

Dynamische Systemen

 tuyaux.winak.be/index.php/Dynamische_Systemen

Dynamische Systemen

Richting Wiskunde

Jaar 3BWIS

Januari 2015 - 2016

Theorie

1. Formuleer het Flow-Box theorema. (zonder bewijs)
2. Bewijs dat als z een fixpunt is en er een Lyapunov-functie bestaat voor z . Dan is z stabiel. (Stelling van Lyapunov)
3. Definieer $f(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{k=1}^n x_k^2)^2$ en zij $x' = -\text{grad}(f)|_x$
 - Wat zijn de fixpunten?
 - Bespreek de stabiliteit.
4. Los op:
 - Wat is een volledig integreel Hamiltoniaans systeem?
 - Geef twee voorbeelden (zonder bewijs)
 - Hoe kunnen we, voor algemene vectorvelden, bepalen of de stromen commuteren?
 - Wat weten we over de niveauverzamelingen van een Hamiltoniaans systeem?
5.
 - Waarom vinden we bij continue dynamische systemen geen chaos in dimensie 2?
 - Geef een voorbeeld van chaos en leg uit wat tot de chaos leidt.

Oefeningen

1. Beschouw
$$\begin{cases} x' = x^3 - y^3 + xy^2 - x^2y + 2x - 3x^2 + y^2 \\ y' = x^3 + y^3 + xy^2 + x^2y + 2y - 3yx^2 + y^2 \end{cases}$$
 - Zet de vergelijking om in poolcoördinaten $(x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta))$
 - Hoeveel fixpunten bevat dit systeem
 - Hoeveel periodieke banen zijn er? Zijn deze stabiel?
2. Stel C de Cantorverzameling. Bereken de similarity en de box-counting dimensie van $C^2 = C \times C$. En vervolgens ook voor $C^n = C \times C \times \dots \times C$. (De definities waren gegeven.)

3. Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} x' = (-x^2 - y + 1)x \\ y' = (x - y - 1)y \end{cases}$$

$$\begin{cases} x' = (-x^2 - y + 1)x \\ y' = (x - y - 1)y \end{cases}$$

- Bereken nullclines (i.e. $x'=0, y'=0$) en fixpunten.
- Om Hartman-Grobman toe te passen moeten we eerst nagaan of de punten hyperbolisch zijn.
- Wat is de vorm bij de verschillende fixpunten? (knoop, spiraal,...)
- Beschrijf de evolutie van het systeem (long term behaviour).

Januari 2016-2017

1. Gegeven was een stelsel, helaas geen idee meer hoe het er exact uitzag. Maar een type vraag van de vorm:

- Zet dit stelsel om in poolcoördinaten ($x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$).
- Bereken de nullclines en fixpunten. Zijn deze stabiel?
- Hoeveel periodieke banen zijn er? Bespreek de stabiliteit.

2.

- Definieer *commutativiteit van stromen*.
- Geef een voorbeeld van (niet-constante) commutatieve stromen die commuteren en bewijs dit.
- Geef een voorbeeld van niet-commuterende stromen.
- Beschrijf het *Flow Box* theorema, geef een tekening en leg deze uit.
- Beschouw op \mathbb{R}^n de Euclidische metriek en definieer $f(x_1, \dots, x_n) = (\sum_{j=1}^n x_j^2)^2$. Beschouw het stelsel $x' = -\text{grad} f$. Hoeveel fixpunten heeft dit stelsel en wat kan je zeggen over de stabiliteit?

3.

- Leg uit wat voor fixpunten een lineair stelsel $x' = Ax$ (met $A \in M_2(\mathbb{R})$) kan hebben geef aan welke hyperbolisch zijn. Geef ook de index. (Bewijzen moet je niet geven.)
- Definieer de limietverzamelingen ω^+ en ω^- .
- Geef de stelling van Poincaré-Bendixon en teken de verschillende mogelijkheden.

4.

- Definieer het begrip *invariante verzameling* en geef een voorbeeld.
- Bewijs dat $\omega^+(y) \subseteq \omega^-(z)$ als $y \in \omega^+(z)$.
- Geef een voorbeeld van een limietverzameling die niet samenhangend is.
- Leg uit waarom er geen chaos kan zijn in 2D.

5. Beschouw op $R=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x,y\geq 0\}$ het stelsel

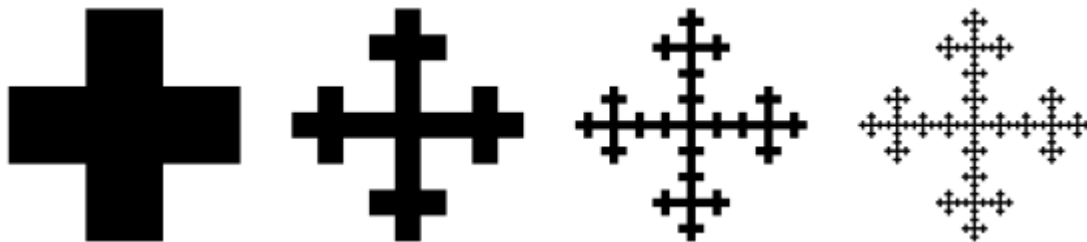
$$\begin{cases} x' = (-x-2y+5)x \\ y' = (x-2y-3)y \end{cases}$$

$$\{x' = (-x-2y+5)x, y' = (x-2y-3)y\}$$

- Bereken de nullclines en de fixpunten. (De fixpunten moet je uiteraard alleen in \mathbb{R}^2 zoeken.)
- Bereken de afgeleide van dit stelsel en ga na of de fixpunten hyperbolisch zijn door de stelling van Hartman-Grobman te gebruiken.
- Classificeer de punten. (i.e. stabiele knoop, zadel, ...)
- Schets met deze informatie een faseportret en bespreek de *long-term behaviour*.

6. Gegeven is de sneeuwvlok van Viscek op $[0,1]\times[0,1]$ (zie afbeelding onderaan)

- Wat is de oppervlakte van deze fractal?
- Bereken de *similarity dimension*.
- Bereken de *box-counting dimension*.
- Bereken de *similarity* en *box-counting* dimension van de 3-dimensionale versie van deze fractal.



Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS