Tuyaux
1ste Bachelor Fysica

WINAK

Januari
2011

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

Komende weken zullen iets minder aangenaam zijn dan de voorbije, maar behoren willens nillens toch tot het leven van iedere student. Bedachtzaam als we zijn bij WINAK hebben we over de jaren heen een dikke bundel examenvragen bijgehouden en er een fancy naam aan gegeven, de Tuyaux (over de spellingswijze bestaan heftige discussies onder de mentoren, dus don't ask! ;-)).

Het spreekt voor zich dat er over de jaren heel wat cursuswijzigingen zijn doorgevoerd en dat niet iedere vraag even relevant is, maar je mag er meestal toch vanuit gaan de laatste twee jaar min of meer representatief zijn.

Naast dit heugelijke nieuws, nog iets anders. Zoals jullie wel weten zijn jullie nog maar het derde jaar met het nieuwe programma. Hierdoor zijn heel wat vakken niet meer relevant voor jullie en zijn er van veel van jullie vakken maar 2 echte representatieve voorbeelden. Toch blijven vele dingen van daarvoor nog steeds nuttig, vandaar dat ze er ook nog bijstaan.

Ik weet dat de komende anderhalve maand met momenten zeer zwaar zullen worden, maar laat je zeker nooit ontmoedigen! Als het even niet gaat, pauzeer dan even en bijt dan weer door en als het lijkt dat je misschien niet voor grootste onderscheiding kan gaan, neem dan vrede met die grote, maar doe zeker ieder examen mee! Al vaker is een examen veel beter meegevallen dan gevreesd en dan kan je dat vak bij op je diploma zetten en verder gaan!

Deze tuyaux zijn opgesteld op je te helpen bij het studeren. Graag zou ik eerst nog een paar opmerkingen willen maken :

- Een tuyaux is een **hulpmiddel**. Dit wil zeggen dat het noch je cursus noch je nota's kan vervangen. Dit document bevat een zeer groot aantal vragen dat gesteld zijn geweest de vorige jaren en is dus zeer nuttig om te bekijken.
  - **hoe** je moet studeren, een idee te krijgen van hoe het examen er uit zal zien, welke soort vragen in het algemeen gesteld worden, aan welke delen van de cursus een zeer groot belang wordt gehecht (dit zijn de delen van de cursus die ongeveer elk jaar terug komen).
  - of je je cursus kent door te proberen **antwoorden** op de vragen en oefeningen die in dit document staan, zonder constant terug naar je cursus te moeten kijken.
- Sommige vragen zijn al vrij oud en stammen dus nog af uit een tijd waar andere klemtonen lagen of meer/minder werd geëist voor een vak. Ook soms van tijden dat het vak door een andere prof werd afgenomen.
- Deze Tuyaux zijn niet foutenloos. Mocht je er vinden, mag je ze altijd mailen naar julie@winak.be.

- Als je net een examen hebt afgelegd, probeer dan de vragen ergens bij te houden en te bezorgen aan iemand van WINAK. Op die manier hebben al meer dan twintig jaar lang WINAKers dit voor jullie gedaan en zo leven de Tuyaux verder!

Verder kan ik jullie alleen nog maar allemaal heel veel succes toewensen bij de examens, jullie aanmoedigen om jullie voor elk vak 200% in te zetten, en om de moed niet te verliezen tijdens deze vier-weken-lange examenperiode.

Julie
WINAK mentor Fysica 2010-2011

Hoofdstuk 2

Algemene Fysica I

2.1 De cursus, het vak, het examen

Het vak wordt gegeven samen met de Wiskunde. Ze zien in de les hetzelfde, alleen worden op het examen andere klemtonen gelegd.

Het theorie examen Algemene Fysica gebeurt mondeling met schriftelijke voorbereiding. Iedereen krijgt dezelfde drie vragen en na een aantal uren moet je je mondeling gaan verdedigen bij Prof. Dr. Van Tendeloo. Als je iets niet meer volledig weet, mag je één minuut in een (blanco) cursus kijken om daarna verder te werken.

Het oefeningenexamen Algemene Fysica bestaat uit het schriftelijk oplossen van theoretische vraagstukken. Eventueel mag je een wiskundig formularium gebruiken en mag je je zakrekentoestel gebruiken. Het gaat niet om rekenvraagstukken, maar om theoretische afleidingen, die nadien toegepast kunnen worden op een getallenvoorbeeld. O.a. de eskimo op de iglo is een echte klassieker. Het oefeningenexamen van 2010 is jammer genoeg niet bijgehouden. Dus bij deze nog eens een oproep jullie oefeningen over te schrijven of snel na het examen te noteren, zodat we de tuyaux kunnen blijven aanvullen!

Sinds dit jaar is er een deel van de cursus overgeplaatst naar 'Algemene Fysica II' dus kan het voorvallen dat er vragen niet meer relevant zijn. Ga hier echter niet te snel van uit, het zou zonde zijn van de vragen.

2.2 Theorie

2.2.1 Januari 1989

2.2.1.1 Groep 1

1. Einsteinmodel voor de soortelijke warmte. Wat is het verschil met Debeye?
2. Samenstelling van harmonische bewegingen (zwevingen) -constructie van Fresnel.
3. Leg uit: enkele definities en begrippen.

2.2.1.2 Groep 2

1. Kinetische gastheorie: Bewijs dat $pV = nRT$.
2. Leid de formule van Bernouilli af. Bewijs dat daaruit de grondformule van de hydrostatica volgt.
3. Bespreek de proef van Rutherford en zijn gevolgen.

2.2.2 Januari 1990

1. Bespreek het Dopplereffect.
2. Hoe verandert de snelheid als functie van de tijd voor een vallende regendruppel?
3. Bereken de overdruk in een zeepbel.
4. Hoe verklaar je thermische uitzetting op atomaire schaal?
5. Definieer de diffusiecoëfficiënt D en leid een uitdrukking af voor D zonder rekening te houden met quanten.

2.2.3 September 1992

1. Leid uit de wetten van Kepler de 3de wet van Newton af.
2. Geef drie manieren om de oppervlaktespanning te bepalen.
3. Hoe bereken je de druk in de atmosfeer op enkele kilometers hoogte?
4. Spectrumemittantie: Beschrijf het verloop als functie van λ en schets de behandelingen van Rayleigh en Planck om dit verloop te beschrijven.

2.2.3.1 Januari 1993

1. Beschrijf de beweging van een geladen deeltje in een magnetisch veld. Hoe kan je dit gebruiken als massaspectrograaf?
2. Wat is de dynamische stuwkracht? Leid een uitdrukking af voor deze kracht.
3. Definieer de soortelijke warmte en beschrijf haar verloop als functie van de temperatuur.
4. Beschrijf de Brownse beweging van een deeltje in suspensie in een vloeistof.

2.2.4 Januari 1994

2.2.4.1 Groep 1

1. Beschouw de vallende regendruppel, waarbij de wrijving door de lucht een rol speelt. Toon aan dat de snelheid na voldoende lange tijd constant wordt. Definieer het begrip relaxatietijd.
2. Bereken de druk in een bewegend (ideaal) fludum. Hoe meet je die?
3. Definieer de soortelijke warmte. Hoe varieert die als functie van de temperatuur? Kan je die variatie verklaren?

2.2.4.2 Groep 2

1. Hoe meet je de uitsroomsnelheid van een gas? Hoe meet je de viscositeit van een vloeistof?
2. Definieer de volumeuitzettingscoëfficiënt. Geef een uitdrukking voor de volume- verandering als functie van het temperatuursverschil.
3. Definieer de diffusiecoëfficiënt D. Geef een uitdrukking voor de diffusiecoëfficiënt D als functie van microscopische grootheden. Hoe varieert D als functie van druk en temperatuur? Bestaat er een betrekking tussen de diffusiecoëfficiënt en de Boltzmann-constante?

2.2.5 September 1994

1. Atoommodel van Bohr: wat is het? Basisveronderstellingen, benaderingen? Kan je het model experimenteel verifiëren? Hoe verandert de energie van een elektron als functie van de afstand tot de kern?

2. Bereken de stijghoogte van het vrije vloeistofoppervlak in nabijheid van een vlakke wand.

3. Definieer de viscositeitscoëfficiënt η. Geef een uitdrukking voor de viscositeitscoëfficiënt als functie van microscopische grootheden. Hoe varieert η als functie van druk en temperatuur?

2.2.6 Januari 1995

2.2.6.1 Groep 1

1. Atoommodel van Bohr: wat is het? Basisveronderstellingen, benaderingen? Kan je het model experimenteel verifiëren? Hoe verandert de energie van een elektron als functie van de afstand tot de kern?

2. Definieer de circulatie van een vectorveld. Bereken eveneens de hydrodynamische stuwkracht op een (vereenvoudigde) vliegtuigvleugel.

3. Kinetische gastheorie: Welke manieren ken je om het getal van Avogadro te bepalen? Hoe defineer je de vrije weglengte + meten?

2.2.6.2 Groep 2

1. Dynamica: Beschrijf de variatie van de zwaarteversnelling met de breedteligging op aarde. Waarom geeft die afleiding niet het correcte resultaat, i.e. welke benaderingen heb je gemaakt?

2. Warmteleer: Definieer soortelijke warmte. Hoe meet je die? Hoe verloopt de soortelijke warmte als functie van de temperatuur? Bespreek de betrekking $C_v = 3 \cdot N_A \cdot k$.

2.2.7 September 1995

1. Bespreek het Dopplereffect.

2. Vallende regendruppel: Toon aan dat de snelheid na voldoende lange tijd constant wordt. Definieer het begrip relaxatietijd.

3. Maxwell-verdeling.

2.2.8 Januari 1996

1. Harmonische trilling: Geef de bewegingsvergelijking van de harmonische trilling, uitgaande van het behoud van energie. Waarom kan een model van harmonische trilling geen warmteuitzetting in een vaste stof verklaren?

2. Hydrostatica: Bereken de kracht op de wand van een vat dat een stilstaande vloeistof bevat, zonder rekening te houden met oppervlakte-effecten.

3. Getal van Avogadro: Definitie? Hoe kan je het getal van Avogadro nauwkeurig bepalen? Bespreek de nauwkeurigheid van de verschillende methodes.

2.2.9 September 1996

1. Dynamica: Valt een steen "echt" naar het middelpunt van de aarde?
2. Hydrostatica: Bereken de overduk in een zeepbel op 2 verschillende manieren.
3. Kinetische gastheorie: Definieer de diffusiecoëfficiënt en leid een uitdrukking af voor D. Welke krachten neem je in rekening en welke verwaarloos je?

2.2.10 Januari 1997

1. Bereken de lengte voor een sferische slinger als functie van de openingshoek en de lengte L van de draad.
2. Definieer de moleculaire soortelijke warmte C_v. Hoe verloopt C_v als functie van de temperatuur? Geef de Einstein-afleiding en de beperking hieraan verbonden.
3. Geef het verband tussen de diffusiecoëfficiënt en de mobiliteit van een gas. Is deze betrekking enkel geldig voor gassen?

2.2.11 September 1999

1. Atoommodel van Bohr: wat is het ? Basisveronderstellingen, benaderingen? Kan je het model experimenteel verifiëren? Hoe verandert de energie van een elektron als functie van de afstand tot de kern?
2. Geef de verschillende methodes om de oppervlaktespanning te meten.
3. Geef het verschil tussen gas en damp en definieer:
   - kritisch punt
   - trippelpunt
   - ideaal gas

2.2.12 September 1999

1. Hydrostatica: Bereken de drukkracht op de wand van een aquarium. Op welke hoogte moet je het (van buitenaf) ondersteunen tegen barsten of breken?
2. Hydrodynamica:
   - Wat leert u de wet van Bernouilli?
   - Hoe kan je de snelheid van een gas (vloeistof) meten?
3. Kinetische gastheorie: Definieer de diffusiecoëfficiënt D. Geef een uitdrukking voor de diffusiecoëfficiënt D als functie van microscopische grootheden. Is er een verband tussen D en de mobiliteit μ?

2.2.13 Januari 2000

1. Harmonische trilling: Geef de bewegingsvergelijking van de harmonische trilling, uitgaande van het behoud van mechanische energie. Waarom kan een model van harmonische trilling geen thermische uitzetting van materialen verklaren?
2. Hydrostatica: Bereken de overduk in een zeepbel op 2 verschillende manieren.
3. Kinetische gastheorie: Definieer het begrip osmose. Hoe bereken je de osmotische druk? (wet van Van 't Hoff)

2.2.14 September 2000

1. Dynamica: Geef de behoudswetten en leg uit hoe die zich vertalen in het Lagrange formalisme. Definieer een conservatief krachtveld.

2. Warmtegeleiding: Verklaar microscopisch waarom een vaste stof uitzet bij opwarming. Is dit in overeenstemming met het macroscopisch resultaat?

3. Kinetische gastheorie: Toon aan dat de energie van een deeltje in een afgesloten stelsel gelijk is aan $\frac{kT}{2}$ per vrijheidsgraad.

2.2.15 Januari 2001

1. Atoomodel van Bohr.

2. Anharmoniciteit van de chemische uitzetting.

3. Geef en bespreek drie manieren om het getal van Avogadro te vinden (N_A).

2.2.16 September 2001

1. Bespreek de samenstelling van twee trillingen met dezelfde trillingsrichting en frequentie. Wat zijn zwevingen?

2. Leid de vergelijking van Bernouilli af. Bewijs dat hieruit de grondformule van de hydrostatica volgt.

3. Einstein-Smoluchowski theorie der Brownse beweging

2.2.17 Januari 2002

1. De harmonische trilling:

   - Leid de bewegingsvergelijking af voor een harmonische trilling (uitgaande van het behoud van energie).
   - Waarom kan een model van harmonische trilling geen warmteuitzetting in een vaste stof verklaren?

2. Hydrostatica:

   - Bereken de kracht op de wand van een vat dat een stilstaande vloeistof bevat, zonder rekening te houden met oppervlakte-effecten.
   - Welke correctie moet men toepassen *met* oppervlakte-effecten?

3. Getal van Avogadro:

   - Definitie?
   - Hoe kan je het getal van Avogadro bepalen?
   - Bespreek de nauwkeurigheid van de verschillende methodes.

2.2.18 Januari 2005

1. **Dynamica**
   Definieer het begrip "coriolisversnelling". Leid een uitdrukking af voor de coriolisversnelling en geef een toepassing.

2. **Hydrostatica**
   Geef drie manieren om de oppervlaktespanning te bepalen. Zijn ze universeel toepasbaar?

3. **Kinetische gastheorie**

   (a) Geef de definitie van "vrije weglengte".

   (b) Hoe bereken je de vrije weglengte van een atoom binnen het model van de kinetische gastheorie?

   (c) Hoe bepaal je experimenteel de vrije weglengte?

2.2.19 September 2005

1. **Hydrostatica**
   Geef drie manieren om de oppervlaktespanning te bepalen. Zijn ze universeel toepasbaar?

2. **Hydrodynamica**

   (a) Leid de wet van Poiseuille af.

   (b) Welke benaderingen heb je hier expliciet en impliciet gebruikt?

3. **Kinetische gastheorie**

   (a) Geef de definitie van "vrije weglengte".

   (b) Hoe bereken je de vrije weglengte van een atoom binnen het model van de kinetische gastheorie?

   (c) Hoe bepaal je experimenteel de vrije weglengte?

2.2.20 Januari 2006

1. **Dynamica**

   (a) Wat is het atoommodel van Bohr?

   (b) Welke veronderstellingen (of postulaten) heb je nodig om af te leiden dat de baandiameter niet willekeurig is?

   (c) Hoe verandert de energie van een elektron als functie van de afstand tot de kern?

   (d) Hoe verifieer je of het model correct is?

2. **Hydrodynamica:**

   (a) Formuleer de wet van Bernouilli en geef de afleiding.

   (b) Hoe kan je de snelheid van een gas (vloeistof) meten?

3. **Kinetische gastheorie**

   (a) Definieer en bereken de vrije weglengte van een gasmolecule.

   (b) Hoe kan je ze experimenteel bepalen?

2.2.21 Januari 2007

1. Hydrostatica:
    - Bereken de drukkracht op de wand van een vat gevuld met vloeistof tot op een hoogte h.
    - Moet je het resultaat aanpassen als je de capillaire opstijging langs de wand meeneemt ?
2. Hydrodynamica:
    - Basisformule van de hydrodynamica ?
    - Hoe meet je de snelheid van een fluïdum door een buis?
3. Kinetische gastheorie:
    - Wanneer spreekt men van 'damp' en wanneer van 'gas'?
    - Definieer:
        - tripelpunt
        - kritisch punt
        - ideaal gas
    - Toon aan dat de totale energie van een gas gegeven wordt door 3/2kT.
    - Welke aannames zijn nodig opdat bovenstaande redenering correct zou zijn?

2.2.22 September 2007

1. De wetten van Newton
2. (a) Vergelijking van Bernoulli
   (b) mannier om v te bepalen
3. de vrije weglengte

2.2.23 Januari 2008

2.2.23.1 Groep 1

1. Definities
    - conservatief krachtveld
    - getal van Avogadro
    - oppervlaktespanning
    - viscositeit
    - zwart lichaam
2. Hydrostatica
    - Deeg de afleiding voor de formule van Laplace
    - Bereken de overdeuk in een zeepbel door toepassing van de formule van Laplace
3. Kinetische gastheorie
    - Definieer de vrije weglengte van een gasmolecule
    - Bereken de vrije weglengte van een gasmolecule binnen benaderingen van de kinetische gastheorie
    - Hoe kan je de vije weglengte experimenteel bepalen?

2.2.23.2 Groep 2

1. Definities
    - difussiecoëfficient
    - laminaire stroming
    - stroomlijn
    - soortelijke warmte (twee soorten)
2. Hydrodynamica
    - wat is de continuteitsvergelijking, geldt deze voor alle fluda?
    - hoe meet je de snelheid van een gas
3. warmteleer
    - thermische uitzetting van een voorwerp + schets microscopische verklaring (waarom oneven macht als afwijking?)
    - verband tussen warmteleer en elektriciteit

2.2.24 Januari 2009

2.2.24.1 Groep 1

1. "Atoommodel van Bohr". Over wat gaat het? Wat zijn de basisaannames? Toon aan dat de afstand van de kern tot het elektron niet willekeurig is.
2. Welke snelheid is nodig om aan de aarde te ontsnappen? Welke snelheid heeft een satelliet in een baan om de aarde?
3. Wat is een "laminaire stroming"? Wat is de snelheid van een vloeistofdeeltje door een cilindervormige buis met straal R op een afstand r van het centrum?

2.2.25 Januari 2010

1. De valversnelling g varieert zowel met de hoogte boven de aarde als met de breedteligging op de aarde. Toon dit aan en geef een uitdrukking voor de zwaarteversnelling op een breedteligging ϕ als de zwaarteversnelling aan de evenaar gekend is.
2. Definieer het begrip oppervlaktespanning. Hoe kan je de oppervlaktespanning meten voor een vloeistof met een grote oppervlaktespanning? Waarom?
3. Bereken het snelheidsprofiel van een laminaire vloeistof (wat is dat?) door een cilindervormige buis met doormeter R.

2.3 oefeningen

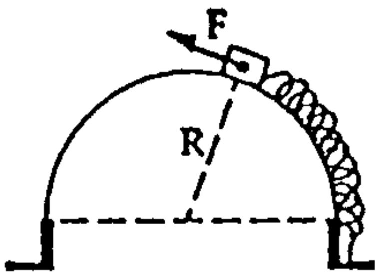
- Dit zijn allemaal voorbeelden voor de Fysica
- Bij vele opgaven (vooral degenen van 2001 en ouder) zijn de vectorstreepjes weggelaten.
- Schrijf op *elk* blad je naam en richting (ook je kladpapier)
- Er is geen mondeling (dus als er niets op je blad staat. . .)
- Er wordt enorm veel aandacht gehecht aan de *redenering* die je volgt. Geef duidelijk aan waarom je elke stap doet, waarom juist die formule hier van toepassing is, wat de fysische betekenis daarvoor is,. . . . Wees ook duidelijk in je notaties: definieer alle variabelen die je in je berekeningen gebruikt (maak een schets van de situatie. . .).

2.3.1 Januari 1993-1994

1. Een houten kubus met zijde 0.1m, en dichtheid $500\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ drijft op water in een bekerglas. Men voegt olie toe ($\rho_0 = 800\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$) tot de olie 0.04m onder het bovenvlak van de kubus staat. Hoe groot is de druk aan de onderzijde van de kubus? ($p_{\mathrm{atm}} = 10^5\mathrm{Pa}$)
2. Een spoorwegbufferveer heeft een krachtsconstante $k = 24 \cdot 10^7\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$. Een trein van 5000ton rolt tegen de buffer en drukt deze daarbij 15cm in. Met welke snelheid raakte de trein de buffer?
3. Een stalen bol met massa m_1 hangt aan een touw met lengte l. De bol wordt vanuit horizontale positie losgelaten. Op zijn laagste punt botst hij tegen een stalen bol in rust en met massa m_2.
   (a) Veronderstel een elastische botsing van de bollen. Bereken de respectievelijke snelheden van de bollen juist na de botsing en de hoogtes die ze bereiken.
   (b) Veronderstel een volledig inelastische botsing. Welke hoogte bereikt het massacentrum na de botsing?
4. Een bol met straal r en dichtheid ρ_b valt van 1m hoogte in een olie met viscositeit η en dichtheid ρ_0. Tot welke snelheid zal de viskeuze wrijvingskracht ($F = 6\pi\eta v r$) de bol afremmen?
5. Een cilindrisch vat heeft een diameter van 0.10m en een hoogte van 0.20m. Aan de basis is een holte van van $1\mathrm{cm}^2$ aangebracht. Er loopt water in het vat met een snelheid van $1.4 \cdot 10^{-4}\frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{s}}$. Bepaal de hoogte tot waar het water zal stijgen in het vat.

2.3.2 September 1993-1994

1. Een variabele kracht F is gericht volgens de raaklijn van een wrijvingsloos cylindrisch oppervlak met straal R, zoals getoond in de figuur. Door de kracht te variëren wordt een blok met massa m langs het oppervlak bewogen terwijl een veer met krachtsconstante k vanuit positie 1 naar positie 2 wordt uigerokken. Bereken de arbeid geleverd door de kracht F.
2. Twee ringen met respectievelijke massa's $m_1 = 2.0\mathrm{kg}$ en $m_2 = 5.0\mathrm{kg}$ bewegen zonder wrijving op een horizontale staaf. De lichtste ring heeft een snelheid van $17\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ en haalt de andere ring, die een snelheid heeft van $3\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$, in. Aan de zware ring is, langs de kant waarlangs de lichte ring nadert, een veer bevestigd met $k = 4480\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}$.



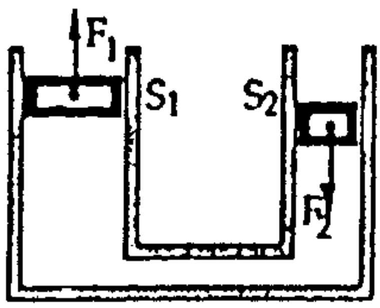
Figuur 2.1: blok aan veer over cilinder

(a) Hoever wordt de veer ingedrukt bij de botsing van de deeljes?

(b) Wat zijn de snelheden na de botsing?

3. Een rubberen (kinder)ballon met eem massa van 2.5g is gevuld met He met een dichheid van $0.33\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. De balon is sferisch, met een straal van 12cm. Een lang katoenen touwtje met een massa van 2g hangt aan de onderkant van de ballon. Aanvankelijk ligt het touwtje op de grond, maar wanneer de ballon opstijgt, trekt het het touwtje mee, en stekt het uit. Op welke hoogte zal de ballon ophouden met stijgen, omwille van van het gewicht van het touwtje?($\rho_{lucht} = 1.29\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$)

4. Bekijk de figuur van de hydraulische pers. Toon $F_2 = \frac{S_2}{S_1}F_1$ aan, gebruik makend van de wet van Bernouilli.

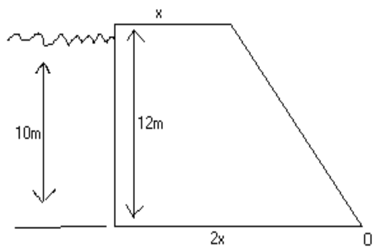


Figuur 2.2: hydraulische pers

2.3.3 Januari 1994-1995

1. De figuur stelt een betonnen dammuur voor ($\rho_{beton} = 3000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$). De muur is 12m hoog en de lengte van de muur loodrecht op de figuur is 30m. Zoek de minimumwaarde voor de dimensie x, als de muur niet mag kantelen om punt O, bij een waterniveau van 10m.

2. In de ruimte, ver van de invloed van de aarde of andere hemellichamen, worden twee massa's geplaatst 40.0m uit elkaar, en los gelaten. Als $m_1 = 50.0$kg en $m_2 = 100.0$kg, wat is dan de snelheid van elke massa als de onderlinge afstand nog 20.0m bedraagt; wat is dan de relatieve snelheid van de massa's?

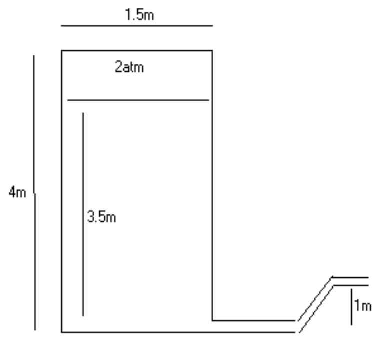


Figuur 2.3: dijk

3. Een ijsblokje van 50g komt uit een diepvriezer bij $-10°$C en wordt in een glas water van $0°$C gegooid. Hoeveel water vriest vast aan het ijsblokje?

4. Een stalen benzinetank (hoogte 30cm, lengte 60cm,breedte 60cm) drijft met een diepgang van 20cm in water. De tank wordt gevuld met 1,2l benzine (dichtheid $730\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) zal de gevulde tank nog drijven? Verwaarloos het volume van het staal.

5. Het vat voorgesteld in de figuur is bovenaan hermetisch afgesloten. De hoogte van het vat is 4m, de diameter 1.5m. Het bevat water tot op een niveau van 3.5m waarboven een druk heerst van 2atm. Wat is de initiële snelheid van het water dat de buis verlaat? Op welk niveau houdt het water op met stromen?



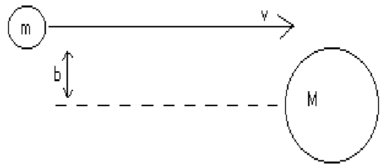
Figuur 2.4: het vat met uitstromend water

2.3.4 September 1994-1995

1. Een planetoïde met massa m nadert een ster met massa M vanop grote afstand, zoals voorgesteld door de figuur. Wat is de kortste afstand van nadering tussen planetoïde en ster?

2. Een 100g wegende houten schijf schuift over een wrijvingsloos oppervlak en botst tegen een tweede schijf die in rust is. Na de botsing beweegt de eerste schijf onder een hoek van $90°$ met haar oorspronkelijke bewegingsrichting en de tweede onder een hoek van $20°$ met het originele pad van de eerste schijf. Als de botsing volledig elastisch is, wat is dan de massa van de tweede schijf?

3. Een massa m_1 bevindt zich op een geheld wrijvingsloos vlak dat een hoek α maakt met de horizontale. Bovenaan de helling loopt de koord over een wiel en een tweede



Figuur 2.5: de naderende planetoïde

massa m_2 hangt loodrecht naar beneden aan het andere einde van de koord. Bereken in functie van m_1 en m_2

(a) de versnelling van de beide massa's

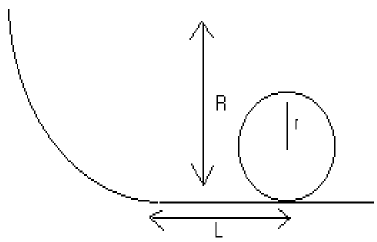
(b) de spankracht van de koord

4. 1 liter water wordt 10 graden onderkoeld (en bevindt zich dus bij $-10°$C). Door het inwerpen van een 20 g ijs bij 0°C bevriest een deel van het water ogenblikkelijk. Hoeveel g ijs wordt gevormd, en welke temperatuur heeft dit ijs?

5. Een houten bolletje wordt op 2m boven een wateroppervlak losgelaten. Bereken tot op welke diepte het bolletje zinkt als het een dichtheid ρ_h heeft van $700\frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}^3}$ en een straal $r = 0.02$m. Verwaarloos wrijving.

2.3.5 September 1995-1996

1. Een pretparkwagentje rijdt op een wrijvingsloos spoor dat bestaat uit een kwart cirkel met straal R, gevolgd door een horizontaal stuk met een lengte $L = 20$m en vervolgens een looping met straal $r = 5$m. Het hele traject bevindt zich in een vertikaal vlak. Het wagentje vertrekt vanuit rust bij het begin van de baan(zie figuur). Bereken de minimale straal R van het eerste gedeelte van de baan, nodig opdat het wagentje de looping zou kunnen maken zonder van de rails te vallen.



Figuur 2.6: het pretparkwagentje

2. Veronderstel dat men een tunnel zou kunnen boren dwars door de aarde van Noord- naar Zuidpool. Beschrijf de beweging van een steen die men aan de Noordpool in de tunnel laat vallen(d.w.z. geef een uitdrukking voor de plaats als functie van de tijd). Veronderstel hierbij dat de aarde een homogene dichtheid heeft en verwaarloos de wrijving (de tunnel is vacuüm). Bereken in het bijzonder na in hoeveel tijd de steen het middelpunt van de aarde bereikt.(gegevens: straal aarde $R_A = 6371$km; massa aarde $M_A = 5.9737 \cdot 10^24$kg)

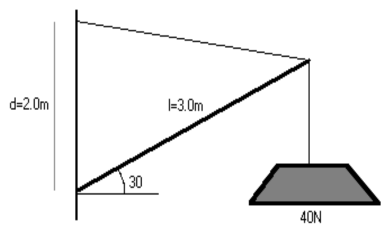
3. Een luchtbel bevindt zich op de bodem van een meer (temperatuur $T = 15°C$) op een diepte van 10m. De luchtbel stijgt naar het oppervlak van het meer.
   (a) Bereken de straal van de luchtbel op het moment dat zij het oppervlak bereikt.
   (b) Bereken hoelang het opstijgen duurt.(Verwaarloos de massa van de lucht in de luchtbel) (gegevens: viscositeit van water $\eta = 1.14$cp; oppervlaktespanning verwaarlozen)
4. Een houten kubus (zijde $a = 0.1$m ; dichtheid $\rho_h = 500\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$) drijft op water in een bekerglas. Men giet olie met dichtheid $\rho_{olie} = 800\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ op het water tot de olie 0.04m onder het bovenlak van de kubs staat.
   (a) Hoe dik is de olielaag?
   (b) Hoe groot is de druk aan de onderzijde van de kubus als de druk op het oppervlak 1atm(= 101325Pa) is?

2.3.6 Januari 1998

1. Een kogel met massa 0.01kg boort zich in een blok met massa 1.0kg gelegen op een horizontale wrijvingsloze tafel. Het blok is verbonden met een veer zoals getoond in de figuur. Door de impact wordt de veer 10cm ingedrukt. Als men weet dat een kracht van 1N de veer 1cm indrukt, wat was dan de afvuursnelheid van de kogel?

Figuur 2.7: de kogel en het blok aan de veer

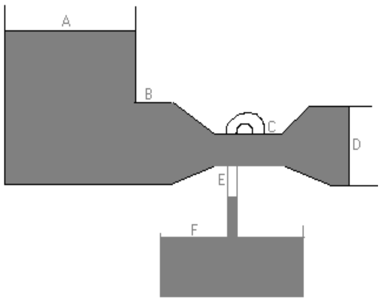
2. Een plank is met een scharnier vastgemaakt aan de muur. Een draad verbonden met de muur op een afstand $d = 2.0$m boven het scharnier is bevestigd aan het andere eind van de plank (zie figuur). Er wordt nu een gewicht van 40N met een draad opgehangen aan het uiteinde van de plank. De plank maakt dan een hoek van 30° met de horizonale. Als de plank een gewicht heeft van 60N (uniform verdeeld over de plank) en een lengte $l = 3.0$m heeft, hoeveel bedraagt dan de spankracht T in het touw dat de plank met de muur verbindt en welke kracht oefent het scharnier uit op de plank?



Figuur 2.8: de plank

3. Een vliegtuig vliegt over de Noordpool met een snelheid van $900\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ en vliegt verder naar het Zuiden met diezelfde constante snelheid langs een bepaalde lengtelijn. Bepaal de hoek tussen een schietlood opgehangen in het vliegtuig en de lijn die het centrum van de aarde met het vliegtuig verbindt op het ogenblik dat het vliegtuig zich bevindt:
   (a) boven de Noordool
   (b) boven de evenaar
   (c) op 45° NB

4. Twee zeer grote vaten A en F (zie figuur) bevatten dezelfde vloeistof. Een horizontale buis BCD wordt bevestigd aan de bodem van vat A en bevat een vernauwing bij C. Een verticale buis E wordt bevestid aan de vernauwing in C en leidt de vloeistof naar vat F. Veronderstel een normale stroming en geen viscosteit. Als de dwarsdoorsnede in C de helft bedraagt van de dwarsdoorsnede in D en als D zich bevindt op een hoogte h_1 onder het vloeistofniveau in A, tot welke hoogte h_2 zal de vloeistof dan stijgen in buis E? Druk je antwoord uit in termen van h_1 en verwaarloos de verandering van de atmosferische druk met de hoogte.



Figuur 2.9: de twee grote vaten

2.3.7 Januari 1998-1999

1. Een kanon is opgesteld op een spoorwegwagentje. De massa M van het wagentje met zijn lading bedraagt $50m$ waar m de massa is van een projectiel gelijk aan 25kg. Bereken de snelheid van het wagentje nadat de twee projectielen in horizontale richting werden afgevuurd; hun ontsnapsnelheid bedraagt $1000\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$.

2. Een planeet beschrijft een circulaire baan rond een massieve ster. De ster ondergaat een sferisch symmetrische explosie waardoor 1% van zijn massa plots geëjecteerd wordt tot ver buiten de baan van de planeet. Vind de eccentriciteit van de nieuwe baan van de planeet als men aanneemt dat de planeet zelf geen verandering ondergaat ten gevolge van de explosie. $r^0 = a(1-e)$
   $r^1 = a(1+e)$

3. Je laat een potlood, met de punt naar beneden, in een bakje met water vallen. Als je het potlood loslaat vanop een hoogte van 4cm (afstand tussen punt en oppervlak), hoe diep zal het dan duiken? Beschrijf het potlood als een cilinder met een straal van 0.4cm, een lengte van 20cm en een massa van 4.0g. Verwaarloos wrijving en inertiële weerstand van het water.

4. 500g water en 100g ijs zijn in thermisch evenwicht bij 0°C. Wat is het eindresultaat indien men 200g stoom van 100°C toevoegt aan dit mengsel? ($c_{\text{ijs}} = 2100\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; $c_{\text{w}} = 4187\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; $c_{\text{stoom}} = 2010\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; $L_{\text{sm}} = 3.349 \cdot 10^5$Jkg; $L_{\text{v}} = 2.257 \cdot 10^6$Jkg; $c_{\text{Al}} = 908.5$Jkg)

2.3.8 September 1998-1999

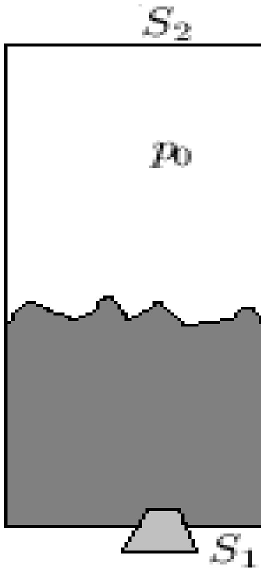
1. Een luchtbel bevindt zich op de bodem van een meer (temperatuur $T = 15°$C) op een diepte van 10m. De luchtbel heeft aanvankelijk een straal van $r_0 = 0.3mm$. De luchtbel stijgt naar het oppervlak van het meer.
   (a) Bereken de straal van de luchtbel op het moment dat zij het het oppervlak bereikt.
   (b) Bereken hoelang het opstijgen duurt. (Verwaarloos de massa van de lucht in de zeepbel) Gegevens: viscositeit van het water $\eta = 1.14$cp; oppervlaktespanning verwaarlozen.
2. Een ijsblokje van 50g komt uit een diepvriezer bij $-10°$C en wordt in een glas van 0°C gegooid. Hoeveel water vriest vast aan het ijsblokje?
3. Twee ringen met respectievelijke massa's $m_1 = 2{,}0$ kg en $m_2 = 5{,}0$ kg bewegen zonder wrijving op een horizontale staaf. De lichtste ring heeft een snelheid van 17 m/s en haalt de andere ring in die een snelheid heeft van 3 m/s. Aan de zware ring is langs de kant waarlangs de lichtste ring nadert een veer bevestigd met $k = 4480$ N/m. Hoever wordt de veer ingedrukt bij botsing van twee deeltjes? Wat zijn de snelheden na de botsing?
4. Een bol van 0.5kg heeft een initiële snelheid van $4\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en een eindsnelheid van $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bol A botst met een bol van 0.3kg in rust. Vind de eindsnelheid van bol B en de hoeken waaronder beide bollen weggekaatst worden (ten opzichte van de invalsrichting van bol A).

2.3.9 Augustus 1999-2000

1. Een kanon is opgesteld op een spoorwegwagentje. De massa M van het wagentje met zijn lading bedraagt $50m$ waar m de massa is van een projectiel gelijk aan 25kg. Bereken de snelheid van het wagentje nadat de twee projectielen in horizontale richting werden afgevuurd; hun ontsnapsnelheid bedraagt $1000\frac{\text{m}}{\text{s}}$.
2. Een bimetaal bestaat uit een plaatje Invar-staal ($\alpha = \frac{9 \cdot 10^{-7}°}{\text{C}}$) en een aluminium plaatje ($\alpha = \frac{24 \cdot 10^{-6}°}{\text{C}}$). Elk van beiden heeft een dikte $d = 0.1$mm en een lengte $l = 10$cm. Bereken de zijwaartse verplaatsing van het uiteinde van dit bimetaal bij een temperatuurstoename van $\Delta T = 10°$C. Vergelijk de gevonden verplaatsing met de verplaatsing (lengteverandering) die een afzonderlijk Al-plaatje (zelfde afmetingen) zou opleveren. (Hints: De vervormde plaatjes vormen concentrische cirkelbogen. Veronderstel verder dat het midden van elk van de plaatjes—d.i. op afstand van $\frac{d}{2}$ van het midden van het bimetaal— zijn "normale" uitzetting uitvoert, terwijl op andere plaatsen ten gevolge van spanningen een andere lengteverandering optreedt.)
3. Een "waterraket" bestaat uit een cilindervormig vat (oppervlakte grondvlak $S_1 = 100\text{cm}^2$); hoogte $H = 10$cm, met aan de onderzijde een kleine opening ($S_2 = 0.1\text{cm}^2$). Aanvankelijk is het vat voor de helft gevuld met water en voor de andere helft met gecompresseerde lucht (druk p_0) en afgesloten met een stop.

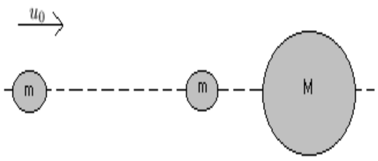
(a) Hoe groot moet de initiële druk p_0 minstens zijn opdat de raket de grond zou verlaten onmiddellijk na het verwijderen van de stop?

(b) Hoe groot moet p_0 minstens zijn opdat de raket de grond "ooit" zou verlaten (d.w.z. voor al het water uit het vat is gestroomd)? De massa M van het lege vat is 10g. Veronderstel een constante temperatuur.



Figuur 2.10: de waterraket

4. We beschouwen drie bollen met respectevelijke massa's m, m en M, waarbij M groter is dan m. Bol 1 heeft oorspronkelijk een snelheid u_0 terwijl de bollen 2 en 3 in rust zijn en elkaar niet raken. We nemen aan dat de bollen centraal en volkomen elastisch botsen. bepaal het aanal botsingen dat zal optreden en bepaal de eindsnelhed van elk van de drie bollen.



Figuur 2.11: drie bollen

2.3.10 Januari 2001

1. Een bol A van 0.7kg heeft een initiële snelheid van $3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ en een eindsnelheid van $2\frac{\text{m}}{\text{s}}$. Bol A botst met een bol B van 0.25kg in rust. Vind de eindsnelheid van bol B en de hoeken van waaronder de beide bollen weggekaatst worden (t.o.v. de invalsrichting van A)

2. Veronderstel dat men een tunnel zou (kunnen) boren die Antwerpen en New York langs een rechte lijn met elkaar verbindt. De afstand tussen beide steden—gemeten langs het

(gekromde) aardopppervlak — is 5880km. Een wagentje rolt vanuit rust de tunnel in, over een wrijvinsloos spoor. Wat is de maximale snelheid die het wagentje bereikt in de tunnel in de veronderstelling dat de aarde een homogene dichtheid heeft. Als een meer realistische dichtheidsverdeling (d.w.z. hogere ρ in het centrum) in rekening gebracht zou worden, zou je dan een grotere of kleinere of dezelfde snelheid vinden? (gegeven: straal aarde $R_A = 6371$km, massa aarde $M_A = 5.9737 \cdot 10^2 4$kg)

3. Een "waterraket" bestaat uit een cilindervormig vat (oppervlakte grondvlak $S_1 = 100\text{cm}^2$); hoogte $H = 10$cm, met aan de onderzijde een kleine opening ($S_2 = 0.1\text{cm}^2$). Aanvankelijk is het vat voor de helft gevuld me water en voor de andere helft met gecompreseerde lucht (druk p_0) en afgesloten met een stop.
   (a) Hoe groot moet de initiële druk p_0 minstens zijn opdat de raket de grond zou verlaten onmiddellijk na het verwijderen van de stop?
   (b) Hoe groot moet p_0 minstens zijn opdat de raket de grond "ooit" zou verlaten (d.w.z. voor al het water uit het vat is gestroomd)? De massa M van het lege vat is 10g. Veronderstel een constane temperatuur.
4. Wat zal het eindresultaat zijn wanneer men 125g stoom van 100°C en 30g ijs bij 10°C toevoegt aan een mengsel van 150g water en 15g ijs bij 0°C? ($c_{\text{ijs}} = 2100\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; $c_{\text{W}} = 4187\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; $c_{\text{stoom}} = 2010\frac{\text{J}}{\text{kgK}}$; $L_{\text{sm}} = 3.349 \cdot 10^5$Jkg; $L_{\text{VW}} = 2.257 \cdot 10^6$Jkg)

2.3.11 September 2001

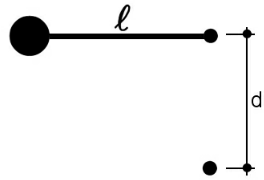
1. Een luchtbel bevindt zich op de bodem van een meer (temperatuur T = 15°C) op een diepte van 10 meter. De luchtbel heeft aanvankelijk een straal $r_0 = 0.3$mm. De luchtbel stijgt naar het oppervlak van het meer.
   (a) Bereken de straal van de luchtbel op het ogenblik dat zij het oppervlak bereikt.
   (b) Bereken hoelang het opstijgen duurt. (Verwaarloos de massa van de lucht)

   (viscositeit van water: $\eta = 1.14$cp; oppervlaktespanning verwaarlozen)
2. Een ijsblokje van 50g komt uit een diepvriezer bij −10°C en wordt in een glas water van 0°C gegooid. Hoeveel water vriest er vast aan het ijsblokje?
3. Een stalen bol met massa m_1 hangt aan een touw met lengte l. De bol wordt losgelaten uit horizontale positie. Op zijn laagste punt botst hij tegen een andere stalen bol met massa m_2.
   (a) Veronderstel volkomen elastische botsing van de bollen. Bereken de respektievelijke snelheden van de bollen juist na de botsing en de hoogtes die ze bereiken.
   (b) Veronderstel volkomen inelastische botsing van de bollen. Welke hoogte bereikt het massacentrum na de botsing?
4. Een tussenschot verdeelt een vat in twee gelijke delen. Het ene deel bevat He op een temperatuur van 250K, het andere O_2 op een temperatuur van 310K. Beide gassen hebben dezelfde druk. Wat is de eindtemperatuur als het tussenschot wordt weggenomen?

2.3.12 Januari 2002

Examen opgesteld door S. Bals.

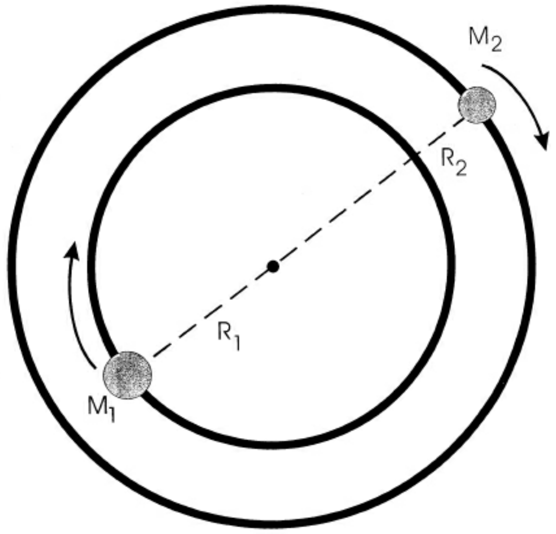
1. Een bolletje aan een touw met lengte l, dat vastzit aan een nagel, wordt gelost. Een andere nagel bevindt zich op een hoogte d onder het ophangpunt van het touw. Wat is de minimale waarde van d (als functie van l) opdat het bolletje een volledige cirkel zou beschrijven rond de nagel?



2. Een maatbeker heeft een diameter van $0,1$m en een hoogte van $0,2$m. Aan de basis is er een opening van 1cm^2. Er loopt water in de beker met een debiet $1,4.10^{-4}\text{m}^3/\text{s}$. Bepaal de hoogte tot waar het water stijgt in de beker.

3. Tijdens een vulkaanuitbarsting rolt er een "brandende wolk" langs de flank van de vulkaan. De temperatuur in de wolk bedraagt 700°C en bestaat uit een gas met hoge moleculaire massa M. Bepaal de minimale waarde van M zodat de dichtheid van het gas groter is dan de omringende lucht. (Temperatuur van de omringende lucht = 20°C, $M_{lucht} = 29$g. Opm.: beide gassen mengen niet)

4. Beschouw een dubbelster bestaande uit 2 sterren met massa m_1 en m_2 die om elkaar cirkelen. Veronderstel dat de banen cirkels zijn met het massamiddelpunt als middelpunt van de baan en met stralen r_1 en r_2. Wat is de omwentelingsperiode van het systeem rond het massamiddelpunt als functie van m_1, m_2, r_1 en r_2 (d.w.z. zoek een uitdrukking voor T waar al deze variabelen in voorkomen). Zie figuur.



2.3.13 Januari 2005

Kevin Jorissen

1. Op de 8ste dag verveelde God zich een beetje, en dus boorde hij een tunnel dwars door de aarde, recht van de Noordpool tot de Zuidpool. Daar aangekomen ving Hij een pinguïn en dropte die in het gat. Denkend dat Hij de aarde homogeen had geschapen, berekende Hij hoeveel later het arme dier op de Noordpool zou verschijnen, ten prooi aan hongerige ijsberen, en op dat berekende tijdstip ging Hij een op de Noordpool kijken of dat een foto waard was.
   (a) Doe zelf die berekening met de aarde als homogene bol met straal $6340km$ en dichtheid $5,5\frac{g}{cm^3}$.
   (b) We weten dat de aarde niet homogeen is, maar een zware kern heeft. Stel dat de massa nog steeds sferisch verdeeld is, maar van het oppervlak naar de kern toe steeds dichter wordt. Kan je beargumenteren of God te vroeg, te laat of precies op tijd kwam?
   (c) *Tracht een meer realistische tijd te berekenen uitgaande van de radiale dichtheidsverdeling (bonusvraag)*
   $$\rho(r) = 10\frac{g}{cm^3}\left(1 - 0,75\frac{r^2}{R^2}\right) \tag{2.1}$$
2. We berekenen de draagkracht van een heteluchtballon. De ballon zelf bestaat uit een sfeer (met onveranderlijke straal R) gevuld met lucht die door een verwarmingselement wordt verhit. De ballon heeft onderaan een opening. De apparatuur (zeil, touwen, verwarmingselement, brandstof, mand) heeft een massa van $100kg$.
   We gaan ervan uit dat de temperatuur in de atmosfeer op hoogte h boven het zeeniveau gegeven wordt door
   $$T = T_0 + ah \tag{2.2}$$
   met $T_0 = 288K$ en $a = -6,5\frac{K}{km}$. Op zeeniveau is de massadichtheid van lucht $1,3\frac{kg}{m^3}$. We veronderstellen de atmosfeer statisch en verwaarlozen alle effecten i.v.m. het weer, aardrotatie, hoogteafhankelijkheid van het zwaarteveld van de aarde, enz. Indien nodig mag de lucht als zuiver N_2-gas beschouwd worden.
   (a) Bereken de dichtheid van de atmosfeer als functie van de hoogte.
   (b) Bereken de draagkracht van de ballon als functie van de hoogte.
   (c) Een koppel ballonvaarders (samen $1500N$ zwaar) wil de Everest overvliegen ($8848m$ hoog). Indien zij hun ballon vullen met lucht van $100°C$, hoe groot moet de ballon dan zijn om de reis te volbrengen?
3. Een ideaal gas bevat twee soorten deeltjes met concentraties n_1 en n_2, en werkzame doorsnedes d_1 en d_2. Bereken de gemiddelde vrije weglengtes voor beide soorten deeltjes. De deeltjes botsen uitsluitend elastisch en de twee gassen zijn in thermisch evenwicht met elkaar. Deeltjes van soort 1 en 2 hebben een vergelijkbare massa.
4. Je doet een experiment om de smelttemperatuur van ijzer te meten. Een calorimeter met waterwaarde $34g$ met $200ml$ water is op $0°C$. Dan worden er twee stoffen bijgevoegd: $100g$ ijs op $-20°C$ en $170g$ ijzer dat net gestold is. Het geheel bereikt een nieuw thermisch evenwicht bij $50°C$. Bereken de smelttemperatuur van ijzer.
   Je weet dat ijzer (Fe) een soortelijke warmte heeft van $0,109\frac{cal}{Kg}$, atoomnummer 26 en een molaire massa van 55,845.

2.3.14 September 2005

Kevin Jorissen

1. Een ideaal gas bevat twee soorten deeltjes met concentraties n_1 en n_2, en werkzame doorsnedes d_1 en d_2. Bereken de gemiddelde vrije weglengtes voor beide soorten deeltjes. De deeltjes botsen uitsluitend elastisch en de twee gassen zijn in thermisch evenwicht met elkaar.

2. Een homogene sfeer (geen massieve bol) met massa m ligt met zijn massamiddelpunt op een loodrechte afstand d van het massamiddelpunt van een homogene dunne staaf met lengte $2l$ en massa M. Bereken de kracht die de sfeer uitoefent op de staaf.

3. Een bol met warmtegeleidingscoëfficiënt k, stralingsabsorptiecoëfficiënt ε, binnenstraal R_1 en buitenstraal R_2 wordt van binnenuit verwarmd. De temperatuur van het binnenoppervlak is T_1. Het buitenoppervlak heeft temperatuur T_2, en $T_2 < T_1$. T_1 en T_2 worden constant gehouden: vanbinnen compenseert een verwarmingselement in het water warmteverliezen, vanbuiten wordt warmte uitgewisseld met de omgeving. Die uitwisseling gebeurt uitsluitend via straling, waarbij de omgeving bekeken mag worden als een oneindig grote zwarte straler met temperatuur T_r.
   Er stelt zich een stationaire situatie in met de volgende kenmerken: $\varepsilon = 0,75, k = 40\frac{J}{s \cdot K \cdot m}, R_1 = 1m, R_2 = 1,2m, T_1 = 300K$; het verwarmingselement levert een vermogen van $9600\pi Watt$.
   Bereken de omgevingstemperatuur T_r. *(Hint: bereken tweemaal het warmteverlies)*

4. We bekijken een spoorwagentje met (tarra) massa $M = 1000kg$ en (binnen)oppervlakte $A = 5m^2$. Het wagentje is vanboven niet afgesloten en is 1m hoog gevuld met water (dat dus nog eens een massa $m_{t=0} = 5000kg$ heeft). Op een afstand $h = 0,25m$ onder het aanvankelijke waterpeil wordt een gat geslagen met oppervlakte $a = 10cm^2$. Het wagentje staat op wrijvingsloze rails.
   (a) Bereken de initiële snelheid waarmee het water naar buiten spuit.
   (b) h en m zijn functies van de tijd. Bereken hoe het waterpeil verandert in de loop van de tijd.
   (c) *Hoe lang duurt het voor het wagentje zich* $2m$ *heeft verplaatst? (bonusvraag)*

2.3.15 Januari 2006

Dr. S. Bals

1. Een massaloze veer kan door een kracht van $100N$, $1m$ worden ingedrukt. De veer is opgesteld onderaan een wrijvingsloos hellend vlak met hellingshoek $\alpha = 30°$. Een massa $m = 10kg$ wordt vanuit rust losgelaten op de top van de helling en komt tot stilstand als de veer 2m is ingedrukt.
   (a) Welke afstand heeft m afgelegd alvorens tot rust te komen?
   (b) Hoe groot is de snelheid van m juist voor het bereiken van de veer?

2. Een bal met massa m ondergaat een elastische botsing met een bal die een massa M heeft en die voor de botsing stil ligt. De bal met massa M maakt na de botsing een hoek van 30° met de invalsrichting. De bal met massa m maakt na de botsing een hoek van 60° met de invalsrichting. Bepaal massa M als functie van m.

3. De stop over een gat met oppervlakte $10cm^2$ aan de zijkant van een open cilindrische tank met diameter $0,5m$ springt los. Het water bevindt zich op dat ogenblik $1m$ boven het gat.

(a) Wat is de snelheid waarmee het water uit het gat stroomt bij het losspringen van de stop?

(b) Welke kracht moet men uitoefenen om te verhinderen dat de tank begint te schuiven? De tank staat op een wrijvingsloos vlak

$\rho = 10^3 kg/m$

4. Een autoband met volume $5,6 \cdot 10^3 \text{cm}^3$ is gevuld met stikstof tot een <u>over</u>druk van $2 \cdot 10^5 N/m^2$ bij een temperatuur van $300K$.

   (a) Wat is de massa van het gas in de band?

   (b) Tijdens de rit stijgt de temperatuur $20K$, wat is dan de nieuwe overdruk?

   $p_{atm} = 101325Pa$, moleculaire massa $N_2 = 28g/mol$, $R = 8.3145\frac{J}{mol.K}$

2.3.16 Januari 2009

Prof. Dr. G. Van Tendeloo

1. Een lift met masse $2000kg$ hangt stil op de eerste verdieping, $4m$ boven een ophangveer met veerconstante $k = 1.4\ 10^5 N/m$. Opeens breekt de kabel waar de lift aan ophangt. Een veiligheidssysteem klemt onmiddelijk tegen de rails langs de muur, zodat een constante wrijvingskracht van $4500N$ de beweging belemmert.

   (a) Bepaal de snelheid van de lift juist voor ze de veer raakt.

   (b) Bepaal over welke afstand de veer zal worden ingedrukt.

   (c) Bepaal de hoogte waarop de lift "teruggekaatst" wordt.

2. Een blok met massa $M = 100kg$ is in rust op een volkomen glad vlak waarvan een uiteinde (het rechtse) begrensd wordt door een verticale wand. Een tweede blok met masse m is geplaatst tussen het eerste blok en de wand en beweegt naar links met constante snelheid u (naar het eerste blok toe). Neem $u = 0.18m/s$. De massa m botst achtereenvolgens met M en de wand. Men constateert dat achteraf beide blokken met dezelfde snelheid naar links bewegen.

   (a) Bereken m. Neem aan dat de wand een oneindige massa heeft en de botsingen elastisch gebeuren.

   (b) Bereken de uiteindelijke gelijke snelheid v van beide massa's.

3. Een cilinder met straal $R = 5.0cm$ en lengte $C = 10cm$ heeft een massadichtheid $\rho_{cilinder} = 0.85g/cm^3$ en drijft in water met lange zijde C vertikaal. Neem $\rho_{water} = 1000kg/cm^3$.

   (a) Bereken hoe diep het blok onder water zit bij evenwicht. Druk het uit in functie van de dichtheid van het blok, de dichtheid van de vloeistof en de lengte van de cilinder.

   (b) Vervolgens drukt men het blok naar beneden en laat het los. Stel de bewegingsvergelijking op. Bereken de periode waarmee de cilinder trilt, zowel analytisch als numeriek.

4. Een cilindrische tank met straal 10 m staat opgesteld op een platform van 10 meter hoog en staat onder een overdruk van 2000 Pa. Op een hoogte van 5.0 m in de tank is er een opening voorzien, met een spuitstuk met een diameter van 10 cm dat ervoor zorgt dat de straal onder een hoek van 30 (met de horizontale) het vat verlaat. De bedoeling is dat het water dat het spuitstuk verlaat, opgevangen wordt in een afvoergoot op de grond.

(a) Bereken hoeveel water men per seconde in het vat moet laten lopen, opdat het water dat het spuitstuk verlaat steeds in de afvoer blijft lopen.

(b) Tot op welke hoogte boven het spuitstuk klimt/daalt het niveau als het evenwicht bereikt is?

Hoofdstuk 3

Wiskundige methoden voor de fysica 1

3.1 De cursus, het vak en het examen

Het is nog maar het derde jaar dat Prof. Eelbode dit vak geeft. Hij controleert op het examen of je de leerstof echt onder de knie hebt, of alleen van buiten hebt geleerd door het stellen van inzichtsvragen. De laatste les overloopt hij ook samen de cursus en vermeldt hij welke delen het belangrijkste zijn en wat voor vragen je kan verwachten, dus de laatste lessen zijn zeker aan te raden (zoals bij alle vakken trouwens het geval is)!

- **Definities!**: Hoewel ze vaak onbenullig lijken en stom zijn om vanbuiten te leren, beginnen veel examens op basis van deze definities! Het zou dus spijtig zijn moest je alles wel kunnen bewijzen maar niet kunnen beginnen omdat je niet weet waarover ze het hebben.
- **Oefeningen**: Het oefeningengedeelte telt even veel mee als de theorie, zorg er dus voor dat je dit minstens even goed kan! Voor Fysici zijn oefeningen vaak belangrijker dan de wiskundige achtergrond.
- **Rustig**: Probeer zo rustig mogelijk te blijven, alleen zo kan je geconcentreerd blijven bij mondelinge examens.

Hieronder vinden jullie een verzameling van theorie-examens van de vakken 'Analyse 1' en 'Lineaire Algebra' van de voorbije jaren. Deze twee vakken zitten nu vervat in jullie 'Wiskundige methoden 1'. Ook zijn de vragen van de voorbije 2 jaar Wiskundige Methoden 1 toegevoegd.

Het oefeningenexamen was in lang vervlogen tijden nog open boek en om de studenten te helpen, heeft Dr. Werner Peeters, de vorige docent van dit vak, een groot aantal oefeningenexamens van vroeger uitgewerkt. Deze kan je in bijlage ook vinden en zijn heel handig als extra.

De oefeningen van het deel 'lineaire algebra'(matrices, eigenvectoren,...) werden de vorige jaren gedoceerd door Hans Heymans. Oefeningenexamens van dit vak zijn ook te vinden en omvatten wel ongeveer wat je hierover moet kennen, maar zijn natuurlijk niet van de hand van Anneleen Van Geenhoven. Toch zijn ze een goede test!

Ten slotte staat het oefeningenexamen van Wiskundige Methoden 1 van het voorbije jaar (van zowel januari als augustus) er ook bij, wat natuurlijk het meest representatief zal zijn voor het examen van dit jaar! Anneleen zegt tijdens de les welke soort oefeningen je kan verwachten, en aangezien deze drie examens heel gelijkaardig zijn, kan je ze best eens proberen oplossen om te weten of je het kan!

3.2 Theorie Analyse

3.2.1 Januari 2005

1. Geef en bewijs de stelling van Leibnitz.
2. Bespreek: regel van Fuss
3. Restterm van Lagrange
4. Los op zonder gebruik te kmaken van partiële integratie:

$$\int xe^x dx \tag{3.1}$$

3.2.2 Januari 2006

1. Bewijs de continuïteit van:
   (a) $\frac{1}{x}$-functie
   (b) sinusfunctie
2. Geef het schema voor het berekenen van oppervlakte, booglengte, inhoud en complanatie voor cartesische coördinaten, parametervoorstellingen en poolcoördinaten.
3. Geef de kettingregel voor het afleiden
   (a) Bewijs deze formule
   (b) Geef een "intelligente" toepassing[1]

3.2.3 Januari 2007

1. Geef de definities van continuïteit en afleidbaarheid en zo veel mogelijk verbanden tussen deze begrippen.
2. We kregen een integraal en moesten die op 3 fundamenteel verschillende manieren oplossen.
3. Reststelling van Taylor en Lagrange.

3.2.4 Januari 2008

3.2.4.1 Groep 1

1. geef de limiet definities van oneigenlijke en oneindige limieten + hoe je ze moet berekenen
2. De middelwaardestellingen + een intelligente toepassing
3. Substitutie van goniometrische integralen (tweede klasse), welke? + voorbeelden

3.2.4.2 Groep 2

1. Extremum onderzoek en afgeleiden, wat hebben ze met elkaar te maken
2. Primitieven en welke stellingen daaromtrent bewezen zijn
3. Taylorreeks en restterm

[1] dr. Peeters bedoelt de beperkte inverse functiestelling

3.2.4.3 Groep 3

1. convexiteit en concaviteit, welke eigenschappen, bewijs dat convex $\Leftrightarrow$ stijgend
2. Toepassingen van integralen (schema) + overal een voorbeeld bij
3. regels van Fuss + voorbeeld

3.3 Theorie Lineaire algebra

3.3.1 Januari 2008

1. bespreek de algebraïsche en geometische multipliciteit
2. Geef de dimensie formule en bewijs (Bewijs dim(VxW) = dim(V) + dim(W))
3. We zagen twee definities over de rang van een matrix, bewijs dat deze equivalent zijn.
4. Zij f: V-¿ W een lineaire afbeelding. Wat is dan de matrix van f. Hoe worden de coordinaten van V omgezet in coordinaten van W?
5. Bewijs: als de eigenvectoren onderling verschillend zijn, bewijs dat ze dan lineair onafhankelijk zijn. En als A een symmetrische matrix is, bewijs dan dat de eigenvectoren onderling orthogonaal zijn.
6. bewijs $det(A^-1) = det(A)^-1$. Dit moest ik gewoon als laatste vraag snel oplossen, om te kijken of je met gemak van die kleine dingetjes kunt bewijzen.
7. Bewijs dat dim(K(A)) + dim (N(A) = n
8. Bewijs dat als V' C V deelruimte f(V') deelruimte is van W en dat als W' C W deelruimte $f^-1(W')$ deelruimte is van V opmerking: f^-1 is niet de inverse van de lineaire afbeelding
9. Geef de matrixvoorstelling van f, f: U $\rightarrow$ V en hoe zet je een vector u element van U om aan de hand van deze matrixvoorstelling

3.4 Theorie Wiskundige Methoden I

Prof. Dr. Eelbode

3.4.1 Januari 2009

3.4.1.1 Groep 1

1. Geef de stelling van Rolle
2. Geef de stelling van Cauchy met bewijs
3. Waar of vals:
   (a) Een bijectie is altijd monotoon
   (b) De oppervlakte onder de functie $x = \frac{1}{x(ln(x))^p}$ convergeert voor p<1, met p een reëel getal

3.4.1.2 Groep 2

1. Geef de middelwaardestelling van de integraalrekening met tekening
2. Geef de eerste hoofdstelling van de integraalrekening met bewijs
3. Waar of vals?
   (a) De oppervlakte onder de functie $x = \frac{1}{x(ln(x))^p}$ divergeert voor p>1, met p een reëel getal
   (b) Gegeven een functie die 3x differentieerbaar is, niet continu in f"(a) maar wel in f'(a) en f"'(a). Deze functie bestaat

3.4.2 Januari 2010

Prof. Dr. Eelbode

1. Geef en bewijs de stelling van Weierstrass.
2. Waar of vals?
   - Indien $\phi(x) = |x^2 + x|$, dan geldt er dat $\phi'(x) = |2x + 1|$.
   - Alle bijecties $f : [0, 1] \to [0, 1]$ zijn monotoon.
   - Als de taylorreeks van de functie $f(x) = xe^{-x^2}$ wordt gegeven door $\sum_k y_k x^k$, dan geldt er dat $y_{32} \neq 0$.
   - Alle polynomen van graad $n \geq 3$ die enkel oneven machten bevatten, hebben altijd een buigpunt.
   - De functie $\mu(x) := cosy$ is een integrerende factor voor de differentiaalvergelijking $(2(x - y)siny + cosy)dy = cosydx$.
3. $F(s) := \int_0^\infty f(x)e^{-sx}dx$.
   $f(x) = x$
   - Geef het domein voor $F(s)$.
   - Bepaal $F(s)$ voor een waarde s in het domein.
4. Geef en bewijs eerste hoofdstelling van de calculus en geef de tweede hoofdstelling van de calculus.
5. Leg kort uit hoe je een differentiaalvergelijking van de vorm $y' + \psi(x)y = \mu(x)$ kunt oplossen.

3.5 Oefeningen Analyse

3.5.1 Juni 2007

Anneleen Van Geenhoven

1. Zij $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een twee maal differentieerbare functie
   (a) Bewijs : $\forall x, y \in \mathbb{R} : |x + y| \leq |x| + |y|$
   (b) Schrijf de functiewaarde van f in $x+d$ (met $d > 0$) als Taylorpolynoom van graad 1 rond x (met restterm).
   (c) Welke bovengrens voor $|f'|$ kan je hieruit afleiden indien geldt dat $\forall x \in \mathbb{R}$: $|f(x)| \leq k$ en $|f"(x)| \leq l$?
   (d) Het antwoord op de vraag c is afhankelijk van d. Bestaat er een minimale bovengrens ?
   (e) Welk resultaat bekom je als $k = l = 1$? En wat is het resultaat als $k = 9$ en $l = 1$?
2. Bewijs dat elke continue functie $f : [0, 1] \to [0, 1]$ een fixpunt heeft. (Een fixpunt van een functie f is een getal c in het domein van f waarvoor $f(c) = c$)
3. (a) Teken de grafiek van de kappakromme met cartesische vergelijking
   $$y^2(x^2 + y^2) = a^2x^2 \qquad (a > 0)$$
   door overgang naar een mogelijke parametervoorstelling.
   (Tip : ga eerst over naar poolcoördinaten, leid hieruit een parametervoorstelling af.)
   (b) Bereken de oppervlakte tussen de grafiek en de rechten $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ door de vergelijking om te zetten in poolcoördinaten.
   (c) Bepaal (met gebruik van de parametervoorstelling) de inhoud van het omwentelingslichaam dat ontstaat bij rotatie van de kappakromme tussen $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}a$ en $x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$ rond de x-as.
4. Los volgende differentiaalvergelijking op en schrijf de oplossing in de vorm “y = ...” :
   $$y' \tan x = -2y \sec^2 x - \frac{\tan x}{1 + \cos^2 x}$$

3.5.2 Januari 2008

Anneleen Van Geenhoven

1. Toon aan dat de volgende gelijkheid geldt:
   $$5Bgtan\frac{1}{7} + 2Bgtan\frac{3}{79} = \frac{\pi}{4}$$
2. Bepaal de volgende limieten:
   (a)
   $$\lim_{x \to 0} \frac{9x - sin(3x)}{5x + 4\sin(2x)}$$
   Zonder de regel van Hopital.

(b)
$$\lim_{x\to 0} \sqrt[x^2]{\cos x}$$

3. Beschouw de volgende parametervergelijking:
$$\begin{cases} x(t) = a.\cos^3 t \\ y(t) = a.\sin^3 t \end{cases} \tag{3.2}$$
   (a) Maak de grafiek behorende bij deze vergelijking
   (b) Berekn de oppervlakte ingesloten door deze grafiek.
   (c) Berekn de oppervlakte van het omwentelingslichaam dat ontstaat door wentelen om de x-as.

4. Hoeveel termen (verschillend van 0) van de Mauclaurinreeks van e^{-x^4} zijn nodig om $\int_0^{1/2} e^{-x^4}dx$ te bepalen tot op 5 decimalen? Bereken vervolgens de integraal met deze nauwkeurigheid

5. Los de volgende differentiaalvergelijking op en schrijf de oplossing in de vorm: y=...
$$x^2y'' - 4xy' + 6y - 2x^4 - x^2 = 0y(1) = 2; y'(1) = 4$$

3.6 Oefeningen Lineaire Algebra

3.6.1 Januari 2007

1. Zij A een $n\times 1$-matrix zodanig dat ${}^tA.A = 1$. Definieer dan de matrix $H := I_n - 2A.{}^tA$
   (a) Toon aan dat H een symmetrische matrix is
   (b) Toon aan dat $H^{-1} =^t H$

2. Zij V de deelruimte van $\mathbb{R}_2[X]$ voortgebracht door de veeltermen X^2+X en X^2-2X. Beschouw de lineaire afbeelding $f : V \to \mathbb{R}^2$ gegeven door $f(X^2+X) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ en $f(X^2-2X) = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.
   (a) Geef de matrix van f t.o.v. de geordende basissen $B = X^2+X, X^2-2X$ in V en $C = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$ in $\mathbb{R}^2$.
   (b) Bereken de matrix van de lineaire afbeelding t.o.v. de twee standaardbasissen : we bedoelen de basissen $B' = X^2, X$ en $C' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.
   (c) Bepaal $Ker(f)$ en $Im(f)$.

3. We werken in de complexe vectorruimte $\mathbb{C}^4$. Is de matrix A diagonaliseerbaar ? Zo ja, geef dan een diagonaliserende matrix S (d.w.z. $S^{-1}AS = D$), zo neen, toon dit dan aan.
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4. Geef een inproduct op $\mathbb{R}[X]$ met de volgende eigenschappen (en toon aan dat ze voldaan zijn) :
   (a) Even en oneven veeltermfuncties staan loodrecht op elkaar (f is even als $f(-x) = f(x)$, oneven als $f(-x) = -f(x)$).
   (b) De lengte (norm) van elke constante veelterm c is gelijk aan $|c|$.

5. We beschouwen de functie

$$\phi : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X] : aX^2 + bX + c \longmapsto aX^2 + (b - 2a)X + (a - b + c)$$

   (a) Beschrijf *geometrisch* wat deze functie met de veeltermen doet.
   (b) Is ϕ lineair ? Motiveer je antwoord (kort).

3.6.2 Januari 2008

Hans Heymans

1. Goed of fout: er is maar 1 oneindig dimensionale deelruimte van $\mathbb{R}[x]$ en dat is $\mathbb{R}[x]$ zelf. Beargumenteer.

2. Geef een basis voor de kern en het beeld van de onderstaande lineaire afbeelding en ga na of f surjectief is.

$$f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4 : \underline{x} \to M.\underline{x}$$

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 & 1 & 12 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

3. Stel (a,b) $\neq$ (0,0) in $\mathbb{R}^2$. Geef de matrix van de loodrechte projectie op vect{(a,b)} (de projectie kan als een lineaire afbeelding van $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ beschouwd worden)
   (a) t. o. v. $B = \{(1,0),(0,1)\}$
   (b) t. o. v. $B' = \{(a,b),(b,-a)\}$

4. (a) Stel $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ de (verschillende) eigenwaarden van een vierkante matrix M met bijbehorende eigenruimten $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_k}$. Wat zijn dan de eigenwaarden en eigenruimten van de matrix $N = \alpha M(\alpha \neq 0)$.
   (b) Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van de matrix A. Geef zo mogelijk een matrix die A diagonaliseert of leg uit waarom zo'n matrix niet bestaat

$$A = 1/3 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

5. De matrix A uit de opgave 4b induceert een bilineaire afbeelding $g_a : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$: $(\underline{v}, \underline{w}) \to {}^t\underline{v}.A.\underline{w}$
   Toon aan dat g_a geen inproduct is.

   HINT: de oplossing van 4b kan nuttig zijn

3.6.3 September 2008

Hans Heymans

1. Goed of fout, argumenteer: elke oneindige deelverzameling van $\mathbb{R}^3$ is voortbrengend.
2. Bewijs dat ϕ lineair is en geef de matrix van ϕ ten opzichte van de (geordende) basissen:

$$\begin{array}{l} B_1 = \{X, 1\} \subset \mathbb{R}_1[X] \\ B_2 = \{X^2, X, 1\} \subset \mathbb{R}_2[X] \\ \phi : \mathbb{R}_1[X] \to \mathbb{R}_2[X] : F \mapsto \int_0^X F(t)dt \end{array} \tag{3.3}$$

3. Stel $M = [K_1 K_2 K_3] \in M_{5,3}(\mathbb{R})$ en beschouw de lineaire afbeelding

$$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^5 : x \mapsto Mx \tag{3.4}$$

   Wat is de dimensie van $Ker(f)$ (bewijs) als je weet dat:

   (a) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha K_1 + \beta K_2 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0$

   (b) $\exists \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R} : \exists i : \alpha_i \neq 0$ en $\alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 + \alpha_3 K_3 = 0$

4. Bewijs dat voor alle lineair onafhankelijke vectoren v en w in $\mathbb{R}^2$ geldt: er bestaat een inproduct op $\mathbb{R}^2$ ten opzichte waarvan v en w orthogonaal zijn.
5. Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van de matrix A.is A diagonaliseerbaar?

$$A = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3.7 Oefeningen Wiskundige Methoden I

3.7.1 Januari 2009

Anneleen Van Geenhoven

1. Bepaal de volgende limiet:

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - cos(x) - ln\sqrt{1 + x^2}}{x^4}$$

2. Bepaal de volgende onbepaalde integraal:

$$\int \frac{1}{tanx - 1} \mathrm{d}x$$

3. Bepaal door middel van een Taylorreeks $e^{\frac{1}{5}}$ tot op 7 decimalen nauwkeurig. Bepaal hiervoor eerst hoeveel termen je nodig hebt om de gewenste nauwkeurigheid te bereiken. Opmerking: Let er op dat je in je berekening de gevraagde waarde al niet gebruikt! Concreet: ga ervan uit dat je e^x voor geen enkele waarde van x kent, behalve $e^0 = 1$ en $e^1 \approx 2.7$.
4. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\frac{2}{3x + 2y - 1} = y' - 1$$

Vereenvoudig de oplossing zoveel mogelijk.

5. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'' - y = xcos(x)$$

Schrijf je oplossing in de vorm $y = f(x)$.

6. (a) Toon aan dat

$$\mathbf{B_3} = \left\{ \begin{pmatrix} -15 \\ 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -8 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -14 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

een basis is voor $\mathbb{R}^3$.

(b) Zij verder de basis

$$\mathbf{B_2} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} \right\}$$

voor $\mathbb{R}^2$ (Dit hoef je niet aan te tonen).

(c) Bepaal de matrix van

$$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 + 3x_3 \\ x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

ten opzichte van deze basissen B_3 en B_2.

(d) Een andere basis van $\mathbb{R}^3$ is

$$\mathbf{B_3'} = \left\{ \begin{pmatrix} -9 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -15 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(dit hoef je weer niet te bewijzen). Bepaal de matrix van de basisovergang van B_3 naar B_3'.

(e) Een nieuwe basis van $\mathbb{R}^2$ is

$$\mathbf{B_2'} = \left\{ \begin{pmatrix} -7 \\ -16 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 8 \\ 21 \end{pmatrix} \right\}$$

(niet bewijzen). Bepaal ook hiervoor de overgangsmatrix van B_2 naar B_2'.

(f) Bepaal aan de hand van de voorgaande resultaten de matrix T te opzichte van de basissen B_3' en B_2'.

7. (a) Ga na of de volgende matrix A diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$. Indien dit zo is, bepaal dan ook een matrix P die A diagonaliseert, en geef de bijbehorende diagonaalmatrix D. Geef ook het verband tussen de 3 matrices A, P en D.

$$A = \begin{bmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{27}{5} & \frac{-18}{5} \\ \frac{12}{5} & \frac{-31}{5} & \frac{24}{5} \\ 3 & -9 & 7 \end{bmatrix}$$

(b) Wat kan je hieruit besluiten voor de diagonaliseerbaarheid van A^{-1}?

8. Vereenvoudig de volgende uitdrukking: $arcsin\frac{5}{13} + arccos\frac{8004}{8125}$

9. Zijn de volgende verzamelingen aftelbaar of overaftelbaar?
   (a) $[0,1]\bigcap\mathbb{Q}$
   (b) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$
10. Bepaal de partiële afgeleide naar x van de volgende functie:

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{xy}}{\sqrt{x-\sqrt{xy^2}}}$$

   Opmerking: Wat kan je veronderstelling in verband met het teken van x en/of y? Maak hier gebruik van.
11. Bepaal de waarde van de volgende oneigenlijke integraal:

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x+1)^2}\mathrm{d}x$$

3.7.2 Augustus 2009

Anneleen Van Geenhoven

3.7.2.1 Groep 1

1. Ga na of de volgende functie injectief, surjectief en/of bijectief is:

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z} : n \mapsto (-1)^n 2n + \tfrac{1}{2}((-1)^n - 1)$$

   Verklaar je antwoorden aan de hand van bewijzen en/of tegenvoorbeeldjes!
2. Bepaal de volgende limieten:
   (a)
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{4}{x^2+2x-3} - \frac{4}{x+3}\right)$$
   (b)
$$\lim_{\substack{x\geq 0\\ \to}}(x+cos(2x))^{cosec(3x)}$$
3. Een touw van 60cm wordt in twee stukken geknipt. Een deel ervan wordt in de vorm van een cikel gelegd, het andere in de vorm van een gelijkzijdige driehoek.
   (a) Waar moet geknipt worden om een minimale totale oppervlakte te bekomen?
   (b) Waar moet geknipt worden om een totale maximale oppervlakte te bekomen?
4. Bepaal $\int \frac{2x^3+4x^2+10x+13}{x^4+9x^2+20}\mathrm{d}x$
5. Bepaal de oppervlakte van het omwentelingslichaam dat ontstaat door de curve $y = e^x$ te wentelen rond de x-as van $x = 0$ tot $x = \ln 7$. Hint: Gebruik voor de integraal de substitutie $t = e^x$.
6. Bereken met behulp van een Taylorreeks ln(1.3) tot op 4 decimalen nauwkeurig. Bepaal hiervoor eerst hoeveel termen je nodig hebt om de gewenste nauwkeurigheid te bereiken.
7. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$xy'' - y' = 3x^2$$

Schrijf de oplossing in de vorm van $y = f(x)$.

8. Geef een basis voor de vectorruimte

$$\{(a-2b+5c, 2a+5b-8c, -a-4b+7c, 3a+b+c) \in \mathbb{R}^4 | a, b, c \in \mathbb{R}\}$$

9. Los het volgende stelsel op:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 + x_4 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \\ 9x_1 - 3x_2 - x_3 - 7x_4 = 4 \\ -8x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = -10 \end{cases}$$

10. Zij $a = (2, 1, -1)$, $b = (-4, 3, 1)$ en $c = (0, 1, 2)$. Bepaal

$$a \times \Big((b \times c) \times (a \times c)\Big)$$

11. Ga na of de volgende matrix A diagonaliseerbaar is over $\mathbb{R}$. Indien dit zo is, bepaal dan ook een matrix P die A diagonaliseert, en geef de bijbehorende diagonaalmatrix D. Geef ook het verband tussen de 3 matrices A, P en D.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

3.7.2.2 Groep 2

1. Vereenvoudig $4arctan\frac{1}{5} - arctan\frac{1}{239}$. (Wees volledig!)
2. Bepaal volgende limieten:

   (a)
   $$\lim_{x \to 0} \left(arctanx^{sinx}\right)$$

   (b)
   $$\lim_{x \to +\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

   (c)
   $$\lim_{x \to -\infty} \left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

3. We willen een cilindervormig vat maken met een inhoud van 64 dm^3. Voor de bodem van het vat willen we een metaalsoort gebruiken met een kostprijs van 2 euro per dm^3, de opstaande zijwand van het vat kost 2,5 euro per dm^3. Bepaal de maten van het vat zodat de prijs minimaal is.
4. Bepaal $\int xarcsin(x^2)\mathrm{d}x$.
5. Bereken de booglengte van de curve $y = ln(cosx)$ tussen $x = \frac{\pi}{6}$ en $x = \frac{\pi}{4}$.
6. Bepaal $\int xarcsin(x^2)\mathrm{d}x$.
7. Bereken de booglengte van de curve $y = ln(cosx)$ tussen $x = \frac{\pi}{6}$ en $x = \frac{\pi}{4}$.
8. Stel dat we sinx benaderen door middel van een MacLaurinreeks met 3 termen (verschillend van nul). Voor welke waarden van x is de fout hierbij hoogstens 0,00005? Geef je antwoord in graden.

9. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$y'' - \tfrac{1}{x}y' - 2 = 0$$

Schrijf de oplossing in de vorm $y = f(x)$.

10. Bepaal voor welke waarden van h de verzameling

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ h \end{pmatrix} \right\}$$

een basis is van $\mathbb{R}^4$. (Verklaar voldoende!)

11. Bereken de inverse matrix van

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 0 \\ 1 & 3 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

12. Zij V een complexe vectorruimte en $u, v, w \in V$, zodat $\langle u, v\rangle = 3 + i, \langle u, w\rangle = 2 - 2i, \langle v, w\rangle = -4i, ||u|| = 3, ||v|| = 1en||w|| = 5$. Bereken $\langle +v - 3w, 2u - v\rangle$.

13. Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & -4 \\ -3 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3.8 Extra uitgewerkte oefeningen voor Analyse

Hierna volgen elf jaar aan oefeningenexamens Analyse die erna worden opgelost. Dit is een supergoede test om te zien of je alles kan!

3.8.1 Januari 1995

Dr. Kristin Robeys / Lic. Werner Peters

1. Los volgende differentiaalvergelijking op:

$$2x + 1 - \frac{y^2}{x^2} + (y^2 + \frac{2y}{x})y' = 0 \tag{3.5}$$

2. (a) Zij ($\mathbb{R}$,d) de Euclidische metrische ruimte, $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$, en zij $(\mathrm{V}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij uniforme omgevingen van $\mathbb{N}$. Is $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n$ ook nog
      i. een uniforme omgeving van $\mathbb{N}$?
      ii. een omgeving van $\mathbb{N}$?

   Zo, ja, bewijs, zo nee, geef een tegenvoorbeeld.

   (b) *(Staat niet op zoveel punten als 2.a! Probeer deze vraag enkel van zodra je alle andere vragen hebt)* Zelfde vraag voor $\mathbb{Q}$ in plaats van $\mathbb{N}$.

3. Zij de volgende functie $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeven:

$$f : \begin{cases} (x, y, z) \longmapsto \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2} \text{ als } (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ (0, 0, 0) \longmapsto 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

   Is deze functie in $\bar{0} = (0, 0, 0)$

   (a) continu?

   (b) (continu) partieel afleidbaar?

   (c) afleidbaar

   (d) differentieerbaar?

4. Gegeven volgend stelsel:

$$\begin{cases} xyz^2t^2 = 16 \\ x^2 + 2y + z^2 - 2t^2 + 1 = 0 \end{cases} \tag{3.7}$$

   (a) Geef een analytische voorwaarde opdat je (y,t) in functie van (x,z) zou kunnen bepalen.

   (b) Hoeveel oplossingen heeft dit stelsel in een omgeving van het punt $(x_0, z_0) = (1, -2)$? En welke?

   (c) Bereken in ditzelfde punt voor elk van de gevonden oplossingen $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial z}$, $\frac{\partial t}{\partial x}$ en $\frac{\partial t}{\partial z}$.

5. Bereken de lijnintegraal $\int f \mathrm{d}\gamma$ als $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (x, y, z) \longmapsto (y, z, x)$ en γ is de doorsnede van de oppervlakken $z = xy$ en $x^2 + y^2 = 1$, eenmaal doorlopen in tegenwijzerzin, gezien vanop het punt $+\infty$ op de Z-as.[2]

3.8.2 September 1996

1. Beschouw voor alle $a, b \in \mathbb{R}$ het lichaam $L(a, b)$ begrensd door de vlakken $x = 0$ en $x = 1$ en het oppervlak dat ontstaat door de parabool $y = x^2 + ax + b$ te laten wentelen om de x-as. Bewijs dat het volume van $L(a, b)$ minimaal is als $a = -1$ en $b = \frac{1}{6}$.

2. Beschouw de lineaire differentiaalvergelijking (LDV)

$$x^3y'' + xy' - y = e^{\frac{-1}{x}} \tag{3.8}$$

   (a) Geef de volledige oplossing van de geassocieerde homogene lineaire differentiaalvergelijking (HLDV).

   (b) Geef een particuliere oplossing van de HLDV.

   Aanwijzing: $y_1(x) = x$ is een oplossing van de HLDV.

3. Beschouw de afbeeldingen

$$f : \mathbb{R}^3 \longmapsto \mathbb{R} : \begin{cases} (x, y, z) & \longmapsto & \frac{\sqrt{|xy|}\sin(z)}{z} \text{ als } z \neq 0 \\ (x, y, 0) & \longmapsto & \sqrt{|xy|} \end{cases} \tag{3.9}$$

   en $g = f|_{[0,1]\times[0,1]\times[0,1]}$.

   (a) Is f continu? Bewijs uw antwoord.

   (b) Is f uniform continu? Bewijs uw antwoord.

[2] Maak een tekening, en schrijf een parametervoorsteling voor γ uit!

(c) Is g continu? Bewijs uw antwoord.

(d) Is g uniform continu? Bewijs uw antwoord.

4. Zijn volgende (continue) functies differentieerbaar? Bewijs uw antwoord.

(a)

$$f_1 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} x & \longmapsto & \frac{x-\sin(x)}{x^2} \text{ als } x \neq 0 \\ 0 & \longmapsto & 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

(b)

$$f_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (x,y) & \longmapsto & y\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ als } (x,y) \neq (0,0) \\ (0,0) & \longmapsto & (0,0) \end{cases} \tag{3.11}$$

5. Stel $p, q \in \mathbb{R}_0^+$. Gebruik de coördinaten-transformatie

$$\begin{cases} \frac{x}{p} = u^2 \\ \frac{y}{q} = v^2 \end{cases} \tag{3.12}$$

$(u, v \geq 0)$ om te bewijzen dat de oppervlakte van het gebied

$$S = \left\{ (x,y) \in (\mathbb{R}^+)^2 | \sqrt{\frac{x}{p}} + \sqrt{\frac{y}{q}} \leq 1 \right\} \tag{3.13}$$

gelijk is aan $\frac{pq}{6}$.

3.8.3 Juni 1997

Werner Peters en Bart Windels

1. (a) Bepaal de algemene (implicitiete) oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y' = \frac{2xy + \sqrt{x}}{6xy^2 - 2x^2} \tag{3.14}$$

op $\mathbb{R}_0^+$ met behulp van de substitutie $x = u^2$.

(b) Bepaal de lineaire differentiaalvergelijking van de orde 2 met constante coëfficiënten met als algemene reële oplossing

$$y = Ae^{2x}\cos(x) + Be^{2x}\sin(x) + \cos(x) + \sin(x) \tag{3.15}$$

$(A, B \in \mathbb{R})$.

2. Gegeven een continue functie $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Bewijs dat de verzameling van alle fixpunten van f gesloten is.

3. Beschouw de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^5(x^2-y^2)}{x^6+y^6} & \text{als} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als} & (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{3.16}$$

(a) Is f contnu in $(0,0)$? Motiveer uw antwoord.

(b) Is f afleidbaar in $(0,0)$? Motiveer uw antwoord.

   (c) Is f differenteerbaar in $(0,0)$? Motiveer uw antwoord.

4. Gegeven het volgende niet-lineaire stelsel:

$$\begin{cases} (xz)^3 + y^3 z - \sqrt[3]{108}xy = 0 \\ x^3 - z - 15 = 0 \end{cases} \tag{3.17}$$

   (a) Bepaal de oplossingen van dit stelsel voor $x = \sqrt[3]{16}$.
   (b) Geef een analytische voorwaarde opdat $y$en z in functie van x worden bepaald.
   (c) Bepaal $\frac{\partial y}{\partial x}$ en $\frac{\partial z}{\partial x}$ voor elk van de in (a) gevonden oplossingen die aan deze voorwaarde voldoen.

5. Bewijs dat de oppervlakte ingesloten door de parabolen $y = x^2, y = 2x^2, y^2 = x$ en $y^2 = 7x$, gelijk is aan 1.

3.8.4 September 1997

1. Bepaal expliciet de algemene oplossing van de differentiaalvergelijking

$$y''' - 3y'' + 4y = 2e^{2x} + 3xe^{3x}. \tag{3.18}$$

2. Vul telkens de gepaste inclusie of gelijkheid in, zodat de uitspraak waar is voor elke verzameling A in een metrische ruimte; u moet deze *niet* bewijzen. Bewijs *wel* dat de andere inclusies in het algemeen vals zijn.

   (a) $\partial(A^\circ) \ldots \partial(A)$
   (b) $\partial(\overline{A}) \ldots \partial(A)$

3. Beschouw voor elke $k \in \mathbb{R}_0^+$ de functie

$$f_k : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{|xy|^k}{x^2-2xy+4y^2} & \big((x,y) \neq (0,0)\big) \\ 0 & \big((x,y) = (0,0)\big) \end{cases} \tag{3.19}$$

   Bewijs dat f_k continu is als en slechts als $k > 1$.

4. Boer Teun heeft enkele onverwachte resultaten bekomen, toen hij probeerde zijn kippen te klonen. Hij heeft nu twee soorten kippen:

   (a) de eerste soort legt eieren met vergelijking

$$z^2 = 4\frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}, \tag{3.20}$$

   (b) de tweede soort legt ellipsoïdale eieren

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3.21}$$

   die door het punt $(1,2,3)$ gaan en met een zo klein mogelijk volume.

   Bereken voor elke soort het volume van één ei.

5. Gegeven het volgende stelsel:

$$\begin{cases} a^2 - bcd = 4 \\ -2b + c - 3d = -7 \\ b + c - 2d = 0 \end{cases} \tag{3.22}$$

6. Geef een voldoende voorwaarde opdat a, b en c lokaal als functie van d kunnen worden bepaald.
7. Bepaal de oplossingen van het stelsel waarvoor $d = 1$.
8. Bepaal (indien mogelijk) $\frac{\partial a}{\partial d'}$, $\frac{\partial b}{\partial d}$ en $\frac{\partial c}{\partial d}$ in elk van de in (b) gevonden oplossingen.
9. Bepaal (indien mogelijk) $\frac{\partial^2 a}{\partial d^{2\prime}}$, $\frac{\partial^2 b}{\partial d^2}$ en $\frac{\partial^2 c}{\partial d^2}$ in elk van de in (b) gevonden oplossingen.

3.8.5 Juni 1998

1. Zij $A = \left\{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Z} : y = (x-1)^3\right\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{R} : 0 < x < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$. Bepaal $\bar{A}, A^\circ, \partial A, A'$ en $A^\bullet$. Teken A.
2. Bepaal expliciet alle functies $y = y(x)$ die voldoen aan
$$x^4 y^{(4)} - 6xy' + 18y = 0 \tag{3.23}$$
3. (a) Bewijs dat het product van n positieve reële getallen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ met gegeven som $\sum_{i=1}^n x_i = S$ maximaal is als $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$.
   (b) Bewijs dat het meetkundig gemiddelde van n positieve getallen steeds kleiner is dan hun rekenkundig gemiddelde, dit wil zeggen
$$\forall n \in \mathbb{N}_0, \forall x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbb{R}^+ : \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n} \leq \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \tag{3.24}$$
   (c) Onderzoek de continuïteit, de partiële afleidbaarheid, de afleidbaarheid en de differentieerbaarheid van de functie
$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \longmapsto \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x^5 y^5 z^5}}{x^4 + y^4 + z^4} & \text{als} \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0) \\ 0 & \text{als} \quad (x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases} \tag{3.25}$$
4. Bereken de oppervlakte, ingesloten door de parabolen $y^2 = 4x + 4, y^2 = 8x + 8$ en de rechten $y = x + 1$ en $y = 3x + 3$. Maak een nauwkeurige tekening.

3.8.6 September 1997-1998

Werner Peters

1. Zij $A := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}_0\right\}$.
   (a) Zoek, indien mogelijk, een omgeving van A die géén uniforme omgeving is. Indien dit niet kan, verklaar dan ook waarom.
   (b) Zelfde vraag voor $\bar{A}$
2. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = x \ln x \tag{3.26}$$
3. Gegeven de functie
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^2 y^2}{x^3 + y^6} & \text{als} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \tag{3.27}$$

   Ga na of deze functie in (0,0)

(a) continu

(b) partieel afleidbaar

(c) afleidbaar t.o.v. een willekeurige richting

(d) differentieerbaar is.

