

CHAPITRE III : INTRODUCTION À LA COMMANDE B

La théorie classique du contrôle des systèmes linéaires invariant dans le temps s'intéresse à l'amélioration des mesures de performance d'un système contrôlé dans les domaines fréquentiel et temporel. En particulier, les objectifs d'amélioration des performances dans le domaine temporel impliquent généralement la diminution des temps de montée, de l'erreur en régime permanent, de la sensibilité à l'incertitude de modélisation ou aux perturbations externes ainsi que des réponses temporelles avec un temps de stabilisation plus court et un dépassement minimal.

Les objectifs d'amélioration des performances dans le domaine fréquentiel consistent généralement à augmenter les marges de stabilité de phase et de gain pour améliorer la robustesse du système de rétroaction. La forme la plus simple de compensation utilisée pour améliorer la réponse transitoire d'un système est basée sur une rétroaction à gain élevé, car il est bien connu que l'augmentation du gain entraîne avantageusement une augmentation des vitesses de réponse, une diminution de l'erreur en régime permanent, etc. Cependant, la compensation à gain élevé nécessite un compromis entre la sélection d'un gain approprié et d'autres mesures de performance acceptables. En effet, une augmentation du gain dans une mesure suffisamment élevée dans certains systèmes peut conduire à un comportement oscillatoire et à l'instabilité. Au cours des années 80, un énorme intérêt a été accordé au problème de la robustesse, ce qui a conduit à la théorie du contrôle H^∞ (Zames 1983)¹. Cependant, l'optimisation de la sensibilité par l'opérateur se traduisait essentiellement par des résultats de robustesse de la réponse en fréquence. Bien que l'application d'un retour de gain élevé dans les méthodes de contrôle classiques conduise parfois à des oscillations et des instabilités, les algorithmes de robustesse ont montré qu'il est possible d'appliquer un gain très élevé et de bénéficier (d'un gain amélioré et de marges de phase tout en minimisant l'opérateur de sensibilité (Bensoussan 1984)². La réponse temporelle a été en quelque sorte négligée pendant un certain temps, l'hypothèse sous-jacente étant que l'amélioration de la réponse temporelle détériore généralement les performances de la réponse en fréquence.

En raison de ces lacunes, des compensateurs quasi-linéaires ont été proposés. Les compensateurs quasi-linéaires éliminent la contradiction entre les performances et la complexité du compensateur et, par conséquent, permettent d'obtenir des performances de suivi arbitraires proches de la perfection lorsque le gain du compensateur tend vers l'infini (Kelemen et Bensoussan 2004)³. En outre, il a été démontré que les compensateurs à rétroaction quasi-linéaires

¹ BENSOUSSAN, David, ZAMES, Georges, "Multivariable Feedback, Sensitivity and Decentralized Control", IEEE Transactions on Automatic Control, vol. AC-28, n° 11, novembre 1983.

² BENSOUSSAN, David, "Decentralized Control and Sensitivity Reduction of Weakly Coupled Systems", International Journal of Control, vol. 40, n° 6, p.1099-1118, 1984. - v40 n6 (198412): 1099-1118.

³ KELEMEN Mattei, BENSOUSSAN DAVID, "On the Design, Robustness, Implementation and Use of Quasi-Linear Feedback Compensator", International Journal of Control, 15 avril 2004, Vol 77, No 6, pp 527-545 - 77, no. 6 (2004): 527-545.

ont des réponses temporelles non oscillatoires pour des gains de compensateur élevés. Ces avantages que présentent les compensateurs quasi-linéaires par rapport aux compensateurs linéaires s'expliquent par l'adaptation automatique des pôles de la boucle fermée à la stabilité et aux marges de stabilité pour des gains de système plus élevés. Cependant, les contrôleurs quasi-linéaires de l'art antérieur n'ont pas encore abordé de manière exhaustive toutes les considérations de performance, en particulier l'amélioration des temps de montée du système. La présente méthode est un contrôleur quasi-linéaire qui est simultanément optimisable dans le domaine temporel et le domaine fréquentiel, qui réalise un suivi arbitrairement rapide et robuste, des marges de stabilité de gain et de phase améliorées, des performances améliorées dans le domaine temporel, et une sensibilité améliorée pour une variété de systèmes stables et instables. Bien que la conception soit basée sur l'inversion du processus, il sera démontré que la réponse temporelle non oscillatoire ultrarapide peut cohabiter avec un coût de rétroaction acceptable.

Les méthodes de contrôle robustes optimisent les gains énergétiques. Cependant, la distribution de phase du présent compensateur peut être modifiée dans des plages spécifiques du domaine fréquentiel afin d'obtenir une réponse temporelle améliorée ou en faisant un compromis entre des gains énergétiques optimisés non idéaux et une réponse temporelle améliorée.

3-1 La méthode de commande proposée

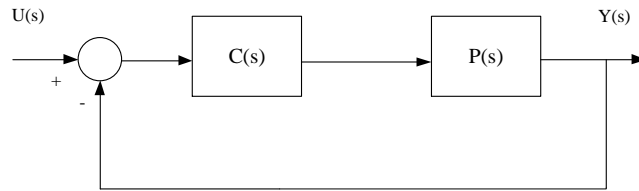
La méthode (Bensoussan 2011)⁴ vise à contrôler une fonction de transfert $P(s)$ instable et inversible d'un processus. Plus précisément, l'application du contrôleur $C(s)$ est restreinte à une classe de plantes $P(s)$ qui sont invariantes en temps linéaire, inversibles, et strictement propres. Plus précisément, la plante est inversible si elle n'a pas de zéros dans le demi-plan droit, c'est-à-dire que sa réciproque $P^{-1}(s)$ est holomorphe dans $\text{Re}(s) \geq 0$. Elle comprend le calcul d'une fonction de transfert en boucle ouverte $J(s)$ comprenant le produit d'un filtre à haut gain $J_1(s)$ ayant un gain (Bensoussan 2015)⁵ suffisant pour que $|J(\omega)| > [1+1/\varepsilon]$ lorsque $|\omega| \leq \omega_1$ où ω_1 est choisi pour obtenir une réponse temporelle souhaitée, un réseau de phase $J_2(s)$ fournissant une avance de phase aux fréquences intermédiaires et un filtre passe-bas $J_3(s)$ choisi de telle sorte que $|1+J(\omega)| > 1/M$ pour tout ω et $J(s)$ est strictement propre. Les limites $\varepsilon < 1$ et $M > 1$ sont choisies pour satisfaire une exigence de sensibilité souhaitée, calculer un signal d'erreur e comprenant la différence entre le signal d'entrée du système u et le signal de sortie de l'installation y , et modifier le signal d'erreur selon la fonction de transfert $C(s) = H^{-1}(s)J(s)$ et introduire le signal d'erreur dans l'installation. On montrera que $H(s)$ est une version modifiée de $P(s)$ qui est identique à $P(s)$ lorsque $P(s)$ est à phase minimale.

