Banach-en Hilbertruimten

tuyaux.winak.be/index.php/Banach-en_Hilbertruimten

Banach-en Hilbertruimten	
Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Bespreking

Theorie

De theorie wordt op de karakteristieke manier van professor Lowen gegeven, met heel dynamische hoorcolleges. Hierbij hoort regelmatig een vraag aan het publiek bij, die deze al dan niet kan oplossen. De stof wordt over het algemeen als minder zwaar ervaren ten opzichte van Analytische topologie, hier boet het echter wel in aan de uitgebreide mogelijkheden voor leuke voorbeelden allerhande te verzinnen. De stof zou je kunnen situeren in de grijze regio tussen Analyse en algebra, aangezien hier in een abstractie van een vectorruimte gewerkt wordt (de genormeerde ruimte). Professor Lowen legt de zwaarte van deze cursus overduidelijk op het stuk over Hilbertruimten. Deze cursus kan ook gevolgd worden door 3de Bach fysici (als ik mij niet vergis was 2012-2013 het laatste jaar dat de 2de jaarsfysici dit mochten kiezen). Hierdoor wordt in de cursus een hoofdstuk ingelast over Fourierreeksen (wat Prof. Lowen minder belangrijk vindt voor wiskundigen). Daartegenover staat dan het laatste hoofdstuk over (al dan niet compacte) operatoren op hilbertruimten, constructie en eigenschappen van de zwakke topologie en de spectraalstelling (wat hij ervaart als het natuurlijke domein van de wiskundigen binnen dit vak). De altijd-aanwezige tips voor een vak van Prof.Lowen zijn ook hier aanwezig: Hou je stof goed bij. Hou je hoofd koel. Denk over alles na (waarom mag wat je doet)... Het examen verloopt zoals altijd mondeling en dit voor ongeveer 2 uur tot 3 uur (afhankelijk van het aantal examenafleggend volk).

Oefeningen

De werkcolleges worden gegeven door Frederik Caenepeel. (gedetailleerde beschrijving volgt nog)

Examenvragen

Theorie

Juni 2016

1. Wat is het orthogonaal complement van een verzameling?
   - Geef alles wat je hier over weet.
   - Bewijs
     $x - PFx \perp F$
     $$x - PFx \perp F$$
     .
   - Bewijs
     $F \perp \perp = F$
     $$F \perp \perp = F$$
     als F gesloten is.
2. Wat is de toegevoegde operator?
   Waarom bestaat ze?
3. Leg in grote lijnen Fouriertransformaties uit.
4. Wat zijn compacte operatoren?
   Geef (tegen)voorbeeld.

5. Wat zegt de spectraalstelling?

Juni 2015

1. Bespreek orthogonaliteit en de verbanden met projecties.
   - Bewijs:
     $$x-P_Fx\perp F \text{ en } y\in F: x-y\perp F\Rightarrow y=P_Fx$$
   - Bewijs dat voor een willekeurige deelverzameling F van een Hilbertruimte E geldt dat $\overline{F}=F^{\perp\perp}$.
   - Bewijs
     $$(e_n)_n \text{ totaal en orthonormaal } \Leftrightarrow (e_n)_n \text{ maximaal orthogonaal } \Leftrightarrow \forall x\in E: x=\sum_n (x|e_n)e_n \leftrightarrow \|x\|^2=\sum_n|(x|e_n)e_n|^2$$
   - Bewijs, A een projectie $\Leftrightarrow \exists F\subset E$ gesloten zodat $A=P_F$.
   - Is $l^2\to l^2:(x_n)_n\mapsto(\sum_{k=1}^m x_k,0,0,...)$ een projectie?
2. Leg uit hoe de ruimte L^2 gedefinieerd is.
   - Schets het bewijs dat $(L^2,\|\|_2)$ een volledige ruimte is. Waarom voeren we bepaalde functies (g_n en g) in?
   - Wat weet je over Fourierreeksen?
   - Stel f continu en $\forall n:\int f(t)e^{int}dt=0$, wat weet je dan over f.
3. Wat is een compacte operator? Geef een voorbeeld van een compacte en een niet-compacte operator.
   - Wat zijn toegevoegde operatoren? Bewijs de existentie ervan.
   - Beschrijf operatoren van rang 1.
   - Waarom hebben we operatoren van eindige rang nodig?
   - Bewijs dat operatoren van eindige rang dicht zitten in $K(E,F)$.
   - Wat is de zwakke toplogie? Hoe karakteriseren we operatoren van eindige rang met de zwakke topologie? Bewijs dit.
   - Is de samenstelling van niet-compacte operatoren opnieuw niet-compact?
   - Wat weet je over de eigenwaarden van een compacte Hermitische operator?
   - Geef de spectraalstelling.
   - Hoe kan je de omgekeerde spectraalstelling bewijzen? (Hint: Gebruik eindige operatoren.)
   - Stel A een Hermitische en compacte operator. Veronderstel dat er een $n\in\mathbb{N}$ bestaat zodat $A^n=0$, bewijs dan dat $A=0$.
   - Stel $(x_n)_n$ een orthonormale familie in E en $(\lambda_n)_n$ een familie in K. Welke eis leggen we op $(\lambda_n)_n$ opdat $\sum_n\lambda_n(x|x_n)x_n$ een operator definieert.

Juni 2014

1. Geef en bewijs de projectiestelling. Wat is het verband met orthogonaliteit?
2. Geef een voorbeeld van een compacte en een niet-compacte operator.
3. Welk verband bestaat er tussen de projecties op M en $M^\perp$?
4. Geef de spectraalstelling. Voor welke waarden geeft is dergelijke reeks een compacte operator?
5. Gegeven een rij functies $(f_n)_n\in L^2$ waarvoor geldt
   $$\int f_n(t)e^{ikt}dt\to 0$$
   voor elke $k\in\mathbb{Z}$. Bewijs dat $(f_n)_n$ zwak convergeren naar 0.
6. Wat is een Schauderbasis en een Hilbertbasis? Wat is het verband tussen de twee? Bewijs dat een aftelbare Hilbertbasis een Schauderbasis is.
7. Stel $F=<e_1,\dots,e_n>$. Bewijs dat $P_F(x)=\sum_{i=1}^n(x|e_i)e_i$.
8. Wat is een toegevoegde operator? Waarom bestaat ze? Bewijs.
9. Als A compact is, wat weet je dan over $A\circ B$ of $B\circ A$? Geldt het omgekeerde ook
   $$A\circ B$$
   compact $\Rightarrow$ A of B compact.
10. Geef de definitie van: orthogonaliteit, orthogonaal complement en biorthogonaal complement.

11. Geef basiseigenschappen van orthogonaliteit. Bewijs dat A⊥A⊥ een gesloten deelruimte is.
12. Wanneer is A⊥⊥A⊥⊥ de kleinste deelruimte de AA omvat? Bewijs.
13. Gegeven een operator A:E→EA:E→E van rang 1. Bewijs dat er eenϕϕ en een ψψ bestaan zodat ∀x:Ax=(x|ϕ)∗ψ∀x:Ax=(x|ϕ)∗ψ. Bepaal de norm van AA. Wanneer is AA compact?
14. Stel (xn)n(xn)n een totale orthonormale rij, (Kn)n(Kn)n een rij scalairen. Definieer Ax=∑nKn(x|xn)xnAx=∑nKn(x|xn)xn. Wanneer is AA een operator?

Juni 2013

1. Wat weet je over orthogonaliteit en projecties? Geef ook de belangrijke verbanden. Te bewijzen ∀x∈E: x−PF(x)⊥F

   ∀x∈E:x−PF(x)⊥F

2. Wat is de toegevoegde operator (bij de andere groep kwam hier bij: geef en bewijs de belangrijke stelling waar dit op steunt)? Stel A:E→FA:E→F een operator van rang 1, bewijs dan dat er een y,z∈Ey,z∈E bestaan zodanig dat ∀x∈E:A(x)=(x|y)z∀x∈E:A(x)=(x|y)z.
3. Vertel wat je weet over de zwakke structuur en de sterke structuur en geef de verbanden. Wat is het belangrijkste verschil tussen deze twee structuren?
4. Bewijs naar keuze: (1) De gesloten eenheidsbol is zwak compact, (2) De gesloten eenheidsbol is zwak rijencompact.
5. Wat is een compacte operator? Geef een voorbeeld van een compacte operator en een tegenvoorbeeld.
6. Onderstel A: E -> F een compacte bijectieve operator, kan A−1A−1 continu zijn? En rijencontinu (voor Ew−>FEw−>F)

