Espaces Vectoriels Normés
Fonctions à plusieurs variables

Mise à jour du cours du 29/01

Lundi 15 janvier 2018

Soit E un espace vectoriel.
Le but de cette partie est de définir la notion de distance entre deux vecteurs de E.
Ex : – $E = \mathbb{R}$: On peut définir la distance entre deux réels a et a' par $d(a, a') = |a - a'|$.
– $E = \mathbb{C}$: On peut poser $z, z' \in \mathbb{C}$, $d(z, z') = |z - z'|$. Si on écrit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors $d(z, z') = |x - x' + i(y - y')| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.
– $E = \mathbb{R}^2$: Si $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$, on peut définir $d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$.

1 Normes et distances sur un espace vectoriel

Définition : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$. Une norme sur E est par définition une application $N : E \to \mathbb{R}$, $x \mapsto N(x)$ vérifiant :
– $\forall\, x \in E$, $N(x) \geqslant 0$, et $(N(x) = 0 \iff x = 0)$,
– $\forall\, x \in E$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
– (Inégalité triangulaire) $\forall\, x, y \in E$, $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$.

Définition : Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple (E, N) où E est un e.v et N une norme sur E.

Propriétés :
– Soient $x_1, x_2, x_3 \in E$ avec (E, N) un e.v.n. Alors,
$N(x_1 + x_2 + x_3) = N((x_1 + x_2) + x_3) \leqslant N(x_1 + x_2) + N(x_3) \leqslant N(x_1) + N(x_2) + N(x_3)$
– Si $x_1, ..., x_p \in E$, $N(x_1, ..., x_p) \leqslant N(x_1) + ... + N(x_p)$.
– Si $x, y \in E$, $|N(x) - N(y)| \leqslant N(x - y)$.

Démo :
$N(x) = N((x - y) + y) \leqslant N(x - y) + N(y)$, $N(x) - N(y) \leqslant N(x - y)$.
Aussi $N(y) - N(x) \leqslant N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1| N(x - y) = N(x - y)$.
Finalement, $|N(x) - N(y)| = \text{Max}(N(x) - N(y), N(y) - N(x)) \leqslant N(x - y)$.

Ex :
– $E = \mathbb{R}$: Posons $N(x) = |x|$ (Valeur absolue).
N est une norme sur $\mathbb{R}$, car $|x| \geqslant 0$, $(|x| = 0 \iff x = 0)$,
$\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$, $|\lambda x| = |\lambda||x|$, et $\forall\, x, y \in E$, $|x + y| \leqslant |x| + |y|$.
– $E = \mathbb{C}$: Posons $N(x) = |x|$ (Module).
N est une norme sur $\mathbb{C}$, car $|z| \geqslant 0$, $(|z| = 0 \iff z = 0)$,
$\forall\, \lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda z| = |\lambda||z|$, et $\forall\, z, z' \in E$, $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.
– Espaces euclidiens :
Soit E un e.v. Une forme bilinéaire est une application $B : E \times E \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto B(x, y)$ telle qu'elle est linéaire en chacune de ses variables.

Un produit scalaire sur un e.v E est une forme bilinéaire symétrique sur E définie positive au sens suivant : $\forall\ x \in E,\ B(x,x) \geqslant 0$, et $B(x,x) = 0 \iff x = 0$. Un espace euclidien est un e.v muni d'un produit scalaire.

On pose $B(x,\ y) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j y_j$. B est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$ avec $(x,\ y \in \mathbb{R}^n)$.

On pose maintenant : $N(x) = \sqrt{B(x,x)}$. Alors, N est une norme sur E.

Démo :

$i/$ Par définition, $N(x) \geqslant 0$, et $N(x) = 0 \iff B(x,x) = 0 \iff x = 0$

$ii/$ Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $N(\lambda x) = \sqrt{B(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 B(x,x)} = |\lambda|\sqrt{B(x,x)} = |\lambda| N(x)$,

$iii/$ On va utiliser le lemme : $\forall\ x,\ y \in E$, posons $p(\lambda) = B(x+\lambda y, x) + \lambda B(x+\lambda y, y)$. Si on pose $z = x + \lambda y$ fixé, et $u(\omega) = B(z,\omega)$, on a écrit que $(u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y))$.

On aura $p(\lambda) = B(x,\ x) + \lambda B(y,\ x) + \lambda B(x,\ y) + \lambda^2 B(y,\ y)$ donc $p(\lambda) = B(x,\ x) + 2\lambda B(y,\ x) + \lambda^2 B(y,\ y)$ donc $\lambda \mapsto p(\lambda)$ est un polynôme de degré $\leqslant 2$ et $p(\lambda) = B(x+\lambda y, x+\lambda y) \geqslant 0$.

Or, si un polynôme de degré $\leqslant 2$ ne change pas de signe, son discriminant est $\leqslant 0$.

$(2B(x,\ y))^2 - 4B(x,\ x)B(y,\ y) \leqslant 0$, donc $|B(x,\ y)| \leqslant \sqrt{B(x,x)}\ \sqrt{B(y,y)}$. On a donc $N(x + y)^2 = B(x + y,\ x + y) = B(x,\ x + y) + B(y,\ x + y) = B(x,\ x) + B(y,\ x) + B(x,\ y) + B(y,\ y) = B(x,\ x) + 2B(x,\ y) + B(y,\ y) \leqslant N(x)^2 + N(x)N(y) + N(y)^2$.

On a obtenu $N(x + y)^2 \leqslant (N(x) + N(y))^2$ soit $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$

− $E = \mathbb{R}^n$: $B(x,\ y) = \Sigma\ x_i y_i$. La norme obtenue se note $||..||_2$ et pour $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ est donnée par

$||\mathrm{x}||_2 \overset{def}{=} (\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2)^{\frac{1}{2}}$

− Autre exemple de normes : Soient E, E' deux e.v et $\varphi : E \to E'$ linéaire injective.

Soit N' une norme sur E'. Pour $x \in E$, posons $N(x) \overset{def}{=} N'(\varphi(x))$. Alors N est une norme sur E :

$i/$ $N(x) \geqslant 0$ de plus $N(x) = 0 \Longrightarrow N'(\varphi(x)) = 0 \Longrightarrow \varphi(x) = 0$ (car N' est une norme) $\Longrightarrow x = 0$. (puisque φ est injective).

$ii/$ $N(\lambda x) = N'(\varphi(\lambda x)) = N'(\lambda\varphi(x)) = |\lambda| N'(\varphi(x)) = |\lambda| N(x)$

$iii/$ $N(x + y) = N'(\varphi(x + y)) = N'(\varphi(x) + \varphi(y)) \leqslant N'(\varphi(x)) + N'(\varphi(y)) = N(x) + N(y)$

1.1 Normes usuelles de $\mathbb{R}^p$

Soit $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$, les normes usuelles de $\mathbb{R}^p$ sont définies par :

$$\boxed{||x||_1 \overset{def}{=} \sum_{j=1}^{p} |x_j|, \qquad ||x||_2 \overset{def}{=} (\sum_{j=1}^{p} x_j^2)^{\frac{1}{2}}, \qquad ||x||_\infty \overset{def}{=} \underset{j \in \{0,\ \ldots,\ p\}}{\mathrm{Max}} [|x_j|].}$$

Propriété : $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, sont des normes de $\mathbb{R}^p$.

Démo :

− Pour $||..||_2$: voir plus haut.

− Pour $||..||_1$:

Soit $x \in E$, $||x||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| \geqslant 0$, et $\sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| = 0 \iff \forall\ j\ x_j = 0 \iff x = 0$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |\lambda x_j| = |\lambda|(\sum\limits_{j=1}^{p} |x_j|) = |\lambda| ||x||_1$.

Soient $x,\ y \in \mathbb{R}^p$, $||x + y||_1 = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j + y_j| \leqslant \sum\limits_{j=1}^{p} (|x_j| + |y_j|) = \sum\limits_{j=1}^{p} |x_j| + \sum\limits_{j=1}^{p} |y_j| = ||x||_1 + ||y||_1$

– Pour $||..||_\infty$:

$||x||_\infty = 0 \Longrightarrow \underset{j\in\{1,\ \dots,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j|] = 0. \Longrightarrow \forall\ j\ x_j = 0 \Longleftrightarrow x = 0.$

Vérifions l'inégalité triangulaire : $|x_j + y_j| \leqslant |x_j| + |y_j| = ||x_j||_\infty + ||y_j||_\infty$ donc $\underset{j\in\{1,\ \dots,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j| + |y_j|] \leqslant ||x_j||_\infty + ||y_j||_\infty$.

<u>Propriété :</u> $\forall\ x \in \mathbb{R}^p$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant p||x||_\infty$.

<u>Démo :</u> $\forall\ j \in \{1,\ \dots,\ p\}$, $|x_j| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{p} x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$ donc $||x||_\infty = \underset{j\in\{1,\ \dots,\ p\}}{\text{Max}}[|x_j|] \leqslant ||x||_2$.

Pour montrer que $||x||_2 \leqslant ||x||_1$, il suffit de vérifier que $||x||_2^2 \leqslant ||x||_1^2$

Soit $\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right)\left(\sum_{j=1}^{p} x_j\right) = \sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{i=1}^{p}|x_j||x_i|\right) = \sum_{j=1}^{p} x_j^2 + \sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} |x_j||x_i|$. Or, $\sum_{j=1}^{p}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{p} |x_j||x_i| \geqslant 0$, donc

$||x||_2^2 \leqslant ||x||_1^2$, enfin $||x||_2 \leqslant ||x||_1$.

$||x||_1 = \sum_{j=1}^{p}|x_j| \leqslant \sum_{j=1}^{p}||x||_\infty = ||x||_\infty \sum_{j=1}^{p} 1 = p||x||_\infty$

<u>Remarque :</u>

Si E est un e.v de dimension finie p, et si $(e_1,\ \dots,\ e_p)$ est une base de E, alors $\forall\ x \in E$ s'écrit de manière unique $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. On peut donc définir des normes N_1, N_2, N_∞ sur E en posant

$$N_\ell \overset{def}{=} \left|\left|\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right|\right|_\ell,\ \ell \in \{1, 2, \infty\}$$

1.2 Norme produit

Soient $(E_1,\ N_1)$,$(E_2,\ N_2)$ deux e.v.n. Soit $E_1 \times E_2 = \{x = (x_1, x_2),\ x_1 \in E_1,\ x_2 \in E_2\}$.

<u>Définition :</u> $N(x) \overset{def}{=} \text{Max}[N_1(x_1),\ N_2(x_2)]$ est une norme sur E, et est appelée norme produit.

1.3 Distance associée à une norme

<u>Définition :</u> Soit $(E,\ N)$ un e.v.n. la distance $d(x,\ y)$ entre $x \in E$ et $y \in E$, associée à N est par définition $d(x,\ y) = N(x - y)$.

<u>Propriété :</u> La distance précédente est une application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$i/$ $\forall\ (x,\ y) \in E \times E$ $d(x,\ y) \geqslant 0$ et $(d(x,\ y) = 0 \Longleftrightarrow x = y)$

$ii/$ (symétrie) $\forall\ x,\ y \in E$, $d(x,\ y) = d(y,\ x)$

$iii/$ (Inégalité triangulaire) $\forall\ x,\ y,\ z \in E$, $d(x,\ z) \leqslant d(x,\ y) + d(y,\ z)$

<u>Démo :</u>

$ii/$ $d(x,\ y) = N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1|N(x - y) = N(x - y) = d(y,\ x)$

$iii/$ $d(x,\ z) = N(x - z) = N((x - y) + (y - z)) \leqslant N(x - y) + N(y - z) = d(x,\ y) + d(y,\ z)$

<u>Remarque :</u>

De manière générale, si E est une ensemble, on définit une d distance sur E comme une application vérifiant $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant $i/$, $ii/$, $iii/$.

C'est une notion de distance plus générale de la distance associée à une norme. Si $d(x,\ y) = N(x - y)$. On peut prendre par exemple pour tout $a \in E$, $d(x + a,\ y + a) = N((x + a) - (y + a)) = N(x - y) = d(x,\ y)$. Cette propriété n'est pas toujours vraie pour une distance "normale".

Soit $(E,\ N)$ un e.v.n. Soit $a \in E$.

Définition :

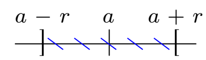
$i/$ Soit $r > 0$, la boule ouverte de centre a et de rayon r est par définition $B(a,\, r) = \{x \in E,\ N(x - a) < r\} = \{x \in E,\ d(x,\, a) < r\}$

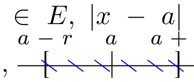
$ii/$ Soit $r \geqslant 0$, la boule fermée de centre a et de rayon r est par définition $\overline{B}(a,\, r) = \{x \in E,\ N(x - a) \leqslant r\} = \{x \in E,\ d(x,\, a) \leqslant r\}$

Remarque :

- Soit $r > 0$, alors $a \in B(a,\, r) \subset \overline{B}(a,\, r)$
- $\overline{B}(a,\, 0) = \{a\}$
- Si $r < r'$ $B(a,\, r) \subset B(a,\, r')$, $\overline{B}(a,\, r) \subset \overline{B}(a,\, r')$

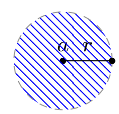
Ex :

- $E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$. Soit $a \in \mathbb{R}$, alors $B(a, r) = \{x \in E,\ |x - a| < r\} =]a - r, a + r[$, 

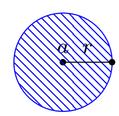
$\overline{B}(a,\, r) = \{x \in \mathbb{R},\ |x - a| \leqslant r\} =[a - r,\, a + r]$, 

- $E = \mathbb{C}$, $N(z) = |z|$, pour $z \in \mathbb{C}$. Soient $a,\, r > 0$.

Alors $B(a,\, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| < r\}$ c'est le disque ouvert de centre a, et de rayon r :



Alors $\overline{B}(a,\, r) = \{z \in \mathbb{C},\ |z - a| \leqslant r\}$ c'est le disque fermé de centre a, et de rayon r :



- $E = \mathbb{R}^p$ muni des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, on a vu que $\forall\ x \in \mathbb{R}^p$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant p||x||_\infty$

Notons $B_\ell(a,\, r) = \{x \in \mathbb{R}^p,\ ||x - a||_\ell \leqslant r\}$. $\ell \in \{1, 2, \infty\}$

Soit $r > 0$, soit $x \in B_\ell(0,\, \frac{r}{p})$. Alors $||x||_\infty < \frac{r}{p}$, donc $||x||_1 \leqslant p||x||_\infty < p\frac{r}{p} = r$ or $x \in B_1(0,\, r)$.

On en déduit que $B_\infty(0,\, \frac{r}{p}) \subset B_1(0,\, r)$ De même $B_1(0,\, r) \subset B_2(0,\, r) \subset B_\infty(0,\, r)$.

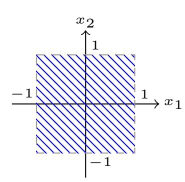
$$\forall\ x \in E,\ B_\infty(0,\, \tfrac{r}{p}) \subset B_1(0,\, r) \subset B_2(0,\, r) \subset B_\infty(0,\, r).$$

Cas de $p = 2$, $r = 1$

Alors $B_\infty(0,\, 1) = \left\{x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, ||x||_\infty\right\}$

$= \left\{(x_1,\ x_2) \in\ \mathbb{R}^2, \text{Max}[|x_1|,\, |x_2|] < 1\right\}$

$= \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\right\}$

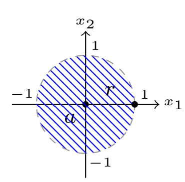


Alors $B_2(0,\, 1) = \left\{x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, ||x||_2\right\}$

$= \left\{(x_1,\ x_2) \in\ \mathbb{R}^2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\right\}$

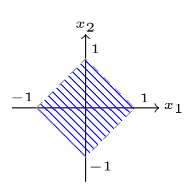
$= \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\right\}$

$= \{z = x_1 + ix_2), |z| < 1\}$



Alors $B_\infty(0,\, 1) = \left\{x = (x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, ||(x_1,\ x_2)||_1\right\} = \left\{(x_1,\ x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| + |x_2| < 1\right\}$

Alors $B_1(0,\, 1) \cap \{(x_1,\ x_2), x_1 \leqslant 0, x_2\} = A$.
$B_1(0,\, 1)$ s'obtient par symétrie par A, par rapport aux axes.



Définition :

On dit que deux normes N_1 et N_2 sont équivalentes ssi $\exists\ C > 0$, telle que $\forall\ x \in E$, $N_1(x) \leqslant CN_2(x)$ et $N_2(x) \leqslant CN_1(x)$.

Remarque :

On définit aussi "N_1 et N_2 sont équivalentes" par :

$\exists\ C_1 > 0$, telle que $\forall\ x \in E$, $N_2(x) \leqslant C_1N_1(x)$ et, $\exists\ C_2 > 0$, telle que $\forall\ x \in E$, $N_1(x) \leqslant C_2N_2(x)$.

Cette définition est équivalente à la précédente.

Déf 1 $\Longrightarrow$ Déf 2, c'est évident, on prend $C_1 = C_2 = C$. Déf 1 $\Longrightarrow$ Déf 2, en prennant $C = \text{Max}[C_1,\ C_2]$.

Ex : Sur $\mathbb{R}^p$ $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, sont des normes équivalentes (car $\forall\ x \in \mathbb{R}^p$, $||x||_\infty \leqslant ||x||_2 \leqslant ||x||_1 \leqslant p||x||_\infty$.)

2 Limites et continuité

Définition :

On considère $(E,\ N)$ un e.v.n. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On dit que u_n converge vers ℓ ssi la suite réelle $(N(u_n - \ell))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Propriété : Supposons que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, $u'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell'$. Alors, $u_n + u'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$.

Démo :

$$N((u_n + u'_n) - (\ell + \ell')) = N((u_n - \ell) + (u'_n - \ell')) \leqslant \underbrace{N(u_n - \ell)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} + \underbrace{N(u'_n - \ell')}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$$

donc $N((u_n + u'_n) - (\ell + \ell')) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. On en déduit que $u_n + u'_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell + \ell'$

Remarque :

Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $(E,\ N)$ converge, la limite est unique : Supposons que $u_n \longrightarrow \ell$, $u'_n \longrightarrow \ell'$. Alors,

$0 \leqslant N(\ell - \ell') = N((\ell - u_n) + (\ell' - u_n)) \leqslant N(\ell - u_n) + N(\ell' - u_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$\Longrightarrow 0 \leqslant N(\ell - \ell') \leqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{i=1}^{n} u_i = 0$ d'où $N(\ell - \ell') = 0$, donc $\ell - \ell' = 0$.

Proposition :

Soient N_1, N_2 deux normes equivalentes sur un e.v E. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de E, soit $\ell \in E$. Alors $(N_1(u_n - \ell) \Longrightarrow 0) \Longleftrightarrow (N_2(u_n - \ell) \Longrightarrow 0)$. $((i) \Longleftrightarrow (ii))$.

Démo :

Montrons que $i/ \Longrightarrow ii/$. Comme N_1, N_2 sont équivalents, $\exists\ C > 0$, tel que $\forall\ x \in E$, $N_2(x) \leqslant CN_1(x)$ donc $0 \leqslant N_2(u_n - \ell) \leqslant \underbrace{CN_1(u_n - \ell)}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0}$. Donc $N_2(u_n - \ell) \longrightarrow 0$. De même $ii/ \Longrightarrow i/$ en inversant N_1 et N_2.

Corollaire :

Comme les normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$ sont équivalentes :

Une suite de $\mathbb{R}^p$ converge vers $\ell \in \mathbb{R}^p$ pour l'une de ces normes ssi elle converge pour une autre.

Remarque :

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $(E,\ N)$ converge vers ℓ, il est équivalent de montrer que la suite $(u_n - \ell)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Proposition :

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de $\mathbb{R}^p$, $u_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{p,n} \end{bmatrix}$ où $((x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de $\mathbb{R}$ $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\})$. Alors

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{'}$ muni de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty \Longleftrightarrow$ Les suites $(x_{p,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers ℓ_j, $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\})$.

Démo :

Par la remarque précédente, on peut supposer $\ell = 0$. On doit montrer $||u_n||_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \iff$ $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\}$ $(x_{j,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vers 0 (où $k = 1$, 2 ou ∞). Montrons $\Longrightarrow$. Supposons $||u_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Or, $||u_n||_\infty = \text{Max}[|x_{1,n}|,\ |x_{2,n}|,\ ...,\ |x_{p,n}|]$. Alors $|x_{j,n}| \leqslant ||u_n||_\infty \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc, $x_{j,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\}$.

Montrons $\Longleftarrow$, On a : $x_{j,n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\}$.

Alors $||u_n||_1 = |x_{1,n}| + |x_{2,n}| + ... + |x_{p,n}| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 + 0 + ... + 0 = 0$. Donc $||u_n||_1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

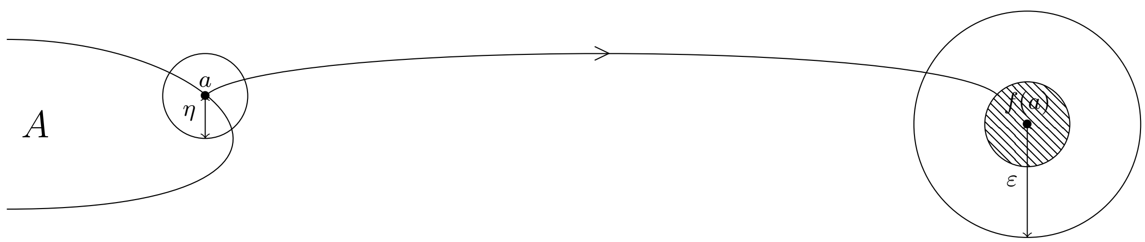
2.1 Applications Continues

Définition :

Soient $(E,\ N)$, $(E',\ N')$ deux e.v.n. Soient $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$, $a \in A$. On dit que f est continue en a ssi $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in A$, $\underbrace{N(x-a) < \eta}_{x \in B_E(a,\ \eta)} \Longrightarrow \underbrace{N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon}_{f(x) \in B_{E'}(f(a),\ \varepsilon)}$.

Remarque :

$\Longrightarrow \forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in A \cap B_E(a,\ \eta)$, on a $f(x) \in B_{E'}(f(a),\ \varepsilon)$



Remarque :

Cela généralise la définition des fonctions continues d'une variable : I intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$, f est continue en a : $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ \eta > 0$ et $\forall\ x \in I$, $x \in |x - a| < \eta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Proprosition :

Soit $f : A \longrightarrow E'$ continue en $a \in E$. Alors, pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $f((x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans E'.

Démo :

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue en a, $\exists\ \eta > 0$ tel que $\forall\ x \in A$, $N(x - a) < \eta \Longrightarrow N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$.
Soit (x_n) convergeant vers a, $x_n \in A$. Cela signifie que $N(x_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Il existe donc n_0, tel que $\forall\ n \geqslant n_0$, $N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$. On a prouvé que $\forall\ \varepsilon > 0$, $\exists\ n_0$, et $\forall\ n \geqslant n_0$, $N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$.
Donc, $N'(f(x_n) - f(a)) \longrightarrow 0$ si $n \longrightarrow +\infty$ donc $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ dans E'.

Théorème :

Soient $(E,\ N)$, $(E',\ N')$ deux e.v.n. Soient $A \subset E$, $f : A \longrightarrow E'$, $a \in A$.

f est continue en $a \iff$ Pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, la suite $f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$.

Démo :

$i/ \longrightarrow ii/$ est la proposition précédente.

On peut montrer $ii/ \longrightarrow i/$ par contraposée. On suppose donc : $\exists\ \varepsilon_0 > 0$ et $\forall\ \eta > 0$, $\exists\ x \in A$ avec $N(x - a) < \eta$ et $N'(f(x) - f(a)) \geqslant \varepsilon_0$.

Appliquons cela avec $\eta = \frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$. Il existe donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A$ vérifiant $N(x_n - a) < \frac{1}{n+1}$ et $N'(f(x) - f(a)) \geqslant \varepsilon_0$.

On a donc $N(x_n - a) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de A convergeant vers a. De plus la suite

$f(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne peut converger vers $f(a)$ (puisque si elle convergeait vers $f(a)$, $0 = \lim\limits_{n\to+\infty} N'(f(x) - f(a)) \geqslant \varepsilon_0$ > 0 : absurde.) On a montré que $i/$ (faux) $\Longrightarrow ii/$ (faux)

Application du théorème précédent :

Proposition :

Soient E, E' deux e.v, N, N_1 deux normes équivalentes sur E, et N', N_1' deux normes équivalentes sur E'. Soient $A \subset E$, $a \in A$, $f : A \longrightarrow E'$. Il y a équivalence entre :

– $i/$ f est continue en a lorsque E est muni de N, et E' est muni de N'.

– $ii/$ f est continue en a lorsque E est muni de N_1, et E' est muni de N_1'.

Démo :

Par le théorème précédent, $i/$ équivaut à :

– $i'/$ $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A vérifiant $N(x_n - a) \longrightarrow 0$, on a : $N'(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0$.

De même $ii/$ équivaut à :

– $ii'/$ $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A vérifiant $N_1(x_n - a) \longrightarrow 0$, on a : $N_1'(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0$.

Or, on a vu que si N est équivalente à N_1 : $(N(x_n - a) \longrightarrow 0) \Longleftrightarrow (N_1(x_n - a) \longrightarrow 0)$. De même, comme N' est équivalente à N_1', $(N'(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0) \Longleftrightarrow (N_1'(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0)$. Donc $i'/ \Longleftrightarrow ii'/$.

Remarque :

Supposons $E = \mathbb{R}^n$, $E' = \mathbb{R}^p$. On sait que les normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$, sont équivalentes. Lorsqu'on étudie la continuité de $f : A \longrightarrow E'$. où $A \subset E$, on peut étudier n'importe laquelle de ces normes.

2.2 Sommes de fonctions continues en un point

Notation :

$f : A \longrightarrow E'$, $g : A \longrightarrow E'$, on note $f + g : A \longrightarrow E'$, $x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$. Si $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x)$, $\forall\ x \in a$.

Proposition :

Si f et g sont continues en $a \in A$ alors $f + g$ et $\lambda f(x)$ sont continues en a.

Démo :

Pour voir que $f + g$ est continue en a, il suffit de montrer que $\forall\ (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a, $((f + g)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(f + g)(a)$. Or comme f est continue en a, $f(x_n) \longrightarrow f(a)$ et g est continue en a, $g(x_n) \longrightarrow g(a)$. Donc $f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow f(a) + g(a)$.

Proposition :

Soient (E, N), (E', N'), (E'', N'') trois e.v.n. Soient $A \subset E$, $B \subset E'$, $f : A \longrightarrow E'$, $g : B \longrightarrow E''$. Supposons $f(A) \subset B$. On peut donc définir $g \circ f : A \longrightarrow E''$. Soit $a \in A$. On pose $b = f(a)$ $(\in f(A) \subset B)$ Supposons f continue en a et g continue en b. Alors $g \circ f$ continue en $g \circ f$ est continue en a.

Démo :

Il suffit de voir que pour toute quite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de A convergeant vers a $((g \circ f)(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $(g \circ f)(a)$. Or comme f est continue en a, $x_n \longrightarrow a \Longleftrightarrow a$, $f(x_n) \longrightarrow b$, et comme g est continue en b, $y_n = f(x_n) \longrightarrow b \Longleftrightarrow g(y_n) = (g \circ f)(x_n) \longrightarrow g(b) = (g \circ f)(a)$

Proposition :

Soient (E, N) un e.v.n. $A \subset E$, $a \in E$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$. On munit $\mathbb{R}^p$ de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$.

Pour $x \in A$, écrivons $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$ On obtient $f_j : A \longrightarrow \mathbb{R}$, $j \in \{1,\ ...,\ p\}$. Il y a équivalence entre :

– $i/$ f est continue en a.

– $ii/$ $\forall\ j \in \{1,\ ...,\ p\}$, f_j est continue en a.

Démo :

– $i/ \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \longrightarrow a$, la suite $f((x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(a)$ dans $\mathbb{R}$.

– $ii/ \iff (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $A \longrightarrow a$, $\forall\, j \in \{1,\ ...,\ p\}$ la suite $f_j((x_n))_{n\in\mathbb{N}} \longrightarrow f_j(a)$.

Or on a vu que $\begin{bmatrix} f_1(x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_n) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{bmatrix} \iff \forall\, j \in \{1,\ ...,\ p\}\ f_j((x_n))_{n\in\mathbb{N}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} f_j(a)$.

Définition :
On dit que $f : A \longrightarrow E'$ est continue sur $A \iff \forall\, a, \in A\ f$ est continue est a.

Théorème :
Soient $(E,\ N)$, $(E',\ N')$ deux e.v.n. Soient $u : E \longrightarrow E'$ linéaire. Il y a équivalence entre :
– $i/$ u est continue sur E
– $ii/$ u est continue sur 0
– $iii/$ $\exists\, C > 0$, $\forall\, x \in E$, $N'(u(x)) \leqslant CN(u(x))$.

Démo :

$i/ \Longrightarrow ii/$: évident. $0 \in E$

$ii/ \Longrightarrow iii/$: Si u est continue en 0, $\forall\, \varepsilon > 0$ et $\exists\, \eta > 0$ et $\forall\, x \in E$, $N(x-0) < \eta \Longrightarrow N'(u(x) - u(0)) < \varepsilon$
Comme u est linéaire, $u(0) = 0$ donc $N(x) < \eta \Longrightarrow N'(u(x)) < \varepsilon$ Appliquons cela avec $\varepsilon = 1$.
$\exists\, \eta_0 > 0$ tel que $N(x) < \eta_0 \Longrightarrow N'(u(x)) < 1$. Soit $y \in E$, $y \neq 0$. Posons $x = \frac{y}{N(y)} \cdot \frac{\eta_0}{2}$. Alors $N(x) = \frac{\eta_0}{2}$ $< \eta_0$ donc soit $N'(\frac{\eta_0}{2N(y)} u(y)) < 1$ puisque u est linéaire. Donc, $\forall\, y \in E \setminus \{0\}$ $\frac{N'(u(y))}{2N(y)/\eta_0} < 1$ d'où $N'(u(y)) < CN(y)$ avec $C = \frac{2}{\eta_0}$ Donc $iii/$ est vraie.

$iii/ \Longrightarrow i/$: Soit $a \in E$. On veut monter que u est continue en a. $\exists\, C > 0$ et $\forall\, y \in E$, $N'(y) < CN(y)$.
Pour $\varepsilon > 0$ donné, posons $\eta = \varepsilon/C$, supposons $N(x-a) < \eta$. Alors,
$N'(u(x) - u(a)) = N'(u(x-a)) \leqslant CN(x-a) < C\eta = \varepsilon$. Donc u est continue en a.

Proposition :

Munissons $\mathbb{R}^p$ de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$. Soient $(E,\ N)$ un e.v.n et $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$, une application linéaire. Alors u est continue.

Démo :

Notons $(e_1,\ ...,\ e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$, si $x \in \mathbb{R}^p$, $\sum_{j=1}^{p} x_j e_j$. Alors $u(x) = \sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j)$ car u est linéaire.

Alors $N(u(x)) = N(\sum_{j=1}^{p} x_j u(e_j)) \leqslant \sum_{j=1}^{p} N(x_j u(e_j)) = \sum_{j=1}^{p} |x_j| N(u(e_j))$. Posons $M = \mathrm{Max}[N'(u(e_j))]$. Donc

$N(u(x)) \leqslant M \sum_{j=1}^{p} |x_j| = M||x||_1$. D'après $iii/$ de la propriété pécédente, cela implique que u est continue.

