ESPACES EUCLIDIENS

Feuille 1

Exercice 1.1. Soit V un K-espace vectoriel, et $\alpha \in V^*$ une forme linéaire non nulle. Montrez que α est surjective. Deduisez-en la dimension de $\mathrm{Ker}(\alpha)$ lorsque V est de dimension finie n.

Exercice 1.2. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et considérons la base

$$\mathcal{C} = \{(1,0,1),(1,1,0),(0,-1,2)\}$$

de $\mathbb{R}^3$.

(a) Décrivez les formes linéaires qui composent la base $\mathcal{C}^*$ de $(\mathbb{R}^3)^*$ (en résolvant les systèmes d'équations linéaires correspondant aux conditions sur les éléments de la base duale).

(b) Exprimer les coordonnées $\{\phi\}_{\mathcal{B}^*}$ et $\{\phi\}_{\mathcal{C}^*}$ de la forme linéaire

$$\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$
$$(x,y,z) \mapsto y + 2z$$

relativement à $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$.

Exercice 1.3. Soient $x_0, x_1, \cdots, x_n$ des éléments de $\mathbb{K}$ deux à deux distincts. Montrer que la famille $\mathcal{B} = \{L_i \mid 0 \leq i \leq n\}$ de polynômes définis par

$$L_i(X) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$$

est une base de $\mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$, l'espace des polynômes de degré $\leq n$. Montrer que la base duale de $\mathcal{B}$ est donnée par $\mathcal{B}^* = \{\varphi_0, \ldots, \varphi_n\}$ où φ_i est définie par $\varphi_i(P) = P(x_i)$ pour tout $P \in \mathcal{P}_n^{\mathbb{K}}$.

Exercice 1.4. Soit V un K-espace vectoriel de dimension n. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ des bases de V, et soient $\mathcal{B}^*$ et $\mathcal{C}^*$ les bases duales de V^*. On considère les matrices de passage $P = \{\mathrm{id}_V\}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ et $Q = \{\mathrm{id}_{V^*}\}_{\mathcal{B}^*}^{\mathcal{C}^*}$.

(a) On déduit de la Proposition 1.33 du cours que $Q = {}^tP^{-1}$.

(b) Supposons donnée une base $\mathcal{C}$ quelconque de K^n. Déduisez de (a) un procédé pour trouver la base duale $\mathcal{C}^*$ de $(K^n)^*$.

(c) En identifiant K^n et $(K^n)^{**}$ par l'isomorphisme canonique ev, notez que ce même procédé permet de trouver $\mathcal{C}$ à partir de $\mathcal{C}^*$.

Exercice 1.5. On considère la base $\mathcal{B} = \{f_1, f_2, f_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ donnée par

$$f_1 = (1,2,4), \quad f_2 = (2,8,11) \quad \text{et} \quad f_3 = (1,3,5)\,.$$

(a) En utilisant l'exercice 1.4.b, déterminez la base duale de $(\mathbb{R}^3)^*$. Vérifiez le résultat.

(b) Déterminez des équations des plans $P_1 = \mathrm{Vect}(f_2, f_3)$, $P_2 = \mathrm{Vect}(f_1, f_3)$ et $P_3 = \mathrm{Vect}(f_1, f_2)$. Que remarquez-vous ?

Exercice 1.6. On considère $\mathcal{C} = \{\phi_1, \phi_2, \phi_3\} \subset (\mathbb{R}^3)^*$ avec

$$\begin{aligned}\phi_1(x,y,z) &= x + 2y,\\ \phi_2(x,y,z) &= 2x + y + z,\\ \phi_3(x,y,z) &= x + z.\end{aligned}$$

Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $(\mathbb{R}^3)^*$ et, en utilisant l'exercice 1.3.c, détérminer la base duale de $\mathbb{R}^3$. Vérifiez le résultat.

Page internet: `http://www.math.univ-paris13.fr/~ausoni/cours-S4-2018.html`