CHAPITRE I : LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE - LA TRANSFORMÉE EN Z

1-1 Rappels théoriques

1-1-1 Séries de Fourier

La série de Fourier permet de représenter un signal périodique sous la forme d'une somme des signaux sinusoïdaux (harmoniques), dont les fréquences sont un multiple entier de la fréquence du signal périodique (fréquence fondamentale) et si nécessaire d'une composante continue. L'effet du signal périodique sur une variable du circuit est déterminé en appliquant le principe de superposition à la série de Fourier du signal. Pour un signal périodique $x(t)$ ayant une période T la relation suivante est vérifiée :

$$x(t) = x(t + nT), n = 1,1,3, \dots$$

Le signal $x(t)$ peut-être écrit selon une série de Fourier selon trois formulations :

Forme 1 :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n cos(n\omega_0 t) + a_n sin(n\omega_0 t)\right), n = 1, 2, 3, \dots$$

Tel que :

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \ , \ a_0 = \frac{1}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)dt \ , \ a_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)cos(n\omega_0 t)dt \ , \ b_n = \frac{2}{T}\int_{t_0}^{t_0+T} x(t)sin(n\omega_0 t)dt$$

Le coefficient a_0 est la valeur moyenne du signal. La composante de $x(t)$ dont la fréquence angulaire est $n\omega_0 t$ est appelée l'harmonique de rang n. La composante de $x(t)$ dont la fréquence angulaire est ω_0 est appelée l'harmonique fondamentale.

Forme 2 :

$$x(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n\omega_0 t - \varphi_n), n = 1, 2, 3, \dots$$

Tel que :

$$A_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \ , \ \varphi_n = tan^{-1}\left(\frac{b_n}{a_n}\right)$$

Forme 3 :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} C_n e^{jn\omega_0 t}, n = \pm 1, 2, 3, \dots$$

Tel que :

$$C_n = \frac{a_n}{2} - j\frac{b_n}{2} = |C_n|e^{j\varphi_n} \quad , \quad |C_n| = \frac{1}{2}\sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \quad , \quad \varphi_n = tan^{-1}\left(\frac{-b_n}{a_n}\right)$$

Exemples :

Nous allons considérer cinq signaux périodiques : Un signal d'horloge, un signal triangulaire, un signal de Dirac, un signal $sinc(x)$ et un cycle d'une impulsion unique de période infinie.

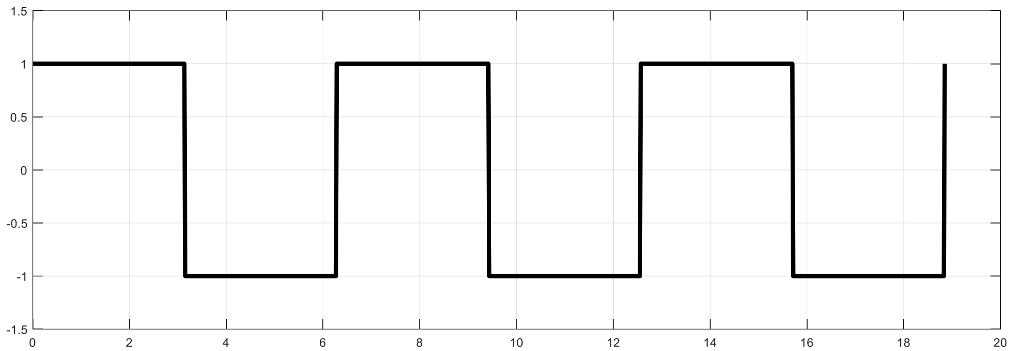
Dans le programme MATLAB, il faut déclarer les valeurs suivantes :

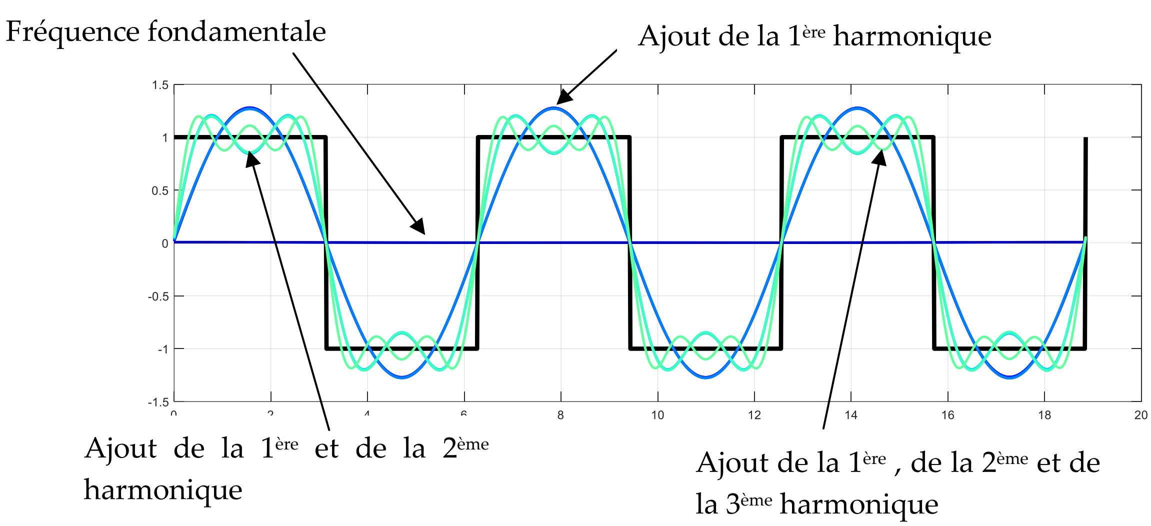
- L : Intervalle retenu pour l'abscisse.
- N : Pas d'échantillonnage horizontal du graphe

La commande fait appel aux coefficients A(k)et B(k) des séries de Fourier. Dans cet exemple, nous limitons la valeur de k à 20. Le signal d'origine est reconstitué avec plus de précision lorsque la valeur de k augmente.

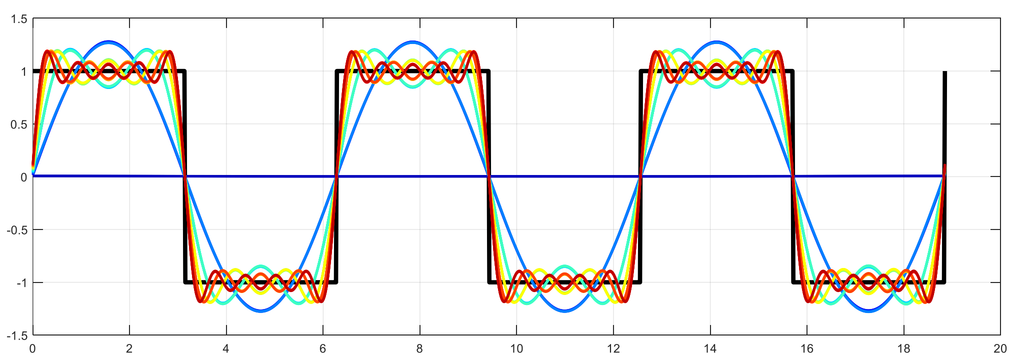
```
% La série de Fourier
clear;
clc;
% Définir les bornes
L=pi;
N=1024;
dx=2*L/(N-1);
x=-L:dx:L;
% définir la fonction
f=0*x;
f(N/4:N/2)=4*(1:N/4+1)/N;
f(N/2+1:3*N/4)=1-4*(0:N/4-1)/N;
% f=square(x);
% f=tripuls(x);
% f=gauspuls(x);
% f=sinc(x);
figure
plot(x,f,'-k','LineWidth',3.5), grid on;
ylim([-1.5 1.5]);
hold on
% Calculer la serie de Fourier
CC=jet(20);
A0=sum(f.*ones(size(x)))*dx/pi;
tFS=A0/2;
for k=1:60
    A(k)=sum(f.*cos(pi*k*x/L))*dx/pi;
    B(k)=sum(f.*sin(pi*k*x/L))*dx/pi;
    tFS=tFS+A(k)*cos(k*pi*x/L)+B(k)*sin(k*pi*x/L);
    plot(x,tFS,'-','color',CC(k,:),'LineWidth',2)
    pause(.5)
end
```

Reconstitution d'un signal d'horloge à partir de ses harmoniques.

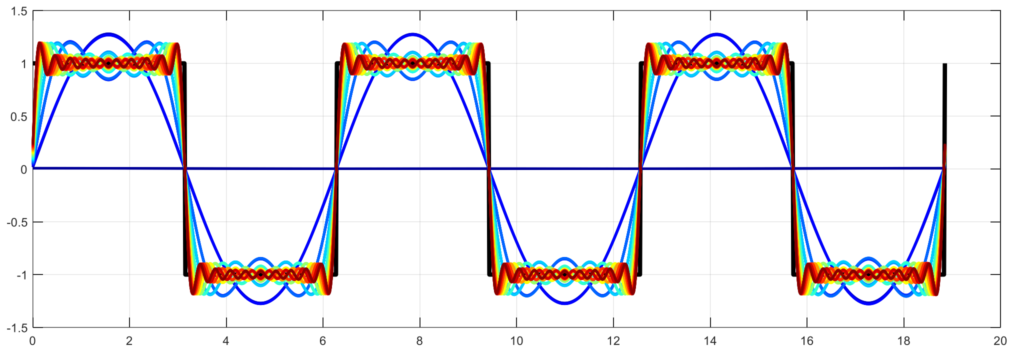




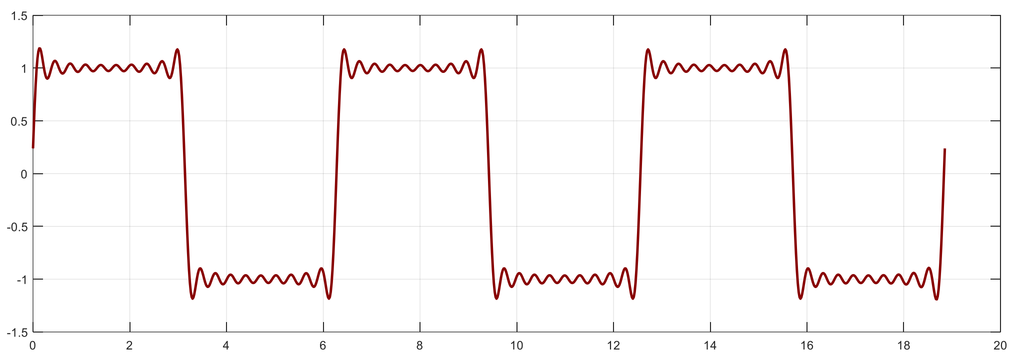
Avec 30 harmoniques



Avec 60 harmoniques

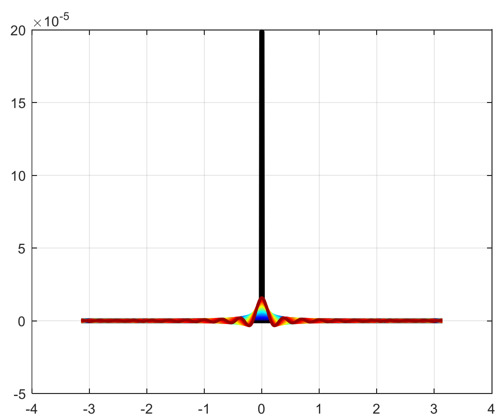


Résultat avec 60 harmoniques

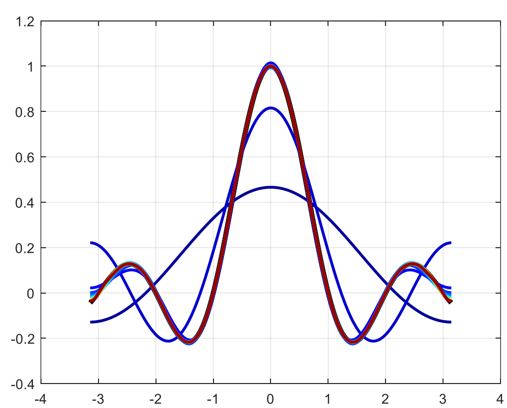


Autres exemples :

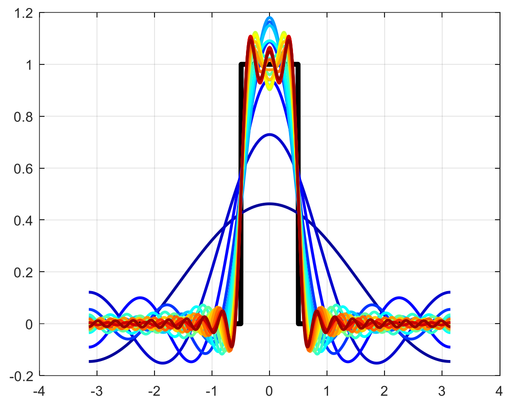
Impulsion de Dirac



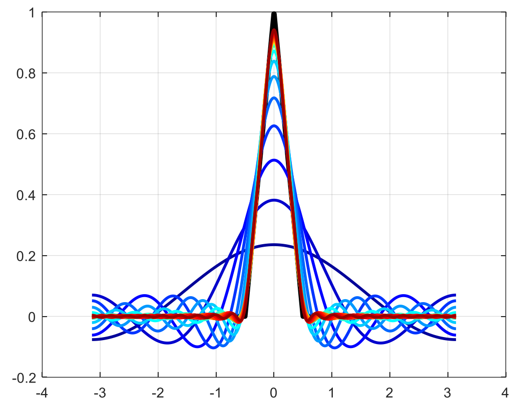
Fonction sinc



Impulsion unique



Signal triangulaire



1-1-2 Transformée de Fourier

La transformée de Fourier est une opération qui permet de représenter en fréquence des signaux qui ne sont pas périodiques. Il s'agit de l'analogue des séries de Fourier pour les fonctions périodiques lorsque la période tend vers l'infini, une fonction non périodique pouvant être considérée comme une fonction dont la période est infinie. Ce passage à la limite nous fait passer des séries de Fourrier à la transformation de Fourier. Tout signal $g(t)$ d'énergie finie peut être représenté par la transformée de Fourier $G(\omega)$ qui lui est unique et qui est définie comme suit :

$G(\omega) = \frac{1}{T}\int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt$ ou $G(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j2\pi f}\, df$

La transformée inverse de Fourier est définie comme suit :

$g(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} G(\omega)e^{j\omega t}d\omega$ ou $g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(f)e^{j2\pi f}\, df$

Remarque: Il est également possible de représenter l'argument (la phase) de la transformée de Fourier. Ainsi, une multiplication par $cos(\omega_0 t)$ n'introduit pas une modification de phase. Une multiplication par $sin(\omega_0 t)$ introduit un déphasage de -90° à la fréquence ω_0 et un déphasage de $+90^{\circ}$ à la fréquence de $-\omega_0$. Un délai temporel de a va introduire un déphasage $-\omega a$ qui dépend de la fréquence. Dans le cas d'une impulsion unique, le déphasage est une succession de 0° et de 180° qui alterne à chaque fois que la fonction $Sa(x)$ s'annule.

Exemples :

Rappelons qu'il s'agit d'impulsions uniques et non périodiques et représenterons l'amplitude $|G(\omega)|$ de la transformation de Fourier.

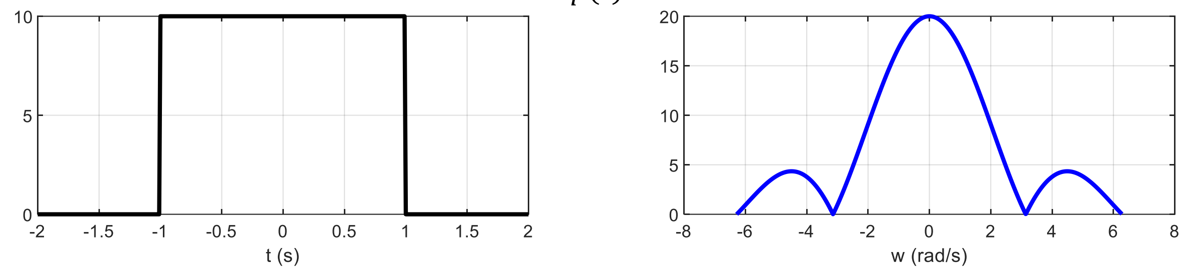
Représenter la transformation de Fourrier d'une impulsion rectangulaire unique $p(t)$, ainsi que celles de $p(t-a)$, $p(te^{j\omega_c t})$, $p(t)cos\omega_c t$, $p(bt)$ et $p(t/b)$. L'impulsion rectangulaire est définie par son amplitude A et sa durée τ : $p(t) = A$ pour $-\frac{\tau}{2} \leq t \leq \frac{\tau}{2}$ et $p(t) = 0$ ailleurs.

Illustrer les exemples avec $A = 10$, $\tau = 2\ s$, $a = 0.5$, $b = 5$ et $\omega_c = 4\ rad/s$:

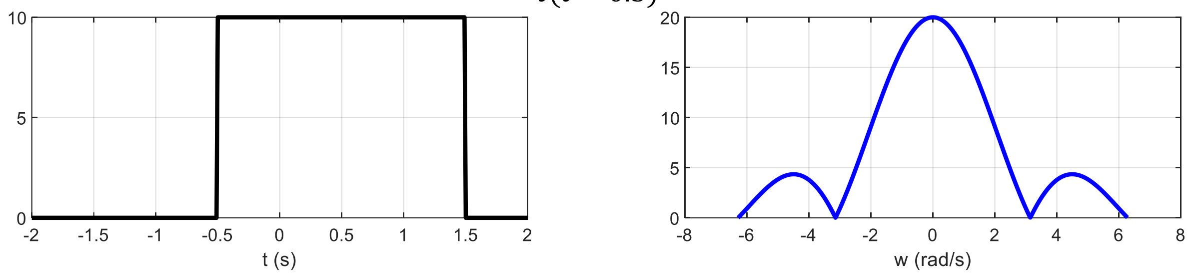
Nous notons que sur l'axe des fréquences f, les zéros de la transformation de Fourrier sont des multiples de $\frac{1}{\tau}$ et que sur l'axe des pulsations ω, les zéros de la transformation de Foutrrier sont des multiples de $\frac{2\pi}{\tau}$.

```
% transformée de Fourier continue
syms w
% définir de la fonction
T=2; % Largeur de l'impulsion (Tau)
A=10; % Amplitude de l'impulsion
a=0.5; % Décalage dans le temps
b=2; % Compression
c=0.5; % Expansion
omega=4; % Décalage en fréquence
t=-2:0.01:2;
f_t=A.*((t>=-T/2)-(t>=T/2)); % p(t)
f_t=A.*((t>=-((T/2)-a))-(t>=((T/2)+a))); % p(t-a)
f_t=A.*((t>=-(T/b)/(2))-(t>=(T/b)/(2))); % p(b*t)
f_t=A.*((t>=-(T/c)/(2))-(t>=(T/c)/(2))); % p(t/c)
f_t=A*exp(j*omega*t).*((t>=-(T)/(2))-(t>=(T)/(2))); % p(t)*exp(j*omega*t)
f_t=A*cos(omega*t).*((t>=-(T)/(2))-(t>=(T)/(2))); % p(t)cos(omega*t)
% Calculer la transformée de Fourier
f_w=trapz(t,f_t.*exp(-j*w*t));
w=-4*pi:0.01:4*pi;
for i=1:length(w)
    f_w(i)=trapz(t,f_t.*exp(-j*w(i).*t));
end
% Calcul de l'amplitude
A=abs(f_w);
A=abs(1/b)*abs(f_w); % Compression
A=abs(c)*abs(f_w); % Expansion
% Calcul de la phase
phi=angle(f_w)*180/pi;
% Tracés
subplot(1,2,1)
% Tracé de la fonction
plot(t,f_t,'k','linewidth',2)
xlabel('t (s)')
grid on;
subplot(1,2,2)
% Tracé de l'amplitude
plot(w,A,'b','linewidth',2)
xlabel('w (rad/s)')
grid on;
```

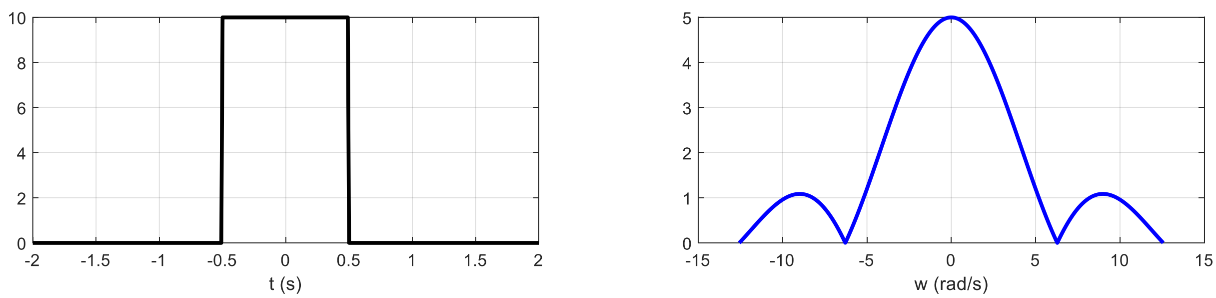
$p(t)$



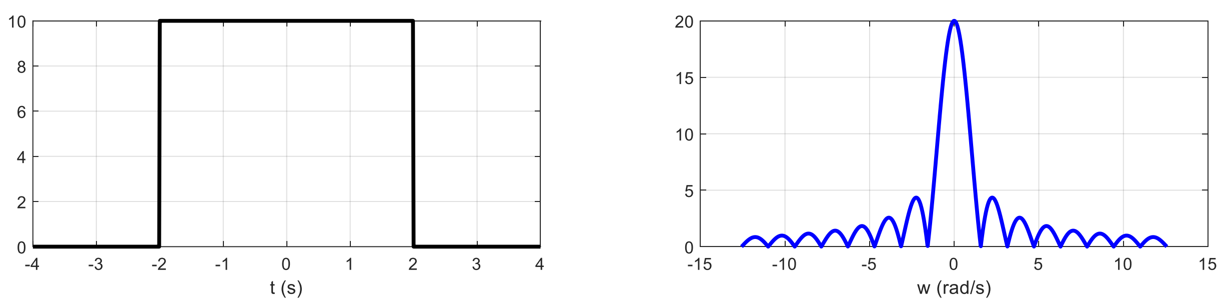
$t(t-0.5)$



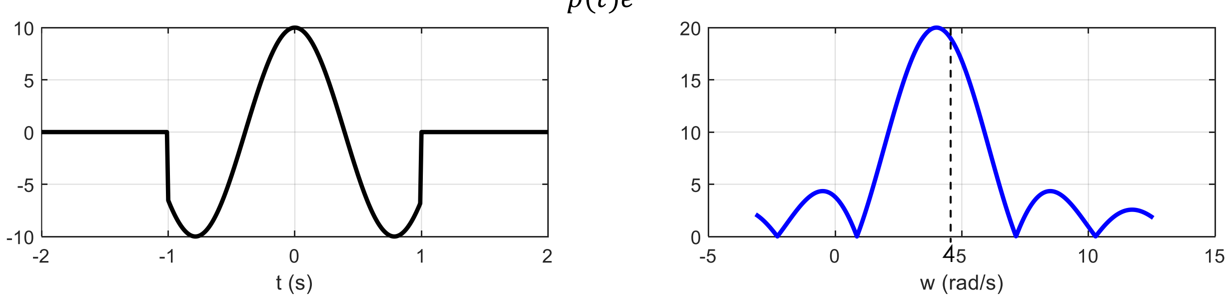
$p(2t)$



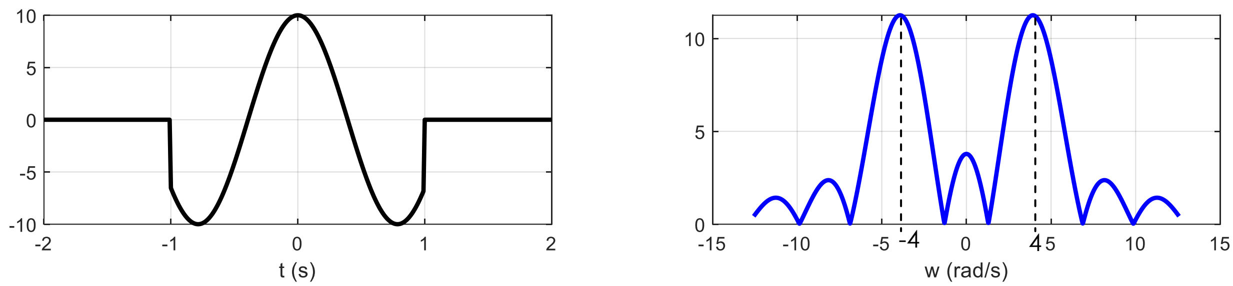
$p(t/2)$



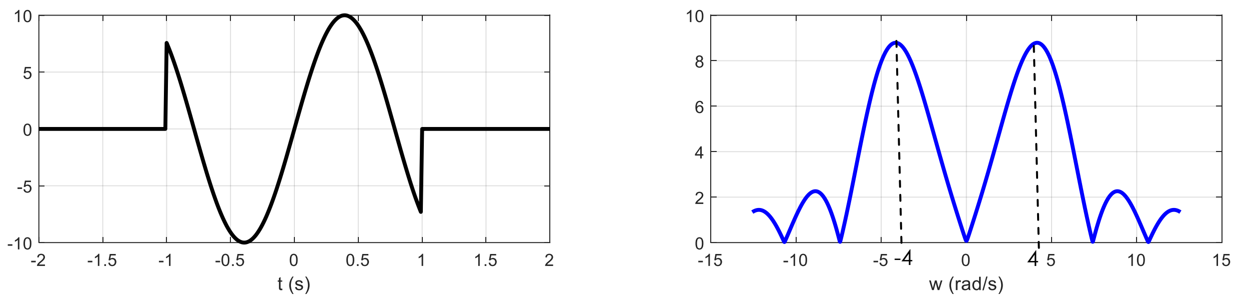
$p(t)e^{j4t}$



$p(t)cos(4t)$



$p(t)sin(4t)$



1-2 Problèmes

1-2-1 Problème #1 :

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes ou $u(t)$ représente une fonction échelon :

$y(t) = Au(t)$

$y(t) = Atu(t)$

$y(t) = Ae^{-at}u(t)$

$y(t) = sin(\omega t)u(t)$

$y(t) = cos(\omega t)u(t)$

Corrigé :

Selon la définition de la transformée de Laplace de $y(t)$.

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[y(t)] = Y(s) = \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt} \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[Au(t)] = Y(s) = A\int_0^\infty e^{-st}dt = \frac{-A}{s}[e^{-st}]_0^\infty = \frac{A}{s}$$

$$\mathcal{L}[Atu(t)] = Y(s) = A\int_0^\infty te^{-st}dt$$

L'intégration par parties donne :

$$\int udv = uv - \int vdu \quad , \quad u = t \quad \rightarrow \quad du = dt \quad , \quad dv = e^{-st}dt \quad \rightarrow \quad v = \int e^{-st}dt = \frac{-1}{s}e^{-st}$$

$$\mathcal{L}[Atu(t)] = Y(s) = A\int_0^{\infty} te^{-st}dt = A\left[t\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right) - \int_0^{\infty}\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right)dt\right]$$

$$= A\left[t\left(\frac{-1}{s}e^{-st}\right) - \left(\frac{1}{s^2}e^{-st}\right)\right]_0^{\infty} = \frac{A}{s^2}$$

Autre méthode : Selon les propriétés de la transformée de Laplace : $\boldsymbol{\mathcal{L}[\int y(t)dt] = \frac{Y(s)}{s}}$

D'où : $\int u(t)dt = tu(t)$, et : $\mathcal{L}[A\int u(t)dt] = \frac{Y(s)}{s} = \frac{\frac{A}{s}}{s} = \frac{A}{s^2}$

$$\mathcal{L}[Ae^{-at}u(t)] = Y(s) = \int_0^{\infty} Ae^{-at}e^{-st}dt = A\int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{-A}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_0^{\infty} = \frac{A}{s+a}$$

Autre méthode : Utilisons la propriété de la transformée de Laplace : $\boldsymbol{\mathcal{L}[e^{-at}y(t)] = Y(s+a)}$

D'où : $\mathcal{L}[Au(t)] = \frac{A}{s}$, et : $\mathcal{L}[Ae^{-at}u(t)] = Y(s+a) = \frac{A}{s+a}$

$$\mathcal{L}[sin(\omega t)u(t)] = Y_1(s) = \int_0^{\infty} sin(\omega t)e^{-st}dt$$

$$\mathcal{L}[cos(\omega t)u(t)] = Y_2(s) = \int_0^{\infty} cos(\omega t)e^{-st}dt$$

D'après les relations d'Euler :

$$e^{j\omega t} = cos(\omega t) + jsin(\omega t) \quad , \quad e^{-j\omega t} = cos(\omega t) - jsin(\omega t)$$

$$sin(\omega t) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right) \quad , \quad cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)$$

$$\mathcal{L}[sin(\omega t)u(t)] = Y_1(s) = \int_0^{\infty} sin(\omega t)e^{-st}dt = \frac{1}{2j}\int_0^{\infty}\left(e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{2j}\int_0^{\infty}\left(e^{-(s-j\omega)t} - e^{-(s+j\omega)t}\right)dt = \frac{1}{2j}\left(\int_0^{\infty} e^{-(s-j\omega)t}dt - \int_0^{\infty} e^{-(s+j\omega)t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{s-j\omega} - \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$\mathcal{L}[cos(\omega t)u(t)] = Y_2(s) = \int_0^\infty cos(\omega t)e^{-st}dt = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{j\omega t} + e^{-j\omega t}\right)e^{-st}dt$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(e^{-(s-j\omega)t} + e^{-(s+j\omega)t}\right)dt = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty e^{-(s-j\omega)t}dt + \int_0^\infty e^{-(s+j\omega)t}dt\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-j\omega} + \frac{1}{s+j\omega}\right) = \frac{s}{s^2+\omega^2}$$

1-2-2 Problème #2 :

Déterminer la transformée de Laplace des fonctions suivantes :

$y(t) = e^{-at}sin(\omega t)u(t)$

$y(t) = e^{-at}cos(\omega t)u(t)$

$y(t) = t^3u(t)$

Corrigé :

$y(t) = e^{-at}sin\omega tu(t)$

Appliquons la propriété de la transformée de Laplace : $\boldsymbol{\mathcal{L}[e^{-at}y(t)] = Y(s+a)}$

D'où: $\mathcal{L}[sin(\omega t)u(t)] = \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$, et : $\mathcal{L}[e^{-at}sin(\omega t)u(t)] = Y(s+a) = \frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$

$y(t) = e^{-at}cos\omega tu(t)$

Toujours selon la même propriété de la transformée de Laplace : $\boldsymbol{\mathcal{L}[e^{-at}y(t)] = Y(s+a)}$

$\mathcal{L}[cos(\omega t)u(t)] = \frac{s}{s^2+\omega^2}$, Et : $\mathcal{L}[e^{-at}cos(\omega t)u(t)] = Y(s+a) = \frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$

$y(t) = t^3u(t)$

Appliquons la propriété de la transformée de Laplace : $\boldsymbol{\mathcal{L}[\int y(t)dt] = \frac{Y(s)}{s}}$

Posons : $\int u(t)dt = t \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[tu(t)] = \mathcal{L}[\int u(t)dt] = \frac{Y(s)}{s} = \frac{\frac{1}{s}}{s} = \frac{1}{s^2}$

$$\int tdt = \frac{t^2}{2} \quad \rightarrow \quad t^2 = 2\int tdt \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[t^2u(t)] = \mathcal{L}\left[2\int tdt\right] = 2\frac{Y(s)}{s} = 2\frac{\frac{1}{s^2}}{s} = \frac{2}{s^3}$$

$$\int t^2dt = \frac{t^3}{3} \quad \rightarrow \quad t^3 = 3\int t^2dt \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}[t^3u(t)] = \mathcal{L}\left[3\int t^2dt\right] = 3\frac{Y(s)}{s} = 3\frac{\frac{2}{s^3}}{s} = \frac{6}{s^4}$$

Autre méthode : Selon la propriété de la transformée de Laplace : $\boldsymbol{\mathcal{L}[ty(t)] = -\frac{dY(s)}{ds}}$

$$\mathcal{L}[tu(t)] = Y_1(s) = -\frac{d}{ds}Y(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}$$

$$\mathcal{L}[t^2u(t)] = Y_2(s) = \mathcal{L}\big[t\big(tu(t)\big)\big] = -\frac{d}{ds}Y_1(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2}\right) = \frac{2}{s^3}$$

$$\mathcal{L}[t^3u(t)] = Y_3(s) = \mathcal{L}\big[t\big(t^2u(t)\big)\big] = -\frac{d}{ds}Y_2(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s^3}\right) = \frac{6}{s^4}$$

Autre méthode : Appliquons la propriété de la transformée de Laplace : $\boldsymbol{\mathcal{L}[t^n u(t)] = \frac{n!}{s^{n+1}}}$

$$\rightarrow \quad \mathcal{L}[t^3u(t)] = \frac{3!}{s^{3+1}} = \frac{6}{s^4}$$

1-2-3 Problème #3 :

Calculer la transformation inverse de Laplace des fonctions suivantes :

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s-1)^3}$$

$$Y(s) = \frac{s^3+2s^2+6s+7}{s^2+s+5}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

Corrigé :

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2}$$

Selon le théorème des résidus :

$$Y(s) = \frac{1}{(s+a)^n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{k_i}{(s+a)^i} \quad , \quad k_i = \lim_{s\to -a}\left(\frac{1}{(n-i)!}\right)\frac{d^{(n-i)}}{ds^{(n-i)}}[(s+a)^n Y(s)]\,, i = 1,2,\dots,n$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{k_1}{s+1} + \frac{k_2}{s+2} + \frac{k_3}{(s+2)^2}$$

Pour : $n = 1, i = 1$

$$k_1 = \lim_{s\to -1}\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)\frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}}\big((s+1)^1 Y(s)\big) = \lim_{s\to -1}(s+1)Y(s) = \left.\frac{2}{(s+2)^2}\right|_{s=-1} = 2$$

Pour : $n = 2, i = 1$

$$k_2 = \lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{(2-1)!}\right)\frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}}\left((s+2)^2Y(s)\right) = \lim_{s\to -2}\frac{d}{ds}\left((s+2)^2Y(s)\right) = \frac{d}{ds}\left(\frac{2}{s+1}\right)\Big|_{s=-2} = -2$$

Pour : $n = 2, i = 2$

$$k_3 = \lim_{s\to -2}\left(\frac{1}{(2-2)!}\right)\frac{d^{(2-2)}}{ds^{(2-2)}}\left((s+2)^2Y(s)\right) = \lim_{s\to -2}(s+2)^2Y(s) = \frac{2}{(s+1)}\Big|_{s=-2} = -2$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s+1)(s+2)^2} = \frac{2}{s+1} - \frac{2}{s+2} - \frac{2}{(s+2)^2}$$

La transformée inverse de $Y(s)$ est obtenue à partir des relations :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = te^{-at}}$$

Soit $y(t) = (2e^{-t} - 2e^{-2t} - 2te^{-2t})u(t)$

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s-1)^3}$$

Selon le théorème des résidus :

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s-1)^3} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s-1} + \frac{k_3}{(s-1)^2} + \frac{k_4}{(s-1)^3}$$

Pour : $n = 1, i = 1$

$$k_1 = \lim_{s\to 0}\left(\frac{1}{(1-1)!}\right)\frac{d^{(1-1)}}{ds^{(1-1)}}\left(s^1Y(s)\right) = \lim_{s\to 0} sY(s) = \frac{s+5}{(s-1)^3}\Big|_{s=0} = -5$$

Pour : $n = 3, i = 1$

$$k_2 = \lim_{s\to 1}\left(\frac{1}{(3-1)!}\right)\frac{d^{(3-1)}}{ds^{(3-1)}}\left((s-1)^3Y(s)\right) = \lim_{s\to 1}\frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\left((s-1)^3Y(s)\right) = \frac{1}{2}\frac{d^2}{ds^2}\frac{s+5}{s}\Big|_{s=1} = 5$$

Pour : $n = 3, i = 2$

$$k_3 = \lim_{s\to 1}\left(\frac{1}{(3-2)!}\right)\frac{d^{(3-2)}}{ds^{(3-2)}}\left((s-1)^3Y(s)\right) = \lim_{s\to 1}\frac{d}{ds}\left((s-1)^3Y(s)\right) = \frac{d}{ds}\frac{s+5}{s}\Big|_{s=1} = -5$$

Pour : $n = 3, i = 3$

$$k_4 = \lim_{s\to 1}\left(\frac{1}{(3-3)!}\right)\frac{d^{(3-3)}}{ds^{(3-3)}}\left((s-1)^3Y(s)\right) = \lim_{s\to 1}\left((s-1)^3Y(s)\right) = \frac{s+5}{s}\Big|_{s=1} = 6$$

$$Y(s) = \frac{s+5}{s(s-1)^3} = \frac{-5}{s} + \frac{5}{s-1} - \frac{5}{(s-1)^2} + \frac{6}{(s-1)^3}$$

La transformée inverse de $Y(s)$ est obtenue à partir des relations :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = u(t)} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+a}\right] = e^{-at}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^2}\right] = te^{-at}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+a)^3}\right] = \frac{1}{2}t^2e^{-at}}$$

