

Espaces Vectoriels Normés

Fonctions à plusieurs variables

Lundi 15 janvier 2018

Soit E un espace vectoriel.

Le but de cette partie est de définir la notion de distance entre deux vecteurs de E .

Ex : – $E = \mathbb{R}$: On peut définir la distance entre deux réels a et a' par $d(a, a') = |a - a'|$.

– $E = \mathbb{C}$: On peut poser $z, z' \in \mathbb{C}$, $d(z, z') = |z - z'|$. Si on écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors $d(z, z') = |x - x' + i(y - y')| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

– $E = \mathbb{R}^2$: Si $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on peut définir $d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

1 Normes et distances sur un espace vectoriel

Définition : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} . Une norme sur E est par définition une application

$N : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto N(x)$ vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$, et $(N(x) = 0 \iff x = 0)$,
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$,
- (Inégalité triangulaire) $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$.

Définition : Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple (E, N) où E est un e.v et N une norme sur E .

Propriétés :

- Soient $x_1, x_2, x_3 \in E$ avec (E, N) un e.v.n. Alors,
 $N(x_1 + x_2 + x_3) = N((x_1 + x_2) + x_3) \leq N(x_1 + x_2) + N(x_3) \leq N(x_1) + N(x_2) + N(x_3)$
- Si $x_1, \dots, x_p \in E, N(x_1, \dots, x_p) \leq N(x_1) + \dots + N(x_p)$.
- Si $x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$.

Démo :

$$N(x) = N((x - y) + y) \leq N(x - y) + N(y), N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$

$$\text{Aussi } N(y) - N(x) \leq N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1|N(x - y) = N(x - y).$$

$$\text{Finalement, } |N(x) - N(y)| = \text{Max}(N(x) - N(y), N(y) - N(x)) \leq N(x - y).$$

Ex :

– $E = \mathbb{R}$: Posons $N(x) = |x|$ (Valeur absolue).

N est une norme sur \mathbb{R} , car $|x| \geq 0, (|x| = 0 \iff x = 0)$,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda x| = |\lambda||x|$, et $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$.

– $E = \mathbb{C}$: Posons $N(x) = |x|$ (Module).

N est une norme sur \mathbb{C} , car $|z| \geq 0, (|z| = 0 \iff z = 0)$,

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda z| = |\lambda||z|$, et $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$.

– Espaces euclidiens :

Soit E un e.v. Une forme bilinéaire est une application $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto B(x, y)$ telle qu'elle est linéaire en chacune de ses variables.

Un produit scalaire sur un e.v E est une forme bilinéaire symétrique sur E définie positive au sens suivant :
 $\forall x \in E, B(x, x) \geq 0$, et $B(x, x) = 0 \iff x = 0$. Un espace euclidien est un e.v muni d'un produit scalaire.

On pose $B(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$. B est un produit scalaire sur \mathbb{R}^n avec $(x, y \in \mathbb{R}^n)$.

On pose maintenant : $N(x) = \sqrt{B(x, x)}$. Alors, N est une norme sur E .

Démo :

i/ Par définition, $N(x) \geq 0$, et $N(x) = 0 \iff B(x, x) = 0 \iff x = 0$

ii/ Si $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E, N(\lambda x) = \sqrt{B(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 B(x, x)} = |\lambda| \sqrt{B(x, x)} = |\lambda| N(x)$,

iii/ On va utiliser le lemme : $\forall x, y \in E$, posons $p(\lambda) = B(x + \lambda y, x) + \lambda B(x + \lambda y, y)$. Si on pose $z = x + \lambda y$ fixé, et $u(\omega) = B(z, \omega)$, on a écrit que $(u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y))$.

On aura $p(\lambda) = B(x, x) + \lambda B(y, x) + \lambda B(x, y) + \lambda^2 B(y, y)$ donc $p(\lambda) = B(x, x) + 2\lambda B(y, x) + \lambda^2 B(y, y)$ donc $\lambda \mapsto p(\lambda)$ est un polynôme de degré ≤ 2 et $p(\lambda) = B(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$.

Or, si un polynôme de degré ≤ 2 ne change pas de signe, son discriminant est ≤ 0 .

$(2B(x, y))^2 - 4B(x, x)B(y, y) \leq 0$, donc $|B(x, y)| \leq \sqrt{B(x, x)} \sqrt{B(y, y)}$. On a donc $N(x + y)^2 = B(x + y, x + y) = B(x, x + y) + B(y, x + y) = B(x, x) + B(y, x) + B(x, y) + B(y, y) = B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y) \leq N(x)^2 + N(x)N(y) + N(y)^2$.

On a obtenu $N(x + y)^2 \leq (N(x) + N(y))^2$ soit $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

– $E = \mathbb{R}^n : B(x, y) = \sum x_i y_i$. La norme obtenue se note $\|.. \|_2$ et pour $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est donnée par

$$\|x\|_2 \stackrel{def}{=} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

– Autre exemple de normes : Soient E, E' deux e.v et $\varphi : E \rightarrow E'$ linéaire injective.

Soit N' une norme sur E' . Pour $x \in E$, posons $N(x) \stackrel{def}{=} N'(\varphi(x))$. Alors N est une norme sur E :

i/ $N(x) \geq 0$ de plus $N(x) = 0 \implies N'(\varphi(x)) = 0 \implies \varphi(x) = 0$ (car N' est une norme) $\implies x = 0$. (puisque φ est injective).

ii/ $N(\lambda x) = N'(\varphi(\lambda x)) = N'(\lambda \varphi(x)) = |\lambda| N'(\varphi(x)) = |\lambda| N(x)$

iii/ $N(x + y) = N'(\varphi(x + y)) = N'(\varphi(x) + \varphi(y)) \leq N'(\varphi(x)) + N'(\varphi(y)) = N(x) + N(y)$

1.1 Normes usuelles de \mathbb{R}^p

Soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$, les normes usuelles de \mathbb{R}^p sont définies par :

$$\|x\|_1 \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^p |x_j|, \quad \|x\|_2 \stackrel{def}{=} \left(\sum_{j=1}^p x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty \stackrel{def}{=} \max_{j \in \{0, \dots, p\}} \|x_j\|.$$

Propriété : $\|.. \|_1, \|.. \|_2, \|.. \|_\infty$, sont des normes de \mathbb{R}^p .

Démo :

– Pour $\|.. \|_2$: voir plus haut.

– Pour $\|.. \|_1$:

Soit $x \in E, \|x\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j| \geq 0$, et $\sum_{j=1}^p |x_j| = 0 \iff \forall j, x_j = 0 \iff x = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^p |\lambda x_j| = |\lambda| \left(\sum_{j=1}^p |x_j| \right) = |\lambda| \|x\|_1$.

Soient $x, y \in \mathbb{R}^p, \|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^p (|x_j| + |y_j|) = \sum_{j=1}^p |x_j| + \sum_{j=1}^p |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

– Pour $\|\cdot\|_\infty$:

$$\|x\|_\infty = 0 \implies \max_{j \in \{1, \dots, p\}} [|x_j|] = 0. \implies \forall j \ x_j = 0 \iff x = 0.$$

Vérifions l'inégalité triangulaire : $|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| = \|x_j\|_\infty + \|y_j\|_\infty$ donc

$$\max_{j \in \{1, \dots, p\}} [|x_j| + |y_j|] \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Propriété : $\forall x \in \mathbb{R}^p, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$.

Démo : $\forall j \in \{1, \dots, p\}, |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^p x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ donc $\|x\|_\infty = \max_{j \in \{1, \dots, p\}} [|x_j|] \leq \|x\|_2$.

Pour montrer que $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$, il suffit de vérifier que $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$

$$\text{Soit } \left(\sum_{j=1}^p x_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^p x_j\right) \left(\sum_{j=1}^p x_j\right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^p |x_j||x_i|\right) = \sum_{j=1}^p x_j^2 + \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p |x_j||x_i|. \text{ Or, } \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p |x_j||x_i| \geq 0,$$

donc

$$\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2, \text{ enfin } \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j| \leq \sum_{j=1}^p \|x\|_\infty = \|x\|_\infty \sum_{j=1}^p 1 = p\|x\|_\infty$$

Remarque :

Si E est un e.v de dimension finie p , et si (e_1, \dots, e_p) est une base de E , alors $\forall x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$. On peut donc définir des normes N_1, N_2, N_∞ sur E en posant

$$N_\ell \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\|_\ell, \ell \in \{1, 2, \infty\}$$

1.2 Norme produit

Soient $(E_1, N_1), (E_2, N_2)$ deux e.v.n. Soit $E_1 \times E_2 = \{x = (x_1, x_2), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$.

