Université Paris 13 | Cours de probabilités et statistique 2
Institut Galilée | Année 2017-2018
Licences 2 de Mathématiques | Second semestre

LECTURE DE TABLES STATISTIQUES - APPROXIMATIONS GAUSSIENNES

Dans tous les exercices de cette feuille, et des suivantes, vous n'hésiterez pas à représenter graphiquement ce que vous cherchez.

1. Lecture de tables statistiques

Exercice 1. Soit X une gaussienne centrée réduite. Calculer

(1) $P(X < 1.28)$.
(2) $P(X > -1.65)$.
(3) $P(X > 2.58)$.
(4) $P(|X| < 1.96)$.

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire gaussienne de moyenne $m = 50$ et d'écart-type $\sigma = 4$. Calculer

(1) $P(X > 40)$.
(2) $P(X < 60)$.
(3) $P(X > 90)$.
(4) $P(60 < X < 80)$.
(5) $P(|X - 40| < 10)$.

Exercice 3. Soit X une gaussienne centrée réduite. Déterminer t tel que

(1) $P(X \leq t) = 0.99$.
(2) $P(X \leq t) = 0.1$.
(3) $P(|X| < t) = 0.95$.
(4) $P(X \leq t) = 0.25$. Ce réel t est le premier quartile Q_1 de la gaussienne centrée réduite.
(5) $P(X \leq t) = 0.5$. Ce réel t est la médiane Me de la gaussienne centrée réduite.
(6) $P(X \leq t) = 0.75$. Ce réel t est le troisième quartile Q_3 de la gaussienne centrée réduite.

Exercice 4. *(extrait de partiel)*

(1) Une chaîne de mise en bouteilles de vin est réglée de telle sorte que le contenu exact d'une bouteille (en cl) est une variable aléatoire X de loi $\mathcal{N}(76, 1)$. Quelle est la probabilité qu'une bouteille prise au hasard ait un contenu inférieur à 75 cl ?
(2) Déterminer l'espérance et l'écart-type d'une variable aléatoire de loi normale X, sachant que :

$$P(X > 5) = 0.8413 \text{ et } P(X \leq 10) = 0.8770.$$

Date: Janvier 2018.

2. Calculs sur la loi gaussienne

Exercice 5. Soit X une gaussienne centrée réduite

(1) Montrer, à l'aide d'une majoration simple, que pour tout entier $k \geq 0$, $E(|X|^k) < +\infty$. Ceci signifie que l'on peut calculer pour tout $k \geq 0$ $E(X^k)$.
(2) Calculer $E(X)$, $E(X^2)$, puis $E(X^k)$ pour tout entier $k > 0$.
(3) Calculer $V(X^2)$.

Exercice 6. (1) Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. Soit $Y = exp(X)$. La loi de la variable aléatoire Y est appelée loi log-normale. Calculer la densité de Y (on pensera à calculer la fonction de répartition de Y). Vérifier que $E(Y) = \exp(1/2)$ et que $V(Y) = e(e-1)$.
(2) Soit X une variable aléatoire gaussienne centrée réduite. On appelle f la fonction qui à tout réel t associe $f(t) = E(\exp(tX))$. Calculer $f(t)$. (Vous verrez l'année prochaine que cette fonction s'étend aux variables complexes, et que si on remplace t par it elle s'appelle fonction caractéristique de X; cette fonction se révèlera être un outil essentiel dans le calcul des lois de probabilité).

Exercice 7. Soient $X_1, \cdots, X_d$ d gaussiennes centrées réduites indépendantes. On rappelle que la loi de $Z = X_1^2 + \cdots + X_d^2$ est appelée loi du χ^2 à d degrés de liberté. Calculer $E(Z)$, puis $V(Z)$ (en utilisant les résultats de l'exercice 5).

Exercice 8. *(extrait de partiel)* Soit X une variable aléatoire Gaussienne $\mathcal{N}(2,9)$. Rappeler quel est l'ensemble des valeurs prises par cette gaussienne, ainsi que sa densité. Quelles sont son espérance et sa variance. Soient X_1, X_2, X_3 et X_4 quatre gaussiennes indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$. Quelle est la loi de $\overline{X}_4$? Comment appelle t'on la loi de $Z = X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2$? Calculer $E(Z)$.

3. Approximations gaussiennes - théorème central-limite

Indication : Soit $p \in]0,1[$, et n un entier strictement positif. Soit Y_n une loi binomiale de paramètres (n,p). Soient a et b deux entiers positifs avec $a \leq b$. On pourra utiliser, lorsque l'on veut approcher la loi de Y_n lorsque n est grand, que $P_p(a \leq Y_n \leq b) = P_p(a - 0.5 \leq Y_n \leq b + 0.5)$, ce qui permettra d'avoir une valeur approchée de cette probabilité plus précise.

Exercice 9. Soit S_{100} le nombre de faces obtenu en lançant 100 fois une pièce équilibrée. Utiliser le théorème central-limite (que vous rappelerez) pour calculer
1) $P(S_{100} \leq 35)$ 2) $P(35 < S_{100} < 65)$
3) $P(S_{100} > 70)$ 4) $P(S_{100} < 60)$

Exercice 10. Soit S_{200} le nombre de faces obtenues en lançant 200 fois une pièce équilibrée. Calculer 1) $P(S_{200} = 95)$ 2) $P(S_{200} = 82)$.

Exercice 11. *(extrait de partiel)* Un examen où l'on doit répondre vrai ou faux à chaque question comporte 48 questions. Lilas a deux chances sur trois de répondre correctement à une question. Rose répond au hasard à chaque question. Tout étudiant répondant correctement à 30 questions ou plus est reçu. Comparer les probabilités d'être reçu de Rose et Lilas.

Exercice 12. *(extrait de partiel)* Une banque accepte des rouleaux de pièces d'un centime d'euro de ses clients commerçants sans les recompter. Chaque rouleau est sensé contenir 20 pièces de un centime, et la banque donne en échange une pièce de 20 centimes à ses clients. En réalité chaque rouleau contient 19 pièces de 1 centime dans 30 % des cas, 20 pièces de 1 centime dans 60 % des cas, et 21 pièces de 1 centime dans 10 % des cas.

(1) Soit X la valeur (en centimes d'euros) d'un rouleau apporté à la banque. Calculer l'espérance et la variance de $X - 20$.
(2) Evaluer la probabilité que la banque perde 25 centimes ou plus si 100 rouleaux lui sont apportés.
(3) Evaluer la probabilité que la banque perde exactement 25 centimes sur 100 rouleaux.
(4) Evaluer la probabilité que la banque perde de l'argent sur 100 rouleaux.