CHAPITRE IV : MÉTHODE DE LAGRANGE

La méthode de Lagrange (1736-1813) est une méthode d'analyse des systèmes dynamiques équivalente à celle de Newton; elle recourt à des coordonnées généralisées qui sont des quantités scalaires plutôt que des quantités vectorielles, ce qui permet une analyse indépendante des systèmes de coordonnées.

4-1 Rappels théoriques :

La méthode de Lagrange est basée sur le principe de la conservation d'énergie et se résume à l'équation suivante :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

Tel que :

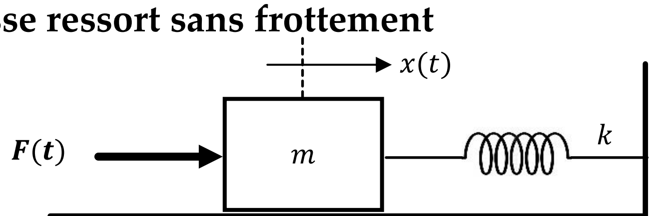
q_i : Coordonnées généralisées, Q : Force externe, T : Énergie cinétique, D : Énergie de dissipation, U : Énergie potentielle.

Dans ce qui suit, nous allons appliquer la méthode de Lagrange à différents systèmes mécaniques de translation et de rotation et sur des circuits électriques ayant différents degrés de liberté. Nous allons comparer les résultats obtenus avec la méthode de Lagrange à ceux qui sont obtenus par la méthode de Newton pour les systèmes mécaniques et par la méthode mailles pour les circuits électriques.

4-2 Problèmes :

4-2-1 Systèmes à un degré de liberté :

Système #1 : Masse ressort sans frottement



Modélisation par équations différentielles (Newton) :

$$\sum_i F_i = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad F(t) - kx = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + kx = F(t)$$

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$q = x;\ D = 0;\ Q = F(t)$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

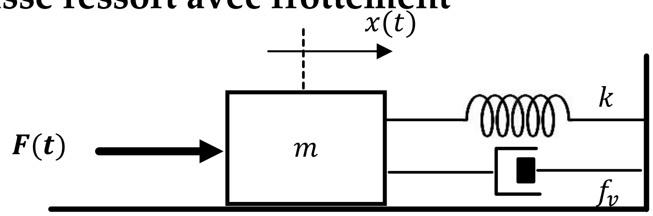
$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = kx$$

$$m\ddot{x} + kx = F(t)$$

Nous avons obtenu la même équation différentielle que précédemment.

Système #2 : Masse ressort avec frottement



Modélisation par équations différentielles (Newton) :

$$\sum_i F_i = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad F(t) - f_v\dot{x} - kx = m\ddot{x} \quad \rightarrow \quad m\ddot{x} + f_v\dot{x} + kx = F(t)$$

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$$q = x \,;\; Q = F(t)$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x}$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

$$U = \frac{1}{2}kx^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial x} = kx$$

$$D = \frac{1}{2}f_v\dot{x}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{x}} = f_v\dot{x}$$

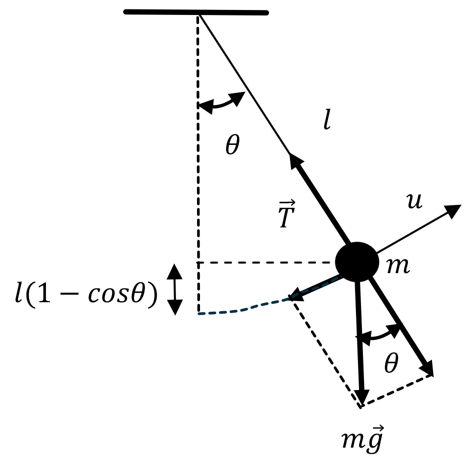
$$m\ddot{x} + f_v\dot{x} + kx = F(t)$$

Nous avons obtenu la même équation différentielle que précédemment.

Système #3 : Pendule simple sans frottement

Modélisation par équations différentielles (Newton) :

Il n'y a pas de mouvement dans la direction de la tige du pendule. Dans la direction du déplacement de la masse m :



$\sum_i F_i = m\ddot{u} \quad \rightarrow \quad -mgsin\theta = m\ddot{u}$

Avec : $u = l\theta$ pour les petits angles θ

$-mgsin\theta = ml\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$q = \theta\ ;\ D = 0\ ;\ Q = 0$

$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2ml^2\dot{\theta}$

$T = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

$U = mgl(1 - cos\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mglsin\theta$

$ml^2\ddot{\theta} + mglsin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

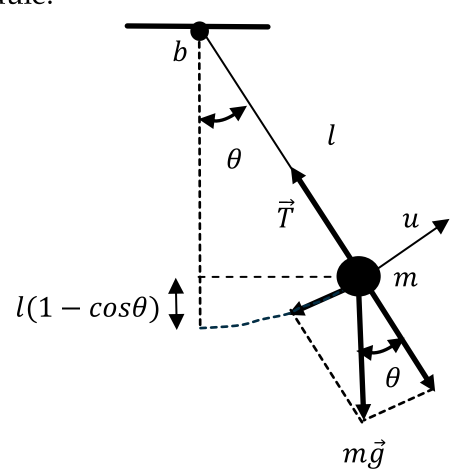
Nous avons obtenu la même équation différentielle que précédemment.

Système #4 : Pendule simple avec frottement

Modélisation par équations différentielles (Newton) :

Il n'y a pas de mouvement dans la direction de la tige du pendule.

Dans la direction du déplacement de la masse m :



$\sum_i F_i = m\ddot{u} \quad \rightarrow \quad -msin\theta g - \frac{b\dot{\theta}}{l} = m\ddot{u}$

Avec : $u = l\theta$ pour les petits angles θ

$-msin\theta g - \frac{b}{l}\dot{\theta} = ml\ddot{\theta} \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$q = \theta;\ Q = 0$

$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta}$

$$T = \frac{1}{2}m\left(l\dot{\theta}\right)^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

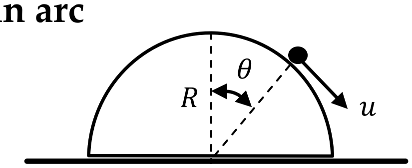
$$D = \frac{1}{2}b\dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}} = b\dot{\theta}$$

$$U = mgl(1 - cos\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mglsin\theta$$

$$ml^2\ddot{\theta} + b\dot{\theta} + mglsin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{b}{ml^2}\dot{\theta} + \frac{g}{l}sin\theta = 0$$

Nous avons obtenu la même équation différentielle que précédemment.

Système #5 : Bille glissant sans frottement sur un arc



Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$$q = \theta, D = 0, Q = 0$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mR\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mR\ddot{\theta}$$

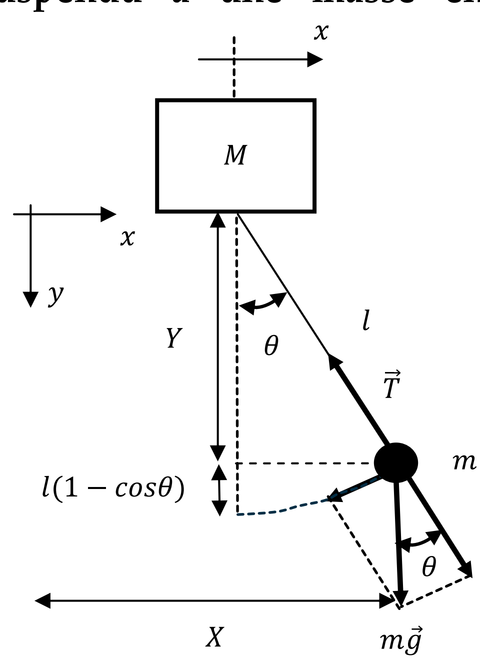
$$\rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$U = mgRcos\theta \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgRsin\theta$$

Nous obtenons une équation à une inconnue θ:

$$mR^2\ddot{\theta} - mgRsin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad \ddot{\theta} - \frac{g}{R}sin\theta = 0$$

Système #6 : Pendule sans frottement suspendu à une masse en mouvement



Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$$q = \theta, Q = 0, D = 0$$

$$X = x + lsin\theta, Y = lcos\theta$$

$$\rightarrow \quad \dot{X} = \dot{x} + l\dot{\theta}cos\theta, \dot{Y} = -l\dot{\theta}sin\theta$$

$$U = mgl(1 - cos\theta) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial \theta} = mglsin\theta$$

$$T = \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2cos^2\theta + 2l\dot{x}\dot{\theta}cos\theta + l^2\dot{\theta}^2sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}M\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}cos\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial\theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}sin\theta$$

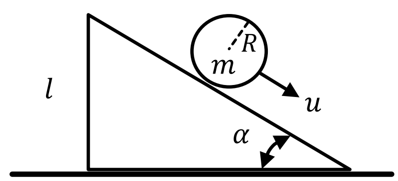
Nous obtenons une équation à une inconnue θ:

$$ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}cos\theta + mglsin\theta = 0 \quad \rightarrow \quad l\ddot{\theta} + \ddot{x}cos\theta + gsin\theta = 0$$

Système #7 : Cylindre amovible sans frottement sur un plan incliné

Le bloc triangulaire du plan incliné est rivé au sol.

Modélisation par la méthode de Lagrange :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial\dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$$q = u, Q = 0, D = 0$$

$$U = mg(l - usin\alpha) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial u} = -mgsin\alpha$$

$$T = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 = \frac{1}{2}m\dot{u}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{\dot{u}}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}m\dot{u}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial\dot{u}} = \frac{3}{2}m\dot{u} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial\dot{u}}\right) = \frac{3}{2}m\ddot{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0$$

Nous obtenons une équation à une inconnue u:

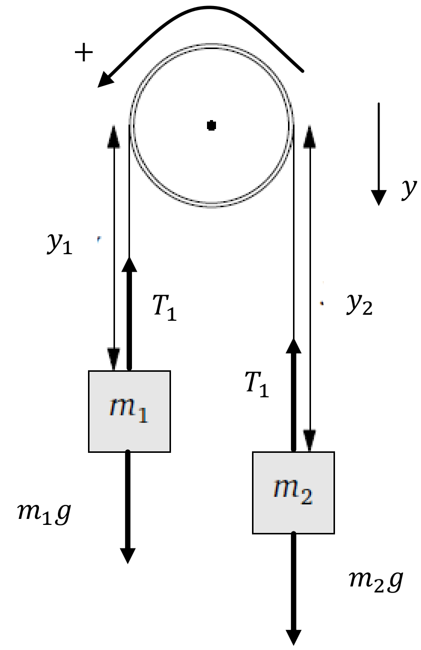
$$\frac{3}{2}m\ddot{u} - mgsin\alpha = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{3}{2}\ddot{u} - gsin\alpha = 0$$

Système #8 : Poulie sans inertie et sans frottement

Hypothèses : La poulie est considérée idéale (masse et inertie négligeables) de même que le fil (masse négligeable et frottement nul) et le module de la tension exercée sur les masses m_1 et m_2 est désigné T_1, $m_2 < m_1$.

Contraintes : $y_1 + y_2 = l \quad \rightarrow \quad y_1 = l - y_2 \quad \rightarrow \quad \dot{y}_1 = -\dot{y}_2 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$

Modélisation par équations différentielles (Newton) :



$$\sum_i F_i = m_i\ddot{y}$$

$$m_1g - T_1 = m_1\ddot{y}_1$$

$$T_1 - m_2g = -m_2\ddot{y}_2 = m_2\ddot{y}_1$$

Additionnons les deux équations :

$$(m_1 - m_2)g = (m_1 + m_2)\ddot{y}_1 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = \frac{(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}g$$

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$$q = y_1, Q = 0, D = 0$$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1{}^2 + \frac{1}{2}m_2\dot{y}_2{}^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1{}^2$$

Le calcul des énergies potentielles dépend du choix du repère. Selon le repère choisi (voir la direction de l'axe y dans la figure), les énergies potentielles sont négatives.

$$U = -m_1gy_1 - m_2gy_2 = -m_1gy_1 - m_2g(l - y_1) = -(m_1 - m_2)gy_1 - m_2gl$$

$$T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{y}_1{}^2 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1} = (m_1 + m_2)\dot{y}_1 \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\right) = (m_1 + m_2)\ddot{y}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_1} = 0$$

$$U = -(m_1 - m_2)gy_1 - m_2gl \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial y_1} = -(m_1 - m_2)g$$

Nous obtenons une équation à une inconnue y_1:

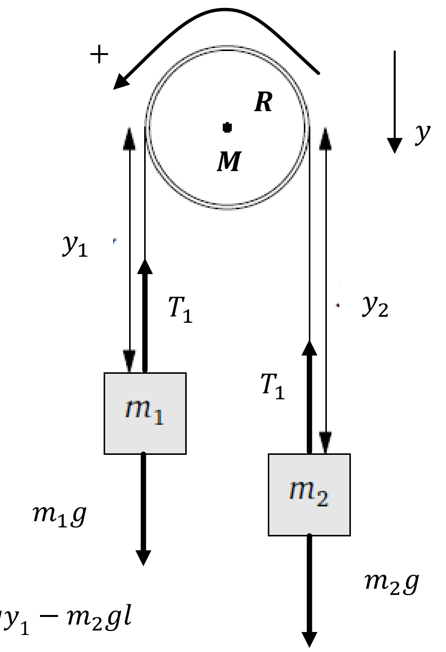
$$(m_1 + m_2)\ddot{y}_1 = (m_1 - m_2)g \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}g$$

Système #9 : Poulie avec inertie et sans frottement

Hypothèses : La poulie est considérée non idéale (masse et inertie non négligeables). Le fil (masse négligeable et frottement nul) et le module de la tension exercée sur les masses m_1 et m_2 est désigné T_1, $m_2 < m_1$.

Contraintes :

$$y_1 + y_2 = l \quad \rightarrow \quad y_1 = l - y_2 \quad \rightarrow \quad \dot{y}_1 = -\dot{y}_2 \quad \rightarrow \quad \ddot{y}_1 = -\ddot{y}_2$$



Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q$$

$q = y_1,\, Q = 0, D = 0$

$$T=\frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^{\,2}+\frac{1}{2}m_2\dot{y}_2^{\,2}+\frac{1}{2}J\dot{\theta}^2$$

$$=\frac{1}{2}(m_1+m_2)\dot{y}_1^{\,2}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{\dot{y}_1}{R}\right)^2=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)\dot{y}_1^{\,2}$$

Le calcul des énergies potentielles dépend du choix du repère. Selon le repère choisi (voir la direction de l'axe y dans la figure), les énergies potentielles sont négatives.

$$U=-m_1gy_1-m_2gy_2=-m_1gy_1-m_2g(l-y_1)=-(m_1-m_2)gy_1-m_2gl$$

$$T=\frac{1}{2}\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)\dot{y}_1^{\,2}\;\rightarrow\;\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}=\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)\dot{y}_1\;\rightarrow\;\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\right)=\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)\ddot{y}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_1}=0$$

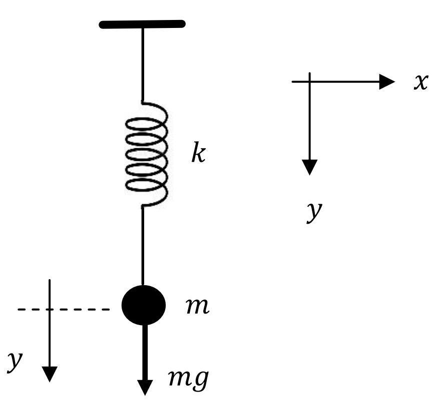
$$U=-(m_1-m_2)gy_1-m_2gl\quad\rightarrow\quad\frac{\partial U}{\partial y_1}=-(m_1-m_2)g$$

Nous obtenons une équation à une inconnue y_1:

$$\left(m_1+m_2+\frac{1}{2}M\right)\ddot{y}_1=(m_1-m_2)g\quad\rightarrow\quad\ddot{y}_1=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2+\frac{1}{2}M}g$$

Système #10 : Masse suspendue à un ressort

Modélisation par la méthode de Lagrange :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q$$

$q = y, Q = 0, D = 0$

$$T=\frac{1}{2}m\dot{y}^2\quad\rightarrow\quad\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=m\dot{y}\quad\rightarrow\quad\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=m\ddot{y}$$

$$U=mgy+\frac{1}{2}ky^2\quad\rightarrow\quad\frac{\partial U}{\partial y}=mg+ky$$

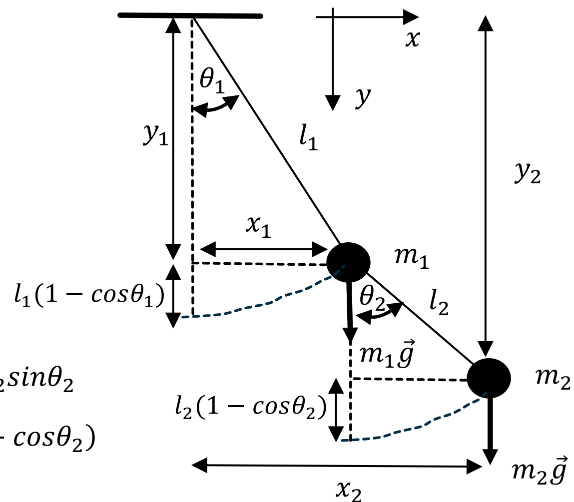
Nous obtenons une équation à une inconnue y:

$$m\ddot{y}+mg+ky=0\quad\rightarrow\quad m\ddot{y}+ky=mg$$

4-2-2 Systèmes à deux degrés de liberté :

Système #11 : Pendule double sans frottement

Modélisation par la méthode de Lagrange :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q$$

$q_1=\theta_1,\, q_2=\theta_2, Q=0, D=0$

$x_1=l_1sin\theta_1,\, y_1=l_1cos\theta_1$

$\rightarrow\ \ \dot{x}_1=l_1\dot{\theta}_1cos\theta_1,\, \dot{y}_1=-l_1\dot{\theta}_1sin\theta_1$

$x_2=l_1sin\theta_1+l_2sin\theta_2,\, y_2=l_1cos\theta_1+l_2cos\theta_2$

$\rightarrow\ \ \dot{x}_2=l_1\dot{\theta}_1cos\theta_1+l_2\dot{\theta}_2cos\theta_2,\, \dot{y}_2=-l_1\dot{\theta}_1sin\theta_1-l_2\dot{\theta}_2sin\theta_2$

$U=m_1gl_1(1-cos\theta_1)+m_2gl_1(1-cos\theta_1)+m_2gl_2(1-cos\theta_2)$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta_1}=m_1gl_1sin\theta_1+m_2gl_1sin\theta_1 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial \theta_2}=m_2gl_2sin\theta_2$$

$$T=\frac{1}{2}m_1{v_1}^2+\frac{1}{2}m_2{v_2}^2=\frac{1}{2}m_1\left({\dot{x}_1}^2+{\dot{y}_1}^2\right)+\frac{1}{2}m_2\left({\dot{x}_2}^2+{\dot{y}_2}^2\right)$$

$$\begin{aligned}&=\frac{1}{2}m_1\left({l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2cos^2\theta_1+{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2sin^2\theta_1\right)\\&\qquad+\frac{1}{2}m_2\Big({l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2cos^2\theta_1+{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2sin^2\theta_1+{l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2cos^2\theta_2+{l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2sin^2\theta_2\\&\qquad+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2cos\theta_1cos\theta_2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2sin\theta_1sin\theta_2\Big)\end{aligned}$$

Avec : $cos^2\theta_1+sin^2\theta_1=1$ et $cos^2\theta_2+sin^2\theta_2=1$

$$T=\frac{1}{2}m_1{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+\frac{1}{2}m_2\left({l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+{l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(cos\theta_1cos\theta_2+sin\theta_1sin\theta_2)\right)$$

Avec : $cos\theta_1cos\theta_2+sin\theta_1sin\theta_2=cos(\theta_2-\theta_1)$

$$T=\frac{1}{2}m_1{l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+\frac{1}{2}m_2\left({l_1}^2{\dot{\theta}_1}^2+{l_2}^2{\dot{\theta}_2}^2+2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2cos(\theta_2-\theta_1)\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}=(m_1+m_2){l_1}^2\dot{\theta}_1+m_2l_1l_2\dot{\theta}_2cos(\theta_2-\theta_1)$$

$$\rightarrow\ \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right)=(m_1+m_2){l_1}^2\ddot{\theta}_1+m_2l_1l_2\ddot{\theta}_2cos(\theta_2-\theta_1)-\left(\dot{\theta}_2-\dot{\theta}_1\right)m_2l_1l_2\dot{\theta}_2sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_1}=-m_2l_1l_2\dot{\theta}_1\dot{\theta}_2sin(\theta_2-\theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2} = m_2 {l_2}^2 \dot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) = m_2 {l_2}^2 \ddot{\theta}_2 + 2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 cos(\theta_2 - \theta_1) - (\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_2 sin(\theta_2 - \theta_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta_2} = m_2 l_1 l_2 \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 sin(\theta_2 - \theta_1)$$

Nous obtenons le système d'équations à deux inconnues θ_1 et θ_2:

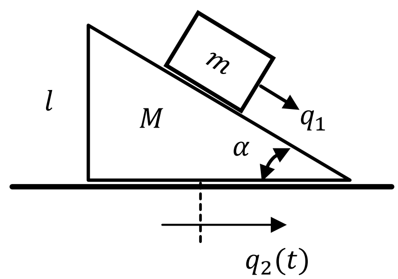
$$(m_1 + m_2) {l_1}^2 \ddot{\theta}_1 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_2 cos(\theta_2 - \theta_1) - m_2 l_1 l_2 {\dot{\theta}_2}^2 sin(\theta_2 - \theta_1) + (m_1 + m_2) g l_1 sin\theta_1 = 0$$

$$m_2 {l_2}^2 \ddot{\theta}_2 + m_2 l_1 l_2 \ddot{\theta}_1 cos(\theta_2 - \theta_1) + m_2 l_1 l_2 {\dot{\theta}_1}^2 sin(\theta_2 - \theta_1) + m_2 g l_2 sin\theta_2 = 0$$

Système #12 : Masse glissant sans frottement sur un plan incliné amovible

Le bloc du plan incliné de masse M glisse sans frottement dans le plan horizontal; le bloc de masse m glisse sans frottement sur le bloc de masse M. Ainsi, lorsque la masse m se déplace à droite, la masse M se déplace à gauche.

Modélisation par la méthode de Lagrange :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$$Q = 0, D = 0$$

$$U = mg(l - q_1 sin\alpha) \quad \rightarrow \quad \frac{\partial U}{\partial q_1} = -mgsin\alpha \ , \ \frac{\partial U}{\partial q_2} = 0$$

$$T = \frac{1}{2} M {\dot{q}_2}^2 + \frac{1}{2} m(\dot{q}_2 + \dot{q}_1 cos\alpha)^2 + \frac{1}{2} m {\dot{q}_1}^2 sin^2\alpha = \frac{1}{2}(M + m){\dot{q}_2}^2 + \frac{1}{2} m\left({\dot{q}_1}^2 + 2\dot{q}_1 \dot{q}_2 cos\alpha\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = m\dot{q}_1 + m\dot{q}_2 cos\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = m\ddot{q}_1 + m\ddot{q}_2 cos\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = (M + m)\dot{q}_2 + m\dot{q}_1 cos\alpha \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = (M + m)\ddot{q}_2 + m\ddot{q}_1 cos\alpha$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

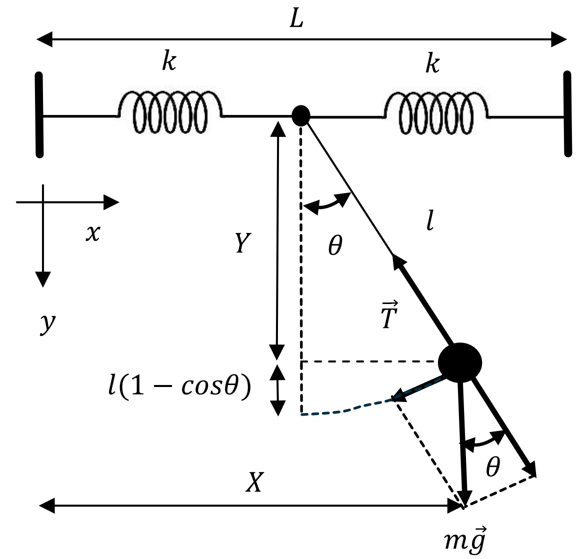
Nous obtenons le système d'équations à deux inconnues q_1 et q_2 :

$$m\ddot{q}_1 + m\ddot{q}_2 cos\alpha - mgsin\alpha = 0$$

$$(M + m)\ddot{q}_2 + m\ddot{q}_1 cos\alpha = 0$$

Système #13 : Pendule sans frottement suspendu entre deux ressorts

Dans cet exemple, nous admettons que les ressorts restent horizontaux et qu'au repos le pendule est situé à une distance $L/2$ des extrémités.



Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$q_1 = \theta, q_2 = x, Q = 0, D = 0$

$X = x + l sin\theta, Y = l cos\theta$

$\rightarrow \quad \dot{X} = \dot{x} + l\dot{\theta}cos\theta, \dot{Y} = -l\dot{\theta}sin\theta$

$$U = \frac{1}{2}k\left(x - \frac{L}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{2} - x\right)^2 + mgl(1 - cos\theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = mglsin\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = k\left(x - \frac{L}{2}\right) - k\left(\frac{L}{2} - x\right) = 2k\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

$$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2\right) = \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2cos^2\theta + 2l\dot{x}\dot{\theta}cos\theta + l^2\dot{\theta}^2sin^2\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{x}^2 + l^2\dot{\theta}^2 + 2l\dot{x}\dot{\theta}cos\theta\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = ml^2\dot{\theta} + ml\dot{x}cos\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = ml^2\ddot{\theta} + ml\ddot{x}cos\theta - ml\dot{x}\dot{\theta}sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = -ml\dot{x}\dot{\theta}^2sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} + ml\dot{\theta}cos\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Nous obtenons le système d'équations à deux inconnues x et θ:

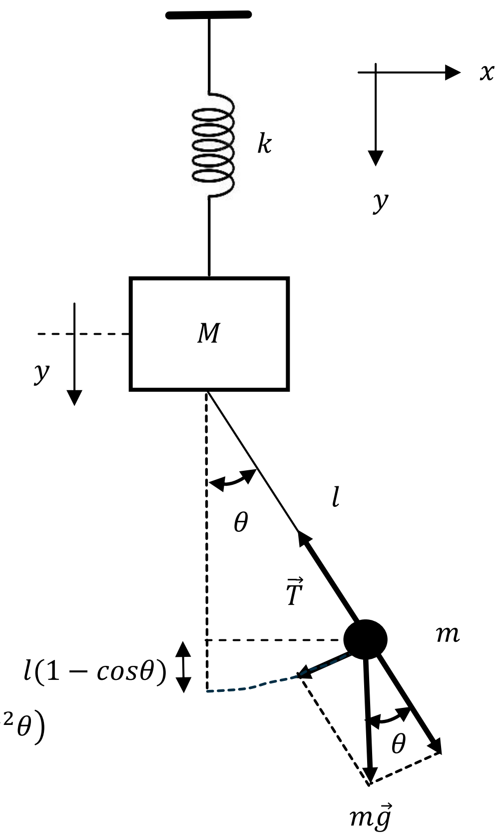
$$l\ddot{\theta} + \ddot{x}cos\theta + gsin\theta = 0$$

$$m\ddot{x} + ml\ddot{\theta}cos\theta - ml\dot{\theta}^2sin\theta + 2k\left(x - \frac{L}{2}\right) = 0$$

Système #14 : Pendule sans frottement suspendu à une masse et un ressort

On suppose que La mase M et le ressort sont en équilibre.

Modélisation par la méthode de Lagrange :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_i}+\frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i}+\frac{\partial U}{\partial q_i}=Q$$

$q_1=\theta, q_2=y, Q=0, D=0$

$Y=y+lcos\theta, X=lsin\theta$

$\rightarrow \quad \dot{Y}=\dot{y}-l\dot{\theta}sin\theta, \dot{X}=l\dot{\theta}cos\theta$

$$U=\frac{1}{2}ky^2+mgl(1-cos\theta)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta}=mglsin\theta$$

$$\frac{\partial U}{\partial y}=ky$$

$$T=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{Y}^2+\dot{X}^2\right)$$

$$=\frac{1}{2}M\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\left(\dot{y}^2+l^2\dot{\theta}^2sin^2\theta-2l\dot{y}\dot{\theta}sin\theta+l^2\dot{\theta}^2cos^2\theta\right)$$

$$=\frac{1}{2}(M+m)\dot{y}^2+\frac{1}{2}m\left(l^2\dot{\theta}^2-2l\dot{y}\dot{\theta}sin\theta\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}=ml^2\dot{\theta}-ml\dot{y}sin\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right)=ml^2\ddot{\theta}-ml\ddot{y}sin\theta-ml\dot{y}\dot{\theta}cos\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta}=-ml\dot{y}\dot{\theta}^2sin\theta$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}=(M+m)\dot{y}-ml\dot{\theta}sin\theta \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right)=(M+m)\ddot{y}-ml\ddot{\theta}sin\theta-ml\dot{\theta}^2cos\theta$$

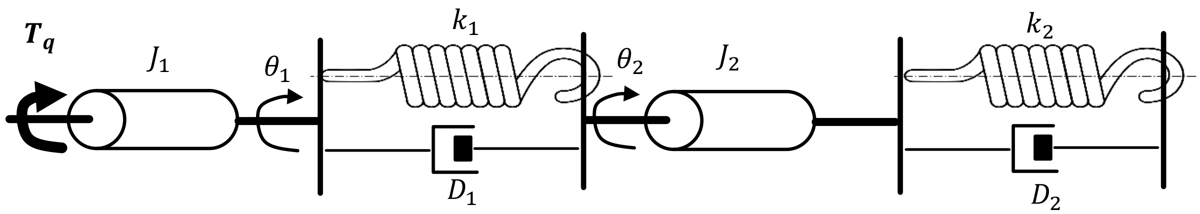
$$\frac{\partial T}{\partial y}=0$$

Nous obtenons le système d'équations à deux inconnues y et θ:

$l\ddot{\theta}-\ddot{y}sin\theta+gsin\theta=0$

$(M+m)\ddot{y}-ml\ddot{\theta}sin\theta-ml\dot{\theta}^2cos\theta+ky=0$

Système #15 : Système mécanique en rotation



Modélisation par équations différentielles (Newton) :

$$\sum_i T_i = J\ddot{\theta}$$

k_i : Constante de ressort, D_i : Constante de frottement, T_q : Couple externe, $q_1 = \theta_1$, $q_2 = \theta_2$

$$T_q - D_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - k_1(\theta_1 - \theta_2) = J_1\ddot{\theta}_1$$

$$-D_1(\dot{\theta}_2 - \dot{\theta}_1) - D_2\dot{\theta}_2 - k_1(\theta_2 - \theta_1) - k_2\theta_2 = J_2\ddot{\theta}_2$$

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$T = \frac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1{}^2 + \frac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2{}^2$$

$$D = \frac{1}{2}D_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2)^2 + \frac{1}{2}D_2\dot{\theta}_2{}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1(\theta_1 - \theta_2)^2 + \frac{1}{2}k_2\theta_2{}^2$$

$\boldsymbol{q_1 = \theta_1}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_1} + \frac{\partial U}{\partial \theta_1} = T_q$$

$$\frac{d}{dt}(J_1\dot{\theta}_1) - 0 + D_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + k_1(\theta_1 - \theta_2) = T_q$$

$$J_1\ddot{\theta}_1 = -D_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - k_1(\theta_1 - \theta_2) + T_q$$

$\boldsymbol{q_2 = \theta_2}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{\theta}_2} + \frac{\partial U}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(J_2\dot{\theta}_2) - 0 - D_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) + D_2\dot{\theta}_2 - k_1(\theta_1 - \theta_2) + k_2\theta_2 = 0$$

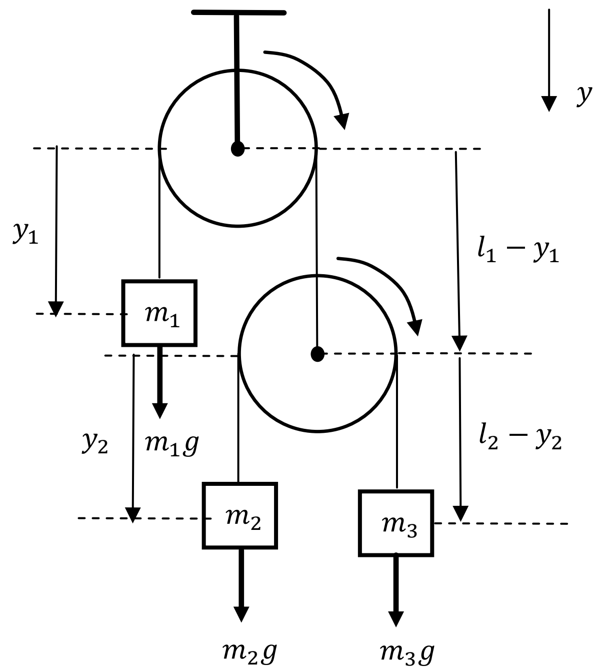
$$J_2\ddot{\theta}_2 = D_1(\dot{\theta}_1 - \dot{\theta}_2) - D_2\dot{\theta}_2 + k_1(\theta_1 - \theta_2) - k_2\theta_2$$

Nous retrouverons les mêmes équations obtenues en appliquant la méthode d'analyse de Newton.

Système #16 : Machine d'Atwood

Hypothèses : Les poulies sont considérées idéales (masse et inertie non négligeables). Le fil (masse négligeable et frottement nul) et la tension appliquée est supposée être constante, $m_1 < m_2 + m_3$, $m_2 < m_3$.

Contraintes : l_1 et l_2 (longueurs des fils) constantes.



Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$q_1 = y_1, q_2 = y_2, Q = 0, D = 0$

$$T = \frac{1}{2}m_1\dot{y}_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\left(\dot{y}_1 - \dot{y}_2\right)^2 + \frac{1}{2}m_3\left(\dot{y}_1 + \dot{y}_2\right)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_1}\right) = (m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{y}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}_2}\right) = (m_2 + m_3)\ddot{y}_2 + (m_3 - m_2)\ddot{y}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial y_2} = 0$$

Le calcul des énergies potentielles dépend du choix du repère. Selon le repère choisi (voir la direction de l'axe y dans la figure), les énergies potentielles sont négatives.

$$U = -m_1 g y_1 - m_2 g y_2 - m_2 g(l_1 - y_1) - m_3 g\left(l_1 - y_1\right) - m_3 g\left(l_2 - y_2\right)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y_1} = -m_1 g + m_2 g + m_3 g \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial y_2} = -m_2 g + m_3 g$$

Nous obtenons un système d'équations à deux inconnues y_1 et y_2:

$$(m_1 + m_2 + m_3)\ddot{y}_1 + (m_3 - m_2)\ddot{y}_2 - m_1 g + m_2 g + m_3 g = 0$$

$$(m_2 + m_3)\ddot{y}_2 + (m_3 - m_2)\ddot{y}_1 - m_2 g + m_3 g = 0$$

Système #17 : Poulies sans frottement avec ressorts

Hypothèses : Les poulies sont considérées non idéales (masse et inertie non négligeables). Les ressorts ont des longueurs initiales au repos de l_1 et l_2. L'axe de la poulie de masse M_1 est fixe. Pour ce système, nous nous limitons à écrire les équations de Lagrange.

