Lineaire algebra - Encyclopedia Academia

Lineaire algebra	
Richting	Wiskunde
Jaar	1BWIS

Bespreking

Dit vak is, naast Calculus en verzamelingenleer, het belangrijkste vak van het eerste semester. Het vak werd tot vorig jaar gegeven door Prof. Van Steen maar vanaf dit jaar door professor Lebruyn. In het begin zal je de cursus zeer abstract vinden en niet direct een duidelijk beeld hebben. Maar hoe meer je bezig bent met het vak (vooral de oefeningen), krijg je meer inzichten. De cursus is één van de beste (het handelsmerk van Van Steen). Zijn lessen zijn meestal wat waziger en je kan niet altijd volledig volgen maar de cursus schept veel helderheid.

Theorie

Theorie wordt gegeven door professor Lebruyn. Professor Lebruyn geeft meestal 2 testen tijdens het semester. Als je in z'n geheel op beide testen slaagt moet je geen examen meer doen.

Oefeningen

De oefeningen worden gegeven door Nicolaas Verhulst, een jonge docatoraatsassistent. Hij is gepassionneerd door de wiskunde en geeft heel goed zijn oefeningenlessen. Er staat telkens een leuk vraagstuk of breinbreker op het einde en hij zorgt voor een ontspannen sfeer in de klas. Als je iets niet begrijpt, legt hij dit altijd met veel plezier uit. En hij doet ook graag een partijtje schaken.

Puntenverdeling en examen

De punten voor theorie en oefeningen tellen even hard door dus: 10 op theorie en 10 op oefeningen. Van Steen durft ook een tussentijdse test te doen om te polsen hoe ver je staat en als je hierop slaagt, ben je voor dit deel op het examen vrijgesteld.

Theorie

Het theorie-examen is mondeling en gebeurt in groepjes van 6 à 7 personen. Je komt in het lokaal en Van Steen zet de eerste vragen op het bord. Die werk je tot in de puntjes uit en als je klaar bent, roep je hem. Dan overlopen jullie samen wat je neerpende. Al naargelang hoe goed het ging, geeft hij de volgende vraag. Dit herhaalt zich tot hij het goed vindt of de tijd voorbij is. Als je een vraag echt niet weet, kan je (mist puntenaftrek) een andere vraag krijgen.

Oefeningen

Het oefeningen-examen ligt sterk in de lijn van wat je in de klas hebt gedaan. Er is genoeg tijd om alle vragen of te ronden. Maar als je een vraag niet direct ziet, kan je beter naar de volgende gaan. Dan kan er misschien nog inspiratie komen als je erop terugkomt.

Examenvragen vanaf het academiejaar 2014 - 2015

In het academiejaar 2014 - 2015 stopt professor Van Steen definitief met lesgeven, en zal dit vak door een andere professor gegeven worden.

Examenvragen Professor Van Steen

Theorie en oefeningen

Academiejaar 2015-2016 1ste zit

1. Bepaal voor welke $\lambda \in R$ het volgende lineaire stelsel een oplossing heeft :$x1+2x2-3x3=\lambda 3x1+5x2-3x3=2\lambda -3x1-4x2-3x3=1$
2. Stel $n \in N+$. Welke van de volgende stellingen zijn en juist en welke fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:
   - $\det:Mn(R)\to R$ is surjectief.
   - Als $n \neq 2$ dan is $\det:Mn(R)\to R$ niet injectief.
   - Voor elke $A,B \in M2(R)$ geldt $\det(A+B)=\det(A)+\det(B)$.
   - Voor elke inverteerbare matrix $A \in M3(R)$ met $A-1=A$ geldt $\det(A)=1$.

Theorie

Academiejaar 2014 - 2015 2de zit

1. Geef de definitie van een deelruimte die wordt voortgebracht door een deelverzameling.
2. Waarom heeft een eindig voortgebrachte vectorruimte steeds een basis?
3. Geef de definitie en een voorbeeld van een isomorfisme.
4. Stel en bewijs de alternatiefstelling.
5. Bewijs dat de eigenwaarden reëel zijn + de spectraalstelling.
6. Geef de definitie van een hermitische matrix.
7. Geef de definitie van lineaire onafhankelijke vectoren en voortbrengende vectoren.

Belangrijkste vragen

1.
    - De matrixvoorstelling van een lineare afbeelding
    - Gramm-Schimdt
    - Alles betreffende eigenwaarden en eigenvectoren
    - Dimensieformules + alle soorten variaties op de stellingen (andere stellingen over dimensies)
    - De existentie van basissen, hoe maak je ze? Het uitbreiden van een lineair onafhankelijk deel tot een basis. Het inkrimpen van een voortbrengend deel tot een basis. Geef de stellingen die daarvoor dienen.
    - Orthogonaliteit

Academiejaar 2013 - 2014 2de zit

1. Geef en bewijs de schrapstelling en het bijhorende lemma.
2. Waaraan is dim(K(A))+dim(N(A)) gelijk? Bewijs dit.
3. Geef de criteria voor diagonalisatie. Bewijs de equivalentie.
4. Zij f een endomorfisme in V met dim(V) eindig. Wat is dan de karakteristieke veelterm van f en wat is het verband tussen de karakteristieke veelterm en eigenwaarden en eigenvectoren?
5. Stel V een vectorruimte. Wat wordt er dan bedoeld met "de duale van V" en "de duale basis". Bewijs ook dat de duale basis een basis is voor $V*$.

Academiejaar 2013 - 2014 1ste zit

1. Zij $A \in M_{n,n}(R)$. Bewijs: $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow rg(A)=n$.
2. Formuleer de "schrapstelling" en het bijhorende lemma. Bewijs ze.
3. Geef wat je weet over de matrixvoorstelling van een lineaire afbeelding. Hoe kan een lineaire afbeelding geschreven worden als een matrixproduct?
4. Zij $f:V \rightarrow V$ een lineaire afbeelding. Definieer: karakteristieke veelterm van f. Wat is het verband met de eigenwaarden en de eigenvectoren?
5. Bewijs dat eigenvectoren met verschillende eigenwaarden lineair onafhankelijk zijn.
6. Geef de definitie van geometrische en algebraische multipliciteit en bewijs de ongelijkheid tussen de twee.

Academiejaar 2013 - 2014 Tussentijdse test

1. Zij $A,B \in M_{n,n}(R)$ vierkante matrixen. Toon aandet(AB)=det(A).det(B)
2. Zij V een vectorruimte die een eindige basis B heeft. Als $S \subset V$ een verzameling is waarvoor geldt dat $|B|<|S|$ dan is S lineair afhankelijk. Bewijs dit! Leg uit hoe we deze stelling kunnen gebruiken om het begrip dimensie van V te definiëren.

1. Inverteer de matrix:
    - A=(0121034−38)
    - en bereken de oplossing(en) van het stelsel
    - Ax=(912)

2. Beschouw een vector $v \in R^n$. Zoals gewoonlijk noteren we de getransponeerde matrix van v als ${}^T v$. Veronderstel dat ${}^T u u=1$ en definieer $M=u\,{}^T u$ en $N=I-2M$. Bewijs of ontkracht de volgende beweringen:
   - $M^2=M$
   - ${}^T M=M$
   - $(MN)^2=-M$
   - $N^2=I$
3. Definieer voor twee n x n-matrices N en M de anticommutator als $\tilde{N,M}=NM+MN$.
   - Bewijs dat voor M en N omkeerbaar met $(MN)^m=I$ en $\tilde{M,N}=0$, m even is.
   - Toon aan dat de verzameling $U_M=\{N|\tilde{N,M}=0\}$ een deelruimte van $M_n(K)$ is voor elke $M \in M_n(K)$.
   - Geef een voor beeld van een matrix $M \neq 0$ met $U_M \neq 0$.

Academiejaar 2012 - 2013 1ste zit

1. Bewijs dat $Det(A) \neq 0 \Leftrightarrow$ A is inverteerbaar.
2. Dimensieformule voor V/W bewijzen met eventueel de voorafgaande stelling.
3. Geef de definitie van geometrische en algebraiesche multipliciteit en bewijs dat de geometrische kleiner of gelijk is aan de algebraiesche.
4. Bewijsf is injectief $\Leftrightarrow Ker(f)=0$.
5. Bespreek 'karakteristieke veelterm'. (Definieer en leg het verband met eigenwaarden en met de vorige vraag)

Academiejaar 2011 - 2012 1ste zit

1. Stel dat V en W twee vectorruimten zijn, wat is dan V/W? Er wordt hier ook naar de constructie ervan gevraagd (welgedefinieerdheid enz ... nagaan). Bewijs en vul aan dim(V/W)=….
2. Beschouw een n-dimensionale vectorruimte V en een m-dimensionale vectorruimte W. Toon aan dat $Hom_K(V,W)$ isomorf is met $M_{m,n}(R)$.
3. Definieer geometrische en algebraiesche multipliciteit. Welk verband geldt er tussen beide en bewijs dit ook (geometrische ≤ algebraiesche).
   - Bijvraag 1: Definieer de karaktersitieke veelterm
   - Bijvraag 2: Zij $e_1,\ldots,e_n$ en $f_1,\ldots,f_n$ twee basissen voor V en zij $f:V\rightarrow V$ een endomorfisme. Stel $A=[a_{ij}]$ en $A'=[a'_{ij}]$ de matrices van f t.o.v deze basissen. Toon aan$det(A-t\cdot I_n)=det(A'-t\cdot I_n)$.

Academiejaar 2010 - 2011 1ste zit

1. Definieer lineair onafhankelijk en afhankelijk.
   - Is {u} lineair afhankelijk of onafhankelijk en waarom?
   - Is {u,v} lineair onafhankelijk of afhankelijk en waarom?
2. Definieer: nulruimte en kolomruimte. Van wat is de nulruimte een deelverzameling? Bewijs $rg(AB) \leq rg(B)$.
3. Vervangvraag$f:R^n\rightarrow R^m$ een lineaire afbeelding dan $\exists A \in M_{m,n}$ zodat $f=f_A$.

4. Geef de definitie van een karakteristieke veelterm. Waarom hangt deze niet af van de matrix van de functie? Veralgemening van de dimensieformuledim(N(A))+dim(K(A))=n (aantal kolommen) en bewijs:
    - Gramm-Schmidt.
    - De dimensieformule dim(V+W)=….
    - Voor t eigenvectoren met onderling verschillende eigenwaarden is de verzameling {v1,…,vt} lineair onafhankelijk.
5. Bewijs dat de functie tussen V/ker(f) en Im(f) welgedefinieerd is en een lineaire afbeelding is. Geef de definitie van geometrische en algebraiesche multipliciteit en bewijs dat de geometrische kleiner of gelijk is aan de algebraiesche.

Academiejaar 2009 - 2010 2de zit

---

1. Stel A∈Mm,n en B∈Mn,p:
    - Definieer K(A) en N(A) en toon aan dat dit deelruimten zijn.
    - rg(AB)≤min{rg(A),rg(B)}
2. V,W⊂U deelruimten (dim(U)<∞). Wat is dan dim(V+W)? Toon dit ook aan.
3. Gegeven een lineaire afbeelding f:V→W:
    - Wat is de matrixvoorstelling van f?
    - f:Rn→Rm een lineaire afbeelding dan ∃A∈Mm,n zodat f=fA.
4. Stel A∈Mm,n en stel c1,…,ct verschillende eigenwaarden van A. Stel verder vi∈Vct\{0} met i=1,…,t.
    - Dan {v1,…,vt} lineair onafhankelijk.
    - Als AT=A dan vi⊥vj(∀i≠j).

Academiejaar 2006 - 2007 1ste zit

---

1. Stel A∈Mm,n
    - Definieer dan:
        - de rijenruimte van A
        - de kolommenruimte van A
        - De nulruimte van A
    - Toon aandim(K(A))+dim(N(A))=m.
    - Geef de stelling in verband met dim(V)=dim(Im(f))+dimker(f)
2. Stel A en B twee matrices. Toon aanA·B=Inen|A|=|B|⇒B·A=In
3. Zij V en W vectorruimten, e1,…,en een basis in V en w1,…,wn elementen in W. Toon aan: er bestaan een unieke lineaire afbeeling f:V→W zodat ∀i=1,…,n:f(ei)=wi
    - f injectief ⇒…
    - f surjectief ⇒…
4. Stel dat e1,…,en onderling verschillende eigenwaarden zijn, v1,…,vn de overeenkomende eigenvectoren. Toon aan:
    - v1,…,vn lineair onafhankelijk.
    - als tA=A dan vi⊥vj,∀i≠j.

Academiejaar 2004 - 2005 2de zit

---

1. Bewijs: als f:V→V , dan dim(V)=dim(Kerf)+dim(Imf).

2. Gramm-Schmidt
3. Bewijs dat het optellen van matrices een lineaire afbeelding is.
4. Gegeven een hermitische matrix
    - Bewijs dat de eigenwaarden reeel zijn.
    - Bewijs dat eigenvectoren met verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan.
5. Stel dat V en W twee vectorruimten zijn wat betekent dan V/W? Waaraan is dim(V/W) gelijk aan?
6. Orthogonalisatieprocédé van Gramm-Schmidt.
7. Bewijs dat de eigenvectoren van verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan.

Academiejaar 2004 - 2005 1ste zit

1.
    - Defineer het begrip lineair onafhankelijke vectoren in Rn.
    - Zij v,w∈Rn vectoren met v,w≠0. Toon aan: v,w zijn lineair afhankelijk als en slecht als v=λw voor zekere λ∈R.
2.
    - Hoe defineert men de kern van een lineaire afbeelding?
    - Toon aan dat Kerf van een lineaire afbeelding f:Rn→Rm een deelruimte is van Rn .
    - Zij f:Rn→Rm een lineaire afbeelding. Toon aann=dim(Kerf)+dim(Imf) .
3. Zij A∈Mn,n(R) een vierkante matrix.
    - Hoe defineert men de karakteristieke veelterm van A?
    - Toon aan dat de wortels van deze veelterm juist de eigenwaarden van A zijn.
    - Zij v1,⋯,vt∈Rn eigenvectoren van A met respectievelijke eigenwaarden λ1,⋯,λt∈R . Toon aan: als λ1,⋯,λt onderling verschillend zijn, dan zijn de eigenvectoren v1,⋯,vt lineair onafhankelijk.

Oefeningen

Academiejaar 2014 -2015 2de zit

1. Gegeven A diagonaliseerbaar.
    - Toon aan: spoor van A is gelijk aan de som van de eigenwaarden.
    - Toon aan: determinant van A is gelijk aan het product van de eigenwaarden.
    - Bereken de eigenwaarden van de volgende matrix[124−1]
2. Gegeven[−426][234][−1018][121]

    Reduceer tot basis en orthonormaliseer.
3. Pn reële vectorruimte van polynomen met graad ≤ n. V={f∈Pn|f1=0}.
    - Geef een basis voor Pn en V.
    - Toon aanPn/V≅R.

4. $(V_i)_{i\in N}$ een collectie reële vectorruimtes. $V=\{(f_i)_{i\in N}|f_i:V_i\to V_{i+1}$ is lineair $\}$. Definieer op V:
   - $(f_i)_{i\in N}\oplus(g_i)_{i\in N}=(f_i+g_i)_{i\in N}$ (som)
   - $\lambda\otimes(f_i)_{i\in N}=(\lambda.f_i)_{i\in N}$ (maal)
   1. Toon aan dat dit van V een reële vectorruimte maakt.
   2. Toon aan $\dim(V)<\infty\Leftrightarrow\nexists i$ met $\dim(V_i)=\infty$ en er zijn maar een eindig aantal i's met $V_i\neq 0$.

Academiejaar 2013 - 2014 1ste zit

1. Geef de oplossingenruimte in functie van l $\{2x+4y-2z=0 \; -2x-6y+2z=0 \; 4x+7y+lz=0$
2. Beschouw de verzameling van alle reële rijtjes $(a_n)_{n\in N}$ van reële getallen zodanig dat $a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}+3a_{n-3}$. Toon aan dat dit een vector ruimte is (puntsgewijze optelling en vermenigvuldiging). Welke dimensie heeft ze?
3. Orthgonaliseer de kolommenruimten van volgende matrix$[3-51111-15-23-78]$
4. Zij $f:R^3\to R^3$ zodanig dat $f([120])=[67-5]$, $f([012])=[012]$ en $f([201])=[310]$. Geef de matrixvoorstelling t.o.v. de canonieke basis, bereken de nulruimte ervan en diagonaliseer indien mogelijk.
5. Zij V,W,T reële eindigdimensionale vectorruimten. Zij $f:V\to W$ een lineaire afbeelding en de cokern van f wordt gedefinieerd als$\mathrm{coker}(f)=W/\mathrm{Im}(f)$.
   - Bewijs$\mathrm{coker}(f)\times V/\ker(f)\approx W$
   - Bewijs: als $\varphi:W\to \mathrm{coker}(f):x\to\bar{x}$ de quotiëntafbeelding dan is $\varphi\circ f=0$.
   - Bewijs: als $g:W\to T$ een lineaire afbeelding en $g\circ f=0$, dan bestaat er een $h:\mathrm{coker}(f)\to T$ een lineaire afbeelding zodat $g=f\circ\varphi$

Academiejaar 2012 - 2013 1ste zit

1. $M_n(R)$ is een vectorruimte.
   - Toon aan dat de symmetrische en anti-symmetrische matrices deelruimten zijn.
   - Toon aan dat $M_n(R)$ de directe som is uit die twee.
2. Bereken de nulruimte van volgende matrix:

   $A=[1-1-7-24011-21]$
3. Gegeven$f:U\to V$ en $g,h:V\to W$ en $g\circ f=h\circ f$
   - Bewijs dat $P=\{x\in V|h(x)=g(x)\}$ een deelvectorruimte is.
   - $\mathrm{Dim}(U)\leq\mathrm{Dim}(P)$ indien f injectief is. of omgekeerd?
4. Geef een vector die loodrecht staat op $[111]$ en $[10-1]$.
5. Bereken de eigenwaarden van A = [98/301], alsook de eigenvectoren. Diagonaliseer A en geef de overgansmatrices.

   Hoe kan men A construeren aan de hand van de eigenwaarden en eigenvectoren?

Academiejaar 2009 - 2010 2de zit

1. Goed of fout? : Stel A, B, en C deelverzamelingen van een overkoepelende (niet lege) verzameling, waarbinnen we de complementen beschouwen. Dan geldt$[(A\cap C^c)\cup(B\cap C^c)]^c\cap(A\cup B)\subset C$

2. Bespreek het volgende stelsel(met a,b,c∈R) {x+by+z=1ax+y+z=1x+cy+z=1
3. Ga na of de verzameling V:={(xyz)∈R3|x+y+z=1}, uitgerust met de bewerkingen zoals hier volgend gedefineerd, een vectorruimte is. (x1,y1,z1)+(x2,y2,z2):=(x1+x2−1,y1+y2,z1+z2)r·(x,y,z):=(rx−r+1,ry,rz)(∀r∈R)
4. Beschouw de functie ϕ:M2,2(R)→R3[X] gegeven door [abcd]+c+(d+c)X+(b−a)X2+aX3 Toon aan dat ϕ een bijectieve lineaire afbeelding is. Kies basissen voor M2,2(R) en R3[X] zodat de matrix van ϕ ten opzichte van deze basissen de eenheidsmatrix wordt. Beargumenteer je werkwijze.
5. Bereken de eigenwaarden en bijhorende eigenruimte van de matrix A . Geef indien mogelijk een omkeerbare matrix T zodat T−1AT een diagonaalmatrix is, of leg uit waarom zo een matrix niet bestaat. A=[−120222020010−3−60−6]

