*; tem-se $mq = mnk$ e $pn = mnk$, donde $mq = pn$; a definição de igualdade pode pôr-se, portanto, assim:

$$4) \qquad \frac{m}{n} = \frac{p}{q} \longleftrightarrow m.q = p.n$$

devendo entender-se com o sinal $\longleftrightarrow$ que as relações de dependência entre as duas igualdades se devem entender nos dois sentidos; isto é, a igualdade $m.q = p.n$ arrasta $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$, reciprocamente, $\frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ arrasta $m.q = p.n$.

Êste facto pode traduzir-se ainda pelo seguinte enunciado — *não se altera um número racional quando se multiplica* (ou divide) *o seu numerador e o seu denominador pelo mesmo número natural.*

Redução ao mesmo denominador. Esta propriedade permite efectuar sempre a redução de dois números racionais ao mesmo denominador. Dados $r = \frac{m}{n}$ e $s = \frac{p}{q}$ podemos escrever $r = \frac{m.q}{n.q}$ e $s = \frac{p.n}{q.n}$ (1).

(1) — Na prática, efectua-se a redução ao menor denominador comum que é o menor múltiplo comum dos dois denominadores. Isso faz parte da *técnica operacional* que não é o objectivo dêste livro.

16. — Desigualdade *Definição.* De dois números racionais *r* e *s*, diz-se maior aquele que, *com a mesma unidade,* mede um segmento maior.

Conseqüências. 1.ª — Se os dois números teem o mesmo *denominador,* é maior (menor) o que tiver maior (menor) numerador [1].

2.ª — Se os dois números teem o mesmo *numerador* é maior (menor) o que tiver menor (maior) *denominador* [2].

O leitor verifica fàcilmente estas duas propriedades, fazendo as figuras convenientes, com base na fig. 13 de pág. 49.

3.ª — Se os dois números não teem nem o mesmo numerador, nem o mesmo denominador, reduzem-se ao mesmo denominador e comparam-se em seguida: dados $r = \frac{m}{n}$, $s = \frac{p}{q}$, tem-se $r = \frac{m.q}{n.q}$, $s = \frac{n.p}{n.q}$ donde

$$5) \qquad \frac{m}{n} > \frac{p}{q} \longleftrightarrow m.q > n.p\,.$$

17. — A adição *Definição.* A definição é dada ainda segundo o primeiro critério do parágrafo 13 — *dados dois números racionais* r *e* s *medindo, com a mesma unidade, dois segmentos, chama-se soma* r + s *ao número racional que mede, ainda com a mesma unidade, o segmento soma dos dois.*

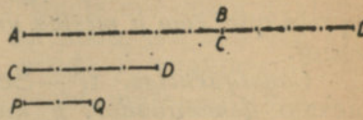
Para esta definição ficar completa, tem que defi-

---

(1) — Estão aqui dois enunciados — um com as palavras *maior, maior,* outro com as palavras *menor, menor.*

(2) — Aqui estão também dois enunciados — um com as palavras *maior, menor,* outro com as palavras *menor, maior.*

nir-se soma de dois segmentos. Sejam (fig. 14) os dois segmentos de recta $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$; chama-se *soma* dêles ao segmento $\overline{AD}$ que se obtém transportando $\overline{CD}$ para a recta sôbre a qual existe $\overline{AB}$, e fazendo lá coíncidir a origem C de $\overline{CD}$ com a extremidade B de $\overline{AB}$.



(fig. 14)

Conseqüências. 1.ª—Se os dois números dados teem o mesmo denominador, $r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{n}$, mostra a fig. 14 que o segmento $\overline{AD}$ é medido pelo número $\frac{m+p}{n}$, logo

$$6) \qquad \frac{m}{n}+\frac{p}{n}=\frac{m+p}{n}.$$

2.ª — Se os dois números não teem o mesmo denominador, podem reduzir-se prèviamente ao mesmo denominador (parágrafo 15); tem-se então, dados $r=\frac{m}{n}$, $s=\frac{p}{q}$, que $r=\frac{m.q}{n.q}$, $s=\frac{n.p}{n.q}$, donde $r+s=\frac{mq+np}{nq}$ logo

$$7) \qquad \frac{m}{n}+\frac{p}{q}=\frac{m.q+n.p}{n.q}.$$

3.ª — Verifica-se que se manteem tôdas as propriedades da adição no campo natural [cap. 1.º, parág. 18].

18. — A subtracção *Definição.* Dá-se conforme o segundo critério de 13 — *analogia* com o campo natural. *Dados dois números* $r=\frac{m}{n}$ e $s=\frac{p}{q}$, *chama-se diferença* r - s *dêles a um terceiro número racional* d *tal que* $s+d=r$.

Conseqüências. 1.ª — Satisfaz à definição o número

$d = \frac{mq - np}{nq}$; efectivamente, em virtude de **17**, 6) e de propriedades já conhecidas, tem-se $d + s = \frac{m.q - n.p}{n.q} + \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq} + \frac{n.p}{n.q} = \frac{mq - np + np}{nq} = \frac{mq}{nq} = \frac{m}{n} = r.$

Pode, portanto, escrever-se

8) $$\frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}.$$

2.ª — Verificam-se tôdas as propriedades da subtracção, no campo natural [cap. 1.º, parágrafo **22**].

3.ª — A operação, como no campo natural, tem um caso de impossibilidade — aquêle em que o aditivo é menor que o subtrativo.

19. — A multiplicação *Definição*. a) *Multiplicador inteiro* — segundo critério de **13**: *analogia*:

$$n.\frac{p}{q} = \overbrace{\frac{p}{q} + \frac{p}{q} + \ldots + \frac{p}{q}}^{(n)}$$ [cap. 1.º, parágrafo **19**, 4)]

donde, por **17**, 6),

9) $$n.\frac{p}{q} = \frac{n.p}{q}.$$

b) Multiplicador fraccionário, multiplicando inteiro — segundo critério de **13**: manutenção da comutatividade do produto:

10) $$\frac{p}{q}.n = n.\frac{p}{q} = \frac{p.n}{q}.$$

c) Caso geral — extensão de 10):

11) $$\frac{p}{q}.\frac{r}{s} = \frac{p.\frac{r}{s}}{q} = \frac{\frac{p.r}{s}}{q}.$$

Conseqüências. Manteem-se tôdas as propriedades da operação no campo inteiro [cap. 1.º, parágrafo **19**].

20. — A divisão 13: *analogia* *Definição.* a) *Divisor inteiro* — segundo critério de

12) $\frac{p}{q}:n = x \leftarrow n.x = \frac{p}{q}$ [cap. 1.º, parágrafo **23**, 7)].

Á igualdade de condição, $n.x = \frac{p}{q}$, satisfaz o número $x = \frac{p}{q.n}$ visto que [10)] $\frac{p}{q.n}.n = \frac{p.n}{q.n} = \frac{p}{q}$ e êste número é único, pela unicidade do produto.

Tem-se portanto

13) $$\frac{p}{q}:n = \frac{p}{q.n}$$

logo, *as operações de divisão por um inteiro e multiplicação do denominador por êsse inteiro equivalem-se.*

De 13) conclue-se, em particular, que, dados os inteiros *a* e *b*, se tem $a:b = \frac{a}{1}:b = \frac{a}{b}$, portanto tem valor, em tôda a sua generalidade, a igualdade

14) $$a:b = \frac{a}{b}$$

excluído apenas $b = 0$, pois nesse caso a operação de divisão não tem significado. Em vista disto, consideraremos, daqui em diante, como equivalentes os sinais de divisão (:) e de fracção (—).

Destas considerações resulta imediatamente que o segundo membro de 11) pode escrever-se

$$\frac{\frac{p.r}{s}}{q} = \frac{p.r}{s}:q = \frac{p.r}{q.s} \quad \text{donde}$$

15) $$\frac{p}{q}.\frac{r}{s} = \frac{p.r}{s.q}$$

igualdade que se traduz habitualmente dizendo que *se efectua o produto de dois números racionais fazendo,* *têrmo a têrmo, o produto dos numeradores e denominadores.*

b) Divisor fraccionário — segundo critério do parágrafo 13 — *analogia*

$$16) \qquad \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = x \leftarrow x . \frac{r}{s} = \frac{p}{q}.$$

Á igualdade de condição satisfaz o número $x = \frac{p.s}{q.r}$, visto que $\frac{p.s}{q.r} . \frac{r}{s} = \frac{p.s.r}{q.r.s} = \frac{p}{q}$ e tal número é único, em virtude da unicidade do produto; tem-se portanto

$$17) \qquad \frac{p}{q} : \frac{r}{s} = \frac{p.s}{q.r} = \frac{p}{q} . \frac{s}{r}.$$

Conseqüências. 1.ª — A operação da divisão é sempre possível, excluído, como sempre, o caso do divisor ser nulo.

2.ª — Manteem-se tôdas as propriedades da divisão no campo inteiro [cap. 1.º, parágrafo 23]

21. — A potenciação de expoente inteiro

Definição — segundo critério do parágrafo 13 — *analogia.*

$$18) \qquad \left(\frac{p}{q}\right)^n = \overbrace{\frac{p}{q} . \frac{p}{q} . \dots . \frac{p}{q}}^{(n)} \qquad \text{[cap. 1.º, 20, 5)].}$$

Conseqüências. 1.ª — Da definição e de 20, 15) resulta imediatamente

$$19) \qquad \left(\frac{p}{q}\right)^n = \frac{p^n}{q^n}.$$

2.ª — Manteem-se tôdas as propriedades do campo inteiro [cap. 1.º, 20, e final de 23].

22.—A radiciação *Definição.* — segundo critério de **13**: *analogia.*

$$20)\qquad \sqrt[n]{\frac{p}{q}} = x \leftarrow x^n = \frac{p}{q} \text{ [cap. 1.º, 24, 9)]}$$

Conseqüências. 1.ª — Da definição e de **21**, 19) resulta que, quando existem $\sqrt[n]{p}$ e $\sqrt[n]{q}$, é $x = \frac{\sqrt[n]{p}}{\sqrt[n]{q}}$.

2.ª — O caso mais geral é o da impossibilidade da operação, como no campo inteiro.

3.ª — Manteem-se as propriedades do campo inteiro [cap. 1.º, **24**]; a propriedade monotónica amplia-se: se $r = \frac{p}{q} > 1$ é verdade que de $n > m$ resulta $\sqrt[n]{r} < \sqrt[m]{r}$ mas se $r < 1$ passa-se o contrário; por exemplo, tem-se $\sqrt{\frac{16}{81}} = \frac{4}{9}$, $\sqrt[4]{\frac{16}{81}} = \frac{2}{3}$ e $\frac{2}{3} > \frac{4}{9}$.

23.—A potenciação de expoente fraccionário *Definição* — segundo critério de **13**: — *manutenção das leis formais.*

Seja a operação $r^{\frac{p}{q}}$ a definir. Qualquer que seja o valor que $x = r^{\frac{p}{q}}$ venha a ter, queremos que sôbre êste símbolo se opere com as leis formais habituais; deve ser, portanto, em particular, $x^q = \left(r^{\frac{p}{q}}\right)^q = r^{\frac{p}{q}\cdot q}$ [cap. 1.º, **20**, 5.ª prop.]; ora $\frac{p}{q}\cdot q = \frac{p\cdot q}{q} = p$, logo $x^q = r^p$ donde, por definição de raiz [cap. 1.º, 24, 9)] $x = \sqrt[q]{r^p}$; a nova operação deve ser, portanto, definida do modo seguinte:

21) $$r^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{r^p}$$

Conseqüências. As propriedades desta operação deduzem-se imediatamente das da radiciação.

24.—A logaritmação Tratamento análogo ao do campo inteiro, com as mesmas propriedades e análogos casos de impossibilidade.

25. — Os dois campos, inteiro e racional, teem as mesmas propriedades? No estudo de tôdas as propriedades anteriores, foi dito sistemàticamente — manteem-se as propriedades do campo inteiro. Ocorre, portanto, preguntar — ¿os dois campos numéricos teem exactamente as mesmas propriedades? Não é assim. Quando se diz — manteem-se as propriedades — não se exclue o caso de aparecerem propriedades novas que, não contrariando as anteriores, as ampliem. É o que na realidade se dá. Por exemplo, no campo inteiro, todo o número não nulo ou é igual a 1 ou maior que 1, de modo que, se n não é nulo, se pode afirmar que $a.n \geq a$.

Mas no campo racional há números menores que 1 e não nulos — todos os $\frac{p}{q}$ com $p < q$ — logo se n é racional pode acontecer que seja $a.n < a$. A propriedade anterior, que se traduzia lá pela relação $a.n \geq a$, é agora aqui ampliada do modo seguinte

22) $$a.n \gtreqless a \leftarrow n \gtreqless 1.$$

No capítulo seguinte temos que fazer, com demora e cuidado, o estudo de algumas propriedades do campo racional, estudo êsse que não fazemos já porque nenhuma das considerações até agora feitas impôe a sua necessidade. Por agora, limitemo-nos a apresentar, sem justificação por ser um pouco longa, os resultados da variação da potência, no caso mais geral que até agora conhecemos — base e expoente racionais: r^s.

a) variação em relação à base — a potência cresce com a base.

b) variação em relação ao expoente — a potência cresce com o expoente se a base é maior que 1 e decresce quando o expoente aumenta se a base é menor que 1.

CAPÍTULO III

Crítica do problema da medida

1.º — Crítica

1. — Posição do problema No parágrafo 10 do cap. 2.º fez-se a construção do campo numérico racional com base na igualdade $\overline{AB} = \frac{m}{n} . \overline{CD}$ a qual exprime que a medida do segmento $\overline{AB}$, tomando como unidade o segmento $\overline{CD}$, é o número racional $\frac{m}{n}$.

Essa construção assenta, como lá se viu, na seguinte operação: divide-se a unidade $\overline{CD}$ em tantas partes iguais quantas as necessárias para que cada uma delas — parte alíquota de $\overline{CD}$ — caiba um número exacto de vezes em $\overline{AB}$, isto é, seja também parte alíquota de $\overline{AB}$.

O problema da *crítica* põe-se dêste modo — *¿existe sempre uma parte alíquota de* $\overline{CD}$ *que seja parte alíquota de* $\overline{AB}$?

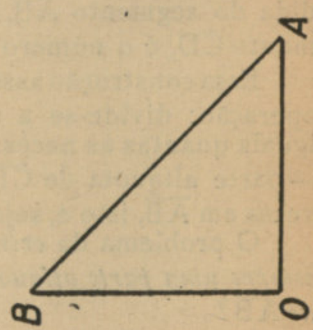
2. — Os dois pontos de vista O problema pode ser encarado do ponto de vista prático e do ponto de vista teórico.

