Complexe analyse - Encyclopedia Academia

Complexe analyse

Complexe analyse	
Richting	Wiskunde
Jaar	3BWIS

Examenvragen

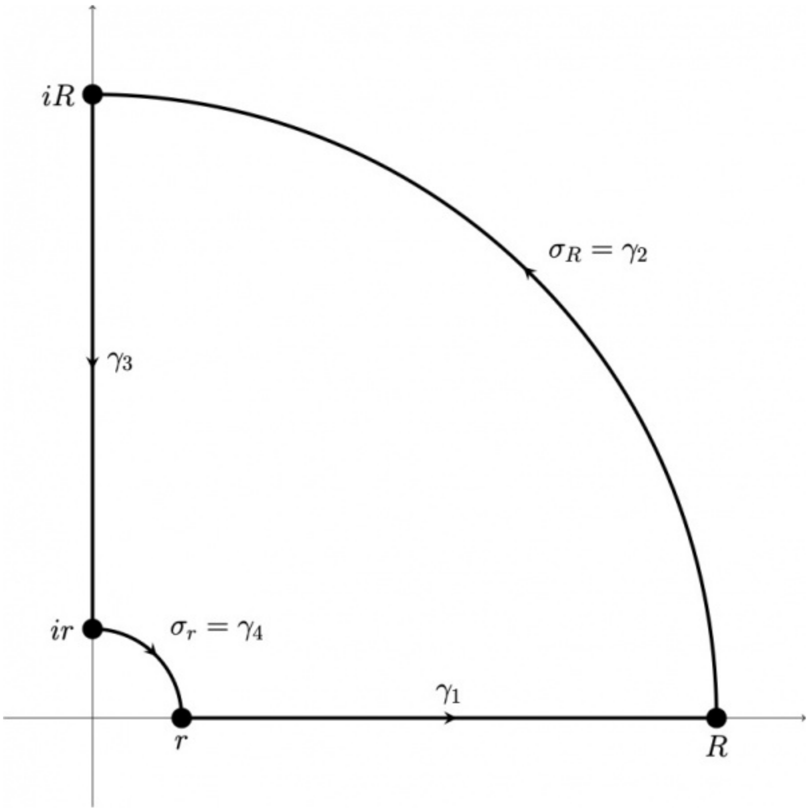
Januari 2023

Theorie

1. Vraag 1
    1. Leid de vergelijkingen af waaraan een analytische functie f=u+iv moet voldoen.
    A holomorphic function f=u+iv satisfies a set of equations: derive these equations.
    2. Gebruik vervolgens deze vergelijkingen om aan te tonen dat elke analytische functie f(z) aanleiding geeft tot twee harmonische functies (en leg ook uit wat dat zijn).
    Use these equations to prove that a holomorphic function gives rise to two harmonic functions (as part of your answer: explain what harmonic functions are).
2. Vraag 2: Toon aan dat als f(z) analytisch is in een enkelvoudig samenhangend gebied Ω, dat je dan de waarde van f(z) in een punt z∈Ω kan schrijven als een contourintegraal langs een gesloten contour Γ die volledig in Ω ligt (de integraalformule van Cauchy).
Prove Cauchy's integral formula, which says that the value f(z) of a holomorphic function in a point z∈Ω (simply connected region) can be written as a contour integral along a contour Γ⊂Ω.
3. Vraag 3: In de cursus hebben we een algemene formule gezien om het residu te bepalen van een functie f(z) in z0∈C als die een k-voudige pool heeft in dat punt z0. Leid deze formule af.
We have seen a general formula to calculate the residu of a function f(z) in z0∈C if you know that this is a pole of order k. Derive this formula.

4. Vraag 4
    1. Stel dat we de functie f(z)=lnH(2+z) beschouwen met H=]−π,+π. Als we de Taylor-reeks voor deze functie zouden opstellen rond het punt z0=1+i, wat zal dan de convergentiestraal zijn? Geef ook de stelling waarop je steunt (zonder bewijs).
    Suppose we consider the function f(z)=lnH(2+z) where H=]−π,+π]. If we would look at the Taylor series for this function around the point z0=1+i, what will the radius of convergence then be? Which theorem do you use here (no proof required)?
    2. Verklaar volgende bewering: om het maximum te kennen van de functie |f(z)|2 in de eenheidsbal B(0,1) voor f(z)=z2−2, moeten we gaan kijken naar het maximum van de functie φ(θ)=5−4cos(2θ).
    Explain the following statement: in order to calculate the maximum value of |f(z)|2 in the unit ball B(0,1) for f(z)=z2−2, one has to consider the maximum of the function φ(θ)=5−4cos(2θ).
    3. Stel dat we onderstaande Moebiustransformatie beschouwen, met een parameter a∉C(0,1). Leg dan uit waarom het beeld van 0 genoeg is om te besluiten of B(0,1) naar zichzelf gaat, dan wel naar het complement van de sluiting (merk op: C(0,1) wordt op zichzelf afgebeeld). f(z):=z−a1−¯az.
    Suppose that we consider the fractional linear transformation from above, with a∉C(0,1). Explain why it is sufficient to know the image of a∈C to conclude whether B(0,1) maps to itself, or to the complement of the closure (note that the circle C(0,1) is mapped to itself).
    4. Gegeven onderstaande integraal, wat kan je dan zeggen over de parameter a∈C? 12πi∮C(0,42)2z−(1+a)(z−1)(z−a)dz=2. *Given the integral above, what can you say about the parameter a∈C?*

Oefeningen



De contour voor de integraal in oefening 1.

1. Beschouw de integraal $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2-1}dx=\frac{\pi^2}{4}$ door gebruik te maken van $f(z)=\frac{\ln(z)}{z^2-1}$ en de gegeven contour.
   (a) Toon aan dat de singulariteit in $z=1$ ophefbaar is en leg uit waarom dit van belang is voor onze berekening.

   (b) Toon aan dat de bijdrage van σ_R wegvalt wanneer $R\to\infty$.

   (c) Toon aan dat de bijdrage van σ_r wegvalt wanneer $r\to 0$.

   (d) Bereken de integraal in de opgave. (BONUS: kan je ook iets zeggen over de integraal $\int_0^\infty \frac{\ln(x)}{x^2+1}dx$?)

2. Hoeveel nulpunten heeft $f(z)=z^2+5\sin z$ in de rechthoek $R=\{z=x+iy: -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}, -1<y<1\}$? **Hint:** $|\sin z|=\sqrt{\sinh^2 y+\sin^2 x}$ en $\sinh 1>1$.
3. Zoek een conforme afbeelding Φ zodat het gebied ingesloten door $|z-1|<2$ en $|z+1|<2$ op de eenheidsschijf wordt afgebeeld.

Januari 2022

Theorie

1. (a) Leid de vergelijkingen af waaraan een analytische functie $f=u+iv$ moet voldoen

   (b) Gebruik vervolgens deze vergelijkingen om aan te tonen dat elke analytische functie $f(z)$ aanleiding geeft tot twee harmonische functies (en leg ook uit wat dat zijn).

   (c) Geef twee andere definities voor een analytische functie (en dus niet 'afleidbaar in een open domein').

2. Definiëer het windingsgetal van een (gesloten) kromme rond een punt, en toon aan dat dit altijd een geheel getal is (je mag hierbij voor het gemak veronderstellen dat de afgeleide in elk punt van de kromme bestaat, en dus de nuance die opduikt bij stuksgewijs gladde krommen negeren in je bewijs).
3. Stel dat de functie f(z) analytisch is in het gebied Ω=B(z0,R)\{z0}.
   (a) Toon om te beginnen aan dat de waarde f(z) voor z∈Ω kan worden geschreven als een som van twee complexe integralen.

   (b) Bewijs vervolgens dat één van die integralen geschreven kan worden als het zogenaamde 'hoofddeel' van de Laurent-ontwikkeling (het andere deel van de ontwikkeling hoef je niet te behandelen). Geef ook aan waar dat hoofddeel zal convergeren.

4. Wat is het beeld van de open schijf B(0,1) onder de complexe afbeelding f(z) gedefinieerd door: f(z)=eiπ4z−2i1+2z Je mag je baseren op eigenschappen uit de cursus zonder die te bewijzen (vermeld ze wel).

   Stel dat Γ↔|z+2|=3. Verklaar hoe je de argumentstelling kan gebruiken om volgende integraal te berekenen: I:=∮Γ2z+3z2+3z+2dz. Geef daarbij duidelijk aan wat die stelling precies zegt (de naam hoef je niet te verklaren).

   Geef twee stellingen uit de cursus die duidelijk illustreren dat complexe functies zich helemaal anders gedragen dan hun reële tegenhangers (formuleer de stelling en leg uit wat er anders is over R).

Oefeningen

Bestand:ComplexeAnalyse oefeningen januari2022 .pdf

Augustus 2020

Theorie

1. Het bewijs van de hoofdstelling van de algebra begint met "Stel p(z)≠0:∀z∈C dan kan men een functie invoeren f(z) als de inverse (als breuk) van p(z)→f(z) is geheel en begrensd en dus is f(z) constant. Toon aan dat die eigenschap i.v.m. begrensdheid waar is.
2. Bewijs dat W(Γ,z1)=W(Γ,z2)
3. In de cursus zagen we stelling die leert om afgeleide fn(z0) van een analytische functie te kunnen berekenen door middel van een geschikte integraal (mits aan zekere voorwaarden voldaan is).
   1. Formuleer de stelling (zonder bewijs) die bovenstaande zin verklaart.
   2. Gebruik de residustelling en definitie van Weierstrass om dit gemakkelijk te bewijzen.

4. WAAR/VALS
    1. f(z) een complexe functie met essentiële singulariteit in z=0 en Γ gesloten contour die de oorsprong omvat (als enige singulariteit) dan geldt **altijd** ∮Γf(z)dz
    2. Het product van twee harmonische functies is harmonisch.
    3. (geen waar/vals) Verklaar sin(2z)=2sin(z)cos(z) zonder berekeningen. (hint: gebruik een stelling uit de cursus en denk in de richting van reëele getallen.)

Praktijk

1.
    1. Toon dat veelterm z5+15z+1=0 een oplossing heeft in schijf |z|<110 en 4 oplossingen heeft op ring R bepaald door 32<|z|<2.
    2. Bepaal de conforme afbeelding die R afbeeldt op bovenste halfvlak.
2. γ lineaire fractionele transformatie: bewijs dat alle punten fixpunten zijn of er hoogstens twee fixpunten zijn.
3. f(z)=tanh(πz)z(z−i) (hint |tanh(π(c+it))|≤|coth(πc)|) (met cosh(x) =0 gegeven)
    1. Bepaal singulariteiten; welk type?
    2. Bepaal residu in de contour bepaald door a a+i a-i -a.
    3. Bereken ∮c in de contour bepaald door a a+i a-i -a.
    4. Bereken +∞∫−∞tanh(πx)x(x2+1)dx. (hint?: deel de contourintegraal op in 4 en neem er 2 samen om deze integraal te bekomen)

Augustus 2018

Oefeningen

1. Bestaat er een analytische functie f:B(0,1)→C en d=fn(0)=(n!)? Waarom wel/niet?
2. Neem λ∈R>1. Toon aan dat de vergelijking e−z+z=λ exact 1 oplossing heeft in het open rechtenhalfvlak {z∈C|R(z)>0} die bovendien R is.
3. Neem a∈R>0,z0∈C\R en neem een natuurlijk getal n≥1. Bepaal nu ∫∞−∞eiax(x−z0)ndx.
4. Stel f(t):R→C (die we voor de eenvoud constante veronderstellen) dan is de Laplace transformatie van f(t) gedefinieerd als Lf(t)=F(z)=∫∞0f(t)e−stdt. De inverse tranformatie is gedefinieerd als L−1F(z)=12πi∫a+i∞a−i∞F(z)eztdz waarbij a zo gekozen is dat F(z) analytisch is in het rechtse halfvlak R(z)≥a. Bepaal nu L−11(z+1)2. Hint: Kijk naar ∫CRezt(z+1)2dz waarbij CR de kromme is die boven de imaginaire as van -Ri naar Ri loopt om dan via het cirkelsegment |z|=R terug naar -Ri te gaan en laat dan R→∞.
5. Zoek conforme afbeelding van het gebied Ω={z∈C:Im(z)>0}\{z=iy,0≤y≤1} naar het open bovenvlak.

Juni 2018

Theorie

1. Leid de vergelijking af waaraan een analytische functie moet voldoen.
2. Als je een willekeurige R -waardige functie u(x,y) krijgt (de hier van het gemak ∞ keer afleidbaar wordt verondersteld), kan je die dan altijd aanvullen met een R -waardige functie v(x,y) zodat de functie f(z) = u + iv analytisch is?
3. Gegeven een analytische functie g:B(0,R)→B(0,1):z→g(z),R>1. Toon aan dat er ∀w∈B(0,1),∃!zw∈B(0,1):zw=wg(zw)
    - Verklaar de existentie van die waarde zw door een gepaste stelling van de cursus te gebruiken in combinatie met de kromme Γ↔|z|=1.
    - Bewijs deze stelling.
4. Wanneer een complexe f afleidbaar is in een open (enkelvoudig, samenhangend) gebied Ω⊂C , dan kan men daaruit afleiden dat de functie ∞ veel afleidbaar is. Straffer zelfs, je weet zelfs hoe die afgeleiden eruit gaan zien (als integraal). Geef die formule van de algemene afgeleide en bewijs het simpelste geval. Bovenstaande eigenschap geldt zogenaamd niet voor het reële geval: Wanneer f(x)∈C1(Ω) , dan kan je daar onmogelijk uit concluderen dat f(x)∈C∞(Ω). Geef nog een voorbeeld van een eigenschap uit de cursus die wel geldt voor de analytische functies f(x), maar niet voor de reële (zonder bewijs).
5. Waar of vals.
    - Als f(z) en g(z) gehele functies zijn waarvoor geldt dat |f(z)|≤|g(z)|,g(z)≠0 op C⇒F(z)=1f(z) ook geheel.
    - Er bestaan ∞ veel conforme afbeeldingen φ van B(0,1) op zichzelf waarvoor geldt dat φ(1π)=0.

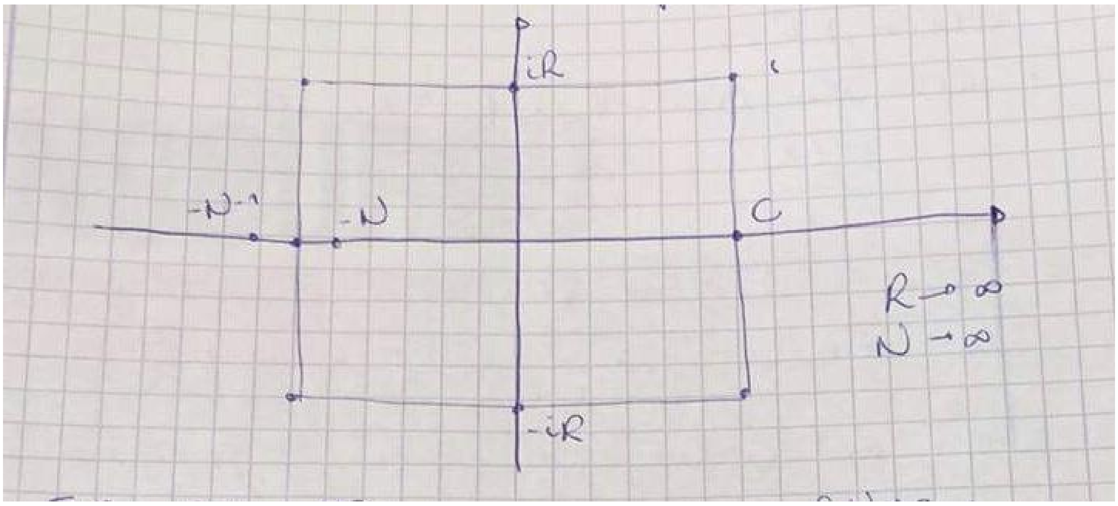
Oefeningen

1. Neem complexe veelterm P(z) met n niet noodzakelijk verschillend nulpunt zk.
    - Toon aan dat ∀z∈C\{z1,...,zn}:P′(z)P(z)=∑∞k=1¯z−zk|z−zk|2.
    - Stel w een nulpunt van P'(z), toon aan dat er n reële getallen λk bestaan zodat n∑k=0λk=1 en w=n∑k=0λkzk.
2. Neem f(z) analytisch binnen de eenheidscirkel en op de rand.

   De functie f(z) voldoet ook aan |f(z)−z|<1,∀z∈C(0,1). Toon aan dat |f′(1/2)|≤8.
3. Stel dat een functie f(z) analytisch is op B(0,1) en dat voor n≥2:f(1/n)=7n3. Wat kan je zeggen over f‴(0)?

4. De Mellin-transformatie van een functie $f(x)$ is gedefinieerd als $F(s)=\int_0^\infty x^{s-1}f(x)dx$ en we beweren nu dat de inverse gegeven wordt door $f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_c} x^{-s}F(s)ds$ waarbij C_c de rechte $t\mapsto c+ti$ is met $c > 0$. Beschouw hiervoor de Gammafunctie $\Gamma(z)=\int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$, met $Re(z) > 0$, dan is $\Gamma(s)$ de Mellin-transformatie van $f(x)=e^{-x}$. We gaan nu bewijzen dat de inversie-formule wel degelijk klopt voor dit specifieke voorbeeld.
    - Bepaal de polen van $\Gamma(z)$ en bijbehorende residuen (je mag gebruiken dat de Gamma-functie in bovenstaande integraalformule analytisch is op $Re(z)>0$ en dat $\Gamma(z+1)=z\Gamma(z)$).

    - Beschouw de kromme $\gamma_{R,N}$

      Toon aan dat $\int_{\gamma_{R,N}} x^{-s}\Gamma(s)ds\to\int_{C_c} x^{-s}\Gamma(s)ds$ als $R,N\to\infty$ waarbij je de stellingsformule mag gebruiken $\Gamma(z)\approx z^{z-\frac{1}{2}}e^{-z}\sqrt{2\pi}$ voor $|x|\to\infty$.
    - Combineer nu de vorige 2 puntjes om aan te tonen dat $\frac{1}{2\pi i}\int_{C_c} x^{-s}\Gamma(s)ds=e^{-x}$
5. Stel $\Omega=\{c\in\mathbb{C} \mid |z-2-2i|<2, |z-2-i|>1\}$. Construeer een conforme afbeelding van Ω naar het open bovenhalfvlak.

2017

Theorie

1. (2pt)
    - Leidt de vergelijking af waaraan een analytische functie moet voldoen.
    - Stel dat je 2 voldoende afleidbare functies $u(x,y)$ en $v(x,y)$ gevonden hebt die in een deelverzameling $D\subset\mathbb{C}$ voldoen aan die vergelijkingen. Mag je dan zeker stellen dat $f(z):=u(x,y)+iv(x,y)$ een analytische functie is?

2. (4pt)
    - (Waar/Vals) Er bestaat een analytische functie f(z) waarvoor geldt dat het beeld van de verzameling $\Omega1:=\{z=x+iy|y>0\}$ gelijk is aan $\Omega2:=\{w=u+iv|u\geq0\}$.
    - Neem Cn cirkel $|z|=n$. Als je weet dat $\int Cnf(z)dz\neq\int Cn+2f(z)dz$, waarbij f(z) geen polen of nulpunten heeft voor $|z|\in N$. Wat kan je zeggen over f(z)?
    - (Waar/Vals) f(z),g(z) complexe functies waarvan je weet $\int|z|=1f'(z)f(z)dz=\int|z|=2g'(z)g(z)dz$. Dan f(z),g(z) evenveel nulpunten binnen die cirkels en dus liggen alle nulpunten van g(z) binnen $|z|=1$.
3. (2pt)
    - Formuleer de stelling die de reeksontwikkeling voor f(z) beschrijft rond z0, als f(z) een analytische functie is in B(z0,R)\{z0} met z0 een geïs. sing.
    - Bewijs stukje dat leidt tot negatieve machten in die reeks, waarbij je mag vertrekken van $f(t)=12\pi i\int CRf(\xi)\xi-zd\xi-12\pi i\int Crf(\xi)\xi-zd\xi$. Met Cr,CR cirkels met middelpunt z0 en straal $0<r<R$.
4. (2pt) Bewijs 1 stelling
    - Windingsgetal kromme rond punt buiten die kromme = 0
    - Rouché
    - Stelling die vorm van conforme afbeeldingen van B(0,1) op zichzelf vastlegt.

Oefeningen

1. (3pt) $a>1,n\in N0$. Show $\int\pi-\pi a+\cos(n\theta)a2+1+2a\cos(n\theta)d\theta=2\pi a$. Hint: slightly modify $f(z)=1zn+a$.
2. (2pt) $P(z)=anzn+an-1zn-1+...+a0$ Use Rouché's theorem to show that P(z) has exactly n zeroes in the complex plane.
3. (3pt) Tn square with center in the origin and sides, parallel to axes, of length 2N+1. $f(z)=1z2\sin(\pi z)$
    - Show on $Tn:|1\sin(\pi z)|\leq1$
    - Calculate residue of f(z) in all singularities.
    - Use residue theorem to find value of $\sum\infty n=1(-1)nn2$
4. (2pt) $\Omega:=\{z\in C||z|<2,|z-i|>1\}$ Find a conformal map that sends Ω to open upper half plane.

2016 (prof. Eelbode)

Theorie

1. Toon aan dat de afleidbaarheid van een functie f(z) impliceert dat f aan de Cauchy-Riemann vergelijkingen voldoet.
2. Bewijs dat als Γ een circuit is en z1 en z2 van elkaar verschillende punten op Γ zijn die verbonden kunnen woorden door een gebroken lijn die Γ niet snijdt, dat dan W(Γ,z1)=W(Γ,z2).
3. Bewijs/tegenvoorbeeld-vragen. (Dus zeker van alle begrippen in de curses een voorbeeld kunnen illustreren.)
4. Bewijs de stelling van Rouché. (Er was ook een extra vraag die de stelling toepastte.)

Oefeningen

1. Bewijs $$\int_0^{2\pi} e^{\cos(2\theta)}\cos(\sin(2\theta))\,d\theta = 2\pi$$ Hint, gebruik de afbeelding $\frac{e^{z^2}}{z}$
2. Beschouw de Riemann zeta functie $$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$$
   - Gebruiken dat $\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} z^{2k}$, waarbij $(B_n)_n$ de Bernoulli-getallen voorstellen, om te bewijzen dat de Laurentreeks van $\cot(z)$ volgende Laurentreeks heeft $$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^{2k} B_{2k}}{(2k)!} z^{2k-1}$$
   - Toon aan dat $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2n}}$ gelijk is aan $-\frac{\pi}{2}\mathrm{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^{2n}}, 0\right)$
   - Gebruik nu de Taylorontwikkeling van $\cot(z)$ om aan te tonen dat de waarde $\mathrm{Res}\left(\frac{\cot(\pi z)}{z^{2n}}, 0\right)$ gelijk is aan $(-1)^n \frac{2^{2n} B_{2k} \pi^{2n-1}}{(2n)!}$ en haal hieruit de waarde van $\zeta(2n)$
3. Gegeven was een situatie waarvoor je een Möbius-transformatie moet opstellen. (Situatie van de vorm: beeld de bovenste helft van de eenheidscirkel af op het rechter halfvlak, e.d.)

2015 (prof. Lebruyn)

Omdat prof. Eelbode dit jaar ziek was, werd dit vak dit jaar door prof. Lebruyn gegeven met zijn 2 testen systeem.

Test 1

Theorie

1. Als $\phi(z)$ continu is over de contour Γ dan hebben we aangetoond dat voor de afgeleide van de Cauchy integraal geldt $$\frac{d}{dz}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(\xi)}{z-\xi}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(\xi)}{(z-\xi)^2}\,d\xi$$ Toon aan waarom hieruit volgt dat $$\frac{d^n}{dz^n}\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(\xi)}{z-\xi}\,d\xi = \frac{n!}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(\xi)}{(z-\xi)^{n+1}}\,d\xi$$
2. Formuleer en bewijs de stelling van Cauchy-Taylor (reeksontwikkeling voor analytische functies).
3. Bespreek de verschillende types van geïsoleerde singulariteiten. Welke types kunnen optreden bij rationale functies $R(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$ met $p(z), q(z) \in \mathbb{C}[z]$?

Oefeningen

1. Stel dat f een complex afleidbare functie is die gedefinieerd is op heel $\mathbb{C}$.
   - We definiëren de functie $g: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ zodat $$g(z) = \begin{cases} \frac{f(z)-f(0)}{z} & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$ Verklaar waarom $g(z)$ afleidbaar is op gans $\mathbb{C}$.
   - We zeggen dat de limiet in oneindig van een complexe functie $h(z)$ gelijk is aan a als er voor elke $\epsilon > 0$ een $M \geq 0$ bestaat zodat voor elke $|z| > M$ geldt $|h(z) - a| < \epsilon$. Veronderstel nu dat $\lim_{z\to\infty} \frac{f(z)}{z}$ bestaat. Toon aan dat $f(z)$ van de vorm $az + b$ is met $a, b \in \mathbb{C}$. Het voorgaande resultaat kan hierbij van pas komen.

2. Met het symbool S_n stellen we het vierkant voor dat als middelpunt de oorsprong heeft en waarvan de zijden evenwijdig lopen met de coördinaatassen en lengte $2n+1$ hebben.
    - Gebruik de residustelling en de functie $\frac{1}{\sin(\pi z)(z^2+3)}$ om de volgende reekssom te bepalen $\sum_{n\in\mathbb{Z}}\frac{(-1)^n}{n^2+3}$ Je mag hierbij gebruik maken van het feit dat $\frac{1}{\sin(\pi z)}\leq 1$ voor alle $z\in S_n$.
    - Bereken met behulp van de voorgaan de oefening de reekssom $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^n}{n^2+3}$

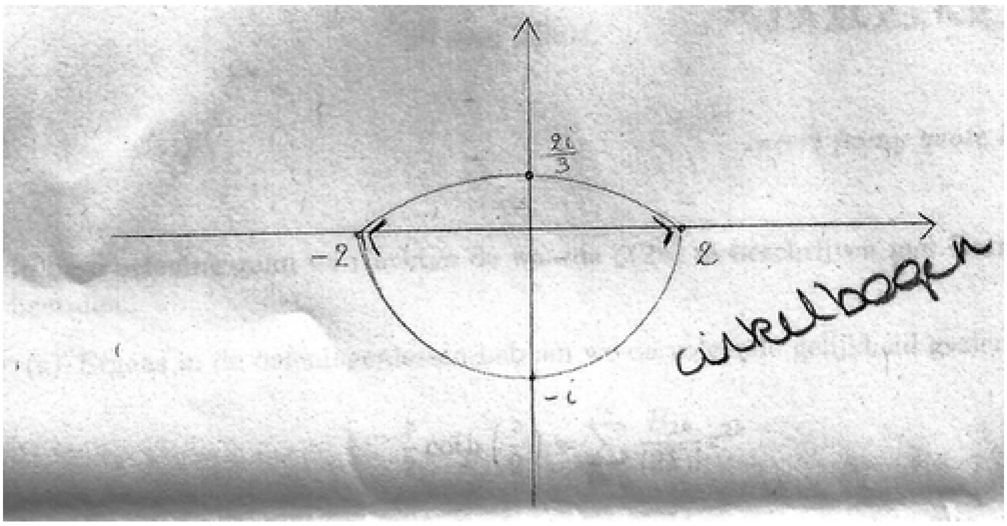
Test 2

Theorie

1. Geef de definitie avn een Riemannoppervlak en formuleer de topologische classificatiestelling van Riemannoppervlakken. Geef op maximum één bladzijde een overzicht van het bewijs.
2. Wanneer noemen we een continue functie f conform in $z_0\in\mathbb{C}$? Geef een criterium opdat een analytische functie f conform is in z_0. Hoe volgt hieruit dat f een lokaal homeomorfisme bepaalt rond z_0 en zijn beeldpunt? Hoe gebruiken we conformitiet in het bewijs van de classificatie van Riemannoppervlakken?

Oefeningen

1. Stel $a\in\mathbb{C}$ en $n\geq 2$. Toon aan dat de veelterm $f(z)=az^n+z+1$ minstens één nulpunt heeft in het gebied $\{z\in\mathbb{C}\mid |z|\leq 2\}$.
    - Toon aan dat $|z_1|\ldots|z_n|=|a-1|$ waarbij $z_1\ldots z_n$ de wortels zijn van de veelterm $f(x)$.
    - Veronderstel eerst dat $|a-1|\leq 2^n$. Gebruik het voorgaande resultaat om aan te tonen dat $f(z)$ een nulpunt z moet hebben met $|z|\leq 2$.
    - Stel nu dat $|a-1|>2$. Gebruik de stelling van Rouché om te bewijzen dat er een nulpunt van $f(z)$ bestaat met modulus kleiner dan 2.
2. Construeer een conforme afbeelding die het volgende gebied afbeeldt op het bovenhalfvlak. Het gebied wordt ingesloten door twee cirkelbogen die elkaar loodrecht snijden.



juni 2013

Theorie

1. Leid expliciet de vergelijkingen af waaraan een analytische functie moet voldoen.
2. We hebben in de cursus een stelling gezien die ons in staat stelt om het aantal nulpunten van complexe polynomen $P(z)$ in ringen $R(0,R_1,R)$ te tellen. Formuleer deze stelling, toon ze aan en illustreer dan aan de hand van een zelf gekozen voorbeeld.
3. Als $u(x,y)$ een harmonische functie is in $\beta(0,1)$, welke ook nog continu is t.e.m. op de rand, dan geldt er dat $u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}u(e^{i\theta})P_r(t-\theta)d\theta$ met $z=x+iy=re^{i\theta}$. Toon deze formule aan door te vertrekken van de formule van Cauchy. Eventuele hulpstellingen die te maken hebben met conforme afbeeldingen van $\beta(0,1)$ op zichzelf moet je wel vermelden, maar niet bewijzen.
4. Zoek de fout in onderstaande redenering:

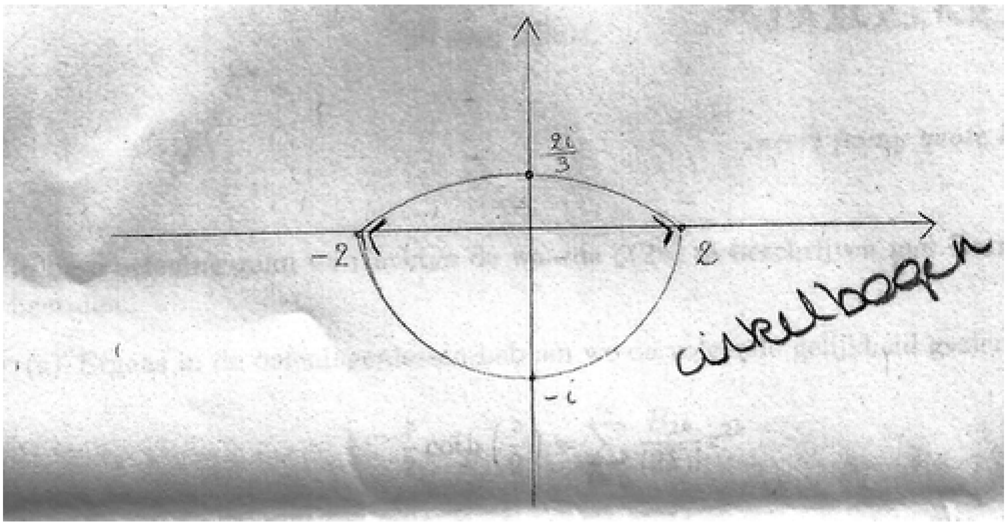
stel dat we een functie $f(z)$ ontbinden als een reeks door middel van $f(z)=\frac{1}{(z-1)(2z-1)}$ $=\frac{1}{(z-1)}-\frac{2}{2z-1}$ $=-\sum_{k=0}^{\infty}(z^k)-\frac{1}{z(1-\frac{1}{2z})}$ $=-(1+z+z^2+\dots)-\frac{1}{z}(1+\frac{1}{2z}+\frac{1}{4z^2}+\dots+\frac{1}{(2z)^k}+\dots)$. Dan zien ze dat $z=0$ een essentiele singulariteit is voor $f(z)$ met residu gelijk aan -1.

1. Geef de definitie van het windingsgetal, en bewijs dat dit steeds een geheel getal is.

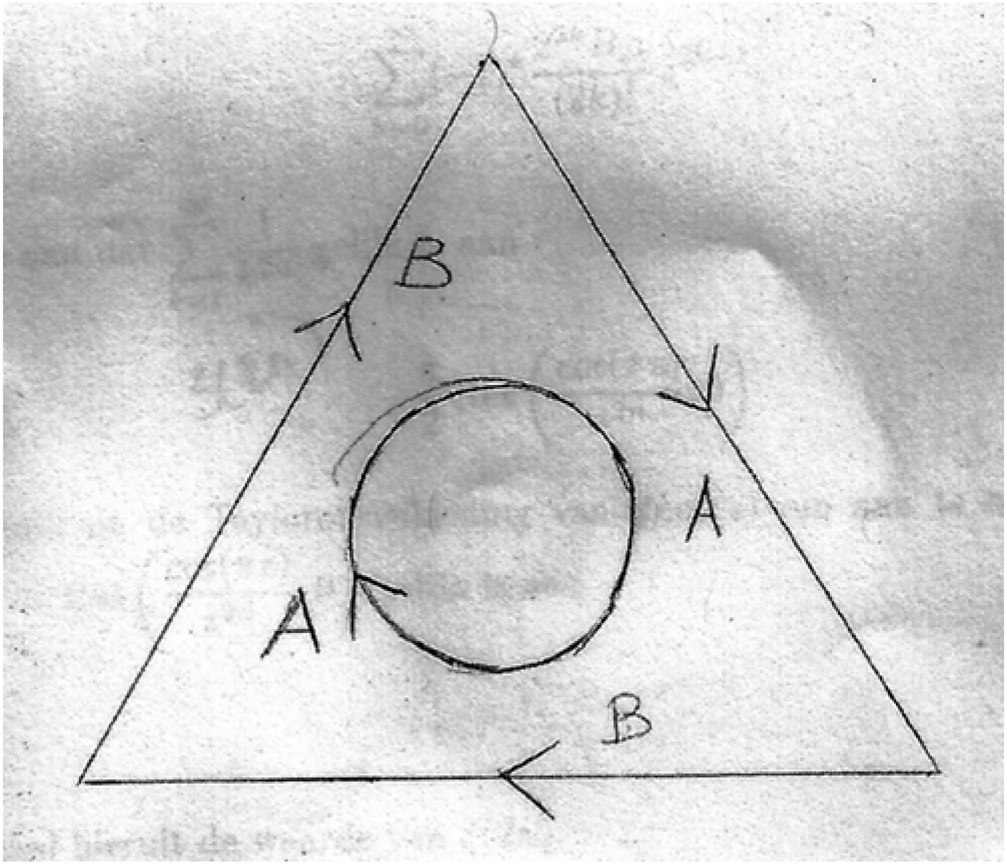
Oefeningen

1. In deze oefening trachten we de waarde $\zeta(2n)$ te beschrijven met bernoulligetallen.
   - Ergens in de oefeningenlessen hebben we de volgende gelijkheid gezien$\frac{z}{2}\coth\frac{z}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{B_{2k}}{(2k)!}z^{2k}$ Hierbij is $(B_n)_n$ de rij Bernoulligetallen. Leid uit deze gelijkheid de volgende voorstelling van de Laurentreeks van $\cot(z)$ af$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k2^{2k}B_{2k}}{(2k)!}z^{2k-1}$
   - Toon aan dat $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}$ gelijk is aan $-\frac{\pi}{2}\mathrm{Res}(\frac{\cot(\pi z)}{z^{2n}},0)$
   - Gebruik nu de Taylorontwikkeling van $\cot(z)$ om aan te tonen dat de waarde $\mathrm{Res}(\frac{\cot(\pi z)}{z^{2n}},0)$ gelijk is aan $\frac{(-1)^n2^{2n}B_{2k}\pi^{2n-1}}{(2n)!}$ en haal hieruit de waarde van $\zeta(2n)$
2. Stel $\lambda>1$ en definieer de functie $g(z)$ als $\lambda-z-e^{-z}$
   - Toon aan dat $g(z)$ één nulpunt heeft in $\beta(\lambda,1)$.
   - Waarom is dit nulpunt zeker reëel?
   - Bewijs dat dit nulpunt het enige nulpunt is in het rechterhalfvlak.

3. Geef een conforme afbeelding die het onderstaande gebied op het bovenhalfvlak afbeeldt.



4. Klassificeer het onderstaande Riemannoppervlak:



Categorieën:

- Wiskunde
- 3BWIS