Algebraische meetkunde

tuyaux.winak.be/index.php/Algebraische_meetkunde

Algebraische meetkunde

Richting	Wiskunde
Jaar	3BWIS

Januari 2016

Dit vak werd tijdens het academiejaar gegeven aan de VUB.

Theorie

Oefeningen

Stel R een commutatieve ring en k een algebraïsch gesloten lichaam.

1. Volgende vragen staan los van elkaar:
    - Beschrijf alle projectieve algebraïsche delen van $\mathbb{P}^1(k)$.
    - Stel $k \subset R$ waarbij R eindigdimensionaal is over k. Bewijs dat R isomorf is een direct product van lokale ringen.
    - Toon aan dat iedere gladde projectieve kromme *(ieder punt is eenvoudig)* in $\mathbb{P}^2(k)$ irreducibel is. (Hint: gebruik de stelling van Bezout.) Geldt dit ook voor affiene krommen.
2. Beschouw een affiene variëteit $X \subset \mathbb{A}^n(k)$. De coördinatenring $\Gamma(X) = \mathbb{C}[X_1, ..., X_n]/I(X)$ is een eindig voortgebrachte $\mathbb{C}$-algebra en een domein.
    - Toon aan dat iedere eindig voortgebrachte $\mathbb{C}$-algebra dat een domein is, isomorf is met de coördinatenring van een affiene variëteit.
    - Wat zegt die over de contravariante functor $\Gamma : \overline{\mathrm{Var}}_{\mathbb{C}} \to \overline{\mathrm{Alg}}_{\mathbb{C}}$?
    - Stel $P \in X$. Wanneer is $\mathcal{O}_P(X)$ eindig voortgebracht als $\mathbb{C}$-algebra?
3. F is een irreducibele projectieve kegelsnede. Stel $P = (0,1,0)$ een enkelvoudig punt F en $Z = 0$ de raaklijn aan F in P.
    - Bewijs dat $F = aYZ - bX^2 - cXZ - dZ^2$ met $a, b \neq 0$.
    - Vind een projectieve coördinatentransformatie T zodat $F^T = YZ - X^2$.
    - Toon dat er isomorfisme na maar één irreducibele projectieve kegelsnede bestaat.
    - Toon aan dat iedere irreducibele projectieve kegelsnede glad is.
4. Beschouw volgende krommen in $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$
$$F = Y^5 - X(Y^2 - XZ)^2 \qquad G = Y^4 + Y^3Z - X^2Z^2$$
Vind alle snijpunten van deze krommen en bepaal het intersectiegetal $I(P, F \cap G)$ in minstens één snijpunt P (naar keuze). (Hint: Kijk eerst naar de oplossingen voor $Z \neq 0$. Schrijf Y^3 in termen van $(Y^2 - X)$ (uit het voorschrift van G_*) en vervang Y^3 in F_*.)

Test mei 2015

Theorie

1. Geef de definitie van een dominante reguliere afbeelding $\phi: Z \to W$. Toon aan dat ϕ dominant is als en slechts als ϕ^* een injectief ringmorfisme is.
2. Geef de definitie van de raakruimte $T_z(Z)$ in een punt z aan een affiene varieteit Z. Toon aan dat de dimensie van $T_z(Z)$ een upper-semicontinue functie is op Z.
3. Definieer de kegel $C(V)$ over een projectieve varieteit $V \subset \mathbb{P}^n$. Voor welke V is $C(V)$ een gladde varieteit?
4. Definieer de blow-up van 0 in $\mathbb{A}^n$ en toon aan dat deze blow-up irreducibel is.

Oefeningen

1. Bereken de differentiaal in elk punt van $\mathbb{A}^3$ van de volgende functie
$$\mathbb{A}^3 \xrightarrow{f} \mathbb{A}^3, (x_0,x_1,x_2) \mapsto (x_0+x_1+x_2, x_0^2+x_1^2+x_2^2, x_0^3+x_1^3+x_2^3)$$
In welke punten is $df_{(x_0,x_1,x_2)}$ niet surjectief? Schrijf deze verzameling als een Zariski-gesloten deel van $\mathbb{A}^3$ en decomposeer deze verzameling in irreducibele delen.
2. Bepaal of de blow-up van de unieke singulariteit van het oppervlak $V(a^3+b^3+c^3) \subset \mathbb{A}^3$ glad is.
3. Waar of vals? Bewijs of weerleg.
   - Elk morfisme van $\mathbb{C}^k$ naar $(\mathbb{C}^*)^n$ is constant voor alle $n,k \geq 1$.
   - De orthogonale groep $O_n(\mathbb{C})$ is samenhangend.
   - Er bestaat een d-upple inbedding $\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^9$ voor een zekere $d \in \mathbb{N}$.
   - $V(\det(M)) \subset M_3(\mathbb{C}) \cong \mathbb{A}^9$ heeft een unieke singulariteit.

