Léon Jubin - Huerne

SYS - 802 -
Méthode Avancé de commande

Devoir 1

Automne 2022

## Probleme 1

Soit le système décrit par l'équation de différence :

$$u(k) = y(k+3) - 3y(k+2) - 13y(k+1) + 15y(k)$$

Les condition initiales : $y(0)=0$, $y(1)=-1$, $y(2)=2$

a) $$\mathcal{Z}\{y(k+3)\} = z^3\left[Y(z) - y_0 - y_1 z^{-1} - y_2 z^{-2}\right]$$
$$= z^3 Y(z) - y_0 z^3 - y_1 z^2 - y_2 z$$

De même pour $\mathcal{Z}\{y(k+2)\} = z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1$

et $\mathcal{Z}\{y(k+1)\} = z Y(z) - z y_0$

Ainsi,

$$U(z) = \left[z^3 Y(z) - y_0 z^3 - y_1 z^2 - y_2 z\right] - 3\left[z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1\right]$$
$$- 13\left[z Y(z) - z y_0\right] + 15 Y(z)$$

Avec $y_0 = y(0) = 0$
$y_1 = y(1) = -1$
$y_2 = y(2) = 2$

$$U(z) = Y(z)\left[z^3 - 3z^2 - 13z + 15\right] + z^2 - 5z$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Y(z) = \frac{1}{z^3-3z^2-13z+15} U(z) + \frac{-z^2+5z}{z^3-3z^2-13z+15}}$$

Avec cond. initiales nulles, $z^2 + 5z = 0$

d'où $\boxed{G(z) = \dfrac{Y(z)}{U(z)} = \dfrac{1}{z^3 - 3z^2 - 13z + 15}}$

Sinon $\boxed{G(z) = \dfrac{1}{z^3 - 3z^2 - 13z + 15} + \dfrac{-z^2 + 5z}{(z^3 - 3z^2 - 13z + 15)U(z)}}$

b) $u$ est un échelon, $U(z) = \dfrac{z}{z-1}$

Ainsi, $Y(z) = \left[\dfrac{z}{z-1} - z^2 + 5z\right] \dfrac{1}{z^3 - 3z^2 - 13z + 15}$

$$= \frac{z + (-z^2 + 5z)(z-1)}{(z-1)(z^3 - 3z^2 - 13z + 15)}$$

$$Y(z) = \frac{z(-4 + 6z - z^2)}{(z-1)(z^3 - 3z^2 - 13z + 15)}$$

On cherche à réduire le dénominateur en produit de pôles

On remarque la racine évidente 1 à $z^3 - 3z^2 - 13z + 15$

Ainsi,

$$z^3 - 3z^2 - 13 + 15 = (z-1)(z^2 - 2z - 15)$$

$$\Delta = 4 + 60 = 64, \quad p_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2} = \{5 ; -3\}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{Y(z)}{z} = \frac{-4 + 6z - z^2}{(z-1)^2 (z-5)(z+3)}}$$

On cherche maintenant à faire la décomposition en element simple.

À l'aide du théorème du residu, on cherche $\frac{Y(z)}{z}$ tq:

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{K_{11}}{z-1} + \frac{K_{12}}{(z-1)^2} + \frac{K_2}{z-5} + \frac{K_3}{z+3}$$

determinons $K_{11}$, $K_{12}$, $K_2$, $K_3$

- $$K_{11} = \frac{d}{dz}\left[(z-1)^2 \frac{Y(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=1}$$

$$\frac{d}{dz}\left[(z-1)^2\frac{Y(z)}{z}\right] = \frac{(6-2z)(z-5)(z+3) - (2z-2)(-4+6z-z^2)}{\left[(z-5)(z+3)\right]^2}$$

Ainsi, $$K_{11} = \frac{4\times(-4)\times 4}{\left[(-4)\times(4)\right]^2}$$

$$\boxed{K_{11} = -\frac{1}{4}}$$

- $$K_{12} = \left[(z-1)^2 \frac{Y(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=1} = \frac{-4+6-1}{(-4)\times(4)}$$

$$\boxed{K_{12} = -\frac{1}{16}}$$

- $$K_2 = \left[(z-5)\frac{Y(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=5} = \frac{-4+30-25}{4^2\times 8}$$

$$\boxed{K_2 = \frac{1}{128}}$$

- $$K_3 = \left[(z+3)\frac{Y(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=-3} = \frac{-4-18-9}{(-4)^2(-8)}$$

$$\boxed{K_3 = \frac{31}{128}}$$

Ainsi,

$$\frac{Y(z)}{z} = -\frac{1}{4}\,\frac{1}{z-1} - \frac{1}{16}\,\frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{128}\,\frac{1}{z-5} + \frac{31}{128}\,\frac{1}{z+3}$$

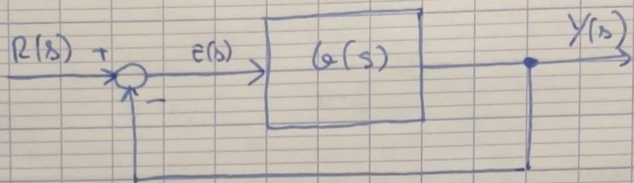
$$\Leftrightarrow Y(z) = \frac{1}{128}\left[-32\,\frac{z}{z-1} - 8\,\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-5} + 31\,\frac{z}{z+3}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{y(k) = \frac{1}{128}\left[-32 - 8k + 5^k + 31(-3)^k\right]}$$

## Problème 2

$$G(s) = \frac{5s-4}{(s-1)(s-0{,}5)}$$

a)




$$T(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$$

$$= \frac{\dfrac{5s-4}{(s-1)(s-0{,}5)}}{1 + \dfrac{5s-4}{(s-1)(s-0{,}5)}}$$

$$= \frac{5s-4}{5s-4+s^2-s-0{,}5s+0{,}5}$$

$$T(s) = \frac{5s-4}{s^2+3{,}5s-3{,}5}$$

On cherche le denominateur t.q: $s^2+3{,}5s-3{,}5 = (s-p_1)(s-p_2)$

$$\Delta = (3{,}5)^2 + 4 \times 3{,}5 = 26{,}25$$

$$p_{1,2} = \frac{-3{,}5 \pm \sqrt{26{,}25}}{2} = \left\{ -4{,}3117 = -\frac{7+\sqrt{105}}{4} \; ; \; 0{,}8117 = \frac{-7+\sqrt{105}}{4} \right\}$$

d'où $$\boxed{T(s) = \frac{5s-4}{\left(s+\frac{7+\sqrt{105}}{4}\right)\left(s-\frac{-7+\sqrt{105}}{4}\right)}}$$

b) On cherche à faire une transformé de Laplace inverse de $T(s)$ pour trouver l'équation différentiel $T(t)$

Pour cela il faut faire une décomposition en element simple.

On utilise le theoreme des résidus pour trouver $T(s)$ tq :

$$T(s) = \frac{K_1}{s + \frac{7+\sqrt{105}}{4}} + \frac{K_2}{s - \frac{-7+\sqrt{105}}{4}}$$

- $K_1 = \left[\left(s + \frac{7+\sqrt{105}}{4}\right) T(s)\right]\Bigg|_{s = -\frac{7+\sqrt{105}}{4}}$

$$= \frac{175 + 17\sqrt{105}}{70}$$

$$\boxed{K_1 = 4{,}988}$$

- $K_2 = \left[\left(s - \frac{-7+\sqrt{105}}{4}\right) T(s)\right]\Bigg|_{s = \frac{-7+\sqrt{105}}{4}}$

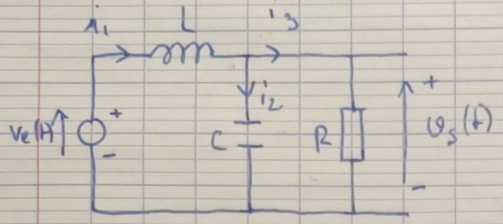
$$= \frac{175 - 17\sqrt{105}}{70}$$

$$\boxed{K_2 = 0{,}0114}$$

d'où $T(s) = \dfrac{4{,}988}{s + 4{,}3117} + \dfrac{0{,}0114}{s - 0{,}8117}$

Ainsi, $\boxed{T(t) = 4{,}988\, e^{-4{,}3117t} + 0{,}0114\, e^{0{,}8117t}}$

## Problème 3




a) Modelisons le système en utilisant la méthode de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$

avec $q_i$ = coordonnées généralisées
$Q$ = Forces externes
$T$ = Energies cinétiques
$D$ = Energies de dissipation
$U$ = Energies potentielles