Academiejaar 2008 - 2009 1ste zit

1. Stel V een vectorruimte , I een verzameling, en Wi een deelruimte van V , ∀i∈I. Bewijs dat de verzameling ⋂i∈IWi een deelruimte van V is.
2. Stel V=F∈R[X]|gr(F)≤2. Beschouw voor een willekeurige c∈R0 de afbeelding f:V→R:F↦F(c)(0∈V)
    - Bewijs dat f lineair is.
    - Geef een basis voor Ker(f) en Im(f).
3. Bepaal de matrix ten opzichte van de kanonieke basis van de lineaire afbeelding f:R2→R2:x_↦sp(x_) die een vector x_∈R2 afbeeldt op zijn spiegelbeeld ten opzichte van de rechte L door de oorsprong en met richtingsvector [21] .
4. Stel A∈Mm,n(R),v∈N(A),w∈K(AT) . Bewijs dat v en w orthogonaal zijn (ten opzichte van het kanonieke inproduct)
5. Bereken de eigenwaarden met bijhorende eigenruimten van de matrix A. Geef indien mogelijk een omkeerbare matrix T zodat T−1AT een diagonaalmatrix is of leg uit waarom zo'n matrix niet bestaat. A=[1001001000001001]

Academiejaar 2008 - 2009 1ste zit

1. Stel V een vectorruimte , I een verzameling, en Wi een deelruimte van V , ∀i∈I. Bewijs dat de verzameling ⋂i∈IWi een deelruimte van V is.
2. Stel V=F∈R[X]|gr(F)≤2. Beschouw voor een willekeurige c∈R0 de afbeelding f:V→R:F↦F(c)(0∈V)
    - Bewijs dat f lineair is.
    - Geef een basis voor Ker(f) en Im(f).
3. Bepaal de matrix ten opzichte van de kanonieke basis van de lineaire afbeelding f:R2→R2:x_↦sp(x_) die een vector x_∈R2 afbeeldt op zijn spiegelbeeld ten opzichte van de rechte L door de oorsprong en met richtingsvector [21] .
4. Stel A∈Mm,n(R),v∈N(A),w∈K(AT) . Bewijs dat v en w orthogonaal zijn (ten opzichte van het kanonieke inproduct)

5. Bereken de eigenwaarden met bijhorende eigenruimten van de matrix A. Geef indien mogelijk een omkeerbare matrix T zodat T−1AT een diagonaalmatrix is of leg uit waarom zo'n matrix niet bestaat. A=[1001001000001001]

Academiejaar 2006 - 2007 2de zit

1.
   - Geef een voorbeeld van een lineaire functie van R3 naar R2 waarvoor de dimensie van de kern 2 is.
   - Stel V,W en U eindig dimensionale vectorruimten en f:U→V en g:V→W lineaire afbeeldingen. Bewijs dan dat dim(Im(f)⋂Ker(g))=dim(Im(f))−dim(Im(g∘f)) Hint: Stel Im(f):= V'
2. [−an−1−an−2⋯−a1−a010⋯0001⋰⋮⋮⋮⋯0000⋯10] pn=(−1)n(λn+an−1λn−1+⋯+a1λ+a0)
   - Bewijs per inductie dat de karakteristieke veelterm van bovenstaande matrix An gelijk is aan pn .
   - Stel n=2 geef dan één voorbeeld waarbij A2 diagonaliseerbaar is en één voorbeeld wanneer dit niet het geval is.
   - Wat zijn de mogelijke dimensies van de kolommenruimte van An? (Motiveer je antwoord.)
3.
   - Bewijs dat het inproduct f:V×V→R steeds niet ontaard is.
   - Vul aan: de samenstelling g∘f van een inproduct f:V×V→R met lineaire afbeelding g:R→R is terug een inproduct als en slechts als …

Academiejaar 2006 - 2007 1ste zit

---

1. Stel A,B∈Mn(K). Veronderstel dat A regulier is. Toon aan datA+B is regulier ⇔In+B⋅A−1 is regulier.
2. Stel in R3 b1=(72−7);b2=(−111);b′1=(010);b′2=(10−1) Dan is ⟨b1,b2⟩=⟨b′1,b′2⟩:=V . Beschouw de lineaire afbeelding f:V→R2[X] gegeven door f(b1)=5X2−5Xf(b2)=−2X2+2X
   - Geef de matrix van f ten opzichte van de geordende basissen B={b1,b2} in V en C={X2+X+1,X2+X,X2+1} in R2[X] .
   - Bereken de matrix van de lineaire afbeelding ten opzichte van twee andere basissenB′={b′1,b′2};C′:{X2,X,1} .
   - Bepaal Ker(f) en Im(f).
3. We werken in de reeele vectorruimte R4 .
   - Geef de karakteristieke veelterm van A.
   - Bereken de eigenruimte voor de eigenwaarde -2.
   - Welke eigenwaarde is cruciaal met betrekking tot de diagonaliseerbaarheid van A? (Motiveer je antwoord)
   - A=[0101101001011010]
4. Stel V een n-dimensionale reele vectorruimte met het canonieke inproduct ⟨−,−⟩ en A∈Mn(R) . Bewijs de volgende stelling AT⋅A=In⇔∀v,w∈V:⟨A⋅v,A⋅w⟩=⟨v,w⟩

5. Is deze uitdrukking waar of niet waar? (Motiveer je antwoord) f:Rn→R (linear en niet de nulafbeelding) is injectief ⇔n=1

Academiejaar 2005 - 2006 2de zit

1. Stel W:=f∈R[X]|f(3)=0 .
   - Bepaal de veeltermen die in W zitten expliciet.
   - Is W een deelruimte van R[X] ? (Motiveer je antwoord)
2. We beschouwen de vectorruimten V1=R1[X]V2=R2[X]V3=R met de respectievelijk geordende basissen B1=[1X]B2=[1XX2]B3=[1] en we definieren de volgende functies (met λ∈R) σ1:V1→V2:F↦∫x0F(x)dxσ2:V2→V3:G↦G(λ)
   - Bepaal de matrices van σ1,σ2 en σ2∘σ1 .
   - Waar komt σ2∘σ1 op neer?
3. Stel V een vectorruimte met een inproduct ⟨−,−⟩:V2↦V. ⟨−,−⟩ bepaalt de normafbeelding ı−:V↦R via ||v||:=√⟨v,v⟩. Het is mogelijk om het inproduct te reconstrueren met als enige gegeven de functie ||−||. Stel v,w∈V. Schrijf dan ⟨v,w⟩ in functie van de norm.
4. Geef een matrix X∈GL3(R) die voldoet aanX−1AX=[300000001]A=[21−1121110]

Academiejaar 2005 - 2006 1ste zit

1. Beschouw de volgende drie vectoren in R4 . Voor welke waarden van α∈R zijn deze vectoren lineair afhankelijk? (021α),(2α−12),(−21α4)
2. Zij V een R -vectorruimte. Beschouw een lineaire afbeelding f:V→V en g:V→V . Stel dat f eigenwaarde λ∈R heeft, en dat g eigenwaarde μ∈R heeft. Wat kan men dan zeggen over de eigenwaarden van g∘f in functie van λ en μ? Bespreek nauwkeurig en bewijs al je beweringen.
3. We werken in de reeele deelvectorruimte R3. Zij W=⟨(010)t⟩⊂R3 een deelvectorruimte. Beschouw de afbeelding f:R3→R3:(xyz)↦(x−y−z−x+y−z−x−y+z) en de afbeelding g g:R3→R3/W:v↦¯v
   - Geef de matrix van f ten opzichte van de kanonieke basissen.
   - Bereken de eigenwaarden λ van f en geef een basis voor elke eigenruimte Vλ.
   - Geef een basis B voor de quotientvectorruimte R3/W.
   - Geef een matrix van g∘f ten opzichte van de kanonieke basis van R3 en de zelfgekozen basis B van R3/W.
4. We werken in R -vectorruimte in R2. Beschouw de afbeeldingf:R2×R2→R: (v,w)↦vt(2112)w
   - Toon aan dat deze bilineaire vorm een inproduct is.
   - Zoek een orthonormale basis voor R2 ten opzichte van dit inproduct.

Academiejaar 2004 - 2005 2de zit

1. Gegeven de $\mathbb{R}$ -vectorruimten $V=\mathbb{R}[X]_3$ en $W=\langle X^2+1,X\rangle\subset V$. Beschouw de vectoren $v_1,v_2,v_3\in V$. $v_1=X^3+X^2+X-1$ $v_2=3X^2+2X+1$ $v_3=2X^3-X^2+1$.
    - Geef een basis B voor V/W .
    - Zijn de vectoren $\overline{v_1},\overline{v_2},\overline{v_3}\in V/W$
        - lineair onafhankelijk? Bewijs je antwoord.
        - voortbrengend? Bewijs je antwoord.
        - basisvectoren? Bewijs je antwoord.
2. Beschouw de volgende lineaire afbeeldingen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}z\\x\end{pmatrix}$ $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}3x+y\\x+3y\\2x+2y\end{pmatrix}$
    - Geef de matrix van de afbeelding $g\circ f$ ten opzichte van de kanonieke basissen.
    - Geef een basis voor de kern en geef een basis voor het beeld van de afbeelding $g\circ f$.
    - Is de afbeelding $g\circ f$ injectief, surjectief, bijectief? Bewijs wat je beweert. Geef het voorschrift van de inverse functie als deze bestaat.
    - Geef de eigenwaarden en een basis voor de bijhorende eigenruimten van de afbeelding $g\circ f$.
3. We werken in de vectorruimte $\mathbb{R}[X]_3$. Beschouw het volgende scalair product: we definieren $f,g\in\mathbb{R}[X]_3$ $f\cdot g:=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$.
    - Geef de matrix van deze bilineaire vorm ten opzichte van de basis $1,X,X^2,X^3$
    - Geef met behulp van het Gramm-Schimdt-orthonormalisatieprocédé een orthonormale basis (ten opzichte van dit scalair product) voor de deelruimte voortgebracht door de vectoren $1,X,X^2$.

Academiejaar 2004 - 2005 1ste zit

1. Beschouw de lineaire afbeeldingen $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3:\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}2x+3z\\x+y+z\\2x+z\end{pmatrix}$.
    - Geef de matrixvoorstelling van deze afbeelding.
    - Geef een basis voor de kern en voor het beeld van f.
    - Is deze afbeelding injectief, surjectief, bijectief? Bewijs wat je beweert. Geef het voorschrift van de inverse functie als deze bestaat.
    - Geef de eigenwaarden en een basis voor de bijhorende eigenruimten van de afbeelding f.
2. Beschouw de volgende drie vectoren in $\mathbb{R}^4$. Voor welke waarden van $\alpha\in\mathbb{R}$ zijn deze vectoren lineair afhankelijk? $\begin{pmatrix}2\\\alpha\\1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\2\\\alpha\\-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\-1\\-5\\\alpha\end{pmatrix}$

Academiejaar 2006 - 2007 Voorbeeldexamen

1. Zij $e_1,\cdots,e_n$ een geordende basis voor een K-vectorruimte V en zij $f_1,\cdots,f_m$ een geordende basis voor een K-vectorruimte W. Als A een (m,n) -matrix is dan bestaat er exact één lineaire afbeelding $f:V\to W$ zodat de matrix van f ten opzichte van deze basissen gelijk is aan A. Bewijs dit en formuleer de stelling die je hiervoor gebruikt.
2. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en $f:V\to V$ een lineaire afbeelding. Toon aan $Ker(f)\cap Im(f)=0\Leftrightarrow Ker f+Im f=V$
3. Zij $A\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ en $b\in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Toon aan dat $rg(A\cdot B)\leq rg(A)$.

Oplossingen voorbeeldexamen

1. Zij A=[aij] en stel w1=∑mj1=1aj1fjw2=∑mj2=1aj2fj⋯wn=∑mjn=1ajnfj. Dan bestaat er precies één lineaire afbeelding van V naar W zodat f(ei)=wi∀i=1⋯n. Dus f(ei)=∑mj=1ajifj en dus M(f)=A .
2. Zij f:V→V met dim(V)=n<∞
   dim((Ker(f)+Im(f))=n⇔dim(Ker(f)⋂Im(f))=0⇔Im(f)+Ker(f)=V⇔Ker(f)⋂Im(f)=0
3. rg(A·B)=rg(At·B)=rg(Bt·At)≤rg(At)=rg(A)