RÉVISION INTRA-A22

I- Nyquist :

Cas 1 : $P(s)$ ne possède pas de pôles ou de zéros instables.

$$P(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2}$$

Étudier la stabilité de P(s) en boucle fermée (retour unitaire).

Corrigé :

Le module de $P(s)$:

$\omega = 0^+ \quad \rightarrow \quad A_i(\omega = 0^+) = \infty$

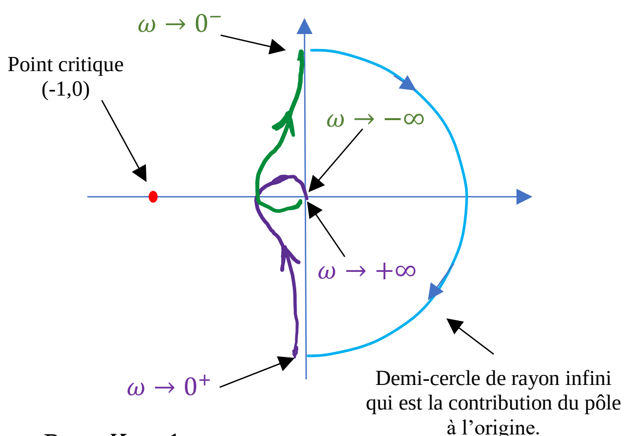
$\omega = +\infty \quad \rightarrow \quad A_i(\omega = +\infty) = 0$

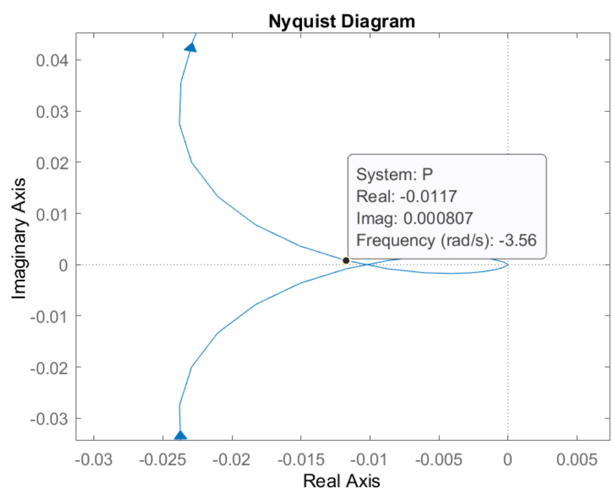
La phase de $P(s)$:

Un retard $\rightarrow \quad \varphi_i(\omega = 0^+) = -90^\circ$

$n = 4\ , \quad m = 1 \quad \rightarrow \quad n - m = 3 \quad \rightarrow \quad \varphi_f(\omega = +\infty) = -90^\circ(n-m) = -270^\circ$

Diagramme de Nyquist pour K=1 :





Pour $K \neq 1$:

$$P(s) = \frac{K(s+1)}{s(s+2)(s+3)^2}$$

$$\rightarrow \quad P(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{j\omega(j\omega+2)(j\omega+3)^2} = \frac{-7K\omega^4 - 3K\omega^2 + j(K\omega^5 - 13K\omega^3 - 18K\omega)}{\omega^8 + 22\omega^6 + 153\omega^4 + 324\omega^2}$$

L'intersection de nyquist avec l'axe des réels est obtenue comme suit :

$Imag(P(j\omega)) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = 3.77\ rad/s$

$Real(P(j\omega_1)) = -0.0104K$

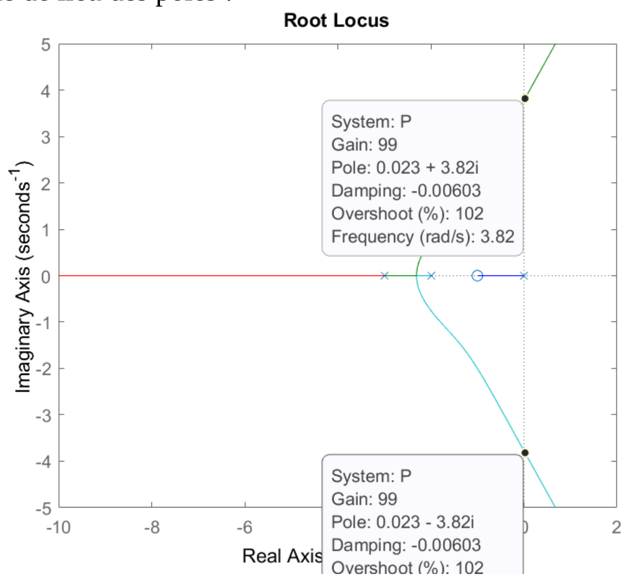
Stabilité en boucle fermée :

Comme P(s) ne possède pas de pôles instables en boucle ouverte, le système en boucle fermée reste instable si le point critique n'est pas encerclé.

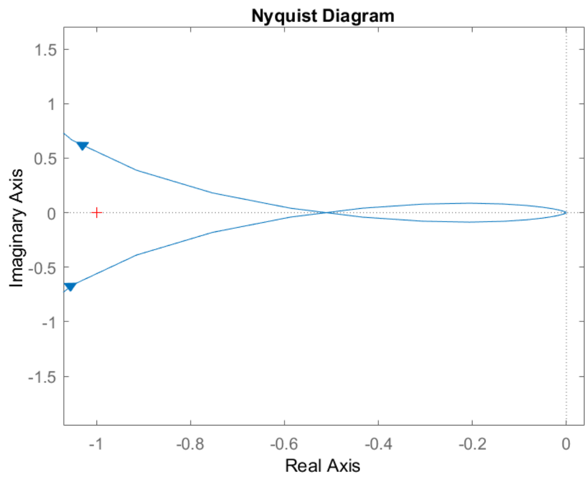
Donc :

$$-0.0104K > -1 \quad \rightarrow \quad K < \frac{1}{0.0104} = 96.15$$

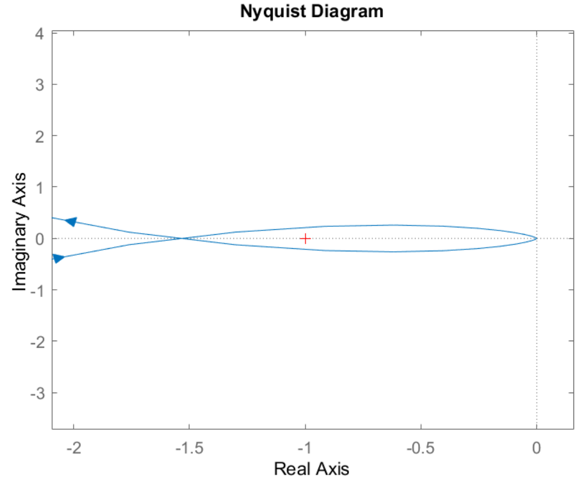
Validation avec la méthode de lieu des pôles :



Pour K=50 (système stable)



Pour K=150 (système instable)



Cas 2 : $P(s)$ possède un pôle instable

$$P(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-2)(s+10)^2}$$

Étudier la stabilité de P(s) en boucle fermée (retour unitaire).

Corrigé :

Le module de $P(s)$:

$\omega = 0^+ \quad \rightarrow \quad A_i(\omega = 0^+) = \infty$

$\omega = +\infty \quad \rightarrow \quad A_i(\omega = +\infty) = 0$

La phase de $P(s)$: Tracé de Bode.

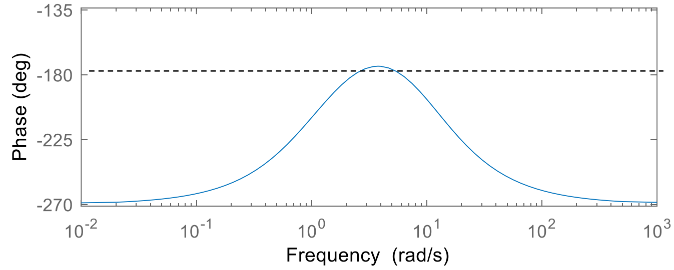
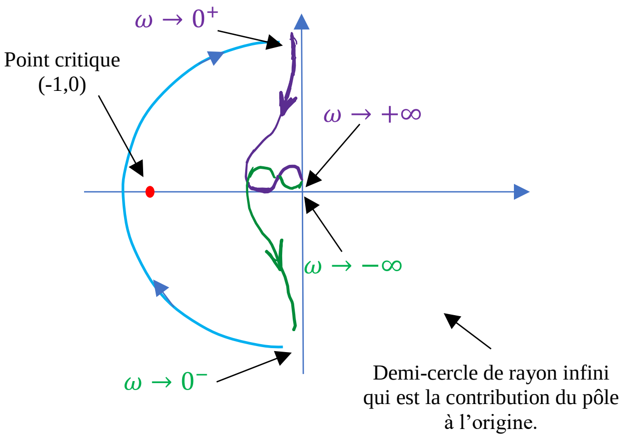
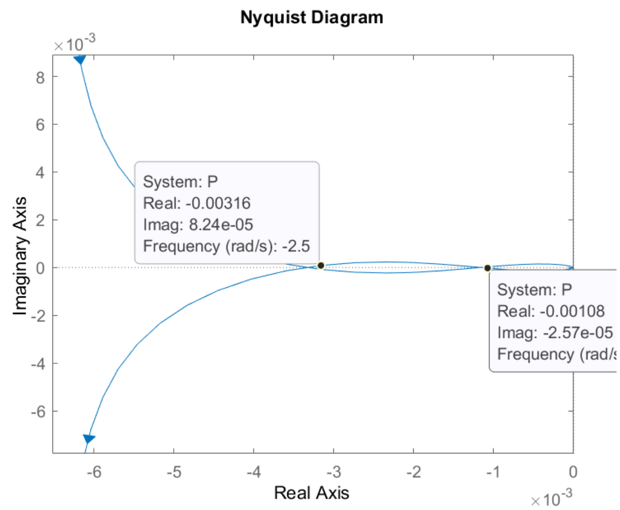


Diagramme de Nyquist pour K=1 :





Pour $K \neq 1$:

$$P(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-2)(s+10)^2}$$

$$\rightarrow \quad P(j\omega) = \frac{K(j\omega+1)}{j\omega(j\omega-2)(j\omega+10)^2} = \frac{-17K\omega^4 - 260K\omega^2 + j(K\omega^5 - 42K\omega^3 + 200K\omega)}{\omega^8 + 204\omega^6 + 10800\omega^4 + 40000\omega^2}$$

Les deux intersections de nyquist avec l'axe des réels sont obtenues comme suit :

$Imag(P(j\omega)) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = 6.04\, rad/s \quad , \quad \omega_2 = 2.34\, rad/s$

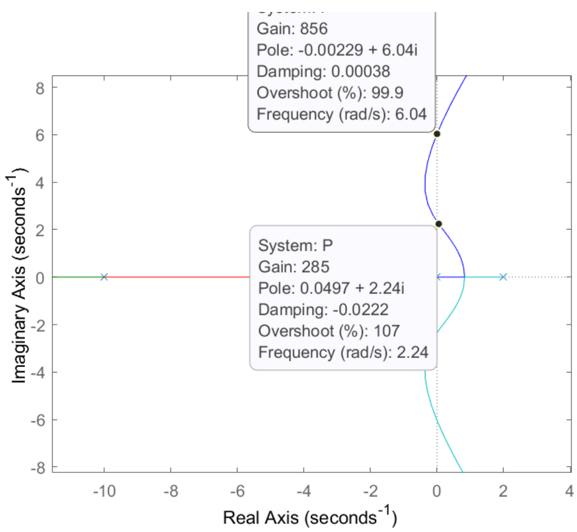
$Real(P(j\omega_1)) = -0.0012K$

$Real(P(j\omega_2)) = \ -0.0033K$

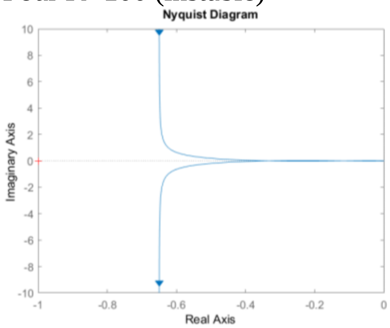
Stabilité en boucle fermée :
Comme P(s) possède un pôle instable en boucle ouverte, le système en boucle fermée reste instable si le point critique est encerclé une fois dans le sens anti-horaire.
Donc :

$$-0.0012K > -1 \ > -0.0033K \quad \rightarrow \quad \frac{1}{0.0033} = 303.03 \ < K < \frac{1}{0.0012} = 833.33$$

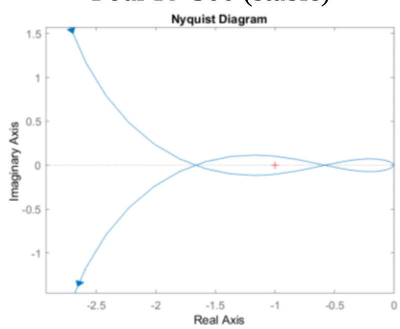
Validation avec la méthode de lieu des pôles :



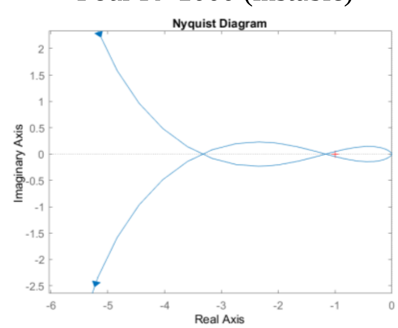
Pour K=100 (instable)



Pour K=500 (stable)



Pour K=1000 (instable)



Cas 3 : $P(s)$ possède un pôle instable et un zéro instable

$$P(s) = \frac{K(s-1)}{s(s-2)(s+10)^2}$$

Étudier la stabilité de P(s) en boucle fermée (retour unitaire).

Corrigé :

Le module de $P(s)$:

$\omega = 0^+ \quad \rightarrow \quad A_i(\omega = 0^+) = \infty$

$\omega = +\infty \quad \rightarrow \quad A_i(\omega = +\infty) = 0$

La phase de $P(s)$: Tracé de Bode.

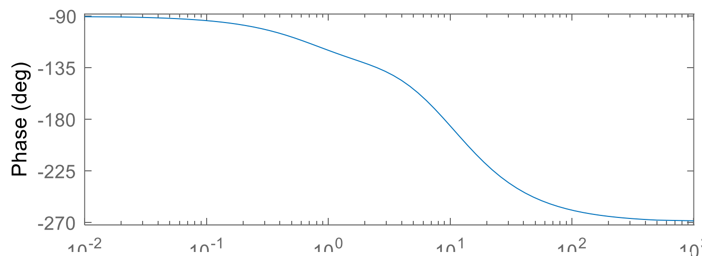
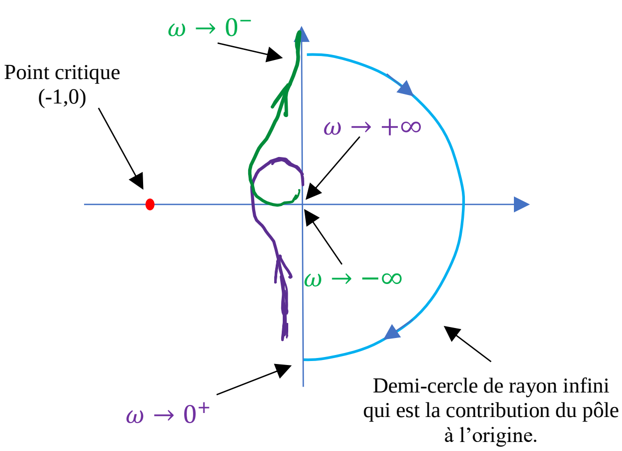
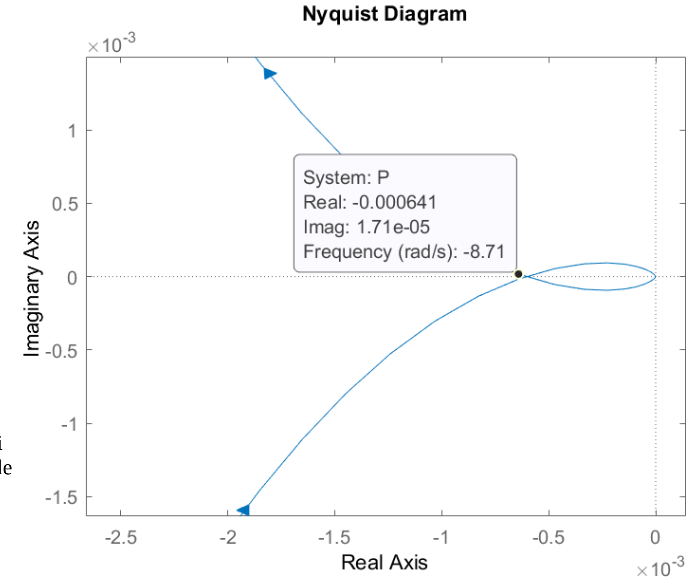


Diagramme de Nyquist pour K=1 :





Pour $K \neq 1$:

$$P(s) = \frac{K(s-1)}{s(s-2)(s+10)^2}$$

$$\rightarrow \quad P(j\omega) = \frac{K(j\omega-1)}{j\omega(j\omega-2)(j\omega+10)^2} = \frac{-19K\omega^4 - 140K\omega^2 + j(K\omega^5 - 78K\omega^3 - 200K\omega)}{\omega^8 + 204\omega^6 + 10800\omega^4 + 40000\omega^2}$$

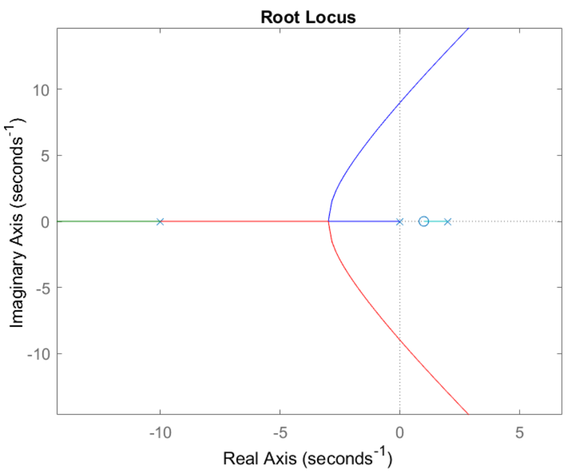
L'intersections de nyquist avec l'axe des réels est obtenue comme suit :

$Imag(P(j\omega)) = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_1 = 8.9713\ rad/s$

$Real(P(j\omega_1)) = -0.0023K$

Stabilité en boucle fermée :
Comme P(s) possède un pôle instable en boucle ouverte, le système en boucle fermée reste instable si le point critique est encerclé une fois dans le sens anti-horaire. Selon le diagramme de Nyquist, le sens de rotation est le sens horaire, donc le système reste instable quelle que soit la valeur de K.

Validation avec la méthode de lieu des pôles :



II- SOLUTION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT : Question tirée du document : CHAPITRE V - Modèles d'état : Commandabilité, Observabilité, Solution de l'équation d'état.

Soit les modèles d'état suivants :
$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0), x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Pour une entrée échelon unitaire, calculer $x(t)$ en utilisant :

La matrice de transition.
La transformation inverse de Laplace.
La matrice de similarité.

b) Calculer $y(t)$.
c) Trouver les matrices discrètes pour T=0.1s.
d) Calculer $X(z)$.
e) Calculer $x(kT)$ et $y(kT)$.

Corrigé :

a) Calcul de $x(t)$ en utilisant la matrice de transition :

```
A=[0 1;-2 -3]; B=[0;1];C=[1 0];x0=[1;1];u=1;
syms s
s*eye(2)-A
% ans =
% [ s,     -1]
% [ 2, s + 3]
```

```
inv(s*eye(2)-A)
% ans =
% [ (s + 3)/(s^2 + 3*s + 2)   ,      1/(s^2 + 3*s + 2)]
% [      -2/(s^2 + 3*s + 2)    ,    s/(s^2 + 3*s + 2)]
phi=ilaplace(inv(s*eye(2)-A))
% phi =  [   2*exp(-t) - exp(-2*t)      ,     exp(-t) - exp(-2*t)]
%        [ 2*exp(-2*t) - 2*exp(-t)    ,    2*exp(-2*t) - exp(-t)]
phi_tau=ilaplace(inv(s*eye(2)-A),t-tau)
% phi_tau = [2*exp(tau - t) - exp(2*tau - 2*t)     ,     exp(tau - t) - exp(2*tau - 2*t)]
%           [2*exp(2*tau-2*t) - 2*exp(tau - t)   ,     2*exp(2*tau - 2*t) - exp(tau - t)]
X=phi*x0+int(phi_tau*B*u,tau,0,t)
% x =    2*exp(-t) - (3*exp(-2*t))/2 + 1/2
%         -exp(-2*t)*(2*exp(t) - 3)
y=C*x
% y = 2*exp(-t) - (3*exp(-2*t))/2 + 1/2
```

b) Calcul de $x(t)$ en utilisant la transformation inverse de Laplace :

```
A=[0 1;-2 -3]; B=[0;1];C=[1 0];x0=[1;1];u=1;
syms s
U=1/s;
s*eye(2)-A;
inv(s*eye(2)-A)
% ans = [ (s + 3)/(s^2 + 3*s + 2)      ,      1/(s^2 + 3*s + 2)]
%       [      -2/(s^2 + 3*s + 2)       ,     s/(s^2 + 3*s + 2)]
X=inv(s*eye(2)-A)*x0+inv(s*eye(2)-A)*B*U
% X =
%  1/(s^2 + 3*s + 2) + (s + 3)/(s^2 + 3*s + 2) + 1/(s*(s^2 + 3*s + 2))
%  s/(s^2 + 3*s + 2) - 1/(s^2 + 3*s + 2)
x=ilaplace(X)
% x =
%   2*exp(-t) - (3*exp(-2*t))/2 + 1/2
%   3*exp(-2*t) - 2*exp(-t)
y=C*x
% y = 2*exp(-t) - (3*exp(-2*t))/2 + 1/2
```

c) Calcul de $x(t)$ en utilisant la matrice de similarité :

```
A=[0 1;-2 -3]; B=[0;1];C=[1 0];x0=[1;1];u=1;
[M,V]=eig(A);
inv(M)*A*M
% ans =
%    -1.0000      -0.0000
%          0      -2.0000
inv(M)*B
% ans =
%     1.4142
%     2.2361
C*M
```

```
% ans =
%      0.7071   -0.4472
q0=inv(M)*x0
% q0 =       4.2426
%            4.4721
syms t
q=[q0(1)*exp(S(1,1)*t)      ;      q0(2)*exp(S(2,2)*t)]+inv(M)*B*u]
% q =   2^(1/2) + 3*2^(1/2)*exp(-t)
%       5^(1/2) + 2*5^(1/2)*exp(-2*t)
x=M*q
% x =     3*exp(-t)-2*exp(-2*t)
%         4*exp(-2*t) - 3*exp(-t) + 1
y = C*M*q
% y =   3*exp(-t)-2*exp(-2*t)
```

d) Calcul des matrices discrètes (T=0.1) :

```
A=[0 1;-2 -3]; B=[0;1];C=[1 0];x0=[1;1];u=1;
T=0.1;
```

$AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} 0.1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.2 & -0.3 \end{pmatrix} \ll 1$

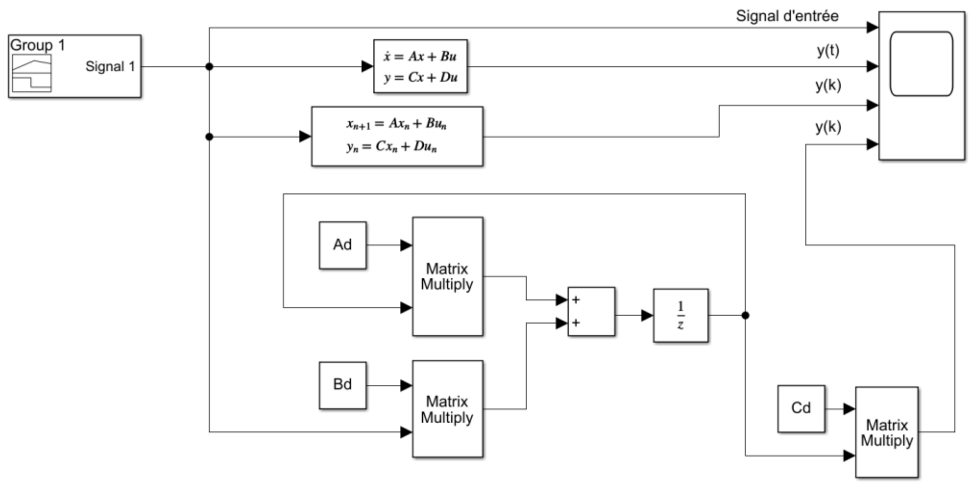
$AT \ll 1$, la matrice discrète peut être calculée de la façon suivante :

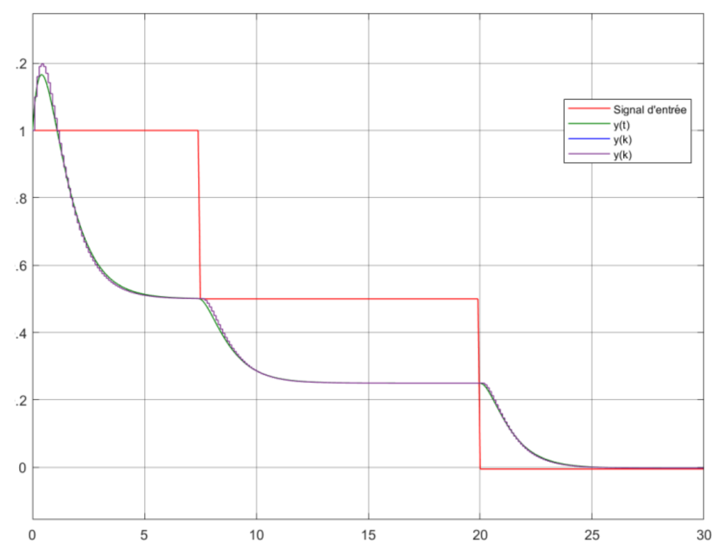
```
Ad=eye(2)+T*A
Bd=T*B
Cd=C
% Ad =
%      1.0000    0.1000
%     -0.2000    0.7000
% Bd =
%      0
%      0.1000
```

e) Calcul de $x(k)$ en utilisant la transformée en z :

```
syms z
Ud=z/z-1;
z*eye(2)-Ad;
inv(z*eye(2)-Ad)
% ans = [ (5*(10*z - 7))/(50*z^2 - 85*z + 36) , 5/(50*z^2 - 85*z + 36)]
%       [ -10/(50*z^2 - 85*z + 36)        , (50*(z - 1))/(50*z^2 - 85*z + 36)]
Xd=inv(z*eye(2)-A)*z*x0+inv(z*eye(2)-Ad)*Bd*Ud
% Xd =
%   (50*z^2 - 30*z + 2)/(50*z^2 - 85*z + 36)
%   -(10*(- 5*z^2 + 4*z + 2))/(50*z^2 - 85*z + 36)
xd=iztrans(Xd)
% xd =
%    (31*(9/10)^n)/9 - (5*(4/5)^n)/2 + 1/18
%     5*(4/5)^n - (31*(9/10)^n)/9 - 5/9
yd=Cd*xd
% yd =
%   (31*(9/10)^n)/9 - (5*(4/5)^n)/2 + 1/18
```

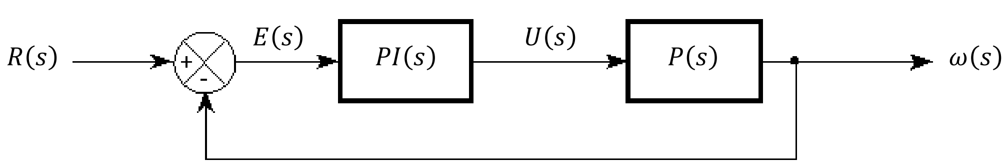
f) Réponse indicielle :





III- CIRCUIT DE PHASE : Question tirée du document : CHAPITRE II – Rappels de la commande classique.

Soit un système de rétroaction comprenant le processus P(s) ainsi qu'un compensateur PI(s) dans son gain de boucle. L'objectif est d'améliorer la marge de phase par le truchement d'un compensateur à avance de phase de façon à obtenir une marge de phase MP souhaitée de $MP = 67^{\circ}$.



Fonction de transfert du système :

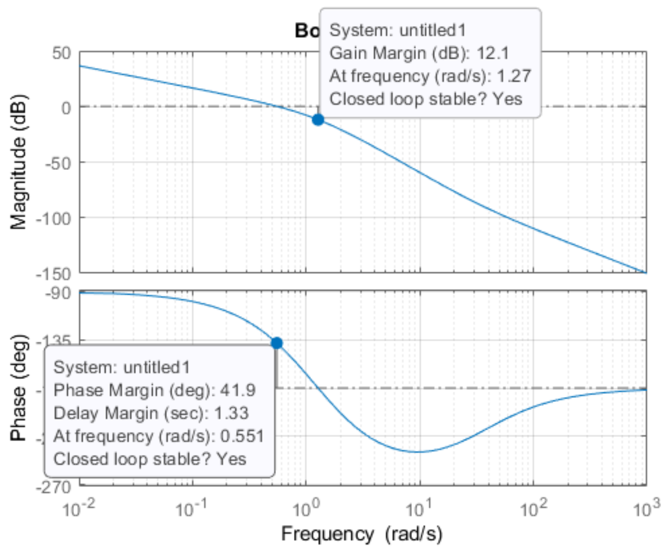
$$P(s) = \frac{0.5}{(s+1)(s+1.5)}$$

Fonction de transfert du contrôleur proportionnel intégral :

$PI(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$, $K_p = 0.058$: Gain proportionnel, $K_i = 2.01$: Gain intégral

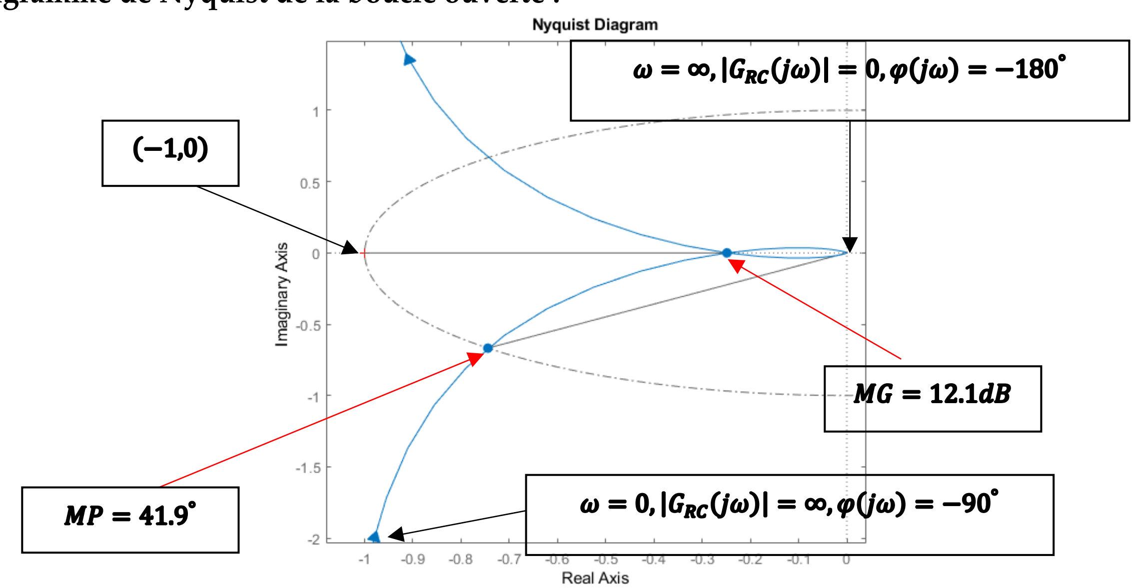
La fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_{BO}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot P(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot \frac{0.5}{(s+1)(s+1.5)} = \frac{0.5(K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+1.5)}$$



La lecture du diagramme de Bode : $MG = 12.1$ et $MP = 41.9^{\circ}$. La marge de gain est mesurée à la fréquence $\omega = 1.21\ rad/s$ et la marge de phase est mesurée à la fréquence $\omega = 0.55\ rad/s$.

Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte :



L'encerclement à droite de rayon infini n'est pas représenté dans ce graphe.

Conception du circuit de phase $C_{AP}(s)$:

Pour obtenir une marge de phase $MP = 67^{\circ}$, il faut introduire une avance de phase $\varphi = 67^{\circ} - 41.9^{\circ} = 25.1^{\circ}$ à $\omega = 0.55\, rad/s$.

$C_{AP}(s) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{1+\frac{s}{z}}{1+\frac{s}{p}}$, Telle que : $z = \frac{\omega_m}{\sqrt{\gamma}}$, $p = \sqrt{\gamma}\omega_m$, $\gamma = \frac{1+sin\varphi}{1-sin\varphi}$, $\omega_m = 0.55\, rad/s$, $\varphi = 25.1^{\circ}$

Simulation Matlab :

```
Phi=0.44; % Phi = MP souhaitee =67 deg - MP actuelle = 41.9
gamma=(1+sin(Phi))/(1-sin(Phi));
wu=0.55; % wu à MP=67 deg
zz=wu/sqrt(gamma); % zero du compensateur
pp=sqrt(gamma)*wu; % pole du compensateur
Ca=tf([(1/sqrt(gamma))*(1/zz) 1/sqrt(gamma)],[1/pp 1]);
% Fonction de transfert en boucle fermee avec compensateur
GMC_BF=(Ca*Gpi*Gm)/(1+(Ca*Gpi*Gm));
```

Simulation par Simulink :

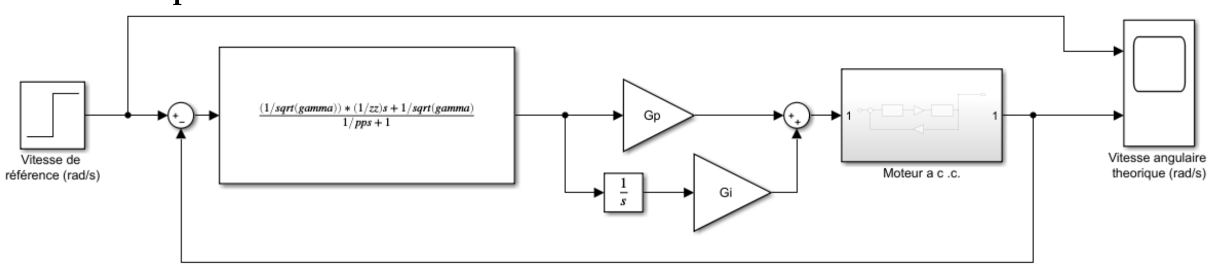
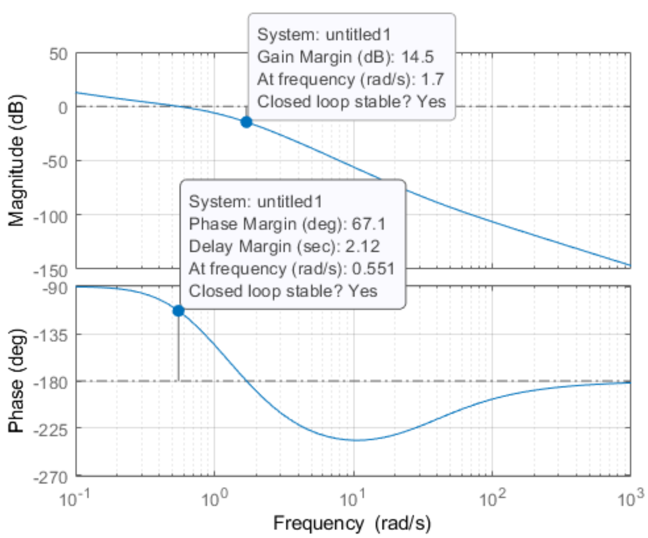
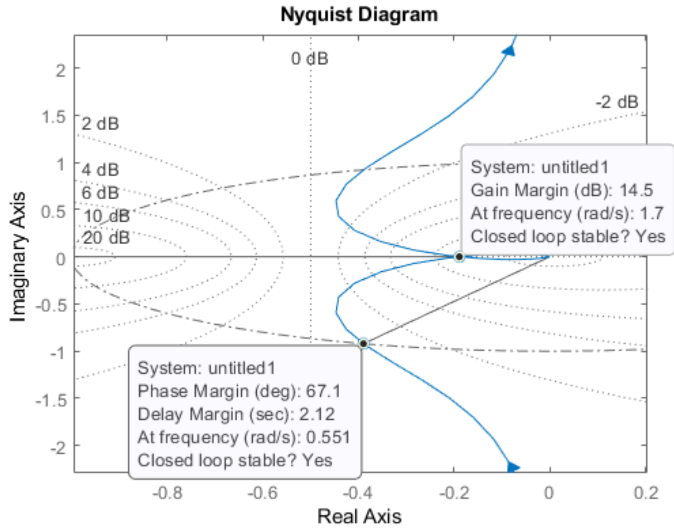


Diagramme de Bode :



La lecture du diagramme de Bode montre : $MG = 14.5\, dB$et $MP = 67.1^{\circ}$. La marge de gain est mesurée à la fréquence $\omega = 1.7\, rad/s$ et la marge de phase est mesurée à la fréquence $\omega = 0.55\, rad/s$.

Diagramme de Nyquist :

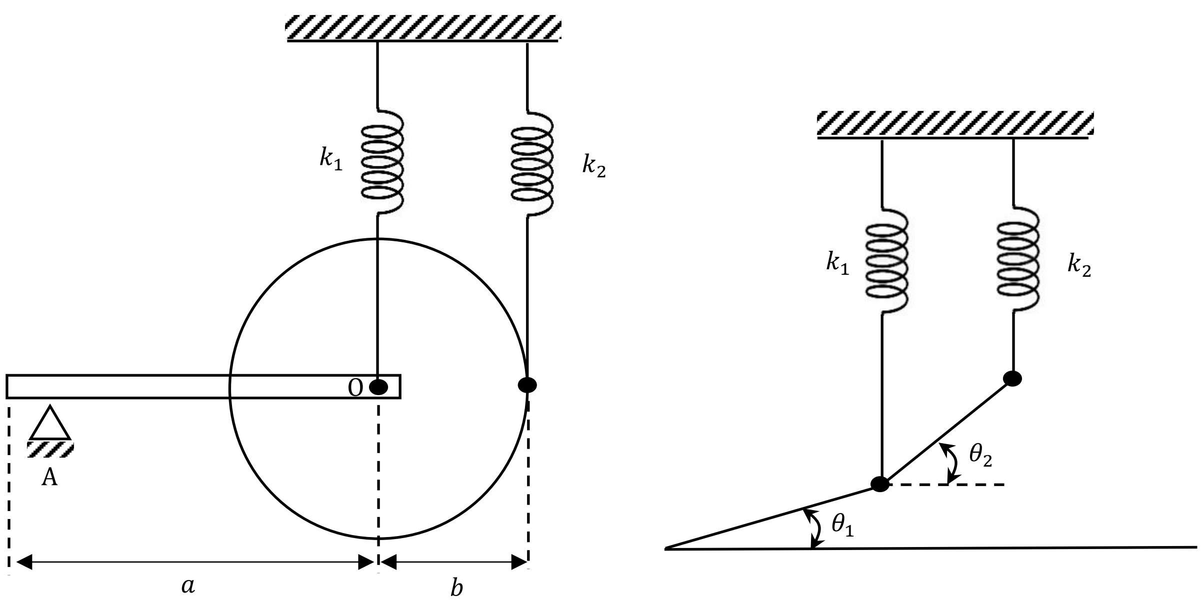


L'encerclement à droite de rayon infini n'est pas représenté dans ce graphe.

Étude de stabilité en utilisant le Diagramme de Nyquist :
Nous notons que le point critique (-1,0) n'est pas encerclé, ce qui assure la stabilité car il n'y a aucun pôle instable dans la boucle ouverte. En effet :

IV- MODEL D'ETAT : Question tirée de l'examen intra A21 (15 points) :

Effectuer la modélisation de Lagrange du système suivant et la mettre sous forme d'état :



J_1 est le moment d'inertie de la barre et du tambour autour du point d'appui A

J_2 est le moment d'inertie du tambour par rapport à son centre O.

k_1 , k_2 sont des ressorts et k_T est la constante de friction circulaire du tambour

Corrigé :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q \quad , \quad q_1=\theta_1 \ , \ q_2=\theta_2, Q=0$$

$$T=\frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1{}^2+\frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2{}^2$$

$$U=\frac{1}{2}k_1(a\theta_1)^2+\frac{1}{2}k_2(a\theta_1+b\theta_2)^2$$

$$D=\frac{1}{2}k_T\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)^2$$

$\boldsymbol{q_1=\theta_1}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_1}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1}+\frac{\partial U}{\partial \theta_1}=0 \quad \rightarrow \quad J_1\ddot{\theta}_1+k_1a^2\theta_1+k_2a(a\theta_1+b\theta_2)-k_T\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)=0$$

$\boldsymbol{q_2=\theta_2}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right)-\frac{\partial T}{\partial \theta_2}+\frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2}+\frac{\partial U}{\partial \theta_2}=0 \quad \rightarrow \quad J_2\ddot{\theta}_2+k_2b(a\theta_1+b\theta_2)+k_T\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)=0$$

Choix des variables d'état :
$x_1=\theta_1$, $x_2=\dot{x}_1=\ddot{\theta}_1$, $x_3=\theta_2$, $x_4=\ddot{\theta}_2$

Modèle d'état :

$$\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\\ \dot{x}_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ -\dfrac{a^2(k_1+k_2)}{J_1} & -\dfrac{K_T}{J_1} & -\dfrac{abk_2}{J_1} & \dfrac{K_T}{J_1}\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -\dfrac{abk_2}{J_2} & \dfrac{b^2k_2}{J_2} & \dfrac{K_T}{J_2} & -\dfrac{K_T}{J_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{pmatrix}$$