Hilbertruimten en Fourierreeksen

tuyaux.winak.be/index.php/Hilbertruimten_en_Fourierreeksen

Hilbertruimten en Fourierreeksen	
Richting	Fysica Wiskunde
Jaar	3BFYS 3BWIS

Bespreking

Deze cursus behandelt de basisbegrippen van de theorie van Hilbertruimten en haar toepassingen, met dan in het bijzonder het gebruik van Fourier-analyse in differentiaalvergelijkingen. Dit vak wordt gegeven door professor David Eelbode en professor Wim Vanroose en bestaat in feite uit twee delen. Halverwege het semester stoppen de lessen van David en neemt Wim het over.

Het examen bestaat uit een oefeningenexamen, met oefeningen uit beide delen. En een theorie-examen, waarbij er schriftelijke vragen zijn over beide delen, en je dan twee keer een tiental minuten bij een van de proffen een aantal on-the-spot vragen krijgt. Bij Wim gaat het vooral over de intuïtie van Fouriertransformaties. Bij David is het belangrijk om begrippen en implicaties uit de cursus te kennen. Kritisch vragen naar bijvoorbeeld welk type convergentie hij bedoelt in zijn vragen geeft bonuspuntjes.

Puntenverdeling

Oefeningen	Deel David		5
	Deel Wim		5
Theorie	Deel David	Schriftelijk	4
		Mondeling	1
	Deel Wim	Schriftelijk	4
		Mondeling	1

Examenvragen

2021-2022

Theorie

Deel Wim

1. Stel $f,g\in L1(R)f,g\in L1(R)$ twee functies. Wat is het convolutieproduct? Wat is het convolutieproduct in de Fourierruimte? Weet je een toepassing van het convolutieproduct?
2. Gegeven volgende differentiaalvergelijking met constante coëfficiënten $a,b,c\in Ra,b,c\in R$: $au''(x)+bu'(x)+cu(x)=f(x)\forall x\in Rau''(x)+bu'(x)+cu(x)=f(x)\forall x\in R$ met $f(x)f(x)$ gegeven. Hoe kunnen we deze vergelijking via de Fouriertransformatie oplossen? Wat als we bb nu veranderen door een functie $b(x)b(x)$, die van de plaats afhangt? Kunnen we die techniek nog gebruiken?
3. Aan welke eigenschappen voldoet $a(u,v):V\times V\to Ra(u,v):V\times V\to R$ een continue, V-elliptische bilineaire vorm?
4. Stel $Vh\in VVh\in V$ een eindige deelruimte van VV met een basis $\phi i\phi i$ met $i\in\{1,\ldots,N\}i\in\{1,\ldots,N\}$. Hoe kunnen we de vergelijking $a(v,u)=(v,f)\forall v\in Vha(v,u)=(v,f)\forall v\in Vh$ herschrijven als een lineair stelsel? Waarom is de oplossing uniek?

Deel David

1. In de cursus zagen we dat elke inproductruimte $(V,<.,.>)(V,<.,.>)$ ook een genormeerde ruimte oplevert. Is het omgekeerde ook waar? Zijn genormeerde ruimtes steeds inproductruimtes?
2. Waar/Vals: Op een deelruimte van een Hilbertruimte kan je altijd projecteren. Geef ook een bewijs of tegenvoorbeeld.
3. Als $(V,<.,.>)(V,<.,.>)$ een inproductruimte is, dan is de functionaal die een vector $v\in Vv\in V$ stuurt naar het inproduct $<v,w><v,w>$ met een vaste vector $w\in Vw\in V$ altijd continu. Toon deze eigenschap aan.
4. In de cursus hebben we een *anti-lineaire isometrie* gezien tussen een Hilbertruimte VV en haar duale. Leg kort uit wat daarmee bedoeld wordt.
5. Stel dat $0\neq\psi\in End(V)0\neq\psi\in End(V)$ een compacte Hermitische operator is met eigenwaarden $\{\lambda k:k\in R\}\{\lambda k:k\in R\}$ en projecties $\pi\lambda k\pi\lambda k$ op bijhorende eigenruimtes. Toon dan aan dat: $\psi=\sum k\lambda k\pi\lambda k\psi=\sum k\lambda k\pi\lambda k$. Uit je antwoord moet ook duidelijk blijken wat de betekenis van bovenstaande reeks.

