Tuyaux
2de Bachelor Wiskunde

WINAK

Eerste Semester
2011-2012

Inhoudsopgave

Hoofdstuk 1

Inleiding

In deze tuyaux vind je de examenvragen van het eerste semester van vakken van tweede bachelor wiskunde. Veel valt er hier niet aan toe te voegen dus mij blijft er enkel over om jullie uitzonderlijk veel succes te wensen met het studeren en uiteraard ook tijdens de examens.

Joke Van Nuffel
WINAK mentor wiskunde 07-08
Sarah Wuyts
WINAK mentor wiskunde 08-09
WINAK mentor wiskunde 09-10
Elke Gijsbrechts
WINAK mentor wiskunde 10-11
WINAK mentor wiskunde 11-12

Hoofdstuk 2

Analyse IV: Lebesgueintegraal en topologie

2.1 Theorie

2.1.1 Augustus 2011

1. Initale structuren: Leg uit + voorbeelden.
   Bijvraag: Geef het verband met functieruimten en wat kun je dan zeggen over de convergentie in die ruimten.

2. Alexandroff compactificatie: Leg uit.
   Bewijs dat deze nieuwe topologische ruimte effectief compact is.

3. Som alle eigenschappen op die je kent over topologische ruimten (A_1, A_2, T_0, T_1, samenhangend, compact, $\cdots$). Welke van deze eigenschappen gaan over op initiale topologie, finale topologie, producten, quotiënten en deelruimten ? (Maak een tabel en vul deze gewoon aan met een plusteken of minteken en eventueel een voorwaarde).

2.1.2 Januari 2011

- Groep 1:

  1. We hebben convergentie ingevoerd in topologische ruimten. Waarom? Leg uit waarom en hoe convergentie rijen tekort schoot in topologische ruimten. Geef een voorbeeld.
  2. Initiale structuren: Definitie, belangrijke eigenschappen, voorbeeld.
  3. Samenhangend: Definitie, equivalente eigenschappen.

2.1.3 2010

- Groep 1:

  – Leg uit: initiale structuren
  – Leg uit: lokale compactheid
  – Vertel een verhaaltje over de fundamentaalgroep van een cirkel

- Groep 2:

  - Convergentie: Vertel alles wat je weet. Geef een (niet-triviaal) voorbeeld van een filter. Stel (X, T) een ruimte waarin elke filter naar elk punt convergeert, wat kan je zeggen over de topologie?
  - Metriseerbaarheid: Wat was het probleem bij metrische ruimten en producten? Hoe hebben we dat nu in topologie opgelost? Geef een voorbeeld van een niet metriseerbare ruimte.
  - Wat zijn overdekkingsruimten? Wat is de fundamentele groep van de cirkel? En die van de torus? (en bewijs: fundamentele groep van product is isomorf met product van fundamentele groepen)

- Groep 3:
  - Puntsgewijze convergentie: def.
  - Geef voorbeeld met alle filters convergeren naar alle punten.
  - $T2$: Wat is hier allemaal equivalent mee? Geef 2 bewijzen uit die lijst. Geef een voorbeeld dat $T2$ niet bewaard blijft bij quotiënten.
  - Geef de fundamentaalgroep van $S2$

- Groep 4:
  - Convergentie van rijen volstaat niet in algemene topologische ruimtes. Hoe hebben we convergentie ingevoerd in algemene topologische ruimtes? Geef eigenschappen van convergentie.
    Bijvragen:
    * Bewijs eig 2.3 hoofdstuk 3.
    * Als in een topologische ruimte, de enkele convergente filters de puntfilters zijn en de puntfilters een uniek convergentiepunt hebben. Wat is dan de topologie?
  - Hausdorff: Definitie en eigenschappen. Bijvragen:
    * Bewijs eig 2.8 hoofdstuk 5 en geef een stelling waarin we dit resultaat gebruiken.
    * Bewijs 1.14 hoofdstuk 6
  - Wat is de fundamentele groep van S^2? Leg uit.

2.1.4 juni 2009

- Wat weet je over de Lebesgueintegraal (vooral definities)?
- Geef de verschillende convergenties en hun verbanden. Geef tegenvoorbeelden voor pijlen die niet kloppen is het tegenvoorbeeld voor voor $L_2 \to$ b.o. ook een tegenvoorbeeld voor $\mu \to$ b.o.?. Geef een deelrij die b.o. convergeert. Bewijs $\mu \Rightarrow$ b.o. deelrij.
- Wat weet je over convergentie in topologische ruimten?
  - $\forall x \in X$, $\forall F$ filter: $F \to x \Rightarrow T = \{\emptyset, X\}$ triviale topologie.
  - Als X een ruimte en T en T' topologiëen en (X, T) en (X, T') dezelfde convergente filters hebben dan geldt dat $T = T'$.
- Wat versta je onder initiale structuren?

2.1.5 juni 2008

- Convergenties: geef de definities van de verschillende convergenties die we in de les gezien hebben (L_1, L_2, puntsgewijze, bijna overal, in maat), en het schema met de bijbehorende eigenschappen. Bewijs al de eigenschappen en toon aan dat dit de enige implicatiepijlen zijn door tegenvoorbeelden te geven.
- Definieer initiale topologie en schrijf alles op wat je er over weet (tot het bord vol staat). Geef daarna het bewijs van de stelling die we als eerste in de cursus gezien hebben, *i.e.*, de belangrijkste karakterisatie van de initiale topologie.
- Op het bord stond ook de stelling dat als f en g continu zijn, en $f \circ g$ initiaal dan is g initiaal. Geef nu een voorbeeld waar g en $f \circ g$ initiaal zijn en g niet continu.
- Beschouw de afbeeldingen $\mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ en $\mathbb{R} \xrightarrow{f^3} \mathbb{R}$. Deze beide afbeeldingen zijn continu of discontinu. Verklaar.
- Tip: f is meetbaar, f_m zijn meetbaar. Waarom is $|f_n - f|$ meetbaar?
- Geef alle grote stellingen van Beppo Levi 1 tot Lebesgue in maat en het bewijs van Lebesgue in maat.
- Leg uit: initiale structuur.
- $(\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \mathcal{T}_g)_{f \text{ stijgende functies}}$ initaal. Wat is de topologie op $\mathbb{R}$?
- $f : X \to Y$ continu en surjectief.
  - X is samenhangend. Is Y ook samenhangend?
  - Y is samenhangend. Wanneer impliceert dit dat X ook samenhangend is?

2.2 Oefeningen

2.2.1 Augustus 2011

Open boek. Kies 3 van de 4 vragen.

1. (a) (X, T) een topologische ruimte. En een convergente rij in deze ruimte $(x_n)_n \to x$. Bewijs dat de verzameling die de elementen van deze rij en het convergentiepunt x bevat compact is.

   (b) (X, T) een topologische A_1 ruimte. Bewijs de volgende equivalenties: (X, T) Hausdorff $\Leftrightarrow$ Elke convergente rij heeft een uniek convergentiepunt $\Leftrightarrow$ (X, T) T_1 en elk compact deel is gesloten.

2. Neem $(\mathbb{R}, T_E)$ en $A \subset \mathbb{R}$ met de spoortopologie. Bewijs dat als (A, T_{sp}) enkel geïsoleerde punten heeft, dan A aftelbaar is.

3. Ga na welk van de volgende topologische ruimten homeomorf zijn (bewijs):

   (a) $[0, 1]$

   (b) S^1

   (c) $\mathbb{R}$

   (d) $\alpha\mathbb{R}$

   (e) $]0, 1[$

(f) $\mathbb{R}^2$

4. Beschouw $(\mathbb{R}, T)$ met $T = \{]a, b] | a, b \in \mathbb{R}\}$. Ga na:
   (a) Is T een basis?
   (b) Is T fijner/grover dan T_E?
   (c) Is deze topologische ruimte compact ?
   (d) Is deze topologische ruimte Hausdorff ?
   (e) Is deze topologische ruimte samenhangend ?

2.2.2 Juni 2011

1. Zij $(X, \mathcal{T})$ en $(Y, \mathcal{S})$ topologische ruimten en zij $f : (X, \mathcal{T}) \to (Y, \mathcal{S})$ continu. Bewijs de volgende uitspraken:
   (a) Veronderstel dat f een gesloten afbeelding is. Neem $y \in Y$ en stel U een open deel van X zodat $f^{-1}(y) \subseteq U$. Toon dat er een open omgeving W van y bestaat zodanig dat $f^{-1}(y) \subseteq f^{-1}(W) \subseteq U$.
   (b) Veronderstel dat f een gesloten surjectie is en dat $f^{-1}(y)$ compact is voor elke $y \in Y$. Veronderstel verder dat X Hausdorff is. Bewijs dat Y ook Hausdorff is.

2. Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte en stel $A \subseteq X$. Definieer op X de volgende relatie

$$xRx' \Leftrightarrow x = x' \text{ of } \{x, x'\} \subseteq A$$

   Bewijs de volgende uitspraken:
   (a) Als A gesloten is en als X een T_3-ruimte is, dan is $(X|R, \mathcal{T}|R)$ Hausdorff.
   (b) Geldt (a) nog steeds als A niet gesloten is ? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
   (c) Geldt (a) nog steeds als we T_3 vervangen door Hausdorff? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

3. Beschouw op $\mathbb{R}$ de volgende topologieën:
   - $\mathcal{T}_E$, de Euclidische topologie.
   - $\mathcal{T}_{cof}$, de topologie van de eindige complementen.
   - $\mathcal{T} = \{A \subseteq X | \mathbb{R} \backslash A \text{ is compact in } \mathcal{T}_E\} \bigcup \{\phi\}$

   Beantwoord nu de volgende vragen:
   (a) Toon aan dat $\mathcal{T}$ een toplogie definieert op $\mathbb{R}$.
   (b) Vergelijk de topologieën $\mathcal{T}_E$, $\mathcal{T}_{cof}$ en $\mathcal{T}$ met elkaar (i.e. welke topologie is fijner/ grover dan een andere topologie?)
   (c) Is $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ compact ?
   (d) Is $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ T_1? Hausdorff ? T_3?
   (e) Is $(\mathbb{R}, \mathcal{T})$ samenhangend?
   (f) Stel $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ een veelterm met reële coefficiënten. Toon aan dat de functie

$$f : (\mathbb{R}, \mathcal{T}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{T}_{cof}) : x \mapsto P(x)$$

   continu is.

