# Wiskundige methoden voor de fysica II



## Wiskundige methoden voor de fysica II

| | |
|---|---|
| Richting | Fysica |
| Jaar | 1BFYS |

## Bespreking

In dit vak komen een hele hoop nieuwe wiskundige begrippen en methoden aan bod die in de loop van je opleiding zeer belangrijk zullen zijn. Aangezien er een hele hoop nieuwe begrippen aanbod komen loont het zeker om naar de lessen te gaan. Drie grote onderwerpen die aanbod zullen komen in dit vak zijn coordinatenstelsels en transformaties, inleiding tot vector analyse (rotor, divergentie, gradient) en eigenvectoren. Ook komt er een nieuwe notatie methode aanbod die in het begin misschien zeer abstract en ongemakkelijk lijkt, maar na enkele praktijklessen zal je zien dat deze notatie zeker loont.

In de praktijklessen worden steeds opgavenbladen uitgedeeld met oefeningen op de theorie die in de voorgaande lessen is gezien. De opgaven komen steeds op blackboard tijdens het jaar, meestal komt ook na een praktijkles de uitgewerkte oplossing van het opgaveblad van die les online.

Voor het exaam vindt de prof het vooral belangrijk dat je doorhebt waar het over gaat (Vandaar de veel wederkerende metriek vraag) en dat je zaken zoals gradient, rotor,... begrijpt en weet waar ze vandaan komen. De vragen op het exaam zijn grote openvragen, daarom is het zeer belangrijk dat je ook de samenhang van alles begrijpt. Houd dit zeker in je achterhoofd bij het leren, probeer bijvoorbeeld na tien paginas alles op te sommen wat aan bod is gekomen en kijk of je niets vergeten bent. De vragen lijken misschien simpel, maar bij een vraag zoals "Wat is de metriek?" wordt verwacht dat je zeer veel kan zeggen en niet enkel één zin!

Het oefeningexamen is zeer gelijkend aan de vragen uit de oefeningsessies. De vragen zijn meestal niet moeilijk en hebben redelijk triviale antwoorden, het belangrijkste hier is dat je de technieken onder de knie hebt. Transformatie tussen pool, bol,...,-coordinaten zijn zeer belangrijk en zal je nog veel tegenkomen in je verdere fysica-carrière.

Doorheen het jaar wordt er ook 1 test gedaan, meestal tegen het einde van het jaar. Deze bevat enkel oefeningen en zal je een beeld geven van wat er op het oefeningen exaam kan gevraagd worden. De test telt enkel mee op het exaam indien deze je een hoger cijfer geeft en kan dus gezien worden als een bonus. Het loont dus zeker om goed te leren voor deze test, want zo krijg je een goed beeld of dat je de oefeningen al beheerst.

## Puntenverdeling

50% Theorie 50% Oefeningen

## Examenvragen

### Academiejaar 2022-2023 1ste zit

:

Examen Wiskundige Methoden voor de Fysica II
1-ste Bachelor Fysica
1-ste zittijd, 27 januari 2023

1.
Wat weet je over:
- het scalair product
- het vectorieel product
- het uitwendig product

van 2 vectoren?

2.
- Geef de definitie en fysische betekenis van de divergentie. Geef een voorbeeld uit de fysica.
- Leid de uitdrukking af voor de divergentie van een vector in cartesische coördinaten.
- Leid de uitdrukking af voor de divergentie in orthogonale coördinatenstelsels.
- Bereken de divergentie in bolcoördinaten.

3.
- Geef de definitie en eigenschappen van een orthogonale operator.
- Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van een orthogonale operator.
- Wat is de voorstelling van een orthogonale operator in de basis van de eigenvectoren?

### Academiejaar 2021-2022 1ste zit

### Theorie

1. Leg uit wat je weet over:
    1. het scalar product van 2 vectoren.
    2. het vectorieel product van 2 vectoren.
    3. het uitwendig product van 2 vectoren.

1. Leg het volgende eveneens uit:
    1. Wat is de rotor, geef een uitdrukking uit de fysica.
    2. Leid de uitdrukking voor de rotor af in carhtesische coordinaten.
    3. Leid de uitdrukking van de rotor af in orthogonale stelsels.
    4. Geef de rotor in bolcoordinaten.

1. Leg wederom uit:
    1. Wat is de definitie van een orthogonale operator
    2. Geef de eigenschappen van een orthogonale operator
    3. Wat zijn de eigenvectoren en eigenwaarden van een orthogonale operator (bewijs)
    4. Geef de orthogonale operator in basis van de eigenfuncties

## Academiejaar 2020 - 2021 1$^{ste}$ zit

### Theorie

1. 
    1. Geef de definitie en de betekenis van de metriek. Waarvoor wordt de metriek gebruikt?
    2. Leid de transformatieformules van de metriek af. Is de metriek een fysische grootheid? Leg uit
    3. Geef met behulp van de metriek een uitdrukking voor
        1. Scalair product tussen 2 vectoren
        2. Lengte van een vector
        3. De hoek tussen 2 vectoren
        4. De lengte van een kromme
    4. Leid een uitdrukking af voor die grootheden in orthogonaal en orthonormaal coördinatenstelsels.
    5. Wat is het volume-element en waarvoor wordt het gebruikt? Gebruik de metriek om het volume-element van orthogonaal coördinatenstelsels te berekenen.