Contraintes :

Hauteur constante : $d_1 + y_2 = C_1$, longueur du coude constante : $(y_2 - d_2) + (y_2 - y_1) = C_2$.

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$q_1 = y_1, q_2 = y_2, Q = 0, D = 0$

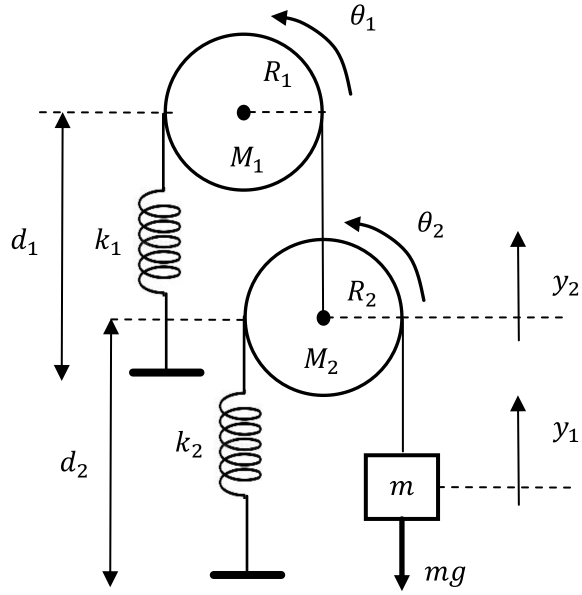
$$T = \tfrac{1}{2}J_1\dot{\theta}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}J_2\dot{\theta}_2^{\,2} + \tfrac{1}{2}m\dot{y}_1^{\,2} + \tfrac{1}{2}M_2\dot{y}_2^{\,2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_1R_1^{\,2}\right)\left(\frac{\dot{y}_2}{R_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}M_2R_2^{\,2}\right)\left(\frac{\dot{y}_1 - \dot{y}_2}{R_2}\right)^2 + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^{\,2} + \frac{1}{2}M_2\dot{y}_2^{\,2}$$

$$= \frac{1}{4}M_1\dot{y}_2^{\,2} + \frac{1}{4}M_2\left(\dot{y}_1^{\,2} + \dot{y}_2^{\,2} - 2\dot{y}_1\dot{y}_2\right) + \frac{1}{2}m\dot{y}_1^{\,2} + \frac{1}{2}M_2\dot{y}_2^{\,2}$$

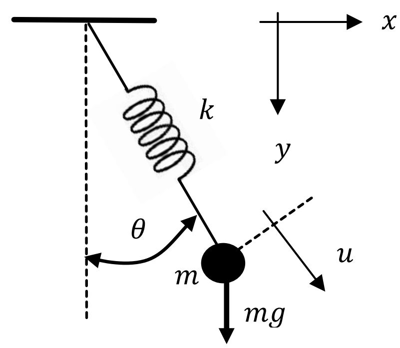
$$= \left(\frac{1}{4}M_1 + \frac{3}{4}M_2\right)\dot{y}_2^{\,2} + \left(\frac{1}{4}M_2 + \frac{1}{2}m\right)\dot{y}_1^{\,2} - \frac{1}{2}M_2\dot{y}_1\dot{y}_2$$

$$U = mgy_1 + M_2gy_2 + \frac{1}{2}k_1(d_1 - l_1)^2 + \frac{1}{2}k_2(d_2 - l_2)^2$$



Système #18 : Pendule suspendu à un ressort

Hypothèse : Le ressort a une longueur initiale au repos de u_0.



Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$q_1 = u, q_2 = \theta, Q = 0, D = 0$

$x = usin\theta \quad \rightarrow \quad \dot{x} = \dot{u}sin\theta + u\dot{\theta}cos\theta$

$y = ucos\theta \quad \rightarrow \quad \dot{y} = \dot{u}cos\theta - u\dot{\theta}sin\theta$

$$T = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{u}^2sin^2\theta + u^2\dot{\theta}^2cos^2\theta + 2u\dot{u}\dot{\theta}sin\theta cos\theta + \dot{u}^2cos^2\theta + u^2\dot{\theta}^2sin^2\theta - 2u\dot{u}\dot{\theta}sin\theta cos\theta\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot{u}^2 + u^2\dot{\theta}^2\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = m\dot{u} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{u}}\right) = m\ddot{u}$$

$$\frac{\partial T}{\partial u} = mu\dot{\theta}^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = mu^2\dot{\theta} \quad \rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = mu^2\ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$U = mgu(1 - cos\theta) + \frac{1}{2}ku^2$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = mg(1 - cos\theta) + ku$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -mgusin\theta$$

Nous obtenons le système d'équations à deux inconnues u et θ:

$$m\ddot{u} - mu\dot{\theta}^2 - mg(1 - cos\theta) + ku = 0$$

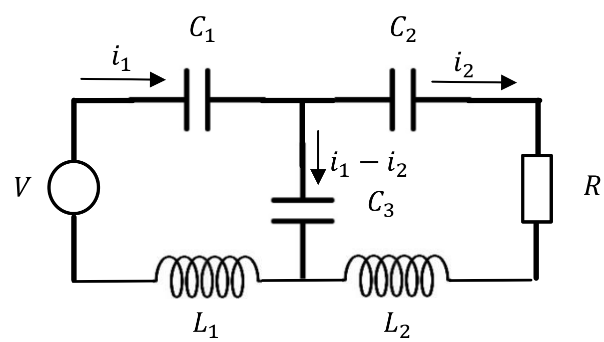
$$u^2\ddot{\theta} + 2u\dot{u}\dot{\theta} + gusin\theta = 0$$

Système #19 : Circuit RLC à deux mailles

$$V_{L_i} = L_i\dot{I}_i = L_i\ddot{q}_i \quad , \quad I_{C_i} = C_i\dot{V}_i = \frac{\dot{q}_i}{C_i} \quad , \quad V_i = R_iI_i = R_i\dot{q}_i$$

Tel que : V_i : Tension en V, I_i : Courant en A, q_i : Quantité de charge en C.

Modélisation par la méthode de Lagrange :



$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

$$Q = V$$

$$T = \frac{1}{2}L_1{I_1}^2 + \frac{1}{2}L_2{I_2}^2 = \frac{1}{2}L_1{\dot{q}_1}^2 + \frac{1}{2}L_2{\dot{q}_2}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = L_1\ddot{q}_1 \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = L_2\ddot{q}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0$$

$$U = \frac{1}{2}C_1{V_1}^2 + \frac{1}{2}C_2{V_2}^2 + \frac{1}{2}C_3{V_3}^2 = \frac{1}{2}\frac{{q_1}^2}{C_1} + \frac{1}{2}\frac{{q_2}^2}{C_2} + \frac{1}{2}\frac{(q_1 - q_2)^2}{C_3}$$

$$\frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{q_1}{C_1} + \frac{q_1 - q_2}{C_3} \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = \frac{q_2}{C_2} - \frac{q_1 - q_2}{C_3}$$

$$D = \frac{1}{2}R{I_2}^2 = \frac{1}{2}R{\dot{q}_2}^2 \quad , \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = R\dot{q}_2$$

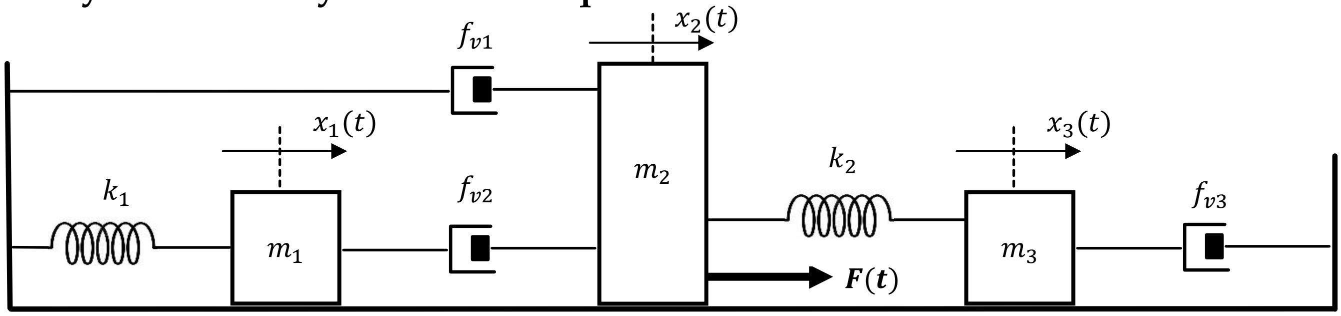
Nous obtenons le système d'équations à deux inconnues q_1 et q_2:

$$L_1\ddot{q}_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_3}\right)q_1 - \frac{1}{C_3}q_2 = V$$

$$L_2\ddot{q}_2 + R\dot{q}_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}\right)q_2 - \frac{1}{C_3}q_1 = 0$$

4-2-3 Systèmes à trois degrés de liberté :

Système #20 : Système mécanique en translation



Modélisation par équations différentielles (Newton) :

$$\sum_i F_i = m\ddot{x}$$

k_i : Constante de ressort, f_{vi} : Constante de frottement, F : Force externe, $q_i = x_i$, $i = 1{,}2{,}3$

$$-f_{v2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1 = m_1\ddot{x}_1$$

$$F - f_{v2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f_{v1}\dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_3) = m_2\ddot{x}_2$$

$$-f_{v3}\dot{x}_3 - k_2(x_3 - x_2) = m_3\ddot{x}_3$$

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$T = \frac{1}{2}m_1{\dot{x}_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{\dot{x}_2}^2 + \frac{1}{2}m_3{\dot{x}_3}^2$$

$$D = \frac{1}{2}f_{v1}{\dot{x}_2}^2 + \frac{1}{2}f_{v2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2}f_{v3}{\dot{x}_3}^2$$

$$U = \frac{1}{2}k_1{x_1}^2 + \frac{1}{2}k_2(x_2 - x_3)^2$$

$\boldsymbol{q_1 = x_1}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_1} + \frac{\partial U}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_1\dot{x}_1) - 0 + f_{v2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_1 x_1 = 0$$

$$m_1\ddot{x}_1 = -f_{v2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) - k_1 x_1$$

$\boldsymbol{q_2 = x_2}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_2} + \frac{\partial U}{\partial x_2} = F$$

$$\frac{d}{dt}(m_2\dot{x}_2) - 0 + f_{v1}\dot{x}_2 - f_{v2}(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + k_2(x_2 - x_3) = F$$

$$m_2\ddot{x}_2 = f_{v2}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - f_{v1}\dot{x}_2 - k_2(x_2 - x_3) + F$$

$\boldsymbol{q_3 = x_3}$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_3}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_3} + \frac{\partial D}{\partial \dot{x}_3} + \frac{\partial U}{\partial x_3} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m_3\dot{x}_3) - 0 + f_{v3}\dot{x}_3 - k_2(x_2 - x_3) = 0$$

$$m_3\ddot{x}_3 = -f_{v3}\dot{x}_3 + k_2(x_2 - x_3)$$

Nous retrouverons les mêmes équations obtenues en appliquant la méthode d'analyse de Newton.