Juni 2012

1. Geef de definitie van orthogonaliteit en projecties en voorbeelden.
2. Wat wil het zeggen dat 2 deelruimten orthogonaal zijn? Wat is het verband tussen orthogonaliteit en een projectie?
3. Geef en bewijs de projectiestelling. Geef ook een voorbeeld dat duidelijk maakt dat het noodzakelijk is dat we de deelverzameling waarop we projecteren volledig is om de porjectiestelling te doen gelden.
4. Geef de definitie van een compacte operator en geef een voorbeeld, tegenvoorbeeld.
5. Geef alle eigenschappen die gelden voor een compacte operator.
6. Zwakke convergentie is convergentie in welke topologie? Is deze topologie gelijk aan de norm topologie? Wanneer wel? Toon aan waarom het anders niet geldt.
7. Bewijs: A compact ⇒⇒ het aantal lineair onafhankelijke eigenvectoren met corresponderende eigenwaarden die absolute waarden r > 0 hebben, is eindig.
8. Stel A compact en B een willekeurige operator. Wat kan je dan zeggen over de samenstelling AB en BA?
   Stel AB compact, moet dan 1 van de 2 operatoren compact zijn? Geef een tegenvoorbeeld of een argument om dit aan te tonen.

Oefeningen

Augustus 2017

1. E:={f∈C(R3,R)|supx∈R3|f(x)|<∞}E:={f∈C(R3,R)|supx∈R3|f(x)|<∞}, (E,||.||∞)(E,||.||∞) BR, V:={f∈C(R3,R)|∀ε>0,∃Kε⊆R3compact:supx∈R3\Kε|f(x)|≤ε}V:={f∈C(R3,R)| ∀ε>0,∃Kε⊆R3compact:supx∈R3\Kε|f(x)|≤ε}, W:={f∈C(R3,R)|∀ε>0,∃Kε⊆R3compact:supx∈R3\Kε|f(x)|<ε}W:={f∈C(R3,R)| ∀ε>0,∃Kε⊆R3compact:supx∈R3\Kε|f(x)|<ε}
   - Toon aan dat VV en WW deelruimtes zijn van EE.
   - Is VV gesloten in EE? Is WW gesloten in EE?
   - Is VV volledig? Is WW volledig?
2. l0:={(xn)n∈l2|∃n0:∀n≥n0:xn=0}l0:={(xn)n∈l2|∃n0:∀n≥n0:xn=0} Bepaal l⊥0l0⊥ en l0⊕l⊥0l0⊕l0⊥ in l2l2

3. E HR
   - Toon aan $\forall x,y \in E: ||z-x||^2 + ||z-y||^2 = \frac{1}{2}||x-y||^2 + 2||z - \frac{x+y}{2}||^2$
   - $V \subseteq E$ convex, $(x_n)_n$ rij in V zodat $||x_n|| \to \inf_{x \in V} ||x||$ Toon aan $(x_n)_n$ convergeert in E
   - Bewijs $(\mathbb{R}^2, ||.||_\infty)$ geen HR (gebruik vorige)
4. Bereken Fourrierreeks $f:[-\pi,\pi] \to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} x & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$
5. Beschouw differentiaalvergelijking $u_t = t^2 u_{xx}$ met $t>0$ zodat $u(x,0)=f(x)$ Toon mbv Fourriertransformatie aan dat $u(x,t) = \sqrt{\frac{3}{4\pi t^3}} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-3(x-z)^2/4t^3} dt$ oplossing is. Welke voorwaarden stel je aan u en f? (Hint : $a^2 - 2ab = (a-b)^2 - b^2$ en $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{2\pi}$)
6. Beschouw $f: I \to \mathbb{C}$ en $M_f: L^2(I) \to L^2(I): g \mapsto f \cdot g$
   - Ga na dat M_f operator is
   - Bepaal $||M_f||$, M_f^*, eigenwaarden en eigenvectoren van M_f
   - Voor welke f is M_f Hermitisch? projectie?
   - Is M_f compact? HS?