Soit $u(t)$ le signal d'entrée du système, $y(t)$ le signal de sortie de l'installation, et $e(t)$ le signal d'erreur représentant la différence entre le signal d'entrée $u(t)$ et le signal de sortie $y(t)$ tel que

⁴ BENSOUSSAN, D. *System and method for feedback control*, Patent application 13/217.861, August 25, 2011, Brevet US 8,831,755.

⁵ BENSOUSSAN David, *Robust and Ultrafast Response Compensator for Unstable Invertible Plants*, Automatica, Volume 60, Octobre 2015 pp. 43-47, 2015

calculé par un soustracteur. Le système de rétroaction en boucle fermée est décrit par le groupe d'équations suivantes : $Y(s) = P(s)C(s)E(s)$ et $E(s) = U(s) - Y(s)$



Où les signaux $U(s)$, $Y(s)$ et $E(s)$ représentent les transformées de Laplace des fonctions temporelles correspondantes $u(t)$, $y(t)$ et $e(t)$ respectivement. Les objectifs de conception du contrôleur comprennent la réalisation d'un suivi rapide et robuste, des marges de stabilité de gain et de phase améliorées, des mesures améliorées dans le domaine temporel et des temps de montée réduits, ainsi qu'une meilleure sensibilité d'une variété de systèmes stables et instables. Le contrôleur réalise ces mesures de performance simultanément dans le domaine temporel et dans le domaine fréquentiel, sans recourir aux compromis normalement associés aux contrôleurs linéaires.

Les objectifs de conception du contrôleur $C(s)$ prennent en compte la réponse temporelle de telle sorte que le gain de rétroaction ait un pôle dominant ω_1 qui réponde aux objectifs de réponse temporelle suffisamment rapide tout en atteignant les objectifs de sensibilité. Soit $S(\omega)$ l'opérateur de sensibilité défini par $[I + P(\omega)C(\omega)]^{-1}$. Généralement, les objectifs de sensibilité comprennent les conditions de sensibilité minimale dans une bande passante donnée, par exemple $|S(\omega)| < \varepsilon < 1$, qui ne se traduit pas par une sensibilité maximale excessive $M > 1$ sur toute la gamme de fréquences. En ce sens, la sensibilité peut être contrôlée et le système de rétroaction est capable de réagir suffisamment vite tout en restant stable. Notons que dans un système à rétroaction unitaire, une valeur de $|S(\omega)|$ proche de zéro se traduit par une transmission en boucle fermée proche de 1, ce qui indique un excellent suivi de l'entrée par la sortie.

Notons également que dans un système à rétroaction unitaire, le caractère borné de $|S(\omega)|$ assure le caractère borné de la boucle fermée. La stabilité s'ensuit donc même lorsque le processus est instable et inversible. Le contrôleur quasi-linéaire présenté ici est un contrôleur comportant des pôles qui dépendent de manière appropriée de son gain. Son avantage par rapport aux contrôleurs linéaires réside dans le fait qu'il est capable de maintenir inaltéré l'excès de pôles par rapport aux zéros et qu'il permet d'augmenter le gain de transmission de la boucle sans mettre en péril les marges de stabilité de phase et de gain.

Les réseaux de phase peuvent garantir que la gamme de fréquences intermédiaires de la boucle fermée contribue également à une meilleure réponse temporelle. Le réseau de phase $J_2(s)$ permet d'améliorer la conception sur la bande de transition entre les basses fréquences et les hautes fréquences. Idéalement, une fonction de transfert en boucle fermée de 1 permettrait un suivi exact. Ceci pourrait être presque atteint en utilisant un gain élevé dans la bande de basse fréquence.

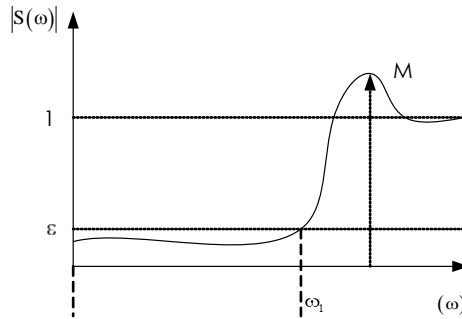
Comme la fonction de transfert en boucle fermée est strictement propre, des fréquences de coupure plus élevées améliorent la réponse temporelle, mais augmentent également l'énergie investie. Nous utiliserons donc une fréquence de coupure élevée avec des gains réduits.

3-2 Construction du contrôleur

L'algorithme de commande repose sur les relations de base qui existent entre la sensibilité $S(s) = E(s)/U(s)$ et la transmission en boucle fermée $T(s) = Y(s)/U(s)$ dans un système de contrôle à rétroaction unitaire dans lequel le processus à contrôler $P(s)$ est instable et inversible $C(s)$ est le compensateur en série, à savoir :

$$S(s) = \frac{1}{1+P(s)C(s)} \quad , \quad T(s) = \frac{P(s)C(s)}{1+P(s)C(s)} \quad \text{et} \quad S(s) + T(s) = 1$$

La conception se fait en trois étapes : aux basses fréquences $\omega \leq \omega_1$, rendre la sensibilité plus petite que tout nombre positif $\varepsilon > 0$, en utilisant un gain élevé. Dans la bande de fréquence de transition, utiliser des systèmes de phase (avance-retard et/ou des filtres passe-tout) pour améliorer la réponse à l'échelon. Sur toutes les fréquences, s'assurer que la sensibilité est plus petite que n'importe quel nombre $M > 1$, soit $|S(\omega)| < \varepsilon$ pour $\omega \leq \omega_1$ et $|S(\omega)| < M$ pour $\omega \geq \omega_1$.



Module de la sensibilité $S(\omega)$ en fonction de la fréquence

Une version heuristique simplifiée de l'algorithme suit pour le cas des processus stables et inversibles : Soit $C(\omega) = P^{-1}(\omega)J(\omega)$ pour que le gain de boucle devienne :

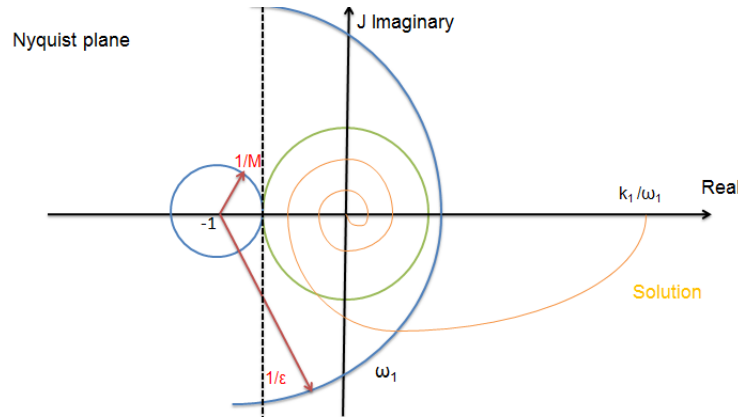
$$P(\omega)C(\omega) = P(\omega)P^{-1}(\omega)J(\omega) = J(\omega)$$

Où $J(\omega)$ est conçu de manière à ce que les spécifications souhaitées soient prises en compte tout en assurant que le compensateur $C(s)$ est strictement propre. On désigne par $\|\cdot\|_{\omega_1}$ la norme H^∞ restreinte aux fréquences inférieures à ω_1 .

$$\text{Pour } \omega \leq \omega_1 : |[I + J(\omega)]^{-1}|_{\omega_1} < \varepsilon \Leftrightarrow \|[I + J(\omega)]\|_{\omega_1} > \frac{1}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{1}{\varepsilon} > 1$$

$$\text{Pour tout } \omega : \|[I + J(\omega)]^{-1}\|_\infty < M \Leftrightarrow \|[I + J(\omega)]\|_\infty > \frac{1}{M} \quad \text{et} \quad \frac{1}{M} < 1$$

Dans le plan de Nyquist, la solution proposée montre un gain de boucle tel que le diagramme de sensibilité est à l'extérieur du cercle de sensibilité ε pour les fréquences inférieures à ω_1 et extérieur au cercle de sensibilité M pour toutes les fréquences



Dans le cas où le processus est instable, un algorithme modifié conduit aux mêmes bornes de sensibilité. Nous supposons le comportement suivant du processus aux fréquences élevées :

$$|P(s)| > c/|s^q| \quad (1)$$

pour une certaine constante c et un nombre entier q .

$$\text{Nous définissons : } C(s) = H^{-1}(s)J(s) \quad (2)$$

Où $H(s)$ représente une fonction de transfert qui se comporte comme $P(s)$ aux hautes fréquences et $J(s)$ approxime une fonction de la manière suivante. En écrivant $s=j\omega$, les valeurs de $J(\omega)$ se situent dans le demi-plan complexe de droite sur une plage de fréquence donnée par $|\omega| \leq \omega_1$ et $J(\omega)$ aura un gain élevé de sorte que les valeurs de $P(\omega)C(\omega)$ seront maintenues en dehors du cercle de sensibilité centré sur $(-1, 0)$, et de rayon $1/\varepsilon > 1$. Une telle conception garantit que la sensibilité sur la gamme de fréquences restreinte $|s| < \omega_1$ est inférieure à ε .

$$\|[I + P(\omega)C(\omega)]^{-1}\|_{\omega_1} < \varepsilon \quad (3)$$

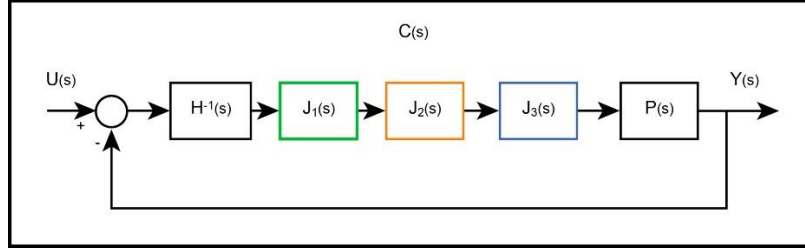
De plus, les valeurs de $J(s)$ seront maintenues en dehors du cercle de sensibilité M centré sur $(-1, 0)$ avec un rayon $1/M < 1$ à toutes les fréquences. Une telle conception limite la sensibilité maximale à une valeur inférieure à M à n'importe quelle fréquence, soit

$$\|[I + P(s)C(s)]^{-1}\|_{\infty} < M \quad (4)$$

Le cercle de sensibilité M pourrait être représenté sur le diagramme de Nichols en représentant le graphique $20 \log[\cos \varphi + \alpha((\cos^2 \varphi) - 1 + 1/M^2)]$ pour $\cos^2 \varphi > (1 - \frac{1}{M^2})$. Alternativement, le diagramme de $J^{-1}(s)$ pourrait être représenté sur un graphique de Nichols dans lequel les cercles M classiques (grandeurs constantes de la boucle fermée) représentent cette fois les cercles de sensibilité. La mise en œuvre de la compensation $C(s)$ se prête à une conception graphique simple utilisant les outils de contrôle classiques tels que les diagrammes et graphiques de Bode, Nyquist, Evans ou Black-Nichols. La fonction $J(s)$ peut être décomposée en trois parties :

$$J(s) = k_1 J_1(s) J_2(s) J_3(s) \quad (5)$$

Où $k_1 J_1(s)$ est un filtre à haut gain avec une bonne réponse temporelle agissant aux basses fréquences, $J_2(s)$ est un réseau de phase qui fournit une avance de phase dans la gamme de fréquences intermédiaires et $J_3(s)$ est un filtre passe-bas à large bande qui assure également que le compensateur est strictement propre.



Nous supposons le comportement suivant du processus aux hautes fréquences : $|P(s)| > c/|s|^q$ pour une certaine constante c et un nombre entier q . Le processus instable peut être décomposé en le produit de sa partie à phase minimale $P_1(s)$ et sa partie instable $P_2(s)$, de sorte que les éléments en cascade représentent la centrale de la manière suivante :

$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \quad (6)$$

Une autre fonction de transfert $H(s)$ peut être définie de telle sorte que, pour une certaine valeur s_0 :

$$H(s) = \left[\frac{c}{(s+s_0)^q} \right] P_2^{-1}(s)P(s) = \frac{c}{(s+s_0)^q} P_1(s) \quad (7)$$

de sorte que $H(s)$ ait le même comportement que $P(s)$ à haute fréquence, à savoir

$$\|P(s)H(s)^{-1} - 1\| < \alpha < 1 \quad (8)$$

Où α est une valeur inférieure à l'unité. Notons que $H(s)$ est holomorphe par construction et que son inverse est holomorphiquement inversible dans $\text{Re}(s) \geq 0$. Le contrôleur $C(s)$ est construit comme suit :

$$C(s) = H^{-1}(s)J(s) = \left(\frac{1}{c} \right) (s + s_0)^q P_1^{-1}(s)J(s) \quad (9)$$

De sorte que le gain de boucle soit $P(s)C(s) = P(s)H^{-1}(s)J(s)$ et que la sensibilité soit exprimée par $S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = [1 + J(s)]^{-1}$ avec $J(s) = k_1 J_1(s)J_2(s)J_3(s)$.

$k_1 J_1(s)$ est la fonction de transfert d'un filtre à haut gain ayant une réponse temporelle ultrarapide, par exemple $J_1(s)$ peut avoir la forme : $k_1 J_1(s) = k_1 \frac{\omega_1}{s + \omega_1}$

L'unité de compensation $J_2(s)$ comprend une chaîne d'éléments de compensation à avance/retard sous la forme d'un compensateur à avance/retard de phase à n circuits de phase agissant dans la plage intermédiaire de fréquence, où les pôles p_i peuvent être instables.

$$J_2(s) = \prod_{i=1}^n \frac{s + z_i}{s + p_i}$$

$J_3(s)$ est la fonction de transfert d'un filtre passe-bas agissant à une fréquence très élevée de sorte que la fonction de transfert du contrôleur $C(s)$ reste strictement propre. Le filtre passe-bas $J_3(s)$ peut être prévu sous la forme générale : $J_3(s) = \prod_{i=1}^k \frac{\omega_{zi}}{s + \omega_{zi}}$, $k \geq q$

Notons que le choix de ω_{zi} pourrait être réduit de diverses manières pour améliorer la mise en œuvre, comme par exemple une réduction des besoins énergétiques.

À titre d'exemple, nous pourrions choisir :

$$J(s) = J_1(s)J_2(s)J_3(s) = \frac{k_1\omega_1}{(s+\omega_1)} \left[\frac{(s+z)}{(s+p)} \right] \left[\frac{\omega_2}{(s+\omega_2)} \right]^k , \quad k \geq q \quad (10)$$

3-3 Conception pratique du compensateur $C(s)$

Illustration du cas d'un système stable et inversible



La fonction de transfert en boucle ouverte est:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = C(s)P(s) = P(s)^{-1}(s)J(s)P(s) = J(s) = \left(\frac{k_1}{s+\omega_1} \right) \left(\frac{\omega_2}{s+\omega_2} \right)^k \quad (11)$$

Les constantes $k, k_1, \omega_1, \omega_b, \omega_2$ sont choisies selon les conditions de Bensoussan (1984) :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq n \\ k_1 \geq \max \left[2^{(k+1)/2} \omega_1 \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right), \omega_1 \left(\frac{M-1}{M} \right) \right] \\ \omega_b \succ \omega_1 \left[\frac{k_1^2}{\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{M} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \\ k \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_2} \right) < \frac{\pi}{2} \\ \omega_2 \succ \max(\omega_b, s_0) \end{array} \right. \quad (12)$$

Le compensateur créé est conservateur. Il doit prendre en compte différents paramètres pour sa construction :

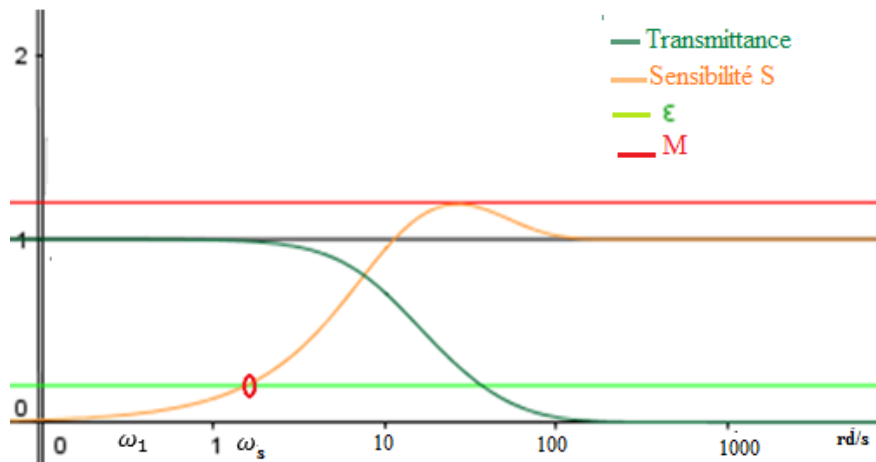
La plage ω_s sur laquelle on minimise la sensibilité.

ω_1 est la valeur minimum où $|S(s)|$ doit être inférieure à ε

La sensibilité ε ne doit pas être dépassée sur la plage de minimisation.

La sensibilité maximale M ne doit être dépassée à toutes les fréquences.

La marge de phase désirée.



$$\begin{cases} |S(\omega)| < \varepsilon \text{ pour } \omega \leq \omega_s \\ |S(\omega)| < M \text{ pour } \omega > \omega_s \end{cases} \quad (13)$$

Cette approche consiste à introduire ω_s et à fixer ω_1 et ω_2 dans le but de minimiser l'erreur en régime permanent tout en conservant un meilleur temps de réponse.

$$T(0) = \frac{J(0)}{1+J(0)} = \frac{1}{1+\frac{\omega_1}{k_1}} \Rightarrow (\omega_1 \ll k_1) \quad (14)$$

Les paramètres du compensateur seront obtenus par (Lyes, 2016, p81-82) :

$$\left\{ \begin{array}{l} k \geq n \\ k_1 \geq \sqrt{\omega_s^2 + \omega_1^2} \left(\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon} \right) \\ \omega_b \succ \omega_1 \left[\frac{k_1^2}{\omega_1^2 \left(1 - \frac{1}{M} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} \\ k \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_2} \right) + \tan^{-1} \left(\frac{\omega_b}{\omega_1} \right) \prec \pi - PM \\ \pi - PM \prec \pi - 2 \sin^{-1} \frac{1}{M} \\ \omega_2 \succ \max(\omega_b, s_0) \end{array} \right. \quad (15)$$

3-4 Utilisation du logiciel GEOGEBRA

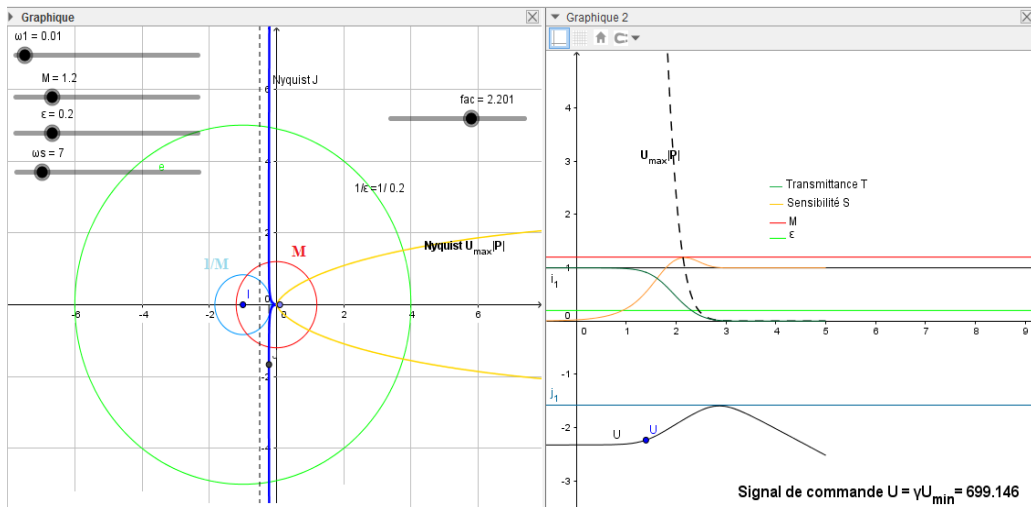
La conception de la commande B est plus facile par utilisation du logiciel GEOGEBRA en y représentant les cercles de sensibilité (ε, M_s) ainsi que les cercles de module de boucle fermée M_T et en ajustant les paramètres du compensateur au moyen de glissières. Le logiciel GEOGEBRA va permettre de représenter entre autres paramètres les fonctions suivantes :

Le diagramme de Nyquist avec les cercles de transmittance et de sensibilité

Le module de la transmission en boucle fermée en fonction de la fréquence

Le module de la sensibilité en fonction de la fréquence

Le niveau du signal d'entrée au processus



Dans le plan de Nyquist, il est également possible de représenter :

La transmission de la boucle fermée $T(s)$ et de vérifier les fréquences auxquelles son module s'éloigne de l'unité

Le gain normalisé $C(s)/C_{\max}$ qui doit être contenu dans le cercle unitaire afin de ne pas dépasser un gain de compensateur maximal

Les gains $\frac{C(s)}{1+P(s)C(s)}$ et $\frac{P(s)}{1+P(s)C(s)}$

L'optimisation de la commande peut être faite au moyen :

De l'ajustement des circuits de phase $J_2(s)$ qui visent à faire adhérer le diagramme de Nyquist à la droite parallèle à l'axe des ordonnées et passant par $-1/2$.

De l'ajout d'un préfiltre qui égalise en fréquence la fonction de transfert en boucle fermée.

De l'ajout d'un filtre prédictif qui accélère la réponse temporelle.

3-5 Exemples

3-5-1 Exemple d'un système stable: Le disque dur

Le modèle du disque dur développé par (Chen,2006) ⁶ donne :

$$P(s) = \frac{6.4013 \times 10^7}{s^2} \prod_{i=1}^4 P_{r,i}(s) \quad \text{with} \quad (1)$$

$$P_{r,1}(s) = \frac{0.912s^2 + 457.4s + 1.433 \times 10^8}{s^2 + 359.2s + 1.433 \times 10^8} \quad (2)$$

⁶ M. CHEN BEN, Hard Disk Drive Servo System 2006: Springer.

$$P_{r,2}(s) = \frac{0.7586s^2 + 962.2s + 2.491 \times 10^8}{s^2 + 789.1s + 2.491 \times 10^8} \quad (3)$$

$$P_{r,3}(s) = \frac{9.917 \times 10^8}{s^2 + 1575s + 9.917 \times 10^8} \quad (4)$$

$$P_{r,4}(s) = \frac{2.731 \times 10^9}{s^2 + 2613s + 2.731 \times 10^9} \quad (5)$$

$$C(s) = P^{-1}(s)J(s) \quad , \quad P(s)C(s) = J(s) = k_1 \left(\frac{\omega_1}{s + \omega_1} \right)^m \prod_{i=1}^n \left(\frac{s + z_i}{s + p_i} \right) \frac{\omega_2^k}{(s + \omega_2)^k}$$

Tel que : $m = 1, n = 2, \omega_1 = 50, \omega_b = 13 \times 10^4, p_1 = p_2 = 50, z_1 = z_2 = 33, k = 6, k_1 = 6223$.
 ω_2 est une fraction de ω_b .

Réponse indicielle

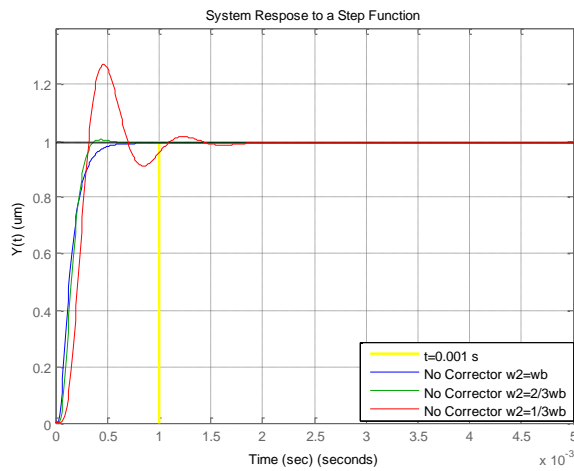


Diagramme de Bode de la boucle ouverte

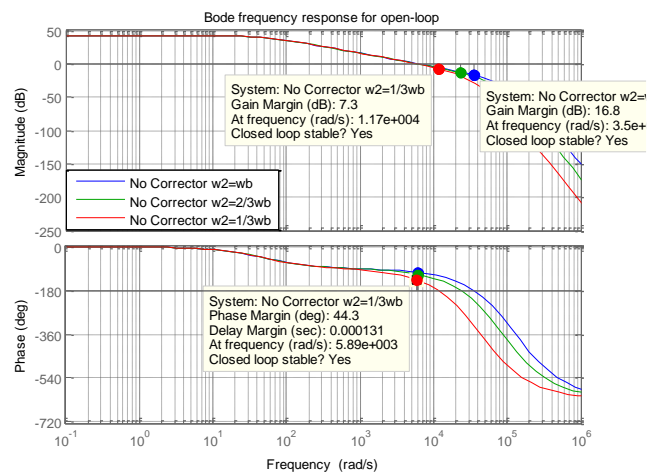


Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte

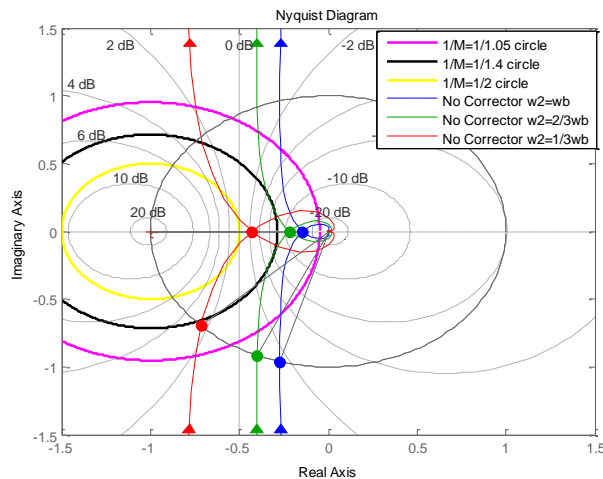


Diagramme de Nicols de la boucle ouverte

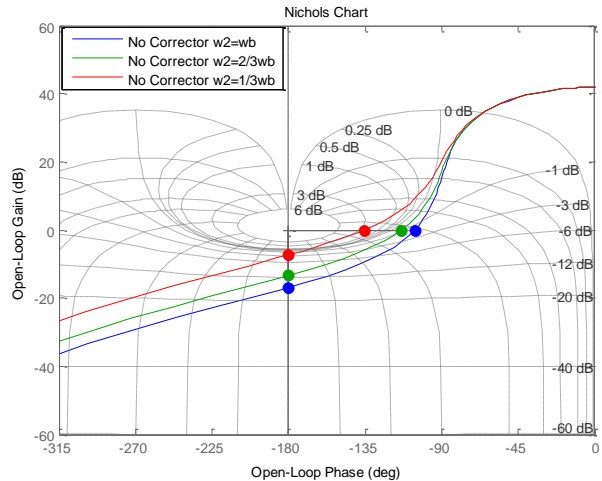


Diagramme de Bode de la sensibilité

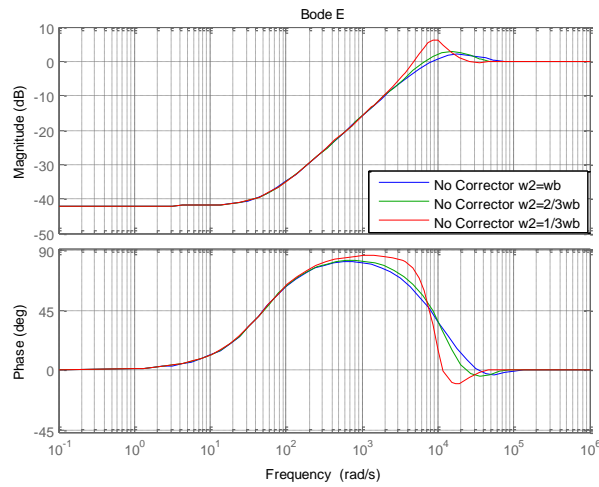
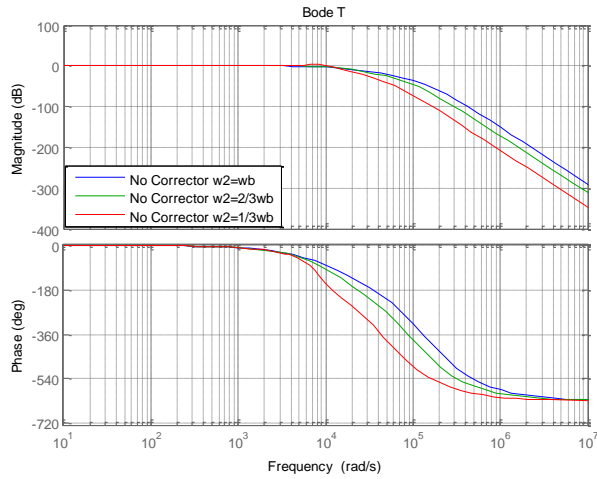
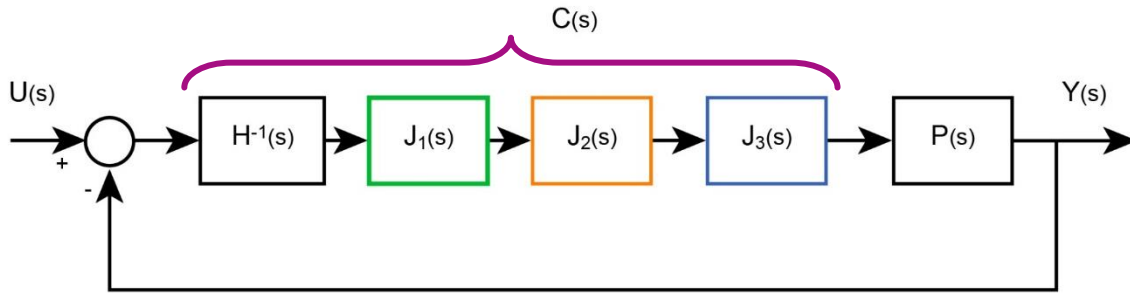


Diagramme de Bode de la boucle fermée



3-5-2 Exemple pour P(s) instable: Système de lévitation :



Structure de la commande B

$$P(s) = \frac{-7817.5}{(s - 30.51)(s + 31.34)(s + 184.38)}$$

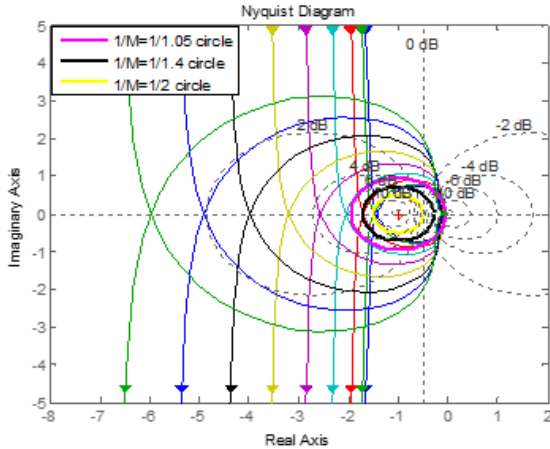
$$P(s) = P_1(s)P_2(s) \quad , \quad P_1(s) = \frac{-7817.5}{(s + 31.34)(s + 184.38)} \quad , \quad P_2(s) = \frac{1}{(s - 30.51)}$$

$$P(s)C(s) = P(s)H^{-1}(s)J(s) = \frac{1}{c}(s + s_0)^{q'}J(s)P_2(s)$$

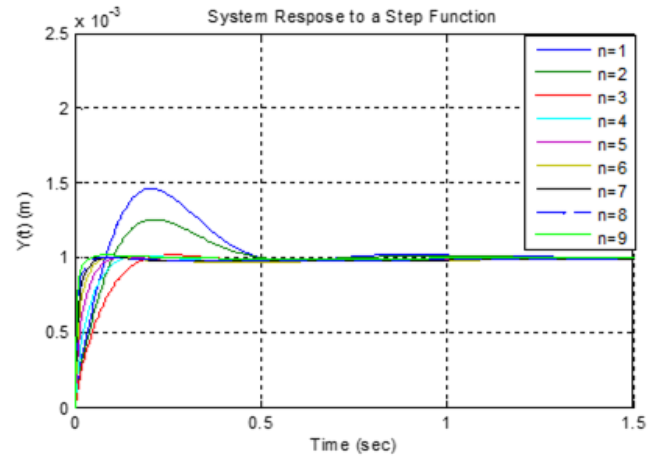
$$C(s) = \frac{-\left(5000 + 1000 \frac{(n-1)}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{s}{70}\right) \left(1 + \frac{s}{3}\right) \left(1 + \frac{s}{31.38}\right) \left(1 + \frac{s}{184.38}\right)}{\left(1 + \frac{s}{100}\right) \left(1 + \frac{s}{0.019}\right) \left(1 + \frac{s}{3000}\right)}$$

Pour étudier les variations de gain, l'indice n est modifié en conséquence.

Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte



Réponse indicielle

3-5-3 L'effet de l'ajout des limites $|T(\omega)|$, $|S(\omega)|$ et $|U(\omega)|$

La fonction de transfert simplifiée du contrôleur B est donnée par :

$$J(s) = \frac{K_1}{s + \omega_1} \left(\frac{\omega_2}{s + \omega_2} \right)^k$$

Tel que: $K_1 = 35.8$, $k=3$, $\omega_1 = 0.06 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = 292 \text{ rad/s}$.

Sur la fenêtre graphique, le diagramme de Nyquist est affiché en bleu, le cercle de sensibilité ε en vert et le cercle de sensibilité M_s en rouge. Dans cet exemple, $\varepsilon = 0.62$ et $M_s = 1.27$. Ces valeurs peuvent être ajustées en utilisant les curseurs.

