Numerieke analyse

Numerieke Analyse	
Richting	Wiskunde
Jaar	1BWIS,2BINF

Bespreking

Dit vak wordt gegeven in het tweede semester van de eerste bachelor wiskunde en de tweede bachelor informatica. Het doel is het onderzoeken van algoritmes, het benaderen van nulpunten en dekpunten en interpolatie. Het vak wordt gegeven door prof Karel in 't Hout. De theorielessen zijn op zich vrij saai, en al bijna alles wat daar aan bod komt, staat ook in de cursus (dictaat). De oefeningen worden gegeven door Jacob Snoeijer. Tussen de "Samenvattingen + oplossingen oefeningen" van informatica kan je uitgewerkte oefeningen terugvinden.

Examenvragen

Dit examen wordt in een keer afgelegd, theorie en praktijk op één examen.

Juni 2021

1. Voor een willekeurige $a\in[0,\pi]a\in[0,\pi]$ is de waarde $y=2\sin 2ay=2\sin 2a$. We onderzoeken algoritme AA met computerversie
   $\tilde{A}:\tilde{y}=2\otimes(SIN(\tilde{a})\otimes SIN(\tilde{a}))$
   $$\tilde{A}:\tilde{y}=2\otimes(SIN(\tilde{a})\otimes SIN(\tilde{a}))$$

   Hierin is $\tilde{a}=fl(a)\tilde{a}=fl(a)$ en $SIN(x)=fl(\sin(x))SIN(x)=fl(\sin(x))$ voor representeerbare xx. Neem dat 22 representeerbaar is.
   1. Bepaal, voor willekeurige $a\in[0,\pi]a\in[0,\pi]$, het conditiegetal $\gamma a\gamma a$ van yy met betrekking tot aa.
   2. Is de opgave yy te berekenen goed geconditioneerd als $a\approx0,a=\pi2,a\approx\pi a\approx0,a=\pi2,a\approx\pi$? Licht toe.
   3. Toon aan dat voor $\sigma\sigma$ van AA geldt
      $\sigma\approx6$
      $$\sigma\approx6$$

      als $a\approx0a\approx0$.
   4. $y\sim y\sim$ wordt berekend met $A\sim A\sim$ en bewegende punt aritmetisch met $B=10B=10$ en aantal cijfers tt. Hoe groot met tt minstens zijn opdat voor alle $a\approx0a\approx0$ de absolute waarde van de relatieve fout in yy maximum $10-310-3$ is? Licht toe en geef als geheel getal.
2. Gegeven dat $x3-x-2=0x3-x-2=0$precies één oplossing $x2\in[1,2]x2\in[1,2]$ heeft:
   1. Bereken $x0x0$ en $x1x1$ van $x*x*$ met de bisectiemethode in interval $[1,2][1,2]$.
   2. Bereken $x1x1$ met de methode van Newton met $x0=2x0=2$.
   3. Bewijs
      $|xk-x*|<(16k)\forall k\ \ 0$
      $$|xk-x*|<(16k)\forall k\ \ 0$$

3. Ter benadering van $f(x)=t\sqrt{}f(x)=t$ voor $t>0t>0$ beschouwen we interpolerende polynoom PP van graad 2 behorende bij steunpunten $(1,1),(2,2-\sqrt{}),(3,3-\sqrt{})(1,1),(2,2),(3,3)$ en interpolerende polynoom QQ van graad 3 met steunpunten $(1,1),(2,2-\sqrt{}),(3,3-\sqrt{}),(4,2)(1,1),(2,2),(3,3),(4,2)$.
   1. Bereken met Neville $P(52)P(52)$
   2. Bepaal met de interpolatieformule van Newton de polynomen PP en QQ.
   3. Toon aan dat $|f(t)-Q(t)|<145|f(t)-Q(t)|<145$ voor $t=52t=52$
4. We beschouwen numerieke integratie ter benadering van
   $I=\ln(n)=\int n11tdtI=\ln(n)=\int 1n1tdt$
   1. Bereken de twee benaderingen met de trapeziumregel met $n=1n=1$ en $n=2n=2$ stapjes.
   2. Toon aan dat voor $n\geq1n\geq1$ geldt
      $0\leq I\sim-I\leq431n2$
      $$0\leq I\sim-I\leq431n2$$

5. Zij de functie $F:(a,b)\to R F:(a,b)\to R$ twee keer continu differentieerbaar, $x_*\in[a,b] x_*\in[a,b]$ is een nulpunt van FF en $x0\in(a,b) x0\in(a,b)$. Zij $\beta=\sup a<y<b 1|F'(y)|<\infty, \gamma=\sup a<y<b|P''(y)|<\infty \beta=\sup a<y<b 1|F'(y)|<\infty, \gamma=\sup a<y<b|P''(y)|<\infty$ en $x1,x2,x3,\ldots x1,x2,x3,\ldots$ de rij benadering van $x*x*$ gekregen door de methode van Newton uitgaande van $x0x0$. Neem aan dat deze rij in $[a,b][a,b]$ ligt. Bewijs dat
   $|xb-x*|\le 12\beta\gamma|xk-1-x*|2\forall k\ge 1$
   $$|xb-x*|\le 12\beta\gamma|xk-1-x*|2\forall k\ge 1$$

Juni 2020

1. Beschouw de opgave voor een willekeurig gegeven $a,b>0a,b>0$ de waarde yy te berekenen
   $y=ab(a+b)$
   $$y=ab(a+b)$$

   . Onderzoek hiertoe algoritme AA met computerversie
   $A\sim:=a\sim\oslash[b\sim\otimes(a\sim\oplus b\sim)]$
   $$A\sim:=a\sim\oslash[b\sim\otimes(a\sim\oplus b\sim)]$$

   , waarbij $a\sim=fl(a)a\sim=fl(a)$ en $b\sim=fl(b)b\sim=fl(b)$.
   1. Bewijs dat voor het conditiegetal $\gamma a\gamma a$ van yy m.b.t. aa geldt
      $0<\gamma a<1$
      $$0<\gamma a<1$$

      .
   2. Bewijs dat voor het conditiegetal $\gamma b\gamma b$ van yy m.b.t. bb geldt
      $-2<\gamma b<-1$
      $$-2<\gamma b<-1$$

      .
   3. Bepaal het stabiliteitsgetal $\sigma\sigma$ van AA.
2. Zij $F(x)=e-x+3x-3F(x)=e-x+3x-3$ voor $0\le x\le 10\le x\le 1$. Gegeven is dat FF precies één nulpunt $x*x*$ $[0,1][0,1]$ heeft.
   1. Bepaal de eerste twee benaderingen $x1,x2x1,x2$ van $x*x*$ die worden verkregen door toepassing van de methode van Newton met startwaarde $x0=0x0=0$. Het getal ee mag hierin voorkomen. Beschouw de vervolgens de iteratie
      $xk=1-13e-xk-1(k=1,2,3,\ldots)$
      $$xk=1-13e-xk-1(k=1,2,3,\ldots)$$

      met een willekeurig gegeven startwaarde $x0\in[0,1]x0\in[0,1]$.
   2. Bewijs dat $|xk-x*|\le(13)k|xk-x*|\le(13)k$ voor alle $k\ge 1k\ge 1$.

