

Wiskundige statistiek

 tuyaux.winak.be/index.php/Wiskundige_statistiek

Wiskundige Statistiek

Richting Wiskunde

Jaar 3BWIS

Bespreking en quotering

Zoals de naam van het vak het zegt, gaat dit vak over statistiek. Je ziet stelling over het schatten van parameters in een statistisch model, welke schatters goed zijn, hoe ze te vinden etc. Verder worden er enkele asymptotische eigenschappen van schatters behandeld. Een 2de deel van de cursus bestaat uit het bouwen van betrouwbaarheidsintervallen en hypothesetesten.

3 van de 20 punten van het examen kan je verdienen met een (niet te zwaar) project op het einde van het semester. Het examen zelf bestaat uit 2 schriftelijke gelijkwaardige theorie -en oefeningexamens.

Examenvragen

Januari 2023

1.

1. Geef de informatie-ongelijkheid van Cramér-Rao.

2. Welke veronderstellingen zijn hierbij genomen?

2. Bewijs dat een asymptotisch normale rij schatters consistent is.

3. Bewijs dat $T \in H_g$ is een MVUE $\Leftrightarrow \forall U \in H_0: E\theta[TU] = 0 \Leftrightarrow \forall U \in H_0: E\theta[TU] = 0$.

4. Beschouw

$$F_{\theta}(x) = 1 - e^{-\theta^2 x^2}, x > 0, \theta > 0.$$

$$F_{\theta}(x) = 1 - e^{-\theta^2 x^2}, x > 0, \theta > 0.$$

1. Berekenen de MLE voor θ .

2. Bepaal een sufficiënte statistiek voor θ .

3. Geef de Fisher-informatie voor het steekproefmodel met verdeling F_{θ} .

4. Bepaal de asymptotische verdeling van θ^{MLE} .

5. Beschouw volgende onafhankelijke s.v.

$$X_1, \dots, X_{n1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$X_1, \dots, X_{n1} \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_{n2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

$$Y_1, \dots, Y_{n2} \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$$

met onbekende $\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2$. Bepaal een $(1-\alpha)$ - $(1-\alpha)$ -betrouwbaarheidsinterval voor $\mu_1 - \mu_2$ als $\sigma_1^2 = 4\sigma_2^2$.

6. In een mediazaak wenst de eigenaar na te gaan of klanten van het merk A even geïnteresseerd zijn in noise cancelling koptelefoons als klanten van merk B. De eigenaar merkt tijdens een bepaalde periode dat er van het merk A 18 noise cancelling van de 42 verkochte koptelefoons zijn en van merk B 23 van de 50 verkochte koptelefoons.

1. Kan de eigenaar op basis van deze gegevens besluiten dat de noise cancelling koptelefoon minder populair is bij klanten van merk A dan merk B? Bepaal dit op significantie-niveau van 5%.

2. Leg het begrip p-waarde in woorden uit.

7. Bij een bedrijf wordt volgende tabel aan verwerkingstijden (in minuten) voor klanten gemerkt bij een steekproef

$t \in [0, 2] \cup [2, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 8] \cup [8, 10] \cup [10, 20]$

$K \in [0, 2] \cup [2, 4] \cup [4, 6] \cup [6, 8] \cup [8, 10] \cup [10, 20]$

met t de tijd in minuten en K het aantal klanten. Toets de hypothese dat de verwerkingstijd exponentieel verdeeld is op significantie-niveau 1%.

Juni 2019

[Media:wiskstat.pdf](#)

Juni 2016

Theorie

- **Vraag 1**

- Geef de definitie van een *minimum variance unbiased estimator*.
- Geef en bewijs de stelling van Rao over *MVUE's*.

- **Vraag 2** Stel X_1, \dots, X_n een steekproef uit een uniforme verdeling op het interval $[0, \theta]$ met θ een onbekende parameter. We doen een hypothesetest met als nulhypothese de bewering dat $\theta = 12$ en $\theta > 12$ als alternatieve hypothese. We verwerpen de nulhypothese vanaf dat

$Y = \max(X_1, \dots, X_n) > c$ een constante c overschrijdt.

- Zoek de constante c zodat de test een significantieniveau van 5% heeft.
- Stel dat $Y = 0.46$ en $n = 20$, welke pp-waarde vinden we dan en wat kan je besluiten over de test?
- Zelfde vraag met $Y = 0.52$.
- zoek n zodat de power gelijk is aan $1 - \beta$ voor een vaste θ .

- **Vraag 3** Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Verklaar.

Als we bij een hypothesetest voor $\mu = \mu_0$ een p-waarde van 0,2 uitkomen, dan zal slechts 99% van het betrouwbaarheidsinterval informatie over μ_0 bevatten.

Oefeningen

- **Oefening 1** Stel X_1, \dots, X_n een steekproef waarbij elke X_i

$$F_{\theta}(x) = 1 - e^{-2\theta x} \forall x \geq 0, \theta > 0$$

$$F_{\theta}(x) = 1 - e^{-2\theta x} \forall x \geq 0, \theta > 0$$

- Bepaal het steekproefmodel.
- Bereken de *maximum likelihood estimator* $\hat{\theta}^{MLE}$ van θ
- Geef een voldoende statistiek voor θ .
- Bereken de Fisherinformatie van het model.
- Bespreek de asymptotische verdeling van $\sqrt{n}(\hat{\theta}^{MLE} - \theta)$. (Geef dus aan welke eigenschappen je gebruikt.)
- Stel een 99% betrouwbaarheidsinterval op voor θ in de asymptotische verdeling
- **Oefening 2** Men onderzocht het TV-kijkgedrag van 251 mannen en 474 vrouwen. Voor de mannen vond men een gemiddelde van 2,12 uur per dag, met een standaarddeviatie van 0,80 uur. Voor de vrouwen vond men een gemiddelde van 2,82 uur per dag met een standaarddeviatie van 1,51 uur per dag. Ga na met de gepaste test of het kijkgedrag van mannen verschilt ten opzichte van die van vrouwen. Gebruik een significantieniveau $\alpha = 0.05$. Je mag veronderstellen dat het kijkgedrag van mannen en vrouwen normaal verdeeld is met dezelfde variantie.

Januari 2015

Theorie

Vraag 1

- Wat is een asymptotisch normale rij, geef de definitie.
- Onder welke voorwaarden is de maximum likelihood schatterrij $\hat{\theta}_n$ asymptotisch normaal? Bewijs dit. Bepaal de efficiëntie ervan.
- Onder de voorwaarden van de vorige vraag, bepaal een betrouwbaarheidsinterval voor deze schatter.

Vraag 2

- Wat is het verschil tussen een enkelvoudige hypothese en een samengestelde hypothese? Stel we hebben een normaal verdel, met $H: \sigma = 2$, wat voor hypothese is dit?
- Wat is een meest onderscheidende test?
- Geef en bewijs het lemma van Neyman-Pearson.

Vraag 3 Zij een gegeneraliseerd lineair model $Y = X\theta + \epsilon$

- Bepaal de kleinste kwadraten schatter voor θ
- Onder welke voorwaarden bestaat deze? Bewijs dit
- Wat zijn de eigenschappen (verwachtingswaarde en covariantie) van de kleinste kwadraten schatter?
- Onder welke voorwaarden is de kleinste kwadraten schatter multinomiaal verdeeld?

Oefeningen

- **Vraag 1** Gegeven een steekproef X_1, \dots, X_n waarbij X_i de volgende dichtheidsfunctie heeft

$$f_{\theta}(x) = x^{\theta} 2e^{-1x^{2\theta+2}}$$

$$f_{\theta}(x) = x^{\theta} 2e^{-1x^{2\theta+2}}$$

$$\theta, x > 0$$

- Bepaal het statistisch model.
 - Bepaal de fisherinformatie van het model.
 - Bepaal een sufficiënte statistiek.
 - Bepaal de MLE en bepaal de verdeling ervan.
 - Geef een likelihood ratio testprocedure voor de hypothese $H_0: \theta = 3$ versus $H_1: \theta \neq 3$
- **Vraag 2** Gegeven is een steekproef van 6 jongeren uit een gevangenis met hun gewicht voor ze naar de gevangenis gingen en toen ze de gevangenis verlieten. Gevraagd is om na te gaan of er een verband tussen deze 2 variabelen bestaat.
 - Formuleer de nulhypothese en de alternatieve hypothese.
 - Bereken de p-waarde.
 - Formuleer een besluit op het significantieniveau 0.05.
 - Welke veronderstellingen heb je gemaakt?

Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS