

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Luka Horjak

HOLOMORFNI AVTOMORFIZMI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Miran Černe

Ljubljana, 2023

Kazalo

1	Holomorfni avtomorfizmi v kompleksni ravnini	4
1.1	Enostavno povezana območja	4
1.2	Punktirani diski in kolobarji	5
1.3	Avtomorfizmi p -povezanih območij	6
2	Riemannove ploskve	10
2.1	Gladke in kompleksne mnogoterosti	10
2.2	Riemann-Rochov izrek	14
2.3	Weierstrassove točke	16
2.4	Hipereliptične ploskve	20
3	Avtomorfizmi Riemannovih poloskev	22
3.1	Sfere in torusi	22
3.2	Ploskve večjih rodov	25
	Literatura	28

Holomorfni avtomorfizmi

POVZETEK

...

Holomorphic automorphisms

ABSTRACT

...

Math. Subj. Class. (2020): 30F10, 30C20

Ključne besede: ..., ...

Keywords: ..., ...

1 Holomorfní avtomorfizmi v kompleksni ravnini

1.1 Enostavno povezana območja

Da lahko govorimo o holomorfnih funkcijah, se bomo omejili na odprte podmnožice kompleksne ravnine.

Definicija 1.1. *Holomorfen avtomorfizem* odprte množice $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je bijektivna holomorfná preslikava $f: \Omega \rightarrow \Omega$ s holomorfnim inverzom.

Opazimo, da je zadosten pogoj že to, da je f bijektivna in holomorfná. Opazimo še, da množica avtomorfizmov nekega območja tvori grupo z operacijo kompozitum. To grupo označimo z $\text{Aut}(\Omega)$.

Prepričamo se lahko, da lahko avtomorfizme nepovezanih množic opišemo z avtomorfizmi, ki komponente med seboj permutirajo. V nadaljevanju se bomo tako omejili na povezane množice.

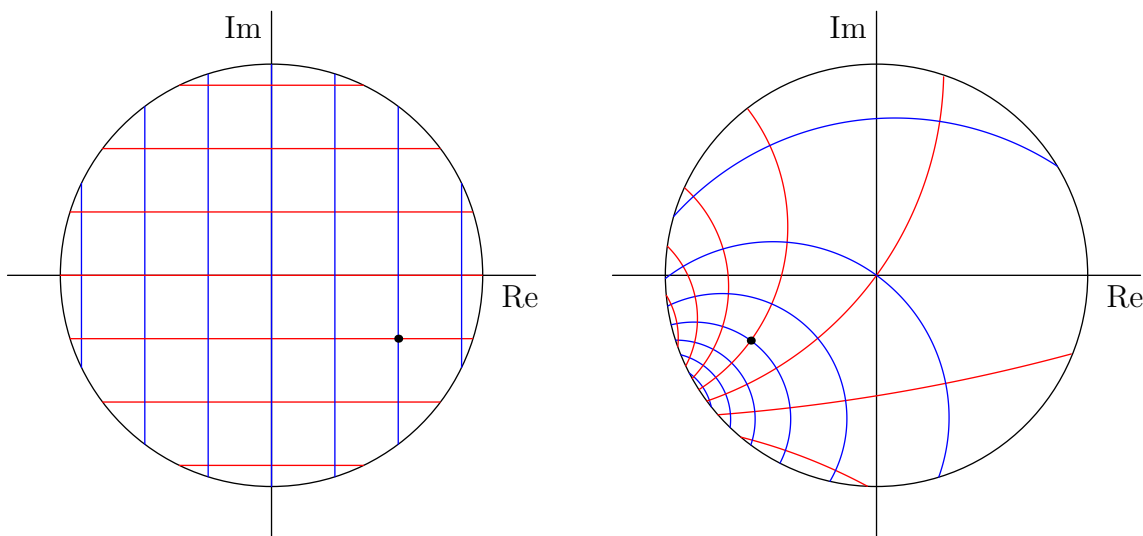
Definicija 1.2. *Območje* v kompleksni ravnini \mathbb{C} je vsaka odprta povezana množica.

Primer 1.3. Kompleksna ravnina je območje v \mathbb{C} . Njena grupa avtomorfizmov je enaka

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \neq 0\}. \quad \diamond$$

Primer 1.4. Naj bo Δ odprt enotski disk v \mathbb{C} . Tedaj je

$$\text{Aut}(\Delta) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid a \in \Delta \wedge \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \diamond$$



Slika 1: Primer avtomorfizma diska z označenima točkama $f^{-1}(0)$ in $f(0)$

Izkaže se, da smo s tem do izomorfizma natančno opisali grupe avtomorfizmov vseh povezanih in enostavno povezanih množic v \mathbb{C} . Velja namreč naslednja lema:

Lema 1.5. *Naj bosta Ω_1 in Ω_2 biholomorfno ekvivalentni območji v \mathbb{C} . Tedaj je $\text{Aut}(\Omega_1) \cong \text{Aut}(\Omega_2)$.*

Dokaz. Naj bo $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ biholomorfna preslikava. Sedaj definiramo preslikavo $\Phi: \text{Aut}(\Omega_1) \rightarrow \text{Aut}(\Omega_2)$ s predpisom

$$\Phi(\phi) = f^{-1} \circ \phi \circ f.$$

Ker je s predpisom

$$\Phi^{-1}(\psi) = f \circ \psi \circ f^{-1}$$

očitno podan predpis inverza preslikave Φ , je ta bijektivna. Velja pa

$$\Phi(\phi \circ \psi) = f^{-1} \circ \phi \circ \psi \circ f = (f^{-1} \circ \phi \circ f) \circ (f^{-1} \circ \psi \circ f) = \Phi(\phi) \circ \Phi(\psi),$$

zato je Φ homomorfizem. \square

Spomnimo se na Riemannov upodobitveni izrek, ki pravi, da je vsako povezano in enostavno povezano območje v kompleksni ravnini ali biholomorfno ekvivalentno \mathbb{A} ali pa kar enako \mathbb{C} . Grupe avtomorfizmov povezanih in enostavno povezanih območij so do izomorfizma natančno tako le $\text{Aut}(\mathbb{A})$ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$.

Omenimo še, da lahko kompleksno ravnino dopolnimo do Riemannove sfere $\hat{\mathbb{C}}$. Njeni avtomorfizmi so Möbiusove transformacije, torej

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

1.2 Punktirani diski in kolobarji

Po obravnavi enostavno povezanih območij so naslednji korak območja z »luknjami«. Eden izmed osnovnejših primerov takih območij je punktiran disk $\mathbb{A}_\alpha = \mathbb{A} \setminus \{\alpha\}$.

Disk $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$ je biholomorfno ekvivalenten vsakemu punktiranemu disku, saj je preslikava $f: \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{A}^*$ s predpisom

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

biholomorfna. Sledi, da je $\text{Aut}(\mathbb{A}_\alpha) \cong \text{Aut}(\mathbb{A}^*)$.

Trditev 1.6. *Za punktiran disk velja*

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Dokaz. Naj bo $f: \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{A}^*$ poljuben avtomorfizem. Tedaj je točka 0 izolirana singularnost funkcije f . Ker je f omejena, je to odpravljiva singularnost.

Naj bo $\tilde{f}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija, ki jo dobimo tako, da f razširimo na celoten disk. Predpostavimo, da velja $\tilde{f}(0) \neq 0$. Ker je \tilde{f} holomorfna, je odprta, zato sledi $|\tilde{f}(0)| < 1$. Oglejmo si točko $\alpha \neq 0$, za katero je $f(\alpha) = \tilde{f}(0)$. Izberemo si lahko disjunktni okolici U in V točk 0 in α . Ker je \tilde{f} odprta, je odprta tudi množica $W = \tilde{f}(U) \cap \tilde{f}(V)$. Hitro opazimo, da velja $\tilde{f}(0) \in W$, zato je ta množica neprazna. Sledi, da je W neskončna, kar je protislovje, saj velja $f(U \setminus \{0\}) \cap f(V) = \emptyset$.

Sledi, da je $\tilde{f}(0) = 0$, zato je \tilde{f} avtomorfizem diska. Tako dobimo inkluzijo

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) \subseteq \{f \in \text{Aut}(\mathbb{A}) \mid f(0) = 0\}.$$

Ni težko preveriti, da velja tudi obratna inkluzija, oziroma

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \square$$

Kaj pa se zgodi, če število lukenj povečamo? Naj bo $\Delta_2 = \Delta \setminus \{0, \alpha\}$.¹ Po enakem razmisleku kot prej ugotovimo, da za vsak avtomorfizem $f \in \text{Aut}(\Delta_2)$ velja $f(0) \in \Delta$ in hkrati $f(0) \notin \Delta_2$. Enako velja za točko α . Sedaj ni težko videti, da velja

$$\text{Aut}(\Delta_2) = \left\langle z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

saj je avtomorfizem diska natančno določen z dvema točkama.

Sedaj si oglejmo še kolobar $R = \Delta \setminus \Delta(r)$. Naj bo $f: R \rightarrow R$ avtomorfizem. Izkaže se, da se f zvezno razširi na ∂R . Ker lahko f komponiramo s preslikavo $\varphi: z \mapsto \frac{\rho}{z}$, lahko predpostavimo, da je $f(\partial\Delta) = \partial\Delta$.

