

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Luka Horjak

HOLOMORFNI AVTOMORFIZMI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Miran Černe

Ljubljana, 2023

Kazalo

1	Holomorfni avtomorfizmi v kompleksni ravnini	4
1.1	Enostavno povezana območja	4
1.2	Punktirani diski in kolobarji	5
1.3	Avtomorfizmi p -povezanih območij	6
2	Riemannove ploskve	7
2.1	Gladke in kompleksne mnogoterosti	7
2.2	Riemann-Rochov izrek	10
2.3	Weierstrassove točke	11
2.4	Hipereliptične ploskve	15
3	Avtomorfizmi Riemannovih poloskev	17
3.1	Sfere in torusi	17
3.2	Ploskve večjih rodov	17
	Literatura	19

Holomorfni avtomorfizmi

POVZETEK

...

Holomorphic automorphisms

ABSTRACT

...

Math. Subj. Class. (2020): 30F10, 30C20

Ključne besede: ..., ...

Keywords: ..., ...

1 Holomorfní avtomorfizmi v kompleksni ravnini

1.1 Enostavno povezana območja

Da lahko govorimo o holomorfnih funkcijah, se bomo omejili na odprte podmnožice kompleksne ravnine.

Definicija 1.1. *Holomorfen avtomorfizem* odprte množice $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je bijektivna holomorfná preslikava $f: \Omega \rightarrow \Omega$ s holomorfnim inverzom.

Opazimo, da je zadosten pogoj že to, da je f bijektivna in holomorfná. Opazimo še, da množica avtomorfizmov nekega območja tvori grupo z operacijo kompozitum. To grupo označimo z $\text{Aut}(\Omega)$.

Prepričamo se lahko, da lahko avtomorfizme nepovezanih množic opišemo z avtomorfizmi, ki komponente med seboj permutirajo. V nadaljevanju se bomo tako omejili na povezane množice.

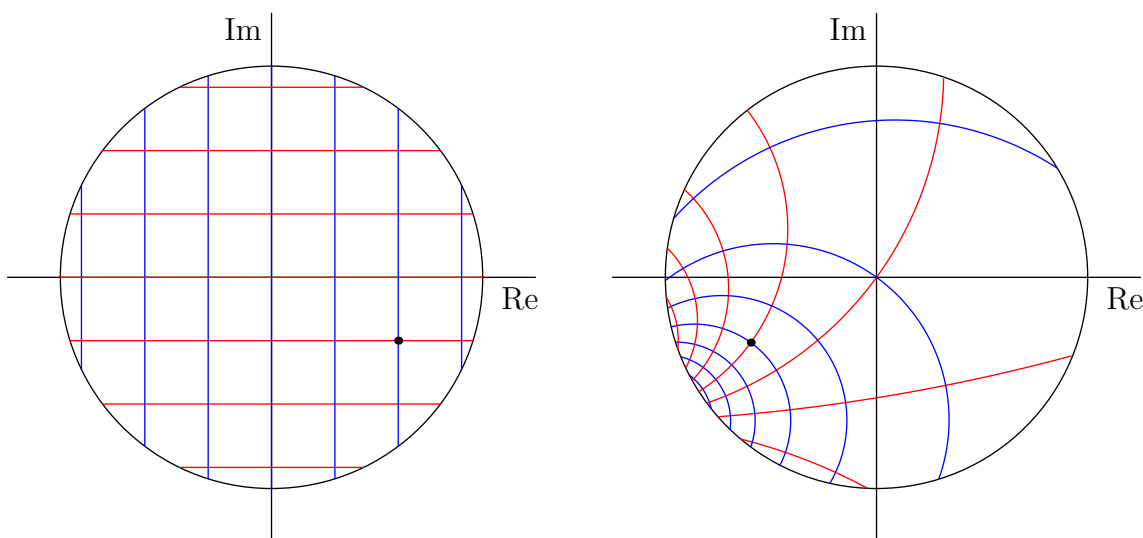
Definicija 1.2. *Območje* v kompleksni ravnini \mathbb{C} je vsaka odprta povezana množica.

Primer 1.3. Kompleksna ravnina je območje v \mathbb{C} . Njena grupa avtomorfizmov je enaka

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \neq 0\}. \quad \diamond$$

Primer 1.4. Naj bo Δ odprt enotski disk v \mathbb{C} . Tedaj je

$$\text{Aut}(\Delta) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid a \in \Delta \wedge \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \diamond$$



Slika 1: Primer avtomorfizma diska. Označeni sta točki $f^{-1}(0)$ in $f(0)$.

Izkaže se, da smo s tem do izomorfizma natančno opisali grupe avtomorfizmov vseh povezanih in enostavno povezanih množic v \mathbb{C} . Velja namreč naslednja lema:

Lema 1.5. *Naj bosta Ω_1 in Ω_2 biholomorfno ekvivalentni območji v \mathbb{C} . Tedaj je $\text{Aut}(\Omega_1) \cong \text{Aut}(\Omega_2)$.*

Dokaz. Naj bo $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ biholomorfna preslikava. Sedaj definiramo preslikavo $\Phi: \text{Aut}(\Omega_1) \rightarrow \text{Aut}(\Omega_2)$ s predpisom

$$\Phi(\phi) = f^{-1} \circ \phi \circ f.$$

Ker je s predpisom

$$\Phi^{-1}(\psi) = f \circ \psi \circ f^{-1}$$

očitno podan predpis inverza preslikave Φ , je ta bijektivna. Velja pa

$$\Phi(\phi \circ \psi) = f^{-1} \circ \phi \circ \psi \circ f = (f^{-1} \circ \phi \circ f) \circ (f^{-1} \circ \psi \circ f) = \Phi(\phi) \circ \Phi(\psi),$$

zato je Φ homomorfizem. \square

Spomnimo se na Riemannov upodobitveni izrek, ki pravi, da je vsako povezano in enostavno povezano območje v kompleksni ravnini ali biholomorfno ekvivalentno \mathbb{A} ali pa kar enako \mathbb{C} . Grupe avtomorfizmov povezanih in enostavno povezanih območij so do izomorfizma natančno tako le $\text{Aut}(\mathbb{A})$ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$.

