ESPACES EUCLIDIENS

Feuille 2

Exercice 2.1. Donnez une équation des hyperplans suivants :

(1) $W = \mathrm{Vect}\big((3,5)\big) \subset \mathbb{R}^2$;

(2) $W = \mathrm{Vect}\big((1,i,1),(1+2i,3,0)\big) \subset \mathbb{C}^3$.

Exercice 2.2. Soit S le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $w = (1,1,1,1)$, $x = (1,3,0,4)$, $y = (-2,4,-5,7)$ et $z = (-4,0,-6,2)$. Trouvez une base de S° dans $(\mathbb{R}^4)^*$. Donnez un système d'équations linéaires homogène (avec un nombre minimal d'équations) dont S est l'espace des solutions. Répétez l'exercice avec T au lieu de S, où T est le sous-espace de $\mathbb{R}^4$ engendré par w et x.

Exercice 2.3. Considérons des applications K-linéaires $U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{g} W$. Montrer que

$$(g \circ f)^* = f^* \circ g^* : W^* \to U^* .$$

Montrer par ailleurs que $(\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$, et que si f est un isomorphisme, alors f^* est aussi un isomorphisme et $(f^*)^{-1} = (f^{-1})^*$.

Exercice 2.4. Vérifiez les propriétés énoncées dans le cours au point 1.41.

Exercice 2.5. Soient $a < b$ des nombres réels, et soit $\mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des polynômes nul ou de degré inférieur ou égal à 2. Montrez qu'il existe des nombres $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que

$$\int_a^b P(t)dt = \alpha P(a) + \beta P(\frac{a+b}{2}) + \gamma P(b)$$

pour tout $P \in \mathcal{P}_2^{\mathbb{R}}$. Donnez une formule pour α, β et γ.

Exercice 2.6. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. On suppose que E est de dimension finie. Montrer que $u \in \mathcal{L}(E,F) - \{0\}$ est de rang r si, et seulement si, il existe des formes linéaires $\varphi_1, \cdots, \varphi_r$ linéairement indépendantes dans E^* et des vecteurs $y_1, \cdots, y_r$ linéairement indépendants dans F tels que

$$u(x) = \sum_{i=1}^r \varphi_i(x) y_i \quad \text{pour tout } x \in E.$$

Montrer que dans ce cas, on a

$$\mathrm{Ker}\, u = \bigcap_{i=1}^r \mathrm{Ker}\, \varphi_i$$

Trouvez une telle décomposition dans l'exemple de l'application

$$u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2 - x_3, 3x_1 + 4x_2 - x_3) .$$