Algebraična topologija 2

Luka Horjak (luka1.horjak@gmail.com)

22. februar 2024

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Algebraična topologija 2 v letu 2023/24. Predavatelj v tem letu je bil doc. dr. Sašo Strle.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Kohomologija

1.1 Homologija s koeficienti

22. februar 2024

Definicija 1.1.1. Naj bo (C_*, ∂_*) verižni kompleks in G abelova grupa. Tenzorski produkti $C_n \otimes_{\mathbb{Z}} G$ inducirajo verižni kompleks $(C_* \otimes G, \partial_* \otimes \mathrm{id})$. Pripadajočo homologijo imenujemo *homologija s koeficienti v G*.

Definicija 1.1.2. Naj bosta A in G abelovi grupi. Naj bo F prosta abelova grupa in $\varphi \colon F \to A$ epimorfizem. *Torzijski produkt* je grupa $\mathrm{Tor}(A, G)$, za katero je zaporedje

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tor}(A, G) \longrightarrow \ker \varphi \otimes G \longrightarrow F \otimes G \longrightarrow A \otimes G \longrightarrow 0$$

eksaktno.

Opomba 1.1.2.1. Torzijski koeficient je funktor.

Izrek 1.1.3 (Univerzalni koeficient za homologijo)**.** Naj bo (C_*, ∂_*) verižni kompleks prostih abelovih grup in G abelova grupa. Potem je zaporedje

$$0 \longrightarrow H_n(C_*) \otimes G \longrightarrow H_n(C_*, G) \longrightarrow \mathrm{Tor}(H_{n-1}(C_*), G) \longrightarrow 0$$

eksaktno, funktorialno in razcepno.

Dokaz. Zaporedje

$$0 \longrightarrow Z_* \xrightarrow{i_*} C_* \xrightarrow{\partial_*} B_{*-1} \longrightarrow 0$$

je eksaktno in zato razcepno. Sledi, da je tudi zaporedje

$$0 \longrightarrow Z_* \otimes G \xrightarrow{i_* \otimes \mathrm{id}} C_* \otimes G \xrightarrow{\partial_* \otimes \mathrm{id}} B_{*-1} \otimes G \longrightarrow 0$$

eksaktno. Pripadajoče dolgo eksaktno zaporedje je

$$\cdots \longrightarrow B_n \otimes G \xrightarrow{\delta_n} Z_n \otimes G \longrightarrow H_n(C_*^G) \longrightarrow B_{n-1} \otimes G \xrightarrow{\delta_{n-1}} Z_{n-1} \otimes G \longrightarrow \cdots$$

Dobimo inducirano kratko eksaktno zaporedje

$$0 \longrightarrow \operatorname{coker} \delta_n \longrightarrow H_n(C_*^G) \longrightarrow \ker \delta_{n-1} \longrightarrow 0.$$

□

Opomba 1.1.3.1. Razcep ni funkctorialen.

1.2 Kohomologija

Definicija 1.2.1. Naj bo (C_*, ∂_*) verižni kompleks abelovih grup in G abelova grupa. Funktor $\mathrm{Hom}(\cdot, G)$ določa kohomologijo.

Stvarno kazalo