# Lineaire algebra en meetkunde



### Lineaire algebra en meetkunde

| | |
|---|---|
| Richting | Wiskunde |
| Jaar | 1BWIS |

## Bespreking

Dit vak gaat over vectoren, matrices, en zowat alles wat je daarmee kan.

### Theorie

Dit vak wordt gegeven door Boris Shoyket. Hij heeft soms moeite om structuur in zijn lessen te leggen. Gebruik dus zeker de cursus voor, tijdens en na de les om zelf die structuur te zien en te begrijpen. De cursus is logischer opgebouwd dan de les.

### Oefeningen

De oefeningen worden gegeven door Sten Veraa, een van de beste assistenten. Je kan alles aan hem vragen, hij is altijd bereid om te helpen.

### Evaluatie en examen

Doorheen het eerste semester zijn er twee taken voor het vak, die bestaan uit oefeningen van de hoofdstukken die net gezien zijn. Deze tellen mee voor 15% van het examen. Er is een oefeningenexamen en een theorie-examen in januari. Het oefeningenexamen staat op 35% van de punten (of 50% als de punten van de taak lager zijn gemiddeld dan het oefeningenexamen), het theorie-examen op 50% van de punten.

## Examenvragen

### Examen januari 2022

Prof. Boris Shoyket

#### Theorie

1. (a) Zij $A=(a)_{ij}$ een $n\times n$ bovendriehoeksmatrix zodat $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}\neq 0$. Toon aan dat $[0 \dots 0]$ de unieke oplossing is van het stelsel
$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$
   (b) Geef een inductieve definitie van de determinant van een vierkante matrix.
   (c) Zij $A\in M_n(\mathbb{R})$ een matrix met $\det(A)\neq 0$. Geef en bewijs een formule voor $A^{-1}$ in functie van $\det(A)$ en $\det(A_{ij})$.
2. Zij V een $\mathbb{R}$-vectorruimte.
   (a) Definiëer wat een basis is voor V en wat de dimensie van V is.
   (b) Bewijs dat $\dim(\mathbb{R}^n)=n$.
   (c) Zij $W\subseteq V$ een deelruimte van V. Definiëer de quotiëntruimte $V/W$. Aangenomen dat V eindigdimensionaal is, geef een formule voor $\dim(V/W)$ in functie van $\dim(V)$ en $\dim(W)$ en bewijs deze.
3. Zij V een eindigdimensionale K-vectorruimte.
   (a) Zij $f:V\to V$ een K-lineaire afbeelding. Definiëer een eigenvector en en eigenwaarde van $f$. Definiëer de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde. Geef een voorbeeld van een lineaire afbeelding met een eigenwaarde waarvan de algebraïsche en meetkundige multipliciteit en de meetkundige multipliciteit niet gelijk zijn.
   (b) Welke ongelijkheid geldt tussen de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van een eigenwaarde van $f$? Bewijs deze uitspraak.
4. Zij $E$ een Euclidische ruimte.
   (a) Zij $x\in E$ een punt en $L\subseteq E$ een lineaire variëteit. Definiëer de afstand van $x$ tot $L$ en definiëer de orthogonale projectie van $x$ op $L$.
   (b) Geef en bewijs de stelling die een verband geeft tussen de afstand $d(x,L)$ en de orthogonale projectie van $x$ op $L$.

#### Oefeningen

1. (8 ptn) Gegeven zijn het vlak αα en de rechte RR. We spiegelen de rechte RR ten opzichte van het vlak αα en noemen deze SS. Bepaal een vergelijking voor SS. α≡3x1+x2−2x3=−5,R≡{2x1+x2+2x3=13x1−x2=3α≡3x1+x2−2x3=−5,R≡{2x1+x2+2x3=13x1−x2=3
2. (7 ptn) Gegeven zijn de rechten LL en MM en het vlak ββ.L≡⎡⎣⎢x1x2x3⎤⎦⎥=⎡⎣⎢512⎤⎦⎥+ρ⎡⎣⎢−21−2⎤⎦⎥,M≡{2x1−3x2+x3=−74x1+x2−5x3=−7L≡[x1x2x3]=[512]+ρ[−21−2],M≡{2x1−3x2+x3=−74x1+x2−5x3=−7 , β≡x1+x2+x3=2β≡x1+x2+x3=2.
   (a) Ga na of de rechten LL en MM evenwijdig zijn.