3. Gegeven zijn de punten tà=0,t1=2,t2=3,t3=4tà=0,t1=2,t2=3,t3=4 en bijhorende reële waardes y0,y1,y2,y3y0,y1,y2,y3. Zij:
   - PP het polynoom van graad 2 zodat P(ti)=yiP(ti)=yi voor i=0,1,2i=0,1,2;
   - QQ het polynoom van graad 2 zodat Q(ti)=yiQ(ti)=yi voor i=1,2,3i=1,2,3;
   - RR het polynoom van graad 3 zodat R(ti)=yiR(ti)=yi voor i=0,1,2,3i=0,1,2,3.
   - Veronderstel dat P(1)=0.47P(1)=0.47 en Q(1)=0.63Q(1)=0.63
   1. Bepaal de waarde R(1)R(1). Neem aan dat yi=f(ti)yi=f(ti) voor alle ii met een functie ff die willekeurig vaak continu afleidbaar is op [0,4][0,4] en voldoet aan |f(j)(t)|≤2−j|f(j)(t)|≤2−j voor alle 0≤t≤40≤t≤4 en j=1,2,3,≤j=1,2,3,≤
   2. Bepaal een bovengrens voor de fout |f(1)−R(1)||f(1)−R(1)|.
4. We bekijken numerieke integratiemethoden voor de waarde **I**=∫π/20sin4(t)dt**I**=∫0π/2sin4(t)dt.
   1. Bereken de benadering **I~I~** van **II** verkregen door toepassing van de regel van Simpson.
   2. Zij in het vervolg **I~nI~n** de benadering voor **II** verkregen door toepassing van de uitgebreide trapeziumregel met nn subintervallen. Bereken **I~1I~1** en **I~2I~2**.
   3. Bewijs dat |**I~n−I**|≤π324n2|**I~n−I**|≤π324n2 voor alle n≥1n≥1.
5. Zij functie F:(a,b)→RF:(a,b)→R twee keer continu differentieerbaar, x∗∈(a,b)x∗∈(a,b) nulpunt van FF, en x0∈(a,b)x0∈(a,b). Zij β=supa<y<b1|F′(y)|<∞,γ=supa<y<b|F″(y)|<∞β=supa<y<b1|F′(y)|<∞,γ=supa<y<b|F″(y)|<∞ en x1,x2,x3,…x1,x2,x3,… de rij benaderingen van x∗x∗ gedefinieerd door de methode van Newton uitgaande van x0x0. Neem aan dat deze rij in het interval (a,b)(a,b) ligt. Bewijs
   |xk−x∗|≤12βγ|xk−1−x∗|2

   |xk−x∗|≤12βγ|xk−1−x∗|2

   voor alle k≥1k≥1.

Juni 2019

Media:numerieke_analyse-18191.pdf

Augustus 2018

Media:NA_2018_zit2.pdf

Juni 2017

1. Beschouw de opgave om voor willekeurig gegeven a,b>0a,b>0 de waarde y te berekenen
   y=ab(a+b)

   $$y=ab(a+b)$$

   Onderzoek hiertoe algoritme A met computerversie
   A~:y~=a~⊘[b~⊗(a~⊕b~)]A~:y~=a~⊘[b~⊗(a~⊕b~)] waarbij a~=fl(a)a~=fl(a) en b~=fl(b)b~=fl(b) .
   - Bewijs dat voor het conditiegetal γaγa van yy m.b.t. aa altijd geldt
     0<γa<1

     $$0<\gamma a<1$$

   - Bewijs dat voor het conditiegetal γbγb van yy m.b.t. bb altijd geldt
     −2<γb<−1

     $$-2<\gamma b<-1$$

   - Bepaal het stabiliteitsgetal σσ van A.
   - De waarde y~y~ wordt berekend met A~A~ en bewegende punt aritmetriek met grondtal B=10B=10 en aantal cijfers tt. Hoe groot moet tt minstens zijn opdat men kan verwachten dat voor alle a,b>0a,b>0 de absolute waarde van de relatieve fout in yy maximaal 10−310−3 is? (Licht toe en geef je antwoord als geheel getal).
2. Zij F(x)=e−x+3x−3F(x)=e−x+3x−3 voor 0≤x≤10≤x≤1.
   - Bewijs dat FF precies één nulpunt x∗x∗ in [0,1][0,1] heeft.
   - Bepaal de eerste twee benaderingen x1,x2x1,x2 van x∗x∗ die worden verkregen door toepassing van de methode van Newton met startwaarde x0=0x0=0. Het getal ee mag hierin voorkomen.
   - Beschouw vervolgens de iteratie
     xk=1−13e−xk−1(k=1,2,3,...)xk=1−13e−xk−1(k=1,2,3,...) . Bewijs dat |xk−x∗|≤(13)k|xk−x∗|≤(13)k voor alle k≥1k≥1

3. Een vloeistof wordt opgewarmd tot 100 graden Celsius. De verwarming wordt vervolgens stopgezet en iedere 5 minuten wordt de temperatuur van de vloeistof gemeten. Men vindt zo het volgende resultaat
   tijdtemperatuur0100560103615222014258305

   $$\text{tijd}051015202530\text{temperatuur}1006036221485$$

   Zij P het interpolerend polynoom van graad 3 behorend bij de gegevens op de tijdstippen t=5,10,15,20t=5,10,15,20.
   - Bepaal met de interpolatieformule van Newton het polynoom P.
   - Zij ff de functie zodat voor iedere t≥0t≥0 de vloeistoftemperatuur op tijdstipt gelijk is aan f(t)f(t). Neem aan dat ff willekeurig vaak continu differentieerbaar op [0,∞][0,∞] is en dat de afgeleiden van ff voldoen aan
     |f(j)(t)|≤100(110)j

     $$|f(j)(t)| \leq 100(110)j$$

     (t≥0)(t≥0) voor j=1,2,3,...j=1,2,3,...
   - Leid een bovengrens af voor de fout |f(14)−P(14)||f(14)−P(14)|.
4. We bekijken numerieke integratiemethoden voor de waarde
   I=∫π20sin4(t)dtI=∫0π2sin4(t)dt .
   - Bereken I~I~ van II verkregen door toepassing van de regel van Simpson.
   - Zij in het vervolg I~nI~n de benadering van II verkregen door toepassing van de uitgebreide trapeziumregel met n subintervallen. Bereken I~1I~1 en I~2I~2
   - Bewijs dat (I~−I)≤π324n2(I~−I)≤π324n2 voor alle n≥1n≥1.
5. Zij functie F:[a,b]→RF:[a,b]→R twee keer continu differentieerbaar, x∗∈[a,b]x∗∈[a,b] een nulpunt van FF, en x0∈[a,b]x0∈[a,b]. Zij β=supa<y<b1|F′(y)|<∞β=supa<y<b1|F′(y)|<∞, γ=supa<y<b|F″(y)|<∞γ=supa<y<b|F″(y)|<∞ en x1,x2,x3,...x1,x2,x3,... de rij benaderingen van x∗x∗ gedefinieerd door de methode van Newton uitgaande van x0x0. Neem aan dat deze rij in het interval [a,b][a,b] ligt. Bewijs
   |xk−x∗|≤12βγ|xk−1−x∗|2∀k≥1

   $$|xk - x∗| \leq 12\beta\gamma|xk-1-x∗|2\forall k \geq 1$$

Augustus 2015

1. Stel dat a>1a>1 en de functie y=1a−1−1a+1=2a2−1y=1a−1−1a+1=2a2−1
   - A1=[1⊘(a~⊖1)]⊖[1⊘(a~⊕1)]A1=[1⊘(a~⊖1)]⊖[1⊘(a~⊕1)]
   - A2=2⊘(a~⊗a~⊖1)A2=2⊘(a~⊗a~⊖1)

   we stellen dat a~=fl(a)a~=fl(a) en dat 1 en 2 representeerbaar zijn

   1. Bereken γaγa
   2. Is γaγa goed geconditioneerd als a≈1a≈1? En als a≥2a≥2?
   3. Toon aan dat σ1=|γa|+2a+1σ1=|γa|+2a+1
   4. Toon aan dat σ2=|γa|+a2a2−1+2σ2=|γa|+a2a2−1+2
   5. Als a≥2a≥2, wat is dan het beste algoritme?

2. We hebben een functie $f(x)=2x^3-x-5=0$, $x^*\in[1,2]$ en we stellen dat er juist een nulpunt bestaat van $f(x)$ in dit interval.
    1. Bereken met de methode van newton x_1 met $x_0=\frac{3}{2}$
    2. De waarde 5 in $f(x)$ hebben we bekomen door een experiment met een maximum afwijking van $\frac{1}{20}$ in [1, 2].
        1. Toon aan dat $|\Delta y|\leq\frac{1}{250}$, met $x^*=\frac{3}{2}$
3. We hebben de functie $f(t)=t\sqrt{t}$ met de steunpunten $(1,1),(2,2\sqrt{2}),(4,8)$
    1. Bereken met de methode van Neville $P(3)$
    2. Bereken met de methode van Newton de polynoom P
    3. Bereken een bovengrens voor $|f(3)-P(3)|$
4. We hebben $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(t)dt$
    1. Bereken $\tilde{I}$ met de regel van Simpson
    2. We hebben nu I_n met n subintervallen. En we maken gebruik van de uitgebreide trapeziumregel.
        1. Bereken $\tilde{I}_1$
        2. Bereken $\tilde{I}_2$
        3. Toon aan dat $|\tilde{I}_n-I|\leq\frac{\pi^3}{12n^2}$, voor $n\geq1$
5. $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ en is continu differentieerbaar.
   We hebben $I=\int_\alpha^\beta f(t)dt$, benaderd $\tilde{I}=(\beta-\alpha)f(\alpha)$

