AFE

Chapitre 1 : Suites de Fonctions

25 janvier 2018

1 Introduction

On considère le problème suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y^{'}(x) = y(x) \quad \text{avec } y(0) = 1 \tag{1}$$

Méthode de Euler : C'est une méthode générale pour construire une solution approchée de (1).
On suppose que (1) admet une solution f.
On cherche à approcher $f(x)$ par la méthode d'Euler.
Cette méthode est basée sur l'approximation affine.
Pour $x \in \mathbb{R}$, pour h petit :

$$f(x+h) \approx f(x) + h^{'} f(x)$$

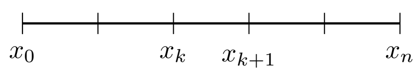
$o(h) = hg(h)$ avec $g(h) \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 0$ Donc ici l'approximation (1_h) s'écrit, en utilisant (1).

$$f(x+h) \approx f(x) + hf(x)$$

$$f(x+h) \approx (1+h)f(x) \tag{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}, x > 0$, on subdivise $[0, x]$ en n sous-intervalles ($n \geq 1$).
$0 \leq k \leq n-1$, $I_k = [x_k, x_{k+1}]$

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = x$$



on a : $k = \frac{x}{n}$, $x_k = kh$ et $x_{k+1} = x_k + h$
Pour n grand (donc h petit) n appliquant (2) en x_k on a $f(x_{k+1}) \approx (1+h)f(x_k)$
$\implies f(x_n) \approx (1+h)^n f(x_0)$
$\implies f(x_n) \approx (1 + \frac{x}{n})^n f(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$
On note $f_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$
Il est naturel d'étudier la suite de fonction $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et d'étudier $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$. En fait g est la fonction exponentielle.

Remarque : Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$ $f_n(x) = e^{n \ln(1 + \frac{x}{n})}$

Avec les équivalence : $\ln(1 + \frac{x}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{n}$
$\implies n \ln(1 + \frac{x}{n}) \underset{n \to +\infty}{\sim} x \implies \lim\limits_{n \to +\infty} n \ln(1 + \frac{x}{n}) = x$
Comme $x \in \mathbb{R} \to e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = e^x$

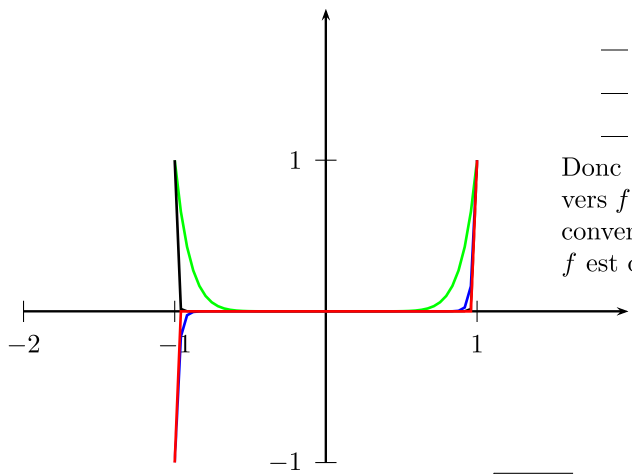
Avec un DL : $\ln(1 + \frac{x}{n}) = \underbrace{\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{= \frac{1}{n} g\left(\frac{1}{n}\right)}$

2 Différentes notions de convergence

Définition : On considère une suite de fonctions $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ où toutes les fonctions sont définies sur un intervalle D de $\mathbb{R}$ et à valeurs numérique.
$n \in D,\ f_n(x) : D \to \mathbb{R}$

(i) On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D si pour tout $n \in D$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
(ii) On appelle alors la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction définie sur D par $\forall x \in D : f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$
.

Exemple 1 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}, f_n(x) = x^n$

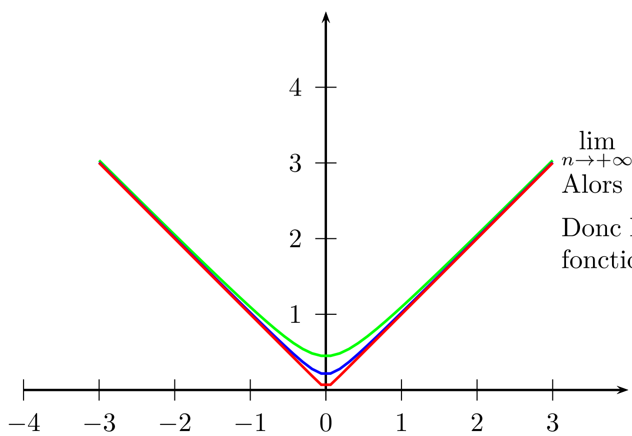


— si $x \in\ ]-1, 1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
— si $x = 1$ $f_n(x) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.
— si $x \in\ ]-\infty, -1]\cup]1, +\infty[$ la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Donc la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $]-1, 1]$ vers f et c'est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
f est définie par :

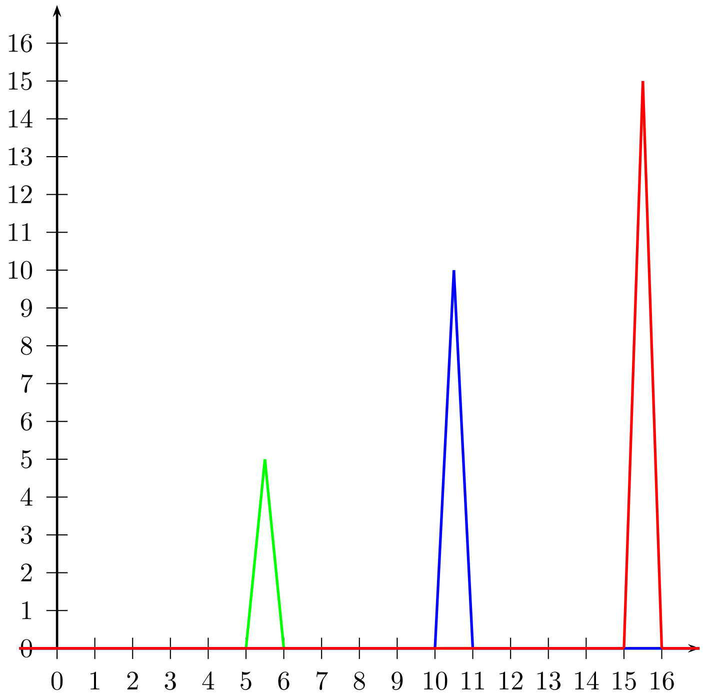
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in\ ]-1, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exemple 2 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$



$\lim\limits_{n\to+\infty} x^2 + \frac{1}{n} = x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$.
Alors pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) =\mid x \mid$.
Donc la suite de fonction $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par : $g(x) =\mid x \mid, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, (h_n) la suite de fonction définie par :



$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, n] \cup [n+1, +\infty[\\ 2n(x-n) & \text{si } x \in [n, n+\frac{1}{2}] \\ n - 2n\big(x - n - \frac{1}{2}\big) & \text{si } x \in [n+\frac{1}{2}, n+1] \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n > x$, on a $h_n(x) = 0$.
Alors $\lim_{n \to +\infty} h_n(x) = 0$.
Donc la suite de fonction $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle,c'est-à-dire vers h avec $h(x) = 0$,$\forall x \in \mathbb{R}$.

Question naturelle : Si les fonctions f ont une propriété commune, pour $n \in \mathbb{N}$,(continuité, dérivabilité,intégrabilité) est ce que la fonction limite à les même propriété ?

— Dans l'exemple 1 ; $f_n \in \mathcal{C}^0\big(]-1,1[\big)$ f n'est pas continue sur $]-1,1]$.
— Dans l'exemple 2 ; $g_n \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R}\big), \forall n \in \mathbb{N}$ et g n'est pas dérivable en 0.

Définition : Soit f une fonction majorée sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$,à valeurs réelles. On appelle borne supérieur de f sur A, et on note $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ ou $\sup\limits_{A} f$ la borne supérieur de l'ensemble $\{f(x), x \in A\}$.
Remarque : Si f est borné sur A, alors $\mid f \mid$ est majoré sur A et admet donc une borne supérieur sur $A(\sup \mid f(x) \mid)$.

Proposition :

1. Si f est continue sur $[a,b] \implies \exists c \in [a,b], \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$.
2. Si f est croissante sur $[a,b]$ alors $\sup f(x) = f(b)$.
3. Si f est croissante et majorée sur $[a,b[$ alors $\sup f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.
4. Si f est décroissante sur $[a,b]$ alors $\sup f(x) = f(a)$.
5. Si f est décroissante et majorée sur $]a,b]$ alors $\sup f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Définition : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction f si :

1. pour n assez grand, $f_n - f$ est borné sur D.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup \mid f_n(x) - f(x) \mid = 0$.

Exemple 1 : A-t-on $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $]-1,1[$ vers f ?

Soit $x \in]-1,1[$, $\mid f_n(x) - f(x) \mid = \mid x^n - 0 \mid = \mid x \mid^n$
De plus, $\sup \mid f_n(x) - f(x) \mid = \sup\limits_{x\in]-1,1[} \mid x \mid^n = \lim\limits_{x\to 1^-} \mid x \mid^n = 1$
$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in]-1,1[} \mid f_n(x) - f(x) \mid = \lim\limits_{n\to+\infty} (1) = 1 \neq 0.$
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1[$ vers f.

Remarque : On a $]-1,1[\subset]-1,1]$.
$\Longrightarrow \sup\limits_{]-1,1[} \mid f_n - f \mid \leq \sup\limits_{]-1,1]} \mid f_n - f \mid$
$\Longrightarrow \sup\limits_{]-1,1]} \mid f_n - f \mid \geq 1.$
Donc $\sup\limits_{]-1,1]} \mid f_n - f \mid$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty \Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $]-1,1]$ vers f.
Si f_n est continue sur D et f n'est pas continue sur D alors f_n ne converge pas uniformément sur D vers f.
Par contre si l'on considère $a \in]0,1[$ et si l'on regarde la convergence uniforme sur $[-a,a]$.
$\sup\limits_{x\in[-a,a]} \mid f_n(x) - f(x) \mid = \sup \mid x \mid^n = \mid a \mid^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \ \big(\text{ car } a \in]0,1[\big).$
Donc f_n converge uniformément sur $[-a,a]$ vers $f, \forall a \in]0,1[$.

Exemple 2 :

$x \in \mathbb{R} \sup \mid g_n(x) - g(x) \mid = \sup \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \mid x \mid \right|.$
On a $\left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}} + x^2} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}.$
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, \mid g_n(x) - g(x) \mid \leq \sqrt{\frac{1}{n}}\ , \forall n \in \mathbb{N}^*.$

— $\mid g_n(x) - g(x) \mid \leq 1$, est borné.
— $\sup \mid g_n(x) - g(x) \mid \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$

Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g.

Exemple 3 :

$\sup \mid h_n(x) - h(x) \mid = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \mid h_n(x) \mid = n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$
Donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers h.
Soit $a \in \mathbb{R}, \sup \mid h_n(x) - h(x) \mid = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
Donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-\infty, a]$ vers h.

Proposition :

1. Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers f, il faut que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f.
   On retient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers $f \Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f.
   La réciproque est fausse.

   Preuve : Soit $x_0 \in D$
   $\mid f_n(x_0) - f(x_0) \mid \leq \sup\limits_{x\in D} \mid f_n(x) - f(x) \mid \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$
   $\Longrightarrow f_n(x_0) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(x_0)$ en tant que point de $x_0 \in D$.
   $\Longrightarrow (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f.

2. Si $\widetilde{D} \subset D$ et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\widetilde{D}$ vers f.

Preuve :
$0 \leq \sup_{x \in \widetilde{D}} \mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \sup_{x \in D} \mid f_n(x) - f(x) \mid \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$
$\Longrightarrow \sup_{x \in \widetilde{D}} \mid f_n(x) - f(x) \mid \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$

Comparaison entre convergence simple et convergence uniforme :

— La convergence simple sur D de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f signifie que :
$\forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x}$ tel que $\forall n \geq N_{\epsilon,x}, \mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \epsilon.$

— La convergence uniforme sur D de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f signifie que :
$\forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon,x}$ tel que $\forall n \geq N_{\epsilon,x} \forall x \in D, \mid f_n(x) - f(x) \mid \leq \epsilon.$