- Ici, $Q = v_e(t)$
  $i_1 = \dot{q}_1$
  $i_2 = \dot{q}_2$
  $i_3 = \dot{q}_3$

- $T = \frac{1}{2} L i_1^2 = \frac{1}{2} L \dot{q}_1^2$

- $U = \frac{1}{2} \cdot \frac{q_2^2}{C}$

- $D = \frac{1}{2} R (\dot{q}_1 - \dot{q}_2)^2$

- <u>par rapport à $q_1$ :</u>

$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right] = L\ddot{q}_1$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = R(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

• Par rapport à $q_2$ :

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right] = 0$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{q_2}{C}$$

$$\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = -R(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

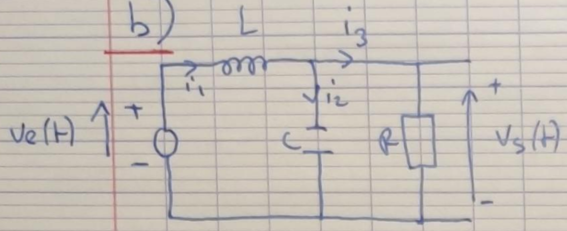
Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} L\ddot{q}_1 + R(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = v_e \\ \frac{q_2}{C} - R(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = 0 \end{cases}}$$

Or $R(\dot{q}_1 - \dot{q}_2) = V_s$

$$\boxed{\begin{cases} V_e - L\ddot{q}_1 - V_S = 0 \\ V_s - \frac{q_2}{C} = 0 \end{cases}}$$

b)




- On a $\begin{cases} i_2 = C \dfrac{d u_2}{dt} = C \dot{V}_2 \\ V_1 = L \dot{i}_1 \\ V_s = R\, i_3 \end{cases}$

- Loi des mailles

$$\begin{cases} \Leftrightarrow V_e - L\dot{i}_1 - \dfrac{1}{C}\int i_2 \Leftrightarrow V_e - L\dot{i}_1 - V_s = 0 \quad (1) \\ V_e - L\dot{i}_1 - V_s = 0 \\ V_s - \dfrac{1}{C}\int i_2 = 0 \Leftrightarrow V_s = V_2 \end{cases}$$

- Loi des nœuds

$$i_1 = i_2 + i_3$$

$$\Leftrightarrow i_1 = C\dot{V}_2 + \frac{V_s}{R}$$

$$\Leftrightarrow i_1 = C\dot{V}_s + \frac{V_s}{R}$$

$$\Leftrightarrow C\dot{V}_s + \frac{V_s}{R} - i_1 = 0 \quad (2)$$

- Posons $\begin{cases} x_1(t) = i_1(t) \\ x_2(t) = V_s(t) \end{cases}$

On déduit en utilisant (1) et (2)

$$\begin{cases}(1)\\(2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} V_e(t) - L\dot{x}_1(t) - x_2(t) = 0 \\ C\dot{x}_2(t) + \frac{1}{R}x_2(t) - x_1(t) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}_1(t) = \frac{1}{L}x_2(t) + \frac{1}{L}V_e(t) \\ \dot{x}_2(t) = \frac{1}{C}x_1(t) - \frac{1}{RC}x_2(t) \end{cases}}$$

Ainsi, on déduit A et B tel que $\dot{X} = AX + B$ avec $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\dot{X} = AX + B$

$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} V_e}$$

c) • $\boxed{A_d = e^{AT} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{1}{L}T} \\ e^{\frac{1}{C}T} & e^{-\frac{1}{RC}T} \end{pmatrix}}$

- $B_d = (A_d - I)\, A^{-1} B$

• $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{adj}(A)}{\det(A)}$

• $\mathrm{adj}(A) = \mathrm{com}(A)^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}$

• $\det(A) = \dfrac{1}{LC}$

• $A^{-1} = \dfrac{\begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & 0 \end{pmatrix}}{\frac{1}{LC}}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{L}{R} & C \\ -L & 0 \end{pmatrix}$

• $B_d = \begin{pmatrix} -1 & e^{-\frac{T}{L}} \\ e^{\frac{T}{C}} & e^{-\frac{T}{RC}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{L}{R} & C \\ -L & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} -1 & e^{-\frac{T}{L}} \\ e^{\frac{T}{C}} & e^{-\frac{T}{RC}} - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{R} \\ -1 \end{pmatrix}$

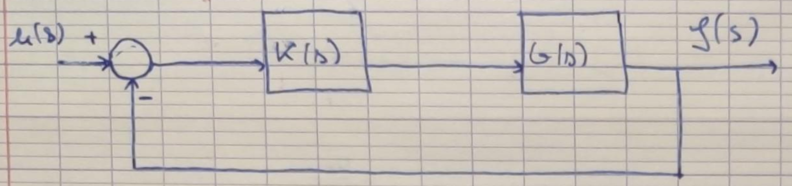
$$\boxed{B_d = \begin{pmatrix} \frac{1}{R} - e^{\frac{T}{L}} \\ -\frac{1}{R} e^{\frac{T}{C}} - e^{-\frac{T}{RC}} \end{pmatrix}}$$

Ainsi, $X_k = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$, avec $T = 0{,}1$

$$X_{k+1} = A_d X_k + B_d V(k)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\frac{0{,}1}{L}} \\ e^{\frac{0{,}1}{C}} & e^{-\frac{0{,}1}{RC}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{R} - e^{\frac{0{,}1}{L}} \\ -\frac{1}{R} e^{\frac{0{,}1}{C}} - e^{-\frac{0{,}1}{RC}} \end{pmatrix} V_e(k)}$$

# Probleme 4




$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

$$G(s) = \frac{1}{s+1}$$

## a) Critère de Routh

On pose $H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)}$

$$= \frac{K(s)\,G(s)}{1 + K(s)\,G(s)}$$

$$H(s) = \frac{K_p s + K_i}{s^2 + (K_p + 1)s + K_i}$$

dénominateur : $s^2 + (K_p+1)s + K_i$

Pour respecter le critère de Routh, il faut que $K_p + 1 > 0$ et $K_i > 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\begin{cases} K_i > 0 \\ K_p > -1 \end{cases}}$

$$\begin{array}{c|cc} p^2 & 1 & K_i \\ p^1 & K_p+1 & 0 \\ p^0 & \frac{(K_p+1)K_i}{K_p+1} & 0 \end{array}$$

Pour respecter le critère de Routh

$1>0$ ✓

$K_p+1>0 \Rightarrow K_p > -1$

$K_i > 0$

Donc pour respecter le critère de Routh, c'est à dire que $G(s)$ est stable

$$\boxed{\begin{cases} K_i > 0 \\ K_p > -1 \end{cases}}$$

b) On cherche à obtenir les poles à $-5$ et $-10$

$$\Leftrightarrow \quad s^2 + (K_p+1)s + K_i = (s-p_1)(s-p_2)$$

On cherche que $\begin{cases} p_1 = -5 \\ p_2 = -10 \end{cases} \Rightarrow (s+5)(s+10)$

$$\Delta = (K_p+1)^2 - 4K_i$$

$$p_{1,2} = \frac{-(K_p+1) \pm \sqrt{(K_p+1)^2 - 4K_i}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_1 = \dfrac{-(K_p+1) + \sqrt{(K_p+1)^2-4K_i}}{2} = -5 \quad (A) \\[2ex] p_2 = \dfrac{-(K_p+1) - \sqrt{(K_p+1)^2-4K_i}}{2} = -10 \quad (B) \end{cases}$$

