

# Espaces Vectoriels Normés

## Fonctions à plusieurs variables

Mise à jour du cours du 05/02

Lundi 15 janvier 2018

Soit  $E$  un espace vectoriel.

Le but de cette partie est de définir la notion de distance entre deux vecteurs de  $E$ .

Ex : –  $E = \mathbb{R}$  : On peut définir la distance entre deux réels  $a$  et  $a'$  par  $d(a, a') = |a - a'|$ .

–  $E = \mathbb{C}$  : On peut poser  $z, z' \in \mathbb{C}$ ,  $d(z, z') = |z - z'|$ . Si on écrit  $z = x + iy$  et  $z' = x' + iy'$ , alors  $d(z, z') = |x - x' + i(y - y')| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ .

–  $E = \mathbb{R}^2$  : Si  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$ , on peut définir  $d((x, y), (x', y')) = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2}$ .

## 1 Normes et distances sur un espace vectoriel

Définition : Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Une norme sur  $E$  est par définition une application

$N : E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto N(x)$  vérifiant :

- $\forall x \in E, N(x) \geq 0$ , et  $(N(x) = 0 \iff x = 0)$ ,
- $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda|N(x)$ ,
- (Inégalité triangulaire)  $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$ .

Définition : Un espace vectoriel normé (e.v.n) est un couple  $(E, N)$  où  $E$  est un e.v et  $N$  une norme sur  $E$ .

Propriétés :

- Soient  $x_1, x_2, x_3 \in E$  avec  $(E, N)$  un e.v.n. Alors,  
 $N(x_1 + x_2 + x_3) = N((x_1 + x_2) + x_3) \leq N(x_1 + x_2) + N(x_3) \leq N(x_1) + N(x_2) + N(x_3)$
- Si  $x_1, \dots, x_p \in E, N(x_1, \dots, x_p) \leq N(x_1) + \dots + N(x_p)$ .
- Si  $x, y \in E, |N(x) - N(y)| \leq N(x - y)$ .

Démo :

$$N(x) = N((x - y) + y) \leq N(x - y) + N(y), N(x) - N(y) \leq N(x - y).$$

$$\text{Aussi } N(y) - N(x) \leq N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1|N(x - y) = N(x - y).$$

$$\text{Finalement, } |N(x) - N(y)| = \text{Max}(N(x) - N(y), N(y) - N(x)) \leq N(x - y).$$

Ex :

–  $E = \mathbb{R}$  : Posons  $N(x) = |x|$  (Valeur absolue).

$N$  est une norme sur  $\mathbb{R}$ , car  $|x| \geq 0$ ,  $(|x| = 0 \iff x = 0)$ ,

$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda x| = |\lambda||x|$ , et  $\forall x, y \in \mathbb{R}, |x + y| \leq |x| + |y|$ .

–  $E = \mathbb{C}$  : Posons  $N(x) = |x|$  (Module).

$N$  est une norme sur  $\mathbb{C}$ , car  $|z| \geq 0$ ,  $(|z| = 0 \iff z = 0)$ ,

$\forall \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda z| = |\lambda||z|$ , et  $\forall z, z' \in \mathbb{C}, |z + z'| \leq |z| + |z'|$ .

– Espaces euclidiens :

Soit  $E$  un e.v. Une forme bilinéaire est une application  $B : E \times E \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto B(x, y)$  telle qu'elle est linéaire en chacune de ses variables.

Un produit scalaire sur un e.v  $E$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $E$  définie positive au sens suivant :  
 $\forall x \in E, B(x, x) \geq 0$ , et  $B(x, x) = 0 \iff x = 0$ . Un espace euclidien est un e.v muni d'un produit scalaire.

On pose  $B(x, y) = \sum_{j=1}^n x_j y_j$ .  $B$  est un produit scalaire sur  $\mathbb{R}^n$  avec  $(x, y \in \mathbb{R}^n)$ .

On pose maintenant :  $N(x) = \sqrt{B(x, x)}$ . Alors,  $N$  est une norme sur  $E$ .

Démo :

i/ Par définition,  $N(x) \geq 0$ , et  $N(x) = 0 \iff B(x, x) = 0 \iff x = 0$

ii/ Si  $\lambda \in \mathbb{R}, x \in E, N(\lambda x) = \sqrt{B(\lambda x, \lambda x)} = \sqrt{\lambda^2 B(x, x)} = |\lambda| \sqrt{B(x, x)} = |\lambda| N(x)$ ,

iii/ On va utiliser le lemme :  $\forall x, y \in E$ , posons  $p(\lambda) = B(x + \lambda y, x) + \lambda B(x + \lambda y, y)$ . Si on pose  $z = x + \lambda y$  fixé, et  $u(\omega) = B(z, \omega)$ , on a écrit que  $(u(x + \lambda y) = u(x) + \lambda u(y))$ .

On aura  $p(\lambda) = B(x, x) + \lambda B(y, x) + \lambda B(x, y) + \lambda^2 B(y, y)$  donc  $p(\lambda) = B(x, x) + 2\lambda B(y, x) + \lambda^2 B(y, y)$  donc  $\lambda \mapsto p(\lambda)$  est un polynôme de degré  $\leq 2$  et  $p(\lambda) = B(x + \lambda y, x + \lambda y) \geq 0$ .

Or, si un polynôme de degré  $\leq 2$  ne change pas de signe, son discriminant est  $\leq 0$ .

$(2B(x, y))^2 - 4B(x, x)B(y, y) \leq 0$ , donc  $|B(x, y)| \leq \sqrt{B(x, x)} \sqrt{B(y, y)}$ . On a donc  $N(x + y)^2 = B(x + y, x + y) = B(x, x + y) + B(y, x + y) = B(x, x) + B(y, x) + B(x, y) + B(y, y) = B(x, x) + 2B(x, y) + B(y, y) \leq N(x)^2 + N(x)N(y) + N(y)^2$ .

On a obtenu  $N(x + y)^2 \leq (N(x) + N(y))^2$  soit  $N(x + y) \leq N(x) + N(y)$

–  $E = \mathbb{R}^n : B(x, y) = \sum x_i y_i$ . La norme obtenue se note  $\|.. \|_2$  et pour  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$  est donnée par

$$\|x\|_2 \stackrel{def}{=} \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

– Autre exemple de normes : Soient  $E, E'$  deux e.v et  $\varphi : E \rightarrow E'$  linéaire injective.

Soit  $N'$  une norme sur  $E'$ . Pour  $x \in E$ , posons  $N(x) \stackrel{def}{=} N'(\varphi(x))$ . Alors  $N$  est une norme sur  $E$  :

i/  $N(x) \geq 0$  de plus  $N(x) = 0 \implies N'(\varphi(x)) = 0 \implies \varphi(x) = 0$  (car  $N'$  est une norme)  $\implies x = 0$ . (puisque  $\varphi$  est injective).

ii/  $N(\lambda x) = N'(\varphi(\lambda x)) = N'(\lambda \varphi(x)) = |\lambda| N'(\varphi(x)) = |\lambda| N(x)$

iii/  $N(x + y) = N'(\varphi(x + y)) = N'(\varphi(x) + \varphi(y)) \leq N'(\varphi(x)) + N'(\varphi(y)) = N(x) + N(y)$

## 1.1 Normes usuelles de $\mathbb{R}^p$

Soit  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$ , les normes usuelles de  $\mathbb{R}^p$  sont définies par :

$$\|x\|_1 \stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^p |x_j|, \quad \|x\|_2 \stackrel{def}{=} \left( \sum_{j=1}^p x_j^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|x\|_\infty \stackrel{def}{=} \max_{j \in \{0, \dots, p\}} |x_j|.$$

Propriété :  $\|.. \|_1, \|.. \|_2, \|.. \|_\infty$ , sont des normes de  $\mathbb{R}^p$ .

Démo :

– Pour  $\|.. \|_2$  : voir plus haut.

– Pour  $\|.. \|_1$  :

Soit  $x \in E, \|x\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j| \geq 0$ , et  $\sum_{j=1}^p |x_j| = 0 \iff \forall j, x_j = 0 \iff x = 0$ .

Soit  $\lambda \in \mathbb{R}, \|\lambda x\|_1 = \sum_{j=1}^p |\lambda x_j| = |\lambda| \left( \sum_{j=1}^p |x_j| \right) = |\lambda| \|x\|_1$ .

Soient  $x, y \in \mathbb{R}^p, \|x + y\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j + y_j| \leq \sum_{j=1}^p (|x_j| + |y_j|) = \sum_{j=1}^p |x_j| + \sum_{j=1}^p |y_j| = \|x\|_1 + \|y\|_1$

– Pour  $\|\cdot\|_\infty$  :

$$\|x\|_\infty = 0 \implies \text{Max}_{j \in \{1, \dots, p\}} [|x_j|] = 0. \implies \forall j \ x_j = 0 \iff x = 0.$$

Vérifions l'inégalité triangulaire :  $|x_j + y_j| \leq |x_j| + |y_j| = \|x_j\|_\infty + \|y_j\|_\infty$  donc

$$\text{Max}_{j \in \{1, \dots, p\}} [|x_j| + |y_j|] \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty.$$

Propriété :  $\forall x \in \mathbb{R}^p, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$ .

