Representaties van groepen

Eindig dimensionale algebra's	
Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Bespreking

Theorie

Elke week krijg je 2u theorie van professor Lebruyn. De lessen worden goed georganiseerd en professor Lebruyn geeft over het algemeen goed les. Belangrijk is om nota's te nemen in de les aangezien de cursus soms minder duidelijk is.

Oefeningen

Oefeningen worden gegeven door Kevin De Laet. Het niveau van de oefeningen ligt hoog en de oplossingen komen maar beknopt op het bord te staan. Als je vragen hebt kan je ook altijd bij hem terecht.

Puntenverdeling en examen

Tijdens het eerste semester krijg je 2 testen. Op beide testen worden zowel oefeningen als theorie ondervraagd. Theorie zijn meestal 3 vragen, waarvan 2 vrij letterlijk uit de cursus en ééntje waarmee hij inzicht test. Meestal krijg je 3 oefeningen waarvan één analoog aan een oefening uit de lessen, een theoretische vraag en ten slotte waar of fout vraagjes . Als je voor beide testen slaagt (in het totaal) moet je geen examen meer doen in januari.

Examenvragen

Academiejaar 2021-2022

Tussentijdse test 1

Test 1 : 28 maart 2022

Theorie

1. $\#G = n \times p$ met $(n, p) = 1$ en p priem, g element van orde p.

   (a) Definiëer de centraliser deelgroep $C_G(g)$ en wat heeft deze te maken met de conjugatie-klas van g?

   Oplossing: $C_G(g) = \{h \in G \mid g.h = h.g\}$. Laat G werken op zichzelf door conjugatie, dan is de orbit van g gelijk aan de conjugatie-klas $conj(g)$ en is de stabilisator deelgroep van g gelijk aan $C_G(g)$. Bijgevolg is $\#conj(g) = \#G/\#C_G(g)$ via de orbit stelling.

   (b) Definiëer de normalisator deelgroep $N_G(P)$ van eeen Sylow p-deelgroep P van G en wat heeft die te maken met het aantal p-Sylow deelgroepen?

   Oplossing: $N_G(P) = \{g \in G \mid g^{-1}Pg = P\}$. Uit Sylow weten we dat alle Sylow p-deelgroepen geconjugeerd zijn, dus het aantal p-Sylows is $\#G$ gedeeld door de orde van de stabilisator-deelgroep van P (onder de actie door conjugatie) en dat is juist $N_G(P)$.

   (c) Voor $e \neq g \in P$, toon aan dat $C_G(g) = C_N(g)$ met $N = N_G(P)$.

   Oplossing: Aangezien $P = \langle g \rangle$ volgt voor $h \in C_G(g)$ dat $h^{-1}.g^i.h = g^i$ voor alle i en dus geldt $h \in N_G(P)$, maar dan is $g \in C_G(g) \cap N_G(P) = C_N(g)$.

   (d) Toon aan dat elke conjugatie-klas van een orde p element in G evenveel elementen heeft.

   Oplossing: Als $\langle g' \rangle = P' = x^{-1}.P.x$ (uit Sylow) dan geldt ook dat $N_G(P') = x^{-1}.N_G(P).x$ want als $h \in N_G(P')$ dan

   $$x^{-1}.h.x.P' = x^{-1}.h.P.x = x^{-1}.P.h.x = x^{-1}.P.x.(x^{-1}.h.x) = P'.x^{-1}.h.x$$

   dus zijn $N = N_G(P)$ en $N' = N_G(P')$ isomorf, maar dan zijn ook $C_N(g)$ en $C_{N'}(g')$ isomorf en dus wegens voorgaande punten hebben de conjugatie-klassen van g en van g' evenveel elementen.

2. Gegeven de character tabel van G en een G-representatie V met character-functie χ_V.

   (a) Hoe vind je de dimensie van V?

   Oplossing: De dimensie is $\chi_V(e)$.

   (b) Hoe vind je de irreduciebele componenten van V?

   Oplossing: Als V_i een irreduciebele is met character-functie χ_i (een rij in de character-tabel) dan komt V_i juist (χ_V, χ_i) keer voor in V.

(c) Definiëer $Hom_G(V,V)$ en formuleer het lemma van Schur.

Oplossing: $Hom_G(V,V)$ is de vectorruimte van alle G-endomorfismen, dat is, lineaire afbeeldingen $F : V \to V$ die compatiebel zijn met de G-actie, dat is, $F(g.v) = g.F(v)$ voor alle $g \in G$ en $v \in V$. Het lemma van Schur stelt dat

$$dim\ Hom_G(V,W) = \begin{cases} 1 \text{ als } V \simeq W \\ 0 \text{ anders} \end{cases}$$

voor irreduciebele G-representaties V en W.

(d) Hoe vind je de dimensie van $Hom_G(V,V)$?

Oplossing: $Hom_G(V,V) = (V^* \otimes V)^G$ en dus is de dimensie

$$(\chi_{V^* \otimes V}, \chi_T) = (\overline{\chi_V}\chi_V, \chi_T)$$

met T de triviale representatie.

3. Gegeven een groep G met deelgroep H en quotient-groep $\overline{G}$.

(a) Hoe wordt een G-representatie een H-representatie?

Oplossing: Via de samenstelling $H \subseteq G \to GL_d(\mathbb{C})$, dat is door restrictie van de actie.

(b) Hoe wordt een $\overline{G}$-representatie een G-representatie?

Oplossing: Door de samenstelling $G \to \overline{G} \to GL_d(\mathbb{C})$, dat is, $g.v = \overline{g}.v$ met $\overline{g}$ de restklasse van g in $\overline{G}$.

(c) Is een irreduciebele G-representatie steeds een irreduciebele H-representatie?

Oplossing: Neen. Neem een niet-Abelse groep G en een irreduciebele G-representatie V van dimensie groter dan 1, dan is V niet irreduciebel voor elke cyclische deelgroep $\langle g \rangle$ met $g \in G$.

(d) Is elke irreduciebele $\overline{G}$-representatie een irreduciebele G-representatie?

Oplossing: Ja, want elke niet triviale G-invariante deelruimte van V is ook een niet-triviale $\overline{G}$-deelruimte, omdat de actie dezelfde is.

Academiejaar 2015 - 2016

Examen 1ste zit

Theorie

1.
    - Definieer het tensor product van twee CC-vectorruimten VV en WW.
    - Toon aan dat indien VV en WW representaties zijn van GG dat dan ook V⊗WV⊗W een GG-representatie is.
    - Toon aan dat χV⊗W=χV(g).χW(g)χV⊗W=χV(g).χW(g).
2.
    - Formuleer de stelling van Jordan-Holder en definieer de termen 'compositierij' en 'compositie-factor'.
    - Geef een methode om uit de character-tabel van GG alle niet-triviale normaaldelers van GG te bepalen.
3.
    - Geef de grote stappen aan in het bewijs dat elke GG-representatie een directe som is van simpele representaties.
    - Wat is de character-tabel van GG en formuleer de orthogonaliteitsrelaties ervan.
    - Hoeveel simpele representaties van dimensie 1 heeft een eindige groep GG?

Oefeningen

1. Stel VV een simpele representatie van een groep GG zodat de triviale representatie een deelrepresentatie is van V⊗WV⊗W. Geldt dan dat V≅V∗V≅V∗.
2. Geef een voorbeeld van een trouwe (faithful) 3-dimensionale representatievan D4D4.
3. Gegeven volgende rij uit een charactertabel van een eindige groep GG <1,1,ω,ω2,−1,ω4,ω5>

   <1,1,ω,ω2,−1,ω4,ω5>

   met ωω een primitieve 6de eenheidswortel. Toon aan: de orde van GG is deelbaar door 6. Toon vervolgens aan door de charactertabel op te stellen:
    1. GG heeft 42 elementen.
    2. GG heeft 1 conjugatieklasse met 1 element, 1 conjugatieklasse met 6 elementen en 5 conjugatieklassen met 7 elementen.
4. Bepaal de charactertabel van S3×Z3S3×Z3.
5. Waar of niet waar? Toon aan of weerleg:
    1. De symmetriegroep van een tetra?eder is isomorf met de rotatiesymmetriegroep van de kubus.
    2. De rotatiesymmetriegroep van een tetra?eder is isomorf met de rotatiesymmetriegroep van de kubus.
    3. Stel GG een eindige groep met exact 2 niet-isomorfe simpele representaties. Dan geldt G≅Z3G≅Z3.

