Espaces Vectoriels Normés

Mise à jour du cours du 02/03

Lundi 15 janvier 2018

Soit E un espace vectoriel.

Le but de cette partie est de définir la notion de distance entre deux vecteurs de E.

Ex : – $E = \mathbb{R}$: On peut définir la distance entre deux réels a et a' par $d(a, a') = |a - a'|$.

– $E = \mathbb{C}$: On peut poser $z, z' \in \mathbb{C}$, $d(z, z') = |z - z'|$. Si on écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors $d(z, z') = |x - x' + i(y - y')| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

– $E = \mathbb{R}^2$: Si $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on peut définir $d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

1 Normes et distances sur un espace vectoriel

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est par définition une application $N : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto N(x)$ vérifiant :

– $\forall\, x \in E$, $N(x) \geqslant 0$, et $(N(x) = 0 \iff x = 0)$,

– $\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,

– (Inégalité triangulaire) $\forall\, x, y \in E$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Définition : Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple (E, N) où E est un e.v et N une norme sur E.

Propriétés :

– Soient $x_1, x_2, x_3 \in E$ avec (E, N) un e.v.n. Alors,

$N(x_1 + x_2 + x_3) = N((x_1 + x_2) + x_3) \leqslant N(x_1 + x_2) + N(x_3) \leqslant N(x_1) + N(x_2) + N(x_3)$

– Si $x_1, ..., x_p \in E$, $N(x_1, ..., x_p) \leqslant N(x_1) + ... + N(x_p)$.

– Si $x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$.

Démo :

$N(x) = N((x - y) + y) \leqslant N(x - y) + N(y)$, $N(x) - N(y) \leqslant N(x - y)$.

Aussi $N(y) - N(x) \leqslant N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1| N(x - y) = N(x - y)$.

Finalement, $|N(x) - N(y)| = \mathrm{Max}(N(x) - N(y), N(y) - N(x)) \leqslant N(x - y)$.

Ex :

– $E = \mathbb{R}$: Posons $N(x) = |x|$ (Valeur absolue).

N est une norme sur $\mathbb{R}$, car $|x| \geqslant 0$, $(|x| = 0 \iff x = 0)$,

$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda x| = |\lambda||x|$, et $\forall\, x, y \in E$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.

– $E = \mathbb{C}$: Posons $N(x) = |x|$ (Module).

N est une norme sur $\mathbb{C}$, car $|z| \geqslant 0$, $(|z| = 0 \iff z = 0)$,

$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda z| = |\lambda||z|$, et $\forall\, z, z' \in E$, $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

– Espaces euclidiens :

Soit E un e.v. Une forme bilinéaire est une application $B : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto B(x, y)$ telle qu'elle est linéaire en chacune de ses variables.

Un produit scalaire sur un e.v E est une forme bilinéaire symétrique sur E définie positive au sens suivant :

$\forall\ x \in E$, $B(x,x) \geqslant 0$, et $B(x,x) = 0 \iff x = 0$. Un espace euclidien est un e.v muni d'un produit scalaire.

On pose $B(x,\, y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$. B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ avec $(x,\, y \in \mathbb{R}^n)$.

On pose maintenant : $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$. Alors, N est une norme sur E.

Démo :

$i/$ Par définition, $N(x) \geqslant 0$, et $N(x) = 0 \iff B(x,x) = 0 \iff x = 0$

$ii/$ Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $N(\lambda x) = \sqrt{B(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 B(x,x)} = |\lambda|\sqrt{B(x,x)} = |\lambda| N(x)$,

$iii/$ On va utiliser le lemme : $\forall\ x,\, y \in E$, posons $p(\lambda) = B(x + \lambda y, x) + \lambda B(x + \lambda y, y)$. Si on pose $z = x + \lambda y$ fixé, et $u(\omega) = B(z, \omega)$, on a écrit que $(u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y))$.

On aura $p(\lambda) = B(x,\, x) + \lambda B(y,\, x) + \lambda B(x,\, y) + \lambda^2 B(y,\, y)$ donc $p(\lambda) = B(x,\, x) + 2\lambda B(y,\, x) + \lambda^2 B(y,\, y)$ donc $\lambda \mapsto p(\lambda)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$ et $p(\lambda) = B(x + \lambda y, x + \lambda y) \geqslant 0$.

Or, si un polynôme de degré $\leqslant 2$ ne change pas de signe, son discriminant est $\leqslant 0$.

$(2B(x,\, y))^2 - 4B(x,\, x)B(y,\, y) \leqslant 0$, donc $|B(x,\, y)| \leqslant \sqrt{B(x,x)}\ \sqrt{B(y,y)}$. On a donc $N(x + y)^2$ $= B(x + y,\, x + y) = B(x,\, x + y) + B(y,\, x + y) = B(x,\, x) + B(y,\, x) + B(x,\, y) + B(y,\, y) =$ $B(x,\, x) + 2B(x,\, y) + B(y,\, y) \leqslant N(x)^2 + N(x)N(y) + N(y)^2$.

On a obtenu $N(x + y)^2 \leqslant (N(x) + N(y))^2$ soit $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

$-$ $E = \mathbb{R}^n$: $B(x,\, y) = \Sigma\ x_i y_i$. La norme obtenue se note $||..||_2$ et pour $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est donnée par

$||\text{x}||_2 \overset{def}{=} (\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

$-$ Autre exemple de normes : Soient E, E' deux e.v et $\varphi : E \to E'$ linéaire injective.

Soit N' une norme sur E'. Pour $x \in E$, posons $N(x) \overset{def}{=} N'(\varphi(x))$. Alors N est une norme sur E :

$i/$ $N(x) \geqslant 0$ de plus $N(x) = 0 \Longrightarrow N'(\varphi(x)) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = 0$ (car N' est une norme) $\Longrightarrow x = 0$. (puisque φ est injective).

$ii/$ $N(\lambda x) = N'(\varphi(\lambda x)) = N'(\lambda\varphi(x)) = |\lambda| N'(\varphi(x)) = |\lambda| N(x)$

$iii/$ $N(x + y) = N'(\varphi(x + y)) = N'(\varphi(x) + \varphi(y)) \leqslant N'(\varphi(x)) + N'(\varphi(y)) = N(x) + N(y)$

1.1 Normes usuelles de $\mathbb{R}^p$

Soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$, les normes usuelles de $\mathbb{R}^p$ sont définies par :

$$\boxed{||x||_1 \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{p} |x_j|, \qquad ||x||_2 \overset{def}{=} (\ \sum_{j=1}^{p} x_j^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad ||x||_\infty \overset{def}{=} \underset{j \in \{1,\, \dots,\, p\}}{\text{Max}} [|x_j|].}$$

Propriété : $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, sont des normes de $\mathbb{R}^p$.

Démo :

$-$ Pour $||..||_2$: voir plus haut.

$-$ Pour $||..||_1$:

Soit $x \in E$, $||x||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| \geqslant 0$, et $\sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| = 0 \iff \forall\ j\ x_j = 0 \iff x = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |\lambda x_j| = |\lambda|(\sum\limits_{j=1}^{p} |x_j|) = |\lambda| ||x||_1$.

Soient $x,\, y \in \mathbb{R}^p$, $||x + y||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j + y_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} (|x_j| + |y_j|) = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| + \sum\limits_{j=1}^{p} |y_j| = ||x||_1 + ||y||_1$

$-$ Pour $||..||_\infty$:

$||x||_\infty = 0 \Longrightarrow \underset{j\in\{1,\ ...,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j|] = 0. \Longrightarrow \forall\ j\ x_j = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Vérifions l'inégalité triangulaire : $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j| = ||x_j||_\infty + ||y_j||_\infty$ donc $\underset{j\in\{1,\ ...,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j| + |y_j|] \leqslant ||x_j||_\infty + ||y_j||_\infty$.

<u>Propriété :</u> $\forall\ x \in \mathbb{R}^p$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant p||x||_\infty$.

<u>Démo :</u> $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\}$, $|x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ donc $||x||_\infty = \underset{j\in\{1,\ ...,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j|] \leqslant ||x||_2$.

Pour montrer que $||x||_2 \leqslant ||x||_1$, il suffit de vérifier que $||x||_2^2 \leqslant ||x||_1^2$

Soit $\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p}|x_j||x_i|\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} |x_j||x_i|$. Or, $\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} |x_j||x_i| \geqslant 0$, donc

$||x||_2^2 \leqslant ||x||_1^2$, enfin $||x||_2 \leqslant ||x||_1$.

$||x||_1 = \sum_{j=1}^{p}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p}||x||_\infty = ||x||_\infty \sum_{j=1}^{p} 1 = p||x||_\infty$

<u>Remarque :</u>

Si E est un e.v de dimension finie p, et si $(e_1,\ ...,\ e_p)$ est une base de E, alors $\forall\ x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. On peut donc définir des normes N_1, N_2, N_∞ sur E en posant

$$N_\ell \stackrel{def}{=} \left|\left|\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right|\right|_\ell,\ \ell \in \{1, 2, \infty\}$$

1.2 Norme produit

Soient $(E_1,\ N_1)$,$(E_2,\ N_2)$ deux e.v.n. Soit $E_1 \times E_2 = \{x = (x_1, x_2),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$.

<u>Définition :</u> $N(x) \stackrel{def}{=} \text{Max}[N_1(x_1),\ N_2(x_2)]$ est une norme sur E, et est appelée norme produit.

1.3 Distance associée à une norme

<u>Définition :</u> Soit $(E,\ N)$ un e.v.n. la distance $d(x,\ y)$ entre $x \in E$ et $y \in E$, associée à N est par définition $d(x,\ y) = N(x - y)$.

<u>Propriété :</u> La distance précédente est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$i/$ $\forall\ (x,\ y) \in E \times E$ $d(x,\ y) \geqslant 0$ et $(d(x,\ y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$

$ii/$ (symétrie) $\forall\ x,\ y \in E$, $d(x,\ y) = d(y,\ x)$

$iii/$ (Inégalité triangulaire) $\forall\ x,\ y,\ z \in E$, $d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$

<u>Démo :</u>

$ii/$ $d(x,\ y) = N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1|N(x - y) = N(x - y) = d(y,\ x)$

$iii/$ $d(x,\ z) = N(x - z) = N((x - y) + (y - z)) \leqslant N(x - y) + N(y - z) = d(x,\ y) + d(y,\ z)$

<u>Remarque :</u>

De manière générale, si E est un ensemble, on définit une d distance sur E comme une application vérifiant $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant $i/$, $ii/$, $iii/$.

C'est une notion de distance plus générale de la distance associée à une norme. Si $d(x,\ y) = N(x - y)$. On peut prendre par exemple pour tout $a \in E$, $d(x + a,\ y + a) = N((x + a) - (y + a)) = N(x - y) = d(x,\ y)$. Cette propriété n'est pas toujours vraie pour une distance "normale".

Soit $(E,\ N)$ un e.v.n. Soit $a \in E$.

Définition :

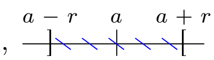
$i/$ Soit $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est par définition $B(a,\, r) = \{x \in E,\ N(x - a) < r\} = \{x \in E,\ d(x,\, a) < r\}$

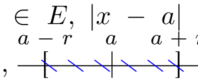
$ii/$ Soit $r \geqslant 0$, la boule fermée de centre a et de rayon r est par définition $\overline{B}(a,\, r) = \{x \in E,\ N(x - a) \leqslant r\} = \{x \in E,\ d(x,\, a) \leqslant r\}$

Remarque :

- Soit $r > 0$, alors $a \in B(a,\, r) \subset \overline{B}(a,\, r)$
- $\overline{B}(a,\, 0) = \{a\}$
- Si $r < r'$ $B(a,\, r) \subset B(a,\, r')$, $\overline{B}(a,\, r) \subset \overline{B}(a,\, r')$

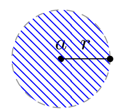
Ex :

- $E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $B(a,\, r) = \{x \in E,\ |x - a| < r\} =]a - r,\, a + r[$, 

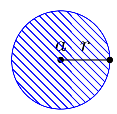
$\overline{B}(a,\, r) = \{x \in \mathbb{R},\ |x - a| \leqslant r\} = [a - r,\, a + r]$, 

- $E = \mathbb{C}$, $N(z) = |z|$, pour $z \in \mathbb{C}$. Soient $a,\, r > 0$.

Alors $B(a,\, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| < r\}$ c'est le disque ouvert de centre a, et de rayon r :



Alors $\overline{B}(a,\, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| \leqslant r\}$ c'est le disque fermé de centre a, et de rayon r :



- $E = \mathbb{R}^p$ muni des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, on a vu que $\forall\, x \in \mathbb{R}^p$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant p||x||_\infty$

Notons $B_\ell(a,\, r) = \{x \in \mathbb{R}^p,\ ||x - a||_\ell \leqslant r\}$. $\ell \in \{1, 2, \infty\}$

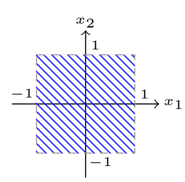
Soit $r > 0$, soit $x \in B_\ell(0,\, \frac{r}{p})$. Alors $||x||_\infty < \frac{r}{p}$, donc $||x||_1 \leqslant p||x||_\infty < p\frac{r}{p} = r$ or $x \in B_1(0,\, r)$.

On en déduit que $B_\infty(0,\, \frac{r}{p}) \subset B_1(0,\, r)$ De même $B_1(0,\, r) \subset B_2(0,\, r) \subset B_\infty(0,\, r)$.

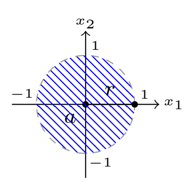
$$\forall\, x \in E,\ B_\infty(0,\, \tfrac{r}{p}) \subset B_1(0,\, r) \subset B_2(0,\, r) \subset B_\infty(0,\, r).$$

Cas de $p = 2$, $r = 1$

Alors $B_\infty(0,\, 1) = \left\{x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, ||x||_\infty\right\}$
$= \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, \mathrm{Max}[|x_1|,\, |x_2|] < 1\right\}$
$= \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\right\}$

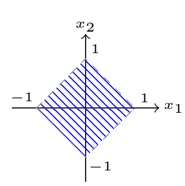


Alors $B_2(0,\, 1) = \left\{x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, ||x||_2\right\}$
$= \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\right\}$
$= \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\right\}$
$= \{z = x_1 + ix_2), |z| < 1\}$



Alors $B_\infty(0,\, 1) = \left\{x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, ||(x_1,\ x_2)||_1\right\} = \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| + |x_2| < 1\right\}$

Alors $B_1(0,\, 1) \cap \{(x_1,\ x_2), x_1 \leqslant 0, x_2\} = A$.
$B_1(0,\, 1)$ s'obtient par symétrie par A, par rapport aux axes.



Définition :

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes ssi $\exists\ C > 0$, telle que $\forall\ x \in E$, $N_1(x) \leqslant CN_2(x)$ et $N_2(x) \leqslant CN_1(x)$.

Remarque :

On définit aussi "N_1 et N_2 sont équivalentes" par :

$\exists\ C_1 > 0$, telle que $\forall\ x \in E$, $N_2(x) \leqslant C_1N_1(x)$ et, $\exists\ C_2 > 0$, telle que $\forall\ x \in E$, $N_1(x) \leqslant C_2N_2(x)$.

Cette définition est équivalente à la précédente.

Déf 1 $\Longrightarrow$ Déf 2, c'est évident, on prend $C_1 = C_2 = C$. Déf 1 $\Longrightarrow$ Déf 2, en prennant $C = \text{Max}[C_1,\ C_2]$.

Ex : Sur $\mathbb{R}^p$ $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, sont des normes équivalentes (car $\forall\ x \in \mathbb{R}^p$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant p||x||_\infty$.)

2 Limites et continuité

Définition :

On considère $(E,\ N)$ un e.v.n. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que u_n converge vers ℓ ssi la suite réelle $(N(u_n - \ell))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Propriété : Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $u'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Alors, $u_n + u'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Démo :

$$N((u_n + u'_n) - (\ell + \ell')) = N((u_n - \ell) + (u'_n - \ell')) \leqslant \underbrace{N(u_n - \ell)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{N(u'_n - \ell')}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

donc $N((u_n + u'_n) - (\ell + \ell')) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $u_n + u'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$

Remarque :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $(E,\ N)$ converge, la limite est unique : Supposons que $u_n \longrightarrow \ell$, $u_n \longrightarrow \ell'$. Alors,

$0 \leqslant N(\ell - \ell') = N((\ell - u_n) + (\ell' - u_n)) \leqslant N(\ell - u_n) + N(\ell' - u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Longrightarrow 0 \leqslant N(\ell - \ell') \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 0$ d'où $N(\ell - \ell') = 0$, donc $\ell - \ell' = 0$.

Proposition :

Soient N_1, N_2 deux normes equivalentes sur un e.v E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, soit $\ell \in E$. Alors $(N_1(u_n - \ell) \longrightarrow 0) \Longleftrightarrow (N_2(u_n - \ell) \longrightarrow 0)$. $((i) \Longleftrightarrow (ii))$.

Démo :

Montrons que $i/ \Longrightarrow ii/$. Comme N_1, N_2 sont équivalents, $\exists\ C > 0$, tel que $\forall\ x \in E$, $N_2(x) \leqslant CN_1(x)$ donc $0 \leqslant N_2(u_n - \ell) \leqslant \underbrace{CN_1(u_n - \ell)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$. Donc $N_2(u_n - \ell) \longrightarrow 0$. De même $ii/ \Longrightarrow i/$ en inversant N_1 et N_2.

Corollaire :

Comme les normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$ sont équivalentes :

Une suite de $\mathbb{R}^p$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ pour l'une de ces normes ssi elle converge pour une autre.

Remarque :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(E,\ N)$ converge vers ℓ, il est équivalent de montrer que la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^p$, $u_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{p,n} \end{bmatrix}$ où $((x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}$ $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\})$. Alors

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{\text{'}}$ muni de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty \Longleftrightarrow$ Les suites $(x_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ_j, $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\})$.

Démo :

Par la remarque précédente, on peut supposer $\ell = 0$. On doit montrer $||u_n||_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff \forall\ j \in \{1,\ \dots,\ p\}\ (x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 (où $k = 1,\ 2$ ou ∞). Montrons $\Longrightarrow$. Supposons $||u_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, $||u_n||_\infty = \text{Max}[|x_{1,n}|,\ |x_{2,n}|,\ \dots,\ |x_{p,n}|]$. Alors $|x_{j,n}| \leqslant ||u_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, $x_{j,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\forall\ j \in \{1,\ \dots,\ p\}$.

Montrons $\Longleftarrow$, On a : $x_{j,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,\ \forall\ j \in \{1,\ \dots,\ p\}$.

Alors $||u_n||_1 = |x_{1,n}| + |x_{2,n}| + \dots + |x_{p,n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 0 + \dots + 0 = 0$. Donc $||u_n||_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

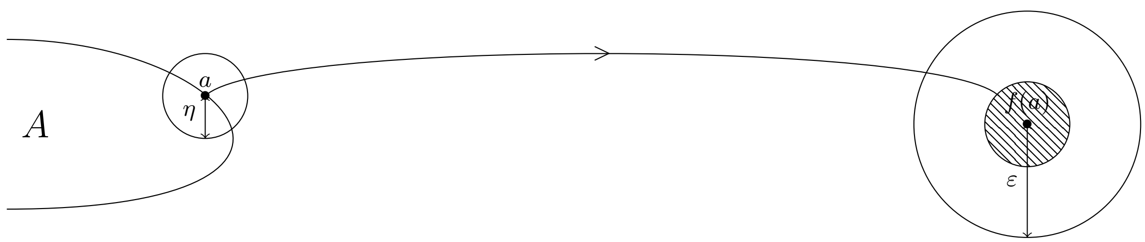
2.1 Applications Continues

Définition :

Soient $(E,\ N)$, $(E',\ N')$ deux e.v.n. Soient $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$, $a \in A$. On dit que f est continue en a ssi $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in A$, $\underbrace{N(x-a) < \eta}_{x\in B_E(a,\ \eta)} \Longrightarrow \underbrace{N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon}_{f(x)\in B_{E'}(f(a),\ \varepsilon)}$.

Remarque :

$\Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in A \cap B_E(a,\ \eta)$, on a $f(x) \in B_{E'}(f(a),\ \varepsilon)$



Remarque :

Cela généralise la définition des fonctions continues d'une variable : I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, f est continue en a : $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in I$, $|x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Proprosition :

Soit $f : A \longrightarrow E'$ continue en $a \in E$. Alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $f((x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans E'.

Démo :

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a, $\exists\ \eta > 0$ tel que $\forall\ x \in A$, $N(x - a) < \eta \Longrightarrow N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$.

Soit (x_n) convergeant vers a, $x_n \in A$. Cela signifie que $N(x_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il existe donc n_0, tel que $\forall\ n \geqslant n_0$, $N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$. On a prouvé que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$, et $\forall\ n \geqslant n_0$, $N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$.

Donc, $N'(f(x_n) - f(a)) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow +\infty$ donc $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ dans E'.

Théorème :

Soient $(E,\ N)$, $(E',\ N')$ deux e.v.n. Soient $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$, $a \in A$.

f est continue en $a \iff$ Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Démo :

$i/ \longrightarrow ii/$ est la proposition précédente.

On peut montrer $ii/ \longrightarrow i/$ par contraposée. On suppose donc : $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ et $\forall\ \eta > 0$, $\exists\ x \in A$ avec $N(x - a) < \eta$ et $N'(f(x) - f(a)) \geqslant \varepsilon_0$.

Appliquons cela avec $\eta = \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Il existe donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ vérifiant $N(x_n - a) < \frac{1}{n+1}$ et $N'(f(x) - f(a)) \geqslant \varepsilon_0$.

On a donc $N(x_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A convergeant vers a. De plus la suite

$f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers $f(a)$ (puisque si elle convergeait vers $f(a)$, $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} N'(f(x)-f(a)) \geqslant \varepsilon_0$ > 0 : absurde.) On a montré que $i/$ (faux) $\Longrightarrow ii/$ (faux)

<u>Application du théorème précédent :</u>

<u>Proposition :</u>

Soient E, E' deux e.v, N, N_1 deux normes équivalentes sur E, et N', N_1' deux normes équivalentes sur E'. Soient $A \subset E$, $a \in A$, $f : A \longrightarrow E'$. Il y a équivalence entre :

– $i/$ f est continue en a lorsque E est muni de N, et E' est muni de N'.

– $ii/$ f est continue en a lorsque E est muni de N_1, et E' est muni de N_1'.

<u>Démo :</u>

Par le théorème précédent, $i/$ équivaut à :

– $i'/$ $\forall$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A vérifiant $N(x_n - a) \longrightarrow 0$, on a : $N'(f(x)-f(a)) \longrightarrow 0$.

De même $ii/$ équivaut à :

– $ii'/$ $\forall$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A vérifiant $N_1(x_n - a) \longrightarrow 0$, on a : $N_1'(f(x)-f(a)) \longrightarrow 0$.

Or, on a vu que si N est équivalente à N_1 : $(N(x_n - a) \longrightarrow 0) \Longleftrightarrow (N_1(x_n - a) \longrightarrow 0)$. De même, comme N' est équivalente à N_1', $(N'(f(x)-f(a)) \longrightarrow 0) \Longleftrightarrow (N_1'(f(x)-f(a)) \longrightarrow 0)$. Donc $i'/ \Longleftrightarrow ii'/$.

<u>Remarque :</u>

Supposons $E = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}^p$. On sait que les normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, sont équivalentes. Lorsqu'on étudie la continuité de $f : A \longrightarrow E'$. où $A \subset E$, on peut étudier n'importe laquelle de ces normes.

2.2 Sommes de fonctions continues en un point

<u>Notation :</u>

$f : A \longrightarrow E'$, $g : A \longrightarrow E'$, on note $f+g : A \longrightarrow E'$, $x \mapsto (f+g)(x) = f(x)+g(x)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$, $\forall$ $x \in a$.

<u>Proposition :</u>

Si f et g sont continues en $a \in A$ alors $f+g$ et $\lambda f(x)$ sont continues en a.

<u>Démo :</u>

Pour voir que $f+g$ est continue en a, il suffit de montrer que $\forall$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, $((f+g)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(f+g)(a)$. Or comme f est continue en a, $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ et g est continue en a, $g(x_n) \longrightarrow g(a)$. Donc $f(x_n)+g(x_n) \longrightarrow f(a)+g(a)$.

<u>Proposition :</u>

Soient (E, N), (E', N'), (E'', N'') trois e.v.n. Soient $A \subset E$, $B \subset E'$, $f : A \longrightarrow E'$, $g : B \longrightarrow E''$. Supposons $f(A) \subset B$. On peut donc définir $g \circ f : A \longrightarrow E''$. Soit $a \in A$. On pose $b = f(a)$ $(\in f(A) \subset B)$ Supposons f continue en a et g continue en b. Alors $g \circ f$ continue en $g \circ f$ est continue en a.

<u>Démo :</u>

Il suffit de voir que pour toute quite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a $((g\circ f)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(g \circ f)(a)$. Or comme f est continue en a, $x_n \longrightarrow a \Longleftrightarrow a$, $f(x_n) \longrightarrow b$, et comme g est continue en b, $y_n = f(x_n) \longrightarrow b \Longleftrightarrow g(y_n) = (g\circ f)(x_n) \longrightarrow g(b) = (g \circ f)(a)$

<u>Proposition :</u>

Soient (E, N) un e.v.n. $A \subset E$, $a \in E$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On munit $\mathbb{R}^p$ de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$.

Pour $x \in A$, écrivons $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$ On obtient $f_j : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ ..., \ p\}$. Il y a équivalence entre :

– $i/$ f est continue en a.

– $ii/$ $\forall$ $j \in \{1, \ ..., \ p\}$, f_j est continue en a.

<u>Démo :</u>

– $i/ \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \longrightarrow a$, la suite $f((x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans $\mathbb{R}$.

– $ii/ \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \longrightarrow a$, $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\}$ la suite $f_j((x_n))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f_j(a)$.

Or on a vu que $\begin{bmatrix} f_1(x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_n) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{bmatrix} \iff \forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\}\ f_j((x_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_j(a)$.

<u>Définition :</u>

On dit que $f : A \longrightarrow E'$ est continue sur $A \iff \forall\ a, \in A$ f est continue est a.

<u>Théorème :</u>

Soient $(E,\ N)$, $(E',\ N')$ deux e.v.n. Soient $u : E \longrightarrow E'$ linéaire. Il y a équivalence entre :

– $i/$ u est continue sur E

– $ii/$ u est continue sur 0

– $iii/$ $\exists\ C > 0,\ \forall\ x \in E,\ N'(u(x)) \leqslant CN(u(x))$.

<u>Démo :</u>

$i/ \Longrightarrow ii/$: évident. $0 \in E$

$ii/ \Longrightarrow iii/$: Si u est continue en 0, $\forall\ \varepsilon > 0$ et $\exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in E$, $N(x-0) < \eta \Longrightarrow N'(u(x) - u(0)) < \varepsilon$

Comme u est linéaire, $u(0) = 0$ donc $N(x) < \eta \Longrightarrow N'(u(x)) < \varepsilon$ Appliquons cela avec $\varepsilon = 1$.

$\exists\ \eta_0 > 0$ tel que $N(x) < \eta_0 \Longrightarrow N'(u(x)) < 1$. Soit $y \in E$, $y \neq 0$. Posons $x = \frac{y}{N(y)} \cdot \frac{\eta_0}{2}$. Alors $N(x) = \frac{\eta_0}{2}$ $< \eta_0$ donc soit $N'(\frac{\eta_0}{2N(y)}u(y)) < 1$ puisque u est linéaire. Donc, $\forall\ y \in E \setminus \{0\}$ $\frac{N'(u(y))}{2N(y)/\eta_0} < 1$ d'où $N'(u(y)) < CN(y)$ avec $C = \frac{2}{\eta_0}$ Donc $iii/$ est vraie.

$iii/ \Longrightarrow i/$: Soit $a \in E$. On veut monter que u est continue en a. $\exists\ C > 0$ et $\forall\ y \in E$, $N'(y) < CN(y)$.

Pour $\varepsilon > 0$ donné, posons $\eta = \varepsilon/C$, supposons $N(x-a) < \eta$. Alors,

$N'(u(x) - u(a)) = N'(u(x-a)) \leqslant CN(x-a) < C\eta = \varepsilon$. Donc u est continue en a.

<u>Proposition :</u>

Munissons $\mathbb{R}^p$ de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$. Soient $(E,\ N)$ un e.v.n et $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$, une application linéaire. Alors u est continue.

<u>Démo :</u>

Notons $(e_1,\ ...,\ e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, si $x \in \mathbb{R}^p$, $\sum\limits_{j=1}^{p} x_j e_j$. Alors $u(x) = \sum\limits_{j=1}^{p} x_j u(e_j)$ car u est linéaire.

Alors $N(u(x)) = N(\sum\limits_{j=1}^{p} x_j u(e_j)) \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} N(x_j u(e_j)) = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| N(u(e_j))$. Posons $M = \mathrm{Max}[N'(u(e_j))]$. Donc $N(u(x)) \leqslant M \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| = M||x||_1$. D'après $iii/$ de la propriété pécédente, cela implique que u est continue.

2.3 Exemples de fonctions continues

<u>Ex 1 :</u>

L'application $E \times E \longrightarrow E$, $(x,\ y) \mapsto x + y$ est continue.

<u>Ex 2 :</u>

L'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,\ y) \mapsto x \cdot y$ est continue.

<u>Ex 3 :</u>

L'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z,\ \omega) \mapsto z \cdot \omega$ est continue.

<u>Ex 4 :</u>

Soient $(E,\ N)$ un e.v.n, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^*$. Soit $a \in E$, supposons f continue en a. Alors, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est continue en a.

<u>Ex 5 :</u>

Soit $E = M_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p. Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in M_p(\mathbb{R})$, posons

$N(A) = p \underset{1 \leqslant i,j \leqslant p}{\text{Max}} |a_{ij}|$. N est une norme et on pose N' une norme sur E, telle que $\forall\ A,\ B \in M_p(\mathbb{R}$

$N'((A,\ B)) = \text{Max}[N(A),\ N(B)]$. Soit $\Phi : E \times E \longrightarrow E$. $(A,\ B) \longrightarrow AB$. Φ est une continue dans $(E,\ N')$.

Ex 6 :

Soit $(E,\ N)$ un e.v.n. L'application $E \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto N(x)$ est continue.

(Je scannerai leurs démonstrations car trop longues pour certaines.)

2.4 Exemples de fonctions non continues

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ (x,\ y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,\ y) \neq 0$, et $f(0,\ 0) = 0$.

Démo :

Montrons que f n'est pas continue en $(0,\ 0)$

. Il suffit de construire une suite $((x_n,\ y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0, telle que $f(x_n,\ y_n)$ ne converge pas vers $f(0,\ 0) = 0$. Prenons, $x_n = y_n = \frac{1}{n+1}$ Donc $(x_n,\ y_n) \mapsto (0,\ 0)$. Mais

$f(x_n,\ y_n) = \frac{\frac{1}{1+n}\cdot\frac{1}{1+n}}{\left(\frac{1}{1+n}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+n}\right)^2} = \frac{1}{2}$. En particulier $f(x_n,\ y_n) \nrightarrow 0$.

Si on fixe $y = y_0$, $x \mapsto f(x,\ y_0)$ est continue

– Si $y_0 \neq 0 : f(x,\ y_0) = \frac{xy_0}{x^2+y_0^2}$ et le dénominateur ne s'annule pas.

– Si $y_0 = 0 : f(x,\ 0) = 0$. $\forall\ x \in \mathbb{R}$ donc $x \mapsto f(x,\ 0)$ est continue.

Donc f est continue séparément par rapport à chaque variable, mais pas comme fonction de deux variables.

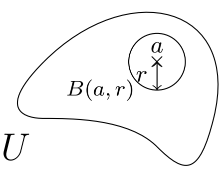
3 Topologie sur un e.v.n

3.1 Ouverts d'un e.v.n

Définition :

Soit $(E,\ N)$, un e.v.n. On dit que $U \subset E$ est ouvert $\Longleftrightarrow \forall\ a \in U,\ \exists\ r > 0$, tel que $B(a,\ r) \subset U$.

Ex :

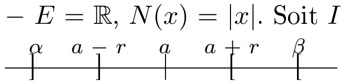


– U est ouvert.

– $U = \emptyset$ est ouvert.

Ex :

– $E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$. Soit $I =]\alpha,\ \beta[$, $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}$, (ou $\alpha = -\infty$, ou $\beta = +\infty$). Alors I est ouvert. Soit $a \in I$.



On doit trouver $r > 0$, tel que $B(a,\ r) =]a - r,\ b - r[\notin I$. Il suffit de prendre $r <$ Min $[a - \alpha,\ b - \beta]$.

– $[0, 1[$ n'est pas un ouvert. On ne peut pas trouver un $r > 0$, tel que : $B(0,\ r) \subset [0, 1[$.

Notation :

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de s.e.v. de E. On note $\bigcup_{i\in I} A_i = \{x \in E, \exists\ i \in I, \text{tel que } x \in A_i\}$.

Proposition : Soit $(E,\ N)$ un e.v.n.

$i/$ Soit $(u_i)_{i\in I}$, une famille d'ouverts de E. Alors $\bigcup_{i\in I} u_i$ est un ouvert de E.

$ii/$ Soient U,V deux ouverts de E. Alors $U \cap V$ est ouvert. Plus généralement, si $U_1,\ U_2,\ ...,\ U_n$ sont des ouverts de E alors $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ est un ouvert de E. (Toute intersection finie d'éléments est un ouvert.)

Démo :

$i/$ Supposons $\forall\ i \in I$. U_i est ouvert. Soit $U = \bigcup_{i\in I} U_i$. Soit $a \in U$. $\exists\ i_0 \in I$, tel que $a \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert $\exists\, r > 0$, tel que $B(a,\, r) \subset U_{i_0}$. $U_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i = U$ donc on a trouvé $r > 0$ avec $B(a,\, r) \subset U$. Donc U est ouvert.

$ii/$ Soient $U,\, V$ deux ouverts de E. Montrons que $U \cap V$ est ouvert. Soit $a \in U \cap V$. Comme $a \in U$ et que U est ouvert, $\exists\, r_1 > 0$, avec $B(a,\, r_1) \subset U$. De même, comme $a \in V$. Posons $r = \mathrm{Min}[r_1,\, r_2] > 0$.

Alors $B(a,\, r) \subset B(a,\, r_1) \subset U$ et $B(a,\, r) \subset B(a,\, r_2) \subset V$. $\Longrightarrow B(a,\, r) \subset U \cap V$.

Attention :

L'intersection d'une famille infinie n'est pas ouvert en général.

Ex :

Soient $U_n = \left]-\frac{1}{n}, 1\right[$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}}^{+\infty} U_n = \{x \in E;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \in U_n\} = \left\{x \in E;\ \forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < x < 1\right\}$.

Donc $A = [0,\, 1[$. Or, on a vu que A n'est pas ouvert.

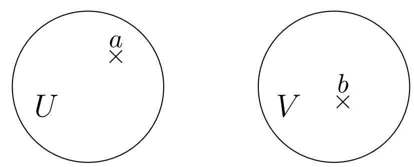
Notation :

Si $X,\, Y$ sont des ensembles, et $f : X \longrightarrow Y$, si $Z \subset Y$, on pose $f^{-1}(Z) \overset{def}{=} \{x \in E;\ f(x) \in Z\}$. On note aussi $f^{-1}(Z) = f^*(Z)$.

Proposition :

Soient $(E,\, N)$, $(E',\, N')$ deux e.v.n. $f : E \to E'$ continue. Si V est ouvert de E, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

Démo :



Posons $U = f^{-1}(V)$. Soit $a \in U$. On doit montrer qu'il existe $r > 0$, tel que $B(a,\, r) \subset U$. Notons $b = f(a) \in V$. Comme V est ouvert $\exists\, \varepsilon > 0$, tel que $B(b,\, \varepsilon) \subset V$. Comme f est continue en a, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in E$, $N(x-a) \Longrightarrow N'(f(x)-b) < \varepsilon$. $x \in B_E(a,\, \eta) \Longrightarrow$ $f(x) \in B_{E'}(b,\, \varepsilon) \subset V$. Donc $\forall\, x \in B(a,\, \eta)$, $f(x) \in V$,
donc $B(a,\, \eta) \subset f^{-1}(V)$. Si on pose $r = \eta$, on aura donc trouvé une boule $B(a,\, r) \subset f^{-1}(V) = U$. Donc $f^{-1}(V)$ est ouvert.

Application :

Soit $a \in E$, $r > 0$. Alors la boule ouverte $B(a,\, r)$ est un ouvert E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto N(x,\, a)$. On a vu que f est continue. Or $B(a,\, r) = \{x \in E,\ f(x) < r\} = f^{-1}\underbrace{(]-\infty; r[)}_{\text{ouvert de}\mathbb{R}} \Longrightarrow f^{-1}(]-\infty; r[)$ est un ouvert.

De même $E \diagdown \overline{B}(a,\, r)$ est un ouvert car $E \diagdown \overline{B}(a,\, r) = \{x \in E,\ N(x-a) > r\} = \{x \in E, f(x) > r\} = f^{-1}(]-\infty; r[)$.

Proposition :

Soient $N_1,\, N_2$ deux normes équivalentes sur un e.v. E. Soit $U \subset E$, U est ouvert pour $N_1 \Longleftrightarrow U$ est ouvert pour N_2.

Démo :

$N_1,\, N_2$ équivalents, $\exists\, C > 0$ avec $\forall\, x \in E$, $N_1(x) \leqslant CN_2(x)$ et $N_2(x) \leqslant CN_1(x)$.

Soit U un ouvert pour N_1.

Montrons que U un ouvert pour N_2. $\Longleftrightarrow \forall\, a \in U$, $\exists\, r_2 > 0$, $B_{N_2}(a,\, r_2) = \underbrace{N(x-a) < \eta}_{\subset U}$

Comment U est ouvert pour N_1, on sait qu'il existe $r_1 > 0$, $B_{N_1}(a-r_1) = \{x \in E,\ N_1(x-a) < r_1\} \subset U$.
Posons $r_2 = \frac{r_1}{C}$. Soit $x \in B_{N_2}(a,\, r_2) \subset U$ alors $N_2(x-a) < r_2$ d'où $= N_1(x-a) \leqslant N_2(x-a) \cdot C < C \cdot r_2$ $= r_1$. Donc $B_{N_2}(a,\, r_2) \subset B_{N_1}(a,\, r_1)$. Comme $B_{N_1}(a,\, r_1) \subset U$ on a donc trouvé $r_2 > 0$ avec $B_{N_2}(a,\, r_2) \subset U$.

Corollaire :

Soit $E = \mathbb{E}^p$. Alors les ouverts associés aux normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$ sont les mêmes.

Ex :

$P =]a,\, b[\, \times\,]c,\, d[\subset \mathbb{R}^2$ (muni de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$) alors P est ouvert. En effet, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $]\alpha,\, \beta[$ est un ouvert. Soient

$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$(x_1, x_2) \mapsto x_1$, $\quad (x_1, x_2) \mapsto x_2$.

