UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Luka Horjak

HOLOMORFNI AVTOMORFIZMI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Miran Černe

Ljubljana, 2023

Kazalo

Holomorfni avtomorfizmi

POVZETEK

Na mnogih matematičnih področjih so glavna tema preslikave z določenimi lastnostmi – homomorfizmi, homeomorfizmi, ali pa kar poljubne preslikave med množicami. Posebej zanimive so bijektivne preslikave, ki imajo za domeno in kodomeno isti objekt in jim pravimo avtomorfizmi tega objekta. Te nam namreč opišejo simetrije nekega objekta. V kompleksni analizi imamo tako opravka s holomorfnimi avtomorfizmi, ki ohranjajo kote. Cilj diplomskega dela je analiza grup holomorfnih avtomorfizmov nekaterih območij v kompleksni ravnini in kompaktnih Riemannovih ploskev.

Holomorphic automorphisms

ABSTRACT

The main theme of many mathematical subjects are maps with some properties – be it homomorphisms, homeomorphisms, or just any map between sets. Especially interesting are bijective maps with the same object as domain and codomain, which are called automorphisms of said object. These describe symmetries of the object. In complex analysis, we deal with holomorphic automorphisms, which preserve angles. The goal of this thesis is to analyze groups of holomorphic automorphisms of some domains in the complex plane and of compact Riemann surfaces.

Math. Subj. Class. (2020): 30F10, 30C20

Ključne besede: holomorfen avtomorfizem, Riemannova ploskev, divizor

Keywords: holomorphic automorphism, Riemann surface, divisor

1 Uvod

V diplomskem delu si bomo ogledali simetrije določenih geometrijskih objektov. Specifično nas bodo zanimale konformne preslikave, torej tiste, ki ohranjajo kote. Ekvivalentno so to holomorfne preslikave z neničelnim odvodom.

V prvem delu se bomo osredotočili na odprte množice v kompleksni ravnini. Glavna ideja bo, da vsak avtomorfizem dovolj regularnega območja razširimo do avtomorfizma Riemannove sfere, nato pa bomo glede na njegove geometrijske lastnosti omejili število avtomorfizmov. Glavni rezultat tega dela bo Heinsov izrek iz leta 1946, ki pravi, da za vsa dovolj velika naravna števila n območja z n luknjami premorejo največ $2n$ holomorfnih avtomorfizmov.

V naslednjem razdelku bomo uvedli pojem Riemannovih ploskev. Raziskali bomo posledice Riemann-Rochovega izreka, ki ga je dokazal G. Roch leta 1865. Z njim bomo poiskali točke na kompaktnih Riemannovih ploskvah, v katerih imajo meromorfne funkcije lahko pole majhne stopnje, in jih analizirali.

Na koncu si bomo ogledali še holomorfne avtomorfizme kompaktnih Riemannovih ploskev. Dokazali bomo Schwarzov in Hurwitzev izrek iz let 1878 in 1893, ki omejujeta število holomorfnih avtomorfizmov Riemannovih ploskev rodov $g \geq 2$ na $84(g-1)$.

2 Holomorfni avtomorfizmi v kompleksni ravnini

2.1 Enostavno povezana območja

Da lahko govorimo o holomorfnih funkcijah, se bomo omejili na odprte podmnožice kompleksne ravnine.

Definicija 2.1. *Holomorfen avtomorfizem* odprte množice $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ je bijektivna holomorfna preslikava $f\colon \Omega \to \Omega$ s holomorfnim inverzom.

Znano je, da je zadosten pogoj že to, da je f bijektivna in holomorfna. Opazimo še, da množica avtomorfizmov nekega območja tvori grupo z operacijo kompozitum. To grupo označimo z $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

Prepričamo se lahko, da lahko avtomorfizme nepovezanih množic opišemo z avtomorfizmi, ki komponente med seboj permutirajo. V nadaljevanju se bomo tako omejili na povezane množice.

Definicija 2.2. *Območje* v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ je vsaka odprta povezana množica.

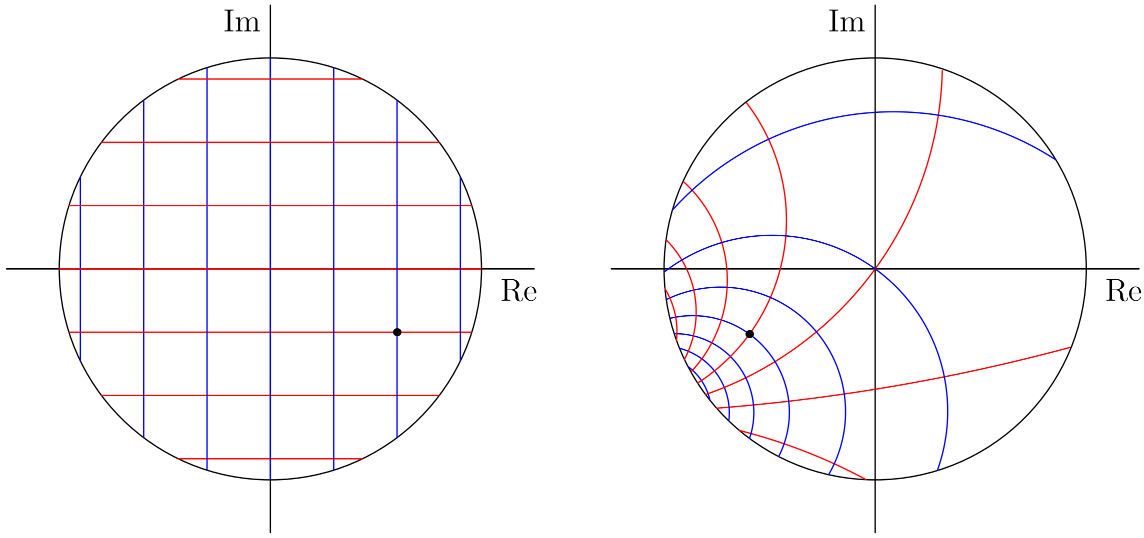
Grupe avtomorfizmov nekaterih območij so splošno znane – za kompleksno ravnino in enotski disk ju dobimo s pomočjo Liouvillovega izreka in Schwarzove leme:

Zgled 2.3. Grupa avtomorfizmov kompleksne ravnine je enaka

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \neq 0\}. \qquad \diamondsuit$$

Zgled 2.4. Naj bo $\mathbb{A}$ odprt enotski disk v $\mathbb{C}$. Tedaj je

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{A}) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \cdot \frac{z-a}{1-\bar{a}z} \;\middle|\; a \in \mathbb{A} \wedge \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \qquad \diamondsuit$$



Slika 1: Primer avtomorfizma diska z označenima točkama $f^{-1}(0)$ in $f(0)$

Izkaže se, da smo s tem do izomorfizma natančno opisali grupe avtomorfizmov vseh povezanih in enostavno povezanih množic v $\mathbb{C}$. Velja namreč naslednja lema:

Lema 2.5. *Naj bosta Ω_1 in Ω_2 biholomorfno ekvivalentni območji v $\mathbb{C}$. Tedaj je $\mathrm{Aut}(\Omega_1) \cong \mathrm{Aut}(\Omega_2)$.*

Dokaz. Naj bo $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ biholomorfna preslikava. Sedaj definiramo preslikavo $\Phi\colon \mathrm{Aut}(\Omega_1) \to \mathrm{Aut}(\Omega_2)$ s predpisom

$$\Phi(\phi) = f^{-1} \circ \phi \circ f.$$

Ker je s predpisom

$$\Phi^{-1}(\psi) = f \circ \psi \circ f^{-1}$$

očitno podan predpis inverza preslikave Φ, je ta bijektivna. Velja pa

$$\Phi(\phi \circ \psi) = f^{-1} \circ \phi \circ \psi \circ f = \left(f^{-1} \circ \phi \circ f\right) \circ \left(f^{-1} \circ \psi \circ f\right) = \Phi(\phi) \circ \Phi(\psi),$$

zato je Φ izomorfizem. $\square$

Spomnimo se na Riemannov upodobitveni izrek, ki pravi, da je vsako povezano in enostavno povezano območje v kompleksni ravnini ali biholomorfno ekvivalentno $\mathbb{\Delta}$ ali pa kar enako $\mathbb{C}$. Grupe avtomorfizmov povezanih in enostavno povezanih območij so do izomorfizma natančno tako le $\mathrm{Aut}(\mathbb{\Delta})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

Omenimo še, da lahko kompleksno ravnino dopolnimo do Riemannove sfere $\widehat{\mathbb{C}}$. Znano je, da so njeni avtomorfizmi Möbiusove transformacije, torej

$$\mathrm{Aut}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \,\middle|\, ad - bc = 1 \right\}.$$

2.2 Punktirani diski in kolobarji

Razdelek je povzet po [2].

Po obravnavi enostavno povezanih območij so naslednji korak območja z »luknjami«. Enostaven primer takega območja je punktirani disk $\mathbb{\Delta}_\alpha = \mathbb{\Delta} \setminus \{\alpha\}$.

Disk $\mathbb{\Delta}^* = \mathbb{\Delta} \setminus \{0\}$ je biholomorfno ekvivalenten vsakemu punktiranemu disku, saj je preslikava $f\colon \mathbb{\Delta}_\alpha \to \mathbb{\Delta}^*$ s predpisom

$$f(z) = \frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$$

biholomorfna. Sledi, da je $\operatorname{Aut}(\mathbb{\Delta}_\alpha) \cong \operatorname{Aut}(\mathbb{\Delta}^*)$.

Trditev 2.6. *Za punktirani disk velja*

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{\Delta}^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Dokaz. Naj bo $f\colon \mathbb{\Delta}^* \to \mathbb{\Delta}^*$ poljuben avtomorfizem. Tedaj je točka 0 izolirana singularnost funkcije f. Ker je f omejena, je to odpravljiva singularnost.

Naj bo $\widetilde{f}\colon \mathbb{\Delta} \to \mathbb{C}$ funkcija, ki jo dobimo tako, da f razširimo na celoten disk. Predpostavimo, da velja $\widetilde{f}(0) \neq 0$. Ker je $\widetilde{f}$ holomorfna in nekonstantna, je odprta, zato sledi $\left|\widetilde{f}(0)\right| < 1$. Oglejmo si točko $\alpha \neq 0$, za katero je $f(\alpha) = \widetilde{f}(0)$. Izberemo si lahko disjunktni okolici U in V točk 0 in α. Ker je $\widetilde{f}$ odprta, je odprta tudi množica $W = \widetilde{f}(U) \cap \widetilde{f}(V)$. Hitro opazimo, da velja $\widetilde{f}(0) \in W$, zato je ta množica neprazna. Sledi, da je W neskončna, kar je protislovje, saj velja $f(U \setminus \{0\}) \cap f(V) = \emptyset$.

Sledi, da je $\widetilde{f}(0) = 0$, zato je $\widetilde{f}$ avtomorfizem diska. Tako dobimo inkluzijo

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{\Delta}^*) \subseteq \{ f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{\Delta}) \mid f(0) = 0 \}.$$

Ni težko preveriti, da velja tudi obratna inkluzija, oziroma

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{\Delta}^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \;\middle|\; \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \qquad \square$$

Kaj pa se zgodi, če število lukenj povečamo? Naj bo $\mathbb{\Delta}_2 = \mathbb{\Delta} \setminus \{0, \alpha\}$.[1] Po enakem razmisleku kot prej ugotovimo, da za vsak avtomorfizem $f \in \operatorname{Aut}(\mathbb{\Delta}_2)$ velja $f(0) \in \mathbb{\Delta}$ in hkrati $f(0) \notin \mathbb{\Delta}_2$. Enako velja za točko α. Sedaj ni težko videti, da velja

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{\Delta}_2) = \left\langle z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \overline{\alpha}z} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

saj je avtomorfizem diska natančno določen z dvema točkama.

Sedaj si oglejmo še kolobar $R = \mathbb{\Delta} \setminus \overline{\mathbb{\Delta}(r)}$ za $0 < r < 1$. Naj bo $f\colon R \to R$ avtomorfizem. Po Carathéodoryjevem izreku [7, izrek 5.1.1 in opomba 5.1.2] se f zvezno razširi na ∂R. Ker lahko f komponiramo s preslikavo $\varphi\colon z \mapsto \frac{r}{z}$, lahko predpostavimo, da je $f(\partial \mathbb{\Delta}) = \partial \mathbb{\Delta}$.

Naj bo

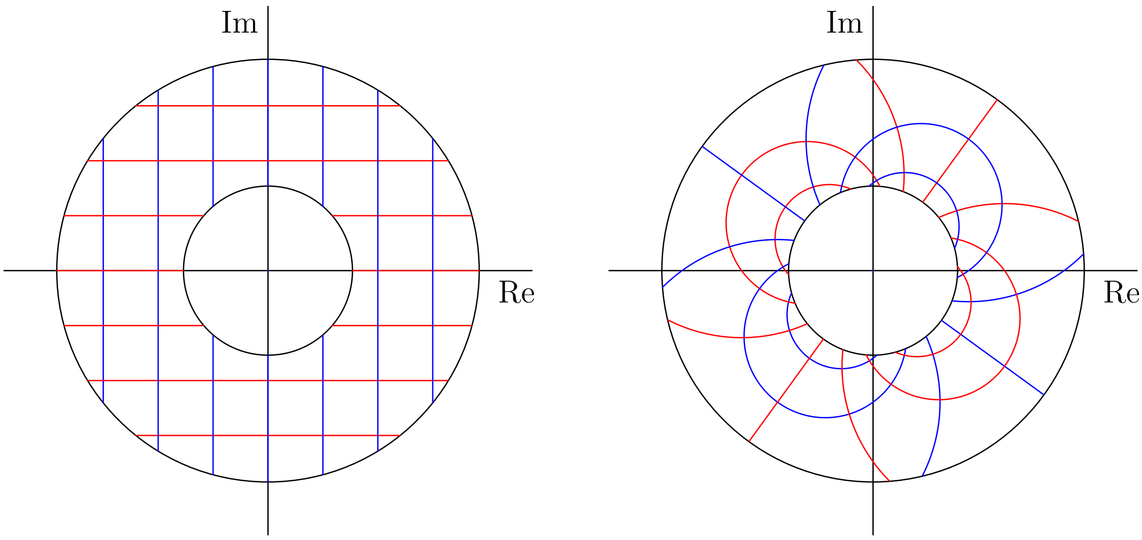
$$u(z) = \log|f(z)| - \log|z|.$$

[1] Podobno kot prej lahko privzamemo, da je ena izmed lukenj enaka 0.

Ker je logaritem absolutne vrednosti holomorfne funkcije brez ničel harmonična funkcija, je $\triangle u = 0$. Ker je $u|_{\partial R} = 0$, je po principu maksima $u = 0$. Tako sledi $|f(z)| = |z|$ in

$$\left|\frac{f(z)}{z}\right| = 1.$$

Ker je $\frac{f(z)}{z}$ holomorfna in so nekonstantne holomorfne preslikave odprte, sledi, da je $\frac{f(z)}{z}$ konstantna. Tako so vsi avtomorfizmi kolobarja kar $z \mapsto e^{i\theta} z$ in $z \mapsto e^{i\theta} \frac{r}{z}$.



Slika 2: Primer avtomorfizma kolobarja

2.3 Avtomorfizmi p-povezanih območij

Ta razdelek je prirejen po [7, poglavje 12] in [1, razdelek 5.9].

Oglejmo si avtomorfizme območja $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq p\}$, pri čemer brez škode za splošnost vzamemo $x_p = \infty$. Za $p = 1$ dobimo kar kompleksno ravnino, katere avtomorfizme že poznamo. Pri $p = 2$ lahko brez škode za splošnost vzamemo $x_1 = 0$. Ni težko videti, da so vsi avtomorfizmi oblike $z \mapsto e^{i\theta} \cdot z^{\pm 1}$.

Sedaj si oglejmo še primer $p > 2$. Preverimo lahko, da se vsak avtomorfizem Ω razširi do avtomorfizma Riemannove sfere, ki permutira točke x_i. Ker je vsaka Möbiusova transformacija enolično določena s tremi točkami, je moč grupe $\mathrm{Aut}(\Omega)$ tako omejena s $p(p-1)(p-2)$. Izkaže se, da lahko to mejo še bistveno izboljšamo. Najprej dokažimo naslednjo lemo:

Lema 2.7. *Naj bo $p > 2$ naravno število in $f \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ netrivialen avtomorfizem območja $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq p\}$. Tedaj ima f natanko dve fiksni točki.*

Dokaz. Naj bo

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

naš avtomorfizem. Ker je $\mathrm{Aut}(\Omega)$ končna grupa, obstaja tako naravno število n, da je $f^n = \mathrm{id}$. Spomnimo se, da kompozitum Möbiusovih transformacij ustreza množenju pripadajočih matrik. Sedaj lahko poiščemo Jordanovo formo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = P \cdot J \cdot P^{-1} = P \cdot \begin{bmatrix} \lambda & \varepsilon \\ 0 & \mu \end{bmatrix} \cdot P^{-1},$$

pri čemer je $\varepsilon \in \{0,1\}$. Če je $\varepsilon = 1$, velja $\lambda = \mu$ in

$$J^n = \begin{bmatrix} \lambda^n & n \cdot \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{bmatrix} \neq I.$$

Tako sledi $\varepsilon = 0$. Sledi, da se f konjugira k preslikavi

$$z \mapsto \frac{\lambda z}{\mu} = \alpha z,$$

ta pa ima natanko dve fiksni točki; 0 in ∞. □

Trditev 2.8. *Naj bo $p > 2$ naravno število in $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq p\}$. Tedaj velja $|\mathrm{Aut}(\Omega)| \leq 2p$ ali pa $|\mathrm{Aut}(\Omega)| \in \{12, 24, 60\}$.*

Dokaz. Označimo $G = \mathrm{Aut}(\Omega)$ in predpostavimo, da je $|G| \geq 2$. Avtomorfizme območja Ω lahko razširimo do avtomorfizmov $\widehat{\mathbb{C}}$. Za vsako točko $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ njen stabilizator označimo z $G_z = \{g \in G \mid g(z) = z\}$. Opazimo, da je točk z netrivialnim stabilizatorjem končno mnogo – v nasprotnem primeru bi obstajal netrivialen avtomorfizem $T \in G$ z neskončno mnogo fiksnimi točkami, kar bi pomenilo, da se na Riemannovi sferi v neskončno mnogo točkah ujema z identiteto. Ker je Riemannova sfera kompaktna, po principu identičnosti sledi $T = \mathrm{id}$.

Vzemimo neko maksimalno množico $\left\{z_j \in \widehat{\mathbb{C}} \;\middle|\; 1 \leq j \leq r\right\}$ točk, ki imajo netrivialen stabilizator in paroma disjunktne orbite $G \cdot z_j = \{g(z_j) \mid g \in G\}$. Naj bo še $v_j = \left|G_{z_j}\right|$ za vse $j \leq r$. Sedaj na dva načina preštejmo fiksne točke netrivialnih avtomorfizmov (z večkratnostmi). Ker ima vsak netrivialen avtomorfizem natanko 2 fiksni točki, je teh skupaj enako kar $2 \cdot (|G| - 1)$. Vsaka fiksna točka netrivialnega avtomorfizma ima očitno netrivialen stabilizator, zato je vsebovana v eni izmed orbit $G \cdot z_j$. Velja tudi obratno, vsaka točka orbite $G \cdot z_j$ je fiksna točka natanko $v_j - 1$ netrivialnih avtomorfizmov, saj so si stabilizatorji med seboj konjugirani. Elementov orbite je seveda $\frac{|G|}{v_j}$. Tako dobimo enakost

$$2 \cdot (|G| - 1) = \sum_{j=1}^{r} \frac{|G|}{v_j} \cdot (v_j - 1).$$

Z malo spretnosti lahko to enakost preoblikujemo v

$$2 - \frac{2}{|G|} = \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_j}\right).$$

Sedaj ločimo naslednje primere:

i) Če je $r = 1$, velja

$$1 - \frac{1}{v_1} < 1 \leq 2 - \frac{2}{|G|},$$

kar je seveda protislovje.

ii) Naj bo $r = 2$. Enakost lahko v tem primeru prepišemo v obliko

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}.$$

Ker velja $v_1, v_2 \leq |G|$, je lahko zgornja enakost izpolnjena le, kadar velja $v_1 = v_2 = |G|$. To pomeni, da imamo natanko dve točki, ki sta fiksni točki vsakega avtomorfizma. Ker je vsak avtomorfizem Riemannove sfere natanko določen s tremi točkami, je tako dovolj določiti, kam se slika ena izmed p točk, za to pa imamo kvečjemu p možnosti. V tem primeru tako velja $|\mathrm{Aut}(\Omega)| \leq p$.[2]

iii) Naj bo $r = 3$. V tem primeru lahko zgornjo enakost prepišemo v

$$\frac{2}{|G|} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} - 1.$$

Brez škode za splošnost naj velja $v_1 \leq v_2 \leq v_3$. Če za vse j velja $v_j \geq 3$, je desna stran enačbe nepozitivna. Tako sledi $v_1 = 2$. Če velja tudi $v_2 = 2$, lahko izrazimo $v_3 = \frac{|G|}{2}$. Orbita točke z_3 je tako enaka kar $\{z_3, z_3'\}$. Sledi, da stabilizatorji točke z_3 fiksirajo ta dva elementa, kar po istem argumentu kot zgoraj implicira, da je $v_3 \leq p$ in zato $|G| \leq 2p$.[3]

Ostane še primer, ko je $v_1 = 2$ in $v_2, v_3 \geq 3$. Če velja $v_3 \geq 6$, dobimo

$$\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} - 1 \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0,$$

kar je seveda protislovje. Podobno pridemo do protislovja, če velja $v_2, v_3 \geq 4$. Tako nam preostanejo le še primeri

$$(v_1, v_2, v_3) \in \{(2,3,3), (2,3,4), (2,3,5)\}.$$

S krajšim računom dobimo $|G| \in \{12, 24, 60\}$.

iv) Naj bo $r \geq 4$. Ker je $v_j \geq 2$, sledi

$$\sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{r}{2} \geq 2 > 2 - \frac{2}{|G|},$$

kar je seveda protislovje. □

Zgled 2.9. Naj bo $p = 7$, $A = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = 1\}$ in $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A$. Ker Möbiusove transformacije slikajo krožnice v premice ali krožnice, se enotska krožnica preslika v premico ali krožnico. Ta mora vsebovati 6 točk iz množice A, kar je mogoče le, če se slika sama vase. Sledi, da je 0 fiksna točka vsakega avtomorfizma tega območja. To med drugim pomeni, je vsak avtomorfizem $T \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ tudi avtomorfizem diska. Tako so edini avtomorfizmi rotacije, ki pa fiksirajo tudi točko ∞. To pomeni, da to območje spada v primer $r = 2$. Res velja $|\mathrm{Aut}(\Omega)| = 6 < p$. ♢

[2]Dokazati se da celo, da velja $\mathrm{Aut}(\Omega) \cong \mathbb{Z}_k$ za nek $k \leq p$.

[3]V tem primeru je $\mathrm{Aut}(\Omega)$ izomorfna neki diedrski grupi.

Zgled 2.10. Naj bo $p = 7$, $A = \{z \in \mathbb{C} \mid z^7 = 1\}$ in $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A$. Podobno kot v prejšnjem zgledu ugotovimo, da avtomorfizmi območja Ω slikajo enotsko krožnico samo vase. Ker se poleg tega ohranja zaporedje točk na krožnici, vsak avtomorfizem ustreza neki simetriji pravilnega 7-kotnika. Ker lahko rotacijo predstavimo z avtomorfizmom $z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{7}} \cdot z$, zrcaljenje pa z avtomorfizmom $z \mapsto \frac{1}{z}$, dobimo diedrsko grupo. Ta zgled ustreza primeru, ko je $r = 3$ in $v_1 = v_2 = 2$. Res je $|\mathrm{Aut}(\Omega)| = 14 = 2p$. $\diamondsuit$

Zgled 2.11. Naj bo $p = 4$, A množica središč mejnih ploskev tetraedra, očrtanega enotski sferi, in $\Omega = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A$. Območje Ω lahko s stereografsko projekcijo predstavimo v kompleksni ravnini, in sicer kot $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid z^3 = 1\}$. Naj bo $\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$. Če je ∞ fiksna točka avtomorfizma, je ta kar rotacija okoli izhodišča $z \mapsto \omega^k \cdot z$, saj mora biti afina preslikava. Preverimo lahko, da je tudi preslikava

$$z \mapsto \frac{\omega z + 2}{z - \omega^2}$$

avtomorfizem območja Ω, ki prav tako ustreza rotaciji tetraedra. Ti preslikavi generirata simetrično grupo tetraedra. Tako sledi $|\mathrm{Aut}(\Omega)| \geq 12$. Ker je $\mathrm{Aut}(\Omega)$ podgrupa permutacijske grupe, velja $|\mathrm{Aut}(\Omega)| \leq 24$. Ker pa po zgornjem premisleku $\mathrm{Aut}(\Omega)$ ne vsebuje preslikave, ki bi fiksirala 1 in ∞ ter hkrati zamenjala točki ω in ω^2, sledi $|\mathrm{Aut}(\Omega)| < 24$, oziroma $|\mathrm{Aut}(\Omega)| = 12$. Predstavnika orbit velikosti 4 sta 0 in 1, orbite velikosti 6 pa $1 + \sqrt{3}$. $\diamondsuit$

Za primera $|G| = 24$ in $|G| = 60$ območje Ω dobimo na enak način, le namesto tetraedra vzamemo oktaeder oziroma ikozaeder.

Za katera števila p pa lahko velja $|G| > 2p$? Če imamo v točki x_j luknjo območja Ω, jo moramo imeti tudi v vsakem elementu njene orbite. Oglejmo si vsak primer posebej:

i) Naj bo $|G| = 12$. V tem primeru imamo dve orbiti velikosti 4 in eno orbito velikosti 6, vse ostale pa so velikosti 12. Tako sledi

$$p = 4a + 6b + 12c,$$

pri čemer veljajo omejitve $a \leq 2$ in $b \leq 1$. Ker želimo še $p < 6$, je edina možnost kar $p = 4$.

ii) Naj bo $|G| = 24$. V tem primeru imamo po eno orbito velikosti 6, 8 in 12, zato velja

$$p = 6a + 8b + 12c + d$$

z omejitvami $a, b, c \leq 1$. Ob pogoju $p < 12$ tako sledi $p \in \{6, 8\}$.

iii) Naj bo $|G| = 60$. V tem primeru imamo po eno orbito velikosti 12, 20 in 30, od koder sledi

$$p = 12a + 20b + 30c + 60d$$

z omejitvami $a, b, c \leq 1$. Z dodatnim pogojem $p < 30$ sta tako edini možnosti $p \in \{12, 20\}$.

Oglejmo si še primer, ko robne komponente niso nujno točke.

Izrek 2.12 (Heins)**.** *Naj bo Ω območje na Riemannovi sferi, katerega robne komponente sestavlja p točk ali Jordanovih krivulj. Tedaj za moč grupe* $\mathrm{Aut}(\Omega)$ *veljajo enake ocene kot zgoraj.*

Dokaz. Po posplošitvi Riemannovega upodobitvenega izreka (glej [6]) lahko predpostavimo, da je Ω kar enotski disk, ki mu odstranimo nekaj točk in diskov. Po Carathéodoryjevem izreku sledi, da avtomorfizem permutira robne komponente območja Ω. Tako obstaja homomorfizem $\lambda\colon \mathrm{Aut}(\Omega) \to S_{\partial\Omega}$, kjer je $S_{\partial\Omega}$ permutacijska grupa. Jedro homomorfizma so natanko tisti avtomorfizmi, ki fiksirajo vsako robno komponento posebej. Pokažimo, da je jedro trivialno.

Naj bo $T \in \ker\lambda$ poljuben avtomorfizem. Najprej se lahko znebimo točkastih robnih komponent, saj se te preslikajo same vase. Z uporabo Schwarzovega zrcaljenja lahko T razširimo preko vseh ostalih robnih komponent. Enostavno je preveriti, da se pri tem ohrani injektivnost preslikave. V limiti nam v vsaki komponenti Ω^c ostane samo ena točka. V vseh omejenih komponentah je to odpravljiva singularnost, v neomejeni pa ali odpravljiva singularnost ali pol prve stopnje. V prvem primeru je T omejen in zato konstanten, torej ne more biti avtomorfizem območja Ω. V drugem primeru se T razširi do avtomorfizma Riemannove sfere. Zanimajo nas torej avtomorfizmi Riemannove sfere, ki fiksirajo vse robne komponente Ω. V nadaljevanju na točkaste robne komponente glejmo kot na diske z radijem 0.

Naj bo $T = \frac{az+b}{cz+d}$. Sedaj obravnavajmo dva primera.

i) Velja $c = 0$. V tem primeru je T afina transformacija. To implicira, da T poleg robnih komponent fiksira tudi njihova središča. Ker sta to vsaj dve različni točki, ima T dve fiksni točki, zato velja kar $T = \mathrm{id}$.

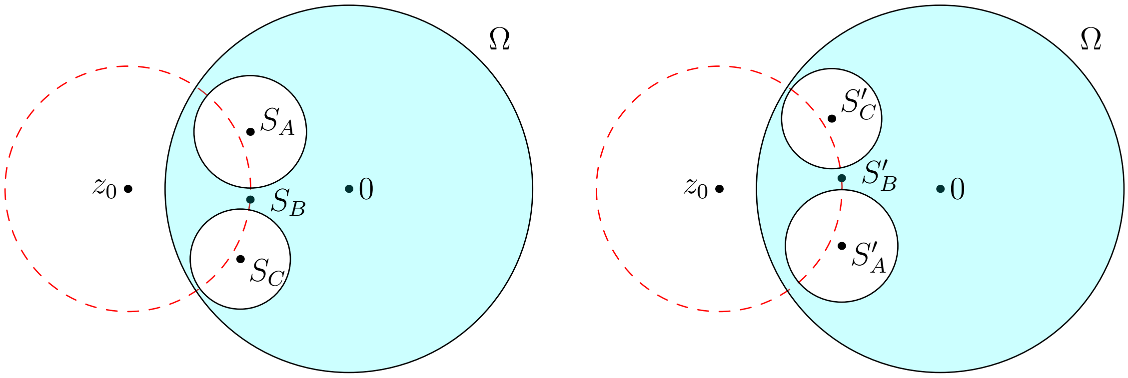
ii) Velja $c \neq 0$. Tedaj je T kompozitum inverzije v točki $z_0 = -\frac{d}{c}$, rotacije in translacije. Ker mora inverzija ohranjati radije robnih komponent (preostali preslikavi sta namreč izometriji), morajo vse biti ortogonalne na neko krožnico s središčem v z_0.[4] Sedaj opazimo, da smo prišli do protislovja, saj je inverzija obrnila orientacijo središč robnih komponent, česar pa ne moremo popraviti z rotacijo in translacijo.

Sedaj si izberimo poljubno točko $z \notin \Omega$ in si oglejmo njeno orbito, torej množico $A = \{T(z) \mid T \in \mathrm{Aut}(\Omega)\}$. Po enakem razmisleku kot zgoraj se namreč vsak avtomorfizem Ω razširi do avtomorfizma kompleksne ravnine. V vsaki komponenti Ω^c imamo kvečjemu en element množice A. Sedaj si izberimo poljubno točko v eni izmed komponent, ki je množica A ne obišče, in postopek ponovimo. Tako na koncu dobimo množico $S = \{z_i \mid 1 \leq i \leq p\}$, pri čemer je v vsaki komponenti Ω^c natanko ena točka. Poljubni avtomorfizem $T \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ se torej razširi do avtomorfizma območja $\Omega \setminus S$, s tem pa je izrek dokazan. $\square$

Za konec še omenimo, da avtomorfizmov ni nujno končno mnogo, če ima Ω^c neskončno mnogo komponent. Na sliki 4 je območje

$$\Omega = \mathbb{A} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D),$$

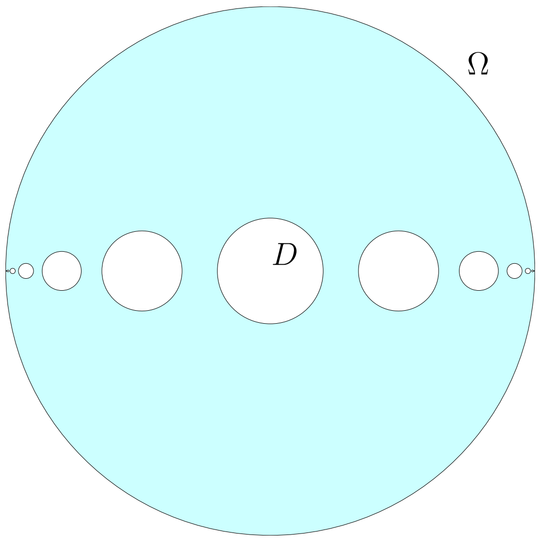
[4] Ne morejo imeti središča v z_0, saj bi tedaj T območje Ω slikal v notranjost te krožnice.



Slika 3: Inverzija prezrcali robne komponente

kjer je D zaprt disk s središčem v 0 in radijem $\frac{1}{5}$ ter

$$f(z) = \frac{z - \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}z}.$$



Slika 4: Neskončno-povezano območje z neskončno avtomorfizmi

Seveda je $f^n \in \mathrm{Aut}(\Omega)$ za vsak $n \in \mathbb{Z}$. Ker sta lastni vrednosti matrike

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

$\frac{1}{2}$ in $\frac{3}{2}$, je njena Jordanova forma enaka

$$J = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Tako je J^n skalarni večkratnik identitete natanko tedaj, ko je $n = 0$, kar pomeni, da f nima končnega reda. Grupa $\mathrm{Aut}(\Omega)$ je v tem primeru torej res neskončna.

3 Riemannove ploskve

3.1 Gladke in kompleksne mnogoterosti

V tem poglavju bomo rezultate iz območij na Riemannovi sferi posplošili na bolj splošne množice. Seveda hočemo še naprej govoriti o holomorfnih preslikavah, zato potrebujejo te množice neko strukturo, v kateri znamo odvajati. Naravna izbira so tako mnogoterosti.

Razdelek je povzet po [5, razdelek 1.2] in [3, poglavja I.1, III.7 ter II.5].

Definicija 3.1. *Topološka mnogoterost* dimenzije n je Hausdorffov, 2-števen topološki prostor M, v katerem ima vsaka točka $p \in M$ okolico, homeomorfno odprti podmnožici $\mathbb{R}^n$. Paru okolice in homeomorfizma pravimo *lokalna karta.*

V nadaljevanju se omejimo na dvodimenzionalne mnogoterosti (ploskve), saj so lokalno homeomorfne podmnožici kompleksne ravnine, kar nam bo olajšalo definicijo holomorfnosti.

Zdi se, da lahko za vsako primerno preslikavo $f\colon M \to N$ med ploskvama M in N preverimo, ali je holomorfna – za vsako točko $P \in M$ poiščemo lokalni karti (U, φ) in (V, ψ) točk P in $f(P)$ in preverimo, ali je preslikava $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ holomorfna. To seveda lahko naredimo, a naletimo na težavo – holomorfnost je v tem primeru odvisna od lokalne karte. Odločiti se moramo torej, katere lokalne karte bomo izbrali.

Definicija 3.2. *Atlas* ploskve M je množica lokalnih kart $\mathcal{U} = \{(U_i, \varphi_i) \mid i \in I\}$, za katero velja

$$M = \bigcup_{i \in I} U_i.$$

Če velja $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, definiramo *prehodno preslikavo*

$$\varphi_{i,j}\colon \varphi_i(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C} \to \varphi_j(U_i \cap U_j) \subseteq \mathbb{C}$$

s predpisom $\varphi_{i,j} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$. Atlas je *kompleksen*, če so vse prehodne preslikave holomorfne.

S to definicijo smo se znebili zgornje težave. Če namreč vzamemo lokalne karte iz istega kompleksnega atlasa, je holomorfnost preslikave neodvisna od izbire lokalne karte – če so $(U_i \subseteq M, \varphi_i)$ in $(V_i \subseteq N, \psi_i)$ za $i \in \{1, 2\}$ lokalne karte točk P in $f(P)$, za $f_i = \psi_i \circ f \circ \varphi_i^{-1}$ na dovolj majhni okolici velja

$$f_2 = \left(\psi_2 \circ \psi_1^{-1}\right) \circ f_1 \circ \left(\varphi_1 \circ \varphi_2^{-1}\right).$$

Če je funkcija f_1 holomorfna, je zaradi holomorfnosti prehodnih preslikav holomorfna tudi f_2.

$$\begin{tikzcd}
\varphi_1(U) \subseteq \mathbb{C} \arrow[r, dashed, "f_1"] & \psi_1(V) \subseteq \mathbb{C} \\
U = U_1 \cap U_2 \arrow[u, "\varphi_1"] \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_2"'] & V = V_1 \cap V_2 \arrow[u, "\psi_1"'] \arrow[d, "\psi_2"] \\
\varphi_2(U) \subseteq \mathbb{C} \arrow[r, dashed, "f_2"'] & \psi_2(V) \subseteq \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Pravimo, da sta kompleksna atlasa $\mathcal{U}$ in $\mathcal{V}$ *kompatibilna*, če je tudi $\mathcal{U} \cup \mathcal{V}$ kompleksen atlas. Lahko se prepričamo, da je kompatibilnost ekvivalenčna relacija. Ko izbiramo atlas za mnogoterost je tako pomembno le, v katerem ekvivalenčnem razredu je ta atlas. Taki izbiri razreda atlasov pravimo tudi *kompleksna struktura*.

Definicija 3.3. *Riemannova ploskev* je povezana mnogoterost dimenzije 2 (kompleksne dimenzije 1) skupaj z izborom ekvivalenčnega razreda kompleksnih atlasov.

Zgled 3.4. Najpreprostejši primeri Riemannovih ploskev so kar območja v kompleksni ravnini. Kompleksna struktura na teh množicah je podana kar z vložitvijo okolic v kompleksno ravnino.

Kompleksno strukturo lahko uvedemo tudi na sferi, in sicer s stereografsko projekcijo. Če sta N in S severni in južni pol sfere $S^2 \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R}$, nam preslikavi

$$\pi_N \colon (z,t) \mapsto \frac{z}{1-t} \qquad \text{in} \qquad \pi_S \colon (z,t) \mapsto \frac{\overline{z}}{1+t}$$

podata lokalni karti za $S^2 \setminus \{N\}$ in $S^2 \setminus \{S\}$. Krajši izračun pokaže, da je

$$\pi_N \circ \pi_S^{-1}(\xi) = \frac{1}{\xi},$$

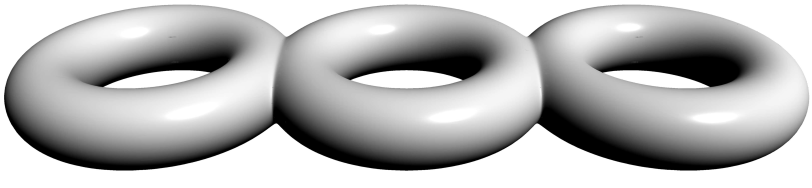
kar je holomorfna preslikava, zato je to res kompleksen atlas. $\diamondsuit$

Definicija 3.5. Preslikava $f \colon M \to N$ med Riemannovima ploskvama je *holomorfna*, če je za vsako točko $P \in M$ in poljubni lokalni karti (U, φ) in (V, ψ) točk P ter $f(P)$ preslikava $\tilde{f} = \psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ holomorfna.

Po zgornjem razmisleku je holomorfnost dovolj preveriti na enem paru lokalnih kart vsake točke. Pomembno je omeniti, da imajo holomorfne preslikave med Riemannovimi ploskvami po definiciji enake lokalne lastnosti kot holomorfne preslikave v kompleksni ravnini – velja na primer izrek o odprti preslikavi za nekonstantne holomorfne funkcije.

Sedaj, ko imamo definirano holomorfnost, lahko uvedemo še pojem holomorfnega avtomorfizma ploskve M – to bo preprosto vsaka bijektivna holomorfna preslikava $f \colon M \to M$.

V nadaljevanju se bomo omejili na kompaktne Riemannove ploskve. Izkaže se, da so vse Riemannove ploskve orientabilne [5, razdelek 1.2.6]. Topološko lahko te klasificiramo kot g-toruse – za $g = 0$ to pomeni sfero, za $g = 1$ torus, za $g \geq 2$ pa g torusov, ki so zlepljeni skupaj (povezana vsota). Številu g pravimo *rod* ploskve.



Slika 5: Ploskev roda $g = 3$

Za lažjo analizo grup avtomorfizmov se moramo najprej seznaniti z nekaterimi lastnostmi Riemannovih ploskev.

Trditev 3.6. *Naj bo $f\colon M \to N$ nekonstantna holomorfna preslikava med kompaktnima Riemannovima ploskvama. Tedaj obstaja naravno število m, za katero f doseže vsako točko $Q \in N$ natanko m-krat.*[5]

Dokaz. Iz kompleksne analize vemo, da za vsako točko $P \in M$ obstajata taki lokalni koordinati $\tilde{z}_1$ in $\tilde{z}_2$ točk P in $f(P)$, da je $f(\tilde{z}_1) = \tilde{z}_2^n$. Število $n-1$ označimo z $b(P)$ in mu pravimo *razvejiščno število točke*. Namesto oznake $b(P)$ bomo v nadaljevanju pogosto uporabili tudi *red* točke $\operatorname{ord}_P f = b(P) + 1$.

Za vsako naravno število m naj bo

$$\Sigma_m = \left\{ X \in N \;\middle|\; \sum_{f(P)=X} (b(P)+1) \geq m \right\}.$$

Označimo še

$$\varphi(X) = \sum_{f(P)=X} (b(P)+1).$$

Posebej, če je $X \notin f(M)$, velja $\varphi(X) = 0$. Vse množice Σ_m so odprte – če je $b(P) = n-1$, lahko v lokalnih koordinatah zapišemo $f(\tilde{z}) = \tilde{z}^n$. Enačba $f(\tilde{z}) = \varepsilon$ ima tako natanko n rešitev, zato za okolico U točke P velja

$$b(P) + 1 = \sum_{Q \in U \cap f^{-1}(P')} (b(Q)+1),$$

kjer je $P' \in f(U)$. Če to enakost seštejemo po okolicah vseh točk $P \in f^{-1}(X)$, dobimo

$$m \leq \varphi(X) \leq \varphi(P').$$

Pokažimo še, da so te množice zaprte v $\widehat{\mathbb{C}}$. Naj bo Q limita zaporedja točk $Q_k \in \Sigma_m$, pri čemer je brez škode za splošnost $b(P) = 0$ za vsak $P \in f^{-1}(Q_k)$. Ker imajo vse množice $f^{-1}(Q_k)$ vsaj m elementov, lahko najdemo tako podzaporedje zaporedja $(Q_k)_{n=1}^{\infty}$, da lahko iz njihovih praslik tvorimo m konvergentnih zaporedij. Tako sledi

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} (b(P)+1) \geq m.$$

Sledi, da so vse množice Σ_m odprte in zaprte v $\widehat{\mathbb{C}}$. Čim je ena izmed množic Σ_m neprazna, je tako enaka celotni Riemannovi sferi, saj je ta povezana. □

Številu m pravimo *stopnja* preslikave f in označimo $m = \deg f$.

Posledica 3.7. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev. Če je $f\colon M \to \mathbb{C}$ holomorfna preslikava, je konstantna.*

Dokaz. Preslikavo f lahko opazujemo kot preslikavo med Riemannovo ploskvijo M in Riemannovo sfero $\widehat{\mathbb{C}}$. Če f ni konstantna, ima pozitivno stopnjo, kar pa ni mogoče, saj je $f^{-1}(\infty) = \emptyset$. □

To posledico lahko pravzaprav dokažemo tudi z uporabo lastnosti holomorfnih preslikav. Denimo, da je f nekonstantna. Ker je M kompaktna, je taka tudi $f(M)$. Ker pa so nekonstantne holomorfne preslikave odprte, pa sledi, da je $f(M)$ tudi odprta. To seveda pomeni, da je $f(M) = \mathbb{C}$, kar je v protislovju s kompaktnostjo.

[5] Šteto z večkratnostmi.

Definicija 3.8. Za kompaktni Riemannovi ploskvi M in N ter nekonstantno preslikavo $f\colon M \to N$ definiramo *razvejiščno število* kot

$$B = \sum_{P \in M} b_f(P).$$

Število je dobro definirano, saj je množica $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$ diskretna in tako zaradi kompaktnosti končna.

Izrek 3.9 (Riemann-Hurwitz)**.** *Naj bosta M in N kompaktni Riemannovi ploskvi rodov g in γ, $f\colon M \to N$ pa nekonstantna preslikava stopnje n. Tedaj za razvejiščno število B velja*

$$2 - 2g = n(2 - 2\gamma) - B.$$

Dokaz. Ker je množica $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$ končna, jo lahko uporabimo za triangulacijo ploskve N. Denimo, da ima triangulacija F lic, E povezav in V vozlišč. To triangulacijo lahko z f^{-1} prenesemo na M. Tako dobimo triangulacijo ploskve M z nF lici, nE povezavami in $nV - B$ vozlišči. Sledi, da je[6]

$$\begin{aligned} F - E + V &= 2 - 2\gamma, \\ nF - nE + nV - B &= 2 - 2g. \end{aligned}$$

Iz teh enačb očitno sledi

$$2 - 2g = n(2 - 2\gamma) - B. \qquad \square$$

Trditev 3.10. *Naj bo $H \subseteq \mathrm{Aut}(M)$ končna podgrupa grupe avtomorfizmov Riemannove ploskve M. Tedaj je podgrupa $H_P = \{h \in H \mid h(P) = P\}$ ciklična.*

Dokaz. Dokazali bomo, da obstaja enostavno povezana množica $D \subseteq M$, ki je invariantna za H_P – za vsak $h \in H_P$ torej velja $h(D) = D$. Po Riemannovem upodobitvenem izreku namreč tedaj obstaja biholomorfna preslikava $f\colon D \to \mathbb{A}$, za katero velja $f(P) = 0$. Avtomorfizmi diska $f \circ h \circ f^{-1}$ so torej rotacije, vsaka končna grupa rotacij pa je ciklična.

Opazujmo avtomorfizme v lokalni koordinati točke P. Pokažimo, da vsak element $h \in H_P$ dovolj majhne diske s središčem v P slika v konveksne množice. Dovolj je pokazati, da dovolj majhne krožnice s središčem v P slika v konveksne krivulje, oziroma da je argument smeri tangentnega vektorja na sliko krožnice monotona funkcija.

Tangentni vektor v točki z na sliko krožnice z radijem $r = |z|$ dobimo kot

$$h'(z) \cdot \frac{z}{|z|} \cdot i,$$

kar pomeni, da je njegov argument enak

$$\arg h'(z) + \arg(z) + \frac{\pi}{2}.$$

Dokazujemo torej, da je

$$\arg\left(h'\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)\right) + \varphi$$

[6] Eulerjeva karakteristika.

naraščajoča funkcija v φ za vse dovolj majhne r, ker pa lahko lokalno definiramo[7]

$$\arg(z) = \operatorname{Im}(\log(z)),$$

je dovolj pokazati, da je

$$\varphi + \operatorname{Im}\left(\log\left(h'\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)\right)\right)$$

naraščajoča. Njen odvod je enak kar

$$1 + \operatorname{Im}\left(\frac{h''\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)}{h'\left(r \cdot e^{i\varphi}\right)} \cdot r \cdot i \cdot e^{i\varphi}\right) = 1 + \operatorname{Re}\left(\frac{z \cdot h''(z)}{h'(z)}\right),$$

kar je za dovolj majhne z zaradi zveznosti seveda pozitivno.

Sedaj naj bo $r > 0$ tako realno število, da je $h(\mathbb{\Delta}(r))$ konveksna za vse $h \in H_P$. Tedaj je

$$D = \bigcap_{h \in H_P} h(\mathbb{\Delta}(r))$$

konveksna množica, zato je enostavno povezana. □

Definicija 3.11. Naj bo $H \subseteq \operatorname{Aut}(M)$ končna podgrupa grupe avtomorfizmov Riemannove ploskve M. Naj bo $\pi\colon M \to M/H$ kvocientna projekcija. Na množici M/H uvedemo kompleksno strukturo na naslednji način:

i) Če je grupa $H_P = \{h \in H \mid h(P) = P\}$ trivialna, lokalna karta na dovolj majhni okolici P inducira lokalno karto pri $\pi(P)$.

ii) Če je v lokalni koordinati H_P generirana s preslikavo $z \mapsto e^{\frac{2\pi i}{k}} z$, za lokalno karto točke $\pi(P)$ vzamemo z^k.

Prepričamo se lahko, da so te lokalne karte med seboj kompatibilne. Na kvocientu M/H smo torej dobili kompleksno strukturo, zato je to Riemannova ploskev. Opazimo še, da je kvocientna projekcija $\pi\colon M \to M/H$ holomorfna.

Definicija 3.12. *Meromorfen q-diferencial* ω Riemannove ploskve je dodelitev meromorfne funkcije f vsaki lokalni koordinati, pri čemer je $f(z)\,dz^q$ neodvisna od lokalne koordinate. Meromorfnim 1-diferencialom pravimo kar *meromorfni diferenciali.*

Naj bosta (U, φ) in (V, ψ) lokalni karti, za kateri velja $U \cap V \neq \emptyset$. Če jima meromorfen q-diferencial ω priredi funkciji f_U in f_V, mora tako veljati

$$f_U = f_V \cdot \left(\left(\psi \circ \varphi^{-1}\right)'\right)^q.$$

Če je ω meromorfen diferencial, ki je v lokalnih koordinatah podan z $f_U(z)\,dz$, je $\omega^q = f_U(z)^q\,dz^q$ meromorfen q-diferencial.

[7]Ker je h avtomorfizem, velja $h'(z) \neq 0$.

Zgled 3.13. Naj bosta z in $\xi = \frac{1}{z}$ lokalni koordinati za $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{\infty\}$ in $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \{0\}$. Tedaj je $\xi' = -\frac{1}{z^2}$, zato velja

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{\xi} \cdot \xi'.$$

S predpisoma $\omega = \frac{1}{z}\,dz$ in $\omega = -\frac{1}{\xi}\,d\xi$ je tako podan meromorfen diferencial na $\widehat{\mathbb{C}}$. $\diamondsuit$

Trditev 3.14. *Naj bosta α in β meromorfna q-diferenciala. Tedaj je $\frac{\alpha}{\beta}$ meromorfna funkcija.*

Dokaz. Z zgornjimi oznakami velja

$$\frac{\alpha_U}{\beta_U} = \frac{\alpha_V \cdot \left((\psi \circ \varphi^{-1})'\right)^q}{\beta_V \cdot \left((\psi \circ \varphi^{-1})'\right)^q} = \frac{\alpha_V}{\beta_V}.$$

Kvocient $\frac{\alpha}{\beta}$ tako ni odvisen od lokalnih koordinat. $\square$

Očitno velja tudi obratno – če je α meromorfen q-diferencial in f meromorfna funkcija, je tudi $f\alpha$ meromorfen q-diferencial.

3.2 Riemann-Rochov izrek

Razdelek je povzet po [3, poglavje III.4].

Definicija 3.15. *Divizor* na Riemannovi ploskvi M je formalni simbol

$$\mathfrak{A} = \prod_{P \in M} P^{\alpha(P)},$$

kjer za vsak P velja $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$ in je $\alpha(P) \neq 0$ za kvečjemu končno mnogo točk $P \in M$. *Stopnja* divizorja $\mathfrak{A}$ je definirana kot

$$\deg \mathfrak{A} = \sum_{P \in M} \alpha(P).$$

Divizorji se pogosto označujejo tudi linearno, torej simbolno

$$\mathfrak{A} = \sum_{P \in M} \alpha(P) P.$$

Divizorji na M tvorijo grupo za naravno definirano množenje – to grupo označimo z $\mathrm{Div}(M)$. Tako je $\deg\colon \mathrm{Div}(M) \to \mathbb{Z}$ homomorfizem grup.

Za vsako nekonstantno meromorfno funkcijo $f \in \mathscr{K}(M)$ definiramo njen *glavni divizor* kot[8]

$$(f) = \prod_{P \in M} P^{\operatorname{ord}_P f}.$$

Definiramo lahko še *divizor polov*

$$f^{-1}(\infty) = \prod_{P \in M} P^{\max(-\operatorname{ord}_P f, 0)}$$

[8]Glavne divizorje na enak način definiramo še za meromorfne diferenciale.

in *divizor ničel*
$$f^{-1}(0) = \prod_{P\in M} P^{\max(\operatorname{ord}_P f,0)}.$$
Opazimo, da velja
$$(f) = \frac{f^{-1}(0)}{f^{-1}(\infty)}.$$
Na divizorjih uvedemo ekvivalenčno relacijo $\sim$ na naslednji način:
$$\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B} \iff \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} = (f).$$

Lema 3.16. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev. Za vsako nekonstantno funkcijo $f \in \mathscr{K}(M)$ velja* $\deg f^{-1}(0) = \deg f^{-1}(\infty)$. *Ekvivalentno je* $\deg(f) = 0$.

Dokaz. Stopnja divizorja polov funkcije f je natanko število njenih polov, štetih z večkratnostmi, stopnja divizorja ničel pa število njenih ničel. Ti števili sta enaki po trditvi 3.6. □

Posebej velja opomniti, da to pomeni, da imajo meromorfne funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah enako število ničel in polov (štetih z večkratnostmi).

Na divizorjih lahko uvedemo relacijo delne urejenosti kot
$$\prod_{P\in M} P^{\alpha(P)} \geq \prod_{P\in M} P^{\beta(P)} \iff \forall P \in M\colon \alpha(P) \geq \beta(P).$$
Pravimo, da je divizor $\mathfrak{A}$ *efektiven*, če velja $\mathfrak{A} \geq 1$. Ekvivalentno to pomeni, da je $\alpha(P) \geq 0$ za vsak $P \in M$. Ni težko videti, da je za vsak divizor $\mathfrak{A}$ na M množica
$$L(\mathfrak{A}) = \{f \in \mathscr{K}(M) \mid (f) \geq \mathfrak{A}\}$$
vektorski prostor nad $\mathbb{C}$ – njegovo dimenzijo označimo z $r(\mathfrak{A})$.

Zgled 3.17. Velja $r(1) = 1$. Pogoj $(f) \geq 1$ je namreč ekvivalenten temu, da je f holomorfna. Ker so vse holomorfne funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah konstantne, je zato $L(1) \cong \mathbb{C}$, kar je enodimenzionalen prostor. ♢

Zgled 3.18. Če je $\deg \mathfrak{A} > 0$, je $r(\mathfrak{A}) = 0$. Iz neenakosti $(f) \geq \mathfrak{A}$ za neničelno funkcijo f namreč sledi $0 = \deg(f) \geq \deg \mathfrak{A} > 0$, kar je protislovje. ♢

Trditev 3.19. *Naj bo P točka na kompaktni Riemannovi ploskvi M. Tedaj za vsako naravno število n velja*
$$r\left(P^{-n}\right) \leq r\left(P^{1-n}\right) + 1.$$

Dokaz. Naj bosta f in g meromorfni funkciji s polom stopnje natanko n v točki P. V neki lokalni karti lahko torej zapišemo
$$f(z) = \frac{a}{z^n} + f_1(z) \quad \text{in} \quad g(z) = \frac{b}{z^n} + g_1(z),$$
kjer velja $f_1, g_1 \in L\left(P^{1-n}\right)$. Sledi, da je
$$bf - ag \in L\left(P^{1-n}\right),$$
zato je $L\left(P^{1-n}\right) \cup \{f\}$ ogrodje za $L\left(P^{-n}\right)$. □

Podobno je tudi za meromorfne diferenciale

$$\Omega(\mathfrak{A}) = \{\omega \mid \omega \text{ je meromorfen diferencial} \wedge (\omega) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Označimo $i(\mathfrak{A}) = \dim \Omega(\mathfrak{A})$.

Trditev 3.20. *Naj bo $\mathfrak{A}$ poljuben divizor in ω meromorfen diferencial. Tedaj je*

$$i(\mathfrak{A}) = r\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right).$$

Dokaz. Naj bo $\varphi\colon \Omega(\mathfrak{A}) \to L\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right)$ preslikava s predpisom $\varphi\colon \zeta \mapsto \frac{\zeta}{\omega}$. Seveda je predpis dobro definiran, ni pa težko videti, da je to izomorfizem vektorskih prostorov. Sledi, da imata enako dimenzijo. □

Izrek 3.21 (Riemann-Roch)**.** *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g in $\mathfrak{A}$ divizor na M. Tedaj velja*

$$r\left(\mathfrak{A}^{-1}\right) - i(\mathfrak{A}) = \deg \mathfrak{A} - g + 1.$$

Dokaz izreka najdemo v [3, izrek III.4.11].

Zgled 3.22. Z uporabo zgornjega izreka lahko izračunamo $i(1)$. Velja namreč

$$i(1) = r(1) - \deg 1 + g - 1 = g. \qquad \diamondsuit$$

To pomeni, da je dimenzija vektorskega prostora holomorfnih diferencialov (torej meromorfnih diferencialov brez polov) enaka g.

Trditev 3.23. *Naj bo* $\deg \mathfrak{A} > 2g - 2$. *Tedaj je* $i(\mathfrak{A}) = 0$.

Dokaz. Naj bo $\omega \in i(1)$ neničeln holomorfen diferencial. Tedaj je

$$r\left((\omega)^{-1}\right) = \deg(\omega) - g + 1 + i\left((\omega)\right).$$

Po trditvi 3.20 je $r\left((\omega)^{-1}\right) = i(1) = g$ in $i\left((\omega)\right) = r(1) = 1$. Od tod sledi, da je $\deg(\omega) = 2g - 2$.

Sedaj dobimo

$$i(\mathfrak{A}) = r\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right) = 0,$$

saj je $\deg\left(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}\right) > 0$. □

To pomeni, da je stopnja glavnih divizorjev meromorfnih diferencialov navzgor omejena z $2g - 2$.

3.3 Weierstrassove točke

Razdelek je povzet po [3, poglavje III.5].

Podobno kot pri ravninskih območjih bo tudi pri Riemannovih ploskvah naš cilj vložiti grupo avtomorfizmov v neko končno simetrično grupo. Ker naše ploskve nimajo roba, bo to vložitev težje najti. Poiskali bomo točke, za katere obstajajo funkcije s poli majhnih stopenj v teh točkah, pri čemer si bomo pomagali z Riemann-Rochovim izrekom.

Izrek 3.24 (Weierstrass)**.** *Naj bo M ploskev roda $g > 0$ in $P \in M$. Tedaj obstaja natanko g števil*

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g,$$

za katera ne obstaja funkcija $f \in \mathscr{K}(M)$, ki je holomorfna na $M \setminus \{P\}$ in ima pol reda n_j v P. Tem številom pravimo vrzeli.

Dokaz. Najprej se prepričajmo, da res velja $n_1 = 1$. V nasprotnem primeru bi obstajala meromorfna funkcija $f\colon M \to \widehat{\mathbb{C}}$, ki ima natanko en pol prve stopnje. Po trditvi 3.6 sledi, da je f bijekcija, zato je M konformno ekvivalentna Riemannovi sferi. To seveda ni mogoče, saj smo privzeli, da za rod ploskve M velja $g > 0$.

Opazimo, da je število n vrzel natanko tedaj, ko je $r(P^{-n}) = r(P^{1-n})$. Ker je $r(P^{-n}) \leq r(P^{1-n}) + 1$, število n ni vrzel natanko tedaj, ko velja

$$r\left(P^{-n}\right) - r\left(P^{1-n}\right) = 1.$$

Po Riemann-Rochovem izreku velja

$$r\left(P^{-k}\right) = k - g + 1 + i\left(P^{k}\right),$$

zato sledi

$$\begin{aligned} r\left(P^{-n}\right) - r(1) &= \sum_{k=1}^{n} \left(r\left(P^{-k}\right) - r\left(P^{1-k}\right)\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(1 + i\left(P^{k}\right) - i\left(P^{k-1}\right)\right) \\ &= n + i\left(P^{n}\right) - i(1). \end{aligned}$$

Ker je $i(1) = g$ in za vse $n > 2g - 2$ velja $i(P^n) = 0$, sledi

$$r\left(P^{-n}\right) - 1 = n - g.$$

Opazimo, da leva stran prešteje ravno števila, ki so manjša od n in niso vrzeli. Sledi, da je vrzeli natanko g in so vse strogo manjše od $2g$ – enakost namreč nastopi že pri $n = 2g - 1$. $\square$

Definicija 3.25. Točka $P \in M$ je *Weierstrassova točka*, če na M obstaja neničelni holomorfen diferencial z ničlo reda vsaj g v P.

