Wiskundige methoden voor de fysica I Calculus

tuyaux.winak.be/index.php/Wiskundige_methoden_voor_de_fysica_I_Calculus

Calculus	
Richting	Fysica Wiskunde
Jaar	1BFYS 1BWIS

Bespreking

Dit vak wordt samengegeven met de eerste bachelor wiskunde door professor Eelbode. Hij geeft veel nuttig informatie tijdens zijn theorie lessen en zijn zeker de moeite waard om te volgen. Het tempo in de lessen is wel vrij hoog, zeker aangezien dat dit een van de eerste vakken is die je krijgt in je universitaire opleiding en je nog zal moeten wennen aan de overstap middelbaar-unief. De cursus, geschreven door de prof zelf, is ook zeer overzichtelijk en volgt zeer goed de theorie lessen. In de praktijk lessen worden telkens oefeningenbladen uitgedeeld, en deze komen normaal ook op blackboard op het einde van het semester. De oplossingen komen **niet** op blackboard en maar worden wel besproken in de praktijklessen zelf.

Professor Eelbode geeft rond het begin van november altijd een test over calculus. Met deze test kan je een vrijstelling halen voor een deel van het exaam. Het is zeker hard aan te raden om goed te studeren, want dan ben je vrijgesteld voor een groot deel van het examen in januari en hierdoor heb je een paar extra dagen studeertijd tijdens de blok. De vragen van deze testen worden ook bijgehouden op deze pagina, ook hiervoor is het een goed idee om deze eens te bekijken om te zien of je alles wel grondig genoeg begrijpt.

Puntenverdeling

Het volledig examen staat op 20 punten. Samen met Wiskundige methoden voor de fysica I Lineaire algebra dat op 10 punten staat wordt een totaal op 30 gevormd. Dit resultaat wordt herleid naar een resultaat op 20, en dat is het eindresultaat. Dit vak telt dus voor iets meer dan 13 punten mee van het eindresultaat. Indien je er voor 1 deel niet door bent (Calculus of Algebra) maar in het totaal wel geslaagd bent heb je geen herexamen. Indien je er voor 1 deel door bent, en in het totaal niet geslaagd bent, dien je enkel herexamen te doen van het deel waarop je buisde. De mogelijk vrijstelling, die te behalen is met de test, zie bespreking, geldt enkel tijdens de eerste zit, als je een herexaam doet voor calculus telt deze vrijstelling niet meer.

Tussentijdse testen

De vragen van de tussentijdse testen kan je hier terugvinden.

Examenvragen

Academiejaar 2023-2024 1ste zit

Theorie

Media:Calculus2324.pdf

Academiejaar 2022-2023 1ste zit

Theorie

:

Naam/Richting:

Examen Calculus Theorie (Zittijd 1)

Dinsdag 17 Januari 2023

Enkele opmerkingen vooraf:

- Je hebt in totaal 3u de tijd voor dit examen (tot 11u30).
- Dien aan het eind **enkel je net en dit opgavenblad** in. Je kladwerk wordt *niet* gelezen. Vergeet niet op alle bladzijden je naam te vermelden.
- Als er gevraagd wordt een stelling te bewijzen, dan mag je uiteraard op andere stellingen steunen: geef wel telkens aan over welk resultaat het gaat (bijvoorbeeld: 'ik gebruik hier dat contine functies op een compact interval altijd begrensd zijn'). Resultaten waarop je steunt moeten uiteraard niet bewezen worden als deel van de vraag.

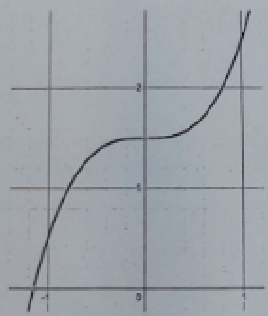
Veel succes!

Vraag 1 (komt overeen met deel van de test):
In de cursus hebben we een stelling gezien die iets zegt over de existentie van het minimum voor een continue functie $f(x)$ op een domein $D = [a, b]$.

(i) Formuleer deze stelling (volledig, dus enkel de naam geven is niet voldoende) en toon ze aan. /3

(ii) Geef een expliciet voorbeeld van een continue functie op het domein $D =]1, 2]$ die verklaart waarom er een voorwaarde ligt op het domein. Een grafiek is hier niet voldoende, het antwoord moet dus een functievoorschrift zijn. /1

Vraag 2 (komt overeen met deel van de test):



Hierboven staat een deel van de grafiek van de afgeleide $f'(x)$ van een functie $f(x)$ op een domein $D \subset \mathbb{R}$.
Waar/Vals: de functie $f : D \to \mathbb{R}$ heeft een buigpunt in $x = 0$. /2

Vraag 3 (komt overeen met deel van de test):
Stel dat je van twee afleidbare functies $f : D \to \mathbb{R}_0^+$ en $g : D \to \mathbb{R}_0^+$ op een (open) domein $D \subset \mathbb{R}$ weet dat ze strikt stijgend zijn. Verklaar dan volgende bewering: de functie $fg : D \to \mathbb{R}^+$ is een bijectie van D op het beeld van die functie. Gebruik daarvoor gepaste stellingen (die je hier niet moet bewijzen). /2

:

Vraag 4:

(i) Hoe kan je controleren of de differentiaalvergelijking

$$S(x,y)dx + T(x,y)dy = 0$$

exact is? /1

(ii) Stel dat bovenstaande vergelijking *niet* exact is. Leg dan uit wat een integrerende factor $\mu(x,y)$ is, en leid de vergelijking af waaraan die functie moet voldoen (uiteraard zonder ze op te lossen). /1

(iii) Stel dat je weet dat de oplossingen voor een homogene differentiaalvergelijking worden gegeven door de functies $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = xe^x$ en $y_3(x) = x^2e^x$. Geef dan die vergelijking! /2

Vraag 5:
Gegeven een continue functie $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Geef dan de definitie van de bijhorende 'integraal met een variabele bovengrens', en toon aan dat dit een primitieve zal zijn voor de gegeven functie. /2

Vraag 6:
Geef de volledige formulering voor de majorantenregel voor oneigenlijke integralen van de eerste soort, en gebruik deze vervolgens om aan te tonen dat de integraal

$$I_\infty := \int_0^\infty \frac{x^{42}}{1+e^x}dx .$$

convergent is. /2

Vraag 7:

(i) Vervolledig in eerste instantie onderstaande formule (voor een voldoende afleidbare functie): /1

$$\int_a^x T_n(f,a)(t)dt = [\text{Taylor-veelterm}] .$$

(ii) Bewijs dan deze eigenschap. Je mag daarbij steunen op andere eigenschappen voor Taylor-veeltermen (zonder bewijs), maar wees wel volledig in je verklaring: alle stappen moeten hier expliciet toegelicht worden! /2

(iii) Gebruik tenslotte bovenstaande eigenschap om te verklaren waarom we kunnen zeggen dat

$$\pi \approx 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9}\right) .$$

Je hoeft daarbij geen rekening te houden met de analyse van de restterm, het is hier voldoende om te verklaren waarom precies die breuken hier tevoorschijn komen. /1

Oefeningen

:

Het antwoord op al je vragen is hieronder te vinden:
https://www.youtube.com/watch?v=dQw4w9WgXcQ

Naam + Richting (Wis/Fys):

Examen Calculus Oefeningen (Zittijd 1)

19 Januari 2023

Enkele opmerkingen vooraf:

- Je hebt in totaal 3u de tijd voor dit examen.
- Dien aan het eind **enkel** dit opgavenblad en je **antwoorden** in. Je kladwerk wordt *niet* gelezen.
- Er wordt voornamelijk geëvalueerd op redeneringen en minder op uitkomsten: beschrijf je denkproces uitvoerig in de vorm van voldoende tussenstappen.
- Refereer naar gebruikte stellingen en geziene begrippen om je antwoord te staven: zonder voldoende verklaringen kunnen er punten worden afgetrokken.
- Als je een bizar resultaat uitkomt, verklaar dan wat er bizar is aan het resultaat.

Veel succes!

Vraag 1: Beschouw de functie

$$f : [5, 15] \to \mathbb{R} : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{(x-8)^2}\right).$$

a) Schrijf de $(\varepsilon, \delta; P, Q)$-definitie neer voor de bewering

$$\lim_{x \to 8} f(x) = +\infty.$$

/1

b) Bewijs de bewering uit opgave a) met een $(\varepsilon, \delta; P, Q)$-bewijs. /2

Vraag 2: Bepaal alle mogelijke waarden $a, b \in \mathbb{R}$ zodat de volgende functie continu is:

$$f : \left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \sqrt[x^2]{\cos x} & x \in \left]-\frac{\pi}{2}, 0\right[\\ a & x = 0 \\ \frac{\cos x \sin(bx)}{x} & x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$$

/1,5

Vraag 3: Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^x + 2.$$

a) Zij $a \in \mathbb{R}$ willekeurig. Geef de vergelijking van de raaklijn aan de kromme $y = f(x)$ door het punt $A_a = (a, f(a))$. /1

b) Zij B_a het snijpunt van de raaklijn aan de kromme $y = f(x)$ door A_a en de x-as. Voor welke a geldt er dat de afstand tussen A_a en B_a minimaal is? /2,5

<u>Hint:</u> Op een bepaald moment kom je (na een gepaste substitutie) een vierdegraadsvergelijking tegen. Laat je hier niet door afschrikken: ontbinden in factoren doet soms wonderen ☺.

:

Vraag 4: Beschouw een continue functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en een tweemaal afleidbare functie $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Zij $a, b \in \mathbb{R}$ willekeurig. Bereken de tweede afgeleide van de functie

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_a^{\varphi(x)} \left(\int_b^t f(s) ds \right) dt.$$

/2

Vraag 5: Beschouw het gebied begrensd door $x = 0, y = \sqrt{1-x}$ en $y = -\sqrt{1-x}$. Bepaal alle waarden $a > 0$ zodanig dat de kromme $x = ay^2$ dit gebied verdeelt in 3 gelijke delen. /3

Vraag 6:

a) Bepaal, met behulp van een gekende Taylorreeks, de Taylorreeks ontwikkeld rond 0 van de functie

$$f : \left]-\sqrt[7]{7}, +\infty\right[\to \mathbb{R} : x \mapsto x \ln(x^7 + 7).$$

Beschrijf het maximale convergentiegebied. /1,5

b) Tijdens een programmeerproject gebruik je in MATLAB volgende benadering:

$$\cos x \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

De nauwkeurigheid van MATLAB is 2^{-52}, m.a.w. MATLAB kan 2 getallen enkel onderscheiden indien hun verschil groter is dan 2^{-52} (de realiteit is iets complexer, maar deze vereenvoudiging volstaat voor deze examenvraag). Bepaal een zo groot mogelijke $\delta > 0$ zodat

$$\forall x \in \left]-\delta, \delta\right[: \left| \cos x - \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) \right| < 2^{-52},$$

m.a.w. zodat de benadering exact is volgens MATLAB. Verklaar je antwoord. /2

Vraag 7: Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$xy' + x^2 = -\frac{y}{\ln(x)}.$$

Geef een expliciete oplossing. /3,5

Academiejaar 2021-2022 2^e zit

Onder deze sectie kan u de vragen met oplossingen terug vinden van de tweede zit van 2021 -2022

Oefeningen

Make your wonderful dream a reality,
and it will become your truth!
(N, from Pokémon Black)

Naam + Richting (Wis/Fys):

Examen Calculus Oefeningen (Zittijd 2)

26 Augustus 2022

Enkele opmerkingen vooraf:

- Je hebt in totaal 3u de tijd voor dit examen.
- Dien aan het eind **enkel dit opgavenblad en je antwoorden** in. Je kladwerk wordt *niet* gelezen.
- Voorzie je uitwerking van een verklaring: zonder duidelijke verwijzing naar gebruikte stellingen, kunnen er punten worden afgetrokken.

Veel succes!

Vraag 1: In deze opgave zullen we tonen dat

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^2-2x+2}{2x^2+1} = \frac{1}{2}. \tag{1}$$

a) Schrijf de $(\varepsilon, \delta; P, Q)$-definitie die overeenkomt met (1) neer. **/1**

b) Bewijs bewering (1) door gebruik te maken van de $(\varepsilon, \delta; P, Q)$-definitie. **/2**

a) $(\forall \varepsilon > 0)\,(\exists P > 0)\,(\forall x \in \mathbb{R})\left(x < -P \Rightarrow \left|\frac{x^2-2x+2}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon\right)$.

b) Zij $\varepsilon > 0$ willekeurig. Neem $P = \frac{1+\sqrt{-2\varepsilon^2+3\varepsilon+1}}{2\varepsilon}$ (dit vind je normaal aan het einde van het bewijs). Zij nu $x \in \mathbb{R}$ zodat $x < -P$. Dan geldt er dat

$$\left|\frac{x^2-2x+2}{2x^2+1} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-4x+3}{4x^2+2}\right| = \frac{-4x+3}{4x^2+2} < \varepsilon.$$

Hierbij kunnen we de absolute waarden laten vallen omdat $x < -P < 0$, dus $-4x+3 > 0$. De ongelijkheid geldt door het volgende argument.

We hebben dat

$$\frac{-4x+3}{4x^2+2} < \varepsilon \Leftrightarrow -4x+3 < \varepsilon(4x^2+2) \Leftrightarrow 4\varepsilon x^2 + 4x + (2\varepsilon - 3) > 0. \tag{2}$$

Dit laatste kan je beschouwen als een kwadratische functie in x met een parameter ε. We maken hiervan een tekenverloop. De discriminant is

$$D = 16(-2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1).$$

We veronderstellen[1] dat $\varepsilon \leq \frac{3+\sqrt{17}}{4}$, dus $D \geq 0$. De wortels van de kwadratische functie zijn dan

$$x_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{-2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1}}{2\varepsilon}.$$

[1]Indien $\varepsilon > \frac{3+\sqrt{17}}{4}$, dan is $D < 0$ dus is (2) waar voor elke $x \in \mathbb{R}$ en dus geldt de te bewijzen stelling voor elke $P > 0$.

Omdat $x < 0$ geeft een tekenverloop (het is een dalparabool) ons dat (2) waar is als en slechts als

$$x < -\frac{1 + \sqrt{-2\varepsilon^2 + 3\varepsilon + 1}}{2\varepsilon} = -P,$$

maar het is gegeven dat $x < -P$, dus we zijn klaar.

:

Vraag 2: Gegeven de functie

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto x^{\frac{a}{\ln(x^2)}} + \sin(\lfloor b \rfloor x) + cx^2 + dx$$

waarbij $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ constanten zijn. Bepaal alle waarden voor a, b, c en d zodanig dat er aan volgende voorwaarden is voldaan (d kan van a, b en/of c afhangen):

i) $\lim_{x \to 0+} f(x) = 1$.

ii) Er bestaat een $\delta > 0$ zodat f concaaf is op $]\pi - \delta, \pi + \delta[$.

iii) f heeft een lokaal maximum in $x = 2\pi$.

Voetnoot: Hierbij is $\lfloor b \rfloor$ de floor-function: deze geeft als output het grootste gehele getal dat kleiner dan of gelijk is aan b (bv. $\lfloor e \rfloor = 2$). Dit lijkt de oefening moeilijker te maken, maar je zal in je berekeningen zien dat dit voor heel wat vereenvoudigingen zorgt. **/4**

Door de definitie van de machtsverheffing (met variabele in grondtal en exponent) vinden we dat:

$$x^{\frac{a}{\ln(x^2)}} = \exp\left(\ln\left(x^{\frac{a}{\ln(x^2)}}\right)\right) = \exp\left(\frac{a}{\ln(x^2)}\ln(x)\right) = \exp\left(\frac{a\ln(x)}{2\ln(x)}\right) = e^{\frac{a}{2}}.$$

Bijgevolg geldt er dat

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+}\left(x^{\frac{a}{\ln(x^2)}} + \sin(\lfloor b \rfloor x) + cx^2 + dx\right) = \lim_{x \to 0^+} e^{\frac{a}{2}} = e^{\frac{a}{2}}.$$

We besluiten voor uitspraak *i*) dat

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 1 \Leftrightarrow e^{\frac{a}{2}} = 1 \Leftrightarrow a = 0.$$

De functie f kan dus eenvoudiger worden geschreven als

$$f :]0, +\infty[\to \mathbb{R} : x \mapsto 1 + \sin(\lfloor b \rfloor x) + cx^2 + dx$$

Voor de volgende voorwaarden hebben we de eerste en tweede afgeleide nodig:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lfloor b \rfloor \cos(\lfloor b \rfloor x) + 2cx + d, \\ f''(x) &= -\lfloor b \rfloor^2 \sin(\lfloor b \rfloor x) + 2c. \end{aligned}$$

Omdat f tweemaal afleidbaar is, geldt er dat

$$\exists \delta > 0 : f \text{ is concaaf op }]\pi - \delta, \pi + \delta[\Leftrightarrow \exists \delta > 0, \forall x \in]\pi - \delta, \pi + \delta[: f''(x) \leq 0.$$

Een nodige, maar niet voldoende voorwaarde is dat $f''(\pi) \leq 0$. Merk op dat $\sin(\lfloor b \rfloor \pi) = 0$ (want $\lfloor b \rfloor \in \mathbb{Z}$), dus we vinden dat

$$f''(\pi) \leq 0 \Leftrightarrow -\lfloor b \rfloor^2 \sin(\lfloor b \rfloor \pi) + 2c \leq 0 \Leftrightarrow 2c \leq 0 \Leftrightarrow c \leq 0.$$

Als $c = 0$, dan is $f''(x) = -\lfloor b \rfloor^2 \sin(\lfloor b \rfloor x)$. Door het gekende gedrag van de sinusfunctie weten we dan dat er geen $\delta > 0$ bestaat zodat $\forall x]\pi - \delta, \pi + \delta[: f''(x) \leq 0$.

Als $c < 0$, dan is $f''(\pi) < 0$. Omdat f'' een continue functie is, geldt door het *behoud van teken* dat

$$\exists \delta > 0, \forall x \in]\pi - \delta, \pi + \delta[: f''(x) < 0,$$

dus in het bijzonder is f concaaf op $]\pi - \delta, \pi + \delta[$.

We besluiten nu dat

$$\exists \delta > 0 : f \text{ is concaaf op }]\pi - \delta, \pi + \delta[\Leftrightarrow c < 0.$$

Voor de laatste voorwaarde is een nodige (maar niet voldoende) voorwaarde dat $x = 2\pi$ een kritiek punt is van f , ofwel $f'(2\pi) = 0$. Omdat $\cos(\lfloor b \rfloor 2\pi) = 1$ (opnieuw omdat $\lfloor b \rfloor \in \mathbb{Z}$), vinden we dat

$$f'(2\pi) = \lfloor b \rfloor \cos(\lfloor b \rfloor 2\pi) + 2c2\pi + d = \lfloor b \rfloor + 4c\pi + d.$$

We besluiten dat

$$f \text{ heeft een kritiek punt in } x = 2\pi \Leftrightarrow d = -\lfloor b \rfloor - 4c\pi.$$

Om te tonen dat f een lokaal maximum heeft in $x = 2\pi$, zullen we tonen dat $x = 2\pi$ een regulier kritiek punt is ($f''(2\pi) \neq 0$) en dat $f''(2\pi) < 0$. Inderdaad, we vinden dat (omdat $c < 0$):

$$f''(2\pi) = -\lfloor b \rfloor^2 \sin(\lfloor b \rfloor 2\pi) + 2c = 2c < 0,$$

wat betekent dat f een lokaal maximum heeft in $x = 2\pi$ zonder extra voorwaarde.

We concluderen dat f voldoet aan de gegeven voorwaarden indien

$$(a, b, c, d) \in \{(0, x, y, -\lfloor x \rfloor - 4\pi y) \in \mathbb{R}^4 | y < 0\}.$$

:

Vraag 3: Het *trifolium* is een kromme die wordt beschreven door de Carthesische vergelijking

$$2(x^3 - 3xy^2) + (x^2 + y^2)^2 = 0.$$

Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan het trifolium in het punt $(1, 1)$. **/1**

De rico van de raaklijn aan het trifolium in $(1, 1)$ wordt gegeven door $\frac{dy}{dx}\big|_{(x,y)=(1,1)}$. We leiden de vergelijking $2(x^3 - 3xy^2) + (x^2 + y^2)^2 = 0$ impliciet af naar x in het punt $(x, y) = (1, 1)$:

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{d}{dx}\Big|_{(x,y)=(1,1)} \left(2(x^3 - 3xy^2) + (x^2 + y^2)^2\right) \\
&= \left(2\left(3x^2 - 3y^2 - 3x \cdot 2y \cdot \frac{dy}{dx}\right) + 2(x^2 + y^2)\left(2x + 2y\frac{dy}{dx}\right)\right)\Big|_{(x,y)=(1,1)} \\
&= 2\left(3 - 3 - 6\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,y)=(1,1)}\right) + 2 \cdot 2\left(2 + 2\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,y)=(1,1)}\right) \\
&= 8 - 4\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,y)=(1,1)}.
\end{aligned}$$

Dit betekent dat

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{(x,y)=(1,1)} = 2,$$

dus de raaklijn is van de vorm

$$y = 2x + q$$

voor een nog te bepalen $q \in \mathbb{R}$. Omdat $(1, 1)$ op de raaklijn ligt, vinden we dat

$$1 = 2 + q \Rightarrow q = -1,$$

dus de raaklijn wordt gegeven door

$$y = 2x - 1.$$

:

Vraag 4: David en Senne zitten op café om het examen Calculus op te stellen. Senne is echter zijn portemonnee vergeten, maar gelukkig wil David trakteren. Hij stelt wel een voorwaarde: 'Ik heb net een nieuwe vaas gekocht, maar de kleur staat me niet aan. Ik wil dat jij deze vaas voor me verft.' Senne heeft, gezien de omstandigheden, niet veel keuze en stemt in met het voorstel. 'Hoeveel verf heb ik nodig?', vraagt hij aan David. 'Oh, dat is zeer eenvoudig: de vaas kan worden beschreven door de functie

$$f : [1, a] \to \mathbb{R} : x \mapsto 4 + 3x^2$$

te wentelen rond de y-as, waarbij a de richtingscoëfficiënt is van de raaklijn in $x = 2$ aan de kromme beschreven door de functie

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \int_1^{42(x-2)^2+\pi(x-2)+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt.$$

Tot later!' zegt David, waarna hij meteen naar huis vertrekt. Hoeveel verf heeft Senne nodig? Het antwoord kan een irrationaal getal zijn. **/4**

We bepalen eerst a, wat de rico van de raaklijn is in $x = 2$ aan de kromme beschreven door de functie g, m.a.w. $a = g'(2)$. Door een combinatie van de Eerste Hoofdstelling van de Calculus en de kettingregel vinden we dat

$$\begin{aligned}
a &= \frac{d}{dx}\Big|_{x=2} \left(\int_1^{42(x-2)^2+\pi(x-2)+\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{t} dt \right) \\
&= \left(\frac{\sin\left(42(x-2)^2 + \pi(x-2) + \frac{\pi}{2}\right)}{42(x-2)^2 + \pi(x-2) + \frac{\pi}{2}} \frac{d}{dx} \left(42(x-2)^2 + \pi(x-2) + \frac{\pi}{2}\right) \right) \Big|_{x=2} \\
&= \left(\frac{\sin\left(42(x-2)^2 + \pi(x-2) + \frac{\pi}{2}\right)}{42(x-2)^2 + \pi(x-2) + \frac{\pi}{2}} (84(x-2) + \pi) \right) \Big|_{x=2} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\frac{\pi}{2}} \pi \\
&= 2.
\end{aligned}$$

We willen nu de zijdelingse oppervlakte bepalen van het omwentelingslichaam verkregen door de functie

$$f : [1, 2] \to \mathbb{R} : x \mapsto 4 + 3x^2$$

te wentelen rond de y-as. Dit is equivalent met het wentelen van de inverse functie f^{-1} (die bestaat omdat $f(x) = 4 + 3x^2$ een bijectie is op $\mathbb{R}^{\geq 0}$) rond de x-as (want inverteren komt overeen met een spiegeling rond $y = x$), waarvoor we formules kennen.

Omdat f een monotoon stijgende functie is, geldt er dat

$$f([1, 2]) = [f(1), f(2)] = [7, 16].$$

Verder vinden we dat

$$y = 4 + 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y-4}{3} \Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y-4}{3}}.$$

De inverse functie is dus

$$f^{-1} : [7, 16] \to [1, 2] : x \mapsto \sqrt{\frac{x-4}{3}},$$

dus hebben we voor de afgeleide

$$\left(f^{-1}(x)\right)' = \frac{1}{\sqrt{12(x-4)}}.$$

De gezochte zijdelings oppervlakte S is dan, zoals eerder beschreven, gelijk aan

$$\begin{aligned} S &= 2\pi \int_7^{16} |f^{-1}(x)| \sqrt{1 + \left((f^{-1}(x))'\right)^2} dx \\ &= 2\pi \int_7^{16} \sqrt{\frac{x-4}{3}} \sqrt{1 + \frac{1}{12(x-4)}} dx \\ &= 2\pi \int_7^{16} \sqrt{\frac{x-4}{3}} \sqrt{\frac{12(x-4)+1}{12(x-4)}} dx \\ &= \frac{\pi}{3} \int_7^{16} \sqrt{12x-47} dx. \end{aligned}$$

Door de substitutie $t = 12x - 47$ toe te passen op deze laatste integraal, hebben we dat

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{3} \int_7^{16} \sqrt{12x-47} dx \\ &= \frac{\pi}{36} \int_{37}^{145} \sqrt{t} dt \\ &= \frac{\pi}{36} \left[\frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{t=37}^{145} \\ &= \frac{\pi}{54} \left(\sqrt{145^3} - \sqrt{37^3} \right). \end{aligned}$$

Deze waarde voor S is de hoeveelheid verf die Senne nodig heeft.

:

Vraag 5: In deze opgave zullen we $\frac{1}{2}e$ benaderen.

a) Benader $\frac{1}{2}e$ door middel van een derdegraads Taylorveelterm van de functie

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}$$

ontwikkeld rond het punt 0. **/1.5**

b) Beschouw de restterm $R_3(f,0)(1)$ voor de benadering van $\frac{1}{2}e$ door de Taylorveelterm $T_3(f,0)(x)$ uit de vorige opgave. Toon aan dat

$$\exists c \in \,]0,1[\, : |R_3(f,0)(1)| \leq \frac{1}{8}(c^4 + 6c^2 - 8c + 9)$$

/1.5

c) Gebruik het voorgaande resultaat om te tonen dat

$$|R_3(f,0)(1)| \leq \frac{9}{8}.$$

/1

a) We bepalen alle afgeleiden tot en met de vierde afgeleide van f. Belangrijk hierbij is dat je de breuk steeds zo veel mogelijk vereenvoudigt bij elke tussenstap (anders is het gevaar op rekenfouten zeer reëel). We hebben dat:

$$f'(x) = \frac{e^x}{1+x} + e^x(-1)(1+x)^{-2} = \frac{e^x(1+x) - e^x}{(1+x)^2} = \frac{xe^x}{(1+x)^2}.$$

Voor de tweede afgeleide:

$$f''(x) = \frac{xe^x + e^x}{(1+x)^2} + xe^x(-2)(1+x)^{-3} = \frac{e^x(x^2+2x+1) - 2xe^x}{(1+x)^3} = \frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}.$$

Voor de derde afgeleide:

$$f'''(x) = \frac{e^x(x^2+1+2x)}{(1+x)^3} + e^x(x^2+1)(-3)(1+x)^{-4} = \frac{e^x(x^3+3x^2+3x+1) - 3e^x(x^2+1)}{(1+x)^4} = \frac{e^x(x^3+3x-2)}{(1+x)^4}$$

Ten slotte vinden we voor de vierde afgeleide (die we alleen nodig hebben in vraag *b*)):

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= \frac{e^x(x^3+3x-2+3x^2+3)}{(1+x)^4} + e^x(x^3+3x-2)(-4)(1+x)^{-5} \\ &= \frac{e^x(x^4+4x^3+6x^2+4x+1) - 4e^x(x^3+3x-2)}{(1+x)^5} \\ &= \frac{e^x(x^4+6x^2-8x+9)}{(1+x)^5} \end{aligned}$$

Merk hierbij op dat de uitwerking van $(1+x)^n$ door het binomium van Newton je heel wat rekenwerk kan besparen. We vatten samen:

n	0	1	2	3	4
$f^{(n)}(x)$	$\frac{e^x}{1+x}$	$\frac{xe^x}{(1+x)^2}$	$\frac{e^x(x^2+1)}{(1+x)^3}$	$\frac{e^x(x^3+3x-2)}{(1+x)^4}$	$\frac{e^x(x^4+6x^2-8x+9)}{(1+x)^5}$
$f^{(n)}(0)$	1	0	1	-2	9

8

:

De derdegraads Taylorveelterm van f ontwikkeld rond 0 is per definitie

$$T_3(f,0)(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x-0)^k = 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}.$$

Ten slotte, omdat $\frac{1}{2}e = f(1)$ vinden we volgende benadering van $\frac{1}{2}e$:

$$\frac{1}{2}e \approx T_3(f,0)(1) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}.$$

b) Door de Formule van Taylor (Stelling 5.5) en de eerder gevonden afgeleiden geldt er dat

$$\exists c \in]0,1[: |R_3(f,0)(1)| = \left|\frac{f^{(4)}(c)}{4!}(1-0)^4\right| = \frac{1}{24}\left|\frac{e^c(c^4+6c^2-8c+9)}{(1+c)^5}\right|. \qquad (3)$$

Omdat $0 < c < 1$, vinden we enerzijds dat $e^c < e^1 = e < 3$ en anderzijds dat

$$1 < |c+1| < 2 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{|c+1|} < \frac{1}{1} = 1 \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^5 < \frac{1}{|(c+1)^5|} < 1^5 = 1.$$

We besluiten dus dat

$$\left|\frac{e^c}{(1+c)^5}\right| = \frac{e^c}{|(c+1)^5|} < 3.$$

Als we dit gebruiken in (3), krijgen we dat

$$|R_3(f,0)(1)| = \frac{1}{24}\left|\frac{e^c(c^4+6c^2-8c+9)}{(1+c)^5}\right| < \frac{1}{8}|c^4+6c^2-8c+9| = \frac{1}{8}(c^4+6c^2-8c+9).$$

De absolute waarden vallen weg omdat $0 < c < 1$, dus $-8c+9 > 0$ en dus zeker $c^4+6c^2-8c+9 > 0$.

c) Indien we kunnen aantonen dat

$$\forall x \in]0,1[: x^4 + 6x^2 - 8x + 9 \leq 9,$$

dan volgt het gevraagde meteen uit vraag *b*). Dit is dus een verdoken optimalisatievraagstuk. Beschouw de functie

$$g : [0,1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^4 + 6x^2 - 8x + 9,$$

dus $g'(x) = 4x^3 + 12x - 8$. Nu is $g'(0) < 0$ en $g'(1) > 0$. Omdat g' continu is, geldt er door de stelling van Bolzano dat g' een nulpunt α heeft, dus g heeft een kritiek punt. Verder is $g''(x) = 12x^2 + 12 > 0$, dus g' is een monotoon stijgende functie. Bijgevolg zal α het unieke nulpunt van g' (en dus het unieke kritieke punt van g) zijn. Maar $g''(\alpha) > 0$, dus g bereikt een lokaal minimum in α.
Aangezien g gedefinieerd is op een compact interval, zegt de stelling van Weierstrass dat g een globaal maximum heeft. Dit moet in een van de randpunten zijn, aangezien we eerder hebben getoond dat er geen (lokaal) maximum is in een kritiek punt. Dit betekent dat

$$\forall x \in [0,1] : x^4 + 6x^2 - 8x + 9 \leq \max\{g(0), g(1)\} = \max\{9, 8\} = 9.$$

:

Vraag 6: Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\left(\sinh(e^x)e^x y + \frac{x^2 - \arctan y}{x^2}\right) dx + \left(\cosh(e^x) + \frac{1 + 2xy + 2xy^3}{x + xy^2}\right) dy = 0, \quad y(8) = 0.$$

Het is voldoende indien je de impliciete oplossing geeft. **/4**

We noteren

$$\begin{cases} P(x,y) &= \sinh(e^x)e^x y + \frac{x^2 - \arctan y}{x^2} \\ Q(x,y) &= \cosh(e^x) + \frac{1+2xy+2xy^3}{x+xy^2} \end{cases}.$$

Enerzijds geldt er dat $\frac{\partial P}{\partial y} = \sinh(e^x)e^x - \frac{1}{x^2(1+y^2)}$, anderzijds

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} &= \sinh(e^x)e^x + \frac{2y + 2y^3}{x + xy^2} + (1 + 2xy + 2xy^3)(-1)\frac{1}{(x + xy^2)^2}(1 + y^2) \\ &= \sinh(e^x)e^x + \frac{2xy + 2xy^3}{x^2(1 + y^2)} - \frac{(1 + 2xy + 2xy^3)(1 + y^2)}{x^2(1 + y^2)^2} \\ &= \sinh(e^x)e^x + \frac{2xy + 2xy^3}{x^2(1 + y^2)} - \frac{1 + 2xy + 2xy^3}{x^2(1 + y^2)} \\ &= \sinh(e^x)e^x - \frac{1}{x^2(1 + y^2)} \end{aligned}$$

Omdat $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ hebben we bewezen dat de DV exact is. Er bestaat dus een functie $\Psi(x,y)$ zodat

$$\begin{cases} \frac{\partial \Psi}{\partial x} &= P(x,y) \\ \frac{\partial \Psi}{\partial y} &= Q(x,y) \end{cases}$$

en zodat de impliciete oplossing van de DV wordt gegeven door $\Psi(x,y) = c$ voor een $c \in \mathbb{R}$. We bepalen nu Ψ.

Ten eerste geldt er dat

$$\Psi(x,y) = \int P(x,y)dx = y\int \sinh(e^x)e^x dx + \int dx - \arctan y \int \frac{1}{x^2}dx = y\cosh(e^x) + \frac{1}{x}\arctan(y) + x + c(y).$$

Anderzijds moet er gelden dat $\frac{\partial \Psi}{\partial y} = Q(x,y)$, dus

$$\cosh(e^x) + \frac{1}{x(1+y^2)} + c'(y) = \cosh(e^x) + \frac{1 + 2xy + 2xy^3}{x + xy^2}.$$

Hieruit volgt nu dat

$$c'(y) = \frac{1 + 2xy + 2xy^3}{x + xy^2} - \frac{1}{x(1+y^2)} = \frac{2xy(1+y^2)}{x(1+y^2)} = 2y.$$

Dit betekent dat

$$c(y) = y^2 + c.$$

Er bestaat dus een $c \in \mathbb{R}$ zodat de impliciete oplossing wordt gegeven door

$$y\cosh(e^x) + \frac{1}{x}\arctan(y) + x + y^2 = c.$$

Als voorwaarde is nog gegeven dat $y(8) = 0$, dus het punt $(8,0)$ ligt op de gezochte kromme, m.a.w.

$$c = 0 \cdot \cosh(e^8) + \frac{1}{8}\arctan(0) + 8 + 0^2 = 8.$$

De impliciete oplossing is dus

$$y\cosh(e^x) + \frac{1}{x}\arctan(y) + x + y^2 = 8.$$

10

Academiejaar 2020-2021 (1ste zit)

Prof. David Eelbode

Theorie

1. Stel dat $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ een constante f is, en dat $f(x_0)<0$ (met $a<x_0<b$ in het domein van f). Bewijs dan dat deze functie negatief zal zijn in een omgeving van dit punt x_0.
2. Gebruik een gepaste eigenschap van convexe f om een criterium op te stellen waaraan een (strikt positieve) functie $f:D\to\mathbb{R}_0^+$ moet voldoen opdat de functie $g(x):=\ln(f(x))$ convex zou zijn. Je maag hier uiteraard steunen op het feit dat de functie $f(x)$ voldoende afleidbaar is. Je moet de eigenschap die je gebruikt niet bewijzen, maar uiteraard wel vermelden.
3. (Waar/Vals) Elke bijectie $\phi:[0,1]\to[0,1]$ is monotoon.
4.
    1. Gebruik een gepaste stelling uit de cursus om te verklaren waarom er zeker een punt ξ element van $\mathbb{R}$ bestaat waarvoor geldt dat $e^\xi=2-\xi$. Je mag je antwoord illustreren met een grafiek, maar die telt niet als antwoord op deze vraag.
    2. Geef nu de volledige formulering (niet alleen de naam!) van de stelling die je in het puntje hierboven gebruikte, en bewijs deze stelling daarna ook.
5.
    1. Leg uit wat het precies betekent om te zeggen dat de functie $f(x,y)$ in 2 variabelen homogeen is van een zekere graad $\alpha\in\mathbb{R}$
    2. Toon aan dat je de differentiaalvergelijking $A(x,y)+B(x,y)y'(x)=0$ kan herleiden tot een vergelijking die je kan oplossen met de techniek van het scheiding der veranderlijken, als je daarbij weet dat de functies $A(x,y)$ en $B(x,y)$ homogeen zijn van eenzelfde graad.
6.
    1. Geef de veelterm $T_n(f,0)(x)$ als $f(x)=\frac{1}{1-x}$ (mag zonder bewijs)
    2. Gebruik een eigenschap van Taylor-polynomen om uit het vorige puntje de veelterm $T_n(g,0)(x)$ met $g(x)=\ln(1+x)$ af te leiden. Vergeet hierbij zeker ook niet om die eigenschap te vermelden (in volle algemeenheid, zonder bewijs).
    3. Wat is het convergentie-interval van de reeks die we krijgen door in deelvraag 2 de graad naar oneindig te laten naderen? (geen bewijs nodig)
7. Leg uit wat de majorantenregel precies zegt (zonder bewijs) en gebruik die om aan te tonen dat de oneigenlijke integraal $I_\infty:=\int_1^\infty \frac{\cos^2(x)}{x^4(1+x^3)}dx$ convergent is.
8.
    1. Geef de volledige formulering voor de (eerste) hoofdstelling van de calculus (zonder bewijs).
    2. Gebruik nu deze stelling om aan te tonen dat de functie $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto g(x):=\int_0^{x^2}\frac{e^{-t^2}\sin t}{42+\arctan(t)}dt$ een kritiek punt heeft in de oorsprong.
9. (Waar/Vals): De coëfficiënt van x^{25} in de Taylor-reeks voor $f(x)=\sin(x^3)$ ontwikkeld rond $x=0$ is gelijk aan nul.