4. Beschouw $\mathbb{R}^2$ met de Euclidische topologie. Bewijs:
   (a) Is $\mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{Q}^2$ samenhanged?
   (b) Stel A een aftelbaar deel van $\mathbb{R}^2$. Bewijs dat $\mathbb{R}^2 \backslash A$ samenhangend is. (Hint: neem een willekeurig punt van $\mathbb{R}^2$, hoeveel rechten gaan er door dit punt ?)
   (c) Stel dat men uit $\mathbb{R}^3$ een aftelbaar aantal rechten weglaat, is deze ruimte dan samenhangend ?

2.2.3 September 2010

1. Definieer op $\mathbb{Z}$ een collectie $\mathcal{B}$ als volgt:

$$\mathcal{B} = \{V_p^n | p \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}_0\}$$

   waarbij

$$V_p^n = \{\cdots, p-2a, p-a, p, p+a, p+2a, \cdots\}$$

   Dan is $\mathcal{B}$ de basis voor een topologie $\mathcal{T}$ op $\mathbb{Z}$. Definieer verder voor elke $x \in \mathbb{Z}$:

$$A_x = \{\cdots, -2x, -x, 0, x, 2x, \cdots\}$$

   (a) Is A_x open ? (Maak eventueel onderscheid: voor welke $x \in \mathbb{Z}$ wel en voor welke $x \in \mathbb{Z}$ niet ?)
   (b) Voor welke x'en is A_x gesloten?
   (c) Is $\{-1, 1\}$ open? Gesloten?
   (d) (Besteed hier niet te veel tijd aan, dit is slechts een minder belangrijk bijvraagje.) Gebruik voorgaande resultaten om aan te tonen dat er oneindig veel priemgetallen zijn.

2. Een open deel G van een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ wordt "regulier open"genoemd als het gelijk is aan het inwendige van zijn afsluiting: $G = int(cl(G))$.
   (a) Geef een voorbeeld van een topologische ruimte en een open deel daarin dat niet regulier open is.
   (b) Vul aan en bewijs:
   De doorsnede van twee regulier open verzamelingen is ... (wel/niet) altijd regulier open.
   (c) Idem voor de unie:
   De unie van twee regulier open verzamelingen is ... (wel/niet) altijd regulier open.

3. Bewijs dat volgende beweringen voor een compacte Hausdorff ruimte $(X, \mathcal{T})$ equivalent zijn:
   (a) Elk punt $x \in X$ heeft een basis $\mathcal{B}(x)$ voor de omgevingen in x, bestaande uit open en samenhangende verzamelingen.
   (b) Elke open cover heeft een verfijning bestaande uit een eindig aantal samenhangende open verzamelingen.

4. (Let goed op welke ongelijkheden strikt zijn en welke niet, dit is belangrijk!)
   Definieer

$$A = \{(x, 0) | 0 < x \leq 1\}$$
$$B = \{(x, 1) | 0 \leq x < 1\}$$

en $X = A\bigcup B$. Definieer een topologie $\mathcal{T}$ op X door als basis voor $\mathcal{T}$ de collectie

$$\{U_{a,b}|0 \leq a < b \leq 1\}\bigcup\{V_{a,b}|0 \leq a < b \leq 1\}$$

te nemen, waarbij

$$U_{a,b} = \{(x,0)|a < x \leq b\}\bigcup\{(x,1)|a < x < b\}$$

en

$$V_{a,b} = \{(x,1)|a \leq x < b\}$$

Ga na of deze topologische ruimte $(X,\mathcal{T})$ A1, A2, Separabel, T_0, T_1, T_2, T_3, compact, en/of samenhangend is.

OPMERKING: Bepaalde eigenschappen zoals Lindelöf, totaal onsamenhangend, en nog enkele andere, moet je dus NIET onderzoeken. Je mag deze eigenschappen uiteraard wel bespreken als je daar iets kan uit afleiden voor de wel gevraagde eigenschappen.

2.2.4 juni 2009

1. Zij $(X,\mathcal{A},\mu)$ een maatruimte waarvoor $\forall x \in X : \{x\} \in \mathcal{A}$. Een punt x van X wordt *positief* genoemd als en slecht als $\mu(\{x\}) > 0$. De maat μ noemen we *diffuus* als er geen positieve punten bestaan (met andere woorden, als $\mu(\{x\}) = 0, \forall x \in X$).
   (a) Geef een voorbeeld van een niet-diffuse maat op $(\mathbb{R},\mathcal{R})$.
   (b) Zij μ een maat op $(\mathbb{R},\mathcal{R})$ waarvoor $\mu(\mathbb{R}) = 1$. Bewijs dat er maten μ_1 en μ_2 op $(\mathbb{R},\mathcal{R})$ bestaan waarvoor
   - $\mu = \mu_1 + \mu_2$,
   - $\mu_1 = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon_j \delta_{x_j}$ voor zekere $x_0, x_1, \dots \in \mathbb{R}$ en $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \geq 0$,
   - μ_2 is diffuus.

   Hint: wanneer er een vaste $k \in \mathbb{N}, k > 1$ beschouwen, hoeveel punten $(y_i^k)_{i\in I}$ kunnen er dan hoogstens zijn waarvoor $\frac{1}{k} \leq \mu(\{y_i^k\}) < \frac{1}{k-1}$?
2. Stel $(X,\mathcal{A},\mu)$ een maatruimte. Zij $A \in \mathcal{A}$, dan beschouwen we de maatruimte $(A,\mathcal{A}_A,\mu_A)$, waarbij
$$\mathcal{A}_A := \mathcal{A}|_A = \{B \subseteq A|B \in \mathcal{A}\} \quad \text{en} \quad \mu_A = \mu|_{\mathcal{A}_A}.$$
   (a) Toon aan: als $f \in \mathcal{L}_1(X,\mathcal{A},\mu)$, dan geldt $f.1_A \in \mathcal{L}_1(X,\mathcal{A},\mu)$ en $f|_A \in \mathcal{L}_1(A,\mathcal{A}_A,\mu_A)$ en $\int f1_A d\mu = \int f|_A d\mu_A$.
   (b) Bepaal $\mathcal{L}_1(A,\mathcal{A}_A,\mu_A)$.
3. Stel $\mathcal{B} := \{\mathbb{R}\backslash\{x\}|x \in \mathbb{R}\}$. Bewijs dat $\mathcal{B}$ een filter op $\mathbb{R}$ voortbrengt, en bepaal $\lim\langle\mathcal{B}\rangle$ en $\text{adh}\langle\mathcal{B}\rangle$ in de topologische ruimte $(\mathbb{R},\mathcal{A})$
4. Definieer volgende verzamelingen
$$\begin{aligned} L_0 &= \{(x,0)|x \in]0,1[\} \\ L_i &= \{(x,\frac{1}{i})|x \in [0,1[\} \quad (\forall i \in \mathbb{N}_0) \\ X &= \bigcup_{i\in\mathbb{N}} L_i = L_0 \cup \bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} L_i \end{aligned}$$

   Bekijk de topologie $\mathcal{T}_L$ op X die bepaald wordt door volgende eigenschappen:

- voor $i \in \mathbb{N}_0$: elk punt van L_i behalve $(0, \frac{1}{i})$ is open
- basisomgevingen van $(0, \frac{1}{i})$ zijn deelverzamelingen van L_i met eindig complement (voor $i \in \mathbb{N}_0$)
- de verzamelingen $U_i(x,0) = \{(x,0)\} \cup \{(x, \frac{1}{n}) | n > i\}$ vormen een basis voor de omgevingen van $(x,0) \in L_0$

Ga na of de topologische ruimte $(X, \mathcal{T}_L)$ A1, A2, separabel, Hausdorff, compact, samenhangend en / of totaal onsamenhangend is.

2.2.5 juni 2008

1. Zij X een verzameling en $\mathcal{A} \subseteq 2^X$.
   (a) Veronderstel $X \in \mathcal{A}$ en $\forall A, B \in \mathcal{A} : A \backslash B \in \mathcal{A}$. Bewijs dat $\mathcal{A}$ een algebra is.
   (b) Onderstel dat $X \in \mathcal{A}$ en dat $\mathcal{A}$ gesloten is voor het complement en de eindige unie van disjuncte delen. Toon aan dat $\mathcal{A}$ geen algebra moet zijn.

2. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatruimte. Definieer voor elke $A \subseteq X$
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_A &:= \{E \in \mathcal{A} | A \subseteq E\} \\ \text{en } \mu^*(A) &:= \inf\{\mu(E) | E \in \mathcal{L}_A\} \end{aligned}$$
   Toon dan volgende beweringen aan:
   (a) Het infimum wordt steeds bereikt. Met andere woorden:
$$\forall A \subseteq X : \exists E \in \mathcal{L}_A : \mu^*(A) = \mu(E).$$
   (b) μ^* is een buitenmaat.

3.
   - Zij $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte, en $F, G \subseteq X$ gesloten verzamelingen. Veronderstel bovendien dat $F \cap G$ en $F \cup G$ allebei samenhangend zijn. Toon aan dat dan ook F en G samenhangend zijn.
   - Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de geslotenheid van F **én** G noodzakelijk zijn. Zoek dus een voorbeeld waarvoor F wel, maar G niet gesloten is, zodanig dat $F \cap G$ en $F \cup G$ samenhangend zijn, maar F en/of G niet.

4. Stel $X =]0,1[^2 \cup \{(0,0), (1,0)\}$. De topologie op X wordt gedefinieerd aan de hand van een omgevingensysteem:
   - Omgevingen van een punt $(x,y) \in]0,1[^2$ worden voortgebracht door (voldoende kleine) Euclidische omgevingen ervan.
   - Een basis voor de omgevingen van $(0,0)$ wordt gegeven door $\{R_n^0 | n \in \mathbb{N}_0\}$ waarbij $R_n^0 = (]0, \frac{1}{2}[\times]0, \frac{1}{n}[) \cup \{(0,0)\}$.
   - Een basis voor de omgevingen van $(1,0)$ wordt gegeven door $\{R_m^1 | m \in \mathbb{N}_0\}$ waarbij $R_m^1 = (]\frac{1}{2}, 1[\times]0, \frac{1}{m}[) \cup \{(1,0)\}$.

   Ga na of deze topologische ruimte T_0, T_1, T_2, T_3, A_1, A_2, separabel, compact, lokaal compact, samenhangend, totaal onsamenhangend en/of metriseerbaar is.

5. Een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ wordt normaal genoemd indien
$$\forall F, G \subseteq X \text{ gesloten met } F \cap G = \phi : \exists U, V \in \mathcal{T} : F \subseteq U, G \subseteq V, U \cap V = \phi$$

Een deel $A \subseteq X$ heet normaal indien de deelruimte $(A, \mathcal{T}|_A)$ van $(X, \mathcal{T})$ normaal is.
Zij nu $(X, \mathcal{T})$ een topologische ruimte.
Voor een willekeurig deel A van X wordt met $\bar{A}$ steeds de afsluiting van A t.o.v. X bedoeld
Beschouw de volgende twee beweringen:

a: $\forall A, B \subseteq X$ met $\bar{A} \cap B = \phi = A \cap \bar{B} : \exists U, V \in \mathcal{T} : A \subseteq U, B \subseteq V, U \cap V = \phi$.

b: $\forall C \subseteq X : C$ is normaal.

Toon nu de volgende eigenschappen aan:

(a) Voor een willekeurig deel C van X geldt: als $C_1 \subseteq C$ en $C_2 \subseteq C$ disjunct zijn en gesloten in C, dan geldt
$$\bar{C_1} \cap C_2 = \phi = C_1 \cap \bar{C_2}.$$

(b) Bewering **a** impliceert bewering **b**.

(c) Voor $C_1, C_2 \subseteq X$ met $\bar{C_1} \cap C_2 = \phi = C_1 \cap \bar{C_2}$ geldt dat C_1 en C_2 gesloten zijn in $A := X \backslash ((\bar{C_1} \backslash C_1) \cup (\bar{C_2} \backslash C_2))$.

(d) **b** impliceert **a**.

2.2.6 September 2007

1. Stel $E \subseteq \mathbb{R}$. Bewijs achtereenvolgens de volgende beweringen:

   (a) De uitwendige Lebesguemaat $\lambda^*(E)$ is het infimum van $\{\lambda^*(O) | E \subseteq O, O \text{ open } \}$.

   (b) Indien E Lebesgue meetbaar en begrensd is bestaat voor iedere $\epsilon > 0$ een begrensde open verzameling $O \supseteq E$ waarvoor $\lambda^*(O \backslash E) < \frac{\epsilon}{2}$.

   (c) Stel dat $E \subseteq [-N, N]$ Lebesgue meetbaar is, en dat $P \supseteq E^c \cap [-N, N] =: E_N^c$ een open verzameling is met $\lambda^*(P \backslash E_N^c) < \frac{\epsilon}{2}$. Dan is ook $\lambda^*(E \backslash C) < \frac{\epsilon}{2}$, waarbij $C = P^c \cap [-N, N]$.

   (d) Deze C is compact.

   (e) Indien E Lebesgue meetbaar en begrensd is bestaan voor iedere $\epsilon > 0$ een compacte verzameling C en een open verzameling O waarvoor $C \subseteq E \subseteq O$ en $\lambda^*(O \backslash C) < \epsilon$.

2. Laat $\mathcal{D}$ een partitie van een topologische ruimte $(X, \mathcal{T})$ zijn. Bewijs dat de bijbehorende quotiëntruimte T_1 is als en slechts als alle delen in de partitie gesloten zijn.

3. Als $A \subseteq X$ dicht is en $U \subseteq X$ open, dan is $U \subseteq \overline{A \cap U}$. Toon dit aan.

4. Zij $(E, \mathcal{B}, \mu)$ een eindige maatruimte. Toon aan dat $f_n \to f$ in maat als en slechts als $\int |f_n - f| \wedge 1 d\mu \to 0$.

5. X bestaat uit de punten van $\mathbb{R}^2$ met een extra punt 0^* eraan toegevoegd. Omgevingen van punten verschillend van 0 en 0^* worden voortgebracht door de gebruikelijke (Euclidische) open delen van $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ waar dit punt toe behoort. Als basis van de omgevingen van 0 nemen we de verzamelingen
$$V_n(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} | x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, y > 0\} \cup \{0\}$$
waarbij $n \geq 1$. Als basis van de omgevingen van 0^* nemen we de verzamelingen
$$V_n(0^*) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} | x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, y < 0\} \cup \{0^*\}$$

waarbij eveneens $n \geq 1$. De topologie die zo gedefinieerd wordt noemen we de 'dubbele oorsprong topologie' $\mathcal{T}_{do}$.
Ga na of deze topologische ruimte T_0, T_1, T_2, T_3, A_1, A_2, separabel, compact, aftelbaar compact, Lindelöf, lokaal compact, σ-compact, samenhangend, totaal onsamenhangend en/of metriseerbaar is.

Hints:

(a) Indien $U \subseteq X$ open is voor $\mathcal{T}_{do}$, dan is $U \backslash \{0, 0^*\}$ een open deel van $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$ uitgerust met de (geïnduceerde) Euclidische topologie. (Bewijs dit indien je gebruik maakt van deze eigenschap!)

(b) Onderzoek hoe $\overline{V_n(0)}$ en $\overline{V_n(0^*)}$ eruit zien.

(c) Als $U, V \subseteq X$ tegelijk open en gesloten zijn met $0 \in U$ en $0^* \in V$, dan is $U \cap V \neq \phi$. (Bewijs dit indien je gebruik maakt van deze eigenschap!)

2.2.7 Juni 2007

1. Toon aan dat in een maatruimte $(X, \sum)$ voor delen $A, B, C \in \sum$ geldt dat $\mu(A\Delta B) + \mu(B\Delta C)$.

2. Bereken met de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue:

$$\lim_{k\to\infty} \int_{1/2}^{e} \frac{x^k \ln(x)}{x^k + 1} dx$$

3. X is het Euclidische vlak met de gewone topologie. Stel $A = \{(x, y) | y = 0\}$, en beschouw de partitie van X met als delen A en alle verzamelingen $\{(x, y)\}$ met $(x, y) \notin A$. Noteer de corresponderende quotiëntafbeelding als $\pi : X \to X/R$

   (a) Toon aan dat π gesloten is.

   (b) Bewijs dat er een aftelbaar aantal omgevingen van $\pi(A)$ bestaan waarvan de doorsnede precies $\{\pi(A)\}$ is.

   (c) Bewijs dat voor een willekeurig (maar vast) natuurlijk getal m de rij $(\{(m, \frac{1}{n+1})\})_{n\in\mathbb{N}}$ convergeert naar $\pi(A)$ in de quotiëntruimte.

   (d) Zij $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een willekeurige deelrij van $\mathbb{N}$. Beschouw de rij $(\{(n, \frac{1}{N_n+1})\})_{n\in\mathbb{N}}$. Toon aan dat deze rij niet convergeert naar $\pi(A)$ in de quotiëntruimte

4. Bewijs dat voor een gesloten deel F van $(X, \mathcal{T})$ geldt dat $\text{int}(F) = \text{int}(\text{cl}(\text{int}(F)))$. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat dit niet noodzakelijk geldt voor een willekeurig deel F.

5. Stel $X = \mathbb{N}^2$ de verzameling van geordende paren natuurlijke getallen. Een kolom is een verzameling van alle punten (m, n) met vaste m.
   Een deel U van X is open als en slechts als

   - $(0, 0) \notin U$ of
   - $(0, 0) \in U$ en U bevat van elke kolom (behalve eventueel een eindig aantal) alle punten behalve eventueel een eindig aantal.
     Anders geformuleerd, $(0, 0) \in U$ en slechts een eindig aantal kolommen van U bevatten "betekenisvolle gaten".
     (We zeggen dat U een betekenisvol gat heeft in een bepaalde kolom als een oneindig aantal punten van de kolom niet tot U behoren.)

Ga na of deze topologische ruimte T_0, T_1, T_2, T_3, A_1, A_2, separabel, compact, aftelbaar compact, Lindelöf, lokaal compact, σ-compact, samenhangend, totaal onsamenhangend en/of metriseerbaar is.

2.3 Oplossingen

2.3.1 Oplossingen examen september 2007

1. (a) Er geldt

$$\begin{aligned}\lambda^*(E) &= \inf\{\lambda'(\gamma)|\gamma \in \Gamma(E)\}\\ &\leq \inf\{\lambda^*(O)|E \subseteq O, O \text{ open}\}\end{aligned}$$

voor de omgekeerde ongelijkheid: als $\gamma \in \Gamma(E)$ (stel $\gamma = (\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$) dan is $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n$ een open deel van $\mathbb{R}$ dat E omvat. Bovendien is $\lambda^*\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda(\gamma_n) = \lambda'(\gamma)$.

(b) Als E Lebesgue meetbaar en begrensd is geldt $\lambda^*(E) < \infty$. (Er bestaat immers een $M > 0$ waarvoor $E \subseteq [-M, M]$, dan is ook $E \subseteq]-(M+1), M+1[$ en dus volgt uit (a) dat $\lambda^*(E) \leq \lambda(]-(M+1), M+1[) = 2(M+1) < \infty$.) Er geldt dus

$$\begin{aligned}&\lambda^*(E) = \inf\{\lambda^*(O)|E \subseteq O, O \text{ open}\} < \infty.\\ \Rightarrow\quad &\forall\epsilon > 0 : \exists O \text{ open } : E \subseteq O \text{ en } \lambda^*(E) + \frac{\epsilon}{2} > \lambda^*(O)\end{aligned}$$

Stel nu $O' = O\cap]-(M+1), M+1[$. Dan is O' ook open en $\lambda^*(O') \leq \lambda^*(O)$.

$$\begin{aligned}&\lambda^*(O') = \lambda^*(O' \cap E) + \lambda^*(O'\backslash E)\\ \Rightarrow\quad &\lambda^*(O'\backslash E) = \lambda^*(O') - \lambda^*(O' \cap E) \leq \lambda^*(O) - \lambda^*(E) < \lambda^*(E) + \frac{\epsilon}{2} - \lambda^*(E) = \frac{\epsilon}{2}\end{aligned}$$

O' voldoet dus aan de gestelde voorwaarden.

(c)

$$\begin{aligned}E_N^c &:= [-N, N]\backslash E \subseteq P\\ C &:= [-N, N]\backslash P\end{aligned}$$

We tonen volgende bewering aan:

$$E\backslash C \subseteq P\backslash E_N^c$$

Zij $x \in E\backslash C$. Dan is $x \in E \subseteq [-N, N]$, maar $x \notin C$ dus moet $x \in P$. Verder $x \in E$ dus $x \notin [-N, N]\backslash E = E_N^c$.
We zien dus dat $x \in P\backslash E_N^c$.
Uit deze bewering volgt onmiddelijk het gevraagde.