Do ponto de vista prático a resposta é imediata —

sim. De facto, quando se aumenta o número de partes em que se divide $\overline{CD}$, o comprimento de cada uma delas diminui e chega uma altura em que a precisão limitada dos instrumentos de divisão e de medida não nos permite ir além de um certo comprimento mínimo — a parte alíquota de $\overline{CD}$ com êsse comprimento mínimo será também evidentemente parte alíquota de $\overline{AB}$. A parte alíquota comum existe, portanto, sempre; se não tiver sido encontrada antes, é o segmento de comprimento mínimo que pràticamente se pode obter. Assim, êste resultado impõe-se à nossa intuïção. ¿Impôr-se-á êle com a mesma fôrça à nossa razão?

3. — Um caso embaraçoso

Consideremos o seguinte caso de medição de segmentos. Seja (fig. 15) o triângulo rectângulo BOA isósceles, isto é, em que $\overline{OA} = \overline{OB}$, e procuremos, para êste triângulo, resolver o seguinte problema — *achar a medida da hipotenusa $\overline{AB}$ tomando como unidade o catecto $\overline{OA}$*.

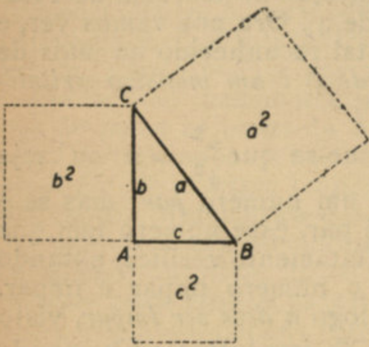


(*fig. 15*)

Se, como a intuição manda, essa medida existe, há um número racional $r = \frac{m}{n}$ *irredutível* (se o não fôsse, tornávamo-lo irredutível, dividindo ambos os têrmos pelo maior divisor comum) tal que [cap. 2.º, parág. 10, 1)]

$$1) \qquad \overline{AB} = \frac{m}{n} \cdot \overline{OA}.$$

Ora, nós vamos ver que esta igualdade é incompatível com outra igualdade matemática. Sabe-se, com efeito, desde os princípios da Geometria, que em todo o triângulo rectângulo ACB de lados $\overline{CB} = a$ (hipotenusa) e $\overline{AC} = b$, $\overline{AB} = c$ (catectos) se verifica a relação *(Teorema de Pitágoras)*:



(fig. 16)

$$2) \qquad a^2 = b^2 + c^2$$

a qual exprime, geomètricamente (fig. 16) que a área do quadrado construido sôbre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos quadrados construidos sôbre os catectos. [1]

Apliquemos esta propriedade ao nosso triângulo da fig. 15; têm os

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$$

e como, por hipótese, $\overline{OA} = \overline{OB}$, vem $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}^2$ ou seja

$$3) \qquad \overline{AB}^2 = 2 . \overline{OA}^2 .$$

Por outro lado, elevando ao quadrado ambos os membros da igualdade 1), vem $\overline{AB}^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 . \overline{OA}^2$ e com-

---

[1] — A demonstração dêste teorema célebre encontra-se em qualquer compêndio de Geometria. O leitor pode ver um apanhado histórico das várias demonstrações em E. Fourrey, *Curiositées géometriques,* cap. 2.º

parando esta igualdade com 3) tem-se, em virtude da *unicidade* do produto,

$$4) \qquad \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Assim, a existência da medida de $\overline{AB}$, tomando $\overline{OA}$ como unidade, e a aceitação do teorema de Pitágoras conduzem à igualdade 4). Ora nós vamos ver, e êste é um facto fundamental reconhecido há mais de 25 séculos, que *a igualdade* 4) *é um monstro aritmético.*

Com efeito, dela conclue-se que $\frac{m^2}{n^2} = 2$ ou seja $m^2 = 2n^2$ isto é, que m^2 é um número *par;* mas se o quadrado de um número é par, êsse número tem que ser par, como o leitor imediatamente verifica, notando que o quadrado de todo o número ímpar é ímpar. Deve ser portanto m par, logo *n deve ser ímpar*, visto termos suposto a fracção $\frac{m}{n}$ irredutível. Chamando k à metade de m, podemos escrever $m = 2k$, onde k é um número inteiro, e introduzindo êste valor de m na igualdade $m^2 = 2n^2$ vem $(2k)^2 = 2n^2$, donde $4k^2 = 2n^2$, isto é, $n^2 = 2k^2$. Mas daqui conclue-se que n^2 é par, logo, pela mesma razão invocada acima, que n é *par.* Portanto *n deve ser simultâneamente par e ímpar* e isto é uma *monstruosidade aritmética.*

4. — A encruzilhada Estamos chegados a uma encruzilhada onde há, aparentemente, apenas os seguintes caminhos de saída:

1.º — Abandonar a igualdade 1), isto é, abandonar a possibilidade de exprimir numèricamente, *sempre,* a medida dum segmento.

2.º — Abandonar o teorema de Pitágoras.

3.º — Conservar a igualdade 1) e o teorema de Pitágoras, mas abandonar a exigência da sua compatibilidade lógica.

4.º — Conservar tudo, mas admitir que um mesmo número possa ser, simultâneamente, par e ímpar.

Dêstes caminhos, o último deve ser regeitado imediatamente. A paridade de um número é uma propriedade que assenta ùnicamente sôbre o facto de êle ser ou não divisível por 2; aceitar que um número possa ser, ao mesmo tempo, par e ímpar obrigaria a pôr de parte as bases da Aritmética.

Os caminhos primeiro e segundo vão contra o *princípio de extensão* [cap. 1.º, parágrafo 10]. A tendência em Matemática é *adquirir, completar, estender, generalizar*; em Matemática só se *abandona* quando se reconhece um vício de raciocínio. Ora a igualdade 1) deu as suas provas na criação do campo racional e seria, portanto, penoso renunciar à sua generalidade; o teorema de Pitágoras é uma verdade geométrica que se pode estabelecer independentemente do facto de dois segmentos terem ou não medida comum.

Resta o terceiro caminho...

5. — Princípio de compatibilidade lógica

Êsse, porém, é o último que nos resolveríamos a seguir. ¿Não é evidente que a razão humana exige, nas suas construções, harmonia, acôrdo?

¿Como poderemos resignar-nos a admitir a coexistência no nosso raciocínio de duas aquisições que se contradizem?

Tôda a teoria matemática é uma construção progressiva feita à custa de conceitos — os sêres de que trata a teoria — e de afirmações feitas sôbre êsses conceitos. Em estado nenhum da construção se pode tolerar desacôrdo. — Ela é dominada por, entre outros, um *princípio geral de compatibilidade lógica,* dos sêres e das afirmações, princípio êsse que é, na Matemática, a expressão de um outro mais geral que domina tôda a construção científica — o princípio do *acôrdo da razão consigo própria*.

6. — Um novo caminho

Regeitados todos os caminhos indicados, por insuficientes, impõe-se um novo esfôrço criador, um arranco para um estado mais elevado do conhecimento — *conservar tudo:* a igualdade 1), o teorema de Pitágoras e a exigência de compatibilidade lógica, e, para conseguir essa conservação universal, *criar novos números*, mais gerais que os racionais, números êsses que confiram à igualdade 1) uma generalidade que a faça abraçar os casos do cap. II, e mais os casos análogos àquele que considerámos agora no parágrafo 3 dêste capítulo.

Encontramo-nos aqui numa situação análoga àquela em que nos encontrámos quando, verificada a insuficiência dos números inteiros para exprimir a medida, fomos forçados à criação dos números racionais.

Repare-se, no entanto, bem: a situação é análoga, mas o aguilhão que nos leva à criação nova é diferente: — *lá, era a necessidade prática (da medição), aqui, é a exigência da compatibilidade lógica (de duas aquisições).*

No desenvolvimento das ciências matemáticas, encontramos a cada passo, conjugados, êstes dois *motivos de progredir,* dois gumes duma mesma arma — *actividade racional* e *actividade experimental; teoria* e *experiência.*

7. — O método a seguir

Vamos usar, na criação nova que se impõe, o mesmo método que seguimos na do campo racional e que sintetizámos no parágrafo 12 do cap. II:

1.º — isolamento da dificuldade;

2.º — determinação do seu carácter aritmético, isto é, da *negação* em que ela se traduz;

3.º — negação da negação.

É o que vamos fazer nos parágrafos seguintes.

2.º — Construção

8. — A insuficiência da aritmética

Um segmento de recta é uma grandeza geométrica; a comparação de dois segmentos de recta é uma operação do *campo geométrico*; a expressão numérica da medição significa a tradução dessa operação geométrica por meio de um *instrumento* do campo numérico. Se, como vimos no parágrafo 3, essa tradução se não pode fazer em todos os casos, quere isso dizer que o instrumento não é suficientemente perfeito.

Antes de prosseguir, detenhamo-nos ainda na seguinte questão — ¿ casos como o apontado no parágrafo 3, terão uma generalidade bastante para que valha a pena metermo-nos no caminho, certamente trabalhoso, dum novo aperfeiçoamento do campo numérico? ¿ ou tratar-se-à apenas de uma excepção? Não; verifica-se fàcilmente que há uma infinidade de casos análogos ao que demos como exemplo. Êste é apenas o mais simples, o mais antigo e, por isso, o mais célebre. Mais; pode afirmar-se que, na medida, o que é mais geral é dar-se o caso do parágrafo 3.

Sempre que dois segmentos de recta estão nêsse caso, *diz-se* que êles são *incomensuráveis* (o que quere dizer que *não teem medida comum).* A afirmação feita equivale, portanto, a esta: — na medida de segmentos, o caso mais geral é o da *incomensurabilidade.*

Trata-se, como se vê, duma *insuficiência geral* do campo numérico racional para traduzir as relações geométricas, e, se vamos meter ombros à eliminação dessa insuficiência, temos que começar por estudar cuidadosamente as propriedades do campo racional e as da recta, comparando-as.

9.—Os conjuntos *(R)* e *(P)*

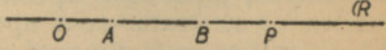
O campo numérico racional, ou seja o conjunto dos números racionais, será daqui por diante designado assim—*conjunto (R).* O conjunto dos pontos da recta será designado por *conjunto (P).*

Uma vez que vamos estudar as propriedades comparadas dêstes dois conjuntos, vamos começar por ver de que maneira podem êles pôr-se em correspondência e de que natureza é essa correspondência.

10.—A correspondência *(R)* $\longleftrightarrow$ *(P)*

Seja (fig. 17) uma recta (R sôbre a qual se tomou um ponto O, arbitrário, como *origem,* e um segmento $\overline{OA}$ como *unidade.*

Seja o número racional $r = \frac{m}{n}$; dividamos $\overline{OA}$ em *n* partes iguais e a partir de O, para a direita, marquemos *m* dessas partes — obtemos um ponto



(fig. 17)

B; o número *r* é a medida do segmento $\overline{OB}$ tomando $\overline{OA}$ como unidade [cap. II, parágrafo **10**].

Esta operação pode efectuar-se sempre, qualquer que seja $r = \frac{m}{n}$, e o ponto B é único, logo a *correspondência (R) → (P) é completa e unívoca.* [cap. 1.º, parágrafo 7].

Vejamos agora a correspondência recíproca — ¿como pode ela estabelecer-se? Seja P um ponto qualquer da recta; procuremos a medida de $\overline{OP}$ com a unidade $\overline{OA}$; se essa medida existir e fôr o número racional $s = \frac{p}{q}$, o qual é então único, façamos corresponder a P o número s. Mas o número s pode não existir; basta, para isso, que $\overline{OP}$ seja incomensurável com $\overline{OA}$ [parágrafo 3, dêste capítulo]; logo, a *correspondência (P) → (R) não é completa.*

Em resumo, podemos afirmar que a *correspondência (R) ←→ (P) não é biunívoca* [cap. 1.º, parágrafos 7 e 8], e neste enunciado simplicíssimo se traduz a insuficiência do instrumento numérico, revelada na existência das incomensurabilidades.

¿Que há a fazer agora? aprofundar o estudo da questão, procurando determinar *qual é o facto que nega a biunivocidade;* a criação do novo campo estará na *negação dêsse facto.*

11. — Em demanda da negação

Vamos passar em revista, uma a uma, as propriedades características do conjunto *(P)*, isto é, da recta.

Essas propriedades características são: *infinidade, ordenação, densidade, continuïdade.* De cada vez, definiremos a propriedade correspondente no conjunto *(R)* e procuraremos se ela se verifica sempre nêle ou não. Onde houver uma que se não verifique, aí estará a negação da biunivocidade.

12. — Infinidade O conjunto *(P)* é infinito, como sabemos (cap. 1.º, parágrafo 13). O conjunto *(R)* é também infinito, pois que abrange o conjunto dos números naturais que já o é.

13. — Ordenação Entre os pontos da recta pode estabelecer-se, com tôda a simplicidade, um *critério de ordenação* — dados dois pontos A e B, diz-se que A *precede* B se estiver à sua *esquerda*.

Êste critério de ordenação é *transitivo*, querendo com isto dizer-se que se A precede B e B precede P, o ponto A precede P (fig. 17).

Todo o conjunto em que haja um *critério de ordenação, transitivo*, diz-se um *conjunto ordenado* — o conjunto *(P)* é, por conseqüência, ordenado.

Ora, o mesmo se pode dizer do conjunto *(R)*; como critério de ordenação podemos tomar êste — de dois números racionais r e s digo que r *precede* s se fôr $r<s$. E, como sabemos [cap. II, parágrafo 16] se $r<s$ e $s<t$ é $r<t$.

14. — Densidade No parág. 13 do cap. 1.º, ao procurar resposta à pregunta — ¿existem conjuntos infinitos além do dos números inteiros? — vimos que a suposição de que o ponto geométrico é uma figura sem dimensões leva imediatamente a admitir que entre dois pontos quaisquer A e B da recta, *existe sempre uma infinidade de pontos*, e isto por mais próximos que A e B estejam um do outro. [1]

---

[1] — Nos parágrafos 12 e 15 do cap. IV, veremos que a suposição contrária, isto é, de que o ponto geométrico é uma figura com espessura, leva a dificuldades tais que não pode manter-se.

Todo o conjunto em que isto se dê, isto é, tal que entre dois dos seus elementos *quaisquer* exista uma infinidade de elementos do mesmo conjunto, diz-se um *conjunto denso;* logo, *o conjunto (P) é denso.*

Não é denso o conjunto dos números inteiros, como o leitor imediatamente reconhece, mas é-o, como vamos ver, o conjunto *(R).*

Sejam, com efeito, r e s dois números racionais quaisquer, arbitràriamente próximos um do outro, e suponhamos $r < s$; seja $d = s - r$. Se somarmos a r um número $d' < d$, obtemos um número r' maior que r mas menor que s; portanto, a existência de números racionais r' entre r e s está dependente apenas da existência de números racionais d' menores que d, e os r' serão tantos quantos fôrem os d'.

Ora, nós vamos ver que *há uma infinidade de números racionais* $d' < d$. Com efeito, d, por ser a diferença de dois números racionais, é [(cap. II, parág. 18, 8)] um número racional, logo é $d = \frac{m}{n}$ com m e n inteiros; por outro lado, todo o número racional da forma $\frac{m}{n+p}$ com p inteiro é [cap. II, parág. 16] menor que d.

