Differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen

Differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen	
Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Bespreking

De cursus differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen (vroeger: 'gewone differentiaalvergelijkingen') wordt sinds academiejaar 2017-2018 gedoceerd door Sonja Hohloch. In de lessen wordt de cursus netjes gevolgd en professor Hohloch werkt elk bewijs zorgvuldig uit op het bord. Het vak zelf is 6 studiepunten. Doorheen het jaar zijn er zes taken die op punten staan. Het is zeker de moeite waard om hier tijd in te steken want ze staan op een aanzienlijk deel van de punten. Er is één examen dat zowel theorie als oefeningen behandelt. De theorie bestaat vooral uit het geven van stellingen die een specifieke naam (van een wiskundige) hebben gekregen. Die zal je dan ook moeten bewijzen. Eventueel staan er wat bijvraagjes bij en een oefening waarbij je deze stelling moet toepassen.

Puntenverdeling

- Examen (theorie + oefeningen) 75%75%
- Taken 25%25%

Examenvragen

Academiejaar 2020-2021 1ste zit

Prof. Sonja Hohloch Corona-examen, hierdoor kan de geziene leerstof en moeilijkheidsgraad een beetje afwijken. Zelfde als 2018-2019 met toevoeging van een vraag over de fixpuntstelling van Banach.

Academiejaar 2018-2019 1ste zit

Prof. Sonja Hohloch

1. Geef de algemene oplossing voor de volgende differentiaalvergelijkingen
    - $x'=5xx'=5x$
    - $x'=tx+t2x'=tx+t2$
    - $x'=f(t)f(x)x'=f(t)f(x)$ met $f:R\to R\neq 0f:R\to R\neq 0$ continu
    - $x'=x3+3x2t+3xt2+t3x'=x3+3x2t+3xt2+t3$
    - $x'=t2x2x'=t2x2$
2. Existentie en uniciteit
    - Wat is voldoende om existentie van een oplossing voor een BWP te garanderen? Welke bijkomende eigenschap geeft uniciteit? Wat zijn de namen van deze stellingen?
    - Geef een voorbeeld van een differentiaalvergelijking die altijd uniek oplosbaar is en bewijs dit.
    - Schrijf de fixpuntstelling van Banach op en bewijs deze.
3. Stelsels van differentiaalvergelijkingen
    - Schrijf het stelsel in de vorm $Av=v'Av=v'$. Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van AA?
      $x'=x+yy'+y=x$
      $$x'=x+yy'+y=x$$
    - Los op.
      $x'=xyy'=-y2$
      $$x'=xyy'=-y2$$
    - Geef de algemene oplossing.
      z′=(\| 1−10110012\)/ |z
      $$z'=(110-111002)z$$
4. Limietveramelingen e.a.
    - Stel zz is een punt. Dan geldt $\omega+(y)\subseteq\omega+(z)\omega+(y)\subseteq\omega+(z)$ $\forall y\in\omega+(z)\forall y\in\omega+(z)$. Bewijs dit.
    - Geef de stelling van Poincaré-Bendixon en teken de verschillende gevallen.
    - Geef het flow box theorema en bewijs dit. Maak ook een tekening.
    - Schrijf een bekend hogerdimensionaal dynamisch systeem op dat chaos bevat. Wat leidt hier tot chaos? Maak een tekening van (de oorzaak van) de chaotische dynamica.

5. Gradiëntveld en hamiltoniaans vectorveld.
    - Bepaal het gradiëntveld en het hamiltoniaans vectorveld.
        - f(v)=v2v4f(v)=v2v4 en v=(v1,...,v2n)v=(v1,...,v2n)
        - h(v)=∑ni=1g(vi)h(v)=∑i=1ng(vi) met g∈C1(R2n,R)g∈C1(R2n,R)
    - Geef twee mogelijke definities van commuterende vectorvelden en bewijs dat ze equivalent zijn.
    - Bepaal de orbits van het hamiltoniaans vectorveld van
      h(x,y)↦ex+ey

      h(x,y)↦ex+ey

    - p∈S2p∈S2 is een punt op de 2-sfeer S2S2. Geef een expliciete formule voor de raakruimte TpS2TpS2 en bewijs dat dit de raakruimte beschrijft.
6. Hartman-Grobman
    - Geef de stelling van Hartman-Grobman.
    - Waarom is deze stelling niet bruikbaar om te bewijzen dat een fixpunt stabiel, maar niet asymptotisch stabiel is?
    - Bepaal de index van de fixpunten van
      V(x,y,z):=(y2+1,xz−1,xy+1)

      V(x,y,z):=(y2+1,xz−1,xy+1)

      Teken de fixpunten en het lokaal gedrag indien de stelling van Hartman-Grobman erop van toepassing is.
7. RWP
   ⌈l⌈x″+x=7tx(0)=0x′(π)=2t∈[0,π]

   {x″+x=7tx(0)=0t∈[0,π]x′(π)=2

    - Bepaal de algemene oplossing van x″+x=0x″+x=0.
    - Bepaal een oplossing van de inhomogene vergelijking x″+x=7tx″+x=7t.
    - Bepaal de unieke oplossing van het RWP.
    - Los het BWP op
      ⌈l⌈x″+x=0x(τ)=0x′(τ)=2τ∈[0,π]

      {x″+x=0x(τ)=0τ∈[0,π]x′(τ)=2

    - g:[0,π]→Rg:[0,π]→R is continu. Hoe zou je de oplossing van x″+x=gx″+x=g vinden?

