Numeriek oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen

Numeriek oplossen van gewone differentiaalvergelijkingen

Richting	Wiskunde
Jaar	3BWIS

Examen juni 2022

1. Beschouw het beginwaardeprobleem
   U′(t)=U(t)U(α)=u0∈Rn

   U′(t)=U(t)U(α)=u0∈Rn

   Zij p≥1p≥1 geheel en willekeurig. Neem aan dat U(t)U(t) tenminste p+1p+1 keer continu differentieerbaar is op [α,β][α,β] en dat (1) een unieke oplossing UU op het interval [α,β][α,β] bezit. Zij |.||.| de maximumnorm op RnRn.

   a. Formuleer het Taylor proces van orde pp voor de numerieke oplossing van (1).

   b. Bewijs dat voor afbreekfout rkrk in de kk-de stap van dit Taylor proces geldt
      |rk|≤Khp+1metK=1(p+1)!maxα≤t≤β|U(p+1)(t)|.

      |rk|≤Khp+1metK=1(p+1)!maxα≤t≤β|U(p+1)(t)|.

   c. Leg uit hoe bij het Taylor proces van orde pp een geschikte variabele stapgrootte hkhk wordt bepaald met behulp van een toegevoegde methode van orde p+1p+1. Leid vervolgens de formule voor hkhk af.

2. Beschouw in deze opgave de Runge-Kutta methode gegeven door de matrix
M=⎛⎝⎜⎜1/21/21/2−1/21/21/2⎞⎠⎟⎟
$$M=(1/2−1/21/21/21/21/2)$$

   a. Geef de formule voor de benaderingen uk(k=1,2,3,...)uk(k=1,2,3,...) die bij toepassing van methode (2) op het algemene beginwaardeprobleem (1) wordt verkregen.

   b. Bepaal de (maximale) orde van de consistentie van de methode.

   c. Leid de stabiliteitsfunctie van de methode af.

   d. Is de methode AA-stabiel? Bewijs je antwoord.

   e. Bekijk thans de numerieke oplossing van
   U′(t)=(−2−11−2)U(t).
   $$U′(t)=(−21−1−2)U(t).$$

   Ga voor methode (2) na voor welke stapgrootten h>0h>0 er geen zwakke instabiliteit optreedt.

3. Beschouw in deze opgave ter numerieke oplossing van (1) de lineaire meerstapsmethode
uk−α1uk−1+α0uk−2=h(β1fk−1+β0fk−2).
$$uk−α1uk−1+α0uk−2=h(β1fk−1+β0fk−2).$$

Neem aan dat de functie ff in (1) aan een Lipschitz voorwaarde op RnRn voldoet met constante L>0L>0.

   a. Is deze methode expliciet of impliciet? Verklaar.

   b. Bepaal α0,α1,β0,β1α0,α1,β0,β1 zodat de hoogst mogelijke orde van consistentie bereikt wordt. Geef ook de bijhorende waarde voor pp.

   c. Ga voor deze methode na of het volledige proces stabiel is.

4. Zij n≥10n≥10 en geheel. Beschouw
   U′(t)=AU(t),(α≤t≤β),U(α)=u0.
   U′(t)=AU(t),(α≤t≤β),U(α)=u0.

   Met de (n×n)(n×n) matrix
   A=(n+1)2⎛⎝⎜⎜⎜⎜⎜⎜⎜−211−2⋱.1⋱.1⋱.−211−2⎞⎠⎟⎟⎟⎟⎟⎟⎟,
   A=(n+1)2(−211−21⋱.⋱.⋱.1−211−2),

   met eigenwaarden
   λi=−4(Δx)2sin2(π2iΔx),(1≤i≤n),Δx=1n+1.
   λi=−4(Δx)2sin2(π2iΔx),(1≤i≤n),Δx=1n+1.

   Toepassing van de impliciete middelpuntsregel op dit beginwaardeprobleem levert een recurrente betrekking van de vorm uk=Buk−1uk=Buk−1, met een matrix BB. Zij II de (n×n)(n×n) eenheidsmatrix.
   a. Geef een formule voor BB in termen van A,IA,I en de stapgrootte hh.
   b. Bewijs dat voor elke stapgrootte h>0h>0 geldt dat (I−12hA)(I−12hA) inverteerbaar is en ‖B‖2≤1‖B‖2≤1.
   c. Bewijs dat er een reële constante KK, onafhankelijk van k,h,nk,h,n, bestaat zodat
      |U(tk)−uk|2≤Kmax1≤j≤k|ej|2(k≥1,h>0,kh≤β−α).
      |U(tk)−uk|2≤Kmax1≤j≤k|ej|2(k≥1,h>0,kh≤β−α).

Examen juni 2019

Media:novgdv.pdf

Examen juni 2017

1. Beschouw het beginwaardeprobleem
   U'(t) = U(t) \hspace{10mm} U(\alpha)= u_0 \label{(1)}
   U'(t) = U(t) \hspace{10mm} U(\alpha)= u_0 \label{(1)}

   met gegeven f:Rn→Rf:Rn→R en u0∈Rnu0∈Rn. Zij p≥1p≥1 geheel en willekeurig. Neem aan dat ff tenminste pp keer continu differentieerbaar is op RnRn en dat (1) een unieke oplossing UU op het interval [α,β][α,β] bezit. Zij |.||.| de maximumnorm op RnRn.
   - Formuleer het Taylor proces van orde pp voor de numerieke oplossing van (1).
   - Bewijs dat voor afbreekfout rkrk in de kk-de stap van dit Taylor proces geldt
     |rk|≤Khp+1metK=1(p+1)!maxα≤t≤β|Up+1(t)|.
     |rk|≤Khp+1metK=1(p+1)!maxα≤t≤β|Up+1(t)|.
   - Leg uit hoe bij het Taylor proces van orde pp een geschikte variabele stapgrootte hkhk wordt bepaald met behulp van een toegevoegde methode van orde p+1p+1. Leid vervolgens de formule voor hkhk af.

2. Beschouw in deze opgave de Runge-Kutta methode gegeven door de matrix
   \begin{pmatrix}
   1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2
   \end{pmatrix} \label{(2)}

   \begin{pmatrix}1/4 & 0 \\ 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \label{(2)}

   - Geef de formule voor de benaderingen uk(k=1,2,3,...)uk(k=1,2,3,...) die bij toepassing van methode (2) op het algemene beginwaardeprobleem (1) wordt verkregen.
   - Bepaal de (maximale) orde van de consistentie van de methode.
   - Leid de stabiliteitsfunctie van de methode af.
   - Is de methode AA-stabiel? Bewijs je antwoord.
   - Bekijk thans de numerieke oplossing van
     U′(t)=(02−10)U(t).

     U′(t)=(0−120)U(t).

     Ga voor methode (2) na voor welke stapgrootten h>0h>0 er geen zwakke instabiliteit optreedt.
3. Beschouw in deze opgave ter numerieke oplossing van (1) de lineaire meerstapsmethode
   3u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2} = 2hf_k \label{3}

   3u_k - 4u_{k-1} + u_{k-2} = 2hf_k \label{3}

   . Neem aan dat de functie ff in (1) aan een Lipschitz voorwaarde op RnRn voldoet met constante L>0L>0.
   - Bewijs dat er een h∗>0h∗>0 bestaat zodat voor alle gegeven h,uk−1,uk−2h,uk−1,uk−2 met 0<h<h∗0<h<h∗ de vergelijking (3) precies één oplossing ukuk heeft.
   - Toon aan dat voor de orde van consistentie pp van de methode geldt dat p=2p=2, maar niet p=3p=3.
   - Toon aan met de wortelvoorwaarde dat het gereduceerde proces behorend bij (3) stabiel is.
   - Zij CC de matrix die toegevoegd is aan het gereduceerde proces en zij ||.||||.|| de maximum norm. Toon aan dat ||Cj||≤2||Cj||≤2 voor alle gehele j≥1j≥1.
4. Beschouw het algemene numerieke proces voor het algemene beginwaardeprobleem (1). Neem wederom aan dat de functie ff aan een Lipschitz voorwaarde op RnRn voldoet.
   - Formuleer het algemene numerieke proces voor (1).
   - Formuleer de stelling voor het algemene numerieke proces.
   - Geef de definities van de drie fundamentele concepten die in deze stelling optreden.
   - Bewijs de stelling over convergentie voor het algemene numerieke proces.

Examen juni 2016

1. Beschouw het beginwaardeprobleem
   $U'(t)=U(t)U(0)=1$

   $$U'(t)=U(t)U(0)=1$$

   stel dat voor $h>0h>0$ met $kh≤1kh≤1$ de waarden ukuk een benadering zijn voor $U(kh)U(kh)$ ($k=1,2,3,...k=1,2,3,...$). Bewijs dat voor de voorwaartse methode van Euler geldt dat
   $|U(kh)−uk|≤(e−1)e2h$

   $$|U(kh)−uk|≤(e−1)e2h$$

   voor alle $k=1,2,3,..k=1,2,3,..$
2. Zij gegeven de volgende matrix voor een Runge-Kutta methode
   ⎛⎝⎜⎜ 121212−121212 ⎞⎠⎟⎟

   $$(12−1212121212)$$

   - Beschouw het algemene beginwaarde probleem
     $U'(t)=f(t,U(t))U(α)=u0$

     $$U'(t)=f(t,U(t))U(α)=u0$$

     geef een uitdrukking voor ukuk (met $k=1,2,3,...k=1,2,3,...$) wanneer we de Runge-Kutta methoden toepassen.
   - Bereken de maximale consistentie van het proces.
   - Bepaal de stabiliteitsfunctie.
   - Is de methode A-stabiel?
3. Beschouw de meerstapsmethode
   $uk+κ(uk−1−uk−2)+uk−3=hη(fk−2+fk−3)$

   $$uk+κ(uk−1−uk−2)+uk−3=hη(fk−2+fk−3)$$

   met $κ∈[0,1]κ∈[0,1]$ en $η>0η>0$.Veronderstel dat ff aan een Lipschitzvoorwaarde voldoet en onbeperkt continu differentieerbaar is. Bepaal dan de orde van convergentie van de methode in functie van κκ en ηη.
4. Stel AA een ($n×nn×n$)-matrix met eigenwaarden $λ1,...,λnλ1,...,λn$ en beschouw het beginwaardeprobleem
   $U'(t)=AU(t)U(α)=u0$

   $$U'(t)=AU(t)U(α)=u0$$

   Als we een 2-stadia θθ-methode toepassen, $θ∈[0,1]θ∈[0,1]$, krijgen we een uitdrukking van de vorm
   $uk=Buk−1$

   $$uk=Buk−1$$

   Geef een uitdrukking voor BB in functie van A,I,hA,I,h en θθ. Je mag gebruiken dat $θhλi≠0θhλi≠0$ voor elke $i=1,...,ni=1,...,n$.

Veronderstel nu dat $θ=12θ=12$.

1.

    Bewijs dat als hλi∈Shλi∈S voor elke i=1,...,ni=1,...,n, dat dan ‖B‖2<1‖B‖2<1

Examen juni 2015

1. Zij θθ een reële parameter. Beschouw volgende Runge-Kutta methode
   ⎛⎝||||01−θ12120θ12−θ12−θ00θθ⎞⎠||||

   (0001−θθ01212−θθ1212−θθ)

   .
    - Voor welke waarden van θθ is deze methode expliciet, voor welke impliciet? Leg uit.
    - Geef de formule voor de benaderingen ukuk verkregen door deze methode toegepast op het beginwaardeprobleem U′(t)=f(t,U(t))U(α)=u0U′(t)=f(t,U(t))U(α)=u0
    - Bepaal de waarden voor θθ zodat deze methode consistent is van orde 2 m.b.t. U. Doe hetzelfde voor orde 3.
    - Beschouw het probleem U′(t)=AU(t)U′(t)=AU(t) met A=(01−10)A=(0−110).
    - Is AA normaal?
    - Bepaal een waarde h0h0 zodat er geen zwakke instabiliteit verwacht wordt voor θ=14θ=14 bij toepassing van de methode op bovenstaand probleem. (De stabiliteitsfunctie was gegeven in functie van θθ.)
2. Beschouw de volgende lineaire meerstapsmethode
   uk+α1uk−1+α0uk−2=h(β1fk−1+β0fk−2)

   uk+α1uk−1+α0uk−2=h(β1fk−1+β0fk−2)

    - Is deze methode impliciet of expliciet?
    - Bepaal voorwaarden op de coëfficiënten zodat een zo hoog mogelijke consistentie bereikt wordt en de maximale consistentie.
    - Bepaal voor deze methode(n) of het gereduceerde proces stabiel is.
3. Beschouw een algemene Runge-Kutta methode met matrix M=(Abt)M=(Abt), met A(i,j)=ai,jA(i,j)=ai,j en b=(b1,…,bm)tb=(b1,…,bm)t en stel ee een m×1m×1 vector met e=(1,…,1)te=(1,…,1)t.
    - Bewijs dat de stabiliteitsfunctie gegeven wordt door
      R(z)=1+zbt(I−zA)−1e

      R(z)=1+zbt(I−zA)−1e

    - Pas de formule toe om de stabiliteitsfunctie van de θθ-methode met 2 stadia te bepalen.
4.
    - Formuleer de stelling i.v.m. convergentie van een algemeen numeriek proces.
    - Geef de definities van de 3 fundamentele concepten in deze stelling.
    - Bewijs de stelling i.v.m. convergentie van een algemeen numeriek proces.

Examen juni 2014

1. Beschouw de Runge-Kutta methode gegeven door de matrix
   ⎛⎝⎜⎜⎜0κ0000η00001⎞⎠⎟⎟⎟
   (000κ000η0001)

   met reële parameters κ,ηκ,η.
   - Is deze methode expliciet of impliciet? (Licht toe)
   - Geef een formule voor de benaderingen uk≈U(tk)(k=1,2,…)uk≈U(tk)(k=1,2,…) die bij toepassing van deze methode op het algemene beginwaardeprobleem
     U′(t)=f(t,U(t)),U(α)=u0
     U′(t)=f(t,U(t)),U(α)=u0

     wordt verkregen.
   - Bepaal de grootst mogelijk orde van consistentie die deze methode kan bereiken, alsook de waarden voor κ,ηκ,η waarvoor deze orde wordt bereikt.
   - Neem nu voor de volgende oefeningen aan dat κ=18,η=12κ=18,η=12.
   - Bewijs dat de verzameling {z|z∈C,I(z)=0 en−6≤R(z)≤0}
     {z|z∈C,ℑ(z)=0 en−6≤ℜ(z)≤0} in het stabiliteitsgebied ligt.
   - Bekijk de numerieke oplossing van het beginwaardeprobleem voor
     U′(t)=(−322−3)U(t)+g(t).
     U′(t)=(−322−3)U(t)+g(t).

     Leidt voor de methode een waarde h0>0h0>0 af zodanig dat voor alle stapgrootten 0<h≤h00<h≤h0 geen zwakke instabiliteit optreedt.
2. Beschouw de lineaire meerstapsmethode
   11uk−18uk−1+9uk−2−2uk−3=6hfk.
   11uk−18uk−1+9uk−2−2uk−3=6hfk.

   Neem aan dat de functie ff aan een Lipschitz voorwaarde op RnRn voldoet met constante L>0L>0.
   - Bewijs dat er een h∗>0h∗>0 bestaat zodanig dat voor alle gegeven h,uk−1,uk−2,uk−3h,uk−1,uk−2,uk−3 met 0<h≤h∗0<h≤h∗ deze vergelijking precies één oplossingukuk heeft.
   - Bewijs dat voor de orde van consistentie pp van deze methode geldt p≥3p≥3.
   - Ga voor deze methode na of het gereduceerde proces stabiel is.
3. Beschouw de Runge-Kutta methode gegeven door de matrix
   M=⎛⎝⎜5/123/43/4−1/121/41/4⎞⎠⎟.
   M=(5/12−1/123/41/43/41/4).

   - Leid hiervan de stabiliteitsfunctie af.
   - Is deze methode AA-stabiel? Bewijs je antwoord.
   - Neem aan dat deze methode toegepast wordt op een stijf, niet-lineair beginwaardeprobleem. Hoe lost men het optredende stelsel vergelijkingen in iedere stap het best op? Geef een formule.

4. Beschouw het algemene beginwaardeprobleem
U′(t)=f(t,U(t))U(α)=u0.
U′(t)=f(t,U(t))U(α)=u0.

met gegeven f:[α,β]×R→Rf:[α,β]×R→R en u0∈Ru0∈R. Neem aan dat ff continu is en er een L>0L>0 bestaat zodat
|f(t,x~)−f(t,x)|≤L|x~−x|
|f(t,x~)−f(t,x)|≤L|x~−x|

voor alle t∈[α,β]t∈[α,β] en x,x~∈Rx,x~∈R. Zij UU de oplossing van dit probleem en neem aan dat deze twee keer continu differentieerbaar is. Bewijs direct, zonder resultaten uit de cursustekst te gebruiken, dat de voorwaartse methode van Euler bij toepassing op dit probleem:
   - stabiel is;
   - consistent is van orde 1 m.b.t. UU;
   - convergent is van orde 1 m.b.t. UU.

Examen juni 2013

1. Leid voor p=1p=1 resp. p=2p=2 een criterium op de coëfficënten van een willekeurig gegeven Runge-Kutta methode af opdat deze orde van consistentie p heeft.
2. Beschouw de Runge-Kutta methode gegeven door de matrix:
   - M=⎡⎣⎢5/123/43/4−1/121/41/4⎤⎦⎥M=[5/12−1/123/41/43/41/4]
   - Bepaal de orde van consistentie.
   - Leid de stabiliteitsfunctie af.
   - Is de methode *A*-stabiel? Bewijs je antwoord.
3. Zij α∈[0,1]α∈[0,1] en β≥0β≥0 willekeurig. Onderzoek, in functie van αα en ββ, de orde van convergentie van de lineaire meerstapsmethode
uk+α(uk−1−uk−2)−uk−3=hβ(fk−1+fk−2)uk+α(uk−1−uk−2)−uk−3=hβ(fk−1+fk−2).
4. Beschouw het beginwaardeprobleem:
   - {U′1(t)=U2(t),U′2(t)=−U1(t),U1(0)=1,U2(0)=0.(1){U1′(t)=U2(t),U1(0)=1,U2′(t)=−U1(t),U2(0)=0.(1)
   - Toon aan dat (1) een unieke oplossing U heeft op [0,∞[[0,∞[.
   - Beschrijf de kromme in het (x,y)-vlak gelegen door x=U1(t),y=U2(t)(t≥0)x=U1(t),y=U2(t)(t≥0).
   - Zij |.|2|.|2 de Euclidische norm en θ∈[0,1]θ∈[0,1]. Beschouw toepassing van het 1-stadium θθ-methode op (1) met willekeurig gegeven stapgrootte h>0h>0. Bewijs voor de verkregen benaderingen u1,u2,…u1,u2,… geldt
|uk|2=c.|uk−1|2
|uk|2=c.|uk−1|2

     met c=1+(1−θ)2h21+θ2h2−−−−−−−−√c=1+(1−θ)2h21+θ2h2 en u0=(01)u0=(01).
   - *Hint*: gebruik normaliteit.

5. Zij stapgrootte $h > 0$ willekeurig en vast. Beschrijf het kwalitatieve gedrag van u_k voor $k \to \infty$. Aan welke waarde θ geef je de voorkeur indien dit gedrag wo goed mogelijk dient overeen te komen met dat van $U(t)$ voor $t \to \infty$?

Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS