

UNIVERZA V LJUBLJANI  
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Luka Horjak

# **HOLOMORFNI AVTOMORFIZMI**

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Miran Černe

Ljubljana, 2023

# Kazalo

<b>1</b>	<b>Holomorfni avtomorfizmi v kompleksni ravnini</b>	<b>4</b>
1.1	Enostavno povezana območja . . . . .	4
1.2	Punktirani diski in kolobarji . . . . .	5
1.3	Avtomorfizmi $p$ -povezanih območij . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Riemannove ploskve</b>	<b>8</b>
2.1	Gladke in kompleksne mnogoterosti . . . . .	8
2.2	Riemann-Rochov izrek . . . . .	11
2.3	Weierstrassove točke . . . . .	13
2.4	Hipereliptične ploskve . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Avtomorfizmi Riemannovih poloskev</b>	<b>19</b>
3.1	Sfere in torusi . . . . .	19
3.2	Ploskve večjih rodov . . . . .	22
	<b>Literatura</b>	<b>25</b>

## **Holomorfni avtomorfizmi**

POVZETEK

...

## **Holomorphic automorphisms**

ABSTRACT

...

**Math. Subj. Class. (2020):** 30F10, 30C20

**Ključne besede:** ..., ...

**Keywords:** ..., ...

# 1 Holomorfni avtomorfizmi v kompleksni ravnini

## 1.1 Enostavno povezana območja

Da lahko govorimo o holomorfnih funkcijah, se bomo omejili na odprte podmnožice kompleksne ravnine.

**Definicija 1.1.** *Holomorfen avtomorfizem* odprte množice  $\Omega \subseteq \mathbb{C}$  je bijektivna holomorfná preslikava  $f: \Omega \rightarrow \Omega$  s holomorfnim inverzom.

Opazimo, da je zadosten pogoj že to, da je  $f$  bijektivna in holomorfná. Opazimo še, da množica avtomorfizmov nekega območja tvori grupo z operacijo kompozitum. To grupo označimo z  $\text{Aut}(\Omega)$ .

Prepričamo se lahko, da lahko avtomorfizme nepovezanih množic opišemo z avtomorfizmi, ki komponente med seboj permutirajo. V nadaljevanju se bomo tako omejili na povezane množice.

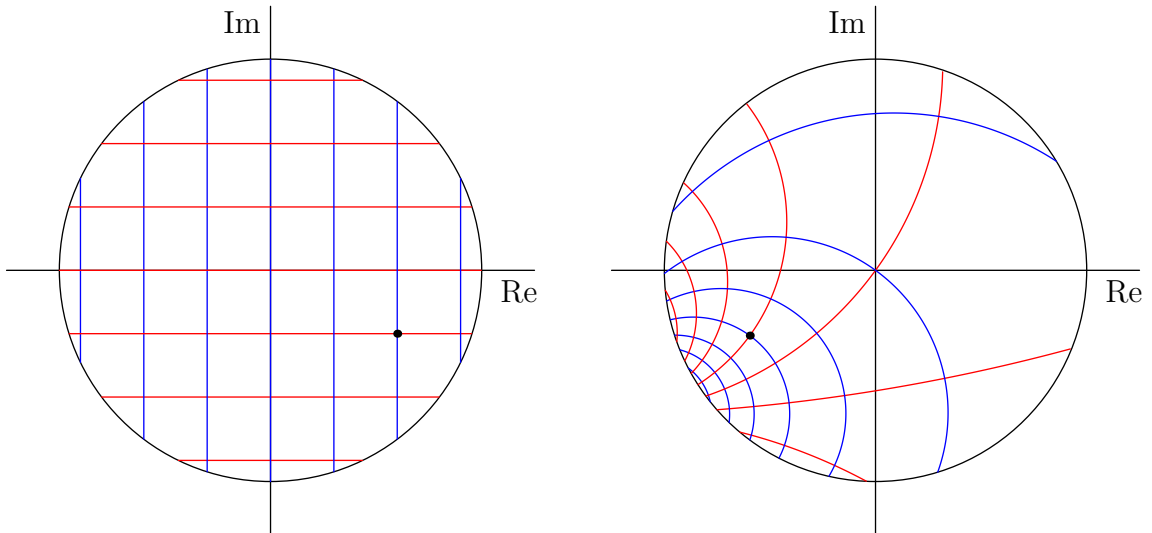
**Definicija 1.2.** *Območje* v kompleksni ravnini  $\mathbb{C}$  je vsaka odprta povezana množica.

**Primer 1.3.** Kompleksna ravnina je območje v  $\mathbb{C}$ . Njena grupa avtomorfizmov je enaka

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \neq 0\}. \quad \diamond$$

**Primer 1.4.** Naj bo  $\Delta$  odprt enotski disk v  $\mathbb{C}$ . Tedaj je

$$\text{Aut}(\Delta) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid a \in \Delta \wedge \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \diamond$$



Slika 1: Primer avtomorfizma diska z označenima točkama  $f^{-1}(0)$  in  $f(0)$

Izkaže se, da smo s tem do izomorfizma natančno opisali grupe avtomorfizmov vseh povezanih in enostavno povezanih množic v  $\mathbb{C}$ . Velja namreč naslednja lema:

**Lema 1.5.** *Naj bosta  $\Omega_1$  in  $\Omega_2$  biholomorfno ekvivalentni območji v  $\mathbb{C}$ . Tedaj je  $\text{Aut}(\Omega_1) \cong \text{Aut}(\Omega_2)$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  biholomorfna preslikava. Sedaj definiramo preslikavo  $\Phi: \text{Aut}(\Omega_1) \rightarrow \text{Aut}(\Omega_2)$  s predpisom

$$\Phi(\phi) = f^{-1} \circ \phi \circ f.$$

Ker je s predpisom

$$\Phi^{-1}(\psi) = f \circ \psi \circ f^{-1}$$

očitno podan predpis inverza preslikave  $\Phi$ , je ta bijektivna. Velja pa

$$\Phi(\phi \circ \psi) = f^{-1} \circ \phi \circ \psi \circ f = (f^{-1} \circ \phi \circ f) \circ (f^{-1} \circ \psi \circ f) = \Phi(\phi) \circ \Phi(\psi),$$

zato je  $\Phi$  homomorfizem.  $\square$

Spomnimo se na Riemannov upodobitveni izrek, ki pravi, da je vsako povezano in enostavno povezano območje v kompleksni ravnini ali biholomorfno ekvivalentno  $\mathbb{A}$  ali pa kar enako  $\mathbb{C}$ . Grupe avtomorfizmov povezanih in enostavno povezanih območij so do izomorfizma natančno tako le  $\text{Aut}(\mathbb{A})$  in  $\text{Aut}(\mathbb{C})$ .

Omenimo še, da lahko kompleksno ravnino dopolnimo do Riemannove sfere  $\hat{\mathbb{C}}$ . Njeni avtomorfizmi so Möbiusove transformacije, torej

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

## 1.2 Punktirani diski in kolobarji

Po obravnavi enostavno povezanih območij so naslednji korak območja z »luknjami«. Eden izmed osnovnejših primerov takih območij je punktiran disk  $\mathbb{A}_\alpha = \mathbb{A} \setminus \{\alpha\}$ .

Disk  $\mathbb{A}^* = \mathbb{A} \setminus \{0\}$  je biholomorfno ekvivalenten vsakemu punktiranemu disku, saj je preslikava  $f: \mathbb{A}_\alpha \rightarrow \mathbb{A}^*$  s predpisom

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

biholomorfna. Sledi, da je  $\text{Aut}(\mathbb{A}_\alpha) \cong \text{Aut}(\mathbb{A}^*)$ .

**Trditev 1.6.** *Za punktiran disk velja*

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

*Dokaz.* Naj bo  $f: \mathbb{A}^* \rightarrow \mathbb{A}^*$  poljuben avtomorfizem. Tedaj je točka 0 izolirana singularnost funkcije  $f$ . Ker je  $f$  omejena, je to odpravljiva singularnost.

Naj bo  $\tilde{f}: \mathbb{A} \rightarrow \mathbb{C}$  funkcija, ki jo dobimo tako, da  $f$  razširimo na celoten disk. Predpostavimo, da velja  $\tilde{f}(0) \neq 0$ . Ker je  $\tilde{f}$  holomorfna, je odprta, zato sledi  $|\tilde{f}(0)| < 1$ . Oglejmo si točko  $\alpha \neq 0$ , za katero je  $f(\alpha) = \tilde{f}(0)$ . Izberemo si lahko disjunktni okolici  $U$  in  $V$  točk 0 in  $\alpha$ . Ker je  $\tilde{f}$  odprta, je odprta tudi množica  $W = \tilde{f}(U) \cap \tilde{f}(V)$ . Hitro opazimo, da velja  $\tilde{f}(0) \in W$ , zato je ta množica neprazna. Sledi, da je  $W$  neskončna, kar je protislovje, saj velja  $f(U \setminus \{0\}) \cap f(V) = \emptyset$ .