Tussentijdse Test I

Theorie

1. Formuleer en bewijs het lemma van Schur.
2. Formuleer de stelling van Jordan-Holder. Geef een compositie rij voor S3S3. Is deze uniek?

3. Bewijs dat de duale representatie V∗V∗ van een simpele GG-representatie ook simpel is.

Oefeningen

1. Toon aan dat Cn×CnCn×Cn geen faithful simpele reresentaties heeft.
2. Toon volgende eigenschap aan: stel GG een eindige groep van even orde en s∈Gs∈G een element van orde 2. Beschouw de reguliere representatie CGCG van GG. Stel (CG)+(CG)+ de deelruimte met eigenwaarde 1 voor de actie van ss en (CG)−(CG)− de deelruimte met eigenwaarde -1. Toon aan dat dim(CG)+=dim(CG)−=dim(CG)2

dim(CG)+=dim(CG)−=dim(CG)2

3. Waar of niet waar? Bewijs of weerleg.
    1. Een niet-abelse, simpele groep heeft geen niet-triviale 1-dimensionale reresentaties.
    2. Het beeld van een 1-dimensionale representatie G→C∗G→C∗ is een cyclische groep als GG eindig is.
    3. Een niet-triviale permutatie representatie van een eindige groep GG is een simpele representatie.
    4. Stel ρ:Sn→GLn(C)ρ:Sn→GLn(C) de klassieke permutatierepresentatie van SnSn. Dan geldt Im(ρ)⊂SLn(C)Im(ρ)⊂SLn(C).

Tussentijdse Test II

Theorie

1. Definieer de character functie χVχV van een GG-representatie VV en toon aan χV⊗W(g)=χV(g).χW(g)

χV⊗W(g)=χV(g).χW(g)

2. Formuleer de twee orthogonaliteit-relaties op de charactertabel en toon aan hoe deze voor de kolommen volgt uit deze van de rijen.
3. Leg uit hoe je de normaaldelers van GG kan halen uit de charactertabel.

Oefeningen

1. Geef de conjugatieklassen en de charactertabel van S3×S3S3×S3.
2. Toon de volgende eigenschap aan: Stel VV een simpele representatie van een eindige groep GG, dan bestaat er altijd een unieke deelrepresentatie V⊗V∗V⊗V∗ die isomorf is met de triviale representatie.
3. Waar of niet waar? Toon aan of weerleg:
    1. Als twee eindige groepen dezelfde charactertabel hebben dan zijn ze isomorf.
    2. Er bestaan eindige groepen GG met een |G||G|-dimensionale simpele representatie.
    3. Stel VV een simpele reresentatie van GG en ψψ een niet triviale 1-dimensionale representatie. Dan kan ψ⊗Vψ⊗V isomorf zijn met VV.
    4. De simpele representaties van S4S4 komende van de rotatiesymmetriegroep van de kubus en de symmetriegroep van de tetraeder zijn ismorf met elkaar.

Academiejaar 2014 - 2015

Tussentijdse Test I

Theorie

1. Formuleer de stelling van Jordan-Hölder en geef een voorbeeld van een eindige groep die twee verschillende decompositie-rijen heeft.
2. Bewijs dat $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)=V^*\otimes W$ als vectorruimte.
3. Als *V* en *W* twee *G*-representaties zijn, definieer dan de actie van *G* op de vectorruimte $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$ en toon aan dat deze actie samenvalt met de actie op het tensorproduct $V^*\otimes W$.
4. Formuleer en bewijs het lemma van Schur en leg uit hoe we dit resultaat gebruiken in het bewijs van de orthogonaliteitsrelaties voor characters.

Oefeningen

1. Toon aan dat als *p* een priemgetal is, dat dan de vergelijking $x^5-2px+p=0$ niet oplosbaar is in radicalen.
2. Geef een voorbeeld van een trouwe driedimensionale representatie van D_4.
3. We zoeken de charactertabel van de groep
   $T=\langle s,t \mid s^6=1,s^3=t^2,sts=t\rangle$
   $$T=\langle s,t \mid s^6=1,s^3=t^2,sts=t\rangle$$
   Gebruik hierbij dat de conjugatieklassen
   $\{e\},\{s^3\}\{s,s^5\}\{s^2,s^4\}\{t,s^2t,s^4t\},\{st,s^3t,s^5t\}$
   $$\{e\},\{s^3\}\{s,s^5\}\{s^2,s^4\}\{t,s^2t,s^4t\},\{st,s^3t,s^5t\}$$
   en het feit dat er een representatie ρ bestaat waarvoor
   $\rho(s)=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^2\end{pmatrix}$
   $$\rho(s)=\begin{pmatrix}\omega & 0\\ 0 & \omega^2\end{pmatrix}$$
   en
   $\rho(t)=\begin{pmatrix}0 & -i\\ i & 0\end{pmatrix}$
   $$\rho(t)=\begin{pmatrix}0 & i\\ -i & 0\end{pmatrix}$$
   met $\omega=e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Tussentijdse Test II

Theorie

1. Geef de belangrijkste stappen die je nodig hebt om te bewijzen dat de dimensie van een irreduciebele *G*-represenatie de orde van *G* deelt.
2. Formuleer de stelling van Burnside en leg kort uit je character theorie gebruikt in het bewijs.

3. Stel *H* een deelgroep van *G*. Definieer de *G*-actie op de inductie $\mathrm{Ind}(V)$ van een irreducíebele *H*-representatie *V*. Stel dat $U_1,..,U_k$ de irreducíebele representaties zijn van *G* en dat je de *H*-characters $\psi_1,...,\psi_k$ kent van de restricties $\mathrm{Res}(U_1),...,\mathrm{Res}(U_k)$. Indien *V* een irreducíebele *H*-representatie is, geef een formule om de decompositie

$$\mathrm{Ind}(V)=U_1^{\oplus e_1}\oplus...\oplus U_k^{\oplus e_k}$$

te berekenen.

Oefeningen

1. Bepaal de charactertabel van $S_3\times Z_3$.
2. Zij *G* een groep met *r* conjugatieklassen $C_1,...,c_r$. We noemen *M* de $r\times r$-matrix die de charactetabel weergeeft. Toon aan dat

$$|\det(M)|=\sqrt{\frac{|G|^r}{\prod_{i=1}^r|c_i|}}$$

3. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld: Zij $n\in\mathbb{N}_0$ willekeurig. De $\mathbb{C}$-algebra $M_n(\mathbb{C})$ is isomorf met een groepalgebra.

Examen Juni

Theorie

1. Geef de stelling van Jordan-Hölder en definieer ale voorkomende begrippen. (behalve *groep*)
2. Toon het volgende aan voor eindigdimensionale $\mathbb{C}-$vectorruimten V en W

$$V^*\otimes W=\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(V,W)$$

3. Geef en bewijs het lemma van Schur.
4. Geef de twee orthogonaliteitsrelaties voor characters.
5. Stel $r\in ZG$ zodat er een van nul verschillend element $u\in\mathbb{C}G$ bestaat waarvoor $r.u=\lambda u$. Bewijs dat λ een algebraïsch getal is.

Oefeningen

1. Stel G een eindige groep met 6 conjugatieklassen.
   - Waarom kan $\langle 3,2,-1,-4,0,1\rangle$ niet het character zijn van een represenatie van G?
   - Waarom kan $\langle 3,2,1,1,0,1\rangle$ niet het character zijn van een irreducibele represenatie van G?
2. Bepaal alle 1-dimensionale en 2-dimensionale representaties van

$$D_7=\langle\sigma,\theta\mid\sigma^7=\theta^2=e,\sigma\theta=\theta\sigma^{-1}\rangle$$

Werk ook de charactertabel uit. Kan je dit resultaat veralgemenen naar D_n?

3. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:
    - Elke groep die kan worden voortgebracht door 2 elementen is oplosbaar.
    - Een eindigdimensionale algebra die nilpontente elementen heeft, bevat geen idempotente elementen.

