

Tuyaux
2de Bachelor Fysica

WINAK

Januari 2011

Inhoudsopgave

Inleiding	3
1 Algemene Fysica 3: Elektromagnetisme	4
1.1 Theorie	4
1.1.1 Januari 2006	4
1.1.2 Januari 2008	5
1.1.3 Januari 2009	5
1.1.4 Januari 2010	6
1.2 Oefeningen	8
1.2.1 Januari 2006	8
1.3 Januari 2008	9
1.4 Januari 2009	11
1.5 Augustus 2009	11
1.6 Januari 2010	13
2 Kwanttheorie en Statistiek	15
2.1 Opgaven	15
2.1.1 Juli 2002	15
2.1.2 Januari 2006	16
2.1.3 September 2008	17
2.1.4 September 2009 en 2010	17
2.2 Oplossingen	18
2.2.1 Juli 2002	18
3 Kwantummechanica	20
3.1 Juni 2005	20
3.2 Januari 2006	21
3.2.1 Januari 2008	21
3.2.2 Extra	22
3.2.3 Januari 2009	22
3.2.4 Augustus 2009	31
4 Theoretische Fysica 4: Mechanica 2	32
4.1 De cursus, het vak, het examen	32
4.2 Theorie	32
4.2.1 Voorbeeldvragen	32
4.2.2 Januari 2005	33
4.2.3 Juni 2006	33
4.2.4 Juni 2008	33
4.2.5 Juni 2009	33
4.2.6 Juni 2010	33

INHOUDSOPGAVE	2
4.3 Oefeningen	34
4.3.1 Januari 2005	34
4.3.2 Juni 2006	34
4.3.3 September 2007	35
4.3.4 Juni 2008	36
4.3.5 Juni 2009	37
4.3.6 Augustus 2009	38
4.3.7 Juni 2010	38
4.3.8 September 2010	40
5 Biofysica 1	42
5.1 Theorie	42
5.1.1 Juni 2005	42
5.1.2 Juni 2006	43
5.1.3 Juni 2008	46
5.1.4 Juni 2008 extra	48
5.1.5 Juni 2010	51
6 Astrofysica	54
6.1 Juni 2008	54
6.1.1 Korte vragen	54
6.1.2 Langere vragen	55
6.2 Juni 2009	58
6.2.1 Korte vragen (20 punten)	58
6.2.2 Lange vragen (20 punten)	59
6.3 Juni 2010	62
6.3.1 Korte vragen (20 punten)	62
6.3.2 Lange vragen (20 punten)	63
Dankwoordje	66

Inleiding

Jullie weten ondertussen hoe alles verloopt, vandaar deze korte inleiding. Ik hoop dat deze verzameling vragen van vroeger en nu jullie kan helpen in deze duistere tijden! Als jullie daarenboven nog zo vriendelijk willen zijn om de examenvragen van deze reeks bij te houden en mij ergens te bezorgen, zijn jullie opvolgers jullie heel dankbaar!

Veel succes!

Deze versie is geprint op 21 november 2010.

*Julie
WINAK mentor Fysica 2010-2011*

Hoofdstuk 1

Algemene Fysica 3: Elektromagnetisme

1.1 Theorie

Dit vak ligt in de lijn van de andere cursussen. De docent is echter de voorbije jaren 2 keer veranderd. De stijl van Prof. G. Van Tendeloo is wel gekend, Prof. Verbeeck wilde vooral dat je de fysica van alles inzag. Prof. Dr. S. Bals legt haar accenten dan weer op een andere plaats, maar om een goed idee te krijgen, is het aangeraden om haar powerpoints erbij te nemen tijdens het studeren of bij het herhalen. Hierop zie je altijd heel duidelijk wat ze belangrijk vindt en wat dan weer minder en ze zijn daarbij een heel goede samenvatting!

1.1.1 Januari 2006

Prof. Dr. Jo Verbeeck

1. Beschrijf de Liebmann methode
2. Bespreek het op- en ontladen van een condensator in een RC-kring
3. Bespreek het Hall-effect mbv. klassieke theorie
4. Bescpreek het gedrag van de stroom door een RLC kring bij het aanleggen van een wisselspanningsbron. Werk analytisch maar bespreek je resultaat aan de hand van fasoren. Maak een schets van amplitude en fase in functie van de aangelegde frequentie.¹
5. ²Bespreek ferro-elektriciteit (indien je een formule van para-elektriciteit nodig hebt, dien je die zelf af te leiden).

Opmerkingen:

- Werk de vragen volledig schriftelijk uit nadien volgen er mondelinge bijvragen.
- Maak DUIDELIJKE tekeningen waarop je alle symbolen aanduidt die je gebruikt.

¹hierbij mag gebruik gemaakt worden van impedanties. Deze hoeven niet meer afgeleid te worden.

²Deze vraag kan je mondeling toelichten (de andere dus niet!), gelieve toch zo volledig mogelijk schriftelijk te antwoorden.

Bijvragen, opgaven ³

1. Waarom wordt een vogel niet geëlektrrocuteerd wanneer hij op een elektriciteitsdraad zit?
2. Waarom sterven koeien vaker door bliksem?
3. Hoe kunnen we weten dat het magnetisch veld van de Aarde vroeger omgedraaid was?

Bijvragen, oplossingen

1. vermits hij geen contact maakt met de grond, zit er geen potentiaalverschil tussen 2 punten van de vogel, dus ook geen stroom
2. Ze sterven vaker door de opgewekte stroom in de grond, niet door de inslag zelf. Vermits hun poten verder uiteen staan dan bij mensen en de grond een zekere weerstand heeft, wordt er een groter potentiaalverschil gecreëerd, en dus meer stroom, dus schadelijker.
3. materialen die in een tijd dat het veld omgekeerd was door afkoeling zijn overgegaan van paramagnetische toestand naar ferromagnetische hebben die polarisatietoestand vastgehouden.

1.1.2 Januari 2008

prof. dr. S. Bals

1. Bespreek geleiding in metalen volgens:
 - (a) De klassieke benadering
 - (b) De statistische benadering (Wet van Fick niet)
2. Bereken de randvoorwaarden voor \bar{E} en \bar{D} aan het scheidingsoppervlak tussen twee diëlektrica. Bespreek waarom je bepaalde benaderingen of formules mag gebruiken.
3. Bereken de equivalente stroomdichtheid voor niet-homogeen gemagnetiseerde materie. Duidelijke tekeningen!

1.1.3 Januari 2009

prof. dr. S. Bals

1. Halfgeleiders (5punten-20min)
 - (a) Beschrijf het mechanisme van intrinsieke geleiding; geef ook een voorbeeld van een materiaal dat zich op deze manier gedraagt. (max. 1 pagina - 1punt)
 - (b) Beschrijf het mechanisme van extrinsieke geleiding; geef ook een vb van een materiaal dat zich op deze manier gedraagt. Geef de verschillen met intrinsieke geleiding. (max. 1 pagina - 1punt)
 - (c) Teken de bandenstructuur voor een metaal, een isolator, een intrinsieke en (de 2 vormen van) extrinsieke halfgeleider. Benoem de banden en bespreek adhv deze figuren of er al dan niet (max. 10 lijnen) geleiding zal plaatsvinden, voor elke situatie apart. (2punten)
 - (d) Wat is een diode en hoe ziet de I,V grafiek eruit? (1punt)

³deze stonden niet op papier: prof. Verbeeck stelde ze tijdens het mondeling en verwachtte dus een onmiddelijk antwoord.

2. Magnetisme (5punten-40min)

- (a) Geef de afleiding van het Larmoreffect. (2punten)
- (b) Geef in de afleiding aan waarom je bepaalde stappen/benaderingen maakt. (1punt)
- (c) Leg in je eigen woorden uit wat dit effect inhoudt; geef dus de fysische interpretatie, dit mag adhv een voorbeeld. Gebruik max. 10 lijnen en maak een tekening. (1punt)
- (d) Bespreek waar en waarom we dit effect verder in de cursus nog gebruiken. (max. 5 lijnen - 1punt)

3. Dielectrica (5punten-30min) DEZE VRAAG WORDT MONDELING BESPROKEN

- (a) Bereken de elektrische potentiaal veroorzaakt door een aantal parallel gerichte dipolen in een cilindrisch volume. Maak duidelijke tekeningen. (2punten)
- (b) Hoe kan je de situatie intuïtief beschouwen? Gebruik max. 5 lijnen en maak een tekening. (1punt)
- (c) Wat gebeurt er voor niet-homogene polarisatie? Geef enkel het resultaat en bespreek de uitdrukking in max. 10 lijnen. (2punten)

4. Supergeleiding (5punten-30min)

- (a) Welke 3 fysische parameters karakteriseren een supergeleider? Leg bij elke parameter de betekenis uit in max. 2 lijnen. (1punt)
- (b) Teken in een grafiek het verband tussen die drie parameters. (1punt)
- (c) Bespreek op max. 1 pagina of de Maxwell vergelijkingen supergeleiding kunnen verklaren. Indien ja: motiveer waarom. Indien nee: welke aanpassingen zijn nodig? (2punten)
- (d) Leg in max. 10 lijnen uit wat Cooperparen zijn, maak ook een tekening. (1punt)

1.1.4 Januari 2010

prof. dr. S. Bals

1. Elektrisch veld (5punten-30min)

- (a) Bereken gebruik makend van de wet van Coulomb, het elektrisch veld veroorzaakt door een homogeen geladen plaatvormige isolator.
- (b) Wat wordt de uitdrukking voor het elektrisch veld als de plaat oneindig groot wordt?
- (c) Leid de situatie in b) ook nog af op een andere manier.

2. Thermoëlektrische coëfficiënten (4punten-15min) Beschrijf de 4 thermoëlektrische effecten die we in de cursus besproken hebben in telkens maximaal 10 lijnen.

3. Magnetisme (5punten-40min)

- (a) Geef de afleiding van het Larmoreffect
- (b) Geef in de afleiding duidelijk aan waarom je bepaalde stappen/benaderingen maakt.

4. Elektrische polarisatie (4punten-30min)

- (a) Leid de uitdrukking van het dipoolmoment af voor een geïnduceerde dipool.

- (b) Bepsreek in maximaal 10 lijnen het verschil met een permanente dipool.
DEZE VRAAG WORDT MONDELING BESPROKEN

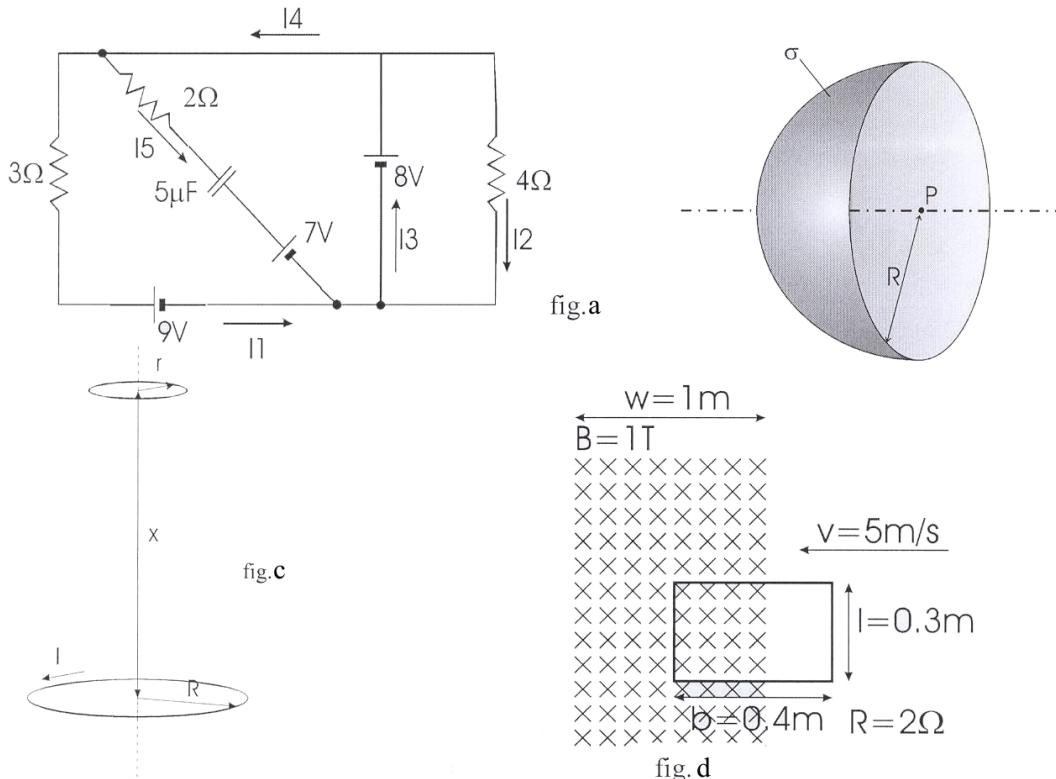
5. Supergeleiding (2punten-15min)

- (a) Wat bepaalt het verschil tussen een type I en type II supergeleider? (max. 5 lijnen)
- (b) Wat weet je over de effecten die optreden bij een type II supergeleider? (max. 10 lijnen)

1.2 Oefeningen

1.2.1 Januari 2006

Prof. Dr. Jo Verbeeck ⁴



Figuur 1.1: De figuren bij het examen oefeningen algemene fysica van Januari 2006

- Bepaal de stroom in elke tak van de kring (zie fig 1.1a, respecteer opgelegde symbolen en zin). Bepaal de lading op de capaciteit. Je mag breuken laten staan.⁵
- Bereken het elektrisch veld in het centrum P van een halve bolschil met straal R . De bolschil bestaat uit een niet geleidend materiaal en bezit een constante oppervlakteladingsdichtheid σ . Is dit resultaat consistent met wat je weet over een hele bolschil?
- Gegeven de opstelling zoals geschetst in fig.1.1c. Een stroomkring met straal R wekt een B -veld op. Een kleine stroomkring met straal r ligt op afstand x van de grote kring met $x \gg R$ (benader zodat B in het vlak van de kleine stroomkring constant is)
 - Toon aan dat $B = \frac{\mu_0 I R^2}{2x^3}$ in het vlak van de kleine stroomkring (met benadering $x \gg R$).
 - Stel dat x verandert met een constante snelheid v . Bereken de opgewekte emk in de kleine stroomkring in functie van v en x (gebruik vorig resultaat).

⁴Waarschijnlijk zijn deze oefeningen opgesteld door Katrijn Putteneers, maar vanwege ziekte verbeterde prof. Verbeeck het examen

⁵Oplossingsmethode: hierbij dien je te weten dat een capaciteit een oneindige weerstand heeft, en veronderstel je dat de opstelling reeds tot stationaire toestand is gekomen, zodat $I_5 = 0$.

4. Een geleidend frame beweegt met een constante snelheid $v = 5 \frac{m}{s}$ in het vlak. Na een tijdje komt het frame door een gebied met homogeen magnetisch veld $b = 1T$ met breedte $w = 1m$ zoals aangegeven op fig.1.1d. Bereken de opgewekte emk en de stroom die in het frame zullen ontstaan in functie van de tijd. Geef de resultaten weer in een grafiek. Toon op een serie tekeningen de stroomzin en de plaats en polariteit van de opgewekte emk voor de verschillende stadia van de beweging (buiten veld, gedeeltelijk in veld, volledig in veld, gedeeltelijk uit veld, volledig uit veld).

Opmerkingen

- Lees aandachtig de opgave en maak een DUIDELIJKE tekening waarop je alle symbolen aanduidt die je gebruikt.
- Kijk na of je resultaat fysisch zinvol is.
- Een vector is geen scalar.

1.3 Januari 2008

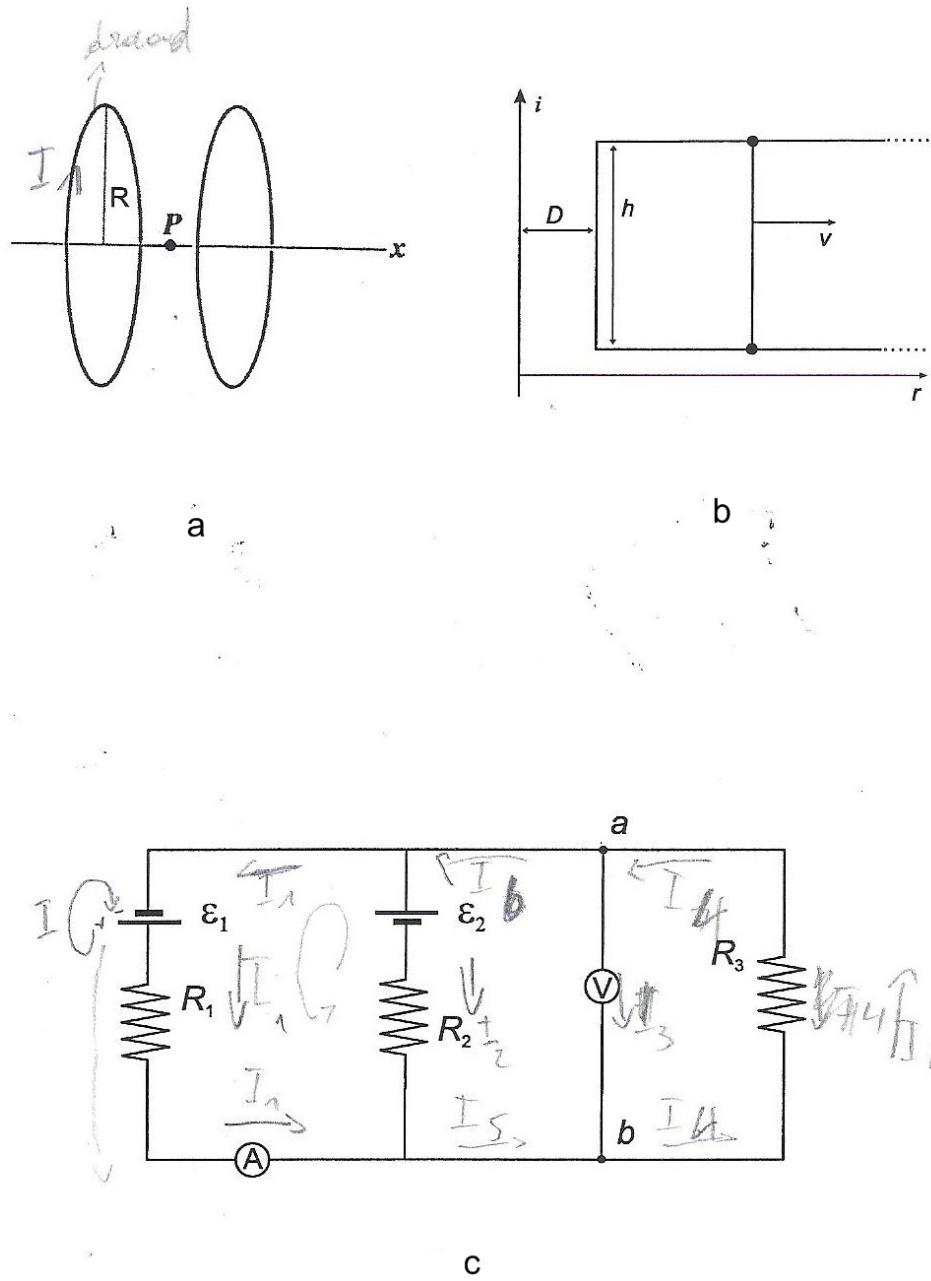
Wouter Van den Broek

1. *Elektrostatica.* Beschouw een ladingsverdeling ρ gegeven door

$$\rho(x, y, z) = \begin{cases} -|x| + D & \text{als } -D \leq x \leq D \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

M.a.w. een plaat met dikte $2D$ in het (y, z) -vlak waarvan de ladingsdichtheid lineair afneemt met x .