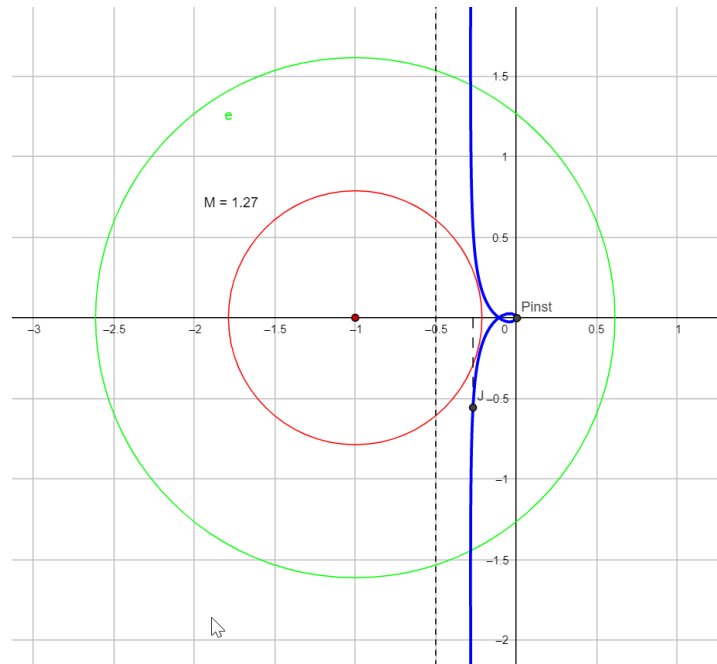


Figure : Diagramme de Nyquist de $G(s)$ et cercles de sensibilité

Les modules, transmittance $|T(\omega)|$, sensibilité $|S(\omega)|$ et signal de commande $|U(\omega)|$ sont ajoutées dans la fenêtre **Graphics 2**. Les limites max et min peuvent être ajoutées aussi dans la fenêtre **Graphics 2** comme ε , M_s et U_{max} . Remarquons aussi que la valeur de U_{max} peut être ajustée en utilisant un curseur.

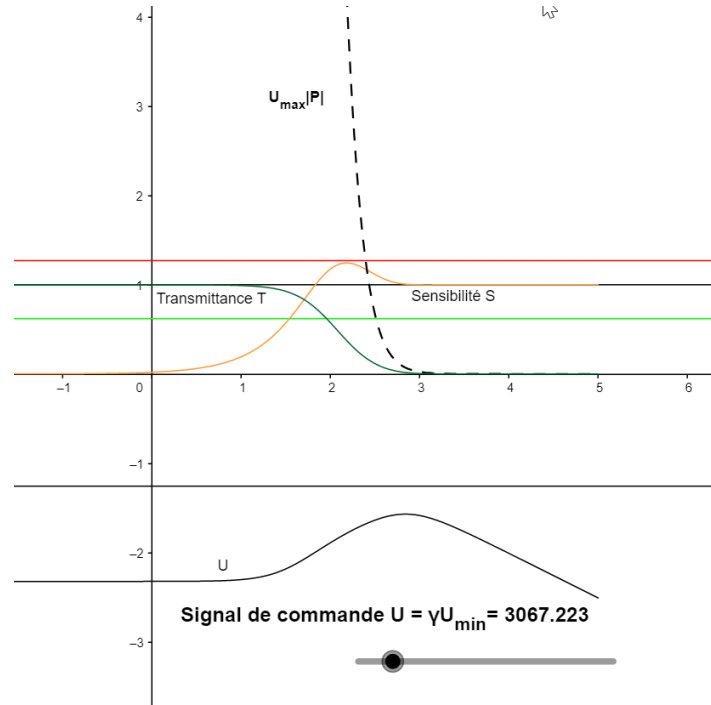


Figure : Modules de la transmittance $T(s)$, de la sensibilité $S(s)$ et de la commande $U(s)$

3-5-4 L'effet de l'ajout de $J_2(s)$ et de préfiltre $F(s)$ sur la boucle de rétroaction

Soit un système stable représentant une antenne satellite :

$$P(s) = \frac{197670000000000}{s(s + 0.2222)(s^2 + 4816s + 9620000)(s^2 + 27480.0000000000004s + 2086000000)}$$

La fonction de transfert simplifiée du contrôleur B est donnée par :

$$J(s) = \frac{k_1}{s + \omega_1} \left(\frac{\omega_2}{s + \omega_2} \right)^k$$

Tel que: $k_1 = 700$, $k=10$, $\omega_1 = 0.03 \text{ rad/s}$ et $\omega_2 = 37 \text{ rad/s}$.

Sur la fenêtre graphique, le diagramme de Nyquist est affiché en mauve, la transmission en boucle fermée $T(\omega)$ en bleu et le diagramme polaire du compensateur B, $C_{BN}(\omega)$ en brun. La figure indique un diagramme de Nyquist juxtaposé à la droite de -0.5 sur une très grande bande passante; la marge de phase est égale à 67° .

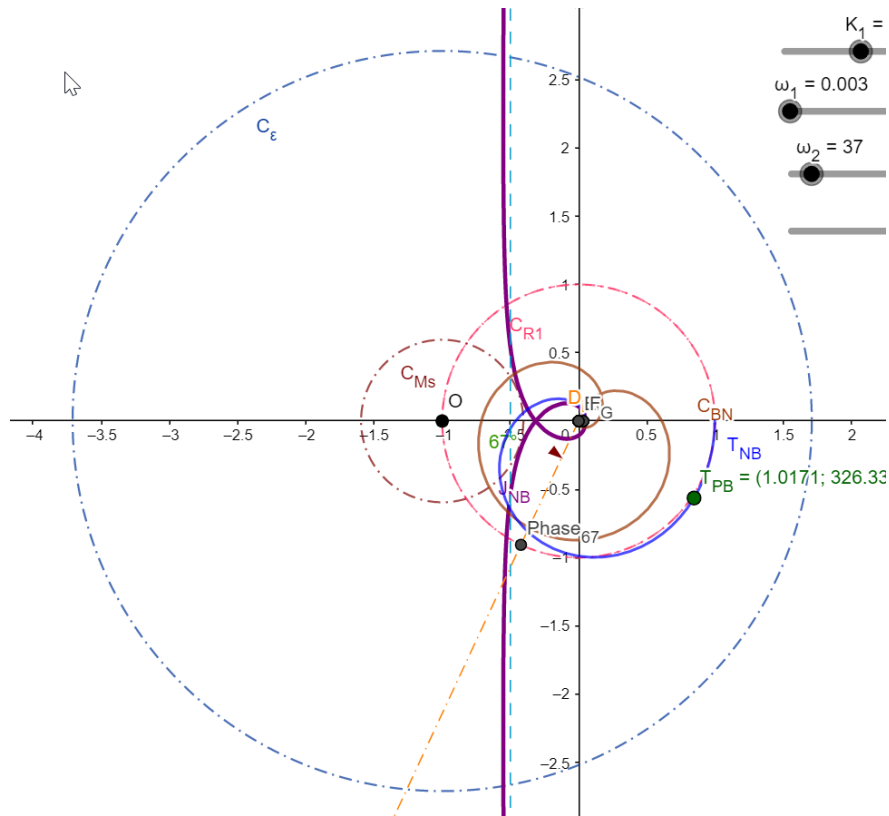


Figure : Diagrammes de Nyquist de $G(s)$ et des courbes normalisées de gain du compensateur $C(s)/C_{max}$ et du module de la transmittance $T(s)$

