Devoir #1 (10%)

À faire par équipe de 2 MAX et à remettre en UN seul fichier PDF au plus tard le 21 octobre à 23h55

Problème #1 (15 points):

Soit le système décrit par l'équation de différence suivante :

$$y(k+3) - 3y(k+2) - 13y(k+1) + 15y(k) = u(k)$$

Les conditions initiales sont : $y(0) = 0, y(1) = -1, y(2) = 2$

a) (5 points) Trouver la fonction de transfert $G(z)$ de ce système.
b) (10 points) Résoudre l'équation de différence lorsque l'entrée $u(k)$ est un échelon.

Corrigé :

a) (5 points) Trouver la fonction de transfert $G(z)$ de ce système.

```
clc; clear;
syms z Z
% Fonction de transfert Gz - Conditions initiales nulles
yn0=0;
yn1=0;
yn2=0;
yn3=z^3*Z-z^3*yn0-z^2*yn1-z*yn2;
yn2=z^2*Z-z^2*yn0-z*yn1;
yn1=z*Z-z*yn0;
Gz=simplify(Z/(yn3-3*yn2-13*yn1+15*Z))
```

b) (10 points) Résoudre l'équation de différence lorsque l'entrée $u(k)$ est un échelon.

```
% Calcul de Y(z) - Conditions initiales non nulles
yn0=0;
yn1=-1;
yn2=2;
Yz=solve(yn3-3*yn2-13*yn1+15*Z==z/(z-1),Z)
% Calcul de y(k)
yn=iztrans(Yz)
% Solution
Gz = -1/(- z^3 + 3*z^2 + 13*z - 15)
Yz = -z/(- z^4 + 4*z^3 + 10*z^2 - 28*z + 15)
yn = 5^n/128 - (-3)^n/128 - n/16
```

Problème #2 (10 points):

Soit le système décrit par la transformée en s suivante:

$$G(s) = \frac{(5s-4)}{(s-1)(s-0.5)}$$

a) (5 points) Déduire la fonction de transfert de la boucle fermée à retour unitaire $T(s)$.
b) (5 points) Calculer l'équation différentielle régissant le système en boucle fermée.

Corrigé :

a) (5 points) Déduire la fonction de transfert de la boucle fermée à retour unitaire $T(s)$.

```
clc; clear;
syms s Ys U
Gs=(5*s-4)/((s-1)*(s-0.5));
% Boucle fermée
T=simplify(Gs/(1+Gs))
```

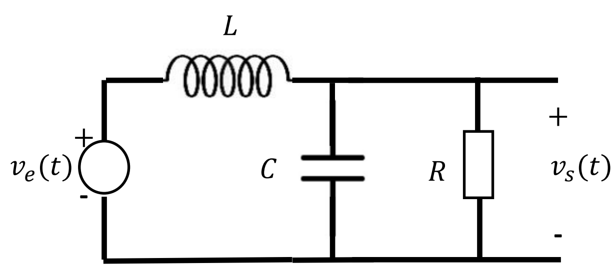
b) (5 points) Calculer l'équation différentielle régissant le système en boucle fermée.

```
% Équation différentielle
expand((2*s^2 + 7*s - 7)*Y==(10*s-8)*U)

% Solution
% T = (10*s - 8)/(2*s^2 + 7*s - 7)
% 2*ydot2 + 7*ydot - 7*y = 10*udot - 8*u
```

Problème #3 (20 points):

Soit le système décrit par le circuit électrique suivant:



a) (10 points) Modéliser le système en utilisant préférablement la méthode de Lagrange.
b) (5 points) Donner la représentation d'état du système avec comme sortie $v_s(t)$.
c) (5 points) Déduire la représentation d'état discrète pour un pas d'échantillonnage $T = 0.1s$.

Corrigé :

a) (10 points) Modéliser le système en utilisant préférablement la méthode de Lagrange.

$$v_L = L\frac{di_1}{dt} = L\ddot{q}_1 \quad , \quad i_C = C\frac{dv_c}{dt} = \frac{\dot{q}_i}{C_i} \quad , \quad v_R = R(i_1 - i_2) = R(\dot{q}_1 - \dot{q}_2)$$

Tel que :

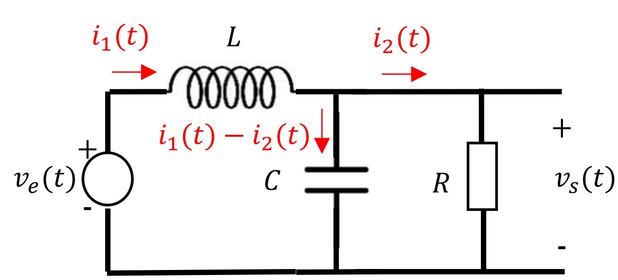
v_c : Tension aux bornes du condensateur en V.

i_i : Courant en A.

q_i : Quantité de charge en C.

Modélisation par la méthode de Lagrange :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U}{\partial q_i} = Q$$

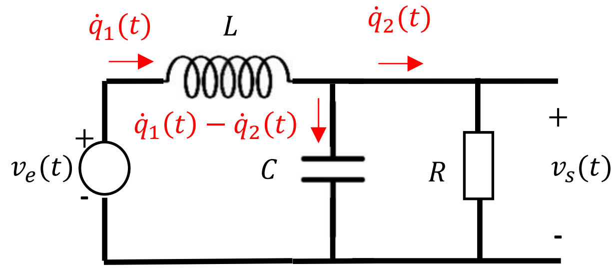


$Q = v_e$

Choix des variables généralisées:

$\dot{q}_1 = i_1, \dot{q}_2 = i_2$

Remarque : On peut choisir d'autres variables généralisées. La représentation d'état n'est pas unique.



$$T = \frac{1}{2}L{i_1}^2 = \frac{1}{2}L{\dot{q}_1}^2$$

$$U = \frac{1}{2}C{v_c}^2 = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\frac{(q_1 - q_2)^2}{C}$$

$$D = \frac{1}{2}R{i_2}^2 = \frac{1}{2}R{\dot{q}_2}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = L\ddot{q}_1 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial q_1} = \frac{1}{C}(q_1 - q_2) \quad , \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_1} = 0$$

$$L\ddot{q}_1 + \frac{1}{C}(q_1 - q_2) = v_e \quad \rightarrow \quad \ddot{q}_1 = -\frac{1}{LC}(q_1 - q_2) + \frac{1}{L}v_e$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = 0 \quad , \quad \frac{\partial T}{\partial q_2} = 0 \quad , \quad \frac{\partial U}{\partial q_2} = -\frac{1}{C}(q_1 - q_2) \quad , \quad \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_2} = R\dot{q}_2$$

$$-\frac{1}{C}(q_1 - q_2) + R\dot{q}_2 = 0 \quad \rightarrow \quad \dot{q}_2 = \frac{1}{RC}(q_1 - q_2)$$

b) (5 points) Donner la représentation d'état du système avec comme sortie $v_s(t)$.

Choix des états :

$$x_1 = i_1 = \dot{q}_1 \rightarrow \dot{x}_1 = \ddot{q}_1 \quad , \quad x_2 = v_c = \frac{q_1 - q_2}{C} \rightarrow \dot{x}_2 = \dot{v}_c$$

D'où :

$$\ddot{q}_1 = -\frac{1}{LC}(q_1 - q_2) + \frac{1}{L}v_e \quad \rightarrow \quad \dot{x}_1 = -\frac{1}{L}x_2 + \frac{1}{L}v_e$$

$$\dot{q}_2 = \frac{1}{RC}(q_1 - q_2) \quad \rightarrow \quad \dot{q}_1 - C\dot{v}_c = \frac{1}{R}v_c \quad \rightarrow \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{C}x_1 - \frac{1}{RC}x_2$$

Et :

$$y(t) = v_s(t) = v_c(t) = x_2$$

La représentation d'état continue:

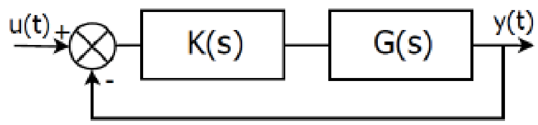
$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{pmatrix} v_2(t) \\ y(t) = (0 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \end{cases}$$

c) (5 points) Déduire la représentation d'état discrète pour un pas d'échantillonnage $T = 0.1s$.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{T}{L} \\ \frac{T}{C} & 1-\frac{T}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{T}{L} \\ 0 \end{pmatrix} v_2(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix} \end{cases}$$

Problème #4 (35 points):

Soit le système décrit par le schéma bloc suivant :



Avec :

$$K(s) = K_p + \frac{K_i}{s}, G(s) = \frac{1}{(s+1)}$$

a) (5 points) Déterminer les gains K_p et K_i qui stabilisent le système en boucle fermée en utilisant le critère de Routh-Hurwitz.
b) (10 points) Déterminer les gains K_p et K_i pour obtenir des pôles à -5 et -10. Améliorer ces gains en faisant varier K_p et K_i sur GeoGebra de façon à obtenir une meilleure réponse temporelle (utiliser le programme GeoGebra temporel disponible dans Moodle).
c) (5 points) Tracer les diagrammes de Bode, de Nyquist et de Nichols. Vérifier sur chacun d'eux la marge de gain et la marge de phase.
d) (5 points) Vérifier la stabilité en utilisant le critère de Nyquist.
e) (10 points) Représenter ce système de rétroaction par des variables d'état. Étudier sa stabilité (valeurs propres négatives).

Corrigé :

a) (5 points) Déterminer les gains K_p et K_i qui stabilisent le système en boucle fermée.

$$K(s)G(s) = \frac{K_p s + K_i}{s(s+1)}$$

$$T = \frac{K(s)G(s)}{1+K(s)G(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^2 + (K_p+1)s + K_i}$$

s^2	1	K_i
s^1	$K_p + 1$	0
s	K_i	0

Stabilité : $K_p > -1$ et $K_i > 0$

b) (10 points) Déterminer les gains K_p et K_i pour obtenir des pôles à -5 et -10. Améliorer ces gains en faisant varier K_p et K_i sur GeoGebra de façon à obtenir une meilleure réponse temporelle.

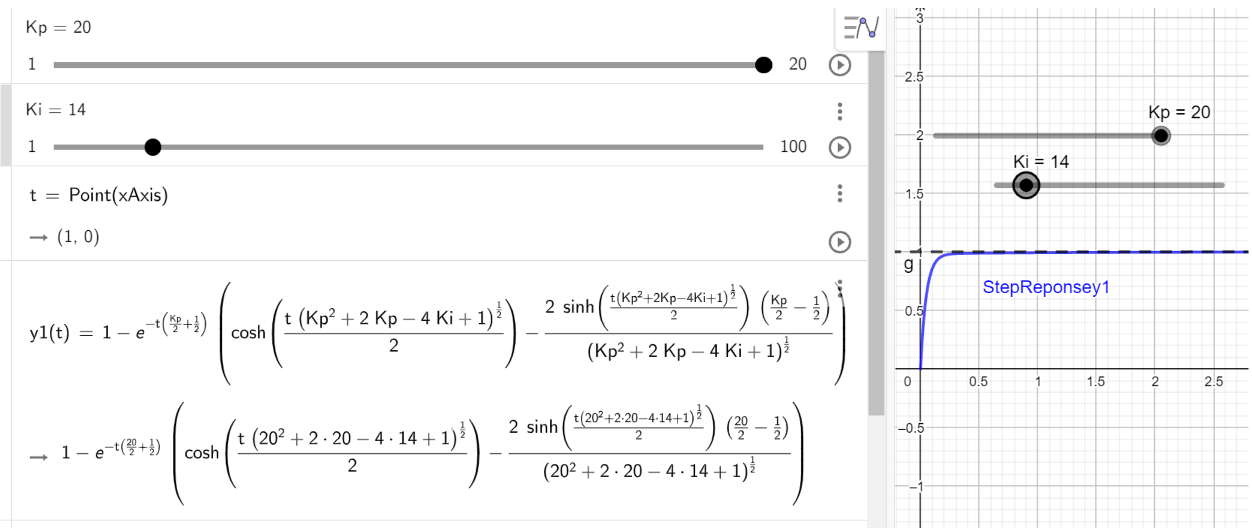
Pour obtenir des pôles à -5 et -10 :

$$T = \frac{K(s)G(s)}{1 + K(s)G(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s^2 + (K_p + 1)s + K_i}$$

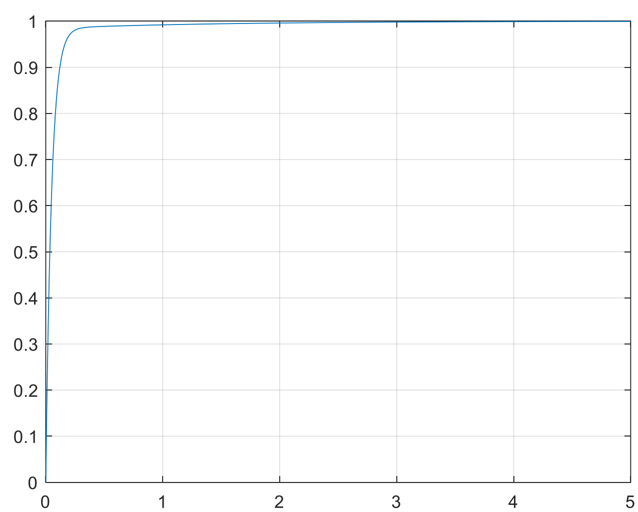
$$s^2 + (K_p + 1)s + K_i = (s+5)(s+10) = s^2 + 15s + 50 \quad \rightarrow \quad K_p = 14 \ , \ K_i = 50$$

Amélioration de la réponse temporelle en utilisant GeoGebra:

$$\rightarrow \quad K_p = 20 \ , \ K_i = 14$$



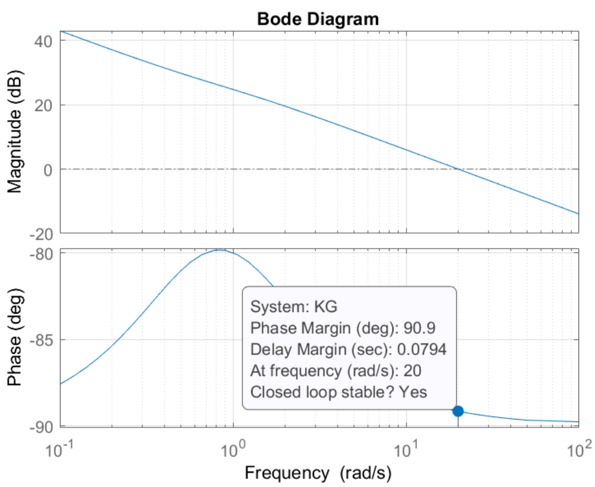

```
syms Kp Ki s t
P=1/(s+1);
C=Kp+(Ki/s);
L=P*C;
T=L/(1+L);
U=1/s;
Y=T*U;
y=ilaplace(Y)
Kp=20;Ki=14;t=0:0.01:5;
y=1 - exp(-t.*(Kp/2 +
1/2)).*(cosh((t.*(Kp^2 + 2.*Kp -
4.*Ki + 1)^(1/2))/2) -
(2.*sinh((t.*(Kp^2 + 2.*Kp - 4.*Ki +
1)^(1/2))/2).*(Kp/2 - 1/2))/(Kp^2 +
2.*Kp - 4.*Ki + 1)^(1/2))
plot(t,y)
grid
```

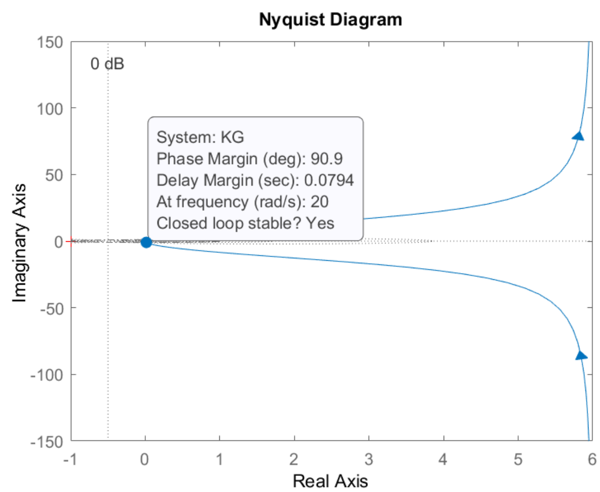


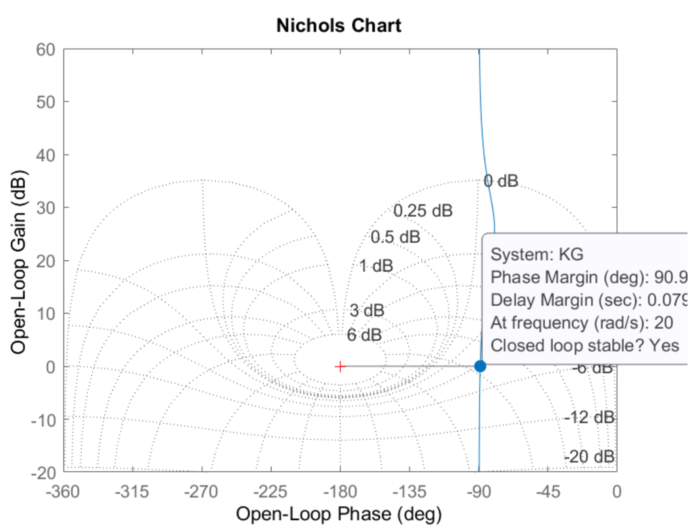
c) (5 points) Tracer les diagrammes de Bode, de Nyquist et de Nichols. Vérifier sur chacun d'eux la marge de gain et la marge de phase.

```
clc; clear;
syms ki kp s
KG=simplify((kp*s+ki)/(s*(s+1)));
```

```
T=simplify(KG/(1+KG));
expand((s+5)*(s+10));
% s^2 + 15*s + 50
% T = % (ki + kp*s)/(ki + s + kp*s + s^2)
kp=20;
ki=14;
s=tf('s')
KG=simplify((kp*s+ki)/(s*(s+1)));
figure
bode(KG) ; grid;
figure
nyquist(KG) ; grid;
figure
nichols(KG) ; grid;
```







d) (5 points) Vérifier la stabilité en utilisant le critère de Nyquist.

Pas de pôles instables en boucle ouverte et pas d'encerclement du point critique, le système est donc stable.

e) (10 points) Représenter ce système de rétroaction par des variables d'état. Étudier sa stabilité.

```
s=tf('s');
P=1/(s+1);
Kp=20;Ki=14;
C=Kp+(Ki/s);
L=P*C;
T=L/(1+L);
% T =
%
%       20 s^3 + 34 s^2 + 14 s
%    ---------------------------
%    s^4 + 22 s^3 + 35 s^2 + 14 s
[A,B,C,D]=tf2ss([20 34 14 0],[1 22 35 14 0])


A =
   -22   -35   -14     0
     1     0     0     0
     0     1     0     0
     0     0     1     0
B =
     1
     0
     0
     0
C =
    20    34    14     0
D =
     0


eig(A)
ans =
         0
  -20.3107
   -1.0000
   -0.6893
```

Les valeurs propres de la matrice A sont négatives, le système est donc stable.

Problème #5 :

Soit un système représenté par la fonction de transfert suivante :

$$G(s) = \frac{Ke^{-1.5s}}{(2s+1)(0.7s+1)(s^2+40s+1600)}$$

a) Calculer le gain statique de $G(s)$.
b) Calculer la fonction de transfert discrète en utilisant un pas d'échantillonnage T approprié. Utiliser le théorème d'échantillonnage.
c) Trouver les valeurs de K qui stabiliseront le système en boucle fermée (libre de choisir la méthode).

Corrigé :

a) Calculer le gain statique K_s de $G(s)$.

$$K_s = G(0) = \frac{K}{1600}$$

b) Calculer la fonction de transfert discrète en utilisant un pas d'échantillonnage T approprié. Utiliser le théorème d'échantillonnage.

Le retard de 1.5s doit être un multiple n de T (n est un entier).

4 pôles : -0.5, -1.43, -20+34.64j, -20-34.64j, les deux premiers pôles (-0.5 et -1.43) sont dominants, donc le pas d'échantillonnage T peut être calculé en considérant seulement les deux termes du premier ordre.

Selon le théorème d'échantillonnage :

$$T_1 < \frac{\pi}{4\omega_{c1}} = \frac{\pi}{4}\tau_1 = \frac{\pi}{4}2 = 1.54s$$

$$T_2 < \frac{\pi}{4\omega_{c2}} = \frac{\pi}{4}\tau_2 = \frac{\pi}{4}0.7 = 0.55s$$

À cause du retard, on prend $T = 1.5s$

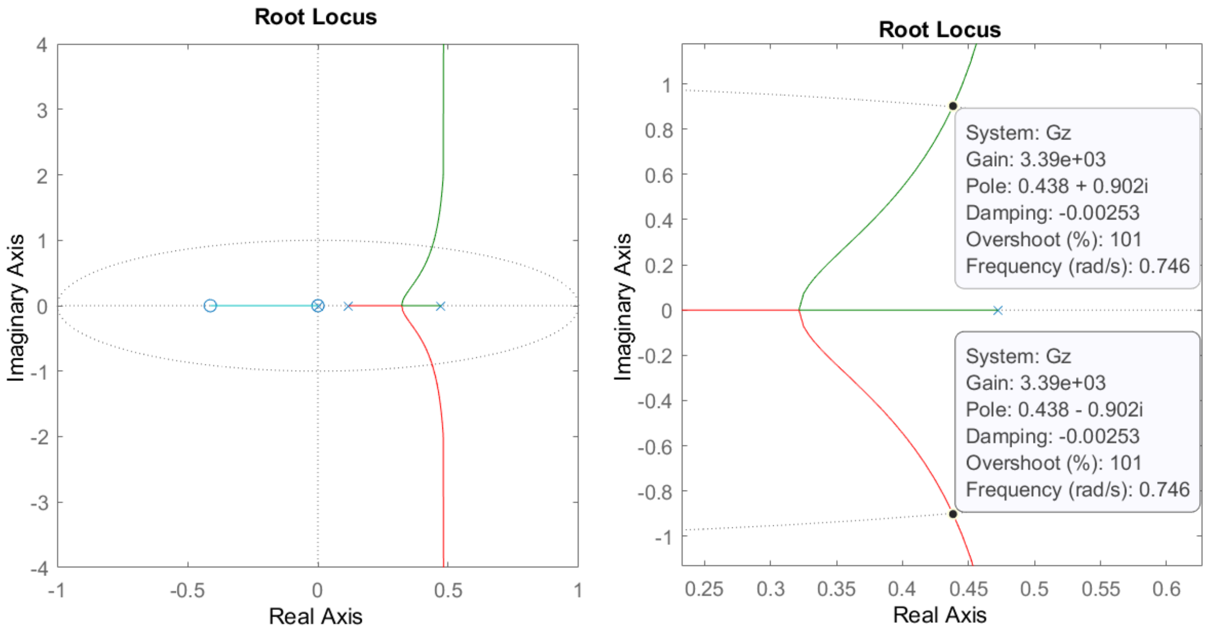
```
syms s
solve(s^2+40*s+1600==0,s);
% ans =
% - 20 - 3^(1/2)*20i
% - 20 + 3^(1/2)*20i
expand((2*s+1)*(0.7*s+1)*(ss^2+40*s+1600));
% ans =
% (7*s^4)/5 + (587*s^3)/10 + 2349*s^2 + 4360*s + 1600
Gdelay = tf([1], [7/5 587/10 2349 4360 1600], 'InputDelay', 1.5);
% G =
%                                      1
%   exp(-1.5*s) * ---------------------------------------------
%                  1.4 s^4 + 58.7 s^3 + 2349 s^2 + 4360 s + 1600
T=1.5;
Gz=c2d(G,T)
% Gz =
%              0.000206 z^3 + 8.507e-05 z^2 - 7.745e-10 z - 1.705e-21
%   z^(-1) * -------------------------------------------------------
%             z^4 - 0.5897 z^3 + 0.05542 z^2 + 1.293e-15 z + 4.852e-28
```

c) Trouver les valeurs de K qui stabiliseront le système en boucle fermée (libre de choisir la méthode).

La méthode peut être par exemple le lieu des racines (rlocus). On applique cette méthode sur le système discret en boucle ouverte G(z). Notez qu'elle peut aussi être appliquée sur le système continu en boucle ouverte G(s).

Un système discret est stable en boucle fermée si tous les modules de ces pôles discrets $|z_i|$ sont inférieurs à 1.

```
figure
rlocus(Gz)
```



Pour que le système discret soit stable en boucle fermée, le lieu de pôles doit être à l'intérieur du cercle unitaire.

D'où, le système est donc stable si : $K < 3.4 \times 10^3$