Getaltheorie - Encyclopedia Academia

tuyaux.winak.be/index.php/Getaltheorie

Getaltheorie

Number Theory	
Richting	Wiskunde
Jaar	3BWIS

Bespreking

Dit vak wordt gegeven door prof. Becher, de oefeningensessies worden verzorgd door Marco (en soms Sten). Tot 2020-2021 werd dit vak gegeven in het tweede jaar, vanaf 2021-2022 in het derde jaar. In 2021-2022 stond het vak in het eerste semester, voor Galoistheorie. Daardoor was een groot deel van de leerstof eigenlijk meer Galoistheorie dan Getaltheorie. Doorheen het semester zijn er testen, telkens over een deel van de leerstof waarmee je al punten kan verdienen. Ook kan je voor participatie doorheen het jaar, oefeningen maken en presenteren in de klas, punten verdienen. Elke test, en participatie telt mee voor 25% van je totaalscore. Als je examen beter is dan een test/participatie telt je examenscore voor dat deel. Hard werken doorheen het jaar kan zo beloond worden met een mooi resultaat, en het feit dat je geen examen meer moet doen.

Sinds academiejaar 22-23 worden de oefeningen gegeven door Remi Rasson en wordt gewerkt met maar één test. De totaalscore wordt dan max(1/4*participatie + 1/4*test + 1/2*examen, examen). Aangezien sinds dit jaar Galoistheorie voor Number Theory (sinds heden dus ook gegeven in het Engels) gegeven wordt, wordt het gedeelte over Galoistheorie overgeslagen en gaan de lessen voornamelijk over herhalingen algebra van de voorbije jaren met de toevoeging van integrale sluitingen en dingen als de klasse-groep.

Examenvragen

2022-2023

Test

1. (6 points) Prove or disprove:
    1. Z[2–√]/(3)[X]Z[2]/(3)[X] is a unique factorisation domain.
    2. To any f,g∈C[X]f,g∈C[X], there exist a,b∈C[X]a,b∈C[X] such that af+bgaf+bg is a greatest common divisor of ff and gg in C[X]C[X].
    3. For any a,b,c∈Za,b,c∈Z, there exists f∈Z[X]f∈Z[X] such that, in Z[X]Z[X], we have f≡amod(X,10),f≡bmod(X−3)f≡amod(X,10),f≡bmod(X−3) and f≡cmod(X+1,7)f≡cmod(X+1,7).
2. (5 points) Show that the domain Z[1+−15√2]Z[1+−152] is not factorial.
3. (5 points) Let ϑ=1+5√2ϑ=1+52 and R=Z[ϑ]R=Z[ϑ]. Let T:R→ZT:R→Z be the trace map. Show the following:
    1. T(ϑn)=T(ϑn−1)+T(ϑn−2)T(ϑn)=T(ϑn−1)+T(ϑn−2) for every integer n   2n   2.
    2. ϑ∈R×ϑ∈R×and R×R×is infinite.
4. (4 points) Let RR be a domain, MM an RR-module and UU an RR-submodule. Show:
    1. If UU and M/UM/U are torsion modules, then MM is a torsion module.
    2. If UU and M/UM/U are torsion-free, then MM is torsion-free.

Examen Juni (180 minutes)

1. Prove or disprove **three** out of the following **four** statements:
   (a) -129 is a square modulo 715.

   (b) 2 is a prime element in Z[−5−−−√]Z[−5].

   (c) Every finitely generated ZZ-submodule of Q(5–√5)Q(55) has rank at most 5.

   (d) Z[41−−√]Z[41] is a Dedekind domain.

2. Let pp be a prime number with p≥5p≥5. Show that −3−3 is a square modulo pp if and only if p≡1mod3p≡1mod3.
3. Let α∈Cα∈C be such that α3−α2−2α−2=0α3−α2−2α−2=0 and K=Q(α)K=Q(α). Show that DK/Q(1,α,α2)=−152DK/Q(1,α,α2)=−152 and OK=Z(α)OK=Z(α).
4. Let K=Q(7–√)K=Q(7). Show the following:
   (a) 2OK=((3+7–√)OK)22OK=((3+7)OK)2.

