

## Licence Math 2ème année

### Épreuve du 14 Mars 2016

*(Les calculatrices et les documents sont interdits.  
Les téléphones portables doivent être éteints)*

### Exercice 1 (Questions de cours) (8 points)

1. Soient  $(E, N)$  un espace vectoriel normé,  $A$  un sous-ensemble de  $E$ ,  $a$  un point de  $E$ .  
Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes :  
 (1) Il existe une suite  $(x_n)_n$  de points de  $A$  qui converge vers  $a$ .  
 (2) Pour tout voisinage  $V$  de  $a$ ,  $V \cap A$  est non vide.
2. Énoncer la caractérisation simple des applications *linéaires* continues sur un espace vectoriel normé  $(E, N)$  à valeurs dans un autre espace vectoriel normé  $(E', N')$  vue en cours.
3. Donner la définition d'un sous-ensemble compact  $K$  d'un espace vectoriel normé  $(E, N)$ .

### Exercice 2 (6 points)

1. On munit  $\mathbb{R}^2$  de l'une quelconque des normes équivalentes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ . Pour chacun des ensembles suivants du plan, le dessiner et dire s'il est ouvert, fermé, ou ni l'un ni l'autre. On justifiera à chaque fois avec soin.
  - $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 < 1 \text{ et } xy > 0\}$ .
  - $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \geq 1 \text{ ou } y = 0\}$ .
  - $C = \{x \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1 \text{ ou } y = 0\}$ .
2. Déterminer l'intérieur de  $C$ . On justifiera avec soin.

### Exercice 3 (4 points)

Soit  $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy > -1\}$ .

1. Dessiner  $D$  et montrer que c'est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .
2. On définit la fonction  $g$  sur  $D$  par  $g(x, y) = \frac{\ln(1 + xy)}{\sqrt{x^2 + y^2}}$  lorsque  $(x, y) \in D \setminus \{(0, 0)\}$  et  $g(0, 0) = 0$ . Montrer que  $g$  est continue sur  $D \setminus \{(0, 0)\}$ .
3. Est-ce que  $g$  est continue en  $(0, 0)$  ? Justifier.

### Exercice 4 (6 points)

On considère les ensembles

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^4 = 1\} \text{ et } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; (1 + y^2)(x^2 - x) = y^2(x - 1)\}.$$

1. L'ensemble  $C$  est-il compact ? Justifier.
2. L'ensemble  $K = \{x \in \mathbb{R}; \exists y \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) \in C\}$  est-il compact ? Justifier.
3. Dessiner l'ensemble  $D$ .
4. L'ensemble  $D$  est-il compact ? Justifier.
5. L'ensemble  $K' = \{y \in \mathbb{R}; \exists x \in \mathbb{R} \text{ tel que } (x, y) \in D\}$  est-il compact ? Justifier.