A propos des Inégalités

Les exercices avec * sont à chercher à la maison.

Exercice 1* *Inégalité de Cauchy*

1. Montrer que pour tous x, y réels on a : $2xy \leq x^2 + y^2$.
2. En déduire que pour tous $a, b \geq 0$ on a : $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$. Déterminer le cas d'égalité.

Exercice 2 *Inégalité de Bernoulli*
Pour tout $x > -1$ et tout n dans $\mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.

1. Montrer l'inégalité de Bernoulli par récurrence sur n.
2. Montrer l'inégalité de Bernoulli en utilisant la convexité de la fonction $x \longmapsto (1+x)^n$ sur $[-1, +\infty[$.

Exercice 3* Montrer en utilisant la notion de convexité que pour tout x dans $[0, \frac{\pi}{2}]$ on a $\sin x \geq \frac{2}{\pi} x$.

Exercice 4 Montrer à l'aide du TAF que l'on a pour tout x dans $\mathbb{R}$ $|\sin x| \leq |x|$.

Exercice 5

1. Montrer que pour tout $x > -1$ on a $\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$
   On pourra utiliser le TAF pour la fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ *entre* 0 *et* x.
2. En déduire que pour tout $x \geq -n$ on a $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x$.

Exercice 6* Montrer que pour tout x dans $[0, 1]$ et tout entier $n \geq 1$ on a

$$nx^{n-1} \leq 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} \leq n$$

Donner un encadrement similaire lorsque $x \geq 1$.

Exercice 7 A l'aide de la formule de Taylor-Lagrange montrer les inégalités suivantes :
- Pour tout x dans $[0, \pi]$ on a $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$.
- Pour tout x réel on a $|\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}| \leq \frac{x^4}{24}$.
- Pour tout $x \geq 0$ et tout n dans $\mathbb{N}$ on a $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$.

Exercice 8 Montrer que pour tout $a > 0$ on a $\frac{1}{2a} - \frac{1}{8a^3} < \sqrt{a^2+1} - a < \frac{1}{2a}$,
- par des transformations algébriques*.
- à l'aide de la formule de Taylor-Lagrange.

théorème de l'acc. fini

Théorème 1 (TAF) *Si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ alors il existe c dans $]a,b[$ vérifiant*

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(c)$$

Théorème 2 (Formule de Taylor-Lagrange) *Si f est n fois continument dérivable sur $[a,b]$ et $n+1$ fois dérivable sur $]a,b[$ alors il existe c dans $]a,b[$ vérifiant*

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)$$

Définition 1 (convexité) *Soit f une fonction continue sur $[a,b]$. On dit que f est convexe si et seulement si $\forall x,y\in[a,b],\ \forall\theta\in[0,1]\ :\ f(\theta x+(1-\theta y))\leq\theta f(x)+(1-\theta)f(y))$.*

Théorème 3 (convexité) *Considérons une fonction f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$. Alors*
(i) f convexe $\Longleftrightarrow$ le graphe de f est au-dessus de toutes ses tangentes sur $[a,b]$
(i.e. $\forall x,y\in[a,b]:f(y)\geq f(x)+f'(x)f(y-x)$),
(ii) si f est deux fois dérivable sur $]a,b[$, alors f convexe $\Longleftrightarrow$ $f''(x)\geq 0,\ \forall x\in]a,b[$.

Définition 2 *Une fonction g est concave si la fonction opposée $f=-g$ est convexe.*

Augustin Louis Cauchy (1789-1857) mathématicien français
Bernoulli (Jacques (1654-1705), Jean (1667-1748), Daniel (1700-1782)(fils de Jean)) famille de physiciens et mathématiciens suisses
Brook Taylor (1685-1731) homme de sciences anglais
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) mathématicien, mécanicien et astronome italien.
Leonhard Euler (1707-1783) mathématicien et physicien suisse.