Soit $y(t) = (-5 + 5e^t - 5te^t + 3t^2e^t)u(t)$

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5}$$

Noter que le degré du numérateur m est supérieur à celui du dénominateur n (Il faut normalement respecter $m \leq n$). Effectuons une division polynomiale.

$$Y(s) = \frac{s^3 + 2s^2 + 6s + 7}{s^2 + s + 5} = \frac{s(s^2 + s + 5) + (s^2 + s + 5) + 2}{s^2 + s + 5}$$

$$= \frac{s(s^2 + s + 5)}{s^2 + s + 5} + \frac{(s^2 + s + 5)}{s^2 + s + 5} + \frac{2}{s^2 + s + 5} = s + 1 + \frac{2}{s^2 + s + 5}$$

Notons que le troisième terme de $Y(s)$ représente la somme d'un sinus amorti exponentiellement dans le temps ($k_1e^{-at}sin\omega t$) et un cosinus amorti exponentiellement dans le temps ($k_2e^{-at}cos\omega t$).

$$\frac{2}{s^2 + s + 5} = k_1\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} + k_2\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Calcul de a et ω :

$$s^2 + s + 5 = (s+a)^2 + \omega^2 = s^2 + 2as + a^2 + \omega^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 = 2a \\ 5 = a^2 + \omega^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0.5 \\ \omega = 2.18\, rad/s \end{cases}$$

Calcul de k_1 et k_2 :

$$2 = k_1\omega + k_2(s+a) = k_2s + k_2a + k_1\omega \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 = k_2 \\ 2 = k_2a + k_1\omega \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k_2 = 0 \\ k_1 = 0.9 \end{cases}$$

Comme $k_2 = 0$, alors le cosinus amorti n'existe pas.

$$\frac{2}{s^2 + s + 5} = 0.9\frac{2.18}{(s+0.5)^2 + 2.18^2}$$

$$Y(s) = s + 1 + 0.9\frac{2.18}{(s+0.5)^2 + 2.18^2}$$

La transformée inverse de $Y(s)$ est obtenue à partir des relations :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}[s] = \frac{d}{dt}\delta(t)} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}[1] = \delta(t)} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = e^{-at}sin(\omega t)}$$

Soit $y(t) = \left(\frac{d}{dt}\delta(t) + \delta(t) + 0.9e^{-0.5t}sin2.18t\right)u(t)$

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)}$$

Selon la méthode des résidus.

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{s+1-2j} + \frac{{k_2}^*}{s+1+2j}$$

${k_2}^*$ est le conjugué de k_2.

Pour tous les gains k_i : $n = 1, i = 1$, d'où : $k_i = \lim_{s\to -a}\big((s+a)Y(s)\big)$

$$k_1 = \lim_{s\to 0} sY(s) = \left.\frac{3}{(s^2+2s+5)}\right|_{s=0} = \frac{3}{5}$$

$$k_2 = \lim_{s\to -1+2j}(s+1-2j)Y(s) = \left.\frac{3}{s(s+1+2j)}\right|_{s=-1+2j} = \frac{-3}{20}(2-j) = 0.33e^{-j26.56^\circ}$$

$$k_3 = {k_2}^* = \frac{-3}{20}(2+j) = 0.33e^{j26.56^\circ}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{\frac{3}{5}}{s} - \frac{3}{20}\frac{2+j}{s+1-2j} - \frac{3}{20}\frac{2-j}{s+1+2j}$$

La transformée inverse de $Y(s)$ est obtenue à partir des relations :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = u(t)} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{(s+a-jb)} + \frac{k^*}{(s+a+jb)}\right] = 2|k|e^{-at}cos(bt+\varphi)} \quad , \quad \boldsymbol{k = |k|e^{j\varphi}}$$

$$y(t) = \big(k_1 + 2|k_2|e^{-at}cos(bt+\varphi)\big)u(t) = \left(\frac{3}{5} + 0.66e^{-t}cos\big(2t - 26.56^\circ\big)\right)u(t)$$

Autre méthode :

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2+2s+5}$$

$$k_1 = \lim_{s\to 0} sY(s) = \left.\frac{3}{(s^2+2s+5)}\right|_{s=0} = \frac{3}{5}$$

$$Y(s) = \frac{3}{s(s^2+2s+5)} = \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2+2s+5} = \frac{s(k_2 s + k_3) + \frac{3}{5}(s^2+2s+5)}{s(s^2+2s+5)}$$

$$= \frac{\left(k_2 + \frac{3}{5}\right)s^2 + \left(k_3 + \frac{6}{5}\right)s + 3}{s(s^2+2s+5)}$$

$$k_2 + \frac{3}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad k_2 = -\frac{3}{5} \quad , \quad k_3 + \frac{6}{5} = 0 \quad \rightarrow \quad k_3 = -\frac{6}{5}$$

D'où :

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{k_2 s + k_3}{s^2 + 2s + 5} = \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{-\frac{3}{5}s - \frac{6}{5}}{s^2 + 2s + 5}$$

Notons que le deuxième terme de $Y(s)$ est la somme d'un sinus amorti exponentiellement dans le temps ($k_1 e^{-at} sin\omega t$) et d'un cosinus amorti exponentiellement dans le temps ($k_2 e^{-at} cos\omega t$).

$$\frac{-\frac{3}{5}s - \frac{6}{5}}{s^2 + 2s + 5} = k_1 \frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2} + k_2 \frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$$

Calcul de a et ω :

$$s^2 + 2s + 5 = (s+a)^2 + \omega^2 = s^2 + 2as + a^2 + \omega^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2 = 2a \\ 5 = a^2 + \omega^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ \omega = 2\ rad/s \end{cases}$$

Calcul de k_1 et k_2 :

$$-\frac{3}{5}s - \frac{6}{5} = k_1\omega + k_2(s+a) = k_2 s + k_2 a + k_1 \omega \quad \rightarrow \quad \begin{cases} -\frac{3}{5} = k_2 \\ -\frac{6}{5} = k_2 a + k_1 \omega \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k_2 = -\frac{3}{5} \\ k_1 = -\frac{3}{10} \end{cases}$$

$$\frac{-\frac{3}{5}s - \frac{6}{5}}{s^2 + 2s + 5} = -\frac{3}{10}\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}$$

D'où :

$$Y(s) = \frac{\frac{3}{5}}{s} + \frac{-\frac{3}{5}s - \frac{6}{5}}{s^2 + 2s + 5} = \frac{\frac{3}{5}}{s} - \frac{3}{10}\frac{2}{(s+1)^2 + 2^2} - \frac{3}{5}\frac{s+1}{(s+1)^2 + 2^2}$$

La transformée inverse de $Y(s)$ est obtenue à partir des relations

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = u(t)} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = e^{-at} sin(\omega t)} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}\right] = e^{-at} cos(\omega t)}$$

Soit $y(t) = \left(\frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t} sin2t - \frac{3}{5}e^{-t} cos2t\right) u(t)$

Validation :

Vérifions que le résultat obtenu est identique au précédent :

$$\frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t} sin2t - \frac{3}{5}e^{-t} cos2t \quad \overset{?}{=} \quad \frac{3}{5} + 0.66e^{-t} cos(2t - 26.56^\circ)$$

$$y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{10}e^{-t} sin2t - \frac{3}{5}e^{-t} cos2t = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}(0.5 sin(2t) + cos2t)$$

Remarque : La fonction **tcollect** de la TI donne :

$$0.5 sin(2t) + cos2t = 1.12 sin(2t + 63.43^\circ)$$

Utilisons tour à tour les relations :

$\boldsymbol{sin\theta = cos(90^\circ - \theta)}$, $\boldsymbol{cos\theta = -cos(\theta + 180^\circ)}$, $\boldsymbol{cos\theta = -cos(\theta + 180^\circ)}$

Il vient que :

$0.5sin(2t) + cos2t = 1.12cos(90^\circ - 2t - 63.43^\circ)$

$0.5sin(2t) + cos2t = -1.12cos\left(\frac{\pi}{2} - 2t - 63.43^\circ + 180^\circ\right) = -1.12cos(-2t + 26.57^\circ)$

$0.5sin(2t) + cos2t = -1.12cos(2t - 26.57^\circ)$

$y(t) = \frac{3}{5} - \frac{3}{5}e^{-t}\left(-1.12cos(2t - 26.57^\circ)\right) = \frac{3}{5} + 0.672e^{-t}cos(2t - 26.57^\circ)$

1-2-4 Problème #4 :

Soit l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = sin2t$$

On supposera que : $y(0) = 4$, $y^{(1)}(0) = \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = -4$

Calculer $Y(s)$ et $y(t)$.

Corrigé :

Utilisons la propriété de la transformée de Laplace : $\boldsymbol{\mathcal{L}\left[\frac{d^n y(t)}{dt^n}\right] = s^n Y(s) - \sum_{i=1}^{n} s^{n-i} \left.\frac{d^{(i-1)}y(t)}{dt^{(i-1)}}\right|_{t=0}}$

Pour $\frac{d^2y(t)}{dt^2}$, $n = 2, i = 1,2$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2}{dt^2}y(t)\right] = s^2Y(s) - \sum_{i=1}^{2} s^{n-i}\left.\frac{d^{(i-1)}y(t)}{dt^{(i-1)}}\right|_{t=0}$$

$$= s^2Y(s) - s^{2-1}\left.\frac{d^{(1-1)}y(t)}{dt^{(1-1)}}\right|_{t=0} - s^{2-2}\left.\frac{d^{(2-1)}y(t)}{dt^{(2-1)}}\right|_{t=0}$$

$$= s^2Y(s) - sy(0) - \left.\frac{dy(t)}{dt}\right|_{t=0} = s^2Y(s) - 4s + 4$$

Pour $\frac{dy(t)}{dt}$, $n = 1, i = 1$

$$\mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}y(t)\right] = s^1Y(s) - \sum_{i=1}^{1} s^{1-i}\left.\frac{d^{(i-1)}y(t)}{dt^{(i-1)}}\right|_{t=0} = sY(s) - s^{1-1}\left.\frac{d^{(1-1)}y(t)}{dt^{(1-1)}}\right|_{t=0}$$

$$= sY(s) - y(0) = sY(s) - 4$$

$$\mathcal{L}[sin2t] = \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

D'où :

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = sin2t \quad \rightarrow \quad (s^2Y(s) - 4s + 4) + 2(sY(s) - 4) + 2Y(s) = \frac{2}{s^2 + 2^2}$$

Soit :

$$Y(s) = \frac{1}{5}\left(\frac{21s + 23}{s^2 + 2s + 2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{s + 1}{s^2 + 2^2}\right)$$

Notons que chacun des deux termes de $Y(s)$ est la somme d'un sinus amorti exponentiellement dans le temps ($k_1e^{-at}sin\omega t$) et d'un cosinus amorti exponentiellement dans le temps ($k_2e^{-at}cos\omega t$).

$$\frac{21s + 23}{s^2 + 2s + 2} = k_1\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} + k_2\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

Calcul de a et ω :

$$s^2 + 2s + 2 = (s + a)^2 + \omega^2 = s^2 + 2as + a^2 + \omega^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 2 = 2a \\ 2 = a^2 + \omega^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 1 \\ \omega = 1\ rad/s \end{cases}$$

Calcul de k_1 et k_2 :

$$21s + 23 = k_1\omega + k_2(s + a) = k_2s + k_2a + k_1\omega \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 21 = k_2 \\ 23 = k_2a + k_1\omega \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k_2 = 21 \\ k_1 = 2 \end{cases}$$

$$\frac{21s + 23}{s^2 + 2s + 2} = 2\frac{1}{(s + 1)^2 + 1^2} + 21\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1^2}$$

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2^2} = k_1\frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} + k_2\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2}$$

Calcul de a et ω :

$$s^2 + 2^2 = (s + a)^2 + \omega^2 = s^2 + 2as + a^2 + \omega^2 \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 0 = 2a \\ 2^2 = a^2 + \omega^2 \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} a = 0 \\ \omega = 2\ rad/s \end{cases}$$

Calcul de k_1 et k_2 :

$$s + 1 = k_1\omega + k_2(s + a) = k_2s + k_2a + k_1\omega \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 1 = k_2 \\ 1 = k_2a + k_1\omega \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} k_2 = 1 \\ k_1 = 0.5 \end{cases}$$

$$\frac{s + 1}{s^2 + 2^2} = 0.5\frac{2}{s^2 + 2^2} + \frac{s}{s^2 + 2^2}$$

D'où :

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{1}{5}\left(\frac{21s + 23}{s^2 + 2s + 2}\right) - \frac{1}{5}\left(\frac{s + 1}{s^2 + 2^2}\right) \\ &= \frac{1}{5}\left(2\frac{1}{(s + 1)^2 + 1^2} + 21\frac{s + 1}{(s + 1)^2 + 1^2}\right) - \frac{1}{5}\left(0.5\frac{2}{s^2 + 2^2} + \frac{s}{s^2 + 2^2}\right) \end{aligned}$$

En se basant sur les relations :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}sin(\omega t)} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}cos(\omega t)}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\right] = sin(\omega t)} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+\omega^2}\right] = cos(\omega t)}$$

Nous obtenons : $y(t) = \left(\frac{1}{5}e^{-t}(2sint + 21cost) - \frac{1}{5}(0.5sin2t + cos2t)\right)u(t)$

1-2-5 Problème #5 :

Déterminer la transformée en z des fonctions suivantes :

$y(t) = e^{-at}$

$y(t) = te^{-at}$

$y(t) = sin\omega t$

$y(t) = tcos\omega t$

Corrigé :

Rappelons la définition de la transformée en z (l'indice s signifie échantillonné- Sample).

$\boldsymbol{y(t)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{y_s(nT)}$

$$\boldsymbol{Y(s)} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{Y_s(s) = \sum_{n=0}^{\infty} y_s(nT)e^{-nTs}}$$

$$\boldsymbol{z = e^{sT}} \quad \rightarrow \quad \boldsymbol{s = \frac{1}{T}lnz}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}[y(nT)] = Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} y_s(nT)z^{-n}}$$

$y(t) = e^{-at} \quad \rightarrow \quad y_s(nT) = e^{-anT}$

Appliquons la définition de la transformée en z : $\mathcal{Z}[e^{-anT}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-anT}z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-aT}z^{-1})^n$

La somme d'une suite géométrique pour $|A| < 1$ donne : $1 + A + A^2 + \cdots + A^n = \frac{1}{1-A}$

D'où : $\mathcal{Z}[e^{-anT}] = \sum_{n=0}^{\infty}(e^{-aT}z^{-1})^n = \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} = \frac{z}{z-e^{-aT}}$

$y(t) = te^{-at} \quad \rightarrow \quad y_s(nT) = nTe^{-anT}$

Utilisons la propriété de la transformée en z : $\boldsymbol{\mathcal{Z}[nTf_s(nT)] = -zT\frac{d}{dz}F(z)}$

$$\mathcal{Z}[nTe^{-anT}] = -zT\frac{d}{dz}F(z) = -zT\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right) = -zT\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-e^{-aT}}\right)$$
$$= -zT\left(\frac{(z-e^{-aT})-z}{(z-e^{-aT})^2}\right) = \frac{Te^{-aT}z}{(z-e^{-aT})^2}$$

Autre méthode : Appliquons la propriété de la transformée en z: $\boldsymbol{\mathcal{Z}[nTf_s(nT)] = -zT\frac{d}{dz}F(z)}$

$$f_s(nT) = 1 \quad \rightarrow \quad F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

$$\mathcal{Z}\big(nTf_s(nT)\big) = -zT\frac{d}{dz}F(z) = -zT\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right) = -zT\left(\frac{z-1-z}{(z-1)^2}\right) = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

Appliquons maintenant la propriété de la transformée en z: $\boldsymbol{\mathcal{Z}[e^{\pm anT}f_s(nT)] = F(ze^{\mp aT})}$

$$\mathcal{Z}[e^{-anT}f_s(nT)] = F(ze^{aT}) = \frac{T(ze^{aT})}{\big((ze^{aT})-1\big)^2} = \frac{T(ze^{-aT})}{(z-e^{-aT})^2}$$

$$y(t) = sin\omega t \quad \rightarrow \quad y_s(nT) = sin\omega nT$$

$$\mathcal{Z}[sin\omega nT] = \sum_{n=0}^{\infty} sin\omega nT z^{-n}$$

D'après les relations d'Euler : $sin(\omega nT) = \frac{1}{2j}\left(e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}\right)$

$$\mathcal{Z}[sin\omega nT] = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega nT} - e^{-j\omega nT}\right)z^{-n} = \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{j\omega nT}\right)z^{-n} - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-j\omega nT}\right)z^{-n}$$
$$= \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{j\omega T}z^{-1}\right)^n - \frac{1}{2j}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-j\omega T}z^{-1}\right)^n = \frac{1}{2j}\frac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}} - \frac{1}{2j}\frac{1}{1-e^{-j\omega T}z^{-1}}$$
$$= \frac{1}{2j}\frac{z}{z-e^{j\omega T}} - \frac{1}{2j}\frac{z}{z-e^{-j\omega T}} = \frac{zsin\omega T}{z^2 - 2zcos\omega T + 1}$$

$$y(t) = tcos\omega t$$

$$y_s(nT) = nTcos\omega nT$$

D'après la propriété de la transformée en z : $\boldsymbol{\mathcal{Z}[nTf_s(nT)] = -zT\frac{d}{dz}F(z)}$

$$f_s(nT) = cos\omega nT$$

Calculons $F(z)$ en utilisant la définition de la transformée en z :

$$F(z) = \mathcal{Z}[cos\omega nT] = \sum_{n=0}^{\infty} cos\omega nTz^{-n}$$

D'après les relations d'Euler : $cos(\omega nT) = \frac{1}{2}\left(e^{j\omega nT} + e^{-j\omega nT}\right)$

$$\mathcal{Z}[cos\omega nT] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}\left(e^{j\omega nT} + e^{-j\omega nT}\right)z^{-n} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{j\omega nT}\right)z^{-n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-j\omega nT}\right)z^{-n}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{j\omega T}z^{-1}\right)^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(e^{-j\omega T}z^{-1}\right)^n = \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{j\omega T}z^{-1}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 - e^{-j\omega T}z^{-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{j\omega T}} + \frac{1}{2}\frac{z}{z - e^{-j\omega T}} = \frac{z^2 - zcos\omega T}{z^2 - 2zcos\omega T + 1}$$

$$\mathcal{Z}[nTcosn\omega T] = -zT\frac{d}{dz}F(z)$$

$$= -zT\frac{d}{dz}\left(\frac{z^2 - zcos\omega T}{z^2 - 2zcos\omega T + 1}\right)$$

$$= -zT\left(\frac{(2z - cos\omega T)(z^2 - 2zcos\omega T + 1) - (2z - 2cos\omega T)(z^2 - zcos\omega T)}{z^2 - 2zcos\omega T + 1}\right)$$

$$= \frac{z^3Tcos\omega T - 2Tz^2 + zTcos\omega t}{(z^2 - 2zcos\omega T + 1)^2}$$

1-2-6 Problème #6 :

Calculer la transformation inverse en z des fonctions suivantes :

$$Y(z) = \frac{0.5z}{(z - 0.5)(z - 0.7)}$$

$$Y(z) = \frac{z(1 - e^{-aT})}{(z - 1)(z - e^{-aT})}$$

Corrigé :

$$Y(z) = \frac{0.5z}{(z - 0.5)(z - 0.7)} \quad \rightarrow \quad \frac{Y(z)}{z} = \frac{0.5}{(z - 0.5)(z - 0.7)}$$

Appliquons le théorème du résidu.

