Discrete Wiskunde

tuyaux.winak.be/index.php/Discrete_Wiskunde

Discrete Wiskunde

Richting	Informatica
Jaar	1BINF

Bespreking

Het eerste wiskunde-vak van de opleiding Informatica, maar wees gerust, in dit vak sparen ze je nog een beetje. Dit vak wordt gedoceerd door professor Symens en zoals je al waarschijnlijk hebt gemerkt: er wordt doorgewerkt. Er is normaal een cursus beschikbaar op de cursusdienst van CGB, het wordt ten sterkste aangeraden deze te kopen aangezien hier bijna alles wordt uitgelegd. Het leermateriaal bestaat uit de cursus, je eigen extra nota's en uit een handboek. Dit handboek is best goed, de leerstof wordt er goed en correct in uitgelegd, er staan veel voorbeelden in. Soms wijdt men in dit boek wat teveel uit over bepaalde zaken die je misschien eens kunt lezen maar voor de rest niet te veel van moet aantrekken.

Op het theorie-examen wordt er voornamelijk naar definities, stellingen en bewijzen gevraagd. Het is dus best eenvoudig om een samenvatting te maken met daarin al deze informatie en dit te leren. Luister ook steeds naar de tips die professor Van Steen geeft, heel vaak geeft hij aan bij bepaalde stukken uit de cursus dat dat deel belangrijk is. Als hij dit zegt, noteer dit dan ook want dit zijn de delen waaruit hij vragen stelt.

De praktijk volgt gewoon de theorie van het boek en als je de voorbeelden uit het boek begrijpt zullen deze oefeningen ook niet echt een struikelblok vormen. Let wel op om bij de theorie en praktijk zo formeel mogelijk te antwoorden en alle uitzonderingen te noteren. Dus als je antwoord 1x1x is (het is maar een voorbeeld), noteer er dan bij dat dit geldt $\forall x \neq 0 \forall x \neq 0$. Ook het gebruik van symbolen in plaats van ellenlange zinnen wordt aangemoedigd.

Puntenverdeling

Theorie: 10/20. Praktijk 10/20.

Examenvragen

Academiejaar 2022 - 2023 - 1ste zittijd

1. A = { 1,2,3,4 } B = { 1,2,3,4,5}
    1. Bepaal het aantal injectieve functies van A -> B (5!)
    2. Bepaal het aantal surjectieve functies van A> B : (Antwoord = 0?)
2. $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + 1 = 0$, Bewijs dat de oplossing van deze functies geen rationaal getal is.

3. Bewijs lemmas: als x even -> x^5 , x^4 , x^3 , x^2 = even (analoog voor oneven, via contradictie)
4. Gegeven een verzameling: A = { 1,2,3,....,100}
5. Hoeveel deelverzamelingen bevat minstens 1 element die deelbaar zijn door 5 of door 2
6. Bewijs een formule via inductie
7. Voorwaardelijke kans + Bayes
8. Er zijn 3 boogschutters. De kans dat persoon a in de roos schiet = 1/3 van persoon b = 1/6 persoon c = 1/4

   Bereken de kans dat als je weet dat 1 van de 3 in de roos geschoten hebt, dat dit persoon a was.
9. Geziene oefening uit de cursus. X ~ N(p , o) Bereken de standaardafwijking (o). p/mu is gegeven incl. een kans-waarde. Reken o hiermee uit.
   1. Bereken P(X < 0,03) (Hiervoor heb je dus de standaardafwijking nodig)
10. de PNF (sum of products) van een Booleeanse functie = <...> Geef een zo kort mogelijke CNF (products of sums) Gebruik Karnaugh Maps
11. Zoek een gesloten formule adhv generende functies
12. Geef de definitie van een functie
13. geef de definitie van een surjectieve functie
14. voor g en f, g°f is een surjectieve functie:
    1. is f surjectief?
    2. is g surjectief?
    3. indien ja, bewijs
    4. geef anders een tegenvoorbeeld in N -> N
15. geef de definitie van een kansveranderlijke
16. wat is "X~B(n, p)" ? leg uit...
17. wat is Var(X) ? geef en bewijs
18. geef of bewijs Chebichef.
19. bewijs regel van Bayes en somregel.
20. genererende functie: geef een gesloten formulle voor Sn = A * S(n-1) + B
21. Wat is een bijectieve functie? (in symbolen)
22. Wat is aftelbaar? Bewijs dat Q aftelbaar is en R niet.
23. Wat is een toevalsveranderlijke?
24. Wat is de kansdichtheidsfunctie?
25. Wat is de verwachtingswaarde van NB? bewijs dit.

Academiejaar 2021 - 2022 - 1ste zittijd

Theorie Examen

(Groep 1 werd verplaatst naar andere groepen)

Groep 2

- Wat is een equivalentierelatie, equivalentieklasse, partitie? Geef ook het verband tussen deze laatste 2 (bewijs dit verband).
- Wat is een herhalingscombinatie? Geef de formule en leid deze af.
- Wat is een toevalsveranderlijke? Als X~B(n,p), wat is E[X]? Bewijs dit laatste.

- Hoe kan je de binomiale verdeling voorstellen met een Poisson-verdeling? Geef ook het bewijs dat dit klopt.
- Wat is een inverse genererende functie? Waneer bestaat die (bewijs)? Wat is het nut?

Academiejaar 2019 - 2020 - 1ste zittijd

Theorie Examen

Groep 1

- Wat is een partieel geordende verzameling? Wat is reflexief, antisymmetrisch, transitief (symbolisch), stel een gegeven verzameling, toon aan dat deze reflexief, antisymmetrisch en of transitief is. Is dit een totale orde? Wat is minima en minimaal element? Stel v=2xv=2x en x=a,b,cx=a,b,c: Bewijs dat dit een partiele ordening is.
- ∑nk=0k∗(nk)∑k=0nk∗(nk). Geef een gesloten formule hiervoor en bewijs.
- Wat is een posson verdeling (symbolisch)? Leid de verwachtingswaarde af. Wat is een toevalsveranderlijke. Bewijs E(x+y)=?E(x+y)=?. Bewijs voor hetzelfde ook de var.
- Geef de wet van grote getallen en bewijs. Geef ook Chebychev.
- Genererende functies: Reken een rijtje uit. (Je kreeg een rij, maar er kwamen geen getallen in voor, enkel symbolen)

Groep 2

- Wat is een aftelbare verzameling, bewijs QQ is aftelbaar en RR is niet aftelbaar. Is NxNNxN aftelbaar?
- Bewijs via inductie het Binomium van Newton.
- Wat is een poisonverdeelde toevalsveranderlijke? Wat is de varianti ervan? Bewijs.
- Wat is een normaalverdeelde toevalsveranderlijke? Hoe en wanneer kunnen we hier een binomiale verdeling mee benaderen?
- Wat is het dualiteitsprincipe en bewijs.

Groep 3

- Wat is een functie en een injectieve functie (in symbolen)? Neem ff, gg injectief, bewijs dat f∘gf∘g injectief is of geef een tegenvoorbeeld als dit niet altijd zo is.
- ∑nk=0(nk)∑k=0n(nk): Bewijs via inductie.
- Wat is de formule voor de variantie van een binomiale verdeling? Bewijs.
- Bewijs E[x+y]E[x+y] en var(x+y)var(x+y) en geef de voorwaarde hiervoor.
- Wat is een genererende functie en de inverse ervan? Wanneer bestaat de inverse niet? Bewijs.

Groep 4

- Wat is een relatie, equivalentierelatie en equivalentieklasse? Toon aan dat twee verschillende equivalentieklasses disjunct zijn.
- Geef en bewijs het binomium van Newton.
- Wat is een toevalsveranderlijke? Toon aan dat de som van XX ~ NB(n,p)NB(n,p) P(Xi)=1

  P(Xi)=1

  .
- Leg de paradox van Simpson uit met een voorbeeld.

- S0,a,bS0,a,b gegeven: Geef de niet-recursieve formule voor Sn=aSn−1+bSn=aSn−1+b. Bewijs.

Groep 5

- Geef de definitie van een relatie, equivalentieklassen en een partitie. Toon aan dat alle equivalentierelaties partities zijn.
- Wat is inductie? Geef alle verschillende soorten inductie. Bewijs via inductie ∑i=0nk2=n(n+1)(2n+1)6

  ∑i=0nk2=n(n+1)(2n+1)6

  .
- Wat is een binomiaal verdeelde toevalsveranderlijke? Bewijs E(x).
- Wat is het dualiteitsprincipe? Leg uit a.d.h.v. de terminologie. Toon aan en geef alle definities die in deze eigenschap voorkomen (verduidelijk).
- Bewijs de regel van Bayes en de somregel.

Groep 6

- Wat is een functie en een injectieve functie (in symbolen)? Neem ff, gg injectief, bewijs dat f∘gf∘g injectief is of geef een tegenvoorbeeld als dit niet altijd zo is.
- ∑nk=0k∗(nk)∑k=0nk∗(nk). Geef een gesloten formule hiervoor en bewijs.
- Wat is een toevalsveranderlijke? Toon aan dat de som van XX ~ NB(n,p)NB(n,p) P(Xi)=1

  P(Xi)=1

  .
- Gegeven twee poissonverdelingen P(λ1),P(λ2)P(λ1),P(λ2). Bewijs dat P(λ1+λ2)=kP(λ1+λ2)=k en dat dit nogsteeds poissonverdeeld is.
- S0,a,bS0,a,b gegeven: Geef de niet-recursieve formule voor Sn=aSn−1+bSn=aSn−1+b. Bewijs.

Oefeningenexamen (inhaalversie wegens ziekte)

- f:Z2→Z2:(x,y)↦{(x,y+1)voor zelfde paar(x+1,y)voor ander paarf:Z2→Z2:(x,y)↦{(x,y+1)voor zelfde paar(x+1,y)voor ander paar Is dit bijectief, ...?
- (a1,b1)R(a2,b2)⇔a1+b2=b1+a2.(a1,b1)R(a2,b2)⇔a1+b2=b1+a2.
- x2+x+3x=0x2+x+3x=0. Toon aan dat x niet rationaal is.
- Toon aan via inductie dat voor de fibonaccigetallen {F2n=F2n+1−F2n−1∀n≥2F2n+1=F2n+1−F2n∀n≥2

  {F2n=Fn+12−Fn−12∀n≥2F2n+1=Fn+12−Fn2∀n≥2

- We gooien met 2 dobbelstenen en noemen X de hoogste waarde van beide dobbelstenen.
  - Geef de kansdichtheidsfunctie.
  - Geef E[x] en σxσx
- 5 gele en 3 blauwe ballen liggen in een bak. Als ik een bal pak, leg ik deze terug plus een bal van dezelfde kleur erbij.
  - Wat is de kans dat de tweede bal die ik neem geel is?
  - Wat is de kans dat de eerste bal die ik neem blauw was, als de tweede geel is.

- $(x,y,z,u)_2(x,y,z,u)_2$ stellen de getallen van 0 tot 15 voor. De getallen {1, 2, 6, 7, 8, 9} geven een 1. Schrijf zo kort mogelijk in DNF en CNF.
- Zet om naar een niet-recursieve formule
  ⎧⎩⎨⎪⎪⎪⎪a0=2a1=2a3=19an=an−1+8an−2−12an−3 voor n≥2
  $$\begin{cases} a_0=2 \\ a_1=2 \\ a_3=19 \\ a_n=a_{n-1}+8a_{n-2}-12a_{n-3} \text{ voor } n\geq 2 \end{cases}$$

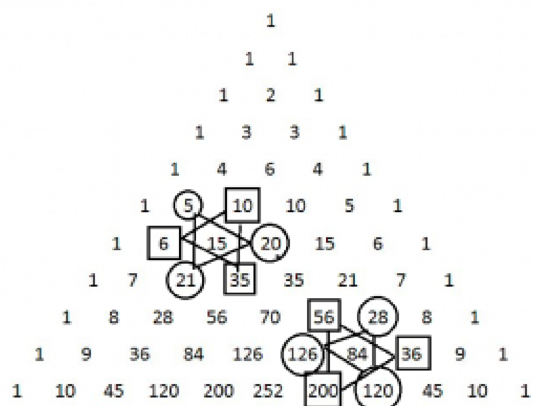
Academiejaar 2018-2019 - 2de zittijd

Theorie Examen

1. Wat is een equivalentierelatie en een quotientverzameling. Geef ook een voorbeeld van een quotientenverzameling met vijf elementen.
2. Wat zijn lucasgetallen en geef hierbij het bewijs.
3. Geef en bewijs de somregel en de regel van Bayes.
4. Wat is binomiaal verdeling, geef de definitie van een toevalsveranderlijke en bewijs de verwachtingswaarde.
5. Leg uit: Karnaugh maps.

Oefeningen Examen

1. Geef voor welke $n\in\mathbb{N}n\in\mathbb{N}$ aan of de functie ff gegeven door het voorschrift $f_n:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}:x\mapsto(x-1)x^n f_n:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}:x\mapsto(x-1)x^n$ injectief, surjectief en/of bijectief is.
2. De getallenrij 3, 6, 12, 22, 37, 58 heeft een veeltermvoorschrift van lage graad. Welke veelterm is dit en welk is de volgende term van de rij?
3. Toon aan via inductie dat $\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}\sum_{k=1}^{n}F_k^2=F_nF_{n+1}$ waarbij F_kF_k staat voor het k-de Fibonaccigetal (Met $F_1=F_2=1F_1=F_2=1$).
4. In de driehoek van Pascal kunnen we "zeshoeken" ontdekken met een bijzondere eigenschap zoals in de volgende figuur. In elke "zeshoek" blijkt het product van de 3 vette getallen gelijk te zijn aan het product van de 3 getallen in een kadertje. Dit blijkt te kloppen voor elke "zeshoek". Schrijf deze zeshoekeigenschap in een combinatorische identiteit met binomiaal coefficienten en bewijs deze gelijkheid.
5. In de familie Dossijn zijn er 12 kinderen. De familie verhuist naar een nieuw huis, maar het huis heeft maar 10 kinderkamers. Hoeveel verschillende manieren zijn er om de kinderen te slapen te leggen als er in elke kamer minstens 1 kind moet slapen. Het is bij deze vraag niet alleen van belang wie met wie slaapt, maar ook in welke kamer ze liggen.



Twee voorbeelden van zeshoeken in de driehoek van Pascal. Voor elk zo'n zeshoek is het product van de vierkantjes gelijk aan het product van de cirkeltjes

6. Op een mondeling examen taalkunde moet je precies 1 vraag beantwoorden. Dit kan een vraag zijn van Frans, van Engels of van Nederlands en deze vragen komen voor met de kansen 30%, 20% en 50%. Veronderstel dat je bij de voorbereiding van het examen 9 van de 10 vragen van Frans kon oplossen, 2 van de 10 vragen van Engels kon oplossen en 6 van de 10 vragen van

Nederlands kon oplossen. Veronderstel nu dat je de vraag van het examen kon oplossen. Wat is nu de kans dat dit een vraag van Frans was?

7. Op een slopend meerkeuze-examen krijgen de studenten 108 vragen voorgeschoteld, met elk 4 antwoordmogelijkheden. Bij elke vraag verdien je 1 punt bij een goed antwoord, 0 bij een fout. Er is geen giscorrectie. Gebruik de tabel van de normale verdeling om te benaderen wat de kans is op strikt meer dan 40 juiste antwoorden indien je bij elke vraag zuiver gokt.
8. (xyzu)2(xyzu)2 is de binaire schrijfwijze van getallen uit {0, 1, 2, 3, ..., 15}. De functie P wordt gedefinieerd door P:0,14→0,1:(x,y,z,u)↦{1 indien 3≤(xyzu)2≤90 indien niet P:0,14→0,1:(x,y,z,u)↦{1 indien 3≤(xyzu)2≤90 indien niet Gebruik nu Karnaugh maps voor de volgende opgaves.
    1. Schrijf P als som van producten van literals met zo weinig mogelijk literals.
    2. Schrijf P als product van sommen van literals met zo weinig mogelijk literals.
9. Gebruik genererende functies om een antwoord te geven op de volgende vraag: Veronderstel dat 100 identieke tickets gegeven worden aan 40 kinderen voor de draaimolen op de kermis. Op hoeveel manieren kan dit gebeuren als elk kind minstens 2 kaartjes moet krijgen.
10. Los de volgende recursievergelijking op. a0=0,a1=6,an=−3an−1+10an−2+3·2n als n≥2.a0=0,a1=6,an=−3an−1+10an−2+3·2n als n≥2.

Academiejaar 2018-2019 - 1ste zittijd

Theorie Examen

Groep 1

1. Wat is aftelbaar? Is Q aftelbaar? is R aftelbaar? Toon aan.
2. Bewijs het binomium van Newton via inductie
3. Wat is een toevalsveranderlijke. Wat is een TV die poisson verdeeld is? (+kansdichtheidsfunctie), X~P(λ) => Var(x) = ?, Bewijs
4. is 2**N aftelbaar? Toon aan (staat ni in de cursus denkk, bewijs is een doordenkertje) 5) Geef en bewijs Chebychev en geef een toepassing hiervan
5. Los vraag 10c van het oefeningenexamen op adhv de verkorte notatie van genererende functies (geef een expliciet voorschrift voor: (1+3x+9x**2+27x**3+...)**2 * (1+2x+4x**2+8x**3+...)
6. Geef zo'n algemeen mogelijk stappenplan om een recursief voorschrift expliciet te maken mbv genererende functies. Voor welke functies is dit allemaal mogelijk?

```
Antwoord oefening 4: Bewijs gelijkaardig aan R aftelbaar. Stel elke verzameling voor
adhv enkel 0'en en 1'en, waarbij een 0 op plaats n betekent dat het n-de element van N
niet in de verzameling zit, een 1 wel. Stel 2**N is aftelbaar, dan kan je alle
verzamelingen op een rijtje zetten, bv:
0 - {0, 3, 4} - 10011000000000000000000...
1 - {1} - 010000000000000....
2 - {1, 6} - 01000010000000000...
=> Nieuwe verzameling maken door een diagonaal te nemen (gelijkaardig aan bij R), en
iedere 0 veranderen in een 1 en iedere 1 veranderen in een 0, dan krijg je in dit
voorbeeld: 001...........
=> Deze verzameling zit er nog niet in, want moest die er wel inzitten, bv. op rij N,
dan klopt het element op de n-de plaats niet
```

Groep 2

1. Wat is een equivalentierelatie, wat is een partitie en wat is het verband?
2. Geef en bewijs het binomium van Newton?
3. Wat is een toevalsveranderlijke? Wat is een toevalsveranderlijke die poisson-verdeeld is? Geef de variantie van een poisson-toevalsveranderlijke en bewijs?
4. E[X+Y] = ? en bewijs, var(x+y)=? en bewijs.
5. wat is een genererende functie en gebruik deze om voor An=l*A(n-1)+k een gesloten formule te vinden

Groep 3

1. Definitie van functie, surjectieve functie en bewijs dat als f, g surj. functies, f ° g ook surjectief + geef tegenvoorbeeld in omgekeerde richting.
2. Constructieve inductie, uitleg + voorbeeld
3. Regel van Bayes bewijzen + wa ge er voor nodig hebt ook ff bewijzen
4. Wat is een toevalsveranderlijke + Negatieve Binomiaal bewijzen
5. Genererende functies, uitleg + hoe vorm je een recursieve vorm om naar een gesloten vorm.

Groep 4

1. Definitie van een functie Definitie van surjectieve functie f, g surjectief => f°g surjectief Geef een tegenvoorbeeld waarom er geen equivalentiepijl is
2. Definitie van structurele inductie Voorbeeld (Binaire boom) eig |V| = |E| + 1 bewijs deze eigenschap
3. Geef de regel van Bayes Bewijs de regel van Bayes (+ somregel)
4. Definitie TV Definitie NB TV Geef E[X] = ? + Bewijs
5. Algemeen aantonen hoe je van een recursief gedefinieerde formule een gesloten formule kunt verkrijgen via genererende functies En geef aan waar deze formule voor kan werken

Groep 5

1. Wat is een injectieve functie (verklaar functie, injectief), bewijs f,g injectief dus f°g injectief, of zeg waarom dit niet geldt met een tegenvoorbeeld
2. vul aan en bewijs ∑np=0∑p=0n (np)(np) = ?, bijvraag; ∑np=03p∑p=0n3p (np)(np) = ?
3. Wat is een toevalsveranderlijke? Wat is een Poissonverdeelde toevalsveranderlijke? x∼P(λ)x∼P(λ) bewijs E[X]=?E[X]=?
4. Bewijs regel van Bayes + somregel bewijzen als bijvraag
5. Wat is een inverse genererende functie en wanneer komt deze voor?

Praktijk Examen

1. Gegeven is de functie f:N→2Nx(Nf:N→2Nx(N \ 2N):n↦(2n,2n+1)2N):n↦(2n,2n+1) is f injectief, surjectief of bijectief?
2. Bewijs dat log23log23 een irrationaal getal is
3. bewijs via inductie dat x2+y2+z2=14nx2+y2+z2=14n gehele oplossingen (x,y,z)∈Z3(x,y,z)∈Z3 heeft ∀n∈N∀n∈N

4. Geef de aantal mogelijke partiële ordeningen van de verzameling V={1,2,3,4}V={1,2,3,4} (= aantal hassediagrammen van deze verzameling)
5. Gegeven voor vakantiegangers:
    - 40% checken hun werkemail
    - 30% gebruiken hun smartphone
    - 25% nemen hun laptop mee
    - 23% checken hun werkmail en gebruiken hun smartphone
    - 51% checken hun email niet, gebruiken geen smartphone en nemen geen laptop mee
    - 88% van degene die hun laptop mee hebben, checken hun werkemail
    - 70% van degene die hun smartphone gebruiken, nemen hun laptop mee

    ```
    Wat is de kans dat iemand die een laptop meenemeent en zijn werkmail checkt ook zijn smartphone gebruikt?
    ```
6. Geef de genererende functie van de positieve oneven getallen, geef ook de kortere notatie hiervan (begin bij 0)
7. X en Y zijn verzamelingen (|X| = 5 en |Y| = 7). Hoeveel verschillende functies f:x→yf:x→y bestaan die als beeld exact 3 waardes heeft? (|Im(f) = 3|

Academiejaar 2017-2018 - 1e zittijd

Oefeningen Examen

Bestand:INFDW201801.pdf

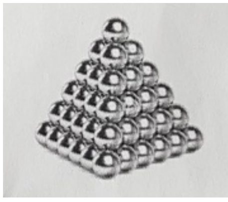
Academiejaar 2016-2017 - 2e zittijd

Theorie Examen (Groep ?)

1.
    - Wat zijn de voorwaarden van een functie?
    - Wat is een injectieve functie?
    - Wat volgt er uit f°g injectief? (+ bewijs)
    - Volgt ook het tegengesteld? (+ tegenvoorbeeld)
2. Bewijs het binomium van Newton
3.
    - Wat is een toevalsveranderlijke?
    - Geef de definitie van een toevalsveranderlijke die negatief binomiaal verdeeld is.
    - Geef de negatief binomiale kansdichtheidsfunctie (en bewijs hoe je hieraan komt en of deze klopt).
4.
    - Geef het convolutieproduct.
    - Geef en bewijs var(X+Y).
5.
    - Wat zijn genererende functies?
    - Wat is een inverse genererende functie?
    - Bestaat deze altijd? (+ bewijs)

Praktijk Examen

1. Geef van de volgende relatie op N0N0 aan of het al dan niet een equivalentierelatie of een partiële ordening is:
   {(x,y)∈N0×N0 | x is deler van 2y(x,y)∈N0×N0 | x is deler van 2y}
   Geef indien mogelijk ook de bijhorende partitie of het bijbehorende Hasse diagram.
2. Bewijs dat voor elke a,b∈Ra,b∈R geldt dat:
   ||a|−|b||≤|a−b|||a|−|b||≤|a−b|.
3. Geef een formule die bepaalt hoeveel ballen er nodig zijn om een driehoekige piramide met nn lagen te maken. Bewijs de formule ook via inductie.
   In onderstaande figuur is n=6n=6

4. Op een huwelijk zijn er 30 gasten en 3 tafels van 10 personen. Op hoeveel manieren kunnen we hen in 3 groepen van 10 splitsen zodat Jos niet bij Janne aan tafel zit en Luc niet bij Louise aan tafel zit? (De volgorde van de groepen maakt dus niet uit, de plaats aan de tafel ook niet).
5. Op de tafel staan 3 vazen met genummerde ballen. In vaas 1 zitten de ballen 1 tot en met 4, in vaas 2 zitten de ballen 5 tot en met 7, in vaas 3 de ballen 8 tot en met 12.
   1. Je trekt lukraak een vaas en dan uit die vaas lukraak een bal. Deze blijkt een even nummer te hebben. Wat is de kans dat je uit vaas 3 hebt getrokken?
   2. Je trekt lukraak 2 ballen (eerst de vaas, dan de bal), zonder teruglegging. Wat is de kans dat beide ballen dezelfde pariteit (even/oneven) hebben?
6. Op kantoor laat een diensthoofd zijn secretaresse 4 brieven versturen. Na het schrijven van het adres op de enveloppe steekt ze de afgedrukte brieven lukraak in de geadresseerde enveloppen. De toevalsveranderlijke XX telt het aantal brieven dat in de juiste enveloppe terechtkomt. Bereken de verwachtingswaarde en de standaardafwijking van dit aantal XX.
7. Vijf mensen die rode hoeden dragen verspreiden een roddel. In het eerste uur vertelt ieder van hen de roddel aan een persoon die nog geen rode hoed draagt. Deze nieuwe *insiders* zetten dan onmiddellijk een rode hoed op en verspreiden dan de roddel verder. Dezelfde trend zet zich verder volgens de volgende regel dat elke persoon de roddel aan 1 persoon vertelt in het eerste uur nadat hij/zij de roddel heeft gehoord en aan 9 personen in elk daaropvolgende uur. Niemand zet zijn/haar hoed af. Hoeveel mensen dragen rode hoeden na nn uur?
   [Hint: Gebruik genererende functies]

Academiejaar 2016-2017 - 1e zittijd

Bestand:INFDW201701.pdf

Academiejaar 2015-2016 - 1e zittijd

Praktijk Examen

Bestand:INFDW201601.pdf

Theorie Examen (Groep 1)

1. Definieer:
    - een relatie
    - een equivalentierelatie
    - een equivalentieklasse
    - een partitie
      + leg verband uit
      + geef een voorbeeld van een equivalentierelatie op ZZ zodat de quotientverzameling eindig is.

2. Wat is inductie? Bewijs via inductie
   ∑i=1ni2=n(n+1)(2n+1)6

   ∑i=1ni2=n(n+1)(2n+1)6

3. Wat is een poissonverdeelde toevalsveranderlijke? X is een poissonverdeelde toevalsveranderlijke, wat is E[x]? + bewijs
4. Leg het verschil uit tussen een discrete en continue verdeling + Hoe benaderen we een discrete verdeling d.m.v. een normale verdeling?
5. Karnough maps (hoe, wat, waarom?)

Academiejaar 2014-2015 - 1e zittijd

Praktijk Examen

1. Gegeven is de functie f:N×Z→Z:(x,y)→2x(2y−1)f:N×Z→Z:(x,y)→2x(2y−1). Is ff injectief, surjectief? Welke aanpassingen zijn nodig aan het domein en/of bereik om van ff een bijectie te maken?
2. Gegeven is de familie van verzamelingen Ω={A,B,C,D,E}Ω={A,B,C,D,E}, met
    - A=A= de verzameling anagrammen van "scheel"
    - B=B= de verzameling anagrammen van "straat"
    - C=C= de verzameling anagrammen van "water"
    - D=D= de verzameling anagrammen van "zeeeend"
    - E=E= de verzameling anagrammen van "aantal"

   en de relatie "heeft minder dan of even veel elementen als" tussen verzamelingen in ΩΩ. Is deze relatie reflectief, symmetrisch, antisymmetrisch, transitief? Is ze dan een equivalentierelatie of een partiële ordening? Maak een diagram van de partities of de bijbehorende Hasse-diagram.
3. Toon aan dat een som van drie derdemachten nooit 4 of 5 kan geven als rest bij deling door 9.
4. Bewijs via volledige inductie dat
   ∑k=1n(−1)kk2=n(n+1)2

   ∑k=1n(−1)kk2=n(n+1)2

   voor alle even n∈N0n∈N0.

5. Onderzoek in een gezin van twee kinderen de volgende gebeurtenissen:
    - A: er zijn kinderen van beide geslachten.
    - B: er is hoogstens één jongen.

   Zijn A en B onafhankelijke gebeurtenissen? En in een gezin van drie kinderen?
6. (Grote teloefening met Venn-diagrammen.)
7. Een machine vult zakjes (met iets?) waarvan de massa normaal verdeeld is met μ = 250g en σ = 20g. Als je een verpakking krijgt waarvan je weet dat het gewicht tussen 240g en 280g ligt, wat is dan de kans dat de verpakking meer dan 260g weegt?
8. Bepaal via genererende functies een expliciet voorschrift voor de reeks a0=1;an=2an−1+3n+1a0=1;an=2an−1+3n+1.

Theorie Examen (groep F)

1. Wat is een aftelbare verzameling?
   Toon aan dat:
   a. Q aftelbaar is
   b. R niet aftelbaar is
2. ∑ni=0(ni)=?∑i=0n(ni)=? Vul aan en bewijs via inductie.
3. Stel X,Y toevalsveranderlijken
   E[X+Y]=? +bewijs
   VAR(X+Y) = ? + bewijs
4. Wat is een binomiaalverdeelde toevalsveranderlijke X?
   E[X] = ? + bewijs
5. Leg uit:
   Duale expressies/Dualiteitswet + geef enkele voorbeelden

Academiejaar 2013-2014 - 1e zittijd

Theorie Examen

Groep 1

1. Wat is een functie? Wat is een surjectieve functie? Als f∘gf∘g surjectief is, is ff surjectief, is gg surjectief? Bewijs of geen een tegenvoorbeeld voor elk.
2. Geef en bewijs
   ∑k=0n(nk)=?

   ∑k=0n(nk)=?

3. Wat is een randomvariabele? Wat is een kansdichtheidsfunctie? Geef de kansdichtheidsfunctie van de Poisson verdeling en bewijs dat het een kansdichtheidsfunctie is (of van de negatief binomiale verdeling voor meer punten).
4. Hoe verschillen continue en discrete verdelingen van elkaar? Waarom zijn continue verdelingen ook interessant voor een cursus discrete wiskunde?
5. Wat is een duale expressie? Leg daarbij ook uit wat een booleaanse expressie is. Wat is een booleaanse functie? Leg het dualiteitsprincipe uit.

Groep 2

1.
    1. Wat is een partiële ordening?
    2. X=1,2,3,A=2XX=1,2,3,A=2X

De relatie was inclusief en dit is dus een partiele ordening. Bewijs dit en bewijs ook dat het geen totale ordening is. (Niet 100% zeker of het deze vraag was.)

1.
    1. Is een partiële ordening een functie?
2. Waaraan is ∑nk=0(nk)=?∑k=0n(nk)=? gelijk? Bewijs met inductie.

1. Wat is een paradox? Geef een voorbeeld en leg paradox van Simpson uit.
2. Wat is een toevalsveranderlijke? Wat is een kansdichtheidsfunctie (KDF)? geef de KDF van Negatieve binomiaal verdeling en bewijs.
3. Var(x+y) = ?

E[x+y] = ? Bewijs beiden.

Groep 3

1. Wat is een functie en een injectieve functie?

Bewijs dat de samenstelling van 2 injectieve functies terug injectief is. Geef een voorbeeld van een samengestelde functie die injectief is, waarbij een van beide niet injectief is.

1. Bewijs via inductie ∑i²= (n(n+1)(2n+1))/6
    1. Wordt hier de volledige of de gewone inductie gebruikt? Wat is het verschil tussen de twee? (bijvraag)
2. Geef en bewijs het binomium van Newton.
3.
    1. Wat is een poisson verdeling?
    2. Wat is een toevalsveranderlijke?
    3. Geef en bewijs: Var(X) (X is verdeeld volgens een poisson verdeling)
4. Verklaar:
    1. Duale identiteiten
    2. Dualiteitsprincipe

Academiejaar 2012-2013 - 2de zittijd

Theorie Examen

Groep 1

1.
    1. Wat is een equivalentie relatie?
    2. Geef drie criteria en telkens een voorbeeld dt aan slechts twee van de drie criteria voldoet.
2.
    1. Wat is inductie?
    2. Wat is volledige inductie? (+verschil met gewone inductie)
3. Bewijs via inductie
   ∑k=0nk2=n(n+1)(2n+1)6

∑k=0nk2=n(n+1)(2n+1)6

4. Geef een combinatorisch bewijs voor
   ∑k=0n(nk)=...

   ∑k=0n(nk)=...

5.
   1. Wat is een binomiaal verdeelde toevalsveranderlijke X?
   2. Wat is E[X] dan? (+bewijs)
6. Geef en bewijs:
   1. E[X+Y]=...E[X+Y]=...
   2. Var(X+Y)=...Var(X+Y)=...

Groep 2

1.
   1. Wat is een surjectieve functie?
   2. Bewijs dat twee surjectieve functies gecombineerd ook surjectief is en geef twee functie waarvoor g ∘∘ f surjectief is maar 1 van de functies niet.
2. Geef en bewijs het binomium van newton via inductie
3.
   1. Wat is een poisson verdeelde toevalsveranderlijke?
   2. Wat is de E(X)E(X) daarvan en bewijs E(X)E(X)
4. Wat zijn duale identiteiten?
5. Wat is een continue toevalsveranderlijke?

Praktijk Examen

---

1. Geef voor elk van de volgende relaties een voorbeeld indien deze bestaan, of geef aan waarom deze niet kunnen bestaan (met A={1,2,3,4,5}A={1,2,3,4,5}).
   1. Een functie f:A→A2f:A→A2 die surjectief is, maar niet injectief.
   2. Een relatie RR op AA die reflexief is, transitief, symmetrisch en antisymmetrisch.
2. Toon aan via inductie dat voor de Fibonaccigetallen {1Fn−1+Fn−2n=1 of n=2n≥2{1n=1 of n=2Fn−1+Fn−2n≥2 geldt dat FnFn even is als en slechts als 3|n3|n.
3. Toon aan dat n3n3 steeds een negenvoud, een negenvoud+1 of een negenvoud-1 is.
4. Hoeveel getallen van 9 cijfers (dus niet beginnende met een nul) zijn er die voldoen aan de volgende twee voorwaarden:
   1. enkel cijfers uit de verzameling {0,1,2}{0,1,2} bevatten.
   2. minimum 4 opeenvolgende enen of minimum 4 opeenvolgende tweeën bevatten.
5. Schat het verwacht aantal getallen van 1000 cijfers dat je willekeurig moet selecteren om een priemgetal te vinden, als je weet dat de kans dat een getal van 1000 cijfers een priemgetal is, ongeveer 1/2302 is.
6. Veronderstel dat pp en qq priemgetallen zijn en dat n=pqn=pq. Wat is de kans dat een willekeurig gekozen getal uit de verzameling {1,2,...,n−1,n}{1,2,...,n−1,n} niet deelbaar is door pp of qq?
7. Ik gooi 450 keer met een zuivere dobbelsteen en tel het aantal keer dat ik een 5 of een 6 gooi. Wat is de kans dat dit aantal tussen 160 en 170 ligt (160 en 170 inclusief)? Gebruik hiervoor de normale verdeling.

8. Veronderstel dat we twee ondoorzichtige zakken hebben met zwarte en witte ballen in. In de eerste zak zitten drie keer meer witte ballen dan zwarte ballen. In de tweede zak zitten drie keer meer zwarte ballen dan witte ballen. We kiezen willekeurig één van beide zakken en nemen hieruit willekeurig 5 ballen (met teruglegging). Het blijkt dat we 4 witte en 1 zwarte bal hebben getrokken. Wat is nu de kans dat we uit de zak met vooral witte ballen hebben getrokken?
9. De bits x,y,z en u zijn de bits die als input gebruikt worden voor een logisch circuit. Samen stellen ze het binair getal $xyzu$ voor. Veronderstel dat het circuit 1 als output geeft indien $xyzu$ in de volgende verzameling zit en 0 als output geeft indien niet. $\{2,3,6,7,11,12,13,14,15\}$
    1. Geef een uitdrukking in DNF die overeenkomtmet deze output.
    2. Gebruik Karnaugh maps om een zo kort mogelijke booleaanse uitdrukking te krijgen voor de in (1) bekomen output.
    3. Gebruik Karnaugh maps om een zo kort mogelijke booleaanse uitdrukking te krijgen voor het complement van de in (1) bekomen output.

Academiejaar 2011 - 2012 - 2de zittijd

Theorie Examen

1.
    1. Defineer de begrippen orderelatie en equivalentierelatie op een verzameling A.
    2. Geef een concreet voorbeeld van een equivalentierelatie op $\mathbb{Z}$.
    3. Geef een concreet voorbeeld van een orderelatie op een eindige verzameling die geen totale ordening is. Is er een maximum in dit voorbeeld? Zo ja, duid aan. Zijn er minimale elementen in dit voorbeeld? Zo ja, duid aan.
2. Geef de formule die de som geeft van de hoeken van een convexe n-hoek ($n \geq 3$). Bewijs met volledige inductie.
3. Geef een combinatorisch bewijs voor volgende formule: $n \cdot 2^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \binom{n}{k}$
4. Formuleer de stelling van Bayes en geef een uitgewerkte toepassing.
5.
    1. Definineer de binomiaaldistributie, dwz geef definitiegebied, beeldverzameling en leg uit hoe de functie werkt.
    2. Geef een kansruimte en een randomvariabele op deze kansruimte zodat de bijbehorende distributiefunctie de binomiaaldistributie is. Leg uit.

Praktijk Examen

1. Gegeven de verzameling $S=\{1,2,3,4,5,6,7\}$ en definieer de relatie R op S als volgt:
   $mRn \leftrightarrow m^2 \equiv n^2 \pmod 5$
    1. Is deze relatie reflexief, symmetrisch, antisymmetrisch, transitief?
    2. Is dit een equivalentierelatie/partiële ordening? Geef de bijbehorende Hassediagram (in geval van partiële ordening).

2. Zoek de fout in het volgende "bewijs".
   Stelling: Voor een willekeurige a∈Z,n∈Na∈Z,n∈N geldt dat an=1an=1.
   Bewijs: Bewijs via inductie naar n:
   Basisstap

   a0=1

   a0=1

   is waar per definitie van de macht.
   Inductiestap: Veronderstel dat a1=1a1=1 voor elke j∈Nj∈N zodat j≤kj≤k. Dan is

   ak+1=ak·akak−1=1·11=1ak+1=ak·akak−1=1·11=1

   Verduidelijk je antwoord.
3. Tijdens de feestdagen verkoopt een winkel waardebon van 25 euro en van 40 euro. Bepaal alle mogelijke totale bedragen die je kan vormen met deze waardebonnen en bewijs je bewering via volledige inductie.
4. In deze vraag mag je ervan uitgaan dat er in Belgïe 11 miljoen inwoners wonen, die elk twee initialen hebben. Toon aan dat je 23 inwoners kan vinden die allen op dezelfde dag verjaren, hetzelfde geslacht hebben en die bovendien dezelfde initialen hebben.
5. Bekijk de (ev. betekenisloze) woorden die bestaan uit 12 letters, gekozen uit de verzameling {a, b, c, d, e, f}.
   1. Indien een willekeurig woord gekozen wordt (met alle woorden even waarschijnlijk), wat is dan de kans dat dit woord geen 'f' bevat?
   2. Indien een willekeurig woord gekozen wordt, wat is dan de kans dat dit woord geen 'f' bevat, maar wel een 'a'?
   3. Indien een willekeurig woord gekozen wordt, wat is dan de kans dat dit woord geen 'f' of 'a' bevat?
   4. Hoeveel woorden bevatten precies 4 c's?
   5. Hoeveel woorden bevatten precies 3 verschillende letters?
6. Veronderstel dat 4% van de renners in de Ronde van Frankrijk doping gebruikt, dat renners die doping gebruiken 96% kans hebben om positief te testen en dat renners die geen doping gebruiken 9% kans hebben om positief te testen. Wat is dan de kans dat een renner die positief test ook effectief doping gebruikt?
7. Een zuivere dodecaëdrische dobbelsteen heeft twaalf zijvlakken die genummerd zijn van 1 tot en met 12 waarbij elk getal met dezelfde kans geworpen wordt.
   1. Men gooit met 1 zuivere dodecaëdrische dobbelsteen. Bepaal de verwachtingswaarde van de worp.
   2. Men gooit met 1 zuivere dodecaëdrische dobbelsteen. Bepaal de variantie van de worp.
   3. Men gooit met 2 zuivere dodecaëdrische dobbelstenen. Bepaal de verwachtingswaarde van de worp.
   4. Men gooit met 2 zuivere dodecaëdrische dobbelstenen. Bepaal de variantie van de worp.

8. De bits x, y, z en u zijn de bits die als input gebruikt worden voor een logisch circuit. Samen stellen ze het binair getal xyzu voor. Veronderstel dat het circuit 1 als output geeft indien xyzu in de volgende verzameling zit en 0 als output geeft indien niet.

   {3,6,8,10,11,13,14,15}{3,6,8,10,11,13,14,15}

   Gebruik Karnaugh maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking te krijgen voor deze output.

Academiejaar 2010 - 2011 - 2de zittijd

Theorie Examen

1. Gebruik voor volgende vragen de exacte wiskundige notatie (geen pijlen, venndiagrammen, ...)
   1. Verklaar de termen injectief, surjectief, bijectief
   2. Geef een surjectieve functie die niet injectief is en leg uit
   3. Geef een injectieve functie die niet surjectief is en leg uit
   4. Geef een relatie die geen functie is en leg uit
2.
   1. Definieer het zwak inductieprincipe
   2. Bewijs via dit principe een formule voor de som van de hoeken in een convexe n-hoek
3. Geef de formule voor het aantal mogelijkheden om b identieke ballen in n verschillende dozen te stoppen en bewijs deze
4.
   1. Definieer de binomiaaldistributie
   2. Definieer een random variabele op de kansruimte zodat de bijhorende kansdistributie de negatieve binomiaaldistributie is en leg uit
5.
   1. Geef de definities van E(X) en Var(X)
   2. Geef de verwachtingswaarden van de binomiaal en de negatieve binomiaaldistributies (ZONDER bewijs)

Academiejaar 2010 - 2011 - 1ste zittijd

Theorie Examen

1.
   1. Formuleer de voorwaarden waaraan een relatie van een verzameling AA naar een verzameling BB moet voldoen om een functie te zijn. Gebruik de correcte wiskundige notaties en terminologie, dus geen Vendiagrammen, pijlen, etc ...
   2. Geef een voorbeeld van een relatie tussen oneindige verzamelingen die geen functie is. Leg uit!
   3. Geef een voorbeeld van een injectieve functie tussen de verzamelingen die je gebruikte in de vorige opgave. Toon aan waarom de functie injectief is.

2. Bewijs met volledige inductie de volgende ongelijkheid voor alle $n \in N n \in N$ en voor alle $x \in R \geq 0 x \in R \geq 0$
   $(1+x)n \geq 1+nx$
   $$(1+x)n \geq 1+nx$$
   . Waar gebruik je de voorwaarde $x \geq 0 x \geq 0$?
3. Geef een combinatorisch bewijs voor de volgende gelijkheid
   $(nk)=(n-1k)+(n-1k-1)$
   $$(nk)=(n-1k)+(n-1k-1)$$
   . Hierbij zijn nn en kk natuurlijke getallen met $k<nk<n$.
4. Op hoeveel verschillende manieren kan men bb identieke ballen verdelen over uu onderscheidbare dozen? Bewijs!
5.
   1. Definieer het begrip random variabele en de bijhorende kansdistributiefunctie.
   2. Zij $U \subset RU \subset R$ een eindige verzameling en zij $f:U \Rightarrow [0,1] f:U \Rightarrow [0,1]$ een functie. Aan welke voorwaarden moet ff voldoen om distributiefunctie van een random variabele te zijn? Leg uit!
   3. Een telefooncentrale krijgt gemiddeld $\lambda\lambda$ gesprekken per minuut te verwerken. Wat is de kans dat de centrale in de komende minuut kk gesprekken te verwerken krijgt. Bewijs uw antwoord!
6.
   1. Definieer het begrip voorwaardelijke kans.
   2. In een doos zitten 22 witte en 22 zwarte (onderscheidbare) ballen. Blindelings worden twee ballen uit de doos gehaald. Wat is de kans dat eerst gekozen bal zwart is? Wat is de kans dat de eerst gekozen bal zwart is als je weet dat de tweede bal ook zwart is? Leg uit! Beschrijf duidelijk de kansruimte en de gebeurtenissen die je gebruikt. (zonder teruglegging)

Praktijk Examen

1. Geef aan welke van de volgende relaties functies zijn, en indien ja, of ze injectief, surjectief, bijectief zijn. Noem hierbij 2Z2Z de verzameling van even gehele getallen. Bewijs je beweringen.
   1. $f:\{0,1,2,3,...,63\} \rightarrow \{0,1\}n:n \mapsto (a0,a1,a2,a3,a4,a5) f:\{0,1,2,3,...,63\} \rightarrow \{0,1\}n:n \mapsto (a0,a1,a2,a3,a4,a5)$ waarbij $(a5a4a3a2a1a0)2(a5a4a3a2a1a0)2$ de binaire voorstelling is van het getal nn.
   2. $g:N \times N \rightarrow N:(n,m) \mapsto m2ng:N \times N \rightarrow N:(n,m) \mapsto m2n$.
   3. $h:(N\backslash\{0\}) \times (N\backslash 2Z) \rightarrow N:(n,m) \mapsto m2nh:(N\backslash\{0\}) \times (N\backslash 2Z) \rightarrow N:(n,m) \mapsto m2n$.
2. De uitdrukking $1*2+2*3+3*4+4*5+...+n(n+1)1*2+2*3+3*4+4*5+...+n(n+1)$ kan je schrijven in een gesloten formule. Bepaal deze formule via de methode van onbepaalde coëfficiënten. Bewijs de formule ook via inductie.

3. Drie verzamelingen AA, BB en CC voldoen aan de volgende eigenschappen:
    - |A|=100|A|=100, |B|=50|B|=50 en |C|=48|C|=48.
    - Het aantal elementen dat slechts tot één van de drie verzamelingen behoort is het dubbel van het aantal elementen dat tot precies twee van de drie verzamelingen behoort.
    - Het aantal elementen dat slechts tot één van de drie verzamelingen behoort is het drievoud van het aantal elementen dat tot elk van de drie verzamelingen behoort.
4. Bij het spel Yahtzee gooit men met 5 zeszijdige dobbelstenen. We gebruiken de volgende terminologie:
    - Een full house is een worp waarbij 3 dobbelstenen een gelijk aantal ogen hebben en de twee andere dobbelstenen ook een gelijk aantal ogen hebben.
    - Een carré is een worp waarbij er minstens 4 dobbelstenen hetzelfde aantal ogen hebben.
    - Een yahtzee is een worp waarbij de 5 dobbelstenen hetzelfde aantal ogen hebben.

    Bepaal de kans dat men bij één worp meteen een full house, een carré of een yahtzee gooit?

5. Een HDTV bestaat uit 103 componenten, die elk met een kans van 0,030,03 defect zijn. De HDTV werkt slechts als al zijn componenten werken. Wat is de kans dat de HDTV defect is?
6. Louis neemt regelmatig het vliegtuig en hij houdt ervan zijn zitplaats te upgraden naar eerste klasse. Hij heeft gemerkt dat als hij minstens 2 uur op voorhand inchecked, dat hij dan 7575 kans heeft op een upgrade. In het andere geval is de kans op een upgrade slechts 3535. Met Louis zijn zeer druk schema kan hij slechts bij 4040 van zijn vluchten meer dan 2 uur op voorhand inchecken. Veronderstel nu dat Louis geen upgrade heeft kunnen hebben tijdens zijn laatste vlucht. Wat is dan de kans dat hij minstens 2 uur voor het vertrek incheckte?
7. De bits xx, yy, zz en ww zijn de bits die als input gebruikt worden voor een logische circuit. Samen stellen ze het binair getal xyzwxyzw voor. Veronderstel dat het circuit 00 als output geeft indien xyzwxyzw het kwadraat is van een geheel getal en 11 als output geeft indien niet.
    1. Gebruik Karnaugh maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking te krijgen voor deze output.
    2. Teken het bijbehorende logische circuit.

Tussentijdse Test

Theorie

1.
    1. Definieer het begrip equivalentierelatie. Hoe definieert men de bijbehorende quotientverzameling?
    2. Geef een voorbeeld van een equivalentierelatie op ZZ die een eindige quotientverzameling geeft. Beschrijf de quotientverzameling zo eenvoudig mogelijk. Hoeveel elementen telt deze quotientverzameling? Leg telkens uit waarom!

2.
    1. Formuleer het sterk inductieprincipe.
    2. Toon aan met volledige inductie dat elk natuurlijk getal dat groter of gelijk is aan 88 een som is van een 33-voud en een 55-voud. Laat duidelijk zien hoe je het inductieprincipe toepast.

Praktijk

1. Toon aan dat voor $n≥1n≥1$ steeds geldt dat 99 een deler is van $4n+15n−14n+15n−1$.
2. Elk van de volgende grafieken komt overeen met een functie van RR naar RR. Geef telkens een functievoorschrift dat overeenkomt met deze grafiek.

Academiejaar 2009 - 2010 - 1ste zittijd

Theorie Examen

1.
    1. Geef een voorbeeld van een equivalentierelatie op ZZ. Toon aan dat dit wel degelijk een equivalentierelatie is. Is de quotiëntverzameling eindig of oneindig?
    2. Geef een voorbeeld van een oneindige verzameling met een partiële orderelatie die geen totale ordening is. Leg uit!
2. Bewijs de volgende formule met volledige inductie
   $(1+x)n≥1+nx$
   $$(1+x)n≥1+nx$$
   voor alle $n∈Nn∈N$ en $x∈Rx∈R$ met $x≥0x≥0$. Geef duidelijk aan waar je gebruikt dat $x≥0x≥0$.
3. Geef zowel een algebraïsch als een combinatorisch bewijs van de volgende formule
   $(n−1k−1)+(n−1k)=(nk)$
   $$(n−1k−1)+(n−1k)=(nk)$$
   . Hierbij is $n∈N0n∈N0$ en $1≤k≤n−11≤k≤n−1$.
4.
    1. Definieer het begrip *voorwaardelijke kans*.
    2. Een doos bevat twee witte ballen en twee zwarte ballen. Twee ballen worden uit de doos weggenomen. Wat is de kans dat de eerste weggenomen bal wit is? Verklaar. Wat is de kans dat de eerst weggenomen bal wit is, gegeven dat de tweede bal ook wit is? Verklaar. Geef een duidelijke beschrijving van de kansruimte, de kansmaat en de gebeurtenissen die je hier gebruikt.
5.
    1. Definieer het begrip *random variabele op een kansruimte*. Hoe definieert men de kansdistributiefunctie van een random variabele?
    2. Geef een voorbeeld van een kansruimte met een random variabele zodat de bijbehorende kansdistributiefunctie de binomiaaldistributie is. Leg uit!

Praktijk Examen

1. Veronderstel dat PP de verzameling van proffen is van deze universiteit en CC de verzameling van alle cursussen die aan deze universiteit gedoceerd worden. De relatie $R \subset C \times PR \subset C \times P$ wordt beschreven door “... wordt gedoceerd door ...”.

    1. Wat wil het zeggen dat deze relatie een functie is?

    2. Indien RR overeenkomt met een functie, wat wil het dan zeggen dat deze functie injectief is?

    3. Indien RR overeenkomt met een functie, wat wil het dan zeggen dat deze functie surjectief is?

    4. Kan deze relatie een equivalentierelatie of een partiële ordening zijn?

2. Bewijs *via inductie* dat $n2-1n2-1$ deelbaar is door 8 voor elk oneven getal *n* met $n>0n>0$.

3. Een book van 500 pagina’s bevat 500 drukfouten. Gebruik de Poissonverdeling om de kans te bepalen dat er op een willekeurige pagina drie of meer drukfouten staan.

4. Een wandelaar kan uit *n* wegen kiezen om van AA naar BB te wandelen. De wegen zijn genummerd 1 tot *n*. Indien de wandelaar weg ii neemt, splitst de weg onderweg in 2i2i wegen, waarvan er slechts 1 tot BB leidt. Als de wandelaar zowel in het begin als in het midden willekeurig een weg kiest. Indien gegeven is dat de wandelaar aankomt, wat is dan de kans dat hij pad ii heeft gekozen.

5. Je beschikt over 6 (6-zijdige) dobbelstenen met de waarden 1, 1, 2, 2, 3, 3 op. Als je met deze 6 dobbelstenen tegelijk gooit, wat is de kans dat elk van de 3 cijfers minstens 1 keer voorkomen?

6. Gegeven de volgende logische tabel

pp	qq	rr	ss	p
1	1	1	1	1
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	1
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	1	1	0	1
0	1	0	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	1	0
0	0	1	0	0
0	0	0	1	0
0	0	0	0	0

   1. Gebruik Karnaugh Maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking in DNV te geven die overeenkomt met deze logische tabel.
   2. Teken het bijbehorende logische circuit.

Academiejaar 2009 - 2010 - 2de zittijd

Theorie Examen

1.
   1. Geef de definitie van injectief, surjectief en bijectief.
   2. Geef een voorbeeld van een functie $f:Z\to Zf:Z\to Z$ die injectief is, maar niet surjectief.
   3. Geef een voorbeeld van een functie $f:Z\to Zf:Z\to Z$ die niet injectief is, maar wel surjectief.
2. Bewijs via inductie: de som van de hoeken van een convexe n-hoek.
3. Geef het combinatorisch bewijs van $n*2(n-1)=\sum nk=0k(nk)n*2(n-1)=\sum k=0nk(nk)$.
4. Formuleer de stelling van Bayes en geef een uitgewerkte toepassing.

5.
    1. Geef de definitie van een binomiaaldistributie. Geef het definitiegebied, de beeldverzameling en leg uit hoe deze gebruikt wordt.
    2. Geef een kansruimte, definieer hierop een random variabele zodat de distributie de binomiaaldistributie is en leg uit.

Academiejaar 2008 - 2009 - 1ste zittijd

Theorie Examen

1. Een vraag over Functies (een aantal definities met minimum, maximum, partieel geordende verzameling)
2. Bewijs $2^n=\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ met inductie
3. Bewijs $\sum_{k=0}^{n} (kC(n,k))=n2^{(n-1)}$ combinatorisch
4. Geef de formule voor de alternatieve binomiaal coëfficient $C(-n,k)$ voor $n>0$ in functie van de gewone binomiaal + bewijs
5. Geef de definitie van
    1. Een random variabele of een kansruimte
    2. De kansdistributie die wordt geassocieerd met een random variabele
    3. De variantie
6.
    1. Geef de definitie van $B_{n,p}$
    2. Geef een voorbeeld van een kansruimte waarvan de random veriabele wordt geassocieerd met de negatieve binomiaal coëfficient

Praktijk Examen

1. Hoeveel getallen << 1 miljoen zijn niet deelbaar door 2, 3 of 5.

2. Een politie-agent moet de baas van een gangsterbende volgen wanneer ze hun vergaderplek verlaten (een huis). Hij weet alleen dat de gangsters met 5 zijn, dat ze allemaal een verschillende lengte hebben en dat de baas de grootste is. Om veiligheidsredenen komen de gangster apart - om het kwartier - buiten. De agent beslist om de eerste 2 te laten gaan en dan de eerste te volgen die groter is. Hoeveel kans heeft hij om de baas te volgen?

3. Je hebt een eerlijke (zeszijdige) dobbelsteen. Je hebt 3 Urnes.
   Urne I (4 zwarte en 3 witte ballen)
   Urne II (2 Zwarte en 5 witte)
   Urne III (7 zwarte)

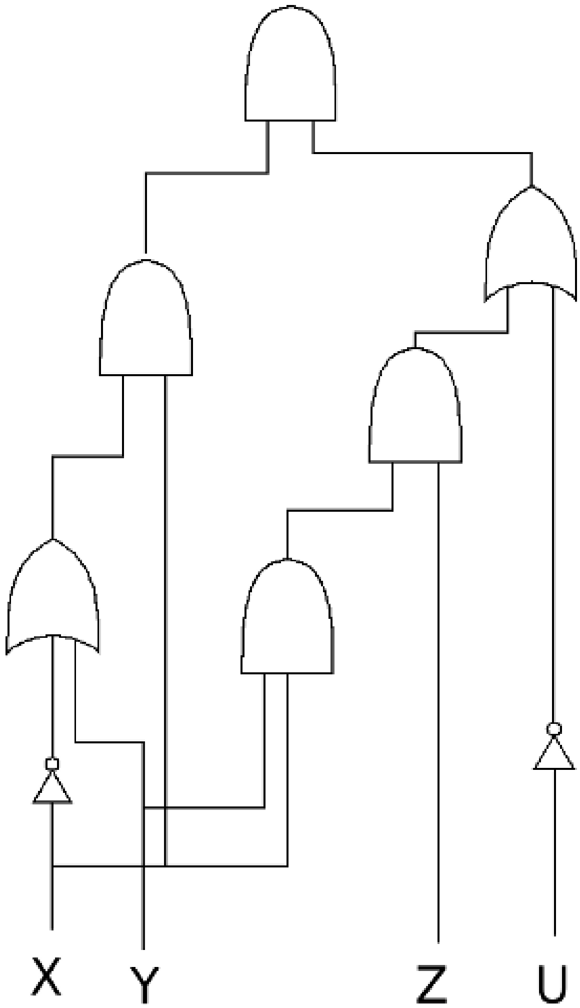
   Als je 1 gooit pak je een bal uit I. Als je 2 of 3 gooit uit II en 4, 5, 6 uit III.

    1. Als je een zwarte bal hebt gepakt, wat is dan de kans dat je een 6 hebt gegooid.

    2. Bereken de variantie van de dobbelsteen als je een zwarte bal hebt gepakt.

4. Gegeven het volgende logische circuit (Figuur fig:circuit)

    1. Geef een booleanse zin die hiermee overeenkomt.
    2. Vereenvoudig deze met Karnaugh-maps en teken het versimpelde circuit.



Tussentijdse Test

Theorie Tussentijdse Test

1.
    - Geef de definities voor de begrippen injectieve functie en totale ordening
    - Toon aan dat de samenstelling van 2 injectieve functies weer injectief is
    - Geef een voorbeeld van een partieel geordende verzameling die niet totaal geordend is. Leg uit!
    - Hoe ziet het hassediagram van een eindige totaal geordende verzameling eruit.
2. Zij x element van RR een positief getal. toon aan met volledige inductie dat (1+x)n≥1+nx(1+x)n≥1+nx (laat duidelijk zien waar je gebruikt dat x≥0x≥0)

Praktijk Tussentijdse Test

1. De rij A0,A1,A2,...A0,A1,A2,... wordt gegeven door de voglende recursieve definitie: A0=1,An=An−1+2n2−4n+3A0=1,An=An−1+2n2−4n+3
    - Schrijft de termen A0,...A5A0,...A5 van deze rij uit en bepaal een veeltermvoorschrift voor deze rij via de methode van de onbepaalde coëfficiënten.
    - Bewijs via inductie dat dit voorschrift inderdaad het voorschrift is van deze rij.

2. Los op in ZZ
   $6x+3\equiv1 \pmod 8$

$$6x+3\equiv1 \pmod 8$$

Academiejaar 2007 - 2008 - 1ste zittijd

Theorie

1. ## Definieer de begrippen orderelatie en equivalentierelatie op een verzameling A.
   1. Geef een concreet voorbeeld van een equivalentierelatie op verzameling ZZ.
   2. Geef een concreet voorbeeld van een orderelatie op een eindige verzameling die geen totale ordening is.
   3. Is er een maximum in dit voorbeeld? Zo ja, duid dit aan.
   4. Zijn er minimale elementen in dit voorbeeld? Zo ja, duid ze aan.
2. Bewijs volgende formule met volledige inductie
   $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=2^n$$

   .
3. Gegeven zijn verschillende objecten O_1, …, O_t. We kiezen d_1 keer het object O_1, d_2 keer het object O_2, … en d_t keer het object O_t. Geef en bewijs een formule die het aantal mogelijke ordeningen geeft van de gekozen objecten.
4. Geef een exacte formulering van de stelling van Bayes. Bewijs de stelling!
5.
   1. Geef de definitie van de distributiefunctie van een random variabele X op een eindige kansruimte S.
   2. Geef de definities van de verwachtingswaarde van een randomvariabele en van de bijbehorende distributiefunctie op een eindige kansruimte.
   3. Geef de definitie van de binomiaaldistributie $B_{n,p}$ (met $0\le p\le 1$). Wat is de verwachtingswaarde van deze distributie? (Geen bewijs!)

Praktijk

Stijn Symens als Assistent

1. Geef van de volgende relaties aan of het equivalentierelaties zijn, partieel geordende verzamelingen zijn, beide zijn of geen van beide zijn. Geef in het geval van equivalentierelatie de bijbehorende partities , in het geval van partiële ordening het bijbehorende hasse diagram.

   Zie figuur zoals in vb 1.17 pg 6 van de oefeningen.

2. In een bepaalde richting kan je als student een aantal keuzevakken kiezen. Drie van die keuzevakken zijn talen. In een klas van 100 studenten zijn er 35 die frans volgen, 42 die Spaans volgen, 43 die duits volgen, 17 die frans en spaans volgen, 13 die frans en duits volgen, 15 die spaans en duits volgen en 20 die geen taal hebben gekozen.

    1. Hoeveel studenten volgen frans of duits , maar geen spaans.

    2. Hoeveel studenten volgen precies 1 taal?

    3. Hoeveel studenten volgen precies 2 talen?

3. Bewijs met inductie dat 13 een deler is van 82n−52n82n−52n voor elke nn element van N 0N0.

4. Een multiple-choice examen (op 50 punten) heeft 10 vragen, 3 met 4 mogelijke antwoorden en 3 met 5 mogelijke antwoorden en 4 met 6 mogelijke antwoorden. Een student krijgt steeds 5 punten per correct antwoord, 0 per vraag die hij openlaat en -1 bij een foutief antwoord. Een student gokt op elke vraag. Wat is zijn verwacht aantal punten?

5. Een 2- Euromuntstuk wordt opgegooid. Als het kop is, wordt een paar dobbelstenen geworpen en de speler krijgt het aantal euro dat overeenkomt met het gezamelijk aantal ogen van de worp. Als het munt is, worden 3 munten opgeworpen en de speler krijgt 4 euro per kop die gegooid wordt. Als de speler 8 euro heeft gewonnen, wat is dan de kans dat het oorspronkelijk 2-euromuntstuk op kop landde?

6. Gegeven de volgende logische tabel. (Het was een tabel met 4 letters, p, q, r ,s)

    1. Teken Karnaugh Maps om een zo kort mogelijke Boolse uitdrukking te geven die overeenkomt met deze logische tabel.

    2. Teken het bijbehorende logische circuit.

Academiejaar 2007 - 2008 - 2de zittijd

Theorie

1. Geef de stelling van Bayes en illustreer deze met een voorbeeld (dus een toepassing geven en uitwerken).
2. Geef de definitie van een transitieve relatie.

Praktijk

1. Gegeven de verzameling A={a,b,c,d,e,f}A={a,b,c,d,e,f}.

    1. Hoeveel injectieve functies zijn er van AA naar AA?

    2. Hoeveel relaties zijn er op AA?

    3. Hoeveel relaties zijn er op AA die symmetrisch en reflexief zijn?

2. In een paardenkoers zijn er 4 deelnemende paarden. Op goeveel verschillende manieren kunnen die over de streepo komen? Het is hierbij mogelijk dat verschillen,de paarden exact op hetzelfde tijdstip over de streep komen (en er dus bv. een gedeelde tweede plaats is).

3. Het aantal verkeersongevallen in de gemeente “Accidorp” werd in 2007 geleten. Er werden statistieken bijgehouden van het aantal ongevallen per dag, en dit is weergegeven in de volgende tabel:

Aantal verkeersongevallen x	**Aantal dagen met x verkeersongevallen**
0	206
1	108
2	41
3	10
4 of meer	0
totaal	356

Gebruik een gekende verdeling, die typisch is voor dit soort gegevens, om deze gegevens te benaderen. Wat zou, volgens die verdelingsfucntie, de kans zijn dat er 4 of meer verkeersongevallen op een dag gebeuren.

4. Bewijs via inductie dat

1+14+…+1n2<2−1n

1+14+…+1n2<2−1n

5. Veronderstel dat we 2 zakken hebben met witte en zwarte ballen in. In de ene zak zitten 3 keer meer witte ballen dan zwarte. In de andere zak zitten 3 keer meer zwarte ballen dan witte. Veronderstel dat we willekeurig een zak kiezenn en dan uit die zak willekeurig 5 ballen nemen (waarbij we een bal steeds terugsteken als we hmm genomen hebben). Het resultaat is dat we 4 witte en 1 zwarte bal getrokken hebben. Wat is de kans dat de ballen uit de zak met vooral witte ballen in getrokken zijn?

6. Gegeven de volgende logische tabel

pp	qq	rr	ss	pp
1	1	1	1	0
1	1	1	0	1
1	1	0	1	0
1	1	0	0	0
1	0	1	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	1	0
0	1	1	0	1
0	1	0	1	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	0
0	0	1	0	1
0	0	0	1	1
0	0	0	0	1

   1. Gebruik Karnaugh maps om een zo kort mogelijke Boàolse uitdrukking te geven die overeenkomt met deze logische tabel.

   2. Teken het bijbehorende logische circuit.

Modelvraag

Theorie

1. Formuleer het *Principe van Inclusie en Exclusie* voor 2 verzamelingen AA en BB. Geef een veralgemening van dit principe voor meerdere verzamelingen A1,…,AtA1,…,At.
2. In de kanstheorie bestaat een regel die veel gelijkenis vertoont met het principe van inclusie en exclusie. Geef en bewijs deze regel voor twee gebeurtenissen AA en BB in een kansruimte (S,Pr)(S,Pr).
3. Definieer het begrip *voorwaardelijke kans*. Als AA en BB disjuncte gebeurtenissen zijn met een kans die niet 00 is, kunnen deze gebeurtenissen dan onafhankelijk zijn? Waarom?

4. Wat is de verwachtingswaarde van de negatieve biniomiaaldistributie met orde 11?
   (f(k)=p·qk−1,k≥1f(k)=p·qk−1,k≥1)
   Bewijs uw antwoord.

Academiejaar 2004 - 2005 - 1ste zittijd

Praktijk

1. Bewijs per inductie dat ∑S⊂[n]2|S|=3n∑S⊂[n]2|S|=3n Waaraan is dan ∑S⊂2[n]2|S| ∑S⊂2[n]2|S| gelijk?
2. Bewijs dat volgende recursief gedefineerde formule V(1)=0V(2)=1∀k≥3:V(k)=(k−1).(V(k−1)+V(k−2))V(1)=0V(2)=1∀k≥3:V(k)=(k−1).(V(k−1)+V(k−2)) gelijk is aan volgende som. V(k)=k!∑ki=2(−1)ii!V(k)=k!∑i=2k(−1)ii!
3. #* Hoeveel nieuwe woorden bekomen we door de letters van het woord {parallellogram} te herschikken?
   - Hoeveel van deze woorden zullen beginnen met een *a*?
   - Hoeveel van deze woorden zullen beginnen en eindigen met een klinker?
   - In hoeveel van deze woorden zullen er geen opeenvolgende *l*'s of *r*'s staan?
4. Hoeveel mogelijke oplossingen zijn er voor volgende som. x+y+z+u=15x+y+z+u=15
   - Als x,y∈Nx,y∈N en z,u∈N0z,u∈N0.
   - Als x,y∈Nx,y∈N en z,u∈N0z,u∈N0 en x+y=7x+y=7 of x+y=8x+y=8.
   - Als x∈N,y∈N0x∈N,y∈N0 en z,u∈Zz,u∈Z met z≥−1z≥−1 en u≥−2u≥−2.
5. Stel dat elke persoon twee genen bezit die de haarkleur bepalen.
   Er zijn twee verschillende soorten, een gen voor blond en een gen voor zwart haar, die beiden evenveel voorkomen.
   We weten dat het blonde gen recessief en het zwarte gen dominant is, dit wil zeggen dat als een persoon één gen voor blond en één voor zwart haar bezit, dat deze persoon dan zwart haar zal ontwikkelen.
   Uiteraard weten we ook dat een kind één gen van elke ouder zal krijgen.
   Beantwoord nu de volgende vragen.
   - Wat is de kans dat een persoon blond haar heeft?
   - Wat is de kans dat een persoon zwart haar heeft indien zijn/haar vader ook zwart haar heeft?
   - Wat is de kans dat een persoon zwart haar heeft indien zijn/haar vader een andere haarkleur heeft dan zijn/haar moeder?
   - Wat is de kans dat beide ouders zwart haar hebben indien hun eerste kind blond is?
   - Stel een gezin met 6 kinderen waarbij de vader en moeder verschillende haarkleur hebben. Wat is de kans dat dit gezin twee maal zoveel blond als zwartharige kinderen heeft?
   - Wat is de kans dat in dit gezin al de blondharigen meisjes zijn en al de zwartharigen jongens?
   - Stel een koppel waarvan vader en moeder verschillende haarkleur hebben wat is de kans dat er pas na vier andere kinderen het tweede blonde kindje geboren wordt?

6. Een bedrijf wil een wedstrijd organiseren waarbij er verschillende geldprijzen te winnen zijn.
   Elke deelnemer koopt een lotje van 0,50 euro, en maakt kans op volgende prijzen.
   De hoofdprijs bedraagt 1500 euro en dit wordt toegekend aan een lot getrokken uit alle gekochte loten. Op dezelfde manier worden er 2 prijzen van 500 euro en 25 prijzen van 100 euro geloot.
   Er wordt geloot met teruglegging.
   - Stel dat het bedrijf minimaal 1000 euro aan deze loterij wil verdienen, hoeveel loten moeten er dan verkocht worden? Wat is de verwachte netto winst per deelnemer indien er 20.000 loten worden verkocht, bereken ook de variantie.
   - Stel nu dat bovenop de te winnen prijzen, elke honderdste koper al 10 euro wint. Hoeveel loten moet het bedrijf dan minimaal verkopen? Stel dat er weer 20.000 loten zullen worden verkocht, zal de verwachte nettowinst per deelnemer hier lager of hoger liggen, wat met de variantie?

Academiejaar 2004 - 2005 - 2de zittijd

Theorie

1.
   - [(a)] Definieer de begrippen *injectieve functie*, *surjectieve functie* en *bijectieve functie*.
   - [(b)] Geef een voorbeeld van een functie die wel surjectief maar niet injectief is.
   - [(c)] Geef een voorbeeld van een functie die wel injectief maar niet surjectief is.
   - [(d)] Geef een voorbeeld van een relatie die geen functie is.

   Gebruik bij de formulering alleen de standaard notatiesystemen voor verzamelingen en functies, dus *geen* Venndiagrammen.

2. Geef een combinatorisch bewijs voor de volgende formule

   $\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$

   $$\binom{n}{k}=\binom{n-1}{k}+\binom{n-1}{k-1}$$

   waarbij $n,k \in \mathbb{N}$ en $k \leq n-1$.
3. Op hoeveel manieren kan men b identieke ballen verdelen over n verschillende (en onderscheidbare) dozen. Bewijs!

4.
   - [(a)] Formuleer de stelling van Bayes. (Geef de volledige formulering, dus niet alleen een formule.)
   - [(b)] Geef een voorbeeld van een toepassing van deze stelling.

5.

- [(a)] Definieer de begrippen *verwachtingswaarde* en *variantie* van een random variabele op een eindige kansruimte.
- [(b)] Bereken de verwachtingswaarde van de binomiaaldistributie.