Lineaire meetkunde

Lineaire Meetkunde	
Richting	Wiskunde
Jaar	1BWIS

Bespreking

Dit vak wordt in het tweede semester van de eerste bachelor gegeven. Er komt veel in voor uit de lineaire algebra, die dan ook zeer kort herhaald zal worden. Men zal vaak stellingen zien voor n-dimentionale ruimten, maar vaak wordt dit ook nog eens extra toegepast op de 2D en 3D-euclidische ruimte.

Het vak wordt gegeven door Stijn Symens. Hij is een aardige prof, hij geeft zowel de theorie als de oefeningen. Hij zal regelmatig vragen om oefeningen thuis voor te bereiden. Hier hangt geen verplichting aan vast, maar kan uiteraard een goede oefening zijn!

Het theoretische examen gebeurt in groepjes van ± 7 man. Prof. Symens geeft een paar vragen die je schriftelijk voorbereidt, wanneer je klaar bent overloopt hij je bewijs/afleiding en stelt hij extra mondelinge vragen. Het is heel belangrijk van elke hoofdstuk de hoofdstelling(en) tot in de puntjes te kennen (zie de vragen hieronder). Het mondelinge deel gaat vaak over de verschillende stappen die tijdens een bewijs voorkomen (waarom je bepaald zaken doet/mag doen, ...) het is dus belangrijk de voorbereidende lemma's te kunnen betrekken bij je uitleg.

Het praktische examen bestaat uit een reeks oefeningen (de meeste) zoals ze werden gezien tijdens de les, er kan al eens een serieuze doordenker bijzitten (zij het op minder punten). Het is belangrijk de algoritmes (zoals de normaalvergelijking van een kwadriek, Matrix-decompositie, Vectorieel Product, ...) goed onder de knie te hebben en situaties te kunnen herkennen waar deze zaken van pas kunnen komen (bij dit laatste gaat het vooral over bewerkingen i.v.m. rechten, vlakken, hoeken, ...). In mei geeft prof. Symens je de mogelijkheid deel te nemen aan een zelftest, deze telt niet mee voor het examen. Het is een goede manier om door te krijgen wat voor vragen er zoal gesteld worden op het examen. De test bestaat enkel uit oefeningen, geen theorie.

Op beide examens gebruik je geen rekenmachine, een overzicht van kwadrieken in E(3)E(3) krijg je.

Beide onderdelen tellen mee voor 50% van de punten.

Examenvragen

Theorie

Academiejaar 2014 - 2015 1ste zit

Groep 1

1. Geef de definitie van een kwadriek. Wat kan je besluiten in verband met referentiestelsels?
2. Bespreek directe isometrieën.
3. Geef de formule voor de afstand tussen 2 kruisende rechten en bewijs die. Bewijs alsook de extra stelling die hiervoor nodig is (cfr. d(L,M)=d(l,m)d(L,M)=d(l,m)).

Groep 2

1. O(V)O(V) werkt enkelvoudig transitief op de verzameling der orthonormale basissen voor VV.
2. Geef de matrixvoorstelling van een gelijkvormigheidsafbeelding. Bewijs dat dit een product is van een homothetie en een isometrie.
3. Geef en bewijs de stelling van Jordan-Weierstraß.
4. Bespreek de affiene deelruimte met homogene coördinaten.

Groep 3

1. Geef en bewijs de veralgemeende stelling van Thales.
2. Bespreek tegengestelde isometrieën.
3. Wat is een affien referentiestelsel? Doel? Geef ook de substitutieformule.
4. Geef de diagonalisatiestelling en bewijs ze.

Academiejaar 2013 - 2014 1ste zit

Groep 1

1. Bewijs dat een niet - triviale orthogonale transformatie op een n-dimensionale vectorruimte V de samenstelling is van ten hoogste n spiegelingen.
2. Geef de formule voor de afstand tussen 2 kruisende rechten en bewijs die. Bewijs alsook de extra stelling die hiervoor nodig is (cfr. d(L,M)=d(l,m)d(L,M)=d(l,m)).

3. Classificeer de tegengestelde isometriën in E(3)E(3).
4. Geef de definitie van een kwadriek. Wat kan je besluiten in verband met referentiestelsels?

Groep 2

1. Geef en bewijs de stelling van Jordan-Weierstraß.
2. Geef en bewijs de stelling van Thales.
3. Een gelijkvormigheidstransformatie is het commutatief product van een isometrie en een homothetie. Bewijs dit.
4. Hoe definiëren we de afstand tussen een punt en een hypervlak.

