A propos des suites de fonctions - TD 2

Exercice 1 On considère les fonctions h_n, $n \geq 1$, définies sur $\mathbb{R}$ par $h_n(x) = \frac{x}{n^2+x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.
2. La suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et x dans $\mathbb{R}$ on pose : $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right)$.

1. Montrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.
2. La convergence de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?
3. La convergence de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}^*}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 3 On considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \frac{1}{1+n^2x^2}$.

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ converge simplement vers une fonction f que l'on déterminera.
2. La suite de fonctions $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?

Exercice 4 Pour n dans $\mathbb{N}$ on considère les fonctions f_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2} \ .$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers une fonction f que l'on déterminera.
2. (a) Etudier les variations sur $\mathbb{R}$ des fonctions f_n pour $n \geq 1$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $\mathbb{R}$?
   (c) Soit a un nombre réel strictement positif. La convergence de la suite $(f_n)_{\in\mathbb{N}}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}\backslash]-a, a[$?

Exercice 4 Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on considère les fonctions h_n définies sur $\mathbb{R}^+$ par $h_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^{-n}$.

1. Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}^+$ de la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

2. En utilisant Taylor-Lagrange montrer que pour tout t dans $\mathbb{R}^+$ on a l'encadrement

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$$

3. En déduire que la suite de fonctions $(h_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur tout intervalle $[0,a]$ avec $a>0$.

Exercice 5 On considère pour n dans $\mathbb{N}$ les fonctions φ_n définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\varphi_n(x) = \frac{x}{(1+nx)^2}$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers une fonction que l'on déterminera.

2. La convergence de la suite $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?

3. (a) Etudier la convergence simple sur $\mathbb{R}_+$ de la suite des dérivées $(\varphi_n')_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) A-t-on sur $\mathbb{R}_+$ l'égalité $\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n' = \left(\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n\right)'$?

   (c) La convergence de la suite $(\varphi_n')_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle uniforme sur $\mathbb{R}_+$?