Sledi, da je  $\tilde{f}(0) = 0$ , zato je  $\tilde{f}$  avtomorfizem diska. Tako dobimo inkluzijo

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) \subseteq \{f \in \text{Aut}(\mathbb{A}) \mid f(0) = 0\}.$$

Ni težko preveriti, da velja tudi obratna inkluzija, oziroma

$$\text{Aut}(\mathbb{A}^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \square$$

Kaj pa se zgodi, če število lukenj povečamo? Naj bo  $\Delta_2 = \Delta \setminus \{0, \alpha\}$ .<sup>1</sup> Po enakem razmisleku kot prej ugotovimo, da za vsak avtomorfizem  $f \in \text{Aut}(\Delta_2)$  velja  $f(0) \in \Delta$  in hkrati  $f(0) \notin \Delta_2$ . Enako velja za točko  $\alpha$ . Sedaj ni težko videti, da velja

$$\text{Aut}(\Delta_2) = \left\langle z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

saj je avtomorfizem diska natančno določen z dvema točkama.

Sedaj si oglejmo še kolobar  $R = \Delta \setminus \Delta(r)$ . Naj bo  $f: R \rightarrow R$  avtomorfizem. Izkaže se, da se  $f$  zvezno razširi na  $\partial R$ . Ker lahko  $f$  komponiramo s preslikavo  $\varphi: z \mapsto \frac{\rho}{z}$ , lahko predpostavimo, da je  $f(\partial\Delta) = \partial\Delta$ .

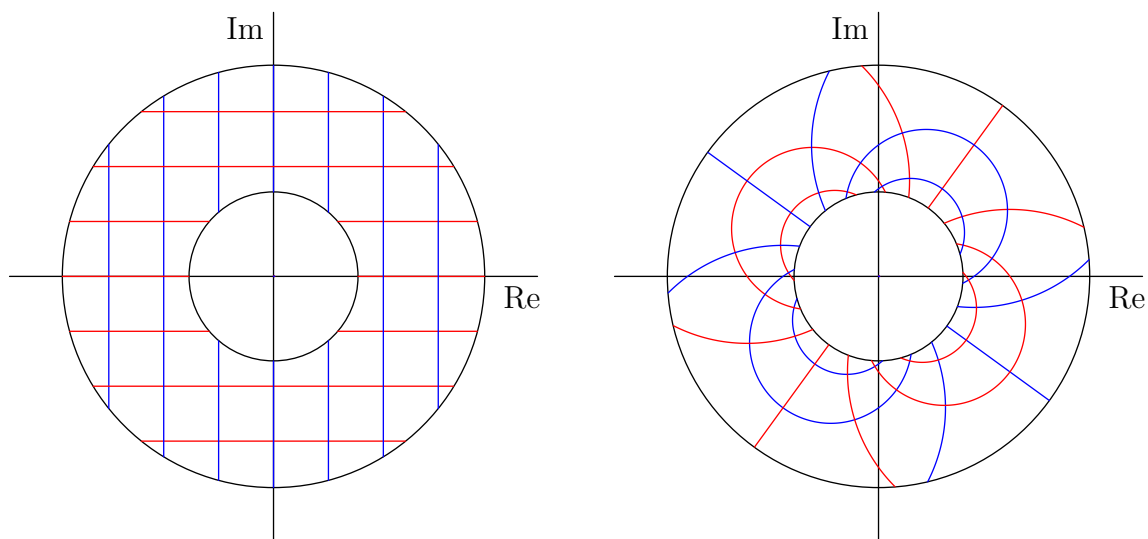
Naj bo

$$u(z) = \log |f(z)| - \log |z|.$$

Ker je logaritem harmonična funkcija, je  $\Delta u = 0$ . Ker je  $u|_{\partial R} = 0$ , je po principu maksima  $u = 0$ . Tako sledi  $|f(z)| = |z|$  in

$$\left| \frac{f(z)}{z} \right| = 1.$$

Ker je  $\frac{f(z)}{z}$  holomorfná in so nekonstantne holomorfne preslikave odprte, sledi, da je  $\frac{f(z)}{z}$  konstantna. Tako so vsi avtomorfizmi kolobarja kar  $z \mapsto e^{i\theta}z$  in  $z \mapsto e^{i\theta}\frac{r}{z}$ .



Slika 2: Primer avtomorfizma kolobarja

### 1.3 Avtomorfizmi $p$ -povezanih območij

Oglejmo si avtomorfizme območja  $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ , pri čemer brez škode za splošnost vzamemo  $x_p = \infty$ . Za  $p = 1$  dobimo kompleksno ravnino. Pri  $p = 2$  lahko brez škode za splošnost vzamemo  $x_1 = 0$ . Ni težko videti, da so vsi avtomorfizmi oblike  $z \mapsto e^{i\theta} \cdot z^{\pm 1}$ .

<sup>1</sup>Podobno kot prej lahko privzamemo, da je ena izmed lukenj enaka 0.

Sedaj si oglejmo še primer  $p > 2$ . Preverimo lahko, da se vsak avtomorfizem  $\Omega$  razširi do avtomorfizma Riemannove ploskve, ki permutira točke  $x_i$ . Ker je vsaka Möbiusova transformacija enolično določena s tremi točkami, je moč grupe  $\text{Aut}(\Omega)$  tako omejena s  $p(p-1)(p-2)$ .

Izkaže se, da lahko to mejo še bistveno izboljšamo. Znano je namreč, da je vsaka končna podgrupa  $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$  konjugirana podgrupi grupe rotacij  $\text{SO}_3$  [5]. Vse končne podgrupe  $\text{SO}_3$  so natanko rotacijske, diedrske, tetraedrska, oktaedrska in ikozaedrska [1]. Preverimo lahko, da je za  $p = 4$  največja možna moč grupe avtomorfizmov enaka 12, za  $p = 6$  in  $p = 8$  dobimo 24, za  $p = 12$  in  $p = 20$  pa 60. Za vse ostale  $p$  je največja grupa simetrij kar dierska, zato je  $|\text{Aut}(\Omega)| \leq 2p$ .

Oglejmo si še primer, ko robne komponente niso nujno točke.

**Izrek 1.7.** *Naj bo  $\Omega$  območje na Riemannovi sferi, katerega robne komponente sestavlja  $p$  točk ali Jordanovih krivulj. Tedaj za moč grupe  $\text{Aut } \Omega$  veljajo enake ocene kot zgoraj.*

*Dokaz.* Po posplošitvi Riemannovega upodobitvenega izreka lahko predpostavimo, da je  $\Omega$  kar enotski disk, ki mu odstranimo nekaj točk in diskov. Po Carathéodoryjevem izreku [4, izrek 5.1.1 in opomba 5.1.2] sledi, da avtomorfizem permutira robne komponente območja  $\Omega$ . Tako obstaja homomorfizem  $\lambda: \text{Aut } \Omega \rightarrow S_{\partial\Omega}$ , kjer je  $S_{\partial\Omega}$  permutacijska grupa. Jedro homomorfizma so natanko tisti avtomorfizmi, ki fiksirajo vsako robno komponento posebej. Pokažimo, da je jedro trivialno.

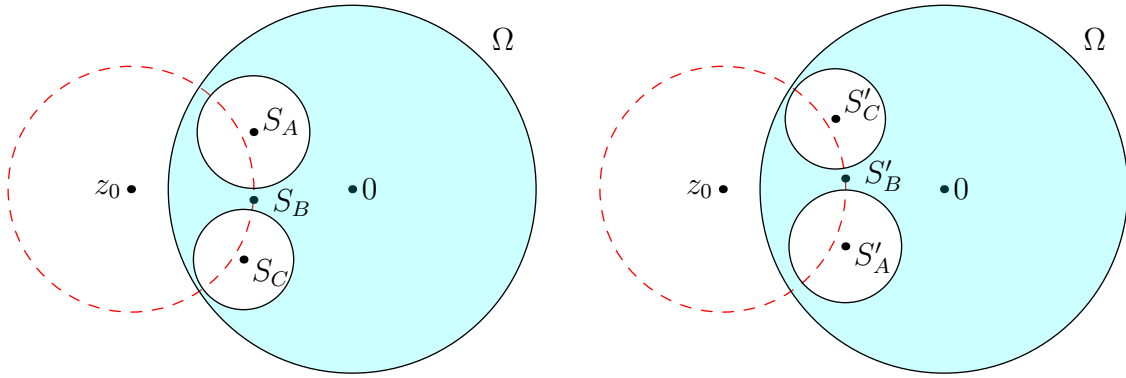
Naj bo  $T \in \ker \lambda$  poljuben avtomorfizem. Najprej se lahko znebimo točkastih robnih komponent, saj se te preslikajo same vase. Z uporabo Schwarzovega zrcaljenja lahko  $T$  razširimo preko vseh ostalih robnih komponent. Enostavno je preveriti, da se pri tem ohrani injektivnost preslikave. V limiti nam v vsaki komponenti  $\Omega^c$  ostane samo ena točka. V vseh omejenih komponentah je to odpravljiva singularnost, v neomejeni pa ali odpravljiva singularnost ali pol prve stopnje. V obeh primerih se  $T$  razširi do avtomorfizma Riemannove sfere. Zanimajo nas torej avtomorfizmi Riemannove sfere, ki fiksirajo vse robne komponente  $\Omega$ . V nadaljevanju na točkaste robne komponente glejmo kot na diske z radijem 0.

