BENTO DE JESUS CARAÇA

Interpolação e Integração Numérica

LISBOA — 1933

BENTO DE JESUS CARAÇA

Interpolação e Integração Numérica

LISBOA — 1933

CAPÍTULO I

Elementos da teoria das Diferenças

1) *Diferenças finitas duma função. O símbolo Δ.*

Considere-se uma função $f(x)$ da qual são conhecidos $n+1$ valores correspondentes a $n+1$ valores do argumento em progressão aritmética: $x_0 = a$, $x_1 = a+h$, $x_2 = a+2h, \cdots x_n = a+nh$.

Da função $f(x)$ pode ser conhecida ou não a expressão analítica. Realiza-se o primeiro caso numa tábua de logarítmos onde são dados os valores de log x para valores de x diferindo de uma unidade e onde portanto é $h = 1$. Realiza-se o segundo, por exemplo, numa tábua bruta de mortalidade onde estão indicados, de ano em ano, os números de sobreviventes de entre um grupo de indivíduos inicialmente escolhido e considerado.

Chama-se *diferença* da função num ponto qualquer x_i e representa-se pelo símbolo $\Delta f(x_i)$ a diferença algébrica dos valores da função nos pontos $x_i + h$ e x_i. É portanto

$$\Delta f(x_i) = f(x_i + h) - f(x_i) = f[a + (i+1)h] - f(a + ih)$$

É manifesto que com os $n+1$ valores dados da função se podem construir n diferenças $\Delta f(x_0), \Delta f(x_1), \cdots \Delta f(x_{n-1})$.

Define-se anàlogamente *diferença de 2.ª ordem* da função $f(x)$ no ponto x_i e representa-se pelo símbolo $\Delta^2 f(x_i)$, pela igualdade

$$\begin{aligned}\Delta^2 f(x_i) &= \Delta f(x_i + h) - \Delta f(x_i)\\ &= \Delta f[a + (i+1)h] - \Delta f(a + ih)\end{aligned}$$

e é evidente que com as n diferenças de 1.ª ordem se podem construir $n-1$ diferenças de 2.ª ordem.

Estes conceitos generalizam-se e define-se em geral *diferença de ordem* k no ponto x_i pela igualdade

$$\Delta^k f(x_i) = \Delta^{k-1} f(x_i + h) - \Delta^{k-1} f(x_i).$$

Para a função considerada podem construir-se $n-k+1$ dife-diferenças de ordem k.

Assim, pela construção sucessiva das diferenças de ordem superior, reconhece-se que o número dessas diferenças diminui de uma unidade quando a ordem aumenta de uma unidade, de modo que com os $n+1$ valores dados se pode chegar até à formação de *uma* diferença de ordem n e essa tomada no ponto inicial a como imediatamente mostra a construção da táboa de diferenças no caso considerado. A essa táboa costuma dar-se a a disposição seguinte:

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	...
a	$f(a)$				
		$\Delta f(a)$			
$a+h$	$f(a+h)$		$\Delta^2 f(a)$		
		$\Delta f(a+h)$		$\Delta^3 f(a)$	
$a+2h$	$f(a+2h)$		$\Delta^2 f(a+h)$		
		$\Delta f(a+2h)$		$\Delta^3 f(a+h)$	
$a+3h$	$f(a+3h)$		$\Delta^2 f(a+2h)$		
		$\Delta f(a+3h)$		$\Delta^3 f(a+2h)$	
...	...	...	...	...	
		$\Delta f[a+(n-4)h]$		$\Delta^3 f[a+(n-5)h]$	
$a+(n-3)h$	$f[a+(n-3)h]$		$\Delta^2 f[a+(n-4)h]$		
		$\Delta f[a+(n-3)h]$		$\Delta^3 f[a+(n-4)h]$	
$a+(n-2)h$	$f[a+(n-2)h]$		$\Delta^2 f[a+(n-3)h]$		
		$\Delta f[a+(n-2)h]$		$\Delta^3 f[a+(n-3)h]$	
$a+(n-1)h$	$f[a+(n-1)h]$		$\Delta^2 f[a+(n-2)h]$		
		$\Delta f[a+(n-1)h]$			
$a+nh$	$f(a+nh)$				

Exemplo. Construir uma tábua de diferenças dos valores de log sen x para valores de x, de minuto em minuto, desde 18° 20′ a 18° 24′. Utilizar-se hão sete decimais nos logaritmos.

Com os valores tirados das tábuas de Schrön constrói-se imediatamente a tábua seguinte

x	log sen x	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
18° 20′	$\overline{1},4976824$				
		$0,0^3 3811$			
18° 21′	$\overline{1},4980635$		$-0,0^6 4$		
		$0,0^3 3807$		0	
18° 22′	$\overline{1},4984442$		$-0,0^6 4$		$0,0^6 1$
		$0,0^3 3803$		$0,0^6 1$	
18° 23′	$\overline{1},4988245$		$-0,0^6 3$		
		$0,0^3 3800$			
18° 24′	$\overline{1},4992045$				

A formação da tábua é extremamente simples: a cada número subtrai-se o que lhe fica imediatamente acima; a diferença coloca-se na coluna seguinte entre os dois. Êste processo de construção tem como conseqüência imediata que a diferença entre o primeiro e último números duma coluna (o último tomado como aditivo) é igual à soma de todos os números da coluna seguinte.

Esta propriedade permíte verificar ràpidamente uma tábua de diferenças.

2) *O símbolo E.*

Seja dada a mesma função que se considerou no parágrafo anterior. Sôbre ela é definido o símbolo E da maneira seguinte:

$$E^0\,[f(x_i)] = f(x_i)$$

$$\left.\begin{array}{l} E^k\,[f(x_i)] = f(x_i + kh) \\ E^{-k}\,[f(x_i)] = f(x_i - kh) \end{array}\right\} k \text{ inteiro e positivo.}$$

A aplicação do símbolo E a $f(x)$ equivale portanto a aumentar o argumento de tantas vezes o acréscimo h quantas as unidades do *índice* k de E.

O símbolo E assim definido goza de propriedades importantes que vamos passar a expor.

1.ª) Qualquer que seja o inteiro n têm-se

$$E^n [f(a) + f(b) + \cdots + f(l)] = E^n [f(a)] + $$
$$+ E^n [f(b)] + \cdots + E^n [f(l)].$$

Com efeito,

$$E^n [f(a) + f(b) + \cdots + f(l)] = f(a + nh) + $$
$$+ f(b + nh) + \cdots + f(l + nh) = E^n [f(a)] + $$
$$+ E^n [f(b)] + \cdots + E^n [f(l)]$$

O símbolo E goza portanto da propriedade distributiva em relação à soma.

2.ª) Sendo k uma constante, tem-se

$$E^n [k . f(a)] = k . E^n [f(a)]$$

Com efeito

$$E^n [k . f(a)] = k f(a + nh) = k . E^n [f(a)]$$

O símbolo E é portanto permutável com uma constante multiplicativa.

3.ª) Sendo m e n dois números inteiros, têm-se

$$E^m \left[E^n [f(a)] \right] = E^n \left[E^m [f(a)] \right] = E^{m+n} [f(a)]$$

Com efeito

$$E^m \left[E^n [f(a)] \right] = E^m [f(a + nh)] = $$
$$= f[a + (m + n) h] = E^{m+n} [f(a)],$$

$$E^n\left[E^m\left[f(a)\right]\right]=E^n\left[f(a+mh)\right]=$$

$$=f\left[a+(m+n)h\right]=E^{m+n}\left[f(a)\right]$$

O símbolo E goza portanto da permutabilidade e multiplicatividade em relação aos seus índices em virtude do que na operação de produto êstes podem ser tratados como expoentes ordinários.

Do que fica demonstrado resulta que o símbolo E pode ser tratado como uma quantidade algébrica qualquer em tôdas as operações correspondentes às propriedades apresentadas. Para essas êle pode portanto ser considerado, no tratamento algébrico, como um *factor* pelo qual se multiplica $f(x_i)$ e que ulteriormente se reporá na sua verdadeira significação [1].

Escreveremos portanto daqui em diante $E^n f(a)$ em vez de $E^n\left[f(a)\right]$.

Por outro lado, da definição e da propriedade 3.ª resulta

$$E^n E^{-n} f(a)=E^0 f(a)=f(a)$$

donde $E^0=1$, de modo que o *factor* E^n fica com significação determinada para todos os valores inteiros positivos ou negativos de n e para $n=o$.

---

[1] É indispensável ter sempre bem presente que a assimilação do símbolo E a um factor que multiplica $f(x_i)$ diz respeito apenas às propriedades demonstradas. Assim, por exemplo, $\frac{Ef(x_i)}{Ef(x_k)}$ não é igual a $\frac{f(x_i)}{f(x_k)}$ mas sim a $\frac{f(x_i+h)}{f(x_k+h)}=$ $=E\left[\frac{f(x_i)}{f(x_k)}\right]$; $Ef(x_i).Ef(x_k)$ não é igual a $E^2\left[f(x_i).f(x_k)\right]$ mas sim a $f(x_i+h).f(x_k+h)=E\left[f(x_i).f(x_k)\right]$. Deve ter-se também sempre presente que o símbolo E só tem significação ligado a uma função e portanto quando esta revista a forma dum produto, dum quociente, etc., deve pôr-se isso bem explícito para não deixar lugar a dúvidas, como sucederia por exemplo com a expressão $Ef(x_i)f(x_k)$.

3) *Relação entre os símbolos E e Δ. Conseqüências.*

Por definição de diferença, tem-se

$$\begin{aligned}\Delta f(x_i) &= f(x_i + h) - f(x_i)\\ &= E f(x_i) - E^0 f(x_i)\\ &= (E - 1) f(x_i)\end{aligned}$$

As operações Δ e $E - 1$ sôbre $f(x)$ conduzem portanto aos mesmos resultados e é lícito, em virtude do que atrás ficou dito e com as restrições que lá foram postas, escrever a *igualdade simbólica*

1) $$\Delta = E - 1$$

cuja significação se não deve perder de vista — sempre que tiver de se operar sôbre uma função por meio do símbolo Δ, essa operação pode ser substituída pela operação $E - 1$ com tôdas as propriedades (e só com essas) que são inerentes ao símbolo E; inversamente a operação por meio do símbolo E pode ser substituída pela operação $1 + \Delta$ com as propriedades do símbolo Δ que adiante vamos estudar e que são necessàriamente conseqüências das do símbolo E. Assim, por exemplo, a operação Δ^n $(n > 0)$ pode ser substituída pela operação $(E - 1)$,^{n} com tôdas as conseqüências dêste desenvolvimento porquanto nêle só figuram potências, produtos dessas potências por constantes e somas dêsses produtos; inversamente a operação E^n pode ser substituída pela operação $(1 + \Delta)^n$.

Propriedades do símbolo Δ.

1.ª) Sendo n um número inteiro e positivo, tem-se

$$\Delta^n [f(a) + f(b) + \cdots + f(l)] = \Delta^n f(a) + \\ + \Delta^n f(b) + \cdots + \Delta^n f(l)$$

Com efeito, de 1) resulta

$$\Delta^n [f(a)+f(b)+\cdots+f(l)]=(E-1)^n [f(a)+f(b)+\cdots+f(l)]$$
$$=(E-1)^n f(a)+(E-1)^n f(b)+\cdots+(E-1)^n f(l)$$
$$=\Delta^n f(a)+\Delta^n f(b)+\cdots+\Delta^n f(l).$$

2.ª) Sendo k uma constante e n um número inteiro e positivo, tem-se

$$\Delta^n [k f(a)]=k\,\Delta^n f(a).$$

Com efeito,

$$\Delta^n [k f(a)]=(E-1)^n [k f(a)]=k\,(E-1)^n f(a)=k\,\Delta^n f(a).$$

3.ª) Sendo m e n dois números inteiros e positivos tem-se

$$\Delta^m [\Delta^n f(a)]=\Delta^n [\Delta^m f(a)]=\Delta^{m+n} f(a).$$

Com efeito,

$$\Delta^m [\Delta^n f(a)]=(E-1)^m (E-1)^n f(a)=$$
$$=(E-1)^{m+n} f(a)=\Delta^{m+n} f(a),$$

$$\Delta^n [\Delta^m f(a)]=(E-1)^n (E-1)^m f(a)=$$
$$=(E-1)^{m+n} f(a)=\Delta^{m+n} f(a).$$

As propriedades operatórias apresentadas são portanto idênticas às do símbolo E. As restantes propriedades operatórias do símbolo Δ podem ser estudadas ou directamente partindo da sua definição ou utilizando a igualdade simbólica 1) depois de estudar as propriedades correspondentes do símbolo E. Adiante serão estudadas mais algumas propriedades de Δ.

A relação 1) é fecunda pelas suas conseqüências das quais vamos apresentar mais duas:

1.ª) *Expressão da diferença de ordem* n *duma função nos valores dessa função em pontos diferentes do argumento.*

Tem-se

$$\Delta^n f(a) = (E - 1)^n f(a)$$

$$= \left[E^n - n\, E^{n-1} + \binom{n}{2} E^{n-2} - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k} + \cdots + (-1)^n \right] f(a)$$

$$= E^n f(a) - n\, E^{n-1} f(a) + \binom{n}{2} E^{n-2} f(a) - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} E^{n-k} f(a) + \cdots + (-1)^n f(a)$$

donde

2) $$\Delta^n f(a) = f(a + nh) - n f[a + (n-1) h] + \binom{n}{2} f[a + (n-2) h] - \cdots + (-1)^k \binom{n}{k} f[a + (n-k) h] + \cdots + (-1)^n f(a).$$

2.ª) *Expressão do valor duma função num ponto nas diferenças sucessivas da função.*

Tem-se

$$f(a + nh) = E^n f(a) = (1 + \Delta)^n f(a)$$

$$= \left[1 + n\, \Delta + \binom{n}{2} \Delta^2 + \cdots + \binom{n}{k} \Delta^k + \cdots + \Delta^n \right] f(a)$$

donde

$$f(a + nh) = f(a) + n\, \Delta f(a) + \binom{n}{2} \Delta^2 f(a) + \cdots + \binom{n}{k} \Delta^k f(a) + \cdots + \Delta^n f(a).$$

4) *Diferenças dum Polinómio.*

Seja dado o polinómio inteiro em x de grau n

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

A sua diferença no ponto x tem por expressão

$$\Delta P(x) = P(x+h) - P(x)$$

$$= a_0 \left[(x+h)^n - x^n\right] + a_1 \left[(x+h)^{n-1} - x^{n-1}\right] +$$

$$+ \cdots + a_{n-1} [x + h - x]$$

$$= a_0 \left[nh\, x^{n-1} + \binom{n}{2} h^2 x^{n-2} + \cdots + nh^{n-1} x + h^n\right] +$$

$$+ a_1 \left[(n-1)\, h\, x^{n-2} + \cdots + h^{n-1}\right] + \cdots + a_{n-1} h$$

$$4) \qquad \Delta P(x) = n\, a_0\, h\, x^{n-1} + \left[\binom{n}{2} a_0 h^2 + \right.$$

$$\left. + (n-1)\, a_1\, h \right] x^{n-2} + \cdots + a_{n-1} h.$$

Esta igualdade mostra que a diferença de um polinómio de grau n é um polimónio de grau $n-1$.

Anàlogamente a diferença de 2.ª ordem de $P(x)$, $\Delta^2 P(x) = \Delta [\Delta P(x)]$ será, visto ser a diferença dum polinómio de grau $n-1$, um polimónio de grau $n-2$ e assim sucessivamente de modo que a diferença de ordem n de $P(x)$ é um polinómio de grau zero, isto é, uma constante.

E como da definição de diferença resulta imediatamente que, sendo k uma constante, se tem $\Delta k = 0$, conclui-se que a diferença de ordem $n+1$ (e por conseqüência tôdas as seguintes) de um polinómio de grau n é nula.

O cálculo das diferenças sucessivas dum polinómio como acima foi indicado é incómodo; adiante será apresentada uma maneira mais simples e rápida de proceder a essa determinação.

É contudo fácil o cálculo da sua diferença de ordem n (n igual ao grau do polinómio).

Com efeito, tem-se

$$\Delta^n P(x) = a_0 \Delta^n x^n + a_1 \Delta^n x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \Delta^n x + \Delta^n a_n$$
$$= a_0 \Delta^n x^n$$

visto que os restantes termos do segundo membro são nulos, pelo que acima ficou dito.

Por outro lado de $\Delta x^n = nh\, x^{n-1} + \cdots$ resulta

5) $$\Delta^n x^n = n\, h\, \Delta^{n-1} x^{n-1}$$

porquanto os restantes termos se anulam pela mesma razão. Da igualdade acima (5) resulta, mudando sucessivamente n em $n-1$ $n-2, \cdots 2, 1,$

$$\Delta^{n-1} x^{n-1} = (n-1)\, h\, \Delta^{n-2} x^{n-2}$$
$$\Delta^{n-2} x^{n-2} = (n-2)\, h\, \Delta^{n-3} x^{n-3}$$
$$\cdots$$
$$\Delta^2 x^2 = 2\, h\, \Delta x$$
$$\Delta x = h$$

Multiplicando agora ordenamente tôdas estas igualdades e reduzindo termos semelhantes, vem

6) $$\Delta^n x^n = n!\, h^n$$

donde

7) $$\Delta^n P(x) = n!\, a_0\, h^n$$

5) ***Diferença*** $\Delta^n\, 0^p$.

Consideremos a função $f(x) = x^p$ e calculemos a sua diferença de ordem n. Tem-se, em virtude de 2),

$$\Delta^n x^p = (x + nh)^p - n[x + (n-1)h]^p +$$
$$+ \binom{n}{2}[x + (n-2)h]^p - \cdots +$$
$$+ (-1)^k \binom{n}{k}[x + (n-k)h]^p + \cdots + (-1)^n x^p$$

Fazendo, para simplificar os cálculos, $h = 1$, vem

$$8)\ \Delta^n x^p = (x + n)^p - n(x + n - 1)^p + \binom{n}{2}(x + n - 2)^p -$$
$$- \cdots + (-1)^k \binom{n}{k}(x + n - k)^p + \cdots + (-1)^n x^p$$

Fazendo agora em ambos os membros desta igualdade $x = 0$, obtém-se a diferença de ordem n de x^p no ponto zero, ou, como abreviadamente se diz, a diferença de ordem n de 0^p. A sua expressão é

$$9)\ \Delta^n 0^p = n^p - n(n-1)^p + \binom{n}{2}(n-2)^p - \cdots +$$
$$+ (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)^p + \cdots + (-1)^{n-1} n.\,1^p.$$

Esta diferença goza de propriedades importantes.

1.ª) $\Delta^n 0^p = n\,\Delta^{n-1} 1^{p-1}$

Com efeito, mudando em 8) n em $n-1$, p em $p-1$ e fazendo $x = 1$ vem:

$$\Delta^{n-1} 1^{p-1} = n^{p-1} - (n-1)(n-1)^{p-1} +$$
$$+ \binom{n-1}{2}(n-2)^{p-1} - \cdots + (-1)^k \binom{n-1}{k}(n-k)^{p-1} +$$
$$+ \cdots + (-1)^{n-2}(n-1)\,2^{p-1} + (-1)^{n-1} 1^{p-1}$$

$$=\frac{1}{n}\Big[n^p - n\,(n-1)^p + \binom{n}{2}(n-2)^p - \cdots$$

$$+(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^p + \cdots + (-1)^{n-2}\binom{n}{2}2^p +$$

$$+(-1)^{n-1}\,n\,.\,1^p\Big]$$

$$=\frac{1}{n}\,\Delta^n\,0^p.$$

$2.^a)$ $\Delta^n\,0^p = n\,[\Delta^n\,0^{p-1} + \Delta^{n-1}\,0^{p-1}]$

Com efeito, da formula (definição de diferença de ordem n) $\Delta^{n-1} f(x+h) = \Delta^n f(x) + \Delta^{n-1} f(x)$

resulta, fazendo $f(x) = x^{p-1}$, $x = 0$, $h = 1$

$$\Delta^{n-1}\,1^{p-1} = \Delta^n\,0^{p-1} + \Delta^{n-1}\,0^{p-1}$$

e, em virtude da propriedade 1.ª, vem

10) $$\Delta^n\,0^p = n\,[\Delta^n\,0^{p-1} + \Delta^{n-1}\,0^{p-1}]$$

$3.^a)$ 11) $$\Delta^n\,0^p = \begin{cases} 0 \rightarrow n > p \\ n! \rightarrow n = p \end{cases}$$

Com efeito, a diferença de um polinómio, de ordem superior ao seu grau, é nula e por outro lado, de 6) resulta fazendo $x = 0$ e $h = 1$, $\Delta^n\,0^n = n!$

A conjugação dêste resultado com o obtido de 9) fazendo $p = n$ determina a expressão seguinte

12) $$n! = n^n - n\,(n-1)^n + \binom{n}{2}(n-2)^n - \cdots$$

$$+(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)^n + \cdots + (-1)^{n-1}\,n \text{ (1)}$$

(1) *V. E.* Pascal, Calcolo delle Differenze Finite pág. 237.

As expressões 10) e 11) juntamente com a evidente $\Delta\, 0^p = 1$, para p qualquer inteiro e positivo, permitem calcular muito simplesmente uma tabela de diferenças sucessivas de 0^h $(p = 1, 2, 3, \cdots)$ (*V.* Tabela 1) ([1]).

Com efeito, por exemplo no quadro

p	$\Delta\, 0^p$	$\Delta^2\, 0^p$	$\Delta^3\, 0^p$	$\Delta^4\, 0^p$	$\Delta^5\, 0^p$
1	1	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0
3	1	$a = 6$	6	0	0
4	1	$b = 14$	$c = 36$	24	0
5	1	$d = 30$	$e = 150$	$f = 240$	120

preenchem-se imediatamente a primeira coluna, a primeira diagonal e tôdas as casas que lhe ficam para a direita (zero); as outras casas preenchem-se em virtude de 10) do modo seguinte: qualquer elemento é igual ao produto da ordem da diferença da sua coluna pela soma dos dois elementos da linha anterior que lhe ficam por cima (um) e à esquerda (o outro).

Assim $a = 2\,(1 + 2) = 6$; $b = 2\,(1 + a) = 14$
$c = 3\,(a + 6) = 36$; $d = 2\,(1 + b) = 30$
$e = 3\,(b + c) = 150$; $f = 4\,(c + 24) = 240$.

As diferenças $\Delta^n\, 0^p$ são de aplicação freqüente. Elas empregam-se com vantagem por exemplo na construção de uma táboa de diferenças das potências de números inteiros sucessivos.

Proponhamo-nos por exemplo formar uma táboa de diferenças da potência 5.ª dos números inteiros

(Vide Tabela da página seguinte)

([1]) *V.* Whittaker and Robinson — The Calculus of Observations pág. 7.

x	$y=x^5$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0					
		$\Delta^1 0^5 = 1$				
1	1		$\Delta^2 0^5 = 30$			
		31		$\Delta^3 0^5 = 150$		
2	32		180		$\Delta^4 0^5 = 240$	
		211		390		$\Delta^5 0^5 = 120$
3	243		570		360	
		781		750		120
4	1024		1320		480	
		2101		1230		120
5	3125		2550		600	
		4651		1830		120
6	7776		4380		720	
		9031		2550		120
7	16807		6930		840	
		15961		3390		120
8	32768		10320		960	
		26281		4350		120
9	59049		14670		1080	
		40951		5430		120
10	100000		20100		1200	

Basta pôr no quadro o primeiro número de cada uma das colunas (no caso presente: $0^5=0$, $\Delta\, 0^5=1$, $\Delta^2\, 0^5=30$, $\Delta^3\, 0^5=150$, $\Delta^4\, 0^5=240$, $\Delta^5\, 0^5=120$), tirados da tabela 1) e proceder em seguida à construção da tabela da direita para a esquerda — cada número soma-se com o que lhe está à esquerda e imediatamente acima, a soma escreve-se à esquerda e imediatamente abaixo (conseqüência imediata, como é evidente, da definição de diferença). Assim $120+240=360$, $240+150=390$, $360+$ $+390=750, \ldots$

Operando dêste modo fica-se com a tabela construída até $x=5$ inclusive (seis valores de x determinam uma diferença de 5.ª ordem). Porém como a diferença de 5.ª ordem de x^5 é constante e tem portanto o mesmo valor para qualquer valor de x, a tabela pode ser prolongada indefinidamente para o que basta preencher a coluna das diferenças de 5.ª ordem e continuar na construção do quadro como acima foi indicado. Obtém-se assim todos os resultados colocados abaixo dos traços horizontais.

A observação que acaba de ser feita tem cabimento sempre que a diferença de uma certa ordem duma função é constante — nestas condições pode prolongar-se indefinidamente o quadro das diferenças, pelo mesmo mecanismo acima indicado.

À tabela anterior pode dar-se também a seguinte disposição, como de resto a todo o quadro de diferenças. É igualmente simples a construção neste caso: preenche-se a primeira linha e constrói-se o quadro da direita para a esquerda — cada número soma-se com o que lhe está à esquerda, a soma escreve-se por debaixo dêste último.

x	$y=x^5$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$	$\Delta^5 y$
0	0	$\Delta\, 0^5 = 1$	$\Delta^2\, 0^5 = 30$	$\Delta^3\, 0^5 = 150$	$\Delta^4\, 0^5 = 240$	$\Delta^5\, 0^5 = 120$
1	1	31	180	390	360	120
2	32	211	570	750	480	120
3	243	781	1320	1230	600	120
4	1024	2101	2550	1830	720	120
5	3125	4651	4380	2550	840	120
6	7776	9031	6930	3390	960	120
7	16807	15961	10320	4350	1080	120
8	32768	26281	14670	5430	1200	120
9	59049	40951	20100	6630	1320	120
10	100000	61051	26730	7950	1440	120

6) *Função Factorial.*

Dá-se o nome de função factorial $(x)_n$ à função definida do modo seguinte

$$\begin{cases} (x)_n = x\,(x-h)\,(x-2\,h)\cdots[x-(n-1)\,h] & n \text{ int. e pos.} \\ (x)_0 = 1 \end{cases}$$

Suporemos sempre, por razão de simplicidade, $h=1$, de modo que a função toma a forma

$$13)\quad \begin{cases} (x)_n = x\,(x-1)\,(x-2)\cdots(x-n+1) \\ (x)_0 = 1 \end{cases}$$

A função factorial goza de algumas propriedades importantes de que a seguir vamos ocupar-nos.

Diferenças sucessivas de $(x)_n$.

Supondo o acréscimo do argumento igual à unidade tem-se

$$\Delta\,(x)_n = (x+1)_n - (x)_n$$

E como

$$(x+1)_n = (x+1)\,x\,(x-1)\cdots(x-n+2) = (x+1)\,(x)_{n-1}$$

$$(x)_n = x\,(x-1)\cdots(x-n+1) = (x-n+1)\,(x)_{n-1}$$

vem

$$\text{14)} \qquad \Delta\,(x)_n = n\,(x)_{n-1}\,.$$

A regra para a formação da diferença de $(x)_n$ é portanto em tudo análoga à regra para a formação da derivada de x^n.

Do mesmo modo se tem

$$\text{14-A)} \quad \begin{cases} \Delta^2\,(x)_n = n\,\Delta\,(x)_{n-1} = n\,(n-1)\,(x)_{n-2} \\ \cdots \\ \Delta^p\,(x)_n = n\,(n-1)\cdots(n-p+1)\,(x)_{n-p} \\ \cdots \\ \Delta^n\,(x)_n = n!\,(x)_0 = n! \end{cases}$$

A comodidade da formação das diferenças sucessivas desta função constitui uma das razões principais, como adiante se verá, do largo emprêgo que dela é feito.

Conseqüências.

De 14) resulta, dividindo ambos os membros por $n!$,

$$\frac{\Delta\,(x)_n}{n!}=\frac{(x)_{n-1}}{(n-1)!} \quad \text{ou} \quad \frac{(x+1)_n-(x)_n}{n!}=\frac{(x)_{n-1}}{(n-1)!}$$

donde

$$15) \qquad \frac{(x+1)_n}{n!}=\frac{(x)_n}{n!}+\frac{(x)_{n-1}}{(n-1)!}.$$

Esta relação permite construir fàcilmente uma táboa de valores de $\frac{(x)_n}{n!}$ e portanto de $(x)_n$ para valores de x formando progressão aritmética de razão 1.

A relação 15) pode ser fàcilmente generalizada.

Com efeito, tem-se

$$\Delta^p\,(x)_n=(E-1)^p\,(x)_n=\Big[E^p-p\,E^{p-1}+\cdots+(-1)^k\tbinom{p}{k}E^{p-k}+$$

$$+\cdots+(-1)^p\Big]\,(x)_n$$

$$=(x+p)_n-p\,(x+p-1)_n+\cdots$$

$$+(-1)^k\tbinom{p}{k}\,(x+p-k)_n+\cdots+(-1)^p\,(x)_n,$$

e como por outro lado $\Delta^p\,(x)_n=\frac{n!}{(n-p)!}\,(x)_{n-p}$, tem-se, introduzindo êste valor na igualdade anterior e dividindo ambos os membros por $n!$,

$$16) \qquad \frac{1}{n!}\Big[(x+p)_n-p\,(x+p-1)_n+\cdots$$

$$+(-1)^k\tbinom{p}{k}\,(x+p-k)_n+\cdots+(-1)^p\,(x)_n\Big]=\frac{(x)_{n-p}}{(n-p)!}.$$

Fazendo $p=n$, esta igualdade toma o aspecto particular

$$16\text{-A)}\quad \frac{(x+n)_n}{n!}-\frac{(x+n-1)_n}{(n-1)!}+\frac{(x+n-2)_n}{2!\,(n-2)!}+\cdots$$

$$+(-1)^k\frac{(x+n-k)_n}{k!\,(n-k)!}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{(x+1)_n}{(n-1)!}+(-1)^n\frac{(x)_n}{n!}=1.$$

7) *Desenvolvimento da função factorial segundo as potências de* x. *Números de Stirling de 1.ª espécie.*

A função $(x)_n$, como um polinómio inteiro em x de grau n que é, pode escrever-se sob a forma

$$17)\quad (x)_n=S_{n1}\,x+S_{n2}\,x^2+\cdots+S_{n\mu}\,x^\mu+\cdots+S_{nn}\,x^n$$

onde os coeficientes $S_{n\mu}$ $(\mu=1,\cdots n)$ são números, aos quais se dá o nome de *números de Stirling de 1.ª espécie.*

A natureza dêstes números determina-se fàcilmente.

Com efeito, efectuando o produto $x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$ reconhece-se imediatamente que

$$18)\quad \begin{cases} S_{n1}=(-1)^{n-1}(n-1)! \\ S_{n2}=(-1)^{n-2}[1.\,2.\cdots(n-2)+\cdots+2.\,3.\cdots(n-2)\,(n-1)] \\ \quad =(-1)^{n-2}(n-1)!\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right] \\ \cdots \\ S_{n\mu}=(-1)^{n-\mu}[1.\,2.\cdots(n-\mu)+\cdots+\mu\,(\mu+1)\cdots(n-1)] \\ \quad =(-1)^{n-\mu}(n-1)!\left[\frac{1}{1.\,2.\cdots(\mu-1)}+\cdots\right. \\ \quad \left.+\frac{1}{(n-\mu+1)\cdots(n-1)}\right] \end{cases}$$

Isto é, em geral o número $S_{n\mu}$ é o produto do factor $(-1)^{n-\mu}$ pela soma dos produtos $n-\mu$ a $n-\mu$ dos $n-1$ primeiros números inteiros, ou, o que é o mesmo, é o produto do factor $(-1)^{n-\mu}.(n-1)!$ pela soma dos recíprocos dos produtos $\mu-1$ a $\mu-1$ dos $n-1$ primeiros números inteiros.

O cálculo dêstes números pelas relações 18) é manifestamente incómodo, sobretudo para valores elevados de n. Há porém maneira mais simples de os calcular, como vamos ver (1).

Da relação evidente $(x)_{n+1}=(x-n).(x)_n$ resulta, desenvolvendo ambos os membros, segundo 17),

$$S_{n+1\,1}\,x+S_{n+1\,2}\,x^2+\cdots+S_{n+1\,\mu}\,x^\mu+\cdots+S_{n+1\,n+1}\,x^{n+1}=$$

$$=(x-n)\left[S_{n1}\,x+S_{n2}\,x^2+\cdots+S_{n\mu}\,x^\mu+\cdots S_{nn}\,x^n\right]$$

$$=-n\,S_{n1}\,x+(S_{n1}-n\,S_{n2})\,x^2+\cdots+(S_{n\,\mu-1}-n\,S_{n\mu})\,x^\mu+$$

$$+\cdots+S_{nn}\,x^{n+1}.$$

Identificando os coeficientes de x^μ em ambos os membros desta igualdade, obtém-se a relação importante

$$19)\qquad S_{n+1\,\mu}=S_{n\,\mu-1}-n\,S_{n\mu}$$

a qual permite calcular por recorrência os números de Stirling de 1.ª espécie. Para êste efeito utilizam-se os valores iniciais, conhecidos a priori

$$S_{n0}=0,\ S_{n1}=(-1)^{n-1}.(n-1)!,\ S_{nm}=\begin{cases}1\rightarrow\ m=n\ (2)\\ 0\rightarrow\ m>n\end{cases}$$

As formulas 18) (à parte a 1.ª) podem assim ser empregadas com vantagem no cálculo das somas indicadas nos seus segundos membros.

---

(1) *V.* Charles Jordan. — Statistique Mathématique pág. 13.
(2) *V.* Tabela 2.

Derivadas de $(x)_n$ tomadas no ponto zero.

Desenvolvendo $(x)_n$ pela fórmula de Mac-Laurin, tem-se

$$(x)_n = \Big[(x)_n\Big]_0 + x\left[\frac{d\,(x)_n}{d\,x}\right]_0 + \frac{x^2}{2!}\left[\frac{d^2\,(x)_n}{d\,x^2}\right]_0 + \cdots$$

$$+ \frac{x^\mu}{\mu!}\left[\frac{d^\mu\,(x)_n}{d\,x^\mu}\right]_0 + \cdots + \frac{x^n}{n!}\left[\frac{d^n\,(x)_n}{d\,x^n}\right]_0.$$

Identificando êste desenvolvimento com 17) obtém-se

$$20)\quad \left[\frac{d^\mu\,(x)_n}{d\,x^\mu}\right]_0 = \mu!\; S_{n\,\mu} \qquad\qquad \mu = 1,\ 2, \cdots n$$

relação importante de que adiante será feita aplicação.

8) *Desenvolvimento das potências inteiras de* x *segundo factoriais. Números de Stirling de 2.ª espécie.*

Dada a função $y = x^n$ (n inteiro e positivo) vamos provar que ela se pode desenvolver do modo seguinte:

$$21)\quad x^n = T_{n\,1}\,(x)_1 + T_{n\,2}\,(x)_2 + \cdots + T_{n\,\mu}\,(x)_\mu + \cdots + T_{n\,n}\,(x)_n$$

onde os coeficientes $T_{n\,\mu}$ ($\mu = 1,\ 2, \cdots n$) são números, aos quais se dá o nome de *números de Stirling de 2.ª espécie.*

Com efeito, tem-se sucessivamente

$$x^n = x.\ x^{n-1}$$

$$\frac{x^{n-1}}{x-1} = P_{n-2}\,(x) + \frac{\alpha_1}{x-1}$$

$$\frac{P_{n-2}\,(x)}{x-2} = P_{n-3}\,(x) + \frac{\alpha_2}{x-2}$$

. . .

$$\frac{P_2(x)}{x-(n-2)} = P_1(x) + \frac{\alpha_{n-2}}{x-(n-2)}$$

$$\frac{P_1(x)}{x-(n-1)} = P_0(x) + \frac{\alpha_{n-1}}{x-(n-1)}$$

$$P_0(x) = 1$$

donde

$$x^n = x.\,x^{n-1}$$

$$x^{n-1} = (x-1).\,P_{n-2}(x) + \alpha_1 \qquad x$$

$$P_{n-2}(x) = (x-2).\,P_{n-3}(x) + \alpha_2 \qquad x\,(x-1)$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$P_2(x) = [x-(n-2)].\,P_1(x) + \alpha_{n-2} \qquad x\,(x-1)\cdots[x-(n-3)]$$

$$P_1(x) = x-(n-1) + \alpha_{n-1} \qquad x\,(x-1)\cdots[x-(n-2)]$$

Multiplicando ambos os membros destas igualdades pelos factores que estão indicados à direita, somando ordenadamente e reduzindo termos semelhantes, resulta

$$x^n = \alpha_1\,x + \alpha_2\,x\,(x-1) + \cdots + \alpha_{n-2}.\,x\,(x-1)\cdots[x-(n-3)] +$$
$$+ \alpha_{n-1}.\,x\,(x-1)\cdots[x-(n-2)] + x\,(x-1)\cdots[x-(n-1)]$$

ou

$$x^n = \alpha_1\,(x)_1 + \alpha_2\,(x)_2 + \cdots + \alpha_{n-2}.\,(x)_{n-2} + \alpha_{n-1}.\,(x)_{n-1} + (x)_n$$

que é manifestamente da forma 21) (1).

---

(1) Note-se de passagem que dêste desenvolvimento se conclui $\Delta^n\,x^n = \Delta^n\,(x)_n$ e, por 14), $\Delta^n\,x^n = n!$ o que coincide com o valor achado em 6) para $h = 1$.

Da dedução feita resulta $T_{nn} = 1$ e, por outro lado, da regra de Ruffini conclui-se $\alpha_1 = T_{n1} = 1$. Êstes dois valores dos $T_{n\mu}$ juntamente com os valores evidentes $T_{n0} = 0$, $T_{nm} = 0$ para $m > n$, constituem os valores imediatos iniciais dos números de Stirling de 2.ª espécie.

Determinação dos números $T_{n\mu}$.

A dedução feita anteriormente indica uma maneira simples de determinar estes números. Com efeito, tem-se como conseqüência imediata da regra de Ruffini

$$\alpha_1 = T_{n1} = 1, \ \alpha_2 = T_{n2} = P_{n-2}(2), \ \alpha_3 = T_{n3} = P_{n-3}(3), \cdots$$

$$\alpha_{n-1} = T_{n\,n-1} = P_1(n-1), \ \alpha_n = T_{nn} = 1,$$

de modo que, dividindo x^{n-1} por $x - 1$, o quociente desta divisão por $x - 2$, o novo quociente obtido por $x - 3$ e assim sucessivamente, os restos obtidos nessas divisões sucessivas são precisamente os números procurados.

Como exemplo da aplicação dêste algorítmo, desenvolvamos x^5. Tem-se

$$\begin{array}{c|cccccc}
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \underline{|0} \\
1 & & 1 & 1 & 1 & 1 & \\
\hline
 & 1 & 1 & 1 & 1 & \underline{|1} & \\
2 & & 2 & 6 & 14 & & \\
\hline
 & 1 & 3 & 7 & \underline{|15} & & \\
3 & & 3 & 18 & & & \\
\hline
 & 1 & 6 & \underline{|25} & & & \\
4 & & 4 & & & & \\
\hline
 & 1 & \underline{|10} & & & &
\end{array}$$

O desenvolvimento de x^5 é portanto da forma

$$x^5 = (x)_1 + 15\ (x)_2 + 25\ (x)_3 + 10\ (x)_4 + (x)_5\,.$$

É possível estabelecer para o cálculo dos $T_{n\,\mu}$ uma relação de recorrência semelhante à que foi deduzida para os números de Stirling de 1.ª espécie (1).

Com efeito, em virtude de 21), tem-se anàlogamente

$$x^{n+1} = T_{n+1\,1}\ (x)_1 + T_{n+1\,2}\ (x)_2 + \cdots + T_{n+1\,\mu}\ (x)_\mu + \\ + \cdots + T_{n+1\,n+1}\ (x)_{n+1}$$

Mas por outro lado

$$x^{n+1} = x \,.\, x^n = T_{n\,1}\ x\ (x)_1 + T_{n\,2}\ x\ (x)_2 + \cdots + T_{n\,\mu}\ x\ (x)_\mu + \\ + \cdots + T_{n\,n}\ x\ (x)_n\,.$$

Ora

$(x-\mu)\,(x)_\mu$

$$(x)_{\mu+1} = x\ (x)_\mu - \mu\ (x)_\mu$$

donde

$$x\ (x)_\mu = (x)_{\mu+1} + \mu\ (x)_\mu$$

e, substituindo, resulta

$$x^{n+1} = T_{n1}\ [(x)_2 + (x)_1] + T_{n2}\ [(x)_3 + 2\ (x)_2] + \cdots + \\ + T_{n\,\mu}\ [(x)_{\mu+1} + \mu\ (x)_\mu] + \cdots + T_{n\,n}\ [(x)_{n+1} + n\ (x)_n]\,.$$

Identificando os coeficientes de $(x)_\mu$ nos dois desenvolvimentos de x^{n+1} resulta

---

(1) *V.* Charles Jordan — loc. cit. pág. 14.

$$22)\qquad T_{n+1\,\mu} = T_{n\,\mu-1} + \mu\, T_{n\,\mu}.$$

Por meio desta relação constroi-se fàcilmente uma tabela de números de Stirling de 2.ª espécie partindo dos valores iniciais atrás apontados (¹).

Relações entre os números de Stirling de 1.ª e de 2.ª espécie.

Se no segundo membro de 21) se desenvolverem as factoriais $(x)_\mu$ segundo 17), obtém-se

$$x^n = T_{n1}\, x + T_{n2}\left[S_{21}\, x + S_{22}\, x^2\right] + \cdots +$$
$$+ T_{n\mu}\left[S_{\mu 1}\, x + S_{\mu 2}\, x^2 + \cdots + S_{\mu\mu}\, x^\mu\right] + \cdots +$$
$$+ T_{nn}\left[S_{n1}\, x + S_{n2}\, x^2 + \cdots + S_{n\mu}\, x^\mu + \cdots + S_{nn}\, x^n\right]$$

ou

$$x^n = \left[T_{n1}\, S_{11} + T_{n2}\, S_{21} + \cdots + T_{n\mu}\, S_{\mu 1} + \cdots + T_{nn}\, S_{n1}\right] x +$$
$$+ \left[T_{n2}\, S_{22} + T_{n3}\, S_{32} + \cdots + T_{n\mu}\, S_{\mu 2} + \cdots + T_{nn}\, S_{n2}\right] x^2 +$$
$$+ \cdots + \left[T_{n\mu}\, S_{\mu\mu} + T_{n\,\mu+1}\, S_{\mu+1\,\mu} + \cdots + T_{nn}\, S_{n\mu}\right] x^\mu +$$
$$+ \cdots + T_{nn}\, S_{nn}\, x^n$$

donde

$$\begin{cases} T_{nn}\, S_{nn} = 1 \\ \cdots \\ T_{n\mu}\, S_{\mu\mu} + T_{n\,\mu+1}\, S_{\mu+1\,\mu} + \cdots + T_{nn} S_{n\mu} = 0 \\ \cdots \\ T_{n1}\, S_{11} + T_{n2}\, S_{21} + \cdots + T_{n\mu}\, S_{\mu 1} + \cdots + T_{nn}\, S_{n1} = 0 \end{cases}$$

(¹) *V.* Tabela VII.

Isto é, os números de Stirling de 1.ª e 2.ª espécie são ligados em geral pelas relações

$$23) \quad T_{n\mu}\, S_{\mu\mu} + T_{n\,\mu+1}\, S_{\mu+1\,\mu} + \cdots + T_{n\,n}\, S_{n\,\mu} =$$

$$= \begin{cases} 0 \rightarrow \mu \neq n \\ 1 \rightarrow \mu = n \end{cases} \qquad \mu = 1, 2, \cdots n$$

Êste sistema permite determinar os segundos números dados os primeiros, porquanto êle é, em relação a $T_{n1}, \cdots T_{nn}$ tomados como incógnitas, um sistema de Cramer, como imediatamente se reconhece.

9) *Desenvolvimento de um polinómio inteiro em* x *segundo factoriais. Conseqüências.*

Seja dado o polinómio

$$P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n.$$

Desenvolvendo cada um dos seus têrmos segundo 21) e efectuando operações, tem-se

$$24) \qquad P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x)_1 + \alpha_2 (x)_2 + \cdots$$

$$+ \alpha_\mu (x)_\mu + \cdots + \alpha_n (x)_n$$

onde $\alpha_0 = a_n$, $\alpha_n = a_0$, sendo $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_{n-1}$ funções lineares dos $T_{n\mu}$:

$$25) \qquad \alpha_\mu = a_0\, T_{n\mu} + a_1\, T_{n-1\,\mu} + \cdots + a_{n-\mu}\, T_{\mu\mu}$$

como imediatamente se reconhece.

Como exemplo, procuremos o desenvolvimento de $P(x) = 2x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 7x + 6$.

Tem-se (Tabela VII)

$$
\begin{array}{ll}
x^5 = (x)_1 + 15\,(x)_2 + 25\,(x)_3 + 10\,(x)_4 + (x)_5 & 2,\ 30,\ 50,\ 20,\ 2 \\
x^4 = (x)_1 + \ 7\,(x)_2 + \ 6\,(x)_3 + (x)_4 & -3, -21, -18, \ -3 \\
x^3 = (x)_1 + \ 3\,(x)_2 + (x)_3 & 4,\ 12,\ \ 4 \\
x = (x)_1 & -7 \\
\hline
 & -4,\ 21,\ 36,\ 17,\ 2
\end{array}
$$

logo

$$P\,(x) = 6 - 4\,(x)_1 + 21\,(x)_2 + 36\,(x)_3 + 17\,(x)_4 + 2\,(x)_5 .$$

O desenvolvimento pode porém fazer-se de outro modo. Com efeito, a análise feita no parágrafo 8) a propósito da função x^n serve, com ligeiras alterações, para um polinómio inteiro, de modo que dividindo $P\,(x)$ sucessivamente por x, $x - 1$, $x - 2, \cdots$ $x - n + 1$, os restos dessas divisões são os coeficientes do desenvolvimento.

Proponhamo-nos desenvolver dêste modo o mesmo polinómio $P\,(x) = 2\,x^5 - 3\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x + 6$.

Tem-se

$$
\begin{array}{c|cccccc}
 & 2 & -3 & 4 & 0 & -7 & \underline{6} \\
1 & & 2 & -1 & 3 & 3 & \\
\hline
 & 2 & -1 & 3 & 3 & \underline{-4} & \\
2 & & 4 & 6 & 18 & & \\
\hline
 & 2 & 3 & 9 & \underline{21} & & \\
3 & & 6 & 27 & & & \\
\hline
 & 2 & 9 & \underline{36} & & & \\
4 & & 8 & & & & \\
\hline
 & 2 & \underline{17} & & & &
\end{array}
$$

portanto

$$P\,(x) = 6 - 4\,(x)_1 + 21\,(x)_2 + 36\,(x)_3 + 17\,(x)_4 + 2\,(x)_5 .$$

Diferenças sucessivas dum polinómio.

O desenvolvimento 24) permite calcular com grande simplicidade as diferenças sucessivas de $P(x)$ em virtude das fórmulas 14).

Tem-se com efeito

$$
26)\quad \begin{cases}
P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 (x)_1 + \alpha_2 (x)_2 + \cdots + \alpha_p (x)_p + \\
\qquad + \cdots + \alpha_n (x)_n \\
\Delta\, P(x) = \alpha_1 + 2\,\alpha_2 (x)_1 + 3\,\alpha_3 (x)_2 + \cdots + p\,\alpha_p (x)_{p-1} + \\
\qquad + \cdots + n\,\alpha_n (x)_{n-1} \\
\Delta^2 P(x) = 2\,\alpha_2 + 2.3\,\alpha_3 (x)_1 + \cdots + p\,(p-1)\,\alpha_p (x)_{p-2} + \\
\qquad + \cdots + n\,(n-1)\,\alpha_n (x)_{n-2} \\
\cdots \\
\Delta^p P(x) = p!\,\alpha_p + \cdots + n\,(n-1)\cdots(n-p+1)\,\alpha_n (x)_{n-p} \\
\cdots \\
\Delta^n P(x) = n!\,\alpha_n
\end{cases}
$$

Note-se de passagem que, visto ser $\alpha_n = a_0$, a última fórmula de 26) coincide com 7) para $h = 1$.

Por exemplo, para calcular as diferenças sucessivas do polinómio $P(x) = 2\,x^5 - 3\,x^4 + 4\,x^3 - 7\,x + 6$, tem que se obter primeiramente o desenvolvimento segundo factoriais, $P(x) = 6 - 4\,(x)_1 + 21\,(x)_2 + 36\,(x)_3 + 17\,(x)_4 + 2\,(x)_5$ e em seguida vem:

$$\Delta\, P(x) = -4 + 42\,(x)_1 + 108\,(x)_2 + 68\,(x)_3 + 10\,(x)_4$$

$$\Delta^2 P(x) = 42 + 216\,(x)_1 + 204\,(x)_2 + 40\,(x)_3$$

$$\Delta^3 P(x) = 216 + 408\,(x)_1 + 120\,(x)_2$$

$$\Delta^4 P(x) = 408 + 240\,(x)_1$$

$$\Delta^5 P(x) = 240.$$

Um caso particularmente importante, pelas suas conseqüências, da determinação das diferenças sucessivas dum polinómio é o seguinte: Seja $f(x)$ um polinómio inteiro do grau n e sejam conhecidos os valores dêsse polinómio para $n+1$ valores do argumento formando progressão aritmética de razão h — pretende-se exprimir os coeficientes do desenvolvimento 24) nas diferenças sucessivas do polinómio.

Para resolver o problema, suponhamos construída a tábua das diferenças a partir dos $n+1$ valores conhecidos $f(a)$, $f(a+h), \cdots f(a+nh)$.

Um valor qualquer do argumento representar-se há, em função do valor inicial a e do acréscimo h, por $y = a + xh$ e as fórmulas atrás deduzidas para o polinómio $f(x)$ valem para $f(a+xh)$ que é um polinómio inteiro em x do mesmo grau que $f(x)$.

Tem-se por conseqüência, [24)]

$$27)\quad f(a+xh) = \alpha_0 + \alpha_1 (x)_1 + \alpha_2 (x)_2 + \alpha_3 (x)_3 + \cdots$$
$$+ \alpha_p (x)_p + \cdots + \alpha_n (x)_n .$$

Formemos as diferenças sucessivas; vem, [26)]

$$\Delta f(a+xh) = \alpha_1 + 2\,\alpha_2 (x)_1 + 3\,\alpha_3 (x)_2 + \cdots + p\,\alpha_p (x)_{p-1} +$$
$$+ \cdots + n\,\alpha_n (x)_{n-1}$$

$$\Delta^2 f(a+xh) = 2\,\alpha_2 + 2.3.\,\alpha_3 (x)_1 + \cdots + p\,(p-1)\,\alpha_p (x)_{p-2} +$$
$$+ \cdots + n\,(n-1)\,\alpha_n (x)_{n-2}\ .$$

...

$$\Delta^p f(a+xh) = p!\,\alpha_p + (p+1) \cdots 2\,\alpha_{p+1} (x)_1 + \cdots$$
$$+ n\,(n-1) \cdots (n-p+1)\,\alpha_n (x)_{n-p}$$

...

$$\Delta^n f(a+xh) = n!\,\alpha_n .$$

Fazendo agora $x = 0$ em ambos os membros destas igualdades, vem:

$$28)\quad \alpha_0 = f(a),\ \alpha_1 = \Delta f(a),\ \alpha_2 = \frac{1}{2!}\,\Delta^2 f(a), \cdots$$
$$\alpha_p = \frac{1}{p!}\,\Delta^p f(a), \cdots \alpha_n = \frac{1}{n!}\,\Delta^n f(a).$$

e, introduzindo estes valores em 27), resulta finalmente

$$29)\quad f(a+xh)=f(a)+x\,\Delta f(a)+\frac{1}{2!}(x)_2\,\Delta^2 f(a)+$$
$$+\cdots+\frac{1}{p!}(x)_p\,\Delta^p f(a)+\cdots+\frac{1}{n!}(x)_n\,\Delta^n f(a)\ (^1)$$

igualdade que tem lugar para qualquer x.

Esta fórmula é de grande importância pelas suas aplicações, como adiante se verá.

10) *Generalização dos resultados dos §§ 7) e 8).*

Chamaremos *função factorial generalizada de grau k (inteiro e positivo)* à função

$$30)\quad (x^k)_n=x^k\,(x^k-1^k)\,(x^k-2^k)\cdots[x^k-(n-1)^k]$$

O seu desenvolvimento segundo as potências crescentes de x é manifestamente da forma

$$31)\quad (x^k)_n=S^k_{n\,1}\,x^k+S^k_{n\,2}\,x^{2k}+\cdots+S^k_{n\,\mu}\,x^{\mu k}+\cdots+S^k_{n\,n}\,x^{nk}$$

onde os coeficientes $S^k_{n\,\mu}$ $(\mu=1,\,2,\cdots n)$ são números, a que daremos o nome de *números de Stirling de 1.ª espécie generalizados de grau k.*

A natureza dêstes números é fácil de determinar; efectuando o produto indicado no segundo membro de 30) e identificando com 31) resulta imediatamente

---

(1) *V.* Whittaker and Robinson, loc. cit. pág. 9 e 10.

$$
32) \left\{
\begin{aligned}
S^k_{n\,1} &= (-1)^{n-1}\,[(n-1)!]^k \\
S^k_{n\,2} &= (-1)^{n-2}\,[1^k . 2^k \cdots (n-2)^k + \cdots + 2^k . 3^k \cdots (n-1)^k] \\
&= (-1)^{n-2}\,[(n-1)!]^k \left[\frac{1}{1^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{(n-1)^k}\right] \\
&\cdots \\
S^k_{n\,\mu} &= (-1)^{n-\mu}\,[(n-1)!]^k \left[\frac{1}{1^k . 2^k . (\mu-1)^k} + \cdots + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{(n-\mu+1)^k \cdots (n-1)^k}\right] \\
&\cdots \\
S^k_{n\,n-1} &= (-1)\,[1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k] \\
S^k_{n\,n} &= 1
\end{aligned}
\right.
$$

fórmulas que contêm como caso particular as 18) para $k = 1$.

É fácil também deduzir uma relação de recorrência entre os $S^k_{n\,\mu}$ que permita calculá-los simplesmente.

Tem-se, com efeito,

$$
\begin{aligned}
(x^k)_{n+1} &= x^k\,(x^k - 1^k) \cdots [x^k - (n-1)^k]\,[x^k - n^k] \\
&= (x^k - n^k)\,(x^k)_n \\
&= (x^k - n^k)\left[S^k_{n\,1}\,x^k + \cdots + S^k_{n\,\mu}\,x^{\mu\,k} + \cdots + \right. \\
&\quad \left. + S^k_{n\,n}\,x^{n\,k}\right] \\
&= -n^k\,S^k_{n\,1}\,x^k + \cdots + \left(S^k_{n\,\mu-1} - n^k\,S^k_{n\,\mu}\right) x^{\mu\,k} + \\
&\quad + \cdots + S^k_{n\,n}\,x^{(n+1)\,k}.
\end{aligned}
$$

Identificando êste desenvolvimento com

$$
\begin{aligned}
(x^k)_{n+1} = S^k_{n+1\,1}\,x^k + S^k_{n+1\,2}\,x^{2\,k} + \cdots + S^k_{n+1\,\mu}\,x^{\mu\,k} + \\
+ \cdots + S^k_{n+1\,n+1}\,x^{(n+1)\,k}
\end{aligned}
$$

resulta

$$33)\qquad S^k_{n+1\,\mu} = S^k_{n\,\mu-1} - n^k\, S^k_{n\,\mu}$$

a qual permite construir uma táboa [1] a partir dos valores iniciais evidentes

$$S^k_{n\,0} = 0,\; S^k_{n\,n} = 1,\; S^k_{n\,m} = 0 \text{ para } m > n.$$

Uma vez construída a tábua são fáceis os cálculos dos segundos membros de 32). Notar-se há em particular que a segunda fórmula de 32) se pode aplicar ao cálculo numérico da soma da série $\Sigma \frac{1}{n^k}$. Tem-se com efeito, dividindo ordenadamente a segunda pela primeira

$$\sum_{n=1}^{n-1} \frac{1}{n^k} = -\frac{S^k_{n\,2}}{S^k_{n\,1}}$$

Exemplo. Calcular a soma da série $\Sigma \frac{1}{n^4}$ com um êrro inferior a $\frac{1}{1000}$.

Da tabela 5 resulta

$$-\frac{S^4_{2\,2}}{S^4_{2\,1}} = 1$$

$$-\frac{S^4_{3\,2}}{S^4_{3\,1}} = \frac{17}{16} = 1{,}0625$$

$$-\frac{S^4_{4\,2}}{S^4_{4\,1}} = \frac{1392}{1296} = 1{,}0748$$

---

[1] *V.* Tabelas 3, 4, 5, 6.

$$-\frac{S^4_{52}}{S^4_{51}} = \frac{357.904}{331.776} = 1{,}0788$$

$$-\frac{S^4_{62}}{S^4_{61}} = \frac{224.021.776}{207.360.000} = 1{,}0804$$

$$-\frac{S^4_{72}}{S^4_{71}} = \frac{290.539.581.696}{268.738.560.000} = 1{,}0811$$

$$-\frac{S^4_{82}}{S^4_{81}} = \frac{697.854.274.212.096}{645.241.282.560.000} = 1{,}0815$$

um limite superior de $R_n = \frac{1}{(n+1)^4} + \frac{1}{(n+2)^4} + \cdots$

é dado por $\alpha = \frac{1}{3.\,n^3}$, de modo que, detendo-nos em $\sum\limits_{n=1}^{7} \frac{1}{n^4}$,

se tem $\alpha = \frac{1}{3.\,7^3} = 0{,}00097 < \frac{1}{10^3}$.

É portanto *1,0815* um valor aproximado da soma com um êrro menor que $\frac{1}{1000}$, o que equivale a dizer que a soma está compreendida entre *1,0815* e *1,0825*.

Derivadas da função $(x^k)_n$ no ponto zero.

Desenvolvendo $(x^k)_n$ pela fórmula de Mac-Laurin, vem

$$34)\quad (x^k)_n = \frac{x^k}{k!}\left[\frac{d^k\,(x^k)_n}{d\,x^k}\right]_0 + \cdots + \frac{x^{\mu k}}{(\mu\,k)!}\left[\frac{d^{\mu k}\,(x^k)_n}{d\,x^{\mu k}}\right]_0 +$$

$$+ \cdots + \frac{x^{nk}}{(n\,k)!}\left[\frac{d^{nk}\,(x^k)_n}{d\,x^{nk}}\right]_0$$

porquanto $(x^k)_n$ só tem têrmos cujos expoentes sejam multiplos inteiros de k. Daqui resulta que no ponto zero são nulas tôdas as derivadas cujo índice não fôr múltiplo inteiro de k, isto é, ao qual corresponda um valor fraccionário de μ.

Identificando 34) com 31), vem, para expressão das derivadas não nulas

$$35)\qquad \left[\frac{d^{\mu k}(x^k)_n}{d\,x^{\mu k}}\right]_0 = (\mu\, k)!\; S^k_{n\,\mu} \qquad \mu = 1, 2, \cdots n$$

Importa, pelo que adiante vai seguir-se, (1) calcular as derivadas no ponto zero da função $\frac{1}{x}\,(x^k)_n$.

Em virtude de 31) e 34) tem-se imediatamente

$$\frac{1}{x}\,(x^k)_n = S^k_{n\,1}\, x^{k-1} + S^k_{n\,2}\, x^{2k-1} + \cdots + S^k_{n\,\mu}\, x^{\mu k-1} + \\ + \cdots + S^k_{n\,n}\, x^{n\,k-1}$$

$$= \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}\left[\frac{d^{k-1}\left[\frac{1}{x}\,(x^k)_n\right]}{d\,x^{k-1}}\right]_0 + \cdots +$$

$$+ \frac{x^{\mu k-1}}{(\mu\, k-1)!}\left[\frac{d^{\mu k-1}\left[\frac{1}{x}\,(x^k)_n\right]}{d\,x^{\mu k-1}}\right]_0 +$$

$$+ \cdots + \frac{x^{n\,k-1}}{(n\,k-1)!}\left[\frac{d^{n\,k-1}\left[\frac{1}{x}\,(x^k)_n\right]}{d\,x^{n\,k-1}}\right]_0 .$$

Identificando os dois segundos membros obtém-se

$$36)\qquad \left[\frac{d^{\mu k-1}\left[\frac{1}{x}\,(x^k)_n\right]}{d\,x^{\mu k-1}}\right]_0 = (\mu\, k-1)!\; S^k_{n\,\mu} \qquad \mu = 1, 2, \cdots n$$

(1) § 17).

Como anteriormente, são nulas tôdas as derivadas que correspondam a valores fraccionários de μ; assim, por exemplo se $k=3$, é nula a derivada 7.ª visto que de $\mu\, k - 1 = 7$ resulta $\mu = \frac{8}{3}$.

Qualquer potência de x de expoente não primo se pode desenvolver segundo funções factoriais generalizadas.

Tem-se com efeito

$$
37) \quad x^{kn} = T^k_{n1}(x^k)_1 + T^k_{n2}(x^k)_2 + \cdots + T^k_{n\mu}(x^k)_\mu + \\
+ \cdots + T^k_{nn}(x^k)_n
$$

onde os $T^k_{n\mu}$ são números a que chamaremos *números de Stirling de 2.ª espécie generalizados de grau k.*

Êste desenvolvimento é possível e duma só maneira o que imediatamente se reconhece se se desenvolverem as factoriais do segundo membro conforme 31) Procedendo duma maneira inteiramente idêntica à usada no § 8, obtém-se para determinar os $T^k_{n\mu}$ as equações

$$
\begin{cases}
T^k_{n1} S^k_{11} + T^k_{n2} S^k_{21} + \cdots + T^k_{n\mu} S^k_{\mu 1} + \cdots + T^k_{nn} S^k_{n1} = 0 \\
\cdots \\
T^k_{n\mu} S^k_{\mu\mu} + T^k_{n\,\mu+1} S^k_{\mu+1\,\mu} + \cdots + T^k_{nn} S^k_{n\mu} = 0 \\
\cdots \\
T^k_{nn} S^k_{nn} = 1
\end{cases}
$$

Ora êste sistema (que generaliza 23) é determinado, porquanto o determinante dos coeficientes dos $T^k_{n\mu}$ é

$$
\Delta = S^k_{11} \cdots S^k_{\mu\mu} \cdots S^k_{nn} = 1.
$$

Para o cálculo prático dos números $T_{n\mu}$ pode deduzir-se uma relação análoga a 22). Procedendo duma maneira identica à usada para êsse efeito no § 8), encontra-se imediatamente

$$38) \qquad T^k_{n+1\,\mu} = T^k_{n\,\mu-1} + \mu^k\, T^k_{n\,\mu}$$

Esta relação generaliza 22) e por meio dela se podem construir táboas dos $T_{n\,\mu}$ a partir dos valores iniciais

$$T^k_{n\,0} = 0,\ T^k_{n\,n} = 1,\ T^k_{n\,m} = 0 \text{ para } m > n.$$

11) *Diferenças Divididas. Suas propriedades.*

Seja considerada uma função $f\,(x)$ da qual se conhecem os valores $f\,(a_0), f\,(a_1), \cdots f\,(a_n)$.

Dá-se o nome de *diferenças divididas de 1.ª ordem* da função $f(x)$ às expressões

$$f\,(a_0,\, a_1) = \frac{f\,(a_0) - f\,(a_1)}{a_0 - a_1}, \cdots$$

$$\cdots f\,(a_i,\, a_{i+1}) = \frac{f\,(a_i) - f\,(a_{i+1})}{a_i - a_{i+1}}, \ldots$$

Anàlogamente se definem *diferenças divididas de 2.ª ordem*

$$f\,(a_0,\, a_1,\, a_2) = \frac{f\,(a_0,\, a_1) - f\,(a_1,\, a_2)}{a_0 - a_2}, \cdots f\,(a_{i-1},\, a_i,\, a_{i+1}) =$$

$$= \frac{f\,(a_{i-1},\, a_i) - f\,(a_i,\, a_{i+1})}{a_{i-1} - a_{i+1}}, \ldots,$$

de 3.ª ordem

$$f\,(a_0,\, a_1,\, a_2,\, a_3) = \frac{f\,(a_0,\, a_1,\, a_2) - f\,(a_1,\, a_2,\, a_3)}{a_0 - a_3}, \ldots,$$

etc.

A partir dos valores conhecidos $f\,(a_0), f\,(a_1) \cdots f\,(a_n)$, pode portanto construir-se uma tábua de diferenças divididas duma maneira semelhante àquela por que se procedeu com a função considerada no § 1.

É de resto evidente, dada a maneira como estas diferenças são definidas, que com os $n+1$ valores dados de $f(x)$ a tábua se extende até à diferença (única) de ordem n.

Exemplo. Construir a tábua de diferenças divididas

dados: $f(-2)=21,\ f(0)=1,\ f(1)=3,\ f(2)=21,\ f(5)=651$
$f(7)=2.451$

x	$f(x)$					
-2	21					
		$f(-2, 0) = -10$				
0	1		$f(-2, 0, 1) = 4$			
		$f(0, 1) = 2$		$f(-2, 0, 1, 2) = 1$		
1	3		$f(0, 1, 2) = 8$		$f(-2, 0, 1, 2, 5) = 1$	
		$f(1, 2) = 18$		$f(0, 1, 2, 5) = 8$		$f(-2, \cdots$
2	21		$f(1, 2, 5) = 48$		$f(0, 1, 2, 5, 7) = 1$	
		$f(2, 5) = 210$		$f(1, 2, 5, 7) = 15$		
5	651		$f(2, 5, 7) = 138$		$f(1, 2, 5, 7, 10) = 1$	
		$f(5, 7) = 900$		$f(2, 5, 7, 10) = 24$		
7	2451		$f(5, 7, 10) = 330$			
		$f(7, 10) = 2550$				
10	10101					

Anàlogamente ao que se passava com as diferenças ordinárias, a tábua de diferenças divididas pode ser extendida aos valores que se quiser do argumento, desde que as diferenças duma certa ordem sejam constantes.

Assim no exemplo acima, supondo que as diferenças de 4.ª ordem são constantes e iguais à unidade, pode prolongar-se o quadro por exemplo para $x=10$. Êsses valores figuram nêle abaixo dos traços e foram determinados da direita para a esquerda como segue: $f(1, 2, 5, 7, 10)=1$ por hipótese

$$\frac{15-f(2, 5, 7, 10)}{-9}=1 \qquad \text{donde} \quad f(2, 5, 7, 10)=24$$

$$\frac{138-f(5, 7, 10)}{-8}=24 \qquad \text{donde} \quad f(5, 7, 10)=330$$

$$\frac{900-f(7,10)}{-5}=330 \quad \text{donde} \quad f(7,10)=2550$$

$$\frac{2451-f(10)}{-3}=2550 \quad \text{donde} \quad f(10)=10.101$$

As diferenças divididas gozam de propriedades importantes que vamos estudar.

Propriedade 1.ª — *Expressão das diferenças divididas nos valores da função.*

Tem-se, em virtude da definição,

$$f(a_0, a_1)=\frac{f(a_0)-f(a_1)}{a_0-a_1}=\frac{f(a_0)}{a_0-a_1}+\frac{f(a_1)}{a_1-a_0}$$

e do mesmo modo para qualquer diferença 1.ª

$$f(a_i, a_{i+1})=\frac{f(a_i)-f(a_{i+1})}{a_i-a_{i+1}}=\frac{f(a_i)}{a_i-a_{i+1}}+\frac{f(a_{i+1})}{a_{i+1}-a_i}$$

Para as diferenças 2.as tem-se anàlogamente

$$f(a_0, a_1, a_2)=\frac{f(a_0, a_1)}{a_0-a_2}-\frac{f(a_1, a_2)}{a_0-a_2}=$$

$$=\frac{1}{a_0-a_2}\left[\frac{f(a_0)}{a_0-a_1}+\frac{f(a_1)}{a_1-a_0}\right]+$$

$$+\frac{1}{a_2-a_0}\left[\frac{f(a_1)}{a_1-a_2}+\frac{f(a_2)}{a_2-a_1}\right]$$

$$=\frac{f(a_0)}{(a_0-a_1)(a_0-a_2)}+\frac{f(a_1)}{(a_1-a_0)(a_1-a_2)}+\frac{f(a_2)}{(a_2-a_0)(a_2-a_1)}.$$

O raciocínio continua-se com a mesma simplicidade para as diferenças de ordem superior, de modo que em geral se tem para a diferença de ordem p

39) $$f(a_0, a_1, \cdots a_p) =$$

$$= \sum_{i=0}^{p} \frac{f(a_i)}{(a_i - a_0)(a_i - a_1) \cdots (a_i - a_{i-1})(a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_p)}.$$

A esta expressão pode dar-se outra forma, notável pela sua simplicidade.

Desenvolvamos o somatório, para tornar os cálculos mais explícitos

$$f(a_0, a_1, \cdots a_p) = \frac{f(a_0)}{(a_0 - a_1)(a_0 - a_2) \cdots (a_0 - a_p)} +$$

$$+ \frac{f(a_1)}{(a_1 - a_0)(a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_p)} + \cdots$$

$$+ \cdots + \frac{f(a_i)}{(a_i - a_0) \cdots (a_i - a_{i-1}) \cdots (a_i - a_{i+1}) \cdots (a_i - a_p)} +$$

$$+ \cdots + \frac{f(a_p)}{(a_p - a_0)(a_p - a_1) \cdots (a_p - a_{p-1})}$$

e representemos, como habitualmente, por $\Pi\,(a_i - a_k)$ o produto de tôdas as diferenças distintas $a_i - a_k$, $i < k$.

Somando as fracções do segundo membro obtém-se

$$f(a_0, a_1, \cdots a_p) = \frac{1}{\Pi\,(a_i - a_k)} \left[f(a_0)(a_1 - a_2) \cdots (a_1 - a_p) \times \right.$$

$$\times (a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_p) \cdots (a_{p-1} - a_p) -$$

$$- f(a_1)(a_0 - a_2) \cdots (a_0 - a_p)(a_2 - a_3) \cdots (a_2 - a_p) \cdots (a_{p-1} - a_p) +$$

$$+\cdots+(-1)^i f(a_i)(a_0-a_1)\cdots(a_0-a_{i-1})\times$$

$$\times(a_0-a_{i+1})\cdots(a_0-a_p)\cdots(a_{p-1}-a_p)+$$

$$+\cdots+(-1)^p f(a_p)(a_0-a_1)\cdots(a_0-a_{p-1})\cdots(a_{p-2}-a_{p-1})\Big].$$

Ora o determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} f(a_0) & f(a_1)\cdots f(a_i)\cdots f(a_p) \\ 1 & 1 \;\cdots\; 1 \;\cdots\; 1 \\ a_0 & a_1 \;\cdots\; a_i \;\cdots\; a_p \\ \cdots & \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1}\cdots a_i^{p-1}\cdots a_p^{p-1} \end{vmatrix}$$

é igual ao produto do factor $(-1)^{\frac{p\,(p-1)}{2}}$ pela soma que está dentro do parêntesis recto, logo

$$f(a_0, a_1, \cdots a_p)=\frac{(-1)^{-\frac{p\,(p-1)}{2}}\,\Delta}{\Pi\,(a_i-a_k)}.$$

Mas por outro lado, para o determinante de Vandermonde de ordem $p+1$

$$\Delta(a_0, a_1, \cdots a_p)=\begin{vmatrix} 1 & 1\cdots 1 \\ a_0 & a_1\cdots a_p \\ \cdots & \\ a_0^p & a_1^p\cdots a_p^p \end{vmatrix} \quad \text{tem-se}$$

$$\Delta(a_0, a_1, \cdots a_p)=(-1)^{\frac{p\,(p+1)}{2}}\cdot\Pi\,(a_i-a_k)$$

e portanto

$$f(a_0, a_1, \cdots a_p) = \frac{(-1)^{-\frac{p(p-1)}{2}}}{(-1)^{-\frac{p(p+1)}{2}}} \cdot \frac{\Delta}{\Delta(a_0, a_1, \cdots a_p)}.$$

Troquemos no determinante numerador a ordem das p últimas linhas de modo que os elementos fiquem dispostos por ordem decrescente dos expoentes e no determinante denominador a ordem de tôdas as linhas de modo a obter o mesmo resultado. Isso equivale a multiplicá-los respectivamente por $(-1)^{\frac{p(p-1)}{2}}$ e $(-1)^{\frac{p(p+1)}{2}}$ e obtém-se como resultado final

$$40)\ f(a_0, a_1, \cdots a_p) = \begin{vmatrix} f(a_0) & f(a_1) \cdots f(a_p) \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} \cdots a_p^{p-1} \\ \cdots & \\ a_0 & a_1 \cdots a_p \\ 1 & 1 \cdots 1 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_0^p & a_1^p \cdots a_p^p \\ a_0^{p-1} & a_1^{p-1} \cdots a_p^{p-1} \\ \cdots & \\ a_0 & a_1 \cdots a_p \\ 1 & 1 \cdots 1 \end{vmatrix}$$

Propriedade 2.ª — *As diferenças divididas são funções simétricas dos seus argumentos.*

É conseqüência imediata de 40).

Propriedade 3.ª — *Expressão dos valores da função nas diferenças divididas.*

Por virtude das definições dadas tem-se

$$f(a_1) = f(a_0) + (a_1 - a_0)\, f(a_0, a_1)$$

$$f(a_2) = f(a_1) + (a_2 - a_1)\, f(a_1, a_2);$$

mas, por outro lado

$$f(a_1, a_2) = f(a_0, a_1) + (a_2 - a_0)\, f(a_0, a_1, a_2)$$

logo, substituíndo, vem

$$f(a_2)=f(a_1)+(a_2-a_1)f(a_0, a_1)+$$
$$+(a_2-a_0)(a_2-a_1)f(a_0, a_1, a_2)$$

ou, substituindo $f(a_1)$ pelo valor achado acima,

$$f(a_2)=f(a_0)+(a_2-a_0)f(a_0, a_1)+$$
$$+(a_2-a_0)(a_2-a_1)f(a_0, a_1, a_2).$$

Do mesmo modo se tem

$$f(a_3)=f(a_2)+(a_3-a_2)f(a_2, a_3),$$

mas

$$f(a_2, a_3)=f(a_1, a_2)+(a_3-a_1)f(a_1, a_2, a_3)$$

$$f(a_1, a_2, a_3)=f(a_0, a_1, a_2)+(a_3-a_0)f(a_0, a_1, a_2, a_3),$$

donde, por substituïções sucessivas,

$$f(a_2, a_3)=f(a_0, a_1)+(a_2-a_0)f(a_0, a_1, a_2)+$$
$$+(a_3-a_1)f(a_0, a_1, a_2)+(a_3-a_1)|(a_3-a_0)f(a_0, a_1, a_2, a_3),$$

$$f(a_3)=f(a_0)+(a_2-a_0)f(a_0, a_1)+(a_2-a_0)(a_2-a_1)f(a_0, a_1, a_2)$$
$$+(a_3-a_2)f(a_0, a_1)+(a_3-a_2)(a_2-a_0)f(a_0, a_1, a_2)+$$
$$+(a_3-a_2)(a_3-a_1)f(a_0, a_1, a_2)+$$
$$+(a_3-a_2)(a_3-a_1)(a_3-a_0)f(a_0, a_1, a_2, a_3)$$

$$f(a_3)=f(a_0)+(a_3-a_0)\,f(a_0,a_1)+$$
$$+(a_3-a_0)(a_3-a_1)\,f(a_0,a_1,a_2)+$$
$$+(a_3-a_0)(a_3-a_1)(a_3-a_2)\,f(a_0,a_1,a_2,a_3).$$

O raciocínio continua-se anàlogamente para os valores seguintes de $f(x)$ e obtém-se em geral, como imediatamente se verifica,

$$41)\quad f(a_n)=f(a_0)+(a_n-a_0)\,f(a_0,a_1)+$$
$$+(a_n-a_0)(a_n-a_1)\,f(a_0,a_1,a_2)+$$
$$+\cdots+(a_n-a_0)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_p)\,f(a_0\,a_1,a_2,\cdots a_{p+1})+$$
$$+\cdots+(a_n-a_0)(a_n-a_1)\cdots(a_n-a_{n-1})\,f(a_0,a_1,\cdots a_{n-1}).$$

Propriedade 4.ª — *Se, para uma sucessão de valores do argumento, uma função é igual numèricamente à soma de duas outras, as suas diferenças divididas de qualquer ordem são as somas das diferenças divididas da mesma ordem das duas funções, calculadas para os mesmos valores do argumento.*

Seja, com efeito $f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$ para $x=a_0, a_1,\cdots a_n$. Tem-se, para $i=1, 2,\cdots n-1$,

$$f(a_i,a_{i+1})=\frac{f(a_i)-f(a_{i+1})}{a_i-a_{i+1}}=\frac{1}{a_i-a_{i+1}}\Big[\varphi(a_i)+$$
$$+\psi(a_i)-\varphi(a_{i+1})-\psi(a_{i+1})\Big]$$
$$=\varphi(a_i,a_{i+1})+\psi(a_i,a_{i+1}).$$

Do mesmo modo,

$$f(a_{i-1},a_i,a_{i+1})=\frac{f(a_{i-1},a_i)-f(a_i,a_{i+1})}{a_{i-1}-a_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{a_{i-1} - a_{i+1}} \Big[\varphi\,(a_{i-1}, a_i) + \psi\,(a_{i-1}, a_i) -$$

$$\varphi\,(a_i, a_{i+1}) - \psi\,(a_i, a_{i+1}) \Big]$$

$$= \varphi\,(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) + \psi\,(a_{i-1}, a_i, a_{i+1})$$

e anàlogamente para as diferenças de qualquer ordem.

A demonstração estende-se imediatamente, como é obvio, à soma dum número finito qualquer de funções.

Propriedade 5.ª — *As diferenças divididas do produto duma constante por uma função são o produto da constante pelas diferenças divididas da função.*

Seja, com efeito $\varphi\,(x) = k\,f\,(x)$ para $x = a_0, a_1, \cdots a_n$.

Tem-se

$$\varphi\,(a_i, a_{i+1}) = \frac{\varphi\,(a_i) - \varphi\,(a_{i+1})}{a_i - a_{i+1}} = \frac{k\,f\,(a_i) - k\,f\,(a_{i+1})}{a_i - a_{i+1}} =$$

$$= k\,\frac{f\,(a_i) - f\,(a_{i+1})}{a_i - a_{i+1}} = k\,f\,(a_i, a_{i+1})$$

e anàlogamente para as diferenças de ordem superior.

Propriedade 6.ª — *Seja* n *um número inteiro e positivo. As diferenças divididas de ordem* n *da função* $f\,(x) = x^n$ *são constantes para qualquer sucessão de valores do argumento.*

Tem-se, com efeito,

$$f\,(a_i, a_{i+1}) = \frac{a_i^n - a_{i+1}^n}{a_i - a_{i+1}} = a_i^{n-1} + a_{i+1}\,a_i^{n-2} + \cdot$$

$$+ a_{i+1}^{n-2}\,a_i + a^{n-}_{+}$$

$$f(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) = \frac{f(a_{i-1}, a_i) - f(a_i, a_{i+1})}{a_{i-1} - a_{i+1}}$$

$$= \frac{1}{a_{i-1} - a_{i+1}} \left[a_{i-1}^{n-1} + a_i\, a_{i-1}^{n-2} + \cdots + a_i^{n-2}\, a_{i-1} + a_i^{n-1} \right.$$

$$\left. - \left(a_i^{n-1} + a_{i+1}\, a_i^{n-2} + \cdots + a_{i+1}^{n-2}\, a_i + a_{i+1}^{n-1} \right) \right]$$

$$= \frac{1}{a_{i-1} - a_{i+1}} \left[\left(a_{i-1}^{n-1} - a_{i+1}^{n-1} \right) + a_i \left(a_{i-1}^{n-2} - a_{i+1}^{n-2} \right) + \cdots \right.$$

$$\left. + a_i^{n-2} \left(a_{i-1} - a_{i+1} \right) \right]$$

$$= a_{i-1}^{n-2} + \cdots + a_{i+1}^{n-2} + a_i \left(a_{i-1}^{n-3} + \cdots + a_{i+1}^{n-3} \right) + \cdots + a_i^{n-2}.$$

Estas expressões e outras que análoga e fàcilmente se deduziam para as diferenças de ordem superior, mostram imediatamente que as diferenças de 1.ª ordem são polinómios homogéneos de grau $n - 1$ nos seus argumentos, as de segunda polinómios homogéneos de grau $n - 2$, etc. Um fácil raciocínio de indução mostra que o mesmo se dá para qualquer ordem, de modo que qualquer diferença de ordem n é um polinómio de grau $n - n = 0$, isto é, uma constante.

Como conseqüência imediata resulta que as diferenças de ordem superior a n são tôdas nulas.

Propriedade 7.ª — *As diferenças divididas de ordem* n *de um polinómio inteiro em* x *de grau* n *são constantes para qualquer sucessão de valores do argumento.*

É conseqüência imediata das propriedades 4.ª; 5.ª e 6.ª.

Propriedade 8.ª — *No caso particular em que os valores do argumento formam progressão aritmética, as diferenças divididas coincidem, à parte factores constantes, com as diferenças finitas ordinárias respectivas.*

Seja, com efeito, a sucessão de valores do argumento

$$a_0,\ a_1 = a_0 + h, \cdots a_i = a_0 + i\,h, \cdots a_n = a_0 + nh.$$

Tem-se,

$$f(a_i, a_{i+1}) = \frac{f(a_0 + i\,h) - f(a_0 + (i+1)\,h)}{a_0 + i\,h - a_0 - (i+1)\,h} =$$

$$= \frac{1}{h}\left[f\,[a_0 + (i+1)\,h] - f\,(a_0 + i\,h)\right]$$

$$= \frac{1}{h}\Delta f\,[a_0 + i\,h] = \frac{1}{h}\Delta f\,(a_i);$$

$$f(a_{i-1}, a_i, a_{i+1}) = \frac{1}{2\,h}\left[\frac{1}{h}\Delta f\,(a_0 + i\,h) - \frac{1}{h}\Delta f\,[a_0 + (i-1)\,h]\right]$$

$$= \frac{1}{2\,h^2}\left[\Delta f\,(a_i) - \Delta f\,(a_{i-1})\right] = \frac{1}{2\,h^2}\Delta^2 f\,(a_{i-1})$$

e do mesmo modo para as diferenças de ordem superior.

Em geral tem-se

42) $$f(a_0, a_1, \cdots a_p) = \frac{1}{p!\,h^p}\Delta^p f\,(a_0) \qquad p = 1,\ 2, \cdots n.$$

CAPÍTULO II

Elementos da Teoria da Interpolação

12) *Generalidades.*

O problema da interpolação consiste no seguinte. São conhecidos duma função $f(x)$, para os valores do argumento $x_0, x_1, \cdots x_n$, os valores correspondentes $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_n)$; pretende determinar-se o valor da função correspondente a um valor do argumento diferente de qualquer dos valores dados $x_0, x_1, \cdots x_n$.

A propósito da função $f(x)$ têm cabimento as considerações feitas no início do § 1 — pode conhecer-se ou não a sua expressão analítica.

No primeiro caso, a necessidade de resolver o problema por um método novo — o da interpolação — em vez de proceder ao cálculo directo, resulta da complicação dessa expressão analítica que a torna incómoda para os cálculos numéricos.

Assim, por exemplo, numa táboa de logaritmos, seria laborioso e incómodo, dado um número a não figurando na táboa, calcular o seu logaritmo operando directamente sôbre a função $y = \log x$.

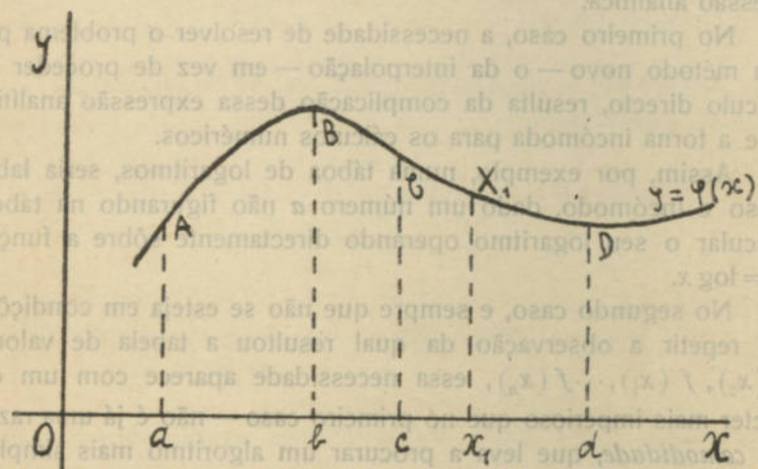
No segundo caso, e sempre que não se esteja em condições de repetir a observação da qual resultou a tabela de valores $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_n)$, essa necessidade aparece com um carácter mais imperioso que no primeiro caso — não é já uma razão de *comodidade*, que leva a procurar um algoritmo mais simples, mas sim a da *impossibilidade* de obter directamente o valor ou valores pedidos.

Assim, por exemplo, se uma táboa de mortalidade dá, de um grupo inicial de indivíduos de idade zero, o número de sobreviventes ao fim de 20, 21, 22,$\cdots$anos e se se desejar saber o número dêsses sobreviventes ao fim de 20 $^1/_2$ anos, ¿como proceder? Como a repetição da observação é impraticável, só há o recurso à creação de um processo de cálculo permitindo determinar o número desejado *ùnicamente* com a ajuda dos números conhecidos e êsse processo é precisamente o da interpolação.

O problema resolve-se substituindo a função dada por outra que tome os mesmos valores que ela para os valores dados do argumento e à qual se dá o nome de *função interpoladora*.

Há porém uma infinidade de funções tomando valores prèviamente fixados correspondendo a determinados valores do argumento e há portanto larga margem para a escolha da função interpoladora. Dois critérios vão guiar-nos na escolha dessa função — ela deve ser de expressão analítica tam simples quanto possível, de modo a tornar comodo o seu uso nos cálculos numéricos; por outro lado, ela deve aproximar-se tanto quanto possível daquela a que se substitui, de modo que os resultados por meio dela obtidos se não afastem muito da realidade.

A razão de ser dêstes dois critérios é evidente, o que fàcilmente se mostra recorrendo à representação geométrica.



Sendo dados $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$, $f(d)$, $\cdots$ e sendo $f(a) = \overline{a\,A}$, $f(b) = \overline{b\,B}$, $f(c) = \overline{c\,C}$, $f(d) = \overline{d\,D}$, $\cdots$, são A, B, C, $D \cdots$ os pontos por onde passa a curva $y = f(x)$ correspondentemente aos valores $a, b, c, d, \cdots$ da variável. Se à curva $y = f(x)$ se substitui a curva $y = \varphi(x)$, deve ela aproximar-se o mais possível da outra, na região considerada, para haver confiança de que por exemplo para o ponto x_1 a ordenada $\overline{x_1 X_1} = \varphi(x_1)$ difira pouco da ordenada no mesmo ponto da curva $y = f(x)$.

É claro que esta aproximação depende do número de pontos conhecidos na região de que se trata; os erros dos resultados serão portanto tanto menores quanto maior fôr o número de pontos dados nas proximidades do ponto desconhecido.

As funções mais simples são os polinómios inteiros de modo que, em obediência ao critério de simplicidade atrás pôsto, ocupar-nos-emos apenas das funções interpoladoras inteiras.

Viu-se porém atrás que as diferenças, quer ordinárias quer divididas, de ordem n de um polinómio inteiro de grau n são constantes, propriedade que, como se prova na teoria das equações às diferenças, só aos polinómios inteiros pertence. Daqui se conclui que a utilização de uma função interpoladora inteira de grau n só pode merecer confiança quando as diferenças de ordem n, construídas com os valores dados, sejam nulas ou pràticamente nulas. É esta uma circunstância que se não deve perder de vista.

13) *Valores do argumento formando progressão aritmética. Fórmula interpoladora de Gregory-Newton.*

Sejam conhecidos os valores de uma função $f(x)$ para os $n+1$ valores do argumento $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $x_2 = a + 2h, \cdots$ $x_n = a + nh$.

Suponhamos que as diferenças de ordem $n+1$ de $f(x)$ são nulas para qualquer valor de x.

Em virtude do que atrás ficou dito, o problema da interpolação neste caso reduz-se ao seguinte: determinar um polinómio inteiro de grau n que, para valores do argumento sucessivamente iguais a $a, a+h, \cdots a+nh$, tome respectivamente os valores $f(a)\ f(a+2h), \cdots f(a+nh)$

A solução do problema é dada manifestamente pela fórmula 29), estabelecida para qualquer valor de x

$$29)\ f(a+xh)=f(a)+x\,\Delta f(a)+\frac{1}{2!}(x)_2\,\Delta^2 f(a)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{p!}(x)_p\,\Delta^p f(a)+\cdots+\frac{1}{n!}(x)_n\,\Delta^n f(a).$$

Efectivamente a $x=0,\ 1,\ 2,\cdots n$ correspondem os valores do argumento $a,\ a+h,\ a+2h,\cdots a+nh$ e o polinómio toma respectivamente os valores $f(a), f(a+h), f(a+2h),\cdots f(a+nh)$, (fórmula 3).

A fórmula interpoladora 29), uma das mais importantes da teoria da interpolação, é devida a James Gregory e atribuída também a Newton.

Como exemplo da aplicação da fórmula de Gregory-Newton resolvamos o seguinte problema:

Exemplo. Duma função $f(x)$ são conhecidos os valores seguintes:

$x)$	0 ,	2,	4,	6,	8,	10
$f(x)$	-5 ,	-11,	191,	1513,	5635,	15005;

Determinar o valor da função para $x=5$.

Construamos a táboa das diferenças [1].

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
0	-5	-6	208	912	768	0
2	-11	202	1120	1680	768	
4	191	1322	2800	2448		
6	1513	4122	5248			
8	5635	9370				
10	15005					

[1] O facto de as diferenças de 4.ª ordem serem nesta táboa constantes não implica que $f(x)$ seja um polinómio do 4.º grau. Tal afirmação só poderia fazer-se se se soubesse que *tôdas* as diferenças de 4.ª ordem de $f(x)$ são nulas, o que não é evidentemente o caso.

Tem-se, no nosso caso, $a=0$, $h=2$, $a+xh=5$, donde $x=\frac{5}{2}\cdot$ Portanto de 29) resulta

$$f(5)=f(o)+\frac{5}{2}\,\Delta f(o)+\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)}{2!}\,\Delta^2 f(o)+$$

$$+\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)}{3!}\,\Delta^3 f(o)+$$

$$+\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)}{4!}\,\Delta^4 f(o)+$$

$$+\frac{\frac{5}{2}\left(\frac{5}{2}-1\right)\left(\frac{5}{2}-2\right)\left(\frac{5}{2}-3\right)\left(\frac{5}{2}-4\right)}{5!}\,\Delta^5 f(o)$$

$$=-5+\frac{5}{2}(-6)+\frac{15}{8}\cdot 208+\frac{15}{48}\cdot 912-$$

$$-\frac{15}{16\,.\,24}\cdot 768=625.$$

Com estes mesmos dados, resolvamos o seguinte problema: determinar o polinómio inteiro (aqui do 4.º grau porque a diferença de 5.ª ordem é nula) que, para os valores dados de x, toma os valores respectivos de $f(x)$.

Tem-se, de 29),

$$P(2x)=-5-6x+\frac{x(x-1)}{2}\cdot 208+$$

$$+\frac{x(x-1)(x-2)}{6}\cdot 912+\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{24}\cdot 768$$

e, efectuando as operações

$$P(2x)=32x^4-40x^3+2x-5$$

ou, fazendo $2x=y$, donde $x=\frac{y}{2}$,

$$P_1(y)=2y^4-5y^3+y-5.$$

Fazendo, em $P(2x)$, $x=\frac{5}{2}$, ou, em $P_1(y)$, $y=5$, obtém-se $f(5)=625$.

À fórmula de Gregory-Newton pode dar-se outra forma, útil nas aplicações.

Ela pode, com efeito, escrever-se assim

$$f(a+xh)=f(a)+x\left\{\Delta f(a)-\frac{1}{2}(1-x)\left[\Delta^2 f(a)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{1}{3}(2-x)\left(\Delta^3 f(a)-\cdots\right)\right]\right\},$$

igualdade que pode desdobrar-se nas seguintes

$$f(a+xh)=f(a)+x.v_1$$

$$v_1=\Delta f(a)-\frac{1}{2}(1-x).v_2$$

$$v_2=\Delta^2 f(a)-\frac{1}{3}(2-x).v_3$$

$$\cdots$$

$$v_p=\Delta^p f(a)-\frac{1}{p+1}(p-x).v_{p+1}$$

$$\cdots$$

$$v_n=\Delta^n f(a).$$

As operações podem assim começar-se introduzindo v_n no valor de v_{n-1} e calculando sucessivamente $v_{n-2}, \cdots v_2, v_1$, $f(a+nh)$.

Operando dêste modo no exemplo anterior tem-se, visto que $v_5 = \Delta^5 f(o) = 0$,

$$v_4 = \Delta^4 f(o) = 768$$

$$v_3 = \Delta^3 f(o) - \frac{1}{4}\left(3 - \frac{5}{2}\right) v_4 = 912 - \frac{1}{8} \cdot 768 = 816$$

$$v_2 = \Delta^2 f(o) - \frac{1}{3}\left(2 - \frac{5}{2}\right) v_3 = 208 + \frac{1}{6} \cdot 816 = 344$$

$$v_1 = \Delta f(o) - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{5}{2}\right) v_2 = -6 + \frac{3}{4} \cdot 344 = 252$$

$$f(5) = f(o) + \frac{5}{2} \cdot v_1 = -5 + \frac{5}{2} \cdot 252 = 625\,.$$

Como segundo exemplo da aplicação da fórmula, resolvamos o seguinte problema: Conhecidos os valores de log sen x para valores de x de minuto em minuto desde $18^\circ\ 20'$ a $18^\circ\ 24'$, calcular log sen $18^\circ\ 21'\ 45''$ (Táboas de 7 decimais de Schrön).

Utilizemos a táboa construída a pág. 3. Como a diferença de 4.ª ordem (e já as de 3.ª) é pràticamente nula, a função satisfaz às condições atrás enunciadas para a aplicação da fórmula de interpolação.

No caso presente é

$$a = 18^\circ\ 20',\ h = 60'',\ a + xh = 18^\circ\ 21'\ 45'' \quad \text{donde} \quad x = \frac{7}{4}$$

Tem-se por conseqüência

$$log\ sen\ 18^\circ\ 21'\ 45'' = \bar{1},\ 4976824 + \frac{7}{4} \cdot 0{,}0^3\ 3811 +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{7}{4}\left(\frac{7}{4}-1\right)(-0{,}0^6 4)+\frac{1}{6}\frac{7}{4}\left(\frac{7}{4}-1\right)\left(\frac{7}{4}-2\right).0+$$

$$+\frac{1}{24}\frac{7}{4}\left(\frac{7}{4}-1\right)\left(\frac{7}{4}-2\right)\left(\frac{7}{4}-3\right).0{,}0^6 1$$

donde, efectuando operações,

$$\log \operatorname{sen} 18^\circ\ 21'\ 45'' = \bar{1},\ 49834906$$

É claro que os dois últimos decimais dêste resultado não merecem confiança visto que os dados apenas contêm sete decimais dos quais em geral só os primeiros seis são exactos.

14) *Valores quaisquer do argumento.*

A fórmula interpoladora de Gregory-Newton aplica-se, como vimos, ao caso restrito (que porém se verifica freqüentemente na prática) de os valores do argumento formarem progressão aritmética.

No caso geral, em que isso se não dá, usam-se outras fórmulas interpoladoras, das quais vamos apresentar duas — a de Lagrange e a geral de Newton. Ambas elas são polinómios inteiros em obediência ao critério de simplicidade atrás pôsto e de cujo âmbito não saímos.

Nestas condições, o problema põe-se do seguinte modo — para os valores do argumento $x_0, x_1, \cdots x_n$ conhecém-se os valores correspondentes duma função, $f(x_0), f(x_1), \cdots f(x_n)$; determinar um polinómio inteiro em x do grau n tomando para $x = x_0$, $x = x_1$, $\cdots x = x_n$, respectivamente os valores $f(x_0)$, $f(x_1), \cdots f(x_n)$.

A) Fórmula de Lagrange.

Sabe-se, da teoria dos polinómios inteiros, que existe um e um só polinómio inteiro em x de grau n tomando $n+1$ valores preestabelecidos não todos nulos correspondentes a $n+1$ valores diferentes da variável.

Seja êsse polinómio

$$f(x) = A + B\,x + C\,x^2 + \cdots + L\,x^n$$

Êle deve satisfazer às $n+1$ condições

$$f(x_0)=A+B\,x_0+C\,x_0^2+\cdots+L\,x_0^n$$

$$f(x_1)=A+B\,x_1+C\,x_1^2+\cdots+L\,x_1^n$$

$$\cdots$$

$$f(x_n)=A+B\,x_n+C\,x_n^2+\cdots+L\,x_n^n$$

Eliminando $A, B, C, \cdots L$ entre as $n+2$ equações acima, obtém-se

$$\begin{vmatrix} f(x) & 1 & x & x^2 \cdots x^n \\ f(x_0) & 1 & x_0 & x_0^2 \cdots x_0^n \\ f(x_1) & 1 & x_1 & x_1^2 \cdots x_1^n \\ \cdots & & & \\ f(x_n) & 1 & x_n & x_n^2 \cdots x_n^n \end{vmatrix} = 0$$

ou, trocando as linhas em colunas e as colunas em linhas,

$$\begin{vmatrix} f(x) & f(x_0) & f(x_1) \cdots f(x_n) \\ 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ x & x_0 & x_1 \cdots x_n \\ x^2 & x_0^2 & x_1^2 \cdots x_n^2 \\ \cdots & & \\ x^n & x_0^n & x_1^n \cdots x_n^n \end{vmatrix} = 0$$

ou,

$$a)\ f(x)\,.\,\Delta_x - f(x_0)\,\Delta_0 + f(x_1)\,\Delta_1 - \cdots + (-1)^{n-1} f(x_n)\,\Delta_n = 0$$

onde $\Delta_x, \Delta_0, \Delta_1, \cdots \Delta_n$ são os determinantes de Vandermonde de ordem $n+1$:

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ x_0 & x_1 & x_2 \cdots x_n \\ \cdots \\ x_0^n & x_1^n & x_2^n \cdots x_n^n \end{vmatrix}, \quad \Delta_0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ x & x_1 & x_2 \cdots x_n \\ \cdots \\ x^n & x_1^n & x_2^n \cdots x_n^n \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ x & x_0 & x_2 \cdots x_n \\ \cdots \\ x^n & x_0^n & x_2^n \cdots x_n^n \end{vmatrix}, \cdots \Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \cdots 1 \\ x & x_0 & x_1 \cdots x_{n-1} \\ \cdots \\ x^n & x_0^n & x_1^n \cdots x_{n-1}^n \end{vmatrix}.$$

Ora, *a)* pode escrever-se

$$f(x) = f(x_0)\frac{\Delta_0}{\Delta_x} - f(x_1)\frac{\Delta_1}{\Delta_x} + \cdots + (-1)^n f(x_n)\frac{\Delta_n}{\Delta_x}$$

ou, efectuando os quocientes dos determinantes acima,

$$f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} -$$

$$-f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$+\cdots+(-1)^n f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_n)(x_1-x_n)\cdots(x_{n-1}-x_n)}$$

ou, finalmente,

$$43)\quad f(x) = f(x_0)\frac{(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)} +$$

$$+f(x_1)\frac{(x-x_0)(x-x_2)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\cdots(x_1-x_n)}$$

$$+\cdots+f(x_n)\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\cdots(x_n-x_{n-1})}.$$

É esta a fórmula de interpolação de Lagrange.

É de notar com cuidado o modo de formação das fracções que multiplicam $f(x_0), \cdots f(x_n)$. Em geral, o coeficiente de $f(x_i)$ é
$$\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

Como exemplo da aplicação da fórmula de Lagrange, resolvamos o seguinte problema:

Exemplo. Uma função $f(x)$ toma para os valores *1, 4, 6, 7, 9, 15* da variável respectivamente os valores *— 39, — 1704, — 4664, — 5601, 1, 325447*. Determinar o valor dessa função correspondente ao valor *5* da variável.

Tem-se no caso presente

$$x_0 = 1 \ , \ x_1 = 4 \ , \ x_2 = 6 \ , \ x_3 = 7 \ , \ x_4 = 9 \ , \ x_5 = 15,$$

$$f(x_0) = -39, f(x_1) = -1704, f(x_2) = -4664, f(x_3) = -5601,$$

$$f(x_4) = 1, f(x_5) = 325447.$$

$$x = 5.$$

Aplicando 43), vem

$$f(5) = \frac{1.(-1).(-2).(-4).(-10)}{(-3).(-5).(-6).(-8).(-14)}(-39) +$$

$$+ \frac{4.(-1).(-2).(-4).(-10)}{3.(-2).(-3).(-5).(-11)} \cdot (-1704) +$$

$$+ \frac{4 \, . \, 1 \, . \, (-2).(-4).(-10)}{5 \, . \, 2 \, . \, (-1).(-3).(-9)} \cdot (-4664) +$$

$$+\frac{4\,.\,1\,.\,(-1)\,.\,(-4)\,.\,(-10)}{6\,.\,3\,.\,1\,.\,(-2)\,.\,(-8)}\cdot(-5601)+$$

$$+\frac{4\,.\,1\,.\,(-1)\,.\,(-2)\,.\,(-10)}{8\,.\,5\,.\,3\,.\,2\,.\,(-6)}\cdot 1+$$

$$+\frac{4\,.\,1\,.\,(-1)\,.\,(-2)\,.\,(-4)}{14\,.\,11\,.\,9\,.\,8\,.\,6}\cdot 325447$$

$$=-3123.$$

Resolvamos ainda a questão seguinte: determinar o polinómio do 5.º grau que satisfaz às condições do exemplo dado.

Tem-se

$$f(x)=\frac{(x-4)\,(x-6)\,(x-7)\,(x-9)\,(x-15)}{(-3)\,.\,(-5)\,.\,(-6)\,.\,(-8)\,.\,(-14)}\cdot(-39)+$$

$$+\frac{(x-1)\,(x-6)\,(x-7)\,(x-9)\,(x-15)}{3\,.\,(-2)\,(-3)\,.\,(-5)\,.\,(-11)}\cdot(-1704)+$$

$$+\frac{(x-1)\,(x-4)\,(x-7)\,(x-9)\,(x-15)}{5\,.\,2\,.\,(-1)\,.\,(-3)\,.\,(-9)}\cdot(-4664)+$$

$$+\frac{(x-1)\,(x-4)\,(x-6)\,(x-9)\,(x-15)}{6\,.\,3\,.\,1\,.\,(-2)\,.\,(-8)}\cdot(-5601)+$$

$$+\frac{(x-1)\,(x-4)\,(x-6)\,(x-7)\,(x-15)}{8\,.\,5\,.\,3\,.\,2\,.\,(-6)}+$$

$$+\frac{(x-1)\,(x-4)\,(x-6)\,(x-7)\,(x-9)}{14\,.\,11\,.\,9\,.\,8\,.\,6}\cdot 325447$$

$$f(x)=x^5-8\,(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

B) Fórmula geral de Newton.

Em virtude de 41) (pág. 44), o polinómio inteiro em x de grau n

$$44)\quad f(x) = f(x_0) + (x - x_0) f(x_0, x_1) +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) f(x_0, x_1, x_2) + \cdots +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}) f(x_0, x_1, \cdots x_i) + \cdots +$$
$$+ (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) f(x_0, x_1, \cdots x_n)$$

toma, para os valores $x_0, x_1, \cdots x_n$ de x, respectivamente os valores $f(x_0)\, f(x_1), \cdots f(x_n)$.

O polinómio 44) constitui portanto uma solução do problema posto a pág. 56 e pode ser adoptado como função interpoladora.

Na relação 44) consiste a *fórmula geral de interpolação de Newton.*

Como exemplo da sua aplicação, resolvamos o problema de pág. 59. Tem para isso que se construir a táboa de diferenças divididas dos valores dados. Ela é [1]

x	$f(x)$	*Dif. 1.as*	*Dif. 2.as*	*Dif. 3.as*	*Dif. 4.as*	*Dif. 5.as*
1	-39					
		[1,4] = -555				
4	-1704		[1,4,6] = -185			
		[4,6] = -1480		[1,4,6,7] = 61		
6	-4664		[4,6,7] = 181		[1,4,6,7,9] = 19	
		[6,7] = -937		[4,6,7,9] = 213		[1,4,6,7,9,15] = 1
7	-5601		[6,7,9] = 1246		[4,6,7,9,15] = 33	
		[7,9] = 2801		[6,7,9,15] = 576		
9	1		[7,9,15] = 6430			
		[9,15] = 54241				
15	325447					

---

(1) Para simplificar a escrita representaremos, como é tambem de uso $f(x_0, x_1, \cdots x_p)$ por $[x_0, x_1, x_2 \cdots x_p]$.

Tem-se por conseqüência

$$f(5)=f(1)+(5-1).(-555)+(5-1).(5-4).(-185)+$$
$$+(5-1).(5-4).(5-6).61+(5-1).(5-4)(5-6).(5-7).19$$
$$+(5-1).(5-4).(5-6).(5-7).(5-9).1$$
$$=-3123.$$

Para determinar o polinómio do 5.º grau satisfazendo às condições enunciadas, tem-se

$$f(x)=-39-555(x-1)-185(x-1)(x-4)+$$
$$+61.(x-1)(x-4)(x-6)+19(x-1)(x-4)(x-6)(x-7)+$$
$$+(x-1)(x-4)(x-6)(x-7)(x-9).$$
$$=x^5-8(x^4+x^3+x^2+x+1).$$

À fórmula de Newton pode dar-se outra forma, útil nas aplicações. Ela pode, com efeito, escrever-se

$$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)\Big\{f(x_0,x_1)+(x-x_1)\,[f(x_0,x_1,x_2)+$$
$$+(x-x_2)\,(f(x_0,x_1,x_2,x_3)+\cdots)]\Big\},$$

igualdade que pode desdobrar-se nas seguintes

$$45)\quad \begin{cases} f(x)=f(x_0)+(x-x_0).\,v_1 \\ v_1=f(x_0,x_1)+(x-x_1).\,v_2 \\ \cdots \\ v_i=f(x_0,x_1,\cdots x_i)+(x-x_i)\;v_{i+1} \\ \cdots \\ v_n=f(x_0,x_1,\cdots x_n) \end{cases}$$

Na prática, semelhantemente ao que se fez com a fórmula de Gregory-Newton, começará por se introduzir o valor de v_n em v_{n-1} e calcular sucessivamente $v_{n-2}, \cdots v_1, f(x)$.

Para a resolução do problema anterior tem-se, operando dêste modo,

$$v_5 = [1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9,\ 15] = 1$$

$$v_4 = [1,\ 4,\ 6,\ 7,\ 9] + (5-9)\ v_5 = 19 - 4 = 15$$

$$v_3 = [1,\ 4,\ 6,\ 7] + (5-7)\ v_4 = 61 - 2.15 = 31$$

$$v_2 = [1,\ 4,\ 6] + (5-6)\ v_3 = -185 - 31 = -216$$

$$v_1 = [1,\ 4] + (5-4)\ v_2 = -555 - 216 = -771$$

$$f(5) = f(1) + (5-1)\ v_1 = -39 - 4.771 = -3123.$$

Para a determinação do polinómio, tem-se

$$v_5 = 1$$

$$v_4 = 19 + (x-9) = x + 10$$

$$v_3 = 61 + (x-7)(x+10) = x^2 + 3x - 9$$

$$v_2 = -185 + (x-6)(x^2+3x-9) = x^3 - 3x^2 - 27x - 131$$

$$v_1 = -555 + (x-4)(x^3 - 3x^2 - 27x - 131) =$$
$$= x^4 - 7x^3 - 15x^2 - 23x - 31$$

$$f(x) = -39 + (x-1)(x^4 - 7x^3 - 15x^2 - 23x - 31) =$$
$$= x^5 - 8(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1).$$

É de notar a vantagem de operar assim.

Relação entre a fórmula geral de Newton e as de Gregory-Newton e Lagrange.

A fórmula geral 44) contém como caso particular a de Gregory-Newton.

Com efeito, supondo que

$$x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h, \cdots x_i = x_0 + ih, \cdots x_n = x_0 + nh$$

tem-se, fazendo $x = x_0 + hy$,

$$x - x_0 = hy, \quad x - x_1 = h\,(y - 1), \cdots$$

$$x - x_i = h\,(y - i), \quad \cdots x - x_n = h\,(y - n),$$

donde,

$$x - x_0 = hy$$

$$(x - x_0)\,(x - x_1) = h^2\,(y)_2$$

$$(x - x_0)\,(x - x_1)\,(x - x_2) = h^3\,(y)_3$$

$$\cdots$$

$$(x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_{i-1}) = h^i\,(y)_i$$

$$\cdots$$

$$(x - x_0)\,(x - x_1) \cdots (x - x_{n-1}) = h^n\,(y)_n .$$

Atendendo por outro lado a

42) $$f\,(x_0, x_1, \cdots x_i) = \frac{1}{i!\,h^i}\,\Delta^i f\,(x_0)$$

vem, substituindo em 44),

$$f\,(x_0 + hy) = f\,(x_0) + y\,\Delta\,f\,(x_0) + \frac{1}{2!}\,(y)_2\,\Delta^2 f\,(x_0) + \cdots$$

$$+ \frac{1}{i!}\,(y)_i\,\Delta^i f\,(x_0) + \cdots + \frac{1}{n!}\,(y)_n\,\Delta^n f\,(x_0)$$

que é a fórmula de Gregory-Newton.

As fórmulas de Lagrange e Newton coincidem. Basta, para o verificar, introduzir em 44) os valores das diferenças divididas dados em 39) (pág. 40).

