Wiskundige methoden in theoretische fysica

Wiskundige methoden in theoretische fysica	
Richting	Fysica
Jaar	MFYS

Bespreking

Tot voor Academiejaar 2014-2015 hoorde dit vak samen met Statistische en wiskundige natuurkunde, maar sindsdien zijn het twee verschillende vakken.

Puntenverdeling

Theorie 50%, Schriftelijk met mondelinge toelichting. Oefeningen 50%

Examenvragen

Academiejaar 2022-2023 2de zit

Prof. Michiel Wouters

Theorie

1. Stel de Laurentreeks op voor een complexe functie rond een singulier punt
2. Gebruik de Cauchy integraalrepresentatie om uit de genererende functie $g(x,t)=e-x2(t-1t)$

   $$g(x,t)=e-x2(t-1t)$$

   integraalvoorstellingen van de Besselfuncties af te leiden.
3. Geef en bewijs de stelling van Morera
4. Leid de formule van Bromwich af voor inverse Laplace transformaties.

Academiejaar 2021-2022 1ste zit

Prof. Michiel Wouters

Theorie

1. Bewijs de stelling van Cauchy-Liouville. Gebruik deze stelling om het fundamentele theorema van de algebra aan te tonen (elke veelterm van graad nn heeft nn wortels).
2. Stel de Taylorreeks op voor een complexe functie en bespreek de convergentie.
3. Leid de Kramers-Krönig af.

4. Gebruik de Cauchy integraalrepresentatie om uit de genererende functie
   g(x,t)=ex2(t−1t)
   g(x,t)=ex2(t−1t)

   integraalvoorstellingen van de Besselfuncties af te leiden.

Oefeningen

1. Beschouw de functie
   f(z)=f1(z)f2(z)
   f(z)=f1(z)f2(z)

   waarbij f1(z)f1(z) en f2(z)f2(z) analytische functies zijn. De functie f2(z)f2(z) heeft een nulpunt in z0z0, waarbij f1(z0)≠0f1(z0)≠0 en f′2(z0)≠0f2′(z0)≠0. Bepaal de coëfficiënt a−1a−1 in de Laurentreeks f(z)f(z) ontwikkeld rond z=z0z=z0 in functie van f1f1, f′1f1′, f′2f2′, ...
2. Bereken volgende integralen, schets steeds het gebruikte contour
   1. ∫π0dθ3−2cos2θ+sin2θ∫0πdθ3−2cos2θ+sin2θ
   2. ∫∞0sinπtsinhπtdt∫0∞sinπtsinhπtdt
3. Bepaal uit de uitdrukkingen
   B(z,w)=∫10tz−1(1−t)w−1dt
   B(z,w)=∫01tz−1(1−t)w−1dt

   B=Γ(z)Γ(w)Γ(z+w)
   B=Γ(z)Γ(w)Γ(z+w)

   dat
   ∫a0y4a2−y2−−−−−−√dy=a6π32.
   ∫0ay4a2−y2dy=a6π32.

4. Bewijs dat ∫1−1P2n(x)dx=22n+1∫−11Pn2(x)dx=22n+1 wetende dat
   g(x,t)=11−2tx+t2−−−−−−−−−−√
   g(x,t)=11−2tx+t2

   log(1+a)=∑k=1∞(−1)k+1kak|a|<1
   log(1+a)=∑k=1∞(−1)k+1kak|a|<1

Academiejaar 2020-2021 2^de^ zit

Prof. Michiel Wouters

Theorie

1. Stel een integraalrepresentatie op voor de Besselfuncties, vertrekkende van de genererende functie:
   g(x;t)=exp[(x/2)(t−1/t)]
   g(x;t)=exp[(x/2)(t−1/t)]

2. Bespreek de convergentie en analyticiteit van Taylorreeksen.

3. Leid de formule van Plemelj af voor:
∫f(x)x+iϵdx

$$∫f(x)x+iϵdx$$

4. Leid de formule van Bromwich af voor inverse Laplace transformaties.

Oefeningen

1. (2 punten2 punten) Construeer één enkele meromorfe functie ff die al de volgende eigenschappen bezit:
    - ∀n∈Z:f(eiπ42n)∀n∈Z:f(eiπ42n) heeft een singulariteit
    - ∀n∈Z:f(eiπ4(2n+1))∀n∈Z:f(eiπ4(2n+1)) is het begin van een vertakkingslijn
    - f(z=0)f(z=0) is een essentiële singulariteit
    - ∀n∈Z:f(i+π2(2n+1))=0∀n∈Z:f(i+π2(2n+1))=0 heeft een singulariteit
2. (3 punten3 punten) Beschouw de volgende vierde orde lineaire differentiaalvergelijking:
    ∂4y(t)∂t4+3∂2y(t)∂t2=cos(3–√t)

    $$∂4y(t)∂t4+3∂2y(t)∂t2=cos(3t)$$

    ∂2y(t)∂t2||0=∂y(t)∂t||0=y(0)=0,∂3y(t)∂t3||0=1/2

    $$∂2y(t)∂t2|0=∂y(t)∂t|0=y(0)=0,∂3y(t)∂t3|0=1/2$$

    Los deze op via het Laplacedomein.
3. (6 punten6 punten) Bereken de volgende integralen. Maak steeds een schets van de gebruikte contour en geef duidelijk je werkwijze weer.
    - ∫∞−∞sin2(x)x2dx∫−∞∞sin2(x)x2dx (3 punten3 punten)
      Hint:sin2(x)=12(1−cos(2x)):sin2(x)=12(1−cos(2x))
    - ∫∞0cosh(bx)cosh(x)dx∫0∞cosh(bx)cosh(x)dx met |b|<1|b|<1 (3 punten3 punten)
4. (2 punten2 punten) De betafunctie is gedefinieerd als B(z,w)=∫10tz−1(1−t)w−1dtB(z,w)=∫01tz−1(1−t)w−1dt en kan worden uitgedrukt in gammafuncties als B(z,w)=Γ(z)Γ(w)Γ(z+w)B(z,w)=Γ(z)Γ(w)Γ(z+w). Gebruik dit om te bewijzen dat
    ∫π/20sin2m−1(θ)cos2n−1(θ)dθ=Γ(m)Γ(n)2Γ(m+n)

    $$∫0π/2sin2m−1(θ)cos2n−1(θ)dθ=Γ(m)Γ(n)2Γ(m+n)$$

5. (3 punten3 punten) De genererende functie voor Laguerrepolynomen wordt gegeven door
    g(x,u)=e−xu1−u1−u=∑n=0∞Ln(x)un

    $$g(x,u)=e−xu1−u1−u=∑n=0∞Ln(x)un$$

    Gerbuik dit om voor m≥1m≥1 de volgende relaties af te leiden
    - Lm−1(x)=L′m−1(x)−L′m(x)Lm−1(x)=Lm−1′(x)−Lm′(x) (1,5 punt1,5 punt)
    - (m+1)Lm+1(x)=Lm(x)(2m+1−x)−mLm−1(x)(m+1)Lm+1(x)=Lm(x)(2m+1−x)−mLm−1(x) (1,5 punt1,5 punt)

Academiejaar 2019-2020 1ste zit

Theorie

1. Stel de Laurentreeks op voor een complexe functie rond een singulier punt
2. Bespreek de convergentie en analyticiteit van Taylorreeksen.
3. Leid de formule van Plemelj af. (Die met $x=i\epsilon$)
4. Leid de formule van Bromwich af voor inverse Laplace transformaties.

Oefeningen

1. Volgens het Argumentprincipe geldt voor een meromorfe functie f binnen en op een gesloten contour C, waarbij f geen polen of nulpunten op C heeft, dat
   $\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(Z-P)$
   $$\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i(Z-P)$$
   Waarbij Z het aantal nulpunten van f binnen C (rekening houdend met multipliciteit) en P het aantal polen van f binnen C (rekening houdend met de orde). Het principe vindt in de praktijk voornamelijk toepassing in numerieke bepaling van nulpunten.
   - Bewijs de stelling voor het geval van een enkel nulpunt (zonder polen) en voor het geval van een enkele pool (zonder nulpunten); en motiveer daaruit waarom ze in algemeenheid geldig moet zijn (Hint: als f een nulpunt met multipliciteit k heeft in z_0, is $f(z)=(z-z_0)^k h(z)$) (1.5 ptn)
   - Bereken gebruikmakend van het argumentprincipe, rond de eenheidscirkel (1 ptn)
     $\oint \tan(\pi z) dz$
     $$\oint \tan(\pi z) dz$$
   - Een gevolg van het argumentprincipe is het theorema van Rouche, dat stelt: Als f(z) en g(z) analytisch zijn in het gebied begrensd door een gesloten contour C en $|f(z)|>|g(z)|$ op C, dan hebben f(z) en f(z)+g(z) evenveel nulpunten (rekening houdend met multipliciteit) binnen C. Op basis hiervan hoeveel nulpunten heeft $F(z)=z^3-2z+11$ in het ringvormige gebied $1<|z|<3$. (1 ptn)
2. Bereken volgende integralen (3 ptn elk)
   - $\int_0^\infty \frac{\sqrt{t}}{(t+2)^3} dt$
   - $\int_0^{2\pi} \frac{\cos(3\theta)}{5+4\cos(\theta)} d\theta$
3. Bucky Laplace vraagt je deze differentiaalvergelijking op te lossen volgens de methode van zijn voorouder. Doe wat hij zegt:
   $y''(t)-2y'(t)+3y(t)=2e^{-t}$
   $$y''(t)-2y'(t)+3y(t)=2e^{-t}$$
   Met beginvoorwaarden $y(0)=2$ en $y'(0)=-1$. (3 ptn)
4. Toon aan dat $S=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}=\pi^3/32$ met behulp van contourintegratie. Hint bereken $\oint \frac{\pi \sec(\pi z)}{z^3} dz$ rond een goed gekozen contour. (3 ptn)
5. Toon aan dat voor gehele n (1.5 ptn)
   $\Gamma(\frac{1}{2}-n)\Gamma(\frac{1}{2}+n)=(-1)^n\pi$
   $$\Gamma(\tfrac{1}{2}-n)\Gamma(\tfrac{1}{2}+n)=(-1)^n\pi$$

6. De genererende functie van hermietpolynomen wordt gegeven door $g(x,t)=e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n$

$$g(x,t)=e^{2xt-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n$$

Gebruik dit om volgende relaties af te leiden voor $n\geq 1$ $n\geq 1$

1.
    - $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$ $H_{n+1}(x)=2xH_n(x)-2nH_{n-1}(x)$ (1.5 ptn)
    - $H'_n(x)=2nH_{n-1}(x)$ $H_n'(x)=2nH_{n-1}(x)$ (1.5 ptn)

Academiejaar 2017-2018 1^ste^ zit

Theorie

1. Leid de residustelling voor de hoofdwaarde-integraal af.
2. Leid de formule van Bromwhich af voor inverse Laplace transformaties
3. Leid de Kramers-Kroning relaties af en bespreek de link met causaliteit.
4. Gebruik de Cauchy integraal representatie om uit de genererende functie

$g(x;t)=\exp[(x/2)(t-1/t)]$

$$g(x;t)=\exp[(x/2)(t-1/t)]$$

integraalvoorstellingen van de Besselfuncties af te leiden.

Academiejaar 2016-2017 1^ste^ zit

Theorie

1. Bewijs de stelling van Cauchy-Liouville die zegt dat een begrensde holomorfe functie constant moet zijn. Gebruik deze stelling om het fundamentele theorema van de algebra aan te tonen (elke veelterm van graad n heeft n wortels).
2. Bespreek de convergentie en analyticiteit van Taylorreeksen.
3. Leid de formule van Bromwhich af voor inverse Laplace transformaties
4. Gebruik de Cauchy integraal representatie om uit de genererende functie

$g(x;t)=\exp[(x/2)(t-1/t)]$

$$g(x;t)=\exp[(x/2)(t-1/t)]$$

integraalvoorstellingen van de Besselfuncties af te leiden.

Academiejaar 2015-2016 1^ste^ zit

Theorie

1. Bespreek analytische voortzetting. Bewijs de stelling die je daarvoor nodig hebt.
2. Stel de Laurentreeks op voor een complexe functie rond een singulier punt.
3. Leid de residustelling voor de hoofdwaarde-integraal af.

4. Leid de recursierelatie voor de Gamma-functie af, bereken de residu's in de polen en stel de asymptotische Stirling benadering op.

Academiejaar 2014-2015 2de zit

Theorie

1. Bespreek analytische voortzetting. Bewijs de stelling die je daarvoor nodig hebt.
2. Stel de Laurentreeks op voor een complexe functie rond een geïsoleerde singulariteit.
3. Leid de residustelling voor de hoofdwaarde-integraal af.
4. Leid de recursierelatie voor de Gamma-functie af, bereken de residu's in de polen en stel de asymptotische Stirling benadering op.

Oefeningen

1. Beschouw de functie
   f(z)=sin(z+i)cosh(π2z√)z4+1−−−−−√(z4−1)
   f(z)=sin(z+i)cosh(π2z)z4+1(z4−1)
   - Beschrijf alle speciale eigenschappen van deze functie zoals: polen, vertakkingspunten, vertakkingslijnen, nulpunten, ...
   - Duid al deze punten aan op een schets en benoem ze (kies daarbij zelf maar de ligging van de vertakkingslijnen).
2. Bereken (schets steeds je contouren):
   - P∫−∞∞(z)−−−√z3−8dzP∫−∞∞(z)z3−8dz
   - ∫−∞∞sin(ωt4)dt∫−∞∞sin(ωt4)dt en gebruik hierbij contourintegratie.

3. In de wereld van Pacman wordt het gewicht van de spookjes gegeven door de contourintegraal over hun oppervlak. Deze contourintegraal houdt rekening met het aantal opgegeten Pacmans n via de functie 16nicot(nπ3z)16nicot(nπ3z) (met n > 0) en d.m.v. een gewichtsfunctie f(z).

    Indien f(z) een holomorfe functie is op en binnen het contour, bereken dan de massa via de contourintegraal

    mn=P∮C16nicot(nπ3z)f(z)dz

    mn=P∮C16nicot(nπ3z)f(z)dz

    waarbij het contour beschreven wordt door het gebied rond de oorsprong afgebakend door de parabool −14x2+4−14x2+4 en de cosinus cos(πx)−6cos(πx)−6 die elkaar snijden in de punten {6,-5} en {-6,-5}.

    - De gewichtsfunctie van een spookje is f(z)=1−(1−z2)eiπ2zf(z)=1−(1−z2)eiπ2z. Wat is het gewicht mnmn van dit spookje voor n=2n=2?
    - De uitwijking van de zweefhoogte ten opzichte van de rustpositie wordt in deze wereld gegeven door de volgende differentiaalvergelijking:

    mnd2x(t)d2t+2mndx(t)dt+mnx(t)=20sin(ωt)

    mnd2x(t)d2t+2mndx(t)dt+mnx(t)=20sin(ωt)

    met mnmn de massa zoals je in (b) berekend hebt. Hierbij is x′(0)=0x′(0)=0 maar x(0)x(0) niet. Gebruik de Laplacetransformaties om de zweefhoogte x(t)x(t) te berekenen.

    Indien het spookje in rustpositie 2 pixels boven de grond zweeft en het spookje met eigenfrequentie ω=1ω=1 Hz oscilleert, zal het spookje in de stationaire toestand (dus voor grote tijden) dan de grond raken? Wat gebeurt er als het spookje meer Pacmans eet zodat n=3n=3? Verklaart dit waarom spookjes jacht maken op Pacman?
4. Bereken L−1(1s2sinh(3s))L−1(1s2sinh(3s))
5. Bewijs de recursierelatie ψ(m)(z+2)=ψ(m)(z+1)+(−1)mm!(z+1)m+1ψ(m)(z+2)=ψ(m)(z+1)+(−1)mm!(z+1)m+1
6. De genererende functie voor de Legendre polynomen is g(x,t)=11−2xt+t2√=∑∞n=0Pn(x)tng(x,t)=11−2xt+t2=∑n=0∞Pn(x)tn
    - Bepaal de coefficiënten an(x)an(x), bnbn en cncn in de recursierelatie an(x)Pn(x)=bnPn+1(x)+cnPn−1(x)an(x)Pn(x)=bnPn+1(x)+cnPn−1(x)
    - Bepaal de coefficiënt d(x)d(x) in de recursierelatie P′n+1(x)+P′n−1(x)=d(x)P′n(x)+Pn(x)Pn+1′(x)+Pn−1′(x)=d(x)Pn′(x)+Pn(x)

Academiejaar 2014-2015 1^ste zit

Sinds dit jaar is er bij Complexe Analyse het deel over speciale functies gekomen.

Theorie

Groep A

1. Bespreek analytische voortzetting. Bewijs de stelling die je daarvoor nodig hebt.

2. Stel de Laurentreeks op voor een complexe functie rond een geïsoleerde singulariteit.
3. Leid de residustelling voor de hoofdwaarde-integraal af.
4. Leid de recursierelatie voor de Gamma-functie af, bereken de residu's in de polen en stel de asymptotische Stirling benadering op.

Groep B

1. Bewijs de stelling van Cauchy-Liouville die zegt dat een begrensde holomorfe functie constant moet zijn. Gebruik deze stelling om het fundamentele theorema van de algebra aan te tonen (elke veelterm van graad n heeft n wortels).
2. Bespreek de convergentie en analyticiteit van Taylorreeksen
3. Leid de formule van Plemelj af:
   $$\lim_{\epsilon\to 0}\int_A^B \frac{f(x)}{x+i\epsilon}dx = P\int_A^B \frac{f(x)}{x}dx - i\pi\int_A^B f(x)\delta(x)dx$$
   $$\lim_{\epsilon\to 0}\int_A^B \frac{f(x)}{x+i\epsilon}dx = P\int_A^B \frac{f(x)}{x}dx - i\pi\int_A^B f(x)\delta(x)dx$$
4. Gebruik de Cauchy integraal representatie om uit de genererende functie ($g(x,t)=\exp[(x/2)(t-1/t)]$) integraalvoorstellingen van de Besselfuncties af te leiden.

Oefeningen

1.
   - Bewijs dat $u(x,y)=x^2+3xy-y^2$ een harmonische functie is. *(1 punt)*
   - Wat is $v(x,y)$ opdat $f(x,y)=u(x,y)+iv(x,y)$ een analytische functie is? *(1 punt)*
2. Bereken: *(elk 3 punten)*
   - $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(z)}{(z^2+1)^3}dz$
   - Voor welke waarden van p bestaat $\int_0^\infty \frac{\theta^{p-1}}{1+\theta}d\theta$ en bereken de integraal.
   - $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}$ en maak hierbij gebruik van het volgende contour (tip: houd je fases goed in het oog)

   gelijkaardige afbeelding: http://i.stack.imgur.com/l1f8m.png
3. Bereken $\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{s}}\right)$. *(3 punten)*
4. Bereken $\int_0^1 x^k \ln x\,dx$ *(1 punt)*
5. Een gewicht, hangend aan een veer ondergaat een gedwongen trilling volgens de differentiaalvergelijking:
   $$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4x=8\sin(\omega t)$$
   $$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+4x=8\sin(\omega t)$$

   met $\omega>0$ een constante en $x(t)$ de verplaatsing ten opzichte van de evenwichtspositie. Als $x(t=0)=x'(t=0)=0$ is, vind dan a) de positie $x(t)$ door gebruik te maken van het Laplacedomein, b) de periode en het gedrag op resonantie en maak hier een ruwe schets van. *(2 punten)*
6. Bereken $\lim_{x\to 0}\frac{\Gamma(ax)}{\Gamma(x)}$. *(1 punt)*

7. De genererende functie voor de Legendre polynomen is
   $g(x,t)=\frac{1}{\sqrt{1-2xt+t^2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$
   $$g(x,t)=\frac{1}{1-2xt+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)t^n$$
   - Bepaal de coefficiënten $a_n(x)$, b_n en c_n in de recursierelatie $a_n(x)P_n(x)=b_nP_{n+1}(x)+c_nP_{n-1}(x)$. *(1,5 punt)*
   - Bepaal de coefficiënt $d(x)$ in de recursierelatie $P'_{n+1}(x)+P'_{n-1}(x)=d(x)P'_n(x)+P_n(x)$ *(1,5 punt)*

Academiejaar 2012-2013 2de zit

Theorie

1. Bespreek het verband tussen afleidbaarheid van complexe functies en oplossingen van de Laplace vergelijking.
2. Leid de integraalformule van Bromwich af voor het berekenen van de inverse Laplace transformatie.
3. Wat is het verband tussen het residu van een functie in een punt en de Laurent reeks ervan rond dat punt?

Oefeningen

1. De temperatuur in een metalen plaat voor een stationaire toestand zonder brontermen wordt gegeven door de warmte diffusievergelijking
   $\nabla^2T(x,y)=0.$
   $$\nabla^2T(x,y)=0.$$
   Bereken de isothermen en stromingslijnen voor de volgende randvoorwaarden:
   $T(x,0)=300K, T(0,y)=77K.$
   $$T(x,0)=300K, T(0,y)=77K.$$
   Gebruik de volgende stappen:
   - Bewijs dat $\ln(z)$ een analytische functie is op het hele complexe domein, uitgezonderd in nul. Gebruik dit om een oplossing voor het probleem te construeren. Beargumenteer je antwoord.
   - Gebruik je oplossing om de isothermen en stromingslijnen te berekenen. Maak hier ook een schets van.
2. Bereken:
   1. $\int_0^{\pi}\frac{d\theta}{3-2\cos(2\theta)+\sin(2\theta)}$
   2. $\int_0^{\infty}\sin(x^3)dx$
   3. Voor welke waarde van p bestaat $\int_0^{\infty}\frac{\theta^{p-1}}{1+\theta}d\theta$ en bereken de integraal.

3. Los volgende differentiaalvergelijking op voor alle waarden van de coëfficiënten: αx″(t)+βx′(t)+γx(t)+sin(t)=0.

   αx″(t)+βx′(t)+γx(t)+sin(t)=0.

   Neem als beginvoorwaarden x(0)=x′(0)=0x(0)=x′(0)=0.
4. Bereken de inverse Laplacegetransformeerde van F(s)=sinh(sx)s2cosh(sa)F(s)=sinh(sx)s2cosh(sa)

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

1. Bespreek de hoofdwaarde van een integraal in de context van complexe contourintegratie
2. Bewijs de stelling van Cauchy-Liouville, die zegt dat een begrensde functie die overal analytisch is, een constante moet zijn. Bewijs hiermee de fundamentele stelling van de algebra.
3. Bewijs de integraalformule van Bromwich voor de inverse Laplacetransformatie

Academiejaar 2011-2012 2de zit

Theorie

1. Bewijs de stelling van Cauchy-Liouville die zegt dat een begrensde en holomorfe functie constant moet zijn. Toon hiermee het fundamentele theorema van de algebra aan.
2. Leid de formule van Bromwich voor de berekening van de inverse Laplace-transformatie af.
3. Bespreek de functie (singulariteiten, mogelijke liggingen vertakkingslijnen): f(z)=1z−1−−−−√·1z·e1/z.

   f(z)=1z−1·1z·e1/z.

Oefeningen

1. Vind de Laurentreeks voor f(z)=z(z+1)(z+2)f(z)=z(z+1)(z+2) rond het punt z=−2z=−2. In welk domein VV, die deelverzameling is van CC, convergeert deze reeks?
2. Bereken de volgende integralen (indien stukken van je contour niet bijdragen, motiveer dan waarom):
   1. ∫0∞cos(2πx)dxx4+x2+1∫0∞cos(2πx)dxx4+x2+1
   2. ∫0∞sin(ωt4)dt∫0∞sin(ωt4)dt (Hint: schrijf de uitkomst in functie van gamma functies)
   3. ∫−∞∞eiqxsin(q)qdq∫−∞∞eiqxsin(q)qdq. Schets het verloop van je resultaat in xx.
3. Bereken de inverse Laplacegetransformeerde van F(s)=4−5ss√F(s)=4−5ss via het Bromwich contour.

4. Los de volgende differentiaalvergelijking op via het Laplacedomein $y''(t)+y(t)=t\sin(t)$.

$$y''(t)+y(t)=t\sin(t).$$

   Alle beginvoorwaarden mag je op 0 stellen.

Academiejaar 2011-2012 1^ste^ zit

Theorie

1. Stel de reeksontwikkeling op voor een functie rond een regulier punt (Taylorreeks) Bespreek de convergentie (met bewijs).
2. Wat is het verband tussen het residu van een functie in een punt z_0 en de Laurentreeks rond dat punt?
3. Bespreek het complexe logaritme.

Oefeningen

1. Zoek het singulier deel van de Laurentreeks van $f(z)=z(z-1)(z+i)$ rond het punt $z=-i$.
2. Bereken:
   - $\int_{-\infty}^{\infty} dx(x^2+4x+5)^3$
   - $\int_0^{\infty} \sin(\pi t)\sinh(\pi t)dt$
   - Voor welke waarde van p bestaat $\int_0^{\infty} \theta^{p-1} 1+\theta d\theta$
3. Beschouw een massa m opgehangen aan een veer met veerconstante κ. In het meest algemene, ongedwongen geval wordt de beweging van deze massa beschreven door $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-\kappa x(t)-\beta\frac{dx(t)}{dt}$ met β de luchtweerstand. Bereken de baan $x(t)$ wanneer deze massa op een willekeurige positie x_0 wordt losgelaten (neem $\frac{dx(t)}{dt}\big|_{t=0}=0$).
4. Bereken de inverse Laplacegetransformeerde van $F(s)=\sinh(sx)s^2\cosh(sa)$
5. Los volgende differentiaalvergelijking op met als beginvoorwaarde $y(0)=-1$.

$-5\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3\sqrt{t}$.

$$-5\frac{dy(t)}{dt}+2y(t)=3t.$$

Categorieën:

- Fysica
- MFYS