Splošna topologija

Luka Horjak (lukahorjak@student.uni-lj.si)

9. februar 2022

Kazalo

Uvod **3**

1 Prostori in preslikave **4**
- 1.1 Topološki prostori . . . 4
- 1.2 Zvezne preslikave . . . 5
- 1.3 Homeomorfizmi . . . 6
- 1.4 Baze in predbaze . . . 7
- 1.5 Podprostori . . . 9

2 Topološke lastnosti **11**
- 2.1 Ločljivost . . . 11
- 2.2 Povezanost . . . 14
- 2.3 Kompaktnost . . . 16

3 Topologije na prostorih preslikav **20**
- 3.1 Prostori preslikav . . . 20
- 3.2 Preslikave na normalnih prostorih . . . 22
- 3.3 Stone-Weierstrassov izrek . . . 26

4 Dodatek **28**
- A Tabela topoloških lastnosti . . . 28

Literatura **29**

Stvarno kazalo **30**

Uvod

V tem dokumentu so zbrani moji zapiski s predavanj predmeta Splošna topologija v letu 2021/22. Predavatelj v tem letu je bil prof. dr. Petar Pavešić.

Zapiski niso popolni. Manjka večina zgledov, ki pomagajo pri razumevanju definicij in izrekov. Poleg tega nisem dokazoval čisto vsakega izreka, pogosto sem kakšnega označil kot očitnega ali pa le nakazal pomembnejše korake v dokazu.

Zelo verjetno se mi je pri pregledu zapiskov izmuznila kakšna napaka – popravki so vselej dobrodošli.

1 Prostori in preslikave

»Splošna topologija je LMN na steroidih.«

– Luka Horjak

1.1 Topološki prostori

5. oktober 2021

Definicija 1.1.1. Naj bo X množica. *Topologija* na X je družina τ podmnožic X, ki zadošča pogojem:

i) $\emptyset, X \in \tau$,

ii) poljubna unija elementov τ je element τ,

iii) poljuben končen presek elementov τ je element τ.

Topološki prostor je par (X, τ). Elementom τ pravimo *odprte množice*, njihovim komplementom pa *zaprte*.

Opomba 1.1.1.1. V metričnih prostorih (X, d) odprte množice[1] tvorijo topologijo τ_d.

Definicija 1.1.2. Topološki prostor (X, τ) je *metrizabilen*, če obstaja taka metrika d na X, da je $\tau = \tau_d$ pri zgornjih oznakah.

Opomba 1.1.2.1. Za metriko $d'(x, x') = \min \{d(x, x'), 1\}$ velja $\tau_d = \tau_{d'}$.

[1] Tu vzamemo definicijo odprtih množic v metričnih prostorih.

1.2 Zvezne preslikave

12. oktober 2021

Definicija 1.2.1. Funkcija $f\colon (X, \tau) \to (X', \tau')$ je *zvezna*, če je praslika vsake odprte množice odprta, oziroma

$$V \in \tau' \implies f^{-1}(V) \in \tau.$$

Zveznim funkcijam pravimo *preslikave*.

Opomba 1.2.1.1. Zvezne preslikave med metričnimi prostori so zvezne tudi glede na z metrikami porojene topologije.

Opomba 1.2.1.2. Identiteta $\mathrm{id}\colon (X, \tau) \to (X, \tau')$ je zvezna natanko tedaj, ko je $\tau' \subseteq \tau$. Pravimo, da je topologija τ *finejša*, τ' pa *bolj groba*.

Trditev 1.2.2. Kompozitum zveznih preslikav je zvezna preslikava.

Dokaz. Naj bosta $f\colon (X, \tau) \to (X', \tau')$ in $g\colon (X', \tau') \to (X'', \tau'')$ zvezni. Sledi

$$V \in \tau'' \implies g^{-1}(V) \in \tau' \implies (g \circ f)^{-1}(V) \in \tau. \qquad \square$$

Opomba 1.2.2.1. Množico vseh zveznih preslikav med (X, τ) in (Y, τ') označimo z $\mathcal{C}((X, \tau), (Y, \tau'))$, oziroma $\mathcal{C}(X, Y)$.

Izrek 1.2.3. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) $f\colon (X, \tau) \to (Y, \tau')$ je zvezna,

ii) $V \in \tau' \implies f^{-1}(V) \in \tau$,

iii) $B^{\mathsf{c}} \in \tau' \implies (f^{-1}(B))^{\mathsf{c}} \in \tau$,

iv) $\forall A \subseteq X\colon f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Dokaz. Prvi dve trditvi sta očitno ekvivalentni po definiciji zveznosti. 2. in 3. trditev sta očitno ekvivalentni, saj velja $f^{-1}(B^{\mathsf{c}}) = f^{-1}(B)^{\mathsf{c}}$. Dokažimo še ekvivalenco 3. in 4. trditve.

Naj bo $A \subseteq X$ poljubna in predpostavimo, da velja 3. trditev. Sledi, da je

$$A \subseteq f^{-1}(f(A)) \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)}).$$

Desna stran je zaprta množica, zato je $\overline{A} \subseteq f^{-1}(\overline{f(A)})$ in

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}.$$

Sedaj predpostavimo, da velja 4. točka. Naj bo B poljubna zaprta podmnožica Y. Potem je

$$f(\overline{f^{-1}(B)}) \subseteq \overline{f(f^{-1}(B))} \subseteq \overline{B} = B.$$

Sledi, da je

$$\overline{f^{-1}(B)} \subseteq f^{-1}(B),$$

zato je $f^{-1}(B)$ zaprta. $\square$

1.3 Homeomorfizmi

19. oktober 2021

Definicija 1.3.1. Funkcija $f: X \to X'$ določa *homeomorfizem* med prostoroma (X, τ) in (X', τ'), če je f bijekcija in obenem inducirana bijekcija $f: \tau \to \tau'$. Pišemo $(X, \tau) \approx (X', \tau)$ in pravimo, da sta prostora *homeomorfna*.

Definicija 1.3.2. Funkcija je *odprta*, če je slika vsake odprte podmnožice X odprta v X'. Simetrično definiramo *zaprte* funkcija.

Trditev 1.3.3. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) $f: X \to X'$ je homeomorfizem,

ii) f je bijekcija, f in f^{-1} sta zvezni,

iii) f je zvezna, odprta bijekcija,

iv) f je zvezna, zaprta bijekcija.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.3.4. *Topološka lastnost* je vsaka lastnost topologije, ki se ohranja pri homeomorfizmih.

Opomba 1.3.4.1. Kompaktnost in povezanost sta topološki lastnosti, polnost pa ne.

Definicija 1.3.5. Definiramo naslednje množice:

i) $B^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| \leq 1\}$ – zaprta enotska krogla

ii) $\mathring{B}^n = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| < 1\}$ – odprta enotska krogla

iii) $S^{n-1} = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\vec{x}\| = 1\}$ – enotska sfera

Trditev 1.3.6. Velja $\mathring{B}^n \approx \mathbb{R}^n$.

Dokaz. Vzamemo homeomorfizem

$$f(\vec{x}) = \frac{\vec{x}}{1 - \|\vec{x}\|}.$$ □

Trditev 1.3.7. Velja $S^{n-1} \setminus \{(0, 0, \ldots, 1)\} \approx \mathbb{R}^{n-1}$.

Dokaz. Naredimo inverzijo v točki $(0, 0, \ldots, 1)$. □

Opomba 1.3.7.1. Zgornji preslikavi pravimo *stereografska projekcija*.

Opomba 1.3.7.2. Posebej velja $S^2 \approx \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Temu prostoru pravimo *Riemannova sfera*.

1.4 Baze in predbaze

Definicija 1.4.1. Družina odprtih množic $\mathcal{B} \subseteq \tau$ je *baza* topologije τ, če lahko vsak element τ dobimo kot unijo elementov $\mathcal{B}$.

Trditev 1.4.2. Naj bo $\mathcal{B}$ baza topologije τ množice x. $A \subseteq X$ je odprta natanko tedaj, ko za vsak $x \in A$ obstaja $B \in \mathcal{B}$, za katero je $x \in B$ in $B \subseteq A$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.4.3. Naj bo $f \colon (X, \tau) \to (X', \tau')$, $\mathcal{B}$ baza τ in $\mathcal{B}'$ baza τ'. Potem velja

i) f je zvezna natanko tedaj, ko je $f^{-1}(\mathcal{B}') \subseteq \tau$ in

ii) f je odprta natanko tedaj, ko je $f(\mathcal{B}) \subseteq \tau'$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.4.4. Naj bo $\mathcal{B}_x \subseteq \tau$ neka poddružina topologije, katere elementi vsebujejo x. Pravimo, da je $\mathcal{B}_x$ *lokalna baza* okolice pri x, če za vsak $U \in \tau$, ki vsebuje x, obstaja $B \in \mathcal{B}_x$, za katero je $B \subseteq U$.

Trditev 1.4.5. Naj bo $\mathcal{B}$ družina podmnožic X in τ množica unij elementov $\mathcal{B}$. Potem je τ topologija natanko tedaj, ko je $\mathcal{B}$ pokritje X in velja

$$\forall B_1, B_2 \in \mathcal{B}, x \in B_1 \cap B_2 \ \exists B \in \mathcal{B} \colon x \in B \wedge B \subseteq B_1 \cap B_2.$$

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.4.6. Naj bo $\mathcal{P}$ neko pokritje množice X. Družina $\mathcal{B}$ vseh končnih presekov elementov $\mathcal{P}$ je baza. Družini $\mathcal{P}$ pravimo *predbaza* baze $\mathcal{B}$.

Trditev 1.4.7. Naj bo $f \colon (X, \tau) \to (X', \tau')$ in $\mathcal{P}'$ predbaza za τ'. Potem je f zvezna natanko tedaj, ko je $f^{-1}(\mathcal{P}') \subseteq \tau$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.4.8. Preslikava $f \colon Z \to X_1 \times \cdots \times X_n$ je zvezna za produktno topologijo[2] natanko tedaj, ko so zvezne vse komponente f.

Dokaz. Očitno je trditev dovolj dokazati za $n = 2$. Naj bo $f \colon Z \to X \times Y$ zvezna. Potem sta komponenti kompozitum projekcije z f, ki sta obe zvezni.

Če sta obe komponenti zvezni, pa ni težko videti, da so praslike pasov odprte, ti pa tvorijo predbazo. □

Definicija 1.4.9. Prostor je *1-števen*, če za vsak x obstaja števna lokalna baza pri x. Prostor je *2-števen*, če ima števno bazo.

[2] Produktna topologija je topologija, ki jo dobimo iz baze $\{U_1 \times \cdots \times U_n \mid \forall i \colon U_i \in \tau_i\}$.

Trditev 1.4.10. Naj bo X 1-števen topološki prostor. Potem za vsak $A \in X$ velja, da je $\overline{A} = L(A) = \{x \mid x \text{ je limita zaporedja v } A\}$.

Dokaz. Za vsak $x \in \overline{A}$ obstaja števna lokalna baza, zato lahko za vsak člen zaporedja preprosto izberemo poljuben

$$a_n \in A \cap \bigcap_{i=1}^{n} B_i. \qquad \square$$

Trditev 1.4.11. Naj bo X 1-števen topološki prostor. $f \colon X \to Y$ je zvezna natanko tedaj, ko za vsak $A \subseteq X$ velja $f(L(A)) \subseteq L(f(A))$.

Dokaz. Uporabimo prejšnjo trditev in izrek 1.2.3. $\square$

Definicija 1.4.12. Množica $A \subseteq X$ je *gosta*, če je $\overline{A} = X$.

Definicija 1.4.13. Prostor (X, τ) je *separabilen*, če v njem obstaja števna gosta množica.

Izrek 1.4.14. Metrični prostor je 2-števen natanko tedaj, ko je separabilen.

Dokaz. Vsak 2-števen prostor je očitno separabilen – iz vsake bazične okolice vzamemo po eno točko.

Naj bo Q števna gosta podmnožica X. Sedaj preprosto vzamemo

$$\mathcal{B} = \{\mathcal{K}(q, r) \mid q \in Q, r \in \mathbb{Q}\}. \qquad \square$$

2. november 2021

1.5 Podprostori

Definicija 1.5.1. Naj bo (X, τ) topološki prostor in $A \subseteq X$. Množica

$$\tau_A = \{A \cap U \mid U \in \tau\}$$

je topologija na A, ki ji pravimo *inducirana* ali *podedovana topologija*. Prostor (A, τ_A) je *podprostor* prostora (X, τ).

Trditev 1.5.2. Zaprte množice v A so preseki A z zaprtimi množicami X.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.5.3. Naj bo $\mathcal{B}$ baza τ. Potem je

$$\mathcal{B}_A = \{B \cap A \mid B \in \mathcal{B}\}$$

baza inducirane topologije.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 1.5.4. Topološka lastnost je *dedna*, če se prenaša na podprostore.

Opomba 1.5.4.1. Separabilnost ni dedna lastnost, a se deduje na odprte podprostore.

Trditev 1.5.5. Naj bo $B \subseteq A \subseteq X$. Potem je

$$\operatorname{Cl}_A B = A \cap \operatorname{Cl}_X B, \quad \operatorname{Int}_A B \supseteq A \cap \operatorname{Int}_X B \quad \text{in} \quad \operatorname{Fr}_A B \subseteq A \cap \operatorname{Fr}_X B.$$

9. november 2021

Dokaz. Velja

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cl}_A B &= \bigcap \{F \mid B \subseteq F \subseteq A \wedge F \text{ je zaprta v } A\} \\
&= \bigcap \{A \cap F \mid B \subseteq F \subseteq X \wedge F \text{ je zaprta v } X\} \\
&= A \cap \operatorname{Cl}_X B.
\end{aligned}$$

Podobno je

$$\begin{aligned}
\operatorname{Int}_A B &= \bigcup \{U \mid U \subseteq A \wedge U \subseteq B \wedge U \text{ je odprta v } A\} \\
&= \bigcup \{A \cap U \mid U \subseteq X \wedge U \cap A \subseteq B \wedge U \text{ je odprta v } X\} \\
&\supseteq A \cap \left(\bigcup \{U \mid U \subseteq X \wedge U \subseteq B \wedge U \text{ je odprta v } X \text{ in } B\}\right) \\
&= A \cap \operatorname{Int}_X B.
\end{aligned}$$

Zadnja inkluzija je direktna posledica prejšnje enakosti in inkluzije. □

Trditev 1.5.6. Če je B odprta v A in A odprta v X, je B odprta v X. Podobno, če je B zaprta v A in A zaprta v X, je B zaprta v X.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.5.7. Inkluzija $i \colon (A, \tau_A) \hookrightarrow (X, \tau)$ je zvezna.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 1.5.8. Zožitev zvezne funkcije na podprostor je zvezna.

Dokaz. Velja $f|_A = f \circ i$. □

Izrek 1.5.9. Naj bo $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje za X. Potem velja

$$A \text{ je odprta v } X \iff \forall \lambda \colon A \cap X_\lambda \text{ je odprta v } X_\lambda.$$

Če je $\{X_\lambda\}$ zaprto in lokalno končno pokritje za X, velja

$$A \text{ je zaprta v } X \iff \forall \lambda \colon A \cap X_\lambda \text{ je zaprta v } X_\lambda.$$

Dokaz. Če je $A \cap X_\lambda$ odprta v X za vse λ, je A odprta v X, saj je

$$A = \bigcup_\lambda A \cap X_\lambda.$$

Naj bo sedaj $A \cap X_\lambda$ zaprta v X za vse λ.[3] Naj bo $x \in X \setminus A$ in U okolica x, ki seka končno mnogo elementov $\{X_\lambda\}$ – naj bodo to $X_{\lambda_1}, \dots, X_{\lambda_n}$. Sledi, da je

$$x \in U \Big\backslash \bigcup_{i=1}^n A \cap X_{\lambda_i},$$

kar je odprta okolica x, ki ne seka A. □

Izrek 1.5.10. Naj bo $\{X_\lambda\}$ odprto ali lokalno končno zaprto pokritje X in $f \colon X \to Y$ funkcija. Potem velja

$$f \text{ je zvezna} \iff \forall \lambda \colon f|_{X_\lambda} \text{ je zvezna.}$$

Dokaz. Naj bo $\{X_\lambda\}$ odprto pokritje. Za odprto množico $U \subseteq Y$ velja

$$f^{-1}(U) = \bigcup_\lambda f^{-1}(U) \cap X_\lambda = \bigcup_\lambda \left(f|_{X_\lambda} \right)^{-1}(U),$$

kar je odprto v X.

Naj bo $\{X_\lambda\}$ lokalno končno zaprto pokritje. Za zaprto množico $F \subseteq Y$ velja

$$f^{-1}(F) \cap X_\lambda = \left(f|_{X_\lambda} \right)^{-1}(F),$$

kar je zaprto v X. Po izreku 1.5.9 je torej $f^{-1}(F)$ zaprta. □

Definicija 1.5.11. Preslikava $f \colon X \to Y$ je *vložitev*, če je $f \colon X \to f(X)$ homeomorfizem.

Trditev 1.5.12. Naj bo $f \colon X \to Y$ injektivna preslikava.

i) Če je $f(X)$ odprt v Y, je f vložitev natanko tedaj, ko je odprta.

ii) Če je $f(X)$ zaprt v Y, je f vložitev natanko tedaj, ko je zaprta.

Dokaz. Če je $f(X)$ odprt podprostor, so podmnožice $f(X)$ odprte natanko tedaj, ko so odprte v Y. Sledi, da je $f \colon X \to f(X)$ odprta natanko tedaj, ko je odprta $f \colon X \to Y$. Podobno velja, če je $f(X)$ zaprt. □

[3] Obe preostali implikaciji sta direktna posledica definicije inducirane topologije.

2 Topološke lastnosti

»Saj to je standardno – fakultetna snov je lahka, osnovnošolska je tista težka.«

– asist. dr. Davorin Lešnik

2.1 Ločljivost

16. november 2021

Definicija 2.1.1. Pravimo, da topologija *loči* disjunktni množici $A, B \subseteq X$, če obstajata taki množici $U, V \in \tau$, da velja

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad B \cap U = \emptyset \quad \text{in} \quad A \cap V = \emptyset.$$

Pravimo, da topologija *ostro loči* množici, če sta v zgornji definiciji U in V disjunktni.

Definicija 2.1.2. Topološki prostor (X, τ) je *Hausdorffov*, če τ ostro loči vse točke.

Trditev 2.1.3. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) X je Hausdorffov
ii) Za vse $x \neq y$ obstaja tak $U \in \tau$, da je $x \in U$ in $y \notin \overline{U}$
iii) Diagonala[4] je zaprt podprostor v $X \times X$.

Dokaz. Če je prostor Hausdorffov, lahko preprosto vzamemo U iz definicije. Sledi, da $y \notin \overline{U}$. Če velja druga točka, pa lahko preprosto vzamemo $V = \overline{U}^{\mathsf{c}}$.

Naj bo $x \neq y$, U in V pa taki odprti množici, da je $x \in U$ in $y \in V$. U in V sta disjunktni natanko tedaj, ko $U \times V$ ne seka diagonale. Če je prostor Hausdorffov, lahko preprosto vzamemo U in V iz definicije. Obratno, če je diagonala zaprta, obstaja škatlasta okolica (x, y), ki ne seka diagonale, iz te pa dobimo želene okolice. □

Izrek 2.1.4. Naj bo Y Hausdorffov.

i) Vsaka končna podmnožica Y je zaprta
ii) Zaporedja v Y imajo največ eno limito
iii) Če sta $f, g\colon X \to Y$ zvezni, je $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\}$ zaprta v X
iv) Če se zvezni preslikavi $f, g\colon X \to Y$ ujemata na gosti podmnožici X, sta enaki
v) Graf zvezne preslikave $f\colon X \to Y$ je zaprt v $X \times Y$.

Dokaz. Prvi dve točki sta očitni.

Vidimo, da je (f, g) zvezna, velja pa $\{x \in X \mid f(x) = g(x)\} = (f, g)^{-1}(\Delta_x)$.

4. točka sledi iz 3. – če se preslikavi ujemata na neki množici, se ujemata tudi na zaprtju.

Za dokaz 5. točke definirajmo preslikavi $u, v\colon X \times Y \to Y$ z $u(x, y) = f(x)$ in $v(x, y) = y$. Množica točk ujemanja u in v je ravno graf $\Gamma_f = \{(x, y) \in X \times Y \mid y = f(x)\} \subseteq X \times Y$ funkcije f, ki je po 3. točki zaprt. □

[4] *Diagonala* je množica $\Delta_x = \{(x, x) \mid x \in X\}$.

Izrek 2.1.5. Naj bo X 1-števen in Y Hausdorffov. Potem je preslikava $f\colon X \to Y$ zvezna natanko tedaj, ko za vsako konvergentno zaporedje v X velja

$$f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n).$$

Dokaz. Privzemimo, da je f zvezna in opazujmo zaporedje (x_n) v X, ki konvergira proti x. Za poljubno okolico U točke $f(x)$ je zaradi zveznosti $f^{-1}(U)$ okolica točke x, kar pomeni, da so v $f^{-1}(U)$ skoraj vsi elementi zaporedja (x_n). Od tod pa sledi, da so v U skoraj vsi elementi zaporedja $(f(x_n))$, torej je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

Predpostavimo sedaj, da f ohranja limite. Naj bo x točka, ki je v zaprtju množice $A \subseteq X$, in naj bo $U_1, U_2, \ldots$ neka baza okolic za x. Tedaj lahko za vsak n izberemo točko $x_n \in A \cap U_1 \cap \cdots \cap U_n$ (ker je ta množica neprazna, saj je $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ odprta okolica x, ki je iz zaprtja A). Tako smo konstruirali zaporedje (x_n), ki konvergira proti točki x in so obenem vsi $f(x_n) \in f(A)$. Po predpostavki je

$$f(x) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) \in \overline{f(A)}.$$

To pa pomeni, da za poljuben $A \subseteq X$ velja $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$, torej je f zvezna po izreku 1.2.3. □

Definicija 2.1.6. Prostor (X, τ) je *Fréchetov*, če τ loči točke.

Trditev 2.1.7. X je Fréchetov natanko tedaj, ko τ finejša od topologije končnih komplementov.

Dokaz. Če je prostor Fréchetov, za vse različne x in y obstaja tak $V \in \tau$, da je $y \in V$ in $x \neq\in V$, zato je y notranja v $X \setminus \{x\}$. Če pa so enojčki zaprti, pa $X \setminus \{x\}$ in $X \setminus \{y\}$ ločita x in y. □

Trditev 2.1.8. Hausdorffova in Fréchetova lastnost sta dedni in multiplikativni.[5]

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Definicija 2.1.9. Prostor (X, τ) je regularen, če je Hausdorffov in τ ostro loči točke od zaprtih množic.

Definicija 2.1.10. Prostor (X, τ) je normalen, če je Hausdorffov in τ ostro loči disjunktne zaprte množice.

Izrek 2.1.11. Če je X metričen, je normalen.

Dokaz. Očitno je X Hausdorffov, zato je dovolj dokazati, da τ ostro loči disjunktne zaprte množice. Naj bosta A in B taki množici. Sedaj preprosto vzamemo

$$U = \{x \in X \mid d(x, A) < d(x, B)\} \quad \text{in} \quad V = \{x \in X \mid d(x, B) < d(x, A)\}.$$

Ni težko videti, da sta ti množici res odprti in disjunktni. □

23. november 2021

[5] Lastnost je *multiplikativna*, če za vse prostore X in Y s to lastnostjo velja, da jo ima tudi $X \times Y$.

Trditev 2.1.12. Regularnost je dedna, normalnost pa se deduje na zaprte podprostore.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Izrek 2.1.13 (Tihon)**.** Prostor, ki je regularen in 2-števen, je normalen.

Dokaz. Naj bosta A in B disjunktni zaprti množici v X s števno bazo $\mathcal{B}$.

Za vsak $a \in A$ obstajata taki disjunktni odprti množici U_a in U_a', da je $a \in U_a$ in $B \subseteq U_a'$. Za U_a lahko vzamemo kar bazično okolico. Unija

$$\bigcup_{a \in A} U_a$$

je tako števno pokritje A, ki je disjunktno B. Podobno lahko najdemo števno pokritje

$$\bigcup_{b \in B} V_b$$

množice B, ki je disjunktno A. Te množice lahko zapišemo v zaporedjih (U_n) in (V_n). Sedaj preprosto vzamemo

$$U_i' = U_i \Big\backslash \bigcup_{j \le i} \overline{V_j} \quad \text{in} \quad V_i' = V_i \Big\backslash \bigcup_{j \le i} \overline{U_j}.$$

Uniji teh množic sta disjunktni in odprti. □

Definicija 2.1.14. Različne stopnje ločljivosti označimo na naslednji način:[6]

T_0: Za vse $x \neq y$ ima vsaj ena izmed njiju okolico, ki ne vsebuje druge.

T_1: Prostor je Fréchetov.

T_2: Prostor je Hausdorffov.

T_3: Za vsako zaprto množico A in $x \notin A$ obstajata okolici, ki ju ostro ločita.

T_4: Topologija ostro loči disjunktne zaprte množice.

Trditev 2.1.15. Prostor je T_3 natanko tedaj, ko za vsako odprto množico U in $x \in U$ obstaja taka odprta množica V, da je $x \in V$ in $\overline{V} \subseteq U$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Trditev 2.1.16. Regularnost je multiplikativna.

Dokaz. Naj bo U odprta podmnožica $X \times Y$ in $x \in U$. Brez škode za splošnost naj bo U bazična. Sedaj uporabimo regularnost na komponentah in vzamemo njun kartezični produkt. □

Trditev 2.1.17. Prostor je T_4 natanko tedaj, ko za vsako zaprto množico A, vsebovano v odprti množici U, obstaja taka odprta množica V, za katero je $A \subseteq V$ in $\overline{V} \subseteq U$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[6] Oznaka ni enotna.

2.2 Povezanost

Definicija 2.2.1. Prostor (X, τ) je *nepovezan*, če ga lahko razcepimo kot disjunktno unijo dveh nepraznih, odprtih množic. Prostor je *povezan*, če ni nepovezan.

Trditev 2.2.2. Naslednje izjave so ekvivalentne:

i) X je nepovezan
ii) X lahko predstavimo kot disjunktno unijo dveh nepraznih, zaprtih množic
iii) V X obstaja netrivialna podmnožica, ki je odprta in zaprta
iv) Obstaja zvezna surjekcija $f : X \to \{0, 1\}$.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Izrek 2.2.3. $A \subseteq \mathbb{R}$ je povezana natanko tedaj, ko je A interval.

Dokaz. Če A ni interval, vzamemo

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < t\} \quad \text{in} \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x > t\},$$

kjer je $t \neq\in A$ in sta zgornji množici neprazni.

Naj bo A interval, ki ga lahko zapišemo kot $U + V$. Naj bo $a \in U$, $c \in V$ in $a < c$. Naj bo

$$b = \sup \{x \in \mathbb{R} \mid [a, x) \subseteq U\}.$$

Sledi, da je $b \in A$, saj je $b < c$. Tako je $b \in \mathrm{Cl}_A U$, zato je tudi v U, saj je U zaprt v A, to pa je v protislovju z odprtostjo U in definicijo b. □

Izrek 2.2.4. Veljajo naslednje trditve:

i) Naj bo $f : X \to Y$ zvezna. Če je X povezan, je tudi $f(X)$ povezan.
ii) Če so $\{A_\lambda\}$ povezane podmnožice X z nepraznim presekom, je njihova unija povezana.
iii) Povezanost je multiplikativna.
iv) Če za vsaka $a, b \in A$ obstaja pot[7] med njima, je A povezan
v) Če je $A \subseteq X$ povezan in $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$, je tudi B povezan.

Dokaz. Uporabimo karakterizacijo s surjekcijo $f : X \to \{0, 1\}$. □

Izrek 2.2.5 (O vmesni vrednosti)**.** Naj bo X povezana in $f : X \to \mathbb{R}$. Potem je $f(X)$ interval.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

[7] *Pot* med a in b je zvezna preslikava $\gamma : [0, 1] \to A$, za katero je $\gamma(0) = a$ in $\gamma(1) = b$.

Definicija 2.2.6. Prostor X je *povezan s potmi*, če med vsakima točkama prostora obstaja pot.

Definicija 2.2.7. *Komponente* prostora X, ki vsebuje x, je unija vseh povezanih podmnožic, ki vsebujejo X. Označimo jo z $C(x)$. Če so vse komponente X enojčki, pravimo, da je X *povsem nepovezan*.

Opomba 2.2.7.1. $C(x)$ je največja povezana podmnožica X, ki vsebuje x.

Izrek 2.2.8. Veljajo naslednje trditve:

i) Komponente tvorijo particijo prostora.

ii) Komponente X so zaprti prostori.

iii) Slika komponente z zvezno preslikavo je vsebovana v eni komponenti kodomene.

Dokaz. Prvi točki sta posledici maksimalnosti – če se $C(x)$ in $C(y)$ sekata, je njuna unija povezana. Ker je zaprtje povezane množice povezano, so komponente zaprte. □

7. december 2021

Definicija 2.2.9. Prostor je *lokalno povezan*, če ima bazo iz povezanih množic.

Trditev 2.2.10. Prostor X je lokalno povezan natanko tedaj, ko so komponente vsake odprte podmnožice X odprte.

Dokaz. Če je X lokalno povezan, za vsako odprto množico U in točko $x \in U$ obstaja povezana okolica x v U, zato je x notranja v svoji komponenti. Če pa so komponente odprte, pa za bazo preprosto vzamemo komponente vseh odprtih množic. □

Definicija 2.2.11. *Potna komponenta* $C'(x)$ prostora X je unija vseh s potmi povezanih podmnožic X, ki vsebujejo x.

Opomba 2.2.11.1. $C'(x)$ je največja s potmi povezana množica X, ki vsebuje x.

Trditev 2.2.12. Veljata naslednji trditvi:

i) Potne komponente tvorijo particijo prostora.

ii) Slika potne komponente z zvezno preslikavo je vsebovana v eni potni komponenti kodomene.

Dokaz. Enak razmislek kot pri povezanosti. □

Definicija 2.2.13. Prostor je *lokalno povezan s potmi*, če ima bazo iz s potmi povezanih množic.

Izrek 2.2.14. V prostoru, ki je lokalno povezan s potmi, so komponente enake komponentam s potmi.

Dokaz. Za vse x velja $C'(x) \subseteq C(x)$. Ker je $C'(x)$ odprta v X, je odprta tudi v $C(x)$. Če je $C'(x) \neq C(x)$, velja, da lahko $C(x)$ zapišemo kot unijo $C'(x)$ in njenega komplementa, ki je prav tako odprt, saj je unija potnih komponent. □

Posledica 2.2.14.1. Če je x povezan in lokalno povezan s potmi, je povezan s potmi.

2.3 Kompaktnost

Definicija 2.3.1. Prostor je *kompakten*, če ima vsako njegovo odprto pokritje končno podpokritje.

Trditev 2.3.2. X je kompakten natanko tedaj, ko ima vsako bazično pokritje končno podpokritje.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Izrek 2.3.3. Vsak kompakten metrični prostor je omejen.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Izrek 2.3.4. Zaprti intervali so kompaktni.

Dokaz. Glej trditev 7.5.3. v zapiskih Analize 1 prvega letnika. □

Izrek 2.3.5. Zvezna slika kompakta je kompakt.

Dokaz. S praslikami pokritja $f(X)$ lahko pokrijemo X, to pokritje pa ima končno podpokritje. S tem smo dobili tudi končno podpokritje $f(X)$. □

Trditev 2.3.6. Zaprt podprostor kompaktnega prostora je kompakten.

Dokaz. Pokritju dodamo komplement podprostora. □

Izrek 2.3.7. Kompaktnost je multiplikativna.

Dokaz. Za vsako pokritje obstaja končno podpokritje množice $\{x\} \times Y$. Tega lahko projeciramo na X in dobimo odprto okolico x. Ko to naredimo za vse $x \in X$, dobimo pokritje X, ki ima končno podpokritje. □

Trditev 2.3.8. Naj bo K kompakten podprostor Hausdorffovega prostora X. Tedaj je K zaprt v X.

14. december 2021

Dokaz. Prostor ostro loči vsako točko K od poljubne točke $x \notin K$. S tem dobimo pokritje K, ki ima končno podpokritje. Sledi, da njihova unija in presek pripadajočih okolic x ostro ločita x od K. Sledi, da za vse $x \notin K$ obstaja okolica, ki ne seka K. □

Izrek 2.3.9 (Heine-Borel-Lebesgue)**.** Množica $A \subseteq \mathbb{R}^n$ je kompaktna natanko tedaj, ko je A zaprta in omejena.

Dokaz. Če je A omejena, je vsebovana v produktu zaprtih intervalov, ki je kompakten. Ker je $\mathbb{R}^n$ Hausdorffov, je tudi zaprta, zato je kompaktna. □

Posledica 2.3.9.1. Vsaka preslikava $f\colon X \to \mathbb{R}$, kjer je X kompakten, je omejena in zavzame min in max.

Dokaz. $f(X)$ je kompaktna, zato je zaprta in omejena. □

Trditev 2.3.10. V kompaktu ima vsaka neskončna množica stekališče.

Dokaz. Naj bo A neskončna podmnožica brez stekališč. Za vsak $x \in X$ obstaja neka njegova okolica, ki vsebuje kvečjemu končno točk A. Ker je X kompakten, obstaja končno podpokritje, kar je protislovje z neskončnostjo A. □

Posledica 2.3.10.1 (Bolzano-Weierstrass)**.** Vsako omejeno zaporedje v $\mathbb{R}^n$ ima konvergentno podzaporedje.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Izrek 2.3.11. Kompakten Hausdorffov prostor je normalen.

Dokaz. Po trditvi 2.3.8 zaprte množice sovpadajo s kompaktnimi, zato je dovolj dokazati, da topologija loči kompakte. Zaključimo podobno kot v dokazu te trditve. □

Izrek 2.3.12. Kompakten metrični prostor je 2-števen in separabilen.

Dokaz. Za vsak n vzamemo končno podpokritje pokritja s kroglami z radijem $\frac{1}{n}$. Njihova unija je števna baza, središča krogel pa gosta podmnožica. □

Trditev 2.3.13. X je kompakten natanko tedaj, ko v vsaki družini zaprtih množic s praznim presekom obstaja končna poddružina, ki ima prazen presek.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Izrek 2.3.14 (Cantor)**.** Padajoča veriga zaprtih množic v kompaktnem prostoru ima neprazen presek.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Lema 2.3.15 (Lebesgue)**.** Za vsako odprto pokritje U metričnega prostora X obstaja *Lebesgueovo število* $\lambda > 0$ z lastnostjo, da je vsaka krogla z radijem manjšim od λ vsebovana v nekem elementu U.

Dokaz. Vzamemo končno podpokritje in za vsako točko vzamemo največjo radij, za katerega je krogla s tem radijem še vsebovana v katerem izmed elementov U. Opazimo, da je to zvezna funkcija, zato zavzame minimum, ki pa je pozitiven. □

Posledica 2.3.15.1. Naj bo $f\colon X \to Y$ zvezna, kjer sta X in Y metrična. Če je X kompakten, je f enakomerno zvezna.

Dokaz. Vzamemo Lebesgueovo število praslik krogel z radijem $\frac{\varepsilon}{2}$. □

Definicija 2.3.16. X je *lokalno kompakten*, če ima vsaka točka kakšno kompaktno okolico.

Definicija 2.3.17. Odprta množica $U \subseteq X$ je *relativno kompaktna*, če je $\overline{U}$ kompakt.

Trditev 2.3.18. Hausdorffov prostor je lokalno kompakten natanko tedaj, ko ima bazo iz relativno kompaktnih množic.

Dokaz. Naj bo U poljubna odprta okolica x in K kompakt, ki vsebuje x. K je normalen, zato je $K \cap U$ regularen. Sledi, da obstaja odprta množica $V \subseteq K$, za katero je

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq K \cap U.$$

Sledi, da je V relativno kompaktna. □

Izrek 2.3.19. Vsak lokalno kompakten Hausdorffov prostor je regularen.

Dokaz. Naj bo U odprta okolica točke x. Po prejšnji trditvi obstaja relativno kompaktna množica $V \subseteq U$. Ker je $\overline{V}$ kompakten in Hausdorffov, je normalen, zato je V regularen. Sledi, da obstaja odprta okolica W točke x, za katero je

$$W \subseteq \overline{W} \subseteq V \subseteq U.$$

□

Definicija 2.3.20. Prostor X je *Baireov*, če ga ni mogoče predstaviti kot števno unijo zaprtih množic s prazno notranjostjo.

Izrek 2.3.21 (Baire)**.** Naj bodo F_i zaprte množice s prazno notranjostjo v lokalno kompaktnem zaprtem prostoru X. Potem ima tudi njihova unija prazno notranjost.

Dokaz. Naj bo $U_0 \subseteq \bigcup F_i$ odprta. Tedaj obstaja $x \in U_0 \setminus F_1$ in njegova relativno kompaktna okolica U_1, ki ne seka F_1, saj ima F_1 prazno notranjost. Postopek nadaljujemo na tej množici. Dobimo zaporedje $\overline{U_i}$ zaprtih množic, ki so vsebovane ena v drugi, zato imajo neprazen presek, kar je protislovje. □

Opomba 2.3.21.1. Podoben izrek velja za polne metrične prostore. Na podoben način lahko skonstruiramo padajoče zaporedje zaprtih krogel, poleg tega pa poskrbimo, da polmeri limitirajo k 0. Zaporedje središč krogel tako tvori Cauchyjevo zaporedje, ki ima limito, ta pa mora biti vsebovana v vseh kroglah.

Definicija 2.3.22. *Kompaktifikacija* prostora X je gosta vložitev $h\colon X \hookrightarrow \hat{X}$, kjer je $\hat{X}$ kompakten Hausdorffov prostor.[8]

Opomba 2.3.22.1. Edina kompaktifikacija kompaktnega Hausdorffovega prostora je identiteta.

Opomba 2.3.22.2. Ker je vsak kompakten Hasudorffov prostor regularen, regularnost pa je dedna, lahko kompaktificiramo le regularne prostore.

Izrek 2.3.23. Naj bo (X, τ) lokalno kompakten Hausdorffov prostor. Naj bo $X^+ = X \cup \{\infty\}$ prostor s topologijo τ^+, ki jo definiramo kot unijo τ in družino množic $U \subseteq X^+$, za katere $\infty \in U$ in je $X^+ \setminus U$ kompaktna v X. Če X ni kompakten, je inkluzija $i\colon X \hookrightarrow X^+$ kompaktifikacija.

[8] Kompaktifikacije na predavanjih nismo obdelali. Ta del zapiskov je povzet po knjigi Splošna topologija [1].

Dokaz. Najprej pokažimo, da je τ^+ topologija. Očitno sta $\emptyset$ in X^+ elementa τ^+. Poljubna unija elementov τ^+ je prav tako element τ^+ – če ∞ ni element nobene množice unije, je unija element τ in s tem tudi τ^+. Če pa je $\infty \in U_{\lambda_0}$ za nek λ_0, pa je

$$\left(\bigcup_\lambda U_\lambda\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap_\lambda U_\lambda^{\mathsf{c}},$$

zaprt podprostor kompakta in zato tudi sam kompakt. Preostanejo nam še končni preseki, dovolj je preveriti presek dveh elementov τ^+. Če oba vsebujeta ∞, je njun komplement unija dveh kompaktov, kar je spet kompakt. Če pa kvečjemu en vsebuje ∞, pa je presek enak preseku dveh odprtih množic v X in spet odprt.

Prostor X^+ je kompakten, saj vsako odprto pokritje vsebuje množico z ∞, katere komplement je kompakt in ga lahko pokrijemo s končno mnogo elementi pokritja.

Prostor X^+ je Hausdorffov, saj lahko ∞ ločimo od vseh točk v X. Vsaka točka $x \in X$ ima namreč relativno kompaktno okolico U, zato U in $X^+ \setminus \overline{U}$ ločita x in ∞.

Preostane še dokaz, da je X gost v X^+, kar pa je posledica tega, da X ni kompakten, zato $\{\infty\}$ ni odprta. □

Definicija 2.3.24. Zgornji kompaktifikaciji pravimo *kompaktifikacija z eno točko* oziroma *kompaktifikacija Aleksandrova*.

3 Topologije na prostorih preslikav

»Kot nek quidditch.«

– prof. dr. Petar Pavešić

21. december 2021

3.1 Prostori preslikav

Definicija 3.1.1. Za $A \subseteq X$ in $U \subseteq Y$ označimo

$$\langle A, U \rangle = \{ f \in \mathcal{C}(X, Y) \mid f(A) \subseteq U \} .$$

Trditev 3.1.2. Naj bo τ_p topologija na $\mathcal{C}(X, Y)$, ki jo definira predbaza

$$\{ \langle \{x\}, U \rangle \mid x \in X \land U \in \tau_Y \} .$$

Tedaj je f limita zaporedja f_i v τ_p natanko tedaj, ko f_i po točkah konvergirajo k f.

Dokaz. The proof is obvious and need not be mentioned. □

Opomba 3.1.2.1. Topologiji τ_p pravimo *topologija konvergence po točkah.*

Definicija 3.1.3. Topologiji, ki jo generira predbaza

$$\{ \langle K, U \rangle \mid K \subseteq X \land K \text{ je kompakt} \land U \in \tau_Y \}$$

pravimo *kompaktno-odprta topologija*. Prostor zveznih preslikav s kompaktno-odprto topologijo označimo z $\widehat{\mathcal{C}}(X, Y)$.

Trditev 3.1.4. Če je Y metričen, lahko za bazo kompaktno-odprte topologije na $\mathcal{C}(X, Y)$ vzamemo

$$\{ \langle f, K, \varepsilon \rangle \mid f \in \mathcal{C}(X, Y) \land K \subseteq X \land K \text{ je kompakten} \land \varepsilon > 0 \} ,$$

kjer je

$$\langle f, K, \varepsilon \rangle = \{ g \in \mathcal{C}(X, Y) \mid \forall x \in K \colon d(f(x), g(x)) < \varepsilon \} .$$

Dokaz. Najprej dokažimo, da je zgornja množica baza. Očitno je pokritje. Naj bo $g \in \langle f_1, K_1, \varepsilon_1 \rangle \cap \langle f_2, K_2, \varepsilon_2 \rangle$. dovolj je pokazati, da ima g okolico, vsebovano v tem preseku. Definiramo kompakt $K = K_1 \cup K_2$ in

$$\varepsilon = \min \left\{ \varepsilon_1 - \max_{x \in K_1} \{ d(f_1(x), g(x)) \} , \varepsilon_2 - \max_{x \in K_2} \{ d(f_2(x), g(x)) \} \right\} .$$

Ni težko videti, da je $\langle g, K, \varepsilon \rangle$ vsebovana v preseku.

Opazimo, da je $\langle x \mapsto y_0, K, \varepsilon \rangle \subseteq \langle K, U \rangle$, zato je topologija iz zgornje baze kvečjemu močnejša od kompaktno-odprte.

Opazimo, da je

$$U_c = \left\{ x \in K \;\middle|\; d(f(x), f(c)) < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

odprto pokritje K, zato ima končno podpokritje. Sledi, da je

$$\bigcap_{n=1}^{N} \left\langle \overline{U}_{c_n}, K \left(f(c_n), \frac{\varepsilon}{2} \right) \right\rangle$$

odprta okolica f v kompaktno-odprti topologiji, ki pa je po trikotniški neenakosti vsebovana v $\langle f, K, \varepsilon \rangle$. □

Opomba 3.1.4.1. Če je X kompakten, topologiji iz zgornje baze pravimo *topologija enakomerne konvergence.* Drugače ji pravimo *topologija enakomerne konvergence na kompaktih.*

Trditev 3.1.5. Preslikava $i\colon Y \to \widehat{\mathcal{C}}(X, Y)$, ki vsakemu $y \in Y$ priredi preslikavo $x \mapsto y$, je vložitev. Če je Y Hausdorffov, je vložitev zaprta.

Dokaz. Za poljubno predbazično okolico velja $\langle K, U\rangle \cap i(Y) = i(U)$, zato je i res bijekcija med topologijama.

Naj bo sedaj Y Hausdorffov in f nekonstantna. Sledi, da obstajata x_1 in x_2 z različnima slikama, ki ju lahko ločimo z U_1 in U_2. Sledi, da je $\langle \{x_1\}, U_1\rangle \cap \langle \{x_2\}, U_2\rangle$ odprta okolica U, ki ne vsebuje konstantnih preslikav, zato je komplement $i(Y)$ odprt. $\square$

Trditev 3.1.6. Prostor $\widehat{\mathcal{C}}(X, Y)$ je Hausdorffov natanko tedaj, ko je Y Hausdorffov, in regularen natanko tedaj, ko je Y regularen.

Dokaz. Če je $\widehat{\mathcal{C}}(X, Y)$ Hausdorffov, pa je po prejšnji trditvi tudi Y Hausdorffov. Podoben razmislek velja za regularnost.

Če je Y Hausdorffov in $f, g \in \mathcal{C}(X, Y)$ funkciji, za kateri je $f(x) \neq g(x)$, sta $\langle \{x\}, U\rangle$ in $\langle \{x\}, V\rangle$ okolici, ki ju ostro ločita, pri čemer sta U in V množici, ki ostro ločita $f(x)$ in $g(x)$.

Naj bo $f \in \mathcal{C}(X, Y)$ in $\langle K, V\rangle$ njena okolica. Dovolj je pokazati, da obstaja taka odprta množica U, da je

$$f(K) \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq V,$$

saj bo tedaj $f \in \langle K, U\rangle \subseteq \overline{\langle K, U\rangle} \subseteq \left\langle K, \overline{U}\right\rangle \subseteq \langle K, V\rangle$.[9] Zaradi regularnosti lahko vsako točko $y \in f(K)$ ostro ločimo od V^{c}. Vse množice, ki ločijo točko od V^{c}, tvorijo pokritje $f(K)$. Ker je K kompakt, je tudi $f(K)$ kompakt, zato obstaja končno podpokritje. Ni težko videti, da njegova unija ustreza pogoju za množico U. $\square$

[9] Druga inkluzija velja, saj za $f \notin \left\langle K, \overline{U}\right\rangle$ obstaja $x \in K$, za katerega je $f(x) \notin \overline{U}$. Sledi, da obstaja okolica V točke $f(x)$, disjunktna $\overline{U}$, in je $\langle \{x\}, V\rangle$ okolica f, disjunktna $\langle K, U\rangle$.

3.2 Preslikave na normalnih prostorih

4. januar 2022

Lema 3.2.1 (Urison)**.** Prostor X je T_4 natanko tedaj, ko za vsak par zaprtih disjunktnih množic $A, B \subseteq X$ obstaja preslikava $f\colon X \to [0,1]$, za katero je $f(A) = 0$ in $f(B) = 1$.

Dokaz. Če taka preslikava obstaja, prasliki intervalov $\left[0, \frac{1}{2}\right)$ in $\left(\frac{1}{2}, 1\right]$ ločita A in B. Naj bo sedaj prostor T_4.

T_4 je ekvivalentna temu, da za vsako zaprto množico A in odprto množico U obstaja odprta množica V, za katero je $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$. Induktivno lahko izberemo take množice $U_{\frac{n}{2^m}}$, da je $U_a \subseteq U_b \iff a \le b$ ter $A \subset U_x \subseteq B$. Sedaj lahko vrednosti f preprosto določimo z bisekcijo, oziroma

$$f(x) = \begin{cases} \inf \{r \mid x \in U_r\}, & x \notin B \\ 1 & x \in B. \end{cases}$$

Ni težko preveriti, da je f res zvezna – pri $\frac{1}{2^n} < \varepsilon$ za okolico x vzamemo ustrezen pas »širine« $\frac{1}{2^n}$. □

Opomba 3.2.1.1. Če je X metričnen, je primer Urisonove funkcije

$$f(x) = \frac{d(x, A)}{d(x, A) + d(x, B)}.$$

Posledica 3.2.1.2. Če je X normalen, realne funkcije ločijo točke.

Posledica 3.2.1.3. V normalnem 2-števnem prostoru X obstaja števna družina funkcij v $\mathcal{C}(X, [0,1])$, ki loči točke X.

Izrek 3.2.2 (Urison)**.** Vsak normalen 2-števen prostor je metrizabilen.

Dokaz. Naj bo $\{f_n\colon X \to [0,1] \mid n \in \mathbb{N}\}$ števna družina Urisonovih funkcij, ki loči točke X. Naj bo[10] $f\colon X \to l^2$ funkcija, podana s predpisom

$$f(x) = \left(\frac{1}{n} f_n(x)\right)_{n \in \mathbb{N}}.$$

f je dobro definirana, saj je zaporedje kvadratno sumabilno po Weierstrassovem kriteriju. Dokažimo, da je f vložitev. Opazimo, da je f injektivna, saj loči točke.

f je zvezna – naj bo $x \in X$, $\varepsilon > 0$ in $N \in \mathbb{N}$ tako naravno število, da je

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Množice

$$U_n = \left\{ y \in X \;\middle|\; (f_n(x) - f_n(y))^2 < \frac{\varepsilon^2}{2N} \right\}$$

[10] l^2 označuje kvadratno sumabilna zaporedja z metriko $d(x, y) = \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} (x_n - y_n)^2}$.

so odprte, zato je odprta tudi

$$U = \bigcap_{n=1}^{N} U_n.$$

Za $y \in U$ tako sledi

$$d(f(x), f(y))^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}(f_n(x) - f_n(y))^2 \leq N \cdot \frac{\varepsilon^2}{2N} + \frac{\varepsilon^2}{2},$$

zato je $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

Preverimo še, da je tudi inverz zvezen. Naj bo U poljubna okolica točke $x \in X$. Obstajata bazični okolici B in B', za kateri je

$$x \in B \subseteq \overline{B} \subset B' \subseteq U.$$

Naj bo f_n Urisonova funkcija, prirejena paru $\overline{B}$ in $X \setminus B'$. Za vse y, za katere je $d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n}$, je $f_n(y) < 1$, saj je $f_n(x) = 0$. Sledi, da je $y \in B' \subseteq U$, zato je f^{-1} zvezen.

Sledi, da je X homeomorfen podprostoru l^2, zato je metrizabilen. $\square$

Posledica 3.2.2.1. 2-števen prostor je metrizabilen natanko tedaj, ko je regularen.

Lema 3.2.3. Naj bo A zaprta podmnožica normalnega prostora X in $f\colon A \to [-c, c]$. Tedaj obstaja taka preslikava $h\colon X \to \left[-\frac{c}{3}, \frac{c}{3}\right]$, za katero je $|f(a) - h(a)| \leq \frac{2}{3}c$ za vse $a \in A$.

Dokaz. Naj bosta

$$A_+ = \left\{a \in A \;\middle|\; f(a) \geq \frac{c}{3}\right\} \quad \text{in} \quad A_- = \left\{a \in A \;\middle|\; f(a) \leq -\frac{c}{3}\right\}.$$

Naj bo sedaj g Urisonova funkcija množic A_+ in A_-. Za h preprosto vzamemo $\frac{2}{3}c \cdot g - \frac{1}{3}c$. $\square$

Izrek 3.2.4 (Tietze)**.** Naj bo A zaprta podmnožica normalnega prostora X. Tedaj lahko vsako preslikavo $f\colon A \to J$, kjer je J interval, razširimo do preslikave $F\colon X \to J$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, hook] & J \\
X \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Slika 1: Izrek 3.2.4.

Dokaz. Brez škode za splošnost naj bo $J = [-1, 1]$. Po zgornji lemi obstaja preslikava $h_1\colon X \to \left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$, za katero funkcija $f_1 = f - h_1$ slika elemente A v interval $\left[-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right]$. Sedaj lahko induktivno skonstruiramo funkcije h_n in f_n, nato pa preprosto vzamemo

$$F = \sum_{n=1}^{\infty} h_n,$$

ki je zvezna po Weierstrassovem kriteriju. Ker je

$$|f_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2$$

za vse $x \in A$, je $F(x) = f(x)$ na A. □

Definicija 3.2.5. Prostor E je *absolutni ekstenzor*,[11] če lahko vsako preslikavo $f\colon A \to E$ iz zaprtega podprostora A normalnega prostora X razširimo do preslikave, ki je definirana na celem X.

Definicija 3.2.6. Podprostor $A \subseteq X$ je *retrakt* prostora X, če obstaja preslikava $r\colon X \to A$ z lastnostjo $r(a) = a$ za vse $a \in A$. Taki preslikavi pravimo *retrakcija*.

Opomba 3.2.6.1. Ker je A množica ujemanja id in $i \circ r$, je retrakt Hausdorffovega prostora vedno zaprt podprostor.

Trditev 3.2.7. Retrakt absolutnega ekstenzorja je absolutni ekstenzor.

Dokaz. Razširitev funkcije komponiramo z retrakcijo. □

Definicija 3.2.8. *Nosilec* preslikave $f\colon X \to \mathbb{R}$ je množica $\overline{f^{-1}(\mathbb{R}^*)}$.

Definicija 3.2.9. *Razčlenitev enote*, podrejena pokritju $\{U_i \mid i \leq n\}$ prostora X, je družina preslikav $\rho_i\colon X \to I$, za katere je nosilec ρ_i vsebovan v U_i za vse i in je

$$\sum_{i=1}^{n} \rho_i(x) = 1$$

za vse $x \in X$.

Izrek 3.2.10. Za vsako odprto pokritje $\{U_i \mid i \leq n\}$ normalnega prostora X obstaja neka podrejena razčlenitev enote.

Dokaz. Najprej dokažimo, da za vsako odprto pokritje $\{U_i \mid i \leq n\}$ obstaja pokritje $\{V_i \mid i \leq n\}$, za katerega velja $\overline{V_i} \subseteq U_i$.

Ker je X normalen, obstaja tak V_1, da je

$$X \setminus \bigcup_{i=2}^{n} U_i \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U_1.$$

Sledi, da lahko v pokritju U_1 zamenjamo z V_1. Ta postopek nadaljujemo, dokler nismo zamenjali vseh množic.

Sledi, da obstajata odprti pokritji $\{V_i \mid i \leq n\}$ in $\{W_i \mid i \leq n\}$, za kateri velja

$$\overline{W_i} \subseteq V_i \subseteq \overline{V_i} \subseteq U_i.$$

Naj bodo f_i Urisonove funkcije za množice $X \setminus V_i$ in $\overline{W_i}$. Ker je $\{W_i \mid i \leq n\}$ pokritje, je

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i$$

[11] Ekstenzorjev in retraktov na predavanjih nismo obdelali. Ta del zapiskov je povzet po knjigi Splošna topologija [1].

na celem X neničelna, zato so preslikave

$$\rho_i = \frac{f_i}{f}$$

dobro definirane. Ker je nosilec ρ_i vsebovan v $\overline{V_i} \subseteq U_i$, tvorijo ρ_i iskano razčlenitev enote. $\square$

3.3 Stone-Weierstrassov izrek

11. januar 2022

Izrek 3.3.1 (Weierstrass)**.** Vsako zvezno funkcijo lahko poljubno dobro aproksimiramo s polinomi.

Analitični dokaz. Naj bo
$$B_{n,i}(x) = \binom{n}{i} x^i (1-x)^{n-i}$$
Berstainova baza. Velja
$$\sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(x) = 1.$$
Za zvezno funkcijo $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ naj bo
$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_{n,i}(x)$$
n-ti Bernsteinov polinom.

Opazimo, da je
$$\begin{aligned} f_n(x) - f(x) &= \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_{n,i}(x) - f(x) \cdot \sum_{i=0}^{n} B_{n,i}(x) \\ &= \sum_{i=0}^{n} \left(f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right) B_{n,i}(x). \end{aligned}$$

Sledi, da je
$$|f_n(x) - f(x)| \le \sum_{i=0}^{n} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,i}(x).$$

Ker je f zvezna, ima maksimum M in je enakomerno zvezna. Za vse $\varepsilon > 0$ tako obstaja $\delta > 0$, da za $|x-y| < \delta$ velja $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tako dobimo, da je[12]
$$\begin{aligned} &\sum_{i=0}^{n} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,i}(x) \\ =&\sum_{\left|x-\frac{i}{n}\right|<\delta} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,i}(x) + \sum_{\left|x-\frac{i}{n}\right|\ge\delta} \left| f\left(\frac{i}{n}\right) - f(x)\right| B_{n,i}(x) \\ \le&\frac{\varepsilon}{2} + 2M \cdot \sum_{\left|x-\frac{i}{n}\right|\ge\delta} B_{n,i}(x) \\ \le&2M \cdot \sum_{i=0}^{n} \frac{\left(x-\frac{i}{n}\right)}{\delta^2} B_{n,i}(x) \\ =&\frac{2M}{\delta^2} \cdot \frac{x\cdot(1-x)}{n} \\ \le&\frac{M}{2n\cdot\delta^2}. \end{aligned}$$
□

[12] Uporabimo znano identiteto $\sum_{i=0}^{n} \left(x - \frac{i}{n}\right)^2 B_{n,i}(x) = \frac{x\cdot(1-x)}{n}$.

Izrek 3.3.2 (Stone-Weierstrass)**.** Če je $A \subseteq \mathcal{C}(X)$ unitalna podalgebra, ki loči točke X, potem je A gosta v $\mathcal{C}(X)$ s kompaktno-odprto topologijo.

Dokaz. Pomagamo si z naslednjo lemo:

Lema. $f(t) = \sqrt{t}$ je na $[0, 1]$ enakomerna limita polinomov.

Dokaz. f razvijemo v Taylorjevo vrsto okoli 1 in opazimo, da konvergira za $t = 0$ in je konvergenca na $[0, 1]$ enakomerna. □

Iz leme sledi, da za $f \in A$ velja $|f| = \sqrt{f^2} \in \overline{A}$. Sledi, da je za $f, g \in A$ tudi $\max\{f(x), g(x)\}, \min\{f(x), g(x)\} \in \overline{A}$.

Ker A loči točke, za vsaka $x, y \in X$ obstaja tak $f \in \mathcal{C}(X)$, da je $f(x) = a$ in $f(y) = b$, saj lahko funkcijo, ki loči x in y, afino transformiramo.

Naj bo $f \in \mathcal{C}(X)$ poljubna. Pokazati moramo, da za poljubna K in ε obstaja $g \in \overline{A} \cap \langle f, K, \varepsilon \rangle$.

Za vsaka $u, v \in K$ naj bo $h_{u,v} \in A$ taka funkcija, da na u in v sovpada z f. Za fiksen u množice

$$U_v = \{x \in K \mid h_{u,v}(x) < f(x) + \varepsilon\}$$

tvorijo odprto pokritje. Sledi, da obstaja končno podpokritje. Definiramo preslikave $h_u(x) = \min\{h_{u,v_i}(x)\}$, ki so v $\overline{A}$.

Naj bo sedaj

$$V_u = \{x \in K \mid h_u(x) > f(x) - \varepsilon\}.$$

Tudi te množice tvorijo odprto pokritje, zato obstaja končno podpokritje, katerih maksimum po točkah h je v $\overline{A}$.

Ni težko videti, da je $h \in \langle f, K, \varepsilon \rangle$. □

Posledica 3.3.2.1. Polinomi so gosti v $\mathcal{C}(X)$ za $X \subseteq \mathbb{R}$.

Posledica 3.3.2.2. Fourierovi polinomi so gosti v $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$.

4 Dodatek

A Tabela topoloških lastnosti

Tabela 1: Tabela topoloških lastnosti in njihovih karakteristik

Lastnost	Dednost	Multiplikativnost
Metrizabilnost	Da	Da
1-števnost	Da	Da
2-števnost	Da	Da
Separabilnost	Na odprte	Da
Hausdorffova	Da	Da
Fréchetova	Da	Da
Regularnost	Da	Da
Normalnost	Na zaprte	Produkt je regularen
Povezanost	Ne	Da
Povezanost s potmi	Ne	Da
Kompaktnost	Na zaprte	Da

Literatura

[1] Petar Pavešić. *Splošna topologija*. Ur. Miran Černe. 2. izd. Ljubljana: DMFA – založništvo, 2017. ISBN: 978-961-212-205-8.

Stvarno kazalo