Diagramme de Nyquist – Critère de stabilité

Définition :

Tracé de l'amplitude $A = |KG(j\omega)|$ et de son angle de phase $\varphi = \angle KG(j\omega)$ pour $0 \leq \omega \leq +\infty$

Règles générales :

- L'angle de phase φ est maximum lorsque $\omega = +\infty$
- $\varphi_{max} = -90^{\circ}(n - m)$. n : nombre de pôles, m : nombre de zéros.
- Le diagramme de Nyquist est symétrique par rapport à l'axe des réels (x) : Le tracé de $0 \leq \omega \leq +\infty$ est symétrique par rapport à celui de $-\infty \leq \omega \leq 0$
- Pour chaque intégration $\left(\frac{1}{s}\right)$ dans la fonction de transfert $KG(j\omega)$, un retard de 90° sera produit $\left(\varphi = -90^{\circ}\right)$
- Pour chaque intégration, un demi-cercle symétrique par rapport à l'axe des réels sera ajouté à droite de la partie symétrique $(-\infty \leq \omega \leq 0)$.
- Les systèmes de type 0 : pas de courbes asymptotiques.
- Les systèmes de type 1 : les courbes sont asymptotiques à l'axe imaginaire négatif $\left(\varphi = -90^{\circ}\right)$ lorsque $\omega = 0$
- Les systèmes de type 2 : les courbes sont asymptotiques à l'axe réel négatif $\left(\varphi = -180^{\circ}\right)$ lorsque $\omega = 0$

Critère de stabilité de Nyquist :

P: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

Z: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle fermée.

$Z = N - P$

Si $Z=0$, le système est stable.

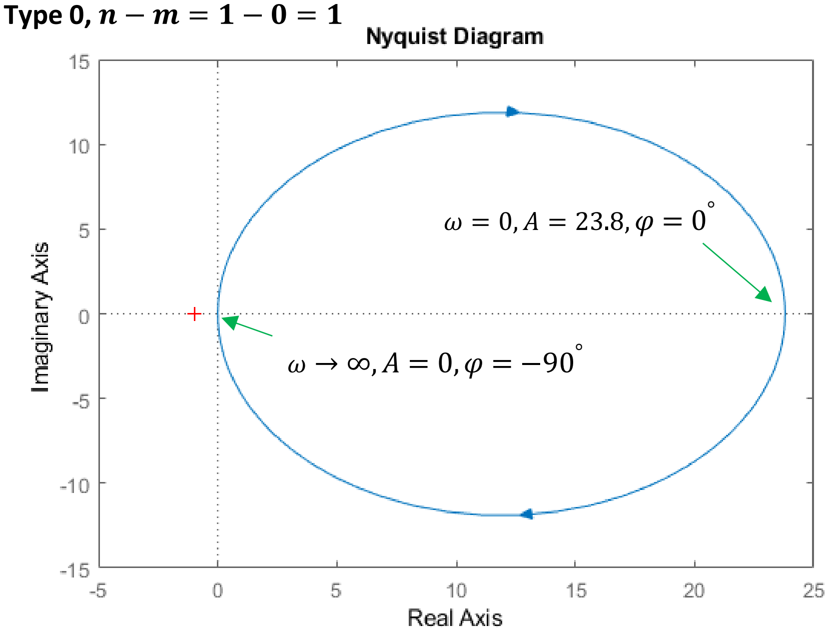
Exemple #1 : Système premier ordre : Type 0, $n - m = 1 - 0 = 1$

$$KG(s) = \frac{23.8}{0.138s + 1}$$

$$KG(j\omega) = \frac{23.8}{0.138j\omega + 1}$$

$$|KG(j\omega)| = \frac{23.8}{\sqrt{1 + 0.02\omega^2}}$$

$$\varphi = -tan^{-1}(0.138\omega)$$



$\omega = 0 \quad \to \quad |KG(j\omega)| = 23.8$

$\quad \to \quad \varphi = 0^{\circ}$

$\omega = \omega_c = \dfrac{1}{0.138} = 7.25\, rad/s \quad \to \quad |KG(j\omega)| = \dfrac{23.8}{\sqrt{2}}$

$\quad \to \quad \varphi = -tan^{-1}(0.138\omega) = -tan^{-1}(1) = -45^{\circ}$

$\omega \to \infty \quad \to \quad |KG(j\omega)| = 0$

$\quad \to \quad \varphi = \varphi_{max} = -90^{\circ}(n - m) = -90^{\circ}$

Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

$Z = N - P$=0, le système est donc stable.

