Multivariate calculus

Multivariate calculus	
Richting	Wiskunde
Jaar	1BWIS

Bespreking

Inhoudelijk lijkt dit vak vrij sterk op het vak calculus, dat je in het eerste semester hebt gehad, alleen gaat het hier om functies met hogere dimensies. Er is een inleidend hoofdstuk over rijen en reeksen, vervolgens zullen continuïteit, afgeleiden en integralen van functies met meerdere veranderlijken behandeld worden.

Theorie

De theorielessen worden gegeven door Sonja Hohloch. Ze heeft een cursus die online staat (https://www.uantwerpen.be/nl/personeel/sonja-hohloch/private-webpage/teaching/antwerpen/), en na elke les geüpdatet wordt. Deze kan je zelf afdrukken. In de les wordt de cursus verduidelijkt door enkele tekeningen.

Oefeningen

De oefeningen worden gegeven door Jaume Alonso Fernandez. Er zijn geen oefeningenbladen beschikbaar, de opgaven worden in de les op bord geschreven. Daarom is het zeer belangrijk om naar zijn lessen te gaan. Er worden doorheen het semester 6 huistaken gegeven, die samen voor 20% van je totale eindcijfer meetellen. Laat je niet afschrikken door de eerste taken, het is normaal dat je deze moeilijk vindt, naar het einde toe worden ze meer haalbaar. Probeer je best te doen voor deze taken, zo krijg je enerzijds de leerstof beter onder de knie en anderzijds is het positief als je niets moet inhalen op het examen.

Puntenverdeling en examen

Op het examen worden theorie en oefeningen tegelijk afgelegd. Focus vooral op de oefeningen, er wordt theorie gevraagd, maar in (veel) mindere mate. De oefeningen zijn redelijk vergelijkbaar met degene die je in de les gezien hebt of voor de opdrachten gemaakt hebt. Voor de theorie zijn de stellingen met naam het belangrijkst (leer zeker de impliciete en inverse functiestelling). Zoals al vermeld, staat 20% van je eindcijfer op de opdrachten die je door het jaar maakt, de overige 80% wordt dus door het examen bepaald.

Examenvragen

Academiejaar 2019-2020

Juni 2020

1.

   1. Bepaal of de volgende rij begrensd is, wat de adherentiepunten zijn (als er bestaan), en wat de limiet is (als die bestaat). **/1**
      $a_n=(1+(-1)^n,\frac{1}{n})$
      $$a_n=(1+(-1)^n,\frac{1}{n})$$

   2. Is de volgende rij convergent? Indien ja, bereken de limiet. **/2**
      $c_n=\frac{(8n)^3+5^{2n}+\sin(3n^2)}{\sqrt[3]{(5n)}+\log(\ln(\log(n)))}$
      $$c_n=\frac{(8n)^3+5^{2n}+\sin(3n^2)}{\sqrt[3]{(5n)}+\log(\ln(\log(n)))}$$

   3. Convergeert de volgende reeks? **/1**
      $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos(n^2)}$
      $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos(n^2)}$$

   4. Voor welke waarden van α convergeert de volgende reeks? **/2**
      $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n}^{\alpha}}{\log(n)}$
      $$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\sqrt{n}^{\alpha}}{\log(n)}$$

2. Zij:
   $||f||_k:C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathbb{R}:f\mapsto\max_{x\in[-k,k]}|f(x)|$
   $$||f||_k:C^0(\mathbb{R},\mathbb{R})\to\mathbb{R}:f\mapsto\max_{x\in[-k,k]}|f(x)|$$

   en de metriek d:

   $d(f,g)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{||f-g||_k}{2^k(1+||f-g||_k)}$
   $$d(f,g)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{||f-g||_k}{2^k(1+||f-g||_k)}$$

   Toon aan dat er geen norm $||.||$ bestaat zodat $d(f,g)=||f-g||$. **/3**

3. Beschouw de functie f:
   $\begin{cases} f(x,y)=0 & \text{als } (x,y)=(0,0) \\ f(x,y)=(2x^3+3y^3)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$
   $$\begin{cases} f(x,y)=0 & \text{als } (x,y)=(0,0) \\ f(x,y)=(2x^3+3y^3)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{als } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$$

