Differentiaalvergelijkingen en functieruimten

Differentiaalvergelijkingen en functieruimten	
Richting	Wiskunde
Jaar	3BWIS

Bespreking

Dit vak is het vervolgvak op Analytische Topologie en werd tot voor kort (2013) nog gedoceerd door Bob Lowen en Tom Vroegrijk samen. Maar omdat Prof. Lowen op emiraat ging, moest Tom Vroegrijk het vak overnemen. Dit vak telt maar 3 studiepunten en ook de cursus is vrij klein (44 paginas) maar deze moet je wel tot in de fijnste puntjes kennen. Elke les heeft Vroegrijk de inhoud van die dag bij. Oefeningen komen minimum aan bod, we zien vooral naar de theorie. Het vak gaat uit van de kennis van topologische ruimten en eigenschappen ervan zoals compactheid en Haussdorf.

Theorie

De theorie is de grootste portie die je moet verwerken. De bewijzen zijn niet allemaal even gemakkelijk en er wordt veel voorkennis verwacht (je cursus Toplogie eens nakijken is hier zeker op zijn plaats). Het examen bestaat uit 4 vragen waarvan er 3 vragen theorie zijn. Deze drie vragen zijn allemaal zeer letterlijke stellingen en bewijsjes uit de cursus. Het theoriedeel en "oefeningendeel" vinden op dezelfde moment plaats.

Oefeningen

Aan oefeningen wordt zeer weinig aandacht gespendeerd in dit vak. Als je je theorie goed genoeg kent, zullen de oefeningen wel lukken. Er is 1 oefening die mee met de theorievragen wordt gesteld. Mits logisch na te denken, is deze niet zo moeilijk om op te lossen.

Examenvragen

Theorie

Januari 2015

Groep 1

1.
    - Geef de definitie van de co-compacttopologie en toon het verband met de compact-opentopologie.
    - Geef de definitie van limsup en liminf en de Fell topologie en enkele eigenschappen.
    - Stel dat X lokaal compact is. Bewijs dan dat een rij $(A_n)_n$ naar A convergeert in de co-compacttpologie als en slechts als $\limsup A_n \subseteq A$.
2. Een vraag over het hoofdstuk van de Sturm-Liouvillevergelijking, gelijkaardig aan de onderstaande.

Groep 2

1.
    - Geef de definitie van splitting, conjoining en continue convergentie. Geef enkele eigenschappen.
    - Geef het verband met de compact-opentopologie.
    - Bewijs dat een topologie T conjoining is als en slechts als elke filter die voor T naar $f \in C(Y,Z)$ convergeert, ook continu naar f convergeert.
2.
    - Leg uit wat een Sturm-Liouvillevergelijking is en hoe we een operator K nodig hadden om a.d.h.v. de spectraalstelling iets te vertellen over de eigenwaarden en eigenvectoren van oplossingen van deze vergelijking.
    - Bewijs dat de operator K Hilbert-Schmidt is.

Januari 2014

Groep 1

1. Als we een Sturm-Liouville systeem beschouwen dan hebben we de operator K gedefinieerd als volgt
$$K(g)=\int_0^1 k(x,t)g(t)dt$$
. We hebben veel van deze operator bewezen. Geef nu de volledige definitie van deze operator zijnde definieer $k(x,t)$ op de juiste manier. Toon vervolgens aan dat de operator K compact is.
2. Leg uit wat equicontinuïteit is en geef enkele eigenschappen van equicontinue verzamelingen. Toon aan dat als F een filter is op een equicontinu deel van Y^X die convergeert naar een continue functie ϕ, de filter F ook naar ϕ convergeert in de compact-opentopologie. Equicontinuïteit speelt een belangrijke rol bij de stelling van Ascoli. Geef een voorbeeld van een toepassing van deze stelling. Leg kort uit hoe de steling van Ascoli in je voorbeeld van pas komt.
3. Om de stelling van Stone-Weierstrasste bewijzen hadden we verschillende voorbereidende eigenschappen nodig. Geef deze eigenschappen (je moet ze niet bewijzen) en schets hoe je stap voor stap tot deze stelling komt.

Groep 2

1. Om de stelling van Sturm-Liouville te bewijzen hadden we verschillende stappen nodig. Leg uit waarom en hoe we de operator KK definieerden en schets hoe we stap voor stap tot de stelling van Sturm-Liouville zijn gekomen. Je moet de eigenschappen die je aanhaalt niet bewijzen.
2. Leg uit wat de compact-opentopologie is, waarom we ze hebben ingevoerd en geef enkele eigenschappen van deze topologie. We zagen onder andere dat de samenstelling
   ∘:C(X,Y)×C(Y,Z)→C(X,Z)
   $$\circ : C(X,Y)\times C(Y,Z)\to C(X,Z)$$
   een continue functie is als YY lokaal compact is en op elke functieruimte de compact-opentopologie staat. Toon dit aan.
3. Leg uit wat equicontinuïteit is en toon aan dat de puntsgewijze sluiting van een equicontinu deel terug equicontinu is.

Januari 2013

Deel Lowen \\ GROEP 1

1. Geef alle eigenschappen van Sturm-Weierstrass en bewijs deze voor niet compacte ruimte.

Deel Lowen \\ GROEP 2

1. Geef Ascoli + Lemma+omkering + enkele belangrijke gevolgen.
2. Bewijs
   H
   $$H$$
   equicontinu ⇒⇒ puntsgewijze sluiting van HH is ook equicontinu.

Deel Tom Vroegrijk

1. Geef de stelling van Sturm-Liouville en maak een schets van het bewijs.
2. Toon aan dat als 00 geen eigenwaarde is van LL, dan is p(uv′−vu′)p(uv′−vu′) een van nul verschillende constante
3. Kan L(f)=(pf′)′+qfL(f)=(pf′)′+qf met randvoorwaarde af(0)+a′f′(0)=0af(0)+a′f′(0)=0 slechts een aftelbaar aantal eigenwaarden hebben? (a,a′)≠(0,0)(a,a′)≠(0,0)

Januari 2011

1.
   - We zagen drie topologieen op functieruimten. Definieer deze en geef verbanden.
   - Zij fn:[0,1]→Rfn:[0,1]→R continu, H:={fn|n∈N}H:={fn|n∈N} equicontinu en fn→Pffn→Pf. Kunnen we dan besluiten dat fn→Uffn→Uf?

2. Wat weet je over een evaluatie-afbeelding? (de bedoeling is hier de stelling te geven dat als YY lokaal compact en Hausdorff is, dat de evaluatie - afbeelding dan continu is voor de compact-open topologie op de functieruimte) Geldt dit ook voor de puntsgewijze en/of de uniforme topologie?

    Schets wat je weet over convergentie van machtreeksen.

1.
    - Bewijs de stelling over de convergentiestraal, i.e dat als x∈]−R,R[⇒∑anxn convergent, x∈]−∞,R[∪]R,+∞[⇒∑anxn divergentx∈]−R,R[⇒∑anxnconvergent,x∈]−∞,R[∪]R,+∞[⇒∑anxndivergent
    - Bewijs ∑anxn0 convergent,0<r<|x0|⇒∑anxn uniform absoluut convergent op [−r,r]
      ∑anx0nconvergent,0<r<|x0|⇒∑anxnuniform absoluut convergent op[−r,r]
    - We weten dat voor algemene functies geldt →u⇒→uc⇒→P

$$\to_u \Rightarrow \to_{uc} \Rightarrow \to_P$$

      . Beschouw nu de twee gevallen ∑anxn op [−r,r]∑anxnop[−r,r] en ∑anxn op]−r,r[∑anxnop]−r,r[. Gelden er in deze twee gevallen andere implicaties?

Oefeningen

Januari 2015

Beide groepen kregen dezelfde oefeningen.

1. Zij XX een T2T2 ruimte. We definiëren voor een open deel G⊆X×RG⊆X×R de verzameling ΓGΓG als de functies ff waarvoor de grafiek volledig binnen GG blijft, i.e.
   {(x,f(x))|x∈X}⊆G

$$\{(x,f(x))|x\in X\}\subseteq G$$

   . We noemen de topologie voortgebracht door deze open delen de graphtopologie.
    - Geef de definitie van de compact-opentopologie op C(X)C(X).
    - Toon aan dat de graphtopologie fijner is dan de compact-opentopologie.
    - Toon aan dat als XX compact is, de topologiën samenvallen.
2. Zij k:[0,1]×[0,1]→Rk:[0,1]×[0,1]→R een continue functie. Dan definiëren we een lineaire operator T:Cu([0,1],R)→Cu([0,1],R)T:Cu([0,1],R)→Cu([0,1],R) door T(f)(x)=∫10k(x,t)f(t)dtT(f)(x)=∫01k(x,t)f(t)dt. Toon aan dat deze operator compact is, i.e. begrensde delen stuurt op delen met compacte sluiting.