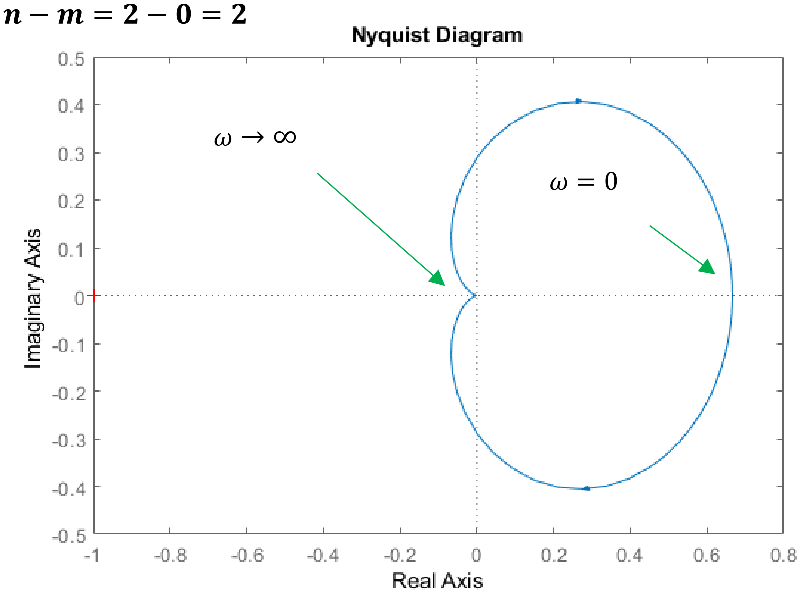
Exemple #2 :Système second ordre : Type 0, $n - m = 2 - 0 = 2$

$$KG(s) = \frac{0.5}{(s+0.5)(s+1.5)}$$

$$KG(j\omega) = \frac{0.5}{(j\omega+0.5)(j\omega+1.5)}$$

$$|KG(j\omega)| = \frac{0.5}{\sqrt{(0.75-\omega^2)^2 + 4\omega^2}}$$

$$\varphi = -tan^{-1}\left(\frac{2\omega}{0.75-\omega^2}\right)$$



$$\omega = 0 \quad \to \quad |KG(j\omega)| = 0.66$$

$$\to \quad \varphi = 0^{\circ}$$

$$\omega = \omega_n = \sqrt{0.75} = 0.86\, rad/s \quad \to \quad |KG(j\omega)| = \frac{0.5}{2\sqrt{0.75}} = 0.29$$

$$\to \quad \varphi = -tan^{-1}(-\infty) = -90^{\circ}$$

$$\omega \to \infty \quad \to \quad |KG(j\omega)| = 0$$

$$\to \quad \varphi = \varphi_{max} = -90^{\circ}(n-m) = -180^{\circ}$$

Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

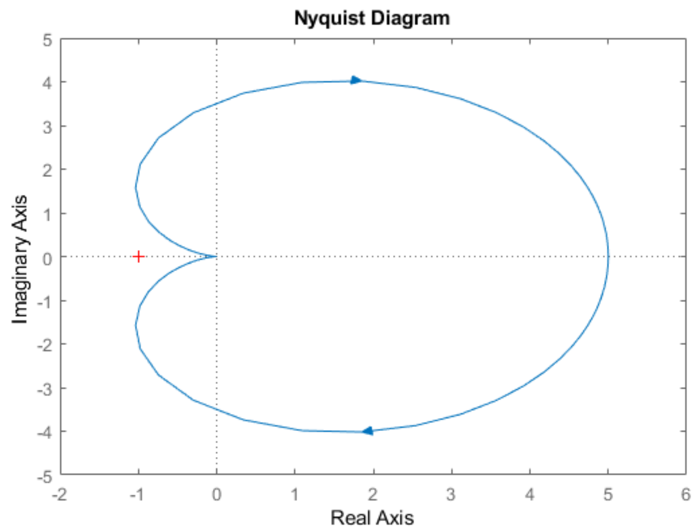
N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

Z = N - P=0, le système est donc stable.

