Numerieke Methoden

tuyaux.winak.be/index.php/Numerieke_Methoden

Numerieke methoden	
Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Vakbeschrijving

Theorie

De theorie wordt gegeven door professor Cuyt. Het vak behandelt vooral verschillende basissen van polynomen en toepassingen daarvan en numerieke algoritmes voor numerieke algebra. Er wordt ook een beetje foutenanalyse terug herhaald. Er is geen cursus, je moet zelf notities nemen, al zijn er aanvullende nota's op BlackBoard of op de website, die meer inhouden dan wat er in de les gezien is.

Oefeningen

De oefeningen worden gegeven door Sem. Het zijn voorbeelden uit de theorie of bewijzen die daar niet gegeven worden of het implementeren van de algoritmes. Sem is een vriendelijke man en geeft goed uitleg en wil indien nodig zeker de nodige oplossingen online zetten.

Examen

Het examen zelf telt voor 65% in het eindtotaal door en er is ook nog een project dat voor de overige 35% meetelt. Al blijkt prof. Cuyt de theorie wel zeer belangrijk te vinden en moet je daar dus best op slagen! Het examen is schriftelijk, gesloten boek en zonder mondelinge toelichting. Er wordt meestal 1 vraag uit de cursus gesteld, de andere zijn eerder inzicht.

Het project is elk jaar anders. In 2014 was dit interpoleren met verschillende technieken en 1 ervan exact integreren d.m.v. een Gaussische kwadratuurregel.

Examenvragen

Academiejaar 2020 - 2021

1ste Zit

Bestand:Numerieke Methoden Juni2021.pdf

2de zit

Bestand:Numerieke Methoden September2021.pdf

Academiejaar 2017 - 2018

1ste Zit

Media:Examenjuni2018.pdf

2de Zit

Media:Examen_augustus_2018.pdf

Academiejaar 2016 - 2017

1. Bewijs ∑+∞j=−∞Bki(tj)=1,∀k≥1∑j=−∞+∞Bik(tj)=1,∀k≥1 met tj=jtj=j.
2. VV Vandermonde matrix, Mk,k=1,...,n−1Mk,k=1,...,n−1.
    - Geef en bewijs M−1kMk−1 en M−11...M−1n−1M1−1...Mn−1−1.
    - Geef de rotatiematrix die zorgt dat door vermenigvuldiging met VV er een nul komt op plaat (n,1)(n,1).
3. f=(f1,...,fn),f=p(xi),p(x)=∑ni=0fili(x)f=(f1,...,fn),f=p(xi),p(x)=∑i=0nfili(x). Stel gepertubeerde p~p~, bewijs ‖p−p~p‖∞≤maxx∈[a,b]∑ni=0|li(x)|‖f−f~f‖∞‖p−p~p‖∞≤maxx∈[a,b]∑i=0n|li(x)|‖f−f~f‖∞
4. Bewijs dat je de Hilbert-matrix krijgt voor de coëfficiëntenmatrix van ∫10(∑ni=0cox0−f(x))2∫01(∑i=0ncox0−f(x))2
5. A=(7/54/54/513/5)A=(7/54/54/513/5)
    - Geef de singuliere waarde ontbinding van AA.
    - Bespreek dimensies, eigenschappen van de matrices.
6. ∫baf(x)w(x)dx≈∑ni=0wif(xi)∫abf(x)w(x)dx≈∑i=0nwif(xi) Bewijs dat als we van ff een polynoom van graad 2n+12n+1 aftrekken, we dezelfde foutafschatting krijgen
    - Hoe bekom je xixi?
    - Hoe bekom je wiwi?
    - Voor welke f(x)f(x) geldt de gelijkheid?
    - Bewijs dit laatste.

Academiejaar 2015 - 2016

1ste Zit

1. yi=f(xi)yi=f(xi) met i=0,...,mi=0,...,m, <gj,gk>=δjk<gj,gk><gj,gk>=δjk<gj,gk>. Geef de discrete formule voor ∑k=0nakgk(x)∑k=0nakgk(x) met n<mn<m

2.
    - Geef het veelterminterpolatieprobleem.
    - Geef een voorbeeld waarbij de veelterminterpolatie niet convergeert.
    - Geef voorwaarden voor x_i en y_i zodat veerlterminterpolatie wel convergeert.
3.
    - Stel x_* oplossing van $Ax=b$ en $\tilde{x}$ oplossing van $A\tilde{x}=\tilde{b}$. Welke rol heeft het conditiegetal $\kappa(A)$ bij $\frac{||\tilde{x}_* - x_*||}{||x_*||}$?
    - Beschrijf beknopt de rol van $\kappa(A)$ bij:
        - LU factorisatie
        - QR factorisatie
        - Eigenwaardenprobleem
4. Geef voorwaartse en achterwaartse foutenanalyse van $\sum_{i=1}^{n} a_n b_n$ (het inwendig vectorproduct).

2de zit

1. Toon aan dat de beste benadering van de vorm $\sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x)$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i g_i(x)$$

   met $n<m$ voor een gegeven functie $f(x)$ of gegeven data $f(x_i), i=0,...,m$, zowel in de discrete als continue KK gevonden wordt met dezelfde coëfficiënten a_i. Leid deze formule af, enkel gebruik makend van de notatie van het inwendig product. (g_i's orthogonaal)
2. Beschouw een strikt monotoon stijgende of dalende functie $\phi:[a,b]\to[-1,1], x\mapsto\phi(x)$

$$\phi:[a,b]\to[-1,1], x\mapsto\phi(x)$$

   Gegeven zijn de data f_i in punten $x_i\in[a,b]$ voor $i=0,..n$. Schrijf het lineaire stelsel neer dat de veralgemeende veelterminterpolatiewaarden uitdrukt $p_n(x_i)=f_i$ en $p_n(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j \phi(x)^j$

$$p_n(x_i)=f_i \text{ en } p_n(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j \phi(x)^j$$

    - Onder welke voorwaarde heeft het stelsel een unieke oplossing voor coëfficiënten a_j in $p_n(x)$?
    - Geef een tegenvoorbeeld dat illustreert dat veralgemeende veelterminterpolatie niet noodzakelijk convergeert.
3. Stel x_* oplossing van $Ax=b$ en $\tilde{x}$ oplossing van $A\tilde{x}=\tilde{b}$. Welke rol heeft het conditiegetal $\kappa(A)$ bij $\frac{||\tilde{x}_* - x_*||}{||x_*||}$?

    Beschrijf beknopt de rol van $\kappa(A)$ bij:
    - LU factorisatie
    - QR factorisatie
    - Eigenwaardenprobleem

4. Geef de voorwaartse en achterwaartse foutenanalyse van

$$f(x)=\sum_{i=-n}^{m} a_i x^i \text{ met } n,m\in \mathbb{N}$$

Je mag veronderstellen dat x en alle a_i exact voorstelbaar zijn in gebruikte floating-point precisie.

Academiejaar 2014 - 2015

2de zit

1. Beschouw $n+1$ datapunten $(x_i,y_i)_{i=0,..,n}$. De data zijn afkomstig van een tweemaal continu afleidbare functie $f(x)$ op het interval $[x_0,x_n]$. Voor welke functie is

$$\int_{x_0}^{x_n} f^{(2)}(x)^2 dx$$

minimaal? Bewijs.
2. Definieer het inwendig product

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(x)g(x)\omega(x)dx$$

met $\omega(x)\geq 0$. Voor welke veeltermbenadering $p(x)$ van graad n is $\langle e(x),e(x)\rangle$ minimaal? (Hier is $e(x)=f(x)-p(x)$.) Leid de formule voor $p(x)$ af.
3. Stel $Ax=b$ een overbepaald stelsel lineaire vergelijkingen. (A een $m\times n$-matrix met $m>n$.) Welke matrix transformaties op het stelsel leveren de vector x af zodat

$$\|b-Ax\|_2$$

minimaal is? Beschrijf één transformatiestap.
4. Beschouw

$$\int_a^b f(x)\omega(x)dx,\omega(x)\geq 0$$

- Welke integraalregels gebruiken een minimaal aantal knooppunten en gewichten? Hoeveel voor welke orde?
- Leg uit hoe je de knooppunten en gewichten kunt berekenen. Bewijs dit.

Academiejaar 2013 - 2014

1. Gegeven de punten xi=(cos((2i−1)π/(2n))xi=(cos((2i−1)π/(2n)) met (i=1…n)(i=1…n). Zij dan TiTi de Chebyshev polynomen (van de eerste soort). Dan geldt de volgende orthogonaliteitsrelatie
   ∑i=1nTk(xi)Tl(xi)=(1+δ0k)(n/2)δkl
   ∑i=1nTk(xi)Tl(xi)=(1+δ0k)(n/2)δkl

   . We interpoleren nu door deze punten xixi
   pn(x)=∑j=1n−1ajxj
   pn(x)=∑j=1n−1ajxj

   met pn(xi)=fipn(xi)=fi. Geef een expliciete formule voor deze veelterm (geen recursie).
2. Gegeven een functie f∈C([a,b])f∈C([a,b]) uitgerust met het inproduct
   ||f||22=∫abf(x)2w(x)dx
   ||f||22=∫abf(x)2w(x)dx

   . Bewijs dat dan volgende equivalentie geldt voor de beste benadering.
   p∗∈Pnp∗∈Pn is de beste benadering van ff in PnPn als en slechts als ∫ab(f−p∗)(x)p(x)w(x)dx=0∫ab(f−p∗)(x)p(x)w(x)dx=0 voor alle p∈Pnp∈Pn.
3. Bewijs dat voor een functie ff die 2 keer continu differentieerbaar is en de natuurlijke cubische spline S(x)S(x)door punten a=x1<x2…xn−1<xn=ba=x1<x2…xn−1<xn=b die de funtie interpoleert in die punten geldt dat
   ∫abS′′(x)dx≤∫abf′′(x)dx
   ∫abS′′(x)dx≤∫abf′′(x)dx

   .
4. Gegeven de orthonormale polynomen {pi|i=1…n}{pi|i=1…n} bij de bijhorende gewichtsfunctie w(x)w(x). Dus ∫abpl(x)pk(x)w(x)dx=δkl∫abpl(x)pk(x)w(x)dx=δkl. Stel dan xixi, i=1…n+1i=1…n+1 de wortels van de veelterm pn+1pn+1 en wiwi de bijhorende gewichten. Gegeven de Gaussische kwadratuur regel ∫abp(x)w(x)dx≈∑i=1n+1wip(xi)∫abp(x)w(x)dx≈∑i=1n+1wip(xi) die polynomen exact integreert tot en met graad 2n+12n+1. Bewijs dan dat de polynomen {p0…pn}{p0…pn} orthonormaal zijn tegenover volgend inproduct
   <f,g>=∑i=1n+1wif(xi)g(xi)
   <f,g>=∑i=1n+1wif(xi)g(xi)

   .
5. Zij A∈Mm,nA∈Mm,n met m>nm>n.
   - Geef een orthonormale basis voor de beeldruimte van deze operator met behulp van singuliere waarden en eigenvectoren.
   - Wat is het verband tussen singuliere waarden en de conditionering van het (kleinste kwadraten) probleem Ax=bAx=b?
   - Geef de determinant en de rang van AA is functie van zijn singuliere waarden.

Categorieën:

- Wiskunde

- 2BWIS