Naj bo  $T = \frac{az+b}{cz+d}$ . Sedaj obravnavajmo dva primera.

- i) Velja  $c = 0$ . V tem primeru je  $T$  afina transformacija. To implicira, da  $T$  poleg robnih komponent fiksira tudi njihova središča. Ker sta to vsaj dve različni točki, ima  $T$  dve fiksni točki, zato velja kar  $T = \text{id}$ .
- ii) Velja  $c \neq 0$ . Tedaj je  $T$  kompozitum inverzije v točki  $z_0 = -\frac{d}{c}$ , rotacije in translacije. Ker mora inverzija ohranjati radije robnih komponent (preostali preslikavi sta namreč izometriji), morajo vse biti ortogonalne na neko krožnico s središčem v  $z_0$ .<sup>2</sup> Sedaj opazimo, da smo prišli do protislovja, saj je inverzija obrnila orientacijo središč robnih komponent, česar pa ne moremo popraviti z rotacijo in translacijo.

Sedaj si izberimo poljubno točko  $z \notin \Omega$  in si oglejmo njeno orbito, torej množico  $A = \{T(z) \mid T \in \text{Aut } \Omega\}$ . Po enakem razmisleku kot zgoraj se namreč vsak avtomorfizem  $\Omega$  razširi do avtomorfizma kompleksne ravnine. V vsaki komponenti

<sup>2</sup>Ne morejo imeti središča v  $z_0$ , saj bi tedaj  $T$  območje  $\Omega$  slikal v notranjost te krožnice.

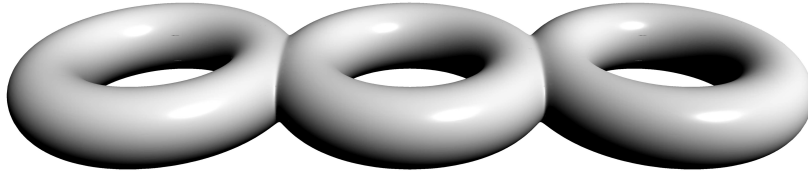


Slika 3: Inverzija prezrcali robne komponente

$\Omega^c$  imamo kvečjemu en element množice  $A$ . Sedaj si izberimo poljubno točko v eni izmed komponent, ki je množica  $A$  ne obiše, in postopek ponovimo. Tako na koncu dobimo množico  $S = \{z_i \mid 1 \leq i \leq p\}$ , pri čemer je v vsaki komponenti  $\Omega^c$  natančno ena točka. Poljuben avtomorfizem  $T \in \text{Aut } \Omega$  se torej razširi do avtomorfizma območja  $\Omega \setminus S$ , s tem pa je izrek dokazan.  $\square$

## 2 Riemannove ploskve

### 2.1 Gladke in kompleksne mnogoterosti



Slika 4: Ploskev roda  $g = 3$

**Definicija 2.1.** Meromorfen  $q$ -diferencial  $\omega$  Riemannove ploskve je dodelitev meromorfne funkcije  $f$  vsaki lokalni koordinati, pri čemer je  $f(z) dz^q$  neodvisna od lokalne koordinate. Meromorfnim 1-diferencialom pravimo kar *meromorfnimi diferenciali*.

Naj bosta  $(U, \varphi)$  in  $(V, \psi)$  lokalni karti, za kateri velja  $U \cap V \neq \emptyset$ . Če jima meromorfen  $q$ -diferencial  $\omega$  priredi funkciji  $f_U$  in  $f_V$ , mora tako veljati

$$f_U = f_V \cdot \left( (\psi \circ \varphi^{-1})' \right)^q.$$

Opazimo, da je  $q$ -ta potenca meromorfnega diferenciala meromorfen  $q$ -diferencial.

**Trditev 2.2.** Naj bosta  $\alpha$  in  $\beta$  meromorfna  $q$ -diferenciala. Tedaj je  $\frac{\alpha}{\beta}$  meromorfna funkcija.

*Dokaz.* Z zgornjimi oznakami velja

$$\frac{\alpha_U}{\beta_U} = \frac{\alpha_V \cdot \left( (\psi \circ \varphi^{-1})' \right)^q}{\beta_V \cdot \left( (\psi \circ \varphi^{-1})' \right)^q} = \frac{\alpha_V}{\beta_V}.$$



Kvocien  $\frac{\alpha}{\beta}$  tako ni odvisen od lokalnih koordinat.  $\square$

Očitno velja tudi obratno – če je  $\alpha$  meromorfen  $q$ -diferencial in  $f$  meromorfná funkcija, je tudi  $f\alpha$  meromorfen  $q$ -diferencial.

**Trditev 2.3.** *Naj bo  $f: M \rightarrow N$  nekonstantna holomorfna preslikava med kompaktnima Riemannovima ploskvama. Tedaj obstaja naravno število  $m$ , za katero  $f$  doseže vsako točko  $Q \in N$  natanko  $m$ -krat.<sup>3</sup>*

*Dokaz.* Iz kompleksne analize vemo, da za vsako točko  $P \in M$  obstajajo take lokalne koordinate  $\tilde{z}$ , da je  $f(\tilde{z}) = f(P) + \tilde{z}^n$ . Število  $n - 1$  označimo z  $b(P)$  in mu pravimo BRANCHING NUMBER. To je seveda dobro definirano.

Za vsako naravno število  $m$  naj bo

$$\Sigma_m = \left\{ X \in N \mid \sum_{f(P)=X} (b(P) + 1) \geq m \right\}.$$

Označimo še

$$\varphi(X) = \sum_{f(P)=X} (b(P) + 1).$$

Vse množice  $\Sigma_m$  so odprte – če je  $b(P) = n - 1$ , lahko v lokalnih koordinatah zapišemo  $f(\tilde{z}) = \tilde{z}^n$ . Enačba  $f(\tilde{z}) = \varepsilon$  ima tako natanko  $n$  rešitev, zato za okolico  $U$  točke  $P$  velja

$$b(P) + 1 = \sum_{Q \in U \cap f^{-1}(P')} (b(Q) + 1),$$

kjer je  $P' \in f(U)$ . Če to enakost seštejemo po okolicah vseh točk  $P \in f^{-1}(X)$ , dobimo

$$m \leq \varphi(X) \leq \varphi(P').$$

Pokažimo še, da so te množice zaprte v  $\hat{\mathbb{C}}$ . Naj bo  $Q$  limita zaporedja točk  $Q_k \in \Sigma_m$ , pri čemer je brez škode za splošnost  $b(P) = 0$  za vsak  $P \in f^{-1}(Q_k)$ . Ker imajo vse množice  $f^{-1}(Q_k)$  vsaj  $m$  elementov, lahko najdemo tako podzaporedje zaporedja  $(Q_k)_{n=1}^\infty$ , da lahko iz njihovih praslik tvorimo  $m$  konvergentnih zaporedij. Tako sledi

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} (b(P) + 1) \geq m.$$

Sledi, da so vse množice  $\Sigma_m$  odprte in zaprte v  $\hat{\mathbb{C}}$ . Čim je ena izmed množic  $\Sigma_m$  neprazna, je tako enaka celotni Riemannovi sferi, saj je ta povezana.  $\square$

Številu  $m$  pravimo *stopnja* preslikave  $f$  in označimo  $m = \deg f$ .

**Posledica 2.4.** *Naj bo  $M$  kompaktna Riemannova ploskev. Če je  $f: M \rightarrow \mathbb{C}$  holomorfna preslikava, je konstantna.*

*Dokaz.* Preslikavo  $f$  lahko opazujemo kot preslikavo med Riemannovo ploskvijo  $M$  in Riemannovo sfero  $\hat{\mathbb{C}}$ . Če  $f$  ni konstantna, ima pozitivno stopnjo, kar pa ni mogoče, saj je  $f^{-1}(\infty) = 0$ .  $\square$

---

<sup>3</sup>Šteto z večkratnostmi.

To posledico lahko pravzaprav dokažemo z uporabo lastnosti holomorfnih preslikav. Ker je  $M$  kompaktna namreč sledi, da je taka tudi  $f(M)$ . Ker pa so nekonstantne holomorfne preslikave odprte, pa sledi, da je  $f(M)$  tudi odprta. To seveda pomeni, da je  $f(M) = \mathbb{C}$ , kar je v protislovju s kompaktnostjo.

**Definicija 2.5.** Za kompaktni Riemannovo ploskvi  $M$  in  $N$  ter nekonstantno preslikavo  $f: M \rightarrow N$  definiramo *TOTAL BRANCH NUMBER* kot

$$B = \sum_{P \in M} b_f(P).$$

Število je dobro definirano, saj je množica  $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$  diskretna in tako zaradi kompaktnosti končna.

**Izrek 2.6** (Riemann-Hurwitz). *Naj bosta  $M$  in  $N$  kompaktni Riemannovi ploskvi rodov  $g$  in  $\gamma$ ,  $f: M \rightarrow N$  pa nekonstantna preslikava stopnje  $n$ . Tedaj za TOTAL BRANCHING NUMBER  $B$  velja*

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}.$$

*Dokaz.* Ker je množica  $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$  končna, jo lahko uporabimo za triangulacijo ploskve  $N$ . Denimo, da ima triangulacija  $F$  lic,  $E$  povezav in  $V$  vozlišč. To triangulacijo lahko z  $f^{-1}$  preslikamo na  $M$ . Tako dobimo triangulacijo ploskve  $M$  z  $nF$  lici,  $nE$  povezavami in  $nV - B$  vozlišči. Sledi, da je

$$\begin{aligned} F - E + V &= 2 - 2\gamma, \\ nF - nE + nV - B &= 2 - 2g. \end{aligned}$$

Iz teh enačb očitno sledi

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}. \quad \square$$

**Trditev 2.7.** *Naj bo  $H \subseteq \text{Aut } M$  končna podgrupa grupe avtomorfizmov Riemannove ploskve  $M$ . Tedaj je podgrupa  $H_P = \{h \in H \mid h(P) = P\}$  ciklična.*

*Dokaz.* Dokazali bomo, da obstaja enostavno povezana množica  $D$ , ki je invariantna za  $H_P$  – za vsak  $h \in H_P$  torej velja  $h(D) = D$ . Po Riemannovem upodobitvenem izreku namreč tedaj obstaja biholomorfna preslikava  $f: D \rightarrow \mathbb{D}$ , za katero velja  $f(P) = 0$ . Avtomorfizmi diska  $f \circ h \circ f^{-1}$  so torej rotacije, vsaka končna grupa rotacij pa je ciklična.

Opazujmo avtomorfizme v lokalni koordinati točke  $P$ . Pokažimo, da vsak element  $h \in H_P$  slika dovolj majhne diske v konveksne množice. Dovolj je pokazati, da dovolj majhne krožnice slika v konveksne krivulje, oziroma da je argument smeri tangentnega vektorja na sliko krožnice monotona.

Tangentni vektor v točki  $z$  na sliko krožnice z radijem  $r = |z|$  dobimo kot

$$h'(z) \cdot \frac{z}{|z|} \cdot i,$$

kar pomeni, da je njegov argument enak

$$\arg h'(z) + \arg(z) + \frac{\pi}{2}.$$

Dokazujemo torej, da je

$$\arg\left(h'\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)\right) + \varphi$$

naraščajoča funkcija v  $\varphi$  za vse dovolj majhne  $r$ , ker pa lahko lokalno definiramo<sup>4</sup>

$$\arg(z) = \text{Im}(\log(z)),$$

je dovolj pokazati, da je

$$\varphi + \text{Im}\left(\log\left(h'\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)\right)\right)$$

naraščajoča. Njen odvod je enak kar

$$1 + \text{Im}\left(\frac{h''(r \cdot e^{i\varphi})}{h'(r \cdot e^{i\varphi})} \cdot r \cdot i \cdot e^{i\varphi}\right) = 1 + \text{Re}\left(\frac{z \cdot h''(z)}{h'(z)}\right),$$

kar je za dovolj majhne  $z$  zaradi zveznosti seveda pozitivno.

Sedaj naj bo  $r > 0$  tako realno število, da je  $h(\Delta(r))$  konveksna za vse  $h \in H_P$ . Tedaj je

$$D = \bigcup_{h \in H_P} h(\Delta(r))$$

konveksna množica, zato je enostavno povezana. □

**Definicija 2.8.** Naj bo  $H \subseteq \text{Aut } M$  končna podgrupa grupe avtomorfizmov Riemannove ploskve  $M$ . Na množici  $M/H$  uvedemo kompleksno strukturo na naslednji način:

- i) Če je grupa  $H_P = \{h \in H \mid h(P) = P\}$  trivialna, lokalna karta na dovolj majhni okolici  $P$  inducira lokalno karto pri  $\pi(P)$ .
- ii) Če je v lokalni koordinati  $H_P$  generirana s preslikavo  $z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{k}} z$ , za lokalno karto točke  $P$  vzamemo  $z^k$ .

Prepričamo se lahko, da so te lokalne karte med seboj kompatibilne. Na kvocientu  $M/H$  smo torej dobili kompleksno strukturo, zato je to Riemannova ploskev. Opazimo še, da je kvocientsna projekcija  $\pi: M \rightarrow M/H$  holomorfna.

## 2.2 Riemann-Rochov izrek

**Definicija 2.9.** *Divizor* na Riemannovi ploskvi  $M$  je formalni simbol

$$\mathfrak{A} = \prod_{P \in M} P^{\alpha(P)},$$

kjer za vsak  $P$  velja  $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$  in je  $\alpha(P) \neq 0$  za kvečjemu končno mnogo točk  $P \in M$ . *Stopnja* divizorja  $\mathfrak{A}$  je definirana kot

$$\deg \mathfrak{A} = \sum_{P \in M} \alpha(P).$$

---

<sup>4</sup>Ker je  $h$  avtomorfizem, velja  $h'(z) \neq 0$ .

Divizorji na  $M$  tvorijo grupo za naravno definirano množenje – to grupo označimo z  $\text{Div}(M)$ . Tako je  $\deg: \text{Div}(M) \rightarrow \mathbb{Z}$  homomorfizem grup.

Za vsako neničelno meromorfno funkcijo  $f \in \mathcal{K}(M)$  definiramo njen *glavni divizor* kot<sup>5</sup>

$$(f) = \prod_{P \in M} P^{\text{ord}_P f}.$$

Definiramo lahko še *divizor polov*

$$f^{-1}(\infty) = \prod_{P \in M} P^{\max(-\text{ord}_P f, 0)}$$

in *divizor ničel*

$$f^{-1}(0) = \prod_{P \in M} P^{\max(\text{ord}_P f, 0)}.$$

Opazimo, da velja

$$(f) = \frac{f^{-1}(0)}{f^{-1}(\infty)}.$$

Na divizorjih uvedemo ekvivalenčno relacijo  $\sim$  na naslednji način:

$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = (f).$$

**Lema 2.10.** *Naj bo  $M$  kompaktna Riemannova ploskev. Za vsako neničelno funkcijo  $f \in \mathcal{K}(M)$  velja  $\deg f^{-1}(0) = \deg f^{-1}(\infty)$ . Ekvivalentno je  $\deg(f) = 0$ .*

*Dokaz.* Stopnja divizorja polov funkcije  $f$  je natanko število njenih polov, štetih z večkratnostmi, stopnja divizorja ničel pa število njenih ničel. Ti števili sta enaki po trditvi 2.3.  $\square$

Posebej velja opomniti, da to pomeni, da imajo funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah enako število ničel in polov (štetih z večkratnostmi).

Na divizorjih lahko uvedemo relacijo delne urejenosti kot

$$\prod_{P \in M} P^{\alpha(P)} \geq \prod_{P \in M} P^{\beta(P)} \iff \forall P \in M: \alpha(P) \geq \beta(P).$$

Pravimo, da je divizor  $\mathfrak{A}$  *efektiven*, če velja  $\mathfrak{A} \geq 1$ . Ni težko videti, da je za vsak divizor  $\mathfrak{A}$  na  $M$  množica

$$L(\mathfrak{A}) = \{f \in \mathcal{K}(M) \mid (f) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor – njegovo dimenzijo označimo z  $r(\mathfrak{A})$ .

**Zgled 2.11.** Velja  $r(1) = 1$ . Pogoji  $(f) \geq 1$  je namreč ekvivalenten temu, da je  $f$  holomorfna. Ker so vse holomorfne funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah konstantne, je zato  $L(1) \cong \mathbb{C}$ , kar je enodimenzionalen prostor.  $\diamond$

**Zgled 2.12.** Če je  $\deg \mathfrak{A} > 0$ , je  $r(\mathfrak{A}) = 0$ . Iz neenakosti  $(f) \geq \mathfrak{A}$  za neničelno funkcijo  $f$  namreč sledi  $0 = \deg(f) \geq \deg \mathfrak{A} > 0$ , kar je protislovje.  $\diamond$

---

<sup>5</sup>Glavne divizorje na enak način definiramo še za meromorfne diferencialne.

Podobno je tudi

$$\Omega(\mathfrak{A}) = \{\omega \mid \omega \text{ je meromorfen diferencial } \wedge (\omega) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor. Označimo  $i(\mathfrak{A}) = \dim \Omega(\mathfrak{A})$ .

**Trditev 2.13.** *Naj bo  $\mathfrak{A}$  poljuben divizor in  $\omega$  meromorfen diferencial. Tedaj je*

$$i(\mathfrak{A}) = r\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right).$$

*Dokaz.* Naj bo  $\varphi: \Omega(\mathfrak{A}) \rightarrow L\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right)$  preslikava s predpisom  $\varphi: \zeta \mapsto \frac{\zeta}{\omega}$ . Seveda je predpis dobro definiran, ni pa težko videti, da je to izomorfizem vektorskih prostorov. Sledi, da imata enako dimenzijo.  $\square$

**Izrek 2.14** (Riemann-Roch). *Naj bo  $M$  kompaktna Riemannova ploskev roda  $g$  in  $\mathfrak{A}$  divizor na  $M$ . Tedaj velja*

$$r\left(\mathfrak{A}^{-1}\right) = \deg \mathfrak{A} - g + 1 + i(\mathfrak{A}).$$

Dokaz izreka najdemo v [2, theorem III.4.11].