Logo, todos os números $\frac{m}{n+1}, \frac{m}{n+2}, \ldots \frac{m}{n+p}, \ldots$ são números $d' < d$. ¿E quantos são êstes? Uma infinidade! uma vez que admitimos [cap. I.º, parág. 11] que a sucessão dos números inteiros é *ilimitada.* Conclusão: *o conjunto (R) é denso* e esta propriedade depende apenas do carácter *infinito* do conjunto dos números naturais.

Ainda não encontrámos a negação da biunivocidade!

15. — Continuïdade O problema da continuïdade é dos mais importantes da Ciência e dos que mais teem sido estudados e debatidos em todos os tempos.

Todos nós temos a noção intuítiva da continuïdade como a de uma *variação que se faz por gradações insensíveis.* Quer seja o movimento de um automóvel sôbre uma estrada, oposto ao movimento que teria *sôbre a estrada* um cangurú; quer seja a variação de comprimento de uma barra metálica com a temperatura, oposta à variação que se obteria *cortando* ou *soldando* bocados à barra, em qualquer fenómeno a respeito do qual falemos de *continuïdade,* entendemos sempre variação por graus insensíveis.

Mas, na continuïdade há mais alguma coisa que isso: *naquilo que para nós é a imagem ideal da continuïdade — a linha recta — há mais do que simples variação por gradações insensíveis.* A recta ultrapassa, em riqueza interior de estrutura, êsse simples variar gradualmente, sem saltos, sem, como habitualmente se diz, soluções de continuïdade.

Se fôsse só isso, a recta seria apenas um conjunto *denso* de pontos, visto que, pelo facto de o conjunto *(P)* ser denso, dum ponto a outro se passa sempre por uma infinidade de pontos, portanto por *gradações insensíveis.*

Ora, como vamos ver, *há na recta mais do que a simples densidade.* Por falta do reconhecimento dêsse facto, surgiram na história da Ciência problemas que durante séculos se consideraram insolúveis.

Não procuremos construções complicadas para *explicar a continuïdade;* alguns filósofos, e dos maiores, falaram e escreveram inùtilmente sôbre explicações da continuïdade [1]. Fixemo-nos nesta ideia—*para nós, a imagem ideal da continuïdade é a linha recta;* contentemo-nos, para perceber a continuïdade, com o grau de clareza que tivermos da noção de linha recta; pro-

---

[1] — No vol. 2.º veremos alguma coisa sôbre a importância histórica e filosófica dêste problema.

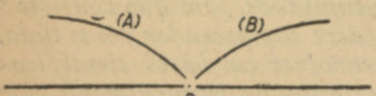
curemos antes um critério distintivo, tão simples quanto possível, que nos permita, em face dum conjunto qualquer, verificar se êle tem ou não a mesma estrutura da recta e, portanto, se se pode também atribuir-lhe ou não continuïdade. O que vamos procurar é uma espécie de *reagente* que nos mostre se num dado conjunto existe ou não essa propriedade, assim como o químico determina se num dado soluto existe ou não certo elemento. O reagente pode não dar uma *explicação* do elemento procurado, mas nem por isso êle será menos útil ao químico no estudo do soluto que tiver entre mãos.

É exactamente a situação em que aqui nos encontramos. Tudo está na procura dum bom *reagente.*

Não se julgue que tal procura foi fácil. Discute-se continuïdade há mais de vinte e cinco séculos e o bom reagente ainda não tem setenta anos!

16 — O conceito de corte

Seja (fig. 18) uma recta e um ponto P sôbre ela; é evidente que, em relação ao ponto P, todos os pontos da recta se repartem em duas classes: a classe (A), dos pontos que estão à esquerda de P e a classe (B) dos pontos que estão à direita de P. O próprio ponto P, que produz a repartição, pode ser colocado indiferentemente na classe (A) ou na classe (B).



(fig. 18)

Sempre que, numa recta, se tem uma repartição dos seus pontos em duas classes (A) e (B) satisfazendo às duas condições: — 1.ª nenhum ponto escapa à repartição; 2.ª todo o ponto da classe (A) está à esquerda de todo o ponto da classe *(B)* — diz-se que se tem um *corte,* do qual *(A)* e *(B)* são as classes constitutivas; o corte constituído pelas duas classes *(A)* e *(B)* representa-se abreviadamente por *(A, B).*

Pelo que vimos acima, podemos afirmar que *todo o ponto P da recta produz nela um corte.*

E a afirmação recíproca, ¿será também verdadeira? Por outras palavras, sempre que se considere na recta um corte — repartição em duas classes nas condições enunciadas — ¿haverá sempre um ponto *P* que produza o corte, isto é, que separe as duas classes?

Eis onde está, como vamos ver, o nó da questão da continuïdade.

17. — Ricardo Dedekind

Em 1872, o matemático alemão *Ricardo Dedekind* publicou uma obra intitulada *Continuïdade e números irracionais,* dedicada ao estudo dêste problema. Nessa obra encontra-se, pela primeira vez, um tratamento rigoroso do conceito de continuïdade e a resposta à pregunta que formulámos. Vejamos como Dedekind põe a questão: «... *nós atribuímos à recta a qualidade de ser completa, sem lacunas, ou seja, contínua. Mas esta continuïdade ¿em que consiste? A resposta a esta pregunta deve compreender em si tudo, e sòmente ela permitirá desenvolver em bases científicas o estudo de* todos *os campos contínuos. Naturalmente, não se consegue nada quando, para explicar a continuïdade, se fala dum modo vago de uma conexão ininterrupta nas suas partes mais pequenas; o que se procura é formular uma propriedade característica e precisa da continuïdade, a qual possa servir de base a deduções verdadeiras e próprias.*

Pensei nisso sem resultado por muito tempo, mas, finalmente, achei o que procurava. O meu resultado será talvez julgado por várias pessoas de vários modos, mas *a maior parte, creio, será concorde em considerá-lo bastante banal. Consiste êle na consideração seguinte.*

Verificou-se que todo o ponto da recta determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal natureza que todo o ponto de uma delas está à esquerda de todo o ponto da outra. Ora eu vejo a essência da continuïdade na inversão desta propriedade, *e, portanto, no princípio seguinte: «se uma repartição de todos os pontos da recta em duas classes é de tal natureza que todo o ponto de uma das classes está à esquerda de todo o ponto da outra, então existe um e um só ponto pelo qual é produzida esta repartição de todos os pontos em duas classes, ou esta decomposição da recta em duas partes».*

Como já disse, creio não errar admitindo que tôda a gente reconhecerá imediatamente a exactidão do princípio enunciado. A maior parte dos meus leitores terá uma grande desilusão ao aprender que é esta banalidade que deve revelar o mistério da continuïdade. A êste propósito observo o que segue. Que cada um ache o princípio enunciado tão evidente e tão concordante com a sua própria representação da recta, isso satisfaz-me ao máximo grau, porque nem a mim nem a ninguém é possível dar dêste princípio uma demonstração qualquer. A propriedade da recta expressa por êste princípio não é mais que um axioma, e é sob a forma dêste axioma que nós pensamos a continuïdade da recta, que reconhecemos à recta a sua continuïdade».

18. — O bom reagente da continuïdade

Em resumo, Ricardo Dedekind caracteriza a continuïdade da recta por esta afirmação, que daqui em diante designaremos por axioma ou postulado da continuïdade de Dedekind — *todo o corte da recta é produzido por* *um ponto dela, isto é, qualquer que seja o corte (A, B) existe sempre um ponto da recta que separa as duas classes (A) e (B).* (1)

Êste é, de facto, como a experiência demonstrou, o bom reagente da continuïdade. Para o vermos, vamos aplicá-lo ao conjunto *(R)*.

Põe-se uma questão prévia: — ¿ será possível definir, no conjunto (*R*), o conceito de *corte?* É; basta que a — estar à esquerda de — em pontos se faça corresponder — ser menor que — em números.

Assim, tem-se um corte no conjunto *(R)* quando existirem duas classes *(A)* e *(B)* de números racionais tais que: 1.º todo o número racional está classificado, ou em *(A)* ou em *(B)*; 2.º todo o número de *(A)* é menor que todo o número de *(B)*.

Temos, por exemplo, um corte quando pomos numa classe *(A)* todos os números menores que 5 e o próprio 5, e numa classe *(B)* todos os números maiores que 5; nêste caso, 5 é o elemento que *separa* as duas classes.

Ponhamos agora a questão fundamental da comparação, que nos trouxe até aqui: ¿do ponto de vista da continuïdade, os conjuntos *(R)* e *(P)* teem a mesma estrutura, como a teem do ponto de vista da infinidade, ordenação e densidade? ou não?

Responde-se à questão, investigando se o conjunto *(R)* satisfaz também ao axioma da continuïdade de *Dedekind-Cantor*, isto é, se *todo* o corte no conjunto *(R)* tem um número de *(R)* a separar as duas classes.

Vamos ver, num exemplo muito simples, que não

(1) — Quási pela mesma altura, o matemático alemão *G. Cantor* formulou a caracterização da continuïdade por uma maneira semelhante; por isso, a êste enunciado se chama, com maior propriedade, axioma da continuïdade de *Dedekind-Cantor*.

é assim—*no conjunto (R) há cortes (A, B) que não teem elemento de separação.*

Efectuemos uma repartição dos números racionais em duas classes *(A)* e *(B)* do modo seguinte:—pomos numa classe *(A)* todo o número racional *r* cujo quadrado seja menor que 2 → $r^2 < 2$; pomos numa classe *(B)* todo o número racional *s* cujo quadrado seja maior que 2 → $s^2 > 2$. ¿Constitue esta repartição um corte *(A, B)*? Em primeiro lugar, o critério de repartição é um critério definido, sem ambiguïdade; dão-nos, por exemplo, o número 0,7—¿onde o devemos pôr? como $0{,}7^2 = 0{,}49 < 2$, o número vai para a classe *(A)*; dão-nos o número 1,5—tem-se $1{,}5^2 = 2{,}25 > 2$, o número vai para a classe *(B)*. Vê-se, por conseqüência, que o critério de repartição abrange todos os números racionais; só lhe escapa um número—aquele cujo quadrado seja igual a 2; *mas êsse,* como vimos no parágrafo 3 dêste capítulo, *não existe no campo racional;* portanto, podemos afirmar que todo o número racional está classificado (1.ª condição). Quanto à segunda, é evidente também que é verificada, em virtude da maneira como varia a potência (cap. II parágrafo 25) de $s^2 > 2 > r^2$ resulta $s > r$.

Temos, então, efectivamente definido assim um corte; ¿qual é o elemento de separação das suas duas classes?—não existe! êle seria o número de quadrado igual a 2, número cuja não existência nos levou ao contacto com o problema da incomensurabilidade.

Impõe-se, portanto, uma conclusão—*o conjunto (*R*) não satisfaz ao axioma da continuïdade de Dedekind-Cantor; o conjunto (*R*) não é contínuo; finalmente, encontrámos a razão da não-biunivocidade da correspondência (*R*) ←→ (*P*); topámos o motivo íntimo da negação!*

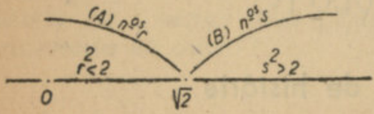
19. — A nova definição

Temos o problema resolvido; uma vez determinado o fundamento da negação, aplicamos o método que já nos levou à criação dos números racionais — *negar a negação.* ¿Que se passa? ¿há cortes no conjunto *(R)* que *não teem* um elemento de separação? São êsses mesmos que nos vão criar os novos elementos de separação. Basta, para isso, dar a seguinte definição: — *chamo número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincidirá com êsse número racional; se não existe tal número, o número real dir-se-à irracional.*

O leitor, recordando aqui a definição de número racional, dada no parágrafo 10 do cap. II, notará a absoluta identidade de método numa e noutra; no que elas diferem, é apenas na natureza daquilo que tem que ser negado: lá, a impossibilidade *geral* da divisão; aqui, a não existência *geral* dum elemento de separação de duas classes.

A natureza própria do problema obriga, no entanto, a que os novos números, agora introduzidos — os números irracionais — não sejam de carácter tão elementar como os racionais; a razão fundamental disso está no seguinte: enquanto, para definir um número racional, bastam dois números naturais — o seu numerador e o seu denominador — *para definir um número real são necessárias duas infinidades de números racionais,* visto que os elementos constitutivos da definição são as duas classes *(A)* e *(B)* do corte, e estas classes teem, cada uma delas, uma infinidade de números. Por exemplo, enquanto na definição do número racional $\frac{7}{5}$ entram apenas os números 7 e 5, combinados pela operação da divisão, o número real irracional $\sqrt{2}$ é definido como o número que separa a classe dos números racionais *r* tais que $r^2 < 2$ da classe dos números racionais *s* tais que $s^2 > 2$, isto é, como o número que é maior que tôda a infinidade dos *r* e menor que tôda a infinidade dos *s* (fig. 19).

É claro que, pela definição que acima demos, os números racionais são números reais e, portanto, teem também uma definição em que figuram duas infinidades de números (por exemplo, 1 é o número real que separa a classe dos números racionais $\frac{m}{n}$ em que $m < n$ da classe dos números racionais $\frac{m}{n}$ em que $m > n$). Mas, como os números racionais podem ser definidos apenas com dois números inteiros, não é preciso recorrer ao infinito quando êles teem que ser estudados em si. *Êsse recurso só se impõe quando êles são estudados como elementos duma categoria mais geral, a dos números reais.*



(fig. 19

Êste facto — *necessidade de recorrer ao conceito de infinito* — explica que, sendo o fenómeno da incomensurabilidade conhecido há mais de 25 séculos, só há muito pouco tempo, com a obra de *Dedekind,* exista uma teoria satisfatória dos números irracionais. Os problemas de carácter científico e filosófico que se prendem com esta questão são muitos e duma importância extrêma. Por isso, e de modo a conseguir uma visão suficiente da grandeza do debate, vamos abrir um parêntesis na nossa exposição que retomaremos no capítulo V.

CAPÍTULO IV

Um pouco de história

1.—A inteligibilidade do universo A actividade do homem, quer considerada do ponto de vista individual, quer do ponto de vista social, exige um conhecimento, tão completo quanto possível, do mundo que o rodeia.

Não basta conhecer os fenómenos; importa *compreender* os fenómenos, determinar as *razões* da sua produção, descortinar as *ligações* de uns com outros.

Nisto, na investigação do «*como?*» do «*porquê?*» se distingue fundamentalmente a actividade do homem da dos outros animais.

Quanto mais alto fôr o grau de *compreensão* dos fenómenos naturais e sociais, tanto melhor o homem se poderá defender dos perigos que o rodeiam, tanto maior será o seu domínio sôbre a Natureza e suas fôrças hostis, tanto mais fàcilmente êle poderá realizar aquele conjunto de actos que concorrem para a sua segurança e para o desenvolvimento da sua personalidade, tanto maior será, enfim, a sua *liberdade*.