4. Gegeven het niet-lineaire stelsel

$$\begin{cases} v^2w - w^2x + x^2y - y^2z + z^2v = -8 \\ vwxyz = 0 \end{cases} \tag{3.28}$$

(a) Ga na dat het punt $(v, w, x, y, z) = (1, 0, 2, 3, 4)$ hiervan een oplossing is.

(b) Van welke koppels variabelen kan je door middel van de impliciete funciestelling de afgeleiden bepalen in (1,0,2,3,4)?

(c) Bereken de impliciete afgeleide in (1,0,2,3,4) voor elk van de in 4b gevonden gevallen.

5. Zij C de kromme die men bekomt door de cilinder met vergelijking $x^2 + \frac{9y^2}{4} = 1$ te doorsnijden met het vlak $x+y = 2z$, doorlopen in tegenwijzerzin, gezien vanuit het punt $+\infty$ van de Z-as. Zij verder het vectorveld F gegeven door $F(x, y, z) = (y, -z, -x)$. Bepaal $\int_C F \cdot \mathrm{d}\alpha$.

3.8.7 Juni 1999

1. Bepaal een twee-parameter-familie oplossingen van de differentiaalvergelijking

$$y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0 \tag{3.29}$$

die de oplossing $y = \frac{\sin x}{x}$ bevat.

2. Onderzoek de continuïteit, de afleidbaarheid en de differentieerbaarheid van de functie

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y, z) \longmapsto \begin{cases} \frac{\sqrt{|xyz|}}{|x|+|y|+|z|} & \big((x, y, z) \neq (0, 0, 0)\big) \\ 0 & \big((x, y, z) = (0, 0, 0)\big) \end{cases} \tag{3.30}$$

in het punt $(0, 0, 0)$.

3. Stel $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ differentieerbaar en $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bewijs dat in de punten waar de uitdrukking

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varphi(ax + by + cz) \tag{3.31}$$

z lokaal als functie van x en y bepaalt, geldt dat

$$(cy - bz)\frac{\partial z}{\partial x} + (az - cx)\frac{\partial z}{\partial y} = bx - ay. \tag{3.32}$$

4. Bereken de lengte van het krommesegment dat door de rechte $25x - 18y = 22$ wordt afgesneden van de kromme $y = \frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{2}x^{1/2}$.

5. Stel $f : (X, d) \longrightarrow (Y, d')$ uniform continu. Bewijs dat voor elke $A \subset X$ geldt dat:

$$A \text{ totaal begrensd} \quad \Longrightarrow \quad f(A) \text{ totaal begrensd.} \tag{3.33}$$

3.8.8 September 1999

1. Los op:
$$y''' - 4y'' + 5y' - 2y = x(e^x + 1). \tag{3.34}$$

2. Zij $(a_n)_n, (b_n)_n$ rijen in $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Toon aan of weerleg:
   (a) $(a_n)_n$ convergent, $(b_n)_n$ adherent $\Longrightarrow (a_n \cdot b_n)_n$ adherent
   (b) $(a_n)_n$ adherent, $(b_n)_n$ adherent $\Longrightarrow (a_n \cdot b_n)_n$ adherent

3. Onderzoek de continuïteit, de differentieerbaarheid en de continu differentieerbaarheid van de functie[3]
$$f(x) := \begin{cases} x\left[\frac{1}{x}\right] & (x \neq 0) \\ 1 & (x = 0) \end{cases} \tag{3.35}$$

4. Bewijs: Het volume van het grootste parallellepipedum met één hoekpunt $(0, 0, 0)$ en het overstaande een element van $2x + y + 4z = 12$ is gelijk aan 8.

5. Bereken de lengte van de kromme
$$r = a \sin^3 \frac{\vartheta}{3} \qquad (a \in \mathbb{R}_0^+). \tag{3.36}$$

3.8.9 Juni 2000

1. Beschouw voor elke $n \in \mathbb{N}_0$ de functie $f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto n^{-1} \arctan(nx)$. Onderzoek de puntsgewijze en uniforme convergentie van de rijen $(f_n)_n$ en $(f_n')_n$.

2. Beschouw de funcie
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x, y) \longmapsto \begin{cases} \frac{x^3 y^2}{x^4 + y^4} & \text{als} \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als} \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases} \tag{3.37}$$
   (a) Bewijs dat f continu is in (0,0).
   (b) Bewijs dat de partiële afgeleiden van f in $(0, 0)$ niet continu zijn.
   (c) Is f differentieerbaar in (0,0)? Motiveer uw antwoord.

3. Bepaal een functie $y = f(x)$ zodat $f(0) = \frac{\pi}{3}$ en $x^2 + 8x^2 \cos^2(y) + y' = 0$.

4. Bewijs dat er een omgeving G van $0 \in \mathbb{R}$ en een functie $y = f(x)$ op G van klasse C^2 bestaan zodat $f(0) = 1$ en $y^3 - xy - 1 = 0$. Benader f met een Taylorpolynoom van graad 2.

5. Bereken
$$\int\int_G \frac{1}{(x+y)^3} \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{3.38}$$
met $G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq x \leq y + 1 \text{ en } -y \leq x - 1 \leq 1 - y\right\}$.

[3] Hierbij is $[x]$ de functie die x afrond naar beneden. Bijvoorbeeld: $[2,71] = 2$, en $[-2,71] = -3$.

3.8.10 Augustus 2000

1. Los op: $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.
2. Stel $a \in]0,1[$. Definieer voor elke $n \in \mathbb{N}_0$:
$$f_n : [-a,a] \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots + x^{4n}. \tag{3.39}$$
Onderzoek de puntsgewijze en uniforme convergentie van de rij $(f_n)_n$.
3. Onderzoek de continuïteit, de afleidbaarheid en de differentieerbaarheid van de volgende functie in $(0,0)$.
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto \begin{cases} \frac{y^3}{(x^2+y^2)\cosh x} & \text{als} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{als} \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} \tag{3.40}$$
4. Stel $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ is een differentieerbare functie en $u : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : (x,y) \longmapsto f(x^2+y^2)$. Bewijs dat
$$x\frac{\partial u}{\partial y} = y\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{3.41}$$
5. Beschouw $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \longmapsto (t-1,1)$ en
$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{(\sqrt{x^2+y^2})^3}, \frac{y}{(\sqrt{x^2+y^2})^3} \right) \tag{3.42}$$
   (a) Bereken $\int f \mathrm{d}\gamma$
   (b) Beschrijf kort een mogelijke fysische interpretatie van f, γ en het resultaat uit (a).

3.8.11 Januari 2001

Dr. Werner Peters

1. Zij d_1 en d_2 twee metrieken op $\mathbb{R}$, en definieer op $\mathbb{R}^2$ de metriek
$$d\big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\big) := \sqrt{\big(d_1(x_1,x_2)\big)^2 + \big(d_2(y_1,y_2)\big)^2}. \tag{3.43}$$
Bewijs nu dat de volgende eigenschappen equivalent zijn:
   (a) $\big((x_n,y_n)\big)_n \longrightarrow (x,y)$ in $(\mathbb{R}^2, d)$.
   (b) $(x_n)_n \longrightarrow x$ in $(\mathbb{R}, d_1)$, en $(y_n)_n \longrightarrow y$ in $(\mathbb{R}, d_2)$.
2. Onderzoek de puntsgewijze en uniforme convergentie van de rij functies[4]
$$\left(f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto \frac{1}{n^3\left(x - \frac{1}{n}\right)^2 + 1} \right)_{n\in\mathbb{N}_0} \tag{3.44}$$
3. Voor de differentiaalvergelijking
$$y'' + \left(4x - \frac{1}{x}\right)y' + 4x^2 y = 3xe^{-x^2} \tag{3.45}$$
heeft de geassocierde *homogene* vergelijking reeds de oplossing $y_1(x) = e^{-x^2}$(ga dat na!). Bepaal de volledige oplossing van de *niet-homogene* vergelijking.

[4] Hint. Teken de grafiek van f_1, f_2, f_3,...

4. Bereken de lijnintegraal $\int_C f \mathrm{d}\gamma$, waarbij C het vierkant $[-1,1]\times[-1,1] \subseteq \mathbb{R}^2$ is, positief doorlopen (d.w.z. in tegenwijzerzin), waarbij
$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{y}, \frac{y^2}{x}\right) \tag{3.46}$$
5. Zoek het unieke punt op het oppervlak
$$x^2 + (y-2z)^2 = 2y + z - 1 \tag{3.47}$$
waarvoor de afstand tot de Z-as minimaal is.
6. Geef *alle* oplossingen van de volgende logaritmische vergelijking:
$$\log_{36}(9x^4 + 6x^2 + 1) = \frac{\log_4 x}{\frac{1}{2} + \log_4 3} + \frac{1}{\log_{(5-3x)} 6} + \frac{1}{\log_{(5+3x)} 6} - 1 \tag{3.48}$$
7. Bestudeer de kromme met impliciete vergelijking
$$(x^2 + y^2)^2 = 3xy^2 \tag{3.49}$$
door overgang naar poolcoördinaten. Maak een schets, inclusief tekenonderzoek t.e.m. de eerste afgeleide , en beantwoord aan de hand hiervan de volgende vragen:
   (a) Wat is de minimale straal van een gesloten bol rond de oorsprong waarin de grafiek van deze kromme volledig in past?
   (b) Hoeveel maal bereikt deze functie in poolcoördinaten een extrema waarde op het interval $[0, 2\pi]$?
   (c) Wat is de oppervlakte die door deze figuur wordt ingesloten?

3.8.12 September 2001

Dr. Werner Peters

1. Zij $(x_n)_n$ een convergente rij en $(y_n)_n$ een adherente rij in $\mathbb{R}$. Beschouw dan de rij $(x_n + y_n)_n$.
   (a) Convergeert deze rij, adhereert ze, of heeft deze i.h.a. geen bijzonder gedrag? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
   (b) Zelfde vraag wanneer $(x_n)_n$ en $(y_n)_n$ beiden adherent zijn.
2. Definieer de volgende rij functies op $I = [0,1]$:
$$(f_n : I \longrightarrow \mathbb{R} : x \longmapsto nx(1-x)^n)_{n\in\mathbb{N}_0} \tag{3.50}$$
   (a) Bewijs dat deze rij puntsgewijs convergeert naar de constante nulfunctie.[5]
   (b) Ga na of dit ook de uniforme limiet is.
   (c) Toon aan dat
$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x. \tag{3.51}$$

[5] Hint: Beschouw de reeks $\sum f_n(x)$.

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\frac{y^2}{x^2}\left(x^2+2x+y\right)\mathrm{d}x+\left(x^2-2y-\frac{y^2}{x}\right)\mathrm{d}y=0 \tag{3.52}$$

4. Gegeven de functie $f(x,y)=4x-6y+x^2+y^2-4$
   (a) Bereken hiervan de extrema en de aard ervan op het inwendige van de cirkel γ met de oorsprong (0,0) en straal 4.
   (b) Bereken hiervan de extrema en de aard ervan op de rand van diezelfde cirkel.
   (c) Integreer f over het gebied R, gevormd door de gesloten bol in $\mathbb{R}^2$ met γ als rand. Maak hierbij gebruik van een overgang naar een geschikt coördinaatsysteem.
5. Schets de kromme met impliciete vergelijking

$$\left(x^2+y^2\right)^3=4y^4 \tag{3.53}$$

en bereken de oppervlakte die erdoor wordt ingesloten.

3.8.13 Januari 2002

Dr. W. Peeters

1. Onderzoek puntsgewijze en uniforme convergentie van de rij functies

$$f_n:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{n+1}{n}e^{-(x-n)^2} \tag{3.54}$$

2. Ga na of de functie Bgtg : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continu, Cauchy continu, uniform continu, k–Lipschitz (bepaal eventueel een optimale k) is.
3. Los deze differentiaalvergelijking op:

$$x^2y''-3xy'+4y=\sqrt{x} \tag{3.55}$$

4. Schets de kromme in $\mathbb{R}^2$ met cartesische vergelijking

$$x^2+2y^2-20y+46=0 \tag{3.56}$$

in het vlak. Bereken dan de inhoud van de ringvormige figuur die je krijgt door deze te wentelen rond de X-as.
5. Zij D de driehoek in $\mathbb{R}^2$, begrensd door de twee coördinaatassen en de rechte $x+2y=6$. Bepaal de extrema van de functie

$$f(x,y)=x^2+2y^2-4x-4y \tag{3.57}$$

   (a) in het inwendige van D.
   (b) op de rand van D.
6. Stel dat een kromme in $\mathbb{R}^3$ in cylindercoördinaten wordt gegeven door (r,θ,z), waarin zowel r als z functies van θ zijn.
   (a) Leid een formule af voor de booglengte in een dergelijk coördinaatsyteem, uitgaande van r en z.
   (b) Beschouw de kromme $\begin{cases} r=1+\cos 2\theta \\ z=2\theta-\sin 2\theta \end{cases}$. Schets hiervan zowel de projectie op het XY–vlak als op het XZ–vlak, en bereken de booglengte over het interval $[-\pi,\pi]$.

3.8.14 September 2002

Dr. W. Peeters

1. Beschouw de volgende rij functies voor alle $n \in \mathbb{N}_0$:
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -x - \frac{\sqrt{2}}{n} & \text{als} \quad x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2n} \\ -\sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2} & \text{als} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2n} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2n} \\ x - \frac{\sqrt{2}}{n} & \text{als} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2n} \end{cases} \tag{3.58}$$
   (a) Teken f_1, f_2 en f_3.
   (b) Bewijs dat alle functies f_n differentieerbaar zijn.
   (c) Bereken hiervan de puntsgewijze limiet
   (d) Is deze puntsgewijze limiet uniform?

2. Bewijs dat in een metrische ruimte X de volgende betrekking geldt:
$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w) \tag{3.59}$$

3. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{1-x}{x} y = 4xe^x \tag{3.60}$$
   Zoek eerst een oplossing van de geassocieerde niet-homogene vergelijking.

4. Onderzoek de convergentie van de reeks $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}$

5. Bereken in $\mathbb{R}^3$ het volume van het gebied tussen het XY-vlak en het oppervlak $f(x,y) = \frac{y^5}{x^4+y^4}$ over de driehoek R in $\mathbb{R}^2$, begrensd door de rechten $y = x$, $y = 2x$ en $x = 2$ in het XY–vlak.

6. Zoek in $\mathbb{R}^2$ de oppervlakte tussen de cirkel $r = \sqrt{2}\sin\theta$ en de lemniscaat $r^2 = \sin 2\theta$. Maak een nauwkeurige tekening van de beide krommen.

3.8.15 Januari 2003

Dr. W. Peeters

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:
$$\left(x^4 + x^2\right) y'' + \left(-5x - 3x^3\right) y' + \left(9 + 3x^2\right) y = 2x^6 \left(x^2 + 1\right) \tag{3.61}$$

2. Zij $a \in \mathbb{R}$ en f en g continu op $[a, +\infty[$ en differentieerbaar op $]a, +\infty[$. Stel verder dat $f(a) \geq g(a)$ en $\forall x > a : f'(x) \geq g'(x)$. Bewijs dan dat $\forall x > a : f(x) \geq g(x)$.[6] Verander zo weinig mogelijk in de voorwaarden van deze bewering om van de laatste ongelijkheid een strikte ongelijkheid te maken.

3. Bestudeer de impliciete functie in $\mathbb{R}^2$ met vergelijking
$$\left(x^2 + y^2 - 4y\right)^2 = x^2 + y^2 \tag{3.62}$$
   door deze eerst om te zetten naar poolcoördinaten. Bereken vervolgens het oppervlak van het halvemaanvormige gedeelte. Gebruik zo veel mogelijk symmetrie-overwegingen.

[6] Hint: Middelwaardestelling

4. Bepaal het/de punt(en) op het oppervlak $x^3y + z^2 + 1 = 0$ in $\mathbb{R}^3$ dat/die het dichtst bij de Z–as ligt/liggen.

5. Bereken de oppervlakte tussen de krommen in $\mathbb{R}^2$ met vergelijkingen

$$y\left(x^2+6x+10\right)^2 = 3x^2+20x+33,\ y=0 \text{ en } x=1 \tag{3.63}$$

3.8.16 Januari 2004

Dr. W. Peeters

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op:

$$\left(xy^2+y^3\right)+\left(x^3+x^2y\right)y' = 0 \tag{3.64}$$

2. Ga na of de onbepaalde integraal $\int_1^{+\infty} x^{-3}\,\mathrm{Bgtg}\,x dx$ bestaat. Zo ja, bepaal er de waarde van. Zo nee, bewijs dat deze divergent is. Hint: begin met eerst de primitieve $\int x^{-3}\,\mathrm{Bgtg}\,x dx$ te berekenen.

3. Bestudeer de poolkromme met vergelijking

$$r\left(\theta\right) = \sin 2\theta + \cos 4\theta \tag{3.65}$$

   (a) Maak een volledig tekenonderzoek van de functie en haar afgeleide, bepaal de minimale en de maximale afstand tot de oorsprong (exact!),

   (b) Bereken de oppervlakte die door de figuur wordt ingenomen.

4. Zoek de relatieve extrema en/of zadelpunten van de functie

$$f\left(x,y\right) = x^4+y^4-4xy+1 \tag{3.66}$$

5. De kwartparaboloïde, begrensd door $y = 4 - x^2 - z^2$ en de vlakken $x = 0$, $y = 0$ en $z = 0$ wordt door het vlak $x + z = 2$ in tweeën gesneden. Bepaal het volume van het stuk waar het punt $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ in zit.

3.8.17 Januari 2005

Dr. W. Peeters

1. Los de volgende differentiaalvergelijking van hogere orde op:

$$y''x(x+1)^2 + y'(x+3)(x+1) - y(x+3) = \left(x^2+3x+3+\frac{1}{x}\right)\ln x \tag{3.67}$$

   Hint: bewijs eerst dat de lineaire functie $y = x + 1$ een particuliere oplossing is van het geassocieerde homogene probleem.

2. Bereken

$$\int \frac{3x^4+24x^2+2x+47}{(x^2+4)^3}dx \tag{3.68}$$

3. Bestudeer de kromme
$$(x^2 + y^2 - 2xy)^2 = (x^2 + y^2)^3 \tag{3.69}$$
door deze eerst om te zetten naar poolcoördinaten.
   (a) Maak een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide en een nauwkeurige schets.
   (b) Bereken de oppervlakte van het ingesloten deel.
4. Zij V het gebied in $\mathbb{R}^3$ binnen de bol met straal 3 rond $o = (0,0,0)$ en buiten de cylinder met als grondvlak de cirkel rond $(0,0)$ in het XY-vlak met straal 2. Bereken het volume V door overgang op cylindercoördinaten:
$$\begin{cases} x = & r\cos\theta \\ y = & r\sin\theta \\ z = & z \end{cases} \tag{3.70}$$
5. Zoek de minima en maxima van $f(x,y,z) = xyz$ die op de kromme liggen, die de doorsnede is van de eenheidsbol $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ en het oppervlak $xy + yz + zx = 1$.

3.8.18 September 2005

1. Los de volgende differentiaalvergelijking van hogere orde op:
$$x^3y''' + 3x^2y'' - 12xy' + 12y = x^2 \tag{3.71}$$
2. Bereken $\displaystyle\int \frac{\operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{tg}^5\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta} d\theta$
3. Beschouw de kromme $\phi : I \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(t^3, 1 - t^2\right)$
   (a) Bepaal I zodanig dat de kromme precies het segment boven de X–as voorstelt, en teken het krommesegment in kwestie
   (b) Bereken het oppervlak tussen de X–as en dit krommesegment.
   (c) Bepaal de booglengte van het krommesegment.
   (d) Als we het in (b) beschreven stuk wentelen rond de X–as, bereken er dan het omwentelingsvolume van.
   (e) Bereken van ditzelfde stuk volume het manteloppervlak.
   Gebruik bij elk van de bovenstaande vragen zo veel mogelijk de symmetrie–eigenschappen van de figuur.
4. Gegeven de parameterverzameling functies
$$f_a(x) = x^4 - 2ax^3 + (12 - 3a)x^2 + (a+1)x - 1 \tag{3.72}$$
Onderzoek het voorkomen van buigpunten in de grafiek van deze functie naargelang de waarde van a.
5. Beschouw in $\mathbb{R}^3$ een collectie bollen met centrum $\mathbf{o} = (0,0,0)$ en veranderlijke straal R. Voor welke waarde van de straal is de drievoudige integraal
$$\iiint\limits_V \left[\frac{1}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2)^3}} - \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}\right] dV \tag{3.73}$$

met V het volumelichaam van de bol, extremaal? Onderzoek ook de aard van het extremum. Hint, gebruik bolcoördinaten:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \tag{3.74}$$

3.8.19 Januari 2006

Dsubr. W. Peeters

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$(2x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^4)dx + (x^3 + 3x^2y^2 + x^2y + 3xy^3)dy = 0 \tag{3.75}$$

door het zoeken van een geschikte integrerende factor.

2. Voor welke differentiaalvergelijking van orde 3 is de volgende multi-parameterfamilie de oplossing?

$$C_1x^2 + C_2x^2\ln x + C_3x = x^3 + 2x^4 \tag{3.76}$$

3. Bereken

$$\int \frac{\sin x + 3\cos x}{6\sin^2 x - 5\cos x - 7}dx \tag{3.77}$$

4. Bestudeer de poolkromme $r = \cos 3\theta + \cos\theta$

   (a) Maak een tekenonderzoek tot en met de eerste afgeleide en een nauwkeurige schets.

   (b) Als je dat goed gedaan hebt, bestaat het inwendige gebied dat door de kromme wordt afgesloten uit drie delen. Bereken voor elk van de drie delen de oppervlakte, alsook de totale oppervlakte van de drie delen samen. Let goed op tekens, oriëntatie, symmetrie etc.

5. Beschouw voor elke p $\in \mathbb{R}_0^+$ het stuk van de kromme $f_p(x) = x^p(1 - x^p)$ dat boven de x-as ligt.

   (a) Teken de krommen f_1, f_2 en f_3, met toevoeging van het benodigde tekenonderzoek.

   (b) Bepaal de oppervlakte tussen deze kromme en boven de x-as.

   (c) Voor welke waarde van p wordt deze oppervlakte extremaal? Hint: de gezochte waarde is uniek! Bepaal ook of het een minimum, een maximum of een zadelpunt is.

3.8.20 September 2006

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op

$$xy' + (3 + x)\,y = e^x \tag{3.78}$$

met als randvoorwaarde $y\,(1) = 0$.

2. Bereken $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(6\sin x - 3\,\mathrm{Bgtg}\,x - 3x)}{x^5}$ zowel mét als zonder de regel van de l'Hopital, en vergelijk je uitkomsten.

3. Bereken $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x^2 - 4} + 3}{x^2 + 1}dx$

4. Bestudeer de parameterkromme

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\cos t \sin^2 t, 1 - \cos^2 2t\right) \tag{3.79}$$

   Maak hiervan een zo goed mogelijke schets, en bepaal de totale door de kromme ingesloten oppervlakte, door zoveel mogelijk gebruik te maken van de symmetrie van de figuur.

5. Voor elke $p \in \mathbb{R}_0^+$ definiëren we een functie als volgt: op het interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ is $y = (2x)^{2p}$; op het interval $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ is $y = \sqrt[p]{2 - 2x}$.

   (a) Teken deze functie voor $p \in \{1, 2, 3\}$

   (b) Bereken de oppervlakte van tussen deze figuur en de X–as op het interval $[0, 1]$ voor elke $p > 0$.

   (c) Voor welke waarde van p bereikt deze oppervlakte een extreme waarde? Hint: de gezochte waarde is uniek! En ga na of dit een minimum, een maximum of een zadelpunt is.

3.9 Oplossingen Oefeningenexamens

Deze oplossingen zijn van de hand van Werner Peeters. Het kan echter zijn dat er bij het omzetten naar ordinaire TEX enkele tekens verdwenen zijn. Maar vermits je deze oplossingen toch enkel komt bekijken wanneer je na een half uur zoeken nog altijd vast zit, zal je die mankementjes vast en zeker herkennen, en mail ze dan naar ben@winak.be.

3.9.1 Januari 2002

1.

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{n+1}{n}e^{-(x-n)^2} && (3.80)\\
\forall x \in \mathbb{R} &: \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}e^{-(x-n)^2} && (3.81)\\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{-(x-n)^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} && (3.82)\\
&= \lim_{n\to+\infty} e^{-(x-n)^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} && (3.83)\\
&= e^{-\lim\limits_{n\to+\infty}(x-n)^2 \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)} && (3.84)\\
&= e^{-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}{(x-n)^{-2}}} && (3.85)\\
&\overset{(H)}{=} e^{-\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\frac{-1}{n(n+1)}}{2(x-n)^{-3}}} && (3.86)\\
&= e^{\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{(x-n)^3}{2n(n+1)}} && (3.87)\\
&= e^{-\infty} = 0 && (3.88)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ De functie convergeert puntsgewijs naar de constante nulfunctie.
Zoeken naar extrema

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left(\frac{n+1}{n}e^{-(x-n)^2}\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad 2\frac{n+1}{n}(-x+n)\,e^{-(-x+n)^2} = 0 && (3.89)\\
&\Rightarrow \quad x = n && (3.90)
\end{aligned}$$

Is het gevonden extremum maximum of minimum?

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{n+1}{n}e^{-(x-n)^2}\right) = 2(n+1)\,e^{-(-x+n)^2}\frac{-1+2x^2-4xn+2n^2}{n} \qquad (3.91)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{n+1}{n}e^{-(x-n)^2}\right)(x=n) \qquad (3.92)$$

$$\begin{aligned}
&= 2(n+1)\,e^0\frac{-1+2n^2-4n^2+2n^2}{n} && (3.93)\\
&= -2\frac{n+1}{n} && (3.94)\\
&< 0 && (3.95)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ De functie bereikt in $x = n$ een maximum.
Uniforme convergentie?

$$\Rightarrow \quad \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n| = f_n(n) = \frac{n+1}{n} \tag{3.96}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n| = 1 \tag{3.97}$$

$\Rightarrow$ De functie convergeert niet uniform.

2. Uit de middelwaardestelling van de integraalrekening volgt dat $\forall x < y \in \mathbb{R}, \exists c \in]x, y[$ zodanig dat $\frac{\text{Bgtg}\, x - \text{Bgtg}\, y}{x-y} = \text{Bgtg}'\, c = \frac{1}{1+c^2}$. Er geldt echter voor alle $c \in \mathbb{R}$ dat $\frac{1}{1+c^2} \leq 1$. Bijgevolg is

$$|\arctan x - \arctan y| \leq \frac{1}{1+c^2} |x-y| \leq |x-y| \tag{3.98}$$

en dus is de functie 1–Lipschitz.

3. De vergelijking

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = \sqrt{x} \tag{3.99}$$

is een vergelijking van Euler. De hiermee geassocieerde homogene vergelijking is

$$x^2 y'' - 3xy' + 4y = 0 \tag{3.100}$$

Substitutie $x = e^z$ geeft

$$(\ddot{y} - \dot{y}) - 3\dot{y} + 4y = 0 \tag{3.101}$$

waarbij $\ddot{y} = \frac{d^2y}{dz^2}$ en $\dot{y} = \frac{dy}{dz}$. Uitwerken van deze vergelijking geeft

$$\ddot{y} - 4\dot{y} + 4y = 0 \tag{3.102}$$

Deze heeft als karakteristieke vergelijking $\Phi(t) = t^2 - 4t + 4 = 0$ met als nulpunt $t = 2$ met multipliciteit 2. De homogene oplossing is dus

$$y_h = c_1 e^{2z} + c_2 z e^{2z} \tag{3.103}$$

$$= c_1 x^2 + c_2 x^2 \ln x \tag{3.104}$$

De Wronskiaan is

$$W(x) = \begin{vmatrix} x^2 & x^2 \ln x \\ 2x & 2x \ln x + x \end{vmatrix} = x^3 \tag{3.105}$$

wat betekent dat bij al wat nu volgt impliciet geldt dat $x \neq 0$ – anders was er immers geen differentiaalvergelijking van orde 2! Aangenomen dat er een niet-homogene oplossing van de vorm

$$y_p = z_1 x^2 + z_2 x^2 \ln x \tag{3.106}$$

bestaat, vinden we dat

$$z_1' = \frac{1}{x^3} \begin{vmatrix} 0 & x^2 \ln x \\ \frac{\sqrt{x}}{x^2} & 2x \ln x + x \end{vmatrix} = -\frac{\ln x}{x^2\sqrt{x}} \tag{3.107}$$

$$z_2' = \frac{1}{x^3} \begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & \frac{\sqrt{x}}{x^2} \end{vmatrix} = \frac{1}{x^2\sqrt{x}} \tag{3.108}$$

en dus

$$z_1 = \int -\frac{\ln x dx}{x^2\sqrt{x}} = \frac{2}{3x^{3/2}}\ln x + \frac{4}{9x^{3/2}} \tag{3.109}$$

$$z_2 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x}} = -\frac{2}{3x^{3/2}} \tag{3.110}$$

De particuliere oplossing is dus

$$y_p = \left(\frac{2}{3x^{3/2}}\ln x + \frac{4}{9x^{3/2}}\right)x^2 - \frac{2}{3x^{3/2}}x^2\ln x \tag{3.111}$$

$$= \frac{4}{9}\sqrt{x} \tag{3.112}$$

De volledige oplossing is dus

$$y_h = c_1x^2 + c_2x^2\ln x + \frac{4}{9}\sqrt{x} \tag{3.113}$$

4.

$$x^2 + 2y^2 - 20y + 46 = 0 \tag{3.114}$$

Oplossen naar $y \Rightarrow y_{1,2} = 5 \pm \frac{1}{2}\sqrt{(8-2x^2)}$. Duidelijk is $y_1 > y_2$ en geen van beiden snijden de X-as; het te wentelen volume wordt dus

$$V = \pi\int_{-2}^{2}\left(y_1^2 - y_2^2\right)dx \tag{3.115}$$

$$= \pi\int_{-2}^{2}\left(\left(5+\frac{1}{2}\sqrt{(8-2x^2)}\right)^2 - \left(5-\frac{1}{2}\sqrt{(8-2x^2)}\right)^2\right)dx \tag{3.116}$$

$$= \pi\int_{-2}^{2}\left(\left(27+5\sqrt{(8-2x^2)}-\frac{1}{2}x^2\right)-\right. \tag{3.117}$$

$$\left.\left(27-5\sqrt{(8-2x^2)}-\frac{1}{2}x^2\right)\right)dx \tag{3.118}$$

$$= 10\sqrt{2}\pi\int_{-2}^{2}\sqrt{4-x^2}dx \tag{3.119}$$

$$\tag{3.120}$$

Stel $I = \int\sqrt{4-x^2}dx$

Stel $x = 2\sin t \Rightarrow \begin{cases} 4 - x^2 = 4 - 4\sin^2 t = 4\cos^2 t \Rightarrow \sqrt{4 - x^2} = 2\cos t \\ dx = 2\cos t dt \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= 4\int \cos^2 t dt && (3.121)\\
&= 2\int (1 + \cos 2t)\, dt && (3.122)\\
&= 2t + 2\sin t\cos t + c && (3.123)\\
&= 2\,\mathrm{Bgsin}\,\frac{x}{2} + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{4}} + c && (3.124)\\
&= 2\,\mathrm{Bgsin}\,\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2} + c && (3.125)\\
\Rightarrow V &= 10\sqrt{2}\pi\left[2\,\mathrm{Bgsin}\,\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2}\right]_{-2}^{2} && (3.126)\\
&= 20\sqrt{2}\pi\left[2\,\mathrm{Bgsin}\,\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\sqrt{4 - x^2}\right]_{0}^{2} && (3.127)\\
&= 20\sqrt{2}\pi\,(\pi) && (3.128)\\
&= 20\sqrt{2}\pi^2 && (3.129)
\end{aligned}$$

5. $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - 4(x + y)\, x + 2y = 6$

(a)

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 4 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 4y - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow\ (2,1)\ \text{is een potentieel extremum} \qquad (3.130)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4 \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow H(2,1) = 8 \text{ en } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(2,1) = 2 \qquad (3.131)$$

$\Rightarrow (2,1)$ is een minimum, namelijk $f(2,1) = -6$

(b) $F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 4(x + y) + \lambda y$ op $x \in [0, 6]$

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 4 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y - 4 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = y = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, \lambda) = (2, 0, 4) \qquad (3.132)$$

$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 4(x + y) + \lambda x$ op $y \in [0, 3]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 4 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y - 4 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, \lambda) = (0, 1, 4) \qquad (3.133)$$

$F(x, y, \lambda) = x^2 + 2y^2 - 4(x + y) + \lambda(x + 2y - 6)$ op $x \in [0, 6]$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2x - 4 + \lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4y - 4 + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x + 2y - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, \lambda) = \left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right) \qquad (3.134)$$

Stel nu vast dat $f(0,0) = 0,\ f(2,0) = -4$ en $f(6,0) = 12$
$\Rightarrow$ Er is een lokaal minimum op ∂D in $(2,0)$
Verder is $f(0,0) = 0,\ f(0,1) = -2$ en $f(0,3) = 6$

$\Rightarrow$ Er is een lokaal minimum op ∂D in $(0, 1)$
Tot slot is $f(6, 0) = 12$, $f\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right) = -\frac{14}{3}$ en $f(0, 3) = 6$
$\Rightarrow$ Er is op ∂D een lokaal minimum in $\left(\frac{8}{3}, \frac{5}{3}\right)$.
Bijgevolg zijn er in $(6, 0)$, $(0, 3)$ en $(0, 0)$ noodzakelijk lokale maxima.

6. (a)

$$\begin{cases} x = r(\theta)\cos\theta \\ y = r(\theta)\sin\theta \\ z = z(\theta) \end{cases} \tag{3.135}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{dx}{d\theta} = r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta \\ \frac{dy}{d\theta} = r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta \\ \frac{dz}{d\theta} = z'(\theta) \end{cases} \tag{3.136}$$

$$\Rightarrow l = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta}\right)^2} d\theta \tag{3.137}$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{(r'\cos\theta - r\sin\theta)^2 + (r'\sin\theta + r\cos\theta)^2 + (z')^2} d\theta \tag{3.138}$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\begin{array}{c} (r')^2\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right) + (2-2)\, rr'\cos\theta\sin\theta + \\ r^2\left(\sin^2\theta + \cos^2\theta\right) + (z')^2 \end{array}} d\theta \tag{3.139}$$

$$= \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + (r')^2 + (z')^2} d\theta \tag{3.140}$$

(b) $r = 1 + \cos 2\theta$
$z = 2\theta - \sin 2\theta$

$$\frac{d}{d\theta}(1 + \cos 2\theta) = -2\sin 2\theta \tag{3.141}$$

$$\frac{d}{d\theta}(2\theta - \sin 2\theta) = 2 - 2\cos 2\theta = 4 - 4\cos^2\theta = 4\sin^2\theta \tag{3.142}$$

$$\Rightarrow l = \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{(1 + \cos 2\theta)^2 + (-2\sin 2\theta)^2 + \left(4\sin^2\theta\right)^2} d\theta \tag{3.143}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\cos^4\theta + 16\sin^2\theta\cos^2\theta + 16\sin^4\theta} d\theta \tag{3.144}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{4\left(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta\right)^2} d\theta \tag{3.145}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} 2\left(\cos^2\theta + 2\sin^2\theta\right) d\theta \tag{3.146}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left(2 + 2\sin^2\theta\right) d\theta \tag{3.147}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (2 + (1 - \cos 2\theta)) d\theta \tag{3.148}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} (3 - \cos 2\theta) d\theta \tag{3.149}$$

$$= \left[3\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_{-\pi}^{\pi} \tag{3.150}$$

$$= 6\pi \tag{3.151}$$

3.9.2 September 2002

1. (a)

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -x - \sqrt{2} & \text{als} \quad x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\sqrt{1-x^2} & \text{als} \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \\ x - \sqrt{2} & \text{als} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \tag{3.152}$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -x - \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{als} \quad x \leq -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\sqrt{\frac{1}{4}-x^2} & \text{als} \quad -\frac{\sqrt{2}}{4} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{4} \\ x - \frac{\sqrt{2}}{2} & \text{als} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \end{cases} \tag{3.153}$$

$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} -x - \frac{\sqrt{2}}{3} & \text{als} \quad x \leq -\frac{\sqrt{2}}{6} \\ -\sqrt{\frac{1}{9}-x^2} & \text{als} \quad -\frac{\sqrt{2}}{6} \leq x \leq \frac{\sqrt{2}}{6} \\ x - \frac{\sqrt{2}}{3} & \text{als} \quad x \geq \frac{\sqrt{2}}{6} \end{cases} \tag{3.154}$$

(b) De enige punten waar de differentieerbaarheid ter discussie staat is in $-\frac{\sqrt{2}}{2n}$ en $\frac{\sqrt{2}}{2n}$. Nu geldt dat

$$\lim_{x \overset{<}{\to} -\frac{\sqrt{2}}{2n}} \frac{d}{dx}\left(-x - \frac{\sqrt{2}}{n}\right) = -1 = \lim_{x \overset{>}{\to} -\frac{\sqrt{2}}{2n}} \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2}\right) \tag{3.155}$$

en dat

$$\lim_{x \overset{<}{\to} \frac{\sqrt{2}}{2n}} \frac{d}{dx}\left(-\sqrt{\frac{1}{n^2} - x^2}\right) = 1 = \lim_{x \overset{>}{\to} \frac{\sqrt{2}}{2n}} \frac{d}{dx}\left(x - \frac{\sqrt{2}}{n}\right) \tag{3.156}$$

dus de functie is differentieerbaar.

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} -x & \text{als} \quad x \leq 0 \\ x & \text{als} \quad x \geq 0 \end{cases} = |x| = f(x)$

(d) $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)|$ is omwille van symmetrie gelijk aan $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^+} |f_n(x) - x|$

$$\begin{aligned}
&= \max\left(\sup_{x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2n}\right]}\left|-\sqrt{\frac{1}{n^2}-x^2} - x\right|, \sup_{x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2n}\right]}\left|x - \frac{\sqrt{2}}{n} - x\right|\right) && (3.157)\\
&= \max\left(\sup_{x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2n}\right]}\left|-\sqrt{\frac{1}{n^2}-x^2} - x\right|, \sup_{x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2n}\right]}\left|x - \frac{\sqrt{2}}{n} - x\right|\right) && (3.158)\\
&= \sup_{x\in\left[0,\frac{\sqrt{2}}{2n}\right]}\left|x - \frac{\sqrt{2}}{n} - x\right| && (3.159)\\
&= \frac{\sqrt{2}}{n}, && (3.160)
\end{aligned}$$

dus $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = 0$. De convergentie is dus wel degelijk uniform.

2.

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,w) + d(w,y), \tag{3.161}$$

dus

$$\begin{aligned} d(x,y) - d(z,w) &\leq d(x,z) + d(w,y) && (3.162)\\ &= d(x,z) + d(y,w) && (3.163) \end{aligned}$$

Anderzijds is

$$d(z,w) \leq d(z,x) + d(x,y) + d(y,w)\,, \tag{3.164}$$

dus

$$\begin{aligned} d(z,w) - d(x,y) &\leq d(z,x) + d(y,w) && (3.165)\\ &= d(x,z) + d(y,w) && (3.166) \end{aligned}$$

Bijgevolg is

$$|d(x,y) - d(z,w)| \leq d(x,z) + d(y,w) \tag{3.167}$$

3.

$$y'' - \frac{y'}{x} + \frac{1-x}{x}y = 4xe^x \tag{3.168}$$

$y_1(x) = e^x$ is oplossing van de HDV, dus stel $y = e^x u$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} y' = e^x(u+u') \\ y'' = e^x(u+2u'+u'') \end{array} \right. \tag{3.169}$$

Substitutie in de vergelijking geeft dan

$$\begin{aligned} & e^x(u+2u'+u'') - \frac{e^x(u+u')}{x} + \frac{1-x}{x}e^x u = 4xe^x && (3.170)\\ \Rightarrow\quad & 2e^x u' + e^x u'' - \frac{e^x}{x}u' = 4xe^x && (3.171)\\ \Rightarrow\quad & 2u' + u'' - \frac{1}{x}u' = 4x && (3.172) \end{aligned}$$

Stel $v = u'$, dan wordt dit

$$v' + \left(2 - \frac{1}{x}\right)v = 4x \tag{3.173}$$

Een integrerende factor hiervoor is

$$\mu(x) = e^{\int}\left(2 - \tfrac{1}{x}\right)dx = e^{(2x - \ln x)} = \frac{e^{2x}}{x} \tag{3.174}$$

Na vermenigvuldiging wordt dit

$$\frac{e^{2x}}{x}v' + \frac{e^{2x}}{x}\left(2 - \frac{1}{x}\right)v = 4e^{2x} \tag{3.175}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & \left(\frac{e^{2x}}{x}v\right)' = 4e^{2x} && (3.176)\\ \Rightarrow\quad & \frac{e^{2x}}{x}v = \int 4e^{2x}dx = 2e^{2x} + c_1 && (3.177)\\ \Rightarrow\quad & u' = v = xe^{-2x}\left(2e^{2x} + c_1\right) = 2x + c_1 xe^{-2x} && (3.178)\\ \Rightarrow\quad & u = \int \left(2x + c_1 xe^{-2x}\right)dx = x^2 + \left(-\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x}\right)c_1 + c_2 && (3.179) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow y = e^x u = e^x \left(x^2 + \left(-\frac{1}{2} x e^{-2x} - \frac{1}{4} e^{-2x} \right) c_1 + c_2 \right) \tag{3.180}$$

$$= e^x x^2 - \frac{c_1}{2} x e^{-x} - \frac{c_1}{4} e^{-x} + e^x c_2 \tag{3.181}$$

4.

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n} \tag{3.182}$$

Volgens het criterium van d'Alembert is

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{n+1}}{3^{n+1}\ln(n+1)}}{\frac{\sqrt{n}}{3^n \ln n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{3} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} = \frac{1}{3}, \tag{3.183}$$

want

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} = 1 \tag{3.184}$$

en

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{\ln(n+1)} \overset{(H)}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}} = 1 \tag{3.185}$$

5.

$$\iint\limits_R \frac{y^5}{x^4+y^4} dx dy = \int_0^2 \left(\int_x^{2x} \frac{y^5}{x^4+y^4} dy \right) dx \tag{3.186}$$

$$= \int_0^2 \left(\int_x^{2x} \frac{y^5}{x^4+y^4} dy \right) dx \tag{3.187}$$

Nu is

$$\int \frac{y^5}{x^4+y^4} dy = \int \frac{y^5 + x^4 y - x^4 y}{x^4+y^4} dy \tag{3.188}$$

$$= \int \left(y - \frac{x^4 y}{x^4+y^4} \right) dy \tag{3.189}$$

$$= \frac{y^2}{2} - \frac{x^4}{2} \int \frac{d\left(y^2\right)}{\left(x^2\right)^2 + \left(y^2\right)^2} \tag{3.190}$$

$$= \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \operatorname{Bgtg} \left(\frac{y^2}{x^2} \right) \tag{3.191}$$

Dus

$$\int_x^{2x} \frac{y^5}{x^4+y^4} dy = \left[\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \operatorname{Bgtg} \left(\frac{y^2}{x^2} \right) \right]_x^{2x} \tag{3.192}$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \operatorname{Bgtg} 4 + \frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} \operatorname{Bgtg} 1 \tag{3.193}$$

$$= \frac{3x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \operatorname{Bgtg} 4 + \frac{\pi x^2}{8} \tag{3.194}$$

En bijgevolg is

$$\int_0^2 \left(\int_x^{2x} \frac{y^5}{x^4+y^4} dy \right) dx = \int_0^2 \left(\frac{3x^2}{2} - \frac{x^2}{2} \operatorname{Bgtg} 4 + \frac{\pi x^2}{8} \right) dx \tag{3.195}$$

$$= \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^3}{6} \operatorname{Bgtg} 4 + \frac{\pi x^3}{24} \right]_0^2 \tag{3.196}$$

$$= 4 - \frac{4}{3} \operatorname{Bgtg} 4 + \frac{\pi}{3} \tag{3.197}$$

6. De figuren snijden elkaar buiten de oorsprong ook nog als $\sqrt{2} \sin\theta = \sin 2\theta$, dus voor $\theta = \frac{\pi}{4}$. De gezochte oppervlakte is dus

$$S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} 2 \sin^2 \theta d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \tag{3.198}$$

$$= \int_0^{\pi/4} \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta + \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{\pi/2} \sin 2\theta d\theta \tag{3.199}$$

$$= \left[\frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{4} \left[\cos 2\theta \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \tag{3.200}$$

$$= \left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{2} \right) - \frac{1}{4} \left(\cos \pi - \cos \frac{\pi}{2} \right) \tag{3.201}$$

$$= \frac{\pi}{8} \tag{3.202}$$

3.9.3 Januari 2003

1.

$$\left(x^4 + x^2\right) y'' + \left(-5x - 3x^3\right) y' + \left(9 + 3x^2\right) y = 2x^6 \left(x^2 + 1\right) \tag{3.203}$$

De homogene vergelijking heeft als oplossing $y_1(x) = x^3$:

$$\left(x^4 + x^2\right) \frac{d^2}{dx^2} \left(x^3\right) + \left(-5x - 3x^3\right) \frac{d}{dx} \left(x^3\right) + \left(9 + 3x^2\right) \left(x^3\right) = 0 \tag{3.204}$$

Stel dus

$$y = x^3 u \tag{3.205}$$

$$\Rightarrow y' = 3x^2 u + x^3 u' \tag{3.206}$$

$$\Rightarrow y'' = 6xu + 6x^2 u' + x^3 u'' \tag{3.207}$$

Dan

$$\left(x^4 + x^2\right) \left(6xu + 6x^2 u' + x^3 u''\right) + \tag{3.208}$$

$$\left(-5x - 3x^3\right) \left(3x^2 u + x^3 u'\right) + \left(9 + 3x^2\right) \left(x^3 u\right) = 2x^8 + 2x^6 \tag{3.209}$$

$$3x^6 u' + x^7 u'' + x^4 u' + x^5 u'' = 2x^8 + 2x^6 \tag{3.210}$$

$$\left(x^7 + x^5\right) u'' + \left(3x^6 + x^4\right) u' = 2x^8 + 2x^6 \tag{3.211}$$

$$\left(x^3 + x\right) u'' + \left(3x^2 + 1\right) u' = 2x^4 + 2x^2 \tag{3.212}$$

Stel $v = u'$

$$\left(x^3 + x\right) v' + \left(3x^2 + 1\right) v = 2x^4 + 2x^2 \tag{3.213}$$

$$v' + \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} v = 2x \tag{3.214}$$

$$\int \frac{3x^2 + 1}{x^3 + x} dx = \int \frac{3x^2 + 1}{x\left(x^2 + 1\right)} dx = \int \left(\frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{C}{x}\right) dx \tag{3.215}$$

$$Ai + B = \lim_{x \to i} \frac{3x^2 + 1}{x} = 2i \tag{3.216}$$

$$C = \lim_{x \to 0} \frac{3x^2 + 1}{x^2 + 1} = 1 \tag{3.217}$$

$$= \int \frac{2x dx}{x^2 + 1} + \int \frac{dx}{x} = \ln\left(x^2 + 1\right) + \ln x = \ln\left(x\left(x^2 + 1\right)\right) \tag{3.218}$$

$$\Rightarrow \mu(x) = e^{\int \frac{3x^2+1}{x^3+x} dx} = e^{\ln x\left(x^2+1\right)} = x\left(x^2 + 1\right) \tag{3.219}$$

$$\left(x^3 + x\right) v' + \left(3x^2 + 1\right) v = 2x\left(x^3 + x\right) \tag{3.220}$$

$$\left(\left(x^3 + x\right) v\right)' = 2x^4 + 2x^2 \tag{3.221}$$

$$\left(x^3 + x\right) v = \frac{2}{5} x^5 + \frac{2}{3} x^3 + c_1 \tag{3.222}$$

$$v = \frac{c_1}{x^3 + x} + \frac{2}{15} \frac{3x^4 + 5x^2}{x^2 + 1} \tag{3.223}$$

$v = u'$, dus

$$u' = \frac{c_1}{x^3 + x} + \frac{2}{15} \frac{3x^4 + 5x^2}{x^2 + 1} \tag{3.224}$$

$$u = \int \left(\frac{c_1}{x^3 + x} + \frac{2}{15} \frac{3x^4 + 5x^2}{x^2 + 1}\right) dx \tag{3.225}$$

$$= \int \left(\frac{c_1}{x^3 + x} + x^2 - 1 + \frac{5x + 1}{x^2 + 1}\right) dx \tag{3.226}$$

$$= c_1 \ln|x| - \frac{1}{2} c_1 \ln\left|x^2 + 1\right| + \frac{2}{15} x^3 + \frac{4}{15} x - \frac{4}{15} \operatorname{Bgtg} x + c_2 \tag{3.227}$$

$$= c_1 \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right| + \frac{2}{15} x^3 + \frac{4}{15} x - \frac{4}{15} \operatorname{Bgtg} x + c_2 \tag{3.228}$$

$y = x^3 u$, dus

$$y = c_1 x^3 \ln\left|\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\right| + \frac{2}{15} x^6 + \frac{4}{15} x^4 - \frac{4}{15} x^3 \operatorname{Bgtg} x + c_2 x^3 \tag{3.229}$$

2. Bewijs: beschouw de functie $f - g$ op het interval $[a, x]$
$\Rightarrow$ Middelwaardestelling: $\exists c \in]a, x[: (f - g)'(c) = \frac{(f-g)(x)-(f-g)(a)}{x-a}$
$\Rightarrow (f'(c) - g'(c))(x - a) = (f - g)(x) - (f - g)(a)$
$\Rightarrow (f'(c) - g'(c))(x - a) + (f(a) - g(a)) = (f(x) - g(x))$
Nu is per veronderstelling $f'(x) \geq g'(x)$. $\Rightarrow (f'(c) - g'(c)) > 0$, en uiteraard is ook

$x - a \geq 0$; bovendien is eveneens per veronderstelling $f(a) - g(a) \geq 0$
$\Rightarrow f(x) - g(x) \geq 0$
$\Rightarrow f(x) \geq g(x)$.
Om van de laatste ongelijkheid een strikte ongelijkheid te maken, stel $f(a) > g(a)$ of stel $\forall x > a : f'(x) > g'(x)$.

3. $\left(x^2 + y^2 - 4y\right)^2 = x^2 + y^2$
$\Rightarrow \left(r^2 - 4r\sin\theta\right)^2 = r^2$
$\Rightarrow \left(r^2 - 4r\sin\theta\right)^2 = r^2$
$\Rightarrow r^2 - 4r\sin\theta = \pm r$
$\Rightarrow r^2 = r\left(\pm 1 + 4\sin\theta\right)$
Laten we $r = 1 + 4\sin\theta$ nemen, te bestuderen op $[0, 2\pi]$, de andere is er symmetrisch mee verwant.
Stel$1 + 4\sin\theta = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = 2\pi - \text{Bgsin}\,\frac{1}{4} \simeq 6.030\,505\,053 \\ \text{of } \theta = \pi + \text{Bgsin}\,\frac{1}{4} \simeq 3.394\,272\,909 \end{cases}$
$r' = 4\cos\theta$
Stel $4\cos\theta = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$ of $\theta = \frac{3\pi}{2}$
Tekenonderzoek:

	0		$\frac{\pi}{2}$		$\pi + \text{Bgsin}\,\frac{1}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi - \text{Bgsin}\,\frac{1}{4}$		2π
r	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
r'	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
	$\nearrow$	$\nearrow$	$M(5)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$m(-3)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

$$S = 2\left(\frac{1}{2}\int_{-\text{Bgsin}\,\frac{1}{4}}^{\pi/2} (1+4\sin\theta)^2\,d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi+\text{Bgsin}} \tfrac{1}{4}^{3\pi/2}(1+4\sin\theta)^2\,d\theta\right) \tag{3.230}$$

$$\int (1+4\sin\theta)^2\,d\theta = \int \left(1 + 8\sin\theta + 16\sin^2\theta\right)d\theta \tag{3.231}$$
$$= \int \left(1 + 8\sin\theta + 16\left(\frac{1-\cos 2\theta}{2}\right)\right)d\theta \tag{3.232}$$
$$= \int (1 + 8\sin\theta + 8 - 8\cos 2\theta)\,d\theta \tag{3.233}$$
$$= \int (9 + 8\sin\theta - 8\cos 2\theta)\,d\theta \tag{3.234}$$
$$= 9\theta - 8\cos\theta - 4\sin 2\theta \tag{3.235}$$

$$\Rightarrow S = [9\theta - 8\cos\theta - 4\sin 2\theta]_{-\text{Bgsin}\,\frac{1}{4}}^{\pi/2} - [9\theta - 8\cos\theta - 4\sin 2\theta]_{\pi+\text{Bgsin}\,\frac{1}{4}}^{3\pi/2} \tag{3.236}$$
$$= \left(\frac{9}{2}\pi + 9\arcsin\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\sqrt{15}\right) - \left(\frac{9}{2}\pi - 9\arcsin\frac{1}{4} - \frac{3}{2}\sqrt{15}\right) \tag{3.237}$$
$$=18\arcsin\frac{1}{4} + 3\sqrt{15} \tag{3.238}$$

4. $F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + \lambda\left(x^3 y + z^2 + 1\right) = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} = 2x + 3\lambda x^2 y = 0 \ (I) \\ \dfrac{dF}{dy} = 2y + \lambda x^3 = 0 \ (II) \\ \dfrac{dF}{dz} = 2\lambda z = 0 \ (III) \\ \dfrac{dF}{d\lambda} = x^3 y + z^2 + 1 = 0 \ (IV) \end{cases} \tag{3.239}$$

$\Rightarrow z = 0$ of $\lambda = 0$

- Als $\lambda = 0 \overset{(II)}{\Rightarrow} y = 0 \overset{(I)}{\Rightarrow} x = 0 \overset{(IV)}{\Rightarrow} z^2 + 1 = 0$, hetgeen geen reële oplossingen heeft.
- Als $z = 0 \overset{(IV)}{\Rightarrow} x^3 y + 1 = 0$, dus $y = -\frac{1}{x^3}$
  Invullen in (I) geeft $2x + 3\lambda x^2 \left(-\frac{1}{x^3}\right) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}x^2$
  Invullen in (II) geeft$2\left(-\frac{1}{x^3}\right) + \lambda x^3 = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{x^6}$
  De eliminatievoorwaarde wordt dus $\frac{2}{x^6} = \frac{2}{3}x^2$
  $\Rightarrow x^8 = 3$
  $\Rightarrow x = \pm\sqrt[8]{3} \Rightarrow y = -\frac{1}{x^3} = \mp\frac{1}{\sqrt[8]{3^3}}$
  $\Rightarrow \left(\sqrt[8]{3}, -\frac{1}{\sqrt[8]{3^3}}, 0\right)$ en $\left(-\sqrt[8]{3}, +\frac{1}{\sqrt[8]{3^3}}, 0\right)$ zijn extremale punten waarvoor de afstand in kwestie, $\sqrt[4]{3} + \frac{1}{\sqrt[4]{3^3}}$, minimaal is.

5.

$$y = \frac{3x^2 + 20x + 33}{\left(x^2 + 6x + 10\right)^2} = \frac{Ax + B}{\left(x^2 + 6x + 10\right)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + 6x + 10} \tag{3.240}$$

$$A(-3 + i) + B = \lim_{x \to -3+i} \left(3x^2 + 20x + 33\right) = -3 + 2i \tag{3.241}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3A + B = -3 \\ A = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 2 \\ B = 3 \end{cases} \tag{3.242}$$

$$C(-3 + i) + D = \lim_{x \to -3+i} \left(\frac{3x^2 + 20x + 33}{\left(x^2 + 6x + 10\right)^2} - \frac{2x + 3}{\left(x^2 + 6x + 10\right)^2} \right) \left(x^2 + 6x + 10\right) \tag{3.243}$$

$$= \lim_{x \to -3+i} 3 = 3 \tag{3.244}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -3C + D = 3 \\ 3C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = 3 \end{cases} \tag{3.245}$$

$$3x^2 + 20x + 33 = 0 \Rightarrow x \in \left\{-\frac{11}{3}, -3\right\} \tag{3.246}$$

$\Rightarrow$ We zoeken $\displaystyle\int_{-\frac{11}{3}}^{1} \frac{3x^2 + 20x + 33}{\left(x^2 + 6x + 10\right)^2} dx$ en $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{3x^2 + 20x + 33}{\left(x^2 + 6x + 10\right)^2} dx$

$$\int \left(\frac{2x + 3}{\left(x^2 + 6x + 10\right)^2} + \frac{3}{x^2 + 6x + 10} \right) dx \tag{3.247}$$

$$= \int \frac{d\left(x^2+6x+10\right)}{\left(x^2+6x+10\right)^2} - 3\int \frac{dx}{\left(x^2+6x+10\right)^2} + 3\int \frac{dx}{x^2+6x+10} \tag{3.248}$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+10} - 3\int \frac{dx}{\left((x+3)^2+1\right)^2} + 3\int \frac{dx}{(x+3)^2+1} \tag{3.249}$$

$$t = x+3 \tag{3.250}$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+10} - 3\int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2} + 3\int \frac{dt}{t^2+1} \tag{3.251}$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+10} - 3M_2 + 3\,\mathrm{Bgtg}\,t + c \tag{3.252}$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+10} - 3\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,t + \frac{t}{2\left(t^2+1\right)}\right) + 3\,\mathrm{Bgtg}\,t + c \tag{3.253}$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+10} - 3\left(\frac{1}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,(x+3) + \frac{x+3}{2\left((x+3)^2+1\right)}\right) + 3\,\mathrm{Bgtg}\,(x+3) + c \tag{3.254}$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+10} - \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,(x+3) - \frac{3\,(x+3)}{2\left(x^2+6x+10\right)} + 3\,\mathrm{Bgtg}\,(x+3) + c \tag{3.255}$$

$$= -\frac{1}{x^2+6x+10} + \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,(x+3) - \frac{3\,(x+3)}{2\left(x^2+6x+10\right)} + c \tag{3.256}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{3x+11}{x^2+6x+10} + \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,(x+3) + c \tag{3.257}$$

$$\Rightarrow \int_{-\frac{11}{3}}^{1} \frac{3x^2+20x+33}{\left(x^2+6x+10\right)^2}dx = \left[-\frac{1}{2}\frac{3x+11}{x^2+6x+10} + \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,(x+3)\right]_{-\frac{11}{3}}^{1} \tag{3.258}$$

$$= -\frac{7}{17} + \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,4 + \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,\frac{2}{3} \tag{3.259}$$

$$\text{en} \int_{1}^{+\infty} \frac{3x^2+20x+33}{\left(x^2+6x+10\right)^2}dx = \lim_{T\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\frac{3x+11}{x^2+6x+10} + \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,(x+3)\right]_{1}^{T} \tag{3.260}$$

$$= \lim_{T\to+\infty}\left(-\frac{1}{2}\frac{3T+11}{T^2+6T+10} + \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,(T+3) + \frac{7}{17} - \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,4\right) \tag{3.261}$$

$$= 0 + \frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{7}{17} - \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,4 \tag{3.262}$$

$$= \frac{7}{17} + \frac{3\pi}{4} - \frac{3}{2}\,\mathrm{Bgtg}\,4 \tag{3.263}$$

3.9.4 Januari 2004

1.

$$\left(xy^2+y^3\right) + \left(x^3+x^2y\right)y' = 0 \tag{3.264}$$

Dit is een homogene vergelijking van graad 3 $\Rightarrow$ stel $y = ux$ en $y' = u + u'x$

$$\Rightarrow \left(x^3u^2 + x^3u^3\right) + \left(x^3 + x^3u\right)(u + u'x) = 0 \tag{3.265}$$

$$\Rightarrow \left(u^2 + u^3\right) + (1+u)(u + u'x) = 0 \tag{3.266}$$

$$\Rightarrow \left(u^2 + u^3\right) + \left(u + u^2\right) + (1+u)\,u'x = 0 \tag{3.267}$$

$$\Rightarrow \left(u + 2u^2 + u^3\right) = -(1+u)\frac{du}{dx}x \tag{3.268}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-(1+u)}{(u + 2u^2 + u^3)}du \qquad \text{S.O. } u = 0 \text{ en } u = -1 \tag{3.269}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-(1+u)}{u(1+u)^2}du \tag{3.270}$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{-1}{u(1+u)}du \tag{3.271}$$

$$-\frac{1}{u(1+u)} = \frac{1}{1+u} - \frac{1}{u} \tag{3.272}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \ln|1+u| - \ln|u| + c \tag{3.273}$$

$$\Rightarrow \ln|x| = \ln\left|\frac{1+u}{u}\right| + c \tag{3.274}$$

$$\Rightarrow x = c\frac{1+\frac{y}{x}}{\frac{y}{x}} \tag{3.275}$$

$$\Rightarrow x = c\frac{x+y}{y} \tag{3.276}$$

$$\Rightarrow xy = c(x+y) \qquad \text{S.O. } y = 0 \text{ (abondant) en } y = -x \tag{3.277}$$

2.

$$\int x^{-3}\,\mathrm{Bgtg}\,x\,dx = I \tag{3.278}$$

$$\begin{cases} u = \mathrm{Bgtg}\,x \\ dv = \dfrac{dx}{x^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ v = -\dfrac{1}{2x^2} \end{cases} \tag{3.279}$$

$$I = -\frac{\mathrm{Bgtg}\,x}{2x^2} + \int \frac{dx}{2x^2(1+x^2)} \tag{3.280}$$

$$\frac{1}{2x^2(1+x^2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{Cx+D}{x^2+1} \tag{3.281}$$

$$A = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2(1+x^2)} = \frac{1}{2} \tag{3.282}$$

$$B = \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2x^2(1+x^2)} - \frac{1}{2x^2}\right)x \tag{3.283}$$

$$= \lim_{x\to 0} -\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} = 0 \tag{3.284}$$

$$Ci + D = \lim_{x\to i}\frac{1}{2x^2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} C = 0 \\ D = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \tag{3.285}$$

$$I = -\frac{\operatorname{Bgtg} x}{2x^2} + \int \frac{dx}{2x^2} - \int \frac{dx}{2\left(1+x^2\right)} \tag{3.286}$$

$$= -\frac{\operatorname{Bgtg} x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \operatorname{Bgtg} x + c \tag{3.287}$$

$$\Rightarrow \int_1^{+\infty} x^{-3} \operatorname{Bgtg} x dx = \lim_{P\to+\infty} \left[-\frac{\operatorname{Bgtg} x}{2x^2} - \frac{1}{2x} - \frac{1}{2} \operatorname{Bgtg} x\right]_1^P \tag{3.288}$$

$$= \lim_{P\to+\infty} \left(-\frac{\operatorname{Bgtg} P}{2P^2} - \frac{1}{2P} - \frac{1}{2} \operatorname{Bgtg} P + \frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \tag{3.289}$$

3. $r(\theta) = \sin 2\theta + \cos 4\theta$

   (a) Periode $= \pi \Rightarrow$ Domein $= [0, \pi]$
   $r = 0 \Rightarrow \sin 2\theta + \cos 4\theta = 0$
   $\Rightarrow \sin 2\theta + \sin\left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right) = 0$
   $\Rightarrow 2\sin\frac{2\theta + \left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right)}{2} \cos\frac{2\theta - \left(\frac{\pi}{2} - 4\theta\right)}{2} = 0$
   $\Rightarrow 2\sin\left(-\theta + \frac{\pi}{4}\right)\cos\left(3\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
   $\Rightarrow \sin\left(-\theta + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ of $\cos\left(3\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
   $\Rightarrow -\theta + \frac{\pi}{4} = k\pi$ of $3\theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi$
   $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ of $3\theta = \frac{3}{4}\pi + k\pi$
   $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi$ of $\theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}$
   $\Rightarrow \theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}\right\}$
   $r'(\theta) = 2\cos 2\theta - 8\sin 2\theta \cos 2\theta$
   $r' = 0 \Rightarrow 2\cos 2\theta - 8\sin 2\theta\cos 2\theta = 0$
   $\Rightarrow 2\cos 2\theta\left(1 - 4\sin 2\theta\right) = 0$
   $\Rightarrow \cos 2\theta = 0$ of $\sin 2\theta = \frac{1}{4}$
   $\Rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$ of $2\theta = \operatorname{Bgsin}\frac{1}{4} + k2\pi$ of $2\theta = \pi - \operatorname{Bgsin}\frac{1}{4} + k2\pi$
   $\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ of $\theta = \frac{1}{2}\operatorname{Bgsin}\frac{1}{4} + k\pi$ of $\theta = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Bgsin}\frac{1}{4} + k\pi$
   $\Rightarrow \theta \in \left\{\frac{1}{2}\operatorname{Bgsin}\frac{1}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Bgsin}\frac{1}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

θ	0		$\frac{1}{2}\operatorname{Bgsin}\frac{1}{4}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Bgsin}\frac{1}{4}$
r	$+$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$
r'	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	0
	$\nearrow$	$\nearrow$	$M\left(\frac{9}{8}\right)$	$\searrow$	$m(0)$	$\nearrow$	$M\left(\frac{9}{8}\right)$

θ	$\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{Bgsin}\frac{1}{4}$		$\frac{7\pi}{12}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{11\pi}{12}$		π
r	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
r'	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
	$M\left(\frac{9}{8}\right)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$m(-2)$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$

(b) Oppervlakte:

$$\begin{aligned}
S &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_0^\pi r^2(\theta)\, d\theta && (3.290)\\
&= \int_0^\pi (\sin 2\theta + \cos 4\theta)^2\, d\theta && (3.291)\\
&= \int_0^\pi (\sin 2\theta + \cos 4\theta)^2\, d\theta && (3.292)\\
&= \int_0^\pi \left(\sin^2 2\theta + 2\sin 2\theta \cos 4\theta + \cos^2 4\theta\right) d\theta && (3.293)\\
&= \int_0^\pi \left(\frac{1-\cos 4\theta}{2} + \sin 6\theta - \sin 2\theta + \frac{1+\cos 8\theta}{2}\right) d\theta && (3.294)\\
&= \left[\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta - \frac{1}{6}\cos 6\theta + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{16}\sin 8\theta\right]_0^\pi = \pi && (3.295)
\end{aligned}$$

4.

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1 \quad (3.296)$$

We bepalen eerst

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 4y = 0 \quad (3.297)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y^3 - 4x = 0 \quad (3.298)$$

met andere woorden

$$\begin{cases} x^3 = y \\ y^3 = x \end{cases} \quad (3.299)$$

dus

$$x = x^9 \Rightarrow x^9 - x = 0 \quad (3.300)$$

$$\Rightarrow x(x-1)(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right) = 0 \quad (3.301)$$

$\Rightarrow x \in \{-1, 0, 1\}$. Kandidaat–kritieke punten zijn dus $(-1,1)$, $(0,0)$ en $(1,1)$
Verder berekenen we

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 \quad (3.302)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -4 \quad (3.303)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 12y^2 \quad (3.304)$$

$$\Rightarrow H(x,y) = 144x^2y^2 - 16 \quad (3.305)$$

$H(-1,-1) = 128$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 12 > 0 \Rightarrow (-1,-1)$ is een lokaal minimum
$H(0,0) = -16 < 0 \Rightarrow (0,0)$ is een zadelpunt
$H(1,1) = 128$ en $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = 12 > 0 \Rightarrow (1,1)$ is een lokaal minimum

5. $y = 4 - x^2 - z^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ en $x + z = 2$

$$I = \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(\int_0^{4-x^2-z^2} dy \right) dz \right) dx \quad (3.306)$$

$$= \int_0^2 \left(\int_0^{2-x} \left(4 - x^2 - z^2\right) dz \right) dx \quad (3.307)$$

$$= \int_0^2 \left[4z - x^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_0^{2-x} dx \quad (3.308)$$

$$= \int_0^2 \left(\frac{4}{3} x^3 - 4x^2 + \frac{16}{3} \right) dx \quad (3.309)$$

$$= \left[\frac{1}{3} x^4 - \frac{4}{3} x^3 + \frac{16}{3} x \right]_0^2 \quad (3.310)$$

$$= \frac{16}{3} \quad (3.311)$$

3.9.5 Januari 2005

1.

$$y'' x (x+1)^2 + y' (x+3)(x+1) - y (x+3) = \left(x^2 + 3x + 3 + \frac{1}{x} \right) \ln x \quad (3.312)$$

Homogene oplossing: $y = x + 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = (x+1) u \\ y' = (x+1) u' + u \\ y'' = (x+1) u'' + 2u' \end{cases} \quad (3.313)$$

$$\Rightarrow ((x+1) u'' + 2u') x (x+1)^2 \quad (3.314)$$

$$+ ((x+1) u' + u)(x+3)(x+1) - (x+1) u (x+3) \quad (3.315)$$

$$= \left(x^2 + 3x + 3 + \frac{1}{x} \right) \ln x \quad (3.316)$$

$$\Rightarrow ((x+1) u'' + 2u') x (x+1)^2 \quad (3.317)$$

$$+ ((x+1) u' + u)(x+3)(x+1) - (x+1) u (x+3) \quad (3.318)$$

$$= \frac{1}{x} (x+1)^3 \ln x \quad (3.319)$$

$$\Rightarrow \left(x^4 + 3x^3 + 3x^2 + x \right) u'' + \left(3x^3 + 9x^2 + 9x + 3 \right) u' \quad (3.320)$$

$$= \frac{1}{x} (x+1)^3 \ln x \quad (3.321)$$

$$\Rightarrow x (x+1)^3 u'' + 3 (x+1)^3 u' = \frac{1}{x} (x+1)^3 \ln x \quad (3.322)$$

$$\Rightarrow x^2 u'' + 3x u' = \ln x \quad (3.323)$$

$$\overset{v=u'}{\Rightarrow} x^2 v' + 3x v = \ln x \quad (3.324)$$

$$\Rightarrow v' + \frac{3}{x} v = \frac{\ln x}{x^2} \quad (3.325)$$

Integrerende factor is $e^{\int \frac{3}{x} dx} = x^3$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & x^3 v' + 3x^2 v = x \ln x && (3.326) \\ \Rightarrow \quad & \left(x^3 v\right)' = x \ln x && (3.327) \\ & && (3.328) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^3 v &= \int x \ln x dx && (3.329) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c_1 && (3.330) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow v &= \frac{\frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + c_1}{x^3} && (3.331) \\ &= \frac{1}{4} \frac{2x^2 \ln x - x^2 + 4c_1}{x^3} && (3.332) \\ &= \frac{1}{2x} \ln x - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x^3} c_1 && (3.333) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u &= \int v dx && (3.334) \\ &= \int \left(\frac{1}{2x} \ln x - \frac{1}{4x} + \frac{1}{x^3} c_1 \right) dx && (3.335) \\ &= \frac{1}{4} \ln^2 x - \frac{1}{4} \ln x - \frac{1}{2} \frac{c_1}{x^2} + c_2 && (3.336) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y &= (x+1)\, u && (3.337) \\ &= \frac{1}{4}(x+1) \ln^2 x - \frac{1}{4}(x+1) \ln x - \frac{1}{2} \frac{c_1}{x^2}(x+1) + c_2 (x+1) && (3.338) \end{aligned}$$

2.

$$\frac{3x^4 + 24x^2 + 2x + 47}{\left(x^2+4\right)^3} = \frac{Ax+B}{\left(x^2+4\right)^3} + \frac{Cx+D}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{Ex+F}{x^2+4} \qquad (3.339)$$

$$\begin{aligned} A(2i) + B = \lim_{x \to 2i} \left(3x^4 + 24x^2 + 2x + 47\right) = -1 + 4i && (3.340) \\ \Rightarrow (A, B) = (2, -1) && (3.341) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{3x^4 + 24x^2 + 2x + 47}{\left(x^2+4\right)^3} - \frac{2x-1}{\left(x^2+4\right)^3} = \frac{3x^4 + 24x^2 + 48}{\left(x^2+4\right)^3} = \frac{3}{x^2+4} \qquad (3.342)$$

$\Rightarrow (C, D) = (0, 0)$ en $(E, F) = (0, 3)$

$$\Rightarrow I = \int \left(\frac{2x-1}{\left(x^2+4\right)^3} + \frac{3}{x^2+4} \right) dx \tag{3.343}$$

$$= \int \frac{d\left(x^2+4\right)}{\left(x^2+4\right)^3} - \int \frac{dx}{\left(x^2+4\right)^3} + 3 \int \frac{dx}{x^2+4} \tag{3.344}$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+4\right)^2} - \frac{1}{64} \int \frac{dx}{\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+1\right)^3} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1} \tag{3.345}$$

$$\overset{\left(\begin{array}{c} x = 2t \\ dx = 2dt \end{array}\right)}{=} -\frac{1}{2\left(x^2+4\right)^2} - \frac{1}{32} \int \frac{dt}{\left(t^2+1\right)^3} + \frac{3}{2} \int \frac{dx}{t^2+1} \tag{3.346}$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+4\right)^2} - \frac{1}{32} M_3(t) + \frac{3}{2} \operatorname{Bgtg} t + c \tag{3.347}$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+4\right)^2} - \frac{1}{32} \left(\frac{3}{8} \operatorname{Bgtg} t + \frac{3t}{8\left(t^2+1\right)} + \frac{t}{4\left(t^2+1\right)^2} \right) + \frac{3}{2} \operatorname{Bgtg} t + c \tag{3.348}$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+4\right)^2} - \frac{1}{32} \left(\frac{3}{8} \operatorname{Bgtg} \frac{x}{2} + \frac{3x}{16\left(\frac{x^2}{4}+1\right)} + \frac{x}{8\left(\frac{x^2}{4}+1\right)^2} \right) + \frac{3}{2} \operatorname{Bgtg} \frac{x}{2} + c \tag{3.349}$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+4\right)^2} - \frac{1}{32} \left(\frac{3}{8} \operatorname{Bgtg} \frac{x}{2} + \frac{3}{4} \frac{x}{\left(x^2+4\right)} + \frac{2x}{\left(x^2+4\right)^2} \right) + \frac{3}{2} \operatorname{Bgtg} \frac{x}{2} + c \tag{3.350}$$

$$= -\frac{1}{2\left(x^2+4\right)^2} - \frac{3}{256} \operatorname{Bgtg} \frac{x}{2} - \frac{3}{128} \frac{x}{x^2+4} - \frac{1}{16} \frac{x}{\left(x^2+4\right)^2} + \frac{3}{2} \operatorname{Bgtg} \frac{x}{2} + c \tag{3.351}$$

$$= -\frac{1}{16} \frac{x+8}{\left(x^2+4\right)^2} - \frac{3}{128} \frac{x}{x^2+4} + \frac{381}{256} \operatorname{Bgtg} \frac{x}{2} + c \tag{3.352}$$

3. (a)

$$\left(x^2+y^2-2xy\right)^2 = \left(x^2+y^2\right)^3 \tag{3.353}$$

$$\Rightarrow \left(r^2 - 2r^2 \cos\theta \sin\theta\right)^2 = r^6 \tag{3.354}$$

$$\Rightarrow \left(1 - 2\cos\theta\sin\theta\right)^2 = r^2 \tag{3.355}$$

$$\Rightarrow r = \pm\left(1 - 2\cos\theta\sin\theta\right) \tag{3.356}$$

Laten we $r = 1 - 2\cos\theta\sin\theta$ onderzoeken. Periode is 2π, dus op $[-\pi, \pi]$

Nulpunten $r = 0 \Rightarrow 1 - 2\cos\theta\sin\theta = 0 \Rightarrow \sin 2\theta = 1 \Rightarrow \theta \in \left\{\frac{\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}\right\}$

Afgeleide: $r' = -4\cos^2\theta + 2$

$-4\cos^2\theta + 2 = 0 \Rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta \in \left\{-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$

θ	$-\pi$		$\frac{-3\pi}{4}$		$\frac{-\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{4}$		π
r	+	+	0	+	+	+	+	+	0	+	+	+	+
r'	−	−	0	+	0	−	−	−	0	+	0	−	−
r	$\searrow$	$\searrow$	$m\,(0)$	$\nearrow$	$M\,(2)$	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	$m\,(0)$	$\nearrow$	$M\,(2)$	$\searrow$	$\searrow$

(b) De oppervlakte wordt gegeven door

$$S = 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{\pi/4}^{5\pi/4} r^2 d\theta \tag{3.357}$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1 - 2\cos\theta \sin\theta)^2 \, d\theta \tag{3.358}$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (1 - \sin 2\theta)^2 \, d\theta \tag{3.359}$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(1 - 2\sin 2\theta + \sin^2 2\theta\right) d\theta \tag{3.360}$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(1 - 2\sin 2\theta + \frac{1 - \cos 4\theta}{2}\right) d\theta \tag{3.361}$$

$$= \int_{\pi/4}^{5\pi/4} \left(\frac{3}{2} - 2\sin 2\theta - \frac{\cos 4\theta}{2}\right) d\theta \tag{3.362}$$

$$= \left[\frac{3}{2}\theta + \cos 2\theta - \frac{1}{8}\sin 4\theta\right]_{\pi/4}^{5\pi/4} \tag{3.363}$$

$$= \frac{15}{8}\pi - \frac{3}{8}\pi = \frac{3}{2}\pi \tag{3.364}$$

4.

$$\left|\frac{\partial (x, y, z)}{\partial (r, \theta, z)}\right| = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \tag{3.365}$$

Vergelijking sfeer: $x^2 + y^2 + z^2 = 9 \Rightarrow r^2 + z^2 = 9$

Vergelijking cylinder: $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow r^2 = 4$

$$\Rightarrow V = 2\int_0^{2\pi}\int_2^3\int_0^{\sqrt{9-r^2}} dzrdrd\theta \tag{3.366}$$

$$= 2\,[\pi]_0^{2\pi}\int_2^3 r\sqrt{9-r^2}dr \tag{3.367}$$

$$= 4\pi\frac{1}{-2}\int_2^3 \sqrt{9-r^2}d\left(9-r^2\right) \tag{3.368}$$

$$= -2\pi\frac{2}{3}\left[\left(9-r^2\right)^{3/2}\right]_2^3 \tag{3.369}$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\left[\left(9-r^2\right)^{3/2}\right]_2^3 \tag{3.370}$$

$$= -\frac{4\pi}{3}\cdot\left(-5\sqrt{5}\right) \tag{3.371}$$

$$= \frac{20}{3}\sqrt{5}\pi \tag{3.372}$$

5. $f(x,y,z) = xyz$ met als randvoorwaarden

$$\begin{cases} \phi_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 \\ \phi_2(x,y,z) = xy+yz+zx-1 \end{cases} \tag{3.373}$$

$$\Rightarrow F(x,y,z,\lambda,\mu) = xyz + \lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right) + \mu\,(xy+yz+zx-1) \tag{3.374}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = yz + 2\lambda x + \mu y + \mu z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = zx + 2\lambda y + \mu x + \mu z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = xy + 2\lambda z + \mu y + \mu x = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2+y^2+z^2-1 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \mu} = xy+yz+zx-1 = 0 \end{cases} \tag{3.375}$$

Uit de eerste drie vergelijkingen volgt dat

$$\lambda = -\frac{1}{2}\frac{yz+\mu y+\mu z}{x} = -\frac{1}{2}\frac{zx+\mu x+\mu z}{y} = -\frac{1}{2}\frac{xy+\mu y+\mu x}{z} \tag{3.376}$$

$$\Rightarrow \frac{yz+\mu y+\mu z}{x} = \frac{zx+\mu x+\mu z}{y} = \frac{xy+\mu y+\mu x}{z} \tag{3.377}$$

Uit de eerste gelijkheid volgt dat $\mu = -\frac{(y+x)\,z}{x+y+z}$

en uit de tweede gelijkheid volgt dat $\mu = -\frac{(y+z)\,x}{x+y+z}$

$$\Rightarrow \frac{(y+x)\,z}{x+y+z} = \frac{(y+z)\,x}{x+y+z} \tag{3.378}$$

Aangenomen dat $x + y + z \neq 0$, volgt hieruit dat

$$yz + xz = yx + zx \Rightarrow yz = yx \Rightarrow y = 0 \vee z = x \tag{3.379}$$

Als echter $y = 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2 + z^2 = 1 \\ zx = 1 \end{cases} \Rightarrow$ kan niet

$$\Rightarrow \quad z = x \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 + y^2 = 1 \\ 2xy + x^2 = 1 \end{cases} \tag{3.380}$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - 2xy + y^2 = 0 \tag{3.381}$$

$$\Rightarrow \quad x = y = z = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \tag{3.382}$$

Antwoord:

- minimum in $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}, \frac{-1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{9}$
- maximum in $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$

3.9.6 September 2005

1.

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' - 12xy' + 12y = x^2 \tag{3.383}$$

Homogene vergelijking is $x^3 y''' + 3x^2 y'' - 12xy' + 12y = 0$

$$\text{Stel } x = e^z \Rightarrow \begin{cases} y' = \frac{1}{x}\dot{y} \\ y'' = \frac{1}{x^2}\left(\ddot{y} - \dot{y}\right) \\ y''' = \frac{1}{x^3}\left(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\right) \end{cases} \tag{3.384}$$

$$\Rightarrow \quad \left(\dddot{y} - 3\ddot{y} + 2\dot{y}\right) + 3\left(\ddot{y} - \dot{y}\right) - 12\dot{y} + 12y = 0 \tag{3.385}$$

$$\Rightarrow \quad \dddot{y} - 13\dot{y} + 12y = 0 \tag{3.386}$$

Karakteristieke vergelijking: $t^3 - 13t + 12 = 0 \Rightarrow t \in \{1, 3, -4\}$

$$y_h = C_1 e^z + C_2 e^{3z} + C_3 e^{-4z} = C_1 x + C_2 x^3 + \frac{C_3}{x^4} \tag{3.387}$$

Methode van de variatie van de parameters:

$$W(x) = \begin{vmatrix} x & x^3 & \frac{1}{x^4} \\ 1 & 3x^2 & -\frac{4}{x^5} \\ 0 & 6x & \frac{20}{x^6} \end{vmatrix} = \frac{70}{x^3} \tag{3.388}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & x^3 & \frac{1}{x^4} \\ 0 & 3x^2 & -\frac{4}{x^5} \\ \frac{1}{x} & 6x & \frac{20}{x^6} \end{vmatrix} = -\frac{7}{x^3} \\ W_2(x) = \begin{vmatrix} x & 0 & \frac{1}{x^4} \\ 1 & 0 & -\frac{4}{x^5} \\ 0 & \frac{1}{x} & \frac{20}{x^6} \end{vmatrix} = \frac{5}{x^5} \\ W_3(x) = \begin{vmatrix} x & x^3 & 0 \\ 1 & 3x^2 & 0 \\ 0 & 6x & \frac{1}{x} \end{vmatrix} = 2x^2 \end{cases} \Rightarrow \tag{3.389}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1' = \frac{-\frac{7}{x^3}}{\frac{70}{x^3}} = -\frac{1}{10} \\ z_2' = \frac{\frac{5}{x^5}}{\frac{70}{x^3}} = \frac{1}{14x^2} \\ z_3' = \frac{2x^2}{\frac{70}{x^3}} = \frac{1}{35}x^5 \end{cases} \Rightarrow \tag{3.390}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \int -\frac{1}{10}dx = -\frac{1}{10}x \\ z_2 = \int \frac{1}{14x^2}dx = -\frac{1}{14x} \\ z_3 = \int \left(\frac{1}{35}x^5\right)dx = \frac{1}{210}x^6 \end{cases} \tag{3.391}$$

$$\Rightarrow y_p = \left(-\frac{1}{10}x\right)x + \left(-\frac{1}{14x}\right)x^3 + \left(\frac{1}{210}x^6\right)\frac{1}{x^4} = -\frac{1}{6}x^2 \tag{3.392}$$

$$\Rightarrow y = C_1x + C_2x^3 + \frac{C_3}{x^4} - \frac{1}{6}x^2 \tag{3.393}$$

2.

$$I = \int \frac{\operatorname{tg}^2\theta + \operatorname{tg}^5\theta}{1 - \operatorname{tg}^2\theta}d\theta \tag{3.394}$$

$$t = \operatorname{tg}\theta \tag{3.395}$$

$$\theta = \operatorname{Bgtg} t \tag{3.396}$$

$$d\theta = \frac{dt}{1+t^2} \tag{3.397}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{t^2 + t^5}{1 - t^2}\frac{dt}{1+t^2} \tag{3.398}$$

$$= \int \left(-t + \frac{t^2 + t}{(1-t)(1+t)(1+t^2)}\right)dt \tag{3.399}$$

$$= \int \left(-t + \frac{t}{(1+t^2)(1-t)}\right)dt \tag{3.400}$$

Stel $\dfrac{t}{(1+t^2)(1-t)} = \dfrac{A}{1-t} + \dfrac{Bt+C}{1+t^2}$

$$A = \lim_{t\to 1} \frac{t}{(1+t^2)} = \frac{1}{2} \tag{3.401}$$

$$Bi + C = \lim_{t\to i} \frac{t}{(1-t)} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow \begin{cases} B = 1/2 \\ C = -1/2 \end{cases} \tag{3.402}$$

$$\Rightarrow I = \int \left(-t + \frac{1}{2}\frac{1}{1-t} + \frac{1}{2}\frac{t-1}{1+t^2} \right) dt \tag{3.403}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\int \frac{d\left(t^2+1\right)}{1+t^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^2+1} \tag{3.404}$$

$$= -\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}\ln|1-t| + \frac{1}{4}\ln\left|1+t^2\right| - \frac{1}{2}\operatorname{Bgtg} t + c \tag{3.405}$$

$$= -\frac{1}{2}\operatorname{tg}^2\theta - \frac{1}{2}\ln|1-\operatorname{tg}\theta| + \frac{1}{4}\ln\left|1+\operatorname{tg}^2\theta\right| - \frac{\theta}{2} + c \tag{3.406}$$

3.

$$\left(t^3, 1-t^2\right) \tag{3.407}$$

(a) $I = [-1, 1]$

(b)

$$S = \int_{-1}^{1} \left(1-t^2\right) 3t^2 dt \tag{3.408}$$

$$= 2\int_{0}^{1} \left(1-t^2\right) 3t^2 dt \tag{3.409}$$

$$= \frac{4}{5} \tag{3.410}$$

(c)

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{\left(3t^2\right)^2 + (-2t)^2} dt \tag{3.411}$$

$$= 2\int_{0}^{1} \sqrt{9t^4 + 4t^2} dt \tag{3.412}$$

$$= 2\int_{0}^{1} t\sqrt{9t^2+4} dt \tag{3.413}$$

$$\text{Stel } u = 9t^2 + 4 \Rightarrow du = 18t dt \tag{3.414}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \frac{1}{9}\int \sqrt{u}du && (3.415)\\
&= \frac{2}{27}\sqrt{u^3}+c && (3.416)\\
&= \frac{2}{27}\sqrt{\left(9t^2+4\right)^3}+c && (3.417)\\
\Rightarrow l &= \left[\frac{2}{27}\sqrt{\left(9t^2+4\right)^3}\right]_0^1 && (3.418)\\
&= \frac{26}{27}\sqrt{13}-\frac{16}{27} && (3.419)\\
&\simeq 2.879\,419\,747 && (3.420)
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
V &= 2\pi\int_0^1 \left(1-t^2\right)^2 3t^2dt && (3.421)\\
&= \pi\int_0^1 \left(6t^6-12t^4+6t^2\right)dt && (3.422)\\
&= \pi\left[\frac{6}{7}t^7-\frac{12}{5}t^5+\frac{6}{3}t^3\right]_0^1 && (3.423)\\
&= \frac{16}{35}\pi && (3.424)
\end{aligned}$$

(e)

$$\begin{aligned}
S &= 4\pi\int_0^1 \left(1-t^2\right)\sqrt{9t^4+4t^2}dt && (3.425)\\
&= 4\pi\int_0^1 \left(1-t^2\right)t\sqrt{9t^2+4}dt && (3.426)
\end{aligned}$$

$$\text{Stel } u=9t^2+4 \Rightarrow \begin{cases} du=18tdt \\ t^2=\dfrac{u-4}{9} \Rightarrow 1-t^2=\dfrac{13-u}{9} \end{cases} \quad (3.427)$$

$$\begin{aligned}
I &= \frac{4\pi}{162}\int (13-u)\sqrt{u}du = \frac{52\pi}{243}\sqrt{u^3}-\frac{4\pi}{405}\sqrt{u^5} && (3.428)\\
&= \frac{52\pi}{243}\sqrt{\left(9t^2+4\right)^3}-\frac{4\pi}{405}\sqrt{\left(9t^2+4\right)^5} && (3.429)\\
\Rightarrow S &= \left[\frac{52\pi}{243}\sqrt{\left(9t^2+4\right)^3}-\frac{4\pi}{405}\sqrt{\left(9t^2+4\right)^5}\right]_0^1 && (3.430)\\
&= \left(\frac{1352}{1215}\sqrt{13}-\frac{1696}{1215}\right)\pi && (3.431)
\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^4 - 2ax^3 + (12-3a)x^2 + (a+1)x - 1 && (3.432)\\
\frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2}\left(x^4 - 2ax^3 + (12-3a)x^2 + (a+1)x - 1\right) && (3.433)\\
&= 12x^2 - 12ax + 24 - 6a && (3.434)\\
\Delta &= (12a)^2 - 4\cdot 12\cdot(24-6a) && (3.435)\\
&= 144a^2 - 1152 + 288a && (3.436)\\
&= 144(a+4)(a-2) && (3.437)
\end{aligned}$$

a		-4		2	
Δ	$+$	0	$-$	0	$+$

(a) $a = 2 \Rightarrow f(x) = x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4 - 4x^3 + 6x^2 + 3x - 1\right) = 12x^2 - 24x + 12 = 0 \qquad (3.438)$$

$\Rightarrow x = 1$ (mult. 2)

x		1	
f''	$+$	$0^{(2)}$	$+$
f	$\smile$		$\smile$

$\Rightarrow$ Geen buigpunten

(b) $a = -4 \Rightarrow f(x) = x^4 + 8x^3 + 24x^2 - 3x - 1$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(x^4 + 8x^3 + 24x^2 - 3x - 1\right) = 12x^2 + 48x + 48 = 0 \qquad (3.439)$$

$\Rightarrow x = -2$ (mult. 2)

x		-2	
f''	$+$	$0^{(2)}$	$+$
f	$\smile$		$\smile$

$\Rightarrow$ Geen buigpunten

(c) $a \in \left]-4, 2\right[$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2}\left(x^4 - 2ax^3 + (12-3a)x^2 + (a+1)x - 1\right) && (3.440)\\
&= 12x^2 - 12ax + 24 - 6a && (3.441)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta &= (-12a)^2 - 4\cdot 12\cdot(24-6a) && (3.442)\\
&= 144a^2 - 1152 + 288a && (3.443)\\
&= 144(a+4)(a-2) < 0 && (3.444)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ Geen buigpunten

(d) $a \in \left]-\infty, -4\right[\cup \left]2, +\infty\right[$

$$\Delta = 144(a+4)(a-2) > 0 \qquad (3.445)$$

$$x_{1,2} = \frac{12a \pm \sqrt{144(a+4)(a-2)}}{12} = a \pm \sqrt{(a+4)(a-2)} \qquad (3.446)$$

x		$a - \sqrt{(a+4)(a-2)}$		$a + \sqrt{(a+4)(a-2)}$	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\smile$	B	$\frown$	B	$\smile$

5.

$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta\sin\varphi \\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi \\ z = \rho\cos\varphi \end{cases} \tag{3.447}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow |\det J| &= \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} && (3.448)\\
&= \left|-\rho^2\sin\varphi\right| && (3.449)\\
&= \rho^2\sin\varphi && (3.450)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_0^{\pi}\left(\left(\frac{1}{\rho^3}-\frac{1}{\rho^2}\right)\rho^2\sin\varphi\right)d\varphi\right)d\theta\right)d\rho && (3.451)\\
&= \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\left[\left(\frac{1}{\rho}-1\right)(-\cos\varphi)\right]_0^{\pi}\right)d\theta\right)d\rho && (3.452)\\
&= \int_0^R \left(\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{2}{\rho}-2\right)d\theta\right)d\rho && (3.453)\\
&= \int_0^R \left(\frac{2}{\rho}-2\right)d\rho\cdot\int_{-\pi}^{\pi}d\theta && (3.454)\\
&= [2\ln\rho-2\rho]_0^R\cdot[\theta]_{-\pi}^{\pi} && (3.455)\\
&= \infty && (3.456)
\end{aligned}$$

6.

$$\text{Stel } \frac{d}{dR}\left(\frac{8}{3}R^{\frac{3}{2}}\pi-4\pi R\right) = 4\sqrt{R}\pi-4\pi = 0 \Rightarrow R = 1 \tag{3.457}$$

$$\frac{d^2}{dR^2}\left(\frac{8}{3}R^{\frac{3}{2}}\pi-4\pi R\right) = \frac{2}{\sqrt{R}}\pi \Rightarrow \frac{d^2}{dR^2}\left(\frac{8}{3}R^{\frac{3}{2}}\pi-4\pi R\right)(1) = 2\pi > 0 \tag{3.458}$$

$\Rightarrow$ Voor $R = 1$ bereikt de integraal een minimum.

3.9.7 Januari 2006

1.

$$\left(2x^2y+xy^3+2xy^2+y^4\right)dx+\left(x^3+3x^2y^2+x^2y+3xy^3\right)dy = 0 \tag{3.459}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3+3x^2y^2+x^2y+3xy^3\right) = 3x^2+6xy^2+2xy+3y^3 \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(2x^2y+xy^3+2xy^2+y^4\right) = 2x^2+3xy^2+4xy+4y^3 \end{cases} \tag{3.460}$$

$$\Rightarrow \quad \text{niet exact} \tag{3.461}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow R &= \left(2x^2+3xy^2+4xy+4y^3\right)-\left(3x^2+6xy^2+2xy+3y^3\right) && (3.462)\\
&= -x^2-3xy^2+2xy+y^3 && (3.463)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{R}{Q-P} &= \frac{-x^2-3xy^2+2xy+y^3}{(x^3+3x^2y^2+x^2y+3xy^3)-(2x^2y+xy^3+2xy^2+y^4)} && (3.464)\\
&= \frac{-x^2-3xy^2+2xy+y^3}{x^3+3x^2y^2-x^2y-2xy^2+2xy^3-y^4} && (3.465)\\
&= -\frac{1}{x+y} && (3.466)
\end{aligned}$$

Een integrerende factor is dus

$$e^{\int -\frac{1}{t}dt} = e^{-\ln t} = t^{-1} = \frac{1}{t} \tag{3.467}$$

We beschouwen dus de vergelijking

$$\frac{\left(2x^2y + xy^3 + 2xy^2 + y^4\right)}{x+y}dx + \frac{\left(x^3 + 3x^2y^2 + x^2y + 3xy^3\right)}{x+y}dy = 0 \tag{3.468}$$

met singuliere oplossing $y = -x$. Na vereenvoudiging wordt deze

$$\left(2x + y^2\right) ydx + \left(x + 3y^2\right) xdy = 0 \tag{3.469}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\left(2x + y^2\right) y\right) = 3y^2 + 2x \\ \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\left(x + 3y^2\right) x\right) = 3y^2 + 2x \end{cases} \Rightarrow \text{ wél exact} \tag{3.470}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = \int \left(2xy + y^3\right) dx = x^2y + xy^3 + c_y \\ \varphi(x,y) = \int \left(x^2 + 3xy^2\right) dy = x^2y + xy^3 + c_x \end{cases} \tag{3.471}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi(x,y) = x^2y + xy^3 + c \\ \text{S.O.: } y = -x \end{cases} \tag{3.472}$$

2. De gedaante impliceert een Eulervergelijking $\Rightarrow$ stel $x = e^z$
$c_1x^2 + c_2x^2 \ln x + c_3x = x^3 + 2x^4$
$\Rightarrow$ Homogene vergelijking: $c_1e^{2z} + c_2ze^{2z} + c_3e^z$
$\Rightarrow$ Karakteristieke vergelijking: $(t-2)^2(t-1) = t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = 0$
$\Rightarrow$Homogene vergelijking: $\dddot{y} - 5\ddot{y} + 8\dot{y} - 4y$
Hierbij is

$$\frac{dy}{dz} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dz} = y'x \tag{3.473}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{d}{dx}(y'x)\frac{dx}{dz} = (y''x + y')x = x^2y'' + xy' \tag{3.474}$$

$$\frac{d^3y}{dz^3} = \frac{d}{dx}\left(x^2y'' + xy'\right)\frac{dx}{dz} \tag{3.475}$$

$$= \left(y'''x^2 + 2xy'' + xy'' + y'\right)x \tag{3.476}$$

$$= y'''x^3 + 3x^2y'' + xy' \tag{3.477}$$

$$\Rightarrow \quad y'''x^3 + 3x^2y'' + xy' - 5\left(x^2y'' + xy'\right) + 8(y'x) - 4y = 0 \tag{3.478}$$

$$\Rightarrow \quad x^3y''' - 2x^2y'' + 4xy' - 4y = 0 \tag{3.479}$$

Wat het niet–homogene stuk betreft,

$$x^3\frac{d^3}{dx^3}\left(x^3 + 2x^4\right) - 2x^2\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3 + 2x^4\right) + 4x\frac{d}{dx}\left(x^3 + 2x^4\right) - 4\left(x^3 + 2x^4\right) = 24x^4 + 2x^3 \tag{3.480}$$

De gezochte vergelijking is dus

$$x^3y''' - 2x^2y'' + 4xy' - 4y = 24x^4 + 2x^3 \tag{3.481}$$

3.
$$I = \int \frac{\sin x + 3\cos x}{6\sin^2 x - 5\cos x - 7}dx \tag{3.482}$$
$$t = \operatorname{tg}\frac{x}{2} \tag{3.483}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \int \frac{\frac{2t}{1+t^2} + 3\frac{1-t^2}{1+t^2}}{6\left(\frac{2t}{1+t^2}\right)^2 - 5\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - 7}\frac{2}{1+t^2}dt && (3.484)\\
&= \int \frac{3t^2 - 2t - 3}{t^4 - 5t^2 + 6}dt && (3.485)\\
&= \int \frac{3t^2 - 2t - 3}{(t^2-2)(t^2-3)}dt && (3.486)
\end{aligned}$$

$$\frac{3t^2 - 2t - 3}{(t^2-2)(t^2-3)} = \frac{A}{t-\sqrt{2}} + \frac{B}{t+\sqrt{2}} + \frac{C}{t-\sqrt{3}} + \frac{D}{t+\sqrt{3}} \tag{3.487}$$
$$\Rightarrow A = \lim_{t\to\sqrt{2}} \frac{3t^2 - 2t - 3}{\left(t+\sqrt{2}\right)(t^2-3)} = 1 - \frac{3\sqrt{2}}{4} \tag{3.488}$$
$$\Rightarrow B = \lim_{t\to-\sqrt{2}} \frac{3t^2 - 2t - 3}{\left(t-\sqrt{2}\right)(t^2-3)} = 1 + \frac{3\sqrt{2}}{4} \tag{3.489}$$
$$\Rightarrow C = \lim_{t\to\sqrt{3}} \frac{3t^2 - 2t - 3}{\left(t+\sqrt{3}\right)(t^2-2)} = \sqrt{3} - 1 \tag{3.490}$$
$$\Rightarrow D = \lim_{t\to-\sqrt{3}} \frac{3t^2 - 2t - 3}{\left(t-\sqrt{3}\right)(t^2-2)} = -\sqrt{3} - 1 \tag{3.491}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow I &= \left(1 - \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\int \frac{dt}{t-\sqrt{2}} + \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\int \frac{dt}{t+\sqrt{2}} && (3.492)\\
&\quad + \left(\sqrt{3}-1\right)\int \frac{dt}{t-\sqrt{3}} + \left(-\sqrt{3}-1\right)\int \frac{dt}{t+\sqrt{3}} && (3.493)\\
&= \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4} + 1\right)\ln\left|t-\sqrt{2}\right| + \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\ln\left|t+\sqrt{2}\right| && (3.494)\\
&\quad + \left(\sqrt{3}-1\right)\ln\left|t-\sqrt{3}\right| + \left(-\sqrt{3}-1\right)\ln\left|t+\sqrt{3}\right| + c && (3.495)\\
&= \left(-\frac{3\sqrt{2}}{4} + 1\right)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{2}\right| + \left(1 + \frac{3\sqrt{2}}{4}\right)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{2}\right| && (3.496)\\
&\quad + \left(\sqrt{3}-1\right)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}-\sqrt{3}\right| + \left(-\sqrt{3}-1\right)\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+\sqrt{3}\right| + c && (3.497)
\end{aligned}$$

4. $r = \cos 3\theta + \cos\theta$

   (a) Periode: 2π

$$r = 4\cos^3\theta - 2\cos\theta \tag{3.498}$$

$$r = 0 \Leftrightarrow 2\left(\cos\theta\right)\left(2\cos^2\theta - 1\right) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \theta = \pm\dfrac{\pi}{4} + k2\pi \\ \theta = \pm\dfrac{3\pi}{4} + k2\pi \end{cases} \tag{3.499}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \\ \theta = \dfrac{\pi}{4} + k\dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{3.500}$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\theta}\left(4\cos^3\theta - 2\cos\theta\right) &= -12\cos^2\theta\sin\theta + 2\sin\theta && (3.501)\\ &= -2\left(\sin\theta\right)\left(6\cos^2\theta - 1\right) && (3.502)\\ &= 0 && (3.503) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin\theta = 0 \text{ of } 6\cos^2\theta - 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \theta = k\pi \\ \theta = \pm\,\mathrm{Bgcos}\,\dfrac{1}{\sqrt{6}} + 2\pi \\ \theta = \pm\left(\pi - \mathrm{Bgcos}\,\dfrac{1}{\sqrt{6}}\right) + 2\pi \end{cases} \tag{3.504}$$

Zij $\alpha = \mathrm{Bgcos}\,\dfrac{1}{\sqrt{6}}$

θ	0		$\frac{\pi}{4}$		α		$\frac{\pi}{2}$		$\pi-\alpha$		$\frac{3\pi}{4}$		π
r	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$
r'	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0
r	M	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	m
	2				$-\frac{2\sqrt{6}}{9}$				$\frac{2\sqrt{6}}{9}$				-2

θ	π		$\frac{5\pi}{4}$		$\pi+\alpha$		$\frac{3\pi}{2}$		$2\pi-\alpha$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
r	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
r'	0	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	0
r	m	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$\searrow$	$\searrow$	m	$\nearrow$	$\nearrow$	$\nearrow$	M
	-2				$\frac{2\sqrt{6}}{9}$				$-\frac{2\sqrt{6}}{9}$				2

(b)

$$\begin{aligned} I &= \int \left(\cos 3\theta + \cos\theta\right)^2 d\theta && (3.505)\\ &= \int \left(\cos^2 3\theta + 2\cos 3\theta\cos\theta + \cos^2\theta\right) d\theta && (3.506)\\ &= \int \left(\frac{1+\cos 6\theta}{2} + \cos 2\theta + \cos 4\theta + \frac{1+\cos 2\theta}{2}\right) d\theta && (3.507)\\ &= \int \left(1 + \frac{1}{2}\cos 6\theta + \frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) d\theta && (3.508)\\ &= \theta + \frac{1}{12}\sin 6\theta + \frac{3}{4}\sin 2\theta + \frac{1}{4}\sin 4\theta + c && (3.509) \end{aligned}$$

$$S_1 = 2\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\left(1 + \frac{1}{2}\cos 6\theta + \frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right) d\theta = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} \tag{3.510}$$

$$S_2 = S_3 = \frac{1}{2}\int_{\pi/4}^{\pi/2}\left(1+\frac{1}{2}\cos 6\theta + \frac{3}{2}\cos 2\theta + \cos 4\theta\right)d\theta = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3} \tag{3.511}$$

Dus is de totale oppervlakte

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{2}{3} + \frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{\pi}{8} - \frac{1}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \tag{3.512}$$

5.

$$f_p(x) = (1 - x^p)\,x^p \tag{3.513}$$

Merk eerst en vooral op dat, als $p \notin \mathbb{Z}$, er überhaupt geen sprake kan zijn van deze kromme te evalueren op $\mathbb{R}^-$.

(a)

$$f_1(x) = (1-x)\,x \tag{3.514}$$
$$f_2(x) = \left(1-x^2\right)x^2 \tag{3.515}$$
$$f_3(x) = \left(1-x^3\right)x^3 \tag{3.516}$$

(b)

$$S_p = \int_0^1 (1-x^p)\,x^p dx = \left[\frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{x^{2p+1}}{2p+1}\right]_0^1 = \frac{p}{(2p+1)(p+1)} \tag{3.517}$$

(c)

$$\frac{d}{dp}\frac{p}{(2p+1)(p+1)} = -\frac{2p^2-1}{(2p+1)^2(p+1)^2} = 0 \tag{3.518}$$

$$\Rightarrow p \in \left\{-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}. \tag{3.519}$$

Alleen de eerste waarde komt in aanmerking.

$$\frac{d^2}{dp^2}\frac{p}{(2p+1)(p+1)} = 2\frac{4p^3-6p-3}{(2p+1)^3(p+1)^3} \tag{3.520}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2}{dp^2}\frac{p}{(2p+1)(p+1)}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -16\frac{2\sqrt{2}+3}{\left(\sqrt{2}+1\right)^3\left(2+\sqrt{2}\right)^3} < 0 \tag{3.521}$$

$\Rightarrow$ Het is inderdaad een maximum.
Voor p even is er wegens symmetrie nog een even groot stuk dat er langs de linkerkant van de as bij komt. Alle waarden $p \in 2\mathbb{N}_0$ zijn dus ook nog eens lokale maxima.

3.9.8 September 2006

1.

$$xy' + (3+x)\,y = e^x \tag{3.522}$$

$$\Rightarrow \text{Normaalvorm } \frac{y'}{x} + \left(\frac{3}{x} + 1\right) y = \frac{e^x}{x} \tag{3.523}$$

$$\Rightarrow \text{Integrerende factor } \mu(x) = e^{\int \left(\frac{3}{x}+1\right)dx} = e^{3\ln x + x} = x^3 e^x \tag{3.524}$$

$$\Rightarrow x^2 e^x y' + \left(3x^2 e^x + x^3 e^x\right) y = x^2 e^{2x} \tag{3.525}$$

$$\Rightarrow \left(x^3 e^x y\right)' = x^2 e^{2x} \tag{3.526}$$

$$\Rightarrow x^3 e^x y = \int x^2 e^{2x} dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + c \tag{3.527}$$

$$\Rightarrow y = \frac{\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) e^{2x} + c}{x^3 e^x} = \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^3}\right) e^x + \frac{1}{x^3 e^x} c \tag{3.528}$$

$$\text{Eis: } y(1) = 0 \tag{3.529}$$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{4}e + e^{-1}c \Rightarrow c = -\frac{1}{4}e^2 \tag{3.530}$$

$$\Rightarrow y_P = \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{4x^3}\right) e^x - \frac{1}{4x^3 e^{x-2}} \tag{3.531}$$

2. Met:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(6\sin x - 3\,\mathrm{Bgtg}\,x - 3x)}{x^5} \tag{3.532}$$

$$= \frac{0}{0} \tag{3.533}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6\left(1+x^2\right)\cos x - 3 - 3\left(1+x^2\right)}{5x^4\left(1+x^2\right)} \tag{3.534}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6\cos x + 6x^2\cos x - 6 - 3x^2}{5x^4 + 5x^6} \tag{3.535}$$

$$= \frac{0}{0} \tag{3.536}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-6\sin x - 6x^2 \sin x + 12x\cos x - 6x}{20x^3 + 30x^5} \tag{3.537}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-3\sin x - 3x^2\sin x + 6x\cos x - 3x}{10x^3 + 15x^5} \tag{3.538}$$

$$= \frac{0}{0} \tag{3.539}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{\cos x - x^2\cos x - 4x\sin x - 1}{10x^2 + 25x^4} \tag{3.540}$$

$$= \frac{0}{0} \tag{3.541}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-5\sin x + x^2\sin x - 6x\cos x}{20x + 100x^3} \tag{3.542}$$

$$= \frac{0}{0} \tag{3.543}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-11\cos x + x^2\cos x + 8x\sin x}{20 + 300x^2} \tag{3.544}$$

$$= -\frac{11}{20} \tag{3.545}$$

Zonder:

$$\lim_{x\to 0} \frac{(6\sin x - 3\,\mathrm{Bgtg}\,x - 3x)}{x^5} \tag{3.546}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x - x^3 + \frac{1}{20}x^5 - 3x + x^3 - \frac{3}{5}x^5 - 3x + O\left(x^7\right)}{x^5} \tag{3.547}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{20}x^5 - \frac{3}{5}x^5 + O\left(x^7\right)}{x^5} \tag{3.548}$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{20} - \frac{3}{5} + O\left(x^2\right)\right) \tag{3.549}$$

$$= -\frac{11}{20} \tag{3.550}$$

3.

$$I = \int \frac{\sqrt{x^2-4}+3}{x^2+1}dx \tag{3.551}$$

$$= \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+1}dx + \int \frac{3}{x^2+1}dx \tag{3.552}$$

$$= \int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2+1}dx + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x \tag{3.553}$$

$$\sqrt{x^2-4} = x+t \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4 = x^2 + 2tx + t^2 \tag{3.554}$$

$$\Rightarrow \quad -4 = 2tx + t^2 \tag{3.555}$$

$$\Rightarrow \quad x = -\frac{4+t^2}{2t} \tag{3.556}$$

$$\Rightarrow \quad dx = \frac{4-t^2}{2t^2}dt \tag{3.557}$$

$$x^2+1 = \left(-\frac{4+t^2}{2t}\right)^2 + 1 = \frac{t^4+12t^2+16}{4t^2}$$

$$\sqrt{x^2-4} = x+t = \left(-\frac{4+t^2}{2t}\right) + t = \frac{t^2-4}{2t}$$

$$\Rightarrow I = \int \frac{\frac{t^2-4}{2t}}{\frac{t^4+12t^2+16}{4t^2}} \frac{4-t^2}{2t^2}dt + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x \tag{3.558}$$

$$= \int -\frac{\left(t^2-4\right)^2}{t\left(t^4+12t^2+16\right)}dt + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x \tag{3.559}$$

$$= -\ln|t| + 20\int \frac{t}{t^4+12t^2+16}dt + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x \tag{3.560}$$

$$= -\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + 20\int \frac{t}{t^4+12t^2+16}dt + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x \tag{3.561}$$

$$u = t^2 \Rightarrow du = 2tdt \tag{3.562}$$

$$\Rightarrow I = -\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + 10\int \frac{du}{u^2+12u+16} + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x \tag{3.563}$$

$$= -\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + 10\int \frac{du}{\left(u+6-2\sqrt{5}\right)\left(u+6+2\sqrt{5}\right)} + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x \tag{3.564}$$

$$= -\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + \int \left(\frac{A}{u+6-2\sqrt{5}} + \frac{B}{u+6+2\sqrt{5}}\right)du + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x \tag{3.565}$$

$$A = \lim_{u \to -6+2\sqrt{5}} \frac{10}{u+6+2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \tag{3.566}$$

$$B = \lim_{u \to -6-2\sqrt{5}} \frac{10}{u+6-2\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{2} \tag{3.567}$$

$$\Rightarrow I = -\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|u+6-2\sqrt{5}\right| - \frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|u+6+2\sqrt{5}\right| + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x + c \tag{3.568}$$

$$= -\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|\frac{u+6-2\sqrt{5}}{u+6+2\sqrt{5}}\right| + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x + c \tag{3.569}$$

$$= -\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|\frac{t^2+6-2\sqrt{5}}{t^2+6+2\sqrt{5}}\right| + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x + c \tag{3.570}$$

$$= -\ln\left|\sqrt{x^2-4}-x\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\ln\left|\frac{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)^2+6-2\sqrt{5}}{\left(\sqrt{x^2-4}-x\right)^2+6+2\sqrt{5}}\right| + 3\,\mathrm{Bgtg}\,x + c \tag{3.571}$$

4. Bestudeer de parameterkromme

$$X : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2 : t \mapsto \left(\cos t \sin^2 t, 1 - \cos^2 2t\right) \tag{3.572}$$

Maak hiervan een zo goed mogelijke schets, en bepaal de totale door de kromme ingesloten oppervlakte, door zoveel mogelijk gebruik te maken van de symmetrie van de figuur.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
x	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$-\frac{\sqrt{2}}{4}$	0	$\frac{\sqrt{2}}{4}$	0
y	0	1	0	1	0	1	0	1	0

$$I = 2\int_0^{\pi/2} \left(1-\cos^2 2t\right)\left(3\cos^2 t \sin t - \sin t\right) dt \tag{3.573}$$

$$= 2\int_0^{\pi/2} \left(4\cos^4 t - 4\cos^2 t\right)\left(3\cos^2 t - 1\right) d\left(\cos t\right) \tag{3.574}$$

$$\overset{(u=\cos t)}{=} 2\int_1^{0} \left(4u^4 - 4u^2\right)\left(3u^2-1\right) du \tag{3.575}$$

$$= 2\int_1^{0} \left(12u^6 - 16u^4 + 4u^2\right) du \tag{3.576}$$

$$= 2\left[\frac{12}{7}u^7 - \frac{16}{5}u^5 + \frac{4}{3}u^3\right]_1^0 = \frac{32}{105} \tag{3.577}$$

5. Voor elke $p \in \mathbb{R}_0^+$ definiëren we een functie als volgt: op het interval $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ is $y = (2x)^{2p}$; op het interval $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ is $y = \sqrt[p]{2-2x}$.

(a) Teken deze functie voor $p \in \{1, 2, 3\}$

$$\begin{cases} (2x)^{2p} & \text{als} \quad 0 < x < 0,5 \\ \sqrt[p]{2-2x} & \text{als} \quad 0,5 \leq x < 1 \end{cases} \tag{3.578}$$

$$\begin{cases} (2x)^{2p} & \text{als} \quad 0 < x < 0,5 \\ \sqrt[p]{2-2x} & \text{als} \quad 0,5 \leq x < 1 \end{cases} \tag{3.579}$$

(b) Bereken de oppervlakte van tussen deze figuur en de X–as op het interval $[0, 1]$ voor elke $p > 0$.

$$S_p = \int_0^{1/2} (2x)^{2p}\, dx + \int_{1/2}^{1} \sqrt[p]{(2-2x)} dx \tag{3.580}$$

$$= \left[\frac{1}{2}\frac{(2x)^{1+2p}}{1+2p}\right]_0^{1/2} + \left[-\frac{1}{2}\frac{(-2x+2)^{\frac{1}{p}+1}}{\frac{1}{p}+1}\right]_{1/2}^{1} \tag{3.581}$$

$$= \frac{1}{2(1+2p)} + \frac{1}{2\left(\frac{1}{p}+1\right)} = \frac{2p^2+2p+1}{2(1+2p)(p+1)} \tag{3.582}$$

$$= \frac{2p^2+2p+1}{4p^2+6p+2} \tag{3.583}$$

(c) Voor welke waarde van p bereikt deze oppervlakte een extreme waarde? Hint: de gezochte waarde is uniek! En ga na of dit een minimum, een maximum of een zadelpunt is.

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{2}\frac{2p+1+2p^2}{(1+2p)(p+1)}\right) = \frac{1}{2}\frac{-1+2p^2}{(1+2p)^2(p+1)^2} = 0 \Rightarrow p = \frac{\sqrt{2}}{2} \tag{3.584}$$

$$\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{2}\frac{2p+1+2p^2}{(1+2p)(p+1)}\right) = -\frac{-3-6p+4p^3}{(1+2p)^3(p+1)^3} \tag{3.585}$$

$$\left.\frac{d^2}{dp^2}\left(\frac{1}{2}\frac{2p+1+2p^2}{(1+2p)(p+1)}\right)\right|_{p=\frac{\sqrt{2}}{2}} = 8\frac{3+2\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^3\left(2+\sqrt{2}\right)^3} > 0 \tag{3.586}$$

$\Rightarrow$ Het is een minimum

Hoofdstuk 4

Fysica van het dagelijkse leven

4.1 De Cursus, het vak, het examen

Dit is nog maar het 3de jaar dat dit vak gegeven wordt. Het examen bestaat uit een dikke bundel (zo'n 8 tal pagina's) met meerkeuzevragen. Er zijn heel triviale, onbenullige vragen bij, maar ook echte denkvragen. Dit vak mag zeker niet onderschat worden, zoals men gemakkelijk zou kunnen doen, aangezien je dus veel details moet kunnen geven op je examen. Het examen van vorig jaar is helaas niet kunnen bewaard worden, maar was wel heel erg gelijkaardig aan dat van 2009 volgens de studenten die vorig jaar dit vak aflegden.

4.2 Multiple Choice examen

4.2.1 Januari 2009

1. De eerste Nobelprijs in de natuurkunde werd
   (a) toegekend aan Roetgen in 1895.
   (b) toegekend aan Roetgen in 1901.
   (c) toegekend aan Roetgen in 1923.
   (d) nooit toegekend aan Roetgen.

2. Noem I_a de intensiteit van de X-stralen die gegenereerd worden door elektronen te laten invallen op doelkern K_a. Noem I_b de intensiteit van de X-stralen die gegenereerd worden door elektronen te laten invallen op doelkern K_b. Als je weet dat zowel massa als de lading van doelkern K_b twee keer groter is dan die van K_a, dan is
   (a) $I_b = I_a$
   (b) $I_b = 2I_a$
   (c) $I_b = 4I_a$
   (d) $I_b = 16I_a$

3. Bremmstrahlung ontstaat uit de interactie van
   (a) een beta-deeltje met de kern
   (b) een alfa-deeltje met een valentie-elektron
   (c) een X-straal met een kern
   (d) een X-straal met een valentie-elektron

4. Het belangrijkste proces bij de interactie van 0,5 MeV X-stralen met materie is
   (a) de Compton interactie
   (b) paarvorming
   (c) het foto-elektrisch effect
   (d) de elektron-vangst

5. Welke uitspraak is juist?
   (a) Bij het fotoelektrisch effect is de energie vna het uittredend X-stralenfoton gelijk aan dat van het invallend X-stralenfoton min de bindingsenergie van het elektron.
   (b) Attenuatie van X-stralen in een materie ten gevolge van paarvorming is belangrijk voor X-stralenfotonen met een energie van 5 MeV
   (c) De maximale energie van de X-stralen geproduceerd door een X-stralenbron kan je verhogen door een ander materiaal als anode te gebruiken
   (d) De wet van Lambert-Beer beschrijft de exponentiële afname van de intensiteit van een monochromatische X-stralenbundel als functie van de lineaire attenuatiecoëfficiënt van een materiaal

6. De fase-overgang van een vaste stof naar gas noemt men:
   (a) Depositie
   (b) Sublimatie
   (c) Condensatie
   (d) Geen van deze 3

7. Deze fase-overgang gebeurt bij
   (a) lage druk en lage temperatuur
   (b) lage druk en hoge temperatuur
   (c) hoge druk en lage temperatuur
   (d) hoge druk en hoge temperatuur

8. Dentrieten worden vooral gevormd bij
   (a) lage druk en lage vochtigheid
   (b) lage druk en hoge vochtigheid
   (c) hoge druk en lage vochtigheid
   (d) hoge druk en hoge vochtigheid

9. Wat is de blangrijkste oorzaak van het ontstaan van sneeuw?
   (a) het hexagonale rooster van ijskristal
   (b) temperatuursverschillen tussen de binnen- en buitenkant van een wolk
   (c) de condensatie van een waterdruppel rond een stofdeeltje
   (d) kristalvertakking

10. Welke uitspraak is juist?
   (a) Hoe groter de druppels, hoe helderder de regenboog.
   (b) Een regenboog bij zoetwaterdruppels is kleiner dan bij zoutwaterdruppels.

(c) Je zou een regenboog kunnen zien die ontstaat door licht dat 3 keer gebroken is in de druppel, als de intensiteit van het doorgaande licht maar groot genoeg is.
(d) Als rood licht invalt op een druppel, wijzigt de frequentie.

11. Wat beschrijft best wat er gebeurt als een lichtstraal invalt vanuit lucht op een glasoppervlak onder een hoek t.o.v. de normale die groter is dan de kritische hoek?
    (a) totale reflectie
    (b) totale transmissie
    (c) partiële reflectie en partiële transmissie
    (d) partiële reflectie en totale transmissie

12. Monochromatisch licht (golflengte in vacum λ) valt loodrecht in op een dun, glazen plaatje met dikte d en brekingsindex n_2. De brekingsindex van het milieu boven en onder het plaatje is respectievelijk n_1 en n_3. Indien $n_1 = 1 < n_2 < n_3$, dan zal er in reflectie destructieve interferentie optreden indien d =
    (a) $\lambda/2$
    (b) $\lambda/4$
    (c) $\lambda/(2n_2)$
    (d) $\lambda/(4n_2)$

13. De meest specifieke en noodzakelijke reden waarom een regenboog kan waargenomen worden is
    (a) omdat bij 1 interne breking in de druppel de hoek tussen de invallende straal en de uitgaande straal een maximum bereikt.
    (b) omdat verschillende kleuren onder verschillende hoeken breken.
    (c) omdat er dispersie is.
    (d) omdat de hoek tussen de invallende straal en de uitgaande straal ongeveer 42 graden bedraagt.

14. Bij de verklaring van de kleuren die men ziet in een dunne oliefilm op water spelen de volgende eigenschappen een rol: 1.terugkaatsing , 2. brekingsindex, 3. interferentie, 4. buiging, 5. polarisatie. De juiste combinatie:
    (a) 1,2,3
    (b) 1,2,4
    (c) 2,3,4
    (d) 1,2,5

15. De eenheid van de viscositeitscoëfficiënt is:
    (a) N/m^2
    (b) N/(s.m^2)
    (c) N.s/r
    (d) N.s/m

16. De hematokrietwaarde van het bloed is:
    (a) de verhouding van het volume van de enthrocyten tov het volume van het bloed

(b) de verhouding van het volume van de leucocyten tov het volume van het bloed
(c) de verhouding van het volume van de thrombocyten tov het volume van het bloed
(d) de verhouding van het volume van het bloedplasma tov het volume van het bloed

17. De snelheid van het bloed kan het best gemeten worden via het Doppler effect door geluid onder een hoek van
    (a) 0 te meten tov de stroomrichting van het bloed
    (b) 45 te meten tov de stroomrichting van het bloed
    (c) 60 te meten tov de stroomrichting van het bloed
    (d) 90 te meten tov de stroomrichting van het bloed

18. Het niet-lineair verband tussen het bloeddebiet en de drukgradiënt kan je verklaren door:
    (a) het Bernouilli effect
    (b) de verandering van hematokrietwaarde
    (c) de toename van viscositeit bij grotere drukgradiënt
    (d) de wet van Stokes

19. Vroeger werd de bloeddruk gemeten met een sphygmomanometer op basis van kwik. Indien men in plaats van kwik water als vloeistof had gebruikt en daarbij de straal van de vloeistofkolom verdubbeld had, dan zou bij dezelfde druk de hoogte van de vloeistof in de kolom
    (a) gelijk gebleven zijn
    (b) met ongeveer een factor 3,5 toegenomen zijn
    (c) met ongeveer een factor 7 toegenomen zijn
    (d) met ongeveer een factor 14 toegenomen zijn

20. Welke grootheid dient het nauwkeurigst gekend te zijn voor de plaatsbepaling van een ontvanger?
    (a) positie van minstens 4 van de satellieten
    (b) tijdstip van uitzenden van het signaal vanuit minstens 4 van de satellieten
    (c) tijdstip van ontvangst van het signaal van minstens 4 van de satellieten
    (d) alledrie de grootheden dienen even nauwkeurig gekend te zijn

21. Welke uitspraak is niet correct?
    (a) De omwentelingsellipsoïde is de verzamling van alle punten met gelijke gravitatie
    (b) Voor elk punt van het aardoppervlak is er een andere omwentelingsellipsoïde
    (c) Het centrum van een omwentelingsellipsoïde valt niet samen met het massamiddelpunt van de aarde
    (d) De omwentelingsellipsoïde wordt bepaald door de geometrische datum

22. Welke uitspraak is niet correct?
    (a) De breedtegraad komt op elke plaats op aarde overeen met een vaste afstand
    (b) De lengtegraad komt op elke plaats op aarde overeen met een vaste afstand

(c) De breedte is de hoek tussen het evenaarsvlak en de loodlijn op de ellipsoïde door een punt

(d) De lengte is de hoek tussen een referentiemeridiaan en de meridiaan door een punt, genomen in het vlak van de evenaar

23. Wat is de vereiste nauwkeurigheid voor het tijdsverschil tussen uitzenden en ontvangst van een signaal voor een plaatsbepaling die tot op 1m nauwkeurig is?

    (a) 1.10^{-8}/sec
    (b) 3.10^{-8}/sec
    (c) 1.10^{-9}/sec
    (d) 3.10^{-9}/sec

24. Welke uitspraak is correct?

    (a) Als gevolg van de beperkte relativiteit tikt de klok van de satelliet trager dan de klok van de ontvanger, als gevolg van de algemene relativiteit tikt de klok van de satelliet trager dan de klok van de ontvanger
    (b) Als gevolg van de beperkte relativiteit tikt de klok van de satelliet trager dan de klok van de ontvanger, als gevolg van de algemene relativiteit tikt de klok van de satelliet sneller dan de klok van de ontvanger
    (c) Als gevolg van de beperkte relativiteit tikt de klok van de satelliet sneller dan de klok van de ontvanger, als gevolg van de algemene relativiteit tikt de klok van de satelliet trager dan de klok van de ontvanger
    (d) Als gevolg van de beperkte relativiteit tikt de klok van de satelliet sneller dan de klok van de ontvanger, als gevolg van de algemene relativiteit tikt de klok van de satelliet sneller dan de klok van de ontvanger

25. Het effect van de beperkte relativiteit op de plaatsbepaling van de ontvanger is van de orde van:

    (a) 10^{-8}
    (b) 10^{-9}
    (c) 10^{-10}
    (d) 10^{-11}

26. Welke uitspraak is correct?

    (a) Het gevolg van het Doppler-effect op de GPS plaatsbepaling is groter dan al de relativistische effecten samen
    (b) Voor het Doppler-effect wordt gecorrigeerd door de klok in de satelliet te corrigeren voordat die in de ruimte gaat
    (c) Voor het Doppler-eefect wordt gecorrigeerd dmv grondstations
    (d) Het Doppler-effect is de enige manier om de snelheid van de ontvanger te bepalen

27. Welke uitspraak is correct?

    (a) Voor een snelheid gelijk aan de lichtsnelheid is de Lorentzfactor 0
    (b) Voor een snelheid gelijk aan de lichtsnelheid is de Lorentzfactor 1
    (c) Voor een snelheid gelijk aan de lichtsnelheid is de Lorentzfactor zeer groot
    (d) Voor een snelheid gelijk aan de lichtsnelheid is de Lorentzfactor onbepaald

28. Welk effect is het belangrijkste voor de stabiliteit van een fiets?
    (a) Het gyroscopisch effect
    (b) De snelheid van de fiets
    (c) Het gewicht van de fietser
    (d) De straal van het wiel

29. Welk effect is het belangrijkst voor de hellingshoek die je kunt maken in een bocht?
    (a) De hoogte van het massamiddelpunt
    (b) De snelheid van de fiets
    (c) Het gewicht van de fietser
    (d) De straal van het wiel
    (e) De wrijvingscoëfficiënt tussen het wegdek en de band

30. Welke uitspraak is niet correct?
    (a) Als je niet overkop wil gaan bij het remmen kan je best je zadel zo laag mogelijk plaatsen
    (b) Als je niet overkop wil gaan bij het remmen kan je best een lange fiets nemen
    (c) Als je niet overkop wil gaan bij het remmen kan je best je een zo zwaar mogelijke fiets nemen
    (d) Als je niet overkop wil gaan bij het remmen kan je best op een nat wegdek rijden

31. Nanobuizen worden gekenmerkt door 2 coëfficiënten n en m, welke van de volgende nanobuizen is mettalisch?
    (a) $n = 4$, $m = 2$
    (b) $n = 5$, $m = 2$
    (c) $n = 5$, $m = 3$
    (d) Er bestaan geen mettalische nanobuizen

32. Wat is fout?
    (a) In de pn-junctie wordt het p-type silicium negatief geladen en het n-type silicium positief geladen
    (b) In het n-type silicium ligt het energieniveau van de acceptor dicht bij de valentieband van het silicium
    (c) Silicium gedopeerd met fosfor is een n-type halfgeleider
    (d) De geleidbaarheid van de halfgeleider silicium kan verhoogd worden door doperingen uit de IIIa of Va groep van de tabel van Mendeljev

33. Bekijk volgende beweringen:
    (a) Methaan (CH4) is een typisch voorbeeld van een molecule met ionaire bindingen
    (b) Een nanobuis met n=2 en m=3 is chiraal
    (c) Diamant is harder dan grafiet omdat de covalente bindingen in de diamant sterker zijn dan in grafiet
    (d) De zesringstructuur in grafeen vindt zijn oorsprong in de sp^2 hybridizatie

Zijn correct: A. enkel 2,3 en 4 B. enkel 2 en 4 C. enkel 2 D. enkel 1 en 4

34. Wat gebeurt er met de Coulombkracht tussen 2 ladingen q_1 en $q_2$als de afstand r tussen de ladingen verdubbelt?
    (a) de kracht halveert
    (b) de kracht wordt 8 maal kleiner
    (c) de kracht verdubbelt
    (d) de kracht wordt 4 maal kleiner
35. Welke uitspraak is fout?
    (a) In een covalente binding worden de elektronen gedeeld, niet getransformeerd
    (b) In een metaal overlappen conductie- en valentieband
    (c) In een zonnecel op basis van siliciumhalfgeleiders wordt het zonlicht gebruikt om de elektronen uit de conductieband naar de valentieband te brengen
    (d) De geleidbaarheid van een halfgeleider stijgt met de temperatuur
36. Welk getal stelt het 5-bits getal 10111 voor?
    (a) 20
    (b) 23
    (c) 28
    (d) 29
37. Welke bewering is fout?
    (a) Quantumcomputers zullen verschillende berekeningen parallel kunnen uitvoeren
    (b) Een klassiek register van 3 bits kan op een gegeven moment in tijd maar 1 van de 6 mogelijke getallen opslaan, terwijl een quantumregister op een gegeven moment in tijd alle zes getallen kan opslaan door quantumsuperpositie
    (c) Quantumcomputers zullen het factoriseren van getallen vergemakkelijken
    (d) Het grote probleem bij het bouwen van een quantumcomputer is dat de quantum-informatie verloren gaat in de omgeving (de-coherentie)
38. Een quantumregister van grootte n is
    (a) Een verzameling van n bits
    (b) Een verzameling van 2n bits
    (c) Een verzameling van n quantumbits
    (d) Een verzameling van 2n quantumbits
39. Bekijk de volgende beweringen:
    (a) Het tweespletenexperiment met elektronen toonde het golfkarakter van deeltjes aan
    (b) In de klassieke beschrijving van licht wordt de lichtintensiteit in elk punt gegeven door het kwadraat van de amplitude van de lichtgolf
    (c) Voor deeltjes wordt de waarschijnlijkheid om een deeltje op een bepaalde plaats terug de vinden gegeven door het kwadraat van de amplitude van de golffunctie

(d) In het tweespletenexperiment met licht wordt de lichtintensiteit in elk punt gegeven door de som van het kwadraat van de amplituden van de twee afzonderlijke lichtgolven

Is fout: A. enkel 4 B. enkel 2 en 3 C. enkel 2,3 en 4 D. enkel 2 en 4

40. Men denkt aan synthetisch diamant met stikstof-vacature-defecten als geschikt materiaal voor een quantumcomputer, omdat

    (a) Een koolstofatoom een elektron meer heeft dan een stikstofatoom
    (b) Een stikstofatoom een elektron meer heeft dan een koolstofatoom
    (c) Het extra elektron gekenmerkt wordt door een spintoestand, waarbij er 2 mogelijkheden zijn, die dus als bit kan dienen
    (d) De spintoestand kan gemanipuleerd worden door elektromagnetische straling

    Is correct: A. enkel 1,3 en 4 B. enkel 1 en 3 C. enkel 2,3 en 4 D. enkel 2 en 3

41. Wanneer het aantal thermonucleaire reacties in de zon stijgt

    (a) Zal de diameter van de zon toenemen, zodat de temperatuur in het centrum daalt
    (b) Zal de diameter van de zon afnemen, zodat de temperatuur in het centrum daalt
    (c) Zal de diameter van de zon toenemen, zodat de temperatuur in het centrum stijgt
    (d) Zal de diameter van de zon afnemen, zodat de temperatuur in het centrum daalt

42. Nemen we de volgende beweringen:

    (a) De zon is een perfecte zwarte straler met effectieve temperatuur van 5777K
    (b) De oppervlaktetemperatuur van 1,5 x 10^K van de zon komt overeen met een zwarte straler die vooral in het visuele spectrum straalt
    (c) Door de hoge druk in de zon zijn er geen intacte moleculen in de zon
    (d) We kunnen experimenteel vaststellen dat de zon warmer is in de kern dan aan de rand doordat op foto's van de zon, de rand donkerder lijkt dan het centrum

    Is correct: A. enkel 3 B. enkel 3 en 4 C. enkel 1,3 en 4 D. enkel 1,2,3 en 4

43. Wat is fout?

    (a) Een witte dwerg wordt beschermd tegen de enorme zelfgravitatie door de elektronendruk
    (b) Onze zon kan eindigen als een super nova type II
    (c) Een witte dwerg is in zijn eindstadium vergelijkbaar met een metaal (ionair kristal mer elektronen die ertussen bewegen)
    (d) De Schwarzschildstraal is evenredig met de massa van het object

44. Het licht gegenereerd in het binnenste van de zon doet er gemiddeld 30 000 jaar over om ons te bereiken omdat

    (a) De zon 30 000 lichtjaren van ons staat
    (b) De fotonen uit het visuele spectrum een 'random walk' in de zon uitvoeren
    (c) De X-stralen voortdurend met materiaaldeeltjes botsen en daarbij energie verliezen
    (d) De zon geen perfecte zwarte straler is

45. Wat is juist?
    (a) Neutronensterren gaan steeds trager roteren als ze kleiner worden
    (b) De zelfgravitatie van een kleine dwerg is groter dan die van een neutronenster
    (c) Er bestaat momenteel geen enkele experimentele manier om zwarte gaten in de ruimte te lokaliseren
    (d) Een belangrijke stap in het ontstaan van een super nova type II is de fusie van kernen die zwaarder zijn dan waterstofkernen

Hoofdstuk 5

Wiskundige methoden voor de fysica 2

5.1 De cursus, het vak, het examen

Het theorie-examen was volledig schriftelijk. Sinds het academiejaar 2008-2009 is deze cursus van naam en gedeeltelijk van inhoud veranderd. Er kunnen dus enkele dingen in staan die niet meer overeenkomen met wat er nu gekend moet zijn.

Het oefeningenexamen bestaat uit een drietal oefeningen die allemaal volledig schriftelijk moeten opgelost worden.

Zeer belangrijk: Wordt dus wel veel gevraagd.

- Berekening van de Cristoffelsymbolen i.f.v. de metriek
- Antisymmetrische pseudo-eenheidstensor
- Trafo voor bolcoördinaten afleiden, metrische tensor berekenen, basisvectoren (ook reciproke)
- Cristoffelsymbolen berekenen (1ste soort)
- Formules, voonamelijk div($a \times b$), rot grad f, div rot $\vec{f}$
- Hoeken van Euler, overgangsmatrix
- Formule voor divergentie opstellen

Ook veel voorkomend zijn de volgende onderwerpen: Iets minder dan vorige.

- Transformatieformules
- Differentiaaloperatoren: definities
- Quotiëntwet
- Infinitesimaalrotaties
- Eigenwaarden en eigenvectoren van de antisymmetrische lineaire operator

enkele voorbeelden een beetje over alle jaren...

1. div($a \times b$)=?
2. Trafo bolcoördinaten: leid af: metriek, basisvectoren, reciproke basisvectoren, Cristoffelsymbolen.

3. Stel de uitdrukking op voor de Cristoffelsymbolen in functie van de metriek.
4. rot grad f=?
5. div rot $\vec{f}$=?
6. Bewijs dat de anti-symmetrische eenheidstensor een eenheidstensor is.
7. ...

5.2 Theorie

5.2.1 Januari 2001 groep 1

1. Bespreek het concept van 'metriek'. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.
2. Toon aan hoe de metriek nuttig is om basis en reciproke basis van een coördinatenstelsel te bepalen. Bepaal de metriek in bolcoördinaten en gebruik de metiek om de basis en reciproke basis te berekenen.
3. Toon aan hoe de metriek kan gebruikt worden om de christoffelsymbolen expliciet te bepalen. Gebruik dit resultaat om de christoffelsymbolen in bolcoördinaten te bepalen.
4. Toon aan hoe de metriek gebruikt wordt om de rotor van een vetor te bepalen. Bereken de rotor in bolcoördinaten.

5.2.2 Januari 2001 groep 2

covariante vectoren: vertel hier zoveel van als je kan bedenken.

- vertel wat over covariantie en de gradient in bolcoördinaten
- rotor en reken uit in cylindrische coördinaten.
- vectorieel product

5.2.3 Januari 2002

1. (a) Bespreek het concept van de 'metriek' van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.
   (b) Toon aan hoe de metriek nuttig is om de basis en de reciproke basis van een coördinatenstelsel te bepalen. Bepaal de metriek in cylindercoördinaten en gebruik die om de basis en reciproke basis te berekenen.
   (c) Toon aan hoe de metriek kan gebruikt worden om de christoffelsymbolen expliciet te bepalen. Gebruik dit resultaat om de christoffelsymbolen in cylindercoördinaten te bepalen.
   (d) Toon aan hoe de metriek gebruikt wordt om de rotor van een vector te definieren. Bereken de rotor in cylindercoördinaten.
2. Bespreek op je eigen manier het concept van de Fourierreeks.

5.2.4 Januari 2005

Prof. Dr. P. Scheunders

Deel 1: Mathematische Technieken

1. Bespreek het concept van een metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.
2. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen. Bereken de metriek in cylindercoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in cylindercoördinaten.
3. Toon aan hoe de metriek gebruikt wordt om cristoffelsymbolen expliciet te berekenen. Bereken de cristoffelsymbolen in cylindercoördinaten.

Deel 2: Veldentheorie
Bespreek:

1. Fourierreeks,
2. Basisfuncties,
3. Hermitische operatoren

en hun onderlinge relatie. Toon aan hoe deze concepten worden gebruikt om een klassiek veldprobleem op te lossen.

5.2.5 Augustus 2005

Prof. Dr. P. Scheunders

Deel 1: Mathematische Technieken

1. Geef de definitie en de betekenis van de covariante componenten van een vector en van de reciproke basis. Leid de transformatieformules af.
2. Definieer het vectoriële product met behulp van diens covariante componenten.
3. Toon aan dat de gradiënt van een scalair gedefineerd wordt m.b.v. covariante componenten. Leid de gradiënt in bolcoördinaten af.
4. Toon aan dat de rotor van een vector gedefineerd wordt m.b.v. covariante componenten. Leid de rotor in bolcoördinaten af.

Deel 2: Veldentheorie
Bespreek:

1. Fourierreeks,
2. Basisfuncties,
3. Hermitische operatoren

en hun onderlinge relatie. Toon aan hoe deze concepten worden gebruikt om een klassiek veldprobleem op te lossen.

5.2.6 Januari 2006

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie en de betekenis van de covariante componenten van een vector en van de reciproke basis. Leid de transformatieformules af.
2. Definieer het vectoriële product met behulp van covariante componenten. Bespreek het vectoriële product van de basisvectoren, en de geometrische betekenis van het vectoriële product.
3. Toon aan dat de gradiënt van een scalair gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Geef de fysische betekenis van een gradiënt. Bereken de gradiënt in bolcoördinaten.
4. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
5. Bespreek infinitesimale rotaties.

5.2.7 Januari 2007

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen.
2. Bereken de metriek in bolcoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in bolcoördinaten.
3. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Bespreek de hoeken van Euler.

5.2.8 Januari 2008

Prof. Dr. P. Scheunders[1]

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen.
2. Bereken de metriek in bolcoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in bolcoördinaten.
3. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Bespreek de hoeken van Euler.

5.2.9 Juni 2009

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Bepaal met behulp van de metriek een uitdrukking voor: het scalair product tussen 2 vectoren, de lengte van een vector, de hoek tussen 2 vectoren en de lengte van een kromme. // Wat is de uitdrukking voor die grootheden in orthogonale coördinatenstelsels?
2. Bereken de metriek en de basis in cilindercoördinaten.
3. Leid de uitdrukking voor de rotor af. Bereken de rotor in cilindercoördinaten.
4. Bespreek de Fourier-reeks.

5.2.10 Juni 2010

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie, de betekenis en transformatieformules van de metriek.
2. Bereken de metriek en de basisvectoren in bolcoördinaten.
3. Leid de uitdrukking voor de rotor af. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Leid een uitdrukking af voor de snelheid en versnelling in bolcoördinaten.

[1] Dit examen was identiek aan dat van Januari 2007

5.3 Oefeningen

5.3.1 September 1995

1. Een vector veld $\vec{f}$ is gegeven door $\vec{f} = (x^2 + y^2 + z^2)(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$, waar (x, y, z) cartesische coördinaten in een driemensionele vlakke ruimte zijn.
   (a) Bereken het vektorveld rot$\vec{f}$ in cartesische coördinaten
   (b) Transformeer $\vec{f}$ naar cylindercoördinaten
   (c) Bereken rot $\vec{f}$ in cylindercoördinaten, vertrekkend van $\vec{f}$ in cylindercoördinaten

De volgende vragen van dit jaar komen nog uit het vorige curriculum. Vroeger werd dit vak namelijk in één examen op het einde van het jaar afgenomen. Ik zal daarom die vragen verplaatsen naar het tweede deel van dit vak. Dit geldt ook voor de volgende examens tot Januari 2001.

5.3.2 Juni 1998

1. Beschouw een vectorveld gegeven door zijn cartesische componenten $\vec{f} = (x^2+y^2+z^2)^\tau$.
   (a) Bereken rot$\vec{f}$ in cartesische coördinaten.
   (b) Tansformeer $\vec{f}$ naar cylindercoördinaten.
   (c) Bereken rot$\vec{f}$ rechtstreeks in cylindercoördinaten.
   (d) Transformeer rot$\vec{f}$ terug naar cartesische coördinaten.
2. Beschouw een (2-dimensionaal) boloppervlak. Neem de θ en φ van bolcoördinaten als onafhankelijke coördinaten die dit oppervlak beschrijven. De metriek op het boloppervlak (straal R) is gegeven door:

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

   Bereken de Christoffelsymbolen van de 2de soort.

5.3.3 Juni 1999

Gegeven een scalare functie $V = \frac{Q}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

1. Bereken $\vec{E} = -\text{grad}V$ in cartesische coördinaten.
2. Transformeer de functie V naar cilindercoördinaten.
3. Transformeer $\vec{E}$ naar cylindercoördinaten.
4. Bereken, gebruik makend van de functie V in cilindercoördinaten, het vectorveld $\vec{E}$ in cilindercoördinaten.

5.3.4 September 1999

1. Gegeven het vectorveld $\vec{f}$ in cilindercoördinaten:
   (a) Bereken div$\vec{f}$ in cilindercoördinaten.
   (b) Transformeer de vector $\vec{f}$ naar cartesische coördinaten.
   (c) Transformeer div$\vec{f}$ naar cartesische coördinaten.
   (d) Bereken div$\vec{f}$ in cartesische coördinaten vetrekkende van $\vec{f}$ in cartesische coördinaten.
2. Beschouw een contravariante vector $\vec{f} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$ in cartesische coördinaten. Stel dat we deze vector $\vec{f}$ transfomeren naar bolcoördinaten ($\vec{f}^I$), daarna omzetten naar een covariante vector ($\vec{f}^{II}$) en dan transformeren naar cilindercoördinaten ($\vec{f}^{III}$). Indien we deze vector $\vec{f}^{III}$ terug omzetten naar cartesische coördinaten, wat is dan het resultaat?

5.3.5 Juni 2000

1. Beschouw een functie $f(x, y, z)$ in cartesische coördinaten:
$$f(x, y, z) = \sinh(x^2 + y^2 + z^2) + \cosh(x^2 + y^2 + z^2) \tag{5.2}$$
   (a) Bereken ∇f in cartesische coördinaten.
   (b) Transformeer f naar bolcoördinaten.
   (c) Transformeer ∇f naar bolcoördinaten.
   (d) Bereken ∇f in bolcoördinaten vertrekkende van f in bolcoördinaten (zie 1b).

5.3.6 Januari 2001

Greg Tisson

1. Gegeven een scalair veld $\tau = \rho^2 (1 + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi))$ in cilindercoördinaten.
   (a) Bereken grad(τ) en schrijf deze vector met behulp van de eenheidsvectoren ($\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z$).
   (b) Transformeer τ naar cartesische coördinaten.
   (c) Transformeer grad(τ) naar cartesische coördinaten.
   (d) Bereken grad(τ) vertrekkende van τ in cartesische coördinaten.
2. Stel $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2r(1 + \cos\varphi \sin\theta) \\ r\cos\theta \sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ een contravariante vector in bolcoördinaten. Bereken rot$\vec{f}$.
3. Gegeven a een scalair, $\vec{B}$ een vector, $\vec{k}$ een constante vector en $\vec{r}$ de plaatsvector.
   - Bewijs $\vec{\nabla} \times (a\vec{B}) = a\vec{\nabla} \times (\vec{B}) + \vec{\nabla}(a) \times \vec{B}$
   - Bereken $\vec{\nabla} \times (\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})$

Dit is het enige examen op basis van het nieuwe curriculum.

1. Gegeven een scalair veld $\tau = \rho^2 (1 + 2\cos(\varphi)\sin(\varphi))$ in cilindercoördinaten.
   (a) Bereken grad(τ) en schrijf deze vector met behulp van de eenheidsvectoren $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.
   (b) Transformeer τ naar cartesische coördinaten.
   (c) Transformeer grad(τ) naar cartesische coördinaten.
   (d) Bereken grad(τ) vertrekkende van τ in cartesische coördinaten.
2. Stel $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2r(1+\cos\varphi\sin\theta) \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix}$ een contravariante vector in bolcoördinaten. Bereken rot$\vec{f}$.
3. Gegeven a een scalair, $\vec{B}$ een vector, $\vec{k}$ een constante vector en $\vec{r}$ de plaatsvector.
   - Bewijs $\vec{\nabla} \times (a\vec{B}) = a\vec{\nabla} \times (\vec{B}) + \vec{\nabla}(a) \times \vec{B}$
   - Bereken $\vec{\nabla} \times (\vec{k}e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}})$

5.3.7 Juni 2005

Greg Tisson

Gegeven een vectorveld in cartesische coördinaten:

$$\vec{f} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(\vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}) \tag{5.3}$$

1. Bereken $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ in cartesische coördinaten,
2. Transformeer $\vec{f}$ naar bolcoördinaten,
3. Bereken $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ in bolcoördinaten,
4. Transformeer $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ van cartesische coördinaten naar bolcoördinaten en vergelijk met 3.

5.3.8 Augustus 2005

Greg Tisson

1. Gegeven een vectorveld in cartesische coördinaten:

$$\vec{f} = \frac{1}{x^2+y^2+z^2}(\vec{e_x} + \vec{e_y} + \vec{e_z}) \tag{5.4}$$

   (a) Bereken $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ in cartesische coördinaten,
   (b) Transformeer $\vec{f}$ naar bolcoördinaten,
   (c) Bereken $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ in bolcoördinaten,
   (d) Transformeer $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$ van cartesische coördinaten naar bolcoördinaten en vergelijk met 1c.
2. Bereken $\vec{\nabla} \times \left(\vec{\nabla} \times \vec{A}\right)$ als $\vec{A} = 2xz^2\vec{e_x} - yz\vec{e_y} + 3xz^3\vec{e_z}$

5.3.9 Januari 2007

1. Werk uit in Carthesische coördinaten
$$\vec{\nabla}\left[\vec{\nabla}.\frac{\vec{r}}{r^3}\right]$$
met $\vec{r} = z^i\vec{a_i}$

2. Gegeven een carthesisch coödinatenstelsel (x, y, z) en een assenstelsel (η, θ, z) die verbonden zijn met de volgende transformatieformules :
$$\begin{cases} x = e^{\eta}\cos\theta \\ y = e^{\eta}\sin\theta \\ z = z \end{cases}$$
Bereken de Christoffel symbolen van de tweede soort.

3. Gegeven de volgende scalairen in een carthesisch assenstelsel
$$A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$
$$B = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}$$
   (a) Bereken in dit carthesisch coördinatenstelsel $\vec{\nabla}\left[(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)\right]$ en $(\vec{\nabla}A) \times (\vec{\nabla}B)$.
   (b) Transformeer $A, B, \vec{\nabla}\left[(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)\right]$ en $(\vec{\nabla}A) \times (\vec{\nabla}B)$ naar cillindercoördinaten.
   (c) Bereken in cillindercoördinaten $\vec{\nabla}\left[(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)\right]$ en $(\vec{\nabla}A) \times (\vec{\nabla}B)$.

5.3.10 Januari 2008

1. Werk uit in cartesische coördinaten:
$$\vec{\nabla} \times \vec{r}e^{\vec{r}.\vec{k}} \tag{5.5}$$
met $\vec{r} = x^i\vec{a_i}$ en $\vec{k} = constant$

2. Gegeven een cartesisch assenstalsel (x,y,z) en een assenstelsel (u,v,w) die verbonden zijn met de volgende transfomatieformules:
$$\begin{cases} x = uv + vw \\ y = u^2 - w^2 \\ z = w - u \end{cases}$$
Bereken van het coördinatenstelsel de Christoffelsymbolen van de eerste soort met als eerste index 1.

3. Gegeven de volgende scalairen in een cartesisch assenstelsel (x,y,z)
$$A = -\frac{1}{r^2}$$
$$\vec{B} = \frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e_x} + \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\vec{e_y} - \sqrt{x^2+y^2}\vec{e_z}$$
   - Bereken in dit cartesisch stelsel $(\vec{\nabla}A).(\vec{B})$ en $(\vec{\nabla}A) \times (\vec{B})$
   - Transformeer A,$\vec{B}$, $(\vec{\nabla}A).(\vec{B})$ en $(\vec{\nabla}A) \times (\vec{B})$naar bolcoördinaten.
   - Bereken uit A en B in cilindercoördinaten $(\vec{\nabla}A).(\vec{B})$ en $(\vec{\nabla}A) \times (\vec{B})$

5.3.11 September 2008

1. Werk uit in (3D) cartesische coördinaten:

$$\vec{k} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\phi}) \tag{5.6}$$

met $\vec{phi} = -y\vec{e_x} + x\vec{e_y}$ en $\vec{k} = constant$

2. Gegeven een cartesisch assenstalsel (x,y,z) en een assenstelsel (u,v,w) die verbonden zijn met de volgende transfomatieformules:

$$\begin{cases} x = ve^u \\ y = ve^{-u} \\ z = w \end{cases}$$

Bereken van het coördinatenstelsel (u,v,w) de metriek en de Christoffelsymbolen van de eerste soort.

3. Gegeven de volgende scalairen in een cartesisch assenstelsel (x,y,z)

$$A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

$$B = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$$

- Bereken in dit cartesisch stelsel $(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)$ en $(\vec{\nabla}A) \times (\vec{\nabla}B)$
- Transformeer A,B, $(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)$ en $(\vec{\nabla}A) \times (\vec{\nabla}B)$ naar cilindercoördinaten.
- Bereken uit A en B in cilindercoördinaten $(\vec{\nabla}A).(\vec{\nabla}B)$ en $\vec{\nabla}A) \times (\vec{\nabla}B)$

5.3.12 Juni 2009

1. Werk uit in cartesische coördinaten

$$\vec{\nabla}[\vec{\nabla}r^3]$$

met $\vec{r} = x_i\vec{a_i}$

2. Gegeven de volgende scalair en vector in een cartesisch assenstelsel (x, y, z)

$$A = \tfrac{xyz}{2}$$
$$\vec{B} = 2x\vec{e_x} + 2y\vec{e_y} - 2z\vec{e_z}$$

(a) Bereken in dit cartesisch stelsel $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).\vec{B}]$ en $\vec{rot}\big(\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).\vec{B}]\big)$

(b) Transformeer $A, \vec{B}, \vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).\vec{B}], \vec{rot}\big(\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).\vec{B}]\big)$ naar cilindercoördinaten

(c) Bereken uit A en $\vec{B}$ in cilindercoördinaten $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).\vec{B}]$ en $\vec{rot}\big(\vec{\nabla}[(\vec{\nabla}A).\vec{B}]\big)$

3. Beschouw een dunne staaf met lengte L, geïsoleerd van de omgeving. Op het begintijdstip $t = 0$ bevindt een gedeelte van de staaf (2δ rond het middelpunt) zich op de hoogte Ψ_0, de rest heeft temperatuur 0. De warmtegeleiding wordt gegeven door de golfvergelijking:

$$\Psi'' - \tfrac{1}{k}\dot{\Psi} = 0$$

De uiteinden van de staaf zijn geïsoleerd, zodat daar de homogene Neumann randvoorwaarden gelden.

$$\begin{cases} \Psi'(0,t) = 0 \\ \Psi'(L,t) = 0 \end{cases}$$

(a) Geef de beginvoorwaarden.

(b) Stel deelvergelijkingen op met behulp van de methode van scheiding van veranderlijken.

(c) Identificeer en los het eigenwaardeprobleem op.

(d) Identificeer en los het restprobleem op.

(e) *Bonus*: Zoek uit alle oplossingen, diegene die voldoet aan de beginvoorwaarden.

Dankwoordje

Met dank aan:

- Alle vorige WINAK mentoren die aan deze tuyaux hun steentje hebben bijgedragen.
- Mijn medementoren Elke en Christophe voor de leuke samenwerking.
- Al de mensen die mij hun examenvragen hebben bezorgd en zo deze nieuwe Tuyaux mee hebben mogelijk gemaakt.
- De mensen die me mijn schrijffouten en typfouten vergeven en doormailen naar julie@winak.be.