    1. Bewijs dat $\tilde{I}-I=-\frac{1}{2}f'(\tau)(\beta-\alpha)^2$, voor $\tau\in[\alpha,\beta]$

Juni 2015

---

1. We benaderen volgende integraal

$$\int_0^1 t.\sin(\pi.t)dt$$

    - Bereken met de uitgebreide trapeziumregel voor n = 4,2,1.
    - Bewijs $|I_n-I|\leq\frac{\pi.(1+\pi)}{6.n^2}$
2. Bewijs $f(t)-P(t)=\frac{1}{2}.f''(\tau).(t-\alpha).(t-\beta)$ zonder stellingen uit de cursus te gebruiken.
3. $t_0=0,t_1=2,t_3=3,t_4=4$
    - P polynoom van graad 2 zodat $P(t_i)=y_i$ voor $i=0,1,2$
    - Q polynoom van graad 2 zodat $P(t_i)=y_i$ voor $i=1,2,3$
    - R polynoom van graad 3 zodat $P(t_i)=y_i$ voor $i=0,1,2,3$
    - $P(1)=0,47$ en $Q(1)=0,63$
    1. Bepaal $R(1)$.
    2. Bepaal de bovengrens $|f(1)-R(1)|$ als je weet dat $|f^{(j)}(t)|\leq2^{-j}$.

4. $F(x)=e^{-x}+2.x-2$ voor $0\leq x\leq 1$
    - Bewijs dat er 1 nulpunt x_* bestaat in $[0,1]$
    - Geef de eerste twee benaderingen door de methode van Newton te gebruiken met startwaarde $x_0=0$
    - $x_k=1-\frac{1}{2}.e^{-x_{k-1}}$ met $k=1,2,...$
    1. Bewijs $|x_k-x_*|\leq(\frac{1}{2})^k$

Juni 2014

1. Zij gegeven $y=ab(a+b)$ met willekeurige $a,b>0$. We benaderen y door het algoritme $\tilde{A}=\tilde{a}\oslash[\tilde{b}\otimes(\tilde{a}\oplus\tilde{b})]$.
    1. Bewijs dat voor γ_a geldt dat $0<\gamma_a<1$
    2. Bewijs dat voor γ_b geldt dat $-2<\gamma_b<-1$
    3. Bepaal het stabiliteitsgetal σ van A
    4. Zij nu gegeven dat de waarde $\tilde{y}$ wordt berekend door middel van algoritme $\tilde{A}$ met grondtal $B=10$ en aantal cijfers t. Hoe groot moet t tenminste zijn opdat de absolute waarde van de relatieve fout in y maximaal 5×10^{-2} bedraagt?
2. De functie $F(x)=x^3+2.x^2+x-1$ is gegeven:
    1. Stel dat we het nulpunt x_* benaderen door middel van de bissectiemethode op het interval $[0,1]$. Hoe groot moet k zijn opdat $|x_k-x_*|<10^{-2}$?
    2. Bereken door gebruik te maken van de methode van Newton een benadering x_1 van het nulpunt x_* als er voor de startwaarde gegeven is dat $x_0=0$.
    3. Geef een meetkundige interpretatie van de methode van Newton voor een algemene niet-lineaire vergelijking.
3. Stel $f(t)=\sqrt{t}$ op $[1,4]$ en beschouw het interpolerend polynoom P met steunpunten $(1,1),(2,\sqrt{2}),(3,\sqrt{3})$ en $(4,2)$.
    1. Geef door gebruik te maken van de methode van Neville een benadering voor $P(\frac{5}{2}$.
    2. Bepaal het interpolerend polynoom P door gebruik te maken van de interpolatieformule van Newton. (Het volstaat om de waarden $c_0,c_1,...$ te bepalen en in te vullen. Je moet het polynoom niet volledig uitwerken.)
    3. Toon aan dat $|f(t)-P(t)|<\frac{1}{45}$ voor $t=\frac{5}{2}$.
4. We beschouwen $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4(t).dt$
    1. Bepaal een benadering $\tilde{I}$ van I door middel van de regel van Simpson.
    2. Voor het vervolg van de oefening duiden we met $\tilde{I_n}$ op een benadering van I met n deelintervallen.
        - Bepaal $\tilde{I_1}$ en $\tilde{I_2}$ door middel van de uitgebreide trapeziumregel.
        - Bewijs dat $|\tilde{I_n}-I|\leq\frac{\pi^3}{24.n^2}\,\forall n\geq1$

5. Stel $G:[a,b]\to[a,b]$ een continu differentieerbare functie met $\theta=\max{|G'(x)| \mid a\leq x\leq b}<1$. Zij $x_0\in[a,b]$. Bewijs dan dat...
    1. ... er precies één $x_*\in[a,b]$ is met $G(x_*)=x_*$.
    2. ... als $\lim_{k\to+\infty}x_k=x_*$ er dan geldt dat
    $|x_k-x_*|\leq\theta^k|x_0-x_*|\leq\theta^k.(b-a)(k\geq1)$

$$|x_k-x_*|\leq\theta^k|x_0-x_*|\leq\theta^k.(b-a)(k\geq1)$$

Juni 2013

1. We proberen $\tan^2(x)$ te benaderen door het algoritme $(SIN(\tilde{a})\oslash COS(\tilde{a}))\otimes(SIN(\tilde{a})\oslash COS(\tilde{a}))$.
    - Bereken γ_a.
    - Is dit algoritme goed geconditioneerd voor $a\approx0$? En voor $a\approx\frac{\pi}{4}$ en $a\approx\frac{\pi}{2}$?
    - Bereken het stabiliteitsgetal σ
    - bepaal t om een nauwkeurigheid van 5x10^{-5} te verkrijgen.
2. $F(x)=e^{-x}-x$
    - Geef de twee eerste benaderingen mbv de methode van Newton voor x_0 = 0.
    - $G(x)=\frac{1}{2}(x+e^{-x})$ Gebruik de dekpunt iteratie $x=G(x)$ om de eerste twee benaderingen van een dekpunt te bepalen waarbij x_0 = 0.
    - Bewijs dat er twee dekpunten zijn.
    - Toon aan dat voor de gegeven dekpuntiteratie geldt dat
    $|x_k-x| < (\frac{1}{3})^k$

$$|x_k-x|<(\frac{1}{3})^k$$

    .
3. Gebruik de methode van Neville om de temperatuur na 23 minuten te bepalen. Gebruik de steunpunten 25,20,15. (Voorbeeld uit de cursus).
    Geef een afschatting voor de fout.
4. We benaderen volgende integraal
    $\int_1^5\frac{1}{5x}dx$

$$\int_1^5\frac{1}{5x}dx$$

    - Bereken met de uitgebreide trapeziumregel voor n = 4,2,1.
    - Gebruik de methode van Romberg om een nauwkeurigere benadering te krijgen.
    - Bewijs dat
    $0<I_n-I\leq10h^2$

$$0<I_n-I\leq10h^2$$

5. Een eenvoudige methode om een integraal ∫βαf(t)dt∫αβf(t)dt te benaderen is door I~=(β−α)f(α)

$$\tilde{I}=(\beta-\alpha)f(\alpha)$$

. Bereken de exacte fout I~−II~−I.

   (Tip: gebruik zoals in de cursus de Taylor benadering, tot 0de graad)(Deze tip werd niet op het examen gegeven)

Categorieën:

- Wiskunde
- 1BWIS
- 2BINF