A inteligibilidade do universo, considerado o têrmo *universo* no seu significado mais geral — *mundo cósmico* e *mundo social* — é, por conseqüência, uma condição necessária da vida humana. Compreende-se portanto que, desde há muitos séculos, tenham sido realizados notáveis esforços no sentido de atingir uma parcela de verdade sôbre a realidade.

Onde, como e *por quem* foi lançada pela primeira vez para o espaço a pregunta — *porquê?* — impossível de o dizer. O que já é mais facil é fixar datas aproximadas ao primeiro conjunto coerente de respostas a essa pregunta, ao primeiro esbôço, pode dizer-se, da *teoria da c.ência;* mas ¿quantos séculos vão de um momento ao outro?

2. — Condições sociais

Não é em qualquer local e sob quaisquer condições que pode esperar-se o aparecimento de tais esboços científicos. A sua organização exige uma atitude de cuidada observação da Natureza e um esfôrço de reflexão que não são compatíveis com a vida do homem primitivo, para o qual a luta diária pelo sustento e abrigo imediatos absorve todo o tempo e atenção.

A ciência só desponta em estado relativamente adiantado da civilização, estado que, como diz S. Taylor, permita *«a todos viver e a alguns pensar»*.

Essas condições parecem ter sido realizadas pela primeira vez, no que diz respeito ao mundo ocidental, nas colónias gregas do litoral da Ásia Menor, no dobrar do século VII para o século VI antes de Cristo. O comércio, principalmente de vinho, azeite e têxteis, produzira aí um florescimento económico sensível.

Por outro lado, ligado à civilização comercial, encontra-se um conjunto de condições de vida — facilidade e necessidade de viajar, contacto com povos diferentes, etc. — que a tornam muito mais própria para o desenvolvimento científico que a civilização agrária, a qual é, de sua natureza, pesada, opressiva, fechada.

3. — As preocupações fundamentais

Pensando no Universo e procurando, como acima dissémos, (paråg. 1) compreender os fenómenos, descobrir as suas *razões* e *ligações*, os primeiros pensadores foram levados a pôr as seguintes questões fundamentais:

1.ª — A Natureza apresenta-nos diversidade, pluralidade: de aspectos, formas, propriedades, etc. *¿Existe, no entanto, para além dessa diversidade aparente, um princípio único, ao qual tudo se reduza?*

2.ª — *¿Qual é a estrutura do Universo? Como foi criado? Como se movem os astros e porquê?*

Destas duas questões interessa-nos principalmente aqui, por se ligar mais directamente com o nosso assunto, a primeira.

4. — As respostas jónicas

As primeiras respostas à primeira pregunta foram dadas pelos filósofos das colónias jónicas da Asia Menor — Mileto, principalmente — e foram *afirmativas,* diferindo apenas na natureza do princípio ou elemento único ao qual tudo devia reduzir-se.

Para *Thales de Mileto* (o mais antigo dêsses filósofos jónicos e que viveu, aproximadamente, de 624 a 548 a. C.) é a *água* êsse elemento único. *Tudo é água!* afirmação de que hoje sorrimos, mas que, aos olhos de um observador de há 26 séculos, apresentava razões fortes de verdade ao notar, não só quanto a água é indispensável à germinação das plantas e, duma maneira geral, à existência da vida, mas ainda a facilidade de passagem da água pelos três estados físicos habituais — sólido (gêlo), líquido e gasoso (vapor de água).

Para *Anaximandro de Mileto,* contemporâneo de

Thales, (1) existe também uma substância primordial mas que não é, como a de Thales, conhecida de todos; essa substância é *infinita* e *indeterminada;* as coisas materiais formam-se por *determinações* parciais dêsse elemento fundamental — o *indeterminado.*

O indeterminado — em grego *apeiros* — é, para Anaximandro, «sem morte e sem corrupção», «começo e origem do existente».

Anaximènes de Mileto, contemporâneo de Thales e Anaximandro, admite também a existência de uma substância primordial que não é, porém, indeterminada se bem que infinita: — é o *ar.* Anaximènes dizia que «quando o ar se dilata, de maneira a ser raro, torna-se fôgo, enquanto que, por outro lado, os ventos são ar condensado. As nuvens formam-se do ar amassado e quando se condensam ainda mais, tornam-se água. A água, continuando a condensar-se, torna-se terra; e quando se condensa o mais que pode ser, torna-se pedra».

Assim, por um processo de rarefacção e condensação, era percorrido o ciclo do que os primeiros filósofos chamavam os *quatro elementos — terra, água, ar, fôgo.*

5. — A resposta de Heraclito

A cidade de Efeso era também uma colónia grega-jónica do litoral da Ásia Menor. Lá nasceu, pelo ano de 530 a. C., o filósofo Heraclito. Á pregunta que nos está ocupando, deu êle uma resposta profundamente original, muito diferente da dos filósofos que o precederam e o seguiram.

Enquanto, para os filósofos jónicos, a *explicação* se baseia na existência duma substância primordial, permanente, para Heraclito o aspecto essencial da

(1) — Anaximandro viveu, aproximadamente, de 611 a 545 a. C.

realidade é a *transformação* que as coisas estão *permanentemente* sofrendo por acção do *fôgo*.

O mundo dos filósofos de Mileto era um mundo da permanência, da matéria, o mundo de Heraclito era o mundo dinâmico da *transformação incessante*, do *devir*. Vejamos, à luz dos poucos fragmentos que se conhecem da sua obra, quais eram as ideias principais de Heraclito.

6. — O devir do mundo

O aspecto fundamental que a realidade nos apresenta e aquele, portanto, ao qual se deve prender a razão ao procurar uma *explicação* racional do mundo, é o estarem constantemente as coisas transformando-se umas nas outras. Morte e vida unem-se, formando um processo único de evolução — «*o fôgo vive a morte do ar e o ar vive a morte do fôgo; a água vive a morte da terra e a terra vive a morte da água*». Assim, a morte não significa destruïção, ruína, mas fonte duma nova vida: a todo o momento a morte actua e a vida surge. Daqui resulta que é impossível, num dado instante, atingir a *permanência*, a *estabilidade* seja do que fôr; tudo *flue*, tudo *devém*, a todo o momento, uma coisa nova — «*tu não podes descer duas vezes ao mesmo rio; porque novas águas correm sempre sôbre ti*».

Mas, se assim é, as coisas, ao mesmo tempo, *são* e *não são* elas próprias, e o mesmo processo de evolução nos atinge a nós — «*somos e não somos*» — transformamo-nos constantemente.

7. — Harmonia dos contrários

¿Donde resulta o devir? e porquê as coisas se transformam constantemente? Porque há um princípio universal de luta, de tensão de contrários, que a todo o momento rompe o equilíbrio para criar um equilíbrio novo — *«a luta é o pai de tôdas as coisas e o rei de tôdas as coisas; de alguns fez deuses, de alguns, homens; de alguns, escravos; de outros, homens livres»*. Noutro passo, Heraclito afirma: — *«os homens não sabem como o que varia é concorde consigo próprio; há uma harmonia das tensões opostas como a do arco e da lira»*.

Para Heraclito, portanto, a harmonia não resulta da junção de coisas semelhantes, mas da luta dos contrários; nisto, é êle conseqüente com a sua ideia fundamental do *devir* — ¿como poderia a união dos semelhantes gerar vida nova? não é precisamente o contrário que a Natureza nos mostra pela acção conjunta do masculino e do feminino?

Em resumo, mundo da *energia*, do *fôgo* como princípio actuante — *«o fôgo, no seu progresso, julgará e condenará tôdas as coisas»* — da *luta* dos contrários, da *fluência*, do *devir*, tal é, nos seus traços fundamentais, o quadro que o filósofo de Efeso nos oferece da realidade universal.

8. — A resposta pitagórica

Pitágoras de Samos (1) é um filósofo que parece ter vivido entre os anos 580 e 504 a. C.. Da sua vida pouco se sabe ao certo, a despeito das toneladas de tinta que, com maior ou menor fantasia, teem corrido àcêrca da sua vida e da sua acção.

É, no entanto, seguro que, a partir do século VI a. C., existiu e exerceu larga influência na Grécia uma seita, de objectivos místicos e científicos, deno-

(1) — Samos é o nome de uma ilha do Mar Egeu, junto ao litoral da Ásia Menor; Pitágoras parece ter sido originário dessa ilha.

minada *escola pitagórica;* dela parece ter sido Pitágoras o fundador. Será sempre ao conjunto de ideias que caracterizavam essa seita que nos referiremos quando empregarmos o nome de Pitágoras.

¿O que distinguia, em relação à questão que estamos estudando, a escola pitagórica? A resposta dada por ela, profundamente original também, distinguia-se de tôdas as anteriores por esta característica fundamental: o motivo essencial da explicação racional das coisas, via-o Pitágoras nas diferenças de *quantidade* e de *arranjo,* de *forma;* no *número* e na *harmonia.*

Um dos mais destacados representantes da escola, *Filolao,* afirma: «*tôdas as coisas teem um número e nada se pode compreender sem o número*».

9. — Uma ideia grandiosa

No fundo duma afirmação destas palpita uma das ideias mais grandiosas e mais belas que até hoje teem sido emitidas na história da Ciência — a de que a compreensão do universo consiste no estabelecimento de relações entre números, isto é, de *leis matemáticas;* estamos, portanto, em face do aparecimento da ideia luminosa duma *ordenação matemática do Cosmos.*

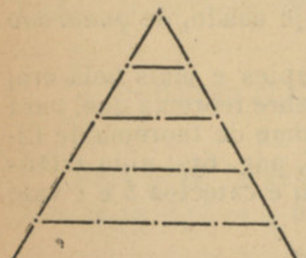
Ouçamos o que, dois séculos mais tarde, a êste respeito diz *Aristóteles* (1), na sua *Metafísica:* "*...aqueles a quem se chama pitagóricos foram os primeiros a consagrar-se às Matemáticas e fizeram-nas progredir. Penetrados desta disciplina, pensaram que os princípios das Matemáticas eram os princípios de todos os sêres. Como, dêsses prin-*

(1) — O ensino na escola pitagórica fazia-se por transmissão oral; daí resulta uma ausência de textos originais sôbre que se possa fazer um estudo directo; há que fazer reconstituïções pelas referências posteriores.

cípios, os números são, pela sua natureza, os primeiros, e como, nos números, os pitagóricos pensavam aperceber uma multidão de analogias com as coisas que existem e se transformam, mais que no Fôgo, na Terra e na Água (tal determinação dos números sendo a justiça, tal outra a alma e a inteligência, tal outra o tempo crítico, e do mesmo modo para cada uma das outras determinações); como êles viam, além disso, que os números exprimiam as propriedades e as proporções musicais; como, enfim, tôdas as coisas lhes pareciam, na sua inteira natureza, ser formadas à semelhança dos números e que os números pareciam ser as realidades primordiais do Universo, consideraram que os princípios dos números eram os elementos de todos os sêres e que o Céu inteiro é harmonia e número" [1].

10. — Verificações

Desta ideia grandiosa — que as leis matemáticas traduzem a harmonia universal — os pitagóricos apresentavam uma multidão de justificações. Vamos referir-nos a algumas no campo da Geometria e a uma no da música.



(fig. 20)

Na figura *20* está indicado como, pela adjunção sucessiva de pontos num determinado arranjo geométrico, se vão obtendo triângulos equiláteros a partir uns dos outros; êste facto geométrico — geração de triângulos a partir uns

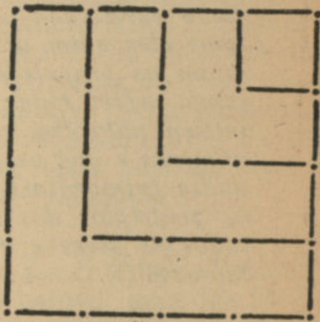
(1) — Metafísica. A. 5.

dos outros — é regido pela lei matemática simples $1+2=3$, $1+2+3=6$, $1+2+3+4=10, \ldots$ em geral

$$1) \qquad 1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

que dá o número total de pontos empregados; por isso, aos números da forma $\frac{n(n+1)}{2}$ os pitagóricos chamavam *números triangulares.*

Na fig. 21 está um esquema análogo para a formação de quadrados a partir uns dos outros.



(*fig. 21*)

Aqui, a lei matemática é

$1+3=4=2^2$, $1+3+5=$ $=9=3^2, \ldots$

em geral

$$2) \qquad 1+3+5+\ldots+(2n-1)=n^2$$

e daqui vem o nome, ainda hoje usado, de *quadrado* dum número.

Mas a verificação mais simples e mais bela era, sem dúvida, a fornecida pelo célebre teorema que, para sempre, ficou conhecido pelo nome de teorema de Pitágoras (cap. III, parág. 3 fig. 16, pág. 65): num triângulo rectângulo de hipotenusa a e catectos b e c vale a relação:

$$3) \qquad a^2=b^2+c^2.$$

Que lei matemática tão simples a regular a estrutura duma figura geométrica! Por isso, êste teorema foi sempre considerado como a mais brilhante aquisição da escola pitagórica.

No domínio da música, Pitágoras registou triunfos não menos notáveis. Por experiências feitas no monocórdio [1], êle verificou que os comprimentos das cordas que, com igual tensão, dão notas em intervalo de *oitava* estão entre si na razão de 2 para 1; em intervalo de *quinta* na razão de 3 para 2; em intervalo de *quarta* na razão de 4 para 3. ¡Como Pitágoras deve ter vibrado de entusiasmo ao verificar como até as relações de coisa tão subtil e incorpórea como o som — a matéria, por excelência, da harmonia — se traduziam em relações numéricas simples! E não é difícil meter numa única relação matemática estas harmonias musicais.

Sejam *a* e *b* dois números quaisquer, e seja $m = \frac{a+b}{2}$ a sua *média aritmética;* chama-se *média harmónica* dos mesmos dois números àquele número *h* que forma com *a, m* e *b* uma proporção nas seguintes condições:

4) $$a : m :: h : b.$$

Daqui tira-se imediatamente [2] $h = \frac{a \cdot b}{m}$ e, substituindo *m* pelo seu valor,

5) $$h = \frac{2ab}{a+b}.$$

A proporção 4) toma, portanto, o aspecto

6) $$a : \frac{a+b}{2} :: \frac{2ab}{a+b} : b.$$

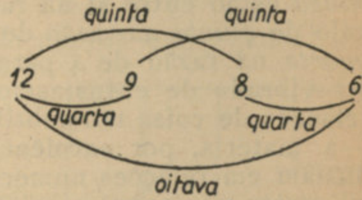
Pois bem: façamos, por exemplo, $a = 12$ e $b = 6$; vem $m = \frac{12+6}{2} = 9$, $h = \frac{2.12.6}{12+6} = 8$; a proporção é

---

(1) — Instrumento com uma corda só e um cavalete móvel que permite, deslocando-o, dividir a corda em dois segmentos na razão que se quiser.