Exemple #3 : Système second ordre : Type 0, $n - m = 2 - 0 = 2$

$$KG(s) = \frac{10}{(s+1)(s+2)}$$



Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

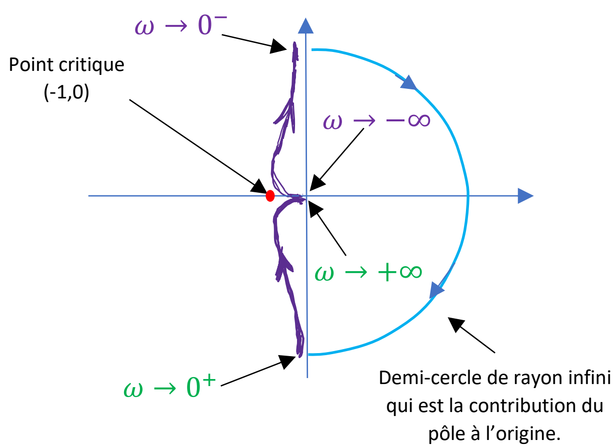
Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

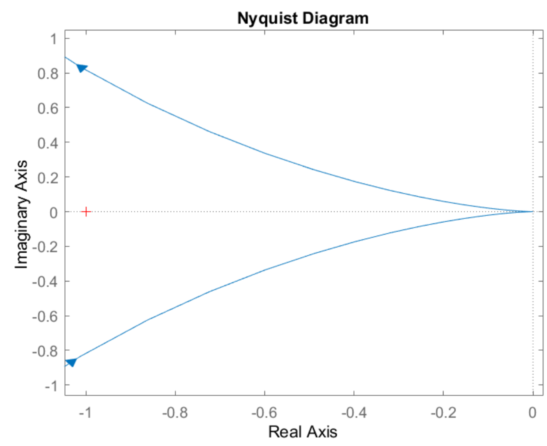
$Z = N - P = 0$, le système est donc stable.

Exemple #4 : Système second ordre : Type 1, $n - m = 2 - 0 = 2$

$$KG(s) = \frac{10}{s(s+2)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

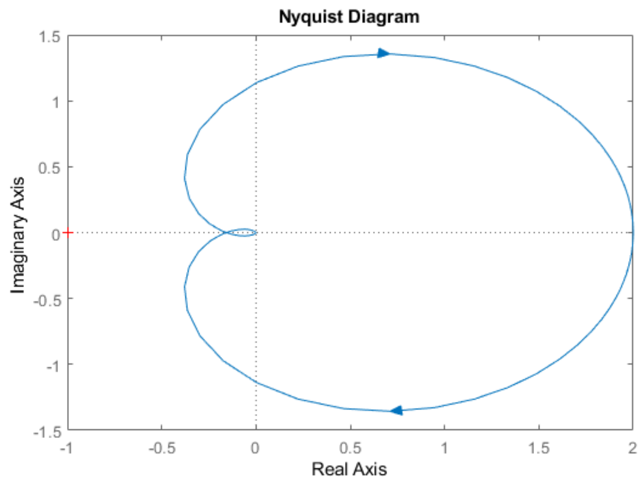
N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

Z = N - P=0, le système est donc stable.

Exemple #5 : Système troisième ordre : Type 0, $\boldsymbol{n-m=3-0=3}$

$$KG(s)=\frac{20}{(s+1)(s+2)(s+5)}$$



Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

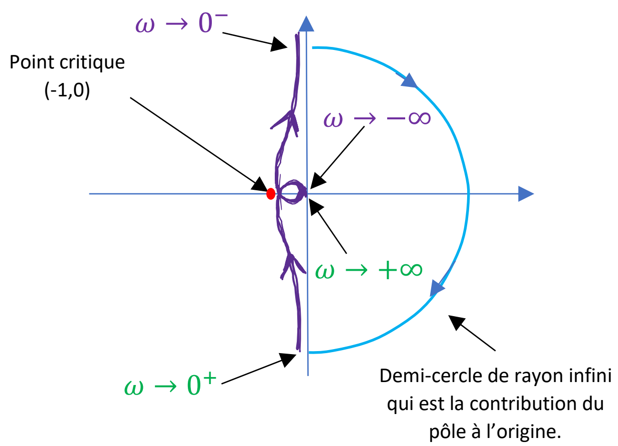
Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

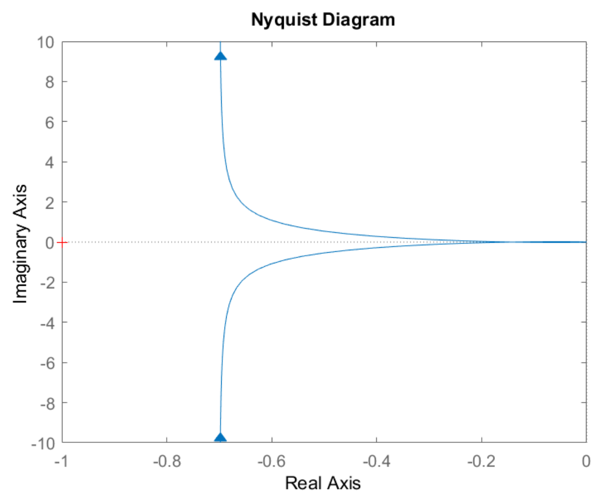
Z = N - P=0, le système est donc stable.

Exemple #6 : Système troisième ordre : Type 1, $n - m = 3 - 0 = 3$

$$KG(s) = \frac{20}{s(s+2)(s+5)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

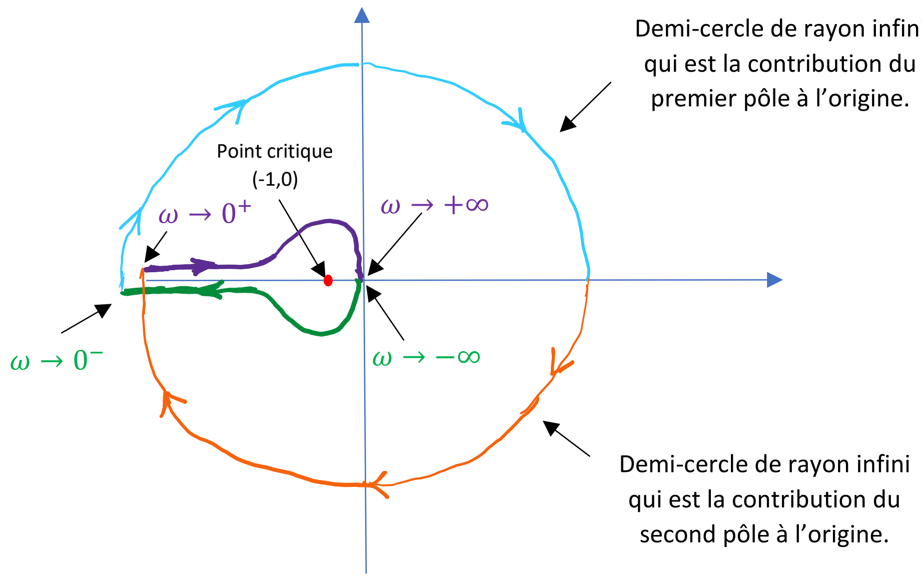
Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

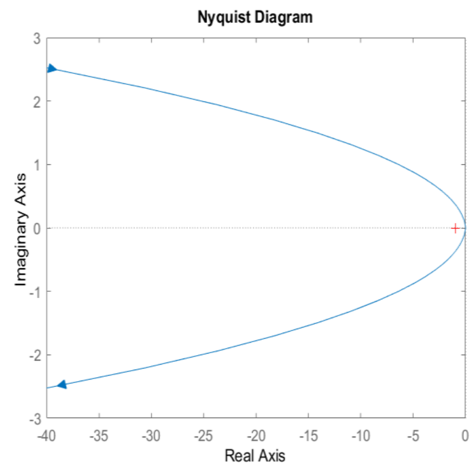
Z = N - P=0, le système est donc stable.

Exemple #7 : Système troisième ordre : Type 2, $n - m = 3 - 0 = 3$

$$KG(s) = \frac{20}{s^2(s+5)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle ouverte.

N=2: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **horaire.**

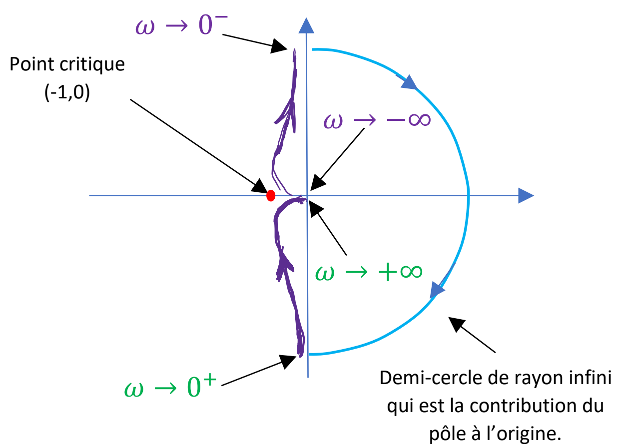
Z: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle fermée.

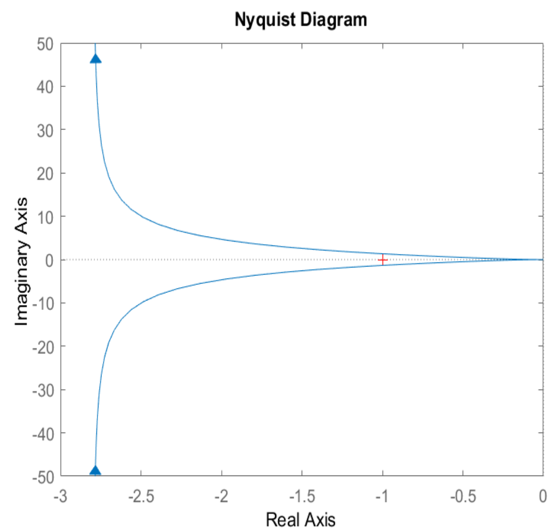
Z = N - 0=2, le système est donc instable.

Exemple #8 : Système troisième ordre : Type 1, $n - m = 3 - 1 = 2$

$$KG(s) = \frac{10(s+2)}{s(s+1)(s+5)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

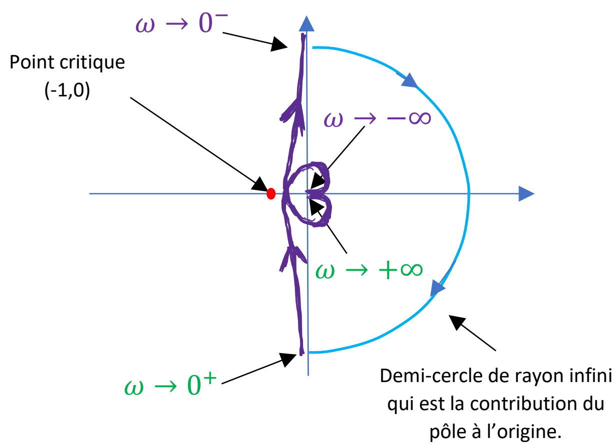
Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

