Inleiding kwantummechanica

Inleiding kwantummechanica	
Richting	Fysica
Jaar	2BFYS

Bespreking

Dit vak kan in het begin zeer vaag en onduidelijk zijn. Logisch, omdat dit jullie eerste echte ontmoeting is met de kwantummechanica. De prof legt tijdens zijn lessen de cursus zeer duidelijk uit. Het is hier dan ook ten sterkste aan te raden om ervoor te zorgen dat je mee bent met de leerstof. Het vak is uiteindelijk niet zeer ingewikkeld/moeilijk; de cursus is de eerste keer misschien niet helemaal duidelijk, maar na een paar keer doornemen is ze zeer goed te begrijpen. Maar het is iets nieuws, en meestal anders dan je gewend bent van bij de klassieke fysica.

Buiten de afleidingen is het op het theorie-examen uiterst belangrijk dat je doorhebt over wat het gaat en dit dan ook kunt uitleggen. Bij het theorie-examen is er ook een mondeling gedeelte, waarbij je gewoon bij de prof komt, hij je examen overloopt en je nog de kans geeft aan te vullen waar er iets ontbreekt. De prof stelt op het einde van het semester de keuze aan de studenten om het theorie en/of oefeningenexamen openboek af te leggen. De appendices op het einde van de cursus mogen sowieso altijd gebruikt worden.

Om je te helpen met de oefeningen is er een uitgewerkt bestand van de oefeningen van 2010-2011 , Ook is er een van 2011-2012. De oefeningensessies kunnen al eens moeizaam verlopen. Dit is meestal omdat je de nieuwe begrippen en notaties uit de theorie nog niet al te goed kent. Daarom is het uiterst belangrijk al tijdens het jaar hier wat tijd in te steekt, zodat je weet wat je moet doen tijdens de oefeningensessies. De wiskundige principes heb je normaal gezien al onder de knie.

Er worden doorheen het jaar 5 taken gegeven die niet op juistheid worden verbeterd, maar eerder op het feit of je de taken op tijd afgeeft. Als je alle vijf taken (volledig fout) op tijd indient krijg je sowieso 1 extra punt op de oefeningen, indien je de taken volledig juist hebt krijg je hiervoor 2 extra punten op het oefeningenexamen. Je uiteindelijke bonus zal normaal gezien dus ergens tussen 1 en 2 liggen

Puntenverdeling

Theorie en oefeningen zijn even belangrijk en tellen dus beide mee voor elk 50%. Je moet wel op beide onderdelen er door zijn om dit vak te halen, als je in eerste zit voor beide onderdelen niet slaagt, moet je in tweede zit beide onderdelen opnieuw doen. Indien je voor 1 van de twee onderdelen wel slaagt, moet je dit onderdeel niet meer opnieuw in tweede zit doen.

Examenvragen

Academiejaar 2021-2022 2e zit

Prof. Michiel Wouters Hieronder vindt u het oefeningenexamen en theorieexamen terug.

Theorie

Bestand:Oefeningexamen kwantummechanica september 2022.pdf

1. Illustreer de Heisenberg onzekerheidsrelatie aan de hand van een Gaussisch golfpakket.

2. Bespreek het tunneleffect kwalitatief (je moet de transmissie-coëfficiënt niet berekenen, maak wel een schets van de golffunct. Waarom de tunnelcoëfficiënt exponentieel af met de breedte van de barrière?

3. Toon aan dat de translatieoperator gegeven wordt door $e^{-ia\hat{P}/\hbar}$, waarbij $\hat{P}$ de impulsoperator is. Toon aan dat voor een hamiltoniaan $\hat{H}$ met translatiesymmetrie geldt dat $[\hat{H}, \hat{P}] = 0$

4. Bereken de eigenenergieën en eigentoestanden van de harmonische oscillatorpotentiaal door de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking op te lossen met de Frobenius methode.

Theorie-examen inleiding kwantummechanica
2^e zit september 2022

4 vragen uit lijst van vooraf 19 mogelijke theorievragen met formularium

Academiejaar 2021-2022 1ste zit

Prof. Michiel Wouters

Theorie

Voor het theorieexamen kreeg men een formularium met de belangrijkste formules uit de cursus.

1. Bespreek het tweespleten-experiment aan de hand van de expansie van een toestand bestaande uit de superpositie van twee Gaussische golfpaketten. Gebruik hiervoor dat bij lange tijden de fasefactor van een expanderend golfpakket dat gecentreerd is rond x=0 gegeven wordt door eim2ℏtx2. Bespreek de rol van het al dan niet meten van de initiële positie van het deeltje.
2. Toon aan dat de Hamiltoniaan van de harmonische oscillator geschreven kan worden als ˆH=ℏω(ˆa†ˆa+12) in termen van de ladderoperator ˆa=√mω2ℏˆx+i√12ℏmωˆp. Wat zijn de eigenwaarden van de operator ˆa†ˆa? Toon aan dat de grondtoestand van de harmonische oscillator voldoet aan ˆa|0⟩=0. Bepaal aan de hand van deze voorwaarde de grondtoestandsgolffunctie.
3. Wat zijn de Clebsch-Gordan cëfficiënten bij het optellen van impulsmomenten?
4. Leid de eigenenergieën af van het waterstofatoom door de radiale vergelijking [−ℏ22m1r2∂∂r(r2∂∂r)+ℏ22ml(l+1)r2−e24πϵ01r]R(r)=ER(r) op te lossen. Welke impulsmomenten zijn mogelijk bij welke radiale toestanden? Bespreek hoe de grootte-orde van de energie van de grondtoestand het gevolg is van een compromis tussen kinetische en potentiële energie.

Oefeningen

Het oefeningenexamen was open boek.

1. Beschouw een driedimensionale Hilbertruimte opgespannen door de basis van orthonormale eigenvectoren |ϕ1⟩, |ϕ2⟩ en |ϕ3⟩ van een operator ˆA|ϕn⟩=√n|ϕn⟩. Een tweede operator wordt op deze ruimte gedefinieerd als ˆB|ϕn⟩={12|ϕ1⟩ voor n=1n2|ϕn⟩−n|ϕn−1⟩voor n=2,3
(a) Is ˆA een hermitische operator? Is \hat{B} een hermitische operator? Verantwoord.

(b) Bepaal de eigenwaarden en genormaliseerde eigenvectoren van ˆB ten opzichte van de basis |ϕn⟩.

(c) Bepaal de verwachtingswaarde van ˆB voor de toestand |ψ⟩=√25|ϕ1⟩+√15|ϕ2⟩+√25|ϕ3⟩.

2. Twee spinloze bosonen bevinden zich in een harmonische val en interageren met een interactiepotentiaal gδ(x1−x2).
   (a) Geef de Hamiltoniaan voor dit systeem.

   (b) Bereken de variationele energie voor de golffunctie ψ(x1,x2)∼exp{−x21/(2a)}exp{−x22/(2a)}, (a>0.

   (c) Geef de vergelijking om de energie te minimaliseren. Je hoeft deze \bold{niet} op te lossen.

   (d) Controleer je resultaat door de variationale energie te minimaliseren in de limiet g→0.

   (e) Wordt de onzekerheid Δx1/2 op de positie van de deeltjes groter of kleiner door toevoeging van repulsieve interacties (g>0)? Verklaar. Tip: herschrijf je antwoord op (c) naar de vorm g=f(a).

   (f) Stel dat de deeltjes geen bosonen zijn maar spin-1/2 fermionen in de spintoestand |↑↑〉. Is de golffunctie ψ geschikt als variationele toestand? Leg uit.

3. Een deeltje met massa m bevindt zich in de grondtoestand van een harmonische potentiaak met frequentie ω. Op t=0 wordt de oscillatorfrequentie plots veranderd naar ω/4. Onmiddelijk hierna wordt de energie gemeten.
   (a) Wat is de kans om het deeltje terug te vinden in de grondtoestand van de nieuwe Hamiltoniaan?

   (b) Wat is de kans om het deeltje terug te vinden in de eerste geëxiteerde toestand van de verbrede harmonsiche val? Verklaar.

Academiejaar 2019-2020 1ste zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

1. Geef deeltje-golf dualiteit
2. Toon aan dat fermionen en bosonen een natuurlijk gevolg is van het identiek zijn van deeltjes in de kwantummechanica
3. Impulsrepresentatie. Bereken/geef de operatoren corresponderende met de observabelen: positie en impuls in de impulsrepresentatie.
4. Bereken het spectrum van de harmonische oscillator
5. Bereken de additie van 2 spin 1/2 deeltjes. Geef de Hilbertruimte van de irreducibele representaties.
6. Bereken L+Yml(θ,ϕ)

Oefeningen

1. Een deeltje in een harmonische oscillator bevindt zich in de toestand
   $|\psi\rangle=A(2|0\rangle-3|2\rangle)$

   waarbij $|0\rangle$ en $|2\rangle$ respectievelijk de grondtoestand en de tweede geëxciteerde toestand van de harmonische oscillator zijn.
    1. Normeer deze toestand, met andere woorden bepaal A
    2. Bepaal de tijdsafhankelijke toestand $|\phi(t)\rangle$.
    3. Bepaal de kleinst mogelijke waarde van T waarvoor, op een globale fasefactor na, de toestand gegeven is door $|\phi(t)\rangle=A(2|0\rangle+3|2\rangle)$.
    4. Bepaal de tijdsafhankelijke verwachtingswaarden $\langle\hat{}x\rangle(t),\langle\hat{}p\rangle(t),\langle\hat{}x2\rangle(t)$, $\langle\hat{}p2\rangle(t)$
    5. Ga de Heisenberg onzekerheidsrelatie na voor deze toestand. Op welk tijdstip wordt deze minimaal?
2. Beschouw een 3D Hilbertruimte opgespannen door de set van orthonormale basistoestanden $S=\{|\phi1\rangle,|\phi2\rangle,|\phi3\rangle\}$. De operatoren $\hat{}A$ en $\hat{}B$ werken als volgt in op de toestanden:
   $\hat{}A|\phi n\rangle=\{n2|\phi n\rangle-2n|\phi n-1\rangle$ voor $n\in\{2,3\}|\phi1\rangle$ voor $n=1$

   \\
   $\hat{}B|\phi n\rangle=\{|\phi2\rangle$ voor $n=1|\phi1\rangle$ voor $n=20$ voor $n=3$

    1. Is $\hat{}A$ een hermitische operator? Is $\hat{}B$ een hermitische operator?
    2. Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van $\hat{}A$ in de basis S
    3. Stel nu dat een deeltje zich in de beginstoestand
       $|\psi\rangle=\surd25|\phi1\rangle+\surd15|\phi2\rangle+\surd25|\phi3\rangle$

       bevindt
    4. Indien men nu de grootheid B die correspondeert met de operator $\hat{}B$ meet, welke waarden kan men dan bekomen, met welke waarschijnlijkheden en wat is de toestand na de meting?
    5. Bepaal de verwachtingswaarde van $\hat{}A$ voor dit deeltje. Idem voor $\hat{}B$.
3. Het effect van de eindige grootte van de kern van het waterstofatoom kan als een storing op het systeem met een puntkern, dat in de cursus werd behandeld, worden beschouwd. Door de kern te modelleren als een uniform geladen sferische schil met straal b, kan deze storing op de Hamiltoniaan worden beschreven als
   $V=\{e24\pi\epsilon0(1r-1b)$ voor $r<b0$ voor $r>b$

    1. Bepaal de eerste orde correctie op de energie van de grondtoestand. Belangrijk: de verhouding tussen de grootte van de kern en de Bohrstraal is $ba'0\approx10-5$. Je mag dus stellen dat $e-ra'0\approx1$ als $r<b$.
    2. Bepaal de verhouding tussen de eerste orde correctie en de ongestoorde grondtoestandsenergie. Wat kan je hieruit besluiten over het belang van de eindige grootte van de kern?

4. Een elektron in rust bevindt zich in een homogeen magneetveld $B=B_ze_z$.
    1. Bepaal de Hamiltoniaan van dit systeem in de basis gevormd door de eigentoestanden van $\hat{S}$.
    2. Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van deze Hamiltoniaan.
    3. Nu wordt ook een homogeen magneetveld in de x-richting aangelegd, het totale magneetveld is nu dus gegeven door $B=B_xe_x+B_ze_z$.
    4. Bepaal de nieuwe Hamiltoniaan van het totale systeem in dezelfde basis als bij 1.
    5. Bepaal de eigenwaarden van het totale systeem.
    6. Veronderstel nu dat $B_x \ll B_z$. Benader deze eigenwaarden dan tot op tweede orde in B_x.
    7. Indien je het magneetveld in de x-richting als storing beschouwt, bepaal dan de eigenwaarden van het totale systeem tot op tweede orde in de storing. Vergelijk je resultaat met dat van het vorige puntje.
    8. Gebruik de toestand $|\psi\rangle=\cos(\phi)|\psi_1\rangle+\sin(\phi)|\psi_2\rangle$ om een bovengrens te vinden voor de grondtoestandsenergie van het totale systeem. Hierbij is ϕ de variationele parameter en zijn $|\psi_1\rangle$ en $|\psi_2\rangle$ de eigentoestanden van het systeem zonder magneetveld in de x-richting.

Academiejaar 2018-2019 1^{ste} zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

1. Welk experiment gaf een bewijs van het deeltjeskarakter van straling? Beschrijf het experiment, geef de resultaten en een theoretische verklaring. Wat is het belang van dit effect voor de kwantummechanica?
2. Geef het postulaat met betrekking tot een kwantummmechanische meting.
3. Toon aan dat het bestaan van fermionen en bosonen een natuurlijk gevolg is van het identiek zijn van deeltjes in de kwantummechanica. Geef de veeldeeltjesgolffunctie van twee spin 1/2, niet-interagerende, identieke deeltjes.
4. Bereken de angulaire impulscomponenten L_i $(i=x,y,z)$ in bolcoördinaten. Idem voor $L_\pm$. Bereken de commutatierelatie $[L_+,L_-]$.
5. Geef het experiment dat een bewijs is van het feit dat elektronen spin 1/2 bezitten. Beschrijf het experiment en geef een theoretische verklaring.

Oefeningen

1. Beschouw een systeem waarvoor de Hamiltoniaan de eigenwaarden E1 en E2 heeft en overeenkomstige eigentoestanden |ψ1⟩ en |ψ2⟩. Een observabele ˆA heeft eigenwaarden a1 en a2 en overeenkomstige eigentoestanden
   |ϕ1⟩=1√2(|ψ1⟩+|ψ2⟩),|ϕ2⟩=1√2(|ψ1⟩−|ψ2⟩)

   Een deeltje bevindt zich op tijdstip t=0 in de toestand |ϕ1⟩.
    1. Wat is de verwachtingswaarde van de energie van dit deeltje?
    2. Wat is de verwachtingswaarde van de grootheid die overeenstemt met de observabele ˆA van dit deeltje?
    3. Bepaal de tijdsafhankelijke toestanden |ϕ1(t)⟩ en |ϕ2(t)⟩.
    4. Wat is de tijdsafhankelijke verwachtingswaarde van de energie van dit deeltje?
    5. Wat is de tijdsafhankelijke verwachtingswaarde van de grootheid die overeenstemt met de observabele ˆA van dit deeltje? Teken deze als functie van de tijd.
    6. Hoe ziet bovenstaand resultaat eruit indien E1=E2? Verklaar je resultaat.
2. Een elektron bevindt zich in de grondtoestand van een tritiumatoom (een waterstofatoom met twee extra neutronen, dus Z=1). Plots vervalt het tritiumatoom naar een He+3-ion (een kern bestaande uit twee protonen en een neutron, dus Z=2), waarbij dus een neutron in een proton wordt omgezet door middel via elektron-emissie (dit elektron vliegt weg en kan dus buiten beschouwing worden gelaten). De rol van de neutronen kan volledig worden verwaarloosd.
    1. Wat is de kans dat het elektron zich in de toestand |1,0,0⟩ (de 1S-toestand) van het He+3-ion bevindt?
    2. Wat is de kans dat het elektron zich in de toestand |2,0,0⟩ (de 2S-toestand) van het He+3-ion bevindt?
    3. Wat is de kans dat het elektron zich in de toestand |2,1,0⟩ (de 2P0-toestand) van het He+3-ion bevindt? Verklaar je resultaat fysisch.
3.
    1. Construeer de matrixvorm, in de basis van de eigentoestanden van ˆSz, van de operator die overeenstemt met de elektron-spin in een willekeurige richting, met andere woorden de operator →S⋅→n. Gebruik hiervoor de uitdrukking voor de basisvector in een willekeurige richting:
       →n=sinθcosϕ→ex+sinθsinϕ→ey+cosθ→ez

       met θ en ϕ de hoeken uit het bolcoördinatenstelsel.
    2. Bepaal de eigenwaarden en de eigentoestanden van deze operator. Schrijf de eigentoestanden als functie van θ2 en ϕ.
    3. Een elektron bevindt zich in de spintoestand |χ⟩=1√3(1+i1). De spin in een willekeurige richting wordt gemeten. Welke waarden kan men dan bekomen en met welke waarschijnlijkheden en wat is de toestand na de meting?
    4. Bepaal (→S⋅→n)2. Wat zijn de eigenwaarden van deze operator? Zijn deze ontaard?

4. Een deeltje bevindt zich in een 1D harmonische oscillator. Vervolgens wordt hieraan een kleine storing van de vorm b(ˆxˆp+ˆpˆx) toegevoegd met b een reële cosntante.
    1. Waarom kan er geen storing van de vorm bˆxˆp aan de Hamiltoniaan worden toegevoegd?
    2. Bepaal de eerste orde correctie op de energie van de n^{de} eigentoestand |n⟩.
    3. Bepaal de tweede orde correctie op de energie van de grondtoestand |0⟩ en op de energie van de tweede geëxciteerde toestand |2⟩.
    4. Bepaal de eerste orde correctie op de eerste geëxciteerde toestand |1⟩.

Nuttige formules

∫∞0dxxne−x=n!

Academiejaar 2017-2018 1^{ste} zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

1. Wat is het foto-elektrisch effect? Beschrijf het experiment, geef de resultaten en een theoretische verklaring. Wat is het belang van dit effect voor de kwantummechanica?
2. Bereken het waterstofspectrum door gebruik te maken van Bohrse banen
3. Bewijs L+|l,m⟩=h2π√(1−m)(l+m+1)|l,m+1⟩
4. Zij J1 en J2 twee onafhankelijke impulsmomenten waarvan de eigenvectoren respectievelijk de Hilbertruimtes H1 en H2 opspannen. Construeer in de productruimte H1⨂H2 deel-Hilbertruimtes met basisvectoren die eigenfuncties zijn van het totale impulsmoment.

Oefeningen

1. Beschouw de Hamiltoniaan gegeven doorH=(a0b0c0b0a) waarbij a,b en c reële constanten zijn waarvoor geldt dat a−c≠±b
    1. Wat zijn de eigenwaarden en eigenstoestanden van deze Hamiltoniaan?
    2. Een deeltje in dit systeem bevindt zich in de begintoestand |Ψ(0)⟩=(0,0,1)T. Indien de energie van dit deeltje wordt gemeten, welke waarden kan men dan bekomen en met welke waarschijnlijkheden en wat is de toestand na de meting?
    3. Wat is de tijdsafhankelijke toestand |Ψ(t)⟩?
    4. Herhaal (2) voor de begintoestand |Φ(0)⟩=(0,0,1)T.
    5. Wat is de tijdsafhankelijke toestand|Φ(t)⟩?
2. Beschouw een deeltje in een harmonische oscillator in de nde eigentoestand |n⟩
    1. Bereken de verwachtingswaarde van de potentiële energie.
    2. Bereken de verwachtingswaarde van de kinetische energie.

Stel nu dat het deeltje zich in de grondtoestand |0⟩ bevindt en dat de opsluitingsfrequentie van de harmonische oscillator plotseling verdubbelt, met andere woorden ω′=2ω. De energie van het deeltje wordt gemeten.

1.
    1. Wat is dan de kans om als resultaat ℏω2 te vinden?
    2. Wat is dan de kans om als resultaat ℏω te vinden?
2. Bereken de verwachtingswaarde van ˆp4 voor de grondtoestand van het waterstofatoom, waarbij ˆp de grootte is van de relatieve impuls. Toon aan dat hiervoor geldt dat<ˆp4>=5(μe24πϵ0ℏ)4 Tip: beschrijf de relatieve impuls ˆp eerst als functie van de relatieve Hamiltoniaan ˆHrel en de potentiële energie ˆV(r).
3. Een elektron in rust bevindt zich in een homogeen magneetveld B=Bzez.
    1. Bepaal de Hamiltoniaan van dit systeem in de basis gevormd door de eigentoestanden van ˆSz.
    2. Wat zijn de eigenwaarden en eigenvectoren van deze Hamiltoniaan?

Nu wordt ook een homogeen magneetveld in de x-richting aangelegd, het totale magneetveld is nu dus gegeven door B=Bxex+Bzez.

1.
    1. Bepaal de nieuwe Hamiltoniaan van het totale systeem in dezelfde basis als bij (1).
    2. Bepaal de eigenwaarden van het totale systeem
    3. Veronderstel nu dat Bx≪Bz. Benader deze eigenwaarden dan tot op tweede orde in Bx.
    4. Indien je het magneetveld in de x-richting als storing beschouwt, bepaal dan de eigenwaarden van het totale systeem tot op tweede orde in de storing. Vergelijk je resultaat met dat van het vorige puntje.
    5. Gebruik de toestand |ψ⟩=cos(ϕ)|ψ1⟩+sin(ϕ)|ψ2⟩ om een bovengrens te vinden voor de grondtoestandsenergie van het totale systeem. Hierbij is ϕ de variationele parameter en zijn |ψ1⟩ en|ψ2⟩ de eigentoestanden van het systeem zonder magneetveld in de x-richting.

Nuttige formules∫∞∞dxe−αx2=√πα

Academiejaar 2015-2016 1^{ste} zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

1. Leid de continuiteitsvergelijking af uit de schrödingervergelijking en leg uit wat de significantie hiervan is.
2. Bespreek de 16 Clebsch-Gordon coefficienten voor het optellen van twee impulsmomenten j_1=j_2=1/2
3. Bereken de matrix representatie van Sx, Sy, Sz, in de Hilbertruimte van een spin 1 deeltje.

4. Geef de postulaten van de kwantummechanica

Oefeningen

1. Beschouw een deeltje in de driedimensionale potentiaal
   V(x)={12mω2zz, voor 0<x<a∞ elders

    1. Bepaal de energie en golffunctie van dit deeltje.
    2. Geef de grondtoestand en de ontaarding ervan. Geef ook de eerste geëxiteerde toestand en de ontaarding ervan indien:
        1. ℏω>3π2ℏ22ma24
        2. ℏω<3π2ℏ22ma24
        3. ℏω=3π2ℏ22ma24
2. Gegeven de Hamiltoniaan H=(hggh) met h en g reële constanten.
    1. Wat zij de eigentoestanden en de bijhorende energieniveaus van deze Hamiltoniaan?
    2. Geef de tijdsafhankelijke eigentoestanden en vorm hiermee een algemene lineaire combinatie $ | \psi (t) \rangle $ en normeer.
    3. Stel dat een deeltje zich op tijdstip t = 0 in de toestand |ψ(0)⟩=(10) bevindt, wat is dan de toestand op een willekeurig later tijdstip t?
    4. Bepaal de waarschijnlijkheidsdichtheden van de twee componenten van $ | \psi (t) \rangle $ afzonderlijk als functie van de tijd en teken deze functie van $gt / \hbar$.
    5. Hoe zien de waarschijnlijkheidsdichtheden van $| \psi (t) \rangle$ eruit indien de begintoestand gegeven is door|ψ(0)⟩=1√2(11) en verklaar het verschil met de eerder berekende waarschijnlijkheidsdichtheden voor $ | \psi (t) \rangle$ in (2.4).
3. Beschouw de toestand $| \psi \rangle = A(| 2,1,1 \rangle + \sqrt{3}| 2,1,0 \rangle + | 2,1,-1 \rangle)$. Waarbij de kets in het rechterlid eigentoestanden van de vorm $| n,l,m \rangle$ van het waterstof atoomzijn waarvoordus geldt dat $\langle r, \theta, \phi | n,l,m \rangle = \Psi_{n,l,m}(r, \theta, \phi) $ de golffunctie van het waterstof atoom is.
    1. Normeer deze toestand, gebruik hiervoor de uitdrukking voor $\gamma_{n,l}$ (gegeven)
    2. Bepaal de verwachtingsvoorwaarden van r.
    3. Bepaal de verwachtingsvoorwaarden van r^2.
    4. Bepaal de onzekerheid $ \Delta r$.
    5. Bepaal de verwachtingswaarde van L_+.
    6. Indien je de z-component van de draaiimpuls L_z van deze toestand zou meten, welke waarden kan je dan bekomen en met welke waarschijnlijkheid en wat is de toestand na de metingen?

4. De potentiaal van de halve harmonische oscillator is gegeven door V(x)={inf, voor x≤012mω2x2 voor x>0

    1. Gebruik de golffunctie: Ψ(x)={0, voor x≤0Axe−ax2 voor x>0 om een bovengrens te bepalen voor de grondtoestandsenergie van een deeltje in deze potentiaal. Hierbij is A de normeringsfactor en a de variatoniele parameter.

    2. Wat is de exacte grondtoestandsenergie van een deeltje in deze potentiaal? Gebruik hiervoor eenvoudige grafische argumenten.
    3. Hoe goed komt je variationeel rsultaat overeen met het exacte resultaat en hoe kan je dit verklaren?

Academiejaar 2014-2015 1ste zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

1. Bewijs de Heisenberg onzekerheidsrelatie voor twee willekeurige observabelen A en B.
2. Bespreek de 16 Clebsch-Gordon coefficienten voor het optellen van twee impulsmomenten j_1=j_2=1/2
3. Geef de afleiding voor de Fermi-Dirac verdeling. Teken deze functie voor T=0 en T#0.
4. Bewijs het variatie principe.
5. Geef een fysische interpretatie van de golffunctie en motiveer deze.

Oefeningen

Ben Van Duppen Welkom op het oefeningenexamen inl. Kwantummechanica. Dit zijn de spelregels.

1.
    1. Het examen is open cursus, je mag dus je cursus gebruiken (incl. appendices). Uitgewerkte oefeningen of eigen notities zijn verboden.
    2. Op de laatste pagina staan enkele nuttige formules.
    3. Het examen bestaat uit vijf vragen (eentje meer dan gewoonlijk) met enkele subvragen. Deze subvragen dienen om je te begeleiden. Laat je niet afschrikken door de lengte van de vraagstelling, het antwoord is vaak korter dan de vraag zelf.
    4. Indien een vraag het vervolg is van een voorgaande die je niet hebt kunnen beantwoorden, schets dan de oplossing en overtuig me dat je weet hoe het zou moeten.
    5. Indien iets niet duidelijk is, kan je dit steeds vragen. Ik zal uitmaken of ik antwoord of niet.