- (a) Bereken het elektrisch veld \bar{E} in de volledige ruimte, d.w.z. voor zowel $|x| < D$ als $|x| > D$. Maak hiervoor gebruik van de wet van Gauss en de symmetrie van het systeem.
- (b) Bereken het potentiaalverschil ΔV tussen de vlakken $x = 2D$ en $x = 0$.
2. *Magnetisme.* De Helmholtzopstelling van twee spoelen (zie figuur 1.2a) veroorzaakt een uniform veld over een groot gebied. Twee gelijke spoelen, met dezelfde stroom, worden op dezelfde as geplaatst, op een afstand R gelijk aan hun straal.
 - (a) Stel een uitdrukking op voor het veld B op een willekeurig punt van de as.
 - (b) Bewijs dat dB/dx en d^2B/dx^2 gelijk zijn aan nul in P.
3. *Emk.* Een oneindig lange draad vervoert een stroom i , op een afstand D van de draad bevindt zich een kader met totale weerstand R , (zie figuur 1.2b). Het glijdende stuk van het kader verplaatst zich met een snelheid v . Geef een uitdrukking voor de stroom I in de kader als functie van v en r . Bepaal de zin van I a.d.h.v. de wet van Lenz en geef een uitdrukking voor de kracht die men op de staaf moet uitoefenen om v constant te houden.
4. *R-keten.* Gegeven een stroomkring (figuur 1.2c). Wat is de grootte en de zin van de stroom door de Amperemeter? Wat is de spanning uitgelezen op de Voltmeter? Welk punt heeft de hoogste potentiaal, a of b ?
Gebruik volgende waarden: $R_1 = 1 \Omega$, $R_2 = 2 \Omega$, $R_3 = 3 \Omega$, $\epsilon_1 = 1 \text{ V}$ en $\epsilon_2 = 3 \text{ V}$.



Figuur 1.2: De figuren bij het examen oefeningen algemene fysica van Januari 2008

1.4 Januari 2009

Wouter Van den Broek

1. *Elektrostatica.* Een vroeger atoommodel, voorgesteld door Rutherford, heeft een positieve puntlading Ze (de kern) in het centrum van een bol met straal R waarin de negatieve lading, Ze , uniform verdeeld is. Z is het atoomgetal en e de elementaire lading.

- (a) Toon aan dat het elektrische veld van het atoom gelijk is aan

$$E = \begin{cases} \frac{Ze}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{R^3} \right) & \text{als } r \leq R \\ 0 & \text{als } r > R \end{cases}$$

Tip: Zoek eerst de ladingsverdeling ρ_- van de elektronen. (3p)

- (b) Zoek de potentiaal $V_{R/2}$ op een afstand $R/2$ van de kern. (2p)

2. *Kirchoff.* Beschouw figuur 1. Geef de stromen door elke weerstand, de aflezing van de voltmeter, en de spanning ϵ van de stroombron. (5p)

3. *Emk.* De straal r van de geleidende lus in figuur 2 krimpt met de tijd volgens $r = r_0 e^{-\beta t}$. De lus staat loodrecht op een constant magnetisch veld \vec{B} .

- (a) Wat is de geïnduceerde emk ϵ op een willekeurig tijdstip t ? (2p)

- (b) Duid de richting van de geïnduceerde stroom aan. (1p)

- (c) Welke kracht moet men leveren op het tijdstip t om de lus samen te trekken, als de weerstand van de geleider R Ohm per meter is? (2p).

4. *Magnetisme.* Figuur 3 is een doorsnede van drie lange draden met een massadichtheid van 50 g/m . Ze voeren allen dezelfde stroom in de aangeduide richting. De onderste draden liggen 4 cm uit elkaar en zijn vastgemaakt aan de tafel.

- (a) Zoek de stroom I waarbij de bovenste draad blijft zweven zodat hij een gelijkzijdige driehoek vormt met de onderste draden. (4p)

- (b) Als de stroom aangepast wordt zodat de bovenste draad nog slechts 2 cm boven de tafel zweeft, waar op de middelloodlijn van het lijnstuk tussen de 2 onderste draden is het veld dan exact nul? (1p)

1.5 Augustus 2009

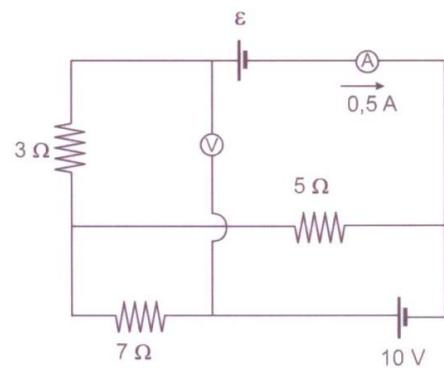
Wouter Van den Broek

1. *Elektrostatica.* Gegeven een cilinderschil

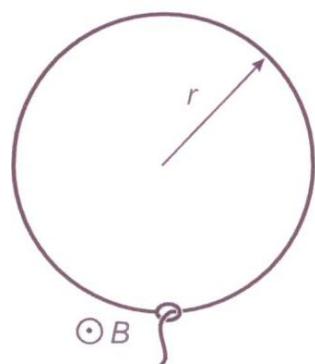
$$\rho = \begin{cases} \rho_0 & \text{als } a^2 \leq r^2 \leq b^2 \\ 0 & \text{buiten de cilinderschil} \end{cases}$$

Bewijs dat het elektrisch veld gegeven wordt door

$$E = \begin{cases} 0 & \text{als } r < a \\ \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} (r^2 - a^2) & \text{als } a \leq r \leq b \\ \frac{\rho_0}{2\epsilon_0} \frac{1}{r} (b^2 - r^2) & \text{als } b < \infty \end{cases}$$



Figuur 1



Figuur 2

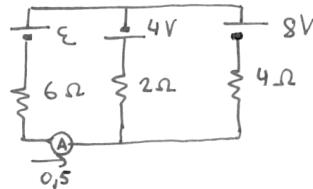


Figuur 3

rcll

$$\rho = \rho_0 \sqrt{a^2 - r^2} \quad \text{voor } r \leq a; \quad = 0 \quad \text{voor } r > a.$$

2. *Magnetisme* Je bekijkt een elektron op een cirkelvormige baan met een snelheid van $2.210^6 m/s$ en straal 5.310^{-19} . De elementaire lading wordt gegeven door 1.610^{-15} (μ_0 wordt ook gegeven). Bereken nu het magnetisch veld in het middelpunt van de cirkelvormige baan.
3. *Kirchoff*. Beschouw figuur 1. Bereken ϵ en de stroom in elke weerstand.
4. *Emk*. Gegeven $\bar{B} = \frac{1}{\sqrt{3}} e^t (\bar{e}_x - \bar{e}_y + \bar{e}_z)$, het magnetisch veld dat verandert in de tijd en gevoeld wordt door een koperen draad.
- (a) Wat is de geïnduceerde emk ϵ op een willekeurig tijdstip t ? (2p)
 - (b) Wat is de zin van de geïnduceerde stroom? (1p)

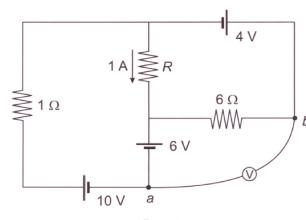


Figuur 1.3: figuur 1

1.6 Januari 2010

Wouter Van den Broek

1. *Elektrostatica*. Beschouw de cilindrische ladingsverdeling ρ : Met r de afstand tot de cilinderas.
- (a) Bereken de grootte van het elektrisch veld \vec{E} . [/4]
 - (b) Bereken het potentiaalverschil tussen $r = a$ en $r = 2a$. Als je vraag a niet opgelost hebt, gebruik dan $E(r) \propto 1/r$ [/1]
2. *Kirchhoff*. Zie figuur 1. Bereken de stromen door de weerstanden van 1 en 6Ω . Wat is de waarde van de weerstand R , en welke waarde wordt er op de voltmeter afgelezen? Welk punt heeft de hoogste potentiaal, a of b? [/5]



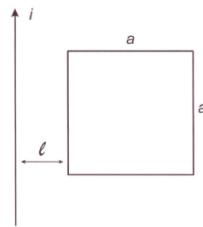
Figuur 1.4: figuur 1

3. *Magnetisme.* De lens van een elektronenmicroscoop creëert een elektronenbundel waarvan de stroomdichtheid in het focusvlak een Gaussiaans profiel heeft:

$$J = J_0 \exp -r^2/\sigma^2 \quad (1.1)$$

met r de afstand in het focusvlak en de richting van de stroom loodrecht op dit vlak. Deze stroomdichtheid veroorzaakt een magnetisch veld \vec{B} in het focusvlak.

- (a) 99% van de stroom bevindt zich binnen $r > 2.15\sigma$. Welk gedrag verwacht je voor $B(r > 2.15\sigma)$? [1]
 - (b) Bereken de grootte van het magnetisch veld \vec{B} voor willekeurige r . [/4]
4. *Emk.* Zie figuur 2. Een stroomvoerende geleider en een koperen kader liggen beiden in hetzelfde vlak. De stroom i in de geleider neemt af met de tijd t volgens $i = i_0 \exp -\beta t$, met β een positieve constante.
- (a) Bereken de elektromotorische kracht in de kader. [/4]
 - (b) Duid de stroomzin aan van de geïnduceerde stroom. [/1]



Figuur 2

Figuur 1.5: figuur 2

Hoofdstuk 2

Kanstheorie en Statistiek

Dit is het eerste jaar dat dit vak niet meer door Prof. De Wolf, maar door Prof. Van Aert gegeven wordt. De vorige examens zijn dus misschien niet zo relevant, maar kunnen toch dienen als een goede oefening!

2.1 Opgaven

2.1.1 Juli 2002

Prof. Dr. E. De Wolf

1. Bij een groot aantal ziekenhuispatiënten werd nagegaan of ze leden aan diabetes en werd bovendien de bloeddruk gemeten. In deze populatie had 10% diabetes en 25% een hoge bloeddruk. Bij de diabetespatiënten had 85% een hoge bloeddruk.
 - (a) Welk is de kans op hoge bloeddruk bij niet-diabetici? (0.183)
 - (b) Welk is de kans dat een patiënt diabetes heeft indien de bloeddruk hoog is? (0.34)
2. r_1, r_2, \dots, r_n zijn n onafhankelijke Poisson veranderlijken met gemiddelden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Bewijs dat de veranderlijke $r = \sum_{i=1}^n r_i$ ook Poisson verdeeld is. Wat is $\mathcal{M}\{r\}$ en $\sigma^2\{r\}$?
3. Het IQ van studenten (en proffen) is normaal verdeeld met gemiddelde 100 (per definitie) en dispersie 16.
 - (a) Bereken de prob. dat een student een IQ heeft ≥ 132 .
 - (b) 25 studenten worden geselecteerd. Welk is de kans dat het gemiddelde IQ van deze studenten groter is dan 110?
4. Zij x een r.v. met cumulatieve d.f. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Bewijs dat de r.v. $u = F(x)$ uniform verdeeld is over het interval $(0, 1)$.
5. De Cauchy-verdeling $\phi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ heeft als karakteristieke functie $\chi(t) = e^{-|t|}$. Beschouw n onafhankelijke Cauchy-veranderlijken x_1, x_2, \dots, x_n . Welk is de verdeling van het rekenkundige gemiddelde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$? Bespreek dit resultaat in het licht van de Centrale Limietstelling.
6. a) Bewijs de ongelijkheid van Tchebycheff; b) bewijs de Stelling van Bernoulli; c) de wet der grote getallen.

7. Uit een Gaussisch-verdeelde populatie met gemiddelde μ en dispersie σ neemt men een aselecte steekproef van n elementen. Bewijs dat de variantie van de verbeterde steekproef-variantie gelijk is aan $\frac{2\sigma^4}{n-1}$.
8. Bij het werpen van een dobbelsteen zijn zes uitslagen mogelijk $E_1 \dots E_6$. We werpen 12 dobbelstenen. Bereken de kans dat de verschijnselen $E_1 \dots E_6$ elk exact 2 keer optreden (0.0034). Dit is een urne-probleem met 6 vakjes en 12 ballen.
9. Bewijs dat de binomiale verdeling $p_i = C_n^i \theta(1-\theta)^{n-i}$ kan benaderd worden door de normale verdeling voor grote n .
10. Toon aan dat een r.v. y met exponentiële verdeling $\phi(y) = e^{-y}$ kan worden gesimuleerd door middel van de transformatie $y = -\ln(1-x)$ waarbij x uniform verdeeld is tussen 0 en 1.

2.1.2 Januari 2006

Prof. Dr. E. De Wolf

1. Bij een groot aantal ziekenhuispatienten werd nagegaan of ze leden aan diabetes en werd bovendien de bloeddruk gemeten. In deze populatie had 10% diabetes en 25% een hoge bloeddruk. Bij de diabetespatiënten had 85% een hoge bloeddruk.
 - Welk is de kans op hoge bloeddruk bij niet-diabetici? (0.183)¹
 - Welk is de kans dat een patiënt diabetes heeft indien de bloeddruk hoog is? (0.34)
2. De veranderlijke x is normaal verdeeld met gemiddelde gelijk aan variantie gelijk aan 16. Wat is de probabiliteit dat $12 \leq x \leq 20$?
3. Zij x een r.v. met cumulatieve d.f. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Bewijs dat de r.v. $u = F(x)$ uniform verdeeld is over het interval $(0, 1)$.
4. Een dubbele vraag
 - (a) Wat is het verband tussen onafhankelijk en niet gecorreleerd.² Wat is er hierbij bijzonder aan normaal verdeelde veranderlijken?
 - (b) Bewijs dat de absolute waarde van de correlatiecoëfficiënt steeds kleiner of gelijk is aan 1.
5. Uit een Gaussisch-verdeelde populatie met gemiddelde μ en dispersie σ neemt men een aselecte steekproef van n elementen. Bewijs dat de variantie van de **verbeterde** steekproef-variantie gelijk is aan $\frac{2\sigma^4}{n-1}$.³
6. Twee personen werpen elk een munt n keer op. Wat is de kans dat ze hetzelfde aantal keer "munt" bekomen?
7. Wat is de benaderende variantie van y wanneer

$$y = A \sin \theta + B \cos \theta \quad (2.1)$$

A, B en θ zijn onafhankelijke veranderlijken.

¹Deze numerieke oplossingen stonden wel degelijk mee op het opgavenblad

²Hierbij werd ook gevraagd te bewijzen dat onafhankelijk ongecorreleerd impliceert

³Hierbij werd ook gevraagd te bewijzen dat $\frac{ns^2}{\sigma^2}$ verdeeld is volgens χ^2 .

2.1.3 September 2008

Prof. Dr. E. De Wolf

1. r_1, r_2, \dots, r_n zijn n onafhankelijke Poisson veranderlijken met gemiddelden $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$. Bewijs dat de veranderlijke $r = \sum_{i=1}^n r_i$ ook Poisson verdeeld is. Wat is $\mathcal{M}\{r\}$ en $\sigma^2\{r\}$?
2. Zij x een r.v. met cumulatieve d.f. $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$. Bewijs dat de r.v. $u = F(x)$ uniform verdeeld is over het interval $(0, 1)$.
3. Zij x en y twee onafhankelijke r.v., beschouw:

$$\begin{aligned} a &= x+y \\ b &= x-y \end{aligned} \tag{2.2}$$

Bereken $\sigma^2\{a\}, \sigma^2\{b\}, \text{cov}\{a, b\}$ en ρ tussen a en b .

4. De Cauchy-verdeling $\phi(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ heeft als karakteristieke functie $\chi(t) = e^{-|t|}$. Beschouw n onafhankelijke Cauchy-veranderlijken x_1, x_2, \dots, x_n . Welk is de verdeling van het rekenkundige gemiddelde $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$? Bespreek dit resultaat in het licht van de Centrale Limietstelling.
5. Bewijs dat het rekenkundig gemiddelde van een aselecte en voldoende grote steekproef benaderend normaal verdeeld is.
6. Een boek van 500 pagina's bevat 500 drukfouten. Bereken de kans dat het aantal drukfouten op een pagina groter of gelijk aan 3 is.
7. $y = A \sin(\theta) + B \cos(\theta)$
Zijn A , B en θ onafhankelijk? Bereken de variantie van y .
8. Bolletjes met een diameter van $3 \pm 1\text{cm}$ worden aangekocht. De productie is Gaussisch verdeeld met $\mu = 3,0\text{cm}$ en $\sigma = 0,5\text{cm}$
 - Hoeveel procent wordt er verworpen?
 - Hoe moet de producent dit in zijn prijs verwerken?

2.1.4 September 2009 en 2010

Prof. Dr. E. De Wolf Het examen van in 2009, net als dat van in 2010 bestond enkel uit vragen die reeds hierboven in andere examens gesteld werden.

2.2 Oplossingen

Vooraleer je verder leest, bedenk dat het nuttiger is om eerst een tijd te zoeken voor je deze oplossingen bekijkt!

2.2.1 Juli 2002

1. D = diabetes; \bar{D} = geen diabetes; H = Hoge bloeddruk

(a)

$$P(H) = P(H \cdot D) + P(H \cdot \bar{D}) \quad (2.3)$$

$$= P(D)P(H/D) + P(\bar{D})P(H/\bar{D}) \quad (2.4)$$

$$\Leftrightarrow 0,25 = 0,1 \cdot 0,85 + 0,9 \cdot x \quad (2.5)$$

$$\Leftrightarrow x = 0,1833\dots \quad (2.6)$$

(b)

$$P(D/H) = \frac{P(D)P(H/D)}{P(D)P(H/D) + P(\bar{D})P(H/\bar{D})} \quad (2.7)$$

$$= \frac{0,1 \cdot 0,85}{0,1 \cdot 0,85 + 0,9 \cdot 0,1833\dots} \quad (2.8)$$

$$= 0,34 \quad (2.9)$$

2.

$$\mathcal{M}_r(T) = \mathcal{M}_{r_1+\dots+r_n}(T) \quad (2.10)$$

$$= \mathcal{M}_{r_1}(T) \cdot \dots \cdot \mathcal{M}_{r_n}(T) \quad (2.11)$$

$$= e^{\mu_1(e^T-1)} \cdot \dots \cdot e^{\mu_n(e^T-1)} \quad (2.12)$$

$$= e^{(\mu_1+\dots+\mu_n)(e^T-1)} \quad (2.13)$$

Dit is Poisson-verdeeld met $\mu = \sum \mu_i (= \sigma)$ (zie theorie).

$$\sigma = \mu^2 - \mu(\mu - 1) = (\sum \mu_i)^2 - \sum \mu_i(\sum \mu_i - 1) = \sum \mu_i = \mu$$

3. (a)

$$P = 1 - \Phi(132) \quad (2.14)$$

$$= 1 - \Psi\left(\frac{132 - 100}{16}\right) \quad (2.15)$$

$$= 1 - \Psi(2) \quad (2.16)$$

$$\cong 0,027 \quad (2.17)$$

Het laatste resultaat volgt uit de tabellen (aan het einde van hoofdstuk 5)

(b) Dit resultaat is niet helemaal zeker:

Analoog aan (a) maar met $\sigma_n = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{16}{\sqrt{25}}$

4. Zal je zelf moeten vinden ;-)

5.

$$\chi_{\bar{x}}(T) = \chi_{\frac{x_1+\dots+x_n}{n}}(T) \quad (2.18)$$

$$= \chi_{\frac{x_1}{n}}(T) \cdot \dots \cdot \chi_{\frac{x_n}{n}}(T) \quad (2.19)$$

$$= \chi_{x_1}\left(\frac{T}{n}\right) \cdot \dots \cdot \chi_{x_n}\left(\frac{T}{n}\right) \quad (2.20)$$

$$= e^{-\frac{|T|}{n}} \cdot \dots \cdot e^{-\frac{|T|}{n}} \quad (2.21)$$

$$= e^{-|T|} \quad (2.22)$$

Dit is opnieuw Poisson-verdeeld (zie theorie). De centrale limiet-stelling geldt hier niet (ondermeer omdat σ niet bestaat)

6. Zie theorie

7. Zie theorie (en opmerking bij examen van januari 2006)

8. (Ook dit resultaat is niet helemaal zeker, maar vermits de numerieke uitkomst juist is, is de kans dat dit klopt vrij groot...)

$$P = \frac{\text{aantal gunstige gevallen}}{\text{totaal aantal gevallen}} \quad (2.23)$$

Hierin is het totaal aantal gevallen 6^{12} . Het aantal gunstige is in feite de vraag “Op hoe veel manieren kan ik 12 dingen opdelen in groepen van 6 waarbij elke groep 2 elementen bevat”. Zo’n oefening is analoog aan eentje gemaakt in de klas; de uitkomst is dat $\frac{12!}{(2!)^6}$.

9. Zie theorie

10. Wederom niet zeker

$$d\Phi(y) = \phi(y)dy \quad (2.24)$$

$$= \phi(y(x)) \left| \frac{dy}{dx} \right| dx \quad (2.25)$$

$$= e^{\ln(1-x)} \left| \frac{-1}{1-x} \right| dx \quad (2.26)$$

$$= (1-x) \frac{1}{1-x} dx \quad (2.27)$$

$$= dx \quad (2.28)$$

$$= \phi(x)dx \quad (2.29)$$

$$= d\Phi(x) \quad (2.30)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = 1 \quad (2.31)$$

Dit laatste wijst op een uniforme verdeling.

Hoofdstuk 3

Theoretische Fysica V: Inleiding tot de Kwantummechanica

Sinds dit jaar geeft Prof. F. Peeters dit vak opnieuw. Hij gaf dit vak tot enkele jaren geleden ook, dus ik denk dat de stijl van de vragen wel zal overeenkomen met zijn vroegere examens. In 2010 gaf Prof. Brosens dit vak, hiervan zijn jammer genoeg geen vragen bewaard, maar zijn vraagstijl verschilt waarschijnlijk toch erg met deze van Prof. Peeters.

3.1 Juni 2005

Prof. Dr. F. Peeters en Dr. B. Baelus

1. Geef de postulaten van de kwantummechanica
2. Het waterstofatoom:
 - (a) Bereken het spectrum door gebruik te maken van de kwantisatie van de Bohrse banen.
 - (b) Geef de kwantumgetallen voor het waterstofatoom en welke waarden kunnen ze aannemen? Wat is de ontaarding van elk energieniveau?
3. Een deeltje beweegt zich in een oneindig diepe potentiaalput met breedte $2a$:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & -a < x < a \\ \infty & \text{elders} \end{cases} \quad (3.1)$$

De initiële golffunctie op $t = 0$ wordt gegeven door

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} 3x^3 + a^3 & -a < x < a \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (3.2)$$

- (a) Geef de eigenwaarden en eigenfuncties van deze oneindig diepe potentiaalput.
- (b) Bereken de waarschijnlijkheid om de laagste energie te meten op $t = 0$.
- (c) Geef de tijdsafhankelijke golffunctie van het deeltje als er geen meting heeft plaatsgevonden.
- (d) Geef de tijdsafhankelijke golffunctie al een meting op $t = 0$ resulteerde in E_1 .

4. Beschouw een deeltje met massa m in de volgende potentiaalput

$$V(x)) = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Dit is de zogenaamde “halve harmonische oscillator”¹

- (a) Geef de energieniveaus van dit systeem.
 - (b) Schets de golffuncties die overeenkomen met de laagste 3 eigenwaarden.
5. (a) Toon aan dat $[x, H] = \frac{i\hbar}{m}p$ als $H = \frac{p^2}{2m} + V(x)$.
- (b) Bereken: $\int_1^{10} \delta(x^2 - 7x + 6)(5x^2 - 10) dx$

3.2 Januari 2006

Prof. F. Peeters en Dr. B. Baelus

1. Beschouw het waterstofatoom en veronderstel de massa van de kern oneindig. Reduceer de Schrödinger vergelijking tot 1D vergelijkingen.
Los één van deze vergelijkingen op.
Geef de betekenis van het gevonden kwantumgetal.
2. Bereken het energiespectrum van een 1D oneindig diepe potentiaalput. Bewijs dat de grondtoestand voldoet aan de onzekerheidsrelatie van Heisenberg.
3. Voor een bepaald systeem kan de observabele A 3 waarden aannemen: 1,2 en 3. De Hamiltoniaan \hat{H} werkt in als volgt op de orthonormale eigentoestanden van \hat{A} :

$$\hat{H}|1\rangle = |1\rangle + i|2\rangle \quad (3.4)$$

$$\hat{H}|2\rangle = |2\rangle - i|1\rangle \quad (3.5)$$

$$\hat{H}|3\rangle = |3\rangle \quad (3.6)$$

- (a) Vind de eigentoestanden van de Hamiltoniaan.²
 - (b) Indien op $t = 0$ de energiewaarde $E = 2$ wordt gemeten, wat is dan de verwachtingswaarde van \hat{A} ?
4. Beschouw de beweging van een deeltje met massa m in een ééndimensionale potentiaal $V_0(x) = \lambda\delta(x)$. Bereken de transmissiecoëfficiënt T voor $\lambda > 0$.³

3.2.1 Januari 2008

Prof. Dr. F. Peeters

¹deze vraag vereist slechts een zeer kort antwoord

²ook 0 is een eigenwaarde

³Hierbij mag je kiezen tussen dit berekenen voor een balkvormige potentiaal en dan de limiet nemen, zodat je de deltafunctie krijgt, ofwel rechtstreeks met de deltafunctie werken, wat veel korter is.

Theorie

1. Wat is het foto-elektisch effect?
 - (a) Geef een schematische experimentele opstelling
 - (b) Wat meet dit effect?
 - (c) Waarom was de ontdekking van dit effect belangrijk voor de kwantummechanica?
2. Het waterstofatoom. Neem de massa van de kern gelijk aan oneindig. Reduceer het drie dimensioneel probleem tot eendimensionale problemen.

Oefeningen

1. Beschouw een deeltje in een oneindig diepe potentiaalput met breedte L:

$$V(x) = \begin{cases} 0, & 0 < x < L \\ \infty & \text{elders} \end{cases} \quad (3.7)$$

De initiële golffunctie op $t = 0$ is

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} N(a^2 - x^2), & 0 < x < L \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \quad (3.8)$$

- (a) Bepaal de normalisatieconstanten N
- (b) Schrijf de initiële golffunctie als een superpositie van de stationaire toestanden $\phi_n(x)$ van de put:

$$\Psi(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \phi_n(x) \quad (3.9)$$

en bereken de expansiecoëfficiënten c_n

- (c) Geef de tijdsafhankelijke golffunctie van het deeltje
- (d) Wat is de waarschijnlijkheid om de energie E_n te meten?
- (e) Bereken de verwachtingswaarde $\langle H \rangle$

2. Bereken de volgende commutator voor de operator

$$\hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 - \frac{\mu r^2 \omega^2}{2} : \quad (3.10)$$

$$[\hat{L}_x, \hat{H}_0]$$

3.2.2 Extra

Op het einde van de laatste les heeft Professor Partoens nog volgende examens gegeven:

Juni 2002

Augustus 2002

September 2003

Juni 2004

3.2.3 Januari 2009

Prof. Dr. Partoens

2^{de} kan. natuurkunde 28 juni 2002

Examen Theoretische Fysica 5

Inleiding tot de kwantummechanica

1. Het waterstof atoom.
 - (a) Leid de radiale en de angulaire vergelijkingen af.
 - (b) Bereken het spectrum door gebruik te maken van de kwantizatie van Bohrse banen.
2. Geef één experiment dat de golf-deeltjes dualiteit illustreert. Leg het principe van het experiment uit en toon waar men de golf-deeltjes dualiteit nodig heeft om het experiment te verklaren.
3. Beschouw de ééndimensionale oneindig diepe potentiaalput. De golffunctie van een deeltje in de put wordt op tijd $t = 0$ gegeven door

$$\psi(x, 0) = \begin{cases} A & \text{als } 0 < x < L \\ 0 & \text{buiten de put} \end{cases}$$

- (a) Bepaal de constante A zodat de golffunctie genormeerd is.
(Kies A reëel.)
- (b) Wat is de waarschijnlijkheid om op $t = 0$ het deeltje te vinden in het interval $[0, \Delta x]$?
- (c) Onderstel dat op $t = 0$ de energie van het deeltje gemeten wordt. Wat is de waarschijnlijkheid om de grondtoestandsenergie E_1 te meten?
- (d) En wat is de waarschijnlijkheid om de eerste geëxciteerde toestand E_2 te meten?
- (e) Onderstel dat een meting op $t = 0$ als resultaat E_1 opleverde. Geef dan de tijdsafhankelijke golffunctie $\psi(x, t)$ voor $t > 0$.
- (f) Onderstel dat er geen meting gebeurt is. Geef dan de tijdsafhankelijke golffunctie $\psi(x, t)$ voor $t > 0$.

4. Een elektron in een waterstofatoom is in de volgende genormeerde toestand:

$$\psi(\vec{r}) = \frac{1}{6} [4\psi_{1,0,0}(\vec{r}) + 3\psi_{2,1,1}(\vec{r}) - \psi_{2,1,0}(\vec{r}) + \sqrt{10}\psi_{2,1,-1}(\vec{r})].$$

Met de energie-eigenfuncties ψ_{n,l,m_l} komen de energie-eigenwaarden $E_n = E_1/n^2$ overeen.

- (a) Wat is de verwachtingswaarde van de energie?
 - (b) Wat is de verwachtingswaarde van de operator L^2 ?
 - (c) Wat is de verwachtingswaarde van de z -projectie van de angulair impulsmomentoperator L_x ?
5. Beschouw een deeltje in de volgende ééndimensionale potentiaal

$$V(x) = \begin{cases} \infty & \text{als } x < 0 \\ 0 & \text{als } 0 \leq x < L \\ V_0 > 0 & \text{als } x \geq L \end{cases}$$

Leid de transcendente vergelijking af die het spectrum van de *gebonden* toestanden bepaald door de Schrödingervergelijking op te lossen. Toon aan dat het gevonden resultaat inderdaad het spectrum van de oneindig diepe put oplevert als $V_0 \rightarrow \infty$.

Hulpblad

- De tijdsonafhankelijke Schrödinger vergelijking:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x)$$

- Spectrum en eigenfuncties van een deeltje in een ééndimensionale oneindig diepe put:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < x < L \\ \infty & \text{elders} \end{cases}$$

$$E_n = \frac{\hbar^2 \pi^2 n^2}{2mL^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

- Spectrum en eigenfuncties van een ééndimensionale harmonische oscillator (met $a = \sqrt{m\omega/\hbar}$):

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2$$

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &= \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}} e^{-a^2 x^2 / 2} \\ \psi_1(x) &= \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}} \sqrt{2} a x e^{-a^2 x^2 / 2} \\ \psi_2(x) &= \sqrt{\frac{a}{\sqrt{\pi}}} \frac{1}{\sqrt{2}} (2a^2 x^2 - 1) e^{-a^2 x^2 / 2} \end{aligned}$$

2^{de} kan. natuurkunde 30 augustus 2002

Examen Theoretische Fysica 5

Inleiding tot de kwantummechanica

1. Wat is het foto-elektrisch effect? Wat bewijst dit effect dat belangrijk was voor de ontwikkeling van de kwantummechanica?
2. Bewijs dat de eigenwaarden van een hermitische operator reëel zijn. En waarom is deze stelling relevant voor de kwantummechanica?
3. Illustrer de onbepaaldheidrelatie van Heisenberg d.m.v. een Gaussisch golfpakket.
4. Beschouw een deeltje in een ééndimensionale oneindig diepe put met breedte L :

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 < x < L \\ \infty & \text{elders} \end{cases}$$

De golffunctie op tijd $t = 0$ wordt gegeven door

$$\psi(x, 0) = A \left(\sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{2\pi x}{L} + \sqrt{3} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{4\pi x}{L} + \sqrt{5} \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \frac{5\pi x}{L} \right).$$

- (a) Is dit een stationaire toestand? Leg uit.
- (b) Bepaal de waarde van de normalisatieconstante A .
- (c) Wat is de waarschijnlijkheid om energie E_n , $n = 1, 2, 3, 4, 5$ te meten?
- (d) Wat is de verwachtingswaarde van de energie?
- (e) Wat is de golffunctie op een later ogenblik t ,
 - i. als er geen meting gebeurd is?
 - ii. als een meting op $t = 0$ resulteerde in E_4 ?

5. Beschouw een deeltje in een tweedimensionale harmonische oscillator:

$$V(x, y, z) = \frac{m}{2}\omega^2x^2 + \frac{m}{2}\omega^2y^2.$$

Voor de drie laagste energieniveaus:

- (a) bepaal de energie;
- (b) de ontaarding van elk niveau;
- (c) de eigenfunctie(s) die ermee overeenkomen;
- (d) en een schets van deze eigenfuncties (duid in het xy -vlak de lijnen aan waar de golffuncties nul zijn en het teken van de golffuncties).

Examen Theoretische fysica 5: Inleiding tot de kwantummechanica
2^{de} kandidatuur Natuurkunde --- 28 september 2003

1. a) Wat is het correspondentieprincipe?
 b) Illustrer de onbepaaldheidsrelatie van Heisenberg d.m.v. een Gaussisch golfpakket.
2. a) Leid de radiale en angulaire vergelijking af voor een waterstof atoom.
 b) Bereken het waterstofspectrum door gebruik te maken van de kwantizatie van de Bohrse banen.
3. Beschouw een deeltje met massa m in volgende ééndimensionale potentiaal:

$$V(x) = \begin{cases} 0 & |x| < a \\ V_0 > 0 & |x| \geq a \end{cases}$$
 Beschouw verstrooide toestanden en bereken de transmissiecoëfficiënt T.
4. Beschouw een deeltje in een oneindig diepe potentiaalput met breedte L.

$$V(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x \leq L \\ \infty & x < 0 \text{ of } x > L \end{cases}$$
 De initiële golffunctie op $t = 0$ is

$$\Psi(x, 0) = \begin{cases} N \left(\sin\left(\frac{\pi}{L}x\right) + 2\sin\left(\frac{3\pi}{L}x\right) - \sin\left(\frac{4\pi}{L}x\right) \right) & 0 \leq x \leq L \\ 0 & x < 0 \text{ of } x > L \end{cases}$$
 - a. Bepaal de normalisatieconstante N.
 - b. Wat is de waarschijnlijkheid om de energie E_n ($n=1,2,3,4$) te meten?
 - c. Bereken de verwachtingswaarde $\langle H \rangle$.
 - d. Geef de golffunctie op een later ogenblik t
 - i. als er geen meting gebeurd is.
 - ii. als een meting op $t=0$ resulteerde in E_I .
 - e. Als een meting op tijd $t=0$ E_I opleverde, wat is dan de waarschijnlijkheid om op een later tijdstip de waarde E_3 te vinden?

$$\int_{-\infty}^{\infty} dt e^{-\alpha t^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$$

Laplace operator in bolcoördinaten: $\Delta \Psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi^2} \right]$

Examen: Theoretische Fysica 5 (Inleiding tot de kwantummechanica)
2^{de} kandidatuur fysica: 14 juni 2004 – U408

1. a) Geef één experiment dat de golf-deeltjes dualiteit illustreert. Leg het principe van het experiment uit en toon aan waar men de golf-deeltjes dualiteit nodig heeft om het experiment te verklaren.
 b) Geef twee fysische effecten die niet met behulp van de klassieke mechanica kunnen verklaard worden en waarvoor een kwantummechanische beschrijving noodzakelijk is.
2. Harmonische oscillator in twee dimensies met potentiaal: $V(x,y) = \frac{1}{2}m\omega^2(x^2 + y^2)$.
 - a) Bereken het energiespectrum.
 - b) Geef de golffunctie van de grondtoestand.
3. Een deeltje met massa m is opgesloten in een één-dimensionele ruimte tussen $-L/2$ en $L/2$. Op tijd $t=0$ bevindt het deeltje zich in een zulksdane toestand dat, als een meting van de energie plaats heeft de enige mogelijke resultaten E_1 en $E_2 = 4E_1$ kunnen zijn. Beide energieën kunnen met dezelfde waarschijnlijkheid gemeten worden.
 - a) Geef de genormaliseerde toestand waarin het deeltje zich bevindt (die zal een arbitraire parameter hebben)
 - b) Bepaal de waarde van deze parameter wetende dat op $t=0$ geldt dat $\langle p \rangle = \frac{4\hbar}{3L}$.
 - c) Bereken voor welke $t > 0$ geldt dat $\langle p \rangle = 0$
4. Een deeltje in een centrale potentiaal heeft de golffunctie

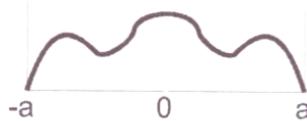
$$\psi(x, y, w) = A(xy + yz + zx)e^{-\alpha r^2}$$
 - a) Welke is de waarschijnlijkheid dat een meting van het draaimoment $l = 0$ geeft ?
 - b) Welke is de waarschijnlijkheid dat een meting $L^2 = 6\hbar^2$ geeft ?

Het examen van Prof. Partoens was schriftelijk, oefeningen en theorie tesamen in een examen. Je mocht zelf kiezen wanneer je mondeling ging doen bij Prof. Partoens, die in een lokaal ernaast zat. Het is wel aan te raden dit te doen als je al de vragen opgelost hebt, of alleen nog die vragen moet doen waar je zeker van bent dat je ze kan oplossen. Dit aangezien Prof. Partoens heel veel raad en tips geeft bij alles wat je al hebt opgelost, zodat je vaak ineens weet wat je fout hebt gedaan, en hoe je dit eventueel moet aanpassen. Als je na je mondelinge deel nog vastzit met verdere vragen heb je niet echt meer kans hier uitleg of hints bij te krijgen.

1. Toon aan dat de momentum operator \hat{p}_x in de kwantummechanica voorgesteld wordt door $\frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x}$.
2. Een deeltje in een oneindig diepe potentiaalput van breedte $2a$

$$\begin{cases} V(x) = 0 & \text{als } -a \leq x \leq a \\ V(x) = \infty & \text{elders} \end{cases}$$

wordt op $t = 0$ beschreven door de golffunctie in figuur 1.



Figuur 3.1: figuur 1

Wat is de waarschijnlijkheid om als energie $E = 4 \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m(2a)^2}$ te meten en waarom?

3. De eendimensionale golffunctie $\psi_0(x)$ wordt gegeven door

$$\psi_0(x) = A(1 - x^2) \quad \text{als } -1 \leq x \leq 1, 0 \text{ elders}$$

- (a) Bepaal de normalisatieconstante A.
- (b) Bereken de variantie van de operatoren \hat{x} en \hat{p} voor de gegeven golffunctie.
- (c) Controleer de onzekerheidsrelatie van Heisenberg.

4. Beschouw een deeltje met massa m in de tweedimensionale oneindig diepe put

$$V(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } 0 \leq x \leq a \text{ en } 0 \leq y \leq 2a \\ +\infty & \text{elders} \end{cases}$$

- (a) Geef de stationaire toestanden voor deze potentiaal (gebruik de oplossingen van het eendimensionale geval), samen met het energiespectrum.
- (b) Geef de tijdsafhankelijke oplossingen voor de grondtoestand en de eerste geëxciteerde toestand.
5. De eigenfuncties van het waterstofatoom kunnen zo gecombineerd worden dat ze gemeenschappelijke eigenvectoren zijn van \hat{L}^2 en \hat{L}_x ? Waarom (niet)?
6. Beschouw het systeem gedefinieerd door de potentiaal

$$V_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} mw^2 x^2 & \text{als } 0 \leq x \\ +\infty & \text{als } x < 0 \end{cases}$$

Geef het energiespectrum. (Deze oefening vereist geen lange berekeningen!)

3.2.4 Augustus 2009

Prof. Dr. Partoens

1. Bereken de commutator van de positieoperator \hat{x} en impulsoperator \hat{p} : $[\hat{x}, \hat{p}]$.
2. Een deeltje is in de grondtoestand van een harmonische oscillator met opsluitingsfrequentie w_0 . De genormaliseerde golffunctie wordt dus gegeven door

$$\psi_0(x) = \left(\frac{mw_0}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{mw_0}{2\hbar}x^2}$$

Plots verdubbelt de opsluitingsfrequentie tot $w_{new} = 2w_0$, zonder dat de golffunctie mee verandert (uiteraard zal de golffunctie wel anders evolueren in de tijd omdat de Hamiltoniaan verandert). Onmiddelijk na de verdubbeling van de opsluitingsfrequentie meet je de energie.

- (a) Wat is de kans dat deze energiemeting de waarde $\hbar w_0/2$ oplevert?
- (b) Wat is de kans dat deze energiemeting de waarde $\hbar w_0$ oplevert?
- (c) Wat is de kans dat deze energiemeting de waarde $3\hbar w_0$ oplevert?
3. Beschouw een deeltje in volgende eendimensionale potentiaalput

$$V(x,y) = \begin{cases} \infty & \text{als } x \leq 0 \\ 0 & \text{als } 0 \leq x \leq a \\ |V_0| & \text{als } a \leq x \end{cases}$$

Bepaal de vergelijking voor de energieën van de gebonden toestanden van deze potentiaal. Bereken ook de limiet voor een oneindig diepe potentiaalput.

4. Beschouw een deeltje in een driedimensionale harmonische oscillator met opsluitingspotentiaal $\frac{1}{2}mw_0^2r^2$.
 - (a) Geef de energie van de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand. (Maak gebruik van het resultaat van de eendimensionale harmonische oscillator.)
 - (b) Geef de golffunctie van de grondtoestand. Maak ook een schets.
 - (c) Omdat de potentiaal enkel afhangt van r kunnen we dit probleem ook oplossen in bolcoördinaten, net zoals voor het waterstofatoom. De totale golffunctie wordt gegeven door $\Psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$. Na scheiden van veranderlijken wordt de driedimensionale Schrödingervergelijking gegeven door

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - \frac{2mr^2}{\hbar^2} (V(r) - E) &= l(l+1) \\ \frac{1}{Y} \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial Y}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial\phi^2} \right) &= -l(l+1) \end{aligned}$$

De oplossing van het hoekafhankelijke gedeelte leert ons dat l een natuurlijk getal moet zijn. Bepaal de grondtoestandsenergie en golffunctie van de driedimensionale harmonische oscillator door deze Schrödingervergelijking op te lossen.

Hoofdstuk 4

Theoretische Fysica 4: Mechanica 2

4.1 De cursus, het vak, het examen

Zowel de cursus als het examen zijn analoog aan het examen mechanica 1.

4.2 Theorie

4.2.1 Voorbeeldvragen

Dit is een lijstje dat Prof. Van Dyck enkele jaren geleden zelf heeft rondgestuurd. Hij heeft er wel bij vermeld dat het niet limiterend is.

1. Trillingen
 - (a) Dubbele slinger in het zwaarteveld.
 - (b) Vrije trillingen van een systeem rond evenwicht (harmonische benadering).
 - (c) Parametrische resonantie (t/m blochfuncties)
 - (d) Gedwongen trillingen met wrijving
2. Relativiteit
 - (a) Minkowski metriek en Lorentz transformatie
 - (b) Leid de behoudswetten af uit de Newtonsymmetrieën in de 4-wereld.
 - (c) Botsingen
 - (d) Geladen deeltje in EM veld
3. Chaos
 - (a) Driehoeksmap (incl fixpunt, Lyapounov exponent).
 - (b) Logistieke map
4. Kwantummechanica
 - (a) Leid de Schrödinger vergelijking af uit het beginsel van de minste actie

4.2.2 Januari 2005

Prof. Dr. D. Van Dyck

1. Parametrische resonantie tot en met Bloch functies.
2. Stel de Minkowski metriek en Lorentz transformatie op. (relativiteitstheorie)
3. Geef de driehoeksmap inclusief het bewijs van de Lyapunov exponent. (Chaos)

4.2.3 Juni 2006

Prof. Dr. D. Van Dyck

1. Parametrische resonantie t/m Bloch functies
2. Relativiteitstheorie → geladen deeltje in EM veld
3. Driehoeksmap + afleiding Lyapounov exponent

4.2.4 Juni 2008

1. Gedwongen trillingen met wrijving
2. Stel de Minkovski metriek en Lorentztransformatie op
3. Driehoeksmap + afleiding Lyapounov exponent

4.2.5 Juni 2009

1. Leid de Schrödinger vergelijking af uit het beginsel van de minste actie
2. Stel de Minkovski metriek en Lorentztransformatie op
3. Relativiteitstheorie → geladen deeltje in EM veld

4.2.6 Juni 2010

Groep A

1. Gedwongen trilling met wrijving
2. Relativistische botsingen
3. Driehoeksmap

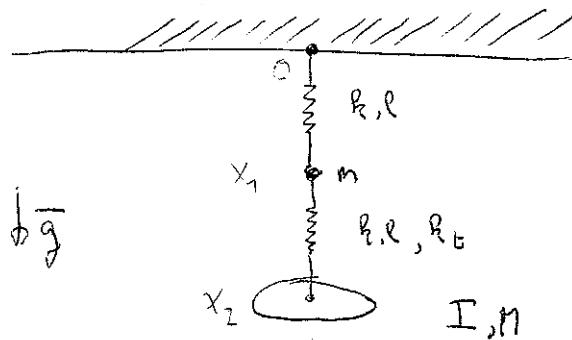
Groep B

1. Parametrische resonantie
2. Stel de Minkovski metriek en Lorentztransformatie op
3. Relativiteitstheorie → geladen deeltje in EM veld

4.3 Oefeningen

4.3.1 Januari 2005

1. Beschouw een systeem bestaande uit 2 veren, een massapunt (massa m), en een schijf opgehangen in het zwaarteveld (zie figuur 4.1). De schijf heeft een traagheidsmoment I en een totale massa M , de veren een krachtsconstante k en een evenwichtslengte l . Bovendien heeft de onderste veer een significantie torsieconstante k_t ; verwaarloos torsie op de bovenste veer. De veren kunnen alleen verticaal bewegen.
 - (a) Bereken expliciet de evenwichtsstand.
 - (b) Schrijf de Lagrangiaan in de harmonische benadering.
 - (c) Bespreek de beweging van het systeem.



Figuur 4.1: Schijf hangende aan 2 veren

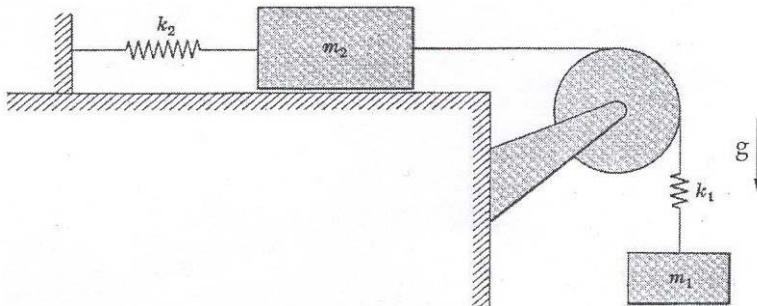
2. Een satelliet vertrekt naar een ster die op een afstand van 4,3 lichtjaar ligt. Bereken de snelheid die nodig is om de reis in 4,3 jaar te overbruggen (tijd gemeten op de satelliet). Bij aankomst stuurt de satelliet een signaal terug. Hoeveel aardse jaren zijn verstreken tussen het vertrek van de satelliet en de ontvangst van het signaal?
3. Beschouw 2 identieke deeltjes (rustenergie E_0). Het eerste heeft totale energie E en botst elastisch met het tweede (in rust in het labo). Na de botsing volgen ze een symmetrisch traject met halve openingshoek $\pm\phi/2$ t.o.v. de invalrichting. Druk ϕ uit i.f.v. E en E_0 .

4.3.2 Juni 2006

Sandra Vanaert

Gebruik rekenmachine en theoriecursus toegelaten.

1. Zie figuur 4.2. Een massapunt met massa m_2 ligt op een tafel en is verbonden met de muur met een veer met krachtconstante k_2 en evenwichtslengte l_2 . Aan massapunt m_2 is een kabel verbonden die over een wiel loopt gemonteerd aan de tafel (veronderstel dat de traagheidstensor I van het wiel verwaarloosd kan worden). Aan deze kabel hangt een veer met veerconstante k_1 en evenwichtslengte l_1 waaraan een massapunt met massa m_1 hangt in het zwaarteveld.
 - (a) Stel de Lagrangiaan op voor dit systeem
 - (b) Bepaal de evenwichtsposities
 - (c) Bepaal en bespreek de eigentrillingen van het systeem voor ($m_1 = m_2$, $k_1 = k_2$).



Figuur 4.2

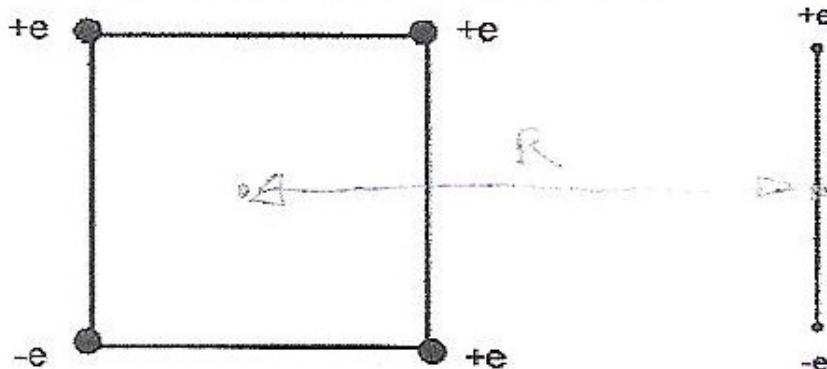
2. Een deeltje met rustmassa m en kinetische energie $2mc^2$ botst met een stilstaand deeltje met rustmassa $2m$. Na de botsing gaan de twee deeltjes als één nieuw deeltje verder. Bereken de rustmassa van dit nieuwe deeltje (in functie van m) en bereken zijn snelheid.
3. Een pion met massa van $135\text{MeV}/c^2$ vervalt in twee fotonen.
 - (a) Wat is de golflente van de twee fotonen en in welke richting t.o.v. elkaar zullen ze zich voortplanten in het ruststelsel van het pion.
 - (b) Een pion wordt typisch gevormd bij botsingen tussen deeltjes. Als het gevormde pion de versneller met de helft van de lichtsnelheid verlaat en in het ruststelsel van het pion de fotonen onder een hoek van 90° met de bewegingsrichting worden geproduceerd:
 - i. Wat is dan de, in het stelsel van de versneller, waargenomen golflengte van ieder van de twee fotonen?
 - ii. Onder welke hoeken t.o.v. de bewegingsrichting van het pion worden de beide fotonen in dit stelsel waargenomen?

Het impulsmoment van een foton met frequentie γ wordt gegeven door $p = \frac{h\gamma}{c}$, met h de constante van Planck ($h = 4,12 \cdot 10^{-15}\text{eVs}$) en c de lichtsnelheid. De golflengte van een foton met frequentie γ wordt gegeven door $\lambda = \frac{c}{\gamma}$. Een foton heeft rustmassa $m = 0$.

4.3.3 September 2007

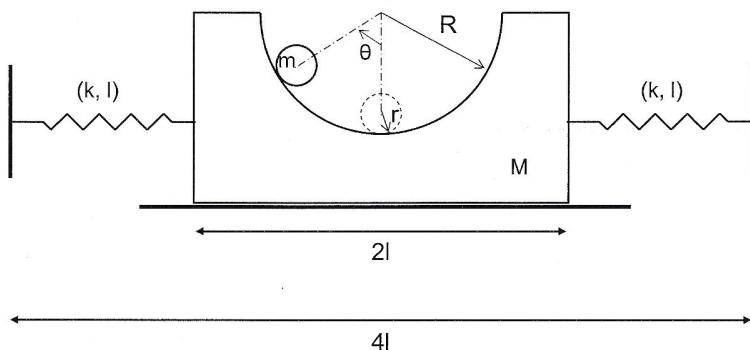
1. Beschouw een cirkelvormig membraan (straal 1) vastgehouden aan de rand. Bespreek de mogelijke trillingswijze als de beginsnelheid nul is en het beginprofiel gegeven.
 - Welke zijn de eigenwaarde- en restproblemen?
 - Schrijf de oplossing $\Psi(x, y, t)$ in reeksform
 - Geef de uitdrukking voor ontwikkelingscoëfficiënten
2. Beschouw de volgende twee ladingsverdelingen
 - Bepaal mono-, di- en quadrupoolmoment van beide
 - Onderstel dat beide ladingsverdelingen alleen in een vlak kunnen bewegen en dat hun middelpunten op vaste afstand van elkaar liggen. Bespreek de evenwichttoestanden van dit systeem. Verwaarloos hierbij quadrupoolmomenten (en hogere orde momenten)

4 2007.jpg



4.3.4 Juni 2008

1. Zie figuur. Een homogeen cilinder met massa m en straal r rolt zonder te slippen in een cirkelvormige groef met straal R . Het traagheidsmoment van de cilinder is gelijk aan $\frac{1}{2}mr^2$. Het blok met massa M en lengte $2l$ is verbonden met twee identieke veren (veerconstante k , evenwichtslengte l) en beweegt in horizontale richting over een oppervlak. De wrijving met het oppervlak wordt verwaarloosd. De andere uiteinden van de veren zijn gehecht aan twee vaste punten, op een afstand $4l$ van elkaar.



Figuur 1

- (a) Stel de Lagrangiaan op voor dit systeem
 (b) Bepaal de evenwichtsposities
 (c) Pas de harmonische benadering toe
 (d) Bepaal en bespreek de eigentrillingen voor het speciale geval dat $m = M$ en $k = \frac{mg}{R-r}$
2. In de bovenste laag van de atmosfeer, op een hoogte h boven het zeeniveau, wordt door de kosmische straling een $\pi^+ - meson$ geproduceerd (rustenergie E_0 , rustmassa m_π) met een totale energie E_π . Het $\pi^+ - meson$ gaat verticaal omlaag. Het vervalt na tijd τ_0 , gemeten in zijn rustsysteem, in een $\mu^+ - lepton$ (rustmassa m_μ) en een neutrino (rustenergie nul).

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + n \quad (4.1)$$

- (a) Op welke hoogte boven het zeeniveau vervalt het $\pi^+ - meson$ (uitgedrukt in functie van E_π , E_0 , h en τ_0)?

- (b) Bereken de energie van het $\mu^+ - lepton$ in het rustsysteem van het vervallen $\pi^+ - meson$ (uitgedrukt in functie van rustmassa's m_π en m_μ)
3. Beschouw een eenndimensionaal dynamisch systeem beschreven door de evolutievergelijking (map) $f(x) = 2x^2 - 0.5$
- Bepaal de fixpunten van zowel de eerste als de tweede generatie map.
 - Zijn de fixpunten stabiel?
 - Bepaal het aantrekkingsbasin voor de stabiele fixpunten.
 - Beschrijf het gedrag van het dynamisch systeem en maak een grafische analyse

4.3.5 Juni 2009

1. Beschouw 2 massapunten met respectievelijke massa's m_1 en m_2 . Het eerste massapunt is opgehangen aan twee veren (krachtconstante k en evenwichtslengte l). die opgehangen zijn op een afstand $2l$ van elkaar. Het tweede massapunt is opgehangen aan het eerste massapunt met een veer (krachtsconstante k' en evenwichtslengte l'). De massapunten kunnen enkel bewegen op een verticale rechte. het gehele systeem is onderworpen aan de zwaartekracht.
- Stal de Langrangiaan op voor dit systeem.
 - Bepaal de evenwichtsposities. Veronderstel in de afleiding van de evenwichtspositie x_1 van massa m_1 dat $\frac{x_1}{l} \approx 1$.
 - Pas de harmonische benadering toe.
 - Bepaal en bespreek de eigentrillingen.
2. In het laboratoriumstelsel beweegt een π^0 meson in de positieve x -richting met kinetische energie gelijk aan zijn rustenergie. Het π^0 meson (rustmassa m) vervalt in twee fotonen (rustmassa 0). In het ruststelsel van het π^0 meson bewegen de fotonen respectievelijk in de positieve en negatieve y' -richting.
- Wat zijn de energieën van de fotonen in het ruststelsel van het π^0 meson (uitgedrukt in eenheden van de rustenergie van het π^0 meson)?
 - Wat zijn de energieën van de fotonen in het laboratoriumstelsel (uitgedrukt in eenheden van rustenergie van het π^0 meson)?
 - Onder welke hoeken (t.o.v. de positieve x -as) bewegen de fotonen in het laboratoriumstelsel?
3. Beschouw een eenndimensionaal dynamisch systeem beschreven door de evolutievergelijking (map) $f(x) = 2x^2 - 0.5$
- Bepaal de fixpunten van zowel de eerste als de tweede generatie map.
 - Zijn de fixpunten stabiel?
 - Bepaal het aantrekkingsbasin voor de stabiele fixpunten.
 - Beschrijf het gedrag van het dynamisch systeem en maak een grafische analyse.

4.3.6 Augustus 2009

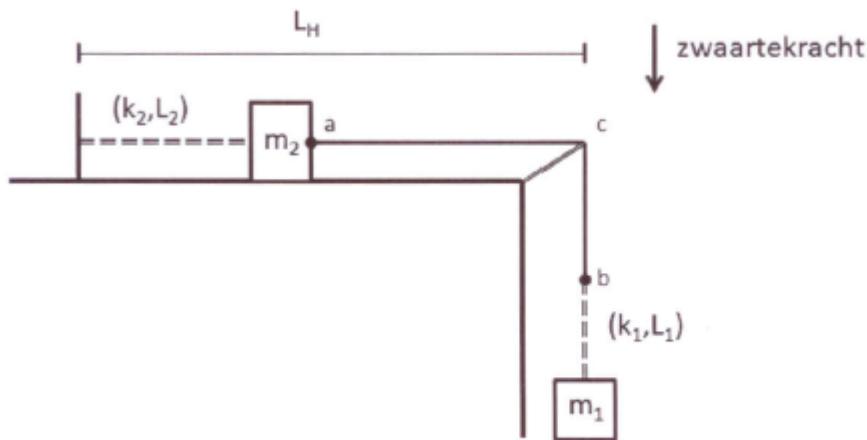
- Een stelsel van 2 gekoppelde slingers beweegt in een vlak in het zwaarteveld. De koppeling gebeurt door een veer met krachtconstante k . Beschrijf de beweging. Stel dat de afstand tussen de twee slingers gelijk is aan $l_0 = 10\text{cm}$, de massa's: $m_1 = m_2 = 1\text{kg}$, de lengte van de slingers: $l_1 = l_2 = 2.5\text{m}$ en de krachtconstante van de veer: $k = 200\text{g/s}^2$. Uit een windtunnel komen luchtstoten met regelbare frequentie. Bij welke frequentie worden de eigentrillingen opgewekt?.
- In de bovenste laag van de atmosfeer op een hoogte h boven het zeeniveau, wordt door de komsmische straling een π^+ meson geproduceerd (reustenergie E_0 , rustmassa m_π) met een totale energie E_π . Het π^+ meson gaat verticaal omlaag. Het vervalt na een tijd τ_0 , gemeten in zijn rustsysteem, in een μ^+ lepton (rustmassa m_μ) en een neutrino (rustenergie 0).

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + n \quad (4.2)$$

- Op welke hoogte boven het zeeniveau vervalt het π^+ -meson (uitgedrukt in functie van E_π , E_0 , h en τ_0)?
- Bereken de energie van het μ^+ -lepton in het rustsysteem van het vervallen π^+ -meson (uitgedrukt in functie van rustmassa's m_π en m_μ)
- Beschouw een eenndimensionaal dynamisch systeem beschreven door de evolutievergelijking (map) $f(x) = 2(x - x^2)$.
 - Bepaal de fixpunten van de eerste generatiemap.
 - Zijn de fixpunten stabiel?
 - Bepaal het aantrekingsbasin voor de stabiele fixpunten.
 - Maak een grafische analyse.

4.3.7 Juni 2010

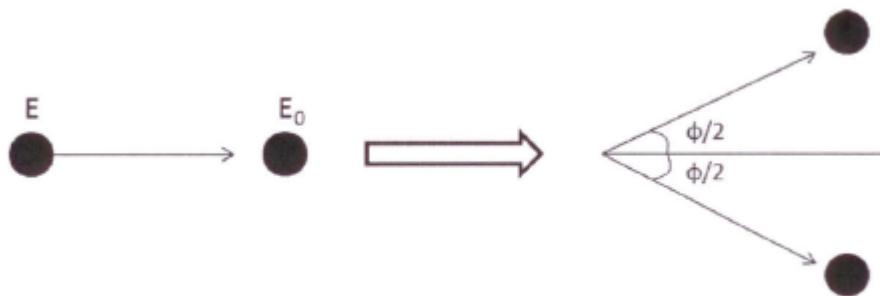
- Zie figuur 1. Een massapunt met massa m_2 ligt op tafel en is verbonden met een muur door een veer met krachtconstante k_2 en evenwichtslengte L_2 . Aan dit massapunt is een kabel met vaste lengte verbonden, die loopt van punt a tot punt b. Noem de totale lengte van deze kabel L_k . Aan deze kabel hangt een veer met krachtconstante k_1 en evenwichtslengte L_1 waaraan een massapunt met massa m_1 hangt in het zwaarteveld. De lengtes van de 2 massapunten mogen worden verwaarloosd. De afstand van de muur tot het punt c noemt met L_H . (10pt)
 - Stel de Lagrangiaan op voor dit systeem en bepaal de evenwichtsposities van beide massapunten.
 - Bepaal en bespreek de eigentrillingen in het vereenvoudigde geval $m_1 = m_2 = m$, $k_1 = k_2 = k$.
- Twee ruimtevoertuigen α en β bewegen door het sterrenstelsel Tentaminus. Vanuit Tentaminus gezien ligt de baan van α en β in een vlak (x,y), waarbij α met een snelheid $0.8c$ beweegt langs de x-as en β met een snelheid $0.8c$ langs de y-as. Op het tijdstip $t = 0\text{s}$ in het Tentaminus assenstelsel, bevinden α en β zich in de oorsprong van het Tentaminus assenstelsel (net ver genoeg van elkaar om niet te botsen, maar deze afstand mag verwaarloosd worden) en worden de klokken van zowel α als β op nul gezet. (4pt)
 - Wat is de snelheid van β gezien vanuit het assenstelsel van α ? Onder welke hoek (t.o.v. de x-richting) beweegt β t.o.v. α ?



Figuur 1: Massa-veer systeem vraag 1

Figuur 4.3: Figuur 1

- (b) Op het ogenblik dat de klokken van zowel α als β een tijd 1s aangeven, wordt vanaf beide ruimtevoertuigen een foton uitgezonden. Het foton van α wordt, gezien vanuit α in positieve y -richting gelanceerd. Het foton van β wordt, gezien vanuit β , in de positieve x -richting gelanceerd. Wat is, gezien vanuit het Tentaminus stelsel, de plaats en het tijdstip van beide lanceringen?
 - (c) Zullen de gevuldte banen van de 2 fotonen elkaar snijden of niet? Of lopen ze evenwijdig? (Tip: Beschouw dit vanuit het Tentaminus stelsel).
3. Beschouw een referentiestelsel waarin een proton met totale energie E elastisch botst met een tweede proton dat in rust is. Na de botsing volgen ze (in datzelfde referentiestelsel) een symmetrisch traject met halve openingshoek $\pm\varphi/2$ ten opzichte van de invalsrichting. Vind een uitdrukking voor de openingshoek φ als functie van E en E_0 , met E_0 de rustenergie van een proton. (3pt)



Figuur 2: vraag 3

Figuur 4.4: Figuur 2

4. Beschouw een massapunt met massa m waarvan de beweging gebonden is op een cirkel

in een verticaal vlak, onder invloed van de zwaartekracht. (3pt)

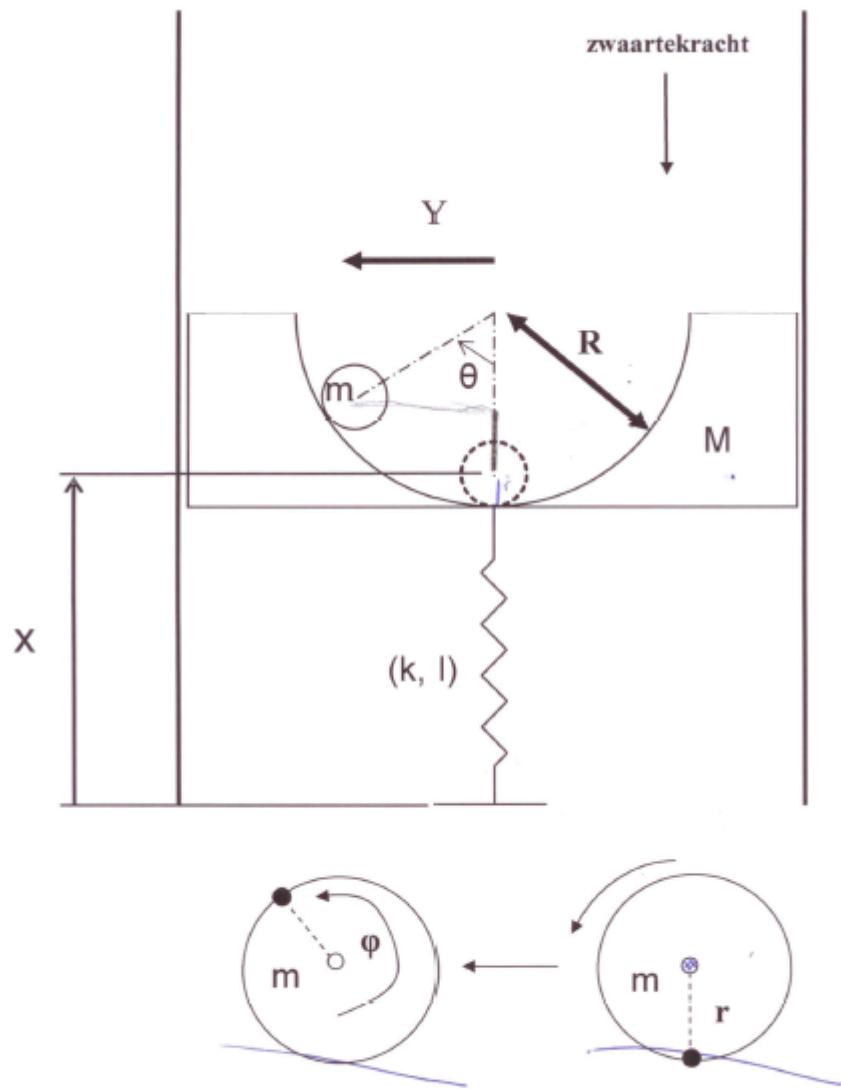
- (a) Bepaal de bewegingsvergelijking van het massapunt met de methode van Lagrange.
- (b) Bepaal de bewegingsvergelijking van het massapunt en de reactiekrachten die op het massapunt inwerken, met de methode van d'Alembert.

4.3.8 September 2010

1. Een homogene cilinder met massa m en straal r rolt zonder te slippen in een cirkelvormige groef met straal R . De groef met massa M , is verbonden met een veer (veerconstante k , evenwichts lengte l) en kan enkel in verticale richting bewegen zoals getoond in figuur 1. Het traagheidsmoment van de cilinder wordt gegeven door $I = \frac{1}{2}mr^2$. De variabele x duidt de hoogte aan van het middelpunt van de cilinder wanneer $\theta = 0$, ten opzichte van het aanhechtingspunt van de veer. Je mag deze variabele x beschouwen als de coördinaat van de groef met massa M . Bepaal en bespreek de eigentillingen. Tip: Zoek een relatie tussen ϕ en θ om de variabele ϕ te elimineren in de Lagrangiaan. (10pt)
2. Een deeltje met rustmassa m en kinetische energie $2mc^2$ botst met een stilstaand deeltje met massa $2m$. Door de botsing worden de twee deeltjes omgezet in 1 nieuw deeltje. Bepaal de rustmassa van dit deeltje in functie van m en bereken zijn snelheid. In deze oefening wordt alles in hetzelfde labostelsel beschouwd. (5pt)
3. Een deeltje met snelheid $0.6c$ in de x-richting in het laboratoriumstelsel emiteert een elektron, dat in het ruststelsel van het oorspronkelijk deeltje een snelheid met grootte $0.75c$ heeft. Bereken de snelheid van het elektron in het laboratoriumstelsel (5pt),
 - als het elektron in de x-richting wordt uitgezonden in het ruststelsel van het oorspronkelijke deeltje. (2pt)
 - als het elektron in de y-richting wordt uitgezonden in het ruststelsel van het oorspronkelijke deeltje. (2pt)
 - als het elektron in de y-richting wordt uitgezonden in het laboratoriumstelsel. (1pt)

Formularium

$$\bar{v} = \frac{-\bar{v}_A + \bar{v}_B + \left[\sqrt{1 - (\frac{\bar{v}_A}{c})^2} - 1 \right] \bar{v}_{B\perp}}{1 - \frac{\bar{v}_A \cdot \bar{v}_B}{c^2}} \quad (4.3)$$



Figuur 1

Figuur 4.5: Figuur 1 vraag 1

Hoofdstuk 5

Biofysica 1

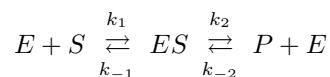
Prof. S. Van Doorslaer laat onder het jaar een werkje maken met voordracht dat reeds op de helft van de punten staat. Het examen zelf is een volledig schriftelijk open-boek examen.

5.1 Theorie

5.1.1 Juni 2005

Prof. Dr. S. Van Doorslaer

1. De snelheidswet voor de reversibele Michaelis-Menten kinetiek



wordt algemeen gegeven door

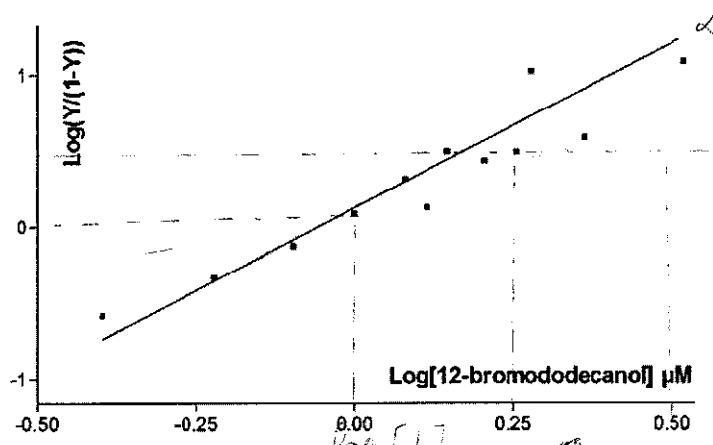
$$v = v_{max} \frac{c_s - \frac{c_p}{K_{eq}}}{K_M + c_s + \frac{K_M}{K_P} c_P} \quad (5.1)$$

met $K_P = \frac{k_{-1} + k_2}{k_{-2}}$ en $K_{eq} = \frac{k_2 k_1}{k_{-2} k_{-1}}$. v_{max} en K_M zijn gedefinieerd in de cursus.

Bewijs dat uitdrukking (5.1) inderdaad de kinetiek van bovenstaande reactie beschrijft. Hoe kan je K_P interpreteren?

2. Het chemosensorisch eiwit (CSP) van de mot *Mamestra brassicae* heeft een vermoeidelijke functie als chemische signaaltransductor. Dit betekent dat het verschillende chemische moleculen kan binden, waarbij het een conformationele verandering ondergaat dat de trigger voor een verder chemisch of elektrisch proces is. X-stralen diffractie studies hebben aangetoond dat dit eiwit drie moleculen 12-bromododecanol kan binden. In figuur 5.1 vind je de afhankelijkheid van de verzadigingsgraad Y (in de cursus aangeduid als Θ) van de concentratie aan ligand. [V.Camanacci, et al, PNAS, 100, 5069 (2003)]

- (a) Wat kan je uit de figuur besluiten over de coöperativiteit van het systeem?
- (b) Figuur 5.1 werd bekomen door de vermindering van de tryptofaanfluorescentie te meten in functie van de concentratie van 12-bromododecanol. Wat zijn de mogelijke processen die verantwoordelijk zijn voor deze signaalverandering?



Figuur 5.1: Hill diagram voor CSP van mot *Mamestra brassicae* voor binding van 12-bromododecanol

- (c) Er zitten maar twee tryptofanen in het eiwit en het eiwit is klein (dus bindingsplaatsen en tryptofanen kunnen dicht bij elkaar zitten). De onderzoekers zullen dan ook heel voorzichtig moeten zijn bij de interpretatie van hun fluorescentieresultaten. Geef drie modellen die zeker tegenover elkaar zullen moeten afgewogen worden in de analyse van de experimentele data. Is het model waarbij de tryptofaanfluorescentie maar door 1 van de liganden beïnvloed wordt één van deze mogelijkheden? Waarom (niet)?
3. We beschouwen een ecologisch systeem van een vissoort en een kleine kreeftensoort. De vissen leven van de kreeften en hun geboortecijfer wordt er direct door bepaald. De kreeften krijgen de tijd niet om een natuurlijke dood te sterven. Ze worden of opgegeten door de vissen of gevangen door de mens. De vissen zijn toxicisch voor de mens en worden daarom niet opgegeten. Ze sterven een natuurlijke dood.
- (a) Stel voor dit ecologisch systeem het stelsel van differentiaalvergelijkingen op.
 - (b) Om meer kreeften te kunnen vangen voegen de vissers medicijnen, die de vruchtbaarheid van de kreeften verhogen, toe aan het water. Is dit op lange termijn een goed idee? Waarom (niet)?
4. De concentraties aan zouten en opgeloste stoffen en de osmotische druk binnen een cel is sterk afhankelijk van de omgeving. Celmembranen zijn doorlaatbaar voor water, via de ionenkanalen kunnen verschillende ionen de cel binnendringen en ionenpompen zorgen voor een actief ionentransport. Dit is ook zo voor de cellen in ons lichaam. Het direct inspuiten van een waterige oplossing met een K_k concentratie ver boven de isotonische waarde zal een drastisch effect hebben op onze cellen. Wat zal het effect zijn op de neuronen? Wat zal het effect op de neuronen zijn van het inspuiten van een oplossing met een heel hoge suikerconcentratie (veel hoger dan in de cel)?

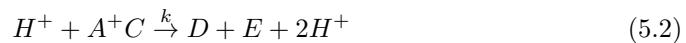
5.1.2 Juni 2006

Groep 1

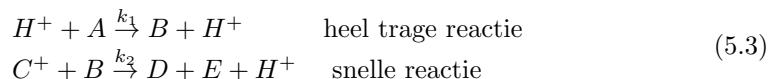
Prof. Dr. Sabine Van Doorslaer

1. (5 pt)

In de cursus hebben we voorbeelden van enzymatische kinetiek gezien. Er bestaat echter ook zo iets als autocatalyse, waarbij er tijdens de reactie een product gevormd wordt dat de reactie kan versnellen. Dit komt in biologische reacties ook vrij vaak voor. Een mogelijk geval van autocatalyse is het volgende: Veronderstellen we de reactie



waarbij de reactie eigenlijk is opgebouwd uit de deelreacties



Leid nu, in analogie met de werkwijze voor enzymkinetiek, de uitdrukkingen af voor $\frac{dc_A}{dt}$ en $\frac{dc_{H^+}}{dt}$.

De concentratie van welk species kan je als quasi-stationair beschouwen en waarom? Gebruik dit om te bewijzen dat $\frac{d(c_A + c_{H^+})}{dt} = 0$.

Voor het laatste geldt dat

$$c_A(t) = c_A(0) - x(t) \quad (5.4)$$

$$c_{H^+}(t) = c_{H^+}(0) + x(t) \quad (5.5)$$

waarbij $x(t)$ de zogenaamde omzettingsvariabele is en $x(0) = 0$.

Leid nu de uitdrukking voor $\frac{dx}{dt}$ af en integreer die om een uitdrukking voor $x(t)$ te krijgen.

Hoe ziet de functie $\frac{x(t)}{c_A(0)}$ eruit voor een geval waarbij $\frac{c_A(0)}{c_{H^+}(0)}$ groot is (bv. $= 10^7$)?

Hoe verklaar je dit in termen van de reactie?

2. (2 pt)

In de curve op figuur 5.2 wordt de verzwakkinggraad van hemoglobine van volwassenen en 6-dagen oude embryo's van kippen vergelijken met die van menselijk hemoglobine [A.F. Riggs, J.Exp. Biol., 201, 1073 (1998)]

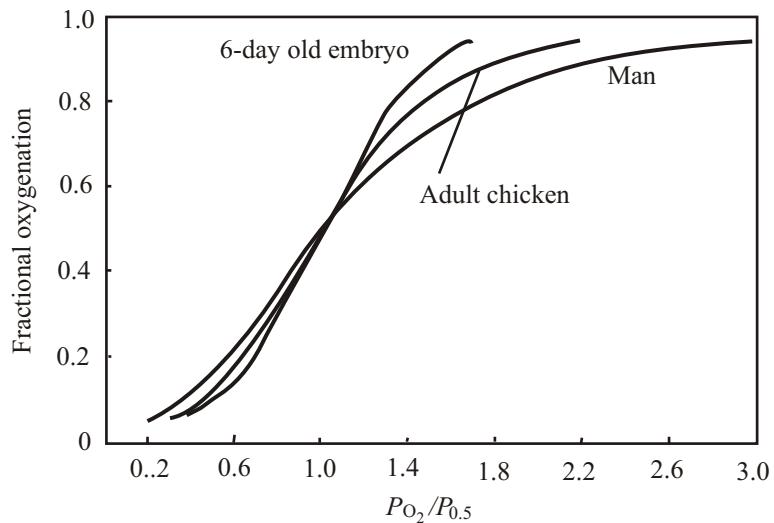
Wat leren deze curves ons over de coöperativiteit van zuurstofbinding in de drie hemoglobines en hoe kan je dit afleiden uit de grafiek?

Het hemoglobine van alle vertebraten bezet 4 heemgroepen. Voor hemoglobine van 6-dagen oude embryo's van kippen wordt een Hill coëfficiënt van 6.5 gevonden. Waarom is dit een verrassend resultaat? Kan je een mogelijke verklaring suggereren?

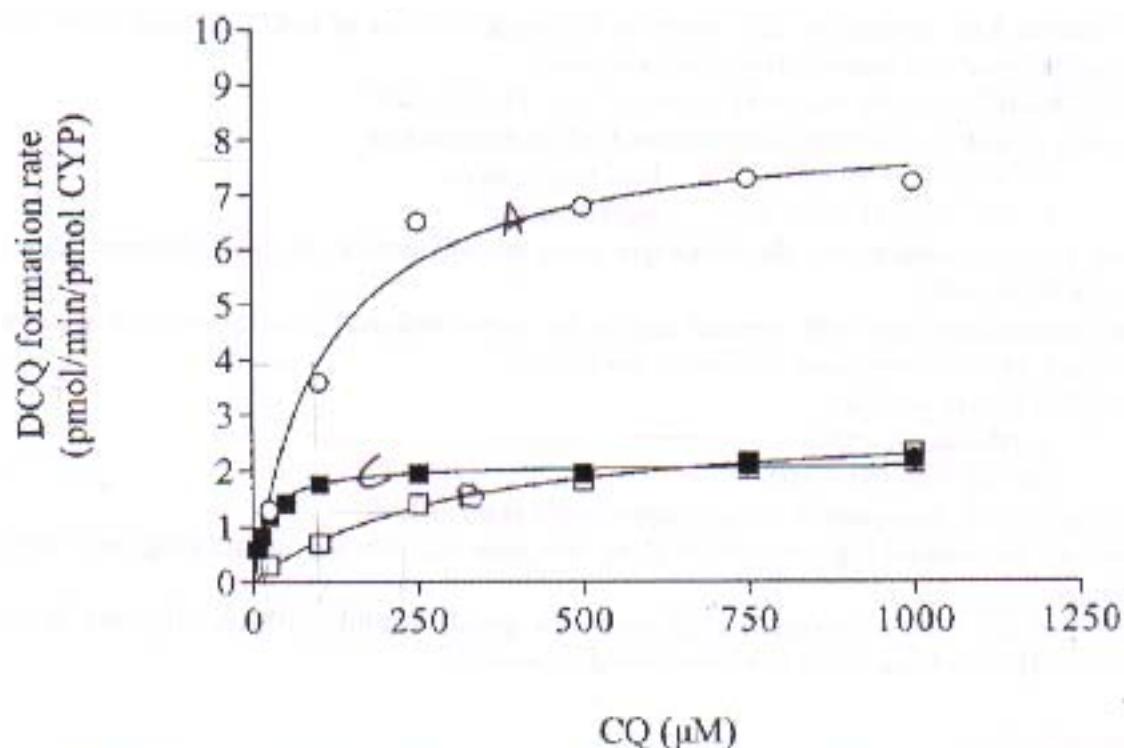
3. (1,5 pt)

In de mens wordt het anti-malaria middel chloroquine (CQ) gemetaboliseerd naar een groot metaboliet, N-desetylchloroquine (DCQ). Deze reactie wordt beïnvloed door isoformen van menselijk cytochrome 450. Figuur 5.3 toont de DCQ vorming uit CQ in condities waarbij telkens een andere P450 isovorm aanwezig is (open cirkels: CYP-A, open vierkant: CYP-B, gevuld vierkant: CYP-C) [D. Projean et al, Drug metabolism and Disposition, 31, 748 (2003)].

Wat kan je afleiden uit figuur 5.3 aangaande de relatieve grootte van de v_{max} en K_M voor de drie verschillende gevallen? Stel dat de reactie in aanwezigheid van CYP-A de reactie zonder inhibitie is (dus standaard Michaelis-Menten reactie) en dat de



Figuur 5.2: Vergelijk van de verzuigingsgraad van hemoglobine



Figuur 5.3: DCQ vorming uit CQ

geobserveerde veranderingen voor één van de andere reacties te wijten is aan inhibitie volgens één van de standaardtypes die we in de les besproken hebben. Welke reactie is dit dan en wat voor type inhibitie hebben we? Verantwoord je antwoord.

4. (1,5 pt)

(Vraag is verloren gegaan)

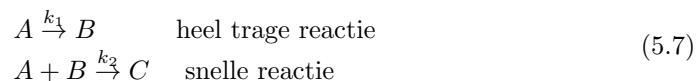
Groep 2

Prof. Dr. Sabine Van Doorslaer

- In de cursus hebben we voorbeelden van enzymatische kinetiek gezien. In biologisch reacties gaat het echter niet altijd om deze types van enzymatische kinetiek. Soms hebben tussenproducten een invloed op de reactie. Een mogelijk geval is het volgende: veronderstellen we de nettoreactie:



waarbij de reactie eigenlijk is opgebouwd uit



Leid nu, in analogie met de werkwijze voor enzymkinetiek, de uitdrukkingen af voor $\frac{dc_A}{dt}$ en $\frac{dc_C}{dt}$.

De concentratie van welk species kan je als quasi-stationair beschouwen? Gebruik dit om te bewijzen dat $\frac{d(c_A + 2c_C)}{dt} = 0$.

Introduceren we nu $x(t)$, de zogenaamde omzettingsvariabele:

$$c_C(t) = c_C(0) + x(t) \quad (5.8)$$

$$c_A(t) = c_A(0) - 2x(t) \quad (5.9)$$

en $x(0) = 0$.

Leid nu de uitdrukking voor $\frac{dx}{dt}$ af en integreer die om een uitdrukking voor $x(t)$ te krijgen.

Wat voor een verloop heeft de functie $x(t)$?

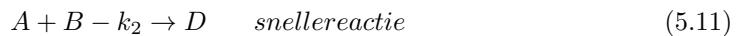
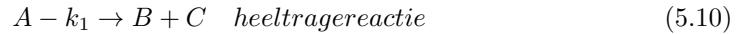
Veronderstel nu anderzijds dat de reactie (5.6) niet uit twee stappen zou bestaan (dus dat $2A$ direct in C zou omgezet worden). Leidt voor dit geval de uitdrukking voor $x(t)$ af. Kan je tussen de twee gevallen (met of zonder tussenstap) differentiëren?

5.1.3 Juni 2008

Sabine Van Doorslaer

- In de cursus hebben we voorbeelden van enzymatische kinetiek gezien. In biologische reacties gaat het echter niet altijd om deze types van enzymatische kinetiek. Soms hebben tussenproducten een invloed op de reactie. Een mogelijk geval is het volgende: Veronderstellen we de nettoreactie: $2A - k \rightarrow C + D$

waarbij de reactie eigenlijk is opgebouwd uit



Leid nu, in analogie met de werkwijze die we voor de enzymkinetiek gebruikt hebben, de uitdrukkingen af voor dc_A/dt , dc_B/dt en dc_C/dt .

Van welk species kan je de concentratie als quasi-stationair beschouwen en waarom?

Gebruik die quasi-stationariteit om te bewijzen dat $d(c_A + 2c_D)/dt = 0$

Introduceren we nu $x(t)$, de zogenaamde omzettingsvariabele: $c_C(t) = c_C(0) + x(t)$

$$c_D(t) = c_D(0) + x(t)$$

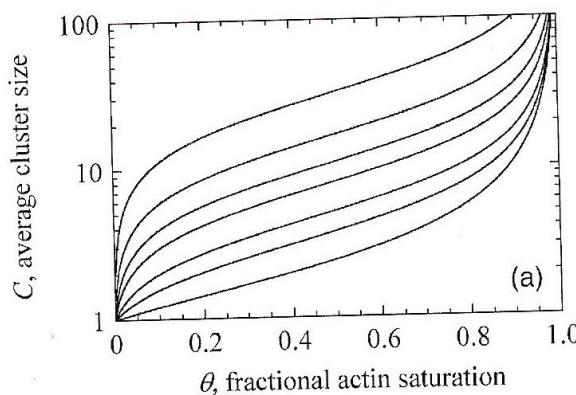
$$c_A(t) = c_A(0) - 2x(t)$$

$x(0) = 0$ Leid nu de uitdrukking voor dx/dt af en integreer die om een uitdrukking voor $x(t)$ te krijgen.

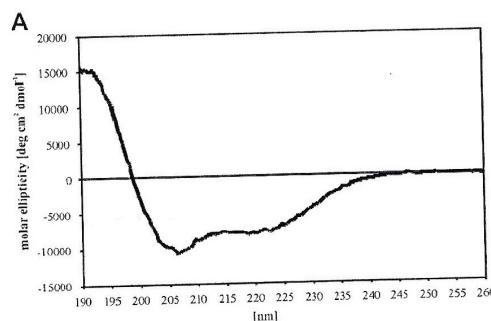
Schets het verloop van deze functie $x(t)$?

Veronderstel nu anderzijds dat de reactie $2A - k \rightarrow C + D$ niet uit twee stappen zou bestaan (dus dat $2A$ direct in $C + D$ zou worden omgezet). Leid voor dit geval de uitdrukking voor $x(t)$ af. Kan je tussen de twee gevallen (met of zonder tussenstap) differentiëren?

- Het coöperativiteitsgedrag van de binding van cofilinclusters aan actinevezels van spieren werden onlangs bestudeerd. Hieronder vind je een simulatie van het bindingsgedrag van deze clusters. Welk type coöperativiteit werd hier gesimuleerd? Aan wat merk je dat? Wat is het verschil tussen de onderste en de bovenste grafiek?



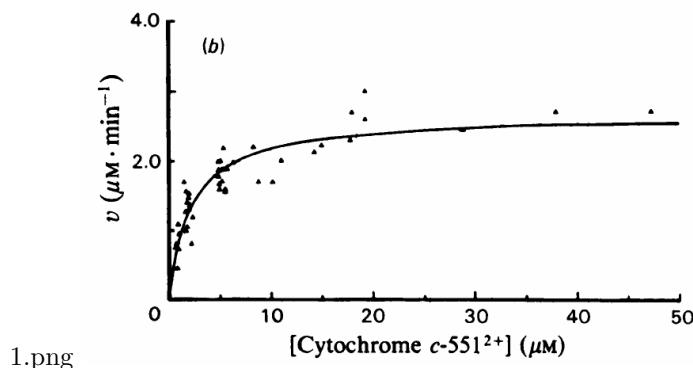
- Hieronder zie je het CD spectrum voor een zink-vingereiwit. Wat zegt dit spectrum je over de structuur van het eiwit?



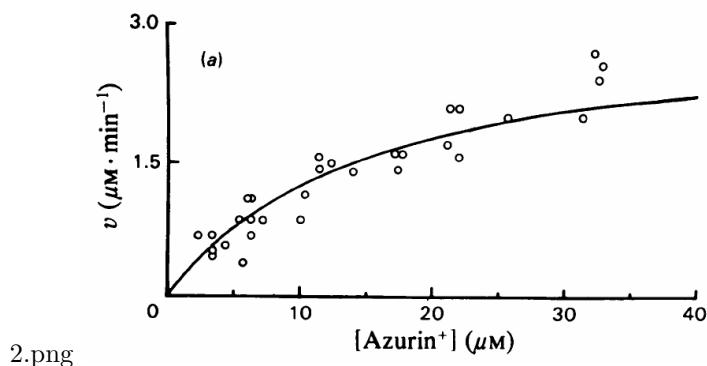
4. We veronderstellen een gesloten zeegebied waar een vissoort samen met een zeehondenpopulatie leeft. De vissen vormen het voedsel voor de zeehonden. Dit zeegebied is echter verontreinigd met PCB's die zowel voor de vissen als voor de zeehonden schadelijk zijn ($k_{v_s} N_v$ is het aantal vissen per jaar dat aan PCB vergiftiging sterft, $k_{Z_s} N_Z$ het aantal zeehonden dat per jaar aan PCB vergiftiging sterft). Stel, in analogie met het haas-lynx systeem dat we in de cursus gezien hebben, het stelsel gekoppelde vergelijkingen opdat deze populaties beschrijft. Je mag aannemen dat de vissen enkel sterven door PCB vergiftiging of door prooi aan de zeehonden. De zeehonden kunnen naast PCB ook een natuurlijke dood sterven.
Geef de voorwaarde waaraan voldaan moet zijn, opdat in dit systeem oscillaties optreden.
5. Voor de reactie $ATP + H_2O \rightarrow ADP + fosfaat$, geldt dat ze exergonisch is. Welke relatie bestaat er dan tussen de chemische potentialen van de verschillende individuele moleculen in de reactie?

5.1.4 Juni 2008 extra

1. Van het enzyme cytochrome oxidase is bekend dat het zowel de oxidatie van cytochroom c-551 (een ijzerhoudend eiwit) als de oxidatie van azurin (een koperhoudend eiwit) kan catalyseren. De afzonderlijke oxidatieracties kunnen perfect door een Michaelis-Menten reactie beschreven worden. In de onderstaande figuren staan de Michaelis-Menten grafieken voor beide reacties. We noemen de enzymatische oxidatie van cytochroom c551 ENZYMERACTIE 1, die van azurin ENZYMERACTIE 2.



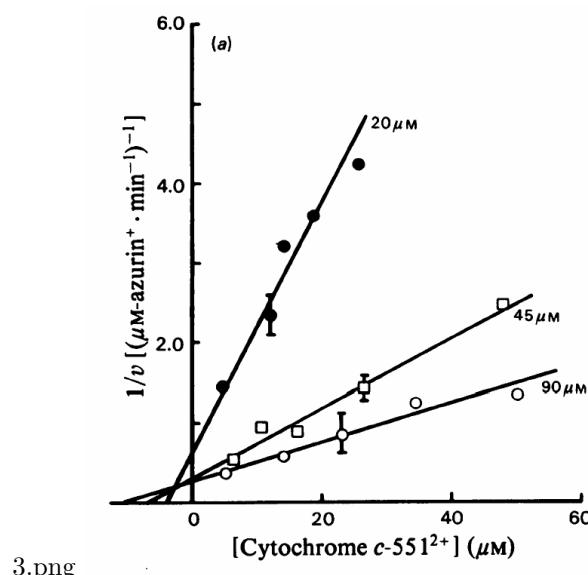
Figuur 1. Michaelis Menten kinetiek voor de ENZYMERACTIE 1 (enzyme concentratie 20 nM)



Figuur 2. Michaelis Menten kinetiek voor de ENZYMERACTIE 2 (enzyme concentratie 20 nM)

Schat de verhouding van K_m^1/K_m^2 af (K_m^1 en K_m^2 zijn de Michaelis-Menten constanten van de respectievelijke enzymereacties 1 en 2).

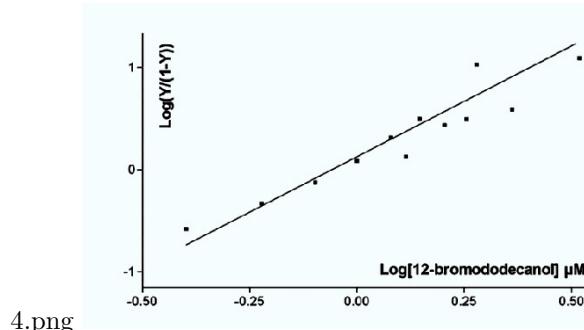
Nu voegt men tegelijkertijd azurin en cytochrome c-551 bij het enzyme (men zal dus een competitie tussen twee enzymatische reacties krijgen). De experimentele observaties worden weergegeven in Figuur 3.



Figuur 3. Grafiek die de snelheid van enzymereactie 2 als functie van de concentratie van cytochrome c-551 weergeeft. De waarden 20 M, 45 M en 90 M bij de 3 rechten komen overeen met de concentratie van azurin

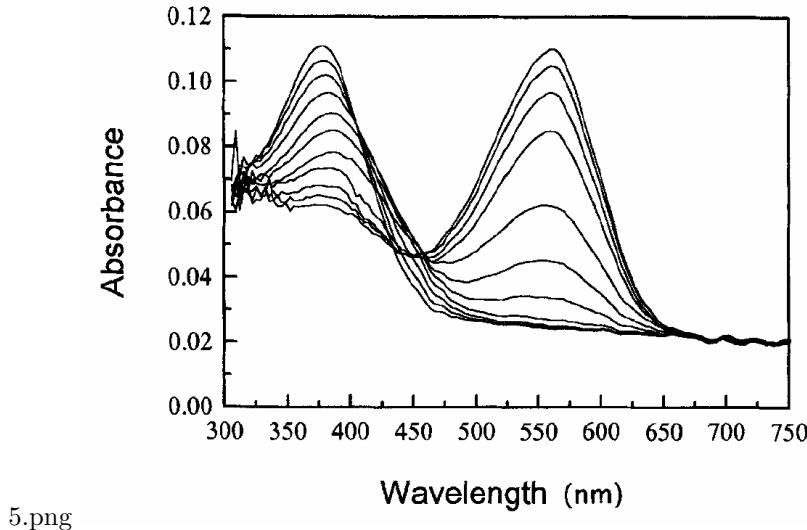
Leidt formeel de uitdrukking voor $1/v_2$ in functie van de concentratie van cytochrome c-551 af (v_2 is de reactiesnelheid van enzymereactie 2). Uit deze uitdrukking moet natuurlijk direct de lineaire afhankelijkheid van de concentratie van cytochrome c-551 blijken. Toon ook aan dat de uitdrukking inderdaad de geobserveerde afhankelijkheid van $1/v_2$ van de concentratie van azurin voorspelt. Welke vorm van inhibitie beschrijven we hier eigenlijk? Wat is het essentieel verschil met het standaardvoorbeeld van dit type inhibitie dat we in de cursus besproken hebben?

2. Het chemosensorisch eiwit (CSP) van de mot *Mamestra brassicae* heeft een vermoeidelijke functie als chemische signaaltransductor. Dit betekent dat het verschillende chemische molekülen kan binden, waarbij het een conformationele verandering ondergaat dat de trigger voor een verder chemisch of elektrisch proces is. Xstralendiffractie studies hebben aangetoond dat dit eiwit drie molekülen 12-bromododecanol kan binden. In de onderstaande figuur vind je de afhankelijkheid van de verzadigingsgraad Y (in cursus aangeduid als θ) van de concentratie aan ligand. [V. Camanacci, et al, PNAS, 100, 5069 (2003)]



Figuur 4. Hill diagram voor CSP van mot *Mamestra brassicae* voor binding van 12-bromododecanol.

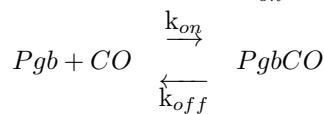
- (a) Wat kan je uit de figuur besluiten over de coperativiteit van het systeem ?
 - (b) De onderstaande figuur werd bekomen door de vermindering van de tryptofaanfluorescentie te meten in functie van de concentratie van 12- bromododecanol. Wat zijn de mogelijke processen die verantwoordelijk zijn voor deze signaalverandering ?
 - (c) Er zitten maar twee tryptofanen in het eiwit en het eiwit is klein (dus bindingsplaatsen en tryptofanen kunnen dicht bij elkaar zitten). De onderzoekers zullen dan ook heel voorzichtig moeten zijn bij de interpretatie van hun fluorescentieresultaten. Geef minstens twee modellen die zeker tegenover elkaar zullen moeten afgewogen worden in de analyse van de experimentele data. Behoort het model waarbij de volledige tryptofaanfluorescentie maar door 1 van de liganden benvloed wordt tot n van deze mogelijkheden ? Waarom (niet) ?
3. De ionenbalans in ons lichaam is cruciaal. Verklaar wat het effect op neuronale cellen zou zijn indien we ze zouden brengen in oplossing met een concentratie aan KNO_3 ver boven de normale isotonische waarde die gevonden wordt in het lichaam. Wat zou het effect zijn indien je het experiment zou herhalen met een cesiumzout als je aanneemt dat er geen Cs^+ ionenkanalen zijn ?
 4. Tijdens de voorstelling van de werkjes, hebben enkele van jullie collegas gesproken over de fysica van het oog. Hierbij hebben ze opsine vermeld, een eiwit dat door binding met retinal rhodopsine vormt. In sommige bacteriën vind men aanverwante eiwitten terug (bacterio-opsine dat met retinal bacterio-rhodopsine vormt). In de onderstaande figuur zie je de verandering van het UV/Vis spectrum wanneer aan een micelle-oplossing van retinal, bacterio-opsine wordt toegevoegd (een micelle-oplossing is te vergelijken met een zeepoplossing, die in dit geval het retinal zal omgeven en waaruit retinal maar langzaam kan diffunderen.). Het absorptiemaximum van ongebonden retinal ligt bij 380 nm, dat van gebonden retinal bij ongeveer 560 nm. Uit de onderstaande grafiek besluiten de onderzoekers dat het proces van retinalbinding aan opsine over tenminste 1 intermediaire toestand moet verlopen. Kan je verklaren waarom ze dit besluiten ?



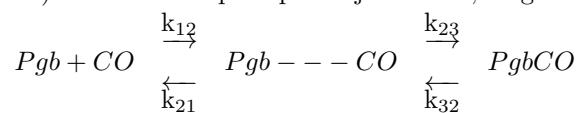
Figuur 5: verandering van het absorptiesignaal van retinal in functie van de tijd voor het hierboven beschreven experiment. uit P. Booth et al., Eur. J. Biochem., 246, 674 (1997)

5.1.5 Juni 2010

1. Het heembewattende protoglobin (Pgb) is het oudste globine-eiwit dat momenteel bekend is. Het ijzeratoom van de heemgroep kan CO binden. Experimenteel kunnen de reactieconstanten k_{on} en k_{off} bepaald worden voor de CO-bindingsreactie

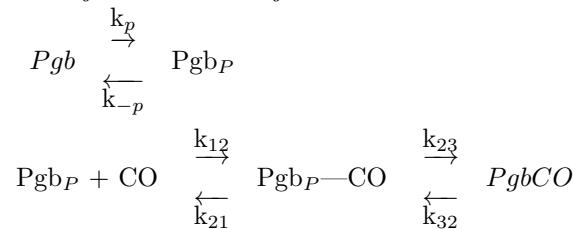


- (a) Het bleek al vlug dat de CO-binding eigenlijk in twee stappen gebeurt. CO dringt eerst de eiwitholte waarin de heemgroep zit binnen (aangeduid als toestand $Pgb-CO$) en bindt dan pas op het ijzeratoom, volgens het schema:



Bepaal hoe de schijnbare reactieconstanten k_{on} en k_{off} kunnen uitgedrukt worden in functie van de echte reactieconstanten k_{12} , k_{21} , k_{23} , k_{32} . Geef ook geldige eenheden voor k_{12} , k_{21} , k_{23} en k_{32} .

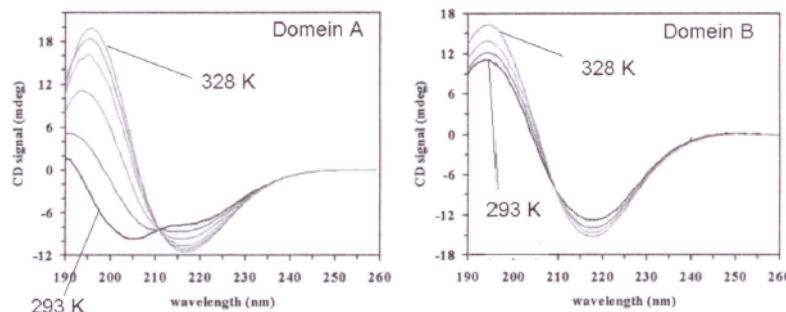
- (b) Voor sommige varianten van Pgb bleek dat er eerst een intern ligand van het heemijzer moest verwijderd worden vooraleer CO binding kan optreden, dus



Waarbij Pgb de variant is met de interne ligand op het heemijzeratoom en Pgb_P met de bindingspositie vrij.

Bepaal hoe de schijnbare reactieconstanten k_{on} en k_{off} kunnen uitgedrukt worden in functie van de echte reactieconstanten k_{12} , k_{21} , k_{23} , k_{32} , k_P en k_{-P} . Hoe kan je deze reactievorm gemakkelijk onderscheiden van deze uit punt a)?

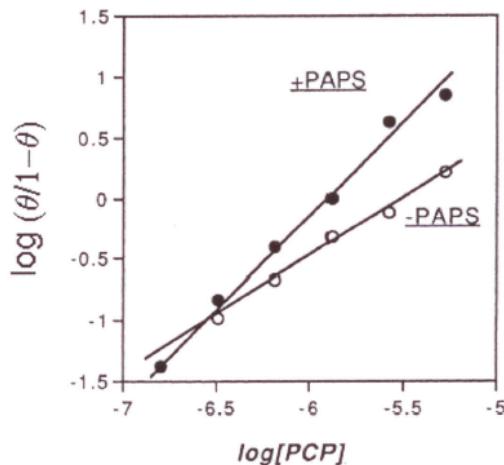
- In zijdedraad zijn verschillende gebieden te onderscheiden met verschillen in hun eiwitontvouwingspatroon. In de onderstaande figuren vind je de temperatuursafhankelijke CD spectra terug van twee zulke gebieden. **Bespreek het verschil in secundaire eiwitstructuur tussen deze twee gebieden bij 293K en vergelijk hun temperatuursafhankelijkheid.**



Figuur: CD spectra van domeinen A en B van een zijdedraad in functie van de temperatuur (figuur aangepast uit J.M. Kenney et al., Eur. J. Biochem., 269, 4159 (2002))

Figuur 5.4: figuur 1

- Fenolsulfotransferasen (FST) spelen een belangrijke rol in detoxificatie van cancerogene producten en in het metabolisme (dus verwerken) van medicamenten. Meer bepaald verestert het eiwit een brede waaier van producten met behulp van sulfaat (dat aanwezig is onder de vorm van 3'-phosphoadenosine-5'-phosphosulfaat (PASP)). Men kan het coöperativiteitsgedrag van de binding van de inhibitor PCP (Pentachlorophenol) bestuderen. In de onderstaande grafiek vind je de Hilldiagrammen weer voor binding van PCP aan FST met of zonder PASP. **Welke types coöperativiteit herken je? Als je weet dat FST Trp in de nabijheid van de bindingsplaatsen voor PCP heeft, hoe hebben de onderzoekers dan onderstaande curven bekomen (welke spectroscopische methode werd gebruikt, wat meten ze juist)?**
- De interactie van een elandpopulatie met een wolvenpopulatie is de klassieke buitenroofdier interactie. **Stel, in analogie met het haas-lynx systeem dat we hebben gezien in de cursus, het stelsel gekoppelde vergelijkingen op dat deze populaties beschrijft zowel voor het gesoleerde eland-wolfsysteem als voor de situatie waarbij de mens jacht maakt op zowel de wolven als elanden. Bespreek hoe deze menselijke jachtactiviteiten de stationaire populaties van de wolf en eland beïnvloeden en wat het effect van de jacht is wanneer het systeem uit evenwicht wordt gebracht.**
- ATC-ase is een regulerend enzyme dat aan het begin van het reactiepad in de biosynthese van pyrimidinenucleotiden staat. ATC-ase kan aspartaat als substraat gebruiken. Het enzyme wordt geactiveerd door ATP en geremd door CTP (cytidinetrifosfaat). Zowel ATP als CTP hebben een invloed op K_m voor het substraat aspartaat, maar niet op v_{max} . In de afwezigheid van ATP of CTP is 5mM de concentratie aan aspartaat die nodig is om de helft van de maximale reactiesnelheid te bereiken. **Schets het verloop**

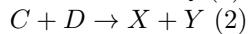
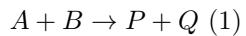


Figuur: Hilldiagram voor binding van de inhibitor PCP aan FST met en zonder toevoeging van PAPS (aangepast overgenomen uit J. D. Beckmann et al., *Chemic-Biological Interactions*, 109, 93 (1998))

Figuur 5.5: figuur 2

van v in functie van aspartaat voor ATC-ase en duid aan hoe de additie van CTP en ATP het verloop van v verandert.

6. We veronderstellen dat we twee reacties hebben:



We doen een gedachteexperiment en veronderstellen dat de som van de energie van X en Y gelijk is aan de som van de energie van P en Q. Reactie (2) is exergonisch, reactie (1) endergonisch. De snelheidsconstante van (1) is groter dan die voor reactie (2). Schets het energieprofiel voor deze twee reacties. Veronderstel nu dat (1) en (2) evenwichtsreacties zouden zijn. Welk geval heeft dan de snelste terugreactie en waarom?

Hoofdstuk 6

Astrofysica

Dit examen is volledig schriftelijk en is vrij lang, je werkt dus best goed door. Op het eerste blad stonden een hoop fysische constanten (alle mogelijke constanten die je nodig zou kunnen hebben).

6.1 Juni 2008

Los alle korte vragen op en twee van de drie lange vragen

6.1.1 Korte vragen

Observationele technieken

Een paar lijnen volstaat, per vraag 4 ptn.

1. Geef twee redenen waarom de spiegels in moderne telescopen groot worden gemaakt
2. Schets hoe het licht gefocuseerd wordt op een prime-focus camera. Geef een voor en een nadeel van een prime-focus camera, bijvoorbeeld in vergelijking met een ander design
3. Ster A heeft een schijnbare magnitudet $m_A = -5$. Ster B lijkt 10 keer helderder. Wat is de schijnbare magnitude van ster B, m_B ? Hoeveel verder moet ster B staan zodat $m_a = m_B$
4. Beschrijf kort twee eigenschappen van een ster die je uit haar spectrum kan afleiden. Beschrijf ook hoe je die eigenschappen uit het spectrum zou halen
5. Schat de maximale duur van de oculatie van een ster door de maan. (hint: bereken de hoeksnelheid van de maan aan de hemel, en verwaarloos de rotatie van de aarde. Gebruik 0.5 graden voor de diameter van de maan.)

Sterren

1. wat is een Herzsprung-Russel diagram? Schets de hoofdreeks in zulk diagram. Schets de positie van Rode Reuzen en Witte Dwergen
2. Wat produceert de energie in de zon? Welke waarnemingen tonen dat aan? Wat bepaalt welke fractie van de zon deelneemt aan dit proces?

3. Veronderstel dat 10% van de zon deelneemt aan nucleaire fusie. Schat de hoofdreeks levensduur van de zon. Verondersteldat dezelfde 10 % deelneemt aan de reactie $3He^4 \rightarrow C^{12}$ nadat de zon een rode reus geworden is. Als dit de enige energiebron is, wat is dan de verhouding tussen de levensduur van de hoofdreeks en het rode reus stadium? (hint: gebruik de massa's van H, He en C gegeven in de tabel en veronderstel dat de lichtkracht de hele tijd dezelfde blijft.)
 4. Om de structuur van een ster te vinden gebruikten we onder andere de vergelijking voor hydrostatisch evenwicht,
- $$\frac{Gm}{r^2} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dr} \quad (6.1)$$
- Wat drukt die vergelijking uit? Waarom is dit niet voldoende om de structuur te vinden? Welke andere vergelijking moesten we eerst nog afleiden? (hint: beschrijf de andere vergelijking, je hoeft haar niet af te leiden)
5. Wat is een gedegenereerd gas? Welk fysisch proces bepaalt de Chandrasekhar massa; M_C ?

6.1.2 Langere vragen

Observationele technieken

Veronderstel gain van de CCD $g = 1$

1. De variantie van een Poisson proces met gemiddelde N_γ is $\sigma^2 = N_\gamma$. Fotonen gedetecteerd op een CCD volgen de Poisson statistiek. Toon aan dat de signaal/ruis verhouding voor een waarneming met $N_\gamma = 100$ fotonen gegeven is door $S/N = 10$. (2ptn)
2. Wat is read-out noise? Een CCD heeft een read-out noise $\sigma_R = 3$. Bereken hoe dit de vorige signaal-ruis verhouding beïnvloedt. (2ptn)
3. Gedurende een waarneming valt er ook licht op de pixels afkomstig van de achtergrond. Veronderstel dat dit overeenkomt met $N_B = 20$. Bereken opnieuw de signaal/ruis verhouding. (2ptn)
4. Toon aan dat, wanneer de achtergrond de ruis domineert in waarnemingen van een ster, de signaal/ruis verhouding gegeven is door $\dot{N}_\gamma(\dot{N}_B)^{-1/2}t^{-1/2}$. De foton flux van een ster is \dot{N}_γ , die van de achtergrond is \dot{N}_B en t is de integratietijd. (2ptn)
5. De *Very Large Telescope* neemt een zwakke ster waar. Al het licht van de ster valt op 1 enkele pixel. De foton flux van de ster op de detector is $\dot{N}_\gamma = 5 \times 10^{-2}/s$ en die van de achtergrond is $\dot{N}_B = 10^{-1}/s$ per pixel. De read-out noise per pixel is $\sigma_R = 3$. Hoelang moet je minstens integreren om een signaal/ruis verhouding van $S/N = 3$ te krijgen? (4ptn)
6. De volgende nacht is de seeing sterk toegenomen en daardoor is het licht van de ster verdeeld over $n = 9$ pixels. Gebruik opnieuw $\sigma_R = 3$ en bereken hoe dit de integratietijd voor $S/N = 3$ heeft veranderd. (hint: breng in rekening dat de achtergrond flux per pixel is) (4ptn)
7. De figuur toont hoeveel licht, E_B , we van de nachthemel detecteren, in energie per tijd, per oppervlakte, per angstrom per boogseconde. Veronderstel dat de filter waar doorheen we waarnemen een breedte van $W = 1000\text{Angstrom}$, en dat een pixel overeenkomt met een schijfje met straal 0.1 Bgseconde. Schat hoeveel fotonen er per seconde per pixel gedetecteerd worden door de VLT. Veronderstel dat elk foton een golflengte heeft van $\lambda = 5000\text{\AA}$. (4ptn hint: $1\text{erg} = 10^{-7}\text{J}$, de diameter van de VLT spiegel is 8m)

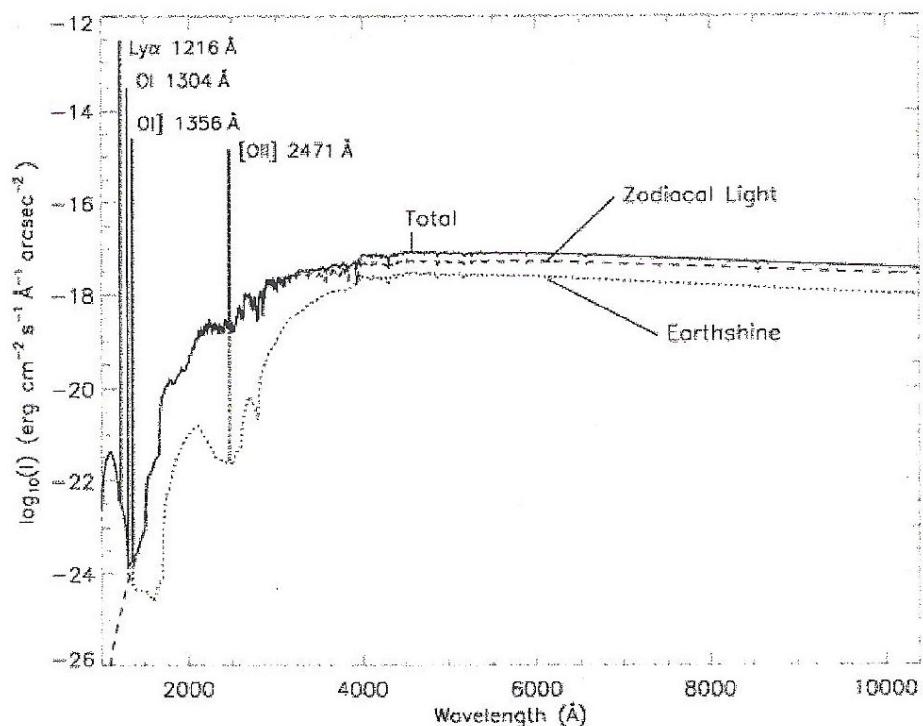


Figure 1: Helderheid van de nachthemel als functie van golflengte.

Structuur en evolutie van een isotherme ster

Eens ster heeft straal R_0 , dichtheidsprofiel:

$$\rho(R) = \rho_0 (R_0/R)^2 \text{ voor } R \leq R_0 \quad (6.2)$$

$$\rho(R) = 0 \text{ voor } R < R_0 \quad (6.3)$$

en een constante temperatuur $T(R) = T_0$ doorheen de ster. Veronderstel dat het gas de ideale gawet volgt:

$$p = \frac{k_B}{\mu m_h} \rho T \quad (6.4)$$

met μ het gemiddelde moluculaire gewicht. Veronderstel verder dat de ster uit volledig geioniseerd waterstof bestaat

1. Deze ster heeft massa $M = M_{zon}$ en straal $R = R_{zon}$. Bereken ρ_0 (2 ptn) (hint: voor een sferische distributie is de massa $M(< R)$ in een bol met straal R , $M(< R) = \int_0^R \rho(r) 4\pi r^2 dr$)
2. Toon aan dat deze ster aan de vergelijning voor hydrostatisch evenwicht voldoet (vgl zie korte vragen) voor een goede keuze van T_0 en bereken die waarde van T_0 . Gebruik de waarde $\mu u = 1/2$ voor volledig geioniseerd waterstof.
3. De oppervlakte temperatuur van deze ster is fT_0 met $f = 10^{-3}$. Bebruik de stralingswetten voor een zwarte straler en berekend de verhouding L/L_{zon} , van de lichtkracht L van de ster over die van de zon. (hint de geemiteerde intensiteit voor een zwarte straler met temperatuur T is $I = \sigma T^4$) (4 ptn)
4. Door fusie wordt al het waterstof omgezet in Helium en verandert de waarde van T_0 , maar niet die van R_0 , M noch f . Als het helium volledig geioniseerd is, bereken de nieuwe waarde van μ en L/L_{zon} . (5ptn)
5. Veronderstel dat alle sterren dezelfde *gemiddelde dichtheid* en waarde van f hebben. Bereken en schets de hoofdreeks in een Herzsprung-Russel diagram en berken en schet waar de sterren liggen die Helium verbranden (5 ptn, hint: Duid goed aan wat er op de assen staat, en welke curve de H en He-sterren precies volgen.)

De groei van zwarte gaten en de Eddington lichtkracht

De groei van een zwart gat is beperkt doordat de straling kan verhinderen dat nog meer materie in het gat valt. We berekenen hoe groot de stralingsdruk is als de fotonen interageren met stof in de omgeving van het zwarte gat. Botsingen tussen stof en gas zorgen ervoor dat de fotonendruk ook op het gas werkt. Veronderstel dat de (sferische) stofdeeltjes massa m_d en straal r_d hebben. Veronderstel ook nog dat het gas dichtheid ρ_g heeft en dat de verhouding tussen de dichtheid van stof over gas gelijk is aan $\eta = \rho_d/\rho_g$. Het zwarte gat heeft massa M .

1. Als de lichtkracht L is, toon aan dat de stralingskracht op een stofdeeltje op afstand r gegeven is door:

$$f_d = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\pi r_d^2}{c} \quad (6.5)$$

(2 ptn, hint: gebruik dat het momentum van een foton met energie E gegeven is door E/c)

2. Bekijk een sferische schil met volume V op afstand r van de lichtbron. Toon aan dat de totale stralingskracht, F_r , op de schil, gegeven is door:

$$F_d = \frac{\eta \rho_g V}{m_d} \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\pi r_d^2}{c} \quad (6.6)$$

(4ptn)

3. Bereken de gravitatiekracht, F_g , op die schil uitgeoefend door het zwarte gat. Wat is de Eddington lichtkracht? Toon aan dat

$$L_{Edd} = 4\pi G M c \frac{1 + \eta}{\eta} \frac{m_d}{\pi r_d^2} \quad (6.7)$$

(4ptn)

4. De massa van het zwarte gat neemt toe door accretie van gas en stof. Veronderstel dat een fractie ϵ van de rustmassa van materie dat in het zwarte gat valt, omgezet wordt in straling, toon dan aan dat de lichtkracht gegeven wordt door:

$$L = \epsilon \dot{M} c^2 \quad (6.8)$$

(2ptn)

5. Veronderstel dat de lichtkracht $L = L_{Edd}$. Toon aan dat de massa van het zwarte gat groeit als

$$M(t) = M_0 e^{t/t_{Edd}} \quad (6.9)$$

Bereken t_{Edd} in het geval dat $\epsilon = 0.10$, $\eta = 0.010$, $r_d = 1.0 \times 10^{-4} \text{ cm}$, $m_d = 1.0 \times 10^{-8} \text{ g}$
(8ptn)

6.2 Juni 2009

Los alle korte vragen op en twee van de drie lange vragen

6.2.1 Korte vragen (20 punten)

Een paar lijnen volstaat per antwoord, elke vraag staat op 4 punten.

Observationale Technieken

1. Definieer lichtkracht, L , flux F , schijnbare en absolute magnitude van een ster.
2. Geef twee belangrijke vereisten voor de lokatie van een observatorium.
3. Schets hoe het licht gefocuseerd wordt in een Cassegrain design.
4. Beschrijf kort twee belangrijke stappen die je moet doen met CCD waarnemingen om de ruwe data in wetenschappelijk bruikbare data om te zetten.
5. De CCD camera op teleskopen wordt meestal gekoeld. Waarom?

Sterren

1. Schets een Herzsprung-Russel diagram. Duid duidelijk aan wat er op de assen staat. Wat is de 'hoofdreeks' in zulk een diagram? Welk process genereert de energie in hoofdreeks sterren?
2. Hoe kan je de temperatuur aan het oppervlakte van de zon meten? Hoe kan je de massa van de zon bepalen?
3. Schat de thermische tijdschaal van de zon. [Hint: gebruik de gegeven zonne-constanten, en veronderstel dat de gravitationele energie, GM^2/R vergelijkbaar is met de thermische energie.
4. Het verschil $(M_i - A_i amu).c^2$ tussen de massa M_i van element i, en A_i keer de atoomaire massa eenheid amu, heet het 'massa verschil' van het element. (A_i is het aantal nucleonen in de kern.) Voor waterstof en Helium is het massa verschil

$$(M_H - 1\text{amu}).c^2 = 7.289\text{MeV}$$

$$(M_{He} - 4\text{amu}).c^2 = 2.425\text{MeV}$$

(Zie lijst met constanten voor de waarde van de fysische constanten). Bereken hiermee de efficientie, ϵ , van waterstof fusie in de zon.

5. De lichtkracht L op de hoofdreeks hangt af van de massa M van een ster als $L \propto M^3$. Gebruik dit om de levensverwachting (t_*) van een ster te vinden als functie van haar massa, in termen van de levensverwachting van de zon, t_0 .

6.2.2 Lange vragen (20 punten)

Observationale Technieken

In deze oefening onderzoeken we hoe lang we met de Hubble Space Telescope moeten integreren om een planeet zoals Jupiter te kunnen zien rond een naburige ster, gelijkaardig aan de Zon. Voor de eigenschappen van die extra-solaire planeet en haar ster, gebruiken we daarom de waarden voor Jupiter en de Zon zelf, en veronderstellen dat we waarnemen vanuit een naburige ster, op afstand r_* . Om dit te berekenen moeten we

1. Vinden hoeveel zonlicht Jupiter reflecteert.
2. Hoeveel fotonen de HST daarvan kan waarnemen, per seconde.
3. Hoeveel achtergrond noise HST heeft.
4. Gegeven deze twee waarden, hoe lang we moeten integreren om een goede detectie van Jupiter te maken.

Gebruik deze waarden:

- $D = 2.4\text{m}$ (diameter van de HST primaire spiegel)
- $p = 0.1$ (resolutie van HST, in boog seconden)
- $d = 1 \times 10^9 \text{ km}$ (afstand Zon-Jupiter)
- $r = 3.5 \times 10^4 \text{ km}$ (straal van Jupiter)

1. Veronderstel dat Jupiter al het zonlicht dat er op valt naar ons toe reflecteert. Toon aan dat de lichtkracht van Jupiter dan gegeven is door

$$L_J = \frac{L_0 \pi r_*^2}{4\pi d^2} = 3,06 \cdot 10^{-10} L_0$$

2. Veronderstel dat we deze planeet waarnemen in het visuele, $\lambda = 5000\text{\AA}$. Toon aan dat

$$\begin{aligned} F_J &= \frac{L_J}{4\pi r_*^2} \\ \dot{N}_J &= \frac{F_J \pi (D/2)^2}{E} \end{aligned}$$

waarin F_J de flux is die van Jupiter meten, E de energie van een foton met golflengte λ , en \dot{N}_J het aantal fotonen dat de HST detecteert van deze planeet per seconde en bereken \dot{N}_J .

3. Onze waarneming wordt bemoeilijkt doordat de telescoop ook nog fotonen detecteert die niet van Jupiter afkomstig zijn, maar bijvoorbeeld ook van andere sterren, en van stof in het zonnestelsel. De figuur (van de HST web-site) toont hoeveel licht, E_B , we van de nachthemel detecteren, in energie, per eenheid van tijd, per eenheid van oppervlakte, per Angstrom, per boogseconde². Veronderstel dat de filter waar doorheen we waarnemen een breedte van $W = 1000\text{\AA}$ heeft. Veronderstel verder dat het licht van Jupiter of HST verdeeld wordt over de diffractie limiet van de telescoop, namelijk een schijfje met straal gelijk aan de resolutie, $p = 0.1$ boog seconden. Vind een uitdrukking voor \dot{N}_B , het aantal achtergrond fotonen dat HST waardeert per eenheid van tijd.
4. Gegeven dat we N_J fotonen per seconde detecteren van Jupiter, en N_B van de 'achtergrond' toon aan dat de signaal-ruis verhouding voor integratie tijd t , gegeven is door

$$\frac{S}{N} = \frac{\dot{N}_J t}{[(\dot{N}_J + \dot{N}_B)t]^{1/2}}$$

5. Geef een formule voor t zodat $S/N > 3$ en bereken t voor je eerdere gevonden waarden [Hint: $1 \text{ erg} = 10^{-7} \text{ J}$].

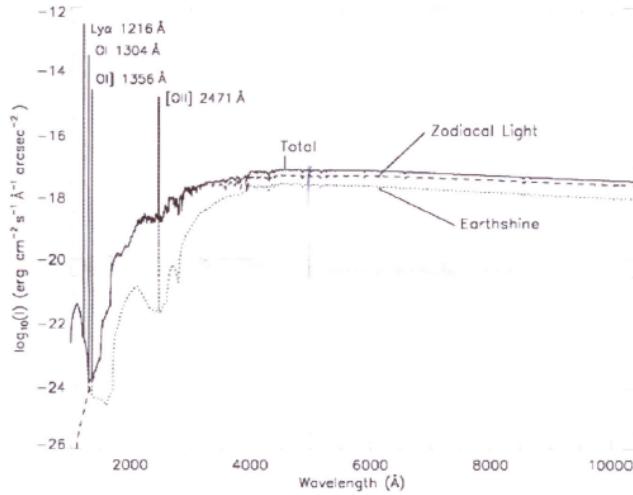


Figure 1: Helderheid van de nachthemel als functie van golflengte.

Figuur 6.1: Helderheid van de nachthemel als functie van golflengte

Sterren

1. Lane-Emden vergelijking en Chandrasekhar massa (20 punten)

1. Toon aan dat in een sferische massa verdeling, de massa, dM , in een schil met straal r en dikte dr , $dr \ll r$, gelijk is aan $dM = 4\pi r^2 \rho dr$.
2. Gebruik dit om de vergelijking voor hydrostatisch evenwicht in een sferische ster af te leiden:

$$\frac{GM(< r)}{r^2} = \frac{-1dp}{\rho dr}$$

($M(< r)$ is de massa in de bol met straal r .) [Hint: vergelijk de gravitatie kracht op de schil met de druk kracht op de schil.]

3. Wat is een toestandsvergelijking (equation of state)?
4. Veronderstel dat $p = K\rho^\gamma$ (K en γ constant). Substitueer dit in de vergelijking van het 2de deel van deze vraag en toon aan dat

$$\frac{S}{N} = \frac{\dot{N}_J t}{[(\dot{N}_J + \dot{N}_B)t]^{1/2}}$$

(de Lane- Emden vergelijking), waarin

- $r = \alpha\xi$
- $\rho = \rho_c \theta^n$
- $\alpha^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G(\rho_c)^{((n-1)/n)}}$
- $\gamma = 1 + 1/n$

5. Toon aan dat de massa van de ster $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = -4\pi \alpha^3 \rho_c \xi_1^2 \frac{d\theta}{d\xi_1}$. De index '1' , betekent de waarde aan de oppervlakte van de ster.
6. Combineer de vergelijkingen van r , α en M om het verband tussen de straal R , en de massa M , van de ster te vinden, $\frac{M}{-\xi_1^2 (\frac{d\theta}{d\xi_1})^{n-1}} = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{R}{\xi_1} \right)^{n-3} \left[\frac{(n+1)K}{G} \right]^n$
7. Voor een relativistisch gedegeneerd Helium gas is $p = \frac{hc}{8} \left(\frac{3}{\pi} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho}{2m_p} \right)^{4/3}$

2. Stralingsdruk, massa verlies, en een limiet op de massa van sterren die Witte Dwergen worden (20 punten)

Stofdeeltjes in de atmosfeer van een ster absorberen een deel van de flux. Aangezien de geabsorbeerde fotonen ook momentum hebben resulteert dit in een kracht die de stofdeeltjes naar buiten duwt. Botsingen tussen stof en gas deeltjes sleuren het gas ook mee naar buiten. Dit resulteert in een stellaire wind, en de ster verliest massa. We leiden eerst een uitdrukking voor de kracht op het gas ten gevolge van dit effect (vergelijkbaar met de berekening van de Eddington lichtkracht), en gaan daarna na wat het effect van massa verlies is op de evolutie van de ster.

1. Een ster met massa M heeft sferische stofdeeltjes met massa m_s , en straal d in zijn atmosfeer. Voor een stofdeeltje op afstand r van een ster met lichtkracht L , toon aan dat de stralingskracht F_s , op het deeltje gegeven is door

$$F_S = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\pi d^2}{c}$$

[Hint: het momentum van een foton met energie E is E/c .]

2. Beschouw een schil op afstand r met dikte dr , gas massa M_g en stofmassa $M_s = \epsilon M_g$ ($\epsilon \ll 1$). Toon aan dat het aantal stofdeeljes in deze schil $N_s = \epsilon M_g/m_s$. Toon aan dat de stralingskracht, F_S , en gravitatiekracht, F_G , op de schil gelijk zijn aan

$$F_S = \frac{\epsilon M_g F_s}{m_s}$$

$$F_G = \frac{G M M_g}{r^2}$$

3. Toon aan dat je verwacht dat de wind start wanneer

$$L \geq \frac{\epsilon M_g F_s}{m_s}$$

4. Door de wind verliest de ster een deel van zijn massa M . Veronderstel dat we dit schrijven als

$$\dot{M} = -\alpha L$$

Vind $M(t)$, veronderstel $M(0) = M_0$. Door verbranding neemt de massa van de kern, M_k , toe. Veronderstel dat de verbranding een hoeveelheid energie Q per eenheid van massa produceert. Toon dat

$$M(t) = M_0 = \alpha Lt$$

$$M_k(t) = M_0 = \frac{Lt}{Q}$$

Wat is de massa van de ster op het ogenblik dat de mantel geheel verloren is (en dus $M = M_k$)? [Hint: veronderstel dat de lichtkracht L constant is, en dat $M_k(t=0) = 0$.]

5. Toon aan dat

$$Q = 6.5 \cdot 10^{14} J kg^{-1}$$

voor waterstof fusie.

6. Op het einde van de verbranding moet de massa van de kern kleiner zijn dan de Chandrasekhar massa $M_{Ch} \approx 1.4M_0$ om nog een stabiel te zijn. Vind de limiet voor de oorspronkelijke massa van de ster opdat dit zou gebeuren. Veronderstel $\alpha = 10^{-14} kg J^{-1}$.

6.3 Juni 2010

Los alle korte vragen op en twee van de drie lange vragen

6.3.1 Korte vragen (20 punten)

Een paar lijnen volstaat per antwoord, elke vraag staat op 4 punten.

Observationele Technieken

1. Geef twee belangrijke redenen waarom grote, moderne telescopen spiegels gebruiken i.p.v. lenzen.
2. Wat is *seeing* en wat veroorzaakt het?
3. Schets de *Nasmyth* focus van de telescoop. Moderne spectrografen zijn erg groot en zwaar. Geef twee redenen waarom het dus veel beter is deze op de Nasmyth focus te installeren in plaats van op de prime focus.
4. Definieer de angulaire resolutie van een telescoop. Wat bepaalt de angulaire resolutie van de *HubbleSpaceTelescope*? Hangt dit af van de golflengte?
5. Twee sterren, A en B, hebben dezelfde lichtkracht. A heeft schijnbare magnitude $m_A = 4$ en staat op afstand $d_A = 4pc$; B heeft $m_B = 10$. Bereken de afstand tot ster B (verwaarloos absorptie). Hoe zou je kunnen onderzoeken of er absorptie is door stof (dust) in de richting van ster B?

Sterren

1. Schets een Herzsprung-Russel diagram. Duid duidelijk aan wat er op de assen staat. Schets de positie van (a) de hoofdreeks, (b) Rode Reuzen en (c) Witte dwergen.
2. Helium fusie genereert de energie in Rode Reuzen. Waarom treedt dit proces niet op in de zon? Welk proces vindt plaats op het einde van de hoofdreeks evolutie van een ster zoals de zon, zodat He fusie plots wel mogelijk wordt?
3. Wat is gedegenereerde materie? Welk type ster bestaat bijvoorbeeld uit gedegenereerde materie?
4. Bereken hoeveel waterstofatomen er per seconde worden omgezet in He in de zon.
5. Zware sterren produceren elementen zwaarder dan He zowel tijdens hun evolutie als tijdens de super nova explosie. Bespreek kort de evolutie van (a) lichte sterren en (b) heel zware sterren en verklaar waarom deze geen zwaardere elementen produceren gedurende hun leven.

6.3.2 Lange vragen (20 punten)

Observationele Technieken

Rond een ster op afstand $d = 1pc$ is er een planeet met leven. Toevallig hebben de astronomen op die planeet ook een ruimte telescoop met precies de eigenschappen van een HIST: diameter $D = 2.4m$, een CCD met read-out noise $\sigma_R^2 = 0.2$, dark current $\dot{N}_d = 0.1s^{-1}$ en gain $g = 1$. Astronoom Andy heeft waarnemingsstijd op de ruimte telescoop en wil proberen het zonlicht dat reflecteert van de aarde te meten. Hij weet dat de vergelijking voor de signaal-ruis verhouding in een waarneming gegeven wordt door:

$$\frac{S}{N} = \frac{\sum \dot{N}_\gamma t}{(\sum [\dot{N}_\gamma t + \dot{N}_B t + \sigma_R^2 + \dot{N}_d t])^{1/2}} \quad (6.10)$$

Maak de benadering dat al het zonlicht dat wordt uitgestraald (en ook wordt gereflecteerd) golflengte $\lambda = 5000\text{\AA}$ heeft.

1. Bespreek kort de verschillende termen in deze vergelijking, wat betekent de som? (2pt)

2. De grootte van de Airy schijf is $\theta = 1.22\lambda/D$. Bereken of hun HST voldoende resolutie heeft om de zon en de aarde gescheiden te kunnen waarnemen. (4pt)
3. Toon aan dat de flux F van door de aarde gereflecteerd zonlicht gemeten door Andy, maximaal gelijk is aan

$$F = L_o \frac{\pi r^2}{4\pi AU^2} \frac{1}{4\pi d^2}, \quad (6.11)$$

waarin $r = 6000$ km de straal van de aarde is. (4pt)

4. Bereken die flux. (2pt)
5. Bereken het aantal fotonen \dot{N}_γ dat per seconde op de HST spiegel valt. (4pt)
6. De waarnemingen worden bemoeilijkt doordat een deel f van het direkte zonlicht op de detector valt, net op de plaats waar het beeld van de aarde ook valt. Veronderstel dat $f = 0.01$. Bereken de minimale integratietijd zodat de signaal-ruis verhouding $S/N = 3$. (4pt)

Sterren

1. Lane-Emden vergelijking en Chandrasekhar massa (20 punten)

1. Toon aan dat in een sferische massaverdeling, de massa, dM , in een schil met straal r en dikte dr , $dr \ll r$, gelijk is aan $dM = 4\pi r^2 \rho dr$. (2pt)
2. Gebruik dit om de vergelijking voor hydrostatisch evenwicht in een sferische ster af te leiden:

$$\frac{GM(< r)}{r^2} = \frac{-1dp}{\rho dr}$$

($M(< r)$ is de massa in de bol met straal r .) (2pt) [Hint: vergelijk de gravitatie kracht op de schil met de druk kracht op de schil.]

3. Wat is een toestandsvergelijking (equation of state)? (2pt)
4. Veronderstel dat $p = K\rho^\gamma$ (K en γ constant). Substitueer dit in de vergelijking van het 2de deel van deze vraag en toon aan dat

$$\frac{S}{N} = \frac{\dot{N}_J t}{[(\dot{N}_J + \dot{N}_B)t]^{1/2}}$$

(de Lane- Emden vergelijking), waarin

- $r = \alpha\xi$
- $\rho = \rho_c \theta^n$
- $\alpha^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G(\rho_c)^{((n-1)/n)}}$
- $\gamma = 1 + 1/n$

5. Bereken de structuur van een ster met $n = 1$. (4pt)
6. Bereken haar massa en straal in termen van α en ρ_c . (4pt)
7. Deze ster heeft dezelfde massa en straal als de zon. Bereken haar centrale dichtheid ρ_c . (2pt)

2. Stralingsdruk, massa verlies, en een limiet op de massa van sterren die Witte Dwergen worden (20 punten)

Stofdeeltjes in de atmosfeer van een ster absorberen een deel van de flux. Aangezien de geabsorbeerde fotonen ook momentum hebben resulteert dit in een kracht die de stofdeeltjes naar buiten duwt. Botsingen tussen stof en gas deeltjes sleuren het gas ook mee naar buiten. Dit resulteert in een stellaire wind, en de ster verliest massa. We leiden eerst een uitdrukking voor de kracht op het gas ten gevolge van dit effect (vergelijkbaar met de berekening van de Eddington lichtkracht), en gaan daarna na wat het effect van massa verlies is op de evolutie van de ster.

- Een ster met massa M heeft sferische stofdeeltjes met massa m_s , en straal d in zijn atmosfeer. Voor een stofdeeltje op afstand r van een ster met lichtkracht L , toon aan dat de stralingskracht F_S , op het deeltje gegeven is door

$$F_S = \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\pi d^2}{c}$$

[Hint: het momentum van een foton met energie E is E/c .] (4pt)

- Beschouw een schil op afstand r met dikte dr , gas massa M_g en stofmassa $M_s = \epsilon M_g$ ($\epsilon \ll 1$). Toon aan dat het aantal stofdeeltjes in deze schil $N_s = \epsilon M_g / m_s$. Toon aan dat de stralingskracht, F_S , en gravitatiekracht, F_G , op de schil gelijk zijn aan

$$F_S = \frac{\epsilon M_g F_s}{m_s}$$

$$F_G = \frac{G M M_g}{r^2}$$

(2pt)

- Toon aan dat je verwacht dat de wind start wanneer

$$L \geq \frac{\epsilon M_g F_s}{m_s}$$

(2pt)

- Door de wind verliest de ster een deel van zijn massa M . Veronderstel dat we dit schrijven als

$$\dot{M} = -\alpha L$$

Vind $M(t)$, veronderstel $M(0) = M_0$. Door verbranding neemt de massa van de kern, M_k , toe. Veronderstel dat de verbranding een hoeveelheid energie Q per eenheid van massa produceert. Toon dat

$$M(t) = M_0 = \alpha L t$$

$$M_k(t) = M_0 = \frac{Lt}{Q}$$

(2pt) Wat is de massa van de ster op het ogenblik dat de mantel geheel verloren is (en dus $M = M_k$)? (2pt) [Hint: veronderstel dat de lichtkracht L constant is, en dat $M_k(t=0) = 0$.]

- Toon aan dat

$$Q = 6.5 \cdot 10^{14} \text{ J kg}^{-1}$$

voor waterstof fusie. (4pt)

- Op het einde van de verbranding moet de massa van de kern kleiner zijn dan de Chandrasekhar massa $M_{Ch} \approx 1.4M_0$ om nog een stabiel te zijn. Vind de limiet voor de oorspronkelijke massa van de ster opdat dit zou gebeuren. Veronderstel $\alpha = 10^{-14} \text{ kg J}^{-1}$. (4pt)

Dankwoordje

Met dank aan:

- Alle vorige WINAK mentoren die aan deze tuyaux hun steentje hebben bijgedragen.
- Mijn medementoren Elke en Christophe voor de leuke samenwerking.
- Al de mensen die mij hun examenvragen hebben bezorgd en zo deze nieuwe Tuyaux mee hebben mogelijk gemaakt.
- De mensen die me mijn schrijffouten en typfouten vergeven en doormailen naar julie@winak.be.