(2) — Numa proporção qualquer, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos.

12:9::8:6. Ora, êstes quatro números dão, precisamente, as razões dos comprimentos das cordas do monocórdio que fornecem os intervalos musicais de oitava, quinta e quarta, como resulta do esquema da fig. 22.



(fig. 22)

E como isto se dá sempre que seja a=2b, como o leitor fàcilmente reconhece, na relação numérica 6) está, afinal, condensada a harmonia musical!

¿Que mais seria preciso para enebriar uma mente ávida de encontrar o porquê da harmonia universal?

11 — Grandeza e mesquinhez duma ideia

O próprio brilhantismo dos triunfos parece ter sido prejudicial ao equilíbrio da escola pitagórica como conjunto de doutrina. Da afirmação, bela e fecunda, da existência duma *ordenação matemática do cosmos* — tôdas as coisas teem um número — fez-se esta outra afirmação, bem mais grave e difícil de verificar, — *as coisas são números.*

Para a apoiar, houve que, fora da experimentação e da verificação, procurar uma estrutura material idêntica à estrutura numérica. Tal procura parece ter cristalizado na afirmação seguinte — que a matéria era formada por corpúsculos cósmicos, de extensão não nula, embora pequena, os quais, reünidos em certa quantidade e ordem, produziam os corpos; cada um de tais corpúsculos — *mónada* — era assimilado à *unidade* numérica e, assim, os corpos se formavam por *quantidade e arranjo de mónadas* como os números se formavam por *quantidade e arranjo de unidades* (v. figs. 20 e 21).

Uma conseqüência imediata de tal pensamento era o atribuirem-se *virtudes* especiais aos números, uma vez que êles eram o princípio de tudo; por isso, na passagem de Aristóteles que trancrevemos se fala em que: «tal determinação dos números era a justiça, tal outra a alma e a inteligência, etc.».

Uma vez neste pendor, foi-se até ao ponto de fazer as entorses necessárias à realidade quando ela se não mostrava de acôrdo com as propriedades místicas dos números; Aristóteles deu um exemplo célebre disso.

Em resumo, podemos dizer que a escola pitagórica nos apresenta um lado positivo e um lado negativo.

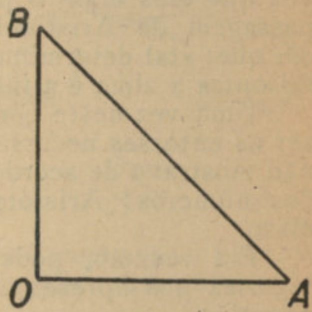
Constitue o lado positivo a sua aspiração para a inteligibilidade, emitindo a ideia grandiosa da ordenação matemática do cosmos e dando uma primeira realização dela por algumas leis matemáticas notáveis.

Forma o seu lado negativo tudo aquilo que aos números se atribue fora da sua propriedade fundamental de traduzir relações de quantidade.

O lado positivo leva às mais luminosas realizações da ciência e mais duma vez tem orientado o progresso científico; o lado negativo leva ao misticismo confuso que hoje se refugia nas alfurjas onde se deitam cartas e se leem sinas.

12.—Asas quebradas A escola pitagórica devia receber em breve um desmentido brutal à afirmação que constituia o seu lado positivo e a sua aspiração mais nobre — a ordenação matemática do cosmos. A natureza das coisas quis que fôsse precisamente através da mais bela das suas conquistas — o teorema de Pitágoras — que êsse desmentido houvesse de ser pronunciado.

Seja o triângulo rectângulo isósceles BOA (fig. 23) e procuremos medir a hipotenusa $\overline{AB}$ tomando como unidade o lado $\overline{OA}$. Resulta do estudo que fizemos no parágrafo 3 do cap. III, que tal medida não existe, isto é, que não existem dois números inteiros m e n que traduzam a razão dos comprimentos dos dois segmentos $\overline{OA}$ e $\overline{AB}$. Mas ¿que é feito, então, da afirmação de que «os princípios dos números são os elementos de todos os sêres», que «o Céu inteiro é harmonia e número»? ¿Que valor tem ela, se os números não podem dar conta, sequer, desta coisa simples e elementar que é a razão dos comprimentos de dois segmentos de recta? ¿Onde está o alcance universal dessa afirmação? No dia em que foi descoberto o fenómeno da incomensurabilidade de segmentos, a escola pitagórica estava ferida de morte.



(fig. 23)

Para ver quanto era fundo o golpe e grave a ameaça de ruína total, basta recordar o que atrás dissémos sôbre a teoria das *mónadas.* A ser ela verdadeira, a recta, como tôda a figura geométrica, seria formada de mónadas postas ao lado umas das outras, e, então, ao procurar a parte alíquota comum a dois segmentos, ela encontrar-se-ia sempre *quanto mais não fôsse quando se chegasse, por sub-divisões sucessivas, às dimensões da mónada* — se um segmento tivesse m, outro n vezes o comprimento da mónada, a razão dos comprimentos seria $\frac{m}{n}$. A descoberta da incomensurabilidade fazia estalar, como se vê, a teoria das mónadas e conseqüente assimilação delas às unidades numéricas, e punha assim, em têrmos agudos, o problema da inteligibilidade do universo.

Era tudo, até aos mais íntimos fundamentos da teoria, a ameaçar uma ruína estrondosa! ¿Como sair dêste passo difícil? ¿Como conciliar a teoria com o fenómeno da incomensurabilidade, imposto por considerações de compatibilidade lógica?

O leitor que seguiu a construção feita nos parágrafos 8 a 19 do cap. III, conhece o caminho de saída; mas ¿que fez o filósofo pitagórico há 25 séculos? como reagiu êle?

13.—Tentativas de fuga

Vários indícios posteriores mostram que a primeira reacção foi a de *esconder* o caso. Citaremos, como um dos mais precisos dêsses indícios, a seguinte passagem de Plutarco,(1) na vida de *Numa Pompilius*, XXXV:

«... *diz-se que os pitagóricos não queriam pôr as suas obras por escrito, nem as suas invenções, mas imprimiam a ciência na memória daqueles que êles reconheciam dignos disso.*

E como algumas vezes comunicaram alguns dos seus mais íntimos segrêdos e das mais escondidas subtilezas da geometria a algum personagem que o não merecia, êles diziam que os deuses, por presságios evidentes, ameaçavam vingar êste sacrilégio e esta impiedade, com alguma grande e pública calamidade».

(1) — Escritor grego, nascido na cidade, hoje desaparecida, de Cheronea, por altura do ano 50 da nossa era. Tornou-se célebre pela sua notável colecção de «Vidas dos Homens Ilustres».

De resto, o carácter de seita da escola pitagórica, em que os aspectos místico e político, êste fechado e aristocrático, [1] ombreavam com o aspecto científico, prestava-se a essa tentativa de segrêdo à volta de questão de tal maneira embaraçosa. Onde só havia a ganhar com o debate público e extenso, os pitagóricos instituiram como norma, pelo contrário, o segrêdo, o silêncio.

Uma outra tentativa de fuga parece ter residido numa vaga esperança de que, considerando como infinito — um infinito grosseiro, mal identificado, que era mais um *muito grande* do que o infinito moderno — o número de mónadas que formam um segmento de recta, talvez a dificuldade desaparecesse. Efectivamente, a demonstração mais antiga da incomensurabilidade (aquela que era conhecida nêsse tempo e que reproduzimos no parágrafo 3 do cap. III) baseava-se, no fundo, em que o número não pode ter ao mesmo tempo as duas paridades. Mas se êsse número fôsse infinito, ¿êsse argumento teria a mesma fôrça? ¿não estaria aí uma escapatória de recurso?

Isto não é uma simples conjectura; o desenvolvimento posterior do movimento filosófico e a polémica viva que aparece, logo a seguir, sôbre o tema do infinito combinado com as afirmações dos pitagóricos, mostram bem claramente o caminho geral que as coisas seguiram.

Essa polémica foi conduzida principalmente por uma nova escola filosófica — a escola de Elea.

---

(1) — O que foi origem de uma revolta popular que estalou em Crotona contra a Escola e originou a sua destruição; nela parece ter perdido a vida o próprio Pitágoras.

14.—A crítica eleática Elea, em latim Velia, era uma cidade da costa ocidental da Itália do Sul, que constituía, pelos meados do século VI a.C., uma das muitas colónias gregas na Itália, colónias essas cujo conjunto era designado por Grande Grécia.

Em Elea nasceu, não se sabe ao certo quando, mas provàvelmente entre 520 e 530 a.C., um filósofo — Parménides — que, primeiramente ligado à escola pitagórica, se havia em breve de separar dela, procedendo a um exame crítico de tôdas as noções e concepções filosóficas que até aí tinham sido emitidas. Não podemos dar aqui um apanhado, sequer, da construção de Parménides de Elea; a sua crítica levantou alguns dos problemas mais importantes de que a história da filosofia e da ciência dá conta, em todos os tempos.

A sua preocupação fundamental era idêntica à dos filósofos que o precederam — ¿ qual é a natureza íntima do *existente?* Dos pequenos fragmentos que hoje se conhecem da sua obra, (o célebre *Poema)* e das referências posteriores, depreende-se que Parménides distinguia aquilo que era objecto puramente da *razão* — o que êle chamava a *verdade* — e o que era dado pela *observação,* pelos *sentidos* — o que êle denominava a *opinião.*

Opondo, assim, a *razão* à *opinião,* Parménides abriu um debate, duma importância e alcance excepcionais, que até hoje tem trabalhado intimamente todo o movimento científico — as relações entre a *razão* e a *experiência,* entre a *teoria* e a *prática,* o debate do *idealismo* e *materialismo.*

Ao *existente* êle reconhece, na parte do Poema dedicada à *verdade,* as características seguintes — *unidade, homogeneidade, continuïdade, imobilidade, eternidade,* relegando para o *vulgo da opinião* todos aqueles atributos que porventura contrariem êstes.

Grande parte desta construção, que tem seu quê de impressionante e grandioso, é dirigida contra a escola pitagórica; dela trataremos no parágrafo seguinte. Outra parte, não menos importante, é-o contra Heraclito de Efeso.

Á concepção de Heraclito, que via na transformação permanente, no *devir,* a essência das coisas, opõe Parménides o raciocínio seguinte—«como é possível que aquilo que *é* possa *vir a ser?* ¿E como poude êle vir à existência? Se *foi,* não *é* e também não *é* se está a ponto de *vir a ser* no futuro. Assim, o nascimento não existe e não pode também falar-se de destruição». Portanto, nem morte nem nascimento — Heraclito dissera: «o fôgo vive a morte do ar e o ar vive a morte do fôgo»—imobilidade, identidade a si próprio, na eternidade. Não faltam até, no Poema, traços de superioridade olímpica para com Heraclito e os que o seguem—«multidões sem capacidade de julgamento, aos olhos de quem as coisas são e não são, as mesmas e não as mesmas, e vão em direcções opostas».

Só o futuro do progresso científico poderia julgar èntre duas maneiras de vêr tão opostas como estas.

O triunfo veio, vinte séculos mais tarde, totalmente para Heraclito,(1) mas Parménides conserva, pela importância extrema das questões que levantou, pela profunda seriedade com que as tratou, um lugar na primeira linha dos pensadores de todos os tempos.

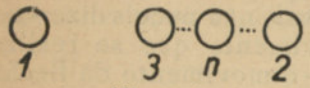
15.—A polémica anti-pitagórica Na construção de Parménides há, como acima dissemos, muita coisa dirigida contra os pitagóricos. Em primeiro lugar, a homogeneidade e

(1)—Ver, no vol. II, o cap. sôbre o estudo matemático do devir.

continuïdade parmenídeas, as quais se opõem, de todo em todo, à construção pitagórica das *mónadas.*

A polémica foi violenta; dela restam-nos, conservados por Aristóteles, alguns *argumentos* de Zenão de Elea, o mais notável discípulo de Parménides.

Diz Zenão: ¿como querem que a recta seja formada por corpúsculos materiais de extensão não nula? Isso vai contra a vossa afirmação fundamental de que *tôdas as coisas teem um número.* Com efeito, (fig. 24) entre dois corpúsculos, 1 e 2, deve haver um espaço—¿se estivessem unidos, em que se distinguiam um do outro?—e êsse espaço deve ser maior que as dimensões de um corpúsculo, visto que estas são as menores concebíveis; logo, entre os dois posso intercalar um corpúsculo, 3, e fico com dois espaços: um entre 1 e 3 e outro entre 3 e 2, nas mesmas condições. Posso repetir o raciocínio indefinidamente, e fico, portanto, com a possibilidade de meter entre 1 e 2 quantos *corpúsculos quiser*—¿Qual é, então, o número que pertence ao segmento que vai de 1 a 2?



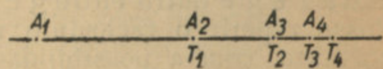
(fig. 24)

Como se vê, é a própria afirmação fundamental da escola pitagórica que está batida em cheio pela argumentação de Zenão. Mas esta argumentação vai mais longe, devastando e levantando, de cada vez, novos problemas.

A construção eleática fôra duramente atacada por estabelecer a *imobilidade* como uma das características do *existente*—¿há coisa mais real e segura do que o movimento no mundo?

Zenão responde:—não se trata de saber se há ou não há movimento no mundo, mas de saber se êle é *compreensível,* isto é, compatível com a explicação racional que damos do Universo. Nós, eleatas, *não* *o compreendemos, não conseguimos pô-lo de acôrdo com o resto da explicação racional,* mas vós, pitagóricos, julgais compreender e nadais apenas em contradições. Uma de duas:—ou num segmento de recta há um número finito de mónadas ou há uma infinidade. Vejamos o primeiro caso; considerai uma flecha em movimento, percorrendo êsse segmento de recta; em cada instante a ponta da flecha ocupa um lugar: a localização duma mónada—¿O que se passa entre um logar e o seguinte? Nada! porque, não havendo nada entre duas mónadas consecutivas, não podeis dizer-me coisa alguma sôbre um movimento que se realize onde nada existe; conclusão:—o movimento da flecha é uma sucessão de imobilidades! Percebeis?

Consideremos agora o segundo caso: há uma infinidade de mónadas; então, o movimento é igualmente inconcebível. Suponhamos que dois móveis—A (Aquiles) e T (Tartaruga)—partem ao mesmo tempo, um da posição A_1 outro da posição T_1 (a tartaruga tem o avanço $A_1 T_1$). Por mais pequeno que seja o avanço da tartaruga e por maior que seja a velocidade de Aquiles, comparada com a da tartaruga, aquele nunca apanha esta! Suponhamos, para fixar ideias, que a velocidade de Aquiles é dupla da da tartaruga. Quando A atinge a posição A_2 (onde T estava inicialmente) T está em T_2, com o avanço $T_1 T_2$, igual a metade de $A_1 T_1$. Quando A alcança T_2 (posição A_3) T está já em T_3 com o avanço $T_2 T_3$. O raciocínio prossegue indefinidamente (porque estamos supondo infinito o número de mónadas) e há sempre um avanço de T sôbre A. ¿Como se percebe então que A alcance T?



(fig. 25)

Como o leitor vê, a concepção corpuscular da escola pitagórica está batida por todos os lados, sem possibilidade de porta de saída.

Os argumentos de Zenão não fazem mais que tornar palpável a incompatibilidade dessa concepção com a estrutura da recta. Mas essa incompatibilidade fôra revelada já, com fôrça indestrutível, pela existência das incomensurabilidades. Dêsse dia em diante, a escola podia, quando muito, apresentar uma fachada brilhante a encobrir ruínas interiores.

Zenão é o homem que aparece, de picareta na mão, a arrazar a fachada.

16. — Balanço Está o leitor vendo a quantidade e importância das questões, de carácter filosófico e científico, que surgiram à volta da crítica do problema da medida, pelo aparecimento das incomensurabilidades e conseqüente necessidade de nova ampliação do campo numérico. Ligado com essa necessidade, encontra-se todo o vasto problema da *inteligibilidade do universo.*

A maneira pela qual essa ampliação se fez, foi vista nos parágrafos 8 a 19 do cap. III. Agora, após esta ligeira excursão histórica, resta-nos ver qual o caminho imediato que as coisas seguiram e, antes de mais, fazer um *balanço:* ¿das concepções que descrevemos, o que ficou e o que se perdeu?

1.º — Vimos como surgiu a ideia heracliteana do *devir,* em que consiste, e como mais tarde apareceu a concepção eleática da *imobilidade eterna,* em contraposição com ela; neste momento nada podemos dizer, a não ser que elas se encontram frente a frente, disputando a primazia para a inteligibilidade do universo.

2.º — Vimos como a escola pitagórica emitiu a ideia grandiosa da *ordenação matemática do cosmos* e como ela foi arrastada no ruir estrondoso dessa escola.

3.º — Mas os últimos golpes de picareta, os argumentos de Zenão de Elea, dão, pela sua própria essência, um fio condutor para se encontrar um caminho de saída. Dêsses argumentos resulta:

a) — que as dificuldades levantadas pelo fenómeno da incomensurabilidade só podem ser resolvidas depois de um cuidadoso estudo dos problemas do *infinito* e do *movimento*. A estrutura da recta, da qual depende a incomensurabilidade, aparece, nos seus argumentos, ligada a êsses dois problemas;

b) — que, em qualquer hipótese, a recta não pode ser pensada como uma simples justaposição de pontos, mónadas ou não; há nela qualquer coisa que ultrapassa uma simples colecção de pontos; êsse qualquer coisa — a sua *continuïdade* — necessita dum estudo aprofundado, ligado com o aspecto numérico, quantitativo, da medida.

4.º — Vimos como a concepção eleática levantou um problema teórico, dominando todos êstes — o problema do *conceito da verdade* e *meio de a adquirir*.

Feito o balanço, preguntará o leitor: — ¿o que aconteceu a seguir?

17. — As novas preocupações e os dois horrôres

Todos êstes problemas continuaram a ser intensamente debatidos, mas ao lado dêles surgiram outros, cujo interêsse imediato os ultrapassou, ou deformou o seu caminho de resolução.

Estamos no meado do século V a. C. A intensa actividade política e militar em que nessa altura a Grécia está mergulhada, traz a cidade de Atenas à primeira plana da vida da península. Ela torna-se [1] a grande metrópole da arte, da filosofia e da ciência gregas, que passam a constituir a côrte brilhante dum personagem oculto e perigoso — o imperialismo ateniense. Os seus desejos de hegemonia sôbre tôda a península começam a tomar o primeiro plano das preocupações dos homens, e o próprio tipo do filósofo grego — o homem que procurava viver na demanda da virtude cívica e do conhecimento da Natureza — altera-se a pouco e pouco. Surge um conjunto de preocupações, dizendo respeito mais directamente ao *homem,* o qual tende a tornar-se o *centro do mundo;* surge, mais tarde, a *razão de Estado,* que estabelece uma nova hierarquia de valores e exige uma subordinação geral aos interêsses do imperialismo de Atenas. A vida borbulhante, talvez um pouco desordenada, das cidades livres dos séculos VII e VI a. C, vira o aparecer das grandes hipóteses, as grandes discussões, as grandes aspirações à inteligibilidade; a vida, sem dúvida mais brilhante, mas dominada por um pensamento político de expansão e absorção, de Atenas, vê a decadência lenta dêsses grandes motivos, dessas grandes concepções. Contra o que é habitualmente afirmado, temos que concluir que o *clima* de Atenas foi *mortal* para o desenvolvimento da ciência clássica.

Daqui resulta que nenhum dos problemas postos pela crítica de Zenão foi resolvido na Antiguïdade.

Concluiu-se pela *incapacidade numérica* para resolver o problema das incomensurabilidades; portanto, pela *degradação do número em relação à geometria.* Conseqüência: abandonou-se o que a escola pitagórica afirmara de positivo — a crença numa ordenação matemá-

(1) — Como o leitor deve ter notado, todas as escolas filosóficas a que nos referimos viveram fora da Metrópole grega.

tica do cosmos — e retomou-se, a breve trecho, em têrmos cada vez menos nobres, o lado negativo das suas concepções.

Concluiu-se pela *exclusão do conceito quantitativo de infinito* dos raciocínios matemáticos — a matemática grega toma uma feição de cada vez mais *finitista:* invade-a o *horror do infinito.*

Concluiu-se pelo *abandono das concepções dinâmicas,* sempre que tal fôsse possível — a matemática grega é invadida pelo *horror do movimento.*

Êstes traços — *degradação do número, horror do infinito, horror do movimento* — constituem a trincheira cómoda da hibernação, formam o biombo prudente que o filósofo grego coloca entre si e a realidade. Mais tarde, havia de levantar-se um vento portador de fôrças novas que, rasgando o biombo em farrapos, colocaria novamente os homens em contacto com a realidade, estuante de vida. Mais tarde .. vinte séculos depois, já Renascimento em fora.

O resto da história será contado adiante, a propósito das matérias que serão estudadas nos capítulos seguintes (vol. 2.º).

CAPÍTULO V

O campo real

1. — Recordando uma definição No parágrafo 19 do cap. III foi dada, nos seguintes termos, a definição geral de *número real* — chama-se número real ao elemento de separação das duas classes dum corte qualquer, no conjunto dos números racionais; se existe um número racional a separar as duas classes, o número real coincide com êsse número racional; se não existe tal número, o número real diz-se *irracional*.

Por esta definição é criada uma classe de números — os *números reais* — que, como nela se diz, engloba os números racionais e contém, além dêles, outros números, denominados irracionais.

Ao conjunto de todos os números reais chamaremos *campo real;* designá-lo-emos por *conjunto* $(\overline{R})$, ou *campo* $(\overline{R})$.

Vamos fazer um estudo sumário dêste campo, de modo a poder responder a algumas preguntas que atrás foram feitas.

2.—Classificação dos números reais

Do que está dito na definição e do que se viu no capítulo II, conclue-se que os números reais podem ser classificados no seguinte esquema:

$$\text{Números reais}\begin{cases}\text{racionais}\begin{cases}\text{inteiros}\\ \text{fraccionários}\end{cases}\\ \text{irracionais}\end{cases}$$

O leitor que tenha seguido com atenção todo o desenrolar desta epopeia, viu como determinadas necessidades, umas de ordem prática, outras de ordem teórica, levaram a percorrer êste longo caminho—desde o número natural, nascido da repetição de contagens, mal identificado ainda, mas já esboçado na mente do homem primitivo, até ao conceito de número real, para cuja criação há que recorrer a duas infinidades de números; criação essa tão laboriosa que, à sua passagem, ruem sistemas filosóficos e alteram-se matrizes do pensamento. E, no entanto,—e aqui reside a beleza máxima do progresso científico—desde que a questão foi posta, correspondendo a um problema básico, aqui de carácter teórico, ela acabou por ser resolvida, a-pesar das enormes dificuldades que essa resolução topou e a que aludimos nos parágrafos anteriores. É êste, sem dúvida, o ensinamento mais notável que o estudo desta questão nos fornece.

Vejamos agora quais são, do ponto de vista pròpriamente matemático, as conseqüências mais importantes da introdução dos novos números.

3.—A impossibilidade da radiciação

Temos, em primeiro lugar, uma importantíssima conseqüência de carácter aritmético. Viu-se, no parágrafo 22 do capítulo II, que a operação da radiciação é, em geral, impossível no campo racional.

As coisas passam-se agora diferentemente. Seja a um número racional qualquer; por definição de raíz, $\sqrt[n]{a}$ será aquele número b tal que $b^n = a$. No campo racional, a questão põe-se assim — o número b em geral não existe. No campo real a questão toma outro aspecto, mais geral. Façamos, no conjunto (R), uma repartição em duas classes, do modo seguinte: pomos numa classe (A) todos os números racionais r tais que $r^n < a$, e numa classe (B) todos os números racionais s tais que $s^n > a$. Estas duas classes constituem um corte (A, B), como fàcilmente se verifica, e definem, portanto, um número real l. Uma de duas: ou as duas classes teem um número racional a separá-las, o qual será o *número racional* l, tal que $l^n = a$, ou não; se não tiverem, o número l, então *irracional*, definido pelo corte, é a raíz $\sqrt[n]{a}$. Em qualquer dos dois casos, existe a raíz, logo, *no campo real desaparece a impossibilidade da radiciação.*

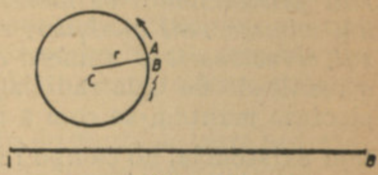
A conclusão mantém-se se a fôr um número real qualquer, de modo que pode afirmar-se — *no campo real existem todos os números da forma* $\sqrt[n]{a}$ *onde* a *é um número real qualquer, e êsses números são, em geral, irracionais.* O número a pode, por sua vez, ser já o resultado de uma radiciação, ou mais de uma; o raciocínio mantém-se com a mesma fôrça: por exemplo, tem existência, no campo real, o número $\sqrt{2+\sqrt{3+\sqrt{5}}}$.

4.— ¿Os números irracionais são todos da forma $\sqrt[n]{a}$?

O resultado a que acabamos de chegar chama a nossa atenção: para o problema seguinte — se, partindo dos números inteiros, operarmos sôbre êles com as quatro primeiras operações (as operações racionais: somar, subtrair, multiplicar e dividir) obtemos sempre números do campo racional; se introduzirmos mais a operação da radiciação, saímos do campo racional. ¿Será então verdade que os números irracionais só possam obter-se a partir da radiciação? ou, por outras palavras, ¿será verdade que todos os números irracionais são da forma $\sqrt[n]{a}$?

Nada do que foi até agora dito nos autoriza a dar resposta afirmativa; a definição que demos de número real é *independente* da radiciação. Só depois da teoria feita, mostrámos que as raizes existem sempre, como números em geral irracionais, deixando aberta a possibilidade da existência de números irracionais que não sejam raizes. Ora, existem de facto tais números; um dêles é o número π, talvez o número mais célebre da Matemática.

5. — O número π. Consideremos uma circunferência de raio qualquer r (fig. 26); demonstra-se que o comprimento P da circunferência (do qual o leitor pode ter uma imagem considerando esticado o fio $\overline{AB}$ que, dobrado, formasse a circunferência) é dado pela fórmula



(fig. 26)

1) $\quad P = 2r.\pi$

ou

2) $\quad P = d.\pi$

sendo d o diâmetro da circunferência. Se escrevermos a igualdade 2) sob a forma

2 a) $$\pi = \frac{P}{d}$$

teremos que — π *é a razão do perímetro de qualquer circunferência para o seu diâmetro.*

Pois bem, demonstra-se que *o número π é irracional*(1) *e que não é exprimível por uma raiz ou combinação finita de raizes, actuando sôbre números inteiros.*

Êste número, pela sua importância enorme, tem sido objecto de muitos estudos; está calculado actualmente com 707 (!) casas decimais. Vamos dá-lo com as primeiras 20:

3) $\qquad 3{,}14159265358979323846\ldots.$

Não julgue o leitor que nas aplicações práticas seja preciso conhecer tantas casas decimais; na prática, a não ser em determinações de um extremo rigôr, toma-se:

4) $\qquad \pi = 3{,}1416$

e mesmo, freqüentemente, apenas

5) $\qquad \pi = 3{,}14.$

Por exemplo: se um homem, ao abrir um poço, põe êste problema — o poço tem dois metros de diâmetro, ¿quanto tem de circunferência? — a resposta é imediata: $P = 2.3{,}14 = 6{,}28$ m. Se tomássemos o valor dado por 4), teríamos $P = 2.3{,}1416 = 6{,}2832$ m., resposta cuja precisão já não interessa, porque ninguém vai entrar com décimos de milímetro em medida de poços!

O leitor poderá preguntar nesta altura — ¿há problemas de medida cujo grau de precisão exija o conhecimento das 707 decimais com que está calculado π? Não! muito longe, extremamente longe disso!

---

(1) — O leitor que olhe para a igualdade 2 a) sem atender bem ao seu significado, pode ser levado a supôr, erradamente, que π é um número racional, visto que é $\frac{m}{n}$ a expressão geral dos números racionais; mas, para que assim seja, é preciso que *m* e *n* sejam números inteiros, o que não acontece em 2 a).

No século XVI, houve quem calculasse π com 127 decimais; pois bem, a respeito dêsse cálculo, diz Jacques Hadamard, um dos melhores matemáticos do nosso tempo: «fornece já uma precisão tal, que, sôbre uma circunferência com um raio mil milhões de vezes maior que a distância da terra ao sol, o êrro seria mil milhões de vezes menor que a espessura de um cabelo»!

Por aqui se vê que grau de precisão, absolutamente fora das necessidades, mesmo do laboratório mais rigoroso, fornece o valor actualmente conhecido.

Para quê, então? Por causa dos problemas de carácter teórico que se levantam à volta dêste número e dos outros que, como êle, são irracionais e não exprimíveis por meio de radicais.

6. — A correspondência $\overline{R} \longleftrightarrow (P)$. Os dois contínuos

Deixemos o número π que tem dado, durante mais de trinta séculos, água pela barba aos melhores matemáticos, e retomemos o fio das nossas considerações — estudo do campo real.