Définition : $N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \max[N_1(x_1), N_2(x_2)]$ est une norme sur E , et est appelée norme produit.

1.3 Distance associée à une norme

Définition : Soit (E, N) un e.v.n. la distance $d(x, y)$ entre $x \in E$ et $y \in E$, associée à N est par définition $d(x, y) = N(x - y)$.

Propriété : La distance précédente est une application $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant :

i/ $\forall (x, y) \in E \times E \ d(x, y) \geq 0$ et $(d(x, y) = 0 \iff x = y)$

ii/ (symétrie) $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$

iii/ (Inégalité triangulaire) $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Démo :

ii/ $d(x, y) = N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1|N(x - y) = N(x - y) = d(y, x)$

iii/ $d(x, z) = N(x - z) = N((x - y) + (y - z)) \leq N(x - y) + N(y - z) = d(x, y) + d(y, z)$

Remarque :

De manière générale, si E est une ensemble, on définit une d distance sur E comme une application vérifiant $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant i/, ii/, iii/.

C'est une notion de distance plus générale de la distance associée à une norme. Si $d(x, y) = N(x - y)$. On peut prendre par exemple pour tout $a \in E, d(x + a, y + a) = N((x + a) - (y + a)) = N(x - y) = d(x, y)$. Cette propriété n'est pas toujours vraie pour une distance "normale".

Soit (E, N) un e.v.n. Soit $a \in E$.

Définition :

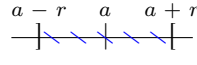
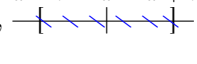
i/ Soit $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est par définition $B(a, r) = \{x \in E, N(x - a) < r\} = \{x \in E, d(x, a) < r\}$

ii/ Soit $r \geq 0$, la boule fermée de centre a et de rayon r est par définition $\bar{B}(a, r) = \{x \in E, N(x - a) \leq r\} = \{x \in E, d(x, a) \leq r\}$

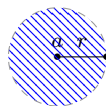
Remarque :

- Soit $r > 0$, alors $a \in B(a, r) \subset \bar{B}(a, r)$
- $\bar{B}(a, 0) = \{a\}$
- Si $r < r'$ $B(a, r) \subset B(a, r')$, $\bar{B}(a, r) \subset \bar{B}(a, r')$

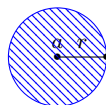
Ex :

- $E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $B(a, r) = \{x \in E, |x - a| < r\} =]a - r, a + r[$, 
 $\bar{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$, 
- $E = \mathbb{C}$, $N(z) = |z|$, pour $z \in \mathbb{C}$. Soient $a, r > 0$.

Alors $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$ c'est le disque ouvert de centre a , et de rayon r :



Alors $\bar{B}(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\}$ c'est le disque fermé de centre a , et de rayon r :

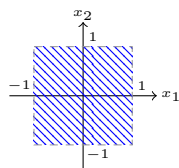


- $E = \mathbb{R}^p$ muni des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, on a vu que $\forall x \in \mathbb{R}^p, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$
Notons $B_\ell(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p, \|x - a\|_\ell \leq r\}$. $\ell \in \{1, 2, \infty\}$
Soit $r > 0$, soit $x \in B_\ell(0, \frac{r}{p})$. Alors $\|x\|_\infty < \frac{r}{p}$, donc $\|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty < p \cdot \frac{r}{p} = r$ or $x \in B_1(0, r)$.
On en déduit que $B_\infty(0, \frac{r}{p}) \subset B_1(0, r)$ De même $B_1(0, r) \subset B_2(0, r) \subset B_\infty(0, r)$.