Januari 2014

Groep 1

1. Stel X een compacte Hausdorffruimte en A een puntenscheidende algebra van de functieruimte $C(X)$. Toon aan dat $\overline{A}$ ofwel gelijk is aan $C(X)$ ofwel identiek is aan de verzameling $\{f\in C(X) | f(x_0)=0\}$ voor een zekere $x_0\in X$.
   - Stel dat er een $x_0\in X$ bestaat zodat voor alle $f\in A$ geldt dat $f(x_0)=0$. Definieer B als $\{c+f | c\in \mathbb{R}$ en $f\in A\}$ en toon aan dat elke $g\in C$ met de eigenschap $g(x_0)=0$ een element is van $\overline{B}$. Leid hieruit af dat $\overline{A}$ gelijk is aan $\{f\in C(X) | f(x_0)=0\}$.
   - Veronderstel dat er geen $x\in X$ bestaat waarin alle elementen uit A gelijk zijn aan 0.Gebruik dit gegeven om aan te tonen dat er een strikt positieve functie g bestaat in A. Bewijs nu dat $\frac{1}{g}\in \overline{B}$ (zie hierboven). Leid hieruit af dat $1\in \overline{A}$ en dat $\overline{A}$ gelijk is aan $C(X)$.

Groep 2

1. Toon aan dat voor elke $N\in \mathbb{N}$ geldt dat de vectorruimte voortgebracht door de basis $\{e^{nx} | n\geq N\}$ dicht is in $C([0,1])$.Gebruik dit resultaat om te bewijzen dat als $f\in C([0,1])$ er een $N\in \mathbb{N}$ bestaat zodat $\int_0^1 e^{nx}f(x)dx=0$ voor elke $n\geq N$, de functie $f(x)$ gelijk moet zijn aan 0.

Januari 2011

---

1. Los volgende differentiaalvergelijking op door middel van machtreeksen
$$(x^2+2)y''+3xy'-y=0$$
. Een benadering met een veelterm van graad 5 is voldoende.
2. Herinner je dat we een verzameling $H\subseteq Y^X$ zwak equicontinu genoemd hebben asa voor elke $x\in X$ het volgende geldt
$$\forall y\in Y, \forall U\in \mathcal{V}(x), \exists W\in \mathcal{V}(y), \forall f\in H : (f(x)\in W \Rightarrow f(V)\subseteq U)$$
. Veronderstel dat Y regulier is. Toon aan dat de puntsgewijze sluiting van H zwak equicontinu is, als H zwak equicontinu is.
3. Zij $\mathbb{R}_l$ de verzameling van reele getallen met daarop de left ray topologie. Deze topologie, waarvan de verzameling van open delen gelijk is aan $\{]-\infty,a[| a\in \mathbb{R}\}$, is niet regulier. Een deel $H\subseteq C(\mathbb{R},\mathbb{R}_l)$ is zwak equicontinu als voor elke $x\in \mathbb{R}$ en elk rijtje $(f_n)_n$ in H geldt dat $(x_n\to x \text{ en } f_n(x)\to y)\Rightarrow f_n(x_n)\to y$. Gebruik $C(\mathbb{R},\mathbb{R}_l)$ om aan te tonen dat de regulariteit van de beeldruimte een noodzakelijke voorwaarde is in de vorige oefening.

4. Definieer AA als de verzameling van alle functies $f \in C(R,R) f \in C(R,R)$ met de volgende eigenschap
   $\exists n \in N, \forall x \geq n : f(x) = 0$
   $$\exists n \in N, \forall x \geq n : f(x) = 0$$
   . Bewijs dat AA dicht is in $C(R,R) C(R,R)$ met de compact-open topologie.

Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS