

Algemene relativiteitstheorie

 tuyaux.winak.be/index.php/Algemene_relativiteitstheorie

Algemene relativiteitstheorie (VUB)

Richting	<u>Fysica</u>
----------	---------------

Jaar	<u>MFYS</u>
------	-------------

Bespreking

Er is geen cursus van de prof zelf, hij werkt aan de hand van het handboek Spacetime and Geometry van Sean Carroll. Elke les wordt een stuk uit het handboek overlopen, hier en daar wordt soms wat extra informatie gegeven of wordt iets op een andere manier uitgelegd. De prof vraagt altijd om de les thuis voor te bereiden door een aantal pagina's grondig door te lezen. Doe dit zeker aangezien er vaak veel informatie zit in elke les en je anders misschien niet goed kan volgen. Het kan nuttig zijn om tijdens deze voorbereiding al een samenvatting te maken en deze naar de les mee te nemen. Tijdens de les kan je dan eventueel wat toevoegen aan je samenvatting.

Oefeningen en theorie zijn schriftelijk, beiden op hetzelfde examen en kunnen beiden mondeling besproken worden. Vanaf dat je een van de vragen af hebt kan je al mondeling gaan doen.

Het examen is gesloten boek. Vergelijkingen worden gegeven, tenzij je ze via fysisch redeneren kan achterhalen (formule voor frequentie, afhankelijkheid van dichtheden met $a(t), \dots$). De belangrijkste vragen op het examen gaan meestal over laatste hoofdstukken. Schwarzschild, gravitatie golven en cosmologie zijn dus erg belangrijke hoofdstukken die je best goed begrijpt. De prof heeft niet de neiging om lange rekenkundige afleiding te vragen, de kans is dus bijvoorbeeld klein dat je bijvoorbeeld de Schwarzschild metriek zult moeten afleiden. Er wordt eerder getest op het begrijpen van de verschillende concepten en of je met deze concepten en formules kan werken en fysisch begrijpt.

En je moet geen stress voor het examen hebben! De prof ziet jou even graag slagen als jijzelf, als een vraag niet lukt kan je deze nog proberen voor halve punten mits het krijgen van een eventuele tip.

Puntenverdeling

1 examen van 4 uur dat zowel oefeningen als theorie zijn, opgesteld door professor Craps zelf. Dit examen staat op 20 punten. Doorheen het jaar zijn er taken die je moet maken, als je op deze taken geslaagd bent, kan dit er voor zorgen dat een 9 een 10 wordt en je toch slaagt voor het vak.

Examenvragen

Academiejaar 2021-2022 1^{ste} zit

Prof. Hans Van Haevermaet

Theorie

:

Examen 1e zit Algemene Relativiteitstheorie
10 januari 2022

Hans Van Haevermaet

Het examen is schriftelijk met mondelinge toelichting, gesloten boek, en duurt 4 uur.
Schrijf duidelijk op elk antwoordblad je naam.
Succes!

- 3 1. Beschouw K^μ een Killing vector zodat $\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0$, en $X^\mu = dx^\mu/d\lambda$ de raakvector langs een geodeet met affine parameter λ :
- ✓ (a) Wat is een Killing vector, en waarom gebruiken we dit? (1 punt)
- (b) Toon aan dat $K_\mu X^\mu$ constant is langs de geodeet. (2 punten)
- 4 2. Beschouw een variëteit met de volgende metriek en coördinaten $x^\mu = (t, x)$:

$$ds^2 = \frac{1}{t^2}(-dt^2 + dx^2)$$

- ✓ (a) Bereken de Christoffel symbolen voor deze metriek (2 punten) met

$$\Gamma_{\mu\nu}^\sigma = \frac{1}{2}g^{\sigma\rho}(\partial_\mu g_{\nu\rho} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}).$$

- ✓ (b) Stel de geodetische vergelijkingen op, en gebruik deze om na te gaan of de curve $x^\mu(\lambda) = (\sec \lambda, \tan \lambda)$ een geodeet is of niet. (2 punten)

- 4 3. De eerste oplossing van de vergelijkingen van Einstein in vacuum werd reeds gevonden in 1916 en is de Schwarzschild metriek:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2.$$

Waarmee ook de volgende differentiaal vergelijking kan afgeleid worden:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\lambda} \right)^2 + V(r) = \frac{E^2}{2} \quad \text{met} \quad V(r) = \frac{\epsilon}{2} - \frac{\epsilon GM}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{GML^2}{r^3}$$

waarbij $\epsilon = +1$ voor massieve deeltjes.

Exercising Theorem:
je moet de
term $-GM/r^3$ laten
staan! r^3
Ik dacht: Kepler
is klassiek
→ schrap de
term die enkel
in algemene relativiteit
voorkomt, maar op
nordelijke toelichting
leek dat dit niet
de betekenis was

- ✓ (a) Welke eigenschappen en/of gevolgen kan je direct afleiden als je naar deze metriek kijkt? Zijn er singulariteiten aanwezig? (1 punt)
- ✓ (b) Welke behouden grootheden kan je direct vinden uit deze metriek? (1 punt)
- ✓ (c) Gebruik al deze informatie om de derde wet van Kepler af te leiden: $\Delta t = 2\pi\sqrt{r^3/GM}$. Hierbij is Δt de periode van een omwenteling van een circulaire baan van een planeet. (2 punten)
 klassieke limit: term $-GM/r^3$ valt weg
- 4. Een belangrijk gevolg van de Algemene Relativiteitstheorie is het bestaan van zwaartekrachtsgolven:
 - ✓ (a) Welke limieten en/of benaderingen hebben we toegepast om zwaartekrachtsgolven te beschrijven? (1 punt) → $\gamma_{\mu\nu} = 0$, perturbatie: $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$
 - ✓ (b) Hoe transformeert een metriek perturbatie $h_{\mu\nu}$ onder een infinitesimale coördinaten transformatie $x'^\mu = x^\mu - \epsilon \xi^\mu$ waarbij $\epsilon \ll 1$ en ξ een vectorveld is? Waarom zijn zo'n ijk transformaties eigenlijk belangrijk? (2 punten)
 - ✓ (c) Als zwaartekrachtsgolven de ruimtetijd zelf uitrekken, hoe kunnen we dan het effect van zo'n golven op vrij-vallende deeltjes beschrijven (geen afleidingen nodig) en experimenteel gaan meten? (2 punten)
 ↳ hidden information → Feynman Periode constant deeltjes moeten zijn
- 5. Voor een maximaal symmetrische ruimtetijd hebben we gezien dat de Riemann tensor uitgedrukt kan worden als volgt:

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \kappa(g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu})$$

- ✓ (a) Werk in een 4 dimensionale ruimte en bereken de Ricci tensor, en de Ricci scalair. Plug deze dan in de vergelijkingen van Einstein en bereken een uitdrukking voor de energie-impuls tensor. Herken je het resultaat? (2 punten)
- ✓ (b) Een lichtstraal volgt een radiaal pad in de Robertson-Walker metriek: $g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$
 $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}$

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - \kappa r^2} + r^2 d\Omega^2 \right)$$

Bereken de verandering van r in functie van de affine parameter λ (i.e. $dr/d\lambda$). Gebruik hiervoor een nieuwe coördinaat χ , zodat $d\chi^2 = dr^2/(1 - \kappa r^2)$, en je kennis uit vraag 1. (2 punten)

↳ integreer met $\frac{1}{a}$
 \rightarrow integreren $\sqrt{1-\kappa r^2}$
 voor verschillende κ geeft χ i.f.v. r

1. What are gravitational waves? Describe them qualitatively (no formulas). How are they detected? How do they derive what type of process caused them?
2. How would one parameters from a a binary star system from gravitational waves in the Newtonian limit. Given is an expresion for the derivative of energy from general relativity and an expression for h in function of M , R , r and ω .
3. Prove that the contraction of a tensor is still a tensor.
4. Give the general definition of the exponential map $\exp_p: T_p \rightarrow M$ and illustrate how it works in the special case in which M is the Minkowski spacetime.
5. In an FRW universe, a comoving observer had 4-velocity $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ and $K_{\mu\nu} = a^2(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu)$ is a Killing tensor, $\nabla(\sigma K_{\mu\nu}) = 0$. (You don't have to show this.) Show how you can use this Killing tensor to define a conserved quantity for a freely falling particle. Also show that freely falling massive particles slow down with respect to comoving coordinates in an expanding universe and that massless particles undergo a cosmological redshift.
6. Give and discuss the Kruskal diagram of the Schwarzschild solution. What is the advantage of Kruskal coordinates compared to the original Schwarzschild coordinates? Kruskal coordinates en metric is given.
7. Assume we live in a spatially flat FRW universe, for simplicity always dominated by matter. Then according to general relativity, our universe started from a big bang singularity. Suppose that astronomical observations tell us that events at different spatial positions on a given time-slice have very similar properties. Is it in general possible to give a causal explanation of the similarities as due to local interactions in the common past of the events we observe? Why (not) (hint: use conformal diagram)?

Academiejaar 2015-2016 2^{de} zit

Given: Friedmann's equations, Schwarzschild metric (also in Kruskal coordinates) and the relation between the cosmological constant and the vacuum energy density.

1. Do the partial derivatives of the components of a one-form ω form a tensor? And is the external derivative $d\omega$? Show this. [2 points]
2. The formula for the frequency of a photon following a light-like geodesic is $\omega = -g_{\mu\nu} U_\mu dx^\nu / d\lambda$. Explain this formula. [2 points]
3. Explain briefly what gravitational waves are (no formulas needed). Have they been observed yet (directly or indirectly)? Explain briefly (again no formulas needed). [2 points]
4. Give and discuss the Kruskal diagram of the Schwarzschild solution. What is the advantage of Kruskal coordinates compared to the original Schwarzschild coordinates? [4 points]
5. If an FRW universe consists of radiation, matter and a negative cosmological constant, do you know if the expansion decelerates or accelerates, or do you need additional information for this? [2 points]

6. Consider an FRW universe with a negative cosmological constant, without radiation or matter. Compute the scale factor $a(t)$ and the spatial curvature κ . How do you interpret the resulting metric? [3 points]
7. Derive the conformal diagram of the anti-de Sitter spacetime, draw it and discuss it. (metric and coordinate transformation are given) [5 points]

Academiejaar 2015-2016 1^{ste} zit

Examen Brussel I

1. Explain the concepts $\omega = -g_{\mu\nu}U^\mu dx^\nu d\lambda$ and $E = -K_\mu dx^\mu d\lambda$ for a photon in the Schwarzschild metric. Use these to derive the formula of the gravitational redshift in this metric. [5 points] (The metric is given.)
2. Qualitatively explain the concept of gravitational waves. Have they been observed directly or indirectly? [2 points]
3. Show that if you contract over a pair of indices of a tensor, the result is again a tensor. [2 points]
4. Consider an FRW universe consisting only of vacuum (so no matter nor radiation) with a negative cosmological constant $\Lambda = 8\pi G\rho/\Lambda = 8\pi G\rho/\Lambda$. Calculate the scale factor $a(t)$ and the spatial curvature κ and interpret the results in terms of the metric. [3 points] (Friedmann equations and the fact that $p = -\rho$ for vacuum equation of state)
5. Consider the de Sitter metric. Perform a coordinate transformation from which you can draw the conformal diagram. [5 points] (Metric and transformation given)
6. Given are:

$$12(drd\lambda)^2 + V(r) = E$$

$$12(drd\lambda)^2 + V(r) = E$$

$$V(r) = 12\epsilon - \epsilon GMr + L^2 2r^2 - GML^2 r^3$$

$$V(r) = 12\epsilon - \epsilon GMr + L^2 2r^2 - GML^2 r^3$$

$$E = 12E^2$$

$$E = 12E^2$$

Derive the non-relativistic equivalents of these relations. To make a rigorous comparison, you need to relate the "non-relativistic energy per unit mass" to the "relativistic energy per unit mass". [3 points]

Examen Antwerpen

Given: Expression for the Riemann tensor and Christoffel connection, de Schwarzschild metric in ordinary and in Kruskal coordinates.

1. Give the general definition of the exponential map $\exp_p: T_p \rightarrow M$ and illustrate how it works in the special case in which M is the Minkowski spacetime. [2 points]

2. Assume you are standing on Earth with two perfectly synchronized clocks. While one clock stands still next to you, you throw the other upwards and catch it again a little later. Will the clocks still show the same time? If so, why? If not, which clock will show an earlier time than the other, and why? (Hint: to answer this question, no computations are required.) [2 points]
3. Give and discuss the Kruskal diagram of the Schwarzschild solution. What is the advantage of Kruskal coordinates compared to the original Schwarzschild coordinates? What would the worldline look like of a photon that makes a circular orbit around the black hole? Also sketch and discuss (without formulas) the conformal diagram of the Schwarzschild spacetime. [5 points]
4. In an FRW universe, a comoving observer had 4-velocity $U_\mu = (1, 0, 0, 0)$ and $K_{\mu\nu} = a^2(g_{\mu\nu} + U_\mu U_\nu)$ is a Killing tensor, $\nabla(\sigma K_{\mu\nu}) = 0$. (You don't have to show this.) Show how you can use this Killing tensor to define a conserved quantity for a freely falling particle. Also show that freely falling massive particles slow down with respect to comoving coordinates in an expanding universe and that massless particles undergo a cosmological redshift. [4 points]
5. Assume we live in a spatially flat FRW universe, for simplicity always dominated by matter. Then according to general relativity, our universe started from a big bang singularity. Suppose that astronomical observations tell us that events at different spatial positions on a given time-slice have very similar properties. Is it in general possible to give a causal explanation of the similarities as due to local interactions in the common past of the events we observe? Why (not)? [2 points]
6. Consider the $(1+1)$ -dimensional spacetime described by the metric $ds^2 = a^2(-dt^2 + dx^2)$, with $-\infty < t < +\infty$ and $0 < x < +\infty$. This spacetime corresponds to (part of) a maximally symmetric spacetime. Find out which one. [3 points]
7. Show that, when two indices of a tensor are contracted, the result is again a tensor. [2 points]

Examen Brussel II

Formula's for the Riemann tensor and the Christoffel symbols are given.

1. Show that for an observer with four velocity U_μ , the velocity v of an object with four-velocity V_μ is given by $v = 1 - V_\mu U_\mu$. [3 points].
2. Given the metric of the anti-de Sitter-space $ds^2 = \alpha^2(-\cosh^2(\rho)dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega^2)$, find and discuss the conformal diagram. Given $\cosh(\rho) = 1/\cos(\chi)$

$$\cosh(\rho) = 1/\cos(\chi)$$

[5 points].
3. Given $ds^2 = -dt^2 + t^2 dx^2$, determine the well known space-time that is partially determined by this metric. [3 points].
4. Show the existence of gravitational red-shift from the EEP. [3 points].

5. Discuss the observational relevance of the black hole aspects of the Schwarzschild metric. [2 points].
6. Define luminosity distance d_L , the proper motion distance d_M , the angular diameter distance d_A en proof $d_L = (1+z)d_M = (1+z)^2 d_A$ [3 points].
7. Give a physically relevant example of a situation in which the exponential map does not have the whole tangent space as its domain. [1 point].

Academiejaar 2012-2013 1^{ste} zit

Gegeven: De 2 Friedmanvergelijkingen, vergelijking tussen kosmologische constante en de vacuum-energie en de Schwarzschildmetriek in zijn gewone vorm en in Kruskal-coördinaten.

1. Vraag 1

1. Zijn de afgeleiden van de componenten van een een-vorm ω een tensor? Is de uitwendige afgeleide $d\omega$ een tensor? Toon aan (2 punten)

2. De formule voor de frequentie van een foton is gegeven door

$$\omega = -g_{\mu\nu} U^\mu dx^\nu / \lambda$$

$$\omega = -g_{\mu\nu} U^\mu dx^\nu / \lambda$$

(2 punten)

2. Vraag 2: Wat zijn gravitatiegolven? Zijn ze al waargenomen? (geen formules nodig) (2 punten)

3. Vraag 3: Geef en bespreek het Kruskal-diagram van de Schwarzschild oplossing. Wat is het voordeel van Kruskal coördinaten vergeleken met de originele Schwarzschild coördinaten. (punten 4)

4. Vraag 4

1. Als een FRW universum bestaat uit straling, materie en een negatieve kosmologische constante, weet je dan of de expansie versnelt of vertraagt? Of heb je extra info nodig? (2 punten)

2. Beschouw een FRW universum met negatieve kosmologische constante, zonder straling of materie. Bereken $a(t)$ en de ruimtelijke kromming κ . Hoe interpreteer je de resulterende metriek? (3 punten)

5. Vraag 5: Gegeven de metriek van de de Sitter ruimte. Leidt het conforme diagram af en bespreek. (hint gebruik de transformatie $\cosh(\alpha) = 1/\cos(t')$)

$$\cosh(\alpha) = 1/\cos(t')$$

(5 punten)

Academiejaar 2011-2012 1^{ste} zit

Men krijgt de energie-impulstensor voor een perfecte vloeistof, de vergelijkingen van Friedmann, de Schwarzschild-metriek, deze in Kruskal-coördinaten.

1. Toon aan dat $V_\mu W_\nu V_\mu W_\nu$ constant is langs een kromme als $V_\mu V_\mu$ en $W_\mu W_\mu$ parallelgetransporteerde vectoren zijn langs die kromme (en als de connectie compatibel is met de metiek). Gebruik dit om aan te tonen dat het tijdsachtig/lichtachtig/ruimteachtig karakter van een geodeet nooit verandert. (3 punten)
2. De metiek van de anti-de Sitter-ruimte is $ds^2 = a^2(-\cosh^2(\rho)dt^2 + d\rho^2 + \sinh^2(\rho)d\Omega^2)$, Leid het conforme diagram van deze ruimte-tijd af, teken en bespreek het. (hint: voor de coördinatentransformatie $\cosh(\rho) = 1/\cos(\chi)$) uit 5 punten
3. Veronderstel dat je op aarde staat met twee perfect gesynchroniseerde klokken. De ene klok houdt je stil, terwijl je de andere klok omhoog gooit en even later weer opvangt. Zullen de klokken nog steeds dezelfde tijd aangeven? zo ja, waarom? zo nee: welke klok geeft een vroeger tijdstip aan dan de andere, en waarom? (2 punten)
4.
 1. In een Friedmann-Robertson-walker-heelal wordt energiebehoud uitgedrukt door de vergelijking $0 = -\partial_0 \rho - 3a' a(\rho + p)$, Maak hiervan gebruik om af te leiden hoe de energiedichtheid afhangt van de schaalfactor in een heelal gedomineerd door - materie, -straling, -vacuum-energie. Hoe interpreteer je deze resultaten? Welke van deze resultaten zijn relevant voor de evolutie van ons heelal (3 punten)
 2. Leid de vergelijking $H' = -4\pi G \sum_i (c)(1 + w_i)\rho_i$ af en gebruik ze om aan te tonen dat een vlak heelal bestaande uit straling, materie en vacuum-energie geen transitie kan ondergaan van een contraherende naar een expanderende fase. Geldt deze conclusie ook als de ruimte positief of negatief gekromd is? 3 punten
5. Geef en bespreek het Kruskal-diagram voor de Schwarzschild-oplossing. Wat is het voordeel van Kruskal-coördinaten ten opzichte van de oorspronkelijke Schwarzschild-coördinaten (4 punten)

Categorieën:

- Fysica
- MFYS