- $(A) \Leftrightarrow (-10 + K_p + 1)^2 = (K_p+1)^2 - 4K_i$

$$\Leftrightarrow (-9 + K_p)^2 = 81 + K_p^2 - 18K_p$$

$(A) \Leftrightarrow Kp^2 - 18Kp + 81 = Kp^2 + 2Kp - 4Ki + 1$

$(A) \Leftrightarrow -20Kp + 4Ki + 80 = 0$

• $(B) (-20 + Kp + 1)^2 = \left(-\sqrt{(Kp+1)^2 - 4Ki}\right)^2$

$\Leftrightarrow 19^2 + Kp^2 - 38Kp = Kp^2 + 2Kp - 4Ki + 1$

$(B) \Leftrightarrow -40Kp + 4Ki + 360 = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} (A) \\ (B) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -20Kp + 4Ki + 80 = 0 \\ -40Kp + 4Ki + 360 = 0 \end{cases}$$

$$(A)-(B) \Leftrightarrow \begin{cases} -20Kp + 4Ki + 80 = 0 \\ -20Kp + 280 = 0 \Leftrightarrow Kp = \frac{280}{2} = 14 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -20 \times 14 + 4Ki + 80 = 0 \Leftrightarrow Ki = \frac{1}{4}(-80 + 20 \times 14) \\ Kp = 14 \end{cases}$$

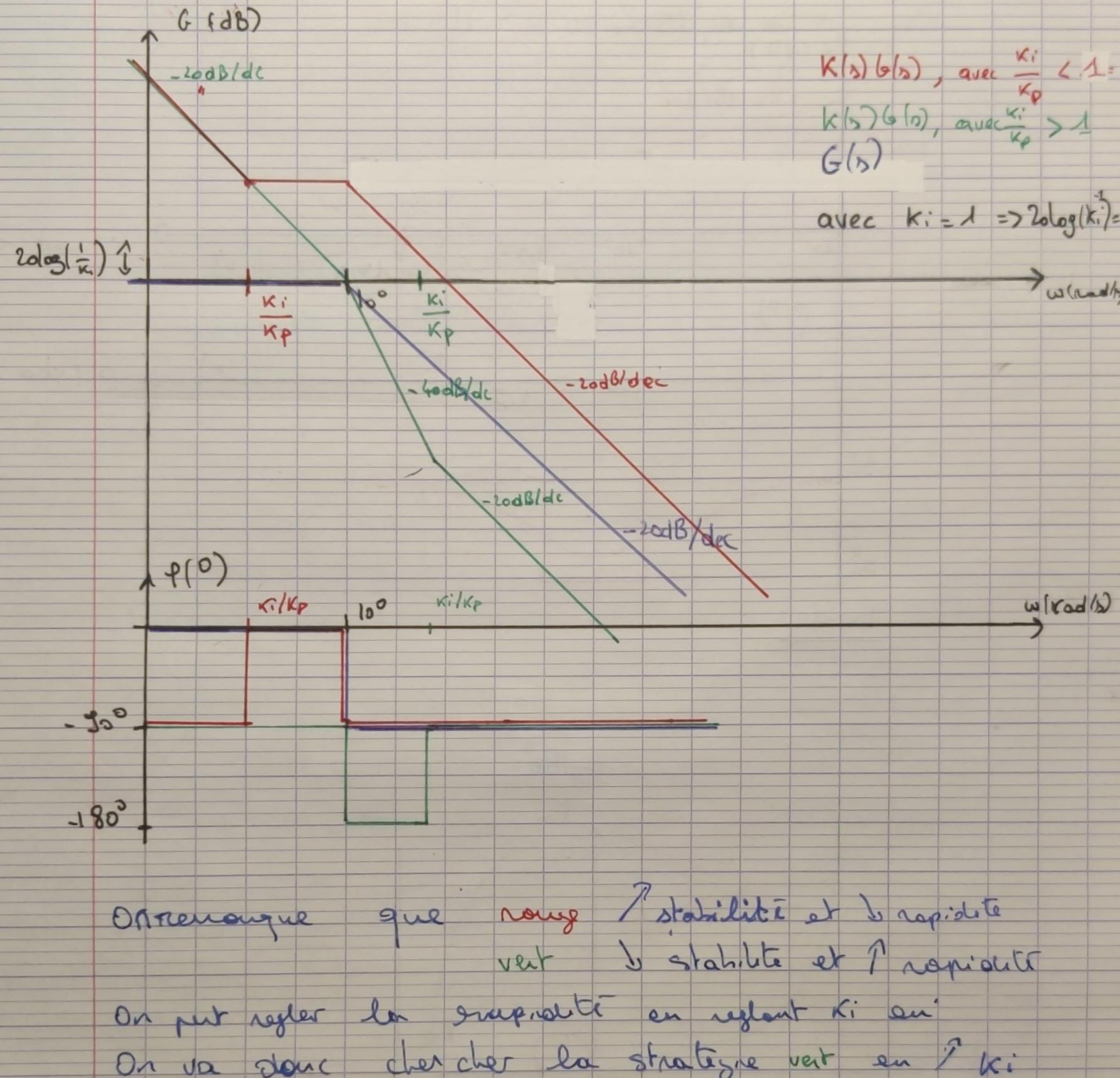
$$\Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} Ki = 50 \\ Kp = 14 \end{cases}}$$

**A meliorer les gains ?**

$K(s) = Kp + \frac{Ki}{s} = \frac{Ki + Kp\,s}{s} = Ki\,\frac{1 + \frac{Kp}{Ki}s}{s}$

Donc $K(s)$ est : un gain $Ki$, un avance de phase de $\frac{Ki}{Kp}$ et un integrateur.

Comment améliorer les performances du correcteur ?
augmenter la $M\phi$ ? augmenter la rapidité ?




On remarque que rouge ↗ stabilité et ↘ rapidité
vert ↘ stabilité et ↗ rapidité

On peut régler la rapidité en réglant Ki ou

On va donc chercher la stratégie vert en ↗ Ki pour être rapide et stable

Par exemple : $\left| \begin{array}{l} Ki = 0{,}01 \\ Kp = 1 \end{array} \right.$ => $\left\{ \begin{array}{l} \text{Forte stabilité} : M\phi = 170° \\ \text{très lent} : T_{95\%} = 642\,s \end{array} \right.$

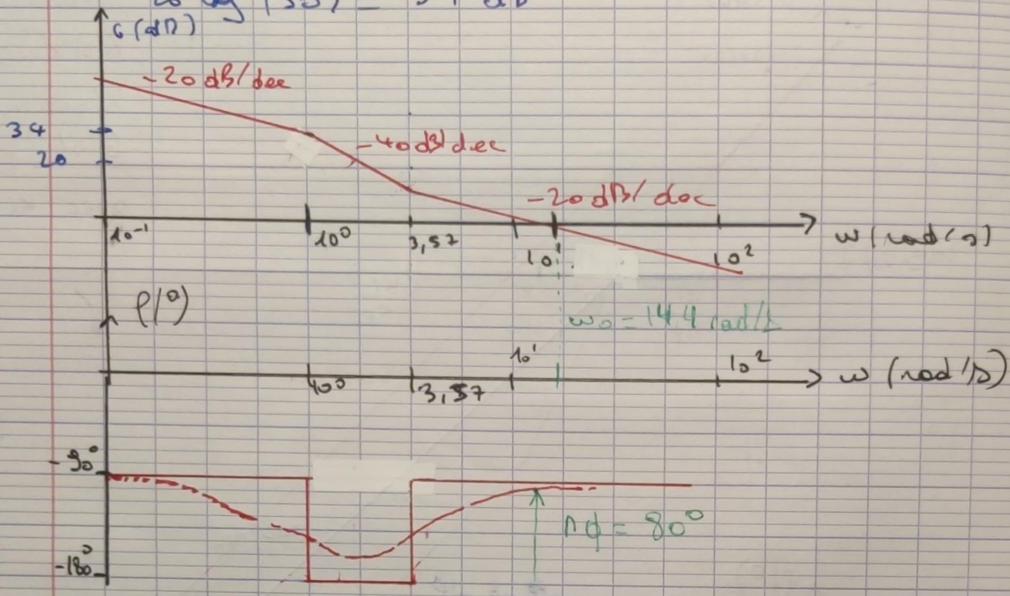
en augmentant Ki et en gardant le même $\frac{Ki}{Kp} = 10^{-2}$

On a $\left| \begin{array}{l} Ki = 1 \\ Kp = 100 \end{array} \right.$ => $\left\{ \begin{array}{l} M\phi = 90{,}6° \\ \omega_0 = 100\ rad/s \rightarrow \text{rapide} \\ T_{95\%} = 0{,}0453\,s \end{array} \right.$

