Inleiding analytische mechanica

tuyaux.winak.be/index.php/Inleiding_analytische_mechanica

Inleiding analytische mechanica

Richting	Fysica
Jaar	1BFYS

Bespreking

Sinds 2013-2014 wordt dit vak gegeven door prof. Wouters. De lessen worden ook opgedeeld theorie en oefeningen. De eerste lessen zijn samen met de wiskundigen die dit vak al keuzevak hebben gekozen dus worden tijdens deze lessen maar een aantal hoofdstukken besproken. Nadien worden de resterende hoofdstukken gedaan zonder de wiskundigen. Vragen stellen zijn geen probleem tijdens de les en het is zeker aangeraden naar elke les te gaan. De examens zijn mondeling en er worden vooral afleidingen gevraagd, dit zijn dan grote open vragen en daarom is het belangrijk om ook de structuur in de cursus te begrijpen.

Puntenverdeling

Het grootste deel van de punten staan op de theorie. Het theorie examen is mondeling met schriftelijke voorbereiding en de oefeningen zijn schriftelijk.

Examenvragen

Mogelijke examenvragen

Professor Michiel Wouters

Lijst gegeven door de prof.

Variatierekening

- Leid de Eulervergelijkingen af.
- Los het probleem van Bernouilli op.
- Bewijs de dunne lensformule.

Wetten van de mechanica

- Stel de Langrangiaan op voor een vrij massapunt en toon aan dat die voldoet aan de Newton-symmetrieën en aan het relativiteitsbeginsel van Galilei.
- Bewijs de behoudswetten voor een afgesloten stelsel uitgaande van de Newton-symmetrieën.

- Leid de vergelijkingen van Hamilton af.
- Mechanische similariteit.

Het star lichaam

- Stel de uitdrukking op voor het draaimoment van een star lichaam.
- Traagheidsellipsoide.
- Bewijs het theorema van Steiner.

Het tweedeeltjesprobleem

- Los het tweedeeltjesprobleem op tot en met het afleiden van r(t)r(t) en ϕ(t)ϕ(t).
- Hoe kan men navigeren in de ruimte?

Mechanica van het starre lichaam

- Stel de Langrangiaan op voor een star lichaam.
- Het gyroscopisch effect.
- De fysische slinger.

Botsingen

- Algemene theorie van de botsingen van twee deeltjes (in MMPT-stelsel en in Lab-stelsel).
- Rutherford-verstrooiing.
- Vrije trillingen rond een stabiel evenwicht.

Academiejaar 2022-2023 2de zit

Theorie

1. Bespreek trilling in het Lagrangiaanse formalisme. Bespreek hiervoor de expansie van de langrangiaan rond een stabiel evenwichtspunt en de diagonalisatie hiervan. Bepaal de algemene uitdrukking voor de oplossing van de bewegingsvergelijkingen.
2. Wat is het verband tussen de rotatiesnelheid en de kinetische energie van een star lichaam dat roteer rond een vaste as.
3. Leid de perkenwet en de baanvergelijkingen voor het tweedeeltjesprobleem met een gravitatiepotentiaal af. Maak een schets van de effectieve potentiaal en bespreek asymptotisch gedrag. Bespreek ook de vorm en energieën van de banen die kunnen voorkomen.

Oefeningen

Inleiding Analytische Mechanica

1Ba Fysica & 2Ba Wiskunde

Universiteit Antwerpen

Oefeningenexamen

20 juni 2023

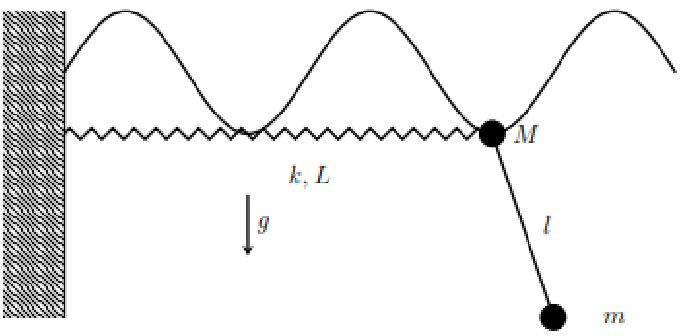
Geef steeds weer in welk assenstelsel je werkt (oorsprong en richting van de assen) en welke coördinaten je kiest ten opzichte van dit assenstelsel. Probeer je antwoorden steeds te verklaren of interpreteren. Overtuig ons dat je de materie begrijpt, ook wanneer een afleiding niet helemaal lukt. Zorg ervoor dat op elk blad je naam staat. Veel succes!

1. Een puntmassa M kan vrij bewegen langs een sinusoïdale draad in het zwaarteveld, beschreven door $y = \sin(x)$ (zie Figuur 1). De massa is verbonden aan de muur via een veer met veerconstante k en evenwichtslengte $L = 7\pi/4$. Aan de puntmassa M is bovendien een slinger opgehangen van lengte l, met aan het uiteinde een puntmassa m. Beschouw voor de veer enkel *horizontale* uitrekking.

   (a) Stel de Lagrangiaan op en leid hieruit de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking(en) af. Je hoeft deze *niet* op te lossen.

   (b) Zoek de evenwichtsconfiguratie in termen van je gekozen coördinaten, en voer in de Lagrangiaan de harmonische benadering uit voor kleine uitwijkingen rond dit evenwicht.

   (c) Geef de eigenfrequentie(s) voor trillingen.



Figuur 1

2. Alain de Aardappel is op vakantie in Mexico en draagt een sombrero (zie Figuur 2), waarvan de hoogte wordt beschreven door

$$z(r,\theta) = \frac{A^2}{4B} - Ar^2 + Br^4 \qquad A, B > 0.$$

Op het oppervlak van de hoed ligt een knikker met massa m.

   (a) Stel de Lagrangiaan op voor de beweging van de knikker, die je als puntmassa mag beschrijven.

   (b) Leid hieruit de Hamiltoniaan af en schrijf de Hamilton-bewegingsvergelijkingen neer voor de coördinaten en hun canonische impulsen.

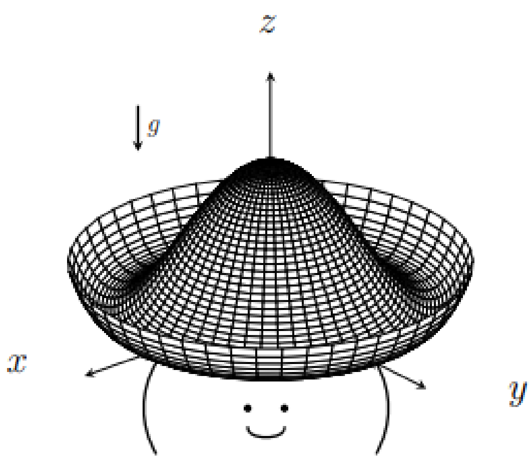
   (c) Toon met je antwoord op de vorige vraag aan welke grootheden behouden zijn en verklaar.

3. Achteraan in de klas zitten twee studenten te schaken. De gemoederen lopen op en een pion rolt van het schaakbord. De pion, afgebeeld in Figuur 3 heeft een homogene dichtheid ρ_0 en bestaat uit een kegel met hoogte h en onderaan straal r, met daarbovenop een bol van dezelfde straal r.

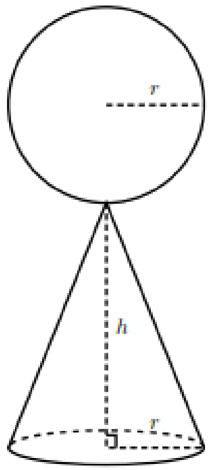
   (a) Druk de massa en de locatie van het massacentrum uit in termen van r, h en ρ_0.

   (b) Bereken het traagheidsmoment van de pion rondom zijn verticale as.

   (c) Geef een uitdrukking voor de kinetische energie van de pion wanneer deze met snelheid v over de tafel rolt.



Figuur 2



Figuur 3

Academiejaar 2020-2021 2de zit

Theorie

1. Wat is het verband tussen de rotatiesnelheid en de kinetische energie van een star lichaam? Leid de kinetische energie af voor een star lichaam dat roteert rond een vaste as. Hoe verandert die energie als de as verschoven wordt?
2. Bespreek: beweging in 1 dimensie
3. Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Oefeningen

Geef steeds weer in welk assenstelsel je werkt (oorsprong, richting van de assen) en welke coördinaten je kiest ten opzichte van dit assenstelsel. Je mag dit aanduiden op het opgavenblad, maar vergeet dit niet mee af te geven. zorg ervoor dat op elk blad je naam staat. Veel succes!

1. Een puntmassa m beweegt wrijvingsloos langs een massaloze hoepel met straal R, die met een constante hoeksnelheid ω roteert in het horizontale vlak. De puntmassa is verbonden aan een vast punt op de hoepel via een veer met evenwichtslengte O en veerconstante k. Verwaarloos g.
    1. Geef het aantal vrijheidsgraden en kies geschikte coördinaten om ze voor te stellen.
    2. Stel de Lagrangiaan op.
    3. Bepaal canonische impuls(en) en stel hiermee de Hamiltoniaan op.
    4. Schrijf de Hamilton bewegingsvergelijkingen neer. Je hoeft deze niet op te lossen.
2. Bij het verkennen van een tombe stoot Lara Croft op een slingerend mes dat de weg blokkeert. Om haar sprong te plannen, wil Lara weten hoe het mes slingert. Het mes kan je benaderen door een halve cirkel met straal R en een homogene oppervlaktedichtheid $\rho(r,\theta)=\rho 0\rho(r,\theta)=\rho 0$. Het mes is in het midden van de rechte zijde verbonden aan het ophangpunt via een massaloze staaf.
    1. Geef het aantal vrijheidsgraden en kies geschikte coördinaten om ze voor te stellen.
    2. Bereken van het mes de massa, de locatie van het massacentrum en het traagheidsmoment I ten opzichte van het massacentrum voor rotatie in het getoonde vlak
    3. Stel de Lagrangiaan op voor de volledige beweging in het vlak.
    4. Wat is de evenwichtsconfiguratie?
    5. Maak de harmonische benadering voor kleine uitwijkingen uit evenwicht en herschrijf de Lagrangiaan in matrixvorm.
    6. Zoek eigenfrequenties.
3. Alain de aardappel (een puntmassa m) is van het toilet gesprongen en hangt aan de rol WC-papier. De massa van het papier mag je verwaarlozen, het rolletje heeft een straal R en traagheidsmoment I. Het rolletje roteert naarmate Alain op en neer beweegt en zo het papier afrolt. Alain kan niet slingeren of roteren.
    1. Geef het aantal vrijheidsgraden en kies geschikte coördinaten.
    2. Stel Lagrangiaan op en haal hieruit de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking(en).
    3. Bereken hoelang het duurt voordat Alain de grond raakt, wanneer hij uit stilstand vertrekt ter hoogte van de rol.

Academiejaar 2020-2021 1ste zit

Theorie

1. Leid de behoudswetten af die volgen uit de homogeniteit (translatie-invariantie) en isotropie (rotatie-invariantie) van de ruimte.
2. Leid de perkenwet en de baanvergelijkingen voor het tweedeeltjesprobleem met een gravitatiepotentiaal af. Je mag vertrekken van het gereduceerde probleem (enkel de relatieve beweging). Maak een schets van de effectieve potentiaal en bespreek het asymptotische gedrag bij kleine en grote afstanden. Bespreek de vorm van de baan bij alle energieën die fysisch kunnen voorkomen.
3. Stel de Lagrangiaan en bewegingsvergelijkingen op voor een massa die beweegt in een roterend assenstelsel. Leid hiervoor eerst de formule voor de snelheid in een roterend assenstelsel af. Benoem de verschillende (fictieve) krachten die voorkomen in de bewegingsvergelijkingen.

Oefeningen

Universiteit Antwerpen

Inleiding Analytische Mechanica: Oefeningenexamen

1Ba Fysica

15 juni 2021

Geef steeds weer in welk assenstelsel je werkt (oorsprong, richting van de assen) en welke coördinaten je kiest ten opzichte van dit assenstelsel. Je mag dit aanduiden op het opgaveblad, maar vergeet dit dan niet mee af te geven. Zorg ervoor dat op elk blad je naam staat. Veel succes!

1. Een puntmassa m beweegt wrijvingsloos langs een massaloze staaf, die kan roteren in het horizontale vlak. De Lagrangiaan is:

$$L = \frac{m}{2}(\dot{q}^2 + q^2\dot{\alpha}^2),$$

met de q de afstand van de massa tot de rotatie-as, en α de rotatiehoek van de staaf.

   (a) Stel de Hamiltoniaan op en leid de Hamilton-bewegingsvergelijkingen af. Je hoeft deze niet op te lossen.

   (b) Doe hetzelfde voor een Lagrangiaan met extern opgelegde rotatiesnelheid: $\dot{\alpha} = \omega(t)$.

   (c) Doe nogmaals hetzelfde voor het geval waarin de rotatiesnelheid constant is: $\omega(t) = \omega_0$.

   (d) In welke van deze 3 gevallen is de Hamiltoniaan een behouden grootheid?

2. Een puntmassa M beweegt wrijvingsloos over een sinusoïdale draad met als voorschrift in het aangeduide stelsel:

$$y = \frac{h}{2}\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\right).$$

Aan de puntmassa hangt een slinger van lengte l met onderaan een tweede puntmassa m.

   (a) Hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem? Geef de stabiele evenwichtstoestand.

   (b) Stel de Lagrangiaan op.

   (c) Expandeer de Lagrangiaan voor kleine uitwijkingen rond het evenwicht en schrijf hem in matrixvorm.

   (d) Hoe zou je hieruit de eigenfrequenties halen? Je hoeft dit rekenwerk *niet* te doen.

3. Alain de aardappel is van de draaimolen gevallen, en hangt met beide armen aan de rand. De draaimolen is een homogene schijf met straal R en massa M. Het lichaam van Alain heeft een homogene dichtheid ρ_A en een omtrek beschreven door

$$r(\theta) = \frac{L}{4}\left[1 + \cos^2(\theta)\right].$$

Zijn armen kan je benaderen door één veer met constante k en rustlengte $L/2$. Alain hangt steeds buiten de molen en loodrecht op de rand van de schijf. Beschouw alles in 2D en verwaarloos zwaartekracht.

(a) Stel de Lagrangiaan op en leid de Euler-Lagrange vergelijking(en) af. Je hoeft deze *niet* op te lossen.

(b) Welke grootheid is behouden en waarom?

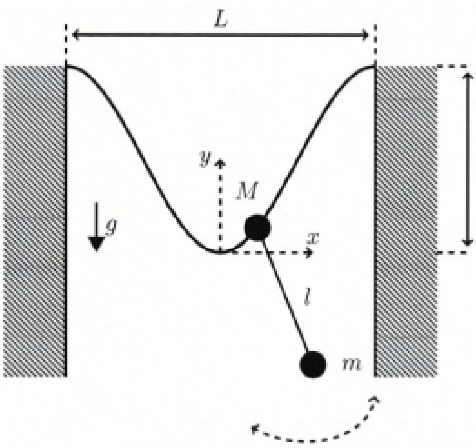
(c) Onder welke voorwaarde roteren Alain en de draaimolen aan een constante hoeksnelheid?

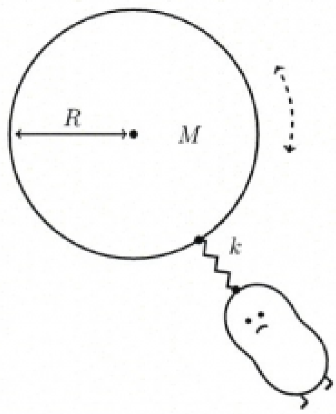
(d) Alain verliest zijn houvast wanneer zijn armen worden uitgerekt tot zijn lichaamslengte. Bij welke constante rotatiesnelheid gebeurt dit?

Volgende integralen krijg je cadeau:

$$\int_0^{2\pi} \left[1 + \cos^2(\theta)\right]^2 \mathrm{d}\theta = \frac{19\pi}{4} \qquad \int_0^{2\pi} \left[1 + \cos^2(\theta)\right]^3 \cos(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$$

$$\int_0^{2\pi} \left[1 + \cos^2(\theta)\right]^4 \mathrm{d}\theta = \frac{867\pi}{64} \qquad \int_0^{2\pi} \left[1 + \cos^2(\theta)\right]^3 \sin(\theta)\mathrm{d}\theta = 0$$





1. Een puntmassa mm beweegt wrijvingsloos langs een massaloze staaf, die kan roteren in het horizontale vlak. De Langrangiaan is L=m2(q˙2+q2α˙2)L=m2(q˙2+q2α˙2), met de afstand van de massa tot de rotatie-as, en αα de rotatiehoek van de staaf.
   1. Stel de Hamiltoniaan op en leid de Hamilton-bewegingsvergelijkingen af. Je hoeft deze niet op te lossen.
   2. Doe hetzelfde voor een Langrangiaan met een extern opgelegde rotatiesnelheid
      α˙=ω(t)
      α˙=ω(t)
      .
   3. Doe nogmaals hetzelfde voor het geval waarin de rotatiesnelheid constant is
      ω(t)=ω0
      ω(t)=ω0
      .
   4. In welke van deze 3 gevallen is de Hamiltoniaan een behouden grootheid?
2. Een puntmassa MM beweegt wrijvingsloos over een sinusoïdale draad tussen x=−L2 en x=L2x=−L2 en x=L2 met als voorschrift
   y=h2(1−cos(2πxL))
   y=h2(1−cos(2πxL))
   . Aan de puntmassa hangt een slinger van lengte ll met onderaan een tweede puntmassa mm.
   1. Hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem? Geef de stabiele evenwichtstoestand.
   2. Stel de Lagrangiaan op.
   3. Expandeer de Lagrangiaan voor kleine uitwijkingen rond het evenwicht en schrijf hem in matrixvorm.
   4. Hoe zou je hieruit de eigenfrequenties halen? Je hoeft dit rekenwerk niet te doen.

3. Alain de aardappel is van de draaimolen gevallen, en hangt met beide armen aan de rand. De draaimolen is een homogene schijf met straal R en massa M. Het lichaam van Alain heeft een homogene dichtheid ρ_A en een omtrek beschreven door $r(\theta)=\frac{L}{4}(1+\cos^2(\theta))$. Zijn armen kan je benaderen door één veer met constante k en rustlengte $\frac{L}{2}$. Alain hangt steeds buiten de molen en loodrecht op de rand van de schijf. Beschouw alles in 2D en verwaarloos zwaartekracht.
    1. Stel de Langrangiaan op en leid de Euler-Lagrange vergelijking(en) af. Je hoeft deze niet op te lossen.
    2. Welke grootheid is behouden en waarom?
    3. Onder welke voorwaarde roteren Alain en de draaimolen aan een constante hoeksnelheid?
    4. Alain verliest zijn houvast wanneer zijn armen worden uitgerekt tot zijn lichaamslengte. Bij welke constante rotatiesnelheid gebeurt dit?

Volgende integralen krijg je cadeau

$$\int_0^{2\pi}[1+\cos^2(\theta)]^2 d\theta=\frac{19\pi}{4}$$

$$\int_0^{2\pi}[1+\cos^2(\theta)]^4 d\theta=\frac{867\pi}{64}$$

$$\int_0^{2\pi}[1+\cos^2(\theta)]^3\cos(\theta) d\theta=0$$

$$\int_0^{2\pi}[1+\cos^2(\theta)]^3\sin(\theta) d\theta=0$$

Academiejaar 2018-2019 1ste zit

Professor Michiel Wouters

Theorie

Groep A

Vraag 1

Leid de Hamiltoniaan af uit de Lagrangiaan d.m.v. een Legendretransformatie. Wat zijn de bewegingsvergelijkingen? Bespreek de actie in het Hamiltoniaans formalisme.

Vraag 2

Wat is het verband tussen de kinetische energie en de rotatiesnelheid van een star lichaam? Leid de kinetische energie af voor een star lichaam dat roteert rond een vaste as.

Vraag 3

Stel de Eulervergelijkingen op. Pas deze toe voor de precessie van een vrije tol.

Groep B

Vraag 1

Leid de Eulervergelijkingen af bij variatierekening.

Vraag 2

Wat is het verband tussen de kinetische energie en de rotatiesnelheid van een star lichaam? Leid de kinetische energie af voor een star lichaam dat roteert rond een vaste as.

Vraag 3

Leid de perkenwet en de baanvergelijking voor het twee-deeltjes probleem af.

Groep C

Vraag 1

Leid behoud van energie en impuls af uit de daarbij horende symmetrieën van de Lagrangiaan.

Vraag 2

Wat is het verband tussen de kinetische energie en de rotatiesnelheid van een star lichaam? Leid de kinetische energie af voor een star lichaam dat roteert rond een vaste as.

Vraag 3

Bespreek botsingen. Leid de formule van Rutherford af voor de botsing van twee geladen deeltjes.

Groep D

Vraag 1

Bespreek beweging in 1 dimensie.

Vraag 2

Wat is het verband tussen de kinetische energie en de rotatiesnelheid van een star lichaam? Leid de kinetische energie af voor een star lichaam dat roteert rond een vaste as.

Vraag 3

Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Oefeningen

1. Beschouw het systeem in figuur 1 (op komst). Een massapunt met massa m beweegt wrijvingsloos langs een draad die de vorm heeft van f(x)=sin(x) (waarbij x=0 overeenkomt met de linkermuur waaraan het touw gespannen is). Aan het massapunt is een staaf opgehangen met lengte L, massa M en een verwaarloosbare dikte. Deze staaf kan vrij slingeren in het vlak van de draad. Het hele systeem ondervindt zwaartekracht. Stel de exacte Lagrangiaan van het systeem op. Bereken de eigenfrequenties van het systeem voor kleine uitwijkingen rond één van de evenwichtspunten. Voor het berekenen van de eigenfrequenties mag je veronderstellen dat m verwaarloosbaar klein is en L gelijk is aan de eenheidslengte (i.e. m=0 en L=1)
2. Een massapunt met massa m1m1 kan vrij bewegen op de wand van een kegel, zoals weergegeven in figuur 2 (op komst). De hoek van de kegelwand met verticale is αα. Massa m1m1 is via een massaloos touw van lengte L verbonden met een ander massapunt met massa m2m2, door een gat in de punt van de kegel. Massa m2m2, die zich binnen in de kegel bevindt, kan enkel op en neer bewegen in de verticale richting. Zoek de Lagrangiaan van dit systeem en stel de Hamiltoniaan op. Schrijf de Euler-Lagrange- en Hamilton-bewegingsvergelijkingen neer.
3. Pingu de pinguïn heeft twee bollen, elk met straal R en massa M. Hij trapt beide bollen om de beurt een helling met hoek αα op. Bal 1 schuift de helling op zonder te rollen en bol 2 rolt zonder te glijden. Als pingu er voor zorgt dat beide bollen dezelfde initiële translatiesnelheid v0v0 bezitten, welke bol zal er dan het verste gaan op de helling? Bereken voor beide bollen een uitdrukking voor de maximale afstand die de bol kan afleggen i.f.v. de gegeven waarden.

Academiejaar 2017-2018 1ste zit

Professor Michiel Wouters

Theorie

Groep A

Vraag 1

Bespreek beweging in één dimensie.

Vraag 2

- Wat is het verband tussen de kinetische energie en de rotatiesnelheid van een star lichaam?
- Leid de stelling van Steiner af.
- Verifieer dit voor een homogene staaf.

Vraag 3

Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Groep C

Vraag 1

Bespreek de Lagrangiaan in een niet-inertiaal assenstelsel.

Vraag 2

Werk de algemene oplossing voor het tweedeeltjesprobleem uit.

Vraag 3

Leg Hamiltoniaanse mechanica uit.

Groep D

Vraag 1

- Wat is het verband tussen de kinetische energie en de rotatiesnelheid van een star lichaam?
- Leid de stelling van Steiner af.
- Verifieer dit voor een homogene staaf.

Vraag 2

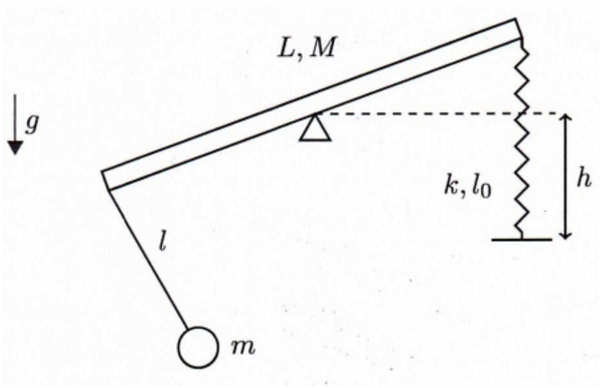
Bespreek botsingen in de klassieke mechanica.

Vraag 3

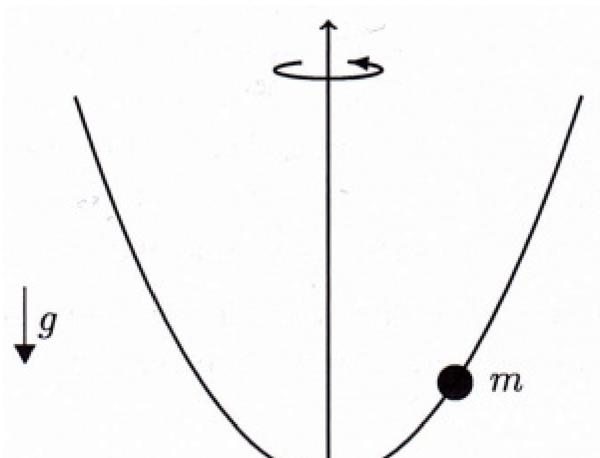
Leid de baanvergelijking af voor het Keplerprobleem (het tweedeeltjesprobleem met een 1r1r-interactie).

Oefeningen

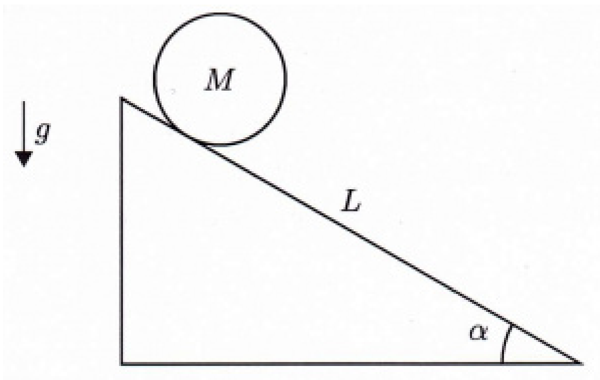
1. Beschouw het systeem in de volgende figuur. Een homogene staaf met massa MM, lengte LL en een verwaarloosbare dikte kan vrij roteren rond zijn middelpunt. Het middelpunt zelf staat vast en kan niet bewegen. Aan de linkerzijde van de staaf is een slinger bevestigd, bestaande uit een massaloze staaf van lengte ll en een massa mm. De rechterzijde van de staaf is via een veer met veerconstante kk en evenwichtslengte l0l0 verbonden met een vast punt. De verticale afstand van dit punt tot het middelpunt van de staaf is gegeven door hh. Het hele systeem ondervindt zwaartekracht. Stel de Lagrangiaan van dit systeem op in het geval dat je **alleen verticale uitrekking van de veer in beschouwing moet nemen**. Toon aan dat, indien de veerconstante kk gegeven wordt door k=mgh−l0k=mgh−l0, het systeem in evenwicht is wanneer de staaf horizontaal staat en de slinger verticaal naar beneden hangt. Gebruik deze waarde van de veerconstante om de eigenfrequenties van het systeem te bepalen voor **kleine uitwijkingen** rond dit evenwicht.



2. Een massapunt met een massa mm kan in het zwaarteveld wrijvingsloos glijden langs een massaloze draad die de vorm heeft van een parabool met voorschrift f(s)=Cs2f(s)=Cs2 (met CC een constante), zoals weergegeven in onderstaande figuur. De parabool kan bovendien vrij roteren omheen een verticale as doorheen zijn oorsprong. Zoek de Lagrangiaan van dit systeem en stel de Hamiltoniaan op. Schrijf de Euler-Lagrange- en Hamilton-bewegingsvergelijkingen neer.



3. Pingu de pinguïn heeft twee muntstukken, elk met een straal RR en een verwaarlossbare dikte. Hij moet uitzoeken welk van beide muntstukken vervalst is. De muntstukken hebben dezelfde massa MM, maar terwijl het echte muntstuk een constante massadichtheid ρ0ρ0 heeft, neemt de massadichtheid van het valse muntstuk lineair af in de radiële richting vanuit het middelpunt volgens ρ(r)=ρ0(1−rR)ρ(r)=ρ0(1−rR). Om de muntstukken te testen, laat Pingu ze (zonder beginsnelheid) van een helling met lengte LL en hoek αα naar beneden rollen (zie figuur). Welk van beide muntstukken zal het snelst beneden zijn? Vind een uitdrukking voor de tijd die elk muntstuk nodig heeft om van bovenaan de helling naar beneden te rollen in functie van de gegeven waarden.



Academiejaar 2015-2016 1^{ste} zit

Theorie

Groep A

Vraag 3

Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Groep B

Vraag 1

Geef het verband tussen het impulsmoment en de snelheid van een star lichaam.

Vraag 2 Bespreek mechanische gelijkheid. Vraag 3

Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Groep C

Vraag 1

Leid het verband tussen kinetische energie en rotatiesnelheid van een star lichaam af.

Vraag 2

Bespreek botsingen.

Vraag 3

Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Groep D

Vraag 1

Leid de bewegingsvergelijking van de gyroscoop af.

Vraag 2

Leid de baanvergelijking af bij de Rutherfordverstrooiing (het twee deeltjesprobleem voor een 1r1r-potentiaal).

Vraag 3

Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Academiejaar 2014-2015 1ste zit

Professor Michiel Wouters

Theorie

Groep A

Vraag 1

Leid de uitdrukking voor het impulsmoment van een star lichaam af in termen van de traagheidstensor.

Vraag 2

Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Vraag 3

Bespreek beweging in één dimensie

Groep B

Vraag 1

Leid het behoud van Impulsmoment af uit een symmetrie van de Lagrangiaan.

Vraag 2

Leid de hamiltoniaanse dynamica af uit de Lagrangiaanse en het principe van minste actie voor de hamiltoniaan.

Vraag 3

Leid de bewegingsvergelijkingen voor een star lichaam af en bereken de precessie van een vrije tol.

Groep C

Vraag 1

- Stel de uitdrukking op voor de kinetische energie van een star lichaam rond een as.
- Bewijs het theorema van Steiner.

Vraag 2

Leid het behoud van impuls af en bespreek het massacentrum.

Vraag 3

Leid de baanvergelijking af bij de Rutherfordverstrooiing (het twee deeltjesprobleem voor een 1r1r-potentiaal).

Groep D

Vraag 1

Leid het behoud van impulsmoment af uit de isotropie van de ruimte.

Vraag 2

Leid de hamiltoniaanse dynamica af uit de Lagrangiaanse en het principe van minste actie voor de hamiltoniaan.

Vraag 3

Leid de precessie van de slinger van Foucault af.

Oefeningen

1. Beschouw het systeem in fig. 1. Het lichaam van een kunstschaatser kan voorgesteld worden door een massieve cilinder met straal R en homogene dichtheid en massa M. De handen en armen worden voorgesteld door twee oneindig dunne staven, elk met lengte L en massa m. De schaatser maakte nu een pirouette met constante hoeksnelheid rond aangegeven as, met de armen uitgestrekt. Dan trekt ze haar armen in, waarbij de nieuwe configuratie kan worden voorgesteld alsof de armen een oneindig dunne cirkel vormen met straal 2R. De totale massa van de armen blijft uiteraard hetzelfde. Zoek de verhouding van de hoeksnelheid in de nieuwe positie tov de begin positie. Gegeven is m/M=1/4 en L/R = 10.

2. Een blok met massa M kan wrijvingsloos bewegen op een horizontale rechte. Een homogene schijf met massa m bevindt zich op de schuine zijde van deze blok en kan hierover wrijvingsloos rollen zonder te slippen, zie figuur 2. Neem aan dat de schijf zich ten alle tijden op de schuine zijde bevindt. Er is ook zwaartekracht. Bereken de versnelling van beide blokken door gebruik te maken van de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen. Druk het resulataat uit in functie van m/M. Check je resultaat voor m/M = 0. Is er een behouden grootheid? Zo ja, dewelke?
3. Drie homogene identieke staven AB, BC en CD, elk met lengte a en massa m, zijn aan elkar gekoppeld dmv scharnieren en aan een horizontale balk, die zelf niet kan bewegen. Vanaf het midden van staaf BC hangt een mathematische slinger met lengte a en massa 2m. Zoek de enigenfrequenties van dit systeem voor kleine uitwijkingen rond het evenwicht.

