Numerieke Lineaire Algebra

Numerieke Lineaire Algebra	
Richting	Informatica
Jaar	3BINF

Bespreking

Dit vak werd tussen 2013 en 2021 niet meer gegeven, maar wordt sinds 2021-2022 weer onderwezen door Prof. Benny Van Houdt. Het vak is een vervolg op Lineaire Algebra en Numerieke Analyse uit de 2e bachelor, en gaat iets dieper in op de theorie omtrent zowel lineaire algebra (normen van vectoren en matrices, QR factorisatie en Singuliere Waarde Ontbinding) alsook numerieke methoden (conditionering en stabiliteit).

Het examen bestaat voor 50% uit theorievragen, en 50% uit oefeningen zoals die uit de oefenzittingen tijdens het semester.

Puntenverdeling

Theorie: 10/20, Oefeningen: 10/20

Examenvragen

Academiejaar 2022 - 2023

Bestand:Vragen NLA 2023.pdf

Academiejaar 2021 - 2022 - 1ste zittijd

Bestand:INF NLA 2022 ZIT 1.pdf

Academiejaar 2012 - 2013 - 1ste zittijd

Praktijk

1. We definieren de 2x2 matrix A=[1/k−1/k21/k1/k2]voork∈R+A=[1/k1/k−1/k21/k2]voork∈R+
    1. Bepaal ‖A‖2‖A‖2
    2. Toon aan dat limk→+infK2(A)limk→+infK2(A)
2. We veronderstellen dat B een m,nm,n matrix is van rang 1. Bepaal dan een QR-factorisatie van B met behulp van Householder reflecties.

3. Vul de ontbrekende elementen in zodat onderstaande matrices unitair worden, of geef aan waarom dit onmogelijk is.
   U1=[cos(π/4)cos(π/4))..],U2=[2–√/2..1],U3=[i..eiπ],U1=[cos(π/4).cos(π/4)).],U2=[2/2..1],U3=[i..eiπ],U4=[3–√/3...]U4=[3/3...] met i2=−1i2=−1
4. Veronderstel A∈Cm,nA∈Cm,n met det(A)!=0det(A)!=0. Zijn volgende uitspraken waar of vals?
    1. Als A=Q1RenA=Q2RA=Q1RenA=Q2R beiden QR-factorisaties zijn van A, dan geldt Q1=Q2Q1=Q2.
    2. Als A=U1∑V∗1enA=U2∑V∗2A=U1∑V1∗enA=U2∑V2∗ beide SVD's zijn van A, dan geldt U1=U2enV1=V2U1=U2enV1=V2.
5. Bepaald * zodat de groeifactor p van ⎡⎣⎢21−142∗−246⎤⎦⎥[24−2124−1∗6] maximaal is.
6. Gegeven de afbeelding f(x1,x2,x3)=⎛⎝⎜x1+x3x2x1−x3⎞⎠⎟f(x1,x2,x3)=(x1+x3x2x1−x3)
    1. Bepaal het relatieve conditiegetal h2(x)vanf(x)h2(x)vanf(x).
    2. Bepaal een zo scherp mogelijke bovengrens voor het conditiegetal Kr(x)vanf(x)Kr(x)vanf(x). Voor welke vector x=(x1,x2,x3)Tx=(x1,x2,x3)T wordt de gevonden bovengrens bereikt?

Academiejaar 2009 - 2010 - 1ste zittijd

Theorie

1.
    1. Geef alle getallen die exact voorstelbaar zijn in volgende floating point set voor op een lijn (d0.d1)×βe(d0.d1)×βe met di=0di=0 of 11 en e=[−2,1]e=[−2,1].
    2. Gegeven xx en yy, bereken O(x)+O(y)O(x)+O(y) met x=0,79x=0,79 en y=1,72y=1,72
    3. Bereken de bovengrens van de absolute fout die je maakt.
2.
    1. Conditionering van het probleem x=A−1bx=A−1b. Het kwam erop neer dat men het conditiegetal er van moest geven voor de berekening van xx uit een stelsel Ax=bAx=b. Ook moest men de algemene definitie van een conditiegetal geven.
    2. Hoeveel bedoende cijfers verlies je met conditiegetal k(A)=108k(A)=108 in decimale voorstelling?
3. Er werd gezegd:
    x=[0,0,1]x=[0,0,1]
    Ax=[0,0,6]Ax=[0,0,6]
    1. Bepaal de singuliere waardenontbinding van AA (zonder AA zelf te berekenen).
    2. Bepaal het conditiegetal van AA.
    3. Bereken ||A−A1||2||A−A1||2.
    4. Bepaal de rang en determinant van AA.

4. Leg kort de werking van QR uit. Bespreek vervolgens de methoden waarmee we een QR factorisatie kunnen uitvoeren en vergelijk (stabiliteit, complexiteit, beschikbaarheid van tussentijdse resultaten, ...)
    1. Stel we hebben A = QR. Hoe kunnen we Ax = b berekenen? In hoeveel flops kunnen we dit doen?

Academiejaar 2007 - 2008 - 1ste zittijd

Theorie

1.
    1. Geef in formule vorm de 2 axioma's die aan de basis liggen van een degelijke (`IEEE 754`) floating point aritmetiek.
    2. Beschouw 2 reële getallen $x,y \in \mathbb{R}$. We hebben gezien dat
    $$fl(x) \ominus fl(y) = x(1+\epsilon_4) - y(1+\epsilon_5)$$
    Met $|\epsilon_4|,|\epsilon_5| \leq 2\epsilon_{machine} + O(\epsilon_{machine}^2)$. Wat is de betekenis van dit resultaat in woorden?
    3. Leid uit (opgave2-1-b) een uitdrukking en dan een bovengrens af voor de voorwaartse fout. $\left|\frac{fl(x) \ominus fl(y) - (x-y)}{x-y}\right|$
    4. Bereken het conditiegetal κ (in 1-norm) voor het probleem van aftrekking van 2 reële getallen. Hierbij is gegeven dat
    $$\|v\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |v_i| \quad \|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \|a_j\|_1$$
    5. Vind je dat conditiegetal terug in de bovengrens die je in (opgave2-1-c) bekomen hebt? Indien ja, naar welke stelling (geef deze!) in de theorie kan je dit terugkoppelen?
    6. We hebben 3 verschillende factorisaties gezien van een matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$: LU (met en zonder pivotering QR en SVD). Bespreek voor elke factorisatie de dimensie en de structuur/eigenschappen van de matrix die optreden in de factorisatie.
    7. Geef beknopt maar volledig en correct aan welke eigenschappen voldaan is door Gauss-eliminatie met pivotering, die niet is voldaan door Gauss-eliminatie zonder pivotering. Waarom is deze eigenschap belangrijk?
2. Gegeven is een matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en een vector $y \in \mathbb{R}^m$ met $m > n$.
    1. Onderstel dat $Q \in \mathbb{R}^{m \times m}$ orthogonaal is. Toon aan dat $\|Qr\|_2^2 = \|r\|_2^2$ voor elke vector $r \in \mathbb{R}^m$.
    2. Leg het belang van deze eigenschap uit voor het oplossen van overbepaalde stelsels lineaire vergelijkingen in de zin van de kleinste kwadraten. Wees volledig.

Academiejaar 2006 - 2007

Theorie

---

1. Stel we hebben een IEEE-compliant implementatie van floating-point arithmetiek op floating-point getallen uit $F(2,t,L,U)F(2,t,L,U)$ met $U=2e-1U=2e-1$ en $L=-2e-1+1L=-2e-1+1$ en $U \gg tU \gg t$.
    1. Stel we hebben een bitpatroon met allemaal 0'en. Welk FP-getal stelt dit voor? Waarom?
    2. Geef de belangrijkste verschillen tussen $F(2,k*t,L,U)F(2,k*t,L,U)$ $F(2k,t,L,U)F(2k,t,L,U)$.
    3. Geef de waarde van 1 ULP. Waarvan is ULP de afkorting?
2. Gegeven is een tridiagonale matrix $A \in RnxnA \in Rnxn$:
    1. Stel we willen $Ax \rightarrow =b \rightarrow Ax \rightarrow =b \rightarrow$ oplossen met $b \rightarrow \in Rnb \rightarrow \in Rn$, welke techniek kunnen we dan best toepassen? Voordelen en nadelen.
    2. Welke eigenschap zou leiden tot een andere techniek? Waarom?
3. Gegeven
   $A \in Rnxn$

   $$A \in Rnxn$$

   met $m>nm>n$ en vector $y \rightarrow \in Rmy \rightarrow \in Rm$:
    1. De oplossing van het stelsel $Ax \rightarrow =b \rightarrow Ax \rightarrow =b \rightarrow$ kan herleid worden tot een oplossing van een stelsel met evenveel lineair onafhankelijke vergelijkingen als onbekenden van de vorm $Cx \rightarrow =d \rightarrow Cx \rightarrow =d \rightarrow$ met $C \in RnxnC \in Rnxn$ en $d \in Rnd \in Rn$. Geef de afleiding.
    2. Geef de conditionering van het oorspronkelijke probleem en van het theoretisch equivalente probleem $Cx \rightarrow =d \rightarrow Cx \rightarrow =d \rightarrow$.
    3. Geef de formule dat bewijst dat QR-factorizatie van matrix AA achterwaarts stabiel is.