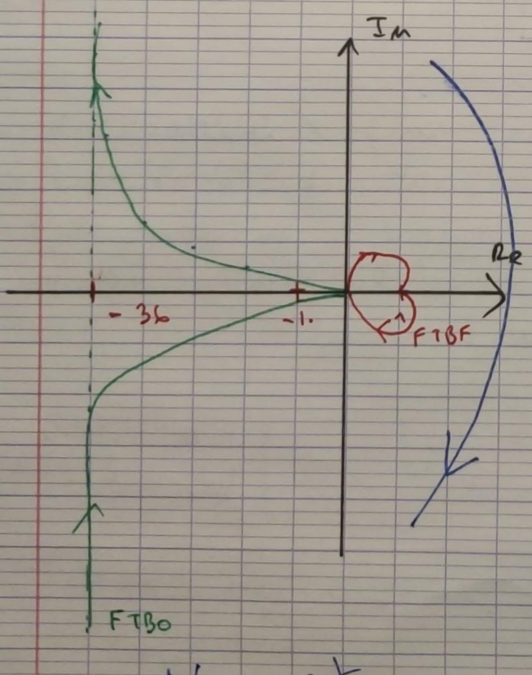
pas de dépassement

c) avec $\left| \begin{array}{l} K_p = 14 \\ K_i = 50 \end{array} \right.$ , $G(s)K(s) = 50 \, \dfrac{1 + \frac{1}{3{,}57} s}{s} \, \dfrac{1}{s+1}$

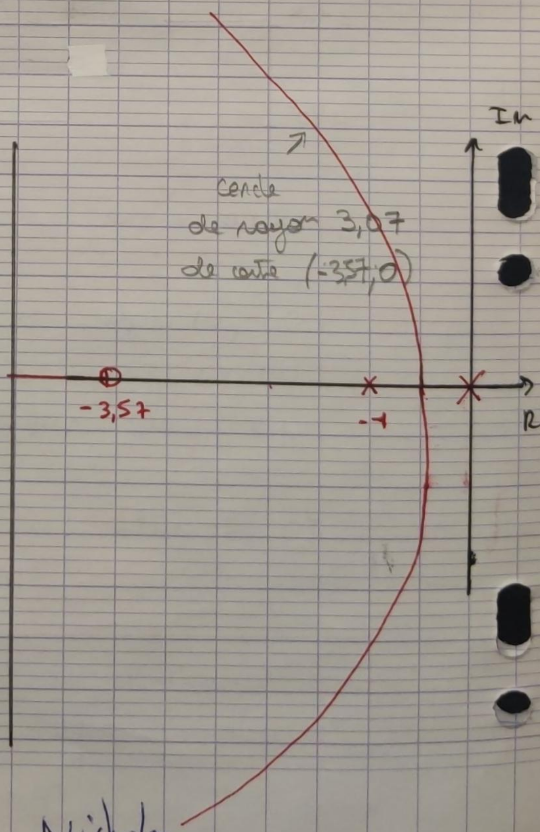
$20 \log(50) = 34$ dB




Bode




Nyquist




Nichols

d) Critère de Nyquist

P = 0 : nombre de pole instable

N = 0 : nombre d'encerclement autour du point critique (-1, 0)

$$\boxed{Z = N - P = 0 \rightarrow \text{stable en boucle fermé}}$$

e) $G(s) = \dfrac{15s + 50}{s^2 + 15s + 50}$

representatio d'etat :

$$A\_G = \begin{bmatrix} -15 & -50 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B\_G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C\_G = \begin{bmatrix} 14 & 50 \end{bmatrix}$$

$$D\_G = 0$$

Verifions la stabilité

$0 = \det(sI - A\_G)$

$\Leftrightarrow 0 = \begin{vmatrix} s + 15 & 50 \\ -1 & s \end{vmatrix}$

$\Leftrightarrow 0 = (s + 15)s + 5$

$\Leftrightarrow 0 = s^2 + 15s + 5$

$\Rightarrow \quad 0 = s^2 + 15s + 50$

$\Rightarrow \quad 0 = (s+10)(s+5)$

Donc les valeur propre sont $\begin{cases} \lambda_1 = -10 \\ \lambda_2 = -5 \end{cases}$

Donc <u>le système est stable.</u>

## Problème 5

$$G(s) = \frac{K e^{-1,5 s}}{(2s+1)(0,7s+1)(s^2+40s+1600)}$$

a) On cherche le gain statique.

$$K_s = \lim_{s \to 0} s\, G(s)\, U(s)$$

$$= \lim_{s \to 0} s \frac{K e^{-1,5 s}}{(2s+1)(0,7s+1)(s^2+40s+1600)} \frac{1}{s}$$

$$= \frac{K}{1 \times 1 \times 1600}$$

$$\boxed{K_s = \frac{K}{1600}}$$

b) Transformation bilinéaire $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$

$$G(z) = \frac{K e^{-\frac{1,5 \times 2}{T} \frac{z-1}{z+1}}}{\left(\frac{2 \times 2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 1\right)\left(\frac{0,7 \times 2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 1\right)\left(\left(\frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}\right)^2 + \frac{40 \times 2}{T} \frac{z-1}{z+1} + 1600\right)}$$

$$= \frac{K e^{-\frac{3}{T}} \left(e^{z-1} - e^{z+1}\right)(z+1)^2}{\left(\frac{4}{T}(z-1)(z+1) + (z+1)\right)\left(\frac{1,4}{T}(z-1)(z+1) + (z+1)\right)\left(\frac{4}{T^2}(z-1)^2 + \frac{80}{T}(z-1)(z+1) + 1600(z+1)^2\right)}$$

$$\boxed{G(z) = \frac{K e^{-\frac{3}{T}} \left(e^{z-1} - e^{z+1}\right)(z+1)^2}{\left(\frac{4+T}{T} z^2 + 2z + \frac{T-4}{T}\right)\left(\frac{1,4+T}{T} z^2 + 2z + \frac{T-1,4}{T}\right)\left(\frac{4+80T+1600T^2}{T^2} z^2 + \frac{3200T^2-8}{T^2} z + \frac{4-80T+1600T^2}{T^2}\right)}}$$

Determinons T

D'après le théorème de Shanon : avec $T = \frac{1}{f}$

$f > 2\, f_{max}$

Determinons $f_{max}$

Graphiquement j'ai choisi $\omega'_{max} \simeq 10^3$ rad/s $\Leftrightarrow f_{max} = 159{,}1$ Hz

car $\varphi(\omega = 10^3) \simeq 359{,}9°$

La phase ne varie presque plus

Choisissons pour etre sur que

$f = 7 \times f_{max}$

$f = 1114$ Hz

On peut arrondir à $f \simeq 1 \times 10^3$ Hz.

Donc $\boxed{\begin{array}{l} T = 1 \text{ ms} \\ T = 1 \times 10^{-3} \text{ s} \end{array}}$

c) Calculons l'erreur statique

$$e_s = \lim_{s \to 0} s\left(u(s) - Y(s)\right)$$

$$= \lim_{s \to 0} s\left(u(s)\left(1 - G(s)\right)\right)$$

$$= \lim \cancel{s}\left(\frac{1}{\cancel{s}}\left(1 - \frac{K e^{-1{,}5s}}{(2s+1)(0{,}7s+1)(s^2+40s+1600)}\right)\right)$$

$$e_s = 1 - \frac{K}{1600}$$

$$\boxed{e_s = \frac{1600 - K}{1600}}$$

On voudrait que $e_s = 0$

d'où $e_s = 1 - \frac{K}{1600} = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{K = 1600}$$

Donc pour avoir $e_s = 0$, il faut que $K = 1600$

Trouvons la valeur de K qui permet à ce que le système soit linéaire

d'après Routh

retard

$$G(s) = K e^{-1,5s} \frac{\frac{1}{0,7} \times \frac{1}{2}}{(s+0,5)(s+1,43)(s^2+40s+1600)}$$

$$= K e^{-1,5s} \frac{0,71}{(s+0,5)(s+1,43)(s+20+20i\sqrt{3})(s+20-20i\sqrt{3})}$$

$\forall i \in [\![1;4]\!]$, on remarque que $Re(p_i) < 0$

Donc le système est stable d'après le critère de Routh

Donc peut importe le K choisi le système est stable.

On peut donc choisir que $\boxed{K = 1600}$