Licence Math 2ème année

Épreuve du Mars 2017

(Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les téléphones portables doivent être éteints)

Exercice 1 (Questions de cours)

1. Soient (E, N) et (E', N') deux espaces vectoriels normés, A un sous ensemble de E, a un point de A et $f : A \to E'$ une application continue en a. Montrer que pour toute suite $(a_n)_n$ de A convergeant vers a, la suite $(f(a_n))_n$ converge vers $f(a)$.
2. Soit (E, N) un espace vectoriel normé et A un sous-ensemble compact de E. Montrer que si B est un fermé, $B \subset A$, alors B est compact.

Exercice 2

On munit $\mathbb{R}^2$ de l'une quelconque des normes équivalentes $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1 \text{ et } x \neq 0\}$.
   (a) Dessiner A.
   (b) L'ensemble A est-il ouvert ? Est-il fermé ? Justifier.
   (c) Déterminer l'adhérence de A.
   (d) L'ensemble A est-il compact ?
   (e) L'ensemble A est-il connexe par arcs ?
2. (a) On note pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, U_n la boule ouverte de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ de rayon 2^{-n}. Est-ce que $U = \bigcup_{n=1}^{+\infty} U_n$ est ouvert ? Justifier.
   (b) On note pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, F_n la boule fermée de centre $(\frac{1}{n}, 0)$ de rayon $\frac{1}{2n}$. Est-ce que $F = \bigcup_{n=1}^{+\infty} F_n$ est fermé ? Justifier.

Exercice 3

Soient U l'ouvert de $\mathbb{R}^2$ donné par $U = \mathbb{R}^2 - \{(0, y); y \in \mathbb{R}\}$ et f la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = x\text{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right), \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0, y) = 0.$$

1. Montrer que f est continue sur U.
2. Est-ce que f est continue sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

3. On définit pour (x, y) dans $V = U - \{(x,0); x \in \mathbb{R}\}$, $g(x,y) = \dfrac{x}{y}\text{Arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Soit $A = V \cup \{(0,0)\}$. Peut-on trouver $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que la fonction h définie sur A par $h(x,y) = g(x,y)$ si $(x,y) \in V$, $h(0,0) = \lambda$ soit continue en $(0,0)$? Justifier.

Exercice 4

Soient a, b, c trois points sur $\mathbb{R}^p$ et N une norme sur $\mathbb{R}^p$. On considère l'application suivante $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$, définie par

$$f(x) = N(x-a) + N(x-b) + N(x-c).$$

1. Soit B la boule fermée de centre a de rayon $f(a)$. Montrer que f admet un minimum en un point x_0 de B.
2. Montrer que pour tout x dans le complémentaire de B, on a $f(x) \geq f(a)$.
3. En déduire que f admet un minimum sur $\mathbb{R}^p$ en x_0.