Grondslagen van de wiskunde

Grondslagen van de wiskunde	
Richting	Wiskunde
Jaar	MWIS

Januari 2015-2016

1.
    - Definieer de begrippen welorde en ordinaal. Bewijs dat elke welorde isomorf is met een uniek ordinaal.
    - We kunnen de optelling van ordinalen inductief definiëren op volgende manier (zie drie puntjes hieronder). Toon aan dat dit overeenstemt met de definitie in de cursus.
        - $\alpha+0=\alpha$
        - $(\alpha+\beta)+1=\alpha+(\beta+1)$
        - Indien β een limietordinaal, $\alpha+\beta=\sup_{\xi\in\beta}\alpha+\xi$
    - Is een transitieve verzameling van ordinalen opnieuw een ordinaal? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
2.
    - Definieer kardinalen. Is het zo dat elk kardinaal van de vorm $\aleph_\alpha$ is voor zeker ordinaal α.
    - Geef een overzicht van rekenregels van kardinalen en bewijs er een naar keuze.
    - Toon aan dat
        - $\prod_{0<n<\omega} n=2^{\aleph_0}$
        - $\prod_{\alpha<\omega+\omega}\aleph_\alpha\leq\aleph_{\omega+\omega}^{\aleph_0}$
3.
    - Formuleer Z,W en AC. Bewijs een van de implicaties.
    - Het axioma van aftelbaar afhankelijke keuzes (CDC) luidt: voor elk paar (X,ρ), met X een niet-lege verzameling en ρ een relatie op X die voldoet aan $\forall x\in X,\exists y\in X:x\rho y$. Bewijs dat $AC\Rightarrow CDC$.
    - Toon aan dat AC equivalent is met de bewering dat elke functie $f:X\rightarrow Y$ tussen niet lege verzamelingen een links inverse heeft.

Januari 2016 - 2017

1.
   - Definieer *welorde* en *ordinaal*.
   - Toon dat (ORD,<)(ORD,<) een *totaal geordende klasse* is. Toon aan dat iedere niet-lege verzameling (*resp. verzameling*) ordinalen een minimum (*resp. een supremum*) heeft in ORDORD. Bewijs eveneens de lemma's die je hiervoor nodig hebt.
   - We kunnen de optelling van ordinalen inductief definiëren op volgende manier (zie drie puntjes hieronder). Toon aan dat dit overeenstemt met de definitie in de cursus.
     - α+0=αα+0=α
     - (α+β)+1=α+(β+1)(α+β)+1=α+(β+1)
     - Indien ββ een limietordinaal, α+β=supξ∈βα+ξα+β=supξ∈βα+ξ
   - Zij αα een limietordinaal. Bewijs dat α=⋃β<αβα=⋃β<αβ. Wat als αα een opvolger ordinaal is.
2.
   - Definieer *cardinaal* en ℵαℵα
   - Geef en bewijs:
     - Stelling van Schröder-Bernstein
     - Stelling van Cantor-Bernstein
   - Bereken de cardinaliteit van de Cantorset.
   - Bereken de cardinaliteit van de verzameling {a∈R|∃P∈Z[X]:P(a)=0}{a∈R|∃P∈Z[X]:P(a)=0} en van de Euclidische topologie TETE op RR.
3.
   - Formuleer Z,WZ,W en ACAC. Bewijs een van de implicaties.
   - Bespreek het regulariteitsaxioma en de *rank*. Geef eveneens twee korte bewijsjes m.b.t. de *rank*.
   - Beschouw (ACC)=(ACC)= "ieder aftelbaar product van niet-lege verzamelingen is niet-leeg" en (CDC)=(CDC)= "voor ieder paar (X,ρ)(X,ρ) met X≠ϕX≠ϕ en ρρ een relatie op XX zodat (∀x∈X,∃y∈X:xρy)(∀x∈X,∃y∈X:xρy), bestaat er een rij (xn)n(xn)n in XX met (∀n∈N:xnρxn+1)(∀n∈N:xnρxn+1)". Bewijs dat (CDC)⇒(ACC)(CDC)⇒(ACC).
   - Toon aan dat Z,Q,R∈V(ω+ω)Z,Q,R∈V(ω+ω)

Categorieën:

- Wiskunde
- MWIS