Ex 5 :

2/ * $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longrightarrow f(x)+g(y)$.

Mq f est continue en a.

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite convergente vers a.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}$, $h(x_n, b) = f(x_n) + g(b)$

$f(x_n) = h(x_n, b) - g(b)$.

$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers a et $(b)_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers b, donc $((x_n, b))_{n\in\mathbb{N}}$ cv vers (a,b).

Puisque h est continue en (a,b), $\lim_{n\to+\infty} h(x_n, b) = h(a,b)$ et donc continue en a.

* Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite cv vers b.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $h(a, y_n) = f(a) + g(y_n)$.

$\lim_{n\to+\infty} (a, y_n) = (a,b)$ donc $\lim_{n\to+\infty} h(a, y_n) = h(a,b)$.

et $\lim_{n\to+\infty} g(y_n) = h(a,b) - f(a) = g(b)$.

Ex 7

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \begin{cases} \dfrac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^4} & \text{si } (x_1, x_2) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x_1, x_2) = (0,0). \end{cases}$$

1/ • $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$. donc $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = (0,0)$.

• $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = \dfrac{\frac{1}{n^3}}{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^4}} = \dfrac{1}{n} \times \dfrac{1}{1 + \frac{1}{n^2}}$

$= \dfrac{1}{n + \frac{1}{n}} = \dfrac{n}{n^2+1} = \dfrac{1}{n + \frac{1}{n}}$

Donc $\lim_{n\to+\infty} \varphi\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) = 0$

Si $\alpha \neq 0$:

On a $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=(0,0)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\neq\alpha\neq\varphi(0,0)$

donc φ n'est pas continue en $(0,0)$.

Si $\alpha = 0$:

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^{\cancel{2}}}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^{\cancel{2}}},\frac{1}{n}\right)=(0,0)$

et $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\varphi(0,0)$. On ne peut rien dire.

2/ $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n^2}=0$, $\lim\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)=(0,0)$.

$\forall n\in\mathbb{N}^*$, $\varphi\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)=\dfrac{\frac{1}{n^2}\frac{1}{n^2}}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2+\frac{1}{n^4}}=\frac{1}{2}$.

d'où $\lim\varphi\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}$

Comme dans 1/, si $\alpha=\frac{1}{2}$, on ne peut rien dire.

si $\alpha\neq\frac{1}{2}$, φ n'est pas continue en $(0,0)$.

- En utilisant la 1/, on obtient ~~deux suits qui ne~~ que ~~convergent pas vers~~ $\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\neq\lim\varphi\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)$.
alors que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n^2},\frac{1}{n}\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=(0,0)$.

$\boxed{\text{Donc } \varphi \text{ n'est pas continue en } (0,0)}$

Ex6

* Soit $x \in S_\infty$ donc $\|x\|_\infty = 1$ donc $x \neq (0,0)$.

$$\|f(x)\|_2 = \left\| \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} . x \right\|_2 = \left\| \frac{1}{\|x\|_2} . x \right\|_2 =$$

$$\left| \frac{1}{\|x\|_2} \right| . \|x\|_2 = \frac{1}{\|x\|_2} . \|x\|_2 = 1 . \cancel{\in S_2}$$

Donc $f(x) \in S_2$. Donc $\boxed{f(S_\infty) \subset S_2}$

* Soit $y \in S_2$. On a $\|y\|_2 = 1$.

On cherche $x \in S_\infty$ tel que.

$y = \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} . x$ i.e. $y = \frac{1}{\|x\|_2} . x$. $(*)$.

x et y sont colinéaires.

Cherchons x sous la forme $x = \alpha . y$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

On cherche $x = \alpha . y$ $(*)$.

et on obtient $y = \frac{1}{\|\alpha . y\|_2} . \alpha y$.

i.e. $y = \frac{\alpha}{|\alpha| \|y\|_2} . y$.

Donc $\frac{\alpha}{|\alpha| \|y\|_2} = 1$.

Donc $\frac{\alpha}{|\alpha|} = 1 \Rightarrow \alpha > 0$.

De plus on veut $\|x\|_\infty = 1$. i.e. $\|\alpha y\|_\infty = 1$.

$|\alpha| \|y\|_\infty = 1$.

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\|y\|_\infty}$.

En Conclusion : $\forall y \in S_2$, $\exists x \left(= \frac{1}{\|y\|_\infty} . y\right) \in S_\infty$, $f(x) = y$.

i.e. $S_2 \subseteq f(S_\infty)$.

$\boxed{\text{Finalement } f(S_\infty) = S_2 .}$

Scanned by CamScanner

2/ Soit N une norme sur $\mathbb{R}^2$.
Mq f est continue en 0 lorsque $\mathbb{R}^2$ est muni de la norme N.

Montrons tout d'abord que $N(f(x)) \leq N(x)$.

- $N(f(0)) = N(0) = 0$.

- $\forall x \neq 0$, $N(f(x)) = N\left(\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} \cdot x\right)$

$$= \frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} N(x).$$

Or d'après le cours : $\|x\|_2 \geqslant \|x\|_\infty$.
donc :

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} \leq 1.$$

$$\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_2} N(x) \leq N(x).$$

$$N(f(x)) \leq N(x).$$

Soit $\varepsilon > 0$, si $N(x-0) \leq \varepsilon$ alors comme.

$$N(f(x)-f(0)) \leq N(x-0).$$

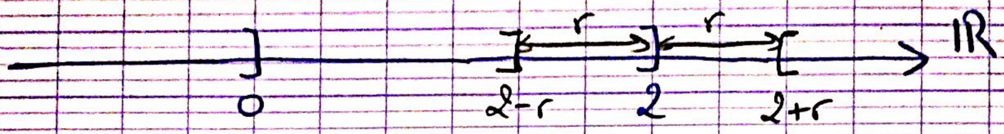
$\boxed{\text{alors } N(f(x)-f(0)) \leq \varepsilon}$ (On a trouvé un éta positif qui montre que f est continue en 0.

Donc f est continue en 0.

4

Ex 8

* $\mathbb{R}$ est muni de la norme usuelle ($x \mapsto |x|$).



→ • $2 \in]0,2]$.

• Soit $r>0$, $B(2,r) =]2-r, 2+r[$.

$2+\frac{r}{2} \notin]0,2]$ or $2+\frac{r}{2} \in B(2,r)$.

Donc $B(2,r) \not\subset]0,2]$.

2 n'est pas un point intérieur à $]0,2]$.

$\boxed{]0,2] \text{ n'est pas un ouvert de } \mathbb{R}.}$

→ $\mathbb{R} \setminus]0,2] =]-\infty ; 0] \cup]2,+\infty[$.

0 n'est pas un point intérieur de $\mathbb{R} \setminus]0,2]$.

En effet, Soit $r>0$, $B(0,r) =]-r,r[\not\subset \mathbb{R} \setminus]0,2]$

* $[-1,+\infty[$ n'est pas ouvert ~~car~~ car -1 n'est pas un point intérieur.