Kanstheorie en statistiek

tuyaux.winak.be/index.php/Kanstheorie_en_statistiek

Kanstheorie en statistiek

Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Bespreking

Theorie

De theorie wordt gegeven door Tim Verdonck. In de les volgt hij gewoon de cursus (begeleid met slides).

Oefeningen

De oefeningen worden gegeven door Lise Tubex. Ze legt de oefeningen goed uit en de oefeningen sluiten goed aan bij de theorie.

Examen

Het examen word op dezelfde dag gedaan, schriftelijk en theorie, oefeningen direct na elkaar. Voor de theorie mag je niets gebruiken, voor de oefeningen het formularium (zie BB) en een (niet-grafisch) rekentoestel.

Examenvragen

Academiejaar 2020-2021

Prof. Tim Verdonck

1. (/4) Geef en bewijs de Centrale Limietstelling.
2. (/2) Zij X,X1,X2,…X,X1,X2,… stochastische vectoren op een kansruimte (Ω,A,P)(Ω,A,P) en r>0r>0, dan geldt
   Xn−→LrX⇒Xn−→PXXn→LrX⇒Xn→PX
   Bewijs.
3. (/2) Als bloed van een ziek persoon getest wordt, geeft een bloedtest in 90%90% van de gevallen een positief resultaat. De bloedtest geeft ook in 2%2% van de gevallen een vals positief als een gezond persoon getest wordt. Stel dat 7%7% van de bevolking ziek is. Wat is de kans dat een willekeurig persoon ziek is als hij positief test?
4. (/2) Beschouw de Rayleigh verdeling met als dichtheidsfunctie
   fX(x)=2xθe(−x2θ)voorx>0fX(x)=2xθe(−x2θ)voorx>0
   1. (/0,5) Bereken FxFx
   2. (/0,5) Hoe vind je random getallen uit de Rayleigh-verdeling als je random getallen uit de uniforme verdeling hebt?
   3. (/0,5) Stel een nieuwe stochastische variabele Y=X2Y=X2.
   4. (/0,5) Hoe is Y verdeeld? Geef ook de naam van deze verdeling en de parameters.

5. (/2,5) In een populatie leerlingen stellen we twee s.v. X=score op de test wiskunde en Y=score op de test fysica. De gezamenlijke dichtheidsfunctie van X en Y wordt gegeven door fX,Y(x,y)=c(x+3y) voor0≤x≤1,0≤y≤1fX,Y(x,y)=c(x+3y) voor0≤x≤1,0≤y≤1
    1. Bepaal c
    2. Welke proportie studenten haalt meer dan 0,8 op wiskunde?
    3. Gegeven dat een student 0,3 haalt op fysica. Wat is de kans dat deze student meer dan 0,8 haalt op wiskunde?
6. (/2) In een krantenwinkel koopt een kwart van de klanten een welbepaalde krant. Op een bepaalde dag zijn er 140 klanten. Hoeveel kranten moet de krantverkoper op voorraad hebben zodat de kans dat de vraag groter is dan het aanbod maximaal 0,3 is?

Academiejaar 2017-2018

Oefeningen

1. Gegeven fX,Y(x,y)={12xy201<y<+∞,1y<x<yeldersfX,Y(x,y)={12xy21<y<+∞,1y<x<y0elders
    - Bepaal fX(x)fX(x) en fY(y)fY(y)
    - Zijn X en Y onafhankelijk?
    - Bepaal de dichtheidsfunctie van YXYX
    - Bereken de conditionele verwachtingswaarde E[X2/Y]E[X2/Y]
    - Bereken P(X<Y−−√)P(X<Y) aan de hand van de dichtheidsfunctie.
2. Gegeven fX(x)=ce−|x−2α|fX(x)=ce−|x−2α|
    - Bepaal c
    - Bepaal de karakteristieke functie.

Test oefeningen 1

1. Bepaal de momentgenererende functie voor X∼Erlang(n,λ),fX(x)=λnxn−1e−λx(n−1)!;x≥0,λ>0,n≥1.X∼Erlang(n,λ),fX(x)=λnxn−1e−λx(n−1)!;x≥0,λ>0,n≥1.
2. Gegeven W een stochastische variabele met dichtheidsfunctie fW(w)=⎧⎩⎨⎪⎪⎪⎪⎪⎪01−e−w−12e−w+12−e−w−12als w<−12als−12≤w≤12als w>12fW(w)={0als w<−121−e−w−12als−12≤w≤12e−w+12−e−w−12als w>12
    - Beschouw de transformatie Y=W2Y=W2. Bepaal de dichtheidsfunctie fYfY gebruik makend van de transformatiestelling, en bepaal vervolgens E[Y]E[Y] met behulp van fYfY.
    - Stel Y=|W|Y=|W|. Schrijf de verdelingsfunctie FYFY in functie van de verdelingsfunctie van W. Werk met deze vergelijking verder om de dichtheidsfunctie fYfY te berekenen.

Test oefeningen 2

1. Gegeven (X,Y)(X,Y) een stochastische vector met gezamenlijke dichtheidsfunctie fX,Y(x,y)=c(x+y)−5,1≤x≤y<+∞fX,Y(x,y)=c(x+y)−5,1≤x≤y<+∞, voor c>0c>0
    - Bepaal constante c.
    - Bereken E[XY]E[XY], zijn X en Y onafhankelijk?
    - Bereken E[Y|X=2]E[Y|X=2]

Academiejaar 2015 - 2016

Theorie

1. Karakteristieke functie:
    - Welke voorwaarde hebben we nodig voor de karakteristieke functie φX(t)φX(t) van een stochastische variabele XX om te kunnen besluiten dat XX een continue variabele is? Leg uit en bewijs.
    - Hoe kan de dichtheidsfunctie worden afgeleid van de karakteristieke functie? Bewijs.

2. Correlatie: Zij XX en YY kwadratisch integreerbare stochastiche variabelen.
    - Definieer de correlatiecoëfficiënt van XX en YY. Wat is zijn domein? Bewijs.
    - Wanneer zijn XX en YY ongecorreleerd? Wanneer onafhankelijk?
    - Beschrijf het verband tussen correlatie en onafhankelijkheid. I.e. toon aan dat onafhankelijke variabelen altijd ongecorreleerd zijn. Is het omgekeerde ook waar? Bewijs of tegenvoorbeeld.
    - Stel (X,Y)∼N2(μ¯,Σ)(X,Y)∼N2(μ¯,Σ), bewijs dat XX en YY ongecorreleerd zijn als en slechts als ze onafhankelijk zijn.
3. Verdelingen:
    - Leid de dichtheidsfunctie van de lognormalelognormale verdeling af. Welke stelling gebruik je bij de afleiding? Bewijs deze stelling.
    - Bespreek de kentallen van deze verdeling die betrekking hebben tot de locatie en de spreiding.

Oefeningen

1. Beschouw de gezamenlijke dichtheidsfunctie
   fX,Y,Z(x,y,z)={Ce−(x+y+z)00<x<y<zelders

   fX,Y,Z(x,y,z)={Ce−(x+y+z)0<x<y<z0elders

   met CC een constante.
    - Bepaal de dichtheidsfunctie fX,Z(x,z)fX,Z(x,z) van de stochastische vector (X,Z)(X,Z).
    - Bepaal de constante CC.
    - Bereken de verwachtingswaarde van XX.
    - Bereken de conditionele verwachting E[Z∣X=1]E[Z∣X=1].
    - Bereken de dichtheidsfunctie fW(w)fW(w) van de stochastische variabele W=Z−XW=Z−X.
2. Stel X∼B(α,β)X∼B(α,β) met dichtheidsfunctie
   fX(x)={xα−1(1−x)β−1B(α,β)0x∈[0,1]elders

   fX(x)={xα−1(1−x)β−1B(α,β)x∈[0,1]0elders

   waarbij B(α,β)=Γ(α)Γ(β)Γ(α+β)=∫10tα−1(1−t)β−1dtB(α,β)=Γ(α)Γ(β)Γ(α+β)=∫01tα−1(1−t)β−1dt de bèta-functie voorstelt.
    - Bereken de karakteristieke functie φX(t)φX(t) van de stochastische variabele XX.
    - Onder welke voorwaarde kan φX(t)φX(t) worden afgeleid van de momenten van XX? Pas hier toe indien mogelijk of leg uit waarom het niet kan.

Academiejaar 2014 - 2015

Theorie

Prof. Guillaume

1. Stel (Ω,M,P)(Ω,M,P) een kansruimte. Is elke kwadratisch integreerbare stochastische variabele XX ook integreerbaar? (i.e. X∈L2(Ω,M,P)⇒X∈L1(Ω,M,P)X∈L2(Ω,M,P)⇒X∈L1(Ω,M,P)?)
2. Gegeven is een stochastische variabele XX. Onder welke voorwaarden kan je de verwachtingswaarde E[Xk]E[Xk] bepalen aan de hand van de karakteristieke functie φX(t)φX(t). Bewijs dit voor k=1,2k=1,2.
    - Je mag de afschatting |φX(u)−∑nk=0(iu)kk!E[Xk]|≤min(|uX|n+1(n+1)!,2|uX|nn!)|φX(u)−∑k=0n(iu)kk!E[Xk]|≤min(|uX|n+1(n+1)!,2|uX|nn!) gebruiken zonder bewijs.
    - Je mag de **Gedomineerde Convergentiestelling** gebruiken zonder bewijs. (deze werd gegeven)
3. Stel Z=Var[X∣Y]Z=Var[X∣Y]
    - Geef twee definities van de voorwaardelijke variantie.
    - Toon aan hoe de ene tot de andere leidt.
    - Bewijs op **twee verschillende** manieren dat ZZ een positieve stochastische variabele is.

4.
    - Definieer de *n-variate standaard normale verdeling* en leid de dichtheidsfunctie af.
    - Bespreek de kentallen *(verwachtingswaarde, variantie, covariantie)* van deze verdeling.
    - Definieer de *n-variate normale verdeling* aan de hand van de standaard normale verdeling.
    - Leid de dichtheidsfunctie af van de n-variate normale verdeling.
    - Bespreek ook hier de kentallen.

Oefeningen

1. Stel I en R onafhankelijke stochastische variabelen met dichtheidsfuncties $f_I(x)=6x(1-x)$ als $0 \leq x \leq 1$ en $f_R(x)=2x$ als $0 \leq x \leq 1$. Definieer $W \doteq I^2 R$. Bepaal de dichtheidsfunctie f_W van W.
2. Gegeven is dat een stochastische variabele X die R, genoteerd als $X \mid R$, exponentieel verdeeld is met dichtheidsfunctie $f_{X \mid R}(x \mid r)=r.e^{-rx}.1\{x>0\}$. De stochastische variabele R is Gamma-verdeeld met dichtheidsfunctie $f_R(r)=\frac{1}{\Gamma(a)}.r^{a-1}.e^{-r}.1\{r>0\}$ met $a>2$.
    - Bepaal de dichtheidsfunctie van X.
    - Bepaal $E[X \mid R]$.
3. Stel X een stochastische variabele met dichtheid $f_X(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ met $-\infty<x<\infty$.
    - Bepaal de karakteristieke functie $\varphi_X(t)$.
    - Kan je de dichtheidsfunctie van X bepalen aan de hand van de karakteristieke functie? (Je moet dit niet doen, enkel uitleggen waarom wel/niet.)

Academiejaar 2013 - 2014

Theorie

prof. Volders

1. Geef en bewijs de ongelijkheid van Jensen.
2. Geef de definitie van de correlatiecoëfficënt. Wat is de betekenis ervan?
3. Beschouw n onafhankelijke stochastieken $X_1 \ldots X_n$ met waarden in $\mathbb{R}^m$. Voor $S=X_1+\ldots+X_n$ geldt dan
$$P_S=P_{X_1} * \ldots * P_{X_n}$$
. Bewijs.
4. Geef de definitie van de lognormale verdeling. Leid een formule voor de dichtheidsfunctie af. Beschrijf uitvoerig de grafiek van deze functie.
5. Geef en bewijs de vergelijking van Wald.
6. Geef en bewijs de vergelijkingen van Chapmam-Kolmogorov.

Oefeningen

1. Gegeven 2 s.v. X en Y die onafhankelijk zijn en dichtheidsfunctie $e^{-x}(x>0)$ en $e^{-y}(y>0)$ hebben. Geef de gezamelijke dichtheidsfunctie van $U:=X+Y$ en $V:=XY$. Vermeld duidelijk welke stellingen je gebruikt.
2. Gegeven is
$$E[Y \mid X]=1$$
, bewijs dat dan $Var[X \mid Y] \geq Var[X]$.

3. Bepaal c zodat de volgende functie een dichtheidsfunctie van een stochastische variabele wordt
   $f_X(x)=ce^{-|x-\eta|}$
   $$f_X(x)=ce^{-|x-\eta|}$$
   met $\eta\in\mathbb{R}^+$, $x\in\mathbb{R}$. De karateristieke functie wordt gegeven door
   $\varphi_X(t)=\frac{e^{i\eta t}}{1+t^2}$
   $$\varphi_X(t)=\frac{e^{i\eta t}}{1+t^2}$$
   . Reken dit na.
4. Gegeven een rij stochastische variabelen X_n die in kans convergeren naar X en Y. Bewijs dat dan $P(|X-Y|=0)=1$.
5. Gegeven een verdeling met volgende dichtheidsfunctie
   $f_X(x)=\frac{x^n e^{-x}}{n!}$
   $$f_X(x)=\frac{x^n e^{-x}}{n!}$$
   met $n\in\mathbb{N}, x>0$. Bewijs dat $P(0\leq X\leq 2n+2)\geq\frac{n}{n+1}$.
   Hint: Maak gebruik van Chebyshev's ongelijkheid.

Categorieën:

- Wiskunde
- 2BWIS