

UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Luka Horjak

HOLOMORFNI AVTOMORFIZMI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Miran Černe

Ljubljana, 2023

Kazalo

1	Holomorfni avtomorfizmi v kompleksni ravnini	4
1.1	Enostavno povezana območja	4
1.2	Punktirani diski in kolobarji	5
1.3	Avtomorfizmi p -povezanih območij	6
2	Riemannove ploskve	6
2.1	Gladke in kompleksne mnogoterosti	6
2.2	Riemann-Rochov izrek	8
2.3	Weierstrassove točke	10
2.4	Hipereliptične ploskve	12
3	Avtomorfizmi Riemannovih poloskev	14
3.1	Sfere in torusi	14
3.2	Ploskve večjih rodov	14
	Literatura	16

Holomorfni avtomorfizmi

POVZETEK

...

Holomorphic automorphisms

ABSTRACT

...

Math. Subj. Class. (2020): 30F10, 30C20

Ključne besede: ..., ...

Keywords: ..., ...

1 Holomorfní avtomorfizmi v kompleksni ravnini

1.1 Enostavno povezana območja

Definicija 1.1. *Območje* v kompleksni ravnini \mathbb{C} je vsaka odprta povezana množica.

Definicija 1.2. *Holomorfen avtomorfizem* območja Ω je bijektivna holomorfná preslikava $f: \Omega \rightarrow \Omega$ s holomorfnim inverzom.

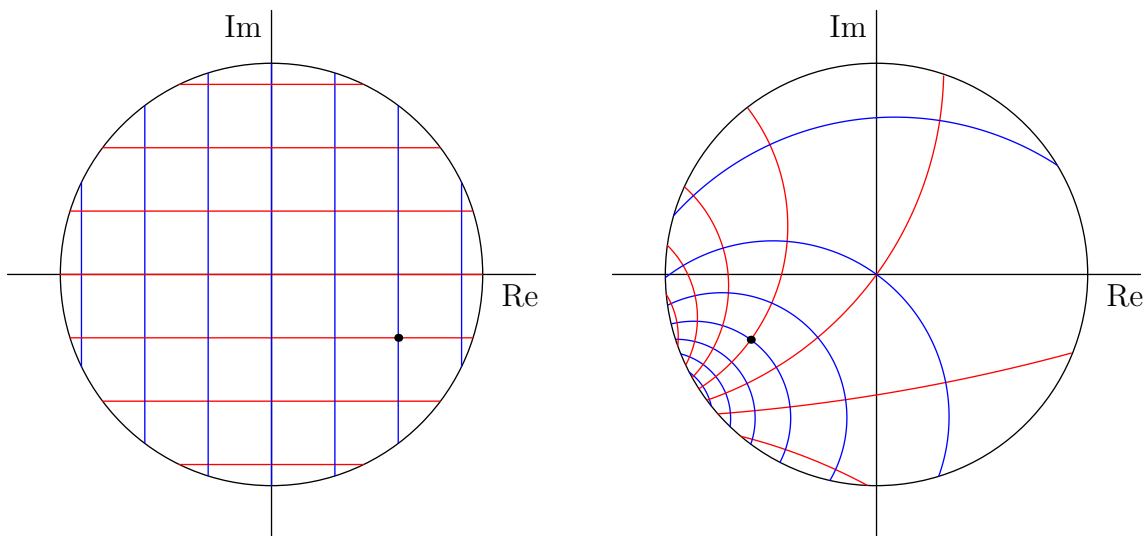
Opazimo, da je zadosten pogoj že to, da je f bijektivna z neničelnim odvodom. Opazimo še, da množica avtomorfizmov nekega območja tvori grupo z operacijo kompozitum. To grupo označimo z $\text{Aut}(\Omega)$.

Primer 1.3. Kompleksna ravnina je območje v \mathbb{C} . Njena grupa avtomorfizmov je enaka

$$\text{Aut}(\mathbb{C}) = \{z \mapsto az + b \mid a \neq 0\}. \quad \diamond$$

Primer 1.4. Naj bo \mathbb{D} odprt enotski disk v \mathbb{C} . Tedaj je

$$\text{Aut}(\mathbb{D}) = \left\{ z \mapsto e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \mid a \in \mathbb{D} \wedge \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \diamond$$



Slika 1: Primer avtomorfizma diska. Označeni sta točki $f^{-1}(0)$ in $f(0)$.

Izkaže se, da smo s tem do izomorfizma natančno opisali grupe avtomorfizmov vseh povezanih in enostavno povezanih množic v \mathbb{C} . Velja namreč naslednja lema:

Lema 1.5. *Naj bosta Ω_1 in Ω_2 biholomorfno ekvivalentni območji v \mathbb{C} . Tedaj je $\text{Aut}(\Omega_1) \cong \text{Aut}(\Omega_2)$.*

Dokaz. Naj bo $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ biholomorfna preslikava. Sedaj definiramo preslikavo $\Phi: \text{Aut}(\Omega_1) \rightarrow \text{Aut}(\Omega_2)$ s predpisom

$$\Phi(\phi) = f^{-1} \circ \phi \circ f.$$

Ker je s predpisom

$$\Phi^{-1}(\psi) = f \circ \psi \circ f^{-1}$$

očitno podan predpis inverza preslikave Φ , je ta bijektivna. Velja pa

$$\Phi(\phi \circ \psi) = f^{-1} \circ \phi \circ \psi \circ f = (f^{-1} \circ \phi \circ f) \circ (f^{-1} \circ \psi \circ f) = \Phi(\phi) \circ \Phi(\psi),$$

zato je Φ homomorfizem. □

Spomnimo se na Riemannov upodobitveni izrek, ki pravi, da je vsako povezano in enostavno povezano območje v kompleksni ravnini ali biholomorfno ekvivalentno Δ ali pa kar enako \mathbb{C} . Grupe avtomorfizmov povezanih in enostavno povezanih območij so do izomorfizma natančno tako le $\text{Aut}(\Delta)$ in $\text{Aut}(\mathbb{C})$.

Omenimo še, da lahko kompleksno ravnino dopolnimo do Riemannove sfere $\hat{\mathbb{C}}$. Njeni avtomorfizmi so Möbiusove transformacije, torej

$$\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

1.2 Punktirani diski in kolobarji

Po obravnavi enostavno povezanih območij so naslednji korak območja z »luknjami«. Eden izmed osnovnejših primerov takih območij je punktiran disk $\Delta_\alpha = \Delta \setminus \{\alpha\}$.

Disk $\Delta^* = \Delta \setminus \{0\}$ je biholomorfno ekvivalenten vsakemu punktiranemu disku, saj je preslikava $f: \Delta_\alpha \rightarrow \Delta^*$ s predpisom

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

biholomorfna. Sledi, da je $\text{Aut}(\Delta_\alpha) \cong \text{Aut}(\Delta^*)$.

Trditev 1.6. *Za punktiran disk velja*

$$\text{Aut}(\Delta^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}.$$

Dokaz. Naj bo $f: \Delta^* \rightarrow \Delta^*$ poljuben avtomorfizem. Tedaj je točka 0 izolirana singularnost funkcije f . Ker je f omejena, je to odpravljiva singularnost.

Naj bo $\tilde{f}: \Delta \rightarrow \mathbb{C}$ funkcija, ki jo dobimo tako, da f razširimo na celoten disk. Predpostavimo, da velja $\tilde{f}(0) \neq 0$. Ker je \tilde{f} holomorfna, je odprta, zato sledi $|\tilde{f}(0)| < 1$. Oglejmo si točko $\alpha \neq 0$, za katero je $f(\alpha) = \tilde{f}(0)$. Izberemo si lahko disjunktni okolici U in V točk 0 in α . Ker je \tilde{f} odprta, je odprta tudi množica $W = \tilde{f}(U) \cap \tilde{f}(V)$. Hitro opazimo, da velja $\tilde{f}(0) \in W$, zato je ta množica neprazna. Sledi, da je W neskončna, kar je protislovje, saj velja $f(U \setminus \{0\}) \cap f(V) = \emptyset$.

Sledi, da je $\tilde{f}(0) = 0$, zato je f avtomorfizem diska. Sledi, da je

$$\text{Aut}(\Delta^*) \subseteq \{f \in \text{Aut}(\Delta) \mid f(0) = 0\}.$$

Ni težko preveriti, da velja tudi obratna inkluzija. Tako dobimo

$$\text{Aut}(\Delta^*) = \left\{ z \mapsto e^{i\pi\theta} z \mid \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \quad \square$$

Kaj pa se zgodi, če število lukenj povečamo? Naj bo $\Delta_2 = \Delta \setminus \{0, \alpha\}$.¹ Po enakem razmisleku kot prej ugotovimo, da za vsak avtomorfizem $f \in \text{Aut}(\Delta_2)$ velja $f(0) \in \Delta$ in hkrati $f(0) \notin \Delta_2$. Enako velja za točko α . Sedaj ni težko videti, da velja

$$\text{Aut}(\Delta_2) = \left\langle z \mapsto \frac{\alpha - z}{1 - \bar{\alpha}z} \right\rangle \cong \mathbb{Z}_2,$$

saj je avtomorfizem diska natančno določen z dvema točkama.

1.3 Avtomorfizmi p -povezanih območij

Oglejmo si avtomorfizme območja $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x_i \mid 1 \leq i \leq p\}$. Za $p = 1$ dobimo kompleksno ravnino. Pri $p = 2$ lahko brez škode za splošnost vzamemo $x_1 = 0$ in $x_2 = \infty$. Ni težko videti, da so vsi avtomorfizmi oblike $z \mapsto e^{i\theta} \cdot z^{\pm 1}$.

Sedaj si oglejmo še primer $p > 2$. Preverimo lahko, da se vsak avtomorfizem Ω razširi do avtomorfizma Riemannove ploskve, ki permutira točke x_i . Ker je vsaka Möbiusova transformacija enolično določena s tremi točkami, je moč grupe $\text{Aut}(\Omega)$ tako omejena s $p(p-1)(p-2)$.

Izkaže se, da lahko to mejo še bistveno izboljšamo. Znano je namreč, da je vsaka končna podgrupa $\text{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ konjugirana podgrupi grupe rotacij SO_3 [4]. Vse končne podgrupe SO_3 so natanko rotacijske, diedrske, tetraedrska, oktaedrska in ikozaedrska [1]. Preverimo lahko, da je za $p = 4$ največja možna moč grupe avtomorfizmov enaka 12, za $p = 6$ in $p = 8$ dobimo 24, za $p = 12$ in $p = 20$ pa 60. Za vse ostale p je največja grupa simetrij kar dierska, zato je $|\text{Aut}(\Omega)| \leq 2p$.

2 Riemannove ploskve

2.1 Gladke in kompleksne mnogoterosti

Definicija 2.1. *Meromorfen diferencial* Riemannove ploskve je dodelitev meromorfne funkcije f vsaki lokalni koordinati, pri čemer je $f(z) dz$ neodvisna od lokalne koordinate.

Naj bosta (U, φ) in (V, ψ) lokalni karti, za kateri velja $U \cap V \neq \emptyset$. Če jima meromorfen diferencial ω priredi funkciji ω_U in ω_V , mora tako veljati $\omega_U = \omega_V \cdot (\psi \circ \varphi^{-1})'$.

Trditev 2.2. *Naj bosta α in β meromorfna diferenciala. Tedaj je $\frac{\alpha}{\beta}$ meromorfna funkcija.*

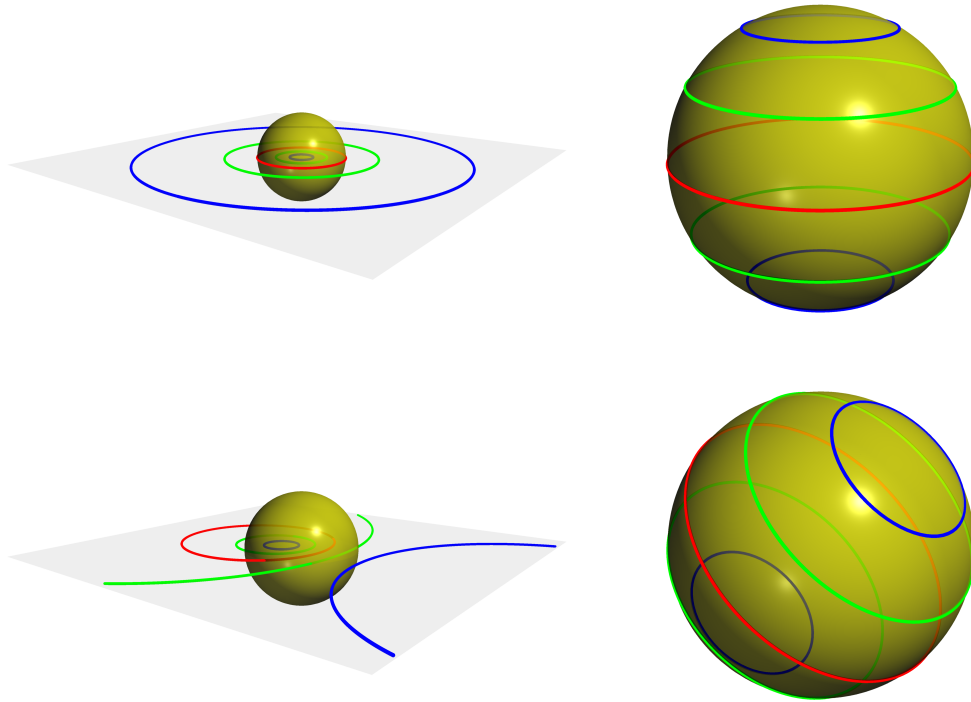
Dokaz. Z zgornjimi oznakami velja

$$\frac{\alpha_U}{\beta_U} = \frac{\alpha_V \cdot (\psi \circ \varphi^{-1})'}{\beta_V \cdot (\psi \circ \varphi^{-1})'} = \frac{\alpha_V}{\beta_V}.$$

Kvocien $\frac{\alpha}{\beta}$ tako ni odvisen od lokalnih koordinat. □

Očitno velja tudi obratno – če je α meromorfen diferencial in f meromorfna funkcija, je tudi $f\alpha$ meromorfen diferencial.

¹Podobno kot prej lahko privzamemo, da je ena izmed lukenj enaka 0.



Slika 2: Kompozitum stereografske projekcije z rotacijo sfere

Trditev 2.3. *Naj bo $f: M \rightarrow N$ nekonstantna holomorfná preslikava med kompaktnima Riemannovima ploskvama. Tedaj obstaja naravno število m , za katero f doseže vsako točko $Q \in N$ natanko m -krat.²*

Dokaz. Iz kompleksne analize vemo, da za vsako točko $P \in M$ obstajajo take lokalne koordinate \tilde{z} , da je $f(\tilde{z}) = f(P) + \tilde{z}^n$. Število $n - 1$ označimo z $b(P)$ in mu pravimo BRANCHING NUMBER.

Za vsako naravno število m naj bo

$$\Sigma_m = \left\{ X \in N \mid \sum_{f(P)=X} (b(P) + 1) \geq m \right\}.$$

Označimo še

$$\varphi(X) = \sum_{f(P)=X} (b(P) + 1).$$

Vse množice Σ_m so odprte – če je $b(P) = n - 1$, lahko v lokalnih koordinatah zapišemo $f(\tilde{z}) = \tilde{z}^n$. Enačba $f(\tilde{z}) = \varepsilon$ ima tako natanko n rešitev, zato za okolico U točke P velja

$$b(P) + 1 = \sum_{Q \in U \cap f^{-1}(P')} (b(Q) + 1),$$

kjer je $P' \in f(U)$. Če to enakost seštejemo po okolicah vseh točk $P \in f^{-1}(X)$, dobimo

$$m \leq \varphi(X) \leq \varphi(P').$$

²Šteto z večkratnostmi.

Pokažimo še, da so te množice zaprte v $\hat{\mathbb{C}}$. Naj bo Q limita zaporedja točk $Q_k \in \Sigma_m$, pri čemer je brez škode za splošnost $b(P) = 0$ za vsak $P \in f^{-1}(Q_k)$. Ker imajo vse množice $f^{-1}(Q_k)$ vsaj m elementov, lahko najdemo tako podzaporedje zaporedja $(Q_k)_{n=1}^{\infty}$, da lahko iz njihovih praslik tvorimo m konvergentnih zaporedij. Tako sledi

$$\sum_{P \in f^{-1}(Q)} (b(P) + 1) \geq m.$$

Sledi, da so vse množice Σ_m odprte in zaprte v $\hat{\mathbb{C}}$. Čim je ena izmed množic Σ_m neprazna, je tako enaka celotni Riemannovi sferi, saj je ta povezana. \square

Številu m pravimo *stopnja* preslikave f .

Definicija 2.4. Za kompaktni Riemannovo ploskvi M in N ter nekonstantno preslikavo $f: M \rightarrow N$ definiramo *TOTAL BRANCHING NUMBER* kot

$$B = \sum_{P \in M} b_f(P).$$

Število je dobro definirano, saj je množica $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$ diskretna in tako zaradi kompaktnosti končna.

Izrek 2.5 (Riemann-Hurwitz). *Naj bosta M in N kompaktni Riemannovi ploskvi rodov g in γ , $f: M \rightarrow N$ pa nekonstantna preslikava stopnje n . Tedaj za TOTAL BRANCHING NUMBER B velja*

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}.$$

Dokaz. Ker je množica $\{P \in M \mid b_f(P) > 0\}$ končna, jo lahko uporabimo za triangulacijo ploskve N . Denimo, da ima triangulacija F lic, E povezav in V vozlišč. To triangulacijo lahko z f^{-1} preslikamo na M . Tako dobimo triangulacijo ploskve M z nF lici, nE povezavami in $nV - B$ vozlišči. Sledi, da je

$$\begin{aligned} F - E + V &= 2 - 2\gamma, \\ nF - nE + nV - B &= 2 - 2g. \end{aligned}$$

Iz teh enačb očitno sledi

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + \frac{B}{2}.$$

\square

2.2 Riemann-Rochov izrek

Definicija 2.6. *Delitelj* na Riemannovi ploskvi M je formalni simbol

$$\mathfrak{A} = \prod_{P \in M} P^{\alpha(P)},$$

kjer za vsak P velja $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$ in je $\alpha(P) \neq 0$ za kvečjemu končno mnogo točk $P \in M$. *Stopnja* delitelja \mathfrak{A} je definirana kot

$$\deg \mathfrak{A} = \sum_{P \in M} \alpha(P).$$

Delitelji na M tvorijo grupo za naravno definirano množenje – to grupo označimo z $\text{Div}(M)$. Tako je $\deg: \text{Div}(M) \rightarrow \mathbb{Z}$ homomorfizem grup.

Za vsako neničelno meromorfno funkcijo $f \in \mathcal{K}(M)$ definiramo njen *glavni delitelj* kot

$$(f) = \prod_{P \in M} P^{\text{ord}_P f}.$$

Definiramo lahko še *polarni delitelj*

$$f^{-1}(\infty) = \prod_{P \in M} P^{\max(-\text{ord}_P f, 0)}$$

in *ničelni delitelj*

$$f^{-1}(0) = \prod_{P \in M} P^{\max(\text{ord}_P f, 0)}.$$

Opazimo, da velja

$$(f) = \frac{f^{-1}(0)}{f^{-1}(\infty)}.$$

Lema 2.7. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev. Za vsako neničelno funkcijo $f \in \mathcal{K}(M)$ velja $\deg f^{-1}(0) = \deg f^{-1}(\infty)$. Ekvivalentno je $\deg(f) = 0$.*

Dokaz. Stopnja polarne delitelja funkcije f je natanko število njenih polov, štetih z večkratnostmi, stopnja ničelnega delitelja pa število njenih ničel. Ti števili sta enaki po trditvi 2.3. \square

Posebej velja opomniti, da to pomeni, da imajo funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah enako število ničel in polov (štetih z večkratnostmi).

Na deliteljih lahko uvedemo relacijo delne urejenosti kot

$$\prod_{P \in M} P^{\alpha(P)} \geq \prod_{P \in M} P^{\beta(P)} \iff \forall P \in M: \alpha(P) \geq \beta(P).$$

Ni težko videti, da je za vsak delitelj \mathfrak{A} na M množica

$$L(\mathfrak{A}) = \{f \in \mathcal{K}(M) \mid (f) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor – njegovo dimenzijo označimo z $r(\mathfrak{A})$.

Zgled 2.8. Velja $r(1) = 1$. Pogoj $(f) \geq 1$ je namreč ekvivalenten temu, da je f holomorfna. Ker so vse holomorfne funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah konstantne, je zato $L(1) \cong \mathbb{C}$, kar je enodimenzionalen prostor. \diamond

Zgled 2.9. Če je $\deg \mathfrak{A} > 0$, je $r(\mathfrak{A}) = 0$. Iz neenakosti $(f) \geq \mathfrak{A}$ za neničelno funkcijo f namreč sledi $0 = \deg(f) \geq \deg \mathfrak{A} > 0$, kar je protislovje. \diamond

Podobno je tudi

$$\Omega(\mathfrak{A}) = \{\omega \mid \omega \text{ je meromorfna 1-forma} \wedge (\omega) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor. Označimo $i(\mathfrak{A}) = \dim \Omega(\mathfrak{A})$.

Trditev 2.10. *Naj bo \mathfrak{A} poljuben delitelj in ω meromorfen diferencial. Tedaj je*

$$i(\mathfrak{A}) = r(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}).$$

Dokaz. Naj bo $\varphi: \Omega(\mathfrak{A}) \rightarrow L(\mathfrak{A}(\omega)^{-1})$ preslikava s predpisom $\varphi: \zeta \mapsto \frac{\zeta}{\omega}$. Seveda je predpis dobro definiran, ni pa težko videti, da je to izomorfizem vektorskih prostorov. Sledi, da imata enako dimenzijo. \square

Izrek 2.11 (Riemann-Roch). *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g in \mathfrak{A} delitelj na M . Tedaj velja*

$$r(\mathfrak{A}^{-1}) = \deg \mathfrak{A} - g + 1 + i(\mathfrak{A}).$$

Dokaz izreka najdemo v [2, theorem III.4.11].

Zgled 2.12. Z uporabo zgornjega izreka lahko izračunamo $i(1)$. Velja namreč

$$i(1) = r(1) - \deg 1 + g - 1 = g. \quad \diamond$$

Trditev 2.13. *Naj bo $\deg \mathfrak{A} > 2g - 2$. Tedaj je $i(\mathfrak{A}) = 0$.*

Dokaz. Naj bo $\omega \in i(1)$ neničelna holomorfna 1-forma. Tedaj je

$$r((\omega)^{-1}) = \deg(\omega) - g + 1 + i((\omega)).$$

Po trditvi 2.10 je $r((\omega)^{-1}) = i(1) = g$ in $i((\omega)) = r(1) = 1$. Od tod sledi, da je $\deg(\omega) = 2g - 2$.

Sedaj dobimo

$$i(\mathfrak{A}) = r(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}) = 0,$$

saj je $\deg(\mathfrak{A}(\omega)^{-1}) > 0$. \square

2.3 Weierstrassove točke

Izrek 2.14 (Weierstrass). *Naj bo M ploskev roda $g > 0$ in $P \in M$. Tedaj obstaja natanko g števil*

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g,$$

za katera ne obstaja funkcija $f \in \mathcal{K}(M)$, ki je holomorfna na $M \setminus \{P\}$ in ima pol reda n_j v P . Tem številom pravimo GAP.

Dokaz. Najprej opazimo, da je število n GAP natanko tedaj, ko je $r(P^{-n}) = r(P^{1-n})$. Ker je $r(P^{-n}) \leq r(P^{1-n}) + 1$, število n ni GAP natanko tedaj, ko velja

$$r(P^{-n}) - r(P^{1-n}) = 1.$$

Po Riemann-Rochovem izreku velja

$$r(P^{-k}) = k - g + 1 + i(P^k),$$

zato sledi

$$\begin{aligned} r(P^{-n}) - r(1) &= \sum_{k=1}^n (r(P^{-k}) - r(P^{1-k})) \\ &= \sum_{k=1}^n (1 + i(P^k) - i(P^{k-1})) \\ &= n + i(P^n) - i(1). \end{aligned}$$

Ker je $i(1) = g$ in za vse $n > 2g - 2$ velja $i(P^n) = 0$, sledi

$$r(P^{-n}) - 1 = n - g.$$

Opazimo, da leva stran šteje ravno število $\text{NEGAPOV} \leq n$. Sledi, da je GAPOV natanko g in so vsi strogo manjši od $2g$. \square

Definicija 2.15. TEŽA točke $P \in M$ je vsota

$$\tau(P) = \sum_{j=1}^g (n_j - j),$$

kjer so n_j GAPI za P .

Lema 2.16. Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev z rodno $g \geq 2$. Tedaj je

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g.$$

Definicija 2.17. Točka $P \in M$ je *Weierstrassova točka*, če na M obstaja neničelna holomorfná diferencialna 1-forma z ničlo reda vsaj g v P .³

Lema 2.18. Ekvivalentno, vsaj eno izmed števil $2, \dots, g$ ni GAP.

Dokaz. Obstoj diferencialne 1-forme z ničlo reda vsaj g v P je ekvivalentna pogoju $i(P^g) > 0$. Po Riemann-Rochovem izreku je ta neenakost ekvivalentna

$$r(P^{-g}) - 1 > 0,$$

oziroma $r(P^{-g}) \geq 2$. Ker je $r(1) = 1$, med $2, \dots, g$ obstaja število, ki ni GAP. \square

Lema 2.19. Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$. Tedaj za število w Weierstrassovih točk veljata oceni

$$2g + 2 \leq w \leq g^3 - g.$$

Dokaz. Ker je $\tau(P) \geq 1$ za vsako Weierstrassovo točko in velja

$$\sum_{P \in M} \tau(P) = g^3 - g,$$

takoj sledi $w \leq g^3 - g$. Velja pa

$$\begin{aligned} \tau(P) &= \sum_{j=1}^g (n_j - j) \\ &= \sum_{j=1}^{2g} j - \sum_{j=1}^g \alpha_j - \sum_{j=1}^g j \\ &= \sum_{j=g+1}^{2g-1} j - \sum_{j=1}^{g-1} \alpha_j \\ &\leq \frac{g^2 - g}{2}. \end{aligned} \quad \square$$

³V splošnem definiramo q -Weierstrassove točke – obstaja q -forma z ničlo reda vsaj $\dim \mathcal{H}^q(M)$.

2.4 Hipereliptične ploskve

Definicija 2.20. Kompaktna Riemannova ploskev M je *hipereliptična*, če obstaja nekonstantna meromorfna funkcija $f: M \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ z natanko dvema poloma.⁴

Ekvivalentno to pomeni, da obstaja tak CEL delitelj $D \in \text{Div } M$, da je $\deg D = 2$ in $r(D^{-1}) \geq 2$.

Trditev 2.21. Vsaka kompaktna Riemannova ploskev roda $g \leq 2$ je hipereliptična.

Trditev 2.22. Weierstrassove ploskve imajo natanko $2g + 2$ *BRANCH* točk.

Dokaz. Po izreku 2.5 velja

$$g = 2 \cdot (0 - 1) + 1 + \frac{B}{2}. \quad \square$$

Trditev 2.23. *BRANCH* točke preslikave f so natanko Weierstrassove točke ploskve M .

Dokaz. Naj bo $P \in M$ *BRANCH* točka. Če je P pol funkcije f , je njegova stopnja tako enaka 2. V nasprotnem primeru ima funkcija

$$g \equiv \frac{1}{f - f(P)}$$

pol stopnje 2 v P . V obeh primerih sledi, da 2 ni *GAP* za točko P , zato je ta Weierstrassova.

Vsaka *BRANCH* točka ima tako *TEŽO*

$$\sum_{k=1}^g (2k - 1) - \sum_{k=1}^g k = \frac{1}{2}g(g - 1),$$

zato je njihova skupna teža $g^3 - g$. Sledi, da so to vse Weierstrassove točke. \square

Lema 2.24. Naj bo P Weierstrassova točka hipereliptične ploskve M in $f \in \mathcal{K}(M)$ funkcija stopnje 2. Tedaj velja $f^{-1}(\infty) \sim P^2$.

Dokaz. Točka P je *BRANCH* točka funkcije f . Če je P pol te funkcije, je zato reda 2 in je $f^{-1}(\infty) = P^2$. V nasprotnem primeru definiramo funkcijo

$$g = \frac{1}{f - f(P)}.$$

Ni težko videti, da je $(g) = f^{-1}(\infty)P^{-2}$. \square

Trditev 2.25. Naj bosta f in g dve funkciji $f: M \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ stopnje 2. Tedaj obstaja Möbiusova transformacija A , za katero je

$$g = A \circ f.$$

⁴Pri tem pole štejemo z večkratnostmi.

Dokaz. Naj bo $f^{-1}(\infty) = P_1Q_1$ in $g^{-1}(\infty) = P_2Q_2$. Ker na M ne obstajajo funkcije stopnje 1, sledi $r(P_1^{-1}Q_1^{-1}) = r(P_2^{-1}Q_2^{-1}) = 2$. Prostora $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$ in $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$ imata tako zaporedoma bazi $\{1, f\}$ in $\{1, g\}$. Ker za Weierstrassovo točko P velja $P_1Q_1 \sim P^2 \sim P_2Q_2$, sledi, da obstaja meromorfná preslikava h , za katero je $(h) = P_1Q_1P_2^{-1}Q_2^{-1}$. Ker je s predpisom $\varphi \mapsto h \cdot \varphi$ očitno podan izomorfizem prostorov $L(P_1^{-1}Q_1^{-1})$ in $L(P_2^{-1}Q_2^{-1})$, obstajajo konstante α, β, γ in δ , za katere je

$$1 = \alpha h + \beta hf \quad \text{in} \quad g = \gamma h + \delta hf.$$

Tako lahko izrazimo

$$g = \frac{\gamma + \delta f}{\alpha + \beta f}. \quad \square$$

Trditev 2.26. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g . Tedaj je M hipereliptična natanko tedaj, ko obstaja involucija $J \in \text{Aut } M$ z natanko $2g + 2$ fiksnimi točkami.*

Dokaz. Predpostavimo najprej, da je M hipereliptična. Naj bo $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ meromorfná funkcija stopnje 2. Za vsak $P \in M$ tako obstaja še ena točka $Q \in M$, za katero je $f(P) = f(Q)$ (če je $\text{ord}_P f = 2$, vzamemo $Q = P$). Tako lahko enostavno definiramo $J(P) = Q$. Ni težko videti, da je J res involucija z $2g + 2$ fiksnimi točkami.

Če je $Q = J(P) \neq P$, lahko na okolici U_Q točke Q zapišemo

$$J(X) = \left(f|_{U_Q}\right)^{-1}(f(X)),$$

zato je J holomorfna na $M \setminus W$. Če pa je $J(P) = P$, pa je $h = \sqrt{f - f(P)}$ lokalna koordinata, za katero velja $J(h) = -h$, saj je

$$f(P_h) = h^2 + f(P) = (-h)^2 + f(P) = f(P_{-h}).$$

Tako je J holomorfna tudi na W .

Predpostavimo sedaj, da obstaja involucija $J \in \text{Aut } M$ z $2g + 2$ fiksnimi točkami. Ker se projekcija $f: M \rightarrow M/\langle J \rangle$ BRANCHA v natanko $2g + 2$ točkah, po izreku 2.5 sledi, da je rod ploskve $M/\langle J \rangle$ enak 0. Sledi, da je $M/\langle J \rangle \cong \hat{\mathbb{C}}$, zato je f meromorfná funkcija z dvema poloma. \square

Opazimo, da so fiksne točke hipereliptične involucije natanko Weierstrassove točke.

Trditev 2.27. *Naj bo M hipereliptična Riemannova ploskev roda $g \geq 2$ in $T \in \text{Aut } M$. Če je $T \notin \langle J \rangle$, ima T kvečjemu 4 fiksne točke.*

Dokaz. Naj bo $f: M \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ funkcija z natanko dvema poloma. Tedaj je taka tudi $f \circ T$, zato obstaja Möbiusova transformacija A , za katero je

$$f \circ T = A \circ f.$$

Naj bo P fiksna točka avtomorfizma T . Sledi, da je

$$A(f(P)) = f(T(P)) = f(P),$$

zato je $f(P)$ fiksna točka preslikave A . Opazimo, da je $A \neq \text{id}$, saj bi v nasprotnem primeru veljalo $f \circ T = f$, kar implicira $T \in \langle J \rangle$. Tako ima A kvečjemu 2 fiksni točki, zato jih ima T največ 4. \square

3 Avtomorfizmi Riemannovih ploskev

3.1 Sfere in torusi

Za določanje grupe avtomorfizmov Riemannovih ploskev so pomembne njihove topološke lastnosti – vsak avtomorfizem je namreč tudi homeomorfizem. Iz geometrijske topologije vemo, da je vsaka orientabilna kompaktna ploskev homeomorfna vsoti g torusov. Številu g pravimo rod ploskve.

Najprej si oglejmo ploskve z ničelnim rodом – topološko so to kar sfere. V prejšnjih razdelkih smo ugotovili, da je grupa avtomorfizmov Riemannove sfere enaka

$$\text{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \mid ad - bc = 1 \right\}.$$

Vemo pa, da je grupa avtomorfizmov odvisna ne samo od topoloških lastnosti objekta, ampak tudi njegove kompleksne strukture.

Naslednji izziv so ploskve z rodом $g = 1$ – torusi. Za toruse IZREK ne velja, zato imamo več različnih grup avtomorfizmov. Oglejmo si, kako jih dobimo:

3.2 Ploskve večjih rodov

Trditev 3.1. *Naj bo $T \in \text{Aut } M$ netrivialen avtomorfizem. Tedaj ima T največ $2g + 2$ fiksnih točk.*

Dokaz. Naj bo $P \in M$ točka, za katero je $T(P) \neq P$. Tedaj obstaja meromorfná funkcija $f \in \mathcal{K}(M)$ s polarnim deliteljem P^r za nek $1 \leq r \leq g + 1$. Oglejmo si funkcijo $h = f - f \circ T$. Njen polarni delitelj je očitno $P^r(T^{-1}P)^r$. Velja torej

$$\deg h^{-1}(0) = \deg h^{-1}(\infty) = 2r \leq 2g + 2,$$

zato ima g kvečjemu $2g + 2$ ničel. Ni težko videti, da so njene ničle natanko fiksne točke avtomorfizma T . \square

Lema 3.2. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$, W pa množica njenih Weierstrassovih točk. Tedaj ta vsak avtomorfizem $T \in \text{Aut } M$ velja $T(W) = W$.*

Dokaz. Avtomorfizmi ohranjajo GAPE. \square

Izrek 3.3 (Schwarz). *Grupe avtomorfizmov kompaktnih ploskev roda $g \geq 2$ so končne.*

Dokaz. Po zgornji lemi sledi, da obstaja homomorfizem $\lambda: \text{Aut } M \rightarrow S_W$, kjer je S_W simetrična grupa. Dovolj je pokazati, da ima λ končno jedro. Ločimo dva primera.

- Če M ni hipereliptična, ima več kot $2g + 2$ Weierstrassovih točk. Vsak avtomorfizem, ki fiksira Weierstrassove točke, je zato kar identiteta, zato je $\ker \lambda$ trivialno.
- Če je M hipereliptična, velja kar $\ker \lambda = \langle J \rangle$, kjer je J hipereliptična involucija, velja pa $|\langle J \rangle| = 2$. \square

Slovar strokovnih izrazov

Riemann surface Riemannova ploskev

Literatura

- [1] M. Artin, *Algebra*, Prentice Hall, 1991.
- [2] H. M. Farkas in I. Kra, *Riemann surfaces*, **71**, Springer, 1980, bibliografija: str. 330-332.
- [3] F. Forstnerič, *Analiza na mnogoterostih*, 2023, [ogled 16. 5. 2023], dostopno na <https://users.fmf.uni-lj.si/forstneric/papers/AMbook.pdf>, bibliografija: str. 237-239.
- [4] R. C. Lyndon in J. L. Ullman, *Groups of elliptic linear fractional transformations*, Proceedings of the American Mathematical Society **18**(6) (1967) 1119–1124, [ogled 2023-06-11], dostopno na <http://www.jstor.org/stable/2035812>.