   (b) Bepaal het snijpunt pp van LL en ββ.

   (c) Bereken d(p,M)d(p,M).

3. (10 ptn) Gegeven is de matrix A=⎡⎣⎢3−1−1−13−1−1−13⎤⎦⎥A=[3−1−1−13−1−1−13] in M3(R)M3(R).
   (a) Bepaal de eigenwaarden van AA.

   (b) Bepaal voor iedere eigenwaarde van AA de bijhorende eigenruimte.

   (c) Bepaal een matrix S∈M3(R)S∈M3(R) zodat StrASStrAS een diagonaalmatrix is. Geef ook de verkregen diagonaalmatrix.

   (d) Ga na of de symmetrische RR-lineaire afbeelding B:R3×R3→R3:(v,w)↦vtrAwB:R3×R3→R3:(v,w)↦vtrAw een inproduct is.

4. (10 ptn) In M2(R)M2(R) beschouwen we de RR-basis E={[1000],[0010],[0100],[0001]}E={[1000],[0100],[0010],[0001]} en de deelverzameling B={[1−112],[3−112],[12−1−3],[2−110]}B={[11−12],[31−12],[1−12−3],[21−10]}.
   (a) Toon aan dat BB een basis is voor M2(R)M2(R).

   (b) Bepaal de basisovergangsmatrix van BB naar EE.

   Zij C=[1011]C=[1101] en beschouw de RR-lineaire afbeelding f:M2(R)→M2(R):A↦CtrACf:M2(R)→M2(R):A↦CtrAC

   (c) Bepaal de matrixvoorstellingen MEEMEE en MBEMEB van de lineaire afbeelding ff ten opzichte van de gegeven bassisen.

   (d) Bepaal dim(Ker(f))dim(Ker(f)) en dim(Im(f))dim(Im(f)).

## Examen januari 2021

Prof. Boris Shoyket
Corona-examen, leerstof en moeilijkheidsgraad kan dus licht afwijken.

### Theorie

1. (a) Definieer het product van twee matrices. Wanneer is dit product welgedefinieerd?

   (b) Beschouw de volgende 3×33×3-matrix
   A=⎡⎣⎢010001100⎤⎦⎥.

   A=[001100010].

   Bepaal A100A100.

2. Zij VV een RR-vectorruimte.
   (a) Definieer wat een basis van VV is en definieer de dimensie van een vectorruimte.

   (b) Stel dat dim(V)=ndim(V)=n en dat {v1,…,vn}{v1,…,vn} een basis is voor VV. Definieer w1,w2,…,wnw1,w2,…,wn als volgt:
   wk=∑ki=1vi=v1+v2+…+vk(1≤k≤n).wk=∑i=1kvi=v1+v2+…+vk(1≤k≤n).
   Bewijs dat {w1,…,wn}{w1,…,wn} ook een basis is van VV.

   (c) Stel dat VV eindig dimensionaal is. Zij {v1,…,vk}{v1,…,vk} een verzameling van lineair onafhankelijke vectoren. Bewijs dat er aan deze verzameling vectoren kunnen toegevoegd worden opdat we een basis voor VV krijgen.

3. Zij VV en WW twee RR-vectorruimten.
   (a) Definieer wat een lineaire afbeelding f:V→Wf:V→W is. Definieer wat een eigenwaarde is van een lineaire afbeelding g:V→Vg:V→V.

   (b) Definieer de karakteristieke veelterm van g:V→Vg:V→V. Bewijs dat deze onafhankelijk is van de keuze van de basis van VV.

   (c) Beschouw opnieuw de matrix uit 1(b)
   A=⎡⎣⎢010001100⎤⎦⎥.

   A=[001100010].

   Bewijs dat deze matrix één reële en twee complexe eigenwaarden heeft. Bepaal de reële eigenwaarde en de eigenruimte van deze eigenwaarde.

4. Zij EE een Euclidische ruimte.
   (a) Zij L⊆EL⊆E een lineaire variëteit. Definieer de orthogonale projectie van een punt b∈Eb∈E op LL.

   (b) Definieer de afstand tussen twee verzamelingen in een Euclidische ruimte. Onderstel dat dim(E)=3dim(E)=3. Zij L1,L2⊆EL1,L2⊆E twee niet snijdende kruisende rechten. Zij x∈L1x∈L1 en y∈L2y∈L2 twee punten zodat d(x,y)=d(L1,L2)d(x,y)=d(L1,L2). Zij RR de rechte die yy bevat en evenwijdig is met L1L1 en αα het vlak dat L2L2 en RR bevat. Bewijs dat d(x,α)=d(L1,L2)d(x,α)=d(L1,L2).

### Oefeningen

1. (5 ptn) Beschouw de deelruimten
$$U=\mathrm{Span}([20206],[414216]) \text{ en } W=\mathrm{Span}([222114],[322218],[30418])$$
van $\mathbb{R}^5$. Bepaal $\dim(U),\dim(W),\dim(U+W)$ en $\dim(U\cap W)$.
2. (10 ptn) Gegeven is de volgende vergelijking van een kwadriek
$$Q\equiv -2x_1^2-2x_2^2-2x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3-5x_1-8x_2+7x_3-10=0$$
Bepaal de normaalvergelijking van deze kwadriek. Verklaar iedere stap nauwkeurig.
3. (10 ptn) Gegeven zijn de rechten
$R\equiv\begin{cases}x_2+x_3=4\\2x_1+2x_2-x_3=0\end{cases}$ en $S\equiv\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\7\end{bmatrix}+\rho\begin{bmatrix}2\\1\\-4\end{bmatrix}$.
Bepaald het volgende:
(a) Het vlak $\alpha$ loodrecht op de rechte $R$ die het punt $\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix}$ bevat.
(b) Het snijpunt $p$ van $R$ en $\alpha$ en het snijpunt $q$ van $S$ en $\alpha$.
(c) De rechte $L$ evenwijdig met het vlak $\alpha$ die de rechte $S$ loodrecht snijdt en die het punt $a=\begin{bmatrix}4\\-1\\0\end{bmatrix}$ bevat.
(d) De afstand van het punt $a$ tot $\alpha$.
4. (10 ptn) In $\mathbb{R}^4$ zijn de volgende vectoren gegeven:
$e_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix},e_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\\0\end{bmatrix},e_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix},e_4=\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\end{bmatrix},v_1=\begin{bmatrix}-2\\3\\1\\1\end{bmatrix},v_2\begin{bmatrix}5\\-4\\-2\\-1\end{bmatrix},v_3=\begin{bmatrix}4\\-1\\-1\\0\end{bmatrix},v_4=\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix},$
Je mag zonder bewijs gebruiken dat $B=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ en $E=\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ basissen zijn.
(a) Bepaal de basisovergangsmatrix van $B$ naar $E$.
Zij $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$ de lineaire afbeelding die bepaald wordt door de beelden van de vectoren in $B$ op de volgende manier
$$f(v_1)=v_1-3v_3,f(v_2)=v_3+2v_4,f(v_3)=v_2-3v_4,f(v_4)=v_1+2v_2$$
(b) Bepaal de matrices $M_B^B(f)$ en $M_B^E(f)$ van de lineaire afbeelding $f$ ten opzichte van de gegeven basissen.
(c) Bepaal een basis voor $\mathrm{Ker}(f)$ en $\mathrm{Im}(f)$

## Examen januari 2020

### Theorie

1. 
   1. Definieer het product van twee matrices. Wanneer is dit product welgedefinieerd?
   2. Definieer wat een lineaire afbeelding tussen vectorruimten is en associeer een matrix met een lineaire afbeelding tussen eindig dimensionale vectorruimten met een gegeven basis
   3. Bewijs dat de matrix geassocieerd met de samenstelling $g\circ f$ van lineaire afbeeldingen $f:U\to V$ en $g:V\to W$, met $U,V,W$ eindig dimensionale vectorruimten met gekozen basissen, gelijk is aan het product van de matrices geassocieerd aan $g$ en $f$
2. Zij $V$ een eindig voortgebrachte vectorruimte.
   1. Zij $S=\{v_1,\dots,v_N\}$ een eindige verzameling van vectoren in $V$. Definieer Span($S$). Definieer wanneer de elementen van $S$ lineair onafhankelijk zijn. Definieer wat een basis van $V$ is.
   2. Gegeven een eindige verzameling van lineair onafhankelijke vectoren in $V$. Bewijs dat deze verzameling uitgebreid kan worden tot een basis van $V$.
   3. Beschouw de verzameling van alle $m\times n$ matrices $M_{m,n}(\mathbb{R})$. Ga na dat dit een vectorruimte is over $\mathbb{R}$. Bepaal de dimensie aan de hand van de definitie.
3. 
   1. Zij $F:V\to V$ een lineaire afbeelding, $\dim V=n$. Definieer een eigenwaarde $\lambda$ van $F$. Definieer de algebraïsche en meetkundige multipliciteit van $\lambda$.
   2. Bewijs dat de algebraïsche multipliciteit van een eigenwaarde van een lineaire afbeelding groter of gelijk is aan zijn meetkundige multipliciteit.
   3. Zij $A$ de $4\times 4$ matrix $\begin{bmatrix}\lambda&1&0&0\\0&\lambda&1&0\\0&0&\lambda&1\\0&0&0&\lambda\end{bmatrix}$. Beschouw het als een lineaire afbeelding $F:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^4$. Toon aan dat $\lambda$ de enige eigenwaarde is van $F$. Bepaal zijn algebraïsche en meetkundige multipliciteit.
4. 
   1. Definieer wat de parameter- en parametervrije vergelijking van een vlak in de 3-dimensionale affiene ruimte is. Toon hoe deze twee vergelijkingen gelinkt zijn aan elkaar.
   2. Zij $E$ de Euclidische ruimte, $L\subseteq E$ een lineaire variëteit. Definieer de orthogonale projectie van een punt op $L$.
   3. Definieer de afstand tussen twee verzamelingen in de Euclidische ruimte $E$. Geef de eigenschap die de afstand $d(p,L)$ met $p$ een punt en $L$ een lineaire variëteit in $E$, linkt aan de orthogonale projectie. Bewijs deze eigenschap.

### Oefeningen

1. (6 ptn) Zij WW de deelverzameling van RNRN (de vectorruimte van alle rijen van reële getallen met componentsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging) die bestaat uit alle rijen (a0,a1,a2,a3,…)(a0,a1,a2,a3,…) van reële getallen die voldoen aan de voorwaarde an+3=2an+2+an+1−2anan+3=2an+2+an+1−2an voor iedere n≥0n≥0. Gegeven zijn de volgende 3 elementen in WW v1=(1,0,0,−2,−4,−10,−20,…)

   v1=(1,0,0,−2,−4,−10,−20,…)

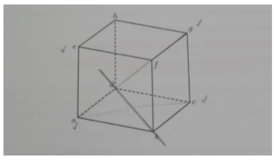
   , v2=(0,1,0,1,0,1,0,…)v2=(0,1,0,1,0,1,0,…), v3=(0,0,1,2,5,10,21,…)v3=(0,0,1,2,5,10,21,…). Toon het volgende aan:
   1. WW is een deelruimte van RNRN.
   2. {v1,v2,v3}{v1,v2,v3} is lineair onafhankelijk.
   3. {v1,v2,v3}{v1,v2,v3} is een basis van WW.
   4. Er bestaan exact drie verschillende reële getallen r,s,t∈Rr,s,t∈R zodat de rijen wr=(1,r,r2,r4,…)wr=(1,r,r2,r4,…), ws=(1,s,s2,s3,s4,…)ws=(1,s,s2,s3,s4,…) en wt=(1,t,t2,t3,t4,…)wt=(1,t,t2,t3,t4,…) in WW zitten.
   5. De verzameling {wr,ws,wt}{wr,ws,wt} is een basis van WW.

1. (10 ptn) Gegeven is de volgende vergelijking van een kwadriek Q≡x21+x22+2x33+4x1x2+2x1x3+2x2x3+2x1−2x2+8x3+10=0

   Q≡x12+x22+2x33+4x1x2+2x1x3+2x2x3+2x1−2x2+8x3+10=0

   Bepaal de normaalvergelijking van deze kwadriek. Verklaar iedere stap nauwkeurig.

1. (11 ptn) Acht punten a,b,c,d,e,f,ga,b,c,d,e,f,g en hh vormen een kubus zoals in de figuur. Het grondvlak abcdabcd is evenwijdig met het vlak α≡8x1−4x2+x3α≡8x1−4x2+x3

   Gegeven zijn de coördinaten van de punten aa en gg. a—=⎡⎣⎢7−1−7⎤⎦⎥a_=[7−1−7],
   g–=⎡⎣⎢−404⎤⎦⎥g_=[−404].
   Bepaal het volgende:
   1. Het vlak \bèta waarin de punten e,f,ge,f,g en hh liggen.
   2. Een richtingsvector van de rechte door bb en ff.
   3. De lengte van een ribbe van de kubus.
   4. De coördinaten van de punten cc en ee.
   5. Een richtingsvector van de rechte door bb en dd.
   6. De coördinaten van de punten b,d,fb,d,f en hh.

1. (8ptn) We beschouwen in de vectorruimte R4R4 de twee geordende basissen

   E=⎧⎩⎨⎪⎪⎪⎪⎪⎪⎡⎣⎢⎢⎢1000⎤⎦⎥⎥⎥,⎡⎣⎢⎢⎢0100⎤⎦⎥⎥⎥,⎡⎣⎢⎢⎢0010⎤⎦⎥⎥⎥,⎡⎣⎢⎢⎢0001⎤⎦⎥⎥⎥⎫⎭⎬⎪⎪⎪⎪⎪⎪E={[1000],[0100],[0010],[0001]},
   B=⎧⎩⎨⎪⎪⎪⎪⎪⎪v1=⎡⎣⎢⎢⎢1211⎤⎦⎥⎥⎥,v2=⎡⎣⎢⎢⎢3533⎤⎦⎥⎥⎥,v3=⎡⎣⎢⎢⎢1282⎤⎦⎥⎥⎥,v4=⎡⎣⎢⎢⎢1292⎤⎦⎥⎥⎥⎫⎭⎬⎪⎪⎪⎪⎪⎪B={v1=[1211],v2=[3533],v3=[1282],v4=[1292]}

   Verder hebben we voor iedere t∈Rt∈R een lineaire afbeelding Ft:R4→R4Ft:R4→R4 bepaald door
   Ft(v1)=2v1+v2+(3+t)v3+3v4Ft(v2)=−tv1−tv3+(1−2t)v4Ft(v3)=(2−t)v1+v2+3v3+(4−2t)v4Ft(v4)=(8−4t)v1+(4+t)v2+(6+7t+t2)v3+(12−3t)v4F
   (3+t)v3+3v4Ft(v2)=−tv1−tv3+(1−2t)v4Ft(v3)=(2−t)v1+v2+3v3+(4−2t)v4Ft(v4)=(8−4t)v1+(4+t)v2+(6+7t+t2)v3+(12−3t)v4

   Bepaal de volgende zaken:
   1. De basisovergangsmatrix PB→EPB→E.
   2. Voor iedere t∈Rt∈R de matrix M(Ft)BBM(Ft)BB.
   3. Voor iedere t∈Rt∈R een basis voor Ker(Ft)Ker(Ft).
   4. Voor iedere t∈Rt∈R een basis voor Im(Ft)Im(Ft)
   5. Voor iedere t∈Rt∈R de matrix M(Ft)BEM(Ft)EB.

### test maart 2017

Theorie

1. (3 ptn) Formuleer de stelling van de Jordan normaal vorm en geef kort (max. een halve bladzijde) de strategie van het bewijs.
2. (3 ptn) Formuleer de spectraal stelling en hoe gebruik je deze stelling om te bepalen of een veralgemeend product op RnRn al dan niet positief definiet is?
3. (1 pt) Definieer de Grassmann manifold Gr(d,n)Gr(d,n) en geef hiervan de dimensie.
4. (1 pt) Formuleer een test op een lineair dynamiisch systeem zodat het asymptotisch stabiel is, en wat verstaan we hieronder?
5. (2 ptn) Definieer het Hermitisch inproduct op CnCn en wat zijn hiervan de voornaamste eigenschappen?

Oefeningen

1. (4 ptn) Gegeven is de vergelijking van de volgende kwadriek in R3R3 Q≡−x21−x22+x23+6x1x2+2x1x3+2x2x3+7x1−x2+6x3−10=0

   Q≡−x12−x22+x32+6x1x2+2x1x3+2x2x3+7x1−x2+6x3−10=0

   .

2. (4 ptn) Van een matrix A∈M8(R)A∈M8(R) zijn de volgende gegevens gekend
   det(A)=−12,rank(A+2I8)=6,rank((A−I8)2)=5,rank((A−I8)4)=3

   det(A)=−12,rank(A+2I8)=6,rank((A−I8)2)=5,rank((A−I8)4)=3

   .
   - Wat zijn de eigenwaarden van A? Wat is de multipliciteit van iedere eigenwaarde als wortel van de karakteristieke veelterm? Verklaar je antwoorden.
   - Bepaal de Jordan normaal vorm van de matrix A.
3. (2 ptn) Zij A∈Mn(R)A∈Mn(R) een orthogonale matrix. Toon volgende eigenschappen aan.
   - Voor een eigenwaarde λ∈Cλ∈C van A geldt dat λλ¯¯¯=1λλ¯=1.
   - Twee eigenvectoren v⃗ ,w⃗ ∈Cnv→,w→∈Cn van A met verschillende eigenwaarden staan loodrecht op elkaar ten opzichte van het Hermitisch inproduct, i.e. (v⃗ ,w⃗ v→,w→) = 0.

### test december 2016

Theorie

1. (3 ptn) Het bewijs van de meetkundige interpretatie van de determinant gaat als volgt: Herinner de QR-decompositie van A, dat is A=Q.RA=Q.R waarbij Q orthogonaal is en R een bovendriehoeksmatrix met diagonaal-entries r11=||v⃗ 1||r11=||v→1|| en voor i>1,rii=||u⃗ i||=||v⃗ i−projVi−1(v⃗ i)||i>1,rii=||u→i||=||v→i−projVi−1(v→i)|| dat de afstand is van v⃗ iv→i tot de deelruimte Vi−1Vi−1. Bijgevolg is det(A)=det(Q)det(R)=±||v⃗ 1||||u⃗ 2||…||u⃗ n||det(A)=det(Q)det(R)=±||v→1||||u→2||…||u→n|| (1). Nu is het volume van de j-dimensionale parallellepipedum EjEj met basis Ej−1Ej−1 in Vj−1Vj−1 en hoogte ||u⃗ i||||u→i|| gelijk aan vol(Ej−1)||u⃗ i||vol(Ej−1)||u→i||. Bijgevolg hebben we inductief vol(En)=∏ni=1||u⃗ i||vol(En)=∏i=1n||u→i|| (2).
   - Waarom geldt gelijkheid (1)?
   - Bewijs per inductie gelijkheid (2).
2. (2 ptn) De quotient ruimte van V ten opzichte van W noteren we met V/W={[v⃗ ]|v∈V}V/W={[v→]|v∈V} de verzameling van alle equivalentieklassen ten opzichte van de equivalentierelatie ∼∼. Merk op dat dezelfde klasse verschillende representanten kan hebben, dus in V/W hebben we [v⃗ ]=[u⃗ ][v→]=[u→] als en slechts als v⃗ −u⃗ ∈Wv→−u→∈W. Op V/W definieren we de vectorbewerkingen als geinduceerd door deze van V. [v⃗ ]+[u⃗ ]=[v⃗ +u⃗ ][v→]+[u→]=[v→+u→] en λ.[v⃗ ]=[λ.v⃗ ]λ.[v→]=[λ.v→]. Ga na dat deze definities niet afhangen van de gekozen representanten in de equivalentieklassen.
3. (2 ptn) In het bewijs dat de eigenwaarden van een geconjugeerde matrix dezelfde zijn als deze van de oorspronkelijke matrix hebben we de volgende gelijkheden
   det(xIn−S−1.A.S)=det(S−1.(xIn−A).S)=det(S)−1det(xIn−A)det(S)=det(xIn−A)

   det(xIn−S−1.A.S)=det(S−1.(xIn−A).S)=det(S)−1det(xIn−A)det(S)=det(xIn−A)

   Waarom gelden deze gelijkheden?
4. (3 ptn) Bewijs: Kies een basis {v⃗ 1,…,v⃗ n}{v→1,…,v→n} voorde n-dimensionale vectorruimte V en een basis {w⃗ 1,…,w⃗ m}{w→1,…,w→m} voor de m-dimensionale vectorruimte W. Bijgevolg kunnen we f voorstellen door een m×nm×n matrix F=[f(v⃗ 1)…f(v⃗ n)]F=[f(v→1)…f(v→n)] Pas nu het Gauss-Jordaneliminatie algoritme toe, dit wil zeggen, we vinden een omkeerbare m×mm×m matrix C zodat C.F=ref(F)C.F=ref(F),de rij-echelon vorm van F,met j1,...,jkj1,...,jk de kolommen met een leidende 1, dan is duidelijk Im(f)=C.Im(f)=vect(C.w⃗ j1,...,C.w⃗ jk)Im(f)=C.Im(f)=vect(C.w→j1,...,C.w→jk) omdat elke andere kolom in ref(F) een lineaire combinatie is van kolommen met een leidende 1. Bijgevolg is de dimensie van Im(f) gelijk aan het aantal kolommen in ref(F) met een leidende 1 dus gelijk aan Rank(F). We beweren nu dat de dimensie van de kern Ker(f) gelijk is aan het aantal kolommen zonder leidende 1. Laat x⃗ =[x1…xn]trx→=[x1…xn]tr een kolomvector zijn van variabelen en bekijk het lineaire stelsel dat de kern bepaalt ref(F).x⃗ =0⃗

   ref(F).x→=0→

   uit de vorm van ref(F) zien we dat de variabelen xjuxju die horen bij een kolom met leidende 1 vrij opgelost kunnen worden in functie van de variabelen die horen bij kolommen zonder leidende 1. Bijgevolg is de dimensie van Ker(f) gelijk aan n - k en zijn we klaar.
   - Formuleer nauwkeurig de stelling die hier bewezen wordt.
   - Welke fout is hier in het 'bewijs' geslopen? Hoe kan je deze fout verbeteren?

Oefeningen

1. (2 ptn) Bepaal de determinant van de volgende matrix
   ⎡⎣⎢9966633338855522227744441111⎤⎦⎥

   [9988776665554443333222221111]

2. (4 ptn) We noteren het inproduct van vectoren x⃗ ,y⃗ ∈Rnx→,y→∈Rn als x⃗ ⋅y⃗ x→⋅y→. Stel V⊆RnV⊆Rn een m-dimensionale deelruimte van RnRn met basis {v⃗ 1,…,v⃗ m}{v→1,…,v→m}. Beschouw dan de afbeelding f:Rn→Rm:w⃗ ↦⎡⎣⎢⎢w⃗ ⋅v⃗ 1⋮w⃗ ⋅v⃗ m⎤⎦⎥⎥f:Rn→Rm:w→↦[w→⋅v→1⋮w→⋅v→m]
   - Toon aan dat f een lineaire afbeelding is tussen de vectorruimten RnRn en RmRm.
   - Bepaal Ker(f).
   - Bepaal Im(f).
   - Bewijs dat dim(V)+dim(V⊥)=ndim(V)+dim(V⊥)=n.
3. (4 ptn) Gegeven is de matrix A=⎡⎣⎢11−2332−3−10⎤⎦⎥A=[13−313−1−220]
   - Bepaal de eigenwaarden van A.
   - Bepaal de eigenruimten van A.

### test november 2016

Theorie

1. (4 ptn) Definieer de volgende begrippen nauwkeurig en volledig:
    - Voor een verzameling vectoren $V=\{\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_n\}$ in $\mathbb{R}^n$:
        - V is een basis voor $\mathbb{R}^n$
        - V is een orthogonale basis.
        - De norm van de vector $\vec{v}_1$
    - Voor een matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$:
        - De rang van A.
        - De getransponeerde van A.
        - Een stelsel lineaire vergelijkingen met coefficienten matrix A.
2. (3 ptn) Formuleer en bewijs de Cauchy-Schwartz ongelijkheid en de driehoeksongelijkheid
3. (3 ptn) Voor een matrix $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ en bijhorende afbeelding $A := \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m : \vec{v} \mapsto A.\vec{v}$
    - Definieer $Ker(A)$ en $Im(A)$.
    - Toon aan dat $Im(A)^\perp = Ker(A^{tr})$.

Oefeningen

1. (4 ptn) Gegeven de vectoren $\vec{v}_1=\begin{bmatrix}1\\-3\\2\\0\end{bmatrix}, \vec{v}_2=\begin{bmatrix}2\\-5\\4\\k\end{bmatrix}, \vec{v}_3=\begin{bmatrix}0\\k\\2\\1\end{bmatrix}, \vec{v}=\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\\-4\end{bmatrix}$ Bepaal voor welke waarden van de parameter $k \in \mathbb{R}$ geldt dat $\vec{v} \in vect(\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3)$.
2. (4 ptn) Zij A een omkeerbare matrix en B een matrix zodat $A^{-1}=\begin{bmatrix}-3&1&-3\\1&-1&2\\2&1&0\end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix}1&-1\\-1&-1\\-1&1\end{bmatrix}$
    - Bepaal A
    - Bepaal de matrix X waarvoor geldt dat $A^2X^{tr}=B$.
3. (2 ptn) Zijn de volgende beweringen juist of fout? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
    - Als V en W twee deelruimten zijn van $\mathbb{R}^n$, dan is $V \cap W$ ook een deelruimte van $\mathbb{R}^n$
    - Voor elk natuurlijk getal $n \geq 1$ geldt dat een vierkante, symmetrische $n \times n$ -matrix met alle entries verschillend van 0 omkeerbaar is.

Categorieën:

- Wiskunde
- 1BWIS