Test maart 2015

Theorie

1. Formuleer het Noether Normalisatie lemma. Wat zegt dit over de oplossingen van een polynomiaal stelsel $V(I) \subset \mathbb{C}^n$? Kan je het lemma verfijnen in het specifieke geval dat I voortgebracht is door lineaire polynomen?
2. Formuleer de zwakke versie van de Nullstellensatz. Wat zegt dit over de maximale idealen van $\mathbb{C}[x_1,\ldots,x_n]$? Hoe kan je de stelling uitbreiden tot maximale idealen van $k[x_1,\ldots,x_n]$ met k niet noodzakelijk een algebraisch gesloten lichaam? Wat is de meetkundige interpretatie van deze uitbreiding?
3. Welke dimensie kan een irreducibele component van een algebraische deelverzameling in $\mathbb{C}^3$ hebben? Wat stellen deze componenten voor, afhankelijk van de dimensie? Welke componenten kan je schrijven als $Z \times W$ met Z een algebraische deelverzameling in $\mathbb{C}^2$ en W een algebraische deelverzameling in $\mathbb{C}^1$.

Oefeningen

1. Toon aan: de curven $\mathbb{A}^1$ en $V(y^2-x^2(x-1)) \subset \mathbb{A}^2$ zijn niet isomorf met elkaar door naar het element $\frac{y}{x}$ in het breukenlichaam van $\mathbb{C}[x,y]/(y^2-x^2(x-1))$ te kijken.

2. Toon aan: de verzameling matrices A∈M2(C)A∈M2(C) waarvoor geldt dat A2=0A2=0 is dezelfde als het Zariski-gesloten deel V(det(A),tr(A))⊂M2(C)V(det(A),tr(A))⊂M2(C). (Hint: Eigenwaarden)
3. Waar of niet waar? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
    - De ring C[x,y]/(y2−f(x))C[x,y]/(y2−f(x)) bevat niet-triviale idempotenten, waarbij f(x)f(x) een niet-constant polynoom is in C[x]C[x] dat geen kwadraat is.
    - De coördinaatring van een lineaire algebraïsche groep GG die niet irreducibel is, hoeft geen niet-triviale idempotenten te bevatten.
    - Er bestaat maar 1 soort niet-ontaarde affiene kegelsnede over CC.

Test maart 2014

Theorie

1. Formuleer de dualiteitsstelling en gebruik zo om te bewijzen dat:

    Een meetkundige formulering van de noethernormalisatiestelling zegt dat iedere irreductibele affiene variëteit XX een surjectieve afbeelding π:X←AnCπ:X←ACn naar een affiene ruimte heeft. Toon eveneens dat er eindig veel punten van XX boven elk punt p∈AnCp∈ACnliggen.
2. Bewijs:
    - Elk polynoom f∈C[x1,...,xn]f∈C[x1,...,xn] een morfisme ϕ:AnC←A1Cϕ:ACn←AC1 bepaalt.
    - ϕϕ is continu ten opzichte van de *Zariskitopologie* op AnCACn en A1CAC1.
3. Gegeven is de curve C=V(y2−x3)C=V(y2−x3) in A2CAC2 en het punt p=(0,0)∈Cp=(0,0)∈C
    - Bereken de dimensie van de vectorruimte mp/m2pmp/mp2 waarbij mpmp het maximaal ideaal is van C[C]=C[X,Y]/(y2−x3)C[C]=C[X,Y]/(y2−x3) bepaald door pp.
    - Doe hetzelfde voor C′=V(y2−x3−x)C′=V(y2−x3−x).
    - Formuleer de *Zariskiraakruimtestelling* en verklaar de gevonden dimensies.

Oefeningen

1. Waar of vals:
    - GL2(C)⊂Mat2(C)GL2(C)⊂Mat2(C) vormt een affiene variëteit.
    - Stel II een radicaal in C[x1,...,xn]C[x1,...,xn]. Dan hebben alle irreductibele componenten van V(I)V(I) dezelfde dimensie.
    - De algebraïsche verzameling VC2(x2+y2)VC2(x2+y2) is irreductibel.
    - De algebraïsche verzameling VC2(x2+y2,x2+9y2)VC2(x2+y2,x2+9y2) is irreductibel.
2. We werken in CC. Bepaal de singulariteiten. Link vervolgens de variëteit aan het overeenkomstige prentje en beargumenteer. (afbeeldingen in aankomst)
    - VC2(x4+x2y+y3)VC2(x4+x2y+y3)
    - VC2(x4+y4+y2−x3)VC2(x4+y4+y2−x3)
    - VC3(x2+y2z)VC3(x2+y2z)

Test maart 2013

Theorie

1. Formuleer de volgende stellingen en geef telkens een meetkundige interpretatie:
    - De zwakke Hilbert Nullstellensatz
    - Noethers normalizatie stelling

2. Bekijk de polynomiale afbeelding A2→A3A2→A3 gegeven door (x,y)→(x2,xy,y2)(x,y)→(x2,xy,y2).
    - Beschrijf het beeld van deze afbeelding.
    - Wat is het bijhorende ringmorfisme dat je krijgt ui dualiteit?
    - Is dit een isomorfisme van affiene varieteiten?
3. Zij VV een irreduciebele algebraische deelverzameling van AnAn en P∈VP∈V.
    - Geef de definitie van de raakruimte TP(V)TP(V)
    - Formuleer de Zariski raakruimte-stelling en geef de grote stappen in het bewijs.

Oefeningen

1. In de oefeningen toonde we aan dat voor een ideaal II en een Groebner basis GG van II, voor elke f∈If∈I geldt dat f‾G=0f¯G=0. Bewijs of weerleg nu het omgekeerde: Als GG een basis is voor II met de extra eigenschap dat voor elke f inIfinI geldt dat f‾G=0f¯G=0, dan is GG een Groebner basis van II.
2. Bewijs of weerleg het volgende. Veronderstel dat *f*, *g* en *h* drie veeltermen zijn in k[x1,…,xn]k[x1,…,xn] met S(f,g)≠0,S(f,h)≠0,S(g,h)≠0S(f,g)≠0,S(f,h)≠0,S(g,h)≠0. Dan is < f,g,h > = < S(f,g),S(f,h),S(g,h) >.
3. Wat is het verband tussen Gaussische eliminatie en werken met Groebnerbasissen?

Test mei 2013

Theorie

1. Definieer volgende begrippen:
    - dominante afbeelding tussen irreduciebele varieteiten
    - schoof van ringen
2. Beschrijf het verband (en het verschil) tussen de Zariski topologie van C[x]C[x] als affiene varieteit enerzijds en als affien schema anderzijds.
3. Teken het gesloten deelschema V(x2−1)V(x2−1) in Spec(Z[x])Spec(Z[x]) en toon aan dat het complement een affien schema is dat isomorf is met een gesloten deelschema van Spec(Z[x,y,z])Spec(Z[x,y,z]).

Oefeningen

1. Beschouw de *d*-uple embedding ϕϕ van P1P1 in PdPd. Toon aan dat X=ϕ(P1)X=ϕ(P1) een projectieve algebraische verzameling is, die isomorf is met P1P1.
2. Gegeven zijn V=V(x2−y)⊂A2V=V(x2−y)⊂A2 en W=V(x3−2x2+3xy−y2)⊂A2W=V(x3−2x2+3xy−y2)⊂A2. Toon aan dat φ:V→W:(x,y)↦(y−x,xy−x)φ:V→W:(x,y)↦(y−x,xy−x) geen isomorfisme is tussen affiene varieteiten. Laat in beide verzamelingen punten weg zodat je opnieuw affiene varieteiten krijgt, die nu wel isomorf zijn. Beschrijf dit isomorfisme expliciet. (Hint: waarmee is V isomorf?)
3. Bepaal de dimensie van V(x3+y2+wz,x2+yz,xyz−y2−t2z−yz,t2−w+y)⊂A5V(x3+y2+wz,x2+yz,xyz−y2−t2z−yz,t2−w+y)⊂A5. Hiervoor werd extra informatie gegeven bekomen via het programma Maple:

```
> GB:=Basis({x^3+y^2+w*z,x^2+y*z,x*y*z-y^2-t^2*z-y*z,t^2-w+y},
  plex(x,y,z,t,w)); #LEX
```

$$GB := [-w^4 - 2w^3 z - w^2 z^2 + 4w^3 t^2 + 4t^2 w^2 z - 6w^2 t^4 - w^3 z^3 - 2wzt^4 + 4t^6 w + 3t^2 z^3 w^2 - t^8 - 3t^4 z^3 w + t^6 z^3, t^2 - w + y, -w^2 z - w^3 + t^6 x - t^4 w + 2t^2 w^2 - 3t^4 xw + 3t^2 w^2 x - 3t^4 z^2 w + 3t^2 w^2 z^2 - w^3 x - w^3 z^2 + t^6 z^2, xzw - 2t^2 xw + w^2 x + z^2 t^4 - 2z^2 t^2 w + w^2 z^2 + t^4 x, wz + w^2 - 2t^2 xw + w^2 x + z^2 t^4 - 2z^2 t^2 w + w^2 z^2 + t^4 x + t^2 xz + t^4 - 2t^2 w, wz - t^2 z + x^2]$$

```
> GB:=Basis({x^3+y^2+w*z,x^2+y*z,x*y*z-y^2-t^2*z-y*z,t^2-w+y},
  tdeg(x,y,z,t,w)); #GLEX
```

$$GB := [t^2 - w + y, x^2 + yz, xyz - y^2 - wz, y^2 z^2 + xy^2 + xzw]$$

Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS