	Support	nature discret ou conti	loi	fonction de répartition •	Espérance	Variance
Bernoulli	$\{0,1\}$	discrète*	$P(X=0) = 1-p$ $P(X=1) = p$ •	$x<0, F(x)=0$ $x \in [0,1), F(x) = 1-p$ $x \geq 1 \quad F(x) = 1$	p	$p(1-p)$
Binomiale	$[\![0,n]\!]$	discrète	$\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ •	$1-(1-p)^k$ loi géométrique	np	$np(1-p)$
Poisson	$\mathbb{N}$	discrète	$\forall k \in \mathbb{N}$, $P(X=k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ •		λ	λ
expo	$\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$	continue	$\forall x \in \mathbb{R}_+$ $\lambda e^{-\lambda x}$ •	$\int_0^x \lambda e^{-\lambda y} dy$ $= \left[-e^{-\lambda y}\right]_0^x = -e^{-\lambda x}+1$	$E(f(X)) = \int_0^{+\infty} f(y) \lambda e^{-\lambda y} dy$ $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ $E(f(X)) = \int_0^1 f(y)\, dy \times 1$ **	$Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$
uniforme sur $[0,1]$	$[0,1]$	continue	1 pour $x \in [0,1]$ •	si $x<0$ $F(x)=0$ si $x \geq 1$ $F(x)=1$ si $x \in [0,1]$ $F(x) = \int_0^x 1\, dy = x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{12}$
uni sur $[a,b]$	$[a,b]$	continue	$\frac{1}{b-a}$ pour $x \in [a,b]$ •	pareil avec $0 \Rightarrow a$ et $1 \Rightarrow b$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$ *
Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$	$\mathbb{R}$	continue	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ •	$P(\mathcal{N}(0,1) \geq 4,1)$ $1 - Erf(4,1)$	0	1
(Gaussienne $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$			$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$ •		m	σ^2

• valeur de probabilité

• densité

• $F(x) = P(X \leq x)$

* discret : ensemble fini ou infini mais dénombrable.

Scanned by CamScanner

Bernoulli p

$E(X) = p$.

$Var(X) = p(1-p)$

$f : p \to p - p^2$

$f' : p \to 1 - 2p$

* $\int_0^1 x \, dx$

$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$.

* $X = a + (b-a)U$ avec U uniforme $[0,1]$

$Var(X) = Var(a + (b-a)U)$

$= Var((b-a)U)$

$= (b-a)^2/12$.

Scanned by CamScanner

PROBA

Feuille 1 : Rappel

Exercice 1 (Suite)

Exponentielle :

- La médiane de X est le nombre m tel que $F(m) = \frac{1}{2}$

$1 - e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\lambda m} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\lambda m = \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \lambda m = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 \Leftrightarrow m = \frac{\ln 2}{\lambda}$

- Le premier quartile de X est le nombre q_1 tel que

$F(q_1) = \frac{1}{4}$

$1 - e^{-\lambda q_1} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow e^{-\lambda q_1} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \lambda q_1 = \ln(4/3) \Leftrightarrow q_1 = \frac{\ln(4/3)}{\lambda}$

- Le 3ème quartile est le nombre q_3 tel que $F(q_3) = 0{,}75$

$q_3 = \frac{\ln 4}{\lambda}$

Uniforme :

- $m = \frac{1}{2}$

$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \in [0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $\qquad q_1 = 1/4 \quad q_3 = 3/4$

Gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$

- $m = 0$
- $0{,}67 < q_3 < 0{,}68$

X est symétique.

$\mathbb{P}(X \geq x) = \mathbb{P}(X \leq -x)$

$\mathbb{P}(X \geq x) = 0{,}25$

$\mathbb{P}(X \leq -x) = 0{,}25$

- $\mathbb{P}(X \geq \cancel{x}) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75 \rightarrow q_3 = -q_1$ car X est symétique

- d_1 tel que $F(d_1) = 0{,}1$

$1{,}28 \leq d_9 \leq 1{,}29$

$-1{,}29 \leq d_1 \leq -1{,}28$

$F(-0{,}72) = 1 - F(0{,}72)$

$F(C_1) = 0{,}01$

$F(C_{99}) = 0{,}99$

$2{,}32 \leq C_{99} \leq 2{,}33$

$-2{,}33 \leq C_1 \leq -2{,}32$

Scanned by CamScanner

Exercice 2 : $\overline{X_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j \qquad E(X_1) = E(X_2) = E(X_n) = m$

1) $E(\overline{X_n}) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}(X_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} m = m$

2) ⓐ $E(S_n^2) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - \overline{X_n})^2\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} E((X_j - \overline{X_n})^2)$

Comme $X_1, \dots, X_n$

la loi de $X_1 - \overline{X_n}$ est la même que celle de $X_j - \overline{X_n}$

$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}((X_1 - \overline{X_n})^2) = \mathbb{E}((X_1 - \overline{X_n})^2)$

ⓑ $\sigma^2 = Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - E(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - m^2$

$\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + m^2$

ⓒ $\mathbb{E}(S_n^2) = \mathbb{E}((X_1 - \overline{X_n})^2) = Var(X_1 - \overline{X_n}) + E(X_1 - \overline{X_n})^2$

$\mathbb{E}(X_1 - \overline{X_n}) = \underbrace{E(X_1)}_{m} - \underbrace{E(\overline{X_n})}_{m} = m - m = 0$

$\mathbb{E}(S_n^2) = Var(X_1 - \overline{X_n}) \qquad \sigma^2 = Var(X_1)$

$S_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_1 - \overline{X_n})^2$

$X_1 - \overline{X_n}$

$= X_1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j = X_1\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}\sum_{j=2}^{n} X_j$

$Var(X_1 - \overline{X_n}) = Var\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_1 + \sum_{j=2}^{n}\left(-\frac{1}{n}\right)X_j\right)$

$= Var\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)X_1\right) + \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n^2} Var(X_j)$

$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2 Var(X_1) + \sum_{j=2}^{n}\frac{1}{n^2} Var(X_j)$

$= \left(1 - \frac{1}{n}\right)^2\sigma^2 + \frac{(n-1)\sigma^2}{n^2}$

$= \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left[1 - \frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right]$

$\mathbb{E}(S_n^2) = \sigma^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

Scanned by CamScanner

Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad 2{,}05 < c_2 < 2{,}06$

Quel est le 2^e centile de X ? $P(X \leq c_2) = 0{,}02$

Quel est le 93^e centile de X ?

$P(X \leq c_{93}) = 0{,}93 \to 1{,}47 < c_{93} < 1{,}48$

$P(X \leq 0) = 0{,}5$

$0{,}02 = P(X \leq c_2) = P(-X \leq c_2) = P(X \geq -c_2) = 1 - P(X \leq c$

$P(X \leq -c_2) = 0{,}98$

TD2 : PROBA

Exercice 1 :

(1) $P(X < 1{,}28) = \phi(1{,}28) = 0{,}8997$

(2) $P(X > -1{,}65) = P(X \leq 1{,}65) = \phi(1{,}65) = 0{,}9505$ symétrie *

(3) $P(X > 2{,}58) = 1 - P(X \leq 2{,}58) = 1 - 0{,}9951 = 0{,}0049$ complémentaire

(4) $P(|X| < 1{,}96) = \phi(1{,}96) - \phi(-1{,}96) = \phi(1{,}96) - 1 + \phi(1{,}96)$

$= 2\phi(1{,}96) - 1 = 0{,}95$

$P(a < X < b) = P(X < b) - P(X < a) = \phi(b) - \phi(a)$

* symétrie :

$P(X < a)$ si $a < 0$ on utilise la symétrie $P(-X < a) = P(X > -a)$

$= 1 - P(X \leq -a)$

Exercice 2 :

$X \sim \mathcal{N}(50, 16)$ $\quad \sigma = 4 \quad \sigma^2 = 16$

$Y = \frac{X - m}{\sigma}$

$E(Y) = E\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = \frac{E(X) - m}{\sigma} = 0$

$Var(Y) = Var\left(\frac{X-m}{\sigma}\right) = Var\left(\frac{X}{\sigma}\right) = \frac{Var(X)}{\sigma^2} = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$

Si $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

alors $X = m + Y\sigma$ avec $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

(1) $P(X > 40) = P(50 + 4Y > 40) = P(Y > -2{,}5) = P(-Y > -2{,}5) = P(Y < 2{,}$

$= 0{,}9938$

(2) $\mathbb{P}(X<60) = \mathbb{P}(50+4Y<60) = \mathbb{P}(Y<2,5) = 0,9938$

(3) $\mathbb{P}(X>90) = \mathbb{P}(50+4Y>90) = \mathbb{P}(Y>10) = 1-\mathbb{P}(Y<10)$

$\mathbb{P}(Y>x) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$= \frac{e^{-50}}{10} \simeq 10^{-30}$

(4) $\mathbb{P}(60<X<80) = \mathbb{P}(60<50+4Y<80) = \mathbb{P}(2,5<Y<7,5)$

$= \Phi(7,5) - \Phi(2,5)$

$\approx 1 - \Phi(2,5) \simeq 0,0062$

(5) $\mathbb{P}(|X-40|<10) = \mathbb{P}(30<X<50) = \mathbb{P}(-5<Y<0) = \mathbb{P}(0<Y<5$

$= \Phi(5) - \Phi(0) \simeq 0,5$

Exercice 3:

(1) $\mathbb{P}(X\leq t) = 0,99 \Rightarrow 2,32 < t < 2,33$

(2) $\mathbb{P}(X\leq t) = 0,1 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X\leq t) = 0,9 \Rightarrow 1,28 < t < 1,29$

(3) $\mathbb{P}(|X|<t) = 0,95 \Leftrightarrow \mathbb{P}(-t<X<t) = \Phi(t) - \Phi(-t) = \Phi(t) - (1-\Phi(t))$

$= 2\Phi(t) - 1 = 2\mathbb{P}(X<t) - 1 = 0,95$

$\Rightarrow 2\mathbb{P}(X<t) = 1,95 \quad \Rightarrow \mathbb{P}(X<t) = 975$

$\Rightarrow t = 1,96$