

## Maattheorie

### Calculus

Richting Wiskunde

Jaar 3BWIS2BWIS

## Bespreking

De theorie wordt gegeven door prof. Berckmoes. Het is een prof. die goed zijn best doet om alles goed uit te leggen op een altijd enthousiaste manier. De oefeningen worden gegeven door assistent Wouter Van Den Haute. Het examen bestaat uit 1 deel oefeningen en 1 deel theorie die beiden voor de helft van de punten meetellen. De theorie is schriftelijk met mondelinge toelichting. De oefeningen zijn openboek. Ook alles wat bewezen of gebruikt is in de oefeningen krijg je op het examen (denk bv aan het lemma van Scheffé).

## Examenvragen

### Theorie

#### Januari 2022

1. Geef de definitie van een  $\sigma$ -algebra.  
2. Geef de definitie van een Dynkin-systeem.  
3. Bewijs dat een  $\sigma$ -algebra een Dynkin-systeem is.  
4. Bewijs dat een Dynkin-systeem dat stabiel is voor het nemen van eindige intersecties een  $\sigma$ -algebra is.
2. Bewijs dat  $f \in M(\Omega, \mathcal{A})$   $f \in M(\Omega, \mathcal{A})$  als en slechts als er een rij  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq M(\Omega, \mathcal{A})$  bestaat met  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$ .
3. Bewijs de eerste stelling van *Beppo-Levi*.
4. Bewijs de stelling van *Egoroff*.

De verwoordingen van de stellingen met naam waren uiteraard gegeven.

#### Augustus 2021

1. Wat is een sigma-algebra?  
2. Wat is een Dynkin-systeem?  
3. Zij  $\mathcal{C}$  een Dynkin-systeem dat stabiel is onder het nemen van eindige doorsnedes. Toon aan dat  $\mathcal{C}$  een sigma-algebra is.
2. Bewijs: Zij  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  een willekeurige maatruimte. De klasse  $\mathcal{A}_\mu := \{A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \infty\}$  is een  $\sigma$ -algebra, die gelijk is aan de  $\sigma$ -algebra  $\sigma(\mathcal{A}_\mu)$ .
3. Bewijs: Beschouw een maatruimte  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Als  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  en  $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$  twee stijgende rijen in  $E^+(\Omega, \mathcal{A})$  zijn met  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$  en  $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n = g$  dan is ook  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n g_n = f g$ .
4. Bewijs de stelling van Beppo Levi 2: Beschouw een maatruimte  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ . Als  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  een dalende rij in  $M^+(\Omega, \mathcal{A})$  is zodanig dat  $\int f_1 d\mu < \infty$  dan is  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int \lim_{n \rightarrow \infty} f_n d\mu$ .

#### Januari 2021

1. Geef de definitie van een algebra.  
2. Geef de definitie van een ring.  
3. Bewijs:  $B$  is een algebra  $\iff B$  is een ring die aan een extra eigenschap voldoet. (Welke?)
2. Bewijs het lemma van Borel-Cantelli.
3. Bewijs het 1<sup>ste</sup> lemma van Fatou. Geef een voorbeeld waaruit blijkt dat de ongelijkheid in het algemeen strikt kan zijn.
4. Bewijs de ongelijkheid van Hölder.

Ter info: Bij vraag 2, 3 en 4 waren de verwoordingen van de te bewijzen lemma's en de ongelijkheid telkens ook gegeven

#### Januari 2019

1. Zij  $X$  een compacte verzameling.
  - Definieer de lengte van een open verzameling  $G \subset X$   $G \subset X$
  - Definieer de Lebesgue buitenmaat van een verzameling  $A \subset X$   $A \subset X$
  - Wanneer is een verzameling  $A \subset X$  Lebesgue meetbaar?
  - Toon aan dat de eindige unie van Lebesgue meetbare verzamelingen ook Lebesgue meetbaar is. Je mag de  $\sigma$ -subadditiviteit van de Lebesgue buitenmaat gebruiken.
2. Stel  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in  $L^1(X)$ . met  $f_n \rightarrow f$  puntsgewijs.
  - Stel  $\{f_n\}$  is  $\|\cdot\|_1$ -totaal begreind, kunnen we dan besluiten dat  $f \in L^1(X)$ ?
  - Stel  $\{f_n\}$  is  $\|\cdot\|_1$ -totaal begreind en  $f \in L^1(X)$ . Kunnen we dan besluiten dat  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ ?
  - Stel  $\{f_n\}$  is  $\|\cdot\|_1$ -begreind, kunnen we dan besluiten dat  $f \in L^1(X)$ ?
  - Stel  $\{f_n\}$  is  $\|\cdot\|_1$ -begreind en  $f \in L^1(X)$ . Kunnen we dan besluiten dat  $f_n \rightarrow f$  in  $L^1$ ?
3.
  - Stel een collectie  $F \subset L^1(X)$ . Wat betekent het als  $F$  uniform integreerbaar is?
  - formuleer de stelling van Vitali.
  - Formuleer de monotone convergentiestelling voor dalende rijen.
  - Laat zien hoe de monotone convergentiestelling voor dalende rijen volgt uit de stelling van Vitali.
4. Zij  $X, Y$  vectorvelden.
  - Wat betekent het als  $X$  en  $Y$  onafhankelijk zijn?
  - Stel  $X$  en  $Y$  zijn onafhankelijk en  $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$  een continue functie. Bewijs dat  $E[f(X, Y)] = E[f(x, Y)]dP_X(x) = E[f(x, Y)]dP_X(x)$ . Formuleer alle stellingen die je hierbij gebruikt en laat zien hoe ze van toepassing zijn.

## Januari 2016

prof Uwe Einmahl

1. Uitwendige maten:
  - Definieer een uitwendige maat  $\mu^*$  en de  $\mu^*$ -meetbare verzamelingen.
  - Formuleer en bewijs de uitbreidingsstelling. Je mag hierbij zonder bewijs veronderstellen dat de restrictie van  $\mu^*$  tot  $M(\mu^*)$  een maat is.
  - Formuleer de uniciteitsstelling en gebruik deze om uit te leggen dat als de maten  $P$  en  $Q$  samenvallen op  $\mathbb{R}$  dat dan ook de verdelingen  $F(x) = P((-\infty, x])$  en  $G(x) = Q((-\infty, x])$  samenvallen.
2. Convergentie: (je kreeg hier de keuze tussen de 2 onderstaande vragen)
  - Definieer convergentie bijna-overal, in kans en in  $L^p$ . Geef en bewijs de hoofdstelling over convergentie. Je mag hierbij gebruik maken van
 
$$X_i (i \in I) \text{ een klasse van toestandsvariabelen, dan geldt de equivalentie: } X_i (i \in I) \text{ is uniform integreerbaar} \Leftrightarrow \sup_{i \in I} E[|X_i|] < \infty \text{ en } (\forall \epsilon > 0)(\exists \delta > 0)$$

$$X_i (i \in I) \text{ een klasse van toestandsvariabelen, dan geldt de equivalentie: } X_i (i \in I) \text{ is uniform integreerbaar} \Leftrightarrow \sup_{i \in I} E[|X_i|] < \infty \text{ en } (\forall \epsilon > 0)$$

$$(\exists \delta > 0): P(A) < \delta \Rightarrow \sup_{i \in I} E[|X_i| \mathbf{1}_A] < \epsilon$$
  - Geef en bewijs de sterke wet van de grote getallen.
3. De stelling van Radon-Nikodym:
  - Geef en bewijs het lemma dat gebruikt wordt in de stelling van Radon-Nikodym. (Je mag de ontbindingsstelling van Hahn zonder bewijs gebruiken.)
  - Formuleer en bewijs de stelling van Radon-Nikodym.

## Januari 2015

prof Uwe Einmahl

1. **Uitbreiding van maten** Wat is een getekende maat? Geef alle definities, en lemma's en het verband met de uitbreidingsstelling. Vervolgens mag je kiezen of je de 3 lemma's die aantonen dat  $M_{\mu^*}$  een  $\sigma$ -algebra is en  $\mu^*$  daarop een maat is, of je bewijst de uitbreidingsstelling. Mogelijke bijvragen:
  - Hoe bekomen we zo de Lebesguemaat en waarom is deze uniek?
  - Geef een voorbeeld van een semi-ring op  $\mathbb{R}$ . Zijn de open intervallen een semi-ring?
2. **Convergentie** Geef de definitie van convergentie in maat, convergentie bijna overal en convergentie in  $L^p$ . Geef eigenschappen, alternatieve karakterisaties en equivalenties. Vervolgens mag je een van de volgende dingen bewijzen:
  - De equivalenties voor convergentie in  $L^p$  in een kansruimte.
  - De sterke wet van de grote getallen.
3. **Getekende maten** Geef en bewijs de stelling van Radon-Nikodym voor eindige maten. Geef ook het lemma ervoor, je hoeft het niet te bewijzen.

## September 2013 - 2014

prof Uwe Einmahl Van volgende vragen moet je kiezen uit (1 of 2) en (3 of 4) en (5 of 6).

1. Formuleer en bewijs de  $\pi$ - $\lambda$ - $\lambda$ -stelling en geef een plaats aan in de cursus waar je deze gebruikt.
2. Bewijs de volgende stelling: Zij  $\mu_1, \mu_2$  maten op  $\sigma(P)$  met  $P$  een  $\pi$ -systeem. Veronderstel dat  $\mu_1$  en  $\mu_2$  samenvallen op  $P$  en er  $\sigma$ -eindig zijn. Dan stemmen  $\mu_1$  en  $\mu_2$  overeen op  $\sigma(P)$ . Gebruik dit om de uitbreiding van de Lebesgue-Stieltjensmaten te maken.

3. Bewijs de stelling van Fubini voor niet-negatieve functies, alsook het voorgaande lemma dat de meetbaarheid van de gebruikte functies aantoonst.
4. Formuleer de stelling van de monotone convergentie. Bewijs hiermee dat het lemma van Fatou (+ formulering) en de gedomineerde convergentiestelling van Lebesgue (+ formulering).
5. Toon aan dat als  $f_n \rightarrow \mu$   $f_n \rightarrow \mu$   $f$  een deelrij bestaat  $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$  bestaat met  $f_{n_k} \rightarrow f$   $\mu$ -b.o. Gebruik deze stelling om een equivalente karakteristiek van convergentie in maat te bewijzen.
6. Bewijs de volledigheid van  $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ( $1 \leq p < \infty$ )  $L_p(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  ( $1 \leq p < \infty$ ).

## Januari 2013-2014

prof Uwe Einmahl

1. Definieer het begrip "uitwendige maat". We hebben gezien dat een maat op een subring  $\mathcal{F}$  kan uitgebreid worden naar een maat op een sigma-algebra (Uitbreidingsstelling). Hierbij werd die maat als volgt gedefinieerd  

$$\mu_*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \mid \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subset A, \mu(A_n) < \infty \right\}$$
  

$$\mu_*(A) = \inf \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) \mid \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n \subset A, \mu(A_n) < \infty \right\}$$

dat een uitwendige maat is (dit deel moet je niet bewijzen). Toon aan dat dit effectief een uitbreiding van de maat is op de sigma-algebra m.a.w. bewijs de Uitbreidingsstelling (behalve stap 1).
2. Geef de stelling van de Monotone convergentie (geen bewijs!). Baseer je hierop om het lemma van Fatou en de stelling van de Gedomineerde Convergentie te bewijzen (geef ze ook volledig!).
1. Geef de definities van convergentie in maat, convergentie  $\mu$ -bijna-overal en convergentie in  $L_p$ . Geef ook verbanden weer tussen deze eigenschappen of gedeeltelijke verbanden. Bewijs één van de verbanden en één verband dat niet geldt.

## Januari 2012-2013

prof Uwe Einmahl

1. Neem twee eindige maten  $\mu_1, \mu_2$  op  $\sigma$ -algebra's  $\mathcal{F}_1$  en  $\mathcal{F}_2$ .
  - o Definieer de product  $\sigma$ -algebra van  $\mathcal{F}_1$  en  $\mathcal{F}_2$ .
  - o Toon aan dat er een productmaat op deze  $\sigma$ -algebra bestaat en toon aan dat deze uniek is (tekening).

## Augustus 2012-2013

1. We hebben in hoofdstuk 1 de uitwendige maat gedefinieerd. Geef de uitbreidingsstelling en het bewijs alsook alle voorgaande lemma's (3) die hiervoor nodig zijn.
2. Zij  $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$  een maatruimte. Geef de definities van  $f_n \rightarrow f$   $\mu$ -b.o.,  $f_n \rightarrow f$  in maat en  $f_n \rightarrow f$  in  $L_p$ . Wat zijn hun verbanden?
  - o Geef en bewijs het lemma van Scheffé.
  - o Bijvraag: toon de verbanden aan.

## Oefeningen

### Januari 2022

1. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:  $D(\{a, b\} \subseteq \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{R})$  is een  $\sigma$ -algebra.
2. Zij  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$  disjuncte delen,  $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$ . Toon aan:  
 $\int_A f \, d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{A_n} f \, d\mu$
3. Zij  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  een maatruimte,  $1 < p < q < \infty$ . Toon aan:  
 $\forall f \in L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \cap L_q(\Omega, \mathcal{A}, \mu): \|f\|_p \leq \|f\|_q$
4. Beschouw de maatruimte  $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$  en de rij  $k_n = n \cdot 1_{[0, 1/n]} - n \cdot 1_{[1/n, 1]}$ . Convergeert  $(k_n)$  in maat? In  $L_1$ ? Convergeert  $\int k_n \, d\lambda$ ?

### Januari 2019

1. Zij  $X$  een overaftelbare verzameling,  $\mathcal{A} = \{E \subseteq X \mid E \text{ of } E^c \text{ hoogstens aftelbaar}\}$  en  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$  hoogstens aftelbaar. Toon aan:
  - o (2p) Toon aan dat  $\mathcal{A}$  een  $\sigma$ -algebra op  $X$  is.
  - o (2p) Toon aan dat  $\mu$  een maat op  $\mathcal{A}$  is.
2. (2p) Bestaat er een verzameling  $X$  met een aftelbaar oneindige  $\sigma$ -algebra op  $X$ ? Hint: Beschouw de collectie  $\{B_x \mid x \in X\}$  waarbij  $B_x = \{A \in \mathcal{A} \mid x \in A\}$ .
3. Gegeven een kansruimte en de metriek  $d(f, g) = \int |f - g| \, d\mu$  waarbij  $a \wedge b = \min(a, b)$ .
  - o (2p) Toon aan dat als voor elke rij meetbare functies  $(f_n)$  geldt dat  $f_n \rightarrow 0$  in  $P \Leftrightarrow d(f_n, 0) \rightarrow 0$  in  $P \Leftrightarrow d(f_n, 0) \rightarrow 0$  (\*), dat dan convergentie in maat equivalent is met convergentie voor de metriek  $d$ .
  - o (2p) Bewijs (\*). Gebruik hierbij de disjuncte unie  $\{|f_n| \leq \delta\} \cup \{|f_n| > \delta\}$  voor een geschikte  $\delta$  en dat  $\{|f_n| > \delta\} \subseteq \{f_n \wedge 1 > \delta\}$ .
4. (5p) Beschouw de maatruimte  $([0, 1], \mathcal{B}, \lambda)$  en de rij  $(f_n)$  waarbij  $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}: x \mapsto n \cdot 2^{-n} \cdot 1_{[0, 2^{-n}]}$ . Convergeert de rij  $(f_n)$  in  $L_1, L_2, L_3$ , in maat, bijna overal?  $(f_n)$  uniform integreerbaar?

5. (4p) Zij  $X$  een positieve toevalsvariabele en  $p > 0$  met  $E[Xp] < \infty$ . Bewijs dat  $E[Xp] = \int_0^\infty pXp-1P(X \geq x)dx$ .

## Januari 2016

prof Uwe Einmahl

1. Stel  $\mu_1$  en  $\mu_2$  uitwendige maten.
  - o Toon aan dat ook  $\mu_1 + \mu_2$  en  $\mu_1 \vee \mu_2$  uitwendige maten zijn.
  - o Bewijs ook dat  $M(\mu_1 + \mu_2) = M(\mu_1) \cap M(\mu_2)$  en  $M(\mu_1 \vee \mu_2) = M(\mu_1) \cup M(\mu_2)$ .
2. Stel  $\mathcal{F}$  een  $\sigma$ -algebra en  $\mathcal{S}$  een semiring zodat  $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{S})$ .
  - o Definieer  $\mathcal{S}^+$  als de collectie van eindige disjunctie unies van verzamelingen uit  $\mathcal{S}$ . Bewijs dat  $\mathcal{S}^+$  een ring is. (Hint: toon eerst aan dat het een  $\pi$ -systeem is.)
  - o Veronderstel dat  $\mu$  een maat is op  $(\Omega, \mathcal{F})$  en stel  $A \in \mathcal{F}$  en  $\epsilon > 0$ . Toon aan dat er verzamelingen  $B_1, \dots, B_n \in \mathcal{S}$  bestaan zodat  $\mu(A \Delta \bigcup_{j=1}^n B_j) \leq \epsilon$ .
  - o Stel  $f: \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$  een  $\mathcal{F}$ -meetbare functie met  $\int |f| d\mu < \infty$ . Toon aan dat er voor  $\epsilon > 0$  een  $\mathcal{F}$ -meetbare functie  $g(x) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{1}_{B_i}(x)$  bestaat zodat  $\int |f(x) - g(x)| d\mu \leq \epsilon$ .
3. Stel  $X: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$  een toestandsvaariabele.
  - o Toon aan dat  $E[e^{tX}] = 1 + \int_0^\infty e^{tx} P(X > x) dx$ .
  - o Gebruik voorgaande formule om de verwachtingswaarde van  $XX$  te berekenen met dichtheidsfunctie  $f(x) = \lambda - 1e^{-x\lambda}$  op  $[0, \infty)$ . ( $\lambda > 0$ ).

## Januari 2015

prof Uwe Einmahl

1. We werken op  $(\mathbb{R}, \mathcal{R}, \lambda)$ .
  - o Toon aan dat voor  $f \in L^1(\mathbb{R})$  met  $\lambda(A) < \infty$ , er een functie  $g \in C(\mathbb{R})$  bestaat zodat  $\int |f - g| d\lambda < \epsilon$  en  $\text{supp}(g) \subseteq \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < \epsilon\}$ .
  - o Zij  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  en  $\int |f| d\lambda < \infty$ , bewijs dan dat er een functie  $g \in C(\mathbb{R})$  bestaat zodat  $\int |f - g| d\lambda < \epsilon$  en  $\text{supp}(g) \subseteq \{x \in \mathbb{R} : |f(x)| < \epsilon\}$ .
  - o Stel  $f_\delta(x) = f(x + \delta)$ . Bewijs dan dat  $\lim_{\delta \rightarrow 0} f_\delta = f$  in  $L^1$ .
2. Stel  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  een rij stochastische variabelen waarvoor geldt dat  $P(X_n = n-1) = n-2$  en  $P(X_n = -1) = 1 - n - 2P(X_n = -1) = 1 - n - 2$ .
  - o Toon aan dat  $\sum_{n=1}^\infty P(X_n = -1) < \infty$ . (Hint: toon aan dat  $P(\liminf_{n \geq 1} X_n = -1) = 1$ ).
3. We werken met  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0, 1])$ ,  $P = \lambda|_{[0, 1]}$ . Stel  $m_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[i/n, (i+1)/n]}$  en  $M_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{[i/n, (i+1)/n]}$ . Stel dan  $X_1 = \mathbf{1}_{[0, 1]}$  en  $X_{n+1} = \mathbf{1}_{[0, 1]}$  en  $X_{n+1} = \mathbf{1}_{[0, 1]}$  en  $X_{n+1} = \mathbf{1}_{[0, 1]}$  voor  $1 \leq n \leq \infty$ .
  - o Convergeert de rij in maat, bijna overal? Is ze uniform integreerbaar? Voor welke waarden is ze convergent in  $L^r$  ( $r > 0$ ), niet gehele getallen toegelaten!
4. Stel  $A_i$  onafhankelijke gebeurtenissen. Stel dat  $P(\bigcup_{i=1}^\infty A_i) = 1$  en  $P(A_i) < 1$  voor alle  $i$ .
  - o Bewijs dat  $P(\limsup_{n \geq 1} A_n) = 1$ .
  - o Wat als  $\sum_{i=1}^\infty P(A_i) < \infty$ ?
5. Bewijs dat voor  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reëel waardige stochastische variabelen geldt  $X_n \rightarrow 0 \Leftrightarrow E(|X_n|) \rightarrow 0$ .

## Januari 2012

prof Uwe Einmahl

1.
  - o Toon aan dat voor de Borel  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$  op  $\mathbb{R}$  geldt dat  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\{[r, \infty) : r \in \mathbb{R}\})$ .
  - o Bewijs dat iedere monotone, niet dalende functie  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ -meetbaar is.
2. Zij  $\Omega$  een verzameling,  $\mathcal{F}$  een  $\sigma$ -algebra op  $\Omega$  en  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{F}$  met  $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{F}$ .
  - o Toon aan dat voor elke  $A \in \mathcal{F}$  een hoogstens aftelbare deelverzameling  $S_A \subseteq \mathcal{S}$  bestaat zodanig dat  $A \in \sigma(S_A)$ .
  - o Toon verder aan dat als  $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$   $\mathcal{F}$ -meetbaar is, dat dan ook een hoogstens aftelbare deelverzameling  $S_f \subseteq \mathcal{S}$  bestaat zodanig dat  $f \circ \sigma(S_f)$  meetbaar is.

3. Zij  $\mathbb{R}$  de Borelσ-algebra op  $\mathbb{R}$  en  $\mu$  een eindige maat op  $\mathbb{R}$ . Definieer  $G: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $G(x) = \int_{-\infty}^x \mu(\{t \leq x\}) dt$  en  $H: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$ ,  $H(x) = \int_x^{\infty} \mu(\{t \geq x\}) dx$  en zij verder  $c > 0$ . Bereken  $\int_{-\infty}^{\infty} (G(x+c) - G(x)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (H(x+c) - H(x)) dx$ . (Hint: Toon aan dat je deze integraal kan schrijven als de productmaat van een gepaste Borelverzameling in  $\mathbb{R}^2$ . Je moet ook aantonen dat deze verzameling een Borelverzameling in  $\mathbb{R}^2$  is.)
4. Beschouw de kansruimte  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  waar  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{R} | A \subseteq [0, 1]\}$ ,  $P(A) = \lambda(A)$  en  $P(A) = \lambda(A)$ . Beschouw de rij  $(X_n)_{n \geq 1}$  waar  $X_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega_k$ ,  $\omega_k \in [0, 1]$ . Convergeert de rij  $(X_n)_{n \geq 1}$  bijna overal? Is  $(X_n)_{n \geq 1}$  uniform integreerbaar?
5. Zij  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{R} | A \subseteq [0, 1]\}$ ,  $P(A) = \lambda(A)$  en  $R = \lambda|_{\mathcal{F}} = \lambda|_{\mathcal{F}}$ . Stel  $X_n = \frac{1}{n} \log \frac{1}{\omega}$ ,  $n \geq 1$ . Toon aan dat:
  - $E[X_n] \rightarrow 0$
  - $\{X_n | n \geq 1\}$  is uniform integreerbaar.
  - Er bestaat geen integreerbare toevalsvariabele  $Y: \Omega \rightarrow [0, \infty]$  zodat  $\forall n \geq 1: |X_n| \leq Y$ . (Hint: bepaal  $\sup_{n \geq 1} E[X_n]$ .)

## Augustus 2012

1. Zij  $\Omega$  een niet-lege verzameling en  $\mu_i, i=1, 2$  uitwendige maten op  $2^\Omega$ . Toon aan dat  $\mu_1 + \mu_2$  ook een uitwendige maat is en bewijs dat  $M(\mu_1 + \mu_2) = M(\mu_1) \cap M(\mu_2)$  als  $\mu_1(\Omega) + \mu_2(\Omega) < \infty$ .
2.
  - Zij  $A = \{[a, b] | a, b \in \mathbb{Q}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$ . Toon aan dat deze klasse van verzamelingen een semiring is en dat  $\mathcal{R}(\mathcal{A})$  de Borelσ-algebra voortgebracht door deze klasse is.
  - Zij  $\mu: \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$  een maat die eindig is voor de compacte delen  $\mathbb{R}$  en zodanig dat  $\forall x \in \mathbb{R}: \mu(A+x) = \mu(A) \forall A \in \mathcal{R}$ . Bewijs dat  $\exists c \in [0, \infty]: \mu = c\lambda$
3. Stel  $A_n, n \geq 1$  onafhankelijke gebeurtenissen zodat  $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = 1$  en  $P(A_n) < 1, n \geq 1$ . Bewijs dat  $P(\limsup A_n) = 1$ .
4. Stel  $X$  een positieve toevalsvariabele met  $E[X^4] < \infty$ . Bewijs dat  $E[X^4] = 4 \int_0^{\infty} x^3 P(X > x) dx$ .
5. Beschouw de kansruimte  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  waar  $\Omega = [0, 1]$ ,  $\mathcal{F} = \mathcal{B}$  Borel delen van  $[0, 1]$  en  $P = \lambda|_{\mathcal{F}} = \lambda|_{\mathcal{F}}$ . Beschouw de rij  $(X_n)_{n \geq 1}$  waar  $X_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $X_n(\omega) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \omega_k$ ,  $\omega_k \in [0, 1]$ . Convergeert de rij  $(X_n)_{n \geq 1}$  bijna overal? Is  $(X_n)_{n \geq 1}$  uniform integreerbaar?

## Categorieën:

- [Wiskunde](#)
- [3BWIS](#)
- [2BWIS](#)