Groep 3

1. Bewijs:
   - O(V)O(V) is een groep.
   - O(V)O(V) werkt enkelvoudig transitief op de verzameling der orthonormale basissen voor VV.
2. Geef de diagonalisatiestelling en bewijs ze.
3. Geef en bewijs de veralgemeende stelling van Thales. Leg ook uit wat het verband is tussen deze stelling en de 'gewone' stelling van Thales.
4. Een gelijkvormigheidstransformatie is het commutatief product van een ... en een ... . Bewijs dit.

Enkele vragen die mondeling gesteld werden

Deze vragen komen uit de verschillende, ze dienen als hulpmiddel voor waar je je op moet focussen voor het mondelinge deel.

1. Je werkt in E(3)E(3), hoeveel spiegelingen kan je maximum hebben om een rotatie te beschrijven?
2. Wat gebeurt er als je de absolute waarde weglaat uit de Hesse-normaalvorm.
3. Heeft een orthonogonale transformatie een inverse? Zo ja, is deze inverse terug een orthogonale transformatie?
4. Is de groep O(V)O(V) een commutatieve groep?
5. Bij het bewijs over kwadrieken en referentiestelsels: Hoe bekom je de matrix S—S_, wat voor een matrix is dat en waarom is dat nuttig/nodig?
6. Waarom is bij een gelijkvormigheidstransformatie in E(3)E(3) det(S—−λ.I–3)≠0det(S_−λ.I_3)≠0?
7. Bij de bespreking van tegengestelde isometriën in E(3)E(3): Bespreek de laatste substituties van de bespreking over de glijspiegeling.
8. Hoe ziet de Jordan-normaalvorm eruit van de volgende matrix (je hoeft de eigenwaarden niet te berekenen.)

A—=⎛⎝⎜123245356⎞⎠⎟A_=(123245356)

Academiejaar 2013 - 2014 2de zit

1. Diagonalisatie.
2. Wat zijn referentiestelsels? Geef en bewijs de formule voor het veranderen van referentiestel. Wat is een kwadriek? Toon aan dat dit begrip onafhankelijk is van referentiestelsel.
3. Een gelijkvormigheidstransformatie is de samenstelling van ... en ... Bewijs.
4. Een orthogonale transformatie in een vectorruimte met dimensie n kan geschreven worden als samenstelling van hoogstens n spiegelingen.

Academiejaar 2012 - 2013 1ste zit

1. Bewijs "De vlakken door L respectievelijk M en evenwijdig met r ^ s snijden elkaar in een rechte C met richting r ^ s. De rechte C snijdt L en M in de punten l en m waarvoor d(L,M) = d(l,m)" en bereken deze afstand ook effectief. (Hesse-normaalvorm gebruiken, zie onderaan de pagina van het bewijs).
2. Bespreek tegengestelde isometrieën in E3E3
3. Definieer parallelprojectie en bewijs de stelling van Thales. (Leg ook de link uit met de veralgemeende stelling van Thales)
4. Wat is een kwadriek? Bewijs dat dit begrip onafhankelijk is van het gekozen referentiestelsel.
5. Diagonalisatie
6. De groep O(V) werkt enkelvoudig transitief op de verzameling van alle orthonormale basissen van V. Bewijs.
7. Een gelijkvormigheidstransformatie wordt gegeven door een ... en een ... . Geef en bewijs.
8. Bewijs de veralgemeende stelling van Thales, en geef het verband met de gewone stelling van Thales. (Merk op: de stelling van Thales is een vrij specifiek geval van de veralgemeende, denk hier goed over na!)
9. Geef en bewijs de stelling van Jordan-Weierstrass (zonder de voorgaande lemma's te bewijzen).

