

## CHAPITRE VI : COMMANDE PAR RETOUR D'ÉTAT - OBSERVATEUR D'ÉTAT

### 6-1 Rappels théoriques

Soit le système commandable et observable :  $\dot{x} = Ax + Bu$  ,  $y = Cx + Du$

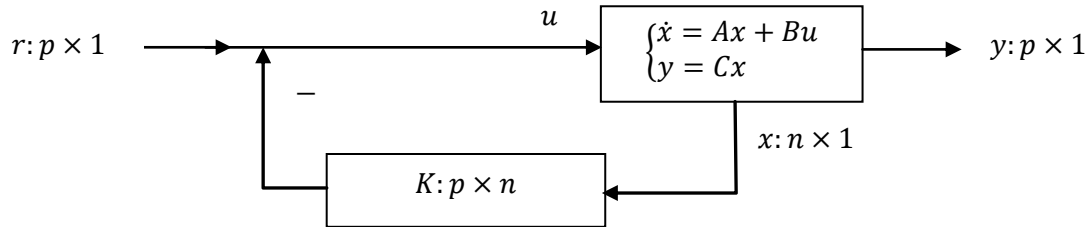
Tel que :  $x: n \times 1$  ,  $y: p \times 1$  ,  $A: n \times n$  ,  $B: n \times m$  ,  $C: p \times n$  ,  $D: n \times m = 0$

#### 6-1-1 Commande par retour d'état :

Il est possible d'appliquer un retour d'état de gain  $K: p \times n$ . Le système devient :

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t)$$

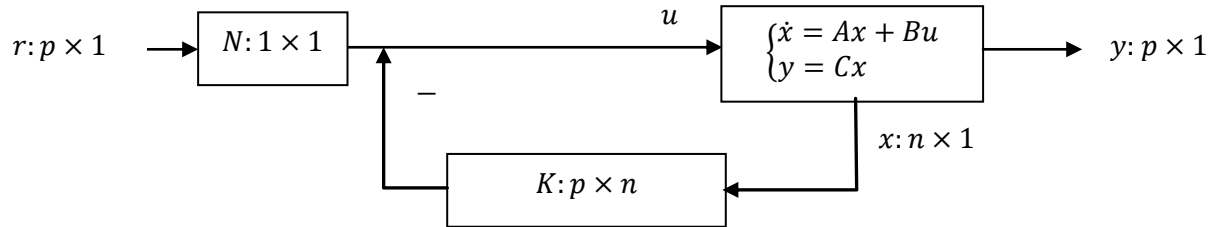
Le gain  $K$  peut être choisi pour relocaliser les valeurs propres initiales de  $A$  à de nouvelles valeurs propres stabilisatrices de  $A - BK$ . La boucle fermée devient :



Pour annuler l'erreur statique, la référence est multipliée par un gain  $N$  tel que :

$$N^{-1} = -C(A - BK)^{-1}B \rightarrow u = -kx + Nr$$

La boucle fermée devient :



La fonction de transfert de la boucle fermée:

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C[sI - A + BK]^{-1}BN$$

#### 6-1-2 Commande par retour de sortie :

Il est possible d'appliquer un retour d'état de gain  $K: p \times n$ . Le système devient :

$$\dot{x}(t) = (A - BKC)x(t) + Br(t)$$

Le gain  $K$  peut être choisi pour relocaliser les valeurs propres initiales de  $A$  à de nouvelles valeurs propres stabilisatrices de  $A - BKC$ .

### 6-1-3 Observateur d'état complet

Pour un système avec retour d'état:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + Br(t) \quad , \quad y(t) = Cx(t)$$

Il est possible de concevoir un observateur ayant la dynamique d'erreur suivante :

$$\dot{e}(t) = (A - HC)e(t) \quad , \quad e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$$

Le gain  $H: n \times p$  est choisi de telle sorte que les valeurs propres de  $A - HC$  soient stables et beaucoup plus grandes que celles de  $A - BK$  afin que l'erreur converge rapidement vers zéro.

La dynamique de l'estimation de l'observateur est donnée par:

$$\dot{\hat{x}}(t) = (A - HC)\hat{x}(t) + Hy(t) + Bu(t) \quad , \quad u(t) = r(t) - K\hat{x}(t)$$

La dynamique du système avec retour d'état et observateur complet devient:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BKe(t) + Br(t)$$

En vertu du principe de séparabilité, les matrices  $K$  et  $H$  peuvent être calculées séparément.

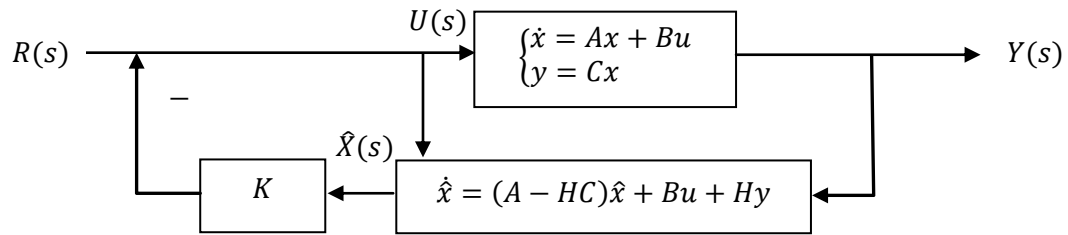
La fonction de transfert de l'observateur sans le retour d'état :

$$G_{obs}(s) = \frac{\hat{X}(s)}{Y(s)} = [sI - A + HC]^{-1}H$$

La fonction de transfert de l'observateur avec retour d'état (référence nulle):

$$G_e(s) = \frac{U(s)}{-Y(s)} = K[sI - A + HC + BK]^{-1}H$$

La boucle fermée devient :



L'équation de la boucle fermée (référence nulle):

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK \\ HC & A - HC - BK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ B \end{pmatrix} r$$

$$y = (C \quad 0 \quad 0) \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

La fonction de transfert correspondante est (référence nulle):

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C_{BF}[sI - A_{BF}]^{-1}B_{BF}$$

**Remarque :** La valeur initiale de l'estimation d'état  $\hat{x}_0$  n'est pas connue. Bien que souvent la valeur  $\hat{x}_0 = 0$  soit utilisée, il est préférable de choisir pour valeur initiale  $\hat{x}_0 = C^+ y_0$  où  $y_0$  est la valeur initiale de la sortie et  $C^+$  est la matrice pseudo-inverse de  $C$ , soit :  $C^+ = C^T (CC^T)^{-1}$ .

### 6-1-4 Observateur d'état réduit

Dans le cas où certains états peuvent être directement accessibles, il n'est pas nécessaire d'estimer tous les états. La dimension du système original est diminuée en mettant de côté les états mesurables. Le vecteur d'état  $x(t)$  est redéfini comme deux vecteurs :  $x_1(t)$  qui représente le vecteur accessible à mesurer et  $x_{réduit}(t)$  qui représente le vecteur non accessible et donc à estimer. Le système devient :

$$\dot{x}_1(t) = A_{11}x_1(t) + A_{12}x_{réduit}(t) + B_1u(t)$$

$$\dot{x}_{réduit}(t) = A_{22}x_{réduit}(t) + A_{21}x_1(t) + B_2u(t)$$

$$y(t) = Cx(t) = x_1(t)$$

La dynamique de l'erreur de l'observateur d'ordre réduit est donnée par:

$$\dot{e}_{réduit}(t) = (A_{22} - H_{réduit}A_{12})e_{réduit}(t) \quad , \quad e_{réduit}(t) = x_{réduit}(t) - \hat{x}_{réduit}(t)$$

Le gain  $H_{réduit}$  est choisi de telle sorte que les valeurs propres de  $A_{22} - H_{réduit}A_{12}$  soient stables et beaucoup plus grandes que celles de  $A - BK$  afin que l'erreur converge rapidement vers zéro.

La dynamique de l'estimation de l'observateur d'ordre réduit est donnée par:

Changement de variable :

$$\hat{z}(t) = \hat{x}_{réduit}(t) - Hy(t) \quad \rightarrow \quad \hat{z}(t) = \hat{x}_{réduit}(t) - H_{réduit}\dot{y}(t)$$

De la sorte, la dynamique devient :

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}(t) = & (A_{22} - H_{réduit}A_{12})\hat{z}(t) + (A_{22}H_{réduit} - H_{réduit}A_{12}H_{réduit} + A_{21} - H_{réduit}A_{11})y(t) \\ & + (B_2 - H_{réduit}B_1)u(t) \end{aligned}$$

$$\hat{x}_{réduit}(t) = \hat{z}(t) - H_{réduit}\dot{y}(t)$$

Tel que :

$$u(t) = r(t) - Kx(t) \quad , \quad x(t) = \begin{pmatrix} y(t) = x_1(t) \\ \hat{x}_{réduit}(t) \end{pmatrix}$$

La dynamique du système avec retour d'état et observateur d'ordre réduit devient:

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t) + BK_2e_{réduit}(t) + Br(t) \quad , \quad K = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \end{pmatrix}$$

En vertu du principe de séparabilité, les matrices  $K$  et  $H_{réduit}$  peuvent être calculées séparément.

## 6-2 Problèmes

### 6-2-1 Problème #1 :

Soit le système décrit par les matrices d'état suivantes :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $C = (1 \ 0)$ .

- Vérifier la commandabilité et l'observabilité
- Trouver les formes commandable et observable
- Construire une commande par retour d'état pour accélérer la réponse temporelle de ce système stable en choisissant des valeurs propres (négatives) deux fois plus grandes.
- Construire un observateur d'état complet 5 fois plus rapide que le système avec retour d'état.
- Construire un observateur d'état d'ordre réduit pour le système.
- Refaire les mêmes étapes pour le système discrétisé pour  $T=0.01s$ .

**Corrigé :**

#### a) Commandable et observabilité :

```
% Commandabilité
A=[-1 1 ; 2 2]; B=[1 ; 1]; C=[1 0];
ctrb(A,B)
ans = 1      0
      1      4
rank(ans)
ans = 2
```

Le système est donc commandable.

```
% Observabilité
obsv(A,C)
ans = 1      0
      -1     1
rank(ans)
ans = 2
```

Le système est donc observable.

#### b) Formes commandable et observable :

```
syms lambda
det(lambda*eye(2)-A)
% lambda^2 - lambda - 4
a1=-1; a0=-4;
P=[A*B B]*[1 0;a1 1]
% Forme observable
Ac=inv(P)*A*P
Bc=inv(P)*B
Cc=C*P
P = -1      1
      3      1
Ac = 0      1
      4      1
```

```

Bc = 0
    1
Cc = -1    1
% Forme observable
Q=inv(P')
Ao=inv(Q)*A*Q
Bo=inv(Q)*B
Co=C*Q
Q = -0.2500    0.7500
    0.2500    0.2500
Ao = -0.5000    6.5000
    0.5000    1.5000
Bo = 2
    2
Co = -0.2500    0.7500

```

**c) Construire une commande par retour d'état pour doubler la vitesse de convergence.**

```

% commande par retour d'état système continu (Doubler la vitesse)
% Méthode de comparaison
% Pôle actuels:
syms lambda
lambda=solve(det(lambda*eye(2)-A)==0,lambda);
lambda1=lambda(1); lambda2=lambda(2);
% Pôles désirés
lambdad=lambda1*2;
% Équation caractéristique désirée
simplify(expand((lambda-lambdad)^2));
% 2*17^(1/2)*lambda - 2*lambda - 2*17^(1/2) + lambda^2 + 18
% Équation caractéristique avec retour d'état
syms k1 k2
K=[k1 k2];
det(lambda*eye(2)-(A-B*K));
% 3*k2 - k1 - lambda + k1*lambda + k2*lambda + lambda^2 - 4
% Calcul du gain K
[k1 k2] = solve(k1 + k2 - 1 == 2*17^(1/2) - 2 , 3*k2 - k1 - 4 == 18-
2*17^(1/2) , k1 , k2);
K=[k1 k2];
% Méthode d'Ackermann
% Équation caractéristique désirée
% 2*17^(1/2)*lambda - 2*lambda - 2*17^(1/2) + lambda^2 + 18
a1d=2*17^(1/2)-2; a0d=18-2*17^(1/2);
% Calcul du gain K
K=[0 1]*CC^-1*(A^2+a1d*A + a0d*eye(2));
% Forme canonique commandable
% Valeur initiales
% a1=5;a0=8;
% Valeur désirées
% a1d=2*17^(1/2)-2;
% a0d=18-2*17^(1/2);
% Calcul du gain Kc pour le modèle canonique commandable
k1c=-a0+a0d ; k2c=-a1+a1d ; Kc=[k1c k2c]
% Calcul du gain K pour le modèle initial
K=Kc*inv(P)
% Système discret (Ackermann)
% Pôles discrets désirés
zd=exp(lambdad*T);

```

```
% Équation caractéristique désirée
expand((lambda-zd)^2);
% lambda^2 - (2*exp(1/100)*lambda)/exp(17^(1/2))^^(1/100) +
exp(1/50)/exp(17^(1/2))^^(1/50)
a1dd=-(2*exp(1/100))/exp(17^(1/2))^^(1/100);
a0dd=exp(1/50)/exp(17^(1/2))^^(1/50);
% Matrice de commandabilité pour le système discret
CCd=ctrb(Ad,Bd);
% Calcul du gain Kd pour le système discret
Kd=[0 1]*CCd^-1*(Ad^2+a1dd*Ad+a0dd*eye(2))
```

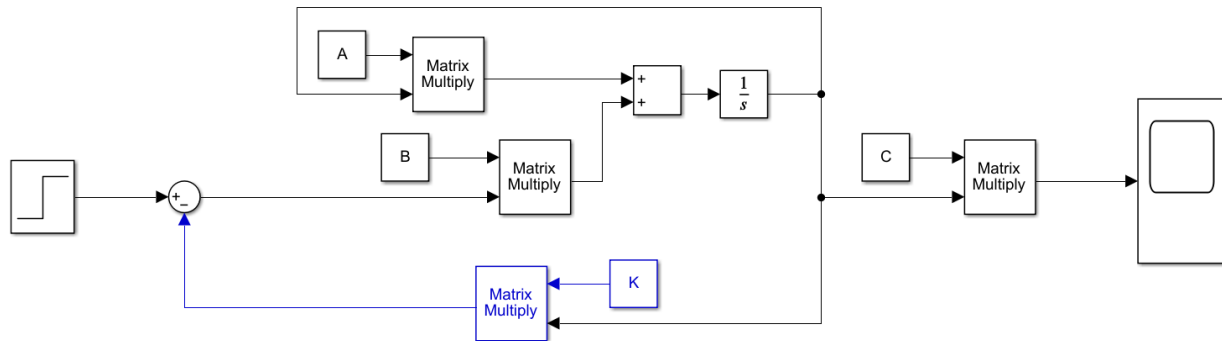
### Gains du retour d'état :

```
K=[1.99 5.25]
```

```
% Gain pour référence non nulle
```

```
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;
```

### Réalisation avec retour d'état:



### d) Construire un observateur d'état complet pour le système.

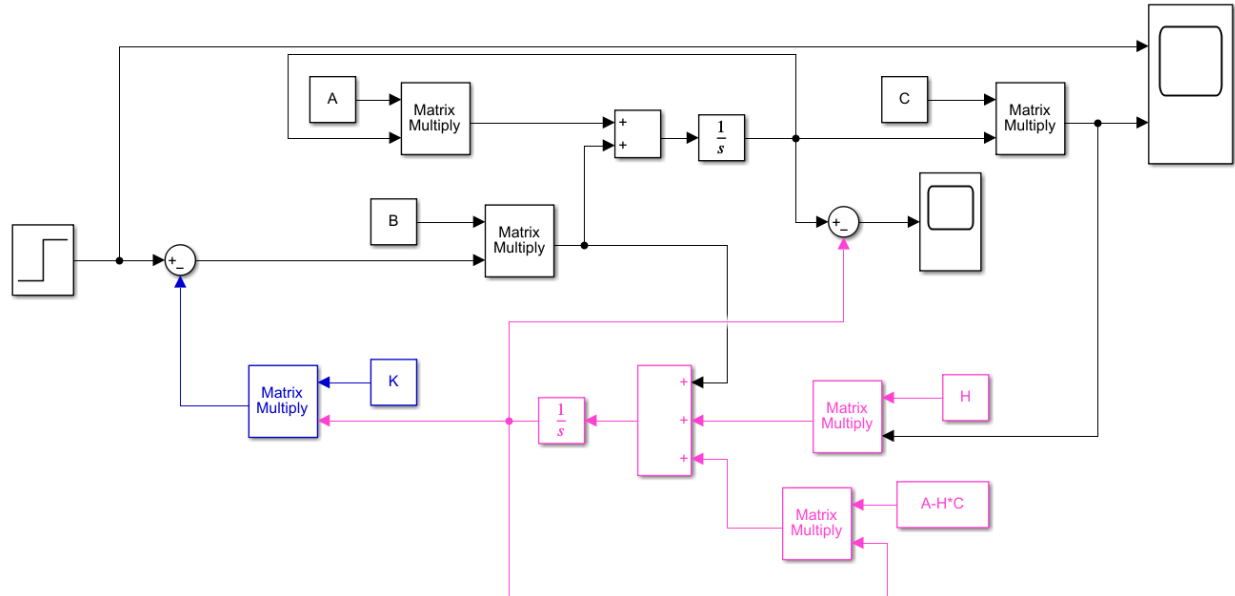
La dynamique de l'observateur doit être beaucoup 5 fois plus rapide que celle du système.

```
% Valeur propres désirées (5 fois plus rapide que le système avec retour
d'état)
expand((lambda-(5*2*(-1.5616)))^2)
% lambda^2 + (7808*lambda)/625 + 39.0175
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1 h2
H=[h1 ; h2];
det(lambda*eye(2)-(A-H*C))
% h2 - 2*h1 - lambda + h1*lambda + lambda^2 - 4
[h1 , h2]=solve(3810304/15625==(h2 - 2*h1 - 4), (3904/125)==(- 1 + h1))
```

### Gains de l'observateur complet :

```
H=[32.2320 ; 312.3235];
```

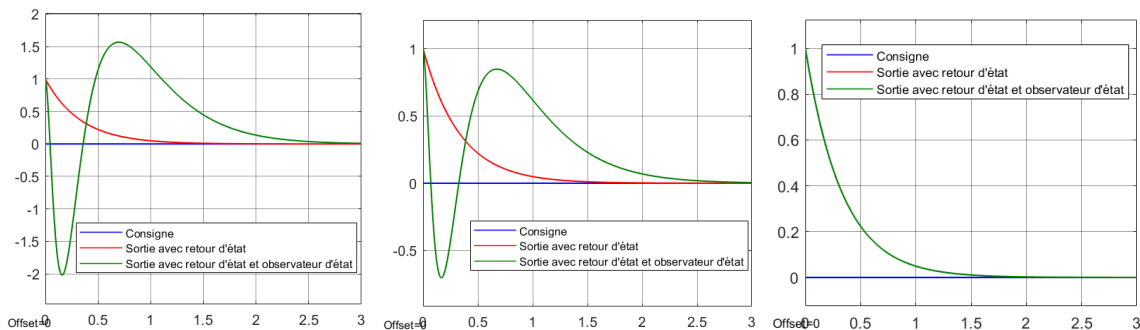
## Réalisation avec retour d'état et observateur complet



En noir: le système original – En rose : l'observateur complet – En bleu : le gain du retour d'état

### Réponse temporelle du système $y(t)$ avec retour d'état et observateur complet:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = 1$ .

#### e) Construire un observateur d'état d'ordre réduit pour le système.

L'état  $x_1$  est mesuré, il n'a pas besoin d'être observé. Aussi, l'observateur se focalisera sur les états  $x_2$  et  $x_3$ .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A_{11}=A(1,1); \quad A_{12}=A(1,2); \quad A_{21}=A(2,1); \quad A_{22}=A(2,2);$$

$$B_1=B(1,1); \quad B_2=B(2,1);$$

% Valeur désirées (5 fois plus rapide que le système avec retour d'état)  
 $\text{expand}((\text{lambda}-(5*2*(-1.5616))))$

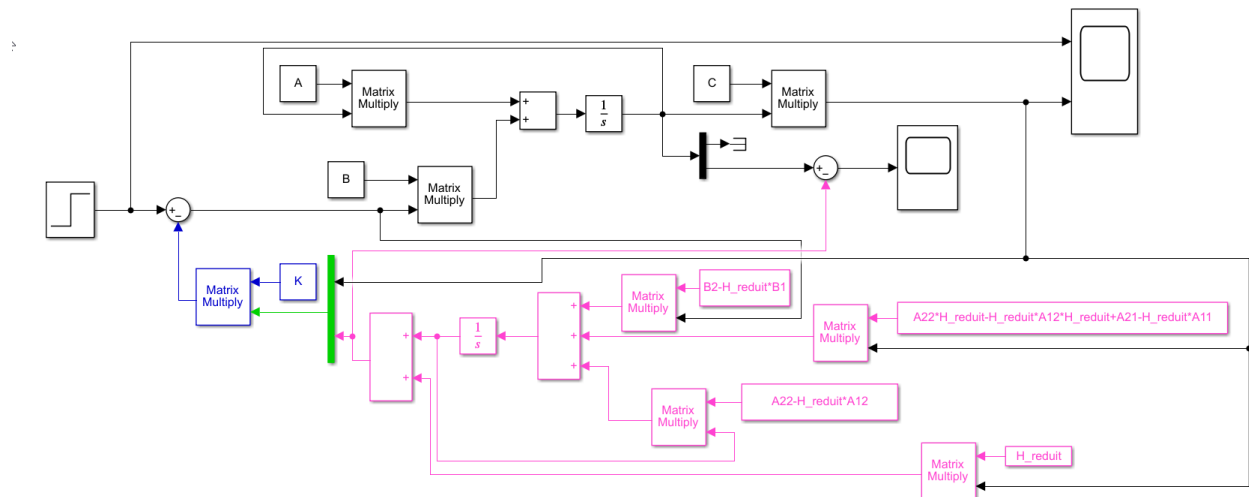
```

% lambda + 1952/125
% Équation caractéristique de l'observateur
syms h2 lambda
% det(lambda*eye(1)-(A22-h2*A12))
% h2 + lambda - 2
solve(h2 - 2 == 1952/125)
% h2= 17.6160
H_reduit=17.6160;

```

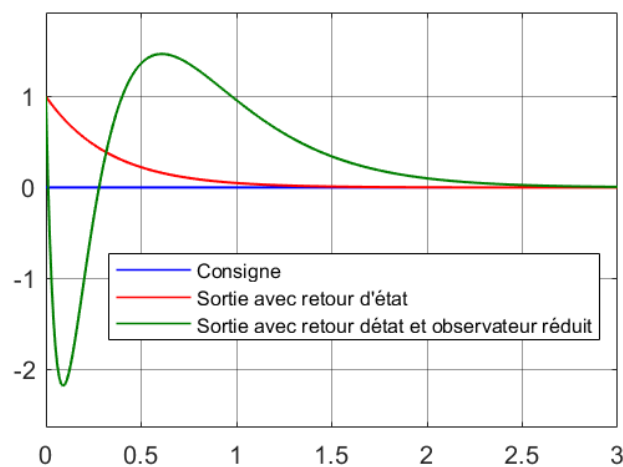
Le retour d'état précédemment calculé  $K$  stabilisera le système avec un observateur d'ordre réduit.

### Réalisation avec retour d'état et observateur d'ordre réduit



En noir: le système original – En rose : l'observateur d'ordre réduit – En bleu : le gain du retour d'état

### Réponse temporelle du système $y(t)$ avec retour d'état et observateur à ordre réduit:



### 6-2-2 Problème #2 :

Soit le système décrit par les matrices d'état suivantes:



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 \\ -6 & -7 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Calculer les matrices discrètes pour un pas d'échantillonnage  $T = 0.1s$ .
- Concevoir une commande par retour d'état pour placer les pôles à 0.45, 0.41, 0.37 dans le plan discret.
- Concevoir un observateur d'état complet deux fois plus rapide que la commande par retour d'état.
- Concevoir un observateur d'état d'ordre réduit.

### Corrigé:

#### a) Calcul des matrices discrètes pour un pas d'échantillonnage $T = 0.1s$ .

```
% Représentation d'état
A=[0 1 -2 ; 3 -4 5 ; -6 -7 6]; B=[0 ; 2 ; 4]; C=[1 0 0];
% Représentation d'état discrète
T=0.1;
Ad=eye(3)+T*A; Bd=T*B; Cd=C;
Matrices discrètes
Ad =1.0000    0.1000   -0.2000
    0.3000    0.6000    0.5000
   -0.6000   -0.7000    1.6000
Bd =0
    0.2000
    0.4000
Cd =1    0    0
```

Vérifions que le système est commandable et observable

```
ctrb(Ad,Bd)
ans =
    0    -0.0600   -0.1280
    0.2000    0.3200    0.4240
    0.4000    0.5000    0.6120
rank(ans)
ans = 3
```

Le système est donc commandable.

```
obsv(Ad,Cd)
ans =
    1.0000    0    0
    1.0000    0.1000   -0.2000
    1.1500    0.3000   -0.4700
rank(ans)
ans = 3
```

Le système est donc observable.

#### b) Concevoir une commande par retour d'état pour placer les pôles à 0.45, 0.41, 0.37.

```
% Commande par retour d'état pour placer les pôles a 0.45, 0.41, 0.37
syms lambda
det(lambda*eye(3)-Ad)
solve(lambda^3 - (16*lambda^2)/5 + (84*lambda)/25 - 601/500, 'MaxDegree', 3)
```

```
% Valeurs propres initiales
% 1.4726, 0.8637 + 0.2651i, 0.8637 - 0.2651i
% Valeurs propres désirées 0.45, 0.41, 0.37
% Équation caractéristique désirée
expand((lambda-0.45)*(lambda-0.41)*(lambda-0.37))
% lambda^3 - (123*lambda^2)/100 + (5027*lambda)/10000 - 13653/200000
% Équation caractéristique avec retour d'état
syms lambda k1d k2d k3d
Kd=[k1d k2d k3d];
det(lambda*eye(3)-(Ad-Bd*Kd))
% (8*k1d)/125 + (9*k2d)/125 + (89*k3d)/250 - 601/500
% + (84*lambda)/25 - (3*k1d*lambda)/50 - (8*k2d*lambda)/25 -
% (39*k3d*lambda)/50
% + (k2d*lambda^2)/5 + (2*k3d*lambda^2)/5 - (16*lambda^2)/5 + lambda^3
[k1d,k2d,k3d]=solve((8*k1d)/125 + (9*k2d)/125 + (89*k3d)/250 - 601/500==
13653/200000 ,...
(84)/25 - (3*k1d)/50 - (8*k2d)/25 - (39*k3d)/50==(5027)/10000 ,...
(k2d)/5 + (2*k3d)/5 - (16)/5==-(123)/100 , k1d , k2d , k3d)
```

### Gains du retour d'état

```
k1d = -32.4232 ; k2d = -13.7313 ; k3d = 11.7907
% Gain pour référence non nulle
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;
```

#### c) Observateur d'état complet:

Précisons qu'une valeur propre double accélère la vitesse de convergence du système exprimé par des variables d'états continues. Dans le cas d'un système exprimé par des variables d'états discrètes, le carré d'une valeur propres accélère la vitesse de convergence du système :  $z = e^{sT}$ , si  $s \leftarrow 2s$  alors :  $z = e^{2sT} = (e^{sT})^2 = z^2$ .

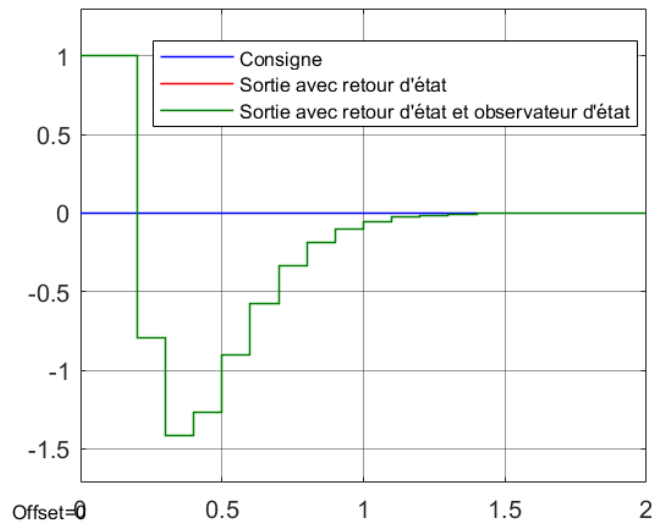
```
% Valeurs propres de l'observateur d'état deux fois plus rapide 0.45^2=0.20,
% 0.41^2=0.17, 0.37^2=0.14
syms lambda
% Équation caractéristique désirée
expand((lambda-0.20)*(lambda-0.17)*(lambda-0.14))
% lambda^3 - (51*lambda^2)/100 + (429*lambda)/5000 - 119/25000
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1d h2d h3d
Hd=[h1d ; h2d ; h3d];
det(lambda*eye(3)-(Ad-Hd*Cd))
% (131*h1d)/100 - h2d/50 + (17*h3d)/100 - 601/500
% + (84*lambda)/25 - (11*h1d*lambda)/5 + (h2d*lambda)/10 -
% (h3d*lambda)/5
% + h1d*lambda^2 - (16*lambda^2)/5 + lambda^3
[h1d,h2d,h3d]=solve((131*h1d)/100 - h2d/50 + (17*h3d)/100 - 601/500==
119/25000 ,...
(84)/25 - (11*h1d)/5 + (h2d)/10 - (h3d)/5 ==- (51)/100 ,...
h1d - (16)/5==(429)/5000 , h1d,h2d,h3d)
```

### Gains de l'observateur complet

```
h1d = 3.2858 ; h2d = -3.8802 ; h3d = -18.7339
```

**Réponse temporelle du système  $y(t)$  avec retour d'état et observateur complet:**

$$x_{0d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \hat{x}_{0d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = 1$ .

**d) Observateur d'état d'ordre réduit:**

% L'état  $x_{d1}$  est mesuré, il n'a pas besoin d'être observé. Aussi, l'observateur se focalisera sur les états  $x_{d2}$  et  $x_{d3}$ .

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0.1 & -0.2 \\ 0.3 & 0.6 & 0.5 \\ -0.6 & -0.7 & 1.6 \end{pmatrix}, B_d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.2 \\ 0.4 \end{pmatrix}, C_d = (1 \quad 0 \quad 0), x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

```
Ad11=Ad(1,1); Ad12=Ad([1:1],[2:3]); Ad21=Ad([2:3],[1:1]); Ad22=Ad([2:3],[2:3]);
Bd1=Bd(1,1); Bd2=Bd([2:3],1);
```

```
syms lambda
```

```
% Équation caractéristique désirée
```

```
expand((lambda-0.17)*(lambda-0.14))
```

```
% lambda^2 - (31*lambda)/100 + 119/5000
```

```
% Équation caractéristique de l'observateur
```

```
syms lambda h2d h3d
```

```
Hd=[h2d ; h3d];
```

```
det(lambda*eye(2)-(Ad22-Hd*Ad12))
```

```
% (17*h3d)/100 - h2d/50 + 131/100
```

```
% - (11*lambda)/5 + (h2d*lambda)/10 - (h3d*lambda)/5 + lambda^2
```

```
[h2d,h3d]=solve((17*h3d)/100 - h2d/50 + 131/100==119/5000 , ...
```

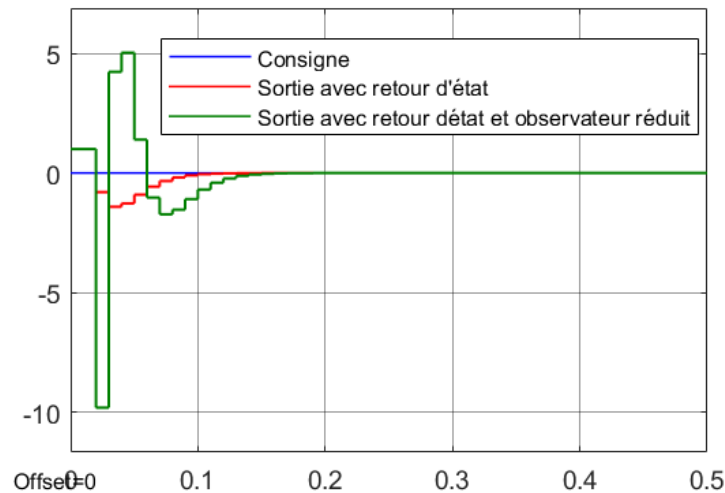
```
- (11)/5 + (h2d)/10 - (h3d)/5==-(31)/100)
```

**Gains de l'observateur à ordre réduit**

```
h2d = 4.9277 ; h3d = -6.9862
```

**Réponse temporelle du système  $y(t)$  avec retour d'état et observateur à ordre réduit:**

$$x_{0d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{x}_{0d} = 0$$

**6-2-3 Problème #3 :**

Soit le système représenté par les matrices d'état suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} -1.7 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} , \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad C = (0 \quad 0.3)$$

- Concevoir un retour d'état qui résulte en une équation caractéristique  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0$  avec un dépassement de  $OS\% = 3\%$ , un facteur d'amortissement de  $\zeta = 0.8$  et un temps de stabilisation de  $T_s = 0.2s$ .
- Concevoir un observateur complet et un observateur d'ordre réduit pour ce système.

**Commandabilité et observabilité:**

```
% Commandabilité
C=ctrb(A,B)
rang_C=rank(C)
% C = 1.0000    -1.7100
%       0         1.0000
% rang_C = 2
% Observabilité
O=obsv(A,C)
rang_O=rank(O)
% O =         0         0.3000
%       0.3000         0
% rang_O = 2
```

**Retour d'état:**

Équation caractéristique du système 2<sup>ème</sup> ordre :  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2) = 0$

On choisit :  $OS\% = 3\%$  ,  $T_s = 0.2s \rightarrow \zeta = 0.8$  ,  $\omega_n = 6 \text{ rad/s}$

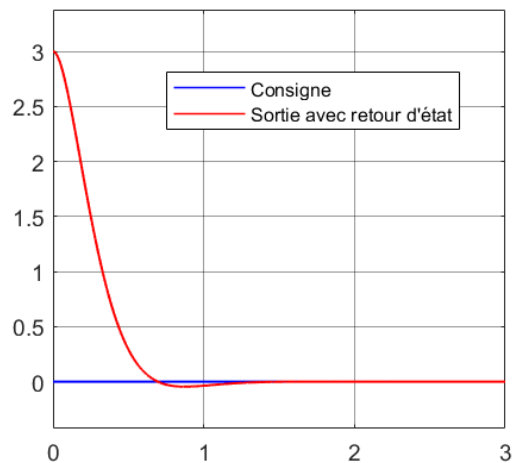
D'où l'équation caractéristique désirée est donnée par :  $s^2 + 9.6s + 36 = 0$

Équation caractéristique du système 2<sup>ème</sup> ordre avec retour d'état:

$$K = (k_1 \quad k_2) \quad , \quad A - BK = s^2 + (1.71 + k_1)s + k_2 = 0$$

```
% Commande par retour d'état système continu (méthode de placement de pôles)
syms k1 k2 lambda
K=[k1 k2];
det(lambda*eye(2)-(A-B*K))
% Équation caractéristique
% k2 + (171*lambda)/100 + k1*lambda + lambda^2
% Équation caractéristique désirée (zeta=0.8 , wn=6 rad/s)
% lambda^2 + 9.6*lambda + 36 = 0
[k1,k2]=solve(6+240*k3 == 11.99 , 5+240*k2+240*k3 == 59.62 , 240*k1 == 0.2)
% k1 = 7.9 ; % k2 = 36 ; K=[7.9 , 36]
% Gain pour référence non nulle
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;
```

Réponse indicielle du système avec retour d'état:



Observateur complet :

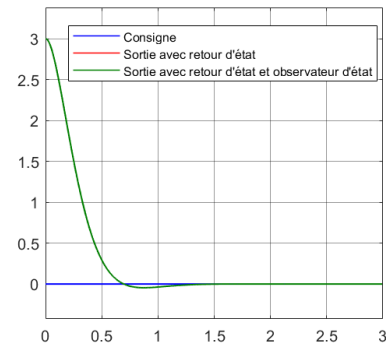
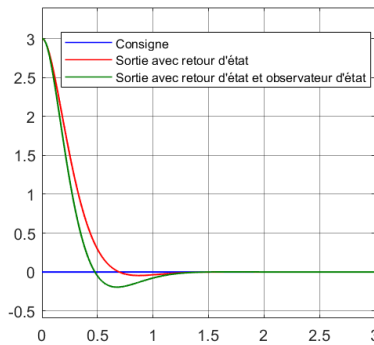
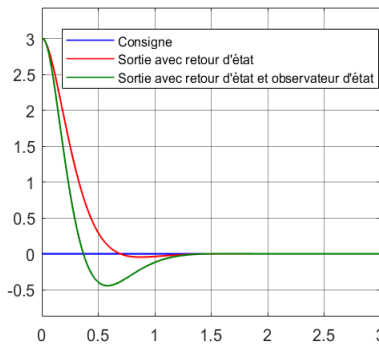
```
syms lambda
lambda=solve(lambda^2 + 9.6*lambda + 36 ==0, 'MaxDegree',2);
lambda=[-4.8000 - 3.6000i;-4.8000 + 3.6000i];
lambdad=real(lambda(1));
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour d'état)
syms lambda
expand((lambda-(2*lambdad))^2)
% lambda^2 + (96*lambda)/5 + 2304/25
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1 h2
H=[h1 ; h2];
det(lambda*eye(2)-(A-H*C))
% (2083*h1)/10000 + (356193*h2)/1000000 + (171*lambda)/100 +
% (2083*h2*lambda)/10000 + lambda^2
[h1 , h2]=solve(((2083*h1)/10000) + ((356193*h2)/1000000)==2304/25, (171/100)
+ (2083*h2)/10000==96/5,h1,h2)
% h1 = 298.8579 ; % h2 = 83.9654
H=[298.8579;83.9654];
```

**Réponse indicielle du système avec retour d'état et observateur complet:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1.5 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



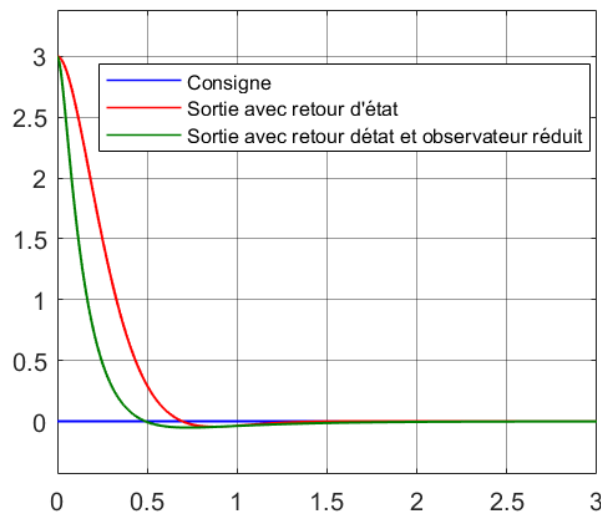
La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = 3$ .

**Observateur d'ordre réduit :**

```
A11=A(1,1); A12=A(1,2); A21=A(2,1); A22=A(2,2); B2=B(1,1); B1=B(2,1);
% Valeur désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour d'état)
syms lambda h1
expand((lambda-(2*lamdad)))
% lambda + 48/5
% Équation caractéristique de l'observateur
det(lambda*eye(1)-(A11-h1*A21))
% h1 + lambda + 171/100
[h1]=solve(h1 + (171/100)==48/5,h1), % h1 = 7.8900
H_reduit=7.8900;
```

**Réponse indicielle du système avec retour d'état et observateur d'ordre réduit:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_{0\text{réduit}} = 0$$



### 6-2-4 Problème #4 :

Soit le système représenté par les matrices d'état suivantes :  $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$ ,  $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ ,  $C = (0 \quad 1)$ .

- Concevoir un retour d'état qui stabilise ce système et place ses pôles aux valeurs de -10.
- Concevoir un observateur complet et un observateur d'ordre réduit pour ce système.

#### Commandabilité:

$C = [B \quad A*B]$

$C = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$

$\text{rank}(C) = 2$

Le rang de la matrice de commandabilité étant égal à l'ordre du système, le système est donc commandable. Notons que la matrice de commandabilité est inversible.

$\det(C) = -16$

$\text{inv}(C) = \begin{pmatrix} -0.7500 & 0.2500 \\ 0.2500 & 0 \end{pmatrix}$

#### Autre méthode :

$[M, V] = \text{eig}(A)$

$M = \begin{pmatrix} 0.4472 & -0.4472 \\ 0.8944 & -0.8944 \end{pmatrix}$

$V = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\text{inv}(M)*B = \begin{pmatrix} 1.0e+17 & * \\ 1.7063 \\ 1.7063 \end{pmatrix}$

La matrice  $M^{-1}B$  ne contenant pas de rangées nulles, le système est donc commandable.

#### Forme canonique commandable

Équation caractéristique :

$\text{syms } \lambda$

$\det(\lambda \text{eye}(2) - A)$

$\text{ans} = \lambda^2 - 2*\lambda + 1$

$a1=-2; a0=1;$

Calcul de la matrice  $P$  :

$P = [A*B \quad B] * [1 \quad 0; a1 \quad 1]$

$P = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 4 & 4 \end{pmatrix}$

Calcul de la forme canonique commandable :

$A_c = \text{inv}(P) * A * P$

$B_c = \text{inv}(P) * B$

$C_c = C * P$

$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

$B_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$C_c = \begin{pmatrix} 4 & 4 \end{pmatrix}$

#### Observabilité

```
O=[C ; C*A]
O = 0      1
    -4     3
rank(O) = 2
```

Le rang de la matrice d'observabilité étant égal à l'ordre du système, le système est donc observable. Notons que la matrice d'observabilité est inversible.

```
det(O) = 2
```

**Autre méthode :**

```
[M,V]=eig(A)
M = 0.4472    -0.4472
    0.8944    -0.8944
V = 1      0
    0      1
C*M =
    0.8944    -0.8944
```

La matrice  $CM$  ne contenant pas de colonnes nulles, le système est donc observable.

### Forme canonique observable

Calcul de la matrice  $Q = (P^T)^{-1}$  :

```
Q=inv(P')
Q = 0.2500    -0.2500
    0         0.2500
```

Calcul de la forme canonique observable :

```
Ao=inv(Q)*A*Q
Bo=inv(Q)*B
Co=C*Q
Ao = -5      9
    -4      7
Bo = 16
    16
Co = 0      0.2500
```

### Commande par retour d'état du système continu ( $x(t)$ accessible)

Nous notons que ce système est instable étant donné qu'il possède au moins une valeur propre positive. Calculer des gains  $K = (k_1 \ k_2)$  de la commande en utilisant :

### La méthode de placement de pôles :

Équation caractéristique initiale :

```
syms lambda
det(lambda*eye(2)-A)
lambda^2 - 2*lambda + 1
% Valeurs propres initiales
solve(lambda^2 - 2*lambda + 1==0,lambda)
ans = 1
    1
```

Équation caractéristique désirée :

```
syms k1 k2 lambda
K=[k1 k2];
```



```
A-B*K
ans =
[      -1,      1]
[- 4*k1 - 4, 3 - 4*k2]
det(lambda*eye(2)-(A-B*K))
4*k1 + 4*k2 - 2*lambda + 4*k2*lambda + lambda^2 + 1
```

Les gains  $k_1$  et  $k_2$  sont déterminés en fonction des valeurs propres désirées à -10. D'où l'équation caractéristique désirée :

```
expand((lambda + 10)^2)
ans = lambda^2 + 20*lambda + 100
```

Les gains  $k_1$  et  $k_2$  sont calculés par comparaison entre les équations caractéristiques initiale et désirée:

```
lambda^2 + 20*lambda + 100 = 4*k1 + 4*k2 - 2*lambda + 4*k2*lambda + lambda^2 + 1
[k1,k2]=solve(4*k1 + 4*k2 + 1 == 100 , 4*k2 - 2 == 20)
k1 = 19.2500 ; k2 = 5.5000;
```

Les gains sont donc:

```
[k1 k2]= [19.2500 5.5000]
```

**La forme canonique de commandabilité :**

Équation caractéristique initiale (en utilisant la matrice  $P^{-1}AP$ ) :

```
det(lambda*eye(2)-(inv(P)*A*P))
ans= lambda^2 - 2*lambda + 1
% Coefficients initiaux
a1=-2 ; a0=1;
solve(lambda^2 - 2*lambda + 1)
ans = 1
1
```

Remarque:  $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - P^{-1}AP)$

% Valeurs propres désirées à -10

L'équation caractéristique désirée est :

```
expand((lambda + 10)^2)
lambda^2 + 20*lambda + 100
% Coefficients désirés
a1d=20 ; a0d=100;
```

Déduire les gains pour la forme canonique commandable:

```
k1c=-a0+a0d=-1+100=99;
k2c=-a1+a1d=2+20=22;
```

Déduire les gains pour le système initial :

```
Kc=[k1c k2c]
K=Kc*inv(P)
K = [19.2500 5.5000]
```

**La méthode de Ackermann :**

```
% valeurs propres désirées à -10
expand((lambda+10)^2)
ans = lambda^2 + 20*lambda + 100
```

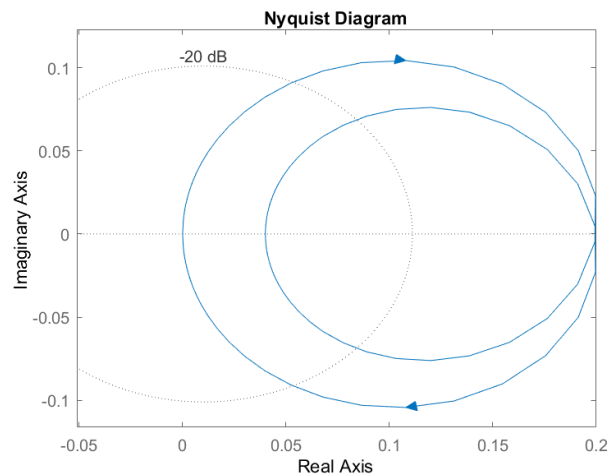
Déduire les gains :

```
K=[0 1]*inv([B A*B])*(A^2+20*A+100*eye(2))
K = [19.2500 5.5000]
% Gain pour référence non nulle
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;
```

### Réponse fréquentielle (Nyquist) du système avec retour d'état :

Pour le système consistant entre l'entrée, la sortie  $x(t)$  et le gain de retour  $K$ , la fonction de transfert est donnée par :

```
[num den]=ss2tf(A-B*K,B,C,D)
num = 0      4      4
den = 1      20     100
G=tf([num],[den])
G =
      4 s + 4
-----
s^2 + 20 s + 100
nyquist(G)
```



Les valeurs propres désirées ayant une partie réelle négative nous posons  $P=0$ . Il ne peut donc y avoir aucun encerclement anti-horaire du point critique  $(-1,0)$ . En effet, le diagramme de Nyquist montre que le système est stable car il y a zéro encerclement anti-horaire du point critique  $(-1,0)$ . De ce fait, le système est stable pour tout gain positif. La marge de gain est infinie et la marge de phase est supérieure à 90 degrés.

### Commande par retour d'état ( $x(t)$ n'est pas accessible) :

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}, C = (0 \quad 1)$$

Comme le système est observable et  $x(t)$  n'est pas accessible, on peut reconstituer  $x(t)$  en utilisant un observateur d'état. L'entrée  $u(t)$  et la sortie  $y(t)$  seront les entrées de l'observateur. La sortie de l'observateur sera la valeur estimée de  $x(t)$ , notée  $\hat{x}(t)$ .

### Calcul des gains de l'observateur :

Selon les requis, l'observateur doit être plus rapide que le système en boucle fermée.

Équation caractéristique initiale (avec le retour d'état):

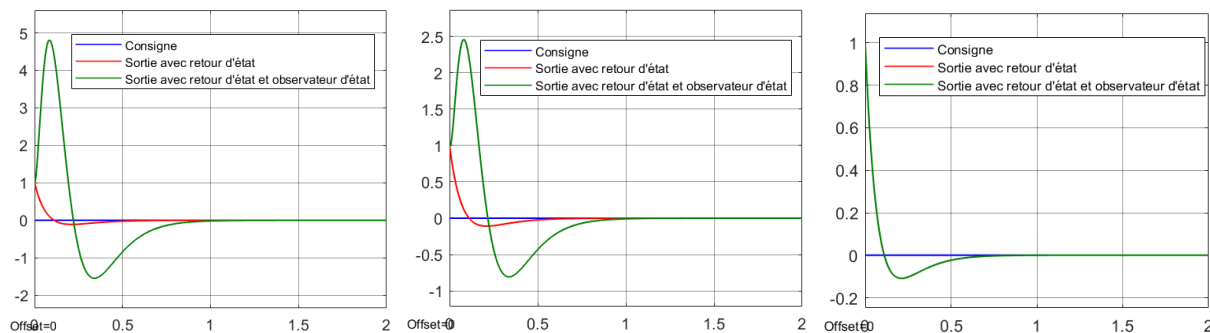
```
% Valeurs propres initiales
det(lambda*eye(2) - (A-B*K))
lambda^2 + 20*lambda + 100
solve(lambda^2 + 20*lambda + 100==0, lambda)
ans = -10
      -10
```

Équation caractéristique de l'observateur:

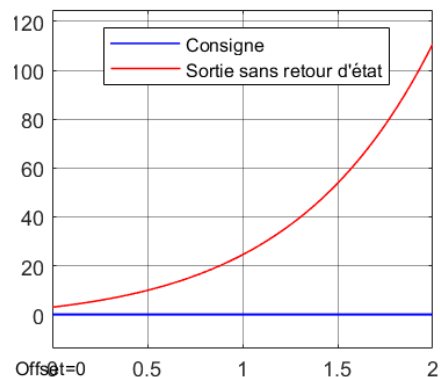
```
% Valeurs propres désirées (2 fois plus rapide que le système)
ans = -20
      -20
syms lambda h1 h2
H=[h1; h2];
expand((lambda+20)^2)
ans = lambda^2 + 40*lambda + 400
det(lambda*eye(2) - (A-H*C))
ans = h2 - 4*h1 - 2*lambda + h2*lambda + lambda^2 + 1
Par comparaison:
[h1,h2]=solve(h2 - 4*h1 + 1 == 400 , h2 + 1 == 40)
h1 = -90 ; h2 = 39;
```

Réponse temporelle du système  $y(t)$  avec retour d'état et observateur complet:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$



La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = 1$ . À titre de comparaison, le système original sans retour d'état est instable, ce que montre sa réponse temporelle à une entrée nulle.



### 6-2-5 Problème #5 :

Soit le système représenté par les matrices d'états suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0 \quad 0)$$

- Concevoir un retour d'état qui stabilise le système et résulte en une équation caractéristique  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \zeta\omega_n) = 0$  dont la partie quadratique a un dépassement de la partie quadratique de  $OS\% = 5\%$ , un facteur d'amortissement de  $\zeta = 0.8$  ainsi qu'un temps de stabilisation de  $T_s = 1s$ .
- Concevoir un observateur complet et un observateur d'ordre réduit pour ce système.

#### Commandabilité et observabilité:

```
A=[0 1 0 ; 0 0 1 ; -2 -3 5]; B=[0 ; 0 ; 1]; C=[1 0 0];
% Commandabilité
C=ctrb(A,B)
rang_C=rank(C)
% C =    0    0    1
        0    1    5
        1    5   22
% rang_C = 3
% Observabilité
O=obsv(A,C)
rang_O=rank(O)
% O =    0    0    1
        0    1    5
        1    5   22
       -2   -3    5
       -10  -15   26
       -44  -65  115
       -10  -17   22
       -52  -88  115
      -230 -389  510
% rang_O = 3
% Les valeurs propres
eig(A)
% ans =
%    4.1642
%   -0.3914
%    1.2271
```

#### Retour d'état:

Nous notons que ce système est instable étant donné qu'il possède au moins une valeur propre positive.

Équation caractéristique du système 3<sup>ème</sup> ordre :

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \zeta\omega_n) = 0$$

On choisit :  $OS\% = 5\%$  ,  $T_s = 1s \rightarrow \zeta = 0.8$  ,  $\omega_n = 6 \text{ rad/s}$

D'où l'équation caractéristique désirée est donnée par :

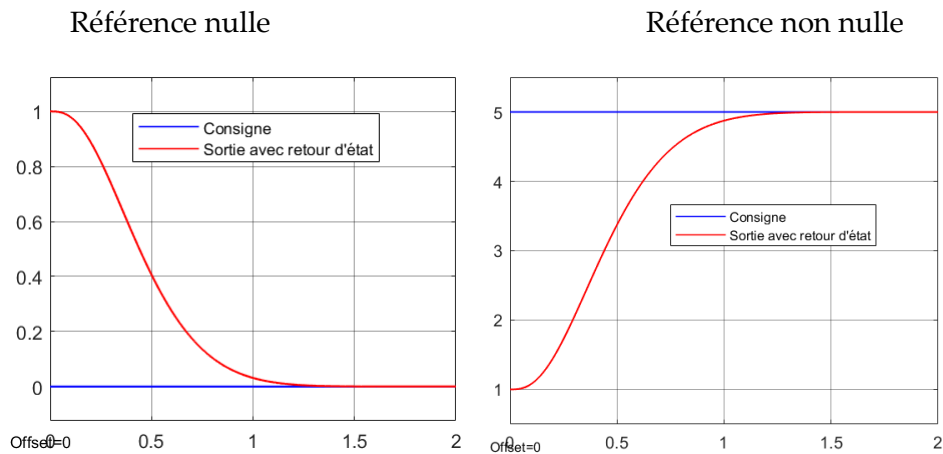
$$s^3 + 14.4s^2 + 82.1s + 172.8 = 0$$

Équation caractéristique du système 3<sup>ème</sup> ordre avec retour d'état:

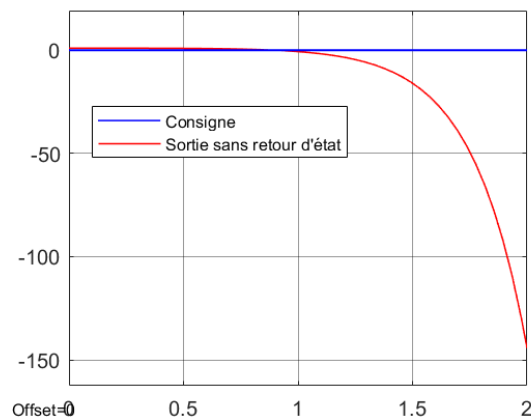
$$K = (k_1 \quad k_2 \quad k_3) \quad , \quad A - BK = s^3 + (5 + k_3)s^2 + (3 + k_2)s + 2 + k_1 = 0$$

```
% Commande par retour d'état système continu (méthode de placement de pôles)
syms k1 k2 k3 lambda
K=[k1 k2 k3];
det(lambda*eye(3) - (A-B*K))
% k1 + 3*lambda + k2*lambda + k3*lambda^2 - 5*lambda^2 + lambda^3 + 2
% Équation caractéristique désirée (zeta=0.8 , wn=6 rad/s)
% lambda^3 + 14.4*lambda^2 + 82.1*s+172.8=0
[k1,k2,k3]=solve(k1 + 2 == 172.8 , k3 - 5 == 14.4 , k2 + 3 == 82.1)
% k1 = 170.8000    k2 = 79.1000    k3 = 19.4000
K=[170.8000, 79.1000, 19.4000];
% Gain pour référence non nulle
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;
```

**Réponse indicielle du système avec retour d'état:**



À titre de comparaison, le système original sans retour d'état est instable, ce que montre sa réponse temporelle pour une référence nulle.



**Observateur complet :**

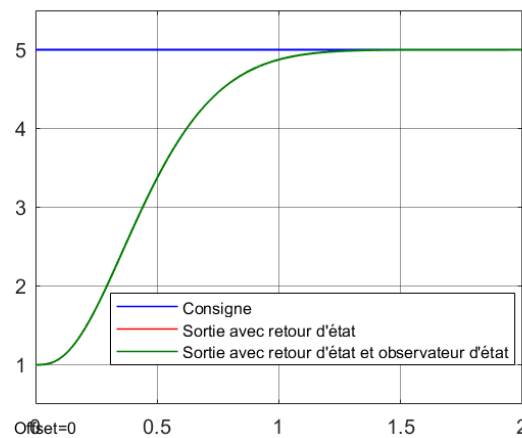
```

syms lambda h1 h2 h3
det(lambda*eye(3)-(A-B*K))
ans = lambda^3 + (72*lambda^2)/5 + (821*lambda)/10 + 864/5
lambda=solve(lambda^3 + (72*lambda^2)/5 + (821*lambda)/10 + 864/5==0, 'MaxDegree', 3);
lambda=[-4.7926;-4.8037 - 3.6028i;-4.8037 + 3.6028i];
lambdad=lambda(1);
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour d'état)
expand((lambda-(2*lambdad))^3)
% lambda^3 + 28.7556*lambda^2 + 275.6282*lambda + 880.6504
% Équation caractéristique de l'observateur
H=[h1 ; h2 ; h3];
det(lambda*eye(3)-(A-H*C))
% 3*h1 - 5*h2 + h3 + 3*lambda - 5*h1*lambda + h2*lambda + h1*lambda^2 - 5*lambda^2 + lambda^3 + 2
[h1 , h2 , h3]=solve(28.7556==h1-5, 275.6282==3+5*h1+h2, 880.6504==3*h1 - 5*h2 + h3 +2, h1, h2, h3)
% h1 = 33.7556
% h2 = 103.8502
% h3 = 1.2966e+03
H=[33.7556;153.8502; 1.2966e+03];

```

**Réponse indicielle du système avec retour d'état et observateur complet:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = 1$ .

**Observateur d'ordre réduit :**

```

A11=A(1,1); A12=A([1:1],[2:3]); A21=A([2:3],[1:1]); A22=A([2:3],[2:3]);
B1=B(1,1); B2=B([2:3],1);

```

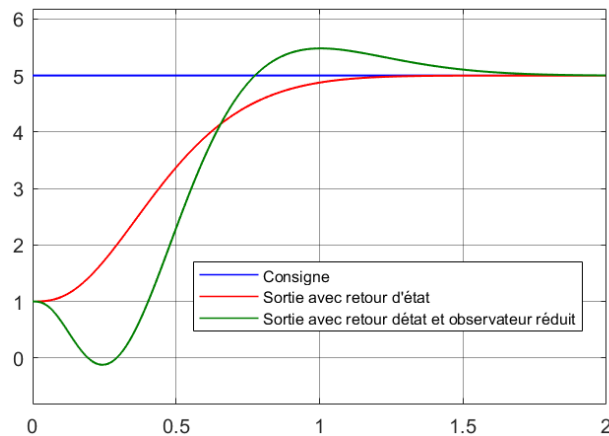
```

% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour
d'état)
syms lambda
expand((lambda-(2*lambda_d))^2)
% lambda^2 + 19.1704*lambda + 91.8761
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1 h2
H=[h1 ; h2];
det(lambda*eye(2)-(A22-H*A12))
% h2 - 5*h1 - 5*lambda + h1*lambda + lambda^2 + 3
[h1 , h2]=solve(-5+h1==19.1704,-5*h1 + h2 +3==91.8761,h1,h2)
% h1 = 24.1704
% h2 = 18.0241
H_reduit=[24.1704; 209.7281];

```

**Réponse indicielle du système avec retour d'état et observateur d'ordre réduit:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_{0\text{réduit}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



### 6-2-6 Problème #6 :

Soit le système représenté par les matrices d'état suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 240 \end{pmatrix}, \quad C = (1 \quad 0 \quad 0)$$

- Concevoir un retour d'état qui améliore la réponse temporelle et résulte en une équation caractéristique  $(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \zeta\omega_n) = 0$  dont la partie quadratique a un dépassement de  $OS\% = 5\%$ , un facteur d'amortissement de  $\zeta = 0.8$  et un temps de stabilisation de  $T_s = 1s$ .
- Concevoir un observateur complet et un observateur d'ordre réduit pour ce système.

**Commandabilité et observabilité:**

```

A=[0 1 0 ; 0 -1 1 ; 0 0 -5]; B=[0 ; 0 ; 240]; C=[1 0 0];
% Commandabilité
C=ctrb(A,B)

```

```

rang_C=rank(C)
% C =      0      0      240
%      0      240     -1440
%      240     -1200      6000
% rang_C = 3
% Observabilité
O=obsv(A,C)
rang_O=rank(O)
% O =      0      0      240
%      0      240     -1440
%      240     -1200      6000
%      0      0     -1200
%      0     -240      7440
%      0      1440     -31200
%      0      0      6000
%      0      240     -37440
%      0     -1440     157440
% rang_O = 3

```

**Retour d'état:**

Équation caractéristique du système 3<sup>ème</sup> ordre :

$$(s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2)(s + \zeta\omega_n) = 0$$

On choisit :  $OS\% = 3\%$  ,  $T_s = 1.8s \rightarrow \zeta = 0.76$  ,  $\omega_n = 5.26 \text{ rad/s}$

Équations

D'où l'équation caractéristique désirée est donnée par :

$$s^3 + 11.99s^2 + 59.62s + 0.20 = 0$$

Équation caractéristique du système 3<sup>ème</sup> ordre avec retour d'état:

$$K = (k_1 \quad k_2 \quad k_3)$$

$$A - BK = s^3 + (5 + k_3)s^2 + (3 + k_2)s + 2 + k_1 = 0$$

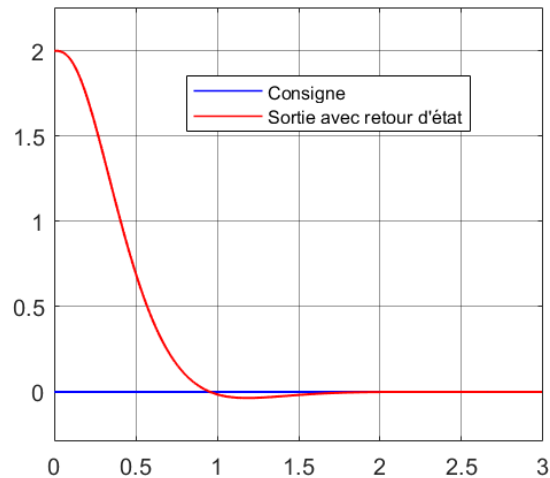
```

% Commande par retour d'état système continu (méthode de placement de pôles
syms k1 k2 k3 lambda
K=[k1 k2 k3];
A-B*K;
det(lambda*eye(3)-(A-B*K))
% Équation caractéristique
% 240*k1 + 5*lambda + 240*k2*lambda + 240*k3*lambda + 240*k3*lambda^2 +
6*lambda^2 + lambda^3
% Équation caractéristique désirée (zeta=0.76 , wn=5.266 rad/s)
% lambda^3 + 11.99*lambda^2 + 59.62*lambda + 0.2 = 0
[k1,k2,k3]=solve(6+240*k3 == 11.99 , 5+240*k2+240*k3 == 59.62 , 240*k1 ==
0.2)
% k1 = 1/1200 k2 = 1621/8000 k3 = 599/24000 K=[1 , 0.35 , 0.05]
% Gain pour référence non nulle
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;

```

**Réponse indicielle du système avec retour d'état:**



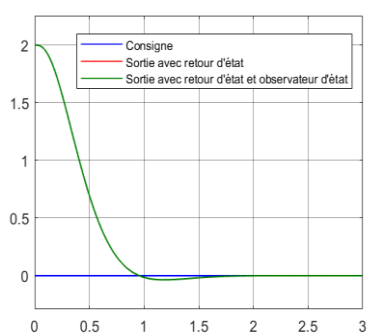
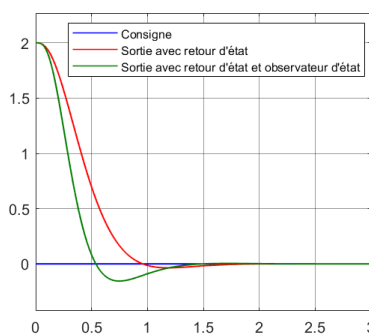
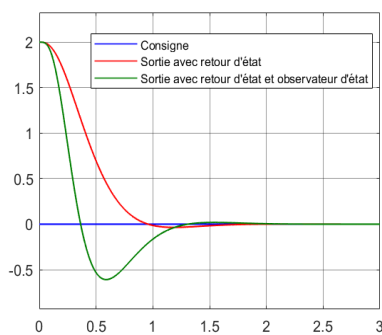


### Observateur complet :

```
syms lambda h1 h2 h3
lambda=solve(lambda^3 + 11.99*lambda^2 + 59.62*lambda + 0.2
==0, 'MaxDegree', 3);
lambda=[-0.0034;-5.9933 - 4.8641i;-5.9933 + 4.8641i];
lambdad=real(lambda(2));
% Valeur désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour d'état)
expand((lambda-(2*lambdad))^3)
% lambda^3 + 35.9598*lambda^2 + 431.0357*lambda + 1.7222e+03
% Équation caractéristique de l'observateur
H=[h1 ; h2 ; h3];
det(lambda*eye(3)-(A-H*C))
% 5*h1 + 5*h2 + h3 + 5*lambda + 6*h1*lambda + h2*lambda + h1*lambda^2 +
6*lambda^2 + lambda^3
[h1 , h2 , h3]=solve(h1+6==35.9598,5+6*h1+ h2==431.0357,1.7222e+03==5*h1 +
5*h2 + h3,h1,h2,h3)
% h1 = 29.9598 h2 = 246.2769 h3 = 341.0165
H=[29.9598;246.2769;341.0165];
```

### Réponse indicielle du système avec retour d'état et observateur complet:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



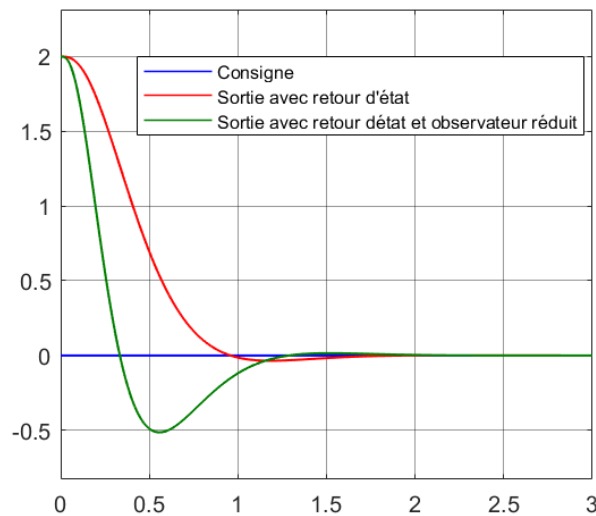
La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = 2$ .

### Observateur d'ordre réduit :

```
A11=A(1,1); A12=A([1:1],[2:3]); A21=A([2:3],[1:1]); A22=A([2:3],[2:3]);
B1=B(1,1); B2=B([2:3],1);
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour
d'état)
syms lambda
expand((lambda-(2*lambda_d))^2)
% lambda^2 + 23.9732*lambda + 143.6786
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1 h2
H=[h1 ; h2];
det(lambda*eye(2)-(A22-H*A12))
% 5*h1 + h2 + 6*lambda + h1*lambda + lambda^2 + 5
[h1 , h2]=solve(6+h1==19.1704,5*h1 + h2 +5==91.8761,h1,h2)
% h1 = 13.1704
% h2 = 21.0241
H_reduit=[13.1704;21.0241];
```

### Réponse indicielle du système avec retour d'état et observateur d'ordre réduit:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_{0\text{réduit}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



### 6-2-7 Problème 7 : Système de lévitation magnétique

Le système de lévitation comprend une petite boule métallique submergée dans un champ magnétique créé par un électroaimant commandé par un contrôleur. Le système comporte aussi un capteur de position capacitif, pour mesurer la position en temps réel de la boule.

Après modélisation et linéarisation<sup>1</sup>, la représentation d'état est donnée par :

```
A=[0 1 0;
    (k1*x30^2)/(m*(k2+x10)^3) , -Kf/m ,
    (-k1*x30)/(m*(k2+x10)^2);
    0 , (k1*x30)/((k2+x10)*(k1+k2*L0+L0*x10)) ,
    (-R*(k2+x10))/(k1+k2*L0+L0*x10)];
```

```
B=[0;0;(k2+x10)*kdriver)/(k1+k2*L0+L0*x10)];
C=[1 0 0];
```

Tel que :

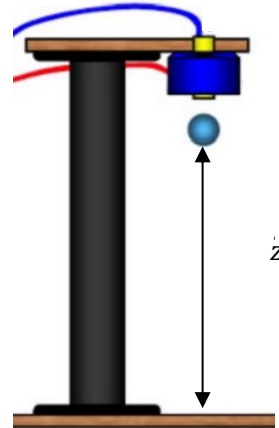
```
m=0.01085;
g=9.80665;
R=25.3;
L0=0.1153;
k1=4.3892e-4;
k2=0.0146;
ki=0.9747;
kdriver=24.7;
alpha0=0.1278;
alpha1=182.57;
x10=0.006;
x20=0; x30=0.4536; Kf=0;
```

**Fonction de transfert :**

```
% GG =
%          -7818
%  -----
%  s^3 + 185.2 s^2 - 803.6 s - 1.763e05
% Les valeurs propres:
eig(A)
% ans =
%    30.5144
%   -31.3431
%  -184.3744
```

**Commandabilité et Observabilité :**

```
% Commandabilité:
CC=ctrb(A,B)
% CC =
%    1.0e+06 *
%
%          0          0   -0.0078
%          0   -0.0078    1.4480
%    0.0002   -0.0335    6.1750
rank(CC)
% ans = 3
% Observabilité:
OO=obsv(A,C)
% OO =
%    1.0000          0          0
%          0    1.0000          0
%   952.1384          0   -43.2409
```



<sup>1</sup> Sun, Yulan, Bensoussan David, Hammami M, Wang Tao., and Houimdi Amine, Robust and Ultrafast Response Compensator Applied to a Levitation System, European Control Conference ECC15, Linz, Austria, July 15-17, 2015.

```
rank(OO)
% ans = 3
```

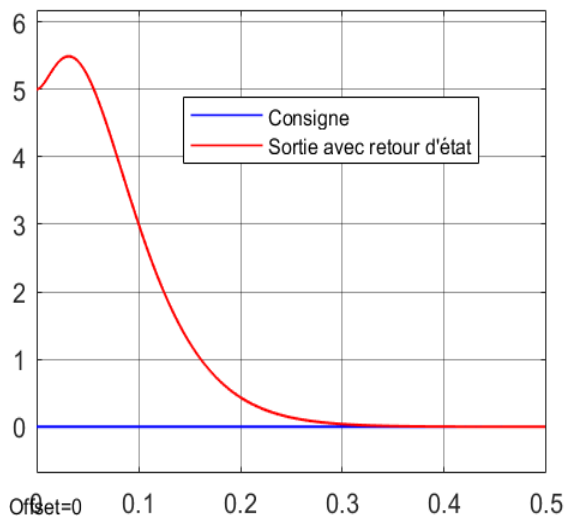
### Commande par retour d'état :

Nous notons que ce système est instable étant donné qu'il possède au moins une valeur propre positive.

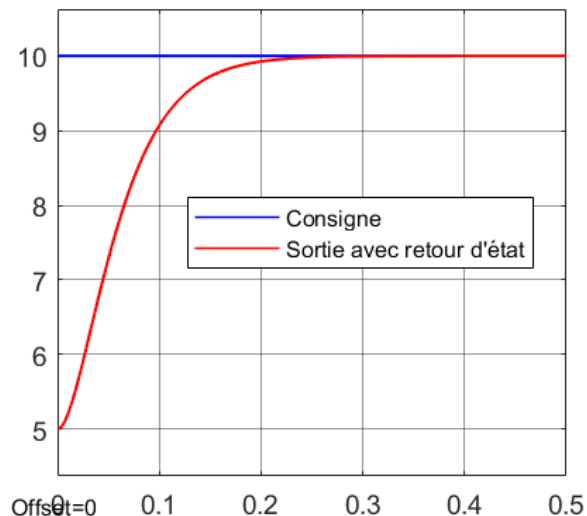
```
lambda=solve(det(lambda*eye(3)-A)==0,'MaxDegree',3);
% ans =
% 30.5144 + 0.0000i
% -1.8437e+02 + 1.0403e-14i
% -31.3431 - 0.0000i
% Pôles désirés
lambdad=-31.3431;
% Équation caractéristique désirée
syms lambda k1 k2 k3
simplify(expand((lambda-lambdad)^3));
% lambda^3 + 94.0293*lambda^2 + 2.9472e+03*lambda + 3.0791e+04
% Équation caractéristique avec retour d'état
K=[k1 k2 k3];
det(lambda*eye(3)-(A-B*K))
% 180.8109*k3*lambda^2 - 1.7216e+05*k3 - 803.6317*lambda -
% 7.8184e+03*k2*lambda - 7.8184e+03*k1 + 185.2031*lambda^2 + lambda^3 -
% 1.7634e+05
% Calcul du gain K
[k1 k2 k3] = solve(94.0293==180.8109*k3+185.2031, 2.9472e+03==-803.6317-
% 7.8184e+03*k2, 3.0791e+04==-1.7216e+05*k3-7.8184e+03*k1-1.7634e+05,
% k1,k2,k3);
K=[k1 k2 k3];
K = [-15.3893 -0.4797 -0.5042];
% Gain pour référence non nulle
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;
```

### Réponse temporelle du système avec retour d'état :

Référence nulle



Référence non nulle



**Observateur complet :**

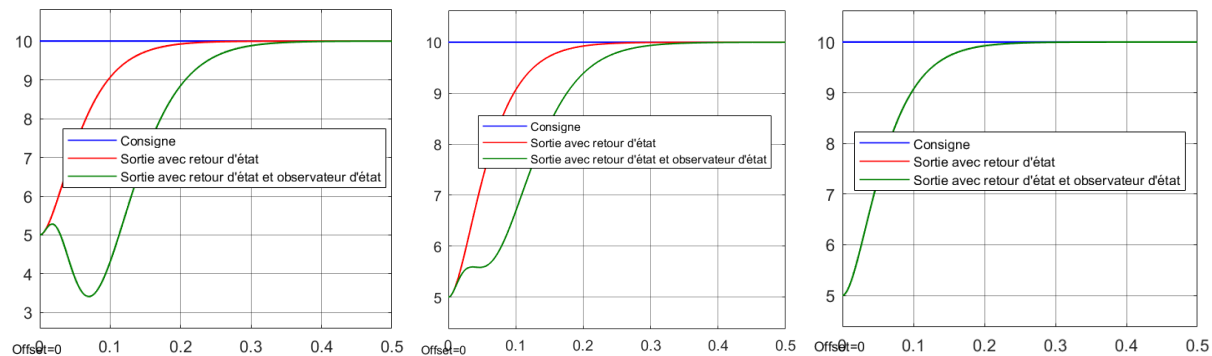
```

lambdad=2*lambdad;
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour
d'état)
syms lambda
expand((lambda-(2*lambdad))^3)
% lambda^3 + 376.1172*lambda^2 + 4.7155e+04*lambda + 1.9706e+06
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1 h2 h3
H=[h1 ; h2 ; h3];
det(lambda*eye(3)-(A-H*C))
% 148.5067*h1 + 185.2031*h2 - 43.2409*h3 - 803.6317*lambda +
185.2031*h1*lambda + h2*lambda + h1*lambda^2 + 185.2031*lambda^2 + lambda^3 -
1.7634e+05
[h1 , h2 , h3]=solve(148.5067*h1 + 185.2031*h2 - 43.2409*h3-
1.7634e+05==1.9706e+06,- 803.6317 + 185.2031*h1 + h2==4.7155e+04,h1 +
185.2031==376.1172,h1,h2,h3);
% h1 = 190.9141
% h2 = 1.2601e+04
% h3 = 4.9747e+03
H=[190.9141;1.2601e+04;4.9747e+03];

```

**Réponse temporelle du système avec retour d'état et observateur complet:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 2.5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = 5$ .

**Observateur réduit :**

```

A11=A(1,1); A12=A([1:1],[2:3]); A21=A([2:3],[1:1]); A22=A([2:3],[2:3]);
B1=B(1,1); B2=B([2:3],1);
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour
d'état)
syms lambda
expand((lambda-(2*lambdad))^2)
% lambda^2 + 250.7448*lambda + 1.5718e+04
% Équation caractéristique de l'observateur

```

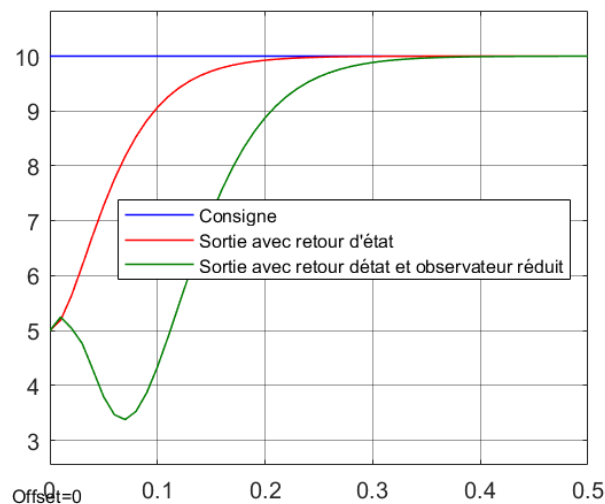
```

syms lambda h1 h2
H=[h1 ; h2];
det(lambda*eye(2)-(A22-H*A12))
% 185.2031*h1 - 43.2409*h2 + 185.2031*lambda + h1*lambda + lambda^2 +
148.5067
[h1 , h2]=solve(185.2031*h1 - 43.2409*h2+ 148.5067==1.5718e+04,185.2031 +
h1==250.7448,h1,h2)
% h1 = 65.5417
% h2 = -79.3454
H_reduit=[65.5417;-79.3454];

```

**Réponse temporelle du système avec retour d'état et observateur d'ordre réduit:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



### 6-2-8 Problème 8 : Retour d'état et observateur de systèmes MIMO

Proposer une méthode qui permette de résoudre les équations de retour d'état et d'observateur dans le cas où  $B$  est une matrice de dimension  $n \times m$  et non pas un vecteur. Indice : Multiplier la matrice  $B$  par un vecteur  $K_2$  de dimension  $m \times n$  et vérifier que le système  $(A, BK_2)$  est commandable. Dans le cas d'une matrice  $C$  de dimension  $p \times n$ , prémultiplier la matrice  $C$  par un vecteur  $K_2$  de dimension  $1 \times p$  et vérifier que le système  $(A, K_2 C)$  est observable. Ces transformations résultent en un système SISO équivalent.

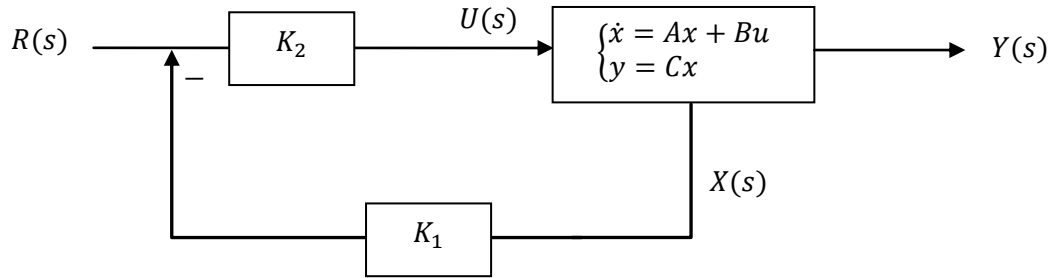
**Corrigé :**

Soit le système  $\dot{x} = Ax + Bu, y = Cx$ , tel que :  $A: n \times n, B: n \times m, C: p \times n$ .

**Les équations de retour d'état dans le cas où  $B$  est une matrice de dimension  $n \times m$ :**

La matrice du gain du retour d'état dans ce cas aura la dimension  $m \times n$ . Elle contient donc  $mn$  éléments. Or, la matrice  $A$  est de dimension  $n \times n$  et admet  $n$  valeurs propres. Aussi, pour obtenir  $n$  valeurs propres désirées, nous pourrions choisir  $mn$  coefficients pour la matrice  $K_2$ . La solution ne sera pas unique. Le placement des pôles n'est donc pas unique, il y'a plusieurs

solutions. Nous ferons usages des deux compensateurs  $K_2: m \times n$  et  $K_1: 1 \times p$  comme illustrer sur la figure suivante :



Supposons que le système  $(A,B)$  soit commandable. Nous introduisons un gain  $K_2$  de dimension  $p \times 1$  de sorte que le système  $(A - BK_2K_1, BK_2)$  soit commandable. Si cela est possible, nous écrivons alors :

$$e = r - K_1x \quad , \quad u = K_2e = K_2r - K_2K_1x$$

D'où :

$$\dot{x} = Ax + Bu = Ax + B(K_2r - K_2K_1x) = (A - BK_2K_1)x + BK_2r$$

Notons que  $BK_2K_1$  a la dimension  $(n \times m)(m \times 1)(1 \times n) = n \times n$  et  $BK_2$  a la dimension  $(n \times m)(m \times 1) = n \times 1$ . Nous avons obtenu un nouveau système mono-entrée étant donné que  $BK_2$  est un vecteur de dimension  $n \times 1$ . Les valeurs propres sont ajustées essentiellement par le gain  $K_2$ .

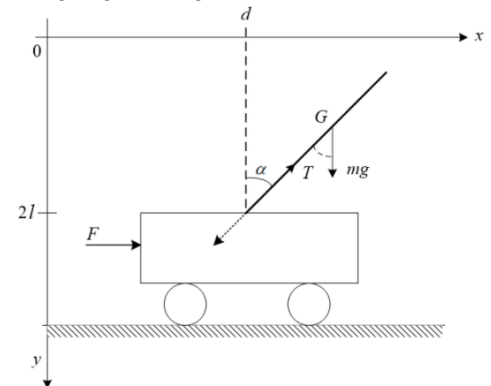
### Les équations de l'observateur d'état dans le cas où $C$ est une matrice de dimension $p \times n$ :

Trouver un vecteur ligne  $\gamma$  de dimension  $1 \times p$  et construire la matrice  $\hat{C} = \gamma C$ . La matrice  $\hat{C}$  aura la dimension  $(1 \times p)(p \times n) = 1 \times n$ . Si le système  $(A, \hat{C})$  est observable, il est alors possible de construire un observateur  $(A - H\hat{C})$ . La sortie  $y = Cx$  devient  $\hat{y} = \hat{C}x = \gamma Cx$ . Pour revenir à  $y$ , il suffit d'utiliser le pseudo-inverse :  $y = C^+ \hat{y}$ . Nous allons appliquer cette méthode au problème suivant.

### 6-2-9 Problème 9 : Le pendule inversé (avec moteur)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16.8835 & -4.5277 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 55.3557 & 47.0088 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3.7778 \\ 0 \\ -12.3862 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Commençons par vérifier la commandabilité du pendule inversé et son observabilité par rapport au déplacement du chariot et par rapport à l'angle d'inclinaison du pendule ont été vérifiés dans le chapitre 5 du livre de référence<sup>2</sup>.



<sup>2</sup> Commande moderne, David Bensoussan

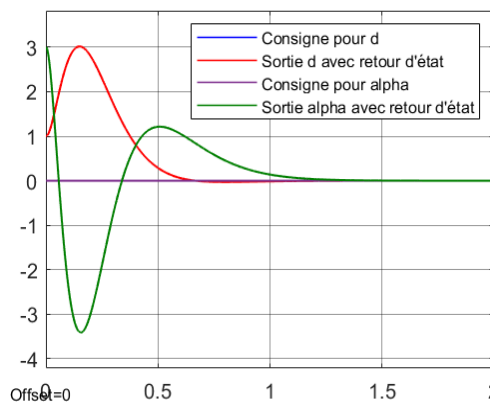
Concevoir une commande par retour d'état pour stabiliser le système et corriger l'entrée de commande, qui est représentée par la tension fournie au moteur, de façon à stabiliser la distance du chariot à la distance de référence en maintenant la tige du pendule verticale.

Nous notons que ce système est instable étant donné qu'il possède au moins une valeur propre positive.

