Algemene Topologie

tuyaux.winak.be/index.php/Algemene_Topologie

Algemene Topologie

Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Bespreking

Dit vak wordt gegeven door Werner Peeters. Sinds 2020-2021 wordt dit vak in de tweede bachelor gegeven i.p.v. de derde bachelor. Dit vak is nu ook maar 3 studiepunten i.p.v. 6. Werner ziet echter wel veel leerstof wat dit toch dat een van de zwaardere vakken maakt. De voorloper van dit vak is Analytische topologie, maar de examenvragen daarvan zijn mogelijks niet heel representatief.

Probeer zeker mee te zijn met alle begrippen en eigenschappen en ook al doorheen het jaar de cursus al eens grondig vast te pakken zodat je vlot mee kan in de lessen.

Oefeningen

Er zijn geen werkcolleges voorzien omdat het vak met 3 studiepunten een beperkt aantal lesmomenten heeft. Werner geeft wel vaak oefeningen op die je thuis kan maken en waarvan de oplossing de volgende les besproken wordt. Deze zijn niet verplicht.

Puntenverdeling

In 2020-2021 was de puntenverdeling 2/3 theorie, 1/3 oefeningen resp. 1/2 theorie, 1/2 oefeningen, hetwelke de hoogste score gaf.

Voorbeeldexamens

Volgende examens zijn gegeven als voorbeeld. Ze zijn nuttig om te kunnen inschatten welk soort vragen er op het examen komen.

Bestand:Topologie Examen juni 2020.pdf

Bestand:Topologie Examen september 2020.pdf

Examenvragen

Theorie

Augustus 2021

1. Geef de definitie van:
    1. volledig gesepareerd
    2. Fréchet-ruimte
    3. Regulier
    4. Quotiënt
2. Bewijs: Stel (X,T) een A_1-topologische ruimte, $A \subseteq X$ en $x \in X$. Dan zijn volgende eigenschappen equivalent:
    1. $x \in \mathrm{cl}A$
    2. $\exists (x_n)_n$ rij in A zodanig dat $(x_n)_n \to x$
    3. $\exists (x_n)_n$ rij in A zodanig dat $(x_n)_n \dashv x$
3. Bewijs: Stel (X,T) een topologische ruimte. De volgende eigenschappen zijn equivalent:
    1. $x,y \in X$ zijn ononderscheidbaar
    2. $x \in \mathrm{cl}\{y\}$ en $y \in \mathrm{cl}\{x\}$
    3. $\mathrm{cl}\{x\} = \mathrm{cl}\{y\}$
    4. $\forall U \in T : x \in U \Leftrightarrow y \in U$
4. Geef een voorbeeld van een normale ruimte die niet regulier is.
5. Bewijs: Als $(f_i : (X_i,T_i)) \to (X,T))_{i \in I}$ en voor elke $i \in I$, tevens $(f_{ij} : (X_{ij},T_{ij})) \to (X_i,T_i))_{j \in J_i}$ families continue functies zijn, en $(f_i \circ f_{ij} : (X_{ij},T_{ij}) \to (X,T))_{i \in I, j \in J_i}$ is finaal, dan is ook $(f_i : (X_i,T_i) \to (X,T))_{i \in I}$ finaal.

Juni 2021

1. Geef de definitie van:
    - A_2
    - Kolmogorv (T_0)
    - volledig regulier
    - inbedding
2. Bewijs de universele eigenschap van initiale structuren (in beide richtingen) :

    Als $(f_i : X \to (X_i,T_i))_{i \in I}$ een source is, en T een topologie op X, dan zijn volgende eigenschappen equivalent:
    1. $(f_i : X \to (X_i,T_i))_{i \in I}$ is initiaal.
    2. Voor iedere topologische ruimte (Z,U) geldt dat een functie $f : (Z,U) \to (X,T)$ continu is als en slechts als alle afbeeldingen $f_i \circ f : (Z,U) \to (X_i,T_i)$ met $i \in I$, continu zijn.
3. Bewijs:
    1. In een T_2-ruimte is elk compact deel gesloten.
    2. In een compacte T_2-ruimte is een deel compact als en slechts als het gesloten is.

4. Zij $f:X\to Y$, en $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{P}(Y)$ zodanig dat $\forall B\in\mathcal{B}: B\cap f(X)\neq\emptyset$
    1. Als $\mathcal{B}$ een filterbasis op Y is, dan is $f^{-1}(\mathcal{B})$ een filterbasis op X.
    2. Als $\mathcal{B}$ een filter op Y is, en f is injectief, dan is $f^{-1}(\mathcal{B})$ een filter op X.
    3. Als $\mathcal{B}$ een ultrafilter op Y is, en f is injectief, dan is $f^{-1}(\mathcal{B})$ een ultrafilter op X.

Oefeningen

Juni 2021

Open boek examen: de studenten mochten de cursus en eigen nota's gebruiken.

1. Beschouw volgende functie

$$f:(\mathbb{R},\mathcal{S})\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_e):x\mapsto\begin{cases}0 & \text{als } x\neq 1\\ 1 & \text{als } x=1\end{cases}$$

   Met $\mathcal{S}$ de Sorgenfrey-topologie en $\mathcal{T}_e$ de euclidische topologie.
    1. Is f continu?
    2. Is f open?
    3. Is f gesloten?
2. Beschouw $\mathbb{N}$ uitgerust met de discrete topologie. We voegen daar twee punten ∞_1,∞_2 aan toe. We stellen $\mathbb{N}=\mathbb{N}\cup\{\infty_1,\infty_2\}$. Definieer de enige open verzamelingen waar ∞_1 in zit als $\mathbb{N}\cup\{\infty_1\}$ en $\mathbb{N}$, en de enige open verzamelingen waar ∞_2 in zit als $\mathbb{N}\cup\{\infty_2\}$ en $\mathbb{N}$. Noem deze topologie $\mathcal{N}$
    1. Toon aan dat $\mathcal{N}$ een topologie is op $\mathbb{N}$.
    2. Toon aan dat $\mathbb{N}\cup\{\infty_1\}$ en $\mathbb{N}\cup\{\infty_2\}$ compact zijn maar hun doorsnede niet.
    3. Wat kan je hieruit besluiten over de doorsnede van compacte ruimten?

3. Zij X oneindig en $p \in X$ vast gekozen. We definiëren de Fort-topologie T als de topologie met de delen G waarvan het complement ofwel eindig is, ofwel p bevat.
    1. Toon aan dat dit een topologie is.
    2. Toon aan
       T
       T
       is compact
    3. Toon aan
       T
       T
       is T_1
    4. Toon aan
       T
       T
       is normaal (en dus T_4)
4. Zij $\forall i \in I$, (X_i, T_i) de discrete topologie, is $(\prod_{i \in I} X_i, \prod_{i \in I} T_i)$ discreet? Motiveer je antwoord.

Categorieën:

- Wiskunde
- 2BWIS