Differentiaalmeetkunde

tuyaux.winak.be/index.php/Differentiaalmeetkunde

Differentiaalmeetkunde	
Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Bespreking

Examenvragen

Academiejaar 2017-2018 1ste zit

Theorie

1. Beschouw een reguliere kromme $c(s)$ met booglengte s als parameter, waarvan de kromming voor alle parameters verschilt van nul.
    - Definieer de 3 vectorfuncties $t(s), n(s)$ en $b(s)$ van de triëder van Frenet. Toon aan dat ze in elk punt van de kromme een orthonormale basis vormen.
    - Definieer het begrip wringing en leid de formules van Frenet voor $t'(s), n'(s)$ en $b'(s)$ af.
2. Beschouw een oppervlak $\sigma: U \to \mathbb{R}^3, (q^1,q^2) \mapsto \sigma(q^1,q^2)$ met meetkundig oppervlak Σ.
    - Definieer de eerste grondvorm. Is de eerste grondvorm een meetkundige grootheid? Bewijs/verklaar je redenering.
    - Definieer de tweede grondvorm. Is de tweede grondvorm een meetkundige grootheid? Bewijs/verklaar je redenering.
3. De Gausskromming van een oppervlak wordt gegeven door $K=\frac{L_{11}L_{22}-L_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$
    - Toon aan dat de Gausskromming volledig bepaald wordt door de coëfficiënten g_{ij} van de eerste grondvorm en hun afgeleiden (het Theorema Egregium van Gauss). Je mag gebruik maken van de vergelijkingen van Gauss $R_{lijk}=L_{ik}L_{lj}-L_{ij}L_{lk}$, met $L_{lj}=L^i_j g_{il}$, zonder ze zelf te moeten afleiden.
    - Bespreek een belangrijke toepassing van deze stelling in de cartografie. Refereer in je bespreking expliciet naar eigenschappen die we in de cursus bewezen hebben.

4. Beschouw de differentieerbare variëteit SL(2,R)SL(2,R).
    - Geef een atlas (naar keuze) voor SL(2,R)SL(2,R). Controleer expliciet dat aan alle voorwaarden van de definitie van een atlas voldaan is.
    - Wanneer noemt men een afbeelding tussen twee differentieerbare variëteiten M en N glad (of differentieerbaar van de classe C∞C∞)? Leg uit waarom dit concept goed gedefinieerd is.
    - Toon aan dat de afbeelding die een element uit SL(2,R)SL(2,R) op haar inverse afbeeldt een gladde afbeelding is. Je mag je bij dit laatste tot één kaart (naar keuze) beperken.

Oefeningen

1. Zij c een kromme met booglengte als parameter, en met kromming 1ρ≠01ρ≠0 en wringing ττ. Bereken de kromming van c2=c′c2=c′ in functie van 1ρ1ρ en ττ.
2. Beschouw het oppervlak gegeven door σ(u,v)=(ln(uv),uv,u2)σ(u,v)=(ln(uv),uv,u2) met u>0u>0 en v>0v>0
    - Bereken de eerste en tweede grondvorm van σσ
    - Zoek de asymptotische lijnen op σσ en toon aan dat er door elk punt van σσ precies één asymptotische lijn gaat.
    - Bereken de hoofdkrommingen en hoofdraakvectoren in het punt P(0,1,1)
3. Beschouw de differentieerbare variëteit S2={(x,y,z)∈R3:x2+y2+z2=1}S2={(x,y,z)∈R3:x2+y2+z2=1} met atlas {(U1,π1),(U2,π2),(U3,π3),(U′1,π1),(U′2,π2),(U′3,π3)}{(U1,π1),(U2,π2),(U3,π3),(U1′,π1),(U2′,π2),(U3′,π3)} waarbij Ui={(x1,x2,x3)∈S2:xi>0}Ui={(x1,x2,x3)∈S2:xi>0} en U′i={(x1,x2,x3)∈S2:xi<0}π1(x,y,z)=(y,z)π2(x,y,z)=(x,z)π3(x,y,z)=(x,y)Ui′={(x1,x2,x3)∈S2:xi<0}π1(x,y,z)=(y,z)π2(x,y,z)=(x,z)π3(x,y,z)=(x,y)
    - Welk punt x heeft lokale coördinaten (12,12)(12,12) volgens de kaart (U2,π2)(U2,π2)?
    - Welk punt y heeft lokale coördinaten (0,35)(0,35) volgens de kaart (U′1,π1)(U1′,π1)?
    - Beschouw de raakvector v aan x die in lokale coördinaten gegeven is door (5∂∂x+3∂∂z)|x(5∂∂x+3∂∂z)|x, volgens de kaart (U2,π2)(U2,π2). Zoek een kromme c(t)c(t) voor t∈]−1,1100[t∈]−1,1100[zodanig dat c(t)∈S2c(t)∈S2 voor t∈]−1100,1100[,c(0)=x,c˙(0)=vt∈]−1100,1100[,c(0)=x,c˙(0)=v

Academiejaar 2015 - 2016 2de zit

Theorie

1. Give the definition of the tangent vector to a manifold M at point p. Show that all tangent vectors to fixed point p form a vectorspace Tp(M)Tp(M). Prove that dimension of Tp(M)Tp(M) is equal to dimension of the manifold M. (you can use without proof that for a smooth function g defined in a convex open set around 0∈Rn0∈Rn there is a presentation g(x)=g(0)+∑ni=1∂g∂xi|x=0⋅xi+∑ni,j=1xi⋅xj⋅g~ij(x)g(x)=g(0)+∑i=1n∂g∂xi|x=0⋅xi+∑i,j=1nxi⋅xj⋅g~ij(x) form some smooth functions g~ij(x)g~ij(x)). Why is it necessary to consider the germs of functions in the definition of a tangent vector rather than just functions in some open set?
2. Consider the sphere S2∈R3S2∈R3 of radius R with its length of arc. Is it possible to find a coordinate system f:U→R2f:U→R2 of an open set U∈S2U∈S2, which preserves lengths of all arcs (where R2R2 is considered with its Euclidean metric)?

3. Take smooth functions f,g:U→Rf,g:U→R where U∈RU∈R is an open set, such that f(x)>0f(x)>0 and f˙(x)2+g˙(x)2=1f˙(x)2+g˙(x)2=1for any x∈Ux∈U. Consider the surface (called the revolution surface) in R3R3 defined by
σ(u,v)=(f(u)cosv,f(u)sinv,g(u))

σ(u,v)=(f(u)cosv,f(u)sinv,g(u))

where u∈U,0<v<2πu∈U,0<v<2π. Prove that σσ is a parametrization. Compute the first and the second fundamental form at any point (u,v)(u,v). Prove that the Gaussian curvature at point (u,v)(u,v) does not depend on vv and is equal to
K(u,v)=−f¨(u)f(u)

K(u,v)=−f¨(u)f(u)

Academiejaar 2014 - 2015 1ste zit

Theorie

Mondeling met schriftelijke voorbereiding (examen in het Engels).

1. Vraag 1:
   - Definieer de booglengte voor een gladde kromme in RnRn.
     - Gebruik de booglengte om te bewijzen dat elke curve een snelheids-1 herparametrisatie heeft.
     - Is deze herparametrisatie uniek?
   - Definieer de kromming in een willekeurig punt van een kromme in RnRn.
     - Wat is de getekende kromming van een kromme in R2R2?
     - Waarom kan men geen getekende kromming definiëren voor krommen in R3R3?
2. Vraag 2:
   - Definieer de eerste en de tweede fundamentaalvorm van een glad oppervlak op de volgende twee manieren:
     - In coördinaten
     - *Invariantly*
   - Definieer k1,k2k1,k2 en de Gausskromming KK.
     Definieer k1k1 en k2k2 algebraïsch en geometrisch.
   - Formuleer het theorema van Euler.
   - Definieer het begrip *an intrinsic invariant*.
   - Formuleer het Gauss Egregium Theorema.

Oefeningen

1. Gegeven is de logaritmische spiraal in π3π3 met als parametrisatie
   γ(θ)=(12−√eθcosθ,12−√eθsinθ,0)

   γ(θ)=(12eθcosθ,12eθsinθ,0)

   - Definieer de omwentelingskegel
     K≡x2+y2=z2

     K≡x2+y2=z2

     Bewijs dat de snijkromme (CC) van KK en de cilinder met als richtkromme γ(θ)γ(θ) en richtvector evenwijdig met de zz-as een helix is.
   - Bepaal de krommingen κ,κnκ,κn en κgκg van CC t.o.v. de kegel.

2. Definieer het oppervlak M met impliciete vergelijking
   $z=(y^2-x)^2$

   $$z=(y^2-x)^2$$

   - Geef een gladde, injectieve parametervergelijking die alle punten van M bereikt.
   - Welke punten van M zijn elliptisch, hyperbolisch, parabolisch en vlak?
   - Stel K de kromme die alle parabolische punten van M beschrijft. Geef een reguliere weg
     $\alpha:\mathbb{R}\to M$

     $$\alpha:\mathbb{R}\to M$$

     met $\alpha(\mathbb{R}=K$.
   - Geef de hoofdrichtingen in een willekeurig punt van K.

Academiejaar 2013 - 2014 1ste zit

1. Give the definition of the tangent vector to a manifold M at point p. Show that all tangent vectors to a fixed point p form a vector space $T_p(M)$. Prove that the dimension of $T_p(M$ is equal to the dimension of the manifold M. (You can use without proof that for a smooth function g defined in a convex open set around $0\in\mathbb{R}^n$ there is a presentation $g(x)=g(0)+\sum_{i=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_i}|_{x=0}.x_i+\sum_{i,j=1}^n x_i.x_j.\tilde{g}_{ij}(x)$ for some smooth function $\tilde{g}_{ij}(x)$). Why it is necessary to consider the germs of functions in the definition of a tangent vector rather than just functions in some open set?
2. Consider the sphere $S^2\subset\mathbb{R}^3$ of radius R with its length of arc. Is it possible to find a coordinate system $f:U\to\mathbb{R}^2$ of an open set $U\subset S^2$, which preserves lenghts of all arcs (where $\mathbb{R}^2$ is considered with its Euclidean metric)?
3. Take smooth functions $f,g:U\to\mathbb{R}$ where $U\subset\mathbb{R}$ is an open set, such that $f(x)>0$ and $\dot{f}(x)^2+\dot{g}(x)^2=1$ for any $x\in U$. Consider the surface (called the revolution surface) in $\mathbb{R}^3$ defined by
   $\sigma(u,v)=(f(u)\cos(v),f(u)\sin(v),g(u))$

   $$\sigma(u,v)=(f(u)\cos(v),f(u)\sin(v),g(u))$$

   where $u\in U$, $0<v<2\pi$.

   Prove that σ is a parametrization. Compute the first and the second fundamental form at any point (u,v). Prove that the Gaussian curvature at a point (u,v) does not depend on v and is equal to $K(u,v)=-\frac{\ddot{f}(u)}{f(u)}$

Academiejaar 2012 - 2013 1ste zit

1. Question 1

   Definition of a tangent vector at a point of a smooth manifold. Tangent space to a point. Main steps in the proof of Theorem that dimension of the tangent space is equal to dimension of manifold.
2. Question 2

   Differential forms on smooth manifolds. Integration of differential forms.

3. Question 3
    - Let $A:Rn\to RnA:Rn\to Rn$ be a linear map, with $\det A\neq 0\det A\neq 0$. Let $In=[0,1]\times nIn=[0,1]\times n$ be the unit cube. Prove that volume $vol(A(In))=|\det A|vol(A(In))=|\det A|$.
    - Consider $n=2n=2$, $A=[11/311/2]A=[111/31/2]$. Consider the sequence $cNcN$, where $cN=vol(AN(I2))cN=vol(AN(I2))$. Prove that $\lim N\to\infty cN=0\lim N\to\infty cN=0$.

Categorieën:

- Wiskunde
- 2BWIS