Obtém-se assim

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\left[\frac{f(x_0)}{x_0 - x_1} + \frac{f(x_1)}{x_1 - x_0}\right] +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\left[\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)}\right.$$

$$\left. + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{f(x_2)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}\right] + \cdots +$$

$$+ (x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})\left[\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_i)} +\right.$$

$$\left. + \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)\cdots(x_1 - x_i)} + \cdots + \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})}\right] + \cdots +$$

$$+ (x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})\left[\frac{f(x_0)}{(x_0 - x_1)\cdots(x_0 - x_n)} +\right.$$

$$+ \frac{f(x_1)}{(x_1 - x_0)\cdots(x_1 - x_n)} + \cdots + \frac{f(x_i)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_n)} + \cdots +$$

$$\left. + \frac{f(x_n)}{(x_n - x_0)\cdots(x_n - x_{n-1})}\right].$$

O coeficiente de $f(x_i)$ neste desenvolvimento é

$$\frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{i-1})}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i-1})} + \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_i)}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_{i+1})} + \cdots +$$

$$+ \frac{(x - x_0)\cdots(x - x_{n-1})}{(x_i - x_0)\cdots(x_i - x_n)} =$$

$$= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_n)}\Big[(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)+$$

$$+(x-x_i)(x_i-x_{i+2})\cdots(x_i-x_n)+\cdots+(x-x_i)\cdots(x-x_{n-1})\Big]$$

$$= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_n)}\Big[(x-x_{i+1})(x_i-x_{i+2})\cdots(x_i-x_n)+$$

$$+\cdots+(x-x_i)\cdots(x-x_{n-1})\Big]$$

$$= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_n)}\Big[(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})(x_i-x_{i+3})\cdots$$

$$(x_i-x_n)+\cdots+(x-x_i)\cdots(x-x_{n-1})\Big]$$

$$=\cdots=\frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_n)}(x-x_{i+1})(x-x_{i+2})\cdots$$

$$(x-x_{n-1})(x-x_i+x_i-x_n)$$

$$= \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}$$

que é precisamente o da fórmula de Lagrange.

15) *Valores do argumento dispostos simètricamente em relação a um dêles. Fórmulas de Gauss e Stirling.*

Em muitas questões acontece que os valores do argumento formam uma progressão aritmética como a seguinte

$$\cdots a-kh,\ a-(k-1)\,h,\cdots a-h,\ a,\ a+h,\cdots$$

$$\cdots a+(k-1)\,h,\ a+kh,\cdots.$$

Neste caso, que não é na essência distinto do resolvido pela fórmula de Gregory-Newton, deduzem-se algumas fórmulas de interpolação importantes como conseqüências da fórmula geral 44).

Façamos

$$x_0 = a,\ x_1 = a + h,\ x_2 = a - h,\ x_3 = a + 2h,\ x_4 = a - 2h, \cdots$$

$$\cdots x_{2k-1} = a + kh,\ x_{2k} = a - kh, \cdots$$

e calculemos as diferenças divididas respectivas.

Como elas são funções siméticas dos seus argumentos, estes podem dispor-se por ordem crescente e, atendendo a 42) (pág. 47), vem:

$$f(x_0, x_1) = f(a, a + h) = \frac{1}{h} \Delta f(a)$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = f(a, a + h, a - h) = f(a - h, a, a + h) =$$

$$= \frac{1}{2!\, h^2} \Delta^2 f(a - h)$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3) = f(a, a + h, a - h, a + 2h) =$$

$$= f(a - h, a, a + h, a + 2h) = \frac{1}{3!\, h^3} \Delta^3 f(a - h)$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = f(a, a + h, a - h, a + 2h, a - 2h) =$$

$$= f(a - 2h, a - h, a, a + h, a + 2h) =$$

$$= \frac{1}{4!\, h^4} \Delta^4 f(a - 2h)$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) =$$

$$= f(a - 2h, a - h, a, a + h, a + 2h, a + 3h) = \frac{1}{5!\, h^5} \Delta^5 f(a - 2h)$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) =$$

$$= f(a - 3h, a - 2h, a - h, a, a + h, a + 2h, a + 3h)$$

$$= \frac{1}{6!\, h^6} \Delta^6 f(a - 3h)$$

$\cdots$

Em geral, tem-se

Diferença de ordem par: $2k+1$ argumentos $a-kh, \cdots a, \cdots a+kh$.

$$46) \quad f(a-kh, \cdots a, \cdots a+kh) = \frac{1}{(2k)!\, h^{2k}} \Delta^{2k} f(a-kh)$$

Diferença de ordem ímpar: $2k+2$ argumentos $a-kh, \cdots a, \cdots a+(k+1)\,h$

$$46') \quad f[a-kh, \cdots a, \cdots a+(k+1)\,h] =$$

$$= \frac{1}{(2k+1)!\, h^{2k+1}} \Delta^{2k+1} f(a-kh).$$

Na fórmula geral de Newton

$$f(x) = f(x_0) + (x-x_0)\, f(x_0, x_1) + \cdots +$$
$$+ (x-x_0) \cdots (x-x_{n-1})\, f(x_0, x_1, \cdots x_n),$$

façamos $x = a + yh$. Vem

$$x - x_0 = hy,\ x - x_1 = h\,(y-1),\ x - x_2 = h\,(y+1),$$
$$x - x_3 = h\,(y-2),\ x - x_4 = h\,(y+2), \cdots,$$
$$x - x_{2k-1} = h\,(y-k),\ x - x_{2k} = h\,(y+k), \cdots$$

e

$$x - x_0 = hy$$
$$(x-x_0)(x-x_1) = h^2\, y\,(y-1)$$
$$(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = h^3\,(y+1)\,y\,(y-1)$$
$$(x-x_0)\cdots(x-x_3) = h^4\,(y+1)\,y\,(y-1)\,(y-2)$$
$$(x-x_0)\cdots(x-x_4) = h^5\,(y+2)\,(y+1)\,y\,(y-1)\,(y-2)$$
$$\cdots$$
$$(x-x_0)\cdots(x-x_{2k-1}) = h^{2k}\,(y+k-1)\cdots y \cdots (y-k)$$
$$(x-x_0)\cdots(x-x_{2k}) = h^{2k+1}\,(y+k)\cdots y \cdots (y-k)$$
$$\cdots$$

Substituindo na fórmula de Newton, vem:

$$47)\quad f(a+yh)=f(a)+y\,\Delta f(a)+\frac{1}{2\,!}\,y\,(y-1)\,\Delta^2 f(a-h)+$$

$$+\frac{1}{3!}\,(y+1)\,y\,(y-1)\,\Delta^3 f(a-h)+$$

$$+\frac{1}{4!}\,(y+1)\,y\,(y-1)\,(y-2)\,\Delta^4 f(a-2h)+$$

$$+\frac{1}{5!}\,(y+2)\cdots(y-2)\,\Delta^5 f(a-2h)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{(2k)!}\,(y+k-1)\cdots y\cdots(y-k)\,\Delta^{2k} f(a-kh)+$$

$$+\frac{1}{(2k+1)!}\,(y+k)\cdots y\cdots(y-k)\,\Delta^{2k+1} f(a-kh)+\cdots$$

É esta a fórmula de interpolação de Newton-Gauss, [1] cujos têrmos se obtêm fazendo no grupo dos dois têrmos gerais sucessivamente $k=0,\ 1,\ 2,\cdots$.

Organizando o quadro das diferenças para os valores dados

x	$f(x)$	*Dif. 1.as*	*Dif. 2.as*	*Dif. 3.as*	*Dif. 4.as*	*Dif. 5.as*	*Dif. 6.as*
...							
$-3h$	$f(a-3h)$						
		$\Delta f(a-3h)$					
$-2h$	$f(a-2h)$		$\Delta^2 f(a-3h)$				
		$\Delta f(a-2h)$		$\Delta^3 f(a-3h)$			
$-h$	$f(a-h)$		$\Delta^2 f(a-2h)$		$\Delta^4 f(a-3h)$		
		$\Delta f(a-h)$		$\Delta^3 f(a-2h)$		$\Delta^5 f(a-3h)$	
	$f(a)$		$\Delta^2 f(a-h)$		$\Delta^4 f(a-2h)$		$\Delta^6 f(a-3h)$
		$\Delta f(a)$		$\Delta^3 f(a-h)$		$\Delta^5 f(a-2h)$	
$+h$	$f(a+h)$		$\Delta^2 f(a)$		$\Delta^4 f\,a-h)$		
		$\Delta f(a+h)$		$\Delta^3 f(a)$			
$+2h$	$f(a+2h)$		$\Delta^2 f(a+h)$				
		$\Delta f(a+2h)$					
$+3h$	$f(a+3h)$						
..							

[1] V. Whittaker and Robinson, loc. cit. pág. 37.

reconhece-se imediatamente que esta fórmula utiliza os valores do quadro colocados na linha média que passa por $f(a)$ e imediatamente abaixo.

Ela é portanto útil sobretudo nas interpolações para valores próximos de a (1).

Como exemplo de aplicação desta fórmula, resolvamos o problema já tratado a pág. 55: Conhecidos os valores de *log sen x* para valores de x de minuto em minuto desde $18^0\ 20'$ a $18^0\ 24'$, calcular *log sen* $18^0\ 21'\ 45''$.

Escolhamos $a = 18^0\ 22'$; como $h = 60''$, vem de

$$a + yh = 18^0\ 21'\ 45'',\ y = -\frac{1}{4}.$$

A táboa das diferenças é (pág. 5)

x	*log sen x*	Δ	Δ^2	Δ^3	Δ^4
$18^0\ 20'$	$\bar{1},4976824$				
		$0,0^3 3811$			
$18^0\ 21'$	$\bar{1},4980635$		$-0,0^6 4$		
		$0,0^3 3807$		0	
$18^0\ 22'$	$\bar{1},4984442$		$-0,0^6 4$		$0,0^6 1$
		$0,0^3 3803$		$0,0^6 1$	
$18^0\ 23'$	$\bar{1},4988245$		$-0,0^6 3$		
		$0,0^3 3800$			
$18^0\ 24'$	$\bar{1},4992045$				

Aplicando a fórmula, o que equivale a usar apenas as diferenças da linha média e abaixo dela, vem:

$$log\ sen\ 18^0\ 21'\ 45'' = \bar{1},4984442 - \frac{1}{4}\ 0,0^3 3803 +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4} - 1\right)\left(-0,0^6 4\right) +$$

(1) Evidentemente que, dada uma sucessão de um número ímpar de números formando progressão aritmética, pode sempre escolher-se um, tal que os outros estejam dispostos simètricamente em relação a êle e portanto os problemas resolvidos pela fórmula de Newton-Gauss podem sê-lo também pela de Gregory-Newton. Simplesmente aquela tem sôbre esta a vantagem de permitir uma melhor representação da função desconhecida na visinhança do número a, valor médio da sucessão.

$$+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{4}+1\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}-1\right).0,0^61+$$

$$+\frac{1}{4!}\left(-\frac{1}{4}+1\right)\left(-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{4}-1\right)\left(-\frac{1}{4}-2\right)0,0^61$$

$$=\bar{1},49834906$$

Obtinha-se êste mesmo resultado utilizando a fórmula apenas até às diferenças segundas.

À fórmula 47) pode dar-se uma forma um pouco diferente, por um arranjo conveniente dos seus têrmos.

Ela pode escrever-se assim

$$f(a+yh)=f(a)+y\left[\Delta f(a)-\frac{1}{2}.\Delta^2 f(a-h)\right]+$$

$$+\frac{1}{2!}y^2\Delta^2 f(a-h)+\frac{1}{3!}y(y^2-1^2)\left[\Delta^3 f(a-h)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2}\Delta^4 f(a-2h)\right]+\frac{1}{4!}y^2(y^2-1^2)\Delta^4 f(a-2h)+\cdots+$$

$$+\frac{1}{(2k+1)!}y(y^2-1^2)(y^2-2^2)\cdots(y^2-k^2)\times$$

$$\times\left[\Delta^{2k+1}f(a-kh)-\frac{1}{2}\Delta^{2k+2}f[a-(k+1)h]\right]+$$

$$+\frac{1}{(2k+2)!}y^2(y^2-1^2)(y^2-2^2)\cdots(y^2-k^2)\Delta^{2k+2}f[a-(k+1)h]$$

$$+\cdots$$ (1)

---

(1) Efectivamente, do têrmo geral de 47) resulta

$$\frac{1}{(2k+1)!}y(y^2-1^2)\cdots(y^2-k^2)\,\Delta^{2k+1}f(a-kh)+$$

$$+\frac{1}{(2k+2)!}y(y^2-1^2)\cdots(y^2-k^2)[y-(k+1)]\,\Delta^{2k+2}f[a-(k+1)h]=$$

As diferenças de ordem par que figuram dentro dos parêntesis rectos podem substituir-se por diferenças de ordem ímpar (para o que basta recorrer às definições). Assim, tem-se:

$$\Delta^2 f(a-h) = \Delta f(a) - \Delta f(a-h)$$

$$\Delta^4 f(a-2h) = \Delta^3 f(a-h) - \Delta^3 f(a-2h)$$

$$\Delta^6 f(a-3h) = \Delta^5 f(a-2h) - \Delta^5 f(a-3h)$$

...

$$\Delta^{2k+2} f[a-(k+1)h] = \Delta^{2k+1} f(a-kh) - \Delta^{2k+1} f[a-(k+1)h]$$

...

Substituindo estes valores na fórmula anterior, efectuando operações e atendendo à significação da função definida no § 10 (pág. 31), vem finalmente

$$= \frac{1}{(2k+1)!}\, y\,(y^2-1^2)\cdots(y^2-k^2)\,\Delta^{2k+1} f(a-kh) +$$

$$+ \frac{1}{(2k+2)!}\, y^2\,(y^2-1^2)\cdots(y^2-k^2)\,\Delta^{2k+2} f[a-(k+1)h]$$

$$- \frac{k+1}{(2k+1)!\,(2k+2)}\, y\,(y^2-1^2)\cdots(y^2-k^2)\,\Delta^{2k+2} f[a-(k+1)h]$$

$$= \frac{1}{(2k+1)!}\, y\,(y^2-1^2)\cdots(y^2-k^2)\Big[\Delta^{2k+1} f(a-kh) -$$

$$- \frac{1}{2}\,\Delta^{2k+2} f[a-(k+1)h]\Big]$$

$$+ \frac{1}{(2k+2)!}\, y^2\,(y^2-1^2)\cdots(y^2-k^2)\,\Delta^{2k+2} f[a-(k+1)h].$$

$$48)\quad f(a+yh)=f(a)+\frac{1}{2}\,y\,[\Delta f(a)+\Delta f(a-h)]+$$

$$+\frac{1}{2}\,y^2\,\Delta^2 f(a-h)+$$

$$+\frac{1}{2\,.\,3!}\,\frac{(y^2)_2}{y}\,[\Delta^3 f(a-h)+\Delta^3 f(a-2h)]+$$

$$+\frac{1}{4!}\,(y^2)_2\,\Delta^4 f(a-2h)$$

$$+\dots$$

$$+\frac{1}{2.(2k+1)!}\,\frac{(y^2)_{k+1}}{y}\left[\Delta^{2k+1} f(a-kh)+\Delta^{2k+1} f[a-(k+1)h]\right]$$

$$+\frac{1}{(2k+2)!}\,(y^2)_{k+1}\,\Delta^{2k+2} f[a-(k+1)\,h]$$

$$+\dots.$$

É esta a fórmula de interpolação de Newton-Stirling.

Pela inspecção do quadro das diferenças de pág. 69 reconhece-se que esta fórmula utiliza as diferenças colocadas o mais próximo possível da linha média e de um e outro lado dela (recorde-se que a de Newton-Gauss utilizava só as diferenças da linha média e abaixo dela).

Aplicando ao exemplo anteriormente apresentado (pág. 70) tem-se

$$log\ sen\ 18^\circ\,21'\,45''=\bar{1},4984442+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)(0{,}0^3 3803+0{,}0^3 3807)$$

$$+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^2(-\,0{,}0^6 4)+\frac{1}{12}\left(-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{16}-1\right)(0{,}0^6 1+0)+$$

$$+\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{16}\left(\frac{1}{16}-1\right)0{,}0^6 1$$

$$=\bar{1},49834906\,.$$

É de notar que, utilizando apenas as diferenças 1.as, se obtém *log sen* $18^\circ\,21'\,45''=\bar{1},49834907$, portanto com aproximação suficiente, visto que o último algarismo não merece confiança.

CAPÍTULO III

Funções Primitivas e Somas

16) *Integrais, indefinido e definido, da função factorial.*

Consideremos a função factorial

$$(x)_i = x\,(x-1)\cdots(x-i+1);$$

o seu integral calcula-se simplesmente desenvolvendo $(x)_i$ segundo as potências de x.

Tem-se [17) pág. 20]

$$(x)_i = S_{i\,1}\,x + S_{i\,2}\,x^2 + \cdots + S_{i\,k}\,x^k + \cdots + S_{i\,i}\,x^i,$$

donde, integrando,

$$\int (x)_i\,dx = \frac{1}{2} S_{i\,1}\,x^2 + \frac{1}{3} S_{i\,2}\,x^3 + \cdots + \frac{1}{k+1} S_{i\,k}\,x^{k+1} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{i+1} S_{i\,i}\,x^{i+1} + C$$

ou

$$\text{49)} \qquad \int (x)_i\,dx = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k+1} S_{i\,k}\,x^{k+1} + C$$

onde C é uma constante arbitrária.

De 49) resulta imediatamente

$$50) \qquad \int_0^n (x)_i \, dx = \sum_{k=1}^{i} \frac{1}{k+1} S_{ik} \, n^{k+1}.$$

17) *Somas Indefinidas. Propriedades.*

Seja dada uma função $y = f(x)$ e, fixado o acréscimo finito h do argumento, consideremos uma nova função $F(x)$ que, para todos os valores do argumento de $f(x)$, satisfaça à condição

$$51) \qquad \Delta F(x) = f(x).$$

A função $F(x)$ assim definida recebe o nome de *soma indefinida de* $f(x)$ ou *integral indefinido às diferenças, de* $f(x)$ (¹) e representa-se pelo símbolo

$$F(x) = \Sigma f(x).$$

A função $F(x)$ goza de propriedades importantes, das quais vamos estudar algumas.

Propriedade 1.ª. A função $F(x) = \Sigma f(x)$ *é definida a menos de uma constante arbitrária.*

Com efeito,

$$\Delta [F(x) + k] = \Delta F(x)$$

logo, em virtude de 51) se $F(x)$ é soma indefinida de $f(x)$ também o é $F(x) + k$.

Esta propriedade estabelece uma analogia flagrante com o que se passa com as funções primitivas ordinárias.

Mais geralmente: *a função* $F(x) = \Sigma f(x)$ *é definida a menos de uma função arbitrária de período* h.

(¹) A razão do nome — integral indefinido às diferenças — está na analogia qne se verifica entre a sua definição e a de função primitiva na análise infinitesimal. A razão do nome — soma indefinida — será vista adiante.

Seja, com efeito, $w(x)$ uma função de período h; tem-se

$$\Delta [F(x) + w(x)] = \Delta F(x) + \Delta w(x) = \Delta F(x),$$

visto que

$$\Delta w(x) = w(x+h) - w(x) = 0,$$

logo, sendo $F(x)$ soma indefinida de $f(x)$, também o é $F(x) + w(x)$, em virtude de 51).

Propriedade 2.ª. Os símbolos Δ e Σ são permutáveis.

Introduzindo em 51) o símbolo adoptado para $F(x)$, vem

$$\Delta F(x) = \Delta [\Sigma f(x)] = f(x).$$

Por outro lado, fazendo $\Delta f(x) = \varphi(x)$, donde $f(x) = \Sigma \varphi(x)$, tem-se

$$\Sigma [\Delta f(x)] = \Sigma \varphi(x) = f(x),$$

logo,

$$\Delta [\Sigma f(x)] = \Sigma [\Delta f(x)] = f(x),$$

igualdade que se pode escrever mais simplesmente, visto que a supressão do parêntesis não arrasta nenhuma ambigüidade,

52) $$\Delta \Sigma f(x) = \Sigma \Delta f(x) = f(x).$$

Os dois símbolos Δ e Σ verificam portanto a igualdade simbólica

53) $$\Delta . \Sigma = 1 \qquad \Sigma = \frac{1}{\Delta}$$

a propósito da qual se podem fazer as considerações que no Cap. 1.º § 3.º foram feitas sôbre a igualdade simbólica $E = 1 + \Delta$.

Dela se podem tirar conclusões análogas e com ela é necessário usar de cautelas análogas.

Propriedade 3.ª. O integral, às diferenças, da soma de um número finito de funções é igual à soma dos integrais, às diferenças, dessas funções.

A igualdade, que traduz o enunciado,

$$\Sigma\,[f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)]=\Sigma f_1(x)+\Sigma f_2(x)+\cdots+$$
$$+\Sigma f_n(x)$$

resulta imediatamente de que, aplicando a operação Δ a ambos os seus membros, se obtém uma identidade.

Propriedade 4.ª. O integral, às diferenças, do produto de uma constante por uma função é igual ao produto da constante pelo integral, às diferenças, da função.

Com efeito, aplicando a operação Δ a ambos os membros da igualdade

$$\Sigma\,[k f(x)]=k.\,\Sigma f(x)$$

que traduz o enunciado, obtém-se uma identidade.

Estas propriedades estabelecem uma analogia muito estreita com as das funções primitivas na análise infinitesimal; outras há de que nos não ocupamos aqui. Ao leitor desejoso de maior minúcia neste estudo, aconselhamos a leitura do artigo «Calcul des Différences et Interpolation» da «Encyclopédie des Sciences Mathématiques» (ed. francesa).

Soma indefinida da factorial.

Da fórmula 14) $\Delta\,(x)_n=n\,(x)_{n-1}$, resulta, mudando n em $n+1$ e em virtude de 51),

$$\text{54)}\qquad \Sigma\,(x)_n=\frac{(x)_{n+1}}{n+1}+k$$

[Comparar com $\int x^n\,dx$].

Soma indefinida de x^n.

É cómodo, para proceder ao seu cálculo, desenvolver prèviamente x^n em polinómio de factoriais o que dá, como se sabe,

$$21) \quad x^n = T_{n1}\,(x)_1 + \cdots + T_{ni}\,(x)_i + \cdots + T_{nn}\,(x)_n.$$

Integrando ambos os membros, às diferenças, e atendendo às propriedades deduzidas e a 54) vem, sucessivamente,

$$\Sigma\, x^n = T_{n1}\,\Sigma\,(x)_1 + \cdots + T_{ni}\,\Sigma\,(x)_i + \cdots + T_{nn}\,\Sigma\,(x)_n$$

$$= \frac{1}{2}\,T_{n1}\,(x)_2 + \cdots + \frac{1}{i+1}\,T_{ni}\,(x)_{i+1} + \cdots + \frac{1}{n+1}\,T_{nn}\,(x)_{n+1}$$

$$+ k,$$

ou

$$55) \qquad \Sigma\, x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1}\,T_{ni}\,(x)_{i+1} + k,$$

que se pode ainda escrever

$$56) \qquad \Sigma\, x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!\,(i+1)}\,\Delta^i\, o^n . (x)_{i+1} + k$$

visto que

$$57)\,(^1) \qquad T_{ni} = \frac{\Delta^i\, o^n}{i!}.$$

18) *Somas Definidas.*

Consideremos uma função $y = f\,(x)$, a sua *soma indefinida* $F\,(x) = \Sigma\, f\,(x)$, definida por $\Delta\, F\,(x) = f\,(x)$, e formemos a soma

$$f\,(a_0) + f\,(a_1) + \cdots + f\,(a_{n-1}). \qquad [a_i = a + i\,h]$$

(1) Para deduzir esta relação basta desenvolver x^n segundo factoriais, formar a diferença de ordem i dos dois membros e calculá-la no ponto zero. Tem-se $\Delta^i\, x^n = i!\; T_{ni} + \cdots + n\,(n-1) \cdots (n-i+1)\; T_{nn}\,(x)_{n-i}$, donde $\Delta^i\, o^n = i!\; T_{ni}$.

Em virtude da definição de $F(x)$, tem-se

$$f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1})=$$
$$=\Delta F(a_0)+\Delta F(a_1)+\cdots+\Delta F(a_{n-1})$$
$$=F(a_1)-F(a_0)+\cdots+F(a_n)-F(a_{n-1})$$
$$=F(a_n)-F(a_0).$$

Assim, a soma $f(a_0)+\cdots+f(a_{n-1})$ exprime-se na diferença de dois valores do integral indefinido, às diferenças, de $f(x)$.

Por analogia com o que se passa na análise infinitesimal, dá-se a essa soma o nome de *integral definido, às diferenças*, ou *soma definida* e representa-se pelo símbolo $\Sigma_{a_0}^{a_n} f(x)$ (1).

Tem-se então

58) $\Sigma_{a_0}^{a_n} f(x)=F(a_n)-F(a_0), \qquad F(x)=\Sigma f(x).$

Aos números a_0 e a_n dá-se ainda, também por analogia, o nome de limites do integral definido.

As expressões deduzidas no número anterior, [fórmulas 54), 55) e 56)] permitem, utilizando 58), calcular muito simplesmente o integral definido, às diferenças, das funções $(x)_n$ e x^n.

Assim, em virtude de 54), tem-se

59) $$\Sigma_p^q (x)_n=\frac{1}{n+1}\Big[(x)_{n+1}\Big]_p^q=$$
$$=\frac{1}{n+1}\left[q(q-1)\cdots(q-n)-p(p-1)\cdots(p-n)\right]$$

---

(1) Deve tomar-se todo o cuidado com êste símbolo e não o confundir com um somatório ordinário. Assim, tem-se $\sum\limits_{x=a_0}^{a_n} f(x)=f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_n)$, ao passo que $\Sigma_{a_0}^{a_n} f(x)=f(a_0)+f(a_1)+\cdots+f(a_{n-1})$.

e é claro que, se k é um inteiro menor que n, se tem $[(x)_n]_{x=k} = 0$.

Em particular, quando o limite inferior é zero e o superior $n+1$, tem-se

$$60) \qquad \Sigma_0^{n+1} (x)_n = n!$$

como imediatamente se reconhece.

Para o cálculo da soma definida da função x^n tem-se, como conseqüência de 55) e 56),

$$61) \qquad \Sigma_p^q x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} T_{ni} \Big[(x)_{i+1} \Big]_p^q$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!\,(i+1)} \Delta^i o^n \Big[(x)_{i+1} \Big]_p^q .$$

É particularmente importante o caso em que o limite inferior é zero (ou um); neste caso, como $\Sigma_0^{p+1} x^n = 1^n + 2^n + \cdots + p^n$, está-se reduzido ao cálculo da

Soma das potências dos primeiros p números inteiros.

De 61) resulta

$$\Sigma_0^{p+1} x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} T_{ni} \Big[(x)_{i+1} \Big]_0^{1+}$$

e, como

$$\Big[(x)_{i+1} \Big]_0^{p+1} = (p+1)\, p\, (p-1) \cdots (p-i+1),$$

$$62) \quad \Sigma_0^{p+1} x^n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} T_{ni}\, (p+1)\, p\, (p-1) \cdots (p-i+1)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!\,(i+1)} \Delta^i o^n\, (p+1)\, p\, (p-1) \cdots (p-i+1)$$

Para os primeiros valores de n obtêm-se, substituindo os números de Stirling de 2.ª espécie (ou as diferenças de o^n) pelos seus valores e efectuando operações, os resultados seguintes

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + p = \frac{1}{2} T_{11} (p+1) p$$

$$= \frac{1}{2} p (p+1).$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + p^2 = \frac{1}{2} T_{21} (p+1) p + \frac{1}{3} T_{22} (p+1) p (p-1)$$

$$= \frac{1}{6} p (p+1) (2p+1).$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + p^3 = \frac{1}{2} T_{31} (p+1) p + \frac{1}{3} T_{32} (p+1) p (p-1) +$$

$$+ \frac{1}{4} T_{33} (p+1) p (p-1) (p-2)$$

$$= \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2 = S_1^2.$$

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + p^4 = \frac{1}{2} T_{41} (p+1) p + \frac{1}{3} T_{42} (p+1) p (p-1) +$$

$$+ \frac{1}{4} T_{43} (p+1) p (p-1) (p-2) +$$

$$+ \frac{1}{5} T_{44} (p+1) p (p-1) (p-2) (p-3)$$

$$= \frac{1}{30} p (p+1) (6p^3 + 9p^2 + p - 1)$$

$$= \frac{1}{5} S_2 (6 S_1 - 1).$$

etc.

Exemplo. Calcular a soma das sextas potências dos primeiros dez números inteiros.

Fazendo em 62) $p=10,\ n=6$, obtém-se

$$S=\Sigma_1^{11} x^6=1^6+2^6+\cdots+10^6=\frac{1}{2}T_{61}.11.10+\frac{1}{3}T_{62}.11.10.9$$

$$+\frac{1}{4}T_{63}.11.10.9.8+\frac{1}{5}T_{64}.11.10.9.8.7+$$

$$+\frac{1}{6}T_{65}\,11.10.9.8.7.6+\frac{1}{7}T_{66}\,11.10.9.8.7.6.5$$

e como $T_{61}=1,\quad T_{62}=31,\quad T_{63}=90,\quad T_{64}=65,\quad T_{65}=15,$ $T_{66}=1$, vem, substituindo,

$$S=\frac{1}{2}\,110+\frac{31}{3}\,990+\frac{90}{4}\,7920+\frac{65}{5}\,55440+$$

$$+\frac{15}{6}\,332640+\frac{1}{7}\,1663200$$

$$=1978405.$$

Para as primeiras potências, substituindo os números de Stirling de 2.ª espécie (ou as diferenças de o^n) pelos seus valores e efectuando operações, os resultados seguintes:

$$S_1 = 1 + 2 + \cdots + p = \frac{1}{2} T_{11} (p+1) p$$

$$= \frac{1}{2} p (p+1).$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + p^2 = \frac{1}{2} T_{21} (p+1) p + \frac{1}{3} T_{22} (p+1) p (p-1)$$

$$= \frac{1}{6} p (p+1) (2p+1).$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \cdots + p^3 = \frac{1}{2} T_{31} (p+1) p + \frac{1}{3} T_{32} (p+1) p (p-1) +$$

$$+ \frac{1}{4} T_{33} (p+1) p (p-1) (p-2)$$

$$= \frac{1}{4} p^2 (p+1)^2 = S_1^2$$

$$S_4 = 1^4 + 2^4 + \cdots + p^4 = \frac{1}{2} T_{41} (p+1) p + \frac{1}{3} T_{42} (p+1) p (p-1) +$$

$$+ \frac{1}{4} T_{43} (p+1) p (p-1) (p-2) +$$

$$+ \frac{1}{5} T_{44} (p+1) p (p-1) (p-2) (p-3)$$

$$= \frac{1}{30} p (p+1) (6p^3 + 9p^2 + p - 1)$$

$$= \frac{1}{5} S_2 (6 S_1 - 1).$$

etc.

Exemplo. Calcular a soma das sextas potências dos primeiros dez números inteiros.

CAPÍTULO IV

Polinómios de Bernoulli e Legendre

19) *Polinómios de Bernoulli de 1.ª espécie.*

Dá-se o nome de *polinómio de Bernoulli de 1.ª espécie* à função $\varphi_n(x)$ definida pela igualdade

$$63)\qquad \Delta\,\varphi_n(x) = \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

ou, o que é o mesmo,

$$63\text{ a)}\qquad \varphi_n(x) = \Sigma\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C.$$

É evidente que a definição assim dada deixa por determinar uma constante arbitrária (mais geralmente, uma função periódica) da qual oportunamente se pode dispor, fixando-a de modo a satisfazer uma determinada condição prèviamente estabelecida.

Procuremos $\Delta\,\dfrac{d}{dx}\,[\varphi_n(x)]$. Tem-se [1]

$$\Delta\,\frac{d}{dx}\,[\varphi_n(x)] = \frac{d}{dx}\,\Delta\,\varphi_n(x) = \frac{d}{dx}\,\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{x^{n-2}}{(n-2)!}$$

---

[1] Como imediatamente se verifica, o símbolo de diferença é permutável com o de derivada. Com efeito, $\dfrac{d}{dx}\,[\Delta f(x)] = \dfrac{d}{dx}\,[f(x+h) - f(x)] =$ $= \dfrac{d}{dx}\,[f(x+h)] - \dfrac{d}{dx}\,[f(x)] = \Delta\,\dfrac{d}{dx}\,[f(x)]$.

e como de 63) vem, mudando n em $n-1$, $\Delta\,\varphi_{n-1}(x)=\dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!}$,

tem-se

$$\Delta\,\frac{d}{d\,x}\,[\varphi_n(x)]=\Delta\,\varphi_{n-1}(x).$$

Somando [1] ambos os membros desta igualdade e dispondo convenientemente da constante C implicada, por virtude da definição, em $\varphi_{n-1}(x)$, tem-se

64) $$\frac{d}{d\,x}\,[\varphi_n(x)]=\varphi_{n-1}(x)$$

donde

65) $$\varphi_n(x)=\int\varphi_{n-1}(x)\,d\,x+c_n$$

onde c_n é uma constante arbitrária.

Esta relação [65)] permite determinar simplesmente a forma de $\varphi_n(x)$; com efeito, de 63) resulta, para $n=1$,

$$\varphi_1(x)=x+c_1$$

e, fazendo em 65) $n=2,\,3,\cdots,$ vem

$$\varphi_2(x)=\frac{1}{2}\,x^2+c_1\,x+c_2$$

$$\varphi_3(x)=\frac{1}{3!}\,x^3+\frac{1}{2}\,c_1\,x^2+c_2\,x+c_3$$

$$\varphi_4(x)=\frac{1}{4!}\,x^4+\frac{1}{3!}\,c_1\,x^3+\frac{1}{2}\,c_2\,x^2+c_3\,x+c$$

. . .

[1] Isto é, tomando as somas indefinidas dos dois membros.

A função $\varphi_n(x)$ é portanto da forma geral, como um fácil raciocínio de indução mostra,

$$66) \qquad \varphi_n(x) = a_0 \frac{x^n}{n!} + a_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \cdots + a_{n-1} x + a_n$$

com $a_0 = 1$.

20) *Coeficientes do polinómio $\varphi_n(x)$. Números de Bernoulli.*

Para determinar os coeficientes $a_1, \cdots a_n$, demonstremos em primeiro lugar que êles são independentes do grau do polinómio; com efeito, de 64) resulta imediatamente, atendendo a 66),

$$\varphi_{n-1}(x) = a_0 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + a_1 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \cdots + a_{n-1}$$

o que prova a afirmação feita.

Os coeficientes podem portanto ser determinados uma vez por tôdas. Para isso, façamos $x = 0$ na igualdade de definição, 63); obtém-se $\Delta \varphi_n(o) = 0$ e, por conseqüência, de 66) resulta, atendendo a que $\Delta \left[\frac{x^i}{i!}\right]_0 = \frac{1}{i!} \Delta o^i = \frac{1}{i!}$, [1]

$$67) \qquad \frac{a_0}{n!} + \frac{a_1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1!} = 0$$

relação que, para $n = 2, 3, \cdots$ dá, visto ser $a_0 = 1$,

$$68) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2!} + a_1 = 0 \\ \frac{1}{3!} + \frac{a_1}{2!} + a_2 = 0 \\ \cdots \end{array} \right.$$

---

[1] Vidé parágrafo 5.

Estas relações permitem a determinação sucessiva de $a_1, a_2, a_3, \cdots$ e mostram que êstes números são todos racionais.

Teorema — Os números de índice ímpar são, à excepção de a_1, *todos nulos.*

Para o demonstrar, comecemos por ver que $a_1, a_2, a_3, \cdots$ são os coeficientes do desenvolvimento em série de potências da função

$$f(x) = \frac{x}{e^x - 1}.$$

Com efeito, fazendo

$$\frac{x}{e^x - 1} = A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2 + \cdots + A_n\, x^n + \cdots,$$

tem-se

$$x = \left(x + \frac{1}{2!}\, x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\, x^n + \cdots\right) . \left(A_0 + A_1\, x + A_2\, x^2 + \right.$$

$$\left. + \cdots + A_n\, x^n + \cdots\right)$$

donde, identificando,

$$\begin{cases} A_0 = 1 \\ \dfrac{A_0}{n!} + \dfrac{A_1}{(n-1)!} + \dfrac{A_2}{(n-2)!} + \cdots + A_{n-1} = 0, \quad n = 2, 3, \cdots \end{cases}$$

relação que coincide manifestamente com 67) e que permite portanto escrever

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 + a_1\, x + a_2\, x^2 + \cdots + a_n\, x^n + \cdots.$$

Consideremos agora a função

$$F(x) = \frac{x}{e^x - 1} - a_1\, x = \frac{x}{e^x - 1} + \frac{1}{2}\, x. \text{ [1]}$$

---

[1] Da primeira das relações 68) resulta $a_1 = -\dfrac{1}{2}$.

Tem-se, efectuando operações,

$$F(x) = \frac{x\,(e^x + 1)}{2\,(e^x - 1)}.$$

Esta função é par [1] e, por conseqüência, no seu desenvolvimento em série de potências só figuram potências pares de x, o que arrasta o anulamento dos coeficientes a_{2k+1} $(k \geqslant 1)$ como se pretendia demonstrar.

Pode portanto escrever-se

$$\frac{x}{e^x - 1} = 1 - \frac{1}{2}x + a_2 x^2 + a_4 x^4 + \cdots + a_{2k} x^{2k} + \cdots$$

onde $a_2, a_4, \cdots$ podem ser determinados pelas relações 68).

Façamos

69) $$B_k = k!\, a_k. \text{ [2]}$$

Os números B_k assim definidos chamam-se *números de Bernoulli,* nome que lhes foi dado por Moivre e Euler em homenagem a Jacques Bernoulli que primeiro os introduziu na análise.

Estes números gozam de propriedades importantes; algumas serão vistas no decorrer dêste trabalho. O leitor desejoso de aprofundar êste estudo pode consultar, entre outros: *N. E. Nörlund: Differenzenrechnung,* cap. 2.º § 1.

Para obtenção de indicações bibliográficas, pode consultar-se: artigo «*Calcul des Différences et Interpolation*» da *Encyclopédie des Sciences Mathématiques,* atrás citado (sobretudo nas notas 83 e 84);

Repertorium der Höheren Analysis vol. 3, cap. 23, § 7.

---

[1] Com efeito, como imediatamente se reconhece, é $F(x) = F(-x)$.

[2] Os polinomos que, com maior rigor, se devem denominar polinómios de Bernoulli de 1.ª espécie são, não pròpriamente os polinómios $\varphi_n(x)$ definidos no texto, mas sim os polinómios $B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \cdot x^{n-k}$.

Como, porém, fàcilmente se reconhece, é $\varphi_n(x) = \frac{1}{n!} B_n(x)$.

Os números de Bernoulli satisfazem à relação

69 a) $$\sum_{k=o}^{n-1} \binom{n}{k} B_k = 0$$

a qual se deduz substituindo em 67) os a_k pelos seus valores, dados por 69).

Os dez primeiros números de Bernoulli são:

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0$$

$$B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30},\ B_9 = 0,\ B_{10} = \frac{5}{66}.$$

Os coeficientes dos polinómios $\varphi_n\ (x)$ são respectivamente

$$a_0 = 1,\ a_1 = -\frac{1}{2},\ a_2 = \frac{1}{12},\ a_3 = 0,\ a_4 = -\frac{1}{720},\ a_5 = 0$$

$$a_6 = \frac{1}{30240},\ a_7 = 0,\ a_8 = \frac{-1}{1.209.600},\ a_9 = 0,\ a_{10} = \frac{1}{47.900.160}.$$

21) *Valores particulares dos polinómios de Bernoulli de 1.ª espécie. Somas das potências dos números inteiros.*

De 66) resulta imediatamente

$$\varphi_n\ (o) = a_n.$$

Por outro lado

$$\varphi_n\ (1) = \frac{a_0}{n!} + \frac{a_1}{(n-1)!} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1!} + a_n$$

o que, em virtude de 67), dá

$$\varphi_n\ (1) = a_n.$$

Tem-se ainda, como conseqüência de 64),

$$\left[\frac{d\,\varphi_n(x)}{dx}\right]_{x=o} = \varphi_{n-1}(o) = a_{n-1}$$

e, do mesmo modo,

$$\left[\frac{d^2\,\varphi_n(x)}{dx^2}\right]_{x=o} = \left[\frac{d\,\varphi_{n-1}(x)}{dx}\right]_{x=o} = \varphi_{n-2}(o) = a_{n-2}$$

...

$$\left[\frac{d^k\,\varphi_n(x)}{dx^k}\right]_{x=o} = a_{n-k}$$

...

o que, de resto, resulta imediatamente da aplicação da fórmula de Mac-Laurin ao polinómio $\varphi_n(x)$.

As derivadas tomadas no ponto 1 têm o mesmo valor que no ponto zero excepto

$$\left[\frac{d^{n-1}\,\varphi_n(x)}{dx^{n-1}}\right]_{x=1} = \varphi_1(1) = 1 + a_1 \quad \text{ao passo que}$$

$$\left[\frac{d^{n-1}\,\varphi_n(x)}{dx^{n-1}}\right]_{x=o} = \varphi_1(o) = a_1.$$ Daqui resulta que os desenvolvimentos de $\varphi_n(x)$ segundo as potências de x e segundo as potências de $x - 1$ diferem apenas no coeficiente do têrmo de grau $n - 1$.

Assim, tem-se por exemplo,

$$\varphi_4(x) = \frac{1}{24}x^4 - \frac{1}{12}x^3 + \frac{1}{24}x^2 - \frac{1}{720}$$

$$= \frac{1}{24}(x-1)^4 + \frac{1}{12}(x-1)^3 + \frac{1}{24}(x-1)^2 - \frac{1}{720}$$

visto que, sendo $a_1 = -\frac{1}{2}$, o coeficiente de $(x-1)^3$ é $\frac{1}{3!}(1+a_1) = \frac{1}{12}$.

As somas de potências dos números inteiros exprimem-se muito simplesmente em polinómios de Bernoulli de 1.ª espécie.

Com efeito, mudando, em 63 a), n em $n+1$ e tomando a soma definida entre os limites a e b, vem

$$\Sigma_a^b \frac{x^n}{n!} = \varphi_{n+1}(b) - \varphi_{n+1}(a)$$

donde

70) $$\Sigma_a^b x^n = n!\,[\varphi_{n+1}(b) - \varphi_{n+1}(a)].$$

Fazendo $a = o \quad b = p+1$, tem-se

71) $$\Sigma_0^{p+1} x^n = n!\,[\varphi_{n+1}(p+1) - a_{n+1}]\ (^1).$$

Exemplo — Calcular a soma das 6.as potências dos dez primeiros números inteiros.

Tem-se $n = 6 \quad p = 10$, logo

$$\Sigma_0^{11} x^6 = 1^6 + 2^6 + \cdots + 10^6 = 6!\,[\varphi_7(11) - a_7]$$

e, como $a_7 = 0$,

$$\Sigma_0^{11} x^6 = 6!\,\varphi_7(11) = 6!\left[\frac{x^7}{7!} - \frac{1}{2}\frac{x^6}{6!} + \frac{1}{12}\frac{x^5}{5!} - \frac{1}{720}\frac{x^3}{3!} + \frac{1}{30240}x\right]_{x=11}$$

$$= 1.978.405.$$

(1) A comparação de 71) com 62) estabelece a relação

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} T_{n\,i}\,(p+1)\,p\,(p-1)\cdots(p-i+1) = n!\,[\varphi_{n+1}(p+1) - a_{n+1}]$$

que liga os números de Stirling de 2.ª espécie com os polinómios de Bernoulli de 1.ª espécie.

As fórmulas deduzidas no parágrafo 18), a partir de 62), podem igualmente ser estabelecidas como conseqüências de 71).

22) *Polinómios de Bernoulli de 2.ª espécie.*

A definição, propriedades, forma de determinação de coeficientes, etc., dêstes polinómios, são análogas às dos polinómios de 1.ª espécie.

Define-se *polinómio de Bernoulli* $\psi_n(x)$ *de 2.ª espécie* pela igualdade

$$72) \qquad \frac{d}{dx}\left[\psi_n(x)\right] = \frac{1}{(n-1)!}(x)_{n-1}.$$

Dela resulta imediatamente por integração ordinária

$$\psi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int (x)_{n-1}\,dx + k$$

e é evidente que a definição dada determina o polinómio a menos de uma constante arbitrária.

Em virtude de 49) (§ 16), pode escrever-se

$$73) \qquad \psi_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i+1}S_{n-1\,i}\,x^{i+1} + C\right]$$

e $\psi_n(x)$ é, por conseqüência, um polinómio de grau n e de coeficientes $b_{n-(i+1)} = \frac{1}{(n-1)!}\,\frac{S_{n-1\,i}}{i+1}$.

Importa porém dar uma outra forma ao desenvolvimento do polinómio, para o que vamos fazer uma análise semelhante à que fizemos a propósito do polinómio $\varphi_n(x)$.

Em virtude de 72) e da permutabilidade dos símbolos Δ e $\frac{d}{dx}$, tem-se

$$\frac{d}{dx}\left[\Delta\,\psi_n(x)\right] = \Delta\,\frac{d}{dx}\left[\psi_n(x)\right] = \Delta\,\frac{(x)_{n-1}}{(n-1)!} = \frac{(x)_{n-2}}{(n-2)!}$$

$$= \frac{d}{dx}\left[\psi_{n-1}(x)\right].$$

Integrando e dispondo convenientemente da constante arbitrária, implicada em 72), tem-se

$$74) \qquad \Delta \psi_n(x) = \psi_{n-1}(x)$$

donde

$$74\ a) \qquad \psi_n(x) = \Sigma\, \psi_{n-1}(x) + c_n .$$

Desta igualdade, e atendendo a que de $\dfrac{d}{dx}[\psi_1(x)] = \dfrac{(x)_0}{0!} = 1$ resulta $\psi_1(x) = (x)_1 + c_1$, conclui-se, por virtude de 54),

$$\psi_1(x) = (x)_1 + c_1$$

$$\psi_2(x) = \Sigma\, \psi_1(x) + c_2 = \frac{1}{2}(x)_2 + c_1 (x)_1 + c_2$$

$$\psi_3(x) = \Sigma\, \psi_2(x) + c_3$$

$$= \frac{1}{3!}(x)_3 + \frac{1}{2!} c_1 (x)_2 + c_2 (x)_1 + c_3$$

e um fácil raciocínio de indução mostra que é em geral

$$75) \quad \psi_n(x) = \frac{b_0}{n!}(x)_n + \frac{b_1}{(n-1)!}(x)_{n-1} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{1!}(x)_1 + b_n$$

com $b_0 = 1$. [comparar com a expressão 66) de $\varphi_n(x)$].

Como primeira propriedade, tem-se que — *os coeficientes* $b_0\ b_1, \cdots b_n$ *não dependem do grau do polinómio.*

Com efeito de 74) e 75) resulta

$$\psi_{n-1}(x) = \frac{b_0}{(n-1)!}(x)_{n-1} + \frac{b_1}{(n-2)!}(x)_{n-2} + \cdots + b_{n-1}$$

o que prova a afirmação.

Os coeficientes b_i podem portanto determinar-se uma vez por tôdas e essa determinação pode fazer-se dando a x um valor particular, por exemplo zero, na igualdade de definição.

Tem-se, de 72),

$$\left[\frac{d\,\psi_n(x)}{dx}\right]_0 = \left[\frac{(x)_{n-1}}{(n-1)!}\right]_0 = 0.$$

Por outro lado, de 75) tira-se, para $x=0$,

$$\left[\frac{d\,\psi_n(x)}{dx}\right]_0 = \frac{1}{n!}\left[\frac{d\,(x)_n}{dx}\right]_0 + \frac{b_1}{(n-1)!}\left[\frac{d\,(x)_{n-1}}{dx}\right]_0 + \cdots$$

$$+ \frac{b_{n-1}}{1!}\left[\frac{d\,(x)_1}{dx}\right]_0$$

e como de 20) (§ 7) resulta

$$\left[\frac{d\,(x)_n}{dx}\right]_0 = S_{n\,1} = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

tem-se

$$\left[\frac{d\,\psi_n(x)}{dx}\right]_0 = \frac{1}{n!}\,S_{n-1} + \frac{b_1}{(n-1)!}\,S_{n-1\,1} +$$

$$+ \frac{b_2}{(n-2)!}\,S_{n-2\,1} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{1!}\,S_{1\,1} = 0$$

ou

$$\frac{1}{n!}(-1)^{n-1}(n-1)! + \frac{b_1}{(n-1)!}(-1)^{n-2}(n-2)! +$$

$$+ \frac{b_2}{(n-2)!}(-1)^{n-3}(n-3)! + \cdots + b_{n-1} = 0$$

donde, efectuando reduções e multiplicando por $(-1)^{n-1}$,

$$76) \qquad \frac{1}{n} - \frac{b_1}{n-1} + \frac{b_2}{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} b_{n-1} = 0.$$

Esta relação permite determinar sucessivamente os números b_1, b_2, $\cdots$ que são denominados *números de Bernoulli de segunda espécie.*

Estes números são manifestamente todos racionais. Os primeiros são: $b_0 = 1$, $b_1 = \frac{1}{2}$, $b_2 = -\frac{1}{12}$, $b_3 = \frac{1}{24}$,

$$b_4 = -\frac{19}{720},\ b_5 = \frac{3}{160},\ b_6 = -\frac{863}{60480}.$$

23) *Valores particulares dos polinómios de Bernoulli de 2.ª espécie. Aplicações.*

De 75) resulta imediatamente

$$\psi_n(i) = \frac{b_0}{n!} [(x)_n]_{x=i} + \frac{b_1}{(n-1)!} [(x)_{n-1}]_{x=i} + \\ + \cdots + \frac{b_{n-1}}{1!} [(x)_1]_{x=i} + b_n$$

e como, para i inteiro, é

$$[(x)_n]_{x=i} = \frac{i!}{(i-n)!},\ ^{(1)} \quad \text{vem}$$

$$\psi_n(i) = \frac{b_0}{n!} \frac{i!}{(i-n)!} + \frac{b_1}{(n-1)!} \frac{i!}{[i-(n-1)]!} + \\ + \cdots + \frac{b_{n-1}}{1!} \frac{i!}{(i-1)!} + b_n$$

---

(1) Se é $i < n$ tem-se $[(x)_n]_{x=i} = 0$.

ou

77) $\psi_n(i) = b_0 \binom{i}{n} + b_1 \binom{i}{n-1} + \cdots + b_{n-1}\binom{i}{1} + b_n \binom{i}{0}$

$$= \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{i}{\alpha} b_{n-\alpha}.$$

Se $i = n$, é manifestamente

77 a) $\psi_n(n) = \sum_{\alpha=0}^{n} \binom{n}{\alpha} b_{n-\alpha}$

$$= b_n + n\, b_{n-1} + \cdots + n\, b_1 + b_0 .$$

Se $i < n$, anulam-se no segundo membro de 77) todos os têrmos em que α ultrapassa i e fica portanto

77 b) $\psi_n(i) = b_n + i\, b_{n-1} + \binom{i}{2} b_{n-2} + \cdots + b_{n-i}$

$$= \sum_{\alpha=0}^{i} \binom{i}{\alpha} b_{n-\alpha}.$$

Desta igualdade resulta, para $i = 0, 1, 2, \dots$

78) $$\begin{cases} \psi_n(0) = b_n \\ \psi_n(1) = b_n + b_{n-1} \\ \psi_n(2) = b_n + 2\, b_{n-1} + b_{n-2} \\ \dots \end{cases}$$

É fácil relacionar os números de Bernoulli de 2.ª espécie com os de Stirling de 1.ª.

Com efeito, de 72) resulta, mudando n em $n + 1$ e integrando entre a e b,

79) $\int_a^b (x)_n\, dx = n! \left[\psi_{n+1}(b) - \psi_{n+1}(a) \right].$

Fazendo $a = o$ e $b = 1$ obtém-se, atendendo a 78),

79 *a*) $$\int_0^1 (x)_n \, dx = n! \, b_n$$

e como, por outro lado, fazendo em 50) $n = 1$ e $i = n$ se tem

$$\int_0^1 (x)_n \, dx = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} S_{nk},$$

obtém-se

80) $$b_n = \frac{1}{n!} \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1} S_{nk}.$$

24) *Polinómios de Legendre.*

Chama-se polinómio de Legendre ao polinómio $P_n(x)$ definido pela igualdade

81) $$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n \text{ (1)}$$

Êstes polinómios gozam de propriedades importantes que vamos passar a expor.

Propriedade 1.ª — $P_n(x)$ *é um polinómio de grau* n *e tem todos os seus têrmos da mesma paridade que* n.

Com efeito, $(x^2 - 1)^n$ é um polinómio de grau $2n$ cujos têrmos são todos de grau par. A operação de derivação aplicada n vezes sucessivas a êsse polinómio determina um novo polinómio

---

(1) Êste polinómio é o coeficiente de α^n no desenvolvimento em série de potências da função $(1 - 2\alpha x + \alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$. Vide sôbre êste assunto C. Jordan, Cours d'Analyse, Tomo I, 3.ª ed., pág. 268 e seg., Tomo II id. pág. 130 e 131 e pág. 299 e seg. Veja-se também E. Goursat. Cours d'Analyse Mathématique, 4.ª ed., Tomo I pág. 208 e seg.

de grau $2n - n = n$. Por outro lado, o grau de cada têrmo do novo polinómio é a diferença entre um número par e n e é portanto um número com a paridade de n.

Propriedade 2.ª — $P_n(x)$ *é uma função par ou ímpar conforme* n *é um número par ou ímpar.*

Com efeito, da propriedade 1.ª resulta

$$P_n(-x) = (-1)^n \cdot P_n(x).$$

Propriedade 3.ª — $P_n(x)$ *tem tôdas as suas raízes reais, simples e compreendidas entre* -1 *e* $+1$.

Com efeito, em primeiro lugar, tem-se

$$(x^2-1)^n = (x-1)^n \cdot (x+1)^n$$

e portanto $(x^2-1)^n$ tem n raízes iguais a 1 e n iguais a -1. A teoria das raízes múltiplas conjugada com o teorema de Rolle mostra que $\frac{d}{dx}(x^2-1)^n$ tem $n-1$ raízes iguais a 1, $n-1$ iguais a -1 e uma x_1 entre -1 e $+1$; pela mesma razão $\frac{d^2}{dx^2}(x^2-1)^n$ tem $n-2$ raízes iguais a 1, $n-2$ iguais a -1 e duas entre -1 e $+1$, das quais uma x_2 entre -1 e x_1 e outra x_3 entre x_1 e 1. O raciocínio repete-se até à formação da derivada de ordem n e é evidente que as raízes dadas pelo teorema de Rolle são tôdas simples.

Propriedade 4.ª — *Se* $\varphi(x)$ *é um polinómio de grau menor que o de* $P_n(x)$, *tem-se*

$$\text{82)} \qquad \int_{-1}^{+1} \varphi(x) \cdot P_n(x)\, dx = 0.$$

Seja, com efeito, $\varphi(x)$ um polinómio de grau $m < n$.

Aplicando n vezes seguidas o teorema de integração por partes, obtem-se [1]:

$$2^n \, . \, n! \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, P_n(x)\, dx = \left[\varphi(x) \frac{d^{n-1}(x^2-1)^n}{dx^{n-1}} - \right.$$

$$\left. - \varphi'(x) \frac{d^{n-2}(x^2-1)^n}{dx^{n-2}} + \cdots + (-1)^{n-1} \varphi^{(n-1)}(x)\,(x^2-1)^n \right]_{-1}^{+1} +$$

$$+ (-1)^n \int_{-1}^{+1} \varphi^{(n)}(x) . (x^2-1)^n \, dx .$$

Ora a parte integrada é nula, porquanto $(x^2-1)^n$ e as suas derivadas até à ordem $n-1$ se anulam para $x=1$ e $x=-1$, e o integral do segundo membro é também nulo porque $\varphi^{(n)}(x)=0$, visto ser, por hipótese, $m<n$.

Propriedade 5.ª — Sendo m *e* n *dois inteiros diferentes, tem-se,*

$$83) \qquad \int_{-1}^{+1} P_m(x) . \, P_n(x)\, dx = 0.$$

É conseqüência imediata da propriedade anterior.

Propriedade 6.ª — É

$$84) \qquad \int_{-1}^{+1} \left[P_n(x) \right]^2 dx = \frac{2}{2n+1} \cdot$$

---

[1] O teorema de integração por partes fica assim generalizado pela fórmula

$$\int_a^b u\, v^{(n)}\, dx = \left[u\, v^{(n-1)} - u'\, v^{(n-2)} + u''\, v^{(n-3)} - \ldots + (-1)^{(n-1)}\, u^{(n-1)}\, v \right]_a^b +$$

$$+ (-1)^n \int_a^b u^{(n)}\, v\, dx$$

Vide E. Goursat loc. cit. pg. 206.

Com efeito, da igualdade que serviu para demonstrar a propriedade 4.ª resulta, fazendo $\varphi(x) = P_n(x)$,

$$\int_{-1}^{+1} \left[P_n(x) \right]^2 dx = \int_{-1}^{+1} P_n(x) . P_n(x) . dx =$$

$$= \frac{1}{2^n . n!} (-1)^n \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \frac{d^n}{dx^n} P_n(x) \, dx.$$

Ora

$$\frac{d^n}{dx^n} P_n(x) = \frac{1}{2^n . n!} . \frac{d^{2n}}{dx^{2n}} (x^2 - 1)^n = \frac{(2n)!}{2^n . n!},$$

logo

$$\int_{-1}^{+1} \left[P_n(x) \right]^2 dx = (-1)^n \frac{(2n)!}{(2^n . n!)^2} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \, dx$$

e como, por outro lado,

$$\int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n \, dx = (-1)^n \, 2^{2n+1} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}, \quad (^1)$$

vem finalmente

$$\int_{-1}^{+1} \left[P_n(x) \right]^2 dx = (-1)^{2n} \, 2^{2n+1} . \frac{(2n)!}{(2^n . n!)^2} . \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} =$$

$$= \frac{2}{2n+1}.$$

Valores particulares

I) $P_n(1) = 1$

---

(1) Vide C. Jordan loc. cit. tomo II pg. 300.

Com efeito,

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n} = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n \left[(x-1)^n (x+1)^n\right]}{dx^n}.$$

Em virtude da regra de Leibniz, tem-se

$$\frac{d^n \left[(x-1)^n (x+1)^n\right]}{dx^n} = (x-1)^n \frac{d^n (x+1)^n}{dx^n} + \cdots +$$

$$+ n \frac{d^{n-1} (x-1)^n}{dx^{n-1}} \frac{d (x+1)^n}{dx} + (x+1)^n \frac{d^n (x-1)^n}{dx}.$$

Para $x = 1$ só se não anula o último têrmo e êsse tem por valor $2^n \cdot n!$, logo

$$P_n(1) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \cdot 2^n \cdot n! = 1.$$

II) $P_n(-1) = (-1)^n$

É conseqüência imediata da propriedade 2.ª e do valor anterior.

III) $P_{2n+1}(o) = 0$

Com efeito, $P_{2n+1}(x)$ só tem têrmos de grau ímpar (prop. 1.ª) e falta-lhe portanto o têrmo independente.

IV) $P_{2n}(o) = (-1)^n \dfrac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2}$

Com efeito, visto que

$$P_{2n}(x) = \frac{1}{2^{2n} (2n)!} \frac{d^{2n} (x^2 - 1)^{2n}}{dx^{2n}},$$

será

$$P_{2n}(o) = \frac{1}{2^{2n}(2n)!}\left[\frac{d^{2n}(x^2-1)^{2n}}{dx^{2n}}\right]_o.$$

Ora, como imediatamente resulta da regra de derivação dum polinómio, $\left[\frac{d^{2n}(x^2-1)^{2n}}{dx^{2n}}\right]_o$ é o produto do coeficiente de x^{2n} no desenvolvimento de $(x^2-1)^{2n}$ por $(2n)!$. E como êsse coeficiente é $(-1)^n\binom{2n}{n}$, tem-se finalmente

$$P_{2n}(o) = \frac{1}{2^{2n}(2n)!}(-1)^n(2n)!\,.\binom{2n}{n}$$

$$=(-1)^n\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Cálculo

Tem-se

$P_o(x) = 1$

$P_1(x) = x$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3)$

. . .

Êstes polinómios podem calcular-se ou utilizando directamente a definição ou a relação de recorrência

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)x\,P_n(x) + n\,P_{n-1}(x) = 0$$

para cuja dedução se pode ver C. Jordan, loc. cit. tomo I pg. 270, E. Goursat loc. cit. tomo I pg. 209.

Raízes

É particularmente importante o conhecimento das raízes dos polinómios de Legendre.

Para os primeiros valores de n tem-se:

$n=2 \quad x_1=-0,5774, \quad x_2=0,5774$

$n=3 \quad x_1=-0,7746\,, \quad x_2=0, \quad x_3=0,7746$

$n=4 \quad x_1=-0,8611\,, \quad x_2=-0,3400\,, \quad x_3=0,3400,$
$x_4=0,8611.$

Encontram-se os valores destas raízes calculados com 8 decimais até $n=5$ em «Ch. Jordan, *Statistique Mathématique*» pg. 25 e com 6 decimais até $n=7$ em «*Repertorium der Höheren Mathematik*» Vol. 1.º cap. 9.º (pg. 525).

CAPÍTULO V

Derivação Numérica

25) *Generalidades.*

O problema da derivação numérica consiste no seguinte: duma função $f(x)$ são conhecidos os valores $f(x_0), f(x_1), \ldots f(x_n)$ — determinar o valor duma derivada de qualquer ordem da função para um dado valor do argumento.

A solução dêste problema é análoga à solução do problema da interpolação: escolhe-se uma função $y = \varphi(x)$ que represente a função dada com suficiente aproximação e utiliza-se essa função para o cálculo das derivadas; a derivada pedida terá como valor aproximado a derivada da função $\varphi(x)$ no mesmo ponto.

É claro que essa função $\varphi(x)$ é precisamente a função interpoladora de cuja determinação nos ocupámos no capítulo 2.º, de modo que não há mais que escolher aquela função interpoladora que melhor convier aos dados e determinar as suas derivadas nos pontos desejados.

Em virtude da íntima relação dos dois problemas, têm aqui cabimento as observações feitas no parágrafo 12 do capítulo 2.º e que nos abstemos de reproduzir.

26) *Caso em que os valores do argumento formam progressão aritmética.*

Na fórmula de Gregory-Newton

$$29)\ f(a + xh) = f(a) + x\,\Delta f(a) + \frac{1}{2!}(x)_2\,\Delta^2 f(a) + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{i!}(x)_i\,\Delta^i f(a) + \cdots + \frac{1}{n!}(x)_n\,\Delta^n f(a)$$

derivemos sucessivamente ambos os membros em relação a x. Vem:

$$h\, f'(a+xh) = \Delta f(a) + \Delta^2 f(a) \frac{d}{dx} \frac{(x)_2}{2!} + \cdots +$$

$$+ \Delta^i f(a) \frac{d}{dx} \frac{(x)_i}{i!} + \cdots + \Delta^n f(a) \frac{d}{dx} \frac{(x)_n}{n!},$$

. . .

$$h^i f^{(i)}(a+xh) = \Delta^i f(a) \frac{d^i}{dx^i} \frac{(x)_i}{i!} + \cdots + \Delta^n f(a) \frac{d^i}{dx^i} \frac{(x)_n}{n!}$$

85) $$= \sum_{k=i}^{n} \Delta^k f(a) \frac{d^i}{dx^i} \frac{(x)_k}{k!}.$$

. . .

Mas de

17) $$(x)_k = S_{k1}\, x + S_{k2}\, x^2 + \cdots + S_{ki}\, x^i + \cdots + S_{kk}\, x^k$$

resulta

$$\frac{d^i}{dx^i}(x)_k = i!\, S_{ki} + \frac{(i+1)!}{1!} S_{k\,i+1}\, x + \cdots + \frac{k!}{(k-i)!} S_{kk} \cdot x^{k-i}$$

$$= \sum_{p=i}^{k} \frac{p!}{(p-i)!} S_{kp}\, x^{p-i}$$

donde

86) $$\frac{d^i}{dx^i} \frac{(x)_k}{k!} = \sum_{p=i}^{k} \frac{p!}{k!\,(p-i)!} \cdot S_{kp} \cdot x^{p-i},$$

e, substituindo em 85),

87) $$h^i f^{(i)}(a+xh) = \sum_{k=i}^{n} \Delta^k f(a) . \sum_{p=i}^{k} \frac{p!}{k!\,(p-i)!} S_{kp}\, x^{p-i}.$$

Para $x = o$ esta fórmula simplifica-se; com efeito, 86) reduz-se à primeira parcela,

$$86') \qquad \left[\frac{d^i}{dx^i}\frac{(x)_k}{k!}\right]_0 = \frac{i!}{k!} S_{ki},$$

e obtém-se portanto

$$87') \qquad h^i f^{(i)}(a) = \sum_{k=i}^{n} \Delta^k f(a) \frac{i!}{k!} S_{ki}.$$

Para os primeiros valores inteiros de i, e atendendo aos valores dos números S_{ki}, tem-se:

$$87'') \left\{ \begin{aligned} & h f'(a) = \Delta f(a) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(a) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a) + \cdots + \\ & \qquad + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta^n f(a) \\ & h^2 f''(a) = \Delta^2 f(a) - \Delta^3 f(a) + \frac{11}{12}\Delta^4 f(a) - \cdots + \\ & \qquad + (-1)^{n-2}\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n-1}\frac{1}{i}\cdot\Delta^n f(a) \\ & h^3 f'''(a) = \Delta^3 f(a) - \frac{3}{2}\Delta^4 f(a) + \frac{7}{4}\Delta^5 f(a) - \frac{15}{8}\Delta^6 f(a) + \cdots \\ & h^4 f^{IV}(a) = \Delta^4 f(a) - 2\,\Delta^5 f(a) + \frac{17}{6}\Delta^6 f(a) - \frac{7}{2}\Delta^7 f(a) + \cdots \\ & h^5 f^{V}(a) = \Delta^5 f(a) - \frac{5}{2}\Delta^6 f(a) + \frac{25}{6}\Delta^7 f(a) - \cdots \\ & \ldots \end{aligned} \right.$$

Às fórmulas 87) e 87') pode dar-se outro aspecto exprimindo os segundos membros em função dos polimónios de Bernoulli de 2.ª espécie.

Com efeito, em virtude de 72), tem-se

$$88)\quad \frac{d^i}{dx^i}\frac{(x)_k}{k!}=\frac{d^i}{dx^i}\left[\frac{d}{dx}\,\psi_{k+1}(x)\right]=\frac{d^{i+1}}{dx^{i+1}}\,\psi_{k+1}(x)$$

e, por conseqüência, substituindo em 85),

$$89)\quad h^i f^{(i)}(a+xh)=\sum_{k=i}^{n}\Delta^k f(a)\,.\,\psi_{k+1}^{(i+1)}(x)\,.$$

No ponto $x=o$, tem-se

$$88')\quad \left[\frac{d^i}{dx^i}\frac{(x)_k}{k!}\right]_0=\psi_{k+1}^{(i+1)}(0)$$

e portanto,

$$89')\quad h^i f^{(i)}(a)=\sum_{k=i}^{n}\Delta^k f(a)\,.\,\psi_{k+1}^{(i+1)}(0)\,.$$

Note-se, de passagem, que a comparação de 86') com 88') estabelece a relação interessante

$$90)\quad \psi_{k+1}^{(i+1)}(0)=\frac{i!}{k!}\cdot S_{ki}$$

Exemplo 1.º Uma função *y de x* toma os valores que constam do quadro seguinte:

x	y
100	2,0000000
102	2,0086002
104	2,0170333
106	2,0253059
108	2,0334238

Calcular a derivada da função para $x=105$.

Tem-se $a=100$, $h=2$, $a+xh=105$ donde $x=\frac{5}{2}$. Construída a táboa das diferenças obtém-se:

$$\Delta f(100)=0{,}0086002, \quad \Delta^2 f(100)=-0{,}0001671,$$
$$\Delta^3 f(100)=0{,}0000066, \quad \Delta^4 f(100)=-0{,}0000008.$$

A aplicação da fórmula 87) dá, visto que $i=1$,

$$2f'(105)=\Delta f(100)+\Delta^2 f(100)\sum_{p=1}^{2}\frac{p!}{2!\,(p-1)!}S_{2p}\left(\frac{5}{2}\right)^{p-1}+$$
$$+\Delta^3 f(100)\sum_{p=1}^{3}\frac{p!}{3!\,(p-1)!}S_{3p}\left(\frac{5}{2}\right)^{p-1}+$$
$$+\Delta^4 f(100)\sum_{p=1}^{4}\frac{p!}{4!\,(p-1)!}S_{4p}\left(\frac{5}{2}\right)^{p-1}$$
$$=\Delta f(100)+\Delta^2 f(100)\left[\frac{1}{2!}S_{21}+\frac{5}{2}S_{22}\right]$$
$$+\Delta^3 f(100)\left[\frac{1}{3!}S_{31}+\frac{2!}{3!}\cdot\frac{5}{2}S_{32}+\frac{1}{2!}\left(\frac{5}{2}\right)^2 S_{33}\right]$$
$$+\Delta^4 f(100)\left[\frac{1}{4!}S_{41}+\frac{2!}{4!}\cdot\frac{5}{2}S_{42}+\frac{3!}{4!\,2!}\left(\frac{5}{2}\right)^2 S_{43}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{3!}\left(\frac{5}{2}\right)^3 S_{44}\right].$$

Feitas as substituïções e efectuadas as operações, encontra-se

$$f'(105)=0{,}0041361.$$

Exemplo 2.º Calcular a primeira, segunda e terceira derivadas da função do exemplo 1.º para $x=100$.

Tem-se, de 87'')

$$2\,f'\,(100) = \Delta f(100) - \frac{1}{2}\,\Delta^2 f(100) + \frac{1}{3}\,\Delta^3 f(100) -$$

$$- \frac{1}{4}\,\Delta^4 f(100)$$

$$= 0{,}0086002 + \frac{1}{2}\,0{,}0001671 + \frac{1}{3}\,0{,}0000066$$

$$+ \frac{1}{4}\,0{,}0000008$$

$$= 0{,}0086861$$

donde

$$\underline{f'\,(100) = 0{,}0043430;}$$

$$4\,f''(100) = \Delta^2 f(100) - \Delta^3 f(100) + \frac{11}{12}\,\Delta^4 f(100)$$

$$= -\,0{,}0001671 - 0{,}0000066 - \frac{11}{12}\,0{,}0000008$$

$$= -\,0{,}0001744$$

donde

$$\underline{f''\,(100) = -\,0{,}0000436;}$$

$$8\,f'''\,(100) = \Delta^3 f(100) - \frac{3}{2}\,\Delta^4 f(100)$$

$$= 0{,}0000066 + \frac{3}{2}\,0{,}0000008$$

$$= 0{,}0000078$$

donde

$$\underline{f'''\,(100) = 0{,}00000097.}$$

A função de que se trata nestes dois exemplos é $y = Log\, x$. Calculando as suas derivadas no ponto $x = 100$, encontra-se

$$f'(100) = \frac{M}{100} = 0{,}0043429 \quad (M = 0{,}4342945)$$

$$f''(100) = -\frac{M}{100^2} = -0{,}0000434$$

$$f'''(100) = \frac{2M}{100^3} = 0{,}00000086.$$

Estes resultados permitem avaliar da aproximação com que a fórmula de Gregory-Newton (limitada às diferenças de 4.ª ordem) representa uma função dada. Igual exactidão na concordância de resultados se nota no exemplo 1.º pois que

$$f'(105) = \frac{M}{105} = 0{,}0041361.$$

27) *Uso da fórmula de Newton-Stirling.*

Sôbre a fórmula de Newton-Stirling pode proceder-se duma maneira idêntica à atrás indicada.

Obter-se-ão para as derivadas expressões a que se recorrerá de preferência quando se verificarem as condições do parágrafo 15.

Derivando sucessivamente ambos os membros de 48) vem:

$$hf'(a + xh) = \frac{1}{2}[\Delta f(a) + \Delta f(a-h)] + x\, \Delta^2 f(a-h) +$$

$$+ \frac{1}{2.\,3!} \frac{d}{dx} \frac{(x^2)_2}{x} [\Delta^3 f(a-h) + \Delta^3 f(a-2h)] +$$

$$+ \frac{1}{4!} \frac{d}{dx} (x^2)_2\, \Delta^4 f(a-2h) +$$

$$+ \cdots +$$

$$+\frac{1}{2(2k+1)!}\frac{d}{dx}\frac{(x^2)_{k+1}}{x}\Big[\Delta^{2k+1}f(a-kh)+$$

$$+\Delta^{2k+1}f[a-(k+1)h]\Big]+$$

$$+\frac{1}{(2k+2)!}\frac{d}{dx}(x^2)_{k+1}\Delta^{2k+2}f\big[a-(k+1)h\big]+$$

$$+\cdots,$$

$$\cdots$$

$$h^{2k}.f^{(2k)}(a+xh)=\frac{1}{(2k)!}\cdot\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(x^2)_k\cdot\Delta^{2k}f(a-kh)+$$

$$+\frac{1}{2(2k+1)!}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\frac{(x^2)_{k+1}}{x}\cdot\Big[\Delta^{2k+1}f(a-kh)+$$

$$+\Delta^{2k+1}f[a-(k+1)h]\Big]+$$

$$+\frac{1}{(2k+2)!}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}(x^2)_{k+1}\cdot\Delta^{2k+2}f[a-(k+1)h]+$$

$$+\frac{1}{2(2k+3)!}\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\frac{(x^2)_{k+2}}{x}\cdot\Big[\Delta^{2k+3}f[a-(k+1)h]+$$

$$+\Delta^{2k+3}f[a-(k+2)h]\Big]+$$

$$+\cdots,$$

$$h^{2k+1}f^{(2k+1)}(a+xh)=\frac{1}{2(2k+1)!}\cdot\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}\frac{(x^2)_{k+1}}{x}\Big[\Delta^{2k+1}f(a-kh)+$$

$$+\Delta^{2k+1}f[a-(k+1)h]\Big]+$$

$$+\frac{1}{(2k+2)!}\cdot\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}(x^2)_{k+1}\cdot\Delta^{2k+2}f[a-(k+1)h]+$$

$$+\frac{1}{2\,(2k+3)!}\cdot\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k-1}}\,\frac{(x^2)_{k+2}}{x}\cdot\left[\Delta^{2k+3} f\,[a-(k+1)\,h]+\right.$$
$$\left.+\Delta^{2k+3} f\,[a-(k+2)\,h]\right]$$

$$+\frac{1}{(2k+4)!}\cdot\frac{d^{2k+1}}{dx^{2k+1}}\,(x^2)_{k+2}\cdot\Delta^{2k+4} f\,[a-(k+2)\,h]$$

$$+\cdots$$

Estas expressões simplificam-se para $x=0$.

Com efeito, atendendo a 35) e 36), tem-se

$$\left[\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\,(x^2)_k\right]_0=(2k)!\;S^2_{kk}$$

$$\left[\frac{d^{2k}}{dx^{2k}}\,\frac{(x^2)_{k+1}}{x}\right]_0=0$$

$$\left[\frac{d^{2k}\,(x^2)_{k+1}}{dx^{2k}}\right]_0=(2k)!\;S^2_{k+1,k}\,,\quad\left[\frac{d^{2k}\,\dfrac{(x^2)_{k+2}}{x}}{dx^{2k}}\right]_0=0,\cdots,$$

de modo que resulta, fazendo $x=0$ em ambos os membros da igualdade que dá o valor de $f^{(2k)}(a+xh)$:

91) $$h^{2k}\,f^{(2k)}(a)=S^2_{kk}\cdot\Delta^{2k} f\,(a-kh)+$$
$$+\frac{(2k)!}{(2k+2)!}\cdot S^2_{k+1,k}\cdot\Delta^{2k+2} f\,[a-(k+1)\,h]$$
$$+\frac{(2k)!}{(2k+4)!}\cdot S^2_{k+2,k}\cdot\Delta^{2k+4} f\,[a-(k+2)\,h]$$
$$+\cdots$$
$$+\frac{(2k)!}{(2k+2l)!}\cdot S^2_{k+l,k}\cdot\Delta^{2k+2l} f\,[a-(k+l)\,h]$$
$$+\cdots$$

Anàlogamente para a derivada de ordem ímpar se tem

$$\left[\frac{d^{2k+1}\dfrac{(x^2)_{k+1}}{x}}{dx^{2k+1}}\right]_0 = (2k+1)!\,S^2_{k+1,\,k+1},$$

$$\left[\frac{d^{2k+1}(x^2)_{k+1}}{dx^{2k+1}}\right]_0 = 0$$

$$\left[\frac{d^{2k+1}\dfrac{(x^2)_{k+2}}{x}}{dx^{2k+1}}\right]_0 = (2k+1)!\,S^2_{k+2,\,k+1},$$

$$\left[\frac{d^{2k+1}(x^2)_{k+2}}{dx^{2k+1}}\right]_0 = 0$$

...

e portanto

$$\text{92)}\qquad h^{2k+1} f^{(2k+1)}(a) = \frac{1}{2} S^2_{k+1,\,k+1}\Big[\Delta^{2k+1} f(a-kh) + \Delta^{2k+1} f[a-(k+1)h]\Big] +$$

$$+ \frac{(2k+1)!}{2\,(2k+3)!} S^2_{k+2,\,k+1}\Big[\Delta^{2k+3} f[a-(k+1)h] + \Delta^{2k+3} f[a-(k+2)h]\Big]$$

$$+ \cdots$$

$$+ \frac{(2k+1)!}{2\,(2k+2l+1)!} S^2_{k+l+1,\,k+1}\Big[\Delta^{2k+2l+1} f[a-(k+l)h] + \Delta^{2k+2l+1} f[a-(k+l+1)h]\Big]$$

$$+ \cdots$$

O problema do cálculo da derivada de qualquer ordem da função no ponto a fica assim resolvido pelas fórmulas 91) e 92).

Fazendo, em 92), $k=0$, e atendendo aos valores de $S^2_{n\mu}$, obtém-se:

$$93)\quad h\,f'(a)=\frac{1}{2}\left[\Delta f(a)+\Delta f(a-h)\right]-\frac{1}{12}\left[\Delta^3 f(a-h)+\right.$$
$$\left.+\Delta^3 f(a-2h)\right]$$
$$+\frac{1}{60}\left[\Delta^5 f(a-2h)+\Delta^5 f(a-3h)\right]+\cdots$$

Fazendo, em 91), $k=1$, resulta:

$$94)\quad h^2 f''(a)=\Delta^2 f(a-h)-\frac{1}{12}\Delta^4 f(a-2h)+$$
$$+\frac{1}{90}\Delta^6 f(a-3h)+\cdots$$

Procede-se do mesmo modo para achar as derivadas seguintes.

28) *Aplicação ao cálculo da taxa instantânea de Mortalidade.*

Na teoria dos seguros de vida figura uma função $v(x)$ que dá, em uma determinada tábua de mortalidade, o número de indivíduos, de entre um grupo sujeito à observação, vivos em cada idade x.

A expressão analítica dessa função é desconhecida; são conhecidos apenas os seus valores para valores de x variando de uma unidade (geralmente um ano) [1].

Nessa teoria desempenha um papel muito importante uma

(1) É ao conjunto dêsses valores que se dá o nome de tábua bruta de mortalidade.

função denominada *taxa instantânea de mortalidade*, definida do modo seguinte

$$\tau_x = -\frac{v'(x)}{v(x)}$$

Proponhamo-nos calcular numèricamente τ_x.

De 93) resulta, visto que no caso presente é $h=1$, $a=x$:

$$v'(x) = \frac{1}{2}\left[\Delta v(x) + \Delta v(x-1)\right] - \frac{1}{12}\left[\Delta^3 v(x-1) + \right.$$

$$\left. + \Delta^3 v(x-2)\right] + \cdots$$

Utilizando apenas os dois têrmos escritos, isto é, desprezando as diferenças de ordem superior a 3, e exprimindo as diferenças nos valores da função, tem-se, visto que

$$\Delta v(x) = v(x+1) - v(x)$$

$$\Delta v(x-1) = v(x) - v(x-1)$$

$$\Delta^3 v(x-1) = v(x+2) - 3v(x+1) + 3v(x) - v(x-1)$$

$$\Delta^3 v(x-2) = v(x+1) - 3v(x) + 3v(x-1) - v(x-2),$$

$$v'(x) = \frac{1}{2}\left[v(x+1) - v(x-1)\right] - \frac{1}{12}\left[v(x+2) - 2v(x+1) + \right.$$

$$\left. + 2v(x-1) - v(x-2)\right]$$

$$= \frac{1}{12}\left[-v(x+2) + 8v(x+1) - 8v(x-1) + v(x-2)\right]$$

donde

$$95)\quad \tau_x = \frac{v(x+2) - 8v(x+1) + 8v(x-1) - v(x-2)}{12\, v(x)}$$

$$= \frac{2}{3}\,\frac{v(x-1) - v(x+1)}{v(x)} - \frac{1}{12}\,\frac{v(x-2) - v(x+2)}{v(x)}.$$

Se se tivessem utilizado apenas as diferenças de 1.ª ordem, desprezando tôdas as outras, tinha-se obtido

$$96)\qquad \tau_x = \frac{1}{2}\,\frac{v\,(x-1) - v\,(x+1)}{v\,(x)}.$$

Na prática, quando não é necessário grande rigor, é esta última a expressão usada para o cálculo da taxa instantânea de mortalidade.

29) *Caso em que os valores do argumento não formam progressão aritmética.*

As derivadas, neste caso geral, calculam-se operando, duma forma semelhante à usada nos parágrafos anteriores, sôbre a fórmula geral de Newton (¹).

$$44)\ f\,(x) = f\,(x_0) + (x - x_0)\,f\,(x_0,\,x_1) +$$

$$+ (x - x_0)\,(x - x_1)\,f\,(x_0,\,x_1,\,x_2) +$$

$$+ \cdots + (x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_{i-1})\,f\,(x_0,\,x_1,\cdots x_i) +$$

$$+ \cdots + (x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_{n-1})\,f\,(x_0,\,x_1,\cdots x_n).$$

Fazendo

$$x - x_k = \alpha_k \qquad k = 0,\,1,\,2,\cdots n-1$$

e

$$(x - x_0)\,(x - x_1)\cdots(x - x_i) = \alpha_0\,\alpha_1\cdots\alpha_i = A_i,$$

(¹) Podia operar-se igualmente sôbre a fórmula de Lagrange mas a de Newton presta-se melhor à dedução das expressões gerais das derivadas.

tem-se

$$\frac{d\alpha_k}{dx} = 1$$

$$\frac{dA_i}{dx} = A_i \sum_i \frac{1}{\alpha_i}$$

$$\frac{d^2A_i}{dx^2} = \frac{dA_i}{dx} \sum_i \frac{1}{\alpha_i} - A_i \sum_i \frac{1}{\alpha_i^2}$$

$$= A_i \left[\left(\sum_i \frac{1}{\alpha_i} \right)^2 - \sum_i \left(\frac{1}{\alpha_i} \right)^2 \right] = 2\, A_i \sum_{ik} \frac{1}{\alpha_i\, \alpha_k}$$

$$\frac{d^3A_i}{dx^3} = 2 \frac{dA_i}{dx} \sum_{ik} \frac{1}{\alpha_i\, \alpha_k} + 2\, A_i \sum_{ik} \left(\frac{1}{\alpha_k} \frac{-1}{\alpha_i^2} + \frac{1}{\alpha_i} \frac{-1}{\alpha_k^2} \right)$$

$$= 2 A_i \left[\sum_i \frac{1}{\alpha_i} \cdot \sum_{ik} \frac{1}{\alpha_i\, \alpha_k} - \sum_{ik} \frac{1}{\alpha_i\, \alpha_k} \left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_k} \right) \right]$$

$$= 3!\, A_i \sum_{ikl} \frac{1}{\alpha_i\, \alpha_k\, \alpha_l}$$

...

$$\frac{d^m A_i}{dx^m} = m!\, A_i \sum_{i_1 \ldots i_m} \frac{1}{\alpha_{i_1}\, \alpha_{i_2} \ldots \alpha_{i_m}}$$

...

sendo, na expressão geral de $\dfrac{d^m A_i}{dx^m}$, o somatório estendido às combinações simples dos $i+1$ índices tomados m a m.

Daqui se conclui imediatamente que

$$\frac{d^{i-1} A_i}{dx^{i-1}} = (i-1)!\, \Sigma\, \alpha_i\, \alpha_k, \quad \frac{d^i A^i}{dx^i} = i!\, \Sigma\, \alpha_i$$

e

$$\frac{d^{i+1} A_i}{dx^{i+1}} = (i+1)!.$$

Com as notações empregadas, a fórmula de Newton escreve-se

$$f(x) = f(x_0) + A_0 f(x_0, x_1) + A_1 f(x_0, x_1, x_2) + \cdots +$$

$$+ A_i f(x_0, x_1, \cdots x_{i+1}) + \cdots + A_{n-1} f(x_0, x_1, \cdots x_n).$$

Derivando sucessivamente esta igualdade, tem-se, atendendo às expressões acima encontradas:

$$
97)\quad \left\{
\begin{aligned}
& f'(x) = f(x_0, x_1) + A_1 \sum_i^1 \frac{1}{\alpha_i} \cdot f(x_0, x_1, x_2) + \\
& \qquad + A_2 \sum_i^2 \frac{1}{\alpha_i} \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \cdots + \\
& \qquad + A_i \sum_i^i \frac{1}{\alpha_i} \cdot f(x_0, x_1, \cdots x_{i+1}) \\
& \qquad + \cdots + A_{n-1} \sum_i^{n-1} \frac{1}{\alpha_i} . f(x_0, x_1, \cdots x_n), \\
& f''(x) = 2! \left[f(x_0, x_1, x_2) + A_2 \sum_{ik}^2 \frac{1}{\alpha_i \alpha_k} \cdot f(x_0, x_1, x_2, x_3) + \right. \\
& \qquad + \cdots + A_i \sum_{ik}^i \frac{1}{\alpha_i \alpha_k} \cdot f(x_0, x_1, \cdots x_{i+1}) + \\
& \qquad \left. + \cdots + A_{n-1} \sum_{ik}^{n-1} \frac{1}{\alpha_i \alpha_k} \cdot f(x_0, \cdots x_n) \right] \\
& \cdots \\
& f^{(i)}(x) = i! \left[f(x_0, x_1, \cdots x_i) + \sum_i^i \alpha_i . f(x_0, x_1, \cdots x_{i+1} + \right. \\
& \qquad \left. + \cdots + A_{n-1} \sum_{i_1 \ldots i_i}^{n-1} \frac{1}{\alpha_{i_1} \ldots \alpha_{i_i}} \cdot f(x_0, x_1, \cdots x_n) \right] \\
& \cdots
\end{aligned}
\right.
$$

Para as primeiras duas derivadas, estas expressões dão:

$$97')\begin{cases} f'(x)=f(x_0, x_1)+(\alpha_0+\alpha_1)f(x_0, x_1, x_2)+ \\ +(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_1\alpha_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3)+(\alpha_0\alpha_1\alpha_2+ \\ +\alpha_0\alpha_1\alpha_3+\alpha_0\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)+\cdots \\ f''(x)=2!\left[f(x_0, x_1, x_2)+(\alpha_0+\alpha_1+\alpha_2)f(x_0, x_1, x_2, x_3)+\right. \\ +(\alpha_0\alpha_1+\alpha_0\alpha_2+\alpha_0\alpha_3+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+ \\ \left.+\alpha_2\alpha_3)f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)+\cdots\right]. \end{cases}$$

A substituïção de x pelo valor indicado, nas expressões deduzidas, permite determinar imediatamente o valor numérico pedido.

Exemplo — Determinar a primeira e segunda derivadas da função $f(x)$ do exemplo do § 14 pág. 59, para $x=5$.

Tem-se

$$x_0=1,\ \ x_1=4,\ \ x_2=6,\ \ x_3=7,\ \ x_4=9,\ \ x_5=15,$$

$$f(x_0)=-39,\ f(x_1)=-1704,\ f(x_2)=-4664,\ f(x_3)=-5601$$

$$f(x_4)=1,\ \ f(x_5)=325447,$$

$$f(x_0, x_1)=-555,\ f(x_0, x_1, x_2)=-185,$$

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3)=61,\ f(x_0,\cdots x_4)=19,\ f(x_0,\cdots x_5)=1.$$

Por ser $x=5$, obtém-se:

$$\alpha_0=4,\ \ \alpha_1=1,\ \ \alpha_2=-1,\ \ \alpha_3=-2,\ \ \alpha_4=-4,\ \alpha_5=-10$$

e, por conseqüência,

$$f'(5) = -555 + 5.(-185) + (-1).61 + (-2).19 + 16.1$$
$$= -1563$$

$$f''(5) = 2[-185 + 4.61 + (-9).19 + 34.1]$$
$$= -156.$$

30) *Expressão das diferenças duma função nas derivadas da mesma função.*

Nos parágrafos anteriores ocupámo-nos da resolução do problema que consiste em exprimir as derivadas duma função nas diferenças dessa função; vamos agora resolver o problema inverso.

Para a diferença de 1.ª ordem a solução é dada imediatamente pela fórmula de Taylor, na hipótese, que supomos verificada, de a função satisfazer às condições analíticas requeridas para que valha êsse desenvolvimento. Tem-se então

$$98)\quad \Delta f(x) = hf'(x) + \frac{h^2}{2!} f''(x) + \cdots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + R_{n+1}$$
$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{h^i}{i!} f^{(i)}(x) + R_{n+1}.$$

Para formar as diferenças de ordem superior não há mais que tomar as diferenças sucessivas dos dois membros desta igualdade.

Se se desejam as diferenças expressas nas derivadas sucessivas tomadas no ponto zero, parte-se do desenvolvimento de Mac-Laurin

$$f(x) = f(o) + xf'(o) + \frac{x^2}{2!} f''(o) + \cdots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(o) + R_{n+1}$$

e obtém-se

$$\Delta f(x) = f'(o)\,\Delta x + f''(o)\,\Delta\left(\frac{x^2}{2!}\right) +$$
$$+ \cdots + f^{(n)}(o)\,\Delta\left(\frac{x^n}{n!}\right) + \Delta R_{n+1}$$

e, em geral,

$$\Delta^m f(x) = f^{(m)}(o)\,\Delta^m\left(\frac{x^m}{m!}\right) + f^{(m+1)}(o)\,\Delta^m\left[\frac{x^{m+1}}{(m+1)!}\right] + \cdots +$$

$$+ f^{(n)}(o)\,\Delta^m\left(\frac{x^n}{n!}\right) + \Delta^m R_{n+1}$$

ou

$$99)\quad \Delta^m f(x) = \sum_{i=m}^{n} f^{(i)}(o)\,\Delta^m\left(\frac{x^i}{i!}\right) + \Delta^m R_{n+1}.$$

A esta expressão pode dar-se outro aspecto que vamos deduzir.

Tem-se (pág. 22)

$$21)\qquad x^i = T_{i1}(x)_1 + T_{i2}(x)_2 + \cdots + T_{ii}(x)_i$$

donde

$$\Delta^m x^i = T_{i1}\,\Delta^m(x)_1 + \cdots + T_{im}\,\Delta^m(x)_m + \cdots + T_{ii}\,\Delta^m(x)_i$$

e como, em virtude de 14), é:

$$\Delta^m(x)_1 = \Delta^m(x)_2 = \cdots = \Delta^m(x)_{m-1} = 0,$$

$$\Delta^m(x)_m = m!\ ,\ \Delta^m(x)_{m+1} = \frac{(m+1)!}{1!}(x)_1\ ,$$

$$\Delta^m(x)_{m+2} = \frac{(m+2)!}{2!}(x)_2, \ldots, \Delta^m(x)_i = \frac{i!}{(i-m)!}(x)_{i-m},$$

resulta,

$$\Delta^m x^i = T_{im} . m! + T_{i,m+1} \frac{(m+1)!}{1!} (x)_1 + T_{i,m+2} \frac{(m+2)!}{2!} (x)_2 +$$

$$+ \cdots + T_{ii} \frac{i!}{(i-m)!} (x)_{i-m}$$

$$= \sum_{k=m}^{i} T_{ik} \frac{k!}{(k-m)!} (x)_{k-m}$$

e, por conseqüência,

$$100) \qquad \Delta^m \left(\frac{x^i}{i!} \right) = \sum_{k=m}^{i} \frac{k!}{i!} T_{ik} \frac{(x)_{k-m}}{(k-m)!} .$$

Substituindo em 99), obtem-se finalmente

$$101) \quad \Delta^m f(x) = \sum_{i=m}^{n} \frac{1}{i!} f^{(i)}(o) \sum_{k=m}^{i} k! \, T_{ik} \frac{(x)_{k-m}}{(k-m)!} + R' .$$

As diferenças no ponto zero, que se obtêm fazendo nesta igualdade $x = o$, têm uma expressão muito mais simples.

Com efeito, em 100) subsiste apenas o primeiro termo, de modo que

$$100') \qquad \left[\Delta^m \left(\frac{x^i}{i!} \right) \right]_o = \frac{m!}{i!} T_{im} ,$$

e como 99), para $x = o$, se reduz a

$$99') \ \Delta^m f(o) = \sum_{i=m}^{n} f^{(i)}(o) \left[\Delta^m \left(\frac{x^i}{i!} \right) \right]_o + \Delta^m R'_{n+1} ,$$

vem, substituindo,

$$102) \qquad \Delta^m f(o) = \sum_{i=m}^{n} \frac{m!}{i!} T_{im} f^{(i)}(o) + R'' .$$

A estas fórmulas pode dar-se ainda outro aspecto, introduzindo os polinómios de Bernoulli de 1.ª espécie.

Tem-se, por definição (pág. 85)

$$63) \qquad \Delta\, \varphi_{i+1}(x) = \frac{x^i}{i!}$$

e, por conseqüência,

$$\Delta^m \left(\frac{x^i}{i!}\right) = \Delta^m \Big[\Delta\, \varphi_{i+1}(x)\Big] = \Delta^{m+1} \varphi_{i+1}(x),$$

donde, substituindo em 99),

$$103) \qquad \Delta^m f(x) = \sum_{i=m}^{n} f^{(i)}(o)\,.\,\Delta^{m+1} \varphi_{i+1}(x) + \Delta^m R_{n+1}\,.$$

No ponto zero, tem-se manifestamente

$$104) \qquad \left[\Delta^m \left(\frac{x^i}{i!}\right)\right]_0 = \Delta^{m+1} \varphi_{i+1}(o)$$

logo, substituindo em 99'), obtém-se

$$105) \qquad \Delta^m f(o) = \sum_{i=m}^{n} f^{(i)}(o)\,.\,\Delta^{m+1} \varphi_{i+1}(o) + \Delta^m R'_{n+1}\,.$$

As fórmulas 100') e 104) estabelecem que

$$106) \qquad \Delta^{m+1} \varphi_{i+1}(o) = \frac{m!}{i!} T_{im}$$

forma de que se notará a analogia com 90).

Na prática desprezam-se os restos das fórmulas deduzidas por serem os seus valores absolutos muito pequenos em relação ao dos restantes termos.

CAPÍTULO VI

Integração Numérica

31) *Generalidades.*

O problema da integração numérica põe-se de uma maneira análoga àquela por que se puzeram os problemas resolvidos nos capítulos II e V — respectivamente interpolação e derivação numérica.

Supõem-se conhecidos, num certo intervalo a, b, valores particulares de uma função $y = f(x)$ — quere determinar-se

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

Se a posição do problema é análoga, análoga é também a maneira de o resolver — começaremos por procurar uma função $\varphi(x)$ que, no intervalo a, b, se aproxime o mais possível da função $f(x)$; uma vez essa função (que é afinal uma função interpoladora) determinada, calcularemos

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx$$

e tomá-lo-emos como valor aproximado de

$$\int_a^b f(x)\, dx.$$

A representação geométrica mostra com tôda a clareza que o grau de aproximação do resultado depende do grau de aproximação da função $\varphi(x)$ à função $f(x)$.

Com efeito, como

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

é o valor da área limitada pelo eixo Ox, as ordenadas nos pontos de abscissas a e b e o arco da curva $y=f(x)$, é manifesto que as duas áreas diferirão tanto menos quanto mais as duas curvas se aproximarem uma da outra.

Do que fica dito, conclui-se que o problema da integração numérica está estreitamente dependente do da escolha da função interpoladora e que, portanto, têm aqui validade as considerações feitas no parágrafo 12, para o qual remetemos o leitor, abstendo-nos de as repetir aqui.

32) *Fórmula de integração deduzida da fórmula interpoladora de Gregory-Newton.*

Suponhamos que os valores particulares da função $f(x)$, conhecidos no intervalo a, b, são aqueles que correspondem à divisão do intervalo em n intervalos parciais, iguais, de amplitude

$$h=\frac{b-a}{n},$$

isto é, que são conhecidos

$$f(a),\ f(a+h),\ \cdots f(a+ih),\ \cdots f(a+nh). \quad (a+nh=b).$$

A fórmula interpoladora usada neste caso é, como sabemos, a de Gregory-Newton

$$29)\qquad f(a+hy)=\sum_{i=o}^{n}\frac{1}{i!}\cdot\Delta^{i}f(a)\,.\,(y)_i\,.\ ^{(1)}$$

No integral a calcular

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_a^{a+nh} f(x)\,dx$$

efectuemos a mudança de variável $x=a+hy$; tem-se $dx=hdy$ e como os limites a e $a+nh$ se transformam respectivamente em o e n, obtem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\int_o^n f(a+hy)\,dy$$

ou, introduzindo nesta igualdade o valor de $f\,(a+hy)$, dado por 29),

$$\int_a^b f(x)\,dx=h\int_o^n\left[\sum_{i=o}^{n}\frac{1}{i!}\cdot\Delta^{i}f(a)\cdot(y)_i\right]dy$$

$$=h\sum_{i=o}^{n}\Delta^{i}f(a)\,\frac{1}{i!}\int_o^n (y)_i\,dy.$$

Façamos

$$107)\qquad K_{n,i}=\frac{1}{i!}\int_o^n (y)_i\,dy\,;$$

a fórmula acima escreve-se então

$$108)\qquad \int_a^b f(x)\,dx=h\sum_{i=o}^{n}K_{n,i}\,\Delta^{i}f(a)\,.$$

---

(1) Com as convenções usuais $0!=1$, $\Delta^{0}f(a)=f(a)$, $(y)_0=1$

Os coeficientes $K_{n,i}$ determinam-se uma vez por tôdas, a partir da igualdade 107) que os define; acha-se fàcilmente

$$K_{n,o}=n\ ,\ K_{n,1}=\frac{1}{2}n^2\ ,\ K_{n,2}=\frac{1}{12}n^2(2n-3)\ ,$$

$$K_{n,3}=\frac{1}{24}n^2(n-2)^2\ ,\cdots$$

Os seus valores numéricos, para n compreendido entre 1 e 6, acham-se no quadro junto.

Números $K_{n,i}$

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
1	1	$\frac{1}{2}$					
2	2	2	$\frac{1}{3}$				
3	3	$\frac{9}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{3}{8}$			
4	4	8	$\frac{20}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{14}{45}$		
5	5	$\frac{25}{2}$	$\frac{175}{12}$	$\frac{75}{8}$	$\frac{425}{144}$	$\frac{95}{288}$	
6	6	18	27	24	$\frac{123}{10}$	$\frac{33}{10}$	$\frac{41}{140}$

Estes coeficientes exprimem-se ainda duma maneira simples em números de Stirling de 1.ª espécie e em números de Bernoulli de 2.ª espécie.

Com efeito, substituindo em 107)

$$\int_o^n (y)_i\, dy$$

pelo seu valor, dado por 50) § 16, tem-se

$$107') \qquad K_{n,i} = \frac{1}{i!} \sum_{l=1}^{i} \frac{1}{l+1} S_{il}\, n^{l+1}.$$

Por outro lado, de 79) § 23, resulta, mudando n em i e fazendo $a = o$, $b = n$,

$$\int_o^n (y)_i\, dy = i!\, [\psi_{i+1}(n) - \psi_{i+1}(o)];$$

e como [78) § 23]

$$\psi_{i+1}(o) = b_{i+1}$$

e [de 77) § 23 mudando i em n e n em $i+1$],

$$\psi_{i+1}(n) = \sum_{\alpha=o}^{i+1} \binom{n}{\alpha} b_{i+1-\alpha},$$

tem-se

$$\int_o^n (y)_i\, dy = i! \left[\sum_{\alpha=o}^{i+1} \binom{n}{\alpha} b_{i+1-\alpha} - b_{i+1} \right]$$

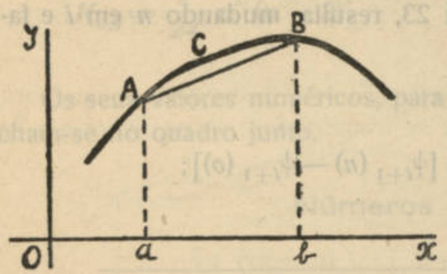
$$= i! \sum_{\alpha=1}^{i+1} \binom{n}{\alpha} b_{i+1-\alpha}$$

donde,

$$107'') \qquad K_{n,i} = \sum_{\alpha=1}^{i+1} \binom{n}{\alpha} b_{i+1-\alpha}.$$

Observação — No caso $b = a + h$ tem-se $n = 1$ e por conseqüência $K_{1,i} = b_i$; a fórmula de integração 108) toma então o aspecto

$$108') \quad \int_a^{a+h} f(x)\,dx = h \sum_{i=0}^{1} b_i \Delta^i f(a)$$



$$= h\,[b_0 f(a) + b_1 \Delta f(a)]$$

$$= h\left[f(a) + \frac{1}{2}\Delta f(a)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,h\,[f(a) + f(a+h)]$$

que corresponde à substituïção, na figura junta, da área curvilínea $aACBb$ pela área do trapézio $aABb$.

Exemplo. Sendo dada a tabela de valores

x	$f(x)$
1,05	1,25386
1,06	1,26996
1,07	1,28619
1,08	1,30254
1,09	1,31903
1,10	1,33565

calcular

$$\int_{1,05}^{1,10} f(x)\,dx.$$ (Whittaker and Robinson, loc. cit. pág. 162).

Tem-se, no caso presente,

$$a = 1,05, \quad b = 1,10, \quad n = 5, \quad h = \frac{b-a}{5} = \frac{1}{100},$$

logo

$$\int_{1,05}^{1,10} f(x)\,dx = \frac{1}{100}\Big[K_{5,0}.f(1,05) + K_{5,1}.\Delta f(1,05) +$$

$$+ K_{5,2}.\Delta^2 f(1,05) + K_{5,3}\cdot\Delta^3 f(1,05) +$$

$$+ K_{5,4}.\Delta^4 f(1,05) + K_{5,5}\,\Delta^5 f(1,05)\Big].$$

Para calcular as diferenças, formemos o quadro respectivo

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
1,05	1,25386	0,01610	0,00013	-0,00001	0,00003	-0,00006
1,06	1,26996	0,01623	0,00012	0,00002	-0,00003	
1,07	1,28619	0,01635	0,00014	-0,00001		
1,08	1,30254	0,01649	0,00013			
1,09	1,31903	0,01662				
1,10	1,33565					

Introduzindo os números da primeira linha dêste quadro no segundo membro da igualdade acima e substituindo os $K_{n,i}$ pelos seus valores, tem-se

$$\int_{1,05}^{1,10} f(x)\,dx = \frac{1}{100}\Big[5\cdot 1,25386 + \frac{25}{2}\cdot 0,01610 +$$

$$+ \frac{175}{12}\cdot 0,00013 - \frac{75}{8}\cdot 0,00001 +$$

$$+ \frac{425}{144}\cdot 0,00003 - \frac{95}{288}\cdot 0,00006\Big]$$

$$= \frac{1}{100} (6{,}47253 - 0{,}00011)$$

$$= 0{,}0647242.$$

33) *Fórmula de Côtes.*

Seja, como no parágrafo anterior, o intervalo a, b dividido em n intervalos parciais iguais de amplitude h e façamos

$$a = x_0, \cdots a + ih = x_i, \cdots a + nh \; (= b) = x_n.$$

Vamos ordenar o segundo membro da fórmula

$$108) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = h \sum_{i=o}^{n} K_{n,i}\, \Delta^i f(x_0)$$

em ordem aos $f(x_i)$ para o que basta, manifestamente, substituir os $\Delta^i f(x_0)$ pelos seus valores, dados por 2) § 3, e efectuar as operações requeridas.

Tem-se, de 2),

$$\Delta^i f(x_0) = f(x_i) - i f(x_{i-1}) + \cdots + (-1)^l \binom{i}{l} f(x_{i-l}) + \\ + \cdots + (-1)^i f(x_0)$$

$$= \sum_{l=o}^{i} (-1)^l \binom{i}{l} f(x_{i-l})$$

e, substituindo,

$$109) \qquad \int_a^b f(x)\, dx = h \sum_{i=o}^{n} K_{n,i} \sum_{l=o}^{i} (-1)^l \binom{i}{l} f(x_{i-l}).$$

Procuremos, no segundo membro desta igualdade, o coeficiente de $f(x_i)$. Desenvolvendo os somatórios, reconhece-se fàcilmente que êsse coeficiente, que representaremos por $M_{n,i}$, é

$$M_{n,i} = K_{n,i} - \binom{i+1}{1} K_{n,i+1} + \cdots + (-1)^l \binom{i+l}{l} K_{n,i+l} + \cdots$$

$$+ (-1)^{n-i} \binom{n}{n-i} K_{n,n} = \sum_{l=0}^{n-i} (-1)^l \binom{i+l}{l} K_{n,i+l}.$$

A fórmula 109) pode portanto escrever-se sob a forma

$$\int_a^b f(x)\,dx = h \sum_{i=0}^{n} M_{n,i} f(x_i)$$

ou, substituindo h pelo seu valor,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{n} \sum_{i=0}^{n} M_{n,i} f(x_i) =$$

$$= (b-a) \sum_{i=0}^{n} \frac{M_{n,i}}{n} f(x_i).$$

Fazendo agora $\frac{M_{n,i}}{n} = H_{n,i}$ tem-se finalmente

$$110) \qquad \int_a^b f(x)\,dx = (b-a) \sum_{i=0}^{n} H_{n,i} f(x_i).$$

A esta fórmula dá-se o nome de *fórmula de Côtes* e aos números

$$111) \qquad H_{n,i} = \frac{1}{n} \sum_{l=0}^{n-i} (-1)^l \binom{i+l}{l} K_{n,i+l}$$

o de *números de Côtes*.

Como se vê, a fórmula de Côtes difere da 108) *apenas na maneira como se ordena o segundo membro.*

Os números $H_{n,i}$ calculam-se pela fórmula 111). No quadro junto encontram-se os seus valores até $n = 6$. Foram calculados pelo próprio Côtes (1.º quartel do século XVIII) até $n = 10$ (vide Repertorium der Höheren Analysis, vol. 1.º, cap. IX, pág. 523).

Números de Côtes $H_{n,i}$

$n \backslash i$	0	1	2	3	4	5	6
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{7}{90}$		
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{144}$	$\frac{25}{96}$	$\frac{19}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{34}{105}$	$\frac{9}{280}$	$\frac{9}{35}$	$\frac{41}{840}$

Exemplo. Resolvamos, utilizando a fórmula de Côtes, o problema já tratado a páginas 130: Dada a tabela de valores

x	$f(x)$
1,05	1,25386
1,06	1,26996
1,07	1,28619
1,08	1,30254
1,09	1,31903
1,10	1,33565

calcular $\int_{1,05}^{1,10} f(x)\, dx$.

Tem-se

$$a = x_0 = 1{,}05 \qquad b = x_5 = 1{,}10, \qquad n = 5,$$

$$b - a = \frac{5}{100} = \frac{1}{20}, \quad \text{logo, de 110), vem}$$

$$\int_{1,05}^{1,10} f(x)\,dx = \frac{1}{20} \sum_{i=0}^{5} H_{5,i}\, f(x_i)$$

$$= \frac{1}{20} \Big[H_{5,0}\, f(1{,}05) + H_{5,1}\, f(1{,}06) + H_{5,2}\, f(1{,}07)$$

$$+ H_{5,3}\, f(1{,}08) + H_{5,4}\, f(1{,}09) + H_{5,5}\, f(1{,}10) \Big]$$

$$= \frac{1}{20} \left[\frac{19}{288} \,.\, 1{,}25386 + \frac{25}{96} \,.\, 1{,}26996 + \frac{25}{144} \,.\, 1{,}28619 \right.$$

$$\left. + \frac{25}{144} \,.\, 1{,}30254 + \frac{25}{96} \,.\, 1{,}31903 + \frac{19}{288} \,.\, 1{,}33565 \right]$$

$$= \frac{1}{20}\, 1{,}294484$$

$$= 0{,}0647242$$

34) *Outra dedução da fórmula de Côtes.*

Quando os intervalos parciais em que se divide o intervalo total de integração *a, b* não são iguais, usa-se, como é obvio, em virtude das considerações do parágrafo 31), em vez da função interpoladora de Gregory-Newton a geral de Newton ou a de Lagrange.

Esta última é habitualmente empregada também no caso, de que nos temos ocupado nos dois parágrafos anteriores, de a divisão do intervalo *a, b* se fazer em intervalos parciais iguais.

É manifesto, pelo que se viu no parágrafo 14), que, com tal procedimento, se obtém directamente a fórmula de Côtes 110); simplesmente, os números de Côtes, $H_{n,i}$, virão dados por uma expressão diferente daquela [111)] que no parágrafo anterior encontramos.

Vamos deduzir essa nova expressão, pelo interêsse teórico que apresenta.

A fórmula de Lagrange é (pág. 58)

$$43) \qquad f(x) = \sum_{i=o}^{n} R_i f(x_i)$$

com

$$43\text{ a)}\ R_i = \frac{(x-x_0)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)}.$$

No caso presente, em que

$$x_0 = a,\quad x_1 = a+h, \cdots x_i = a+ih, \cdots x_n = b = a+nh,$$

tem-se

$$R'_i = \frac{(x-a)\cdots\left[x-\left(a+(i-1)\,h\right)\right]\left[x-\left(a+(i+1)\,h\right)\right]\cdots\left[x-(a+nh)\right]}{ih\,.\cdots h\,(-h)\cdots\left[-(n-i)\,h\right]}$$

$$= \frac{(x-a)\cdots\left[(x-a)-(i-1)\,h\right]\left[(x-a)-(i+1)\,h\right]\cdots\left[(x-a)-nh\right]}{(-1)^{n-i}\,h^n\,i!\,(n-i)!}$$

e, por conseqüência,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=o}^{n}\int_a^b R'_i f(x_i)\,dx.$$

Façamos a mudança de variável

$$x - a = \frac{b-a}{n} y = h\, y$$

donde $dx = h\, dy$.

Obtém-se

$$\int_a^b f(x)\, dx = h \sum_{i=0}^{n} \int_0^n R_i'' f(x_i)\, dy$$

e, por serem $f(x_i)$ constantes,

$$\int_a^b f(x)\, dx = h \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \int_0^n R_i'' \, dy$$

ou, visto que $h = \dfrac{b-a}{n}$,

$$\int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \frac{1}{n} \int_0^n R_i'' \, dy.$$

Esta igualdade coïncide manifestamente com 110); os coeficientes do segundo membro são os números de Côtes que agora nos aparecem dados por

112) $$H_{n,i} = \frac{1}{n} \int_0^n R_i'' \, dy.$$

Vejamos o que significa o segundo membro; como R_i'' se obtém de R_i' pela mudança de variável $x - a = hy$, tem-se

$$R_i'' = \frac{h\,(hy-h)\cdots[hy-(i-1)\,h]\,[hy-(i+1)\,h]\cdots(hy-nh)}{(-1)^{n-i}\,h^n\,i!\,(n-i)!}$$

$$= \frac{h^n\,y\,(y-1)\cdots[y-(i-1)]\,[y-(i+1)]\cdots(y-n)}{(-1)^{n-i}\,h^n\,i!\,(n-i)!}$$

$$= \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{(y)_{n+1}}{y-i}$$

donde

$$113)\qquad H_{n,i} = \frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\int_0^n \frac{(y)_{n+1}}{y-i}\,dy,$$

expressão a que pretendiamos chegar.

Propriedades dos números de Côtes.

1.ª — *Os números de Côtes são simétricos, isto é,*

$$H_{n,i} = H_{n,n-i}.$$

Com efeito, de 113) resulta, mudando i em $n-i$,

$$H_{n,n-i} = \frac{(-1)^i}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot J$$

fazendo

$$J = \int_0^n \frac{(y)_{n+1}}{y-(n-i)}\,dy$$

$$= \int_0^n y\,(y-1)\cdots[y-(n-i-1)]\,[y-(n-i+1)]\cdots(y-n)\,dy.$$

Trocando o sinal a todos os factores da função integranda, obtém-se

$$J=(-1)^n\int_0^n (-y)\,(-y+1)\cdots[-y+(n-i-1)]$$

$$[-y+(n-i+1)]\cdots(-y+n)\,dy$$

$$=(-1)^n\int_0^{n'} [(-y+n)-n]\cdots[(-y+n)-(i+1)]$$

$$[(-y+n)-(i-1)]\cdots(-y+n)\,dy.$$

Façamos a mudança de variável $-y+n=z$, donde $dy=-dz$; os novos limites são n e o, de modo que

$$J=(-1)^{n+1}\int_n^0 (z-n)\cdots[z-(i+1)]\,[z-(i-1)]\cdots z\,.dz$$

$$=(-1)^n\int_0^n z\,(z-1)\cdots[z-(i-1)]\,[z-(i+1)]\cdots(z-n)\,dz.$$

Tem-se, por conseqüência,

$$H_{n,n-i}=\frac{(-1)^{n+i}}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\int_0^n z\,(z-1)\cdots[z-(i-1)]$$

$$[z-(i+1)]\cdots(z-n)\,dz$$

e, visto que $n+i$ e $n-i$ têm a mesma paridade,

$$H_{n,n-i}=\frac{(-1)^{n-i}}{i!\,(n-i)!}\cdot\frac{1}{n}\cdot\int_0^n \frac{(z)_{n+1}}{z-i}\,dz$$

$$=H_{n,i} \qquad q.\ e.\ d.$$

2.ª — $\sum_{i=o}^{n} H_{n,i} = 1$.

Apliquemos, com efeito, a fórmula de Côtes à função $f(x) = 1$. Tem-se, manifestamente, $f(x_i) = 1$ para i qualquer, logo

$$\int_a^b dx = (b-a) \sum_{i=o}^{n} H_{n,i}$$

donde resulta imediatamente, por ser $\int_a^b dx = b - a$,

$$\sum_{i=o}^{n} H_{n,i} = 1.$$

35) *Fórmulas particulares deduzidas da fórmula de Côtes.*

Na prática costumam empregar-se fórmulas mais simples que a de Côtes e obtidas do modo seguinte: divide-se o intervalo de integração num certo número de partes iguais e, em cada um dêsses intervalos parciais, usa-se a fórmula de Côtes [ou a fórmula equivalente 108)] para um pequeno valor de n: 1, 2 ou, mais raramente, 3.

Equivale isso a substituir a curva verdadeira por uma linha quebrada, no caso $n = 1$, ou a fazer passar, por cada dois pontos consecutivos de divisão, uma parábola do 2.º ou do 3.º grau.

Vamos deduzir as fórmulas obtidas para cada um dos três casos.

1.º — Caso $n = 1$ — Régra dos Trapézios.

Dividamos o intervalo a, b em m intervalos iguais e a cada um apliquemos a fórmula de Côtes para $n = 1$.

Tem-se, no intervalo $\left[a + (i-1)\,h,\; a + ih\right]$ $\left(h = \dfrac{b-a}{m}\right)$

$$\int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)\,dx = h\left[H_{1,0}\,f\,[a+(i-1)\,h] + H_{1,1}\,f\,(a+ih)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f\,[a+(i-1)\,h] + f\,(a+ih)\right]$$

e, como

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)\,dx,$$

tem-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[f\,[a+(i-i)\,h] + f\,(a+ih)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f\,(a) + 2\,f\,(a+h) + \cdots + 2\,f\,[a+(n-1)\,h] + f\,(a+nh\right]$$

ou, finalmente,

$$114)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\,[f\,(a) + f\,(a+nh)] + h\,[f\,(a+h) + \\ + \cdots + f\,[a+(n-1)\,h]\,.$$

Esta fórmula traduz a chamada *regra dos trapézios* porque, à área verdadeira a calcular fica, por êste procedimento, substituída uma área constituída por trapézios contiguos (vide § 32. Observação).

2.° — Caso $n=2$ — Fórmula de Simpson.

Procedendo de uma maneira inteiramente análoga, tem-se

$$\int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)\,dx = h\left[H_{2,0}\,f\,[a+(i-1)\,h] + H_{2,1}\,f\,[a+(i-\tfrac{1}{2})\,h] + \right. \\ \left. + H_{2,2}\,f\,(a+ih)\right]$$

$$= \frac{h}{6}\left[f\,[a+(i-1)\,h + 4\,f\,[a+(i-\tfrac{1}{2})\,h] + f\,(a+ih)\right]$$

donde,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)\,dx = \frac{h}{6}\Big\{ f(a) + 4f\left(a+\tfrac{1}{2}h\right) +$$

$$+ f(a+h) + f(a+h) + 4f\left(a+\tfrac{3}{2}h\right) + f(a+2h) + \cdots +$$

$$+ f[a+(m-1)h] + 4f\left[a+\left(m-\tfrac{1}{2}\right)h\right] + f(a+mh)\Big\}$$

$$= \frac{h}{6}\Big\{ f(a) + f(a+mh) + 2\,[f(a+h) + f(a+2h) + \cdots$$

$$+ f[a+(m-1)h]$$

$$+ 4\left[f\left(a+\tfrac{1}{2}h\right) + f\left(a+\tfrac{3}{2}h\right) + \cdots + f\left[a+\left(m-\tfrac{1}{2}\right)h\right]\right\}.$$

Notando que $h = \dfrac{b-a}{m}$, que o intervalo a, b ficou dividido em $2m$ intervalos parciais iguais e fazendo

$$y_k = f\left(a + \frac{h}{2}k\right) = f\left(a + \frac{b-a}{2m}k\right),\ k = 0, 1, \cdots 2m,$$

a igualdade acima pode escrever-se

$$115)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6m}\Big[y_0 + y_{2m} + 2\,(y_2 + y_4 + \cdots + y_{2m-2})$$

$$+ 4\,(y_1 + y_3 + \cdots + y_{2m-1})\Big]$$

que é a chamada *fórmula de Simpson.*

3.º — Caso $n = 3$.

Com procedimento inteiramente análogo aos anteriores, obtém-se

$$\int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)\,dx = h\Big[H_{3,0}\,f[a+(i-1)\,h] +$$

$$+ H_{3,1}\,f\,[a+(i-\tfrac{2}{3})\,h] + H_{3,2}\,f\,[a+(i-\tfrac{1}{3})\,h] +$$

$$+ H_{3,3}\,f\,(a+ih)\Big]$$

$$= \frac{h}{8}\Big[f\,[a+(i-1)\,h] + 3\,f\,[a+(i-\tfrac{2}{3})\,h] +$$

$$+ 3\,f\,[a+(i-\tfrac{1}{3}\,h)] + f\,(a+ih)\Big],$$

logo,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{m}\int_{a+(i-1)h}^{a+ih} f(x)\,dx = \frac{h}{8}\Big\{f(a) + 3\,f\,(a+\tfrac{1}{3}\,h) +$$

$$+ 3\,f\,(a+\tfrac{2}{3}\,h) + f\,(a+h)$$

$$+ f\,(a+h) + 3\,f\,(a+\tfrac{4}{3}\,h) + 3\,f\,(a+\tfrac{5}{3}\,h) + f\,(a+2h) + \cdots +$$

$$+ f\,[a+(m-1)\,h] + 3\,f\,[a+(m-\tfrac{2}{3})\,h] +$$

$$+ 3\,f\,[a+(m-\tfrac{1}{3})\,h] + f\,(a+mh)\Big\}.$$

Notando agora que o intervalo total a, b ficou dividido em $3m$ intervalos parciais de amplitude $\frac{h}{3}$, com $h = \frac{b-a}{m}$, e fazendo

$$y_k = f\,(a+\tfrac{h}{3}\,k) = f\left(a+\frac{b-a}{3m}\,k\right),\quad k = 0,\,1,\cdots 3m,$$

pode escrever-se

$$116)\quad \int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{8m}\Big[y_0 + y_{3m} + 2\,(y_3 + y_6 + \cdots + y_{3m-3}) + 3\,(y_1 + y_4 + \cdots + y_{3m-1}) + 3\,(y_2 + y_5 + \cdots + y_{3m-2}) \Big].$$

Exemplo. Partindo da igualdade $\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$, calcular π utilizando cada uma das três fórmulas deduzidas neste parágrafo e efectuando a divisão do intervalo de integração em 6 partes iguais.

Tem-se

$$= o, \quad b = 1, \quad b - a = 1, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$y_0 = f(o) = 1, \quad y_1 = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{36}{37}, \quad y_2 = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{9}{10},$$

$$y_3 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{5}, \quad y_4 = f\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{9}{13},$$

$$y_5 = f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{36}{61}, \; y_6 = f(1) = \frac{1}{2}.$$

1.º — *Regra dos trapézios.*

De 114) resulta, por ser $h = \frac{1}{6}$,

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \frac{1}{12}(y_0 + y_6) + \frac{1}{6}(y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5)$$

logo

$$\pi = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{36}{37} + \frac{9}{10} + \frac{4}{5} + \frac{9}{13} + \frac{36}{61}\right)$$

$$= 0,5 + \frac{2}{3} \cdot 3,955445$$

$$= 3,136963.$$

2.º — *Fórmula de Simpson.*

É neste caso $m = 3,\ n = 2,$ logo de 115) vem

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{18}\left[y_0 + y_6 + 2\,(y_2 + y_4) + \right.$$
$$\left. + 4\,(y_1 + y_3 + y_5)\right]$$

donde

$$\pi = \frac{2}{9}\ (1,5 + 2\ .\ 1,592308 + 4\ .\ 2,363137)$$

$$= 3,141592.$$

3.º — *Fórmula 116).*

Agora é $m = 2,\ n = 3,$ portanto a fórmula 116) dá

$$\frac{\pi}{4} = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{1}{16}\left[y_0 + y_6 + 2\,y_3 + 3\,(y_1 + y_2 + y_4 + y_5)\right]$$

e, por conseqüência,

$$\pi = \frac{1}{4}\ (1,5 + 2\ .\ 0,8 + 3\ .\ 3,155445)$$

$$= 3,141584.$$

Como se vê, comparando estes resultados uns com os outros e com $\pi = 3{,}1415926\cdots$, as fórmulas de Simpson e 116) dão uma aproximação apreciável, ao contrário do que acontece com a regra dos trapézios que só fornece certa a primeira casa decimal; mais precisamente, a regra dos trapézios dá o valor de π com um êrro menor que $\frac{1}{10^2}$, a de Simpson com um êrro menor que $\frac{1}{10^6}$ e a fórmula 116) com um êrro menor que $\frac{1}{10^5}$.

Evidentemente, os resultados poderiam tornar-se mais aproximados por uma sub-divisão do intervalo de integração num maior número de intervalos parciais.

36) *Fórmula de Weddle.*

De entre as fórmulas particulares que se podem obter a partir das fórmulas gerais atrás deduzidas, 108) e Côtes, vamos ainda apresentar uma, cujo uso é de certa vantagem nalguns casos, devida a Weddle.

Suponhamos para isso que se trata de calcular

$$\int_{x_0}^{x_0+6} f(x)\,dx \qquad (h=1)$$

e que a função $f(x)$ é tal que pràticamente se pode tomar $\Delta^6 f(x) = 0$.

Da fórmula 108) resulta então:

$$\int_{x_0}^{x_0+6} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{6} K_{n,i}\,\Delta^i f(x_0)$$

$$= K_{6,0}\,f(x_0) + K_{6,1}\,\Delta f(x_0) + K_{6,2}\,\Delta^2 f(x_0) +$$

$$+ K_{6,3}\,\Delta^3 f(x_0) + K_{6,4}\,\Delta^4 f(x_0) + K_{6,5}\,\Delta^5 f(x_0) + 0$$

$$= 6\,f(x_0) + 18\,\Delta f(x_0) + 27\,\Delta^2 f(x_0) + 24\,\Delta^3 f(x_0) +$$

$$+ \frac{123}{10}\,\Delta^4 f(x_0) + \frac{33}{10}\,\Delta^5 f(x_0)$$

ou, substituindo as diferenças pelos seus valores,

$$\int_{x_0}^{x_0+6} f(x)\,dx = 6\,f(x_0) + 18\,[f(x_1) - f(x_0)] +$$

$$+ 27\,[f(x_2) - 2\,f(x_1) + f(x_0)]$$

$$+ 24\,[f(x_3) - 3\,f(x_2) + 3\,f(x_1) - f(x_0)] +$$

$$+ \frac{123}{10}\,[f(x_4) - 4\,f(x_3) + 6\,f(x_2) - 4\,f(x_1) + f(x_0)]$$

$$+ \frac{33}{10}\,[f(x_5) - 5\,f(x_4) + 10\,f(x_3) - 10\,f(x_2) + 5\,f(x_1) - f(x_0)]$$

$$= \frac{33}{10} f(x_1) - \frac{42}{10} f(x_2) + \frac{78}{10} f(x_3) - \frac{42}{10} f(x_4) + \frac{33}{10} f(x_5),$$

que pode escrever-se

$$117) \quad \int_{x_0}^{x_0+6} f(x)\,dx = \frac{3}{10} \Big\{ 11\,[f(x_1) + f(x_5)] - 14\,[f(x_2) + f(x_4)] +$$

$$+ 26\,f(x_3) \Big\}.$$

Adicionemos ao segundo membro $\frac{3}{10}\,\Delta^6 f(x_0)$ que, na hipótese feita, é nulo. Visto que

$$\Delta^6 f(x_0) = f(x_6) - 6\,\Big[f(x_1) + f(x_5) \Big] + 15\,\Big[f(x_2) + f(x_4) \Big] -$$

$$- 20\,f(x_3) + f(x_0),$$

tem-se, efectuando operações,

$$118)\quad \int_{x_0}^{x_0+6} f(x)\,dx = \frac{3}{10}\left\{ f(x_0) + 5\left[f(x_1) + f(x_5) \right] + \right.$$

$$\left. + \left[f(x_2) + f(x_4) \right] + 6\,f(x_3) + f(x_6) \right\}$$

que é a fórmula de Weddle.

Exemplo — Calcular o logarítmo natural de 2 utilizando a fórmula de Weddle aplicada ao cálculo de $\int \frac{dx}{1+x}$ entre limites convenientes.

Tem-se

$$\int_1^7 \frac{dx}{1+x} = \Big[\log\,(1+x) \Big]_1^7 = \log 8 - \log 2 = 2 \log 2$$

donde

$$\log 2 = \frac{1}{2} \int_1^7 \frac{dx}{1+x}.$$

Façamos $x_0 = 1$; vem $7 = x_0 + 6$. De $f(x) = \frac{1}{1+x}$ resulta

$$f(x_0) = \frac{1}{2},\ f(x_1) = \frac{1}{3},\ f(x_2) = \frac{1}{4},\ f(x_3) = \frac{1}{5}$$

$$f(x_4) = \frac{1}{6},\ f(x_5) = \frac{1}{7},\ f(x_6) = \frac{1}{8}.$$

Aplicando a fórmula de Weddle, obtém-se

$$\log 2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{10}\left[\frac{1}{2}+5\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}\right)+6\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{8}\right]$$

$$=\frac{3}{20}\cdot\left[0{,}5+5\,.\,0{,}47619+0{,}41667+1{,}2+0{,}125\right]$$

$$=\frac{3}{20}\,.\,4{,}62262$$

$$=0{,}69339\,.$$

Como $\log 2 = 0{,}69314\cdots$ vê-se que o resultado vem dado com um êrro inferior a $\frac{3}{10^4}$.

37) *Fórmula de Gregory.*

A fórmula que vamos deduzir, além da sua importância de ordem prática pelas aplicações que dela se fazem na teoria dos Seguros de Vida, apresenta ainda o interêsse teórico de ser a primeira de tôdas as fórmulas de integração numérica a ter sido estabelecida (1670).

Seja o intervalo de integração a, b dividido em n intervalos parciais de amplitude h, $b = a + nh$.

Tem-se

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \sum_{i=o}^{n-1}\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\,dx.$$

Fazendo a mudança de variável

$x = hu + a + ih$, donde $dx = hdu$, obtém-se

$$J = \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\,dx = h\int_0^1 f(a+ih+hu)\,du.$$

Mas da fórmula de interpolação de Gregory-Newton 29) resulta (na hipótese de serem nulas as diferenças de ordem superior a n e supondo que se completou o quadro das diferenças — § 5)

$$f(a+ih+hu)=f(a+ih)+(u)_1\,\Delta f(a+ih)+$$

$$+\frac{1}{2!}(u)_2\,\Delta^2 f(a+ih)+\cdots+\frac{1}{n!}(u)_n\,\Delta^n f(a+ih)$$

logo

$$J=h\left[f(a+ih)\int_0^1 du+\Delta f(a+ih)\int_0^1 (u)_1\,du+\right.$$

$$+\frac{1}{2!}\Delta^2 f(a+ih)\int_0^1 (u)_2\,du+\cdots+$$

$$\left.+\frac{1}{n!}\Delta^n f(a+ih)\int_0^1 (u)_n\,du\right].$$

Por outro lado [79 a) § 23] $\int_0^1 (x)_i\,dx=i!\,b_i$, e $b_0=1$, por conseqüência

$$J=h\left[b_0 f(a+ih)+b_1\,\Delta f(a+ih)+b_2\,\Delta^2 f(a+ih)+\cdots+\right.$$

$$\left.+b_n\,\Delta^n f(a+ih)\right],$$

donde

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx=h\left[b_0\sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih)+b_1\sum_{i=o}^{n-1}\Delta f(a+ih)+\right.$$

$$\left.+b_2\sum_{i=o}^{n-1}\Delta^2 f(a+ih)+\cdots+b_n\sum_{i=o}^{n-1}\Delta^n f(a+ih)\right].$$

Ora, recorrendo aos operadores simbólicos E e Δ, [§ 3] reconhece-se fàcilmente que

$$\sum_{i=o}^{n-1} \Delta^k f(a+ih) = \Delta^{k-1} f(a+nh) - \Delta^{k-1} f(a) \quad (^1)$$

portanto, substituíndo, obtém-se finalmente

$$119) \int_a^{a+nh} f(x)\, dx = h \left\{ b_\circ \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) + b_1 [f(a+nh) - f(a)] + \right.$$
$$+ b_2 [\Delta f(a+nh) - \Delta f(a)] + \cdots +$$
$$\left. + b_n [\Delta^{n-1} f(a+nh) - \Delta^{n-1} f(a)] \right\}$$

que é a fórmula de Gregory.

Exemplo numérico — Resolvamos o problema já tratado no § 32 — calcular $\int_{1,05}^{1,10} f(x)\, dx$, conhecidos os valores da tabela

x	$f(x)$
1,05	1,25386
1,06	1,26996
1,07	1,28619
1,08	1,30254
1,09	1,31903
1,10	1,33565 .

---

(1) Com efeito, $\sum_{i=o}^{n-1} \Delta^k f(a+ih) = \sum_{i=o}^{n-1} \Delta^k E^i f(a) = \Delta^k f(a) \sum_{i=o}^{n-1} E^i =$

$$= \Delta^k f(a) \frac{E^n - 1}{E - 1} = \Delta^{k-1} f(a) (E^n - 1)$$
$$= \Delta^{k-1} E^n f(a) - \Delta^{k-1} f(a)$$
$$= \Delta^{k-1} f(a+nh) - \Delta^{k-1} f(a).$$

Há que construir o quadro das diferenças e completa-lo, considerando as diferenças de ordem 5 como constantes.

x	$f(x)$	$\Delta f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$
1,05	1,25386	0,01610	0,00013	-0,00001	0,00003	-0,00006
1,06	1,26996	0,01623	0,00012	0,00002	-0,00003	-0,00006
1,07	1,28619	0,01635	0,00014	-0,00001	-0,00009	-0,00006
1,08	1,30254	0,01649	0,00013	-0,00010	-0,00015	-0,00006
1,09	1,31903	0,01662	0,00003	-0,00025	-0,00021	-0,00006
1,10	1,33565	0,01665	-0,00022	-0,00046	0,00027	-0,00006

Tem-se então, atendendo a que $h = \frac{1}{100}$, $b_0 = 1$,

$$b_1 = \frac{1}{2}, \quad b_2 = -\frac{1}{12}, \quad b_3 = \frac{1}{24}, \quad b_4 = -\frac{19}{720}, \quad b_5' = \frac{3}{160}:$$

$$\int_{1,05}^{1,10} f(x)\,dx = \frac{1}{100}\left[6,43158 + \frac{1}{2}\cdot 0,08179 - \frac{1}{12}\cdot 0,00055\right.$$

$$\left. - \frac{1}{24}\cdot 0,00035 + \frac{19}{720}\cdot 0,00045 - \frac{3}{160}\cdot 0,00030\right]$$

$$= \frac{1}{100}\left[6,43158 + 0,040895 - 0,000046\right.$$

$$\left. - 0,000015 + 0,000012 - 0,000006\right]$$

$$= 0,0647242.$$

Aplicação importante [1] **— Cálculo de uma anuïdade contínua.**

Uma anuïdade contínua sôbre uma cabeça de idade x e de duração n anos representa-se pelo símbolo $/_n\,\alpha_x$ e define-se pela igualdade

$$/_n\,\alpha_x = \int_0^n {}_tE_x\,dt$$

onde ${}_tE_x$ (capital diferido) tem o valor

$${}_tE_x = (1+i)^{-t}\,\frac{v\,(x+t)}{v\,(x)} = (1+i)^{-t}\,p\,(x,\,t)$$

sendo t a variável tempo, i a taxa de juro, $v\,(x)$ a função de sobrevivência, indicando, em cada idade, o número de vivos de entre um grupo inicialmente tomado.

Apliquemos a fórmula de Gregory ao cálculo do integral definido.

Como aqui é $h = 1$ (porque é de um ano a amplitude dos intervalos mínimos dados pelas tábuas de mortalidade) e $a = o$ (porque é a idade zero a tomada para início das observações), tem-se, notando que $f\,(a+ih) = {}_iE_x$,

$$\int_0^n {}_tE_x\,dt = {}_0E_x + {}_1E_x + \cdots + {}_{n-1}E_x + b_1\,[\,{}_nE_x - {}_0E_x\,] +$$

$$+ b_2\,[\,\Delta\,{}_nE_x - \Delta\,{}_0E_x\,] + b_3\,[\,\Delta^2\,{}_nE_x - \Delta^2\,{}_0E_x\,] + \cdots.$$

Mas

$$b_1 = \frac{1}{2},\quad {}_0E_x = 1 \quad \text{e} \quad {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots + {}_{n-1}E_x = /_{n-1}a_x$$

---

[1] Para mais exemplos de aplicação da fórmula de Gregory à teoria dos seguros de vida, vide H. Galbrun, Assurances sur la Vie, Calcul des Primes. Paris 1924. Gauthier Villars.

(anuïdade temporária de $n-1$ anos, não contínua, sôbre a mesma cabeça de idade x), logo

$$/_n\alpha_x = /_{n-1}a_x + 1 + \frac{1}{2}\left[{}_nE_x - 1\right] + b_2\left[\Delta\,{}_nE_x - \Delta\,{}_0E_x\right] +$$

$$+ b_3\left[\Delta^2{}_nE_x - \Delta^2{}_0E_x\right] + \cdots$$

ou

$$120)\quad /_n\alpha_x = /_{n-1}a_x + \frac{1}{2}\left[1 + {}_nE_x\right] - \frac{1}{12}\left[\Delta\,{}_nE_x - \Delta\,{}_0E_x\right] +$$

$$+ \frac{1}{24}\left[\Delta^2{}_nE_x - \Delta^2{}_0E_x\right] + \cdots.$$

Esta igualdade pode ainda escrever-se, somando e subtraindo ${}_nE_x$ ao segundo membro e notando que $/_{n-1}a_x + {}_nE_x = /_na_x$,

$$120\ a)\quad /_n\alpha_x = /_na_x + \frac{1}{2}\left[1 - {}_nE_x\right] - \frac{1}{12}\left[\Delta\,{}_nE_x - \Delta\,{}_0E_x\right] +$$

$$+ \frac{1}{24}\left[\Delta^2{}_nE_x - \Delta^2{}_0E_x\right] + \cdots.$$

Se se trata de uma anuïdade vitalícia, contínua, de duração ilimitada, tem-se, por definição,

$$\alpha_x = \int_0^\infty {}_tE_x\,dt,$$

$/_n a_x$ transforma-se em a_x' e $\lim\limits_{n=\infty} {}_nE_x = 0$, logo a igualdade 120 a) dá

$$121)\quad \alpha_x = a_x + \frac{1}{2} + \frac{1}{12}\,\Delta\,{}_0E_x - \frac{1}{24}\,\Delta^2{}_0E_x + \cdots.$$

38) *Fórmula de Euler — Mac Laurin.*

Como vimos no parágrafo anterior, a fórmula de Gregory relaciona o integral definido de uma função com uma soma de valores dessa função (integral às diferenças, § 18) e com as diferenças sucessivas da mesma função.

A fórmula de Euler — Mac Laurin, que vamos deduzir, efectua uma relacionação entre os mesmos elementos, simplesmente figurando, no segundo membro, as derivadas da função em vez das diferenças da mesma função.

Para a deduzir, suponhamos que $f(x)$ é uma função que no intervalo a, b admite derivadas até à ordem que fôr exigida pelos cáculos que vão seguir-se.

Seja $F(x)$ uma função primitiva de $f(x)$ $[F'(x) = f(x)]$. Pela suposição que acaba de ser feita, $F(x)$ pode desenvolver-se pela fórmula de Taylor com resto R_{2n+1}.

Tem-se, sendo x e $x+h$ pontos do intervalo a, b,

$$\alpha)\ F(x+h) - F(x) = h\,F'(x) + \frac{h^2}{2!}\,F''(x) + \cdots + \frac{h^{2n}}{(2n)!}\,F^{(2n)}(x) + R_{2n+1}.$$

Fazendo, em ambos os membros desta igualdade, $x = a$ e notando que, por ser $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$, se tem

$$F(a+h) - F(a) = \int_a^{a+h} f(x)\,dx\,, \qquad F^{(i)}(x) = f^{(i-1)}(x),$$

obtém-se

$$\text{I)}\quad \int_a^{a+h} f(x)\,dx = h\,f(a) + \frac{h^2}{2!}\,f'(a) + \frac{h^3}{3!}\,f''(a) + \cdots + \frac{h^{2n}}{(2n)!}\,f^{(2n-1)}(a) + R^{(1)}_{2n+1}.$$

Derivemos agora ambos os membros da igualdade α) e façamos, na nova igualdade obtida, $x = a$; obtemos

$$F'(x+h) - F'(x) = h\,F''(x) + \frac{h^2}{2!}\,F'''(x) + \cdots +$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n)!}\,F^{(2n+1)}(x) + R'_{2n+1}$$

donde

$$\text{II)} \quad [f(x)]_a^{a+h} = h\,f'(a) + \frac{h^2}{2!}\,f''(a) + \frac{h^3}{3!}\,f'''(a) + \cdots +$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n)!}\,f^{(2n)}(a) + R^{(2)}_{2n+1}.$$

Derivando sucessivamente ambos os membros de α) e fazendo em seguida $x = a$, obtém-se:

$$F''(x+h) - F''(x) = h\,F'''(x) + \frac{h^2}{2!}\,F^{\text{IV}}(x) + \cdots +$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n)!}\,F^{(2n+2)}(x) + R''_{2n+1}$$

donde

$$\text{III)} \quad [f'(x)]_a^{a+h} = h\,f''(a) + \frac{h^2}{2!}\,f'''(a) + \frac{h^3}{3!}\,f^{\text{IV}}(a) + \cdots +$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n)!}\,f^{(2n+1)}(a) + R^{(3)}_{2n+1}$$

. . .

$$\text{IV)} \quad [f^{(2n-2)}(x)]_a^{a+h} = h\,f^{(2n-1)}(a) + \frac{h^2}{2!}\,f^{(2n)}(a) + \cdots +$$

$$+ \frac{h^{2n}}{(2n)!}\,f^{(4n-2)}(a) + R^{(2n)}_{2n+1}.$$

Multipliquemos ambos os membros das igualdades I, II, III, $\cdots$ IV respectivamente por $a_0,\ a_1 h,\ a_2 h^2, \cdots a_{2n-1} h^{2n-1}$, onde $a_0, a_1, a_2, \cdots$ são os coeficientes dos polinómios de Bernoulli de 1.ª espécie, e somemos ordenadamente.

Tem-se, representando por S_0 a soma dos têrmos do segundo membro onde figuram derivadas de $f(x)$ de ordem superior a $2n-1$,

$$\int_a^{a+h} f(x)\,dx + a_1 h\,[f(x)]_a^{a+h} + a_2 h^2\,[f'(x)]_a^{a+h} + \cdots +$$

$$+ a_{2n-1} h^{2n-1}\,[f^{(2n-2)}(x)]_a^{a+h} = h f(a) + \left(\frac{1}{2!} + a_1\right) h^2 f'(a) +$$

$$+ \left(\frac{1}{3!} + \frac{a_1}{2!} + a_2\right) h^3 f''(a) + \cdots +$$

$$+ \left[\frac{1}{(2n)!} + \frac{a_1}{(2n-1)!} + \cdots + a_{2n-1}\right] h^{2n} f^{(2n-1)}(a) + S_0.$$

Mas, em virtude de 67), são nulos todos os têrmos dêste segundo membro, à excepção do primeiro e de S_0, logo, escrevendo $\Delta f^{(i)}(a)$ em vez de $[f^{(i)}(x)]_a^{a+h}$, obtém-se

$$122)\quad \int_a^{a+h} f(x)\,dx = h f(a) - a_1 h \Delta f(a) - a_2 h^2 \Delta f'(a) - \cdots -$$

$$- a_{2n-1} h^{2n-1} \Delta f^{(2n-2)}(a) + S_0.$$

A fórmula de Euler — Mac Laurin obtém-se dividindo o intervalo $a,\ b$ em n intervalos parciais iguais de amplitude $h = \dfrac{b-a}{n}$ e aplicando a cada um a fórmula 122).

Procedendo assim, tem-se $(b = a + nh)$

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\,dx$$

e

$$\int_{a+ih}^{a+(i+1)h} f(x)\,dx = h\, f(a+ih) - a_1\, h\, \Delta f(a+ih) -$$

$$-a_2 h^2\, \Delta f'(a+ih) - \cdots - a_{2n-1}\, h^{2n-1}\, \Delta f^{(2n-2)}(a+ih) + S_i$$

donde

$$\int_{a}^{a+nh} f(x)\,dx = h \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) - a_1\, h \sum_{i=o}^{n-1} \Delta f(a+ih) -$$

$$-a_2\, h^2 \sum_{i=o}^{n-1} \Delta f'(a+ih) - \cdots -$$

$$-a_{2n-1}\, h^{2n-1} \sum_{i=o}^{n-1} \Delta f^{(2n-2)}(a+ih) + T.$$

Mas, como imediatamente se reconhece (vide § 18), é

$$\sum_{i=o}^{n-1} \Delta f^{(k)}(a+ih) = f^{(k)}(a+nh) - f^{(k)}(a)\,.$$

Por outro lado, como se sabe (vide § 20), os coeficientes a_i são nulos para i ímpar (à excepção de a_1), logo a igualdade acima toma o aspecto

$$123)\quad \int_{a}^{a+nh} f(x)\,dx = h \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) - a_1\, h \left[f(a+nh) - f(a) \right] -$$

$$-a_2\, h^2 \left[f'(a+nh) - f'(a) \right] -$$

$$-a_4\, h^4 \left[f'''(a+nh) - f'''(a) \right] - \cdots -$$

$$-a_{2n-2}\, h^{2n-2} \left[f^{(2n-3)}(a+nh) - f^{2n-3}(a) \right] + T.$$

É esta a fórmula de Euler — Mac Laurin [1].

Substituindo os coeficientes a_i pelos seus valores, tem-se

$$123\text{ a)}\quad \int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h\sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) + \frac{1}{2}h\left[f(a+nh)-f(a)\right] -$$

$$-\frac{1}{12}h^2\left[f'(a+nh)-f'(a)\right]+\frac{1}{720}h^4\left[f'''(a+nh)-f'''(a)\right]-$$

$$-\frac{1}{30.240}h^6\left[f^{\text{v}}(a+nh)-f^{\text{v}}(a)\right]+\cdots+T.$$

39) *Aplicações da fórmula de Euler — Mac Laurin.*

A fórmula que deduzimos no parágrafo anterior pode ser aplicada tanto ao cálculo de $\int_a^{a+nh} f(x)\,dx$ como ao de $\sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih)$; depende isso evidentemente daquela das duas entidades, integral ou somatório, cujo valor seja prèviamente conhecido ou fácil de determinar directamente, de modo que haja vantagem em utilizar a fórmula para calcular a outra.

No parágrafo 41) veremos uma aplicação importante da fórmula de Euler — Mac Laurin; nêste vamos limitar-nos a mostrar, em dois exemplos, a sua aplicação ao cálculo do integral e do somatório.

Exemplo 1.º — Calcular a soma $\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots+\frac{1}{19^4}$.

Tomemos a função $f(n)=\frac{1}{n^4}$ e usemos a fórmula com os limites *10* e *20* no integral.

---

[1] Para a expressão do resto T, veja-se C. Jordan — Cours d'Analyse, Tomo II, pág. 119 a 125; Jules Tannery — Introduction à la Théorie des Fonctions d'une Variable, Tomo II pág. 98 a 108.

Tem-se, visto que $h=1$,

$$\int_{10}^{20}\frac{1}{n^4}\,dn=\frac{1}{10^4}+\ldots+\frac{1}{19^4}+\frac{1}{2}\Big[f(n)\Big]_{10}^{20}-\frac{1}{12}\Big[f'(n)\Big]_{10}^{20}+$$

$$+\frac{1}{720}\Big[f'''(n)\Big]_{10}^{20}+\ldots.$$

E como

$$\int_{10}^{20}\frac{1}{n^4}\,dn=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n^3}\right)_{10}^{20}=\frac{7}{24.10^3},$$

$$\left(\frac{1}{n^4}\right)_{10}^{20}=-\frac{15}{16.10^4},$$

$$\left[\left(\frac{1}{n^4}\right)'\right]_{10}^{20}=-4\left(\frac{1}{n^5}\right)_{10}^{20}=\frac{31}{8.10^5},$$

$$\left[\left(\frac{1}{n^4}\right)'''\right]_{10}^{20}=-120\left(\frac{1}{n^7}\right)_{10}^{20}=\frac{15}{16}\cdot\frac{127}{10^7},$$

vem

$$\frac{1}{10^4}+\cdots+\frac{1}{19^4}=\int_{10}^{20}\frac{1}{n^4}\,dn-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n^4}\right)_{10}^{20}+\frac{1}{12}\left[\left(\frac{1}{n^4}\right)'\right]_{10}^{20}-$$

$$-\frac{1}{720}\left[\left(\frac{1}{n^4}\right)'''\right]_{10}^{20}+\cdots$$

$$=\frac{7}{24.10^3}+\frac{15}{32.10^4}+\frac{31}{96.10^5}-\frac{127}{768.10^7}+\ldots$$

Limitando o desenvolvimento aos têrmos escritos, encontra-se para valor aproximado da soma

$$\frac{1}{10^4}+\frac{1}{11^4}+\cdots+\frac{1}{19^4}=0{,}00034175\,.$$

Dêste resultado merecem confiança pelo menos sete casas decimais pois $\frac{127}{768.10^7}=0{,}0000000165$ e o desenvolvimento do segundo membro é ràpidamente convergente.

Exemplo 2.º — Cálculo de uma anuïdade contínua.

Achámos no parágrafo 37), como aplicação da fórmula de Gregory, a seguinte expressão para uma anuïdade contínua temporária

120 a) $${}_{/n}\alpha_x={}_{/n}a_x+\frac{1}{2}\,[1-{}_nE_x]-\frac{1}{12}\,[\Delta\,{}_nE_x-\Delta\,{}_oE_x]+\cdots$$

Vamos determinar da mesma anuïdade uma expressão diferente usando a fórmula de Euler — Mac Laurin.

Trata-se do cálculo de

$${}_{/n}\alpha_x=\int_0^n {}_tE_x\,dt \quad \text{onde} \quad {}_tE_x=(1+i)^{-t}\,\frac{v\,(x+t)}{v\,(x)}\,.$$

Façamos $f\,(t)={}_tE_x=(1+i)^{-t}\,\frac{v\,(x+t)}{v\,(x)}$ e limitemos as operações às derivadas de primeira ordem. Tem-se, visto que $h=1$,

$${}_{/n}\alpha_x=\int_0^n f\,(t)\,dt=f\,(o)+f\,(1)+\cdots+f\,(n-1)+\frac{1}{2}\,[f\,(n)-f\,(o)]$$

$$-\frac{1}{12}\,[f'\,(n)-f'\,(o)]+\cdots.$$

Mas

$$f(o)+f(1)+\cdots+f(n-1)={}_0E_x+{}_1E_x+\cdots+$$

$$+{}_{n-1}E_x=1+|_{n-1}\, a_x$$

$$f(n)-f(o)={}_nE_x-{}_0E_x={}_nE_x-1$$

e

$$f'(t)=(1+i)^{-t}\,\frac{v'(x+t)}{v(x)}-(1+i)^{-t}\log(1+i)\,\frac{v(x+t)}{v(x)}$$

$$=(1+i)^{-t}\,\frac{v(x+t)}{v(x)}\left[\frac{v'(x+t)}{v(x+t)}-\log(1+i)\right]$$

$$=f(t)\left[-\tau_{x+t}-\log(1+i)\right]$$

sendo $-\dfrac{v'(x)}{v(x)}=\tau_x$ a taxa instantânea de mortalidade.

Daqui resulta

$$f'(n)-f'(o)=f(n)\left[-\tau_{x+n}-\log(1+i)\right]-$$

$$-f(o)\left[-\tau_x-\log(1+i)\right]$$

$$=\log(1+i)\,(1-{}_nE_x)+\tau_x-\tau_{x+n}\cdot{}_nE_x$$

visto que $\quad f(n)={}_nE_x;\qquad f(o)={}_0E_x=1.$

Obtém-se, por conseqüência, substituindo,

$$|_n\,\bar{a}_x=1+|_{n-1}\,a_x-\frac{1}{2}(1-{}_nE_x)-$$

$$-\frac{1}{12}\left[\log(1+i)(1-{}_nE_x)+\tau_x-\tau_{x+n}\cdot{}_nE_x\right]+\cdots.$$

ou

$$124)\quad |_n\, \alpha_x = |_n a_x + \frac{1}{2}(1 - {}_nE_x) -$$

$$- \frac{1}{12}\left[\log(1+i)(1 - {}_nE_x) + \tau_x - \tau_{x+n} \cdot {}_nE_x\right] + \cdots.$$

Para a anuïdade contínua ilimitada obtém-se, por ser

$$\lim_{n=\infty} |_n\, \alpha_x = \alpha_x \qquad \lim_{n=\infty} {}_nE_x = 0,$$

$$125)\quad \alpha_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\left[\log(1+i) + \tau_x\right] + \cdots.$$

40) *Método de Gauss.*

Temos até aqui feito sempre a divisão do intervalo de integração em intervalos iguais e temos visto que, duma maneira geral, quanto maior fôr o número dêsses intervalos parciais, maior é a precisão das fórmulas.

Pode, porém, pôr-se a seguinte questão — ¿ é, porventura, a divisão em intervalos parciais *iguais* aquela que assegura as melhores condições de aproximação dos resultados? ou haverá *outra* divisão possível, no mesmo número de intervalos, que forneça resultados mais aproximados?

Tomemos, por exemplo, a fórmula de Côtes (§§ 33 e 34) e investiguemos do grau de aproximação que ela fornece.

Seja $f(x)$ a função de que se quere calcular o integral.

A fórmula de Côtes é, como se sabe, para a divisão em n intervalos,

$$110)\quad \int_a^b f(x)\, dx = (b-a) \sum_{i=o}^{n} H_{ni}\, y_i$$

onde $y_i = f(x_i)$ e os x_i são equidistantes.

A função interpoladora é aqui (fórmula de Lagrange)

$$\varphi(x) = \sum_{i=o}^{n} R_i \,.\, f(x_i)$$

com

$$R_i = \frac{(x - x_o) \cdots (x - x_{i-1})\,(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n)}{(x_i - x_o) \cdots (x_i - x_{i-1})\,(x_i - x_{i+1}) \cdots (x_i - x_n)},$$

e, como é sabido, tem-se

$$\varphi(x_o) = f(x_o), \;\cdots\; \varphi(x_n) = f(x_n).$$

Suponhamos que $f(x)$ é desenvolvível em série de potências convergente

$$f(x) = \alpha_o + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_m x^m + \cdots$$

e seja $\varphi_k(x)$ uma função igual a x^k para $x = x_o, \cdots x = x_n$; em virtude das condições $\varphi(x_o) = f(x_o), \cdots \varphi(x_n) = f(x_n)$, pode escrever-se o desenvolvimento

$$\varphi(x) = \alpha_o + \alpha_1 \varphi_1(x) + \cdots + \alpha_m \varphi_m(x) + \cdots.$$

Resulta daqui

$$\int_a^b f(x)\, dx = \Sigma\, \alpha_m \int_a^b x^m\, dx$$

$$\int_a^b \varphi(x)\, dx = \Sigma\, \alpha_m \int_a^b \varphi_m(x)\, dx$$

donde se conclui que o êrro δ cometido quando se substitui pela interpoladora $\varphi(x)$ a função $f(x)$, é

$$126) \qquad \delta = \Sigma\, \alpha_m \int_a^b \left[x^m - \varphi_m(x) \right] dx\,.$$

Para avaliar êste êrro, efectuaremos a divisão de x^m por

$$R(x) = (x - x_o) \cdots (x - x_n).$$

Obtém-se

127) $$x^m = R(x) \, . \, Q_m(x) + R_m(x)$$

sendo $Q_m(x)$ nula se $m < n + 1$ e igual a um polinómio inteiro de grau $m - (n + 1)$ se $m \geqslant n + 1$. Por outro lado, visto que $R(x)$ se anula para $x = x_o, \cdots x = x_n$, tem-se $R_m(x) = x^m$ para êsses valores de x, isto é,

$$R_m(x) = \varphi_m(x).$$

De 127) resulta então

$$x^m - \varphi_m(x) = R(x) \, . \, Q_m(x)$$

donde, substituindo em 126), se obtém para expressão do êrro

126 a) $$\delta = \Sigma \, \alpha_m \int_a^b R(x) \, . \, Q_m(x) \, dx.$$

Dêste segundo membro anulam-se os $n + 1$ primeiros têrmos (visto que $Q_m(x) = 0$ para $m = 0, 1, \cdots n$) nada se podendo dizer dos seguintes.

Conclui-se portanto desta análise que a aproximação dada pela fórmula de Côtes é significada pelo número de têrmos que se anulam em 126 a), os quais são precisamente $n + 1$ desde que se faça a divisão do intervalo a, b em n intervalos parciais iguais.

Vamos agora ver, e é nisso que consiste precisamente o método de Gauss, que é possível determinar os $x_o, \cdots x_n$ de modo que no êrro δ se anulem, não apenas os $n + 1$, mas sim os $2n + 1$ primeiros têrmos.

Suponhamos que os limites do integral são -1 e $+1$ (se o não forem, não há mais que efectuar a mudança de variável conveniente) e tomemos para valores dos $x_0, \cdots x_n$ as raízes do polinómio de Legendre $P_{n+1}(x)$ (§ 24). Então, como tôda a análise anterior se mantém, será

$$128) \qquad \delta = \Sigma \alpha_m \int_{-1}^{+1} P_{n+1}(x) \,.\, Q_m(x)\, dx.$$

Mas, pela propriedade 4.ª dos polinómios de Legendre (v. § 24, pág. 99) o integral anula-se desde que $Q_m(x)$ seja de grau inferior ao de $P_{n+1}(x)$. Ora êste é (prop. 1.ª) de grau $n+1$ e como $Q_m(x)$ é de grau $m-(n+1)$, o integral anula-se para todos os valores de m tais que $m-(n+1) < n+1$, isto é, $m < 2n+2$.

Para os valores tomados para $x_0, \cdots x_n$, a aproximação vai então mais longe visto que na série do segundo membro de 128) se anulam os $2n+2$ primeiros têrmos.

Isto é, a função interpoladora $\varphi(x) = \sum_{i=o}^{n} R_i f(x_i)$ em que os x_i são as raízes do polinómio de Legendre $P_{n+1}(x)$, representa a função $f(x)$, para efeito da integração, com a aproximação correspondente não à de um polinómio de grau n mas à de um polinómio de grau $2n+1$.

O método de Gauss deve portanto ser preferido ao de Côtes sempre que fôr requerido um maior rigor nos resultados.

A sua aplicação conduz ao uso da fórmula

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, dx = \sum_{i=o}^{n} y_i \int_{-1}^{+1} R_i\, dx$$

onde $y_i = f(x_i)$ e x_i são, como acima ficou dito, as raízes do polinómio de Legendre $P'_{n+1}(x)$.

Para calcular $\int_a^b f(x)\, dx$ pode fazer-se também a transformação de modo que os limites do novo integral sejam o e 1.

Obtém-se, fazendo $x = a + ht$ $(h = b - a)$.

$$\int_a^b f(x)\,dx = h\int_0^1 f(a+ht)\,dt$$

e, por conseqüência,

$$129)\quad \int_a^b f(x)\,dx = h\left[E_0 f(a+ht_0) + E_1 f(a+ht_1) + \cdots + E_n f(a+ht_n)\right]$$

onde $t_0, \cdots t_n$ são as raízes da equação de Legendre transformada

$$\frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}\left[t^{n+1}(t-1)^{n+1}\right] = 0$$

e

$$E_i = \int_0^1 \frac{(t-t_0)\cdots(t-t_{i-1})(t-t_{i+1})\cdots(t-t_n)}{(t_i-t_0)\cdots(t_i-t_{i-1})(t_i-t_{i+1})\cdots(t_i-t_n)}\,dt.$$

Os valores de $t_0, \cdots t_n$, $E_0, \cdots E_n$ podem ver-se em Whittaker and Robinson, *The Calculus of Observations* pág. 160; em *Repertorium der Höheren Mathematik*, vol I, cap. 9, pág. 525 e 526.

Consulte-se também sôbre êste assunto: *Encyclopédie des Sciences Mathématiques* — Calcul des Différences et Interpolation § 26; C. Runge und H. König, *Numerisches Rechnen*, cap. 9, § 80.

41) *O problema da somação. Fórmulas de Woolhouse e Lubbock.*

O problema da *somação* consiste no seguinte: duma função $f(x)$ são conhecidos os valores $f(x_0), \cdots f(x_n)$; efectuemos a divisão de cada um dos intervalos x_i, x_{i+1} em m intervalos parciais $x'_{i,k}$, $x'_{i,k-1}$, — determinar a soma $S = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{m} f(x'_{i,k})$.

Vamos ocupar-nos da resolução dêste problema apenas no caso em que os x_i são *equidistantes* e em que a divisão de cada um dos intervalos se faz em m intervalos parciais *iguais*.

Neste caso simples, o problema toma o seguinte aspecto: sendo conhecidos $f(a), f(a+h), \cdots f(a+nh)$, calcular

$$S = f(a) + \cdots + f\left(a + i\frac{h}{m}\right) + \cdots + f\left[a + (m-1)\frac{h}{m}\right] +$$

$$+ f(a+h) + \cdots + f\left(a+h+i\frac{h}{m}\right) + \cdots + f\left[a+h+(m-1)\frac{h}{m}\right] +$$

$$+ \cdots$$

$$+ f[a+(n-1)h] + \cdots + f\left[a+(n-1)h+i\frac{h}{m}\right] +$$

$$+ \cdots + f\left[a+(n-1)h+(m-1)\frac{h}{m}\right]$$

$$= \sum_{i=o}^{mn-1} f\left(a + i\frac{h}{m}\right).$$

A) Fórmula de Woolhouse.

Partamos da fórmula de Euler — Mac Laurin

$$123) \quad \int_a^{a+nh} f(x)\,dx = h \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) - a_1 h[f(a+nh) - f(a)] -$$

$$- a_2 h^2 [f'(a+nh) - f'(a)] - a_4 h^4 [f'''(a+nh) - f'''(a)] -$$

$$- \cdots - a_{2n-2} h^{2n-2} [f^{(2n-3)}(a+nh) - f^{(2n-3)}(a)] + T$$

e dividamos o intervalo h em m intervalos parciais iguais de amplitude $h' = \frac{h}{m}$.

A fórmula de Euler — Mac Laurin, aplicada com os intervalos assim divididos, dá

$$\int_a^{a+mnh'} f(x)\,dx = h' \sum_{i=o}^{mn-1} f(a+ih') - a_1 h' [f(a+mnh') - f(a)] -$$

$$-a_2 h'^2 [f'(a+mnh') - f'(a)] - a_4 h'^4 [f'''(a+mnh') - f'''(a)] -$$

$$-\cdots - a_{2n-2} h'^{2n-2} [f^{(2n-3)}(a+mnh') - f^{(2n-3)}(a)] + T'$$

ou

$$\int_a^{a+nh} f(x)\,dx = \frac{h}{m} \sum_{i=o}^{mn-1} f\left(a + i\frac{h}{m}\right) - a_1 \frac{h}{m} [f(a+nh) - f(a)] -$$

$$-a_2 \frac{h^2}{m^2} [f'(a+nh) - f'(a)] - a_4 \frac{h^4}{m^4} [f'''(a+nh) - f'''(a)] -$$

$$-\cdots - a_{2n-2} \frac{h^{2n-2}}{m^{2n-2}} [f^{(2n-3)}(a+nh) - f^{(2n-3)}(a)] + T'.$$

Igualemos o segundo membro desta igualdade ao segundo membro de 123); obtém-se, após divisão por h,

$$\frac{1}{m} S - a_1 \frac{1}{m} [f(a+nh) - f(a)] - a_2 \frac{h}{m^2} [f'(a+nh) - f'(a)] -$$

$$-a_4 \frac{h^3}{m^4} [f'''(a+nh) - f'''(a)] - a_6 \frac{h^5}{m^6} [f^V(a+nh) - f^V(a)] - \cdots -$$

$$-a_{2n-2} \frac{h^{2n-3}}{m^{2n-2}} [f^{(2n-3)}(a+nh) - f^{(2n-3)}(a)] + T' = \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) -$$

$$-a_1 [f(a+nh) - f(a)] - a_2 h [f'(a+nh) - f'(a)] -$$

$$-a_4 h^3 [f'''(a+nh) - f'''(a)] -$$

$$-a_6 h^5 [f^V(a+nh) - f^V(a)] - \cdots -$$

$$-a_{2n-2} h^{2n-3} [f^{(2n-3)}(a+nh) - f^{(2n-3)}(a)] + T,$$

donde

$$\frac{1}{m}S = \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) + a_1\left(\frac{1}{m}-1\right)[f(a+nh)-f(a)] +$$

$$+ a_2\, h\left(\frac{1}{m^2}-1\right)[f'(a+nh)-f'(a)] +$$

$$+ a_4\, h^3\left(\frac{1}{m^4}-1\right)[f'''(a+nh)-f'''(a)] +$$

$$+ a_6\, h^5\left(\frac{1}{m^6}-1\right)[f^V(a+nh)-f^V(a)] + \cdots +$$

$$+ a_{2n-2}\, h^{2n-3}\left(\frac{1}{m^{2n-2}}-1\right)[f^{(2n-3)}(a+nh)-f^{(2n-3)}(a)] + T - T'.$$

Mas

$$a_1\left(\frac{1}{m}-1\right) = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}-1\right) = \frac{m-1}{2m}$$

$$a_2\left(\frac{1}{m^2}-1\right) = \frac{1}{12}\left(\frac{1}{m^2}-1\right) = -\frac{1}{12}\cdot\frac{m^2-1}{m^2}$$

$$a_4\left(\frac{1}{m^4}-1\right) = -\frac{1}{720}\left(\frac{1}{m^4}-1\right) = \frac{1}{720}\cdot\frac{m^4-1}{m^4}$$

$$a_6\left(\frac{1}{m^6}-1\right) = \frac{1}{30240}\left(\frac{1}{m^6}-1\right) = -\frac{1}{30240}\cdot\frac{m^6-1}{m^6}$$

. . .

logo

$$130)\qquad S = m \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) + \frac{m-1}{2}\left[f(a+nh)-f(a)\right] -$$

$$-\frac{h}{12}\cdot\frac{m^2-1}{m}\left[f'(a+nh)-f'(a)\right]+$$

$$+\frac{h^3}{720}\cdot\frac{m^4-1}{m^3}\left[f'''(a+nh)-f'''(a)\right]-$$

$$-\frac{h^5}{30240}\cdot\frac{m^6-1}{m^5}\left[f^V(a+nh)-f^V(a)\right]+\cdots.$$

É esta a fórmula de Woolhouse.

Aplicação — *Cálculo de uma anuïdade vitalícia fraccionada.*

Seja a anuïdade vitalícia temporária

$$/_n\, a_x = {}_1E_x + {}_2E_x + \cdots + {}_nE_x\,.$$

Denomina-se ([1]) anuïdade vitalícia temporária fraccionada, e representa-se pelo símbolo $/_n\, a_x^{(k)}$, a soma

$$/_n\, a_x^{(k)} = \frac{1}{k}\left[{}_{\frac{1}{k}}E_x + {}_{\frac{2}{k}}E_x + \cdots + {}_nE_x\right].$$

Para calcular esta anuïdade, como aplicação da fórmula de Woolhouse, façamos $f(t) = {}_tE_x$.

Tem-se

$$a)\qquad /_n\, a_x = f(1) + f(2) + \cdots + f(n) = \sum_{t=o}^{n-1} f(t) + f(n) - f(o)$$

([1]) Vide qualquer tratado de Seguros de Vida.

e

$$\text{b)}\quad {}_{/n}a_x^{(k)} = \frac{1}{k}\left[f\left(\frac{1}{k}\right)+f\left(\frac{2}{k}\right)+\cdots+f\left(\frac{nk}{k}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{k}\left[\sum_{t=o}^{nk-1} f(t)+f(n)-f(o)\right]=\frac{1}{k}\left[S+f(n)-f(o)\right].$$

A fórmula de Woolhouse dá, no caso presente ($a=o$, $m=k$, $h=1$, $i=t$)

$$S = k\sum_{t=o}^{n-1} f(t)+\frac{k-1}{2}\left[f(n)-f(o)\right]-$$

$$-\frac{1}{12}\,\frac{k^2-1}{k}\left[f'(n)-f'(o)\right]+\cdots$$

donde, substituindo $\sum\limits_{t=o}^{n-1} f(t)$ e S, pelos seus valores dados por *a*) e *b*),

$$k\,{}_{/n}a_x^{(k)}-f(n)+f(o)=k\left[{}_{/n}a_x-f(n)+f(o)\right]+$$

$$+\frac{k-1}{2}\left[f(n)-f(o)\right]-\frac{1}{12}\,\frac{k^2-1}{k}\left[f'(n)-f'(o)\right]+\cdots$$

donde, ainda,

$${}_{/n}a_x^{(k)}={}_{/n}a_x+\left(\frac{k-1}{2k}-1+\frac{1}{k}\right)\left[f(n)-f(o)\right]-$$

$$-\frac{1}{12}\,\frac{k^2-1}{k^2}\left[f'(n)-f'(o)\right]+\cdots.$$

E como

$$f(n) = {}_nE_x, \quad f(o) = 1,$$

$$f'(n) - f'(o) = \log(1+i)(1 - {}_nE_x) + \tau_x - \tau_{x+n} \cdot {}_nE_x, \text{[1]}$$

tem-se, finalmente,

$$131) \quad {}_{/n}a_x^{(k)} = {}_{/n}a_x + \frac{k-1}{2k}(1 - {}_nE_x) -$$

$$- \frac{1}{12}\frac{k^2-1}{k^2}\left[\log(1+i)(1 - {}_nE_x) + \tau_x - \tau_{x+n} \cdot {}_nE_x\right] + \cdots .$$

Para a anuïdade vitalícia ilimitada tem-se, por ser

$$\lim_{n=\infty} {}_{/n}a_x^{(k)} = a_x^{(k)}, \quad \lim_{n=\infty} {}_nE_x = 0, \quad \lim_{n=\infty} {}_{/n}a_x = a_x,$$

$$132) \quad a_x^{(k)} = a_x + \frac{k-1}{2k} - \frac{1}{12}\frac{k^2-1}{k^2}\left[\log(1+i) + \tau_x\right] + \cdots .$$

Se k tende para infinito, as anuïdades descontínuas tendem para as anuïdades contínuas respectivas e obtém-se imediatamente, por ser

$$\lim_{k=\infty} {}_{/n}a_x^{(k)} = {}_{/n}\alpha_x, \quad \lim_{k=\infty} \frac{k-1}{2k} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{k=\infty} \frac{k^2-1}{k^2} = 1,$$

$$131') \quad {}_{/n}\alpha_x = {}_{/n}a_x + \frac{1}{2}(1 - {}_nE_x) - \frac{1}{12}\left[\log(1+i)(1 - {}_nE_x) + \right.$$

$$\left. + \tau_x - \tau_{x+n} \cdot {}_nE_x\right] + \cdots$$

$$132') \quad \alpha_x = a_x + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\left[\log(1+i) + \tau_x\right] + \cdots$$

fórmulas que já encontrámos no § 39 [fórmulas 124) e 125)].

---

[1] Vide § 39, pág. 162.

B) Fórmula de Lubbock.

A fórmula de Lubbock obtém-se da de Woolhouse

$$130)\quad S = m \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) + \frac{m-1}{2}\left[f(a+nh) - f(a)\right] -$$

$$- \frac{h}{12}\,\frac{m^2-1}{m}\left[f'(a+nh) - f'(a)\right] +$$

$$+ \frac{h^3}{720}\,\frac{m^4-1}{m^3}\left[f'''(a+nh) - f'''(a)\right] -$$

$$- \frac{h^5}{30240}\,\frac{m^6-1}{m^5}\left[f^V(a+nh) - f^V(a)\right] + \cdots$$

substituindo as derivadas pelos seus valores nas diferenças.

Tem-se de 87'') pág. 107 [1].

$$f'(a+nh) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(a+nh) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(a+nh) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a+nh) - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4}\Delta^4 f(a+nh) + \frac{1}{5}\Delta^5 f(a+nh) - \cdots\right]$$

$$f'(a) = \frac{1}{h}\left[\Delta f(a) - \frac{1}{2}\Delta^2 f(a) + \frac{1}{3}\Delta^3 f(a) - \frac{1}{4}\Delta^4 f(a) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{5}\Delta^5 f(a) - \cdots\right]$$

(1) As derivadas no ponto $a+xh$ foram deduzidas no § 26) em função das diferenças no ponto a.

Mas é manifesto que os seus valores *no ponto* $a+xh$ são dadas também por 87'').

$$f'(a+nh)-f'(a)=\frac{1}{h}\Big\{\Delta f(a+nh)-\Delta f(a)-$$

$$-\frac{1}{2}[\Delta^2 f(a+nh)-\Delta^2 f(a)]+$$

$$+\frac{1}{3}[\Delta^3 f(a+nh)-\Delta^3 f(a)]-$$

$$-\frac{1}{4}[\Delta^4 f(a+nh)-\Delta^4 f(a)]+$$

$$+\frac{1}{5}[\Delta^5 f(a+nh)-\Delta^5 f(a)]-\cdots\Big\};$$

$$f'''(a+nh)=\frac{1}{h^3}\Big[\Delta^3 f(a+nh)-\frac{3}{2}\Delta^4 f(a+nh)+$$

$$+\frac{7}{4}\Delta^5 f(a+nh)-\cdots\Big]$$

$$f'''(a)=\frac{1}{h^3}\Big[\Delta^3 f(a)-\frac{3}{2}\Delta^4 f(a)+$$

$$+\frac{7}{4}\Delta^5 f(a)-\cdots\Big]$$

$$f'''(a+nh)-f'''(a)=\frac{1}{h^3}\Big\{\Delta^3 f(a+nh)-\Delta^3 f(a)-$$

$$-\frac{3}{2}[\Delta^4 f(a+nh)-\Delta^4 f(a)]+$$

$$+\frac{7}{4}[\Delta^5 f(a+nh)-\Delta^5 f(a)]-\cdots\Big\};$$

$$f^{V}(a+nh)=\frac{1}{h^5}[\Delta^5 f(a+nh)-\cdots]$$

$$f^{V}(a) = \frac{1}{h^5}\left[\Delta^5 f(a) - \cdots\right]$$

$$f^{V}(a+nh) - f^{V}(a) = \frac{1}{h^5}\left[\Delta^5 f(a+nh) - \Delta^5 f(a) - \cdots\right].$$

Substituindo estes valores na fórmula 130) (Woolhouse) obtém-se

$$S = m\sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) + \frac{m-1}{2}\left[f(a+nh) - f(a)\right] +$$

$$+ A_1\left[\Delta f(a+nh) - \Delta f(a)\right] + A_2\left[\Delta^2 f(a+nh) - \Delta^2 f(a)\right] + \cdots$$

onde

$$A_1 = -\frac{h}{12}\cdot\frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{1}{h} = -\frac{m^2-1}{12\,m}$$

$$A_2 = -\frac{h}{12}\cdot\frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{-1}{2h} = \frac{m^2-1}{24m}$$

$$A_3 = -\frac{h}{12}\cdot\frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{1}{3h} + \frac{h^3}{720}\cdot\frac{m^4-1}{m^3}\cdot\frac{1}{h^3}$$

$$= -\frac{(m^2-1)\,(19m^2-1)}{720m^3}$$

$$A_4 = -\frac{h}{12}\cdot\frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{-1}{4h} + \frac{h^3}{720}\cdot\frac{m^4-1}{m^3}\cdot\frac{-3}{2h^3}$$

$$= \frac{(m^2-1)\,(9m^2-1)}{480m^3}$$

$$A_5 = -\frac{h}{12}\cdot\frac{m^2-1}{m}\cdot\frac{1}{5h} + \frac{h^3}{720}\cdot\frac{m^4-1}{m^3}\cdot\frac{7}{4h^3} -$$

$$- \frac{h^5}{30240}\cdot\frac{m^6-1}{m^5}\cdot\frac{1}{h^5} = -\frac{(m^2-1)\,(863m^4-145m^2+2)}{60280m^5}.$$

Substituindo, obtém-se finalmente

$$133)\ S = m \sum_{i=o}^{n-1} f(a+ih) + \frac{m-1}{2}[f(a+nh) - f(a)] -$$

$$- \frac{m^2-1}{12\,m}[\Delta f(a+nh) - \Delta f(a)] + \frac{m^2-1}{24\,m}[\Delta^2 f(a+nh) - \Delta^2 f(a)] -$$

$$- \frac{(m^2-1)(19m^2-1)}{720\,m^3}[\Delta^3 f(a+nh) - \Delta^3 f(a)] -$$

$$+ \frac{(m^2-1)(9m^2-1)}{480\,m^3}[\Delta^4 f(a+nh) - \Delta^4 f(a)] -$$

$$- \frac{(m^2-1)(863\,m^4 - 145\,m^2 + 2)}{60280\,m^5}[\Delta^5 f(a+nh) - \Delta^5 f(a)] + \cdots.$$

É esta a fórmula de Lubbock.

No «Text-Book» do Instituto dos Actuários de Londres encontram-se os valores numéricos dos coeficientes da fórmula de Lubbock (até ao coefiente da diferença de 6.ª ordem), bem como os seus logaritmos, para valores inteiros de m de 2 a 11 inclusive.

Lá se encontram também, tratados pormenorizadamente, exemplos de aplicação numérica.

Podíamos aplicar a fórmula de Lubbock ao cálculo de uma anuïdade fraccionada. Os resultados só diferiríam dos obtidos pela fórmula de Woolhouse a partir do 3.º têrmo onde, em vez das derivadas, apareceriam as diferenças.

Fàcilmente se verifica que se obteria

$$131'')\ {}_{/n}a_x^{(k)} = {}_{/n}a_x + \frac{k-1}{2k}(1 - {}_nE_x) - \frac{k^2-1}{12\,k^2}[\Delta\,{}_nE_x - \Delta\,{}_oE_x] + \cdots$$

$$132'')\ a_x^{(k)} = a_x + \frac{k-1}{2\,k} + \frac{k^2-1}{12\,k^2}\Delta\,{}_oE_x + \cdots$$

e destas igualdades deduzir-se-iam imediatamente as correspondentes a anuïdades contínuas, fazendo tender k para ∞.

O leitor desejoso de maior minúcia sôbre êste assunto pode consultar H. Galbrun, Assurances sur la Vie, Calcul des Primes, pag. 113 e seguintes.

TABELA I

Diferenças $\Delta^t 0^n$

n \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	2	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	6	6	0	0	0	0	0	0	0
4	1	14	36	24	0	0	0	0	0	0
5	1	30	150	240	120	0	0	0	0	0
6	1	62	540	1.560	1.800	720	0	0	0	0
7	1	126	1.806	8.400	16.800	15.120	5.040	0	0	0
8	1	254	5.796	40.824	126.000	191.520	141.120	40.320	0	0
9	1	510	18.150	186.480	834.120	1.905.120	2 328.480	1.451.520	362.880	0
10	1	1.022	55.980	818.520	5.103.000	16.435.440	29.635.200	30.240.000	16.329.600	3.628.800

TABELA II

Números de Stirling de 1.ª Espécie: $S_{n,\nu}$

$n \backslash \nu$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	2	-3	1	0	0	0	0	0
4	-6	11	-6	1	0	0	0	0
5	24	-50	35	-10	1	0	0	0
6	-120	274	-225	85	-15	1	0	0
7	720	-1.764	1.624	-735	175	-21	1	0
8	-5.040	13.068	-13.132	6.769	-1.960	322	-28	1

TABELA III

Números de Stirling de 1.ª Espécie generalizados: $S^2_{n,\mu}$

n \ μ	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	4	-5	1	0	0	0	0	0
4	-36	49	-14	1	0	0	0	0
5	576	-820	273	-30	1	0	0	0
6	-14.400	21.076	-7.645	1.023	-55	1	0	0
7	518.400	-773.136	296.296	-44.473	3.003	-91	1	0
8	-25.401.600	38.402.064	-15.291.640	2.475.473	-191.620	7.462	-140	1

TABELA IV

Números de Stirling de 1.ª Espécie generalizados: $S^{3}_{n,\mu}$

n \ μ	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	8	-9	1	0	0	0	0	0
4	-216	251	-36	1	0	0	0	0
5	13.824	-16.280	2.555	-100	1	0	0	0
6	-1.728.000	2.048.824	-335.655	15.055	-225	1	0	0
7	373.248.000	-444.273.984	74.550.304	-3.587.535	63.655	-441	1	0
8	-128.024.064.000	152.759.224.512	-26.015.028.256	1.305.074.809	-25.421.200	214.918	-784	1

TABELA V

Números de Stirling de 1.ª Espécie generalizados: $S^{4}_{n,\mu}$

$n \backslash \mu$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	16	-17	1	0	0	0	0	0
4	-1.296	1.393	-98	1	0	0	0	0
5	331.776	-357.904	26.481	-354	1	0	0	0
6	-207.360.000	224.021.776	-16.908.529	247.731	-979	1	0	0
7	268.738.560.000	-290.539.581.696	22.137.475.360	-337.967.905	1.516.515	-2.275	1	0
8	-645.241.282.560.000	697.854.274.212.096	-53.442.617.921.056	833.598.415.265	-3.979.120.420	6.978.790	-4.676	1

TABELA VI

Números de Stirling de 1.ª Espécie generalizados: $S^{5}_{n,\mu}$

n \ μ	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	1	0	0	0	0	0	0
3	32	-33	1	0	0	0	0	0
4	-7.776	8.051	-276	1	0	0	0	0
5	7.962.624	-8.252.000	290.675	-1.300	1	0	0	0
6	-24.883.200.000	25.795.462.624	-916.611.375	4.353.175	-4.425	1	0	0
7	193.491.763.200.000	-200.610.400.564.224	7.153.365.514.624	-34.766.900.175	38.761.975	-12.201	1	0
8	-3.252.016.064.102.400.000	3.371.852.494.046.112.768	-120.427.224.604.849.792	591.480.656.755.849	-686.239.414.000	243.824.182	-29.008	1

TABELA VII

Números de Stirling de 2.ª Espécie: $T_{n,\mu}$

$n \backslash \mu$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	3	1	0	0	0	0	0
4	1	7	6	1	0	0	0	0
5	1	15	25	10	1	0	0	0
6	1	31	90	65	15	1	0	0
7	1	63	301	350	140	21	1	0
8	1	127	966	1.701	1.050	266	28	1

NOTA

Êste livro devia terminar com um capítulo sôbre integração numérica das equações diferenciais. Por motivos de ordem material houve que suprimi-lo.

Para o estudo do assunto aconselhamos:

Whittaker and Robinson — The Calculus of Observations; Cap. XIV.

C. Runge und H. König — Numerisches Rechnen; Cap. X.

ERRATA

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
10	19	numere-se a fórmula com o número 3)	
»	19	$f\ a)$	$f\,(a)$
13	11	$- \cdot$	$- \cdots +$
18	7	$(x)_{n-}$	$(x)_{n-1}$
33	última	$\frac{1392}{1296}$	$\frac{1393}{1296}$
35	nota	§ 17	§ 27
44	10	$f\,(a_0,\ a_1, \cdots a_{n-1})$	$f\,(a_0,\ a_1, \cdots a_n)$
45	penúltima	$+ \cdot$	$+ \cdots +$
»	última	a^{n-}_{+}	a^{n-1}_{i+1}
55	3	$f\,(a + nh)$	$f\,(a + xh)$
»	15	pág. 3	pág. 5
67	5	siméticas	simétricas
81	15	$\left[(x)_{i+1}\right]_0^{1+}$	$\left[(x)_{i+1}\right]_0^{p+1}$
86	17	$+ c$	$+ c_4$
89	25	polinomos	polinómios
95	12	$\frac{1}{n!}\ S_{n-1}$	$\frac{1}{n!}\ S_{n1}$
102	5	$\frac{d^n\,(x-1)^n}{dx}$	$\frac{d^n\,(x-1)^n}{dx^n}$

Pág.	Linha	Onde se lê	Leia-se
118	antepenúltima	$\frac{d^i A^i}{dx^i} =$	$\frac{d^i A_i}{dx^i} =$
121	penúltima	$\Delta \frac{x^2}{2!}\Big)$	$\Delta \left(\frac{x^2}{2!}\right)$
141	7	$f(a+nh$	$f(a+nh)$
»	última	$f[a+(i-1)h$	$f[a+(i-1)h]$
142	6	$f[a+(m-1)h]$	$f[a+(m-1)h]]$
»	7	$f\left[a+\left(m-\frac{1}{2}\right)h\right]\Big]\Big\}$	$f\left[a+\left(m-\frac{1}{2}\right)h\right]\Big]\Big\}$
144	9	$=o$	$a=o$
148	3	$f(x_6)]\}$	$f(x_6)\}$
152	9	$0{,}00027$	$-0{,}00027$
155	12	cáculos	cálculos
165	1	efectuaremos	efectuemos

ÍNDICE DE NOMES

(Os números referem-se às páginas)

ÍNDICE DE MATÉRIAS