Academiejaar 2014 - 2015

Prof. Marc David

Theorie

Oefeningen

1. Geef de oplossingenverzameling en een oplossing voor het beginwaardeprobleem.
    - {y′=tan(x)(y−1sin(x))x0=0,y0=1{y′=tan(x)(y−1sin(x))x0=0,y0=1
    - {y′=1+y22xyln(1+y2)x0=2,y0=1{y′=1+y22xyln(1+y2)x0=2,y0=1
    - {y′=x2y+xy2x3+y3x0=1,y0=2{y′=x2y+xy2x3+y3x0=1,y0=2
2. Stel u(x)u(x) een oplossing voor LD(A,0)LD(A,0), bepaal de machtreeks van u(x)u(x) tot en met de 4de graadsterm.

    A(x)=[10x−1]A(x)=[1x0−1]
3. Bepaal het kritische punt van volgende autonome differentiaalvergelijking. Geef een Lyapunov functie (en onderschatter) en bespreek de stabiliteit van het kritische punt.

    {y′1=y22−y1y′2=−y2(y22+2y1){y1′=y22−y1y2′=−y2(y22+2y1)

Academiejaar 2013 - 2014

Prof. Marc David

Theorie

GROEP 1

1. Geef en bewijs de exitentiestelling van Picard.
2. Geef de oplossing van het beginwaarden probleem
    {y′(x)=A(x)y+b(x)y(x0)=y0

    {y′(x)=A(x)y+b(x)y(x0)=y0

    indien de fundamentele matrix U gekend is.
3. Geef en bewijs de eerste stelling van Lyapunov.

GROEP 2

1. Geef de methode van de variatie der constanten voor LD∗(Φ,b)LD∗(Φ,b).
2. Bewijs de stelling voor de oplossing van LD(A,0)LD(A,0) voor een lineaire D.V. in dimensie n voor een functie A:J→Kn×nA:J→Kn×n die analytisch is op een interval I=[s1,s2]⊂JI=[s1,s2]⊂J en x0∈Ix0∈I. Geef hiervoor de recursiebetrekking voor de coëfficiënten van de reeks en bespreek de convergentiestraal.
3. Als g:Rn→Rng:Rn→Rn een analytische functie is die een autonome differentiaalvergelijking y′=g(y)y′=g(y) bepaalt. Als de matrix van de gelineariseerde vergelijking Aij=∂gi∂yj(yc)Aij=∂gi∂yj(yc) (voor oplossingen dichtbij het kritische punt ycyc) waarvan het reele deel van de eigenwaarden strikt negatief zijn, dan is ycyc asymptotisch stabiel. Geef de stelling en het bewijs waar dit op steunt (dit is stelling 4.10 in de cursus).

Oefeningen

1. Geef de oplossingenverzameling en de oplossing van het beginwaardeprobleem van volgende D.V.:
   - {y′=11+x2√y+xx0=0,y0=1{y′=11+x2y+xx0=0,y0=1
   - {y′=y(1−3y)6xy−2−xx0=1,y0=−1{y′=y(1−3y)6xy−2−xx0=1,y0=−1
   - {y′=xy+2y2x2+xyx0=1,y0=2{y′=xy+2y2x2+xyx0=1,y0=2
2. Bepaal van volgende matrix de reeks voor de oplossing t.e.m. de vierde macht. Voor deze vergelijking kan ook een expliciete oplossing gevonden worden. Geef het verband tussen de twee oplossingen.

   A=[1xx−1]A=[1xx−1]
3. Bepaal de kritische punten en onderzoek de stabiliteit ervan. Geef de Lyapunov functie (inclusief onderschatter).

   {y′1=y2−y1y′2=−y1−2y2+y31{y1′=y2−y1y2′=−y1−2y2+y13

Academiejaar 2012 - 2013

Prof. Marc David

Theorie

1. Formuleer en bewijs de existentiestelling van Picard.
2. Toon dat de oplossingenverzameling van een homogene lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking in dimensie n, een vectorruimte met dimensie n vormt.
3. Formuleer en bewijs de eerste stelling van Lyapunov.

Oefeningen

1. Bewijs het volgende: indien pp lineair onafhankelijke oplossingen van een homogene lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking in dimensie nn gekend zijn dan kan het probleem herleid worden tot het oplossen van een homogene lineaire differentiaalvergelijking in dimensie n−pn−p en het bepalen van pp primitieven.
2. Zij AA een matrixwaardige functie van een reële veranderlijke xx, analytisch op [s1,s2]⊂R[s1,s2]⊂R; toon aan dat de vergelijking y′=A.yy′=A.y op dit interval dan een analytische functie als oplossing heeft; leg uit hoe de coëfficiënten van haar machtreeks bepaald worden en bespreek de convergentiestraal.
3. Onderstel de gegeven functie g:Rn→Rng:Rn→Rn die de autonome differentiaalvergelijking y′=g(y)y′=g(y) bepaalt, onderstel dat deze een geïsoleerd kritisch punt ycyc heeft en dat gg analytisch is in de omgeving van ycyc. Dan zijn trajecten die voldoende dicht bij ycyc komen, asymptotisch stabiel indien alle eigenwaarden van de matrix gevorm door de partiële afgeleiden in ycyc Aij:=∂gi∂yj(yc)

   Aij:=∂gi∂yj(yc)

een strikt negatief reëel deel hebben. Formuleer een bewijs de eigenschap waarop deze bewering steunt.

Academiejaar 2011 - 2012

Prof. Marc David

1. Formuleer en bewijs de existentiestelling van Picard.
2. Leid een uitdrukking af voor de oplossing van het eerste orde beginwaardenprobleem in dimensie nn
   {y′=A(x)y+b(x)y(x0)=y0

   {y′=A(x)y+b(x)y(x0)=y0

   in de veronderstelling dat nn lineair onafhankelijke oplossingen van LD(A,0)LD(A,0) gekend zijn.
3. Als g:Rn→Rng:Rn→Rn een analytische functie is die een autonome differentiaalvergelijking y′=g(y)y′=g(y) bepaalt. Als de matrix van de gelineariseerde vergelijking Aij=∂gi∂yj(yc)Aij=∂gi∂yj(yc) (voor oplossingen dichtbij het kritische punt ycyc) waarvan het reele deel van de eigenwaarden strikt negatief zijn, dan is ycyc asymptotisch stabiel. Geef de stelling en het bewijs waar dit op steunt (dit is stelling 4.10 in de cursus).

Academiejaar 2010 - 2011

Prof. Marc David GROEP 1

1. Geef de methode van de variatie der constanten voor LD∗(Φ,b)LD∗(Φ,b).
2. Bespreek exacte differentiaalvergelijkingen en hun oplossing.
3. Als g:Rn→Rng:Rn→Rn een analytische functie is die een autonome differentiaalvergelijking y′=g(y)y′=g(y) bepaalt. Als de matrix van de gelineariseerde vergelijking Aij=∂gi∂yj(yc)Aij=∂gi∂yj(yc) (voor oplossingen dichtbij het kritische punt ycyc) waarvan het reele deel van de eigenwaarden strikt negatief zijn, dan is ycyc asymptotisch stabiel. Geef de stelling en het bewijs waar dit op steunt (dit is stelling 4.10 in de cursus).

GROEP 2

1. Existentiestelling van oplossingen van een DV met methode van Picard. Formuleer en bewijs.
2. Bespreek de oplossing van een scheidbare eerste orde DV.
3. Leg uit hoe je het gedrag van de oplossigen van een autonome eerste orde DV in dimensie 1 kan voorspellen en pas dit toe op het probleem van logaritmische groei met migratie.

Academiejaar 2009 - 2010

Prof. Marc David GROEP 1

1. Toon dat, voor wat betreft existentie en uniciteit van oplossingen, het voldoende is om enkel vectori?ele differentiaalvergelijkingen van eerste orde te beschouwen.

2. Bewijs het volgende: indien pp linear onafhankelijke oplossingen van een homogene lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking in dimensie nn gekend zijn, dan kan het probleem herleid worden tot het oplossen van een homogene lineaire differentiaalvergelijking in dimensie n−pn−p en het bepalen van pp primitieven.
3. Bespreek een voorbeeld van de toepassing van differentiaalvergelijkingen in de populatiedynamica.
4. Bespreek de oplossing van een scheidbare eerste-orde differentiaalvergelijking.

GROEP 2

1. Onder welke voorwaarden op de differentiaalvergelijking kunnen twee verschillende oplossingen (u,J)(u,J) en (v,J)(v,J) van een eerste orde differentiaalvergelijking elkaar niet snijden? Bewijs.
2. Leid een uitdrukking af voor de oplossing van het beginwaardenprobleem
   {y′(x)=A(x)y+b(x)y(x0)=y0

   {y′(x)=A(x)y+b(x)y(x0)=y0

   in de veronderstelling dat nn onafhankelijke oplossingen van LD(A,0)LD(A,0) gekend zijn.
3. Formuleer en bewijs de eerste stelling van Lyapunov.

Categorieën:

- Wiskunde
- 2BWIS