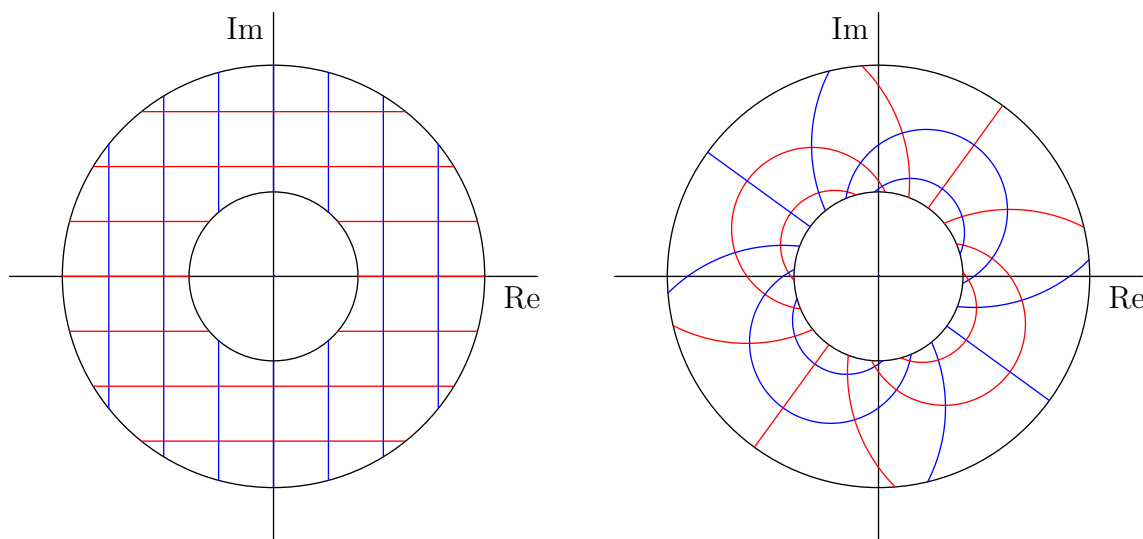
Naj bo

$$u(z) = \log |f(z)| - \log |z|.$$

Ker je logaritem harmonična funkcija, je $\Delta u = 0$. Ker je $u|_{\partial R} = 0$, je po principu maksima $u = 0$. Tako sledi $|f(z)| = |z|$ in

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = 1.$$

Ker je $\frac{f(z)}{z}$ holomorfná in so nekonstantne holomorfne preslikave odprte, sledi, da je $\frac{f(z)}{z}$ konstantna. Tako so vsi avtomorfizmi kolobarja kar $z \mapsto e^{i\theta}z$ in $z \mapsto e^{i\theta}\frac{r}{z}$.



Slika 2: Primer avtomorfizma kolobarja

1.3 Avtomorfizmi p -povezanih območij

Oglejmo si avtomorfizme območja $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq p\}$, pri čemer brez škode za splošnost vzamemo $x_p = \infty$. Za $p = 1$ dobimo kar kompleksno ravnino, katere avtomorfizme že poznamo. Pri $p = 2$ lahko brez škode za splošnost vzamemo $x_1 = 0$. Ni težko videti, da so vsi avtomorfizmi oblike $z \mapsto e^{i\theta} \cdot z^{\pm 1}$.

¹Podobno kot prej lahko privzamemo, da je ena izmed lukenj enaka 0.

Sedaj si oglejmo še primer $p > 2$. Preverimo lahko, da se vsak avtomorfizem Ω razširi do avtomorfizma Riemannove ploskve, ki permutira točke x_i . Ker je vsaka Möbiusova transformacija enolično določena s tremi točkami, je moč grupe $\text{Aut}(\Omega)$ tako omejena s $p(p-1)(p-2)$. Izkazuje se, da lahko to mejo še bistveno izboljšamo.

Trditev 1.7. *Naj bo $p > 2$ naravno število in $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq p\}$. Tedaj velja $|\text{Aut}(\Omega)| \leq 2p$ ali pa $|\text{Aut}(\Omega)| \in \{12, 24, 60\}$.*

Dokaz. Označimo $G = \text{Aut}(\Omega)$ in predpostavimo, da je $|G| \geq 2$. Označimo $G = \text{Aut } \Omega$ in za vsako točko $z \in \Omega$ njen stabilizator označimo z $G_z = \{g \in G \mid g(z) = z\}$. Vzemimo neko maksimalno množico $\{z_j \mid 1 \leq j \leq r\}$ točk, ki imajo netrivialen stabilizator in paroma disjunktno orbite. Naj bo še $v_j = |G_{z_j}|$ za vse $j \leq r$. Sedaj na dva načina preštejmo fiksne točke netrivialnih avtomorfizmov (z večkratnostmi). Ker ima vsak avtomorfizem natanko 2 fiksni točki, je teh skupaj enako kar $2 \cdot (|G| - 1)$. Zlahka preverimo, da so fiksne točke ravno elementi orbit točk z_j . Vsaka točka orbite točke z_j je fiksna točka natanko $v_j - 1$ netrivialnih avtomorfizmov, takih točk pa je seveda $\frac{|G|}{v_j}$. Tako dobimo enakost

$$2 \cdot (|G| - 1) = \sum_{j=1}^r \frac{|G|}{v_j} \cdot (v_j - 1).$$

Z malo spretnosti lahko to enakost preoblikujemo v

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right).$$

Sedaj ločimo naslednje primere:

i) Velja $r = 1$. Velja

$$1 - \frac{1}{v_1} < 1 \leq 2 - \frac{2}{|G|},$$

kar je seveda protislovje.

ii) Velja $r = 2$. Enakost lahko v tem primeru prepišemo v obliko

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}.$$

Ker velja $v_1, v_2 \leq |G|$, je lahko zgornja enakost izpolnjena le v primeru $v_1 = v_2 = |G|$. To pomeni, da imamo natanko dve fiksni točki, ki sta fiksni točki vsakega avtomorfizma. Ker je vsak avtomorfizem Riemannove sfere natanko določen s tremi točkami, je tako dovolj določiti, kam se slika ena izmed p točk, za to pa imamo kvečjemu p možnosti. V tem primeru tako velja $|\text{Aut}(\Omega)| \leq p$.²

iii) Velja $r = 3$. V tem primeru lahko zgornjo enakost prepišemo v

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} - 1.$$

²Dokazati se da celo, da velja $\text{Aut}(\Omega) \cong \mathbb{Z}_k$ za nek $k \leq p$.

Brez škode za splošnost naj velja $v_1 \leq v_2 \leq v_3$. Če za vse j velja $v_j \geq 3$, je desna stran enačbe nepozitivna. Tako sledi $v_1 = 2$. Če velja tudi $v_2 = 2$, lahko izrazimo $v_3 = \frac{|G|}{2}$. Orbita točke z_3 je tako enaka kar $\{z_3, z'_3\}$. Sledi, da stabilizatorji točke z_3 fiksirajo ta dva elementa, kar po istem argumentu kot zgoraj implicira, da je $v_3 \leq p$ in zato $|G| \leq 2p$.³

Ostane še primer, ko je $v_1 = 2$ in $v_2, v_3 \geq 3$. Če velja $v_3 \geq 6$, dobimo

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} - 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0,$$

kar je seveda protislovje. Podobno pridemo do protislovja, če velja $v_2, v_3 \geq 4$. Tako nam preostanejo le še primeri

$$(v_1, v_2, v_3) \in \{(2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5)\}.$$

Ni težko izračunati, da velja $|G| \in \{12, 24, 60\}$.

iv) Velja $r \geq 4$. Ker je $v_j \geq 2$, sledi

$$\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{r}{2} \geq 2 > 2 - \frac{2}{|G|},$$

kar je seveda protislovje. □

Za katera števila p pa lahko velja $|G| > 2p$? Če imamo v točki x_j luknjo območja Ω , jo moramo imeti tudi v vsakem elementu njene orbite. Oglejmo si vsak primer posebej:

i) Velja $|G| = 12$. V tem primeru imamo dve orbiti velikosti 4 in eno orbito velikosti 6, vse ostale pa so velikosti 12. Tako sledi

$$p = 4a + 6b + 12c,$$

pri čemer veljajo omejitve $a \leq 2$ in $b \leq 1$. Ker želimo še $p < 6$, je edina možnost kar $p = 4$.

ii) Velja $|G| = 24$. V tem primeru imamo po eno orbito velikosti 6, 8 in 12, zato velja

$$p = 6a + 8b + 12c + d$$

z omejitvami $a, b, c \leq 1$. Ob pogoju $p < 12$ tako sledi $p \in \{6, 8\}$.

iii) Velja $|G| = 60$. V tem primeru imamo po eno orbito velikosti 12, 20 in 30, od koder sledi

$$p = 12a + 20b + 30c + 60d$$

z omejitvami $a, b, c \leq 1$. Z dodatnim pogojem $p < 30$ sta tako edini možnosti $p \in \{12, 20\}$.

³V tem primeru je $\text{Aut}(\Omega)$ izomorfna neki diedrski grupi.

Zgornje množice si lahko predstavljamo tudi geometrijsko. Grupe redov 12, 24 in 60 ustrezajo ravno grupam rotacij tetraedra, oktaedra in ikozaedra. Orbite netrivialnih velikosti v teh primerih predstavljajo kar oglišča, razpolovišča robov in pa središča mejnih ploskev. Če za p točk izberemo eno izmed teh orbit, bodo vse rotacije še vedno avtomorfizmi območja.