2.
    1. Geef de definitie en fysische betekenis van de divergentie. Wat is het verband tussen de divergentie en behoudswetten?
    2. Leid de uitdrukking af voor de divergentie en een vector in cartesische coördinaten.
    3. Leid de uitdrukking af voor de divergentie in orthogonaal coördinatenstelsel.
    4. Bereken de divergentie in bolcoördinaten.
    5. Leid de integraalstelling van Gauss af.

### Oefeningen

Schrijf voor alle vragen je uitwerking op, enkel het eindresultaat is niet voldoende.

1. Bewijs voor alle scalaire functies f op een cartesische ruimte geldt dat $\nabla\times(\nabla f)=0$
2. Werk uit met indexnotatie in een cartesische n-dimensionale ruimte$\nabla\cdot(\nabla\cos(||r||2))$
3. Werk volgende opgaven uit in een cartesisch orthogonaal stelsel (x,y,z)
    1. $B\cdot(\nabla\times A)$ met A=xzex+2xyz2ez en B=yzex+xzey+xyez
    2. $\nabla\cdot(fC)$ met f=√xyz en C=xex+y2ey+2x2y2ez
4. Gegeven een cartesisch orthogonaal assenstelsel (x,y,z) het coördinatenstelsel (a,b,c) met transformatieformules:
    1.
        1. x=a2sin(b)cos(c)
        2. y=a2sin(b)sin(c)
        3. z=a2cos(b)
    2. Stel de transformatieformules op, die op de cilindercoördinaten (ρ,ϕ,z) in functie van (a,b,c) bepalen.
    3. Stel de inverse transformatieformules op, die de (a,b,c)-coördinaten bepalen in functie van de cilindercoördinaten (ρ,ϕ,z).
    4. Bereken de metriek van het (a,b,c) stelsel. Begin hiervoor van de metriek in coördinaten (g11=1,g22=ρ2,g33=1).
    5. Is het (a,b,c) stelsel orthogonaal? Recht- of kromlijnig? Verklaar je antwoord.
    6. Schrijf de eenheidsvectoren van het (a,b,c) stelsel in functie van de basisvectoren van cilindercoördinaten.
    7. Gegeven het vectorveld F=aa+ab+ac, som van de basisvectoren van het (a,b,c) stelsel. Zet dit vectorveld om naar cilindercoördinaten.

## Academiejaar 2019 - 2020 1ste zit

Prof. Paul Scheunders

### Theorie

Vraag 1

1. Geef de definitie van het vectorieel product tussen 2 vectoren (in carthesische coördinaten). Geef een voorbeeld uit de fysica.
2. Waarom levert het vectoriële product een pseudovector op?

3. Bereken een uitdrukking voor →UX(→VX→W)

Vraag 2

1. Geef de definitie en fysische betekenis van de divergentie. Geef een voorbeeld uit de fysica. Wat is het fysische verband tussen de divergentie en de behoudswetten?
2. Leid af: divergentie in cartesische coördinaten
3. Leid af: divergentie in orthogonale coördinaten
4. Leid af: divergentie in bolcoördinaten

Vraag 3

1. Geef de definitie van een orthogonale operator
2. Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van een orthogonale operator

**Oefeningen**

Vraag 1
Gegeven het cilindercoördinatenstelsel en de transformatieformules voor (a,b,c)

1. Stel de bijhorende transformatiematrix op
2. Bepaal de metriek in het (a,b,c)-stelsel
3. Bepaal de inverse transformatieformules
4. Is het (a,b,c)-stelsel recht-/kromlijnig? Is het orthogonaal?
5. Geef de eenheidsvectoren in het (a,b,c)-stelsel in functie van die in cilindercoördinaten
6. Gegeven f=a∗c∗cos(b). Bepaal de gradiënt van f in functie van de basisvectoren in cilindercoördinaten

Vraag 3
Bewijs met indexnotatie, in een carthesische ruimte, →r=xi→exi

1. →∇X(sin(→r∗→r)∗→r)=→0

Vraag 3
Werk uit in 3-dimensionele, carthesische coördinaten

1. →∇X→A met →A=sin(xy)→ax−zecos(ln(y))∗→ay+exy→az
2. →∇((→∇→B)∗(→∇f)) met →B=x4z→ax+zcos(z)→ay+z→az en f=xecos(y)

## Academiejaar 2018 - 2019 $1^{\text{ste}}$ zit

Prof. Paul Scheunders

**Oefeningen**

Vraag 1
Werk uit met indexnotatie in een cartesische, n-dimensionale ruimte:

$\vec{\nabla}(\vec{\nabla}\cdot(\vec{v}\cdot\vec{v})\vec{r})$

met $\vec{r}=x_i\vec{e}_i$.

Vraag 2
Gegeven het cartesisch, orthonormaal assenstelsel $(x,y,z)$ en het coördinatenstelsel $(a,b,c)$ met als transformatieformules:

$$\begin{cases} x=e^a\sin b\cos c \\ y=e^a\sin b\sin c \\ z=e^a\cos b \end{cases}$$

- Stel de transformatieformules op van $(a,b,c)$ naar $(\rho,\phi,z')$.
- Stel de transformatieformules op van $(\rho,\phi,z')$ naar $(a,b,c)$.
- Bereken de metriek van het $(a,b,c)$-stelsel, uitgaande van de metriek in cylindercoördinaten.
- Schrijf de eenheidsvectoren van het $(a,b,c)$-stelsel i.f.v. basisvectoren in cylindercoördinaten.

- Is het $(a,b,c)$-stelsel orthogonaal? Is het recht- of kromlijnig?

Vraag 3
Werk uit in driedimensionale, cartesische coördinaten:

- $\vec{\nabla}\times(\phi\vec{A})$ met $\vec{A}=\cos y\,\vec{e}_x-x\sin y\,\vec{e}_y$ en $\phi=x\cos y-\sin y$

- $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}e^{|\vec{r}|^2})$ met $\vec{r}=x_i\vec{e}_i$

Extra
Gegeven de volgende geparametriseerde kromme in cylindercoördinaten:

$$\begin{cases} \rho=a \\ \phi=\cos\lambda \\ z'=a\cos\lambda \end{cases}$$

met $a\in\mathbb{R}$. Bereken de lengte van deze kromme voor $\lambda\in[\frac{\pi}{2},\pi]$.

## Academiejaar 2017 - 2018 2$^{de}$ zit

Prof. Paul Scheunders

### Theorie

Vraag 1

- Geef de fysische betekenis van de divergentie van een vector.
- Leid in cartesische coördinaten de uitdrukking af van de divergentie.
- Leid in orthogonale coördinaten de uitdrukking af voor de divergentie.

- Bereken hieruit de divergentie in cilindercoördinaten.

Vraag 2

- Geef de definitie van eigenwaarden en eigenvectoren van een lineaire operator en geef aan hoe je deze kan berekenen. Bedenk enkele toepassingen.
- Geef de definitie van een orthogonale operator. Hoe ziet de matrixvoorstelling eruit in een orthonormale basis?
- Bereken de eigenwaarden en eigenvectoren van een orthogonale operator.

## Academiejaar 2015 - 2016 1ste zit

### Theorie

1. Geef de definitie en leidt de transformatieformules af van de metriek.
    1. Beschrijf de functie en het nut van de metriek, gebruik voorbeelden.
    2. bereken de metriek en de basisvectoren van de bolcoördinaten.
2.
    1. Leidt de uitdrukking af voor de rotor van een vector, in cartesische coördinaten
    2. en in orthogonale coördinatenstelsels.
    3. Bereken de rotor in cilindercoördinaten.
3. Beschrijf een rotatie met behulp van de hoeken van Euler.

### Oefeningen

1. Gegeven het cartesisch coördinatenstelsel (x,y,z) en het coördinatenstelsel (ρ,ϕ,z′) volgende transformatieformules:
   {x=eρcosϕ′y=eρsinϕ′z=z′
    1. Geef de transformatieformules naar het nieuw coordinatenstelsel vanuit cylindercoordinaten
    2. Bereken de metriek vanuit de cylindermetriek (geef ook je uitwerking)
    3. Geef de basisvectoren in functie van de cylinderbasisvectoren
    4. Geef de eenheidsvectoren in functie van de cylinderbasisvectoren
    5. Geef de eenheidsvectoren in functie van de cylindereenheidsvectoren
2. Gegeven de definitie voor het scalair veld f en de vectoren →A en →B
   f=x3+y3+z3→A=cos(y)→ex+xsin(y)→ey+→ez→B=xcos(y)→ex+sin(y)→ey−x→ez
    1. Bereken in dit cartesisch stelsel $\Delta$f, ∇×→A en ∇×(→A.→B)
    2. Transformeer $\Delta$f, ∇×→A en ∇×(→A.→B) naar cilindercoördinaten.
3. Werk volledig uit in de indexnotatie:
   →∇(→∇.(→r.→r)→r)
   Met →r=xi→ei een vectorveld in een cartesisch orthonormaal assenstelsel.

## Academiejaar 2014 - 2015 1ste zit

### Theorie

1. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformule van de metriek. Geef met hulp van de metriek een uitdrukking voor:
    - Het scalair product tussen 2 vectoren
    - De lengte van een vector
    - De hoek tussen 2 vectoren
    - De lengte van een kromme
      Wat is de uitdrukking voor die grootheden in orthogonale en orthonormale coördinatenstelsels?
2. Leid de uitdrukking af voor de rotor van een vector. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
3. Eigenwaarden/-vectoren
    - Wat zijn eigenwaarden en eigenvectoren?
    - Waarvoor kan je deze gebruiken? Bedenk een aantal toepassingen
    - Bereken de eigenvectoren bij een orthogonale operator

## Academiejaar 2013 - 2014 $2^{de}$ zit

### Theorie

1. Voor 7 punten:
    - Geef een definitie voor de metriek, en leidt de transformatieformules af. Wat is het nut van de metriek? Bespreek enkele toepassingen.
    - Bereken de metriek en de basisvectoren in bolcoördinaten
2. Voor 8 punten:
    - Leid een uitdrukking af voor de rotor van een vector in een cartesisch coördinatenstelsel
    - en algemeen in een orthogonaal coördinatenstelsel
    - Bereken de rotor in bolcoördinaten
3. Voor 5 punten:
      Leid een uitdrukking af voor de snelheid en versnelling in bolcoördinaten, waarbij je gebruik maakt van een rotatievector.

### Oefeningen

1. Gegeven volgende transformatieformules:
      $\{x=e\rho\cos\phi' y=e\rho\sin\phi' z=z'$
    1. Geef de transformatieformules naar het nieuw coordinatenstelsel vanuit bolcoordinaten
    2. Bereken de metriek vanuit de bolmetriek (geef ook je uitwerking)
    3. Geef de basisvectoren in functie van de bolbasisvectoren
    4. Geen de eenheidsvectoren in functie van de bolbasisvectoren
    5. Is dit stelsel recht of kromlijnig? Verklaar ook waarom je je antwoord hebt gekozen

2. Gegeven de definitie voor $\phi$ en $A$:

   $$\phi = x^2yz^3 \text{ en } \vec{A} = 12xyz\vec{e}_x + y^2x^2z^3\vec{e}_y + 13yz^2\vec{e}_z$$

   1. Bereken $\vec{\nabla}\phi$ en $(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A}$
   2. Bereken $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A}]$ en $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A}])$
   3. Transformeer $(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A}$ en $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}\phi)\cdot\vec{A}]$ naar bolcoordinaten
3. Werk uit in carthesische coordinaten ($\vec{r} = x_i\vec{a}_i$

   $$\vec{\nabla}(\vec{r}\cdot e \vec{r}\cdot\vec{r}\vec{r}\cdot\vec{r})$$

## Academiejaar 2013 - 2014 1ste zit

Prof P. Scheunders

### Tussentijdse Test

Gegeven de transformatieformule van orthonormale, carthesische coördinaten naar log-polaire coördinaten:

$$\begin{cases} x = e^\rho\cos\theta \\ y = e^\rho\sin\theta \end{cases}$$

1. Bereken de metriek van het log-polair coördinatensysteem. Zijn log-polaire coördinaten orthogonaal? Waarom wel/niet?
2. Leidt transformatieformules af om van log-polaire coördinaten$(\rho,\theta)$ naar polaire coördinaten $(r,\phi)$ te gaan$\begin{cases} x = r\cos\phi \\ y = r\sin\phi \end{cases}$
3. Bereken de eenheidsvectoren van het log-polaire coördinatensysteem
4. Bereken metriek de metriek van het polair coördinatensysteem a.d.h.v. de transformatie van log-polaire naar polaire coördinaten (en noteer berekeningen)
5. Gegeven de vector $\vec{B} = \vec{e}_r + \vec{e}_\phi$. Geef de componenten van $\vec{B}$ in het log-polaire coördinatensysteem
6. Bereken de lengte van $\vec{B}$

### Theorie

1. Metriek
   1. Betekenis/definitie van de metriek.
   2. Gebruik de metriek om een uitdrukking te vinden voor:
      - scalair product van 2 vectoren
      - lengte van een vector
      - hoek tussen 2 vectoren
      - lengte van een kromme
   3. Bepaal deze grootheden in een orthogonaal en orthonomaal coordinatenstelsel
2. Divergent
   1. Bereken de divergentie in een carthesisch assenstelsel
   2. Hoe doe je dit in een orthogonaal assenstelsel?
   3. Geef de divergent in bolcoordinaten

3. Eigenwaarden/-vectoren
    1. Wat zijn eigenwaarden en eigenvectoren?
    2. Waarvoor kan je deze gebruiken? Bedenk een aantal toepassingen
    3. Bereken de eigenvectoren bij een orthogonale operator

### Oefeningen

1. Los op in carthesische cooordinaten→∇[→∇(e|→r|2)]
2. Gegeven een vector →A=z→ex+x→ey+y→ez
    1. Los →∇×→A op in carthesische coordinaten
    2. Transformeer →A naar cilindrische coordinaten (ρ,ϕ,z′)
    3. Los →∇×→A op in cilindrische coordinaten
    4. Transformeer je oplossing van de cilindrische coordinaten terug naar een carthesisch stelsel
3. Gegeven een coordinatentransformatie naar een assentstelsel (x′,y′), en een parametervergelijking in dat assenstelsel:
   {x=x′−y′sin(α)cos(α)y=y′
   {x′(t)=t22cos(α)+t33sin(α)y′(t)=t33
    1. Maak een shcets van hoe beide assenstelsel ten opzichte van elkaar liggen. Je hoeft de parametervergelijking niet te schetsen
    2. Bepaal de metriek van het (x′,y′)stelsel. Is dit stelsel orthogonaal? Is het recht- of kromlijnig? Verklaar!
    3. Bereken de booglengte van de parametervergelijking in het (x′,y′)stelsel over een interval t∈[0,1]
    4. Transformeer de parametervergelijking naar het (x,y) stelsel
    5. Bereken de booglengte van de parametervergelijking over een interval t∈[0,1] in het (x,y) stelsel

## Academiejaar 2012 - 2013 2$^{de}$ zit

Prof P. Scheunders

### Theorie

1. 
    1. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformule van de metriek.
    2. Bereken de metriek voor cilindercoördinaten.
2. 
    1. Leidt de uitdrukking af voor de divergentie van een vector.
    2. Bereken de divergent in cilindercoördinaten.
3. Leidt een uitdrukking af voor de snelheid en versnelling in bolcoördinaten.

## Academiejaar 2012 - 2013 1$^{ste}$ zit

### Theorie

1. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformule van de metriek. Geef met hulp van de metriek een uitdrukking voor:
    - Het scalair product tussen 2 vectoren
    - De lengte van een vector
    - De hoek tussen 2 vectoren
    - De lengte van een kromme
      Wat is de uitdrukking voor die grootheden in orthogonale en orthonormale coördinatenstelsels?
2. Leid de uitdrukking af voor de rotor van een vector. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
3. Bereken de eigenwaarde en eigenvectoren van een orthogonale operator.

### Oefeningen

1. Gegeven het vectorveld $\vec{r}=x_i\vec{e}_i$ en het scalair veld $\Phi=x_jx_j^2$ in een cartesisch orthonormaal stelsel. Werk volledig uit in de indexnotatie:
    - $(\vec{\nabla}\Phi)\times\vec{r}+\Phi(\vec{\nabla}\times\vec{r})$
    - $\vec{\nabla}.(2\vec{r}\Phi)$
    - $(\vec{r}.\vec{\nabla})\vec{r}+\vec{r}(\vec{\nabla}.\vec{r})$
2. Gegeven de coördinatentransformatie van een cartesisch orthonoraal stelsel (x,y) naar het (v,w)-stelsel met:
   $\begin{cases} x=\frac{v^2+w^2-2w}{v^2+w^2} \\ y=\frac{2v}{v^2+w^2} \end{cases}$
    - Bereken de metriek van het (v,w)-stelsel.
    - Bereken in het (v,w)-stelsel de booglengte voor $\lambda\in[a..b]$ van de parameterkromme beschreven door:
      $\begin{cases} v=3\lambda \\ w=\lambda \end{cases}$
    - Transformeer de parameterkromme naar het (x,y)-stelsel.
    - Bereken in het (x,y)-stelsel de booglengte voor $\lambda\in[a..b]$ van de parameterkromme.
    - Is het assenstelsel rechtlijnig en/of orthogonaal?
3. Gegeven in cartesische coördinaten:
   $\vec{A}=y\vec{e}_x+x\vec{e}_y+0\vec{e}_z$
   $\vec{B}=x\vec{e}_x-y\vec{e}_y+1\vec{e}_z$
    - Bewijs dat $\vec{A}$ en $\vec{B}$ orthogonaal zijn.
    - Zoek een vectorveld $\vec{C}$ zodat $\vec{A},\vec{B}$ en $\vec{C}$ een orthogonale basis vormen.
    - Wat is de metriek van het nieuwe stelsel?
    - Bepaal de eenheidsvectoren in het nieuwe stelsel.

## Academiejaar 2011 - 2012 2$^{de}$ zit

### Theorie

1. Definitie/betekenis van de metriek
2. Rotor, leidt af voor bolcoordinaten
3. Eigenwaarden en -vectoren

### Oefeningen

1. Gegeven volgende tranformatieformules:
2. r=u2+v22
3. θ=arctan(uvu2−v2)
4. ϕ=ϕ′
    - Geef de metriek, is dit stelsel orthogonaal?
    - Geef de lengte van een gegeven vector F
    - Transformeer naar bolcoordinaten
    - Geef de lengte van F in bolcoordinaten
5. Bewijs dat ∇×(r×s|r|3)=−s|r|3+rr.s|r|5
6. Beeld je een attractie in waarbij een arm draait rond een centrum. Aan het einde van die arm hangt een zitje dat ook rond zijn eigen as draait. De arm beweegt ook op en neer met de frequentie van een cosinus. Leidt stap voor stap de bewegingsvergelijking (ifv tijd) van een persoon af die op dat stoeltje zit. In de uitleg staat nog iets meer hulp (welke assenstelsels je moet gebruiken, welke stappen je best volgt)

## Theorie

### Januari 2001 groep 1

1. Bespreek het concept van `metriek'. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.
2. Toon aan hoe de metriek nuttig is om basis en reciproke basis van een coördinatenstelsel te bepalen. Bepaal de metriek in bolcoördinaten en gebruik de metiek om de basis en reciproke basis te berekenen.
3. Toon aan hoe de metriek gebruikt wordt om de rotor van een vetor te bepalen. Bereken de rotor in bolcoördinaten.

### Januari 2001 groep 2

1. [covariante vectoren:] vertel hier zoveel van als je kan bedenken.
2. vertel wat over covariantie en de gradient in bolcoördinaten
3. rotor en reken uit in cylindrische coördinaten.
4. vectorieel product

### Januari 2002

1. Bespreek het concept van de `metriek' van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.
2. Toon aan hoe de metriek nuttig is om de basis en de reciproke basis van een coördinatenstelsel te bepalen. Bepaal de metriek in cylindercoördinaten en gebruik die om de basis en reciproke basis te berekenen.
3. Toon aan hoe de metriek gebruikt wordt om de rotor van een vector te definieren. Bereken de rotor in cylindercoördinaten.

**Januari 2005**

---

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Bespreek het concept van een metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.
2. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen. Bereken de metriek in cylindercoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in cylindercoördinaten.

**Augustus 2005**

---

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie en de betekenis van de covariante componenten van een vector en van de reciproke basis. Leid de transformatieformules af.
2. Definieer het vectoriële product met behulp van diens covariante componenten.
3. Toon aan dat de gradiënt van een scalair gedefineerd wordt m.b.v. covariante componenten. Leid de gradiënt in bolcoördinaten af.
4. Toon aan dat de rotor van een vector gedefineerd wordt m.b.v. covariante componenten. Leid de rotor in bolcoördinaten af.

**Januari 2006**

---

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie en de betekenis van de covariante componenten van een vector en van de reciproke basis. Leid de transformatieformules af.
2. Definieer het vectoriële product met behulp van covariante componenten. Bespreek het vectoriële product van de basisvectoren, en de geometrische betekenis van het vectoriële product.
3. Toon aan dat de gradiënt van een scalair gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Geef de fysische betekenis van een gradiënt. Bereken de gradiënt in bolcoördinaten.
4. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
5. Bespreek infinitesimale rotaties.

**Januari 2007**

---

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen.
2. Bereken de metriek in bolcoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in bolcoördinaten.

3. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Bespreek de hoeken van Euler.

**Januari 2008**

---

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen.
2. Bereken de metriek in bolcoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in bolcoördinaten.
3. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Bespreek de hoeken van Euler.

**Juni 2009**

---

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Bepaal met behulp van de metriek een uitdrukking voor: het scalair product tussen 2 vectoren, de lengte van een vector, de hoek tussen 2 vectoren en de lengte van een kromme.
   Wat is de uitdrukking voor die grootheden in orthogonale coördinatenstelsels?
2. Bereken de metriek en de basis in cilindercoördinaten.
3. Leid de uitdrukking voor de rotor af. Bereken de rotor in cilindercoördinaten.

**Juni 2010**

---

{Groep 1} Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie, de betekenis en transformatieformules van de metriek.
2. Bereken de metriek en de basisvectoren in bolcoördinaten.
3. Leid de uitdrukking voor de rotor af. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Leid een uitdrukking af voor de snelheid en versnelling in bolcoördinaten.

{Groep 2} Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules van de metriek. Geef met behulp van de metriek een uitdrukking voor:
    - Het scalair product.
    - Lengte van een vector.
    - Hoek tussen 2 vectoren.
    - Lengte van een kromme.
    - Wat is de uitdrukking voor deze grootheden in orthogonale coördinatenstelsels?
2. Bereken de metriek en de basisvectoren van bolcoördinaten.
3. Leid de uitdrukking voor de rotor af. Bereken de rotor in bolcoördinaten.

## Oefeningen

### September 1995

1. Een vector veld $\vec{f}$ is gegeven door $\vec{f}=(x^2+y^2+z^2)(\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_z)$ waar $(x,y,z)$ cartesische coördinaten in een driemensionele vlakke ruimte zijn.

1. Bereken het vektorveld rot$\vec{f}$ in cartesische coördinaten
2. Transformeer $\vec{f}$ naar cylindercoördinaten
3. Bereken rot $\vec{f}$ in cylindercoördinaten, vertrekkend van $\vec{f}$ in cylindercoördinaten

### Juni 1998

1. Beschouw een vectorveld gegeven door zijn cartesische componenten $\vec{f}=(x^2+y^2+z^2)^T$
    1. Bereken rotf in cartesische coördinaten.
    2. Tansformeer f naar cylindercoördinaten.
    3. Bereken rotf rechtstreeks in cylindercoördinaten.
    4. Transformeer rotf terug naar cartesische coördinaten.
2. Beschouw een (2-dimensionaal) boloppervlak. Neem de $\theta$ en $\varphi$ van bolcoördinaten als onafhankelijke coördinaten die dit oppervlak beschrijven. De metriek op het boloppervlak (straal R is gegeven door$G=(g_{ij})=\begin{pmatrix}R^2&0\\0&R^2\sin^2\theta\end{pmatrix}$

Bereken de Christoffelsymbolen van de 2de soort.

### Juni 1999

Gegeven een scalare functie $V=Q\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

1. Bereken $\vec{E}=-\text{grad}V$ in cartesische coördinaten.
2. Transformeer de functie V naar cilindercoördinaten.
3. Transformeer $\vec{E}$ naar cylindercoördinaten.
4. Bereken, gebruik makend van de functie V in cilindercoördinaten, het vectorveld $\vec{E}$ in cilindercoördinaten.

### September 1999

1. Gegeven het vectorveld f in cilindercoördinaten:
    1. Bereken divf in cilindercoördinaten.
    2. Transformeer de vector →f naar cartesische coördinaten.
    3. Transformeer divf naar cartesische coördinaten.
    4. Bereken divf in cartesische coordinaten vetrekkende van →f in cartesische coordinaten.
2. Beschouw een contravariante vector →f=(x2y2z2)

in cartesische coördinaten. Stel dat we deze vector →f transfomeren naar bolcoördinaten →fI , daarna omzetten naar een covariante vector →fII en dan transformeren naar cilindercoördinaten →fIII . Indien we deze vector →fIII terug omzetten naar cartesische coördinaten, wat is dan het resultaat?

### Juni 2000

---

1. Beschouw een functie f(x,y,z) in cartesische coördinaten:
    f(x,y,z)=sinh(x2+y2+z2)+cosh(x2+y2+z2)
    1. Bereken ∇f in cartesische coördinaten.
    2. Transformeer f naar bolcoördinaten.
    3. Transformeer ∇f naar bolcoördinaten.
    4. Bereken ∇f in bolcoördinaten vertrekkende van f in bolcoördinaten (zie 1b).

### Januari 2001

---

Greg Tisson

1. Gegeven een scalair veld τ=ρ2(1+2cos(φ)sin(φ)) in cilindercoördinaten.
    1. Bereken grad τ en schrijf deze vector met behulp van de eenheidsvectoren (→eρ,→eφ,→ez)
    2. Transformeer τ naar cartesische coördinaten.
    3. Transformeer grad τ naar cartesische coördinaten.
    4. Bereken grad τ vertrekkende van τ in cartesische coördinaten.
2. Stel →f=(2r(1+cosφsinθ)rcosθsinφcosφ) een contravariante vector in bolcoördinaten. Bereken rotf
3. Gegeven a een scalair, →B een vector, →k een constante vector en →r de plaatsvector.
    1. Bewijs →∇×(a→B)=a→∇×(→B)+→∇(a)×→B
    2. Bereken →∇×(→kei→k⋅→r)

### Juni 2005

---

Greg Tisson

1. Gegeven een vectorveld in cartesische coördinaten $\vec{f}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_z)$
    1. Bereken $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}$ in cartesische coördinaten,
    2. Transformeer $\vec{f}$ naar bolcoördinaten,
    3. Bereken $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}$ in bolcoördinaten,
    4. Transformeer $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}$ van cartesische coördinaten naar bolcoördinaten en vergelijk met 1.3.

## Augustus 2005

Greg Tisson

1. Gegeven een vectorveld in cartesische coördinaten $\vec{f}=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}(\vec{e}_x+\vec{e}_y+\vec{e}_z)$
    1. Bereken $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}$ in cartesische coördinaten,
    2. Transformeer $\vec{f}$ naar bolcoördinaten,
    3. Bereken $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}$ in bolcoördinaten,
    4. Transformeer $\vec{\nabla}\cdot\vec{f}$ van cartesische coördinaten naar bolcoördinaten en vergelijk met 1.3
2. Bereken $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\times\vec{A})$ als $\vec{A}=2xz^2\vec{e}_x-yz\vec{e}_y+3xz^3\vec{e}_z$

## Januari 2007

1. Werk uit in Carthesische coördinaten $\vec{\nabla}[\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r^3}]$ met $\vec{r}=z_i\vec{a}_i$
2. Gegeven de volgende scalairen in een carthesisch assenstelsel $A=\frac{x^2+y^2+z^2}{2}, B=\frac{x^2+y^2-z^2}{2}$
    1. Bereken in dit carthesisch coördinatenstelsel $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)]$ en $(\vec{\nabla}A)\times(\vec{\nabla}B)$
    2. Transformeer $A, B, \vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)]$ en $(\vec{\nabla}A)\times(\vec{\nabla}B)$ naar cillindercoördinaten.
    3. Bereken in cillindercoördinaten $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)]$ en $(\vec{\nabla}A)\times(\vec{\nabla}B)$

## Januari 2008

1. Werk uit in cartesische coördinaten $\vec{\nabla}\times\frac{\vec{r}}{r}e^{\vec{r}.\vec{k}}$ met $\vec{r}=x_i\vec{a}_i$ en $\vec{k}=\text{constant}$
2. Gegeven een cartesisch assenstalsel (x,y,z) en een assenstelsel (u,v,w) die verbonden zijn met de volgende transfomatieformules $x=uv+vw$ $y=u^2-w^2$ $z=w-u$
    1. Bereken van het coördinatenstelsel de Christoffelsymbolen van de eerste soort met als eerste index 1.
3. Gegeven de volgende scalairen in een cartesisch assenstelsel (x,y,z) $A=-\frac{1}{r^2}, \vec{B}=\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_x+\frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e}_y-\sqrt{x^2+y^2}\vec{e}_z$
    1. Bereken in dit cartesisch stelsel $(\vec{\nabla}A).(\vec{B})$ en $(\vec{\nabla}A)\times(\vec{B})$
    2. Transformeer A, B $(\vec{\nabla}A).(\vec{B})$ en $(\vec{\nabla}A)\times(\vec{B})$ naar bolcoördinaten.
    3. Bereken uit A en B in cilindercoördinaten $(\vec{\nabla}A).(\vec{B})$ en $(\vec{\nabla}A)\times(\vec{B})$

## September 2008

1. Werk uit in (3D) cartesische coördinaten→k×(→∇×→ϕ) met →phi=−y→ex+x→ey en →k=constant
2. Gegeven een cartesisch assenstalsel (x,y,z) en een assenstelsel (u,v,w) die verbonden zijn met de volgende transfomatieformulesx=veuy=ve−uz=w
   Bereken van het coördinatenstelsel (u,v,w) de metriek en de Christoffelsymbolen van de eerste soort.
3. Gegeven de volgende scalairen in een cartesisch assenstelsel (x,y,z) A=x2+y2+z22,B=z2x2+y2
   1. Bereken in dit cartesisch stelsel (→∇A).(→∇B) en (→∇A)×(→∇B)
   2. Transformeer A,B, (→∇A).(→∇B) en (→∇A)×(→∇B) naar cilindercoördinaten.
   3. Bereken uit A en B in cilindercoördinaten (→∇A).(→∇B) en →∇A)×(→∇B)

### Juni 2009

---

1. Werk uit in cartesische coördinaten →∇[→∇r3] met →r=xi→ai
2. Gegeven de volgende scalair en vector in een cartesisch assenstelsel (x,y,z) A=xyz2, →B=2x→ex+2y→ey−2z→ez
   1. Bereken in dit cartesisch stelsel →∇[(→∇A).→B] en →rot(→∇[(→∇A).→B])
   2. Transformeer A,→B,→∇[(→∇A).→B],→rot(→∇[(→∇A).→B]) naar cilindercoördinaten
   3. Bereken uit A en →B in cilindercoördinaten →∇[(→∇A).→B] en →rot(→∇[(→∇A).→B])
3. Beschouw een dunne staaf met lengte L, geisoleerd van de omgeving. Op het begintijdstip t=0 bevindt een gedeelte van de staaf 2δ rond het middelpunt) zich op de hoogte Ψ0 de rest heeft temperatuur 0. De warmtegeleiding wordt gegeven door de golfvergelijkingΨ″−1k˙Ψ=0 De uiteinden van de staaf zijn geisoleerd, zodat daar de homogene Neumann randvoorwaarden gelden.{Ψ′(0,t)=0Ψ′(L,t)=0.
   1. Geef de beginvoorwaarden.
   2. Stel deelvergelijkingen op met behulp van de methode van scheiding van veranderlijken.
   3. Identificeer en los het eigenwaardeprobleem op.
   4. Identificeer en los het restprobleem op.
   5. Zoek uit alle oplossingen, diegene die voldoet aan de beginvoorwaarden.

### Juni 2010

---

1. Werk uit in cartesische coördinaten →∇[→∇(→r→r.→r)] met →r=xi→ai
2. Gegeven cilindercoordinaten (ρ,ϕ,z) en de coordinatentransformatieρ=τσϕ=ϕ′z=0.5(τ2−σ2), verder is een vectorveld →F gegeven→F=(τ−σ)→aτ+(τ+σ)→aσ+√2(τ2−σ2τσ)→a′ϕ
   1. Bereken de metriek van het (τ,σ,ϕ′) stelsel
   2. Bereken de lengte van →F in het (τ,σ,ϕ′) stelsel
   3. Transformeer het vectorveld →F naar cilindercoordinaten
   4. Bereken de lengte van →F in cilindercoordinaten
   5. bonus: Transformeer →F naar carthesische coordinaten, uitgaande van →F in cilindercoordinaten

3. Gegeven in een cartesisch assenstelsel
   ϕ=x2yz3,→A=12xyz→ex+y2x2z3→ey+13yz2→ez, bereken in dit cartesisch stelsel
    1. →∇ϕ en (→∇ϕ).→A
    2. →∇[(→∇ϕ).→A] en →∇×→∇[→∇ϕ.→A]
    3. Transformeer naar cilindercoordinaten (→∇ϕ).→A en →∇[(→∇ϕ).→A]

**Januari 2012**

---

1. Een mannetje vertrekt op t=0 onder een lantaarnpaal en loopt er met een horizontale snelheid →v in een rechte lijn van weg. Gebruik de tijd t als derde dimensie (naast x en y). Vertrekkende van het cartesisch orthonormaal assenstelsel (x,y,t) in de figuur, definieer een nieuw polair assenstelsel (r,ϕ,t′) zodat ϕ=0 op t=0 en ϕ toeneemt naarmate het mannetje zich verwijdert van de lantaarnpaal. Gegeven dat de lantaarnpaal 4 meter hoog is, en het mannetje 2 meter groot:

    Fout bij het aanmaken van de miniatuurafbeelding: Bestand is zoek

    - Bereken de positie p′h en de snelheid →v′h van het hoofd van het mannetje in het (r,ϕ,t′) assenstelsel.
    - Bereken de positie p′s, en de snelheid →v′s van de schaduw van het hoofd van het mannetje in het (r,ϕ,t′) assenstelsel.
    - Definieer een nieuw polair assenstelsel (r′,ϕ′,t") met oorsprong de bovenkant van het hoofd van het mannetje, en ϕ′ zó dat ϕ′=0 als het mannetje recht naar beneden kijkt, en ϕ′=π/2 als hij weg van de lantaarnpaal recht voor zich uit kijkt. Bereken in dit nieuwe assenstelsel de positie ps" en de snelheid →v′s van de schaduw van het hoofd van het mannetje.
2. Gegeven de volgende vectoren in een cartesisch orthonormaal assenstelsel (x,y,z)
   →A=zx→ex+xy→ey+yz→ez→B=cosy→ex−xsinx→ey→C=xcosy→ex−siny→ey
    - Bereken in dit cartesisch stelsel →∇·→A, →∇×→B en ∇(→B·→C).
    - Transformeer →∇·→A, →∇×→B en ∇(→B·→C) naar cilindercoördinaten.
3. Toon aan in een cartesisch orthonomaal assenstelsel dat
   (→A×→B)·((→B×→C)×(→C×→A))=((→A×→B)·→C)2
   met →A, →B en →C willekeurige vectoren.

Categorieën:
- Fysica
- 1BFYS