Alors π_1, π_2 sont linéaires sur $\mathbb{R}^2$. On sait alors qu'elles sont continues.

Donc comme $]a, b[\subset \mathbb{R}$ est ouvert, $\pi_1^{-1}(]a, b[) = U_1$ est ouvert. $]c, d[\subset \mathbb{R}$ est ouvert, $\pi_2^{-1}(]c, d[) = U_2$ est ouvert. $P = U_1 \cap U_2$ est un ouvert.

3.2 Fermés d'un e.v.n.

Définition :

Soit (E, N), un e.v.n. On dit que $F \subset E$ est fermé $\Longleftrightarrow E - F$ est ouvert.

Ex :

- $\emptyset$ est fermé car $E - \emptyset = E$ qui est ouvert
- E est fermé car $E - E = \emptyset$ qui est ouvert.

Donc $\emptyset$, et E sont à la fois ouverts et fermés.

- $\overline{B}(a, r) = \{x \in E; N(x - a) \leqslant r\}$ est fermé car $E - \overline{B}(a, r) = \{x \in E; N(x - a) > r\}$ est ouvert.
- $\{x \in E; N(x - a) < r\}$ est fermé car $E - F = \{x \in E; N(x - a) < r\} = B(a, r)$ est ouvert.

Cas particulier :

$E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$. Alors si $a < b$ $[a, b] = \overline{B}(c, r)$ où $c = \frac{a+b}{2}$, $r = \frac{b-a}{2}$. Donc $[a, b]$ est un fermé.

Un s.e.v d'un e.v.n peut être ni ouvert, ni fermé.

Ex :

$E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1[$ alors A n'est pas ouvert car on ne peut pas trouver $r > 0$, $]-r, r[\subset A$. Mais A n'est pas non plus fermé. S'il l'était, $E - A$ serait ouvert. $E - A =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[$ qui n'est pas ouvert car il n'existe pas $r > 0$ tel que $\overline{B}(1, r) =]1 - r, 1 + r[\subset E - A$.

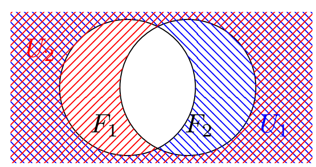
Proposition : Soit (E, N) un e.v.n :

- F_1, F_2 deux fermés de E. Alors $F_1 \cup F_2$ est fermé. Plus généralement, si F_1, ..., F_n sont des fermés, alors $F_1 \cup ... \cup F_n$ est fermé.
- Soit $(F_i)_{i \in I}$ une famille de fermés de E, alors $\bigcap\limits_{i \in I} F_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in F_i\}$ est un fermé.

Démo :

Soient F_1, F_2 deux fermés de E. $U_1 = E - F_1$ et $U_2 = E - F_2$ ouverts de E.

Alors $U_1 \cap U_2 = \{x \in E, x \notin F_1$ et $x \notin F_2\} = \{x \in E, x \notin F_1 \cup F_2\}$ $= E - (F_1 \cup F_2)$. $U_1 \cap U_2$ est ouvert donc $F_1 \cup F_2$ est fermé.



Soit $(F_i)_{i \in I}$ des fermés. Posons $U_i = E - F_i$. C'est un ouvert de E. On sait que $\bigcup\limits_{i \in I} U_i$ est un ouvert.

$\bigcup\limits_{i \in I} U_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in U_i\} = \{x \in E, \forall i \in I$ avec $x \notin F_i\}$. Donc $\bigcup\limits_{i \in I} U_i = E - (\bigcap\limits_{i \in I} F_i)$ On en déduit que $E - (\bigcap\limits_{i \in I} F_i)$ est un ouvert donc $(\bigcap\limits_{i \in I} F_i)$ est un fermé.

3.3 Caractérisation des fermés par les suites.

Théorème :

Soit (E, N) un e.v.n, $F \subset E$. Il y'a équivalence entre :

- $i/$ F est fermé.
- $ii/$ $\forall$ $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ convergeant vers $\ell \in E$, on a $\ell \in F$.

Démo :

$i/ \Longrightarrow ii/$. Supposons F fermé. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$. $x_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$. Supposons que $\ell \notin F$ et montrons la contradiction. Comme F est fermé, $E - F$ est ouvert et par hypothèse $\ell \in E - F$. Il existe donc $r > 0$, tel que $B(\ell, r) \subset E - F$. Comme $x_n \in F$, $\forall\ n$ on a $N(x_n - \ell) \geqslant r$. Par hypothèses $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ i.e : $N(x_n - \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $0 = \lim N(x_n - \ell) \geqslant r > 0$ absurde. Donc $\ell \in F$.

$ii/ \Longrightarrow i/$. Montrons que F est fermé ce qui équivaut à ce que $E - F$ soit ouvert, supposons $E - F$ n'est pas ouvert montre que cela contredit $i/$.

$(E - F$ ouvert$) \Longleftrightarrow (\forall\ \ell \in E - F, \exists\ r > 0$ avec $B(\ell, r) \subset E - F)$

$(\forall\ \ell \in E - F$ n'est pas ouvert$) \Longleftrightarrow (\exists\ \ell \in E - F, \forall\ r > 0, B(\ell, r)$ n'est pas inclus dans $E - F) \Longleftrightarrow (\exists\ \ell \in E - F, \forall\ r > 0, B(\ell, r) \cap F \neq \emptyset)$.

Appliquons cela avec $\frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $B\left(\ell, \frac{1}{n+1}\right) \cap F \neq 0$ donc il existe $x_n \subset F \cap B\left(\ell, \frac{1}{n+1}\right)$ donc $x_n \in F$ et $N(x_n - \ell) < \frac{1}{n+1}$. $N(x_n - \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F convergeant vers ℓ et $\ell \notin F$. On a donc obtenu une suite qui contredit l'hypothèse $ii/$.

Ex :

– $[a,\ b]$ est un fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a,\ b]$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On doit monter qu'en fait $\ell \in [a,\ b]$. Par hypothése on a $a \leqslant x_n \leqslant b$. En passant à la limite, on obtient $a \leqslant \ell \leqslant b$. De la même manière, $[a,\ +\infty[$, $]-\infty,\ b]$ sont des fermés.

– $[0,\ 1[$ n'est pas fermé. Il suffit des vérifier que $ii/$ du théorème n'est pas satisfaite, donc qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,\ 1[$ qui converge vers $\ell \notin [0,\ 1[$.

Prenons $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} \in [0,\ 1[$ et $x_n \longrightarrow 1 \notin [0,\ 1[$.

3.4 Adhérence d'un ensemble

Définition :

Soit A un s.e.v d'un e.v.n $(E,\ N)$. On appelle adhérence de A, et on note $\overline{A}$, l'ensemble $\{\ell\ \in\ E,\ \exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \in A$ avec $x_n \longrightarrow \ell\}$

Remarque :

$A \subset \overline{A}$ car si $a \in \overline{A}$, on peut écrire $a = \lim x_n$ avec $x_n = a$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$.

Propositions :

$i/$ $\overline{A}$ est fermé

$ii/$ A est fermé $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$

Démo :

$i/$ semblable à la démonstration du théorème.

$ii/$ $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ fermé, découle de $i/$.

A fermé $\Longrightarrow A = \overline{A}$ car : On sait qu'on a toujours $A \subset \overline{A}$, il reste à voir que si A est fermé, on a aussi $\overline{A} \subset A$

Or si $\ell \in \overline{A}$, $\exists\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de A avec $x_n \longrightarrow \ell$. Mais si A est fermé on sait que la limite d'une telle suite est dans A donc $\ell \in A$.

Ex :

Soit $r > 0$, Alors $\underbrace{\overline{B(0,r)}}_{\text{adhérence de la boule ouverte}} = \underbrace{\overline{B}(0,r)}_{\text{Boule fermée}}$

Démo :

On sait que $B(0,r) \subset \overline{B}(0,r)$ donc $\overline{B(0,r)} \subset \overline{\overline{B}(0,r)} = \overline{B}(0,r)$ car $\overline{B}(0,r)$ est fermée.

Il reste à voir que $\overline{B}(0,r) \subset \overline{B(0,r)}$: Soit ℓ avec $N(\ell) = r$, et soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $[0,\ 1[$ $t_n \longrightarrow 1$.

Alors $x_n = t_n\ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $N(x_n) = t_nN(\ell) = t_nr < r$ donc $x_n \in B(0,r)$ donc $\ell \in B(0,r)$.

Définition :

Soient $A \subset E$, $a \in \overline{A} \Longleftrightarrow$ il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A avec $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} a$

Proposition :

Soit $A \in E$ il y'a équivalence entre :

$i/$ $a \in \overline{A}$

$ii/$ $\forall\ r > 0,\ B\,(a, r) \cap A \neq \emptyset$

Démo :

$i/ \Longrightarrow ii/$ Soit $a \in \overline{A}$; il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A avec $x_n \longrightarrow a$. Soit $r > 0$. Comme $N(x_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ $\exists\ n$ avec $N(x_n - a)$.

$ii/ \Longrightarrow i/$ appliquons $ii/$ avec $r = \frac{1}{n+1}$ $n \in \mathbb{N}$. Comme $A \cap B\left(a, \frac{1}{n+1}\right) \neq 0$ $\exists\ x_n \in A$ avec $N(x_n - a) < \frac{1}{1+n}$ donc $x_n \longrightarrow a$.

3.5 Limite de fonctions

Rappel :

Soient I intervalle de $\mathbb{R}$, $A \in I$, $f : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet $\ell \in \mathbb{R}$, pour limite, lorsque x tend vers $a \Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in I - \{a\},\ |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - \ell| < \varepsilon.$ $\Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in (I - \{a\}) \cap\ ]a - \eta,\ a + \eta[$ on a $f(x) \in\ ]\ell - \varepsilon,\ \ell + \varepsilon[$.

Définition :

Soient $(E,\ N)$, $(E',\ N')$ deux e.v.n. $A \subset E$, $a \in \overline{A}$. Soit $f \longrightarrow E'$. On dit que f admet une limite $\ell \in E'$ lorsque x tend vers a en restant dans A. $\Longleftrightarrow$
$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A,\ N(x - a) < \eta \Longrightarrow N'(f(x) - \ell) < \varepsilon.$

$\Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A \cap B_E(a,\ \eta)$, on a $f(x) \in B_{E'}(\ell,\ \varepsilon)$

Remarque :

Si la limite existe, alors elle est unique.

Démo :

Supposons $\ell,\ \ell' \in E'$ sont limites de f lorsque $x \longrightarrow a,\ x \in A$.

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta > 0,\ \forall\ x \in A,\ N(x - a) < \eta \Longrightarrow N'(f(x) - \ell) < \varepsilon.$

$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \eta' > 0,\ \forall\ x \in A,\ N(x - a) < \eta \Longrightarrow N'(f(x) - \ell') < \varepsilon.$

Posons $\eta'' = \text{Min}\,[\eta,\ \eta'] > 0$. Comme $a \in \overline{A}$, $B\,(a, \eta'') \cap A \neq \emptyset$. Soit x $A \cap \in B\,(a, \eta'')$ on aura donc à la fois $N'(f(x) - \ell) < \varepsilon$ et $N'(f(x) - \ell') < \varepsilon$

Alors $N'(\ell - \ell') = N'((\ell - f(x)) + (f(x) - \ell')) \leqslant N'(\ell - f(x)) + N'((f(x) - \ell') < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$. On a prouvé que $\forall\ \varepsilon > 0,\ 0 \leqslant N'(\ell - \ell') < 2\varepsilon$ d'où $N'(\ell - \ell') = 0$. On notera $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$.

Ex :

$E = \mathbb{R}$, Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, en posant $A = I - \{a\}$, on retrouve la définition usuelle de la limite. On a $a \in \overline{A}$. $A =]a,\ b]$ $b > a$. Alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ est la limite à droite.

Notation :

Lorsque U est un ouvert, que $a \in U$, et que $A = U - \{a\}$ on écrit $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ à la place de $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$.

Proposition :

Soient $A \subset E$, $a \in \overline{A}$, $f : A \longrightarrow E'$, il y'a équivalence entre :

$i/$ $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ existe et vaut $\ell \in E'$

$ii/$ $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Propriétés :

$i/$ Si f admet ℓ pour limite lorsque $x \longrightarrow a,\ x \in A$ alors $\ell \in \overline{f(A)}$.

$ii/$ Si $g : A \longrightarrow E'$, $\ell = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x)$ et $\ell' = \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g(x)$ existent, alors $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} (f + g)(x)$ existe et vaut $\ell + \ell'$

$iii/$ Si $f : A \longrightarrow E'$, $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell \in E'$ existe et $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} g(x) = \lambda \in \mathbb{R}$ existe, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} (f(x)g(x))$ existe et vaut $\lambda\ell$.

$iv/$ Soient E, E', E'' trois e.v.n, $A \subset E$, $B \subset E'$, $f : A \longrightarrow E'$, $g : B \longrightarrow E''$. Supposons $f(A) \subset B$, que $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ existe, on sait alors que $\ell \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$. Supposons $\ell' = \lim\limits_{\substack{y \to \ell \\ y \in B}} g(y)$ existe. Alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} (g \circ f(x))$ existe et vaut ℓ'.

$v/$ Soit $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$, $x \mapsto f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f(x_p) \end{bmatrix}$ où $f_j : A \longrightarrow \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_p \end{bmatrix}$ existe $\Longleftrightarrow$ $\forall\ j \in \{1, ..., p\}$ $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f_j(x)$ existe et vaut ℓ_j.

Démo :

$i/$ Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ suite de A, $x_n \longrightarrow a$, alors $f(x_n) = y_n \longrightarrow \ell$ et $y_n \in f(a)$, donc $\ell \in \overline{f(A)}$.

$ii/$ Si $x_n \longrightarrow a$ on a $f(x_n) \longrightarrow \ell$, $g(x_n) \longrightarrow \ell'$ donc $f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow \ell + \ell'$.

$iv/$ Pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A, $x_n \longrightarrow a$, on sait que $y_n = f(x_n) \longrightarrow \ell$. Mais $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de $f(a) \subset B$ qui converge vers ℓ, donc $g(y_n) \longrightarrow \ell'$. Donc pour toute suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A, $x_n \longrightarrow a$, $g \circ f(x_n) \longrightarrow \ell'$.

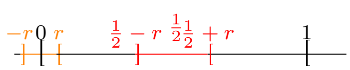
Soit $f : A \longrightarrow E'$, $a \in A$. Alors f est continue en $a \Longleftrightarrow \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ existe et vaut $f(a)$.

3.6 Voisinages, Intérieur d'un ensemble

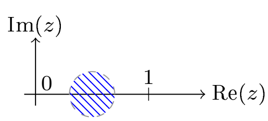
Définition :

Soit (E, N) un e.v.n, $a \in E$. On dit que $V \subset E$ est voisinage de a de E. $\Longleftrightarrow \exists\ r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$.

Ex :



$E = \mathbb{R}$. $V = [0,\ 1[$, ici V est voisinage de $1/2$, car $\exists\ r > 0$ tel que $B\left(\frac{1}{2}, r\right) = \left]\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r\right[\subset V$. Par contre V n'est pas voisinage de 0 car $\nexists\ r > 0$ avec $]-r, r[\subset V$.



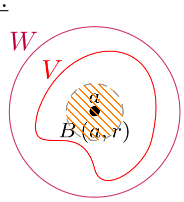
$E = \mathbb{C}$, avec $\forall\ z \in \mathbb{C}$, $N(z) = |z|$. Soit $A = [0, 1[$ Alors $[0, 1[$ n'est pas voisinage de $1/2$ dans $\mathbb{C}$, car $B\left(\frac{1}{2}, r\right) = \left\{z \in \mathbb{C}, |z - \frac{1}{2} < r\right\}$, or $\forall\ r > 0$, $B\left(\frac{1}{2}, r\right)$ non inclus dans A.

Propriétés :

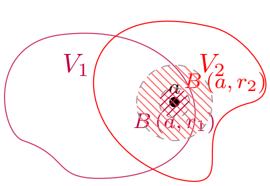
$i/$ Si V est un voisinage de a et $V \subset W$, alors W est voisinage de a.

$ii/$ Si V_1, V_2 sont voisinages de a, alors $V_1 \cap V_2$ est voisinage de a.

Démo :



$i/$ Soit V un voisinage de a, $\exists\ r > 0$ avec $B(a, r) \subset V$, comme $V \subset W$, alors $B(a, r) \subset W$. Donc W est un voisinage de a.



$ii/$ Soit $r = \text{Min}[r_1, r_2] > 0$, alors $B(a, r) \subset V_1 \cap V_2$. Donc $V_1 \cap V_2$ est un voisinage de a.

<u>Proposition :</u>

Il y a équivalence entre :

$i/$ $U \subset E$ est un ouvert,

$ii/$ $\forall\ a \in U$, U est voisinage de a.

<u>Démo :</u>

$i/ \iff \forall\ a \in U, \exists\ r > 0$ avec $B(a, r) \subset U \iff \forall\ a \in U$, U est voisinage de $a \iff ii/$.

<u>Proposition :</u>

On peut remplacer "boules" par "voisinages" dans les définitions de la limite, et de la continuité :

Si $\ell = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \iff (1) : \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \eta > 0, \forall\ x \in A \cap B_E(a, \eta)$, on a $f(x) \in B_{E'}(\ell, \varepsilon)$.

Alors $(1) \iff (2) : \forall\ V$ voisinage de ℓ, $\exists\ U$ voisinage de A, $\forall\ x \in A \cap U$, on a $f(x) \in V$.

<u>Démo :</u>

Montrons que $(1) \Longrightarrow (2)$, Soit V un voisinage de ℓ, $\exists\ \varepsilon > 0$ tel que $B(\ell, \varepsilon) \subset V$. Appliquons (1) avec ε. $\exists\ \eta > 0$ tel que $\forall\ x \in A \cap B_E(a, \eta)$, $f(x) \in B_{E'}(\ell, \varepsilon) \subset V$. Posons $U = B_E(a, \eta)$, c'est un voisinage qui vérifie (2).

Montrons que $(2) \Longrightarrow (1)$, soit $\varepsilon > 0$, alors $B(\ell, \varepsilon)$ est un voisinage de ℓ. On peut appliquer (2) à $V = B(\ell, \varepsilon)$. $\exists\ U$ voisinage de a avec $x \in A \cap U \Longrightarrow f(x) \in V = B(\ell, \varepsilon)$ comme U est voisinage de a, $\exists\ \eta > 0$ tel que $B(a, \eta) \subset U$. Donc $\forall\ x \in A \cap B_E(a, \eta)$, on a $f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$ donc (1) est vrai.

<u>Proposition :</u>

Soit $A \in E$. Alors $(a \in \overline{A}) \iff (\forall\ V$ voisinage de a, $V \cap A \neq \emptyset)$.

<u>Démo :</u>

$\boxed{\Longrightarrow}$ Soit $a \in \overline{A}$. Soit V voisinage de a. $\exists\ r > 0$ tel que $B(a, r) \subset V$. Comme $a \in \overline{A}$, on a $B(a, r) \subset A \neq \emptyset$, donc $V \cap A \neq \emptyset$. $\boxed{\Longleftarrow}$ Comme $B(a, r)$ est voisinage de a, $A \cap B_E(a, \eta) \neq \emptyset$, $\forall\ x > 0$, donc $a \in \overline{A}$.

<u>Corollaire :</u>

Soit $A \subset E$, notons $(F_i)_{i \in I}$ la famille de tous les fermés vérifiant $A \subset F_i$. Alors $\overline{A} = \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.

<u>Démo :</u>

Puisque $A \subset F_i$, on a $\overline{A} \subset \overline{F_i} = F_i$ (car F_i est fermé). On a donc $\overline{A} \subset \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.

Montrons que $\bigcap\limits_{i \in I} F_i \subset \overline{A}$ ou encore $E - \overline{A} \subset E - (F_i)_{i \in I}$. Soit $a \in E - \overline{A}$, $a \notin \overline{A}$ donc $\exists\ r > 0$ tel que $\cap\ A = \emptyset$. Soit $G = E - B(a, r)$, alors G est un fermé et $A \subset G$. Donc G est un élément de la famille F_i, $\exists\ i_0 \in I$ avec $G = F_{i_0}$. De plus $a \notin G$ donc $E - G = E - F_{i_0} \subset E - \bigcap\limits_{i \in I} F_i$.

3.7 Intérieur d'un ensemble

<u>Définition :</u>

Soient (E, N) un e.v.n, $A \subset E$, on dit que a est dans l'intérieur de $A \iff \exists\ r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points intérieurs de A.

<u>Ex :</u>

$E = \mathbb{R}$, $A = [0, 1[$ Alors $\mathring{A} =]0, 1[$ puisque si $x \in]0, 1[$, $\exists\ r > 0$ tel que $]x - r,\ x + r[\subset A$.

Par contre 0 n'est pas intérieur à A.

$E = \mathbb{R}^2$, muni de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, $A = [0, 1[\times \{0\}$. Alors $\mathring{A} = \emptyset$.

$\forall\ M = (a, 0) \in A$ avec $0 \leqslant a < 1$, $\forall\ r > 0$, $B(M, r) = \left\{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 < r^2\right\}$ non inclus A.

<u>Remarque :</u>

La définition équivaut à $a \in \mathring{A} \iff \exists\ V$ voisinage de a avec $V \subset A$.

<u>Propriétés :</u>

$i/$ $A \subset B \Longrightarrow \mathring{A} \subset \mathring{B}$.

$ii/$ $E - \mathring{A} = \overline{E - A}$.

Démo :

$ii/$ $x \in E - \mathring{A} \Longleftrightarrow x \notin \mathring{A} \Longleftrightarrow \forall\ V$ voisinage de x, V n'est pas inclus de A. $\Longleftrightarrow \forall\ V$ voisinage de x, $V \cap (E - A) \neq \emptyset \Longleftrightarrow x \in \overline{E - A}$.

Corollaire :

$i/$ $\mathring{A}$ ouvert et (A est ouvert) $\Longleftrightarrow$ ($A = \mathring{A}$)

$ii/$ Soit $(U_i)_{i \in I}$ la famille de tous les ouverts inclus dans A. Alors $\mathring{A} = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$.

Démo :

$i/$ Soit $a \in \mathring{A}$: $\exists\ r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Si $b \in B(a, r - ||a - b||) \subset B(a, r) \subset A$, donc $b \in \mathring{A}$. Donc on aura trouvé $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathring{A}$. Donc $\mathring{A}$ est ouvert. Si $A = \mathring{A}$, alors A est ouvert. Réciproquement, si A est ouvert et $a \in A$, $\exists\ V$ voisinage de a avec $V \subset A$, donc $a \in \mathring{A}$. Donc $A = \mathring{A}$.

$ii/$ Comme $U_i \subset A$ donc $V = \bigcup\limits_{i \in I} U_i \subset A$. Or, V est ouvert, donc $V = \mathring{V}$, comme $V \subset A \Longrightarrow \mathring{V} \subset \mathring{A}$ on a donc $V \subset \mathring{A}$.

Réciproquement, si $a \in \mathring{A}$, $\exists\ r > 0$ tel que $B(a, r) \subset A$. Donc $B(a, r)$ est un ouvert inclus dans A, $\exists\ i_0 \in I$ tel que $B(a, r) = U_{i_0}$. Donc $a \in B(a, r) \subset \bigcup\limits_{i \in I} U_i = V$. Donc $\mathring{A} \subset V$.

4 Compacité

Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'un e.v.n E. Une suite extraite (ou sous-suite) de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de la forme $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ où $k \mapsto n_k$, $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, est strictement croissante.

Ex :

$n_k = 2k$, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$.

Remarque :

$k \mapsto n_k$, $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante $\Longleftrightarrow \forall\ k$, $n_{k+1} > n_k \Longleftrightarrow n_{k+1} \geqslant n_k + 1$. (car $n_k \in \mathbb{N}$, $\forall\ k$).

En particulier $n_{k+1} \geqslant n_k + 1 \geqslant n_{k-1} + 2 \geqslant \ldots \geqslant \underbrace{n_0 + (k+1)}_{\to +\infty \text{ si } k \to +\infty}$. Donc $n_k \longrightarrow +\infty$ si $k \longrightarrow +\infty$.

> Définition :
>
> Soient (E, N) un e.v.n, $A \subset E$. On dit que A est compact $\Longleftrightarrow \forall\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A, $\exists$ une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge vers une limite $\ell \in A$. $(*)$

Définition équivalente :

A est compact $\Longleftrightarrow \forall\ (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de A, $\exists\ \ell \in A$, $\forall\ \varepsilon > 0$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\ q \geqslant n$ avec $N(x_q - \ell) < \varepsilon$ $(**)$

Remarque :

$(**)$ ne signfie pas que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers ℓ, car $x_n \longrightarrow \ell \Longleftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n \in \mathbb{N}$, $\forall\ q \geqslant n$, $N(x_q - \ell) < \varepsilon$

Démo :

Montrons que $(*) \Longrightarrow (**)$. Supposons qu'il existe $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sous-suite , $x_{n_k} \longrightarrow \ell \in A$. Donc $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ k_0$ et $\forall\ k \geqslant k_0$, $N(x_{n_k} - \ell) < \varepsilon$ (1). Comme $n_k \longrightarrow +\infty$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\ k_1$ et $\forall\ k \geqslant k_1$, $n_k \geqslant n$ (2).

Posons $k_2 = \text{Max}[k_2, k_1]$. Alors si on pose $q = n_{k_2}$, on a $q \geqslant n$ d'après (2) et $N(x_q - \ell) < \varepsilon$ d'après (1). On a donc vérifié $(**)$.

Montrons que $(**) \Longrightarrow (*)$. Réécrivons $(**)$ en prenant $\varepsilon = \frac{1}{k+1}$ ($k \in \mathbb{N}$) $\exists\ \ell \in A$, $\forall\ k \in \mathbb{N}$, $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $\exists\ q = q(k, n) \geqslant n$ avec $N(x_q - \ell) < \frac{1}{k+1}$ $(***)$. On veut construire $\mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, $k \longrightarrow n_k$ strictement croissante avec $N(x_{n_k} - \ell) \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. On pose $n_0 = q(0, 0)$. Donc $N(x_{n_0 - \ell}) < q$ d'après $(***)$.

Supposons construits $n_0 < n_1 < \ldots < n_{k-1}$. Appliquons $(***)$ à l'ordre k et en prenant $n = n_{k-1} + 1$. On trouve un $q = q(k, n_{k-1} + 1) > n_{k-1} + 1 > n_{k-1}$ tel que $N(x_q - \ell) < \frac{1}{k+1}$. On définit $n_k = q(k, n_{k-1} + 1)$. Alors $n_k > n_{k-1}$ et $N(x_{n_k} - \ell) < \frac{1}{n+1} \xrightarrow[k \to +\infty]{} 0$. On a donc construit $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sous-suite de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$

avec $x_{n_k} \xrightarrow[k\to+\infty]{} \ell \in A$.

Ex :

Soit $(E,\, N)$ un e.v.n. Soit $A = \{a_1, ..., a_N\}$ un s.e.v de E. Alors A est compact.

Démo :

D'après $(**)$, on doit vérifier $\exists\, \ell \in A,\, \forall\, \varepsilon > 0,\, \forall\, n \in \mathbb{N},\, \exists\, q \geqslant n$ avec $N(x_q - \ell) < \varepsilon$.
Supposons cette propriété fausse. Alors $\forall\, \ell \in A,\, \exists\, \varepsilon > 0,\, \exists\, n \in \mathbb{N},\, \forall\, q \geqslant n,\, N(x_q - \ell) \geqslant \varepsilon$.
Comme $A = \{a_1, ..., a_N\}$, en appliquant à $\ell = a_j$, $j \in \{1, ..., N\}$, on trouve donc $\varepsilon_j,\, n_j \in \mathbb{N}$ tels que $\forall\, q \geqslant n_j,\, N(x_q - a_j) \geqslant \varepsilon_j$. Posons $\varepsilon_0 = \mathrm{Min}[\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N] > 0$, $n_0 = \mathrm{Max}[n_1, \ldots, n_N]$ $n \in \mathbb{N}$. Alors si $q \geqslant n_0$, on a $q \geqslant n_j$ donc $N(x_q - a_j) \geqslant \varepsilon_j \geqslant \varepsilon_0$. $\forall\, j \in \{1, ..., N\}$. Donc si on fixe $q \geqslant n_0$, on a trouvé un élément $x_q \in A$, tel que $N(x_q - a) > 0$, $\forall\, a \in A$. Absurde puisqu'on pourrait prendre $a = x_j$. On a trouvé ε_0 tel que $x_q \notin B(a_j, \varepsilon_0)$ $\forall\, j$ alors que $x_q \in A = \{a_1, ..., a_N\}$.

Propriétés des ensembles compacts :

Définition :

Un sous-ensemble A d'un e.v.N est dit borné $\Longleftrightarrow \exists\, r > 0$ tel que $A \subset B(0, r)$.

Proposition :

Soit $(E,\, N)$ un e.v.n, $A \subset E$, A est compact si A est fermé et borné.

Démo :

Soit A compact, montrons que A est fermé. On doit avoir pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A, convergeant vers une limite $\ell \in E$, on a en fait $\ell \in A$. Comme A est compact, on sait qu'il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, qui converge $\ell' \in A$. Mais si $x_n \longrightarrow \ell$ et si $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est une sous-suite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on doit avoir $x_{n_k} \longrightarrow \ell$. Par unicité de la limite de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, on doit avoir $\ell = \ell'$. Comme $\ell' \in A$, on a $\ell \in A$. Donc A est fermé.
Montrons que A est borné. S'il ne l'est pas, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, A n'est pas inclus $B(0, r)$, donc $\exists\, x_n \in A$ avec $x_n \notin B(0, r)$ i.e avec $N(x_n) \geqslant n$. Donc $N(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$. Comme A est compact, il existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sous-suite convergeant vers $\ell \in A$. Comme $x \mapsto N(x)$ est continue, $N(x_{n_k}) \longrightarrow N(\ell)$. Mais $N(x_{n_k}) \longrightarrow +\infty$, d'où $N(\ell) = +\infty$: Absurde.

Exemples d'ensembles non compacts :

Soit $E = \mathbb{R}$, $A = [0, +\infty[$ est non borné , donc A n'est pas compact .
$A = [0, 1[$ n'est pas fermé , donc A n'est pas compact .

Proposition :

Soit A un sous-ensemble compact d'un e.v.n $(E,\, N)$. Soit B un sous-ensemble fermé de E, $B \subset A$. Alors B est compact.

Démo :

Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de B. Comme $B \subset A$ c'est une suite de A, et comme A est compact $\exists\, (x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sous-suite convergeant vers $\ell \in A$. Comme B est fermé , on sait que si une suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de B converge, sa limite est dans B. Donc $\ell \in B$. Donc toute suite de B a une sous-suite convergeant vers une limite $\ell \in B$. Donc B est compact.

Proposition :

Soient $(E,\, N)$, $(E',\, N')$ deux e.v.n, soient $A \subset E$, $A' \subset E'$, supposons A, A' compacts. Alors $A \times A'$ est compact.

Démo :

Soit $z_n = (x_n,\, y_n)$ suite de $A \times A'$, alors $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A qui est compact. Il existe $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ sous-suite, $x_{n_k} \longrightarrow \ell \in A$. Considérons $z_{n_k} = (x_{n_k},\, y_{n_k})$. Alors $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est sous-suite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $x_{n_k} \longrightarrow \ell \in A$. Considérons $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, c'est une suite A', qui est compact. Il existe une sous-suite $(y_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ de $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, avec $y_{n_{k_j}} \xrightarrow[j\to+\infty]{} \ell' \in A'$. Soit $z_{n_{k_j}} = (x_{n_{k_j}},\, y_{n_{k_j}})$. Alors $(z_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ est sous-suite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On a $y_{n_{k_j}} \longrightarrow \ell'$ et $x_{n_{k_j}} \longrightarrow \ell$ (puisque $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergeait vers ℓ).

On a donc trouvé $(z_{n_{k_j}})_{j\in\mathbb{N}}$ sous-suite de $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

<u>Proposition :</u>

Soient $(E,\, N)$, $(E',\, N')$ es.vs.ns, $A \subset E$, A compact, $f : A \longrightarrow E'$ continue . Alors $f(A)$ est compact.

<u>Proposition :</u>

Soit A compact de l'e.v.n $(E,\, N)$ et $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$continue. Alors f est bornée et atteint ses bornes, i.e $\exists\ a,b \in A$ tels que $\forall\ x \in A$, $f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b)$.

<u>Démo :</u>

D'après la prop. précédente, $f(A)$ est compact, donc fermé et borné. Comme $f(A)$ est borné, $\exists\ R > 0$ avec $f(A) \subset [-R, R]$. Posons $M = \sup\limits_{x\in A} f(x) = \sup\ f(A) \leqslant R < +\infty$ et $m = \inf\limits_{x\in A} f(x) = \sup\ f(A) \geqslant -R > -\infty$ donc f est borné.

Comme $f(A)$ est fermé, on sait que $M \in f(A)$, $m \in f(A)$. Donc il existe $a \in A$, $b \in A$ avec $f(a) = m$ et $f(b) = M$.

<u>Rappel :</u>

Si $a,\, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $[a, b]$, il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente vers $\ell \in [a, b]$ (Théorème de Bolzano-Weierstrass sur $\mathbb{R}$).

<u>Théorème de Bolzano-Weierstrass :</u>

Soit E un e.v.n. de <u>dimension finie</u>. Soient $A \subset E$. Il y a équivalence entre :

- $i/$ A est compact
- $ii/$ A est est fermé et borné

<u>Remarques :</u>

– On a vu que $i/ \Longrightarrow ii/$ est toujours vrai (sans avoir à supposer E de dimension finie).

– $ii/ \Longrightarrow i/$ est faux si E n'est pas de dimension finie. – Si $E = \mathbb{R}$, si A est fermé borné, $\exists\ a < b$ tel que $A \subset [a, b]$. Or d'après le rappel $[a, b]$ est compact, donc A qui est fermé dans le compact $[a, b]$ est compact. On a donc $ii/ \Longrightarrow i/$ si $E = \mathbb{R}$.

<u>Proposition :</u>

Soit $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $||..||_\infty$. Soit $A \subset E$, fermé borné, alors A est compact.

<u>Démo :</u>

Comme A est borné, $\exists\ R > 0$ tel que $A \subset \overline{B}(0, R)$ (pour la norme $||..||_\infty$) $= \{x \in \mathbb{R}^n,\ ||x||_\infty \leqslant R\} = \left\{ x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ \mathrm{Max}|x_j| \leqslant R \right\} = [-R, R]^n$. On sait déjà que $[-R, R]$ est un compact de $\mathbb{R}$, on a vu que le produit de deux compacts est compact. Donc $[-R, R]^2$, $[-R, R]^3$, ... , $[-R, R]^n$ sont compacts.

Donc A est un fermé inclus dans le compact $[-R, R]^n$, donc A est compact.

<u>Equivalence des normes sur un e.v.n :</u>

<u>Théorème :</u>

Soit E un e.v.n de dimension finie. Soient N, N' deux normes sur E. Alors N et N' sont équivalentes.

<u>Démo :</u>

Soient E un e.v.n de dimension finie, N, N' normes sur E. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et soit

$\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \mapsto \varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$. Alors φ est linéaire, bijective.

Pour $x \in \mathbb{R}^n$ posons

$N_1 = N(\varphi(x))$, $N_1' = N'(\varphi(x))$, alors N_1 et N_1' sont des normes sur $\mathbb{R}^n$. D'après le cas pour $E = \mathbb{R}^n$, elles

sont équivalentes, $\exists\ C > 0$ tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $C^{-1}N_1'(x) \leqslant N_1(x) \leqslant CN_1'(x)$. Donc $\forall\ y \in E$,
$C^{-1}N'(y) \leqslant N(y) \leqslant CN'(y)$, donc N et N' sont équivalentes.

Corollaire :

Soit E un e.v.n de dimension finie. Alors les ouverts, fermés, voisinages, les compacts de E associés à une norme sur E sont indépendants du choix de cette norme. Même chose pour les limites, la continuité des fonctions définies sur $A \subset E$, à valeurs dans un e.v.n $(F, ||..||_F)$.

Fin de la démo du théorème de Bolzano-Weierstrass :

On veut que si E est un e.v.n de dimension finie, si $A \subset E$ est fermé et borné, alors A est compact.
On a déjà
traité le cas $E = \mathbb{R}^n$ muni de la norme $||..||_\infty$. Soit (E, N) e.v.n de dimension finie. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$ définie par $\varphi(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ si $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$. On sait que φ est linéaire, bijective. Posons pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{N}_1(x) = N(\varphi(x))$, c'est une norme de $\mathbb{R}^n$. Par le théorème précédent, N_1 est équivalente à $||..||_\infty$. $\exists\ C > 0$ tel que $\forall\ x \in \mathbb{R}^n$, $C^{-1}||x||_\infty \leqslant N_1(x) \leqslant C||x||_\infty$.
On a $N(\varphi(x)) = N_1(x) \leqslant C||x||_\infty$ donc $\varphi(\mathbb{R}^n, ||..||_\infty) \longrightarrow (E, N)$ est continue.
Soit $A \subset E$, A fermé et borné. Soit $A' = \varphi^{-1}(A) \subset \mathbb{R}^n$. Comme φ est continue et A fermé, $\varphi^{-1}(A)$ est fermé. Comme A est borné, $\exists\ R > 0$ avec $N(y) \leqslant R$, $\forall\ y \in A$. Alors si $x \in A'$,
$||x||_\infty \leqslant CN_1(x) = CN(\varphi(x)) \leqslant CR$. Donc A' est borné dans $(\mathbb{R}^n, ||..||_\infty$. On a déjà vu que cela entraîne que A' est compact. Or $\varphi : A' \longrightarrow E$ est continue, donc $\varphi(A') = A$ est compact dans E.

Proposition :

Soient (E, N), (E', N') deux e.v.n. Supposons E de dimension finie. Soit $u : E \longrightarrow E'$ linéaire. Alors u est continue.

Démo :

On l'a déjà vu pour $v : (\mathbb{R}^n, ||..||_\infty) \longrightarrow E'$ linéaire. Si E est de dimension finie n, soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \longrightarrow E$, $\varphi : x \longrightarrow \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ bijection linéaire. On a vu que φ est continue de $(\mathbb{R}^n, ||..||_\infty)$ dans (E, N). Soit $v = u \circ \varphi$. Alors v est linéaire de $(\mathbb{R}^n, ||..||_\infty)$ dans (E', N'). On sait que v est continue.
Or, $u = v \circ \varphi^{-1}$, donc il suffit de voir que φ^{-1} est continue. Or si $y \in E$, $||\varphi^{-1}(y)||_\infty$ est une norme sur E, espace de dimension finie, donc équivalente à N : $\exists\ C > 0$ tel que
: $\forall\ y \in E$, $C^{-1}N(y) \leqslant ||\varphi^{-1}(y)||_\infty \leqslant CN(y)$. Cette dernière inégalité montre que φ^{-1} est continue.