Démo :  $\forall j \in \{1, \dots, p\}, |x_j| \leq \left(\sum_{j=1}^p x_j^2\right)^{\frac{1}{2}}$  donc  $\|x\|_\infty = \text{Max}_{j \in \{1, \dots, p\}} [|x_j|] \leq \|x\|_2$ .

Pour montrer que  $\|x\|_2 \leq \|x\|_1$ , il suffit de vérifier que  $\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2$

$$\text{Soit } \left(\sum_{j=1}^p x_j\right)^2 = \left(\sum_{j=1}^p x_j\right) \left(\sum_{j=1}^p x_j\right) = \sum_{j=1}^p \left(\sum_{i=1}^p |x_j| |x_i|\right) = \sum_{j=1}^p x_j^2 + \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^p \sum_{i=1}^p |x_j| |x_i|. \text{ Or, } \sum_{j=1}^p \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^p |x_j| |x_i| \geq 0,$$

donc

$$\|x\|_2^2 \leq \|x\|_1^2, \text{ enfin } \|x\|_2 \leq \|x\|_1.$$

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^p |x_j| \leq \sum_{j=1}^p \|x\|_\infty = \|x\|_\infty \sum_{j=1}^p 1 = p\|x\|_\infty$$

Remarque :

Si  $E$  est un e.v de dimension finie  $p$ , et si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base de  $E$ , alors  $\forall x \in E$  s'écrit de manière unique  $x = \sum_{j=1}^p x_j e_j$ . On peut donc définir des normes  $N_1, N_2, N_\infty$  sur  $E$  en posant

$$N_\ell \stackrel{\text{def}}{=} \left\| \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \right\|_\ell, \ell \in \{1, 2, \infty\}$$

## 1.2 Norme produit

Soient  $(E_1, N_1), (E_2, N_2)$  deux e.v.n. Soit  $E_1 \times E_2 = \{x = (x_1, x_2), x_1 \in E_1, x_2 \in E_2\}$ .

Définition :  $N(x) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Max}[N_1(x_1), N_2(x_2)]$  est une norme sur  $E$ , et est appelée norme produit.

## 1.3 Distance associée à une norme

Définition : Soit  $(E, N)$  un e.v.n. la distance  $d(x, y)$  entre  $x \in E$  et  $y \in E$ , associée à  $N$  est par définition  $d(x, y) = N(x - y)$ .

Propriété : La distance précédente est une application  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant :

i/  $\forall (x, y) \in E \times E \ d(x, y) \geq 0$  et  $(d(x, y) = 0 \iff x = y)$

ii/ (symétrie)  $\forall x, y \in E, d(x, y) = d(y, x)$

iii/ (Inégalité triangulaire)  $\forall x, y, z \in E, d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Démo :

ii/  $d(x, y) = N(y - x) = N((-1)(x - y)) = |-1|N(x - y) = N(x - y) = d(y, x)$

iii/  $d(x, z) = N(x - z) = N((x - y) + (y - z)) \leq N(x - y) + N(y - z) = d(x, y) + d(y, z)$

Remarque :

De manière générale, si  $E$  est une ensemble, on définit une  $d$  distance sur  $E$  comme une application vérifiant  $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant i/, ii/, iii/.

C'est une notion de distance plus générale de la distance associée à une norme. Si  $d(x, y) = N(x - y)$ . On peut prendre par exemple pour tout  $a \in E, d(x + a, y + a) = N((x + a) - (y + a)) = N(x - y) = d(x, y)$ . Cette propriété n'est pas toujours vraie pour une distance "normale".

Soit  $(E, N)$  un e.v.n. Soit  $a \in E$ .

Définition :

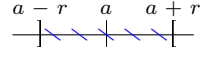
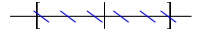
i/ Soit  $r > 0$ , la boule ouverte de centre  $a$  et de rayon  $r$  est par définition  $B(a, r) = \{x \in E, N(x - a) < r\} = \{x \in E, d(x, a) < r\}$

ii/ Soit  $r \geq 0$ , la boule fermée de centre  $a$  et de rayon  $r$  est par définition  $\overline{B}(a, r) = \{x \in E, N(x - a) \leq r\} = \{x \in E, d(x, a) \leq r\}$

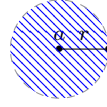
Remarque :

- Soit  $r > 0$ , alors  $a \in B(a, r) \subset \overline{B}(a, r)$
- $\overline{B}(a, 0) = \{a\}$
- Si  $r < r'$   $B(a, r) \subset B(a, r')$ ,  $\overline{B}(a, r) \subset \overline{B}(a, r')$

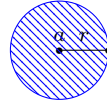
Ex :

- $E = \mathbb{R}$ ,  $N(x) = |x|$ . Soit  $a \in \mathbb{R}$ , alors  $B(a, r) = \{x \in E, |x - a| < r\} = ]a - r, a + r[$ , 
- $\overline{B}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}, |x - a| \leq r\} = [a - r, a + r]$ , 
- $E = \mathbb{C}$ ,  $N(z) = |z|$ , pour  $z \in \mathbb{C}$ . Soient  $a, r > 0$ .

Alors  $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| < r\}$  c'est le disque ouvert de centre  $a$ , et de rayon  $r$  :



Alors  $\overline{B}(a, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\}$  c'est le disque fermé de centre  $a$ , et de rayon  $r$  :



- $E = \mathbb{R}^p$  muni des normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ , on a vu que  $\forall x \in \mathbb{R}^p, \|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$

Notons  $B_\ell(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^p, \|x - a\|_\ell \leq r\}$ .  $\ell \in \{1, 2, \infty\}$

Soit  $r > 0$ , soit  $x \in B_\ell(0, \frac{r}{p})$ . Alors  $\|x\|_\infty < \frac{r}{p}$ , donc  $\|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty < p \cdot \frac{r}{p} = r$  or  $x \in B_1(0, r)$ .

On en déduit que  $B_\infty(0, \frac{r}{p}) \subset B_1(0, r)$  De même  $B_1(0, r) \subset B_2(0, r) \subset B_\infty(0, r)$ .

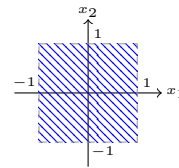
$$\forall x \in E, B_\infty(0, \frac{r}{p}) \subset B_1(0, r) \subset B_2(0, r) \subset B_\infty(0, r).$$

Cas de  $p = 2, r = 1$

$$\text{Alors } B_\infty(0, 1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\|_\infty\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \text{Max}[|x_1|, |x_2|] < 1\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\}$$

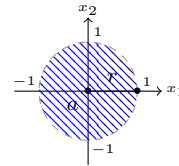


$$\text{Alors } B_2(0, 1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|x\|_2\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < 1\}$$

$$= \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| < 1 \text{ et } |x_2| < 1\}$$

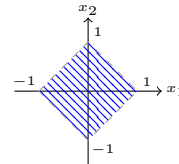
$$= \{z = x_1 + ix_2, |z| < 1\}$$



$$\text{Alors } B_\infty(0, 1) = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \|(x_1, x_2)\|_1\} = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, |x_1| + |x_2| < 1\}$$

$$\text{Alors } B_1(0, 1) \cap \{(x_1, x_2), x_1 \leq 0, x_2\} = A.$$

$B_1(0, 1)$  s'obtient par symétrie par A, par rapport aux axes.



Définition :

On dit que deux normes  $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes ssi  $\exists C > 0$ , telle que  $\forall x \in E$ ,  $N_1(x) \leq CN_2(x)$  et  $N_2(x) \leq CN_1(x)$ .

Remarque :

On définit aussi " $N_1$  et  $N_2$  sont équivalentes" par :

$\exists C_1 > 0$ , telle que  $\forall x \in E$ ,  $N_2(x) \leq C_1 N_1(x)$  et,  $\exists C_2 > 0$ , telle que  $\forall x \in E$ ,  $N_1(x) \leq C_2 N_2(x)$ .

Cette définition est équivalente à la précédente.

Déf 1  $\implies$  Déf 2, c'est évident, on prend  $C_1 = C_2 = C$ . Déf 1  $\implies$  Déf 2, en prenant  $C = \max[C_1, C_2]$ .

Ex : Sur  $\mathbb{R}^p$   $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ , sont des normes équivalentes (car  $\forall x \in \mathbb{R}^p$ ,  $\|x\|_\infty \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq p\|x\|_\infty$ .)

## 2 Limites et continuité

Définition :

On considère  $(E, N)$  un e.v.n. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'éléments de  $E$ . On dit que  $u_n$  converge vers  $\ell$  si la suite réelle  $(N(u_n - \ell))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

Propriété : Supposons que  $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell$ ,  $u'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell'$ . Alors,  $u_n + u'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell'$ .