Juni 2017

---

1. Prehilbertruimte $H = C([0,1],\mathbb{R})$, $(f|g) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$ en deelruimte $V = \{f \in H \mid f(0) = 0\}$
   - V gesloten in H?
   - $f \in H$, $\forall n \in \mathbb{N}_0: f_n: [0,1] \to \mathbb{R}: x \mapsto \begin{cases} xnf(\frac{1}{n}) & 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ f(x) & \frac{1}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$ Toon aan $(f_n)_n \to f$ in H
   - Bepaal $V^\perp$, $V \oplus V^\perp$, $\overline{V}$ in H
   - V volledig?
2. E HR, $G_1 \supseteq G_2 \supseteq \dots$ dalende gesloten rij in E, $G := \bigcap_{n \in \mathbb{N}_0} G_n$, $x \in E$, $a_n := P_{G_n} x$
   - $\exists E$ HR en $G_1 \supsetneq G_2 \supsetneq \dots$ gesloten deelruimten
   - rij $(d(x,G_n))_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergeert
   - $p \leq q: ||a_p - a_q||^2 \leq 2(d(x,G_q)^2 - d(x,G_p)^2)$
   - rij $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ convergeert
   - $\lim_{n \to \infty} a_n = P_G x$
3. $f(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$ Bereken $\int_0^\infty \sin(x)\cos(x)xdx$
4. Gebruik Fouriertr om te tonen dat $-\frac{1}{8}e^{-4|x|}$ oplossing is van $y' - 4y = f(x)e^{-4x}$ met $f(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$
5. rij $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}$ met $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}_0} \to 1$, operator $A: l^2 \to l^2: (x_1, x_2, \dots) \mapsto (\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, \dots)$
   - Ga na of A operator is
   - Bepaal $||A||$, A^*, eigenvectoren en eigenwaarden van A
   - Welke voorwaarde moet je op (λ_n) zetten zodat A Hermitisch is
   - Voor welke (λ_n) is A compact? HS?

Juni 2015

---

1. Beschouw volgende vectorruimte over $\mathbb{C}$

$$\ell_b^\infty = \{(x_n)_n \in l^\infty \mid |x_1| + \sum_{i=1}^\infty |x_{i+1} - x_i| < \infty\}$$

   definieer hierop de norm

$$||x||_b = |x_1| + \sum_{i=1}^\infty |x_{i+1} - x_i|$$

   - Bewijs dat $(\ell_b^\infty, || \, ||_b)$ een genormeerde ruimte is.
   - Is deze ruimte een Banachruimte?
   - Vind een element in $\ell^\infty \setminus \ell_b^\infty$.

2. Stel HH een Hilbertruimte
   - Toon aan
     ∀x,y,z:∥z−x∥2+∥z−y∥2=12∥x−y∥2+2∥z−x+y2∥2

     ∀x,y,z:∥z−x∥2+∥z−y∥2=12∥x−y∥2+2∥z−x+y2∥2

   - Stel M⊂HM⊂H convex en (xn)n(xn)n een rij in MM zodat ∥xn∥→infx∈M∥x∥∥xn∥→infx∈M∥x∥. Toon aan dat (xn)n(xn)n convergeert in HH.
   - R2R2 met de maximum-metriek is geen Hilbertruimte, toon aan. Toon ook aan dat voorgaand puntje niet geldig is in deze ruimte.
3. Bereken ∑∞n=1(−1)n1−cos(2n)4n2∑n=1∞(−1)n1−cos(2n)4n2 a.h.v. de Fourierreeks van f:]−π,π[→R:x↦{14(2−|x|)0|x|<22≤|x|<π

   f:]−π,π[→R:x↦{14(2−|x|)|x|<202≤|x|<π

4. Gegeven is de lineaire operator T:ℓ2→ℓ2:(xn)n↦(x1,12–√x2,13–√x3,…,1n−−√xn,…)

   T:ℓ2→ℓ2:(xn)n↦(x1,12x2,13x3,…,1nxn,…)