Omenimo še, da lahko kompleksno ravnino dopolnimo do Riemannove sfere $\hat{\mathbb{C}}$. Njeni avtomorfizmi so Möbiusove transformacije, torej

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

1.2 Punktirani diski in kolobarji

Po obravnavi enostavno povezanih območij so naslednji korak območja z »luknjami«. Eden izmed osnovnejših primerov takih območij je punktiran disk $\mathbb{A}_\alpha = \mathbb{A} \setminus \{\alpha\}$.

Disk $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$ je biholomorfno ekvivalenten vsakemu punktiranemu disku, saj je preslikava $f: \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{A}^*$ s predpisom

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

biholomorfna. Sledi, da je $\text{Aut}(\mathbb{A}_\alpha) \cong \text{Aut}(\mathbb{A}^*)$.

Trditev 1.6. *Za punktiran disk velja*

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Dokaz. Naj bo $f: \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{A}^*$ poljuben avtomorfizem. Tedaj je točka 0 izolirana singularnost funkcije f . Ker je f omejena, je to odpravljiva singularnost.

Naj bo $\tilde{f}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija, ki jo dobimo tako, da f razširimo na celoten disk. Predpostavimo, da velja $\tilde{f}(0) \neq 0$. Ker je \tilde{f} holomorfna, je odprta, zato sledi $|\tilde{f}(0)| < 1$. Oglejmo si točko $\alpha \neq 0$, za katero je $f(\alpha) = \tilde{f}(0)$. Izberemo si lahko disjunktni okolici U in V točk 0 in α . Ker je \tilde{f} odprta, je odprta tudi množica $W = \tilde{f}(U) \cap \tilde{f}(V)$. Hitro opazimo, da velja $\tilde{f}(0) \in W$, zato je ta množica neprazna. Sledi, da je W neskončna, kar je protislovje, saj velja $f(U \setminus \{0\}) \cap f(V) = \emptyset$.

Sledi, da je $\tilde{f}(0) = 0$, zato je \tilde{f} avtomorfizem diska. Tako dobimo inkluzijo

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) \subseteq \{f \in \text{Aut}(\mathbb{A}) \mid f(0) = 0\}.$$

Ni težko preveriti, da velja tudi obratna inkluzija, oziroma

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \square$$

Kaj pa se zgodi, če število lukenj povečamo? Naj bo $\Delta_2 = \Delta \setminus \{0, \alpha\}$.¹ Po enakem razmisleku kot prej ugotovimo, da za vsak avtomorfizem $f \in \text{Aut}(\Delta_2)$ velja $f(0) \in \Delta$ in hkrati $f(0) \notin \Delta_2$. Enako velja za točko α . Sedaj ni težko videti, da velja

$$\text{Aut}(\Delta_2) = \left\langle z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

saj je avtomorfizem diska natančno določen z dvema točkama.

Sedaj si oglejmo še kolobar $R = \Delta \setminus \Delta(r)$. Naj bo $f: R \rightarrow R$ avtomorfizem. Izkaže se, da se f zvezno razširi na ∂R . Ker lahko f komponiramo s preslikavo $\varphi: z \mapsto \frac{\rho}{z}$, lahko predpostavimo, da je $f(\partial\Delta) = \partial\Delta$.

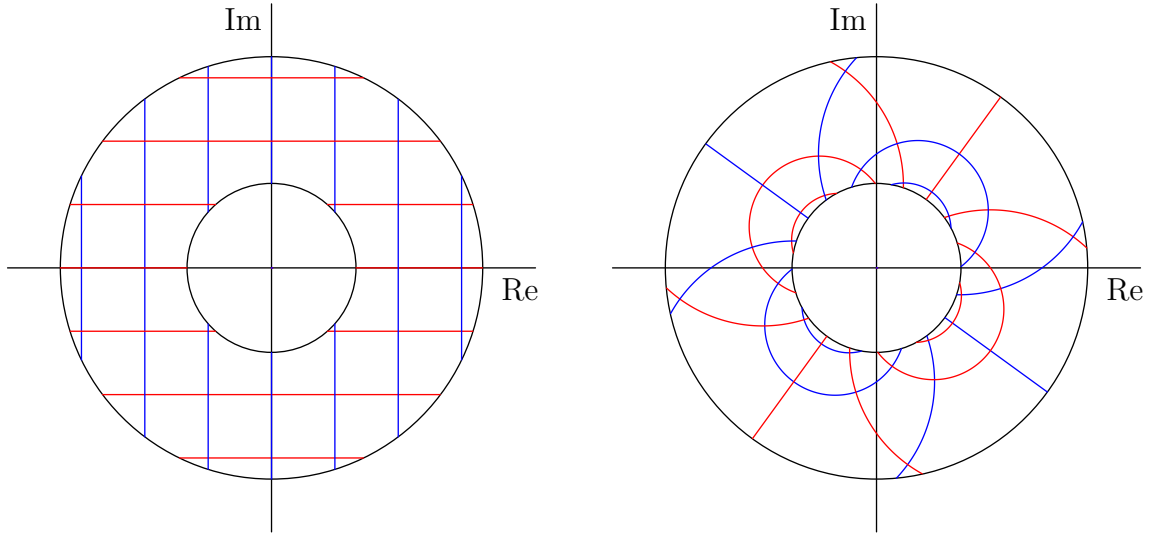
Naj bo

$$u(z) = \log |f(z)| - \log |z|.$$

Ker je logaritem harmonična funkcija, je $\Delta u = 0$. Ker je $u|_{\partial R} = 0$, je po principu maksima $u = 0$. Tako sledi $|f(z)| = |z|$. Sledi, da je

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = 1.$$

Ker je $\frac{f(z)}{z}$ holomorfná in so nekonstantne holomorfne preslikave odprte, sledi, da je $\frac{f(z)}{z}$ konstantna. Tako so vsi avtomorfizmi kolobarja kar $z \mapsto e^{i\theta}z$ in $z \mapsto e^{i\theta}\frac{r}{z}$.



Slika 2: Primer avtomorfizma kolobarja.

1.3 Avtomorfizmi p -povezanih območij

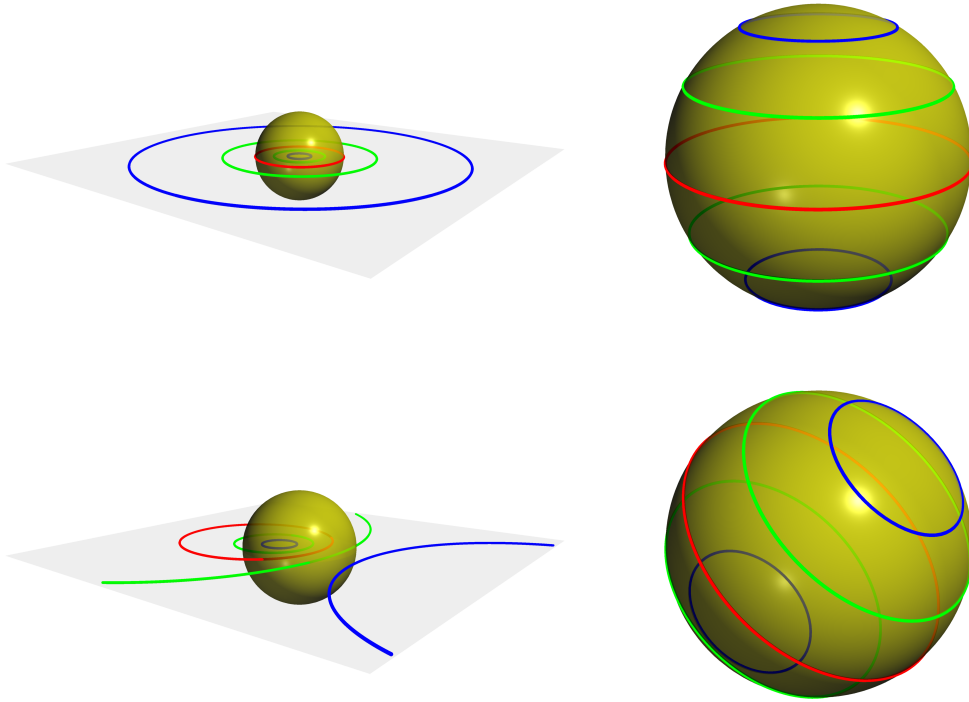
Oglejmo si avtomorfizme območja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq p\}$. Za $p = 1$ dobimo kompleksno ravnino. Pri $p = 2$ lahko brez škode za splošnost vzamemo $x_1 = 0$ in $x_2 = \infty$. Ni težko videti, da so vsi avtomorfizmi oblike $z \mapsto e^{i\theta} \cdot z^{\pm 1}$.

Sedaj si oglejmo še primer $p > 2$. Preverimo lahko, da se vsak avtomorfizem Ω razširi do avtomorfizma Riemannove ploskve, ki permutira točke x_i . Ker je vsaka

¹Podobno kot prej lahko privzamemo, da je ena izmed lukenj enaka 0.

Möbiusova transformacija enolično določena s tremi točkami, je moč grupe $\text{Aut}(\Omega)$ tako omejena s $p(p-1)(p-2)$.

Izkaže se, da lahko to mejo še bistveno izboljšamo. Znano je namreč, da je vsaka končna podgrupa $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ konjugirana podgrupi grupe rotacij SO_3 [4]. Vse končne podgrupe SO_3 so natanko rotacijske, diedrske, tetraedrska, oktaedrska in ikozaedrska [1]. Preverimo lahko, da je za $p = 4$ največja možna moč grupe avtomorfizmov enaka 12, za $p = 6$ in $p = 8$ dobimo 24, za $p = 12$ in $p = 20$ pa 60. Za vse ostale p je največja grupa simetrije kar diedrska, zato je $|\text{Aut}(\Omega)| \leq 2p$.



Slika 3: Kompozitum stereografske projekcije z rotacijo sfere

2 Riemannove ploskve

2.1 Gladke in kompleksne mnogoterosti

Definicija 2.1. Meromorfen q -diferencial ω Riemannove ploskve je dodelitev meromorfne funkcije f vsaki lokalni koordinati, pri čemer je $f(z) dz^q$ neodvisna od lokalne koordinate. Meromorfnim 1-diferencialom pravimo kar *meromorfnimi diferenciali*.

Naj bosta (U, φ) in (V, ψ) lokalni karti, za kateri velja $U \cap V \neq \emptyset$. Če jima meromorfen q -diferencial ω priredi funkciji f_U in f_V , mora tako veljati

$$f_U = f_V \cdot \left((\psi \circ \varphi^{-1})' \right)^q.$$

Opazimo, da je q -ta potenca meromorfnega diferenciala meromorfen q -diferencial.

Trditev 2.2. Naj bosta α in β meromorfna q -diferenciala. Tedaj je $\frac{\alpha}{\beta}$ meromorfna funkcija.

Dokaz. Z zgornjimi oznakami velja

$$\frac{\alpha_U}{\beta_U} = \frac{\alpha_V \cdot ((\psi \circ \varphi^{-1})')^q}{\beta_V \cdot ((\psi \circ \varphi^{-1})')^q} = \frac{\alpha_V}{\beta_V}.$$

Kvocien $\frac{\alpha}{\beta}$ tako ni odvisen od lokalnih koordinat. \square

Očitno velja tudi obratno – če je α meromorfen q -diferencial in f meromorfna funkcija, je tudi $f\alpha$ meromorfen q -diferencial.

