Groepen en ringen - Encyclopedia Academia

Groepen en ringen

Groepen en commutatieve ringen

Richting	Wiskunde
Jaar	1BWIS

Bespreking

Dit vak wordt gegeven door professor Becher. Ook is de leerstof nu beperkt tot groepentheorie (maar dan uitgebreider uiteraard).

Voor wie graag de abstractere theorie wil kennen die schuilt achter bekende termen zoals 'lichaam' en 'permutatie', belooft dit vak zeer interessant te worden. Groepen komen enorm vaak terug in verschillende cursussen (zowel in de algebra, als in de analyse en de meetkunde), dus vormen ze een heel belangrijke basis voor de verdere studieloopbaan in de wiskunde.

Vanaf het academiejaar 2013 - 2014 wordt dit vak gegeven door professor Becher. De oefeningen worden gegeven door Sten Veraa. Voor het examen en de tussentijdse test is het zo dat Becher geen bewijzen van de stellingen uit de cursus vraagt. Je moet uiteraard alle stellingen wel perfect kennen, want het examen bestaat uit het bewijzen van niet-geziene stellingen die meteen volgen uit wat je zag tijdens de les.

Theorie

Het vak begint met een relatief eenvoudig hoofdstuk over permutaties, waarna er verder gegaan wordt met de meer algemene theorie over groepen. De cursus wordt afgesloten door theorie over commutatieve ringen.

In de theorielessen worden er voornamelijk nieuwe definities ingevoerd en stellingen bewezen. Dit kan soms nogal abstract zijn.

Oefeningen

De oefeningen worden gegeven door Nikolaas Verhulst, een van de tofste assistenten. Zijn oefeningen helpen altijd om de abstracte theorie wat te concretiseren en zijn lessen gaan steeds in een ontspannen sfeer door. Ook zijn traditionele 'oefeningen voor thuis of op de trein' vormen altijd een leuke uitdaging. Als je met vragen of problemen zit met dit vak, kan je altijd contact opnemen met Nikolaas. Hij helpt je graag met het verwerven van inzicht in de leerstof en maakt steeds tijd voor je vrij als het nodig is. Uiteraard is het wel uiterst aan te raden om altijd naar zijn oefeningenlessen te gaan, vermits de meeste vragen daar beantwoord kunnen worden.

Puntenverdeling en examen

Er is 1 tussentijdse test die je resultaat enkel Positief kan beinvloeden, samen met het huiswerk dat je wekelijks krijgt.

Theorie

Er wordt geen theorie gevraagd op het examen enkel oefeningen waarin je de theorie moet toepassen.

Oefeningen

De oefeningen op het examen zijn vaak vergelijkbaar met de geziene oefeningen tijdens de les, maar de assistent durft er ook wel eens enkele vragen tussen te zetten waarin hij bijvoorbeeld een nieuw begrip definieert waarbij je dan iets moet aantonen door gebruik te maken van je inzicht in de verschillende stukken leerstof uit de cursus. Panikeer niet als je een vraag niet meteen kan oplossen. Het zijn vaak vragen die op het eerste zicht enorm moeilijk lijken, maar die je bij nader inzien toch zonder heel veel problemen kan oplossen.

Examenvragen

Zoals reeds vermeld maakt prof. Becher geen onderscheid tussen theorie en oefeningen. Er is zowel een Nederlandse als een Engelse versie van het examen. Je mag zelf kiezen in welke van deze twee talen je het examen maakt.

2019-2020

Augustus 2020

1. Bewijs of ontkracht:
    1. A14 bevat een element van orde 24.
    2. Elke echt deelgroep van D6 is cyclisch.
    3. Er bestaat een actie van A5 op een verzameling met een baan met 2 elementen.
    4. Z bevat een eindige deelring.
2. Bewijs:
    1. Elke groep van orde 1225 is abels.
    2. Er bestaat geen simpele groep van orde 280.

3. Stel G=⟨a,b⟩ voor a,b∈G met ord(a)=8, ord(b)=2 en bab−1=a5. Ga na:
    1. G is een niet-abelse groep van orde 16.
    2. De deelgroep H=⟨a4,b⟩ is normaal in G.
    3. G/H≃C4.
    4. |Z(G)|=4 en G/Z(G)≃C2×C2.
4. We beschouwen de volgende verzameling van matrices over het lichaam F3=Z/3Z R={(a0b0c0b0a)∈M3(F3)|a,b,c∈F3} Toon aan:
    1. R is een deelring van M3(F3).
    2. R is commutatief, maar geen domein.
    3. De afbeelding R→F3 (a0b0c0b0a)↦a+b is een surjectief ringhomomorfisme.
    4. {(a0−a0c0−a0a)|a,c∈F3} is een maximaal ideaal van R.
    5. Rx≃C2×C2×C2

2018-2019

Juni 2019

Media:groepen_en_ringen-18191.pdf

2017-2018

Juni 2018

Media:examen juni 2018.pdf

Test

Media:Test.jpg

2016 - 2017

Juni 2017

1. Bewijs of ontkracht:
    - Elke groep met elementen van orde 3 en 5 bevat ook een element van orde 15.
    - Er bestaat een surjectief groepshomomorfisme S4→S3.
    - Er bestaan oneindig veel simpele groepen van even orde.
    - In elke commutatieve ring heeft een veelterm van graad 3 ten hoogste 3 wortels.
    - De kardinaliteit van iedere ring is een veelvoud van zijn karakteristiek.
2. Zij gegeven een groepsactie G×X→X met een eindige groep G Toon aan:
    - Als |G|<|X| dan heeft de actie meerdere banen.
    - Als |G|=55 en |X|=17 dan bestaat er een x∈X waarvoor g.x=x geldt voor alle g∈G.

3. Stel p een priemgetal
    - Stel G een niet-abelse groep met p^3 elementen. Toon aan dat $G/Z(G) \simeq C_p \times C_p$
    - Beschouw de groep

$G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \middle| a,b,c \in \mathbb{F}_p \right\}$ met de matrixvermenigvuldiging als groepsbewerking. Bepaal het centrum $Z(G)$.

1. Toon de volgende beweringen aan:
    - Elke groep van orde 99 is abels.
    - Er bestaat geen simpele groep van orde 105.
2. Zij R een ring met $1 \neq 0$ waarin $x^2 = x$ geldt voor iedere $x \in R$. Concludeer:
    - $\mathrm{char}(R) = 2$.
    - R is commutatief.
    - Als R een domein is dan is $R \simeq \mathbb{F}_2$.

Tussentijdse test 2

Per uitzondering werd dit jaar een tweede tussentijdse test gegeven.

1. Besluit welke van de volgende beweringen juist en welke fout zijn:
    - Elke groep van orde 10 heeft een normale deelgroep van index 2.
    - Het centrum van D_7 is triviaal.
    - Elke ring met 9 elementen is een domein.
    - $\{(x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ is een ideaal van $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
    - Voor het ideaal (X^2+1) in $\mathbb{R}[X]$ geldt $\mathbb{R}[X]/(X^2+1) \simeq \mathbb{C}$.
2. Stel $\Phi: G \to G'$ een groepshomomorfisme. Toon aan:
    - $[G:\ker(\Phi)] \leq |G'|$.
    - Als G simpel is, dan is ofwel Φ injectief ofwel $\Phi(x) = 1_{G'}$ voor elke $x \in G$.
3. Stel R een commutatieve ring die niet de nulring is. Toon aan dat $\Phi: R \to R, x \mapsto x^2$ een ringhomomorfisme is als en slechts als $\mathrm{char}(R) = 2$.
4. Beschouw een ronde taart die in twaalf gelijke stukken is gesneden. In het midden van elk stuk wordt een kaars geplaatst. Stel dat er n kleuren van kaarsen ter beschikking zijn. Hoeveel verschillende kleurpatronen kunnen er gemaakt worden? (We maken geen onderscheid tussen twee patronen als ze in elkaar omgevormd kunnen worden door de taart te draaien.) Formaliseer het probleem in termen van groepsacties en pas de stelling van Burnside toe. Beschrijf de groepsactie en definieer alle termen daarin.

Tussentijdse test 1

1. Bepaal welke van de volgende stellingen gelden. Geef een argument.
    - Elke eindige monoïde is een groep.
    - Elke echte deelgroep van A_4 is abels.
    - A_5 heeft een deelgroep van orde 30.
    - Elke groep van orde 25 is cyclisch.
    - A_6 bevat een element van orde 6.
2. Toon aan dat $\mathrm{ord}(xy) = \mathrm{ord}(yx)$ voor iedere $x,y \in G$.

3. Stel $G=\langle a,b\rangle$ voor $a,b\in G$ met $ord(a)=6$, $b2=a3$ en $bab-1=a-1$. Toon aan:
    - $|G|=12$
    - $\langle a2\rangle$ is een normale deelgroep van G met $G/\langle a2\rangle\simeq Z/4Z$.
4. Een isomorfisme $G\to G$ heet een automorfisme van G. Toon aan:
    - Aut(G), de verzameling van de automorfismen van G, is een groep t.o.v. de samenstelling van afbeeldingen.
    - Voor $g\in G$ is $\Phi g:G\to G,x\mapsto gxg-1$ een automorfisme van G.

2015 - 2016

Augustus 2016

1. Bewijs of ontkracht:
    - Elke monoïde met twee elementen is een groep.
    - Elke ring met vier elementen is commutatief.
    - Elk groepshomomorfisme $Z\to Q$ is ook een ringhomomorfisme.
    - Elk oneindig domein heeft karakteristiek 0.
    - Voor elementen a en b van een domein met $a2=b2$ geldt $b=\pm a$.
2. Stel G een groep en $n\in N$. Stel dat $xnyn=(xy)n$ voor iedere $x,y\in G$. Toon aan:
    - $Gn=\{xn|x\in G\}$ is een deelgroep van G.
    - $Gn=\{x\in G|xn=1G\}$ is een normale deelgroep van G.
    - $G/Gn\simeq Gn$
3. Stel $n\in N$ met $n\geq 2$. Toon aan:
    - $An+2$ bevat een element van orde n.
    - $An+1$ bevat een element van orde n als en slechts als n geen macht van 2 is.
4. Beschouw de ring $A=M2(F2)$. Toon aan dat $A\times\simeq S3$.
5. Stel G een groep. Toon aan:
    - Als $|G|=77$ dan is G cyclisch.
    - Als $|G|=255$ dan is G niet simpel.
6. Toon aan:
    - Zijn a en b coprieme idealen van de commutatieve ring A, dan zijn ook $a2=a*a$ en $b2=b*b$ copriem.
    - Voor $k\in N$ zijn de door $X2,(X-1)2,(X-3)2,...,(X-k)2$ voortgebrachte idealen in de ring $R[X]$ paarsgewijs copriem.
    - Voor $k\in N$ bestaat er een $f\in R[X]$ zodanig dat de veelterm $f-i$ een meervoudig nulpunt in i heeft voor $i=0,...,k$. (Gebruik de Chinese Reststelling.)

2014 - 2015

Augustus 2015

Stel p een priemgetal. Herinner u dat $Fp=Z/pZ$

1. Stel Geen eindige groep. Toon de gelijkwaardigheid aan van de volgende stellingen:
   - |G| is een macht van p.
   - ordG(g) is een macht van p voor elke g∈G.
   - ordG(g) is een veelvoud van p voor elke g∈G\{1G}.
2. We hebben gelijkvormige parels in n verschillende kleuren ter beschikking om kettingen te maken. Hoeveel verschillende kleurpatronen zijn er voor kettingen met p parels? (We maken geen onderscheid tussen twee patronen als ze in elkaar omgevormd kunnen worden door de ketting te draaien of te spiegelen.) Formaliseer het probleem in termen van groepacties en pas de stelling van Burnside toe. Beschrijf de groepacties en definieer alle termen daarin.
3. Bewijs:
   - Elke eindige deelmonoïde van een groep is een deelgroep.
   - Elke groep van orde 21 bevat precies 6 elementen van orde 7.
   - Als R→S een ringhomomorfisme is en char(R) >0 geldt, dan is char(S) een deler van char(R).
4. Stel G={Fp→Fp:x↦ax+b|a,b∈Fp,a≠0} ,toon de volgende stellingen aan.
   - G is een deelgroep van de groep van bijecties Fp→Fp en |G|=p.(p−1).
   - G heeft een normale deelgroep van orde p.
   - G wordt voortgebracht door 2 elementen.
   - G is niet abels, behalve als p=2.
5. Stel f=Xp−X in Fp[X]. Toon het volgende aan.
   - f(α)=0 voor elke α∈Fp.
   - f=∏p−1k=0(X−¯k).
   - g∈Fp[X] voldoet aan g(α)=0 voor elke α∈Fp als en slechts als g=f.h voor een zeker h∈Fp[X].

Juni 2015

---

1. Bewijs of ontkracht:
   - Elke monoïde met 6 elementen is een groep.
   - Elke groep met orde een veelvoud van 6 bevat een element van orde 6.
   - Er bestaat een domein met precies 6 inverteerbare elementen.
   - Er bestaat een lichaam met 6 elementen.
2. Beschouw een ronde taart die in twintig gelijke stukken is gesneden. In het midden van elke stuk wordt een kaars geplaatst. Stel dat er een n kleuren van kaarsen ter beschikking zijn. Hoeveel verschillende kleurpatronen kunnen er gemaakt worden? (We maken geen onderscheid tussen twee patronen als ze in elkaar omgevormd kunnen worden door te taart te draaien.) Formaliseer het probleem in termen van groepacties en pas de stelling van Burnside toe. Beschrijf de groepactie en definieer alle termen daarin.
3. Stel p en q twee priemgetallen zodanig dat p < q en p geen deler is van q - 1. Toon aan dat elke groep van orde pq cyclisch is.

4. Stel m een oneven getal geheel getal met$m\neq 1$ en stel G een groep van orde 2m. Herinner u dat G op zichzelf werkt door links-vermenigvuldiging en dat deze actie gegeven wordt door een groepshomomorfisme $\Phi:G\to S_{2m}$, als we de elementen van G met 1,..., 2m associëren. Verantwoord hetvolgende:
    - Voor $g\in G\setminus 1_G$ en $\sigma=\Phi(g)$ hebben we $\sigma(i)\neq i$ voor alle i = 1,.., 2m.
    - Voor $g\in G$ met$ord_G(g)=2$is de permutatie $\Phi(g)$ een product van m disjuncte transposities.
    - $Im(\Phi)\not\subset A_{2m}$.
    - G is niet simpel.
5. Toon hetvolgende:
    - Voor elke veelterm $f \in Z[X]\setminus Z$ is de verzameling $\{ f(z) \mid z \in Z \}$ oneindig.
    - Als R een commutatieve ring is en $\Phi:R\to Q$ is een ringhomomorfisme, dan is de ker(Φ) een priemideaal van R.
    - Als R een ring is en als er een ringhomomorfisme $R\to Q$ bestaat, dan heeft R karakteristiek 0.

Tussentijdse Test

$n\in N^+$

1. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:
    - Een abelse groep van orde 6 is altijd cyclisch.
    - Een normale deelgroup van een groep is altijd abels.
    - De groep S_n is niet simpel wanneer $n\geq 3$.
    - A_4 heeft een quotiëntgroep isomorf met Z/3Z.
2. Stel $n\geq 3$ en $\sigma\in S_n\setminus\{id\}$. Bewijs dat er een transpoditie $\tau\in S_n$ bestaat zodat $\tau\sigma\neq\sigma\tau$.
3. Stel p een priemgetal en stel $|G|=p^n$. Bewijs dat...
    - ... er altijd een element van orde p bestaat in G.
    - ... Gwordt voortgebracht door n elementen.
4. Definieer een groepshomomorfisme $\Phi:G\to G'$. Bewijs het volgende:
    - $[G:ker(\Phi)]\leq|G'|$
    - Stel G simpel, dan is ofwel Φ injectief ofwel </math> \Phi(x) = 1_{G'}</math> voor elke $x\in G$.

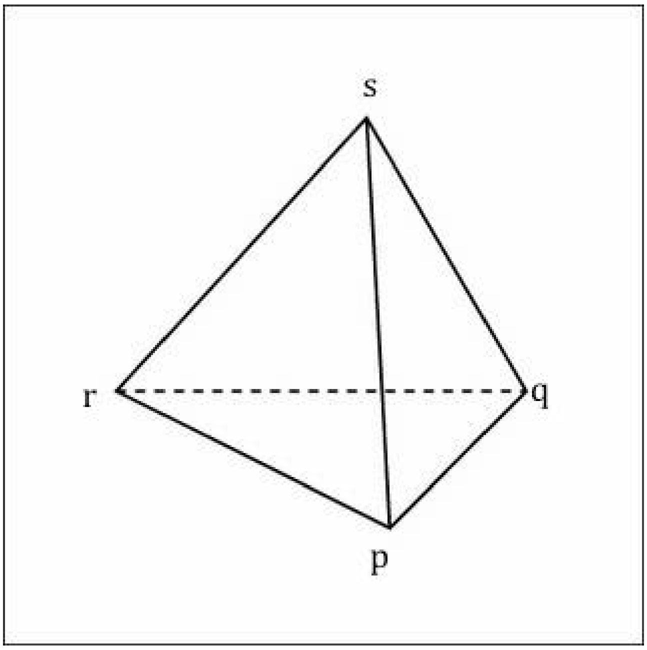
2013 - 2014

Juni 2014

Let G always be a group.

1. Show the following:
    - If *G* is simple, then any group homomorphism $f:G\to G'$ is either injective or satisfies $f(g)=1_{G'}$ for all $g\in G$.
    - If $g^2=1_G$ for all $g\in G$, then *G* is abelian.
    - Any two conjugate subgroups of *G* are isomorphic.

2.
   - The invertible 2-by-2 matrices with coefficients in C form a group for the matrix multiplication. Consider the subgroup *Q* that is generated by the elements α= (i00i) and β=(01−10). Determine the orders of α and β, show that $\beta\alpha$=αjβk for some j,k$\in$N, and then list the different elements of *Q* as a product of powers of α and β.
   - Show that there exist five pairwise non-isomorphic groups of order 8.
3. Show the following:
   - If |G|=45, then *G* is abelian.
   - If |G|=125, then either *G* is abelian or |Z(G)|=5.
4. Let n$\in$N+. Find a formula for the number of colourings of the sides of a tetrahedron by *n* colours when two colourings are identified if they can be obtained from one another by rotation. Give an explanation. Use (without proof) that the group of rotations of the tetrahedron can be identified with An.



5. Decide which of the following statements are true:
   - Every finite ring is a domain.
   - Every subring of a field is a domain.
   - Every ring whose characteristic is a prime number contains a field (as a subring).
   - Every finite ring is commutative.

Augustus 2014

Let G always be a group.

1. Let G be abelian. Let T be the set of all elements of finite order in G. Show the following:
   - T is a normal subgroup of G
   - Every nontrivial element of the groep G/T has infinite order.
   - For any group homomorphism f:G→Z one has T⊆Ker(f).

2. The invertible 2x2-matrices with coefficients in C form a group for the matrix multiplication. We consider the subgroup Q generated by the elements $\alpha=(i00-i)$ and $\beta=(01-10)$.
    - Determine the orders of α and β, show that $\beta\alpha=\alpha j\beta k$ for some $j,k\in N$.
    - Show that $|Q|=8$ and list the elements of Q in the form $\beta\alpha=\alpha j\beta k$.
    - Show that Q is not abelian and not isomorphic to D4.
3. Show the following:
    - $|G|=77$ then G cyclic.
    - $|G|=2p$ where p is an odd prime number, then either G is cyclic or G contains p element of order 2.
4. Let $n\in N+$. How many different colour combinations can be obtained by colouring 4 balls of the same size if n colours are available? Find a formula and give a explanation, using an appropriate group action.
5. Decide which of the following statements are true:
    - Any product of cyclic groups is cyclic.
    - If $f:G\to G'$ is a group homomorphism, then Im(f) is a normal subgroup of G'.
    - Any additive subgroup of a ring is an ideal.
    - If $f:R\to R'$ is a ring homomorphism such that Im(f) is an ideal of R', then f is surjective.

Theorie

April 2012 (test)

1.
    - Zij G een groep en zij $K\subset H\subset G$ deelgroepen. Geef en bewijs het verband tussen de drie indexen die je met deze groepen kan vormen.
    - Geef een voorbeeld waarbij K een oneindige groep maar waarbij de drie indexen toch eindig zijn. Leg uit!
2. Zij G een groep met neutraal element e en zij $g\in G$.
    - Definieer de *orde van g*.
    - Onderstel dat $o(g)<\infty$. Toon aan: als k een geheel getal is zodat $gk=e$ dan is k een veelvoud van $o(g)$.
    - Toon aan dat voor elke $k=1,2,\ldots,n$ een element $\sigma\in Sn$ bestaat met $o(\sigma)=k$.
    - Als p een priemgetal is dan bestaat er in $Sp-1$ geen element met orde p. Waarom?
3.
    - Geef en bewijs de eerste isomorfiestelling voor groepen.
    - Zij $\phi:G\to G'$ een groepshomomorfisme met $|G|<\infty$. Toon aan dat $|Im(\phi)|$ een deler is van $|G|$.

Juni 2012

1. Toon aan: Zij I een ideaal in een ring R. Dan is:
    - I een priemideaal als en slechts als de factorring R/I geheel is;
    - I een maximaal ideaal als en slechts als de factorring R/I een lichaam is.

2. De karakteristiek van een ring (wordt heel vaak gevraagd!)
    - Leg uit wat de karakteristiek van een ring is.
    - Als R een gehele ring is dan is char(R)=0 of char(R) is een priemgetal. Bewijs.
    - Als K een lichaam is met char(K)=0 dan bevat K een deellichaam dat isomorf is met Q. Als char(K)=p>0 dan heeft K een deellichaam dat isomorf is met Fp. Bewijs.
3. Bewijs dat Z een hoofdideaalring is.

Augustus 2012

1. Geef de definitie van een factorgroep
2. ϕ:R→S een ringhomomorfisme en I een ideaal van R en J een ideaal van S. Welke eigenschappen hebben we hier van gezien en bewijs ze.
3. Geef de stelling van Krull en bewijs

1. Een deelgroep van een cyclische groep is cyclisch.
2. Geef de baan-stabilisator stelling en bewijs het + Waar hebben we deze stelling in de cursus gebruikt?
3. Leg de karakterisatie van een ring uit en wat kan je erover zeggen als K een lichaam is en bewijs dit ook

April 2013 Test 1

1. Formuleer volgende stellingen:
    - Stelling van Bezout
    - Kleine stelling van Fermat
2. Definieer volgende begrippen:
    - cyclische notatie voor σ∈Sn
    - Een permutatie-groep G
    - Voortbrengers van een permutatie-groep G
3. Twee permutaties σ,τ∈Sn zijn geconjugeerd als en slechts als ze dezelfde cycle-lengte hebben. Geef de grote stappen van het bewijs van deze stelling.

Mei 2013 Test 2

1. Definieer volgende begrippen:
    - quotiënt-groep
    - compositie-factor
    - p-Sylow groep
2. Formuleer en bewijs de stelling van Cauchy
3. Toon aan dat het aantal p-Sylow deelgroepen congruent is met 1 modulo p.

Juni 2013 Examen

1. Definieer volgende begrippen nauwkeurig:
    - een groep G
    - de orde van een element $g \in G$
    - een normaaldeler N van een groep G
    - een groepsmorfisme $f: G \to H$ tussen twee groepen G en H
    - een compositie-rij van een groep G
    - een p-Sylow deelgroep P van een groep G
    - het centrum C van een groep G
    - de actie van een groep G op een verzameling V
    - de cyclische groep Cn
    - de alternerende groep An

1. Toon aan dat de orde van een deelgroep H van G steeds een deler is van de orde van G.
2. Formuleer en bewijs de orbit-telstelling.
3. Toon aan dat alle p-Sylow deelgroepen van een groep G geconjugeerd zijn.
4. Wat kun je zeggen over het aantal elementen van orde 5 in een groep G van orde 60? Hoeveel verschillende antwoorden kan je krijgen?

Oefeningen

April 2012 (test)

1. Toon aan dat de permutaties $\sigma=(1\ 3\ 2)$ en $\tau=(1\dots n)$ de groep Sn voortbrengen. Kan je dit veralgemenen naar willekeurige permutaties α,β met $o(\alpha)=2$ en $o(\beta)=n$?
2. Ik heb een groep $G=G1\times G2$ met 28 elementen en ik ken G1, maar ik kan niet zeggen of G commutatief is of niet. Welke orde heeft G1 ?
3. Definieer voor een willekeurige groep G met deelgroepen K en L de *join* als $K\vee L=\bigcap KL\subseteq G'\subseteq GG'$ waarbij G' varieert over de deelgroep van G.
    - Geef een voorbeeld waarbij $K\vee L\neq KL$.
    - Toon aan dat als K en L normaaldelers zijn van G met $K\vee L=G, K\cap L=\{e\}$ geldt $G/K\cong L$ en $G/L\cong K$.
      (Hint: gebruik de tweede isomorfiestelling.)

Juni 2012

1. Beschouw een groep G met elementen a, b en c in G. Toon aan dat abc en cab dezelfde orde hebben. Kan je dit resultaat nog veralgemenen?
2. Beschouw voor een willekeurige groep G de volgende verzameling van automorfismen$A=\{\phi:G\to G \| \forall H \text{ deelgroep van } G:\phi(H)=H\}\subseteq Aut(G)$.
    - Toon aan dat dit een normaaldeler is van Aut(G).
    - Geef een voorbeeld waarbij $Aut(G)\neq A\neq\{0\}$.

3. Beschouw een commutatieve ring R. Een element x∈R heeft *nilpotent* als er een n∈N bestaat zodat xn=0.
    - Bewijs dat N={x| x is nilpotent } een ideaal is.
    - Toon aan dat R/N geen nilpotente elementen bevat (behalve 0 uiteraard).
    - Veronderstel dat S een ring is zonder nilpotenten en dat ϕ:R→S een ringmorfisme is. Bewijs dat er een ringmorfisme ¯f is zodat ¯f∘π=ϕ waarbij π de canonieke projectie van R op R/N is.
4. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:
    - Het product van lichamen is terug een lichaam.
    - De verzamelingen hoofdidealen in een ring vormt opnieuw een ring met de bewerkingen Ra⊚Rb=R(ab) en Ra⊕Rb=R(a+b).
    - Stel R=Z[i]={a+bi∥a,b∈Z} met de canonieke bewerkingen. Elk ideaal I≠0 in R bevat een niet nul element van Z.
5. Veronderstel dat mr. X een diner + quiz avondje organiseert. De gasten komen allemaal in paren aan, behalve mr. X zelf. Tijdens het etentje zit men met zeven personen aan elk tafeltje, maar aan drie tafels zitten er acht. Tijdens de quiz worden groepjes van 5 gevormd, maar in één groepje zit maar 4 man. Als mr. X 75 uitnodigingen heeft verstuurd, hoeveel mensen zijn er dan op ingegaan?

Augustus 2012

1. Zij R een groep en stel dat a∈R. De orde van a is n. Wat is de orde van b∈R als men weet databa−1=b3
2. Stel men heeft een 4x4 ongekleurd schaakveld. Op hoeveel manieren kan men 8 torens op het speelveld zetten op rotatie en spiegeling na beschouwd? En op hoeveel manieren kan met 4 torens op het speelveld zetten als ze elkaar niet mogen aanvallen ook op rotatie en spiegeling na beschouwd (i.e. De torens mogen niet op dezelfde rij of kolom staan)?
3. Toon aan dat de actie GLn(R)XSn−1→Sn−1:(A,x)→Ax∥∥Ax∥∥ met Sn−1 de eenheidssfeer een welgedefinieerde transitieve groepsactie is
4. Zij R een commutatieve gehele ring met +,* als bewerkingen.
    - a∼b⇔⟨a⟩=⟨b⟩ Waarbij <a> de deelgroep van (R,+) voortgebracht door a is. Toon aan dat er eindig aantal elementen in zo'n equivalentieklasse zitten .
    - Als R=Z X Z X Z X ... X Z Wat kan je dan zeggen over a∼b

April 2013 Test 1

1. Bewijs dat als a2+b2 een drievoud is, zowel a en b drievouden zijn. Gebruik dat feit om aan te tonen dat de enige oplossing van a2+b2=3(c2+d2) waarbij a,b,c,d natuurlijke getallen zijn, de triviale oplossing a=b=c=d=0 is.
2. Je weet dat als twee cycles σ en τ disjunct zijn, ze noodzakelijk commuteren. Toon aan met een tegenvoorbeeld dat dit geen *nodige* voorwaarde is; d.w.z. geef twee (verschillende) niet-disjuncte cycles die met elkaar commuteren.
3. Noteer de conjugatieklasse van een permutatie σ∈Sn als C(σ)⊆Sn. Toon aan dat de conjugatieklasse C(σ) door de functie I:Sn→Sn:τ↦τ−1 wordt afgebeeld op een conjugatieklasse C(τ) . Wanneer is het beeld van I:C(σ)→Sn terug gelijk aan C(σ)?

Mei 2013 Test 2

1. Beschouw een eindige groep G met een normaaldeler N en veronderstel dat ∣N∣ en [G:N] copriem zijn (ggd = 1). Toon aan dat H een deelgroep is van N als en slechts als H een deelgroep van H is zodanig dat ∣H∣ een deler is van ∣N∣. Leg uit welke stellingen je waar gebruikt.
2. Beschouw een groep G, toon aan dat:
   - als G precies één element met o(g)=2 bezit, dat dan hg=gh voor elke h∈G.
   - als G precies twee elementen heeft van orde 3, dat <x>⊴G , als x orde 3 heeft.
   - veralgemeen het laatste puntje.
3. Bereken het aantal 2x2 matrices met elementen in Z/2Z op elementaire bewerkingen na. (Elementaire bewerkingen: een bij een andere rij optellen, een rij met een getal niet gelijk aan 0 vermenigvuldigen en twee rijen van plaats verwisselen.) Verantwoord je berekeningen.

Juni 2013 examen

1. Stel dat xy=zn voor natuurlijke getallen x,y,z en n en veronderstel dat ggd(x,y)=1. Toon aan dat er s en t bestaan met x=sn en y=tn.
2. Stel X een verzameling van n elementen. Definieer voor een willekeurige bijectie f:X→X de support van f als supp(f)={x|f(x)≠x}. Toon aan dat voor elke A⊆X de verzameling {f:X→X|supp(f)⊆A} een groep vormt. Geldt hetzelfde voor {f:X→X|supp(f)=A of supp(f)=ϕ}? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
3. Beschouw een willekeurige groep G.
   - Toon aan: als G abels is dan is H = {g2|g∈G} een deelgroep is.
   - Toon met een voorbeeld dat zelfs als G niet abels is, H nog altijd een deelgroep kan zijn.
   - Toon met een voorbeeld dat H niet altijd een groep is.
   - Toon aan dat de groep voortgebracht door H een normaaldeler is in G.

1. Stel G een commutatieve groep. Bewijs dat Tor(G)={g∈G|o(g)<∞} een deelgroep is en toon aan dat elk element ¯g∈G/Tor(G) verschillend van ¯1 oneindige orde heeft. Geef een voorbeeld van een oneindige groep waarvoor G = Tor(G). (Gewoonlijk noemt men Tor(G) de torsiegroep van G).

1. Beschouw het volgende spel: je hebt voldoende grote voorraad van blauwe, rode, groene en gele pionnen. Daaruit neem je er vier willekeurig en zet die op een rijtje. Een zet bestaat uit het verwisselen van twee naast elkaar staande pionnen en een beurt bestaat uit twee zetten. Het doel is om een gegeven beginconfiguratie te bereiken. Hoeveel niet-equivalente beginconfiguraties zijn er? (Twee beginconfiguraties zijn equivalent als je de ene na een aantal beurten kan bereiken van de andere.)

1. Toon aan dat er geen simpele groep G bestaat met precies 56 elementen.

Categorieën:

- Wiskunde
- 1BWIS