Inleiding Statistische fysica

Statistische fysica	
Richting	Fysica
Jaar	3BFYS

Bespreking

Puntenverdeling

Theorie=9; Cursus in de les=2; Oefeningen/taak=9

Examenvragen

Academiejaar 2022-2023 1ste zit

Theorie

```
   Bespreek de volgende begrippen:
   • Shannon entropie
   • Bose Einstein verdeling
   • Ergodiciteit
   • Ensembles
   • Broglie golflengte
   • Thermodynamiche potentialen
   • Postulaten van de statistische fysica

    Gibbs verdeling:
   • Leid de canonische gibbs verdeling af.
   • Geef een uitdrukking voor de verwachtingswaarde van de fluctuatie van de
interne energie, gebruikmakend van de canonische verdeling.
   • Fluctuatie-respons theorema voor interne energie
   • Leg uit wat het fluctuatie-respons theorema in het algemeen inhoudt (niet
enkel voor de interne energie)
```

Oefeningen

:

Statistische Fysica: oefeningen

Er werd een nieuw deeltje ontdekt genaamd het Temperion. Per energieniveau kunnen maximaal drie deeltjes zitten. Men beschikt over een 3D-gas van Temperionen. Het energiespectrum wordt gegeven door:

$$\varepsilon(n_x, n_y, n_z) = \max_{x,y,z}(\gamma_i n_i)$$

1) Toon aan dat de toestandsdichtheid gegeven wordt door:

$$g(\varepsilon) = \frac{3\varepsilon^2}{\gamma_x \gamma_y \gamma_z}$$

2) Gebruik deze toestandsdichtheid om de temperatuur af te leiden waar het gas niet meer als klassiek gas kan worden beschouwd.
3) Leid (zoals in de cursus voor fermionen en bosonen werd gedaan) de Tempere-Van den Bremen verdeling af voor de Temperionen.
4) Geef een uitdrukking voor deze verdeling bij temperatuur nul. Teken ze bij temperatuur nul en ook voor een kleine eindige temperatuur.
5) Geef een uitdrukking voor E_T (zoals de Fermi-energie) in functie van het aantal deeltjes N.
6) Geef een uitdrukking voor U voor lage temperaturen in functie van N en E_T.

Academiejaar 2019-2020 1ste zit

Theorie

1. De encyclopedie: Geef een korte definitie van elk van onderstaande termen, alsof je een paragraafje voor een woordenboek of encyclopedie schrijft.
   1. Ergodiciteit (geef ook een voorbeeld van een niet-ergodisch systeem).
   2. De golflengte van de Broglie (geef ook de formule, en waarvoor het dient).
   3. Extensieve versus intensieve grootheden (beantwoord ook: is de druk intensief of extensief? Waarom?)
   4. Ensembles (wat zijn de drie ensembles, en hoe verhouden ze zich tot elkaar?)
   5. De Shannon-entropie (geef ook de link met de Boltzmann entropie).
2. Schets de Fermi-Dirac verdeling (a) T=0, en (b) bij een temperatuur die niet nul is, maar wel veel kleiner dan de Fermi temperatuur, en (c) bij een temperatuur veel groter dan de Fermi temperatuur.
3. De eendeeltjes-partitiesom voor een puntdeeltje met massa mm in een doos met volume VV, bij temperatuur TT, is VV (2πmkBT/h2)3/2(2πmkBT/h2)3/2. Bereken de toestandssom voor een diatomair gas in dezelfde doos. Bijvraag: welke temperatuursschalen kan je onderscheiden?

4. De toestandsdichtheid voor bosonen met massa m in een doos met volume V is $g(\varepsilon)=\frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\varepsilon^{1/2}$. Bereken in de Bose-Einstein gecondenseerde fase hoe het aantal deeltjes in de grondtoestand verandert als functie van de temperatuur, met andere woorden bereken $N_0(T)$. Tip:

$$\int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{e^x-1}dx=\zeta(\alpha)\Gamma(\alpha)$$

met ζ de Riemann zeta functie en Γ de gamma functie.

Oefeningen

1. De ster "Trappist" is een koele ster (T = 2500K) op ongeveer 40 lichtjaar afstand van de zon. Met zijn straal van slechts 84200 km is het dus een rode dwergster. Er cirkelen planeten rond de ster, op afstanden gegeven in de tabel:

Trappist-b: 1.73 miljoen km	Trappist-f: 5.76 miljoen km
Trappist-c: 2.37 miljoen km	Trappist-g: 7.01 miljoen km
Trappist-d: 3.33 miljoen km	Trappist-h: 9.27 miljoen km
Trappist-e: 4.38 miljoen km	

Enkele jaren na Australië is de rest van de aarde ook afgebrand en je bent commandant op een kolonistenschip op weg naar het sterrenstelsel Trappist. Welke planeet zou jij kiezen voor je kolonie? Zijn er trouwens wel planeten in de "leefbare zone" (i.e. met een temperatuur die vloeibaar water toelaar op 1 atm)?

1. De planeet waarop je geland bent is arm in ijzer. Wel kan je er ferroceen kristallen ontginnen (zie figuur), die sublimeren. Veronderstel dat er evenwicht komt tussen de vaste fase en de gasfase, wanneer de kristallen in een gesloten doosje worden bewaard; het totaal aantal atomen in de doos is N = $N_{gas}+N_{vast}$. De canonische eendeeltjes-partitiesom in de gasfase is $Z_{gas}(T)$, en de eendeeltjes-partitiesom in de vaste fase is $Z_{vast}(T)$. Als je veronderstelt dat $N_{gas}\gg 1$ en $N_{vast}\gg 1$, toon dan aan dat $N_{gas}=Z_{gas}(T)/Z_{vast}(T)$.

2. Door het afbreken van het ferroceengas heb je uiteindelijk een blokje ijzer gemaakt, met een ideaal elektronengas bij fermidruk p1p1. Je knutselt aan batterijen voor de kolonie. Dat doe je door het ijzerblokje aan een blokje van een ander metaal te plaatsen met fermidruk p2p2, die verschilt van p1p1. Beide blokjes zijn bij dezelfde temperatuur (veel lager dan de Fermi-temperatuur) en bevatten evenveel elektronen.
    1. Berekende Fermidruk van het samengestelde systeem als functie van p1p1 en p2p2.
    2. Is er een spanningsverschil tussen de blokjes wanneer ze aan elkaar gezet worden? Zo ja, bereken het spanningsverschil, zo nee leg uit waarom
    3. Stroomt er een lading tussen de blokjes wanneer ze aan elkaar worden gezet? Zo ja, bereken de totale overgezette lading van 1 naar 2, zo nee leg uit waarom. Samengevat, heb je een goede batterij? \par Hint: de Fermi-golfvector is kF=(3π2N/V)1/3kF=(3π2N/V)1/3. Bereken als eerste stap de Fermidruk.

Academiejaar 2013-2014 2de zit

Theorie

1. Het woordenboekje: geef een korte definitie van elk van onderstaande termen, alsof je een stukje voor een woordenboek of encyclopedie schrijft.
    1. Grootcanonische toestandssom
    2. Ergodiciteit
    3. Bose-Einstein condensaat
    4. De Broglie golflengte
    5. Postulaat van Boltzmann
    6. Vrije Energie
    7. Legendretransformaties
    8. Fermi temperatuur
    9. Link fluctuatie en respons
    10. Niet-extensieve thermodynamica
2. Beschrijf de ensembetheorie aan de hand van de verzamelingenleer. Geef in deze context de kans dat de energie van een gesloten subsysteem met NsNs deeltjes gelijk is aan EsEs. Bepaal ook de kans dat er in een open subsysteem NsNs deeltjes zijn, onafgezien van de energie. Hoe bepaal je de canonische en grootcanonische verwachtingswaarden in dit beeld?
3. Geef de afleiding van de Fermi-Dirac en de Bose-Einstein verdeling. Schets in een grafiek de Fermi-Dirac verdeling als functie van de energie bij temperatuur nul, en teken hierbij ook de curve met eindige temperatuur. Maak ook een schets van de Bose-Einstein verdeling. Maak ten slotte een schets van de Maxwell-Boltzmann verdeling.

Oefeningen

1. Een deeltje heeft twee magnetische toestanden, een toestand "+" met magnetisatie $M_+=+\mu_B$ en een toestand "-" met magnetisatie $M_-=-\mu_B$ waarbij μ_B het Bohr-magneton is. In een magneetveld is de energie $\varepsilon_+=-\mu_B B$ voor de "+" toestand en $\varepsilon_-=+\mu_B B$ voor de "-" toestand (merk op dat de tekens omgekeerd zijn).
    1. Bereken de toestandssom, en haal hieruit de vrije energie, en dan uit deze vrije energie de entropie.
    2. Wat is de kans p_+, p_- dat een deeltje zich in toestand "+" resp. "-" bevindt? Bereken hieruit de Shannon entropie via $S=-k_B\sum_j p_j \ln p_j$. Komt deze entropie overeen met de entropie die je uit het eerste deel van je vraag vond?
2. Rubidium-86 is een fermionisch deeltje, en in een optische val zijn de energieniveau's gegeven door
$$E_{n_x,n_y,n_z}=\hbar\Omega(n_x+n_y+n_z)$$
    1. Toon aan dat de toestandsdichtheid gegeven is door $g(\varepsilon)=\varepsilon^2/(2(\hbar\Omega)^3)$.
    2. Bereken voor dit systeem de interne energie per deeltje, in eenheden van de Fermi-energie($=U/NE_F$).
3. Beschouw een biomolecule als subsysteem dat energie E_s kan uitwisselen met het reservoir, en dat uitgerekt kan worden tot een lengte x_s als je met een kracht F aan de uiteinden trekt. De interne energie van het subsysteem is dan gegeven door $U=E_s-Fx_s$ (vergelijk dit met $U=E_s-\mu N_s$). Aan de hand van argumenten à la Gibbs vindt je voor de kans dat de biomolecule een energie E_s heeft én een uitrekking x_s heeft evenredig aan
$$P(E_s,x_s)\propto e^{-\beta(E_s-Fx_s)}$$
met $\beta=\frac{1}{k_BT}$ de temperatuur. De uitrekking x_s van de molecule is een fluctuerende grootheid. Zoek het verband tussen de variantie van x_s ($\rightarrow\langle x_s^2\rangle=\sigma_{x_s}$) en de elasticiteitsmodulus van het molecuul, gedefinieerd als de respons van de uitrekking op de kracht:
$$Y=\frac{\partial\langle x_s\rangle}{\partial F}$$

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

Groep A

1. Het woordenboekje: geef een korte definitie van elk van onderstaande termen, alsof je een stukje voor een woordenboek of encyclopedie schrijft.
    1. Toestandsvergelijking
    2. Microcanonisch ensemble
    3. Fermi-Dirac verdeling (inclusief grafiek!)
    4. Extensieve versus intensieve grootheden
    5. Ergodiciteit
    6. Bose-Einstein erdeling (inclusief grafiek!)
    7. Sommerfeld integraal
    8. De nulde hoofdwet van de thermodynamica

    Afgelopen met het woordenboekje, nu zoeken we formules om:

    1. de soortelijke warmte CpCp uit de Gibbs vrije enthalpie G(p,T,N)G(p,T,N) te berekenen.
    2. het aantal deeltjes NN uit de grootcanonische toestandssom Ξ(T,V,μ)Ξ(T,V,μ) te berekenen.
2. Dit is een denkvraag over het fluctuatie-respons theorema. Beschouw een magnetische naald als subsysteem. Het materiaal kan een energie EsEs uitwisselen met het reservoir, en kan een magnetisatie MsMs verwerven ten gevolge van een externe fluxdichtheid BB. De interne energie van de naald wordt gegeven door U(Es,Ms)=Es−MsBU(Es,Ms)=Es−MsB. Aan de hand van argumenten à la Gibbs weten we dat de kans dat de naald een energie EsEs én een magnetisatie MsMs heeft, evenredig is aan
P(Es,Ms)∝e−β(Es−MsB)P(Es,Ms)∝e−β(Es−MsB) met β=1/(kBT)β=1/(kBT) de temperatuur. De magnetisatie MsMs van de molecule is een fluctuerende grootheid. Zoek het verband tussen de variantie van MsMs en de magnetische susceptibiliteit χmχm van de naald, gedefinieerd als de respons va de magnetisatie op de externe fluxdichtheid BB:
χm=∂⟨Ms⟩∂B

    χm=∂⟨Ms⟩∂B

3. Bespreek licht in een doos - toon aan dat uit de gepaste kantumstatistiek de stralingswet van Planck kan worden afgeleid, en toon aan dat de interne energiedichtheid schaalt zoals T4T4.

Groep B

1. Het woordenboekje: geef een korte definitie van elk van onderstaande termen, alsof je een stukje voor een woordenboek of encyclopedie schrijft.
    1. Shannon entropie
    2. de Broglie golflengte
    3. Thermodynamische potentialen
    4. Langrange multiplicator
    5. Ergodiciteit
    6. Canonisch ensemble
    7. Statistische gemiddeldes
    8. Thermisch evenwicht

   Afgelopen met het woordenboekje, nu zoeken we formules om:

    1. de soortelijke warmte C_V uit de vrije energie $F(T,V,N)$ te berekenen.
    2. de druk p uit de canonische toestandssom $Z(T,V,N)$ te berekenen.
2. Dit is een denkvraag over de ensembletheorie van Gibbs.
    1. Volg Gibbs' redenering voor de grootcanonische verdeling, maar pas het toe op een subsysteem dat energie en *volume* kan uitwisselen met het reservoir (maar geen deeltjes), en beantwoord de vraag "Wat is de kans $P(E_s,V_s)$ dat het subsysteem een gegeven energie E_s en een gegeven volume V_s heeft?"
    2. Zoek de toestandssom $\tilde{Z}$ die met deze nieuwe Gibbsverdeling $P(E_s,V_s)$ overeenkomt. Toon aan dat onze gewoonlijke link met de interne energie nu niet langer de interne energie U geeft, maar de enthalpie H; met andere woorden bewijs

$$H = k_B T^2 \frac{\partial \ln \tilde{Z}}{\partial T}$$

3. Schrijf de uitdrukking voor de Bose-Einstein verdeling en de Fermi-Dirac verdeling op. Maak dan drie grafieken:
    - Een grafiek van beide verdelingen bij temperatuur gaande naar nul (maar niet helemaal nul), als functie van de energie. Duid op de energie-as ook de chemische potentiaal en het nulpunt van de energie aan.
    - Een grafiek van de interne energie versus de temperatuur, en zet op deze grafiek drie curves: voor het Fermi gas, voor het Bose gas en voor het klassieke ideale gas.
    - Een grafiek voor de soortelijke warmte, met daarop curves voor het Fermi gas, voor het Bose gas en voor het klassieke ideale gas. Duid op de grafiek de de kritische temperatuur voor Bose-Einstein condensatie aan.

Oefeningen

Groep A

1. Beschouw een doos met een verplaatsbaar membraan. Dit membraan verdeelt de doos in twee systemen die onderling volume kunnen uitwisselen. Veronderstel dat de temperatuur en het aantal deeltjes van de systemen dezelfde zijn, en dat het totaal volume vast ligt. Bewijs dan dat de volgende gelijkheid geldt:
   ∂S1∂V1=∂S2∂V2∂S1∂V1=∂S2∂V2
   waarbij S1S1, S2S2 de entropieën zijn van de systemen en S1S1, S2S2 de volumes zijn in doos 1 en doos 2. Is dit equivalent aan p1=p2p1=p2 bij evenwicht?
2. We beschouwen een gas van NN spingepolariseerde fermionen, waarvoor de microscopische analyse leert dat er twee kwantumgetallen zijn, n1,n2∈Nn1,n2∈N, en dat de energie gegeven is door
   En1,n2=α(n1+2n2)En1,n2=α(n1+2n2)
   Hierin is αα een systeemparameter die omgekeerd evenredig is met het volume.
   a. Toon aan dat de toestandsdichtheid gegeven is door g(ϵ)=ϵ/(2α2)g(ϵ)=ϵ/(2α2).
   b. Bereken, als functie van het aantal deeltjes, de temperatuurwaaronder je zeker kwantumstatistiek moet gebruiken.
   c. Bereken de Fermi-energie, in eenheden αα (dus bereken je EF/αEF/α). Vergelijk je antwoord met dat van vraag (b).
   d. Bereken de interne energie per deeltje bij temperatuur nul. Toon aan dat voor deze fermionen geldt dat U=2NEF/3U=2NEF/3.
   e. Wat is de druk bij temperatuur nul?
   f. Bereken de grootcanonische potentiaal F(T,V,μ)F(T,V,μ) voor dit systeem, bij temperatuur nul.

Groep B

1. Beschouw onderscheidbare deeltjes die zich in drie mogelijke energieniveau's kunnen bevinden
   ϵ+=+kBT1

   ϵ+=+kBT1

   , ϵ0=0ϵ0=0 en ϵ−=−kBT1ϵ−=−kBT1. Bereken de Shannon entropie voor één deeltje in thermisch evenwicht met een reservoir bij temperatuur TT.
2. Een vaste stof en een damp (ideaal gas) van dezelfde atomen bevinden zich in een systeem met constant volume en op een constante temperatuur. NsNs is het aantal deeltjes dat tot de vaste stof behoort, en NgNg is het aantal deeltjes dat zich in het gas bevindt. Toon aan dat in evenwicht NgNg gegeven wordt door
   Ng=Zg(T)ZsT

   Ng=Zg(T)ZsT

   met Zg(T)Zg(T) de eendeeltjestoestandssom van het gas en Zs(T)Zs(T) de eendeeltjestoestandssom voor de vaste stof.

3. Een neutronenster bevat N neutronen met elks massa m_s, opeengepakt in een bol met straal R. De totale gravitationele potentiële energie van een ster met massa M en straal R is $U_{grav}=-(3/5)GM^2/R$ waarin G Newton's constante is
    1. Leid een fomule af voor de temperatuur waarop deze neutronen een kwantumgas vormen.
    2. We benaderen dit als een homogeen ideaal Fermi gas. Als je weet dat voor een Fermigas de kantumdruk voldoet aan $pV=(2/3)U$ met U de interne energie, bereken dan hoe de kwantumdruk afhangt van de straal R waarin de neutronen opeengeperst zitten.
    3. Deze kwantumdruk wilt de ster doen uiteenspatten. Het is de gravitatie die de ster wil doen inkrimpen. Bepaal een formule voor de straal van de neutronenster, waarbij kwantumdruk en gravitatie elkaar in evenwicht houden.

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

Groep A

1. Het woordenboekje: geef een korte definitie van elk van onderstaande termen, alsof je een stukje voor een woordenboek of encyclopedie schrijft.
    - Canonisch ensemble
    - Postulaat van Boltzmann
    - Statistische gemiddeldes
    - Ergodiciteit
    - Lichtdruk
    - Soorten subsystemen
    - Enthalpie
    - Fluctuatie-respons theorema
    - Intensieve en extensieve grootheden
    - Gibbs grootcanonische kansverdeling
2. Wat loopt er mis in de berekening van de canonische toestandssom via de éédeeltjestoestandssom, $Z_{CAN}=Z_1^N/N!$, wanneer er meer dan één deeltje per energieniveau te verwachten is? Leg dit uit aan de hand van een voorbeeld. Hoe hangt dit samen met kwantummechanica, en in het bijzonder met de golflengte van De Broglie? Ten slotte, wat is het verband tussen de temperatuur waarom een gas kwantummechanisch behandeld moet worden, en de kritische temperatuur voor Bose-Einstein condensatie?

3. In de cursus hebben we de laagste orde temperatuurscorrectie berekend op de interne energie van het Fermi gas. Pas dezelfde technieken toe om de laagste-orde correctie uit te rekenen op de chemische potentiaal. Vertrek hierbij van $\int_0^\infty g(\epsilon) n_F(\epsilon) d\epsilon$,

$$\int_0^\infty g(\epsilon) n_F(\epsilon) d\epsilon,$$

   met $n_F(\epsilon)$ de Fermi-Dirac verdeling, en $g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2}$

$$g(\epsilon) = \frac{V}{2\pi^2}\left(\frac{2m}{\hbar^2}\right)^{3/2}\epsilon^{1/2}$$

   de toestandsdichtheid. Je herinnert je dat we in de cursus een analoge integraal hadden voor U, volg dezelfde stappen voor deze integraal voor N. Je vindt dan een vergelijking tussen μ en N. Schrijf $\mu = E_F(1 + AT^2)$ en bepaal A, als je alle termen van orde T^3 en hoger laat wegvallen. N is het aantal deeltjes en is onafhankelijk van de temperatuur.

Groep B

1. Het woordenboekje: geef een korte definitie van elk van onderstaande termen, alsof je een stukje voor een woordenboek of encyclopedie schrijft.
   - De Broglie golflengte
   - Ensembles
   - Toestandsdichtheid
   - Chemische potentiaal
   - Shannon entropie
   - Legendre transformaties
   - Vrije energie
   - Bose-Einstein condensatie
   - Postulaten van de statistische fysica
   - Ergodiciteit
2. Schrijf de uitdrukking voor de Bose-Einstein verdeling en de Fermi-Dirac verdeling op. Maak dan drie grafieken:
   - Een grafiek van beide verdelingen bij temperatuur gaande naar nul (maar niet helemaal nul), als functie van de energie. Duid op de energie-as ook de chemische potentiaal en het nulpunt van de energie aan.
   - Een grafiek van de interne energie versus de temperatuur, en zet op deze grafiek drie curves: voor het Fermi gas, voor het Bose gas en voor het klassieke ideale gas.
   - Een grafiek voor de soortelijke warmte, met daarop curves voor het Fermi gas, voor het Bose gas en voor het klassieke ideale gas. Duid op de grafiek de de kritische temperatuur voor Bose-Einstein condensatie aan.

3. In de cursus beschouwen we een open subsysteem dat zowel deeltjes als energie met de omgeving kan uitwisselen. Maar je kan ook een subsysteem beschouwen dat energie en *volume* kan uitwisselen met de omgeving.

   Toon aan, met eenzelfde redenering als we via Gibbs gevolgd hebben voor open subsystemen, dat de kans om het subsysteem te vinden met een gegeven energie E_s en volume V_s gegeven is door

   P(Es&Vs)=1ΞVexp[−(Es+pVskBT],

   P(Es&Vs)=1ΞVexp[−(Es+pVskBT],

   met p de druk, en ΞVΞV een nieuw soort toestandssom

   ΞV=∑Es,Vsexp[−(Es+pVskBT].

   ΞV=∑Es,Vsexp[−(Es+pVskBT].

   Toon aan dat kBT∂ln(ΞV)/∂TkBT∂ln(ΞV)/∂T niet de interne energie is maar de enthalpie.

   Deze kansverdeling bepaalt de verwachte waarde van het volume,

   ⟨Vs⟩=∑Es,VsVsP(Es&Vs)

   ⟨Vs⟩=∑Es,VsVsP(Es&Vs)

   .

   Er is nu een fluctuatie-respons theorema dat de samendrukbaarheid κ=−∂⟨Vs⟩/∂pκ=−∂⟨Vs⟩/∂p linkt met de fluctuaties van het volume σ2V=⟨V2s⟩−⟨Vs⟩2σV2=⟨Vs2⟩−⟨Vs⟩2. Vind deze relatie (ga op dezelfde manier te werk als voor het fluctuatie-respons theorema uit de cursus).

Oefeningen

Groep B

1. Beschouw onderscheidbare deeltjes met 2 mogelijke toestanden, j=1,2j=1,2 met energie ϵjϵj zodat ϵ1=aϵ1=a en ϵ2=−aϵ2=−a. Stel de toestandssom op. Bereken uit de toestandssom de vrije energie, en bereken uit deze vrije energie de entropie.
   Wat is de kans pjpj dat een deeltje zich in de toestand j bevindt? Bereken hieruit de Shannon entropie via S=−kB∑jpjlnpjS=−kB∑jpjlnpj. Komt deze entropie overeen met de entropie die je uit het eerste deel van je vraag vond?

2. We beschouwen een gas van N fermionen, waarvoor de microscopische analyse je leert dat er twee kwantumgetallen zijn, n1∈Nn1∈N en n2∈Nn2∈N, en dat de energie gegeven is door
   En1,n2=α2n21+n22−−−−−−√.

   En1,n2=α2n12+n22.

   Het aantal fermionen in het gas is π·1018π·1018 en de temperatuur is 100 millikelvin. De parameter αα heeft eenheden van energie en is gelijk aan α=1,38·10−30α=1,38·10−30 Joule (herinner je dat kB=1,38·10−23kB=1,38·10−23 J/K).

   1. Toon aan dat de toestandsdichtheid gegeven is door g(ϵ)=2πϵ/α2g(ϵ)=2πϵ/α2.
   2. Is het gas in het kwantummechanisch regime of kan het klassiek behandeld worden?
   3. Bereken de Fermi energie, in eenheden αα (dus bereken je Ef/αEf/α), en in eenheden kelvin (dus bereken de Fermi-temperatuur).
   4. Bereken de soortelijke warmte in eenheden NkBNkB (dus bereken je CV/(NkB)CV/(NkB)). Gebruik hiertoe de Sommerfield integraal
      ∫0∞f(ϵ)e(ϵ−μ)/(kBT)+1dϵ

      ∫0∞f(ϵ)e(ϵ−μ)/(kBT)+1dϵ

      =∫0μf(ϵ)dϵ+π26(kBT)2∂f∂ϵ∣∣ϵ=μ+O(T3)=∫0μf(ϵ)dϵ+π26(kBT)2∂f∂ϵ|ϵ=μ+O(T3)

      Toon aan dat de uitkomst geschreven kan worden als 4π23TTF4π23TTF voor μ=kBTFμ=kBTF.

   5. Bereken de entropie in eenheden NkBNkB.

Academiejaar 2011-2012 1ste zit

Mondeling

1. Bespreking van de taak.
2. bijvragen over het schriftelijk examen:
   - Toon aan dat Shannon en Boltzmann-entropie equivalent zijn.
   - Uitleg over het woordenboekje
   - Naast drie postulaten, welke aannames zijn er nog in de thermodynamica.

Schriftelijk

1. Het woordenboekje: geef definitie alsof je een woordenboek schrijft.
    - 3postulaten
    - Shannon entorpie
    - Statistische gemiddelden
    - Ergodiciteit
    - soorten ensembles
    - Toestandsdichtheid
    - Extensieve vs intensieve grootheden
    - Fluctuatie-respons theorie
    - Gibbs canonische verdeling
    - Grootcanonische toestanden
2.
    - Geef uitdrukkingen en grafieken van Bose-Einstein vs Fermi-Dirac verdeling, en duid μμ aan.
    - Geef een grafiek van de Cv van een klassiek Fermi en Bose-gas
    - Bewijs voor BEC dat μ=−kBTN0μ=−kBTN0
3. Zoek hoogste orde correctie op μμ voor Fermi-gas. Vertrek van N=∫∞−∞g(ζ)NF(ζ)dζN=∫−∞∞g(ζ)NF(ζ)dζ en door Schomerfeld. Bepaal dan A in μ=EF(1+AT2)μ=EF(1+AT2) waarbij je orde T3T3 en hoger verwaarloost.

Academiejaar 2010-2011 1^ste zit

Theorie

1. (2 punten) De toestand van een mono-atomair gas in een groot-kanoniek ensemble is gegeven door een rij dichtheidsverdelingen fN(q,p),N=0,1,2,...,fN(q,p),N=0,1,2,..., genormaliseerd zo dat
   1=∑∞N=01N!h3N∫ΓNdqdpfN(q,p)1=∑N=0∞1N!h3N∫ΓNdqdpfN(q,p)
   Schrijf een uitdrukking neer voor het gemiddelde van de kwadratische snelheid. Voor het n-de deeltje bedraagt deze
   v2n=∑3α=1(pn,αm)2vn2=∑α=13(pn,αm)2
   met m de massa van een atoom.
2. (3 punten) Beschouw een model behorend tot de exponentiële familie met Hamiltoniaan H(x),H(x),
   pθ(x)=c(x)exp(−Φ(β)−βH(x))pθ(x)=c(x)exp(−Φ(β)−βH(x)).
   Wat is het verband tussen de thermodynamische entropie S(U) en de Massieu-functie Φ(β)Φ(β)? Geef een argument waarom de afgeleide dS/dU gelijk is aan ββ(neem aan dat kB=1kB=1
3. (2 punten) Gebruik de methode van lagrange om de entropiefunctie van Boltzmann-Gibbs-<Shannon maximaal te maken onder de conditie dat de verwachtingswaarde van de Hamiltoniaan H(x) een gegeven waarde U heeft.
4. (3 punten) De renormalisatietransformatie definieert stromen in de parameterruimte van een model. Argumenteer waarom rond een fixpunt de eigenwaarden van de gelineariseerde transformatie met een machtwet schalen.

1. Extra vraag voor de wiskunde
   De Weibull-distributie is op de positieve as gegeven door
   $f(x)=\frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1}e^{-(x/\lambda)^k}$
   Toon aan dat deze kansverdeling als functie van λ behoort tot de (gekromde) exponentiële familie.

Praktijk

---

1. Renormalisatie (3 punten): Veronderstel dat een systeem onder renormalisatie slechts twee relevante variabelen heeft: de gereduceerde temperatuur t en het gereduceerd magneetveld h. Onder decimatie voldoet de gereduceerde vrije energie aan de schalingrelatie
   $\bar{f}_s(t,h) \propto b^{-d}\bar{f}_s(b^{y_1}t, b^{y_2}h).$
   Bepaal de kritische exponent γ, gedefineerd door $\chi_T \propto |t|^{-\gamma}$ bij magneetveld gelijk aan nul.
2. χ^2-distributie (3 punten): de χ^2-verdeling wordt gedefinieerd als
   $p_k(x)=\frac{x^{k/2-1}e^{-x/2}}{2^{k/2}\Gamma(k/2)}$
   met $x\geq 0$. Schrijf deze distributie in exponentiële familie vorm (geef dus uitdrukkingen voor $c(x),\Phi(k),\theta(k) \text{ en } H(x)).$
3. Landautheorie (4 punten) De Landautheorie is een mean field theorie waarin aangenomen wordt dat de vrije energie een polynoom is in de ordeparameter. Voor het Isingmodel geldt dan
   $F=F_0+a_2m^2+a_4m^4$
   met m de magnetisatie en $F_0,a_4\in\mathbb{R}^+_0$).
   1. Toon aan dat bij $a_2=0$ een faseovergang plaatsvindt (2 punten)
   2. Neem aan dat $a_2=\tilde{a}_2t$ (met $\tilde{a}_2\in\mathbb{R}_0^+$). Bereken de kritische exponent β_- gedefinieerd zodat $M\propto(-t)^\beta$ als het uitwendig veld nul is - door op te leggen dat het systeem in evenwicht is (2 punten)
4. Entropie extremalisatie: Veronderstel dat de variabele x de waarden 0 tot en met N kan aannemen met kansen p(n). Gegeven het gemiddelde $\bar{x}$, bepaal de distributie p(n) die de BGS-entropie maximaliseert. Veronderstel dat de a priori gewichten gegeven zijn door $c(n)=\frac{N!}{n!(N-n)!}$
5. Tsallisentropie Doe de vorige oef opnieuw maar met in plaats van de BGS-entropie de Tsallisentropie $S_q(p)=\frac{1}{1-q}\left(\sum_n p(n)\left(\frac{p(n)}{c(n)}\right)^{q-1}-1\right)$
6. von Neumannentropie: gegeven een dichtheidsmatrix in Blochrepresentatie
   $\rho_r=0.5(I-f_k\sigma_k)$
   $$\rho_r=0.5(I-f_k\sigma_k)$$
   Bereken de von Neumannentropie $S(\rho_r)$
7. Exponentiele distributie: Bereken de BGS-entropie van de exponentiele distributie $p(x)=ae^{-ax}$

Categorieën:

- Fysica

- 3BFYS