Trditev 3.26. *Točka P je Weierstrassova natanko tedaj, ko vsaj eno izmed števil $2, \ldots, g$ ni vrzel za P.*

Dokaz. Obstoj meromorfnega diferenciala z ničlo reda vsaj g v P je ekvivalenten pogoju $i(P^g) > 0$. Po Riemann-Rochovem izreku je ta neenakost ekvivalentna

$$r\left(P^{-g}\right) - 1 > 0,$$

oziroma $r\left(P^{-g}\right) \geq 2$. Ker je $r(1) = 1$, med $2, \ldots, g$ obstaja število, ki ni vrzel. $\square$

Weierstrassove točke nam bodo pomagale pri analizi grup avtomorfizmov Riemannovih ploskev:

Lema 3.27. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$, W pa naj označuje množico njenih Weierstrassovih točk. Tedaj za vsak avtomorfizem T ploskve M velja $T(W) = W$.*

Dokaz. Ker lahko meromorfno funkcijo s polom primerne stopnje komponiramo z avtomorfizmom, sledi, da ti ohranjajo vrzeli. □

Podobno kot pri ravninskih območjih smo dobili homomorfizem med grupo avtomorfizmov in neko simetrično grupo. V nadaljevanju bomo pokazali, da je Weierstrassovih točk končno mnogo.

Preostanek tega razdelka bo namenjen oceni števila Weierstrassovih točk.

Posebno pozornost najprej namenimo *nevrzelim* – komplementu tega zaporedja, torej številom

$$1 < \alpha_1 < \cdots < \alpha_g = 2g,$$

za katera obstaja funkcija s polom reda α_j v P. Če sta števili α_i in α_j nevrzel, je tako tudi število $\alpha_i + \alpha_j$, saj lahko vzamemo kar produkt pripadajočih funkcij. Posebej je vsak večkratnik nevrzeli spet nevrzel. Če je $\alpha_1 = 2$, so tako vsa soda števila nevrzeli in so vrzeli natanko liha števila, manjša od $2g$.

Lema 3.28. *Za vsako naravno število $j < g$ velja*

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} \geq 2g.$$

Dokaz. Denimo, da je $\alpha_j + \alpha_{g-j} < 2g$. Tedaj so vsa števila $\alpha_k + \alpha_{g-j}$ za $k \leq j$ nevrzeli, manjše od $2g$. Dobimo zaporedje

$$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_{g-j} < \alpha_1 + \alpha_{g-j} < \cdots < \alpha_j + \alpha_{g-j} < 2g.$$

Tako imamo skupaj vsaj $g - j + j + 1 = g + 1$ nevrzeli, manjših ali enakih $2g$. To je seveda protislovje. □

Lema 3.29. *Velja neenakost*

$$\sum_{j=1}^{g} \alpha_j \geq g \cdot (g+1)$$

z enakostjo natanko tedaj, ko je $\alpha_1 = 2$.

Dokaz. Za dokaz neenakosti je dovolj uporabiti prejšnjo lemo. Zgornja izraza sta enaka natanko tedaj, ko za vsak $j < g$ velja

$$\alpha_j + \alpha_{g-j} = 2g.$$

Če je število α nevrzel, je tako torej tudi $2g - \alpha$. Opazimo, da je za nevrzeli $\alpha_i < \alpha_j$ tudi $\alpha_i + (2g - \alpha_j)$ nevrzel, zato je tak tudi

$$2g - (\alpha_i + (2g - \alpha_j)) = \alpha_j - \alpha_i.$$

Sledi, da je tudi vsaka razlika nevrzel spet nevrzel. Sledi, da so vse nevrzel večkratnik najmanjše nevrzel (osnovni izrek o deljenju), kar pa takoj implicira $\alpha_1 = 2$. □

Število n je vrzel natanko tedaj, ko je $r\left(P^{-n}\right)=r\left(P^{1-n}\right)$. To je po Riemann-Rochovem izreku ekvivalentno $i\left(P^{n-1}\right)-i\left(P^{n}\right)=1$. Sledi, da imajo holomorfni diferenciali na M v točki P lahko red enak le enemu izmed števil

$$n_1-1, n_2-1, \ldots, n_g-1.$$

Posebej, obstaja baza $\{\omega_i \mid 1 \leq i \leq g\}$ holomorfnih diferencialov, pri čemer velja $\operatorname{ord}_P \omega_i = n_i - 1$.

Definicija 3.30. *Utež* točke $P \in M$ je vsota

$$\tau(P)=\sum_{j=1}^{g}(n_j-j),$$

kjer so n_j vrzeli za P.

Lema 3.31. *Naj bodo φ_1, φ_2, …, φ_n meromorfne funkcije s paroma različnim redom v točki $P \in X$. Tedaj za determinanto*

$$\Phi(z)=\det\begin{bmatrix}\varphi_1(z) & \varphi_2(z) & \ldots & \varphi_n(z)\\ \varphi_1'(z) & \varphi_2'(z) & \ldots & \varphi_n'(z)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varphi_1^{(n-1)}(z) & \varphi_2^{(n-1)} & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(z)\end{bmatrix}$$

velja

$$\operatorname{ord}_z \Phi=\sum_{i=1}^{n}\left(\operatorname{ord}_z \varphi_i - i + 1\right).$$

Dokaz. Za lažji zapis pišimo

$$\Phi(z)=\det\left[\varphi_1(z) \quad \ldots \quad \varphi_n(z)\right].$$

Trditev dokažemo z indukcijo – trditev očitno velja za $n=1$. Za indukcijski korak si bomo pomagali z dejstvom, da za vsako meromorfno funkcijo f velja

$$\Phi_f=\det\left[f\cdot\varphi_1(z) \quad \ldots \quad f\cdot\varphi_n(z)\right]=f^n\cdot\det\left[\varphi_1(z) \quad \ldots \quad \varphi_n(z)\right].$$

Razpišemo lahko namreč

$$\Phi_f=\det\begin{bmatrix} f\varphi_1 & \ldots & f\varphi_n\\ f\varphi_1'+f'\varphi_1 & \ldots & f\varphi_n'+f'\varphi_n\\ \vdots & & \vdots\\ f\varphi_1^{(n-1)}+\cdots+f^{(n-1)}\varphi_1 & \ldots & f\varphi_n^{(n-1)}+\cdots+f^{(n-1)}\varphi_n\end{bmatrix}.$$

S preprostimi linearnimi kombinacijami lahko sedaj dobimo

$$\Phi_f=\det\begin{bmatrix} f\varphi_1 & \ldots & f\varphi_n\\ f\varphi_1' & \ldots & f\varphi_n'\\ \vdots & & \vdots\\ f\varphi_1^{(n-1)} & \ldots & f\varphi_n^{(n-1)}\end{bmatrix}=f^n\Phi.$$

Tako dobimo

$$\det\left[\varphi_1 \quad \dots \varphi_n\right] = \varphi_1^n \cdot \det\left[1 \quad \tfrac{\varphi_2}{\varphi_1} \quad \dots \quad \tfrac{\varphi_n}{\varphi_1}\right] = \varphi_1^n \cdot \det\left[\left(\tfrac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)' \quad \dots \quad \left(\tfrac{\varphi_n}{\varphi_1}\right)'\right].$$

Ker za vsak i velja $\operatorname{ord}_z \varphi_1 \neq \operatorname{ord}_z \varphi_i$, sledi

$$\operatorname{ord}_z \left(\frac{\varphi_i}{\varphi_1}\right)' = \operatorname{ord}_z \varphi_i - \operatorname{ord}_z \varphi_1 - 1.$$

To so paroma različna števila, zato lahko uporabimo indukcijsko predpostavko. Dobimo

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}_z \Phi &= n \cdot \operatorname{ord}_z \varphi_1 + \sum_{i=2}^{n} (\operatorname{ord}_z \varphi_i - \operatorname{ord}_z \varphi_1 - 1 - (i-2)) \\ &= \operatorname{ord}_z \varphi_1 + \sum_{i=2}^{n} (\operatorname{ord}_z \varphi_i - i + 1) \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{ord}_z \varphi_i - i + 1). \end{aligned}$$ □

Naj v neki lokalni koordinati velja $\omega_i = f_{U_i}\, dz$. Če vzamemo $\varphi_i = f_{U_i}$, lahko zapišemo kar $\tau(P) = \operatorname{ord}_P \Phi$.

Trditev 3.32. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev z rodom $g \geq 2$. Tedaj je*

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g.$$

Dokaz. Pokažimo, da je zgoraj definirani Φ holomorfen m-diferencial za $m = \frac{g\cdot(g+1)}{2}$. Denimo, da lokalno velja $\omega_i = \varphi_i(z)\, dz = \psi_i(\tilde{z})\, d\tilde{z}$, in naj bo $f(\tilde{z}) = z$ prehodna preslikava. Tako velja

$$\psi_i(f(z)) \cdot f'(z) = \psi_i(\tilde{z}) \cdot f'(z) = \varphi_i(z),$$

dokazujemo pa

$$f'(z)^m \cdot \det\left[\psi_1 \quad \dots \quad \psi_g\right] = \det\left[\varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_g\right].$$

Velja pa

$$\begin{aligned} \det\left[\varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_g\right] &= \det\left[(\psi_1 \circ f)\cdot(f') \quad \dots \quad (\psi_g \circ f)\cdot(f')\right] \\ &= (f')^g \cdot \det\left[\psi_1 \circ f \quad \dots \quad \psi_g \circ f\right]. \end{aligned}$$

Po pravilu odvoda kompozituma lahko iz vrstice i izpostavimo še $(f')^{i-1}$. Tako dobimo

$$\det\left[\varphi_1 \quad \dots \quad \varphi_g\right] = (f')^m \cdot \left(\det\left[\psi_1 \quad \dots \quad \psi_g\right] \circ f\right).$$

Spomnimo se, da za holomorfen diferencial ω velja $\deg(\omega) = 2g - 2$. Ker je $\frac{\omega^m}{\Phi}$ meromorfna funkcija, sledi

$$\deg(\Phi) = m \cdot \deg(\omega) = m \cdot (2g-2).$$

Ker imajo meromorfni diferenciali diskretni množici ničel in polov, zgornja vsota vsebuje kvečjemu končno mnogo neničelnih členov. Tako dobimo

$$\sum_{P\in M} \tau(P) = \sum_{P \in M} \operatorname{ord}_P \Phi = (g-1)\cdot g \cdot (g+1).$$ □

Trditev 3.33. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$. Tedaj za število w Weierstrassovih točk veljata oceni*

$$2g + 2 \leq w \leq g^3 - g.$$

Dokaz. Ker je $\tau(P) \geq 1$ za vsako Weierstrassovo točko in velja

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g,$$

takoj sledi $w \leq g^3 - g$. Velja pa

$$\begin{aligned}
\tau(P) &= \sum_{j=1}^{g} (n_j - j) \\
&= \sum_{j=1}^{2g} j - \sum_{j=1}^{g} \alpha_j - \sum_{j=1}^{g} j \\
&= g(2g+1) - \frac{g(g+1)}{2} - \sum_{j=1}^{g} \alpha_j \\
&\leq g(2g+1) - \frac{g(g+1)}{2} - g(g+1) \\
&= \frac{g(g-1)}{2}.
\end{aligned}$$

Tako sledi

$$g^3 - g = \sum_{P \in M} \tau(P) \leq w \cdot \frac{g(g-1)}{2},$$

oziroma $w \geq 2g + 2$. □

3.4 Hipereliptične ploskve

Razdelek je povzet po [3, poglavje III.7].

V prejšnjem razdelku smo identificirali točke, ki jih avtomorfizmi permutirajo. Da bo število avtomorfizmov končno, mora obstajati končno mnogo avtomorfizmov, ki fiksirajo Weierstrassove točke. To bo seveda težje doseči, če bo teh točk malo. Oglejmo si torej lastnosti ploskev, ki imajo samo $2g + 2$ Weierstrassovih točk.

Definicija 3.34. Kompaktna Riemannova ploskev M je *hipereliptična*, če obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f : M \to \widehat{\mathbb{C}}$ z natanko dvema poloma.[9]

Ekvivalentno to pomeni, da obstaja tak efektiven divizor $D \in \operatorname{Div} M$, da je $\deg D = 2$ in $r(D^{-1}) \geq 2$. Najprej dokažimo, da je ta definicija res ekvivalentna temu, da ima ploskev natanko $2g + 2$ Weierstrassovih točk.

Trditev 3.35. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g z natanko $2g + 2$ Weierstrassovimi točkami. Tedaj je M hipereliptična.*

[9] Pri tem pole štejemo z večkratnostmi.

Dokaz. Če v neenakosti $w \geq 2g+2$ velja enakost, mora po lemi 3.29 za vsako Weierstrassovo točko veljati $\alpha_1 = 2$. To pomeni, da obstaja meromorfna funkcija, ki ima pol druge stopnje v neki Weierstrassovi točki, kar je ravno definicija hipereliptične ploskve. □

Trditev 3.36. *Funkcija $f\colon M \to \widehat{\mathbb{C}}$ z dvema poloma ima natanko $2g+2$ razvejišč.*

Dokaz. Po izreku 3.9 za funkcijo f velja

$$g = 2 \cdot (0-1) + 1 + \frac{B}{2}.$$ □

Trditev 3.37. *Razvejišča preslikave f so natanko Weierstrassove točke ploskve M.*

Dokaz. Naj bo $P \in M$ razvejišče. Če je P pol funkcije f, je njegova stopnja tako enaka 2, sicer pa ima funkcija

$$g \equiv \frac{1}{f - f(P)}$$

pol stopnje 2 v P. V obeh primerih sledi, da 2 ni vrzel za točko P, zato je ta Weierstrassova.

Vsako razvejišče ima tako utež

$$\sum_{k=1}^{g} (2k-1) - \sum_{k=1}^{g} k = \frac{1}{2} g(g-1),$$

saj velja $\alpha_1 = 2$. Njihova skupna utež je tako $g^3 - g$. Sledi, da so to vse Weierstrassove točke. □

Sedaj bomo analizirali še fiksne točke avtomorfizmov hipereliptičnih ploskev.

Trditev 3.38. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g. Tedaj je M hipereliptična natanko tedaj, ko obstaja involucija $J \in \operatorname{Aut}(M)$ z natanko $2g+2$ fiksnimi točkami.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je M hipereliptična. Naj bo $f\colon M \to \widehat{\mathbb{C}}$ meromorfna funkcija stopnje 2. Za vsak $P \in M$ tako obstaja še natanko ena točka $Q \in M$, za katero je $f(P) = f(Q)$ (če je $\operatorname{ord}_P f = 2$, vzamemo $Q = P$). Tako lahko enostavno definiramo $J(P) = Q$. Ni težko videti, da je J res involucija z $2g+2$ fiksnimi točkami.

Preverimo še holomorfnost preslikave J. Če je $Q = J(P) \neq P$, lahko za neki okolici U_P in U_Q točk P in Q za vse $X \in U_P$ zapišemo

$$J(X) = \left(f|_{U_Q} \right)^{-1} (f(X)),$$

zato je J holomorfna na $M \setminus W$, kjer W označuje množico Weierstrassovih točk. Če pa je $J(P) = P$, pa lahko lokalno zapišemo $f(z) = f(P) + h(z)^2$. Tako definiran h je lokalna koordinata za točko P, v kateri velja $f(h) = f(P) + h^2$. Tako sledi

$$f(h) = h^2 + f(P) = (-h)^2 + f(P) = f(-h),$$

zato je $J(h) = -h$. Tako je J holomorfna na M.

Predpostavimo sedaj, da obstaja involucija $J \in \mathrm{Aut}(M)$ z $2g+2$ fiksnimi točkami. Ker se projekcija $f\colon M \to M/\langle J\rangle$ razveja v natanko $2g+2$ točkah, po izreku 3.9 sledi, da je rod ploskve $M/\langle J\rangle$ enak 0. Sledi, da je $M/\langle J\rangle \cong \widehat{\mathbb{C}}$, zato je f meromorfna funkcija z dvema poloma. □

Zgornji involuciji J pravimo *hipereliptična involucija*.

Opazimo, da so fiksne točke hipereliptične involucije natanko Weierstrassove točke. Cilj preostanka razdelka je, da dokažemo, da imajo preostali avtomorfizmi bistveno manj fiksnih točk. Pri tem si bomo pomagali z netrivialnimi Möbiusovimi transformacijami, ki imajo kvečjemu po 2 fiksni točki.

Lema 3.39. *Naj bo P Weierstrassova točka hipereliptične ploskve M in $f \in \mathscr{K}(M)$ funkcija stopnje 2. Tedaj za divizor polov velja $f^{-1}(\infty) \sim P^2$.*

Dokaz. Točka P je razvejišče funkcije f. Če je P pol te funkcije, je zato reda 2 in je $f^{-1}(\infty) = P^2$. V nasprotnem primeru definiramo funkcijo

$$g = \frac{1}{f - f(P)}.$$

Ni težko videti, da je $(g) = f^{-1}(\infty)P^{-2}$. □

Trditev 3.40. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 1$ in naj bosta f_1 in f_2 dve funkciji $f_i\colon M \to \widehat{\mathbb{C}}$ stopnje 2. Tedaj obstaja Möbiusova transformacija A, za katero je*

$$f_2 = A \circ f_1.$$

Dokaz. Naj bo $f_i^{-1}(\infty) = P_iQ_i$ za $i \in \{1,2\}$. Ker na M ne obstajajo meromorfne funkcije stopnje 1, sledi $r(P_1^{-1}Q_1^{-1}) = r(P_2^{-1}Q_2^{-1}) = 2$. Prostora $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$ in $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$ imata tako zaporedoma bazi $\{1, f_1\}$ in $\{1, f_2\}$. Ker za Weierstrassovo točko P velja $P_1Q_1 \sim P^2 \sim P_2Q_2$, sledi, da obstaja meromorfna preslikava h, za katero je $(h) = P_1Q_1P_2^{-1}Q_2^{-1}$. Ker je s predpisom $\varphi \mapsto h\cdot\varphi$ očitno podan izomorfizem prostorov $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$ in $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$, obstajajo konstante α, β, γ in δ, za katere je

$$1 = \alpha h + \beta h f_1 \quad \text{in} \quad f_2 = \gamma h + \delta h f_1.$$

Tako lahko izrazimo

$$f_2 = \frac{\gamma + \delta f_1}{\alpha + \beta f_1}.$$ □

Trditev 3.41. *Naj bo M hipereliptična Riemannova ploskev roda $g \geq 2$ in T avtomorfizem ploskve M. Če je $T \notin \langle J\rangle$, ima T kvečjemu 4 fiksne točke.*

Dokaz. Naj bo $f\colon M \to \widehat{\mathbb{C}}$ funkcija z natanko dvema poloma. Tedaj je taka tudi $f \circ T$, zato obstaja Möbiusova transformacija A, za katero je

$$f \circ T = A \circ f.$$

Naj bo P fiksna točka avtomorfizma T. Sledi, da je

$$A(f(P)) = f(T(P)) = f(P),$$

zato je $f(P)$ fiksna točka preslikave A. Opazimo, da je $A \neq \mathrm{id}$, saj bi v nasprotnem primeru veljalo $f \circ T = f$, kar implicira $T \in \langle J\rangle$. Tako ima A kvečjemu 2 fiksni točki, zato jih ima T največ 4. □

4 Avtomorfizmi Riemannovih ploskev

4.1 Sfere in torusi

Razdelek je prirejen po [2].

Za določanje grupe avtomorfizmov Riemannovih ploskev so pomembne njihove topološke lastnosti – vsak avtomorfizem je namreč tudi homeomorfizem. Iz geometrijske topologije vemo, da je vsaka orientabilna kompaktna ploskev homeomorfna vsoti g torusov. Številu g pravimo rod ploskve.

Najprej si oglejmo ploskve z ničelnim rodom – topološko so to kar sfere. V prejšnjih razdelkih smo ugotovili, da je grupa avtomorfizmov Riemannove sfere enaka

$$\mathrm{Aut}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; ad-bc=1 \right\}.$$

Vemo pa, da je grupa avtomorfizmov odvisna ne samo od topoloških lastnosti objekta, ampak tudi od njegove kompleksne strukture. Izkaže se, da imamo na ploskvah roda $g=0$ do konformne ekvivalence le eno kompleksno strukturo:

Lema 4.1. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g=0$. Tedaj je M konformno ekvivalentna Riemannovi sferi.*

Dokaz. Naj bo $P \in M$ poljubna točka. Po Riemann-Rochovem izreku velja

$$r\left(P^{-1}\right) = 1 - 0 + 1 + i(P) \geq 2,$$

zato obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f \in L\left(P^{-1}\right)$. Ker ima ta pol, je ta v točki P in je enostaven. Sledi, da je stopnja preslikave f enaka 1, zato je f bijektivna. $\square$

Posledica zgornje leme je, da imajo vse Riemannove ploskve roda $g=0$ izomorfne grupe avtomorfizmov. Lema je pravzaprav poseben primer Koebejevega izreka o uniformizaciji, ki pravi, da je vsaka enostavno povezana Riemannova ploskev konformno ekvivalentna Riemannovi sferi, kompleksni ravnini ali enotskemu disku.

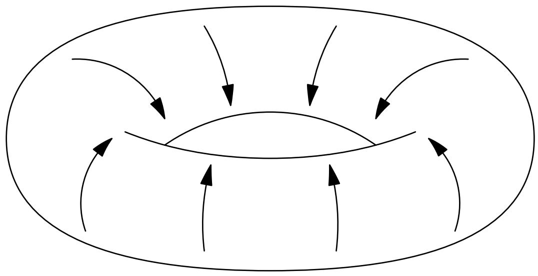
Naslednji izziv so ploskve z rodom $g=1$ – torusi. Za toruse izrek o uniformizaciji seveda ne velja, zato bomo dobili drugačne (in tudi med seboj različne) grupe avtomorfizmov.

Topološko je torus kvocient $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$, pri čemer $\mathbb{Z}^2$ deluje na $\mathbb{R}^2$ s predpisom $(m,n)\cdot(x,y) = (x+m, y+n)$. Množico $\mathbb{R}^2$, ki ji pravimo tudi *krovni prostor*, lahko seveda enačimo s $\mathbb{C}$. Kvocient $\mathbb{C}/\mathbb{Z}^2$ je spet Riemannova ploskev s podedovano kompleksno strukturo [5, razdelek 1.8.2].

Seveda pa lahko za delovanje grupe $\mathbb{Z}^2$ vzamemo tudi kak drug predpis, na primer $(m,n)\cdot z = z + m\lambda + n\mu$ za $\mathbb{R}$-linearno neodvisna $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Topološko spet dobimo enak prostor ne glede na izbiro $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, izkaže pa se, da tako dobimo bistveno različne kompleksne strukture. To lahko dokažemo tako, da poiščemo grupe avtomorfizmov.

Naj bo $\Lambda = \{m\lambda + n\mu \mid m,n \in \mathbb{Z}\}$, torej neka mreža v ravnini. Kompleksen torus, generiran s to mrežo, označimo s $\mathbb{C}/\Lambda$.

Najprej si oglejmo primere preprostih avtomorfizmov, ki jih najdemo na vsakem torusu. Najpreprostejša geometrijska transformacija torusa je kar rotacija – v krovnem prostoru to ustreza preslikavi $z \mapsto z + r \cdot \lambda$ za realno število r. Obstaja pa še ena vrsta rotacije, pri kateri se torus rotira »sam vase«. To so še preslikave $z \mapsto z + r \cdot \mu$. Skupaj tako dobimo množico preslikav $z \mapsto z + \alpha$ za poljuben $\alpha \in \mathbb{C}$.



Slika 6: Rotacija torusa

Preslikave oblike

$$f(z + \Lambda) = z + \alpha + \Lambda$$

so res avtomorfizmi torusa, saj so očitno dobro definirane in imajo inverz

$$f^{-1}(z + \Lambda) = z - \alpha + \Lambda.$$

Oba sta seveda holomorfna, saj je kompleksna struktura na torusu podedovana iz kompleksne ravnine. Opazimo še, da je tudi $f(z+\Lambda) = -z+\Lambda$ avtomorfizem torusa. To nas privede do naslednje trditve:

Trditev 4.2. *Naj bo $T \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C}/\Lambda)$ poljuben avtomorfizem in $\pi\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ krovna projekcija. Tedaj obstaja taka afina funkcija $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, da velja*

$$T \circ \pi = \pi \circ F.$$

Dokaz. Najprej opazimo, da lahko T razširimo do preslikave $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}/\Lambda$ s predpisom $f = T \circ \pi$, kjer je π (krovna) projekcija. Mnogoterost $\mathbb{C}$ je enostavno povezana, zato po izreku o dvigu preslikave v krov (glej [5, izrek 1.106]) obstaja taka holomorfna funkcija $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, da velja

$$T \circ \pi = \pi \circ F.$$

Naj bo sedaj $\alpha \in \Lambda$ poljubna točka mreže in

$$\Phi(z) = F(z + \alpha) - F(z).$$

Tedaj velja

$$\pi(\Phi(z)) = \pi(F(z + \alpha)) - \pi(F(z)) = T(\pi(z)) - T(\pi(z + \alpha)) = 0.$$

Pri tem odštevanje na torusu interpretiramo kot odštevanje v kvocientni grupi. Sledi, da je $\Phi(\mathbb{C}) \subseteq \Lambda$, ker pa je to diskretna množica in Φ zvezna funkcija, sledi, da je Φ konstantna. Tako dobimo $F(z + \alpha) = F(z) + c$ za vsak $\alpha \in \Lambda$, oziroma $F'(z+\alpha) = F'(z)$. To že pomeni, da je F' omejena, zato je po Liouvilleovem izreku konstantna, kar pomeni, da je

$$F(z) = az + b,$$

pri čemer je $a \neq 0$. $\square$

Sedaj si oglejmo, kakšne avtomorfizme take preslikave F dopuščajo. Velja

$$T(z + \Lambda) = T(\pi(z)) = \pi(F(z)) = az + b + \Lambda.$$

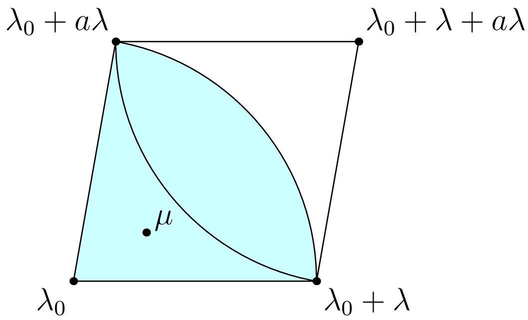
Ker že vemo, da so translacije avtomorfizmi, je dovolj preveriti, katere izmed preslikav $T(z + \Lambda) = az + \Lambda$ so avtomorfizmi torusa.

Naj bo $\lambda \in \Lambda$ poljuben element mreže. Tedaj je

$$\Lambda = T(\Lambda) = T(\lambda + \Lambda) = a\lambda + \Lambda,$$

enako pa velja za inverz $T^{-1}(z + \Lambda) = \frac{z}{a} + \Lambda$. Tako sledi, da je $\lambda \in \Lambda$ natanko tedaj, ko je $a\lambda \in \Lambda$. Oglejmo si $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ z najmanjšo dolžino. Brez škode za splošnost lahko vzamemo $F(0) = 0$, kar pomeni, da je $a\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$, od koder sledi $|a| \geq 1$. Z enakim premislekom za T^{-1} dobimo še $|a| \leq 1$, torej $|a| = 1$.

Če je $a = \pm 1$, dobimo avtomorfizme, ki smo jih našteli zgoraj. Sicer sta λ in $a\lambda$ $\mathbb{R}$-linearno neodvisna. Denimo, da mreža Λ ni generirana z λ in $a\lambda$. To pomeni, da obstaja element mreže $\mu \in \Lambda$, ki ga ne moremo izraziti z λ in $a\lambda$. To med drugim pomeni, da μ leži v notranjosti (ali na stranici) nekega romba z oglišči λ_0, $\lambda_0 + \lambda$, $\lambda_0 + \lambda + a\lambda$ in $\lambda_0 + a\lambda$.



Slika 7: Element mreže ne more ležati v notranjosti romba

Sedaj ni težko videti, da velja $|\lambda_0 - \mu| < |\lambda|$ ali $|\lambda_0 + \lambda + a\lambda - \mu| < |\lambda|$, saj leži v notranjosti enega izmed krožnih izsekov s središčem v λ_0 ali $\lambda_0 + \lambda + a\lambda$ in polmerom $|\lambda|$, označenih na sliki 7. To ni mogoče, saj sta tako $\lambda_0 - \mu$ kot $\lambda_0 + \lambda + a\lambda - \mu$ elementa mreže, λ pa je po dolžini najmanjši.

Ker je $a\lambda \in \Lambda$, velja tudi $a^2\lambda \in \Lambda$. Tako lahko izrazimo

$$a^2\lambda = ma\lambda + n\lambda,$$

oziroma

$$a^2 = ma + n.$$

To je kvadratna enačba z realnimi koeficienti, zato sta njeni rešitvi a in $\overline{a}$. Po Vietovih formulah tako dobimo $n = -1$ in $|m| \leq 2$. Z obravnavo primerov dobimo

$$a \in \left\{ \pm 1, \pm i, e^{\pm \frac{i\pi}{3}}, e^{\pm \frac{2i\pi}{3}} \right\}.$$

4.2 Ploskve višjih rodov

Razdelek je povzet po [3, poglavje V.1].

Trditev 4.3. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$ in $T \in \operatorname{Aut}(M)$ netrivialen avtomorfizem. Tedaj ima T največ $2g+2$ fiksnih točk.*

Dokaz. Naj bo $P \in M$ točka, za katero je $T(P) \neq P$. Tedaj obstaja meromorfna funkcija $f \in \mathscr{K}(M)$ z divizorjem polov P^r za nek $1 \leq r \leq g+1$. Oglejmo si funkcijo $h = f - f \circ T$. Njen divizor polov je očitno $P^r(T^{-1}(P))^r$. Velja torej

$$\deg h^{-1}(0) = \deg h^{-1}(\infty) = 2r \leq 2g+2,$$

zato ima h kvečjemu $2g+2$ ničel. Ni težko videti, da so fiksne točke avtomorfizma T ničle funkcije h, zato je tudi teh kvečjemu $2g+2$. □

Izrek 4.4 (Schwarz)**.** *Grupe avtomorfizmov kompaktnih ploskev roda $g \geq 2$ so končne.*

Dokaz. Po lemi 3.27 sledi, da obstaja homomorfizem $\lambda\colon \operatorname{Aut}(M) \to S_W$, kjer je S_W simetrična grupa. Dovolj je pokazati, da ima λ končno jedro. Ločimo dva primera.

a) Če M ni hipereliptična, ima več kot $2g+2$ Weierstrassovih točk. Vsak avtomorfizem, ki fiksira Weierstrassove točke, je zato po trditvi 4.3 kar identiteta, zato je $\ker \lambda$ trivialno.

b) Če je M hipereliptična, velja kar $\ker \lambda = \langle J \rangle$, kjer je J hipereliptična involucija. Ostali avtomorfizmi imajo namreč kvečjemu 4 fiskne točke. Ker velja $|\langle J \rangle| = 2$, je grupa $\operatorname{Aut}(M)$ res končna. □

Izrek 4.5 (Hurwitz)**.** *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$. Tedaj je*

$$|\operatorname{Aut}(M)| \leq 84(g-1).$$

Dokaz. Ker je $G = \operatorname{Aut}(M)$ končna grupa, lahko tvorimo kvocient $N = {}^{M}\!/_{G}$. Naj bo $\pi\colon M \to N$ kvocientna projekcija. Ni težko videti, da je $\deg \pi = |G|$, saj ima vsaka točka P, ki ni fiksna točka nobenega netrivialnega avtomorfizma, orbito velikosti $|G|$. Za preslikavo π so razvejiščna števila točk enaka $b(P) = |G_P| - 1$, pri čemer označimo $G_P = \{g \in G \mid g(P) = P\}$. Vzemimo po številu točk maksimalno množico $\{P_j \mid 1 \leq j \leq r\}$, ki so fiksne točke nekega netrivialnega avtomorfizma in imajo disjunktne orbite, in označimo $v_j = \left|G_{P_j}\right|$. Jasno je, da je velikost orbite točke P_j enaka $\frac{|G|}{v_j}$, zato za razvejiščno število preslikave velja

$$B = \sum_{j=1}^{r} \frac{|G|}{v_j} \cdot (v_j - 1)\,,$$

zato po izreku 3.9 sledi

$$2g - 2 = |G| \cdot (2\gamma - 2) + |G| \cdot \sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_j}\right),$$

kjer je γ rod ploskve N. Preostanek dokaza ločimo na tri primere:

i) Velja $\gamma \geq 2$. V tem primeru mora veljati

$$2g - 2 \geq |G| \cdot 2,$$

od koder dobimo oceno $|G| \leq g - 1$.

ii) Velja $\gamma = 1$. Če je $r = 0$, dobimo $g = 1$, v nasprotnem primeru pa velja

$$\sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{1}{2},$$

od koder sledi $|G| \leq 4(g - 1)$.

iii) Velja $\gamma = 0$. Od tod lahko enačbo prepišemo v

$$2g - 2 = |G| \cdot \left(\sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) - 2\right). \tag{4.1}$$

Veljati mora $r \geq 3$, saj je v nasprotnem primeru desna stran enačbe negativna. Če je $r \geq 5$, sledi

$$\sum_{j=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{5}{2},$$

zato je $|G| \leq 4(g - 1)$. Enostavno se lahko znebimo tudi primera $r = 4$. V tem primeru namreč ne morejo vsi v_j biti enaki 2, saj bi tedaj desna stran enačbe (4.1) bila negativna. Tako lahko ocenimo

$$\sum_{j=1}^{4} \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq 3 \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{13}{6},$$

zato velja ocena $|G| \leq 12(g - 1)$.

Preostane še primer $r = 3$. Naj bo $2 \leq v_1 \leq v_2 \leq v_3$. Najprej opazimo, da je $v_2 \geq 3$, saj bi v nasprotnem primeru desna stran enačbe (4.1) bila negativna. Iz enakega razloga dobimo tudi $v_3 > 3$. Če je $v_3 \geq 7$, tako dobimo

$$\sum_{j=1}^{3} \left(1 - \frac{1}{v_j}\right) \geq \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{6}{7} = \frac{85}{42},$$

od koder dobimo oceno iz trditve izreka, to je $|G| \leq 84(g - 1)$.

Preostane nam še možnost $v_3 \leq 6$. Pri vsakem izmed teh končno mnogo primerov dobimo, da je desna stran enačbe (4.1) negativna ali pa sledi ocena $|G| \leq 40(g - 1)$. □

Za konec omenimo še, da je enakost $|G| = 84(g - 1)$ dejansko dosežena za nekatere vrednosti g, na primer $g = 3$ in $g = 7$. Za preostale $g \leq 10$ zgornja meja ni dosežena.

Slovar strokovnih izrazov

branching number razvejiščno število
divisor divizor
domain območje
gap vrzel
genus rod
holomorphic automorphism holomorfen avtomorfizem
manifold mnogoterost
Riemann surface Riemannova ploskev

Literatura

[1] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991.

[2] M. Černe, *Avtomorfizmi riemannovih ploskev*, 2019, FMF seminar za učitelje matematike.

[3] H. M. Farkas in I. Kra, *Riemann surfaces*, **71**, Springer, 1980, bibliografija: str. 330-332.

[4] F. Forstnerič, *Riemannove ploskve in analitična geometrija*, 2018, [ogled 24. 7. 2023], dostopno na `https://users.fmf.uni-lj.si/forstneric/datoteke/Riemannove-ploskve.pdf`, bibliografija: str. 153-154.

[5] F. Forstnerič, *Analiza na mnogoterostih*, 2023, [ogled 16. 5. 2023], dostopno na `https://users.fmf.uni-lj.si/forstneric/papers/AMbook.pdf`, bibliografija: str. 237-239.

[6] Z.-X. He in O. Schramm, *Fixed points, koebe uniformization and circle packings*, Annals of Mathematics **137**(2) (1993) 369–406, [ogled 12. 8. 2023], dostopno na `http://www.jstor.org/stable/2946541`.

[7] S. G. Krantz, *Geometric Function Theory*, Birkhäuser Boston, MA, 1 izd., 2006, doi: https://doi.org/10.1007/0-8176-4440-7, [ogled 7. 5. 2023], dostopno na `https://link.springer.com/book/10.1007/0-8176-4440-7`, bibliografija: str. 303-306.