Getallen en verzamelingen

tuyaux.winak.be/index.php/Getallen_en_verzamelingen

Getallen en verzamelingen

Richting	Wiskunde
Jaar	1BWIS

Bespreking

Dit vak zal gaan over bewijstechnieken, verzamelingenleer, relaties en functies, getaltheorie en logica.

Theorie en Oefeningen

De theorielessen worden gegeven door Stijn Symens. De oefeningenlessen door Lander Hermans. Tijdens de oefeningensessies laat hij de leerlingen oefeningen aan het bord maken. Tijdens het semester worden doorgaans drie taken gegeven. Deze zijn niet verplicht voor het geval dat je echt geen tijd hebt, maar er wordt wel verwacht dat je ze maakt. Ze zijn een zeer goede oefening naar het examen toe. Er is een goede cursus voor dit vak beschikbaar.

Examen

Er is een apart examen voor oefeningen en theorie. Het oefeningenexamen kan pittig zijn, maar laat daardoor de moed niet zakken voor de theorie, daar vallen nog wat punten op te halen als je goed voorbereid bent. Onderschat dit vak niet, de cursus is niet al te dik en lijkt niet al te moeilijk, maar bepaalde stukken kunnen wel eens tegenvallen.

Examenvragen

Januari 2023

1. Geef de definitie van een equivalentierelatie, equivalentieklasse, quoti\"entverzameling en partitie. Bewijs dat elke quoti\"entverzameling een partitie is.
2. Bewijs de stelling van Euler (de Euler-Phi functie).
3. Wat is structurele inductie? Geef een relevant voorbeeld.
4. Geef de definitie van een booleaanse expressie, functie, identiteit. Leg het dualiteitsprincipe uit.
5. Geef de volledigheidsstelling van de propositielogica en schets het bewijs.
6. Definieer surjectief en injectief. Zij ff en gg functies zodat f∘gf∘g bijectief is. Bewijs of geef een tegenvoorbeeld voor volgende beweringen.
    1. ff is injectief
    2. ff is surjectief
    3. gg is injectief
    4. gg is surjectief
7. Definieer de rationale getallen aan de hand van equivalentieklassen en definieer (en bewijs) +,⋅,≥+,⋅,≥.
8. Bewijs de stelling van Bézout.

Januari 2022

1. Wat is aftelbaarheid? Bewijs dat RR niet en QQ wel aftelbaar is. Wat is een bijectie? Is 2N2N aftelbaar en bewijs? Geef een voorbeeld van een andere verzameling equipotent met RR.

2. Wat is een dedekindsnede? Maak gebruik van Dedekindsnden om aan te tonen dat QQ dicht is in RR.
3. Geef de Chinese reststelling en bewijs.
4. Geef de euler-phi functie en het bewijs.
5. Geef de volledigheid van de propositielogica en schets het bewijs a.d.h.v. de lemma’s.

Augustus 2020

1. Beschouw functie f:Z2→Z2:(x,y)↦{(x,y+1), x, y beide even(x+1,y), andersf:Z2→Z2:(x,y)↦{(x,y+1),x, y beide even(x+1,y), anders

   is deze functie injectief, surjectief of bijectief? Verklaar.
2. Toon aan dat een reële oplossing xx van de vergelijking x2+x+3x=0x2+x+3x=0 geen rationaal getal is.
3. Toon aan via inductie dat voor een reële x>−1x>−1 en n∈Nn∈N geldt dat 1(1+x)n≥1−nx1(1+x)n≥1−nx.
4. Bepaal de constantes a0,a1,…,a6a0,a1,…,a6 zodat cos6θ=a6cos6θ+a5cos5θ+…+a1cosθ+a0cos6θ=a6cos6θ+a5cos5θ+…+a1cosθ+a0
5. Een Googol noteren we als 1010010100, een Googolplex noteren we als 1010100=10(10100)1010100=10(10100)

   Vandaag is het vrijdag. Als je na vandaag een googelplex dagen verder telt, op welke dag van de week kom je dan uit?
6. Toon aan dat er 1000000 opeenvolgende natuurlijke getallen bestaan die deelbaar zijn door het kwadraat van een priemgetal.
7. Toon aan dat ¬P→Q,R∨¬Q,P→(S∨T),(¬R∧¬T)⊢S¬P→Q,R∨¬Q,P→(S∨T),(¬R∧¬T)⊢S door een bewijs te geven dat gebruik maakt van 13 regels die we gezien hebben bij natuurlijke deductie.

Januari 2018

1. Hoeveel elementen heeft de verzameling Ω=2(22ϕ\2ϕ)\22ϕΩ=2(22ϕ\2ϕ)\22ϕ?
2. Waar of niet waar? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.
   - Indien R en S equivalentierelaties zijn op dezelfde verzameling V, dan is R∩SR∩S een equivalentierelatie op V.
   - Indien R en S equivalentierelaties zijn op dezelfde verzameling V, dan is R∪SR∪S een equivalentierelatie op V.
3. Toon via inductie aan dat voor het n-de priemgetal pnpn geldt dat pn≤22n−1pn≤22n−1.
4. Beschouw de verzameling A={(x,y)∈R2|x2+y2=1}A={(x,y)∈R2|x2+y2=1}. Toon aan dat |A|=|R||A|=|R|.
5. Langs de buitenkant van elke zijde van een willekeurige convexe vierhoek wordt een vierkant geplaatst. Toon aan dat de twee lijnstukken die gevormd worden naar de middelpunten van de vierkanten loodrecht op elkaar staan en even lang zijn.
6. Toon aan dat 20212018−220212018−2 niet geschreven kan worden als som van 3 kwadraten en niet geschreven kan worden als som van 3 derdemachten.
7. Bepaal alle gehele oplossingen van het stelsel {3x−6y+16z=12x+5y−6z=2{3x−6y+16z=12x+5y−6z=2
8. Gegeven de uitdrukking (xyzu)2(xyzu)2 is een binaire schrijfwijze van getallen uit {0,1,…,15}{0,1,…,15}. De functie PP wordt gedefinieerd als volgt P:{0,1}4→{0,1}:(x,y,z,u)↦{1 indien (xyzu)2 een Fibonaccigetal is 0 indien (xyzu)2 geen Fibonaccigetal is

   P:{0,1}4→{0,1}:(x,y,z,u)↦{1 indien (xyzu)2 een Fibonaccigetal is 0 indien (xyzu)2 geen Fibonaccigetal is

   (beschouw 0 als een fibonaccigetal).
   - Schrijf P als som van producten van literals met zo weinig mogelijk literals.
   - Schrijf P als product van sommen van literals met zo weinig mogelijk literals.

9. Toon aan dat $\phi \vdash ((A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)) \leftrightarrow (A \leftrightarrow \neg B)$ door een bewijs te geven dat gebruik maakt van de 13 regels die we gezien hebben bij natuurlijke deductie.

Augustus 2017

1. Kijk naar de volgende functie $f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 : (x,y) \mapsto kgv(x,2y)$

   $$f: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}_0 : (x,y) \mapsto kgv(x,2y)$$

   Geef aan of deze functie injectief en/of surjectief is. Zorg er bovendien voor dat je door een (zo klein mogelijke) aanpassing aan het domein en/of de beeldverzameling de functie bijectief maakt.
2. Geef van de volgende relatie op $\mathbb{R}$ aan of het al dan niet een equivalentierelatie of een partiële ordening is. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2y - xy^2 - x + y = 0\}$ Geef indien mogelijk ook de bijbehorende partitie of het bijbehorende Hasse diagram.
3. Geef een voorbeeld van een partitie van $\mathbb{N}$ die $\mathbb{N}$ verdeelt in $\aleph_0$ aftelbaar oneindige verzamelingen.
4. Veronderstel dat x_1 en x_2 de wortels zijn van de vergelijking $x^2+px-1=0$, waarbij p een oneven priemgetal is. Noem $y_n = x_1^n + x_2^n$ voor elke $n \geq 0$. Toon aan via inductie dat y_n en y_{n+1} copriem zijn voor elke $n \geq 0$.
5. Gelijkzijdige driehoeken met hoekpunten D en E respectievelijk worden langs de buitenkant op de zijden AB en BC van een driehoek $\triangle ABC$. Toon aan dat de middelpunten van BD, BE en AC de hoekpunten zijn van een gelijkzijdige driehoek.
6. Toon aan dat als $9|a^2+b^2+c^2 \Rightarrow 9|a^2-b^2$ of $9|b^2-c^2$ of $9|a^2-c^2$.
7. Zij n een natuurlijk getal en zij p een oneven priemdeler van n^2+1. Bewijs dat $p \equiv$ 1 mod 4. [Hint: gebruik de kleine stelling van fermat].
8. De bits x, y, z en w zijn de bits die als input gebruikt worden voor een logische circuit. Samen stellen ze het binair getal xyzw voor. Veronderstel dat het circuit 0 als output geeft indien xyzw een kwadraat is van een geheel getal en 1 als output geeft indien niet.
   1. Geef een uitdrukking in DNF die overeenkomt met deze output.
   2. Gebruik Karnaugh maps om een zo kort mogelijke booleaanse uitdrukking te krijgen voor de in (1) bekomen output.
   3. Gebruik Karnaugh maps om een zo kort mogelijke booleaanse uitdrukking te krijgen voor het complement van de in (1) bekomen output.
9. Stel een logisch bewijs op door gebruik te maken van de elf regels van natuurlijke deductie voor de propositielogica. Toon aan dat de volgende zin een tautologie is. $A \vee B \leftrightarrow (\neg A \to B)$

Categorieën:

- Wiskunde
- 1BWIS