Oglejmo si še primer, ko robne komponente niso nujno točke.

Izrek 1.8. *Naj bo Ω območje na Riemannovi sferi, katerega robne komponente sestavlja p točk ali Jordanovih krivulj. Tedaj za moč grupe $\text{Aut}(\Omega)$ veljajo enake ocene kot zgoraj.*

Dokaz. Po posplošitvi Riemannovega upodobitvenega izreka (glej [4]) lahko predpostavimo, da je Ω kar enotski disk, ki mu odstranimo nekaj točk in diskov. Po Carathéodoryjevem izreku [5, izrek 5.1.1 in opomba 5.1.2] sledi, da avtomorfizem permutira robne komponente območja Ω . Tako obstaja homomorfizem $\lambda: \text{Aut}(\Omega) \rightarrow S_{\partial\Omega}$, kjer je $S_{\partial\Omega}$ permutacijska grupa. Jedro homomorfizma so natanko tisti avtomorfizmi, ki fiksirajo vsako robno komponento posebej. Pokažimo, da je jedro trivialno.

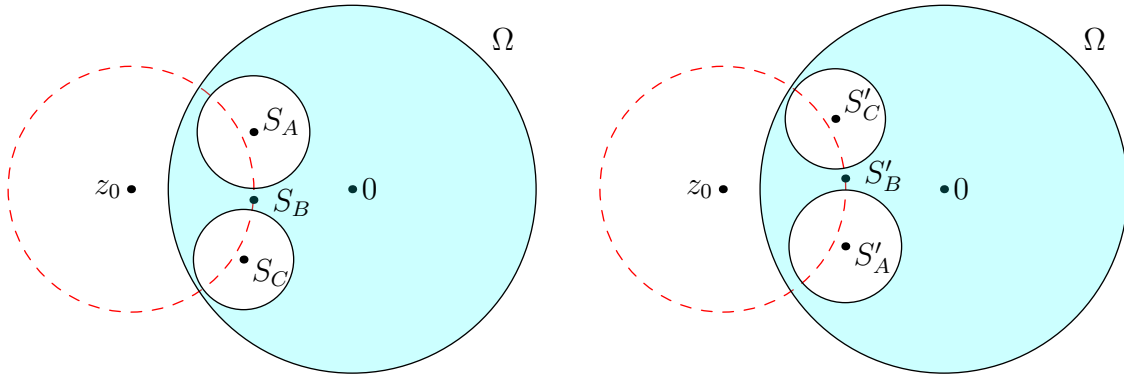
Naj bo $T \in \ker \lambda$ poljuben avtomorfizem. Najprej se lahko znebimo točkastih robnih komponent, saj se te preslikajo same vase. Z uporabo Schwarzovega zrcaljenja lahko T razširimo preko vseh ostalih robnih komponent. Enostavno je preveriti, da se pri tem ohrani injektivnost preslikave. V limiti nam v vsaki komponenti Ω^c ostane samo ena točka. V vseh omejenih komponentah je to odpravljiva singularnost, v neomejeni pa ali odpravljiva singularnost ali pol prve stopnje. V obeh primerih se T razširi do avtomorfizma Riemannove sfere. Zanimajo nas torej avtomorfizmi Riemannove sfere, ki fiksirajo vse robne komponente Ω . V nadaljevanju na točkaste robne komponente glejmo kot na diske z radijem 0.

Naj bo $T = \frac{az+b}{cz+d}$. Sedaj obravnavajmo dva primera.

- i) Velja $c = 0$. V tem primeru je T afina transformacija. To implicira, da T poleg robnih komponent fiksira tudi njihova središča. Ker sta to vsaj dve različni točki, ima T dve fiksni točki, zato velja kar $T = \text{id}$.
- ii) Velja $c \neq 0$. Tedaj je T kompozitum inverzije v točki $z_0 = -\frac{d}{c}$, rotacije in translacije. Ker mora inverzija ohranjati radije robnih komponent (preostali preslikavi sta namreč izometriji), morajo vse biti ortogonalne na neko krožnico s središčem v z_0 .⁴ Sedaj opazimo, da smo prišli do protislovja, saj je inverzija obrnila orientacijo središč robnih komponent, česar pa ne moremo popraviti z rotacijo in translacijo.

Sedaj si izberimo poljubno točko $z \notin \Omega$ in si oglejmo njeno orbito, torej množico $A = \{T(z) \mid T \in \text{Aut}(\Omega)\}$. Po enakem razmisleku kot zgoraj se namreč vsak avtomorfizem Ω razširi do avtomorfizma kompleksne ravnine. V vsaki komponenti Ω^c imamo kvečjemu en element množice A . Sedaj si izberimo poljubno točko v eni izmed komponent, ki je množica A ne obišče, in postopek ponovimo. Tako na koncu dobimo množico $S = \{z_i \mid 1 \leq i \leq p\}$, pri čemer je v vsaki komponenti Ω^c natanko ena točka. Poljuben avtomorfizem $T \in \text{Aut}(\Omega)$ se torej razširi do avtomorfizma območja $\Omega \setminus S$, s tem pa je izrek dokazan. \square

⁴Ne morejo imeti središča v z_0 , saj bi tedaj T območje Ω slikal v notranjost te krožnice.



Slika 3: Inverzija prezrcali robne komponente

2 Riemannove ploskve

2.1 Gladke in kompleksne mnogoterosti

V tem poglavju bomo rezultate iz območij na Riemannovi sferi posplošili na bolj splošne množice. Seveda hočemo še naprej govoriti o holomorfnih preslikavah, zato potrebujejo te množice neko strukturo, v kateri znamo odvajati. Naravna izbira so tako mnogoterosti.

Definicija 2.1. *Topološka mnogoterost* dimenzije n je Hausdorffov, 2-števen topološki prostor M , v katerem ima vsaka točka $p \in M$ okolico, homeomorfno odprti podmnožici \mathbb{R}^n . Paru okolice in homeomorfizma pravimo *lokalna karta*.

Zdi se, da lahko za vsako primerno preslikavo $f: M \rightarrow N$ med mnogoterostima M in N preverimo, ali je diferenciable – za vsako točko $P \in M$ poiščemo evklidski okolici s homeomorfizmoma (U, φ) in (V, ψ) točk P in $f(P)$ in preverimo, ali je preslikava $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ diferenciable. To seveda lahko naredimo, a pridemo do težave – diferenciablenost je v tem primeru odvisna od lokalne karte.

V nadaljevanju se omejimo na dvodimenzionalne mnogoterosti (ploskve), saj so lokalno homeomorfne podmnožici kompleksne ravnine, kar nam bo olajšalo definicijo holomorfnosti.

Definicija 2.2. *Atlas* ploskve M je množica lokalnih kart $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$, za katero velja

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Če velja $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, definiramo *prehodno preslikavo* $\varphi_{i,j}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$ s predpisom $\varphi_{i,j} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Atlas je *kompleksen*, če so vse prehodne preslikave holomorfne.

S to definicijo smo se znebili zgornje težave. Če namreč vzamemo lokalne karte iz istega kompleksnega atlasa, je holomorfnost preslikave neodvisna od izbire lokalne karte – če so (U, φ_i) in (V, ψ_i) lokalne karte točk P in $f(P)$, za $f_i = \psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ velja

$$f_2 = (\psi_2 \circ \psi_1^{-1}) \circ f_1 \circ (\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}).$$

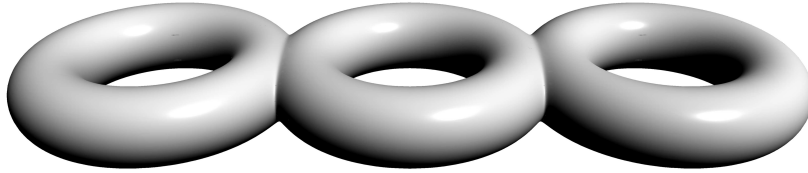
Če je funkcija f_1 holomorfná, je zaradi holomorfности prehodnih preslikav holomorfná tudi f_2 .

$$\begin{array}{ccc}
 U_1 \subseteq \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad f_1 \quad} & V_1 \subseteq \mathbb{C} \\
 \uparrow \varphi_1 & & \uparrow \psi_1 \\
 U & \xrightarrow{\quad f \quad} & V \\
 \downarrow \varphi_2 & & \downarrow \psi_2 \\
 U_2 \subseteq \mathbb{C} & \xrightarrow{\quad f_2 \quad} & V_2 \subseteq \mathbb{C}
 \end{array}$$

Pravimo, da sta kompleksna atlasa \mathcal{U} in \mathcal{V} *kompatibilna*, če je tudi $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ kompleksen atlas. Lahko se prepričamo, da je kompatibilnost ekvivalenčna relacija. Ko izbiramo atlas za mnogoterost je tako pomembno le, v katerem ekvivalenčnem razredu je ta atlas.

Definicija 2.3. *Riemannova ploskev* je povezana mnogoterost dimenzije 2 (kompleksne dimenzije 1) skupaj z izborom ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov.

V nadaljevanju se bomo omejili na kompaktne Riemannove ploskve. Izkaže se, da so vse Riemannove ploskve orientabilne [3, razdelek 1.2.6]. Z geometrijsko topologijo lahko te klasificiramo kot g -toruse – za $g = 0$ to pomeni sfero, za $g = 1$ torus, za $g \geq 2$ pa g torusov, ki so zlepljeni skupaj. Številu g pravimo *rod* ploskve.



Slika 4: Ploskev roda $g = 3$

Definicija 2.4. *Meromorfen q -diferencial* ω Riemannove ploskve je dodelitev meromorfne funkcije f vsaki lokalni koordinati, pri čemer je $f(z) dz^q$ neodvisna od lokalne koordinate. Meromorfnim 1-diferencialom pravimo kar *meromorfní diferenciali*.

Naj bosta (U, φ) in (V, ψ) lokalni karti, za kateri velja $U \cap V \neq \emptyset$. Če jima meromorfen q -diferencial ω priredi funkciji f_U in f_V , mora tako veljati

$$f_U = f_V \cdot \left((\psi \circ \varphi^{-1})' \right)^q.$$

Opazimo, da je q -ta potenca meromorfnega diferenciala meromorfen q -diferencial.

Trditev 2.5. *Naj bosta α in β meromorfna q -diferenciala. Tedaj je $\frac{\alpha}{\beta}$ meromorfna funkcija.*

Dokaz. Z zgornjimi oznakami velja

$$\frac{\alpha_U}{\beta_U} = \frac{\alpha_V \cdot \left((\psi \circ \varphi^{-1})' \right)^q}{\beta_V \cdot \left((\psi \circ \varphi^{-1})' \right)^q} = \frac{\alpha_V}{\beta_V}.$$

Kvociént $\frac{\alpha}{\beta}$ tako ni odvisen od lokalnih koordinat. □

Očitno velja tudi obratno – če je α meromorfen q -diferencial in f meromorfná funkcija, je tudi $f\alpha$ meromorfen q -diferencial.

Trditev 2.6. *Naj bo $f: M \rightarrow N$ nekonstantna holomorfna preslikava med kompaktnima Riemannovima ploskvama. Tedaj obstaja naravno število m , za katero f doseže vsako točko $Q \in N$ natanko m -krat.⁵*

Dokaz. Iz kompleksne analize vemo, da za vsako točko $P \in M$ obstajajo take lokalne koordinate \tilde{z} , da je $f(\tilde{z}) = f(P) + \tilde{z}^n$. Število $n - 1$ označimo z $b(P)$ in mu pravimo BRANCHING NUMBER. To je seveda dobro definirano.

Za vsako naravno število m naj bo

$$\Sigma_m = \left\{ X \in N \mid \sum_{f(P)=X} (b(P) + 1) \geq m \right\}.$$

Označimo še

$$\varphi(X) = \sum_{f(P)=X} (b(P) + 1).$$

Vse množice Σ_m so odprte – če je $b(P) = n - 1$, lahko v lokalnih koordinatah zapišemo $f(\tilde{z}) = \tilde{z}^n$. Enačba $f(\tilde{z}) = \varepsilon$ ima tako natanko n rešitev, zato za okolico U točke P velja

$$b(P) + 1 = \sum_{Q \in U \cap f^{-1}(P')} (b(Q) + 1),$$

kjer je $P' \in f(U)$. Če to enakost seštejemo po okolicah vseh točk $P \in f^{-1}(X)$, dobimo

$$m \leq \varphi(X) \leq \varphi(P').$$

Pokažimo še, da so te množice zaprte v $\hat{\mathbb{C}}$. Naj bo Q limita zaporedja točk $Q_k \in \Sigma_m$, pri čemer je brez škode za splošnost $b(P) = 0$ za vsak $P \in f^{-1}(Q_k)$. Ker imajo vse množice $f^{-1}(Q_k)$ vsaj m elementov, lahko najdemo tako podzaporedje zaporedja $(Q_k)_{n=1}^\infty$, da lahko iz njihovih praslik tvorimo m konvergentnih zaporedij. Tako sledi

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} (b(P) + 1) \geq m.$$

Sledi, da so vse množice Σ_m odprte in zaprte v $\hat{\mathbb{C}}$. Čim je ena izmed množic Σ_m neprazna, je tako enaka celotni Riemannovi sferi, saj je ta povezana. \square

Številu m pravimo *stopnja* preslikave f in označimo $m = \deg f$.

Posledica 2.7. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev. Če je $f: M \rightarrow \mathbb{C}$ holomorfna preslikava, je konstantna.*

Dokaz. Preslikavo f lahko opazujemo kot preslikavo med Riemannovo ploskvijo M in Riemannovo sfero $\hat{\mathbb{C}}$. Če f ni konstantna, ima pozitivno stopnjo, kar pa ni mogoče, saj je $f^{-1}(\infty) = 0$. \square

⁵Šteto z večkratnostmi.

To posledico lahko pravzaprav dokažemo z uporabo lastnosti holomorfnih preslikav. Ker je M kompaktna namreč sledi, da je taka tudi $f(M)$. Ker pa so nekonstantne holomorfne preslikave odprte, pa sledi, da je $f(M)$ tudi odprta. To seveda pomeni, da je $f(M) = \mathbb{C}$, kar je v protislovju s kompaktnostjo.

Definicija 2.8. Za kompaktni Riemannovo ploskvi M in N ter nekonstantno preslikavo $f: M \rightarrow N$ definiramo *TOTAL BRANCH NUMBER* kot

$$B = \sum_{P \in M} b_f(P).$$

Število je dobro definirano, saj je množica $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$ diskretna in tako zaradi kompaktnosti končna.

Izrek 2.9 (Riemann-Hurwitz). *Naj bosta M in N kompaktni Riemannovi ploskvi rodov g in γ , $f: M \rightarrow N$ pa nekonstantna preslikava stopnje n . Tedaj za TOTAL BRANCHING NUMBER B velja*

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}.$$

Dokaz. Ker je množica $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$ končna, jo lahko uporabimo za triangulacijo ploskve N . Denimo, da ima triangulacija F lic, E povezav in V vozlišč. To triangulacijo lahko z f^{-1} preslikamo na M . Tako dobimo triangulacijo ploskve M z nF lici, nE povezavami in $nV - B$ vozlišči. Sledi, da je

$$\begin{aligned} F - E + V &= 2 - 2\gamma, \\ nF - nE + nV - B &= 2 - 2g. \end{aligned}$$

Iz teh enačb očitno sledi

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}. \quad \square$$

Trditev 2.10. *Naj bo $H \subseteq \text{Aut } M$ končna podgrupa grupe avtomorfizmov Riemannove ploskve M . Tedaj je podgrupa $H_P = \{h \in H \mid h(P) = P\}$ ciklična.*

Dokaz. Dokazali bomo, da obstaja enostavno povezana množica D , ki je invariantna za H_P – za vsak $h \in H_P$ torej velja $h(D) = D$. Po Riemannovem upodobitvenem izreku namreč tedaj obstaja biholomorfna preslikava $f: D \rightarrow \mathbb{D}$, za katero velja $f(P) = 0$. Avtomorfizmi diska $f \circ h \circ f^{-1}$ so torej rotacije, vsaka končna grupa rotacij pa je ciklična.

Opazujmo avtomorfizme v lokalni koordinati točke P . Pokažimo, da vsak element $h \in H_P$ slika dovolj majhne diske v konveksne množice. Dovolj je pokazati, da dovolj majhne krožnice slika v konveksne krivulje, oziroma da je argument smeri tangentnega vektorja na sliko krožnice monotona.

Tangentni vektor v točki z na sliko krožnice z radijem $r = |z|$ dobimo kot

$$h'(z) \cdot \frac{z}{|z|} \cdot i,$$

kar pomeni, da je njegov argument enak

$$\arg h'(z) + \arg(z) + \frac{\pi}{2}.$$

Dokazujemo torej, da je

$$\arg\left(h'\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)\right) + \varphi$$

naraščajoča funkcija v φ za vse dovolj majhne r , ker pa lahko lokalno definiramo⁶

$$\arg(z) = \text{Im}(\log(z)),$$

je dovolj pokazati, da je

$$\varphi + \text{Im}\left(\log\left(h'\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)\right)\right)$$

naraščajoča. Njen odvod je enak kar

$$1 + \text{Im}\left(\frac{h''(r \cdot e^{i\varphi})}{h'(r \cdot e^{i\varphi})} \cdot r \cdot i \cdot e^{i\varphi}\right) = 1 + \text{Re}\left(\frac{z \cdot h''(z)}{h'(z)}\right),$$

kar je za dovolj majhne z zaradi zveznosti seveda pozitivno.

Sedaj naj bo $r > 0$ tako realno število, da je $h(\Delta(r))$ konveksna za vse $h \in H_P$. Tedaj je

$$D = \bigcup_{h \in H_P} h(\Delta(r))$$

konveksna množica, zato je enostavno povezana. □

Definicija 2.11. Naj bo $H \subseteq \text{Aut } M$ končna podgrupa grupe avtomorfizmov Riemannove ploskve M . Na množici M/H uvedemo kompleksno strukturo na naslednji način:

- i) Če je grupa $H_P = \{h \in H \mid h(P) = P\}$ trivialna, lokalna karta na dovolj majhni okolici P inducira lokalno karto pri $\pi(P)$.
- ii) Če je v lokalni koordinati H_P generirana s preslikavo $z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{k}} z$, za lokalno karto točke P vzamemo z^k .