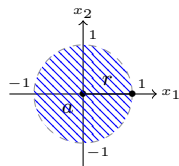
$$\forall x \in E, B_\infty(0, \frac{r}{p}) \subset B_1(0, r) \subset B_2(0, r) \subset B_\infty(0, r).$$

Cas de $p = 2, r = 1$

$$\begin{aligned} \text{Alors } B_\infty(0, 1) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \text{Max}[|x_1|, |x_2|] < 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\} \end{aligned}$$

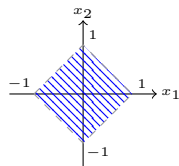


$$\begin{aligned} \text{Alors } B_2(0, 1) &= \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\} \\ &= \{z = x_1 + ix_2, |z| < 1\} \end{aligned}$$



$$\text{Alors } B_\infty(0, 1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|(x_1, x_2)\|_1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| + |x_2| < 1\}$$

Alors $B_1(0, 1) \cap \{(x_1, x_2), x_1 \leq 0, x_2\} = A$.
 $B_1(0, 1)$ s'obtient par symétrie par A, par rapport aux axes.



Définition :

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes ssi $\exists C > 0$, telle que $\forall x \in E$, $N_1(x) \leq CN_2(x)$ et $N_2(x) \leq CN_1(x)$.

Remarque :

On définit aussi " N_1 et N_2 sont équivalentes" par :

$\exists C_1 > 0$, telle que $\forall x \in E$, $N_2(x) \leq C_1 N_1(x)$ et, $\exists C_2 > 0$, telle que $\forall x \in E$, $N_1(x) \leq C_2 N_2(x)$.

Cette définition est équivalente à la précédente.

Déf 1 \implies Déf 2, c'est évident, on prend $C_1 = C_2 = C$. Déf 1 \implies Déf 2, en prenant $C = \max[C_1, C_2]$.

Ex : Sur \mathbb{R}^p $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, sont des normes équivalentes (car $\forall x \in \mathbb{R}^p$, $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$.)

2 Limites et continuité

Définition :

On considère (E, N) un e.v.n. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On dit que u_n converge vers ℓ ssi la suite réelle $(N(u_n - \ell))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Propriété : Supposons que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, $u'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell'$. Alors, $u_n + u'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + \ell'$.

Démo :

$$N((u_n + u'_n) - (\ell + \ell')) = N((u_n - \ell) + (u'_n - \ell')) \leq \underbrace{N(u_n - \ell)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0} + \underbrace{N(u'_n - \ell')}_{{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}}$$

donc $N((u_n + u'_n) - (\ell + \ell')) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. On en déduit que $u_n + u'_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell + \ell'$

Remarque :

Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de (E, N) converge, la limite est unique : Supposons que $u_n \rightarrow \ell$, $u'_n \rightarrow \ell'$. Alors,

$$0 \leq N(\ell - \ell') = N((\ell - u_n) + (\ell' - u'_n)) \leq N(\ell - u_n) + N(\ell' - u'_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\implies 0 \leq N(\ell - \ell') \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n u_i = 0 \text{ d'où } N(\ell - \ell') = 0, \text{ donc } \ell - \ell' = 0.$$

Proposition :

Soient N_1, N_2 deux normes équivalentes sur un e.v E . Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E , soit $\ell \in E$. Alors

$$(N_1(u_n - \ell) \implies 0) \iff (N_2(u_n - \ell) \implies 0). ((i) \iff (ii)).$$

Démo :

Montrons que $i/ \implies ii/$. Comme N_1, N_2 sont équivalents, $\exists C > 0$, tel que $\forall x \in E$, $N_2(x) \leq CN_1(x)$ donc $0 \leq N_2(u_n - \ell) \leq \underbrace{CN_1(u_n - \ell)}_{\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0}$. Donc $N_2(u_n - \ell) \rightarrow 0$. De même $ii/ \implies i/$ en inversant N_1 et N_2 .

Corollaire :

Comme les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes :

Une suite de \mathbb{R}^p converge vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ pour l'une de ces normes ssi elle converge pour une autre.

