Metrische ruimten en differentiaalrekenen (Wiskunde)

Metrische ruimte en differentiaalrekenen	
Richting	Wiskunde
Jaar	1BWIS

Bespreking

Als je eender welke student wiskunde zou vragen: "Wat is het moeilijkste vak in het eerste jaar?", dan zouden ze dit vak antwoorden. Metrische ruimten en differentiaalrekening wordt gezien als HET vak in de eerste bachelor. Het vak wordt gegeven door Professor Lowen. Prof. Lowen is zeer gekend onder de studenten omwille van zijn examens. Sommige vinden ze heel moeilijk, andere ondervinden geen verschil met een ander examen. De cursus is niet zo dik maar zoals het elke wiskunde-cursus betaamt, moet alles tot in de puntjes gekend zijn.

Theorie

De theorie wordt dus gegeven door Professor Bob Lowen. In de les is hij een zeer vriendelijke en duidelijk prof. Doorheen het jaar kan je misschien verhalen horen van examens die faliekant verliepen en hij kwaad werd. Ik kan alleen maar zeggen dat Professor Lowen één van de beste proffen is en als je je definities en stellingen goed kent, je niets hoeft te vrezen. Prof. Lowen vraagt op zijn examen graag equivalentie-bewijzen in twee richtingen. Meestal is er één richting van gekend, de andere moet je zelf vinden dus thuis al voorbereiden is de boodschap.

Vanaf het academiejaar 2013 - 2014 zal deze cursus gegeven worden door dr. Tom Vroegrijk. Het is belangrijk dat je elke hoofdstuk kan schematiseren, i.e. kunnen uitleggen wat je wil bereiken aan de hand van de meest cruciale tussenstappen, je moet hier geen bewijzen geven (tenzij expliciet gevraagd). Verder moet je elke definitie tot in de puntjes kennen en de verbanden tussen deze definities kunnen uitleggen/aantonen.

Oefeningen

De oefeningen worden gegeven door Ben Berckmoes. Hij is een doctoraatsstudent in de analyse. Hij werkt zeer gestructureerd en maakt voor elke les een oefeningenblad. Je zal in de oefeningenlessen soms oefeningen maken die hij niet op het examen vraagt. Op het einde zegt hij welke oefeningen voor hem het belangrijkst zijn.

Puntenverdeling en examen

Bij dit vak zijn de punten anders verdeeld. Theorie weegt zwaarder door dan oefeningen dus Professor Lowen heeft de doorslag op je punt.

Theorie

Voor het examen word je op het bureau van Professor Lowen verwacht met een 6-tal leerlingen. Prof. Lowen geeft ieder van jullie dan een lokaal met een bord om daar je examen op te doen. Ik raad aan dat je eerst de vraag uitschrijft op papier en daarna pas op het bord zet. Dan komt Lowen langs en ziet of het okee is en vraagt eventueel nog bijvragen. Dit gaat zo verder tot hij vindt dat het goed of slecht is.

Oefeningen

Het examen wordt in de grote aula in de G-bouw afgelegd en je kan je vrij goed voorbereiden op de vragen. Het zijn meestal gelijkaardige vragen per jaar.

Examenvragen

Theorie en oefeningen

Augustus 2015

Rijen en convergentie

1. Zij (xn)n∈N∈(R,||)(xn)n∈N∈(R,||) de rij gegeven door
   xn:=ln(n2+1)

   $$x_n := \ln(n^2+1)$$

   Zijn er adherentiepunten?
2. Stel (yn)n∈N∈(R,||)(yn)n∈N∈(R,||) niet convergent, kan er dan een interval II bestaan met I=[a,b]I=[a,b] zodat
   −∞<a<b<+∞:{yn|n∈N}⊂I−∞<a<b<+∞:{yn|n∈N}⊂I?

3. Stel
   zk:=k!3.5.7...(2.k−1).(2.k+1)

zk:=k!3.5.7...(2.k−1).(2.k+1)

   Is (sn)n∈N:sn:=∑nk=1zk(sn)n∈N:sn:=∑k=1nzk convergent?

Differentiatie

1. Beschouw de functie f:R2→Rf:R2→R gedefinieerd door f(x,y)={xy(x+y)x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)f(x,y)={xy(x+y)x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0).
   Ga na of *f* partieel afleidbaar, lokaal begrensd partieel afleidbaar, continu partieel afleidbaar, continu differentieerbaar en/of continu is.

Optimisatie

1. Bepaal de aard, grootte en ligging van de (lokale) extrema van de volgende functie als je weet dat D={(x,y)∈R2|x6+y6≤219}D={(x,y)∈R2|x6+y6≤219}:
   f:D→R:(x,y)↦x6+y6−12.(x−y)4f:D→R:(x,y)↦x6+y6−12.(x−y)4

Eigenschappen van functies

1. Geef de stelling van Bolzano-Weierstrauββ.
2. Bewijs deze stelling.
3. Wat betekent de impliciete functie-stelling voor lineaire gevallen?

Integratie

1. Stel f(x,y)=2.x2.yf(x,y)=2.x2.y en D:={(x,y)∈R2|0≤x,0≤y,x+y≤1}D:={(x,y)∈R2|0≤x,0≤y,x+y≤1}
   Bereken ∫Df(x,y)dxdy∫Df(x,y)dxdy
2. Stel g(x,y)=max{x,y}g(x,y)=max{x,y}
   Bereken ∫1−1∫1−1g(x,y)dxdy∫−11∫−11g(x,y)dxdy
3. h∈C2(Rn,R)h∈C2(Rn,R); Laplace operator Δh:Rn→R:Δh(x)=∑ni=1DiDih(x)Δh:Rn→R:Δh(x)=∑i=1nDiDih(x) met DihDih partiële afgeleide, richting i'de standaardvector.
   Bewijs voor f,g∈C2f,g∈C2
   ∫R(Δf(z))g(z)dz=∫Rf(z)(Δg(z))dz

∫R(Δf(z))g(z)dz=∫Rf(z)(Δg(z))dz

Juni 2015

Rijen en convergentie

1. Zij (xn)n∈N∈(R,||)(xn)n∈N∈(R,||) de rij gegeven door
   xn:=n3+5.n2+sin(n)2.n5+n

xn:=n3+5.n2+sin(n)2.n5+n

   - Convergeert de rij?
   - Indien ja? Wat is de limiet? Waarom?
2. Zij (yn)n∈N∈(R2,||.||)(yn)n∈N∈(R2,||.||) de rij gegeven door
   yn:=(cos(2.n),sin(n))

yn:=(cos(2.n),sin(n))

   Bestaat er een convergente deelrij? Zoja, bewijs.
3. Zij (zn)n∈N∈(R,||)(zn)n∈N∈(R,||) een rij en beschouw de reeks (sn)n∈N(sn)n∈N gegeven door
   sn:=∑k=1nzk

sn:=∑k=1nzk

   Als (zn)n∈N(zn)n∈N convergeert, convergeert dan ook (sn)n∈N(sn)n∈N? Zo ja, bewijs.

Differentiatie

1. Bepaal voor de volgende functie of ze *Partieel Afleidbaar, Continu, Differentieerbaar, Continu Differentieerbaar, Continu Partieel Afleidbaar* en/of *Lokaal Begrensd Partieel Afleidbaar* is.
   f:R2→R:(x,y)↦{x.sin(y)+y.sin(x)x2+y2√0(x,y)≠(0,0)(x,y)=(0,0)f:R2→R:(x,y)↦{x.sin(y)+y.sin(x)x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)

Optimisatie

1. Bepaal de aard, grootte en ligging van de (lokale) extrema van de volgende functie als je weet dat D={(x,y)∈R2|x2+y2≤1}D={(x,y)∈R2|x2+y2≤1}:
   f:D→R:(x,y)↦(y2−x−1)(y2+x−1)f:D→R:(x,y)↦(y2−x−1)(y2+x−1)

Eigenschappen van functies

1. Geef de inverse-functie-stelling.
2. Wat betekent de inverse-functie-stelling voor lineaire afbeeldingen?
3. Voldoet f(x,y):=(ex2+y,sin(x+y))f(x,y):=(ex2+y,sin(x+y)) in (x,y)=(0,0)∈R2(x,y)=(0,0)∈R2 aan de voorwaarden van de inverse-functie-stelling? Indien ja, wat betekent dit?

Integratie

1. Geef de namen van twee belangrijke stellingen voor hogere dimensies?
2. Stel a,b>0a,b>0 en E:={(x,y)∈R|x2a2+y2b2≤1}E:={(x,y)∈R|x2a2+y2b2≤1} een ellips. Bereken het volz(E):=∫z1dzvolz(E):=∫z1dz
   Hint: Volume van B:={(x,y)∈R2|x2+y2≤1}B:={(x,y)∈R2|x2+y2≤1} is gelijk aan ππ. Maak een tekening en vind een diffeomorfisme ϕ:B→Eϕ:B→E.
3. Stel g:Rn→Rg:Rn→R een diffeomorfisme met compacte drager. Voor 1≤i≤n1≤i≤n wordt de partiele afgeleide in de richting van de i'de standaardvector als Dig:Rn→RDig:Rn→R genoteerd. Bewijs ∀1≤i≤n∀1≤i≤n
   ∫Rn(Dig)(z)dz=0
   $$\int_{\mathbb{R}^n}(D_i g)(z)\,dz=0$$

Theorie

September 2014

1. Definieer *equipotentie, aftelbaarheid* en *overaftelbaarheid*. Geef voorbeelden van aftelbare verzamelingen.
   - Beschouw Z2[X]Z2[X], de verzameling van polynomen van de tweede graad met coëfficiënten in ZZ. Is deze verzameling aftelbaar?
   - Hetzelfde voor (in't algemeen) de verzameling Z[X]Z[X] van veeltermen in ZZ.
2. Geef de definitie van een reeks, een convergente reeks, absolute convergentie en commutatieve convergentie.
   - Geef de *worteltest van Cauchy*.
   - Bewijs dat als limn→∞xn−−√n<1limn→∞xnn<1 dat de reeks ∑nxn∑nxn convergeert. *(Hint: Maak gebruik van het feit dat een reeks ∑nan∑nan convergeert als 0<a<10<a<1.)*
3. Beschrijf de continuïteit van een functie tussen metrische ruimten door gebruik te maken van karakterisaties door rijen, bollen, open/gesloten verzamelingen, ...
   Bewijs dat, als f:X→Yf:X→Y een continue functie is tussen metrische ruimten *X* en *Y*, de volgende eigenschap geldt
   ∀A⊂X:x∈A‾⇒f(a)∈f(A)‾
   $$\forall A\subset X: x\in\overline{A}\Rightarrow f(a)\in\overline{f(A)}$$
   . Waarbij je stelt dat *A* open is in *X*. De eigenschap bewijs je door gebruik te maken van de volgende eigenschap ∀G⊂Y∀G⊂Y open geldt dat f−1(G)f−1(G) open is in *X*.

Juni 2014

Deze vragen werden gesteld verspreid over de verschillende groepen. Per groep kan je rekenen op 3 à 4 vragen.

1. Geef een overzicht van hoe je RR construeert uit QQ.
   Bijvraag: Bewijs dat de som van twee fundamentaalrijen opnieuw een fundamentaalrij is.
2. Geef en bewijs het criterium van Abel.
   Toon aan de hand van een voorbeeld aan dat het criterium niet geldt wanneer de desbetreffende rij niet monotoon is.
3. Geef een overzicht van de soorten rijen in een metrische ruimten en bespreek de verbanden.
   Stel dat we een ruimte definiëren bestaand uit Cauchyrijen, de Cauchy-ruimte. Heeft het zin deze ruimte in te voeren?
4. Geef de definities van de verschillende soorten convergentie. Geef ook de verbanden.
5. Geef en bewijs het criterium van Dirichlet.
   Als we *dalend naar nul* vervangen door *convergerend naar nul*, klopt het dan nog? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
6. Geef alle soorten afgeleiden en de implicaties ertussen.
7. Leg uit hoe we met differentieerbaarheid de extrema kunnen classificeren. Geef de relevante stellingen (zonder bewijs).
8. Definieer: Afsluitingspunten, afsluiting, gesloten verzameling, inwendige punten, inwendige en open verzameling. Geef ook de verbanden (zonder bewijs).
9. Welke metrische begrippen kan je met open delen karakteriseren/definiëren?
10. Bewijs: Voor functies f:X→Yf:X→Y geldt dat als xn→xxn→x ook f(xn)→f(x)f(xn)→f(x) als en slechts als f−1(G)f−1(G) is open voor elke G⊂YG⊂Y.
11. Definieer continuïteit en uniform continu aan de hand van rijen.
12. Bewijs dat als twee rijen equivalent zijn, en één van de twee rijen adhereert, dat ze dan beide adhereren aan hetzelfde punt.
13. Geef de metrische begrippen die aan de hand van rijen gedefinieerd kunnen worden. (Zijnde volledig en compact)

Voorbeeldexamen

1. Geef de definitie van een convergente, adherente en Cauchy rij. Geef enkele verbanden met de rest van de cursus: Waar hebben we deze begrippen gebruikt, in definties,stellingen ?
2.
   - Geef de defintie van differentieerbaarheid en afleidbaarheid en het verband ertussen.
   - Bewijs dat differentieerbaarheid in a afleidbaarheid in a impliceert en dat bovendien ∀y∈Rn∀y∈Rn zonder geldt dat Df(a,y)=Df(a)(y)
     $$Df(a,y)=Df(a)(y)$$

Juni 2012

1. Definieer convergentie en adherentie van rijen. Welke verbanden bestaan hier tussen? Bewijs een verband.
2. Geef alle verbanden die je kent tussen convergentie en de rest van de cursus (tot het bord vol staat).
   Bijvraag: je zal waarschijnlijk een bijvraag krijgen afhankelijk van wat je op het bord geschreven hebt.

3. Formuleer de stelling over het samenstellen van functies.
    Bijvraag: bewijs D(u+v)=D(u)+D(v)D(u+v)=D(u)+D(v) (je krijgt een hint hier)
4. Gegeven de reeksen ∑an,∑|an|,∑an−−√∑an,∑|an|,∑an en ∑(an)2∑(an)2. Wat zijn de verbanden tussen deze reeksen qua convergentie? Zoek deze en bewijs ze. Geef tegenvoorbeelden voor verbanden die er niet zijn.

Augustus 2010

1. Continuiteit in een punt. Definitie en equivalente begrippen? Bewijs een equivalentie tussen 2 uitdrukkingen.
2. Afleidbaarheid en differentieerbaarheid in a (voor meerdere veranderlijken): Definitie en geef de verbanden. (met voorbeeld en tegenvoorbeeld)
3. Geef de indeling van de functies zoals in het laatste hoofdstuk en geef een voorbeeld van een regelfunctie die niet continu is en niet van begrensde variatie is.

Juni 2010

1. Continu en compact, welke mooie eigenschappen volgen uit deze 2 begrippen?
2. Afleidbaarheid in a en differentieerbaarheid in a, geef definitie en verband voor meerdere veranderlijken.
3.
    - Definieer een Cauchy rij, convergent en adherent en geef de verbanden tussen de begrippen.
    - Toon aan dat de begrippen niet hetzelfde zijn met voorbeelden.
    - We zeggen dat een functie f adherent continu is als xnxn adhereert aan x, dan f(xn)f(xn) adhereert aan f(x). Wat is het verband tussen continu en adherent continu?
4. Wat versta je onder afleidbaarheid en differentieerbaarheid en wat is het verband tussen de twee begrippen? Toon dit verband aan.
5. Geef de indeling van de functies zoals in het laatste hoofdstuk en geef een voorbeeld van een regelfunctie die niet continu is en niet van begrensde variatie is.
6. Gegeven zijn drie reeksen
    ∑nan,∑n|an|,∑n(an)2

    ∑nan,∑n|an|,∑n(an)2

    . Wat zijn de verbanden tussen deze reeksen qua convergentie?

Juni 2009

1. Rijtjes: eigenschappen en verbanden, Waar zijn we dit tegengekomen in de cursus?
2. Afgeleiden en differentieren van Rn→RpRn→Rp en het verband tussen de twee.
3. Convergente en absoluut convergente reeksen en het verband.

Juni 2007

1. Geef de definitie van continuiteit in een punt. Wat zijn de equivalente uitdrukkingen? Bewijs een pijl heen en terug.
2. Geef de defintie van continuiteit.
3. Wat zijn de definities van afleidbaarheid en differentieerbaarheid? Geef en bewijs het verband ertussen.
4. Geef en bewijs het verband tussen continuiteit en differentieerbaarheid.
5. Wat kan je zeggen over compactheid en continuiteit?
6. Geef een voorbeeld van een functie f:X→Rf:X→R met X⊂RX⊂R niet compact, zodanig dat f(X) niet compact is.
7. Geef het schema van verschillende types van begrensde functies . Geef een voorbeeld van een functie die in een bepaald vakje in het diagram thuis hoort.
8. Geef eb bewijs de kettingregel.
9. Wanneer hebben we dat adherent continu ⇔⇔ continu? Bewijs.
10. ∑un,∑|un|−−−√∑un,∑|un| Vul in en bewijs: de ene is convergent ⇒⋯⇒⋯

Juni 2013

1. Geef de definitie van continuïteit en uniforme continuïteit en geef het verband ertussen. Bewijs dat deze begrippen equivalant zijn in een compacte metrische ruimte.
2. Definieer continu afleidbaar en continu differentieerbaar en geef en bewijs de verbanden tussen die twee.
3. Definieer convergent en absoluut convergent voor reeksen en bewijs het verband.
4. Geef alle karakterisaties van continuïteit en bewijs een verband. (Waarvan een door contrapositie)
5. Bewijs dat als f continu partieel afleidbaar is in a, ze ook differentieerbaar is in a.
6. Compact en continu, welke eigenschappen volgen daaruit? Geef ook een tegenvoorbeeld voor het omgekeerde van de stelling van Weierstrass.
7. Geef en bewijs het criterium van d'Alembert voor convergentie van reeksen.
8. Geef en bewijs de stelling omtrent de differentiaal van samengestelde functies. (Beter gekend als de kettingregel)

Oefeningen

September 2014

1. Bepaal of de volgende reeksen convergeren of divergeren:
    - ∑n1n(1−n3)√3∑n1n(1−n3)3
    - ∑n2n+13n−4∑n2n+13n−4

2. Bepaald voor de volgende functie of ze *Partieel Afleidbaar, Continu, Differentieerbaar, Continu Differentieerbaar, Continu Partieel Afleidbaar* en/of *Lokaal Begrensd Partieel Afleidbaar* is.
   f:R2→R:(x,y)↦{x.sin(y)+y.sin(x)x2+y2√0(x,y)≠(0,0)(x,y)=(0,0)f:R2→R:(x,y)↦{x.sin(y)+y.sin(x)x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)
3. Bepaal de aard, grootte en ligging van de (lokale) extrema van de volgende functie als je weet dat D={(x,y)∈R2|x2+y2≤1}D={(x,y)∈R2|x2+y2≤1}:
   f:D→R:(x,y)↦(y2−x−1)(y2+x−1)f:D→R:(x,y)↦(y2−x−1)(y2+x−1)
4. Stel C10([0,1])C01([0,1]) een reële vectorruimte van alle functies f:[0,1]→Rf:[0,1]→R die continu differentieerbaar zijn en de eigenschap hebben dat f(0)=0f(0)=0. Stel nu JJ de deelcollecite van C10([0,1])C01([0,1]) bestaande uit alle stijgende functies ff.
   - Toon aan dat || .||∗:C10([0,1])→R+:f↦∫10|f′(s)|ds||.||∗:C01([0,1])→R+:f↦∫01|f′(s)|ds welgedefinieerd is en een norm is voor C10([0,1])C01([0,1]).
   - Toon aan
     ∀f∈J:||f||1≤||f||∗

     ∀f∈J:||f||1≤||f||∗

     als je weet dat ||f||1=∫10|f(s)|ds||f||1=∫01|f(s)|ds.

Juni 2014

---

1. Ga na of volgende reeksen convergent zijn:
   - ∑nlog(n)n.n√∑nlog(n)n.n
   - ∑n1n.(1+n2)√∑n1n.(1+n2)
2. Beschouw de functie f:R2→Rf:R2→R gedefinieerd door f(x,y)={xy(x+y)x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)f(x,y)={xy(x+y)x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0).
   Ga na of *f* partieel afleidbaar, lokaal begrensd partieel afleidbaar, continu partieel afleidbaar, continu differentieerbaar en/of continu is.
3. Beschouw de functie f:R2∖(0,0)→R2:(x,y)↦(xx2+y2,−yx2+y2)f:R2∖(0,0)→R2:(x,y)↦(xx2+y2,−yx2+y2) en merk op dat voor getallen x,y∈R0x,y∈R0 de betrekking 1x+iy=xx2+y2−i.yx2+y21x+iy=xx2+y2−i.yx2+y2 steeds geldig is in CC.
   - Is *f* injectief? Is *f* surjectief?
   - In welke punten van R∖(0,0)R∖(0,0) voldoet *f* aan de voorwaarden van de inverse functiestelling?
   - Beschouw de verzameling U={(x,y)∈R2|0<x2+y2<1}U={(x,y)∈R2|0<x2+y2<1}. Is f|Uf|U injectief? Bepaal de verzameling f|U(U)f|U(U).
4. Zij LL de reële vectorruimte van alle lineaire afbeeldingen f:R→Rf:R→R.
   - Toon aan: De afbeelding || .||∗:L→R+:f↦supx∈R|f′(x)|||.||∗:L→R+:f↦supx∈R|f′(x)| is welgedefinieerd en is een norm op LL.
   - Toon aan: De afbeelding || .||∗∗:L→R+:f↦∫10|f(x)dx|||.||∗∗:L→R+:f↦∫01|f(x)dx| is welgedefinieerd en is een norm op LL
   - Toon aan: Voor elke f∈Lf∈L is de ongelijkheid ||f||∗∗≤||f||∗||f||∗∗≤||f||∗ geldig.
   - Bestaat er een constante C>0C>0 zodanig dat voor elke f∈Lf∈L de ongelijkheid ||f||∗<C.||f||∗∗||f||∗<C.||f||∗∗ geldig is?

Juni 2010

---

1. Zij \mathcall{C}^'_0 ([0,1])\mathcall{C}^'_0 ([0,1]) de reele vectorruimte van alle functies f:[0,1]→Rf:[0,1]→R die continu differentieerbaar zijn en de eigenschap dat f(0)=0.
   - Toon aan: de afbeelding ||\cdot||_* : C^'_0 ([0,1]) \rightarrow \mathbb}{R}^+ : t \mapsto sup_{x \in [0,1]} |f'(x)|||\cdot||_* : C^'_0 ([0,1]) \rightarrow \mathbb}{R}^+ : t \mapsto sup_{x \in [0,1]} |f'(x)| is welgedefinieerd en een norm op C^'_0 ([0,1])C^'_0 ([0,1]).
   - Toon aan: Voor iedere functie f \in C^'_0 ([0,1])f \in C^'_0 ([0,1]) is de ongelijkheid ||f||∞≤||f||∗||f||∞≤||f||∗
2. Ga na of de volgende reeksen convergent zijn.
   - ∑nnlogn(n)∑nnlogn(n)
   - ∑n1n(1+n2)√∑n1n(1+n2)
3. Beschouw de functie f:R2→R2:(x,y)↦(x2−y2,2xy)f:R2→R2:(x,y)↦(x2−y2,2xy) . En merk op dat voor getallen x,y∈Rx,y∈R de betrekking (x+yi)2=(x2−y2)+(2xy)i(x+yi)2=(x2−y2)+(2xy)i steeds geldig is in CC.
   - Is f injectief? Is f surjectief?
   - In welke punten van R2R2 voldoet f aan de voorwaarden van de inverse functiestelling?
   - Beschouw de verzameling U=R+0×RU=R0+×R. Toon aan dat f|Uf|U injectief is en bepaal de verzameling V=f|U(U)V=f|U(U) .
4. Beschouw de functie f:R+→Rf:R+→R gedefinieerd door f(x,y)={x3y2x4+y4(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)f(x,y)={x3y2x4+y4(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0). Ga na of f PA, LBPA, CPA, C, D, CD is.

Juni 2009

---

1. Gegeven is de onderstaande functie
   d:R2×R2→[0,∞[((x1,y1),(x2,y2))↦{|y1−y2|x1=x2|y1|+|x1−x2|+|y2|x1≠x2

   d:R2×R2→[0,∞[((x1,y1),(x2,y2))↦{|y1−y2|x1=x2|y1|+|x1−x2|+|y2|x1≠x2

   - Toon aan dat deze functie een metriek is op R2R2 .
   - Gegeven zijn de punten (0,0) en (2,3). Teken de gesloten bollen met straal 1 voor de gegeven metriek rond deze punten. Geef duidelijk aan welke punten erin zitten en welk niet.
   - Definieer xnxn als (1n,1)(1n,1) en ynyn als (1n,0)(1n,0). Ga na of de rijtjes (xn)n(xn)n en (yn)n(yn)n convergeren in de gegeven metrische ruimte en geef het convergentiepunt indien het bestaat.

2. Stel (X,d) een metrische ruimte en neem a,b∈Xa,b∈X . Definieer A⊆XA⊆X als de verzameling \left{ x \in X | d(a,x) \geq d(x,b) \right}\left{ x \in X | d(a,x) \geq d(x,b) \right} .
   - Toon aan dat A een open verzameling is.
   - Bewijs dat \overline{A} \subseteq \left{ x \in X | d(a,x) \geq d(x,b) \right}\overline{A} \subseteq \left{ x \in X | d(a,x) \geq d(x,b) \right} .
   - Laat met een voorbeeld zien dat de inclusie uit de vorige opgave strikt is.
3. Ga na of volgende reeksen convergeren:
   - ∑nsin(π/3n)sin(π/6n)∑nsin(π/3n)sin(π/6n)
   - ∑n1n2cos(π/3n)∑n1n2cos(π/3n)
   - ∑n1+n!(1+n)!∑n1+n!(1+n)!
4. Gegeven is de functie f:R2→Rf:R2→R met f(x,y)=(x+y)e−x2−y2f(x,y)=(x+y)e−x2−y2.
   - Geef alle lokale minima en maxima van deze functie.
   - Bepaal de minimale en maximale waarde die deze functie bereikt op de driehoek met hoekpunten (-1,0) , (1,0) en (0,1).

Juni 2008

1. We maken bij deze vraag voortdurend gebruik van poolcoordinaten. Stel dat p1p1 en p2p2 twee punten zijn in R2R2 met respectievelijke poolcoordinaten (r1,θ1)(r1,θ1) en (r2,θ2)(r2,θ2) . Definieer de metriek d als volgt
   d(p1,p2)={|r1−r2|θ1=θ2r1+r2θ1≠θ2
   d(p1,p2)={|r1−r2|θ1=θ2r1+r2θ1≠θ2
   - Zij p het punt met poolcoordinaten (2,0). Teken de bollen B(p,1) en B(p,3). Geef duidelijk aan welke punten tot de bol behoren en welke niet.
   - Gegeven zijn de rijtjes ((1/n,π/2))n∈N0((1/n,π/2))n∈N0. Zijn deze rijtjes convergent? Indien ja, geef dan het convergentiepunt.
   - Geef de sluiting van het open bovenhalfvlak.
2. Ga na of de volgende reeksen convergent zijn:
   - ∑nn√ln(n)n3+1∑nnln(n)n3+1
   - ∑n(−1)nn(3/2)n+3∑n(−1)nn(3/2)n+3
3. Ga na of de volgende functie continu , partieel afleidbaar, afleidbaar of differentieerbaar is in de oorsprong
   f(x,y)={0(x,y)=(0,0)xy2/y3x2+y4(x,y)≠(0,0)
   f(x,y)={0(x,y)=(0,0)xy2/y3x2+y4(x,y)≠(0,0)
4. Bepaal alle extrema van de volgende functie en classifieer ze
   g(x,y)=ex(x2−y2)
   g(x,y)=ex(x2−y2)
5. Bepaal de punten (x,y,z) van het oppervlak x2−yz+4x+3=0x2−yz+4x+3=0 waarvoor de afstand tot de x-as een extreme waarde heeft.

Juni 2007

1. Gegeven is de onderstaande functie
   d:R2×R2→[0,∞[((x1,y1),(x2,y2))↦{|y1−y2|x1=x2|y1|+|x1−x2|+|y2|x1≠x2
   d:R2×R2→[0,∞[((x1,y1),(x2,y2))↦{|y1−y2|x1=x2|y1|+|x1−x2|+|y2|x1≠x2
   - Toon aan dat deze functie een metriek is op R2R2 .
   - Gegeven zijn de punten (0,0) en (2,3). Teken de gesloten bollen met straal 1 voor de gegeven metriek rond deze punten. Geef duidelijk aan welke punten erin zitten en welk niet.
   - Definieer xnxn als (1n,1)(1n,1) en ynyn als (1n,0)(1n,0). Ga na of de rijtjes (xn)n(xn)n en (yn)n(yn)n convergeren in de gegeven metrische ruimte en geef het convergentiepunt indien het bestaat.
2. Convergeert de volgende reeks? Toon aan. ∑∞n=1ln(n)n2∑n=1∞ln(n)n2
3. Ga na of de volgende functie in de oorsprong continu, partieel afleidbaar, afleidbaar of differentieerbaar is
   f(x,y)={3x2y1/2x4+y2√(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)
   f(x,y)={3x2y1/2x4+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)
4. In welke punten op de ellipsoide met vergelijking x2+2y2+z2=1x2+2y2+z2=1 bereikt de functie f(x,y,z)=2x33+y2+2yzf(x,y,z)=2x33+y2+2yz een lokaal minimum of maximum?

September 2006

1. Stel dat (X,d) een metrische ruimte en A⊆XA⊆X. Definieer de verzameling A(e)⊆XA(e)⊆X voor ϵ>0ϵ>0 als \left{ x \in X | d(x,A) \leq \epsilon \right}\left{ x \in X | d(x,A) \leq \epsilon \right} Toon de volgende beweringen aan:
   - ∀ϵ≥0:A¯¯¯¯⊆A(e)∀ϵ≥0:A¯⊆A(e)
   - A¯¯¯¯=⋂e>0A(e)A¯=⋂e>0A(e)
   - A(e)A(e) is gesloten.
   - \partial A^{(e)} \subseteq \lef{ x \in X | d(x,A)= \epsilon \right}\partial A^{(e)} \subseteq \lef{ x \in X | d(x,A)= \epsilon \right}
   - Er bestaat een voorbeeld waarbij de vorige inclusie strikt is.
2. Convergeert de volgende reeks? Beargumenteer. ∑∞n=01⋅3⋅5⋯(2n−1)2⋅4⋅6⋯(2n)∑n=0∞1⋅3⋅5⋯(2n−1)2⋅4⋅6⋯(2n)
3. Ga na of de volgende functie afleidbaar, partieel afleidbaar, continu of differentieerbaar is in de oorsprong
   f:R3→R(x,y,z)↦{x2y3x4+(y2+x2)2(x,y,z)≠(0,0,0)0(x,y,z)=(0,0,0)
   f:R3→R(x,y,z)↦{x2y3x4+(y2+x2)2(x,y,z)≠(0,0,0)0(x,y,z)=(0,0,0)

4. Zoek de punten op de curve gegeven door de vergelijkingen
{x2−xy+y2−z2−1=0x2+y2−1=0

{x2−xy+y2−z2−1=0x2+y2−1=0

die het dichtst bij de oorsprong liggen.

Juni 2006

---

1. We noemen de functie d:X×X→[0,∞[d:X×X→[0,∞[een ultrametriek als de volgende eigenschappen gelden
UM1: \forall x,y \in X = d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \\ UM2: \forall x,y \in X : d(x,y)=d(y,x) \\ UM3: \forall x,y,z \in X : d(x,z) \leq max \left{d(
UM1: \forall x,y \in X = d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y \\ UM2: \forall x,y \in X : d(x,y)=d(y,x) \\ UM3: \forall x,y,z \in X : d(x,z) \leq max \left{d(

   Bewijs nu de volgende stellingen:
   - Gegeven drie punten x,y,z in een ultrametrische ruimte X is er steeds een punt van de drie met de eigenschap dat de afstanden tot de twee andere punten gelijk zijn.
   - Elk punt uit een open bol is het midden van die bol, m.a.w. als x∈B(y,r)x∈B(y,r) dan B(x,r)=B(y,r)B(x,r)=B(y,r).
   - Als twee open bollen een niet-lege doorsnede hebben , dan is een van die bollen bevat in de andere, m.a.w. als B(x,s)∩B(y,r)≠∅B(x,s)∩B(y,r)≠∅ dan B(x,s)⊆B(y,r)B(x,s)⊆B(y,r) of B(y,r)⊆B(x,s)B(y,r)⊆B(x,s) .
2. Ga na of de volgende reeks convergent of absoluut convergent is
∑n=3∞(−1)nn(ln(n))(lnlnn)

∑n=3∞(−1)nn(ln(n))(lnlnn)

3. Ga na of de volgende functie continu, partieel afleidbaar, afleidbaar of differentieerbaar is
f:R2→R:f(x,y)↦{2x3y+2x2y2x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)
f:R2→R:f(x,y)↦{2x3y+2x2y2x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)

4. Bepaal de punten (x,y,z) aan het oppervlak x2−yz+4x+3=0x2−yz+4x+3=0 waarvoor de afstand tot de x-as, gegeven door de formule x2+z2−−−−−−√x2+z2 een extreme waarde.

Categorieën:
- Wiskunde
- 1BWIS