Oefeningen

1. Gegeven $k\in L2([0,1])k\in L2([0,1])$, beschouw de volgende operator: $A:L2([0,1])\to L2([0,1]):f\mapsto k\int 10f(x)dxA:L2([0,1])\to L2([0,1]):f\mapsto k\int 01f(x)dx$
   1. Bepaal de norm van AA
   2. Is AA compact? Bewijs je antwoord.
   3. Bepaal $A*A*$
2. Bereken de Fourierreeks van de periodieke functie $f:[-\pi,\pi]\to R:\mapsto\{10x\in[-\pi 2,\pi 2]x\notin[-\pi 2,\pi 2]f:[-\pi,\pi]\to R:\mapsto\{1x\in[-\pi 2,\pi 2]0x\notin[-\pi 2,\pi 2]$ Bepaal de Fourierreeks van $g(x)=f(x-T)g(x)=f(x-T)$. Verifiëer dat $||f||22=||g||22||f||22=||g||22$ door gebruik te maken van Fourierreeksen.
3. _
   1. Vind m.b.v. de Fouriertransformatie een oplossing voor de volgende differentiaalvergelijking: $\partial 2f\partial x+k\star f=g\partial 2f\partial x+k\star f=g$, met $g,k\in L1(R)\cap L2(R)g,k\in L1(R)\cap L2(R)$ en $\star\star$ de convolutie.
   2. Waarom vind je exact één oplossing hoewel de bovenstaande differentiaalvergelijking een twee-parameter familie oplossingen heeft?

4. Bereken de zwakke afgeleide van volgende $L1(]-1,1[)L1(]-1,1[)$-functies
    1. $f1=1-|x|f1=1-|x|$
    2. $f2=x|x|f2=x|x|$
    3. $f=\lceil l\{f142f2x<0x=0x>0f=\{f1x<042x=0f2x>0$
5. Bewijs het volgende theorema: Voor twee open verzamelingen $U\subseteq\Omega U\subseteq\Omega$ en $f\in Hn(\Omega)f\in Hn(\Omega)$ geeft $D\alpha(f|U)=D\alpha f|UD\alpha(f|U)=D\alpha f|U$.

2019-2020

Theorie

Deel 1 (Wim)

1. Schrijf de fouriergetransformeerde van $f'(t)g(t)f'(t)g(t)$ in functie van $f\hat{}(\omega)f\hat{}(\omega)$ en $g\hat{}(\omega)g\hat{}(\omega)$.
2. Gegeven de differentiaalvergelijking $(\alpha(x)u'(x))'=f(x)(\alpha(x)u'(x))'=f(x)$ met $\forall x\in[0,L]\forall x\in[0,L]$ en randvoorwaarden $u(0)=u(L)=0u(0)=u(L)=0$. Formuleer in variationele vorm en stel de bilineaire vorm op. Stel een basis van testfuncties voor en zet het variationeel probleem om in een stelsel van coëfficiënten van de oplossing uu. Welke integralen moet je uitwerken om dit stelsel op te stellen? (Je moet deze niet uitrekenen)
3. Wat is V-ellipticiteit? Hoe garandeert deze eigenschap dat het overeenkomstig stelsel oplosbaar is? Waaraan moet $\alpha(x)\alpha(x)$ uit de vorige vraag voldoen om te garanderen dat de oplossing bestaat?
4. Stel $f,f\hat{}\in L1(R)f,f\hat{}\in L1(R)$. Dan $\forall\omega\forall\omega$ geldt er $|f\hat{}(\omega)|\leq K|\omega|2|f\hat{}(\omega)|\leq K|\omega|2$. Wat kan je zeggen over de afgeleiden van ff?

Deel 2 (David)

Groep 1

1. (3 punten) Gegeven een orthonormale familie $F=\{vj:j\in J\}\subset VF=\{vj:j\in J\}\subset V$ in een inproductruimte, dan hebben we in de cursus een stelling gezien die een verband legt tussen de begrippen 'maximaal zijn' en 'totaal zijn'.
    1. Geef de definitie van beide begrippen (totaal en maximaal) en formuleer de stelling waarnaar ik hierboven verwijs (je hoeft ze niet aan te tonen).
    2. Ik knip en plak hier een stukje uit het bewijs: *stel dat de orthonormale familie FF maximaal is, dan weten we om te beginnen dat de verzameling* $Bv:=\{j\in J:\langle v,vj\rangle\neq 0\}Bv:=\{j\in J:\langle v,vj\rangle\neq 0\}$ *hoogstens aftelbaar is (voor willekeurige* $v\in Vv\in V$*). Bovendien convergeert de vector* $wv:=\sum j\in Bv\langle v,vj\rangle vjwv:=\sum j\in Bv\langle v,vj\rangle vj$ *, en wel omdat VV compleet is.*
    Vraag: wat moet je in feite nog controleren om de existentie van de vector wvwv te concluderen (i.e. waarom convergeert de rij $(wn)n\in N\subset V(wn)n\in N\subset V$ met wnwn een partieelsom van bovenstaande reeks)? Geef daarbij ook de expliciete definitie van het begrip dat je nodig zal hebben in je antwoord. De controle zelf moet je voor alle duidelijkheid *niet* uitvoeren.

2. (3 punten)
    1. Geef de definitie van een compacte hermitische operator op een Hilbertruimte VV ,
       en verklaar waarom de identieke operator (die $v\mapsto vv\mapsto v$ stuurt) niet per se compact
       is.
    2. **Waar/Vals**: er bestaan compacte hermitische operatoren φφ waarvan het spectrum
       gelijk is aan de verzameling
       σ(φ):={λn=n2+1n2+2:n∈N0}σ(φ):={λn=n2+1n2+2:n∈N0}.

    3. Geef de (algemene) definitie voor de norm van een operator. Leg ook uit hoe je de
       norm van φφ kan gebruiken om iets de zeggen over de continuïteit van die operator
       (zonder bewijs).
3. (4 punten) Formuleer en bewijs de stelling van Riesz (we zijn hierbij enkel geïnteresseerd
   in het geval dat de ruimte VV waarin we werken oneindig veel dimensies heeft). In de
   cursus zagen we ook dat deze stelling kan gebruikt worden om aan operatoren
   φ∈End(V)φ∈End(V) een nieuwe operator te associëren: welke operator is dat, en hoe
   staan ze met elkaar in verband?

Groep 2

1. (3 punten) Gegeven een orthonormale familie F={vj:j∈J}⊂VF={vj:j∈J}⊂V in een
   inproductruimte, dan hebben we in de cursus een stelling gezien die een verband legt
   tussen de begrippen 'maximaal zijn' en 'totaal zijn'.
    1. Geef de definitie van beide begrippen (totaal en maximaal) en formuleer de stelling
       waarnaar ik hierboven verwijs (zonder bewijs).
    2. In de cursus hebben we gezien dat maximaal orthonormale families in een
       Hilbertruimte dienst doen 'basis' (het definiëert dus dit begrip in het geval van
       oneindig veel dimensies). Waarom kunnen we dat precies zeggen? Welke relevante
       eigenschap hebben die families, zodat ze zich inderdaad gedragen als een basis?
2. (3 punten)
    1. Geef de definitie van de toegevoegde operator φ∗φ∗ voor een operator φφ. Geef ook
       duidelijk aan welke stelling de existentie van die operator garandeert, en onder welke
       voorwaarden. Formuleer tot slot ook de stelling die je vertelt hoe deze operator kan
       gebruikt worden om een Hilbertruimte te ontbinden als een directe som.
    2. **Waar/Vals:** indien W<VW<V een deelruimte is van de Hilbertruimte VV, dan geldt er
       altijd dat W⊥⊥=WW⊥⊥=W.
    3. Geef de definitie van de norm van een operator φφ, zowel in het algemene geval als
       het geval waarbij die operator hermitisch is.
3. (4 punten)
    1. Formuleer en bewijs de Eigenschap van Bessel.
    2. Stel dat φ∈End(V)φ∈End(V) een compacte, hermitische operator is. Wat kan je dan
       allemaal zeggen over het spectrum van die operator?

Groep 3

1. (3 punten) Gegeven een orthonormale familie $F=\{vj:j\in J\}\subset VF=\{vj:j\in J\}\subset V$ in een inproductruimte, dan hebben we in de cursus een stelling gezien die een verband legt tussen de begrippen 'maximaal zijn' en 'totaal zijn'.
    1. Geef de definitie van beide begrippen (totaal en maximaal) en formuleer de stelling waarnaar ik hierboven verwijs (zonder bewijs).
    2. In een cursus Lineaire Algebra hebben we gezien dat alle (complexe) vectorruimten van dimensie mm isomorf zijn met de ruimte CmCm. In een cursus Hilbertruimten leren we vanalles over vector- ruimten met oneindig veel dimensies, en l2l2 is daarvan een bijzonder mooi voorbeeld. Indien VV een Hilbertruimte is met $\dim(V)\neg\in N\dim(V)\neg\in N$, mag ik dan concluderen dat $V\cong l2V\cong l2$? Bespreek dit, door eventueel een relevante definitie en/of stelling te vermelden.
2. (3 punten)
    1. Geef de definitie van de toegevoegde operator $\varphi*\varphi*$ voor een operator $\varphi\varphi$. Geef ook duidelijk aan welke stelling de existentie van die operator garandeert, en onder welke voorwaarden.
    2. **Waar/Vals**: indien $W<VW<V$ een deelruimte is van de Hilbertruimte VV en $v\in Vv\in V$, dan bestaat er altijd een vector $w=\pi(v)\in Ww=\pi(v)\in W$ die we kunnen omschrijven als 'de projectie van vv op WW'.
    3. In de cursus hebben we gezien dat een inproduct op een vectorruimte zeer handig is, in die zin dat het aanleiding geeft tot een norm op die ruimte. Stel nu dat ik een norm op een vectorruimte VV heb, hoort daar dan een inproduct bij (zodanig dat $||\cdot\cdot||2=\langle\cdot,\cdot\rangle 2=\langle\cdot,\cdot\rangle$)?
3. (4 punten)
    1. Formuleer en bewijs de eigenschap die zegt onder welke omstandigheden we voor een operator $\varphi\in End(V)\varphi\in End(V)$ kunnen concluderen dat $\varphi(v)=\sum j\in J\lambda j\langle v,vj\rangle vj\varphi(v)=\sum j\in J\lambda j\langle v,vj\rangle vj$.

       De betekenis van de getallen $\lambda j\lambda j$ en de vectoren vjvj moet ook duidelijk worden uit je antwoord.
    2. Geef voor elk van de voorwaarden die je legt op $\varphi\varphi$ in deel 1 van deze vraag de definitie van wat dat begrip precies is.

Groep 4

1. (3 punten) Gegeven een orthonormale familie $F=\{vj:j\in J\}\subset VF=\{vj:j\in J\}\subset V$ in een inproductruimte, dan hebben we in de cursus een stelling gezien die een verband legt tussen de begrippen 'maximaal zijn' en 'totaal zijn'.
    1. Geef de definitie van beide begrippen (totaal en maximaal) en formuleer de stelling waarnaar ik hierboven verwijs (zonder bewijs).
    2. Stel nu dat de verzameling JJ overaftelbaar is: dan komen we toch in de problemen, want dan heeft een uitdrukking zoals $\sum j\langle v,vj\rangle vj\sum j\langle v,vj\rangle vj$ geen betekenis (daar we enkel kunnen sommeren in een reeks als $j\in Nj\in N$)? Of zie ik hier iets over het hoofd?

2. (3 punten)
    1. In de cursus spelen ‘gesloten deelruimten’ $W<V$ van een Hilbertruimte een belangrijke rol. Leg uit wat ‘gesloten’ hierbij precies betekent (ik zoek hierbij niet naar de topologische definitie, je mag bespreken hoe we dat in de cursus checken in de context van Hilbertruimten). Is ‘gesloten zijn’ hetzelfde als ‘compleet zijn’?
    2. **Waar/Vals**: indien $W<V$ een deelruimte is van de Hilbertruimte V , dan is $V=W\oplus W^\perp$.
    3. Stel dat $\varphi\in End(V)$ een compacte hermitische operator is, wat kan je dan allemaal vertellen over het spectrum van die operator?
3. (4 punten) Formuleer en bewijs de stelling van Riesz (we zijn hierbij enkel geïnteresseerd in het geval dat de ruimte V waarin we werken oneindig veel dimensies heeft). In de cursus zagen we ook dat deze stelling kan gebruikt worden om aan operatoren $\varphi\in End(V)$ een nieuwe operator te associëren: welke operator is dat, en hoe staan ze met elkaar in verband?

Oefeningen

1. Zij E een Hilbertruimte en $A:E\to E$ een operator. Een gesloten deelruimte $M\subseteq H$ noemen we A-invariant als $AM\subseteq M$. Als zowel M als $M^\perp$ A-invariant zijn, zeggen we dat M de operator A reduceert.
    1. (2 punten) Toon aan: Een gesloten deelruimte $M\subseteq E$ met orthogonale projectie π_M is invariant onder een operator A als en slechts als $A\pi_M=\pi_M A\pi_M$.
    2. (3 punten) Toon aan: Een gesloten deelruimte $M\subseteq E$ met orthogonale projectie π_M reduceert een operator A als en slechts als A en π_M commuteren. (Hint: maak zonder bewijs gebruik van volgend resultaat: Een deelruimte $M\subseteq E$ reduceert een operator A als en slechts als M invariant is onder A en A^*.)
2. (5pt) Zij E een Hilbertruimte en $A:E\to E$ een operator. Toon aan dat volgende eigenschappen equivalent zijn:
    1. A is compact
    2. AA^* is compact
    3. A^* is compact
    4. A^*A is compact
    (Hint: Toon bij (d)$\Rightarrow$(a) dat $(Ax_{j_k})_k$ een Cauchyrij is voor een goed gekozen $(x_{j_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Gebruik hiervoor Cauchy-Schwartz.)

3. Beschouw de Hilbertruimte E=L2([0,1],R)E=L2([0,1],R) en de deelruimten
   V={f∈E|f is een veelterm}

   V={f∈E|f is een veelterm}

   Vn={f∈E|f is een veelterm met degf≤n}

   Vn={f∈E|f is een veelterm met degf≤n}

   waarbij n∈Nn∈N.
   1. (1 punt) **Waar/Vals**: VV is een Hilbertruimte.
   2. (1 punt) **Waar/Vals**: ∀n∈N:Vn∀n∈N:Vn is een Hilbertruimte.
   3. (3 punten) In het hoofdstuk Fourierreeksen hebben we aangetoond hoe het mogelijk is om bijvoorbeeld veeltermfuncties in EE te benaderen door sinus- en cosinusfuncties. Stel dat het omgekeerde gevraagd wordt: welke functie in V42V42 ligt het dichtst bij cosxcosx (we werken nog steeds in EE)? Uiteraard moet je dit nu niet uitrekenen. Maar als je dat toch zou moeten doen, hoe zou je dat oplossen? Geef een overzichtelijk stappenplan wat je moet doen.
4. Gegeven de functie
   f(t)={1−t20|t|<1|t|≥1

   f(t)={1−t2|t|<10|t|≥1

   1. (2 punten) Toon aan dat
      f̂(ω)=4(sinω−ωcosω)ω3

      f^(ω)=4(sinω−ωcosω)ω3

   2. (3 punten) Bereken
      ∫+∞−∞sint−tcostt3dt

      ∫−∞+∞sint−tcostt3dt

      Verklaar je stappen.

Deze eigenschappen mag je zonder bewijs gebruiken:

- Als f(x)=exp(−x2/α)f(x)=exp(−x2/α), dan is f̂(ω)=π/α−−−√exp(−ω2/(4α))f^(ω)=π/αexp(−ω2/(4α)).
- ∫e−iωxdx=iωe−iωx+C∫e−iωxdx=iωe−iωx+C
- ∫xe−iωxdx=1+ixωω2e−iωx+C∫xe−iωxdx=1+ixωω2e−iωx+C
- ∫x2e−iωxdx=ix2ω2+2xω−2iω3e−iωx+C∫x2e−iωxdx=ix2ω2+2xω−2iω3e−iωx+C
- ∫x3e−iωxdx=ix3ω3+3x2ω2−6ixω−6ω4e−iωx+C∫x3e−iωxdx=ix3ω3+3x2ω2−6ixω−6ω4e−iωx+C