Figuur: komt nog

Academiejaar 2013-2014 2de zit

Professor Michiel Wouters

Theorie

Vraag 1

Leid het behoud van impulsmoment af uit de isotropie van de ruimte.

Vraag 2

Bespreek beweging in één dimensie.

Vraag 3

Beschrijf de beweging van een gyroscoop.

Academiejaar 2013-2014 1ste zit

Professor Michiel Wouters

Theorie

Groep A

Vraag 1

Bespreek de beweging van een deeltje in één dimensie.

Vraag 2

Geef de kinetische energie van een star lichaam.

Vraag 3

Bespreek mechanische gelijkvormigheid en pas dit toe op het keplerprobleem.

Groep B

Vraag 1

Leid het behoud van impulsmoment af.

Vraag 2

Leid de ELBV af.

Vraag 3

Leid het Hamiltoniaanse formalisme van de mechanica af uit het Lagrangiaanse formalisme.

Groep C

Vraag 1

Leid de perkenwet en de effectieve potentiaal af voor het tweedeeltjesprobleem.

Vraag 2

- Stel de Lagrangiaan op in een niet-inertiaal assenstelsel.
- Wat is de betekenis van de verschillende termen?

Vraag 3

Leid het behoud van impuls af uit de symmetrie van de Lagrangiaan. Bespreek ook het massacentrum.

Groep D

Vraag 1

Leid de ELBV af.

Vraag 2

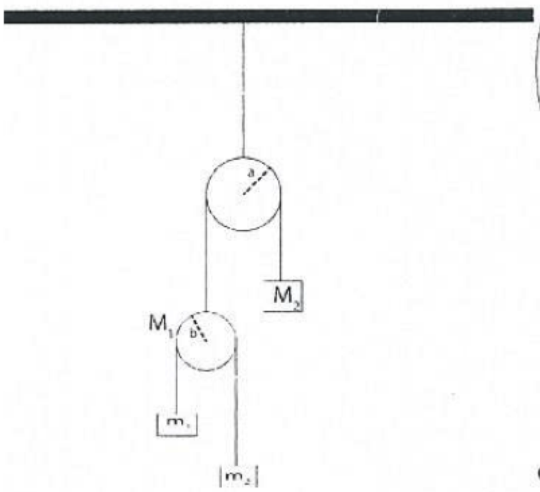
Leid de Eulervergelijkingen voor starre lichamen af.

Vraag 3

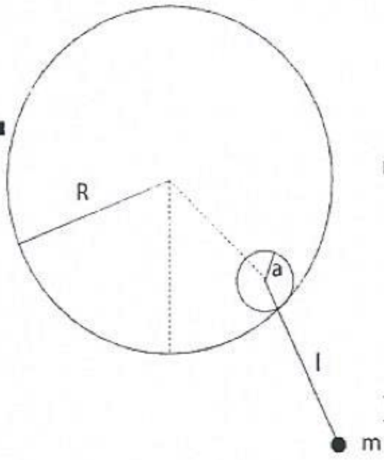
Bespreek de beweging in één dimensie.

Oefeningen

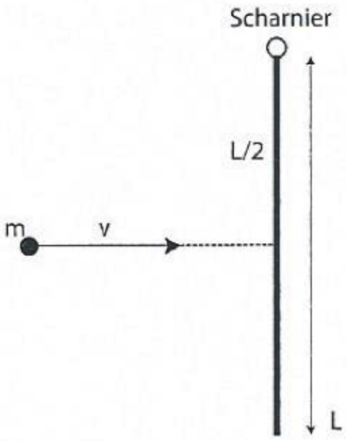
1. Gegeven het systeem in fig.I. Een katrol hangt aan een vast ophangingspunt aan het plafond. Over deze katrol kunnen een massa M2M2 en een tweede katrol met massa M1M1 glijden, beide verbonden door een touw met vaste lengte. De glijbeweging gebeurt enkel in de verticale richting. Aan de tweede katrol, moet met massa M1M1, hangen opnieuw twee massa's m(1,2)m(1,2) die opnieuw via een touw met vaste lengte met elkaar verbonden zijn en kunnen glijden over de katrol waaraan ze opgehangen zijn. Het gehele systeem bevindt zich in het zwaarteveld.
    - Negeer de rotatiebeweging van de katrollen en veronderstel dat de touwen wrijvingsloos over de katrollen glijden. Schrijf de Lagrangiaan van het systeem op en zoek via de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking de versnelling van de massa's
    - Wat als de katrollen wel konden roteren? Beschouw daarvoor de bovenste katrol met straal aa, en de onderste katrol met straal bb. Beide hebben een uniforme massadichtheid ρ0ρ0. Veronderstel dat de touwen enkel kunnen rollen over de katrollen en dus niet langer glijden. Hoe ziet de Lagrangiaan er nu uit? Bereken opnieuw de versnelling van de massa's.
2. Beschouw het systeem in fig.II. Een cilinder met straal aa en massa MM kan rollen binnenin een grotere cilinder met straal RR. Aan het middelpunt van de rollende cilinder hangt een massaloze staaf met lengte ll met daaraan een muntmassa mm. Het hele systeem ondervindt zwaartekracht. Zoek de Lagrangiaan en bereken de eigentrilling rond evenwicht (dit laatste mag je doen in de limiet M>>m,R>>aM>>m,R>>a)
3. Beschouw een deur met breedte LL en een massa MM. Een kogel met massa mm en snelheid vv wordt loodrecht en perfect in het midden van de deur afgevuurd waardoor de deur begint te roteren rond het scharnier (fig.III). Wat is de rotatiesnelheid na impact van de kogel? Veronderstel dat de kogel zich in de deur boor (er is dus geen terugstoot of de kogel vliegt er niet door). Gegeven zijn L=1m,v=400m/s,M/m=600L=1m,v=400m/s,M/m=600



Dubbele Atwood Machine.



Een rollende cilinder met daaraan opgehangen een slinger met lengte l.



Een kogel met massa m en snelheid v slaagt loodrecht in op een deur met massa M die kan scharnieren.

Academiejaar 2012-2013 2^e zit

Theorie

1. Probleem van Bernouilli
2. Mechanische similariteit + 2 voorbeelden
3. Vrije trillingen rond stabiel evenwicht

Oefeningen

1. Een vlakke mathematische slinger met massa m2m2 is opgehangen in het zwaartekrachtveld aan een massapunt, met massa m1m1, dat vrij kan bewegen langs een horizontale rechte, en dat verbonden is met een vast punt op die rechte door een veer (zie figuur)
   <insert image>
   1. Stel de lagrangiaan op. Gebruik daarna de harmonische benadering om deze Lagrangiaan te vereenvoudigen.
   2. Bereken de eigenfrequenties van het systeem.
2. Beschouw een halve cilinder met straal R en hoogte h. De dichtheid is inhomogeen en neemt lineair af als functie van de afstand tot de oorsprong, van dichtheid αα op r=0 tot 0 op r=R
   1. Bereken de totale massa.
   2. Bereken het massamiddelpunt.
   3. Bereken de traagheidstensor tov. het massamiddelpunt.

3. Een massa M hangt in het gravitatieveld via een touw over een verwaarloosbaar kleine en massaloze katrol aan een massa m. Initieel wordt de massa m horizontaal gehouden, en hangt de massa M in rust naar beneden. Veronderstel dat de massa M enkel verticaal kan bewegen, en dat de massa m kan bewegen in het vlak (zie figuur).
    <insert image>
    1. Bepaal de kinetische en potentiële energie van het systeem in termen van de coördinaten r en θθ
    2. Bepaal de Lagrangiaan en de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen. Je hoeft deze niet op te lossen, dus enkel het stelsel differentiaalvergelijkingen is voldoende.

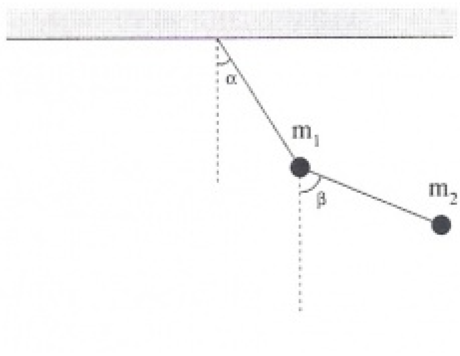
Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

1. Groep A
    1. Variatierekening: Leid de Eulervergelijking af vanuit een variatiebeginsel.
    2. Draaimoment van een star lichaam.
        1. Bijvraag: traagheidsellipsoïde
    3. Bereken dσdΩdσdΩ als functie van s en pas toe op Rutherfordverstrooiing.
2. Groep B
    1. Leidt uit de isotropie van de ruimte een behoudswet af.
    2. Traagheidsellipsoide
    3. Gyroscopisch effect + toepassing op de boemerang.

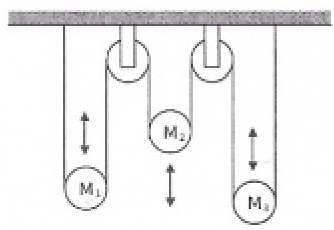
Oefeningen

1. (4 ptn.) Een dubbele slinger in het vlak hangt in het zwaartekrachtveld. De lengte van elke slinger is l, maar de massa's verschillen (m_1 resp. m_2).



    1. (2 ptn.) Stel de Langragiaan op. Beschouw enkel kleine uitwijkingen.
    2. (2 ptn.) Bereken de eigenfrequenties van het systeem

2. (4 pnt.) Beschouw een holle cilinder met binnenstraal R_1, buitenstraal R_2 en hoogte h. De dichtheid is inhomogeen en neemt lineair toe als functie van de hoogte. van 0 op hoogte nul tot λλ op hoogte h.
    1. (1 pt.) Bereken de totale massa.
    2. (1 pt.) Bereken het massamiddelpunt.
    3. (1,5 pt.) Bereken de traagheidstensor tov. het massamiddelpunt.
    4. (0,5 pt.) Bereken het traagheidsmoment rond de symmetrie-as.
3. (2 ptn.) Drie katrollen met massa M_1, M_2 en M_3 zijn via een touw verbonden over twee vaste katrollen, en onderhevig aan de zwaartekracht. De uiteinden van het touw hangen vast (zie tekening). Veronderstel dat de drie katrollen enkel vertikaal kunnen bewegen, en dat ze perfect glad zijn voor het touw en dus niet roteren, maar schuiven (je hoeft dus geen rekening te houden met rotatie-bewegingen). Bereken de versnellingen van de massa's.



Figuur 1: Het katrollen-systeem.

Academiejaar 2011-2012 2^de^ zit

Theorie

1. Leidt de ELBV af
2. Bewijs de behoudswetten uit de Newton-veronderstellingen. Bewijs deze ook
3. Rutherford: phi0=-2es/alpha
   Effectieve doorsnede

   Experiment van rutherford

Praktijk

1. Een massa (m_1) is bevestigd aan een veer die enkel verticaal kan bewegen. Aan die m1 hang een slinger met lengte l_0. Hieraan is een 2de massa aan bevestigd.
    - Stel de langrangiaan op (eerst exact tot 2de orde, daarna paraxiale benaderingen)
    - zoek de eigenfrequenties van het systeem
2. Een homogene piramide heeft hoogte h, en een vierkant met zijdelengte 2K als bodem. Bereken de massa en het traagheidsmoment rond I_Z (deze staat loodrecht op het grondoppervlak)

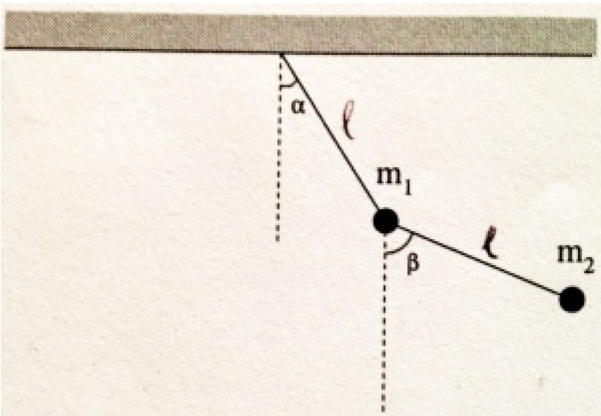
3. Een massa m is bevestigd aan een veer. Deze kan enkel bewegen in het verticale vlak. Bereken de langrangiaan, en geef de differentiaalvergelijkingen. Je hoeft deze niet op te lossen. (let op: verticaal vlak betekent gewoon dat je in 2D mag werken, niet dat het enkel op en neer beweegt)

Academiejaar 2011-2012 1^ste^ zit

Theorie

1. Groep A:
    1. Stel de Lagrangiaan op voor een star lichaam.
    2. Los het twee deeltjes probleem op.
    3. Los het probleem van Bernouilli op.
2. Groep B:
    1. Bewijs de behoudswetten voor een afgesloten stelsel uitgaande van de Newtonsymmetrieën
    2. Bewijs de dunne lens formule
    3. Rutherford verstrooiing
3. Groep C:
    1. Stel de Langrangiaan op voor een vrij massapunt en toon aan dat die voldoet aan de Newton symmetrieen en aan het relativiteitsbeginsel van Galilei
    2. Mechanische similariteit + 2 voorbeelden
    3. Vrije trillingen rond een stabiel evenwicht

Praktijk

1. (4 ptn.) Een dubbele slinger in het vlak hangt in het zwaartekrachtsveld. De lengte van elke slinger is *l*, maar de massa's verschillen (m_1 resp. m_2).
    - 

    - Stel de exacte lagrangiaan op. Gebruik de harmonische benadering (sin(*x*) ≈≈, cos(*x*) ≈1−12x2≈1−12x2) om deze lagrangiaan te vereenvoudigen (beperk jezelf tot termen van 2e orde).
    - Bereken de eigenfrequenties van het systeem ahv. de vereenvoudigde lagrangiaan.

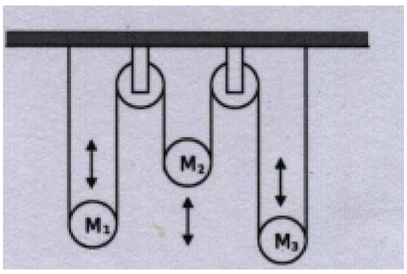
2. (4 ptn.) Beschouw een inhomogene cylinder met straal R en hoogte h. De dichtheid langs de centrale as is gegeven door $\rho(r=0)=\alpha\rho(r=0)=\alpha$ en neemt lineair af tot $\rho(r=R)=0\rho(r=R)=0$.
    - Bereken de totale massa
    - Bereken de traagheidstensor tov. het massamiddelpunt van de cylinder.
3. Een massa M hangt in het gravitatieveld via een touw over een verwaarloosbaar kleinde en massaloze katrol aan een massa m. Initieel wordt de massa m horizontaal gehouden, en hangt de massa M in rust naar beneden. Veronderstel dat de massa M enkel verticaal kan bewegen, en dat de massa m kan bewegen in het vlak (zie figuur).
    - Fout bij het aanmaken van de miniatuurafbeelding: Bestand is zoek

    - Bepaal de kinetische en potentiële energie van het systeem in termen van de coördinaten r en $\theta\theta$.
    - Bepaal de Lagrangiaan en de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen. Je hoeft deze niet op te lossen, dus enkel het stelsel differentiaalvergelijkingen is voldoende.

Academiejaar 2010-2011 2^de^ zit

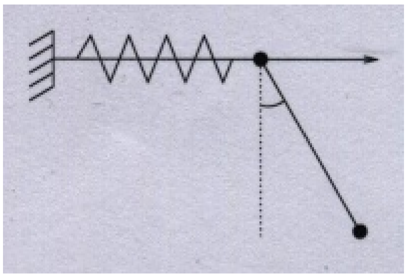
Praktijk

1. Drie katrollen met massa's $M1,M2,M3M_1,M_2,M_3$ zijn via een touw verbonden over twee vaste katrollen, en onderhevig aan de zwaartekracht. De uiteinden van het touw hangen vast (zie tekening). Veronderstel dat de drie katrollen enkel vertikaal kunnen bewegen, en dat ze perfect glad zijn voor het touw en dus niet roteren, maar schuiven (je hoeft dus geen rekening te houden met de rotatie-bewegingen).



    1. Hoeveel vrijheidsgraden zijn er in het systeem?
    2. Stel de Lagrangiaan op.
    3. Gebruik de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen om de versnelling van $M1M_1$ te bepalen
2. Beschouw een inhomogene cylinder met straal R en hoogte h. De dichtheid is gegeven door $\rho(z=0)=\alpha\rho(z=0)=\alpha$ (ondervlak) en neemt lineair af tot $\rho(z=h)=0\rho(z=h)=0$ (bovenvlak).
    1. Bereken de totale massa, het locatie van het massa middelpunt, en de traagheidstensor t.o.v. het massa-middelpunt
    2. Bereken het traagheidsmoment rond de z-as.

3. Een vlakke mathematische slinger met massa m1m1 is opgehangen in het zwaartekrachtsveld aan een massapunt, met massa m2m2, dat vrij kan bewegen langs een horizontale rechte, en dat verbonden is met een vast punt op die rechte door een veer (zie figuur).



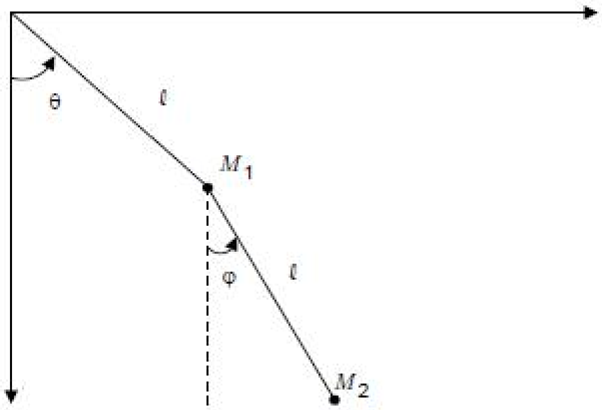
    1. Stel de exacte Lagrangiaan op. Gebruik daarna de harmonische benadering sin(x)≈x,cos(x)≈1−12x2sin(x)≈x,cos(x)≈1−12x2 om deze Lagrangiaan te vereenvoudigen (beperk jezelf tot termen van 2de orde).
    2. Bereken de eigenfrequenties van het systeem.

Academiejaar 2010-2011 1^ste^ zit

Theorie

1. Groep A
    1. Leidt de Hamiltonvergelijkingen af.
    2. Draaimoment van een star lichaam.
       Bijvraag: traagheids ellipsoide en bewijs v'+w x r'
    3. Trilling rond een stabiel evenwicht.
2. Groep B
    1. Behoudswetten + newtonsymmetrieën.
    2. Mechanische similariteit.
    3. Gyroscopisch effect met voorbeelden.
3. Groep C
    1. Variatierekening: los het probleem van bernouilli op.
    2. Stel de lagrangiaan van het vrije massapunt op en ga na of dit voldoet aan de basishypothesen (Newton en Galilei)
    3. Stel de lagrangiaan van het starre lichaam op
       Bijvraag: traagheids ellipsoide en bewijs v'+w x r'
4. Groep D
    1. Variatierekening: stel de vergelijkingen van euler op.
    2. Traagheidsellipsoide.
    3. Rutherfordverstrooiing.
5. Extra examen
    1. Traagheidsellipsoide
    2. Hoofdwetten (behoudswetten) afleiden uit symmetrieën van Newton
    3. Hamiltonvergelijking

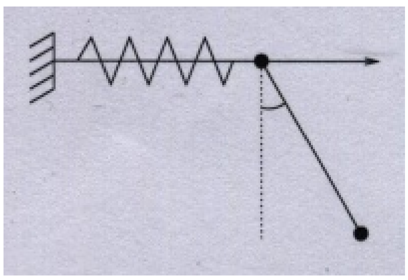
Praktijk

1. Een dubbele slinger in het vlak hangt in het zwaartekrachtsveld. De lengte van elke slinger is ll, maar de massa's verschillen(M1M1 resp. M2M2)
    - 

    - Stel de Langrangiaan op. Gebruik de harmonische benadering (sin(x) ≈x≈x, cos(x)≈1−12x2≈1−12x2) om deze Lagrangiaan te vereenvoudigen (beperk jezelf tot termen van 2e orde).
    - Bereken de eigenfrequenties van het systeem.
2. Beschouw een inhomogene cylinder met straal RR en hoogte hh. De dichtheid langs de centrale as is gegeven door ρ(r=0)=αρ(r=0)=α en neemt lineair af tot ρ(r=R)=0ρ(r=R)=0
    - Bereken de totale massa en de traagheidstensor t.o.v. het massamiddelpunt van de cylinder.
    - Bereken het traagheidsmoment rond de zz-as.
3. Een deeltje is gebonden op een vlak met vergelijking ax+by+cz+d=0ax+by+cz+d=0, en is onderhevig aan de zwaartekracht.
    - Bereken de versnelling van het deeltje.
    - Bepaal de reactiekrachten die inwerken op het deeltje vanwege de binding.

Juni 2010

1. Een vlakke mathematische slinger is opgehangen in het zwaarteveld aan een massapunt dat vrij kan bewegen langs een horizontale rechte, en dat verbonden is met een vast punt op die rechte door een veer.



    1. Stel de Lagrangiaan op. Gebruik de harmonische benadering (sin(x)≈x,cos(x)≈1−12x2)(sin(x)≈x,cos(x)≈1−12x2) om deze Lagrangiaan te vereenvoudigen (beperk jezelf tot termen van 2de orde).
    2. Bereken de eigenfrequenties van het systeem.

2. Beschouw een inhomogene cilinder met straal RR en hoogte hh. De dichtheid langs de centrale as is gegeven door ρ(r=0)=αρ(r=0)=α en neemt lineair af tot ρ(r=R)=0.ρ(r=R)=0.
    1. Bereken de totale massa en de traagheidstensor tov het massamiddelpunt van de cilinder.
    2. Bereken het traagheidsmoment rond de z-as.
3. Een deeltje is gebonden op een vlak met vergelijking ax+by+cz+d=0ax+by+cz+d=0, en is onderhevig aan de zwaartekracht.
    1. Bereken de versnelling van het deeltje.
    2. Bepaal de reactiekrachten die inwerken op het deeltje vanwege de binding.

Juni 2009

Theorie

Groep 1

1. Beschrijf het twee-deeltjesprobleem. (Tot de formules voor r(t)r(t) en φφ(t))
2. Het draaimoment van een star lichaam (i.e. traagheidstensor)
3. Tangentiële en normale component van de versnelling en de snelheid

Groep 2

1. Behoudswetten die volgen uit de homogeniteit en de isotropie van de ruimte.
2. Bespreek de Rutherfordverstrooiing.
3. Variatierekening: Leid de Eulervergelijkingen af.

Groep 3

1. Traagheidsellipsoïde.
2. Leid de theorie van botsingen af (alles tot voor Rutherford).
3. Geef de afleiding van de Lagrangiaan onder de hypothesen van de mechanica. (Bij het laatste deel vroeg kreeg je als bijvraag: Hoe werd het Relativiteitsbeginsel reeds bij de Variatierekening behandeld?)

Praktijk

1. Een vlakke mathematische slinger is opgehangen in het zwaarteveld aan een massapunt dat vrij kan bewegen langs een horizontale rechte en dat verbonden is met een vast punt op die rechte door een veer.
    - Stel de Lagrangiaan op.
    - Los de bewegingsvergelijkingen op.
2. Beschouw een inhomogene cylinder met straal R en hoogte h. De dichtheid langs de centrale as is gegeven door ρ(r=R)=αρ(r=R)=α en neemt lineair af tot ρ(r=R)=0ρ(r=R)=0.
    - Bereken de totale massa en de traagheidstensor van de cylinder.
    - Bereken het traagheidsmoment rond de zz-as.

3. Een αα-deeltje met massa mm en lading +2ee beweegt in het krachtveld van een zware nucleus met lading +Zee. Op grote afstand van de nucleus heeft het een snelheid vv. Als het deeltje niet zou afwijken, zou het passeren op een afstand bb van de nucleus. Wat is de kleinste afstand dat het deeltje de nucleus nadert? Tip: De uitdrukking voor de Coulomb-potentiaal is
U(r)=q1q24πϵ0r

U(r)=q1q24πϵ0r

Juni 2008

Theorie

Groep 1

1. Beschrijf het twee-deeltjesprobleem. (Tot de formules voor r(t)r(t) en φφ(t))
2. Traagheidsellipsoïde.
3.

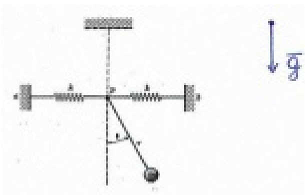
Homogeniteit van ruimte	→→	Behoudswet
Isotropie van ruimte	→→	Behoudswet

Groep 2

1. Variatierekening: Leid de ELBV af.
2. Bespreek de Rutherfordverstrooiing.

Praktijk

1. Beschouw het systeem bestaande uit twee ideale veren en slinger in het zwaarteveld. De veren zijn aan elkaar en de ene aan punt a, de andere aan punt b, horizontaal. De slinger hangt aan de veren in het punt waar de twee aan elkaar hangen en aan de slinger hangt een massa. De afstand [a,b] is twee maal de evenwichtstoestand van de veren. Onderstel beweging in een vlak, niet op en neer.



   - hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem?
   - Stel de ELBV op (niet oplossen)
   - Hoe kan je de wrijving mee laten werken?

2. Beschouw de beweging van een massapunt aan de binnenzijde van een boloppervlak in het zwaarteveld
    - geef de bewegeingsvergelijking
    - maak een schets van de reactiekrachten, gebruik de algemene vergelijking
    - Stel dat hij enkel in de onderste helft van de bol kan bewegen, wat is dan de oplossing?
    - Hetzelfde voor wanneer hij enkel op constante hoogte kan bewegen.
    - Of voor wanneer hij in een constant verticaal vlak kan bewegen.

Juni 2007

Theorie

1. Variatierekening: Leid de Eulervergelijkingen af.
2. Bereken de Lagrangiaan van het starre lichaam.
3. Tweedeeltjes-probleem: Lagrangiaan, perkenwet, leidt $x(t)$ en $\varphi(t)$ af.

Praktijk

1. Beschouw een slinger met als verbinding tussen het vaste punt en de massa een veer met constante k (in plaats van een touwtje of een staaf):
    1. Hoeveel vrijheidsgraden heeft dit systeem ?
    2. Stel de ELBV op (deze oplossen is niet nodig!)
2. Beschouw een homogene pyramide met een vierkant met zijde a als grondvlak. Bereken hiervan:
    1. de massa
    2. het massamiddelpunt
    3. de traagheidstensor t.o.v. de top
    4. de traagheidstensor t.o.v. het massamiddelpunt
3. Beschouw een massapunt dat alleen plaatsen kan innemen op het oppervlak van een gegeven paraboloï de met cylinderco{ö}rdinaten $z=a.\rho^2$. Stel hiervan de bewegingsvergelijkingen op en bewijs dat een cirkelbeweging een mogelijke oplossing hiervan is.

Juni 2006

Groep 1

1. Leid de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen af vanuit het variatiebeginsel.
2. Stel de Lagrangiaan op voor een star lichaam.
3. Beschrijf het twee-deeltjesprobleem. (Tot de formules voor $r(t)$ en $\varphi(t)$)

Groep 2

1. Lagrangiaan van een star lichaam

2.

Homogeniteit van ruimte	→→	Behoudswet
Isotropie van ruimte	→→	Behoudswet

3. Twee-deeltjesprobleem tot en met perkenwet $(r(t),\varphi(t))(r(t),\varphi(t))$

Praktijk

1. Beschouw een vlak onder een helling $\alpha\alpha$ met de horizontaal (in het zwaarteveld). Hierop ligt een blok met massa MM die verbonden is d.m.v. een ideale veer en katrol met een identiek blok. Het 2e blok kan alleen verticaal bewegen.
   1. Stel de Lagragiaan op
   2. Stel de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen op en los op. Kies zelf een eenvoudig stel beginvoorwaarden.
   3. Beschrijven de blokken een zuiver harmonische oscillatie?
   4. Hoe kan je wrijving in dit systeem beschrijven? Je hoeft geen vergelijkingen uit te werken of op te lossen.

   Tip: Kies de veralgemeende co"ordinaten zo dat de bewegingsvergelijkingen niet gekoppeld zijn.
2. Beschouw de beweging van een massapunt m gebonden aan een helix in het zwaarteveld van de aarde. De helix is gegeven in cilinderco"ordinaten door de vergelijking
   $\vec{r} = \rho_0 e_\rho \to + a\varphi e_z \to$

   $$r\to = \rho_0 e_\rho \to + a\varphi e_z \to$$

   De zwaartekracht is gericht langs de zz-as; aa en $\rho_0\rho_0$ zijn constanten. Op $t=0t=0$ bevindt het deeltje zich op een hoogte hh en heeft beginsnelheid 00.
   1. Stel de bewegingsvergelijkingen op en los op voor de gegeven beginvoorwaarden.
   2. Vind een algemene uitdrukking voor de reactiekracht.
   3. Maak een schets van de reactiekracht op een bepaald punt van de helix.

September 2005

1. Stel de Lagrangiaan op voor het vrije massapunt. Controleer of dit voldoet aan de Newton-symmetrieën en het traagheidsbeginsel.
2. Geef het verband tussen $\vec{L}$ $L\to$ en $\vec{\omega}$ $\omega\to$ voor het starre lichaam.
3. Leid hfst 8 af tot en met de behoudswetten.

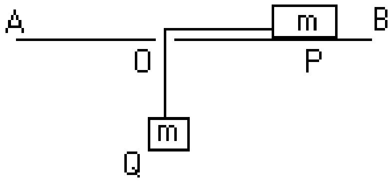
Juni 2005

Theorie

1. Traagheidsellipsoïde.
2. Stel de bewegingsvergelijkingen op voor een stelsel met bindingen, vertrekkend van het beginsel van minste actie. (Multiplicatoren van Lagrange)
3. Rutherford-verstrooiing.*geg.:* $\varphi_0 = -2Es\alpha\varphi_0 = -2Es\alpha$

Praktijk

1. In figuur stelt ABAB een wrijvingsloos horizontaal oppervlak voor met kleine opening in OO. Een touw met lengte ll verbindt doorheen dit gaatje de massa’s PP en QQ. De massa mm in PP krijgt een snelheid v0v0 loodrecht op OPOP in het vlak. De initiële lengte van OPOP bedraagt aa.

    1. Kies een gepast coördinatenstelsel en geef de Langrangiaan van het systeem.
    2. Geef de bewegingsvergelijkingen.
    3. Bespreek het geval waarbij aa en/of v0v0 heel klein zijn.
    4. Toon aan dat voor v0=ag−−√v0=ag het deeltje PP een eenparige cirkelvormige beweging uitvoert.
    5. Veronderstel nu massa’s m1m1 en m2m2 in resp. P en Q. Geef opnieuw de Lagrangiaan en de bewegingsvergelijkingen en interpreteer in functie van m1m1 en m2m2. Kan je dit systeem gebruiken voor een experiment dat het bestaan van de centripetale kracht aantoont?
2. Beschouw een platte schijf met straal a en dikte ϵϵ. Aangezien ϵa≪1ϵa≪1 verwaarlozen we de dikte en werken 2 dimensionaal. De massadichtheid ρ(r,ϕ)ρ(r,ϕ) in de schijf is ρ(r,ϕ)=2r|sinϕ|ρ(r,ϕ)=2r|sinϕ|.
    1. Bereken de totale massa van de schijf.
    2. Bereken het massamiddelpunt.
    3. Bereken het traagheidsmoment t.o.v. het massamiddelpunt van de schijf.
3. Een massapunt bevindt zich op een heliocoïdale baan in het zwaarteveld (zie figuur . De afstand ΔΔ tussen 2 opeenvolgende windingen is constant.

4. Geef de Lagrangiaan en de bindingsvoorwaarde(n) voor dit systeem in geschikte veralgemeende coördinaten.
5. Stel de bewegingsvergelijkingen op en bereken de reactiekracht. Zoek de ’effectieve’ valversnelling.
6. Bepaal de bewegingsvergelijkingen en de reactiekracht in de limieten waarbij respectievelijk $\rho \ll \Delta\rho \ll \Delta$ en $\Delta \ll \rho\Delta \ll \rho$. Los de bewegingsvergelijkingen op en bespreek.

Categorieën:

- Fysica
- 1BFYS