Prepričamo se lahko, da so te lokalne karte med seboj kompatibilne. Na kvocientu M/H smo torej dobili kompleksno strukturo, zato je to Riemannova ploskev. Opazimo še, da je kvocientna projekcija $\pi: M \rightarrow M/H$ holomorfna.

2.2 Riemann-Rochov izrek

Definicija 2.12. *Divizor* na Riemannovi ploskvi M je formalni simbol

$$\mathfrak{A} = \prod_{P \in M} P^{\alpha(P)},$$

kjer za vsak P velja $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$ in je $\alpha(P) \neq 0$ za kvečjemu končno mnogo točk $P \in M$. *Stopnja* divizorja \mathfrak{A} je definirana kot

$$\deg \mathfrak{A} = \sum_{P \in M} \alpha(P).$$

⁶Ker je h avtomorfizem, velja $h'(z) \neq 0$.

Divizorji na M tvorijo grupo za naravno definirano množenje – to grupo označimo z $\text{Div}(M)$. Tako je $\deg: \text{Div}(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ homomorfizem grup.

Za vsako neničelno meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{K}(M)$ definiramo njen *glavni divizor* kot⁷

$$(f) = \prod_{P \in M} P^{\text{ord}_P f}.$$

Definiramo lahko še *divizor polov*

$$f^{-1}(\infty) = \prod_{P \in M} P^{\max(-\text{ord}_P f, 0)}$$

in *divizor ničel*

$$f^{-1}(0) = \prod_{P \in M} P^{\max(\text{ord}_P f, 0)}.$$

Opazimo, da velja

$$(f) = \frac{f^{-1}(0)}{f^{-1}(\infty)}.$$

Na divizorjih uvedemo ekvivalenčno relacijo \sim na naslednji način:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = (f).$$

Lema 2.13. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev. Za vsako neničelno funkcijo $f \in \mathcal{K}(M)$ velja $\deg f^{-1}(0) = \deg f^{-1}(\infty)$. Ekvivalentno je $\deg(f) = 0$.*

Dokaz. Stopnja divizorja polov funkcije f je natanko število njenih polov, štetih z večkratnostmi, stopnja divizorja ničel pa število njenih ničel. Ti števili sta enaki po trditvi 2.6. \square

Posebej velja opomniti, da to pomeni, da imajo funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah enako število ničel in polov (štetih z večkratnostmi).

Na divizorjih lahko uvedemo relacijo delne urejenosti kot

$$\prod_{P \in M} P^{\alpha(P)} \geq \prod_{P \in M} P^{\beta(P)} \iff \forall P \in M: \alpha(P) \geq \beta(P).$$

Pravimo, da je divizor \mathfrak{A} *efektiven*, če velja $\mathfrak{A} \geq 1$. Ni težko videti, da je za vsak divizor \mathfrak{A} na M množica

$$L(\mathfrak{A}) = \{f \in \mathcal{K}(M) \mid (f) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor – njegovo dimenzijo označimo z $r(\mathfrak{A})$.

Zgled 2.14. Velja $r(1) = 1$. Pogoj $(f) \geq 1$ je namreč ekvivalenten temu, da je f holomorfna. Ker so vse holomorfne funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah konstantne, je zato $L(1) \cong \mathbb{C}$, kar je enodimenzionalen prostor. \diamond

Zgled 2.15. Če je $\deg \mathfrak{A} > 0$, je $r(\mathfrak{A}) = 0$. Iz neenakosti $(f) \geq \mathfrak{A}$ za neničelno funkcijo f namreč sledi $0 = \deg(f) \geq \deg \mathfrak{A} > 0$, kar je protislovje. \diamond

⁷Glavne divizorje na enak način definiramo še za meromorfne diferencialne.

Podobno je tudi

$$\Omega(\mathfrak{A}) = \{\omega \mid \omega \text{ je meromorfen diferencial } \wedge (\omega) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor. Označimo $i(\mathfrak{A}) = \dim \Omega(\mathfrak{A})$.

Trditev 2.16. *Naj bo \mathfrak{A} poljuben divizor in ω meromorfen diferencial. Tedaj je*

$$i(\mathfrak{A}) = r\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right).$$

Dokaz. Naj bo $\varphi: \Omega(\mathfrak{A}) \rightarrow L\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right)$ preslikava s predpisom $\varphi: \zeta \mapsto \frac{\zeta}{\omega}$. Seveda je predpis dobro definiran, ni pa težko videti, da je to izomorfizem vektorskih prostorov. Sledi, da imata enako dimenzijo. \square

Izrek 2.17 (Riemann-Roch). *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g in \mathfrak{A} divizor na M . Tedaj velja*

$$r\left(\mathfrak{A}^{-1}\right) = \deg \mathfrak{A} - g + 1 + i(\mathfrak{A}).$$

Dokaz izreka najdemo v [2, theorem III.4.11].

Zgled 2.18. Z uporabo zgornjega izreka lahko izračunamo $i(1)$. Velja namreč

$$i(1) = r(1) - \deg 1 + g - 1 = g. \quad \diamond$$

Trditev 2.19. *Naj bo $\deg \mathfrak{A} > 2g - 2$. Tedaj je $i(\mathfrak{A}) = 0$.*

Dokaz. Naj bo $\omega \in i(1)$ neničelna holomorfen diferencial. Tedaj je

$$r\left((\omega)^{-1}\right) = \deg(\omega) - g + 1 + i((\omega)).$$

Po trditvi 2.16 je $r((\omega)^{-1}) = i(1) = g$ in $i((\omega)) = r(1) = 1$. Od tod sledi, da je $\deg(\omega) = 2g - 2$.

Sedaj dobimo

$$i(\mathfrak{A}) = r\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right) = 0,$$

saj je $\deg(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}) > 0$. \square

2.3 Weierstrassove točke

Izrek 2.20 (Weierstrass). *Naj bo M ploskev roda $g > 0$ in $P \in M$. Tedaj obstaja natanko g števil*

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g,$$

za katera ne obstaja funkcija $f \in \mathcal{K}(M)$, ki je holomorfnna na $M \setminus \{P\}$ in ima pol reda n_j v P . Tem številom pravimo GAP.

Dokaz. Najprej opazimo, da je število n GAP natanko tedaj, ko je $r(P^{-n}) = r(P^{1-n})$. Ker je $r(P^{-n}) \leq r(P^{1-n}) + 1$, število n ni GAP natanko tedaj, ko velja

$$r\left(P^{-n}\right) - r\left(P^{1-n}\right) = 1.$$

Po Riemann-Rochovem izreku velja

$$r(P^{-k}) = k - g + 1 + i(P^k),$$

zato sledi

$$\begin{aligned} r(P^{-n}) - r(1) &= \sum_{k=1}^n (r(P^{-k}) - r(P^{1-k})) \\ &= \sum_{k=1}^n (1 + i(P^k) - i(P^{k-1})) \\ &= n + i(P^n) - i(1). \end{aligned}$$

Ker je $i(1) = g$ in za vse $n > 2g - 2$ velja $i(P^n) = 0$, sledi

$$r(P^{-n}) - 1 = n - g.$$

Opazimo, da leva stran šteje ravno število $\text{NEGAPOV} \leq n$. Sledi, da je GAPOV natanko g in so vsi strogo manjši od $2g$. \square

Izkaže se, da je lažje analizirati komplement tega zaporedja, torej števila

$$1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_g = 2g,$$

za katera obstaja funkcija s polom reda α_j v P . Če sta števili α_i in α_j NEGAPA , je tako tudi število $\alpha_i + \alpha_j$, saj lahko vzamemo kar produkt pripadajočih funkcij. Posebej je vsak večkratnik NEGAPA spet NEGAP . Če je $\alpha_1 = 2$, so tako vsa soda števila NEGAPI in GAPI natanko liha števila, manjša od $2g$.

Lema 2.21. *Za vsako naravno število $j < g$ velja*

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g.$$

Dokaz. Denimo, da je $\alpha_j + \alpha_{g-j} < 2g$. Tedaj so vsa števila $\alpha_k + \alpha_{g-j}$ za $k \leq j$ NEGAPI , manjši od $2g$. Tako imamo skupaj vsaj $g - j + j + 1 = g + 1$ NEGAPOV , manjših od $2g$. To je seveda protislovje. \square

Lema 2.22. *Velja neenakost*

$$\sum_{j=1}^g \alpha_j \geq g \cdot (g + 1)$$

z enakostjo natanko tedaj, ko je $\alpha_1 = 2$.

Dokaz. Za dokaz neenakosti je dovolj uporabiti prejšnjo lemo. Zgornja izraza sta enaka natanko tedaj, ko za vsak $j < g$ velja

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g.$$

Če je število α NEGAP , je tako torej tudi $2g - \alpha$. Opazimo, da je za NEGAPA $\alpha_i < \alpha_j$ tudi $\alpha_i + (2g - \alpha_j)$ NEGAP , zato je tak tudi

$$2g - (\alpha_i + (2g - \alpha_j)) = \alpha_j - \alpha_i.$$

Sledi, da je tudi vsaka razlika NEGAPOV NEGAP . Sledi, da so vsi NEGAPI večkratnik najmanjšega NEGAPA (osnovni izrek o deljenju), kar pa takoj implicira $\alpha_1 = 2$. \square

Število n je GAP natanko tedaj, ko je $r(P^{-n}) = r(P^{1-n})$. To je po Riemann-Rochovem izreku ekvivalentno $i(P^{n-1}) - i(P^n) = 1$. Sledi, da imajo holomorfní diferenciali na M v točki P lahko red enak le enemu iz števil

$$n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_g - 1.$$

Posebej, obstaja baza $\{\omega_i \mid 1 \leq i \leq g\}$ holomorfnih diferencialov, pri čemer velja $\text{ord}_P \omega_i = n_i - 1$.