Les paramètres sont ajustés afin de garder le graphique de $C_{BN}(s)$ (nous aurons ultérieurement recours à la valeur en dB soit $C_{BNdB}(s)$) dans le cercle unité et le diagramme de Nyquist au plus près de la droite réelle $-1/2$ en respectant les objectifs de sensibilité. Idéalement, la marge de phase devrait être de 67 degrés. Il faut éviter les dépassements de fréquence de $T(s)$ qui se traduisent par un dépassement dans le domaine temporel.

En vue d'améliorer les objectifs de sensibilité, un filtre opérant dans les fréquences moyennes $J_2(s)$ et un préfiltre $F(s)$ sont conçus comme suit :

$$J_2(s) = \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right)\left(1 + \frac{s}{z_2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right)\left(1 + \frac{s}{p_2}\right)} \quad , \quad F(s) = \frac{1 + \frac{s}{f_1}}{1 + \frac{s}{f_2}}$$

L'effet de l'ajout du filtre $J_2(s)$ et du préfiltre $F(s)$ est illustré dans la figure suivante. Pour satisfaire la contrainte de C_{max} les fréquences sont ajustée en utilisant des curseurs à ces valeurs : $z_1 = 3.7, p_1 = 3.9, z_2 = 8.5, p_2 = 10.8$. Pour satisfaire la contrainte d'un gain en boucle fermée dans le cercle unitaire, les fréquences du filtre sont ajustées en utilisant des curseurs à ces valeurs : $f_1 = 6.5, f_2 = 5.5$.

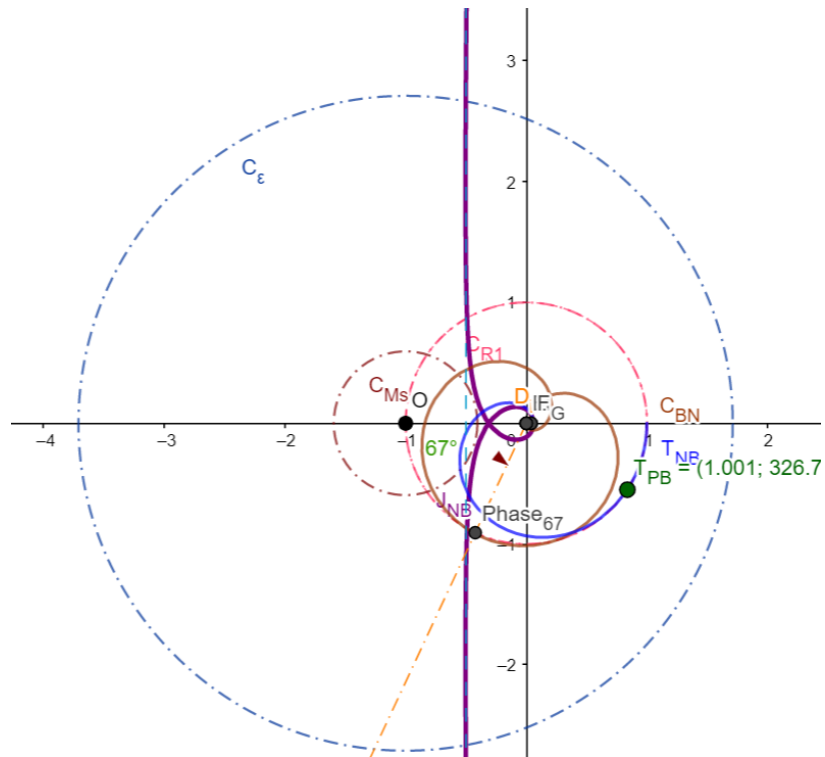


Figure : Effets du préfiltre $F(s)$ et du filtre $J_2(s)$ sur les diagrammes de Nyquist de $G(s)$ et des courbes normalisées de gain du compensateur $C(s)/C_{\max}$ et du module de la transmittance $T(s)$

On remarque que le diagramme de Nyquist s'est rapproché plus de la droite réelle $-1/2$ et que le gain en boucle fermée a été nettement amélioré en restant à l'intérieur du cercle unitaire pour toutes les valeurs de ω .

Le module de la sensibilité (en vert), la transmittance (en bleu), le compensateur (violet) et le module de commande multiplié par celui de la sensibilité (orange) sont tracés en fonction de la fréquence dans la fenêtre **Graphics 2** (à droite).

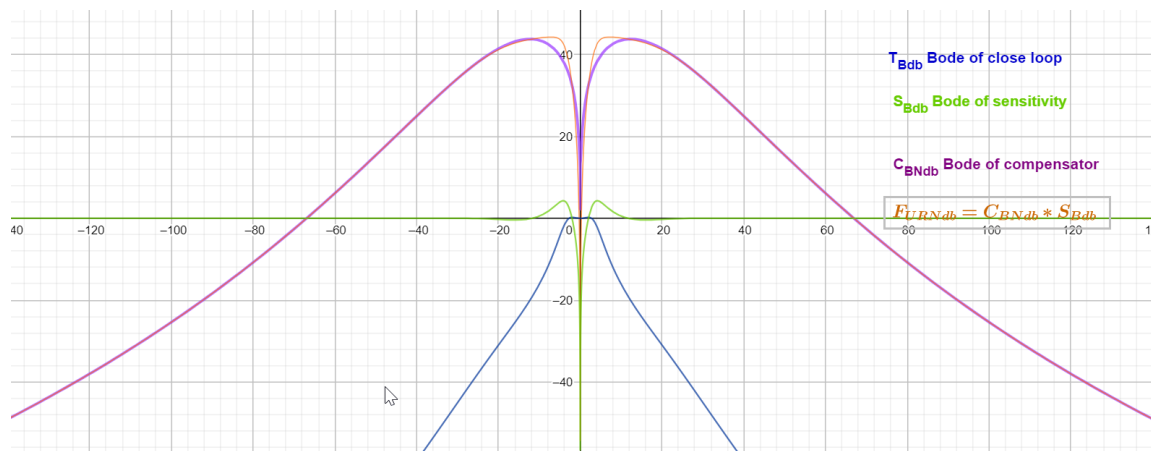


Figure : Modules de la transmittance, de la sensibilité, du compensateur $C(s)$ et de $C(s)S(s)$

La figure suivante présente la partie centrale en zoom.

