UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA MATEMATIKO IN FIZIKO

Matematika – 1. stopnja

Luka Horjak

HOLOMORFNI AVTOMORFIZMI

Delo diplomskega seminarja

Mentor: prof. dr. Miran Černe

Ljubljana, 2023

Kazalo

Holomorfni avtomorfizmi

Povzetek

...

Holomorphic automorphisms

Abstract

...

Math. Subj. Class. (2020): ..., ...
Ključne besede: ..., ...
Keywords: ..., ...

1 Holomorfni avtomorfizmi v kompleksni ravnini

1.1 Enostavno povezana območja

Definicija 1.1. *Območje* v kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ je vsaka odprta povezana množica.

Definicija 1.2. *Holomorfni avtomorfizem* območja Ω je bijektivna holomorfna preslikava $f\colon \Omega \to \Omega$ s holomorfnim inverzom.

Opazimo, da je zadosten pogoj že to, da je f bijektivna z neničelnim odvodom. Opazimo še, da množica avtomorfizmov nekega območja tvori grupo z operacijo kompozitum. To grupo označimo z $\mathrm{Aut}(\Omega)$.

Primer 1.3. Kompleksna ravnina je območje v $\mathbb{C}$. Njena grupa avtomorfizmov je enaka

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{az + b \mid a \neq 0\}\,. \qquad \diamondsuit$$

Primer 1.4. Naj bo $\mathbb{\Delta}$ odprt enotski disk v $\mathbb{C}$. Tedaj je

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{\Delta}) = \left\{ e^{i\theta} \cdot \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \;\middle|\; a \in \mathbb{\Delta} \wedge \theta \in [0, 2\pi) \right\}. \qquad \diamondsuit$$

Izkaže se, da smo s tem do izomorfizma natančno opisali grupe avtomorfizmov vseh povezanih in enostavno povezanih množic v $\mathbb{C}$. Velja namreč naslednja lema:

Lema 1.5. *Naj bosta Ω_1 in Ω_2 biholomorfno ekvivalentni območji v $\mathbb{C}$. Tedaj je $\mathrm{Aut}(\Omega_1) \cong \mathrm{Aut}(\Omega_2)$.*

Dokaz. Naj bo $f\colon \Omega_1 \to \Omega_2$ biholomorfna preslikava. Sedaj definiramo preslikavo $\Phi\colon\ \mathrm{Aut}(\Omega_1) \to \mathrm{Aut}(\Omega_2)$ s predpisom

$$\Phi(\phi) = f^{-1} \circ \phi \circ f.$$

Ker je s predpisom

$$\Phi^{-1}(\psi) = f \circ \psi \circ f^{-1}$$

očitno podan predpis inverza preslikave Φ, je ta bijektivna. Velja pa

$$\Phi(\phi \circ \psi) = f^{-1} \circ \phi \circ \psi \circ f = \left(f^{-1} \circ \phi \circ f\right) \circ \left(f^{-1} \circ \psi \circ f\right) = \Phi(\phi) \circ \Phi(\psi),$$

zato je Φ homomorfizem. $\square$

Spomnimo se na Riemannov upodobitveni izrek, ki pravi, da je vsako povezano in enostavno povezano območje v kompleksni ravnini ali biholomorfno ekvivalentno $\mathbb{\Delta}$ ali pa kar enako $\mathbb{C}$. Grupe avtomorfizmov povezanih in enostavno povezanih območij so do izomorfizma natančno tako le $\mathrm{Aut}(\mathbb{\Delta})$ in $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$.

Omenimo še, da lahko kompleksno ravnino dopolnimo do Riemannove sfere $\widehat{\mathbb{C}}$. Njeni avtomorfizmi so Möbiusove transformacije, torej

$$\mathrm{Aut}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) = \left\{ \frac{az + b}{cz + d} \;\middle|\; ad - bc = 1 \right\}.$$

1.2 Kolobarji in punktirani diski

Po obravnavi enostavno povezanih območij so naslednji korak območja z »luknjami«. Najosnovnejši tak primer je seveda kolobar.

Opazimo, da se pri velikem številu lukenj grupa avtomorfizmov bistveno zmanjša – enostavno povezana območja imajo neskončno avtomorfizmov, prav tako območja z eno luknjo.

2 Riemannove ploskve

2.1 Gladke in kompleksne mnogoterosti

2.2 Riemann-Rochov izrek

Definicija 2.1. *Delitelj* na Riemannovi ploskvi M je formalni simbol

$$\mathfrak{A} = \prod_{P \in M} P^{\alpha(P)},$$

kjer za vsak P velja $\alpha(P) \in \mathbb{Z}$ in je $\alpha(P) \neq 0$ za kvečjemu končno mnogo točk $P \in M$. *Stopnja* delitelja $\mathfrak{A}$ je definirana kot

$$\deg \mathfrak{A} = \sum_{P \in M} \alpha(P).$$

Delitelji na M tvorijo grupo za naravno definirano množenje – to grupo označimo z $\mathrm{Div}(M)$. Tako je $\deg \colon \mathrm{Div}(M) \to \mathbb{Z}$ homomorfizem grup.

Za vsako neničelno meromorfno funkcijo $f \in \mathscr{K}(M)$ definiramo njen *glavni delitelj* kot

$$(f) = \prod_{P \in M} P^{\operatorname{ord}_P f}.$$

Definiramo lahko še *polarni delitelj*

$$f^{-1}(\infty) = \prod_{P \in M} P^{\max(-\operatorname{ord}_P f, 0)}$$

in *ničelni delitelj*

$$f^{-1}(0) = \prod_{P \in M} P^{\max(\operatorname{ord}_P f, 0)}.$$

Opazimo, da velja

$$(f) = \frac{f^{-1}(0)}{f^{-1}(\infty)}.$$

Lema 2.2. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev. Za vsako neničelno funkcijo $f \in \mathscr{K}(M)$ velja* $\deg f^{-1}(0) = \deg f^{-1}(\infty)$. *Ekvivalentno je* $\deg(f) = 0$.

Dokaz. Predpostavimo lahko, da je f nekonstantna. Iz kompleksne analize vemo, da za vsako točko $P \in M$ obstajajo take lokalne koordinate $\tilde{z}$, da je $f(\tilde{z}) = f(P) + \tilde{z}^n$. Število n označimo z $b(P)$.

Za vsako naravno število m naj bo

$$\Sigma_m = \left\{ \alpha \in \widehat{\mathbb{C}} \;\middle|\; \sum_{f(P)=\alpha} b(P) \geq m \right\}.$$

Označimo še

$$\varphi(\alpha) = \sum_{f(P)=\alpha} b(P).$$

Vse množice $\Sigma_m \setminus \{\infty\}$ so odprte – če je $b(P) = n$, lahko v lokalnih koordinatah zapišemo $f(\tilde{z}) = \alpha + \tilde{z}^n$. Enačba $f(\tilde{z}) = \alpha + \varepsilon$ ima tako natanko n rešitev, zato na dovolj majhni okolici točke P velja

$$b(P) = \sum_{f(Q)=\alpha+\varepsilon} b(Q).$$

Če to enakost seštejemo po okolicah vseh točk P, dobimo

$$m \leq \varphi(\alpha) \leq \varphi(\alpha + \varepsilon).$$

Pokažimo še, da so te množice zaprte v $\widehat{\mathbb{C}}$. Naj bo Q limita zaporedja točk $Q_k \in \Sigma_m$, pri čemer je brez škode za splošnost $b(P) = 0$ za vsak $P \in f^{-1}(Q_k)$. Ker imajo vse množice $f^{-1}(Q_k)$ vsaj m elementov, lahko najdemo tako podzaporedje zaporedja $(Q_k)_{n=1}^{\infty}$, da lahko iz njihovih praslik tvorimo m konvergentnih zaporedij. Tako sledi

$$\sum_{P\in f^{-1}(Q)} b(P) \geq m.$$

Sledi, da so vse množice Σ_m odprte in zaprte v $\mathbb{C}$. Čim je ena izmed množic $\Sigma_m \setminus \{\infty\}$ neprazna, je tako enaka celotni kompleksni ravnini. Ker je Σ_m poleg tega še zaprta v $\widehat{\mathbb{C}}$, velja kar $\Sigma_m = \widehat{\mathbb{C}}$. Sledi, da obstaja tako naravno število m, da je $\varphi(\alpha) = m$ za vsa kompleksna števila α, poleg tega pa velja še $\varphi(\infty) \leq m$.

Ker lahko identičen razmislek naredimo tudi za funkcijo $\frac{1}{f}$, sledi še neenakost $\varphi(\infty) \geq m$. Tako je φ konstantna na $\widehat{\mathbb{C}}$.

Za zaključek dokaza je dovolj opaziti, da velja

$$f^{-1}(0) = \varphi(0) = \varphi(\infty) = f^{-1}(\infty). \qquad \square$$

Posebej velja opomniti, da to pomeni, da imajo funkcije na kompaktnih Riemannovih ploskvah enako število ničel in polov (štetih z večkratnostmi).

Na deliteljih lahko uvedemo relacijo delne urejenosti kot

$$\prod_{P\in M} P^{\alpha(P)} \geq \prod_{P\in M} P^{\beta(P)} \iff \forall P \in M\colon \alpha(P) \geq \beta(P).$$

Ni težko videti, da je za vsak delitelj $\mathfrak{A}$ na M množica

$$L(\mathfrak{A}) = \{f \in \mathscr{K}(M) \mid (f) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor – njegovo dimenzijo označimo z $i(\mathfrak{A})$. Podobno je tudi

$$\Omega(\mathfrak{A}) = \{df \mid f \in \mathscr{H}(M) \wedge (df) \geq \mathfrak{A}\}$$

vektorski prostor. Označimo $i(\mathfrak{A}) = \dim \Omega(\mathfrak{A})$.

Izrek 2.3 (Riemann-Roch)**.** *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda g in $\mathfrak{A}$ delitelj na M. Tedaj velja*

$$r\left(\mathfrak{A}^{-1}\right) = \deg \mathfrak{A} - g + 1 + i(\mathfrak{A}).$$

2.3 Weierstrassove točke

Izrek 2.4. *Naj bo M ploskev roda $g > 0$ in $P \in M$. Tedaj obstaja natanko g števil*

$$1 = n_1 < n_2 < \cdots < n_g < 2g,$$

za katera ne obstaja funkcija $f \in \mathscr{K}(M)$, ki je holomorfna na $M \setminus \{P\}$ in ima pol reda n_j v P. Tem številom pravimo GAP.

Definicija 2.5. Točka $P \in M$ je *Weierstrassova točka*, če na M obstaja neničelna holomorfna diferencialna 1-forma z ničlo reda vsaj g v P.[1]

Lema 2.6. *Ekvivalentno, vsaj eno izmed števil $2, \ldots, g$ ni GAP.*

Dokaz. Obstoj diferencialne 1-forme z ničlo reda vsaj g v P je ekvivalentna pogoju $i(P^g) > 0$. Po Riemann-Rochovem izreku je ta neenakost ekvivalentna

$$r\left(P^{-g}\right) - 1 > 0,$$

oziroma $r\left(P^{-g}\right) \geq 2$. Ker je $r(1) = 1$, med $2, \ldots, g$ obstaja število, ki ni GAP. $\square$

Lema 2.7. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$. Tedaj za število w Weierstrassovih točk veljata oceni*

$$2g + 2 \leq w \leq g^3 - g.$$

2.4 Hipereliptične ploskve

[1] V splošnem definiramo q-Weierstrassove točke – obstaja q-forma z ničlo reda vsaj $\dim \mathscr{H}^q(M)$.

3 Avtomorfizmi Riemannovih poloskev

3.1 Sfere in torusi

Za določanje grupe avtomorfizmov Riemannovih ploskev so pomembne njihove topološke lastnosti – vsak avtomorfizem je namreč tudi homeomorfizem. Iz geometrijske topologije vemo, da je vsaka orientabilna kompaktna ploskev homeomorfna vsoti g torusov. Številu g pravimo rod ploskve.

Najprej si oglejmo ploskve z ničelnim rodom – topološko so to kar sfere. V prejšnjih razdelkih smo ugotovili, da je grupa avtomorfizmov Riemannove sfere enaka

$$\operatorname{Aut}\left(\widehat{\mathbb{C}}\right) = \left\{ \frac{az+b}{cz+d} \;\middle|\; ad-bc=1 \right\}.$$

Vemo pa, da je grupa avtomorfizmov odvisna ne samo od topoloških lastnosti objekta, ampak tudi njegove kompleksne strukture.

Naslednji izziv so ploskve z rodom $g=1$ – torusi. Za toruse IZREK ne velja, zato imamo več različnih grup avtomorfizmov. Oglejmo si, kako jih dobimo:

3.2 Ploskve večjih rodov

Trditev 3.1. *Naj bo $T \in \operatorname{Aut} M$ netrivialen avtomorfizem. Tedaj ima T največ $2g+2$ fiksnih točk.*

Dokaz. Naj bo $P \in M$ točka, za katero je $T(P) \neq P$. Tedaj obstaja meromorfna funkcija $f \in \mathscr{K}(M)$ s polarnim deliteljem P^r za nek $1 \leq r \leq g+1$. Oglejmo si funkcijo $h = f - f \circ T$. Njen polarni delitelj je očitno $P^r(T^{-1}P)^r$. Velja torej

$$\deg h^{-1}(0) = \deg h^{-1}(\infty) = 2r \leq 2g+2,$$

zato ima g kvečjemu $2g+2$ ničel. Ni težko videti, da so njene ničle natanko fiksne točke avtomorfizma T. □

Lema 3.2. *Naj bo M kompaktna Riemannova ploskev roda $g \geq 2$, W pa množica njenih Weierstrassovih točk. Tedaj ta vsak avtomorfizem $T \in \operatorname{Aut} M$ velja $T(W) = W$.*

Dokaz. Avtomorfizmi ohranjajo GAPE. □

Izrek 3.3 (Schwarz)**.** *Grupe avtomorfizmov kompaktnih ploskev roda $g \geq 2$ so končne.*

Dokaz. Po zgornji lemi sledi, da obstaja homomorfizem $\lambda\colon \operatorname{Aut} M \to S_W$, kjer je S_W simetrična grupa. Dovolj je pokazati, da ima λ končno jedro. Ločimo dva primera.

a) Če M ni hipereliptična, ima več kot $2g+2$ Weierstrassovih točk. Vsak avtomorfizem, ki fiksira Weierstrassove točke, je zato kar identiteta, zato je $\ker \lambda$ trivialno.

b) Če je M hipereliptična, velja kar $\ker \lambda = \langle J \rangle$, kjer je J hipereliptična involucija, velja pa $|\langle J \rangle| = 2$. □

Slovar strokovnih izrazov