   - Toon aan dat TT continu is. Bepaal ∥T∥∥T∥.
   - Bepaal de toegevoegde operator T∗T∗. Is TT Hermitisch? Zo ja, is TT een projectie?
   - Is TT een compacte operator? Is het een Hilbert-Schmidt operator?
   - Is TT bijectief? Zo ja, is T−1T−1 begrensd en wat is ∥T−1∥∥T−1∥?
   - Bepaal alle eigenwaarden en -vectoren. Beargumenteer waarom je ze allemaal hebt.

Juni 2014

Opmerking: Je mocht kiezen tussen vraag 2 en 3, je moest ze niet alle twee maken. 1 en 4 waren verplicht.

1. Beschouw de reële vectorruimte C([−1,1])={f:[−1,1]→R|fC([−1,1])={f:[−1,1]→R|fcontinu}}. We rusten dit uit met het inproduct <f,g>=∫−11f(x)g(x)dx<f,g>=∫−11f(x)g(x)dx.
   - Zij AA de deelruimte van C([−1,1])C([−1,1]) bestaande uit al de even functies en stel BB de deelruimte bestaande uit de oneven functies. Dus A={f∈C([−1,1])|f(x)=f(−x)∀x}A={f∈C([−1,1])|f(x)=f(−x)∀x} en B={f∈C([−1,1])|f(−x)=−f(x)∀x}B={f∈C([−1,1])|f(−x)=−f(x)∀x}. Toon aan dat A⊥=BA⊥=B.
   - Is BB gesloten in C([−1,1])C([−1,1])? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
2. Zij f:R→Rf:R→R een periodische functie met periode 2π2π. Stel verder dat ff continu is en een continue afgeleide heeft op heel RR. Stel verder dat de Fourierreeks van ff gegeven is door f∼a02+∑n=1+∞(ancos(nx)+bnsin(nx))f∼a02+∑n=1+∞(ancos(nx)+bnsin(nx)).
   - Toon aan dat de Fourierreeks van f′f′ gegeven is door f′(x)∼∑n=1+∞(nbncos(nx)−nansin(nx))f′(x)∼∑n=1+∞(nbncos(nx)−nansin(nx)).
   - Toon aan dat als ∫−ππf(x)dx=0∫−ππf(x)dx=0, dat dan de volgende ongelijkheid geldt ∫−ππ|f(x)|2dx≤∫−ππ|f′(x)|2dx

     ∫−ππ|f(x)|2dx≤∫−ππ|f′(x)|2dx

     . Toon verder aan dat de gelijkheid geldt als en slechts als f(x)=asin(x)+bcos(x)f(x)=asin(x)+bcos(x) voor constanten a,b∈Ra,b∈R.
3. Bereken ∑n=1+∞(−1)n+1(2n−1)3∑n=1+∞(−1)n+1(2n−1)3 door gebruik te maken van de Fourierreeks van f:]−π,π[→R:x↦x(π−|x|)f:]−π,π[→R:x↦x(π−|x|).
4. Beschouw de lineaire operator T:l2→l2:(xn)n↦(11x1,12√x2,13x3,14√x4,15x5,…,12n−1x2n−1,12n√x2n,…)T:l2→l2:(xn)n↦(11x1,12x2,13x3,14x4,15x5,…,12n−1x2n−1,12nx2n,…).
   - Toon aan dat TT begrensd is en vind ||T||||T||.
   - Vind T∗T∗. Is TT Hermitisch? Is TT een projectie-operator?
   - Is TT een compacte operator? Is TT Hilbert-Schmidt?
   - Is TT bijectief? Is T−1T−1 begrensd? Bepaal ||T−1||||T−1||.
   - Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van TT.

Categorieën:

- Wiskunde

- 2BWIS