Tuyaux
1ste Bachelor Wiskunde

WINAK

Eerste Semester
2011-2012

Contents

Chapter 1

Inleiding

Deze tuyaux zijn opgesteld om je te helpen bij het studeren. Graag zou ik eerst nog een paar opmerkingen willen maken :

- Een tuyaux is een **hulpmiddel**. Dit wil zeggen dat het noch je cursus noch je nota's kan vervangen. Dit document bevat een zeer groot aantal vragen die gesteld zijn geweest in de vorige jaren, en is dus zeer nuttig om te bekijken zodat
  - je weet **hoe** je moet studeren, een idee krijgt van hoe het examen er uit zal zien, weet welke soort vragen in het algemeen gesteld worden en aan welke delen van de cursus een zeer groot belang wordt gehecht (dit zijn de delen van de cursus die ongeveer elk jaar terug komen).
  - je weet of je je cursus kent door te proberen **antwoorden** op de vragen en oefeningen die in dit document staan, zonder constant terug naar je cursus te moeten kijken.
- Sommige vragen zijn oud en stammen dus nog uit een tijd waar andere klemtonen lagen of meer/minder werd geëist voor een vak.
- Deze Tuyaux zijn niet fouten-loos. Mocht je er vinden, mag je ze altijd mailen naar elke@winak.be.

Verder kan ik jullie alleen nog maar allemaal heel veel succes toewensen bij de examens, jullie aanmoedigen om jullie voor elk vak 200% in te zetten, en om de moed niet te verliezen tijdens deze lange examenperiode. Zelfs als je niet helemaal zeker bent dat je grootste onderscheiding gaat halen, raad ik jullie toch aan om mee te doen met elk examen (dan weet je ook meteen hoe het allemaal in zijn werk gaat bij die prof of assistent) en dan maar een grote onderscheiding te halen… die je dan nog altijd met je punten van het tweede semester kan inhalen.
Veel succes!

Elke Gijsbrechts
WINAK mentor Wiskunde 2010-2012

Chapter 2

Analyse I

2.1 Theorie

Dit vak wordt voor het derde jaar door Professor Eelbode gegeven, dus er zijn nog niet zo veel voorbeeldexamens van beschikbaar. Het oefeningenexamen van 2009 is een examen van een andere Professor, maar het kan geen kwaad om ook dat eens te bekijken.

2.1.1 Januari 2011

1. Formuleer de eigenschap waarop Bolzano steunt en bewijs ze.
2. Geef van elk van de volgende beweringen aan of ze waar of vals zijn.
   - Indien $\rho(x) = |x^2 + x| \Rightarrow \rho'(x) = |2x + 1|$.
   - Polynomen van de vorm $P(x) = a_5x^5 + a_3x^3 + a_1x$ hebben altijd een buigpunt.
3. Toon volgende stelling aan:
   Indien een afleidbare functie $f : I \to \mathbb{R}$ (op een open interval) in het punt $c \in I$ een lokaal minimum bereikt, dan geldt er dat $f'(c) = 0$.
4. De volgende berekeningen komen uit een wiskundige paper "The Riemann Zeta-function $\xi(a)$: generalities" over de fameuse ξ-functie van Riemann.

$$\begin{array}{rcll} \xi(s) & = & \frac{\xi_a(s)}{1-2^{1-s}} & \text{geg.} \\ & \approx & \frac{\xi_a(1)+(s-1)\xi_a'(1)}{(s-1)\ln 2 - \frac{1}{2}(s-1)^2\ln^2 2} & \text{gevr.} \\ & \approx & \frac{\xi_a(1)+(s-1)\xi_a'(1)}{(s-1)\ln 2}\left(1 + \frac{\ln 2}{2}(s-1)\right) & \text{gevr.} \end{array}$$

   - Verklaar de overgang van de eerste lijn naar de tweede lijn (zowel voor teller als voor noemer).
   - Verklaar de overgang van de tweede lijn naar de derde lijn.

   Opmerking: Heb je niet nodig, maar voor de volledigheid:

$$\xi(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

$$\xi_a(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^s}$$

5. De Mellin-transformatie is een voorbeeld van een integraaltransformatie: deze beeldt een gegeven $\mathbb{R}$-waardige functie $f(x)$ af op een nieuwe $\mathbb{R}$-waardige functie. $M(f)(s)$ in de variabele $s \in D$ gedefinieerd als
$$M(f) : D \to \mathbb{R} : s \mapsto M(f)(s) := \int_0^\infty x^s f(x) \frac{dx}{x}$$
Het domein D van deze functie $M(f)(s)$ bestaat uiteraard uit alle getallen $s \in \mathbb{R}$ waarvoor de bovenstaande oneigenlijke integraal convergeert.
   - Laten we vertrekken van de volgende (niet-continue) functie:
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{\cosh x} & x \geq 1 \end{cases}$$
   Bewijs dan volgende bewering omtrent het domein D van de Mellin-transformatie voor deze functie: $s < 0 \Rightarrow s \in D$
   - Wat is de $M(e^{-x})(s)$ voor $s = n + \frac{1}{2}$ met $n \in \mathbb{N}$?
6. Is de volgende bewering waar of vals:
Alle oplossingen van de DV $y' + y^4 + 1 = 0$ zijn dalende functies.

2.1.2 Augustus 2010

1. Formuleer en bewijs de stelling van Bolzano.
2. Geef van elk van de volgende beweringen aan of ze waar of vals zijn (en waarom):
   - Indien $f(x) \geq g(x)$ voor alle $x \in \mathbb{R}$, dan is $(f - g)(x)$ een stijgende functie.
   - Het open interval $]-2, 2[$ is overaftelbaar.
   - Indien voor een begrensde functie $f(x)$ geldt dat $f(x) = T_n(f,a)(x) + R_n(f,a)(x)$, met daarbij
   $$|R_n(f,a)(x)| \leq \frac{f^{(n)}(c)}{n^2 \tan(\frac{1}{n})}(x-a)^{n+1}$$
   (voor alle $|x - a| < 1$)
   En c tussen a en x, dan geldt er dat de Taylorreeks voor $f(x)$ convergeert voor $|x - a| < 1$.
   - Stel dat $f(x) = \sum_{k=0}^n c_{2k} x^{2k}$, met $c_{2k} \in \mathbb{R}_0$, een willekeurig polynoom is van graad $n \geq 4$. Indien je weet dat $f'(1) = 0$ en $f''(1) > 0$, dan geldt er dat $f(x)$ een lokaal maximum heeft voor $x = -1$.
   - Alle oplossingen voor de vergelijking $y'(x) + y^4(x) = -1$ zijn dalende functies.
3. Voor even functies $f(t)$ herleidt de Fourier-transformatie zich tot
$$\mathcal{F}[f](w) := \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(t) \cos(wt) dt$$
Indien de integraal $\mathcal{F}[f](w)$ convergeert, dan zegt men dat $f(t)$ Fourier-transformeerbaar is.
Gevraagd: Is de functie $f(t) = \frac{e^{-t^2}}{t^2+b^2}$ Fourier-transformeerbaar (met $b \neq 0$)?
4. Formuleer de hoofdstellingen van de calculus (zonder bewijs).
5. Geef de meest algemene vorm voor een homogene tweede-orde differentiaalvergelijking van Euler, en leg uit hoe je deze vergelijking kan oplossen (i.e. stel een algoritme op en werk uit). Onderscheid daarbij drie gevallen, al naargelang de constanten die voorkomen in de algemene vorm.

2.2 Oefeningen

2.2.1 Oefeningen 2009

1. Bewijs dat als $(\alpha_n)_n$ een fundamentaalrij is, met $\alpha_n \neq 0$ voor alle $n \in \mathbb{N}$ dat dan ook $(\frac{\alpha_n}{\alpha_{n^2}})_n$ een fundamentaalrij is. Welk reëel getal stelt ze voor?

2. Bewijs of ontkracht: $(\alpha_n)_n$ naar beneden begrensd $\Leftrightarrow \lim_n \inf \alpha_n \in \mathbb{R}$

3. Voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ stellen we $A_n := \{0, k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots | k_n \in \{0, 1, 8, 9\}\}$ en $A := \bigcap_{n>0} A_n$. Ga na of A eindig, aftelbaar of overaftelbaar is.

4. Als $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continu is en $f(a) = b, f(b) = a$ voor zekere $a, b \in \mathbb{R}$, dan is er tenminste *één* $c \in \mathbb{R}$ zodat $f(c) = c$. Toon dit aan.

5. (a) Bewijs dat als f afleidbaar is op $\mathbb{R}$ en $\lim_{x\to a} f'(x)$ bestaan, dan is $\lim_{x\to a} f'(x) = f'(a)$.
   (b) Betekent dit dat elke differentieerbare functie continu differentieerbaar is?

6. (a) Bepaal $\alpha \in \mathbb{R}$ zodat de functie
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \arctan \frac{1}{x} & x > 0 \\ \frac{\pi}{2} & x = 0 \\ \arctan \frac{1}{x} + \alpha & x < 0 \end{cases}$$
   continiu is op $\mathbb{R}$.
   (b) Toon aan dat (met de gevonden waarde α) de functie f onbeperkt afleidbaar is op $\mathbb{R}$.
   (c) Bereken de Taylorreeks rond 0 van de functie f.

2.2.2 Augustus 2010

1. Bepaal de volgende limieten:
   $$\lim_{x\to 2} \frac{f(2x+4) - f(x^3)}{x^2 - 4} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 1}}{3x - 6}$$

2. Bicky Mouse, het obese vriendje van Mickey, staat aan een hoekpunt van een groot driehoekig stuk kaas. De driehoek zelf is gelijkzijdig en heeft zijde $z = 2$. In het midden van de tegenovergestelde zijde ligt een bicky cheese, en uiteraard wil onze vriend die burger zo snel mogelijk naar binnen werken. Bicky beweegt aan een snelheid $v = \sqrt{2}v_0$ langs de buitenste zijde van het stuk kaas, maar kan zich uiteraard ook een rechtlijnig pad dwars doorheen de kaas vreten. Dit gaat dan wel iets trager, aan een snelheid $v = v_0$. Bepaal het pad dat Bicky moet volgen om zo snel mogelijk zijn burger te bereiken. (TIP: $A^2 = B^2 + C^2 - 2BC \cos \alpha$)

3. Bepaal de booglengte van de curve
   $$f(x) = \ln\left(\frac{e^x + 1}{e^x - 1}\right)$$
   met $0 < a \leq x \leq b$.

4. Zoek de functie $f(x)$ waarvoor volgende eigenschappen gelden:
   - $f(x) \geq 0$

- $f(0) = 0$ en $f(1) = 1$
- De oppervlakte onder de curve tussen 0 en x is recht evenredig met de $(n+1)^{ste}$ macht van de functie $f(x)$ zelf (met $n > 1 \in \mathbb{N}$).

5. Bepaal een geschikte Taylor-ontwikkeling om $\sin 3$ te berekenen (de foutenanalyse hoef je niet uit te voeren).

6. Los volgende DV op:

$$y'' + y = 1 + \tan x$$

Chapter 3

Lineaire Algebra

3.1 De cursus, het vak, het examen

Het theorie examen wordt per groepen van ongeveer zeven personen afgelegd en duurt ook meestal wel de volle vier uur. Jullie zitten allemaal samen in een lokaal. Professor Van Steen schrijft de eerste vraag op het bord, die is dezelfde voor iedereen. Je schrijft je antwoord tot in detail uit op je papier, en als je klaar bent komt professor Van Steen het nalezen. Naargelang het antwoord dat je geeft kan hij er verder op ingaan, bijvragen stellen, of compleet over gaan naar iets anders. Als je geen enkel idee hebt van hoe je op een bepaalde vraag moet antwoorden, in plaats van een uur naar een leeg blad te zitten staren is het best om (mits aftrek van een aantal punten) een andere vraag te vragen.
Je moet alles kennen en kunnen bewijzen wat er in de lessen is gezien, zorg dat je de structuren goed kent en weet waarom je bepaalde dingen doet, uitwerkt...
Het oefeningenexamen leggen jullie allemaal samen af en ligt in de lijn met wat je in de klas gedaan hebt. Tijd is er in principe genoeg, maar als je een antwoord niet direct ziet is het toch aangeraden om dan eerst de vragen te doen die je wel kan en er daarna op terug te komen. Mischien heb je dan wat meer inspiratie opgedaan. Weinig mensen kunnen alle vragen beantwoorden op een oefeningenexamen, een 20 is dan ook het symbool voor perfectie, dus panikeren is voor niets nodig, neem rustig eens diep adem, en concentreer je verder op je examen.

3.2 Theorie

3.2.0.1 Belangrijke Vragen

- De matrixvoorstelling van een lineaire afbeelding.
- Gramm-Schmidt.
- Alles betreffende eigenwaarden en eigenvectoren.
- Dimensieformules + alle soorten variaties op de stellingen(andere stellingen over dimensies).
- De exsistentie van basissen, hoe maak je ze? Het uitbreiden van een lineair onafhankelijk deel tot een basis. Het inkrimpen van een voortbrengend deel tot een basis. Geef de stellingen die daarvoor dienen.
- Orthogonaliteit

3.2.0.2 December 2004

1. (a) Definieer het begrip *lineair onafhankelijke vectoren* in $\mathbb{R}^n$.
   (b) Zij $v, w \in \mathbb{R}^n$ vectoren met $v \neq 0$ en $w \neq 0$. Toon aan: v, w is lineair afhankelijk als en slechts als $v = \lambda w$ voor een zekere $\lambda \in \mathbb{R}$.
2. (a) Hoe definieert men den *kern* van een lineaire afbeelding?
   (b) Toon aan dat de kern $Ker\ f$ van een lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een deelruime is van $\mathbb{R}^n$.
   (c) Zij $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ een lineaire afbeelding. Toon aan:
   $$n = \dim\ Ker\ f + \dim\ Im\ f$$
3. Zij $A \in \mathfrak{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ een vierkante matrix.
   (a) Hoe definieert men de *karakteristieke veelterm* van A?
   (b) Toon aan dat de wortels van deze veelterm juist de eigenwaarden zijn van A.
   (c) Zij $v_1, \ldots, v_t \in \mathbb{R}^n$ eigenvectoren van A met respectievelijke eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_t \in \mathbb{R}^n$. Toon aan: als $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$ onderling verschillend zijn, dan zijn de vectoren $v_1, \ldots, v_t$ lineair onafhankelijk.

3.2.0.3 Juni 2005: Groep 1

1. Bewijs: als $f : V \to V$, dan $dim(V) = dim(Ker(f)) + dim(Im(f))$.
2. Gramm-Schmidt
3. Bewijs dat het optellen van Matrices een lineaire afbeelding is.
4. Gegeven een Hermitische matrix.
   (a) Bewijs dat de eigenwaarden reëel zijn
   (b) Bewijs dat eigenvectoren van verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan

3.2.0.4 Juni 2005: Groep 2

1. Wanneer V en W twee vectorruimten zijn, wat betekent dan V/W? Waaraan is $dim(V/W)$ gelijk?
2. Gramm-Schmidt
3. Bewijs dat eigenvectoren van verschillende eigenwaarden loodrecht op elkaar staan.

3.2.0.5 Januari 2007

1. $A \in M_{m,n}$
   (a) Definieer dan :
      i. de rijenruimte van A
      ii. de kolommenruimte van A
      iii. de nulruimte
   (b) toon aan : $\dim(K(A)) + \dim(N(A)) = m$
   (c) geef de stelling in verband met $\dim(\mathrm{Im} f) + \dim(\ker f) = \dim V$
2. A en B matrices. Toon aan : $AB = In$ en $|A| = |B| \Rightarrow BA = In$
3. Zij V en W vectorruimten, $e_1, \ldots, e_n$ een basis in V en $w_1, \ldots, w_n$ elementen in W. Toon aan : er bestaat een unieke lineaire afbeelding $f : V \to W$ zodat $\forall i = 1, \ldots, n$: $f(e_i) = w_i$.
   (a) f injectief $\Rightarrow \ldots$
   (b) f surjectief $\Rightarrow \ldots$
4. $e_1, \ldots, e_n$ eigenwaarden die onderling verschillend zijn, $v_1, \ldots, v_n$ de overeenkomende eigenvectoren. Toon aan :
   (a) $v_1, \ldots, v_n$ lineair onafhankelijk
   (b) als ${}^tA = A$ dan $v_i \perp v_j \forall i \neq j$

3.2.0.6 September 2010

1. $A \in M_{m,n}$, $B \in M_{n,p}$
   (a) Definieer $N(A)$ en $K(A)$ en toon aan dat dit deelruimten zijn.
   (b) $rg(AB) \leq min\{rg(A), rg(B)\}$
2. $V, W \subset U$ deelruimten ($dim(U) < \infty$). Wat is dan $dim(V + W)$? Toon dit ook aan.
3. Gegeven een lineaire afbeelding $f : V \to W$.
   - Wat is de matrixvoorstelling van f ?
   - $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineaire afbeelding dan $\exists A \in M_{m,n}$ zodat $f = f_A$.
4. $A \in M_{m,n}$. $c_1, \cdots, c_t$ zijn verschillende eigenwaarden van A en $v_i \in V_{c_i} \backslash \{0\}$ met $i = 1, \cdots, t$
   (a) Dan $\{v_1, \cdots, v_t\}$ lineair onafhankelijk.
   (b) Als $A^T = A$, dan $v_i \perp v_j (\forall i \neq j)$

3.2.0.7 Januari 2011

1. Definieer: LO en LA
   Is $\{u\}$ LO of LA en waarom?
   Is $\{u, v\}$ LO of LA en waarom?

2. Definieer: De Nulruimte en Kolommenruimte.
   Van wat is de nulruimte een deelverzameling?
   Bewijs: $rg(AB) \leq rg(B)$

   Vervangvraag:
   Gegeven een functie $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, bewijs dat er een matrix A bestaat zodanig dat $f_A = f$ (zie pagina 74 en verder!!)

3. Geef de definitie van een karakteristieke veelterm.
   Waarom hangt deze niet af van de matrix van de functie?
   Veralgemening van de dimensieformule: $dim(N(A)) + dim(K(A)) = n$(aantal kolommen) en bewijs.

   - Gram-schmidt
   - Bewijs van $dim(v + w)$
   - Voor t eigenvectoren met verschillende eigenwaarden is de verzameling $\{v_1, \cdots, v_t\}$ lineair onafhankelijk.

4. Bewijs dat de functie tussen $V/ker(f)$ en $Im(f)$ welgedefinieerd is en een lineaire afbeelding is.
   Geef de definitie van geometrische en algebrasche multipliciteit. En bewijs dat de geometrische kleiner of gelijk is aan de algebrasche multipliciteit.

3.3 Oefeningen

Hier zijn examenvragen van de vorige jaren. De theorie moet natuurlijk wel gekend zijn om dit examen te kunnen afleggen.

3.3.0.8 voorbeeldexamen gegeven begin december 2006

1. Zij $e_1, \ldots, e_n$ een geordende basis voor een K-vectorruimte V en zij $f_1, \ldots, f_m$ een geordende basis voor een K-vectorruimte W.
   Als A een (m, n)-matrix is dan bestaat er exact één lineaire afbeelding
   $$f : V \to W$$
   zodat de matrix van f ten opzichte van deze basissen gelijk is aan A. Bewijs dit. Formuleer de stelling waarop je steunt.
2. Zij V een eindigdimensionale vectorruimte en zij $f : V \to V$ een lineaire afbeelding. Toon aan :
   $$Ker(f) \cap Im(f) = 0 \Leftrightarrow Ker(f) + Im(f) = V$$
3. Zij $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ en $B \in M_{n,p}(\mathbb{R})$. Toon aan dat
   $$rg(A.B) \leq rg(A)$$

3.3.0.9 oplossingen voorbeeldexamen

1. zij $A = [a_{ij}]$ en stel
   $$w_1 = \sum_{j=1}^{m} a_{j1} f_j w_2 = \sum_{j=1}^{m} a_{j2} f_j \ldots w_3 = \sum_{j=1}^{m} a_{jn} f_j$$
   Dan bestaat er precies een lineaire afbeelding van V naar W zodanig dat $f(e_i) = w_i \forall i = 1, \ldots, n$
   Dus $f(e_i) == \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j$
   En dus $M(f) = A$
2. Zij $f : V \to V$ met $\dim(V) = n < \infty$
   $$dim(Im(f)+Ker(f)) = n \Leftrightarrow dim(ker(f) \cap Im(f)) = 0 Im(f)+ker(f) = V \Leftrightarrow Ker(f) \cap Im(f) = 0$$
3. $$rg(A.B) = rg(^tA.B) = rg(^tB.^tA) \leq rg(^tA) = rg(A)$$

3.3.0.10 December 2004

1. Beschouw de lineaire afbeeldingen
   $$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2x + 3z \\ x + y + z \\ 2x + z \end{pmatrix}.$$
   (a) Geef de matrix van de afbeelding f.
   (b) Geef een basis voor de kern en een basis voor het beeld van de afbeelding f.

(c) Is de afbeelding f injectief, surjectief, bijectief? Bewijs wat je beweert. Geef het voorschrift van de inverse functie, indien deze bestaat.

(d) Geef de eigenwaarden en een basis voor de bijhorende eigenruimten van de afbeelding f.

2. Beschouw de volgende drie vectoren in $\mathbb{R}^4$. Voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ zijn deze vectoren lineair afhankelijk?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

3.3.0.11 Juni 2005

1. Beschouw de volgende drie vectoren in $\mathbb{R}^4$. Voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ zijn deze vectoren lineair afhankelijk?

$$\begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ \alpha \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -5 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

2. Gegeven de $\mathbb{R}$-vectorruimten

$$V = \mathbb{R}[X]_3 \text{ en } W = \left\langle X^2+1, X \right\rangle \subseteq V.$$

Beschouw de vectoren $v_1, v_2, v_3 \in V$,

$$v_1 => X^3 + X^2 - X + 1 \; v_2 = 3X^2 + 2X + 1 \; v_3 = 2X^3 - X^2 + 1.$$

(a) Geef een basis $\mathcal{B}$ voor V/W.

(b) Zijn de vectoren $\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3} \in V/W$

i. lineair onafhankelijk? Bewijs je antwoord.

ii. voortbrengend? Bewijs je antwoord.

iii. basisvectoren? Bewijs je antwoord.

3. Beschouw de lineaire afbeeldingen

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} z \\ x \end{pmatrix}$$

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 3x+y \\ x+3y \\ 2x+2y \end{pmatrix}$$

(a) Geef de matrix van de afbeelding $g \circ f$ ten opzichte van de canonieke basissen.

(b) Geef een basis voor de kern en een basis voor het beeld van de afbeelding $g \circ f$.

(c) Is de afbeelding $g \circ f$ injectief, surjectief, bijectief? Bewijs wat je beweert. Geef het voorschrift van de inverse functie, indien deze bestaat.

(d) Geef de eigenwaarden en een basis voor de bijhorende eigenruimten van de afbeelding $g \circ f$.

4. We werken in de vectorruimte $\mathbb{R}[X]_3$. Beschouw volgende het volgend scalair product; we definiëren voor $f, g \in \mathbb{R}[X]_3$:

$$f \cdot g = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)dx.$$

   (a) Geef de matrix van deze bilineaire vorm ten opzichte van de basis $1, X, X^2, X^3$.

   (b) Geef met behulp van het Gram-Schmidt-orthonormalisatieprocédé een orthonormale basis (ten opzichte van dit scalair product) voor de deelruimte voortgebracht door de vectoren $1, X, X^2$.

3.3.0.12 September 2005

1. Beschouw de volgende drie vectoren in $\mathbb{R}^4$. Voor welke waarden van $\alpha \in \mathbb{R}$ zijn deze vectoren lineair afhankelijk?

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ \alpha \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte. Beschouw een lineaire afbeelding $f : V \longrightarrow V$ en $g : V \longrightarrow V$ Stel dat f eigenwaarde $\lambda \in \mathbb{R}$ heeft, en dat g eigenwaarde $\mu \in \mathbb{R}$ heeft. Wat kan men dan zeggen over eigenwaarden van $g \circ f$ in functie van λ en μ? Bespreek nauwkeurig en bewijs al je beweringen.

3. We werken in $\mathbb{R}$-vectorruimte in $\mathbb{R}^2$. Beschouw de afbeelding

$$f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (v, w) \longmapsto^t v \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} w,$$

   (a) Toon aan dat deze bilineaire afbeelding een inproduct is.

   (b) Zoek een orthonormale basis voor $\mathbb{R}^2$ ten opzicht van dit inproduct.

4. We werken in reële deelvectorruimte $\mathbb{R}^3$. Zij $W = \langle {}^t \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \subset \mathbb{R}^3$ een deelvectorruimte. Beschouw een lineaire afbeelding f

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x - y - z \\ -x + y - z \\ -x - y + z \end{pmatrix},$$

   en de afbeelding g

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3/W : v \longmapsto \overline{v}.$$

   (a) Geef de matrix van f ten opzichte van de canonieke basissen.

   (b) Bereken de eigenwaarden λ van f en geef een basis van elke eigenruimte V_λ.

   (c) Geef een basis $\mathcal{B}$ van de quotiëntvectorruimte $\mathbb{R}^3/W$.

   (d) Geef een matrix van $g \circ f$ ten opzichte van de canonieke basis van $\mathbb{R}^3$ en de zelfgekozen basis $\mathcal{B}$ van $\mathbb{R}^3/W$.

3.3.0.13 September 2006

1. Stel $W := \{f \in \mathbb{R}[X] \mid f^{(3)} = 0\}$.
   (a) Bepaal de veeltermen die in W zitten expliciet.
   (b) Is W een deelruimte van $\mathbb{R}[X]$? (Motiveer je antwoord.)
2. We beschouwen de vectorruimten
   $$V_1 = \mathbb{R}_1[X] \qquad V_2 = \mathbb{R}_2[X] \qquad V_3 = \mathbb{R}$$
   met de respectievelijke geordende basissen
   $$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & X \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 1 & X & X^2 \end{bmatrix} \qquad B_3 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}$$
   en we definiëren de volgende functies (met $\lambda \in \mathbb{R}$):
   $$V_1 \xrightarrow{\phi_1} V_2 \xrightarrow{\phi_2} V_3 \qquad \phi_1(F) := \int_0^x F(x)\,\mathrm{d}x \qquad \phi_2(G) := G(\lambda)$$
   (a) Bepaal de matrices van ϕ_1, ϕ_2 en $\phi_2 \circ \phi_1$.
   (b) Waar komt $\phi_2 \circ \phi_1$ op neer?
3. Stel V een vectorruimte met een inproduct $\langle -, - \rangle : V^2 \to V$. $\langle -, - \rangle$ bepaalt de normafbeelding $\|-\| : V \to \mathbb{R}$ via $\|v\| := \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Het is mogelijk om het inproduct te reconstrueren met als enige gegeven de functie $\|-\|$. Stel $v, w \in V$. Schrijf dan $\langle v, w\rangle$ in functie van de norm.
4. Geef een matrix $X \in GL_3(\mathbb{R})$ die voldoet aan:
   $$X^{-1}AX = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

3.3.0.14 Januari 2007

1. Stel A, $B \in M_n(K)$. Veronderstel dat A regulier is. Toon aan :
   $$A + B \text{ is regulier} \Leftrightarrow I_n + B.A^{-1} \text{ is regulier}$$
2. Stel in $\mathbb{R}^3$:
   $$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$
   Dan is $\langle b_1, b_2\rangle = \langle b_1', b_2'\rangle := V$. Beschouw de lineaire afbeelding $f : V \to \mathbb{R}_2[X]$ gegeven door:
   $$f(b_1) = 5X^2 - 5Xf(b_2) = -2X^2 + 2X$$
   (a) Geef de matrix van f t.o.v. de geordende basissen $B = \{b_1, b_2\}$ in V en $C = \{X^2 + X + 1, X^2 + X, X^2 + 1\}$ in $\mathbb{R}_2[X]$.
   (b) Bereken de matrix van de lineaire afbeelding t.o.v. twee andere basissen : $B' = \{b_1', b_2'\}$ en $C' = \{X^2, X, 1\}$.
   (c) Bepaal $\mathrm{Ker}(f)$ en $\mathrm{Im}(f)$

3. We werken in de reële vectorruimte $\mathbb{R}^4$.
   (a) Geef de karakteristieke veelterm van A.
   (b) Bereken de eigenruimte voor eigenwaarde -2.
   (c) Welke eigenwaarde is cruciaal met betrekking tot de diagonaliseerbaarheid van A ? (Motiveer je antwoord.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Stel V een n-dimensionele reële vectorruimte, met het canonieke inproduct $\langle -, - \rangle$, en $A \in M_n(\mathbb{R})$. Bewijs de volgende stelling :

$$^tA.A = I_n \Leftrightarrow \forall v, w \in V : \langle A.v, A.w \rangle = \langle v, w \rangle$$

5. Is deze uitdrukking waar of onwaar ? (Motiveer je antwoord.)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ (lineair en niet nul) is injectief} \Leftrightarrow n = 1$$

3.3.0.15 September 2007

1. (a) Geef een voorbeeld van een lineaire functie van $\mathbb{R}^3$ naar $\mathbb{R}^2$ waarvoor de dimensie van de kern 2 is.
   (b) Stel U, V en W eindig dimensionale vectorruimeten en $f : U \to V$ en $g : V \to W$ lineaire afbeeldingen. Bewijs dan dat :

$$\dim(\mathrm{Im}(f) \cap \mathrm{Ker}(g)) = \dim(\mathrm{Im}(f)) \text{ - } \dim(\mathrm{Im}(g \circ f))$$

   Hint : Stel $\mathrm{Im}(f) := V'$.

2.
$$A_n = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$p_n = (-1)^n(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1\lambda + a_0)$$

   (a) Bewijs per inductie dat de karakteristieke veelterm van de bovenstaande matrix A_n gelijk is aan p_n.
   (b) Stel $n = 2$, geef dan één voorbeeld waarbij A_2 diagonaliseerbaar is en één voorbeeld waarbij A_2 niet diagonaliseerbaar is.
   (c) Wat zijn de mogelijke dimensies van de kolommenruimte van A_n ? (Motiveer je antwoord.)

3. (a) Bewijs dat een inproduct $f : V \times V \to \mathbb{R}$ steeds niet ontaard is.
   (b) Vul aan : de samenstelling $g \circ f$ van een inproduct $f : V \times V \to \mathbb{R}$ met een lineaire afbeelding $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is terug een inproduct als en slechts als $\ddots$.

3.3.0.16 Januari 2007

1. Stel $A, B \in M_n(K)$. Veronderstel dat A regulier is. Toon aan:
   $A + B$ is regulier $\iff I_n + B.A^{-1}$ is regulier.

2. Stel in $\mathbb{R}^3$:

$$b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \\ -7 \end{bmatrix} \qquad b_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad b_1' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad b_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

   Dan is $< b_1, b_2 >=< b_1', b_2' >:= V$. Beschouw de lineaire afbeelding $f : V \to \mathbb{R}_2[X]$ gegeven door:

$$f(b_1) = 5X^2 - 5X \;\; f(b_2) = -2X^2 + 2X$$

   (a) Geef de matrix van f t.o.v. de geordende basissen $B = \{b_1, b_2\}$ in V en $C = \{X^2 + X + 1, X^2 + X, X^2 + 1\}$ in $\mathbb{R}_2[X]$.

   (b) Bereken de matrix van de lineaire afbeelding t.o.v. twee andere basissen: $B' = \{b_1', b_2'\}$ en $C' = \{X^2, X, 1\}$.

   (c) Bepaal $Ker(f)$ en Im(f).

3. We werken in de reële vectorruimte $\mathbb{R}^4$.

   (a) Geef de karakteristieke veelterm van A.

   (b) Bereken de eigenruimte voor de eigenwaarde -2.

   (c) Welke eigenwaarde is cruciaal met betrekking tot de diagonaliseerbaarheid van A? (Motiveer je antwoord.)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Stel V een n-dimensionale reële vectorruimte, met het canonieke inporduct $< -, - >$, en $A \in M_n(\mathbb{R})$. Bewijs de volgende stelling:

$$A^T.A = I_n \iff \forall v, w \in V :< A \centerdot v, A \centerdot w >=< v, w >$$

5. Is deze uitdrukking waar of onwaar? (Motiveer je antwoord.)

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \text{ (linear en niet nul) is injectief} \Leftrightarrow n = 1$$

3.3.0.17 Januari 2009

1. Stel V een vectorruimte, I een verzameling en W_i een deelruimte van V, voor elke $i \in I$. Bewijs dat de verzameling $\bigcap_{i \in I} W_i$ een deelruimte van V is.

2. Stel $V = \{F \in \mathbb{R}[X] | gr(F) \leq 2\}$. Beschouw voor een willekeurige $c \in \mathbb{R}_0$ de afbeelding $f : V \to \mathbb{R} : F \mapsto F(c) \quad (0 \in V)$

   (a) Bewijs dat f lineair is.

   (b) Geef een basis voor $Ker(f)$ en $Im(f)$.

3. Bepaal de matrix t.o.v. de canonieke basis van de lineaire afbeelding $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 : \underline{x} \mapsto sp(\underline{x})$ die een vector $\underline{x} \in \mathbb{R}^2$ afbeeldt op zijn spiegelbeeld t.o.v. de rechte L door de oorsprong en met de richtingsvector $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

4. Stel $A \in M_{m,n}(\mathbb{R}), v \in N(A), w \in K({}^tA)$. Bewijs dat v en w orthogonaal zijn (t.o.v. het canonieke inproduct).

5. Bereken de eigenwaarden en de bijhorende eigenruimten van de matrix A. Geef indien mogelijk een omkeerbare matrix T zodat $T^{-1}AT$ een diagonaalmatrix is of leg uit waarom zo'n matrix niet bestaat.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.3.0.18 September 2010

1. Goed of fout: Stel A, B en C deelverzamelingen van een overkoepelende (niet lege) verzameling, waarbinnen we de complementen beschouwen. Dan geldt:

$$[(A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)]^c \cap (A \cup B) \subseteq C$$

2. Bespreek het onderstaande stelsel (met $a, b, c \in \mathbb{R}$)

$$\begin{cases} x + by + z = 1 \\ ax + y + z = 1 \\ x + cy + z = 1 \end{cases}$$

3. Ga na of de verzameling $V := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x + y + z = 1\}$, uitgerust met de bewerkingen zoals hieronder gedefinieerd, een vectorruimte is

$$\begin{aligned} (x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2) &:= (x_1 + x_2 - 1, y_1 + y_2, z_1 + z_2) \\ r.(x, y, z) &:= (rx - r + 1, ry, rz) \qquad (\forall r \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

4. Beschouw de functie $\phi : M_{2,2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[X]$, gegeven door

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + c + (d + c)X + (b - a)X^2 + aX^3$$

Toon aan dat ϕ een bijectieve lineaire afbeelding is. Kies basissen voor $M_{2,2}(\mathbb{R})$ en $\mathbb{R}_3[X]$ zodat de matrix van ϕ t.o.v. deze basissen de eenheidsmatrix wordt. Beargumenteer je werkwijze.

5. Bereken de eigenwaarden en de bijhorende eigenruimten van de matrix A. Geef indien mogelijk een omkeerbare matrix T zodat $T^{-1}AT$ een diagonaalmatrix is, of leg uit waarom zo een matrix niet bestaat.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & -6 & 0 & -6 \end{bmatrix}$$

Chapter 4

Algemene fysica

4.1 De cursus, het vak, het examen

Het theorie examen Algemene Fysica gebeurt mondeling, met schriftelijke voorbereiding. Iedereen krijgt dezelfde drie vragen, en na een aantal uren moet je je mondeling gaan verdedigen bij Prof. Dr. Van Tendeloo. Als je iets niet meer volledig weet, mag je één minuut in een (blanco) cursus kijken, en daarna verder werken. Er zal altijd één vraag i.v.m. Dynamica en één vraag i.v.m. Toestandsvergelijkingen en Kinetische Gastheorie bijzitten. Probeer altijd de praktische inzichten aan de theorie te koppelen.
De cursus van dit vak is veel dikker dan die van de wiskundige vakken. Dit heeft natuuurlijk ook wel een invloed op de mannier waarop je je cursus moet kennen. Daar waar bij alle wiskundige vakken het nodig is om je cursus volledig tot in de kleinste details van buiten te kennen is dat hier iets minder. Dit moet je wel opnemen met een korreltje zout, je moet heel hard werken voor dit vak, en het ook beter kennen dan eender welk ander vak in het middelbaar. Zoals jullie al gezien hebben in de test in het midden van het semester wil professor Van Tendeloo zeker nagaan of je de basics (behoudswetten, wetten van Newton, etc.) van het vak kent.
Het oefeningen examen Algemene Fysica bestaat uit het schriftelijk oplossen van theoretische vraagstukken. Je mag je zakrekentoestel gebruiken. Het gaat niet om rekenvraagstukken, maar om theoretische afleidingen, die nadien toegepast kunnen worden op een getallenvoorbeeld. De oefeningen van het oefeningenexamen zijn vrij gelijkaardig met de oefeningen die gemaakt werden gedurende het semester.
De oefeningen en de theorievragen zijn specifiek gericht op de wiskunderichting. In het algemeen zijn de theorievragen ongeveer dezelfde voor Wiskunde en Fysica. Per groep die de examens tegelijkertijd aflegt, worden er aparte examens opgegeven.
Het is al jaren een zekere tendens om dit vak niet te gaan afleggen en te wachten tot in het tweede semester omdat je je niet zeker voelt van het resultaat. Sta mij toe om dit ten zeerste af te raden, voor dit vak, en voor alle andere vakken. Ik garandeer niet dat je erdoor zult zijn, maar dan heb je later toch al veel minder last van spijt als je in tweede zit ziet dat dit vak uiteindelijk toch wel best meevalt. Ik zou het niet als tijdverlies beschouwen om toch maar eens te gaan proberen, wie weet ...

4.2 Theorie

- Kinematica
  - Harmonische trillingen
  - Doppler-effect
- Dynamica
  - Alle definities
  - Wetten van Kepler
  - Waterstofatoom van Bohr
  - Newton: theorie en toepassingen
- Hydrostatica
  - Alle definities
  - Overdruk in een zeepbel
  - Formule van Laplace
  - Oppervlakte-energie en -spanning: drie methoden om oppervlaktespanning te berekenen, het verband tussen oppervlakte-energie en -spanning, Terquem
- Hydrodynamica en Viscositeit
  - Formule van Bernouilli
  - Viscositeit
  - Laminaire en turbulente stroming
  - Wet van Poiseuille en toepassingen
- Warmte en -transport (Thermodynamica)
  - Molecuulmodel voor een ideaal gas
  - Thermische agitatie als gevolg van de anharmoniciteit van de roostertrillingen
  - Einstein en Debeye-model
  - Warmtetransport
- Toestandsvergelijkingen en Kinetische Gastheorie
  - Wilsonkamer en bellenvat
  - Molecuulmodel van een ideaal gas
  - Vrije weglengte
  - Maxwell-verdeling
  - Einstein-Schmoluchowski theorie der Brownse beweging
  - Zelfdiffusie
  - Verband tussen diffusiecoëfficiënt en Boltzmann-constante.
  - Het getal van Avogadro (N_A): alles.

4.2.0.19 Januari 1994

Groep 1 :

1. Beschouw een vallende regendruppel, waarbij wrijving door de lucht een rol speelt. Toon aan dat de snelheid na voldoende lange tijd constant wordt. Definieer het begrip relaxatietijd.
2. Bereken de druk in een bewegend (ideaal) fluïdum. Hoe meet je die?
3. Definieer de soortelijke warmte. Hoe varieert die als functie van de temperatuur?

Groep 2 :

1. Hoe meet je de uitstroomsnelheid van een gas? Hoe meet je de viscositeit van een vloeistof?
2. Definieer de volume-uitzettingscoëfficiënt. Geef een uitdrukking voor de volumeverandering als functie van het temperatuursverschil.
3. Definieer de diffusiecoëfficiënt D. Geef een uitdrukking voor de diffusiecoëfficiënt D als functie van microscopische grootheden. Hoe varieert D als functie van druk en temperatuur? Bestaat er een betrekking tussen de diffusiecoëfficiënt en de Boltzmanconstante?

4.2.0.20 September 1994

1. Atoommodel van Bohr. Wat is het? Basisveronderstellingen en benaderingen? Kan je het model experimenteel bevestigen? Hoe verandert de energie van een elektron als functie van de afstand tot de kern?
2. Bereken de stijghoogte van het vrije vloeistofoppervlak in de nabijheid van een vlakke wand.
3. Definieer de viscositeitscoëfficiënt η. Geef een uitdrukking voor de viscositeitscoëfficiënt η als functie van microscopische grootheden. Hoe varieert η als functie van druk en temperatuur?

4.2.0.21 Januari 1995

Groep 1 :

1. Atoommodel van Bohr. Wat is het? Basisveronderstellingen en benaderingen? Kan je het model experimenteel bevestigen? Hoe verandert de energie van een elektron als functie van de afstand tot de kern?
2. Definieer de circulatie van een vectorveld en bereken de hydrodynamische stuwkracht op een (vereenvoudigde) vliegtuigvleugel.
3. Welke manieren ken je om het getal van Avogadro N_A te bepalen? Hoe definieer je vrije weglengte en hoe meet je deze?

Groep 2 :

1. Beschrijf de variatie van de zwaarteversnelling met de breedteligging op aarde. Waarom geeft die afleiding niet het correcte resultaat, t.t.z. welke benadering heb je gemaakt?
2. Definieer de soortelijke warmte. Hoe meet je die? Hoe verloopt de soortelijke warmte als functie van de temperatuur? Bespreek de betrekking $C_V = 3 \cdot N_A \cdot k$.
3. Welk verband bestaat er tussen de diffusiecoëfficiënt D en de Boltzmann-constante k?

4.2.0.22 September 1995

1. Bespreek volledig het Doppler-effect.
2. Beschouw een vallende regendruppel, waarbij wrijving door de lucht een rol speelt. Bespreek volledig en definieer het begrip relaxatietijd.
3. Naar keuze: Maxwell-verdeling of thermische geleidingscoëfficiënt.

4.2.0.23 Januari 1996

1. Geef de bewegingsvergelijkingen voor een harmonische trilling, uitgaande van het behoud van energie. Waarom kan een model van harmonische trilling geen warmteuitzetting in een vaste stof verklaren?
2. Bereken de kracht op de wand van een vat dat een stilstaande vloeistof bevat, zonder rekening te houden met oppervlakte-effecten.
3. Definieer het getal van Avogadro N_A. Hoe bereken je N_A en bespreek de nauwkeurigheid van de verschillende methoden.

4.2.0.24 Januari 2000

1. De valversnelling g varieert zowel met de hoogte boven de aarde als met de breedteligging op de aarde. Toon dit aan en geef een uitdrukking voor de zwaarteversnelling op een bepaalde breedteligging φ als de zwaarteversnelling aan de evenaar gekend is.
2. Hoe meet je de snelheid van een gas (twee manieren)?
3. De Einstein-Schmoluchowski theorie der Brownse beweging. Wat is een "Brownse beweging"? Wat zijn de basisveronderstellingen voor de berekening? Toon aan dat de kwadratische verplaatsing lineair toeneemt met de tijd. Wat kan je hiermee aanvangen?

4.2.0.25 Januari 2001

1. Beschouw een vallende regendruppel, waarbij wrijving door de lucht een rol speelt. Bespreek het snelheidsverloop volledig en definieer het begrip relaxatietijd.
2. Bespreek oppervlakte-energie en spanning volledig, en bespreek ook de methode van Terquem.
3. Geef en beschouw volledig de Einstein-Schmoluchowski theorie der Brownse beweging.

4.2.0.26 Januari 2003

1. Hydrostatica:
   - Wat is oppervlaktespanning?
   - Wat is het verschil met oppervlakte-energie?
   - Hoe meet je de oppervlaktespanning? (uitwerken)
2. Hydrodynamica:
   Hoe meet je de viscositeit?
   - van water
   - van olie

3. Kinetische gastheorie:
   - Welke zijn de basisonderstellingen van de kinetische gastheorie?
   - Bewijs dat de totale energie van een deeltje binnen de kinetische gastheorie enkel van de temperatuur afhangt.

4.2.0.27 Januari 2005

1. Kinematica:
   - Wat is het Doppler effect?
   - Hoe verandert de periode van een signaal als een waarnemer met snelheid v naar de bron toe beweegt?
   - Zijn die formules algemeen geldig (Bij snelheden boven de snelheid van het geluid/licht)
2. Hydrostatica:
   - Wat is de grondformule van de hydrostatica?
   - Hoe vereenvoudigt die formule zich als alleen maar de gravitatiekracht in rekening wordt gebracht?
   - Hoe wordt die formule aangepast als de vloeistof niet in rust, maar in beweging is?
3. Kinetische gastheorie:
   - Hoe definieer je de diffusiecoëfficiënt?
   - Geef een microscopische afleiding van die diffusiecoëfficiënt D.
   - Bespreek het resultaat (Laat toe het getal van Avogadro te bepalen).

4.2.0.28 Januari 2006

1. Dynamica:
   - Formuleer de drie behoudswetten
   - Hoe vertalen die behoudswetten zich naar het formalisme van Lagrange?
   - Wat is een conservatief krachtveld?
   - Toon aan dat in een conservatief krachtveld de mechanische energie bewaard blijft.
2. Hydrostatica:
   - Definieer ,, oppervlaktespanning " en ,,oppervlakte energie"
   - Welke methodes heb je om oppervlaktespanning te meten? (de derde methode is kijken naar de hoogte van een vloeistof in een capillaire buis)
   - Welke methode pas je wanneer toe?
3. Kinetische gastheorie:
   - Definieer de diffusiecoëfficiënt
   - Hoe varieert die diffusie coëfficiënt met de druk en de temperatuur?
   - Is er een verband met de mobiliteit?

4.2.0.29 Augustus 2006

1. Dynamica:
   - Wat is het atoommodel van Bohr?
   - Welke veronderstellingen (of postulaten) heb je nodig om af te leiden dat de baandiameter niet willekeurig is?
   - Hoe verandert de energie van een elektron als functie van de afstand tot de kern?
   - Hoe verifieer je of het model correct is?
2. Hydrostatica:
   - Definieer ,, oppervlaktespanning " en ,,oppervlakte energie"
   - Welke methodes heb je om oppervlaktespanning te meten? (de derde methode is kijken naar de hoogte van een vloeistof in een capillaire buis)
   - Welke methode pas je wanneer toe?
3. Kinetische gastheorie:
   - Definieer het begrip ,, vrije weglengte "
   - Wat betekend ,, Maxwell verdeling in de kinetische gastheorie "
   - Hoe bepaal je het getal van Avogadro?

4.2.0.30 Januari 2007

1. Dynamica
   - Formuleer de drie behoudswetten (en hun beperkingen).
   - Wat is een conservatief krachtveld ?
   - Toon aan dat voor een conservatief krachtveld de totale mechanische energie bewaard blijft.
2. Hydrodynamica
   - Definieer de viscositeitco"efficient.
   - Hoe verloopt, bij laminaire stroming, de snelheid van een vloeistof door een cylindrische buis als functie van de afstand tot het centrum ?
3. Warmteleer
   - Definieer soortelijke warmte.
   - Hoe verloopt de soortelijke warmte als functie van de temperatuur ?
   - Welke verschillende benaderingen laten toe die soortelijke warmte te berekenen ?
   - Hoe bepaal je experimenteel de soortelijke warmte ?

4.2.0.31 Januari 2009

1. Definieer het Doppler effect en bereken de frequentieverschuiving voor een waarnemer die beweegt naar een bron die in rust is.
2. Hoe benvloedt het feit dat de zon niet als oneindig zwaar kan beschouwd worden de de beweging van de aarde om de zon? Definieer het begrip 'gereduceerde massa'.
3. Wat is oppervlaktespanning? Welke verschillende manier heb je om de oppervlaktespanning te meten?

4.2.0.32 Augustus 2009

1. **"Atoommodel van Bohr"**
   - Wat zijn de basis aannames?
   - Toon aan dat de afstand van de kern tot het elektron niet willekeurig is.
   - Hoe verloopt de energie van een elektron als functie van de afstand tot de kern?
   - Hoe kan je experimenteel verifieren of de afleiding correct is?
   - Wat wordt bedoelt met "massacentrum correctie"'?
2. **Hydrostatica: de formule van Laplace**
   - Wat drukt deze wet uit?
   - Geef de afleiding.
   - Houdt deze wet rekening met cappilaire opstijging?
3. **Grondformule van de hydrodynamica**
   - Wat drukt deze grondformule uit?
   - Geef de afleiding (en de beperkingen).

4.2.0.33 Januari 2010

1. Definieer het Doppler effect en bereken de frequentieverschuiving voor een waarnemer die beweegt naar een bron die in rust is.
2. Definieer het begrip 'gereduceerde massa'. Welke snelheid is nodig om aan de aarde te ontsnappen? Welke snelheid heeft een satelliet in een baan om de aarde?
3. Wat is oppervlaktespanning? Welke verschillende manieren heb je om de oppervlaktespanning te meten?

4.3 Oefeningen

4.3.0.34 Januari 1994

1. Een houten kubus met zijde $0,1\ m$, en dichtheid $500\ kg/m^3$, drijft op water in een bekerglas. Men voegt olie toe ($\rho_0 = 800\ kg/m^3$) tot de olie $0,04\ m$ onder het bovenvlak van de kubus staat. Hoe groot is de druk aan de onderzijde van de kubus? ($p_{atm} = 10^5\ Pa$)

2. Een spoorwegbufferveer heeft een krachtsconstante $k = 24 \cdot 10^7\ N/m$. Een trein van 5000 ton rolt tegen de buffer en drukt deze daarbij 15 cm in. Met welke snelheid raakte de trein de buffer?

3. Een stalen bol met massa m_1 hangt aan een touw met lengte l. De bol wordt vanuit horizontale positie losgelaten. Op zijn laagste punt botst hij tegen een stalen bol met massa m_2. Veronderstel een elastische botsing van de bollen; bereken de respectievelijke snelheden van de bollen juist na de botsing en de hoogtes die ze bereiken. Veronderstel een volledig inelastische botsing van de bollen; welke hoogte bereikt het massacentrum na de botsing?

4. Een bol met straal r en dichtheid ρ_b valt van 1 m hoogte in een olie met viscositeit η en dichtheid p_0. Tot welke snelheid zal de viskeuze wrijvingskracht (Wet van Stokes) de bol afremmen?

5. Een cilindrisch vat heeft een diameter van $0,10\ m$ en een hoogte van $0,20\ m$. Aan de basis is een holte van 1 cm^2 aangebracht. Er loopt water in het vat met een snelheid van $1,4 \cdot 10^{-4}\ m^3/s$. Bepaal de hoogte tot waar het water zal stijgen in het vat.

4.3.0.35 September 1994

1. Een variabele kracht F is gericht volgens de raaklijn van een wrijvingsloos cilindrisch oppervlak met straal R. Door de kracht te variëren wordt een blok met massa m langs het oppervlak bewogen terwijl een veer met krachtsconstante k vanuit positie 1 naar positie 2 wordt uitgetrokken. Bereken de arbeid geleverd door de kracht F.

2. Twee ringen met respectievelijke massa's $m_1 = 2,0\ kg$ en $m_2 = 5,0\ kg$ bewegen zonder wrijving op een horizontale staaf. De lichtste ring heeft een snelheid van 17 m/s en haalt de andere ring in die een snelheid heeft van 3 m/s. Aan de zware ring is langs de kant waarlangs de lichtste ring nadert een veer bevestigd met $k = 4480\ N/m$. Hoever wordt de veer ingedrukt bij botsing van twee deeltjes? Wat zijn de snelheden na de botsing?

3. Een rubberen (kinder)ballon met een massa van $2,5\ g$ is gevuld met helium met een dichtheid van $0,33\ kg/m^3$. De ballon is sferisch, met een straal van 12 cm. Een lang katoenen touwtje met een massa van 2 g hangt aan de onderkant van de ballon. Aanvankelijk ligt het touwtje op de grond, maar wanneer de ballon opstijgt, trekt het het touwtje mee, en strekt het het uit. Op welke hoogte zal de ballon ophouden met stijgen, omwille van het gewicht van het touwtje? ($\rho_{lucht} = 1,29\ kg/m^3$)

4. Hydraulische pers. Toon aan dat

$$F_2 = \frac{S_2}{S_1} \cdot F_1$$

gebruik makend van de Wet van Bernouilli.

4.3.0.36 Januari 1995

1. De figuur (op bord) stelt een betonnen dammuur voor ($\rho_{beton} = 3000\ kg/m^3$). De muur is 12 m hoog en de lengte van de muur — loodrecht op de figuur — is 30 m. Zoek de minimumwaarde voor de dimensie x, als de muur niet mag kantelen om een punt o, bij een waterniveau van 10 m.

2. In de ruimte, ver van de invloed van de aarde of andere hemellichamen, worden twee massa's geplaatst op $40,0\ m$ uit elkaar, en los gelaten. Als $m_1 = 50,0\ kg$ en $m_2 = 100,0\ kg$, wat is dan de snelheid van elke massa als de onderlinge afstand nog $20,0\ m$ bedraagt; wat is dan de relatieve snelheid van de massa's?

3. Een ijsblokje van 50 g komt uit een diepvriezer bij $-10°C$ en wordt in een glas water van $0°C$ gegooid. Hoeveel water vriest vast aan het ijsblokje?

4. Een stalen benzinetank (hoogte 30 cm, lengte 60 cm, breedte 60 cm) drijft met een diepgang van 20 cm in water. De tank wordt gevuld met $1,2\ l$ benzine (dichtheid 730 kg/m^3). Zal de gevulde tank nog drijven? Verwaarloos het volume van het staal.

5. Het vat voorgesteld in de figuur (op bord) is bovenaan hermetisch gesloten. De hoogte van het vat is 4 m, de diameter $1,5\ m$. Het bevat water tot op een niveau van $3,5\ m$ waarboven een druk heerst van 2 atm. Wat is de initiële snelheid van het water dat de buis verlaat? Op welk niveau houdt het water op met stromen?

4.3.0.37 September 1995

1. Een planetoïde met massa m nadert een ster met massa M vanop grote afstand, zoals voorgesteld op de figuur (op bord). Wat is de kortste afstand van nadering tussen planetoïde en ster?

2. Een 100 g wegende houten schijf schuift over een wrijvingsloos oppervlak en botst tegen een tweede schijf die in rust is. Na de botsing beweegt de eerste schijf onder een hoek van $90°$ met haar oorspronkelijke bewegingsrichting en de tweede onder een hoek van $20°$ met het originele pad van de eerste schijf. Als de botsing volledig elastisch is, wat is dan de massa van de tweede schijf?

3. Een massa m_1 bevindt zich op een geheld wrijvingsloos oppervlak dat een hoek α maakt met de horizontale. Bovenaan de helling loopt de koord over een wiel en een tweede massa m_2 hangt loodrecht naar beneden aan het andere uiteinde van de koord. Berken in functie van m_1 en m_2 de versnelling van beide massa's en de spankracht van de koord.

4. 1 l water wordt $10°C$ onderkoeld (en bevindt zich dus bij $-10°C$). Door het inwerpen van 20 g ijs bij $0°C$ bevriest een deel van het water ogenblikkelijk. Hoeveel g ijs wordt gevormd, en welke temperatuur heeft dit ijs?

5. Een houten bolletje wordt op 2 m boven een wateroppervlak losgelaten. Bereken tot op welke diepte het bolletje zinkt als het een dichtheid ρ_h heeft van 700 kg/m^3 en een straal $r = 0,02\ m$. Verwaarloos wrijving.

4.3.0.38 Januari 1996

1. Een eskimo zit bovenop de top van zijn half bolvormige iglo (straal R). Door een klein duwtje begint hij naar beneden te glijden (verwaarloos wrijving). Tot in welk punt blijft de eskimo in contact met het ijsoppervlak? Op welke afstand van de iglo komt hij op de grond terecht?

2. Veronderstel dat men een tunnel zou (kunnen) boren die Antwerpen en New York langs een rechte lijn met elkaar verbindt. De afstand tussen beide steden — gemeten langs het (gekromde) aardoppervlak — is 5880 km. Een wagentje rolt vanuit rust de tunnel in, over een wrijvingsloos spoor. Wat is de maximale snelheid die het wagentje bereikt in de tunnel in de veronderstelling dat de aarde een homogene dichtheid heeft. Als een meer realistische dichtheidsverdeling — d.w.z. hogere ρ in centrum — in rekening gebracht zou worden, zou je dan een grotere, kleinere of dezelfde snelheid vinden? Gegeven wordt: straal aarde $R_A = 6371\ km$, massa aarde $M_A = 5,9737 \cdot 10^{24}\ kg$.

3. Een blok met massa m wordt op de schuine zijde van een wig met massa M gelegd, die op haar beurt over een horizontale tafel kan glijden (zie figuur (op bord)). De schuine zijde van de wig maakt een hoek α met de horizontale en alle oppervlakken (van tafel, wig en blok) zijn wrijvingsloos. Als het systeem aanvankelijk in rust is met hoekpunt P van het blok op een hoogte h boven de tafel, wat zijn dan de snelheden van blok en wig op het moment dat het hoekpunt P de tafel raakt? Pas toe voor $m = 0,25\ kg$, $M = 1\ kg$ en $\alpha = 30°$.

4. Wat is het eindresultaat wanneer men $0,12\ kg$ ijs van $0°C$ en $1\ kg$ aluminium van $600°C$ samenvoegt in een calorimeter met een verwaarloosbare warmtecapaciteit? Gegeven wordt:
$c_{ijs} = 2100\ J/kgK$
$c_w = 4187\ J/kgK$
$c_{stoom} = 2010\ J/kgK$
$L_{sm} = 3,349 \cdot 10^5\ J/kg$
$L_v = 2,257 \cdot 10^6\ J/kg$
$c_{Al} = 908,5\ J/kgK$

5. Een "waterraket" bestaat uit een cilindervormig vat (oppervlakte grondvlak $S_1 = 100\ cm^2$, hoogte $H = 10\ cm$), met aan de onderzijde een kleine opening ($S_2 = 0,1\ cm^2$). Aanvankelijk is het vat voor de helft gevuld met water en voor de andere helft met gecompresseerde lucht (druk p_0), en afgesloten met een stop. Hoe groot moet de initiële druk p_0 minstens zijn opdat de raket de grond zou verlaten onmiddellijk na het verwijderen van de stop? Hoe groot moet p_0 minstens zijn opdat de raket de grond "ooit" zou verlaten (d.w.z. voor al het water uit het vat gestroomd is)? De massa M van het lege vat is 10 g. Veronderstel een constante temperatuur.

4.3.0.39 Januari 2001

1. Een eskimo zit bovenop de top van zijn half bolvormige iglo (straal R). Door een klein duwtje begint hij naar beneden te glijden (verwaarloos wrijving). Tot in welk punt blijft de eskimo in contact met het ijsoppervlak? Op welke afstand van de iglo komt hij op de grond terecht?

2. Een bimetaal bestaat uit een plaatje Invar-staal ($\alpha = 9 \cdot 10^{-7}\ °C^{-1}$) en een aluminium plaatje ($\alpha = 24 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$). Elk van beide plaatjes heeft een dikte $d = 0,1\ mm$ en een lengte $l = 10\ cm$. Bereken de zijwaartse verplaatsing van het uiteinde van dit bimetaal bij een temperatuurstoename $\Delta T = 10°C$. Vergelijk de gevonden verplaatsing met de verplaatsing (lengteverandering) die een afzonderlijk Al-plaatje (zelfde afmetingen) zou opleveren. [1]

[1] Hints. De vervormde plaatjes vormen concentrische cirkelbogen. Veronderstel verder dat het midden van elk van de plaatjes — d.i. op afstand $d/2$ van het midden van het bimetaal — zijn "normale" thermische uitzetting uitvoert, terwijl op andere plaatsen ten gevolge van spanningen een andere lengteverandering optreedt.

3. Twee zeer grote open vaten, A en F, bevatten beide dezelfde vloeistof. Een horizontale buis BCD wordt bevestigd aan de bodem van vat A en bevat een vernauwing bij C. Een verticale buis E wordt bevestigd aan de vernauwing in C en leidt vloeistof naar vat F. Veronderstel een normale stroom en geen viscositeit. Als de dwarsdoorsnede in C de helft bedraagt van de dwarsdoorsnede in D en als D zich bevindt op een afstand h_1 onder het vloeistofniveau in A, tot welke hoogte h_2 zal de vloeistof dan stijgen in buis E? Druk je antwoord uit in termen van h_1 en verwaarloos de verandering van atmosferische druk met de hoogte.

4. Een vrouw tilt een massa M op met behulp van een katrol, geplaatst ter hoogte van haar hand. Haar voorarm is $f = 24\ cm$ lang, en haar biceps spieren zijn daaraan bevestigd op $a = 3\ cm$ van de elleboog. Bereken de spanning T in haar biceps als haar bovenarm en voorarm hoeken ϑ en φ maken t.o.v. de verticale. Als ze $\vartheta = \varphi$ houdt, zal het tillen van de massa dan gemakkelijker of moeilijker gaan?

4.3.0.40 Januari 2005

1. Een sferisch, uitrekbaar ballonnetje (massa $1g$) wordt gevuld met heliumgas (dichtheid $0.18kg/m^3$) wordt tot het een straal van $15cm$ heeft, en wordt vastgeknoopt aan een touwtje ($6m$ lang en $20g$ zwaar). De ballon wordt gevuld en "losgelaten" in normale omstandigheden (lucht met dichtheid $1.29kg/m^3$, geen wind, geen lekken). Hoe gedraagt hij zich?
   Wat later slaat het weer om : de temperatuur blijft gelijk, maar de luchtdruk neemt met 5% toe. Wat gebeurt er met de ballon?

2. Je doet een experiment om de smelttemperatuur van ijzer te meten. Een calorimeter met waterwaarde $34g$ met $200ml$ water is op $0°C$. Dan worden er twee stoffen bijgevoegd : $100g$ ijs op $-20°C$ en $170g$ ijzer dat net gestold is. Het geheel bereikt een nieuw thermisch evenwicht bij $50°C$. Bereken de smelttemperatuur van ijzer.
   Je weet dat ijzer (Fe) een soortelijke warmte heeft van $0.109cal/K\ g$, atoomnummer 26 en molaire massa van 55.845.

3. Een bol met massa M, opgehangen aan een touw met lengte l, wordt losgelaten vanuit horizontale positie. Er bevindt zich een nagel op een afstand d recht onder het ophangpunt. Bereken de minimumwaarde voor d opdat de bol een volledige cirkelbeweging zou uitvoeren rond de nagel.

4. We bekijken een spoorwagentje met (tarra) massa M (=1000 kg) en (binnen)oppervlakte A (=$5m^2$). Het wagentje is vanboven niet afgesloten en is $1m$ hoog gevuld met water (dat dus nog eens een massa $m(t = 0) = 5000\ kg$ heeft). Op een afstand h (= 0.25 m) onder het aanvankelijke waterpeil wordt een gat geslagen met een oppervlakte a(=10 cm^2). Het wagentje staat op wrijvingsloze rails.
   (a) Bereken de initiële snelheid waarmee het water naar buiten spuit.
   (b) h en m zijn functies van de tijd. Bereken hoe het waterpeil verandert in de loop van de tijd.
   (c) Moeilijker: hoe lang duurt het voor het wagentje zich 2 m heeft verplaatst?

4.3.0.41 September 2005

1. Het is winter en de vijver bevriest. De lucht is $-10°C$ koud(ter info : dieper in de vijver is het iets warmer). Hoe lang duurt het (bij constante luchttemperatuur) voor de ijslaag aangroeit tot een dikte van 8 cm? (De warmtegeleidingscoëfficiënt van ijs bedraagt 1.6 $W/(m\ K)$ en de smeltwarmte van ijs is 80 cal/g.)

(Deze vraag is gesteld op het examen voor de wiskunde, maar heeft nooit meegeteld voor punten. Iedereen die dat examen had afgelegd had deze vraag fout. De formules nodig voor deze vraag zijn nooit gebruikt in de practica.)

2. Bestudeer een rechthoekig vlot (oppervlakte A) uit twee lagen met respectievelijke dichtheden en diktes ρ_1, h_1 en ρ_2, h_2. Neem aan dat $\rho_2 < \rho_1$. Wat is de gemiddelde dichtheid van het vlot? Neem aan dat die kleiner is dan de dichtheid van water, zodat het vlot kan drijven. Zoek de diepgang van het vlot in het water wanneer de lichte kant boven is, en wanneer de zware kant boven is. Verschilt de potentiële energie van het totale systeem in de twee beschreven situaties?

3. Een blok met massa m wordt op de schuine zijde van een wig met massa M gelegd, die op haar beurt over een horizontale tafel kan glijden. De schuine zijde van de wig maakt een hoe α en alle oppervlakken zijn wrijvingsloos. Aanvankelijk is het systeem in rust met het onderste punt P van blok m op de hoogte h boven de tafel. Wat zijn de snelheden van blok en wig op het moment dat P de tafel raakt? Stel $m = 250g$, $M = 1\ kg$, h=10cm, $\alpha = -10°$.

4. Het schip van Robinson Crusoë is net verzwolgen door de woelige zee. Gelukkig ziet hij recht voor zich op loodrechte afstand d de kustlijn. Robinson begint te zwemmen met een snelheid van $2m/s$ onder een hoek α met de richting recht naar de kustlijn. Er staat eveneens een zeestroming van eveneens $2m/s$ onder een hoek γ met diezelfde richting. Robinsons doel is het punt recht voor hem, waar een bevallige nimf verleidelijk naar hem zit te lonken; indien hij op een ander punt aan land komt, moet hij nog doorheen het zand ploeteren ($4m/s$).

   (a) Aangezien hij moe is, wil Robinson haast maken. Bereken de hoek α die hem het snelst op zijn doel brengt. (Het volstaat een eenvoudige goniometrische vergelijking te geven die α en γ bevat).

   (b) Concrete toepassing : De kustlijn is die van een eiland, een rechthoek met zijde $2L$. Deze zijde staat loodrecht op de lijn van R.C.'s startpositie naar het midden van de zijde. (Andere zijden zijn niet toegankelijk). Bereken de snelste hoek α en de nodige tijd voor het traject expliciet voor $d = 1\ km$, $L = 200m$, $\gamma = 90$.

4.3.0.42 Januari 2006

1. Een honkbalspeler slaat een homerun door de bal uit het stadion te slaan. Hij slaat daarvoor met zijn honkbalknuppel tegen de bal zodat die een snelheid van v_0= 40 m/s krijgt en een hoek van 30 graden met de horizontale maakt. De bal vertrekt op een hoogte van 1 m. De wand van het stadion is 2.5 m hoog en bevindt zich op 120 m van de honkbalspeler.

   (a) Hoeveel meter hoog vliegt de bal over de muur.

   (b) Wat is de maximale waarde voor v_0 zodat de bal toch tegen de muur zou botsten?

   (c) Stel dat je een veldspeler mag inzetten. Hij kan zijn handschoen op een hoogte van 2.5 m brengen. Hij moet een minimale afstand van 20 m hebben ten opzichte van de honkbalspeler die de bal moet slaan. Bestaat er dan een positie voor de veldspeler (binnen het stadion) zodat hij de bal kan vangen?

2. (a) Een bal met massa $m_1 = 100g$ heeft een snelheid van 0.5 m/s en botst frontaal en elastisch met een tweede bal met massa m_2= 200g die in rust is. Na de botsing bewegen beide ballen langs de oorspronkelijke invalsrichting. Wat is de grootte van de snelheden van beide ballen na de botsing, wat is de zin van de snelheden?

(b) Stel nu dat door de botsing beide ballen aan elkaar zullen plakken en samen verder bewegen (de botsing is dus niet meer elastisch), wat is dan de snelheid waarmee de ballen zullen voortbewegen?

(c) Hoeveel energie gaat er bij deze inelastische botsing verloren?

3. Een tuinslang met een inwendige diameter van 7.5 mm is verbonden met een tuinsproeier die 24 gaatjes van 0.5 mm bevat. Het water in de tuinslang heeft een snelheid van 3 m/s. Met welke snelheid homt het water uit de gaatjes? Onder welke hoek moet de sproeier geheld zijn om het water zo ver mogelijk te spuiten? Hoe ver komt het water?

4. (a) Hoeveel energie is nodig om 20 vierkante ijsblokjes (ribbe = 3 cm, $T = -10°C$) om te zetten in water van $10°C$? c_{ijs}=2100 $J/kg.K$; c_{water}= 4180 $J/kg.K$; ρ_{ijs}=920 kg/m^3; $L_s melt = 334.10^3\ J/kg$.

   (b) Stel dat je de ijsblokjes in 100g water gooit bij $0°C$. Hoeveel g van het water zal dan ijs bij $0°C$ vormen?

4.3.0.43 Januari 2007

1. Een raket met massa M explodeert op een hoogte h = 500m en heeft op het moment van de explosie een snelheid v = 200 m/s. De raket valt uit elkaar in 2 stukken met massa's $M/4$ en $3M/4$. Het stuk met massa $M/4$ vliegt met een snelheid v_1 = 400 m/s onder een hoek +60° ten opzichte van de bewegingsrichting vlak voor de explosie.

   (a) Wat is de snelheid van het stuk met massa $3M/4$ vlak na de explosie ?

   (b) Onder welke hoek vliegt het stuk ?

   (c) wat is de maximale hoogte dat het stuk met massa $M/4$ bereikt ?

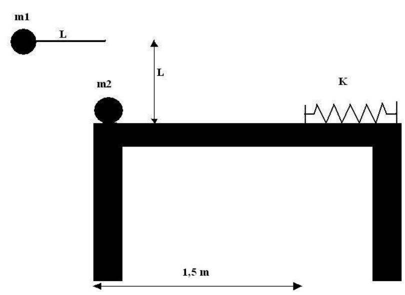
   (d) Hoe ver vliegt het stuk met massa $M/4$ ten opzichte van de plaats van de explosie ?

2. Een stalen bol met maasa m_1 = 10kg hangt aan een touw met lengte L = 1m. De bol wordt vanuit horizontale positie losgelaten.

   (a) Wat is de snelheid van de bol op zijn laagste punt ?

   (b) Op zijn laagste punt botst hij tegen een stalen bol in rust op een horizontale tafel. De massa van deze bol is m_2 = 30kg. Veronderstel een elastische botsing van deze bolen. Wat zijn de snelheden van de bollen juist na de botsing en in welke richting bewegen ze ?

   (c) De bol met massa m_2 rolt 1.5m verder over een horizontale tafel en botst daar met een veer met veerconstante $K = 4480N$/m. Hoe ver wordt de veer ingedrukt ?

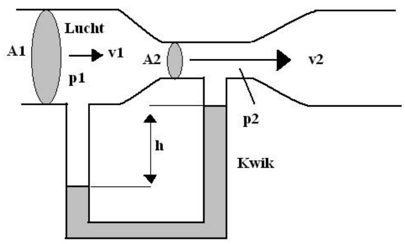


3. Door een horizontale buis van een *Venturi meter* blaast er lucht van links naar rechts. De snelheid waarmee de lucht wordt ingeblazen is $v_1 = 15$ m/s. Het brede en smalle gedeelte van de horizontale buis hebben respectievelijk een straal $r_1 = 1.0$cm en $r_2 = 0.5$cm. De dichtheid van de ingeblazen lucht is $\rho_{lucht} = 1.3$ kg/m^3. De U-vormige buis van de Venturi meter bevat kwik met een dichthied $\rho_{kwik} = 13.6 \times 10^3$ kg/m^3.

   (a) Wat is de snelheid v_2 van de lucht in het smalle gedeelte van de horizontale buis ?

   (b) Wat is het drukteverschil $p_1 - p_2$ aan de opening van de U-vormige buis ?