2.3 Exemples de fonctions continues

Ex 1 :

L'application $E \times E \longrightarrow E$, $(x,\ y) \mapsto x + y$ est continue.

Ex 2 :

L'application $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $(x,\ y) \mapsto x \cdot y$ est continue.

Ex 3 :

L'application $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z,\ \omega) \mapsto z \cdot \omega$ est continue.

Ex 4 :

Soient $(E,\ N)$ un e.v.n, $A \subset E$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^*$. Soit $a \in E$, supposons f continue en a. Alors, $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$ est continue en a.

Ex 5 :

Soit $E = M_p(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre p. Si $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant p} \in M_p(\mathbb{R})$, posons

$N(A) = p \underset{1 \leqslant i,j \leqslant p}{\text{Max}} |a_{ij}|$. N est une norme et on pose N' une norme sur E, telle que $\forall\ A,\, B \in M_p(\mathbb{R}$

$N'((A,\, B)) = \text{Max}[N(A),\, N(B)]$. Soit $\Phi : E \times E \longrightarrow E$. $(A,\, B) \longrightarrow AB$. Φ est une continue dans $(E,\, N')$.

Ex 6 :

Soit $(E,\, N)$ un e.v.n. L'application $E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto N(x)$ est continue.

(Je scannerai leurs démonstrations car trop longues pour certaines.)

2.4 Exemples de fonctions non continues

Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $(x,\, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,\, y) \neq 0$, et $f(0,\, 0) = 0$.

Démo :

Montrons que f n'est pas continue en $(0,\, 0)$

. Il suffit de construire une suite $((x_n,\, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ convergeant vers 0, telle que $f(x_n,\, y_n)$ ne converge pas vers $f(0,\, 0) = 0$. Prenons, $x_n = y_n = \frac{1}{n+1}$ Donc $(x_n,\, y_n) \mapsto (0,\, 0)$. Mais

$f(x_n,\, y_n) = \dfrac{\frac{1}{1+n} \cdot \frac{1}{1+n}}{\left(\frac{1}{1+n}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+n}\right)^2} = \frac{1}{2}$. En particulier $f(x_n,\, y_n) \nrightarrow 0$.

Si on fixe $y = y_0$, $x \mapsto f(x,\, y_0)$ est continue

– Si $y_0 \neq 0 : f(x,\, y_0) = \frac{xy_0}{x^2+y_0^2}$ et le dénominateur ne s'annule pas.

– Si $y_0 = 0 : f(x,\, 0) = 0$. $\forall\ x \in \mathbb{R}$ donc $x \mapsto f(x,\, 0)$ est continue.

Donc f est continue séparément par rapport à chaque variable, mais pas comme fonction de deux variables.

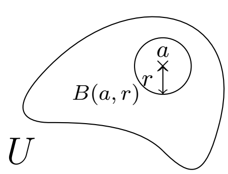
3 Topologie sur un e.v.n

3.1 Ouverts d'un e.v.n

Définition :

Soit $(E,\, N)$, un e.v.n. On dit que $U \subset E$ est ouvert $\Longleftrightarrow \forall\ a \in U$, $\exists\ r > 0$, tel que $B(a,\, r) \subset U$.

Ex :

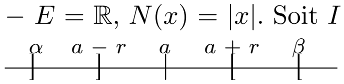


– U est ouvert.

– $U = \emptyset$ est ouvert.

Ex :

– $E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$. Soit $I =]\alpha,\, \beta[$, $\alpha,\, \beta \in \mathbb{R}$, (ou $\alpha = -\infty$, ou $\beta = +\infty$). Alors I est ouvert. Soit $a \in I$.



On doit trouver $r > 0$, tel que $B(a,\, r) =]a - r,\, b - r[\notin I$. Il suffit de prendre $r <$ Min $[a - \alpha,\, b - \beta]$.

– $[0, 1[$ n'est pas un ouvert. On ne peut pas trouver un $r > 0$, tel que : $B(0,\, r) \subset [0, 1[$.

Notation :

Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille de s.e.v. de E. On note $\bigcup\limits_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists\ i \in I, \text{tel que } x \in A_i\}$.

Proposition : Soit $(E,\, N)$ un e.v.n.

i/ Soit $(u_i)_{i \in I}$, une famille d'ouverts de E. Alors $\bigcup\limits_{i \in I} u_i$ est un ouvert de E.

ii/ Soient U,V deux ouverts de E. Alors $U \cap V$ est ouvert. Plus généralement, si U_1, U_2, ..., U_n sont des ouverts de E alors $U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_n$ est un ouvert de E. (Toute intersection finie d'éléments est un ouvert.)

Démo :

i/ Supposons $\forall\ i \in I$. U_i est ouvert. Soit $U = \bigcup\limits_{i \in I} U_i$. Soit $a \in U$. $\exists\ i_0 \in I$, tel que $a \in U_{i_0}$. Comme U_{i_0} est ouvert $\exists\, r > 0$, tel que $B(a,\, r) \subset U_{i_0}$. $U_{i_0} \subset \bigcup\limits_{i\in I} U_i = U$ donc on a trouvé $r > 0$ avec $B(a,\, r) \subset U$. Donc U est ouvert.

$ii/$ Soient U, V deux ouverts de E. Montrons que $U \cap V$ est ouvert. Soit $a \in U \cap V$. Comme $a \in U$ et que U est ouvert, $\exists\, r_1 > 0$, avec $B(a,\, r_1) \subset U$. De même, comme $a \in V$. Posons $r = \mathrm{Min}[r_1,\, r_2] > 0$.

Alors $B(a,\, r) \subset B(a,\, r_1) \subset U$ et $B(a,\, r) \subset B(a,\, r_2) \subset V. \Longrightarrow B(a,\, r) \subset U \cap V$.

Attention :

L'intersection d'une famille infinie n'est pas ouvert en général.

Ex :

Soient $U_n = \left]-\frac{1}{n}, 1\right[$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}^{+\infty} U_n = \{x \in E;\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ x \in U_n\} = \left\{x \in E;\ \forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < x < 1\right\}$.

Donc $A = [0,\, 1[$. Or, on a vu que A n'est pas ouvert.

Notation :

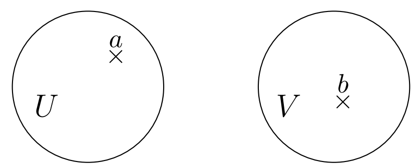
Si X, Y sont des ensembles, et $f : X \longrightarrow Y$, si $Z \subset Y$, on pose $f^{-1}(Z) \overset{def}{=} \{x \in E;\ f(x) \in Z\}$. On note aussi $f^{-1}(Z) = f^*(Z)$.

Proposition :

Soient $(E,\, N)$, $(E',\, N')$ deux e.v.n. $f : E \to E'$ continue. Si V est ouvert de E, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

Démo :

Posons $U = f^{-1}(V)$. Soit $a \in U$. On doit montrer qu'il existe $r > 0$, tel que $B(a,\, r) \subset U$. Notons $b = f(a) \in V$. Comme V est ouvert $\exists\, \varepsilon > 0$, tel que $B(b,\, \varepsilon) \subset V$. Comme f est continue en a, $\exists\, \eta > 0$ tel que $\forall\, x \in E$, $N(x - a) \Longrightarrow N'(f(x) - b) < \varepsilon$. $x \in B_E(a,\, \eta) \Longrightarrow f(x) \in B_{E'}(b,\, \varepsilon) \subset V$. Donc $\forall\, x \in B(a,\, \eta)$, $f(x) \in V$,



donc $B(a,\, \eta) \subset f^{-1}(V)$. Si on pose $r = \eta$, on aura donc trouvé une boule $B(a,\, r) \subset f^{-1}(V) = U$. Donc $f^{-1}(V)$ est ouvert.

Application :

Soit $a \in E$, $r > 0$. Alors la boule ouverte $B(a,\, r)$ est un ouvert E. Soit $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto N(x,\, a)$. On a vu que f est continue. Or $B(a,\, r) = \{x \in E,\ f(x) < r\} = f^{-1}\underbrace{(]-\infty; r[)}_{\text{ouvert de}\mathbb{R}} \Longrightarrow f^{-1}(]-\infty; r[)$ est un ouvert.

De même $E \smallsetminus \overline{B}(a,\, r)$ est un ouvert car $E \smallsetminus \overline{B}(a,\, r) = \{x \in E,\ N(x - a) > r\} = \{x \in E, f(x) > r\} = f^{-1}(]-\infty; r[)$.

Proposition :

Soient N_1, N_2 deux normes équivalentes sur un e.v. E. Soit $U \subset E$, U est ouvert pour $N_1 \Longleftrightarrow U$ est ouvert pour N_2.

Démo :

N_1, N_2 équivalents, $\exists\, C > 0$ avec $\forall\, x \in E$, $N_1(x) \leqslant CN_2(x)$ et $N_2(x) \leqslant CN_1(x)$.

Soit U un ouvert pour N_1.

Montrons que U un ouvert pour N_2. $\Longleftrightarrow \forall\, a \in U$, $\exists\, r_2 > 0$, $B_{N_2}(a,\, r_2) = \underbrace{N(x - a) < \eta}_{\subset U}$

Comment U est ouvert pour N_1, on sait qu'il existe $r_1 > 0$, $B_{N_1}(a - r_1) = \{x \in E,\ N_1(x - a) < r_1\} \subset U$.

Posons $r_2 = \frac{r_1}{C}$. Soit $x \in B_{N_2}(a,\, r_2) \subset U$ alors $N_2(x - a) < r_2$ d'où $= N_1(x - a) \leqslant N_2(x - a) \cdot C < C \cdot r_2 = r_1$. Donc $B_{N_2}(a,\, r_2) \subset B_{N_1}(a,\, r_1)$. Comme $B_{N_1}(a,\, r_1) \subset U$ on a donc trouvé $r_2 > 0$ avec $B_{N_2}(a,\, r_2) \subset U$.

Corollaire :

Soit $E = \mathbb{E}^p$. Alors les ouverts associés aux normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$ sont les mêmes.

Ex :

$P =]a,\, b[\times]c,\, d[\subset \mathbb{R}^2$ (muni de l'une des normes $||..||_1$, $||..||_2$, $||..||_\infty$) alors P est ouvert. En effet, un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, $]\alpha,\, \beta[$ est un ouvert. Soient

$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\pi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$(x_1,\, x_2) \mapsto x_1, \qquad (x_1,\, x_2) \mapsto x_2.$

Alors π_1, π_2 sont linéaires sur $\mathbb{R}^2$. On sait alors qu'elles sont continues.

Donc comme $]a,\, b[\, \subset \mathbb{R}$ est ouvert, $\pi_1^{-1}(]a,\, b[) = U_1$ est ouvert. $]c,\, d[\, \subset \mathbb{R}$ est ouvert, $\pi_2^{-1}(]c,\, d[) = U_2$ est ouvert. $P = U_1 \cap U_2$ est un ouvert.

3.2 Fermés d'un e.v.n.

Définition :

Soit $(E,\, N)$, un e.v.n. On dit que $F \subset E$ est fermé $\iff E - F$ est ouvert.

Ex :

- $\emptyset$ est fermé car $E - \emptyset = E$ qui est ouvert
- E est fermé car $E - E = \emptyset$ qui est ouvert.

Donc $\emptyset$, et E sont à la fois ouverts et fermés.

- $\overline{B}(a,\, r) = \{x \in E; N(x-a) \leqslant r\}$ est fermé car $E - \overline{B}(a,\, r) = \{x \in E; N(x-a) > r\}$ est ouvert.
- $\{x \in E; N(x-a) < r\}$ est fermé car $E - F = \{x \in E; N(x-a) < r\} = B(a,\, r)$ est ouvert.

Cas particulier :

$E = \mathbb{R}$, $N(x) = |x|$. Alors si $a < b$ $[a,\, b] = \overline{B}(c,\, r)$ où $c = \frac{a+b}{2}$, $r = \frac{b-a}{2}$. Donc $[a,\, b]$ est un fermé.

Un s.e.v d'un e.v.n peut être ni ouvert, ni fermé.

Ex :

$E = \mathbb{R}$, $A = [0,\, 1[$ alors A n'est pas ouvert car on ne peut pas trouver $r > 0$, $]-r,\, r[\, \subset A$. Mais A n'est pas non plus fermé. S'il l'était, $E - A$ serait ouvert. $E - A =]-\infty,\, 0[\, \cup [1,\, +\infty[$ qui n'est pas ouvert car il n'existe pas $r > 0$ tel que $\overline{B}(1,\, r) =]1-r,\, 1+r[\, \subset E - A$.

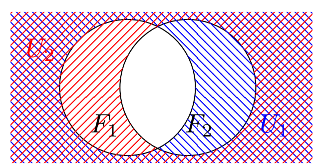
Proposition : Soit $(E,\, N)$ un e.v.n :

- F_1, F_2 deux fermés de E. Alors $F_1 \cup F_2$ est fermé. Plus généralement, si F_1, ..., F_n sont des fermés, alors $F_1 \cup ... \cup F_n$ est fermé.
- Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille de fermés de E, alors $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in F_i\}$ est un fermé.

Démo :

Soient F_1, F_2 deux fermés de E. $U_1 = E - F_1$ et $U_2 = E - F_2$ ouverts de E.

Alors $U_1 \cap U_2 = \{x \in E, x \notin F_1 \text{ et } x \notin F_2\} = \{x \in E, x \notin F_1 \cup F_2\}$ $= E - (F_1 \cup F_2)$. $U_1 \cap U_2$ est ouvert donc $F_1 \cup F_2$ est fermé.



Soit $(F_i)_{i\in I}$ des fermés. Posons $U_i = E - F_i$. C'est un ouvert de E. On sait que $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ est un ouvert.

$\bigcup\limits_{i\in I} U_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in U_i\} = \{x \in E, \forall i \in I \text{ avec } x \notin F_i\}$. Donc $\bigcup\limits_{i\in I} U_i = E - (\bigcap\limits_{i\in I} F_i)$ On en déduit que $E - (\bigcap\limits_{i\in I} F_i)$ est un ouvert donc $(\bigcap\limits_{i\in I} F_i)$ est un fermé.

3.3 Caractérisation des fermés par les suites.

Théorème :

Soit $(E,\, N)$ un e.v.n, $F \subset E$. Il y'a équivalence entre :

- $i/$ F est fermé.
- $ii/$ $\forall$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in F$ convergeant vers $\ell \in E$, on a $\ell \in F$.

Démo :

$i/ \Longrightarrow ii/$. Supposons F fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \in F$. $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$. Supposons que $\ell \notin F$ et montrons la contradiction. Comme F est fermé, $E - F$ est ouvert et par hypothèse $\ell \in E - F$. Il existe donc $r > 0$, tel que $B(\ell, r) \subset E - F$. Comme $x_n \in F$, $\forall\, n$ on a $N(x_n - \ell) \geqslant r$. Par hypothèses $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ i.e : $N(x_n - \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $0 = \lim N(x_n - \ell) \geqslant r > 0$ absurde. Donc $\ell \in F$.

$ii/ \Longrightarrow i/$. Montrons que F est fermé ce qui équivaut à ce que $E - F$ soit ouvert, supposons $E - F$ n'est pas ouvert montre que cela contredit $i/$.

$(E - F$ ouvert$) \Longleftrightarrow (\forall\, \ell \in E - F, \exists\, r > 0$ avec $B(\ell, r) \subset E - F)$

$(\forall\, \ell \in E - F$ n'est pas ouvert$) \Longleftrightarrow (\exists\, \ell \in E - F, \forall\, r > 0, B(\ell, r)$ n'est pas inclus dans $E - F) \Longleftrightarrow (\exists\, \ell \in E - F, \forall\, r > 0, B(\ell, r) \cap F \neq \emptyset)$.

Appliquons cela avec $\frac{1}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, donc $B(\ell, \frac{1}{n+1}) \cap F \neq 0$ donc il existe $x_n \subset F \cap B(\ell, \frac{1}{n+1})$ donc $x_n \in F$ et $N(x_n - \ell) < \frac{1}{n+1}$. $N(x_n - \ell) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de F convergeant vers ℓ et $\ell \notin F$. On a donc obtenu une suite qui contredit l'hypothèse $ii/$.

Ex :

– $[a, b]$ est un fermé. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [a, b]$ convergeant vers $\ell \in \mathbb{R}$. On doit monter qu'en fait $\ell \in [a, b]$. Par hypothése on a $a \leqslant x_n \leqslant b$. En passant à la limite, on obtient $a \leqslant \ell \leqslant b$. De la même manière, $[a, +\infty[$, $]-\infty, b]$ sont des fermés.

– $[0, 1[$ n'est pas fermé. Il suffit des vérifier que $ii/$ du théorème n'est pas satisfaite, donc qu'il existe $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0, 1[$ qui converge vers $\ell \notin [0, 1[$.

Prenons $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} \in [0, 1[$ et $x_n \longrightarrow 1 \notin [0, 1[$.

3.4 Adhérence d'un ensemble

Définition :

Soit A un s.e.v d'un e.v.n (E, N) . On appelle adhérence de A, et on note $\overline{A}$, l'ensemble $\{\ell \in E, \exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ avec $x_n \longrightarrow \ell\}$

Remarque :

$A \subset \overline{A}$ car si $a \in \overline{A}$, on peut écrire $a = \lim x_n$ avec $x_n = a$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Propositions :

$i/$ $\overline{A}$ est fermé

$ii/$ A est fermé $\Longleftrightarrow A = \overline{A}$

Démo :

$i/$ semblable à la démonstration du théorème.

$ii/$ $A = \overline{A} \Longrightarrow A$ fermé, découle de $i/$.

A fermé $\Longrightarrow A = \overline{A}$ car : On sait qu'on a toujours $A \subset \overline{A}$, il reste à voir que si A est fermé, on a aussi $\overline{A} \subset A$ Or si $\ell \in \overline{A}$, $\exists\, (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de A avec $x_n \longrightarrow \ell$. Mais si A est fermé on sait que la limite d'une telle suite est dans A donc $\ell \in A$.

Ex :

Soit $r > 0$, Alors $\underbrace{\overline{B(0, r)}}_{\text{adhérence de la boule ouverte}} = \underbrace{\overline{B}(0, r)}_{\text{Boule fermée}}$

Démo :

On sait que $B(0, r) \subset \overline{B}(0, r)$ donc $\overline{B(0, r)} \subset \overline{\overline{B}(0, r)} = \overline{B}(0, r)$ car $\overline{B}(0, r)$ est fermée.

Il reste à voir que $\overline{B}(0, r) \subset \overline{B(0, r)}$: Soit ℓ avec $N(\ell) = r$, et soit $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite de $[0, 1[$ $t_n \longrightarrow 1$.

Alors $x_n = t_n\ell \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$ et $N(x_n) = t_nN(\ell) = t_nr < r$ donc $x_n \in B(0, r)$ donc $\ell \in B(0, r)$