# Licence Math 2ème année

Corrigé de l'épreuve du 14 Mars 2016

*(Les calculatrices et les documents sont interdits.*
*Les téléphones portables doivent être éteints)*

## Exercice 1

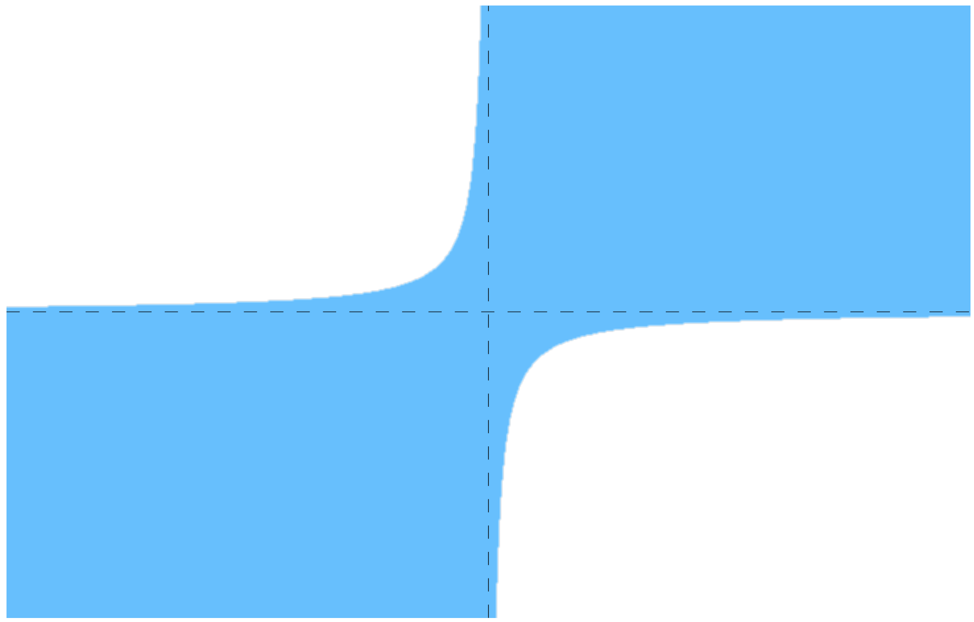
Voir cours.

## Exercice 2

1. - L'ensemble $A$ s'écrit $A = D \cap (Q_+ \cup Q_-)$, où $D$ est le disque ouvert de centre 0 de rayon 1, $Q_+ = \{(x,y); x > 0, y > 0\}$ et $Q_- = \{(x,y); x < 0, y < 0\}$. Chacun de ces ensembles étant défini par des inégalités strictes, il est ouvert. Alors $A$ est l'intersection d'un ouvert avec la réunion de deux ouverts. Il est donc ouvert.
   - L'ensemble $B$ est la réunion de deux fermés, le complémentaire de la boule ouverte de centre 0, de rayon 1 pour la norme $\|\cdot\|_2$, et l'axe horizontal. C'est donc un fermé.
   - L'ensemble $C$ n'est pas fermé, car la suite $((0, 1 + \frac{1}{n+1}))_n$ est une suite de $C$ convergeant vers un point qui n'est pas dans $C$. Il n'est pas non plus ouvert car $(0,0)$ est dans $C$, mais aucune boule ouverte de centre ce point n'est incluse dans $C$.
2. Soit $U = \{(x,y); x^2 + y^2 > 1\}$. Alors $U$ est un ouvert inclus dans $C$, donc $U$ est inclus dans $\mathring{C}$. Il est égal à $\mathring{C}$ car les points de $C - U$ sont les points de l'intervalle $[-1, 1]$ de l'axe horizontal, et aucun de ces points ne peut être dans l'intérieur de $C$ puisqu'aucune boule centrés en un de ces points et de rayon strictement positif n'est contenue dans $C$.

## Exercice 3

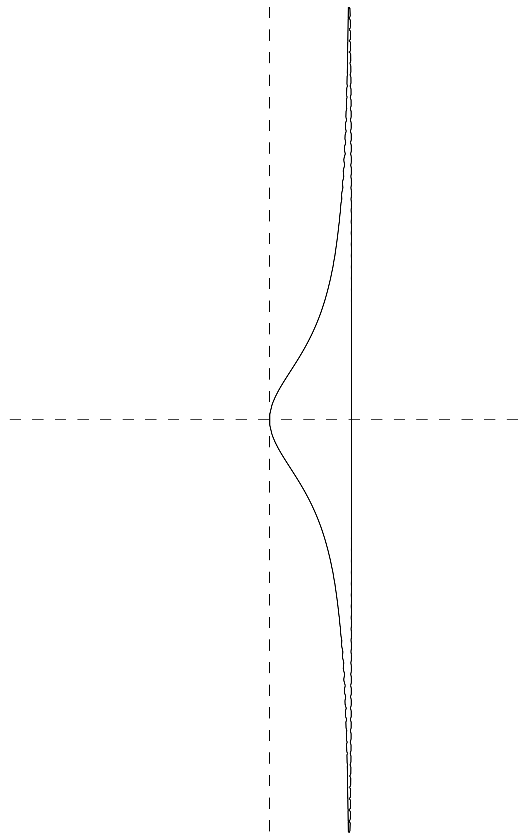
1. L'ensemble $D$ est ouvert comme image réciproque de l'ouvert $]0, +\infty[$ par l'application continue $(x,y) \to xy + 1$. Son allure est donnée par le domaine grisé ci-dessous :



2. Comme $xy + 1 > 0$ sur $D$, la fonction $(x, y) \to \ln(1 + xy)$ est bien définie et continue sur $D$ (comme composée de fonctions continues). La fonction $(x, y) \to \sqrt{x^2 + y^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$ comme composée de fonctions continues. Comme elle ne s'annule qu'en zéro, le quotient est continu sur $D - \{0\}$.
3. On sait que $\frac{\log(1+u)}{u} \to 1$ si $u$ tend vers 0. Il en résulte que ce quotient est borné lorsque $|u| \leq 1$, donc que $|\ln(1 + xy)| \leq C|xy|$ lorsque $(x, y)$ reste dans $B(0, 1)$. Alors, pour $(x, y)$ dans cette boule
$$|g(x, y)| \leq C\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq C|x| \to 0 = g(0, 0) \text{ si } (x, y) \to (0, 0).$$
Donc $g$ est continue en zéro.

## Exercice 4

1. L'ensemble $C$ est fermé, comme image réciproque du fermé $\{0\}$ par l'application continue $(x, y) \to x^2 + y^4 - 1 = 0$. Il est borné, puisque $(x, y) \in C \Rightarrow |x| \leq 1$ et $|y| \leq 1$. C'est donc un compact de $\mathbb{R}^2$.
2. On peut écrire $K = p(C)$ où $p$ est l'application continue $(x, y) \to x$. C'est donc un compact comme image d'un compact par une application continue.
3. L'ensemble $D$ ets la réunion de la droite d'équation $x = 1$ et de la courbe d'équation $x = \frac{y^2}{1+y^2}$, soit l'ensemble :



4. L'ensemble $D$ n'est pas compact, puisqu'il contient la droite d'équation $x = 1$ qui n'est pas bornée.
5. L'ensemble $K'$ est la projection sur l'axe vertical de l'ensemble $D$, soit $\mathbb{R}$ qui n'est pas compact.