Fonctions à plusieurs variables

Mise à jour du cours du 05/02

Mercredi 14 février 2018

1 Dérivées partielles. Fonction de classe C^1

Notation :

On note $||.||$ la norme $||.||_\infty$ sur $\mathbb{R}^n$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,\, y) \mapsto f(x,\, y)$

Soit $a = (a_1, a_2) \in U$, $\exists\, r > 0$ tel que $B\,(a, r) = \{x,\ ||x - a||_\infty < r\} \subset U$. Donc $\left\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ \text{Max}[|x_1 - a_1|, |x_2 - a_2|]\right\}$ $\subset U$.

Considérons $x_1 \longrightarrow f(x_1,\, a_2) \overset{def}{=} \varphi(x_1)$, $]a_1 - r,\, a_1 + r[\, \longrightarrow \mathbb{R}$.

Si $x_1 \longrightarrow \varphi(x_1)$ est dérivable en $x_1 = a_1$ on dira que f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_1 au point a, on écrira $\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \overset{def}{=} \varphi'(a_1)$.

De même, si on définit pour $x_2 \in\,]a_2 - r,\, a_2 + r[$, $\psi(x_2) = f(a_1,\, x_2)$ et si ψ est dérivable en a_2, on dira que f admet une dérivée partielle par rapport à x_2 au point a. On posera $\frac{\partial f}{\partial x_2}(a) = \psi'(a_2)$.

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $r > 0$ tel que $B\,(a, r) \subset U$, pour $j \in \{1, ..., n\}$ soit $\alpha_j :]a_j - r,\, a_j + r[\, \longrightarrow B\,(a, r)$.

Définition :

On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la j-ième variable au point $a \Longleftrightarrow$ la fonction $t \mapsto f \circ \alpha_j(t)$, $]a_j - r,\, a_j + r[\, \longrightarrow \mathbb{R}$, est dérivable au point $t = a_j$.

On note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \overset{def}{=} (f \circ \alpha_j)'(a_j)$. Si f admet une dérivée partielle par rapport à la j-ième variable en tout point x $\in U$, on peut définir une fonction $\frac{\partial f}{\partial x_j} : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$.

Principe de calcul :

Pour calculer une dérivée partielle par rapport à la variable x_j, on fixe les autres variables, et on est ramené au calcul de la dérivée d'une fonction de la seule variable x_j.

Ex :

$U = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2, z > 0\right\}$ posons $f(x, y, z) = yz^x = e^{x\ln(z)}$

Dérivées partielles par rapport à x en un point $(x_0,\, y_0,\, z_0) \in U$. On fixe $y = y_0$, $z = z_0$ et on considère $x \mapsto f(x, y_0, z_0) = \underbrace{y_0 e^{xln(z_0)}}_{\varphi(x)}$ On aura $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \varphi'(x_0)$. Or $\varphi'(x) = y_0(\ln(z_0)e^{x\ln(z_0)}$, donc $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) =$ $y_0(\ln(z_0))e^{x_0\ln(z_0)} = y_0\ln(z_0)z_0^{x_0}$.

Dérivées partielles par rapport à y. On fixe $x = x_0$, $z = z_0$. On considère $y \longrightarrow \psi(y) = ye^{x_0\ln(z_0)}$. On a $\psi'(y)$ $= e^{x_0\ln(z_0)} = z_0^{x_0}$. Donc $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = z_0^{x_0}$.

Dérivée partielle par rapport à z. On fixe $x = x_0$, $y = y_0$. On considère $z \mapsto \theta(z) = y_0 e^{x_0\ln(z)}$ $]0, +\infty[\, \longrightarrow$ $\mathbb{R}$. Alors θ est dérivable et $\theta'(z) = y_0 x(\ln(z))' e^{x_0\ln(z)} = y_0\frac{x_0}{z}e^{x_0\ln(z)} = y_0 x_0 z^{x_0 - 1}$, donc $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = y_0 x_0 z^{x_0 - 1}$.

Généralisation de la définition :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On écrit $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$, et f_i est une fonction $f_i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, Définition :

Soit $a \in U$. On dit que f admet une dérivée partielle par rapport à la variable x_j en $a \in U \iff \forall\ i \in \{1, ..., p\}$, f_i admet une dérivée partielle par rapport à x_j en a. On note $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_p}{\partial x_j}(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$.

Définition :

Soient U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, on dit que f est C^1 sur $U \iff$

$i/\ \forall\ j \in \{1, ..., n\}$ f admet une dérivée partielle par rapport à x_j en tout point $x \in U$, et

$ii/\ \forall\ j \in \{1, ..., n\}$, $x \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$, $U \longrightarrow \mathbb{R}^p$, est continue.

Ex :

$U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z > 0\}$, $f(x, y, z) = ye^{x\ln(z)}$.

On a vu que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y\ln(z)e^{x\ln(z)}$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = e^{x\ln(z)}$ $\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = y\frac{yx}{z}e^{x\ln(z)}$ continues sur U (comme composées de fonctions continues). Donc f est C^1 sur U.

Ex :

Pour $(x,\ y) \in \mathbb{R}^2$, posons $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $f(0, 0) = 0$.

Vérifions que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$, existent en tout point de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$. Considérons $x \mapsto \frac{xy_0}{x^2+y_0^2} = \varphi(x)$.

Si $y_0 \neq 0$, le dénominateur ne s'annule pas $\forall\ x \in \mathbb{R}$ donc φ est dérivable en tout point et $\varphi'(x) = \frac{y_0}{x^2+y_0^2} - \frac{2x^2y_0}{(x^2+y_0^2)^2}$

Si $y_0 = 0$, $\varphi(x) = 0$ est donc dérivable en $x_0 \neq 0$, donc $\varphi'(x_0) = 0$. Donc $\forall\ (x_0, y_0) \in U = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ existe et vaut $\frac{y_0}{x_0^2+y_0^2} - \frac{2x_0^2y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$. De même, $\forall\ (x_0, y_0) \in U$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ existe et vaut $\frac{x_0}{x_0^2+y_0^2} - \frac{2y_0^2x_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}$.

De plus $(x, y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, $(x, y) \longrightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ sont continues sur U. (Ce sont des composées de fonctions continues, comme les dénominateurs ne s'annulent pas sur U). Donc f est de classe C^1 sur U.

Cas du point $(0,\ 0)$: On a $f(x,\ 0) = 0$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Donc $x \mapsto f(x,\ 0)$ est dérivable et donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ 0)$ existe et vaut 0. De même $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ 0)$ existe et vaut 0. Donc $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Par contre, f n'est pas de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$. Considérons pour $y \neq 0$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\ y) = \frac{1}{y}$ n'est pas continue en $y = 0$. Donc f n'est pas C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Remarque :

On a vu que f n'est pas continue en $(0,\ 0)$.

Rappel :

Soient I un intervalle ouvert, $I \subset \mathbb{R}$, $a \in I$, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$. f est dérivable en a, de dérivée $f'(a) \iff$ $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) \iff \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0$ et $\forall\ h$ tel que $a + h \in I$ et $|h| < \eta$, on a $|f(a + h) - f(a) - f'(a)h| \leqslant \varepsilon|h|$ $(*)$

Notation :

Soient U un ouvert d'un e.v.n, F un e.v.n, $f : U \longrightarrow F$, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}_+$.

$-$ On écrit $f = \mathcal{O}(g)$, $x \mapsto a \iff \exists\ C > 0, \exists\ r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et que $\forall\ x \in B(a, r)$, $||f(x)||_F \leqslant Cg(x)$,

$-$ On écrit $f = o(g)$, $x \mapsto a \iff \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$ et que $\forall\ x \in B(a, r)$, $||f(x)||_F \leqslant \varepsilon g(x)$.

On peut réecrire $(*)$ sous la forme $f(a + h) - f(a) - f'(a)h = o(|h|)$, $h \longrightarrow 0$.

Proposition :

Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^1. Soit $a \in U$. Alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j = o(||h||),\ h \longrightarrow 0.$

Donc $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$ tel que $\forall\ h$ avec $a + h \in I$ et $|h| < \eta$, on a $|f(a+h) - f(a) - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) h_j| \leqslant \varepsilon ||h||$.