Bit Quântico e Portas Quânticas na Esfera de Bloch

Visualização em Maple

Virginia S. Costa e Luiz M. Carvalho

Departamento de Matemática Aplicada - Instituto de Matemática e Estatística

Universidade do Estado do Rio de Janeiro

Modelo para um Bit Quântico e sua forma Polar

- O Bit Quântico (*q-bit*) é a menor unidade de informação para a Computação Quântica.
- O q-bit pode se apresentar nos estados

$$|0\rangle = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad e \qquad |1\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- E num estado que é a combinação linear (neste contexto, chamada de *superposição*) dos estados $|0\rangle$ e $|1\rangle$, isto é,

$$|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \tag{1}$$

onde α e $\beta \in \mathbb{C}$ são chamados *amplitudes* e $|\psi\rangle \in \mathbb{C}^2(\mathbb{C})$.

- Porém, o processo de medida perturba inevitavelmente o estado do q-bit produzindo um colapso não-determinístico de $|\psi\rangle$ para $|0\rangle$ ou $|1\rangle$.
- Após uma medida, obtemos o $|0\rangle$ com probabilidade $|\alpha|^2$ ou $|1\rangle$ com probabilidade $|\beta|^2$.
- Sendo $|\alpha|^2$ e $|\beta|^2$ probabilidades, temos que

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \tag{2}$$

e, conseqüentemente,

$$\|\psi\| = 1.$$

- Escrevendo $\alpha = a + ib$ e $\beta = c + id$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, temos $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $|\beta| = \sqrt{c^2 + b^2}$, e como $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, temos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1. \tag{3}$$

- A partir da Eq. (3), interpretamos o q-bit como um vetor unitário $(a, b, d, c) \in \mathbb{R}^4$ e a esfera unitária S^3 de $\mathbb{R}^4$ como o lugar geométrico dos q-bits.
- Sabendo que as amplitudes α e β da Eq.(1) são números complexos, podemos expressá-las em coordenadas polares, isto é,

$$\alpha = |\alpha|\, e^{i\,\mathrm{Arg}(\alpha)} \qquad e \qquad \beta = |\beta|\, e^{i\,\mathrm{Arg}(\beta)},$$

onde $0 \leq \mathrm{Arg}(z) < 2\pi$ é o argumento do complexo z e $|z|$ o seu módulo.

- Podemos, ainda, definir $\mathrm{Arg}(\alpha) = \gamma$ e $\mathrm{Arg}(\beta) = \gamma + \phi$, onde as operações entre ângulos devem ser consideradas em aritmética módulo 2π. Assim, temos

$$|\psi\rangle = |\alpha|\, e^{i\gamma}\, |0\rangle + |\beta|\, e^{i(\gamma+\phi)}\, |1\rangle.$$

- Sendo $|\alpha| \geq 0$, $|\beta| \geq 0$ e $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$, podemos definir ξ por meio das equações

$$\cos(\xi) = |\alpha| \qquad e \qquad \mathrm{sen}(\xi) = |\beta|\,,$$

onde $0 \leq \xi \leq \frac{\pi}{2}$.

- Fazendo $\theta = 2\xi$, temos

$$|\psi\rangle = e^{i\gamma}[\cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2})|1\rangle], \tag{4}$$

- Com

$$\theta = 2\arccos(|\alpha|) = 2\,\mathrm{arcsen}(|\beta|),$$

$$\phi = \mathrm{Arg}(\beta) - \mathrm{Arg}(\alpha),$$

$$\gamma = \mathrm{Arg}(\alpha),$$

onde $\theta \in [0, \pi]$, $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\gamma \in [0, 2\pi)$.

A Esfera de Bloch

- Note que, se tentarmos modificar o q-bit expresso pela Eq. (4) através de um operador unitário, o fator $e^{i\gamma}$ não se altera:

$$U|\psi\rangle = e^{i\gamma}\, U[\cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2})|1\rangle],$$

onde U é o operador unitário de 1 (um) q-bit (isto é, uma matriz unitária 2×2).

