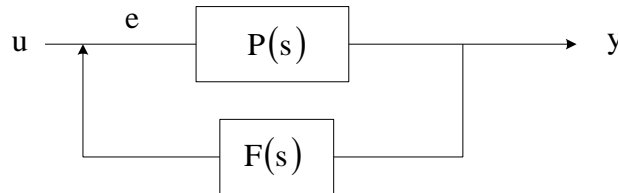


CHAPITRE II : RAPPELS DE LA COMMANDE CLASSIQUE

2-1 Rappels théoriques

2-1-1 Critère de Nyquist

Considérons la boucle de rétroaction suivante dans laquelle $P(s)$ est un processus dont la fonction de transfert comprend des zéros z_1, z_2, \dots, z_m et des pôles p_1, p_2, \dots, p_m où $n \geq m$.



On définit la fonction de transfert en boucle fermée :

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{P(s)}{1 + F(s)P(s)}$$

On définit la fonction de sensibilité :

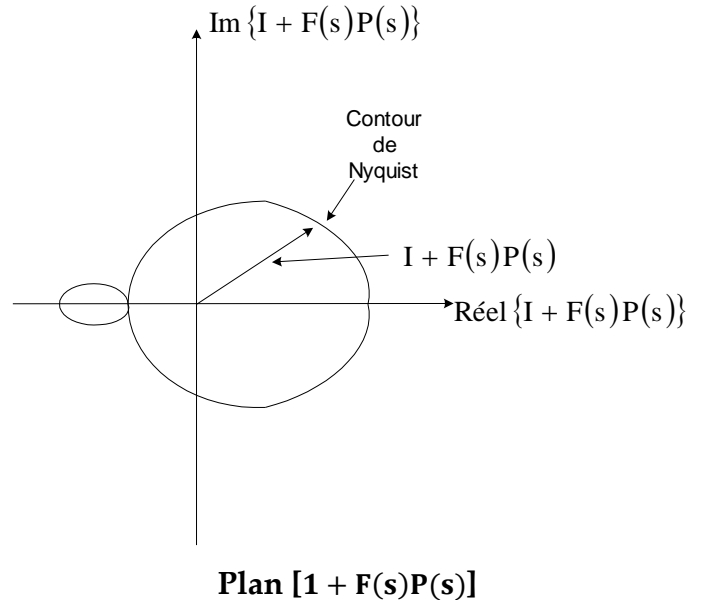
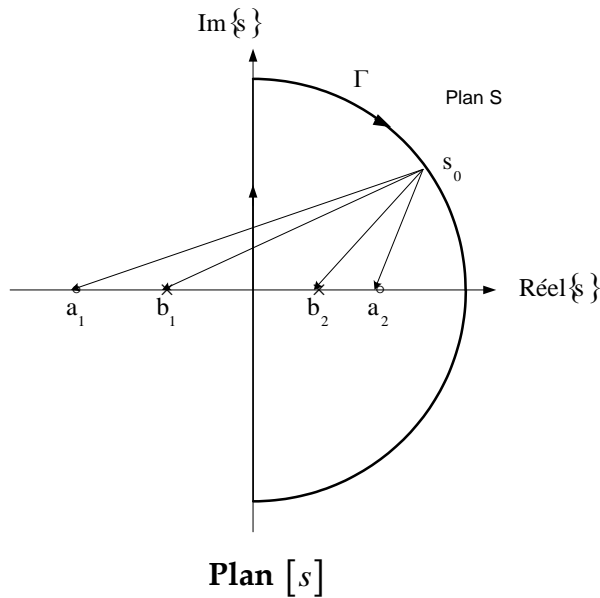
$$\frac{E(s)}{U(s)} = \frac{1}{1 + F(s)P(s)}$$

Les zéros et les pôles de la boucle fermée sont a_1, a_2, \dots, a_m et b_1, b_2, \dots, b_m . La stabilité de ce système va dépendre de la position des pôles de la boucle fermée dans le plan complexe S . Soit un contour Γ du demi-plan complexe de droite pouvant inclure les zéros a_1, a_2, \dots, a_m et les pôles b_1, b_2, \dots, b_m du dénominateur $1 + F(s)P(s)$ mais en entrant les pôles sur l'axe imaginaire, c'est-à-dire :

$$1 + F(s)P(s) = k \frac{(s + a_1)(s + a_2) \dots (s + a_m)}{(s + b_1)(s + b_2) \dots (s + b_m)}$$

De façon générale $n \geq m$ car les systèmes réels ont généralement plus de pôles que de zéros.

Le système en boucle fermée sera stable seulement si les zéros de $1 + F(s)P(s)$ ne se trouvent pas dans le demi-plan complexe de droite. Évaluons la fonction $1 + F(s)P(s)$ sur le contour Γ lorsque ce contour est parcouru dans le sens des aiguilles d'une montre. Les valeurs de $1 + F(s)P(s)$ vont dépendre de vecteurs joignant les pôles ou les zéros à des points s_0 sur le contour Γ .



Lorsque s_0 se déplace sur le contour Γ , le vecteur émanant de a_1 contribue un changement total de phase nul à la phase de $1 + F(s)P(s)$. Cependant, un vecteur émanant de a_2 va contribuer un changement de phase dans la direction des aiguilles d'une montre, soit -360° lorsque s_0 parcourt le contour Γ . Soit Z le nombre de zéros dans le demi-plan complexe de droite de $1 + F(s)P(s)$ et P le nombre de pôles de $1 + F(s)P(s)$ dans le demi-plan complexe de droite, qui est égal au nombre de pôles de $F(s)P(s)$ dans le demi-plan complexe de droite.

La contribution de Z zéros dans le demi-plan complexe de droite sera de $-Z \times 360^\circ$ ou de $-Z \times 2\pi$ radians. De façon similaire, un nombre de pôles P dans le demi-plan complexe de droite contribuera un angle de $P \times 360^\circ$ ou $P \times 2\pi$ radians. Le tracé de $1 + F(s)P(s)$ dans le plan complexe effectuera donc un nombre N d'encerclements autour de l'origine dans le sens horaire inverse égal à $N = P - Z$ ou $Z = P - N$.

Z , le nombre de zéros dans le demi-plan complexe de droite de $1 + F(s)P(s)$ doit être nul car il représente les pôles de la boucle formée $\frac{P(s)}{1 + F(s)P(s)}$. Nous notons que le nombre d'encerclement de $1 + F(s)P(s)$ autour de l'origine est égal au nombre d'encerclements de $F(s)P(s)$ autour du point $(-1, 0)$. Le critère de stabilité de Nyquist s'énoncera donc de la façon suivante : Le système en boucle fermée sera stable pour autant que le contour de Nyquist de la fonction $F(s)P(s)$ effectue un nombre d'encerclements dans le sens antihoraire autour du point critique $(-1, 0)$ égal au nombre de pôles P de $F(s)P(s)$ dans le demi-plan complexe de droite, donc $P = N$.

Exemple : Étudier la stabilité de la boucle de rétroaction suivante :

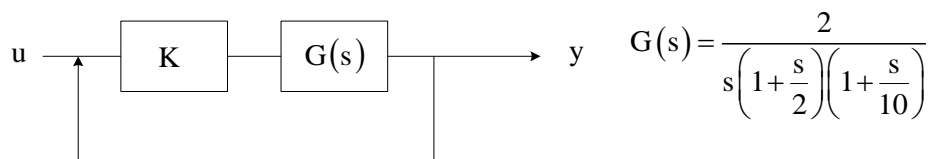
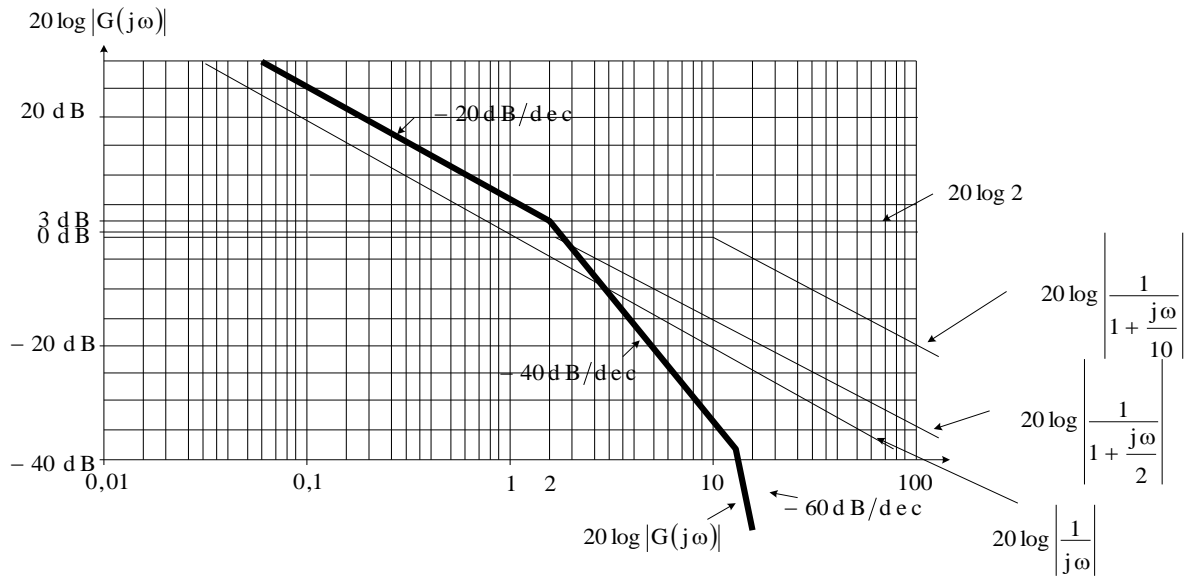
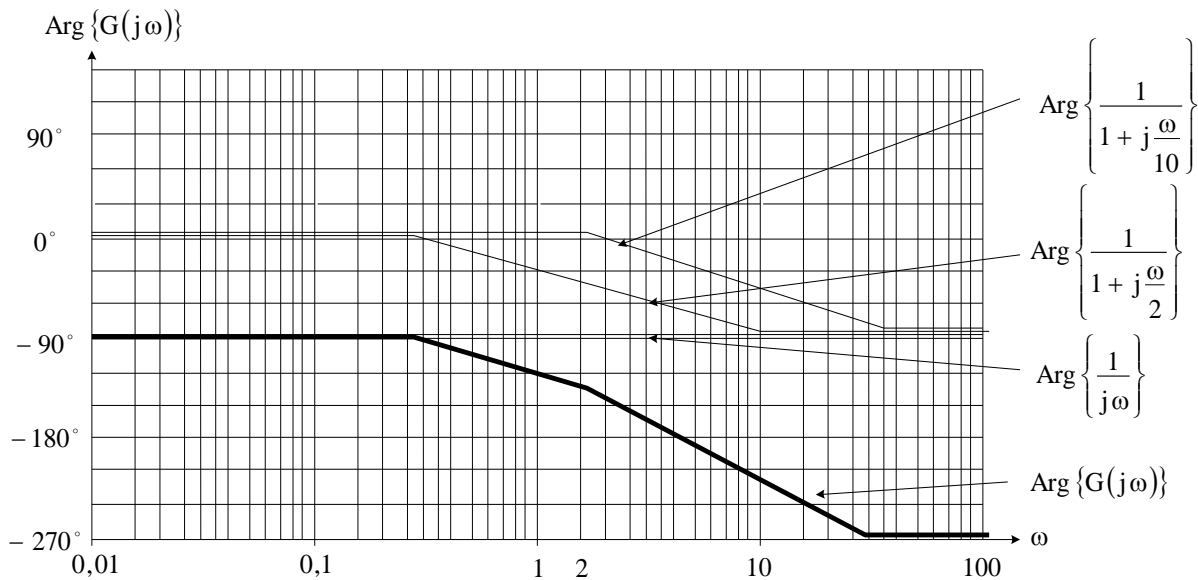


Diagramme de Bode :

$$A = 20 \log |G(j\omega)| \text{ et } \varphi = \angle G(j\omega)$$

**Diagramme de Bode de gain****Diagramme de Bode de phase****Diagramme de Bode MATLAB:**

```
G=tf([2], [1 12 20 0])
bode(G); margin(G); grid
```

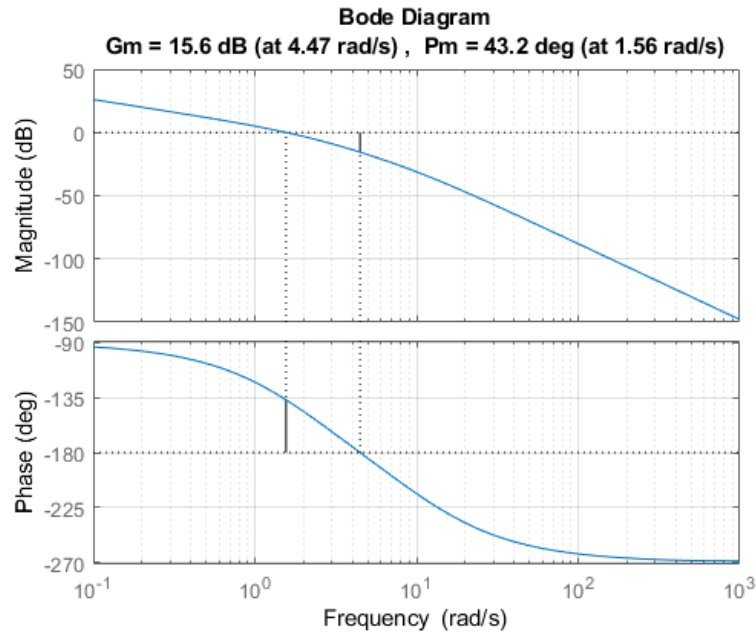
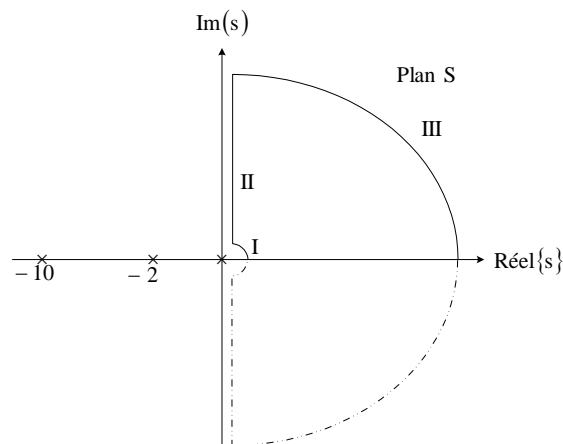


Diagramme de Nyquist :

Divisons le contour du demi-plan complexe de droite en trois parties I, II et III, et ne considérons que la portion $\text{Im}(s) > 0$ à ce stade-ci. L'autre portion $\text{Im}(s) < 0$ sera obtenue par symétrie, c'est-à-dire $G(s^*) = -G(s)$.



Contour de plan S

$$\text{I: } s = \varepsilon e^{j\theta} \begin{cases} \varepsilon \rightarrow 0 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$G(s) = \frac{2}{\varepsilon e^{j\theta} \left(1 + \frac{\varepsilon e^{j\theta}}{2}\right) \left(1 + \frac{\varepsilon e^{j\theta}}{10}\right)^2} = \frac{2}{\varepsilon e^{j\theta}} = \infty < -\theta$$

C'est-à-dire que $G(s)$ passe de $\infty < 0$ à $\infty < \frac{-\pi}{2}$.

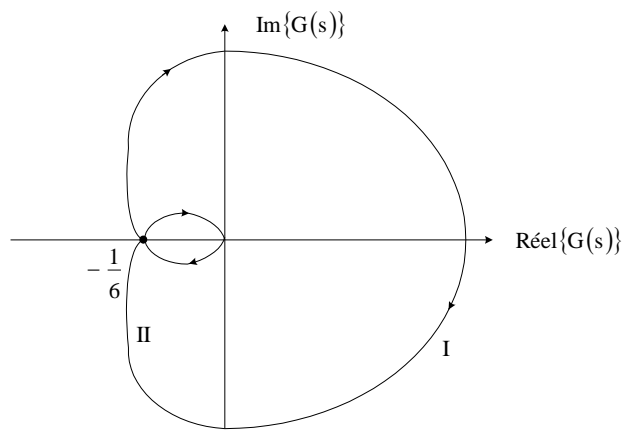
II : $s = j\omega$. Le diagramme de Bode indique une amplitude sans cesse décroissante et une phase allant de -90° à -270° .

III : $s = Re^{j\phi} \begin{cases} R \rightarrow \infty \\ \frac{\pi}{2} > \phi > 0 \end{cases}$

$$G(s) = \frac{2}{Re^{j\phi} \left(1 + \frac{R}{2}e^{j\phi}\right) \left(1 + \frac{R}{10}e^{j\phi}\right)^2} \cong \frac{2}{R^3 e^{j3\phi}} \cong 0 < -3\phi$$

Ce qui revient à un arc de cercle de rayon quasi-nul allant de $0 < -270^\circ$ à $0 < 0^\circ$.

D'où le diagramme de Nyquist suivant :

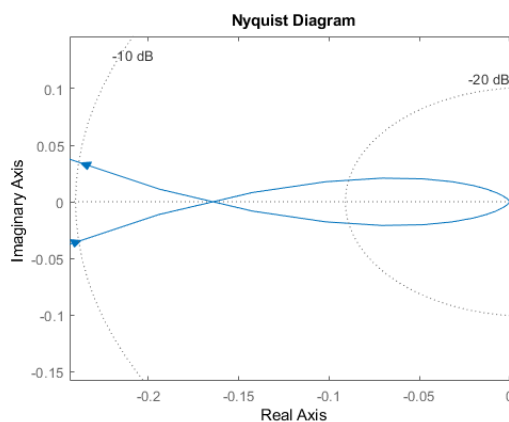
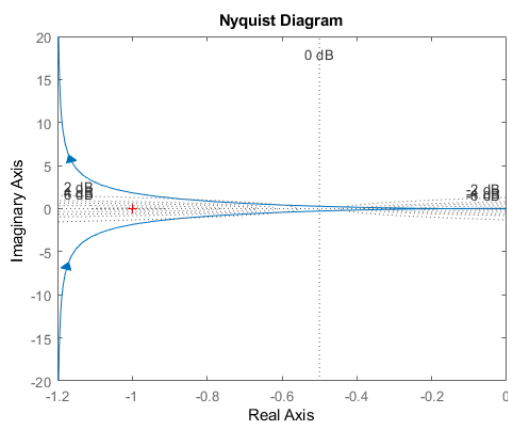


Contour de Nyquist de $G(s)$

Diagramme de Nyquist MATLAB:

```
G=tf([2], [1 12 20 0])
nyquist(G); grid;
```

Le diagramme de Nyquist ne représente pas l'encerclement du plan complexe de droite. Nous représentons également un zoom du diagramme de Nyquist en haute fréquence.



(Zoom)

L'intersection du graphe avec l'axe réel est obtenue en posant $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$, soit :

$$\begin{aligned} G(j\omega) &= \frac{2}{j\omega \left(1 + \frac{j\omega}{2}\right) \left(1 + \frac{j\omega}{10}\right)} = \frac{40}{j\omega(2 + j\omega)(10 + j\omega)} = \frac{40}{j\omega(20 - \omega^2 + 12j\omega)} \\ &= \frac{40}{-12\omega^2 + j(20\omega - \omega^3)} = \frac{40[-12\omega^2 - j(20\omega - \omega^3)]}{[-12\omega^2 + j(20\omega - \omega^3)][-12\omega^2 - j(20\omega - \omega^3)]} \\ &= \frac{40[-12\omega^2 - j(20\omega - \omega^3)]}{(12\omega^2)^2 + (20\omega - \omega^3)^2} \end{aligned}$$

Posons $\text{Im}\{G(j\omega)\} = 0$, c'est-à-dire $20\omega - \omega^3 = 0$, soit $\omega = 0$ et $\omega = \pm\sqrt{20} \text{ rad/s}$.

$$\text{D'où } \text{Réal}\{G(j\omega)\} = G(j\sqrt{20}) = \frac{40}{-12\omega^2} = -\frac{1}{6}$$

Le nombre d'encerclements autour du point critique $-\frac{1}{K}$ va dépendre de la valeur de K. Il doit être nul car $G(s)$ ne possède aucun pôle dans le demi-plan complexe de droite ($P=0$). D'où :

$$\frac{-1}{K} < -\frac{1}{6} \quad \Rightarrow \quad K < 6$$

\Rightarrow Système stable car $P=0$ et $N=0$ car il y a zéro encerclement autour du point critique $(-\frac{1}{K}, 0)$

$$\frac{-1}{6} < -\frac{1}{K} < 0 \quad \Rightarrow \quad K > 6$$

\Rightarrow Système instable car $P = 0$ et $N = -2$ encerclements autour du point critique $(-\frac{1}{K}, 0)$

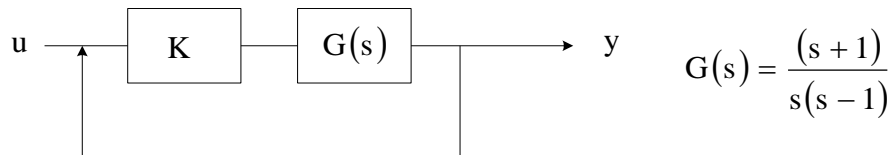
$$-\frac{1}{K} > 0 \quad \Rightarrow \quad K < 0$$

\Rightarrow Système instable car $P = 0$ et $N = -1$ encerclement autour du point critique $(-\frac{1}{K}, 0)$

Le système de rétroaction est donc stable pour toute valeur de K vérifiant $0 < K < 6$

Exemple :

Étudier la stabilité de la boucle de rétroaction suivante comprenant un processus $G(s)$ instable :



Nous commencerons par tracer le diagramme de Bode, soit :

$$20 \log |G(j\omega)| = 20 \log \frac{|j\omega + 1|}{|j\omega(j\omega - 1)|} = 20 \log \left| \frac{1}{j\omega} \right|$$

Le diagramme de Bode de gain est une fonction décroissante de la pulsation ω .

$$\text{Arg}\{G(j\omega)\} = \arg\{(1 + j\omega)\} + \arg\left\{\left(\frac{1}{j\omega}\right)\right\} + \arg\left\{\left(\frac{1}{j\omega - 1}\right)\right\}$$

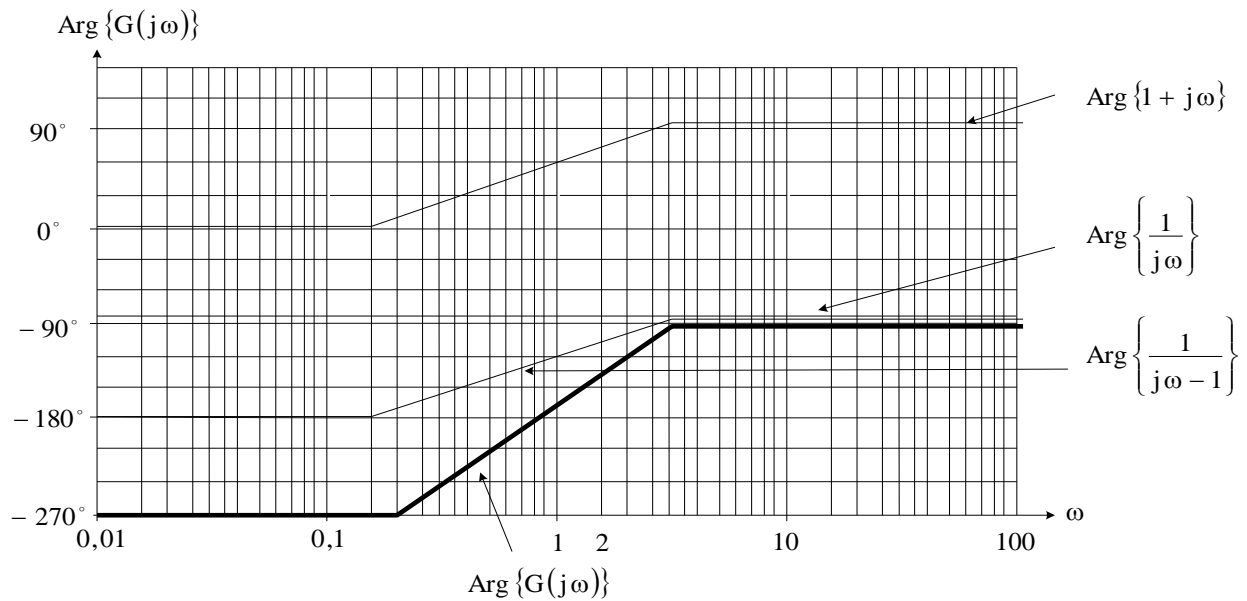
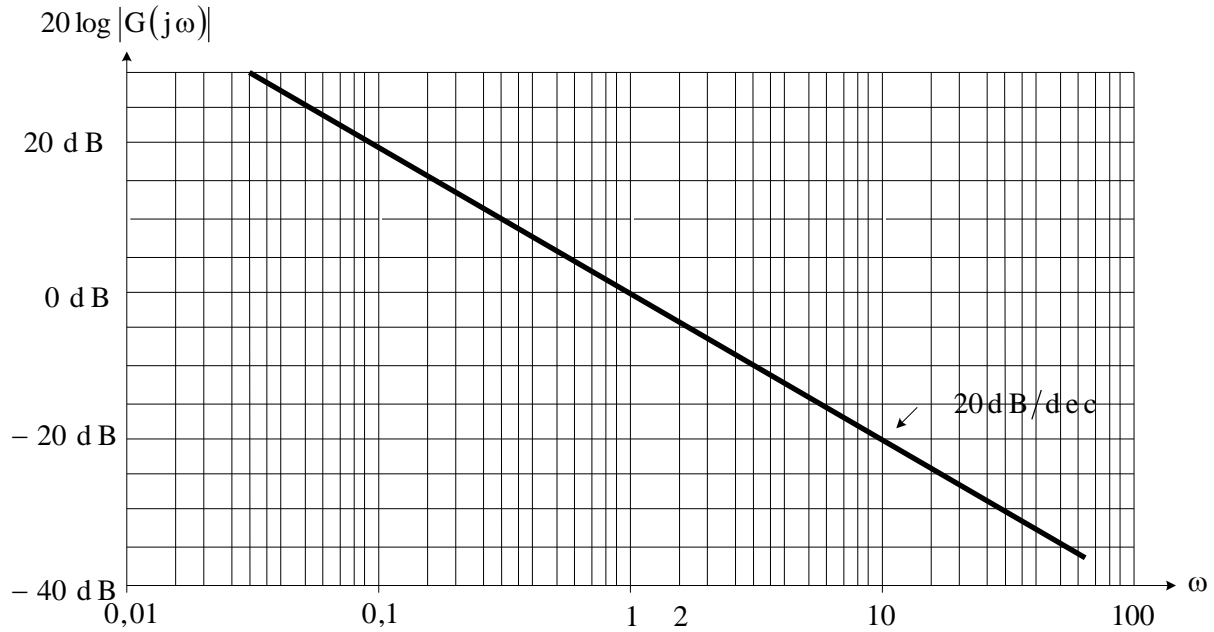


Diagramme de Bode MATLAB:

```
G=tf([1 1], [1 -1 0])
bode(G); margin(G); grid
```

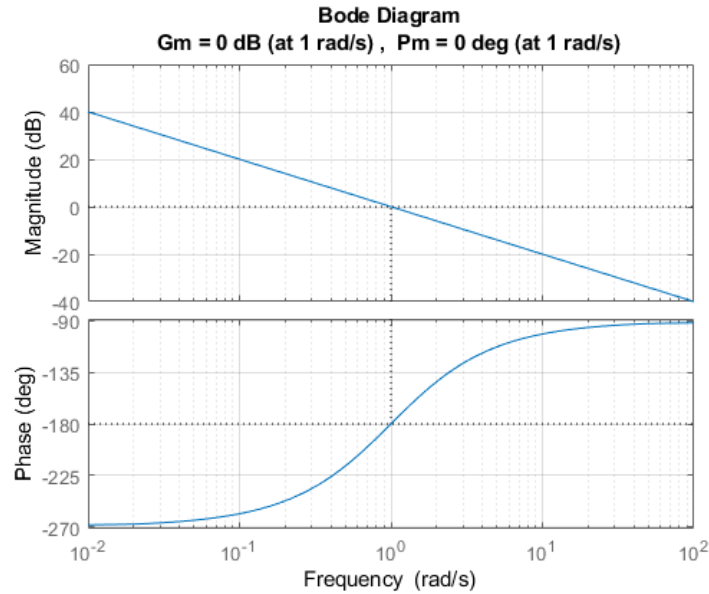


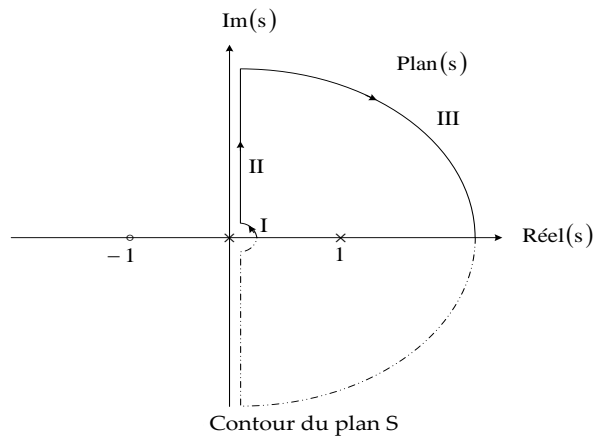
Diagramme de Nyquist :

Passons à l'étude de la fonction de transfert $G(s)$ en regard du demi-plan complexe de droite. Nous considérerons seulement la partie imaginaire positive et compléterons cette étude par symétrie en faisant usage de la propriété : $G(s^*) = -G(s)$. Le contour du quart de plan complexe de droite sera divisé en trois parties I, II et III, en contournant le pôle $s = 0$.

$$\text{I.} \quad s = \varepsilon e^{j\theta} \begin{cases} \varepsilon \rightarrow 0 \\ 0 < \theta < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{II.} \quad s = j\omega$$

$$\text{III.} \quad s = Re^{j\phi} \begin{cases} R \rightarrow \infty \\ \frac{\pi}{2} > \phi > 0 \end{cases}$$



$$\text{I.} \quad G(s) = \frac{\varepsilon e^{j\theta} + 1}{\varepsilon e^{j\theta}(\varepsilon e^{j\theta} - 1)} \cong \frac{1}{-\varepsilon e^{j\theta}} = \infty < -\pi - \theta.$$

Le graphe de Nyquist varie donc de $\infty < -\pi$ à $\infty < -\frac{3\pi}{2}$

II. Les variations de $G(j\omega)$ nous sont données par le diagramme de Bode, soit une amplitude sans cesse décroissante et une phase allant de -270° (c'est-à-dire $+90^\circ$) à -90° .

