Maattheorie - Encyclopedia Academia

Maattheorie

Calculus	
Richting	Wiskunde
Jaar	3BWIS2BWIS

Bespreking

De theorie wordt gegeven door prof. Berckmoes. Het is een prof. die goed zijn best doet om alles goed uit te leggen op een altijd enthousiaste manier. De oefeningen worden gegeven door assistent Wouter Van Den Haute. Het examen bestaat uit 1 deel oefeningen en 1 deel theorie die beiden voor de helft van de punten meetellen. De theorie is schriftelijk met mondelinge toelichting. De oefeningen zijn openboek. Ook alles wat bewezen of gebruikt is in de oefeningen krijg je op het examen (denk bv aan het lemma van Scheffé).

Examenvragen

Theorie

Januari 2022

1.
    1. Geef de definitie van een σ-algebra.
    2. Geef de definitie van een Dynkin-systeem.
    3. Bewijs dat een σ-algebra een Dynkin-systeem is.
    4. Bewijs dat een Dynkin-systeem dat stabiel is voor het nemen van eindige intersecties een σ-algebra is.
2. Bewijs dat $f\in\mathcal{M}(\Omega,\mathcal{A})$ als en slechts als er een rij $(f_n)_n\subseteq\mathcal{E}(\Omega,\mathcal{A})$ bestaat met $\lim_{n\to\infty}f_n=f$.
3. Bewijs de eerste stelling van *Beppo-Levi*.
4. Bewijs de stelling van *Egoroff*.

De verwoordingen van de stellingen met naam waren uiteraard gegeven.

Augustus 2021

1.
    1. Wat is een sigma-algebra?
    2. Wat is een Dynkin-systeem?
    3. Zij C een Dynkin-systeem dat stabiel is onder het nemen van eindige doorsnedes. Toon aan dat C een sigma-algebra is.
2. Bewijs: Zij $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ een willekeurige maatruimte. De klasse $\mathcal{A}_\mu:=\{A\cup N: A\in\mathcal{A} \text{ en } N\in\mathcal{N}_\mu\}$ is een σσ-algebra, die gelijk is aan de σσ-algebra $\sigma(\mathcal{A}\cup\mathcal{N}_\mu)$.
3. Bewijs: Beschouw een maatruimte $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Als $\{f_n:n\in\mathbb{N}_0\}$ en $\{g_n:n\in\mathbb{N}_0\}$ twee stijgende rijen in $\mathcal{E}^+(\Omega,\mathcal{A})$ zijn met $\lim_{n\to\infty}\uparrow f_n\le\lim_{n\to\infty}\uparrow g_n$ dan is ook $\lim_{n\to\infty}\uparrow\int f_n d\mu\le\lim_{n\to\infty}\uparrow\int g_n d\mu$.
4. Bewijs de stelling van Beppo Levi 2: Beschouw een maatruimte $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$. Als $\{f_n:n\in\mathbb{N}_0\}$ een dalende rij in $\mathcal{M}^+(\Omega,\mathcal{A})$ is zodanig dat $\int f_1 d\mu<\infty$ dan is $\lim_{n\to\infty}\downarrow\int f_n d\mu=\int\lim_{n\to\infty}\downarrow f_n d\mu$

Januari 2021

1.
    1. Geef de definitie van een algebra.
    2. Geef de definitie van een ring.
    3. Bewijs: B is een algebra $\Leftrightarrow$ B is een ring die aan een extra eigenschap voldoet. (Welke?)
2. Bewijs het lemma van Borel-Cantelli.
3. Bewijs het 1ste lemma van Fatou. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de ongelijkheid in het algemeen strikt kan zijn.
4. Bewijs de ongelijkheid van Hölder.

Ter info: Bij vraag 2, 3 en 4 waren de verwoordingen van de te bewijzen lemma's en de ongelijkheid telkens ook gegeven

Januari 2019

1. Zij X een compacte verzameling.
    - Definieer de lengte van een open verzameling $G\subset X$
    - Definieer de Lebesgue buitenmaat van een verzameling $A\subset X$
    - Wanneer is een verzameling $A\subset X$ Lebesgue meetbaar?
    - Toon aan dat de eindige unie van Lebesgue meetbare verzamelingen ook Lebesgue meetbaar is. Je mag de σ-subadditiviteit van de Lebesgue buitenmaat gebruiken.
2. Stel $(f_n)_n$ in $L^1(X)$. met $f_n\to f$ puntsgewijs.
    - Stel $\{f_n|n\}$ is $||\cdot||_1$-totaal begrensd, kunnen we dan besluiten dat $f\in L^1(X)$?
    - Stel $\{f_n|n\}$ is $||\cdot||_1$-totaal begrensd en $f\in L^1(X)$. Kunnen we dan besluiten dat $f_n\to f$ in L^1?
    - Stel $\{f_n|n\}$ is $||\cdot||_1$-begrensd, kunnen we dan besluiten dat $f\in L^1(X)$?
    - Stel $\{f_n|n\}$ is $||\cdot||_1$-begrensd en $f\in L^1(X)$. Kunnen we dan besluiten dat $f_n\to f$ in L^1?
3.
    - Stel een collectie $F\subset L^1(X)$. Wat betekent het als F uniform integreerbaar is?
    - formuleer de stelling van Vitali.
    - Formuleer de monotone convergentiestelling voor dalende rijen.
    - Laat zien hoe de monotone convergentiestelling voor dalende rijden volgt uit de stelling van Vitali.
4. Zij X,Y vectorvelden.
    - Wat betekent het als X en Y onafhankelijk zijn?
    - Stel X en Y zijn onafhankelijk en $f:\mathbb{R}\to[0,1]$ een continue functie. Bewijs dat $E[f(X,Y)]=\int E[f(x,Y)]dP_X(x)$. Formuleer alle stellingen die je hierbij gebruikt en laat zien hoe ze van toepassing zijn.

Januari 2016

prof Uwe Einmahl

1. Uitwendige maten:
    - Definieer een uitwendige maat μ_* en de μ_*-meetbare verzamelingen.
    - Formuleer en bewijs de uitbreidingsstelling. Je mag hierbij zonder bewijs veronderstellen dat de restrictie van μ_* tot $M(\mu_*)$ een maat is.
    - Formuleer de uniciteitsstelling en gebruik deze om uit te leggen dat als de maten P en Q samenvallen op R dat dan ook de verdelingen $F(x)=P(]-\infty,x])$ en $G(x)=Q(]-\infty,x])$ samenvallen.
2. Convergentie: (je kreeg hier de keuze tussen de 2 onderstaande vragen)
    - Definieer convergentie bijna-overal, in kans en in L^p. Geef en bewijs de hoofdstelling over convergentie. Je mag hierbij gebruik maken van
    $$X_i (i\in I) \text{een klasse van toestandsvariabelen, dan geldt de equivalentie:} X_i (i\in I) \text{is uniform integreerbaar} \Leftrightarrow \sup_{i\in I} E[|X_i|]<\infty \text{en} (\forall\epsilon>0)(\exists\delta>0): P(A)<\delta \Rightarrow \sup_{i\in I} E[|X_i| I_A]<\epsilon$$
    - Geef en bewijs de sterke wet van de grote getallen.
3. De stelling van Radon-Nikodym:
    - Geef en bewijs het lemma dat gebruikt wordt in de stelling van Radon-Nikodym. (Je mag de ontbindingsstelling van Hahn zonder bewijs gebruiken.)
    - Formuleer en bewijs de stelling van Radon-Nikodym.

Januari 2015

prof Uwe Einmahl

1. **Uitbreiding van maten** Wat is een getekende maat? Geef alle definities, en lemma's en het verband met de uitbreidingsstelling. Vervolgens mag je kiezen of je de 3 lemma's die aantonen dat M_{μ_*} een σ-algebra is en μ_* daarop een maat is, of je bewijst de uitbreidingsstelling. Mogelijke bijvragen:
    - Hoe bekomen we zo de Lebesguemaat en waarom is deze uniek?
    - Geef een voorbeeld van een semi-ring op $\mathbb{R}$. Zijn de open intervallen een semi-ring?
2. **Convergentie** Geef de definitie van convergentie in maat, convergentie bijna overal en convergentie in L^p. Geef eigenschappen, alternatieve karakterisaties en equivalenties. Vervolgens mag je een van de volgende dingen bewijzen:
    - De equivalenties voor convergentie in L^p in een kansruimte.
    - De sterke wet van de grote getallen.
3. **Getekende maten** Geef en bewijs de stelling van Radon-Nikodym voor eindige maten. Geef ook het lemma ervoor, je hoeft het niet te bewijzen.

September 2013 - 2014

prof Uwe Einmahl Van volgende vragen moet je kiezen uit (1 of 2) en (3 of 4) en (5 of 6).