Tot slot: veel succes! Ben

1. Een radioantenne zendt zijn radiosignaal uit op een frequentie van 4MHz en heeft een vermogen van 5kW.
    1. Hoeveel fotonen worden er per seconde uitgezonden?
    2. Is het noodzakelijk dat je radiotoestel rekening houdt met de kwantisatie van de radiogolven en het probabilistisch karakter van fotonen? Verklaar.
2. Een deeltje met massa m beweegt in een oneindig diepe potentiaalput met lengte a. Op tijdstip $t=0$ bevindt het zich in de toestand ψ(x,0)=√35asin(3πxa)+√15asin(5πxa)
    1. Normaliseer de golffunctie.
    2. Bepaal de golffunctie $\psi(x,t)$ op een tijdstip $t>0$.
    3. Bereken de waarschijnlijkheidsdichtheid $\rho(x,t)$.
    4. Bereken de waarschijnleikheidsstroomdichtheid $j(x,t)$.
3. Beschouw de operator $\hat{A}=(\hat{x}\frac{d}{dx}+2)$. Hierin is $\hat{x}$ de positieoperator en $\frac{d}{dx}$ de operator die overeenkomt met de afgeleide naar de positie in positierepresentatie.
    1. Is $\hat{A}$ hermitisch? Toon aan.
    2. Bereken de commutatoren
        1. $[\hat{A},\hat{x}]$
        2. $[\hat{A},\frac{d}{dx}]$
        3. $[\hat{x},[\hat{A},\hat{x}]]$
        4. $[\frac{d}{dx},[\hat{A},\frac{d}{dx}]]$
4. Een systeem bestaat uit twee identieke harmonische oscillatoren die gekoppeld zijn. De hameltoniaan gegeven door ˆH=ˆH1+ˆH2−λˆx1ˆx2 waarin ˆHi=ˆp2i2m+12mω2ˆx2i. $\hat{x}_i$ is de positieoperator en $\hat{p}_i$ de impulsoperator horende bij oscillator i. λ drukt de mate van de koppeling tussen de twee oscillatoren uit.
    1. Bepaal de energieniveaus van het systeem in ontkoppelde toestand
    2. Wat is de grondtoestand en die van de eerste geëxciiteerde toestand? Wat is de ontaardingsgrootheid van het $n^\textrm{de}$ niveau? (voor $\lambda=0$)
    3. Toon aan dat voor $\lambda>0$ het energiespectrum geschreven kan worden als Eλmx,mX=ℏωx(mx+12)+ℏωX(mX+12) waarin x de relatieve coördinaat is en X de coördinaat van het massamiddelpunt. (Hint: Herschrijf het probleem dus in relatieven en massacentrumcoördinaten.)
    4. Bespreek wat er gebeurt met de ontaarding van de grondtoestand en van de eerste geëxciteerde toestand voor $\lambda=0\rightarrow\lambda>0$.

5. Indien het foton een massa m_γ zou hebben, zou de Coulombpotentiaal de volgende vorm hebbenV(→r)=−q24πϵ0e−μrr, met $\mu=\frac{m_\gamma c}{\hbar}$.
    1. Maak gebruik van de golffunctie $\psi(\vec{r})=\frac{1}{\sqrt{\pi}b^3}e^{-r/b}$ om aan te tonen dat de bovengrens voor de grondtoestandsenergie van het waterstofatoom als functie van de parameter b gegeven wordt door Egs(b)<ℏ22mb2−q2πϵ0b31(μ+2/b)2
    2. Stel nu $\mu=0$ en minimalizeer de variationele energie.
        1. Voor welke waarde van b is de energie maximaal? Met welke fysische grootheid stemt deze waarde overeen?
        2. Met welke energie stemt je minimale energie overeen? Wat zegt dit over de variationele golffunctie bij deze normale waarde van b?

Nuttige formules∫∞0dxxnexp(−x)=n!

Academiejaar 2012-2013 2de zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

Het examen werd afgelegd zonder cursus, maar we mochten appendices B-E gebruiken.

1.
    - Wat is de golf-deeltje dualiteit?
    - Bespreek (je hoeft dit niet mathematisch uit te werken) de 2 experimenten die dit aantonen
2. Waterstofatoom, neem de massa van de kern oneindig. Reduceer het 3D-probleem tot 1D-problemen. Je hoeft deze 1Dproblemen niet op te lossen.
3. Oneindig diepe potentiaalput
    - Geef een afleiding van het spectrum en van de eigenfuncties
    - Teken de waarschijnlijkheidsverdeling van de 3 laagste eigentoestanden
4. Gegeven 2 identieke vrije deeltjes. Geef de golffunctie indien deze deeltjes
    1. Fermionen zijn
    2. Bosonen zijn
    Geef de twee deeltjes golffunctie waarbij het ene deeltje een fermion is, en het andere een boson

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

Het examen werd afgelegd zonder cursus, maar we mochten appendices B-E gebruiken. Bij het examen kregen we nog 3 formules gegeven die niet op de appendices stonden:

- (∫dx|f(x)|2)⋅(∫dx|g(x)|2)≥|∫dxf∗(x)g(x)|2

- E(p)=√m2c4+c2p2
- v=dEdp

Dit waren de vragen:

1. Wat is het Compton-effect?
   - Beschrijf het experiment, geef de resultaten en een theoretische verklaring
   - Wat is het belang van dit effect voor de kwantummechanica?
2. Geef de postulaten van de kwantummechanica die betrekking hebben op de meting van een kwantummechanisch systeem
3. Bewijs ΔAΔB≥12|<[ˆA,ˆB]>|, waarbij ˆA en ˆB hermitische operatoren zij. ΔA is de variantie van A (nl. de onzekerheid in de observabele A)
4. Bereken de Clebsch-Gordon coefficienten voor de samenstelling van twee spin ½ deeltjes

Praktijk

We mochten bij dit examen de cursus gebruiken, met eigen notities van tijdens de les. Van de oefeningen mochten we niets gebruiken (niet de uitgewerkte bladen, en ook niet eigen oplossingen). Dit jaar werden de oefeningen voor het eerste gegeven door Ben Van Duppen.

1. Een deeltje met massa m in een oneindig diepe potentiaalput die loopt over [0,L] met voorschrift
   V(x)={0, voor 0≤x≤L∞ elders

   heeft op t=0 een golffunctie gegeven door

   Ψ(x,t=0)={Ax(L−x), voor 0≤x≤L0 elders

   1. Bepaal de normalisatieconstante A
   2. Wat is de verwachtingswaarde van de energie van deze golffunctie?
   3. Projecteer deze golffunctie op de eigenfuncties van de oneindig diepe put, <ψn|Ψ>. Gebruik dit om de golffunctie te schrijven als superpositie van eigenfuncties van de oneindig diepe put. Motiveer het resultaat met symmetrieargumenten.
   4. Met welke waarschijnlijkheid kunnen de energieën E1 en E2 de grondtoestandsenergie en eerste aageslagen toestand van de oneindig diepe put, op t=0 gemeten worden?
   5. Wat is de tijdsafhankelijke golffunctie Ψ(x,t)

2. Beschouw een toestand $|\psi>$ die een lineaire combinatie is van drie orthonormale toestanden $|\phi n>$:
   $|\psi>=\sqrt{}25|\phi1>+1\sqrt{}5|\phi2>+\sqrt{}25|\phi3>$

   Een operator ˆB werkt in op deze orthonormale toestanden als

   $\hat{}B|\phi n>=\{n2|\phi n>-n|\phi n-1>$ voor $n\in\{2,R\}12|\phi1>$ voor n=1 elders

   1. Bepaal de verwachtingswaarde van ˆB voor de toestand $|\psi>$
   2. Is ˆB een hermitische operator? Staaf je antwoord.
   3. Bepaal de eigenwaarden en genormaliseerde eigenvectoren van ˆB ten opzochte van de basis $|\phi n>$.
3. De Hamiltoniaan van een deeltje met massa m en angulair impuls in een ééndimensionale harmonische oscillator met oscillatorsterkte ω, wordt in de positierepresentatie gegeven door
   $H=-\hbar22m\partial2\partial x2+12m\omega2x2+cx4$

   waarin de derde term beschouwd kan worden als een storing. Bereken de grondtoestandsenergie van dit systeem tot op tweede orde

4. Een waterstofatoom bevindt zich in de toestand $\Psi n,l,m=|n,l,m>$, een genormaliseerde eigentoestand van de angulair impuls operatoren ˆL2 en ˆLz. Bereken de verwachtingswaarden van ˆLx en ˆL2x voor deze toestand.

Hierbij kregen we nog de volgende nuttige formules:

$\int dxx\sin(x)=\sin(x)-x\cos(x)$

$\int dxx2\sin(x)=2x\sin(x)-(x2-2)\cos(x)$

Academiejaar 2011-2012 1ste zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

Zonder cursus.

1. Compton effect. Leg uit. Wat is het belang voor de QM?
2. Geef de postulaten van de QM die iets zeggen over de meting van mogelijke fysische grootheden van een systeem.
3. Los de Schrödingervergelijking op voor een oneindig diepe potentiaalput die gelegen is in het gebied -L/2<0<l/2. Bereken het spectrum en de genormaliseerde eigenfuncties. Welke verschillen zijn er met de klassieke mechanica?
4. Wat zijn fermionen en bosonen? Wat is het verschil tussen deze twee soorten deeltjes? Wat is het equivalent in de klassieke mechanica? Geef de golffunctie van twee fermionen en geef de golffunctie van twee bosonen in termen van de een-deeltjes golffuncties.
5. Bereken de matrix representatie van Sx, Sy, Sz, in de Hilbertruimte van een spin 1/2 deeltje.

Praktijk

Hierbij mocht de cursus en de eigen notities van tijdens de les gebruikt worden. Niet het bestand met de uitgewerkte oplossingen van de assistent.

1. Bereken volgende commutatoren voor de Hamiltoniaan $\hat{H}$ die de relatieve coördinaat $\vec{r}$ van het waterstofatoom beschrijft:

   $$\hat{H}=-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2-\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

   1. $[\hat{L}_x,\hat{H}]$
   2. $[\hat{L}_z,\hat{H}]$
   3. $[\hat{L}^2,\hat{H}]$
2. Beschouw de ééndimensionale harmonische oscillator met massa m en frequentie ω. Introduceer hierop een kwadratische storing V , met λ een klein, reëel getal. Bereken via storingsrekening de correctie op de grondtoestandsenergie tot op de tweede orde. Bereken ook de exacte energie en vergelijk deze met het resultaat uit storingsrekening d.m.v een Taylor expansie voor kleine λ.

   $$V=\frac{1}{2}\lambda m\omega^2x^2$$
3. Ga na wat de onzekerheidsrelatie van Heisenberg wordt in 3 dimensies en beschouw dan de eerste aangeslagen toestand van de driedimensionale harmonische oscillator $\psi_1(\vec{r})=Nxe^{-\frac{m\omega}{2\hbar}r^2}$.

   Bepaal N en ga na of deze toestand voldoet aan de onzekerheidsrelatie van Heisenberg. Eventueel mag je gebruik maken van volgende integralen:
   - $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-q^2}dq=\sqrt{\pi}$
   - $\int_{-\infty}^{\infty}q^2e^{-q^2}dq=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$
   - $\int_{-\infty}^{\infty}q^4e^{-q^2}dq=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}$
   - $\int_{-\infty}^{\infty}q^6e^{-q^2}dq=\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$
4. Beschouw een waterstofatoom dat zich in de volgende toestand bevindt(met de notatie $\Psi_{n,l,m}(r,\theta,\phi)$ voor de eigentoestanden zoals in de cursus)

   $$\Psi(r,\theta,\phi)=N(2\Psi_{1,0,0}(r,\theta,\phi)+\Psi_{2,1,-1}(r,\theta,\phi)+2\Psi_{3,2,0}(r,\theta,\phi))$$

   1. Bepaal N
   2. Stel dat er een meting plaatsvindt van de z-component van het impulsmoment, wat is de verwachtingswaarde?

Maak het jezelf niet te moeilijk. Diracnotatie gebruiken zal je vaak tijd besparen.

Academiejaar 2010-2011 2de zit

Prof. Francois Peeters

Theorie

1. Oneindig diepe potentiaalput.
   - Geef een afleiding van het spectrum en van de eigenfuncties.
   - Teken de waarschijnlijkheidsverdeling van de drie laagste eigentoestanden.

2. Heisenberg onzekerheidsrelatie:
    - Geef een afleiding van de algemene formule.
    - Geef één expliciet voorbeeld van zulk een onzekerheidsrelatie en geef de consequenties van deze relatie.
3. Waterstofatoom. Bereken de radiale golfvergelijking (alleen de differentiaalvergelijking geven).
4. Harmonische oscillator. Bereken het spectrum.
5. Wat is het verschil tussen Bose- en Fermi-deeltjes? Geef de bezettingswaarschijnlijkheid voor beide deeltjes + maak een figuur hiervan.

Praktijk

Op dit examen mochten de cursus en eigen nota's gebruikt worden. Het handboek en de nota's die uitgewerkt werden door de assistent niet.

1. Beschouw het waterstofatoom waarvan het radiale deel van de golffunctie genormeerd is en het hoekafhankelijk deel in de volgende toestand is gebrachtY(θ,ϕ)=N(2Y00(θ,ϕ)+Y−11(θ,ϕ)−2Y02(θ,ϕ)) met Y de bolfuncties (waarvan je alle eigenschappen die je kent mag gebruiken).
    - Bepaal N.
    - Stel dat er een meting plaatsvindt van de lengte van het totale impulsmoment, wat is de verwachtingswaarde?
2. Beschouw de ééndimensionale harmonische oscillator en gebruik de variationele methode om een bovengrens te berekenen voor de energie van de grondtoestand, gebruik hiervoor volgende variationele golffunctieψ(x)=Nexp(−bx2) met b de variationele parameter. Valt er je iets op aan de golffunctie die je zo bekomt?
3. We beschouwen de genormaliseerde eigenfuncties ψn(x) van de ééndimensionale Hamiltoniaan met corresponderende eigenwaarden En. Op tijdstip t = 0 bevindt een deeltje zich in de volgende toestand ψ(x)=N[2ψ1(x)+ψ4(x)+2ψ5(x)]
    - Bepaal de normalisatieconstante N.
    - Bepaal voor n = 1,3,5 de waarschijnlijkheid dat een meting van de energie En oplevert.
    - Stel dat En=nE1, wat is dan de verwachtingswaarde E van de energie.
    - Geef de tijdsafhankelijke golffunctie ψ(x,t) (waarbij je mag aannemen dat er geen metingen op het systeem werden gedaan).
    - Indien een meting op t = 0 E1 opleverde, wat is dan de waarschijnlijkheid om op een later ogenblik t de waarde E4 te meten?
4. Beschouw de onzekerheidsrelatie van Heisenberg voor twee hermitische operatoren Â en ˆBΔAΔB≥12|<[A,B]>|, ga na of deze opgaat in het geval dat we de operatoren Sx en Sy op de spinor |1/2, -1/2>. Wat gebeurt er als we de operatoren Sx en Sz beschouwen?

Academiejaar 2010-2011 1ste zit

Prof. Francois Peeters

Oefeningen

Op dit examen mochten de cursus en eigen nota's gebruikt worden. Het handboek en de nota's die uitgewerkt werden door de assistent niet.

1. Het hoekafhankelijk deel van de golffunctie van een waterstofatoom is gegeven door$Y(\theta,\phi)=N(2Y_{00}(\theta,\phi)+Y_{-11}(\theta,\phi)+Y_{01}(\theta,\phi))$ met $Y_{ml}(\theta,\phi)$ de bolfuncties.
   - Bepaal N.(waarbij je mag veronderstellen dat het radiale deel van de golffunctie genormeerd is)
   - Stel dat er een meting plaatsvindt van de z-compotent van het impulsmoment, wat is de verwachtingswaarde?
2. Beschouw de ééndimensionale harmonische oscillator met massa m en frequentie ω. Introduceer hierop een kwadratische storing van de vorm$V=\frac{1}{2}\lambda m\omega^2x^2$ met λ een klein reeel getal. Bereken via storingsrekening de correctie op de grondtoestandsenergie tot op tweede orde. Bereken ook de exacte energie en vergelijk deze met het resultaat uit storingsrekening dmv een taylor expansie voor kleine λ
3. Beschouw een systeem dat voor een observabele A twee waardes kan aannemen: 1 en 2. Verder weten we dat de Hamiltoniaan $\hat{H}$ als volgt inwerkt op de orthonormale eigentoestanden van $\hat{A}$:$\hat{H}|1\rangle=|1\rangle+i|2\rangle;\hat{H}|2\rangle=|2\rangle-i|1\rangle$
   1. Vindt de eigentoestanden van de Hamiltoniaan
   2. Indien op t=0 de energiewaarde E=2 wordt opgemeten, wat is dan de verwachtingswaarde van $\hat{A}$?
4. Beschouw de onzekerheidsrelatie van Heisenberg voor twee hermitische operatoren $\hat{A}$ en $\hat{B}$$\Delta A\Delta B\geq\frac{1}{2}|\langle[\hat{A},\hat{B}]\rangle|$, ga na of deze opgaat in het geval dat we de operatoren $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_y$ op de spinor |1/2, 1/2>. Wat gebeurt er als we de operatoren $\hat{S}_x$ en $\hat{S}_z$ beschouwen?

Oudere examenvragen

Vragen van oudere examens vind je hier.

Categorieën:

- Fysica
- 2BFYS