Definicija 2.23. TEŽA točke $P \in M$ je vsota

$$\tau(P) = \sum_{j=1}^g (n_j - j),$$

kjer so n_j GAPI za P .

Lema 2.24. Naj bodo $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ meromorfne preslikave s paroma različnim redom v točki $P \in X$. Tedaj za determinanto

$$\Phi(z) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \dots & \varphi_n(z) \\ \varphi'_1(z) & \varphi'_2(z) & \dots & \varphi'_n(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(z) & \varphi_2^{(n-1)}(z) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(z) \end{bmatrix}$$

velja

$$\text{ord}_z \Phi = \sum_{i=1}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1).$$

Dokaz. Za lažji zapis pišimo

$$\Phi(z) = \det [\varphi_1(z) \quad \dots \quad \varphi_n(z)].$$

Trditev dokažemo z indukcijo – trditev očitno velja za $n = 1$. Za indukcijski korak si bomo pomagali z dejstvom, da za vsako meromorfno funkcijo f velja

$$\Phi_f = \det [f \cdot \varphi_1(z) \quad \dots \quad f \cdot \varphi_n(z)] = f^n \cdot \det [\varphi_1(z) \quad \dots \quad \varphi_n(z)].$$

Razpišemo lahko namreč

$$\Phi_f = \det \begin{bmatrix} f\varphi_1 & \dots & f\varphi_n \\ f\varphi'_1 + f'\varphi_1 & \dots & f\varphi'_n + f'\varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ f\varphi_1^{(n-1)} + \dots + f^{(n-1)}\varphi_1 & \dots & f\varphi_n^{(n-1)} + \dots + f^{(n-1)}\varphi_n \end{bmatrix}.$$

S preprostimi linearnimi kombinacijami lahko sedaj dobimo

$$\Phi_f = \det \begin{bmatrix} f\varphi_1 & \dots & f\varphi_n \\ f\varphi'_1 & \dots & f\varphi'_n \\ \vdots & & \vdots \\ f\varphi_1^{(n-1)} & \dots & f\varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = f^n \Phi.$$

Tako dobimo

$$\det [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n] = \varphi_1^n \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \end{bmatrix} = \varphi_1^n \cdot \det \left[\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)' \ \dots \ \left(\frac{\varphi_n}{\varphi_1} \right)' \right].$$

Ker za vsak i velja $\text{ord}_z \varphi_1 \neq \text{ord}_z \varphi_i$, sledi

$$\text{ord}_z \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1} \right)' = \text{ord}_z \varphi_i - \text{ord}_z \varphi_1 - 1.$$

To so paroma različna števila, zato lahko uporabimo induksijsko predpostavko. Dobimo

$$\begin{aligned} \text{ord}_z \Phi &= n \cdot \text{ord}_z \varphi_1 + \sum_{i=2}^n (\text{ord}_z \varphi_i - \text{ord}_z \varphi_1 - 1 - (i-2)) \\ &= \text{ord}_z \varphi_1 + \sum_{i=2}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1). \end{aligned} \quad \square$$

Posledično lahko zapišemo $\tau(P) = \text{ord}_P \Phi$, pri čemer za φ_i vzamemo kar ω_i .

Trditev 2.25. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev z rodno $g \geq 2$. Tedaj je*

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g.$$

Dokaz. Pokažimo, da je zgoraj definiran Φ holomorfen m -diferencial za $m = \frac{g \cdot (g+1)}{2}$. Denimo, da ω_i priredi okolici U karto φ , okolici V pa karto ψ , f pa naj bo prehodna preslikava. Tako velja

$$\psi(f(z))f'(z) = \varphi(z),$$

dokazujemo pa

$$f'(z)^m \cdot \det [\psi_1 \ \dots \ \psi_g] = \det [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_g].$$

Velja pa

$$\begin{aligned} \det [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_g] &= \det [(\psi_1 \circ f) \cdot (f') \ \dots \ (\psi_g \circ f) \cdot (f')] \\ &= (f')^g \cdot \det [\psi_1 \circ f \ \dots \ \psi_g \circ f]. \end{aligned}$$

Po pravilu odvoda kompozituma lahko iz vrstice i izpostavimo še $(f')^{i-1}$. Tako dobimo

$$\det [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_g] = (f')^m \cdot (\det [\psi_1 \ \dots \ \psi_g] \circ f).$$

Spomnimo se, da za meromorfen diferencial ω velja $\deg(\omega) = 2g - 2$. Ker je $\frac{\omega^m}{\Phi}$ meromorfna funkcija, sledi

$$\deg(\Phi) = m \cdot \deg(\omega) = m \cdot (2g - 2).$$

Tako je

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = \sum_{P \in M} \text{ord}_P \Phi = (g-1) \cdot g \cdot (g+1). \quad \square$$

Definicija 2.26. Točka $P \in M$ je *Weierstrassova točka*, če na M obstaja neničelna holomorfen diferencial z ničlo reda vsaj g v P .⁸

Trditev 2.27. *Ekvivalentno, vsaj eno izmed števil $2, \dots, g$ ni GAP.*

Dokaz. Obstoj diferencialne 1-forme z ničlo reda vsaj g v P je ekvivalentna pogoju $i(P^g) > 0$. Po Riemann-Rochovem izreku je ta neenakost ekvivalentna

$$r(P^{-g}) - 1 > 0,$$

oziroma $r(P^{-g}) \geq 2$. Ker je $r(1) = 1$, med $2, \dots, g$ obstaja število, ki ni GAP. \square

Trditev 2.28. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$. Tedaj za število w Weierstrassovih točk veljata oceni*

$$2g + 2 \leq w \leq g^3 - g.$$

Dokaz. Ker je $\tau(P) \geq 1$ za vsako Weierstrassovo točko in velja

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g,$$

takoj sledi $w \leq g^3 - g$. Velja pa

$$\begin{aligned} \tau(P) &= \sum_{j=1}^g (n_j - j) \\ &= \sum_{j=1}^{2g} j - \sum_{j=1}^g \alpha_j - \sum_{j=1}^g j \\ &= g(2g + 1) - \frac{g(g + 1)}{2} - \sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \\ &\leq g(2g + 1) - \frac{g(g + 1)}{2} - g(g + 1) \\ &= \frac{g(g - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Posledično je res $w \geq 2g + 2$. \square

2.4 Hipereliptične ploskve

Definicija 2.29. Kompaktna Riemannova ploskev M je *hipereliptična*, če obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ z natanko dvema poloma.⁹

Ekvivalentno to pomeni, da obstaja tak efektiven divizor $D \in \text{Div } M$, da je $\deg D = 2$ in $r(D^{-1}) \geq 2$.

Trditev 2.30. *Weierstrassove ploskve imajo natanko $2g + 2$ BRANCH točk.*

⁸V splošnem definiramo q -Weierstrassove točke – obstaja q -diferencial z ničlo reda vsaj $\dim \mathcal{H}^q(M)$.

⁹Pri tem pole štejemo z večkratnostmi.

Dokaz. Po izreku 2.9 velja

$$g = 2 \cdot (0 - 1) + 1 + \frac{B}{2}. \quad \square$$

Trditev 2.31. *BRANCH točke preslikave f so natanko Weierstrassove točke ploskve M .*

Dokaz. Naj bo $P \in M$ BRANCH točka. Če je P pol funkcije f , je njegova stopnja tako enaka 2. V nasprotnem primeru ima funkcija

$$g \equiv \frac{1}{f - f(P)}$$

pol stopnje 2 v P . V obeh primerih sledi, da 2 ni GAP za točko P , zato je ta Weierstrassova.

Vsaka BRANCH točka ima tako TEŽO

$$\sum_{k=1}^g (2k - 1) - \sum_{k=1}^g k = \frac{1}{2}g(g - 1),$$

zato je njihova skupna teža $g^3 - g$. Sledi, da so to vse Weierstrassove točke. \square

Lema 2.32. *Naj bo P Weierstrassova točka hipereliptične ploskve M in $f \in \mathcal{K}(M)$ funkcija stopnje 2. Tedaj velja $f^{-1}(\infty) \sim P^2$.*

Dokaz. Točka P je BRANCH točka funkcije f . Če je P pol te funkcije, je zato reda 2 in je $f^{-1}(\infty) = P^2$. V nasprotnem primeru definiramo funkcijo

$$g = \frac{1}{f - f(P)}.$$

Ni težko videti, da je $(g) = f^{-1}(\infty)P^{-2}$. \square

Trditev 2.33. *Naj bosta f in g dve funkciji $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ stopnje 2. Tedaj obstaja Möbiusova transformacija A , za katero je*

$$g = A \circ f.$$

Dokaz. Naj bo $f^{-1}(\infty) = P_1Q_1$ in $g^{-1}(\infty) = P_2Q_2$. Ker na M ne obstajajo funkcije stopnje 1, sledi $r(P_1^{-1}Q_1^{-1}) = r(P_2^{-1}Q_2^{-1}) = 2$. Prostora $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$ in $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$ imata tako zaporedoma bazi $\{1, f\}$ in $\{1, g\}$. Ker za Weierstrassovo točko P velja $P_1Q_1 \sim P^2 \sim P_2Q_2$, sledi, da obstaja meromorfná preslikava h , za katero je $(h) = P_1Q_1P_2^{-1}Q_2^{-1}$. Ker je s predpisom $\varphi \mapsto h \cdot \varphi$ očitno podan izomorfizem prostorov $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$ in $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$, obstajajo konstante α, β, γ in δ , za katere je

$$1 = \alpha h + \beta hf \quad \text{in} \quad g = \gamma h + \delta hf.$$

Tako lahko izrazimo

$$g = \frac{\gamma + \delta f}{\alpha + \beta f}. \quad \square$$

Trditev 2.34. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g . Tedaj je M hipereliptična natanko tedaj, ko obstaja involucija $J \in \text{Aut } M$ z natanko $2g + 2$ fiksnimi točkami.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je M hipereliptična. Naj bo $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija stopnje 2. Za vsak $P \in M$ tako obstaja še ena točka $Q \in M$, za katero je $f(P) = f(Q)$ (če je $\text{ord}_P f = 2$, vzamemo $Q = P$). Tako lahko enostavno definiramo $J(P) = Q$. Ni težko videti, da je J res involucija z $2g + 2$ fiksnimi točkami.

Če je $Q = J(P) \neq P$, lahko na okolici U_Q točke Q zapišemo

$$J(X) = (f|_{U_Q})^{-1}(f(X)),$$

zato je J holomorfna na $M \setminus W$. Če pa je $J(P) = P$, pa je $h = \sqrt{f - f(P)}$ lokalna koordinata, za katero velja $J(h) = -h$, saj je

$$f(P_h) = h^2 + f(P) = (-h)^2 + f(P) = f(P_{-h}).$$

Tako je J holomorfna tudi na W .

Predpostavimo sedaj, da obstaja involucija $J \in \text{Aut } M$ z $2g + 2$ fiksnimi točkami. Ker se projekcija $f: M \rightarrow M/\langle J \rangle$ BRANCHA v natanko $2g + 2$ točkah, po izreku 2.9 sledi, da je rod ploskve $M/\langle J \rangle$ enak 0. Sledi, da je $M/\langle J \rangle \cong \hat{\mathbb{C}}$, zato je f meromorfna funkcija z dvema poloma. \square

Opazimo, da so fiksne točke hipereliptične involucije natanko Weierstrassove točke.

Trditev 2.35. *Naj bo M hipereliptična Riemannova ploskev roda $g \geq 2$ in $T \in \text{Aut } M$. Če je $T \notin \langle J \rangle$, ima T kvečjemu 4 fiksne točke.*

Dokaz. Naj bo $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ funkcija z natanko dvema poloma. Tedaj je taka tudi $f \circ T$, zato obstaja Möbiusova transformacija A , za katero je

$$f \circ T = A \circ f.$$

Naj bo P fiksna točka avtomorfizma T . Sledi, da je

$$A(f(P)) = f(T(P)) = f(P),$$

zato je $f(P)$ fiksna točka preslikave A . Opazimo, da je $A \neq \text{id}$, saj bi v nasprotnem primeru veljalo $f \circ T = f$, kar implicira $T \in \langle J \rangle$. Tako ima A kvečjemu 2 fiksni točki, zato jih ima T največ 4. \square

3 Avtomorfizmi Riemannovih poloskev

3.1 Sfere in torusi

Za določanje grupe avtomorfizmov Riemannovih ploskev so pomembne njihove topološke lastnosti – vsak avtomorfizem je namreč tudi homeomorfizem. Iz geometrijske

topologije vemo, da je vsaka orientabilna kompaktna ploskev homeomorfna vsoti g torusov. Številu g pravimo rod ploskve.

Najprej si oglejmo ploskve z ničelnim rodом – topološko so to kar sfere. V prejšnjih razdelkih smo ugotovili, da je grupa avtomorfizmov Riemannove sfere enaka

$$\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid ad-bc=1 \right\}.$$

Vemo pa, da je grupa avtomorfizmov odvisna ne samo od topoloških lastnosti objekta, ampak tudi njegove kompleksne strukture.

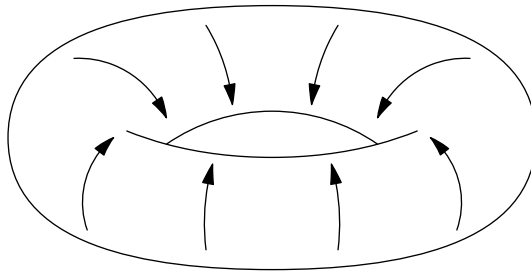
Naslednji izziv so ploskve z rodом $g=1$ – torusi. Za toruse IZREK ne velja, zato imamo več različnih grup avtomorfizmov.

Topološko je torus kvocient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, pri čemer \mathbb{Z}^2 deluje na \mathbb{R}^2 s predpisom $(m,n) \cdot (x,y) = (x+m, y+n)$. Množico \mathbb{R}^2 lahko seveda enačimo s \mathbb{C} . Delovanje grupe \mathbb{Z}^2 je povsem nezvezno in brez negibnih točk, zato je kvocient \mathbb{C}/\mathbb{Z}^2 spet kompleksna mnogoterost (VIR). Tako smo dobili kompleksno strukturo na torusu.

Seveda pa lahko za delovanje grupe \mathbb{Z}^2 vzamemo tudi kak drug predpis, na primer $(m,n) \cdot z = z + m\lambda + n\mu$ za \mathbb{R} -linearно neodvisna $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Topološko spet dobimo enak prostor ne glede na izbiro $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, izkaže pa se, da tako dobimo bistveno različne kompleksne strukture. To lahko dokažemo tako, da poiščemo grupe avtomorfizmov.

Naj bo $\Lambda = \{m\lambda + n\mu \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$, torej neka mreža v ravnini. Kompleksen torus, generiran s to mrežo, označimo s \mathbb{C}/Λ .

Najprej si oglejmo primere preprostih avtomorfizmov, ki jih najdemo na vsakem torusu. Najpreprostejša geometrijska transformacija torusa je kar rotacija – v krovnem prostoru to ustreza preslikavi $z \mapsto z + r \cdot \lambda$ za realno število r . Obstaja pa še ena vrsta rotacije, pri kateri se torus rotira »sam vase«. To so še preslikave $z \mapsto z + r \cdot \mu$. Skupaj tako dobimo množico preslikav $z \mapsto z + \alpha$ za poljuben $\alpha \in \mathbb{C}$.



Slika 5: Rotacija torusa

Preslikave oblike

$$f(z + \Lambda) = z + \alpha + \Lambda$$

so res avtomorfizmi torusa, saj so očitno dobro definirane in imajo inverz

$$f^{-1}(z + \Lambda) = z - \alpha + \Lambda.$$

oba sta seveda holomorfna, saj je kompleksna struktura na torusu podedovana iz kompleksne ravnine. Opazimo še, da je tudi $f(z + \Lambda) = -z + \Lambda$ avtomorfizem torusa. To nas privede do naslednje trditve:

Trditev 3.1. Naj bo $T \in \text{Aut } \mathbb{C}/\Lambda$ poljuben avtomorfizem in $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ krovna projekcija. Tedaj obstaja taka afina funkcija $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, da velja

$$T \circ \pi = \pi \circ F.$$

Dokaz. Najprej opazimo, da lahko T razširimo do preslikave $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$ s predpisom $f = T \circ \pi$, kjer je π krovna projekcija. Mnogoterost \mathbb{C} je enostavno povezana, zato po izreku o dvigu preslikave v krov (VIR) obstaja taka holomorfná funkcija $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, da velja

$$T \circ \pi = \pi \circ F.$$

Naj bo sedaj $\alpha \in \Lambda$ poljubna točka mreže in

$$\Phi(z) = F(z + \alpha) - F(z).$$

Tedaj velja

$$\pi(\Phi(z)) = \pi(F(z + \alpha)) - \pi(F(z)) = T(\pi(z)) - T(\pi(z + \alpha)) = 0.$$

Sledi, da je $\Phi(\mathbb{C}) \subseteq \Lambda$, ker pa je to diskretna množica in Φ zvezna funkcija, sledi, da je Φ konstantna. Tako dobimo $F(z + \alpha) = F(z) + c$ za vsak $a \in \Lambda$, oziroma $F'(z + \alpha) = F'(z)$. To že pomeni, da je F' omejena, zato je po Liouvilleovem izreku konstantna, kar pomeni, da je

$$F(z) = az + b,$$

pri čemer je $a \neq 0$. □

Sedaj si oglejmo, kakšne avtomorfizme take preslikave F dopuščajo. Velja

$$T(z + \Lambda) = T(\pi(z)) = \pi(F(z)) = az + b + \Lambda.$$

Ker že vemo, da so translacije avtomorfizmi, je dovolj preveriti, katere izmed preslikav $T(z + \Lambda) = az + \Lambda$ so avtomorfizmi torusa.

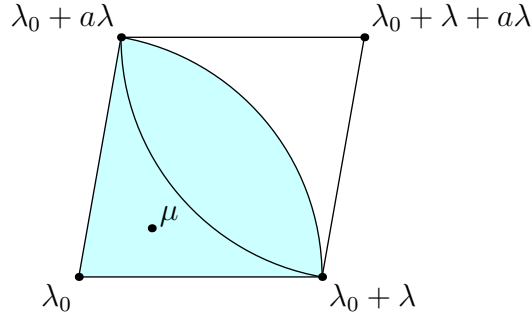
Naj bo $\lambda \in \Lambda$ poljuben element mreže. Tedaj je

$$\Lambda = T(\Lambda) = T(\lambda + \Lambda) = a\lambda + \Lambda,$$

enako pa velja za inverz $T^{-1}(z + \Lambda) = \frac{z}{a} + \Lambda$. Tako sledi, da je $\lambda \in \Lambda$ natanko tedaj, ko je $a\lambda \in \Lambda$. Oglejmo si $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ z najmanjšo dolžino. Brez škode za splošnost lahko vzamemo $F(0) = 0$, kar pomeni, da je $a\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, od koder sledi $|a| \geq 1$. Z enakim premislekom za T^{-1} dobimo še $|a| \leq 1$.

Če je $a = \pm 1$, dobimo avtomorfizme, ki smo jih našli zgoraj. Sicer sta λ in $a\lambda$ \mathbb{R} -linearno neodvisna. Denimo, da mreža Λ ni generirana z λ in $a\lambda$. To pomeni, da obstaja element mreže $\mu \in \Lambda$, ki ga ne moremo izraziti z λ in $a\lambda$. To med drugim pomeni, da μ leži v notranjosti (ali na stranici) nekega romba z oglišči λ_0 , $\lambda_0 + \lambda$, $\lambda_0 + \lambda + a\lambda$ in $\lambda_0 + a\lambda$.

Sedaj ni težko videti, da velja $|\lambda_0 - \mu| < |\lambda|$ ali $|\lambda_0 + \lambda + a\lambda - \mu| < |\lambda|$, saj leži v notranjosti enega izmed krožnih izsekov s središčem v λ_0 ali $\lambda_0 + \lambda + a\lambda$ in polmerom $|\lambda|$, označenima na sliki 6. To ni mogoče, saj sta tako $\lambda_0 - \mu$ kot $\lambda_0 + \lambda + a\lambda - \mu$ elementa mreže, λ pa je po dolžini najmanjši.



Slika 6: Element mreže ne more ležati v notranjosti romba

Ker je $a\lambda \in \Lambda$, velja tudi $a^2\lambda \in \Lambda$. Tako lahko izrazimo

$$a^2\lambda = ma\lambda + n\lambda,$$

oziroma

$$a^2 = ma + n.$$

To je kvadratna enačba z realnimi koeficienti, zato sta njeni rešitvi a in \bar{a} . Po Vietovih formulah tako dobimo $n = 1$ in $|m| \leq 2$. Z obravnavo primerov dobimo

$$a \in \left\{ \pm 1, \pm i, e^{\pm \frac{i\pi}{3}}, e^{\pm \frac{2i\pi}{3}} \right\}.$$

3.2 Ploskve večjih rodov

Trditev 3.2. *Naj bo $T \in \text{Aut } M$ netrivialen avtomorfizem. Tedaj ima T največ $2g + 2$ fiksni točk.*

Dokaz. Naj bo $P \in M$ točka, za katero je $T(P) \neq P$. Tedaj obstaja meromorfná funkcija $f \in \mathcal{K}(M)$ z divizorjem polov P^r za nek $1 \leq r \leq g + 1$. Oglejmo si funkcijo $h = f - f \circ T$. Njen divizor polov je očitno $P^r(T^{-1}P)^r$. Velja torej

$$\deg h^{-1}(0) = \deg h^{-1}(\infty) = 2r \leq 2g + 2,$$

zato ima g kvečjemu $2g + 2$ ničel. Ni težko videti, da so njene ničle natanko fiksne točke avtomorfizma T . \square

Lema 3.3. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$, W pa množica njenih Weierstrassovih točk. Tedaj ta vsak avtomorfizem $T \in \text{Aut } M$ velja $T(W) = W$.*

Dokaz. Avtomorfizmi ohranjajo GAPE. \square

Izrek 3.4 (Schwarz). *Grupe avtomorfizmov kompaktnih ploskev roda $g \geq 2$ so končne.*

Dokaz. Po zgornji lemi sledi, da obstaja homomorfizem $\lambda: \text{Aut } M \rightarrow S_W$, kjer je S_W simetrična grupa. Dovolj je pokazati, da ima λ končno jedro. Ločimo dva primera.

- a) Če M ni hipereliptična, ima več kot $2g + 2$ Weierstrassovih točk. Vsak avtomorfizem, ki fiksira Weierstrassove točke, je zato kar identiteta, zato je $\ker \lambda$ trivialno.

- b) Če je M hipereliptična, velja kar $\ker \lambda = \langle J \rangle$, kjer je J hipereliptična involucija. Ostali avtomorfizmi imajo namreč kvečjemu 4 fiksne točke. Ker velja $|\langle J \rangle| = 2$, je grupa $\text{Aut } M$ res končna. \square

Izrek 3.5 (Hurwitz). *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$. Tedaj je*

$$|\text{Aut } M| \leq 84(g - 1).$$

Dokaz. Ker je $G = \text{Aut } M$ končna grupa, lahko tvorimo kvocient $N = M/G$. Naj bo $\pi: M \rightarrow N$ kvocientna projekcija. Ni težko videti, da je $\deg \pi = |G|$, saj ima vsaka točka P , ki ni fiksna točka nobenega netrivialnega avtomorfizma, orbito velikosti $|G|$. Za preslikavo π so BRANCHING NUMBER enaka $b(P) = |G_P| - 1$, pri čemer označimo $G_P = \{g \in G \mid g(P) = P\}$. Vzemimo maksimalno množico $\{P_j \mid 1 \leq j \leq r\}$ točk, ki so fiksne točke nekega netrivialnega avtomorfizma in imajo disjunktne orbite, in označimo $v_j = |G_{P_j}|$. Jasno je, da je velikost orbite točke P_j enaka $\frac{|G|}{v_j}$, zato za TOTAL BRANCH NUMBER velja

$$B = \sum_{j=1}^r \frac{|G|}{v_j} \cdot (v_j - 1),$$

zato po izreku 2.9 sledi

$$2g - 2 = |G| \cdot (2\gamma - 2) + |G| \cdot \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right),$$

kjer je γ rod ploskve N . Preostanek dokaza ločimo na tri primere:

- i) Velja $\gamma \geq 2$. V tem primeru mora veljati

$$2g - 2 \geq |G| \cdot 2,$$

od koder dobimo oceno $|G| \leq g - 1$.

- ii) Velja $\gamma = 1$. Če je $r = 0$, dobimo $g = 1$, v nasprotnem primeru pa velja

$$\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{1}{2},$$

od koder sledi $|G| \leq 4(g - 1)$.

- iii) Velja $\gamma = 0$. Od tod lahko enačbo prepišemo v

$$2g - 2 = |G| \cdot \left(\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) - 2 \right). \quad (3.1)$$

Veljati mora $r \geq 3$, saj je v nasprotnem primeru desna stran enačbe negativna. Če je $r \geq 5$, sledi

$$\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{5}{2},$$

zato je $|G| \leq 4(g-1)$. Enostavno se lahko znebimo tudi primera $r = 4$. V tem primeru namreč ne morejo vsi v_j biti enaki 2, saj bi tedaj desna stran enačbe (3.1) bila negativna. Tako lahko ocenimo

$$\sum_{j=1}^4 \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6},$$

zato velja ocena $|G| \leq 12(g-1)$.

Preostane še primer $r = 3$. Naj bo $2 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3$. Najprej opazimo, da je $v_2 \geq 3$, saj bi v nasprotnem primeru desna stran enačbe (3.1) bila negativna. Iz enakega razloga dobimo tudi $v_3 > 3$. Če je $v_3 \geq 7$, tako dobimo

$$\sum_{j=1}^3 \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{85}{42},$$

od koder dobimo oceno iz trditve izreka, to je $|G| \leq 84(g-1)$.

Preostane nam še možnost $v_3 \leq 6$. Pri vsakem izmed teh končno mnogo primerov dobimo, da je desna stran enačbe (3.1) negativna ali pa sledi ocena $|G| \leq 40(g-1)$. \square

Slovar strokovnih izrazov

Riemann surface Riemannova ploskev

Literatura

- [1] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- [2] H. M. Farkas in I. Kra, *Riemann surfaces*, **71**, Springer, 1980, bibliografija: str. 330-332.
- [3] F. Forstnerič, *Analiza na mnogoterostih*, 2023, [ogled 16. 5. 2023], dostopno na <https://users.fmf.uni-lj.si/forstneric/papers/AMbook.pdf>, bibliografija: str. 237-239.
- [4] Z.-X. He in O. Schramm, *Fixed points, koebe uniformization and circle packings*, Annals of Mathematics **137**(2) (1993) 369–406, [ogled 2023-08-12], dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2946541>.
- [5] S. G. Krantz, *Geometric Function Theory*, Birkhäuser Boston, MA, 1 izd., 2006, doi: <https://doi.org/10.1007/0-8176-4440-7>, [ogled 7. 5. 2023], dostopno na <https://link.springer.com/book/10.1007/0-8176-4440-7>, bibliografija: str. 303-306.