   (c) Wat is het hoogteverschil h van het kwik in de U-vormige buis ?



4. (a) Hoeveel energie is nodig om 50g ijs bij $-40°C$ om te zetten in water van $20°C$?

   (b) stel dat het ijs gemengd wordt met 11g stoom bij $120°C$. Wat is dan de eindtemperatuur?

   ($c_{ijs} = 0.5$ cal/g°C, $c_{water} = 1$ cal/g°C, $c_{stoom} = 0.481$ cal/g°C, $L_{sm} = 79.8$ cal/g, $L_v = 540$ cal/g)

4.3.0.44 Januari 2008

Gebruik rekenmachine toegelaten.

1. Op tijdstip $t = 0s$ wordt bovenaan een wrijvingsloos vlak met lengte $16m$ een massa losgelaten. De massa bereikt $4s$ later de grond. Eveneens bij $t = 0s$ wordt een tweede massa op het hellend vlak vanop de grond naar boven geschoven, en wel zo dat ze gelijktijdig met de eerste massa op de grond terugkomt.

   (a) Zoek de versnelling van beide massa's als zij zich op het hellend vlak bevinden.

   (b) Hoe groot is de hellingshoek van het vlak?

   (c) Hoe groot is de beginsnelheid van de tweede massa?

   (d) Hoe ver geraakt deze tweede massa op het hellend vlak?

2. Zie figuur 1. Een bolvormige kegel met massa M en een snelheid $u_1 = 10m/s$ botst elastisch tegen een kogel met massa $2M$ die in rust is. Na de botsing beweegt massa M zich in de richting die een hoek van 90 vormt met de oorspronkelijke bewegingsrichting.

   (a) Bepaal de grootte van de snelheid v_1 van M na de botsing.

   (b) Bepaal de grootte van de snelheid v_2 die de massa $2M$ heeft na de botsing.

   (c) Bepaal de hook θ die deze snelheid insluit met de oorspronkelijke bewegingsrichting van M.

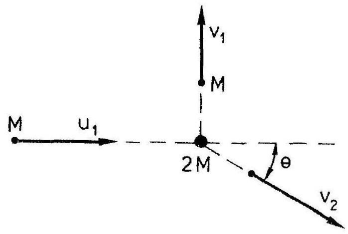


Figure 1:

3. Zie figuur 2. Een stalen bol met massa $m_1 = 10kg$ hangt aan een touw met lengte $L = 1m$. De bol wordt vanuit horizontale positie losgelaten.
    (a) Wat is de snelheid van de bol op zijn laagste punt?
    (b) Op zijn laagste punt botst hij tegen een stalen bol in rust op een horizontale tafel. De massa van deze bol is $m_2 = 30kg$. Veronderstel een elastische botsing van de bollen. Wat zijn de snelheden van de bollen juist na de botsing en in welke richting bewegen ze?
    (c) De bol met massa m_2 rolt $1.5m$ verder over een horizontale tafel en botst daar met een veer met veerconstante $K = 4480N/m$. Hoe ver wordt de veer ingedrukt?

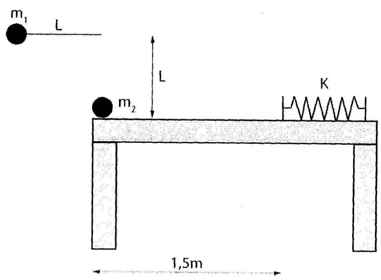


Figure 2:

4. Beschouw een cilindrisch vat met diameter $20cm$ en hoogte $50cm$. In de bodem is een gat met een oppervlakte van $2cm^2$. Aan het vat wordt met een debiet van 0,5 liter per seconde water toegevoegd.
    (a) Leid een uitdrukking af voor de uitstroomsnelheid in functie van de hoogte van de vloeistof in het vat.
    (b) Bereken tot op welke hoogte het water in het vat stijgt.
    (c) Hoeveel liter per seconde water zou men moeten toevoegen opdat het water in het vat zou stijgen tot op een hoogte van $25cm$?

Chapter 5

Logica

Voor dit vak loont het om goed wakker te zijn en logisch te kunnen denken. De negatie geven van een ingewikkelde uitdrukking waarvan de betekenis van geen belang is, en het ontwerpen van een elektronisch circuit dat aan de opgave voldoet zijn vrij vaak voorkomend.
Het examen is open boek, dit wil zeggen dat je je oefeningen en je cursus mag gebruiken tijdens het examen. Het is dus aangeraden om de oplossingen van de oefeningen goed te noteren tijdens het jaar.
Het afgelopen jaar was er een kleine verandering van het examen van dit vak. Het werd opgesplitst in een theorie- en een praktijkexamen. Het praktijkexamen is nog steeds open boek en gelijkaardig aan de voorbeeldexamens hieronder. Het theoretisch examen bestaat eerder uit het geven van definities van begrippen of het verbeteren van een gegeven (fout) bewijsje. Dit is een gesloten boek examen.

5.1 Examen Juni 2007

1. Bepaal of volgende well-formed formula logisch geldig is. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
$$(\exists x)(A^1(x) \Rightarrow (\forall y)A^1(y))$$

2. Wat volgt is een correct bewijs voor
$$\vdash (\forall x)(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\exists x)B \Rightarrow (\exists x)C)$$
Noteer achter elke afleiding of het om een hypothese of axioma gaat, of hoe de formule een gevolg is van voorgaande formules.
   (a) $(\forall x)(B \Rightarrow C)$
   (b) $(\exists x)B$
   (c) $\neg(\forall x)\neg B$
   (d) $\neg(\forall x)\neg B \Rightarrow (\neg(\exists x)C \Rightarrow \neg(\forall x)\neg B)$
   (e) $\neg(\exists x)C \Rightarrow \neg(\forall x)\neg B$
   (f) $(\neg(\exists x)C \Rightarrow \neg(\forall x)\neg B) \Rightarrow ((\neg(\exists x)C \Rightarrow (\forall x)\neg B) \Rightarrow (\exists x)C$
   (g) $(\neg(\exists x)C \Rightarrow (\forall x)\neg B) \Rightarrow (\exists x)C$
   (h) $\neg(\exists x)C$
   (i) $(\forall x)\neg C$
   (j) $\neg C$

(k) $(\neg\neg B \Rightarrow \neg C) \Rightarrow (\neg\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow \neg B$

(l) $\neg C \Rightarrow (\neg\neg B \Rightarrow \neg C)$

(m) $\neg\neg B \Rightarrow \neg C$

(n) $(\neg\neg B \Rightarrow C) \Rightarrow \neg B$

(o) $B \Rightarrow C$

(p) $\neg\neg B \Rightarrow C$

(q) $\neg B$

(r) $(\forall x)\neg B$

(s) $(\forall x)(B \Rightarrow C), (\exists x)B, \neg(\exists x)C \vdash (\forall x)\neg B$

(t) $(\forall x)(B \Rightarrow C), (\exists x)B \vdash \neg(\exists x)C \Rightarrow (\forall x)\neg B$

(u) $(\forall x)(B \Rightarrow C), (\exists x)B \vdash (\exists x)C$

(v) $(\forall x)(B \Rightarrow C) \vdash (\exists x)B \Rightarrow (\exists x)C$

(w) $\vdash (\forall x)(B \Rightarrow C) \Rightarrow ((\exists x)B \Rightarrow (\exists x)C)$

3. beschouw onderstaande uitspraken voor $n > 2$

   - precies 1 van deze uitspraken is niet waar.
   - precies 2 van deze uitspraken zijn waar.
   - precies 3 van deze uitspraken zijn niet waar.
   - precies 4 van deze uitspraken zijn waar.

     $\vdots$
   - precies n van deze uitspraken zijn $\begin{cases} \text{waar} & \text{n even} \\ \text{niet waar} & \text{n oneven} \end{cases}$

   Wat kan je besluiten in verband met de waarheid van deze uitspraken ? Verklaar je antwoord.

5.2 Propositielogica

1. Ga voor de onderstaande uitdrukkingen na welke logisch gevolg zijn van welke andere uitdrukkingen en welke logisch equivalent zijn. Verklaar je antwoord.

   (a) $(A \wedge \neg C) \Rightarrow (C \Leftrightarrow B)$

   (b) $(\neg B \vee (A \Leftrightarrow C)) \wedge (B \otimes C)$

   (c) $(\neg B \Rightarrow C) \wedge ((A \downarrow B) \wedge \neg(C \Leftrightarrow \neg A))$

   (d) $(B \Rightarrow (A \Leftrightarrow C)) \vee (A \Rightarrow B \wedge (\neg C|A))$

   (e) $A \Rightarrow ((B \wedge \neg C) \Rightarrow ((C \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \vee \neg(B \wedge C))))$

   Waar $\otimes$ het *exclusive or* connectief (pg 15) is en de connectieven $|$ en $\downarrow$ worden gedefinieerd op pg 29.

2. Een behoorlijk domme autodief had, zonder het te weten, de auto van de hoofdcommissaris van de politie gestolen. De politie stelde meteen een onderzoek in en op basis van getuigenverklaringen werden vier verdachte personen, die rond de tijd van het misdrijf in de buurt van de auto waren gezien, gearresteerd. Omdat de hoordcommissaris de zaak hoog opnam, besloot hij de vier verdachten persoonlijk te verhoren en de gloednieuwe leugendetector van het politiebureau in te zetten. Elke verdachte gaf bij het

verhoor drie verklaringen, die hieronder staan :

Verdachte A :

1 Op de middelbare school heb ik bij verdachte C in de klas gezeten.

2 Verdachte B heeft geen rijbewijs.

3 De dief wist niet dat de auto van de hoofdcommissaris was.

Verdachte B :

1 Verdachte C is de schuldige.

2 Verdachte A is onschuldig.

3 Ik heb nog nooit achter het stuur van een auto gezeten.

Verdachte C :

1 Ik heb verdachte A voor vandaag nog nooit ontmoet.

2 Verdachte B is onschuldig.

3 Verdachte D is de schuldige.

Verdachte D :

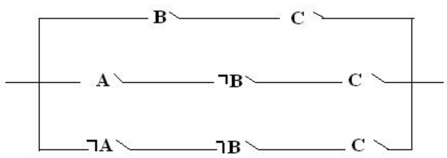
1 Verdachte C is onschuldig.

2 Ik heb het niet gedaan.

3 Verdachte A is de schuldige.

Met zoveel elkaar tegensprekende verklaringen wist de hoofdcommissaris het ook niet meer. Tot overmaat van ramp bleek ook dat de leugendetector nog niet helemaal werkte zoals het hoorde, want het appartaat gaf alleen aan dat er van de twaalf verklaringen precies vier waar waren, maar niet welke.
Wie is de autodief ?

3. Op pagina 24 worden elektrische circuits met aan/uit schakelaars besproken.
   (a) Teken een dergelijk circuit voor de uitdrukkingen $A \Rightarrow B$ en $A \Leftrightarrow B$.
   (b) Geef een zo eenvoudig mogelijk circuit dat logisch equivalent is met onderstaand circuit. Verklaar je antwoord !



   (c) Teken een circuit dat equivalent is met de uitdrukking $\neg(A \Rightarrow (B \Leftrightarrow \neg C))$.
   (d) Stel dat een jury, bestaand uit 3 leden, 'ja' kunnen stemmen door op een knop te drukken. Ontwerp een circuit dat enkel stroom doorlaat wanner er een meerderheid 'ja' gestemd heeft.
   (e) Ontwerp een circuit dat ervoor zorgt dat een licht bediend kan worden door twee schakelaars. Je moet in staat zijn om met elk van beide schakelaars het licht aan of uit te doen door enkel deze schakelaar te verzetten.

4. Bewijs dat de volgende uitdrukkingen theorema's zijn van de propositielogica, waarbij $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ en $\mathcal{D}$ well-formed formulas zijn. Gebruik hiervoor het axiomasysteem van pagina 35. Je mag ook gebruik meken van de thoerema's die reeds in de les weren afgeleid uit dit axiomasysteem. Geef bij elke stap een duidelijke verklaring waarom je deze mag toepassen (verwijs hiervoor naar een definitie, eigenschap of oefening).
   (a) $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$
   (b) $\mathcal{B} \wedge \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{C}$
   (c) $\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}))$
   (d) $(\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{C}) \Rightarrow ((\mathcal{B} \wedge \neg\mathcal{C}) \Rightarrow \neg\mathcal{D})$
   (e) $((\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}) \Leftrightarrow (\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}))$

5.3 Januari 2008

5.3.1 Propositie Logica

1. Zijn de volgende statements logisch equivalent. Of welke wordt logisch geimpliceerd door een andere?
   (a) i. $((P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow R) \wedge ((\neg R \Leftrightarrow Q) \Rightarrow \neg P)$,
   ii. $(Q \wedge (P \Rightarrow R)) \vee (\neg Q \wedge (P \Leftrightarrow \neg R))$.
   (b) i. $C \Rightarrow B$,
   ii. $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg C)$,
   iii. $(B \wedge (C \Rightarrow (A \wedge C)) \vee (\neg B \wedge (C \Rightarrow \neg A))$.
2. Als je weet dat $(A \Rightarrow B)$ vals is en dat $(B \vee C)$ waar is, wat weet je dan over:
$$((B \Leftrightarrow D) \wedge (A \vee B)) \Rightarrow \neg D.$$
3. Zet het volgende om in symbolen en ga na of de conclusie logisch geimpliceerd is (zonder gebruik te maken van waarheidstabellen): Als Jan Steven vorige nacht niet ontmoette, dan is Steven de moordenaar of liegt Jan. Als Steven niet de moordenaar is, dan ontmoette Jan Steven niet en gebeurde de moord na middernacht. Als de moord na middernacht plaats vond, dan is Steven de moordenaar of liegt Jan.
   Dus is Steven de moordenaar.
4. Bewijs: $\vdash ((P \Rightarrow B) \Rightarrow P) \Rightarrow P$ zonder gebruik te maken van waarheidstabellen.

5.3.2 Quantificatie Theorie

1. (a) Het domein is de natuurlijke getallen, $A_1^2(x,y)$ staat voro $x = y$, $f_1^2(x,y) = x.y$ en $f_2^2(x,y) = x+y$. De gebruikte constanten zijn: $a_1 = 3$ en $a_2 = 9$. De uitspraak is:
$$A_1^2(x_3, a_1) \Rightarrow A_1^2(f_1^2(f_2^2(x_1,x_2),x_3),9).$$
   (b) Het domein is de deelverzamelingen van $\mathbb{R}$, $A_1^2(x,y)$ staat voor $x \subseteq y$, $f_1^2(x,y) = x \cap y$ en $f_2^2(x,y) = x \cup y$. De uitspraak is: $(\forall x_1)(\forall x_2)(A_1^2(f_1^2(x_1,x_2),x_1) \wedge A_1^2(x_1, f_2^2(x_1,x_2)) \wedge A_1^2(x_1, f_2^2(x_1,x_2)) \wedge A_1^2(x_1, f_2^2(x_1,x_2)) \vee A_1^2(x_2, f_2^2(x_1,x_2)))$.
2. Is de volgende uitspraak logisch geldig? Zo nee, geef een interpretatie waarin dit duidelijk is.
$$[(\forall x)(\forall y)(A_1^2(x,y) \Rightarrow A_1^2(y,x)) \wedge (\forall x)(\forall y)(\forall z)(A_1^2(x,y) \wedge A_1^2(y,z) \Rightarrow A_1^2(x,z))] \Rightarrow (\forall x)A_1^2(x,x).$$

3. Bewijs

   (a) $\vdash (((\forall x)A_1^1(x) \Rightarrow A_1^2(x)) \wedge (\neg(\forall x)(A_1^3(x) \Rightarrow A_1^2(x))) \Rightarrow (\neg(\forall x)(A_1^3(x) \Rightarrow A_1^1(x)))).$

   (b) $\vdash (\forall x)(B \vee C) \Rightarrow ((\forall x)B \vee (\exists x)C)$

4. Is volgend bewijs correct? Zo nee, waar loopt het mis (geef alle mogelijke fouten).

1)$(\forall x)(\exists y)P(x,y)$	*Hyp*
2)$(\forall x)P(x,d)$	1, *rule C*
3)$P(d,d)$	2, *rule* A_4
4)$(\forall x)P(x,x)$	3, *Gen*
5)$(\forall x)(\exists y)P(x,y) \vdash (\forall x)P(x,x)$	1-4, 2.6, 2.10

5.4 Januari 2010: Praktijk

5.4.1 Propositie Logica

1. Wat kan je zeggen over volgende statement forms? Welke wordt logisch geïmpliceerd door een andere, welke zijn logisch equivalent, welke zijn logisch tegengesteld?

   (a) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \Rightarrow (B \vee \neg A)$,

   (b) $\neg A$,

   (c) $(A \vee (B \wedge \neg C)) \wedge (\neg B \wedge A)$,

   (d) $\neg B \wedge A$.

2. Als je weet dat $(A \Leftrightarrow C)$ en $(C \wedge D)$ vals zijn en dat $(A \vee D)$ waar is, wat weet je dan over:

$$(\neg B \wedge C) \vee ((C \Rightarrow D) \wedge (D \Rightarrow A)).$$

3. Zet het volgende om in symbolen en ga na of de conclusie logisch geïmpliceerd is (zonder gebruik te maken van waarheidstabellen):
   Als de prijzen van drank blijven zoals ze zijn, dan zal er minder gedronken worden of zullen de studenten blut zijn. Als de studenten blut zijn, zullen ze zelf drank gaan brouwen. Als ze zelf drank brouwen en de prijzen van drank blijven zoals ze zijn, dan zullen de studenten niet blut zijn. Bijgevolg zal er niet minder gedronken worden.

4. Bewijs: $\vdash (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Leftrightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C))$ zonder gebruik te maken van waarheidstabellen.

5.4.2 Quantificatie Theorie

1. Wanneer zijn volgende uitspraken waar?

   (a) Het domein is de rationale getallen. $A_1^2(x,y)$ staat voor $x = y$, $f_1^2(x,y) = x+y$ en $f_2^2(x,y) = x \cdot y$. De gebruikte constanten zijn: $a_1 = 0$ en $a_2 = 1$. De uitspraak is:

$$A_1^2(f_1^2(x,y), a_1) \wedge A_1^2(f_2^2(x,y), a_2)$$

   (b) Alles net hetzelfde als in (a), enkel nu is de uitspraak:

$$A_1^2(f_1^2(x,y), a_1) \Rightarrow A_1^2(f_2^2(x,y), a_2)$$

   (c) Alles net hetzelfde als in (a) (ook de uitspraak zelf), enkel nu staat $A_1^2(x,y)$ voor $x \leq y$.

2. Is de volgende uitspraak logisch geldig of niet? Zo nee, is ze wel satisfiable?

$$(\forall x)(\forall y)(A_1^1(x) \wedge A_1^1(y) \Rightarrow \neg A_1^1(f_1^2(x,y))).$$

3. Bewijs

   (a) $\vdash ((\forall x)(U(x) \Rightarrow (\forall(y)(W(y) \Rightarrow \neg R(x,y)))) \wedge (\forall x)(U(x) \Rightarrow (\forall y)(S(y) \Rightarrow R(x,y)))) \Rightarrow ((\exists x)(U(x) \wedge W(x)) \Rightarrow (\exists y)\neg S(y))$.

   (b) $\vdash (\forall x)(B(x) \vee C(x)) \Rightarrow ((\forall x)\neg C(x) \Rightarrow (\forall x)B(x))$.

4. Is volgend bewijs correct? Zo nee, waar loopt het mis (geef alle mogelijke fouten).

1)$(\exists x)(\forall y)(\exists z)(A(x,y) \wedge A(y,z))$	*Hyp*
2)$(\exists x)(\forall y)(A(x,y) \wedge A(y,d))$	1, *rule C*
3)$(\exists x)(A(x,d) \wedge A(d,d))$	2, *rule* A_4
4)$A(d,d) \wedge A(d,d)$	3, *rule C*
5)$A(d,d)$	4, $\wedge$ *eliminatie*
6)$(\forall z)A(z,z)$	5, *Gen*
7)$1 \vdash_C 6$	1-6
8)$1 \vdash 6$	7, 2.10
9)$\vdash 1 \Rightarrow 6$	8, 2.6

Chapter 6

Computerpracticum

6.1 Inhoud

Van dit vak wordt geen examen afgenomen. Je wordt beoordeeld via een kleine test over Maple en Matlab en een project dat je in LaTeX moet maken. Het project zal het zwaarste doorwegen op je eindresultaat.

6.2 Test Maple en Matlab

6.2.1 Test november 2009

Lees goed de instructies in het begin van de test voordat je aan de vragen begint. Hieronder volgen de vragen van de test.

6.2.1.1 Maple

1. Het (nog steeds onbewezen) *vermoeden van Golbach* zegt dat elk even getal groter of gelijk aan 4 geschreven kan worden als som van 2 priemgetallen. Bijvoorbeeld: $8 = 3+5$ of $100 = 39 + 61$
   Schrijf een functie $goldbacht := proc(n)$ die voor een even getal n die twee priemgetallen op het scherm afdrukt. Indien de input n geen even getal is, moet er een foutmelding op het scherm komen.
   Pas de functie toe op $n = 1, n = 7, n = 8, n = 10000$.

2. Een functie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ kunnen we een aantal keer met zichzelf samenstellen. Schrijf een procedure $samenstellen := proc(F, n, a, b)$, die een grafiek maakt waarop de functie F,de functie $F \circ F$, de functie $F \circ F \circ F$, $\ldots$, de functie $\underbrace{F \circ \cdots \circ F}_{n}$ worden afgedrukt op het interval $[a, b]$.
   Hierbij is F een reële functie en n een natuurlijk getal groter dan 1.
   Pas dit achtereenvolgens toe voor $n = 8$ op de sinusfunctie op $[-\pi, \pi]$ en op de functie $x \mapsto x^2$ op $[-1, 1]$.

6.2.1.2 Matlab

1. Gegeven de functie f:

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 11 & x < 3 \\ x - 1 & 3 \leq x \leq 9 \\ \sqrt{x} + 5 & x > 9 \end{cases}$$

Schrijf een Matlab-functie $opgave1(a, b)$ die deze functie plot over het interval $[a, b]$ en die als resultaat het maximum van deze functie op het gegeven interval $[a, b]$ teruggeeft.

2. Schrijf een Matlab funcite $B = powfun(A, v, n)$ die voor willekeurig gegeven vierkante matrix A, gegeven vector v, en gegeven geheel getal $n \geq 2$, de matrix

$$B = \begin{bmatrix} v & Av & A^2v & \cdots & A^nv \end{bmatrix}$$

met kolommen $A^kv(0 \leq k \leq n)$ berekent. Test uw functie met de speciale keuze

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad , \quad n = 10$$

6.2.2 Project LaTeX

Het onderwerp van u project kan je zelf kiezen uit een lijst. In deze lijst zal bij elk onderwerp vermeld worden wat er precies verwacht wordt. Je wordt voor het project begeleid door een professor of assistent die u verder helpt met al u vragen en problemen. Je moet het project indienen en presenteren. Gedurende u presentatie zal je vragen moeten beantwoorden, het is dus belangrijk dat je alles goed begrijpt.

Chapter 7

Dankwoordje

Graag zou ik nog willen bedanken :

- De voorbije winakmentoren en studenten die er voor gezorgd hebben dat er tuyaux verzameld en verspreid werden zodat u ze nu kunt lezen. In het bijzonder Steve Soetewey, Yannick Verdyck, Pieter Belmans en Bruno Herman,
- de mensen die deze tuyaux gaan gebruiken,
- op voorhand al de mensen die een beetje van hun tijd gaan geven door het doorsturen van fouten en/of van de examenvragen van dit jaar voor de tuyaux van de komende jaren naar elke@winak.be,
- al de computers die ik heb mogen gebruiken voor het maken van deze tuyaux, in het bijzonder diegenen die hebben willen meewerken,
- de mensen die ik vergeten ben te vermelden en dat hier ook hun steentje bij gedragen hebben,

die allen op hun manier hebben geholpen met het creëren van dit document zoals het nu is. Deze tuyaux is een document dat enkel tot stand is kunnen komen dankzij de gezamelijke inspanning van velen.