AFE

15 février 2018

1 Suite de Fonctions

1.1 Introduction

On considère le problème suivant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, y^{'}(x) = y(x) \quad \text{avec } y(0) = 1 \tag{1}$$

Méthode de Euler : C'est une méthode générale pour construire une solution approchée de (1).
On suppose que (1) admet une solution f.
On cherche à approcher $f(x)$ par la méthode d'Euler.
Cette méthode est basée sur l'approximation affine.
Pour $x \in \mathbb{R}$, pour h petit :

$$f(x+h) \approx f(x) + h^{'} f(x)$$

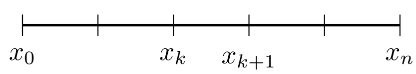
$o(h) = hg(h)$ avec $g(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ Donc ici l'approximation s'écrit, en utilisant (1).

$$f(x+h) \approx f(x) + hf(x)$$

$$f(x+h) \approx (1+h)f(x) \tag{2}$$

Soit $x \in \mathbb{R}, x > 0$, on subdivise $[0, x]$ en n sous-intervalles ($n \geq 1$).
$0 \leq k \leq n-1$, $I_k = [x_k, x_{k+1}]$

$$0 = x_0 \leq x_1 \leq \cdots \leq x_n = x$$



on a : $k = \dfrac{x}{n}$, $x_k = kh$ et $x_{k+1} = x_k + h$
Pour n grand (donc h petit) n appliquant (2) en x_k on a $f(x_{k+1}) \approx (1+h)f(x_k)$
$\implies f(x_n) \approx (1+h)^n f(x_0)$
$\implies f(x_n) \approx (1+\frac{x}{n})^n f(x_0)$, $n \in \mathbb{N}$
On note $f_n(x) = (1+\frac{x}{n})^n$
Il est naturel d'étudier la suite de fonction $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ et d'étudier $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. En fait g est la fonction exponentielle.

Remarque : Calculons $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$, pour $x \in \mathbb{R}^+$.
Soit $x \in \mathbb{R}^+$ $f_n(x) = e^{n\ln(1+\frac{x}{n})}$

Avec les équivalence : $\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{x}{n}$
$\implies n\ln(1+\frac{x}{n}) \underset{n\to+\infty}{\sim} x \implies \lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(1+\frac{x}{n}) = x$
Comme $x \in \mathbb{R} \to e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$, alors on a $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = e^x$

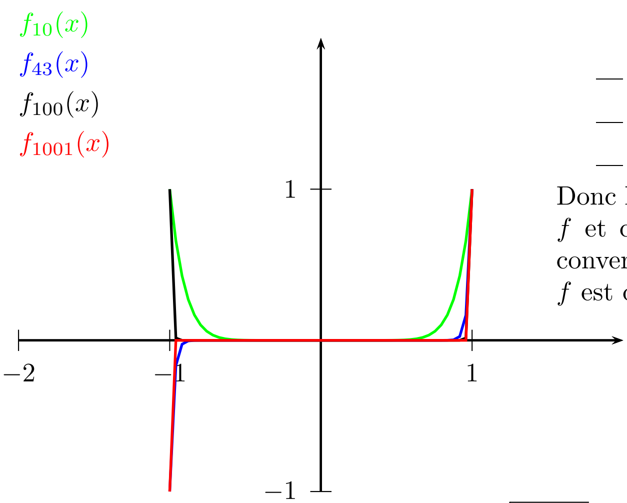
Avec un DL : $\ln(1+\frac{x}{n}) = \underbrace{\dfrac{x}{n} + o\left(\dfrac{1}{n}\right)}_{=\frac{1}{n}g\left(\frac{1}{n}\right)}$

1.2 Différentes notions de convergence

Définition : On considère une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où toutes les fonctions sont définies sur un intervalle D de $\mathbb{R}$ et à valeurs numérique.
$n \in D,\ f_n(x) : D \to \mathbb{R}$

(i) On dit que la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D si pour tout $n \in D$ la suite numérique $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
(ii) On appelle alors la limite simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la fonction définie sur D par $\forall x \in D : f(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$
.

