Globale analyse - Encyclopedia Academia

Globale analyse

Globale Analyse	
Richting	Wiskunde
Jaar	3BWIS

Bespreking

Dit vak is ingevoerd in academiejaar 2018-2019 en werd eerst gegeven door Tom Mestdag. Sinds academiejaar 2019-2020 wordt het gegeven door Lieven Lebruyn. De oefeningen worden gegeven door Sandor Hajdu. Het examen bevat zowel theorie als oefeningen. De oefeningen zijn open boek. De theorie telt mee voor 13 punten, de oefeningen voor 7.

Examenvragen

Tussentijdse test 2021-2022

1. Geef nauwkeurig de definitie van een mm-dimensionale differentiëerbare manifold MM en van een mm-dimensionale differentiëerbare manifold MM met rand ∂M∂M. Toon aan dat een manifold ook een manifold met rand is.
2. Definiëer een gladde afbeelding F:N→MF:N→M. Definiëer een immersie F:N→MF:N→M. Wanneer noemen we F een gladd inbedding? Is deze voorwaarde steeds voldaan? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.
3. Geef de definitie van de raakruimte TpMTpM. Gegeven een kaart (U,ϕ)(U,ϕ) rond pp wat is dan de raakvector ddxi|pddxi|p? Wat is de differentiaal dxi|pdxi|p?
4. Zij F:M→RnF:M→Rn een gladde afbeelding. Geef een gladde inbedding van de raakruimte TMTM in R2nR2n.
5. Definiëer een sectie van een vectorbundle over MM. Toon aan dat MM ingebed kan worden in elke vectorbundle over MM
6. Zij M={(x,y,z)∈R3|x2+y2+z2=3}M={(x,y,z)∈R3|x2+y2+z2=3} en p=(1,1,1)p=(1,1,1). Beschouw de projectie ϕ(x,y,z)=(x,y)ϕ(x,y,z)=(x,y) rond pp. Geef de vergelijking van een curve γγ zodat [γ]=ddx|p[γ]=ddx|p.
7. Stel nu ψ(x,y,z)=(y,z)ψ(x,y,z)=(y,z) de kaart rond pp die compatiebel is met phiphi. Schrijf dan ddx|p∈TpMddx|p∈TpM (in kaart phiphi) in functie van de basisvectorenddy|pddy|p en ddz|pddz|p in de kaart ϕϕ.

Januari 2019

Prof. Tom Mestdag

Theorie

---

1. (4p) Beschouw twee differentieerbare variëteiten M en N en een $C^\infty-$afbeelding $f:M\to N$.
    - Definieer de raakafbeelding van f in een punt $m\in M$.
    - Bepaal een lokale uitdrukking van deze afbeelding ten opzichte van lokale kaarten op M en N. Verklaar alle notaties die je in je antwoord gebruikt.
2. (4p) Een diffeomorfisme $f:M\to N$ waarvoor geldt dat $f_*X=X$ noemen we een symmetrie van een vectorveld X op M. Toon aan dat een symmetrie integraalkrommen van X afbeeldt op integraalkrommen van X. Bewijs alle stellingen en eigenschappen die je hiervoor nodig hebt. Verklaar alle notaties die je in je antwoord gebruikt.
3. (5p) Beschouw een willekeurig tensorveld u op M. Zij X een vectorveld dat nergens nul wordt en waarvan de stroming bepaald wordt door de lokale diffeomorfismen ϕ_t.
    - Geef de definitie van de Lie-afgeleide L_Xu.
    - Toon aan dat u invariant is onder de lokale 1-parametergroep $\{\phi_t\}$, d.w.z. $\phi^*_tu=u$, als en slechts als $L_Xu=0$. Verklaar alle notaties die je in je antwoord gebruikt.

Oefeningen

---

1. (2p) Consider the vector fields X and Y and the function f on R^3 given by
$$X=xy\frac{\partial}{\partial x}+x^2\frac{\partial}{\partial z},Y=y\frac{\partial}{\partial y},f(x,y,z)=xz^2+y$$
. Calculate:
    - $[X,Y](1,2,3)$
    - fX
    - $X(f)$
2. (1p) Consider the following vector field on $R^2:X=e^{xy}\frac{\partial}{\partial x}+(x+2y)\frac{\partial}{\partial y}$. Calculate the push forward f_*X of this vector field under the mapping $f:R^2\to R^2,(x,y)\mapsto f(x,y)=(x-y,x+y)$.
3. (4p) Consider the following 1-forms on a 4-dimensional manifold. $\alpha^1=dx^1+x^2x^3dx^3,\alpha^2=dx^2+x^3dx^3$, and let $\omega=\alpha^1\wedge\alpha^2$
    - Give a local basis for the vector fields X, such that $i_X\omega=0$.
    - Check whether the distribution spanned by those vector fields is integrable or not.
    - Calculate $d\alpha^1\wedge\omega$ and $d\alpha^2\wedge\omega$.

Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS