Licence Math 2ème année

Corrigé de l'épreuve du Mars 2017

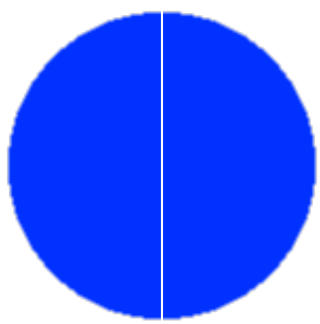
(Les calculatrices et les documents sont interdits.
Les téléphones portables doivent être éteints)

Exercice 1

Voir cours.

Exercice 2

1. (a) Le domaine est donné par



(b) L'ensemble n'est pas ouvert puisque le point $(1, 0)$ est dans A, mais aucune boule de centre $(1, 0)$ de rayon r strictement positif n'est incluse dans A (une telle boule contient l'intervalle $]1, 1 + r[$ de l'axe des x, qui n'est pas contenu dans A).
L'ensemble n'est pas non plus fermé, puisque la suite $(1/n, 0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de A convergeant vers un élément qui n'est pas dans A.
(c) On a $A \subset D$ où D est le disque fermé de centre $(0, 0)$ de rayon un. Donc $\overline{A} \subset \overline{D} = D$. Pour montrer que $\overline{A} = D$, il suffit de construire pour tout point $(0, y)$ avec $-1 \leq y \leq 1$ une suite de A convergeant vers ce point. Lorsque $y \geq 0$, on peut prendre la suite $(1/n, y - 1/n)_{n\geq N_0}$, avec N_0 assez grand pour que

$$\frac{1}{n^2} + \left(y - \frac{1}{n}\right)^2 = y^2 - 2\frac{y}{n} + \frac{2}{n^2} \leq 1.$$

Lorsque $y \leq 0$, on prend $(1/n, y + 1/n)_{n\geq N_0}$.
(d) Comme A n'est pas fermé, il ne peut être compact.

(e) Si A était connexe par arcs, il existerait une application continue $t \to \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ définie sur $[0,1]$ à valeurs dans A, avec $\gamma(0) = (-\frac{1}{2}, 0)$ et $\gamma(1) = (\frac{1}{2}, 0)$. En particulier, γ_1 est continue sur un intervalle, à valeurs dans $\mathbb{R}$, et prend les valeurs $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il doit donc exister t_0 dans $[0,1]$ avec $\gamma_1(t_0) = 0$. Mais alors $\gamma(t_0)$ n'est pas dans A, d'où une contradiction. Donc A n'est pas connexe par arcs.

2. Comme U est une réunion d'ouverts, c'est un ouvert.
3. L'ensemble F n'est pas fermé, puisque la suite $(1/n, 0)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de F qui converge vers le point $(0,0)$ qui n'est pas dans F (comme tous les F_n sont contenus dans le demi-plan $x > 0$, il en est de même de F).

Exercice 3

1. La fonction $(x,y) \to y/x$ est continue sur U puisque le dénominateur ne s'annule pas, donc f est composée de fonctions continues, donc est continue sur U.
2. Pour voir que f est continue sur $\mathbb{R}^2$, il suffit de montrer que pour toute suite $(x_n, y_n)_n$ convergeant vers un point de la forme $(0,y)$, la suite $(f(x_n, y_n))_n$ tend vers $f(0,y) = 0$. Or, comme la fonction Arctg est de valeur absolue majorée par $\pi/2$, on a $|f(x_n, y_n)| \leq \frac{\pi}{2}|x_n|$ qui tend vers 0.
3. Si un tel λ existait, pour toute suite $(x_n, y_n)_n$ de A tendant vers $(0,0)$, on aurait $h(x_n, y_n) = g(x_n, y_n) \to \lambda$. Si on prend $x_n = \frac{1}{n}, y_n = \frac{t}{n}$, avec $t > 0$ on a $h(x_n, y_n) = \frac{\operatorname{Arctg} t}{t}$, qui ne peut être égal à λ pour toute valeur de $t > 0$.

Exercice 4

1. Comme B est une partie fermée et bornée d'un espace vectoriel normé *de dimension finie*, elle est compacte. De plus, f est continue, car on sait que $x \to N(x-y)$ est continue. Or, une fonction continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes, d'où l'existence de x_0.
2. On a
$$f(x) = N(x-a) + N(x-b) + N(x-c) \geq N(x-a) \geq f(a),$$
la dernière inégalité résultant du fait que x est à l'extérieur de la boule B.
3. Pour tout x dans B, on a $f(x) \geq f(x_0)$. Comme a est dans B, on a en particulier $f(a) \geq f(x_0)$. Pour tout x hors de la boule B, on a $f(x) \geq f(a) \geq f(x_0)$. Donc, en tout point x de $\mathbb{R}^p$, on a $f(x) \geq f(x_0)$.