Remarque :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (E, N) converge vers ℓ , il est équivalent de montrer que la suite $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de \mathbb{R}^p , $u_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{p,n} \end{bmatrix}$ où $((x_{j,n})_{n \in \mathbb{N}})$ est une suite de $\mathbb{R} \forall j \in \{1, \dots, p\}$. Alors

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$ muni de l'une des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty \iff$ Les suites $(x_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$ vers $\ell_j, \forall j \in \{1, \dots, p\}$.

Démo :

Par la remarque précédente, on peut supposer $\ell = 0$. On doit montrer $\|u_n\|_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff$
 $\forall j \in \{1, \dots, p\} (x_{j,n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ vers } 0$ (où $k = 1, 2$ ou ∞). Montrons \implies . Supposons $\|u_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Or,
 $\|u_n\|_\infty = \text{Max}[|x_{1,n}|, |x_{2,n}|, \dots, |x_{p,n}|]$. Alors $|x_{j,n}| \leq \|u_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Donc, $x_{j,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
 $\forall j \in \{1, \dots, p\}$.
Montrons \impliedby , On a : $x_{j,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \forall j \in \{1, \dots, p\}$.
Alors $\|u_n\|_1 = |x_{1,n}| + |x_{2,n}| + \dots + |x_{p,n}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + 0 + \dots + 0 = 0$. Donc $\|u_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

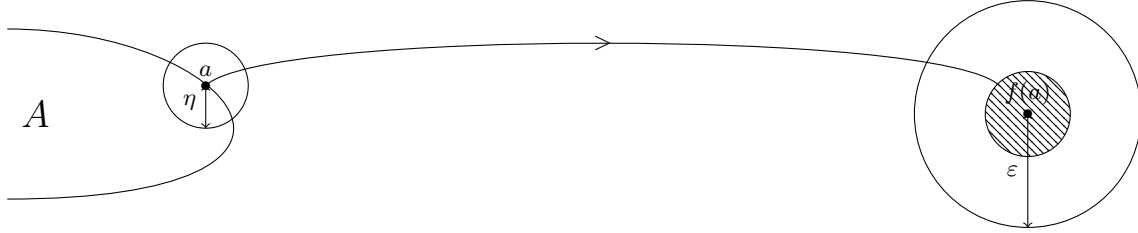
2.1 Applications Continues

Définition :

Soient (E, N) , (E', N') deux e.v.n. Soient $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$, $a \in A$. On dit que f est continue en a ssi $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ et $\forall x \in A$, $\underbrace{N(x - a) < \eta}_{x \in B_E(a, \eta)} \implies \underbrace{N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon}_{f(x) \in B_{E'}(f(a), \varepsilon)}$.

Remarque :

$\implies \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ et $\forall x \in A \cap B_E(a, \eta)$, on a $f(x) \in B_{E'}(f(a), \varepsilon)$



Remarque :

Cela généralise la définition des fonctions continues d'une variable : I intervalle de \mathbb{R} , $a \in I$, f est continue en a : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$ et $\forall x \in I$, $x \in |x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Proposition :

Soit $f : A \longrightarrow E'$ continue en $a \in E$. Alors, pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergeant vers a , la suite $f((x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans E' .

Démo :

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a , $\exists \eta > 0$ tel que $\forall x \in A$, $N(x - a) < \eta \implies N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$.
Soit (x_n) convergeant vers a , $x_n \in A$. Cela signifie que $N(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Il existe donc n_0 , tel que
 $\forall n \geq n_0, N'(f(x_n) - f(a)) < \varepsilon$. On a prouvé que $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$, et $\forall n \geq n_0, N'(f(x_n) - f(a)) < \varepsilon$.
Donc, $N'(f(x_n) - f(a)) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow +\infty$ donc $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ dans E' .

Théorème :

Soient (E, N) , (E', N') deux e.v.n. Soient $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$, $a \in A$.

f est continue en $a \iff$ Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergeant vers a , la suite $f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Démo :

$i/ \longrightarrow ii/$ est la proposition précédente.

On peut montrer $ii/ \longrightarrow i/$ par contraposée. On suppose donc : $\exists \varepsilon_0 > 0$ et $\forall \eta > 0, \exists x \in A$ avec $N(x - a) < \eta$ et $N'(f(x) - f(a)) \geq \varepsilon_0$.

