

Tuyaux  
1ste Bachelor Fysica

WINAK

Juni  
2011

# Inhoudsopgave

<b>1 Inleiding</b>	<b>5</b>
<b>2 Algemene Fysica 2</b>	<b>7</b>
2.1 De cursus, het vak, het examen . . . . .	7
2.2 Theorie . . . . .	7
2.2.1 Groep 1 Juni 1994 . . . . .	7
2.2.2 Groep 1 Juni 1995 . . . . .	8
2.2.3 Groep 2 Juni 1995 . . . . .	8
2.2.4 Groep 3 Juni 1995 . . . . .	8
2.2.5 September 1995 . . . . .	8
2.2.6 Juni 1998 . . . . .	9
2.2.7 Groep 2 Juni 1998 . . . . .	9
2.2.8 September 2000 . . . . .	9
2.2.9 Juni 2001 . . . . .	10
2.2.10 September 2001 . . . . .	10
2.2.11 Juni 2005 . . . . .	11
2.2.12 Juni 2006 . . . . .	11
2.2.13 Juni 2007 . . . . .	11
2.2.14 Juni 2008 . . . . .	12
2.2.14.1 Groep 1 . . . . .	12
2.2.14.2 Groep 2 . . . . .	12
2.2.15 Juni 2010 . . . . .	13
2.3 Oefeningen . . . . .	13
2.3.1 Juni 1998 . . . . .	13
2.3.2 September 1997-1998 . . . . .	14
2.3.3 September 1999 . . . . .	15
2.3.4 Juni 2000 . . . . .	15
2.3.5 Juni 2001 . . . . .	16
2.3.6 Juni 2002 . . . . .	17
2.3.7 Juni 2005 . . . . .	18
2.3.8 Juni 2006 . . . . .	19
2.3.9 Juni 2007 . . . . .	19
2.3.10 Juni 2008 . . . . .	21
2.3.11 Extra examen Juni 2008 . . . . .	22
2.3.12 September 2008 . . . . .	23
2.3.13 Oplossingen Juni 2008 . . . . .	24

<b>INHOUDSOPGAVE</b>	<b>2</b>
<b>3 Experimentele fysica 1</b>	<b>25</b>
3.1 De cursus, het vak, het examen . . . . .	25
3.2 Examenvragen . . . . .	25
3.2.1 Juni 2005 . . . . .	25
3.2.2 September 2005 . . . . .	25
3.2.3 Juni 2006 . . . . .	26
3.2.4 Juni 2007 . . . . .	27
3.2.5 Juni 2008 . . . . .	27
3.2.6 Juni 2010 . . . . .	28
<b>4 Wiskundige methoden voor de fysica 2</b>	<b>30</b>
4.1 De cursus, het vak, het examen . . . . .	30
4.2 Theorie . . . . .	32
4.2.1 Januari 2001 groep 1 . . . . .	32
4.2.2 Januari 2001 groep 2 . . . . .	32
4.2.3 Januari 2002 . . . . .	32
4.2.4 Januari 2005 . . . . .	32
4.2.5 Augustus 2005 . . . . .	33
4.2.6 Januari 2006 . . . . .	33
4.2.7 Januari 2007 . . . . .	34
4.2.8 Januari 2008 . . . . .	34
4.2.9 Juni 2009 . . . . .	34
4.2.10 Juni 2010 . . . . .	34
4.2.10.1 Groep 1 . . . . .	34
4.2.10.2 Groep 2 . . . . .	35
4.3 Oefeningen . . . . .	36
4.3.1 September 1995 . . . . .	36
4.3.2 Juni 1998 . . . . .	36
4.3.3 Juni 1999 . . . . .	36
4.3.4 September 1999 . . . . .	37
4.3.5 Juni 2000 . . . . .	37
4.3.6 Januari 2001 . . . . .	37
4.3.7 Juni 2005 . . . . .	38
4.3.8 Augustus 2005 . . . . .	38
4.3.9 Januari 2007 . . . . .	39
4.3.10 Januari 2008 . . . . .	39
4.3.11 September 2008 . . . . .	40
4.3.12 Juni 2009 . . . . .	40
<b>5 Ecologie</b>	<b>42</b>
5.1 De Cursus, het vak, het examen . . . . .	42
5.2 Theorie . . . . .	42
5.2.1 Januari 2009 . . . . .	42
5.3 Extra . . . . .	43
5.3.1 De examenvragen van Dhr. Prof. Ceulemans . . . . .	43
5.3.2 Juni 2010 . . . . .	57
<b>6 Metrische ruimten en differentiaalrekening</b>	<b>58</b>
6.1 Theorie . . . . .	58
6.1.1 Juni 2005 . . . . .	58
6.1.1.1 Groep 1 . . . . .	58
6.1.1.2 Groep 2 . . . . .	58

6.1.2	Juni 2006 . . . . .	59
6.1.3	Juni 2008 . . . . .	59
6.1.4	Oplossingen Juni 2008 . . . . .	60
6.1.5	Juni 2009 . . . . .	61
6.1.5.1	Groep 1 . . . . .	61
6.1.5.2	Groep 2 . . . . .	61
6.1.6	Juni 2010 . . . . .	61
6.2	Oefeningen . . . . .	61
6.2.1	Opgaven . . . . .	61
6.2.1.1	Juni 2004 (deel 2) . . . . .	61
6.2.1.2	Augustus 2004 . . . . .	62
6.2.1.3	Juni 2005 . . . . .	63
6.2.1.4	Juni 2006 . . . . .	63
6.2.1.5	September 2006 . . . . .	64
6.2.1.6	Juni 2007 . . . . .	65
6.2.1.7	Juni 2008 . . . . .	65
6.2.1.8	Juni 2010 . . . . .	66
6.2.2	Oplossingen . . . . .	67
6.2.2.1	Juni 2004 (deel 2) . . . . .	67
6.2.2.2	Augustus 2004 . . . . .	68
6.2.2.3	Juni 2005 . . . . .	71
6.2.2.4	Juni 2006 . . . . .	73
6.2.2.5	September 2006 . . . . .	75
7	<b>Chemie</b>	<b>80</b>
7.1	September 2004 . . . . .	80
7.2	Januari 2006 . . . . .	83
7.2.1	Opgaven . . . . .	83
7.2.2	Enkele Oplossingen . . . . .	86
7.3	Januari 2008 . . . . .	86
7.4	Januari 2009 . . . . .	87
7.5	September 2010 . . . . .	88
8	<b>Mechanica</b>	<b>89</b>
8.1	De Cursus, het vak, het examen . . . . .	89
8.2	Theorie . . . . .	89
8.2.1	Juni 2005 . . . . .	89
8.2.2	September 2005 . . . . .	89
8.2.3	Juni 2006 . . . . .	90
8.2.4	Juni 2006, extra examen . . . . .	90
8.2.5	Juni 2007 . . . . .	90
8.2.6	Juni 2008 . . . . .	90
8.2.6.1	Groep 1 . . . . .	90
8.2.6.2	Groep 2 . . . . .	90
8.2.7	Juni 2009 . . . . .	90
8.2.7.1	Groep 1 . . . . .	91
8.2.7.2	Groep 2 . . . . .	91
8.2.7.3	Groep 3 . . . . .	91
8.2.8	Juni 2010 . . . . .	91
8.3	Oefeningen . . . . .	91
8.3.1	Juni 2005 . . . . .	91
8.3.2	Juni 2006 . . . . .	92

<i>INHOUDSOPGAVE</i>	4
----------------------	---

8.3.3 Juni 2007 . . . . .	93
8.3.4 Juni 2008 . . . . .	93
8.3.5 Juni 2009 . . . . .	94
8.3.6 Juni 2010 . . . . .	95
<b>Dankwoordje</b>	<b>96</b>

# Hoofdstuk 1

## Inleiding

Komende weken zullen iets minder aangenaam zijn dan de voorbije, maar behoren willens nillens toch tot het leven van iedere student. Bedachtzaam als we zijn bij WINAK hebben we over de jaren heen een dikke bundel examenvragen bijgehouden en er een fancy naam aan gegeven, de Tuyaux (over de spellingswijze bestaan heftige discussies onder de mentoren, dus don't ask! ;-)).

Het spreekt voor zich dat er over de jaren heel wat cursuswijzigingen zijn doorgevoerd en dat niet iedere vraag even relevant is, maar je mag er meestal toch vanuit gaan de laatste twee jaar min of meer representatief zijn.

Naast dit heugelijke nieuws, nog iets anders. Zoals jullie wel weten zijn jullie nog maar het derde jaar met het nieuwe programma. Hierdoor zijn heel wat vakken niet meer relevant voor jullie en zijn er van veel van jullie vakken maar 2 echte representatieve voorbeelden. Toch blijven vele dingen van daarvoor nog steeds nuttig, vandaar dat ze er ook nog bijstaan.

Ik weet dat de komende anderhalve maand met momenten zeer zwaar zullen worden, maar laat je zeker nooit ontmoedigen! Als het even niet gaat, pauzeer dan even en bijt dan weer door en als het lijkt dat je misschien niet voor grootste onderscheiding kan gaan, neem dan vrede met die grote, maar doe zeker ieder examen mee! Al vaker is een examen veel beter meegevallen dan gevreesd en dan kan je dat vak bij op je diploma zetten en verder gaan!

Deze tuyaux zijn opgesteld op je te helpen bij het studeren. Graag zou ik eerst nog een paar opmerkingen willen maken :

- Een tuyaux is een **hulpmiddel**. Dit wil zeggen dat het noch je cursus noch je nota's kan vervangen. Dit document bevat een zeer groot aantal vragen dat gesteld zijn geweest de vorige jaren en is dus zeer nuttig om te bekijken.
  - **hoe** je moet studeren, een idee te krijgen van hoe het examen er uit zal zien, welke soort vragen in het algemeen gesteld worden, aan welke delen van de cursus een zeer groot belang wordt gehecht (dit zijn de delen van de cursus die ongeveer elk jaar terug komen).
  - of je je cursus kent door te proberen **antwoorden** op de vragen en oefeningen die in dit document staan, zonder constant terug naar je cursus te moeten kijken.
- Sommige vragen zijn al vrij oud en stammen dus nog af uit een tijd waar andere klemtonen lagen of meer/minder werd geëist voor een vak. Ook soms van tijden dat het vak door een andere prof werd afgenomen.
- Deze Tuyaux zijn niet foutenloos. Mocht je er vinden, mag je ze altijd mailen naar [julie@winak.be](mailto:julie@winak.be).

- Als je net een examen hebt afgelegd, probeer dan de vragen ergens bij te houden en te bezorgen aan iemand van WINAK. Op die manier hebben al meer dan twintig jaar lang WINAKers dit voor jullie gedaan en zo leven de Tuyaux verder!

Verder kan ik jullie alleen nog maar allemaal heel veel succes toewensen bij de examens, jullie aanmoedigen om jullie voor elk vak 200% in te zetten, en om de moed niet te verliezen tijdens deze vier-weken-lange examenperiode.

*Julie*

*WINAK mentor Fysica 2010-2011*

# **Hoofdstuk 2**

## **Algemene Fysica 2**

### **2.1 De cursus, het vak, het examen**

Dit vak werd lange tijd gegeven door Prof. Dr. Van Landuyt. in 2005 en 2006 heeft Prof. Dr. J. Verbeeck dit gegeven, maar vanaf 2007 wordt het door Prof. Dr. S. Bals gegeven.

In deze cursus komen de gedeeltes

- Optica
- Trillingen en golven
- Thermodynamica

aan bod. Prof. dr. Bals stelt drie of vier vragen die elk over een ander deel van de cursus gaan. Uit deze wordt er door haar 1 gekozen die mondeling verdedigd dient te worden. Bij het mondelinge gedeelte stelt ze hiernaast nog een tiental extra vragen. Hou er rekening mee dat de theorie en oefeningen op evenveel punten staan en dus evenwaardig zijn!

### **2.2 Theorie**

#### **2.2.1 Groep 1 Juni 1994**

Prof. Dr. Van Landuyt

1. (a) Definieer de punten van Weierstrass. Bewijs hun eigenschappen en geef 3 toepassingen.  
(b) Bespreek telescopische lenscombinaties met matrixmethode
2. Bespreek terugkaatsing van lopende golven en geef een voorbeeld van toepassingen in de optica.
3. (a) Bereken het rendement van de ontstoppingsmotor. Bespreek eveneens het isotherm, resp., adiabatisch karakter van de processen.  
(b) Hoe kan men de absolute temperatuur optimaal definiëren? Verantwoord de methode en bespreek de voordelen.
4. Bespreek het falen van de proef van Michelson, de conclusies en verklaar op basis van de Lorentztrafo. Leg uit waarom deze trafo nodig werd ingevoerd.

### 2.2.2 Groep 1 Juni 1995

Prof. Dr. Van Landuyt

1. Stel de formule voor de breking aan een dunne lens op.
2. Thermodynamica: beschrijf de cycli van een verbrandingsmotor + (mondeling) leg het begrip entropie uit.
3. Trillingen en golven: Geef de bewegingsvergelijkingen van golven in verschillende media.
4. Beperkte relativiteit.

### 2.2.3 Groep 2 Juni 1995

Prof. Dr. Van Landuyt

1. Beeldvorming door een sfeer+toepassing.
2. Opheffen van gereflecteerde golven, reflectie van gereflecteerde golven+schets terugkaatsing en transmissie van golven aan een brekingsoppervlak.
3. Aberratie van licht: leg dit klassiek uit, m.b.v. galileïtrafo en relativistisch uit.
4. Stelling van Carnot.

### 2.2.4 Groep 3 Juni 1995

Prof. Dr. Van Landuyt

1. Bespreek de terugkaatsing en transmissie van golven aan een scheidingsoppervlak, inclusief transmissie-en reflectoefficiënt. Geef een voorbeeld van een toepassing in de optica.
2. (a) Karakteriseer de carnotcyclus en bewijs dat:
  - i. deze een maximal rendement heeft;
  - ii. dit onafhankelijk is van het medium.(b) Hoe kan men de absolute temperatuur optimaal definiëren? Verantwoord de methoden en bespreek de voordelen.
3. Aberratie van het licht: leg dit klassiek, m.b.v. galileïtrafo en relativistisch uit.
4. Stelling van Carnot.

### 2.2.5 September 1995

Prof. Dr. Van Landuyt

1. Bespreek de gekoppelde slinger.
2. (a) Beschrijf de koelmachine en bespreek haar rendement. Toon aan dat de tweede hoofdwet (Clausiusformulering) hieruit volgt.  
(b) Bespreek de warmtepomp (met schema) en haar nut.
3. (vraag over relativiteit)
4. Bespreek hoe men de chromatische effecten compenseert bij prisma's. Idem voor lenzen.

### **2.2.6 Juni 1998**

Prof. Dr. Van Landuyt

1. Bespreek het gedrag van lopende golven aan een discontinuïteit in het medium. Pas het resultaat toe op anti-reflecterende lagen. Werk uit.
2. (a) Definieer de punten van Weierstrass. Bewijs hun eigenschappen en geef 3 toepassingen.  
 (b) Bespreek telescopische lenscombinaties met matrixmethode.
3. (a) Bereken het rendement van de ontstoppingsmotor. Bespreek eveneens het isotherm, resp., adiabatisch karakter van de processen.  
 (b) Hoe kan men de absolute temperatuur optimaal definiëren? Verantwoord de methode en bespreek de voordelen.
4. Bespreek het falen van de proef van Michelson, de conclusies en verklaar op basis van de Lorentztrafo. Leg uit waarom deze trafo nodig werd ingevoerd.

### **2.2.7 Groep 2 Juni 1998**

Prof. Dr. Van Landuyt

1. Bespreek het resonantieregime van gedwongen trillingen inclusief de kwaliteitsfactor van de resonantie. Beschrijf een experiment waarmee dit duidelijk geïllustreerd kan worden. Geef ook een aantal voorbeelden van resonanties in de fysica.
2. (a) Bespreek het nut van oculair-lenscombinaties en de karakteristieken van het Huygens-Ramsden oculair in detail.  
 (b) Definieer het scheidend vermogen van een microscoop resp. telescoop. Door welke grootheden is het scheidend vermogen voor elk beperkt?
3. (a) Geef het verband tussen het begrip entropie en...
  - i. de tweede hoofdwet
  - ii. reversibiliteit van processen
  - iii. wanorde
  - iv. gebonden energie
 (b) Bewijs een uitdrukking voor het verband tussen entropie en wanorde.
4. (a) Wat ontbrak er aan de Galileïtransformatie? Hoe werd dit aangetoond, hoe verholpen?  
 (b) Wat leert de aberratie van licht ons over relativistische verschijnselen?

### **2.2.8 September 2000**

Prof. Dr. Van Landuyt

1. (a) Definieer de begrippen fasesnelheid en groepssnelheid van een golf in een dispersief medium en breng dit in verband met “dispersie” in een milieu.  
 (b) Bespreek het gedrag van een longitudinale één-dimensionale keten van identische atomen. Illustrer hierbij hogervermelde begrippen.
2. (a) Beschrijf een Carnot-machine en haar eigenschappen. Definieer het rendement en bereken dit als functie van de temperatuur van de reservoirs waartussen ze werkt.

- (b) Hoe werkt een warmtepomp? Teken het schema en bespreek haar nut (verwarming en koeling).
3. Leid een uitdrukking af voor de brandpuntsafstand van een dikke lens.
  - (a) wat is een telescopisch stelsel?
  - (b) teken de stralengang van een microscoop en een telescoop
  - (c) waarom gebruikt men spiegels bij telescopen?
4. (vraag over relativiteit)

### **2.2.9 Juni 2001**

Prof. Dr. Van Landuyt

1. (a) Definieer de begrippen fasesnelheid en groepssnelheid van een golf in een dispersief medium en breng dit in verband met “dispersie” in een milieu.
- (b) Bespreek het gedrag van een longitudinale één-dimensionale keten van identische atomen. Illustrer hierbij hogervermelde begrippen.
2. (a) Beschrijf een Carnot-machine en haar eigenschappen. Definieer het rendement en bereken dit als functie van de temperatuur van de reservoirs waartussen ze werkt.
- (b) Hoe werkt een warmtepomp? Teken het schema en bespreek haar nut (verwarming en koeling).
3. Leid een uitdrukking af voor de brandpuntsafstand van een dikke lens.
  - (a) wat is een telescopisch stelsel?
  - (b) teken de stralengang van een microscoop en een telescoop
  - (c) waarom gebruikt men spiegels bij telescopen?
4. (vraag over relativiteit)

### **2.2.10 September 2001**

Prof. Dr. Van Landuyt

1. Bespreek het gedrag van lopende golven aan een discontinuïteit in het medium. Bespreek als toepassing anti-reflecterende lagen, en werk uit.
2. Wat zijn de punten van Weierstraß. Geef en bewijs hun eigenschappen. Bespreek het telescopisch stelsel aan de hand van matrixoptica.
3. Bespreek het rendement van een ontploffingsmotor. En bespreek het adiabatisch zijn van de processen. Hoe kunnen we absolute temperatuur op een optimale manier definiëren, en waarom kunnen we dat zo doen?
4. Bespreek het experiment van Michelson-Morley. Wat waren de conclusies? En bespreek ook de verbeterde versie met de Lorentztransformatie. Waarom werd de Lorentztransformatie ingevoerd?

### 2.2.11 Juni 2005

Prof. Dr. J. Verbeeck

1. Leid de lensformule af voor een brekend sferisch oppervlak m.b.v. het principe van Fermat. Stel ook een formule op voor de hoofd- en nevenfocaalafstand.
2. Bespreek de gedwongen gedempte trilling. Werk analytisch en toon de resultaten grafisch.
3. Beschrijf de werking van een waterpomp en bespreek het theoretische rendement.

### 2.2.12 Juni 2006

prof. J. Verbeeck

1. Leid de voorwaarde voor een achromatisch paar dunne lenzen af. En schets de opstelling. Veronderstel dat beide lenzen uit hetzelfde materiaal gemaakt zijn. Maak gebruik van de formule voor de focaallengtes  $F$  tov. de hoofdvlaakken.  

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$
2. Bespreek de trillingsmodi in een oneindige lineaire keten met twee verschillende puntmassa's. (de massa's  $M_1$  en  $M_2$  wisselen elkaar af, de afstand tussen de massa's is  $a$ , de massa's zijn verbonden met ideale veren met veerconstante  $K$ ). Verwaarloos wrijving.
3. Bespreek de werking van een warmtepomp en maak een schatting van het rendement.

### 2.2.13 Juni 2007

Groep 1 :

1. Breking aan een prisma:
  - Leid de formule af die gebruikt kan worden om uit de minimumdeviatie de brekingsindex te berekenen. Maak een duidelijke tekening!
  - Met welke situatie stemt de minimumdeviatie overeen en bereken dit zonder formules te gebruiken.
2. Gedempte trilling:
  - Leid de algemene vergelijking af, welke oplossingen zijn mogelijk ?
  - Bespreek in detail de overgedempte harmonische oscillatie.
3. Carnot:
  - Teken het (p,V)-diagram van een Carnot-cyclus met een ideaal gas.
  - Bespreek de verschillende stappen.
  - Geef en bewijs de stelling van Carnot.
  - Teken en bespreek het (T,S)-diagram voor een Carnot cyclus.

Groep 2 :

1. Beeldvorming door een sfeer:
  - Teken de situatie en geef de afleiding
  - Bespreek de voordelen

- Bespreek het praktisch gebruik
2. Terugkaatsing en transmissie van lopende golven:
    - Bespreek voor transversale golven
    - Bespreek voor longitudinale golven
  3. Ontploffingsmotor:
    - Teken het (p, V)diagram
    - Bespreek de verschillende stappen
    - Geef een schatting voor het rendement
    - Wat is het essentieel verschil met de Dieselmotor?
    - Teken het p,V diagram van de Dieselmotor

### **2.2.14 Juni 2008**

Prof. Dr. S. Bals

#### **2.2.14.1 Groep 1**

1. • Welke zijn de belangrijkste lenzen van een microscoop?  
 • Maak een tekening en bespreek de exacte functies van de lenzen.  
 • Maak een schatting voor de totale vergroting. Gebruik hierbij daar waar mogelijk concrete getallen en leg daarbij uit hoe je aan die getallen komt.  
 • Bespreek in maximaal 10 lijnen wat het scheidend vermogen van een microscoop bepaalt. Denk hierbij ook verder dan de paraxiale benadering.
2. • Leid de formule af die de voortplantingssnelheid van geluid in lucht beschrijft.  
 • Bespreek de terugkaatsing en transmissie van geluidsgolven in een buis waar een discontinuïteit optreedt.
3. • leid  $C_p - C_v$  af voor een ideaal gas.  
 • Geef bij de verschillende stappen in de afleidingen ook aan waarom je bepaalde formules mag gebruiken.  
 • Bespreek de verschillen en overeenkomsten ten opzichte van de afleiding voor een niet ideaal gas.

#### **2.2.14.2 Groep 2**

1. • Bespreek de breking aan een sferisch oppervlak tussen twee media met brekingsindices  $n$  en  $n'$   
 • Maak een duidelijke tekening  
 • Leid de formule van Gauss af in de paraxiale benadering gebruik makend van het principe van Fermat  
 • Bespreek in maximaal 10 lijnen de geldigheid van de paraxiale benadering
2. • Beschouw de reflectie en transmissie van lopende golven tussen twee gebieden met verschillende karakteristieke impedantie  $Z_1$  en  $Z_3$ . Tussen deze gebieden wordt een dunne laag aangebracht van een stof met karakteristieke impedantie  $Z_2$

- Hoe dik moet de tussenlaag zijn opdat de gereflecteerde golven elkaar zouden verzwakken? Verduidelijk dit antwoord aan de hand van een schematische voorstelling voor  $Z_1 \downarrow Z_2 \downarrow Z_3$ .
  - Hoe moet men de karakteristieke impedantie  $Z_2$  kiezen opdat de resulterende gereflecteerde golf zou verdwijnen? Geef de afleiding.
3. • Leid de formule af die de adiabatische expansie van een gas beschrijft.  
 • Teken de adiabaten in een (p,V) diagram  
 • Maak de vergelijking met isothermen, leg zo volledig mogelijk uit wat het verschil is en hoe dit komt.

### 2.2.15 Juni 2010

1. Beeldvorming door breking (refraction): (5ptn - 20min)  
 Geef een voorbeeld. Maak een duidelijke en correcte tekening van de situatie. Geef daarnaast de afleiding van de formule waarmee je de beeldafstand kan berekenen. Als je benaderingen gebruikt, geef dat duidelijk aan waar je ze gebruikt en wanneer ze geldig zijn.
2. Beschouw de reflectie en transmissie van lopende golven tussen twee gebieden met verschillende karakteristieke impedantie  $Z_1$  en  $Z_3$ . Tussen deze gebieden wordt een dunne laag aangebracht met een stof met karakteristieke impedantie  $Z_2$ . (6ptn - 45min)  
 Hoe dik moet de tussenlaag zijn opdat de gereflecteerde golven elkaar zouden verzwakken? Verduidelijk dit antwoord aan de hand van een schematische voorstelling voor  $Z_1 < Z_2 < Z_3$ . Hoe moet men de karakteristieke impedantie  $Z_2$  kiezen opdat de resulterende gereflecteerde golf zou verdwijnen? Geef de afleiding.
3. Adiabatische processen. DEZE VRAAG WORDT MONDELING BESPROKEN. (5ptn - 30min).  
 Geef de formule die adiabatische expansie/compressie beschrijft. Bewijs de formule, indien je bepaalde aannames maakt leg je deze ook uit.
4. Bewijs dat een thermische machine die werkt tussen temperaturen  $T_C$  en  $T_H$  niet efficiënter kan zijn dan de perfect reversibele thermische machine die tussen dezelfde temperaturen werkt. Leg ook uit wat bedoeld wordt met perfect reversibel. (4ptn - 20min)

## 2.3 Oefeningen

Hier zijn bij sommige examens (vooral voor 2001) de vectorstrepen weggelaten.

### 2.3.1 Juni 1998

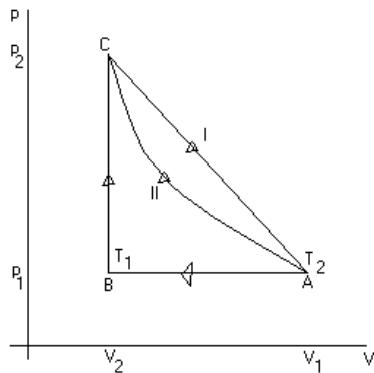
Prof. Dr. Van Landuyt m.m.v. Wim Schuddinck

1. De afstand tussen een object en zijn reëel beeld, gevormd door een convergerende lens, wordt constant gehouden. Toon aan dat er twee mogelijke posities zijn voor een lens en dat de grootte van het object gegeven wordt door  $\sqrt{h_1 h_2}$  met  $h_1$  en  $h_2$  de groottes van de twee beelden.
2. Een elastische snaar met verwaarloosbare massa is opgehangen tussen twee vaste punten  $A$  en  $B$ . De spanning in de snaar bedraagt  $T$  en de afstand  $AB$  bedraagt  $4L$ . Op posities  $L$ ,  $2L$  en  $3L$  t.o.v.  $A$  zijn drie identieke deeltjes met massa  $m$  aangebracht.

- (a) Stel de differentiaalvergelijking op voor elk van de deeltjes in geval van kleine transversale uitwijkingen.
- (b) Bereken de pulsaties van de mogelijke normale trillingswijzen van het systeem.
- (c) Bereken de verhouding van de amplitudes van de drie deeltjes in elke trillingswijze.
- (d) Het eerste deeltje (dichtst bij  $A$ ) wordt een afstand  $3d$  uit evenwichtspositie getrokken. (De twee andere deeltjes krijgen daardoor een uitwijking  $2d$  en  $4d$  respectievelijk.) Vervolgens op tijdstip  $t = 0$ , wordt het systeem vanuit deze positie losgelaten. Beschrijf de resulterende beweging. (Maak ook een schets a.u.b.)
3. Voor een Carnot-machine wordt  $0.8\text{mol}$  van een ideaal mono-atomair gas gebruikt. Het thermisch rendement van de machine bedraagt  $40\%$ . Per cyclus wordt een warmtehoeveelheid van  $20.93 \text{ Joule}$  aan het systeem onttrokken, dat zich bij een temperatuur van  $250^\circ\text{C}$  bevindt.
- (a) Bereken de temperatuur van het koude reservoir.
- (b) Bereken de warmtehoeveelheid die er cyclus aan het koude reservoir wordt afgestaan.
- (c) Bereken de arbeid die door de machine per cyclus verricht wordt.
- (d) Wat is de expansieverhouding gedurende de isotherme expansie?
- (e) Wat is de expansieverhouding gedurende de adiabatische expansie?
4. In een stelsel in rust zendt een bron licht uit in een kegelvormige bundel met breedte  $\pm 45^\circ$ . In een stelsel dat naar de bron toebeweegt met snelheid  $v$  is de bundelbreedte  $\pm 30^\circ$ . Wat is  $v$ ?

### 2.3.2 September 1997-1998

- Beschouw een optisch stelsel bestaande uit een dubbelholle lens (dikte  $4.5\text{cm}$  en kromtestraal voor beide oppervlakken  $10\text{cm}$ ), in combinatie met een vlakholle lens (dikte  $3\text{cm}$ , kromtestraal van het tweede brekend oppervlak  $5\text{cm}$ ). Deze zijn  $30\text{cm}$  van elkaar gelegen en werden beide vervaardigd uit flintglas met brekingsindex  $n' = 1.5$ . Bereken dan:
  - de brandpuntsafstanden van beide lenzen m.b.v. matrixoptica en vergelijk deze met het resultaat van de formule voor dunne lenzen en voor dikke lenzen.
  - de vergroting en beeldafstand van een voorwerp dat  $10\text{cm}$  voor de eerste lens staat.
- Een massa  $m$  hangt aan een veer met veerconstante  $k$ . Bereken de periode v/d oscillaties van het systeem. Bereken tevens de periodes van de oscillaties indien  $m$  opgehangen is aan twee identieke veren (veerconstante  $k$ ) in parallel en in serie.
- Figuur 2.1 stelt 2 mogelijke cycli voor van een motor op basis van een ideaal mono-atomair gas. De beide cycli verschillen slechts wat de trap (C-A) betreft in het  $pV$ -diagramma, die ofwel een lineair dalend verloop heeft(I) ofwel een isotherm is(II). Bepaal een analytische uitdrukking voor het rendement van beide cycli in functie van  $\gamma$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  en bepaal eveneens de expansieverhouding  $f = \frac{V_1}{V_2}$ . Leid hieruit af welke van beide cycli het hoogste rendement heeft (maak eventueel een schets). Bereken achteraf de numerieke waarden van de respectievelijke rendementen voor de praktische situatie  $T_1 = 27^\circ\text{C}$ ;  $T_2 = -73^\circ\text{C}$  en  $f=3$ . ( $\gamma_{\text{mono-atomair}} = 1,67$ )
- (vraag over relativiteit)



Figuur 2.1: de 2 mogelijke cycli

### 2.3.3 September 1999

1. Beschouw een optisch stelsel bestaande uit een biconvexe lens ( $n' = 1.33$ ;  $d = 5\text{cm}$ ;  $r_1 = r_2 = 10\text{cm}$ ) in combinatie met een biconcave lens ( $n'' = 1.5$ ;  $d = 2\text{cm}$ ;  $r_3 = 5\text{cm}$ ;  $r_4 = 6\text{cm}$ ) op een afstand van  $20\text{cm}$  van elkaar. Bereken vergroting en beeldafstand van een voorwerp dat zich op  $15\text{cm}$  voor de eerste lens bevindt. Schets de situatie en bespreek het beeld.
2.  $N$  moleculen van een ideaal gas nemen een volume  $V_1$  in. Wat is het entropieverschil  $\Delta S$  wanneer dit volume onder constante druk vergroot tot  $V_2$ ?
3. (vraag over relativiteit)
4. Een flexibele koord met een lengte van  $80\text{cm}$  heeft als massa  $0.4\text{kg}$ . Ze is opgespannen tussen twee vaste punten die  $50\text{cm}$  uit mekaar liggen met een spanning  $500 \frac{\text{N}}{\text{m}}$ . Met welke frequenties kan de koord trillen?

### 2.3.4 Juni 2000

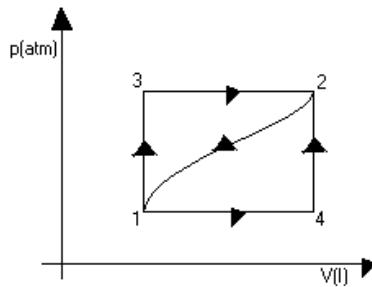
1. Een lens met een concave zijde met een straal met grootte  $17\text{cm}$  en een convexe zijde met een straal van  $8\text{cm}$  heeft in lucht een focusafstand  $27.5\text{cm}$ . Wanneer deze lens in een vloeistof met onbekende brekingsindex wordt geplaatst, is de focusafstand  $109\text{cm}$ . Wat is de brekingsindex van deze vloeistof?
2. Een voorwerp  $6\text{cm}$  hoog wordt op  $40\text{cm}$  voor een dunne convergerende lens met focusafstand  $8\text{cm}$  geplaatst. Wat is de positie, de grootte en de aard (reëel / virtueel / omgekeerd / rechtopstaand) van het beeld?
3. Een verticaal opgehangen koord van  $200\text{cm}$  is onderhevig aan een spanning gelijk aan het gewicht van een massa van  $800\text{g}$ . Bij een frequentie van  $480\text{Hz}$  resoneert het koord in drie segmenten. Wat is de totale massa van het koord?
4.  $1\text{kmol}$  van het ideale gas helium wordt doorheen de processen voorgesteld in het onderstaande schema gevoerd. Het pad van B naar C verloopt isotherm,  $p_A = 1\text{atm}$ ,  $V_A = 22\text{m}^3$ ,  $p_B = 2\text{atm}$ . Welke arbeid wordt er geleverd door of op het gas?
5. Een gas ondergaat een quasistatische en adiabatische expansie, waarbij zijn druk verlaagt en van  $120\text{kPa}$  tot  $100\text{kPa}$  en zijn temperatuur van  $300K$  naar  $280K$  gaat. Is dit gas monoatomisch of diatomisch?

6. (vraag over relativiteit)

### 2.3.5 Juni 2001

1. Een glazen ( $n = 1.5$ ) cilinder is langs een kant geslepen tot een hale bol met  $r = 2\text{cm}$ . Een voorwerp bevindt zich op de as, 8cm voor de bolle kant. Wat is het beeldpunt als de staaf zich bevindt in
  - (a) lucht
  - (b) water ( $n = 1.33$ )?

Zeg ook in woorden waar het beeld zich in beide gevallen bevindt.
2. In welke twee posities zal een convergerende lens met focusafstand  $+7.5\text{cm}$  op een scherm dat  $40\text{cm}$  van het object af staat een beeld vormen van dat object. Zeg ook duidelijk met woorden waar de lens zich dus moet bevinden t.o.v. de lamp en scherm.
3. Beschouw een optisch stelsel bestaande uit een planconcave (vlak-holle) lens ( $n = 1.5$ , dikte  $6\text{cm}$ ; kromtestraal tweede oppervlak  $10\text{cm}$ ) in combinatie met een biconvexe lens ( $n = 1.5$ ; dikte  $7.5\text{cm}$ ; kromtestraal van beide oppervlakken  $5\text{cm}$ ) op een afstand van  $2\text{cm}$  van elkaar. Bereken m.b.v. matrixoptica de vergroting en beeldafstand  $s'$  van een voorwerp dat zich  $10\text{cm}$  voor de eerste lens bevindt.
4. Een  $50\text{cm}$  lange staaf, vastgemaakt in het midden, heeft een dichtheid van  $11 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ . Door een longitudinale tilling zendt de staaf een fundamentele noot uit die twee octaven hoger ligt dan de fundamentele noot die zou worden uitgezonden door een staaf van  $50\text{cm}$  lang,  $0.3\text{g}$  die transversaal trilt onder een spankracht van  $20\text{kg}$ . Bereken de modulus van Young voor de eerste staaf.
5. Als men op onderstaand schema van 1 naar 2 gaat langs pad 1-3-2, wordt er  $100\text{J}$  warmte en  $40\text{J}$  arbeid uitgewisseld door het systeem ( $W_{132}, A_{132}$ ). Langs 1-4-2 wordt er  $20\text{J}$  arbeid geleverd. ( $A_{142}$ )
  - (a) Hoeveel warmte wordt er langs dit tweede pad met het systeem uitgewisseld? ( $W_{142}$ )
  - (b) Als het systeem van 2 naar 1 gaat langs de kromme lijn, wordt er  $25\text{J}$  arbeid geleverd. ( $A_{21}$ ) Welke warmteuitwisseling treedt er op? ( $W_{21}$ )
  - (c) Wat is de warmteuitwisseling voor 1 naar 4 als  $U_1 = 0$  en  $U_4 = 35\text{J}$ ? ( $W_{14}$ )
  - (d) Wat is de warmteuitwisseling voor 4 naar 2? ( $W_{42}$ )



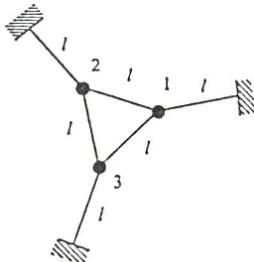
Figuur 2.2: schema van vraag 5

6. Een ideale Carnot machine neemt warmte af van een bron bij temperatuur  $317^{\circ}\text{C}$ , doet wat extern werk en geeft de resterende energie af aan een reservoir bij  $117^{\circ}\text{C}$ . Als 500kCal aan warmte van de bron worden afgenoem, hoeveel arbeid wordt er dan geleverd? Hoeveel warmte wordt er dan aan het reservoir afgegeven?
7. (vraag over relativiteit)

### 2.3.6 Juni 2002

Opgesteld door Joke Hadermann

1. 2 kubussen staan zonder enige tussenruimte naast elkaar, in een met lucht gevulde kamer. Beiden hebben een volume van  $8 \text{ m}^3$ . Een laserstraal valt in op het middelpunt van die zijde van kubus 1 die zich evenwijdig met het scheidingsoppervlak van de twee kubussen bevindt, maar die niet het scheidingsoppervlak zelf is. Kubus 1 heeft brekingsindex  $n' = 1,33$ . De invalshoek van de straal is  $32^{\circ}$ . Deze straal vervolgt haar weg door kubus 1 en valt in op kubus 2, die een onbekende brekingsindex  $n''$  heeft. In deze kubus 2 valt de straal in op één van de zijvlakken niet evenwijdig met het scheidingsoppervlak, op een afstand van  $0,087 \text{ m}$  tot dit scheidingsoppervlak (loodrecht gemeten) en wordt daar totaal gereflecteerd. Wat is de brekingsindex  $n''$  van de tweede kubus?
2. Drie identieke deeltjes met massa  $m$  zijn verbonden met elkaar en met drie vaste punten door 6 identieke massaloze snaren (lengte  $l$ , spankracht  $T$ ), zoals weergegeven in figuur 2.3. De drie vaste punten liggen op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. De drie deeltjes glijden over verticale staven zodat ze alleen in de richting loodrecht op de figuur kunnen bewegen.

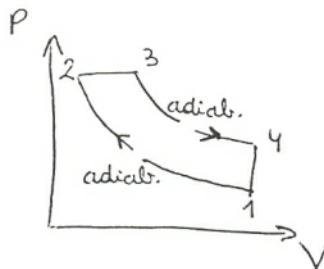


Figuur 2.3: 3 identieke massa's verbonden door 6 identieke snaren

- (a) Bepaal de eigentrillingen van dit systeem.
- (b) Uitgaande van de evenwichtstoestand, wordt door een korte stoot op tijdstip  $t = 0$  aan een deeltje een beginsnelheid  $v_0$  gegeven. Beschrijf de resulterende beweging.
3. De cyclus in figuur 2.4 wordt doorlopen door 1 kg lucht. De temperaturen op de verschillende eindpunten zijn:
  - $T_1 = 21^{\circ}\text{C}$
  - $T_2 = 596^{\circ}\text{C}$
  - $T_3 = 1465^{\circ}\text{C}$

- $T_4 = 503^\circ\text{C}$

De totale verandering van warmte wanneer de cyclus 1 maal doorlopen wordt is 527J.  
Het thermische rendement bedraagt 60%. Bepaal de relatieve verhoudingen van de volumes van de kg lucht op de punten 2 en 3 t.o.v. het volume op punt 1.



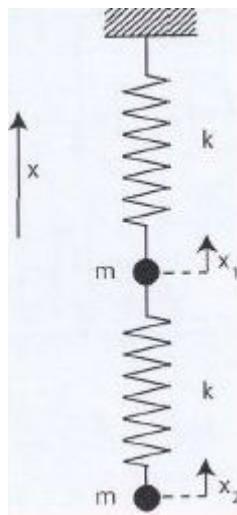
Figuur 2.4: Cyclus van 1 kg lucht

4. (vraag over relativiteit)

### 2.3.7 Juni 2005

Dr. S Bals

- Door de adiabatische expansie van 1mol samengedrukt ideaal gas ( $20^\circ\text{C}$ ,  $p = 50\text{atm}$ ) in een geweer wordt een kogel afgevuurd ( $m = 15\text{g}$ ). Bepaal de snelheid bij het verlaten van de loop. ( $\gamma = 1,4$ ,  $R = 8,314 \frac{\text{J}}{\text{K}\cdot\text{mol}}$ )
- Een uniform touw met lengte  $L$  hangt verticaal. De spanning in het touw is te wijten aan het gewicht van het touw zelf. Bepaal, als functie van de hoogte  $z$ , gemeten van het laagste punt van het touw, de snelheid van transversale golven langs het touw. Bereken ook de tijd die een golf nodig heeft om van het ene eind van het touw naar het andere eind te propageren.
- Een voorwerp wordt op  $2,4\text{m}$  van een scherm geplaatst. Een lens met focusafstand  $f$  wordt tussen het scherm en het voorwerp geplaatst zo dat er een reëel beeld van het voorwerp wordt gevormd op het scherm. Als de lens  $1,2\text{m}$  naar het scherm toe wordt verschoven, wordt er een ander reëel beeld op het scherm gevormd. Bereken:
  - de positie van de lens voor de verplaatsing,
  - de focaalafstand van de lens.
- Een massa hangt aan een massaloze veer met krachtconstante  $k$  aan een vast punt. Een tweede identieke massa hangt via een identieke veer aan de eerste, zoals ook afgebeeld op figuur 2.5.  
Beschouw enkel de beweging in de verticale richting. Bereken:
  - pulsaties van de normale trillingswijzen,
  - verhouding van de amplitudes van beide massa's voor elk van de normale trillingswijzen.



Figuur 2.5: 2 massa's aan 2 veren

### 2.3.8 Juni 2006

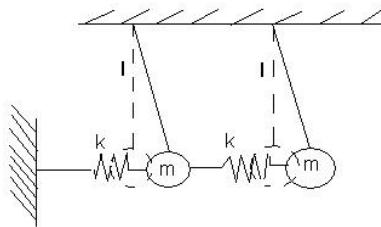
B. Willems

1. Een dikke glazen sfeer is hol vanbinnen. De glazen sfeer wordt gekenmerkt door een buitenstraal van  $6\text{cm}$  en een binnenstraal van  $3\text{cm}$ . Als een bundel zonlicht invalt volgens de aangegeven richting, bereken dan de positie van het beeld, als de holte gevuld wordt met
  - (a) lucht ( $n = 1$ )
  - (b) water ( $n = 1,33$ )
2. Drie identieke deeltjes met massa  $m$  zijn verbonden met elkaar en met drie vaste punten door 6 identieke massaloze snaren (lengte  $l$ , spankracht  $T$ ) zoals weergegeven in figuur 2.3. De drie vaste punten liggen op de hoekpunten van een gelijkzijdige driehoek. De drie deeltjes glijden over verticale staven zodat de massadeeltjes alleen in de richting loodrecht op de figuur kunnen bewegen.
  - (a) Bepaal de normale trillingswijzen van dit systeem:
  - (b) Bereken de pulsaties van de mogelijke normale trillingswijzen.
  - (c) Bepaal de relatieve amplitudes van de drie deeltjes in elk van de normale trillingswijzen, zodat je de normale trillingswijzen kan beschrijven alsook een algemene oplossing voor het ganse systeem kan voorstellen.
3. Voor een Carnot-machine wordt  $1000\text{mol}$  van een ideaal gas gebruikt met  $\gamma = 1,4$ . De expansieverhoudingen bedragen  $5/2$  voor de isotherme expansie en  $8/5$  voor de adiabatische expansie. De nettoarbeid per cyclus geleverd is  $2,5 \cdot 10^5\text{J}$ . Bereken de temperatuur van het koude- en warmtereservoir tussen welke de Carnot-machine werkt.

### 2.3.9 Juni 2007

Catherine Gorlé

1. Een voorwerp wordt op 2.4m van een scherm geplaatst. Een lens met focusafstand  $f$  wordt tussen het voorwerp en het scherm geplaatst zodat er een reëel beeld gevormd wordt op het scherm. Wanneer de lens 1.2m naar het scherm toe wordt geschoven, wordt een ander reëel beeld gevormd op het scherm.
  - (a) Waar bevond de lens zich voor ze verplaatst werd ?
  - (b) Wat is de focusafstand van de lens ?
  - (c) Indien men een concave spiegel met  $R = 30\text{cm}$  op 20cm van het scherm zou plaatsten, waar zou zich dan het spiegelbeeld van het scherm vormen ?
2. Beschouw het gekoppelde trilsysteem in onderstaande figuur.
  - (a) Bepaal de eigenfrequenties
  - (b) Bepaal de relatieve amplitudes voor deze frequenties en geef de overeenkomstige vergelijkingen voor de normaalbeweging van elk deeltje.
  - (c) Beschrijf kort (max. 5 regels) hoe je de specifieke oplossing zou bepalen als gegeven is dat op  $t = 0$  alle massa's zich in de evenwichtspositie bevinden en enkel massa 1 een snelheid  $v_0$  heeft.



3. Een staande golf ontstaat als een superpositie van de volgende 2 golven :

$$y_1 = 15 \sin(3\pi t - 5x)$$

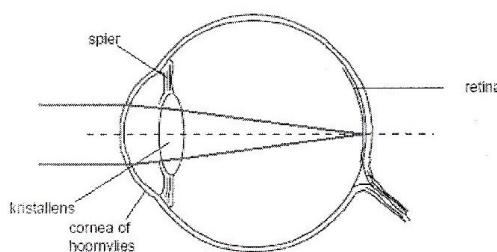
$$y_2 = 15 \sin(3\pi t + 5x)$$

- (a) Wat is de amplitude van de staande golf als  $x = 0.9\text{cm}$  ?
  - (b) Als de golflengte van de staande golf die van de 2<sup>e</sup> harmoniek is, bereken dan de lengte tussen de 2 vaste punten van het koord.
4. Beschouw onderstaand p-v diagram voor 1 mol van een twee-atomig ideaal gas.  $V_1 = 3V_2$ ,  $T_1 = 27^\circ\text{C}$ ,  $T_2 = -73^\circ\text{C}$ ,  $\gamma = 1.4$ ,  $c_p = 29.19 \text{ J/mol/K}$ . Beide kringprocessen verschillen enkel in de stap CA, waar CA,I lineair dalend is en CA,II isotherm is.
  - (a) Benoem het proces AB en bereken de warmte en de verrichte arbeid.  
Schrijf telkens een uitdrukking in functie van  $V_1, V_2, T_1, T_2, c_p, c_v, R$  of  $\gamma$  vooraleer de getallen in te vullen.
  - (b) Idem voor het proces BC
  - (c) Idem voor het proces CA,I
  - (d) Idem voor het proces CA,II
  - (e) Bereken het rendement van beide kringprocessen (via CA,I en via CA,II)

### 2.3.10 Juni 2008

Catherine Gorlé

- Onderstaande figuur toont de basisstructuur van het oog. Het hoornvlies en de lens kunnen beschouwd worden als een enkele dunne lens. Stel dat voor een parallelle lichtinval en een brandpuntsafstand van de effectieve lens van 2,5 cm een beeld op het netvlies gevormd wordt.



- Welke brandpuntsafstand is nodig om een voorwerp op 40cm duidelijk te zien?
    - Moeten de oogsieren de straal van de lens groter of kleiner maken?
    - Als het beeld gevormd op het netvlies maximaal 5cm groot kan zijn, wat is dan de maximum waarneembare grootte van een voorwerp dat zich op 40 cm voor het oog bevindt?
  - Een lichtpunt beweegt zich met een snelheid  $v_{voorwerp}$  in de richting van een sferische spiegel met straal  $r$ , op de centrale as van de spiegel. Leidt een uitdrukking af voor de snelheid van het beeld,  $v_{beeld}$ , in de functie van  $r$ ,  $v_{voorwerp}$  en  $s$  (de afstand tussen de spiegel en het punt in functie van de tijd).
  - Beschouw het gekoppelde trilsysteem getoond in de figuur:
- The diagram shows a horizontal line representing a wall. Three circular masses, each labeled 'm', are connected by springs labeled 'k'. The first and last masses are attached to the wall. Dashed lines labeled 'I' indicate the center of mass for each mass-spring system.
- Bepaal de eigenfrequenties
  - Bepaal de relatieve amplitudes voor deze frequenties en geef de overeenkomstige vergelijkingen voor de normaalbeweging van elk deeltje
  - Schrijf de specifieke oplossing als gegeven is dat op  $t = 0$  alle massa's snelheid 0 hebben en enkel massa 1 een uitwijking  $x_0$  heeft.
- Een mol van een een-atomig ideaal gas ( $\gamma = 1.67$ ) doorloopt een reversibel kringproces dat bestaat uit 3 stappen:
    - van A naar B: een isochore drukverhoging
    - van B naar C: een adiabatische expansie

- van C naar A: een isobaar proces

In punt B geldt  $p_0 = 1013.25 \cdot 10^3 \text{ Pa}$  en  $V_B = 10^{-3} \text{ m}^3$ . Verder is gegeven dat  $V_C = 8V_B$ .

- (a) teken het p-v diagram van dit kringproces
  - (b) bepaal de warmte toegevoegd aan het gas
  - (c) bepaal de warmte afgegeven door het gas
  - (d) bepaal de netto arbeid verricht door het gas
  - (e) bepaal het rendement van de cyclus
5. in een experiment wordt 200g aluminium (specifieke warmte 900 J/kg.K) op 100C gemengd met 50.0g water (specifieke warmte 4184 J/kg.K) op 20C. Het mengsel is thermisch geïsoleerd.
- (a) Wat is de evenwichtstemperatuur?
  - (b) Wat is de entropieverandering van het aluminium?
  - (c) Wat is de entropieverandering van het water?
  - (d) Wat is de entropieverandering van het totale systeem?

### 2.3.11 Extra examen Juni 2008

Catherine Gorlé

1. Een parallelle lichtbundel valt in op een transparante, volle bol met brekingsindex n.

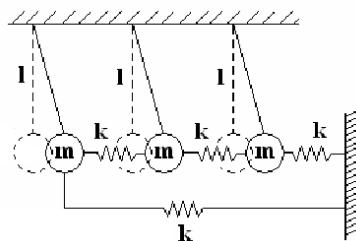
  - (a) Als er een beeldpunt gevormd wordt op de achterzijde van de bol, wat is dan de waarde voor n?
  - (b) Is er een waarde voor n waarvoor een beeld gevormd wordt in het middelpunt van de bol? Indien ja, welke? Indien nee, waarom niet?

2. Een reeel omgekeerd beeld van een voorwerp wordt gevormd door een lens. De afstand tussen het voorwerp en het beeld is 40cm. Het beeld is half zo groot als het voorwerp.

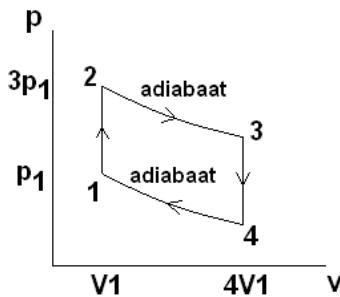
  - (a) Welk soort lens wordt er gebruikt?
  - (b) Hoe ver van het voorwerp staat de lens?
  - (c) Wat is de brandpuntsafstand?

3. Beschouw het gekoppelde trilsysteem getoond in de figuur.

  - (a) Bepaal de eigenfrequenties
  - (b) Bepaal de relatieve amplitudes voor deze frequenties en geef de overeenkomstige vergelijkingen voor de normaalbeweging van elk deeltje
  - (c) Schrijf de specifieke oplossing als gegeven is dat op  $t = 0$  alle massa's snelheid 0 hebben en enkel massa 1 een uitwijking  $x_0$  heeft.



4. Een interne verbrandingsmotor heeft de cyclus getoond in de figuur. Stel dat een ideaal gas de cyclus doorloopt en gebruik een compressieverhouding van  $V_4 = 4V_1$ . Stel  $p_2 = 3p_1$ .
- Geef de druk en de temperatuur op elk punt van het diagram in functie van  $p_1, T_1$  en  $\gamma$ .
  - Bepaal het rendement van de cyclus.



5. De temperatuur van een blok koper van 2kg stijgt reversibel van 25C naar 100 C. De specifieke warmte van koper is 386 J/(kgK).
- Bepaal de energie die als warmte werd opgenomen.
  - Bepaal de verandering in entropie.

### 2.3.12 September 2008

Catherine Gorlé

- (a) Een witte lichtbundel valt in op een prisma met openingshoek  $\alpha = 8^\circ$ . Bepaal het hoekverschil tussen de uitgaande straal voor de rode en blauwe golflengte ( $n_{rood} = 1.644$ ,  $n_{blauw} = 1.664$ ).
  - (b) Indien men een tweede prisma heeft met brekingsindices  $n_{2rood} = 1.384$  en  $n_{2blauw} = 1.400$ , welke openingshoek  $\alpha_2$  is dan nodig om een achromatisch prismapaar te verkrijgen?
2. Een lichtbron wordt 15 cm voor een convexe spiegel met straal 10 cm geplaatst. Op 5 cm achter de bron wordt een convexe lens met  $f = 25$  cm geplaatst.
- Waar zie je het spiegelbeeld van de lichtbron als je door de lens kijkt?
  - Als de lichtbron zich boven de optische as bevindt, waar bevindt het beeld van het spiegelbeeld zich dan? Is dit beeld groter of kleiner dan de bron?
3. (a) Bepaal de eigenfrequenties en overeenkomstige amplitudes van het massa-veer systeem zoals uitgelegd: Drie massa's met massa  $m$  hangen in het zwaarteveld met elkaar en het dak van het labo verbonden door veren met constante  $k$ . Tussen de eerste en laatste massa is een vierde veer met constante  $k$  bevestigd.
- Geef de algemene vergelijking voor de eigenbeweging van elke massa
  - Geef de specifieke oplossing indien gegeven is dat  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $x_3 = x_0$  en  $v_1 = v_2 = v_3 = 0$  op  $t = 0$

4. Voor een carnot-machine wordt 10 mol helium gebruikt ( $\gamma = 1.67$ ,  $R = 8.314\text{J}/(\text{K}\cdot\text{mol})$ ). Het warmte reservoir heeft als tempertatuur  $T_2 = 400^\circ\text{C}$  en het koude reservoir  $T_1 = 60^\circ\text{C}$ . Het initiele volume van het gas is  $V_1 = 2.0 * 10^{-2}\text{m}^3$ , het volume na isotherme expansie is  $V_3 = 4.0 * 10^{-2}\text{m}^3$  en het volume na de adiabatische expansie is  $V_4 = 5.0 * 10^{-2}\text{m}^3$
- Teken het pv-diagram en benoem de verschillende processen.
  - Bereken de arbeid voor elke stap van dit kringproces afzonderlijk en voor 1 cyclus
  - Bereken de opgenomen en afgegeven warmte voor elke stap van het kringproces afzonderlijk en voor 1 cyclus
  - Bepaal het rendement van de motor

### 2.3.13 Oplossingen Juni 2008

Catherine Gorlé

- Hierbij kan je best de lens enkel als dunne lens beschouwen en dan is het een analoge oefening mat wat er vaak in de klas is gemaakt. Laat je tot slot niet van de wijs brengen met je biologische kennis, want de oogspieren zijn blijkbaar zo opgesteld dat ze de oog kunnen doen bollen, in plaats van platter maken.
- De afstand sbeeld volgt uit volgende formule voor sferische spiegels:

$$1/s_{voorwerp} + 1/s_{beeld} = 1/r$$

Of anders geschreven:

$$s_{beeld} = [r^{-1} - s_{voorwerp}^{-1}]^{-1}$$

Hieruit volgt, na differentiëren van beide leden:

$$ds_{beeld} = -(r^{-1} - s_{voorwerp}^{-1})^{-2} \cdot ds_{voorwerp}$$

Of, meer bepaald differentiëren/afleiden naar de tijd:

$$\frac{ds_{beeld}}{dt} = v_{beeld} = \frac{-1}{(1/r - 1/s_{voorwerp})^2} \cdot \frac{ds_{voorwerp}}{dt}$$

# Hoofdstuk 3

# Experimentele fysica 1

## 3.1 De cursus, het vak, het examen

Bij dit vak is het voornaamste uiteraard de proeven afleggen en de verslagen hierover maken. Het examen is voornamelijk een test om te zien of je alle aspecten begrepen hebt, en zodoende ook of je de verslagen zelf hebt gemaakt.

Dit is een volledig schriftelijk examen. Wanneer je al je verslagen deftig hebt gemaakt, kan er nog weinig mislopen. Je moet enkel nog uitzien of er geen elementen in de cursus voorkomen die je in geen enkel verslag hebt gebruikt.

## 3.2 Examenvragen

### 3.2.1 Juni 2005

Prof. Dr. D. Schryvers

1. Bereken, op basis van je eigen meetresultaten, de waarde voor de impedantie  $S$  van de gesloten resonantiebuis (diam. buis = 33mm,  $\rho_{lucht} = 1,3kg/m^3$ ). Welke parameter moet je eerst verbeteren om een nauwkeuriger resultaat te bekomen?
2. Leg uit hoe je de tophoek van het prisma hebt gemeten: geef twee methoden en bereken de gemiddelde waarde. Gebruik een tekening.
3. Bij de fit van een curve door 10 meetpunten wordt een uitdrukking met 2 veranderlijken gebruikt. De uitkomst van de bijhorende  $\chi^2$ -test levert 3,12 op. Lees uit bijgevoegde tabel <sup>1</sup> de juiste interpretatie van dit resultaat af en schrijf dit in een correcte zin.
4. Een meting van de saturatie van de groei van korrels in een materiaal geeft de genormaliseerde waarden in tabel 3.1. Bereken de tijdsconstante van de korrelgroeい.

### 3.2.2 September 2005

Prof. Dr. D. Schryvers

1. Bij de regressieverwerking van lineaire curves wordt geëist dat de meting met de beste nauwkeurigheid op de x-as geplaatst worden. Wat is de reden van deze eis?
2. Wat is de betekenis van het nauwkeurigheidsinterval dat bekomen wordt op basis van de Gauss-verdeling?

---

<sup>1</sup>Deze tabel kan ook in de cursus gevonden worden

$t(s)$	diameter
0	0
0,5	0,27
1,0	0,47
1,5	0,61
2,0	0,72
2,5	0,79
3,0	0,85
3,5	0,89
4,0	0,92
4,5	0,94
5,0	0,96

Tabel 3.1: Saturatie van de groei van korrels

3. Bespreek de resultaten van het gedeelte absorptie in je experiment van de dispersie van licht. Vergelijk wat er gebeurd met de absorptie in het polarisatie experiment.
4. Bereken de waarde voor de grootheid  $Q$  met de volgende gemeten waarden:

$$\begin{aligned}x &= (2,3 \pm 0,1) \text{mm} \\y &= (13,2 \pm 0,2) \text{mm} \\z &= (0,23 \pm 0,02) \text{mm}\end{aligned}$$

$$Q = \frac{(x + y + z)^2}{xy} \quad (3.1)$$

Hoe kan men dit experiment het best verbeteren?

5. Teken een correct histogram en distributiegrafiek van de volgende set van 50 afmetingen in mm.

52	72	100	85	61	73	99	81	65	89
68	92	55	90	74	87	111	95	76	83
98	82	93	106	83	79	103	88	97	116
113	108	73	85	58	85	72	63	75	104
102	80	93	89	78	84	66	97	76	87

### 3.2.3 Juni 2006

prof. D. Schryvers

1. Bespreek, in zoveel mogelijk detail, de meetaspecten van het elementaire experiment (staande golf in een gesloten of open buis) met de resonantiebuis (zonder in te gaan in de werking van de oscilloscoop).
2. In welke experimenten heb je met een nonius gewerkt en hoe werkt dit toestel?
3. Waarom wordt in twee van de optica opstellingen met een Na-lamp gewerkt en wat impliceert dit voor de gemeten waarden?
4. Een tijd wordt gemeten met een nauwkeurigheid van  $15ms$ . Welke van de vier mogelijkheden is de geijkte schrijfwijze voor deze meting?
  - (a)  $1,360s$

- (b)  $1,36s$   
 (c)  $1.360ms$   
 (d)  $1.360,00ms$
5. In een experiment wordt de elastische krachtsconstante van een rubberen kabel gemeten met de statische methode en rekt de kabel  $(3,4 \pm 0,2)cm$  uit bij een massa van  $(12 \pm 0,1)g$ . In de dynamische methode meet men een periode van  $(0,72 \pm 0,02)s$  bij een belasting van  $(50,0 \pm 0,1)g$ . Bereken de gemiddelde krachtsconstante.
  6. Welke grootheid zet men bij lineaire regressie van een lineair functieverband in de abscis en waarom?

### 3.2.4 Juni 2007

1. Waarom wordt het voor een temperatuur uitgedrukt in  $^{\circ}\text{C}$  niet toegestaan om een relatieve afwijking te noteren?
2. Een berekening geeft een numeriek resultaat van  $236,3078 \pm 1,4361$ . Geef de juiste schrijfwijze in het hoofdstuk van de berekeningen:
  - (a)  $236,3078 \pm 1,4361$
  - (b)  $236,31 \pm 1,44$
  - (c)  $236,3 \pm 1,4$
  - (d)  $236,3 \pm 1,5$
3. In het experiment van de resonantiebuis kan de geluidssnelheid bepaald worden uit drukbuikmetingen van de gesloten buis op minstens 2 vergelijkbare, maar toch verschillende manieren. De frequentie en de posities van de drukbuiken zijn gegeven. Bepaal m.b.v. deze gegevens welke methode de meest nauwkeurige is. Maak ook een tekening van deze harmoniek en geef de orde.  
 frequentie:  $1357 \text{ Hz} \pm 1 \text{ Hz}$

drukbuiken (m),  $\pm 0,001\text{m}$ :  
 $0,127; 0,252; 0,388; 0,514; 0,636; 0,759$

4. Bewijs met je metingen van het experiment van Clement en Desormes dat de uitgevoerde benadering voor gamma toegalaten is.
5. In de eerste X-stralen diffractiepatroon van DNA (en in alle volgende uiteraard ook) ontbrak de 4de spot in een rij van equidistante reflecties. Welke belangrijke conclusie kan men hieruit meteen halen?

### 3.2.5 Juni 2008

1. Een berekening van de lichtsnelheid levert een numeriek resultaat van  $302,367342 \cdot 10^3 \text{ km/s}$ . De gevonden nauwkeurigheid bedraagt  $114 \text{ m/s}$ . Geef een juiste schrijfwijze van dit resultaat volgens de afspraken geldend in hoofdstuk "berekeningen".
2. wat is de betekenis van het nauwkeurigheidsinterval dat gevonden wordt op basis van de Gauss-verdeling?
3. Leg uit hoe je de minimum deviatiehoek van het prisma hebt gemeten. Gebruik een tekening. Hoe kan dit gebruikt worden bij ijking van het prisma?

4. bereken de waarde voor de grootheid Q met de volgende gemeten waarden:

$$x = (2,3 \pm 0,1)mm$$

$$y = (13,26 \pm 0,02)mm$$

$$Q = \frac{(x+y)^2}{x} \quad (3.2)$$

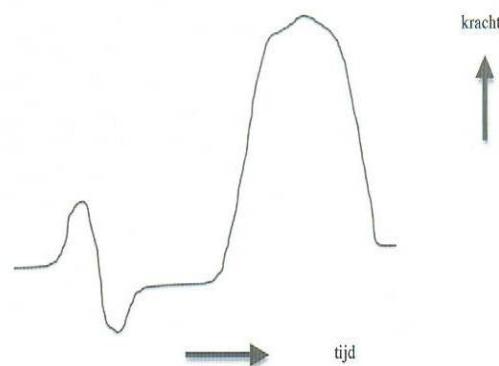
Hoe kan men dit verbeteren?

5. Teken een correct histogram en distributiegrafiek van de volgende set van 50 afmetingen in mm.

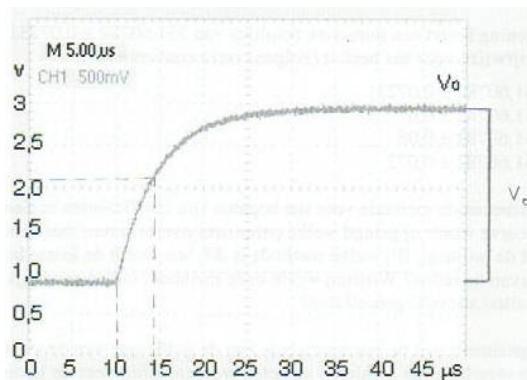
52	72	100	85	61	73	99	81	65	89
68	92	55	90	74	87	111	95	76	83
98	82	93	106	83	79	103	88	97	116
113	108	73	85	58	85	72	63	75	104
102	80	93	89	78	84	66	97	76	87

### 3.2.6 Juni 2010

1. Een berekening levert een numeriek resultaat van  $351,60782 \pm 0,07231$ . Geef de juiste schrijfwijze van dit resultaat volgens de afspraken geldend in hoofdstuk "berekeningen".
  - (a)  $351,60782 \pm 0,07231$
  - (b)  $351,60782 \pm 0,07$
  - (c)  $351,60782 \pm 0,08$
  - (d)  $351,60782 \pm 0,072$
2. Voor 1 welbepaalde methode voor het bepalen van coëfficiënten van een best passende curve wordt opgelegd welke parameter overeenkomt met de abscis en welke met de ordinaat. Bij welke methode is dat, hoe wordt de keuze bepaald en wat is hiervan de reden? Waarom wordt deze methode, indien mogelijk, verkozen boven de alternatieve fitprocedures?
3. Bij het experiment met de resonantiebuis kan de golflengte van de staande golf in de buis op verschillende manieren gemeten worden. Zoek voor de hoogste harmoniek uit jouw experiment in de buis met het door een stop afgesloten uiteinde, 3 verschillende meetmethoden voor deze golflengte. Bepaal welke methode de beste nauwkeurigheid behaalt.
4. Hoe zou je met de meetresultaten van de proef van de oppervlaktespanning het volume van het ondergedompelde materiaal kunnen bepalen? Leg dit uit a.d.h.v. onderstaand figuur die een typisch meetresultaat voorstelt.



5. De formule  $V_c = V_0(1 - e^{-\tau/RC})$  beschrijft de spanning gemeten over een opladende capaciteit in een RC kring aangestuurd door een blokgolf met amplitude  $V_0$ . Het beeld op een oscilloscoop ziet er als volgt uit:



De tijdsconstante  $RC$  (grootte in s) kan bepaald worden door de tijd te meten vanaf het begin van de oplopende curve voor het punt waarbij de spanning  $V_c 63\% (\pm 1\%)$  bereikt van  $V_0$ . Meet de tijdsconstante van deze kring, toon aan dat deze inderdaad te vinden is bij  $63\% V_0$  en bepaal de waarde van de capaciteit (uitgedrukt in Farad) indien de weerstand  $R = 600 \pm 5\Omega$ .

## Hoofdstuk 4

# Wiskundige methoden voor de fysica 2

### 4.1 De cursus, het vak, het examen

Het theorie-examen was volledig schriftelijk. Sinds het academiejaar 2008-2009 is deze cursus van naam en gedeeltelijk van inhoud veranderd. Er kunnen dus enkele dingen in staan die niet meer overeenkomen met wat er nu gekend moet zijn.

Het oefeningenexamen bestaat uit een drietal oefeningen die allemaal volledig schriftelijk moeten opgelost worden.

**Zeer belangrijk:** Wordt dus wel veel gevraagd.

- Berekening van de Cristoffelsymbolen i.f.v. de metriek
- Antisymmetrische pseudo-eenheidstensor
- Trafo voor bolcoördinaten afleiden, metrische tensor berekenen, basisvectoren (ook reciproke)
- Cristoffelsymbolen berekenen (1ste soort)
- Formules, voornamelijk  $\text{div}(a \times b)$ ,  $\text{rot grad } f$ ,  $\text{div rot } \vec{f}$
- Hoeken van Euler, overgangsmatrix
- Formule voor divergentie opstellen

**Ook veel voorkomend zijn de volgende onderwerpen:** Iets minder dan vorige.

- Transformatieformules
- Differentiaaloperatoren: definities
- Quotiëntwet
- Infinitesimaalrotaties
- Eigenwaarden en eigenvectoren van de antisymmetrische lineaire operator

**enkele voorbeelden** een beetje over alle jaren...

1.  $\text{div}(a \times b) = ?$
2. Trafo bolcoördinaten: leid af: metriek, basisvectoren, reciproke basisvectoren, Cristoffelsymbolen.

3. Stel de uitdrukking op voor de Cristoffelsymbolen in functie van de metriek.
4.  $\text{rot grad } f = ?$
5.  $\text{div rot } \vec{f} = ?$
6. Bewijs dat de anti-symmetrische eenheidstensor een eenheidstensor is.
7. ...

## 4.2 Theorie

### 4.2.1 Januari 2001 groep 1

1. Bespreek het concept van ‘metriek’. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.
2. Toon aan hoe de metriek nuttig is om basis en reciproke basis van een coördinatenstelsel te bepalen. Bepaal de metriek in bolcoördinaten en gebruik de metriek om de basis en reciproke basis te berekenen.
3. Toon aan hoe de metriek kan gebruikt worden om de christoffelsymbolen expliciet te bepalen. Gebruik dit resultaat om de christoffelsymbolen in bolcoördinaten te bepalen.
4. Toon aan hoe de metriek gebruikt wordt om de rotor van een vector te bepalen. Bereken de rotor in bolcoördinaten.

### 4.2.2 Januari 2001 groep 2

**covariante vectoren:** vertel hier zoveel van als je kan bedenken.

- vertel wat over covariantie en de gradient in bolcoördinaten
- rotor en reken uit in cylindrische coördinaten.
- vectorieel product

### 4.2.3 Januari 2002

1. (a) Bespreek het concept van de ‘metriek’ van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.  
 (b) Toon aan hoe de metriek nuttig is om de basis en de reciproke basis van een coördinatenstelsel te bepalen. Bepaal de metriek in cylindercoördinaten en gebruik die om de basis en reciproke basis te berekenen.  
 (c) Toon aan hoe de metriek kan gebruikt worden om de christoffelsymbolen expliciet te bepalen. Gebruik dit resultaat om de christoffelsymbolen in cylindercoördinaten te bepalen.  
 (d) Toon aan hoe de metriek gebruikt wordt om de rotor van een vector te definieren. Bereken de rotor in cylindercoördinaten.
2. Bespreek op je eigen manier het concept van de Fourierreeks.

### 4.2.4 Januari 2005

Prof. Dr. P. Scheunders

#### Deel 1: Mathematische Technieken

1. Bespreek het concept van een metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules.
2. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen. Bereken de metriek in cylindercoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in cylindercoördinaten.
3. Toon aan hoe de metriek gebruikt wordt om christoffelsymbolen expliciet te berekenen. Bereken de christoffelsymbolen in cylindercoördinaten.

**Deel 2:** Veldentheorie

Bespreek:

1. Fourierreeks,
2. Basisfuncties,
3. Hermitische operatoren

en hun onderlinge relatie. Toon aan hoe deze concepten worden gebruikt om een klassiek veldprobleem op te lossen.

**4.2.5 Augustus 2005**

Prof. Dr. P. Scheunders

**Deel 1:** Mathematische Technieken

1. Geef de definitie en de betekenis van de covariante componenten van een vector en van de reciproke basis. Leid de transformatieformules af.
2. Definieer het vectoriële product met behulp van diens covariante componenten.
3. Toon aan dat de gradiënt van een scalair gedefineerd wordt m.b.v. covariante componenten. Leid de gradiënt in bolcoördinaten af.
4. Toon aan dat de rotor van een vector gedefineerd wordt m.b.v. covariante componenten. Leid de rotor in bolcoördinaten af.

**Deel 2:** Veldentheorie

Bespreek:

1. Fourierreeks,
2. Basisfuncties,
3. Hermitische operatoren

en hun onderlinge relatie. Toon aan hoe deze concepten worden gebruikt om een klassiek veldprobleem op te lossen.

**4.2.6 Januari 2006**

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie en de betekenis van de covariante componenten van een vector en van de reciproke basis. Leid de transformatieformules af.
2. Definieer het vectoriële product met behulp van covariante componenten. Bespreek het vectoriële product van de basisvectoren, en de geometrische betekenis van het vectoriële product.
3. Toon aan dat de gradiënt van een scalair gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Geef de fysische betekenis van een gradiënt. Bereken de gradiënt in bolcoördinaten.
4. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
5. Bespreek infinitesimale rotaties.

### 4.2.7 Januari 2007

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen.
2. Bereken de metriek in bolcoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in bolcoördinaten.
3. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Bespreek de hoeken van Euler.

### 4.2.8 Januari 2008

Prof. Dr. P. Scheunders<sup>1</sup>

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Toon aan hoe de metriek wordt gebruikt om basis en reciproke basis te bepalen.
2. Bereken de metriek in bolcoördinaten en bereken hieruit de basis en de reciproke basis in bolcoördinaten.
3. Toon aan dat de rotor van een vector gedefinieerd wordt met behulp van covariante componenten. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Bespreek de hoeken van Euler.

### 4.2.9 Juni 2009

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Bespreek het concept van de metriek van een coördinatenstelsel. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules. Bepaal met behulp van de metriek een uitdrukking voor: het scalair product tussen 2 vectoren, de lengte van een vector, de hoek tussen 2 vectoren en de lengte van een kromme. // Wat is de uitdrukking voor die grootheden in orthogonale coördinatenstelsels?
2. Bereken de metriek en de basis in cilindercoördinaten.
3. Leid de uitdrukking voor de rotor af. Bereken de rotor in cilindercoördinaten.
4. Bespreek de Fourier-reeks.

### 4.2.10 Juni 2010

#### 4.2.10.1 Groep 1

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie, de betekenis en transformatieformules van de metriek.
2. Bereken de metriek en de basisvectoren in bolcoördinaten.
3. Leid de uitdrukking voor de rotor af. Bereken de rotor in bolcoördinaten.
4. Leid een uitdrukking af voor de snelheid en versnelling in bolcoördinaten.

---

<sup>1</sup>Dit examen was identiek aan dat van Januari 2007

**4.2.10.2 Groep 2**

Prof. Dr. P. Scheunders

1. Geef de definitie, de betekenis en de transformatieformules van de metriek. Geef met behulp van de metriek een uitdrukking voor:
  - (a) Het scalair product.
  - (b) Lengte van een vector.
  - (c) Hoek tussen 2 vectoren.
  - (d) Lengte van een kromme.

Wat is de uitdrukking voor deze grootheden in orthogonale coördinatenstelsels?

2. Bereken de metriek en de basisvectoren van bolcoördinaten.
3. Leid de uitdrukking voor de rotor af. Bereken de rotor in bolcoördinaten.

## 4.3 Oefeningen

### 4.3.1 September 1995

1. Een vector veld  $\vec{f}$  is gegeven door  $\vec{f} = (x^2 + y^2 + z^2)(\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z)$ , waar  $(x, y, z)$  cartesische coördinaten in een driemimensionele vlakke ruimte zijn.
  - (a) Bereken het vektorveld  $\text{rot } \vec{f}$  in cartesische coördinaten
  - (b) Transformeer  $\vec{f}$  naar cylindercoördinaten
  - (c) Bereken  $\text{rot } \vec{f}$  in cylindercoördinaten, vertrekkend van  $\vec{f}$  in cylindercoördinaten

De volgende vragen van dit jaar komen nog uit het vorige curriculum. Vroeger werd dit vak namelijk in één examen op het einde van het jaar afgenoem. Ik zal daarom die vragen verplaatsen naar het tweede deel van dit vak. Dit geldt ook voor de volgende examens tot Januari 2001.

### 4.3.2 Juni 1998

1. Beschouw een vectorveld gegeven door zijn cartesische componenten  $\vec{f} = (x^2 + y^2 + z^2)^\tau$ .
  - (a) Bereken  $\text{rot } \vec{f}$  in cartesische coördinaten.
  - (b) Transformeer  $\vec{f}$  naar cylindercoördinaten.
  - (c) Bereken  $\text{rot } \vec{f}$  rechtstreeks in cylindercoördinaten.
  - (d) Transformeer  $\text{rot } \vec{f}$  terug naar cartesische coördinaten.
2. Beschouw een (2-dimensionaal) boloppervlak. Neem de  $\theta$  en  $\varphi$  van bolcoördinaten als onafhankelijke coördinaten die dit oppervlak beschrijven. De metriek op het boloppervlak (straal  $R$ ) is gegeven door:

$$G = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

Bereken de Christoffelsymbolen van de 2de soort.

### 4.3.3 Juni 1999

Gegeven een scalare functie  $V = \frac{Q}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ .

1. Bereken  $\vec{E} = -\text{grad } V$  in cartesische coördinaten.
2. Transformeer de functie  $V$  naar cilindercoördinaten.
3. Transformeer  $\vec{E}$  naar cylindercoördinaten.
4. Bereken, gebruik makend van de functie  $V$  in cilindercoördinaten, het vectorveld  $\vec{E}$  in cilindercoördinaten.

#### 4.3.4 September 1999

1. Gegeven het vectorveld  $\vec{f}$  in cilindercoördinaten:
  - (a) Bereken  $\operatorname{div} \vec{f}$  in cilindercoördinaten.
  - (b) Transformeer de vector  $\vec{f}$  naar cartesische coördinaten.
  - (c) Transformeer  $\operatorname{div} \vec{f}$  naar cartesische coördinaten.
  - (d) Bereken  $\operatorname{div} \vec{f}$  in cartesische coördinaten vertrekkende van  $\vec{f}$  in cartesische coördinaten.

2. Beschouw een contravariante vector  $\vec{f} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \\ z^2 \end{pmatrix}$  in cartesische coördinaten. Stel dat

we deze vector  $\vec{f}$  transformeren naar bolcoördinaten ( $\vec{f}^I$ ), daarna omzetten naar een covariante vector ( $\vec{f}^{II}$ ) en dan transformeren naar cilindercoördinaten ( $\vec{f}^{III}$ ). Indien we deze vector  $\vec{f}^{III}$  terug omzetten naar cartesische coördinaten, wat is dan het resultaat?

#### 4.3.5 Juni 2000

1. Beschouw een functie  $f(x, y, z)$  in cartesische coördinaten:

$$f(x, y, z) = \sinh(x^2 + y^2 + z^2) + \cosh(x^2 + y^2 + z^2) \quad (4.2)$$

- (a) Bereken  $\nabla f$  in cartesische coördinaten.
- (b) Transformeer  $f$  naar bolcoördinaten.
- (c) Transformeer  $\nabla f$  naar bolcoördinaten.
- (d) Bereken  $\nabla f$  in bolcoördinaten vertrekkende van  $f$  in bolcoördinaten (zie 1b).

#### 4.3.6 Januari 2001

Greg Tisson

1. Gegeven een scalair veld  $\tau = \rho^2 (1 + 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi))$  in cilindercoördinaten.
  - (a) Bereken  $\operatorname{grad}(\tau)$  en schrijf deze vector met behulp van de eenheidsvectoren  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ .
  - (b) Transformeer  $\tau$  naar cartesische coördinaten.
  - (c) Transformeer  $\operatorname{grad}(\tau)$  naar cartesische coördinaten.
  - (d) Bereken  $\operatorname{grad}(\tau)$  vertrekkende van  $\tau$  in cartesische coördinaten.
2. Stel  $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2r(1 + \cos \varphi \sin \theta) \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$  een contravariante vector in bolcoördinaten. Bereken  $\operatorname{rot} \vec{f}$ .
3. Gegeven  $a$  een scalair,  $\vec{B}$  een vector,  $\vec{k}$  een constante vector en  $\vec{r}$  de plaatsvector.
  - Bewijs  $\vec{\nabla} \times (a \vec{B}) = a \vec{\nabla} \times (\vec{B}) + \vec{\nabla}(a) \times \vec{B}$
  - Bereken  $\vec{\nabla} \times (\vec{k} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}})$

Dit is het enige examen op basis van het nieuwe curriculum.

1. Gegeven een scalair veld  $\tau = \rho^2 (1 + 2 \cos(\varphi) \sin(\varphi))$  in cilindercoördinaten.
  - (a) Bereken  $\text{grad}(\tau)$  en schrijf deze vector met behulp van de eenheidsvectoren  $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ .
  - (b) Transformeer  $\tau$  naar cartesische coördinaten.
  - (c) Transformeer  $\text{grad}(\tau)$  naar cartesische coördinaten.
  - (d) Bereken  $\text{grad}(\tau)$  vertrekende van  $\tau$  in cartesische coördinaten.
2. Stel  $\vec{f} = \begin{pmatrix} 2r(1 + \cos \varphi \sin \theta) \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$  een contravariante vector in bolcoördinaten. Bereken  $\text{rot} \vec{f}$ .
3. Gegeven  $a$  een scalair,  $\vec{B}$  een vector,  $\vec{k}$  een constante vector en  $\vec{r}$  de plaatsvector.
  - Bewijs  $\vec{\nabla} \times (a\vec{B}) = a\vec{\nabla} \times (\vec{B}) + \vec{\nabla}(a) \times \vec{B}$
  - Bereken  $\vec{\nabla} \times (\vec{k} e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}})$

#### 4.3.7 Juni 2005

Greg Tisson

Gegeven een vectorveld in cartesische coördinaten:

$$\vec{f} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \quad (4.3)$$

1. Bereken  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$  in cartesische coördinaten,
2. Transformeer  $\vec{f}$  naar bolcoördinaten,
3. Bereken  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$  in bolcoördinaten,
4. Transformeer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$  van cartesische coördinaten naar bolcoördinaten en vergelijk met 3.

#### 4.3.8 Augustus 2005

Greg Tisson

1. Gegeven een vectorveld in cartesische coördinaten:

$$\vec{f} = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} (\vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z) \quad (4.4)$$

- (a) Bereken  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$  in cartesische coördinaten,
  - (b) Transformeer  $\vec{f}$  naar bolcoördinaten,
  - (c) Bereken  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$  in bolcoördinaten,
  - (d) Transformeer  $\vec{\nabla} \cdot \vec{f}$  van cartesische coördinaten naar bolcoördinaten en vergelijk met 1c.
2. Bereken  $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A})$  als  $\vec{A} = 2xz^2 \vec{e}_x - yz \vec{e}_y + 3xz^3 \vec{e}_z$

### 4.3.9 Januari 2007

1. Werk uit in Carthesische coördinaten

$$\vec{\nabla} \left[ \vec{\nabla} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} \right]$$

met  $\vec{r} = z^i \vec{a}_i$

2. Gegeven een carthesisch coördinatenstelsel  $(x, y, z)$  en een assenstelsel  $(\eta, \theta, z)$  die verbonden zijn met de volgende transformatieformules :

$$\begin{cases} x = e^\eta \cos \theta \\ y = e^\eta \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

Bereken de Christoffel symbolen van de tweede soort.

3. Gegeven de volgende scalairen in een carthesisch assenstelsel

$$A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

$$B = \frac{x^2 + y^2 - z^2}{2}$$

- (a) Bereken in dit carthesisch coördinatenstelsel  $\vec{\nabla} [(\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{\nabla} B)]$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{\nabla} B)$ .
- (b) Transformeer  $A, B, \vec{\nabla} [(\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{\nabla} B)]$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{\nabla} B)$  naar cilindercoördinaten.
- (c) Bereken in cilindercoördinaten  $\vec{\nabla} [(\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{\nabla} B)]$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{\nabla} B)$ .

### 4.3.10 Januari 2008

1. Werk uit in cartesische coördinaten:

$$\vec{\nabla} \times \vec{r} e^{\vec{r} \cdot \vec{k}} \quad (4.5)$$

met  $\vec{r} = x^i \vec{a}_i$  en  $\vec{k} = \text{constant}$

2. Gegeven een cartesisch assenstelsel  $(x, y, z)$  en een assenstelsel  $(u, v, w)$  die verbonden zijn met de volgende transformatieformules:

$$\begin{cases} x = uv + vw \\ y = u^2 - w^2 \\ z = w - u \end{cases}$$

Bereken van het coördinatenstelsel de Christoffelsymbolen van de eerste soort met als eerste index 1.

3. Gegeven de volgende scalairen in een cartesisch assenstelsel  $(x, y, z)$

$$A = -\frac{1}{r^2}$$

$$\vec{B} = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_x + \frac{yz}{\sqrt{x^2 + y^2}} \vec{e}_y - \sqrt{x^2 + y^2} \vec{e}_z$$

- Bereken in dit cartesisch stelsel  $(\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{B})$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{B})$
- Transformeer  $A, \vec{B}, (\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{B})$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{B})$  naar bolcoördinaten.
- Bereken uit  $A$  en  $B$  in cilindercoördinaten  $(\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{B})$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{B})$

### 4.3.11 September 2008

- Werk uit in (3D) cartesische coördinaten:

$$\vec{k} \times (\vec{\nabla} \times \vec{\phi}) \quad (4.6)$$

met  $p\vec{\phi}_i = -ye_x + xe_y$  en  $\vec{k} = \text{constant}$

- Gegeven een cartesisch assenstelsel  $(x,y,z)$  en een assenstelsel  $(u,v,w)$  die verbonden zijn met de volgende transformatieformules:

$$\begin{cases} x = ve^u \\ y = ve^{-u} \\ z = w \end{cases}$$

Bereken van het coördinatenstelsel  $(u,v,w)$  de metriek en de Christoffelsymbolen van de eerste soort.

- Gegeven de volgende scalairen in een cartesisch assenstelsel  $(x,y,z)$

$$A = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}$$

$$B = \frac{z^2}{x^2 + y^2}$$

- Bereken in dit cartesisch stelsel  $(\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{\nabla} B)$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{\nabla} B)$
- Transformeer  $A, B, (\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{\nabla} B)$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{\nabla} B)$  naar cilindercoördinaten.
- Bereken uit  $A$  en  $B$  in cilindercoördinaten  $(\vec{\nabla} A) \cdot (\vec{\nabla} B)$  en  $(\vec{\nabla} A) \times (\vec{\nabla} B)$

### 4.3.12 Juni 2009

- Werk uit in cartesische coördinaten

$$\vec{\nabla}[\vec{\nabla} r^3]$$

met  $\vec{r} = x_i \vec{a}_i$

- Gegeven de volgende scalar en vector in een cartesisch assenstelsel  $(x, y, z)$

$$A = \frac{xyz}{2}$$

$$\vec{B} = 2x\vec{e}_x + 2y\vec{e}_y - 2z\vec{e}_z$$

- Bereken in dit cartesisch stelsel  $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla} A) \cdot \vec{B}]$  en  $\vec{r} \cdot \vec{\nabla}[(\vec{\nabla} A) \cdot \vec{B}]$
- Transformeer  $A, \vec{B}, \vec{\nabla}[(\vec{\nabla} A) \cdot \vec{B}], \vec{r} \cdot \vec{\nabla}[(\vec{\nabla} A) \cdot \vec{B}]$  naar cilindercoördinaten
- Bereken uit  $A$  en  $\vec{B}$  in cilindercoördinaten  $\vec{\nabla}[(\vec{\nabla} A) \cdot \vec{B}]$  en  $\vec{r} \cdot \vec{\nabla}[(\vec{\nabla} A) \cdot \vec{B}]$

- Beschouw een dunne staaf met lengte  $L$ , geïsoleerd van de omgeving. Op het begin-tijdstip  $t = 0$  bevindt een gedeelte van de staaf ( $2\delta$  rond het middelpunt) zich op de hoogte  $\Psi_0$ , de rest heeft temperatuur 0. De warmtegeleiding wordt gegeven door de golfvergelijking:

$$\Psi'' - \frac{1}{k} \dot{\Psi} = 0$$

De uiteinden van de staaf zijn geïsoleerd, zodat daar de homogene Neumann randvoorwaarden gelden.

$$\begin{cases} \Psi'(0, t) = 0 \\ \Psi'(L, t) = 0 \end{cases}$$

- (a) Geef de beginvoorwaarden.
- (b) Stel deelvergelijkingen op met behulp van de methode van scheiding van veranderlijken.
- (c) Identificeer en los het eigenwaardeprobleem op.
- (d) Identificeer en los het restprobleem op.
- (e) *Bonus:* Zoek uit alle oplossingen, diegene die voldoet aan de beginvoorwaarden.

# Hoofdstuk 5

## Ecologie

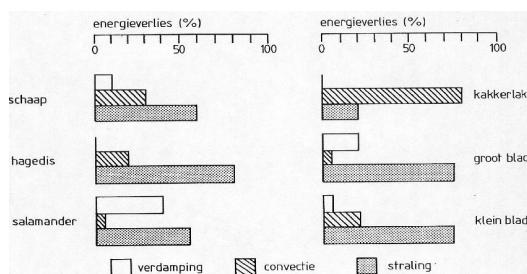
### 5.1 De Cursus, het vak, het examen

Dit is nog maar het 2de jaar dat dit vak gegeven wordt. Het vak wordt gegeven door drie proffen. Enkel de vragen van Dhr. Prof. Reinhart Ceulemans (de eerste twee vragen van het examen van 2009) zijn mondeling. Elke professor stelt 2 vragen, en elk deel telt voor evenveel punten mee. Voor het deel van Dhr. Prof. Matthijsen wordt er doorheen het jaar ook nog een werkje gemaakt met VORTEX, dit telt voor evenveel punten mee als een examenvraag. Voor Dhr. Prf. Erik Matthijsen zal je dus een quotering op 30 hebben (10 punten voor werkje, 10 punten per vraag op het examen) en voor de andere proffen telkens 20 punten. De 30 punten worden echter wel herleid naar 20, zodat elk deel evenveel meetelt.

### 5.2 Theorie

#### 5.2.1 Januari 2009

1. Bespreek onderstaande figuur. Definieer de verschillende processen en verklaar de verschillen in relatieve energieverlies tussen diverse organismen.



2. Definieer het begrip productiviteit; geef ook de verschillende aspecten (componenten) van productiviteit weer. Welke omgevingsparameters controleren productiviteit?
3. (a) Wat is het verschil tussen dispersie en migratie?  
(b) Wat is het algemene belang van dispersie voor natuurlijke populaties?

4. Wat is de watervoetafdruk (water foot print)?
5. Bespreek bondig de verschillende manieren om waterkwaliteit te bepalen (chemisch, toxicologisch, biologisch), incl. voor-en nadelen.

### 5.3 Extra

Dit zijn eigenlijk al de examenvragen die Prof. Ceulemans kan stellen, met de antwoorden erbij.

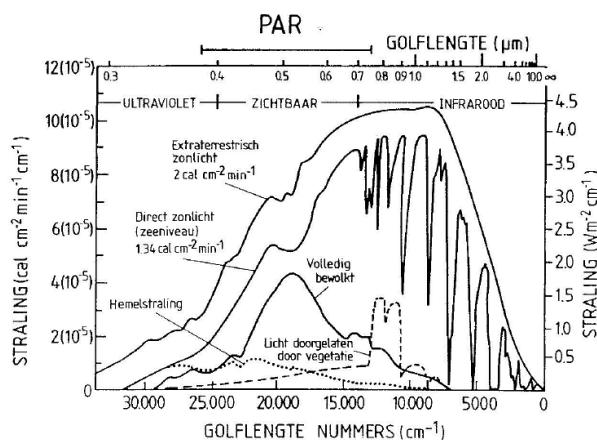
#### 5.3.1 De examenvragen van Dhr. Prof. Ceulemans

1. Wat is een ecosysteem?

Het woord ecosysteem kan men in twee delen opdelen. Eco is een verwijzing naar de omgeving (het milieu). Systeem duidt aan dat het ecosysteem functioneert als een collectie van gerelateerde stukken die samen functioneren als een eenheid. Het ecosysteem bestaat uit twee basiscomponenten: de levende (biotische) componenten en de fysische (abiotische) componenten.

Een ecosysteem is een biotisch en functioneel systeem (of eenheid) dat leven mogelijk maakt en dat alle ingesloten biologische en niet-biologische variabelen omvat. Ecosystemen vertonen een hoge graad van heterogeniteit in tijd en ruimte. Het zijn zeer dynamische systemen; het is zeer moeilijk om hun essentiële karakteristieken te vatten en om ze te modelleren. Ecosystemen en hun biologische componenten, de species of soorten, evolueren gestaag en in een langere termijn perspectief naar een hogere complexiteit.

2. Bespreek onderstaande figuur (Zonnestraling en zichtbaar licht)



Figuur 5.1: fig. 1

Bovenstaande figuur (fig. 1) geeft de spectrale verdeling van de extra-terrestrische zonne-straling (bovenste curve), van de directe zonnestraling op zee niveau op een klare dag onder een open hemel, van het zonlicht onder een gesloten wolkendek, en van het zonlicht na penetratie door een vegetatie of bestand (onderste curve). Elke curve stelt de energie voor die invalt op een horizontaal oppervlak.

PAR = Photosynthetically Active Radiation (Fotosynthetisch Actieve Straling) Golf-lengte nummer = 1/golfelengte

Straling die door de atmosfeer penetreert neemt geleidelijk af door atmosferische gassen en stof, maar deze afname varieert afhankelijk van de golfelengte en de frequentie. Kort-golvige UV-straling en deels ook blauw licht worden er uitgefilterd door de ozonlaag. Zonder deze filtering is er geen leven mogelijk op aarde, omdat deze straling letaal is voor elk protoplasmaweeftsel dat eraan blootgesteld wordt.

Extra-terrestrisch zonlicht bereikt de biosfeer met een intensiteit van ongeveer  $2 \text{ cal.cm}^{-2}.\text{min}^{-1}$  (de zonneconstante, is echter geen constante want varieert in cycli!), maar neemt exponentieel af naarmate het door de atmosfeer passeert. Ten hoogste 66procent (of  $1,34 \text{ cal.cm}^{-2}.\text{min}^{-1}$ ) bereikt 's middags op een zomerdag onder een open hemel het aardoppervlak. De zonnestraling wordt verder afgezwakt, en de spectrale energieverdeling (of energiedistributie) sterk veranderd terwijl ze door het wolkendek, water of vegetaties passeert. De dagelijkse energie-input van de zon in de autotrofe laag van een ecosysteem is gelegen tussen 100 en  $800 \text{ cal.cm}^{-2}$ .

Moleculen van verschillende atmosferische gassen verstrooien de hoger besproken korte golfelengten waardoor ze de hemel (de lucht) een blauwachtige schijn geven en de aarde laten schijnen of schitteren in de ruimte. Waterdamp verstrooit alle golfelengten, waarbij ze wolken hun witachtige kleur geven. Stof verstrooit lange golfelengten en produceert daarbij rode en gele kleuren in de hemel. Omwille van de verstrooiing bereikt een deel van de zonnestraling de aarde als diffuus (of verstrooid) licht, ook gekend onder de term hemelstraling (of skylight). Het relatieve aandeel van direct en diffuus licht verandert niet alleen gedurende de loop van een dag, maar ook globaal in functie van de breedteligging. Diffuus licht vertegenwoordigt een grotere proportie van de totale hoeveelheid geïntercepteerd licht op het aardoppervlak op grotere breedteliggingen ten gevolge van de lage zonnehoeeken.

Hemelstraling is in het kort samengevat dus het deel van het zonlicht dat de aarde bereikt als verstrooid licht. Er gebeurt absorptie in de atmosfeer, omdat de atmosfeer een andere dichtheid heeft. Direct zonlicht gaat vanaf IR grillige lijnen vertonen. Dit komt doordat grassen slechts welbepaalde golfelengten absorberen. Op een bewolkte dag is er veel minder energie, doordat er meer geabsorbeerd wordt door waterdamp.

Planten:

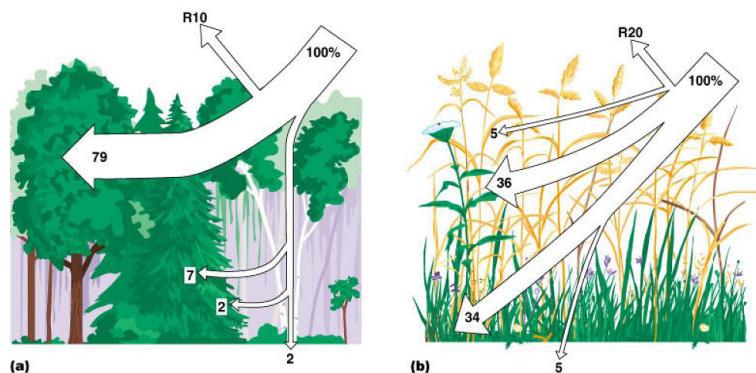
- UV: Morfogenetische straling
- Zichtbaar: Fotosynthese
- IR: Verdamping en opwarming

In het algemeen valt ons op dat er vaak hoge pieken gevonden worden bij het IR-gebied. De redenen hiervoor zijn:

- Planten laten deze energie veel door, en reflecteren het
- Handig om vegetatie in beeld te brengen met behulp van satellieten.

Kortgolvige straling ( $0,1\text{-}4 \mu\text{m}$ ) is straling afkomstig van de zon. De stralingsenergie die het aardoppervlak bereikt op een klaarlichte dag: 10 procent UV, 45 procent zichtbaar licht, 45 procent IR. Vegetaties en planten absorberen sterk in het blauwe en rode gedeelte van het zichtbaar spectrum, veel minder in het groene, slechts zeer weinig in het nabij infrarood en zeer sterk in het ver-infrarood. Het blauwe ( $0,4\text{-}0,5 \mu\text{m}$ ) en rode ( $0,6\text{-}0,7 \mu\text{m}$ ) licht worden specifiek door chlorofyl geabsorbeerd, en de ver-infrarode warmte-energie door het water in de bladeren en de waterdamp er rond.

3. Bespreek onderstaande figuur (fig. 2) (Planten en vegetaties interccepteren het invallend licht)



Figuur 5.2: fig. 2

Onder de bomenlaag van een bos, maar ook op de grond onder een grasveld, is de hoeveelheid licht lager dan deze boven het plantenbestand, omdat de vegetatie het invallend licht intercepteert. De hoeveelheid licht hangt af van de hoeveelheid en de positie van de bladeren. De hoeveelheid licht op een bepaald niveau in een bestand is een functie van het aantal bladeren erboven. Wanneer je neerwaarts in een bestand of vegetatie doordringt, neemt het aantal bladeren toe zodat de hoeveelheid licht verminderd. Maar omdat bladeren verschillen in dimensie en vorm, is het aantal bladeren niet de beste maat voor de hoeveelheid bladmateriaal in een bestand.

In figuur a is een boreaal gemengd woud weergegeven. Het reflecteert 10 procent van de inkomende fotosynthetisch actieve straling (PAR) op de bovenste laag van het kronendak, en absorbeert het grootste deel in de rest van het bestand.

In figuur b is een weide of grasland weergegeven. Het reflecteert 20 procent van de fotosynthetisch actieve straling op de bovenste oppervlakte. De middelste en laagste delen van de vegetatie, waar de bladeren het dichtste zijn, absorberen het grootste deel van de rest.

De hoeveelheid bladeren of bladdensiteit wordt meestal uitgedrukt in termen van de bladoppervlakte. Omdat de meeste bladeren plat of vlak zijn, is de bladoppervlakte gelijk aan de oppervlakte van een of van beide zijden van het blad. Indien de bladeren niet vlak zijn, wordt soms de totale oppervlakte bepaald. Om de veranderingen in de hoeveelheid licht in functie van de toenemende oppervlakte van de bladeren in een bestand/vegetatie te meten, dienen we de oppervlakte van de bladeren te definiëren per eenheid grondoppervlakte. De bladoppervlakte-index of LAI (Leaf Area Index) is de totale hoeveelheid bladoppervlakte per eenheid grondoppervlakte ( $m^2$  bladoppervlakte/ $m^2$  grondoppervlakte). Een LAI van 3 betekent dus dat er  $3m^2$  bladoppervlakte per  $m^2$  grondoppervlak aanwezig zijn. Hoe groter de LAI boven een oppervlak, hoe kleiner de hoeveelheid licht die dat oppervlak bereikt. Als men van boven in het gewas naar beneden beweegt vergroot de cumulatieve bladoppervlakte en de LAI, en verkleint de hoeveelheid licht.

De veralgemeende relatie tussen de hoeveelheid licht en de LAI (dit is dus de extinctie van de straling) van een vegetatie/gewas wordt beschreven door de (extinctie)wet van Beer. In de veronderstelling dat bladeren in een vegetatie hoofdzakelijk toevallig verdeeld zijn, dat de bladeren zwarte stralers zijn en dat de extinctie door stengels, vruchten, enz. kan worden verwaarloosd, bestaat er een lineaire verhouding tussen het logaritme van  $AL_i/AL_0$  en de cumulatieve LAI:

$$AL_i = AL_0 \cdot e^{k \cdot LAI_i}$$

waarbij  $AL_i$  de hoeveelheid beschikbare kortgolvige straling op hoogte/niveau i is,  $AL_0$  de hoeveelheid licht die bovenaan het gewas/vegetatie invalt, k de lichtextinctiecoefficient en  $LAI_i$  de bladoppervlakte-index of leaf area index (dit is de dikte van de bladlaag) boven hoogte i. De extinctiecoefficient k is meestal zeer klein bij erectofiele (bv. Rogge) vegetaties en is redelijk groot bij planofiele (bv. Bonen) vegetaties. Als k klein is, dan wordt het licht langzaam uitgedoofd doorheen de vegetatie; grasland is bvb. Enorm ij� ten opzichte van straling. Als k groot is, dan wordt het licht in de bovenste bladlagen al bijna volledig geabsorbeerd. De verdeling van de straling in een vegetatie is analoog aan de veralgemeende formulering van de extinctiewet van Beer (extinctie van monochromatische parallele radiatie in een homogeen medium)

$$AL_1 = AL_0 - AI_0 \cdot k \cdot dx$$

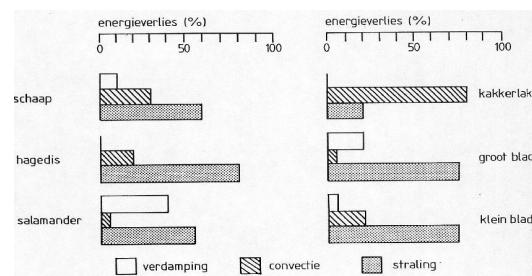
$$AL_1 = AL_0 \cdot e^{kx}$$

waarbij:

- AL: Invallende kortgolvige straling
- $AL_0$ : Straling op niveau 0
- $AL_1$ : Straling op niveau 1
- k: Extinctie-coefficient van het medium voor de straling
- dx: Weglengte of de afstand afgelegd door de straling in het medium

De structuur en de opbouw van de vegetatie of van het gewas bepalen grotendeels het verticaal profiel van de hoeveelheid licht, en dus van de energiehuishouding en de fotosynthese van het gewas. Bepaalde structuren en bladorientaties zijn veel beter in staat het invallend licht over verschillende bladlagen te capteren dan anderen; zij kunnen een grotere (blad)oppervlakte aan de invallende straling blootstellen, waarbij zij meer  $CO_2$  uit de lucht in de bladeren kunnen fixeren (grotere fotosynthese).

#### 4. Bespreek onderstaande figuur (Planten en vegetaties intercepteren het invallend licht)



Figuur 5.3: fig. 3

Bovenstaande figuur (fig. 3) toont de procentuele bijdrage van verdamping, convectie en straling aan het energieverlies van verschillende typen van organismen.

De manier van energie-uitwisseling is belangrijk voor het milieu waarin een organisme kan leven. Wanneer twee stoffen van verschillende temperatuur met elkaar in contact

komen, wordt warmte overgedragen van de stof met de hoge temperatuur door conductie. Dit is een directe interactie tussen de moleculen (voorbeeld: het warmtetransport in de bodem).

Warmtetransport door middel van bewegende vloeistoffen en gassen wordt convectie genoemd. De warmte die door conductie naar het oppervlak van bladeren of de huid van dieren wordt getransporteerd, wordt vervolgens door convectie afgevoerd. Convectie komt tot stand onder invloed van een koudere vloeistof of een gas dat over het oppervlak beweegt (voorbeeld: wind) of van temperatuursgradinten waardoor dichtheidsverschillen ontstaan.

Warmteuitwisseling door straling vereist geen tussenkomst van moleculen. Een oppervlak straalt een hoeveelheid energie uit die evenredig is met de vierde macht van de absolute temperatuur (Stefan en Boltzmann). Er bestaat een relatie tussen de golf-lengte van de uitgezonden straling en de temperatuur van het oppervlak dat de straling uitzendt (Wien).

Schaap: Energie die via de pootjes binnenkomt (conductie) is verwaarloosbaar. De wollen vacht zorgt voor isolatie, dus weinig verdamping en weinig water nodig.

Hagedis: Een hagedis is koudbloedig. Het volgt een vast patroon van opwarmen, verschuilen en afkoelen. Bijgevolg is er bijna geen verdamping en kan een hagedis dus bijna zonder water leven. Er is wel convectie door de wind die over zijn huid gaat.

Salamander: Leeft in een vochtige omgeving, bijgevolg is er veel verdamping en heeft hij veel water nodig.

Kakkerlak: Leeft in droge omstandigheden, dus bijna geen verdamping. Er is echter wel heel veel verlies door convectie, aangezien een kakkerlak een glad pantser heeft dat kan opgetild worden (wind). Weinig straling aangezien een kakkerlak verstopt leeft en dus een lage lichaamstemperatuur heeft (bijna geen opwarming door de zon).

Groot blad: Kan veel water opslaan, dus bijgevolg veel verdamping. Door de wind zal het blad niet snel meebewegen. Het heeft veel huidmondjes.

Klein blad: Kan gemakkelijk bewegen met de wind, en heeft een kleine grenslaag (laminaire stroming)

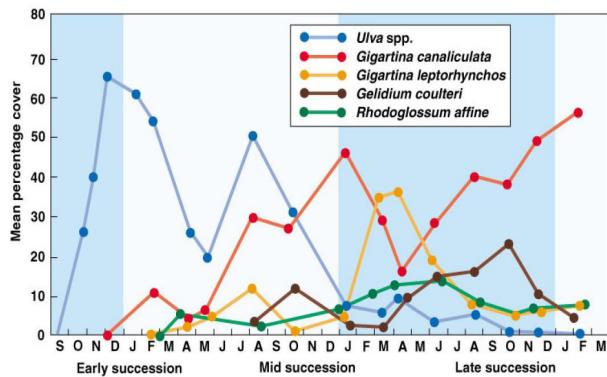
## 5. Wat is successie?

Een nieuw gevormd of nieuw blootgesteld oppervlak (gestolde lava, bodem onder terugtrekkende gletsjer, afgebroken stuk rots) ondergaat een opeenvolging van kolonisaties (vestiging van nieuwe soorten) en extincties (lokaal uitsterven van soorten), die elkaar opvolgen in de tijd. Dit directioneel proces van veranderende gemeenschapsstructuur heet primaire successie.

Secundaire successie is eveneens een temporele verandering van de gemeenschapsstructuur, maar dan van een bestaande gemeenschap na een verstoring (bv. Een akker komt braak te liggen en wordt bos). Verstoring is elk proces dat de bestaande gemeenschap geheel of gedeeltelijk vernietigt.

Kenmerken van successie:

- Plantensoorten van vroege successiestadia of pioniersoorten: klein, snelgroeidend, met hoge reproductie, snelle dispersie (verspreiding), korte levensduur.
- Plantensoorten van late successiestadia: groot, traaggroeidend, met trage reproductie en dispersie, lange levensduur.
- Bij dieren (bv. Vogels, insecten) volgt successie eerder de structuurverandering van de vegetatie dan de veranderingen in soortensamenstelling.



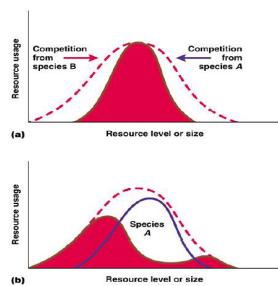
Figuur 5.4: fig. 4

Figuur 4 toont de gemiddelde bedekking van 5 algensoorten die betonblokken koloniseren geplaatst in de intergetijdenzone. Bemerk de veranderingen in dominantie in de tijd.

6. Wat is een niche? Welke types van niches kennen we? (Zie fig. 5 en 6)

Zonder interferentie met andere soorten kan een soort het volledig bereik van condities en resources gebruiken waaraan het is aangepast, dit volledig bereik noemt men de fundamentele niche. Door interactie met competitoren kan vaak maar een deel van de fundamentele niche effectief worden gexploiteerd, dit noemt men de gerealiseerde niche.

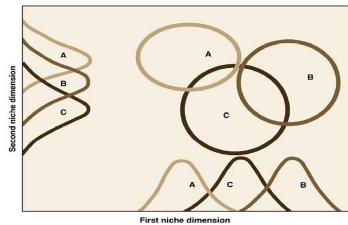
Een niche is zelden ndimensionaal, omdat elke soort veelvoudige behoeften heeft: voedsel, ruimte, bescherming tegen de elementen, enz. Vaak is de totale interactie, alle resource-assen in acht genomen, kleiner dan gesuggereerd wordt door de niche-overlap langs n enkele as. Er kan zelfs sterke overlap zijn tussen soorten langs n gradient (voor n resource) maar niet langs een tweede, zodat de soorten helemaal niet interfereren.



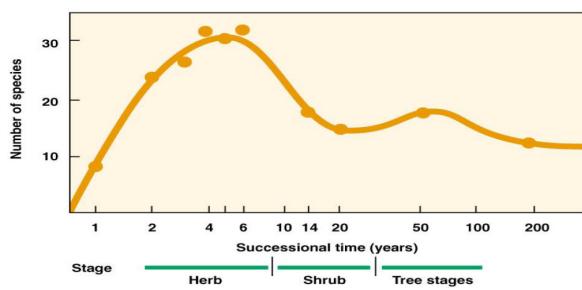
Figuur 5.5: fig. 5

7. Bespreek onderstaande figuur (fig. 7) (Veranderingen in soortendiversiteit tijdens de successie)

Bovenstaande figuur (fig. 7) toont de soortendiversiteit in een Quercus-Pinus bos in Brookhaven, New York (aantal soorten per 0,3ha).



Figuur 5.6: fig. 6



Figuur 5.7: fig. 7

Twee processen zijn de drijvende kracht achter successie in gemeenschappen: kolonisatie en vervanging van soorten. Kolonisatie verhoogt de soortendiversiteit, vervanging (ten gevolge van competitie of lagere tolerantie aan nieuwe condities) verlaagt de soortendiversiteit. De veranderingen die optreden in de tijd in zowel kolonisatie als vervanging zullen dus de evolutie van de soortendiversiteit bepalen. De figuur geeft zo een dergelijke evolutie weer van grasland naar bos. Tijdens de initiale fasen van de successie zijn er vele kruidachtige kolonisatoren, en stijgt de diversiteit. Later worden er soorten vervangen door meer schaduw-tolerante soorten, wat de stijging afremt. De eerste piek in de figuur correspondeert met de transitionele toestand waarbij de meeste initiale soorten nog aanwezig zijn, maar er zich toch ook al soorten van latere successiestadia hebben gevestigd. Nadien volgt een stadium van sterke vervanging en dus afnemende diversiteit. De tweede piek is het gevolg van hetzelfde fenomeen, enkel gaat het nu om houtachtige pioniersoorten die worden vervangen door schaduw-tolerante boomsoorten, terwijl in de eerste piek de kruidachtigen werden vervangen door de houtachtige pioniersoorten.

De snelheid van vervanging wordt bepaald door de groeisnelheid van de soorten. Trage groei impliceert trage vervanging en vice versa. In milieus met een lage beschikbaarheid aan resources (bv. Nutrinten) wordt de groei van de competitoren vertraagd. Aangezien groei de motor is van de soortenvervanging, verlengt hierdoor de periode waarin er coexistentie optreedt. De hoogste soortendiversiteit treedt op bij intermediaire resource-beschikbaarheid, want bij te lage beschikbaarheid kunnen er onvoldoende soorten overleven.

Verstoring is een tweede factor die kan zorgen voor verlengde coexistentie, doordat verstoring de klok terugzet (successie begint lokaal opnieuw). Een zeer hoge verstoringgraad houdt de vegetatie in de allereerste successiestadia, wat de diversiteit beperkt. Afwezigheid van verstoring heeft hetzelfde resultaat, door het mechanisme van sterke vervanging. Bij intermediaire verstoring kan er nog kolonisatie optreden, maar wordt competitieve vervanging minimaal gehouden. Het hieruit voortvloeiende patroon van maximale diversiteit bij intermediaire verstoring wordt de "intermediate disturbance hypothesis" genoemd (Huston en Connell).

De hoger vermelde principes gelden ook voor dierengemeenschappen. De structuur van de vegetatie bepaalt bv. de beschikbaarheid van voedsel, bescherming en nestplaatsen voor vogels. De meer gevarieerde vegetatiestructuur die gepaard gat met latere successiestadia leidt tot een groter scala voor elk van deze resources, waardoor er meer soorten kunnen voorkomen. Zo is grasland vaak slechts het habitat voor een 5-tal vogelsoorten, omdat enkel grondbroeders kunnen nestelen in dit vegetatietype, terwijl oudere bossen vele 10-tallen vogelsoorten kunnen herbergen als gevolg van het veel groter scala aan nestplaatsen (op de grond, in lage struiken, in holen, op hoge takken, enz.). Diersoorten die zorgen voor verstoring, bv. door de bodem om te woelen, zetten de klok van successie terug, en verhogen de diversiteit bij intermediaire

#### 8. Wat is productiviteit?

De primaire productiviteit van een ecologisch systeem (of van een gemeenschap, of van eender welk deel daarvan) is gedefinieerd als de snelheid waarmee stralingsenergie gefixeerd wordt via de fotosynthetische (en/of chemosynthetische) activiteit van de producerende organismen (voornamelijk de groene planten) in de vorm van organische materie die gebruikt kan worden als voedsel voor andere organismen. Het is belangrijk een onderscheid te maken tussen de vier opeenvolgende stappen in het productieproces als volgt:

1. De Bruto Primaire Productiviteit (GPP) is de totale hoeveelheid fotosynthese, inclusief de organische materie die verbruikt wordt in de (autotrofe) respiratie over een

bepaalde periode. Men spreekt hier ook soms over de bruto fotosynthese of de bruto assimilatie.

2. De Netto Primaire Productiviteit (NPP) is de snelheid waarmee organische materie gefixeerd (of geaccumuleerd) wordt in de plant bovenop het respiratorisch verbruik door de plant gedurende de beschouwde periode. Deze term wordt ook soms de netto assimilatie of netto fotosynthese genoemd. In de praktijk wordt de hoeveelheid (autotrofe) respiratie vaak opgeteld bij de hoeveelheid netto assimilatie om een schatting te bekomen van de bruto productiviteit.

3. De Netto GemeenschapsProductiviteit (NGP) is de snelheid waarmee de organische materie, die niet gebruikt of verbruikt wordt door heterotrofen, geaccumuleerd wordt gedurende de beschouwde periode, meestal een groeiseizoen of een jaar. Met andere woorden, de netto gemeenschapsproductiviteit is de netto primaire productiviteit minder het gebruik door de heterotrofen. Voor gemeenschappen geldt over het algemeen:

$GPP \approx R$  bij een pioniersvegetatie

$GPP \approx R$  bij een climaxvegetatie

#### SAMENVATTING:

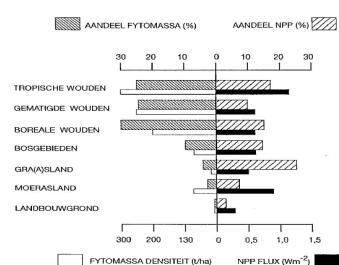
- BPP = Fotosynthese + Autotrofe Respiratie

- NPP = BPP - Autotrofe Respiratie

- GPP = PP - Gebruik door heterotrofen

Productiviteit is de snelheid waarmee organische materie geproduceerd wordt via de fotosynthese.

#### 9. Bespreek onderstaande figuur (Productiviteit)



Figuur 5.8: fig. 8

Bovenstaande figuur (fig. 8) toont de energie in de biosfeer.

De NPP accumuleert over de tijd als plantenbiomassa. De hoeveelheid geaccumuleerde organische materie die op een bepaald tijdstip op een bepaalde oppervlakte voorkomt is de staande biomassa (of "standing crop" biomassa).

De biomassa wordt gewoonlijk uitgedrukt in gram organische materie per  $m^2$ , of een gelijkaardige eenheid van gewicht (massa) per oppervlakte-eenheid. Biomassa verschilt dus wezenlijk van productiviteit. Productiviteit is de snelheid waarmee organische materie geproduceerd wordt via de fotosynthese. Biomassa is de hoeveelheid aanwezig op een welbepaald tijdstip.

De dominantie van de bos-ecosystemen is vrij evident: 80 procent van alle fytonassa en 40 procent van alle netto primaire productie op aarde. De uitgebreide arealen en de vrij hoge productiviteiten van gras-en graaslanden vertalen zich in een groot procentueel aandeel in de totale NPP, alhoewel hun fytonassa slechts een kleine fractie is van deze van bossen en wouden. De zee is niet te verwaarlozen, maar is slechts een relatief klein aandeel ten opzichte van land.

Fytonassa densiteit = biomassa = hoeveelheid droge stof per oppervlakte NPP = opname van C per oppervlakte en per tijd [W] = J/s procent = relatief ten opzichte van totale oppervlakte van land

Tropische wouden: Groot deel van de flux wordt gebruikt om de grote hoeveelheid biomassa in stand te houden.

Gematigde wouden: Directe lichtinval, warm en vochtig, nutrinten zoals N hebben een snelle omlooptijd.

Gra(a)sland: Kleine hoeveelheid biomassa, maar heel groot oppervlakte-aandeel (=alles waar geen bomen staan, wat dus een heel groot gebied is!).

Moerasland: Ondiep, dus nutrinten beschikbaar, ook is er licht tot op de bodem en is er een gebufferde temperatuur.

Landbouwgrond: Mens pompt er extra energie in.

10. Bespreek onderstaande figuur (fig. 9) (Ecosystemen hebben twee belangrijke voedselketens)

Energie die gefixeerd wordt door planten, vormt de basis voor de rest van het leven op de aarde. De energie die wordt vastgelegd door planten, wordt doorheen het ecosysteem doorgegeven via een aantal stappen van eten en gegeten worden, gekend als de voedselketen. De trofische relaties binnen een voedselketen of voedselweb worden gedefinieerd in termen van trofische niveaus. Vanuit een functioneel oogpunt, eerder dan vanuit het standpunt van de soorten, behoren alle organismen die hun energie verwerven na hetzelfde aantal stappen van de autotrofen of de primaire producenten, tot hetzelfde trofisch niveau. Het eerste trofisch niveau komt overeen met de herbivoren (consumenten van de eerste orde), en de hogere niveaus met de carnivoren (consumenten van de tweede orde). Sommige consumenten nemen zelfde trofisch niveau in, maar vele andere zoals de omnivoren, bezetten meer dan 1 trofisch niveau. Voedselketens zijn beschrijvend. Hoe de belangrijkste groepen zich voeden, wordt gedefinieerd op basis van een gemeenschappelijke energiebron, zoals autotrofen, herbivoren en carnivoren.

Binnen elk ecosysteem zijn er twee belangrijke types van voedselketens te onderscheiden, nl. de grazersketen en de detritus-voedselketen. Het onderscheid tussen beide types van voedselketens is gelegen bij de energiebron die de consumenten van het eerste niveau, de herbivoren, hanteren. In de grazersketen is de energiebron de levende plantenbiomassa of de netto primaire productie. In de detritus-voedselketen is de energiebron de dode organische materie of detritus. Op hun beurt vormen de herbivoren in elke voedselketen de energiebron voor de carnivoren, enz. Voorbeelden van grazers-voedselketens: vee dat graast op weiland; herten of reen die in het bos grazen; konijnen die zich voeden op oude graslanden; en insecten die zich voeden met tuin gewassen stellen de consumenten van het eerste niveau voor van de grazersvoedselketen. In tegenstelling tot wat men zou denken of verwachten, is de grazersvoedselketen niet de belangrijkste in terrestrische en in vele aquatische ecosystemen. Alleen in sommige open-water-ecosystemen spelen de grazende herbivoren een dominante rol in de energiestroom.

Alhoewel de bovengrondse herbivoren de meest in het oog springende grazers zijn, hebben ondergrondse herbivoren vaak een zeer belangrijk effect op de primaire productie.

Uit een studie bleek bv. dat ondergrondse herbivoren zoals mestkevers verantwoordelijk zijn voor 82 procent van de totale herbivore assimilatie van onbegraasde plots, 50 procent van licht begraasde plots en 29 procent van intens begraasde plots.

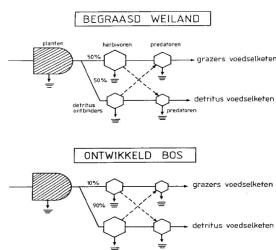
De detritus-voedselketen komt voor in alle ecosystemen. In terrestrische en kustecosystemen is de detritusketen de belangrijkste weg van energiestroom, omdat grazende herbivoren zo weinig van de netto primaire productie verbruiken. Van de totale hoeveelheid energie die door de fotosynthese wordt vastgelegd in een gematigd loofwoud, gaat ongeveer 50 procent van de totale bruto productiviteit naar onderhoud en respiratie, 13 procent wordt nieuw weefsel (levend materiaal), 2 procent wordt verbruikt door de herbivoren, en 35 procent gaat rechtstreeks naar de ontbinders voedselketen. Twee-derde tot drie-vierde van de bruto productiviteit in een grasland-ecosysteem dat begraasd wordt door gedomesticeerd vee, keert terug naar de bodem als dood plantenmateriaal, en minder dan n-vierde wordt geconsumeerd door de herbivore grazers. Ongeveer de helft van de hoeveelheid die geconsumeerd wordt door de herbivoren, keert terug naar de bodem als faeces. In een zoutmoeras-ecosysteem verbruikt de sprinkhaan, de dominante grazende herbivoor, 22 procent van de netto primaire productiviteit.

In de figuur ziet men een Y-vormig energiestroommodel van een ecosysteem dat de koppeling toont tussen de twee belangrijke voedselketens: de grazers voedselketen en de detritus voedselketen.

Het bovenste diagram stelt een ecosysteem voor, zoals bv. een begraasd weiland, waarbij een grote hoeveelheid energie (50 procent) via de grazers voedselketen stroomt.

Het onderste diagram stelt een ecosysteem voor, zoals bv. een volledig ontwikkeld bos, waarbij het merendeel van de energie de detritus voedselweg volgt.

De energiebron van de grazers-voedselketen is levende plantenbiomassa of NPP. De energiebron van de detritus-voedselketen is dode organische materie of detritus.



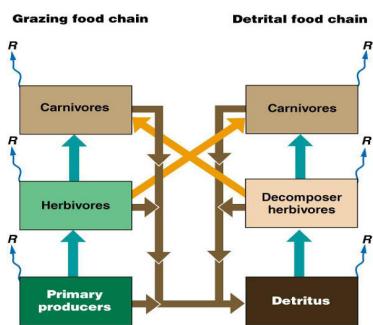
Figuur 5.9: fig. 9

11. Bespreek onderstaande figuur (fig. 10) (Energie stroomt doorheen trofische niveaus)

Bovenstaande figuur geeft de gecombineerde voorstelling van de grazers en de detritus voedselketen waarbij ook de interacties zijn voorgesteld. (R=Respiratie)

Wanneer ecologen de energiestroom doorheen een ecosysteem willen volgen, dan moeten zij de energiestroom doorheen de trofische niveaus traceren. Ze dienen ook de verbanden tussen de twee voedselketens, de grazers en de detritusketens, te definieren en de verliezen vanuit het ecosysteem via respiratie te meten.

De twee voedselketens staan met elkaar in verbinding. De initiale energiebron voor de detritus-voedselketen is de input van afval(-materiaal) en dode organische materie van de grazersketen. Dit verband blijkt uit de verschillende pijlen van elk van de trofische niveaus in de grazersketen die leiden naar de box die wordt aangeduid als detritus of dode organische materie. Er is een aanwijsbaar verschil in de energiestroom tussen de trofische niveaus in de grazers en de ontbinders-voedselketens. In de grazersketen volgt de (energie)stroom een richtingsweg, waarbij de netto primaire productie de energiebron voor de herbivoren vormt, de herbivoren voorzien de energie voor de carnivoren, enz. In de ontbinders- of detritusketen verloopt de energiestroom niet in richting. De afvalmaterialen en de dode organische materie (dode organismen) in elk van de trofische consumentenniveaus worden gerecycleerd, d.w.z. keren terug als een input in de box van de dode organische materie onderaan de detritus voedselketen. Daarenboven bezorgen de hogere trofische niveaus van de detritus-voedselketen ook energie voor de hogere trofische niveaus van de grazersketen (door predatie).



Figuur 5.10: fig. 10

12. Bespreek onderstaande figuur (fig. 11) (Ecologische pyramides karakteriseren de verdeling van energie)

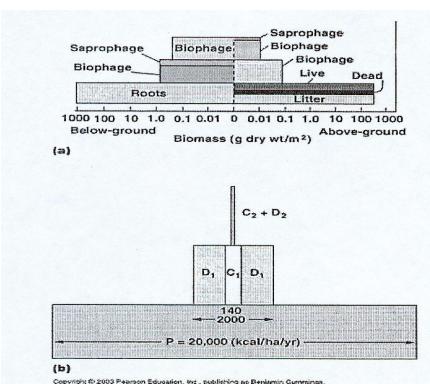
De grazers en de detritusvoedselketens worden in bovenstaande figuren gecombineerd in dezelfde trofische niveaus. Bovenstaande figuur a is de biomassapyramide voor een noordelijke priarie met kort priariegras. De basis van de pyramide stelt de biomassa van de producenten voor (in g droog gewicht/m<sup>2</sup>); het tweede (middelste) niveau stelt de consumenten van eerste orde voor; en het topniveau stelt de tweede-orde consumenten voor. De verticale stippellijn verdeelt de bovengrondse biomassa (rechts) van de ondergrondse biomassa (links). De grootte-orde van de trofische niveaus worden op een logaritmische schaal voorgesteld. De compartimenten zijn verdeeld in levende, staande dode, en strooiselbiomassa, en in consumenten van levende organismen (biofagen) en van dode biomassa (saprofagen). Figuur b toont de energiepyramide voor de Lamto-savanna in Ivoorkust. P is de primaire productiviteit; C1 de consumenten van eerste orde; C2 de consumenten van tweede orde; D1 de ontbinders van plantmateriaal; D2 de ontbinders van dierlijke materie.

Indien we alle biomassa of energie die bevat zit in elk trofisch niveau optellen en grafisch voorstellen, dan kunnen we pyramides van het ecosysteem bekomen. De pyramide van biomassa stelt aan de hand van het gewicht (of de massa) of van andere parameters die het levend materiaal kwantificeren, de totale hoeveelheid voor aan organismen of aan vastgelegde energie die aanwezig is op een bepaald tijdstip, de staande biomassa

(of standing crop). Omdat een deel van de energie of van de materie verloren gaat op elk opeenvolgend trofisch niveau, wordt de totale (bio)massa die op elk niveau kan onderhouden worden, gelimiteerd door de snelheid waarmee energie wordt opgeslagen op het volgende lagere niveau. Over het algemeen, moet de biomassa van de producenten groter zijn dan deze van de carnivoren. Dit gegeven resulteert in een rechtopstaande piramide voor de meeste ecosystemen.

Deze structuur gaat echter niet op voor alle ecosystemen. In sommige ecosystemen, zoals meren en open oceanen, is de primaire productiviteit geconcentreerd in de microscopische wieren of algen. Deze organismen hebben een zeer korte levenscyclus en een snelle reproductie (snelle turnover). Ze worden vrij intensief begraasd door herbivoor zoplankton dat groter is en langer leeft. Als gevolg daarvan is de biomassa van de producenten, ondanks de hoge productiviteit van de algen, laag in vergelijking met die van de zoplanktonherbivoren. Dit resulteert in een omgekeerde piramide.

De energiepiramide geeft enkel de hoeveelheid energiestroom op elk trofisch niveau weer. De basis waarop deze piramide gebouwd is, is de hoeveelheid organismen die per eenheid tijd geproduceerd worden. Of anders uitgedrukt, is het de snelheid waarmee voedsel (materie) doorheen de voedselketen passeert. Sommige organismen hebben een geringe biomassa, maar de totale hoeveelheid energie die ze assimileren en doorgeven kan aanzienlijk groter zijn dan deze van organismen met een veel grotere biomassa. Op een biomassapiramide zullen deze organismen in het ecosysteem veel minder belangrijk lijken dan ze in werkelijkheid zijn. Energiepiramides versmallen naar boven toe omdat vanop elk niveau minder energie wordt doorgegeven, dan er was ingestoken, in lijn met de tweede wet van de thermodynamica. In gevallen waarbij de producten minder massa hebben dan de consumenten, zoals in open waters, moet de energie die ze opslaan en doorgeven groter zijn dan deze van het volgende hogere niveau. Anders kan de biomassa die de producenten onderhouden niet groter zijn dan die van de producenten zelf. Deze hoge energiestroom wordt onderhouden door een snelle turnover van de individuen veeleer dan door een toename in de totale biomassa.

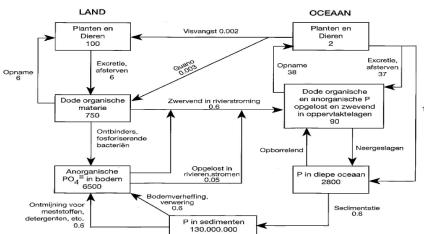


Figuur 5.11: fig. 11

### 13. De Fosforcyclus

Fosfor is een belangrijk element in alle levende cellen (een essentieel component van het protoplasma); het vormt onder meer een onmisbaar bestanddeel van DNA en ATP, en is als dusdanig een strategisch element. Fosfor is echter slechts in relatief kleine, beschikbare, voorraden aanwezig, die niet in verhouding staan met de aanwezigheid van het element in planten en dieren. De kringloop van fosfor is een voorbeeld van een

sedimentair type van kringloop, en is relatief eenvoudig vergeleken met die van stikstof en koolstof.



Figuur 5.12: fig. 12

Bovenstaande figuur (fig. 12) geeft de globale biogeochemische cyclus of kringloop van fosfor. De eenheden: de reserve-poelen zijn uitgedrukt in 1012 mol en de fluxen in 1012 mol per jaar. Zoals uit de figuur kan afgeleid worden is de residentietijd op het land =  $100/6 = 15$  jaar. De residentietijd in de oceaan =  $2/38 = 1/20$  jaar of 18 dagen. In de oceanen komen er ongeveer  $38 \times 1012$  mol fosfor binnen, en gaan er evenveel terug buiten.

Guano is een natuurlijke afzetting bestaande uit de gedroogde uitwerpselen van dieren, en is bekend om de zeer hoge concentratie meststoffen die erin zitten.

De fosforcyclus verloopt volledig sedimentair. De belangrijkste reservoirs van fosfor steken in de aardkorst in de vorm van fosfaatrotsen (apatiet), gevormd in de loop van de geologische geschiedenis, en in natuurlijke fosfaatafzettingen. De terrestrische fosforcyclus volgt de karakteristieke biogeochemische wegen. Door erosie is een deel van de fosfor van de aardkorst geleidelijk in opgeloste vorm in het oppervlaktewater terechtgekomen. Met het afstromende water komt uiteindelijk veel fosfor in zee terecht. Een flink deel daarvan sedimenteert op de bodem en zakt verder naar dieper gelegen sedimenten. In feite volgt de hoofdstroom van fosfor een richtingsweg naar de zee en zakt daar, na veel omwegen, naar de bodem. Heel weinig van de in het zeewater opgeloste hoeveelheid fosfor komt weer terug op het vasteland. Bekend is het voorbeeld van de guano-afzettingen aan de kust van Peru, gevormd uit de P-rijke faecalin van zeevis-etende kustvogels. Er bestaan geen stabiele gasvormige P-verbindingen. Dat betekent dat de fosfor die zich in de atmosfeer bevindt, vastgehecht moet zijn op partikels (stof) of opgelost is in het zoute stuifwater langs de kust.

Bijna alle fosfor in de terrestrische ecosystemen is afkomstig van de verwering van calciumfosfaat-mineralen. De kleine beweeglijke voorraad fosfor die in de bodem en in het water aanwezig is volgt een relatief snelle cyclus van synthese en mineralisatie via levende organismen. Autotrofen nemen P (bv. als opgelost fosfaat) op als een essentieel nutrient. Op het land is P n van de elementen waaraan, samen met N en K, het meest frequent gebrek is in cultuurgrond. Fosfor vormt dan ook een belangrijk bestanddeel van de meeste meststoffen (bv. N/P/K meststoffen). Onder invloed van de activiteit van mycorrhiza kan fosfaat efficiënter opgenomen worden. De schimmelhyfen slaan een hoeveelheid fosfaat op, die naar de weefsels van de plant kan worden getransporteerd als er in het milieu een P-beperking gaat optreden.

In mariene en zoetwater-ecosystemen beweegt de fosforkringloop onder drie verschillende vormen: organisch fosfor in partikels, opgeloste organische fosfaten en anorganische fosfaten. Fytoplankton, zoplankton, bacterien en microbile grazers zijn allen betrokken in de kringloop. De globale fosforcyclus is uniek tussen alle andere belangrijke biogeochemische cycli omdat hij geen echte atmosferische component heeft, alhoewel er transport van P in de lucht gebeurt onder de vorm van bodemstof en stuivend zeewater.

De transfer van fosfor van terrestrische naar aquatische ecosystemen is onder normale omstandigheden gering. Maar de toepassing van fosfaatmeststoffen en de lozing van riool- en zuiveringswater in aquatische ecosystemen leidt tot een aanzienlijke input van fosfor naar aquatische ecosystemen. In dicht-bevolkte en geindustrialiseerde gebieden wordt het oppervlaktewater zwaar belast met P-verbindingen uit meststoffen, detergентen, wasmiddelen enz. Zoete wateren zijn erg gevoelig voor de toevoeging van fosfaat. De plantaardige productie kan daardoor sterk toenemen, met alle consequenties van dien (oa. Eutrofiring). Maar ook kustwateren kunnen te lijden hebben onder een hoge P-belasting, vooral als de uitwisseling met de open zee wordt verhinderd, zoals bij fjorden en baaien die vrijwel geheel door land omsloten zijn. In het oppervlaktewater van de gematigde streken van onze aarde maken de opgeloste voedingsstoffen een aan de seizoenen gebonden cyclus door. Deze cycli worden gedreven door de veranderingen in temperatuur en insstraling, en de activiteit van de groene planten. Opgeloste fosfaten hopen zich s winters op in het water als de fotosyntheseactiviteit laag is. In het voorjaar en in de zomer wordt er door de planten dikwijls zoveel van het nutrient gebruikt dat de concentraties in het water erg laag worden.

Als de planten afsterven komt fosfor snel terug vrij in het water en is daar weer beschikbaar voor fotosynthese. Een deel zakt naar de bodem en hoopt zich daar op. Door geologische bodemverheffingen kan een deel van de fosfor echter terugkeren vanuit de oceaan naar het land.

### 5.3.2 Juni 2010

1. Globale fosforkringloop:
  - (a) Schets met schematische weergave.
  - (b) Geef de belangrijkste processen.
  - (c) Geef de specifieke karakteristieken.
2. Leg het verschil tussen biomassa en productiviteit uit. verklaar eveneens de verschillende ecosystemen op aarde. (Hierbij krijg je een figuur met NPP flux, aandeel NPP, fytomassa densiteit en aandeel fytomassa voor verschillende ecosysteemtypes).
3. (a) Benoem de parameters  $\lambda$ ,  $R_0$  en  $r$  en leg het verschil uit.
  - (b) Gegeven:  $R_0 = 1.2$ ,  $\lambda = 0.95$ ,  $r = 0.5$ . Welke cijfers wijzen op een toe- of afname van de populatie? Welke cijfers nemen het snelste toe of af? Ontbreekt er informatie om uitspraken te doen over de toe- of afname van de populatie, zo ja, welke?
4. Welk type exploitatiestrategie hoort bij de onderstaande grafieken? Wat is het verschil in rendement/welke geeft het optimale rendement? Is er stabiliteit indien er fluctuaties zijn?
5. Eutrofierung. (vertel alles wat je erover weet)

# Hoofdstuk 6

## Metrische ruimten en differentiaalrekening

Dit vak is sinds het academiejaar 2008-2009 een keuzevak en wordt weer gedoceerd door Prof. dr. Lowen. De oude vragen kunnen dus weer relevant zijn. De oefeningen komen nog wel ongeveer overeen met wat er tegenwoordig gekend moet zijn. Voor een vollediger gamma aan vragen verwijst ik naar de tuyaux voor wiskunde.

### 6.1 Theorie

#### 6.1.1 Juni 2005

Prof. Dr. R. Lowen

##### 6.1.1.1 Groep 1

1. Definitie rijen + toepassingen  
extra: bewijs het verband tussen ‘continu’ ( $x_n \rightarrow x$   $f_n \rightarrow f$ ) en ‘adherent continu’ ( $x_n \dashv x$   $f_n \dashv f$ )
2. Geef de definities van ‘differentieerbaar’ en ‘afleidbaar’ en bewijs het verband tussen beide
3.  $f$  is een functie,  $Df(a)(y)$  bestaat overal

$$\phi_y : a \rightarrow Df(a)(y) \tag{6.1}$$

$$\forall y : \phi_y \equiv 0 \Rightarrow f \text{ is continu} \tag{6.2}$$

Te bewijzen:  $f$  is differentieerbaar

4. Geef het verband tussen  $\sum u_n$ ,  $\sum |u_n|$  en  $\sum u_n^2$ .

##### 6.1.1.2 Groep 2

1. Wat is compactheid en continuïteit, en geef alle stellingen hierover.<sup>1</sup> Hierbij werd nog gevraagd zoek een functie die wel continu is maar niet begrensd op een niet compacte verzameling  $A \subset \mathbb{R}$ .

<sup>1</sup>Deze vraag wordt eerder gesteld als “Wat weet je over deze begrippen”, en het is dikwijls vrij moeilijk in te zien dat Prof. Lowen vraagt om alle stellingen waarin deze begrippen in de voorwaarden voorkomen te geven.

2. Samenstellingseigenschap
3. haal hieruit de optelling.

### 6.1.2 Juni 2006

Prof. Dr. R. Lowen

1. Metrische en genormeerde ruimten:
  - (a) Geef alle karakterisaties van lokaal continu.
  - (b) Kies er twee uit en bewijs in beide richtingen.
2. Differentieerbaarheid
  - (a) Geef de definities van differentieerbaarheid en afleidbaarheid.
  - (b) Geef het verband tussen deze twee begrippen en bewijs dit.
  - (c) Zoek een functie die in een punt afleidbaar is maar niet differentieerbaar.
3. Rijen
 

Welk verband bestaat er tussen de convergentie van volgende reeksen? (bvb: als 1 convergent dan 2 convergent)

  - (a)  $\sum |u_n| \Leftrightarrow \sum \sqrt{u_n}$
  - (b)  $\sum |u_n| \Leftrightarrow \sum u_n^2$
  - (c) ...

### 6.1.3 Juni 2008

Prof. Dr. W. Peeters

1. Metrische en genormeerde ruimten:
  - (a) Geef alle karakterisaties van compactheid plus alle definities. Hieruit wordt er 1 gevraagd te bewijzen, deze keer was het: Stel X een metrische ruimte, zijn equivalenten eigenschappen:
    - i. X is compact
    - ii. X is rijcompact
    - iii. X is volledig en totaal begrensd
  - (b) Een bijvraag:<sup>2</sup>
    - i. Stel een metrische ruimte werner1 waarvoor geldt dat alle rijen convergeren
    - ii. stel een metrische ruimte werner2 waarvoor geldt dat alle chauchyrijen adheren. Verlaat waarom deze begrippen niet besproken zijn in de les. Dus met wat zijn ze equivalent of wat zegt dit over de ruimte?
  - (c) Geef de karakterisaties van continuiteit in een punt (bewijs de equivalenties) en continuiteit globaal (zonder bewijs). <sup>3</sup>
  - (d) Bijvraag:<sup>4</sup> nieuw begrip: adherente continuiteit, als volgt gedefinieerd:  
 $f$  is AC ( $x_n$ )<sub>n</sub>  $\Leftrightarrow$  adhereert aan  $x \Rightarrow f(x_n)$   $\Rightarrow$   $f$  adhereert aan  $f(x)$ .  
 Hoe staat dit ten opzichte van de andere soorten continuiteit en bewijs.

<sup>2</sup>Hierop staat een antwoord bij sectie antwoorden nummer 1

<sup>3</sup>ook hierop staat een antwoord bij nummer 2, met dank aan Ruben

<sup>4</sup>weer hetzelfde

- (e) continuiteit in een punt en in het algemeen + de verbanden en deze kunnen bewijzen
2. Differentieerbaarheid
- geef het bewijs van de kettingregel en bewijs hiervan gebruikmakend de somregel voor afgeleiden
  - Geef de definities van afleidbaarheid, partieel afleidbaarheid en differentieerbaarheid.
  - Bijvraag: hoe staan deze begrippen tegenover elkaar en bewijs een van de relaties + tegenvoorbeeld.
  - verbanden continue en differentieerbaar, afleidbaar, partieel afleidbaar... + bijna alles bewijzen
3. Integreerbaarheid
- Bewijs dat de functies van begrensde variatie deel uitmaken van de regelfuncties
  - Bewijs dat iedere regelfunctie de som is van twee stijgende functies
  - Wat zijn functies van begrensde variatie? Bewijs dat deze functies Riemann-integreerbaar zijn.
  - Geef het schema dat op het einde van de cursus stond in verband met integreerbaarheid met bij ieder deel een voorbeeld.
4. Rijen
- Definieer kwadratisch convergent als  $\sum u_n$  kwadratisch convergent  $\Leftrightarrow \sum u_n^2$  convergent. Geef en bewijs het verband tussen convergentie, absoluut convergentie en kwadratisch convergentie.<sup>5</sup>
- #### 6.1.4 Oplossingen Juni 2008
- De antwoorden: de eerste is gewoon een singleton, de tweede wil zeggen dat alle chauhyrijen convergeren en dus dat de ruimte gewoon volledig is.
  - Definities: zie cursus adherente continuiteit  $\Leftrightarrow$  gewone continuiteit (ze zijn hetzelfde).  
Bewijs:  $\Rightarrow$  je moet zelf een rijtje maken dat volgt uit de definities  
 $\Leftarrow$  stel f continu, dan voor alle  $x_n \rightarrow x$  geldt:  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ . Als  $x_n$  convergeert, dan adhert ze ook, bijgevolg adhert f( $x_n$ ) ook en is f dus CC. QED
  - Kwadratisch convergent is zwakker dan absoluut convergent, oftewel: absoluutconvergent  $\Rightarrow$  kwadratisch convergent.  
Bewijs: stel  $\sum \|u_n\| < \infty$   
Dan geldt:  $\|u_n\| \rightarrow 0$   
In formele wiskundige woorden:  $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : \|u_n\| < 1$   
Het kwadraat van een getal kleiner dan 1 is kleiner dan het getal zelf:  
voor die  $n > n_0$  geldt:  $u_n^2 = \|u_n\|^2 < \|u_n\|$   
Sommatie over beide leden geeft:  $\sum \|u_n\|^2 < \sum \|u_n\|$   
Dan geldt wegens het vergelijkingscriterium dat als un absoluut convergent is, dat un kwadratisch convergent is. QED  
Tegenvoorbeeld:  $1/n$ : kwadraat is convergent, de reeks zelf niet.

---

<sup>5</sup>Ook hiervan is er een oplossing van Ruben! nummer 3

### 6.1.5 Juni 2009

Prof. Dr. B. Lowen

#### 6.1.5.1 Groep 1

1. Metrische en genormeerde ruimten:
  - (a) Geef alle definities van continuïteit en uniforme continuïteit
  - (b) Bewijs in 2 richtingen: begincenter Als  $x \in \bar{A}$ , dan  $f(x) \in f(\bar{A}) \iff$  Als  $x_n \rightarrow x$   
Dan ook  $f(x_n) \rightarrow f(x)$
2. Differentieerbaarheid
  - (a) Geef de definities van differentieerbaarheid en afleidbaarheid
  - (b) Geef het verband tussen deze twee begrippen en bewijs dit
3. Riemanintegreerbaarheid
  - (a) Leg uit: functies van begrensde variatie
  - (b) Bewijs dat functies van begrensde variatie Riemanintegreerbaar zijn

#### 6.1.5.2 Groep 2

1. Metrische en genormeerde ruimten:
  - (a) Geef alle definities van rijen, met alle verbanden en bewijs een van deze verbanden
  - (b) Geef alles wat je weet over continuïteit + bewijs Heine Borel
  - (c) Gegeven een compacte verzameling  $A$ . Geef een voorbeeld van een onbegrensde functie van  $A$  naar  $\mathbb{R}$ .
2. Differentieerbaarheid
  - (a) Geef de definities van differentieerbaarheid en afleidbaarheid
  - (b) Geef het verband tussen deze twee begrippen en bewijs dit

### 6.1.6 Juni 2010

Prof. Dr. B. Lowen

1. Globale continuïteit: Geef de definitie en karakterisaties.
2. Wat versta je onder de begrippen continu afleidbaar en continu differentieerbaar? Geef de definities en het onderling verband. (Om duidelijk te zijn: het gaat hier over functies van  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^p$ , en het wordt bekeken in een bepaald punt, niet globaal of op een deelverzameling dus.)

## 6.2 Oefeningen

### 6.2.1 Opgaven

#### 6.2.1.1 Juni 2004 (deel 2)

Dr. Werner Peeters

1. Toon aan dat de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x + \sqrt{x^2 + 1}}{2}$  Lipschitz is. Hint: gebruik de middelwaardestelling van Lagrange.
2. Ga na of de functie

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (x, y) & \mapsto \frac{x^4 y^3}{x^6 + y^8} \quad \text{als } (x, y) \neq \bar{0} \\ \bar{0} & \mapsto 0 \end{cases} \quad (6.3)$$

in het punt  $\bar{0} = (0, 0)$  continu, (partieel) afleidbaar, differentieerbaar is.

### 6.2.1.2 Augustus 2004

Dr. Werner Peeters

1. Zij  $(X, d)$  een compacte ruimte met de gewone euclidische metriek. Definieer

$$d_+((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \quad (6.4)$$

Bewijs dat  $(X \times X, d_+)$  ook compact is.

2. Zij  $X = \mathcal{C}([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ , de verzameling van alle reëelwaardige, continue functies op het interval  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , voorzien van de supremum-metriek

$$d_\infty(f, g) := \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f(x) - g(x)|, \quad (6.5)$$

en neem op  $\mathbb{R}$  de gewone euclidische metriek. Definieer dan

$$F : X \rightarrow X : f \mapsto F(f) \quad (6.6)$$

gedefinieerd door

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] : [F(f)](x) = \int_0^x (f(t) + t) \sin t dt \quad (6.7)$$

- (a) Toon aan dat  $F$  niet  $k$ -Lipschitz is met  $k < 1$ .  
(Hint: Stel  $f(x) = -x$  en  $g(x) = 1 - x$ . Bepaal  $d_\infty(f, g)$  en  $d_\infty(F(f), F(g))$ .)
- (b) Toon aan dat  $F$  wél  $\frac{\pi}{2}$ -Lipschitz is.

3. In welke punten heeft de impliciete kromme

$$f(x, y) = yx^3 + 3yx^2 - 9yx + 4 = 0 \quad (6.8)$$

een horizontale raaklijn?

4. Los de differentiaalvergelijking op:

$$y' + \frac{2}{x}y = xy^3 \quad (6.9)$$

5. Zij  $G$  het gebied in  $\mathbb{R}^2$  gegeven door

$$G = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi] : 0 \leq r \cos \theta \leq 1, 0 \leq r \sin \theta \leq 1\} \quad (6.10)$$

Bepaal de dubbelintegraal  $\iint_G r^3 dr d\theta$

6. Zoek de lokale minima en maxima van de functie

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2} \quad (6.11)$$

### 6.2.1.3 Juni 2005

Dr. Werner Peeters

Gebruik van een niet-programmeerbaar, niet-alfanumeriek rekentoestel is toegelaten!

1. Gegeven de euclidische metriek  $d_E$  op  $\mathbb{R}^2$ . Zij  $o = (0, 0)$ . Definieer aan de hand hiervan de volgende nieuwe functie

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^2 : d(x, y) = \begin{cases} d_E(x, o) + d_E(o, y) & \text{als } x \neq y \\ 0 & \text{als } x = y \end{cases} \quad (6.12)$$

- (a) Ga na dat  $d$  een metriek op  $\mathbb{R}^2$  is.
- (b) Teken ten opzichte van deze metriek de gesloten bol met middelpunt  $(3, 4)$  en straal 5 en de open bol met middelpunt  $(3, 4)$  en straal 6.
- (c) Wanneer is een rijtje  $(x_n)_n$  ten opzichte van deze metriek convergent? Maak een zo gedetailleerd mogelijk overzicht. Hint: als je niet weet hoe hier aan te beginnen, schrijf dan eens een paar voorbeelden op van rijtjes die *in deze metriek* convergeren.
- (d) Ga na of de ruimte  $(\mathbb{R}^2, d)$  volledig is.

2. Ga na of de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot \dots \cdot (2n-1)^{(2n-1)}}{2^2 \cdot 4^4 \cdot 6^6 \cdot \dots \cdot (2n)^{2n}} \quad (6.13)$$

convergent of divergent is.

3. Beschouw de volgende afbeeldingen

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x^5, x^4, x^3) \quad (6.14)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 : (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \alpha + \beta^2 + \gamma^3) \quad (6.15)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (p, q) \mapsto \left( \ln \left( \frac{p}{q} \right), \sqrt{pq} \right) \quad (6.16)$$

Zij  $k : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$  zodanig dat  $k = h \circ g \circ f$ . Bereken dan  $Dk(x)$  zonder de samenstelling uit te rekenen.

### 6.2.1.4 Juni 2006

Dr. Werner Peeters

1. We noemen een functie  $d : X \times X \rightarrow [0, \infty[$  een ultrametriek als de volgende eigenschappen gelden:

- $\forall x, y \in X : d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\forall x, y \in X : d(x, y) = d(y, x)$
- $\forall x, y, z \in X : d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}$

Bewijs nu de volgende stellingen:

- Een driehoek in een ultrametrische ruimte  $(X, d)$  is altijd gelijkbenig.
- Elk punt uit een open bol is het midden van die bol, m.a.w. als  $x \in B(y, r)$ , dan  $B(x, r) = B(y, r)$
- Als twee bollen een niet lege doorsnede hebben dan is één van die bollen bevat in de andere, m.a.w. als  $B(x, s) \cap B(y, r) \neq \emptyset$ , dan  $B(x, s) \subseteq B(y, r)$  of  $B(y, r) \subseteq B(x, s)$ .

2. Beschouw de afbeelding

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\cos^2(xy)-1}{x^2+y^2} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6.17)$$

Ga na of deze functie in  $(0, 0)$  (a) continu, (b) partieel afleidbaar, (c) afleidbaar, (d) differentieerbaar is. Hint: stel  $z = xy$  en gebruik de Taylorreeksontwikkeling van  $\cos 2z$ .

3. Bepaal de punten van het oppervlak  $x^2 - yz + 4x + 3 = 0$  waarvoor de afstand tot de x-as een extreme waarde heeft.
4. Zoek het volume van het gebied tussen de paraboloïde  $z = x^2 + y^2$  en het vlak  $z = 2x$
5. Ga convergentie en absolute convergentie na van de reeks

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(n \ln n) \sqrt{\ln \ln n}} \quad (6.18)$$

#### 6.2.1.5 September 2006

Dr. Werner Peeters

1. Zij  $0 < a < b \in \mathbb{R}$  en zij  $\delta$  een metriek op  $X$ . Beschouw dan de volgende functie:

$$\forall x, y \in X : d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y \\ a & \text{als } \delta(x, y) < a \\ \delta(x, y) & \text{als } a \leq \delta(x, y) \leq b \\ b & \text{als } b < \delta(x, y) \end{cases} \quad (6.19)$$

- (a) Bewijs dat dit een metriek is.  
 (b) Zij  $X = \mathbb{R}^2$  en  $\delta$  de sommetriek. Teken (of waar dit niet mogelijk is, bepaal) dan t.o.v.  $d$  de volgende bollen:  $B^*((0, 0), \frac{a}{2})$ ;  $B((0, 0), a)$ ;  $B^*((0, 0), a)$ ;  $B((0, 0), \frac{a+b}{2})$ ;  $B((0, 0), b)$ ;  $B^*((0, 0), b)$ ;  $B((0, 0), \frac{3b}{2})$
2. Beschouw de afbeelding

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} \operatorname{Bgtg}(x^2y^3) & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad (6.20)$$

Ga na of deze functie in  $(0, 0)$  (a) continu, (b) partieel afleidbaar, (c) afleidbaar, (d) differentieerbaar is.

3. Bepaal de punten van het oppervlak

$$x^2 - 4x + y^4 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 4 = 0 \quad (6.21)$$

waarvoor de afstand tot het  $XY$ -vlak een extreme waarde heeft. (Enkel de reële oplossingen interesseren me!)

4. Zoek het volume van het lichaam dat binnen de bol  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  en buiten de kegel  $z^2 = x^2 + y^2$  ligt.
5. Ga convergentie en absolute convergentie na van de reeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n-1} \right) \quad (6.22)$$

### 6.2.1.6 Juni 2007

1. Gegeven  $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) \mapsto \begin{cases} |x_1 - x_2| \wedge 1 & \text{als } y_1 = y_2 \\ 1 + |y_1 - y_2| & \text{als } y_1 \neq y_2 \end{cases}$ 
  - (a) Ga na dat dit een metriek op  $\mathbb{R}^2$  is
  - (b) Bepaal  $B^*((1, 4), \frac{1}{2})$ ,  $B((1, 4), 1)$ ,  $B^*((1, 4), 1)$ ,  $B((1, 4), \frac{3}{2})$
  - (c) Bestaat er op  $\mathbb{R}^2$  een norm  $\|\cdot\|$  zodanig dat  $d = d_{\|\cdot\|}$ ? Verklaar.
2. Zij  $X$  compact en  $(V_n)_n$  een dalende rij niet-lege gesloten deelverzamelingen, t.t.z.  $\forall n \in \mathbb{N} : V_{n+1} \subseteq V_n$ .
  - (a) Bewijs dat  $V := \bigcap_{n=1}^{\infty} V_n \neq \emptyset$ .
  - (b) Zij  $f : X \rightarrow X$  continu. Bewijs dat voor dezelfde rij geldt dat  $f(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n) = \bigcap_{n=1}^{\infty} f(V_n)$ .
3. Zoek een zo groot mogelijk open interval rond 0 waarin de reeks  $\sum_{n \geq 1} \frac{(n^2+1)*n!*x^n}{(2n^3-3)*n^n}$  convergeert.
4. Ga na of de volgende functie  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  in  $(0,0)$  continu, partieel afleidbaar, afleidbaar, differentieerbaar is:
 
$$f : \begin{cases} (x, y) \mapsto \frac{x^2y^3-x^3y^2}{x^4-x^2y^2+y^4} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ (0, 0) \mapsto 0 & \end{cases} \quad (6.23)$$
5. Bepaal de punten van het oppervlak  $x^4 + (y+3)^2 + z^2 = 4$  waarvan de afstand tot het XZ-vlak extreem is.

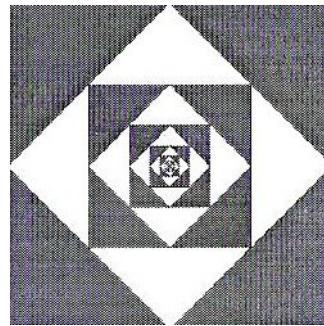
### 6.2.1.7 Juni 2008

Stijn Verwulgen

1. Onderzoek de differentieerbaarheid van de functie

$$\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \mapsto \max\{|x|, |y|\} \quad (6.24)$$

2. Het grote vierkant heeft zijde 1. Bereken de oppervlakte van het grijze gebied.



3. Ga na voor welke waarden van  $p \in \mathbb{R}$  de reeks:

$$\sum \left( \frac{1}{n^p} \right)^2 \quad (6.25)$$

convergent is.

4. Stel voor elke  $n \in \mathbb{N}_0$

$$f_n : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow 2n((x - 1)^{2n} - (x - 1)^{4n}) \quad (6.26)$$

- (a) Bereken de puntsgewijze limiet van de rij  $(f_n)_n$
- (b) Toon aan dat elke  $f_n$  begrensd is en bereken  $\|f_n\|_\infty$
- (c) Toon aan dat de verzameling  $\{f_n | n \in \mathbb{N}\}$  niet compact is in de metrische ruimte  $\mathbb{B}([0, 2])$
- (d) Toon aan dat de rij  $(f_n)_n$  niet uniform convergeert

5. Van een differentieerbare functie

$$g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad (6.27)$$

is gegeven:

$$\begin{cases} Dg(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & 2y \end{pmatrix} \\ g(1, 1) = (2, 2) \\ g(2, 2) = (4, 6) \end{cases} \quad (6.28)$$

gebruik deze informatie en de kettingregel om

- (a)  $D(g \circ g)(1, 1)$  en
- (b)  $D(g \circ g \circ g)(1, 1)$

te berekenen

6. Van een differentieerbare functie  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  is op het bijgevoegde blad grafische informatie gegeven.

- (a) Markeer op de grafiek  $\{(x, y) | F(x, y) = 0\}$  de punten  $\bar{x}$  waarvoor zeker  $\nabla F(\bar{x}) = \bar{0}$  met een \*.
- (b) Markeer de overige punten  $\bar{x}$  waarvoor zeker  $\frac{\partial F}{\partial x} = 0$  met een  $\infty$ .
- (c) Teken op deze grafiek de richting en zin van  $\nabla F(\bar{a})$ . Het punt  $\bar{a}$  is op het blad gegeven.

#### 6.2.1.8 Juni 2010

1. Gegeven metrische ruimtes  $X \in \mathbb{R}, Y \in \mathbb{R}$  en de functie  $f : X \rightarrow Y$ 
  - (a) Toon aan dat ALS f continu is dat DAN  $graf(f)$  gesloten is in  $X \times Y$ .
  - (b) Geef een tegenvoorbeeld voor de omgekeerde implicatie.
2. Voor welke x,y-waarden is de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow (|y - x|, \sqrt{x^2 + y^2})$  differentieerbaar en bereken de differentiaal.
3. Gegeven een oneindige rij kubussen waarvan de lengte van de ribbe afneemt en achter-eenvolgens gelijk is aan  $1, 1/2, 1/3, \dots$ . Welk van de volgende grootheden is een eindig getal?
  - (a) De totale lengte van de hoofddiagonalen
  - (b) De totale oppervlakte van de zijvlakken
  - (c) De totale inhoud

4. Toon aan of volgende verzamelingen al dan niet compact zijn:

- (a)  $\{(x, y) | \sqrt{x^2 + y^2}(x^2 + y^2) = xy\}$  in  $\mathbb{R}^2$
- (b)  $\{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = x\}$  in  $\mathbb{R}^3$
- (c)  $\{f_n : x \rightarrow \frac{1}{1+(x-\frac{1}{n})^2} | n \in N_0\}$  compact in  $(B(\mathbb{R}, \mathbb{R}), d_\infty)$

5. Bereken de afgeleide van de functie  $f : \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : (x, y) \rightarrow x^y$ .

6. Bereken het vorige resultaat en de kettingregel om de afgeleiden van de functie  $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} : x \rightarrow x^x$  te berekenen.

## 6.2.2 Oplossingen

### 6.2.2.1 Juni 2004 (deel 2)

1. Er geldt dat voor alle  $x < y \in \mathbb{R}$  er een  $c \in ]x, y[$  bestaat, zodanig dat  $f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$ . Nu is

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (6.29)$$

en dus is  $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} \left| \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \leq \frac{1}{2} \left( 1 + \left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \right)$  en duidelijk is  $\left| \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \right| \leq 1$ . Bijgevolg is

$$|f(x) - f(y)| \leq |f'(c)| |x - y| \leq |x - y| \quad (6.30)$$

2.

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} : \begin{cases} (x, y) \mapsto \frac{x^4 y^3}{x^6 + y^8} & \text{als } (x, y) \neq \bar{0} \\ \bar{0} \mapsto 0 & \end{cases} \quad (6.31)$$

- $\forall x \neq 0$  is  $\left| \frac{x^4 y^3}{x^6 + y^8} \right| = \left| \frac{x^2 y^5}{(x^6 + y^8) \frac{y^2}{x^2}} \right| \leq \left| \frac{x^2 y^5}{(2x^3 y^2) \frac{y^2}{x^2}} \right| = \left| \frac{1}{2} x y \right|$ , dus  $f$  is continu in al die richtingen. Als  $x = 0$ , is het gestelde triviaal  $\Rightarrow f$  is continu in  $(0, 0)$

$$\begin{aligned} D_1 f(0, 0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, 0) - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{0}{\lambda^7} = 0 \\ D_2 f(0, 0) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0, \lambda) - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{0}{\lambda^9} = 0 \\ \Rightarrow f &\text{ is partieel afleidbaar in } (0, 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \text{ Stel } \bar{h} &= (h_1, h_2) \text{ met } h_1 \neq 0 = h_2 \\ Df(\bar{0}, \bar{h}) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda h_1, \lambda h_2) - f(0, 0)}{\lambda} \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\lambda^7 (h_1^4 h_2^3)}{\lambda^7 (h_1^6 + \lambda^2 h_2^8)} = \frac{h_2^3}{h_1^2} \\ \Rightarrow f &\text{ is afleidbaar (in alle richtingen) in } (0, 0). \end{aligned}$$

- $f$  is niet differentieerbaar in  $(0, 0, 0)$ , want de kandidaat-differentiaal is de constante nulmatrix, dus

$$\frac{h_2^3}{h_1^2} = Df(\bar{0}, \bar{h}) \neq Df(\bar{0})(\bar{h}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \quad (6.32)$$

### 6.2.2.2 Augustus 2004

1. Neem een rijtje  $((x_n, y_n))_n \subseteq X^2$

$$\Rightarrow (x_n)_n \subseteq X \text{ compact},$$

dus is er een convergente deelrij  $(x_{k_n})_n \rightarrow x \in X$

Beschouw nu het rijtje  $(y_{k_n})_n \subseteq X$  compact,

dus is er een convergente deelrij  $(y_{j_{k_n}})_n \rightarrow y \in X$

Neem  $\varepsilon > 0$  en kijk naar de rijtjes  $(x_{j_{k_n}})_n \rightarrow x$  en  $(y_{j_{k_n}})_n \rightarrow y$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_1 : d(x_{j_{k_n}}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists n_2 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_2 : d(y_{j_{k_n}}, y) < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Stel  $n_0 := n_1 \vee n_2 \in \mathbb{N}$  en  $n \geq n_0$

$$\Rightarrow d_+((x_{j_{k_n}}, y_{j_{k_n}}), (x, y)) = d(x_{j_{k_n}}, x) + d(y_{j_{k_n}}, y) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\Rightarrow ((x_n, y_n))_n \dashv (x, y) \text{ in } X \times X$$

Dus is  $X \times X$  rijencompact, dus compact.

2. Zij  $X = C([0, \frac{\pi}{2}], \mathbb{R})$ , voorzien van de supremum-metriek  $d_\infty$ , en neem op  $\mathbb{R}$  de gewone euclidische metriek. Definieer dan

$$F : X \longrightarrow X : f \mapsto F(f) \quad (6.33)$$

gedefinieerd door

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}] : [F(f)](x) = \int_0^x (f(t) + t) \sin t dt \quad (6.34)$$

- (a) Toon aan dat  $F$  niet  $k$ -Lipschitz is met  $k < 1$ . Hint: Stel  $f(x) = -x$  en  $g(x) = 1 - x$ . Bepaal  $d_\infty(f, g)$  en  $d_\infty(F(f), F(g))$ .

$$d_\infty(f, g) = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |-x - (1 - x)| = 1$$

$$[F(f)](x) = \int_0^x (-t + t) \sin t dt = 0$$

$$[F(g)](x) = \int_0^x (1 - t + t) \sin t dt = 1 - \cos x$$

$$\Rightarrow d_\infty(F(f), F(g)) = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} |1 - \cos x| = 1$$

Dus  $d_\infty(F(f), F(g)) \leq d_\infty(f, g)$

(b) Toon aan dat  $F$  wél  $\frac{\pi}{2}$ -Lipschitz is.

$$d_\infty(F(f), F(g)) = \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \left| \int_0^x (f(t) + t) \sin t dt - \int_0^x (g(t) + t) \sin t dt \right| \quad (6.35)$$

$$\leq \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \int_0^x |(f(t) + t) - (g(t) + t)| |\sin t| dt \quad (6.36)$$

$$= \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \int_0^x |f(t) - g(t)| |\sin t| dt \quad (6.37)$$

$$\leq \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \int_0^x |f(t) - g(t)| dt \quad (6.38)$$

$$\leq \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \int_0^x \sup_{t \in [0, \frac{\pi}{2}]} |f(t) - g(t)| dt \quad (6.39)$$

$$= \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \int_0^x d_\infty(f, g) dt \quad (6.40)$$

$$\leq d_\infty(f, g) \sup_{x \in [0, \frac{\pi}{2}]} \int_0^x dt \quad (6.41)$$

$$= \frac{\pi}{2} d_\infty(f, g) \quad (6.42)$$

3.  $f(x, y) = yx^3 + 3yx^2 - 9yx + 4 = 0$

Hier stond een grafiek van  $yx^3 + 3yx^2 - 9yx + 4 = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} (yx^3 + 3yx^2 - 9yx + 4) = 3yx^2 + 6yx - 9y = 3y(x+3)(x-1) \\ \frac{\partial}{\partial y} (yx^3 + 3yx^2 - 9yx + 4) = x^3 + 3x^2 - 9x = x(x^2 + 3x - 9) \end{cases} \quad (6.43)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3yx^2 + 6yx - 9y}{x^3 + 3x^2 - 9x} = 0 \quad (6.44)$$

$$3yx^2 + 6yx - 9y = 3y(x+3)(x-1) = 0 \Rightarrow \{y=0, x=-3, x=1\} \quad (6.45)$$

- $\lim_{y \rightarrow 0} (yx^3 + 3yx^2 - 9yx + 4) = 4 = 0 \Rightarrow$  geen oplossing
- $\lim_{x \rightarrow -3} (yx^3 + 3yx^2 - 9yx + 4) = 27y + 4 = 0 \Rightarrow (x, y) = (-3, -\frac{4}{27})$
- $\lim_{x \rightarrow 1} (yx^3 + 3yx^2 - 9yx + 4) = -5y + 4 = 0 \Rightarrow (x, y) = (1, \frac{4}{5})$

4.  $y' + \frac{2}{x}y = xy^3; y = 0$  S.O.

$$\mu(y) = \frac{-2}{y^3} \quad (6.46)$$

$$\Rightarrow -\frac{2}{y^3}y' - \frac{4}{y^2x} = -2x$$

$$u = y^{-2} \Rightarrow u' = -\frac{2}{y^3} \quad (6.47)$$

$$\Rightarrow u' - \frac{4u}{x} = -2x$$

$$\nu(x) = e^{-\int \frac{4}{x} dx} = \frac{1}{x^4} \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \frac{u'}{x^4} - \frac{4u}{x^5} = -\frac{2}{x^3} \\
&\Rightarrow \left(\frac{u}{x^4}\right)' = -\frac{2}{x^3} \\
&\Rightarrow \frac{u}{x^4} = \int -\frac{2}{x^3} dx = \frac{1}{x^2} + C \\
&\Rightarrow u = Cx^4 + x^2 \\
&\Rightarrow \frac{1}{y^2} = Cx^4 + x^2 \\
&\Rightarrow \begin{cases} y = \frac{\pm 1}{\sqrt{Cx^4 + x^2}} \\ y = 0 \text{ S.O.} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
5. \quad &\iint_G r^3 dr d\theta = \iint_{[0,1] \times [0,1]} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y^2) dx dy \\
&= \int_0^1 \left[ \frac{1}{3}x^3 + y^2 x \right]_0^1 dy = \int_0^1 \left( \frac{1}{3} + y^2 \right) dy = \left[ \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}y^3 \right]_0^1 = \frac{2}{3}
\end{aligned}$$

$$6. \quad f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \frac{x^4 y^2 - 1}{x^3 y^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \frac{x^2 y^4 - 1}{x^2 y^3} \end{cases} \quad (6.49)$$

Merk op dat er geen oplossingen op de coördinaatassen kunnen liggen. Stel

$$\begin{cases} 2 \frac{x^4 y^2 - 1}{x^3 y^2} = 0 \\ 2 \frac{x^2 y^4 - 1}{x^2 y^3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 y^2 - 1 = 0 \\ x^2 y^4 - 1 = 0 \end{cases} \quad (6.50)$$

Dit heeft als reële oplossingen de punten  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$ ,  $(-1, 1)$  en  $(-1, -1)$ . Verder is

$$H(x, y) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} \quad (6.51)$$

$$= \begin{vmatrix} 2 \frac{x^4 y^2 + 3}{x^4 y^2} & \frac{4}{x^3 y^3} \\ \frac{4}{x^3 y^3} & 2 \frac{x^2 y^4 + 3}{x^2 y^4} \end{vmatrix} \quad (6.52)$$

$$= \begin{vmatrix} 2 + \frac{6}{x^4 y^2} & \frac{4}{x^3 y^3} \\ \frac{4}{x^3 y^3} & 2 + \frac{6}{x^2 y^4} \end{vmatrix} \quad (6.53)$$

$$= \left( 2 + \frac{6}{x^4 y^2} \right) \left( 2 + \frac{6}{x^2 y^4} \right) - \frac{16}{x^6 y^6} \quad (6.54)$$

Merk op dat

$$H(1, 1) = H(1, -1) = H(-1, 1) = H(-1, -1) = 48 > 0 \quad (6.55)$$

en dat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,-1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,1) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-1,-1) = 8 > 0 \quad (6.56)$$

De punten  $(1,1), (1,-1), (-1,1)$  en  $(-1,-1)$  zijn dus allevier lokale minima.

### 6.2.2.3 Juni 2005

1.

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 : d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} d_E(\mathbf{x}, \mathbf{o}) + d_E(\mathbf{o}, \mathbf{y}) & \text{als } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 0 & \text{als } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases} \quad (6.57)$$

- (a) (M1)  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{x} = \mathbf{y}$  geldt per definitie
- (M2)  $d(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = d_E(\mathbf{y}, \mathbf{o}) + d_E(\mathbf{o}, \mathbf{x}) = d_E(\mathbf{o}, \mathbf{x}) + d_E(\mathbf{y}, \mathbf{o}) = d_E(\mathbf{x}, \mathbf{o}) + d_E(\mathbf{o}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{x}, \mathbf{y})$
- (M3) Te bewijzen dat  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$

- Als  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  en  $\mathbf{z}$  geen van drieën aan elkaar gelijk zijn, dan is

$$d_E(\mathbf{x}, \mathbf{o}) + d_E(\mathbf{o}, \mathbf{y}) \leq d_E(\mathbf{x}, \mathbf{o}) + d_E(\mathbf{o}, \mathbf{z}) + d_E(\mathbf{z}, \mathbf{o}) + d_E(\mathbf{o}, \mathbf{y}) \quad (6.58)$$

- Als  $\mathbf{x} = \mathbf{z}$ , dan is

$$d_E(\mathbf{x}, \mathbf{o}) + d_E(\mathbf{o}, \mathbf{y}) \leq 0 + d_E(\mathbf{z}, \mathbf{o}) + d_E(\mathbf{o}, \mathbf{y}) \quad (6.59)$$

Analoog als  $\mathbf{y} = \mathbf{z}$

- Als  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ , dan is het linkerlid van de ongelijkheid 0, en mag het rechterlid om het even wat zijn.

(b)

$$d((3, 4), (x, y)) < \alpha \Leftrightarrow (x, y) = (3, 4) \text{ of } \sqrt{(x - 3)^2 + (y - 4)^2} < \alpha \quad (6.60)$$

Enkel de punten  $(3, 4)$  en  $(0, 0)$ ; Bevat naast het punt  $(3, 4)$  ook nog de euclidische open bol met middelpunt  $(0, 0)$  en straal 1

- (c) De rijtjes die naar  $(0, 0)$  convergeren zijn dezelfde als in de euclidische metriek. De rijtjes die naar een ander punt convergeren zijn precies diegene die vanaf een zeker ogenblik constant worden.
- (d) Een Cauchyrij  $(x_n)$  convergeert ofwel naar 0, of wordt vanaf een bepaald ogenblik constant, met dezelfde redenering als in (c). Bijgevolg is de ruimte volledig, want in elk van beide gevallen is ze convergent.

2. d'Alembert:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot \dots \cdot (2n-1)^{(2n-1)} \cdot (2n+1)^{(2n+1)}}{2^2 \cdot 4^4 \cdot 6^6 \cdot \dots \cdot (2n)^{2n} \cdot (2n+2)^{(2n+2)}}}{\frac{1 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \cdot \dots \cdot (2n-1)^{(2n-1)}}{2^2 \cdot 4^4 \cdot 6^6 \cdot \dots \cdot (2n)^{2n}}} \quad (6.61)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^{(2n+1)}}{(2n+2)^{(2n+2)}} \quad (6.62)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+1}{2n+2} \right)^{(2n+1)} \frac{1}{2n+2} \quad (6.63)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{2n+1} \right)^{(2n+1)} \right)^{-1} \frac{1}{2n+2} \quad (6.64)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{2n+2} = 0 \quad (6.65)$$

$\Rightarrow$  convergent

3.

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3 : x \mapsto (x^5, x^4, x^3) \quad (6.66)$$

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (\alpha, \beta, \gamma) \mapsto (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \alpha + \beta^2 + \gamma^3) \quad (6.67)$$

$$h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 : (p, q) \mapsto \left( \ln \left( \frac{p}{q} \right), \sqrt{pq} \right) \quad (6.68)$$

$$(\alpha, \beta, \gamma) = f(x) = (x^5, x^4, x^3) \quad (6.69)$$

$$(p, q) = g(\alpha, \beta, \gamma) = (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2, \alpha + \beta^2 + \gamma^3) \quad (6.70)$$

$$= (x^{10} + x^8 + x^6, x^5 + x^8 + x^9) \quad (6.71)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} Df(x) = \begin{pmatrix} 5x^4 \\ 4x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix} \\ Dg(\alpha, \beta, \gamma) = \begin{pmatrix} 2\alpha & 2\beta & 2\gamma \\ 1 & 2\beta & 3\gamma^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x^5 & 2x^4 & 2x^3 \\ 1 & 2x^4 & 3x^6 \end{pmatrix} \\ Dh(p, q) = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} & -\frac{1}{q} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{q}{p}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{q}} \end{pmatrix} \end{cases} \quad (6.72)$$

$$\Rightarrow Dk(x) = \begin{pmatrix} \frac{1}{x^{10} + x^8 + x^6} & -\frac{1}{x^5 + x^8 + x^9} \\ \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^5 + x^8 + x^9}{x^{10} + x^8 + x^6}} & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^{10} + x^8 + x^6}{x^5 + x^8 + x^9}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x^5 & 2x^4 & 2x^3 \\ 1 & 2x^4 & 3x^6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5x^4 \\ 4x^3 \\ 3x^2 \end{pmatrix} \quad (6.73)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{x} \frac{2x^4 + 2x^7 + x^8 + 3x^2 + 1 - x^6 - 2x^3}{(x^4 + x^2 + 1)(1 + x^3 + x^4)} \\ \frac{1}{2} \frac{x^{\frac{9}{2}}}{\sqrt{1 + x^3 + x^4} \sqrt{x^4 + x^2 + 1}} (30x^4 + 18x^7 + 19x^8 + 13x^2 + 11 + 16x^5 + 17x^6 + 14x^3) \end{pmatrix} \quad (6.74)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x^8 + 2x^7 - x^6 + 2x^4 - 2x^3 + 3x^2 + 1}{x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + 2x^5 + x^4 + x^3 + x} \\ \frac{\sqrt{x}(19x^{12} + 18x^{11} + 17x^{10} + 16x^9 + 30x^8 + 14x^7 + 13x^6 + 11x^4)}{2\sqrt{x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + 2x^4 + x^3 + x^2 + 1}} \end{pmatrix} \quad (6.75)$$

## 6.2.2.4 Juni 2006

1. (a) Neem  $a, b, c$  verschillend in  $X$ . Dan is  $d(a, b) \leq \max\{d(a, c), d(b, c)\}$ . Stel bijvoorbeeld dat  $d(a, c) \geq d(b, c)$ , dan is  $d(a, b) \leq d(a, c)$ . Beschouw dan  $d(a, c) \leq \max\{d(a, b), d(b, c)\}$ . Stel dat  $d(a, c) \leq d(b, c)$ , dan is  $d(a, c) = d(b, c)$ ; in het andere geval is  $d(a, c) \leq d(a, b)$  en dus is  $d(a, c) = d(a, b)$ . Twee van de drie zijden zijn dus even lang.
- (b) Stel  $x \in B(y, r)$ , dan is  $d(x, y) < r$ . Neem  $z \in B(x, r) \Rightarrow d(x, z) < r$ . Dus is  $d(z, y) \leq \max\{d(x, z), d(x, y)\} < r$ , dus  $z \in B(y, r)$ . Omgekeerd, als  $z \in B(y, r)$ , dan is  $d(x, z) < r$  en dus is  $d(y, z) \leq \max\{d(x, z), d(x, y)\} < r$ , dus  $z \in B(x, r)$ . Bijgevolg is  $B(x, r) = B(y, r)$ .
- (c) Stel  $z \in B(x, s) \cap B(y, r)$ . dan is wegens (b)  $B(x, s) = B(z, s)$  en  $B(y, r) = B(z, r)$ . Stel  $r \geq s$ . Neem  $t \in B(x, s)$ , dan is  $t \in B(z, s) \subseteq B(z, r) = B(y, r)$ . Als  $r \leq s$  geldt uiteraard de andere inclusie.
2. (a)  $\frac{\cos^2(xy) - 1}{x^2 + y^2} = \frac{\cos 2(xy) - 1}{2(x^2 + y^2)} = \frac{1 - 2x^2y^2 + O^4(xy) - 1}{2(x^2 + y^2)} = \frac{-2x^2y^2 + O^4(xy)}{2(x^2 + y^2)}$   
 Nu is  $x^2 + y^2 \geq |2xy| \Rightarrow \frac{1}{2(x^2 + y^2)} \leq \frac{1}{4|xy|}$   
 $\Rightarrow 0 \leq |f(x, y)| \leq \left| \frac{-2x^2y^2 + O^4(xy)}{4xy} \right| \leq \frac{1}{2} |xy| + O^3(xy)$   
 $\Rightarrow \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$   
 $f$  is dus continu in  $(0, 0)$

(b)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, 0) - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\cos^2(0) - 1}{\lambda^3} = 0$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0, \lambda) - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\cos^2(0) - 1}{\lambda^3} = 0$$

 $f$  is dus partieel afleidbaar in  $(0, 0)$ 

(c)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda h_1, \lambda h_2) - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\cos^2(\lambda^2 h_1 h_2) - 1}{\lambda^3} \quad (6.76)$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\cos 2(\lambda^2 h_1 h_2) - 1}{2\lambda^3} = \frac{0}{0} \quad (6.77)$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{-4 \sin 2(\lambda^2 h_1 h_2) \lambda h_1 h_2}{6\lambda^2} \quad (6.78)$$

$$= -\frac{2}{3} h_1 h_2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin 2(\lambda^2 h_1 h_2)}{\lambda} \quad (6.79)$$

$$= -\frac{2}{3} h_1 h_2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\sin 2(\lambda^2 h_1 h_2)}{2\lambda^2 h_1 h_2} (2\lambda h_1 h_2) \quad (6.80)$$

$$= -\frac{4}{3} h_1^2 h_2^2 \lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda = 0 \quad (6.81)$$

 $f$  is dus afleidbaar in  $(0, 0)$

(d)

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h_1, h_2)}{\|h\|} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1 - 2h_1^2h_2^2 + O^4(h_1h_2) - 1}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^3}} \quad (6.82)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h_1^2h_2^2 + O^4(h_1h_2)}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^3}} \quad (6.83)$$

Nu is  $h_1^2 + h_2^2 \geq |2h_1h_2| \Rightarrow \frac{1}{h_1^2 + h_2^2} \leq \frac{1}{|2h_1h_2|}$   
 $\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{(h_1^2 + h_2^2)^3}} \leq \frac{1}{\sqrt{|2h_1h_2|^3}}$   
 $\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h_1, h_2)}{\|h\|} \leq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-2h_1^2h_2^2 + O^4(h_1h_2)}{\sqrt{|2h_1h_2|^3}} =$   
 $\lim_{h \rightarrow 0} \left( -\sqrt{\frac{|h_1h_2|}{2}} + O^{5/2}(h_1h_2) \right) = 0$   
 $f$  is dus differentieerbaar in  $(0, 0)$

3. Bepaal de punten van het oppervlak  $x^2 - yz + 4x + 3 = 0$  waarvoor de afstand tot de  $X$ -as een extreme waarde heeft.

Hier stond een grafiek van  $x^2 - yz + 4x + 3 = 0$

$$F(x, y, z, \lambda) = y^2 + z^2 + \lambda(x^2 - yz + 4x + 3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = \lambda(2x + 4) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - \lambda z = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z - \lambda y = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 - yz + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda(2x + 4) = 0 \\ 2y - \lambda z = 0 \\ 2z - \lambda y = 0 \\ x^2 - yz + 4x + 3 = 0 \end{cases} \quad (6.84)$$

•  $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 2y = 0 \\ 2z = 0 \\ x^2 - yz + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + 4x + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (-3, 0, 0, 0) \text{ en } (-1, 0, 0, 0)$

•  $x = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2y = \lambda z \\ 2z = \lambda y \\ yz + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ 2y = \lambda z \\ 4z = \lambda^2 z \\ yz + 1 = 0 \end{cases} \stackrel{z \neq 0}{\Rightarrow} \begin{cases} x = -2 \\ 2y = \lambda z \\ \lambda^2 = 4 \\ yz + 1 = 0 \end{cases}$

•  $\lambda = 2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \lambda = 2 \\ 2y = 2z \\ yz + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \lambda = 2 \\ y = z \\ y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{geen oplossingen}$

•  $\lambda = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \lambda = -1 \\ 2y = -2z \\ yz + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ \lambda = -1 \\ y = -z \\ y^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow (-2, 1, -1, -1) \text{ en } (-2, -1, 1, -1)$

$f(-3, 0, 0) = f(-1, 0, 0) = 0$  en dat moet een minimum zijn

$f(-2, 1, -1) = f(-2, -1, 1) = 2$  en dat moet een maximum zijn.

4. Hier stond een grafiek van  $x^2 + y^2$

$$\Rightarrow I = \iiint_G 1 dx dy dz = \int_{x^2+y^2}^{2x} dz dS \text{ met } S \text{ het gebied in het } XY\text{-vlak dat inwendige}$$

is van de impliciete kromme  $x^2 + y^2 = 2x$ .

$$\Rightarrow r^2 = 2r \cos \theta \Rightarrow r = 2 \cos \theta$$

$$\Rightarrow I = \iint_S (2x - x^2 - y^2) dS$$

Voer een transformatie naar poolcoördinaten door:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \Rightarrow D_{r\theta}(x, y) = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \quad (6.85)$$

$$\Rightarrow I = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{2 \cos \theta} (2r \cos \theta - r^2) dr d\theta \quad (6.86)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[ r^2 \cos \theta - \frac{1}{3} r^3 \right]_0^{2 \cos \theta} d\theta \quad (6.87)$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{4}{3} \cos^3 \theta d\theta \quad (6.88)$$

$$= \left[ \frac{4}{9} \cos^2 \theta \sin \theta + \frac{8}{9} \sin \theta \right]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{16}{9} \quad (6.89)$$

5. (a)  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n \ln n \sqrt{\ln \ln n}}$  is convergent wegens het criterium van Leibnitz.

(b) Wegens opeenvolgende toepassingen van het condensatiecriterium is

$$\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln n) \sqrt{\ln \ln n}} \sim \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n (\ln 2^n) \sqrt{\ln \ln 2^n}} \quad (6.90)$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{n (\ln 2) \sqrt{\ln (n \ln 2)}} \quad (6.91)$$

$$\sim \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{2^n}{2^n (\ln 2) \sqrt{\ln (2^n \ln 2)}} \quad (6.92)$$

$$= \sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{(\ln 2) \sqrt{n \ln (2 \ln 2)}} \quad (6.93)$$

en deze reeks is divergent omwille van het verhoudingscriterium, want die heeft hetzelfde gedrag als  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Immers,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{(\ln 2) \sqrt{n \ln (2 \ln 2)}}}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \frac{1}{\sqrt{\ln 2 + \ln (\ln 2) \ln 2}} \quad (6.94)$$

#### 6.2.2.5 September 2006

1. (a) We hebben reeds in de oefeningen gezien dat  $\delta(x, y) \wedge 1$  een metriek is, dus  $\delta(x, y) \wedge b$  is dat ook. Het supremum van twee metrieken is terug een metriek; de beschreven

metriek is het supremum van voornoemde metriek en de discrete metriek  $d(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{als } x = y \\ a & \text{als } x \neq y \end{cases}$ . Dit volstaat als bewijs; volledig uitschrijven mag natuurlijk ook.

(b)

$$B^* \left( (0, 0), \frac{a}{2} \right) = \{(0, 0)\} \quad (6.95)$$

$$B((0, 0), a) = \{(0, 0)\} \quad (6.96)$$

$$B^*((0, 0), a) = B_d^*((0, 0), a) \quad (6.97)$$

$$B \left( (0, 0), \frac{a+b}{2} \right) = B_d \left( (0, 0), \frac{a+b}{2} \right) \quad (6.98)$$

$$B((0, 0), b) = B_d((0, 0), b) \quad (6.99)$$

$$B^*((0, 0), b) = \mathbb{R}^2 \quad (6.100)$$

$$B \left( (0, 0), \frac{3b}{2} \right) = \mathbb{R}^2 \quad (6.101)$$

2. Beschouw de afbeelding

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \begin{cases} \frac{\operatorname{Bgtg}(x^2y^3)}{x^4 + y^4} & \text{als } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{als } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{aligned} \quad (6.102)$$

Ga na of deze functie in (0, 0) (a) continu, (b) partieel afleidbaar, (c) afleidbaar, (d) differentieerbaar is.

(a)

$$\frac{\operatorname{Bgtg}(x^2y^3)}{x^4 + y^4} = \frac{x^2y^3 + O^6(x)*O^9(y)}{x^4 + y^4} \quad (6.103)$$

Nu is

$$x^4 + y^4 \geq |2x^2y^2| \Rightarrow \frac{1}{x^4 + y^4} \leq \frac{1}{2x^2y^2} \quad (6.104)$$

$$\Rightarrow 0 \leq |f(x, y)| \leq \left| \frac{x^2y^3 + O^6(x)*O^9(y)}{2x^2y^2} \right| \leq \frac{1}{2}|y| + O^4(x)*O^7(y) \quad (6.105)$$

$$\Rightarrow \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0 \quad (6.106)$$

 $f$  is dus continu in (0, 0)

(b)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda, 0) - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Bgtg}(0)}{\lambda^5} = 0 \quad (6.107)$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(0, \lambda) - f(0, 0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Bgtg}(0)}{\lambda^5} = 0 \quad (6.108)$$

 $f$  is dus partieel afleidbaar in (0, 0)

(c)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{f(\lambda h_1, \lambda h_2) - f(0,0)}{\lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{\text{Bgtg}(\lambda^5 h_1^2 h_2^3)}{\lambda^5 (h_1^4 + h_2^4)} = \frac{0}{0} \quad (6.109)$$

$$\stackrel{(H)}{=} \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{5\lambda^4 h_1^2 h_2^3}{1 + \lambda^{10} h_1^4 h_2^6} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{h_1^2 h_2^3}{(1 + \lambda^{10} h_1^4 h_2^6)(h_1^4 + h_2^4)} = \frac{h_1^2 h_2^3}{h_1^4 + h_2^4} \quad (6.110)$$

 $f$  is dus afleidbaar in  $(0,0)$ 

(d)

$$Df(0,0)\bar{h} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0 \neq \frac{h_1^2 h_2^3}{h_1^4 + h_2^4} = Df((0,0), \bar{h}) \quad (6.111)$$

 $f$  is dus niet differentieerbaar in  $(0,0)$ 

3. Bepaal de punten van het oppervlak  $x^2 - 4x + y^4 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 4 = 0$  waarvoor de afstand tot het  $XY$ -vlak een extreme waarde heeft. (Enkel de reële oplossingen interesseren me!)

$$x^2 - 4x + y^4 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 4 = 0 \quad (6.112)$$

*(Grafiek van de functie stond hier)*

$$\Rightarrow F(x, y, z, \lambda) = z^2 + \lambda(x^2 - 4x + y^4 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 4) \quad (6.113)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x} = 2\lambda(x - 2) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial y} = 4\lambda y^3 = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial z} = 2z + 4\lambda z^3 + 12\lambda z^2 + 12\lambda z + 4\lambda = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} = x^2 - 4x + y^4 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 4 = 0 \end{cases} \quad (6.114)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda(x - 2) = 0 \\ 4\lambda y^3 = 0 \\ 2z + 4\lambda z^3 + 12\lambda z^2 + 12\lambda z + 4\lambda = 0 \\ x^2 - 4x + y^4 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 4 = 0 \end{cases}, \quad (6.115)$$

- Als  $\lambda = 0 \Rightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ 1 = 0 \\ x^2 - 4x + y^4 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 4 = 0 \end{cases}$  heeft duidelijk geen oplossingen

- $\Rightarrow \lambda \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ 1 + 4\lambda z^3 + 12\lambda z^2 + 12\lambda z + 4\lambda = 0 \\ z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z = 0 \end{cases} \quad (6.116)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ 1 + 4\lambda z^3 + 12\lambda z^2 + 12\lambda z + 4\lambda = 0 \\ z(z+2)(z^2+2z+2) = 0 \end{cases} \quad (6.117)$$

- Als  $z = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 0 \\ 1 + 4\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, \lambda) = \left(2, 0, 0, -\frac{1}{4}\right)$

$$- \text{ Als } z = -2 \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = -2 \\ 1 - 4\lambda = 0 \end{cases} \Rightarrow (x, y, z, \lambda) = \left(2, 0, -2, \frac{1}{4}\right)$$

De overige oplossingen zijn niet reëel.

Verder is  $f(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + y^4 + (z + 1)^4 = 1$

*Hier stond een grafiek van de functie  $x^2 - 4x + y^4 + z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z + 4$*

Het punt  $(2, 0, 0)$  ligt dus het dichtst bij het  $XY$ -vlak, het punt  $(2, 0, -2)$  ligt er het verste af.

4. Zoek het volume van het lichaam dat binnen de bol  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  en buiten de kegel  $z^2 = x^2 + y^2$  ligt.

*Hier stonden grafieken van de functies  $x^2 + y^2 + z^2 = 2$  en  $z^2 = x^2 + y^2$ .*

We zetten de vergelijkingen om naar bolcoördinaten

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta \sin \varphi \\ y = \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z = \rho \cos \varphi \end{cases} \quad (6.118)$$

De vergelijking van de bol wordt dan  $\rho = \sqrt{2}$ ; bij de vergelijking van de kegel tellen we bij de beide leden  $z^2$  bij, en zetten die dan om naar bolcoördinaten:

$$2z^2 = x^2 + y^2 + z^2 \quad (6.119)$$

$$\Rightarrow 2\rho^2 \cos^2 \varphi = \rho^2 \quad (6.120)$$

$$\Rightarrow \cos^2 \varphi = \frac{1}{2} \quad (6.121)$$

We zoeken dus het gebied tussen de hoeken  $\varphi = \frac{\pi}{4}$  en  $\varphi = \frac{3\pi}{4}$ . Het volume wordt dus gegeven door

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \int_0^{\sqrt{2}} \rho^2 \sin \varphi d\rho d\varphi d\theta \quad (6.122)$$

$$= [\theta]_0^{2\pi} \cdot [-\cos \varphi]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \cdot \left[ \frac{\rho^3}{3} \right]_0^{\sqrt{2}} \quad (6.123)$$

$$= 2\pi \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{3} \sqrt{2} = \frac{8}{3}\pi \quad (6.124)$$

5. Merk op dat  $\sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n-1} < 0$ , dus de convergentie en absolute convergentie van de reeks zijn equivalent, want men kan globaal een min buitenzetten:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n-1} \right| = - \sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{2n-1} - \sin \frac{1}{2n} \right) \quad (6.125)$$

Nu is wegens de regel van Simpson

$$\left( \sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n-1} \right) = 2 \sin \left( \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n-1} \right) \cos \left( \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-1} \right) \quad (6.126)$$

$$= 2 \sin \left( -\frac{1}{2n(2n-1)} \right) \cos \frac{4n-1}{2n(2n-1)} \quad (6.127)$$

$$= -2 \sin \left( \frac{1}{2n(2n-1)} \right) \cos \frac{4n-1}{2n(2n-1)} \quad (6.128)$$

Dus

$$-\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{2n-1} - \sin \frac{1}{2n} \right) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \left( \frac{1}{2n(2n-1)} \right) \cos \frac{4n-1}{2n(2n-1)} \right| \quad (6.129)$$

$$\leq 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \sin \left( \frac{1}{2n(2n-1)} \right) \right|. \quad (6.130)$$

Wegens het verhoudingscriterium en omdat  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin \left( \frac{1}{2n(2n-1)} \right)}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{4} \in ]0, \infty[$  heeft deze reeks hetzelfde convergentiegedrag als  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , zijnde convergent  
Merk op dat

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left( \sin \frac{1}{2n} - \sin \frac{1}{2n-1} \right) = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \sin \frac{1}{m} \quad (6.131)$$

en deze reeks dus ook alternerend is en de algemene term daalt naar nul, dus is die convergent wegens het criterium van Leibniz. Echter om de termen op dergelijke manier te mogen hergroeperen is de convergentie nodig, wat mogelijk een kringredenering wordt.

# Hoofdstuk 7

## Chemie

Sinds vorig jaar wordt dit vak gedoceerd door Prof. Dr. Piet Van Espen. Het examen gebeurt volledig schriftelijk. De slides zijn voldoende uitgebreid om als cursus te dienen, al zijn extra nota's hier en daar wel nuttig ter verduidelijking van de niet-volzinnen op de slides, waar je tegen het examen vaak niet meer aan uit kunt.

### 7.1 September 2004

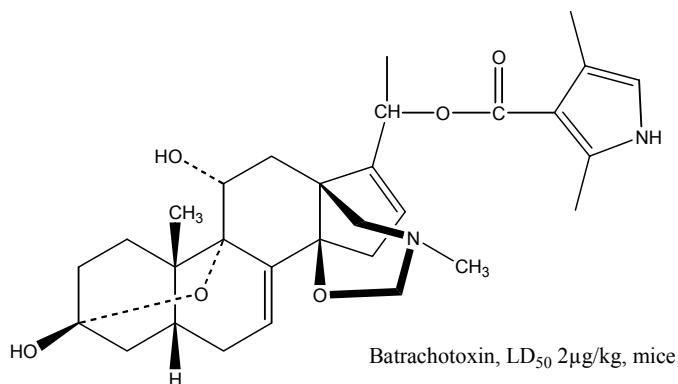
Prof. Dr. F. Lemière

1. (a) Duid alle functionele groepen aan in de structuur in figuur 7.2 en geef ze hun naam.  
(b) Duid alle chirale koolstoffen aan.  
(c) Geef voor 2 chirale centra de absolute configuratie.



Figuur 7.1: Mooie kikker

*De mooie kikker in figuur 7.1 leeft in delen van Centraal en Zuid-Amerika. Deze kikkers zijn levendig gekleurd in rood, geel of oranje. Ze zijn zeer klein (2 – 5cm lang) en wegen slechts enkele grammen en lijken zeer onschuldig. Hun huid produceert echter een van de sterkst toxines in de dierenwereld: batrachotoxin (fig. 7.2) (Gr. Batrachos: kikker + toxin: gif). De meeste giften geproduceerd in amfibiehuid zijn complexe stikstofverbindingen die het slachtoffer op verschillende manieren kunnen beïnvloeden. Sommigen veroorzaken enkel een lokale irritatie, anderen veroorzaken hallucinaties of werken als vasoconstrictor (bloedvat samentrekkend). Batrachotoxin is een zeer sterk zenuwgif ( $LD_{50}$  2 $\mu$ g/kg, muis). Het blokkeert de transmissie van de zenuw impulsen en kan op die manier bijv. Het hart doen stilvallen.*



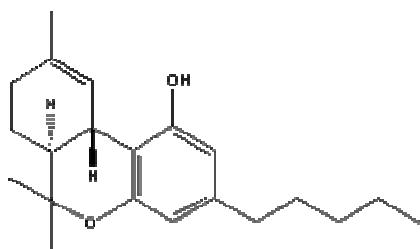
Figuur 7.2: Batrachotoxin

2. Leg uit waarom SF<sub>6</sub> een gewone verbinding is en CH<sub>6</sub> niet kan bestaan.
3. Een verzamelaar van planten en kruiden wordt geplaagd door een muis. Het beestje belaagt zijn verzameling gedroogde planten. Hij had van een oude kameraad een hele zak heel mooi gevormde bladeren gekregen (zoals in figuur 7.3). Hij had al gemerkt dat die bladeren allerlei vreemde effecten konden veroorzaken. De muis had dit blijkbaar ook door en vrat er lustig op los. Onze plantenverzamelaar had één hoop: dat het beest zich dood vrat. Daarom probeerde hij uit te rekenen hoeveel bladeren de muis (gewicht: 18g) moest eten om 50% kans te hebben dood te gaan aan de actieve verbinding 1-trans-delta-9-tetrahydrocannabinol (*THC*) (zie figuur 7.4 en tabel 7.5).



Figuur 7.3: Foto van Cannabisplant

- (a) Bereken hoeveel bladeren (in gram) de muis moet eten om 50% kans te hebben dood te gaan aan een *THC* vergiftiging.
- (b) Bereken welke gemiddelde molaire concentratie *THC* er op die moment in de muis aanwezig is.
4. Vergelijk de basen in figuur 7.6 telkens met de voorgaande en geef aan of ze zwakker/sterker zijn en waarom. Vul de resultaten in in tabel 7.1



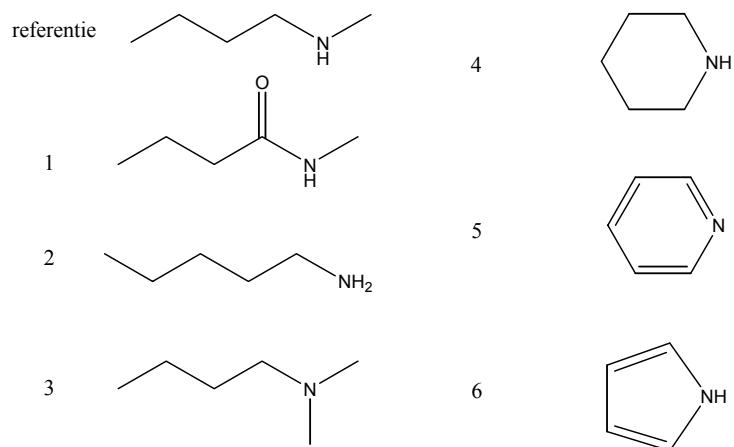
Figuur 7.4: Naam: 1-trans-delta-9-tetrahydrocannabinol

Bruttoformule:  $C_{21}H_{30}O_2$ Kookpunt:  $200^\circ C$ 

Concentratie in THC deze blaadjes: 2.75%

typ. dose	mode	specie	amount	units
LD50	orl	rat	666	mg/kg
LD50	ipr	mus	168	mg/kg
LD50	ipr	rat	373	mg/kg
LD50	ivn	rat	29	mg/kg
LD50	orl	mus	482	mg/kg
LDLo	orl	dog	525	mg/kg
LD50	ivn	mky	128	mg/kg
LC50	ihl	mus	40	mg/kg
LD50	ivn	mus	42	mg/kg
LC50	ihl	rat	40	mg/kg

Figuur 7.5: Toxiciteit van 1-trans-delta-9-tetrahydrocannabinol

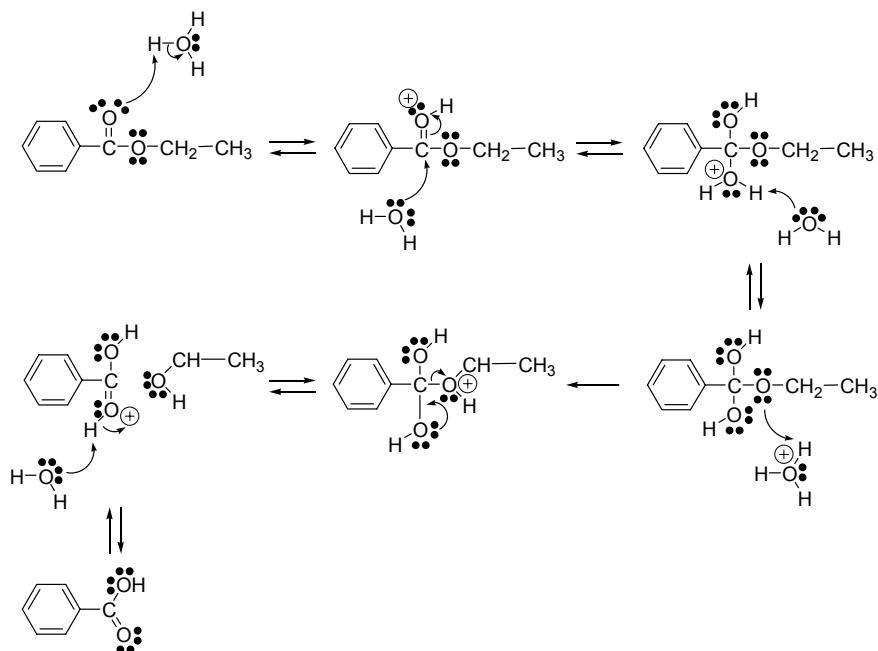


Figuur 7.6: Verschillende basen

	Sterker	Zwakker	MD	MA	ID	IA	Andere
1							
2							
3							
4							
5							
6							

Tabel 7.1: Resultaten bij vraag 4

5. Twee wetenschappers hebben de zure hydrolyse van het ethylester van benzoëzuur bestudeerd. Ze stellen allebei een reactiemechanisme voor, te zien in figuren 7.7 en 7.8. Wie heeft het bij het rechte eind? Leg uit waarom. Leg ook uit waarom het andere wel kan.



Figuur 7.7: Reactiemechanisme 1

6. Spectroscopie oefening (Open boek)

## 7.2 Januari 2006

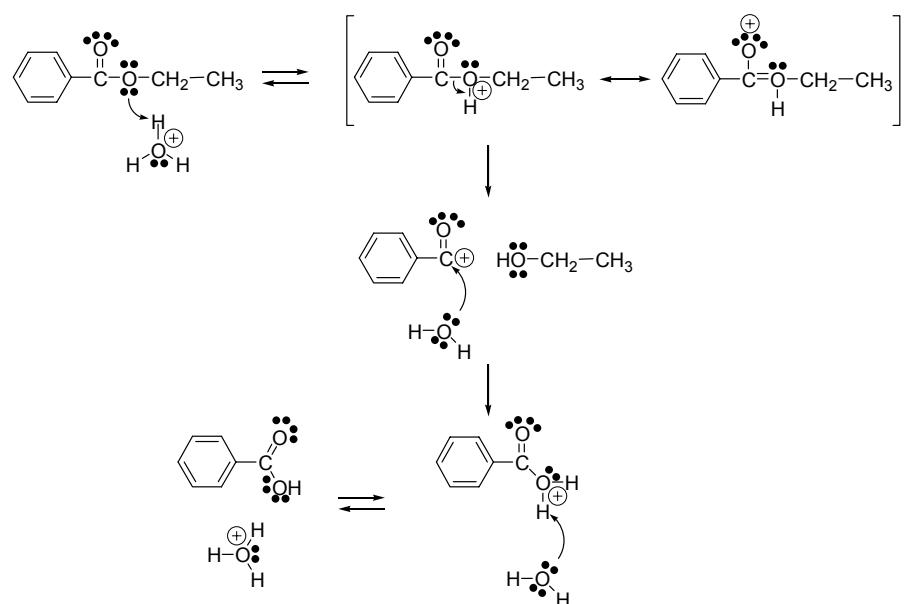
Prof. Dr. F. Lemière

Vermits het opgavenblad afgegeven moest worden, staat er op sommige plaatsen slechts een beschrijving van de vragen.

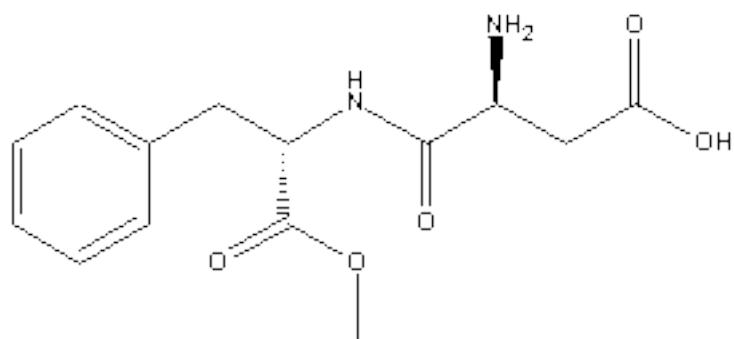
### 7.2.1 Opgaven

- In de vorm van een verhaaltje wordt er gevraagd hoe je van een vet een zeep kunt maken door toevoeging van NaOH, waarbij er stearinezuur gevormd wordt. Ook uitrekening van de stofhoeveelheden komt aan bod.
- Beschouw het model van Aspartaan zoals in figuur 7.9
  - Is deze molecule optisch actief?
  - Duid de chirale centra aan
  - Geef de absolute configuratie.<sup>1</sup>
  - benoem alle functionele groepen (ook aanduiden welke waar).
- Zijn de moleculen in figuur 7.10 aromaten? Zo neen, waarom?

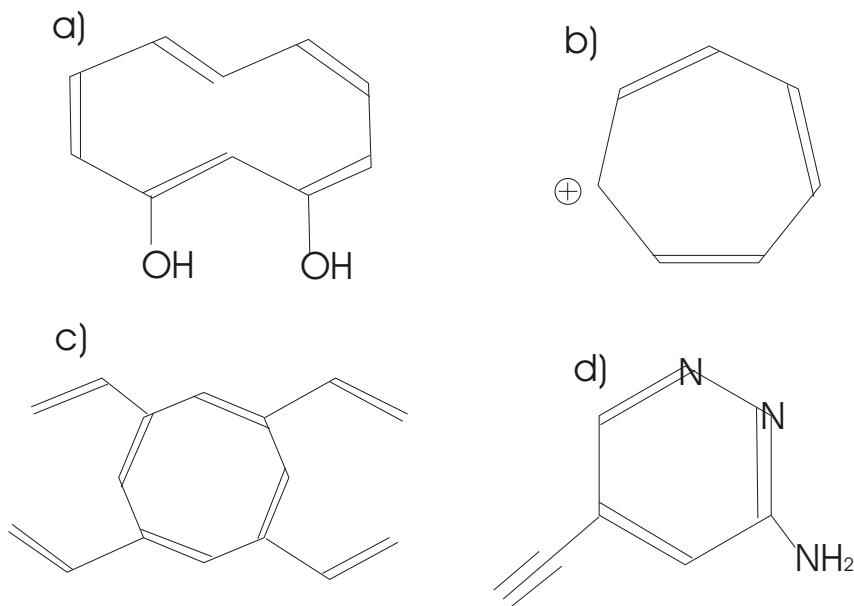
<sup>1</sup>hiermee wordt bedoeld of de chirale centra R of S zijn



Figuur 7.8: Reactiemechanisme 2

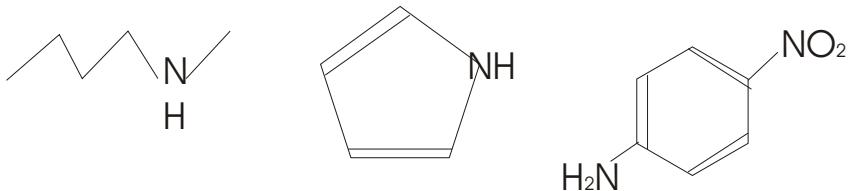


Figuur 7.9: Model van Aspartaam



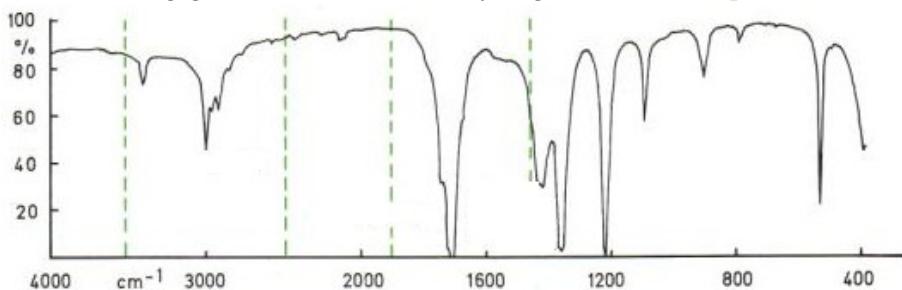
Figuur 7.10: vraag 3

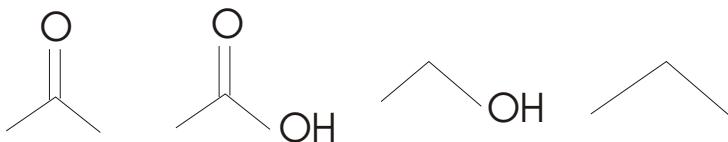
4. Welke molecule is de sterkste base?



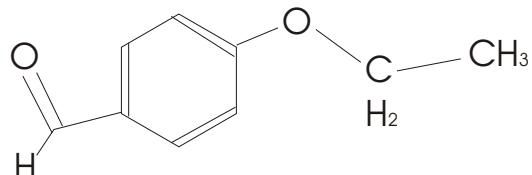
5. Hier werden 2 mechanismen gegeven voor de omzetting van een ester in water naar een alcohol en een carbonzuur, en je moet argumenteren welk het juiste was. In het ene schema moet er 2 maal van een neutrale molecule 2 ionen gevormd worden, terwijl in het andere enkel de beginlading (afkomstig van het zure milieu) verplaatstste, wat voordeeliger is.
6. Bij deze vraag mag je de laatste pagina's uit de cursus gebruiken (tabellen en voorbeeldjes)

- (a) Welke van de gegeven moleculen hoort bij volgend infra-rood-spectrum?





(b) Schets het NMR-spectrum van de volgende molecule



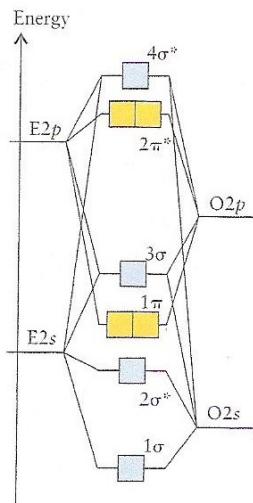
### 7.2.2 Enkele Oplossingen

3. a) neen: overlappende waterstoffen in het midden verhinderen vlakke structuur; b) ja;
- c) neen: 8 elektronen (enkel die in de ring tellen mee!)  $\neq 4n + 2$ ; d) ja
- 6a. Aceton (de eerste): de scherpe piek rond de 1700 duidt op een keton, terwijl de piek rond de 3000 te zwak is om een OH-groep te bevatten.

### 7.3 Januari 2008

Prof. Dr. P. Van Espen

1. Gegeven het onderstaande MO-diagram, geef de elektronenconfiguratie van de grondtoestand van een CO-molecule. In het diagram stelt "E" het koolstofatoom voor CO-molecule



2. Verklaar waarom bij een exotherme reactie  $A \rightleftharpoons B$  het evenwicht naar links (A) verschuift als de temperatuur toeneemt
3. Geef de evenwichtsconstante voor de volgende reacties, met een aanduiding van de orde van grootte en de naam van de constante:

- (a) het oplossen van (het slecht oplosbare)  $BaSO_4$
  - (b) de dissociatie van  $HNO_2$
  - (c) de vorming van het stabiele  $Ni(CN)_4^{2-}$
4. Wat zijn zetmeel, cellulose en glycogeen. Wat hebben zij gemeenschappelijk en waarin verschillen zij?
  5. Welke vormen van isomerie ken je? Geef een korte beschrijving en een voorbeeld
  6. Welke eigenschappen van een molecule zijn sterk bepalend voor het smeltpunt en het kookpunt? Geef enkele voorbeelden.
  7. Beschrijf kort de essentie van de werking van een enzyme en het daarbij horende controlemechanisme.

## 7.4 Januari 2009

Prof. Dr. P. Van Espen

1. Welke kwantumgetallen zijn nodig om een elektron te beschrijven in een atoom en wat is hun betekenis? Welk verschil bestaat er tussen de energieniveaus in een 1-elektron atoom en in een atoom met meerdere elektronen? Verklaar.
2. Bereken de pH en de  $H_3O^+$  concentratie (in mol/L) van een oplossing van 0.05 M (mol/L) azijnzuur. Azijnzuur ( $\text{HAc}$ ) is een zwak zuur met zuurconstante  $K_a = 1.75 \cdot 10^{-5}$ . Als ik aan 100ml van deze azijnzuroplossing 50 ml van een oplossing van natriumacetaat toevoeg, welk soort oplossing heb ik dan? Welke interessante eigenschap heeft deze oplossing?
3. Welke van de volgende stoffen kunnen waterstofbruggen vormen?
  - (a) ethers
  - (b) alcoholen
  - (c) polycyclische aromatische koolwaterstoffen
  - (d) thiolen
  - (e) trichloorethyleen
  - (f) amines
  - (g) ketonen
  - (h) primaire amides

Welke rol spelen waterstofbruggen in bio-moleculen zoals eiwitten en DNA en RNA?

4. Geef de algemene structuur van dierlijke vetten en plantaardige oliën. In wat verschillen vetten van oliën? Hoe kunnen deze laatste dan in vetten omgezet worden? Wat zijn zeepen? Hoe kunnen ze gemaakt worden en geef de chemische reactie van hun vorming. Verklaar de werking van een zeep als reinigingsmiddel.

## 7.5 September 2010

Prof. Dr. P. Van Espen

1. Welke kwantumgetallen zijn nodig om een elektron te beschrijven in een atoom en wat is hun betekenis? Welk verschil bestaat er tussen de energieniveaus in een 1-elektron atoom en in een atoom met meerdere elektronen? Verklaar.
2. Geef de elektronische configuratie van koolstof ( $Z=6$ ) en de Lewis-voorstelling ervan. In bijvoorbeeld methaan zijn er 4 elektronen van koolstof betrokken bij de vorming van de bindingen. Hoe wordt verklaard dat koolstof in dit geval 4 elektronen kan leveren?
3. (a) Geef de pH en de  $H_3O^+$  concentratie in mol/L van een oplossing van 0.05 M (mol/L) azijnzuur. Azijnzuur (HAc) is een zwak zuur met zuurconstante  $K_a = 1.75 \cdot 10^{-5}$ .  
(b) Als ik aan 100 ml van deze azijnzuroplossing 50 ml van een oplossing van natriumacetaat (NaAc) 0.05 M toevoeg, welk soort oplossing heb ik dan? Welke interessante eigenschap heeft deze oplossing?
4. (a) Geef de algemene structuur van dierlijke vetten en plantaardige oliën. In wat verschillen vetten van oliën? Hoe kunnen deze laatste dan in vetten omgezet worden?  
(b) Wat zijn zepen? Hoe kunnen ze gemaakt worden en geef de chemische reactie van hun vorming. Verklaar de werking van een zeep als reinigingsmiddel.

# Hoofdstuk 8

## Mechanica

### 8.1 De Cursus, het vak, het examen

Bij het theorie-examen komt Prof. Dr. Van Dyck binnen, schrijft de drie vragen op het bord, en verdwijnt voor een uur of twee (terwijl een assistent de wacht houdt). Nadien ga je bij hem je vragen mondeling verdedigen.

De inhoud van deze cursus is in het academiejaar 2008-2009 veranderd, enkele dingen kunnen dus niet meer overeenkomen met wat er nu gekend moet zijn.

Het oefeningen-examen bestaat traditioneel uit drie grote, soms onderverdeelde oefeningen uit drie grote hoofdstukken.

### 8.2 Theorie

#### 8.2.1 Juni 2005

Prof. Dr. D. Van Dyck

1. Traagheidsellipsoïde.
2. Stel de bewegingsvergelijkingen op voor een stelsel met bindingen, vertrekend van het beginsel van minste actie. (Multiplicatoren van Lagrange)
3. Rutherford-verstrooiing.<sup>1</sup>

#### 8.2.2 September 2005

Prof. Dr. D. Van Dyck

1. Stel de Lagrangiaan op voor het vrije massapunt. Controleer of dit voldoet aan de Newton-symmetrieën en het traagheidsbeginsel.
2. Geef het verband tussen  $\vec{L}$  en  $\vec{\omega}$  voor het starre lichaam.
3. Leid hfst 8 af tot en met de behoudswetten.

---

<sup>1</sup>geg.:  $\varphi_0 = \frac{-2E_s}{\alpha}$

### 8.2.3 Juni 2006

Prof. Dr. D. Van Dyck

1. Leid de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen af vanuit het variatiebeginsel.
2. Stel de Lagrangiaan op voor een star lichaam.
3. Beschrijf het twee-deeltjesprobleem. (Tot de formules voor  $r(t)$  en  $\varphi(t)$ )

### 8.2.4 Juni 2006, extra examen

Prof. Dr. D. Van Dyck

1. Lagrangiaan van een star lichaam
2. Homogeniteit van ruimte → Behoudswet  
Isotropie van ruimte → Behoudswet
3. Twee-deeltjesprobleem tot en met perkenwet  $(r(t), p(t))$ <sup>2</sup>

### 8.2.5 Juni 2007

Prof. Dr. D. Van Dyck

1. Variatierekening: Leid de Eulervergelijkingen af.
2. Bereken de Lagrangiaan van het starre lichaam.
3. Tweedeeltjes-probleem: Lagrangiaan, perkenwet, leidt  $x(t)$  en  $\varphi(t)$  af.

### 8.2.6 Juni 2008

Prof. Dr. D. Van Dyck

#### 8.2.6.1 Groep 1

1. Beschrijf het twee-deeltjesprobleem. (Tot de formules voor  $r(t)$  en  $\varphi(t)$ )
2. Traagheidsellipsoïde.
3. Homogeniteit van ruimte → Behoudswet  
Isotropie van ruimte → Behoudswet

#### 8.2.6.2 Groep 2

1. Variatierekening: Leid de ELBV af.
2. Bespreek de Rutherfordverstrooiing.

### 8.2.7 Juni 2009

Prof. Dr. D. Van Dyck

---

<sup>2</sup>Gezien de vraag op het andere examen dat jaar zou de  $p$  ook een  $\varphi$  kunnen zijn...

### 8.2.7.1 Groep 1

1. Beschrijf het twee-deeltjesprobleem. (Tot de formules voor  $r(t)$  en  $\varphi(t)$ )
2. Het draaimoment van een star lichaam (i.e. traagheidstensor)
3. Tangentiële en normale component van de versnelling en de snelheid

### 8.2.7.2 Groep 2

1. Behoudswetten die volgen uit de homogeniteit en de isotropie van de ruimte.
2. Bespreek de Rutherfordverstrooing.
3. Variatierekening: Leid de Eulervergelijkingen af.

### 8.2.7.3 Groep 3

1. Traagheidsellipsoïde.
2. Leid de theorie van botsingen af (alles tot voor Rutherford).
3. Geef de afleiding van de Lagrangiaan onder de hypothesen van de mechanica. (Bij het laatste deel vroeg kreeg je als bijvraag: Hoe werd het Relativiteitsbeginsel reeds bij de Variatierekening behandeld?)

## 8.2.8 Juni 2010

Prof. Dr. D. Van Dyck

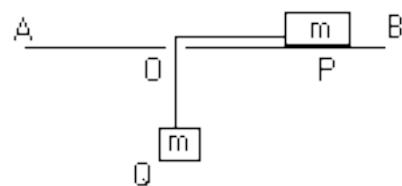
Dit examen was volledig analoog aan dit van het voorbije jaren.

## 8.3 Oefeningen

### 8.3.1 Juni 2005

Greg Tisson (eerste 2 vragen) & Gert Van Gompel (laatste vraag)

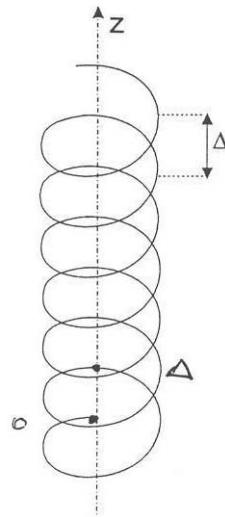
1. In figuur 8.1 stelt  $AB$  een wrijvingsloos horizontaal oppervlak voor met kleine opening in  $O$ . Een touw met lengte  $l$  verbindt doorheen dit gaatje de massa's  $P$  en  $Q$ . De massa  $m$  in  $P$  krijgt een snelheid  $v_0$  loodrecht op  $OP$  in het vlak. De initiële lengte van  $OP$  bedraagt  $a$ .



Figuur 8.1: 2 blokken verbonden door een touw met lengte  $l$

- (a) Kies een gepast coördinatenstelsel en geef de Langrangiaan van het systeem.
- (b) Geef de bewegingsvergelijkingen.
- (c) Bespreek het geval waarbij  $a$  en/of  $v_0$  heel klein zijn.

- (d) Toon aan dat voor  $v_0 = \sqrt{ag}$  het deeltje  $P$  een eenparige cirkelvormige beweging uitvoert.
- (e) Veronderstel nu massa's  $m_1$  en  $m_2$  in resp. P en Q. Geef opnieuw de Lagrangiaan en de bewegingsvergelijkingen en interpreteer in functie van  $m_1$  en  $m_2$ . Kan je dit systeem gebruiken voor een experiment dat het bestaan van de centripetale kracht aantoon?
2. Beschouw een platte schijf met straal  $a$  en dikte  $\epsilon$ . Aangezien  $\frac{\epsilon}{a} \ll 1$  verwaarlozen we de dikte en werken 2 dimensionaal. De massadichtheid  $\rho(r, \phi)$  in de schijf is  $\rho(r, \phi) = 2r |\sin \phi|$ .
- Bereken de totale massa van de schijf.
  - Bereken het massamiddelpunt.
  - Bereken het traagheidsmoment t.o.v. het massamiddelpunt van de schijf.
3. Een massapunt bevindt zich op een helicoïdale baan in het zwaarteveld (zie figuur 8.2). De afstand  $\Delta$  tussen 2 opeenvolgende windingen is constant.
- Geef de Lagrangiaan en de bindingsvoorwaarde(n) voor dit systeem in geschikte veralgemeende coördinaten.
  - Stel de bewegingsvergelijkingen op en bereken de reactiekracht. Zoek de 'effectieve' valversnelling.
  - Bepaal de bewegingsvergelijkingen en de reactiekracht in de limieten waarbij respectievelijk  $\rho \ll \Delta$  en  $\Delta \ll \rho$ . Los de bewegingsvergelijkingen op en bespreek.



Figuur 8.2: Voorstelling van een Helicoïdale baan

### 8.3.2 Juni 2006

Dr. G. Van De Wouwer

1. Beschouw een vlak onder een helling  $\alpha$  met de horizontaal (in het zwaarteveld). Hierop ligt een blok met massa  $M$  die verbonden is d.m.v. een ideale veer en katrol met een identiek blok. Het 2e blok kan alleen verticaal bewegen.

- (a) Stel de Lagragiaan op
- (b) Stel de Euler-Lagrange bewegingsvergelijkingen op en los op. Kies zelf een eenvoudig stel beginvoorwaarden.
- (c) Beschrijven de blokken een zuiver harmonische oscillatie?
- (d) Hoe kan je wrijving in dit systeem beschrijven? Je hoeft geen vergelijkingen uit te werken of op te lossen.

Tip: Kies de veralgemeende coördinaten zo dat de bewegingsvergelijkingen niet gekopeld zijn.

2. Beschouw de beweging van een massapunt m gebonden aan een helix in het zwaarteveld van de aarde. De helix is gegeven in cilindercoördinaten door de vergelijking:

$$\vec{r} = \rho_0 \vec{e}_\rho + a\varphi \vec{e}_z \quad (8.1)$$

De zwaartekracht is gericht langs de  $z$ -as;  $a$  en  $\rho_0$  zijn constanten. Op  $t = 0$  bevindt het deeltje zich op een hoogte  $h$  en heeft beginsnelheid 0.

- (a) Stel de bewegingsvergelijkingen op en los op voor de gegeven beginvoorwaarden.
- (b) Vind een algemene uitdrukking voor de reactiekracht.
- (c) Maak een schets van de reactiekracht op een bepaald punt van de helix.

### 8.3.3 Juni 2007

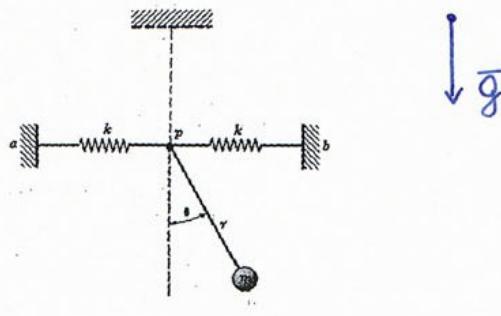
Dr. G. Van De Wouwer

1. Beschouw een slinger met als verbinding tussen het vaste punt en de massa een veer met constante  $k$  (in plaats van een touwtje of een staaf):
  - (a) Hoeveel vrijheidsgraden heeft dit systeem ?
  - (b) Stel de ELBV op (deze oplossen is niet nodig!)
2. Beschouw een homogene pyramide met een vierkant met zijde  $a$  als grondvlak. Bereken hiervan:
  - (a) de massa
  - (b) het massamiddelpunt
  - (c) de traagheidstensor t.o.v. de top
  - (d) de traagheidstensor t.o.v. het massamiddelpunt
3. Beschouw een massapunt dat alleen plaatsen kan innemen op het oppervlak van een gegeven paraboloid met cylindercoördinaten  $z = a.\rho^2$ . Stel hiervan de bewegingsvergelijkingen op en bewijs dat een cirkelbeweging een mogelijke oplossing hiervan is.

### 8.3.4 Juni 2008

Dr. G. Van De Wouwer

1. Beschouw het systeem bestaande uit twee ideale veren en slinger in het zwaarteveld. De veren zijn aan elkaar en de ene aan punt a, de andere aan punt b, horizontaal. De slinger hangt aan de veren in het punt waar de twee aan elkaar hangen en aan de slinger hangt een massa. De afstand [a,b] is twee maal de evenwichtstoestand van de veren. Onderstel beweging in een vlak, niet op en neer.



- hoeveel vrijheidsgraden heeft het systeem?
  - Stel de ELBV op (niet oplossen)
  - Hoe kan je de wrijving mee laten werken?
2. Beschouw de beweging van een massapunt aan de binnenzijde van een boloppervlak in het zwaarteveld
- geef de bewegeingsvergelijking
  - maak een schets van de reactiekrachten, gebruik de algemene vergelijking
  - Stel dat hij enkel in de onderste helft van de bol kan bewegen, wat is dan de oplossing?
  - Hetzelfde voor wanneer hij enkel op constante hoogte kan bewegen.
  - Of voor wanneer hij in een constant verticaal vlak kan bewegen.

### 8.3.5 Juni 2009

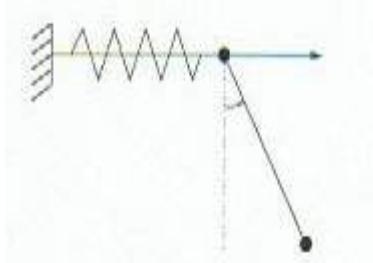
Dr. G. Van De Wouwer

1. Een vlakke mathematische slinger is opgehangen in het zwaarteveld aan een massapunt dat vrij kan bewegen langs een horizontale rechte en dat verbonden is met een vast punt op die rechte door een veer.
  - Stel de Lagrangiaan op.
  - Los de beweegingsvergelijkingen op.
2. Beschouw een inhomogene cylinder met straal  $R$  en hoogte  $h$ . De dichtheid langs de centrale as is gegeven door  $\rho(r = R) = \alpha$  en neemt lineair af tot  $\rho(r = R) = 0$ .
  - Bereken de totale massa en de traagheidstensor van de cylinder.
  - Bereken het traagheidsmoment rond de  $z$ -as.
3. Een  $\alpha$ -deeltje met massa  $m$  en lading  $+2e$  beweegt in het krachtveld van een zware nucleus met lading  $+Ze$ . Op grote afstand van de nucleus heeft het een snelheid  $v$ . Als het deeltje niet zou afwijken, zou het passeren op een afstand  $b$  van de nucleus. Wat is de kleinste afstand dat het deeltje de nucleus nadert? Tip: De uitdrukking voor de Coulomb-potentiaal is:

$$U(r) = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

### 8.3.6 Juni 2010

1. Een vlakke mathematische slinger is opgehangen in het zwaarteveld aan een massapunt dat vrij kan bewegen langs een horizontale rechte, en dat verbonden is met een vast punt op die rechte door een veer.



- (a) Stel de Lagrangiaan op. Gebruik de harmonische benadering ( $\sin(x) \approx x, \cos(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$ ) om deze Lagrangiaan te vereenvoudigen (beperk jezelf tot termen van 2de orde).
  - (b) Bereken de eigenfrequenties van het systeem.
2. Beschouw een inhomogene cilinder met straal  $R$  en hoogte  $h$ . De dichtheid langs de centrale as is gegeven door  $\rho(r = 0) = \alpha$  en neemt lineair af tot  $\rho(r = R) = 0$ .
- (a) Bereken de totale massa en de traagheidstensor tov het massamiddelpunt van de cilinder.
  - (b) Bereken het traagheidsmoment rond de z-as.
3. Een deeltje is gebonden op een vlak met vergelijking  $ax + by + cz + d = 0$ , en is onderhevig aan de zwaartekracht.
- (a) Bereken de versnelling van het deeltje.
  - (b) Bepaal de reactiekrachten die inwerken op het deeltje vanwege de binding.

# Dankwoordje

Met dank aan:

- Alle vorige WINAK mentoren die aan deze tuyaux hun steentje hebben bijgedragen.
- Mijn medementoren Elke en Christophe voor de leuke samenwerking.
- Al de mensen die mij hun examenvragen hebben bezorgd en zo deze nieuwe Tuyaux mee hebben mogelijk gemaakt.
- De mensen die me mijn schrijffouten en typfouten vergeven en doormailen naar [julie@winak.be](mailto:julie@winak.be).