Exemple 1 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}, f_n(x) = x^n$

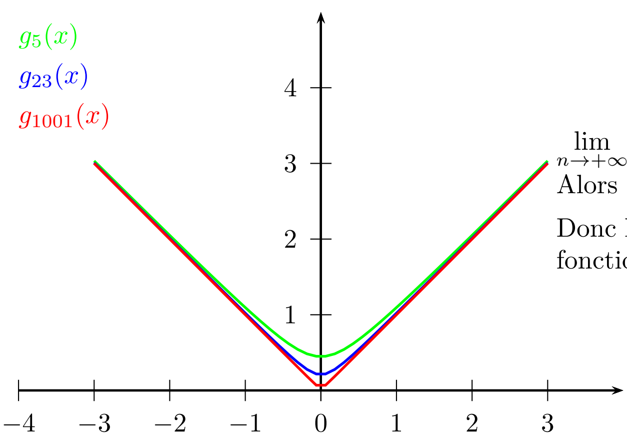


- si $x \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
- si $x = 1$ $f_n(x) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.
- si $x \in]-\infty,-1]\cup]1,+\infty[$ la suite $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.

Donc la suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur]-1,1] vers f et c'est le plus grand sous-ensemble de $\mathbb{R}$ sur lequel $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement.
f est définie par :

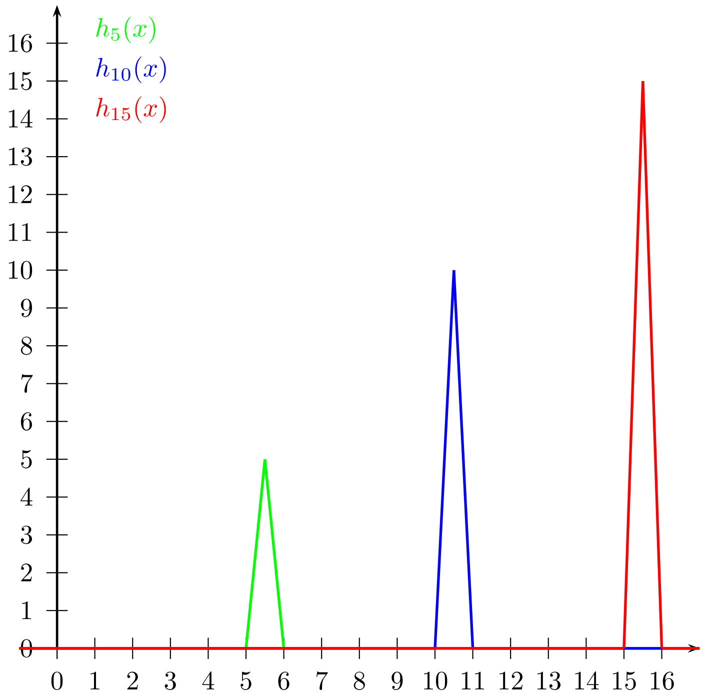
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]-1,1[\\ 1 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Exemple 2 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*, g_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$



$\lim\limits_{n\to+\infty} x^2 + \frac{1}{n} = x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$ continue sur $\mathbb{R}^+$.
Alors pour $x \in \mathbb{R}$ fixé : $\lim\limits_{n\to+\infty} g_n(x) = |x|$.
Donc la suite de fonction $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g définie par : $g(x) = |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Exemple 3 : $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}, (h_n)$ la suite de fonction définie par :



$$h_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, n] \cup [n+1, +\infty[\\ 2n(x-n) & \text{si } x \in [n, n+\frac{1}{2}] \\ n - 2n\big(x - n - \frac{1}{2}\big) & \text{si } x \in [n+\frac{1}{2}, n+1] \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $n > x$, on a $h_n(x) = 0$.
Alors $Lim h_n(x) = 0$.
Donc la suite de fonction $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur R vers la fonction nulle,c'est-à-dire vers h avec $h(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.