III. $G(s) = \frac{Re^{j\phi} + 1}{Re^{j\phi}(Re^{j\phi} - 1)} \cong \frac{1}{Re^{j\phi}} = 0 < -\phi$. $G(s)$ se traduit donc par un arc de cercle de rayon quasi nul allant de $0 < -90^\circ$ à $0 < 0^\circ$.

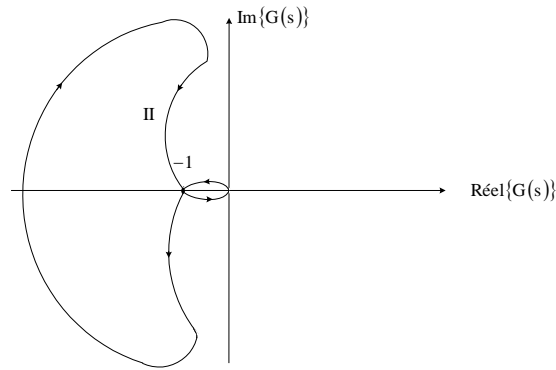
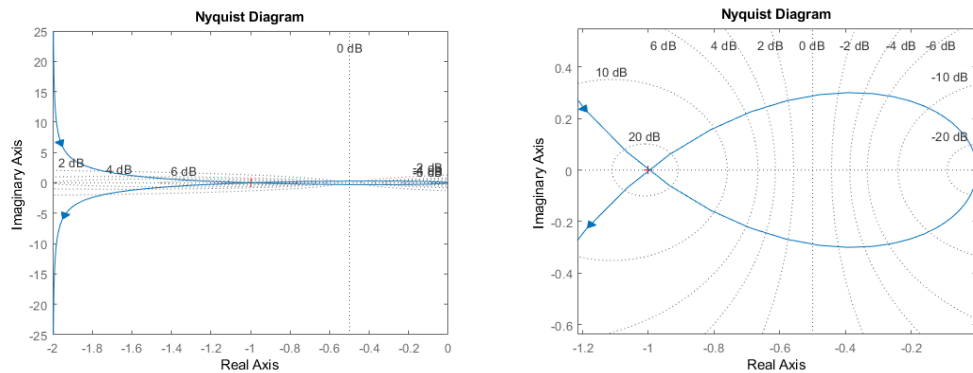


Diagramme de Nyquist

Diagramme de Nyquist MATLAB:

```
G=tf([1 1], [1 -1 0]); nyquist(G); grid
```

Le programme MATLAB ne permet pas de visualiser l'encerclement d'un demi-plan complexe de gauche.



(Zoom)

Le nombre d'encerclements dans le sens contraire des aiguilles d'une montre autour du point critique $\{-\frac{1}{K}, 0\}$ doit être égal au nombre de pôles P de $G(s)$ dans le demi-plan complexe de droite (ici $P = 1$).

$$-\frac{1}{K} < -1 \text{ ou } K < 1 \quad \Rightarrow \text{Système instable car } P=1 \text{ et } N=-1$$

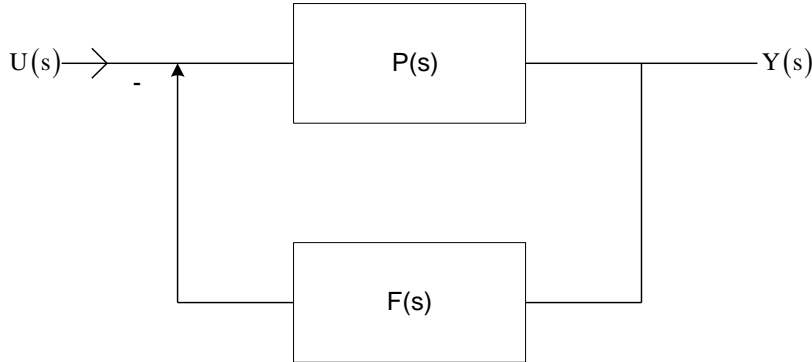
$$-1 < -\frac{1}{K} < 0 \text{ ou } K > 1 \quad \Rightarrow \text{Système stable car } P = N = 1$$

$$-\frac{1}{K} > 0 \text{ ou } K < 0 \quad \Rightarrow \text{Système instable car } P=1 \text{ et } N=0$$

Ce système de rétroaction sera donc stable pour toute valeur de $K > 1$.

2-1-2 Critère du lieu géométrique des racines

La méthode du lieu géométrique des racines développées par Evans consiste à localiser sur le plan complexe les racines de la boucle fermée lorsque le gain de boucle augmente. Seule la connaissance des pôles et des zéros du gain de boucle est nécessaire.



$$T(s) = P(s)[I + F(s)P(s)]$$

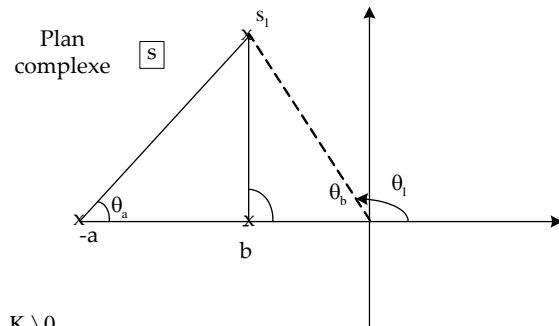
ou

$$T(s) = \frac{P(s)}{I + F(s)P(s)}$$

Exemple illustrative :

$$F(s)P(s) = \frac{K(s+a)}{s(s+b)}$$

Soit s_1 une fréquence complexe quelconque.



Notons que : $s_1 + a = |s_1 + a| \angle \theta_a$

$$s_1 + b = |s_1 + b| \angle \theta_b$$

$$s_1 = |s_1| \angle \theta_0$$

$$F(s_1)P(s_1) = K \frac{s_1 + a}{s_1(s_1 + b)} = |K| \cdot \frac{|s_1 + a|}{|s_1| \cdot |s_1 + b|} \angle \theta_a - \theta_b - \theta_1, \quad K > 0$$

La condition $F(s_1)P(s_1) = -1$ correspond au point critique d'instabilité, i.e.

$$\frac{|K| \cdot |s_1 + a|}{|s_1| \cdot |s_1 + b|} = 1$$

$\theta_a - \theta_b - \theta_1 = 180^\circ + k360^\circ$. C'est sur ces dernières relations que repose la méthode du lieu géométrique des racines.

Méthode de construction

1. Le lieu des racines débute aux pôles de la boucle ouverte ($K = 0$).
2. Le lieu des racines se termine aux zéros de la boucle ouverte ($K \rightarrow \infty$).
3. Il y a autant de branches que de pôles en boucle ouverte.

4. Le lieu des racines est symétrique par rapport à l'axe des réels.
5. Le lieu des racines est asymptotique ($s \rightarrow \infty$) aux droites définies par les angles $\theta = \frac{(1+2k)\pi}{n-m}$
 - n : nombre de pôles de la boucle ouverte.
 - m : nombre de zéros de la boucle ouverte.
 - k : nombre entier $0, 1, 2, \dots, n - m - 1$.
6. Les asymptotes coupent l'axe réel aux valeurs σ_i qui peuvent être obtenues à partir de la valeur des pôles et des zéros du gain de boucle. $\sigma_i = \frac{\sum \text{pôles} - \sum \text{zéros}}{n-m}$
7. Le lieu des racines recouvre une portion de l'axe des réels à la gauche d'un nombre impair de pôles et de zéros de la boucle ouverte.
8. L'intersection du lieu des racines avec l'axe des réels s'obtient en résolvant :
$$\frac{d\left(-\frac{1}{F(s)P(s)}\right)}{ds} = 0$$
9. Les angles de départ et d'arrivée peuvent être obtenus à partir du critère des angles, $\sum \theta_a - \sum \theta_b = 180^\circ$ mesurés à partir du pôle de départ ou du zéro d'arrivée.
10. Le lieu des racines coupe l'axe des imaginaires au seuil d'instabilité. La valeur critique correspondante de K peut être obtenue par le critère de Routh Hurwitz.
11. La valeur de K sur le lieu des racines peut être obtenue à partir des distances entre un point du lieu et les pôles et les zéros.
12. La somme des pôles de la boucle fermée est constante.

Exemple:

Considérer le gain de boucle $F(s)P(s)$ de la boucle de rétroaction :

$$F(s)P(s) = \frac{K}{s(s+b)}$$

- Le lieu des racines démarre à 0 et $-b$. Il y a 2 branches
- Le lieu des racines finit à l'infini. ($s \rightarrow \infty$ représente un zéro du gain de boucle).
- Les asymptotes forment un angle : $\theta_1 = \frac{\pi}{2}k = 0$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}k = 1$
- Les asymptotes coupent l'axe réel au point $\frac{0-b-0}{2} = -\frac{b}{2}$
- Le lieu des racines couvre l'axe réel entre les valeurs 0 et $-b$

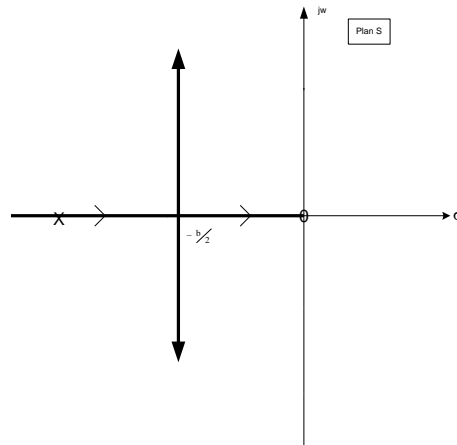
- Le lieu des racines coupe l'axe réel à la valeur

$$\frac{d}{ds}[-s(s+b)] = 0$$

$$\text{i.e. } 2s - b = 0$$

$$\text{ou } s = \frac{b}{-2}$$

Dans ce cas particulier, le lieu des racines s'est confondu à son asymptote.

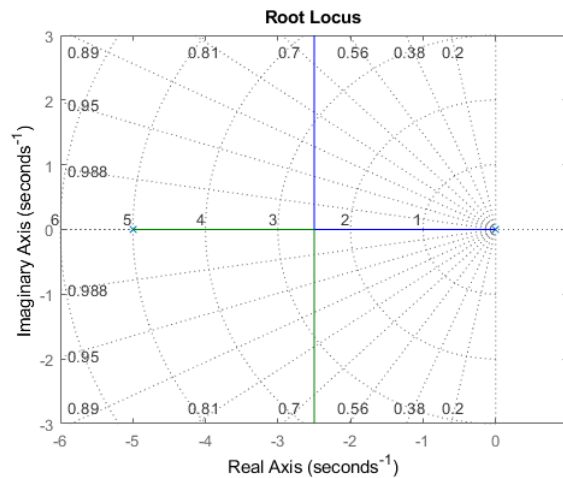


Lieu des racines

Lieu des racines en utilisant MATLAB :

$$F(s)P(s) = \frac{2K}{s(s+5)}$$

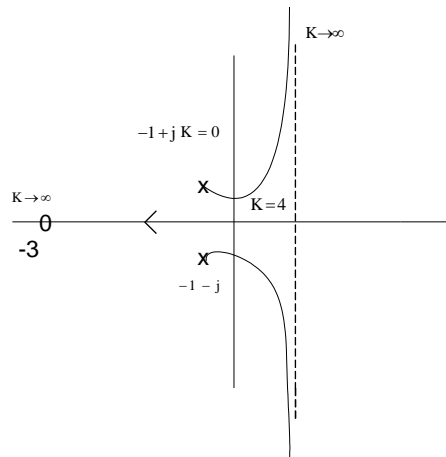
```
G=tf([2], [1 5 0]); rlocus(G); grid
```



Exemple:

$$F(s)P(s) = \frac{K(s+3)}{s(s^2+2s+2)}$$

Les pôles sont : $0, -1 + j, -1 - j$. Le zéro est à : -3 .



Lieu des racines de la boucle fermée dans le plan complexe

- Le lieu des racines débute à $0, -1 - j$ et $-1 + j$ $n = 3, m = 1, n - m = 2$
- Le lieu des racines finit au zéro $(-3, 0)$.
- Les asymptotes forment les angles :

$$\frac{(1 + 2k)\pi}{n - m} = \frac{(1 + 2k)\pi}{2} = \begin{cases} 90^\circ & (k = 0) \\ 270^\circ & (k = 1) \end{cases}$$

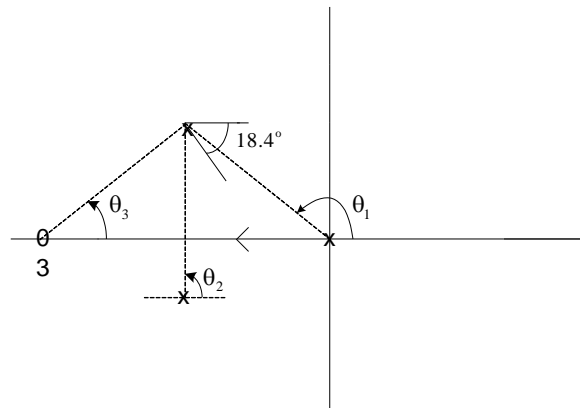
et coupent l'axe des réels au point :

$$\frac{0 + (-1 - j) + (-1 + j) - (-3)}{2} = \frac{1}{2}$$

- Il y a une branche sur l'axe des réels. Les autres branches démarrent des pôles avec un angle θ_x tel que :

Au point $-1 + j, \sum \theta_i = 180^\circ$

$$-\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + \theta_x = 180^\circ \rightarrow -135^\circ - 90^\circ + 26.6^\circ + \theta_x = 180^\circ \rightarrow \theta_x = -18.4^\circ$$



- Intersection avec l'axe des imaginaires : Trouvons les valeurs critiques du gain pour lesquelles il y a stabilité marginale, en étudiant le dénominateur du gain de boucle.

$$1 + K \frac{s + 3}{s^3 + 2s^2 + 2s}$$

Appliquons le critère de Routh-Hurwitz pour l'équation caractéristique :

$$s^3 + 2s^2 + (2 + K)s + 3K = 0$$

$$\begin{cases} 1 & 2 + K \\ 2 & 3K \\ \frac{2(2 + K) - 3K}{2} = 4 - K & 0 \\ 3K & 0 \end{cases}$$

Le système est instable si $4 - K < 0$, i.e. si $K > 4$

Remarque :

Si le nombre d'asymptotes est égal à 3 ou plus, le lieu des racines déborde obligatoirement sur le demi-plan complexe de droite car les asymptotes forment des angles de $\frac{(1+2k)\pi}{n-m}$, $k = 0, 1, \dots (n - m - 1)$.

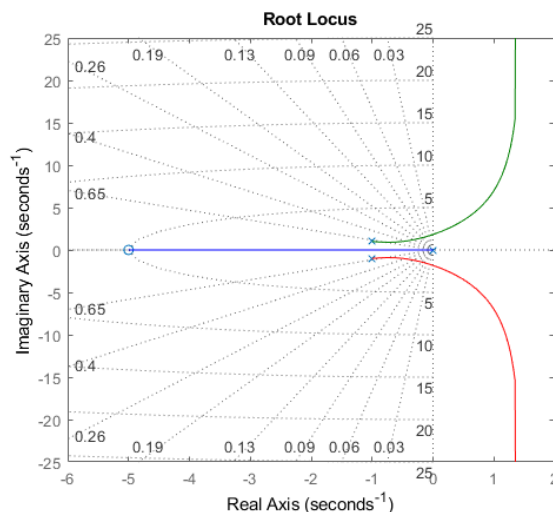
Soit pour $(n - m) = 2$, $\theta_i = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, Pour $(n - m) = 3$, $\theta_i = 3, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{3}$ etc.

Il ressort que le gain K devra nécessairement être limité pour éviter l'instabilité, ce qui empêche de profiter des avantages du haut gain (meilleure poursuite, meilleure réjection des perturbations, meilleure performance en dépit des incertitudes, etc.).

Lieu des racines en utilisant MATLAB :

$$F(s)P(s) = \frac{K(s + 5)}{s(s^2 + 2s + 2)}$$

```
G=tf([1 5], [1 2 2 0]); rlocus(G); grid
```



En plaçant le curseur sur le lieu des racines, il est possible de déterminer la valeur du gain K correspondante.

Exemple :

L'étude de la fonction de transfert $G(s)$ par la méthode du lieu géométrique des racines.

$$F(s)P(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

- 1) Les pôles de $G(s)$: $s = 0$ et $s = 1$ (deux branches)

Le zéro de $G(s)$: $s = -1$

- 2) Pour $K=0$, le lieu des racines commence par les pôles $s = 0$ et $s = 1$.

Pour $K = +\infty$, le lieu des racines se termine par le zéro $s = -1$ branche du pôle $s=0$ et à l'infinie la branche du pôle $s=1$.

- 3) Si $s \rightarrow \infty$ les droites sont définies par :

$$\theta = \frac{(1+2k)\pi}{n-m} = \pi + 2k\pi : \text{l'axe des abscisses.}$$

- 4) Les asymptotes coupent l'axe réel aux valeurs :

$$\sigma_i = \frac{0 + 1 - 1}{2 - 1} = 0$$

- 5) L'intersection du lieu des racines avec l'axe des réels :

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{-s(s-1)}{s+1} \right) = 0 \Rightarrow s^2 + 2s - 1 = 0$$

$$s_1 = -1 + \sqrt{2} = 0.414 \text{ et } s_2 = -1 - \sqrt{2} = -2.41$$

- 6) L'intersection sur l'axe imaginaire par le critère de Routh :

$$1 + KG(s) = 0 \Rightarrow s^2 + (K-1)s + K = 0 \quad \text{stable si } K > 1$$

$$\text{Pour } K = 1, \text{ l'équation caractéristique devient : } s^2 = -1 \Rightarrow s_{1,2} = \pm j$$

Le discriminant de l'équation caractéristique :

$$\Delta = K^2 - 6K + 1 = (K - K_1)(K - K_2)$$

avec $K_1 = 3 - \sqrt{8} = 0.171 < 1$ (instable) et $K_2 = 3 + \sqrt{8} = 5.828 > 1$ (stable)

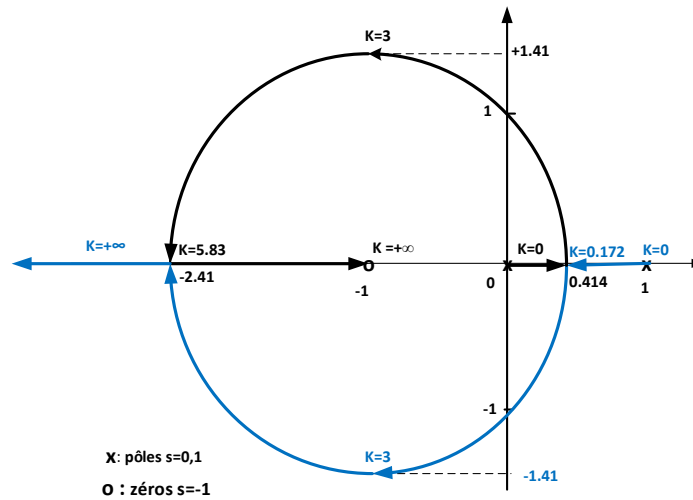
$$\text{a) } \Delta = 0 \Rightarrow s_1 = \frac{-(K_1-1)}{2} = 0.414 \text{ et } s_2 = \frac{-(K_2-1)}{2} = -2.41$$

$$\text{b) } \Delta > 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-(K-1) \pm \sqrt{K^2 - 6K + 1}}{2}.$$

les racines sur l'axe réel : $K \in]-\infty, K_1[\cup]K_2, +\infty[$

$$c) \Delta < 0 \Rightarrow s_{1,2} = \frac{-(K-1) \pm j\sqrt{6K-K^2-1}}{2};$$

les racines sur l'axe imaginaire : $K \in]K_1, K_2[$

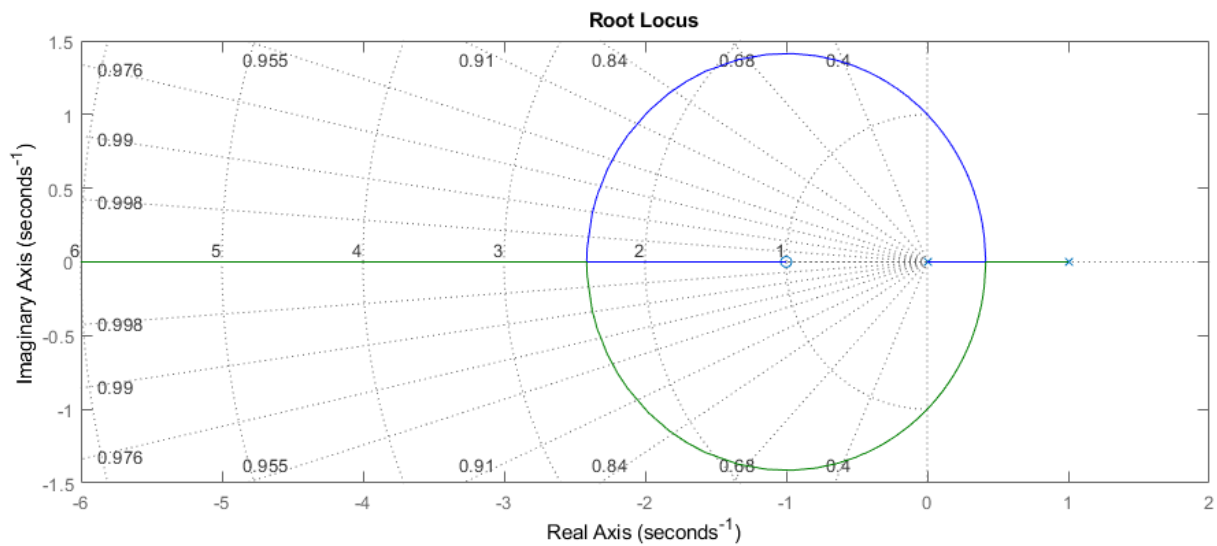


Lieu des racines

Lieu des racines en utilisant MATLAB :

$$F(s)P(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)}$$

```
G=tf([1 1], [1 -1 0]); rlocus(G); grid
```



2-1-3 Gain de boucle fermée $|T(s)|$ constant

Soit X et Y les parties réelles et imaginaires du gain de boucle ouverte $L(\omega) = X + jY$.

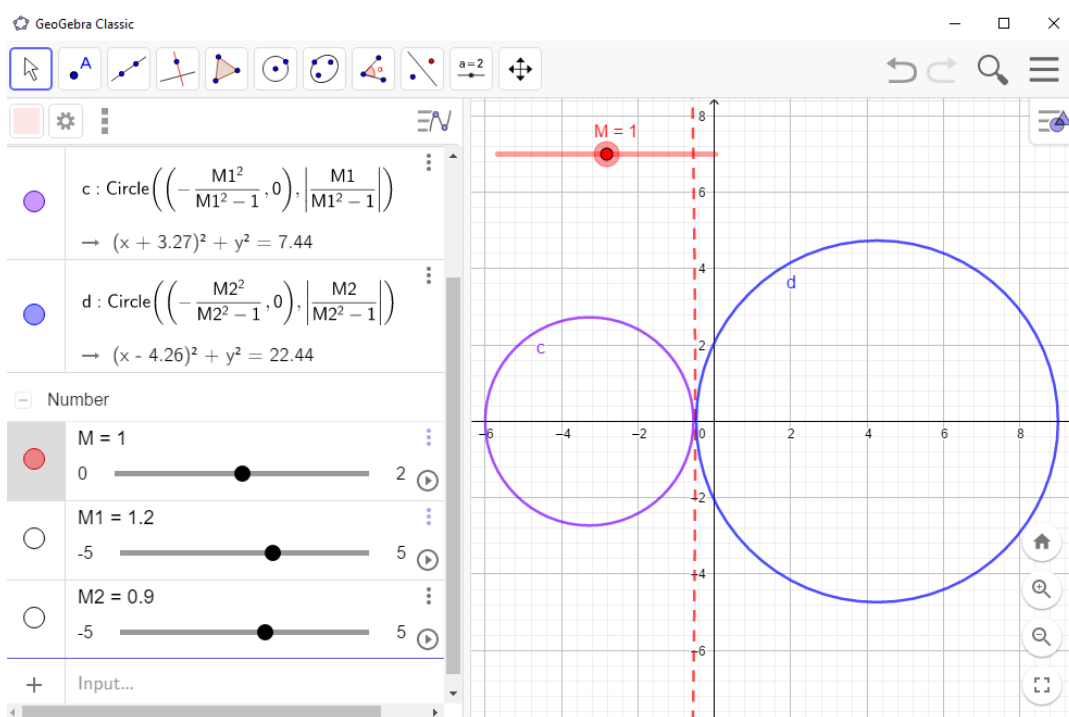
Trouvons les lieux vérifiant $|T(s)| = \left| \frac{L(s)}{1+L(s)} \right| = M$

$$M = \frac{|X+jY|}{|1+X+jY|} \text{ ou } M^2 = \frac{X^2+Y^2}{(1+X)^2+Y^2}, \text{ d'où :}$$

$$X^2 + \frac{2M^2}{M^2-1}X + \frac{M^4}{(M^2-1)^2} + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2-1)^2}$$

$$\left(X^2 + \frac{M^2}{M^2-1} \right)^2 + Y^2 = \frac{M^2}{(M^2-1)^2}$$

Il s'agit de l'équation d'un cercle de centre $\left(-\frac{M^2}{M^2-1}, 0 \right)$ et de rayon $\left| \frac{M}{M^2-1} \right|$.



Noter que le gain de boucle idéal $M=1$ se traduit par un diagramme de Nyquist qui longe la ligne droite dont la valeur réelle est -0.5 . Un diagramme de Nyquist qui longerait le gain de boucle idéal $M=1$ signifierait une transmission parfaite entre l'entrée et la sortie de la boucle de rétroaction. Notez les modifications du diagramme de Nyquist en faisant varier le gain K dans l'exemple suivant.

De la même façon, il est possible de représenter des cercles représentant les phases de boucle fermée constantes. Représentons de façon symbolique la fonction de transfert en boucle fermée $T(s)$:

$$T(s) = \frac{L(s)}{1 + L(s)} = \frac{x + jy}{1 + x + jy}$$

La phase de la boucle fermée s'écrit sous la forme :

$$\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{y}{x+1}\right)$$

Utilisons la propriété : $\tan(a - b) = \frac{\tan(a) - \tan(b)}{1 - \tan(a)\tan(b)}$

D'où :

$$\tan(\varphi) = \frac{y}{x^2 + x + y^2}$$

Posons : $N = \tan(\varphi)$

Il s'ensuit que :

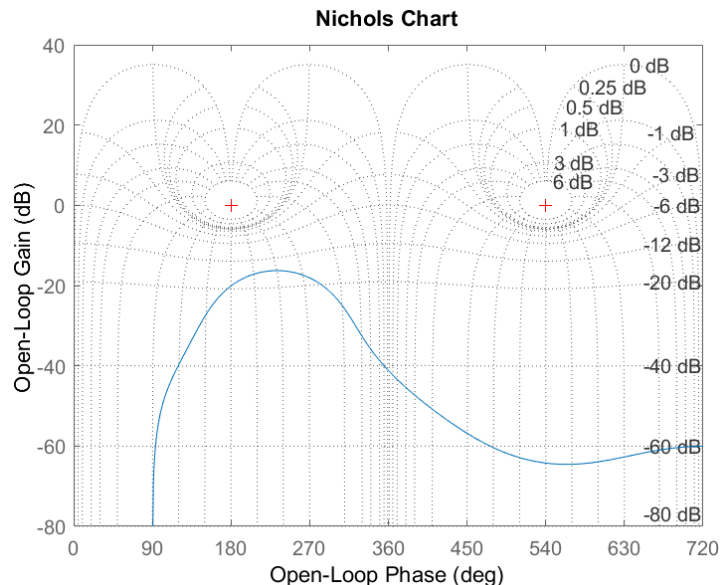
$$x^2 + y^2 + x - \frac{y}{N} = 0 \rightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2N}\right)^2 = \frac{N^2 + 1}{4N^2}$$

Nous avons obtenu une famille de cercles dépendant de N , dont le centre est situé à $x = -\frac{1}{2}$ et

$y = \frac{1}{2N}$ et dont le rayon est $r = \frac{1}{2} \sqrt{1 - \left(\frac{1}{N}\right)^2}$.

Notons que les cercles M et les cercles N peuvent être représentés sur un diagramme de Nichols. Rappelons que ces derniers consistent en un système d'axe avec la phase de la boucle ouverte en abscisse et $20 \log$ du module du gain de la boucle ouverte en ordonnée. Ainsi, le tracé de Nichols permet d'identifier le gain et la phase de la boucle fermée à chaque fréquence.

Voici un exemple du fonctionnement de la fonction nichols : Considérez un modèle de fonction de transfert stable généré aléatoirement de la forme $G(s) = \text{num}(s)/\text{den}(s)$ tel que : num = 0 -0.1022 0.0316 0.1934 -0.1795 0.1620 et den = 1.0000 6.2190 50.6538 222.7866 359.5180 162.7478. Appelez nichols en utilisant la commande suivante (voir aussi, help nichols) : `nichols(tf(num,den));`



Dans le cas d'une rétroaction à retour unitaire, si nous représentons le diagramme de Nichols de l'inverse de la boucle ouverte, il en résulte que les cercles M et les cercles N représentent cette fois-ci les modules et les phases constants de la sensibilité. En effet :

$$M = \left| \frac{L(j\omega)}{1 + L(j\omega)} \right|$$

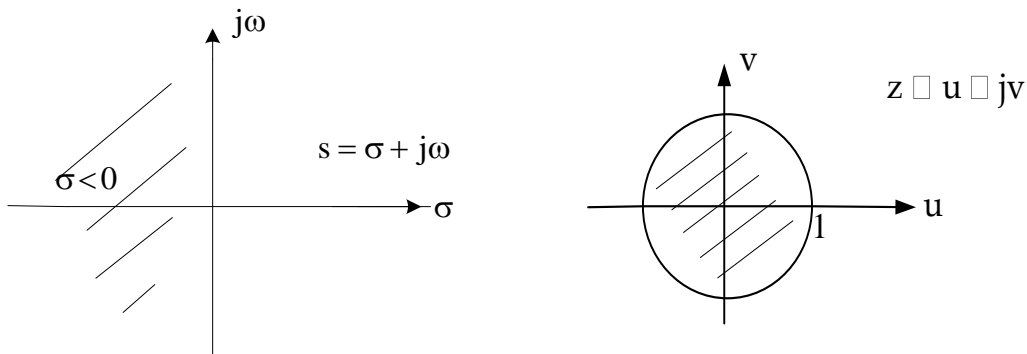
En remplaçant $L(j\omega)$ par $\frac{1}{L(j\omega)}$ l'expression précédente devient :

$$\left| \frac{\frac{1}{L(j\omega)}}{1 + \frac{1}{L(j\omega)}} \right| = \left| \frac{1}{1 + L(j\omega)} \right| = |S(j\omega)|$$

La même conclusion s'applique pour la phase de la sensibilité obtenue par la phase de $\frac{\frac{1}{L(j\omega)}}{1 + \frac{1}{L(j\omega)}}$

2-1-4 Équivalences des transformées en s et en z

Le demi-plan complexe de gauche dans le plan S caractérisé par $s = \sigma + j\omega$, se traduit par la région à l'intérieur du cercle unitaire centré sur l'origine dans le plan Z : pour $\sigma < 0$:



Représentation du demi-plan complexe de gauche dans le plan S

La discrétisation d'une équation différentielle nous force à « négliger » la valeur réelle qui sépare les échantillons successifs. Considérons l'équation différentielle suivante : $y'(t) + ay(t) = r(t)$. La transformation de Laplace donne (en supposant une condition initiale $y(0) = 0$) est donnée par :

$$sY(s) + aY(s) = R(s)$$

D'où :

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s + a}$$

Différentiation arrière : Si la dérivée est estimée par $\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} = \frac{y(k) - y(k-1)}{T}$, où T représente le temps d'échantillonnage, l'équation de différence devient :

$$\frac{y(k) - y(k-1)}{T} + ay(k) = r(k)$$

Où :

$$\frac{Y(z) - z^{-1}Y(z)}{T} + aY(z) = R(z)$$

D'où :

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{\frac{1 - z^{-1}}{T} + a}$$

Il ressort que cette approximation de la dérivée recourt à la transformation :

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{1}{T} \frac{z - 1}{z} \text{ ou } z = \frac{1}{1 - sT}$$

Notons que $1 - sT$ est l'approximation de la fonction e^{-sT} dans laquelle les puissances de (sT) ont été négligées car la période d'échantillonnage est supposée être très petite. La formule de Taylor appliquée à la fonction e^{-sT} est la série $1 - sT + \frac{(sT)^2}{2!} - \frac{(sT)^3}{3!} + \dots$

Différenciation avant : Si la différenciation discrète est exprimée par :

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=kT} = \frac{y(k+1) - y(k)}{T}$$

L'équation de différence devient :

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T} + ay(k) = r(k)$$

Il ressort que :

$$\frac{y(k+1) - y(k)}{T} + ay(k) = r(k)$$

$$\frac{zY(z) - Y(z)}{T} + aY(z) = R(z)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{\frac{z - 1}{T} + a}$$

Ce qui revient :

$$s = \frac{z - 1}{T} \text{ ou } z = 1 + sT$$

Intégration avant : Représentons une intégrale d'une fonction à partir de ses échantillons de la façon suivante :

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt = Ty(k-1)$$

L'équation $\dot{y}(t) = -ay(t) + r(t)$ peut généralement être réécrite comme suit :

$$y(t) = y(0) - a \int_0^t y(\lambda)d\lambda + \int_0^t r(\lambda)d\lambda$$

Dans ce cas particulier, nous aurons alors :

$$y(k) = y(k-1) - ay(k-1)T + r(k-1)T$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - aTz^{-1}Y(z) + Tz^{-1}R(z)$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{1}{\frac{z-1}{T} + a}$$

Ceci correspond à :

$$s = \frac{z-1}{T} \text{ et } z = 1 + sT$$

Intégration arrière : Si nous posons :

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt = y(k)T$$

L'équation $\dot{y}(t) = -ay(t) + r(t)$ peut être réécrite comme suit :

$$y(k) = y(k-1) - aTy(k) + Tr(k)$$

$$Y(z) = z^{-1}Y(z) - aTY(z) + TR(z)$$

$$Y(z) = \frac{T}{1 - z^{-1} + aT} R(z)$$

$$Y(z) = \frac{1}{\frac{1 - z^{-1}}{T} + a}$$

Cela signifie que la variable s est représentée par :

$$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} \text{ ou } z = \frac{1}{1 - sT}$$

Transformation bilinéaire : Cette approximation a recours à l'approximation suivante :

$$\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt = \frac{y(k) + y(k-1)}{2} T$$

Ainsi l'équation $y'(t) = ay(t) + r(t)$ s'écrit $y(t) = y(0) + a \int_0^t y(\lambda) d\lambda + \int_0^t r(\lambda) d\lambda$ et dans ce cas nous aurons:

$$y(k) = y(k-1) - \frac{aT}{2} [y(k) + y(k-1)] + \frac{T}{2} [r(k) + r(k-1)]$$

$$Y(z) = z^{-1} Y(z) - \frac{aT}{2} [Y(z) + z^{-1} Y(z)] + \frac{T}{2} [R(z) + z^{-1} R(z)]$$

$$\frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{\frac{T}{2}(1+z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1+z^{-1})} = \frac{1}{\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) + a}$$

D'où :

$$s = \frac{2z-1}{Tz+1} \quad \text{ou} \quad z = \frac{s + \frac{T}{2}}{s - \frac{T}{2}}$$

Représentation du demi-plan complexe de gauche dans le plan Z selon les différentes approximations :

Pour $z = e^{sT}$ et $s = \sigma + j\omega$, $z = e^{\sigma T} e^{j\omega T}$

Pour $\text{Re}(s) = 0$ (l'axe imaginaire) $\Rightarrow z = u + jv = e^{j\omega T}$

z est l'équation du cercle unitaire centré à l'origine dans le plan Z.

Pour $\text{Re}(s) < 0 \Rightarrow \sigma < 0 \Rightarrow |z| = e^{\sigma T} < 1$

z est l'intérieur du cercle unitaire centré à l'origine dans le plan Z.

Pour la différentiation arrière ou l'intégration arrière :

$$s = \frac{1-z^{-1}}{T} = \frac{1}{T} \frac{z-1}{z}$$

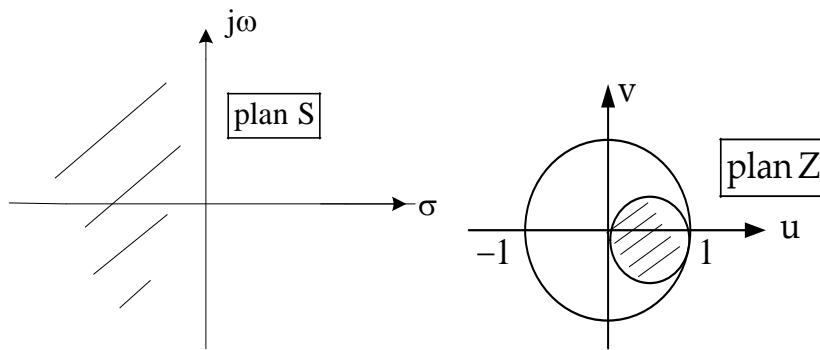
Posons $z = u + jv$

$$s = \frac{1}{T} \frac{u + jv - 1}{u + jv} = \frac{1}{T} \frac{[(u-1) + jv][u - jv]}{u^2 + v^2}$$

La condition $\text{Re}(s) < 0$ se traduit par $(u-1)u + v^2 < 0$

Ou $u^2 + v^2 - u < 0$

Cette équation est celle d'un cercle centré à $(0, \frac{1}{2})$ et le rayon $\frac{1}{2}$



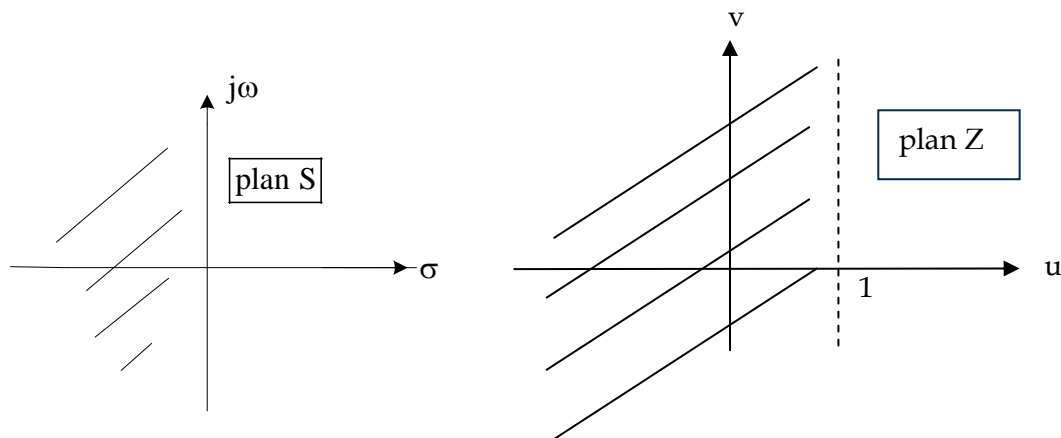
Ainsi, la stabilité dans le domaine continu implique la stabilité dans le domaine discret mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.

Pour la différenciation avant ou pour l'intégration avant :

$$s = \frac{z - 1}{T} = \frac{u + jv - 1}{T}$$

Le demi-plan complexe de gauche $\text{Re}(s) < 0$ se traduit par $u - 1 < 0$ i.e. $u < 1$

Noter qu'alors des régions extérieures au cercle unitaire sont incluses dans ce critère, ce qui peut porter à des erreurs d'interprétation. Ainsi, la stabilité dans le domaine discret implique la stabilité dans le domaine continu mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai.



Pour la transformation bilinéaire:

$$s = \frac{2z - 1}{Tz - 1} = \frac{2u + jv - 1}{Tu + jv + 1} = \frac{2[(u - 1) + jv][(u + 1) + jv]}{(u + 1)^2 + v^2}$$

$$\text{Re}(s) = \frac{2[u^2 - 1 + v^2]}{T(u + 1)^2 + v^2}$$

La condition $\text{Re}(s) < 0$ se traduit par $u^2 + v^2 < 1$ i.e. l'intérieur du cercle unitaire.

La stabilité dans le domaine discret implique la stabilité dans le domaine continu et vice-versa. Du point de vue de la stabilité, l'approximation de la transformation bilinéaire est la plus exacte.

Les résultats sont résumés au tableau suivant.

	Approximations de la transformation s à z	Représentation du demi-plan complexe de gauche $\text{Re}(s) < 0$
Définition	$z = e^{sT}$	Cercle centré à l'origine $ z < 1$
Différentiation arrière	$s = \frac{1 - z^{-1}}{T} = \frac{1}{T} \frac{z - 1}{z}$ ou $z = \frac{1}{1 - sT}$	Cercle centré à $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$
Différentiation avant	$s = \frac{z - 1}{T}$ ou $z = 1 + sT$	Demi-plan $\text{Re}(z) < 1$
Intégration avant	$s = \frac{z - 1}{T}$ et $z = 1 + sT$	Demi-plan $\text{Re}(z) < 1$
Intégration arrière	$s = \frac{1 - z^{-1}}{T}$ ou $z = \frac{1}{1 - sT}$	Cercle centré à $(0, \frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$
Transfo bilinéaire	$s = \frac{2}{T} \frac{z - 1}{z + 1}$ ou $z = \frac{s + \frac{T}{2}}{s - \frac{T}{2}}$	Cercle centré à l'origine $ z < 1$

Remarque :

La transformation bilinéaire n'est qu'une approximation et introduit une certaine erreur (même si les propriétés de stabilité sont conservées). Ainsi une fonction de transfert $G(s)$ sera représentée par une fonction de transfert $\hat{G}(z)$ obtenue grâce à la transformation $s = \frac{2}{T} \frac{z-1}{z+1}$ soit :

$$\hat{G}(z) = G(s) \Big|_{s=\frac{2z-1}{Tz+1}}$$

Pour avoir une idée de la distorsion en cours, construisons la fonction de transfert $\hat{G}(s)$ obtenue à partir de $\hat{G}(z)$ en posant $s = e^{j\omega T}$, soit :

$$\hat{G}(s) = \hat{G}(z) \Big|_{s=\frac{2e^{sT}-1}{Te^{sT}+1}}$$

Correspondant à la réponse en fréquence :

$$\hat{G}(j\omega) = \hat{G}(z) \Big|_{s=\frac{2e^{j\omega T}-1}{Te^{j\omega T}+1}}$$

Comparons $G(j\omega)$ à $\hat{G}(j\omega)$. Pour cela, réécrivons la transformation bilinéaire come suit :

$$s = \frac{2e^{j\omega T} - 1}{T e^{j\omega T} + 1} = \frac{2e^{\frac{j\omega T}{2}} - e^{-\frac{j\omega T}{2}}}{T \frac{e^{\frac{j\omega T}{2}}}{e^{\frac{j\omega T}{2}}} + e^{-\frac{j\omega T}{2}}} = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right) = j\Omega$$

Les deux fonctions $G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega}$ et $\hat{G}(j\Omega) = \hat{G}(s)|_{s=j\Omega}$ diffèrent par leur pulsation ω et Ω avec $\Omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$.

Pour des valeurs $\frac{\omega T}{2}$ très petites, $G(j\omega)$ et $\hat{G}(j\Omega)$ sont pratiquement identiques et les diagrammes de Bode et de Nyquist correspondants se confondront. Lorsque $\frac{\omega T}{2}$ se rapproche de $\frac{\pi}{2}$, $\Omega \rightarrow \infty$ la distorsion devient importante.

2-1-5 Transformation w

Pour pouvoir recourir aux critères de Bode, Nyquist etc. dans le cas d'une transformation en z , il faut effectuer la transformation suivante : $w = \frac{2}{T} \left(\frac{z-1}{z+1} \right)$

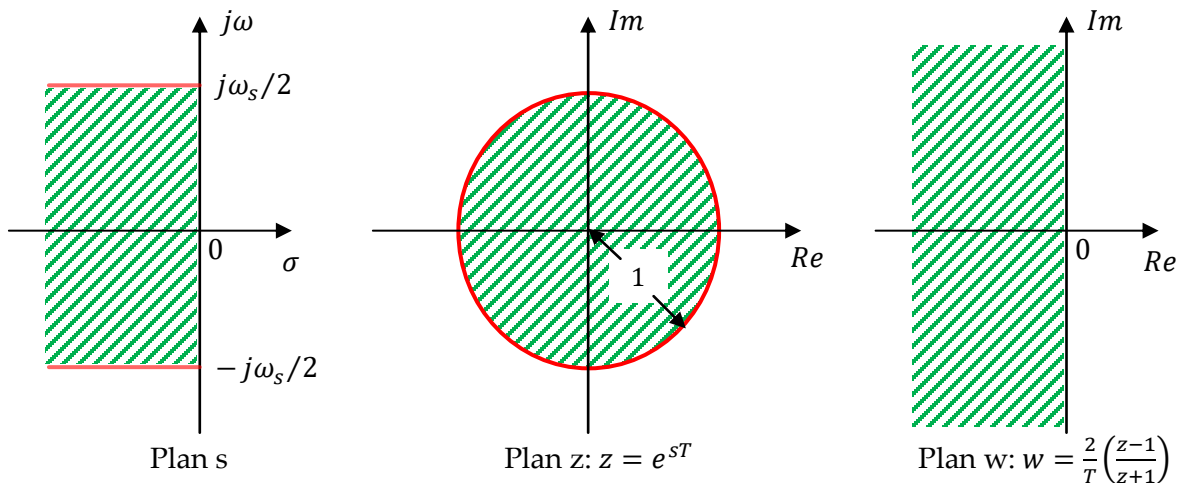
Cette transformation est équivalente à la transformation : $w = j \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

Appliquer le critère de Bode, Nyquist etc. à la fonction de transfert $G(jw)$ puis convertir le résultat en z grâce à la transformation : $z = \frac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}$

En effet, pour le diagramme de Nyquist, le contour est :

$$\begin{aligned} z = e^{j\omega T} &\rightarrow G(z): & 0 \leq \omega T < \pi \\ s = j\omega &\rightarrow G^*(s): & j0 \leq j\omega < j\frac{\omega_s}{2} \\ \omega = j\omega_w &\rightarrow G(w): & j0 \leq j\omega_w < j\infty \end{aligned}$$

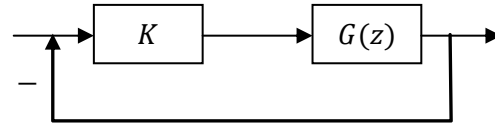
Illustrons ces contours dans les plans s , z et w .



Pour un signal continu $g(t)$, le demi plan complexe de gauche est étudié pour y représenter les réponses en fréquences stables. Toutefois, dans le cas d'un signal échantillonné $g^*(t) = g(t)\delta_T(t)$ où $\delta_T(t)$ est une suite d'impulsions de Dirac espacées de T , la transformation de Fourier s'écrit : $G^*(s) = \sum_{n=0}^{\infty} g(nt)e^{-nTs}$ où $G^*(\omega) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} G(\omega + n\omega_s)$, $G^*(\omega)$ est périodique. Il suffit donc d'étudier le comportement de $G^*(\omega)$ entre $-\frac{\omega_s}{2}$ et $+\frac{\omega_s}{2}$ pour connaître le comportement de $G^*(\omega)$ pour toutes les valeurs de ω . Aussi, il suffira d'étudier la partie du plan délimitée par $-j\frac{\omega_s}{2}$ et $j\frac{\omega_s}{2}$ dans le demi plan complexe de gauche.

Exemple : Pour un intégrateur

$$G(s) = \frac{1}{s} \rightarrow G(z) = \frac{T}{z-1}$$



Après application de la transformation w , le gain de boucle devient :

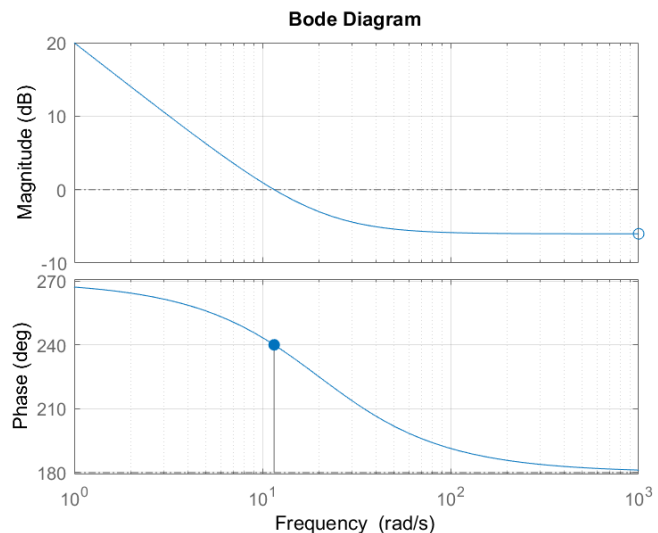
$$KG(w) = K \frac{1 - \frac{wT}{2}}{w}$$

Traçons les diagrammes de Bode de $KG(j\omega_w)$:

```
T=0.1;
K=10;
KG=tf([K*(-T/2) K*1],[1 0])
% KG =
%
% -0.5 s + 10
% -----
%          s
bode(KG)
```

Le design classique de marge de gain et marge de phase se fait sur ce diagramme de Bode. Le circuit de phase obtenu est converti en z au moyen de la

$$\text{transformation : } z = \frac{1 + \frac{T}{2}\omega_w}{1 - \frac{T}{2}\omega_w}$$



2-1-6 Circuits de phase

Les circuits d'avance et de retard de phase sont généralement utilisés pour améliorer les marges de gain ou de phase des boucles de rétroaction. Un circuit d'avance de phase ajoute un déphasage positif φ_m à la fréquence ω_m , modifiant ainsi le diagramme de Bode de phase du gain de boucle. Un circuit de retard de phase ajoute un déphasage négatif φ_m à la fréquence ω_m , modifiant ainsi le diagramme de Bode de phase du gain de boucle.

Définition : Un circuit de phase élémentaire est défini par la fonction de transfert:

$$C_\phi(s) = \gamma \frac{1 + \frac{s}{z}}{1 + \frac{s}{p}}$$

Et la réponse en fréquence : $C_\phi(j\omega) = \gamma \frac{1 + j\frac{\omega}{z}}{1 + j\frac{\omega}{p}}$

D'où le gain : $|C_\phi(j\omega)| = \gamma \frac{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{z})^2}}{\sqrt{1 + (\frac{\omega}{p})^2}}$

Et l'argument : $\arg C_\phi(j\omega) = \arctan\left(\frac{\omega}{z}\right) - \arctan\left(\frac{\omega}{p}\right)$

Les valeurs de p et de z définissent les coudes du profil du circuit de phase et sont déterminés par la fréquence centrale ω_m et le déphasage désiré φ_m .

Notons les relations :

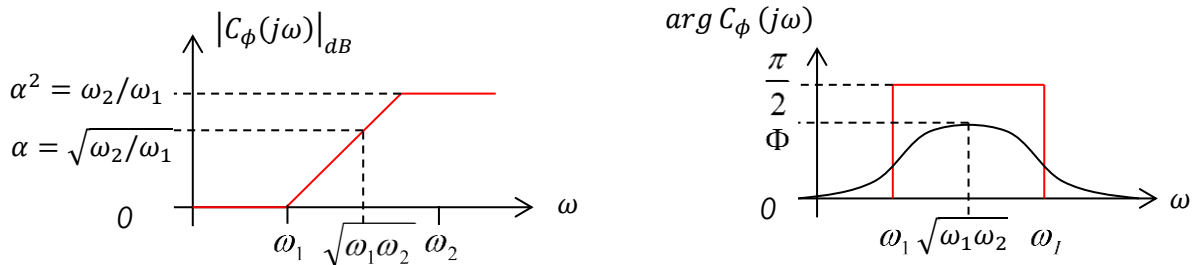
$$\varphi_m = \arctan\left(\frac{\omega_m}{z}\right) - \arctan\left(\frac{\omega_m}{p}\right) \quad z = \omega_m \frac{1 - \sin(\varphi_m)}{\cos(\varphi_m)}, \quad p = \omega_m \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{\cos(\varphi_m)}$$

$$\frac{p}{z} = \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)}, \quad \omega_m = \sqrt{pz}$$

Dans un circuit d'avance de phase, $z \leq p$. Notons que ce filtre ajoute un gain en haute fréquence et qu'il est possible de modifier le gain du circuit de phase en faisant varier la constante γ . Dans un circuit de retard de phase, $p \leq z$. Notons que ce filtre ajoute un gain en basse fréquence et qu'il est possible de modifier le gain en faisant varier la constante γ . Le profil des diagrammes de Bode d'un circuit d'avance de phase ($z \leq p$) se présente ainsi (nous avons supposé que $\gamma = 1$).

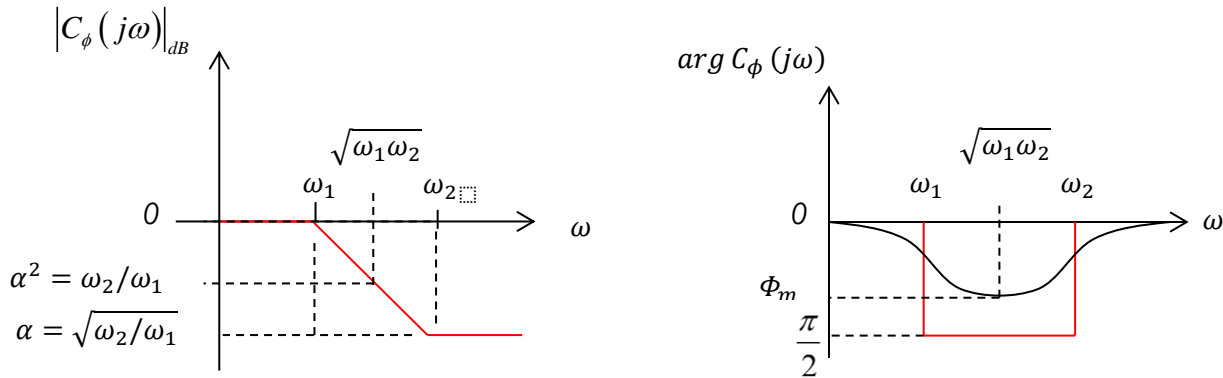
Formulation alternative

Dans ce qui suit, le circuit de phase sera défini par ω_1 et ω_2 . Ces fréquences peuvent représenter un zéro et un pôle dans le cas d'un circuit d'avance de phase et un pôle et un zéro dans le cas d'un circuit à retard de phase. Nous dénotons par α^2 le rapport ω_2/ω_1 .



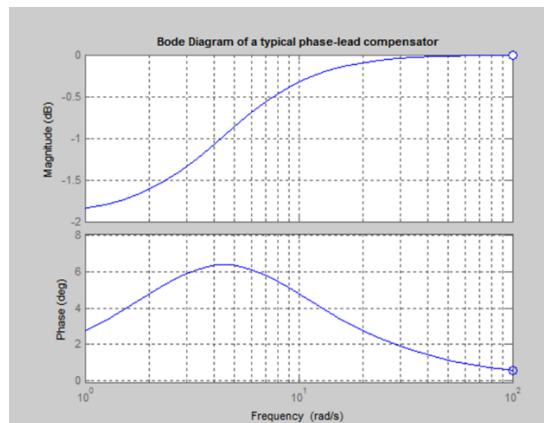
Allure générale d'un circuit d'avance de phase

Relation importante : L'avance de phase maximale Φ_m est réalisée à la fréquence centrale $\omega_m = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$. Ainsi, pour augmenter la marge de phase, on choisira ω_1 et ω_2 tels que $\omega_m = \sqrt{\omega_1 \omega_2}$. Par conséquent, $\Phi_m = \arg(C_D(j\omega_m))$. On peut relier les fréquences au gain α du filtre à la fréquence ω_m , en écrivant $\omega_1 = \frac{\omega_m}{\alpha}$ et $\omega_2 = \alpha \cdot \omega_m$. Si l'on désire une valeur donnée d'avance de phase Φ_m au voisinage ω_m , on détermine α par $\alpha = \tan\left(\frac{\Phi_m + \frac{\pi}{2}}{2}\right)$. Il est également possible d'utiliser la relation $\alpha^2 = \frac{1 + \sin \Phi_m}{1 - \sin \Phi_m}$ pour calculer α . Le profil des diagrammes de Bode d'un circuit de retard de phase ($p \leq z$) se présente ainsi (nous avons supposé que $\gamma = 1$). Notons qu'en haute fréquence, le gain $\gamma \frac{\omega_p}{\omega_z}$ est inférieur au gain de basse fréquence γ .



Allure générale d'un circuit de retard de phase

Remarque : Le circuit d'avance de phase est utilisé pour augmenter la marge de phase à une fréquence centrale particulière mais il augmente le gain en haute fréquence par rapport à celui des basses fréquences. Le circuit de retard de phase est utilisé pour diminuer la marge de phase à une fréquence centrale particulière mais il diminue également le gain en haute fréquence par rapport à celui de basse fréquence.



Diagrammes de Bode d'un circuit d'avance de phase

(pour $z=-4$, $p=-5$, $\varphi_m = 6.3^\circ$ et $\omega_m = \sqrt{20} = 4.47$)

Autre formulation alternative :

$$C_\phi(s) = \gamma \frac{1+s\tau}{1+s\tau'}, \quad \tau' = \alpha\tau$$

Pour un circuit d'avance de phase, $\alpha < 1$. Pour un circuit de retard de phase, $\alpha > 1$.

Les variables τ et τ' jouent le rôle de $\frac{1}{z}$ et $\frac{1}{p}$

D'où les relations :

$$\begin{aligned} \varphi_m &= \arctan(\omega_m \tau) - \arctan(\omega_m \tau') \\ \tau' &= \frac{1}{\omega_m} \cdot \frac{\cos(\varphi_m)}{1 - \sin(\varphi_m)}, \quad \tau' = \alpha\tau = \frac{1}{\omega_m} \cdot \frac{\cos(\varphi_m)}{1 + \sin(\varphi_m)} \\ \frac{\tau'}{\tau} &= \frac{1 - \sin(\varphi_m)}{1 + \sin(\varphi_m)} = \alpha, \quad \omega_m = \sqrt{\frac{1}{\tau\tau'}} \end{aligned}$$

Circuits d'avance et de retard complexes

Soit le circuit d'avance double (deux circuits d'avance en cascade), le maximum de phase $2\varphi_m$.

$$C_{double}(s) = C^2(s) = \frac{p}{z} \left(\frac{s+z}{s+p} \right)^2 = \frac{\omega_d}{\omega_n} \left(\frac{s^2 + 2\xi_n \omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\xi_d \omega_d s + \omega_d^2} \right)$$

Avec $\omega_m = z, \omega_d = p$ et $\xi_d = \xi_n = 1$ Les pôles et zéros du circuit d'avance double sont réels.

Le circuit d'avance complexe (circuit d'avance double avec des pôles et des zéros complexes et un même amortissement) offre une variation de phase sur une plus grande bande passante. Sa fonction de transfert est:

$$C_{complexe}(s) = \frac{\omega_p}{\omega_z} \left(\frac{s^2 + 2\xi \omega_z s + \omega_z^2}{s^2 + 2\xi \omega_p s + \omega_p^2} \right)$$

Avec ω_p est la fréquence naturelle des pôles, et ω_z est la fréquence naturelle des zéros. Les amortissements ξ sont égaux pour avoir une phase symétrique au pic.

Ce qui implique :

$$\omega_p = \omega_m \left(\xi \tan(\varphi_m) + \sqrt{\xi^2 \tan^2(\varphi_m) + 1} \right)$$

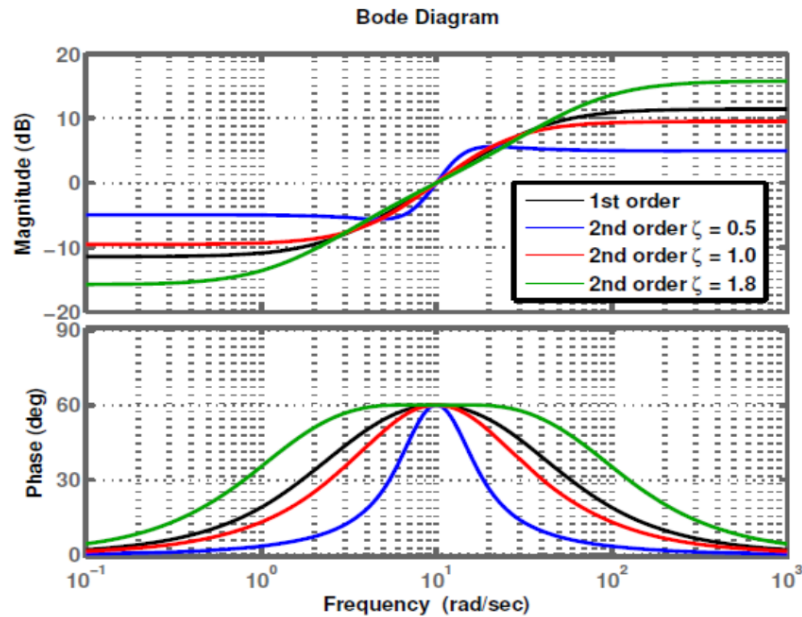
La même procédure est valide pour les zéros :

$$\omega_p = \omega_m \left(-\xi \tan(\varphi_m) + \sqrt{\xi^2 \tan^2(\varphi_m) + 1} \right)$$

Il s'ensuit que la fréquence maximale est : $\omega_m = \sqrt{\omega_p \omega_z}$

$$\begin{aligned} |C(j\omega)| &= \arctan\left(\frac{2\xi\omega_z\omega}{\omega_z^2 - \omega^2}\right) - \arctan\left(\frac{2\xi\omega_p\omega}{\omega_p^2 - \omega^2}\right) \\ \Rightarrow |C(j\omega)| &= \arctan\left(\frac{4\xi^2\omega_m \tan\varphi_m(\omega_m^2 + \omega^2)\omega}{(\omega_m^2 - \omega^2)^2 + 4\xi^2\omega_m^2(1 - \tan^2\varphi_m)\omega^2}\right) \end{aligned}$$

Pour $\omega = \omega_m$ $|C(j\omega_m)| = 2\varphi_m$



Diagrammes de Bode de circuits d'avance complexes (normalisé pour $\omega_m = 1$)

2-1-7 Correcteur à avance de phase

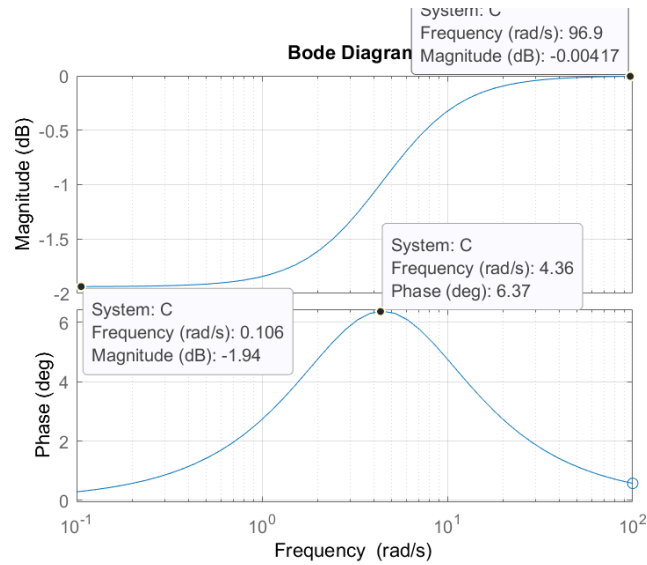
Fonction de transfert :

$$C_{AP}(s) = K \frac{(s+z_0)}{(s+p_0)}, \quad 0 < z_0 < p_0$$

Représentation alternative :

$$C_{AP}(s) = K \frac{1+\tau s}{1+\alpha\tau s}, \quad \text{avec : } z_0 = \frac{1}{\tau} \quad p_0 = \frac{1}{\alpha\tau} \quad \alpha = \frac{z_0}{p_0} < 1$$

Réponse fréquentielle d'un circuit à avance de phase ($z_0 = 4$; $p_0 = 5$, $K=1$) :



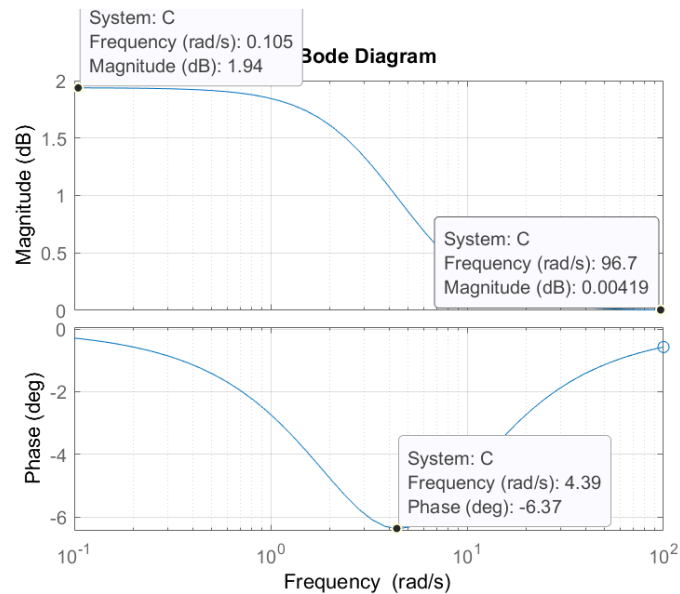
La fréquence centrale est $\omega_m = \sqrt{z_0 p_0} = \sqrt{20} = 4.4 \text{ rad/s}$. Le déphasage maximal est de $\varphi_m = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_m}{z_0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_m}{p_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4.4}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4.4}{4}\right) = 6.3^\circ$. Le gain en basse fréquence est $K \frac{z_0}{p_0} = 1 \times \frac{4}{5} = 0.8$ soit $20 \log(0.8) = -1.93 \text{ dB}$ et finalement le gain en hautes fréquence est $K=1$ soit 0 dB .

2-1-8 Correcteur à retard de phase

Fonction de transfert :

$$C_{RP}(s) = K \frac{(s+z_0)}{(s+p_0)}, \quad 0 < p_0 < z_0$$

Réponse fréquentielle d'un circuit à retard de phase ($z_0 = 5$; $p_0 = 4$, $K=1$) :



La fréquence centrale est $\omega_m = \sqrt{z_0 p_0} = \sqrt{20} = 4.4 \text{ rad/s}$. Le déphasage maximal est de $\varphi_m = \tan^{-1}\left(\frac{\omega_m}{z_0}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{\omega_m}{p_0}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{4.4}{5}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{4.4}{4}\right) = -6.3^\circ$. Le gain en basse fréquence est $K \frac{z_0}{p_0} = 1 \times \frac{5}{4} = 1.25$ soit $20 \log(1.25) = 1.93 \text{ dB}$ et finalement le gain en hautes fréquence est $K=1$ soit 0 dB.

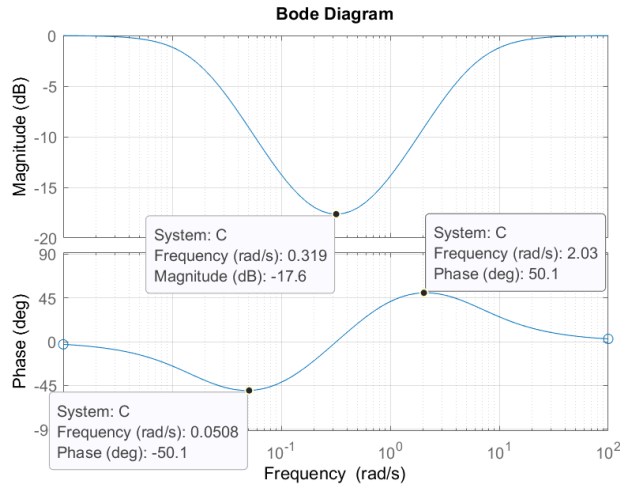
2-1-9 Correcteur à avance et retard de phase

Fonction de transfert :

$$C_{AP-RP}(s) = K \frac{\left(1 + \frac{s}{z_1}\right) \left(1 + \frac{s}{z_2}\right)}{\left(1 + \frac{s}{p_1}\right) \left(1 + \frac{s}{p_2}\right)}$$

$$z_1 = -0.18, p_1 = -0.018, z_2 = -0.57, p_2 = -5.7$$

Réponse fréquentielle d'un correcteur par avance et retard de phase :



La fréquence centrale du circuit de retard de phase est de $\omega_{m1} = \sqrt{0.18 \times 0.018} = 0.0569 \text{ rad/s}$ et celle du circuit d'avance de phase est $\omega_{m2} = \sqrt{0.57 \times 5.7} = 1.8025 \text{ rad/s}$. Dans cet exemple, le circuit de retard de phase opère à des fréquences plus basses que celles du circuit à avance de phase.

2-2 Problèmes

Dans les exemples qui suivent, la conception n'est pas optimale. Les exemples illustrent l'effet de différents compensateurs sur les performances fréquentielles et temporelles des systèmes de rétroaction. Ils permettront à l'étudiant de se familiariser avec les outils de simulation. Les designs plus performants seront considérés dans les chapitres subséquents.

2-2-1 Problème #1 : Système du 1^{er} ordre

Circuit RC : $R = 1K\Omega$, $C = 2mF$, l'entrée est une fonction échelon $u(t)$, Condition initiale $v_o(t = 2) = 2V$.

Modélisation par équation différentielle:

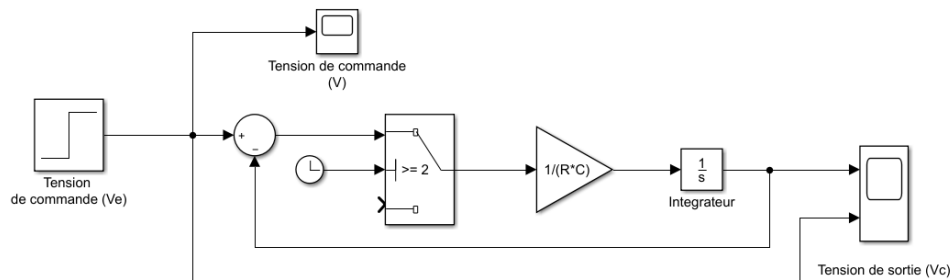
Loi des mailles:

$$\sum_j v_j(t) = 0 \quad \rightarrow \quad v_i(t) - Ri(t) - v_o(t) = 0$$

$$i(t) = C \frac{dv_o(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad v_i(t) - RC \frac{dv_o(t)}{dt} - v_o(t) = 0$$

$$\text{D'où: } \frac{dv_o(t)}{dt} = \frac{1}{RC} (v_i(t) - v_o(t)) = \frac{1}{RC} (u(t) - v_o(t))$$

Conception par Simulink



Modélisation par fonction de transfert $P(s)$ (Condition initiale nulle, $v_o(t = 2s) = 0$):

$$\mathcal{L}\left(\frac{dv_o(t)}{dt}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{RC} (v_i(t) - v_o(t))\right)$$

$$sV_o(s) - v_o(0) = \frac{1}{RC} (V_i(s) - V_o(s))$$

$$sV_o(s) = \frac{1}{RC} (V_i(s) - V_o(s))$$

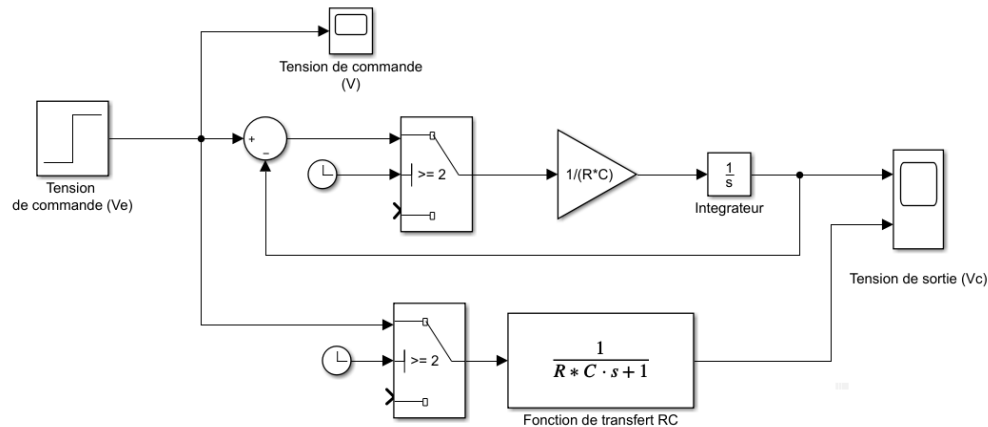
$$P(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{RCs + 1}$$

$$\text{Forme canonique: } P(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K_s}{\tau s + 1}, \quad \tau = RC$$

$$\text{Forme normalisée: } P(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{K_s}{1 + \frac{s}{s_c}}, \quad s_c = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}$$

$K_s = 1$ est le gain statique du système; $\tau = RC$ est la constante de temps; s_c est la fréquence de coupure (complexe)

Conception par Simulink



Modélisation pour les signaux discrets :

Transformée en z du circuit avec une période d'échantillonnage $T=0.5s$:

$$P(s) = \frac{V_c(s)}{V_e(s)} = \frac{K_s}{\tau s + 1}$$

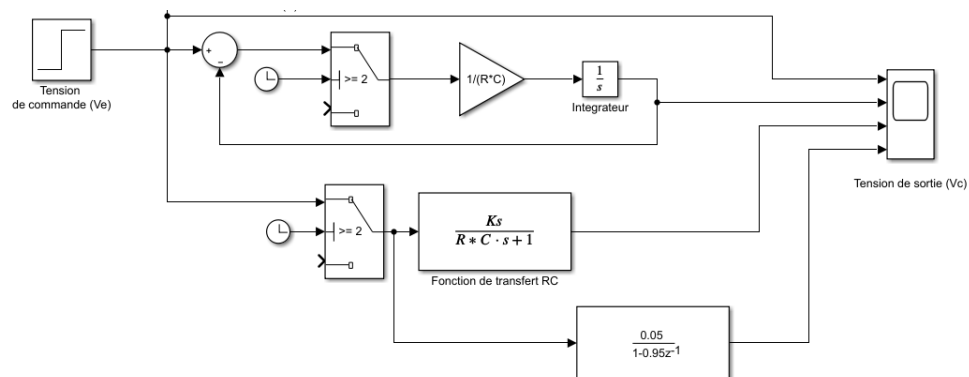
Conversion vers la transformée en z :

$$\frac{1}{s + a} \rightarrow \frac{1}{(1 - e^{-aT})z^{-1}}$$

D'où :

$$\frac{K_s}{\tau s + 1} = \frac{\frac{K_s}{\tau}}{s + \frac{1}{\tau}} = \frac{0.5}{s + 0.5} \rightarrow \frac{T \frac{K_s}{\tau}}{\left(1 - e^{-\frac{1}{\tau}T}\right)z^{-1}} = \frac{0.25}{(1 - 0.75)z^{-1}}$$

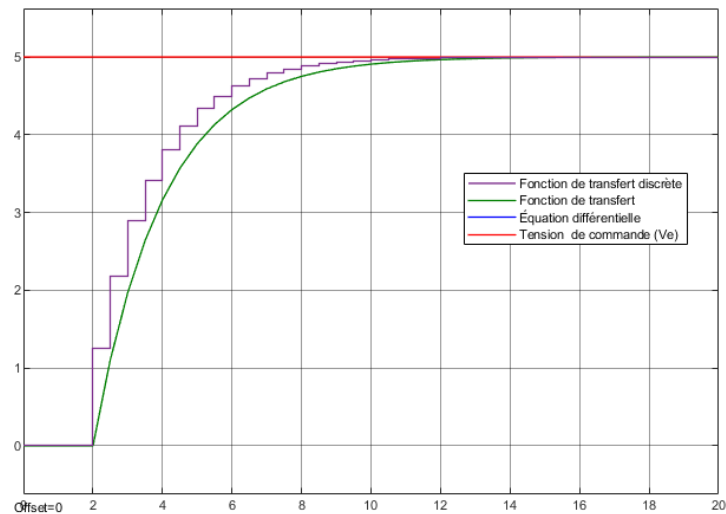
Conception par Simulink



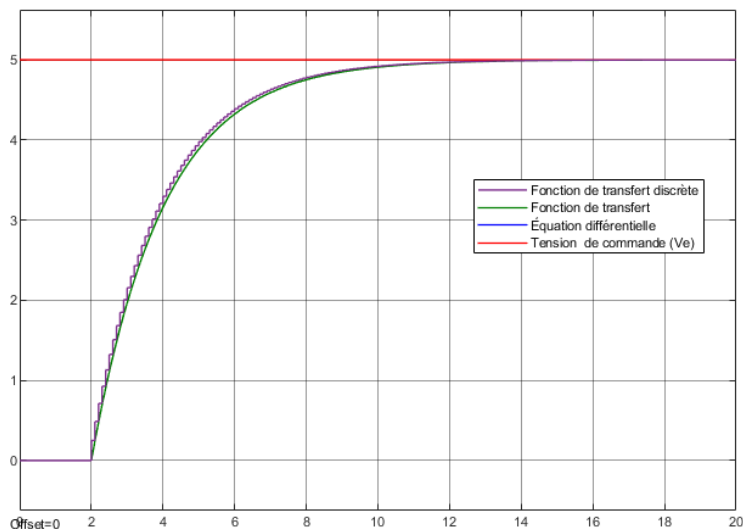
Stabilité : Le système possède un seule pôle réel négatif ($s_c = -\frac{1}{\tau}$). Le pôle est localisé dans le demi-plan gauche. Sa fonction de transfert est stable.

Réponse temporelle à une entrée échelon de 5V:**MATLAB :**

```
% Parametres du circuit RC
R=1e3; % Resistance du circuit (Ohm)
C=2e-3; % Condensateur du circuit (F)
Ks=1; % Gain statique du circuit RC
% Calcul de la fonction de transfert du circuit RC
G_RC=tf([1],[R*C 1]);
% Calcul de Laplace inverse
syms s t z
Vc=ilaplace((5/s)*(1/(1e3*2e-3*s+1)))
% reponse temporelle systeme continu
t = 0:0.1:20;
plot(t, 5 - 5*exp(-t/2))
```



En diminuant la période d'échantillonnage T , $y(nT)$ se rapproche de $y(t)$. Voici un exemple avec $T=0.1$.



Gain statique du système K_s :

Selon la forme canonique, $K_s = 1$

Selon la courbe de la réponse temporelle,

$$K_s = \frac{y(\infty)}{x(t)} = \frac{v_o(\infty)}{v_i(t)} = \frac{5}{5} = 1$$

Noter que d'après le théorème de la valeur finale, $y(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sY(s)$, soit $K_s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{RCs+1} \frac{1}{s} = 1$

Les performances temporelles :**La constante de temps τ :**

Valeur théorique : $\tau = RC = 2 \text{ secondes}$

Valeur simulée : $y(\tau) = 0.63 \times y(\infty) = 0.63 \times 5 = 3.15 \rightarrow \tau = 2 \text{ secondes}$

Le temps de montée :

Valeur théorique : $t_r \approx 2.2 \times \tau = 2.2 \times RC = 4.4 \text{ secondes}$

Valeur simulée :

$$y(t_1) = 0.10 \times y(\infty) = 0.10 \times 5 = 0.5 \rightarrow t_1 \approx 0.2 \text{ secondes}$$

$$y(t_2) = 0.90 \times y(\infty) = 0.90 \times 5 = 4.5 \rightarrow t_2 \approx 4.6 \text{ secondes}$$

$$t_r = t_2 - t_1 = 4.6 - 0.2 = 4.4 \text{ secondes}$$

Le temps de stabilisation à 2%:

Valeur théorique : $t_s \approx 4 \times \tau = 4 \times RC = 8 \text{ secondes}$

Valeur simulée : $y(t_s) = 0.98 \times y(\infty) = 0.98 \times 5 = 4.9 \rightarrow t_s \approx 7.9 \text{ secondes}$

Le temps de stabilisation à 1%:

Valeur théorique : $t_s \approx 5 \times \tau = 5 \times RC = 10 \text{ secondes}$

Valeur simulée :

$$y(t_s) = 0.99 \times y(\infty) = 0.99 \times 5 = 4.95 \rightarrow t_s \approx 9.2 \text{ secondes}$$

Réponse fréquentielle:**Diagramme de Bode asymptotique :**

Les diagrammes asymptotiques permettent d'avoir une vision d'ensemble du diagramme de Bode qui peuvent être dessinés manuellement.

$$P(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s + \frac{1}{RC}} \rightarrow P(j\omega) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)} = \frac{\omega_c}{j\omega + \omega_c}$$

La fréquence de coupure : $\omega_c = \frac{1}{RC} = 0.5 \text{ rad/s}$

Diagramme d'amplitude : $|P(j\omega)| = \frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2 + \omega_c^2}}$

$$\omega \ll \omega_c \rightarrow 20\log|P(j\omega)| = 20\log\left(\frac{\omega_c}{\sqrt{\omega_c^2}}\right) = 20\log(1) = 0 \text{ dB}$$

$$\omega = \omega_c \rightarrow 20\log|P(j\omega)| = 20\log\left(\frac{\omega_c}{\sqrt{2\omega_c^2}}\right) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3 \text{ dB}$$

$$\omega \gg \omega_c \rightarrow 20\log|P(j\omega)| = 20\log\left(\frac{\omega_c}{\sqrt{\omega^2}}\right) = -20\text{dB/dec}$$

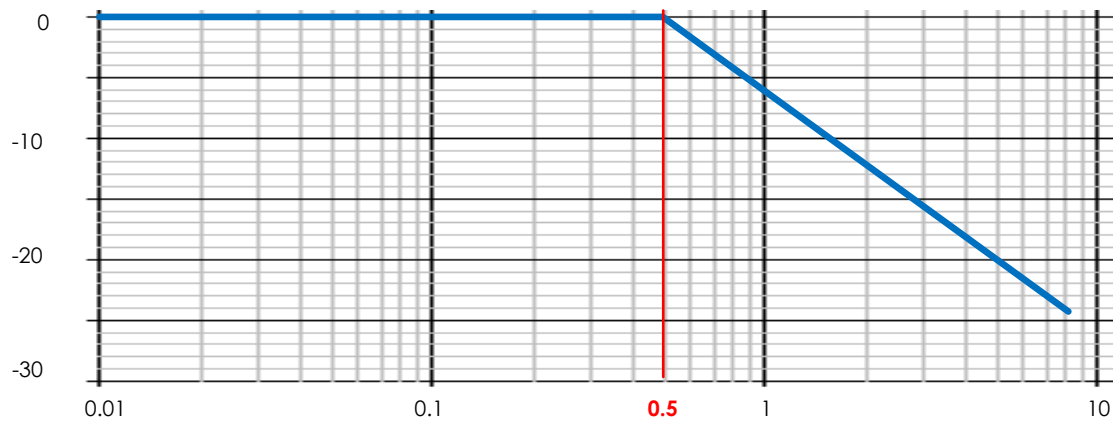


Diagramme de phase : $\varphi(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$$\omega \ll \frac{\omega_c}{10} \rightarrow \varphi(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\tan^{-1}(0) = 0^\circ$$

$$\omega = \omega_c \rightarrow \varphi(j\omega) = -45^\circ$$

$$\omega \gg 10\omega_c \rightarrow \varphi(j\omega) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) = -\tan^{-1}(\infty) = -90^\circ$$

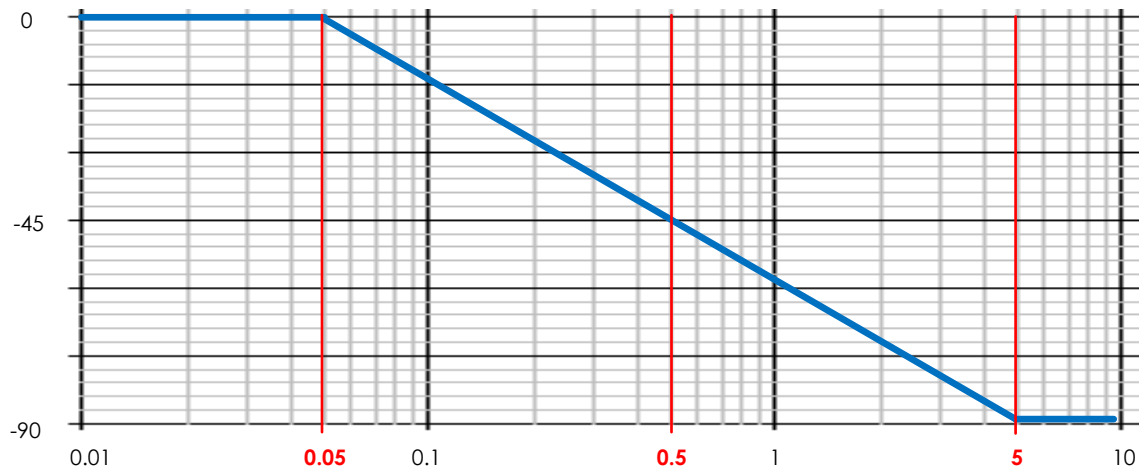
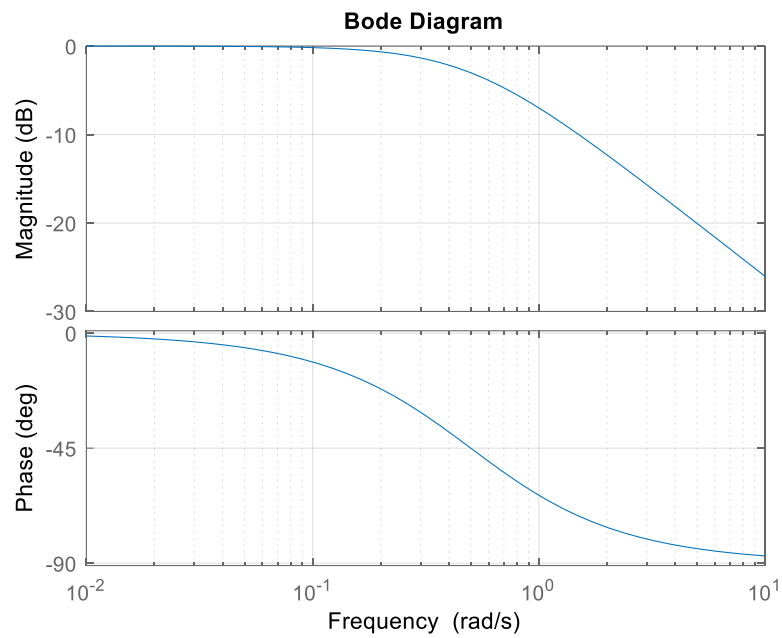
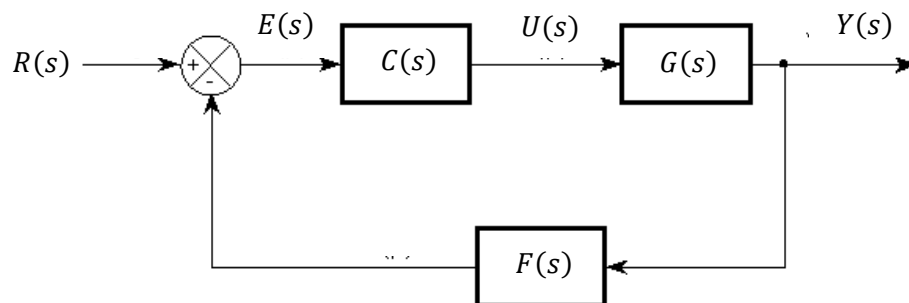
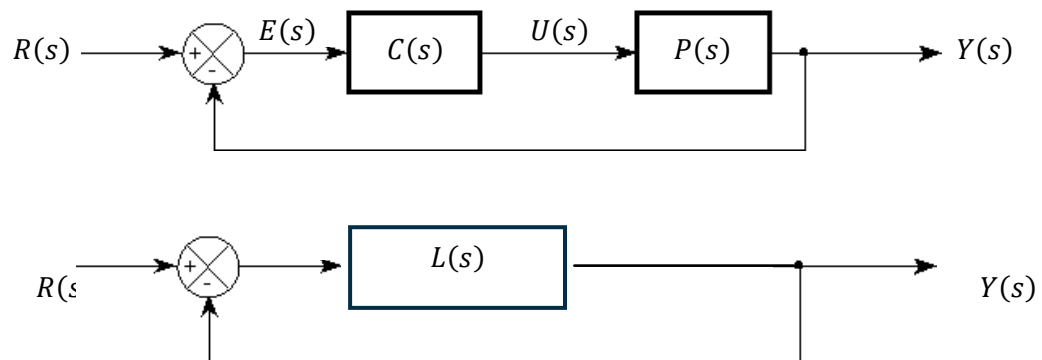
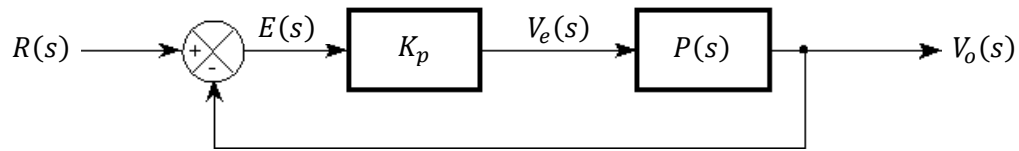


Diagramme de Bode MATLAB :**Boucle de rétroaction :****Boucle de rétroaction à retour unitaire :**

Un contrôleur proportionnel : $C(s) = K_p$ 

Typiquement, un radiateur a une fonction de transfert $P(s)$ de premier ordre. Dans ce qui suit, $V_o(s)$ va représenter la température mesurée et $R(s)$ la température de consigne. Le gain K_p peut se rapporter à la puissance du radiateur. Normalement, en augmentant le K_p , il devrait être possible de rejoindre la température de consigne plus rapidement et diminuer également l'erreur statique.

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$V_o(s) = E(s) \cdot K_p \cdot P(s)$$

$$E(s) = R(s) - V_o(s)$$

$$\text{D'où : } T(s) = \frac{V_o(s)}{R(s)} = \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)}$$

La fonction de sensibilité en boucle fermée :

$$S(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + K_p P(s)}$$

Étude de Stabilité en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = \frac{K_p P(s)}{1 + K_p P(s)} = \frac{K_p \frac{K_s}{\tau s + 1}}{1 + K_p \frac{K_s}{\tau s + 1}}$$

Forme canonique :

$$G_{BF}(s) = \frac{\frac{K_p K_s}{K_p K_s + 1}}{\frac{\tau}{K_p K_s + 1} s + 1} = \frac{K_{BF}}{\tau_{BF} s + 1}$$

Avec : Gain statique en boucle fermée $K_{BF} : K_{BF} = \frac{K_p K_s}{K_p K_s + 1}$

Notons que $K_{BF} \rightarrow 1$ lors que le gain K_p augmente. Il va s'ensuivre que l'erreur statique tendra alors vers zéro. L'erreur statique théorique pour $K_p = 75$: Système de type 0 (sans intégrateurs) avec entrée échelon :

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + K_p} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} K_p P(s)} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} K_p \frac{1}{1 + \frac{s}{s_c}}} = 0.013 = 1.3\%$$

L'erreur statique simulée (relative):

$$e_{ss} = 100 \frac{r(t) - y(\infty)}{r(t)} = 100 \frac{5 - 4.93}{5} = 1.4\%$$

Constante de temps en boucle fermée τ_{BF} : $\tau_{BF} = \frac{RC}{K_p + 1}$

Stabilité en boucle fermée : Le système en boucle fermée à un seule pôle réel négatif ($s = -\frac{1}{\tau_{BF}} = -\frac{G_p + 1}{RC}$). Le pôle est localisé dans le demi-plan gauche. Donc le système est stable en boucle fermée.

Réponse temporelle à une référence échelon de 5V et un gain proportionnel $K_p=75$:

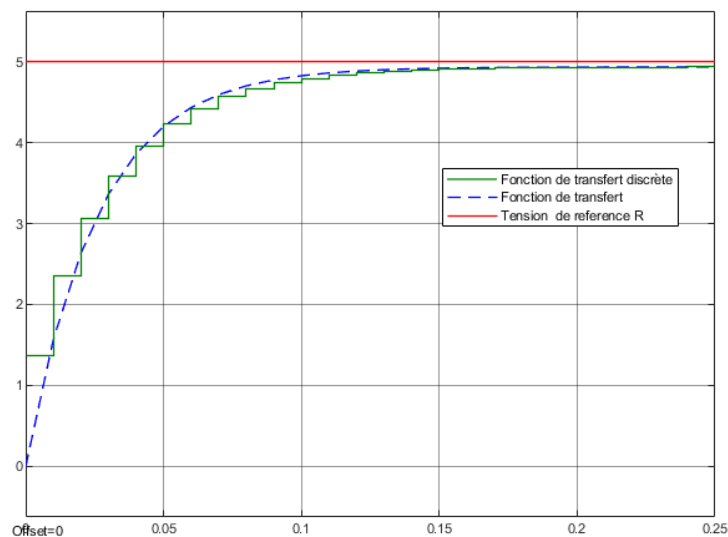


Tableau de comparaison BO-BF

	BO	BF
Gain statique	1	0.98
La constante de temps (sec)	2	0.02
Le temps de montée (sec)	4.4	0.044
Le temps de stabilisation (sec) à 2%	7.9	0.08
Le temps de réponse à 1% (sec)	9.2	0.13

Réponse fréquentielle:

Diagramme de Bode asymptotique :

$$G_{BF}(s) = \frac{\frac{K_p K_s}{K_p K_s + 1}}{\frac{\tau}{K_p K_s + 1} s + 1} = \frac{K_{BF}}{\tau_{BF} s + 1}$$

La fréquence de coupure est $\omega_c = \frac{(K_p K_s + 1)}{\tau} = 38 \text{ rad/s}$

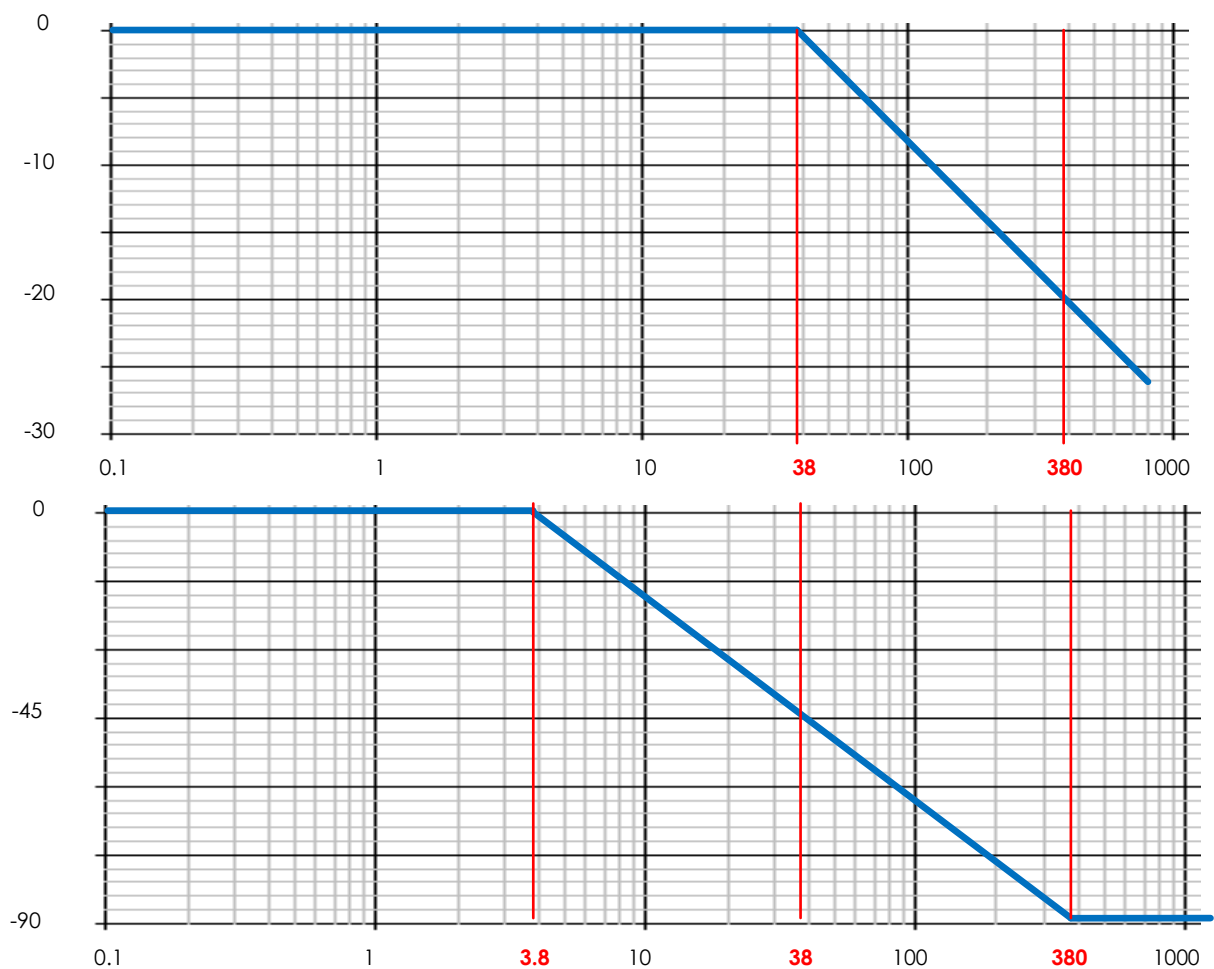
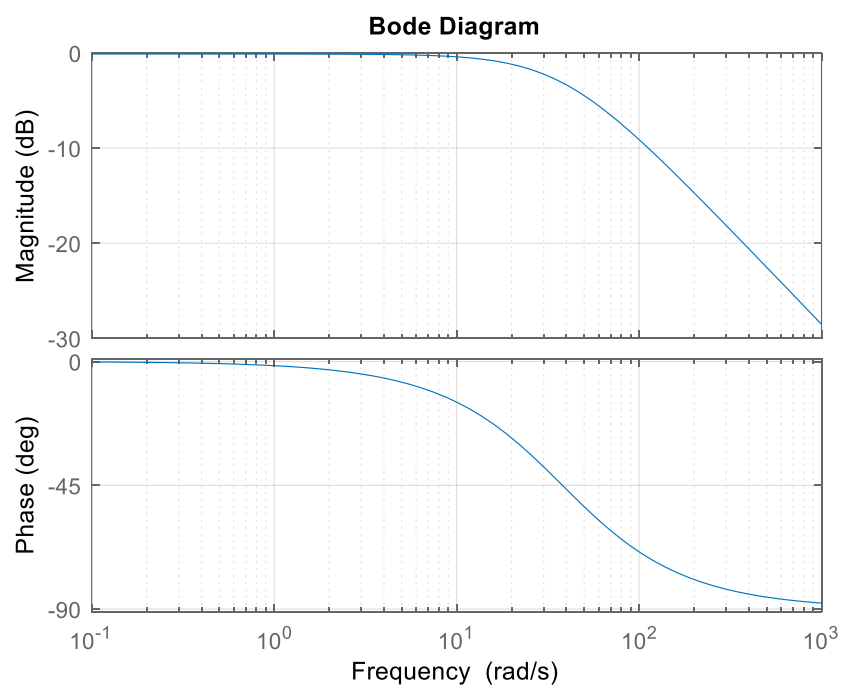


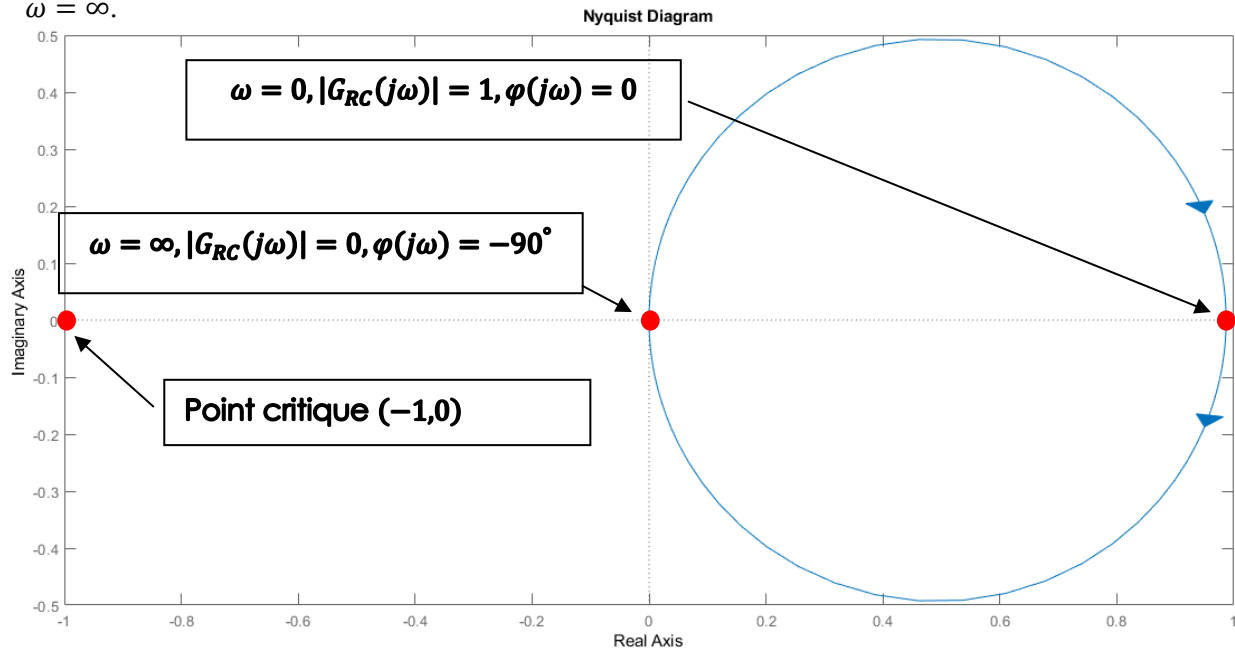
Diagramme de Bode Matlab:



Étude de stabilité en utilisant le Diagramme de Bode : $\forall \omega, \varphi(j\omega) \neq -180^\circ$ donc le système est stable.

Diagramme de Nyquist :

Le diagramme de Nyquist se déduit directement à partir du diagramme de Bode étant donné qu'il n'y a pas d'intégrateur. Ainsi et à titre d'exemple, $L(j\omega) = 1$ pour $\omega = 0$ et $L(j\omega) = 0$ pour $\omega = \infty$.



Étude de stabilité à partir du Diagramme de Nyquist :

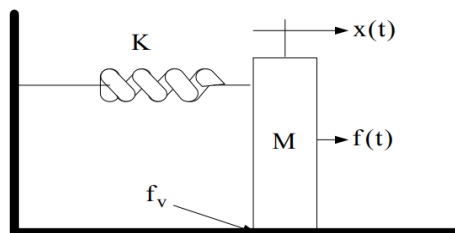
$P = 0$: Nombre de pôles dans le demi-plan droit.

$N = 0$: Nombre d'encerclements autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens anti-horaire

$P = N$, le système est donc stable.

2-2-2 Problème #2 : Système du 2nd ordre

De nombreux systèmes électromécaniques ont des fonctions de transfert de second ordre ou encore sont essentiellement déterminés par l'effet dominant d'une fonction de transfert du second ordre. Analysons le système mécanique de translation suivant :



Paramètres physiques du système:

$M=1$ Kg : Masse du corps;

$k=5$ N/m : Constante du ressort

$f_v=1$ N.s/m : Constante de frottement

$f(t)=u(t)$ N : Force externe

Modélisation du système :**Modélisation par équation différentielle:**

Loi de Newton:

$$\sum_i f_i(t) = M\ddot{x}(t)$$

$$f(t) - f_v\dot{x}(t) - kx(t) = M\ddot{x}(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \frac{f_v}{M}\dot{x}(t) + \frac{k}{M}x(t) = \frac{1}{M}f(t)$$

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}(t) + 5x(t) = f(t)$$

Modélisation par fonction de transfert $G(s)$ (Condition initiale nulle, $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 0$):

$$\mathcal{L}\left(\ddot{x}(t) + \frac{f_v}{M}\dot{x}(t) + \frac{k}{M}x(t)\right) = \mathcal{L}\left(\frac{1}{M}f(t)\right)$$

$$s^2X(s) + \frac{f_v}{M}sX(s) + \frac{k}{M}X(s) = \frac{1}{M}F(s)$$

$$P(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{\frac{1}{M}}{s^2 + \frac{f_v}{M}s + \frac{k}{M}}$$

$$P(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 5}$$

Forme canonique:

$$P(s) = \frac{K_s\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_ns + \omega_n^2}$$

$\omega_n = \sqrt{5}$ est la fréquence naturelle en rad/s

$K_s = 0.2$ est le gain statique du système

$\zeta = 0.2$ est le facteur d'amortissement (sans unité)

$0 < \zeta < 1$: Le système est de type sous amorti.

Modélisation par les signaux discrets :**Transformée en z du circuit avec une période d'échantillonnage T=0.1s:**

$$P(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 5}$$

On écrit $P(s)$ sous la forme de la somme d'un sinus amorti et d'un cosinus amorti (Se rapporter au chapitre #2).

$$\frac{1}{s^2 + s + 5} = k_1 \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} + k_2 \frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega^2} = 0.45 \frac{2.18}{(s + 0.5)^2 + 2.18^2}$$

Conversion s à z :

$$k_1 \frac{\omega}{(s + a)^2 + \omega^2} \rightarrow k_1 \frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}}$$

D'où :

$$P(z) = k_1 \frac{ze^{-aT} \sin \omega T}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos \omega T + e^{-2aT}} = \frac{0.09z}{z^2 - 1.86z + 0.9}$$

Analyse de la stabilité du système en boucle ouverte**Stabilité dans le plan s:**

$$P(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 5}$$

Le système possède deux pôles complexes $s_{1,2} = -0.5 \pm j2.18$. Les deux pôles sont localisés dans le DPG (demi-plan de gauche). Le système est donc stable.

Stabilité dans le plan z:

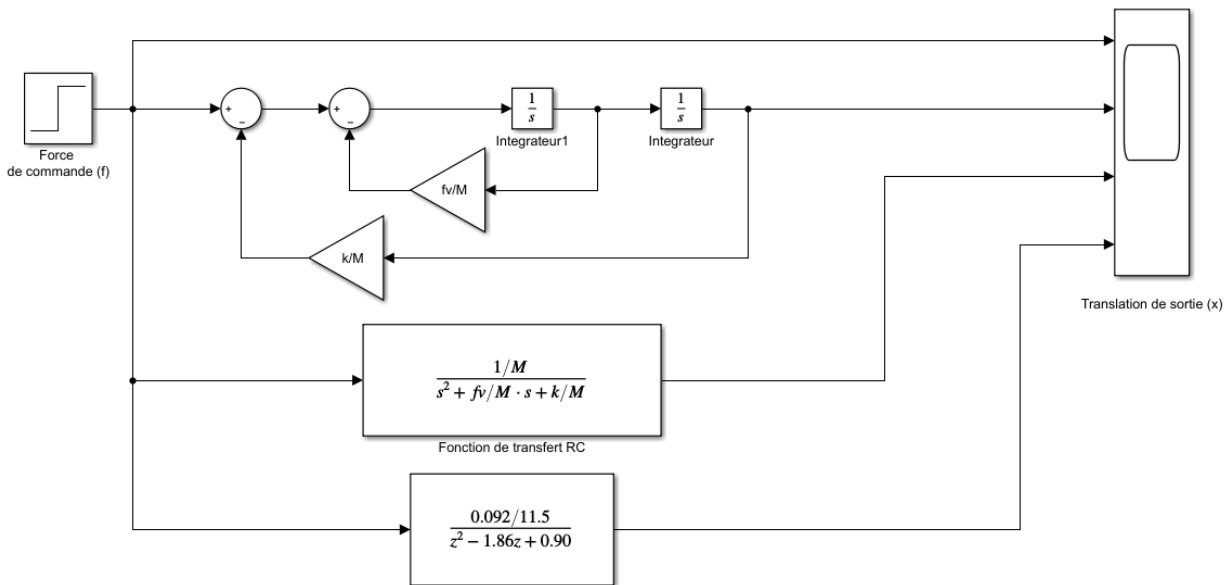
$$P(z) = \frac{0.09z}{z^2 - 1.86z + 0.9}$$

Le système possède deux pôles complexes $z_{1,2} = 0.93 \pm j0.19$. La norme des deux pôles $|z_{1,2}| = 0.95 < 1$, donc les deux pôles sont localisés à l'intérieur du cercle unitaire. Le système est donc stable.

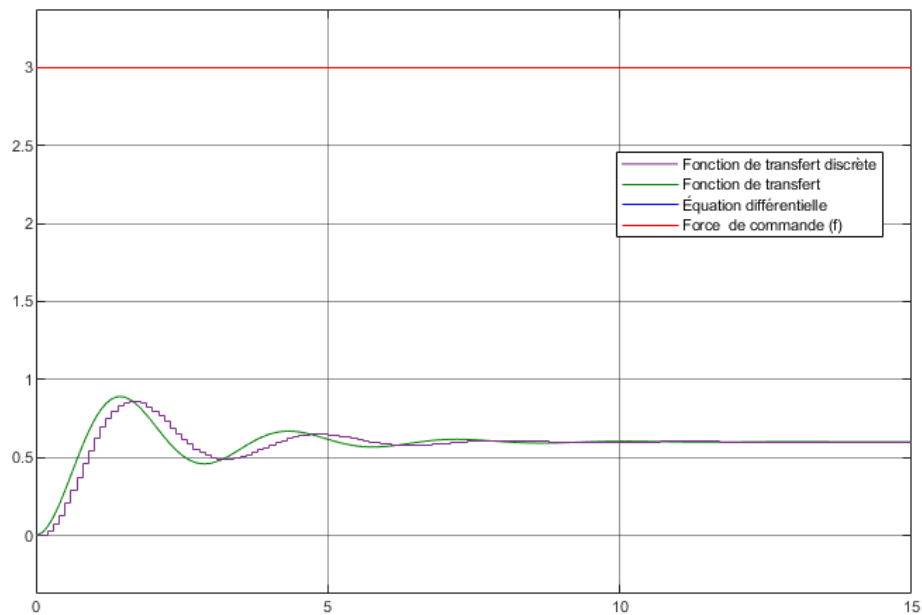
Simulation du système en boucle ouverte:**Simulation par MATLAB**

```
% Paramètres du système de translation
M=1;    % Masse du corps (Kg)
k=5;    % Constante du ressort (N/m)
fv=1;   % constante de frottement (N.m/s)
% Calcul de la fonction de transfert
G_T=tf([1/M],[1 fv/M k/M])
```

Simulation par Simulink



Réponse temporelle du système en boucle ouverte à une entrée échelon d'amplitude 3:



La figure ci-dessus montre les réponses temporelles pour différentes modélisations : Rouge : Consigne, Bleu : modélisation par équation différentielle confondu avec la modélisation par fonction de transfert $P(s)$ en vert, La modélisation fonction de transfert discrète $P(z)$ est illustrée en vert clair.

Les performances temporelles du système en boucle ouverte en ajoutant un gain K:

Gain statique du système K_s :

$$P(s) = \frac{X(s)}{F(s)} = \frac{K}{s^2 + s + 5} \rightarrow K_s = P(s)|_{s=0} = 0.2K$$

Le temps de montée :

Valeur théorique :

$$t_r \approx \frac{1.76\zeta^3 - 0.417\zeta^2 + 1.039\zeta + 1}{\omega_n} = 0.539 \text{ secondes}$$

Valeur simulée :

$$x(t_1) = 0.10 \times x(\infty) = 0.10 \times 1 = 0.01 \rightarrow t_1 \approx 0.207 \text{ secondes}$$

$$x(t_2) = 0.90 \times x(\infty) = 0.90 \times 1 = 0.90 \rightarrow t_2 \approx 0.764 \text{ secondes}$$

$$t_r \approx 0.764 - 0.207 = 0.557 \text{ secondes}$$

Le temps de stabilisation à 2%:

Valeur théorique :

$$t_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} = \frac{4}{0.2 \times \sqrt{5}} = 8.94 \text{ secondes}$$

Valeur simulée :

C'est la valeur après laquelle $x(t)$ demeure entre $0.98x(\infty)$ et $1.02x(\infty)$.

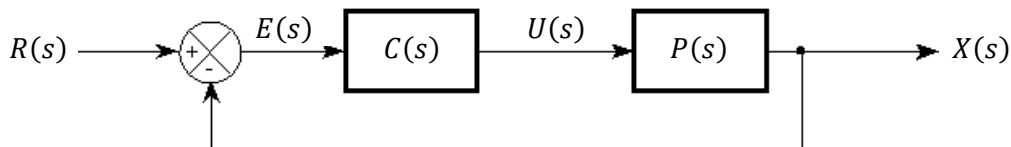
$$x(t_s) = 0.98 \times x(\infty) = 0.98 \times 1 = 0.98 \rightarrow t_s \approx 8.84 \text{ secondes}$$

La valeur finale $x(\infty)$ de $x(t)$ pour une entrée échelon d'amplitude 3:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{3}{s} P(s) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(\frac{3K}{(s^2 + s + 5)} \right) = \frac{3K}{5}$$

En choisissant $K = 5$, nous éliminons l'erreur statique. L'introduction de ce gain ne change pas le temps de montée ou le temps de stabilisation.

Analyse du système avec une rétroaction unitaire et compensateur sériel P :



Fonction de transfert du contrôleur proportionnel intégral :

$$C(s) = K_p$$

K_p est le gain proportionnel.

La fonction de transfert en boucle ouverte devient :

$$G_{BO}(s) = K_p \cdot P(s) = \frac{K_p}{s^2 + s + 5}$$

Le système en boucle ouverte est un système de type 0 (il ne comprend pas un intégrateur). Cette particularité sera prise en considération lors du calcul de l'erreur en régime permanent.

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{K_p \cdot P(s)}{1 + K_p \cdot P(s)} = \frac{K_p}{s^2 + s + 5 + K_p}$$

Précisons que la nouvelle fréquence naturelle est donnée par $\sqrt{5 + K_p}$ et que le nouveau coefficient d'amortissement passe à $\frac{1}{2\sqrt{5+K_p}}$.

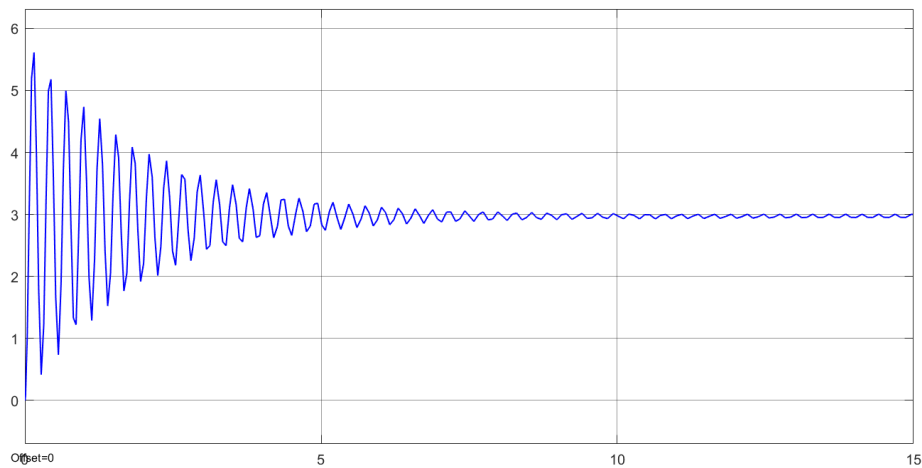
Calcul de l'erreur statique ess:

$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p}{s^2 + s + 5}} = \frac{1}{1 + \frac{K_p}{5}}$$

Choisissons $e_{ss} = 0.01$, il s'ensuit que :

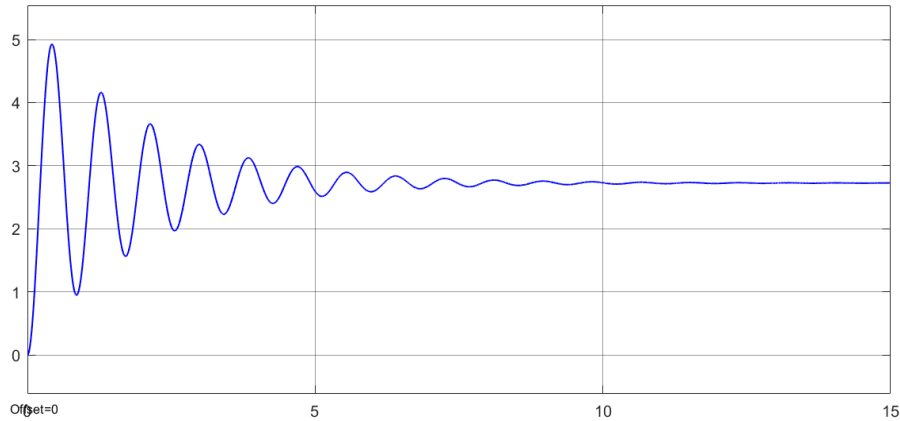
$$e_{ss} = \frac{1}{1 + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{K_p}{s^2 + s + 5}} = \frac{1}{1 + \frac{K_p}{5}} = 0.01 \quad \rightarrow \quad K_p = 495.$$

La réponse temporelle est obtenue par simulation.

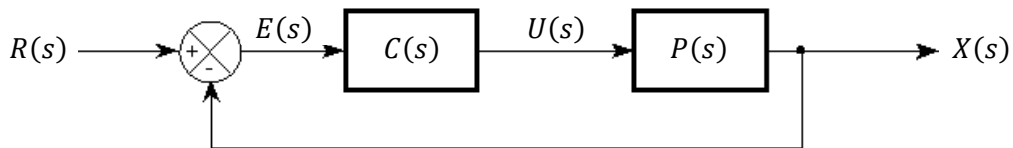


Retenons qu'en augmentant le gain K_p , les oscillations sont plus accentuées étant donné que la fréquence naturelle passe de $\sqrt{5}$ à $\sqrt{5 + K_p}$. De la même façon, le temps de stabilisation passe de $t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{0.2 \times \sqrt{5}} = 8.94 \text{ secondes}$ à $t_s \approx \frac{4}{\zeta \omega_n} = \frac{4}{\frac{1}{2\sqrt{5 \times 495}} \times \sqrt{5 \times 495}} = 8 \text{ secondes}$.

Remarque : Si nous nous étions contentés d'une erreur statique de 0.1 obtenue pour $K_p = 49.5$, la simulation donnerait :



Analyse du système avec une rétroaction unitaire et compensateur sériel PI :



Fonction de transfert du contrôleur proportionnel intégral :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

K_p est le gain proportionnel et K_i est le gain intégral

La fonction de transfert en boucle ouverte devient :

$$G_{BO}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot P(s) = \frac{K_p s + K_i}{s(s^2 + s + 5)}$$

Le système en boucle ouverte est un système de type 1 (il comprend un intégrateur). Cette particularité sera prise en considération lors du calcul de l'erreur en régime permanent.

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = \frac{X(s)}{R(s)} = \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot P(s)}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot P(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^3 + s^2 + (K_p + 5)s + K_i}$$

Étude de la stabilité du système en boucle fermée dans le plan s:

Considérons le dénominateur $D(s)$ et analysons la stabilité en recourant au critère de Routh-Hurwitz. $D(s) = s^3 + s^2 + (K_p + 5)s + K_i$

Il est possible d'utiliser la fonction **solve** ou la fonction **roots** de Matlab pour calculer les racines de $D(s)$ qui sont les pôles du système en boucle fermée. Il est également possible d'étudier les positions des pôles en fonction des gains K_p et K_i . Le critère de Routh-Hurwitz peut indiquer si

la fonction de transfert en boucle fermée contient ou non des pôles instables (situés dans le demi-plan complexe de droite).

La table de Routh :

s^3	1	$(K_p + 5)$	0
s^2	1	K_i	0
s^1	$\frac{1 \times (K_p + 5) - K_i \times 1}{1}$	0	0
s^0	K_i	0	0

Critère de Routh : Le nombre de changements de signes dans la première colonne est égal au nombre de pôles dans le DPD (demi-plan de droite). Pour que le système soit stable, il faut que le nombre de changements de signe soit nul. Donc :

$$\frac{1 \times (K_p + 5) - K_i \times 1}{1} > 0 \quad \text{et} \quad K_i > 0$$

$$K_p - K_i > -5 \quad \text{et} \quad K_i > 0$$

$$\text{Soit} \quad K_p > -5 + K_i \quad \text{et} \quad K_i > 0$$

On peut choisir par exemple ces deux valeurs : $K_p = 3$, $K_i = 4$.

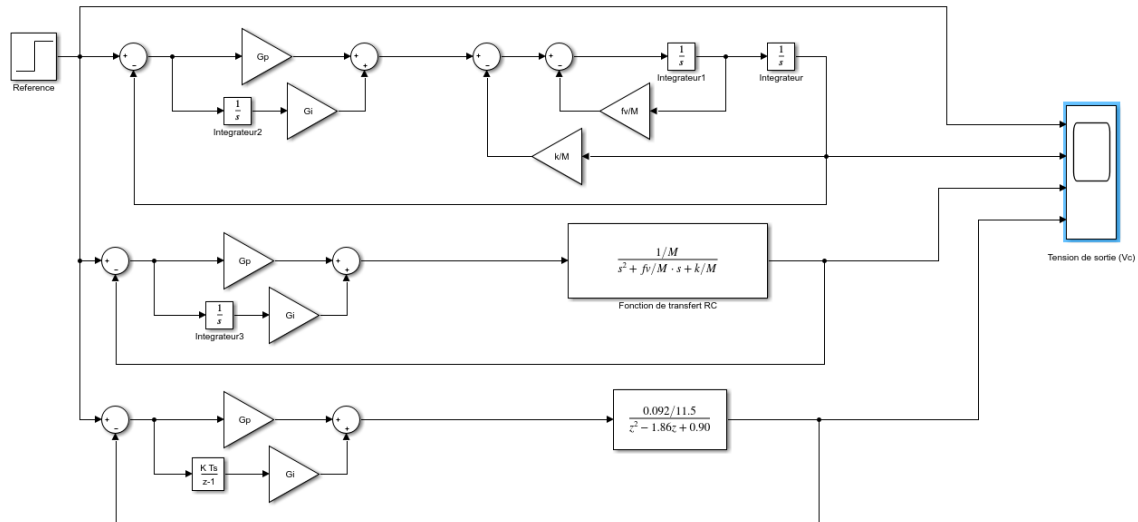
Simulation par Matlab :

```
% Gains du PI
Gp=3;
Gi=4;
% FT du PI
Gc=tf([Gp Gi],[1 0])
% FT en boucle fermée
G_T_BF=(Gc*G_T)/(1+(Gc*G_T))
```

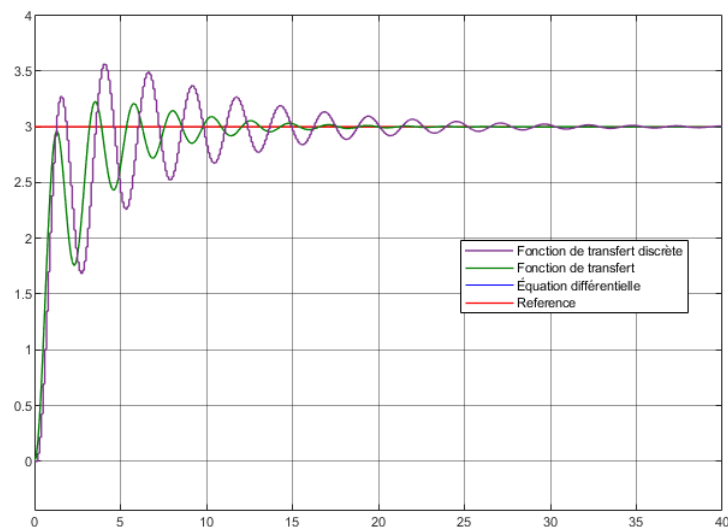
On peut aussi utiliser les fonctions **series** et **feedback** de Matlab :

```
% FT du système
G_T=tf([1/M],[1 fv/M k/M])
% FT du PI
Gc=tf([Gp Gi],[1 0])
% FT en boucle fermée
G_T_BF=feedback(series(Gc,G_T),1)
```

Simulation par Simulink :



Réponse temporelle à une référence échelon de 3V et des gains $K_p=3$ et $K_i=4$:



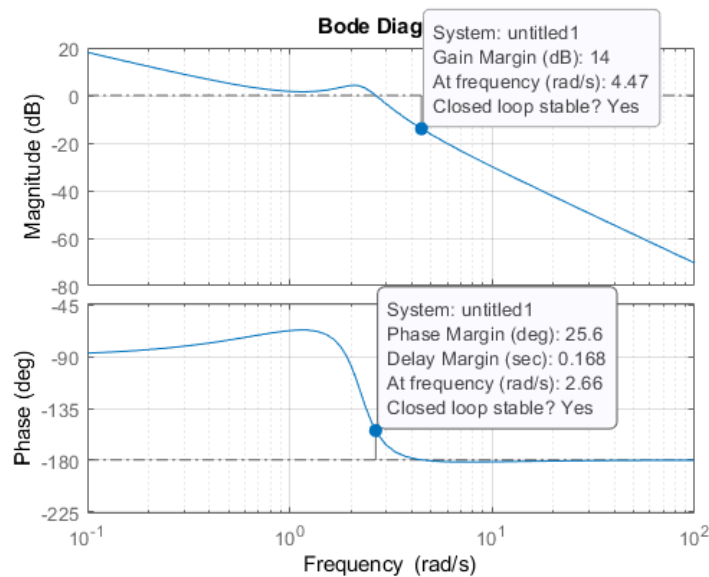
La figure ci-dessus montre les réponses temporelles du système avec rétroaction unitaire pour différentes modélisations : En rouge : le signal référence ; en bleu : la modélisation par équation différentielle ; en vert : la modélisation par la fonction de transfert $G(s)$; en vert clair : la modélisation par la fonction de transfert discrète $G(z)$.

Tableau de comparaison BO-BF

	BO	BF
Gain statique	0.2	1
Erreur statique	0.8	0

Analyse fréquentielle du système en boucle ouverte:

Diagramme de Bode du système en boucle ouverte :



Sur le diagramme de Bode: $MG = 14 \text{ dB}$ et $MP = 25.6^\circ$. La marge de gain correspond à $\omega = 4.47 \text{ rad/s}$. C'est la fréquence à laquelle la phase est égale à -180° . La marge de phase correspond à $\omega = 2.66 \text{ rad/s}$. C'est la fréquence à laquelle le gain est égal à 0 dB . Il y a moyen d'optimiser les valeurs de K_p et de K_i pour améliorer la marge de gain et la marge de phase. Cela peut être fait au moyen du programme MATLAB ou au moyen du programme interactif GEOGEBRA.

Diagramme de Nyquist de la fonction de transfert en boucle ouverte :

Sur le diagramme de Nyquist, l'encerclement à droite de rayon infini n'est pas représenté dans ce graphe. Sur le diagramme de Nyquist: $MG = 14 \text{ dB}$ et $MP = 25.6^\circ$. La marge de gain correspond à $\omega = 4.47 \text{ rad/s}$. C'est la fréquence à laquelle la phase est égale à -180° (axe réel négatif) soit $20 \log(|1/(-0.2)|)$. La marge de phase correspond à $\omega = 2.66 \text{ rad/s}$. C'est la fréquence à laquelle le diagramme de Nyquist recoupe le cercle unitaire (de gain 0 dB) centré à l'origine et représenté en tirets noirs.

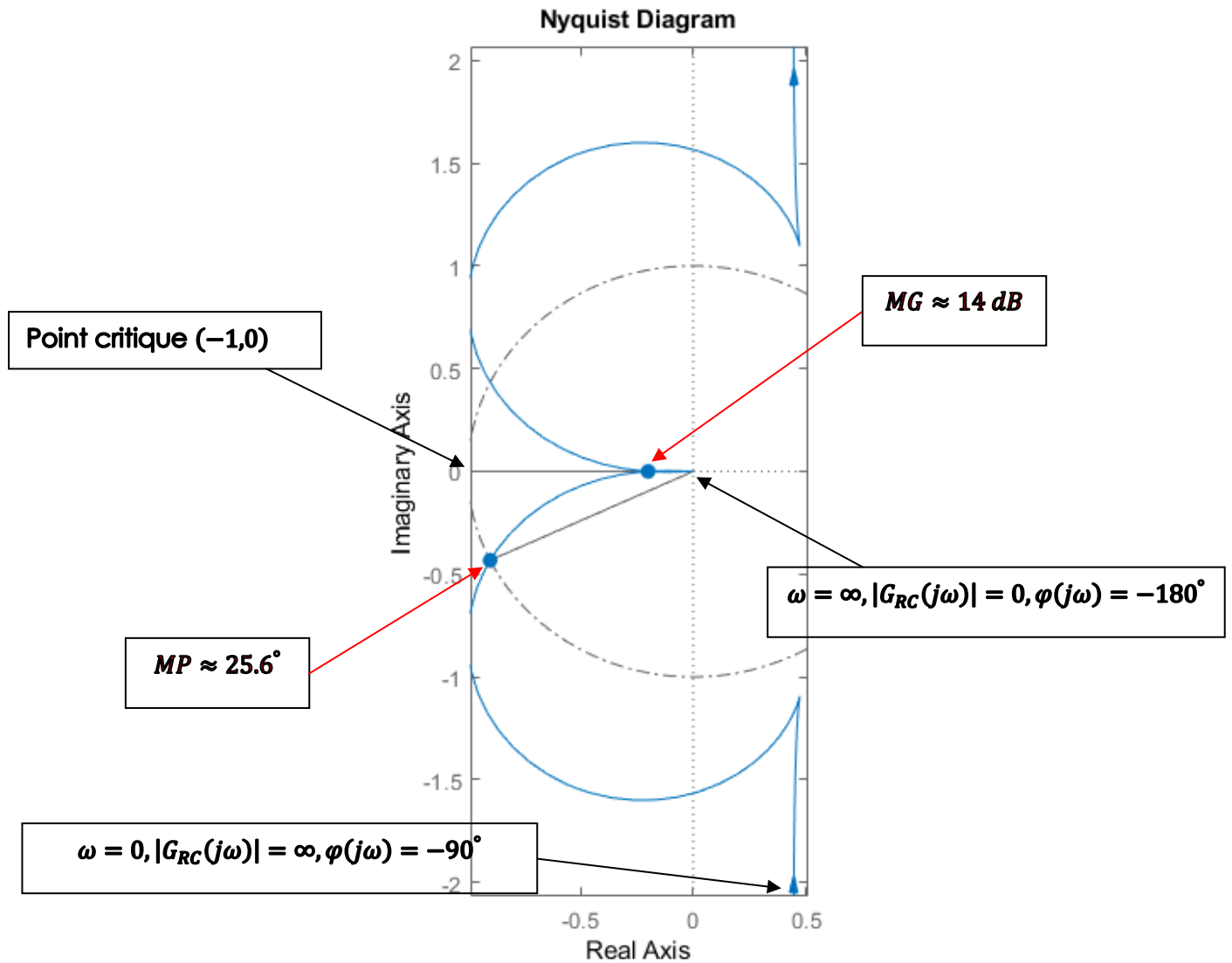
Étude de stabilité en utilisant le diagramme de Nyquist :

Nous notons que le point critique $(-1,0)$ n'est pas encerclé, ce qui assure la stabilité car il n'y a aucun pôle instable dans la boucle ouverte. En effet :

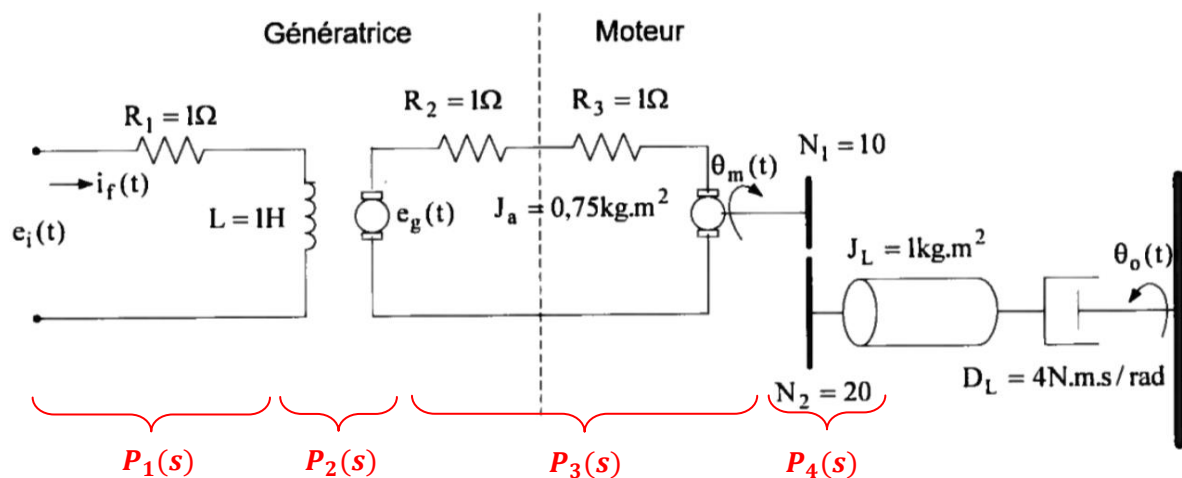
$P = 0$: Nombre de pôles dans le demi-plan droit.

$N = 0$: Nombre d'encerclements autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens anti-horaire

$P = N$, le système est donc stable.



2-2-3 Problème #3 : Système mécanique de rotation de 2nd ordre



Remarque :

L'inertie de la charge J_L ainsi que son amortisseur D_L sont incluses dans $P_3(s)$.

Paramètres physiques du moteur:

Constante mécanique : $K_m=1 \text{ N.m/A}$

Constante électrique : $K_t=1 \text{ V/rad/s}$

Coefficient d'amortissement du moteur $D_a=0 \text{ N.m/rad/s}$

Coefficient de l'induit : $K_f=2 \text{ Ohm}$

Modélisation du système:**Partie électrique :**

Circuit RL, on suppose que la condition initiale $i_f(0) = 0$:

$$\frac{L}{R_1} \frac{di_f(t)}{dt} + i_f(t) = \frac{1}{R_1} e_i(t)$$

$$\frac{L}{R_1} s I_f(s) + I_f(s) = \frac{1}{R_1} E_i(s)$$

$$P_1(s) = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{L}{R_1} s + 1}$$

Générateur:

$$e_g(t) = K_f \cdot i_f(t)$$

$$E_g(s) = K_f \cdot I_f(s)$$

$$P_2 = K_f$$

Partie mécanique :**Moteur :**

$$P_3(s) = \frac{\frac{1}{J_m} \left(\frac{K_t}{R_a} \right)}{s \left(s + \frac{1}{J_m} \left(D_m + K_b \frac{K_t}{R_a} \right) \right)}, \quad J_m = J_a + J_L \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2, \quad D_m = D_a + D_L \left(\frac{N_1}{N_2} \right)^2$$

$$R_a = R_2 + R_3 = 2$$

À noter que l'inertie de la charge J_L ainsi que son amortisseur D_L sont incluses dans $P_3(s)$.

Engrenage:

$$\theta_o(t) = \frac{N_1}{N_2} \cdot \theta_m(t)$$

$$\theta_o(s) = \frac{N_1}{N_2} \cdot \theta_m(s)$$

$$P_4 = \frac{N_1}{N_2}$$

Fonction de transfert du système:

La sortie du système est la position du moteur $\theta_o(s)$

$$\begin{aligned} P(s) = \frac{\theta_m(s)}{E_a(s)} &= G_1(s) \cdot G_2(s) \cdot G_3(s) \cdot G_4(s) = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{L}{R_1}s + 1} \cdot K_f \cdot \frac{\frac{1}{J_m} \left(\frac{K_t}{R_a} \right)}{s \left(s + \frac{1}{J_m} \left(D_m + K_b \frac{K_t}{R_a} \right) \right)} \cdot \frac{N_1}{N_2} \\ &= \frac{1}{s+1} \cdot 2 \cdot \frac{0.5}{s(s+1.5)} \cdot 0.5 = \frac{0.5}{s(s+1)(s+1.5)} \end{aligned}$$

La sortie du système est la vitesse du moteur $\Omega(s)$:

$$P_m(s) = \frac{\Omega_m(s)}{E_a(s)} = \frac{s\theta_o(s)}{E_i(s)} = \frac{0.5}{(s+1)(s+1.5)}$$

Simulation du système $P_m(s)$ sans rétroaction :

Simulation par Matlab:

```
clear all
clc
% Paramètres du moteur
R1=1; % Resistance de l'induit Ra=R1+R2 (Ohm)
Ra=2; % Resistance du rotor Ra=R1+R2 (Ohm)
La=1; % inductance de l'induit (H)
Ja=0.75; % moment d'inertie du moteur (Kg.m^2)
JL=1; % moment d'inertie du moteur (Kg.m^2)
Da=0; % amortisseur visqueux du moteur (N.m/rad/s)
DL=4; % amortisseur visqueux de la charge (N.m/rad/s)
Kt=1; % constante mecanique (N.m/A)
Kb=1; % Constante électrique (V/rad/s)
Kf=2; % Constante de l'induit ea/if (Ohm)
N1=10; % Nombre de dents dans l'engrenage de l'axe du moteur
N2=20; % Nombre de dents dans l'engrenage de l'axe de la charge
% Fonction de transfert du moteur
% Circuit LC
G1=tf([1/R1],[La/R1 1]);
% Generateur
G2=Kf;
% Moteur C.C
Jm=Ja+JL*(N1/N2)^2;
Dm=Da+DL*(N1/N2)^2;
G3=tf([(1/Jm)*(Kt/Ra)], [1 (1/Jm)*(Dm+Kb*(Kt/Ra)) 0]);
```

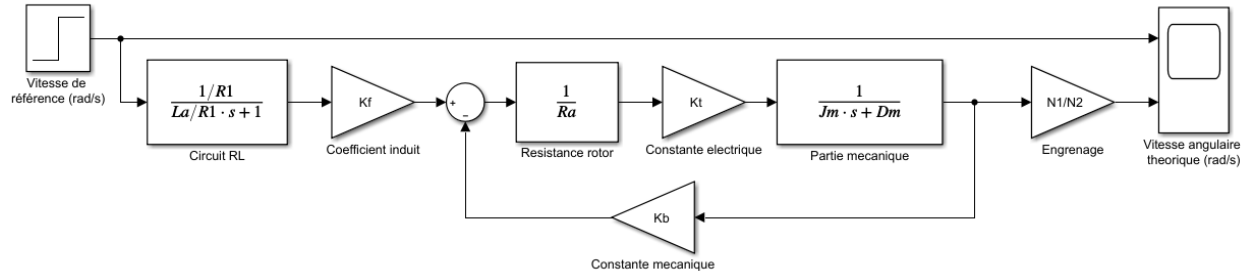
% Engrenage

G4=N1/N2;

% Fonction de transfert: la sortie est la vitesse (rads)

Gm=G1*G2*G3*G4;

Simulation par Simulink:



Analyse de la stabilité du système sans rétroaction :

Stabilité dans le plan s:

$$P_m(s) = \frac{\Omega_m(s)}{E_a(s)} = \frac{0.5}{(s+1)(s+1.5)}$$

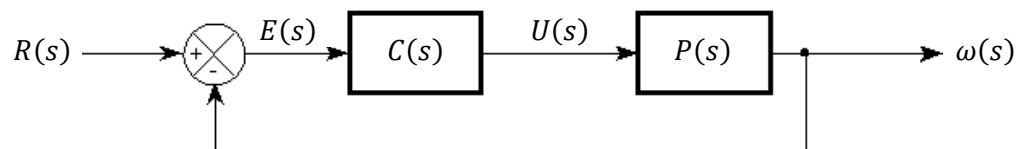
Le système possède deux pôles $s_1 = -1$ et $s_2 = -1.5$. Les deux pôles sont localisés dans DPG (demi-plan de gauche). Le système est donc stable. Le système est un système sur-amorti, car le facteur d'amortissement ζ est supérieur à 1.

Stabilité dans le plan z (T=0.1):

$$P_m(z) = \frac{0.5}{(z-0.9048)(z-0.8607)}$$

Le système possède deux pôles complexes $z_1 = 0.90$ et $z_2 = 0.86$. Les normes des deux pôles $|z_1| = 0.90 < 1$ et $|z_2| = 0.86 < 1$, donc les deux pôles sont localisés à l'intérieur du cercle unitaire. Le système est donc stable.

Analyse du système avec une rétroaction unitaire :



Fonction de transfert du contrôleur proportionnel intégral :

$$C(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

K_p : Gain proportionnel

K_i : Gain intégral

La fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_{BO}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot P_m(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot \frac{0.5}{(s+1)(s+1.5)} = \frac{0.5(K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+1.5)}$$

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = \frac{\Omega(s)}{R(s)} = \frac{\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot P_m(s)}{1 + \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot P_m(s)} = \frac{0.5(K_p s + K_i)}{s^3 + 2.5s^2 + (0.5K_p + 1.5)s + 0.5K_i}$$

Étude de Stabilité en boucle fermée :

$$G_{BF}(s) = \frac{0.5(K_p s + K_i)}{s^3 + 2.5s^2 + (0.5K_p + 1.5)s + 0.5K_i}$$

Les pôles du système en boucle fermée : $D(s) = s^3 + 2.5s^2 + (0.5K_p + 1.5)s + 0.5K_i$

On peut utiliser la fonction **solve** ou la fonction **roots** de Matlab pour calculer les racines de $D(s)$ qui sont les pôles du système en boucle fermée. On peut étudier les positions des pôles en fonction des gains K_p et K_i . Pour que le système soit stable, il faut que les pôles soient localisés dans le DPG (demi-plan de gauche). On peut utiliser aussi le critère de Routh pour étudier la stabilité:

$$D(s) = s^3 + 2.5s^2 + (0.5K_p + 1.5)s + 0.5K_i$$

s^3	1	$(0.5K_p + 1.5)$	0
s^2	2.5	$0.5K_i$	0
s^1	$\frac{2.5 \times (0.5K_p + 1.5) - 0.5K_i \times 1}{2.5}$	0	0
s^0	$0.5K_i$	0	0

Critère de Routh : Le nombre de changement de signes dans la première colonne est égale au nombre de pôles dans le DPD (demi-plan droit). Pour que le système soit stable, il faut que :

$$\frac{2.5 \times (0.5K_p + 1.5) - 0.5K_i \times 1}{2.5} > 0 \quad \text{et} \quad K_i > 0$$

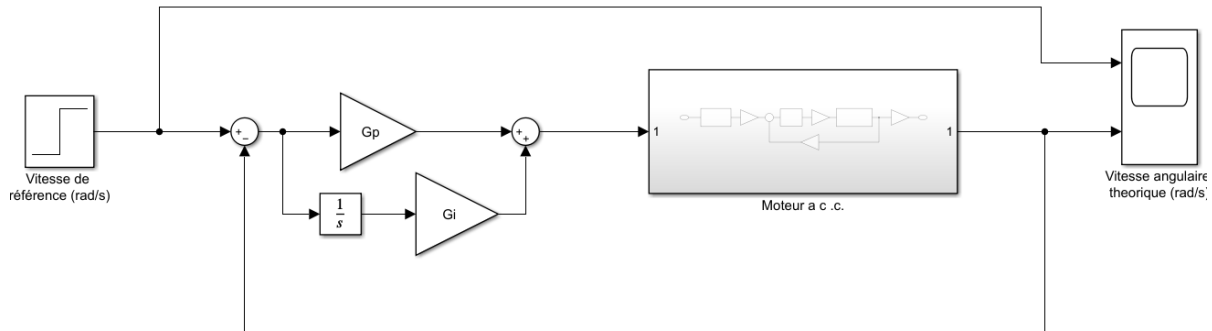
$$2.5K_p - K_i > -7.5 \quad \text{et} \quad K_i > 0$$

On choisit par exemple $K_p = 0.058$ et $K_i = 2.01$.

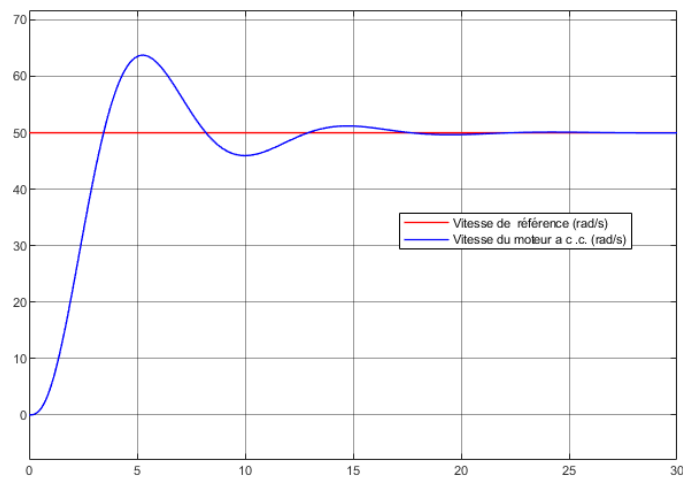
Simulation par Matlab :

```
% Gains PI pour un dépassement de 10% et un Tp=0.5s
Gp=0.058;
Gi=2.01;
Gpi=tf([Gp Gi],[1 0]);
% Fonction de transfert en boucle fermée
GM_BF=(Gc*Gpi*Gm)/(1+(Gc*Gpi*Gm));
```


Simulation par Simulink :

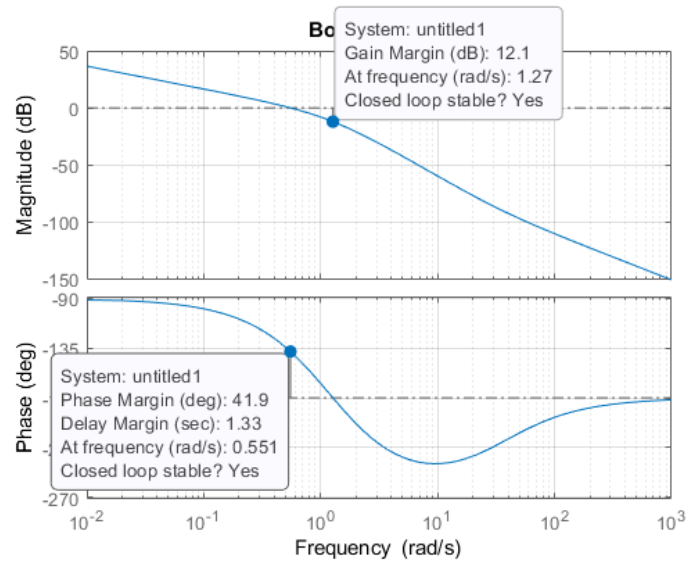


Réponse temporelle à une référence échelon de 50 rad/s et des gains $K_p=0.058$ et $K_i=2.01$:



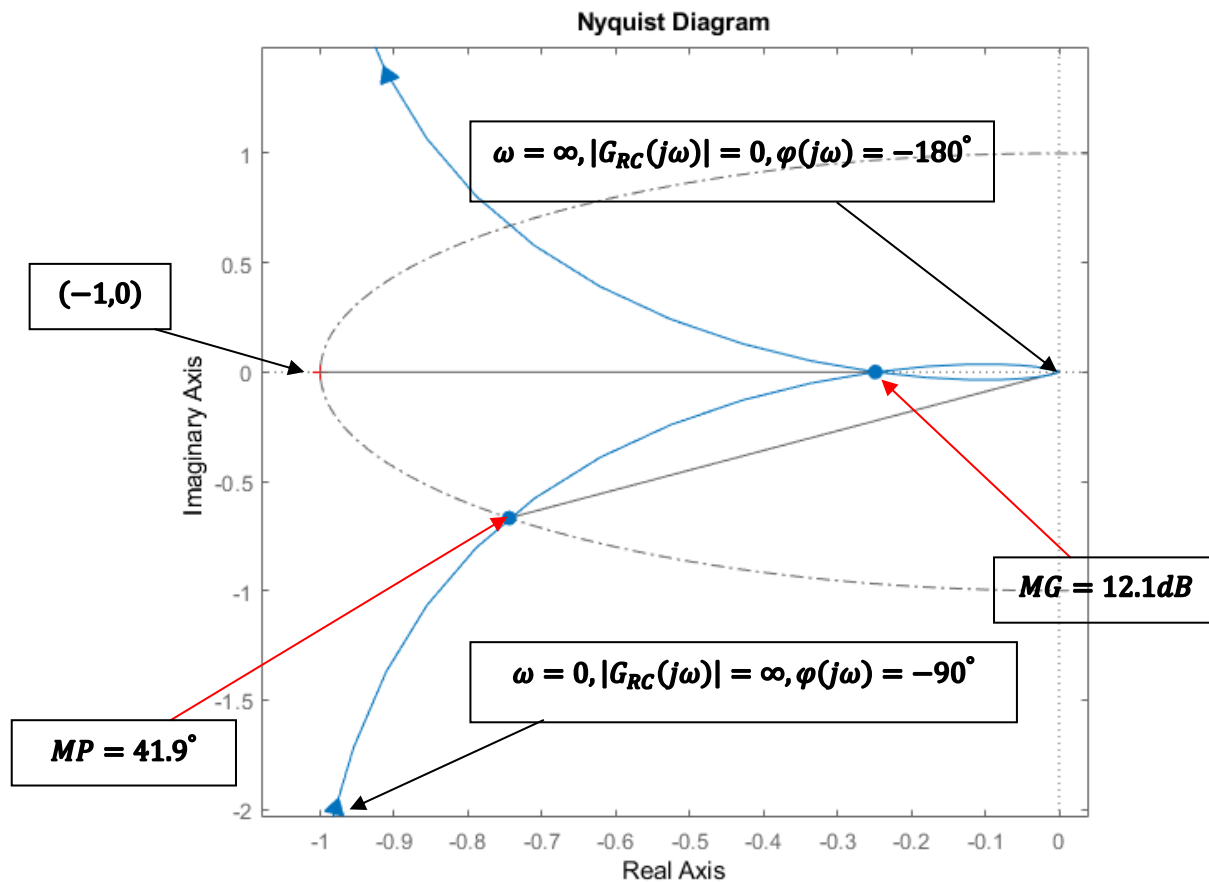
Réponse fréquentielle de la boucle ouverte

Diagramme de Bode de la boucle ouverte :



Sur le diagramme de Bode : $MG = 12.1$ et $MP = 41.9^\circ$. La marge de gain correspond à $\omega = 1.21 \text{ rad/s}$. C'est la fréquence à laquelle la phase est égale à -180° . La marge de phase correspond à $\omega = 0.55 \text{ rad/s}$. C'est la fréquence à laquelle le gain est égal à 0 dB .

Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte :



L'encerclement à droite de rayon infini n'est pas représenté dans ce graphe. Sur le diagramme de Nyquist : $MG = 12.1$ et $MP = 41.9^\circ$. La marge de gain correspond à $\omega = 1.21 \text{ rad/s}$. C'est la fréquence à laquelle la phase est égale à -180° (axe réel négatif). La marge de phase correspond à $\omega = 0.55 \text{ rad/s}$. C'est la fréquence à laquelle le gain est égal à 0 dB (cercle unitaire).

Étude de stabilité en utilisant le Diagramme de Nyquist : Nous notons que le point critique $(-1,0)$ n'est pas encerclé, ce qui assure la stabilité car il n'y a aucun pôle instable dans la boucle ouverte. En effet :

$P = 0$: Nombre de pôles dans le demi-plan droit.

$N = 0$: Nombre d'encerclements autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens anti-horaire

$P = N$, le système est donc stable.

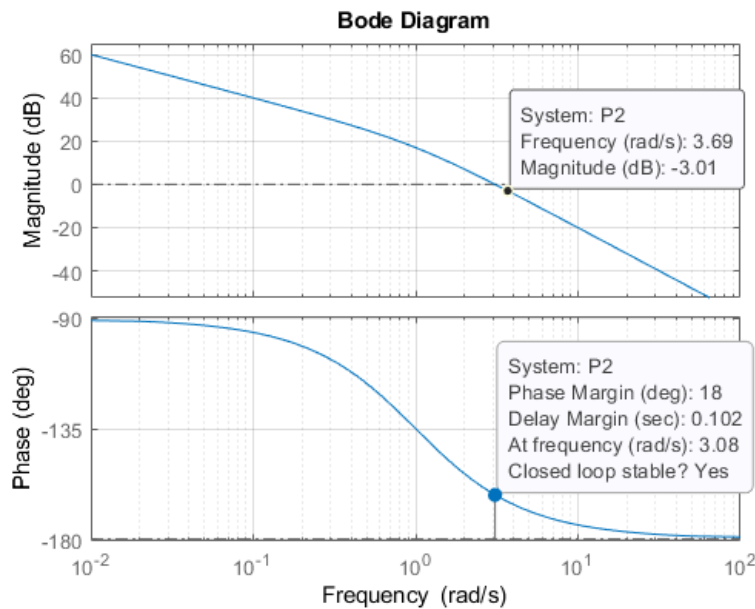
2-2-4 Problème #4 :

$$P(s) = \frac{10K}{s(s+1)}$$

Cahier des charges : $MP \geq 45^\circ$ et $ess \leq 0.1$ pour une entrée rampe.

Dans ce qui suit, nous montrerons une méthode de conception simple et didactique avant de passer à des méthodes plus efficaces.

Le programme MATLAB nous donne (pour $K=1$):



Marge de phase : $MP = 180^\circ + \phi_{\omega_0} = 18^\circ$. Marge de gain : $MG = \infty$. La bande passante : 3.7 rad/s

Planifions une phase additionnelle de $45^\circ - 18^\circ = 27^\circ$ avec une marge de sécurité de 10° soit $\phi_{max} = 37^\circ$ à la fréquence $\omega_m = 3 \text{ rad/s}$.

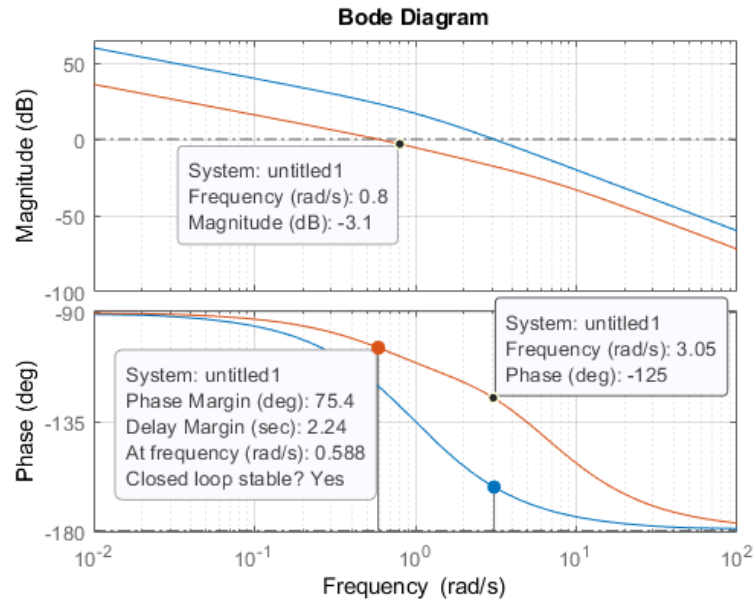
$$\alpha = \frac{z_0}{p_0} = \frac{1 - \sin(\phi_{max})}{1 + \sin(\phi_{max})} = 0.25$$

z_0 vérifie :

$$z_0 = \omega_m \frac{1 - \sin \phi_m}{\cos \phi_m} = 3 \times \frac{1 - \sin 37^\circ}{\cos 37^\circ} = 1.49 \quad , \quad p_0 = \frac{z_0}{0.25} = \frac{1.49}{0.25} = 5.9$$

$$C_{AP}(s) = \frac{1 + \frac{s}{1.49}}{1 + \frac{s}{5.9}}$$

Traçons le diagramme de Bode du nouveau gain de boucle $P(s)C_{AP}(s)$ (pour $K=1$).

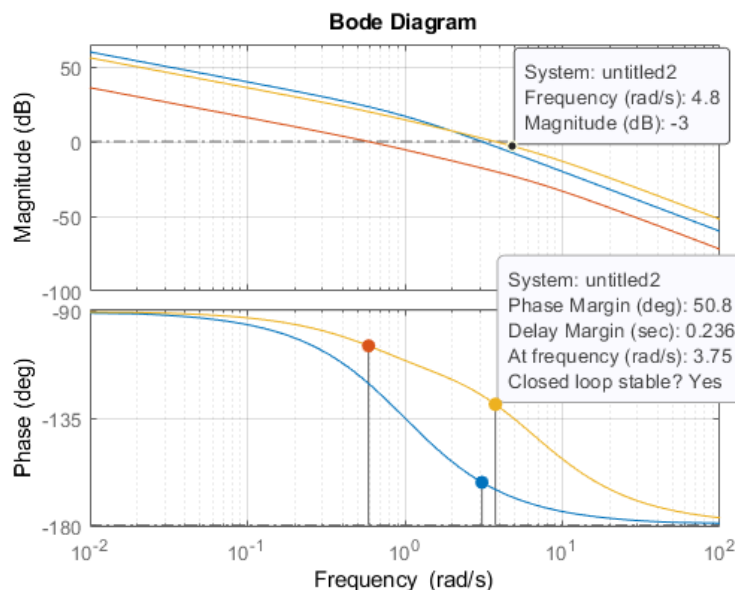


Nous notons qu'une phase supplémentaire de 37° a été ajoutée à la fréquence 3 rad/s. Toutefois, en raison du gain supplémentaire introduit par le circuit de phase, la nouvelle marge de phase est en réalité de 75° . La nouvelle bande passante est 0.8 rad/s. Ajustons le gain K de façon à respecter une erreur statique inférieure à 0.1 dans le cas d'une entrée rampe.

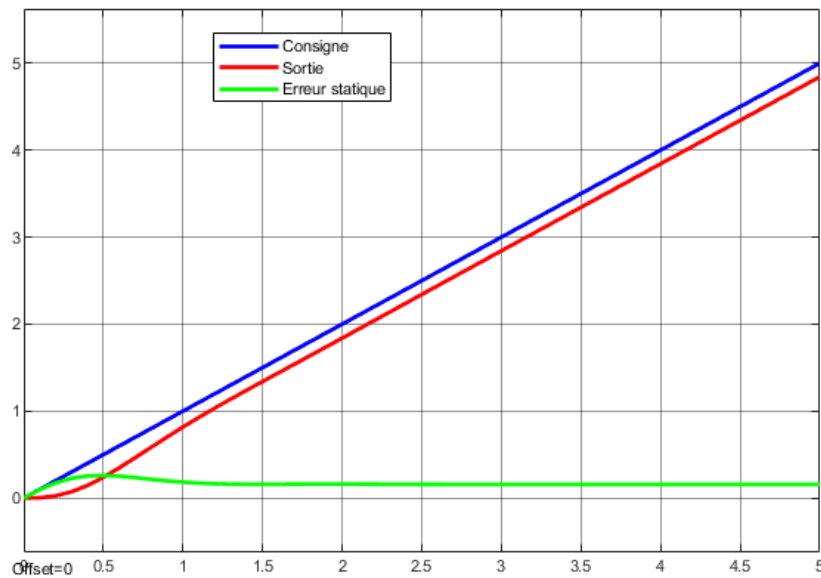
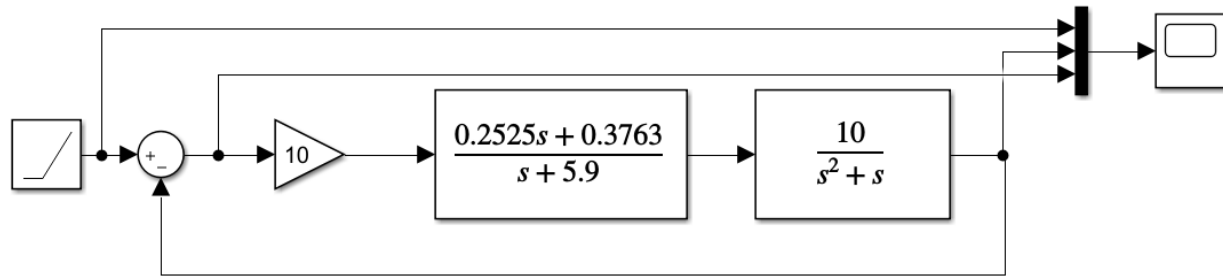
$$\text{ess} = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s^2} \frac{1}{1 + P(s)C(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + sP(s)C(s)} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s + s \frac{10K}{s(s+1)} \frac{1 + \frac{s}{1.49}}{1 + \frac{s}{5.9}}} = \frac{1}{10K}$$

$$= 0.1 \quad \rightarrow \quad K = 10$$

Avec cet ajustement, la nouvelle marge de phase passe à 50.8° . La nouvelle bande passante de la boucle fermée est de 4.8 rad/s. Voir courbe en jaune dans le graphe suivant.



Réponse temporelle à une rampe du système compensé



2-2-5 Problème #5 :

$$P(s) = \frac{K}{(s+1)(0.5s+1)}$$

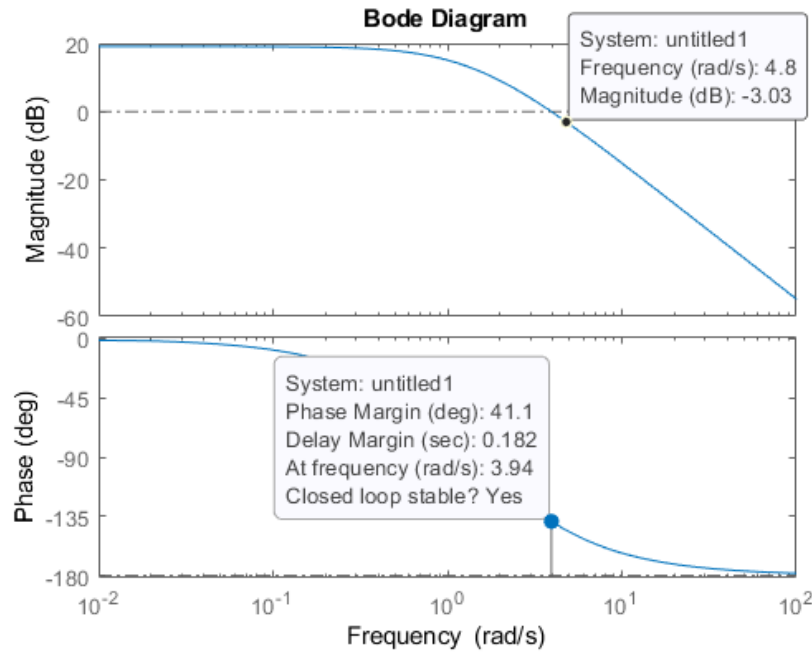
Cahier des charges : $MP = 67^\circ$, $ess \leq 0.1$ pour une entrée : $u(t) = \text{échelon}$

Déterminons le gain K en supposant que le gain du circuit de phase sera de 1 en basses fréquences.

$$ess = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \frac{1}{s} \frac{1}{1 + P(s)C(s)} s = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{1 + P(s)C(s)} = \frac{1}{1 + K} = 0.1 \rightarrow K = 9$$

Le programme MATLAB nous donne :

Marge de phase : $MP = 41^\circ$. Marge de gain : $MG = \infty$. La bande passante : 4.8 rad/s.



Planifions une phase additionnelle ϕ_m pour obtenir une marge de phase (idéale) de 67° soit une avance de phase de $\phi_m = 67^\circ - 41^\circ = 26^\circ$ à la fréquence $\omega_m = 3.9 \text{ rad/s}$.

$$\alpha = \frac{z_0}{p_0} = \frac{1 - \sin(\phi_m)}{1 + \sin(\phi_m)} = \frac{1 - \sin(26^\circ)}{1 + \sin(26^\circ)} = 0.39$$

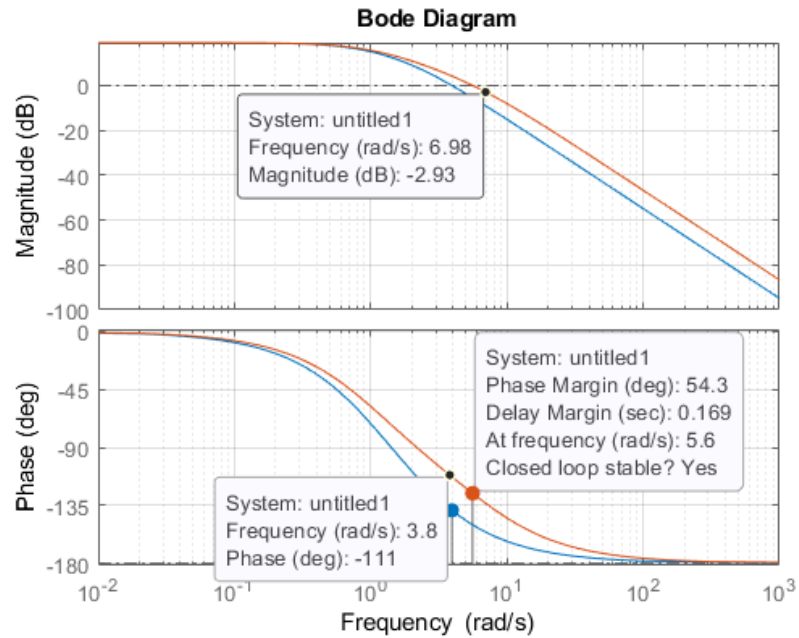
z_0 et p_0 vérifient :

$$z_0 = \omega_m \frac{1 - \sin \phi_m}{\cos \phi_m} = 3.85 \times \frac{1 - \sin 26^\circ}{\cos 26^\circ} = 2.4, \quad p_0 = \frac{z_0}{0.39} = \frac{2.4}{0.39} = 6.15.$$

Pour obtenir un gain unitaire en basses fréquences, Le correcteur aura la forme suivante :

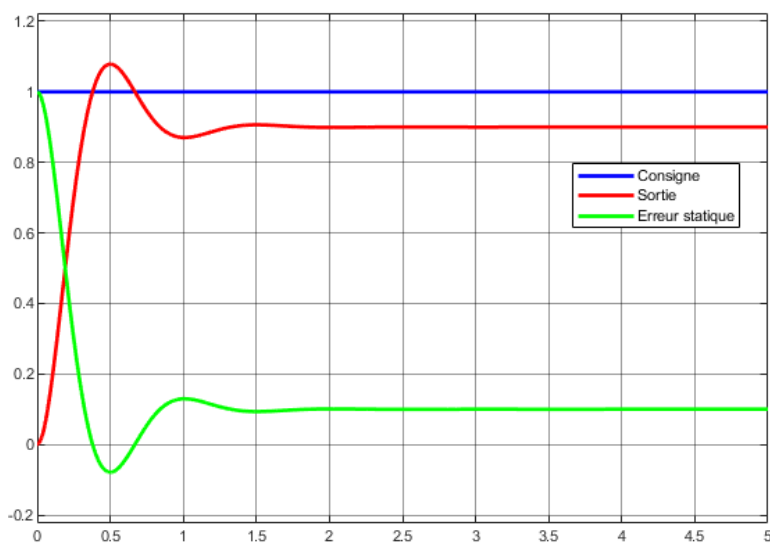
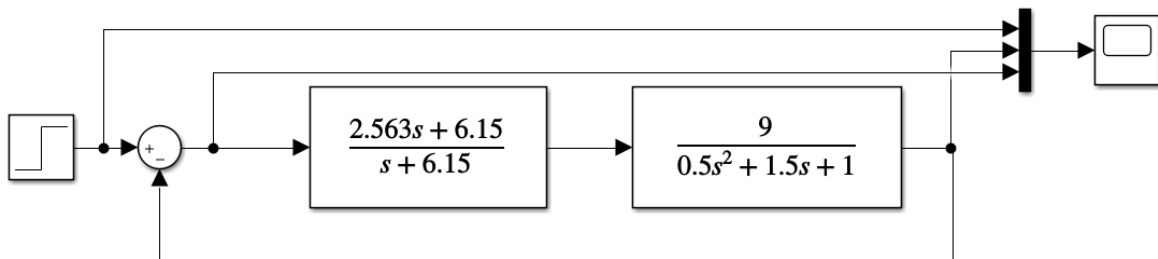
$$C_{AP}(s) = \frac{1 + \frac{s}{2.4}}{1 + \frac{s}{6.15}}$$

Traçons le diagramme de Bode du nouveau gain de boucle $P(s)C_{AP}(s)$ pour $K=9$. Nous notons qu'une phase supplémentaire de 26° a été ajoutée à la fréquence 3.85 rad/s . Toutefois, en raison du gain supplémentaire introduit par le circuit de phase, la nouvelle marge de phase est en réalité de 54° .



Il est toujours possible de réajuster les paramètres du circuit de phase pour se rapprocher de 67° .

Réponse temporelle à un échelon du système compensé



2-2-6 Problème #6 :

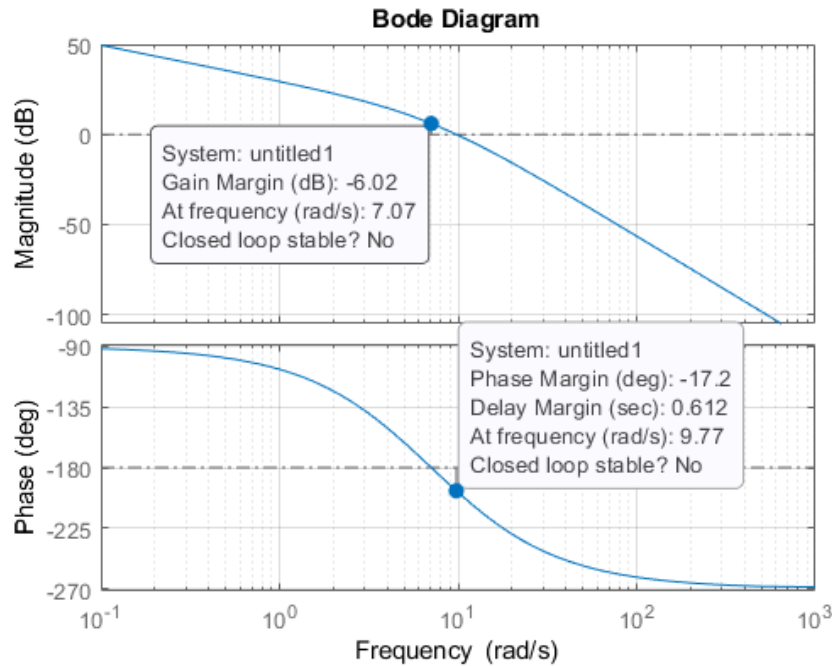
$$P(s) = \frac{K}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.2s)}$$

Cahier des charges : MP = 67° (idéale) à $\omega_m = 10$ rad/sec, $K_v = 30$, $ess = \frac{1}{K_v} = 0.03$

Détermination du gain :

$$K_v = \lim_{s \rightarrow 0} sP(s) = 30 \rightarrow K = 30$$

Fréquence de coupure et marge de phase de KP(s) : $\omega_m = 9,77$ rad/sec, MP = -17,2°



Design du correcteur d'avance de phase :

$$C_{AP}(s) = \frac{1 + \frac{s}{z_1}}{1 + \frac{s}{p_1}}$$

D'après le graphe :

$$\text{À } \omega_m = 10 \text{ rad/sec} \rightarrow \phi = -198^\circ$$

Phase additionnelle :

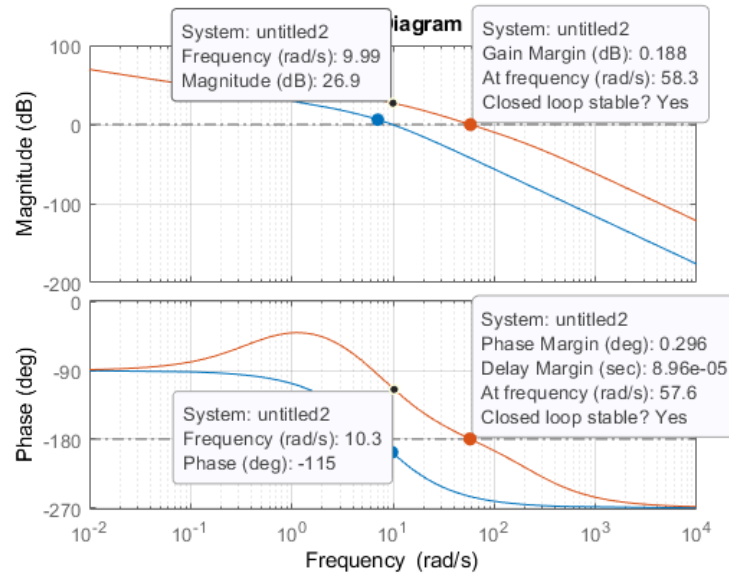
$$\phi_m = 67^\circ - (180^\circ - 198^\circ) = 85^\circ$$

$$\alpha_1 = \frac{z_1}{p_1} = \frac{1 - \sin(85^\circ)}{1 + \sin(85^\circ)} = 0.0019$$

$$z_1 \text{ et } p_1 \text{ vérifient : } z_1 = \omega_m \frac{1 - \sin \phi_m}{\cos \phi_m} = 10 \times \frac{1 - \sin 85^\circ}{\cos 85^\circ} = 0.4366 \quad , \quad p_1 = \frac{z_1}{0.0019} = \frac{0.4366}{0.0019} = 229.7895$$

$$\text{Le correcteur aura la forme suivante : } C_{AP}(s) = \frac{1 + \frac{s}{0.43}}{1 + \frac{s}{229.78}}$$

Traçons le diagramme de Bode du nouveau gain de boucle $P(s)C_{AP}(s)$ pour $K=30$. Nous notons qu'une phase supplémentaire de 83° a été ajoutée à la fréquence 10 rad/s.



Design du correcteur de retard de phase :

$$C_{RP}(s) = \frac{1 + \frac{s}{z_2}}{1 + \frac{s}{p_2}}$$

Soit ω_{AP} la pulsation de coupure où le gain s'annule :

$$\omega_{AP} = 58.3 \text{ rad/sec}$$

$$\text{À } \omega = 10 \text{ rad/sec}$$

$$\text{Gain} = 26.9 \text{ dB et } \phi = -115^\circ$$

Pour que $\omega = 10$ devienne la nouvelle pulsation de coupure, il faut pourvoir à une atténuation de 26.9 dB.

$$20 \log |C_{RP}(s)| = 20 \log \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_2^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{p_2^2}}} \right) = 20 \log \left(\frac{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{z_2^2}}}{\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{(\alpha_2 z_2)^2}}} \right) = -26.9 \rightarrow$$

$$20 \log(\alpha_2) = -26.9 \rightarrow \alpha_2 = 0.0452$$

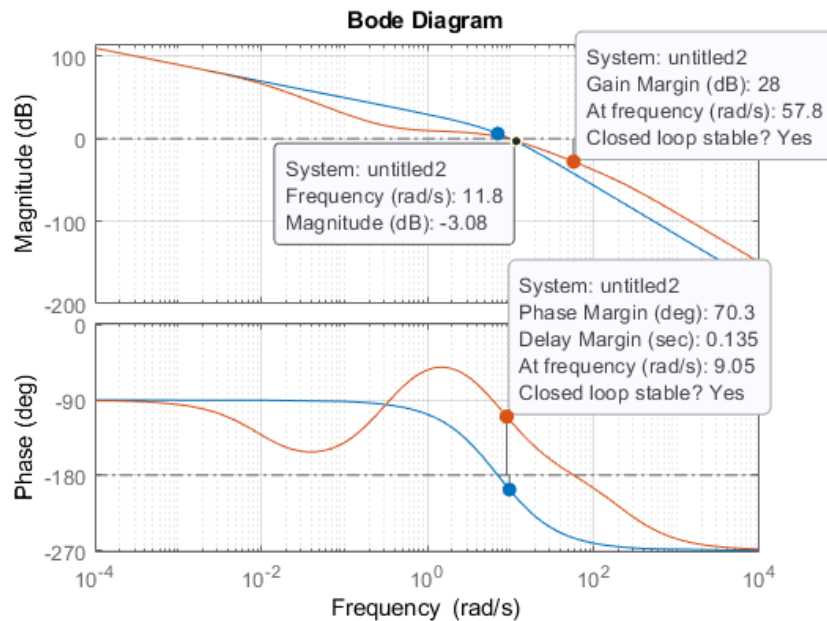
On place z_2 en dessous de la pulsation de coupure pour maintenir la marge de phase désirée

Par exemple : $z_2 = 0.25 \rightarrow p_2 = \frac{0.25}{22.13} = 0.01$ D'où : $C_{RP}(s) = \frac{1 + \frac{s}{0.25}}{1 + \frac{s}{0.01}}$

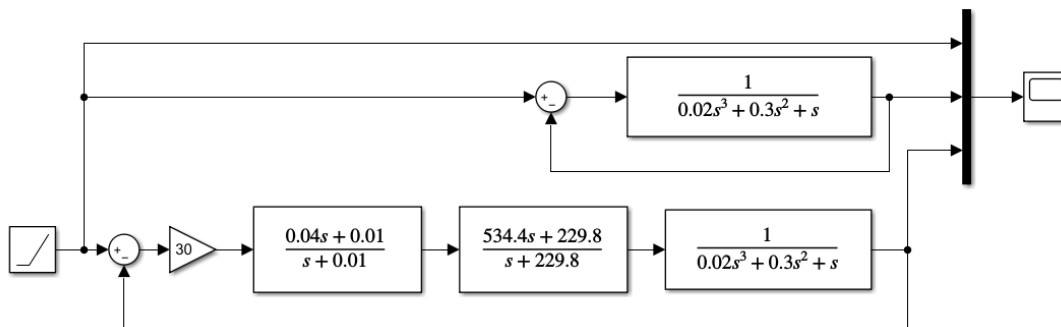
Le circuit avance-retard aura la forme :

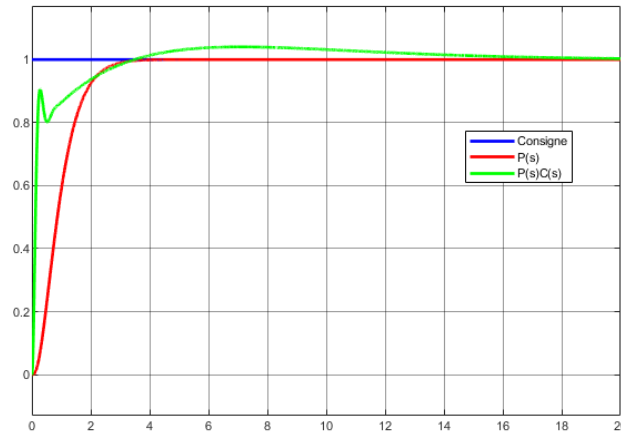
$$C_{AP-RP}(s) = \frac{1 + \frac{s}{0.43}}{1 + \frac{s}{229.78}} \frac{1 + \frac{s}{0.25}}{1 + \frac{s}{0.01}}$$

Traçons le diagramme de Bode du nouveau gain de boucle $P(s)C_{AP-RP}(s)$. Nous notons une marge de phase de 70° à la fréquence de 10 rad/s. Nous notons aussi une marge de gain de 28 dB à la fréquence de 57.8 rad/s. La bande passante est de 11.8 rad/s.



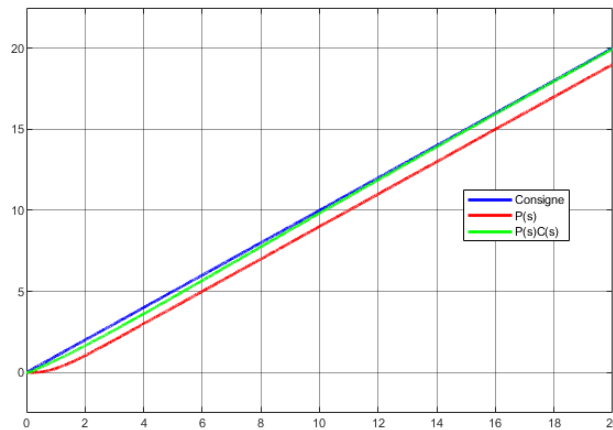
Réponse temporelle à un échelon de $P(s)$ et $P(s)C_{AP-RP}(s)$ avec $K=30$:





En rouge: réponse temporelle de la boucle fermée sans le circuit de phase. En vert : réponse temporelle de la boucle fermée incorporant le circuit de phase.

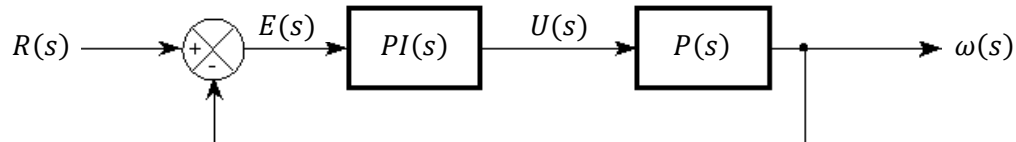
Réponse temporelle à une rampe de $P(s)$ et $P(s)C_{AP-RP}(s)$ avec $K=30$:



En rouge: réponse temporelle de la boucle fermée sans le circuit de phase. En vert : réponse temporelle de la boucle fermée incorporant le circuit de phase.

2-2-7 Problème #7 :

Soit un système de rétroaction comprenant le processus $P(s)$ ainsi qu'un compensateur $PI(s)$ dans son gain de boucle. L'objectif est d'améliorer la marge de phase par le truchement d'un compensateur à avance de phase de façon à obtenir une marge de phase $MP = 67^\circ$.



Fonction de transfert du système :

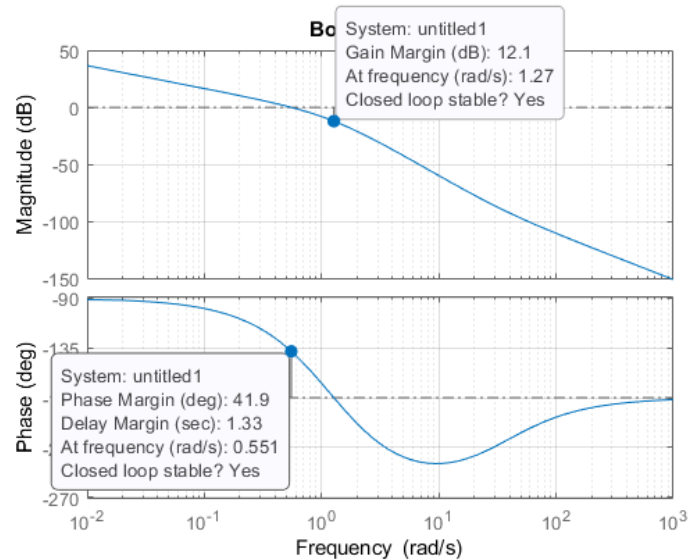
$$P(s) = \frac{0.5}{(s+1)(s+1.5)}$$

Fonction de transfert du contrôleur proportionnel intégral :

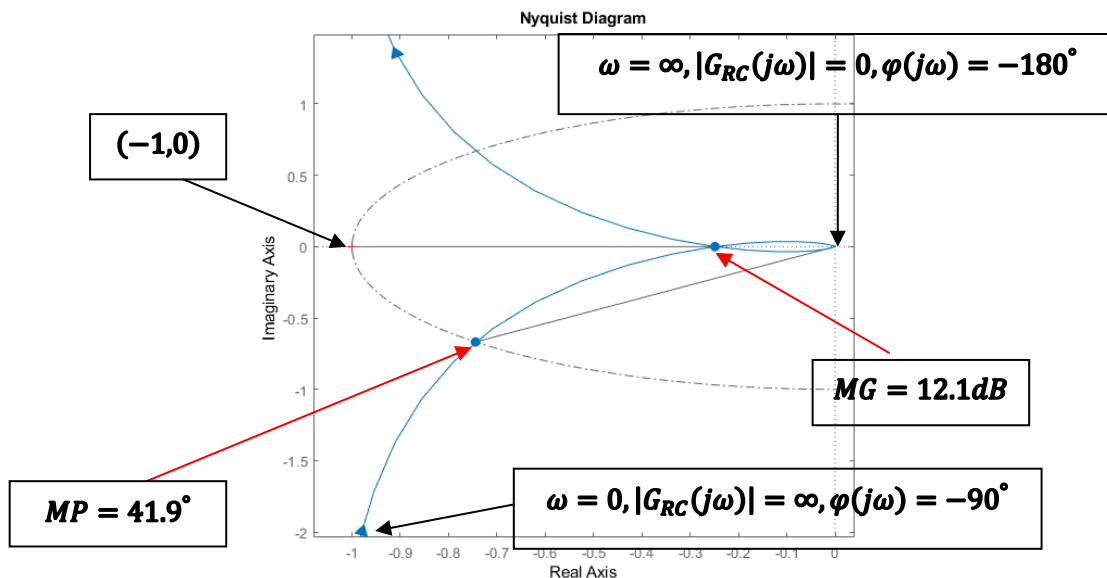
$$PI(s) = K_p + \frac{K_i}{s} \quad , \quad K_p = 0.058: \text{Gain proportionnel}, K_i = 2.01: \text{Gain intégral}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte :

$$G_{BO}(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot P(s) = \left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) \cdot \frac{0.5}{(s+1)(s+1.5)} = \frac{0.5(K_p s + K_i)}{s(s+1)(s+1.5)}$$



La lecture du diagramme de Bode : $MG = 12.1$ et $MP = 41.9^\circ$. La marge de gain est mesurée à la fréquence $\omega = 1.21 \text{ rad/s}$ et la marge de phase est mesurée à la fréquence $\omega = 0.55 \text{ rad/s}$.

Diagramme de Nyquist de la boucle ouverte :

L'encerclement à droite de rayon infini n'est pas représenté dans ce graphe.

Conception du circuit de phase $C_{AP}(s)$:

Pour obtenir une marge de phase $MP = 67^\circ$, il faut introduire une avance de phase $\varphi = 67^\circ - 41.9^\circ = 25.1^\circ$ à $\omega = 0.55 \text{ rad/s}$.

$$C_{AP}(s) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{1 + \frac{s}{z}}{1 + \frac{s}{p}} \quad \text{Telle que : } z = \frac{\omega_m}{\sqrt{\gamma}}, \quad p = \sqrt{\gamma} \omega_m, \quad \gamma = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi}, \quad \omega_m = 0.55 \text{ rad/s}, \quad \varphi = 25.1^\circ$$

Simulation Matlab :

```
Phi=0.44; % Phi = MP souhaitee =67 deg - MP actuelle = 41.9
gamma=(1+sin(Phi))/(1-sin(Phi));
wu=0.55; % wu à MP=67 deg
zz=wu/sqrt(gamma); % zero du compensateur
pp=sqrt(gamma)*wu; % pole du compensateur
Ca=tf([(1/sqrt(gamma))*(1/zz) 1/sqrt(gamma)], [1/pp 1]);
% Fonction de transfert en boucle fermee avec compensateur
GMC_BF=(Ca*Gpi*Gm)/(1+(Ca*Gpi*Gm));
```

Simulation par Simulink :

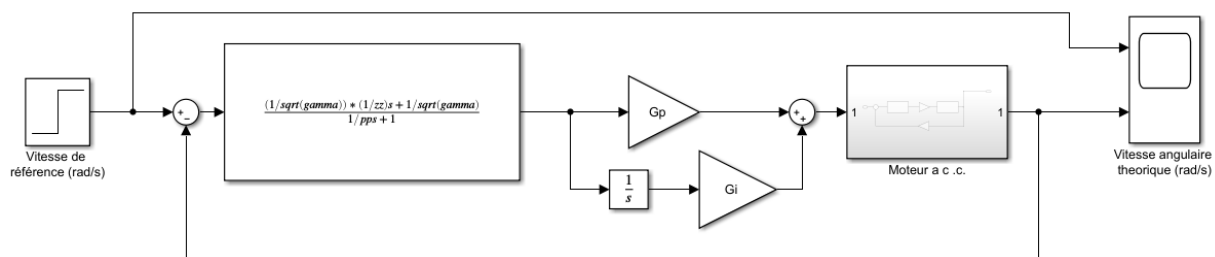
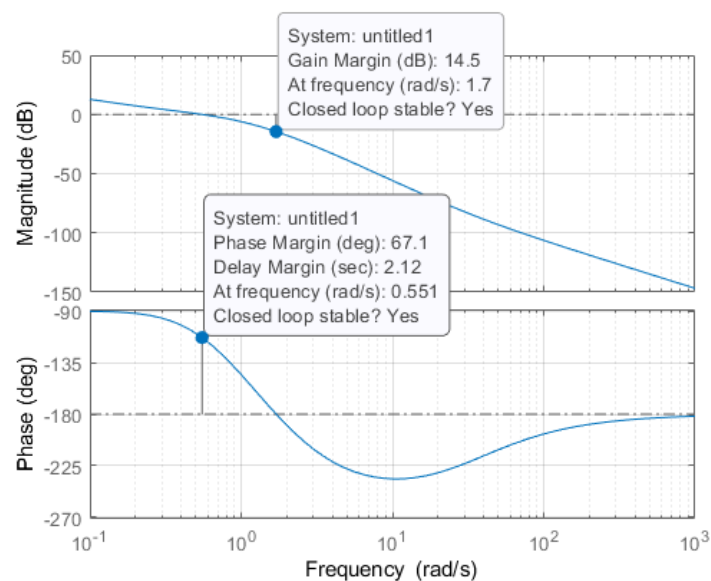
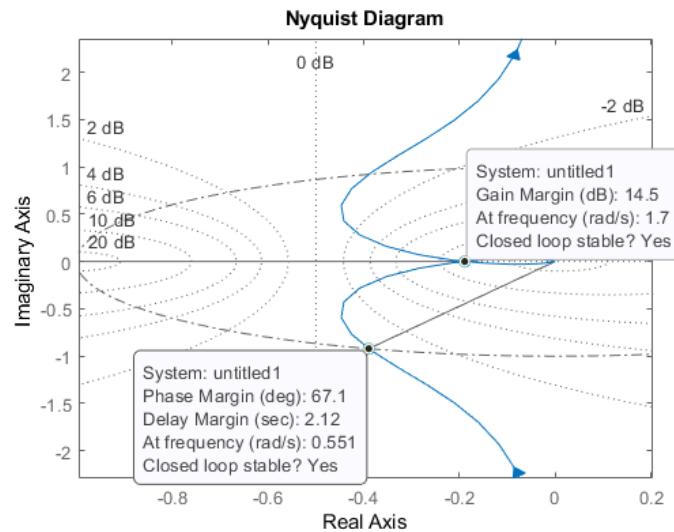


Diagramme de Bode :



La lecture du diagramme de Bode montre : $MG = 14.5 \text{ dB}$ et $MP = 67.1^\circ$. La marge de gain est mesurée à la fréquence $\omega = 1.7 \text{ rad/s}$ et la marge de phase est mesurée à la fréquence $\omega = 0.55 \text{ rad/s}$.

Diagramme de Nyquist :



L'encerclement à droite de rayon infini n'est pas représenté dans ce graphe.

Étude de stabilité en utilisant le Diagramme de Nyquist :

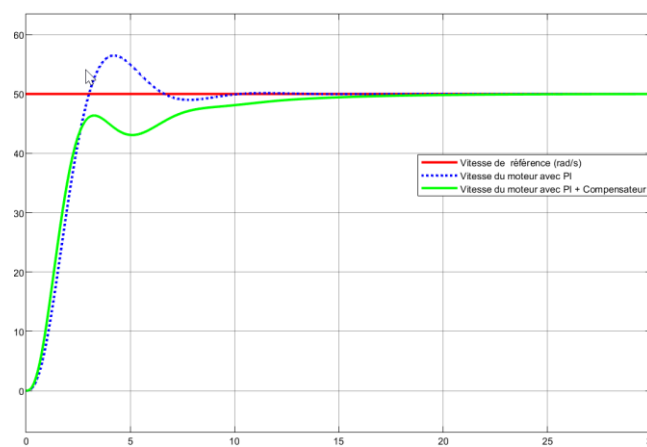
Nous notons que le point critique $(-1,0)$ n'est pas encerclé, ce qui assure la stabilité car il n'y a aucun pôle instable dans la boucle ouverte. En effet :

$P = 0$: Nombre de pôles dans le demi-plan droit.

$N = 0$: Nombre d'encerclements autour du point critique $(-1,0)$ dans le sens anti-horaire

$P = N$, le système est donc stable.

Réponse temporelle avant et après l'ajout du compensateur:

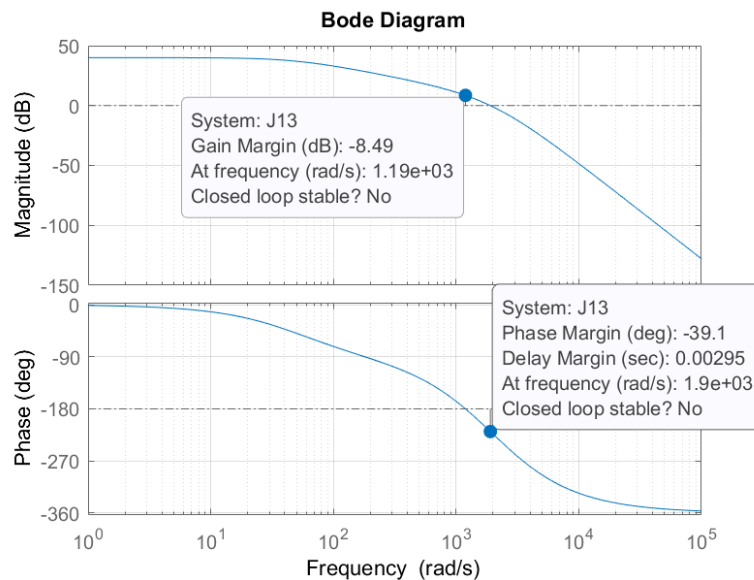


2-2-8 Problème #8 :

Commande d'un système stable et inversible :

Soit un système stable et inversible $P(s)$ et un compensateur $C(s) = P^{-1}(s)J(s)$. Nous introduisons un circuit de phase $J_2(s)$ pour améliorer la performance du système obtenu avec $J(s) = J_1(s)J_3(s) = \frac{k_1}{(s+\omega_1)} \frac{\omega_2^3}{(s+\omega_2)^3}$ avec : $k_1 = 5000, \omega_1 = 50, \omega_2 = 2000$.

Le diagramme de Bode nous permet de lire la marge de gain de 8.49 dB et la marge de phase de $-39,1^\circ$ correspondant à une phase de -218° à la fréquence de 1900 Hz. Étant donné que la marge souhaitée est de 67° , nous aurons donc recours à un circuit d'avance de phase contribuant à une phase supplémentaire de $67^\circ - (-39,1^\circ) = 106,1^\circ$. Un circuit d'avance de phase de $106,1^\circ$ est à éviter, la raison étant qu'il résulterait en un zéro et un pôle instables. Aussi, nous chercherons des solutions alternatives.



Étude avec un correcteur d'avance de phase simple :

$$C_{AP}(s) = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{1 + \frac{s}{z}}{1 + \frac{s}{p}}$$

Tel que :

$$z = \frac{\omega_m}{\sqrt{\gamma}}, \quad p = \sqrt{\gamma}\omega_m, \quad \gamma = \frac{1+\sin\varphi}{1-\sin\varphi}, \quad \omega_m = 1900 \text{ rad/s}, \quad \varphi = 106.1^\circ$$

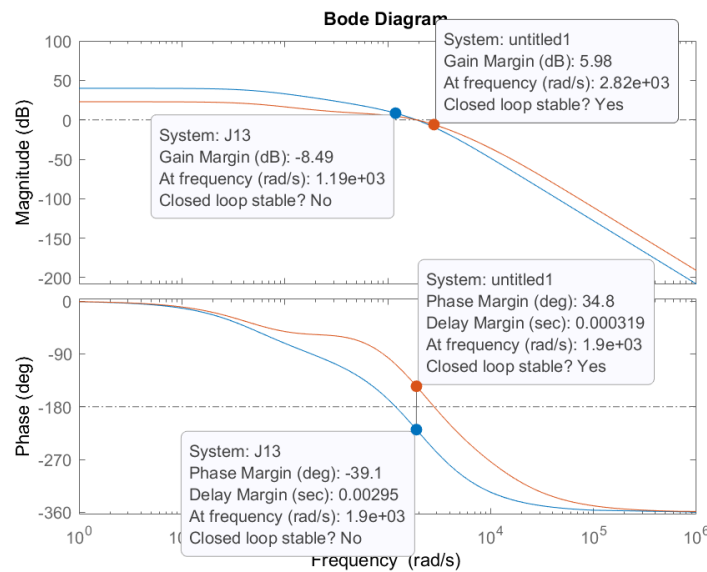
Simulation Matlab :

```
% Circuit de phase ex5
s=tf('s');
k1=5000;
```

```

w1=50;
w2=2000;
J13=(k1/(s+w1))*(w2/(s+w2))^3;
% Compensateur d'avance de phase simple
% FT du compensateur à avance de phase
Phi=1.850; % Phi = MP souhaitée = 67 deg - MP actuelle = -39.1
gamma=(1+sin(Phi))/(1-sin(Phi));
wu=1900; % wu à MP=67 deg
zz=wu/sqrt(gamma); % zero du compensateur
pp=sqrt(gamma)*wu; % pole du compensateur
J2=tf([(1/sqrt(gamma))*(1/zz) 1/sqrt(gamma)], [1/pp 1]);
J2=
    0.0005263 s + 0.1405
-----
    7.396e-05 s + 1

```



Étude avec un correcteur d'avance double

Pour le compensateur d'avance double, chacun d'eux contribuant à une phase supplémentaire de $\frac{106.1^\circ}{2} = 53^\circ$

Design du correcteur :

$$C_{double}(s) = C(s)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{\gamma}}\right)^2 \left(\frac{1 + \frac{s}{z}}{1 + \frac{s}{p}}\right)^2$$

Tel que :

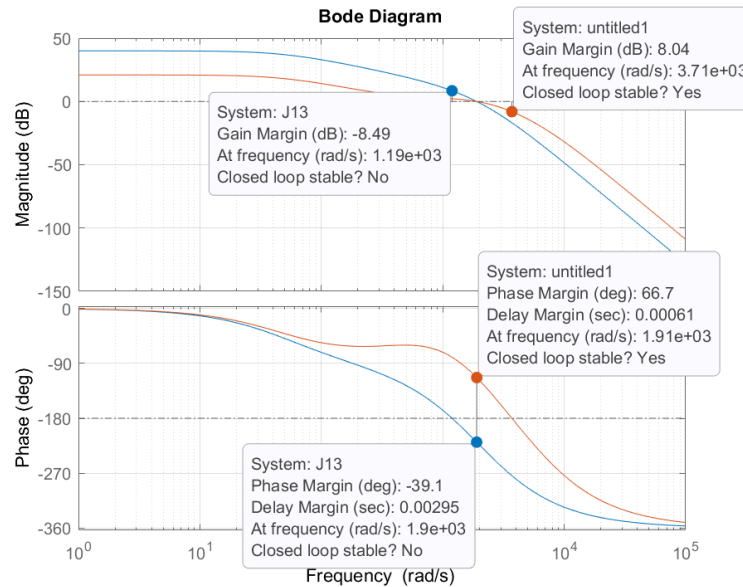
$$z = \frac{\omega_m}{\sqrt{\gamma}}, \quad p = \sqrt{\gamma}\omega_m, \quad \gamma = \frac{1 + \sin\varphi}{1 - \sin\varphi}, \quad \omega_m = 1900 \text{ rad/s}, \quad \varphi = \frac{106.1^\circ}{2}$$

Simulation Matlab :

```
% Compensateur d'avance de phase double
Phi2=1.850/2; % Phi = MP souhaitée = 67 deg - MP actuelle = -39.1
gamma2=(1+sin(Phi2))/(1-sin(Phi2));
wu=1900; % wu à MP=67 deg
zz2=wu/sqrt(gamma2); % zero du compensateur
pp2=sqrt(gamma2)*wu; % pole du compensateur
J22=tf([(1/sqrt(gamma2))*(1/zz2) 1/sqrt(gamma2)], [1/pp2 1]);
J2=J22^2
```

$$2.77\text{e-}07 \text{ s}^2 + 0.0003522 \text{ s} + 0.112$$

$$3.101\text{e-}08 \text{ s}^2 + 0.0003522 \text{ s} + 1$$

**Étude avec un correcteur Lead-Lag :**

Fonction de transfert du correcteur :

$$C_{lead-lag}(s) = \alpha_1 \alpha_2 \left(\frac{s + z_1}{s + p_1} \right) \left(\frac{s + z_2}{s + p_2} \right)$$

Avec : $\alpha_1 = \frac{p_1}{z_1}$; $\alpha_2 = \frac{p_2}{z_2}$

Cahier des charges : MP = 45° à $\omega = 1900 \text{ rad/sec}$

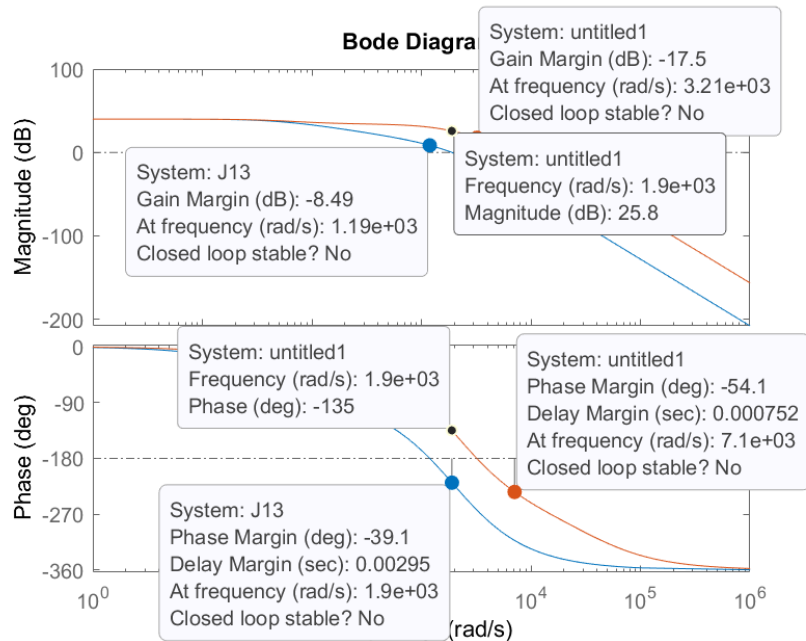
$$\phi_{additionnelle} = 45^\circ - (-39.1^\circ) = 84.1^\circ \text{ à } \omega = 1900 \text{ rad/sec}$$

Design du correcteur lead :

$$\varphi_m = 84.1^\circ \text{ et } \omega_m = 1900 \text{ rad/sec}$$

$$z_2 = \omega_m \frac{1 - \sin(\varphi_m)}{\cos(\varphi_m)} = 97.93, \quad p_2 = \omega_m \frac{1 + \sin(\varphi_m)}{\cos(\varphi_m)} = 36862, \quad \alpha_2 = \frac{p_2}{z_2} = 376.3988$$

Réponse fréquentielle avec le compensateur Lead :

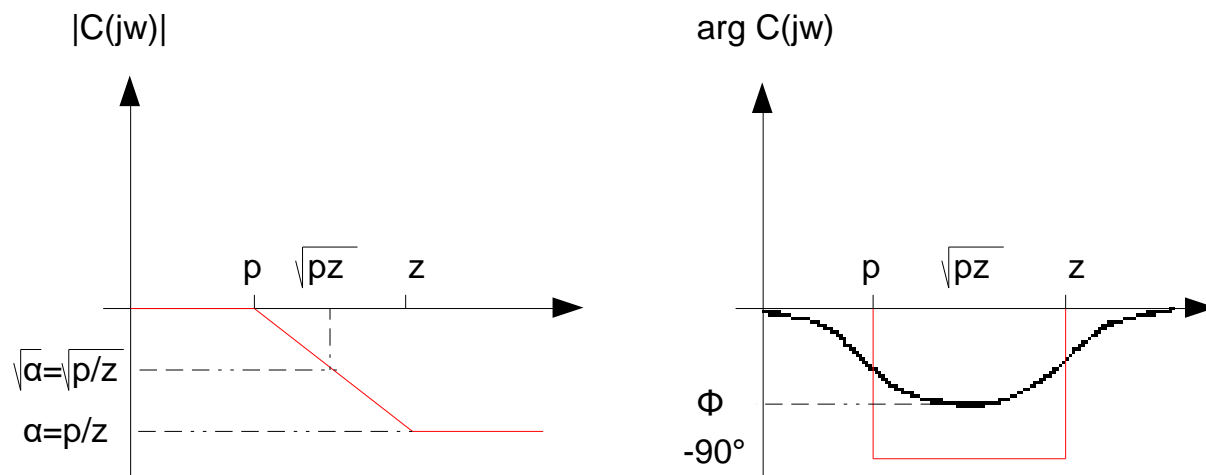


Pour que : $\omega_c = 1900 \text{ rad/sec}$, Il faut atténuer le gain de 25,8 dB

Design du correcteur Lag :

Il faut donc : $\alpha_1 = \frac{p_1}{z_1} = -25.8 \text{ dB}$

$\alpha_1 = \frac{p_1}{z_1} = 0.0513$ à la fréquence : $\omega = 1900 \text{ rad/sec}$



On choisit z_1 1 décade en dessous de la fréquence de coupure : $z_1 = 190$

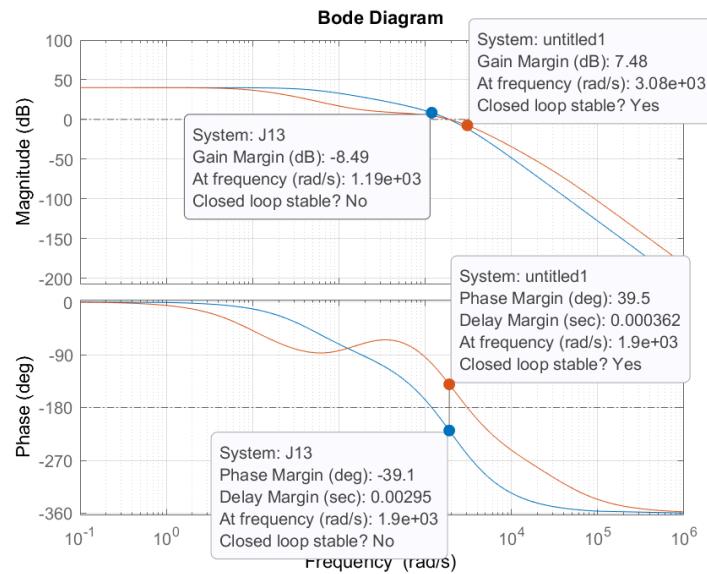
On trouve donc :

$$\alpha_1 = \frac{p_1}{z_1} = 0.0513 \rightarrow p_1 = 9.74$$

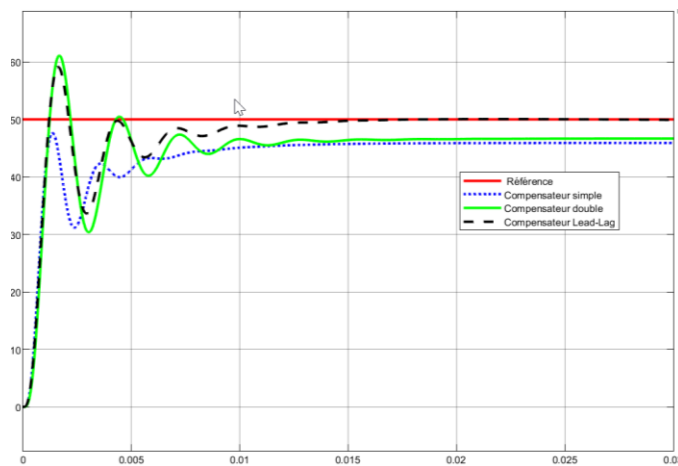
$$C_{lead-lag}(s) =$$

$$\frac{19.3 s^2 + 5558 s + 3.592e05}{s^2 + 3.687e04 s + 3.592e05}$$

Réponse fréquentielle avec le compensateur Lead-Lag :



Réponse indicielle :



La figure montre que les meilleures performances sont atteintes avec le correcteur Lead-Lag. Cependant, avec le circuit d'avance de phase et celui d'avance double, la marge de phase est plus importante. Néanmoins, les circuits de phase peuvent être optimisés au moyen du logiciel GeoGebra qui facilite l'ajustement des pôles et des zéros en jouant sur des curseurs.