1. Formuleer en bewijs de $\pi-\lambda$-stelling en geef een plaats aan in de cursus waar je deze gebruikt.
2. Bewijs de volgende stelling: *Zij μ_1,μ_2 maten op $\sigma(P)$ met P een π-systeem. Veronderstel dat μ_1 en μ_2 samenvallen op P en er σ-eindig zijn. Dan stemmen μ_1 en μ_2 overeen op $\sigma(P)$.* Gebruik dit om de uitbreiding van de Lebesgue-Stieltjensmaten te maken.

3. Bewijs de stelling van Fubini voor niet-negatieve functies, alsook het voorgaande lemma dat de meetbaarheid van de gebruikte functies aantoont.
4. Formuleer de stelling van de monotone convergentie. Bewijs hiermee dat het lemma van Fatou (+ formulering) en de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue (+ formulering).
5. Toon aan dat als fn→μffn→μf er een deelrij bestaat {nk}⊆N{nk}⊆N bestaat met fnk→ffnk→f μμ-b.o. . Gebruike deze stelling om een equivalente karakteristiek van convergentie in maat te bewijzen.
6. Bewijs de volledigheid van Lp(Ω,F,μ)(1≤p≤∞)Lp(Ω,F,μ)(1≤p≤∞).

Januari 2013-2014

prof Uwe Einmahl

1. Definieer het begrip "uitwendige maat". We hebben gezien dat een maat op een subring FF kan uitgebreid worden naar een maat op een sigma-algebra (Uitbreidingstelling). Hierbij werd die maat als volgt gedefineerd μ∗(A)=inf{∑n=0∞μ(An)|∪nAn⊂A,μ(An)<∞}

   μ∗(A)=inf{∑n=0∞μ(An)|∪nAn⊂A,μ(An)<∞}

   dat een uitwendige maat is (dit deel moet je niet bewijzen). Toon aan dat dit effectief een uitbreiding van de maat is op de sigma-algebra m.a.w. bewijs de Uitbreidingsstelling (behalve stap 1).
2. Geef de stelling van de Monotone convergentie (geen bewijs!). Baseer je hierop om het lemma van Fatou en de stelling van de Gedomineerde Convergentie te bewijzen (geef ze ook volledig!).

1. Geef de definities van convergentie in maat, convergentie μμ-bijna-overal en convergentie in LpLp. Geef ook verbanden weer tussen deze eigenschappen of gedeeltelijke verbanden. Bewijs één van de verbanden en één verband dat niet geldt.

Januari 2012-2013

prof Uwe Einmahl

1. Neem twee eindige maten μ1μ1 en μ2μ2 op σ−σ− algebra's F1F1 en F2F2.
   - Definieer de product σ−σ− algebra van F1F1 en F2F2.
   - Toon aan dat er een productmaat op deze σσ-algebra bestaat en toon aan dat deze uniek is (tekening).

Augustus 2012-2013

1. We hebben in hoofdstuk 1 de uitwendige maat gedefinieerd. Geef de uitbreidingsstelling en het bewijs alsook alle voorgaande lemma's (3) die hiervoor nodig zijn.
2. Zij (Ω,F,μ)(Ω,F,μ) een maatruimte. Geef de definities van fn→ffn→f μμ b.o, fn→ffn→f in maat en fn→ffn→f in LpLp. Wat zijn hun verbanden?
   - Geef en bewijs het lemma van Scheffé.
   - Bijvraag: toon de verbanden aan.

Oefeningen

Januari 2022

1. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: D({]a,b]⊆R|a,b∈R})D({]a,b]⊆R|a,b∈R}) is een σσ-algebra.
2. Zij (An)n∈N0⊆A(An)n∈N0⊆A disjuncte delen, A:=∑n∈N0AnA:=∑n∈N0An. Toon aan: f⋅1A∈L1(Ω,A,μ)⇔∀n∈N0:f⋅1An∈L1(Ω,A,μ)f⋅1A∈L1(Ω,A,μ)⇔∀n∈N0:f⋅1An∈L1(Ω,A,μ) en Σn∈N0∫|f|dμ<∞Σn∈N0∫|f|dμ<∞
3. Zij (Ω,A,mu)(Ω,A,mu) een maatruimte, 1<p<r<q<∞1<p<r<q<∞. Toon aan: ∀f∈Lp(Ω,A,mu)∩Lq(Ω,A,mu):||f||r≤||f||λp⋅||f||1−λq∀f∈Lp(Ω,A,mu)∩Lq(Ω,A,mu):||f||r≤||f||pλ⋅||f||q1−λ met λ=1r−1q1p−1qλ=1r−1q1p−1q. Besluit Lp∩Lq⊆LrLp∩Lq⊆Lr. Hint: Hölder
4. Beschouw de maatruimte ([0,1],R,λ)([0,1],R,λ) en de rij kn:=n⋅1[0,1n]−n⋅1[1−1n,1]kn:=n⋅1[0,1n]−n⋅1[1−1n,1]. Convergeert (hn)n(hn)n in maat? In ||.||1||.||1? Convergeert ∫hndλ∫hndλ?

Januari 2019

1. Zij X een overaftelbare verzameling, A:={E⊆X|EofEc hoogstens aftelbaar}A:={E⊆X|EofEc hoogstens aftelbaar} en μ:A→R+:E↦{01E hoogstens aftelbaarEc hoogstens aftelbaarμ:A→R+:E↦{0E hoogstens aftelbaar1Ec hoogstens aftelbaar
   - (2p) Toon aan dat AA een σσ-algebra op X is.
   - (2p) Toon aan dat μμ een maat op AA is.
2. (2p) Bestaat er een verzameling X met een aftelbaar oneindige σσ-algebra op X? Hint: Beschouw de collectie {Bx|x∈X}waarbijBX:=⋂{A∈A|x∈A}{Bx|x∈X}waarbijBX:=⋂{A∈A|x∈A}.
3. Gegeven een kansruimte en de metriek d(f,g)=E[|f−g|∧1]d(f,g)=E[|f−g|∧1] waarbij a∧b=min(a,b)a∧b=min(a,b)
   - (2p) Toon aan dat als voor elke rij meetbare functies (fn)n(fn)n geldt dat fn→0inP⇔d(fn,0)→0fn→0inP⇔d(fn,0)→0 (*), dat dan convergentie in maat equivalent is met convergentie voor de metriek d.
   - (2p) Bewijs (*). Gebruik hierbij de disjuncte unie {|fm|≤δ}∪{|fn|>δ}{|fm|≤δ}∪{|fn|>δ} voor een geschikte δδ en dat {|fn|>ϵ}⊆{fn∧1>ϵ∧1}{|fn|>ϵ}⊆{fn∧1>ϵ∧1}.
4. (5p) Beschouw de maatruimte ([0,1],A={A∈R|A⊆[0,1]},λ|A)([0,1],A={A∈R|A⊆[0,1]},λ|A) en de rij (fn)n(fn)n waarbij fn:[0,1]→R:x↦n32(−x)nvoorn≥1fn:[0,1]→R:x↦n32(−x)nvoorn≥1. Convergeert de rij (fn)ninL1,L2,L3(fn)ninL1,L2,L3, in maat, bijna overal? (fn)n(fn)n uniform integreerbaar?

5. (4p) Zij X een positieve toevalsvariabele en $p>0$ met $E[X^p]<\infty$. Bewijs dat $E[X^p]=\int_0^\infty pX^{p-1}P(X\geq x)dx$.

Januari 2016

prof Uwe Einmahl

1. Stel μ^*_1 en μ^*_2 uitwendige maten.
   - Toon aan dat ook $\mu_1^*+\mu_2^*$ en $\mu_1^*\vee\mu_2^*$ uitwendige maten zijn.
   - Bewijs ook dat $M(\mu_1+\mu_2^*)=M(\mu_1^*)\cap M(\mu_2^*)$
2. Stel F een σ-algebra en S een semiring zodat $F=\sigma(S)$.
   - Definieer $S+$ als de collectie van eindige disjunctie unies van verzamelingen uit S. Bewijs dat $S+$ een ring is. (Hint: toon eerst aan dat het een π-systeem is.)
   - Veronderstel dat μ een maat is op (Ω,F)en stel $A\in F$ en $\epsilon>0$. Toon aan dat er verzamelingen $B_1,...,B_n\in S$ disjunct bestaan zodat
     $$\mu(A\Delta\bigcup_{j=1}^n B_j)\leq\epsilon$$
   - Stel $f:\Omega\to[-\infty,\infty]$ een F-meetbare functie met $\int|f|d\mu<\infty$. Toon aan dat er voor $\epsilon>0$ een F-meetbare functie $g(x)=\sum_{i=1}^n\alpha_i I_{]a_i,b_i]}(x)$ bestaat zodat
     $$\int|f(x)-g(x)|d\mu\leq\epsilon^2$$
     (Hint: bewijs dit eerst voor elementaire functies $h(x)=\sum_{j=1}^m\delta_j I_{D_j}(x)$ met $D_j\in R$.)
3. Stel $X:(\Omega,F)\to(R^+,R\cap R^+)$ een toestandsvariabele.
   - Toon aan dat $E[e^{tX}]=1+t\int_0^\infty e^{tx}P(X>x)dx$
   - Gebruik voorgaande formule om de verwachtingswaarde van X te berekenen met dichtheidsfunctie $f(x)=\lambda^{-1}e^{-x\lambda}I_{[0,\infty[}(x)$. ($\lambda>0$)

Januari 2015

prof Uwe Einmahl

1. We werken op (R,R,λ).
   - Toon aan dat voor $f=I_A$ met $\lambda(A)<\infty$, er een functie $g\in C(R)$ bestaat zodat $||f-g||_1<\epsilon$ en $\overline{\text{supp}(g)}=\overline{\{x\in R|g(x)\neq0\}}$ is compact.
   - Zij $f:R\to R$ en $\int|f|d\lambda<\infty$, bewijs dan dat er een functie $g\in C(R)$ zodat $||f-g||_1<\epsilon$ en $\overline{\text{supp}(g)}$ compact.
   - Stel $f_\delta(x)=f(x+\delta)$. Bewijs dan dat $\lim_{\delta\to0}f_\delta=f$ in L^1.
2. Stel $(X_n)_n$ een rij stochastische variabelen waarvoor geldt dat $P(X_n=n^2-1)=n^{-2}$ en $P(X_n=-1)=1-n^{-2}$.

   Toon aan dat $\frac{S_n}{n}\to-1$ P b.o. (Hint: toon aan dat $P(\liminf_{n\geq1}\{X_n=-1\})=1$)
3. We werken met $\Omega=[0,1],F=R|[0,1],P=\lambda|[0,1]$. Stel $m_n=\sum_{i=1}^n i=\frac{n(n-1)}{2}$. Stel dan $X_1=I_{]0,1]}$ en $X_{m_{n-1}+k}=(k-1)I_{](k-1)/n,k/n]}$ voor $1\leq k\leq n$, $n\geq2$.

   Convergeert de rij in maat, bijna overal? Is ze uniform integreerbaar? Voor welke waarden is ze convergent in L^r ($r>0$, niet gehele getallen toegelaten!)
4. Stel A_i onafhankelijke gebeurtenissen. Stel dat $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i)=1$ en $P(A_i)<1\,\forall i$.
   - Bewijs dat $P(\limsup_{n\geq1}A_i)=1$
   - Wat als $\exists n_0$ zodat $P(A_{n_0})=1$?
5. Bewijs dat voor $(X_n)_n$ reëel waardige stochastische variabelen geldt
   $$X_n\xrightarrow{P}0\Leftrightarrow E\left(\frac{|X_n|}{1+|X_n|}\right)\to0$$
   .

Januari 2012

prof Uwe Einmahl

1.
   - Toon aan dat voor de Borelstam R op R geldt dat $R=\sigma(\{[r,\infty[|r\in R\})$.
   - Bewijs dat iedere monotone, niet dalende functie $f:R\to R$ R-meetbaar is.
2. Zij Ω een verzameling, F een $\sigma-$ algebra op Ω en $S\subseteq F$ met $\sigma(S)=F$
   - Toon aan dat voor elke $A\in F$ een hoogstens aftelbare deelverzameling $S_A\subseteq S$ bestaat zodanig dat $A\in\sigma(S_A)$
   - Toon verder aan dat als $f:\Omega\to R$ F-meetbaar is, dat dan ook een hoogstens aftelbare deelverzameling $S_f\subseteq S$ bestaat zodanig dat $f\circ\sigma(S_f)-$ meetbaar is.

3. Zij RR de Borelstam op RR en μμ een eindige maat op RR. Definieer G:R→[0,∞[:x↦μ(]−∞,x])G:R→[0,∞[:x↦μ(]−∞,x]) en zij verder c>0c>0. Bereken ∫∞−∞(G(x+c)−G(x))dx∫−∞∞(G(x+c)−G(x))dx. (Hint: Toon aan dat je deze integraal kan schrijven als de productmaat van een gepaste Borelverzameling in R2R2. Je moet ook aantonen dat deze verzameling een Borelverzameling in R2R2 is.)
4. Beschouw de kansruimte (Ω,F,P)(Ω,F,P) waar Ω:=[0,1],F:={A∈R|A⊆[0,1]},FΩ:=[0,1],F:={A∈R|A⊆[0,1]},F en P:=λ|FP:=λ|F. Beschouw de rij (Xn)n(Xn)n waar Xn:[0,1]→R:ω↦n32(−ω)n,n≥1Xn:[0,1]→R:ω↦n32(−ω)n,n≥1. Convergeert de rij (Xn)n(Xn)n bijna in L1L1, L2L2,L3L3, in kans, bijna overal? Is (Xn)n(Xn)n uniform integreerbaar?
5. Zij Ω:=]0,1],F:={A∈R|A⊆]0,1]},FΩ:=]0,1],F:={A∈R|A⊆]0,1]},F en R:=λ|FR:=λ|F.Stel Xn:=nlognI]0,1n],n≥3Xn:=nlognI]0,1n],n≥3. Toon aan dat:
    - E[Xn]→0E[Xn]→0
    - {Xn|n≥3}{Xn|n≥3} is uniform integreerbaar.
    - Er bestaat geen integreerbare toevalsvariabele Y:Ω→[0,∞[Y:Ω→[0,∞[zodat ∀n≥3:|Xn|≤Y∀n≥3:|Xn|≤Y.(Hint: bepaal supn≥3Xnsupn≥3Xn.)

Augustus 2012

1. Zij ΩΩ een niet-lege verzameling en μi∗,i=1,2μi∗,i=1,2 uitwendige maten op 2Ω2Ω. Toon aan dat μ1∗+μ2∗μ1∗+μ2∗ ook een uitwendige maat is en bewijs dat M(μ1∗+μ2∗)=M(μ1∗)∩M(μ2∗)M(μ1∗+μ2∗)=M(μ1∗)∩M(μ2∗) als μ1∗(Ω)+μ2∗(Ω)<∞μ1∗(Ω)+μ2∗(Ω)<∞
2.
    - Zij A:={]a,b]|a,b∈Q,a<b}∪{∅}A:={]a,b]|a,b∈Q,a<b}∪{∅}. Toon aan dat deze klasse van verzamelingen een semiring is en dat RR(=de Boreldelen van RR) de σ−σ− algebra voortgebracht door deze klasse is.
    - Zij μ:R→[0,∞[μ:R→[0,∞[een maat die eindig is voor de compacte delen RR en zodanig dat ∀x∈R:∀A∈R:μ(A+x)=μ(A)∀x∈R:∀A∈R:μ(A+x)=μ(A). Bewijs dat ∃c∈[0,∞[:μ=cλ

      ∃c∈[0,∞[:μ=cλ

      , waar λλ de Lebesguemaat is.(Hint: Stel c:=μ([0,1])c:=μ([0,1]) en toon: (i) μ(]0,1m])=cmμ(]0,1m])=cm voor alle m∈N0m∈N0, (ii)μ(]a,b])=cλ(]a,b])μ(]a,b])=cλ(]a,b]) voor alle a<ba<b in QQ. Gebruik dan deel (a) samen met een stelling uit hoofdstuk 1 van de cursus om (b) aan te tonen.)
3. Stel An,n≥1An,n≥1 onafhankelijke gebeurtenissen zodat P[⋃∞n=1An]=1P[⋃n=1∞An]=1 en P[An]<1,n≥1P[An]<1,n≥1. Bewijs dat P[limnsupAn]=1P[limnsupAn]=1.
4. Stel XX een positieve toevalsvariabele met E[X4]<∞E[X4]<∞. Bewijs dat E[X4]=4∫∞0x3P[X>x]dxE[X4]=4∫0∞x3P[X>x]dx.
5. Beschouw de kansruimte (Ω,F,P)(Ω,F,P) waar Ω:=[0,1],F:=Ω:=[0,1],F:= Borel delen van [0,1][0,1] en P=λ|FP=λ|F. Beschouw de rij (Xn)n(Xn)n waar Xn:[0,1]→R:ω↦ω−12I[1/2n+1,1/2n],n≥1Xn:[0,1]→R:ω↦ω−12I[1/2n+1,1/2n],n≥1. Convergeert de rij (Xn)n(Xn)n in L1,L2L1,L2, in kans, bijna overal? Is (Xn)n(Xn)n uniform integreerbaar?

Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS
- 2BWIS