

AFE

Chapitre 1 : Suites de Fonctions

1^{er} février 2018

1 Introduction

On considère le problème suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y'(x) = y(x) \quad \text{avec } y(0) = 1 \quad (1)$$

Méthode de Euler : C'est une méthode générale pour construire une solution approchée de (1).

On suppose que (1) admet une solution f .

On cherche à approcher $f(x)$ par la méthode d'Euler.

Cette méthode est basée sur l'approximation affine.

Pour $x \in \mathbb{R}$, pour h petit :

$$f(x+h) \approx f(x) + h'f(x)$$

$o(h) = hg(h)$ avec $g(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ Donc ici l'approximation (1_h) s'écrit, en utilisant (1).

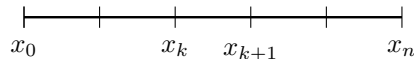
$$f(x+h) \approx f(x) + hf(x)$$

$$f(x+h) \approx (1+h)f(x) \quad (2)$$

Soit $x \in \mathbb{R}, x > 0$, on subdivise $[0, x]$ en n sous-intervalles ($n \geq 1$).

$0 \leq k \leq n-1, I_k = [x_k, x_{k+1}]$

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \dots \leq x_n = x$$



on a : $k = \frac{x}{n}$, $x_k = kh$ et $x_{k+1} = x_k + h$

Pour n grand (donc h petit) n appliquant (2) en x_k on a $f(x_{k+1}) \approx (1+h)f(x_k)$

$$\implies f(x_n) \approx (1+h)^n f(x_0)$$

$$\implies f(x_n) \approx (1+\frac{x}{n})^n f(x_0), n \in \mathbb{N}$$

On note $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$

Il est naturel d'étudier la suite de fonction $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et d'étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$. En fait g est la fonction exponentielle.

Remarque : Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+ f_n(x) = e^{n \ln(1+\frac{x}{n})}$

Avec les équivalence : $\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{x}{n}$

$$\implies n \ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} x \implies \lim_{n \rightarrow +\infty} n \ln(1+\frac{x}{n}) = x$$

Comme $x \in \mathbb{R} \rightarrow e^x$ est continue sur \mathbb{R} , alors on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = e^x$

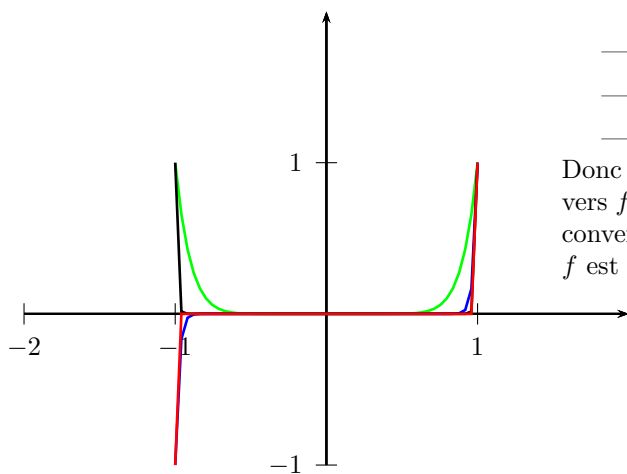
$$\text{Avec un DL : } \ln(1+\frac{x}{n}) = \underbrace{\frac{x}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}g\left(\frac{1}{n}\right)}$$

2 Différentes notions de convergence

Définition : On considère une suite de fonctions $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ où toutes les fonctions sont définies sur un intervalle D de \mathbb{R} et à valeurs numérique.
 $n \in D, f_n(x) : D \rightarrow \mathbb{R}$

- (i) On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur D si pour tout $x \in D$ la suite numérique $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge.
(ii) On appelle alors la limite simple de la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la fonction définie sur D par $\forall x \in D : f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

Exemple 1 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}, f_n(x) = x^n$



— si $x \in]-1, 1[$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$.

— si $x = 1$ $f_n(x) = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$.

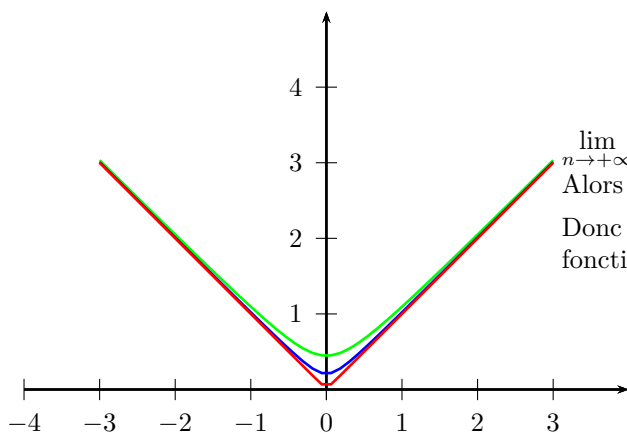
— si $x \in]-\infty, -1] \cup]1, +\infty[$ la suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Donc la suite de fonction $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $] - 1, 1[$ vers f et c'est le plus grand sous-ensemble de \mathbb{R} sur lequel $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement.

f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1, 1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exemple 2 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$

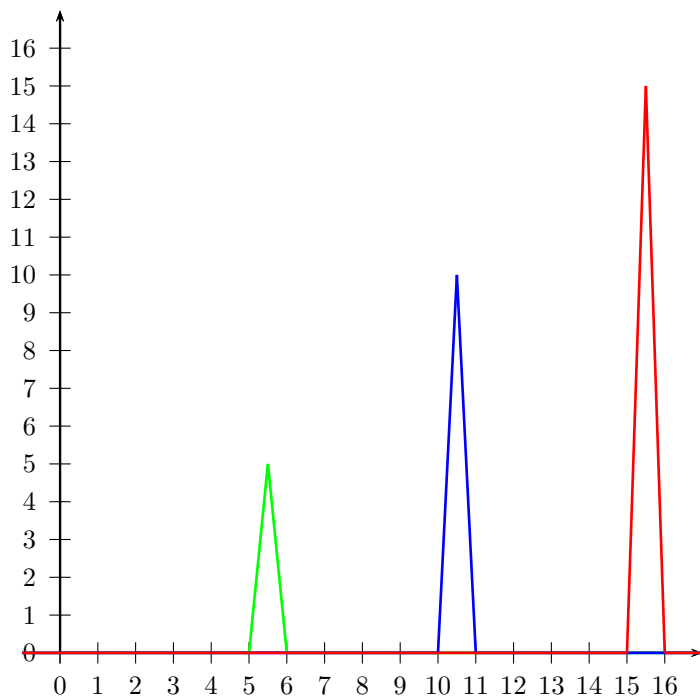


$\lim_{n \rightarrow +\infty} x^2 + \frac{1}{n} = x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur \mathbb{R}^+ .

Alors pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $\lim_{n \rightarrow +\infty} g_n(x) = |x|$.

Donc la suite de fonction $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction g définie par : $g(x) = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, (h_n) la suite de fonction définie par :



$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-\infty, n] \cup [n+1, +\infty[\\ 2n(x-n) & \text{si } x \in [n, n+\frac{1}{2}] \\ n-2n(x-n-\frac{1}{2}) & \text{si } x \in [n+\frac{1}{2}, n+1] \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n > x$, on a $h_n(x) = 0$.

Alors $\lim h_n(x) = 0$.

Donc la suite de fonction $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur \mathbb{R} vers la fonction nulle, c'est-à-dire vers h avec $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Question naturelle : Si les fonctions f ont une propriété commune, pour $n \in \mathbb{N}$, (continuité, dérivabilité, intégrabilité) est ce que la fonction limite à les même propriété ?

- Dans l'exemple 1 ; $f_n \in \mathcal{C}^0(]-1, 1[)$ f n'est pas continue sur $]-1, 1[$.
- Dans l'exemple 2 ; $g_n \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$, $\forall n \in \mathbb{N}$ et g n'est pas dérivable en 0.

Définition : Soit f une fonction majorée sur une partie non vide A de \mathbb{R} , à valeurs réelles. On appelle borne supérieure de f sur A , et on note $\sup_{x \in A} f(x)$ ou $\sup_A f$ la borne supérieure de l'ensemble $\{f(x), x \in A\}$.

Remarque : Si f est borné sur A , alors $|f|$ est majoré sur A et admet donc une borne supérieure sur A ($\sup |f(x)|$).

Proposition :

1. Si f est continue sur $[a, b] \implies \exists c \in [a, b], \sup_{x \in [a, b]} f(x) = f(c)$.
2. Si f est croissante sur $[a, b]$ alors $\sup f(x) = f(b)$.
3. Si f est croissante et majorée sur $[a, b[$ alors $\sup f(x) = \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$.
4. Si f est décroissante sur $[a, b]$ alors $\sup f(x) = f(a)$.
5. Si f est décroissante et majorée sur $]a, b]$ alors $\sup f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Définition : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction f si :

1. pour n assez grand, $f_n - f$ est borné sur D .
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Exemple 1 : A-t-on $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur $] - 1, 1[$ vers f ?

Soit $x \in] - 1, 1[$, $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x|^n$
 De plus, $\sup_{x \in] - 1, 1[} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in] - 1, 1[} |x|^n = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x|^n = 1$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in] - 1, 1[} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} (1) = 1 \neq 0.$$

Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $] - 1, 1[$ vers f .

Remarque : On a $] - 1, 1[\subset] - 1, 1]$.

$$\Rightarrow \sup_{x \in] - 1, 1[} |f_n - f| \leq \sup_{x \in] - 1, 1]} |f_n - f|$$

$$\Rightarrow \sup_{x \in] - 1, 1]} |f_n - f| \geq 1.$$

Donc $\sup_{x \in] - 1, 1]} |f_n - f|$ ne tend pas vers 0 quand $n \rightarrow +\infty \Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $] - 1, 1]$ vers f .

Si f_n est continue sur D et f n'est pas continue sur D alors f_n ne converge pas uniformément sur D vers f .

Par contre si l'on considère $a \in]0, 1[$ et si l'on regarde la convergence uniforme sur $[-a, a]$.

$$\sup_{x \in [-a, a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x \in [-a, a]} |x|^n = |a|^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \quad (\text{car } a \in]0, 1[).$$

Donc f_n converge uniformément sur $[-a, a]$ vers $f, \forall a \in]0, 1[$.

Exemple 2 :

$$x \in \mathbb{R} \sup |g_n(x) - g(x)| = \sup \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| \right|.$$

$$\text{On a } \left| \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2} \right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + \sqrt{x^2}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}.$$

$$\text{On a donc } \forall x \in \mathbb{R}, |g_n(x) - g(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

— $|g_n(x) - g(x)| \leq 1$, est borné.

$$\text{— } \sup |g_n(x) - g(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $(g_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction g .

Exemple 3 :

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x) - h(x)| = \sup_{x \in \mathbb{R}} |h_n(x)| = n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty.$$

Donc $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur \mathbb{R} vers h .

$$\text{Soit } a \in \mathbb{R}, \sup |h_n(x) - h(x)| = 0 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $(h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $] - \infty, a]$ vers h .

Proposition :

1. Pour que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers f , il faut que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f .

On retient $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers $f \Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f .

La réciproque est fausse.

Preuve : Soit $x_0 \in D$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\Rightarrow f_n(x_0) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x_0) \text{ en tant que point de } x_0 \in D.$$

$$\Rightarrow (f_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge simplement sur } D \text{ vers } f.$$

2. Si $\tilde{D} \subset D$ et si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers f , alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur \tilde{D} vers f .

Preuve :

$$0 \leq \sup_{x \in \tilde{D}} |f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\implies \sup_{x \in \tilde{D}} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Comparaison entre convergence simple et convergence uniforme :

- La convergence simple sur D de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f signifie que :
 $\forall x \in D, \forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon, x}$ tel que $\forall n \geq N_{\epsilon, x}, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.
- La convergence uniforme sur D de $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vers f signifie que :
 $\forall \epsilon > 0, \exists N_{\epsilon, x}$ tel que $\forall n \geq N_{\epsilon, x} \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon$.

Théorème de Weierstrass(continuité) :

Soit $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ une suite de fonctions continues sur I de \mathbb{R} , si la suite (f_n) est converge uniformément sur I vers f alors f est continue sur I .

Preuve :

Hypothèse

- $\forall n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue sur I c'est-a-dire $\forall x_0 \in I$.

La fonction f_n est continue en x_0 signifie :

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } \forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \eta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon.$$

- $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur I vers f cela signifie que $\forall \epsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$:
 $\sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$.

Ce qu'on cherche a montrer :

f est continue sur I , c'est-a-dire continue en tout points x_0 de I c'est-a-dire

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } : \forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \epsilon. \quad (3)$$

Soit $x_0 \in I$; soit $\epsilon > 0 \in \mathbb{R}$.

On veut montrer (3).

Pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0).$$

$$\implies |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$$

$$\text{Or } |f(x) - f_n(x)| \leq \sup |f_n(x) - f(x)| \text{ et } |f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup |f_n(x) - f(x)|.$$

$$\text{Donc } |f(x) - f(x_0)| \leq 2 \sup |f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \quad (4)$$

$$\forall \epsilon_1 > 0, \exists \eta > 0 \text{ tel que } : |x - x_0| < \eta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon_1. \quad (5)$$

$$\forall \epsilon_2 > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* > 0 \text{ tel que } : \forall n \geq N : \sup_{x \in I} |f_n(x) - f(x)| < \epsilon_2. \quad (6)$$

Si on choisit $\epsilon_1 = \frac{\epsilon}{2}$ et on prend $n = N$ dans (5) : $\exists \eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

Si on choisit $\epsilon_2 = \frac{\epsilon}{4}$ et on prend $n = N$ dans (6) : $\sup |f_N(x) - f(x)| < \frac{\epsilon}{4}$

On prend $n = N$ dans (4) : $2 \sup |f_N(x) - f(x)| < 2 \frac{\epsilon}{4}$ et $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \frac{\epsilon}{2}$.

$$\text{Donc } \forall x \in I \text{ avec } |x - x_0| < \eta \text{ alors } |f(x) - f(x_0)| < 2 \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Remarque :

1. Remplaçons l'hypothèse " (f_n) converge uniformément sur I vers f " par " (f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I ".
Par exemple : si $I =]0, +\infty[$.
Il suffit de montrer que f_n est continue sur I et f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[, \forall a > 0$.
 $\implies f$ est continue sur $[a, +\infty[, \forall a > 0 \implies f$ est continue sur I par continuité.
2. L'hypothèse de la convergence uniforme de (f_n) est essentielle comme le montre l'exemple 1, c'est-à-dire que si on ne l'a pas, alors il existe $(f_n), f_n$ continue sur I , pour tout n et f n'est pas continue sur I .
3. La fonction limite f peut être continue sans qu'il y ait convergence uniforme de (f_n) vers f (comme dans l'exemple 3). C'est-à-dire que la réciproque du théorème n'est pas vrai.
4. Contraposée du théorème :
Si f n'est pas continue sur I alors (au moins) une des deux hypothèses est fausse.
Soit $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que f_n n'est pas continue sur I ou (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f .
En particulier : Si f_n est continue sur $I, \forall n \in \mathbb{N}$, si (f_n) convergent simplement sur I vers f et si f n'est pas continue sur I alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f .

Exemple : $t_n(x) = \frac{1}{1+nx}, n \in \mathbb{N}, x \in I = [0, 1]$

$x = 0 \quad t_n(0) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1.$
 $x \neq 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n(x) = 0. \implies (t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers t définie par :

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0, 1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

t n'est pas continue sur $[0, 1]$ (car elle n'est pas continue en $x = 0$) et t_n est continue sur $[0, 1], \forall n \in \mathbb{N}$.
Alors d'après la remarque 3 $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers t .

En revanche on aura (t_n) converge uniformément vers t sur $[a, 1], \forall a > 0$.
 $|t_n(x) - t(x)| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na} \implies \sup_{x \in [a, 1]} |t_n(x) - t(x)| < \frac{1}{1+na} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$