(d) $C = [-N, N]\backslash P = [-N, N] \cap P^c$ is gesloten als doorsnede van 2 gesloten delen. Bovendien is $C \subseteq [-N, N]$ begrensd. Vermits we over delen van $\mathbb{R}$ spreken volgt uit de gesloten- en begrensdheid de compactheid van C.

(e) Zij $\epsilon > 0$. E is Lebesgue meetbaar en begrensd. Volgens (b) bestaat dan een open begrensde verzameling O waarvoor $E \subseteq O$ en $\lambda^*(O\backslash E) < \frac{\epsilon}{2}$. O is begrensd, dit betekent dat een $N > 0$ bestaat waarvoor $O \subseteq [-N, N]$.
Dan is ook $E \subseteq [-N, N]$. Voor deze N is ook $E^c \cap [-N, N]$ Lebesgue meetbaar en begrensd. Er bestaat dus, opnieuw wegens (b), een open begrensde verzameling P waarvoor $E^c \cap [-N, N] \subseteq P$ en $\lambda^*(P\backslash E_N^c) < \frac{\epsilon}{2}$. Op de manier in (c) bekomen

we dan een compacte verzameling C waarvoor $C \subseteq E$ en $\lambda^*(C \backslash E) < \frac{\epsilon}{2}$.
We hebben dus een open deel O en een compact deel C gevonden waarvoor

$$\begin{array}{rcl} C & \subseteq & E \subseteq O \\ \lambda^*(O\backslash E) & < & \dfrac{\epsilon}{2} \\ \lambda^*(E\backslash C) & < & \dfrac{\epsilon}{2} \end{array}$$

en vermits $O\backslash C$ de unie is van $O\backslash E$ en $E\backslash C$ vinden we dan dat $\lambda^*(O\backslash C) = \lambda^*((O\backslash E)\cup(E\backslash C)) \leq \lambda^*(O\backslash E) + \lambda^*(E\backslash C) < \epsilon$.

2. Noteer de equivalentierelatie behorende bij $\mathcal{D}$ als R. Dus $xRy \Longleftrightarrow \exists A \in \mathcal{D} : x, y \in A$. De quotiëntafbeelding noteren we als $\pi : X \to X/R$.
$(X/R, \mathcal{T}/R)$ is T_1 als en slechts als alle singletons gesloten zijn: $\forall \overline{x} \in X/R : \{\overline{x}\}$ is gesloten vor $\mathcal{T}/R$.
Per definitie van de quotiënttopologie betekent dit precies dat $\forall \overline{x} \in X/R : \pi^{-1}(\{\overline{x}\})$ gesloten is voor $\mathcal{T}$. Er geldt echter dat

$$\{\pi^{-1}(\{\overline{x}\}) | \overline{x} \in X/R\} = \{A | A \in \mathcal{D}\}$$

Bovenstaande voorwaarde is dus equivalent met: $\forall A \in \mathcal{D} : A$ is gesloten voor $\mathcal{T}$.

3. Neem $x \in U$ en een willekeurige omgeving V van x. Dan moet een open deel G van X bestaan zodat $x \in G \subseteq V$. Vermits G en U beiden open zijn is ook $G \cap U$ open.
Bovendien is $G \cap U$ niet leeg vermits x er een element van is. A is dicht en heeft dus een niet-lege doorsnede met elk niet-leeg open deel van X, i.h.b. met $G \cap U$. Dus $A \cap (G \cap U) \neq \phi$ en bijgevolg ook $A \cap V \cap U \neq \phi$.
We verkrijgen dus

$$\forall V \in \nu(x) : V \cap (A \cap U) \neq \phi$$

Dit betekent dat $x \in \overline{A \cap U}$.

4.
$$f_n \stackrel{\mu}{\to} f \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0 : \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) = 0$$

en we moeten aantonen dat dit equivalent is met

$$\int |f_n - f| \wedge 1 d\mu \stackrel{n\to\infty}{\to} 0$$

$\Longrightarrow$

$$\begin{array}{rl} & \displaystyle\int |f_n - f| \wedge 1 d\mu \\ = & \displaystyle\int_{\{|f_n - f| > \frac{1}{n}\}} |f_n - f| \wedge 1 d\mu + \int_{\{|f_n - f| \leq \frac{1}{n}\}} |f_n - f| \wedge 1 d\mu \\ \leq & \displaystyle\int_{\{|f_n - f| > \frac{1}{n}\}} 1 d\mu + \int_{\{|f_n - f| \leq \frac{1}{n}\}} \frac{1}{n} d\mu \\ \leq & \displaystyle\mu(\{|f_n - f| > \frac{1}{n}\}) + \frac{1}{n}\mu(E) \\ & \stackrel{n\to\infty}{\to} \end{array}$$

$\Longleftarrow$ Zij $\epsilon > 0$

$$\begin{aligned} & \int |f_n - f| \wedge 1 d\mu \\ \geq & \int_{\{|f_n - f| > \epsilon\}} |f_n - f| \wedge 1 d\mu \\ \geq & \int_{\{|f_n - f| > \epsilon\}} \epsilon \wedge 1 d\mu \\ = & (\epsilon \wedge 1)\mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) \end{aligned}$$

Bijgevolg

$$\begin{aligned} & \int |f_n - f| \wedge 1 d\mu \overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ \Rightarrow & (\epsilon \wedge 1)\mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \\ \Rightarrow & \mu(\{|f_n - f| > \epsilon\}) \overset{n\to\infty}{\to} 0 \end{aligned}$$

5. De Euclidische topologie en metriek duiden we aan met $\mathcal{T}_E$ en d_E. Eerst de oplossing van de hints:

   (a) Stel dat U open is voor $\mathcal{T}_{do}$. Dan geldt (enkel van toepassing voor de punten die effectief tot U behoren):

$$\begin{cases} \text{voor } 0: & \exists n \geq 1 : V_n(0) \subseteq U \\ \text{voor } 0^*: & \exists m \geq 1 : V_m(0^*) \subseteq U \\ \text{voor } p \notin \{0, 0^*\}: & \exists \epsilon_p > 0 : B_{d_E}(p, \epsilon_p) \subseteq U \end{cases} \tag{2.1}$$

   Kies ϵ_p telkens zo dat $0 \notin B_{d_E}(p, \epsilon_p)$. Dan geldt

$$U = V_n(0) \cup V_m(0^*) \cup \bigcup_{p \notin \{0,0^*\}, p \in U} B_{d_E}(p, \epsilon_p)$$

   (eventueel zonder de eerste en/of tweede term indien 0 en/of 0^* niet tot U behoren) dus

$$\begin{aligned} U \;=\; & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} | x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, y > 0\} \cup \{0\} \\ & \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} | x^2 + y^2 < \frac{1}{m^2}, y < 0\} \cup \{0^*\} \\ & \cup \bigcup_{p \notin \{0,0^*\}, p \in U} B_{d_E}(p, \epsilon_p) \end{aligned}$$

   (zelfde opmerking). Hieruit volgt

$$\begin{aligned} U \backslash \{0, 0^*\} \;=\; & \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} | x^2 + y^2 < \frac{1}{n^2}, y > 0\} \\ & \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \{0\} | x^2 + y^2 < \frac{1}{m^2}, y < 0\} \\ & \cup \bigcup_{p \notin \{0,0^*\}, p \in U} B_{d_E}(p, \epsilon_p) \end{aligned}$$

   (zelfde opmerking). $U \backslash \{0, 0^*\}$ is dus een unie van open delen voor de geïnduceerde Euclidische topologie op $\mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, en is bijgevolg zelf open.

(b) $\overline{V_n(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0^*\} | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}, y \geq 0\} \cup \{0\}$:
Deze verzameling is duidelijk gesloten want elk punt in het complement (ook 0^*!) heeft een omgeving die volledig binnen het complement blijft. Dat punten (x,y) waarvoor $x^2 + y^2 = \frac{1}{n^2}$ en $y > 0$ in de afsluiting zitten is omdat ze nooit inwendig punt van $\overline{V_n(0)}^c$ kunnen zijn want elke omgeving ervan heeft al zeker een doorsnede met $V_n(0)$. Om dezelfde reden kunnen punten (x,y) waarvoor $x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}$ en $y = 0$ nooit tot $\overline{V_n(0)}^c$ behoren.
Analoog geldt

$$\overline{V_n(0^*)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0, 0^*\} | x^2 + y^2 \leq \frac{1}{n^2}, y \leq 0\} \cup \{0^*\}.$$

(c) Stel dat U en V open en gesloten delen van X zijn waarvoor $0 \in U, 0^* \in V$. Dan bestaan $n, m \geq 1$ waarvoor $V_n(0) \subseteq U$ en $V_m(0^*) \subseteq V$. Vermits U en V gesloten zijn geldt dan ook $\overline{V_n(0)} \subseteq U$ en $\overline{V_m(0^*)} \subseteq V$. Voor een $\epsilon < \min\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\}$ geldt dan dat $(\epsilon, 0) \in \overline{V_n(0)} \cap \overline{V_m(0^*)} \subseteq U \cap V$, en we zien dus dat $U \cap V \neq \phi$.

We kijken nu naar de verschillende eigenschappen:

- **T_2, T_1, T_0**

  - Zij $p \neq q \notin \{0, 0^*\}$. Dan zijn $B_{d_E}(p, \frac{\epsilon}{2})$ en $B_{d_E}(q, \frac{\epsilon}{2})$ waarbij $\epsilon = d_E(p,q)$ disjuncte omgevingen van respectievelijk p en q.
  - Zij $p \neq 0$. Dan zijn $B_{d_E}(p, \frac{\epsilon}{2})$ en $V_n(0)$ met $\epsilon = d_E(p, 0)$ en $\frac{1}{n} < \frac{\epsilon}{2}$ disjuncte omgevingen van p en 0.
  - Analoog voor $p \neq 0^*$.
  - Voor 0 en 0^* zijn $V_1(0)$ en $V_1(0^*)$ disjuncte omgevingen.

  Deze topologische ruimte is dus Haussdorff (T_2) en bijgevolg ook T_1 en T_0.

- **T_3, regulariteit** Uit (b) weten we dat $0^* \notin \overline{V_1(0)}$. Stel dat U een willekeurige omgeving is van $\overline{V_1(0)}$ en V een omgeving van 0^*. Dan bestaat een $m \geq 1$ zodanig dat $0^* \in V_m(0^*) \subseteq V$ en er bestaat een open deel G zodat $\overline{V_1(0)} \subseteq G \subseteq U$.
  Dan geldt $\left(\frac{1}{2m}, 0\right) \in \overline{V_1(0)} \subseteq G$.
  Er bestaat dus een basisomgeving van $\left(\frac{1}{2m}, 0\right)$ die volledig binnen G blijft: $\exists \epsilon > 0 : B_{d_E}\left(\left(\frac{1}{2m}\right), \epsilon\right) \subseteq G$.
  Indien we ervoor zorgen dat $\epsilon < \frac{1}{m}$ geldt dat $\left(\frac{1}{2m}, -\frac{\epsilon}{2}\right) \in B_{d_E}\left(\left(\frac{1}{2m}, 0\right), \epsilon\right) \subseteq G \subseteq U$ en $\left(\frac{1}{2m}, -\frac{\epsilon}{2}\right) \in V_m(0^*) \subseteq V$.
  We zien dus dat $U \cap V \neq \phi$. Er bestaan dus geen disjuncte omgevingen van 0^* en $\overline{V_1(0)}$. Deze topologische ruimte is dus niet regulier, en dus ook geen T_3-ruimte.

- **A_2, A_1, separabel** De topologie is voortgebracht door volgende open delen:

$$\begin{cases} B_{d_E}((x,y), \frac{1}{n}) & \text{voor } (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \text{ en } n \geq 1 \\ V_n(0) & \text{voor } n \geq 1 \\ V_n(0^*) & \text{voor } n \geq 1 \end{cases}$$

  Vermits dit een aftelbare collectie is, is de ruimte A_2 en dus ook A_1 en separabel.

- **compact, lokaal compact** Indien X lokaal compact zou zijn, dan was het een lokaal compacte Hausdorff ruimte die bijgevolg T_3 zou zijn. Dit is echter niet het geval, dus X is niet lokaal compact, en bijgevolg ook niet compact.

- **Lindelöf, aftelbaar compact** $(X, \mathcal{T}_{do})$ is een A_2-ruimte, en dus ook Lindelöf. Vermits X niet compact is volgt dan dat X niet aftelbaar compact kan zijn.

- **σ-compact** We kunnen X schrijven als
$$X = \{0, 0^*\} \cup \bigcup_{(q_1,q_2)\in\mathbb{Q}^2} \left[q_1 - \frac{|q_1|}{2}, q_1 + \frac{|q_1|}{2}\right] \times \left[q_2 - \frac{|q_2|}{2}, q_2 + \frac{|q_2|}{2}\right]$$
Geen van deze vierkantjes $\left[q_1 - \frac{|q_1|}{2}, q_1 + \frac{|q_1|}{2}\right] \times \left[q_2 - \frac{|q_2|}{2}, q_2 + \frac{|q_2|}{2}\right]$ bevat 0 of 0^*, en is een compacte Euclidische omgeving van (q_1, q_2), dus ook een compacte Euclidische omgeving voor de topologie $\mathcal{T}_{do}$. Bovendien is $\{0, 0^*\}$ compact want het is eindig. We hebben X dus geschreven als aftelbare unie van compacte delen. X is dus σ-compact.
- **samenhangend, totaal onsamenhangend** Stel $X = U \cup V$ met U, V niet-leeg, open en disjunct. Wegens (c) moet dan $0, 0^* \in U$ of $0, 0^* \in V$. Veronderstel $0, 0^* \in U$. Vermits U open is, moeten er zeker nog andere elementen tot U behoren (er is een omgeving van 0 die binnen U moet blijven). Wegens (a) zijn $U\backslash\{0, 0^*\}$ en V open delen van $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ met de Euclidische topologie. Bovendien is $\mathbb{R}^2\backslash\{0\} = (U\backslash\{0, 0^*\}) \cup V$. Dit is een disjuncte unie van niet-lege open delen. Dit is een contradictie vermits $\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ uitgerust met de geïnduceerde Euclidische topologie samenhangend is (want wegsamenhangend). $(X, \mathcal{T}_{do})$ is dus samenhangend en dus (vermits X geen singleton is) niet totaal onsamenhangend.
- **metriseerbaar** Een metriseerbare ruimte is altijd T_3, bijgevolg kan $(X, \mathcal{T}_{do})$ niet metriseerbaar zijn.

2.3.2 Oplossingen examen juni 2007

1.
$$\begin{aligned}
& \mu(A\Delta C) \\
= \; & \mu(A\backslash C) + \mu(C\backslash A) \\
= \; & \mu(A\backslash(B \cup C)) + \mu((A \cap B)\backslash C) + \mu(C\backslash(A \cup B)) + \mu((B \cap C)\backslash A) \\
\leq \; & \mu(A\backslash(B \cup C)) + \mu(B\backslash C) + \mu(C\backslash(A \cup B)) + \mu(B\backslash A) \\
\leq \; & \mu(A\backslash B) + \mu(B\backslash A) + \mu(B\backslash C) + \mu(C\backslash B) \\
= \; & \mu(A\Delta B) + \mu(B\Delta C)
\end{aligned}$$

2. Definieer voor elke $k \in \mathbb{N}$
$$f_k(x) := \frac{x^k \ln(x)}{x^k + 1} 1_{[\frac{1}{2},e]}(x)$$
Dan geldt
   - Elke f_k is meetbaar (definitie meetbaar).
   - $$\begin{aligned}
|f_k(x)| &= \left|\frac{x^k \ln(x)}{x^k + 1} 1_{[\frac{1}{2},e]}(x)\right| \neq \left|\ln(x) 1_{[\frac{1}{2},e]}(x)\right| \\
&= \begin{cases} -\ln(x) & \text{als } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \ln(x) & \text{als } x \in [1, e] \\ 0 & \text{als } x \notin [\frac{1}{2}, e] \end{cases}
\end{aligned}$$
   Stel dus
$$g(x) := \begin{cases} -\ln(x) & \text{als } x \in [\frac{1}{2}, 1] \\ \ln(x) & \text{als } x \in [1, e] \\ 0 & \text{als } x \notin [\frac{1}{2}, e] \end{cases}$$

Dan si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ begrensd op $[\frac{1}{2}, e]$ en daarbuiten 0. Bovendien is g b.o. continu, dus meetbaar, en bijgevolg ook $g \in \mathcal{L}^1$.

- $$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} f_k(x) &= \lim_{k\to\infty} \frac{x^k \ln(x)}{x^k+1} 1_{[\frac{1}{2},e]}(x) \\ &= \left(\lim_{k\to\infty} \frac{x^k}{x^k+1}\right) 1_{[\frac{1}{2},e]}(x) \ln(x) \\ &= \ln(x) 1_{[1,e]}(x) \end{aligned}$$

  (voor $x \in [\frac{1}{2}, 1[$ is de limiet 0, voor $x = 1$ is de limiet $\frac{1}{2}\ln(1) = 0$)
  Dus $\lim_{k\to\infty} f_k(x)$ bestaat $\forall x \in [\frac{1}{2}, e]$.

- Wegens de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue geldt dus:

  $$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} \inf_{\mathbb{R}} f_k &= \int_{\mathbb{R}} \lim_{k\to\infty} f_k \\ &= \int_1^e \ln(x) dx \\ &= [x \ln(x)]_1^e - \int_1^e x.\frac{1}{x} dx \\ &= e - (e-1) \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. (a)

$$\begin{aligned} & \pi : (X, \mathcal{T}) \to (X/R, \mathcal{T}/R) \text{ gesloten} \\ \Leftrightarrow\ & \forall F \subseteq X \text{ gesloten } : \pi(F) \subseteq X/R \text{ gesloten} \\ \Leftrightarrow\ & \forall F \subseteq X \text{ gesloten } : \pi^{-1}(\pi(F)) \subseteq X \text{ gesloten} \\ \Leftrightarrow\ & \forall F \subseteq X \text{ gesloten met } F \cap A \neq \phi : \pi^{-1}(\pi(F)) \subseteq X \text{ gesloten (als } F \cap A = \phi \text{ is } \pi^{-1}(\pi(F)) = F = \\ \Leftrightarrow\ & \forall F \subseteq X \text{ gesloten met } F \cap A \neq \phi : F \cup A \subseteq X \text{ gsloten} (x \in \pi^{-1}(\pi(F)) \Rightarrow \pi(x) = \pi(z) \text{ voor een } z \end{aligned}$$

Dit is voldaan vermits $A \subseteq X$ gesloten is.

(b) Welke omgevingen heeft het punt $\pi(A)$ in de quotiëntruimte X/R?

$$\begin{aligned} & V \subseteq X/R \text{ is omgeving van } \pi(A) \\ \Leftrightarrow\ & \exists G \text{ open in } X/R : \pi(A) \in G \subseteq V \\ \Leftrightarrow\ & \exists G \text{ met } \pi^{-1}(G) \subseteq X \text{ open } : \pi(A) \in G \subseteq V \\ \Leftrightarrow\ & \exists H \subseteq X \text{ open } : A \subseteq H \subseteq \pi^{-1}(V) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ $\pi(A) \in G \Rightarrow \pi^{-1}(G) \supseteq \pi^{-1}(\pi(A)) = \{x \in X | \pi(x) \in \pi(A)\} = \{x \in X | xRa$ voor een $a \in A\} = A$

$\Leftarrow$ H open met $A \subseteq H \Rightarrow H = \pi^{-1}(\pi(H))$ en $\pi(A) \subseteq \pi(H) \subseteq \pi(\pi^{-1}(V)) = V$

Dus voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $V_n := \{\pi(A)\} \cup \{\{(x, y) | y \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\setminus \{0\}\}$ een omgeving van $\pi(A)$:

$$\pi^{-1}(V_n) = A \cup \mathbb{R} \times \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[\setminus \{0\} = \mathbb{R} \times \left]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right[$$

en dit is open in X en $A \subseteq \pi^{-1}(V_n)$. Bovendien geldt dat

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} V_n = \{\pi(A)\}$$

($\forall y \in]-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}[\setminus \{0\}$ valt $\{(x, y)\}$ er ergens in de volgende V_i's uit.)

(c) Zij $m \in \mathbb{N}$ vast. Voor elke $n \in \mathbb{N}$ is $\{(m, \frac{1}{n+1})\} \in X/R$. De rij van al deze elementen convergeert in X/R naar $\pi(A) \in X/R$:

$$\text{TB: } \forall V \in \nu(\pi(A)) : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : \{(m, \frac{1}{n+1})\} \in V$$

Stel $V \in \nu(\pi(A))$. Dan geldt $\exists H \subseteq X$ open: $A \subseteq H \subseteq \pi^{-1}(V)$. Bijgevolg geldt $(m, 0) \in A \subseteq H \subseteq \pi^{-1}(V)$. H is open in $\mathbb{R}^2$, dus $\exists \alpha > 0 : (m, 0) \in]m - \alpha, m + \alpha[\times] - \alpha, \alpha[\subseteq H$. Kies nu $n_0 \in \mathbb{N}$ zodat $\frac{1}{n_0+1} \leq \alpha$. Dan geldt $\forall n \geq n_0 : \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n_0+1} \leq \alpha$ en dus $(m, \frac{1}{n+1}) \in]m - \alpha, m + \alpha[\times] - \alpha, \alpha[\subseteq H \subseteq \pi^{-1}(V)$, m.a.w. $\{(m, \frac{1}{n+1})\} = \pi(m, \frac{1}{n+1}) \in V$.

(d) Zij $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ een willekeurige deelrij van $\mathbb{N}$. I.h.b. is dit een stijgende rij. Stel voor alle $n \in \mathbb{N} : a_n := \frac{1}{2(N_n+1)}$ en

$$H := (] - \infty, 0[\times] - 1, 1[\cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (]n - 1, n + 1[\times] - a_n, a_n[).$$

Dit is een open deel van $\mathbb{R}^2$ en $A \subseteq H$. Bovendien is $H = \pi^{-1}(V)$ voor

$$V = \{\pi(A)\} \cup \{\{(x, y)\} | (x, y) \in H\}$$

V is dus een omgeving van $\pi(A)$ in X/R, en voor deze omgeving geldt: $\forall n \in \mathbb{N}$: $\{(n, \frac{1}{N_n+1})\} \notin V$:

$$\left(n, \frac{1}{N_n + 1}\right) = (n, 2a_n) \notin]n - 1, n + 1[\times] - a_n, a_n[$$

We zien dus dat de rij $\left(\left\{\left(n, \frac{1}{N_n+1}\right)\right\}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ niet kan convergeren naar $\pi(A) \in X/R$.

4.
- – $\text{int}(F) \subseteq F \Rightarrow \text{cl}(\text{int}(F)) \subseteq \text{cl}(F) = F$
    $\Rightarrow \text{int}(\text{cl}(\text{int}(F))) \subseteq \text{int}(F)$.
  – $\text{int}(F)$ is open en $\text{int}(F) \subseteq \text{cl}(\text{int}(F))$. Bijgevolg is $\text{int}(F) \subseteq \text{int}(\text{cl}(\text{int}(F)))$.
- Neem $X = (\mathbb{R}, \mathcal{T}_g)$ en $F = [0, 1[\cup]1, 2]$. Dan is
  – $\text{int}(F) =]0, 1[\cup]1, 2[$ en
  – $\text{int}(\text{cl}(\text{int}(F))) = \text{int}(\text{cl}(]0, 1[\cup]1, 2[)) = \text{int}([0,2]) =]0,2[$

5.
- T_2
  – Neem 2 verschillende punten, allebei verschillend van $(0, 0)$. Dan zijn de singletons van deze punten disjuncte omgevingen.
  – Voor $(m, n) \neq (0, 0)$ en $(0, 0)$:
    $A := \mathbb{R}^2 \setminus \{((m, n)\}$ is een open omgeving van $(0, 0)$ en $\{(m, n)\}$ een omgeving van (m, n). Dit zijn bovendien disjuncte omgevingen.

  Dus T_2 en dus ook T_1 en T_0.
- **regulier** Stel F gesloten en $x \notin F$.
  – $x = (0, 0)$ $(0, 0) \notin F$ dus $F := \bigcup_{(m,n) \in F} \{(m, n)\}$ is open. Dus F en X/F zijn beiden open, $F \subseteq F, (0, 0) \in X/F$ en F en X/F zijn disjunct.
  – $x \neq (0, 0)$ $X \setminus \{x\}$ is open en omvat F. Ook $\{x\}$ is open, en beide verzamelingen zijn disjunct.

  dus regulier en dus T_3
- **separabel** X is aftelbaar, dus er bestaat een aftelbaar dicht deel dus separabel.

- A_1 X voldoet niet aan het eerste aftelbaarheidsaxioma: stel dat $(U_i)_{i\in\mathbb{N}}$ een aftelbare basis van omgevingen van $(0,0)$ is. Dan moeten voor elke $i \in \mathbb{N} m_i$ en n_i groter dan i bestaan waarvoor $(m_i, n_i) \in U_i$. Anders zou U_i namelijk in elke kolom verder dan de i-de een betekenisvol gat hebben. Beschouw nu $V := X\backslash\{(m_i, n_i)|i \in \mathbb{N}\}$. Deze verzameling heeft in geen enkele kolom een betekenisvol gat: in kolom i kunnen hooguit de elementen $(m_0, n_0), \ldots, (m_{i-1}, n_{i-1})$ ontbreken. Bijgevolg is V een open verzameling. V is dus een omgeving van de oorsprong. Vermits de U_i's een basis vormen voor de omgevingenfilter van $(0,0)$ bestaat een $i \in \mathbb{N}$ waarvoor

$$(0,0) \in U_i \subseteq V$$

  Dit is echter een contradictie vermits $(m_i, n_i) \in U_i$, maar $(m_i, n_i) \notin V$ dus niet A_1 en dus ook niet A_2.

- **compact** X is niet aftelbaar compact: $U := X\backslash\{(0, n)|n \neq 0\}$ is een open deel van X: er is slechts 1 kolom met een betekenisvol gat. Bijgevolg is $U \cup \bigcup_{n\neq 0}\{(0, n)\}$ een aftelbare open overdekking van X. Deze overdekking heeft echter geen eindige deeloverdekking. Dus niet aftelbaar compact en dus ook niet compact.

- **Lindelöf** X is aftelbaar, dus een willekeurige open overdekking kan uitgedund worden tot een aftelbare overdekking: kies voor elk element in X het open deel dat dit punt bevat. Dus Lindelöf.

- **lokaal compact** Er bestaat geen compacte omgeving van $(0,0)$: stel dat $U \subseteq X$ een omgeving is van (0,0). Dan bestaat een open deel V in X zodat $(0,0) \in V \subseteq U$. V heeft selchts een eindig aantal kolommen met een betekenisvol gat. Hetzelfde geldt dan voor U. I.h.b. moet een kolom bestaan, verschillend van de nulde, zonder betekenisvol gat. Stel dat dit de i-de kolom is. In deze kolom behoort dus een oneindig aantal punten tot U. Beschouw dan volgende open overdekking van U:

$$(U\backslash\{(i, n)|n \in \mathbb{N}\} \cup \bigcup_{n\in\mathbb{N} \text{ met } (i,n)\in U} \{(i, n)\}$$

  Deze kan geen eindige deeloverdekking van U bevatten. U is dus niet compact, dus niet lokaal compact.

- **σ-compact** X is aftelbaar, en een singleton is steeds compact, dus X is een aftelbare unie van compacte delen. Dus σ-compact.

- **totaal onsamenhangend** Stel $A \subseteq X$ samenhangend, met $x = (m, n) \neq (p, q) = y \in A$
  - $x \neq 0$ $\{(m, n)\}$ en $A\backslash\{(m, n)\}$ zijn disjuncte open delen van A en de unie ervan is A, contradictie.
  - $x = 0$ Dan is $y \neq 0$. $\{(p, q)\}$ en $A\backslash\{(p, q)\}$ zijn disjuncte open delen van A, en de unie ervan is A, contradictie.

  Dus totaal onsamenhangend en dus niet samenhangend.

- **metriseerbaar** X is niet A_1 en bijgevolg ook niet metriseerbaar.

Hoofdstuk 3

Kanstheorie

3.1 De cursus, het vak, het examen

Kanstheorie wordt vanaf vorig jaar door een andere prof gegeven. Het examen van 2010 is dus nog een examen van de vorige prof. Vorig jaar had iedereen verschillende vragen. Je moet een kaartje trekken voor je het examen begint, waarop verschillende vragen staan over een onderwerp van de cursus. De bijvragen die hij stelt zijn meestal vrij algemeen en staan niet perc in verband met de vraag die je moest voorbereiden.

3.2 Theorie

3.2.1 Juni 2011

3.2.1.1 Groep 1

1. Productmomenten.
2. Gezamelijke verdelings- en dichtheidsfunctie.
3. Lineaire transformatie van een SV m.b.t de dichtheidsfunctie.
4. Niet lineaire transformatie van een SV m.b.t. de dichtheidsfunctie.

Bijvragen:

1. Definitie van verwachtingswaarde.
2. Definitie van conditionele verwachtingswaarde.
3. Definitie van eindig dimensionale verdelingsfunctie.
4. Definitie van een stochastisch proces.

3.2.1.2 Groep 2

1. Definieer de banachruimte L^p.
2. Wat weet je over deze ruimte in het geval van eindige maten?
3. Stelling daarna: Wat gebeurt er met $||.||_p$ als $p \to \infty$?
4. X, dan definieer de radon nikodym afgeleide van X.

3.2.1.3 Groep 3

1. Definieer elementaire functies.
2. Non-negatieve stochastische veranderlijke benaderen door elementaire functies.
3. Sup, inf, lim van een rij stochastische veranderlijken.
4. Verwachtingswaarde voor een willekeurige stochastische veranderlijke. (Construeer, definieer)

Bijvragen:

1. Definieer convergentie in verdeling.
2. Verband met karakteristieke functie. (Dus als X_n convergeert in verdeling naar X, wat dan voor de karakteristieke functies van X_n , convergeert deze naar iets?)
3. Definieer de productstam.

3.3 Oefeningen

3.3.1 Examen September 2011

1. Zij $(X, \mathcal{A}, \mu)$ een maatuimte. We noemen een verzameling N een null set als ze een deelverzameling is van een meetbare verzameling met maat nul.
   (a) Definieer $\mathcal{A}'$ als $\{A \bigcup N | A \in \mathcal{A}$ en N een null set $\}$. Toon aan dat dit een σ-algebra is.
   (b) Definieer voor een $A \in \mathcal{A}'$ de waarde $\mu'(A)$ als $\inf\{\mu(B) | A \subseteq B$ en $B \in \mathcal{A}\}$. Bewijs dat μ' een maat is op $\mathcal{A}'$.
2. Gegeven is de volgende functie:
$$f_Z(x, y) = \begin{cases} \frac{12}{17}(1 + xy^2 + x^3) & 0 \leq x \leq 1 \text{ en } 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$
   (a) Bewijs dat f_Z een dichtheidsfunctie is.
   (b) Geef de bijhorende verdelingsfunctie.
   (c) Bereken de correlatie tussen de variabelen X en Y.

3.3.2 Examen Juni 2011

1. In een medisch experiment worden twee variabelen X en Y onderzocht.
   De variabele X is de hematocrietwaarde (= Het volume rode bloedcellen per liter bloed.) en de variabele Y is de productie van natuurlijke insuline (= De stof die ervoor zorgt dat glucose in het bloed kan opgenomen worden door de cellen.) in microgram per uur. Beide variabelen nemen waarden aan tussen 0 en 1. De gezamelijke verdeling van deze variabelen wordt gegeven door
$$f_{(X,Y)}(x, y) = 2(x^3 + xy)$$
   (a) Bepaal de covariantie tussen deze variabelen.
   (b) Geef de marginale verdelingen.

(c) Bepaal de verwachtingswaarde van de variabele X voor personen die 0,25 microgram natuurlijk insuline per uur produceren.

(d) Bereken de kans dat de hematocrietwaarde van een persoon kleiner is dan 0.5 als die persoon minder dan 0.8 microgram insuline per uur produceert.

2. Stel X_n en X reële stochastische variabelen op een kansruimte $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

   (a) Toon aan dat $X_n \xrightarrow{L^1} X$ impliceert dat $X_n \xrightarrow{P} X$.

   (b) Laat met een tegenvoorbeeld zien dat de omgekeerde implicatie niet geldt.

3.4 Examen Juni 2010

1. Als $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ een kansruimte is en $\mathcal{B}$ een willekeurige deelruimte van $\mathcal{A}$, dan bestaat er voor elke $X \in L'(\Omega, \mathcal{A}, P)$ één en slechts één RSV in $L'(\Omega, \mathcal{A}, P)$, die we $E[X|\mathcal{B}]$ noteren en de voorwaardelijke (of conditionele) verwachting van X t.o.v. $\mathcal{B}$ noemen met de eigenschap
$$\int_B E[X|\mathcal{B}]dP = \int_B XdP \qquad \forall B \in \mathcal{B}$$
   Het bewijs van deze stelling verloopt in 3 stappen:

   (a) Stel eerst $X \overset{b.o.}{\geq} 0$. Voor elke $A \in \mathcal{A}$ definiëren we $\mu(A) := \int_A XdP$. Dan is μ een maat op $(\Omega, \mathcal{A})$, want $\cdots$

   (b) Beperk μ en P tot $\mathcal{B}$. Dan blijft μ een maat op $(\Omega, \mathcal{B})$ en $\cdots$.

   (c) Indien niet geldt $X \overset{b.o.}{\geq} 0$, dan $\cdots$.

   Vul deze stappen aan tot een correct bewijs. Indien je een stelling of eigenschap uit de cursus gebruikt, formuleer deze dan expliciet.

2. Toon aan: $X_i, i = 1, \cdots, n$, onafhankelijke stochastische veranderlijken met eindige verwachtingswaarden $E[X_i]$ dan is $E\left[\prod_{i=1}^n X_i\right] = \prod_{i=1}^n E[X_i]$. Geef duidelijk aan welke eigenschappen je gebruikt onderweg.

3. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

   (a) Convergentie in verdeling impliceert convergentie in kans.

   (b) Elke variantie-covariantiematrix is positief definiet.

   (c) Als X en Y continue stochastische veranderlijken zijn, dan $X \cdot Y$ ook een continue stochastische veranderlijke.

4. Veronderstel dat de gemiddelde dichtheidsfunctie van de stochastische veranderlijken X en Y gegeven is door:
$$f_{X,Y}(X,Y) = \begin{cases} X + Y & \text{als } 0 < X < 1 \text{ en } 0 < Y < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

   (a) Bereken de conditionele dichtheidsfunctie van Y gegeven X.

   (b) Waaraan is de conditionele verwachtingswaarde van Y gegeven X gelijk ?

   (c) Bereken $Cov(X, Y)$.

5. Gegeven
$$f(Y) = \begin{cases} c - \frac{1}{4}|Y - 3| & 1 \leq Y \leq 5 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$$

(a) Bepaal c zodat $f(Y)$ een dichtheidsfunctie is.

(b) Bereken $F(Y)$.

(c) Bereken $E[Y]$ en $Var[Y]$.

(d) Bepaal $P(Y > 3|Y \leq 4)$.

Hoofdstuk 4

Eindige dimensionale algebra's

4.1 De cursus, het vak, het examen

Deze cursus werd gegeven door Prof. dr. Van Steen. Dit is ondertussen veranderd. Prof. Le Bruyn geeft nu deze cursus in plaats van de cursus *Representatie van eindige groepen.* De examenvragen, die dateren van 2008, zijn nog vragen uit de tijd van Prof. dr. Van Steen.

4.2 Theorie

4.2.1 Januari 2008

- R commutatieve ring, E_1, E_2, E_3 R-modulen. Bewijs dat $E_1 \otimes E_2 \otimes E_3 \cong E_1 \otimes (E_2 \otimes E_3)$
- R ring, M een R-moduul. Bewijs dat M semi-simpel $\Rightarrow$ 1. $N \subset M$ deelmoduul semi-simpel 2. elk quotientmoduul is semi-simpel.
- $\text{Char}(K) \neq 2$, K lichaam, A 2-dimensionale K-algebra. Geef de klassificatie.
- Zij E een vrij R-moduul met $\text{rg}(E) = n, < \infty$. $\bigwedge^r(E) = ?$
- $\mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_d$ met $d = \text{ggd}(m, n)$.
- R semi-simpel $\Rightarrow$ R directe som van min. linksidealen.
- directe som: existentie, uniciteit.

4.2.2 Examen december 2009

1. (3 ptn) Bewijs dat de dimensie van een irreduciebele G-representatie een deler is van de orde van G.
2. (4 ptn) Formuleer of definieer:
   (a) de stelling van Burnside.
   (b) een algebraisch getal.
   (c) de groep-algebra $\mathbb{C}G$.
   (d) Frobenius reciprociteit.
3. (3 ptn) Hoe kan je, aan de hand van de karakter-tabel van G, alle normaaldelers van G bepalen?

4.2.3 Test november 2010

Opmerking: Deze test ondervraagt maar de eerste drie hoofdstukken van de cursus.

1. Definieer de volgende begrippen.
   (a) Duale ruimte van een vectorruimte
   (b) Quiver algebra
   (c) Representatie van een algebra
   (d) Uitwendige algebra
   (e) Convolutieproduct op de groepalgebra
2. Bewijs dat voor alle eindigdimensionale vectorruimten V en W geldt dat
$$hom_{\mathbb{C}}(V, W) \cong V^* \otimes W$$
3. Definieer een simpele algebra en toon aan dat $M_n(\mathbb{C})$ simpel is.

4.2.4 Test december 2010

Opmerking: Deze test ondervraagt het laatste deel van de cursus.

1. Beschouw de 2-dimensionale representatie V van de algebra A met
$$A = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} \\ 0 & \mathbb{C} \end{bmatrix}$$
$$V = \begin{bmatrix} \mathbb{C} \\ \mathbb{C} \end{bmatrix}$$
   waar de actie gegeven wordt door links-vermenigvuldiging.
   - Is V simpel? Waarom (niet)?
   - Is V indecomposabel? Waarom (niet)?
   - Bepaal de endomorfisme algebra $End_A(V)$
   - Bepaal een compositie-rij van V
2. Formuleer en bewijs het lemma van Schur.
3. Formuleer de dichtheidsstelling van Jacobson en gebruik deze om de classificatie van alle eindig-dimensionale simpele algebras af te leiden.

4.3 Oefeningen

4.3.1 Januari 2008

Open boek.

1. Beschouw de groepalgebra $A = \mathbb{C}[S_3]$. Bepaal het centrum $Z = Z(A)$ van A (dit is een deelalgebra) en bepaal voortbrengers en relaties voor Z.

2. Gegeven k een lichaam en $A = k[x, y]$. Verder is $M_1 = A/(x)$ en $M_2 = A/(2x - y)$. Bepaal $M_1 \otimes_A M_2$.

   Opmerking: Hoewel M_1 en M_2 oneindig dimensionaal zijn als k-vectorruimte, is $M_1 \otimes_A M_2$ eindig dimensionaal als k-vectorruimte.

3. Schrijf de $\mathbb{Q}$-algebra
$$A = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & 0 \\ \mathbb{Q}(\sqrt{3}) & \mathbb{Q} \end{pmatrix}$$
   als een algebra met voortbrengers en relaties. Toon aan dat je alle relaties hebt gevonden door een dimensie-argument.

4. Goed of fout (bewijs of weerleg):

   (a) Veronderstel $A \in M_n(\mathbb{R})$ en $B \in M_m(\mathbb{R})$. Indien A en B orthogonale matrices zijn, dan is het kroneckerproduct $A \otimes B \in M_{mn}(\mathbb{R})$ ook orthogonaal.

   (b) Zij $n > 1$ een oneven natuurlijk getal en Q de volgende quiver:
$$1 \to 2 \to 3 \to \cdots \to n$$
   De dimensie (als $\mathbb{C}$-vectorruimte) van de padalgebra $\mathbb{C}Q$ is deelbaar door n.

4.3.2 Examen december 2009

1. (6 ptn) Bekijk de volgende groep van orde 16.
$$G = \langle a, b | a^8 = b^2 = 1, ab = ba^3 \rangle$$
   G heeft de volgende conjugatieklassen:
$$\{1\}, \{a^4\}, \{a^2, a^6\}, \{a, a^3\}, \{a^5, a^7\}, \{b, a^2b, a^4b, a^6b\}, \{ab, a^3b, a^5b, a^7b\}$$
   Bepaal de volledige charactertabel van G. Geef ook aan hoe je aan bepaalde waarden komt. (Bepaal indien nodig de geïnduceerde representaties van representaties van de deelgroep $\langle a \rangle$).

2. Goed of fout (bewijs of geef een tegenvoorbeeld):

   (a) (2 ptn) Indien $\mathcal{X}$ een karakter is van een groep G zodat $\mathcal{X}(g)$ even is voor elke $g \in G$, dan bestaat er ook een karakter ψ zodat $2\psi = \mathcal{X}$.

   (b) (2 ptn) Indien ρ de permutatie representatie is van S_n (i.e. de n-dimensionale representatie de basisvectoren permuteerd), dan is de triviale representatie hiervan een deelrepresentatie.

4.3.3 Test november 2010

Opmerking: Deze test ondervraagt maar de eerste drie hoofdstukken van de cursus.

1. Welke van de volgende deelverzamelingen van $M_n(\mathbb{C})$ vormen een deelalgebra van $M_n(\mathbb{C})$? Leg uit waarom.

   (a) De bovendriehoeksmatrices

   (b) De bovendriehoeksmatrices met allemaal énen op de diagonaal.

(c) De bovendriehoeksmatrices met allemaal nullen op de diagonaal.

2. Beschouw de groep D_5 (met 10 elementen).

$$D_5 = \langle s, t | s^5 = t^2 = 1, st = ts^4 \rangle$$

(a) Schrijf de groepalgebra $\mathbb{C}D_5$ als vrije algebra met relaties. Wat is de dimensie van $\mathbb{C}D_5$?

(b) Bepaal alle 1-dimensionale algebrarepresentaties van $\mathbb{C}D_5$.

(c) Bepaal alle 2-dimensionale groepsrepresentaties van D_5 op equivalenties na (start met te kijken naar de mogelijke eigenwaarden van $\rho(s)$ voor een willekeurige 2-dimensionale representatie $\rho : D_5 \to GL_2$).

4.3.4 Test december 2010

Opmerking: Deze test ondervraagt het laatste deel van de cursus.

1. (a) Bepaal de dimensie van de algebra

$$A = \mathbb{C}\langle X, Y \rangle / (X^4 - 1, Y^2, XY - iYX, Y - X^2Y)$$

door een basis van de vectorruimte te geven.

(b) Het centrum $Z(A)$ bestaat uit alle elementen die met alles commuteren. Bepaal dat centrum (het volstaat te bepalen welke elementen met X en Y commuteren).

(c) $Z(A)$ is tweedimensionaal over $\mathbb{C}$. Met welke tweedimensionale algebra die we in de oefeningen hebben gezien is dit centrum isomorf ?

2. Gegeven de volgende charactertabel van een eindige groep G. Bepaal de grootte van elke conjugatieklasse van de groep G.

conjugatieklasse	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
χ_1	1	1	1	1	1
χ_2	1	ω	ω^2	1	1
χ_3	1	ω^2	ω	1	1
χ_4	3	0	0	α	$\overline{\alpha}$
χ_5	3	0	0	$\overline{\alpha}$	α

met $\alpha = (-1 + \sqrt{7}i)/2$ en $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$.

Hoofdstuk 5

Gewone Differentiaalvergelijkingen

5.1 Examen Juni 2011

5.1.1 Theorie

5.1.1.1 Groep 1

1. Geef de methode van de variatie der constanten voor $LD^*(\Phi, b)$
2. Bespreek exacte differentiaalvergelijkingen en hun oplossing.
3. Als $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ een analytische functie die een autonome differentiaalvergelijking $y' = g(y)$ bepaald.
   Als de matrix van de gelineariseerde vergelijking
   $$A_{ij} := \frac{\partial g_i}{\partial y_i}(y_c)$$
   (voor oplossingen dichtbij het kritisch punt y_c) waarvan het reële deel van de eigenwaarden strikt negatief zijn, dan is y_c asymptotisch stabiel. Geef de stelling waar dit op steunt en bewijs deze. (Dit is stelling 4.10 in de cursus)

5.1.1.2 Groep 2

1. Existentiestelling van oplossingen van een DV met methode van Picard. Formuleer en bewijs.
2. Bespreek de oplossing van een scheidbare eerste orde DV.
3. Leg uit hoe je het gedrag van de oplossigen van een autonome eerste orde DV in dimensie 1 kan voorspellen en pas dit toe op het probleem van logaritmische groei met migratie.

5.1.2 Praktijk

1. Bepaal voor de volgende scalaire vergelijkingen de oplossingenverzameling en de oplossing die voldoet aan $y(x_0) = y_0$:
   (a) $y' = y \tan x - \frac{1}{\cos x}$ en $(x_0, y_0) = (0, 1)$
   (b) $y' = -\frac{1+y^2}{2xy} \ln(1 + y^2)$ en $(x_0, y_0) = (2, 1)$

   (c) $y' = \frac{x^2y+xy^2}{x^3+y^3}$ en $(x_0, y_0) = (1, 2)$

2. Beschouw volgende lineaire homogene vergelijking in dimensie 2:
   $y_1' = y_1 - y_2$
   $y_2' = 2y_1 + y_2$
   Bepaal 2 fundamentele oplossingen en teken de trajecten die ze volgen. Bepaal eveneens welke superpositie van deze oplossingen voldoet aan $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

3. Bepaal het kritisch punt, zoek de gepaste Lyapunov functie (inclusief onderschatter) t.o.v. dat kritisch punt en trek je conclusie over de stabiliteit hiervan voor de autonome differentiaalvergelijking bepaald door de volgende functie:

$$g(y) := \begin{pmatrix} y_2^2 - y_1 \\ -y_2(y_2^2 + 2y_1) \end{pmatrix}$$

5.2 Examen Juni 2010

5.2.1 Theorie

5.2.1.1 Groep 1

1. Toon dat, voor wat betreft existentie en uniciteit van oplossingen, het voldoende is om enkel vectoriële differentiaalvergelijkingen van eerste orde te beschouwen.

2. Bewijs het volgende: indien p lineair onafhankelijke oplossingen van een homogene lineaire eerste-orde differentiaalvergelijking in dimensie n gekend zijn, dan kan het probleem herleid worden tot het oplossen van een homogene lineaire differentiaalvergelijking in dimensie $n - p$ en het bepalen van p primitieven.

3. Bespreek een voorbeeld van de toepassing van differentiaalvergelijkingen in de populatiedynamica.

4. Bespreek de oplossing van een scheidbare scalaire eerste-orde differentiaalvergelijking.

5.2.1.2 Groep 2

1. Onder welke voorwaarde op de differentiaalvergelijking kunnen twee *verschillende* oplossingen (u, J) en (v, J) van een eerste-orde differentiaalvergelijking elkaar niet snijden? Bewijs.

2. Leid een uitdrukking af voor de oplossing van het beginwaardenprobleem

$$\begin{cases} y' = A(x)y + b(x) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

   in de veronderstelling dat n onafhankelijke oplossingen van $LD(A, 0)$ gekend zijn.

3. Formuleer en bewijs de eerste stelling van Lyapunov.

5.2.2 Praktijk

1. Los de volgende beginwaardenproblemen op:

   (a)

$$\begin{cases} y' = \frac{y}{x} + x^2 \\ y(1) = 3 \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} y' = \cos^2 y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

2. Beschouw de lineaire homogene vergelijking $y' = Ay$ in dimensie 2, met

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

Bepaal twee fundamentele oplossingen, teken de trajecten die ze bepalen en ook het traject bepaald door de oplossingen die voldoet aan $y(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

3. Bepaal het kritisch punt, zoek een gepaste Lyapunov functie (inclusief onderschatter) t.o.v. dat kritisch punt en trek je conclusie voor wat de stabiliteit betreft, voor de autonome differentiaalvergelijking bepaald door de volgende functie:

$$g(y) := \begin{pmatrix} y_2 + 0.5y_1^2y_2^2 - 0.25y_1^5 \\ -2y_1 - y_1^3y_2 + 0.5y_2^3 \end{pmatrix}$$

5.3 Examen Juni 2009

1. We bekijken de homogene 2-de orde differentiaalvergelijking

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = 0$$

(a) Wat is een *fundamenteel stel* van oplossingen van deze vergelijking.

(b) Stel y_1 en y_2 twee oplossingen. Hoe kan ik controleren of y_1 en y_2 een fundamenteel stel vormen?

(c) De volgende vergelijkingen volgen een stelsel 1-ste orde homogene differentiaalvergelijkingen

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = p_{11}(t)x_1(t) + p_{12}(t)x_2(t)$$
$$\frac{dx_2(t)}{dt} = p_{21}(t)x_1(t) + p_{22}(t)x_2(t)$$

Wat is een fundamentele matrix van het stelsel?

(d) Wat is het verband tussen de fundamentele oplossingen van de vergelijking in (a) en het stelsel in (c)?

2. De volgende 1-ste orde differentiaalvergelijking

$$y' = f(y)$$

is *autonoom* omdat de rechterhand niet expliciet afhangt van t. Wat zijn *kritische punten* van zo een vergelijking? Geef een voorbeeld van een autonome vergelijking met kritische punten en leg uit hoe de kritische punten helpen om een *kwalitatieve* beschrijving te geven van de oplossing.

3. We bekijken een *in*homogene vergelijking

$$y''(t) + p(t)y'(t) + q(t)y(t) = g(t)$$

waarbij we ook een *particuliere* oplossing moeten zoeken. De *variatie van de parameters* en de *methode van onbepaalde coëfficiënten* zijn twee methoden om een particuliere oplossing te zoeken. Vat kort en bondig *het idee* achter de twee methoden samen. Vergelijk de toepasbaarheid van de twee methoden.

Hoofdstuk 6

Slotwoordje

Deze tuyeaux is enkel tot stand kunnen komen door het werk van verschillende mensen. Eerst en vooral wil ik de studenten bedanken die examenvragen hebben bijgehouden en hebben doorgestuurd naar de mentoren. In het bijzonder zou ik Joke Van Nuffel (mentor Wiskunde 07-08) willen bedanken, omdat ze 2 jaar geleden is begonnen aan een tuyaux voor 2e Bachelor en dit ook met veel zorg heeft gedaan. Hopelijk maken jullie er nuttig gebruik van. Ten slotte wensen alle mentoren jullie nog veel succes bij het studeren en het afleggen van de examens.