- Observe também que, o fator $e^{i\gamma}$ não altera a probabilidade de se obter $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ no momento da medida, pois

$$|\, e^{i\gamma} \cos(\frac{\theta}{2})| = |\, e^{i\gamma}\,||\cos(\frac{\theta}{2})| = |\cos(\frac{\theta}{2})|,$$

assim como,

$$|\, e^{i(\gamma+\phi)} \cos(\frac{\theta}{2})| = |\, e^{i\gamma}\,||\, e^{i\phi} \cos(\frac{\theta}{2})| =$$

$$= |\, e^{i\phi} \cos(\frac{\theta}{2})|.$$

- Devido a essas propriedades, para fins de representação, podemos desprezar o fator $e^{i\gamma}$ (chamado *fator de fase global*) e escrever a Eq. (4) assim:

$$|\psi\rangle_B = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + e^{i\phi}\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2})|1\rangle. \tag{5}$$

- Escrevendo

$$|\psi\rangle_B = \cos(\frac{\theta}{2})|0\rangle + \cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2})|1\rangle +$$

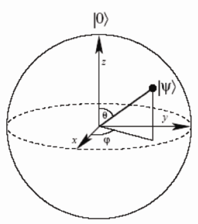
$$+ i\,\mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\frac{\theta}{2})|1\rangle,$$

isto é, o vetor $|\psi\rangle_B$ pertence a um subespaço vetorial $(\mathbb{V})$ de $\mathbb{C}^2(\mathbb{R})$ de dimensão 3 e base $\{|0\rangle, |1\rangle, |i\rangle\}$. Como este subespaço está definido sobre o corpo dos reais, ele é isomorfo a $\mathbb{R}^3$ (Veja [2]).

- Considerando este Isomorfismo, pode-se encontrar uma representação para os q-bits em $\mathbb{R}^3$: *A Esfera de Bloch*.
- Considerando a forma polar de um q-bit, expressa na Eq. (4), dizemos que o *Vetor de Bloch* é dado por

$$B|\psi\rangle_B = \begin{bmatrix} \cos(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\phi)\,\mathrm{sen}(\theta) \\ \cos(\theta) \end{bmatrix}, \tag{6}$$

onde $\phi \in [0, 2\pi)$ e $\theta \in [0, \pi]$.

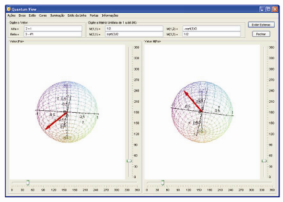


Esfera de Bloch

- A partir da Eq. (6), podemos escrever o seguinte algoritmo em Maple:

```
 bloch_vector:=proc(alpha, beta)
 local X, Y, Z, arg_alpha, arg_beta,
abs_alpha;
 arg_alpha:=argument(alpha);
 arg_beta:=argument(beta);
 abs_alpha:=abs(alpha);
 X:=cos(arg_beta-arg_alpha)
*sin(2*arccos(abs_alpha));
 Y:=sin(arg_beta-arg_alpha)
*sin(2*arccos(abs_alpha));
 Z:=cos(2* *arccos(abs(alpha)));
 Vector([X,Y,Z]);
 end:
```

- E, utilizando o pacote Maplets (veja [1]), conseguimos a *interface* gráfica vista na figura a seguir.

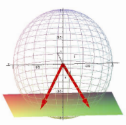


Interface Gráfica - pacote *Maplets* do Maple.

- Através dessa visualização, podemos observar algumas propriedades da Esfera de Bloch, assim como, podemos utilizar o programa para executar a aplicação de *portas quânticas de um q-bit* (veja [4], p. 17).

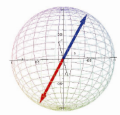
Propriedades da Esfera de Bloch

- ***1ª Propriedade:*** Quaisquer dois vetores de Bloch que pertençam ao mesmo plano, paralelo ao plano XY, representam q-bits que têm probabilidades iguais de produzirem $|0\rangle$ ou $|1\rangle$, ao serem medidos.



Vetores com o mesmo θ.

- ***2ª Propriedade:*** Quaisquer dois vetores de Bloch antípodas são representantes de dois q-bits ortogonais.



Vetores de Bloch antípodas.

- ***3ª Propriedade:*** Considere dois q-bits $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$, então podemos dizer que:

$|\psi'\rangle = e^{i\delta}|\psi\rangle$ se e somente se $|\psi\rangle$ e $|\psi'\rangle$ tem Vetores de Bloch iguais, $\forall \delta \in [0, 2\pi)$.

Portas Quânticas de um Q-Bit

- Das matrizes de Pauli, surge uma outra classe de matrizes, as *Matrizes de Rotação* sobre os eixos $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$, definidas como

$$R_x(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta X}{2}}, \quad R_y(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta Y}{2}}$$

$$e \quad R_z(\theta) \equiv e^{-\frac{i\theta Z}{2}}.$$

onde

$$X \equiv \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Y \equiv \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix},$$

$$Z \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

são as matrizes de Pauli.

- A partir das matrizes de Rotação, que representam rotações em torno dos eixos x, y e z na esfera unitária do $\mathbb{R}^3$, podemos observar o comportamento de portas quânticas de um q-bit utilizando os seguintes resultados:
- Seja U um operador unitário de um q-bit, então

$$U = e^{i\alpha}\, R_{\hat{n}}(\theta), \tag{7}$$

onde $\alpha, \theta \in \mathbb{R}$ e $\hat{n} = (n_x, n_y, n_z) \in \mathbb{R}^3$ é um vetor unitário.

- (Decomposição Z-Y) Seja U um operador unitário de um q-bit, então existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$U = e^{i\alpha}\, R_z(\beta) R_y(\gamma) R_z(\delta). \tag{8}$$

- (Decomposição X-Y) Seja U um operador unitário de um q-bit, então existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ tais que

$$U = e^{i\alpha}\, R_x(\beta) R_y(\gamma) R_x(\delta). \tag{9}$$

- A partir desses resultados podemos concluir que as portas quânticas de um q-bit se comportam como um conjunto de rotações na Esfera de Bloch. Vejamos um exemplo com a porta de Hadamard.

Exemplo com a Porta de Hadamard

- A Porta de Hadamard, definida por

$$H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix},$$

é uma das mais usadas na Computação Quântica. Como a porta de Hadamard é um operador unitário, podemos escrevê-lo na forma da Eq.(7). Assim,

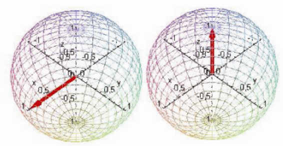
$$H = e^{i\frac{\pi}{2}}\, R_{\hat{n}}(\pi),$$

onde $\hat{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

- Ou seja, a porta de Hadamard, na Esfera de Bloch, se comporta como uma rotação de 180° em torno do vetor $\hat{n} = (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.
- Também podemos escrever a porta H em função das matrizes de rotação em torno dos eixos z e y, segundo a Eq. (8). Assim,

$$H = e^{i\frac{\pi}{2}}\, R_z(0) R_y(\frac{\pi}{2}) R_z(\pi),$$

ou, tendo em vista que $R_z(0) = I$, $H = e^{i\frac{\pi}{2}}\, R_y(\frac{\pi}{2}) R_z(\pi)$, o que, na Esfera de Bloch, caracteriza uma rotação de 90º em torno do eixo y seguida de uma rotação de 180° em torno do eixo z, como mostra a figura a seguir, que foi obtida através do programa.



Aplicação da porta de Hadamard no vetor $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$. À esquerda, temos a representação deste vetor na esfera, i.e., $B(|\psi\rangle)$, já à direita temos a representação de $H(|\psi\rangle)$.

- Em nosso trabalho, também observamos as portas S (Phase Gate) e $\frac{\pi}{8}$, além da porta de Hadamard.

Referências

[1] Maplets beginner's guide. *Waterloo Maple Inc.*, 2001.

[2] L.M. Carvalho, C.C. Lavor, and V.S. Motta. Descrição matemática da esfera de bloch. *Anais do VII Encontro de Modelagem Computacional*, pages 1–9, 2004.

[3] L.M. Carvalho, C.C. Lavor, and V.S. Motta. Portas quânticas e a esfera de bloch. *submetido a TEMA*, Agosto 2004.

[4] M.A. Nielsen and I.L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[5] R. Portugal. Introdução ao maple. 2002.

[6] R. Portugal, C.C. Lavor, L.M. Carvalho, and N. Maculan. *Uma Introdução à Computação Quântica*, volume 8. Sociedade Brasileira de Matemática Aplicada e Computacional (SBMAC), São Carlos, 1st edition, 2004.