Gevorderd Kansrekenen

Gevorderde Kansrekening	
Richting	Wiskunde
Jaar	MWIS

Januari 2016 - 2017

Theorie

Vraag 1 was verplicht op te lossen, daarna kreeg je de keuze tussen vraag 2 en 3.

1. Martingalen en convergentie:
   - Definieer het begrip *submartingaal* en geef een voorbeeld van een submartingaal die geen (gewone) martingaal is.
   - Formuleer en bewijs de convergentiestelling voor submartingalen. Het *upcrossings*-theorema werd gegeven en mocht je zonder bewijs gebruiken.
   - Beschouw een rij onafhankelijke variabelen $(X_n)_{n\geq 0}$ met $E[X_n]=0$. Veronderstel dat $\sum_{n\geq 0} E[X_n^2]$ eindig is, gebruik dan de convergentiestelling om aan te tonen dat $\sum_{n\geq 0} X_n$ bijna overal convergeert.
2. Centrale limietstelling van Linderberg:
   - Formuleer de centrale limietstelling van Lindeberg.
   - Gebruik deze stelling om te bewijzen dat $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{d} Y \sim N(0,1)$ als je weet dat $(X_n)_{n\geq 0}$ een rij onafhankelijke variabelen is met
   $$E[X_n]=0, E[X_n^2]=1, \sup_n E[|X_n|^{94}]<\infty$$
   .
   - Bewijs het omgekeerde van de centrale limietstelling van Lindeberg (i.e. de stelling van Feller).
3. Karakteristieke functies:
   - Bewijs de continuïteitsstelling. De k-dimensionale dichtheid J_σ van $Q_\sigma = Q * N(0,\sigma^2 I)$ werd hierbij gegeven.
   - Gebruik de continuïteitstelling om de uniciteitsstelling van de karakteristieke functie te bewijzen.

Oefeningen

1. Stel $(Z_n)_{n\geq 0}$ een rij onafhankelijke variabelen met
$$E[Z_0]=\frac{1}{2}, E[Z_1]=1, P\{Z_n=n\}=(n+1)^{-1}, P\{Z_n=\frac{1}{n}\}=n(n+1)^{-1}$$
   - Bewijs dat $X_n \doteq \prod_{k=0}^{n} Z_k$ een martingaal is.
   - Bewijs dat er een integreerbare variabele $X:\Omega\to\mathbb{R}$ bestaat zodat $X_n\to X$ b.o.
   - Bepaal de limietverdeling van deze variabele. (Hint: Bereken $E[\sqrt{X_n}]$)
2. Beschouw $\{X_n|n\in\mathbb{N}\}$ en $\{Y_n|n\in n\}$ twee rijen onafhankelijke en symmetrische variabelen. Er geldt dat $|X_n|\leq|Y_n|$ en de reeks $\sum_{n\geq 0}Y_n$ convergeert met positieve kans.
   - Bewijs dat $\sum_{n\geq 0}X_n$ b.o. convergeert.
   - Geldt dit ook als je geen symmetrie veronderstelt? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.
3. Stel $Z_n,Z:\Omega\to\mathbb{R}$ zodat $Z_n\xrightarrow{d}Z$
   - Bewijs dat voor elke rij $c_n\to\infty$ geldt dat $P\{|Z_n|\geq c_n\}\to 0$ als $n\to\infty$ (Hint: Bewijs dat $\forall\epsilon>0,\exists K_\epsilon>0: P\{|Z|\geq K_\epsilon\}\leq\epsilon$.)
   - Stel $a_n>0$ en $b_n>0$ rijen zodat $\frac{a_n}{b_n}\to 1$ en $(X_n)_n$ en Y variabelen. Gebruik dan het vorige resultaat en het lemma van Slutsky om aan te tonen dat
$$\frac{X_n}{a_n}\xrightarrow{d}Y \Leftrightarrow \frac{X_n}{b_n}\xrightarrow{d}Y$$
4. Stel $X:\Omega\to\mathbb{R}$ een stochastische variabele en $-\infty<a<b<+\infty$
   - Bewijs dat
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-c}^{c}\frac{1}{it}(e^{-ita}-e^{-itb})\phi_X(t)\,dt\to P\{a<X<b\}+\frac{1}{2}P\{X\in\{a,b\}\} \text{ als } c\to\infty$$
   - Gebruik dit resultaat om de uniciteitsstelling voor 1-dimensionale karakteristieke functies te bewijzen.
5. Stel $\{X_{n,k}|1\leq k\leq n\}$ een array (*row-wise independent*) zodat $X_{n,k}\sim\text{Bernoulli}(\frac{3}{n+3})$. Toon met karakteristieke functie aan dat
$$\sum_{k=1}^{n}X_{n,k}\xrightarrow{d}Y\sim\text{ Poisson}(3)$$

Categorieën:
- Wiskunde
- MWIS