Rappels

Le théorème de Taylor-Lagrange:
Soit f une fonction définie sur $[a, b]$, $a \neq b$, et $n \in \mathbb{N}$. Si f est n fois continument dérivable sur $[a, b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a, b[$ alors il existe c dans $]a, b[$ vérifiant

$$f(b) = f(a) + + \frac{(b-a)}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

Nouvelle écriture:
On peut poser $b = a + t$ et ainsi $c \in]a, b[$ permet d'écrire $c = a + \theta t$ avec $0 < \theta < 1$. Par conséquent, on peut écrire:

$$\exists \theta \in]0, 1[, \text{ tel que } \quad f(a+t) = f(a) + \frac{t}{1!} f'(a) + \cdots + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(a) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a + \theta t).$$

En particulier, dans le cas où $a = 0$, on obtient alors l'écriture suivante:
Si f est de classe C^n sur $[0, t]$, $t \neq 0$ et $n+1$ fois dérivable sur $]0, t[$, on a:

$$\exists \theta \in]0, 1[, \text{ tel que } \quad f(t) = f(0) + \frac{t}{1!} f'(0) + \cdots + \frac{t^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{t^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta t).$$

Exemple 1:
En utilisant Taylor-Lagrange montrer que pour tout t dans R^+ on a l'encadrement

$$t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t.$$

Pour tout t dans R^+ l'application de la formule de Taylor-Lagrange à l'ordre 1 à la fonction $u \mapsto \ln(1+u)$ entre 0 et t donne l'existence d'un nombre θ dans $]0, 1[$ tel que

$$\ln(1+t) = \ln(1+0) + t(\frac{1}{1+0}) + \frac{t^2}{2}(-\frac{1}{(1+\theta t)^2}) = t - \frac{t^2}{2(1+\theta t)^2}.$$

De l'inégalité $\frac{t^2}{2(1+\theta t)^2} \geq 0$ on déduit $\ln(1+t) \leq t$, et de l'inégalité $\theta t \geq 0$ on déduit $\frac{t^2}{2(1+\theta t)^2} \leq \frac{t^2}{2}$ puis $\ln(1+t) \geq t - \frac{t^2}{2}$.

Exemple 2:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a: $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$ (par convention $\frac{x^0}{0!} = 1$).

Voisinage:
Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle *voisinage* de a, tout intervalle ouvert contenant a.
Voisinage épointé:
Soit $a \in \mathbb{R}$, on appelle *voisinage épointé* de a, tout voisinage de a privé du point a.
Par exemple, si $V = \{x \in \mathbb{R},\ |x-a| < \varepsilon\}$ est un voisinage centré de a, le voisinage épointé de a est $\dot{V} = V \backslash a = \{x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-a| < \varepsilon\}$.

Equivalence:
Soient f et g deux fonctions définies sur un voisinage épointé $\dot{V}$ de $a \in \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f *est équivalente à g au voisinage de a* si l'on peut trouver un sous-voisinage $\dot{W}$ de $\dot{V}$ et une fonction $\lambda : \dot{W} \to \mathbb{R}$ vérifiant:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to a} \lambda(x) = 1 \\ \forall x \in \dot{W},\ f(x) = \lambda(x) g(x) \end{cases}$$

On écrit alors $f \underset{a}{\sim} g$. On a les assertions suivantes:

1. $f \underset{a}{\sim} g \iff f - g = o(g)$ (c'est-à-dire : $f - g = g\,\epsilon(g)$, avec $\lim\limits_{x \to a} \epsilon(g(x)) = 0$).
2. Si g ne s'annule pas sur un voisinage épointé de a, on a:

$$f \underset{a}{\sim} g \iff \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

La relation "équivalente à" est une relation d'équivalence (i.e. réflexive, transitive et symétrique), compatible avec le produit et l'inversion: $f_1 \sim g_1$ et $f_2 \sim g_2 \Rightarrow f_1 f_2 \sim g_1 g_2$, et pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, $f \sim g \Rightarrow |f|^\alpha \sim |g|^\alpha$.

Exemple 1:
- Tout polynôme non nul est équivalent au voisinage de l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$) à son terme de plus haut degré.
- Tout polynôme non nul est équivalent au voisinage de zéro à son terme de plus bas degré.

Exemple 2:
Soit f une fonction dérivable en 0 telle que $f'(0) \neq 0$. Alors

$$f(x) - f(0) \underset{0}{\sim} x f'(0).$$

En particulier, on a : $\ln(1+x) \underset{0}{\sim} x$, $e^x - 1 \underset{0}{\sim} x$, $\sin(x) \underset{0}{\sim} x$, ...

Exemple 3:
1. La relation "équivalente à" n'est pas compatible avec la somme des fonctions.
Exemple: on a $\cos x \underset{0}{\sim} 1 + x$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1+x} = 1$), on a aussi $-1 \underset{0}{\sim} -1$. Mais on n'a pas $\cos x - 1 \underset{0}{\sim} x$ (car $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = -\sin(0) = 0$).

2. La relation "équivalente à" n'est pas compatible avec la composition des fonctions.
Exemple: on a $x^2 + x \underset{+\infty}{\sim} x^2$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + x}{x^2} = \lim\limits_{x \to +\infty} (1 + \frac{1}{x}) = 1$).
Mais on n'a pas $e^{(x)^2 + x} \underset{+\infty}{\sim} e^{(x)^2}$ (car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^{(x)^2+x}}{e^{(x)^2}} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$).