Karakteristični razredi vektorskih svežnjev

Luka Horjak (luka1.horjak@gmail.com)

26. februar 2024

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Izbrana poglavja iz topologije: Karakteristični razredi vektorskih svežnjev v letu 2023/24. Predavatelj v tem letu je bil izr. prof. dr. Jaka Smrekar. Vaje je vodil asist. dr. Jure Kališnik.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

Del I

Predavanja

1 Kohomologija

1.1 Aksiomatična kohomologija

Definicija 1.1.1. Naj bo R komutativen kolobar in $\underline{\mathrm{Top}_2}$ kategorija topoloških parov z zveznimi preslikavami. Naj bo $\kappa\colon \underline{\mathrm{Top}_2} \to \underline{\mathrm{Top}_2}$ funktor, ki objektu (X, A) priredi $(A, \emptyset)$, morfizmu $f\colon (X, A) \to (Y, B)$ pa $f|_A$. *Kohomološka teorija* z vrednostmi v $\underline{{}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}}$ je sestavljena iz zaporedja kofunktorjev $h^n\colon \underline{\mathrm{Top}_2} \to \underline{{}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}}$ in naravnih transformacij $\delta^{n-1}\colon h^{n-1} \circ \kappa \to h^n$, ki zadošča naslednjim aksiomom:

- Homotopija: Če je $F\colon (X, A) \times I \to (Y, B)$ homotopija parov, velja $h^n(F_0) = h^n(F_1)$ za vsak n.
- Eksaktnost: Zaporedje

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & h^n(X,A) \arrow[r] & h^n(X,\emptyset) \arrow[r] & h^n(A,\emptyset) \arrow[dll, "\delta^n_{(X,A)}"'] & \\
& h^{n+1}(X,A) \arrow[r] & h^{n+1}(X,\emptyset) \arrow[r] & h^{n+1}(A,\emptyset) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

  v $\underline{{}_{\mathrm{R}}\mathrm{Mod}}$ je eksaktno.
- Izrez: Naj bo (X, A) par in $U \subseteq A$. Denimo, da obstaja taka zvezna preslikava $\tau\colon X \to I$, da je $U \subseteq \tau^{-1}(0) \subseteq \tau^{-1}([0, 1)) \subseteq A$. Tedaj je z inkluzijo inducirani morfizem $h^n(X, A) \to h^n(X \setminus U, A \setminus U)$ izomorfizem za vsak n.

Zaporedju modulov $\{h^n(\bullet) \mid n \in \mathbb{Z}\}$ pravimo *koeficienti teorije*. Kohomološko teorijo v celoti označimo s h^*. Pišemo $h^n(X) = h^n(X, \emptyset)$.

Opomba 1.1.1.1. Ker je δ^{n-1} naravna transformacija, vsaka zvezna preslikava parov $f\colon (A, X) \to (Y, B)$ inducira morfizem eksaktnih zaporedij.

Definicija 1.1.2. Če velja $h^n(\bullet) = 0$ za vse $n \neq 0$, pravimo, da gre za *običajno kohomološko teorijo* s koeficienti v R-modulu $h^0(\bullet)$.

Izrek 1.1.3 (Eksaktno zaporedje trojice)**.** Za dano trojico $B \subset A \subset X$ je zaporedje

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & h^n(X,A) \arrow[r] & h^n(X,B) \arrow[r] & h^n(A,B) \arrow[dll, "\delta^n_{(X,A,B)}"'] & \\
& h^{n+1}(X,A) \arrow[r] & h^n(X,B) \arrow[r] & h^n(A,B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

eksaktno, kjer je $\delta^n_{(X,A,B)}$ takšna, da diagram

$$\begin{tikzcd}
h^n(A,B) \arrow[r] \arrow[dr, "\delta^n_{(X,A,B)}"'] & h^n(A,\emptyset) \arrow[d, "\delta^n_{(X,A)}"] \\
& h^{n+1}(X,A)
\end{tikzcd}$$

komutira.

Dokaz. Oglejmo si naslednji diagram:

$$\begin{tikzcd}
h^{n-1}(B) \arrow[dr] \arrow[dd, bend right] & & h^n(X,A) \arrow[dl, "\alpha"'] \arrow[dd, bend left] \\
& h^n(X,B) \arrow[dl, "\beta"'] \arrow[dr] & \\
h^n(A,B) \arrow[dr] \arrow[dd, bend right, "\delta^n_{(X,A,B)}"'] & & h^n(X) \arrow[dl] \arrow[dd, bend left] \\
& h^n(A) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
h^{n+1}(X,A) \arrow[dr, "\gamma"] & & h^n(B) \arrow[dl] \\
& h^{n+1}(X,B) &
\end{tikzcd}$$

Vsako izmed barvitih zaporedij je eksaktno po definiciji homološke teorije. Diagram je komutativen, saj δ naravne transformacije. Od tod takoj dobimo $\delta^n_{(X,A,B)} \circ \beta = 0$ in $\gamma \circ \delta^n_{(X,A,B)} = 0$.

Opazimo, da diagram inkluzij

$$\begin{tikzcd}
(X,A) \arrow[r, hook] \arrow[d, hook] & (X,B) \arrow[d, hook] \\
(A,A) \arrow[r, hook] & (A,B)
\end{tikzcd}$$

komutira, zato komutira tudi diagram

$$\begin{tikzcd}
h^n(A,B) & h^n(X,B) \arrow[l, "\beta"'] \\
h^n(A,A) \arrow[u] & h^n(X,A). \arrow[l] \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Ker je $h^n(A,A) = 0$, je tako tudi $\beta \circ \alpha = 0$. Sledi, da je iskano zaporedje verižni kompleks. Eksaktnost sledi iz lovljenja po diagramu.[1] □

Trditev 1.1.4. Če je $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ homotopska ekvivalenca parov, so morfizmi $f^* = h^n(f)\colon h^n(Y,B) \to h^n(X,A)$ izomorfizmi.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.1.5. Če je $f\colon (X,A) \to (Y,B)$ preslikava, za katero sta f in $f|_A$ homotopski ekvivalenci, so $f^*\colon h^n(Y,B) \to h^n(X,A)$ izomorfizmi.

[1] Rezultatu pravimo tudi *lema o kiti*.

23. februar 2024

Dokaz. Uporabimo lemo o petih na diagramu

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & h^{n-1}(B) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"', "\cong"] & h^n(Y,B) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"'] & h^n(X) \arrow[r] \arrow[d, "f^*"', "\cong"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & h^{n-1}(B) \arrow[r] & h^n(Y,B) \arrow[r] & h^n(X) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

□

Trditev 1.1.6. Obstaja izomorfizem[2] $\sigma\colon h^{k-1}(S^{n-1},\{e_1\}) \to h^k(S^n,\{e_1\})$.

Dokaz. Imamo diagram inkluzij

$$\begin{tikzcd} (S^n, S^n \setminus \{-e_{n+1}\}) & (S^n_-, S^n_- \setminus \{-e_{n+1}\}) \arrow[l, hook'] \\ (S^n, S^n_+) \arrow[u, hook] & (S^n_-, S^{n-1}), \arrow[l, hook'] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

ki seveda komutira. Tako dobimo sledeč komutativen diagram:

$$\begin{tikzcd} & h^k(S^n, S^n \setminus \{-e_{n+1}\}) \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[d, "\alpha_2"'] & h^k(S^n_-, S^n_- \setminus \{-e_{n+1}\}) \arrow[d, "\alpha_3"] & \\ h^{k-1}(S^n_+,\{e_1\}) \arrow[r] & h^k(S^n, S^n_+) \arrow[r, "\beta"'] \arrow[d] & h^k(S^n_-, S^{n-1}) \arrow[r] & h^k(S^n_-,\{e_1\}) \\ h^k(S^n_+,\{e_1\}) & h^k(S^n,\{e_1\}) \arrow[l] & h^{k-1}(S^{n-1},\{e_1\}) \arrow[u] & h^{k-1}(S^n_-,\{e_1\}). \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Morfizem α_1 je izomorfizem po lastnosti izreza, α_2 in α_3 pa sta izomorfizma po prejšnji trditvi. Sledi, da je tudi β izomorfizem. Ker pa je $h^l(S^n_*,\{e_1\}) = 0$ za vse l po prejšnji trditvi, dobimo

$$h^k(S^n,\{e_1\}) \cong h^k(S^n,S^n_+) \cong h^k(S^n_-,S^{n-1}) \cong h^{k-1}(S^{n-1},\{e_1\}).$$

□

Posledica 1.1.6.1. Velja $h^k(S^n,\{e_1\}) \cong h^{k-n}(\{e_1\})$.

Definicija 1.1.7. Triada (X,A,B), pri čemer je $X = A \cup B$, je *izrezna*, če so morfizmi $i^*\colon h^n(X,A) \to h^n(B, A\cap B)$ izomorfizmi.

Opomba 1.1.7.1. Izrezna triada (X,A,B) inducira komutativno lestev

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & h^n(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"', "\cong"] & h^n(X) \arrow[r] \arrow[d] & h^n(A) \arrow[r] \arrow[d] & h^{n+1}(X,A) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"', "\cong"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & h^n(B, A\cap B) \arrow[r] & h^n(B) \arrow[r] & h^n(A\cap B) \arrow[r] & h^{n+1}(B, A\cap B) \arrow[r] & \cdots, \end{tikzcd}$$

[2] *Suspenzijski izomorfizem.*

in njeno pripadajoče *Mayer-Vietorisovo zaporedje*. Podobno v primeru, ko je $(A \cup B, A, B)$ izrezna triada za $A \cup B \subset X$, dobimo komutativno lestev

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & h^n(X, A \cup B) \arrow[r] \arrow[d] & h^n(X, A) \arrow[r] \arrow[d] & h^n(A \cup B, A) \arrow[r] \arrow[d, "i^*"', "\cong"] & h^{n+1}(X, A \cup B) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & h^n(X, B) \arrow[r] & h^n(X, A \cap B) \arrow[r] & h^n(B, A \cap B) \arrow[r] & h^{n+1}(X, B) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

in njeno pripadajoče Mayer-Vietorisovo zaporedje.

Del II

Vaje

2 Vektorski svežnji

2.1 Podmnogoterosti

Definicija 2.1.1. Množica $M \subseteq \mathbb{R}^n$ je *gladka, vložena podmnogoterost* dimenzije m, če za vsako točko $p \in M$ obstaja njena okolica U v $\mathbb{R}^n$ in difeomorfizem $\Phi\colon U \to \Phi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$, za katerega je $\Phi(U \cap M) = \mathbb{R}^m \times \{0\}^{n-m}$. Preslikavi $\Phi|_{U\cap M}$ pravimo *lokalna karta*, preslikavi $\left(\Phi|_{U\cap M}\right)^{-1}$ pa *lokalna parametrizacija*.

Definicija 2.1.2. Naj bo $M \subseteq \mathbb{R}^n$ gladka, vložena podmnogoterost in $p \in M$. *Tangentni prostor* M v točki p je množica

$$\mathrm{T}_p M = \left\{\dot{\gamma}(0) \mid \gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M\right\}.$$

Trditev 2.1.3. Prostor $\mathrm{T}_p M$ je vektorski podprostor $\mathbb{R}^n$ z bazo

$$\left\{\frac{\partial r}{\partial x_i}(0) \;\middle|\; i \le m\right\},$$

kjer je r lokalna parametrizacija M v neki okolici p, za katero je $r(0) = p$.

Dokaz. Naj bo $\gamma\colon (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ gladka pot z $\gamma(0) = p$. Predpostavimo še, da γ slika v $M \cap U$, ki je parametrizirana z $r = \Phi^{-1}$. Tedaj je

$$\Phi \circ \gamma = (v_1, \dots, v_m, 0)$$

pot v $\mathbb{R}^n$. Tako dobimo

$$\dot{\gamma}(0) = (r \circ \dot{\Phi} \circ \gamma)(0) = dr \cdot \dot{v}(0) = \sum_{i=1}^{m} v_i(0) \frac{\partial r}{\partial x_i}(0).$$

Vsi bazni elementi so elementi tangentnega prostora, saj jih dobimo s potmi s parametrizacijo

$$t \mapsto r(0, \dots, t, 0, \dots, 0).$$

$\square$

Stvarno kazalo