Academiejaar 2011 - 2012 1ste zit

1. Bewijs: "De groep O(V) werkt enkelvoudig transitief op de verzameling van alle orthonormale basissen van V"
2. Bewijs "De vlakken door L respectievelijk M en evenwijdig met r ^ s snijden elkaar in een rechte C met richting r ^ s. De rechte C snijdt L en M in de punten l en m waarvoor d(L,M) = d(l,m)" en bereken deze afstand ook effectief. (Hesse-normaalvorm gebruiken, zie onderaan de pagina van het bewijs).
3. Diagonalisatie

Oefeningen

Academiejaar 2014 - 2015 1ste zit

1. We werken in E(3)E(3). Gegeven een bol BB met vergelijking
x21+x22+x23+2.x1−4.x2−8.x3+10=0

$$x12+x22+x32+2.x1-4.x2-8.x3+10=0$$

Bepaal de vergelijking van de (omwentelings)kegel die raakt aan BB met top bb, waarbij bt=(1,2,0)bt=(1,2,0).
2. We werken in E(3)E(3), waar het punt aa, het vlak αα en de rechte RR gegeven zijn
a—=⎛⎝⎜80−3⎞⎠⎟R≡{2.x1−2.x2−x3+3=0x1+x2−7=0α≡−5.x1−x2+x3+7=0

$$a\_=(80-3)R\equiv\{2.x1-2.x2-x3+3=0x1+x2-7=0\alpha\equiv-5.x1-x2+x3+7=0$$

Van een tetraëder abcdabcd is het punt aa gegeven. Verder weten we dat b,c,d∈αb,c,d∈α en dat de recht bcbc de rechte RR loodrecht kruist. Bepaal de coördinaten van b,c,db,c,d. (Er zijn twee mogelijke oplossingen.)
3. We werken in E(3)E(3). Gegeven zijn de punten a,b,ca,b,c en a′,b′,c′a′,b′,c′:
   - a—=⎛⎝⎜134⎞⎠⎟a_=(134) \qquad \underline{b} = \left(
     131

     $$131$$

     \right) \qquad \underline{c} = \left(
     431

     $$431$$

     \right) </math>
   - a′—=⎛⎝⎜6−22⎞⎠⎟b′—=⎛⎝⎜403⎞⎠⎟c′—=⎛⎝⎜521⎞⎠⎟a′_=(6−22)b′_=(403)c′_=(521)
   - Geef de matrixvergelijking van de directe isomtrie ϕϕ die aa stuurt naar a′a′, bb stuurt naar b′b′ en cc stuurt naar c′c′.
   - Welke directe isometrie is dit? Geef de relevante hoeken, draaiingsassen, verschuivingsvectoren enz.
4. We werken in E(3)E(3). De vlakken αα en ββ zijn gegeven
α≡72–√.x1−12.x2−12.x3+1=0β≡=12–√.x1+72.x2+72.x3−1=0

$$\alpha\equiv72.x1-12.x2-12.x3+1=0\beta\equiv=12.x1+72.x2+72.x3-1=0$$

Noem S de verzameling van alle punten waarvan de som van het kwadraat van de afstand tot αα en van het het kwadraat van de afstand tot ββ gelijk is aan 1. Toon aan dat S een elliptisch cilinder vormt. Bepaal ook de lengtes van de halve hoofdassen van de ellips die je bekomt als je deze cilinder loodrecht spiegelt.

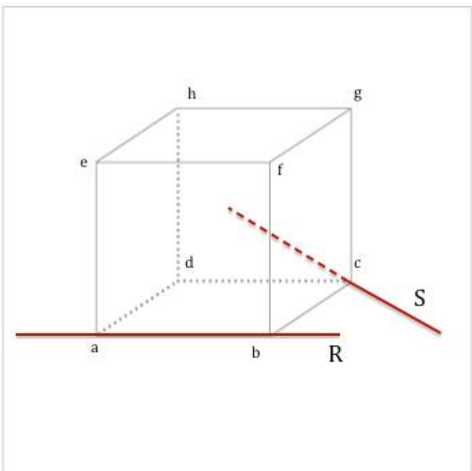
Academiejaar 2013 - 2014 1ste zit

1. We werken in E(3)E(3). Gegeven zijn een punt a,a, een vlak αα en een rechte BB
p–=⎛⎝⎜200⎞⎠⎟B≡{2.x1−2.x2−x3+2=0x1−3.x3−4=0α≡x1+x2+x3+1=0

$$p\_=(200)B\equiv\{2.x1-2.x2-x3+2=0x1-3.x3-4=0\alpha\equiv x1+x2+x3+1=0$$

Bepaal de rechte RR door pp, evenwijdig met αα en die de rechte BB rechthoekig snijdt.
2. Zij gegeven de volgende rotatie ϕ:E(3)→E(3):x—↦S—=14⎛⎝⎜6–√31−6–√132−6–√6–√⎞⎠⎟.x—
ϕ:E(3)→E(3):x_↦S_=14(6−6231−6136).x_
   - Schrijf ϕϕ als een samenstelling van van rotaties om de coördinaatassen.
   - Wat is de rotatie-as van ϕϕ.
3. Zij het volgende gegeven in E(3)E(3)
a—=⎛⎝⎜−5−42⎞⎠⎟R≡x—=a—+ρ.⎛⎝⎜−236⎞⎠⎟S≡{x1+x2+x3−7=0−x1+2.x2+x3−6=0

$$a\_=(-5-42)R\equiv x\_=a\_+\rho.(-236)S\equiv\{x1+x2+x3-7=0-x1+2.x2+x3-6=0$$

   - bepaal dan de punten b,c,d,e,f,gb,c,d,e,f,g en hh zodat:
   - b∈R,c∈Sb∈R,c∈S
   - ze een kubus vormen
   - 

4. Beschouw de volgende kwadriek in E(3)E(3)
   5.x21+5.x22+6.x23+2.x1x2+2.2–√.x2x3+2.2–√.x1x2+4.x1+2.2–√.x3=05.x12+5.x22+6.x32+2.x1x2+2.2.x2x3+2.2.x1x2+4.x1+2.2.x3=0
   - Bewijs dat dit deze kwadriek een omwentelinsellipsoïde is door de normaalvergelijking te bepalen.
   - Bepaal de draaiingssymmetrie-as en de lengte van de halve hoofdassen.
5. We werken in E(3)E(3). Bepaal de verzameling van alle punten pp zodat de projectie van de cirkel CC op π3π3 terug een cirkel is.

C≡{x2=0x21+x23=1C≡{x2=0x12+x32=1

Academiejaar 2013 - 2014 2de zit

1. Drie vergelijkingen van (kruisende) rechten waren gegeven. Wij moesten (a) de vergelijking van alle rechten die steunden op deze drie rechten vinden en (b) zeggen wat de aard van deze figuur was en waarom.
2. Een vergelijking van een kwadriek helemaal herschrijven naar de basisvorm om te zien van welke vorm hij was.
3. Gegeven: Een octaëder, de coördinaten van twee overstaande punten en de vergelijking van een vlak dat deze twee punten bevatte en de figuur door midden sneed. Gevraagd: De coördinaten van de vier andere hoekpunten.
4. Weet ik niet meer helemaal. We kregen volgens mij het beeld van de eerste twee basisvectoren van een 3D ruimte (1,0,0) en (0,1,0) onder een (niet gegeven) rotatie om een as door de oorsprong. We moesten het beeld van (0,0,1) bepalen, de matrixvoorstelling van de afbeelding geven en de rotatie-as en -hoek bepalen.

Academiejaar 2012 - 2013 1ste zit

1. Bepaal de hoek tussen een gegeven rechte en een vlak.
2. Gegeven is een rechte R en een punt p.
   - uit d(p,x) = d(R,x) volgt de vergelijking van een kwadriek. Toon aan.
   - Classificeer de kwadriek.
3. Gegeven dat de isometrie een glijspiegeling is t.o.v. een geven vlak ββ gevolgd door een verschuiving volgens een gegeven vector v⃗ v→. Zoek de bijhorende matrix. Zet deze om in de Jordan-Normaalvorm.
4. Gegeven zijn een punt en een rechte. Bepaal de overige 5 punten van de zeshoek door het gegeven punt waarvan een zijde op de gegeven rechte ligt.
5. Gegeven de vergelijking van een rechte en van twee vlakken, loodrecht op de gegeven rechte. De rechte wordt om een cirkel verplaats zodat men een cilinder met doorsnede 1 verkrijgt. Bepaal de vergelijking van de bol die de 2 cirkels omvat die de doorsnede van de vlakken met de cilinder zijn.

Academiejaar 2012 - 2013 2de zit

1. In de driedimensionale reële affiene ruimte A(3)A(3) zijn vier punten p,q,rp,q,r en ss gegeven. Ten opzichte van een eerste affiene referentiestelsel (o,e⃗ 1,e⃗ 2,e⃗ 3)(o,e→1,e→2,e→3) hebben de punten de volgende coördinaten
   - p–=⎛⎝⎜323⎞⎠⎟q–=⎛⎝⎜−121⎞⎠⎟r–=⎛⎝⎜0−12⎞⎠⎟s–=⎛⎝⎜−323⎞⎠⎟p_=(323)q_=(−121)r_=(0−12)s_=(−323)
   - Ten opzichte van een tweede affiene referentiestelsel (o′,f⃗ 1,f⃗ 2,f⃗ 3)(o′,f→1,f→2,f→3) hebben de punten de coördinaten
   - p′—=⎛⎝⎜100⎞⎠⎟q′—=⎛⎝⎜010⎞⎠⎟r′—=⎛⎝⎜001⎞⎠⎟s′—=⎛⎝⎜121⎞⎠⎟p′_=(100)q′_=(010)r′_=(001)s′_=(121)
   - Zoek de coördinaten van de oorsprong o′o′ van het tweede referentiestelsel ten opzichte van het eerste referentiestelsel.
   - Zijn de twee referentiestelsels gelijk of tegengesteld georiënteerd? Motiveer.
2. In het vlak αα zijn de punten en bb gegeven. Bepaald de coördinaten van het punt cc zodat de driehoek ΔabcΔabc gelijkzijdig is en in het vlak αα ligt.
   α≡5.x1+x2+x3−15=0a—=⎛⎝⎜714⎞⎠⎟b–=⎛⎝⎜4−1−4⎞⎠⎟α≡5.x1+x2+x3−15=0a_=(714)b_=(4−1−4)
3. Een kwadriek KK wordt gegeven door de vergelijking
   4x21+x22+4x23−4x1x2+4x2x3−3x1x3−6x1−14x2−3x3−3=04x12+x22+4x32−4x1x2+4x2x3−3x1x3−6x1−14x2−3x3−3=0
   Herleid deze vergelijking tot zijn normaalvergelijking en vermeld welk type kwadriek beschreven wordt. (En lijst met classificaties wordt gegeven.)
4. In E(3)E(3) bekijken we de isometrie ϕ:x↦A.x+bϕ:x↦A.x+b met
   - A—=13.⎛⎝⎜31−2122−22−1⎞⎠⎟b–=⎛⎝⎜012⎞⎠⎟A_=13.(31−2122−22−1)b_=(012)
   - Toon aan dat ϕϕ een isometrie is.
   - Bespreek deze isometrie.
5. In E(3)E(3) zijn de punten a,ba,b en cc gegeven. Een bol B1B1 met middelpunt aa een bol B2B2 met middelpunt bb en een bol B3B3 met middelpunt cc raken elkaar twee aan twee.
   - a—=⎛⎝⎜1−21⎞⎠⎟b–=⎛⎝⎜7−21⎞⎠⎟c–=⎛⎝⎜151⎞⎠⎟a_=(1−21)b_=(7−21)c_=(151)
   - Bepaal de straal van elke bol.
   - Bepaal het middelpunt van een bol BαBα die raakt aan B1,B2,B3B1,B2,B3.

Academiejaar 2013 - 2014 Zelftest (mei)

1. Bepaal de Jordan Normaalvorm JJ van de volgende matrix AA. Geef ook een matrix SS die ervoor zorgt dat J=S−1.A.SJ=S−1.A.S.
   A=⎛⎝⎜⎜⎜000−300024600−2−300⎞⎠⎟⎟⎟A=(004−2006−30000−3200)
2. In de driedimensionale reële affiene ruimte A(3)A(3) zijn de rechten R,SR,S en TT gegeven. Zoek een parameter - en parametervrije vergelijking van de rechte LL die RR en SS snijdt, en die evenwijdig is met TT.
   R≡⎛⎝⎜x1x2x3⎞⎠⎟=⎛⎝⎜−11−1⎞⎠⎟+ρ.⎛⎝⎜201⎞⎠⎟S≡{x1+x2+2.x3=0x1−x2+x3+4=0T≡{5.x1+x2+x3=0x1+2.x2+2.x3−7=0R≡(x1x2x3)=(−11−1)+ρ.(201)S≡{x1+x2+2.x3=0x1−x2+x3+4=0T≡{5.x1+x2+x3=0x1+2.x2+2.x3−7=0

3. Gegeven de punten pp en qq en het vlak αα in E(3)E(3).
    - $\underline{p} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\underline{q} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\alpha \equiv x_1 + 2.x_2 = 0$p_=(−123)q_=(226)α≡x1+2.x2=0
    - Bepaal de coördinaten van de punten rr en ss zodat:
    - r∈αr∈α
    - pqrspqrs een regelmatige tetraëder (viervlak met alle zijvlakken gelijkzijdige driehoeken) vormt zoals in de figuur. Let ook op de oriëntatie! (2 oplossingen mogelijk)
    -