Démo :

$$N((u_n + u'_n) - (\ell + \ell')) = N((u_n - \ell) + (u'_n - \ell')) \leq \underbrace{N(u_n - \ell)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0} + \underbrace{N(u'_n - \ell')}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$$

donc  $N((u_n + u'_n) - (\ell + \ell')) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . On en déduit que  $u_n + u'_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell + \ell'$

Remarque :

Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $(E, N)$  converge, la limite est unique : Supposons que  $u_n \rightarrow \ell$ ,  $u'_n \rightarrow \ell'$ . Alors,

$$0 \leq N(\ell - \ell') = N((\ell - u_n) + (\ell' - u_n)) \leq N(\ell - u_n) + N(\ell' - u_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

$$\implies 0 \leq N(\ell - \ell') \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^n u_i = 0 \text{ d'où } N(\ell - \ell') = 0, \text{ donc } \ell - \ell' = 0.$$

Proposition :

Soient  $N_1, N_2$  deux normes équivalentes sur un e.v  $E$ . Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $E$ , soit  $\ell \in E$ . Alors

$$(N_1(u_n - \ell) \implies 0) \iff (N_2(u_n - \ell) \implies 0). ((i) \iff (ii)).$$

Démo :

Montrons que  $i/ \implies ii/$ . Comme  $N_1, N_2$  sont équivalents,  $\exists C > 0$ , tel que  $\forall x \in E$ ,  $N_2(x) \leq CN_1(x)$  donc  $0 \leq N_2(u_n - \ell) \leq \underbrace{CN_1(u_n - \ell)}_{\xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0}$ . Donc  $N_2(u_n - \ell) \rightarrow 0$ . De même  $ii/ \implies i/$  en inversant  $N_1$  et  $N_2$ .

Corollaire :

Comme les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  sont équivalentes :

Une suite de  $\mathbb{R}^p$  converge vers  $\ell \in \mathbb{R}^p$  pour l'une de ces normes ssi elle converge pour une autre.

Remarque :

Pour montrer qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $(E, N)$  converge vers  $\ell$ , il est équivalent de montrer que la suite  $(u_n - \ell)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

Proposition :

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $\mathbb{R}^p$ ,  $u_n = \begin{bmatrix} x_{1,n} \\ \vdots \\ x_{p,n} \end{bmatrix}$  où  $((x_{j,n})_{n \in \mathbb{N}})$  est une suite de  $\mathbb{R} \forall j \in \{1, \dots, p\}$ . Alors

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_p \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$  muni de l'une des normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty \iff$  Les suites  $(x_{p,n})_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\ell_j, \forall j \in \{1, \dots, p\}$ .

Démo :

Par la remarque précédente, on peut supposer  $\ell = 0$ . On doit montrer  $\|u_n\|_k \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \iff$   
 $\forall j \in \{1, \dots, p\} (x_{j,n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ vers } 0$  (où  $k = 1, 2$  ou  $\infty$ ). Montrons  $\implies$ . Supposons  $\|u_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Or,  
 $\|u_n\|_\infty = \text{Max}[|x_{1,n}|, |x_{2,n}|, \dots, |x_{p,n}|]$ . Alors  $|x_{j,n}| \leq \|u_n\|_\infty \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc,  $x_{j,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ ,  
 $\forall j \in \{1, \dots, p\}$ .  
 Montrons  $\impliedby$ , On a :  $x_{j,n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \forall j \in \{1, \dots, p\}$ .  
 Alors  $\|u_n\|_1 = |x_{1,n}| + |x_{2,n}| + \dots + |x_{p,n}| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 + 0 + \dots + 0 = 0$ . Donc  $\|u_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

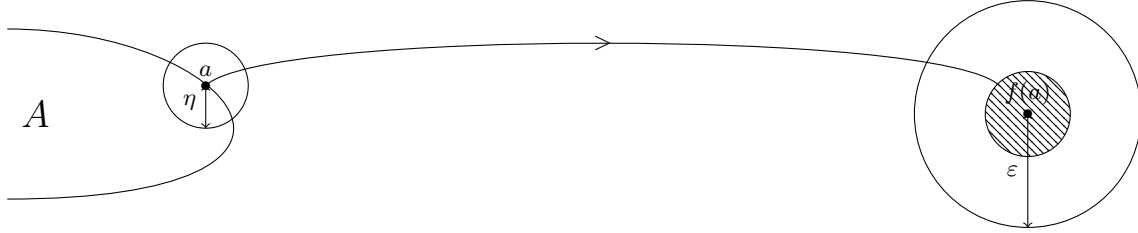
## 2.1 Applications Continues

Définition :

Soient  $(E, N)$ ,  $(E', N')$  deux e.v.n. Soient  $A \subset E$ ,  $f : A \longrightarrow E'$ ,  $a \in A$ . On dit que  $f$  est continue en  $a$  ssi  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$  et  $\forall x \in A$ ,  $\underbrace{N(x - a) < \eta}_{x \in B_E(a, \eta)} \implies \underbrace{N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon}_{f(x) \in B_{E'}(f(a), \varepsilon)}$ .

Remarque :

$\implies \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$  et  $\forall x \in A \cap B_E(a, \eta)$ , on a  $f(x) \in B_{E'}(f(a), \varepsilon)$



Remarque :

Cela généralise la définition des fonctions continues d'une variable :  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$ ,  $f$  est continue en  $a$  :  $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$  et  $\forall x \in I$ ,  $|x - a| < \eta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$ .

Proposition :

Soit  $f : A \longrightarrow E'$  continue en  $a \in E$ . Alors, pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  convergeant vers  $a$ , la suite  $f((x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a)$  dans  $E'$ .

Démo :

Soit  $\varepsilon > 0$ . Comme  $f$  est continue en  $a$ ,  $\exists \eta > 0$  tel que  $\forall x \in A$ ,  $N(x - a) < \eta \implies N'(f(x) - f(a)) < \varepsilon$ .  
 Soit  $(x_n)$  convergeant vers  $a$ ,  $x_n \in A$ . Cela signifie que  $N(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Il existe donc  $n_0$ , tel que  
 $\forall n \geq n_0, N'(f(x_n) - f(a)) < \varepsilon$ . On a prouvé que  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0$ , et  $\forall n \geq n_0, N'(f(x_n) - f(a)) < \varepsilon$ .  
 Donc,  $N'(f(x_n) - f(a)) \longrightarrow 0$  si  $n \longrightarrow +\infty$  donc  $f(x_n) \longrightarrow f(a)$  dans  $E'$ .

Théorème :

Soient  $(E, N)$ ,  $(E', N')$  deux e.v.n. Soient  $A \subset E$ ,  $f : A \longrightarrow E'$ ,  $a \in A$ .

$f$  est continue en  $a \iff$  Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  convergeant vers  $a$ , la suite  $f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(a)$ .

Démo :

$i/ \longrightarrow ii/$  est la proposition précédente.

On peut montrer  $ii/ \longrightarrow i/$  par contraposée. On suppose donc :  $\exists \varepsilon_0 > 0$  et  $\forall \eta > 0, \exists x \in A$  avec  $N(x - a) < \eta$  et  $N'(f(x) - f(a)) \geq \varepsilon_0$ .

Appliquons cela avec  $\eta = \frac{1}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ). Il existe donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x_n \in A$  vérifiant  $N(x_n - a) < \frac{1}{n+1}$  et  $N'(f(x_n) - f(a)) \geq \varepsilon_0$ .

On a donc  $N(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $A$  convergeant vers  $a$ . De plus la suite

$f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut converger vers  $f(a)$  (puisque si elle convergeait vers  $f(a)$ ,  $0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} N'(f(x) - f(a)) \geq \varepsilon_0 > 0$  : absurde.) On a montré que  $i/$  (faux)  $\implies ii/$  (faux)

Application du théorème précédent :

Proposition :

Soient  $E, E'$  deux e.v,  $N, N_1$  deux normes équivalentes sur  $E$ , et  $N', N'_1$  deux normes équivalentes sur  $E'$ .

Soient  $A \subset E, a \in A, f : A \longrightarrow E'$ . Il y a équivalence entre :

- $i/$   $f$  est continue en  $a$  lorsque  $E$  est muni de  $N$ , et  $E'$  est muni de  $N'$ .
- $ii/$   $f$  est continue en  $a$  lorsque  $E$  est muni de  $N_1$ , et  $E'$  est muni de  $N'_1$ .

Démo :

Par le théorème précédent,  $i/$  équivaut à :

- $i'/ \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  vérifiant  $N(x_n - a) \longrightarrow 0$ , on a :  $N'(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0$ .

De même  $ii/$  équivaut à :

- $ii'/ \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  vérifiant  $N_1(x_n - a) \longrightarrow 0$ , on a :  $N'_1(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0$ .

Or, on a vu que si  $N$  est équivalente à  $N_1$  :  $(N(x_n - a) \longrightarrow 0) \iff (N_1(x_n - a) \longrightarrow 0)$ . De même, comme  $N'$  est équivalente à  $N'_1$ ,  $(N'(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0) \iff (N'_1(f(x) - f(a)) \longrightarrow 0)$ . Donc  $i' \iff ii'$ .

Remarque :

Supposons  $E = \mathbb{R}^n, E' = \mathbb{R}^p$ . On sait que les normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ , sont équivalentes. Lorsqu'on étudie la continuité de  $f : A \longrightarrow E'$ . où  $A \subset E$ , on peut étudier n'importe laquelle de ces normes.

## 2.2 Sommes de fonctions continues en un point

Notation :

$f : A \longrightarrow E', g : A \longrightarrow E'$ , on note  $f + g : A \longrightarrow E', x \mapsto (f + g)(x) = f(x) + g(x)$ . Si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on pose  $(\lambda \cdot f)(x) := \lambda f(x), \forall x \in A$ .

Proposition :

Si  $f$  et  $g$  sont continues en  $a \in A$  alors  $f + g$  et  $\lambda f(x)$  sont continues en  $a$ .

Démo :

Pour voir que  $f + g$  est continue en  $a$ , il suffit de montrer que  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  convergeant vers  $a$ ,  $((f + g)(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(f + g)(a)$ . Or comme  $f$  est continue en  $a$ ,  $f(x_n) \longrightarrow f(a)$  et  $g$  est continue en  $a$ ,  $g(x_n) \longrightarrow g(a)$ . Donc  $f(x_n) + g(x_n) \longrightarrow f(a) + g(a)$ .

Proposition :

Soient  $(E, N), (E', N'), (E'', N'')$  trois e.v.n. Soient  $A \subset E, B \subset E', f : A \longrightarrow E', g : B \longrightarrow E''$ .

Supposons  $f(A) \subset B$ . On peut donc définir  $g \circ f : A \longrightarrow E''$ . Soit  $a \in A$ . On pose  $b = f(a) (\in f(A) \subset B)$

Supposons  $f$  continue en  $a$  et  $g$  continue en  $b$ . Alors  $g \circ f$  continue en  $a$ .

Démo :

Il suffit de voir que pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  convergeant vers  $a$   $((g \circ f)(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $(g \circ f)(a)$ . Or comme  $f$  est continue en  $a$ ,  $x_n \longrightarrow a \iff a, f(x_n) \longrightarrow b$ , et comme  $g$  est continue en  $b$ ,  $y_n = f(x_n) \longrightarrow b \iff g(y_n) = (g \circ f)(x_n) \longrightarrow g(b) = (g \circ f)(a)$

Proposition :

Soient  $(E, N)$  un e.v.n.  $A \subset E, a \in E, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^p$ . On munit  $\mathbb{R}^p$  de l'une des normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ .

Pour  $x \in A$ , écrivons  $f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^p$  On obtient  $f_j : A \longrightarrow \mathbb{R}, j \in \{1, \dots, p\}$ . Il y a équivalence

entre :

- $i/$   $f$  est continue en  $a$ .
- $ii/ \forall j \in \{1, \dots, p\}, f_j$  est continue en  $a$ .

Démo :

- $i/ \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } A \longrightarrow a, \text{ la suite } f((x_n))_{n \in \mathbb{N}} \text{ converge vers } f(a) \text{ dans } \mathbb{R}.$
- $ii/ \iff (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ de } A \longrightarrow a, \forall j \in \{1, \dots, p\} \text{ la suite } f_j((x_n))_{n \in \mathbb{N}} \longrightarrow f_j(a).$

Or on a vu que 
$$\begin{bmatrix} f_1(x_n) \\ \vdots \\ f_p(x_n) \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} f_1(a) \\ \vdots \\ f_p(a) \end{bmatrix} \iff \forall j \in \{1, \dots, p\} f_j((x_n))_{n \in \mathbb{N}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f_j(a).$$

#### Définition :

On dit que  $f : A \longrightarrow E'$  est continue sur  $A \iff \forall a, \in A$   $f$  est continue en  $a$ .

#### Théorème :

Soient  $(E, N), (E', N')$  deux e.v.n. Soient  $u : E \longrightarrow E'$  linéaire. Il y a équivalence entre :

- $i/ u$  est continue sur  $E$
- $ii/ u$  est continue sur  $0$
- $iii/ \exists C > 0, \forall x \in E, N'(u(x)) \leq CN(u(x)).$

#### Démo :

$i/ \implies ii/$  : évident.  $0 \in E$

$ii/ \implies iii/$  : Si  $u$  est continue en  $0, \forall \varepsilon > 0$  et  $\exists \eta > 0$  et  $\forall x \in E, N(x - 0) < \eta \implies N'(u(x) - u(0)) < \varepsilon$

Comme  $u$  est linéaire,  $u(0) = 0$  donc  $N(x) < \eta \implies N'(u(x)) < \varepsilon$  Appliquons cela avec  $\varepsilon = 1$ .

$\exists \eta_0 > 0$  tel que  $N(x) < \eta_0 \implies N'(u(x)) < 1$ . Soit  $y \in E, y \neq 0$ . Posons  $x = \frac{y}{N(y)} \cdot \frac{\eta_0}{2}$ . Alors  $N(x) = \frac{\eta_0}{2}$

$< \eta_0$  donc soit  $N'(\frac{\eta_0}{2N(y)}u(y)) < 1$  puisque  $u$  est linéaire. Donc,  $\forall y \in E \setminus \{0\} \frac{N'(u(y))}{2N(y)/\eta_0} < 1$  d'où

$N'(u(y)) < CN(y)$  avec  $C = \frac{2}{\eta_0}$  Donc  $iii/$  est vraie.

$iii/ \implies i/$  : Soit  $a \in E$ . On veut montrer que  $u$  est continue en  $a$ .  $\exists C > 0$  et  $\forall y \in E, N'(y) < CN(y)$ .

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, posons  $\eta = \varepsilon/C$ , supposons  $N(x - a) < \eta$ . Alors,

$N'(u(x) - u(a)) = N'(u(x - a)) \leq CN(x - a) < C\eta = \varepsilon$ . Donc  $u$  est continue en  $a$ .

#### Proposition :

Munissons  $\mathbb{R}^p$  de l'une des normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ . Soient  $(E, N)$  un e.v.n et  $u : \mathbb{R}^p \longrightarrow E$ , une application linéaire. Alors  $u$  est continue.

#### Démo :

Notons  $(e_1, \dots, e_p)$  la base canonique de  $\mathbb{R}^p$ , si  $x \in \mathbb{R}^p, \sum_{j=1}^p x_j e_j$ . Alors  $u(x) = \sum_{j=1}^p x_j u(e_j)$  car  $u$  est linéaire.

Alors  $N(u(x)) = N(\sum_{j=1}^p x_j u(e_j)) \leq \sum_{j=1}^p N(x_j u(e_j)) = \sum_{j=1}^p |x_j| N(u(e_j))$ . Posons  $M = \max[N(u(e_j))]$ . Donc

$N(u(x)) \leq M \sum_{j=1}^p |x_j| = M \|x\|_1$ . D'après  $iii/$  de la propriété précédente, cela implique que  $u$  est continue.

## 2.3 Exemples de fonctions continues

#### Ex 1 :

L'application  $E \times E \longrightarrow E, (x, y) \mapsto x + y$  est continue.

#### Ex 2 :

L'application  $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x \cdot y$  est continue.

#### Ex 3 :

L'application  $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, (z, \omega) \mapsto z \cdot \omega$  est continue.

#### Ex 4 :

Soient  $(E, N)$  un e.v.n,  $A \subset E, f : A \longrightarrow \mathbb{R}^*$ . Soit  $a \in E$ , supposons  $f$  continue en  $a$ . Alors,  $x \mapsto \frac{1}{f(x)}$  est continue en  $a$ .

#### Ex 5 :

Soit  $E = M_p(\mathbb{R})$  l'ensemble des matrices carrées d'ordre  $p$ . Si  $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq p} \in M_p(\mathbb{R})$ , posons



$N(A) = p \max_{1 \leq i, j \leq p} |a_{ij}|$ .  $N$  est une norme et on pose  $N'$  une norme sur  $E$ , telle que  $\forall A, B \in M_p(\mathbb{R})$

$N'((A, B)) = \max[N(A), N(B)]$ . Soit  $\Phi : E \times E \rightarrow E$ .  $(A, B) \rightarrow AB$ .  $\Phi$  est une continue dans  $(E, N')$ .

Ex 6 :

Soit  $(E, N)$  un e.v.n. L'application  $E \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto N(x)$  est continue.

(Je scannerai leurs démonstrations car trop longues pour certaines.)

## 2.4 Exemples de fonctions non continues

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$  si  $(x, y) \neq 0$ , et  $f(0, 0) = 0$ .

Démo :

Montrons que  $f$  n'est pas continue en  $(0, 0)$

. Il suffit de construire une suite  $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers 0, telle que  $f(x_n, y_n)$  ne converge pas vers  $f(0, 0) = 0$ . Prenons,  $x_n = y_n = \frac{1}{n+1}$  Donc  $(x_n, y_n) \mapsto (0, 0)$ . Mais

$$f(x_n, y_n) = \frac{\frac{1}{1+n} \cdot \frac{1}{1+n}}{\left(\frac{1}{1+n}\right)^2 + \left(\frac{1}{1+n}\right)^2} = \frac{1}{2}. \text{ En particulier } f(x_n, y_n) \not\rightarrow 0.$$

Si on fixe  $y = y_0, x \mapsto f(x, y_0)$  est continue

– Si  $y_0 \neq 0 : f(x, y_0) = \frac{xy_0}{x^2+y_0^2}$  et le dénominateur ne s'annule pas.

– Si  $y_0 = 0 : f(x, 0) = 0. \forall x \in \mathbb{R}$  donc  $x \mapsto f(x, 0)$  est continue.

Donc  $f$  est continue séparément par rapport à chaque variable, mais pas comme fonction de deux variables.

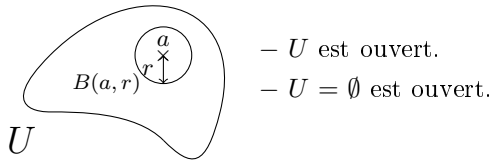
## 3 Topologie sur un e.v.n

### 3.1 Ouverts d'un e.v.n

Définition :

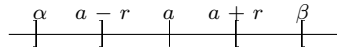
Soit  $(E, N)$ , un e.v.n. On dit que  $U \subset E$  est ouvert  $\iff \forall a \in U, \exists r > 0$ , tel que  $B(a, r) \subset U$ .

Ex :



Ex :

–  $E = \mathbb{R}, N(x) = |x|$ . Soit  $I = ]\alpha, \beta[, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , (ou  $\alpha = -\infty$ , ou  $\beta = +\infty$ ). Alors  $I$  est ouvert. Soit  $a \in I$ .

–  On doit trouver  $r > 0$ , tel que  $B(a, r) = ]a-r, a+r[ \subset I$ . Il suffit de prendre  $r < \min[a-\alpha, \beta-a]$ .

–  $[0, 1[$  n'est pas un ouvert. On ne peut pas trouver un  $r > 0$ , tel que :  $B(0, r) \subset [0, 1[$ .

Notation :

Soit  $(A_i)_{i \in I}$  une famille de s.e.v. de  $E$ . On note  $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \in E, \exists i \in I, \text{ tel que } x \in A_i\}$ .

Proposition : Soit  $(E, N)$  un e.v.n.

i/ Soit  $(u_i)_{i \in I}$ , une famille d'ouverts de  $E$ . Alors  $\bigcup_{i \in I} u_i$  est un ouvert de  $E$ .

ii/ Soient  $U, V$  deux ouverts de  $E$ . Alors  $U \cap V$  est ouvert. Plus généralement, si  $U_1, U_2, \dots, U_n$  sont des ouverts de  $E$  alors  $U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$  est un ouvert de  $E$ . (Toute intersection finie d'éléments est un ouvert.)

Démo :

i/ Supposons  $\forall i \in I. U_i$  est ouvert. Soit  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ . Soit  $a \in U. \exists i_0 \in I$ , tel que  $a \in U_{i_0}$ . Comme  $U_{i_0}$  est

ouvert  $\exists r > 0$ , tel que  $B(a, r) \subset U_{i_0}$ .  $U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i = U$  donc on a trouvé  $r > 0$  avec  $B(a, r) \subset U$ . Donc  $U$  est ouvert.

ii/ Soient  $U, V$  deux ouverts de  $E$ . Montrons que  $U \cap V$  est ouvert. Soit  $a \in U \cap V$ . Comme  $a \in U$  et que  $U$  est ouvert,  $\exists r_1 > 0$ , avec  $B(a, r_1) \subset U$ . De même, comme  $a \in V$ . Posons  $r = \min[r_1, r_2] > 0$ .

Alors  $B(a, r) \subset B(a, r_1) \subset U$  et  $B(a, r) \subset B(a, r_2) \subset V$ .  $\implies B(a, r) \subset U \cap V$ .

Attention :

L'intersection d'une famille infinie n'est pas ouvert en général.

Ex :

Soient  $U_n = ]-\frac{1}{n}, 1[$   $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n = \{x \in E; \forall n \in \mathbb{N}^*, x \in U_n\} = \{x \in E; \forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{1}{n} < x < 1\}$ .

Donc  $A = [0, 1[$ . Or, on a vu que  $A$  n'est pas ouvert.

Notation :

Si  $X, Y$  sont des ensembles, et  $f : X \longrightarrow Y$ , si  $Z \subset Y$ , on pose  $f^{-1}(Z) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E; f(x) \in Z\}$ . On note aussi  $f^{-1}(Z) = f^*(Z)$ .

Proposition :

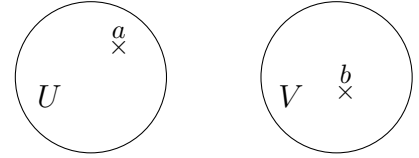
Soient  $(E, N), (E', N')$  deux e.v.n.  $f : E \rightarrow E'$  continue. Si  $V$  est ouvert de  $E'$ ,  $f^{-1}(V)$  est un ouvert de  $E$ .

Démo :

Posons  $U = f^{-1}(V)$ . Soit  $a \in U$ . On doit montrer qu'il existe  $r > 0$ , tel que  $B(a, r) \subset U$ . Notons  $b = f(a) \in V$ . Comme  $V$  est ouvert

$\exists \varepsilon > 0$ , tel que  $B(b, \varepsilon) \subset V$ . Comme  $f$  est continue en  $a$ ,  $\exists \eta > 0$  tel que  $\forall x \in E, N(x - a) \implies N'(f(x) - b) < \varepsilon$ .  $x \in B_E(a, \eta) \implies f(x) \in B_{E'}(b, \varepsilon) \subset V$ . Donc  $\forall x \in B(a, \eta), f(x) \in V$ ,

donc  $B(a, \eta) \subset f^{-1}(V)$ . Si on pose  $r = \eta$ , on aura donc trouvé une boule  $B(a, r) \subset f^{-1}(V) = U$ . Donc  $f^{-1}(V)$  est ouvert.



Application :

Soit  $a \in E, r > 0$ . Alors la boule ouverte  $B(a, r)$  est un ouvert  $E$ . Soit  $f : E \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto N(x, a)$ . On a vu que  $f$  est continue. Or  $B(a, r) = \{x \in E, f(x) < r\} = f^{-1}(\underbrace{]-\infty; r[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}}) \implies f^{-1}(\underbrace{]-\infty; r[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$  est un ouvert.

De même  $E \setminus \overline{B}(a, r)$  est un ouvert car  $E \setminus \overline{B}(a, r) = \{x \in E, N(x - a) > r\} = \{x \in E, f(x) > r\} = f^{-1}(\underbrace{]r; +\infty[}_{\text{ouvert de } \mathbb{R}})$ .

Proposition :

Soient  $N_1, N_2$  deux normes équivalentes sur un e.v.  $E$ . Soit  $U \subset E, U$  est ouvert pour  $N_1 \iff U$  est ouvert pour  $N_2$ .

Démo :

$N_1, N_2$  équivalents,  $\exists C > 0$  avec  $\forall x \in E, N_1(x) \leq CN_2(x)$  et  $N_2(x) \leq CN_1(x)$ .

Soit  $U$  un ouvert pour  $N_1$ .

Montrons que  $U$  un ouvert pour  $N_2$ .  $\iff \forall a \in U, \exists r_2 > 0, B_{N_2}(a, r_2) = \underbrace{N(x - a) < r_2}_{\subset U}$

Comment  $U$  est ouvert pour  $N_1$ , on sait qu'il existe  $r_1 > 0, B_{N_1}(a - r_1) = \{x \in E, N_1(x - a) < r_1\} \subset U$ .

Posons  $r_2 = \frac{r_1}{C}$ . Soit  $x \in B_{N_2}(a, r_2) \subset U$  alors  $N_2(x - a) < r_2$  d'où  $N_1(x - a) \leq N_2(x - a) \cdot C < C \cdot r_2 = r_1$ . Donc  $B_{N_2}(a, r_2) \subset B_{N_1}(a, r_1)$ . Comme  $B_{N_1}(a, r_1) \subset U$  on a donc trouvé  $r_2 > 0$  avec  $B_{N_2}(a, r_2) \subset U$ .

Corollaire :

Soit  $E = \mathbb{R}^p$ . Alors les ouverts associés aux normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$  sont les mêmes.

Ex :

$P = ]a, b[ \times ]c, d[ \subset \mathbb{R}^2$  (muni de l'une des normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$ ) alors  $P$  est ouvert. En effet, un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}, ]\alpha, \beta[$  est un ouvert. Soient

$$\pi_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \pi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

$$(x_1, x_2) \mapsto x_1, \quad (x_1, x_2) \mapsto x_2.$$

Alors  $\pi_1, \pi_2$  sont linéaires sur  $\mathbb{R}^2$ . On sait alors qu'elles sont continues.

Donc comme  $]a, b[ \subset \mathbb{R}$  est ouvert,  $\pi_1^{-1}(]a, b[) = U_1$  est ouvert.  $]c, d[ \subset \mathbb{R}$  est ouvert,  $\pi_2^{-1}(]c, d[) = U_2$  est ouvert.  $P = U_1 \cap U_2$  est un ouvert.

### 3.2 Fermés d'un e.v.n.

Définition :

Soit  $(E, N)$ , un e.v.n. On dit que  $F \subset E$  est fermé  $\iff E - F$  est ouvert.

Ex :

- $\emptyset$  est fermé car  $E - \emptyset = E$  qui est ouvert
- $E$  est fermé car  $E - E = \emptyset$  qui est ouvert.
- Donc  $\emptyset$ , et  $E$  sont à la fois ouverts et fermés.
- $\overline{B}(a, r) = \{x \in E; N(x - a) \leq r\}$  est fermé car  $E - \overline{B}(a, r) = \{x \in E; N(x - a) > r\}$  est ouvert.
- $\{x \in E; N(x - a) < r\}$  est fermé car  $E - F = \{x \in E; N(x - a) < r\} = B(a, r)$  est ouvert.

Cas particulier :

$E = \mathbb{R}, N(x) = |x|$ . Alors si  $a < b$   $[a, b] = \overline{B}(c, r)$  où  $c = \frac{a+b}{2}, r = \frac{b-a}{2}$ . Donc  $[a, b]$  est un fermé.

Un s.e.v d'un e.v.n peut être ni ouvert, ni fermé.

Ex :

$E = \mathbb{R}, A = [0, 1[$  alors  $A$  n'est pas ouvert car on ne peut pas trouver  $r > 0, ]-r, r[ \subset A$ . Mais  $A$  n'est pas non plus fermé. S'il l'était,  $E - A$  serait ouvert.  $E - A = ]-\infty, 0[ \cup [1, +\infty[$  qui n'est pas ouvert car il n'existe pas  $r > 0$  tel que  $\overline{B}(1, r) = ]1 - r, 1 + r[ \subset E - A$ .

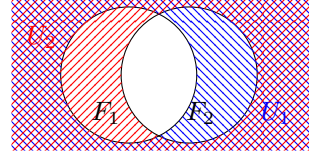
Proposition : Soit  $(E, N)$  un e.v.n :

- $F_1, F_2$  deux fermés de  $E$ . Alors  $F_1 \cup F_2$  est fermé. Plus généralement, si  $F_1, \dots, F_n$  sont des fermés, alors  $F_1 \cup \dots \cup F_n$  est fermé.
- Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de fermés de  $E$ , alors  $\bigcap_{i \in I} F_i = \{x \in E, \forall i \in I, x \in F_i\}$  est un fermé.

Démo :

Soient  $F_1, F_2$  deux fermés de  $E$ .  $U_1 = E - F_1$  et  $U_2 = E - F_2$  ouverts de  $E$ .

Alors  $U_1 \cap U_2 = \{x \in E, x \notin F_1 \text{ et } x \notin F_2\} = \{x \in E, x \notin F_1 \cup F_2\}$   
 $= E - (F_1 \cup F_2)$ .  $U_1 \cap U_2$  est ouvert donc  $F_1 \cup F_2$  est fermé.



Soit  $(F_i)_{i \in I}$  des fermés. Posons  $U_i = E - F_i$ . C'est un ouvert de  $E$ . On sait que  $\bigcup_{i \in I} U_i$  est un ouvert.

$\bigcup_{i \in I} U_i = \{x \in E, \exists i \in I, x \in U_i\} = \{x \in E, \forall i \in I \text{ avec } x \notin F_i\}$ . Donc  $\bigcup_{i \in I} U_i = E - (\bigcap_{i \in I} F_i)$  On en déduit que  $E - (\bigcap_{i \in I} F_i)$  est un ouvert donc  $(\bigcap_{i \in I} F_i)$  est un fermé.

### 3.3 Caractérisation des fermés par les suites.

Théorème :

Soit  $(E, N)$  un e.v.n,  $F \subset E$ . Il y'a équivalence entre :

- $i/ F$  est fermé.
- $ii/ \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$  convergeant vers  $\ell \in E$ , on a  $\ell \in F$ .

Démo :

$i/ \implies ii/$ . Supposons  $F$  fermé. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F$ .  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$ . Supposons que  $\ell \notin F$  et montrons la contradiction. Comme  $F$  est fermé,  $E - F$  est ouvert et par hypothèse  $\ell \in E - F$ . Il existe donc  $r > 0$ ,

tel que  $B(\ell, r) \subset E - F$ . Comme  $x_n \in F, \forall n$  on a  $N(x_n - \ell) \geq r$ . Par hypothèses  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  i.e :  $N(x_n - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Donc  $0 = \lim N(x_n - \ell) \geq r > 0$  absurde. Donc  $\ell \in F$ .

$ii/ \implies i/$ . Montrons que  $F$  est fermé ce qui équivaut à ce que  $E - F$  soit ouvert, supposons  $E - F$  n'est pas ouvert montre que cela contredit  $i/$ .

$(E - F \text{ ouvert}) \iff (\forall \ell \in E - F, \exists r > 0 \text{ avec } B(\ell, r) \subset E - F)$   
 $(\forall \ell \in E - F \text{ n'est pas ouvert}) \iff (\exists \ell \in E - F, \forall r > 0, B(\ell, r) \text{ n'est pas inclus dans } E - F)$   
 $E - F) \iff (\exists \ell \in E - F, \forall r > 0, B(\ell, r) \cap F \neq \emptyset).$

Appliquons cela avec  $\frac{1}{n+1}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ), donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donc  $B\left(\ell, \frac{1}{n+1}\right) \cap F \neq \emptyset$  donc il existe  $x_n \in F \cap B\left(\ell, \frac{1}{n+1}\right)$  donc  $x_n \in F$  et  $N(x_n - \ell) < \frac{1}{n+1}$ .  $N(x_n - \ell) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $F$  convergeant vers  $\ell$  et  $\ell \notin F$ . On a donc obtenu une suite qui contredit l'hypothèse  $ii/$ .

Ex :

–  $[a, b]$  est un fermé. Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [a, b]$  convergeant vers  $\ell \in \mathbb{R}$ . On doit montrer qu'en fait  $\ell \in [a, b]$ . Par hypothèse on a  $a \leq x_n \leq b$ . En passant à la limite, on obtient  $a \leq \ell \leq b$ . De la même manière,  $[a, +\infty[, ]-\infty, b]$  sont des fermés.

–  $[0, 1[$  n'est pas fermé. Il suffit des vérifier que  $ii/$  du théorème n'est pas satisfaite, donc qu'il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0, 1[$  qui converge vers  $\ell \notin [0, 1[$ .

Prenons  $x_n = 1 - \frac{1}{n+1} \in [0, 1[$  et  $x_n \rightarrow 1 \notin [0, 1[$ .

### 3.4 Adhérence d'un ensemble

Définition :

Soit  $A$  un s.e.v d'un e.v.n  $(E, N)$ . On appelle adhérence de  $A$ , et on note  $\overline{A}$ , l'ensemble  $\{\ell \in E, \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \text{ avec } x_n \rightarrow \ell\}$

Remarque :

$A \subset \overline{A}$  car si  $a \in \overline{A}$ , on peut écrire  $a = \lim x_n$  avec  $x_n = a, \forall n \in \mathbb{N}$ .

Propositions :

$i/ \overline{A}$  est fermé

$ii/ A \text{ est fermé} \iff A = \overline{A}$

Démo :

$i/$  semblable à la démonstration du théorème.

$ii/ A = \overline{A} \implies A$  fermé, découle de  $i/$ .

$A$  fermé  $\implies A = \overline{A}$  car : On sait qu'on a toujours  $A \subset \overline{A}$ , il reste à voir que si  $A$  est fermé, on a aussi  $\overline{A} \subset A$ . Or si  $\ell \in \overline{A}$ ,  $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de  $A$  avec  $x_n \rightarrow \ell$ . Mais si  $A$  est fermé on sait que la limite d'une telle suite est dans  $A$  donc  $\ell \in A$ .

Ex :

Soit  $r > 0$ , Alors  $\underbrace{\overline{B(0, r)}}_{\text{adhérence de la boule ouverte}} = \underbrace{\overline{B(0, r)}}_{\text{Boule fermée}}$

Démo :

On sait que  $B(0, r) \subset \overline{B(0, r)}$  donc  $\overline{B(0, r)} \subset \overline{\overline{B(0, r)}} = \overline{B(0, r)}$  car  $\overline{B(0, r)}$  est fermée.

Il reste à voir que  $\overline{B(0, r)} \subset \overline{B(0, r)}$  : Soit  $\ell$  avec  $N(\ell) = r$ , et soit  $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de  $[0, 1[$   $t_n \rightarrow 1$ .

Alors  $x_n = t_n \ell \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$  et  $N(x_n) = t_n N(\ell) = t_n r < r$  donc  $x_n \in B(0, r)$  donc  $\ell \in \overline{B(0, r)}$ .

Définition :

Soient  $A \subset E, a \in \overline{A} \iff$  il existe une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  avec  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$

Proposition :

Soit  $A \in E$  il y'a équivalence entre :

i/  $a \in \overline{A}$

ii/  $\forall r > 0, B(a, r) \cap A \neq \emptyset$

Démo :

i/  $\implies$  ii/ Soit  $a \in \overline{A}$ ; il existe  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  avec  $x_n \longrightarrow a$ . Soit  $r > 0$ . Comme  $N(x_n - a) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$\exists n$  avec  $N(x_n - a)$ .

ii/  $\implies$  i/ appliquons ii/ avec  $r = \frac{1}{n+1}$   $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $A \cap B\left(a, \frac{1}{n+1}\right) \neq \emptyset \exists x_n \in A$  avec  $N(x_n - a) < \frac{1}{1+n}$  donc  $x_n \longrightarrow a$ .

### 3.5 Limite de fonctions

Rappel :

Soient  $I$  intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $A \in I$ ,  $f : I - \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ . On dit que  $f$  admet  $\ell \in \mathbb{R}$ , pour limite, lorsque  $x$  tend vers  $a \implies \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0$  et  $\forall x \in I - \{a\}, |x - a| < \eta \implies |f(x) - \ell| < \varepsilon$ .  $\iff \forall \varepsilon > 0 \exists \eta > 0$  et  $\forall x \in (I - \{a\}) \cap ]a - \eta, a + \eta[$  on a  $f(x) \in ]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ .

Définition :

Soient  $(E, N)$ ,  $(E', N')$  deux e.v.n.  $A \subset E$ ,  $a \in \overline{A}$ . Soit  $f \longrightarrow E'$ . On dit que  $f$  admet une limite  $\ell \in E'$  lorsque  $x$  tend vers  $a$  en restant dans  $A$ .  $\iff$

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, N(x - a) < \eta \implies N'(f(x) - \ell) < \varepsilon$ .

$\iff \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \cap B_E(a, \eta)$ , on a  $f(x) \in B_{E'}(\ell, \varepsilon)$

Remarque :

Si la limite existe, alors elle est unique.

Démo :

Supposons  $\ell, \ell' \in E'$  sont limites de  $f$  lorsque  $x \longrightarrow a, x \in A$ .

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A, N(x - a) < \eta \implies N'(f(x) - \ell) < \varepsilon$ .

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta' > 0, \forall x \in A, N(x - a) < \eta' \implies N'(f(x) - \ell') < \varepsilon$ .

Posons  $\eta'' = \min[\eta, \eta'] > 0$ . Comme  $a \in \overline{A}$ ,  $B(a, \eta'') \cap A \neq \emptyset$ . Soit  $x \in A \cap B(a, \eta'')$  on aura donc à la fois  $N'(f(x) - \ell) < \varepsilon$  et  $N'(f(x) - \ell') < \varepsilon$

Alors  $N'(\ell - \ell') = N'((\ell - f(x)) + (f(x) - \ell')) \leq N'(\ell - f(x)) + N'(f(x) - \ell') < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$ . On a prouvé que  $\forall \varepsilon > 0, 0 \leq N'(\ell - \ell') < 2\varepsilon$  d'où  $N'(\ell - \ell') = 0$ . On notera  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ .

Ex :

$E = \mathbb{R}$ , Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $a \in I$ , en posant  $A = I - \{a\}$ , on retrouve la définition usuelle de la limite. On a  $a \in \overline{A}$ .  $A = ]a, b]$   $b > a$ . Alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$  est la limite à droite.

Notation :

Lorsque  $U$  est un ouvert, que  $a \in U$ , et que  $A = U - \{a\}$  on écrit  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  à la place de  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$ .

Proposition :

Soient  $A \subset E$ ,  $a \in \overline{A}$ ,  $f : A \longrightarrow E'$ , il y'a équivalence entre :

i/  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$  existe et vaut  $\ell \in E'$

ii/  $\forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$  convergeant vers  $a$ , la suite  $f(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ell$ .

Propriétés :

i/ Si  $f$  admet  $\ell$  pour limite lorsque  $x \longrightarrow a, x \in A$  alors  $\ell \in \overline{f(A)}$ .

ii/ Si  $g : A \longrightarrow E'$ ,  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$  et  $\ell' = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} g(x)$  existent, alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} (f + g)(x)$  existe et vaut  $\ell + \ell'$

iii/ Si  $f : A \rightarrow E', g : A \rightarrow \mathbb{R}$ , et si  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \ell \in E'$  existe et  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} g(x) = \lambda \in \mathbb{R}$  existe, alors

$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} (f(x)g(x))$  existe et vaut  $\lambda\ell$ .

iv/ Soient  $E, E', E''$  trois e.v.n,  $A \subset E, B \subset E', f : A \rightarrow E', g : B \rightarrow E''$ . Supposons  $f(A) \subset B$ , que  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$  existe, on sait alors que  $\ell \in \overline{f(A)} \subset \overline{B}$ . Supposons  $\ell' = \lim_{\substack{y \rightarrow \ell \\ y \in B}} g(y)$  existe. Alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} (g \circ f(x))$  existe

et vaut  $\ell'$ .

v/ Soit  $f : A \rightarrow \mathbb{R}^p, x \mapsto f(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_p(x) \end{bmatrix}$  où  $f_j : A \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) = \ell = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \vdots \\ \ell_p \end{bmatrix}$  existe  $\iff$

$\forall j \in \{1, \dots, p\} \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f_j(x)$  existe et vaut  $\ell_j$ .

Démo :

i/ Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de  $A, x_n \rightarrow a$ , alors  $f(x_n) = y_n \rightarrow \ell$  et  $y_n \in f(A)$ , donc  $\ell \in \overline{f(A)}$ .

ii/ Si  $x_n \rightarrow a$  on a  $f(x_n) \rightarrow \ell, g(x_n) \rightarrow \ell'$  donc  $f(x_n) + g(x_n) \rightarrow \ell + \ell'$ .

iv/ Pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A, x_n \rightarrow a$ , on sait que  $y_n = f(x_n) \rightarrow \ell$ . Mais  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de  $f(A) \subset B$  qui converge vers  $\ell$ , donc  $g(y_n) \rightarrow \ell'$ . Donc pour toute suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A, x_n \rightarrow a$ ,  $g \circ f(x_n) \rightarrow \ell'$ .

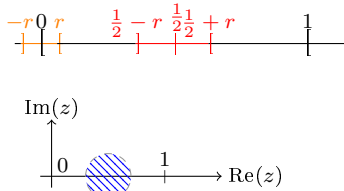
Soit  $f : A \rightarrow E', a \in A$ . Alors  $f$  est continue en  $a \iff \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x)$  existe et vaut  $f(a)$ .

### 3.6 Voisinages, Intérieur d'un ensemble

Définition :

Soit  $(E, N)$  un e.v.n,  $a \in E$ . On dit que  $V \subset E$  est voisinage de  $a$  de  $E$ .  $\iff \exists r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset V$ .

Ex :



$E = \mathbb{R}. V = [0, 1]$ , ici  $V$  est voisinage de  $1/2$ , car  $\exists r > 0$  tel que  $B(\frac{1}{2}, r) = ]\frac{1}{2} - r, \frac{1}{2} + r[ \subset V$ . Par contre  $V$  n'est pas voisinage de  $0$  car  $\nexists r > 0$  avec  $]-r, r[ \subset V$ .

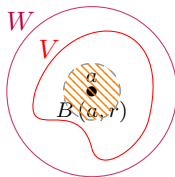
$E = \mathbb{C}$ , avec  $\forall z \in \mathbb{C}, N(z) = |z|$ . Soit  $A = [0, 1]$  Alors  $[0, 1]$  n'est pas voisinage de  $1/2$  dans  $\mathbb{C}$ , car  $B(\frac{1}{2}, r) = \{z \in \mathbb{C}, |z - \frac{1}{2}| < r\}$ , or  $\forall r > 0, B(\frac{1}{2}, r)$  non inclus dans  $A$ .

Propriétés :

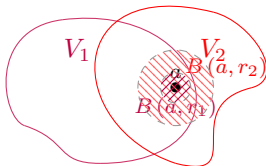
i/ Si  $V$  est un voisinage de  $a$  et  $V \subset W$ , alors  $W$  est voisinage de  $a$ .

ii/ Si  $V_1, V_2$  sont voisinages de  $a$ , alors  $V_1 \cap V_2$  est voisinage de  $a$ .