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.5}{(z - 0.5)(z - 0.7)} = \frac{k_1}{(z - 0.5)} + \frac{k_2}{(z - 0.7)}$$

$$k_i = \lim_{z \to -a}\left(\frac{1}{(n - i)!}\right)\frac{d^{(n-i)}}{dz^{(n-i)}}\left((z + a)^n Y(z)\right), i = 1,2, \dots, n$$

Pour tous les k_i : $n = 1, i = 1$

$$k_1 = \lim_{z\to 0.5}\left((z-0.5)\frac{Y(z)}{z}\right) = \frac{0.5}{(z-0.7)}\bigg|_{z=0.5} = -2.5$$

$$k_2 = \lim_{z\to 0.7}\left((z-0.7)\frac{Y(z)}{z}\right) = \frac{0.5}{(z-0.5)}\bigg|_{z=0.7} = 2.5$$

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{0.5}{(z-0.5)(z-0.7)} = \frac{-2.5}{(z-0.5)} + \frac{2.5}{(z-0.7)}$$

$$Y(z) = \frac{-2.5z}{(z-0.5)} + \frac{2.5z}{(z-0.7)}$$

Utilisons la relation : $\boldsymbol{\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-e^{-at}}\right] = e^{-anT}}$

$$y_s(nT) = -2.5(0.5)^n + 2.5(0.7)^n$$

$$y_s(t) = \sum_{n=0}^{\infty}(-2.5(0.5)^n + 2.5(0.7)^n)\delta(t-nT)$$

Autre méthode : Expansion en série de puissances.

$$\boldsymbol{\frac{z}{(z-a)} = \frac{1}{1-az^{-1}} = 1 + az^{-1} + a^2z^{-2} + a^3z^{-3} + \cdots + a^nz^{-n}}$$

$$Y(z) = \frac{0.5z}{(z-0.5)(z-0.7)} = \frac{-2.5z}{(z-0.5)} + \frac{2.5z}{(z-0.7)} = \frac{-2.5}{1-0.5z^{-1}} + \frac{2.5}{1-0.7z^{-1}}$$

$$\frac{-2.5}{1-0.5z^{-1}} = -2.5(1 + 0.5z^{-1} + 0.5^2z^{-2} + 0.5^3z^{-3} + \cdots + 0.5^nz^{-n})$$

$$\frac{2.5}{1-0.7z^{-1}} = 2.5(1 + 0.7z^{-1} + 0.7^2z^{-2} + 0.7^3z^{-3} + \cdots + 0.7^nz^{-n})$$

D'où :

$$\begin{aligned}Y(z) = 0 &+ (-2.5(0.5)^1 + 2.5(0.7)^1)z^{-1} + (-2.5(0.5)^2 + 2.5(0.7)^2)z^{-2} + \cdots \\ &+ (-2.5(0.5)^n + 2.5(0.7)^n)z^{-n}\end{aligned}$$

Recourons à la relation : $\boldsymbol{\mathcal{Z}[\delta(t-nT)] = z^{-n}}$

$$\begin{aligned}y_s(t) &= 0\delta(t) + (-2.5(0.5)^1 + 2.5(0.7)^1)\delta(t-T) + (-2.5(0.5)^2 + 2.5(0.7)^2)\delta(t-2T) + \cdots \\ &\quad + (-2.5(0.5)^n + 2.5(0.7)^n)\delta(t-nT) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(-2.5(0.5)^n + 2.5(0.7)^n)\delta(t-nT)\end{aligned}$$

$$Y(z) = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}$$

Appliquons le théorème du résidu :

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{k_1}{(z-1)}+\frac{k_2}{(z-e^{-aT})}$$

$$k_i=\lim_{z\to -a}\left(\frac{1}{(n-i)!}\right)\frac{d^{(n-i)}}{dz^{(n-i)}}\left((z+a)^n Y(z)\right), i=1,2,\dots,n$$

Pour tous les k_i : $n=1, i=1$

$$k_1=\lim_{z\to 1}\left((z-1)\frac{Y(z)}{z}\right)=\left.\frac{(1-e^{-aT})}{(z-e^{-aT})}\right|_{z=1}=1$$

$$k_2=\lim_{z\to e^{-aT}}\left((z-e^{-aT})\frac{Y(z)}{z}\right)=\left.\frac{(1-e^{-aT})}{(z-1)}\right|_{z=e^{-aT}}=-1$$

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{1}{(z-1)}-\frac{1}{(z-e^{-aT})}\quad\to\quad Y(z)=\frac{z}{(z-1)}-\frac{z}{(z-e^{-aT})}$$

Recourons aux relations suivantes : $\boldsymbol{\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-1}\right]=1}$, $\boldsymbol{\mathcal{Z}^{-1}\left[\frac{z}{z-e^{-at}}\right]=e^{-anT}}$

$$y_s(nT)=1-e^{-anT}\quad\to\quad y_s(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(1-e^{-anT})\delta(t-nT)$$

Autre méthode : Expansion en série de puissances.

$$\boldsymbol{\frac{z}{(z-a)}=\frac{1}{1-az^{-1}}=1+az^{-1}+a^2z^{-2}+a^3z^{-3}+\cdots+a^nz^{-n}}$$

$$Y(z)=\frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})}=\frac{z}{(z-1)}-\frac{z}{(z-e^{-aT})}=\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$\frac{1}{1-z^{-1}}=1+z^{-1}+z^{-2}+z^{-3}+\cdots+z^{-n}$$

$$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}=1+e^{-aT}z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}+e^{-3aT}z^{-3}+\cdots+e^{-naT}z^{-n}$$

D'où :

$$Y(z)=0+(1-e^{-aT})z^{-1}+(1-e^{-2aT})z^{-2}+(1-e^{-3aT})z^{-3}+\cdots+(1-e^{-naT})z^{-n}$$

Utilisons la relation : $\boldsymbol{\mathcal{Z}[\delta(t-nT)]=z^{-n}}$

$$\begin{aligned}y_s(t)&=0\delta(t)+(1-e^{-aT})\delta(t-T)+(1-e^{-2aT})\delta(t-2T)+(1-e^{-3aT})\delta(t-3T)+\cdots\\&\qquad+(1-e^{-naT})\delta(t-nT)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}(1-e^{-anT})\delta(t-nT)\end{aligned}$$

1-2-7 Problème #7 :

Dériver la transformation en z à partir des transformées de Laplace suivantes :

$$Y(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)(s+d)}$$

$$Y(s) = \frac{(1-e^{-Ts})(s+2)}{s(s+1)}$$

Corrigé :

$$Y(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)(s+d)}$$

D'après le théorème du résidu :

$$Y(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)(s+d)} = \frac{k_1}{(s+b)} + \frac{k_2}{(s+c)} + \frac{k_3}{(s+d)}$$

$$k_1 = \lim_{s\to -b}(s+b)Y(s) = \left.\frac{s+a}{(s+c)(s+d)}\right|_{s=-b} = \frac{a-b}{(c-b)(d-b)}$$

$$k_2 = \lim_{s\to -c}(s+c)Y(s) = \left.\frac{s+a}{(s+b)(s+d)}\right|_{s=-c} = \frac{a-c}{(b-c)(d-c)}$$

$$k_3 = \lim_{s\to -d}(s+d)Y(s) = \left.\frac{s+a}{(s+b)(s+c)}\right|_{s=-d} = \frac{a-d}{(b-d)(c-d)}$$

$$Y(s) = \frac{s+a}{(s+b)(s+c)(s+d)}$$

$$= \frac{a-b}{(c-b)(d-b)}\frac{1}{(s+b)} + \frac{a-c}{(b-c)(d-c)}\frac{1}{(s+c)} + \frac{a-d}{(b-d)(c-d)}\frac{1}{(s+d)}$$

Utilisons les relations :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[e^{-bt}] = \frac{1}{s+b}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}[e^{-ct}] = \frac{1}{s+c}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}[e^{-dt}] = \frac{1}{s+d}}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}[e^{-bt}] = \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{Z}[e^{-ct}] = \frac{1}{1-e^{-cT}z^{-1}}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{Z}[e^{-dt}] = \frac{1}{1-e^{-dT}z^{-1}}}$$

D'où :

$$Y(z) = \frac{(a-b)}{(c-b)(d-b)}\frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}} + \frac{(a-c)}{(b-c)(d-c)}\frac{1}{1-e^{-cT}z^{-1}} + \frac{(a-d)}{(b-d)(c-d)}\frac{1}{1-e^{-dT}z^{-1}}$$

$$Y(s) = \frac{(1-e^{-Ts})(s+2)}{s(s+1)} = (1-e^{-Ts})\frac{(s+2)}{s(s+1)}$$

Appliquons le théorème du résidu :

$$\frac{(s+2)}{s(s+1)} = \frac{k_1}{s} + \frac{k_2}{(s+1)}$$

$$k_1 = \lim_{s\to 0} s\frac{(s+2)}{s(s+1)} = \left.\frac{(s+2)}{(s+1)}\right|_{s=0} = 2$$

$$k_2 = \lim_{s\to -1}(s+1)\frac{(s+2)}{s(s+1)} = \left.\frac{(s+2)}{s}\right|_{s=-1} = -1$$

$$Y(s) = (1-e^{-Ts})\frac{(s+2)}{s(s+1)} = (1-e^{-Ts})\left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s+1}\right)$$

