Wiskundige methoden voor de fysica III

tuyaux.winak.be/index.php/Wiskundige_methoden_voor_de_fysica_III

Wiskundige methoden voor de fysica I	
Richting	Fysica
Jaar	1BFYS

Bespreking

Dit vak is nieuw sinds het academiejaar 2013-2014. De theorie wordt gegeven door professor Eelbode en de oefeningensessies door de assistenten. Het voordeel dat er meerdere assistenten zijn is dat je tijdens de les gemakkelijker vragen kan stellen wanneer je iets niet begrijpt of als je vast zit bij de vorige oefening. Tijdens de theorie wordt er vooral verder gebouwd op wat er tijdens Wiskunde I & II gezien is. Zo komt het hoofdstuk differentiaalvergelijkingen bijvoorbeeld terug en wordt er verder gegaan op Wiskunde I. Bij de oefeningensessies worden er vooral fysische problemen behandeld zodat de theorie minder abstract wordt toegepast.

Examen en puntenverdeling

Het examen is openboek maar mispak je hieraan niet. Doordat het openboek is kunnen de vragen meer diepgang hebben en meer uitleg vereisen. Daarnaast is het slechts één examen dus zowel theorie als oefeningen op dezelfde dag. De theorie weegt minder door maar is zeker niet minder belangrijk. Tijdens het jaar zal er (mogelijk) een proefexamen zijn dat je thuis mag maken en waarbij je moet bijhouden hoelang je erover gedaan hebt. Dit proefexamen zal geen invloed hebben op je examencijfer maar kan wel bepalend zijn in het verbeteren. Dit wil zeggen dat als je bijvoorbeeld net gebuisd zou zijn met 9,5 dat het kan dat je met een goed proefexamen toch een 10 krijgt.

Examenvragen

Academiejaar 2020-2021 1ste zit

Professor David Eelbode

Theorie & Oefeningen

Examen Wiskundige methoden 3 (woensdag 14 juni 2023)

"Nobody ever figures out what life is all about, and it doesn't matter. Explore the world. Nearly everything is really interesting if you go into it deeply enough."
(Feynman)

Vraag 1 (6 punten)

(i) Gegeven is de volgende differentiaalvergelijking van tweede orde:

$$\boxed{y'' + xy' + x^2 y = 0}$$

(a) Stel de recursiebetrekking op waaraan de coëfficiënten c_n moeten voldoen als je een oplossing zou zoeken waarbij je rond de oorsprong $x = 0$ gaat ontwikkelen. Schrik niet als je een verband vindt waarbij 'de twee vorige dominosteentjes nodig zijn' voor het volgende steentje. $\boxed{1,5}$

(b) Je hoeft die betrekking *niet* in volle algemeenheid op te lossen, maar gebruik ze om een oplossing $y(x)$ op te stellen van de vorm

$$y(x) = P_5(x) + \mathcal{O}(x^6)\ ,$$

die correct is tot en met vijfde orde. Deze oplossing moet voldoen aan $y(0) = y'(0) = 1$. $\boxed{1,5}$

(ii) Vervolgens bekijken we ook even de differentiaalvergelijking

$$\boxed{y''(x)\sin^2(x) - \frac{x-\pi}{2}y'(x) + y(x)\cos(x) = 0}$$

(a) Van welk type is het punt $x = \pi$ voor deze vergelijking? $\boxed{1,5}$

(b) Zal de (meest algemene) oplossing voor deze vergelijking bij ontwikkeling rond dat punt $x = \pi$ een reëel analytische functie zijn? Geef goed aan waarom wel, of waarom net niet. $\boxed{1,5}$

Vraag 2 (5 punten)

(i) Stel dat het pad van een weerballon wordt beschreven door de kromme $\vec{x}(t) = (t, 2t, t - t^2)$, en dat de temperatuur $T(t)$ die wordt gemeten kan beschreven worden door de formule

$$T(t) = \frac{xy(1+t)}{1+z}\ .$$

Gebruik dan een gepaste rekenregel uit de multivariate calculus om de verandering $T'(t) = \frac{dT}{dt}$ te bepalen op het tijdstip $t = 1$. Voor alle duidelijkheid: dit is de *totale* afgeleide naar t, niet de *partiële* afgeleide naar t (die je weliswaar ook zal nodig hebben om deze vraag op te lossen). Als we de temperatuur meten in graden Celsius, en op $t = 1$ is het een aangename[1] 25 graden, hoe warm is het dan ongeveer op tijdstip $t = 1,5$? $\boxed{1}$

(ii) Gebruik Lagrange-multiplicatoren om de extrema te bepalen van de functie $f(x, y, z) = x + y^2 z$ op de doorsnede van $x - z = 0$ en $y^2 + z^2 = 2$. Geef daarbij ook duidelijk aan *waarom* we zeker weten dat er inderdaad een maximum en minimum bestaat. $\boxed{4}$

Vraag 3 (6 punten)

(i) Bepaal de component F_z van het vectorveld $\vec{F} = (x^2 z^2, z\cos(y), F_z)$ zodanig dat er voor alle *gesloten* oppervlakken $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ zal gelden dat

$$\iint_\Sigma \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = 0\ .$$

Leg ook voldoende uit wat je redenering daarbij is. $\boxed{2}$

[1] Misschien niet voor de blokkende student, maar weet goed dat je ijsjes officieel op jouw dieet mag zetten nu.

(ii) Bepaal het massamiddelpunt van een solide object L dat gedefinieerd wordt als de verzameling punten

$$L = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x^2+y^2+z^2 \leq a^2\} ,$$

als je weet dat de massadichtheid $\rho(\vec{x})$ evenredig is met de k-de macht van de afstand tot de oorspong (met daarbij $k > 0$ een reële parameter). Als je hier een argument kan geven om je rekenwerk minimaal te houden, dan is dat zeker toegelaten (maar geef dan goed aan waarom). De formules voor massa en massamiddelpunt staan in de cursus. $\boxed{2}$

(iii) Bepaal het oppervlakte-element $d\sigma$ dat je zou nodig hebben als je de oppervlakte-integraal van een (scalaire) functie $f(x,y,z)$ wil bepalen over het oppervlak Σ dat wordt gedefinieerd als

$$\Sigma = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x \in [0,a], y \in [0,b], x^3 + y^3 = z\} .$$

Gebruik daarvoor Cartesische coördinaten. $\boxed{2}$

Vraag 4 (3 punten)

(i) Verklaar waarom de functie hieronder niet continu is in het punt $p(1,1) \in \mathbb{R}^2$: $\boxed{1,5}$

$$f(x,y) = \frac{(x-y)(x+y-2)}{x^2+y^2-2(x+y)+2} .$$

(ii) Bepaal de volgende lijnintegraal (van een complexe functie), waarbij je de techniek die je gebruikt niet hoeft te verantwoorden (i.e. geef aan *welke* formule je gebruikt, maar je hoeft de voorwaarden niet te controleren): $\boxed{1,5}$

$$\oint_\Gamma \frac{\cos(iz)}{z^3+z} dz ,$$

waarbij Γ de cirkel voorstelt met als middelpunt het punt i en als straal $R = \frac{3}{2}$.

De opsteller van het examen dacht bij zichzelf: "waarom zoveel moeite doen om vragen te verzinnen als het het ook gewoon aan chatGPT kan vragen?" Dus ging de opsteller even ten rade bij het Grote Orakel, maar zoals je hieronder kan zien leverde dat niet echt een gepast resultaat op...

Can you give me a good exam question about Stokes' theorem?

What does Stokes' theorem state and how is it related to the curl of a vector field? Use an example to explain how to apply Stokes' theorem to evaluate the circulation of a vector field around a closed curve in a plane.

Not bad, but I would like to have an exercise.

Sure thing! Here's an exercise for you:

1. Stand with your feet hip-width apart and your arms by your side.
2. Inhale deeply through your nose, filling your lungs with air.
3. As you exhale, slowly raise your arms above your head, reaching towards the sky and stretching your body.
4. Hold this stretch for a few seconds, feeling the expansion in your chest and the lengthening in your spine.
5. Slowly lower your arms back to your sides as you inhale.
6. Repeat this stretch 6-10 times, focusing on your breath and the movement of your body.

This exercise can help to open up your chest, improve your posture, and increase your overall sense of relaxation and well-being. Enjoy!

Academiejaar 2020-2021 1ste zit

Professor David Eelbode

Theorie & Oefeningen

Examen Wiskundige methoden 3 (dinsdag 8 juni 2021)

"The Answer to the Great Question... of Life, the Universe and Everything... Is..."
"Forty-two," said Deep Thought, with infinite majesty and calm."
(Douglas Adams)

Vraag 1 (5 punten)

(i) Gegeven de volgende differentiaalvergelijking: $\boxed{3}$

$$3\ln(x+2)y'' + (x^2+1)y' + xe^x y = 0\ .$$

- Toon om te beginnen aan dat deze vergelijking *een uniek regulier singulier punt* heeft.
- *Onderzoek* vervolgens op basis van de indiciële vergelijking het *gedrag van de oplossing* $y(x)$ rond dit punt. Je hoeft daarbij geen recursiebetrekking te bepalen, je mag de coëfficiënten in de reeks(en) gewoon laten staan als onbekenden (c_n en d_n).
- *Geef aan* of de uiteindelijke oplossing in de buurt van het singuliere punt analytisch is, of waar het fout gaat indien dat niet zo is.
- Verandert het gedrag van de oplossing drastisch als die factor 3 helemaal aan het begin van de vergelijking er niet zou staan?

(ii) Stel dat we een differentiaalvergelijking oplossen rond een regulier punt $x = 0$, en dat we de volgende relatie vinden tussen de coëfficiënten van de gezochte reeks:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^2 a_n x^n = 0\ .$$

Leid uit bovenstaande uitdrukking de recursiebetrekking af voor de getallen a_n (om op de volgende vragen te antwoorden moet je deze niet per se oplossen in gesloten gedaante). Verklaar dan waarom we de oplossing $y(x)$ zullen kunnen splitsen in een even en een oneven deel $y_\pm(x)$, en bepaal tenslotte het (open) domein waarop de totale oplossing $y(x) = \alpha y_+(x) + \beta y_-(x)$ zal convergeren (het gedrag in de eventuele randpunten hoef je dus niet te analyseren). $\boxed{2}$

Vraag 2 (5 punten)

(i) Gegeven de functie $f(x,y) := 3x^2 + 4xy + 6y^2$, welke in matrixtaal kan geschreven worden als

$$f(x,y) = (x\ y)\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\ .$$

Gebruik de methode van Lagrange om aan te tonen dat de extremale waarden van deze functie op de eenheidscirkel in het vlak worden gevonden door de eigenvectoren te beschouwen van de vierkante matrix die hierboven staat. $\boxed{2}$

(ii) Stel dat je 3 positieve reële getallen (x, y, z) moet zoeken (nul inbegrepen) waarvan de som gelijk is aan 42, en het product xyz maximaal. Verklaar dan, door expliciet de voorwaarden van een gepaste stelling na te gaan, waarom je *zeker* een maximum zal vinden (voor de twijfelaars: het is hier absoluut niet de bedoeling om die getallen te zoeken). Wat verandert er als we die eis weglaten dat de getallen positief moeten zijn? $\boxed{1,5}$

(iii) Toon aan dat de functie hieronder een uniek zadelpunt heeft: $\boxed{1,5}$

$$\varphi(x,y) := \frac{1}{3}x^3 + y^2 + 2xy - 6x - 3y + 4\ .$$

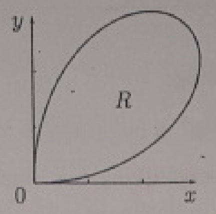
Vraag 3 (6 punten)

(i) Stel dat we $\mathrm{Int}(\Gamma) \in \mathbb{R}$ definiëren als de uitkomst van de lijnintegraal

$$\mathrm{Int}(\Gamma) := \oint_\Gamma \left(y^3 dx + (3x - x^3 + 42) dy \right) ,$$

met daarbij $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ een vlakke kromme. Bepaal dan de kromme Γ waarvoor dit getal $\mathrm{Int}(\Gamma)$ maximaal zal zijn. Beschrijf de kromme, en schets ze met een duidelijke tekening. $\boxed{1,5}$

(ii) Bereken de oppervlakte van het gebied R in onderstaande figuur (de binnenzijde van een blad van de zogenaamde *rhodonea-curve*). Deze curve wordt beschreven in poolcoördinaten door $r(\theta) = a \sin(2\theta)$, met $a \in \mathbb{R}^+$, waarbij je hier nog zelf het domein in θ moet bepalen. $\boxed{1,5}$



(iii) Stel dat we $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ definiëren als een halve sfeer met straal R die in de oorsprong op het (X,Y)-vlak ligt (zeg maar een zeer wankele fruitschaal). Geef dan de parametervoorstelling voor Σ in functie van sferische coördinaten (vergeet ook niet om de grenzen van je relevante parameters te vermelden). $\boxed{1,5}$

(iv) Als Σ het oppervlak voorstelt met vergelijking $z = x^2 + y^2$, waarbij $0 \leq z \leq 4$, en er is gegeven dat

$$\iint_\Sigma \langle \vec{\nabla} \times \vec{F}, d\vec{\sigma} \rangle = 42 ,$$

waarbij de normaalvector zodanig geöriënteerd is dat die bijvoorbeeld in de oorsprong wijst volgens de positieve Z-as, waaraan is dan de integraal

$$I_r := \int_{-2}^{+2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{+\sqrt{4-x^2}} \langle (\vec{\nabla} \times \vec{F})(x, y, 4), \vec{e}_z \rangle dx dy$$

gelijk? De notatie in het integrandum hierboven geeft aan dat men in het vectorveld $\vec{\nabla} \times \vec{F}$ de waarde $z = 4$ heeft ingevuld. $\boxed{1,5}$

Vraag 4 (3 punten)

(i) Toon aan dat onderstaande limiet niet bestaat: $\boxed{1,5}$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y^2}{x^2 y^2 + (x - y)^2} .$$

(ii) Tom Waezig staat op het oppervlak beschreven door de functie $z = f(x,y) = 1 + x^3 - xy^2$ in het punt met coördinaten $(x,y) = (1,1)$. Hij voelt zich — nomen est omen — echter niet zo lekker en wil zo snel mogelijk naar beneden. In welke *richting en zin* moet hij dan bewegen? $\boxed{1,5}$

(iii) Gebruik een gepaste stelling om de waarde van de complexe contourintegraal $\boxed{1}$

$$J_z := \oint_\Gamma \frac{e^{iz}}{z^2 + 4} dz$$

te bepalen, waarbij Γ de cirkel voorstelt met straal 2 en middelpunt $i \in \mathbb{C}$. Je mag hier zonder expliciete controle steunen op het feit dat de functie $z \mapsto e^{iz}$ analytisch is (intuïtief is het uiteraard ook duidelijk).

Academiejaar 2018-2019 1ste zit

Professor David Eelbode

Theorie & Oefeningen

Vraag 1 (6 punten):

Verschillende belangrijke differentiaalvergelijkingen uit de theoretische fysica kunnen herleid worden tot die voor de hypergeometrische functies, een speciale functie die zich voor specifieke parameters (en/of substitutie van variabelen) kan herleiden tot o.a. die van Bessel of Legendre. Deze vergelijking ziet er als volgt uit:

$x(1-x)y''+(\gamma-(1+\alpha+\beta)x)y'-\alpha\beta y=0$

$$x(1-x)y''+(\gamma-(1+\alpha+\beta)x)y'-\alpha\beta y=0$$

Met α, β en $\gamma \in \mathbb{R}$ willekeurige parameters.

1.
    1. Toon aan dat deze vergelijking 2 regulier singuliere punten heeft. (/2)
    2. Verklaar waarom de oplossing voor de hypergeometrische vergelijkingen in de gevallen $1-\gamma=k\in\mathbb{Z}$ rond $x=0$ fundamenteel verschillend is van de gevallen waarin dit niet zo is. (/1)
    3. Stel dat $\gamma=1/2$, bepaal dan de oplossing voor bovenstaande vergelijking die niet analytisch is zond $x=0$ (de andere oplossing, die dan wel analytisch is, hoef je niet te bepalen). De reeks die je nodig hebt om de oplossing te noteren mag je afbreken na de cubische term (dus vanaf x^4 hoef je geen coëfficiënten te bepalen) en je mag je beperken tot $x>0$). Merk ook op dat je de teller in je recursierelatie makkelijk kan ontbinden in een product van 2 factoren (het geeft iets van de vorm $(A+\alpha)(B+\beta)$, met A en B uitdrukkingen waarin n uiteraard zal voorkomen). (/3)

Vraag 2 (4 punten):

1. Gegeven het lichaam $B=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\leq R^2\}$. Verklaar waarom de volgende integraal gelijk is aan 0. (/1)
   $I:=\iiint_B (\sin(x)+\tan(y)+e^{z^2}\arctan(y))\,dV$
   $$I:=\iiint_B (\sin(x)+\tan(y)+e^{z^2}\arctan(y))\,dV$$

2. Gegeven een voorwerp in $\mathbb{R}^3$ beschreven als de verzameling $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=0, z\in[0,a]\}$, als je weet dat de massadichtheid van dit voorwerp (met dus een verwaarloosbare dikte) wordt gegeven door de functie $\rho(x,y,z)=y+x^2+z^3$, bepaal dan de massa van dat voorwerp Σ (hint, $1+\cos(2\theta)=2\cos^2(\theta)$). (/3)

Vraag 3 (6 punten):

1. Toon aan dat de functie
   $z=x+iy\in C\to \sin(z):=eiz-e-iz2i$

   $$z=x+iy\in C\to \sin(z):=eiz-e-iz2i$$

   een holomorfe functie is, en geef dan ook de waarde van de complexe integraal
   $\oint\Gamma \sin(z)z-1dz$

   $$\oint\Gamma \sin(z)z-1dz$$

   Waarbij $\Gamma=C(O,3)\Gamma=C(O,3)$ de cirkel voorstelt met middelpunt z=0 en R=3. (/2)
2. Waar/Vals: stel dat we een functie f(x,y) invoeren als
   $f:R2\backslash\{(0,0)\}\to R:(x,y)\mapsto 2xyx2+y2$

   $$f:R2\backslash\{(0,0)\}\to R:(x,y)\mapsto 2xyx2+y2$$

   dan is die functie uitbreidbaar tot het ganse vlak R2R2 (met andere woorden: in de oorsprong bestaat de limiet, zodat we de functie daar kunnen herdefiniëren). (/2)
3. Stel dat je een (homogene) differentiaalvergelijking van tweede orde met de methode van Frobenius probeert op te lossen, waarbij je gaat ontwikkelen rond het reguliere punt a=1. Op een bepaald moment bekom je daarbij de recursiebetrekking
   $cn+1nkarctan(n)=cn(n+1)(n+2)(n+3)$

   $$cn+1nkarctan(n)=cn(n+1)(n+2)(n+3)$$

   . Leg dan uit hoe het convergentiegedrag van de oplossing $\Sigma ncn(x-1)n\Sigma ncn(x-1)n$ eruit ziet in functie van de parameter $k\in Rk\in R$. (/2)

   Vraag 4 (4 punten):

NASA wil voor een expeditie een raket naar de zon lanceren. Stel dat we als oorsprong van ons coördinaatstelsel de zon nemen. Het slaagpercentage van een raket gelanceerd vanuit een punt (x,y,z) wordt dan gegeven door $100e-(x2+y2+z2)100e-(x2+y2+z2)$. Jammer genoeg kunnen we enkel raketten lanceren van de aarde wiens baan wordt gegeven door de volgende 2 constraints:

⌈l{x2+y2x+y+z==20

$$\{x2+y2=2x+y+z=0$$

. Wat is de maximale kans op slagen voor deze expeditie (Hessianen en andere monsters moet je niet verwerken in je antwoord)? Zou jij als nieuwe directeur van NASA deze missie goedkeuren? (/4)

Academiejaar 2017-2018 1^e zit

Professor David Eelbode

1. Bepaal het volume van een cilinder met hoogte HH en straal RR door de divergentiestelling toe te passen op een geschikt vectorveld.

2. Zoals iedereen ongetwijfeld wel weet, heeft de berg Steamspur een vorm die het best benaderd kan worden door het oppervlak $P \leftrightarrow x^2+y^2+z=20$ in $\mathbb{R}^3$. Wat veel minder geweten is, is dat deze berg bevolkt wordt door capibana's (het resultaat van een onder de radar gebleven gentechnologisch experiment uit de vorige eeuw: de capibana is namelijk een kruising tussen een waterzwijn en een banaan, dus met gele vacht en vier kromme poten).
    1. Als er gegeven wordt dat de maximumpopulatie $PM(\Sigma)$ van de capibana's die op een deeloppervlak Σ van de berg P kan leven wordt gegeven door de uitdrukking

       $$PM(\Sigma)=\iint_\Sigma \frac{1}{\sqrt{81-4z}}\,d\sigma,$$

       wat is dan de maximumpopulatie van capibana's die boven een hoogte H leven? Maak hier eerst een schets van het probleem voor je aan je berekeningen begint, waaarbij je mag uitgaan van het feit dat de berg Steamspur netjes eindigt in het (X,Y)-vlak. Je antwoord zal een functie $f(H)$ opleveren (die wordt uitgedrukt in veelvouden van honderd, dus $f(H)=2$ betekent in werkelijkheid tweehonderd exemplaren. Dit is gewoon informatie om de aantallen logisch te maken; je hoeft hier dus geen rekening mee te houden bij je berekeingen). Schets ook de grafiek van deze (eenvoudige) functie.

2. De overlevingskansen van een capibana die leeft op een hoogte HH op Steamspur wordt beschreven door de functie S(x,y,z)S(x,y,z), met 'SS' voor 'survival'. Hoewel de berg zelf netjes axiaal symmetrisch is (in xx en yy), is deze functie dat niet: capibana's gedijen namelijk niet goed in het volle zonlicht (dat is de invloed van de bananen op hun genetische code: dan krijgen ze bruine vlekken op hun vacht, waardoor ze minder aantrekkelijk worden in de groep en zich niet goed kunnen voortplanten) en functioneren dus het best als ze een optimale hoeveelheid zonlicht absorberen. Als we de XX-as richten naar het noorden, dan werd er vastgesteld dat
   S(x,y,z)=α(2x2+y2+z),

   $$S(x,y,z)=\alpha(2x^2+y^2+z),$$

   met α>0α>0 een gepaste normeringsconstante die ervoor zorgt dat het resultaat tot [0,1][0,1] behoort (daar het een kans is). In deze oefening mag je echter voor het gemak α=1α=1 kiezen; dat maakt het rekenwerk wat eenvoudiger. Als we nu kijken naar capibana's op Steamspur die tegelijkertijd ook in het vlak met vergelijking V↔x+y+z=8V↔x+y+z=8 leven, wat is dan hun (globaal) maximale en minimale overlevingskans? Verklaar ook waarom je (zonder extra rekenwerk) zeker kan zijn van het feit dat dit inderdaad de gezochte extrema zijn, door een gepaste stelling toe te passen! **Opmerking:** het is hier de bedoeling dat je de methode van Lagrange gaat toepassen! Het is misschien ook nuttig om te weten dat 50−−√=52–√≈750=52≈7 (je mag 50−−√50 in je oplossing laten staan, maar gebruik dit getal eventueel om de waarden voor xx, yy en zz bij benadering neer te schrijven wanneer je de waarde SS in de extrema gaat bepalen).
3. Stel nu dat je weet dat de populatie P(t)P(t) van capibana's (in veelvouden van honderd exemplaren) gelijk is aan P(t)=2+y(t)P(t)=2+y(t), waarbij de functie y(t)y(t) beschreven wordt door de vergelijking
   t2y″(t)+3ty′(t)+(1+t)y(t)=0

   $$t^2y''(t)+3ty'(t)+(1+t)y(t)=0$$

   met y(0)=4y(0)=4. We willen dan de populatie als reeks bepalen, ontwikkeld rond het begintijdstip t=0t=0. Ga eerst expliciet na dat dit een regulier singulier punt is en los daarna de vergelijking op. Als de wortels van de indiciële vergelijking voldoen aan de relatie |r1−r2|∈{0,1,2,3,…}|r1−r2|∈{0,1,2,3,…}, dan hoef je slechts voor één enkele rr-waarde de vergelijking op te lossen (de andere moest je niet kennen).

4. In deel 3 heb je de populatie $P(t)=2+y(t)$ bepaald en in deel 1 heb je berekend wat het maximale aantal exemplaren is dat boven een hoogte H kan leven. Op welk tijdstip t zal het deel van de berg van de top tot een hoogte H maximaal bevolkt zijn? Deze vergelijking is niet op te lossen, omdat $P(t)$ als reeks bepaald hebt. Vandaar dat je mag werken met een tweede-orde benadering voor $P(t)$. **Opmerking:** wie vraag 3 niet kon oplossen mag hier vertrekken van een algemene gedaante $P(t)=a_0+a_1t+a_2t^2$, en zo de vraag nog voor de helft van de punten beantwoorden. Idem voor wie vraag 1 niet kon oplossen; die mag gewoon $f(H)$ laten staan.

3. Is de volgende stelling waar of vals?
   1. Stel dat we Ω definiëren als het gebied $\Omega=\{z=x+iy:x>0\}$, dan is de functie
   $$f(z):=\ln(\sqrt{x^2+y^2})+i\arctan\frac{y}{x}$$
   een analytische functie in Ω.
   2. Stel dat we een functie $f(x,y)$ invoeren als
   $$f:\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):x^2=y^2\}\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto\frac{e^{x-y}-1}{x^2-y^2},$$
   dan is die functie continu uitbreidbaar in de punten (a,a) waarvoor $a\neq0$ (anders gezegd: de limiet in het punt (a,a) bestaat voor $a\neq0$).
   3. De differentiaalvergelijking
   $$(2-\cos(t^2+\pi))t\sigma''(t)+\frac{\sigma'(t)}{t^2-1}+e^t\sigma(t)=0$$
   heeft (ondermeer) een oplossing $\sigma(t)$ van de vorm $\sigma(t)=t^{\frac{\sqrt{3}}{4}}\phi(t)$ met daarbij $\phi(t)$ een analytische functie onwikkeld rond $t=0$.
4. Je hebt een voldoende afleidbare functie $f(x,y)$ op $\mathbb{R}^2$ en een kritiek punt (a,b) waarvoor geldt dat de waarde van de determinant $H[f](a,b)>0$. Is het dan altijd zo dat de functie $f_b:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto f(x,b)$ een concave functie is?

Academiejaar 2014-2015 2^e zit

Professor David Eelbode

1.
    1. Verklaar waarom de limiet niet bestaat
       limxy→xy−y2x2+y2

       limxy→xy−y2x2+y2

    2. Verklaar waarom de DV y"(x)+exsin(x)y′(x)+x2lim(x+1)y(x)=(2x−1)y"(x)+exsin(x)y′(x)+x2lim(x+1)y(x)=(2x−1) een unieke oplossing heeft op]0,1[]0,1[die voldoet aan de voorwaarden y(c)=1y(c)=1 y′(c)=0y′(c)=0 (c∈]0,1[)(c∈]0,1[)
    3. *Gradiënt tekenen op een bijgevoegde 'level curves' afbeelding*
2. DV
   y″(x)+xy′(x)+y(x)=0

   y″(x)+xy′(x)+y(x)=0

   : los op.
3. Extrema zoeken
   f(x,y,z)=x+yz

   f(x,y,z)=x+yz

   met voorwaarden x2+y2+z2=1x2+y2+z2=1 en x2+y2−z2=0x2+y2−z2=0
4. F⃗ (x,y,z)=(xx2+y2√,yx2+y2√,zx2+y2√)F→(x,y,z)=(xx2+y2,yx2+y2,zx2+y2), De flux wordt gegeven door ∫Σ<F⃗ ,dσ⃗ >∫Σ<F→,dσ→> Bereken deze op de ouderwetse manier. ΣΣ is een cilinder met 0<=r<=a0<=r<=a en 0<=z<=h0<=z<=h

Academiejaar 2014-2015 1^{ste} zit

Professor David Eelbode

1.
    1. Verklaar de bewering: *De flux van de rotor ∇×F⃗ ∇×F→ van een glad vector veld F⃗ F→ door een gesloten C2C2 oppervlak is altijd nul.*
    2. Waar of Vals?
        1. Gegeven een gladde functie f(x,y) in twee veranderlijken met de eigenschap dat de functies f1:R→R:x→f1(x):=f(x,0)f1:R→R:x→f1(x):=f(x,0) en f2:R→R:y→f2(y):=f(0,y)f2:R→R:y→f2(y):=f(0,y) een (lokaal) minimum bereiken in de oorsprong, dan bereikt de functie f(x,y) een (lokaal) minimum in (x,y) = (0,0).
        2. De functie f(x,y):={x3−y2x3+y2als(x,y)≠(0,0)0als(x,y)=(0,0)f(x,y):={x3−y2x3+y2als(x,y)≠(0,0)0als(x,y)=(0,0) is continu in de oorsprong

