Teorija mere

Luka Horjak (luka1.horjak@gmail.com)

26. februar 2024

Kazalo

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Teorija mere v letu 2023/24. Predavatelj v tem letu je bil doc. dr. Marko Kandić.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Mere in σ-algebre

1.1 σ-algebre in Borelove množice

19. februar 2024

Definicija 1.1.1. Naj bo X neprazna množica. Družina $\mathcal{A}$ podmnožic X je *σ-algebra*, če ima naslednje lastnosti:

i) Velja $X \in \mathcal{A}$.

ii) Če je $A \in \mathcal{A}$, je tudi $A^{\mathsf{c}} \in \mathcal{A}$.

iii) Če je $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, je tudi

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}.$$

Pravimo, da je $(X, \mathcal{A})$ *merljiv prostor*, množicam $\mathcal{A}$ pa *merljive množice*.

Opomba 1.1.1.1. Velja tudi $\emptyset \in \mathcal{A}$, poleg tega pa $\mathcal{A}$ vsebuje vse števne preseke svojih elementov.

Trditev 1.1.2. Naj bo $\mathcal{B}$ družina podmnožic neprazne množice X. Tedaj je presek vseh σ-algeber, ki vsebujejo $\mathcal{B}$, σ-algebra. Označimo jo s $\sigma(B)$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.1.3. Naj bo (X, τ) topološki prostor. *Borelova σ-algebra* prostora X je σ-algebra $\mathcal{B}_X = \sigma(\tau)$.

Trditev 1.1.4. Borelova σ-algebra na $\mathbb{R}$ je generirana z vsako od množic

$$\begin{array}{cccc} \{(a,b) \mid a<b\}, & \{[a,b] \mid a<b\}, & \{(a,b] \mid a<b\}, & \{[a,b) \mid a<b\}, \\ \{(a,\infty) \mid a\in\mathbb{R}\}, & \{(\infty,b) \mid b\in\mathbb{R}\}, & \{[a,\infty) \mid a\in\mathbb{R}\}, & \{(\infty,b] \mid b\in\mathbb{R}\}. \end{array}$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

1.2 Pozitivne mere

Definicija 1.2.1. Naj bo $(X, \mathcal{A})$ merljiv prostor. Preslikava $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ je *pozitivna mera*, če velja naslednje:

i) Velja $\mu(\emptyset) = 0$.

ii) Če so $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disjunktne množice, je

$$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

Pravimo, da je $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *merljiv prostor s pozitivno mero.*

Definicija 1.2.2. Naj bo $X \neq \emptyset$ in $x \in X$. *Diracova delta* je mera na $\mathcal{P}(X)$, podana s predpisom

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

Opomba 1.2.2.1. Prostor $(X, \mathcal{P}(X), \delta_x)$ je merljiv prostor s pozitivno mero.

Definicija 1.2.3. Naj bo (X, μ) merljiv prostor s pozitivno mero.

i) Mera μ je *končna*, če je $\mu(X) < \infty$. Pravimo, da je prostor X *končen merljiv.*

ii) Mera μ je *σ-končna*, če velja

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$

kjer je $\mu(A_n) < \infty$. Pravimo, da je X *σ-končen* merljiv prostor.

iii) Mera μ je *verjetnostna*, če je $\mu(X) = 1$.

Lema 1.2.4. Naj bo $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ končno aditivna funkcija. Če za množici $A, B \in \mathcal{A}$ velja $A \subseteq B$, je $\mu(A) \leq \mu(B)$.

Dokaz. Zapišemo lahko

$$\mu(B) = \mu(A) + \mu(B \setminus A) \geq \mu(A). \qquad \square$$

Trditev 1.2.5. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero. Tedaj za vse $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq A$ velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz. Za množice

$$B_n = A_n \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} A_k$$

velja

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \qquad \square$$

Trditev 1.2.6. Za merljiv prostor (X, μ) s pozitivno mero so naslednje trditve ekvivalentne:

i) Mera μ je σ-končna.

ii) Zapišemo lahko
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n,$$
pri čemer je $A_n \subseteq A_{n+1}$ in $\mu(A_n) < \infty$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.

iii) Zapišemo lahko
$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$
za disjunktne množice A_n, za katere velja $\mu(A_n) < \infty$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.2.7. Končno aditivna funkcija $\mu\colon \mathcal{A} \to [0, \infty]$ za merljiv prostor (X, μ) je pozitivna mera natanko tedaj, ko za vsako naraščajoče zaporedje množic $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ velja
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz. Denimo najprej, da je μ pozitivna mera. Tedaj je res
$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(A_1 \cup \bigcup_{n=2}^{\infty} A_n \setminus A_{n-1}\right) = \mu(A_1) + \sum_{n=2}^{\infty} \mu(A_n \setminus A_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$
Predpostavimo sedaj, da velja drugi pogoj in naj bodo $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ disjunktne množice. Tedaj velja
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} \mu(A_n) = \lim_{k\to\infty} \mu\left(\bigcup_{n\le k} A_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right),$$
zato je μ res pozitivna. □

Posledica 1.2.7.1. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj bo $(A_n)_n$ padajoče zaporedje merljivih množic. Če je $\mu(A_1) < \infty$, velja
$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Dokaz. Uporabimo prejšnjo trditev na zaporedju $(A_1 \setminus A_n)_n$. □

26. februar 2024

1.3 Napolnitev prostora z mero

Definicija 1.3.1. Merljiv prostor $(X, \mathcal{A}, \mu)$ s pozitivno mero je *poln*, če za vsako množico $A \in \mathcal{A}$, za katero je $\mu(A) = 0$, tudi za vse $B \subseteq A$ velja $\mu(B) = 0$.

Definicija 1.3.2. Množica $A \in \mathcal{A}$ je *μ-ničelna*, če je $\mu(A) = 0$.

Opomba 1.3.2.1. Števna unija μ-ničelnih množic je spet μ-ničelna.

Izrek 1.3.3. Naj bo $(X, \mathcal{A}, \mu)$ merljiv prostor s pozitivno mero in naj bo

$$\overline{\mathcal{A}} = \{B = A \cup S \mid A \in \mathcal{A} \land \exists N \in \mathcal{A} \colon \mu(N) = 0 \land S \subseteq N\}.$$

Tedaj je $\overline{\mathcal{A}}$ σ-algebra. S predpisom $\overline{\mu}(A \cup S) = \mu(A)$ postane $(X, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ poln merljiv prostor s pozitivno mero.

Dokaz. Preverimo najprej, da je $\overline{\mathcal{A}}$ σ-algebra. Očitno je $X \in \overline{\mathcal{A}}$. Ker je

$$(A \cup S)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap S^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap (N^{\mathsf{c}} \cup N \setminus S) = (A^{\mathsf{c}} \cap N^{\mathsf{c}}) \cup (A^{\mathsf{c}} \cap N \setminus S),$$

kar je očitno element $\overline{\mathcal{A}}$, je družina zaprta za preseke. Zaprtost za števne unije je očitna.

Sedaj preverimo, da je $\overline{\mu}$ pozitivna mera. Mera je dobro definirana, saj iz $A_1 \cup S_1 = A_2 \cup S_2$ sledi

$$\mu(A_1) = \mu(A_1 \cup N_1) \geq \mu(A_2)$$

in simetrično. Ker je $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$ in

$$\overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup S_n)\right) = \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n \cup S_n),$$

je mera pozitivna.

Denimo sedaj, da velja $\overline{\mu}(N) = 0$ za nek $N \in \overline{\mathcal{A}}$ in $B \subseteq N$. Ker je $N \subseteq M$ za nek $M \in \mathcal{A}$ z $\mu(M) = 0$, je tak tudi B, zato je $\mu(B) = 0$. Prostor je zato res poln. $\square$

Definicija 1.3.4. *Lebesgueova σ-algebra* $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ na $\mathbb{R}$ je napolnitev Borelove.

Izrek 1.3.5. Naj bo C Cantorjeva množica. Tedaj je $|\mathcal{L}_{\mathbb{R}}| = 2^{|C|}$.

Dokaz. Cantorjeva množica je μ-ničelna, zato je $|\mathcal{L}_{\mathbb{R}}| \geq 2^{|C|}$. Ker pa je $\mathcal{L}_R \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ in je $|C| = |\mathbb{R}|$, sledi tudi obratna neenakost. $\square$

1.4 Zunanje mere

Definicija 1.4.1. *Zunanja mera* na $X \neq \emptyset$ je funkcija $\xi \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$, za katero velja naslednje:

i) Velja $\xi(\emptyset) = 0$.

ii) Če je $A \subseteq B$, je $\xi(A) \leq \xi(B)$.

iii) Če so $(A_n)_n \subseteq X$ množice, velja

$$\xi\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \xi(A_n).$$

Trditev 1.4.2. Naj bo $\mathcal{S}$ družina podmnožic neprazne množice X, pri čemer je $\emptyset, X \in \mathcal{S}$. Naj bo $\mu \colon \mathcal{S} \to [0, \infty]$ funkcija, ki zadošča $\mu(\emptyset) = 0$. Definiramo $\mu^* \colon \mathcal{P}(X) \to [0, \infty]$ s predpisom

$$\mu^*(Y) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \;\middle|\; (A_n)_n \subseteq \mathcal{S} \land Y \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\}.$$

Tedaj je μ^* zunanja mera na X.

Dokaz. Očitno je $\mu^*(\emptyset) = 0$. Prav tako ni težko videti, da je μ^* monotona. Sedaj za vsak A_n izberimo pokritje, za katerega je[1]

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_{n,k}) < \mu^*(A_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Tedaj je

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n,k \in \mathbb{N}} \mu(A_{n,k}) < \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n) + \varepsilon. \qquad \square$$

Definicija 1.4.3. Naj bo ξ zunanja mera na X. Množica $A \subseteq X$ je ξ-*merljiva*, če velja

$$\xi(Y) = \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^{\mathsf{x}})$$

za vse $Y \subseteq X$.

Opomba 1.4.3.1. Ekvivalentno iz $\xi(Y) < \infty$ sledi

$$\xi(Y) \geq \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^{\mathsf{c}}).$$

Izrek 1.4.4 (Carathéodory)**.** Naj bo ξ zunanja mera za X. Tedaj je

$$\mathcal{A}_\xi = \{A \subseteq X \mid A \text{ je } \xi\text{-merljiva}\}$$

σ-algebra na X, $\xi|_{\mathcal{A}_\xi}$ pozitivna mera in $(X, \mathcal{A}_\xi, \xi|_{\mathcal{A}_\xi})$ poln merljiv prostor.

[1] Če je katera izmed $\mu^*(A_n) = \infty$, je ta lastnost očitna.

Dokaz. Najprej opazimo, da je $X \in \mathcal{A}_\xi$, in da je $\mathcal{A}_\xi$ zaprta za komplemente. Pokažimo, da je zaprta tudi za končne unije – naj bosta $A, B \in \mathcal{A}_\xi$. Tedaj je

$$\begin{aligned}
\xi\left(Y \cap (A \cup B)\right) + \xi\left(Y \cap (A \cup B)^{\mathsf{c}}\right) &= \xi\left((Y \cap A) \cup (Y \cap B \cap A^{\mathsf{c}})\right) + \xi\left(Y \cap A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}\right) \\
&\leq \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap B \cap A^{\mathsf{c}}) + \xi\left(Y \cap A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}\right) \\
&= \xi(Y \cap A) + \xi(Y \cap A^{\mathsf{c}}) \\
&= \xi(Y).
\end{aligned}$$

□

Stvarno kazalo