Basons-nous sur les relations :

$$\boldsymbol{z = e^{Ts} \quad \rightarrow \quad 1 - e^{-Ts} = 1 - z^{-1}}$$

$$\boldsymbol{\mathcal{L}[u(t)] = \frac{1}{s}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{L}[e^{-t}] = \frac{1}{s+1}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{Z}[u(t)] = \frac{1}{1-z^{-1}}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{Z}[e^{-1t}] = \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}}$$

D'où :

$$Y(z) = (1-z^{-1})\left(\frac{2}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) = \left(\frac{z-1}{z}\right)\left(\frac{z^2 + z(1-2e^{-T})}{(z-1)(z-e^{-T})}\right) = \frac{z^2 + z(1-2e^{-T})}{z(z-e^{-T})}$$

$$= \frac{z + 1 - 2e^{-T}}{z - e^{-T}}$$

1-2-8 Problème #8 :

Soit l'équation de différence suivante :

$y(n+2) - \mathrm{y(n+1)} + 0.5y(n) = 1$

Avec : $y(0) = 2$, $y(1) = 3$.

Calculer $Y(z)$.

Corrigé :

Utilisons la propriété de la transformée en z :

$$\boldsymbol{\mathcal{Z}[f(n-m)] = z^{-m}F(z) + \sum_{i=0}^{m-1} f(i-m)z^{-i}} \quad , \quad \boldsymbol{\mathcal{Z}[f(n+m)] = z^{m}F(z) - \sum_{i=0}^{m-1} f(i)z^{m-i}}$$

Pour $y(n+2)$, $m = 2, i = 0{,}1$

$$y(n+2) = z^2Y(z) - \sum_{i=0}^{2-1} f(i)z^{2-i} = z^2Y(z) - z^{2-0}y(0) - z^{2-1}y(1) = z^2Y(z) - 2z^2 - 3z$$

Pour $y(n+1)$, $m = 1, i = 0$

$$y(n+1) = z^1Y(z) - \sum_{i=0}^{1-1} f(i)z^{1-i} = zY(z) - z^{1-0}y(0) = zY(z) - 2z$$

La transformée de la partie de droite de l'équation étudiée est : $\mathcal{Z}[u(t)] = \frac{z}{z-1}$

D'où :

$y(n+2) - \mathrm{y(n+1)} + 0.5y(n) = 1$

$$(z^2Y(z) - 2z^2 - 3z) - (zY(z) - 2z) + 0.5Y(z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)(z^2 - z + 0.5) - (2z^2 + z) = \frac{z}{z-1}$$

$$Y(z)(z^2 - z + 0.5)(z-1) - (2z^2 + z)(z-1) = z$$

$$Y(z)(z^2 - z + 0.5)(z-1) = (2z^2 + z)(z-1) + z$$

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z^2 - z + 0.5)} + \frac{2z^2 + z}{z^2 - z + 0.5}$$

1-2-9 Problème #9 :

En utilisant Matlab :

Calculer les transformées de Laplace des fonctions suivantes :

$y(t) = Ke^{-at}cos^2(\omega t + \varphi)$

$y(t) = Ke^{-at}sin^2(\omega t + \varphi)$

Calculer les transformées en z des fonctions suivantes :

$y(t) = Ke^{-at}cos(\omega t + \varphi)$

$y(t) = Ke^{-a(t-2T)}sin(\omega(t - 2T) + \varphi)$

Calculer les transformées de Laplace inverse des fonctions suivantes :

$$Y(s) = K\frac{s+4}{s(s-1)^3}$$

$$Y(s) = K_1\frac{4}{(s+2)^2 + 16} + K_2\frac{s+4}{(s+2)^2 + 16}$$

Calculer les transformées en z inverse des fonctions suivantes :

$$Y(s) = K\frac{z-2}{(z+1)(z+2)}$$

$$Y(s) = K\frac{z}{(z+3)(z+1)^2}$$

Résoudre l'équation différentielle suivante :

$\frac{d^3y(t)}{dt^3} - 3\frac{d^2y(t)}{dt^2}(t) - 13\frac{dy(t)}{dt} + 15y(t) = u(t)$, avec $y(0) = 0$; $\frac{dy(0)}{dt} = -1$; $\frac{d^2y(0)}{dt^2} = 2$.

Résoudre l'équation de récurrence suivante :

$y(n+2) - y(n+1) - y(n) = 0$, avec $y(0) = 1$ et $y(1) = 1$

Corrigé :

Nous ferons appel aux fonctions MATLAB suivantes : La lettre minuscule y désignera la fonction temporelle y(t) et la lettre majuscule Y désignera la transformée de Laplace Y(s). La fonction y_n représentera la fonction discrétisée et Z(z) représentera la transformée en z.

```
Y=laplace(y,t,s)
y_t=ilaplace(Y,s,t)
Z=ztrans(y,z)
y_n=iztrans(Z,z)
```

```
clear all;
clc;
 % Transformée de Laplace
syms k a t w phi s
y1=k*exp(-a*t)*cos(w*t+phi)^2;
Y1=laplace(y1,t,s)
y2=k*exp(-a*t)*sin(w*t+phi)^2;
Y2=laplace(y2,t,s)
% Transformée en z
syms k a n T w phi z
y_n1=k*exp(-a*n*T)*cos(w*n*T+phi);
Z1=ztrans(y_n1,z)
y_n2=k*exp(-a*(n+2)*T)*sin(w*(n+2)*T+phi);
Z2=ztrans(y_n2,z)
% Transformée de Laplace inverse
 syms k a t w phi s
Y5=k*(s+4)/(s*(s-1)^3);
y5=ilaplace(Y5,s,t)
Y6=k*4/((s+2)^2+16)+k*(s+4)/((s+2)^2+16);
y6=ilaplace(Y6,s,t)
% Transformée en z inverse
syms k a n T w phi z
Z3=k*z*(z-2)/((z+1)*(z+2))
y_n3=iztrans(Z3,z)
Z4=k*z/((z+3)*(z+1)^2 )
y_n4=iztrans(Z4,z)
% Équation différentielle
syms s Y9
y0=0;
ydot0=-1;
y2dot0=2;
Y3dot=s^3*Y9-s^2*y0-s*ydot0-y2dot0;
Y2dot=s^2*Y9-s*y0-ydot0;
Ydot=s*Y9-s*y0;
U=1/s;
Y9=solve(Y3dot-3*Y2dot-13*Ydot+15*Y9==1/s,Y9);
y9=ilaplace(Y9)
```

```
% Équation de différence
syms z Z5
y_n0=2;
y_n1=3;
yn2=z^2*Z5-z^2*y_n0-z*y_n1;
yn1=z*Z5-z*y_n0;
Z5=solve(yn2-yn1+0.5*Z5==z/(z-1),Z5)
y_n5=iztrans(Z5)
```

Réponses :

```
Y1 =
k*(1/(2*(a + s)) + (cos(2*phi)*(a + s))/(2*((a + s)^2 + 4*w^2)) -
(w*sin(2*phi))/((a + s)^2 + 4*w^2))

Y2 =
k*(1/(2*(a + s)) - (cos(2*phi)*(a + s))/(2*((a + s)^2 + 4*w^2)) +
(w*sin(2*phi))/((a + s)^2 + 4*w^2))

Z1 =
-k*((z*exp(T*a)*sin(T*w)*sin(phi))/(exp(2*T*a)*z^2 - 2*exp(T*a)*cos(T*w)*z +
1) + (z*exp(T*a)*cos(phi)*(cos(T*w) - z*exp(T*a)))/(exp(2*T*a)*z^2 -
2*exp(T*a)*cos(T*w)*z + 1))

Z2 =
k*ztrans(sin(phi + T*w*(n + 2))*exp(-T*a*(n + 2)), n, z)

y5 =
4*k*exp(t) - 4*k - 4*k*t*exp(t) + (5*k*t^2*exp(t))/2

y6 =
k*exp(-2*t)*(cos(4*t) + (3*sin(4*t))/2)

Z3 =
(k*z*(z - 2))/((z + 1)*(z + 2))

y_n3 =
8*k*((-2)^z/2 - kroneckerDelta(z, 0)/2) - 3*k*((-1)^z - kroneckerDelta(z, 0))
+ k*kroneckerDelta(z, 0)

Z4 =
(k*z)/((z + 1)^2*(z + 3))

y_n4 =
(3*k*((-3)^z/3 - kroneckerDelta(z, 0)/3))/4 - (3*k*((-1)^z -
kroneckerDelta(z, 0)))/4 - (k*((-1)^z*(z - 1) + kroneckerDelta(z, 0)))/2
y9 =
(23*exp(-3*t))/96 + exp(5*t)/160 - (5*exp(t))/16 + 1/15

Z5 =
(z + z/(z - 1) + 2*z^2)/(z^2 - z + 1/2)

y_n5 =
(2*(-1)^n*cos((3*pi*n)/4))/2^(n/2) + (-1)^n*2^(1 - n)*(- 1 - 1i)^(n - 1)*1i -
(-1)^n*2^(1 - n)*(- 1 + 1i)^(n - 1)*1i + 2
```