Banach en C*-algebra's

Banach- en C*-algebra's

Richting	Wiskunde
Jaar	MWIS

Juni 2017

1. Veronderstel A een unitale $C*$-algebra en x een zelftoegevoegd element van A. Bewijs dat er een y in A bestaat zodat $y^2-y=x$. Geef nodige en voldoende voorwaarden op x opdat men y zelgtoegevoegd kan nemen. *Bonusvraag: Construeer voor een specifieke x een voorbeeld waarbij y niet normaal is.*
2. Zij A en x gedefinieerd zoals in vorige oefening. Bewijs dat $\{\omega(x) \mid \omega \text{ toestand op } A\} \supseteq \overline{\mathrm{Conv}}(\mathrm{Spec}(x))$, waarbij $\overline{\mathrm{Conv}}(X)$ de sluiting is van de convexe omhullende van een deel $X \subseteq \mathbb{C}$. *Bonusvraag: Bewijs ook de gelijkheid.*
3. Stel H een Hilbert ruimte en $M \subseteq B(H)$ een factor. Bewijs dat...
   - M' opnieuw een factor is.
   - voor een oneindige (zelftoegevoegde) projectie $p \in M'$, de afbeelding $\pi: M \to B(pH), x \mapsto p$ een welgedefinieerd, getrouw en normaal *-homomorfisme is.
   - *Bonusvraag: Toon aan dat dit geldt voor eender welke van nul verschillende (zelftoegevoegde) projectie $p \in M'$.*

4. Stel Γ een discrete groep en $l2(\Gamma)$ de geassocieerde Hilbertruimte van absoluut kwadratisch sommeerbare complex-waardige functies. Definieer voor $g \in \Gamma$ operatoren λg op $l2(\Gamma)$ door middel van $(\lambda g f)(h) = f(g-1h)$.
    - Bewijs dat λg unitair is, en voor alle $g,h \in \Gamma$ geldt dat $\lambda * g = \lambda g-1, \lambda g \lambda h = \lambda gh$ en $\lambda g \delta h = \delta gh$ met δh de Dirac funtie op h. (Eveneens kan men voor $(\rho g f)(h) = f(gh)$ aantonen dat $\rho * g = \rho g-1, \rho g \rho h = \rho gh$ en $\rho g \delta h = \delta hg-1$. Dit hoef je niet aan te tonen.)
    - Zij $L\Gamma$ de von Neumann algebra voortgebracht door de λg en $R\Gamma$ de von Neumann algebra voortgebracht door de ρg. Bewijs dat
    $$L\Gamma \subseteq (R\Gamma)'$$
    - Bewijs dat $x \in (R\Gamma)'$ enkel en alleen indien voor alle g,h in Γ geldt dat $\langle \delta g, x \delta h \rangle = \langle \delta gh-1, x \delta e \rangle$ met ee het eenheidselement van Γ. (Eveneens is x een element van $(R\Gamma)'$ als en slechts als $\langle \delta g, x \delta h \rangle = \langle \delta h-1g, x \delta e \rangle$ voor elke g en h in Γ. Dit hoef je niet aan te tonen.)
    - Toon aan dat $x \in L\Gamma$ als en slechts als er voor alle g en h in Γ geldt dat $\langle \delta g, x \delta h \rangle = \langle \delta gh-1, x \delta e \rangle$. Merk op dat dit samen met het vorige punt toont dat $L\Gamma = (R\Gamma)'$. *Hint: Gebruik dat de $\{\delta g\}$ een orthonormale basis vormen.*

Categorieën:

- Wiskunde
- MWIS