**Zgled 2.15.** Z uporabo zgornjega izreka lahko izračunamo  $i(1)$ . Velja namreč

$$i(1) = r(1) - \deg 1 + g - 1 = g. \quad \diamond$$

**Trditev 2.16.** *Naj bo  $\deg \mathfrak{A} > 2g - 2$ . Tedaj je  $i(\mathfrak{A}) = 0$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $\omega \in i(1)$  neničelna holomorfen diferencial. Tedaj je

$$r\left((\omega)^{-1}\right) = \deg(\omega) - g + 1 + i((\omega)).$$

Po trditvi 2.13 je  $r((\omega)^{-1}) = i(1) = g$  in  $i((\omega)) = r(1) = 1$ . Od tod sledi, da je  $\deg(\omega) = 2g - 2$ .

Sedaj dobimo

$$i(\mathfrak{A}) = r\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right) = 0,$$

saj je  $\deg(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}) > 0$ .  $\square$

### 2.3 Weierstrassove točke

**Izrek 2.17** (Weierstrass). *Naj bo  $M$  ploskev roda  $g > 0$  in  $P \in M$ . Tedaj obstaja natanko  $g$  števil*

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g,$$

*za katera ne obstaja funkcija  $f \in \mathcal{K}(M)$ , ki je holomorfnna na  $M \setminus \{P\}$  in ima pol reda  $n_j$  v  $P$ . Tem številom pravimo GAP.*

*Dokaz.* Najprej opazimo, da je število  $n$  GAP natanko tedaj, ko je  $r(P^{-n}) = r(P^{1-n})$ . Ker je  $r(P^{-n}) \leq r(P^{1-n}) + 1$ , število  $n$  ni GAP natanko tedaj, ko velja

$$r\left(P^{-n}\right) - r\left(P^{1-n}\right) = 1.$$

Po Riemann-Rochovem izreku velja

$$r(P^{-k}) = k - g + 1 + i(P^k),$$

zato sledi

$$\begin{aligned} r(P^{-n}) - r(1) &= \sum_{k=1}^n (r(P^{-k}) - r(P^{1-k})) \\ &= \sum_{k=1}^n (1 + i(P^k) - i(P^{k-1})) \\ &= n + i(P^n) - i(1). \end{aligned}$$

Ker je  $i(1) = g$  in za vse  $n > 2g - 2$  velja  $i(P^n) = 0$ , sledi

$$r(P^{-n}) - 1 = n - g.$$

Opazimo, da leva stran šteje ravno število  $\text{NEGAPOV} \leq n$ . Sledi, da je  $\text{GAPOV}$  natanko  $g$  in so vsi strogo manjši od  $2g$ .  $\square$

Izkaže se, da je lažje analizirati komplement tega zaporedja, torej števila

$$1 < \alpha_1 < \dots < \alpha_g = 2g,$$

za katera obstaja funkcija s polom reda  $\alpha_j$  v  $P$ . Če sta števili  $\alpha_i$  in  $\alpha_j$   $\text{NEGAPA}$ , je tako tudi število  $\alpha_i + \alpha_j$ , saj lahko vzamemo kar produkt pripadajočih funkcij. Posebej je vsak večkratnik  $\text{NEGAPA}$  spet  $\text{NEGAP}$ . Če je  $\alpha_1 = 2$ , so tako vsa soda števila  $\text{NEGAPI}$  in  $\text{GAPI}$  natanko liha števila, manjša od  $2g$ .

**Lema 2.18.** *Za vsako naravno število  $j < g$  velja*

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g.$$

*Dokaz.* Denimo, da je  $\alpha_j + \alpha_{g-j} < 2g$ . Tedaj so vsa števila  $\alpha_k + \alpha_{g-j}$  za  $k \leq j$   $\text{NEGAPI}$ , manjši od  $2g$ . Tako imamo skupaj vsaj  $g - j + j + 1 = g + 1$   $\text{NEGAPOV}$ , manjših od  $2g$ . To je seveda protislovje.  $\square$

**Lema 2.19.** *Velja neenakost*

$$\sum_{j=1}^g \alpha_j \geq g \cdot (g + 1)$$

*z enakostjo natanko tedaj, ko je  $\alpha_1 = 2$ .*

*Dokaz.* Za dokaz neenakosti je dovolj uporabiti prejšnjo lemo. Zgornja izraza sta enaka natanko tedaj, ko za vsak  $j < g$  velja

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g.$$

Če je število  $\alpha$   $\text{NEGAP}$ , je tako torej tudi  $2g - \alpha$ . Opazimo, da je za  $\text{NEGAPA}$   $\alpha_i < \alpha_j$  tudi  $\alpha_i + (2g - \alpha_j)$   $\text{NEGAP}$ , zato je tak tudi

$$2g - (\alpha_i + (2g - \alpha_j)) = \alpha_j - \alpha_i.$$

Sledi, da je tudi vsaka razlika  $\text{NEGAPOV}$   $\text{NEGAP}$ . Sledi, da so vsi  $\text{NEGAPI}$  večkratnik najmanjšega  $\text{NEGAPA}$  (osnovni izrek o deljenju), kar pa takoj implicira  $\alpha_1 = 2$ .  $\square$

Število  $n$  je GAP natanko tedaj, ko je  $r(P^{-n}) = r(P^{1-n})$ . To je po Riemann-Rochovem izreku ekvivalentno  $i(P^{n-1}) - i(P^n) = 1$ . Sledi, da imajo holomorfní diferenciali na  $M$  v točki  $P$  lahko red enak le enemu iz števil

$$n_1 - 1, n_2 - 1, \dots, n_g - 1.$$

Posebej, obstaja baza  $\{\omega_i \mid 1 \leq i \leq g\}$  holomorfnih diferencialov, pri čemer velja  $\text{ord}_P \omega_i = n_i - 1$ .

**Definicija 2.20.** TEŽA točke  $P \in M$  je vsota

$$\tau(P) = \sum_{j=1}^g (n_j - j),$$

kjer so  $n_j$  GAPI za  $P$ .

**Lema 2.21.** Naj bodo  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  meromorfne preslikave s paroma različnim redom v točki  $P \in X$ . Tedaj za determinanto

$$\Phi(z) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \dots & \varphi_n(z) \\ \varphi'_1(z) & \varphi'_2(z) & \dots & \varphi'_n(z) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(z) & \varphi_2^{(n-1)}(z) & \dots & \varphi_n^{(n-1)}(z) \end{bmatrix}$$

velja

$$\text{ord}_z \Phi = \sum_{i=1}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1).$$

*Dokaz.* Za lažji zapis pišimo

$$\Phi(z) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(z) & \dots & \varphi_n(z) \end{bmatrix}.$$

Trditev dokažemo z indukcijo – trditev očitno velja za  $n = 1$ . Za indukcijski korak si bomo pomagali z dejstvom, da za vsako meromorfno funkcijo  $f$  velja

$$\Phi_f = \det \begin{bmatrix} f \cdot \varphi_1(z) & \dots & f \cdot \varphi_n(z) \end{bmatrix} = f^n \cdot \det \begin{bmatrix} \varphi_1(z) & \dots & \varphi_n(z) \end{bmatrix}.$$

Razpišemo lahko namreč

$$\Phi_f = \det \begin{bmatrix} f\varphi_1 & \dots & f\varphi_n \\ f\varphi'_1 + f'\varphi_1 & \dots & f\varphi'_n + f'\varphi_n \\ \vdots & & \vdots \\ f\varphi_1^{(n-1)} + \dots + f^{(n-1)}\varphi_1 & \dots & f\varphi_n^{(n-1)} + \dots + f^{(n-1)}\varphi_n \end{bmatrix}.$$

S preprostimi linearnimi kombinacijami lahko sedaj dobimo

$$\Phi_f = \det \begin{bmatrix} f\varphi_1 & \dots & f\varphi_n \\ f\varphi'_1 & \dots & f\varphi'_n \\ \vdots & & \vdots \\ f\varphi_1^{(n-1)} & \dots & f\varphi_n^{(n-1)} \end{bmatrix} = f^n \Phi.$$

Tako dobimo

$$\det [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_n] = \varphi_1^n \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & \frac{\varphi_2}{\varphi_1} & \dots & \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \end{bmatrix} = \varphi_1^n \cdot \det \left[ \left( \frac{\varphi_2}{\varphi_1} \right)' \ \dots \ \left( \frac{\varphi_n}{\varphi_1} \right)' \right].$$

Ker za vsak  $i$  velja  $\text{ord}_z \varphi_1 \neq \text{ord}_z \varphi_i$ , sledi

$$\text{ord}_z \left( \frac{\varphi_i}{\varphi_1} \right)' = \text{ord}_z \varphi_i - \text{ord}_z \varphi_1 - 1.$$

To so paroma različna števila, zato lahko uporabimo indukcijsko predpostavko. Dobimo

$$\begin{aligned} \text{ord}_z \Phi &= n \cdot \text{ord}_z \varphi_1 + \sum_{i=2}^n (\text{ord}_z \varphi_i - \text{ord}_z \varphi_1 - 1 - (i-2)) \\ &= \text{ord}_z \varphi_1 + \sum_{i=2}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^n (\text{ord}_z \varphi_i - i + 1). \end{aligned} \quad \square$$

Posledično lahko zapišemo  $\tau(P) = \text{ord}_P \Phi$ , pri čemer za  $\varphi_i$  vzamemo kar  $\omega_i$ .

**Trditev 2.22.** *Naj bo  $M$  kompaktna Riemannova ploskev z rodno  $g \geq 2$ . Tedaj je*

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g.$$

*Dokaz.* Pokažimo, da je zgoraj definiran  $\Phi$  holomorfen  $m$ -diferencial za  $m = \frac{g \cdot (g+1)}{2}$ . Denimo, da  $\omega_i$  priredi okolici  $U$  karto  $\varphi$ , okolici  $V$  pa karto  $\psi$ ,  $f$  pa naj bo prehodna preslikava. Tako velja

$$\psi(f(z))f'(z) = \varphi(z),$$

dokazujemo pa

$$f'(z)^m \cdot \det [\psi_1 \ \dots \ \psi_g] = \det [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_g].$$

Velja pa

$$\begin{aligned} \det [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_g] &= \det [(\psi_1 \circ f) \cdot (f') \ \dots \ (\psi_g \circ f) \cdot (f')] \\ &= (f')^g \cdot \det [\psi_1 \circ f \ \dots \ \psi_g \circ f]. \end{aligned}$$

Po pravilu odvoda kompozituma lahko iz vrstice  $i$  izpostavimo še  $(f')^{i-1}$ . Tako dobimo

$$\det [\varphi_1 \ \dots \ \varphi_g] = (f')^m \cdot (\det [\psi_1 \ \dots \ \psi_g] \circ f).$$

Spomnimo se, da za meromorfen diferencial  $\omega$  velja  $\deg(\omega) = 2g - 2$ . Ker je  $\frac{\omega^m}{\Phi}$  meromorfna funkcija, sledi

$$\deg(\Phi) = m \cdot \deg(\omega) = m \cdot (2g - 2).$$

Tako je

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = \sum_{P \in M} \text{ord}_P \Phi = (g-1) \cdot g \cdot (g+1). \quad \square$$



**Definicija 2.23.** Točka  $P \in M$  je *Weierstrassova točka*, če na  $M$  obstaja neničelna holomorfen diferencial z ničlo reda vsaj  $g$  v  $P$ .<sup>6</sup>

**Trditev 2.24.** *Ekvivalentno, vsaj eno izmed števil  $2, \dots, g$  ni GAP.*

*Dokaz.* Obstoj diferencialne 1-forme z ničlo reda vsaj  $g$  v  $P$  je ekvivalentna pogoju  $i(P^g) > 0$ . Po Riemann-Rochovem izreku je ta neenakost ekvivalentna

$$r(P^{-g}) - 1 > 0,$$

oziroma  $r(P^{-g}) \geq 2$ . Ker je  $r(1) = 1$ , med  $2, \dots, g$  obstaja število, ki ni GAP.  $\square$

**Trditev 2.25.** *Naj bo  $M$  kompaktna Riemannova ploskev roda  $g \geq 2$ . Tedaj za število  $w$  Weierstrassovih točk veljata oceni*

$$2g + 2 \leq w \leq g^3 - g.$$

*Dokaz.* Ker je  $\tau(P) \geq 1$  za vsako Weierstrassovo točko in velja

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g,$$

takoj sledi  $w \leq g^3 - g$ . Velja pa

$$\begin{aligned} \tau(P) &= \sum_{j=1}^g (n_j - j) \\ &= \sum_{j=1}^{2g} j - \sum_{j=1}^g \alpha_j - \sum_{j=1}^g j \\ &= g(2g + 1) - \frac{g(g + 1)}{2} - \sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \\ &\leq g(2g + 1) - \frac{g(g + 1)}{2} - g(g + 1) \\ &= \frac{g(g - 1)}{2}. \end{aligned}$$

Posledično je res  $w \geq 2g + 2$ .  $\square$

## 2.4 Hipereliptične ploskve

**Definicija 2.26.** Kompaktna Riemannova ploskev  $M$  je *hipereliptična*, če obstaja nekonstantna meromorfna funkcija  $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  z natanko dvema poloma.<sup>7</sup>

Ekvivalentno to pomeni, da obstaja tak efektiven divizor  $D \in \text{Div } M$ , da je  $\deg D = 2$  in  $r(D^{-1}) \geq 2$ .

**Trditev 2.27.** *Vsaka kompaktna Riemannova ploskev roda  $g \leq 2$  je hipereliptična.*

<sup>6</sup>V splošnem definiramo  $q$ -Weierstrassove točke – obstaja  $q$ -diferencial z ničlo reda vsaj  $\dim \mathcal{H}^q(M)$ .

<sup>7</sup>Pri tem pole štejemo z večkratnostmi.

**Trditev 2.28.** *Weierstrassove ploskve imajo natanko  $2g + 2$  BRANCH točk.*

*Dokaz.* Po izreku 2.6 velja

$$g = 2 \cdot (0 - 1) + 1 + \frac{B}{2}. \quad \square$$

**Trditev 2.29.** *BRANCH točke preslikave  $f$  so natanko Weierstrassove točke ploskve  $M$ .*

*Dokaz.* Naj bo  $P \in M$  BRANCH točka. Če je  $P$  pol funkcije  $f$ , je njegova stopnja tako enaka 2. V nasprotnem primeru ima funkcija

$$g \equiv \frac{1}{f - f(P)}$$

pol stopnje 2 v  $P$ . V obeh primerih sledi, da 2 ni GAP za točko  $P$ , zato je ta Weierstrassova.

Vsaka BRANCH točka ima tako TEŽO

$$\sum_{k=1}^g (2k - 1) - \sum_{k=1}^g k = \frac{1}{2}g(g - 1),$$

zato je njihova skupna teža  $g^3 - g$ . Sledi, da so to vse Weierstrassove točke.  $\square$

**Lema 2.30.** *Naj bo  $P$  Weierstrassova točka hipereliptične ploskve  $M$  in  $f \in \mathcal{K}(M)$  funkcija stopnje 2. Tedaj velja  $f^{-1}(\infty) \sim P^2$ .*

*Dokaz.* Točka  $P$  je BRANCH točka funkcije  $f$ . Če je  $P$  pol te funkcije, je zato reda 2 in je  $f^{-1}(\infty) = P^2$ . V nasprotnem primeru definiramo funkcijo

$$g = \frac{1}{f - f(P)}.$$

Ni težko videti, da je  $(g) = f^{-1}(\infty)P^{-2}$ .  $\square$

**Trditev 2.31.** *Naj bosta  $f$  in  $g$  dve funkciji  $f: M \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  stopnje 2. Tedaj obstaja Möbiusova transformacija  $A$ , za katero je*

$$g = A \circ f.$$

*Dokaz.* Naj bo  $f^{-1}(\infty) = P_1Q_1$  in  $g^{-1}(\infty) = P_2Q_2$ . Ker na  $M$  ne obstajajo funkcije stopnje 1, sledi  $r(P_1^{-1}Q_1^{-1}) = r(P_2^{-1}Q_2^{-1}) = 2$ . Prostora  $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$  in  $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$  imata tako zaporedoma bazi  $\{1, f\}$  in  $\{1, g\}$ . Ker za Weierstrassovo točko  $P$  velja  $P_1Q_1 \sim P^2 \sim P_2Q_2$ , sledi, da obstaja meromorfná preslikava  $h$ , za katero je  $(h) = P_1Q_1P_2^{-1}Q_2^{-1}$ . Ker je s predpisom  $\varphi \mapsto h \cdot \varphi$  očitno podan izomorfizem prostorov  $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$  in  $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$ , obstajajo konstante  $\alpha, \beta, \gamma$  in  $\delta$ , za katere je

$$1 = \alpha h + \beta h f \quad \text{in} \quad g = \gamma h + \delta h f.$$

Tako lahko izrazimo

$$g = \frac{\gamma + \delta f}{\alpha + \beta f}. \quad \square$$

**Trditev 2.32.** *Naj bo  $M$  kompaktna Riemannova ploskev roda  $g$ . Tedaj je  $M$  hipereliptična natanko tedaj, ko obstaja involucija  $J \in \text{Aut } M$  z natanko  $2g + 2$  fiksnimi točkami.*

*Dokaz.* Predpostavimo najprej, da je  $M$  hipereliptična. Naj bo  $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  meromorfna funkcija stopnje 2. Za vsak  $P \in M$  tako obstaja še ena točka  $Q \in M$ , za katero je  $f(P) = f(Q)$  (če je  $\text{ord}_P f = 2$ , vzamemo  $Q = P$ ). Tako lahko enostavno definiramo  $J(P) = Q$ . Ni težko videti, da je  $J$  res involucija z  $2g + 2$  fiksnimi točkami.

Če je  $Q = J(P) \neq P$ , lahko na okolici  $U_Q$  točke  $Q$  zapišemo

$$J(X) = (f|_{U_Q})^{-1}(f(X)),$$

zato je  $J$  holomorfna na  $M \setminus W$ . Če pa je  $J(P) = P$ , pa je  $h = \sqrt{f - f(P)}$  lokalna koordinata, za katero velja  $J(h) = -h$ , saj je

$$f(P_h) = h^2 + f(P) = (-h)^2 + f(P) = f(P_{-h}).$$

Tako je  $J$  holomorfna tudi na  $W$ .

Predpostavimo sedaj, da obstaja involucija  $J \in \text{Aut } M$  z  $2g + 2$  fiksnimi točkami. Ker se projekcija  $f: M \rightarrow M/\langle J \rangle$  BRANCHA v natanko  $2g + 2$  točkah, po izreku 2.6 sledi, da je rod ploskve  $M/\langle J \rangle$  enak 0. Sledi, da je  $M/\langle J \rangle \cong \hat{\mathbb{C}}$ , zato je  $f$  meromorfna funkcija z dvema poloma.  $\square$

Opazimo, da so fiksne točke hipereliptične involucije natanko Weierstrassove točke.

**Trditev 2.33.** *Naj bo  $M$  hipereliptična Riemannova ploskev roda  $g \geq 2$  in  $T \in \text{Aut } M$ . Če je  $T \notin \langle J \rangle$ , ima  $T$  kvečjemu 4 fiksne točke.*

*Dokaz.* Naj bo  $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$  funkcija z natanko dvema poloma. Tedaj je taka tudi  $f \circ T$ , zato obstaja Möbiusova transformacija  $A$ , za katero je

$$f \circ T = A \circ f.$$

Naj bo  $P$  fiksna točka avtomorfizma  $T$ . Sledi, da je

$$A(f(P)) = f(T(P)) = f(P),$$

zato je  $f(P)$  fiksna točka preslikave  $A$ . Opazimo, da je  $A \neq \text{id}$ , saj bi v nasprotnem primeru veljalo  $f \circ T = f$ , kar implicira  $T \in \langle J \rangle$ . Tako ima  $A$  kvečjemu 2 fiksni točki, zato jih ima  $T$  največ 4.  $\square$

## 3 Avtomorfizmi Riemannovih poloskev

### 3.1 Sfere in torusi

Za določanje grupe avtomorfizmov Riemannovih poloskev so pomembne njihove topološke lastnosti – vsak avtomorfizem je namreč tudi homeomorfizem. Iz geometrijske

topologije vemo, da je vsaka orientabilna kompaktna ploskev homeomorfna vsoti  $g$  torusov. Številu  $g$  pravimo rod ploskve.

Najprej si oglejmo ploskve z ničelnim rodом – topološko so to kar sfere. V prejšnjih razdelkih smo ugotovili, da je grupa avtomorfizmov Riemannove sfere enaka

$$\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \mid ad-bc=1 \right\}.$$

Vemo pa, da je grupa avtomorfizmov odvisna ne samo od topoloških lastnosti objekta, ampak tudi njegove kompleksne strukture.

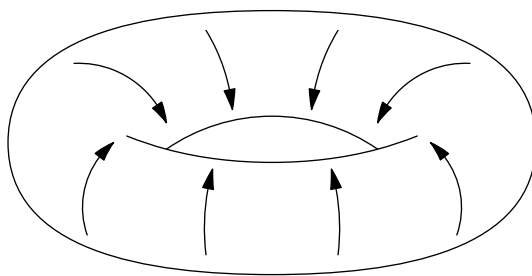
Naslednji izziv so ploskve z rodом  $g=1$  – torusi. Za toruse IZREK ne velja, zato imamo več različnih grup avtomorfizmov.

Topološko je torus kvocient  $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ , pri čemer  $\mathbb{Z}^2$  deluje na  $\mathbb{R}^2$  s predpisom  $(m, n) \cdot (x, y) = (x+m, y+n)$ . Množico  $\mathbb{R}^2$  lahko seveda enačimo s  $\mathbb{C}$ . Delovanje grupe  $\mathbb{Z}^2$  je povsem nezvezno in brez negibnih točk, zato je kvocient  $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$  spet kompleksna mnogoterost (VIR). Tako smo dobili kompleksno strukturo na torusu.

Seveda pa lahko za delovanje grupe  $\mathbb{Z}^2$  vzamemo tudi kak drug predpis, na primer  $(m, n) \cdot z = z + m\lambda + n\mu$  za  $\mathbb{R}$ -linearно neodvisna  $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ . Topološko spet dobimo enak prostor ne glede na izbiro  $\lambda, \mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ , izkaže pa se, da tako dobimo bistveno različne kompleksne strukture. To lahko dokažemo tako, da poiščemo grupe avtomorfizmov.

Naj bo  $\Lambda = \{m\lambda + n\mu \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ , torej neka mreža v ravnini. Kompleksen torus, generiran s to mrežo, označimo s  $\mathbb{C}/\Lambda$ .

Najprej si oglejmo primere preprostih avtomorfizmov, ki jih najdemo na vsakem torusu. Najpreprostejša geometrijska transformacija torusa je kar rotacija – v krovnem prostoru to ustreza preslikavi  $z \mapsto z + r \cdot \lambda$  za realno število  $r$ . Obstaja pa še ena vrsta rotacije, pri kateri se torus rotira »sam vase«. To so še preslikave  $z \mapsto z + r \cdot \mu$ . Skupaj tako dobimo množico preslikav  $z \mapsto z + \alpha$  za poljuben  $\alpha \in \mathbb{C}$ .



Slika 5: Rotacija torusa

Preslikave oblike

$$f(z + \Lambda) = z + \alpha + \Lambda$$

so res avtomorfizmi torusa, saj so očitno dobro definirane in imajo inverz

$$f^{-1}(z + \Lambda) = z - \alpha + \Lambda.$$

oba sta seveda holomorfna, saj je kompleksna struktura na torusu podedovana iz kompleksne ravnine. Opazimo še, da je tudi  $f(z + \Lambda) = -z + \Lambda$  avtomorfizem torusa. To nas privede do naslednje trditve:

**Trditev 3.1.** Naj bo  $T \in \text{Aut } \mathbb{C}/\Lambda$  poljuben avtomorfizem in  $\pi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  krovna projekcija. Tedaj obstaja taka afina funkcija  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , da velja

$$T \circ \pi = \pi \circ F.$$

*Dokaz.* Najprej opazimo, da lahko  $T$  razširimo do preslikave  $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Lambda$  s predpisom  $f = T \circ \pi$ , kjer je  $\pi$  krovna projekcija. Mnogoterost  $\mathbb{C}$  je enostavno povezana, zato po izreku o dvigu preslikave v krov (VIR) obstaja taka holomorfná funkcija  $F: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ , da velja

$$T \circ \pi = \pi \circ F.$$

Naj bo sedaj  $\alpha \in \Lambda$  poljubna točka mreže in

$$\Phi(z) = F(z + \alpha) - F(z).$$

Tedaj velja

$$\pi(\Phi(z)) = \pi(F(z + \alpha)) - \pi(F(z)) = T(\pi(z)) - T(\pi(z + \alpha)) = 0.$$

Sledi, da je  $\Phi(\mathbb{C}) \subseteq \Lambda$ , ker pa je to diskretna množica in  $\Phi$  zvezna funkcija, sledi, da je  $\Phi$  konstantna. Tako dobimo  $F(z + \alpha) = F(z) + c$  za vsak  $a \in \Lambda$ , oziroma  $F'(z + \alpha) = F'(z)$ . To že pomeni, da je  $F'$  omejena, zato je po Liouvilleovem izreku konstantna, kar pomeni, da je

$$F(z) = az + b,$$

pri čemer je  $a \neq 0$ . □

Sedaj si oglejmo, kakšne avtomorfizme take preslikave  $F$  dopuščajo. Velja

$$T(z + \Lambda) = T(\pi(z)) = \pi(F(z)) = az + b + \Lambda.$$

Ker že vemo, da so translacije avtomorfizmi, je dovolj preveriti, katere izmed preslikav  $T(z + \Lambda) = az + \Lambda$  so avtomorfizmi torusa.

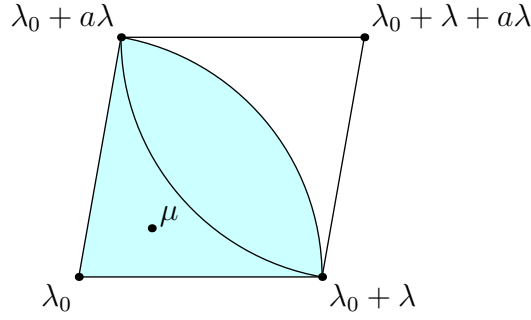
Naj bo  $\lambda \in \Lambda$  poljuben element mreže. Tedaj je

$$\Lambda = T(\Lambda) = T(\lambda + \Lambda) = a\lambda + \Lambda,$$

enako pa velja za inverz  $T^{-1}(z + \Lambda) = \frac{z}{a} + \Lambda$ . Tako sledi, da je  $\lambda \in \Lambda$  natanko tedaj, ko je  $a\lambda \in \Lambda$ . Oglejmo si  $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$  z najmanjšo dolžino. Brez škode za splošnost lahko vzamemo  $F(0) = 0$ , kar pomeni, da je  $a\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ , od koder sledi  $|a| \geq 1$ . Z enakim premislekom za  $T^{-1}$  dobimo še  $|a| \leq 1$ .

Če je  $a = \pm 1$ , dobimo avtomorfizme, ki smo jih našli zgoraj. Sicer sta  $\lambda$  in  $a\lambda$   $\mathbb{R}$ -linearno neodvisna. Denimo, da mreža  $\Lambda$  ni generirana z  $\lambda$  in  $a\lambda$ . To pomeni, da obstaja element mreže  $\mu \in \Lambda$ , ki ga ne moremo izraziti z  $\lambda$  in  $a\lambda$ . To med drugim pomeni, da  $\mu$  leži v notranjosti (ali na stranici) nekega romba z oglišči  $\lambda_0$ ,  $\lambda_0 + \lambda$ ,  $\lambda_0 + \lambda + a\lambda$  in  $\lambda_0 + a\lambda$ .

Sedaj ni težko videti, da velja  $|\lambda_0 - \mu| < |\lambda|$  ali  $|\lambda_0 + \lambda + a\lambda - \mu| < |\lambda|$ , saj leži v notranjosti enega izmed krožnih izsekov s središčem v  $\lambda_0$  ali  $\lambda_0 + \lambda + a\lambda$  in polmerom  $|\lambda|$ , označenima na sliki 6. To ni mogoče, saj sta tako  $\lambda_0 - \mu$  kot  $\lambda_0 + \lambda + a\lambda - \mu$  elementa mreže,  $\lambda$  pa je po dolžini najmanjši.



Slika 6: Element mreže ne more ležati v notranjosti romba

Ker je  $a\lambda \in \Lambda$ , velja tudi  $a^2\lambda \in \Lambda$ . Tako lahko izrazimo

$$a^2\lambda = ma\lambda + n\lambda,$$

oziroma

$$a^2 = ma + n.$$

To je kvadratna enačba z realnimi koeficienti, zato sta njeni rešitvi  $a$  in  $\bar{a}$ . Po Vietovih formulah tako dobimo  $n = 1$  in  $|m| \leq 2$ . Z obravnavo primerov dobimo

$$a \in \left\{ \pm 1, \pm i, e^{\pm \frac{i\pi}{3}}, e^{\pm \frac{2i\pi}{3}} \right\}.$$

## 3.2 Ploskve večjih rodov

**Trditev 3.2.** *Naj bo  $T \in \text{Aut } M$  netrivialen avtomorfizem. Tedaj ima  $T$  največ  $2g + 2$  fiksni točk.*

*Dokaz.* Naj bo  $P \in M$  točka, za katero je  $T(P) \neq P$ . Tedaj obstaja meromorfná funkcija  $f \in \mathcal{K}(M)$  z divizorjem polov  $P^r$  za nek  $1 \leq r \leq g + 1$ . Oglejmo si funkcijo  $h = f - f \circ T$ . Njen divizor polov je očitno  $P^r(T^{-1}P)^r$ . Velja torej

$$\deg h^{-1}(0) = \deg h^{-1}(\infty) = 2r \leq 2g + 2,$$

zato ima  $g$  kvečjemu  $2g + 2$  ničel. Ni težko videti, da so njene ničle natanko fiksne točke avtomorfizma  $T$ .  $\square$

**Lema 3.3.** *Naj bo  $M$  kompaktna Riemannova ploskev roda  $g \geq 2$ ,  $W$  pa množica njenih Weierstrassovih točk. Tedaj ta vsak avtomorfizem  $T \in \text{Aut } M$  velja  $T(W) = W$ .*

*Dokaz.* Avtomorfizmi ohranjajo GAPE.  $\square$

**Izrek 3.4** (Schwarz). *Grupe avtomorfizmov kompaktnih ploskev roda  $g \geq 2$  so končne.*

*Dokaz.* Po zgornji lemi sledi, da obstaja homomorfizem  $\lambda: \text{Aut } M \rightarrow S_W$ , kjer je  $S_W$  simetrična grupa. Dovolj je pokazati, da ima  $\lambda$  končno jedro. Ločimo dva primera.

- a) Če  $M$  ni hipereliptična, ima več kot  $2g + 2$  Weierstrassovih točk. Vsak avtomorfizem, ki fiksira Weierstrassove točke, je zato kar identiteta, zato je  $\ker \lambda$  trivialno.

- b) Če je  $M$  hipereliptična, velja kar  $\ker \lambda = \langle J \rangle$ , kjer je  $J$  hipereliptična involucija. Ostali avtomorfizmi imajo namreč kvečjemu 4 fiksne točke. Ker velja  $|\langle J \rangle| = 2$ , je grupa  $\text{Aut } M$  res končna.  $\square$

**Izrek 3.5** (Hurwitz). *Naj bo  $M$  kompaktna Riemannova ploskev roda  $g \geq 2$ . Tedaj je*

$$|\text{Aut } M| \leq 84(g-1).$$

*Dokaz.* Ker je  $G = \text{Aut } M$  končna grupa, lahko tvorimo kvocient  $N = M/G$ . Naj bo  $\pi: M \rightarrow N$  kvocientna projekcija. Ni težko videti, da je  $\deg \pi = |G|$ , saj ima vsaka točka  $P$ , ki ni fiksna točka nobenega netrivialnega avtomorfizma, orbito velikosti  $|G|$ . Za preslikavo  $\pi$  so BRANCHING NUMBER enaka  $b(P) = \text{ord } G_P - 1$ , pri čemer označimo  $G_P = \{g \in G \mid G(P) = P\}$ . Vzemimo maksimalno množico  $\{P_j \mid 1 \leq j \leq r\}$  točk, ki so fiksne točke nekega netrivialnega avtomorfizma in imajo disjunktne orbite, in označimo  $v_j = |G_{P_j}|$ . Jasno je, da je velikost orbite točke  $P_j$  enaka  $\frac{|G|}{v_j}$ , zato za TOTAL BRANCH NUMBER velja

$$B = \sum_{j=1}^r \frac{|G|}{v_j} \cdot (v_j - 1),$$

zato po izreku 2.6 sledi

$$2g - 2 = |G| \cdot (2\gamma - 2) + |G| \cdot \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right),$$

kjer je  $\gamma$  rod ploskve  $N$ . Preostanek dokaza ločimo na tri primere:

- i) Velja  $\gamma \geq 2$ . V tem primeru mora veljati

$$2g - 2 \geq |G| \cdot 2,$$

od koder dobimo oceno  $|G| \leq g - 1$ .

- ii) Velja  $\gamma = 1$ . Če je  $r = 0$ , dobimo  $g = 1$ , v nasprotnem primeru pa velja

$$\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{1}{2},$$

od koder sledi  $|G| \leq 4(g-1)$ .

- iii) Velja  $\gamma = 0$ . Od tod lahko enačbo prepišemo v

$$2g - 2 = |G| \cdot \left( \sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) - 2 \right). \quad (3.1)$$

Veljati mora  $r \geq 3$ , saj je v nasprotnem primeru desna stran enačbe negativna. Če je  $r \geq 5$ , sledi

$$\sum_{j=1}^r \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{5}{2},$$

zato je  $|G| \leq 4(g-1)$ . Enostavno se lahko znebimo tudi primera  $r = 4$ . V tem primeru namreč ne morejo vsi  $v_j$  biti enaki 2, saj bi tedaj desna stran enačbe (3.1) bila negativna. Tako lahko ocenimo

$$\sum_{j=1}^4 \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6},$$

zato velja ocena  $|G| \leq 12(g-1)$ .

Preostane še primer  $r = 3$ . Naj bo  $2 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3$ . Najprej opazimo, da je  $v_2 \geq 3$ , saj bi v nasprotnem primeru desna stran enačbe (3.1) bila negativna. Iz enakega razloga dobimo tudi  $v_3 > 3$ . Če je  $v_3 \geq 7$ , tako dobimo

$$\sum_{j=1}^3 \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{85}{42},$$

od koder dobimo oceno iz trditve izreka, to je  $|G| \leq 84(g-1)$ .

Preostane nam še možnost  $v_3 \leq 6$ . Pri vsakem izmed teh končno mnogo primerov dobimo, da je desna stran enačbe (3.1) negativna ali pa sledi ocena  $|G| \leq 40(g-1)$ .  $\square$

## Slovar strokovnih izrazov

**Riemann surface** Riemannova ploskev



## Literatura

- [1] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- [2] H. M. Farkas in I. Kra, *Riemann surfaces*, **71**, Springer, 1980, bibliografija: str. 330-332.
- [3] F. Forstnerič, *Analiza na mnogoterostih*, 2023, [ogled 16. 5. 2023], dostopno na <https://users.fmf.uni-lj.si/forstneric/papers/AMbook.pdf>, bibliografija: str. 237-239.
- [4] S. G. Krantz, *Geometric Function Theory*, Birkhäuser Boston, MA, 1 izd., 2006, doi: <https://doi.org/10.1007/0-8176-4440-7>, [ogled 7. 5. 2023], dostopno na <https://link.springer.com/book/10.1007/0-8176-4440-7>, bibliografija: str. 303-306.
- [5] R. C. Lyndon in J. L. Ullman, *Groups of elliptic linear fractional transformations*, Proceedings of the American Mathematical Society **18**(6) (1967) 1119–1124, [ogled 11. 6. 2023], dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2035812>.