

Numerical Optimization

 tuyaux.winak.be/index.php/Numerical_Optimization

Numeric Optimization

Richting Wiskunde

Jaar MWIS

Info

Dit is een vak in de eerste master wiskunde, gegeven door Wim Vanroose. Dit vak kan ook gekozen worden als keuzevak in de master informatica.

Examenvragen

January 2021

Prof. Wim Vanroose

Corona-examen, vragen en geziene leerstof kan hierdoor licht afwijken.

1. De max- of ∞ -norm van een vector $x \in \mathbb{R}^n$ is $\|x\|_\infty = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$. Het kleinste absolute residu probleem voor een matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ en rechterhand $b \in \mathbb{R}^m$ zoekt een $x \in \mathbb{R}^n$ zodat $\min_x \|b - Ax\|_\infty$.
- (1)

Dit heeft toepassingen in modelkalibratie en machine-learning.

Dit probleem kan je herschrijven als een linear programming probleem

$\min_y, x \quad y$

s.t. $-y \mathbf{1}_m \leq b - Ax \leq y \mathbf{1}_m$,

(2)

waar $\mathbf{1}_m$ een vector is van lengte m met 1 ls elementen.

1. Wat is de Lagrangiaan van dit probleem?
2. Wat zijn de KKT condities?
3. Wat is het duale probleem?
4. Controleer of de KKT condities van het duale probleem hetzelfde zijn als voor het primal probleem.

2. In de oefeningen hebben jullie volgend probleem analytisch opgelost

$$\max -(x-1)^2 - (y-1)^2$$

$$\text{s.t. } x+y \leq 1, x, y \geq 0,$$

(3)

$$x \geq 0, y \geq 0.$$

1. Dit is een QP probleem. Schrijf het probleem in de standaard vorm.
 2. Wat is de oplossing? Maak een schets.
 3. Stel dat we nu de active set method gebruiken met initiële schatting $(0, 1/10)$ en initiële working set W waarbij $x \geq 0$ actief is. Leg de opeenvolgende stappen van het algoritme uit die tot een oplossing leiden. Maak eventueel ook een tekening van de opeenvolgende stappen.
 4. Wat is de working set in de opeenvolgende stappen? Worden er constraints verwijderd uit de working set? Hoe weten we dat we eventueel elementen moeten verwijderen?
 5. Hoe weet de QP active set methode wanneer we de oplossing hebben gevonden?
3. De simplex methode lost het volgende LP probleem op in de standaard vorm op
- $$\min c^T x,$$
- $$\text{s.t. } Ax = b, x \geq 0,$$
- (4)

$$x \geq 0.$$

Zie lager een samenvatting van het algoritme voor een inner loop.

1. In lijn 6 selecteren we een index q waarvoor $s_q < 0$ als entering index. Waarom weten we dat het objectief zal verbeteren al we q zo selecteren?
2. Waarom mogen we l , de leaving index, verwijderen uit β in lijn 13?
3. Waarom weten we in lijn 3 dat de oplossing gevonden is?

Data: $\beta, N, x^b = B^{-1}b \geq 0, x_n = 0, x^b = B^{-1}b \geq 0, x_n = 0$

1. Solve $B^T \lambda = c - B^T x^b$ for λ ;
2. Compute $s_n = c_n - N^T \lambda$;
3. **If** $s_n \geq 0$ **then**
4. | **Stop** Optimal Point found;
5. **end**
6. Select $q \in N$ with $s_q < 0$ as entering index;
7. Solve $B_p = A_q B^{-1} A_q$ for p ;
8. **if** $p \leq 0$ **then**
9. | **Stop** problem is unbounded;
10. **end**
11. Calculate $\alpha = \min\{i | p_i > 0\} x^b_i / p_i$ and use l as the minimizing index;
12. Update $x + b = x^b - \alpha x^b = x^b - \alpha p$;

13. Change $\beta \cup \{q\} \setminus \{l\}$ to $\beta \cup \{q\} \setminus \{l\}$;

August 2020

1. What are the Karush-Kuhn-Tucker (KKT) conditions and what do they express? What is the complementarity condition? Why does it occur in the KKT conditions of a minimization problem with inequality constraints?
2. What is the Interior-point method and how does this algorithm solve the KKT conditions?
3. How can you find a good initial feasible solution for the Simplex method. How do you know when the Simplex method has converged?
4. Compare the advantages and disadvantages of the Simplex method with the Interior-point method.

January 2020

1. Compare the Simplex method and Interior-point method for a linear programming problem from a linear algebra point of view. What kind of linear algebra problems do we have in each method? For which problems would you prefer the Simplex method? For which problems would you prefer the Interior-point Method. Motivate your choice.
2. What is the central path in a Barrier method? How do you numerically find a point on the central path? How do successive solutions on the central path approach the solution of the KKT conditions? How do we gain insight into convergence? How does the number of iterations depend on the parameters of the algorithm?
3. Write down the KKT conditions for the following optimization problem and find the local optimum.
$$\begin{aligned} & \max x y \\ & \text{subject to } x + y^2 \leq 2, x + y^2 \leq 2 \\ & x, y \geq 0. \end{aligned}$$
4. Explain *backtracking line search*. Write down the algorithm. Why is this useful? In which algorithms from the course is this used and why?

August 2019

1. Compare the Simplex method and Interior-point method for a linear programming problem from a linear algebra point of view. What kind of linear algebra problems do we have in each method? For which problems would you prefer the Simplex method? For which problems would you prefer the Interior-point Method. Motivate your choice.
2. In the barrier method, the central path is parametrized by a parameter t . In the primal-dual Interior-point method the duality measure $\mu = \sum_{i=1}^n x_i s_i / n$ is used. What is the difference between the two parameters? Explain how they both appear in the KKT conditions.

3. Write down the KKT conditions for the following optimization problem and find the local optimum.

$$\max -(x-2)^2 - 2(y-1)^2$$

$$\text{subject to } x+4y \leq 2$$

$$x \geq y.$$

4. When a sequence of LP problems are solved, where an additional variable is added each time, then one prefers to use the (primal) simplex method. Why is that? On the other hand, when one solves a sequence of problems in which there is always one additional constraint, one prefers the dual simplex. What is the dual simplex? Why is it preferred in the last situation to use the dual simplex instead of the primal simplex?

Categorieën:

- Wiskunde
- MWIS