Oefeningen

1.
    1. Zij $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ afleidbaar met $f(2)=1$ en $f'(x)\ \ 5$. Bepaal een ondergrens voor $f(-2)$ en een bovengrens voor $f(5)$. Verklaar.
    2. Een vliegtuig vliegt aan een snelheid van 500km/h op een hoogte van 3,05 km boven de grond in de richting van een controletoren (hoogte toren: 50 m). Op het moment dat het vliegtuig 4km van het punt recht boven de toren verwijderd is, hoe snel neemt de afstand tussen beiden dan af?
2. Auto A vertrekt op een tijdstip $t=0$ in (0,0) en rijdt in noordoostelijke richting aan 50 km/h. Op datzelfde moment vertrekt auto B in (b,0) met b=100km in noordelijke richting aan 50 km/h. Bepaal het tijdstip waarop de afstand tussen beide auto's minimaal is. Verklaar.
3. Bepaal de booglengte van de grafiek van $f=[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}:x\mapsto\ln(\cos x)$
$$f=[0,\frac{\pi}{4}]\to\mathbb{R}:x\mapsto\ln(\cos x)$$
4. Gebruik Taylorreeksen om $\lim_{x\to0}\frac{e^{3x}-\sin x+\cos x+\ln(1-2x)}{-1+\cos(5x)}$ te berekenen. Geef ook aan welke reeksen je gebruikt en waarom.
5. Los de volgend differentiaalvergelijkingen op $y'''-4y'=30e^{3x}, y(0)=1, y'(0)=y''(0)=0$
$$y'''-4y'=30e^{3x}, y(0)=1, y'(0)=y''(0)=0$$

Academiejaar 2020-2021 (1^{ste} zit)

Prof. David Eelbode

Theorie

- Stel dat $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ een voldoende afleidbare functie is waarvan je ook weet dat $f'(x)>0$ op het ganse domein (in de randpunten mag je hierbij de relevante eenzijdige afgeleiden beschouwen). Ook al heeft deze functie geen kritieke punten, er is een stelling die garandeert dat we toch extrema voor deze functie kunnen verwachten. Formuleer deze stelling (de volledige opgave, niet enkel de naam) en bewijs vervolgens de existentie van de kleinste van die 2 extrema.
- **(Waar/Vals):** Er bestaat geen enkele (voldoende afleidbare) convexe functie $f(x)$ die een kritiek punt heeft in $x=0$ en waarvoor $f'(-1)=1$.
- **(Waar/Vals):** Stel dat je weet dat de grafiek van een voldoende afleidbare functie $f(x)$ door het punt $(0,\frac{1}{2})\in\mathbb{R}^2$ gaat, en dat we $F(x)$ definiëren als $F(x):=\int_a^{x^2}f(t)dt,$

$$F(x):=\int_a^{x^2}f(t)dt,$$

met $a<0$ daarbij een getal in het domein van de functie $f(x)$. Dan weten we absoluut zeker dat $F(x)$ geen buigpunt zal hebben voor $x=0$.

-
    1. Hoe kan je controleren of de differentiaalvergelijking A(x,y)dx+B(x,y)dy=0A(x,y)dx+B(x,y)dy=0 exact is? Je mag hierbij aannemen dat A(x,y)A(x,y) en B(x,y)B(x,y) voldoende afleidbaar zijn.
    2. Definieer het begrip ‘integrerende factor’ voor een niet-exacte differentiaalvergelijking, en stel dan ook de (partiële) differentiaalvergelijking op waaraan deze functie moet voldoen (uiteraard zonder ze op te lossen).
- Stel de voorwaarde op waaraan een (voldoende afleidbare) functie f(x)f(x) moet voldoen opdat de functie g:D→R:x↦g(x)=ef(x)g:D→R:x↦g(x)=ef(x) concaaf zou zijn (op het domein D⊂RD⊂R van ff). Geef daarbij ook duidelijk aan op welke stelling je steunt om die voorwaarde af te leiden.
- Formuleer en bewijs de tweede hoofdstelling van de calculus (en Captain Obvious wenst hier te benadrukken dat het dus niet over de eerste hoofdstelling gaat).
- Gebruik gepaste stellingen of eigenschappen om aan te tonen dat de oneigenlijke integraal
  I∞:=∫∞1tanh2(x)+cos(x2+1)ln(x)x3dx

  I∞:=∫1∞tanh2(x)+cos(x2+1)ln(x)x3dx

convergent is.

Stel dat je van een voldoende afleidbare functie f(x)f(x) op een domein D⊂RD⊂R weet dat a∈Da∈D een kritiek punt is, en dat je verder ook weet dat
f′′(a)=f′′′(a)=⋯=f2k(a)=0,

f′′(a)=f′′′(a)=⋯=f2k(a)=0,

met daarbij uiteraard k∈N0k∈N0, en f(2k+1)(a)≠0f(2k+1)(a)≠0.

-
    1. Heeft f(x)f(x) in aa een zadelpunt? (ja/neen is voldoende)
    2. Bewijs je antwoord op het vorige puntje (je moet enkel dat aantonen).
    3. Verklaar wat ‘voldoende afleidbaar’ hier wil zeggen: wat moet dat (minstens) zijn, en waarom? Je mag daarbij verwijzen naar een stap in het bewijs dat je zonet geleverd hebt.
- Stel dat je van twee functies f(x)f(x) en g(x)g(x) met domein RR weet dat volgende relatie geldt:
  ddx(lnf(x)g(x))=0

  ddx(lnf(x)g(x))=0

Je mag hierbij steunen op het feit dat de logaritme overal gedefinieerd is, die voorwaarden hoef je dus niet in rekening te brengen. Iemand loste een (lineaire) differentiaalvergelijking op van tweede orde, en beweert nu dat de homogene oplossing wordt gegeven door y(x)=c1f(x)+c2g(x)y(x)=c1f(x)+c2g(x). Verklaar waarom dit onmogelijk een juiste conclusie kan zijn.

Oefeningen

- **(Waar/Vals)** Zij a∈D⊆Ra∈D⊆R, L∈RL∈R en f:D→Rf:D→R met limx→af(x)=Llimx→af(x)=L. Dan geldt de volgende eigenschap: ∀ϵ,∃δ>0,∀x,y∈D∖{a}:(|x−a|<δ∧|y−a|<δ)⇒|f(x)−f(y)|<ϵ.

∀ϵ,∃δ>0,∀x,y∈D∖{a}:(|x−a|<δ∧|y−a|<δ)⇒|f(x)−f(y)|<ϵ.

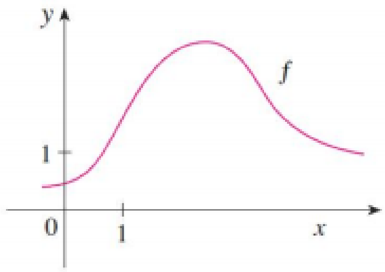
- Gegeven een cirkel met straal RR en een ingeschreven rechthoek. Bewijs dat de oppervlakte van de rechthoek maximaal is als en slechts als deze een vierkant is.
- Bereken limx→8x−−√3−2x+8−−−−−√−2x−−√

limx→8x3−2x+8−2x

- Een observatorium heeft een rond grondvlak met een diameter van 2a2a. Zij AA en BB twee ingangen, diametraal tegenover elkaar geplaatst. De doorsnede van het observatorium, loodrecht op de denkbeeldige lijn ABAB, is in elk punt een vierkant. Wat is het volume ervan?

Hint: Bereken eerst de oppervlakte van de vierkante doorsnedes.

Gegeven de grafiek van een (voldoende afleidbare) functie ff

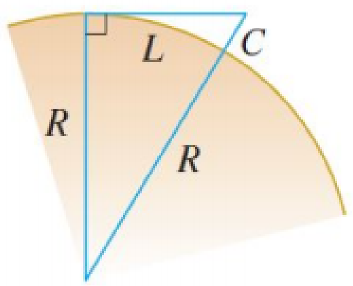


Verklaar waarom we zeker zijn dat

T3(f,1)(x)≠85−45(x−1)+25(x−1)2−110(x−1)3

T3(f,1)(x)≠85−45(x−1)+25(x−1)2−110(x−1)3

Voor de bouw van een (lange) baan door de woestijn, worden hoogteverschillen gemeten. Door de lengte moet men echter rekening houden met de kromming van de aarde en hier correcties aanbrengen.



Toon aan dat als RR de straal van de aarde is en LL de lengte van de weg, de correctie gegeven wordt door

C=Rsec(LR)−R

C=Rsec(LR)−R

Toon ook aan dat
C≈L22R+5L424R3

C≈L22R+5L424R3

Hint: Vermijd sinsin en coscos in je berekeningen en schrijf zoveel mogelijk in functie van tantan en secsec.

1. Bepaal
   ∫2t−32t2−4t+2dt.

   ∫2t−32t2−4t+2dt.

2. Los volgende differentiaalvergelijking op:
   2x−y−1=(3x−2y+1)y′

   2x−y−1=(3x−2y+1)y′

Je oplossing mag impliciet zijn, maar vind wel zo veel mogelijk oplossingen en werk eventuele logaritmes en breuken van breuken weg.

Hint: Het punt (3,5)∈R2(3,5)∈R2 kan je helpen berekeningen in te korten.

Academiejaar 2019-2020 (1^{ste} zit)

Prof. David Eelbode

Test

Media:1920calctest0.jpeg Media:1920calctest.jpeg

Theorie

- Stel dat je een continue functie f(x)f(x) hebt op een domein D⊂RD⊂R, en dat er voor 2 punten a,b∈Da,b∈D geldt dat het product van de bijhorende functiewaarden f(a)f(a) en f(b)f(b) een strikt negatief getal is.
  1. In de cursus hebben we een stelling gezien die je in staat stelt om uit bovenstaande informatie een belangrijke conclusie te trekken over die functie f(x)f(x). *Geef de volledige formulering voor deze stelling en maak een tekening ter illustratie.* Indien er meerdere gevallen zouden zijn, dan mag je een keuze maken (je hoeft dus niet beide gevallen te doen, dat geldt ook voor deel (ii) van de vraag).
  2. Geef vervolgens het bewijs van deze stelling.
-
  1. *Is volgende bewering waar of vals?* Stel dat f(x)∈C2(D)f(x)∈C2(D) een convexe functie is op haar domein DD, en dat de tweede afgeleide bovendien geen nulpunten heeft. Dan moet er gelden dat f′(x)f′(x) een bijectie is van DD op het beeld van de afgeleide functie.
  2. Geef een voorbeeld van een functie f(x)f(x) die wel in C2(R)C2(R) zit, maar niet in C3(R)C3(R). Geef ook expliciet aan waarom jouw functie een antwoord op de vraag is. (i.e. doe een gepaste berekening en gebruik de definitie om aan te tonen waar het al dan niet verkeerd gaat).
- Toon aan dat de functie
  F:[a,b]→R:x→F(x)=∫xaf(t)dt

  F:[a,b]→R:x→F(x)=∫axf(t)dt

een primitieve is voor de continue functie f(x)f(x) op het interval [a,b][a,b] (je hoeft de continuïteit hierbij niet aan te tonen).

- *Formuleer de stelling* die zegt hoe je extrema en zadelpunten kan herkennen voor een voldoende afleidbare functie f(x)f(x) met een kritiek punt in x=ax=a, waarvoor geldt dat f″(a)=...=f(n)(a)≠0f″(a)=...=f(n)(a)≠0. *Geef ook expliciet aan* wat 'voldoende afleidbaar' precies betekent in deze context.
- Gegeven de differentiaalvergelijking a(x)y"+b(x)y′+c(x)y=R(x)a(x)y"+b(x)y′+c(x)y=R(x). Stel dat je weet dat y1(x)y1(x) en y2(x)y2(x) de homogene oplossingen zijn voor deze vergelijking. Leg dan uit hoe je een particuliere oplossing yp(x)yp(x) voor de vergelijking kan contrueren in functie van y1(x)y1(x) en y2(x)y2(x). Bewijs ook waarom deze methode werkt.
- Geef telkens een goed gemotiveerd antwoord op onderstaande vragen (geef duidelijk aan welke stelling of eigenschap je gebruikt).

  In de quantumfysica spelen de zogenaamde Hermite-polynomen Hn(x)Hn(x) een cruciale rol (n∈Nn∈N). De exacte definitie heb je niet nodig om deze vraag op te lossen, het volstaat te weten dat Hn(x)∈Rn[x]Hn(x)∈Rn[x] een veelterm is van graad nn. Naar analogie met de Taylor-reeks kan men ook van de Hermite-reeks spreken: Dat wil zeggen dat men gepaste functies f(x)f(x) kan schrijven als een reeks van de vorm ∑ncnHn(x)∑ncnHn(x), met cncn dan uiteraard een constante die afhangt van de functie f(x)f(x). Deze kan berekend worden in termen van de volgende integraal
  cn=Hn[f]=∫∞−∞Hn(x)f(x)e−x2dx

  cn=Hn[f]=∫−∞∞Hn(x)f(x)e−x2dx

Formuleer de quotiëntregel voor oneigenlijke integralen en gebruik deze dan om te bewijzen dat de getallen |cn|=|Hn[ex]||cn|=|Hn[ex]| voor de functie f(x)=exf(x)=ex effectief bestaan voor alle n∈Nn∈N. Merk op dat we hier absolute waarden nemen, omdat we steunen op het feit dat

|cn|=|Hn[ex]|≤∫∞−∞Hn(x)exe−x2dx

|cn|=|Hn[ex]|≤∫−∞∞Hn(x)exe−x2dx

Verklaar ook waarom dit handig van pas komt bij het toepassen van de quotiëntregel.

  Stel dat we een functie f(x)∈C∞(R)f(x)∈C∞(R) gaan benaderen door middel van een Taylor-polynoom, ontwikkeld rond x=ax=a, en dat we hierbij vinden dat
  f(x)∈[Tn(f,a)(x)−tanh(n)(x−a)n+1n2+1;Tn(f,a)(x)+tanh(n)(x−a)n+1n2+1]

  f(x)∈[Tn(f,a)(x)−tanh(n)(x−a)n+1n2+1;Tn(f,a)(x)+tanh(n)(x−a)n+1n2+1]

Waar/Vals: Dan geldt er dat

f(a+π)=∑j=0∞πjf(j)(a)j!

f(a+π)=∑j=0∞πjf(j)(a)j!

Oefeningen

  Zij K>0K>0 vast. We noemen een functie f:D⊆R→Rf:D⊆R→R K-Lipschitz als
  ∀x,y∈D:|f(x)−f(y)|≤K|x−y|

  ∀x,y∈D:|f(x)−f(y)|≤K|x−y|

Toon aan dat elke K-Lipschiz functie continu is.

-
    1. Beschouw een afleidbare functie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ zodat $f(0)=1$ en $|f'(x)|\leq 1$ voor alle $x\in\mathbb{R}$. Toon aan dat $|f(x)|\leq|x|+1$ voor alle $x\in\mathbb{R}$.
    2. Je rijdt met de fiets op een rechte weg die een spoorweg loodrecht oversteekt aan een snelheid van $30 km/h$ in de richting van het kruispunt. Op het moment dat je 30 meter van de spoorweg verwijderd bent, komt er ook een trein aangereden op 40 meter van de oversteek aan $90 km/h$. Hoe snel verandert de afstand tussen jou en de trein op dit moment?
- Zij $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ een strikt positieve functie. Toon aan dat

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{f(x)+f(1-x)}\,dx=\frac{1}{2}$$

-
    1. Een vlak ligt op een afstand x van het middelpunt van een bol met straal $r=1$ en verdeelt de bol in twee delen. Het volume van het ene deel is het dubbel van het volume van het andere deel. Toon aan dat x een oplossing is van de vergelijking $3x^3-9x+2=0$.
    2. Bereken

$$\lim_{x\to 0} x\int_x^1 \frac{\cos(t)}{t^2}\,dt$$

- Gebruik een Taylorpolynoom van $f(x)=x\sin(x)$ om $\sin(0{,}5)^2$ tot op $\frac{1}{100}$ nauwkeurig uit te rekenen.
- We beschouwen een tank met $2000 l$ benzine waarin $100 kg$ van een antivriesmiddel is opgelost. Als voorbereiding op koud winterweer wordt benzine toegevoegd waarin de concentratie antivriesmiddel $2 kg/l$ is. Deze benzine wordt toegevoegd a rato van $40 l/min$ en wordt goed gemengd met de benzine die aanwezig is in de tank, zodat de concentratie van antivriesmiddel overal gelijk is. Tegelijkertijd wordt deze mengeling uit de tank gepompt aan $45 l/min$. We noemen $H(t)$ de hoeveelheid antivriesmiddel in de tank op tijdstip t (in kg).
    1. Toon aan dat $H(t)$ voldoet aan de differentiaalvergelijking $\frac{dH(t)}{dt}=80-\frac{45H(t)}{2000-5t}$ en vind de bijhorende randvoorwaarde.
    2. Vind een expliciete formule voor $H(t)$, zonder onbekende constanten.

Academiejaar 2019-2020 (2^de zit)

Oefeningen

Bestand:Calculus 2e zit 2019-2020 Oefeningen.pdf

Academiejaar 2017-2018 (1^ste zit)

Prof. David Eelbode

Test

Theorievragen: Media:OplTestT1718.pdf
Oefeningen: Media:OplTestAJ1718P.pdf

Academiejaar 2015-2016

Prof. David Eelbode

Tussentijdse test

1.
    1. Druk in ε/δ-taal uit wat het betekent dat een reëelwaardige functie f op A⊂RA⊂R continu is in a∈Aa∈A.
    2. De functie I:R0→:x→1/xI:R0→:x→1/x is continu. Vul het onderstaande bewijs van deze uitspraak aan. (bewijs gegeven met enkel stukken die ontbreken.)
    3. Zij f een continue functie op A⊂RA⊂R die haar waarden aanneemt in R 0R0. Er is een eigenschap van contiue functies die ons toelaat om nu onmiddellijk uit. 1.(b) te besluiten dat de functie 1/f continu is. Leg uit.
2.
    1. Wat betekent het dat een reëelwaardige functies op]a,b[differentieerbaar is in het punt c∈]a,b[c∈]a,b[?
    2. Zij f en g reëelwaardige functies op]a,b[die differentieerbaar zijn in c∈]a,b[c∈]a,b[.Toon aan dat het product van f en g dan ook differentieerbaar is in c. Maak in je bewijs gebruik van de rekenregels voor oneindige limieten.
3.
    1. Het bewijs van de stelling van Rolle steunt op het bestaan van een maximum en een minimum. Formuleer het resultaat voor continue functies dat ons toelaat te besluiten dat dit maximum en dit minimum bestaan.
    2. Bestaat er een reëelwaardige continue functie op [0,1[die niet naar boven begrensd is? Leg uit.
    3. Bestaat er een reëelwaardige continue functie op [0,1[die noch naar boven noch naar beneden begrensd is? Leg uit.

Theorie

Oefeningen

1. Bepaal de volgende limiet
   lim(ex1−1)x√

   lim(ex1−1)x

2. De driehoek ABC is een gelijkbenige driehoek. De zijden AB en AC zijn even lang. De rechte BP deelt de hoek ABC in twee gelijke delen. We noteren de lengte van de basis BC als b en de hoogte van de driehoek, i.e. de lengte van AM, als h.
    1. Toon aan dat de hoek PBC gelijk is aan
       12arctan(2hb)

       12arctan(2hb)

    2. Bepaal wat er gebeurt met het punt P als we de hoogte h naar 0 laten naderen.

3. Onze held Luke Skywalker heerft dringend nieuwe batterijen nodig voor zijn lightsaber. Hij besluit onderweg naar huis even te stoppen bij de lokale supermarkt. De supermarkt ligt, zoals je op het kunstwerk hieronder kunt zien, vier kilometer van de weg. Luke bevindt zich in zijn landspeeder, zes kilometer van het punt op de weg dat het dichtst bij de supermarkt ligt. Luke besluit nog een stukje over de weg te vliegen aan 24 KM/uur en daarna de weg te verlaten en in een rechte lijn naar de supermarkt te vliegen. Naast de weg kan Luke vanwege de dolle ruimtekonijnen maar 12 km/uur vliegen. Waar moet Luke de weg verlaten om zo snel mogelijk bij de supermarkt terecht te komen?
4. Bepaal de volgende primitieve
   $\int x--\sqrt{}+2x--\sqrt{}-1)(x+2)x--\sqrt{}dx$

$$\int x+2x-1)(x+2)xdx$$

Academiejaar 2014-2015

Augustus

Theorie

1. Indien we van een afleidbare functie weten dat $f(a)=\alpha f(a)=\alpha$ en $f'(x)\leq d\forall a\in Df'(x)\leq d\forall a\in D$, dan kan men de waarde $\beta=f(b)\beta=f(b)$ in elk ander punt $b\in Db\in D$ makkelijk afschatten. Het is niet moeilijk te zien dat
   $\beta=f(a)+f'(c).(b-a)\leq\alpha+d.(b-a)$

   $$\beta=f(a)+f'(c).(b-a)\leq\alpha+d.(b-a)$$

   met $c\in Dc\in D$
   - Welke stelling wordt hier gebruikt? (Schrijf volledig uit)
   - Bewijs de stelling.
2. Waar of vals?
   - De 2de afgeleide van een convexe functie op de hele reële rechte kan gelijk zijn aan $f''(x)=x3+a.x+bf''(x)=x3+a.x+b$ met $a,b\neq 0a,b\neq 0$
   - De samenstelling van een bijectie en een strikt dalende functie is een bijectie.
3. Geef de 1ste hoofdstelling van de integratie(zonder continuïteit).
4. In de cursus zagen we een stelling die zegt hoe we lokale extrema van een functie $f(x)f(x)$ kunnen bepalen waarvoor geldt dat $f'(x)=f''(x)=...=fn(x)=0f'(x)=f''(x)=...=fn(x)=0$. Formuleer en bewijs de stelling.
5. Verklaar de quotiëntregel als convergentietest voor oneigenlijke integralen van de eerste soort aan de hand van twee zelfgekozen voorbeelden: eentje waarbij je de convergentie aantoont en eentje waarbij je divergentie aantoont.
6. Leg in voldoende woorden uit wanneer men voor een voldoende afleidbare functie $f(x)f(x)$ van het Taylor-polynoom van graad n naar de reeks kan gaan, en op welke manier het domein van convergentie zich uit in de restterm.

Tussentijdse test

1. Stel dat f(x) en g(x) met respectievelijke domeinen D_f en D_g allebei continu zijn op in het punt a∈Df∪Dga∈Df∪Dg en dat er bovendien geldt dat f(a) ≠ 0 en g(a) ≠ 0. Dan kan men het volgende aantonen.:
   |f(x)g(x−f(a)g(a)|=|f(x)g(a)−g(x)f(a)g(a)g(x)|
   |f(x)g(x−f(a)g(a)|=|f(x)g(a)−g(x)f(a)g(a)g(x)|

   :
   =|(f(x)−f(a))g(a)−(g(x)−g(a))f(a)g(a)g(x)
   =|(f(x)−f(a))g(a)−(g(x)−g(a))f(a)g(a)g(x)

   :
   ≤|f(x)−f(a)||g(x)|+|(f(a)||g(x)−g(a)|g(a)g(x)
   ≤|f(x)−f(a)||g(x)|+|(f(a)||g(x)−g(a)|g(a)g(x)

   aangezien g(x) continu is en |g(a)|≠0|g(a)|≠0, weten we zeker dat er een interval [a−δ0,a+δ0][a−δ0,a+δ0] bestaat waarvoor geldt dat |g(x)|>0|g(x)|>0 op dit gesloten interval. In het bijzonder hebben we dan ook dat (∃xm,xM∈[a−δ0,a+δ0])(∀x∈[a−δ0,a+δ0])(|g(xm)|≤|g(x)|≤|g(xM)|)(∃xm,xM∈[a−δ0,a+δ0])(∀x∈[a−δ0,a+δ0])(|g(xm)|≤|g(x)|≤|g(xM)|).Dit laat ons toe om de eerdere ongelijkheid uit te werken. |f(x)g(x)−f(a)g(a)|≤|f(x)−f(a)||g(xm)|+|f(a)||g(x)−g(a)||g(xm)|2|f(x)g(x)−f(a)g(a)|≤|f(x)−f(a)||g(xm)|+|f(a)||g(x)−g(a)||g(xm)|2 Nu geldt er het volgende: :
   (∃δ1>0)(|x−a|<δ1=>|f(x)−f(a)|<|g(xm)|2ϵ
   (∃δ1>0)(|x−a|<δ1=>|f(x)−f(a)|<|g(xm)|2ϵ

   :
   (∃δ2>0)(|x−a|<δ2=>|g(x)−g(a)|<|g(xm)|22|f(a)|ϵ
   (∃δ2>0)(|x−a|<δ2=>|g(x)−g(a)|<|g(xm)|22|f(a)|ϵ

   als we dan δ:=min(δ0,δ1,δ2)δ:=min(δ0,δ1,δ2) kiezen dan hebben we aangetoond dat (x−a)<δ=>|f(x)g(x)−f(a)(g(a)|<ϵ(x−a)<δ=>|f(x)g(x)−f(a)(g(a)|<ϵ
   - Welke eigenschap is hier precies aangetoond?
   - In het bovenstaand bewijs weer er verondersteld dat f(a)≠0. Waar precies wordt dit gebruikt? -> De stelling blijft waar als f(a)=0 Waarom?

```
#*Welke stelling uit de cursus garandeert de existentie van x_m en x_M in het domein
van g(x)?
```

1. Waar/vals
   1. Als f(x) en g(x) strikt stijgende afleidbare functies zijn in RR, dan heeft (f°g)(x) een positieve afgeleide.
   2. Indien voor een voldoende afleidbare functie ϕ(x)ϕ(x) geldt dat ϕ‴=xϕ‴=x dan weten we zeker dat ϕ(x)ϕ(x) in x=0 een buigpunt zal hebben.
2. We definiëren de functie f:[0,2π]−>Rf:[0,2π]−>R als volgt
   f(x)={sin(x)ln(x)voorx<00voorx=0f(x)={sin(x)ln(x)voorx<00voorx=0
   - Waarom continu?
   - Toon aan dat f(x) minstens 3 kritieke punten heeft op het interval f:[0,2π]−>Rf:[0,2π]−>R

3. Een zwaar voorwerp hangt aan een touw met lengte L. Wanneer je dit voorwerp voortsleept trekt het een kromme (de tractrix) Het initieel punt is (L,0) en je loopt volgens de y-as
    1. Toon aan dat de afgeleide van f(x) gelijk is aan −L2−x2√x−L2−x2x
    2. gebruik het vorige resultaat om een voorschrift voor f(x) te bepalen

Academiejaar 2013-2014 2^e zit

Theorie

1. In een recent artikel genaamd ' *Random walks with preferential relocations to places visited in the past and their applications to biology* ' zoeken D. Boyer en C. Solis-Salas de oplossing voor een model (met betrekking tot de zogenaamde ' *random walks* ') dat eerder in de ecologische literatuur verscheen. In dat artikel is *M(t)* (de ' *mean square deplacement* ') de onderzocht grootheid. Op een bepaald moment vindt men dat deze voldoet aan volgende gelijkheid
   M(t)=(1−q)t1−t+(1−q)tM(t)+q∫t0M(u)1−udu
   M(t)=(1−q)t1−t+(1−q)tM(t)+q∫0tM(u)1−udu

   met 0<q<10<q<1 een vaste constante parameter die niet van *t* afhangt.
    - Toon aan dat bovenstaande *integraalvergelijking* zich herleidt tot de *differentiaalvergelijking*(1−t(1−q))M′(t)−1−(1−q)t1−tM(t)=1−q(1−t)2(1)(1−t(1−q))M′(t)−1−(1−q)t1−tM(t)=1−q(1−t)2(1)door beide leden af te leiden.
    - In bovenstaande stap moet je een gespaste stelling gebruiken uit de cursus om de *Riemann-integraal* te doen verdwijnen uit de originele vergelijking (van *M(t)*). Formuleer eerste deze stelling (volledig!) en 'toon ze aan.
    - Herschrijf vergelijking (1) in standaardgedaante en gebruik een gepaste methode uit de cursus om te verklaren dat de oplossing wordt gegeven door M(t)=11−t∫(1−q)dt(1−t)(1−(1−q)t)(2)M(t)=11−t∫(1−q)dt(1−t)(1−(1−q)t)(2). Het is dus de bedoeling om aan de hand van dit specifieke voorbeeld uit te leggen hoe je de differentiaalvergelijking van het type dat je net benoemde oplost. Je kan hierbij gebruik maken van het feit dat (1−q)t≠1(1−q)t≠1 en t≠1t≠1.
    - De oplossing van bovenstaande primitieve wordt gegeven door M(t)=1−qq(1−t)ln(1−(1−q)t1−t)M(t)=1−qq(1−t)ln(1−(1−q)t1−t). Bepaal het domein van de functie *M(t)*.
    - Welke stelling garandeert dat *M(t)* op elk gesloten deelinterval van dit domein een maximum heeft? Formuleer de stelling en toon ze aan. Mag ze hier op *M(t)* worden toegepast?

Oefeningen

Academiejaar 2013-2014 1^e zit

Theorie

1. Vraag 1.
    - Formuleer de stelling van Bolzano.
    - Bewijs de stelling.

2. Vraag 2: waar of vals? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
    - Stel ff en gg 2 afleidbare stijgende functies met domein RR. Dan geldt er dat ook de samenstelling g∘f:R→Rg∘f:R→R een stijgende functie.
    - Elke lineaire combinatie αf(x)+βg(x)αf(x)+βg(x) (met α,β∈R0α,β∈R0) van convexe functies f(x)f(x) en g(x)g(x) is opnieuw convexe functie.
3. Vraag 3.
    - Leg uit wat een exacte differentiaalvergelijking is en geef een voorbeeld.
    - Geef de definitie van een integrerende factor μ(x)μ(x) voor een niet exacte differentiaal vergelijking.
    - Leid vervolgens ook de vergelijking af waaraan μ(x)μ(x) moet voldoen. (zonder ze op te lossen)
4. Vraag 4.
    - Gegeven de integraal
      ∫∞0x3ex−1dx

      ∫0∞x3ex−1dx

    - Verklaar waarom de integraal ∫10x3ex−1dx∫01x3ex−1dx goed gedefinieerd is, ook al behoort x=0x=0 niet tot het domein. Bekijk daarvoor het gedrag van het integrandum in de buurt van de oorsprong.
    - Formuleer de quotiëntregel als convergentiecriterium voor onbepaalde integralen, en pas die daarna toe op de integraal ∫∞0x3ex−1dx∫0∞x3ex−1dx om de convergentie ervan te verklaren.
    - Verklaar waarom men het integrandum op R+R+ kan herschrijven als x3ex−1=x3e−x∑j=0∞e−jxx3ex−1=x3e−x∑j=0∞e−jx
    - Als er gegeven wordt dat de reeks en de integratie mogen gewisseld worden, bereken dan de integraal ∫0∞x3e−(j+1)xdx∫0∞x3e−(j+1)xdx (j∈Nj∈N). Hint: stel (j+1)x = t

Oefeningen

1. Tussen 2 punten A en B ligt een recht stuk elektriciteitsleiding van 300m lang. Een dwarsdoorsnede van deze elektriciteitsdraad heeft een straal van 6mm. Ergens aan deze leiding moet een aftakking gemaakt worden naar een punt C, dat op 60m van B ligt, met een draad waarvan de dwarsdoorsnede een straal heeft van 3mm. De weerstand van een stuk elektriciteitsdraad is gelijk aan kLr2kLr2, waarbij L de lengte van de draad is in meter, r de straal van de dwarsdoorsnede in mm en k een onbekende constante. Waar moet deze aftakking gemaakt worden als de weerstand van A naar C minimaal moet zijn?
2. Stel f:R→Rf:R→R een positieve functie. De primitieve van de functie f(x)−−−−√f(x) wordt gegeven door cos(f(x)−−−−√)+ccos(f(x))+c met c∈Rc∈R. Bepaal de primitieven van de functie f(x)f(x)

3. De volgende integraal is gegeven
   $\int_0^1 x^n(\ln x)^n dx$

$$\int_0^1 x^n(\ln x)^n dx$$

   - Toon aan dat deze integraal gelijk is aan $(-1)^n\int_0^\infty x^n e^{-(n+1)x}dx$ $(-1)^n\int_0^\infty x^n e^{-(n+1)x}dx$
   - Gebruik het voorgaande om te bewijzen dat de gegeven integraal gelijk $\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$ $\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}}$. De eigenschappen van de Gammafunctie kunnen hierbij van pas komen.
4. We definieren de functie $f(x)$ $f(x)$ d.m.v. volgende Taylorreeks
   $\sum_{k=0}^\infty \frac{2^{2k}k!}{(2k+1)!}x^{2k+1}$

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{2^{2k}k!}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

   - Toon aan dat $f'(x)$ $f'(x)$ gelijk is aan $1+2xf(x)$ $1+2xf(x)$
   - Bewijs dat de afgeleide van $e^{-x^2}f(x)=e^{-x^2}$ $e^{-x^2}f(x)=e^{-x^2}$
   - Gebruik het voorgaande resultaat om aan te tonen dat $f(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$ $f(x)=e^{x^2}\int_0^x e^{-t^2}dt$
5. Los de volgende differentiaalvergelijking op
   $xy''-(x+1)y'+y=-x^2-1$

$$xy''-(x+1)y'+y=-x^2-1$$

   - De functie e^x e^x is een oplossing van het homogene deel van de vergelijking. Ga op zoek naar een 2de oplossing van het homogene deel van de vergelijking die van de vorm $y(x)=u(x)e^x$ $y(x)=u(x)e^x$ is. Je vindt een voorbeeld van deze methode in je theoriecursus.
   - Geef de volledige oplossingenverzameling van deze differentiaalvergelijking. Je mag zelf kiezen welke methode je gebruikt om de particuliere oplossing te vinden.

Tussentijdse testen

De tussentijdse testen kan je hier vinden.

Academiejaar 2012-2013 2^e zit

prof. Eelbode

Theorie

1. Formuleer en bewijs de stelling die een verband legt tussen continuïteit van een functie (op een gesloten interval) en de existentie van minima voor die functie.
2. Geef van elk van de volgende beweringen aan of ze **waar** of **vals** zijn (en waarom):
   1. Als de functie f(x) continu is op [a,b], dan is de functie
      $F:[a,b]\to\mathbb{R}:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$ $F:[a,b]\to\mathbb{R}:x\mapsto\int_a^x f(t)dt$
      altijd stijgend
   2. Als er oplossingen f(x) bestaan voor de differentiaalvergelijking
      $f''(x)-3(f'(x))^2=\cosh(x)+(f(x))^4$ $f''(x)-3(f'(x))^2=\cosh(x)+(f(x))^4$
      dan zijn dat zeker convexe functies.

3. Leg (voldoende) uit wat de integrerende factor $\mu(x)$ voor een differentiaalvergelijking $A(x,y)+B(x,y)y'=0$ precies is, en leid vervolgens de formule af waaraan deze factor moet voldoen. De bijhorende oplossingen die we in de cursus gezien hebben moet je *niet* behandelen.
4. Als een object licht uitstraalt, dan zal de waargenomen golflengte en frequentie van dat licht afhangen van de beweging ten opzichte van de bron (dit is het zogenaamde *Doppler effect*). Indien ν' de frequentie is van iemand die naar de bron toe (of weg van de bron) beweegt, volgens de lijn waarlangs het licht wordt uitgezonden, dan geldt er dat de waargenomen frequentie gelijk is aan
   $$\nu'=\nu\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$$
   met $\beta=\frac{v}{c}\in]-1,+1[$ de verhouding tussen snelheid van de waarnemer en de lichtsnelheid.
    1. Stel de Taylor-formule op voor $f(x)=(1+x)^\alpha$, met $\alpha\in\mathbb{R}$ willekeurig. Als er gegeven wordt dat een reeks van de vorm
       $$\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-a)^n$$
       congrueert voor alle $x\in\mathbb{R}$ waarvoor geldt dat
       $$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}(x-a)^{n+1}}{c_n(x-a)^n}\right|<1$$
       Wat kan je dan zeggen over de convergentie van de Taylor-reeks die je net vond?
    2. Stel een formule op voor ν' tot op tweede orde in β.

Oefeningen

De vragen en oplossingen van deze oefeningen kan je hier vinden

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

Vragen 1-2 waren enkel voor diegenen die het resultaat van de tussentijdse test wilden verbeteren.

1. Hieronder staat een eigenschap voor functies $f(x)$ op $[0,1]$ met bewijs:
   Gegeven: Indien een functie $f(x)$ continu is op $[0,1]$ en afleidbaar op $]0,1[$, en indien $f(0)=f(1)=0$, dan bestaat er een $0<c<1$ zodanig dat $f'(c)=f(c)$.
   Bewijs: Indien we de functie $g(x):=f(x)e^{-x}$ invoeren, dan moet er een punt $0<c<1$ bestaan waarvoor $g'(c)=0$. Omdat $g'(x)=e^{-x}(f'(x)-f(x))$ volgt het gestelde vrij onmiddellijk. ❏
    1. Welke stelling garandeert het bestaan van het punt $c\in]0,1[$ in bovenstaand bewijsje? Geef de volledige formulering. (De naam alleen is niet voldoende.)
    2. Toon die stelling aan.
    3. Gebruik die stelling om aan te tonen dat de vergelijking $x^5+x=1$ exact één oplossing heeft in $\mathbb{R}$. Dat ze minstens één oplossing heeft, volgt uit een andere stelling. Welke is dat? (zonder bewijs.)

2. Waar/vals (bewijs of geef een tegenvoorbeeld.)
    1. ∀x∈R∀x∈R geldt
       arccos(x)=x

       arccos(x)=x

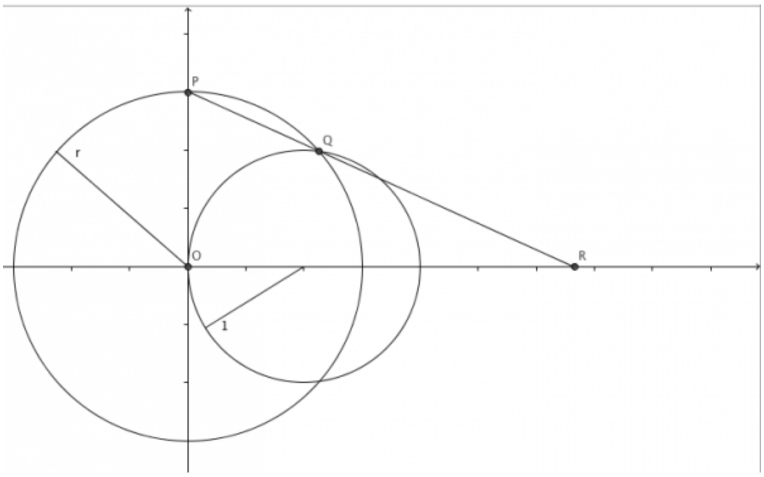
    2. ∃a,b,c∈R∃a,b,c∈R zodat:
       \lim_{x\right z} \frac{ae^x+bx+c}{x^2-4x+4} =3\lim_{x\right z} \frac{ae^x+bx+c}{x^2-4x+4} =3
3. De Mellintransformatie wordt gebruikt om time-stretching te doen. Dit is een typisch voorbeeld van integraaltransformatie. Zo wordt MM gedefinieerd op de functies f(t)opR+f(t)opR+, en het resultaat is de nieuwe functie
   \mathcal{M}[f]D_{\mathcal{M}} \right \mathbb{R}:\quad x \mapsto \mathcal{M}[f](x):=\int_0^\infty t^{x-1}f(t)dt

   \mathcal{M}[f]D_{\mathcal{M}} \right \mathbb{R}:\quad x \mapsto \mathcal{M}[f](x):=\int_0^\infty t^{x-1}f(t)dt

   .
   DMDM is de verzameling van alle x∈Rx∈R waarvoor de integraal convergeert.
    1. Formuleer de 2 criteria uit de cursus waarmee men de convergentie van een oneigenlijke integraal ∫∞0f(x)dx∫0∞f(x)dx kan nagaan. (zonder bewijs, f(x)≥0f(x)≥0 op RR.
    2. Indien f:\quad \mathb{R}^+ \right \mathbb{R}:\quad t \mapsto \ln(1-e^{-t})f:\quad \mathb{R}^+ \right \mathbb{R}:\quad t \mapsto \ln(1-e^{-t}) convergeert voor alle x>0x>0. (dat mag je aannemen.) Verklaar waarom deze uitkomst altijd een negatief getal zal zijn.
4. De vergelijking van een slinger is:
   d2θdθ2+glsinθ=0d2θdθ2+glsinθ=0 (1)
   met l∈Rl∈R de lengte van de linger, en gg de zwaartekrachtversnelling. De veranderlijke θθ staat voor de uitwijking t.o.v. de rusttoestand. Gerelateerd is de vergelijking voor de harmonische oscillator:
   d2θdθ2+glθ=0d2θdθ2+glθ=0 (2)
    1. Van (1) naar (2) is het meest eenvoudige geval van een algemene formule. Geef ze en leid ze af.
    2. Geef de algemene definitie voor de restterm bij approximatie van een functie f(θ)f(θ) die voldoende afleidbaar is.
    3. Verklaar: *De formule uit 4.1 blijft gelden voor een willekeurige n∈Nn∈N en θ∈Rθ∈R.*
5. Los de differentiaalvergelijking y′(x)+α(x)y(x)=β(x)y′(x)+α(x)y(x)=β(x) op in volle algemeenheid.
   Omdat het een homogene lineaire differentiaalvergelijking is, heeft de oplossing een homogeen en particulier stuk. Geef in de oplossing duidelijk aan welke stukken dit respectievelijk zijn.
6. Gebruik een gepaste stelling uit de cursus om te antwoorden op de volgende vraag:
   \lim_{x \right 0} \frac{1}{x} \int\limits_{3}^{3+x}\frac{e^{-t^{ \,\!{2} }}\sin(\frac{\pi t}{2})}{t}dt=\dots\lim_{x \right 0} \frac{1}{x} \int\limits_{3}^{3+x}\frac{e^{-t^{ \,\!{2} }}\sin(\frac{\pi t}{2})}{t}dt=\dots (de teller is e−t2sin(πt2)e−t2sin(πt2))

Praktijk

1. De cirkel met middelpunt (1,0)(1,0) en straal 11 en een cirkel met de oorsprong als middelpunt en straal rr snijden elkaar in een punt QQ in het eerste kwadrant. Het snijpunt van de 2de cirkel met de y-as noemen we PP. De rechte door PP en QQ noemen snijdt de x-as in het punt RR.



   Wat gebeurt er met RR als rr naar 00 convergeert?
2. Een ladder van 10m10m lang leunt op een muur van 3m3m hoog. Het punt waar de ladder de grond raakt is 4m4m ver verwijderd.

   Calculus12-13vraag2.png

   Als op dit moment de onderkant van de ladder met v=0,2m/sv=0,2m/s van de muur wordt weggetrokken, hoe snel daalt de bovenkant van de ladder dan?
3. Bepaal de volgende primitieve:
   ∫tanxln(cosx)dx∫tanxln(cosx)dx
4. De functie f(x)=e−kxsinxf(x)=e−kxsinx heeft een nulpunt in elk geheel veelvoud van ππ. Definieer vnvn als het volume van het lichaam dat we krijgen door f(x)f(x) te wentelen rond de x-as tussen nπnπ en (n+1)π(n+1)π.
   1. Bepaal vnvn.
   2. Bewijs dat vn+1vnvn+1vn enkel afhangt van kk, en niet van nn.
   3. Voor welke kk is die verhouding 1/21/2?
   4. Geef het volume door f(x)f(x) over de volledige positieve x-as te laten wentelen.

5. Definieer de functie g:R→R+g:R→R+ zodat gg gelijk is aan:
   ∫0xe−t2dt∫0xe−t2dt
    1. Geef de Taylorreeks van g(x)g(x) rond het punt 00.
    2. Gebruik de 3de-graadspolynoom van g(x)g(x) om de integraal
       ∫01/2e−t2dt∫01/2e−t2dt
       te bepalen en bewijs dat de benadering tot op 1/101/10 nauwkeurig is. Gegeven
       |g(4)x|<4

       |g(4)x|<4

       op [0,1][0,1].
6. Gegeven
   x2y″−xy′+y′=x2

   x2y″−xy′+y′=x2

    1. y=xy=x is een oplossing van het homogene deel van deze DV. Gebruik reductie van de orde om de volledige oplossingenruimte van het homogene deel te vinden.
    2. Geef de particuliere oplossing van de DV.

De oplossingen van deze oefeningen kan je hier vinden

Academiejaar 2011-2012 1ste zit

Professor Eelbode

Theorie

1. Gegeven de functie f: R->[-1,+1]: x->cos(x)
    1. Toon aan dat f(x) continu is in haar domein, door gebruik te maken van de (ε, δ)-definitie
    2. Bewijs dat f’(x)=-sin(x), door gebruik te maken van de definitie van de afgeleide functie
    3. Toon aan dat f(x) monotoon dalend is, in een geschikt interval. Zonder gebruik te maken van (ii)
    4. Voer de inverse functie f−1(x)f−1(x) in (op een geschikt interval) en maak gebruik van de grafiek van f(x) om f−1(x)f−1(x) te schetsen
    5. In de cursus staat een stelling waarmee men de afgeleide van f−1(x)f−1(x) kan berekenen door gebruik te maken van deel (ii). Formuleer deze stelling en pas toe op (iv)
2. Waar of Vals
    1.]-1,+1[is overaftelbaar
    2. Als ϕ(x)=|x4−1|ϕ(x)=|x4−1| dan is ϕ‘(x)=4x3ϕ‘(x)=4x3
3. Gegeven een continue functie f(x) op een compact interval [a,b] en de geassocieerde functieF:[a,b]−>R:x−>F(x):=∫axf(t)dtF:[a,b]−>R:x−>F(x):=∫axf(t)dt. Wat kan je zeggen omtrent de afleidbaarheid van de functie F(x)? Bewijs je antwoord
4. Bewijs de stelling van in de cursus i.v.m. het extremumonderzoek door gebruik te maken van Taylor-reeksen.
5. Gegeven y(x)=ϕ(x)y(x)=ϕ(x) is een oplossing voor de DV a2(x)y″+a1(x)y′+a0(x)=0a2(x)y″+a1(x)y′+a0(x)=0 Leg uit hoe je de eerste oplossing kan gebruiken om tot een tweede te komen, werk zo ver mogelijk uit.

6. Waar of Vals
    1. de functie $\phi:R+->R:x4\pi\sqrt{}ex\phi:R+->R:x4\pi ex$ is oneindig lang maar heeft toch een eindig volume
    2. Er is een a element van R zodat $\mu(x)=xa\mu(x)=xa$ een integrerende factor is voor de DV
       $y'-4+2y/x=0$
       $$y'-4+2y/x=0$$
    3. Wanneer we voor de functie $f(x)=exsinx+ln(1+x2)coshxf(x)=exsinx+ln(1+x2)coshx$ de Taylor-reeks uitschrijven, heeft deze enkel even machten van x.

Oefeningen

1. $limx\rightarrow+\infty x+1-x2+1-----\sqrt{}-------------\sqrt{}xlimx\rightarrow+\infty x+1-x2+1x$
2. Lucht wordt in een sferische ballon geblazen met een snelheid van 5 kubieke centimeter per seconde.
   Hoe snel neemt de straal toe bij diameter d=20cm?
3. Zoals jullie waarschijnlijk al wel weten, wordt een parabool gedefinieerd als een verzameling van alle punten die even ver van een rechte als van een punt liggen. Voor rechte y=-a en punt (0,a) is de vergelijking van de parabool $f\leftrightarrow y=x24af\leftrightarrow y=x24a$. Voor alle a $\in R\in R$ is de verhouding van enerzijds de booglengte tussen de twee punten ter hoogte van het brandpunt, en anderzijds de afstand tussen het brandpunt en de rechte constant.
    - Bewijs dat deze parabolische constante gelijk is aan $arcsinh(1)+2–\sqrt{}arcsinh(1)+2$
    - Bereken deze tot op een honderste, doormiddel van Taylorexpansie. $ln(1+2–\sqrt{})ln(1+2)$ krijg je als hulpmiddel.
4. Een populatie organismen in een milieu wordt weergegeven door een functie $P(t):R\leftrightarrow[0,1]P(t):R\leftrightarrow[0,1]$. als P gelijk is aan 0 is het organisme volledig uitgeroeid, is P gelijk aan 1 is de maximum capaciteit bereikt. De ogenblikkelijke groei van de populatie wordt weergegeven door $P(t)(1-P(t))cos(t)P(t)(1-P(t))cos(t)$. De cosinus in de functie duidt op de schommelingen door seizoenswisselingen. Als we ervan uitgaan dat P(t) niet groter dan $2/32/3$ wordt, geef dan de vergelijking van $P(t)P(t)$
5. Los volgende DV op
   $4y''+4y'+y=e-x2cos(x)$
   $$4y''+4y'+y=e-x2cos(x)$$

Academiejaar 2010-2011 2^de zit

Hier is spijtig genoeg maar een fractie van het examen bijgehouden.

Theorie

1. Formuleer de eigenschap waarop Bolzano steunt en bewijs deze.
2. Geef van volgende beweringen aan of ze waar of vals zijn:
    - Indien $\phi(x)=|x2+x|\phi(x)=|x2+x|$ dan geldt er dat $\phi'(x)=|2x+1|\phi'(x)=|2x+1|$
    - Alle polynomen van de vorm $P(x)=a5x5+a3x3+a1xP(x)=a5x5+a3x3+a1x$ hebben altijd een buigpunt.

3. Toon de volgende stelling aan:

   Indien een afleidbare functie f:I→Rf:I→R (op een open interval) in het punt c∈Ic∈I een lokaal minimum bereikt, dan geldt er dat f′(c)=0f′(c)=0 .
4. De volgende bewerkingen komen uit een wiskundig paper "The Riemann Zeta-function ζ(a)ζ(a) : generalities " over de fameuze ζζ -funtie van Riemann:
   - ζ(s)=ζa(s)1−21−sζ(s)=ζa(s)1−21−s gegeven
   - ≈ζa(1)+(s−1)ζ′a(1)(s−1)ln(2)−12(s−1)2ln2(2)≈ζa(1)+(s−1)ζa′(1)(s−1)ln(2)−12(s−1)2ln2(2) gevraagd: verklaar deze overgang
   - ≈ζa(1)+(s−1)ζ′a(1)(s−1)ln(2)(1+ln(2)2(s−1))≈ζa(1)+(s−1)ζa′(1)(s−1)ln(2)(1+ln(2)2(s−1)) gevraagd: verklaar deze overgang
5. De Melinn-transformatie is een voorbeeld van een integraaltransformatie: deze beeldt een gegeven RR -waardige functie f(x)f(x) af op een nieuwe RR -waardige functie. M(f)(s)M(f)(s) in de variabele s∈Ds∈D gedefineerd als M(f):D→R:s↦M(f)(s):=∫∞0xsf(x)dxx

   M(f):D→R:s↦M(f)(s):=∫0∞xsf(x)dxx

   - Laten we vertrekken van de volgende (niet-continue) functie {0voorx<11cosh(x)voorx≥1

     {0voorx<11cosh(x)voorx≥1

     Bewijs dan de volgende bewering omtrent het domein D van de Melinn-transformatie voor deze functie s<0⇒s∈D

     s<0⇒s∈D

   - Wat is de M(ex)(s)M(ex)(s) voor s=n+12s=n+12 met n∈Nn∈N ?
6. Is de volgende bewering waar of vals: alle oplossingen van de differentiaalvergelijking y′+y4+1=0y′+y4+1=0 zijn dalende functies.

Praktijk

1. f(x)=exaxex+2f(x)=exaxex+2
   1. Schets de grafiek en geef ook de limieten naar oneindig.
   2. Deze functie bereikt een globaal maximum.
      - Zoek de functiewaarde van dit globaal maximum (in functie van a).
      - Zoek de waarde van a waarvoor dit maximum minimaal is.

Tussentijdse test 2010-2011

Professor Eelbode heeft na de test een uitgewerkt document gegeven. Hier staat duidelijk in wat hij zoal verwachtte.

Januari 2010

Prof. Dr. Eelbode

1. Geef en bewijs de stelling van Weierstrass.

2. Waar of vals?
    1. Indien $\phi(x)=|x^2+x|$ dan geldt er dat $\phi'(x)=|2x+1|$
    2. Alle bijecties $f:[0,1]\to[0,1]$ zijn monotoon.
    3. Als de taylorreeks van de functie $f(x)=xe^{-x^2}$ wordt gegeven door $\sum_k y_k x^k$ dan geldt er dat $y_{32}\neq 0$
    4. Alle polynomen van graad $n\geq 3$ die enkel oneven machten bevatten, hebben altijd een buigpunt.
    5. De functie $\mu(x):=\cos y$ is een integrerende factor voor de differentiaalvergelijking $(2(x-y)\sin y+\cos y)dy=\cos y\,dx$
3. $F(s):=\int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$, $f(x)=x$
    1. Geef het domein voor $F(s)$
    2. Bepaal $F(s)$ voor een waarde s in het domein.
4. Geef en bewijs eerste hoofdstelling van de calculus en geef de tweede hoofdstelling van de calculus.
5. Leg kort uit hoe je een differentiaalvergelijking van de vorm $y'+\psi(x)y=\mu(x)$ kunt oplossen.

Augustus 2009

Anneleen Van Geenhoven {Groep 1}

1. Ga na of de volgende functie injectief, surjectief en/of bijectief is
   $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}:n\mapsto(-1)^n 2n+\frac{1}{2}((-1)^n-1)$
   $$f:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}:n\mapsto(-1)^n 2n+\frac{1}{2}((-1)^n-1)$$
   Verklaar je antwoorden aan de hand van bewijzen en/of tegenvoorbeeldjes!
2. Bepaal de volgende limieten:
    1. $\lim_{x\to 0}(4x^2+2x-3-4x+3)$
    2. $\lim_{x\to 0}(x+\cos(2x))^{\operatorname{cosec}(3x)}$
3. Een touw van 60cm wordt in twee stukken geknipt. Een deel ervan wordt in de vorm van een cikel gelegd, het andere in de vorm van een gelijkzijdige driehoek.
    1. Waar moet geknipt worden om een minimale totale oppervlakte te bekomen?
    2. Waar moet geknipt worden om een totale maximale oppervlakte te bekomen?
4. Bepaal $\int\frac{2x^3+4x^2+10x+13}{x^4+9x^2+20}dx$
5. Bepaal de oppervlakte van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de curve $y=e^x$ te wentelen rond de x as van $x=0$ tot $x=\ln 7$ Hint: Gebruik voor de integraal de substitutie $t=e^x$
6. Bereken met behulp van een Taylorreeks ln(1.3) tot op 4 decimalen nauwkeurig. Bepaal hiervoor eerst hoeveel termen je nodig hebt om de gewenste nauwkeurigheid te bereiken.
7. Los de volgende differentiaalvergelijking op
   $xy''-y'=3x^2$
   $$xy''-y'=3x^2$$
   Schrijf de oplossing in de vorm van $y=f(x)$

{Groep 2}

1. Vereenvoudig $4\arctan\frac{1}{5}-\arctan\frac{1}{239}$ (Wees volledig!)

2. Bepaal volgende limieten:
    1. limx→0(arctanxsinx)limx→0(arctanxsinx)
    2. limx→+∞(x−x2−1−−−−−√)limx→+∞(x−x2−1)
    3. limx→−∞(x−x2−1−−−−−√)limx→−∞(x−x2−1)
3. We willen een cilindervormig vat maken met een inhoud van 64 dm3dm3 Voor de bodem van het vat willen we een metaalsoort gebruiken met een kostprijs van 2 euro per dm3dm3 de opstaande zijwand van het vat kost 2,5 euro per dm3dm3 Bepaal de maten van het vat zodat de prijs minimaal is.
4. Bepaal ∫xrcsin(x2)dx∫xrcsin(x2)dx .
5. Bereken de booglengte van de curve y=ln(cosx)y=ln(cosx) tussen x=π6x=π6 en x=π4x=π4
6. Bepaal ∫xarcsin(x2)dx∫xarcsin(x2)dx .
7. Bereken de booglengte van de curve y=ln(cosx)y=ln(cosx) tussen x=π6x=π6 en x=π4x=π4
8. Stel dat we sinx benaderen door middel van een MacLaurinreeks met 3 termen (verschillend van nul). Voor welke waarden van x is de fout hierbij hoogstens 0,00005? Geef je antwoord in graden.
9. Los de volgende differentiaalvergelijking op
   y″−1xy′−2=

   y″−1xy′−2=

   Schrijf de oplossing in de vorm y=f(x)y=f(x)

Januari 2009

Theorie

{Groep 1}

1. Geef de stelling van Rolle
2. Geef de stelling van Cauchy met bewijs
3. Waar of vals:
    1. Een bijectie is altijd monotoon
    2. De oppervlakte onder de functie x=1x(ln(x))px=1x(ln(x))p convergeert voor p << 1, met p een reëel getal

{Groep 2}

1. Geef de middelwaardestelling van de integraalrekening met tekening
2. Geef de eerste hoofdstelling van de integraalrekening met bewijs
3. Waar of vals?
    1. De oppervlakte onder de functie x=1x(ln(x))px=1x(ln(x))p divergeert voor p >> 1, met p een reëel getal
    2. Gegeven een functie die 3x differentieerbaar is, niet continu in f*(a) maar wel in f′(a) en f*′(a). Deze functie bestaat

Praktijk

Anneleen Van Geenhoven

1. Bepaal de volgende limiet
   limx→01−cos(x)−ln1+x2−−−−−√x4

   limx→01−cos(x)−ln1+x2x4

2. Bepaal de volgende onbepaalde integraal
   ∫1tanx−1dx

   ∫1tanx−1dx

3. Bepaal door middel van een Taylorreeks e15e15 tot op 7 decimalen nauwkeurig. Bepaal hiervoor eerst hoeveel termen je nodig hebt om de gewenste nauwkeurigheid te bereiken.
   Opmerking: Let er op dat je in je berekening de gevraagde waarde al niet gebruikt! Concreet: ga ervan uit dat je exex voor geen enkele waarde van x kent, behalve e0e0 = 1 en e1e1 ≈2.7.≈2.7.
4. Los de volgende differentiaalvergelijking op
   23x+2y−1=y′−1

   23x+2y−1=y′−1

   Vereenvoudig de oplossing zoveel mogelijk.
5. Los de volgende differentiaalvergelijking op
   y″−y=xcos(x)

   y″−y=xcos(x)

   Schrijf je oplossing in de vorm y=f(x)y=f(x)
6. Vereenvoudig de volgende uitdrukking
   arcsin513+arccos80048125

   arcsin513+arccos80048125

7. Zijn de volgende verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar?
   1. [0,1]∩Q[0,1]∩Q
   2. R\QR\Q
8. Bepaal de partiële afgeleide naar xx van de volgende functie
   f(x,y)=xy−−√x−xy2−−−√−−−−−−−−√

   f(x,y)=xyx−xy2

   Opmerking: Wat kan je veronderstelling in verband met het teken van xx en/of yy Maak hier gebruik van.
9. Bepaal de waarde van de volgende oneigenlijke integraal
   ∫∞0lnx(x+1)2dx

   ∫0∞lnx(x+1)2dx

Januari 2008

Theorie

{Groep 1}

1. geef de limiet definities van oneigenlijke en oneindige limieten + hoe je ze moet berekenen
2. De middelwaardestellingen + een intelligente toepassing

3. Substitutie van goniometrische integralen (tweede klasse), welke? + voorbeelden

{Groep 2}

1. Extremum onderzoek en afgeleiden, wat hebben ze met elkaar te maken
2. Primitieven en welke stellingen daaromtrent bewezen zijn
3. Taylorreeks en restterm

{Groep 3}

1. convexiteit en concaviteit, welke eigenschappen, bewijs dat convex ⇔⇔ stijgend
2. Toepassingen van integralen (schema) + overal een voorbeeld bij
3. regels van Fuss + voorbeeld

Praktijk

Anneleen Van Geenhoven

1. Toon aan dat de volgende gelijkheid geldt
   5Bgtan17+2Bgtan379=π4

   5Bgtan17+2Bgtan379=π4

2. Bepaal de volgende limieten:
   1. limx→09x−sin(3x)5x+4sin(2x)limx→09x−sin(3x)5x+4sin(2x) Zonder de regel van Hopital.
   2. limx→0cosx−−−−√x2limx→0cosxx2
3. Beschouw de volgende parametervergelijking:
   x(t)=a.cos3ty(t)=a.sin3t x(t)=a.cos3ty(t)=a.sin3t
   1. Maak de grafiek behorende bij deze vergelijking
   2. Bereken de oppervlakte ingesloten door deze grafiek.
   3. Bereken de oppervlakte van het omwentelingslichaam dat ontstaat door wentelen om de x-as.
4. Hoeveel termen (verschillend van 0) van de Mauclaurinreeks van e−x4e−x4 zijn nodig om ∫1/20e−x4dx∫01/2e−x4dx te bepalen tot op 5 decimalen? Bereken vervolgens de integraal met deze nauwkeurigheid
5. Los de volgende differentiaalvergelijking op en schrijf de oplossing in de vorm: y=...

x2y″−4xy′+6y−2x4−x2=0y(1)=2;y′(1)=4x2y″−4xy′+6y−2x4−x2=0y(1)=2;y′(1)=4

Juni 2007

Praktijk

Anneleen Van Geenhoven

1. Zij $f:R \to Rf:R \to R$ een twee maal differentieerbare functie
   - Bewijs
     $\forall x,y \in R:|x+y| \le |x|+|y|$
     $$\forall x,y \in R:|x+y| \le |x|+|y|$$
   - Schrijf de functiewaarde van ff in x+dx+d (met d>0d>0 als Taylorpolynoom van graad 1 rond xx (met restterm).
   - Welke bovengrens voor $|f'||f'|$ kan je hieruit afleiden indien geldt dat $\forall x \in R:|f(x)| \le k\forall x \in R:|f(x)| \le k$ en $|f''(x)| \le l|f''(x)| \le l$?
   - Het antwoord op de vraag cc is afhankelijk van dd Bestaat er een minimale bovengrens ?
   - Welk resultaat bekom je als k=l=1k=l=1 ? En wat is het resultaat als k=9k=9 en l=1l=1 ?
2. Bewijs dat elke continue functie $f:[0,1] \to [0,1]f:[0,1] \to [0,1]$ een fixpunt heeft. (Een fixpunt van een functie ff is een getal cc in het domein van ff waarvoor f(c)=cf(c)=c
3.
   - Teken de grafiek van de kappakromme met cartesische vergelijking y2(x2+y2)=a2x2(a>0)y2(x2+y2)=a2x2(a>0) door overgang naar een mogelijke parametervoorstelling. (Tip : ga eerst over naar poolco{ö}rdinaten, leid hieruit een parametervoorstelling af.)
   - Bereken de oppervlakte tussen de grafiek en de rechten x=−2√2ax=−22a en x=2√2ax=22a door de vergelijking om te zetten in poolco{ö}rdinaten.
   - Bepaal (met gebruik van de parametervoorstelling) de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat bij rotatie van de kappakromme tussen x=−2√2ax=−22a en x=2√2ax=22a rond de xx as.
4. Los volgende differentiaalvergelijking op en schrijf de oplossing in de vorm y = ...
   y′tanx=−2ysec2x−tanx1+cos2x
   y′tanx=−2ysec2x−tanx1+cos2x

Januari 2007

1. Geef de definities van continuïteit en afleidbaarheid en zo veel mogelijk verbanden tussen deze begrippen.
2. We kregen een integraal en moesten die op 3 fundamenteel verschillende manieren oplossen.
3. Reststelling van Taylor en Lagrange.

Januari 2006

1. Bewijs de continuïteit van:
   1. 1x1x functie
   2. sinusfunctie
2. Geef het schema voor het berekenen van oppervlakte, booglengte, inhoud en complanatie voor cartesische coördinaten, parametervoorstellingen en poolcoördinaten.

3. Geef de kettingregel voor het afleiden
    - Bewijs deze formule
    - Geef een 'intelligente' toepassing {dr. Peeters bedoelt de beperkte inverse functiestelling}

Januari 2005

1. Geef en bewijs de stelling van Leibnitz.
2. Bespreek: regel van Fuss
3. Restterm van Lagrange
4. Los op zonder gebruik te kmaken van partiële integratie
   ∫xexdx

∫xexdx

Extra uitgewerkte oefeningen

Professor Peeters geeft calculus niet meer aan de fysica. Als 'afscheidscadeautje' heeft hij een reeks uitgewerkte extra oefeningen gegeven. Dit is een goede test, hoewel misschien niet alle oefeningen nog even relevant zullen zijn.

Calculus voor de Wiskundigen

Sinds 2014 is de pagin van Fysica en Wiskunde samengevoegd. De oude pagina voor de wiskunde kan je hier vinden