2. Een belangrijke differentiaal vergelijking in zowel wiskunde als fysica is de *Legendre vergelijking*:
   $(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-2x\frac{dy}{dx}+\alpha(\alpha+1)y=0, \alpha\in\mathbb{R}$
   1. Wat zijn de reguliere en singuliere punten van deze vergelijking ?
   2. Los de vergelijking op met behulp van een machtreeks rond $x=0$.
   3. Onderzoek het convergentiegedrag van de machtreeks die je gevonden hebt in de vorige vraag.
   4. Indien $\alpha\in\mathbb{N}$, dan gebeurt er iets speciaal met de oplossing(en). Wat gebeurt er dan?
3. Ueli - *the Swiss Machine* - Steck, wereldgerenomeerd alpinist, heeft een resem verwezelijkingen op z'n naam staan. Naast het veroorzaken van de geweldige Sherpa rellen in het Everest Base Camp in 2013 heefthij ook het snelheidsrecord van noordwandbeklimming van de Eiger op z'n naam staan. Stel dat Ueli op deze befaamde dag op de top van Eiger staat, wiens hoogteprofiel toevallig perfect beschreven kan worden door
   $h(x,y)=3000-\frac{1}{10000}(5x^2+4xy+2y^2)$
   Ueli heeft het echter wat frisjes. Gegeven dat hij een half uur tijd een horizontale afstand vn 1000m kan afleggen (ongeacht de hoogte), wat is het laagste punt dat Ueli dan kan bereiken vanaf de top (0,0)? (Opgepast, a priori is het mogelijk dat hij geen 1000m moet stappen om het laagste punt te bereiken!)
4. Bereken het traagheidsmoment rond de z-as van de paraboloïde gegeven door $z=\frac{1}{4}(x^2+y^2)$ met $0 \le z \le 1$. Herinner uit de oefeningen dat het traagheidsmoment gegeven wordt door:
   $I_z=\iint_\Sigma (x^2+y^2)\,d\sigma$

Academiejaar 2013-2014 2e zit

Professor David Eelbode

1. Een mengeling van twee chemicaliën A en B verandert doorheen een chemische reactie. Stof A verandert in B met een reactiesnelheid van 15%, terwijl B in A verandert aan een snelheid van 10%. Met andere woorden, we kunnen een stelsel differentiaalvergelijkingen neerschrijven voor de concentraties (die we ook gewoon met A en B noteren)

$$\begin{cases} \frac{dA}{dt} = -0.15A+0.10B \\ \frac{dB}{dT} = +0.15A-0.10B \end{cases}$$

   1. Vind het verloop van beide chemicaliën doorheen de tijd door het stelsel op te lossen, als je weet dat de initiële verhoudingen worden gegeven door $70\%\ A$ en $30\%\ B$. (dus $A(0)=0.7$ en $B(0)=0.3$)
   2. Schets in twee grafiekjes hoe de relatieve hoeveelheid A en B verloopt (met alle relevante informatie en getallen).
   3. Stel dat we in het rechterlid van de eerste vergelijking een continue functie $\alpha(t)$ toevoegen (resp. $\beta(t)$ in de tweede vergelijking), zou je dan theoretisch gezien de vergelijking kunnen oplossen met technieken uit de cursus? Licht je antwoord kort toe.

2. Gegeven de volgende differentiaalvergelijking
   $xy''+2y'+xy=0$

   $$xy''+2y'+xy=0$$

   1. Vind twee onafhankelijke oplossingen met de methode van Frobenius. **Let op**: De indiciële vergelijking geeft je 2 wortels die een geheel getal verschillen, maar je kan alsnog 2 onafhankelijke oplossingen vinden zonder problemen. Je hebt de alternatieve methode uit de cursus (met logaritmen) dus *niet* nodig!
   2. Leg de randvoorwaarden $y(0)=1$ en $y'(0)=0$ op om een unieke oplossing te krijgen.
      Fun stuff (optioneel) *Als je deze unieke oplossing vermenigvuldigt met x, bekom je een machtreeks die je zou moeten herkennen uit een andere cursus. Dit kan je gebruiken om je oplossing in een functionele vorm te schrijven, in plaats van de weinig inzichtelijke machtreeks die je nu hebt. De oplossing die je bekomt heet de Sinus Cardinalis, genoteerd als sinc(x), en durft hier en daar al wel eens opduiken wanneer je de frequenties van een tijdsafhankelijke functie analyeert.*

3. Gebruik de functie $f(x,y)=\sin(x+y)+\cos(x-y)$ en de punten $p_1(\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{4})$ en $p_2(\frac{7\pi}{4},\frac{-\pi}{4})$ om het verschil uit te leggen tussen extrema en zadelpunten voor functies in meerdere variabelen. Gebruik hiervoor de criteria uit de cursus.
4. Gegeven het vectorveld $\vec{F}=\alpha(x,y,0)$, bereken dan de flux van $\vec{F}$ van binnen naar buiten doorheen de schil van een bol met straal a.
5. In deze opgave zullen we op ingenieuze wijze de oneigenlijke integraal $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ analytisch bepalen door gebruik te maken van complexe analyse.
   1. Ga na dat de complexe functie $f(z)=e^{iz^2}$ analytisch is, en dat het reële deel van deze functie zich op de reële as precies herleidt naar de functie $\cos(x^2)$ die we willen bestuderen ($z=x+iy$).
   2. Nu hebben we enkel nog een contour nodig waarop we integraalstelling van Cauchy op kunnen toepassen. Kijk bijvoorbeeld naar het volgende contour. Bestand:WiskIIIcontour Het zou uiteraard prettig zijn moest de integraal over de cirkelboog naar 0 convergeren (voor $R \rightarrow +\infty$). Dat is gelukkig zo: toon dat aan.
   3. Na al dit voorbereidend werk kan je eindelijk $\int_0^\infty \cos(x^2)dx$ bepalen. (herinner je ddat we in de oefeningzittingen hebben aangetoond dat $\int_\infty^\infty e^{-x^2}dx=\sqrt{\pi}$.)
   4. Stel dat we in de plaats van $f(z)$ naar de functie $F(z) := e^{\frac{i}{x^2}}$ kijken. Wat zijn dan de singulariteiten voor $F(z)$, en wat is het residu in die singulariteiten?

Academiejaar 2013-2014 1ste zit

Professor David Eelbode

1. Het team van David fabriceren fysici. Omdat D. de efficientie wil optimaliseren, deelt hij zijn klas op in 3 delen (x,y,z) en zoekt de formule die bepaalt hoeveel studenten al dan niet slagen. Hij vindt dat het aantal studenten dat faalt voor het examen gelijk is aan $F(x,y,z)=ax^2+by^2+cz^2$ waarbij x,y,z het aantal studenten voorstelt per groep, en de parameters $a,b,c > 0$ afhankelijk zijn van de assistent. Het totaal aantal studenten kan je voorstellen als $T=x+y+z$.
    - Hoe moet David de studenten verdelen over de assistenten opdat hij een maximale hoeveelheid geslaagde fysici kan produceren?
    - **Theorie**: Als men een extremalisatie heeft gevonden op punt $F(x_0,y_0,z_0)$. Waarom is het dan niet voldoende om F_{xx} te berekenen, het punt in te vullen in deze tweede afgeleide en te kijken naar het teken om te zien of er een maximum of een minimum is?
2. Een belangrijke differentiaal vgl. is de *Chebyshev*-vergelijking van orde p, gegeven door $y''(1-x^2)-y'x+p^2y=0$
    - Wat zijn de reguliere en singuliere punten van deze vergelijking?
    - Los de vgl. op met behulp van een machtreeksoplossing van de vorm $y=\sum_0^\infty{a_nx^n}$ Voor elke oplossing van p vind je 2 onafhankelijke oplossingen. Op welk gebied zijn deze oplossingen zeker betrouwbaar?
    - Merk op dat voor elke orde p, één van beide oplossingen simpelweg een polynoom is.Men noemt het polynoom $T_p(x)$ het *Chebyshev-polynoom van orde p*. Geef de eerste 4 "Chebyshev"-polynomen, i.e. $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$ en $T_3(x)$.
    - Theorie: Wat kan je zeggen over de waarde van de integralen $\oint_{C(0,1)} \frac{T_p(z)T_q(z)}{(1-z^2)^{pq}} dz$ $(p,q \in \mathbb{N})$ met $z \in \mathbb{C}$ en $C(0,1)$ de eenheidscirkel in het vlak?
3. Op een cirkelvormige schaal (straal $r=1$) ligt een berg zand met in totaal een volume van 5π.

    Bereken de impulsflux langs de bovenkant van de hoop zand van de dampdeeltjes indien je weet dat de impuls wordt gegeven door $\bar{F}=\Delta\phi+\Delta\times\bar{G}$ Waarin ϕ gelijk is aan: $\phi=x^2+y^2+z^2$ en $\bar{G}$: $\bar{G}=\frac{1}{3}(-y^3\bar{e_x}+x^2\bar{e_y}+z^2)\bar{e_z}$ Hierin is G verantwoordelijk voor de wrijvingskrachten en $\mu \in \mathbb{R}$ een parameter die de sterkte van deze wrijvingskrachten bepaalt.

1. Complexe analyse: Je hebt de formule:Θ(a)=−12πi∫∞−∞(e−ixa1+iϵ)dxΘ(a)=−12πi∫−∞∞(e−ixa1+iϵ)dx (ϵ∈R+)(ϵ∈R+)
    - Bepaal $\Theta(a)$ voor $a<0$
    - Bepaal $\Theta(a)$ voor $a>0$
    - Hoe gedraagt deze functie zich voor klein ϵ? Bereken daarvoor limϵ→0+Θ(a)limϵ→0+Θ(a) en teken vervolgens de grafiek voor $\Theta(a)$ als functie van a
    - Theorie: als twee functies $f(x)$ en $g(z)$ met polen in $z=a$ van orde n_f en n_g vermenigvuldigd worden kan het product $f(z)g(z)$ dan ooit een pool hebben in $z=a$ met een orde die anders is dan n_f+n_g?

Verklaar je antwoord!