CHAPITRE V : MODÈLES D'ÉTAT : COMMANDABILITÉ, OBSERVABILITÉ, SOLUTION DE L'ÉQUATION D'ÉTAT

5-1 Rappels théoriques :

Soit le système : $\dot{x} = Ax + bu \quad , \quad y = Cx + Du$

Tel que : $x{:}\, n \times 1 \quad , \quad y{:}\, p \times 1 \quad , \quad A{:}\, n \times n \quad , \quad B{:}\, n \times m \quad , \quad C{:}\, p \times n \quad , \quad D{:}\, n \times m$

5-1-1 Critères de commandabilité :

- La matrice de commandabilité $\mathbb{C} = (B \quad AB \quad \dots \quad A^{n-1}B)$ à un rang n. On peut aussi exprimer ce critère par : $det\mathbb{C} \neq 0$. Autrement dit, $\mathbb{C}$ est inversible.
- Dans le cas où la matrice A a des valeurs distinctes propres, un système est commandable si la matrice $(M^{-1}B)$ n'a pas de rangées nulles. M est la matrice de similarité.

5-1-2 Critères d'observabilité :

- La matrice d'observabilité $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$ à un rang n. On peut aussi exprimer ce critère par : $det\mathbb{O} \neq 0$. Autrement dit, $\mathbb{O}$ est inversible.
- Dans le cas où la matrice A a des valeurs distinctes propres, un système est observable si la matrice (CM) n'a pas de colonnes nulles. M est la matrice de similarité.

5-1-3 Solution de l'équation d'état

- **Calcul de $\boldsymbol{x(t)}$ en utilisant la matrice de transition :**

$$\phi(t) = \mathcal{L}^{-1}(sI - A)^{-1}$$

$$x(t) = \phi(t)x(0) + \int_0^t \phi(t - \tau)Bu(\tau)\, d\tau$$

$$y(t) = Cx(t)$$

- **Calcul de $\boldsymbol{x(t)}$ en utilisant Laplace :**

$$X(s) = (sI - A)^{-1}x(0) + (sI - A)^{-1}BU(s)$$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\big(X(s)\big)$$

$$y(t) = Cx(t)$$

- **Calcul de $\boldsymbol{x(t)}$ en utilisant la matrice de similarité :**

$$x(t) = Mq(t) \qquad \rightarrow \qquad q(0) = M^{-1}x(0)$$

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \qquad \rightarrow \qquad \dot{q}(t) = M^{-1}AMq(t) + M^{-1}Bu(t)$$

Telle que : $M^{-1}AM$ est une matrice diagonale.

On calcul $q(t)$ puis $x(t)$.

$y(t) = Cx(t)$

- **Calcul de $\boldsymbol{x(k)}$ en utilisant la transformée en z :**

Calcul des matrices discrètes à partir des approximations suivantes :

$A_d = I + TA, B_d = TB, C_d = C, D_d = D.$

T est le pas d'échantillonnage qui respecte la condition $AT \ll 1$.

$X(z) = (zI - A_d)^{-1}zx(0) + (zI - A_d)^{-1}B_dU(z)$

$x(k) = \mathcal{Z}^{-1}(X(z))$

$y(k) = C_dx(k)$

5-2 Problèmes

5-2-1 Problème 1 :

En utilisant deux critères de commandabilité, vérifier si les systèmes suivants sont commandables. Pour les systèmes non commandables, vérifier s'ils sont stabilisables.

1- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

2- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$

3- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-11} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

4- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-11} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-11} & \mathbf{5} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

5- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}$

Corrigé :

1- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \mathbf{n = 2}$

Premier critère : Calcul de la matrice de commandabilité $\mathbb{C} = (B \quad AB)$

```
A=[1 1;2 -1]; B=[0;1];
C=[B A*B]
% C =
%      0     1
%      1    -1
rank(C)
% ans = 2
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{C}$ est égal à $2 = n$, le système est donc commandable. Ceci est confirmé du fait que le déterminant de $\mathbb{C}$ n'est pas nul et par conséquent $\mathbb{C}$ est inversible.

```
det(C)
% ans = -1
inv(C)
% ans =
%      1     1
%      1     0
```

Deuxième critère : Calcul de la matrice de similarité M :

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%     0.8069   -0.3437
%     0.5907    0.9391
% V =
%     1.7321         0
%          0   -1.7321
```

Calcul de la matrice $(M^{-1}B)$

```
inv(M)*B
% ans =
%     0.3578
%     0.8398
```

Conclusion : Il n'y a pas de rangée nulle dans la matrice $(M^{-1}B)$, le système est donc commandable.

Remarque : Le système possède une valeur propre positive, donc un état instable qui pourrait être stabilisé avec un retour d'état ou de sortie.

2- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \mathbf{2}$

Premier critère : Calcul de la matrice de commandabilité $\mathbb{C} = (B \quad AB)$

```
A=[1 1;0 -1]; B=[1;0];
C=[B A*B]
% ans =
%      1     1
%      0     0
rank(C)
% ans = 1
```

Conclusion : Le rang de $\mathbb{C}$ est égal à $1 \neq n$, le système n'est pas commandable. En effet, le déterminant de $\mathbb{C}$ est nul et donc $\mathbb{C}$ n'est pas inversible.

Deuxième critère : Calcul de la matrice $(M^{-1}B)$:

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%     1.0000   -0.4472
%          0    0.8944
% V =
%      1     0
%      0    -1
inv(M)*B
% ans =
%     1
%     0
```

Conclusion : La matrice $(M^{-1}B)$ contient une rangée nulle, le système n'est pas commandable.

3- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-11} & \mathbf{-6} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \mathbf{n = 3}$

Premier critère : Calcul de la matrice de commandabilité $\mathbb{C} = (B \quad AB \quad A^2B)$

```
A=[0 1 0;0 0 1;-6 -11 -6]; B=[0;0;1];
C=[B A*B A^2*B]
% C =
%      0     0     1
%      0     1    -6
%      1    -6    25
rank(C)
% ans = 3
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{C}$ est égal à $3 = n$, le système est donc commandable.

Deuxième critère : Calcul de la matrice $(M^{-1}B)$:

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%    -0.5774    0.2182   -0.1048
%     0.5774   -0.4364    0.3145
%    -0.5774    0.8729   -0.9435
% V =
%    -1.0000         0         0
%          0   -2.0000         0
%          0         0   -3.0000
inv(M)*B
% ans =
%    -0.8660
%    -4.5826
%    -4.7697
```

Conclusion : Il n'y a pas de rangée nulle dans la matrice $(M^{-1}B)$, le système est donc commandable.

4- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-11} & \mathbf{6} \\ \mathbf{-6} & \mathbf{-11} & \mathbf{5} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \mathbf{3}$

Premier critère : Calcul de la matrice de commandabilité $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B \end{pmatrix}$

```
A=[0 1 -1;-6 -11 6;-6 -11 5]; B=[0;0;1];
C=[B A*B A^2*B]
% C =
%      0    -1     1
%      0     6   -30
%      1     5   -35
rank(C)
% ans = 3
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{C}$ est égal à $3 = n$, le système est donc commandable.

Deuxième critère : Calcul de la matrice $(M^{-1}B)$:

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%     0.7071   -0.2182   -0.0921
%    -0.0000   -0.4364   -0.5523
%     0.7071   -0.8729   -0.8285
% V =
%    -1.0000         0         0
%          0   -2.0000         0
%          0         0   -3.0000
inv(M)*B
% ans =
%    -2.8284
%   -13.7477
%    10.8628
```

Conclusion : Il n'y a pas de rangée nulle dans la matrice $(M^{-1}B)$, le système est donc commandable.

5- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}, \mathbf{n} = \mathbf{4}$

Premier critère : Calcul de la matrice de commandabilité $\mathbb{C} = \begin{pmatrix} B & AB & A^2B & A^3B \end{pmatrix}$

```
A=[1 1 1 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 5 0]; B=[0;1;0;-2];
C=[B A*B A^2*B A^3*B]
% C =
%      0     1    -1     1
%      1     0     2     0
%      0    -2     0   -10
%     -2     0   -10     0
rank(C)
% ans = 4
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{C}$ est égal à 4$= n$, le système est donc commandable.

Deuxième critère : On calcule la matrice $(M^{-1}B)$:

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%     1.0000   -0.7071    0.1768    0.1768
%          0    0.7071   -0.1768   -0.1768
%          0         0    0.3953   -0.3953
%          0         0    0.8839    0.8839
% V =
%     1.0000         0         0         0
%          0         0         0         0
%          0         0    2.2361         0
%          0         0         0   -2.2361
inv(M)*B
% ans =
%     1.0000
%     0.8485
%    -1.1314
%    -1.1314
```

Conclusion : Il n'y a pas de rangée nulle dans la matrice $(M^{-1}B)$, le système est donc commandable.

Remarque : Le système possède une valeur propre positive, donc un état instable. Comme le système est commandable, la commande stabilisera cet état.

5-2-2 Problème 2 :

En utilisant deux critères d'observabilité, vérifier si les systèmes suivants sont observables. Pour les systèmes non observables vérifier s'ils sont détectables.

1- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{1})$

2- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = (\mathbf{3} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{1})$

3- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{40} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1})$

4- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-48} & \mathbf{-34} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = (\mathbf{24} \quad \mathbf{17} \quad \mathbf{3})$

5- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0})$

Corrigé :

1- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{2} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{1})$, $\boldsymbol{n} = \mathbf{2}$

Premier critère : Calcul de la matrice d'observabilité $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \end{pmatrix}$

```
A=[1 1;2 -1]; B=[0;1];C=[0 1]
O=[C; C*A]
% O =
%      0     1
%      2    -1
rank(O)
% ans = 2
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{C}$ est égal à $2 = n$, le système est donc observable.

Deuxième critère : Calcul de la matrice (CM) :

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%     0.8069   -0.3437
%     0.5907    0.9391
% V =
%     1.7321         0
%          0   -1.7321
C*M
% ans =
%     0.5907    0.9391
```

Conclusion : Il n'y a pas de colonne nulle dans la matrice (CM), le système est donc observable.

2- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = (\mathbf{3} \quad \mathbf{4} \quad \mathbf{1})$, $\mathbf{n} = \mathbf{3}$

Premier critère : Calcul de la matrice d'observabilité $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}$

```
A=[0 1 0;0 0 1;0 -2 -3]; B=[0;0;1];C=[3 4 1]
O=[C; C*A; C*A^2]
% O =
%      3     4     1
%      0     1     1
%      0    -2    -2
rank(O)
% ans = 2
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{O}$ est égal à $2 \neq n$, le système n'est pas observable.

Deuxième critère : Calcul de la matrice (CM) :

```
[M,V]=eig(A)
```

```
% M =
%     1.0000   -0.5774    0.2182
%          0    0.5774   -0.4364
%          0   -0.5774    0.8729
% V =
%      0     0     0
%      0    -1     0
%      0     0    -2
C*M
% ans =
%     3.0000         0   -0.2182
```

Conclusion : La matrice (CM) contient une colonne nulle, le système n'est donc pas observable.

3- $\begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{-4} \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{40} \\ \mathbf{10} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = (\mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{1})$, $\mathbf{n = 3}$

Premier critère : Calcul de la matrice d'observabilité $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}$

```
A=[0 0 0;1 0 -3;0 1 -4]; B=[40;10;1];C=[0 0 1]
O=[C; C*A; C*A^2]
% O =
%      0     0     1
%      0     1    -4
%      1    -4    13
rank(O)
% ans = 3
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{C}$ est égal à $3 = n$, le système est donc observable.

Deuxième critère : Calcul de la matrice (CM) :

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%      0         0    0.5883
%    -0.7071   -0.9487    0.7845
%    -0.7071   -0.3162    0.1961
% V =
%     -3     0     0
%      0    -1     0
%      0     0     0
C*M
% ans =
%    -0.7071   -0.3162    0.1961
```

Conclusion : Il n'y a pas de colonne nulle dans la matrice (CM), le système est donc observable.

4- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-48} & \mathbf{-34} & \mathbf{-9} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (\mathbf{24} \quad \mathbf{17} \quad \mathbf{3}), \mathbf{n} = \mathbf{3}$

Premier critère : Calcul de la matrice d'observabilité $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{pmatrix}$

```
A=[0 2 0;4 0 1;-48 -34 -9]; B=[1;0;0];C=[24 17 3]
O=[C; C*A; C*A^2]
% O =
%      24     17      3
%     -76    -54    -10
%     264    188     36
rank(O)
% ans = 2
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{C}$ est égal à $2 \neq n$, le système n'est donc pas observable.

Deuxième critère : Calcul de la matrice (CM) :

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%      0.4082     0.5345     0.2182
%     -0.4082    -0.8018    -0.4364
%     -0.8165     0.2673     0.8729
% V =
%     -2.0000          0          0
%           0    -3.0000          0
%           0          0    -4.0000
C*M
% ans =
%      0.4082    -0.0000     0.4364
```

Conclusion : La matrice (CM) contient une colonne nulle, le système n'est donc pas observable.

5- $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{5} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{-2} \end{pmatrix}, \mathbf{C} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}), \mathbf{n} = \mathbf{4}$

Premier critère : Calcul de la matrice d'observabilité $\mathbb{O} = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ CA^3 \end{pmatrix}$

```
A=[0 1 0 0;0 0 -1 0;0 0 0 1;0 0 5 0]; B=[0;1;0;-2];C=[1 0 0 0]
O=[C; C*A; C*A^2; C*A^3]
% O =
%       1      0      0      0
%       0      1      0      0
%       0      0     -1      0
%       0      0      0     -1
rank(O)
% ans = 4
```

Conclusion : Le rang de la matrice $\mathbb{C}$ est égal à $4 = n$, le système est donc observable.

Deuxième critère : Calcul de la matrice (CM) :

```
[M,V]=eig(A)
% M =
%     1.0000   -1.0000   -0.0801    0.0801
%          0    0.0000   -0.1790   -0.1790
%          0         0    0.4003   -0.4003
%          0         0    0.8951    0.8951
% V =
%          0         0         0         0
%          0         0         0         0
%          0         0    2.2361         0
%          0         0         0   -2.2361
C*M
% ans =
%     1.0000   -1.0000   -0.0801    0.0801
```

Conclusion : Il n'y a pas de colonne nulle dans la matrice (CM), le système est donc observable.

5-2-3 Problème 3 :

Soit les modèles d'état suivants :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, C = (1 \quad 0), x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, C = (2 \quad 1), x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Pour chaque système :

a) Pour une entrée échelon unitaire, calculer $x(t)$ en utilisant :

La matrice de transition.

La transformation inverse de Laplace.

La matrice de similarité.

b) Calculer $y(t)$.
c) Trouver les matrices discrètes pour T=0.1s.
d) Calculer $X(z)$.
e) Calculer $x(kT)$ et $y(kT)$.

Corrigé :

1- $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ \mathbf{-2} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}, \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{C} = (\mathbf{1} \quad \mathbf{0}), \boldsymbol{x_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u(t)}$

a) Calcul de $x(t)$ en utilisant la matrice de transition :

```
A=[0 1;-2 -3]; B=[0;1];C=[1 0];x0=[1;1];u=1;
syms s
```

```
s*eye(2)-A
% ans =
% [ s,    -1]
% [ 2, s + 3]
inv(s*eye(2)-A)
% ans =
% [ (s + 3)/(s^2 + 3*s + 2)  ,     1/(s^2 + 3*s + 2)]
% [      -2/(s^2 + 3*s + 2)    ,   s/(s^2 + 3*s + 2)]
phi=ilaplace(inv(s*eye(2)-A))
% phi =  [   2*exp(-t) - exp(-2*t)      ,    exp(-t) - exp(-2*t)]
%        [ 2*exp(-2*t) - 2*exp(-t)    ,    2*exp(-2*t) - exp(-t)]
phi_tau=ilaplace(inv(s*eye(2)-A),t-tau)
% phi_tau = [2*exp(tau - t) - exp(2*tau - 2*t)    ,     exp(tau - t) -
exp(2*tau - 2*t)]
%            [2*exp(2*tau-2*t) - 2*exp(tau - t)   ,     2*exp(2*tau - 2*t) -
exp(tau - t)]
X=phi*x0+int(phi_tau*B*u,tau,0,t)
% x =    2*exp(-t) - (3*exp(-2*t))/2 + 1/2
%         -exp(-2*t)*(2*exp(t) - 3)
y=C*x
% y = 2*exp(-t) - (3*exp(-2*t))/2 + 1/2
```

b) Calcul de $x(t)$ en utilisant la transformation inverse de Laplace :

```
A=[0 1;-2 -3]; B=[0;1];C=[1 0];x0=[1;1];u=1;
syms s
U=1/s;
s*eye(2)-A;
inv(s*eye(2)-A)
% ans = [ (s + 3)/(s^2 + 3*s + 2)      ,     1/(s^2 + 3*s + 2)]
%       [      -2/(s^2 + 3*s + 2)       ,    s/(s^2 + 3*s + 2)]
X=inv(s*eye(2)-A)*x0+inv(s*eye(2)-A)*B*U
% X =
%  1/(s^2 + 3*s + 2) + (s + 3)/(s^2 + 3*s + 2) + 1/(s*(s^2 + 3*s + 2))
%  s/(s^2 + 3*s + 2) - 1/(s^2 + 3*s + 2)
x=ilaplace(X)
% x =
%   2*exp(-t) - (3*exp(-2*t))/2 + 1/2
%   3*exp(-2*t) - 2*exp(-t)
y=C*x
% y = 2*exp(-t) - (3*exp(-2*t))/2 + 1/2
```

c) Calcul de $x(t)$ en utilisant la matrice de similarité :

```
A=[0 1;-2 -3]; B=[0;1];C=[1 0];x0=[1;1];u=1;
[M,V]=eig(A);
inv(M)*A*M
% ans =
%    -1.0000      -0.0000
%          0      -2.0000
inv(M)*B
% ans =
%     1.4142
%     2.2361
C*M
% ans =
```

```
%      0.7071   -0.4472
q0=inv(M)*x0
% q0 =       4.2426
%            4.4721
syms t
q=[q0(1)*exp(S(1,1)*t)      ;      q0(2)*exp(S(2,2)*t)]+inv(M)*B*u]
% q =   2^(1/2) + 3*2^(1/2)*exp(-t)
%       5^(1/2) + 2*5^(1/2)*exp(-2*t)
x=M*q
% x =     3*exp(-t)-2*exp(-2*t)
%         4*exp(-2*t) - 3*exp(-t) + 1
y = C*M*q
% y =   3*exp(-t)-2*exp(-2*t)
```

d) Calcul des matrices discrètes (T=0.1) :

```
A=[0 1;-2 -3]; B=[0;1];C=[1 0];x0=[1;1];u=1;
T=0.1;
```

$$AT = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} 0.1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 \\ -0.2 & -0.3 \end{pmatrix} \ll 1$$

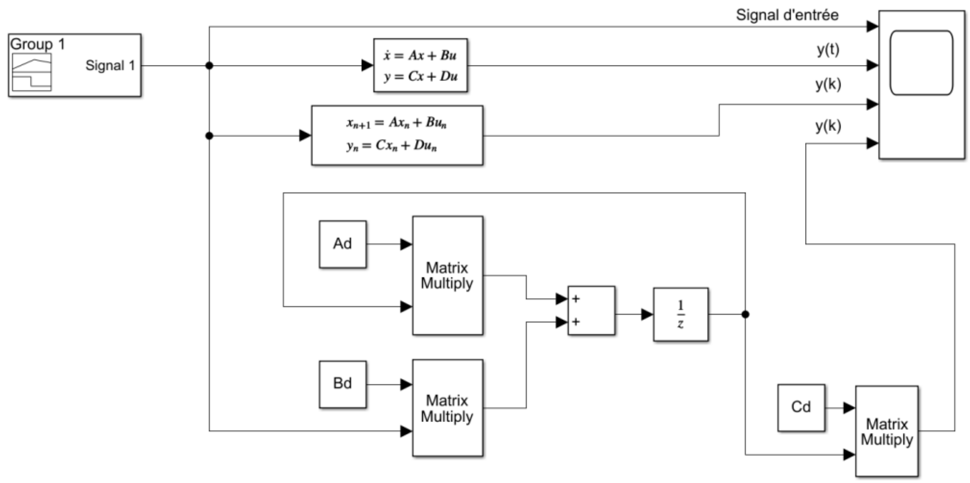
$AT \ll 1$, la matrice discrète peut être calculée de la façon suivante :

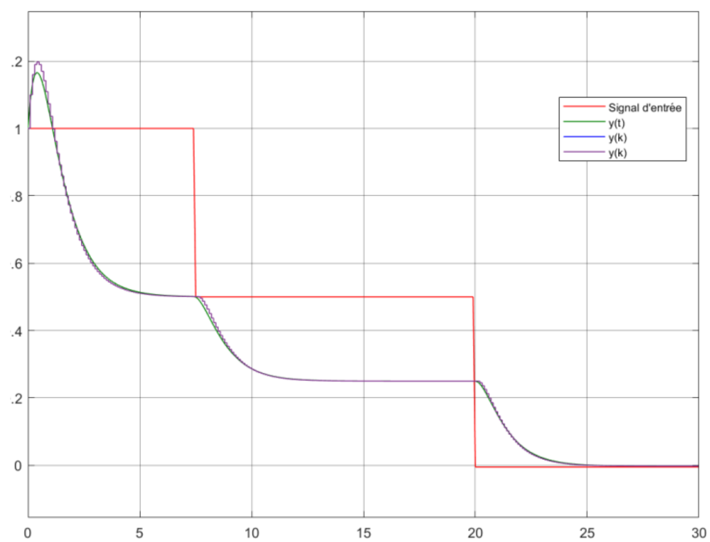
```
Ad=eye(2)+T*A
Bd=T*B
Cd=C
% Ad =
%      1.0000    0.1000
%     -0.2000    0.7000
% Bd =
%      0
%      0.1000
```

e) Calcul de $x(k)$ en utilisant la transformée en z :

```
syms z
Ud=z/z-1;
z*eye(2)-Ad;
inv(z*eye(2)-Ad)
% ans = [  (5*(10*z - 7))/(50*z^2 - 85*z + 36) , 5/(50*z^2 - 85*z + 36)]
%       [ -10/(50*z^2 - 85*z + 36)        , (50*(z - 1))/(50*z^2 - 85*z + 36)]
Xd=inv(z*eye(2)-A)*z*x0+inv(z*eye(2)-Ad)*Bd*Ud
% Xd =
%   (50*z^2 - 30*z + 2)/(50*z^2 - 85*z + 36)
%   -(10*(- 5*z^2 + 4*z + 2))/(50*z^2 - 85*z + 36)
xd=iztrans(Xd)
% xd =
%    (31*(9/10)^n)/9 - (5*(4/5)^n)/2 + 1/18
%     5*(4/5)^n - (31*(9/10)^n)/9 - 5/9
yd=Cd*xd
% yd =
%   (31*(9/10)^n)/9 - (5*(4/5)^n)/2 + 1/18
```

f) Réponse indicielle :





2- $A = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C = (2 \quad 1)$, $x_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $u = 5u(t)$

a) Calcul de $x(t)$ en utilisant la matrice de transition :

```
A=[-2 0;1 -1]; B=[1;0];C=[2 1];x0=[2;3];u=5;
syms s t tau
s*eye(2)-A
inv(s*eye(2)-A)
phi_tau=ilaplace(inv(s*eye(2)-A),t-tau)
phi=ilaplace(inv(s*eye(2)-A),t)
int(phi_tau*B*u,tau,0,t)
x=phi*x0+int(phi_tau*B*u,tau,0,t)
% x =
%  5/2 - exp(-2*t)/2
%  exp(-2*t)/2 + 5/2
y=C*x
% y =
% 15/2 - exp(-2*t)/2
```

b) Calcul de $x(t)$ en utilisant la transformation inverse de Laplace :

```
A=[-2 0;1 -1]; B=[1;0];C=[2 1];x0=[2;3];u=5;
syms s
U=5/s;
s*eye(2)-A;
inv(s*eye(2)-A)
X=inv(s*eye(2)-A)*x0+inv(s*eye(2)-A)*B*U
x=ilaplace(X)
% x =
%  5/2 - exp(-2*t)/2
%  exp(-2*t)/2 + 5/2
y=C*x
% y =
%  15/2 - exp(-2*t)/2
```

c) Calcul de $x(t)$ en utilisant la matrice de similarité :

```
A=[-2 0;1 -1]; B=[1;0];C=[2 1];x0=[2;3];u=5;
[M,V]=eig(A);
S=inv(M)*A*M
% M =
%           0    0.7071
%      1.0000   -0.7071
% V =
%     -1     0
%      0    -2
inv(M)*B
C*M
q0=inv(M)*x0
% q0 =
%     5.0000
%     2.8284
syms t
q=[q0(1)*exp(S(1,1)*t);q0(2)*exp(S(2,2)*t)]+inv(M)*B*u
% q =
%   5*exp(-t) + 5
%   5*2^(1/2) + 2*2^(1/2)*exp(-2*t)
x=M*q
% x =
%   2*exp(-2*t) + 5
%   5*exp(-t)-2*exp(-2*t)
y=C*M*q
% y=
%   5*exp(-t) + 2*exp(-2*t) + 10
```

d) Calcul des matrices discrètes (T=0.1) :

```
A=[-2 0;1 -1]; B=[1;0];C=[2 1];x0=[2;3];u=5;
T=0.1;
```

$$AT = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} 0.1 = \begin{pmatrix} -0.2 & 0 \\ 0.1 & -0.1 \end{pmatrix} \ll 1$$

$AT \ll 1$, la matrice discrète peut être calculée de la façon suivante :

```
Ad=eye(2)+T*A
Bd=T*B
```

```
Cd=C
% Ad =
%     0.8000         0
%     0.1000    0.9000
% Bd =
%          0.1000
%          0
```

e) Calcul de $x(k)$ en utilisant la transformée en z :

```
syms z
Ud=5*z/z-1;
z*eye(2)-Ad;
inv(z*eye(2)-Ad)
Xd=inv(z*eye(2)-Ad)*z*xd0+inv(z*eye(2)-Ad)*Bd*Ud
% Xd =
%   (2*(5*z + 1))/(5*z - 4)
%   (2*(75*z^2 - 55*z + 1))/(50*z^2 - 85*z + 36)
xd=iztrans(Xd)
% xd =
%  (5*(4/5)^n)/2 - 1/2
%  (49*(9/10)^n)/9 - (5*(4/5)^n)/2 + 1/18
yd=Cd*xd
% yd=
%    (5*(4/5)^n)/2 + (49*(9/10)^n)/9 - 17/18
```

f) Réponse indicielle :