   (b) OKOK is a principal ideal domain.

5. Show that the only solutions to Y3=X2+X+2Y3=X2+X+2 in Z×ZZ×Z are (2,2)(2,2) and (−3,2)(−3,2).
   Hint: for (x,y)∈Z×Z(x,y)∈Z×Z, factorize x2+x+2x2+x+2 in Z[θ]Z[θ] where θ=1+−7√2θ=1+−72.

2021-2022

Test 1 2021-2022

1. (6 punten) Welke polynomen zijn irreducibel over Z[X]Z[X]? Bepaal van de andere de priemfactorisatie.
   (a) 2X4−182X4−18

   (b) 12X6+15X3−10X+3012X6+15X3−10X+30

   (c) X4−X3+X2−X+1X4−X3+X2−X+1

2. (6 punten) Zij R={f∈R[X]|∂f(0)=0}R={f∈R[X]|∂f(0)=0}. Toon aan:
   (a) RR is een deeldomein van R[X]R[X].

   (b) X2X2 is irreducibel, maar niet priem.

3. (4 punten) Zij γ∈Cγ∈C. Toon aan dat het domein Q[γ]Q[γ] euclidisch is en dat het domein Q[γ][X]Q[γ][X] factoriaal is.
4. (4 punten) Zij L=Q(3–√3,2–√5)L=Q(33,25). Toon aan dat [L:Q]=15[L:Q]=15.

Test 2 2021-2022

1. (6 points) Determine which of the following statements are true and which are false.
   (a) For any α,β∈Cα,β∈C algebraic over QQ such that Q(α)/QQ(α)/Q and Q(β)/QQ(β)/Q are Galois extensions, we have that Q(α,β)/QQ(α,β)/Q is a Galois extension.

   (b) F125F125 has a subfield with 25 elements.

   (c) There exists an irreducible polynomial of degree 71 over F17F17.

2. (7 points) Show the following:
   (a) X9−X−1∈F3[X]X9−X−1∈F3[X] is separable.

   (b) X9−X−1X9−X−1 has no root in F9F9.

   (c) X9−X−1X9−X−1 splits over F36F36.

   (d) X9−X−1X9−X−1 is reducible in F3[X]F3[X].

3. (7 points) Let α∈Cα∈C such that α3−α2−2α+1=0α3−α2−2α+1=0 and K=Q(a)K=Q(a).
   (a) Show that [K:Q]=3[K:Q]=3.

   (b) Compute TrK/Q(α−3)TrK/Q(α−3) and NK/Q(α−3)NK/Q(α−3).

   (c) Show that α−3α−3 is not a cube in KK.

   (d) Compute DK/Q(1,α,α2)DK/Q(1,α,α2).

   (e) Decide whether K/QK/Q is a Galois extension.

Test 3 2021-2022

---

1. (6 points) Which of the following rings are Dedekind domains? Justify your answers.
   (a) Z[4–√3]Z[43]

   (b) Z[10−−√]Z[10]

   (c) Z[−3−−−√]Z[−3]

   (d) Q[2X,2–√]Q[2X,2]

   (e) C[X,Y]C[X,Y]

2. (6 points) Let K=Q(7–√)K=Q(7) Factor the ideal 210OK210OK into a product of maximal ideals of OKOK.
3. (8 points) Let θ∈Cθ∈C be such that θ3=6−θθ3=6−θ and let K=Q(θ)K=Q(θ). Show that OK=Z[θ,θ2−θ2]OK=Z[θ,θ2−θ2].

Examen Januari 2021-2022

---

1. (12 points) Prove or disprove the following statements:
   (a) For every separable polynomial f∈Q[X]f∈Q[X], the quotient ring Q[X]/(f)Q[X]/(f) is a field.

   (b) Q[X3]Q[X3] is a euclidean domain.

   (c) Z[12−−√]Z[12] is a Dedekind domain.

   (d) Z[−10−−−−√]Z[−10] is a principal ideal domain.

2. (10 points) Consider the polynomial f=X6−3f=X6−3 in F7[X]F7[X]. Let KK be a splitting field of ff over F7[X]F7[X]. Show the following:
   (a) ff is separable.

   (b) [K:F7]=6[K:F7]=6.

   (c) ff is irreducible in F7[X]F7[X].

3. (12 points) Let α∈Cα∈C sucht that α3−α2−2=0α3−α2−2=0 and K=Q(a)K=Q(a). Compute DK/Q(1,α,α2)DK/Q(1,α,α2) and show that OK=Z[α]OK=Z[α]. Is K/QK/Q a Galois extension?
4. (16 points) Consider the number field K=Q(−23−−−−√)K=Q(−23). Let OKOK be the ring of integers and CKCK the ideal class group of KK.
   (a) Find α∈Kα∈K such that OK=Z[α]OK=Z[α] and compute its minimal polynomial.

   (b) Show that there is no element of OKOK with norm 2 or 3, but there is an element of norm 8.

   (c) Decompose 6OK6OK into a product of prime ideals of OKOK.

   (d) Show that every class in CKCK is represented by an ideal of norm at most 11.

   (e) Show that CK≃Z/3ZCK≃Z/3Z.

Juni 2017-2018

---

1. Geef voorbeelden van de volgende situaties met een verantwoording:
    - Een torsievrij $\mathbb{Z}$-moduul dat niet vrij is.
    - Een gebroken ideaal van $\mathbb{Z}$ dat geen ideaal is.
    - Een moduul over $\mathbb{R}[X]$ dat niet eindig voortgebracht is.
2. Stel p een priemgetal verschillend van 2 en 13. Toon aan dat 13 een kwadraat modulo p is als en slechts als $p \equiv 1,3,4,9,10$ of $12 \mod 13$.
3. Welke van de volgende ringen zijn Dedekind domeinen? Beargumenteer uw antwoorden. $\mathbb{Q}[X], \mathbb{Z}[\sqrt{13}], \mathbb{R}[X]/(X^2-1)$
4. Toon aan dat de Diphantische vergelijking $X^3-3Y^3+14Z^3+49W^3=0$ geen oplossing in $\mathbb{Z}^4 \setminus (0,0,0,0)$ heeft.
5. Stel $K=\mathbb{Q}(\alpha)$ voor $\alpha \in \mathbb{C}$ met $\alpha^3-\alpha+1=0$.
    - Toon aan dat $[K:\mathbb{Q}]=3$
    - Ga na dat $Tr_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)=0, Tr_{K/\mathbb{Q}}(\alpha^2)=Tr_{K/\mathbb{Q}}(\alpha^4)=2, Tr_{K/\mathbb{Q}}(\alpha^3)=-3$.
    - Bereken $D_{K/\mathbb{Q}}(1,\alpha,\alpha^2)$.
    - Concludeer dat $\mathcal{O}_K=\mathbb{Z}[\alpha]$.
6. Beschouw het getallenlichaam $K=\mathbb{Q}(\sqrt{-11})$.
    - Geef een $\mathbb{Z}$-basis van de ring van de algebraische getallen $\mathcal{O}_K$.
    - Vind een element $\alpha \in \mathcal{O}_K$ met $N_{K/\mathbb{Q}}(\alpha)=3$.
    - Toon aan dat $2\mathcal{O}_K$ een priemideaal van $\mathcal{O}_K$ is.
    - Ontbind $3\mathcal{O}_K$ als product van maximale idealen van $\mathcal{O}_K$.
    - Er wordt gegeven dat elke klasse in de klassengroep C_K voorgesteld wordt door een ideaal $\mathfrak{a}$ met $N(\mathfrak{a})<4$. Concludeer dat $\mathcal{O}_K$ een hoofdideaaldomein is.

Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS