Wetenschappelijk Programmeren

Wetenschappelijk Programmeren	
Richting	Informatica
Jaar	3BINF

Bespreking

Inleiding

Deze cursus volgt op het vak Numerieke Lineaire Algebra. In deze cursus zal je numerieke basistechnieken bekijken en deze leren toepassen in een wetenschappelijke context. De theorielesseen van het vak worden gedoceerd door professor Cuyt die de technieken tijdens de lessen duidelijk uitlegt. Ze laat ook goed zien wat de verbanden zijn tussen de verschillende hoofdstukken. Voor de praktijk van dit vak zal je oefeningen maken en hands-on ervaring opdoen met belangrijke numerieke bibliotheken.

Theorie

De theorie van dit vak bestaat uit hoorcollege's die gedoceerd worden door professor Cuyt. Tijdens de lessen legt professor Cuyt de materie heel goed uit en het is zeker aangeraden om naar de lessen te komen. De onderwerpen, technieken, hun voor- en nadelen en de toepassingen worden duidelijk belicht.

Praktijk

Bij de praktijkcomponent van dit vak zal je hands-on ervaring opdoen met belangrijke numerieke bibliotheken. Het zal je in staat stellen om problemen in een wetenschappelijke context op te lossen. De praktijkcomponent bestaat uit twee onderdelen: individueel oefeningen maken en presentaties geven/bijwonen.

Oefeningen maken

Voor de praktijkcomponent van dit vak werk je individueel en is het de bedoeling dat je 5 oefeningen gaat oplossen (1 oefening over elk hoofdstuk uit de cursus). Om deze oefening op te lossen ga je gebruik maken van bekende numerieke bibliotheken. Voor elke oefening krijg je ongeveer 1 a 2 weken tijd. De studenten mogen zelf hun oefening kiezen uit een lijst van oefeningen. Dus je kan de oefening nemen die je het leukst lijkt om op te lossen. Elke oefening mag gekozen worden door een bepaald aantal studenten. Op het einde schrijf je ook over je oefening een verslag. Hierin schrijf je hoe je de oplossing moet compileren, analyseer je je probleem aan de hand van de theorie en leg je uit hoe je het probleem hebt opgelost en welke keuzes je hebt gemaakt. Informatie over het schrijven van een verslag krijg je in het begin van het semester van de praktijkassistent.

Presentaties

Tijdens de practica zullen er presentaties gegeven worden. Elk practicum gaat over een bepaald hoofdstuk van de cursus. Ieder practicum zal elke oefening uit de oefeningreeks, door een student gepresenteerd worden. Hierdoor weten de andere studenten ook hoe ze de oefening moeten oplossen. Op het einde van de presentatie worden er door de praktijkassistent ook nog enkele vragen gesteld. Dit kan gaan over hoe jij een bepaald onderdeel hebt opgelost, maar het kunnen ook inzichtsvragen zijn in de cursus. Het is dus de bedoeling dat je goed begrijpt wat er in de cursus staat als je gaat presenteren. Tijdens de practica geeft de praktijkassistent zeer goede algemene feedback die van toepassing is op alle verslagen. Voor specifieke vragen over jou verslag, kan je ook altijd bij de praktijkassistent terecht, deze zal je graag verderhelpen.

Examen

Voor het theoretisch examen is het vooral belangrijk dat je de theorie goed begrijpt. Daarnaast is het ook belangrijk dat men enkel schrijft wat men heel zeker weet. Beperk dus je antwoord tot waar je kennis zeker rijkt. Voor het schrijven van fouten verlies je veel punten. De gedachte hierachter is dat van een universitair wordt verwacht dat hij geen onzin schrijft. Weet je een vraag niet, dan laat je deze beter open of schrijf op tot waar je kennis zeker rijkt. Ze hebben wel liever dat je iets schrijft en laat zien dat je het een beetje snapt, dan helemaal niets.

