Verzamelingenleer

Groepen en commutatieve ringen

Richting	Wiskunde
Jaar	1BWIS

Theorie

Augustus 2014

1. Stel *F* een relatie van een verzameling *A* naar een verzameling *B*.
    - Waaraan moet *F* voldoen om een functie te zijn.
    - Als *F* een functie is, waaraan moet ze dan voldoen om *injectief* te zijn.
    - Geef een voorbeeld van een functie $F:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ die wel *injectief* is, maar niet *surjectief*.
    - Als *A* een eindige verzameling is, bestaat er dan een functie $F:A\to A$ die *injectief* is, maar niet *surjectief*?
2. Definieer het begrip *equivalentierelatie* op een verzameling.
   Geef een voorbeeld van zo'n relatie op $\mathbb{Z}$ waarvoor er exact 5 equivalentieklassen bestaan. Leg uit en bereken deze klassen.

Januari 2013

1. Vraag 1
    - Definieer de begrippen injectieve en surjectieve functie.
    - Geef een voorbeeld van een functie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ die injectief is, maar niet subjectief. Leg uit!
    - Geef een voorbeeld van een functie $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ die surjectief is, maar niet injectief. Leg uit!
    - Zij $f:A\to B$ en $g:B\to C$ functies. Toon aan dat $g\circ f$ injectief $\Rightarrow f$ injectief
2. Vraag 2
    - Zij A een niet lege verzameling en $R\subset A\times A$ een relatie. Kan R zowel een functie zijn als een equivalentierelatie? Leg uit.
    - Zij $\approx$ een equivalentierelatie op A. Als $a\in A$. noteer dan $\overline{a}$ de equivalentieklasse van a. Toon aan:
        - $\overline{a}=\overline{b}\Rightarrow a\approx b$
        - $\overline{a}\neq\overline{b}\Rightarrow\overline{a}\cap\overline{b}=\emptyset$

Augustus 2013

1. Bewijs volgende stellingen over functies:
    - f en g injectief $\Rightarrow g\circ f$ injectief.
    - $g\circ f$ bijectief $\Rightarrow f$ injectief g surjectief.
2. Vraag 2
    - Definieer de begrippen equivalentierelatie en quotiëntverzameling.
    - Geef een voorbeeld van een equivalentierelatie op Z. Hoeveel elementen telt de quotiëntverzameling?

Januari 2014

1. Zij X en Y verzamelingen en zij $f:X\to Y$ een functie.
    - Als $U\subset Y$ en $V\subset Y$ deelverzamelingen zijn, dan is $f^{-1}(U\cap V)=f^{-1}(U)\cap f^{-1}(V)$. Bewijs dit!
    - Zij $g:Y\to Z$ nog een functie. Als $g\circ f$ bijectief is dan is g surjectief en f injectief. Bewijs dit! Geef ook een voorbeeld voor een f en g zodat $g\circ f$ wel bijectief is, maar waarbij f niet surjectief is. Leg uit!

1. Vraag 2
    - Toon aan dat er in een partieel geordende verzameling hoogstens één maximum kan bestaan.
    - Geef een voorbeeld van een partieel geordende verzameling met een maximaal element dat geen maximum is. Leg uit!

Oefeningen

Januari 2013

1. Beschouw $P(R)$ de polynomen met reële coëfficiënten. Definieer $P=\sum_i p_iX^i\sim Q=\sum_i q_iX^i \Leftrightarrow \min\{i\mid p_i\neq 0\}=\min\{i\mid q_i\neq 0\}$. En $P=\sum_i p_iX^i\leq Q=\sum_i q_iX^i \Leftrightarrow \min\{i\mid p_i\neq 0\}\leq\min\{i\mid q_i\neq 0\}$.
    - Toon aan dat $\sim$ een equivalentierelatie is.
    - Toon aan dat $\leq$ een partiële orde relatie is.
2. Geef verzamelingen $S_i\subseteq R$ allemaal verschillend, zodanig dat:
    - $\bigcup_i S_i=[0,\infty[$ en $\bigcap_i S_i=[1,2]$
    - $\bigcup_i S_i=R$ en $\bigcap_i S_i=Q$
3. Noteer $A(X)$ voor de verzameling van alle bijecties van X naar X. Hoeveel elementen heeft $A(\{\nabla,\diamond,\triangle\})\times\{1,3,4,5,9,-5,0,1\}$?

Januari 2014

1. Als R en S twee partiële orderelaties zijn op een verzameling X, is $R\cup S$ dan ook een partiële orde? Is $R\cap S$ terug een partiële orderelatie? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

2. Stel S={f:R→R|fS={f:R→R|f een functie}functie}, i.e. het is de verzameling van alle functies van RR naar RR. Voor twee functies $f,g \in S f,g \in S$ definiëren we $fg:R \to R:x \to f(x)g(x) fg:R \to R:x \to f(x)g(x)$.
    - Toon aan dat
      $f \sim g \Leftrightarrow \exists a \in R0,b \in R \forall x \in R:f(x)=ag(x+b)$
      $$f \sim g \Leftrightarrow \exists a \in R0,b \in R \forall x \in R:f(x)=ag(x+b)$$

      een equivalantierelatie is.
    - Is er een eindige equivalentieklasse? Waarom wel/niet?
    - Als ff en gg injectief (resp. surjectief) zijn, volgt dan dat fg injectief (resp. surjectief) is? Bewijs of geef een tegevoorbeeld.

Categorieën:
- Wiskunde
- 1BWIS