   1. Is f continu? Toon aan. **/3**
   2. Bestaat de partiële afgeleide van f in (0,0)? **/2**
   3. Is f differentiëerbaar in (0,0)? **/3**
   4. Zijn de partiële afgeleiden van f continu in (0,0)? **/2**

4. Differentieerbare functies
   - Schrijf de impliciete functiestelling op.
   - Beschouw $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1^2+x_2^3,\cos(x_1+x_3+x_4^2))$ en $x=(1,1,-1,\sqrt{\frac{\pi}{2}})\in\mathbb{R}^4$ en $r=f(x)\in\mathbb{R}^2$. Welke dimensie heeft het beeld $f^{-1}(r)$ dicht bij x? Bewijs!
   - Vind een functie en een regulier punt zodat men de ellipsoïde $E:=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3|\frac{x_1^2}{3}+\frac{x_2^2}{3}+\frac{x_3^2}{4}=2\}$ als niveauverzameling van dit regulier punt kan schrijven. Hoe kan men de raakruimte T_zE van $z\in E$ berekenen?

5.

   1. Vind de kritieke punten van volgende functie en classificeer ze. **/2**
      $f(x,y)=5y^2-3x^4+2x^2+2$
      $$f(x,y)=5y^2-3x^4+2x^2+2$$

   2. Wat zijn de globale maxima/minima van: **/4**
      $f(x,y,z)=-x-y^2-3z$
      $$f(x,y,z)=-x-y^2-3z$$

      over het gebied bepaald door de volgende vergelijking:

      $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2=3$
      $$\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2=3$$

6. I=∫20∫22x√y5+y4dydxI=∫02∫2x2y5+y4dydx **/6**
    1. Teken het integratiegebied. **/1**
    2. Verander de volgorde van integratie. **/2**
    3. Reken de integraal uit. **/3**
7.
    - Geef de namen van twee belangrijke stellingen van hoger dimensionale integratie.
    - Zij (fk)k∈N∈C0([0,1]n,R)(fk)k∈N∈C0([0,1]n,R) een functierij met limk→∞fk=flimk→∞fk=f puntsgewijs. Geldt het volgende altijd? limk→∞∫[0,1]nfk(x)dx=∫[0,1]nlimk→∞fk(x)dxlimk→∞∫[0,1]nfk(x)dx=∫[0,1]nlimk→∞fk(x)dx Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
    - Stel g:Rn→Rg:Rn→R continu differentieerbaar met compacte drager. Voor 1≤i≤n1≤i≤n wordt de partiële afgeleide in de richting van de i-de standaardvector als Dig:Rn→RDig:Rn→R genoteerd. Bewijs dan dat ∀1≤i≤n∀1≤i≤n geldt
    ∫Rn(Dig)(z)dz=0

∫Rn(Dig)(z)dz=0

Academiejaar 2018-2019

Juni 2019

1. Rijen en reeksen
    - Geef een voorbeeld van een rij met tweee adherentiepunten, geef deze en zeg of de rij convergeert.
    - Beschouw de rij an:=(1n,cos(4πn3),sin(4πn3))an:=(1n,cos(4πn3),sin(4πn3)) in (R3,||||)(R3,||||). Bestaan er adherentiepunten? Indien ja, bepaal die. Bestaan er limieten? Indien ja, bereken deze.
    - Convergeert volgende reeks? Indien ja, waarom? ∑∞n=15n+n3√2n−1∑n=1∞5n+n32n−1 in (R,||)(R,||)
    - Voor welke α∈Rα∈R convergeert volgende reeks? ∑∞n=21nαlog(n)∑n=2∞1nαlog(n)
2. Normen en metrieken
    - Geef drie normen in R2R2 en teken hun eenheidsbollen met als middelpunt de oorsprong.
    - Geef de definitie van equivalentie van normen.
    - Zijn de normen uit (a) equivalent? Indien ja, waarom?
    - Geef twee normen die niet equivalent zijn.
3. Differentieerbaarheid
    Beschouw volgende functie f:R2→Rf:R2→R gegeven door
    f(x,y):=⎧⎩⎨⎪⎪3x2|y|√x2+y20 als (x,y)≠(0,0) als (x,y)=(0,0)f(x,y):={3x2|y|x2+y2 als (x,y)≠(0,0)0 als (x,y)=(0,0)
    Zijn volgende uitspraken juist of fout?
        - f is continu in (0,0)(0,0).
        - Er bestaan partiele afgeleiden in (0,0)(0,0).
        - f is differentieerbaar in (0,0)(0,0).
        - De partieel afgeleiden zijn continu in (0,0)(0,0).
4. Differentieerbare functies.
    - Geef de impliciete functiestelling.
    - Beschouw f:R4→R2,f(x1,x2,x3,x4):=(x21+x32,cos(x1+x3+x24))f:R4→R2,f(x1,x2,x3,x4):=(x12+x23,cos(x1+x3+x42)) en u:=(1,1,−1,π2−−√)∈R4u:=(1,1,−1,π2)∈R4 en r:=f(u)∈R2r:=f(u)∈R2. Welke dimensie heeft het beeld f−1(r)f−1(r) dicht bij uu? Bewijs!
    - Vind een functie en een reguliere waarde zodat men de hyperboloïde M:={(x1,x2,x3)∈R3|x213+x224−x232=2}M:={(x1,x2,x3)∈R3|x123+x224−x322=2} als niveauverzameling van dit regulier punt kan schrijven. Hoe kan men algemeen de raakruimte TzMTzM van z∈Mz∈M berekenen?
5. Optimalisatie
    - Geef de kritieke punten van f:R2→R,f(x,y)=x2+3y2+2xy+5x+3f:R2→R,f(x,y)=x2+3y2+2xy+5x+3 en geef hun type (lokaal minimum/maximum/zadelpunt).
    - Geef de kritieke punten van f:R2→R,f(x,y)=ycos(x)−x2f:R2→R,f(x,y)=ycos(x)−x2 en geef hun type (lokaal minimum/maximum/zadelpunt).
    - Vind het maximum en minimum van f:R3→R,f(x,y,z)=x+y+Zf:R3→R,f(x,y,z)=x+y+Z onder de voorwaarde dat x2+4y2+z2=4x2+4y2+z2=4. Maak gebruik van Lagrange multiplicatoren.

6. Integratie 1

   Gegeven

   $$\int_0^1\int_{2-2y}^{2}(x+2y)^5\,dx\,dy$$

   - Teken het integratiedomein.
   - Bereken de integraal.
   - Verander de volgorde van de integraal.
   - Bereken de integraal in de andere volgorde.

7. Integratie 2

   stel $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ is continu differentieerbaar met compacte drager. Voor $1\le i\le n$ wordt de partiele afgeleide van de i-de standaardvector als $D_ig:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ genoteerd. Bewijs dat $\forall 1\le i\le n$ geldt

   $$\int_{\mathbb{R}^n}(D_ig)(z)\,dz=0$$

Academiejaar 2017-2018

Augustus 2018

1. Rijen en reeksen
   - Beschouw de volgende rijen in $(\mathbb{R}^2,\|\|_E)$ waar $\|\|_E$ de Euclidische norm is. Zijn de rijen begrensd? Bestaan er adherentiepunten? Indien ja, bepaal die. Bestaan er limieten? Indien ja, bereken deze.
     - $a_n=\left(\frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right),\frac{1}{n}\sin\left(\frac{2\pi n}{3}\right)\right)$
     - $b_n=\left(1+(-1)^n,\frac{1}{n}\right)$
   - Beschouw in $(\mathbb{R},||)$ de rij $c_n=\frac{3^{2n}+(3^n)^2+\sin(2n^3)}{\sqrt{2}(3^n+\log(n^3)}$. Convergeert $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Indien ja, bereken deze limiet.
   - Convergeren de volgende reeksen? Bewijs!
     - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\cos(n^2)}$
     - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^n}{n!)}$
     - $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^3}{(3n)!}$
   - Voor welke $\alpha\in\mathbb{R}$ convergeert de volgende reeks? $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^\alpha}\log(n)}$
2. Differentieerbaarheid

   Beschouw de functie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}:f(x,y)=\begin{cases}(x^3+y^3)\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{als } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{als } (x,y)=(0,0)\end{cases}$ Zijn de volgende uitspraken juist/fout? Bewijs.
     - f is continu in $(0,0)$
     - Er bestaan partiele afgeleiden in $(0,0)$
     - f is differentieerbaar in $(0,0)$
     - De partiele afgeleiden zijn continu in $(0,0)$
3. Differentieerbare functies
   - Schrijf de impliciete functiestelling op.
   - Vergelijk de impliciete functiestelling met de inverse functiestelling. Wanneer is welke niet van toepassing. Wat is het verschil? Wat is de gelijkenis? Welke is 'sterker'?
   - Beschouw $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2,f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1^2+x_2^3,\cos(x_1+x_3+x_4^2))$ en $x=(1,1,-1,\sqrt{\frac{\pi}{2}})\in\mathbb{R}^4$ en $r=f(x)\in\mathbb{R}^2$. Welke dimensie heeft het beeld $f^{-1}(r)$ dicht bij x? Bewijs!
4. Optimalisatie
   - Vind de kritieke punten van $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},f(x,y)=y^2-2x^4+3x^2-5$ en bepaal hun type (lokaal maximum/minimum/zadelpunt).
   - Vind het maximum en minimum van $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R},f(x,y,z)=x-y^2-z$ onder de voorwaarde dat $\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{4}z^2=5$.

5. Integratie 1

   Gegeven

   ∫20∫22x√y2+y4dydx

   ∫02∫2x2y2+y4dydx

   - Teken het integratiedomein en bereken de integraal
   - Verander de volgorde van integratie en bereken opnieuw de integraal
6. Integratie 2
   - Stel γ:[0,π]→R2,γ(t)=(cost,sint)γ:[0,π]→R2,γ(t)=(cost,sint) en beschouw het vectorveld G:R2→R2,G(x,y)=(2x+yx)G:R2→R2,G(x,y)=(2x+yx) Bereken de integraal ∫γG∫γG. Hint: Wat voor speciaal type vectorveld is G?
   - Δh(x)=∑ni=1DiDih(x)Δh(x)=∑i=1nDiDih(x) met Dih:Rn→RDih:Rn→R voor 1≤i≤n1≤i≤n de partieel afgeleide in de i-de richting van de i-de standaardvector. Bewijs ∀f∈C2(Rn,R)∀f∈C2(Rn,R) en g⊂C2c(Rn,R):∫Rn(Δf(z))(g(z))dz=∫Rn(f(z))(Δg(z))dz.g⊂Cc2(Rn,R):∫Rn(Δf(z))(g(z))dz=∫Rn(f(z))(Δg(z))dz.

Juni 2018

1. Rijen en reeksen
   - Beschouw de volgende rijen in (R2,||||E)(R2,||||E) waar ||||E||||E de Euclidische norm is. Zijn de rijen begrensd? Bestaan er adherentiepunten? Indien ja, bepaal die. Bestaan er limieten? Indien ja, bereken deze.
     - an=(1ncos(πn2),sin(πn2))an=(1ncos(πn2),sin(πn2))
     - bn=(1log(n+2),4n+5n+3−−−−−−−−−√2n)bn=(1log(n+2),4n+5n+32n)
   - Beschouw in (R,||)(R,||) de rij cn=25n+(5n)2+2log(5n)52n+(2n)5√cn=25n+(5n)2+2log(5n)52n+(2n)5 . Convergeert (cn)n∈N(cn)n∈N ? Indien ja, bereken deze limiet.
   - Convergeren de volgende reeksen? Bewijs!
     - ∑∞n=1cos(n2)∑n=1∞cos(n2)
     - ∑∞n=11log(n+3)∑n=1∞1log(n+3)
     - ∑∞n=1n√2n(3n)!∑n=1∞n2n(3n)!
   - Voor welke α∈Rα∈R convergeert de volgende reeks? ∑∞n=2log(n)n2α∑n=2∞log(n)n2α
2. Differentieerbaarheid

   Beschouw de functie f:R2→R:f(x,y)={(x4+y4)sin(1x3+y3)0 als (x,y)≠(0,0) als (x,y)=(0,0)f:R2→R:f(x,y)={(x4+y4)sin(1x3+y3) als (x,y)≠(0,0)0 als (x,y)=(0,0) Zijn de volgende uitspraken juist/fout? Bewijs.
   - f is continu in (0,0)(0,0)
   - Er bestaan partiele afgeleiden in (0,0)(0,0)
   - f is differentieerbaar in (0,0)(0,0)
   - De partiele afgeleiden zijn continu in (0,0)(0,0)
3. Differentieerbare functies
   - Schrijf de impliciete functiestelling op.
   - Beschouw f:R4→R2,f(x1,x2,x3,x4)=(x21+x32,cos(x1+x3+x24))f:R4→R2,f(x1,x2,x3,x4)=(x12+x23,cos(x1+x3+x42)) en x=(1,1,−1,π2−−√)∈R4x=(1,1,−1,π2)∈R4 en r=f(x)∈R2r=f(x)∈R2. Welke dimensie heeft het beeld f−1(r)f−1(r) dicht bij xx? Bewijs!
   - Vind een functie en een regulier punt zodat men de ellipsoïde E:={(x1,x2,x3)∈R3|x213+x223+x234=2}E:={(x1,x2,x3)∈R3|x123+x223+x324=2} als niveauverzameling van dit regulier punt kan schrijven. Hoe kan men de raakruimte TzETzE van z∈Ez∈E berekenen?
4. Optimalisatie
   - Vind de kritieke punten van f:R2→R,f(x,y)=−2+x3−y2−xf:R2→R,f(x,y)=−2+x3−y2−x en bepaal hun type (lokaal maximum/minimum/zadelpunt).
   - Vind de kritieke punten van f:R2→R,f(x,y)=−2+3x3−y3−6x+yf:R2→R,f(x,y)=−2+3x3−y3−6x+y en bepaal hun type (lokaal maximum/minimum/zadelpunt).
   - Vind de punten met minimale interferentie aan het oppervlak met f:R3→R,f(x,y,z)=−4x+y2−xz−20f:R3→R,f(x,y,z)=−4x+y2−xz−20 en de planeet (bol) met straal 4.

5. Integratie 1
   Gegeven
   ∫π/40∫ex1sin(x)ydydx

   ∫0π/4∫1exsin(x)ydydx

   - Teken het integratiedomein en bereken de integraal
   - Verander de volgorde van integratie en bereken opnieuw de integraal
6. Integratie 2
   - Stel a,b>0a,b>0 en E={(x,y)∈R2|x2a2+y2b2≤1}E={(x,y)∈R2|x2a2+y2b2≤1} een ellips. Bereken het volume vol2(E)=∫E1dxvol2(E)=∫E1dx Hint: We weten dat het volume van B={(x,y)∈R2|x2+y2≤1}B={(x,y)∈R2|x2+y2≤1} gelijk aan ππ is. Maak een tekening en vind een diffeomorfisme ϕ:B→Eϕ:B→E.
   - Stel g:Rn→Rg:Rn→R continu differentieerbaar met compacte drager. Voor 1≤i≤n1≤i≤n wordt de partiële afgeleide in de richting van de i-de standaardvector als Dig:Rn→RDig:Rn→R genoteerd. Bewijs dan dat ∀1≤i≤n∀1≤i≤n geldt
     ∫Rn(Dig)(z)dz=0

     ∫Rn(Dig)(z)dz=0

Academiejaar 2016-2017

Augustus 2017

1. Metrieken
   We noteren punten in RnRn door x=(x1x2)x=(x1x2) en y=(y1y2)y=(y1y2) en we beschouwen de Euclidische norm ||u||E=x21+x22−−−−−−√||u||E=x12+x22 en de som-norm ||x||Σ=|x1|+|x2|||x||Σ=|x1|+|x2| die de Euclidische metriek dE(x,y)=||x−y||EdE(x,y)=||x−y||E en de sommetriek dΣ=||x−y||ΣdΣ=||x−y||Σ induceren. Verder stel R(ϕ)=(cosϕsinϕ−sinϕcosϕ)R(ϕ)=(cosϕ−sinϕsinϕcosϕ)
   - Definieer wat een norm en wat een metriek is.
   - Toon aan dat de Euclidische norm invariant onder notaties is, dit wil zeggen dat ||R(ϕ)x||E=||x||E||R(ϕ)x||E=||x||E geldt voor alle x∈R2x∈R2 en alle ϕ∈Rϕ∈R.
   - Toon aan dat de som-norm niet invariant onder notaties is, dit wil zeggen er bestaan x∈R2x∈R2 en ϕ∈Rϕ∈R zodat ||R(ϕ)x||Σ≠||x||Σ||R(ϕ)x||Σ≠||x||Σ
   - Toon aan dat de euclidische metriek en de sommetriek invariant onder translaties zijn, dit wil zeggen dat voor alle x,y,v∈R2x,y,v∈R2 geldt dat dE(x−v,y−v)=dE(x,y),dΣ(x−v,y−v)=dΣ(x,y)dE(x−v,y−v)=dE(x,y),dΣ(x−v,y−v)=dΣ(x,y)
   - Op R2R2 beschouw de metriek (geen bewijs nodig!)gegeven door d(x,y)=dE(x,y)1+dE(x,y)d(x,y)=dE(x,y)1+dE(x,y). Toon aan dat er geen norm op R2R2 bestaat zodat d(x,y)=||x−y||d(x,y)=||x−y|| geldt voor alle x,y∈R2x,y∈R2
2. Rijen en reeksen
   - Beschouw de volgende rijen in (R2,||||E)(R2,||||E) waar ||||E||||E de Euclidische norm is. Zijn de rijen begrensd? Bestaan er adherentiepunten? Indien ja, bepaal die. Bestaan er limieten? Indien ja, bereken deze.
     - an=(1n,(−1)n+52n−−−−−−−−−−√n)an=(1n,(−1)n+52nn)
     - bn=(log(n),1n√)bn=(log(n),1n)
   - Beschouw in (R,||)(R,||) de rij cn=2n+n2+log(n2)4n+5n√cn=2n+n2+log(n2)4n+5n . Convergeert (cn)n∈N(cn)n∈N ? Indien ja, bereken deze limiet.
   - Convergeren de volgende reeksen? Bewijs!
     - ∑∞n=1(2n)!2nn!∑n=1∞(2n)!2nn!
     - ∑∞n=21nlog(nlog(n))∑n=2∞1nlog(nlog(n))
     - ∑∞n=11n√∑n=1∞1n
   - Voor welke α∈Rα∈R convergeert de volgende reeks? ∑∞n=2n√αlog(n)∑n=2∞nαlog(n)
3. Differentieerbaarheid
   Beschouw de functie f:R2→R:f(x,y)={(x3+y3)sin(1x2+y2)0 als (x,y)≠(0,0) als (x,y)=(0,0)f:R2→R:f(x,y)={(x3+y3)sin(1x2+y2) als (x,y)≠(0,0)0 als (x,y)=(0,0) Zijn de volgende uitspraken juist/fout? Bewijs.
   - f is continu in (0,0)(0,0)
   - Er bestaan partiele afgeleiden in (0,0)(0,0)
   - f is differentieerbaar in (0,0)(0,0)
   - De partiele afgeleiden zijn continu in (0,0)(0,0)

4. Differentieerbare functies
   - Schrijf de inverse functie-stelling op.
   - Voldoet f:R2→R2,f(x,y)=(ex3+xy,cos(2x+y))f:R2→R2,f(x,y)=(ex3+xy,cos(2x+y)) in (x,y)=(0,π/2)(x,y)=(0,π/2) aan de voorwaarden van de inverse functie-stelling? Indien ja, wat betekent dit?
   - Veronderstel nu dat g:Rn→Rmg:Rn→Rm een continu differentieerbare functie is met n>mn>m. Waarom kan men de inverse functie-stelling niet toepassen? Wat kan men misschien anders toepassen?
5. Optimalisatie
   - Vind de kritieke punten van f:R2→R,f(x,y)=x−ycosxf:R2→R,f(x,y)=x−ycosx en bepaal hun type.
   - Vind de kritieke punten van f:R2→R,f(x,y)=x3−3x2+2xy−2y2−6y+5f:R2→R,f(x,y)=x3−3x2+2xy−2y2−6y+5 en bepaal hun type.
   - Vind het maximum en minimum van f:R3→R,f(x,y)=x−y−2zf:R3→R,f(x,y)=x−y−2z onder de voorwaarde dat frac12x2+12y2+19z2=7frac12x2+12y2+19z2=7.
6. Integratie 1

   Gegeven
   ∫2π/40∫1sinxycos(x)dydx

   ∫02π/4∫sinx1ycos(x)dydx

   - Teken het integratiedomein en bereken de integraal
   - Verander de volgorde van integratie en bereken opnieuw de integraal
7. Integratie 2
   - Geef een voorbeeld voor een puntsgewijs naar 0 convergerende functierij (fn)n∈N:[0,1]→R(fn)n∈N:[0,1]→R zodat ∫10fn(x)dx=1∀n∈N∫01fn(x)dx=1∀n∈N.
   - Stel γ:[0,π]→R2,γ(t)=(cost,sint)γ:[0,π]→R2,γ(t)=(cost,sint) en beschouw het vectorveld G:R2→R2,G(x,y)=(2x+yx)G:R2→R2,G(x,y)=(2x+yx) Bereken de integraal ∫γG∫γG. Hint: Wat voor speciaal type vectorveld is G?
   - Stel a,b>0a,b>0 en E={(x,y)∈R2|x2a2+y2b2≤1}E={(x,y)∈R2|x2a2+y2b2≤1} een ellips. Bereken het volume vol2(E)=∫E1dxvol2(E)=∫E1dx Hint: We weten dat het volume van B={(x,y)∈R2|x2+y2≤1}B={(x,y)∈R2|x2+y2≤1} gelijk aan ππ is. Maak een tekening en vind een diffeomorfisme ϕ:B→Eϕ:B→E.

Juni 2017

1. Rijen en reeksen
   - Beschouw de volgende rijen in (RR,|| ||). Zijn de rijen begrensd? Bestaan er adherentiepunten? Indien ja, bepaal ze. Bestaat er een limiet? Indien ja, bereken deze.
     - an=(−1)nn+1+(−1)n2an=(−1)nn+1+(−1)n2
     - bn=1+2n(−1)n−−−−−−−−−√nbn=1+2n(−1)nn
   - In, (RR,||||), beschouw de rij cn=n+7+cos(n2)n2+3n√.cn=n+7+cos(n2)n2+3n. Convergeert (cn)n∈N(cn)n∈N? Indien ja, bereken de limiet.
   - Convergeren de volgende reeksen? Bewijs!
     - ∑∞n=12nn√n!∑n=1∞2nnn!
     - ∑∞n=1(n!)2(2n)!∑n=1∞(n!)2(2n)!
     - ∑∞n=1sin(n)∑n=1∞sin(n)
   - Voor welke α∈Rα∈R convergeert de volgende reeks? ∑∞n=2nαlog(n)∑n=2∞nαlog(n)
2. Metrieken

   Voor f∈C0(R,R)f∈C0(R,R) en k∈N0k∈N0, definieer ||f||k:=maxx∈[−k,k]|f(x)|||f||k:=maxx∈[−k,k]|f(x)|
   - Toon aan dat d:C0(R,R)→R≥0,d(f,g):=∑∞k=0||f−g||k2k(1+||f−g||k)d:C0(R,R)→R≥0,d(f,g):=∑k=0∞||f−g||k2k(1+||f−g||k) welgedefinieerd en een metriek is.
   - Toon aan dat er geen norm |||| ||:C0(R,R)→R≥0||:C0(R,R)→R≥0 bestaat zodat d(f,g)=||f−g||d(f,g)=||f−g|| geldt voor alle f,g∈C0(R,R)f,g∈C0(R,R).
3. Differentieerbaarheid

   Beschouw de functie f:R2→R,f(x,y)={(x2+y2)sin(1x2+y2√)0 als (x,y)≠(0,0) als (x,y)=(0,0)f:R2→R,f(x,y)={(x2+y2)sin(1x2+y2) als (x,y)≠(0,0)0 als (x,y)=(0,0) Zijn de volgende uitspraken juist of fout? Bewijs!
   - ff is continu in (0,0)(0,0).
   - Er bestaan partiële afgeleiden D1f(=∂f∂x)D1f(=∂f∂x) en D2f(=∂f∂y)D2f(=∂f∂y) in (0,0)(0,0).
   - ff is differentieerbaar in (0,0)(0,0).
   - De partiële afgeleiden D1f(=∂f∂x)D1f(=∂f∂x) en D2f(=∂f∂y)D2f(=∂f∂y)zijn continu in (0,0)(0,0).

4. Differentieerbare functies
    - Schrijf de impliciete functiestelling op.
    - Beschouw $f:\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^2, f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1^2+x_2^3,\cos(x_1+x_3+x_4^2))$ en $x=(1,1,-1,\sqrt{\frac{\pi}{2}})\in\mathbb{R}^4$ en $r=f(x)\in\mathbb{R}^2$. Welke dimensie heeft het beeld $f^{-1}(r)$ dicht bij x? Bewijs!
    - Vind een functie en een regulier punt zodat men de ellipsoïde $E:=\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{3}+\frac{x_2^2}{3}+\frac{x_3^2}{4}=2\}$ als niveauverzameling van dit regulier punt kan schrijven. Hoe kan men de raakruimte T_zE van $z\in E$ berekenen?
5. Optimalisatie
    - Vind de kritieke punten van $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=4+x^3+y^3-3xy$ en bepaal hun type (lokaal maximum/minimum/zadelpunt).
    - Vind de kritieke punten van $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}, f(x,y)=y-x^2\sin(y)$ en bepaal hun type (lokaal maximum/minimum/zadelpunt).
    - Vind het maximum en minimum van $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}, f(x,y,z)=x^2-y^2$ onder de voorwaarde dat $x^2+2y^2+3z^2=1$.
6. Integratie I

    Gegeven $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\cos x} y\sin(x)\,dy\,dx$
        - Teken het integratiedomein en bereken de integraal.
        - Verander de volgorde van de integratie en bereken opnieuw de integraal.
7. Integratie II
    - Geef de namen van twee belangrijke stellingen van hoger dimensionale integratie.
    - Zij $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}\in C^0([0,1]^n,\mathbb{R})$ een functierij met $\lim_{k\to\infty} f_k=f$ puntsgewijs. Geldt het volgende altijd? $\lim_{k\to\infty}\int_{[0,1]^n} f_k(x)\,dx=\int_{[0,1]^n}\lim_{k\to\infty} f_k(x)\,dx$ Geef een bewijs of een tegenvoorbeeld.
    - Stel $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continu differentieerbaar met compacte drager. Voor $1\le i\le n$ wordt de partiële afgeleide in de richting van de i-de standaardvector als $D_ig:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ genoteerd. Bewijs dan dat $\forall 1\le i\le n$ geldt
    $\int_{\mathbb{R}^n}(D_ig)(z)\,dz=0$

$$\int_{\mathbb{R}^n}(D_ig)(z)\,dz=0$$

Categorieën:
- Wiskunde
- 1BWIS