Ten slotte is er ook nog een tip die geldt voor alle vragen. Wees specifiek en benoem je punten op je grafieken goed, benoem je assen, enzovoort.

De vragen hier op de tuyaux zijn vaak onduidelijk of vaag, op het examen staat er veel meer uitleg wat ze exact verwachten.

Evaluatie

Voor de evaluatie wordt er gekeken naar zowel de praktische component als de theoretische component. Het is belangrijk dat de student laat zien dat hij/zij vorderingen maakt en dat hij/zij begrijpt waar hij/zij mee bezig is. Het is ook heel belangrijk dat je weet wat er in de cursus staat, dit met de correcte terminologie kan reproduceren en ook begrijpt wat er in de cursus staat. Met dit laatste wordt o.a. bedoeld dat wanneer je een formule invoert, je deze ook uitlegt. Het is dus niet de bedoeling dat je dingen klakkeloos vanbuiten leert die je niet snapt.

Tips

Examentips

1. Gebruik bij het beantwoorden van de vragen de wetenschappelijke terminologie die in de cursus staat
2. Bij het beantwoorden van de vragen mag je formules invoeren, maar leg ze wel even uit als je ze invoert

3. Schrijf enkel op tot waar je kennis zeker rijkt, door fouten te schrijven verlies je punten. Je schrijft dus niet je voorlopig beste inzichten op, maar beperkt je tot wat je 100% zeker weet. Neem geen risico's.
4. Wanneer je een figuur tekent, benoem dan je assen (x-as en y-as) en benoem de punten op je figuur (bijv. (x0,y0)(x0,y0))
5. Maak schriftelijke oefeningen op de theorie, zie de sectie "Schriftelijke oefeningen op de theorie"

Studeer samen

Samen kom je altijd verder dan alleen. Het is bij dit vak dan ook aangeraden om samen met je vrienden een soort van studeergroep op te richten om de cursus goed te begrijpen. De leerstof in deze cursus is vrij complex, en daarom is zoiets zeker aangeraden. Je kan bijvoorbeeld proberen om wekelijks of twee wekelijks een keer samen te komen om een vragenuurtje te organiseren. Dit kan eenvoudig tussen de middag in de refter of in de blauwe zeteltjes bovenaan in gebouw G. Het is dan de bedoeling dat elke student de cursus op voorhand leest, en alles wat hij niet begrijpt op een blaadje schrijft. Elke week of twee weken wordt er even samengezeten en worden de vragen overlopen en wordt er samen naar een antwoord gezocht. Is er toch nog ergens iets niet duidelijk? Dan kan er nog altijd samen naar de praktijkassistent gestapt worden en deze zal je graag verderhelpen.

Verder is het in de examenperiode ook handig om gebruik te maken van sociale media en daar ook een soort van vragengroep op te richten (bijvb. een facebook groep). Leiden sociale media je te veel af? Dan kan je ook een eigen prive forum of iets dergelijks oprichten samen met je vrienden of vragen stellen op het winak forum.

Schriftelijke oefeningen op de theorie

Opmerking: het zou handig zijn moest er in de toekomst een pdf of iets dergelijks gemaakt worden met oefeningen per hoofdstuk en de antwoorden erbij

---

Om theorie goed door te hebben, is het vaak goed om daar oefeningen op te maken. Hieronder enkele pagina's die je kunnen helpen om nog wat meer te oefenen op de theorie.

> Oefeningen op Newton's divided differences

Opfrissen

Vooraleer je dit vak begint te volgen of gaat studeren, kan het geen kwaad om het een en ander terug op te frissen voor de aanvang van deze cursus. Topics die interessant zijn om even terug op te frissen zijn:

- Wat is de floating point representatie alweer?
- Wat zijn singuliere matrices? Kan je twee voorbeelden geven van een singuliere matrix?
- Wat is de essentie van het conditiegetal van een probleem? Wat is het conditiegetal van een matrix?

- Wat zijn beduidende cijfers? Kan je een formele definitie vinden/geven? Kan je in eigen woorden uitleggen waar het op neer komt?
- Wat is een limiet? Wat is de formele definitie van een limiet? Begrijp je die formele definitie?
- Wat is een afgeleide? Kan je dat formeel definiëren ? Wat vertelt zo'n afgeleide ons?
- Wat is een taylorreeks alweer? Weet je er nog iets over? Waarvoor zouden we een taylorreeks kunnen gebruiken?
- Wat is een fourierreeks alweer? Weet je er nog iets over? Waarvoor zouden we een fourierreeks kunnen gebruiken?
- Wat is een logaritme? Wat is een natuurlijk logaritme?
- Wat is de norm van een vector? Wat vertelt zoiets? Weet je nog het verschil tussen de verschillende normen?
- Wat is een basis? Begrijp je waar het op neer komt wat een basis is? Kan je ook een formele definitie geven voor een basis?
- Wat is de stelling van Bolzano-Weierstrass alweer? Weet je waar het op neer komt?
- Wat is de fundamentele stelling van de algebra? Wat betekent deze stelling?

Handige links

Wikipedia | Condition number

Puntenverdeling

Theorie: 10/20. Praktijk: 10/20.

Examenvragen

Academiejaar 2019 - 2020 - 1e zittijd

Data Fitting

Gegeven zijn de datapunten (xi,yi)(xi,yi) met i=1,...,5i=1,...,5. (1,0), (2,0), (3,0), (4,0), (5,2)

- Schrijf de expliciete formule neer voor de veelterminterpolant (tip: een veelterm van graad n heeft precies n nulpunten)
- Schrijf de interpolatievoorwaarden neer die voor deze data een natuurlijke kubische spline leveren. Tel zowel het aantal opgelegde voorwaarden als het aantal te berekenen coefficienten in deze spline en vergelijk.
- Als je datapunten mag toevoegen, doe je dit dan liefst voor de veelterminterpolant of het splinegebaseerde model?

Data Smoothing

We beschouwen het volgende kleinste kwadraten probleem (Euclidische norm (?)). Gegeven zijn de basisfuncties 1, sin(nx) waar n = 1,...,M en de punten xk=2(k−1)πN,k=1,...,Nxk=2(k−1)πN,k=1,...,N met N > 2M en voor 1≤n,m≤M1≤n,m≤M geldt
∑k=1Nsin(nxk)sin(mxk)={n=m:N2n≠m:0∑k=1Nsin(nxk)=0

∑k=1Nsin(nxk)sin(mxk)={n=m:N2n≠m:0∑k=1Nsin(nxk)=0

. In deze punten xkxk beschikken we verder over data ykyk.

- Schrijf in matrix-vectornotatie het overbepaalde stelsel neer dat ontstaat wanneer we het lineaire model a0+∑Mj=1ajsin(jx)a0+∑j=1Majsin(jx) fitten aan de data ykyk in alle punten xk,k=1,...,Nxk,k=1,...,N Geef van alle matricen en vectoren de dimensies.
- Welke vorm heeft het stelsel normaalvergelijkingen, rekening houdend met de discrete orthogonaliteit van de basis? Schrijf ook dit stelsel expliciet neer en geef opnieuw alle dimensies.
- Schrijf de formule voor de coefficienten aj,j=0,...,Maj,j=0,...,M neer die voldoen aan het stelsel normaalvergelijkingen. Van welke minimisatieprobleem zijn deze coefficienten nu de oplossing?

Solve Linear SVS

Beschouw het algemene stelsel lineaire vergelijkingen Ax=bAx=b met A, x en b reeel en respectievelijk van grootte m x n, n x 1, m x 1 waarbij m≥nm≥n. In geval m=n gebruiken we LU-decompositie om het stelsel op te lossen en voor m>nm>n QR-decompositie. Je mag ervan uitgaan dat A maximale rang heeft. Beantwoord volgende vragen voor LU- en QR-decompositie.

- In beide methodes vermenigvuldigen we linker- en rechterlid van het stelsel voor met bepaalde matrices. Waarom gebruiken we deze welbepaalde matrices om voor te vemenigvuldigen (welke eigenschappen hebben ze?)
- Naar welke vorm (geef afmetingen en inhoud van de matrix en vectoren) willen we het opgegeven stelsel uiteindelijk herleiden?
- Hoe bereken je uit deze uiteindelijke vorm van het lineaire stelsel de oplossing voor de ontbrekende vector x?

RNG

De verpaking van je favoriete donuts vermelde meestal het aantal calorieen, maar nooit het volume. Een donut is eigenlijk een torus. Een torus wordt beschreven door (x2+y2−−−−−−√−R)2+zr≤r2(x2+y2−R)2+zr≤r2. Hierbij is r de straal van de cirkel en R de afstand tussen het middelpunt van de cirkel en het centrum van de torus. In dit specifieke geval is r = 2 en R = 5 en bevindt het centrum van de donut zich in (0,0,0). Gegeven is een pseudo ranom number generator die 100.000 uniform verdeelde getallen genereert in het interval]0, 1[. Beschrijf bij voorkeur in psudocode, hoe je met de gegenereerde getallen het volume van onderstaande donut kan berekenen. Je hoeft in je pseudocode geen rekening te houden met het aspect parallelisatie.

Academiejaar 2018 - 2019 - 1e zittijd

Gegeven een set datapunten:

- Geef de interpolerende polynoom als ook een stelsel interpolatie condities.
- Schets en beschrijf de grafiek (ANTWOORD: Runge fenomeen treedt op)
- Is er een andere interpolatietechniek die steunt op polynomen die men kan gebruiken?
- Schets en beschrijf de grafiek gebruik makend van deze andere techniek. (ANTWOORD: Runge fenomeen treedt niet meer op)

Gegeven een overdetermined stelsel:

- Geef het stelsel in matrix-vector notatie.
- Welke vierkante matrix moeten we uitwerken om de L2 least squares approximation te bekomen? (bewijs)

Een orthogonale basisfunctie wordt geïntroduceerd bij 2

- Vind een expliciete formule voor de coëfficiënten.
- Schrijf de residuvector met de formule die je net bent bekomen en leg uit wat deze residuvector net uitdrukt.

Gegeven een figuur (bol met cilinder er uit in het midden, lijkt een beetje op een appel)

Geef pseudocode om het volume mbv random number generatie te bepalen.

Academiejaar 2014 - 2015 - 2e zittijd

Media:WetProg1415.pdf

Academiejaar 2013 - 2014 - 1e zittijd

1. Beschrijf de methode van Newton
   1. Leidt de iteratiestap af
   2. Convergeert deze methode gegarandeerd?
   3. Karakteriseer de convergentiesnelheid.
   4. (Gegeven: een output van methode van Newton, 2 kolommen: benadering en absolute fout): Toon deze convergentiesnelheid aan adhv de output.
2. Formuleer het lineaire kleinste kwadraten probleem voor data yj(j=1...m)yj(j=1...m) in punten xj∈[a,b]xj∈[a,b]. We hanteren een model van de vorm ∑ni=iλjfi(x),n<m∑i=inλjfi(x),n<m met fi(x)fi(x) gegeven basisfuncties. In andere woorden: uit welke voorwaarden worden de λi(i=1...n)λi(i=1...n) berekend.
3. We benaderen f(x)∈[−1,1]f(x)∈[−1,1] door g(x)=∑ni=0aibi(x)g(x)=∑i=0naibi(x) met bi(x)bi(x) orthogonale basisfuncties
   1. Geef 2 voorbeelden van functies bi(x)bi(x) die gebruikt kunnen worden (Veelterm en trigonometrisch)
   2. Geef een eenvoudige uitdrukking voor de coefficienten aiai
4. Gegeven T=∫baf(x)dxT=∫abf(x)dx benadering voor deze integraal volgens de trapeziumregel. Toon aan dat deze niets aanders is dan ∫bas(x)dx∫abs(x)dx, met s(x)s(x) polygonale spline van f(x)f(x) Kan de methode van Newton in moeilijkheden geraken bij het berekenen van het positieve nulpunt? Leg uit.

Academiejaar 2012 - 2013 - 2e zittijd

1. Hoe genereer je random koppels gehele getallen (i,j) binnen of op de cirkel met vergelijking x2+y2=109x2+y2=109
2. Schets de functies fk(x)=11+x2−10−k,k=1,2,...fk(x)=11+x2−10−k,k=1,2,...
3. Onderstel dat we data interpoleren met behulp van een veelterm uitgedrukt in basis xi(i=0,1,...)xi(i=0,1,...). Schrijf het lineair stelsel vergelijkingen op dat de conditievoorwaarden uitdrukt. Is dit stelsel doorgaans goed geconditioneerd?
4. Bij het berekenen van een veeltermmodel op basis van data, onderhevig aan ruis, lossen we een overbepaald (rechthoekig) stelsel op (onderstel dat de kolomrang maximaal is). Is het om het even in welke basis je het veeltermmodel uitdrukt? Leg uit.
5. Leg het principe van Chebyshev economizatie uit aan de hand van de reeksontwikkeling van arctan(x)=∑infi=0(−1)i12i+1x2i+1arctan(x)=∑i=0inf(−1)i12i+1x2i+1 (waarmee bedoeld wordt: werk deze reeks uit en voer een economizatie uit ter wijze van illustratie. De eerste 6 Chebyshev polynomen werden gegeven). Vergelijk deze reeks met de Chebyshev reeksontwikkeling arctan(x)=∑i=0inf(−1)i2(2–√−1)2i+12i+1T2i+1(x)
arctan(x)=∑i=0inf(−1)i2(2−1)2i+12i+1T2i+1(x)

Academiejaar 2011 - 2012 - 2de zittijd

1. Hoe genereer je random koppels gehele getallen (i, j) binnen of op de cirkel met vergelijking x2+y2=109x2+y2=109
2. Schets de functies fk(x)=11+x2−10−k,k=1,2,...fk(x)=11+x2−10−k,k=1,2,... Kan de methode van Newton in moeilijkheden geraken bij het berekenen van het positieve nulpunt? Leg uit.
3. Onderstel dat we data interpoleren met behulp van een veelterm uitgedrukt in basis xi(i=0,1,...)xi(i=0,1,...). Schrijf het lineair stelsel vergelijkingen op dat de conditievoorwaarden uitdrukt. Is dit stelsel doorgaans goed geconditioneerd?
4. Bij het berekenen van een veeltermmodel op basis van data, onderhevig aan ruis, lossen we een overbepaald (rechthoekig) stelsel op (onderstel dat de kolomrang maximaal is). Is het om het even in welke basis je het veeltermmodel uitdrukt? Leg uit.
5. Leg het principe van Chebyshev economizatie uit aan de hand van de reeksontwikkeling van
arctan(x)=∑infi=0(−1)i12i+1x2i+1arctan(x)=∑i=0inf(−1)i12i+1x2i+1
(waarmee bedoeld wordt: werk deze reeks uit en voer een economizatie uit ter wijze van illustratie. De eerste 6 Chebyshev polynomen werden gegeven).
Vergelijk deze reeks met de Chebyshev reeksontwikkeling
arctan(x)=∑infi=0(−i)i2(2√−1)2i+12i+1T2i+1(x)arctan(x)=∑i=0inf(−i)i2(2−1)2i+12i+1T2i+1(x)

Academiejaar 2010 - 2011 - 1ste zittijd

1. Leg volgende begrippen uit:
    1. Het Runge fenomeen
    2. Orthogonale (Chebychev)Veeltermen
    3. Chebychev Economisatie

2. Gegeven een grafiek met een puntenwolk (zonder schaal op de assen, met sterke outliers). Beschrijf je werkwijze om hier een functie voor te modelleren, indien je weet dat er meetfouten op zitten. Geef Norm,schaal, basisfuncties en de vergelijkingen voor de coëfficiënten.
3. De grafiek van een continue functie is gegeven (het functievoorschrift niet). Hoe zou je dit verloop benaderen, techniek en methode en leg uit. wees volledig.
4. Je krijgt een stuk ingewikkelde rekenintensieve code die een functie f(x) beschrijft, je kan f(x) evalueren. Er wordt een bovengrens op de absolute fout vereist. Er wordt gevraagd om de nulpunten te benaderen. Verklaar welke methode je gebruikt en leg deze methode grondig uit.

Academiejaar 2009 - 2010 - 1ste zittijd

1. De constante e (basis van het Neperiaans logaritme) voldoet aan de niet-lineaire vergelijking $\ln x - 1 = 0$. We beschouwen de methode van Newton en de regula falsi methode voor het oplossen van die vergelijking.
   1. Geef de formule voor de Newton iteratiestap, algemeen en meer specifiek voor bovenstaande vergelijking. Illustreer het principe van een Newton iteratiestap grafisch, bij voorkeur voor bovenstaande vergelijking
   2. Geef de formule voor de regula falsi iteratiestap, algemeen en meer specifiek voor bovenstaande vergelijking. Illustreer opnieuw het principe grafisch en let hierbij op de keuze van de startpunten.
   3. Commentarieer de convergentiesnelheid (let op bij regula falsi)
2. Bij interpolatie van data (x_i,f_i), afkomstig van een functie $f(x)$ door een veelterm $p_n(x)$ van graad n, geldt in een punt $(x,f(x))$ $f(x)-p_n(x)=\max_{\xi\in[x_0,\ldots x_n]}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$
   1. Interpreteer de tweede factor in de uitdrukking $\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$
   $$\prod_{i=0}^{n}(x-x_i)$$
   . Waar is de fout nul?
   2. Interpreteer de eerste factor in deze foutenformule $\max_{\xi\in[x_0,\ldots x_n]}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$
   $$\max_{\xi\in[x_0,\ldots x_n]}\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}$$
   . Wanneer is de fout nul?
3. We beschouwen een lineair kleinste kwadraten probleem (l_2). We fitten een model (lineaire combinaties van basisfuncties $b_j(x)$) $\sum_{j=1}^{n}\beta_j b_j(x)$ aan data $(x_i,y_i), i=0,\ldots,m$. De basisfuncties zijn gedefinieerd op het interval $[-1,1]$ terwijl de x_i tot een verschillend interval $[a,b]$ behoren.
   1. Schrijf het stelsel normaalvergelijkingen neer
   2. Wat drukt dat stelsel uit?
4. Welke zijn de twee belangrijke factoren in de foutenformule voor de samengestelde trapeziumregel (zij komen ook voor in de foutenformule voor de middelpuntsregel)?
   1. Hoe zie je aan die factoren van de orde van de integratieregel?
   2. Hoe zie je welke functies exact geintegreerd worden door de integratieregel?

5. Onderstel dat we in de 10-dimensionale hyperkubus [0,1]10[0,1]10 voor een bepaalde simulatie een uniform verdeelde verzameling punten nodig hebben (hoogstens 220220 in aantal).
   1. Kies je vier punten a1,a2,a3,a4a1,a2,a3,a4 in [0,1][0,1] (bij voorbeeld ai=18+i4ai=18+i4 voor i=0,…,3i=0,…,3) en beschouw je alle mogelijk vectoren van lengte 10 die je daarmee kan maken?
   2. Hoe ga je te werk en waarom?

Bij de laatste vraag waren er op het examen nogal wat onduidelijkheden: het eerste puntje is dus een voorstel van een uniforme verdeling waarbij de punten op een 10-dimensionaal ’grid’ liggen met 4 punten op elke as en daar elke mogelijk combinatie van.

Academiejaar 2007 - 2008 - 1ste zittijd

1. Werk de Newton methode uit voor R−−√R. Wat is f(x)f(x) dan? Geef de iteratieve formule om een benaderende oplossing te bekomen. Illustreer dit grafisch. Wat is de convergentiesnelheid?
2. Bespreek de gedeelde differenties van de coëfficiënten van de Newton methode. Hoe voegt men een interpolatiepunt toe?
3. Gegeven de interpolatiepunten t0,t1,…,tkt0,t1,…,tk en een spline van graad kk die k−1k−1 keer differentieerbaar is over het interval [t0,…,tk][t0,…,tk]. Wat is het aantal te bepalen coëfficiënten? Wat is het aantal af te leiden voorwaarden? Werk dit alles in detail uit.
4. Bespreek de invloed die basisfuncties kunnen hebben in het kleinste kwadratenmodel op het conditiegetal.
5. Bespreek Chebychev-economizatie aan de hand van een Taylorreeks voorstelling (formeel of door middel van een voorbeeld). Wat gebeurt er als je dit proces ad infinitum uitvoert?
6. Definieer de orde van een kwadratuurregel. Illustreer dit grafisch en bespreek.

Academiejaar 2006 - 2007 - 1ste zittijd

Theorie

1. Gegeven zijn 3 punten (x0,y0)(x0,y0), (x1,y1)(x1,y1) en (x2,y2)(x2,y2) in R2R2. Leid de formule af voor de parabool door deze punten, gebruik makend van de techniek van veelterminterpolatie. Vertrek rechtstreeks van de definitie van de interpolerende veelterm (niet van de Lagrange of Newton-vorm).
2. We veralgemenen de secant interatie voor het oplossen van f(x)=0f(x)=0 op de volgende manier. In plaats van door 2 opeenvolgende interatiepunten (x0,f(x0))(x0,f(x0)) en (x1,f(x1))(x1,f(x1)) een rechte te trekken en die te snijden met de x-as, trekken we nu door 3 opeenvolgende interatiepunten (x0,f(x0)),(x1,f(x1))(x0,f(x0)),(x1,f(x1)) en (x2,f(x2))(x2,f(x2)) een parabool en snijden die met de x-as. Druk de parabool uit als y=c+b(x−x2)+a(x−x2)2y=c+b(x−x2)+a(x−x2)2. Welk snijpunt van de parabool met de x-as kies je als volgend interatiepunt (doel is een convergentie rij {xi∈Nxi∈N} , dus limi→∞(xi+1−xi)=0)limi→∞(xi+1−xi)=0)?

```
Hoe bereken je in een floating-point omgeving dat snijpunt (we willen niet beide
snijpunten berekenen)?
```

1. Bepaal een model van de vorm y=b exp(ax)y=bexp(ax) door ln(y)ln(y) in de zin van de kleinste kwadraten (l2-vorm) te benaderen met behulp van de gegevens (xi,yi)(xi,yi) voor i=1,…,ni=1,…,n. Geef de formule voor a en voor b en leg uit.
2. Beschouw de ellipsoïde x24+y216+z24=1x24+y216+z24=1. Beschrijf gedetailleerd hoe je met behulp van een Monte Carlo techniek het volume binnen deze ellipsoïde in het eerste octant van R3R3 berekent.

Academiejaar 2006 - 2007 - 2de zittijd

1. Hoe genereer je random koppels gehele getallen (i,j)(i,j) binnen of op de cirkel met vergelijking x2+y2=109x2+y2=109?

2. Schets de functies

   fk(x)=11+x2−110k(k=1,2,…)fk(x)=11+x2−110k(k=1,2,…) Kan de methode van Newton in moeilijkheden geraken bij het berekenen van het positieve nulpunt van fk(x)fk(x)? Leg uit.

3. Onderstel dat we data interpoleren met behulp van een veelterm uitgedrukt in de basis xixi voor alle i=0,1,…i=0,1,…. Schrijf het lineair stelsel vergelijkingen dat de interpolatievoorwaarden uitdrukt neer. Is dat lineair stelsel doorgaans goed geconditioneerd?

4. Bij het berekenen van den veeltermmodel op basis van data onderhevig aan ruis, lossen we een overbepaald (rechthoekig) lineair stelsel op (onderstel dat de kolommenrang maximaal is). Is het om het even in welke basis je het veeltermmodel uitdrukt? Leg uit.

5. Leg het principe van Chebyshev economisatie uit ahv de Taylor reeksontwikkeling van arctan(x)=…arctan(x)=…
   Hoe vergelijk je deze techniek met de Chebyshev reeksontwikkeling arctan(x)=…arctan(x)=…? (Formularium wordt gegeven)

6. De Legendre veelterm van graad 2 is gegeven door L2(x)=x2−13L2(x)=x2−13. Leidt de Gauss-Legendre integratieregel af die als knooppunten de nulpunten L2(x)L2(x) gebruikt. Verifieer daarenboven dat die regel orde 4 heeft.

Opdrachten

Acedemiejaar 2009 - 2010 - 2e zittijd

1. Beschouw de functie f(x)=sinxf(x)=sinx op het interval [0,π][0,π]. Evauleer f(x)f(x) in een voldoende aantal punten om een interpolerende veelterm p(x)p(x) en een natuurlijke kubische splinebenadring s(x)s(x) te bekomen zodanig dat de foutenkrommen |(f−p)(x)||(f−p)(x)| en |(f−s)(x)||(f−s)(x)| (waarvan je een plot mee afgeeft) voldoen aan |(f−p)(x)|≤0.0050≤x≤π|(f−p)(x)|≤0.0050≤x≤π en |(f−s)(x)|≤0.0050≤x≤π|(f−s)(x)|≤0.0050≤x≤π. Het aantal en de locatie van de datapunten kan natuurlijk verschillend zijn voor pp en ss. Waarom is de tweede afgeleide van de splinefunctie in begin- en eindpunt gelijk aan nul een goede keuze?
2. Neem opnieuw de functie f(x)=sinxf(x)=sinx en de datapunten die hierboven gebruikt zijn voor de berekening van ss. Bereken nu enerzijds de beste parabool-benadering q(x)=a+bx+cx2q(x)=a+bx+cx2 op [0,π][0,π] in de zin van de kleinste kwadraten (euclidische norm) met behulp van deze datapunten. Bereken anderzijds de Taylor reeksontwikkeling voor f(x)f(x). Denk goed na rond welk punt je die wil opstellen. Bereken hiermee een Padé benadering r(x)r(x) waarbij de graad in teller en noemer bepaald worden door de vereiste |(f−r)(x)|≤0.0050≤x≤π|(f−r)(x)|≤0.0050≤x≤π. Vergelijk beide met de veelterminterpolant en de spline en geef tevens een plot af van |(f−q)(x)||(f−q)(x)| en |(f−r)(x)||(f−r)(x)|.
3. Gebruik eerst de secant methode en nadien de methode van Newton om een nulpunt te zoeken van de functie f(x)=−0.01+11+x2f(x)=−0.01+11+x2. Commentarieer de bekomen resultaten.
4. Beschouw de Runge functie f(x)=1/(1+25x2)f(x)=1/(1+25x2) op het interval [−1,1][−1,1]. Bereken de oppervlakte tussen de x-as en de curve f(x)f(x) met behulp van de samengestelde trapeziumregel waarbij je gebruik maakt van 11 equidistante punten. Doe hetzelfde gebruikmakend van een 11-punts Gauss-Legendre regel. Bereken daarna de integraal met behulp van random number generatie: als xixi het i-de random getal is in [−1,1][−1,1], te beginnen met de kiem x0x0, dan bereken je voor verschillende n de benadering ∫1−1f(x)dx≈∑ni=0f(xi)∫−11f(x)dx≈∑i=0nf(xi). Vergelijk je drie numerieke resultaten en bespreek.