

# Esfera de Bloch: algumas propriedades

## Valéria S. Motta

Departamento de Ciências Fundamentais, Radiações e Meio Ambiente,  
Instituto Militar de Engenharia - IME,  
Praça General Tibúrcio, 80, Praia Vermelha,  
22290-270, Rio de Janeiro, RJ.  
E-mail: valeria@ime.eb.br.

## **Luiz Mariano Carvalho**

Laboratório de Algoritmos Quânticos, Departamento de Matemática Aplicada,  
Instituto de Matemática e Estatística,  
Universidade do Estado do Rio de Janeiro - UERJ,  
Rua São Francisco de Xavier, 524, sala 6026, bloco D, Maracanã,  
20550-013, Rio de Janeiro, RJ.  
E-mail: luizmc@ime.uerj.br.

## **Nelson Maculan**

Programa de Engenharia de Sistemas e Computação – COPPE,  
Universidade Federal do Rio de Janeiro - UFRJ,  
C. P. 68511, 21945-970, Rio de Janeiro – RJ.  
E-mail: maculan@cos.ufrj.br.

## 1 Introdução

Alguns livros da área de computação quântica dão um tratamento pouco aprofundado à construção da esfera de Bloch [4] e ao estudo de suas propriedades (por exemplo, ([9], p. 15) e ([11], p. 54)). Outros nem mesmo o fazem ([5], [6]). Apresentamos uma descrição matemática detalhada da esfera de Bloch na seção 3. Na seção 2, introduzimos definições preliminares (maiores detalhes em [10]). Esse trabalho é um desenvolvimento de artigos de dois dos autores [2, 3], principalmente através do detalhamento de algumas passagens. Para uma visão mais abrangente sobre computação quântica, sugerimos o livro de Nielsen e Chuang [9].

## 2 Modelos para um q-bit

Em computação clássica, a menor porção de informação disponível é o bit, que pode assumir apenas dois valores, por exemplo, 0 e 1. Em computação quântica, utilizam-se estados quânticos no lugar de estados clássicos. O bit é substituído pelo bit quântico, o *q-bit*, e os valores 0 e 1 de um bit são subs-

tituídos pelos vetores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , representados por

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Essa notação, utilizada em mecânica quântica, é conhecida por notação de Dirac.

A principal diferença entre um bit e um q-bit é que um q-bit genérico  $|\psi\rangle$  é uma combinação linear dos vetores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , ou seja,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix},$$

onde  $\alpha$  e  $\beta$  são números complexos. Note que os vetores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$  pertencem ao espaço vetorial complexo  $\mathbb{C}^2(\mathbb{C})$  e formam uma base ortonormal para esse espaço vetorial. Em computação quântica, essa base é chamada de *base computacional* e o vetor  $|\psi\rangle$  é denominado de *superposição* dos vetores  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , com *amplitudes*  $\alpha$  e  $\beta$ . Em mecânica quântica, vetor é também chamado de *estado*.

A interpretação física de um q-bit é que ele está simultaneamente nos estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ . Isso faz com que a quantidade de informação armazenada no estado  $|\psi\rangle$  possa ser infinita. Entretanto, essa quantidade infinita de informação está no nível quântico. Para torná-la acessível, no nível clássico, precisamos

fazer uma medida. A mecânica quântica diz que o processo de medida altera o estado de um q-bit, fazendo-o assumir o estado  $|0\rangle$ , com probabilidade  $|\alpha|^2$ , ou o estado  $|1\rangle$ , com probabilidade  $|\beta|^2$ . Com apenas duas possibilidades,  $|0\rangle$  ou  $|1\rangle$ , temos então que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Calculando a norma de  $|\psi\rangle$ , obtemos:

$$\| |\psi\rangle \| = \sqrt{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = 1.$$

Como consequência imediata, podemos estabelecer o primeiro modelo para um q-bit.

#### PROPOSIÇÃO 2.1

Um vetor unitário de  $\mathbb{C}^2(\mathbb{C})$  é um modelo matemático para um q-bit.

Um outro modelo é dado na proposição abaixo.

#### PROPOSIÇÃO 2.2

Um vetor unitário de  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  é um modelo matemático para um q-bit.

Prova. Seja  $|\psi\rangle$  um q-bit, pela proposição 2.1, temos que existem  $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ , tais que:

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle, \text{ com } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1.$$

Vamos considerar  $\alpha = a + i^1 b$  e  $\beta = c + i d$ , onde  $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ , então:

$$|\psi\rangle = (a + ib) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + (c + id) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

podemos escrever  $|\psi\rangle$  da seguinte forma:

$$|\psi\rangle = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}$$

Observe que  $|\psi\rangle$  é combinação linear dos vetores da base  $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right\}$ , que é uma base de  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ , pois tomamos os escalares  $a, b, c$  e  $d$  no conjunto dos números reais. Assim verificamos que  $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ . Pela proposição 2.1, sabemos que:

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

substituindo os valores de  $\alpha$  e  $\beta$  na igualdade acima:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

Logo, podemos concluir que um vetor unitário de  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  é um modelo matemático para um q-bit. ■

#### PROPOSIÇÃO 2.3

Um vetor unitário de  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  é um modelo matemático para um q-bit e a esfera unitária  $\mathcal{S}^3$  é o lugar geométrico dos q-bits.

<sup>1</sup>onde  $i$  é a unidade imaginária.

Prova. Considere a seguinte transformação linear entre  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ , dada por:

$$T \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

É fácil ver que  $T$  dada dessa forma é um isomorfismo entre  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  e  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ . Da Proposição 2.2, segue que um q-bit  $|\psi\rangle$  pode ser representado por:

$$|\psi\rangle = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}, \text{ com } a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$$

Aplicando  $T$  à igualdade acima, temos:

$$T(|\psi\rangle) = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vamos usar indistintamente  $T(|\psi\rangle)$  ou  $|\psi\rangle$ , visto que  $T$  é um isomorfismo. Então:

$$|\psi\rangle = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ainda pela proposição 2.2, podemos concluir que  $\| |\psi\rangle \| = 1$ . Assim, concluímos que um q-bit pode ser representado por um vetor unitário de  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$  e  $\mathcal{S}^3$  é o lugar geométrico de todos os q-bits. ■

Poderíamos, também, modelar um q-bit por um quatérnio (veja [1], p. 211 e [8]) ou por um elemento do grupo  $SU(2)$  (veja [7], p. 263). Neste artigo, restringiremos nossa atenção aos modelos de vetores unitários de  $\mathbb{C}^2(\mathbb{C})$  e  $\mathbb{R}^4(\mathbb{R})$ ; essas duas representações e ainda outras estão sendo desenvolvidas em outros trabalhos.

Para introduzirmos a esfera de Bloch, precisamos do seguinte resultado.

#### PROPOSIÇÃO 2.4

Um q-bit pode ser escrito na forma polar

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} [\cos(\xi)|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\xi)|1\rangle], \quad (1)$$

onde  $0 \leq \gamma < 2\pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  e  $0 \leq \xi \leq \pi/2$ .

Prova. ver [2]. ■

### 3 A esfera de Bloch

Em computação quântica, o escalar  $e^{i\gamma}$ , em (1), é denominado *fator de fase global* (veja [9], p. 93). Note que dois q-bits quaisquer  $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$  e  $e^{i\zeta}|\psi\rangle$  têm as mesmas probabilidades de, ao serem medidos, produzirem os estados  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ , pois

$$e^{i\zeta}|\psi\rangle = e^{i\zeta}\alpha|0\rangle + e^{i\zeta}\beta|1\rangle \text{ e}$$

$$|e^{i\zeta}\alpha| = |e^{i\zeta}||\alpha| = |\alpha|.$$

Sabemos, também, que a evolução de um q-bit é descrita, matematicamente, pela aplicação sucessiva de operadores unitários (veja [9], p. 81). Ao aplicarmos uma matriz unitária  $U$  em um q-bit  $|\psi\rangle = e^{i\gamma}[\cos(\xi)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\xi)|1\rangle]$ , obtemos

$$U|\psi\rangle = e^{i\gamma}U[\cos(\xi)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\xi)|1\rangle].$$

Note que o fator de fase global não se modifica pela aplicação de um operador unitário. Usando essas propriedades, podemos desprezar o fator  $e^{i\gamma}$  e, a partir daí, tentar encontrar uma representação geométrica para um q-bit em  $\mathbb{R}^3$ .

#### PROPOSIÇÃO 3.1

Os vetores da forma  $|\psi\rangle_R = \cos(\xi)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\xi)|1\rangle$ , com  $0 \leq \xi \leq \pi/2$  e  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , pertencem a um subespaço vetorial de  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  de dimensão três.

Prova. Reescrevendo o vetor  $|\psi\rangle_R$ , temos

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_R &= \cos(\xi)|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\xi)|1\rangle \\ &= \cos(\xi)|0\rangle + \cos(\varphi)\sin(\xi)|1\rangle \\ &\quad + i\sin(\varphi)\sin(\xi)|1\rangle. \end{aligned}$$

Ou seja, o vetor  $|\psi\rangle_R$  pode ser visto como

$$|\psi\rangle_R = \begin{bmatrix} a \\ c + id \end{bmatrix},$$

com  $a, b, c \in \mathbb{R}$ .

O espaço vetorial real  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$  tem dimensão quatro e uma de suas bases ortonormais é o conjunto

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} i \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right\}.$$

Entretanto, podemos representar o vetor  $|\psi\rangle_R$  utilizando apenas três vetores dessa base, ou seja,

$$\begin{aligned} |\psi\rangle_R &= \cos(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(\varphi)\sin(\xi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &\quad + \sin(\varphi)\sin(\xi) \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Isso conclui a demonstração. ■

O subespaço  $\mathbb{V}$  de  $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ , gerado pelos elementos

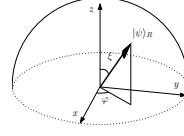


Figura 1: Semi-esfera que é o local geométrico de todos os q-bits  $|\psi\rangle_R$ .

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix} \right\},$$

tem dimensão três. Como esse subespaço está definido sobre o corpo dos reais, ele é isomorfo a  $\mathbb{R}^3$ . Considere, então, um isomorfismo  $\mathcal{T}$  entre  $\mathbb{V}$  e  $\mathbb{R}^3$ , tal que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ i \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \mathcal{T}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Usando esse isomorfismo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(|\psi\rangle_R) &= \cos(\varphi)\sin(\xi) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + \sin(\varphi)\sin(\xi) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \cos(\xi) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Podemos então imaginar que, quando desprezamos o fator de fase global de um q-bit, ele é “projetado” em um subconjunto de  $\mathbb{R}^3$ . Observamos que o lugar geométrico determinado por  $|\psi\rangle_R$  (a partir do isomorfismo, podemos usar indistintamente  $\mathcal{T}(|\psi\rangle_R)$  e  $|\psi\rangle_R$ ) é uma semi-esfera de  $\mathbb{R}^3$ , denominada  $SE^2$ , com centro na origem e raio unitário (ou seja,  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  e  $z \geq 0$ ). Note que  $0 \leq \xi \leq \pi/2$  e  $0 \leq \varphi < 2\pi$ , como representamos na Figura 1.

Para chegarmos à esfera de Bloch, vamos enunciar dois lemas.

LEMA 1 *Sejam  $\overline{SE}^2 = SE^2 - \{(0, 0, 1), (x, y, 0)^2\}$  (a semi-esfera na Figura 1 sem o equador e o pólo norte) e  $Q = (0, \pi/2) \times [0, 2\pi)$ . A função*

$$\begin{aligned} f: Q &\rightarrow \overline{SE}^2 \\ (\xi, \varphi) &\mapsto (\cos(\varphi)\sin(\xi), \sin(\varphi)\sin(\xi), \cos(\xi)) \end{aligned}$$

é uma bijeção.

<sup>2</sup>Com  $x^2 + y^2 = 1$ .

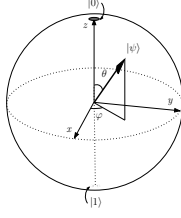


Figura 2: Esfera de Bloch com representação de um q-bit genérico  $|\psi\rangle$  e dos q-bits  $|0\rangle$  e  $|1\rangle$ .

Prova. ver [2]. ■

LEMA 2 *Sejam  $\bar{S}^2 = S^2 - \{(0, 0, 1), (0, 0, -1)\}$  (a esfera na Figura 2 sem os pólos norte e sul) e  $Q = (0, \pi/2) \times [0, 2\pi)$ . A função*

$$g : Q \rightarrow \bar{S}^2 \\ (\xi, \varphi) \mapsto (\cos(\varphi) \sin(2\xi), \sin(\varphi) \sin(2\xi), \cos(2\xi))$$

é uma bijeção.

Prova. ver [2]. ■

### PROPOSIÇÃO 3.2

Sejam  $f$  e  $g$  as funções definidas nos Lemas 1 e 2, respectivamente. A função

$$\mathcal{V} : SE^2 \rightarrow S^2 \\ (x, y, z) \mapsto g(f^{-1}(x, y, z)) \quad ((x, y, z) \in \overline{SE}^2) \\ (0, 0, 1) \mapsto (0, 0, 1) \\ (x, y, 0) \mapsto (0, 0, -1)$$

é uma função sobrejetora e, para  $z \neq 0$ , também é injetora.

Prova. Usando os Lemas 1 e 2 e observando que o domínio da função  $g$  é igual ao contra-domínio da função  $f^{-1}$ , obtemos uma bijeção entre  $\overline{SE}^2$  e  $\bar{S}^2$ , dada por  $g \circ f^{-1}$ , já que a composição de bijeções, nessas condições, é uma bijeção. A função  $\mathcal{V}$ , definida entre  $SE^2$  e  $S^2$ , é, então, uma função sobrejetora e, para  $z \neq 0$ , também é injetora, pela sua própria construção. ■

### COROLÁRIO 3

A função  $\mathcal{V}$  tem uma formulação analítica explícita dada por

$$\mathcal{V} : SE^2 \rightarrow S^2 \\ (x, y, z) \mapsto (2xz, 2yz, 2z^2 - 1)$$

Prova. ver [2]. ■

Cada elemento da imagem de  $\mathcal{V}$  será chamado de *vetor de Bloch*.

### DEFINIÇÃO 3.1 (ESFERA DE BLOCH)

A esfera de Bloch é o lugar geométrico de todos os vetores de Bloch.

### Observações:

1. Os elementos da base computacional  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  são representados na esfera de Bloch pelos pólos norte  $(0, 0, 1)$  e sul  $(0, 0, -1)$ , respectivamente.
2.  $\mathcal{V}$  leva todos os pontos do equador de  $SE^2$  no pólo sul  $(0, 0, -1)$  de  $S^2$ .
3. Fazendo a mudança de variável  $\xi \rightarrow \frac{\theta}{2}$ , na equação (1), chegamos à forma para a representação polar de um q-bit mais comum na literatura da área:

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma} [\cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\frac{\theta}{2})|1\rangle].$$

E, para o vetor de Bloch, teremos:

$$|\psi\rangle_B = \begin{bmatrix} \cos \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix},$$

com

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \theta \leq \pi.$$

4. Cada ponto da esfera de Bloch representa todos os q-bits de formato  $e^{i\gamma} |\psi\rangle$ , para  $|\psi\rangle = [\cos(\theta/2) |0\rangle + e^{i\varphi} \sin(\theta/2) |1\rangle]$  fixado e  $0 \leq \gamma < 2\pi$ .

Na Figura 2, apresentamos uma representação da esfera de Bloch.

## Agradecimentos

Os autores agradecem o apoio da FAPERJ e do CNPq.

## Referências

- [1] S. L. Altmann. *Rotations, Quaternions, and Double Groups*. Oxford Science Publications. Oxford University Press, New York, September 1986.
- [2] L. M. Carvalho, C. Lavor, and V. S. Motta. Descrição matemática da esfera de Bloch. In *Anais do VII Encontro de Modelagem Computacional*, pages 1–9, 2004. CD-ROM.
- [3] L. M. Carvalho, C. Lavor, and V. S. Motta. Portas quânticas e a esfera de Bloch. submetido a TEMA, Agosto 2004.

- [4] R. P. Feynman, F. L. Vernon, and R. W. Hellwarth. Geometrical representation of the Schrödinger equation for solving the MASER problem. *Journal of Applied Physics*, 28(1):49–52, January 1957.
- [5] M. Hirvensalo. *Quantum Computing*. Springer, New York, 2001.
- [6] A. Y. Kitaev, A. Shen, and M. Vyalı. *Classical and Quantum Computing*, volume 47 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, 2002.
- [7] A. I. Kostrikin. *Introducción al Algebra*. Editorial MIR, 1978.
- [8] J. B. Kuipers. *Quaternions and Rotation Sequences*. Princeton University Press, Princeton, December 1999.
- [9] M. A. Nielsen and I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.
- [10] R. Portugal, C. C. Lavor, L. M. Carvalho, and N. Maculan. *Uma Introdução à Computação Quântica*, volume 8 of *Notas em Matemática Aplicada*. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), São Carlos, 1st edition, 2004. também disponível em <http://www.sbmac.org.br>.
- [11] J. Preskill. Quantum information and computation. Lecture Notes, California Institute of Technology, unpublished 1998.