Trditev 2.3. Naj bo $f: M \rightarrow N$ nekonstantna holomorfna preslikava med kompaktnima Riemannovima ploskvama. Tedaj obstaja naravno število m , za katero f doseže vsako točko $Q \in N$ natanko m -krat.²

Dokaz. Iz kompleksne analize vemo, da za vsako točko $P \in M$ obstajajo take lokalne koordinate \tilde{z} , da je $f(\tilde{z}) = f(P) + \tilde{z}^n$. Število $n - 1$ označimo z $b(P)$ in mu pravimo BRANCHING NUMBER. To je seveda dobro definirano.

Za vsako naravno število m naj bo

$$\Sigma_m = \left\{ X \in N \mid \sum_{f(P)=X} (b(P) + 1) \geq m \right\}.$$

Označimo še

$$\varphi(X) = \sum_{f(P)=X} (b(P) + 1).$$

Vse množice Σ_m so odprte – če je $b(P) = n - 1$, lahko v lokalnih koordinatah zapišemo $f(\tilde{z}) = \tilde{z}^n$. Enačba $f(\tilde{z}) = \varepsilon$ ima tako natanko n rešitev, zato za okolico U točke P velja

$$b(P) + 1 = \sum_{Q \in U \cap f^{-1}(P')} (b(Q) + 1),$$

kjer je $P' \in f(U)$. Če to enakost seštejemo po okolicah vseh točk $P \in f^{-1}(X)$, dobimo

$$m \leq \varphi(X) \leq \varphi(P').$$

Pokažimo še, da so te množice zaprte v $\hat{\mathbb{C}}$. Naj bo Q limita zaporedja točk $Q_k \in \Sigma_m$, pri čemer je brez škode za splošnost $b(P) = 0$ za vsak $P \in f^{-1}(Q_k)$. Ker imajo vse množice $f^{-1}(Q_k)$ vsaj m elementov, lahko najdemo tako podzaporedje zaporedja $(Q_k)_{n=1}^{\infty}$, da lahko iz njihovih praslik tvorimo m konvergentnih zaporedij. Tako sledi

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} (b(P) + 1) \geq m.$$

Sledi, da so vse množice Σ_m odprte in zaprte v $\hat{\mathbb{C}}$. Čim je ena izmed množic Σ_m neprazna, je tako enaka celotni Riemannovi sferi, saj je ta povezana. \square

²Šteto z večkratnostmi.

Številu m pravimo *stopnja* preslikave f .

Posledica 2.4. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev. Če je $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna preslikava, je konstantna.*

Dokaz. Preslikavo f lahko opazujemo kot preslikavo med Riemannovo ploskvijo M in Riemannovo sfero $\hat{\mathbb{C}}$. Če f ni konstantna, ima pozitivno stopnjo, kar pa ni mogoče, saj je $f^{-1}(\infty) = \emptyset$. \square

To posledico lahko pravzaprav dokažemo z uporabo lastnosti holomorfnih preslikav. Ker je M kompaktna namreč sledi, da je taka tudi $f(M)$. Ker pa so nekonstantne holomorfne preslikave odprte, pa sledi, da je $f(M)$ tudi odprta. To seveda pomeni, da je $f(M) = \mathbb{C}$, kar je v protislovju s kompaktnostjo.

Definicija 2.5. Za kompaktni Riemannovo ploskvi M in N ter nekonstantno preslikavo $f: M \rightarrow N$ definiramo *TOTAL BRANCHING NUMBER* kot

$$B = \sum_{P \in M} b_f(P).$$

Število je dobro definirano, saj je množica $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$ diskretna in tako zaradi kompaktnosti končna.

Izrek 2.6 (Riemann-Hurwitz). *Naj bosta M in N kompaktni Riemannovi ploskvi rodov g in γ , $f: M \rightarrow N$ pa nekonstantna preslikava stopnje n . Tedaj za TOTAL BRANCHING NUMBER B velja*

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}.$$

Dokaz. Ker je množica $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$ končna, jo lahko uporabimo za triangulacijo ploskve N . Denimo, da ima triangulacija F lic, E povezav in V vozlišč. To triangulacijo lahko z f^{-1} preslikamo na M . Tako dobimo triangulacijo ploskve M z nF lici, nE povezavami in $nV - B$ vozlišči. Sledi, da je

$$\begin{aligned} F - E + V &= 2 - 2\gamma, \\ nF - nE + nV - B &= 2 - 2g. \end{aligned}$$

Iz teh enačb očitno sledi

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}. \quad \square$$

Definicija 2.7. Naj bo $H \subseteq \text{Aut } M$ končna podgrupa grupe avtomorfizmov ploskve M . Na množici M/H uvedemo kompleksno strukturo na naslednji način:

- i) Če je množica $H_P = \{h \in H \mid h(P) = P\}$ trivialna, lokalna karta na dovolj majhni okolici P inducira lokalno karto pri $\pi(P)$.
- ii) Če je v lokalni koordinati H_P generirana s preslikavo $z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{k}} z$, za lokalno karto točke P vzamemo z^k .

Prepričamo se lahko, da so te lokalne karte med seboj kompatibilne. Na kvocientu M/H smo torej dobili kompleksno strukturo, zato je to Riemannova ploskev.

2.2 Riemann-Rochov izrek

Definicija 2.8. *Divizor* na Riemannovi ploskvi M je formalni simbol

$$\mathfrak{A} = \prod_{P \in M} P^{\alpha(P)},$$

kjer za vsak P velja $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$ in je $\alpha(P) \neq 0$ za kvečjemu končno mnogo točk $P \in M$. Stopnja divizorja \mathfrak{A} je definirana kot

$$\deg \mathfrak{A} = \sum_{P \in M} \alpha(P).$$

Divizorji na M tvorijo grupo za naravno definirano množenje – to grupo označimo z $\text{Div}(M)$. Tako je $\deg: \text{Div}(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ homomorfizem grup.

Za vsako neničelno meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{K}(M)$ definiramo njen *glavni divizor* kot³

$$(f) = \prod_{P \in M} P^{\text{ord}_P f}.$$

Definiramo lahko še *divizor polov*

$$f^{-1}(\infty) = \prod_{P \in M} P^{\max(-\text{ord}_P f, 0)}$$

in *divizor ničel*

$$f^{-1}(0) = \prod_{P \in M} P^{\max(\text{ord}_P f, 0)}.$$

Opazimo, da velja

$$(f) = \frac{f^{-1}(0)}{f^{-1}(\infty)}.$$

Na divizorjih uvedemo ekvivalenčno relacijo \sim na naslednji način:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = (f).$$

Lema 2.9. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev. Za vsako neničelno funkcijo $f \in \mathcal{K}(M)$ velja $\deg f^{-1}(0) = \deg f^{-1}(\infty)$. Ekvivalentno je $\deg(f) = 0$.*

Dokaz. Stopnja divizorja polov funkcije f je natanko število njenih polov, štetih z večkratnostmi, stopnja divizorja ničel pa število njenih ničel. Ti števili sta enaki po trditvi 2.3. \square

Posebej velja opomniti, da to pomeni, da imajo funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah enako število ničel in polov (štetih z večkratnostmi).

Na divizorjih lahko uvedemo relacijo delne urejenosti kot

$$\prod_{P \in M} P^{\alpha(P)} \geq \prod_{P \in M} P^{\beta(P)} \iff \forall P \in M: \alpha(P) \geq \beta(P).$$

Pravimo, da je divizor \mathfrak{A} *efektiven*, če velja $\mathfrak{A} \geq 1$. Ni težko videti, da je za vsak divizor \mathfrak{A} na M množica

$$L(\mathfrak{A}) = \{f \in \mathcal{K}(M) \mid (f) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor – njegovo dimenzijo označimo z $r(\mathfrak{A})$.

³Glavne divizorje na enak način definiramo še za meromorfne diferencialne.

Zgled 2.10. Velja $r(1) = 1$. Pogoji $(f) \geq 1$ je namreč ekvivalenten temu, da je f holomorfná. Ker so vse holomorfne funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah konstantne, je zato $L(1) \cong \mathbb{C}$, kar je enodimenzionalen prostor. \diamond

Zgled 2.11. Če je $\deg \mathfrak{A} > 0$, je $r(\mathfrak{A}) = 0$. Iz neenakosti $(f) \geq \mathfrak{A}$ za neničelnó funkcijo f namreč sledi $0 = \deg(f) \geq \deg \mathfrak{A} > 0$, kar je protislovje. \diamond

Podobno je tudi

$$\Omega(\mathfrak{A}) = \{\omega \mid \omega \text{ je meromorfen diferencial } \wedge (\omega) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor. Označimo $i(\mathfrak{A}) = \dim \Omega(\mathfrak{A})$.

Trditev 2.12. Naj bo \mathfrak{A} poljuben divizor in ω meromorfen diferencial. Tedaj je

$$i(\mathfrak{A}) = r\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right).$$

Dokaz. Naj bo $\varphi: \Omega(\mathfrak{A}) \rightarrow L(\mathfrak{A}(\omega)^{-1})$ preslikava s predpisom $\varphi: \zeta \mapsto \frac{\zeta}{\omega}$. Seveda je predpis dobro definiran, ni pa težko videti, da je to izomorfizem vektorskih prostorov. Sledi, da imata enako dimenzijo. \square

Izrek 2.13 (Riemann-Roch). Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g in \mathfrak{A} divizor na M . Tedaj velja

$$r\left(\mathfrak{A}^{-1}\right) = \deg \mathfrak{A} - g + 1 + i(\mathfrak{A}).$$

Dokaz izreka najdemo v [2, theorem III.4.11].

Zgled 2.14. Z uporabo zgornjega izreka lahko izračunamo $i(1)$. Velja namreč

$$i(1) = r(1) - \deg 1 + g - 1 = g. \quad \diamond$$

Trditev 2.15. Naj bo $\deg \mathfrak{A} > 2g - 2$. Tedaj je $i(\mathfrak{A}) = 0$.

Dokaz. Naj bo $\omega \in i(1)$ neničelná holomorfen diferencial. Tedaj je

$$r\left((\omega)^{-1}\right) = \deg(\omega) - g + 1 + i((\omega)).$$

Po trditvi 2.12 je $r((\omega)^{-1}) = i(1) = g$ in $i((\omega)) = r(1) = 1$. Od tod sledi, da je $\deg(\omega) = 2g - 2$.

Sedaj dobimo

$$i(\mathfrak{A}) = r\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right) = 0,$$

saj je $\deg(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}) > 0$. \square

2.3 Weierstrassove točke

Izrek 2.16 (Weierstrass). Naj bo M ploskev roda $g > 0$ in $P \in M$. Tedaj obstaja natanko g števil

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g,$$

za katera ne obstaja funkcija $f \in \mathcal{K}(M)$, ki je holomorfná na $M \setminus \{P\}$ in ima pol reda n_j v P . Tem številom pravimo GAP.

Dokaz. Najprej opazimo, da je število n GAP natanko tedaj, ko je $r(P^{-n}) = r(P^{1-n})$. Ker je $r(P^{-n}) \leq r(P^{1-n}) + 1$, število n ni GAP natanko tedaj, ko velja

$$r(P^{-n}) - r(P^{1-n}) = 1.$$

Po Riemann-Rochovem izreku velja

$$r(P^{-k}) = k - g + 1 + i(P^k),$$

zato sledi

$$\begin{aligned} r(P^{-n}) - r(1) &= \sum_{k=1}^n (r(P^{-k}) - r(P^{1-k})) \\ &= \sum_{k=1}^n (1 + i(P^k) - i(P^{k-1})) \\ &= n + i(P^n) - i(1). \end{aligned}$$

Ker je $i(1) = g$ in za vse $n > 2g - 2$ velja $i(P^n) = 0$, sledi

$$r(P^{-n}) - 1 = n - g.$$

Opazimo, da leva stran šteje ravno število $\text{NEGAPOV} \leq n$. Sledi, da je GAPOV natanko g in so vsi strogo manjši od $2g$. \square

Število n je GAP natanko tedaj, ko je $r(P^{-n}) = r(P^{1-n})$. To je po Riemann-Rochovem izreku ekvivalentno $i(P^{n-1}) - i(P^n) = 1$. Sledi, da imajo holomorfní diferenciali na M v točki P lahko red enak le enemu iz števil

$$n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_g - 1.$$

Posebej, obstaja baza $\{\omega_i \mid 1 \leq i \leq g\}$ holomorfníh diferencialov, pri čemer velja $\text{ord}_P \omega_i = n_i - 1$.

Definicija 2.17. TEŽA točke $P \in M$ je vsota

$$\tau(P) = \sum_{j=1}^g (n_j - j),$$

kjer so n_j GAPI za P .

Lema 2.18. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ meromorfne preslikave s paroma različnim redom v točki $P \in X$. Tedaj za determinanto

$$\Phi(z) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \dots & \varphi_n(z) \\ \varphi_1'(z) & \varphi_2'(z) & \dots & \varphi_n'(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(z) & \varphi_2^{(n-1)}(z) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(z) \end{bmatrix}$$

velja

$$\text{ord}_z \Phi = \sum_{i=1}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1).$$

Dokaz. Za lažji zapis pišimo

$$\Phi(z) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(z) & \dots & \varphi_n(z) \end{bmatrix}.$$

Trditev dokažemo z indukcijo – trditev očitno velja za $n = 1$. Za indukcijski korak si bomo pomagali z dejstvom, da za vsako meromorfnost funkcijo f velja

$$\Phi_f = \det \begin{bmatrix} f \cdot \varphi_1(z) & \dots & f \cdot \varphi_n(z) \end{bmatrix} = f^n \cdot \det \begin{bmatrix} \varphi_1(z) & \dots & \varphi_n(z) \end{bmatrix}.$$

Razpišemo lahko namreč

$$\Phi_f = \det \begin{bmatrix} f\varphi_1 & \dots & f\varphi_n \\ f\varphi_1' + f'\varphi_1 & \dots & f\varphi_n' + f'\varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ f\varphi_1^{(n-1)} + \dots + f^{(n-1)}\varphi_1 & \dots & f\varphi_n^{(n-1)} + \dots + f^{(n-1)}\varphi_n \end{bmatrix}.$$

S preprostimi linearnimi kombinacijami lahko sedaj dobimo

$$\Phi_f = \det \begin{bmatrix} f\varphi_1 & \dots & f\varphi_n \\ f\varphi_1' & \dots & f\varphi_n' \\ \vdots & & \vdots \\ f\varphi_1^{(n-1)} & \dots & f\varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = f^n \Phi.$$

Tako dobimo

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_n \end{bmatrix} = \varphi_1^n \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \end{bmatrix} = \varphi_1^n \cdot \det \begin{bmatrix} \left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' & \dots & \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)' \end{bmatrix}.$$

Ker za vsak i velja $\text{ord}_z \varphi_1 \neq \text{ord}_z \varphi_i$, sledi

$$\text{ord}_z \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} \right)' = \text{ord}_z \varphi_i - \text{ord}_z \varphi_1 - 1.$$

To so paroma različna števila, zato lahko uporabimo indukcijsko predpostavko. Dobimo

$$\begin{aligned} \text{ord}_z \Phi &= n \cdot \text{ord}_z \varphi_1 + \sum_{i=2}^n (\text{ord}_z \varphi_i - \text{ord}_z \varphi_1 - 1 - (i-2)) \\ &= \text{ord}_z \varphi_1 + \sum_{i=2}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1). \end{aligned}$$

□

Posledično lahko zapišemo $\tau(P) = \text{ord}_P \Phi$, pri čemer za φ_i vzamemo kar ω_i .

Trditev 2.19. Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev z rodno $g \geq 2$. Tedaj je

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g.$$

Dokaz. Pokažimo, da je zgoraj definiran Φ holomorfen m -diferencial za $m = \frac{g(g+1)}{2}$. Denimo, da ω_i priredi okolici U karto φ , okolici V pa karto ψ , f pa naj bo prehodna preslikava. Tako velja

$$\psi(f(z))f'(z) = \varphi(z),$$

dokazujemo pa

$$f'(z)^m \cdot \det \begin{bmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_g \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_g \end{bmatrix}.$$

Velja pa

$$\begin{aligned} \det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_g \end{bmatrix} &= \det \begin{bmatrix} (\psi_1 \circ f) \cdot (f') & \dots & (\psi_g \circ f) \cdot (f') \end{bmatrix} \\ &= (f')^g \cdot \det \begin{bmatrix} \psi_1 \circ f & \dots & \psi_g \circ f \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Po pravilu odvoda kompozituma lahko iz vrstice i izpostavimo še $(f')^{i-1}$. Tako dobimo

$$\det \begin{bmatrix} \varphi_1 & \dots & \varphi_g \end{bmatrix} = (f')^m \cdot \left(\det \begin{bmatrix} \psi_1 & \dots & \psi_g \end{bmatrix} \circ f \right).$$

Spomnimo se, da za meromorfen diferencial ω velja $\deg(\omega) = 2g - 2$. Ker je $\frac{\omega^m}{\Phi}$ meromorfna funkcija, sledi

$$\deg(\Phi) = m \cdot \deg(\omega) = m \cdot (2g - 2).$$

Tako je

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = \sum_{P \in M} \text{ord}_P \Phi = (g - 1) \cdot g \cdot (g + 1). \quad \square$$

Definicija 2.20. Točka $P \in M$ je *Weierstrassova točka*, če na M obstaja neničelna holomorfen diferencial z ničlo reda vsaj g v P .⁴

Trditev 2.21. Ekvivalentno, vsaj eno izmed števil $2, \dots, g$ ni GAP.

Dokaz. Obstoj diferencialne 1-forme z ničlo reda vsaj g v P je ekvivalentna pogoju $i(P^g) > 0$. Po Riemann-Rochovem izreku je ta neenakost ekvivalentna

$$r(P^{-g}) - 1 > 0,$$

oziroma $r(P^{-g}) \geq 2$. Ker je $r(1) = 1$, med $2, \dots, g$ obstaja število, ki ni GAP. \square

Trditev 2.22. Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$. Tedaj za število w Weierstrassovih točk veljata oceni

$$2g + 2 \leq w \leq g^3 - g.$$

Dokaz. Ker je $\tau(P) \geq 1$ za vsako Weierstrassovo točko in velja

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g,$$

⁴V splošnem definiramo q -Weierstrassove točke – obstaja q -diferencial z ničlo reda vsaj $\dim \mathcal{H}^q(M)$.

takoj sledi $w \leq g^3 - g$. Velja pa

$$\begin{aligned}
\tau(P) &= \sum_{j=1}^g (n_j - j) \\
&= \sum_{j=1}^{2g} j - \sum_{j=1}^g \alpha_j - \sum_{j=1}^g j \\
&= \sum_{j=g+1}^{2g-1} j - \sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \\
&\leq \frac{g^2 - g}{2}.
\end{aligned}
\quad \square$$

2.4 Hipereliptične ploskve

Definicija 2.23. Kompaktna Riemannova ploskev M je *hipereliptična*, če obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ z natanko dvema poloma.⁵

Ekvivalentno to pomeni, da obstaja tak efektiven divizor $D \in \text{Div } M$, da je $\deg D = 2$ in $r(D^{-1}) \geq 2$.

Trditev 2.24. Vsaka kompaktna Riemannova ploskev roda $g \leq 2$ je hipereliptična.

Trditev 2.25. Weierstrassove ploskve imajo natanko $2g + 2$ *BRANCH* točk.

Dokaz. Po izreku 2.6 velja

$$g = 2 \cdot (0 - 1) + 1 + \frac{B}{2}. \quad \square$$

Trditev 2.26. *BRANCH* točke preslikave f so natanko Weierstrassove točke ploskve M .

Dokaz. Naj bo $P \in M$ *BRANCH* točka. Če je P pol funkcije f , je njegova stopnja tako enaka 2. V nasprotnem primeru ima funkcija

$$g \equiv \frac{1}{f - f(P)}$$

pol stopnje 2 v P . V obeh primerih sledi, da 2 ni GAP za točko P , zato je ta Weierstrassova.

Vsaka *BRANCH* točka ima tako TEŽO

$$\sum_{k=1}^g (2k - 1) - \sum_{k=1}^g k = \frac{1}{2}g(g - 1),$$

zato je njihova skupna teža $g^3 - g$. Sledi, da so to vse Weierstrassove točke. \square

Lema 2.27. Naj bo P Weierstrassova točka hipereliptične ploskve M in $f \in \mathcal{K}(M)$ funkcija stopnje 2. Tedaj velja $f^{-1}(\infty) \sim P^2$.

⁵Pri tem pole štejemo z večkratnostmi.

Dokaz. Točka P je BRANCH točka funkcije f . Če je P pol te funkcije, je zato reda 2 in je $f^{-1}(\infty) = P^2$. V nasprotnem primeru definiramo funkcijo

$$g = \frac{1}{f - f(P)}.$$

Ni težko videti, da je $(g) = f^{-1}(\infty)P^{-2}$. □

Trditev 2.28. *Naj bosta f in g dve funkciji $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ stopnje 2. Tedaj obstaja Möbiusova transformacija A , za katero je*

$$g = A \circ f.$$

Dokaz. Naj bo $f^{-1}(\infty) = P_1Q_1$ in $g^{-1}(\infty) = P_2Q_2$. Ker na M ne obstajajo funkcije stopnje 1, sledi $r(P_1^{-1}Q_1^{-1}) = r(P_2^{-1}Q_2^{-1}) = 2$. Prostora $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$ in $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$ imata tako zaporedoma bazi $\{1, f\}$ in $\{1, g\}$. Ker za Weierstrassovo točko P velja $P_1Q_1 \sim P^2 \sim P_2Q_2$, sledi, da obstaja meromorfna preslikava h , za katero je $(h) = P_1Q_1P_2^{-1}Q_2^{-1}$. Ker je s predpisom $\varphi \mapsto h \cdot \varphi$ očitno podan izomorfizem prostorov $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$ in $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$, obstajajo konstante α, β, γ in δ , za katere je

$$1 = \alpha h + \beta hf \quad \text{in} \quad g = \gamma h + \delta hf.$$

Tako lahko izrazimo

$$g = \frac{\gamma + \delta f}{\alpha + \beta f}. \quad \square$$

Trditev 2.29. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g . Tedaj je M hipereliptična natanko tedaj, ko obstaja involucija $J \in \text{Aut } M$ z natanko $2g + 2$ fiksnimi točkami.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je M hipereliptična. Naj bo $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija stopnje 2. Za vsak $P \in M$ tako obstaja še ena točka $Q \in M$, za katero je $f(P) = f(Q)$ (če je $\text{ord}_P f = 2$, vzamemo $Q = P$). Tako lahko enostavno definiramo $J(P) = Q$. Ni težko videti, da je J res involucija z $2g + 2$ fiksnimi točkami.

Če je $Q = J(P) \neq P$, lahko na okolici U_Q točke Q zapišemo

$$J(X) = \left(f|_{U_Q}\right)^{-1}(f(X)),$$

zato je J holomorfna na $M \setminus W$. Če pa je $J(P) = P$, pa je $h = \sqrt{f - f(P)}$ lokalna koordinata, za katero velja $J(h) = -h$, saj je

$$f(P_h) = h^2 + f(P) = (-h)^2 + f(P) = f(P_{-h}).$$

Tako je J holomorfna tudi na W .

Predpostavimo sedaj, da obstaja involucija $J \in \text{Aut } M$ z $2g + 2$ fiksnimi točkami. Ker se projekcija $f: M \rightarrow M/\langle J \rangle$ BRANCHA v natanko $2g + 2$ točkah, po izreku 2.6 sledi, da je rod ploskve $M/\langle J \rangle$ enak 0. Sledi, da je $M/\langle J \rangle \cong \hat{\mathbb{C}}$, zato je f meromorfna funkcija z dvema poloma. □

Opazimo, da so fiksne točke hipereliptične involucije natanko Weierstrassove točke.

Trditev 2.30. *Naj bo M hipereliptična Riemannova ploskev roda $g \geq 2$ in $T \in \text{Aut } M$. Če je $T \notin \langle J \rangle$, ima T kvečjemu 4 fiksne točke.*

Dokaz. Naj bo $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ funkcija z natanko dvema poloma. Tedaj je taka tudi $f \circ T$, zato obstaja Möbiusova transformacija A , za katero je

$$f \circ T = A \circ f.$$

Naj bo P fiksna točka avtomorfizma T . Sledi, da je

$$A(f(P)) = f(T(P)) = f(P),$$

zato je $f(P)$ fiksna točka preslikave A . Opazimo, da je $A \neq \text{id}$, saj bi v nasprotnem primeru veljalo $f \circ T = f$, kar implicira $T \in \langle J \rangle$. Tako ima A kvečjemu 2 fiksni točki, zato jih ima T največ 4. \square

3 Avtomorfizmi Riemannovih ploskev

3.1 Sfere in torusi

Za določanje grupe avtomorfizmov Riemannovih ploskev so pomembne njihove topološke lastnosti – vsak avtomorfizem je namreč tudi homeomorfizem. Iz geometrijske topologije vemo, da je vsaka orientabilna kompaktna ploskev homeomorfna vsoti g torusov. Številu g pravimo rod ploskve.

Najprej si oglejmo ploskve z ničelnim rodom – topološko so to kar sfere. V prejšnjih razdelkih smo ugotovili, da je grupa avtomorfizmov Riemannove sfere enaka

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Vemo pa, da je grupa avtomorfizmov odvisna ne samo od topoloških lastnosti objekta, ampak tudi njegove kompleksne strukture.

Naslednji izziv so ploskve z rodom $g = 1$ – torusi. Za toruse IZREK ne velja, zato imamo več različnih grup avtomorfizmov. Oglejmo si, kako jih dobimo:

3.2 Ploskve večjih rodov

Trditev 3.1. *Naj bo $T \in \text{Aut } M$ netrivialen avtomorfizem. Tedaj ima T največ $2g + 2$ fiksni točk.*

Dokaz. Naj bo $P \in M$ točka, za katero je $T(P) \neq P$. Tedaj obstaja meromorfná funkcija $f \in \mathcal{K}(M)$ z divizorjem polov P^r za nek $1 \leq r \leq g + 1$. Oglejmo si funkcijo $h = f - f \circ T$. Njen divizor polov je očitno $P^r(T^{-1}P)^r$. Velja torej

$$\deg h^{-1}(0) = \deg h^{-1}(\infty) = 2r \leq 2g + 2,$$

zato ima g kvečjemu $2g + 2$ ničel. Ni težko videti, da so njene ničle natanko fiksne točke avtomorfizma T . \square

Lema 3.2. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$, W pa množica njenih Weierstrassovih točk. Tedaj ta vsak avtomorfizem $T \in \text{Aut } M$ velja $T(W) = W$.*

Dokaz. Avtomorfizmi ohranjajo GAPE. □

Izrek 3.3 (Schwarz). *Grupe avtomorfizmov kompaktnih ploskev roda $g \geq 2$ so končne.*

Dokaz. Po zgornji lemi sledi, da obstaja homomorfizem $\lambda: \text{Aut } M \rightarrow S_W$, kjer je S_W simetrična grupa. Dovolj je pokazati, da ima λ končno jedro. Ločimo dva primera.

- a) Če M ni hipereliptična, ima več kot $2g + 2$ Weierstrassovih točk. Vsak avtomorfizem, ki fiksira Weierstrassove točke, je zato kar identiteta, zato je $\ker \lambda$ trivialno.
- b) Če je M hipereliptična, velja kar $\ker \lambda = \langle J \rangle$, kjer je J hipereliptična involucija, velja pa $|\langle J \rangle| = 2$. □

Slovar strokovnih izrazov

Riemann surface Riemannova ploskev

Literatura

- [1] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- [2] H. M. Farkas in I. Kra, *Riemann surfaces*, **71**, Springer, 1980, bibliografija: str. 330-332.
- [3] F. Forstnerič, *Analiza na mnogoterostih*, 2023, [ogled 16. 5. 2023], dostopno na <https://users.fmf.uni-lj.si/forstneric/papers/AMbook.pdf>, bibliografija: str. 237-239.
- [4] R. C. Lyndon in J. L. Ullman, *Groups of elliptic linear fractional transformations*, Proceedings of the American Mathematical Society **18**(6) (1967) 1119–1124, [ogled 2023-06-11], dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2035812>.