No parágrafo 10 do capítulo III verificámos que a correspondência *n.º racional* $\longleftrightarrow$ *ponto da recta* não era biunívoca, e nessa *carência* de biunivocidade fundamentámos tôda a construção que nos levou ao campo real. E' a altura de preguntar se a carência desapareceu, isto é, se a correspondência

n.º real $\longleftrightarrow$ *ponto da recta*

é biunívoca. Tudo foi feito para que assim seja. A correspondência é, de facto, biunívoca: a todo o número real corresponde um ponto da recta, a todo o ponto da recta corresponde um número real. Por outras palavras, e recorrendo ao conceito de equivalência, dado no parágrafo 8 do cap. I — *o conjunto dos pontos da recta é equivalente ao conjunto dos números reais.*

Atrás [cap. I parág. 16] designámos por *tipo do contínuo* o tipo do conjunto dos pontos da recta. Agora encontramos outro conjunto infinito — o conjunto $(\overline{R})$ — que lhe é *equivalente*. É por conseqüência, natural dizer que o conjunto dos números reais é também do *tipo do contínuo*. Temos, assim, dois contínuos *equivalentes*: *o contínuo geométrico*, conjunto (P) dos pontos da recta, e o *contínuo aritmético*, conjunto $(\overline{R})$, dos números reais.

Êste resultado não deve surpreender o leitor que tenha visto, a partir do parágrafo 10 do cap. III, tôda a construção orientada no sentido do desaparecimento da negação da biunivocidade entre os números e os pontos da recta.

7.—Os conjuntos (N), (R), $(\overline{R})$ e os dois tipos de infinito

Consideremos os quatro conjuntos:

(N) — dos números inteiros
(R) — dos números racionais
($\overline{\text{R}}$) — dos números reais
(P) — dos pontos da recta.

No parágrafo 16 do cap. I, tomámos os conjuntos (N) e (P) e, estudando a possível comparação dêles, pusemos o seguinte problema: ¿os dois tipos — do *numerável*, conjunto (N), e do *contínuo*, conjunto (P) — serão, de facto, distintos do ponto de vista da equivalência? ou não?

Vamos agora responder a esta pregunta, que lá foi deixada em aberto.

Antes, porém, de o fazer, notemos que, no caminho, encontrámos mais dois conjuntos infinitos — (R) e $(\overline{R})$ — em relação aos quais será interessante pôr também o problema da comparação: ¿constituem os conjuntos (R) e $(\overline{R})$ *tipos novos*, ou ligam-se a algum dos dois já considerados: *numerável* e *contínuo?* A questão está resolvida para o conjunto $(\overline{R})$ que, como vimos no parágrafo anterior, tem o tipo do contínuo.

Mas, o conjunto (R) ¿que tipo tem? *¿o do numerável, o do contínuo,* ou *um tipo novo?*

A resposta mais natural *parece* ser a seguinte — o conjunto (R) não tem o tipo do contínuo, porque tôda a crítica e construção feitas no capítulo III resultam precisamente da carência de biunivocidade de (R) em relação a (P); mas (R) também não deve ter o tipo do numerável, porque a distinção dêstes dois conjuntos é evidente — (R) é *denso* e (N) não o é. Há mesmo uma diferença muito maior entre (N) e (R) do que entre (R) e $(\overline{R})$: enquanto (N) tem apenas pontos isolados da recta, de modo que, entre dois pontos quaisquer da recta, há um número finito ou nenhum ponto de (N) (v. na fig. 27 os segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{PQ}$), pelo contrário, em qualquer segmento de recta, por mais pequeno que seja, há sempre uma infinidade de pontos de (R). A diferença entre (N) e (R) é *palpável, visual, intuítiva;* a diferença entre (R) e $(\overline{R})$ não é intuítiva, só pode apreender-se pelo raciocínio, pela crítica, pela exigência de compatibilidade lógica. O tipo de (R), que é diferente de $(\overline{R})$, deve ser também diferente do tipo do numerável, deve ser um tipo novo.

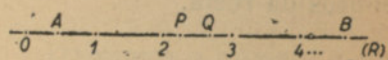


Fig. 27

Êste é o raciocínio mais natural, aquele que a natureza imperiosa das coisas *parece* exigir. E, no entanto, *êste raciocínio não está certo* — (R) não tem um tipo novo, *(R) tem o tipo do numerável.*

Esta afirmação constitue, à primeira vista pelo menos, um autêntico desafio ao bom-senso, à intuíção; ela não é, por isso, menos verdadeira. O leitor está prevenido já de que é perigoso entrar no domínio do infinito ùnicamente armado da sua intuïção, do seu bom-senso... a lâmina aguda da razão não pode, aqui, descansar um instante...

¿A que se chama conjuntos equivalentes? àqueles entre os quais se pode estabelecer uma correspondência biunívoca [cap. I, parágrafos 8 e 14]; se se provar que é possível estabelecer entre *(R)* e *(N)* uma correspondência dessas, ficará provada a sua equivalência. Para o demonstrar, procedamos da seguinte maneira: vamos agrupar todos os números racionais de modo tal que, em cada grupo, a soma dos dois têrmos de cada fracção seja a mesma; todo o número que já figure num grupo anterior será suprimido. Teremos assim:

1.º grupo: soma 2 $\rightarrow \frac{1}{1} = 1$;

2.º grupo: soma 3 $\rightarrow \left(\frac{1}{2}, \frac{2}{1} = 2\right)$;

3.º grupo: soma 4 $\rightarrow \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{2} = 1, \frac{3}{1} = 3\right)$;

4.º grupo: soma 5 $\rightarrow \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, \frac{4}{1} = 4\right)$.

Coloquemos, agora, êstes grupos a seguir uns aos outros e façamos corresponder a cada número dêles um número inteiro:

$$\begin{array}{ccccc} \text{soma 2} & \text{soma 3} & \text{soma 4} & \text{soma 5} & \text{soma 6} \\ 1, & \left(\frac{1}{2}, 2\right), & \left(\frac{1}{3}, 3\right), & \left(\frac{1}{4}, \frac{2}{3}, \frac{3}{2}, 4\right), & \left(\frac{1}{5}, 5\right), \ldots \\ \downarrow & \downarrow\ \downarrow & \downarrow\ \downarrow & \downarrow\ \downarrow\ \downarrow\ \downarrow & \downarrow\ \downarrow \\ 1, & 2, 3, & 4, 5, & 6, 7, 8, 9, & 10, 11, \ldots \end{array}$$

Seja $\frac{m}{n}$ um número racional irredutível *qualquer*; êste número figura no grupo da soma $m + n$; dentro dêsse grupo, ocupa um lugar determinado e corresponde-lhe, portanto, um determinado número inteiro, e um só; reciprocamente, na correspondência acima estabelecida, a cada número inteiro corresponde um número racional e um só. ¿Que concluir daqui? que os dois conjuntos são equivalentes! logo, (R) *tem o tipo do numerável.*

O nosso problema está, portanto, notàvelmente simplificado: nos quatro conjuntos considerados, só encontrámos dois tipos — *o tipo do numerável,* a que pertencem *(N)* e *(R)*, e *o tipo do contínuo,* a que pertencem $(\overline{R})$ e *(P)*. Resta portanto, apenas, comparar êstes dois tipos, para o que bastará, por exemplo, comparar *(N)* e $(\overline{R})$. ¿Que se passa? O leitor, pôsto de sobreaviso pelo resultado surpreendente do tipo de *(R)*, hesitará agora, certamente, em responder o que a intuïção lhe dita: que os dois tipos são distintos — ¿não será possível, por qualquer artifício subtil, no género do usado na demonstração anterior, estabelecer uma biunivocidade entre *(N)* e $(\overline{R})$? Demonstra-se que tal não é, de modo nenhum, possível, mas a demonstração é um pouco delicada e não a faremos aqui.

Aceite êste resultado, teremos finalmente reduzido os quatro conjuntos que até aqui nos apareceram — os três campos numéricos e a recta — a dois tipos de infinito — numerável e contínuo — *distintos um do outro.*

Resumindo os caracteres dêles, temos o quadro seguinte, onde o sinal + representa o carácter afirmativo e o sinal — o negativo:

Conjunto	Ordenado	Infinito	Denso	Tipo do numerável	Tipo do contínuo
(N)	+	+	—	+	—
(R)	+	+	+	+	—
$(\overline{R})$	+	+	+	—	+
(P)	+	+	+	—	+

8. — ¿São o tipo do numerável e o do contínuo os únicos existentes?

Os resultados do parágrafo anterior sugerem esta pregunta — ¿os tipos do numerável e do contínuo esgotam os tipos possíveis de conjuntos infinitos? ou, por outras palavras, ¿todo o conjunto infinito tem que ser, necessáriamente, numerável ou equivalente a *(P)?*

No último quartel do século passado, Georg Cantor, matemático alemão, criou, quàsi sòzinho, um capítulo das Ciências Matemáticas, denominado *Teoria dos Conjuntos.* A essa teoria pertencem os resultados da comparação de tipos que acabamos de apresentar e muitos outros em que aqui não falamos.

Um dos factos fundamentais estabelecidos na Teoria dos Conjuntos [1] é a existência de uma *infinidade de tipos de infinito,* ordenando-se numa hierarquia em que o tipo do numerável constitue o primeiro elemento e o tipo do contínuo o segundo *conhecido* [2].

¿Qual é o instrumento de que a Teoria dos Conjuntos se serve para construir essa hierarquia duma infinidade de tipos?—Sempre o mesmo instrumento, aquela maravilhosa *noção de correspondência,* nascida humildemente nas contagens rudimentares do homem primitivo e que, transportada ao domínio do infinito, se transforma num instrumento poderoso de classificação, no prodigioso escalpelo da mais extraordinária anatomia até hoje feita pelo homem — *a anatomia do infinito!*

9. — Anatomia e Fisiologia

Mas, assim como o corpo humano, no complexo das suas propriedades e reacções, não fica inteiramente conhecido mesmo com a mais minu-

(1) — Pelo próprio *Cantor* em 1897.

(2) — *Conhecido,* porque não se sabe ainda se existe ou não um tipo intermediário entre um e outro.

ciosa anatomia possível, porque a ela escapa tudo o que diz respeito às leis orgânicas que a êsse corpo pertencem como sêr vivo, assim a noção de correspondência não dá conta de tudo o que o infinito contém de propriedades e possibilidades — *a noção de correspondência, só por si, dá-nos a anatomia, não a fisiologia do infinito.*

Esta ideia, que nos dá uma limitação do valor da noção de correspondência para a compreensão do domínio do infinito, há de ser desenvolvida mais adiante (vol. 2.º); por agora, lembramos ao leitor o seguinte, que já a justifica: no quadro do parágrafo 7, verifica-se que *a noção de correspondência é insensível ao denso,* visto que ela confere o mesmo tipo (numerável) ao conjunto *(R)* que é denso e ao conjunto *(N)* que não o é. Ora, para a estrutura íntima de um conjunto infinito, o ser ou não denso é duma importância enorme, como a própria visualização geométrica o mostra.

10. — As operações Em cada um dos campos numéricos até agora estudados, inteiro e racional, procedeu-se, após a construção do campo, ao estudo das operações. Aqui, seguir-se-ia o mesmo trabalho; não o vamos fazer, no entanto, limitando-nos às seguintes indicações gerais:

1.ª — O instrumento de definição e estudo das operações é, naturalmente, aquele mesmo conceito de *corte* que serviu para a criação do campo real. O estudo e determinação das propriedades das operações, em tôda a sua minúcia, é, porém, às vezes, bastante árduo; mas êsse trabalho pode simplificar-se por meio de um outro instrumento, tirado do conceito de *corte*(1).

(1) — O leitor que deseje ver como esta teoria se faz duma maneira completa pode consultar, por exemplo, *Lições de Algebra e Análise,* Vol. 1.º, capítulo I, parág. 47 e seg., do Autor.

2.ª — Como resultado geral, pode afirmar-se que se manteem as propriedades do campo racional; surgem, no entanto, algumas circunstâncias novas:

a) desaparece a impossibilidade da radiciação, como vimos no parág. **3** dêste capítulo;

b) a operação da potenciação aparece com uma possibilidade nova, que exige uma definição nova: aparecer um número irracional no expoente da potência. Por exemplo, uma potência da forma $2^{\sqrt{2}}$. ¿Que significado se pode atribuir-lhe? não temos por agora elementos para responder a esta pregunta; mais tarde o faremos.

3.ª — As operações são sempre definidas de maneira tal que, quando os números reais que nelas entram se reduzem a números racionais, elas coincidem com as operações do mesmo nome, já anteriormente estudadas no campo racional.

4.ª — Como já se fez notar a propósito do campo racional (cap. II, parág. **25**), a identidade de propriedades não deve entender-se num sentido rígido; as propriedades anteriores são mantidas, mas certas relações que não tinham significado no campo anterior passam a tê-lo no campo mais geral. Por exemplo, no campo racional, as igualdades $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$, $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a . b}$ só teem significado para um número restrito de valores de *a*, *b* e *n*; no campo real elas teem existência universal, quaisquer que sejam os valores que essas letras tomem.

5.ª — Mantém-se a impossibilidade da subtracção — no caso em que o aditivo é menor que o subtractivo.

CAPÍTULO VI

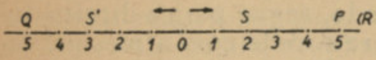
Números relativos

1. — As grandezas que podem ser tomadas em dois sentidos

Certas grandezas, e daquelas que com maior freqüência aparecem na vida corrente, são susceptíveis de ser tomadas em dois sentidos opostos.

Quando se quere, por exemplo, construir uma escala dos tempos, por meio da qual se possam fixar numèricamente os acontecimentos históricos — é isso que faz um calendário — toma-se um acontecimento para origem — no nosso calendário o nascimento de Cristo — e, a partir dessa origem, contam-se os tempos *para lá* e *para cá*. Assim, cada acontecimento vem marcado com um *número* e uma *indicação* correspondente à posição que êsse acontecimento ocupa em relação à origem; por exemplo, se dissermos: Sócrates morreu em 399 a. C., Galileu nasceu em 1564 d. C., referimo-nos a dois acontecimentos perfeitamente localizados no decorrer dos tempos, dois acontecimentos que distam um do outro 1962 anos.

Anàlogamente, quando consideramos o movimento de um ponto, saído duma certa posição inicial e realizando-se ao longo duma trajectória rectilínea, precisamos, para indicar a posição do ponto num determinado instante, de saber, entre outras coisas, em qual dos dois sentidos opostos, sôbre a recta, o movimento se realiza.



(fig. 28)

Seja (fig. 28) a recta R, e o ponto O, tomado nela como origem. Se o ponto móvel tem uma velocidade tal que, em cada segundo, percorre uma unidade de comprimento, sabemos que, ao fim, por exemplo, de 5 segundos, êle percorreu 5 unidades, mas essa simples indicação não nos permite saber se o móvel está em P ou em Q. Se, porém, ao número 5 juntarmos um sinal indicativo do sentido do movimento, a dúvida desaparece. Êsse sinal pode ser qualquer, mas há a necessidade de tomar um, sôbre o qual nos entendamos de uma vez para sempre.

2. — Aspecto aritmético da questão

Isto, só por si, não chega. Se o móvel, partindo de O, está no ponto P ao fim de 5 segundos, isso equivale a afirmar que, nesse tempo, êle percorreu um segmento $\overline{OP}$ de *medida* 5. Suponhamos agora que êle muda o sentido de movimento e continua com a mesma velocidade durante mais três segundos. Ao fim dêsses três segundos, êle estará no ponto S (fig. 28), a uma distância 2 da origem.

¿Como obter êste resultado final, a partir dos dois resultados parciais, nas duas fases que considerámos no movimento? Muito simplesmente: — à medida, 5, do segmento percorrido na primeira fase, *subtraímos* a medida, 3, do segmento percorrido na segunda; o resultado traduz-se pela operação $5-3=2$.

Assim, o resultado final obtém-se por meio de uma *subtracção*. Mas ¿é isso sempre possível?

3. — Dificuldades; como sair delas

É fácil ver que não. Suponhamos que o móvel, partindo de O, sempre com a velocidade de uma unidade por segundo, segue para a direita durante 5 segundos, pára e retrocede com a mesma velocidade durante oito segundos. Ao fim dêsse tempo, o exame da fig. 28 mostra que êle está em S', três divisões à esquerda de O; *mas êste resultado é impossível de obter por uma subtracção,* visto que nesta o aditivo, 5, seria menor que o subtractivo, 8.

Quere dizer — se desejamos obter, *sempre,* resultados de problemas como os postos acima, *temos que nos libertar da impossibilidade da subtracção.*

Mais uma vez nos aparece uma impossibilidade operacional a limitar as condições de resolução de um problema, a *negar* a possibilidade de dar, *em todos os casos,* um resultado numérico.

Que fazer? Como das outras vezes, impõe-se a criação de um novo campo numérico.

A fonte da criação vai ser precisamente a dificuldade encontrada; o método da criação vai ser o método, já duas vezes experimentado com sucesso, da *negação da negação.*

4. — O conceito de número relativo

Em obediência ao que acabamos de dizer, damos a seguinte definição:

Sejam a *e* b *dois números reais quaisquer; à diferença* a — b *chamaremos número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme fôr* $a > b$, $a = b$, $a < b$.

Se fôr $a > b$, o número relativo (positivo) coincidirá com o resultado que, nos campos numéricos anteriores, aprendemos a determimar; se fôr $a < b$, o número relativo (negativo) tomar-se-à como igual à diferença b — a, precedida do sinal — (menos). Por exemplo, a diferença $8-5$ é o número relativo *positivo* 3; a diferença $5-8$ é o número relativo *negativo* -3.

Como se vê, os elementos novos que aparecem no campo relativo são os *números negativos*; os números positivos são os números reais anteriormente conhecidos, encorporados agora no novo campo com uma qualificação nova. O mesmo aconteceu nas construções anteriores: quando se criou o campo racional, os números naturais entraram nêle com tôdas as suas propriedades de números naturais e adquiriram propriedades novas de relação, resultantes da sua nova qualificação como números racionais. Por exemplo, o número *natural* 2 segue imediatamente o número *natural* 1 e precede imediatamente o número *natural* 3; mas o número *racional* 2 não segue imediatamente o número *racional* 1, nem precede imediatamente o número *racional* 3; entre 2 e 1, como entre 2 e 3, há uma infinidade de números *racionais*.

O mesmo acontece quando os números racionais são encorporados no campo real — adquirem propriedades novas de relação. Por exemplo, o número racional $\frac{5}{2}$ e o número racional 3, combinados pela operação de radiciação, conduzem a impossibilidade no campo racional e a possibilidade no campo real.

Na vida social, as coisas não se passam de modo diferente. Um homem tem propriedades diferentes conforme o *campo*, o *agregado* em que se considera. O homem como membro da sua família, da sua freguesia, do seu país, ou da humanidade, é biològicamente o mesmo, mas socialmente diferente. As suas propriedades variam conforme o agregado que se considere.

Por exemplo, uma dessas propriedades — a elegibilidade para certos cargos públicos — não tem existência quando o homem é considerado como membro da sua família, e surge apenas quando é tomado como membro duma nacionalidade.

5. — Qualidades de um ser. Números relativos e absolutos

Ao conjunto de relações em que um determinado ser se encontra com os outros seres dum agregado chamaremos as *qualidades* dêsse sêr. Pelo que acabamos de ver, as qualidades dum sêr dependem do meio em que êle se considera imerso — *a agregado novo, qualidades novas dos sêres que o compõem.* O número 2 tem umas qualidades como membro do campo racional e outras como membro do campo real; tem agora outras como membro do campo relativo.

Pode haver necessidade de especificar que um número real a é considerado independentemente das suas qualidades no campo relativo — o número a será dito, então, um número *absoluto.*

Para distinguir o número absoluto a do número positivo que, no campo relativo, dêle resulta pela nova qualificação, representa-se êste por $+a$; a diz-se, então, o *valor absoluto* ou o *módulo* de $+a$; anàlogamente, o número absoluto a diz-se o *módulo* ou o *valor absoluto* do número negativo $-a$; para indicar o valor absoluto de um número, encerra-se êsse número entre dois traços verticais, de modo que se tem sempre

$$1) \qquad |+a| = |-a| = a.$$

6. — O conjunto dos números relativos e o conjunto dos pontos da recta

Vamos pôr, em relação ao campo real relativo, o mesmo problema que pusemos em relação ao campo real absoluto — natureza da correspondência entre os seus elementos e os pontos da recta. ¿Que se passa? A definição dada no parágrafo 4 e o exame da fig. 28 mostram-nos imediatamente o seguinte: dada a recta orientada, isto é, a recta em que se tomou um ponto O para *origem* e dois sentidos opostos — de O para a direita, ou *sentido positivo,* e de O para a esquerda, ou *sentido negativo* — há uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos seus pontos e o conjunto dos números relativos — a todo o ponto à direita de O corresponde um número real positivo e recìprocamente; a todo o ponto à esquerda de O um número real negativo e recìprocamente; ao próprio O corresponde o número *zero.*

Dêste modo, todo o segmento $\overline{OP}$ tem, qualquer que seja a posição de P em relação a O, uma *medida;* essa medida é *positiva* se P está à direita, e *negativa* se está à esquerda de O.

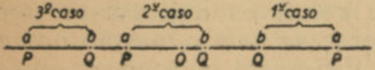
A igualdade

$$\overline{OP} = a \cdot \bar{u} \qquad 2)$$

passa, assim, a ter significado *universal,* qualquer que seja a posição de P na recta orientada; ao número a chama-se, em qualquer hipótese, *medida algébrica* do segmento $\overline{OP}$.

7. — Ordenação Uma vez definido o campo relativo, é preciso proceder ao estudo das suas propriedades estruturais. Comecemos pela *ordenação.*

Dados dois números reais relativos a e b, aos quais correspondem biunìvocamente os pontos P e Q, diz-se que é $a > b$, $a = b$ ou $a < b$ conforme P está à direita de Q, P coincide com Q, ou P está à esquerda de Q. Na fig. 29 estão indicados três



(fig. 29)

casos de posição relativa com dois números relativos *a* e *b* em que $|a| > |b|$; mostra-nos ela que:

1.º — de dois números positivos, é maior o que tiver maior valor absoluto;

2.º — *qualquer* número positivo é maior que *qualquer* número negativo;

3.º — de dois números negativos, é maior o que tiver menor valor absoluto.

Quanto à *igualdade*, da definição dada acima, resulta que dois números relativos são iguais sempre que teem o mesmo valor absoluto e o mesmo *sinal;* um mesmo número relativo pode, portanto, ser definido por uma infinidade de diferenças $p - q$ de números reais — exige-se apenas que não varie o sinal nem o valor absoluto da diferença. Por exemplo, o número -3 pode ser definido pelas diferenças $20 - 23$, $15 - 18$, $1 - 4$, $0 - 3$ etc., em geral pela diferença $a - (a - 3)$ onde *a* é um número real qualquer (zero inclusivé).

Isto tem importância porque, dado um número negativo $p - q$, qualquer, se pode escrever, chamando *r* à diferença $q - p$:

$$p - q = 0 - r = -r \tag{3}$$

portanto, *todo o número negativo pode ser considerado como uma diferença em que o aditivo é zero e o subtractivo é o número real igual ao seu módulo.*

8. — Operações As operações sôbre números relativos definem-se por extensão imediata das operações com o mesmo nome estudadas no campo real. Procurará manter-se, tanto quanto possível, o conjunto de leis operatórias e atender-se-á, nos resultados, à definição dada no parág. 4 dêste capítulo. Os resultados novos, quando aparecerem, serão sempre conseqüências dêstes critérios.

Por exemplo, quanto à *adição e subtracção* será [cap. I, parág. 18 e 22]:

$$(p-q)+(r-s)=p-q+r-s=p+r-q-s=(p+r)-(q+s)$$
$$(p-q)-(r-s)=p-q-r+s=p+s-q-r=(p+s)-(q+r)$$

donde fàcilmente se tiram as regras práticas de cálculo, utilizando, quando algum dos dados seja negativo, a observação feita no final do parágrafo anterior.

Em particular, tem-se $a+(-b)=a+(o-b)=$ $=a+o-b=a-b$; $a-(-b)=a-(o-b)=a+b-$ $-o=a+b$ isto é, *somar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo; subtrair um número negativo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo.*

No campo relativo, as duas operações aparecem-nos assim unificadas numa só, que se chama *adição algébrica.*

Quanto à *multiplicação,* tem-se [cap. I, parág. 18, 19 e 22]:

$$\begin{aligned}(p-q).(r-s) &= p.(r-s)-q.(r-s)=pr-ps-(qr-qs)\\ &= pr-ps-qr+qs=pr+qs-ps-qr\\ &= (pr+qs)-(ps+qr).\end{aligned}$$

Em particular, tem-se:

$$4)\quad \begin{cases}(+a).(+b)=(a-o).(b-o)=+a.b\\ (+a).(-b)=(a-o).(o-b)=-a.b\\ (-a).(+b)=(o-a).(b-o)=-a.b\\ (-a).(-b)=(o-a).(o-b)=+a.b\end{cases}$$

igualdades que conteem a conhecida *regra dos sinais.*

A *divisão* define-se como habitualmente — inversa da multiplicação — e para ela vale uma regra dos sinais semelhante à da multiplicação.

A *potenciação* (que, para expoentes fraccionários, abrange a radiciação) exige um estudo um pouco mais demorado. Se o expoente é um *número real absoluto,* ou, no novo campo, um *número positivo*, servem as mesmas definições com os resultados agora ampliados; por exemplo, da regra dos sinais resulta que, se o expoente é inteiro e a base positiva, a potência é positiva, mas que, se a base é negativa, há que atender à paridade do expoente—se o expoente é par, a potência é positiva, se o expoente é impar, a potência é negativa—o que se resume nas igualdades

$$5)\quad (+a)^{n} = +a^{n}, \quad (-a)^{2K} = +a^{2K}, \quad (-a)^{2K+1} = -a^{2K+1}.$$

Em particular, é

$$6)\quad (+1)^{n} = +1, \quad (-1)^{2K} = +1, \quad (-1)^{2K+1} = -1.$$

Se o expoente é negativo, há que dar uma definição nova; o critério é, como sempre, a manutenção das leis formais [cap. 1.º, parág. 28]. Faz-se o seguinte raciocínio: seja qual fôr o valor que a^{-r} venha a ter, *queremos* que sôbre esta potência se opere como se opera no campo real; em particular, deve ser, portanto, $a^{r} . a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^{r-r} = a^{0}$. Mas [cap. 1.º, parág. 29] a esta potência fomos já levados a atribuir o significado $a^{0} = 1$, logo deve ser $a^{r} . a^{-r} = 1$, donde

$$7)\qquad a^{-r} = \frac{1}{a^{r}}$$

e é esta a definição que adoptamos; por exemplo, será

$$2^{-2} = \frac{1}{2^{2}} = \frac{1}{4}, \quad (-4)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{(-4)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{(-4)^{3}}} = \frac{1}{\sqrt{-64}}.$$

9. — ¿Desapareceram todas as impossibilidades operatórias?

Verificámos no 1.º capítulo que, no campo natural, são em geral impossíveis as operações inversas — subtracção, divisão, radiciação([1]). Nos capítulos seguintes vimos cair, uma a uma, essas impossibilidades — a da divisão no campo racional, a da radiciação no campo real, a da subtracção agora no campo relativo. Parece-nos, por conseqüência, que eliminámos tôdas as impossibilidades e, dêsse ponto de vista, o trabalho de generalizações progressivas a que temos procedido adquire uma alta significação. Estamos, porém, na situação do caminheiro que, após longa jornada, vê subitamente alongar-se o caminho com uma volta inesperada, escondida numa dobra do terreno. As impossibilidades cairam, uma a uma, mas com a introdução do campo relativo, surgiu uma nova! Procuremos, com efeito, levar ao fim a determinação da potência que acima definimos $(-4)^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-64}}$. ¿A que é igual $\sqrt{-64}$?; por definição, será o número x tal que $x^2 = -64$; ora, da regra dos sinais, deduzida no parágrafo anterior, resulta que o quadrado de *qualquer* número real relativo é sempre positivo; logo, não existe a raiz procurada.

Dá-se o mesmo sempre que, o índice do radical sendo par, o radicando é negativo; com efeito, $\sqrt[2K]{-a}$ seria aquele número x tal que $x^{2K} = -a$ e não existe

([1]) — E logaritmação. Poremos de parte, por enquanto, o estudo desta operação.

número x que satisfaça a esta igualdade — *quer* x *seja positivo, quer seja negativo, a potência* x^{2K} *é sempre positiva* [parág. 8, fórmula 5].

Estamos, portanto, em face duma nova impossibilidade.

O estudo completo da radiciação, que o leitor fará sem dificuldade, à luz das definições dadas, leva aos resultados seguintes:

Radicando positivo	*indice par — duas raizes, uma pos. outra neg.*
	indice impar — uma raiz, pos.
Radicando negativo	*indice par — nenhuma raiz*
	indice impar — uma raiz, neg.

A' parte o aspecto pouco *harmonioso* que êste quadro tem, êle apresenta-nos uma negação de existência, a qual possìvelmente causará embaraços.

O leitor, familiarizado com o processo de generalização, que até aqui tem visto operar, pensará imediatamente que essa dificuldade pode dar origem a um novo campo numérico que se obterá por negação dessa negação. Isso é, evidentemente, realizável, mas, antes de o fazer, ponhamos a pregunta — ¿vale a pena? ¿ haverá, porventura, problemas cuja plena resolução exija a ultrapassagem da negação mencionada?

Não estamos por enquanto em condições de responder devidamente a esta pregunta; fá-lo-hemos no segundo volume desta obra. Lá veremos que existem tais problemas e que êles exigem, de facto, a passagem a um campo numérico mais geral.

FIM DO VOI. I

ÍNDICE

ÊSTE VOLUME ACABOU DE
SE IMPRIMIR AOS 24 DE
JUNHO DE 1941 — FOI COM-
POSTO NA OFICINA DAS
EDIÇÕES COSMOS, RUA DO
LORETO, *50-1.º* — FOI IM-
PRESSO NA *GRÁFICA LIS-
BONENSE*, RUA DA ROSA, 238
LISBOA