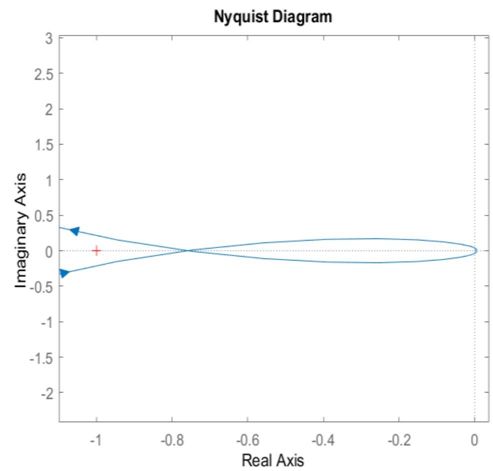
Z = N - P=0, le système est donc stable.

Exemple #9 : Système quatrième ordre : Type 1, $\boldsymbol{n-m=4-0=4}$

$$KG(s)=\frac{300}{s(s+3)(s+4)(s+8)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A=|KG(j\omega)|=\infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

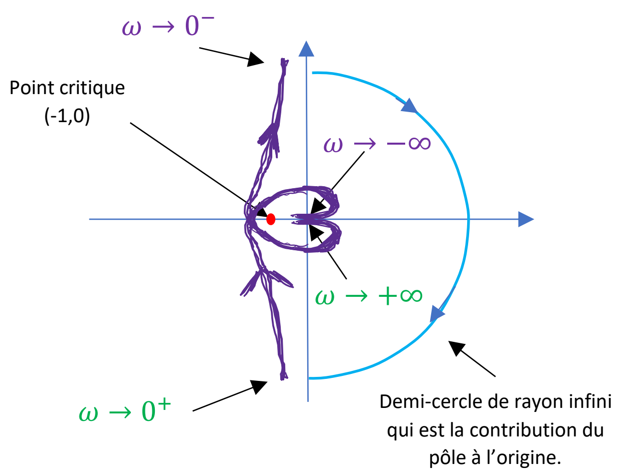
Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

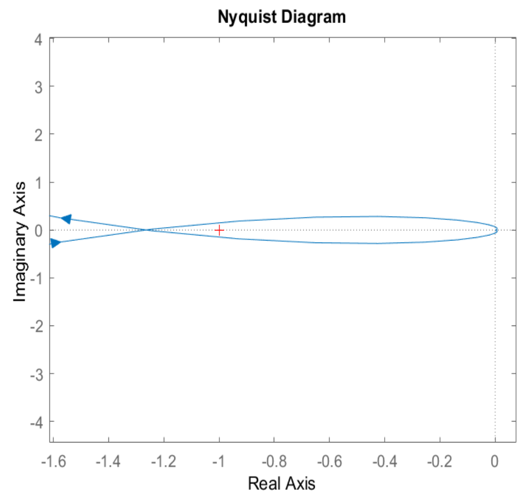
Z = N - P=0, le système est donc stable.

Exemple #10 : Système quatrième ordre : Type 1, $n - m = 4 - 0 = 4$

$$KG(s) = \frac{500}{s(s+3)(s+4)(s+8)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=1: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **horaire.**

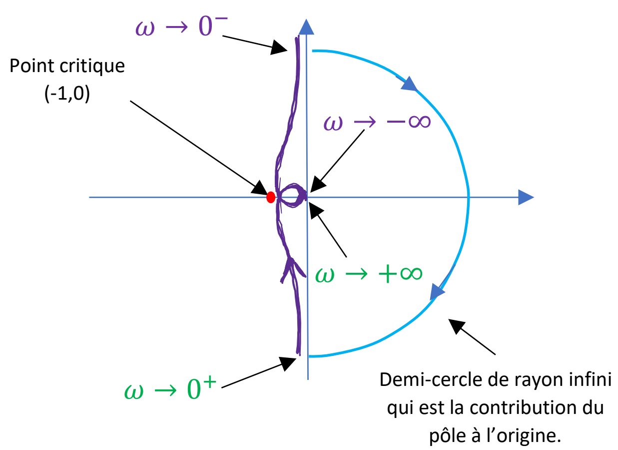
Z: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle fermée.

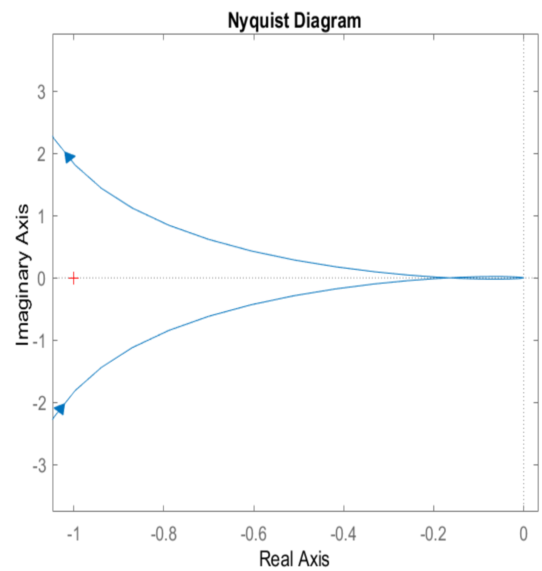
$Z = N - P = 1$, le système est donc instable.

Exemple #11 : Système troisième ordre : Type 1, $n - m = 3 - 0 = 3$

$KG(s) = \dfrac{40}{s(s+2)(s+10)}$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

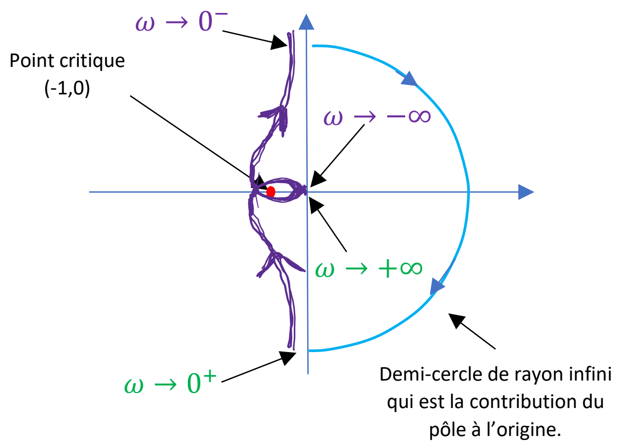
Z: Nombre de pôles dans le demi-plan droit de la boucle fermée.

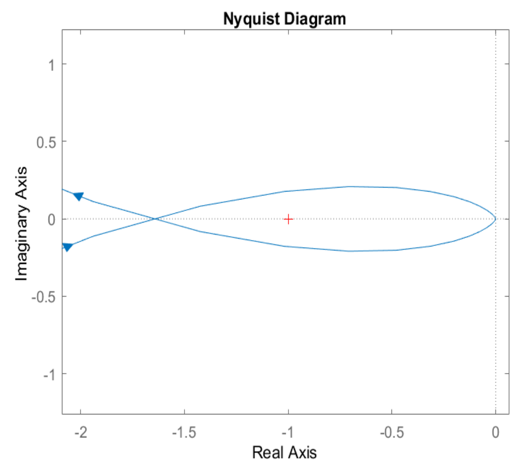
$Z = N - P = 0$, le système est donc stable.

Exemple #12 : Système troisième ordre : Type 1, $n - m = 3 - 0 = 3$

$$KG(s) = \frac{400}{s(s+2)(s+10)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=0: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=1: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **horaire.**

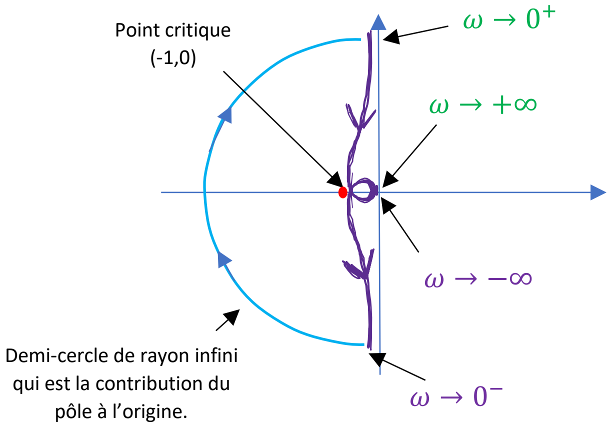
Z: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle fermée.

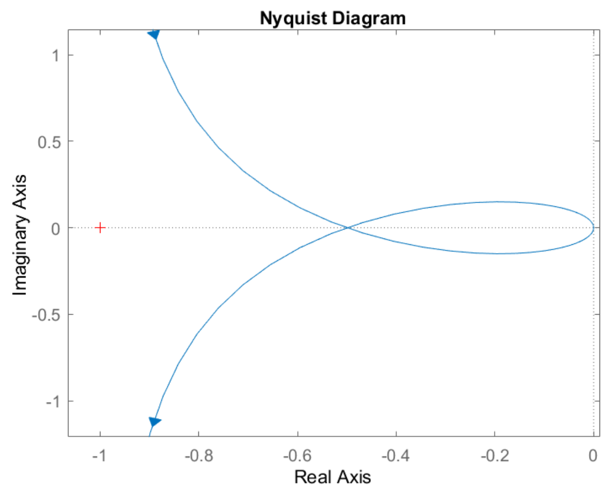
$Z = N - P$=1, le système est donc instable.

Exemple #13 : Système second ordre : Type 1, $n - m = 2 - 1 = 1$

$$KG(s) = \frac{0.5(s+1)}{s(s-1)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=1: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=0: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

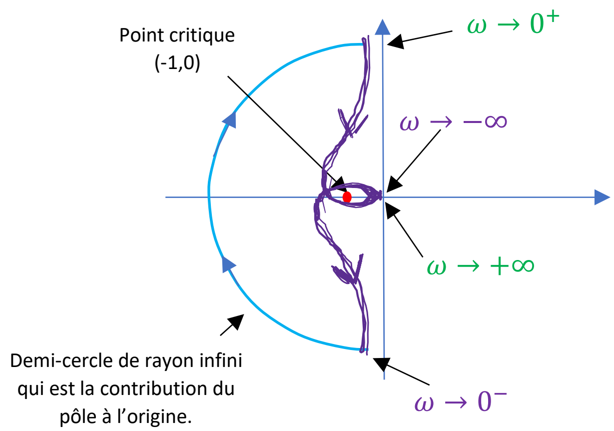
Z: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle fermée.

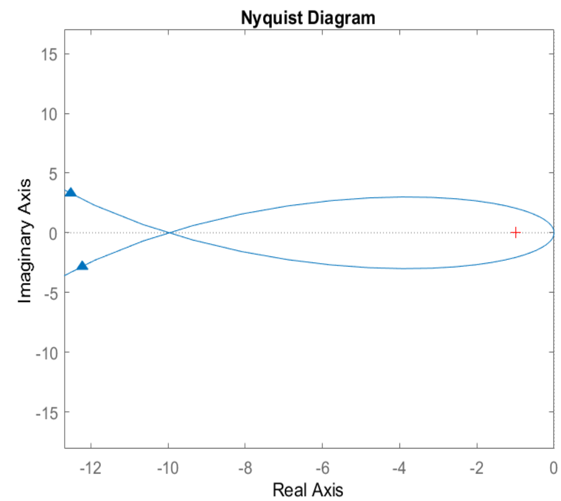
$Z = P - N = 1$, le système est donc instable.

Exemple #14 : Système second ordre : Type 1, $n - m = 2 - 1 = 1$

$$KG(s) = \frac{10(s+1)}{s(s-1)}$$

On ne peut pas voir les allures complètes de Nyquist car Matlab ne peut pas tracer le module $A = |KG(j\omega)| = \infty$.





Critère de stabilité de Nyquist :

P=1: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle ouverte.

N=1: Nombre d'encerclements autour du point critique (−1,0) dans le sens **anti-horaire.**

Z: Nombre de pôles instables (dans le demi-plan droit) de la boucle fermée.

Z = N - P=0, le système est donc stable.