Appliquons cela avec $\eta = \frac{1}{n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$). Il existe donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ vérifiant $N(x_n - a) < \frac{1}{n+1}$ et $N'(f(x_n) - f(a)) \geq \varepsilon_0$.

On a donc $N(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de A convergeant vers a . De plus la suite

$f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut converger vers $f(a)$ (puisque si elle convergeait vers $f(a)$, $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} N'(f(x) - f(a)) \geq \varepsilon_0 > 0$: absurde.) On a montré que $i/$ (faux) $\implies ii/$ (faux)

Application du théorème précédent :

Proposition :

Soient E, E' deux e.v., N, N_1 deux normes équivalentes sur E , et N', N'_1 deux normes équivalentes sur E' .

Soient $A \subset E, a \in A, f : A \longrightarrow E'$. Il y a équivalence entre :

- $i/$ f est continue en a lorsque E est muni de N , et E' est muni de N' .
- $ii/$ f est continue en a lorsque E est muni de N_1 , et E' est muni de N'_1 .

Démo :

Par le théorème précédent, $i/$ équivaut à :

- $i'/$ $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A vérifiant $N(x_n - a) \longrightarrow 0$, on a : $N'(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0$.

De même $ii/$ équivaut à :

- $ii'/$ $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A vérifiant $N_1(x_n - a) \longrightarrow 0$, on a : $N'_1(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0$.

Or, on a vu que si N est équivalente à N_1 : $(N(x_n - a) \longrightarrow 0) \iff (N_1(x_n - a) \longrightarrow 0)$. De même, comme N' est équivalente à N'_1 , $(N'(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0) \iff (N'_1(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0)$. Donc $i'/ \iff ii'/$.

Remarque :

Supposons $E = \mathbb{R}^n, E' = \mathbb{R}^p$. On sait que les normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$, sont équivalentes. Lorsqu'on étudie la continuité de $f : A \longrightarrow E'$. où $A \subset E$, on peut étudier n'importe laquelle de ces normes.

2.2 Sommes de fonctions continues en un point

Notation :

$f : A \longrightarrow E', g : A \longrightarrow E'$, on note $f + g : A \longrightarrow E', x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x), \forall x \in A$.

Proposition :

Si f et g sont continues en $a \in A$ alors $f + g$ et $\lambda f(x)$ sont continues en a .

Démo :

Pour voir que $f + g$ est continue en a , il suffit de montrer que $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergeant vers a , $((f + g)(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(f + g)(a)$. Or comme f est continue en a , $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ et g est continue en a , $g(x_n) \longrightarrow g(a)$. Donc $f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow f(a) + g(a)$.

Proposition :

Soient $(E, N), (E', N'), (E'', N'')$ trois e.v.n. Soient $A \subset E, B \subset E', f : A \longrightarrow E', g : B \longrightarrow E''$.

Supposons $f(A) \subset B$. On peut donc définir $g \circ f : A \longrightarrow E''$. Soit $a \in A$. On pose $b = f(a) (\in f(A) \subset B)$

Supposons f continue en a et g continue en b . Alors $g \circ f$ continue en a .

Démo :

Il suffit de voir que pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A convergeant vers a $((g \circ f)(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(g \circ f)(a)$. Or comme f est continue en a , $x_n \longrightarrow a \iff a, f(x_n) \longrightarrow b$, et comme g est continue en b , $y_n = f(x_n) \longrightarrow b \iff g(y_n) = (g \circ f)(x_n) \longrightarrow g(b) = (g \circ f)(a)$

Proposition :

Soient (E, N) un e.v.n. $A \subset E, a \in E, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On munit \mathbb{R}^p de l'une des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$.

Pour $x \in A$, écrivons $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$ On obtient $f_j : A \longrightarrow \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, p\}$. Il y a équivalence

entre :

- $i/$ f est continue en a .
- $ii/$ $\forall j \in \{1, \dots, p\}, f_j$ est continue en a .

Démo :

- $i/ \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } A \longrightarrow a, \text{ la suite } f((x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } f(a) \text{ dans } \mathbb{R}.$
- $ii/ \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } A \longrightarrow a, \forall j \in \{1, \dots, p\} \text{ la suite } f_j((x_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow f_j(a).$

Or on a vu que
$$\begin{bmatrix} f_1(x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_n) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{bmatrix} \iff \forall j \in \{1, \dots, p\} f_j((x_n))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_j(a).$$

Définition :

On dit que $f : A \longrightarrow E'$ est continue sur $A \iff \forall a, \in A$ f est continue en a .

Théorème :

Soient $(E, N), (E', N')$ deux e.v.n. Soient $u : E \longrightarrow E'$ linéaire. Il y a équivalence entre :

- $i/$ u est continue sur E
- $ii/$ u est continue sur 0
- $iii/ \exists C > 0, \forall x \in E, N'(u(x)) \leq CN(u(x)).$

Démo :

$i/ \implies ii/$: évident. $0 \in E$

$ii/ \implies iii/$: Si u est continue en $0, \forall \varepsilon > 0$ et $\exists \eta > 0$ et $\forall x \in E, N(x - 0) < \eta \implies N'(u(x) - u(0)) < \varepsilon$

Comme u est linéaire, $u(0) = 0$ donc $N(x) < \eta \implies N'(u(x)) < \varepsilon$ Appliquons cela avec $\varepsilon = 1$.

$\exists \eta_0 > 0$ tel que $N(x) < \eta_0 \implies N'(u(x)) < 1$. Soit $y \in E, y \neq 0$. Posons $x = \frac{y}{N(y)} \cdot \frac{\eta_0}{2}$. Alors $N(x) = \frac{\eta_0}{2}$

$< \eta_0$ donc soit $N'(\frac{\eta_0}{2N(y)}u(y)) < 1$ puisque u est linéaire. Donc, $\forall y \in E \setminus \{0\} \frac{N'(u(y))}{2N(y)/\eta_0} < 1$ d'où

$N'(u(y)) < CN(y)$ avec $C = \frac{2}{\eta_0}$ Donc $iii/$ est vraie.

$iii/ \implies i/$: Soit $a \in E$. On veut montrer que u est continue en a . $\exists C > 0$ et $\forall y \in E, N'(y) < CN(y)$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, posons $\eta = \varepsilon/C$, supposons $N(x - a) < \eta$. Alors,

$N'(u(x) - u(a)) = N'(u(x - a)) \leq CN(x - a) < C\eta = \varepsilon$. Donc u est continue en a .

Proposition :

Munissons \mathbb{R}^p de l'une des normes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$. Soient (E, N) un e.v.n et $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$, une application linéaire. Alors u est continue.

Démo :

Notons (e_1, \dots, e_p) la base canonique de \mathbb{R}^p , si $x \in \mathbb{R}^p, \sum_{j=1}^p x_j e_j$. Alors $u(x) = \sum_{j=1}^p x_j u(e_j)$ car u est linéaire.

Alors $N(u(x)) = N(\sum_{j=1}^p x_j u(e_j)) \leq \sum_{j=1}^p N(x_j u(e_j)) = \sum_{j=1}^p |x_j| N(u(e_j))$. Posons $M = \text{Max}[N'(u(e_j))]$. Donc

$N(u(x)) \leq M \sum_{j=1}^p |x_j| = M \|x\|_1$. D'après $iii/$ de la propriété précédente, cela implique que u est continue.

2.3 Exemples de fonctions continues

Ex 1 :

L'application $E \times E \longrightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$ est continue.

Ex 2 :

L'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$ est continue.

Ex 3 :

L'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (z, \omega) \mapsto z \cdot \omega$ est continue.

Ex 4 :

Soient (E, N) un e.v.n, $A \subset E, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^*$. Soit $a \in E$, supposons f continue en a . Alors, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est continue en a .

Ex 5 :

Soit $E = M_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p . Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in M_p(\mathbb{R})$, posons

$N(A) = p \max_{1 \leq i, j \leq p} |a_{ij}|$. N est une norme et on pose N' une norme sur E , telle que $\forall A, B \in M_p(\mathbb{R})$
 $N'((A, B)) = \max[N(A), N(B)]$. Soit $\Phi : E \times E \longrightarrow E$. $(A, B) \longrightarrow AB$.