Question : Si les fonctions f ont une propriété commune, pour $n \in \mathbb{N}$,(continuité, dérivabilité,intégrabilité) est ce que la fonction limite à les même propriété ?

— Dans l'exemple 1 ; $f_n \in \mathcal{C}^0\big(]-1,1[\big)$ f n'est pas continue sur $]-1,1]$.
— Dans l'exemple 2 ; $g_n \in \mathcal{C}^0\big(\mathbb{R}\big), \forall n \in \mathbb{N}$ et g n'est pas dérivable en 0.

Définition : Soit f une fonction majorée sur une partie non vide A de $\mathbb{R}$,à valeurs réelles. On appelle borne supérieur de f sur A, et on note $\sup\limits_{x\in A} f(x)$ ou $\sup\limits_{A} f$ la borne supérieur de l'ensemble $\{f(x), x \in A\}$.
Remarque : Si f est borné sur A, alors $|f|$ est majoré sur A et admet donc une borne supérieur sur $A(\sup |f(x)|)$.

Proposition :

1. Si f est continue sur $[a,b] \implies \exists c \in [a,b], \sup\limits_{x\in[a,b]} f(x) = f(c)$.
2. Si f est croissante sur $[a,b]$ alors $\sup f(x) = f(b)$.
3. Si f est croissante et majorée sur $[a,b[$ alors $\sup f(x) = \lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.
4. Si f est décroissante sur $[a,b]$ alors $\sup f(x) = f(a)$.
5. Si f est décroissante et majorée sur $]a,b]$ alors $\sup f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.

Définition : Convergence uniforme

On dit que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers la fonction f si :

1. pour n assez grand, $f_n - f$ est borné sur D.
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \sup |f_n(x) - f(x)| = 0$.

Exemple 1 : A-t-on $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément sur]-1,1[vers f ?

Soit $x \in]-1,1[$, $|f_n(x) - f(x)| = |x^n - 0| = |x|^n$
De plus, $\sup |f_n(x) - f(x)| = \sup\limits_{x\in]-1,1[} |x|^n = \lim\limits_{x\to 1^-} |x|^n = 1$
$\implies \lim\limits_{n\to+\infty} \sup\limits_{x\in]-1,1[} |f_n(x) - f(x)| = \lim\limits_{n\to+\infty} \big(1\big) = 1 \neq 0.$
Donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur]-1,1[vers f.

Remarque : On a $]-1,1[\subset]-1,1]$.
$\implies \sup\limits_{]-1,1[} |f_n - f| \leq \sup\limits_{]-1,1]} |f_n - f|$
$\implies \sup\limits_{]-1,1]} |f_n - f| \geq 1.$
Donc $\sup\limits_{]-1,1]} |f_n - f|$ ne tend pas vers 0 quand $n \to +\infty \implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur]-1,1] vers f.
Si f_n est continue sur D et f n'est pas continue sur D alors f_n ne converge pas uniformément sur D vers f.
Par contre si l'on considère $a \in]0,1[$ et si l'on regarde la convergence uniforme sur $[-a,a]$.
$\sup\limits_{x\in[-a,a]} |f_n(x) - f(x)| = \sup |x|^n = |a|^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \ \big(\text{ car } a \in]0,1[\big).$
Donc f_n converge uniformément sur $[-a,a]$ vers $f, \forall a \in]0,1[$.

Exemple 2 :

$x \in \mathbb{R} \sup |g_n(x) - g(x)| = \sup \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x|\right|.$
On a $\left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{x^2}\right| = \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{x^2+\frac{1}{n}+x^2}} \leq \frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{\frac{1}{n}}} = \sqrt{\frac{1}{n}}.$
On a donc $\forall x \in \mathbb{R}, |g_n(x) - g(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}}\ \ , \forall n \in \mathbb{N}^*$.

- $|g_n(x) - g(x)| \leq 1$, est borné.
- $\sup |g_n(x) - g(x)| \leq \sqrt{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Donc $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction g.

Exemple 3 :

$\sup |h_n(x) - h(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |h_n(x)| = n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$
Donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$ vers h.
Soit $a \in \mathbb{R}, \sup |h_n(x) - h(x)| = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
Donc $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $]-\infty, a]$ vers h.

Proposition :

1. Pour que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers f, il faut que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f.
   On retient $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers $f \implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f.
   La réciproque est fausse.

   Preuve : Soit $x_0 \in D$
   $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup\limits_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
   $\implies f_n(x_0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x_0)$ en tant que point de $x_0 \in D$.
   $\implies (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur D vers f.

2. Si $\widetilde{D} \subset D$ et si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur D vers f, alors $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur $\widetilde{D}$ vers f.

Preuve :
$0 \leq \sup\limits_{x\in\widetilde{D}}|f_n(x) - f(x)| \leq \sup\limits_{x\in D}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$
$\Longrightarrow \sup\limits_{x\in\widetilde{D}}|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

Comparaison entre convergence simple et convergence uniforme :

— La convergence simple sur D de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f signifie que :
$\forall x \in D, \forall\varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon,x}$ tel que $\forall n \geq N_{\varepsilon,x}, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$

— La convergence uniforme sur D de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers f signifie que :
$\forall\varepsilon > 0, \exists N_{\varepsilon,x}$ tel que $\forall n \geq N_{\varepsilon,x} \forall x \in D, |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon.$

1.3 Propriétés de la fonction limite, problème d'interversion

1.3.1 Continuité de la fonction limite

Théorème de Weiertrass(continuité) :

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur I de $\mathbb{R}$, si la suite (f_n) est converge uniformément sur I vers f alors f est continue sur I.

Preuve :
Hypothèse
— $\forall n \in \mathbb{N}$ la fonction f_n est continue sur I c'est-a-dire $\forall x_0 \in I$.
La fonction f_n est continue en x_0 signifie :
$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0$ tel que :$\forall x \in I$ et $|x - x_0| < \eta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon.$
— $(f_n)_n \in \mathbb{N}$ converge uniformément sur I vers f cela signifie que $\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*$ tel que :$\forall n \geq \mathbb{N}$: $\sup\limits_{x\in I}|f_n(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$
Ce qu'on cherche a montrer :
f est continue sur I, c'est-a-dire continue en tout points x_0 de I c'est-a-dire

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\eta > 0 \text{ tel que : } \forall x \in I \text{ et } |x - x_0| < \eta \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon. \tag{3}$$

Soit $x_0 \in I$; soit $\varepsilon > 0 \in \mathbb{R}$.
On veut montrer (3).
Pour tout $x \in I$ et tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$f(x) - f(x_0) = f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0).$
$\Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)|.$

Or $|f(x) - f_n(x)| \leq \sup|f_n(x) - f(x)|$ et $|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \sup|f_n(x) - f(x)|.$

$$\text{Donc } \ f(x) - f(x_0)| \leq 2\sup|f_n(x) - f(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)|. \tag{4}$$

$$\forall\varepsilon_1 > 0, \exists\eta > 0 \text{ tel que : } |x - x_0| < \eta \implies |f_n(x) - f_n(x_0)| < \varepsilon_1. \tag{5}$$

$$\forall\varepsilon_2 > 0, \exists N \in \mathbb{N}^* > 0 \text{ tel que : } \forall n \geq N : \sup_{x\in I}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon_2. \tag{6}$$

Si on choisit $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2}$ et on prend $n = N$ dans (5) : $\exists\eta > 0$ tel que $|x - x_0| < \eta \implies |f_N(x) - f_N(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

Si on choisit $\varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon}{4}$ et on prend $n = N$ dans (6) : $\sup|f_n(x) - f(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4}$

On prend $n = N$ dans (4) : $2\sup|f_N(x) - f(x)| < 2\dfrac{\varepsilon}{4}$ et $|f_N(x) - f_N(x_0)| < \dfrac{\varepsilon}{2}.$

Donc $\forall x \in I$ avec $|x - x_0| < \eta$ alors $|f(x) - f(x_0)| < 2\dfrac{\varepsilon}{4} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$

Remarque :

1. Remplaçons l'hypothèse "(f_n) converge uniformément sur I vers f" par "(f_n) converge uniformément sur tout segment inclus dans I".
   Par exemple : si $I =]0, +\infty[$.
   Il suffit de montrer que f_n est continue sur I et f_n converge uniformément sur $[a, +\infty[, \forall a > 0$.
   $\implies f$ est continue sur $[a, +\infty[, \forall a > 0 \implies f$ est continue sur I par continuité.

2. L'hypothèse de la convergence uniforme de (f_n) est essentielle comme le montre l'exemple 1, c'est-a-dire que si on ne l'a pas, alors il existe $(f_n), f_n$ continue sur I, pour tout n et f n'est pas continue sur I.

3. La fonction limite f peut être continue sans qu'il y ait convergence uniforme de (f_n) vers f (comme dans l'exemple 3). C'est-a-dire que la réciproque du théorème n'est pas vrai.

4. Contraposée du théorème :
   Si f n'est pas continue sur I alors (au moins) une des deux hypothèse est fausse.
   Soit $\exists n \in \mathbb{N}$ tel que f_n n'est pas continue sur I ou (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.
   En particulier : Si f_n est continue sur I,$\forall n \in \mathbb{N}$, si (f_n) convergent simplement sur I vers f et si f n'est pas continue sur I alors (f_n) ne converge pas uniformément sur I vers f.

Exemple 4 : $t_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}, n \in \mathbb{N}$ et $x \in I = [0,1]$

$x = 0 \quad t_n(0) = 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$
$x \neq 0 \quad \lim\limits_{n\to+\infty} t_n(x) = 0.$ $\implies (t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers t définie par :

$$t(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

t n'est pas continue sur [0,1] (car elle n'est pas continue en $x = 0$) et t_n est continue sur $[0,1], \forall n \in \mathbb{N}$.
Alors d'après la remarque 3 $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément sur I vers t.

En revanche on aura (t_n) converge uniformément vers t sur $[a,1], \forall a > 0$.
$|t_n(x) - t(x)| = \frac{1}{1+nx} \leq \frac{1}{1+na} \implies \sup\limits_{x\in[a,1]} |t_n(x) - t(x)| < \frac{1}{1+na} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$

1.3.2 Interversion limite-intégrale

Question : Supposons que l'on souhaite calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 (1+x^2)^{1/n}\,\mathrm{d}x$.
Il semble difficile de calculer $\int_0^1 (1+x^2)^{1/n}\,\mathrm{d}x$ pour tout n dans $\mathbb{N}$. On a envie d'intervertir la limite et le signe intégrale. Peut-on le faire généralement ?
Etudions des exemples où on peut faire le calcul explicitement pour voir si c'est le cas :

Exemple 5 : Soit φ_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi_n(x) = n\cos^n x \sin x$.
A-t-on $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\lim\limits_{n\to+\infty} \varphi_n(x)\big)\,\mathrm{d}x$?
D'une part on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} n\cos^n x \sin x\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{n}{n+1}(\cos x)^{n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{n}{n+1},$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

D'autre part, pour tout x dans $]0, \frac{\pi}{2}]$ on a $0 \leq \cos x < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos^n x \sin x = 0$ (par le théorème des croissance comparées) et pour $x = 0$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} n\cos^n x \sin x = 0$ également ; donc

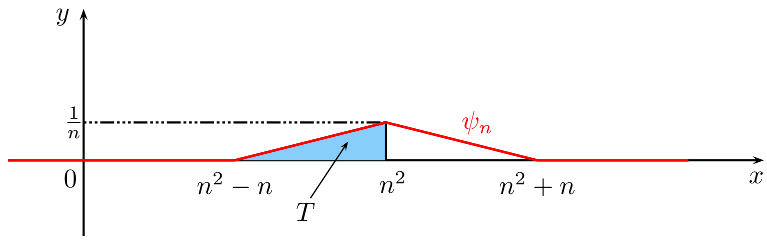
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(\lim_{n\to+\infty} n\cos^n x \sin x\big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (0)\,\mathrm{d}x = 0$$

On obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\varphi_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^{\frac{\pi}{2}}\big(\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)\big)\,\mathrm{d}x.$$

Exemple 6 : Pour $n \geq 1$, considérons les fonctions affines par morceaux ψ_n définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\psi_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \,]-\infty, n^2-n] \cup [n^2+n, +\infty[\\ \frac{1}{n^2}(x-n^2+n) & \text{si } x \in \,[n^2-n, n^2] \\ -\frac{1}{n^2}(x-n^2-n) & \text{si } x \in \,[n^2, n^2+n] \end{cases}$$



Notons S l'aire du triangle T (en bleu ciel sur le graphique), et A l'aire du rectangle $[n^2-n, n^2]\times[0, \frac{1}{n}]$. D'une part on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = 2S = A = (n^2-(n^2-n))\left(\frac{1}{n}\right) = 1,$$

donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\big(1\big) = 1$$

D'autre part pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty}\psi_n(x) = 0$ donc

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty}\big(0\big)\,\mathrm{d}x = 0$$

On obtient donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_{-\infty}^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\psi_n(x)\,\mathrm{d}x$$

L'interversion n'est donc pas possible dans le cas général. Cependant, sous certaines hypothèses, elle l'est.

Théorème 1 (Interversion limite-intégrale) : *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues sur l'intervalle $[a,b]$ et à valeurs numériques. On suppose que cette suite converge uniformément sur $[a,b]$ vers une fonction f qui est donc continue sur $[a,b]$. Alors,*

$$\lim_{n\to+\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b\big(\lim_{n\to+\infty}f_n(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Preuve :
On écrit simplement :

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq \int_a^b |f_n(x)-f(x)|\,\mathrm{d}x \\ &\leq (b-a)\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|\end{aligned}$$

et on conclut en utilisant l'hypothèse de convergence uniforme.

Remarque :
(i) Dans l'exemple 5 la conclusion du théorème n'est pas vérifiée. Il manque donc une hypothèse. L'hypothèse manquante est celle de la convergence uniforme sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ puisque toute les autres sont vérifiées. L'hypothèse de convergence uniforme est donc essentielle (si on l'enlève le théorème devient faux).
(ii) Dans l'exemple 6 la conclusion du théorème n'est pas vérifiée. Il manque donc une hypothèse également. On a $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\psi_n(x)-\psi(x)| = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}}|\psi_n(x)-0| = \dfrac{1}{n} \to 0$, quand $n\to+\infty$, donc la convergence de la suite $(\psi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vers la fonction nulle ψ est uniforme sur $\mathbb{R}$. La seule hypothèse non vérifiée est l'intégration sur un intervalle fermé borné. Cela montre que cette hypothèse est essentielle.

1.3.3 Dérivabilité de la fonction limite

Question : Pour une suite de fonction $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ donnée peut-on intervertir drivée et limite, c'est-à-dire écrire $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n' = (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)'$?

Reprenons l'exemple 2 : soit g_n définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n}}$.
On a vu que $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers g avec $g(x) = |x|$. De plus, g_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Pourtant, g n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$ (puisqu'elle ne l'est pas en 0).
Ainsi la limite, même uniforme, d'une suite de fonctions toutes dérivables sur un même intervalle I, n'est pas forcément dérivable sur cet intervalle. Toutefois, sous certaines hypothèses on peut assurer que la fonction limite est dérivable.

Théorème 2 (Dérivation) : *Soit I un intervalle non réduit à un point et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I. On suppose que :*
(H1) *la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur I vers f ;*
(H2) *la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une fonction g.*
Alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et on a $f' = g$. Autrement dit la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers la dérivée de f' de f ($\lim\limits_{n\to+\infty} f_n' = (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)'$).

Preuve :
Soit x_0 un point de I. On écrit, pour tout x dans I :

$$(\star) \qquad f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\,\mathrm{d}t.$$

La suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur I vers une certaine fonction g.
Les f_n' étant de plus toutes continues sur I, la fonction g est continue sur I. On utilise alors le théorème précédent pour passer à la limite dans $(\star)$ et on obtient :

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ici on a utilisé d'une par **(H1)** pour avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$, et d'autre part **(H2)** et le Théorème 1 pour avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{x_0}^{x} g_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.
La fonction f est donc dérivable sur I et on a $f' = g$. La fonction g étant continue sur I, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Remarque :
(i) La conclusion du théorème dit que l'on peut intervertir le passage à la limite et l'opération de la dérivation.
(ii) D'après notre preuve on peut remplacer l'hypothèse **(H1)** par l'hypothèse
(H1') *Il existe x_0 dans I tel que la suite numérique $(f_n(x_0)_{n\in\mathbb{N}}$ soit convergente.*
(iii) On peut remplacer l'hypothèse **(H2)** par l'hypothèse
(H2') *la suite des dérivées $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment inclus dans I vers une fonction g.*
(iv) On peut remplacer l'hypothèse "$\mathcal{C}^1$" par "dérivable" mais alors on fait de même pour la conclusion. Mais la preuve de ce théorème est plus difficile (on ne peut utiliser l'intégration).

Remarque : Le théorème de dérivabilité peut permettre de montrer qu'une suite de fonction ne converge pas uniformément sur l'intervalle I. Si toutes les fonctions f_n sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur I, si **(H1)** est vérifiée et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n' \neq (\lim\limits_{n\to+\infty} f_n)'$, alors la convergence de la suite $(f_n')_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas uniforme sur I (c'est-à-dire que **(H2)** n'est pas vérifiée), par contraposée du Théorème 2.

Exemple 7 : On considère pour n dans $\mathbb{N}$ les fonctions ϕ_n définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$\phi_n(x) = \frac{x}{(1+nx)^2}.$$

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, ϕ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$ (fraction rationnelle, avec ϕ_n' définie par $\phi_n' = \dfrac{1-nx}{(1+nx)^3}, x \in \mathbb{R}_+$, qui est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$). Regardons maintenant l'hypothèse **(H1)** du théorème de dérivation : pour

$x = 0$ on a $\lim_{n \to +\infty} \phi_n(0) = \lim_{n \to +\infty} 0 = 0$, et pour $x \neq 0$ on a $\phi_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{x}{nx^2}$, c'est-à-dire $\phi_n(x) \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{nx}$ (car $x \neq 0$). Donc pour $x \neq 0$ on a $\lim_{n \to +\infty} \phi_n(x) = 0$. Ainsi $(\phi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction nulle ϕ, l'hypothèse **(H1)** du théorème de dérivation est donc vérifiée.
D'autre part $\phi_n'(x) = \frac{1 - nx}{(1 + nx)^3}$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, donc la suite $(\phi_n')_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement (en procédant encore par des équivalents) sur $\mathbb{R}_+$ vers la fonction s définie par $s(x) = 0$ si $x \neq 0$ et $s(x) = 1$ si $x = 0$. Ainsi s est différente de la fonction nulle, et donc différente de la dérivée de ϕ, on a : $\lim_{n \to +\infty} \phi_n' \neq (\lim_{n \to +\infty} \phi_n)'$, c'est donc l'hypothèse **(H2)** du théorème de dérivation qui n'est pas vérifiée.