Chap 2 : Théorèmes limites en probabilités utilisés en statistique.

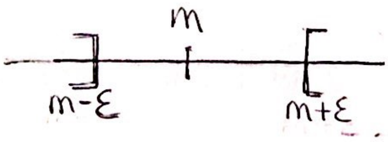
n nombre d'observations sera grand (il va tendre vers l'infini).

- **Loi (faible) des grands nombres (1er thm).**

$(X_n)_{n\geq 1}$ suite de variables aléatoires de même loi, intégrable ($E(|X_1|)<+\infty$) de carré intégrables ($V(X_n)=\sigma^2$, $E(X_1)=m$).

Soit $\varepsilon>0$, $P\left(\left|\frac{X_1+X_2+\dots+X_n}{n}-m\right|\geq\varepsilon\right)\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$

Convergence en probabilité.



Clef de la preuve : Bienaymé-Tchebychev.

Soit Y une v.a d'espérance m et de variance σ^2. Alors pour tout $\varepsilon>0$

$$P(|Y-m|\geq\varepsilon)\leq\frac{V(Y)}{\varepsilon^2}.$$

BC : Bienaymé-Tchebychev
LGN : Loi des grands nombres

BC $\Rightarrow$ LGN.

$Y=\overline{X_n}$. $E(Y)=E\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)=\frac{E(X_1)+\dots+E(X_n)}{n}=\frac{n\times m}{n}=m.$

$Var(Y)=Var\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\left(Var(X_1)+\dots+Var(X_n)\right)$

car elles sont indépendantes.

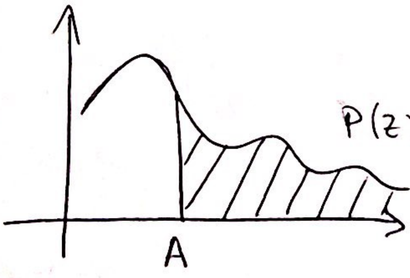
$Var(Y)=\frac{n\sigma^2}{n^2}=\frac{\sigma^2}{n}$. donc $Var(\overline{X_n})=\frac{\sigma^2}{n}$.

Soit $\varepsilon>0$. $P(|\overline{X_n}-m|\geq\varepsilon)\leq\frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{}0$ $\square$

Inégalité de Markov.

Soit Z une v.a positive. Soit r un réel >0. Soit $A\geq 0$.

$$P(Z\geq A)\leq\frac{E(Z^r)}{A^r}$$



$P(Z\geq A)$.

$E(Z^r)=E(Z^r$ sur l'ens où $Z<A)+E(Z^r$ sur l'ens où $Z\geq A)$

$=E(Z^r\times\mathbb{1}_{Z<A})+E(Z^r\times\mathbb{1}_{Z\geq A})$.

$E(Z^r)\geq 0+E(A^r\times\mathbb{1}_{Z\geq A})$

$E(Z^r)\geq A^r\,E(\mathbb{1}_{Z\geq A})$

$E(Z^r)\geq A^r\,\mathbb{P}(Z\geq A)$ $\Rightarrow$ $\boxed{\frac{E(Z^r)}{A^r}\geq\mathbb{P}(Z\geq A).}$ $\square$

Markov $\Rightarrow$ Bienaymé-Tchebychev.

$Z = |Y-m|$, $A = \varepsilon$ $r = 2$.

- **Théorème central limite (TLC) (2^e théorème).**
  Thm de la limite centrée (TLC).

$\overline{X_n} - m$. $E(\overline{X_n}-m) = 0$

$Var(\overline{X_n}-m) = Var(\overline{X_n}) = \frac{\sigma^2}{n}$

On s'intéresse à $\frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\overline{X_n}-m)$. On a $\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-m)}{\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $P\left(\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-m)}{\sigma} \leqslant t\right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(t)$.

$P\left(a \leqslant \frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-m)}{\sigma} \leqslant b\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a)$.

Applications: $(E(e^{itx}))$

- Bernouilli: $\theta \in]0;1[$. $E_\theta(X_1) = \theta$ $Var_\theta(X_1) = \theta \times (1-\theta)$.

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\theta)}{\sqrt{\theta(1-\theta)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0;1)$.

- Poisson $\lambda > 0$: $E_\lambda(X_1) = \lambda$, $Var_\lambda(X_1) = \lambda$

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\lambda)}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathcal{N}(0,1)$.

- Loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$ $E_\lambda(X_1) = 1/\lambda$, $Var_\lambda(X_1) = 1/\lambda^2$.

$\frac{\sqrt{n}(\overline{X_n}-\frac{1}{\lambda})}{\frac{1}{\lambda}} \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$. $\sqrt{n}(\lambda\overline{X_n}-1) \xrightarrow[n\to+\infty]{loi} \mathcal{N}(0,1)$

TCL amélioré (Slutzky).

$\dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - m)}{\sigma} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$. Soit S_n un observateur de σ qui converge vers σ en proba. $\dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - m)}{S_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$ (Intervalle de confiance).

- Bernouilli : $\overline{X}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \theta$

$$\sqrt{\overline{X}_n \times (1-\overline{X}_n)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\theta \times (1-\theta)}.$$

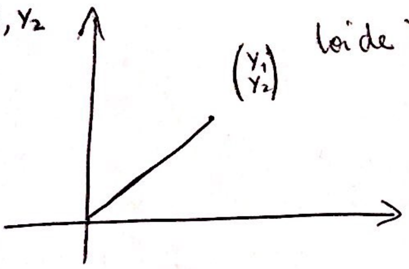
$$\frac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \theta)}{\sqrt{\overline{X}_n \times (1-\overline{X}_n)}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1).$$

- Poisson : $\dfrac{\sqrt{n}\,(\overline{X}_n - \lambda)}{\sqrt{\overline{X}_n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0,1)$.

- Loi gaussienne : $X_1, \dots X_n$ n échantillon $\mathcal{N}(0,1)$.

$n=2$

Y_1, Y_2



loi de $Y_1^2 + Y_2^2$?

On s'intéresse à $Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$

Définition :
la loi de $Z = Y_1^2 + Y_2^2 + \dots + Y_n^2$ est appelée loi de χ^2 à n degré de liberté.