Fiche de TD 1

Ex.1 – On considère les trois normes usuelles définies sur $\mathbb{R}^2$ par

$$\|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|\ ,\ \|(x_1, x_2)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ ,\ \|(x_1, x_2)\|_\infty = \max(|x_1|, |x_2|)$$

1. Dessiner les boules fermées de centre $(3, -1)$ et de rayon 1 dans $\mathbb{R}^2$ pour les trois normes.
2. Montrer que les trois normes sont équivalentes. On pourra montrer les inégalités

$$\|(x_1, x_2)\|_\infty \leq \|(x_1, x_2)\|_1 \leq \sqrt{2}\, \|(x_1, x_2)\|_2 \leq 2\, \|(x_1, x_2)\|_\infty$$

   Montrer que pour tout a dans $\mathbb{R}^2$ et tout $r > 0$ on a $B_\infty(a, r) \subset B_2(a, \sqrt{2}r)$.

Ex.2 – On considère la partie de $\mathbb{R}$, $A = \left\{ \dfrac{\|(x_1, x_2)\|_1}{\|(x_1, x_2)\|_\infty}\ ,\ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \right\}$.
La partie A admet-elle une borne supérieure ? Une borne inférieure ? Si oui, les déterminer.

Ex.3 – Montrer que l'application $N : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $N(x_1, x_2) = |x_1 + x_2| + |x_1|$ définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ équivalente aux normes usuelles. Dessiner la boule unité pour cette norme.

Ex.4 – On note $C([0,1], \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

1. Montrer que les applications suivantes sont des normes sur $C([0,1], \mathbb{R})$:

$$f \longmapsto \|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|\, dt \quad , \quad f \longmapsto \|f\|_\infty = \sup f([0,1])$$

2. on considère les fonctions f_n $(n \geq 2)$ définies sur $[0,1]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/n \\ 2 - nx & \text{si} \quad 1/n \leq x \leq 2/n \\ 0 & \text{si} \quad 2/n \leq x \leq 1 \end{cases}$$

3. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 2}$ converge vers la fonction nulle dans $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\|_1$ mais pas dans $C([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\|_\infty$.
   Les deux normes sont-elles équivalentes ?

Ex.5 – Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions. On considère la fonction $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x, y) = f(x) + g(y)$. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme infinie et $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle.

1. Montrer que si f est continue en a et g est continue en b alors h est continue au point (a, b).
2. On suppose h continue au point (a, b). f est-elle continue en a ? g est-elle continue en b ?

Ex.6 – Soit la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} \cdot x$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Soit $S_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty = 1\}$ et $S_2 = \{x \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2 = 1\}$. Montrer que $f(S_\infty) = S_2$.
2. Montrer que f est continue en 0, ceci quelque soit la norme dont on munit $\mathbb{R}^2$.

Ex.7 – On considère la fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x_1, x_2) = \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4}$ si $(x_1, x_2) \neq (0,0)$ et $\varphi(0,0) = \alpha$, où α est un paramètre réel. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme infinie et $\mathbb{R}$ de sa norme usuelle.

1. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$. Que peut-on en déduire à propos de la continuité de φ en $(0,0)$?
2. Déterminer les limites des suites de termes généraux $\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$ et $\varphi\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right)$. Que peut-on en déduire à propos de la continuité de φ en $(0,0)$?

Ex.8 – Dire pour chacune des parties suivantes de $\mathbb{R}$, si elle est ouverte, fermée, et déterminer son adhérence et son intérieur :
$]0,2]$, $[-1, +\infty[$, $]-2, 1[$, $]-\infty, 7[\cup]8, 9[$, $\cup_{n \in \mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1\right]$, $\left\{\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Ex.9 – Représenter graphiquement les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ et pour chacune d'elles, dire si elle est ouverte, fermée, et déterminer son adhérence et son intérieur :

- $\star$ $A_1 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x \neq 0 \text{ et } y = 1/x^2\right\}$
- $\star$ $A_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, |x| \neq 1 \text{ et } |y| \neq 1\right\}$
- $\star$ $A_3 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \, |x| \neq 1 \text{ ou } |y| \neq 1\right\}$
- $\star$ $A_4 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x + y \geq 0 \text{ et } x > 0\right\}$
- $\star$ $A_5 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, xy > 1\right\}$
- $\star$ $A_6 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x^2 + y^2 = 1 \text{ et } y > 0\right\}$
- $\star$ $A_7 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 2 \leq x^2 + y^2 \leq 3\right\}$
- $\star$ $A_8 = \left\{(\cos t, \sin t) \,/\, t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right\}$

Ex.10 – La partie $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x > 0 \,,\, y > 0 \text{ et } z \leq 0\}$ de $\mathbb{R}^3$ est-elle ouverte ? est-elle fermée ?

Ex.11 – Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé I de $\mathbb{R}$. Montrer que son graphe $G = \{(x, f(x)) \,/\, x \in I\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Ex.12 – L'ensemble $\Gamma = \{(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)) \,/\, t > 0\}$ est-il un fermé de $\mathbb{R}^2$? Déterminer son adhérence.