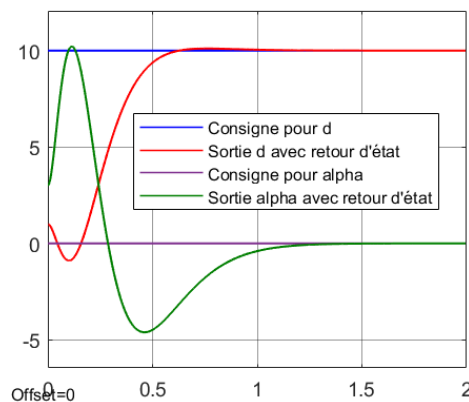
```
A=[0 1 0 0; 0 -16.8835 -4.5277 0 ; 0 0 0 1 ; 0 55.3557 47.0088 0];
B=[0;3.7778;0;-12.3862];
C=[1 0 0 0 ; 0 0 1 0]; D=0;
syms k1 k2 k3 k4
lambda=solve(det(lambda*eye(4)-A)==0,);
% lambda = 0
%      6.0049 - 0.0000i
%     -17.8110 - 0.0000i
%     -5.0774 + 0.0000i
% Pôles désirés
lambda_d=-10;
% Équation caractéristique désirée
simplify(expand((lambda-lambda_d)^4));
% lambda^4 + 40*lambda^3 + 600*lambda^2 + 4000*lambda + 10000
% Équation caractéristique avec retour d'état
K=[k1 k2 k3 k4];
det(lambda*eye(4)-(A-B*K))
% 3.5576e-04*k3*lambda - 543.0391*lambda - 121.5088*k2*lambda - 121.5088*k1 +
% 3.7778*k1*lambda^2 + 3.7778*k2*lambda^3 - 12.3862*k3*lambda^2 + 3.5576e-
% 04*k4*lambda^2 - 12.3862*k4*lambda^3 - 47.0088*lambda^2 + 16.8835*lambda^3 +
% lambda^4
% Calcul du gain K
[k1 k2 k3 k4] = solve(3.7778*k2- 12.3862*k4+ 16.8835== 40 , 3.7778*k1-
12.3862*k3+ 3.5576e-04*k4- 47.0088== 600 , 3.5576e-04*k3- 543.0391-
121.5088*k2 == 4000, - 121.5088*k1 == 10000, k1,k2,k3,k4);
K=[k1 k2 k3 k4];
K = [-82.2986 -37.3888 -77.3378 -13.2699];
% Référence non nulle:
N=pinv(-C*pinv(A-B*K)*B);
```

### Réponse temporelle du système avec retour d'état :

Référence  $d$  nulle



Référence  $d$  non nulle





**Observateur complet :**

La matrice  $C$  a la dimension  $2 \times 4$ . Trouvons un vecteur ligne  $\gamma$  de dimension  $1 \times 2$  et construisons la matrice  $\hat{C} = \gamma C$ .

```
A=[0 1 0 0; 0 -16.8835 -4.5277 0 ; 0 0 0 1 ; 0 55.3557 47.0088 0];
B=[0;3.7778;0;-12.3862];
C=[1 0 0 0 ; 0 0 1 0]; D=0;
Gamma=[k 0];
PseudoGamma=pinv(Gamma);
Cchapeau=Gamma*C
% Cchapeau =
%      k      0      0      0
```

La matrice  $\hat{C}$  aura la dimension  $1 \times p$ .

Vérifions si le système  $(A, \hat{C})$  est observable pour  $k = 1$ .

```
OO=obsv(A,Cchapeau)
% OO =
%      1.0000      0      0      0
%      0      1.0000      0      0
%      0 -16.8835 -4.5277      0
%      0  285.0526  76.4434 -4.5277
rank(OO)
% ans = 4
```

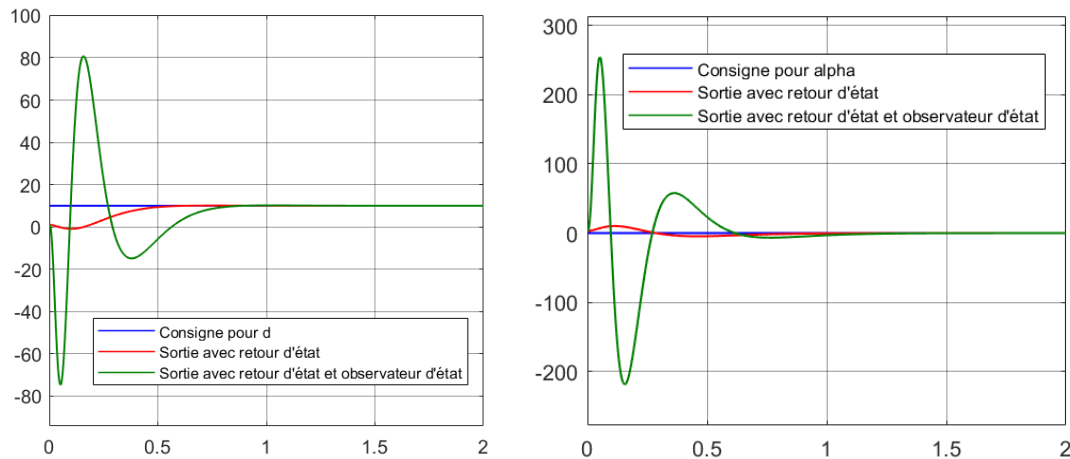
Le système  $(A, \hat{C})$  est donc observable. Étant donné qu'elle est bloc triangulaire, elle est observable pour toutes valeurs de  $k$ :

Il est possible de construire un observateur  $(A-H\hat{C})$ . La sortie  $y = Cx$  devient  $\hat{y} = \hat{C}x = \gamma Cx$ . Pour revenir à  $y$ , il suffit d'utiliser le pseudo-inverse :  $y = \gamma^\dagger \hat{y}$ .

```
lambdad=2*lambdad;
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour d'état)
syms lambda
expand((lambda-(2*lambdad))^4)
% lambda^4 + 160*lambda^3 + 9600*lambda^2 + 256000*lambda + 2560000
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1 h2 h3 h4
H=[h1 ; h2 ; h3 ; h4];
det(lambda*eye(4)-(A-H*Cchapeau))
% 16.8835*h1*lambda^2 - 47.0088*h2 - 4.5277*h4 - 543.0391*lambda -
47.0088*h1*lambda - 4.5277*h3*lambda - 543.0391*h1 + h1*lambda^3 +
h2*lambda^2 - 47.0088*lambda^2 + 16.8835*lambda^3 + lambda^4
[h1,h2,h3,h4]=solve(h1+16.8835==160, 16.8835*h1+h2-47.0088== 9600, -543.0391-
47.0088*h1- 4.5277*h3== 256000, - 47.0088*h2 - 4.5277*h4- 543.0391*h1 ==
2560000,h1,h2,h3,h4);
H=[143.1165;7.2307e+03;-5.8147e+04;-6.5765e+05];
```

### Réponse temporelle du système avec retour d'état et observateur complet:

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



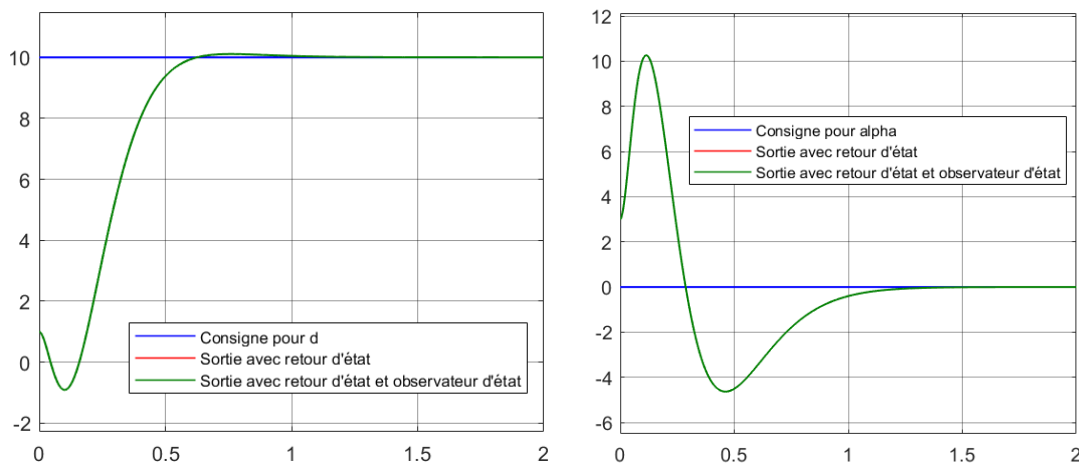
Il est possible d'améliorer la performance de l'observateur, en faisant varier le gain  $k$  qui prend

la valeur 1 dans la présente simulation. Toutefois, la valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspondant au

choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de  $C$  et de la valeur initiale

$y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  donne :  $\hat{x}_0 = C^+ y_0$  soit  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



**Observateur réduit :**

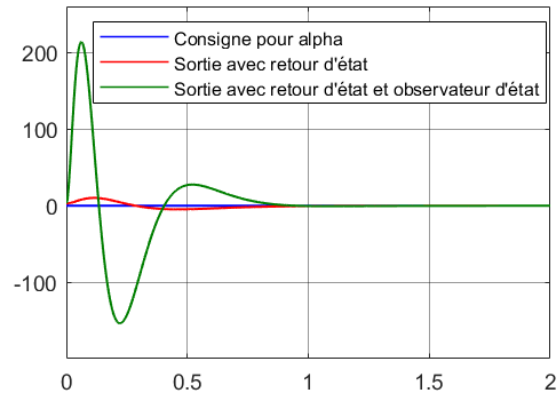
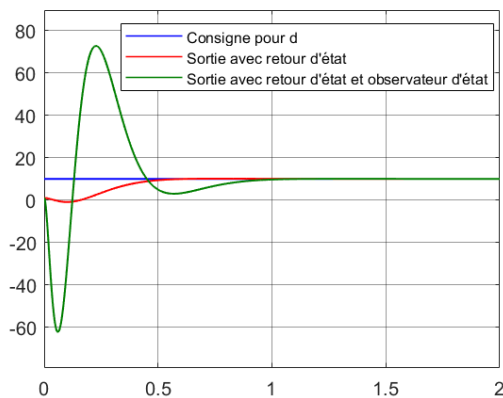
```

A11=A(1,1);A12=A([1:1],[2:4]); A21=A([2:4],[1:1]); A22=A([2:4],[2:4]);
B1=B(1,1); B2=B([2:4],1);
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour
d'état)
syms lambda
expand((lambda-(2*lambda_d))^3)
% lambda^3 + 60*lambda^2 + 1200*lambda + 8000
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1 h2 h3
H=[h1 ; h2 ; h3];
det(lambda*eye(3)-(A22-H*A12))
% h1*lambda^2 - 4.5277*h3 - 47.0088*lambda - 4.5277*h2*lambda - 47.0088*h1 +
16.8835*lambda^2 + lambda^3 - 543.0391
[h1 , h2, h3]=solve(h1+16.8835==60, - 47.0088- 4.5277*h2==1200, - 4.5277*h3-
47.0088*h1- 543.0391 ==8000,h1,h2,h3)
% h1 = 43.1165
% h2 = -275.4177
% h3=-2.3345e+03
H_reduit=[43.1165;-275.4177;-2.3345e+03];

```

**Réponse temporelle du système avec retour d'état et observateur réduit:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$



## 6-2-10 Problème 10 : Boucle de vitesse de la commande d'orientation d'une antenne satellite

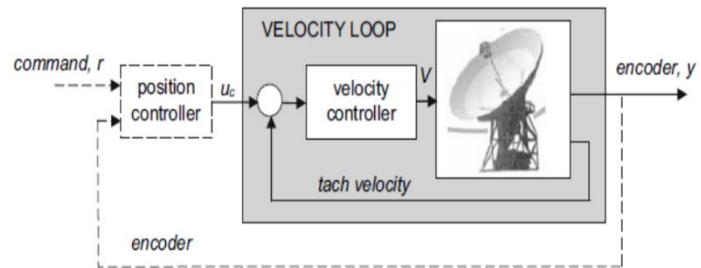
Soit le satellite représenté par sa fonction de transfert  $P(s)^3$  :

$$P(s) = \frac{1}{s^2 + 1.72s + 1.9}$$

<sup>3</sup> Wodek Gawronski. "Modeling and Control of Antenna and Telescopes", Springer Science, 2008

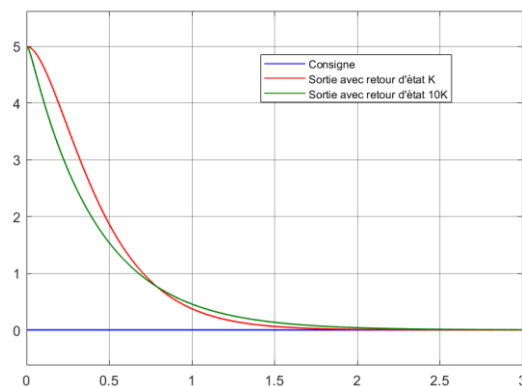
Appliquer un retour d'état pour améliorer la performance de la vitesse de stabilisation de l'antenne satellite en réponse à une entrée échelon. Le numérateur de  $P(s)$  est normalisé à 1 par souci de simplification.

```
s=tf('s');
P=1/(s^2+1.72*s+1.9);
% P =
%      1
%  -----
%      s^2 + 1.72 s + 1.9
[A,B,C,D]=tf2ss([1],[1 1.7 1.9])
% A = -1.7000 -1.9000
%      1.0000      0
% B = 1
%      0
% C = 0      1.0000
% D = 0
syms lambda
lambda=solve(det(lambda*eye(2)-A)==0,lambda);
lambda1=lambda(1);
lambda2=lambda(2);
% Pôles désirés
lambda_d=real(lambda1)*5;
% Équation caractéristique désirée
syms lambda
expand((lambda-lambda_d)^2);
% lambda^2 + (17*lambda)/2 + 289/16
% Équation caractéristique avec retour d'état
syms k1 k2
K=[k1 k2];
det(lambda*eye(2)-(A-B*K))
% k2 + (17*lambda)/10 + k1*lambda + lambda^2 + 19/10
% Calcul du gain K
[k1 k2] = solve((17/10) + k1 == 17/2 , k2 + 19/10 == 289/16 , k1 , k2);
K=[k1 k2]; K = [34/5 1293/80];
% Gain pour référence non nulle
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;
```



À titre comparatif, étudions la réponse temporelle lorsque le gain  $K$  est remplacé par  $10K$ . Nous notons que la convergence vers la finale est plus rapide.

### Réponse temporelle du système avec retour d'état :



**Observateur Complet :**

```

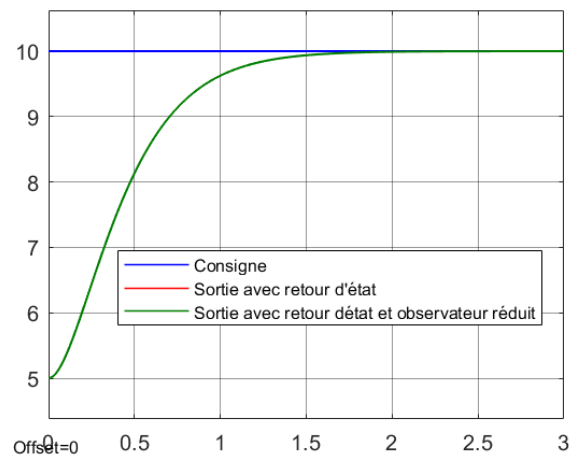
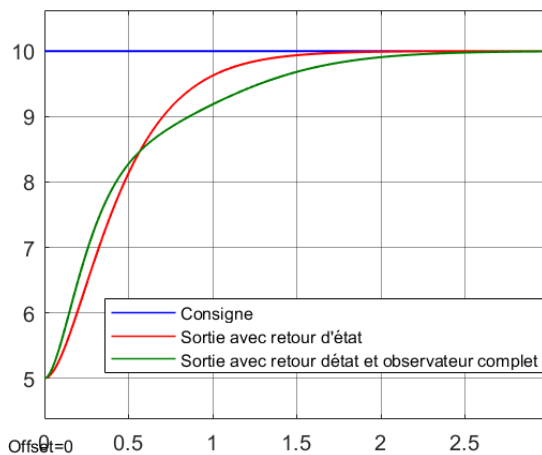
lambdad=2*lambdad;
% Valeur désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour d'état)
syms lambda h1 h2
expand((lambda-(lambdad))^2)
% lambda^2 + (17*lambda)/2 + 289/16
% Équation caractéristique de l'observateur
H=[h1 ; h2];
det(lambda*eye(2)-(A-H*C))
% h1 + (17*h2)/10 + (17*lambda)/10 + h2*lambda + lambda^2 + 19/10
[h1 , h2]=solve(h1 + (17*h2)/10 + 19/10==289/16, (17)/10 + h2==(17)/2,h1,h2);
% h1 = 4.6025 h2 = 6.8000
H=[4.6025;6.8000];

```

**Réponse temporelle du système avec retour d'état et observateur complet:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$



La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = 5$ .

**Observateur d'ordre réduit :**

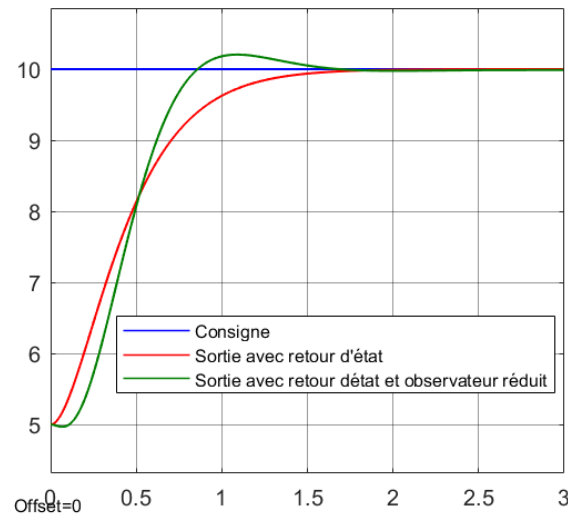
```

A22=A(1,1); A21=A(1,2); A12=A(2,1); A1=A(2,2);
B2=B(1,1); B1=B(2,1);
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour
d'état)
syms lambda
expand((lambda-(2*lambdad)))
% lambda + 17/2
% Équation caractéristique de l'observateur
syms lambda h1
H=h1;
det(lambda*eye(1)-(A22-H*A12))
% h1 + lambda + 17/10
h1=solve(h1 + 17/10==17/2,h1)
% h1 = 34/5
H_reduit=34/5;

```

**Réponse temporelle du système avec retour d'état et observateur d'ordre réduit:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_{0\text{réduit}} = 0$$

**6-2-11 Problème 11 : Commande de l'angle d'élévation d'un avion**

Soit A, B, C et D les matrices d'état représentant la dynamique du mouvement longitudinal (angle d'élévation) d'un avion<sup>4</sup>. Appliquer un retour d'état à ce système. Nous notons que ce système est instable étant donné qu'il possède au moins une valeur propre positive.

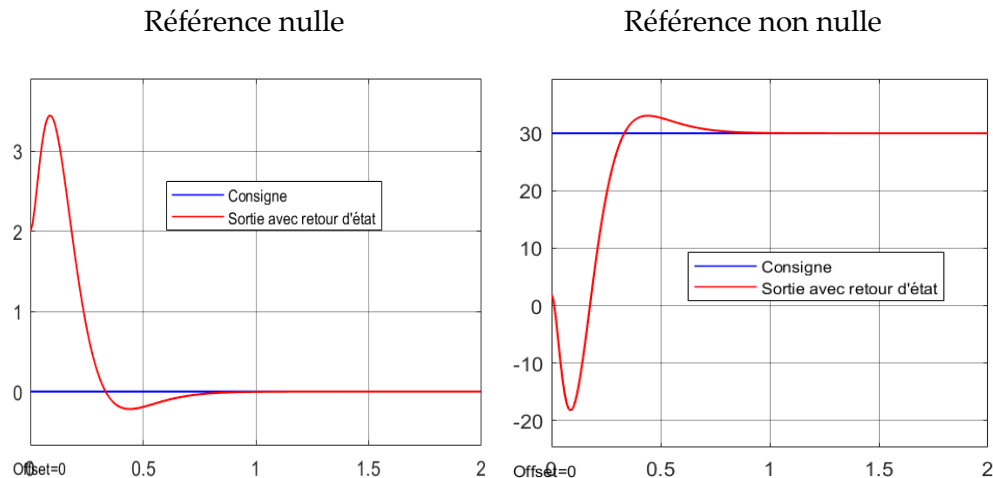
$$A = \begin{bmatrix} -0.0215 & -0.0062 & 0 & -32.1988 \\ -0.1440 & -1.1589 & 951.9638 & -0.281 \\ -0.0043 & -0.0173 & -1.450 & 0.0001 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -107 \\ -24.9486 \\ 0 \end{bmatrix}, C = [1 \ 0 \ 0 \ 0].$$

```
A=[0 1 0 0; 0 0 -4.5 0 ; 0 0 0 1 ; 0 0 47 0];
B=[0;2.2;0;-7.2]; C=[1 0 0 0];
D=0;
syms k1 k2 k3 k4
lambda=solve(det(lambda*eye(4)-A)==0,lambda);
% Pôles désirés
lambdad=real(lambda(4))*2;
% Équation caractéristique désirée
expand((lambda-lambdad)^4);
% lambda^4 + 8*47^(1/2)*lambda^3 + 1128*lambda^2 + 1504*47^(1/2)*lambda +
35344
% Équation caractéristique avec retour d'état
K=[k1 k2 k3 k4];
det(lambda*eye(4)-(A-B*K))
% (11*k1*lambda^2)/5 - 71*k2*lambda - 71*k1 + (11*k2*lambda^3)/5 -
(36*k3*lambda^2)/5 - (36*k4*lambda^3)/5 - 47*lambda^2 + lambda^4
% Calcul du gain K
```

<sup>4</sup> Longitudinal approximations, Nelson :pp155,198.

```
[k1 k2 k3 k4] = solve(((11*k2)/5) - ((36*k4)/5) == 8*47^(1/2) , ((11*k1)/5) -
((36*k3)/5) - 47 == 1128 , - 71*k2 == 1504*47^(1/2) , - 71*k1 == 35344 ,
k1,k2,k3,k4);
K=[k1 k2 k3 k4];
K = [-497.8028 -145.2240 -315.3009 -51.9914];
% Gain pour référence non nulle
N=(-C*(A-B*K)^-1*B)^-1;
```

### Réponse temporelle du système avec retour d'état :



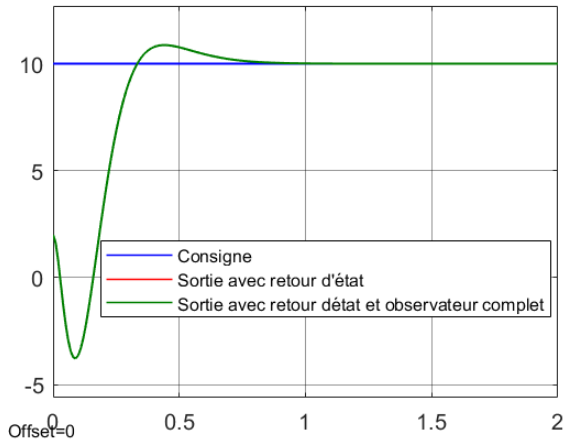
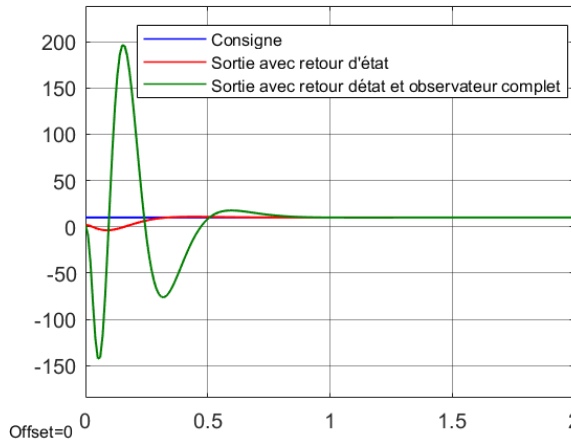
### Observateur complet :

```
lambdad=2*lambdad;
% Valeur propres désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour
d'état)
syms lambda h1 h2 h3 h4
expand((lambda-(lambdad))^4)
% lambda^4 + 16*47^(1/2)*lambda^3 + 4512*lambda^2 + 12032*47^(1/2)*lambda +
565504
% Équation caractéristique de l'observateur
H=[h1 ; h2 ; h3 ; h4];
det(lambda*eye(4)-(A-H*C))
% h1*lambda^3 - (9*h4)/2 - 47*h1*lambda - (9*h3*lambda)/2 - 47*h2 +
h2*lambda^2 - 47*lambda^2 + lambda^4
[h1 , h2 , h3 , h4]=solve(565504==h1 - (9*h4)/2- 47*h2,12032*47^(1/2)==-
47*h1 - (9*h3)/2,4512==h2 - 47,16*47^(1/2)==h1,h1,h2,h3,h4);
% h1 = 109.6905
% h2 = 4559
% h3 = -1.9476e+04
% h4 = -1.7326e+05
H=[109.6905;4559;-1.9476e+04;-1.7326e+05];
```

**Réponse temporelle du système avec retour d'état et observateur complet:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



Les figures ci-dessus mettent en évidence l'importance du choix de la valeur initiale de

l'observateur. La valeur de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  correspond au choix optimal défini par le produit de la

matrice pseudo-inverse de C et de la valeur initiale  $y_0 = Cx_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 2$ . En effet,

$$\hat{y}_0 = C^+ y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times 2 = 2.$$

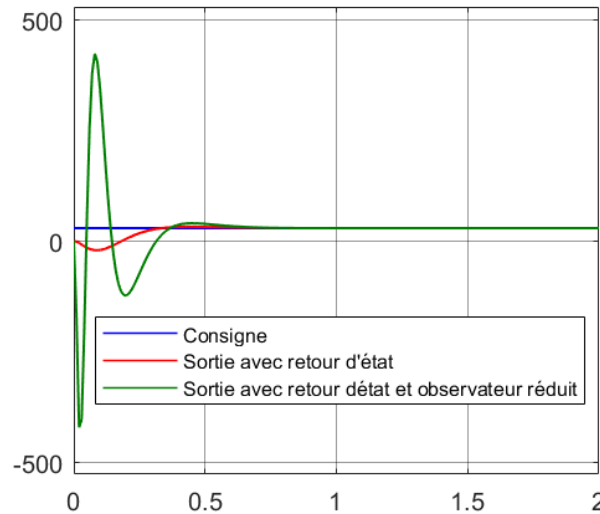
**Observateur réduit :**

```
A11=A(1,1);A12=A([1:1],[2:4]); A21=A([2:4],[1:1]); A22=A([2:4],[2:4]);
B1=B(1,1); B2=B([2:4],1);
% Valeur désirées (2 fois plus rapide que le système avec retour d'état)
syms lambda h1 h2 h3
expand((lambda-(2*lambda^2))^3)
% lambda^3 + 24*47^(1/2)*lambda^2 + 9024*lambda + 24064*47^(1/2)
% Équation caractéristique de l'observateur
H=[h1 ; h2 ; h3];
det(lambda*eye(3)-(A22-H*A12))
% h1*lambda^2 - (9*h3)/2 - 47*lambda - (9*h2*lambda)/2 - 47*h1 + lambda^3
[h1 , h2 , h3]=solve(24064*47^(1/2)==-(9*h3)/2- 47*h1,9024== 47 -
(9*h2)/2,h1==24*47^(1/2),h1,h2,h3)
% h1 = 164.5357 h2 = -2.0158e+03 h3 = -3.8379e+04
H_reduit=[164.5357;-2.0158e+03;-3.8379e+04];
```



Réponse temporelle du système avec retour d'état et observateur d'ordre réduit:

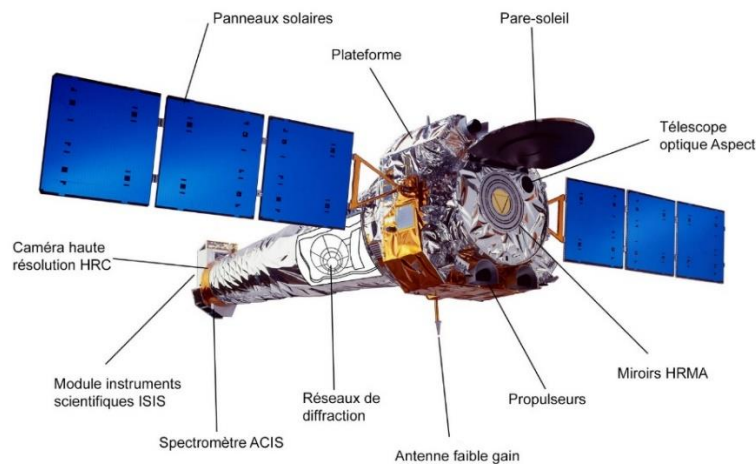
$$x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$



### 6-2-12 Problème 12 : Exemple récapitulatif

Un télescope spatial en orbite géostationnaire est dirigé en direction de la terre selon un angle relatif à un système de référence inertiel. Des propulseurs alimentés par des panneaux solaires permettent de modifier la direction du satellite. Pour la simplicité, nous considérerons la commande sur un seul axe plutôt que 3. Les propulseurs font agir un moment  $M$  qui modifie l'angle de rotation  $\theta$  selon :

$$M(t) = J \frac{d^2\theta}{dt^2}. \text{ Ainsi, l'entrée } u(t) = \frac{M}{J} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \text{ soit } U(s) = s^2\theta(s) \text{ ou } \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

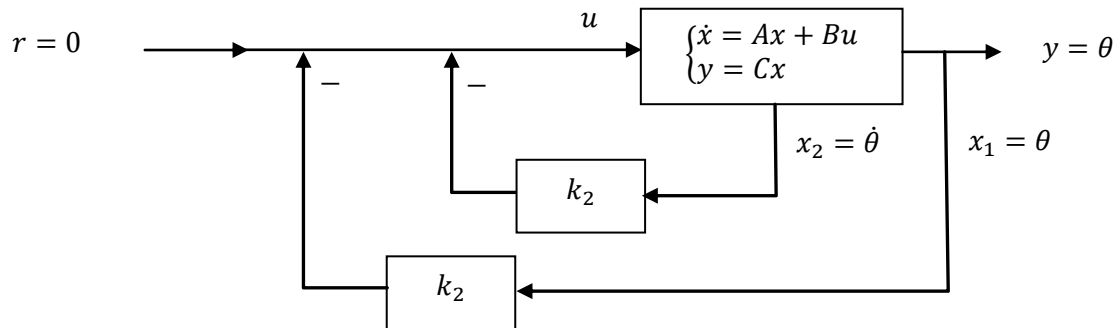


*Télescope spatial Chandra*

Montrer que le système satellite est décrit par les variables d'état continues suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (1, 0)$$

- a) Quelle est la fonction de transfert  $P(s)$  du satellite ? Est-il commandable ? Observable ?
- b) Le satellite comprend une boucle de réaction de commande de positionnement  $x_1 = \theta$  et une boucle de réaction de commande de vitesse  $x_2 = \dot{\theta}$  (Figure 2). On désire obtenir un temps de stabilisation  $t_s$  de 1 seconde et un coefficient d'amortissement de 0,707. Calculer les pôles désirés ainsi que les gains  $K_1$  et  $K_2$  qui permettent d'obtenir ces pôles.



Vérifier le résultat obtenu en utilisant la formule d'Ackermann. Calculer les gains du retour d'état  $K = (K_1, K_2)$  assurant des valeurs propres  $-4 \pm j4$

- c) En utilisant (préférentiellement) la formule d'Ackermann, construire un observateur de gain  $H = \begin{pmatrix} H_1 \\ H_2 \end{pmatrix}$  de façon que le temps de stabilisation de l'erreur entre l'état estimé et l'état réel soit de 0,4 s avec un amortissement de 1. Montrer que les pôles de l'observateur sont -10 et -10.

- d) Calculer la fonction de transfert de l'observateur

$$G_e(s) = \frac{U(s)}{-Y(s)} = K[sI - A + HC + BK]^{-1}H$$

- e) Tracer  $x(t)$  sans observateur et avec observateur d'ordre complet lorsque les conditions initiales sont  $x_1(0) = 1$  et  $x_2(0) = 0$

- f)

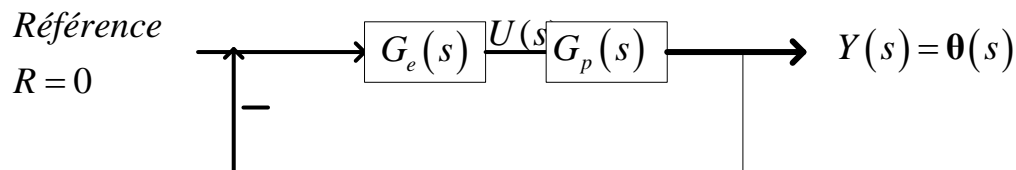


Figure 3

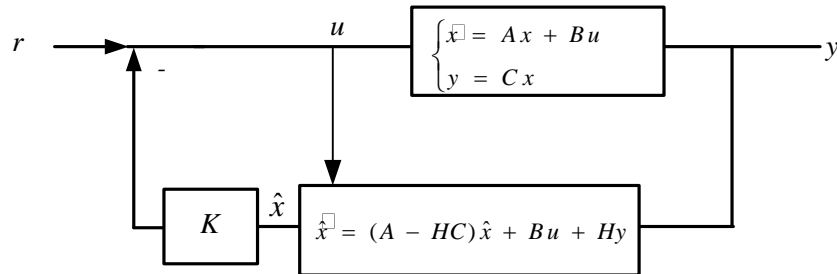
- g) Pour une entrée de référence  $\theta_r$  non nulle, effectuer la transformation de variable :  $\tilde{x}_1 = x_1 - \theta_r$  et  $\tilde{x}_2 = x_2$ . Montrer que la boucle de commande peut être exprimée comme suit :

$$\tilde{x}' = Ax + Bu \quad \text{et} \quad u = -K\tilde{x} = -K_1x_1 - K_2x_2 + K_1r$$

Vérifier que lorsque  $t \rightarrow \infty$ ,  $\tilde{x} \rightarrow 0$ ,  $x \rightarrow \begin{pmatrix} \theta_r \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $u \rightarrow 0$

Représenter le modèle d'état de la boucle fermée avec les variables

$$x_1, x_2, x_3 = \hat{x}_1, x_4 = \hat{x}_2$$



h) Tracer sur Geogebra le diagramme de Nyquist de la boucle ouverte  $G_e(s)P(s)$  (Figure 3). En déduire, toujours sur Geogebra (envoyer des captures d'écran).

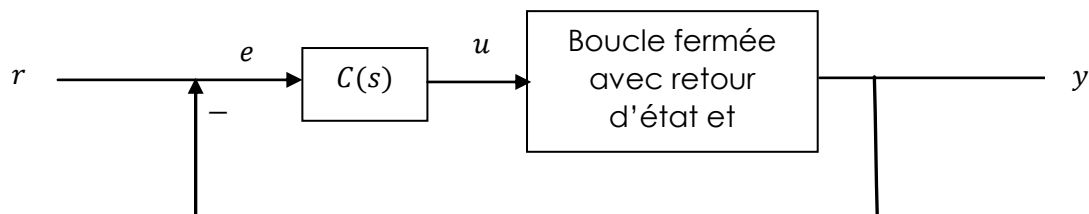
- La stabilité de la boucle fermée  $T(s)$
- La marge de gain
- La marge de phase
- La sensibilité maximale  $M_s$
- Le gain de transmission maximal en boucle fermée  $M_T$

i) Proposer un compensateur  $C(s)$  selon la commande B (faire varier  $k_1, \omega_1, \omega_2, k$ ) qui soit plus performant pour obtenir des nouvelles valeurs du système de la figure 4  $M_T = 1.2$  et de  $M_s = 1,15$  en respectant si possible la limitation  $|C(s)|_{\max} \leq 11$ . Quelle valeur de  $|C(s)|_{\max}$  pourrait assurer de tels objectifs ?

$$C(s) = J(s)T^{-1}(s)$$

$$T(s) = G_e(s)P(s)/[1 + G_e(s)P(s)]$$

$$J(\omega) = k_1 \frac{1}{s + \omega_1} \left( \frac{\omega_2}{s + \omega_2} \right)^k$$



j) Reformuler le problème en z :  $x(k+1) = A_d x(k) + B_d u(k)$ . En supposant un temps d'échantillonnage  $T$  de 0,1s. Utiliser l'approximation

$$A_d = I + AT \quad \text{et} \quad B_d = BT + AB \frac{T^2}{2}$$

Écrire l'équation caractéristique en  $z$ . Déplacer les pôles au moyen d'un retour d'état pour obtenir l'amortissement de 0,707 et un temps de stabilisation de 1 seconde.

Rappel : pour  $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s + \sigma + j\omega_d)(s + \sigma - j\omega_d)}$  les pôles sont :  $s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2}$  et  $z_{1,2} = e^{-\xi\omega_n T} e^{\pm j\omega_n T \sqrt{1-\xi^2}}$ .

Calculer l'équation caractéristique désirée (approximativement)

k) Appliquer la commande optimale. Trouver les nouveaux gains  $K_1$  et  $K_2$  qui minimisent la fonction de coût

$$J = \int_0^\infty [\tilde{x}^T(t) C^T Q C \tilde{x}(t) + u^T(t) R u(t)] dt$$

Avec les pondérations  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  et  $R = 2$ .

Indice : trouver une matrice  $P$  qui vérifie l'équation de Ricatti

$$A^T P + P A + Q = P B R^{-1} B^T P$$

En déduire le gain de retour

$$u = K_{\text{opt}} \tilde{x} = -R^{-1} B^T P \tilde{x}$$

## Corrigé

### a) Commandabilité, Observabilité

Le système est décrit par la fonction de transfert suivante :

$$P(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2}$$

**Représentation d'état :**

$$P(s) = \frac{\theta(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2} \quad \rightarrow \quad s^2 \theta(s) = U(s) \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta}(t) = u(t)$$

En posant  $x_1 = \theta$  et  $x_2 = \dot{x}_1 = \dot{\theta}$ , le système est décrit par les matrices d'état suivantes:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0) \quad , \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Vérifions que le système est commandable et observable :

```
% Commandabilite
C=ctrb(A,B)
```

```

rang_C=rank(C)
% C =
%      0      1
%      1      0
% rang_C = 2

% Observabilite
O=obsv(A,C)
rang_O=rank(O)
% O =
%      0      1
%      1      0
%      0      0
%      0      1
% rang_O = 2

```

Le système est donc commandable et observable.

Nous pouvons vérifier que la fonction de transfert est donnée par :  $P(s) = \frac{1}{s^2}$

```

[num,den]=ss2tf(A,B,C,D);
P=tf(num,den);
% num =
%      0      0      1
% den =
%      1      0      0
% P =
%      1
%      ---
%      s^2

```

- b) Construire une commande par retour d'état pour  $t_s$  de 1 seconde et un coefficient d'amortissement  $\zeta$  de 0,707; choisir comme temps de stabilisation le temps auquel le système atteint  $\pm 2\%$  de la valeur finale:**

$$T_s = \frac{4}{\zeta \omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{0.707 \times 1} = 5.65 \text{ rad/s}$$

Les pôles de la fonction de transfert sont les solutions du dénominateur de la fonction de transfert :  $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ . Soit les solutions de l'équation :  $s^2 + 8s + 32 = 0$ .

$$\text{D'où : } s_{1,2} = -\xi\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\xi^2} = -4 \pm j4.$$

#### Première solution analytique :

La matrice  $A$  a une forme canonique de commandabilité et par conséquent les valeurs de  $K$  sont données par les valeurs caractéristiques du déterminant de la matrice  $A - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 - k_1 & 0 - k_2 \end{pmatrix}$

soit  $s(s + k_2) + k_1 = s^2 + k_2s + k_1 = 0$ .

Égalisons avec l'équation caractéristique désirée :  $s^2 + 8s + 32 = 0$ , il vient que  $k_2 = 8$  et  $k_1 = 32$  et  $K = (32 \quad 8)$ .

```
% Commande par retour d'état (méthode de placement de pôles)
```

```

syms k1 k2 lambda
K=[k1 k2];
A-B*K;
det(lambda*eye(2)-(A-B*K));
% Équation caractéristique
% lambda^2 + k2*lambda + k1
% Équation caractéristique désirée (pôles: p1=-4+4j , p2=-4-4j)
expand((lambda+4-i*4)*(lambda+4+i*4));
% lambda^2 + 8*lambda + 32
% [k1,k2]=solve(k1 == 32 , k2 == 8)
K=[32 , 8];

```

### Deuxième solution analytique :

Retrouvons ce résultat à partir de la méthode d'Ackermann :

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + 8 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 32 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 0 & 32 \end{pmatrix}$$

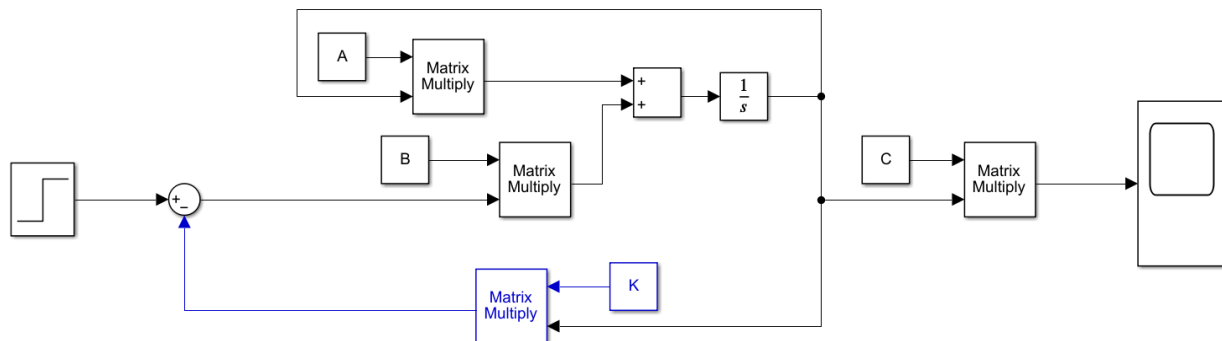
$$K = [0 \ 0 \ \dots \ 1] [B \ AB \ \dots \ A^{n-1}B]^{-1} \alpha_c(A) = [0 \ 1] [B \ AB]^{-1} \begin{pmatrix} 32 & 8 \\ 0 & 32 \end{pmatrix} = (32 \ 8)$$

```

% Commande par retour d'état (méthode d'Ackermann)
% Équation caractéristique désirée (pôles: p1=-4+4j , p2=-4-4j)
expand((lambda+4-i*4)*(lambda+4+i*4));
% lambda^2 + 8*lambda + 32
K=[0 1]*[B A*B]^-1*(A^2 + 8*A + 32*eye(2));
% K=[32 , 8];

```

### Réalisation avec retour d'état:



En noir: le système original – En bleu : le gain du retour d'état

### Fonction de transfert du système avec retour d'état:

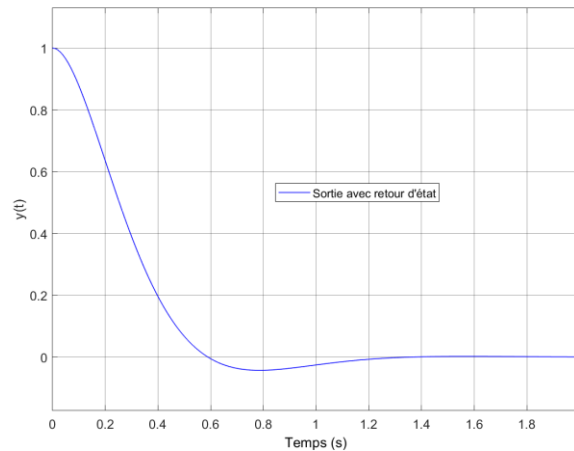
```

% Fonction de transfert
[num,den]=ss2tf(A-B*K,B,C,D)
T=tf(num,den)
% num =
%      0      0      1
% den =
%      1.0000      8.0000     32.0000
% T =
%      1
%      -----
%      s^2 + 8 s + 32

```

On remarque que le gain statique du système avec retour d'état est  $1/32$ . Pour obtenir une erreur statique nulle, il faudrait multiplier la matrice  $C$  par un facteur de 32 car la fonction de transfert désirée est donnée par :  $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{32}{s^2 + 8s + 32}$

**Réponse temporelle du système avec retour d'état pour une entrée nulle et une condition initiale  $y_0 = 1$ :**



**c) Construire un observateur d'état complet ayant un pôle double à -10 :**

$$T_s = \frac{4}{\zeta\omega_n} \rightarrow \omega_n = \frac{4}{\zeta T_s} = \frac{4}{1 \times 0.4} = 10 \text{ rad/s}$$

Les pôles de la fonction de transfert sont les solutions du dénominateur de la fonction de transfert :  $\frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ . Soit les solutions de l'équation :  $s^2 + 20s + 100 = 0$ .

**Première solution analytique :**

Les solutions pour le vecteur  $H$  sont données par les valeurs caractéristiques du déterminant de la matrice  $A - HC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1 & 1 \\ h_2 & 0 \end{pmatrix}$  soit  $s(s + h_1) + h_2 = s^2 + h_1s + h_2 = 0$

Égalisons avec l'équation caractéristique désirée :  $s^2 + 20s + 100 = 0$ , il vient que  $h_2 = 100$  et  $h_1 = 20$  et  $H = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix}$ .

```
% Observateur complet (méthode de placement de pôles)
syms h1 h2 lambda
H=[h1 ; h2];
A-H*C;
det(lambda*eye(2)-(A-H*C));
% Équation caractéristique
% lambda^2 + h1*lambda + h2
% Équation caractéristique désirée (pôles: p1=-10 , p2=-10)
expand((lambda+10)*(lambda+10));
% lambda^2 + 20*lambda + 100
% [h1 ; h2]=solve(h1 == 20 , h2 == 100)
H=[20 ; 100];
```

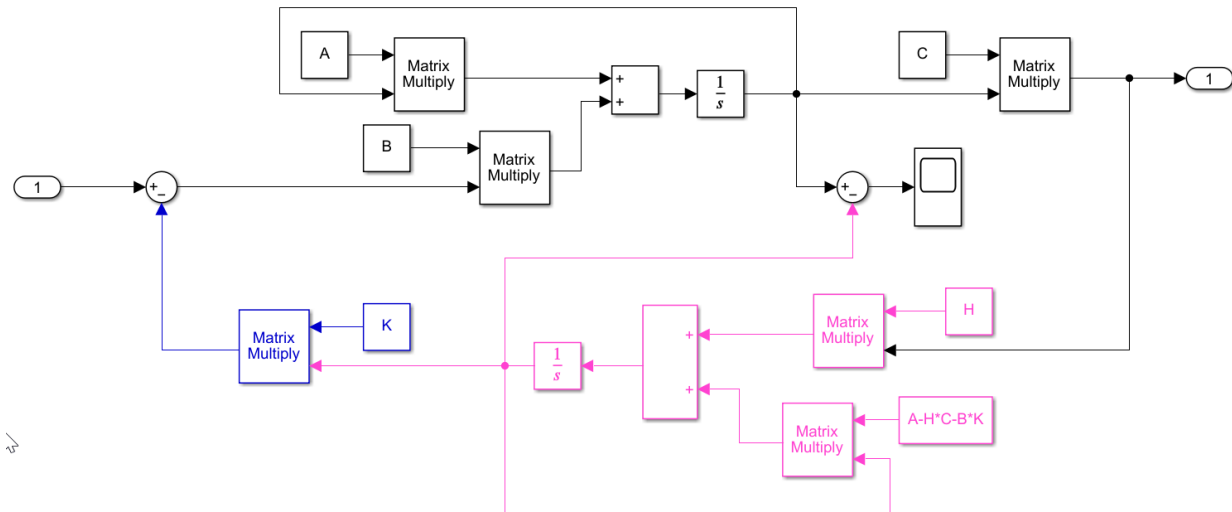
**Deuxième solution analytique :**

Retrouvons ce résultat à partir de la méthode d'Ackermann :

$$\alpha_c(A) = A^n + \alpha_{n-1} A^{n-1} + \dots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 + 20 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 100 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{pmatrix}$$

$$H = \alpha_c(A) \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 20 \\ 0 & 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix}$$

```
% Équation caractéristique désirée (pôles: p1=-10 , p2=-10)
expand((lambda+10)*(lambda+10));
% lambda^2 + 20*lambda + 100
H=(A^2 + 20*A + 100*eye(2))*[C ; C*A]^-1*[0 ; 1];
% H=[20 ; 100];
```

**Réalisation avec retour d'état et observateur complet :**

En noir: le système original – En rose : l'observateur complet – En bleu : le gain du retour d'état

**d) Fonction de transfert de l'observateur avec retour d'état:**

L'équation de l'observateur :

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC)\hat{x} + Hy$$

$$A - HC = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ -100 & 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ -100 & 0 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} y, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La fonction de transfert de l'observateur sans retour d'état :

$$G_{obs}(s) = \frac{\hat{X}(s)}{Y(s)} = K[sI - A + HC]^{-1}H = \frac{1440s + 3200}{s^2 + 20s + 100}$$



```
s=tf('s');
Gobs=K*(s*eye(2)-A+H*C)^(-1)*H
% Gobs =
% (1440*s+3200)/(s^2 + 20*s + 100)
```

L'équation de l'observateur avec retour d'état:

$$\dot{\hat{x}} = (A - HC - BK)\hat{x} + Hy$$

$$A - HC - BK = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 32 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ -132 & -8 \end{pmatrix}$$

Soit :

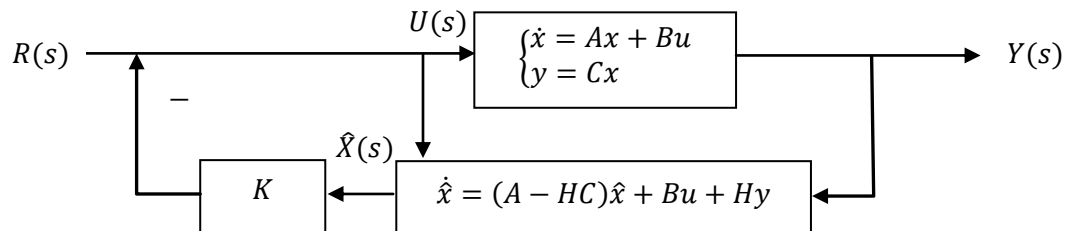
$$\dot{\hat{x}} = \begin{pmatrix} -20 & 1 \\ -132 & -8 \end{pmatrix} \hat{x} + \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix} y, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La fonction de transfert de l'observateur avec retour d'état:

$$G_e(s) = \frac{U(s)}{-Y(s)} = K[sI - A + HC + BK]^{-1}H = \frac{1440s + 3200}{s^2 + 28s + 292}$$

```
s=tf('s');
Ge=K*(s*eye(2)-A+H*C+B*K)^(-1)*H
% Ge =
% (1440*s+3200)/(s^2 + 28*s + 292)
```

#### e) Fonction de transfert de la boucle fermée :



L'équation de la boucle fermée:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\hat{x}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & -BK \\ HC & A - HC - BK \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix} r$$

$$y = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ \hat{x} \end{pmatrix}$$

Avec :

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{pmatrix}, \quad \hat{x} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{\theta} \\ \hat{\dot{\theta}} \end{pmatrix}, \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Soit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -32 & -8 \\ 20 & 0 & -20 & 1 \\ 100 & 0 & -132 & -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} r$$

$$y = (1 \ 0 \ 0 \ 0) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \text{ avec conditions initiales: } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

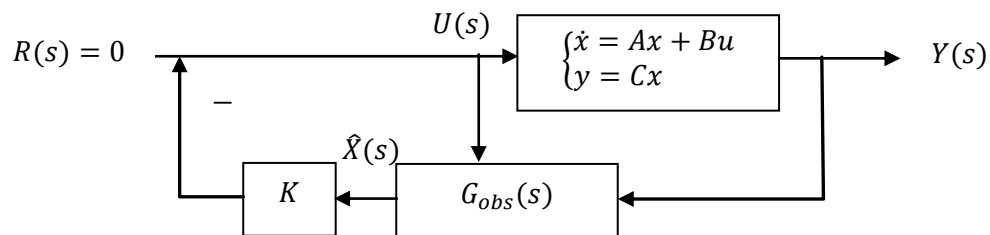
La fonction de transfert correspondante est :

$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C_{BF}[sI - A_{BF}]^{-1}B_{BF} = \frac{1}{(s^2 + 8s + 32)}$$

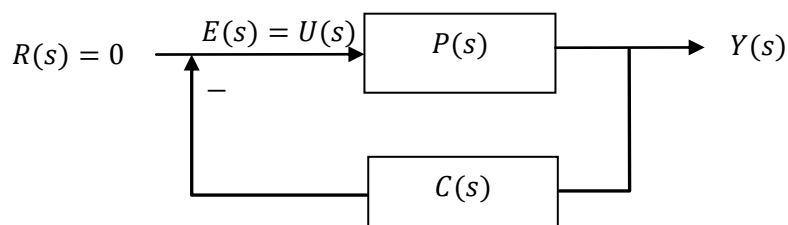
```
Abf=[A-B*K -B*K ; H*C A-H*C-B*K];
Bbf=[B ; B];
Cbf=[C 0 0];
Dbf=0;
[num,den]=ss2tf(Abf,Bbf,Cbf,Dbf);
T=tf(num,den);
% T =
%          s^2 + 20 s + 100
%  -----
%  s^4 + 28 s^3 + 292 s^2 + 1440 s + 3200

% Autre méthode:
syms s
T=simplify(Cbf*(s*eye(4)-Abf)^-1*Bbf);
% T =
%  (160*(9*s + 20))/(s^2*((160*(9*s + 20))/(s^2*(s^2 + 28*s + 292)) + 1)*(s^2
%  + 28*s + 292))
```

**Validation:**



**Boucle de rétroaction équivalente:**



**Validation:**

$$T(s) = \frac{P(s)}{1 + P(s)C(s)} = \frac{s^2 + 28s + 292}{(s^2 + 8s + 32)(s^2 + 20s + 100)}$$

```
syms s
P=1/s^2;
CC=(1440*s+3200)/(s^2 + 28*s + 292);
T=simplify((P)/(1+P*CC));
% T =
% (s^2 + 28*s + 292)/((s + 10)^2*(s^2 + 8*s + 32)) = 1/(s^2 + 8*s + 32)
 $\dot{\hat{x}} = Ax + Bu + H(y - C\hat{x})$ 
```

$$\hat{X}(s) = (sI - A + HC)^{-1}BU(s) + (sI - A + HC)^{-1}HY(s)$$

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K(sI - A + BK + HC)^{-1}H$$

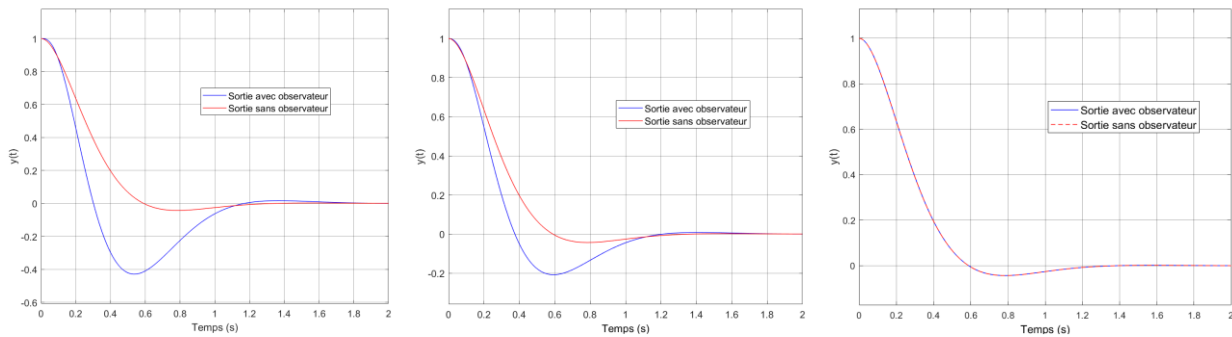
Pour :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 32 & 8 \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 20 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$C(s) = K(sI - A + BK + HC)^{-1}H = \frac{1440s + 3200}{s^2 + 28s + 292}$$

**Réponse temporelle du système  $y(t)$  avec retour d'état et observateur complet:**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



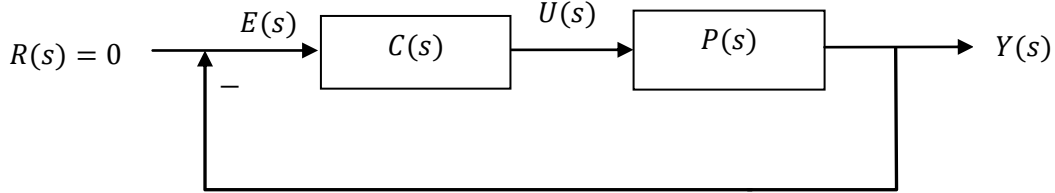
**Remarque 1:** La valeur initiale de l'estimation d'état  $\hat{x}_0$  n'est pas connue. Bien que souvent la valeur  $\hat{x}_0 = 0$  soit utilisée, il est préférable de choisir pour valeur initiale  $\hat{x}_0 = C^+ y_0$  où  $y_0$  est la valeur initiale de la sortie et  $C^+$  est la matrice pseudo-inverse de  $C$ , soit la matrice obtenue comme suit :

$$C^+ = C^T(CC^T)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \left[ \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]^{-1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où : } \hat{x}_0 = C^+ y_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La figure montre qu'avec cette valeur particulière de condition initiale  $\hat{x}_0$ , la sortie du système performe beaucoup mieux qu'avec un choix de  $\hat{x}_0 = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0 \end{pmatrix}$ . De façon générale, le choix de  $\hat{x}_0 = C^+ y_0$  résulte en une performance améliorée.

**Remarque 2 :** Cette structure est en fait prédictive car l'entrée  $R(s)$  est appliquée directement au processus. Toutefois, si nous supposons  $R(s) = 0$ , nous pourrions envisager la structure de rétroaction suivante à retour unitaire. Cette structure est valide dans le cas où  $R(s)$  est une constante. Autrement, il faudra considérer  $C(s)$  comme un simple circuit de phase (voir la section r différent de 0).



**f) Pour une entrée de référence fixe  $r = \theta_r$  non nulle (sans observateur)**

Référons-nous à l'équation suivante :

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad , \quad u = -Kx = -k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_1 r$$

L'entrée  $K_1 r$  ne modifie pas la dynamique du système. Celle-ci reste donc inchangée.

$$\text{En situation de repos : } r = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x}_s = Ax_s + Bu_s = 0$$

$$\text{Pour : } r \neq 0 \quad \rightarrow \quad \dot{x} = Ax + Bu \neq 0$$

$$\text{Posons : } \tilde{u} = u - u_s \quad , \quad \tilde{x} = x - x_s \quad , \quad \tilde{y} = C\tilde{x} = y - r \quad , \quad \dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u}$$

$$\text{Ce qui donne : } \tilde{u} = -K\tilde{x} \quad , \quad \tilde{x} = 0 \rightarrow x = x_s \quad , \quad \tilde{y} = 0 \rightarrow y = r$$

Revenons aux variables originales ; nous obtenons :  $u = -Kx + u_s + kx_s$

$$\dot{x}_s = Ax_s + Bu_s = 0$$

Effectuons la manipulation algébrique suivante en utilisant la relation  $Ax_s + Bu_s = 0$  et en additionnant et soustrayant la quantité  $(BK)x_s$  :

$$(A - BK)x_s + B(u_s + Kx_s) = 0$$

$$\text{D'où : } x_s = -C(A - BK)^{-1}(u_s + Kx_s)$$

Si nous supposons que le système était stabilisé à  $x_s$ , nous aurions :  $y = r = Cx_s$ , soit

$$r = Cx_s = -C(A - BK)^{-1}(u_s + Kx_s)$$

Les grandeurs  $u_s, K, x_s$  sont des constantes. Posons comme solution :

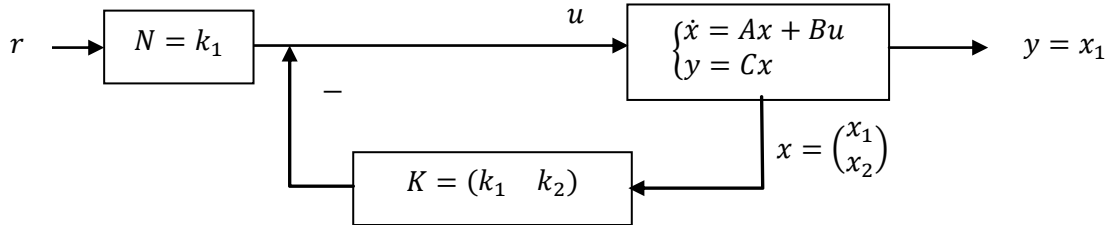
$$u_s + Kx_s = Nr \quad \rightarrow \quad r = -C(A - BK)^{-1}Nr$$

$$N^{-1} = -C(A - BK)^{-1}B \quad \rightarrow \quad u = -kx + Nr$$

Dans le cas de notre exemple :

$$N^{-1} = (-C(A - BK)^{-1}B)^{-1} = \left( -(1 \ 0) \left( \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} (k_1 \ k_2) \right)^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)^{-1} = \frac{1}{k_1}$$

La boucle fermée devient :



Le système de rétroaction est maintenant défini par les relations suivantes :

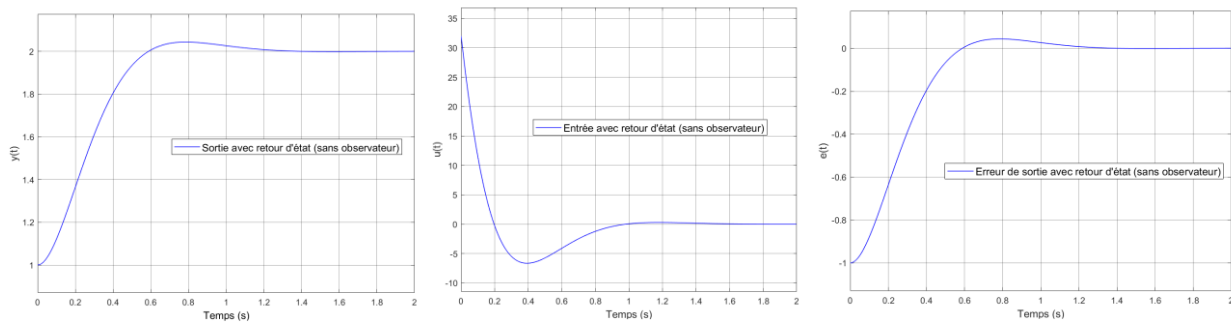
$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ u = Nr - Kx \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} X(s) = (sI - A + BK)^{-1} BNR(s) \\ Y(s) = CX(s) = C(sI - A + BK)^{-1} BNR(s) \\ N = -C(A - BK)^{-1} B \\ T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = C(sI - A + BK)^{-1} BN = -C(sI - A + BK)^{-1} BC(A - BK)^{-1} B \end{cases}$$

Dans le présent exemple,  $N = 32$  et  $T(s) = -\frac{32}{s^2 + 8s + 32}$ . Noter que l'erreur statique est nulle du fait que  $\lim_{s \rightarrow 0} (sT(s) \cdot \frac{2}{s}) = 2$ .

Les figures suivantes représentent  $x(t)$ ,  $u(t)$  et  $\tilde{x}(t) = y(t) - r(t)$  respectivement pour  $x(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et une référence  $r = 2$ .



**Remarque :** Si on avait choisi  $N = 1$ , on aurait des résultats qui mettraient en évidence une très grande erreur statique.

**g) Diagramme de Bode de la boucle ouverte  $P(s)C(s)$  avec observateur,  $C(s) = G_e(s)$  :**

$$C(s) = \frac{1440s + 3200}{(s^2 + 28s + 292)} \quad , \quad P(s) = \frac{1}{s^2} \quad \rightarrow \quad P(s)C(s) = \frac{1440s + 3200}{s^2(s^2 + 28s + 292)}$$

Le gain de boucle  $P(s)C(s)$  contient un zéro (-2.2), deux pôles à l'origine (0,0) et deux pôles complexes ( $-14 \pm j9.8$ ). Notons que le double pôle complexe a une fréquence naturelle de  $\sqrt{292} = 17.08 \text{ rad/s}$ .

Contournons le pôle à l'origine dans le plan  $s$  afin qu'il n'y ait pas de discontinuité dans le contour et posons  $s = \rho e^{j\theta}$ ,  $\rho \rightarrow 0$  et  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . Il s'en suit une variation de  $G(s)$  de  $\infty \angle 0$  à  $\infty \angle -\pi$  dans le sens horaire. Le diagramme de Bode montre un gain généralement décroissant. La phase commence à  $-180^\circ$ , (en raison des deux pôles à l'origine) augmente quelque peu en raison du zéro avant de diminuer d'un autre  $180^\circ$  pour finir ultimement à  $-360^\circ$  degrés (effet de quatre pôles) +  $90^\circ$  (effet du zéro). En hautes fréquences, la phase finale est donc de  $-270^\circ$ .

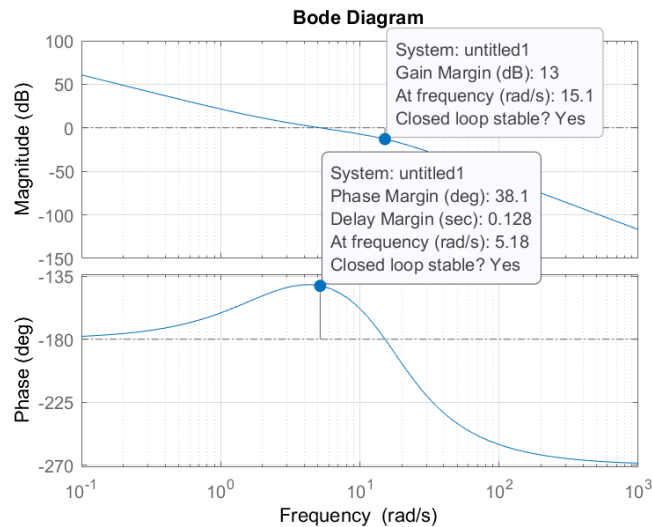
$$\omega \rightarrow 0^+ \quad \rightarrow \quad |G(j\omega)| \rightarrow \infty \quad , \quad \angle G(j\omega) \rightarrow -180^\circ$$

$$\omega \rightarrow +\infty \quad \rightarrow \quad |G(j\omega)| \rightarrow 0 \quad , \quad \angle G(j\omega) \rightarrow -270^\circ$$

Notons que lorsque la fréquence augmente, l'axe des réels négatifs est traversé par le diagramme de Nyquist.

**Bode sur MATLAB:**

```
P=tf([1],[1 0 0]);
CC=tf([1440 3200],[1 28 292]);
bode(P*CC)
```

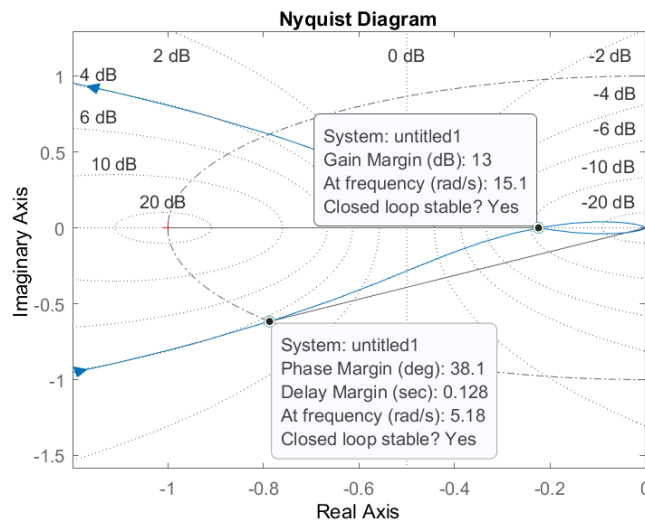
**h) Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte  $P(s)C(s)$  avec observateur,  $C(s) = G_e(s)$** 

$$C(s) = \frac{1440s + 3200}{(s^2 + 28s + 292)} \quad , \quad P(s) = \frac{1}{s^2} \quad \rightarrow \quad P(s)C(s) = \frac{1440s + 3200}{s^2(s^2 + 28s + 292)}$$

**Nyquist sur MATLAB:**

```
P=tf([1],[1 0 0]);
CC=tf([1440 3200],[1 28 292]);
```

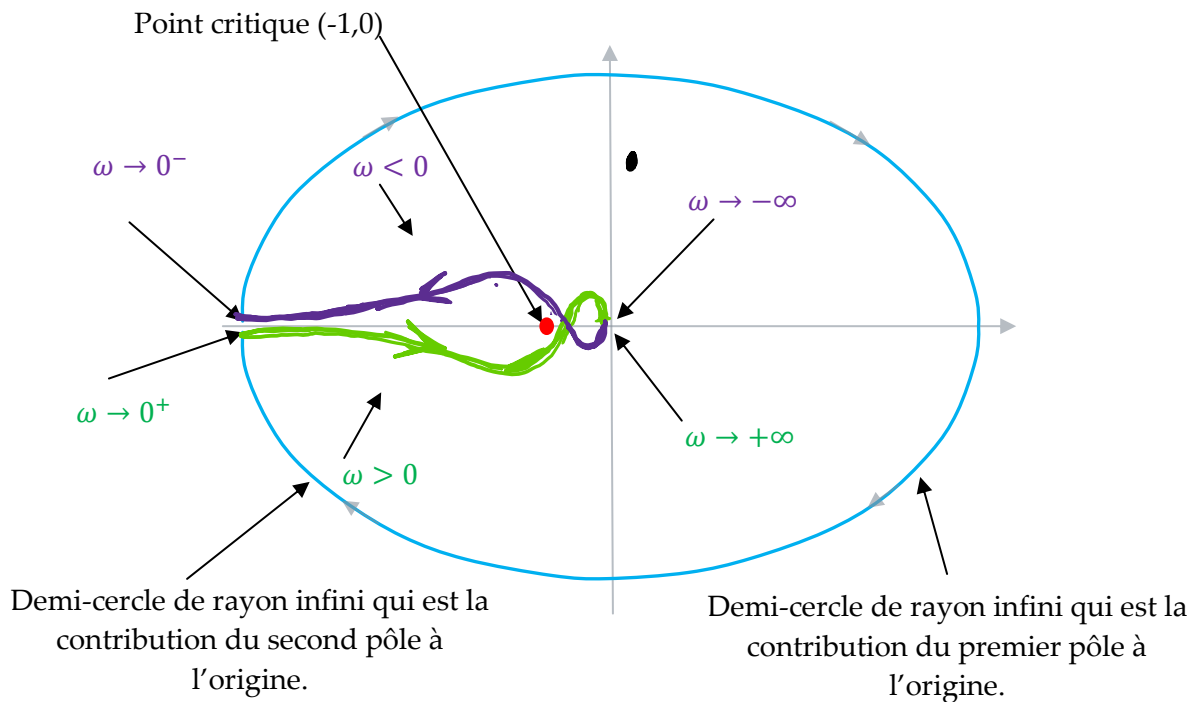
nyquist (P\*CC)

**Tracé de Nyquist manuel :**

$$C(s)P(s) = \frac{1440s + 3200}{s^2(s^2 + 28s + 292)}$$

$$m = 1, \quad n = 4$$

$$\begin{array}{lll} \omega \rightarrow 0^+ & \rightarrow & |G(j\omega)| \rightarrow \infty, \quad \angle G(j\omega) \rightarrow -180^\circ \\ \omega = 5.2 \text{ rad/s} & \rightarrow & |G(j\omega)| = 1, \quad \angle G(j\omega) \rightarrow -142^\circ \\ \omega \rightarrow +\infty & \rightarrow & |G(j\omega)| \rightarrow 0, \quad \angle G(j\omega) \rightarrow -270^\circ \end{array}$$



**L'intersection du graphe avec l'axe réel :**

$$I_m\{P(j\omega)C(j\omega)\} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{-180} = 15.15 \text{ rad/s}$$

D'où :

$$P(j\omega_{-180})C(j\omega_{-180}) = -0.22$$

Précisons que le diagramme de Nyquist obtenu par simulation MATLAB ne montre pas l'encerclement dans le sens horaire dû au double pôle à l'origine soit de la valeur  $\infty \angle 0^\circ$  à  $\infty \angle 180^\circ$  et son symétrique.

Le diagramme de Nyquist obtenu par simulation MATLAB nous donne directement la marge de phase et la marge de gain, soit :  $PM = 38.1^\circ$  et  $GM = 13 \text{ dB}$ . Il est également possible d'identifier la fréquence unitaire  $\omega_{odB} = 15.1 \text{ rad/s}$  et la fréquence à  $-180^\circ$   $\omega_{-180^\circ} = 5.18 \text{ rad/s}$ . Le point critique n'est pas encerclé donc  $N=0$  (le point d'intersection est à droite du point critique). Il n'y a pas de pôles instables dans la chaîne directe  $P(s)C(s)$  donc  $P=0$ . On a  $N=P=0$ , le système est donc stable.

**Nyquist sur GEOGEBRA**

$s = \text{Point}(y\text{Axis})$

$\rightarrow 0 + 0.5i$

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$C(s) = \frac{1440s + 3200}{s^2 + 28s + 292}$$

$$L(s) = C(s)P(s)$$

$$\rightarrow \frac{1440s + 3200}{s^2 + 28s + 292} \cdot \frac{1}{s^2}$$

Nyquist = Locus( $L(s)$ ,  $s$ )

$c : \text{Circle}((0,0),1)$

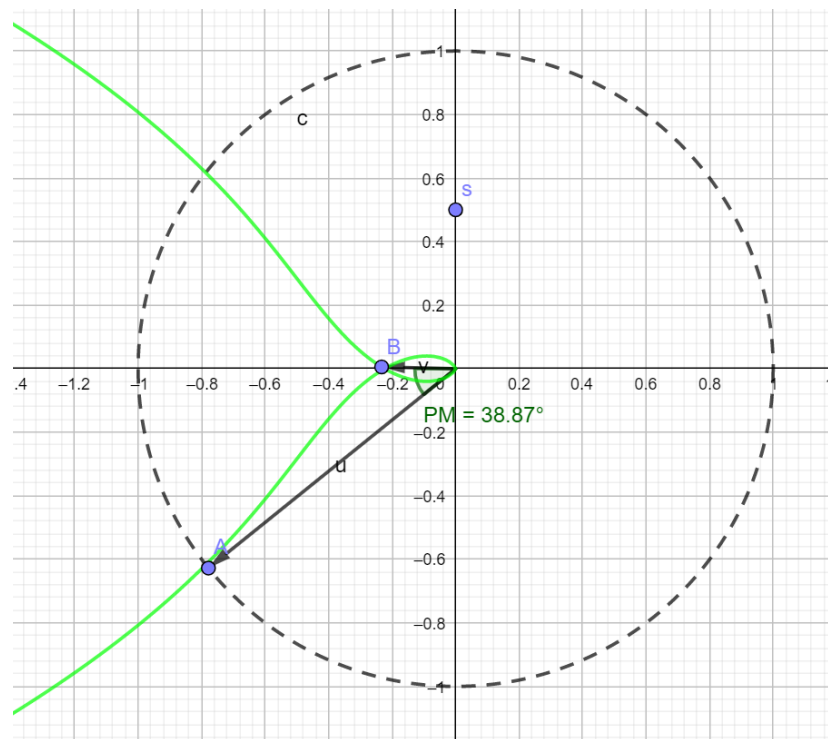
$$\rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$A = \text{Point}(c)$

$\rightarrow (-0.78, -0.63)$

$u = \text{Vector}((0,0), A)$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -0.78 \\ -0.63 \end{pmatrix}$$



Sur GEOGEBRA, la marge de phase et la marge de gain ne sont pas données automatiquement mais il faut les calculer :



$$PM = \text{Angle}(\text{Vector}((0,0), (-1,0)), u)$$

$$\rightarrow 38.87^\circ$$

$$B = \text{Point}(\text{Nyquist})$$

$$\rightarrow (-0.23, 0.01)$$

$$v = \text{Vector}((0,0), B)$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -0.23 \\ 0.01 \end{pmatrix}$$

$$GM = 20 \log_{10} \left( \frac{1}{|v|} \right)$$

$$\rightarrow 12.65$$

Après calculs on trouve :  $PM = 38.87^\circ$  et  $GM = 12.65 \text{ dB}$ . Pour plus de précision, il faut positionner les points A et B avec précision.

**i) Calcul analytique de GM et PM et le point d'intersection avec l'axe réel :**

$$P(s)C(s) = \frac{1440s + 3200}{s^2(s^2 + 28s + 292)}$$

$$P(j\omega)C(j\omega) = \frac{j1440\omega + 3200}{(j\omega)^2((j\omega)^2 + j28\omega + 292)} = \frac{j1440\omega + 3200}{(\omega^4 - 292\omega^2 - j28\omega^3)}$$

L'intersection du graphe avec l'axe réel :

$$I_m\{P(j\omega)C(j\omega)\} = 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{-180} = 15.15 \text{ rad/s}$$

D'où :

$$P(j\omega_{-180})C(j\omega_{-180}) = -0.22$$

L'intersection du graphe avec le cercle unitaire :

$$|P(j\omega)C(j\omega)| = 1 \quad \rightarrow \quad \omega_{odB} = 5.12 \text{ rad/s}$$

D'où :

$$|P(j\omega_{odB})C(j\omega_{odB})| = 0.99$$

Marge de phase :

$$PM = 180^\circ + \frac{180}{\pi} \angle P(j\omega)C(j\omega)|_{\omega=\omega_{odB}} = 38.19^\circ$$

Marge de gain :

$$GM = -20 \log |P(j\omega)C(j\omega)|_{\omega=\omega_{-180}} = 13 \text{ dB}$$

```
syms w
P_w=1/(i*w)^2;
```

```

CC_w=(1440*(i*w)+3200)/((i*w)^2 + 28*(i*w) + 292);
L_w=simplify(P_w*CC_w);
% intersection avec l'axe des réels:
w180=solve(imag(L_w)==0,w);
% w180 =
% 15.1584
L_w180=((1440*(i*w180)+3200)/((i*w180)^2 + 28*(i*w180) + 292))*(1/(i*w180)^2);
% L_w180 =
% -0.2238 - 1.0691e-38i
% intersection avec le cercle unitaire:
wu=solve(abs(L_w)==1,w);
% wu =
% 5.1200
L_wu=abs(((1440*(i*wu)+3200)/((i*wu)^2 + 28*(i*wu) + 292))*(1/(i*wu)^2));
% L_wu =
% 0.9999
% Marge de phase:
PM=180+(180/pi)*angle(((1440*(i*wu)+3200)/((i*wu)^2 + 28*(i*wu) + 292))*(1/(i*wu)^2));
% PM =
% 38.1962 degré
% Marge de gain:
GM=-20*log10(abs(((1440*(i*w180)+3200)/((i*w180)^2 + 28*(i*w180) + 292))*(1/(i*w180)^2)));
% GM =
% 13.0020 dB

```

#### j) Solution discrète :

$$T = 0.1 \text{ sec}$$

#### Représentation discrète :

$$A_d = I + AT \quad , \quad B_d = BT + AB \frac{T^2}{2}$$

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad B_d = \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2} \\ T \end{pmatrix} \quad , \quad K = (k_1 \quad k_2)$$

% Solution discrète:

T=0.1;

Ad=eye(2)+A\*T;

Bd=B\*T+A\*B\*(T^2/2);

#### Retour d'état pour le système discret :

L'équation caractéristique du système avec retour d'état est :

$$\det(zI - A_d + B_d K) = z^2 + \left( T k_2 + \left( \frac{T^2}{2} \right) k_1 - 2 \right) z + \left( \frac{T^2}{2} \right) k_1 - T k_2 + 1 = 0$$

Comparons avec l'équation caractéristique désirée :

$$z_{1,2} = e^{-\xi \omega_n T} e^{\pm j \omega_n T \sqrt{1-\xi^2}} \text{ avec } T = 0.1, \xi = 0.707 \text{ et } \omega_n = 5.65 \text{ rad/s (Voir question b)}$$

```

% Équation caractéristiques avec retour d'état:
syms z k1 k2
K=[k1 k2];
det(z*eye(2)-Ad+Bd*K)
% ans =
% k1/200 - k2/10 - 2*z + (k1*z)/200 + (k2*z)/10 + z^2 + 1
% Équation désirée Ts=1s , zeta=0.707 , wn=5,56 rad/s
zeta=0.707;
wn=5.56;
z1=exp(-zeta*wn*T)+i*wn*T*sqrt(1-zeta^2);
% z1 =
% 0.6750 + 0.3932i
z2=exp(-zeta*wn*T)-i*wn*T*sqrt(1-zeta^2);
% z2 =
% 0.6750 - 0.3932i
expand((z-z1)*(z-z2))
% z^2 - 1.3414*z + 0.6095 = 0
[k1,k2]=solve(- 2 + k1/200 + k2/10 == - 1.3414 , k1/200 - k2/10 + 1 == 0.6095,k1,k2)
% k1 =
% 2681/100 = 26.8100
% k2 =
% 10491/2000 = 5.2455
Kd=[26.81 5.24];

```

### Observateur pour le système discret :

De la même façon, les pôles de l'observateur  $H = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$  que nous placerons de façon à obtenir des pôles 5 fois plus éloignés que ceux du retour d'état.

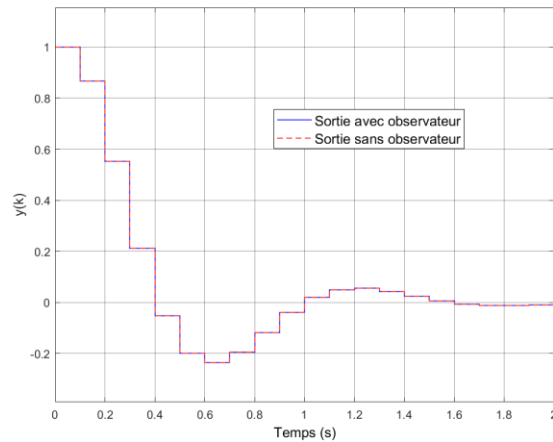
```

% Observateur complet (système discret):
syms z h1 h2
H=[h1 ; h2];
% Équation caractéristique
det(z*eye(2)-Ad+H*C)
% ans =
% h2/10 - h1 - 2*z + h1*z + z^2 + 1
% Équation désirée (5 fois plus rapide que le retour d'état)
zeta=0.707;
wn=5.56;
z1=(exp(-zeta*wn*T)+i*wn*T*sqrt(1-zeta^2))^5;
% z1 =
% -0.2547 + 0.1405i
z2=(exp(-zeta*wn*T)-i*wn*T*sqrt(1-zeta^2))^5;
% z2 =
% -0.2547 - 0.1405i
expand((z-z1)*(z-z2))
% z^2 + 0.5093*z + 0.0846 = 0
[h1,h2]=solve(- 2 + h1 == 0.5093 , h2/10 - h1 + 1 == 0.0846,h1,h2)
% h1 =
% 25093/10000 = 2.5093
% h2 =
% 15939/1000 = 15.9390

```

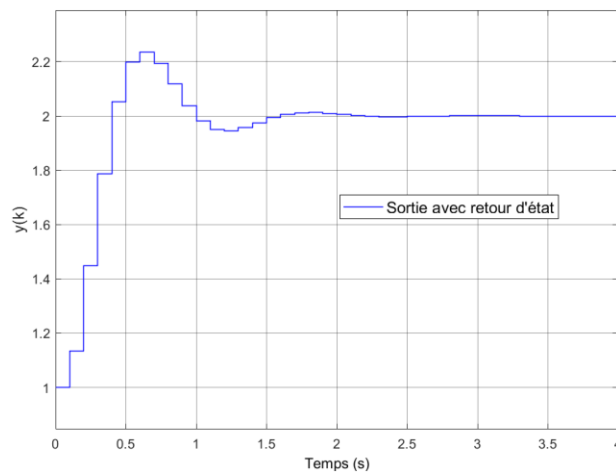
**Réponse temporelle du système discret avec retour d'état et observateur complet pour une référence nulle  $r = 0$ :**

$$x_{d0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} , \quad \hat{x}_{d0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



**Réponse temporelle du système discret avec retour d'état pour une référence non nulle  $r = 2$ :**

$$x_{d0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



**k) Commande optimale :**

Trouver les nouveaux gains  $K_1$  et  $K_2$  qui minimisent la fonction de coût suivante :

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t)C^TQCx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt$$

Avec les pondérations suivantes :  $Q = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  ,  $R = 2$ .

$$\begin{aligned}
 J &= \int_0^{\infty} [x^T(t)C^TQCx(t) + u^T(t)Ru(t)] dt = \int_0^{\infty} (y(t)^TQy(t) + u(t)^TRu(t))dt \\
 &= \int_0^{\infty} \left( (1 \quad 0) \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} (x_1 \quad x_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 2u^2 \right) dt = \int_0^{\infty} (2x_1^2 + 2x_2^2 + 2u^2) dt
 \end{aligned}$$

Pour trouver la valeur  $u$  qui minimise  $J$ , calculons la matrice  $P$  qui vérifie l'équation de Ricatti suivante :  $A^T P + P A + Q = P B R^{-1} B^T P$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} 2^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$$

En comparant les éléments des matrices, nous trouvons :  $P = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{21} & P_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

D'où le gain de retour :

$$u = -K_{\text{opt}}x = -R^{-1}B^T Px = -2^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} x = -(1 \quad 1)x = -(1 \quad 1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1 - x_2$$

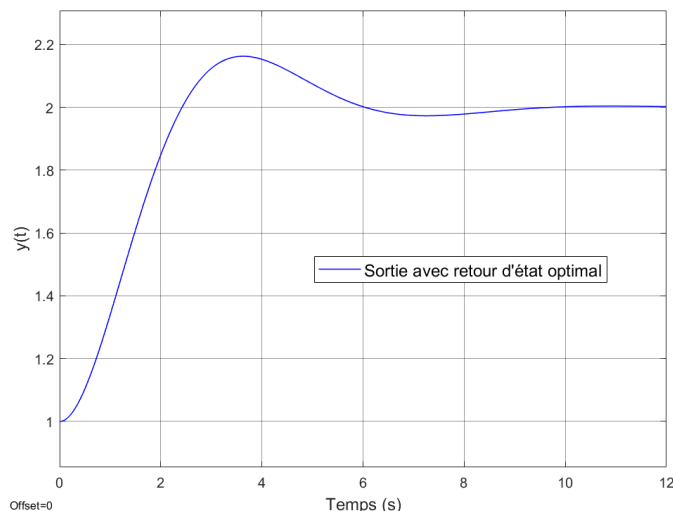
```

% Commande optimale système continue
Q=[2 0 ; 0 0];
R=2;
[Kopt,S,E] = lqr(A, B, Q ,R )
Nopt=(-C*(A-B*Kopt)^-1*B)^-1;

```

**Réponse temporelle du système continu avec retour d'état optimal pour une référence non nulle :**

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$



La figure montre que la convergence vers la valeur désirée est très lente lorsque la commande optimale est utilisée. Cependant, la minimisation de la fonction de coût a résulté en un gain optimal plus faible.