Academiejaar 2013 - 2014

Tussentijdse test 1

Theorie

1. Formuleer en bewijs het lemma van Schur. Hoe gebruiken we dit lemma verder?
2. Hoe bepaal je het centrum $Z(G)$ uit de character tabel van G? (enkel de getallen IN de tabel zijn gekend)
3. Als χ_V het character is van de G-representatie V, toon aan dat volgende functies klasfuncties zijn voor alle $n\in\mathbb{N}$
    - $\phi_n:G\to\mathbb{C}:\phi_n(g)=\chi_V(g)^n$
    - $\psi_n:G\to\mathbb{C}:\psi_n(g)=\chi_V(g^n)$
4. Zijn ϕ_n en ψ_n opnieuw characters van een G-representatie? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld (hint: gebruik de character tabel van S_3).

Oefeningen

1. Goed of fout: bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
    - Het tensor product van twee permutatierepresentaties is terug een permutatierepresentatie.
    - Het tensor product $V\otimes V^*$ van een irreduciebele representatie V kan steeds geschreven worden als $T\oplus V'$, met T de triviale representatie.
    - Elke groep met p^n elementen heeft tenminste 1 niet triviale 1-dimensionale representatie.
2. Bepaal de charactertabel van $D_6=<\sigma,\tau|\sigma^6=\tau^2=1,\sigma\tau=\tau\sigma^5>$

Tussentijdse test 2

Theorie

1. Formuleer de stelling van Burnside. Leg kort uit welke resultaten uit character theorie je gebruikt in het bewijs.
2. Forumeleer de stelling van Brauer-Fowler en schets het belang ervan in de classificatie van eindige simpele groepen.

3. Bekijk de onderstaande character-tabel van een groep G:
    - Toon aan dat G een simpele groep is van orde 360
    - Geef het aantal elementen in elke conjugatieklasse.
    - Toon aan dat g2g2 en g3g3 even orde hebbe, g4g4 of g5g5 orde 3 hebben en g6g6 en g7g7 orde 5 hebben (hint: gebruik #CG(gi)CG(gi))
    - Toon aan dat g2g2 de enige klasse van involuties is. (Hint: gebruik de formule voor het aantal involuties en gebruik een afschatting).
    - Toon aan dat G een deelgroep heeft isomorf met A5A5. (hint gebruik de voorstelling A5≈<a,b|a2=1,b3=1,(ab)5=1>A5≈<a,b|a2=1,b3=1,(ab)5=1> en denk aan de berekening van de structuurconstante aijkaijk).

```
$$ begin{array} G & g_1&g_2&g_3&g_4&g_5&g_6&g_7  \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 & 1 & 1
& 1 & 1 & 1\\ \chi_2 & 5 &  1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ \chi_3 & 5 & 1 & -1 & -1 &
2 & 0 & 0 \\ \chi_4 & 8 & 0 & 0 & -1 & -1 & \alpha & \beta \\ \chi_5 & 8 & 0 & 0 &
-1 & -1 & \beta & \alpha \\ \chi_6 & 9 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ \chi_7 & 10 &
-2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} $$
```

α=12(1+5–√)α=12(1+5) en β=12(1−5–√)β=12(1−5)

Oefeningen

1. Bewijs of weerleg de volgende bewering. Zij H een deelgroep van een eindige groep G. Voor een irreducibele representatie V van G geldt steeds dat indGH(ResGH(V))≈VindHG(ResHG(V))≈V.
2. Een groep G bestaat uit 7 conjugatieklassen. Van het volgende irreducibele character van G zijn de eerste 6 entries gegeven. Bepaal de volledige charactertabel (alsook het aantal elementen van G en het aantal elementen in elke conjugatieklasse). χ=<1,1,−1,−ω,ω2,ω,x>χ=<1,1,−1,−ω,ω2,ω,x> met ω=e2πi6ω=e2πi6
3. Controleer of de volgende deelverzamelingen van de algebra M2(C)M2(C) of M3(C)M3(C) deelalgebra's zijn? Staaf je bewering. Indien ja, zijn ze isomorf met een groepalgebra?
    - {[a00−a];a∈C}{[a00−a];a∈C}
    - ⎧⎩⎨⎪⎪⎡⎣⎢a000e000i⎤⎦⎥;a,e,i∈C⎫⎭⎬⎪⎪{[a000e000i];a,e,i∈C}
    - ⎧⎩⎨⎪⎪⎡⎣⎢a000e0cfi⎤⎦⎥;a,c,e,f,i∈C⎫⎭⎬⎪⎪{[a0c0ef00i];a,c,e,f,i∈C}
    - ⎧⎩⎨⎪⎪⎡⎣⎢a00be0cfi⎤⎦⎥;a,b,c,e,f,i∈C⎫⎭⎬⎪⎪{[abc0ef00i];a,b,c,e,f,i∈C}

Theorie

December 2009

1. Bewijs dat de dimensie van een irreducibele G-representatie een deler is van de orde van G.
2. Formuleer of defineer:
    - De stelling van Burnside
    - een algebraisch getal
    - de groep-algebra CC G
    - Frobenius reciprociteit

3. Hoe kan je, aan de hand van de karakter-tabel van G, alle normaaldelers van G bepalen ?

Oefeningen

December 2009

1. Bekijk de volgende groep van volgorde 16. $G=\langle a,b|a^8=b^2=1,ab=ba^3\rangle$ G heeft de volgende conjugatieklassen

   $$\{1\},\{a^4\},\{a^2,a^6\},\{a,a^3\},\{a^5,a^7\},\{b,a^2b,a^4b,a^6b\},\{ab,a^3b,a^5b,a^7\}$$

   . Bepaal de volledige charactertabel van G. Geef ook aan hoe je aan bepaalde waarden komt. (Bepaal indien nodig de geinduceerde representatie van representaties van de deelgroep <a>)
2. Goed of fout (bewijs of weerleg):
   - (a) Indien X een character is van een groep G zodat X(g) even is voor elke $g\in G$, dan bestaat er ook een karakter ψ zodat $2\psi=X$
   - Indien ρ de permutatie representatie is van S_n (i.e. de n-dimensionale representatie die de basisvectoren permuteert), dan is de triviale representatie hiervan een deelrepresentatie.

Tussentijdse testen

November 2010

1. Definieer de volgende begrippen:
   - Duale ruimte van een vectorruimte
   - Quiver algebra
   - Representatie van een algebra
   - Uitwendig algebra
   - Convolutieproduct op groepalgebra
2. Bewijs dat voor alle eindig dimensionale vectorruimten V en W geldt dat $hom_C(V,W)\cong V^*\otimes W$
3. Definieer een simpele algebraen en toon dat $M_n(C)$ simpel is.
4. Welk van de volgende deelverzamelingen van $M_n(C)$ vormen een deelalgebra van $M_n(C)$? Leg uit waarom.
   - (a) de bovendriehoeksmatrices
   - (b) de bovendriehoeksmatrices met allemaal énen op de diagonaal
   - (c) de bovendriehoeksmatrices met allemaal nullen op de diagonaal

5. Beschouw de groep D5D5 (met 10 elementen)
   D5=⟨s,t|s5=t2=1,st=ts4⟩

D5=⟨s,t|s5=t2=1,st=ts4⟩

   - Schrijf de groepalgebra CD5CD5 als vrije algebra met relaties. Wat is de dimensie van CD5CD5
   - Bepaal alle 1-dimensionale algebrarepresentaties van CD5CD5
   - Bepaal alle 2-dimensionale groepsrepresentaties van D5D5 op equivalenties na (start met te kijken naar de mogelijke eigenwaarden van ρ(s)ρ(s) voor een willekeurige 2-dimensionale representatie ρ:D5→GL2ρ:D5→GL2)

December 2010

1. Beschouw de 2-dimensionale representatie V van de algebra A met A=[CC0C]A=[CC0C] en V=[CC]V=[CC] waar de actie gegeven wordt door links-vermenigvuldiging.
   - Is V simpel? Waarom (niet)?
   - Is V indecomposabel? Waarom (niet)?
   - Bepaal de endomorfisme algebra EndA(V)EndA(V)
   - Bepaal een compositie-rij van V
2. Formuleer en bewijs het lemma van Schur
3. Formuleer de dichtheidsstelling van Jacobson en gebruik deze om de classificatie van alle eindig dimensionale simpele algebra's af te leiden.
4.
   - Bepaal de dimensie van het volgende algebra A=C⟨X,Y⟩/(X4−1,Y2,XY−iYX,Y−X2Y)A=C⟨X,Y⟩/(X4−1,Y2,XY−iYX,Y−X2Y) door een basis van de vectorruimte te geven.
   - Het centrum Z(A) bestaat uit alle elementen die met alles commuteren. Bepaal dat centrum (Het volstaat te bepalen welke elementen commuteren met X en Y)
   - Z(A) is 2-dimensionaal over CC .Met welke tweedimensionale algebra die we in de oefeningen hebben gezien is dit centrum isomorf?
5. Gegeven de volgende charactertabel van een eindige groep G. Bepaal de grootte van elke conjugatieklasse van de groep G.

```
\( \begin{array} {|c|c|c|} conjugatieklasse & C_1&C_2  \\ \hline \chi_1 & 1 & 1 \\
\chi_2 & 1 &  \omega \\ \chi_3 & 1 & \omega^2 \\ \chi_4 & 3 & 0 \\ \chi_5 & 3 & 0
\end{array} \) \( \begin{array} {|c|c|c|} C_3 & C_4 & C_5 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\
\omega^2 & 1 & 1 \\ \omega & 1 & 1 \\ 0 & \alpha & \overline{\alpha} \\ 0 &
\overline{\alpha} & \alpha \end{array} \) met \( \alpha=(-1+ \sqrt{7}i)/2 \) en \(
\omega = (-1+ \sqrt{3}i)/2 \).
```

November 2012

Theorie

1. Is A4A4 een simpele groep? Waarom (niet)?

2. Toon aan dat elke eindige groep een element bevat met orde een priemdeler van de orde van G.
3. Formuleer de stellingen van Sylow en toon aan dat alle p-Sylow deelgroepen geconjugeerd zijn.
4. Toon aan dat voor vectorruimten V en W geldt $V^* \otimes W \simeq \hom_{\mathbb{C}}(V,W)$

Oefeningen

1. Toon aan dat een groep met 110 elementen niet simpel is
2. Het kroneckerproduct is niet commutatief.
    - Toon aan dat je voor vierkante matrices $A \in M_m$ en $B \in M_n$, er steeds een permutatiematrix P kan gevonden worden zodat $A \otimes B = P(B \otimes A)P^T$ (Bepaal deze P in functie van m en n)
    - Hoe zou je dit kunnen veralgemenen naar niet vierkante matrices?

December 2012

Theorie

1. Formuleer de orthogonaliteitrelaties en bewijs de relatie op kolommen uit deze voor de rijen.
2. Bewijs dat de dimensie van een irreduciebele G-representatie een deler is van de orde van de groep.
3. Formuleer de stelling van Burnside.
4. Laat $t \in G$ met $t^2 = e$ en $C_G(t) = C_2$. Toon aan dat $\#(G/[G,G]) \leq 2$. Hint: gebruik de orthogonaliteitsrelaties op de kolommen.

Oefeningen

1. Bekijk de volgende groep van orde 12 $Dic_3 = <a,x | a^3 = x^2, xax^{-1} = a^{-1}>$. Uit deze relaties volgt dat de orde van a gelijk is aan 6 en die van x gelijk is aan 4. Ze heeft ook volgende conjugatieklassen
$$\{1\},\{a^3\},\{a,a^5\},\{a^2,a^4\},\{x,xa^2,xa^4\},\{xa,xa^3,xa^5\}$$
    - Bepaal de volledige charactertabel en leg uit hoe je aan de waarden komt.
    - Is deze groep simpel?
2. Goed of fout (bewijs of weerleg)
    - Voor elke n staan in de charactertabel van S_n enkel reële waarden.
    - Veronderstel H een deelgroep van G met index [G : H] = n. Indien V een k-dimensionale representatie is van H dan is de geïnduceerde representatie van V als representatie van G nk-dimensionaal.
    - Twee niet isomorfe groepen hebben verschillende charactertabellen.

Categorieën:

- Wiskunde
- 2BWIS