Démo :



i/ Soit  $V$  un voisinage de  $a, \exists r > 0$  avec  $B(a, r) \subset V$ , comme  $V \subset W$ , alors  $B(a, r) \subset W$ . Donc  $W$  est un voisinage de  $a$ .



ii/ Soit  $r = \min[r_1, r_2] > 0$ , alors  $B(a, r) \subset V_1 \cap V_2$ . Donc  $V_1 \cap V_2$  est un voisinage de  $a$ .

Proposition :

Il y a équivalence entre :

i/  $U \subset E$  est un ouvert,

ii/  $\forall a \in U, U$  est voisinage de  $a$ .

Démo :

$i/ \iff \forall a \in U, \exists r > 0$  avec  $B(a, r) \subset U \iff \forall a \in U, U$  est voisinage de  $a \iff ii/$ .

Proposition :

On peut remplacer "boules" par "voisinages" dans les définitions de la limite, et de la continuité :

Si  $\ell = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x \in A}} f(x) \iff (1) : \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in A \cap B_E(a, \eta), \text{ on a } f(x) \in B_{E'}(\ell, \varepsilon)$ .

Alors  $(1) \iff (2) : \forall V$  voisinage de  $\ell, \exists U$  voisinage de  $A, \forall x \in A \cap U, \text{ on a } f(x) \in V$ .

Démo :

Montrons que  $(1) \implies (2)$ , Soit  $V$  un voisinage de  $\ell, \exists \varepsilon > 0$  tel que  $B(\ell, \varepsilon) \subset V$ . Appliquons (1) avec  $\varepsilon$ .  $\exists \eta > 0$  tel que  $\forall x \in A \cap B_E(a, \eta), f(x) \in B_{E'}(\ell, \varepsilon) \subset V$ . Posons  $U = B_E(a, \eta)$ , c'est un voisinage qui vérifie (2).

Montrons que  $(2) \implies (1)$ , soit  $\varepsilon > 0$ , alors  $B(\ell, \varepsilon)$  est un voisinage de  $\ell$ . On peut appliquer (2) à  $V = B(\ell, \varepsilon)$ .  $\exists U$  voisinage de  $a$  avec  $x \in A \cap U \implies f(x) \in V = B(\ell, \varepsilon)$  comme  $U$  est voisinage de  $a, \exists \eta > 0$  tel que  $B(a, \eta) \subset U$ . Donc  $\forall x \in A \cap B_E(a, \eta), \text{ on a } f(x) \in B(\ell, \varepsilon)$  donc (1) est vrai.

Proposition :

Soit  $A \in E$ . Alors  $(a \in \bar{A}) \iff (\forall V \text{ voisinage de } a, V \cap A \neq \emptyset)$ .

Démo :

$\implies$  Soit  $a \in \bar{A}$ . Soit  $V$  voisinage de  $a, \exists r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset V$ . Comme  $a \in \bar{A}$ , on a  $B(a, r) \cap A \neq \emptyset$ , donc  $V \cap A \neq \emptyset$ .  $\impliedby$  Comme  $B(a, r)$  est voisinage de  $a, A \cap B_E(a, \eta) \neq \emptyset, \forall \eta > 0$ , donc  $a \in \bar{A}$ .

Corollaire :

Soit  $A \subset E$ , notons  $(F_i)_{i \in I}$  la famille de tous les fermés vérifiant  $A \subset F_i$ . Alors  $\bar{A} = \bigcap_{i \in I} F_i$ .

Démo :

Puisque  $A \subset F_i$ , on a  $\bar{A} \subset \bar{F}_i = F_i$  (car  $F_i$  est fermé). On a donc  $\bar{A} \subset \bigcap_{i \in I} F_i$ .

Montrons que  $\bigcap_{i \in I} F_i \subset \bar{A}$  ou encore  $E - \bar{A} \subset E - (F_i)_{i \in I}$ . Soit  $a \in E - \bar{A}, a \notin \bar{A}$  donc  $\exists r > 0$  tel que  $\cap A = \emptyset$ . Soit  $G = E - B(a, r)$ , alors  $G$  est un fermé et  $A \subset G$ . Donc  $G$  est un élément de la famille  $F_i$ ,  $\exists i_0 \in I$  avec  $G = F_{i_0}$ . De plus  $a \notin G$  donc  $E - G = E - F_{i_0} \subset E - \bigcap_{i \in I} F_i$ .

### 3.7 Intérieur d'un ensemble

Définition :

Soient  $(E, N)$  un e.v.n,  $A \subset E$ , on dit que  $a$  est dans l'intérieur de  $A \iff \exists r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset A$ .  
On note  $\mathring{A}$  l'ensemble des points intérieurs de  $A$ .

Ex :

$E = \mathbb{R}, A = ]0, 1[$  Alors  $\mathring{A} = ]0, 1[$  puisque si  $x \in ]0, 1[, \exists r > 0$  tel que  $]x - r, x + r[ \subset A$ .

Par contre 0 n'est pas intérieur à  $A$ .

$E = \mathbb{R}^2$ , muni de l'une des normes  $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty, A = [0, 1[ \times \{0\}$ . Alors  $\mathring{A} = \emptyset$ .

$\forall M = (a, 0) \in A$  avec  $0 \leq a < 1, \forall r > 0, B(M, r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x^2 + y^2 < r^2\}$  non inclus  $A$ .

Remarque :

La définition équivaut à  $a \in \mathring{A} \iff \exists V$  voisinage de  $a$  avec  $V \subset A$ .

Propriétés :

$i/ A \subset B \implies \mathring{A} \subset \mathring{B}$ .

$$ii/ E - \mathring{A} = \overline{E - A}.$$

Démo :

$$ii/ x \in E - \mathring{A} \iff x \notin \mathring{A} \iff \forall V \text{ voisinage de } x, V \text{ n'est pas inclus de } A. \iff \forall V \text{ voisinage de } x, V \cap (E - A) \neq \emptyset \iff x \in \overline{E - A}.$$

Corollaire :

$$i/ \mathring{A} \text{ ouvert et } (A \text{ est ouvert}) \iff (A = \mathring{A})$$

$$ii/ \text{ Soit } (U_i)_{i \in I} \text{ la famille de tous les ouverts inclus dans } A. \text{ Alors } \mathring{A} = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Démo :

$$i/ \text{ Soit } a \in \mathring{A} : \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset A. \text{ Si } b \in B(a, r - \|a - b\|) \subset B(a, r) \subset A, \text{ donc } b \in \mathring{A}.$$

Donc on aura trouvé  $r > 0$  tel que  $B(a, r) \subset \mathring{A}$ . Donc  $\mathring{A}$  est ouvert. Si  $A = \mathring{A}$ , alors  $A$  est ouvert.

Réciproquement, si  $A$  est ouvert et  $a \in A$ ,  $\exists V$  voisinage de  $a$  avec  $V \subset A$ , donc  $a \in \mathring{A}$ . Donc  $A = \mathring{A}$ .

$$ii/ \text{ Comme } U_i \subset A \text{ donc } V = \bigcup_{i \in I} U_i \subset A. \text{ Or, } V \text{ est ouvert, donc } V = \mathring{V}, \text{ comme } V \subset A \implies \mathring{V} \subset \mathring{A} \text{ on a donc } V \subset \mathring{A}.$$

$$\text{Réciproquement, si } a \in \mathring{A}, \exists r > 0 \text{ tel que } B(a, r) \subset A. \text{ Donc } B(a, r) \text{ est un ouvert inclus dans } A, \exists i_0 \in I \text{ tel que } B(a, r) = U_{i_0}. \text{ Donc } a \in B(a, r) \subset \bigcup_{i \in I} U_i = V. \text{ Donc } \mathring{A} \subset V.$$

## 4 Compacité

Soit  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite d'un e.v.n  $E$ . Une suite extraite (ou sous-suite) de  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de la forme  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  où  $k \mapsto n_k, \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , est strictement croissante.

Ex :

$$n_k = 2k, (x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} = (x_{2k})_{k \in \mathbb{N}}.$$

Remarque :

$$k \mapsto n_k, \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ strictement croissante} \iff \forall k, n_{k+1} > n_k \iff n_{k+1} \geq n_k + 1. (\text{car } n_k \in \mathbb{N}, \forall k).$$

$$\text{En particulier } n_{k+1} \geq n_k + 1 \geq n_{k-1} + 2 \geq \dots \geq \underbrace{n_0 + (k+1)}_{\rightarrow +\infty \text{ si } k \rightarrow +\infty}. \text{ Donc } n_k \rightarrow +\infty \text{ si } k \rightarrow +\infty.$$

Définition :

Soient  $(E, N)$  un e.v.n,  $A \subset E$ . On dit que  $A$  est compact  $\iff \forall (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $A$ ,  $\exists$  une sous-suite  $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$  qui converge vers une limite  $\ell \in A$ . (\*)

Définition équivalente

$$A \text{ est compact} \iff$$