Teorija mere

Luka Horjak (luka1.horjak@gmail.com)

19. februar 2024

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Teorija mere v letu 2023/24. Predavatelj v tem letu je bil doc. dr. Marko Kandić.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Mere in σ-algebre

1.1 σ-algebre in Borelove množice

19. februar 2024

Definicija 1.1.1. Naj bo X neprazna množica. Družina $\mathcal{A}$ podmnožic X je *σ-algebra*, če ima naslednje lastnosti:

i) Velja $X \in \mathcal{A}$.

ii) Če je $A \in \mathcal{A}$, je tudi $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}$.

iii) Če je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, je tudi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Pravimo, da je $(X, \mathcal{A})$ *merljiv prostor*.

Opomba 1.1.1.1. Velja tudi $\emptyset \in \mathcal{A}$, poleg tega pa $\mathcal{A}$ vsebuje vse števne preseke svojih elementov.

Trditev 1.1.2. Naj bo $\mathcal{B}$ družina podmnožic neprazne množice X. Tedaj je presek vseh σ-algeber, ki vsebujejo $\mathcal{B}$, σ-algebra. Označimo jo s $\sigma(B)$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.1.3. Naj bo (X, τ) topološki prostor. *Borelova σ-algebra* prostora X je σ-algebra $\mathcal{B}_X = \sigma(\tau)$.

Trditev 1.1.4. Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ je generirana z vsako od množic

$$\begin{array}{llll} \{(a,b) \mid a<b\}\,, & \{[a,b] \mid a<b\}\,, & \{(a,b] \mid a<b\}\,, & \{[a,b) \mid a<b\}\,, \\ \{(a,\infty) \mid a\in\mathbb{R}\}\,, & \{(\infty,b) \mid b\in\mathbb{R}\}\,, & \{[a,\infty) \mid a\in\mathbb{R}\}\,, & \{(\infty,b] \mid b\in\mathbb{R}\}\,. \end{array}$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

1.2 Pozitivne mere

Definicija 1.2.1. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Preslikava $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je *pozitivna mera*, če velja naslednje:

i) Velja $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Če so $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disjunktne množice, je

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Pravimo, da je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *merljiv prostor s pozitivno mero.*

Definicija 1.2.2. Naj bo $X \neq \emptyset$ in $x \in X$. *Diracova delta* je mera na $\mathcal{P}(X)$, podana s predpisom

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Opomba 1.2.2.1. Prostor $(X, \mathcal{P}(X), \delta_x)$ je merljiv prostor s pozitivno mero.

Definicija 1.2.3. Naj bo (X, μ) merljiv prostor s pozitivno mero.

i) Mera μ je *končna*, če je $\mu(X) < \infty$. Pravimo, da je prostor X *končen merljiv.*

ii) Mera μ je *σ-končna*, če velja

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

kjer je $\mu(A_n) < \infty$. Pravimo, da je X *σ-končen* merljiv prostor.

iii) Mera μ je *verjetnostna*, če je $\mu(X) = 1$.

Lema 1.2.4. Naj bo $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ končno aditivna funkcija. Če za množici $A, B \in \mathcal{A}$ velja $A \subseteq B$, je $\mu(A) \le \mu(B)$.

Dokaz. Zapišemo lahko

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \ge \mu(A). \qquad \square$$

Trditev 1.2.5. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Tedaj za vse $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz. Za množice

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \qquad \square$$

Trditev 1.2.6. Za merljiv prostor (X, μ) s pozitivno mero so naslednje trditve ekvivalentne:

i) Mera μ je σ-končna.

ii) Zapišemo lahko
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$
pri čemer je $A_n \subseteq A_{n+1}$ in $\mu(A_n) < \infty$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

iii) Zapišemo lahko
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
za disjunktne množice A_n, za katere velja $\mu(A_n) < \infty$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.2.7. Končno aditivna funkcija $\mu \colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ za merljiv prostor (X, μ) je pozitivna mera natanko tedaj, ko za vsako naraščajoče zaporedje množic $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ velja
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz. Denimo najprej, da je μ pozitivna mera. Tedaj je res
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \setminus A_{n-1}\right) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Predpostavimo sedaj, da velja drugi pogoj in naj bodo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disjunktne množice. Tedaj velja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\le k} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$
zato je μ res pozitivna. □

Opomba 1.2.7.1. Podobna trditev za preseke ne velja.

2 Merljive funkcije

3 Integral

4 Kompleksne mere

5 Mere na lokalno kompaktnih Hausdorffovih prostorih

Stvarno kazalo