Tuyaux
2de Bachelor Fysica

WINAK

Tweede Semester
2010-2011

Inhoudsopgave

Inleiding

Jullie weten ondertussen hoe alles verloopt, vandaar deze korte inleiding. Ik hoop dat deze verzameling vragen van vroeger en nu jullie kan helpen in deze duistere tijden! Als jullie daarenboven nog zo vriendelijk willen zijn om de examenvragen van deze reeks bij te houden en mij ergens te bezorgen, zijn jullie opvolgers jullie heel dankbaar!

Veel succes!

Deze versie is geprint op 17 april 2011.

Julie
WINAK mentor Fysica 2010-2011

Hoofdstuk 1

Analyse III

1.1 Theorie

Dit examen verloopt nagenoeg hetzelfde als het examen analyse 2.

1.1.1 Januari 2004

Prof. Dr. R. Lowen

1. Zeg wat je weet over orthonogaliteit en projecties en het verband tussen beide. Deze student moest nog bewijzen dat $x - P_F x \perp F$
2. Zeg wat compacte operatoren zijn. Hierbij verlangt prof. Lowen ook een voorbeeld en een tegenvoorbeeld.
3. Spectraalstelling (geen echt bewijs) + als A compact is, dan geldt: $\lim \lambda_n \longrightarrow 0$. Maar wat als A nu slechts een gewone operator moet zijn? Wat zijn dan de condities voor de λ_n? (Zie voetnoot voor een gedeeltelijke oplossing[1])

1.1.2 Januari 2006, groepen 1 en 2

Prof. Dr. R. Lowen

Hierbij werden dezelfde vragen gesteld als bij 1.1.1, Januari 2004

1.1.3 Januari 2006, groepen 3 en 4

Prof. Dr. R. Lowen

1. Wat weet je over basissen in Hilbertruimten? Dus wat is een basis, welke basissen zijn de handigste, wat is de voorwaarde[2], enzovoort. Hierbij vraagt hij ook hoe je in een separabele Hilbertruimte een orthonormale basis creëert. Enkel Gramm-Schmidt is niet voldoende, want je hebt niet zo maar een voortbrengend stel L.O. vectoren.
2. Zeg wat compacte operatoren zijn. Hierbij verlangt prof. Lowen ook een voorbeeld en een tegenvoorbeeld. Ook een bewijs hiervan is gevraagd.

[1] Ze moeten begrensd zijn! Want A is continu als $\sum \lambda_k(x|x_k)x_k$ convergent. Dit betekent dat $\lambda_k(x|x_k) \in l^2$. (zie cursus 1.3.14)

[2] Hilbertruimte moet separabel zijn

1.1.4 Januari 2008

dr. W. Peeters

1. Geef alle eigenschappen in verband met orthogonaliteit en bewijs er enkele (dr. W. Peeters zegt je wel de welke)

2. Geef de bewijzen in verband met Cesaro sommeerbaarheid

1.1.5 Januari 2009

dr. W. Peeters

Kies telkens 2 van de drie vragen die op bord komen, hierbij zullen dan nog kleine bijvraagjes gesteld worden.

Groep 1

1. Bespreek alles wat je weet ivm orthogonaliteit.

2. Cësaro- en Abelsommeerbaarheid en geef hier een toepassing van.

3. Fouriertransformatie (met een voorbeeld erbij).

Groep 2

1. l^p-ruimten zijn Banach, bespreek. Geef ook de stelling van Minkowski en Hölder.

2. Bespreek het 2D-Dirichlet probleem.

3. Bespreek het 1D-golfprobleem.

Groep 3

1. Bespreek alles wat je weet over operatoren: stellingen en voorbeelden.

2. Bespreek het 2D-Dirichlet probleem.

3. De Fouriertransformatie met Gausskern, en wat hebben deze met elkaar te maken?

1.2 Oefeningen

1.2.1 Januari 2003

1. Bepaal de Fourierreeks van de functie

$$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{1 - 2\lambda \cos(x) + \lambda^2} \tag{1.1}$$

waarbij λ reëel is en $|\lambda| < 1$.
Hint: Bewijs dat voor $n \geq 0$ geldt dat:

$$\cos nx = \frac{-1}{1 - 2\lambda \cos x + \lambda^2}\Big(\lambda \cos(n+1)x - (1+\lambda^2)\cos(nx) + \lambda \cos(n-1)x\Big) \tag{1.2}$$

2. Neem ϕ een sesquilineaire functionaal op een (pre-)Hilbertruimte en associeer met ϕ een quadratische vorm $\hat{\phi}$ door $\hat{\phi}(x) = \phi(x, x)$. Stel

$$||\phi|| = \inf\{\alpha |\, |\phi(x, y)| \leq \alpha ||x|| \, ||y||\} \tag{1.3}$$

$$||\hat{\phi}|| = \inf\{\beta |\, |\hat{\phi}(x)| \leq \beta ||x||^2\} \tag{1.4}$$

Toon aan dat als ϕ symmetrisch is en $||\phi|| < \infty$, dat dan $||\phi|| = ||\hat{\phi}||$.

3. Definieer, voor elke $a \in \mathbb{R}^+$, de functie $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto e^{-ax^2/2}$. Bereken door middel van de Fouriertransformatie het convolutieproduct $f_a * f_a$.

4. Neem $T : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C}) : x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto Tx$ met

$$(Tx_n)_n = \begin{cases} x_{n-1} + x_n & n \in 2\mathbb{N} + 1 \\ x_n + x_{n+1} & n \in 2\mathbb{N} \end{cases} \tag{1.5}$$

   (a) Bewijs dat T een operator is.
   (b) Bepaal $||T||$ en de eigenwaarden van T.
   (c) Bepaal T^*.
   (d) Is T compact?

1.2.2 September 2003

Hier was nog een achterkant aan het blad, maar deze had ik niet.

1. Neem 2 Hilbertruimten E en F.

   (a) Beschouw een continue lineaire afbeelding $T : E \to F$ en neem $\phi_T = (Tx|y)$. Ga na dat $\phi_T : E \times F \to \mathbb{C}$ een sesquilineaire afbeelding is en dan $||\phi_T|| = \sup\limits_{||x|| \leq 1, ||y|| \leq 1} ||\phi_T(x, y)|| = ||T||$.
   (b) Bewijs dat iedere begrensde sesquilineaire afbeelding $\phi : E \times F \to \mathbb{C}$ te schrijven is als ϕ_T voor een zekere $T : E \to F$ continu en lineair (definieer T en ga expliciet continuïteit en lineariteit na).

2. Neem $l^2(\mathbb{C})$ en beschouw volgende functie

$$A : l^2 \to l^2 : (x_n)_{(n\in\mathbb{N})} \mapsto (y_n)_n \quad (y_n)_n = \begin{cases} 5x_n - x_{n-1} & n \in 2\mathbb{N} \\ 3x_n & n \in 2\mathbb{N} + 1 \end{cases} \tag{1.6}$$

(a) Bewijs dat dit een goed gedefinieerde continue lineaire functie is

(b) Bepaal de eigenwaarden

(c) Bepaal de toegevoegde operator

(d) Is deze operator compact?

3. Neem twee separabele Hilbertruimten E en F en een Hilbert-Schmidt operator $A : E \to F$.

   (a) Neem een orthonormale basis $(e_n)_n \subset E$ en een orthonormale basis $(e'_n)_n \subset F$. Bewijs
   $$|A|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} ||Ae_i||^2 = \sum_{j=1}^{\infty} ||A^* e'_j||^2 = |A^*|^2 \tag{1.7}$$

   (b) Bewijs dat $|\cdot|$ een zinnige notatie is, met andere woorden, bewijs dat $|A|$ onafhankelijk is van de orthonormale basis $(e_n)_n$.

   (c) Bewijs dat als $|A| < \infty$ en $|B| < \infty$, dat dan $|A + B| \leq |A| + |B|$ en $||A|| \leq |A|$

4. Neem $0 < a < \pi$ en definieer
   $$f(x) := \begin{cases} x & -a \leq x \leq a \\ a\frac{\pi - x}{\pi - a} & a < x < \pi \\ a\frac{\pi + x}{a - \pi} & -\pi < x < -a \end{cases} \tag{1.8}$$

   (a) Teken de grafiek van f

   (b) (blad ten einde)

1.2.3 Januari 2005

Stijn Verwulgen

1. Stel $A := \{(e_n - 2e_{n+1}) \mid n \subset \mathbb{N}\} \subset l^2$.

   (a) Bereken $A^\perp$

   (b) Toon aan dat $\text{vct}(A \cup \{(\frac{1}{n+1})_{n\in\mathbb{N}}\})$ dicht is in l^2.

   (c) Stel $b := (\frac{1}{3^n})_{n\in\mathbb{N}}$. Bereken dan $d(b, A^\perp)$ en $d(b, A^{\perp\perp})$.[3]

2. Neem $\alpha \notin \mathbb{Z}$ en toon aan dat
   $$\cos\alpha\pi = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \ldots + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right) \tag{1.9}$$

   Hint: beschouw de Fourierreeks van de functie $x \mapsto \cos\alpha x$.

3. Stel f een continue functie op $[0, \pi]$. Toon aan dat
   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi f(x)\sin(2^n x)dx = 0 \tag{1.10}$$

4. Schrijf de functie $e^{\alpha x}$ als een reekssom van de Hermite ploynomen in $L^2_{e^{-x^2}}$.

5. De afbeelding $T : L^2(-\pi, \pi) \to L^2(-\pi, \pi) : f \mapsto Tf$ is gedefiniëerd door
   $$Tf(x) := \int_{-\pi}^{\pi} (f(t)\cos t \sin x + 2f(t)\sin t \cos x)\, dt \tag{1.11}$$

[3] dit is de projectie van b op de basis van $A^\perp$ of $A^{\perp\perp}$

(a) Toon aan dat dit een welgedefiniëerde operator is.
(b) Bepaal de toegevoegde T^*.
(c) Bepaal de eigenwaarden, zo deze bestaan.
(d) Ga na of T al dan niet compact is.
(e) Bepaal $\|T\|$.

Bij dit examen werden nog volgende dingen gegeven:

a) Geziene eigenschappn van Hermite Polynomen

1. Definitie
$$H_n := (-1)^n e^{x^2} \left(e^{-x^2}\right)^{(n)} \tag{1.12}$$

2. De rij $(H_n)_n$ is, in de ruimte $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} \mid f(x)e^{-x^2/2} \in L^2(\mathbb{R})\}$, met bijhorend inproduct $(f|g) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}\,dx$, een totale orthogonale familie.

3. Elke H_n is een veelterm van graad n

4. H_n is een (on)even functie als en slechts als n een (on)even getal is.

5. $\|H_n\|^2 = 2^n n!\sqrt{\pi}$

6. We hebben de volgende recursierelatie
$$H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)\ (x \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}_0). \tag{1.13}$$
$(H_n)_n$ bekomt men als eigenvectoren van een (zelftoegevoegde) differentiaaloperator
$$f \mapsto f'' - 2xf'. \tag{1.14}$$

b) Enkele gelijkheden

1. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} e^{-x^2}\,dx = e^{\frac{\alpha^2}{4}}\sqrt{\pi}$,

2. $\cos\alpha\cos\beta = \dfrac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$.

3. $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} x^i = \frac{1}{1-x}, |x| \leq 1$.

1.2.4 Augustus 2005

Stijn Verwulgen

1. Stel (f_n) een rij in een Hilbertruimte die zwak convergeert naar f en bovendien dat $(\|f_n\|)_n$ ook naar $\|f\|$ convergeert. Toon aan dat $(f_n)_n$ dan ook naar f convergeert.

2. In deze opgave werken we met
$$A := \mathrm{vct}\{\sin(nx) \mid\ \in \mathbb{N}, n > 3\} \subset L^2(-\pi,\pi) \tag{1.15}$$
en $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, gegeven door volgend voorschrift:
$$x \mapsto \begin{cases} -\pi - x & x \leq -\frac{\pi}{2} \\ x & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ \pi - x & \frac{\pi}{2} \leq x \end{cases} \tag{1.16}$$

(a) Geef de Fourierreeks van f.

(b) Bereken$\|f\|_2$.

(c) Bereken $d(f, \bar{A})$.

(d) Bereken $d(f, A^{\perp})$.

3. We hebben aangetoond dat de Legendre polynomen

$$P_n(x) := \frac{1}{2^n n!} D^n \left((x^2 - 1)^n \right) \tag{1.17}$$

een orthogonale familie vormen in de Hilbertruimte $L^2([-1, 1])$.
Verder weten we dat

$$\|P_n\|_2^2 = \frac{2}{2n + 1} \tag{1.18}$$

Voor $f \in L^2([-1, 1])$ definiëren we

$$Tf := \sum_{n \in \mathbb{N}} (cos(2\pi n x)|f)\, p_n, \tag{1.19}$$

met

$$p_n(x) := \frac{1}{\|P_n\|} P_n(x). \tag{1.20}$$

(a) Toon aan dat $T : L^2([-1, 1]) \to L^2([-1, 1])$ een welgedefiniëeerde operator is.

(b) Bereken de kern en het beeld van T

(c) Bereken de toegevoegde van T

(d) Is T compact?

1.2.5 Januari 2006

Stijn Verwulgen

1. Definieer

$$f(x) := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} \frac{(-1)^n}{n^3} \sin nx \tag{1.21}$$

en

$$A := \text{vct}\{\text{id}, x \mapsto x^3\} \tag{1.22}$$

(a) Toon aan dat $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ een welgedefiniëerde functie is.[4]

(b) Toon aan dat de restrictie van f tot $[-\pi, \pi]$ kwadratisch integreerbaar is.

(c) Bewijs[5] dat $d_{L^2(-\pi,\pi)}(f, A) = 0$.[6]
Hint: [7]

$$x^3 \underset{L^2(-\pi,\pi)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{12}{n^3} - \frac{2\pi^2}{n} \right) \sin nx \tag{1.23}$$

(d) Geef een methode[8] om $d_{L^2(-\pi,\pi)}(f, \text{vct}\{\text{id}\})$ te berekenen.

[4]Dus er wordt gevraagd of dit zin heeft, en of dit 1 punt definieert.
[5]Aantonen, niet bewijzen
[6]Dit is de Hilbertruimte-afstand.
[7]Dit is dus de Fourier-ontwikkeling
[8]Methode, dus de lastig uit te rekenen integralen (maar ze moeten wel doenbaar zijn) mag je laten staan.

2. Stel
$$L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{K} | f(x)e^{-x^2/2} \in L^2(\mathbb{R})\} \tag{1.24}$$
Men kan aantonen dat met bijhorend inproduct
$$(f|g) := \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}e^{-x^2}dx \tag{1.25}$$
deze ruimte een separabele Hilbertruimte is.
De n-de Hermite polynoom wordt gegeven door
$$H_n := (-1)^n e^{x^2} D^{(n)}(e^{-x^2}). \tag{1.26}$$
   (a) Toon aan dat $D^{(n)}(e^{-x^2}) = V_n(x)e^{-x^2}$, met $V_n(x)$ een veelterm van graad n.
   (b) Toon aan dat H_n een veelterm van graad n is.
   (c) Bereken de hoogstegraadscoëfficiënt van graad n.[9]
   (d) H_n is een (on)even functie als en slechts als n (on)even is. Waarom?
   (e) Toon aan dat $(H_n)_n$ een orthogonale rij is in $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R})$.
   (f) Bereken de norm van H_n.

3. Voor $x = (x_n)_n \in l^2$ definiëren we een rij Tx door
$$(Tx)_n := \begin{cases} \frac{1}{4}(x_n - x_{n+1}) & n \text{ even,} \\ 0 & n \text{ oneven.} \end{cases} \tag{1.27}$$
   (a) Toon aan dat $T : l^2 \to l^2$ een welgedefiniëerde lineare operator is.[10]
   (b) Bereken de toegevoegde van T.
   (c) Is T compact?
   (d) Berekende de Eigenwaarden met bijhorende Eigenvectoren.
   (e) Voor elke $x \in l^2$ geldt $\lim_{n\to\infty} T^n x = 0$. Waarom?

1.2.6 Januari 2008

Wannes Rosiers

1. We noteren c voor de deelruimte van l^2 van convergente rijen. Is het nemen van de limiet een operator, en zo ja wat is zijn norm? ($x_n \to x$ in K dan $T((x_n)_n) := x$)

2. Bereken de Fouriergetransformeerde van de functie
$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 - |x| & als |x| \leq 1, \\ 0 & anders \end{cases} \tag{1.28}$$

3. Beschouw $\mathbb{R}^2$ met de norm $||(x_1, x_2)|| = |x_1| + |x_2|$:
   (a) Bereken de afstand van de oorsprong tot de rechte $x_1 + x_2 = 1$.
   (b) Bepaal alle punten op de rechte die op deze afstand van de oorsprong liggen.
   (c) Laat zien dat deze norm niet afgeleid is uit een inproduct op R^2.

[9] dit volgt onmiddelijk uit 2a
[10] dus ligt het beeld in l^2, is T lineair, is T continu?

4. Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2$ met behulp van

$$f := \begin{cases} 0 & -\pi < x \leq 0 \\ x & 0 < x \leq \pi \end{cases} \tag{1.29}$$

5. Is in de pre-Hilbertruimte $H := C([0,1], \mathbb{R})$ met inproduct $(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ de deelruimte $V := \{f \in H | f(0) = 0\}$ volledig?

6. Definieer $L^2_{e^{-x}}(\mathbb{R}^+)$ analoog aan $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R}^+)$, dit is een separabele Hilbertruimte. Definieer nu volgende functies:

$$\forall n \in \mathbb{N} : L_n := (-1)^n e^x D^{(n)}(x^n e^{-x}) \tag{1.30}$$

(de familie $(L_n)_n$ van hierboven noemen we de *Laguerre polynomen*).

   (a) Toon aan dat L_n een polynoom is van graad n.
   (b) Toon aan: n is een even getal als en slechts als L_n een even functie is.
   (c) Toon aan dat $(L_n)_n$ orthogonaal is in $L^2_{e^{-x}}(\mathbb{R}^+)$
   (d) Bereken $(L_n|L_n)$

1.2.7 September 2008

Wannes Rosiers

1. Men kan aantonen dat

$$(f|g) := \int_{-1}^{1} \frac{f(x)\overline{g(x)}}{\sqrt{1-x^2}} dx \tag{1.31}$$

een hermitische vorm definiëert op de ruimte

$$L^T := \left\{ f : [-1,1] \to \mathbb{C} | \int_{-1}^{1} \frac{|f(x)|^2}{\sqrt{1-x^2}} dx < \infty \right\} \tag{1.32}$$

Definieer nu volgende functies

$$\forall \in \mathbb{N} : T_n(x) := cos(n.arccos(x)), x \in [-1,1]. \tag{1.33}$$

(de familie $T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ noemen we *Tchebychef polynomen*)

   (a) Bewijs dat $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$cos(n\theta) = \sum_{m=0}^{[n/2]} \binom{n}{2m} (-1)^m (1 - cos^2\theta)^m cos^{n-2m}\theta. \tag{1.34}$$

   (b) Toon aan dat, voor elke $n \in \mathbb{N}$, T_n een polynoom is van graad n.
   (c) Ga na dat $(T_n)_n$ orthogonaal is in L^T en bereken $||T_n||$.
   (d) Bewijs dat de polynomen $(T_n)_n$ aan volgende recursiebetrekking voldoen:

$$T_{n+1}(x) + T_{n-1}(x) = 2xT_n(x) \tag{1.35}$$

   (e) Bereken $T_n(x)$ voor $n \in \{0,1,2,3,4,5\}$ Je mag gebruiken dat de familie$(T_n)_n$ totaal is in L^T

(f) Stel

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} : x \mapsto x^3, F := \overline{vct(\{T_n | n \neq 3\})}, \tag{1.36}$$

bereken dan $d(f, F)$ in L^T

2. Neem $\alpha \notin Z$ en toon aan dat

$$cos(\alpha\pi) = \frac{sin(\alpha\pi)}{\pi} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 1^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 2^2} + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - 3^2} + \ldots + \frac{2\alpha}{\alpha^2 - n^2} \right) \tag{1.37}$$

3. Stel $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ een rij van 0 verschillende reële getallen die naar 1 convergeren. Definiëer $T : l^2 \to l^2 x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto T(X)$ door

$$(T(x))_n := \begin{cases} \alpha_n x_n & n \quad even \\ x_{n-1} & n \quad oneven \end{cases} \tag{1.38}$$

(a) Toon aan dat dit een welgedefiniëerde operator is.

(b) Bepaal $||T||$

4. Toon aan dat de afbeelding $f : [0, 1] \to L^2(0, 1) : t \mapsto f(t)$, met

$$\forall x \in [0, 1] : f(t)(x) := \begin{cases} 1, x \leq t \\ 0, x > t \end{cases} \tag{1.39}$$

continu is. Toon ook aan dat, voor elke $a, b, c, d \in [0, 1]$ met $a \leq b \leq c \leq d$,

$$(f(a) - f(b)) \perp (f(c) - f(d)) \tag{1.40}$$

5. Bereken de fouriergetransformeerde van een eindige consinus golf. Zij $\alpha > 0$ en $\omega > 0$, bekijk:

$$f(t) := \begin{cases} cos(\omega t) & |t| \leq \alpha \\ 0 & |t| > \alpha \end{cases} \tag{1.41}$$

1.2.8 Januari 2009

Wannes Rosiers

1. We strarten met volgende ruimte:

$$F := \{f : [0, 1] \to \mathbb{R} | f ctu, \exists\delta \in]0, 1], \forall x \in [0, 1[: f(x) = 0\} \text{ met de supremumnorm.}$$

(a) Is deze ruimte een Banachruimte? Zo nee, maak er een Banachruimte ($\bar{F}$) van.

(b) Is je oorspronkelijke ruimte een preHilbert- of Hilbertruimte? Indien je $\bar{F}$ gedefinieerd hebt, is deze ruimte een preHilbert- of Hilbertruimte? Zo nee, maak er een Hilbertruimte van.

(c) Is F, of indien gedefinieerd $\bar{F}$, met 2-norm (en inproduct $(f|g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ een prëHilbert- of Hilbertruimte?

2. Zijn volgende afbeeldingen operatoren, en zo ja wat is hun norm?

(a) $A : ([0, 1]) \to C([0, 1]), Af(t) = t^2 f(t) + tf(t^2)$ met op beeld en domein de supremumnorm.

(b) $T : l^2 \to l^2 : (Tx)_n = \frac{1}{n+1} + \sum_{k=0}^{n} \frac{x_k}{k+1}$

(c) $A : L^2 \to L^2 : Af(x) := x \int_{-1}^{1} f(t)dt$

3. Gebruik de definitie en alles wat je al weet over Legendre polynomen uit de cursus.
   (a) Toon aan dat dit een totale familie (orthogonale) polynomen is.
   (b) Schrijf de afgeleide van de polynoom P_n in functie van andere Legendre polynomen. (hint: denk eerst goed na welke polynomen je allemaal nodig hebt)
   (c) De Legendre polynomen zijn een gestandaardiseerde oplossing van de differentiaalvergelijking:
   $$\frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{d}{dx}P(x)] + n(n+1)P(x) = 0$$
   Toch vonden we in de les dat ze niet genormeerd zijn, van waar zou dan de naam gestandariseerd komen? (We zoeken enkel een eenvoudige eigenschap van deze polynomen en geen stress: deze vraag staat niet op veel punten.)
4. Toon volgende gelijkheid aan:
   $$\frac{\pi^3}{32} = \sum n = 1^\infty \frac{1}{(2n-1)^3}(-1)^{n+1}$$
   Door gebruik te maken van:
   $$f(x) = \frac{1}{12}(\pi^2 x - x^3)$$
5. Bereken de fouriergetransformeerde van de functie $cos(\alpha x^2)$ waarbij α een positief getal is. (hint: gebruik $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ en soortgelijke formules. Maak je rekenwerk eenvoudiger door $i = \frac{-1}{i}$ te gebruiken en maak een schets indien je $\sqrt{i}$ niet kent.)

Hoofdstuk 2

Algemene Fysica 4: Relativiteit en Elementaire Deeltjes

2.1 De Cursus, het vak, het examen

Deze cursus bestond tot nu toe uit twee delen, relativiteitstheorie en elementaire-deeltjesfysica. Sinds dit jaar is dit echter opgesplitst, dus zullen enkel de vragen die toepassing hebben op relativiteit van toepassing zijn.

Het oefeningenexamen is schriftelijk en open boek. Wanneer je hiermee klaar bent, ga je naar Prof. Van Mechelen om je theorie-examen af te leggen. Je krijgt dan je vragen en mag je voorbereiden terwijl de vorige student zijn/haar examen aflegt. Hij overloopt ook heel kort je oefeningenexamen.

2.2 Theorie

2.2.1 Juni 2006

1. Ξ^+ (ccd) en Ξ^{++} (ccu)-deeltjes zijn in SELEX-experiment gevonden. Hoe kun je deze deeltjes herkennen?
2. Wat voor curve krijg je bij uitzetting van aantal ifv energie? Waarom zulke curve? Welke drie dingen kan je uit deze curve afleiden?
3. Geef een mogelijk vervalschema voor een van deze twee deeltjes
4. Hier tekende Prof. Van Mechelen verschillende lagen van een detector (eerst een sporenkamer, dan een em-detector, dan een hadronische detector en uiteindelijk een muondetector), en je diende te tekenen waar je wat ziet.

2.2.2 September 2008

Hier moesten de studenten een recent artikel over bosonen bespreken op een manier waaruit de prof kon afleiden dat je de stof beheerst.

2.2.3 Juni 2009

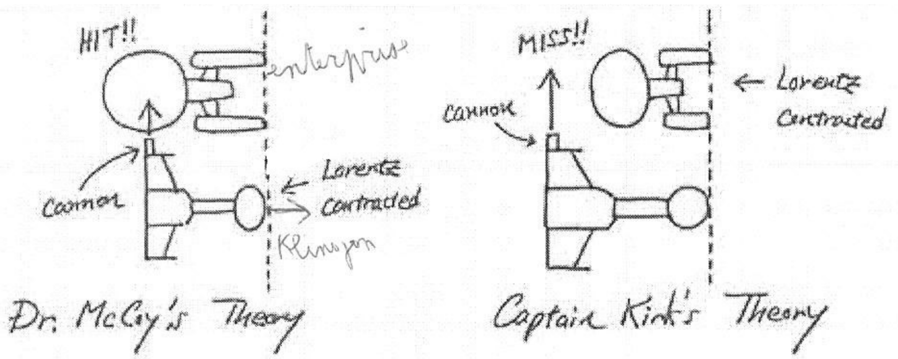
De theorie was dit jaar onvoorbereid. Men ging bij Prof. Van Mechelen zitten en kreeg meteen de vraag, er werd doorgevraagd tot je niet meer kon, of alle vragen had opgelost. Men moest de grafiek van de resonantiepiek (deze staat ook in de cursus) van π^+p vergelijken met deze van π^-p. Hierover werden vragen gesteld zoals: Hoe komt het dat er een hoogteverschil is tussen de pieken van beide gevallen? Kan je raden welk deeltje er gevormd zal worden en waarom? Reken het Isospinproduct uit.

2.3 Oefeningen

2.3.1 Juni 2006

1. Een Klingon Battle Cruiser is uitgerust met een disrupter-kanon. Dit kanon is opgesteld aan de achterkant van het schip en kan enkel vuren in een richting loodrecht op de bewegingsrichting van het ruimteschip. De tactiek van de Klingons is om het kanon af te vuren wanneer het een vijandig schip voorbij vliegt op het moment dat de neus van de Battle Cruiser de staart van het vijandig schip passeert. Voor de verdere discussie nemen we aan dat de transversale afstand tussen beide ruimteschepen en de tijd dat de disruptor-beam nodig heeft om tot bij de vijand te geraken kunnen verwaarloosd worden.

   De Enterprise heeft exact dezelfde lengte als de Battle Cruiser als beide schepen in rust zijn. De Klingons staan op het punt om de Enterprise aan te vallen en Dr. McCoy is ongerust omdat wegens Lorentz-contractie de Battle Cruiser korter is dan de Enterprise, zodat de Enterprise zeker geraakt zal worden. Captain Kirk beweert echter dat het de Enterprise is die korter wordt door Lorentz-contractie en dat de Klingons bijgevolg zeker zullen missen.

   Kirk: It's them that's doing the shooting, so it's their frame of reference that matters.

   McCoy: Damn it, Jim! We're the ones getting shot at. It's our frame of reference that matters!

   Natuurlijk is het Mr. Spock die het probleem koelbloedig oplost. Hij tekent een ruimte-tijd diagram en legt uit aan Capt. Kirk en Dr. McCoy wie van hen gelijk heeft.

   McCoy: Spock! Are you out of your Vulcan mind? We're about to die! And you find nothing better to do than to draw pictures?

   Spock: Doctor, I assure you that I am doing the best I can under the circumstance.

   Hoe ziet het ruimte-tijd diagram van Mr. Spock er uit? Wordt de Enterprise geraakt of niet? Leg uit waarom. [4p]

2. Een foton afkomstig uit een synchrotron-stralingsbron botst met een atomair elektron in een vast doelwit. Daarbij wordt een K^- meson geproduceerd via de reactie

$$\gamma + e^- \leftarrow K^- + \nu_e. \tag{2.1}$$

Neem aan dat het neutrino een zeer kleine, maar eindige massa heeft.

(a) Teken een Feynman-diagram voor deze reactie. [1p]

(b) Wat is de minimale energie die het foton moet hebben om deze reactie mogelijk te maken? [1p]

(c) Wat is de maximale hoek tussen het uitgaande neutrino en de richting van het inkomende foton bij deze minimale energie? [2p]

3. In een deuterium-atoom is één van de elektronen vervangen door een π^- pseudoscalair meson. Het π^- deeltje bevindt zich in de orbitaal met de laagste energie en wordt plots ingevangen door de deuterium-kern:

$$\pi^- + d \leftarrow n + n. \tag{2.2}$$

(Het deuteron is een gebonden toestand van een proton en een neutron met $L = 0$ en $S = 1$.)

(a) Wat is het ruimtelijk en spin draaimoment van het neutron paar? [2p]

(b) Wat is de waarschijnlijkheid dat beide neutronen een spin hebben die tegengesteld is aan die van het deuteron? [2p]

2.3.2 Juni 2008

Groep 1

1. Een zaklamp bevindt zich in rust in de oorsprong van een stelsel S' en straalt een lichtstraal uit langs de y'-as (m.a.w. $v'_x = 0$ en $v'_y = c$). Stel dat het S'-stelsel met een snelheid $V = 0.707c$ beweegt langs de x-as van een stelsel S (de ruimte-assen van S en S' zijn evenwijdig)

(a) Welke hoek heeft de lichtstraal ten opzichte van de x-as in het S-stelsel?

(b) Wat is de snelheid van de lichtstraal in het S-stelsel?

2. Een zgn. "time-of-flight" detector kan gebruikt worden om verschillende soorten van deeltjes te onderscheiden. Deze detector meet de reistijd van een deeltje over een vaste afstand. Indien de impuls van het deeltje gekend is, door metingen met andere subdetectoren, kan hieruit de massa van het deeltje bepaald worden.

(a) Leid een uitdrukking af voor de massa van het deeltje als functie van de "time-of-flight"-meting en de impuls van het deeltje

(b) Bereken het tijdsverschil dat je zou meten tussen deeltjes met verschillende massa m_1 en m_2, maar met dezelfde impuls $|\vec{p}|$(gebruik een reeksontwikkeling voor kleine $m/|\vec{p}|$).

(c) Wat is de maximale impuls waarbij elektronen, muonen, geladen pionenen, geladen kaonen en protonen kunnen onderscheiden worden tot op 2σ, als je een tijdsresolutie aanneemt van 200ps en een vliegafstand van 2m?

3. Beschouw een twee-deeltjes-naar-twee-deeltjes reactie, $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$. Vermits een inkomend deeltje overeenkomt met een uitgaand antideeltje (kruisingssymmetrie), is deze reactie nauw verwant met reacties als $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ en $1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3$. Behoud van vierimpuls in het eerste geval bvb. wordt dan $p_1 - p_3 = -p_2 + p_4$. Deze symmetrie eigenschap laat toe om verschillende overgangswaarschijnlijkheden te berekenen via een eenvoudige substitutie van vierimpulsen ($p_3 \leftrightarrow -p_2$). Beschouw als concreet voorbeeld de reactie $e^-e^+ \rightarrow \mu^-\mu^+$ bij hoge energie.

(a) Bereken de differentiële werkzame doorsnede $d\sigma/d\Omega(e^-e^+ \to \mu^-\mu^+)$ als functie van de verstrooiingshoek $\theta = \theta_{13}$, de hoek tussen de impulsen van deeltje 1 en deeltje 3, met als gegeven dat $|M_{fi}|^2 = 2e^4 \frac{t^2+u^2}{s^2}$. Druk je resultaat ook uit als functie van θ_{14}.

(b) Gebruik makend van kruisingssymmetrie, leid een uitdrukking af voor de differentiële werzame doorsnede $d\sigma/d\Omega(e^-\mu^+ \to e^-\mu^+)$ als functie van de hoger gedefinieerde verstrooiingshoek.

(c) Herhaal de oefening voor $e^-\mu^- \to e^-\mu^-$

4. Bepaal welke van de onverstaande reacties toegelaten of verboden is. Indien de reactie toegelaten is, specifieer via welke wisselwerking ze plaats heeft. Indien de reactie verboden is, leg uit waarom.

$$\begin{array}{lcl} \Delta^{++} & \to & p\pi^+ \\ p & \to & \pi^0 e^+ \nu_e \\ \nu_\mu e^- & \to & \nu_\mu e^- \\ K^+ & \to & \pi^+\pi^0 \\ \pi^+ & \to & e^+\nu_\mu \\ \pi^0 & \to & \gamma\gamma \end{array} \tag{2.3}$$

groep 2

1. In een geleidende draad in referentiestelsel S heerst een stroomsterkte van 10A. De draad zelf is elektrisch neutraal. De elektrische stroom is het gevolg van positieve ladingsdragers die met een snelheid van $0.8c$ naar rechts bewegen en negatieve dragers in rust

   (a) Wat is de elektrische lading per lengte-eenheid (in C/m) in een referentiestelsel S' dat met snelheid $0.8c$ neweeft o, de +x-richting?

   (b) Wat is de stroomsterkte in het S'-stelsel?

2. Een deeltje in een cirkelvormige versneller straalt synchrotronlicht uit. Het vermogen van deze straling wordt gegeven door:

$$P_S = \frac{2}{3}\frac{E^4}{m^4R^2}\alpha \tag{2.4}$$

   Waarbij E en m de energie en massa zijn van het deeltje en R de kromtestraal van de versneller ($\beta \approx 1$)

   (a) Hoeveel energie wordt per omwenteling uitgestraald?

   (b) Bereken het energieverlies te wijten aan synchrotronstraling bij de LEP e^+e^--versneller wanneer die aangedreven werd bij de $Z - boson$ resonantie-energie enerzijds en bij de maximale bundelenergoie van $105 GeV$ anderzijds. De straal van de LEP-versneller is 3km.

   (c) Toon aan dat dit energieverlies in het geval van de LHC (een pp versneller met 7 TeV) geen probleem vormt

   (d) de LEP versneller gebruikte vier pakketjes met elektronen en vier met positronen met elk 4.10^11 deeltjes. (De omtrek is 27 km) Welk elektrisch vermogen was er nodig om de LEP aan te drijven, rekening houdend met een efficientie van 50 %?

3. Een $\Upsilon - meson$ met massa $10.58 GeV/c^2$ wordt in rust geproduceerd bij de reactie $e^-e^+ \to \Upsilon \to B^+B^-$. De massa en levensduur van een $B - meson$ zij resp $5.28 GeV/c^2$ en $1.5 ps$

(a) Wat is de gemiddelde afgelegde weg van de B-mesonen in het laboratorium?

(b) Om deze afstand te vergorten, kan met het $\Upsilon - meson$ een impuls geven in het laboratorium door de e^- en e^+ bundels een verschillend energie te geven. Welke impuls hebben de $B-mesonen$ nodig om een gemiddelde afgelegde weg te bereiken van 0.2 mm?

(c) Wat is de energie van het $\Upsilon - meson$ die hiervoor nodig is?

(d) Welke energieen hebben de elektron en positron bundel nodig om een $\Upsilon - meson$ met deze energie te produceren?

Om de laatste drie vragen te vereenvoudigen, mag je aannemne dat de massa van de $B - meson$ $5.29GeV/c^2$ is, dit zal het eindresultaat niet significant veranderen.

4. TEken het laagste-orde Feynman diagram voor de volgende interacties:

   (a) $t \to W^+b$

   (b) $\Gamma^0 \to p\pi^-$

   (c) $e^+e^- \to W^+W^-$

   (d) $D^0 \to \bar{D}^0$

   (e) $p\bar{p} \to t\bar{t}X$

2.3.3 September 2008

1. Veronderstel dat er een erg interessante planeet werd ontdekt bij een ster die 50 lichtjaar van de aarde verwijderd is. In het jaar 2050 besluit de ESA om een bemande expeditie te sturen om deze planeet te onderzoeken. Men komt overeen dat de reistijd voor de ruimtevaarders zelf 20 jaar moet bedragen.

   (a) Welke snelheid moet het ruimteschip hebben? (stel constante snelheid en verwaarloos de versnelling en vertraging bij vertrek en aankomst) Hoe lang zijn ze onderweg volgens de aarde?

   (b) Het ruimteschip beschikt over een radiozender met frequentie 90 MHz. Op welke frequentie moet de ESA afstemmen om radioboodschappen van de bemanning te ontvangen?

   (c) Net wanneer ze halfweg zijn, wordt de bemanning ongeduldig en besluiten een sonde tegen 0.99c t.o.v. het schip te sturen. Hoeveel jaar zijn er verlopen sinds zijn vertrek op de aarde volgens de computer aan boord van de sonde wanneer deze aankomt

2. Een bundel π^+ mesonen met kinetische energie T produceert μ^+ leptonen die terugkeren via de reactie $\pi^+ \to \mu^+ + \nu_\mu$. Voor welk interval van kinetische energie T is dit mogelijk?

3. De LHC zal, wanneer hij op volle kracht werkt, een luminositeit halen van $10^{34}cm^{-2}s^{-1}$ bij een massamiddelpuntsenergie van 14 TeV. Stel dat er een tot nu toe onbekend kort levend deeltje X^{++} zou bestaan met spin nul en een massa die precies overeenkomt met de massamiddelpuntsenergie van de LHC en waardoor de reactie $p+p \to X^{++} \to p+p$ mogelijk wordt. Berekn het aantal dergelijke deeltjes dat er per tijdseenheid bij de LHC geproduceerd zou worden.

4. Het η meson heeft spin 0. Wegens pariteitsbehoud kan het niet in twee pionen vervallen. Wat zegt dit over de intrinsieke pariteit van het η meson? Het verval $\eta \to \pi^+\pi^-\pi^0$ is wel mogelijk. Leid hieruit af wat de intrinsieke pariteit van een pion is.

2.3.4 Juni 2009

Groep 1

1. 2 hardlopers lopen langs de richting van de x-as. Ze vertrekken op een afstand D van elkaar, de zwakste krijgt een voorsprong. Wanneer hij op tijdstip T is, wordt het startschot voor de tweede gegeven (in ruststelsel S).
   (a) In welk interval van tijdsverschillen bestaat er een stelsel S' waarin de zwakste geen voorsprong heeft?
   (b) Geef de Lorentztransformatie.
2. Een bundel e^- elektronen wordt afgeschoten op een zware atoomkern in rust. ($E_e >> m_e$).
   (a) Wat is de maximale vierimpulsoverdracht?
   (b) Wat is de energieoverdracht en de drie-impulsoverdracht hiervoor?
3. Maak een tabel met daarin J, L, S, P en C voor de begin- en eindtoestand van $pp^- \to \pi^+\pi^-$ vorming t.e.m. $^3D_3$ voor de begintoestand. Welke overgangen zijn er mogelijk (leid dit af uit de tabel)?
4. Welke reacties zijn er mogelijk, waarom wel/niet?
   (a) $p + p^+ \to \gamma$
   (b) $\pi^0 \to \gamma\gamma\gamma$
   (c) $\pi^+ \to \Delta^0\Delta^0$
   (d) $p \to e^+\bar{\mu}_e$

Groep 2

1. Een ruimteschip met snelheid $v = 0.8c$ passeert de aarde om precies 12u. Waarnemers op aarde en op het ruimteschip zijn het eens dat het precies middag is. Beantwoord de volgende vragen en verduidelijk telkens je antwoord met een ruimte-tijd diagram in het stelsel van de aarde en het stelsel van het ruimteschip.
   (a) Om 12.30u volgens een klok in het ruimteschip, vliegt het schip langs een interplanair ruimtestation dat stilstaat t.o.v. de aarde, en waar de klokken gelijk lopen met de klokken op aarde. Hoe laat is het dan volgens de klokken in het ruimtestation?
   (b) Hoe ver is het ruimtestation verwijderd van de aarde volgens het referentiestelsel van de aarde?
   (c) Om 12.30u volgens de klok van het ruimteschip, rapporteert de kapitein via de radio aan zijn basis op aarde. Wanneer wordt dat signaal op aarde ontvangen volgens de klokken op aarde?
   (d) De basis op aarde antwoordt onmiddelijk. Wanneer bereikt het antwoord het ruimteschip volgens de klokken van het schip?
2. Fotonen afkomstig van een argon-laser ($\lambda = 514$nm) botsen frontaal met elektronen afkomstig van de HERA-versneller ($E_e = 26.67$ GeV).
   (a) Wat is de energie van het foton in het ruiststelsel van het elektron?

(b) Beschouw de verstrooiing van het foton onder een hoek van 90 en 180 in het ruststelsel van het elektron. Wat is de energie van het foton in elk van deze gevallen? Hoe groot zijn de verstrooiingshoeken en energieën in het laboratoriumstelsel?

(c) Hoe goed moet de ruimtelijke resolutie van een calorimeter zijn, indien die 64m van het interactiepunt verwijderd is, opdat hij deze fotonen zou kunnen onderscheiden?

3. Het Δ^0 baryon vervalt haast uitsluitend via $\Delta^0 \to p\pi^-$ en $\Delta^0 \to n\pi^0$. Bepaal de verhouding in werkzame doorsnede voor deze twee vervalkanalen.

4. Bespreek de vervalswijzen van het Ω^- hyperon die toegelaten zijn door behoudswetten en toon aan dat enkel vervallen via de zwakke wisselwerking mogelijk zijn.

2.3.5 Juni 2010

Groep 1

1. Een pulsar stuurt radiogolven uit met een frequentie van 1 Hz. Welke frequentie zou je observeren indien je in een ruimteschip zit dat met een snelheid 0.9c beweegt

   (a) naar de pulsar toe;
   (b) van de pulsar weg;
   (c) in een richting loodrecht op de pulsar.

2. Een kaon vervalt naar een paar pionen volgens $K^0 \to \pi^+\pi^-$. Stel dat het π^+ deeltje een snelheid 0.8c en het π^- deeltje een snelheid 0.9c heeft.

   (a) Wat was de snelheid van het kaon voor het verval?
   (b) In welke richting bewegen de pionen na het verval?

3. De LHC heeft een omtrek van 27 km en zal protonen laten botsen bij een massamiddelpuntsenergie $\sqrt{s} = 14TeV$, met 2808 deeltjespakketjes en $10^1 1$ per pakketje. De luminositeit zal $10^3 4cm^{-2}s^{-1}$ bedragen.

   (a) Wat is de stroomsterkte van de bundels in de LHC?
   (b) Wat is de totale energie van de bundels in de LHC?
   (c) Wat is de effectieve doorsnede van de bundels in de LHC?
   (d) Stel dat de werkzame doorsnede voor Higgs productie voor $m_H = 120GeV$ gelijk is aan 2 pb en dat de detectie-efficiëntie voor Higgs bosonen 2% bedraagt. Hoeveel Higgs deeltjes zouden we dan kunnen waarnemen na 1 maand gegevens verzamelen?

Extra

1. Beschouw volgende interacties:

   - $\pi^- + p \to \pi^0 + n$,
   - $\pi^0 \to \gamma + \gamma + \gamma$,
   - $\pi^+ \to \mu^+ + \bar{\nu}_\mu$,
   - $p + \bar{p} \to \Lambda^0 + \Lambda^0$,
   - $p + \bar{p} \to \gamma$.

   Geef aan of de reacties al dan niet toegelaten zijn. Indien niet, vermeld waarom niet en indien wel, vermeld via welke fundamentele wisselwerking de reactie plaatsheeft.

2. Het Δ^0 baryon vervalt haast uitsluitend via $\Delta^0 \to p\pi^-$ en $\Delta^0 \to n\pi^0$. Bepaal de verhouding in werkzame doorsnede voor deze twee vervalkanalen.

September 2010

1. Een haas en een schildpad houden een loopwedstrijd. Ze starten op hetzelfde punt en lopen in dezelfde richting, maar om de schildpad een eerlijke kans te geven moet hij slechts half de afstand lopen. De wedstrijd wordt gelopen en een scheidsrechter, die stilstaat tov de grond ziet beide dieren gelijktijdig aankomen bij hun respectievelijke eindstreep. Schets deze situatie in een ruimte-tijddiagram. Wat is het resultaat van de wedtrijd volgens de haas en de schildpad?

2. Twee klokken, A en B, bewegen met een constante snelheid. Op een gegeven ogenblik kruisen ze elkaar en dan worden de klokken stilgezet. Een T_A later, gemeten volgens klok A, vertrekt er een lichtsignaal van A naar B. Dit signaal komt aan bij klok B op een tijdstip T_B gemeten door klok B. Wat is de relatieve snelheid van de klokken?

3. Een ultrarelativistisch ($\beta \approx 1$) elektron zendt een foton uit.

   (a) Leidt een formule af voor het verband tussen de hoek θ tussen het foton en het inkomend elektron in het lab en de hoek $\theta*$ tussen het foton en de richting waarin het lab beweegt in het ruststelsel van het elektron.

   (b) Toon aan dat voor een isotrope verdeling van de hoek $\theta*$ de helft van alle fotonen in het lab binnen een kegel met openingshoek $1/\gamma \approx \sqrt{2(1-\beta)}$ rond de richting van het elektron worden uitgestraald.

4. Een doelwit bestaande uit vloeibaar waterstof, met een volume van 125 cm^3 en dichtheid $0.071 g/cm^3$ wordt bestookt door een bundel mono-energetische negatieve pionen met een flux van $2x10^7 m^{-2}s^{-1}$. De reactie $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ wordt geobserveerd door de detectie van fotonen afkomstig van het verval van het neutraal pion. Bereken het aantal fotonen dat per seconde wordt uitgezonden door het doelwit indien de werkzame doorsnede voor bovenstaand proces 40 mb bedraagt.

Hoofdstuk 3

Veldentheorie

3.1 Het vak, het examen

De theorievragen zijn al zolang we weten dezelfde: vertel alles over Greense functies dat je weet, ofwel alles over Fouriertransformaties. Meestal krijgt de ene groep de eerste vraag, en de andere groep de tweede. Het kan echter ook zijn, zoals vorig jaar, dat beide groepen bv. Greense functies als vraag krijgen. Deze vragen worden mondeling besproken na een schriftelijke voorbereiding, waarbij er dan enkele bijvragen gesteld worden. Sinds dit jaar wordt dit vak echter niet meer in 3de bachelor, maar in 2de bachelor gegeven mits aanpassingen van de inhoud van de cursus. Het kan dus zijn dat sommige vragen hieronder niet meer relevant zijn.

3.2 Oefeningen

3.2.1 Januari 2007

1. Beschouw de volgende vergelijking:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 . \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.1}$$

   met randvoorwaarden:

   $$u(x, 0) = 0 \tag{3.2}$$

   $$\frac{\partial u}{\partial t} = -2xe^{-x^2} = \frac{de^{-x^2}}{dx} \tag{3.3}$$

   Vind de oplossing $u = u(x, t)$ door de vergelijking en randvoorwaarden naar het Fourierdomein te transformeren.

2. Beschouw een diffusieproces in een vloeistof. Het proces wordt gekarakteriseerd door een diffusieconstante k en loopt binnen een sfeer met straal a. De rand van de sfeer wordt constant op concentratie $c = 0$ gehouden. Op $t = 0$ is er een concentratie $c = c_0$ in een bol met straal b gecentreerd in de oorsprong van de sfeer, en 0 overal anders.

   - Vind een uitdrukking voor de c binnen de sfeer in functie van ruimte en tijd.
   - Reken expliciet na dat de oplossingen van het R-probleem orthogonaal zijn
   - Schets het verloop van c in functie van de tijd, wat is $c(t \to \infty)$?

3. Beschouw twee concentrische ringen (straal a en b). De binnenste heeft als totale lading -q en de buitenste q. Bereken (benaderend) de potenstiaal van het geheel.
   Tip: Schrijf de landingsdichtheid in cilindercoördinaten en gebruik de quadrupoolbenadering.

3.2.2 Januari 2008

1. Bereken de Fourier getransformeerde van volgende 2-dimensionale functie

$$f(x,y) = e^{\frac{-(x^2+y^2)}{a^2}} \tag{3.4}$$

2. Als de functie $f = f(x)$ reëel is, bewijs dan:
   - $\hat{f}(\omega)$ is hermitisch
   - $P_f(\omega) \equiv \hat{f}\hat{f}^*$ is hermitisch rond 0.

3. Beschouw een holle kubische geleider (zijde a). Het bovenvlak en 1 zijvlak staan op constante potentiaal V. De andere zijden zijn geaard. Vind een uitdrukking voor de potentiaal binnen de kubus (in functie van V en a).

4. beschouw de ladingsverdeling gegeven in bolcoördinaten:

$$\rho(\vec{r}) = \frac{-e}{64\pi}.e^{-r}r^2\sin^2\theta \tag{3.5}$$

   Bereken de totale lading Q, dipoolmoment $\vec{d}$ en het elektrisch veld $\vec{E}$ van deze ladingsverdeling op volgende manier:
   - gebruik: $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt = \Gamma(x) = (x-1)!$
   - schrijf ρ in functie van bolfuncties
   - bewijs dat slechts 2 multipoolmomenten verschillen van 0
   - bereken de potentiaal ϕ
   - bereken het elektrisch veld $\vec{E}$

3.2.3 Augustus 2008

1. Beschouw een cirkelvormig membraan (straal 1) vastgehouden aan de rand. Bespreek de mogelijke trillingswijze als de beginsnelheid nul is en het beginprofiel gegeven.
   - Welke zijn de eigenwaarde- en restproblemen,
   - Schrijf de oplossing Ψ in reeksvorm
   - geef uitdrukking voor de ontwikkelingscoëfficiënten.

2. Berekn benaderend (in twee dimensies) de potentiaal van een vlakke ellipsvormige geleider met dikte d. De ellips heeft halve assen a en b (buitenafmetingen) en homogene ladingsdichtheid ρ.

3.2.4 Januari 2009

Groep A

1. Zoek de oplossingen van de onderstaande differentiaalvergelijking met de methode van Fröbenius.

$$xy'' + 2y' + xy = 0, y = y(x)$$

2. Bepaal de potentiaal binnen en buiten een bol (straal a), waarvan het oppervlak een potentiaal $sin^2\theta cos2\phi$ heeft.
   - Welke zijn de eigenwaarde- en restproblemen?
   - Schrijf de oplossing $\Psi(r, \theta, \phi)$ in reeksvorm.
   - Geef de uitdrukking voor de ontwikkelingscoëfficiënten.

3. Beschouw 2 concentrische ringen (straal a en b). De binnenste heeft als totale lading $-q$, de buitenste q. Veronderstel een homogene ladingsverdeling.
   - Bepaal mono-, di- en quadripoolmoment.
   - Bepaal de potentiaal ϕ.
   - Bepaal het elektrisch veld $\vec{E}$.

Groep B

1. Zoek de oplossingen van de onderstaande differentiaalvergelijking met de methode van Fröbenius.

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0, y = y(x)$$

2. Bepaal de potentiaal tussen twee concentrische sferen met straal a en b ($a < b$). De potentiaal op de sferen is gegeven door:

$$\frac{\partial\Psi(a,\theta,\phi)}{\partial r} = W$$
$$\Psi(b, \theta, \phi) = Tcos\theta$$

   - Welke zijn de eigenwaarde- en restproblemen?
   - Schrijf de oplossing $\Psi(r, \theta, \phi)$ in reeksvorm.
   - Geef de uitdrukking voor de ontwikkelingscoëfficiënten.

3. Beschouw een ring met straal a. De bovenste helft heeft als totale lading $+q$, de onderste $-q$. Veronderstel een homogene ladingsverdeling.
   - Bepaal mono-, di- en quadripoolmoment.
   - Bepaal de potentiaal ϕ.

3.2.5 Januari 2010

1. Zoek de oplossing van de onderstaande differentiaalvergelijking met de methode van Fröbenius.

$$x(xy')' - m^2y = 0, y = y(x)$$

2. Beschouw een bol met straal a, waarvan het oppervlak de potentiaal $\cos(\theta)[\sin(\theta)\cos(\varphi) + 1]$ heeft.
   (a) Bepaal de potentiaal binnen en buiten de bol.
   (b) Als er zich twee puntladingen met elk een lading q binnen de bol bevinden, op coördinaat $(\rho, \theta, \varphi) = (b_1, 0, 0)$ en $(b_2, 0, 0)$, wat is dan de elektrische interactie tussen deze puntladingen en de bol?

3. Beschouw 2 concentrische ringen (straal a en b). De binnenste heeft als totale lading $-q$, de buitenste q. Veronderstel een homogene ladingsdichtheid.
   (a) Bepaal momo-, di- en quadrupoolmoment.
   (b) Bepaal de potentiaal φ.
   (c) Bepaal het elektrisch veld $\vec{E}$.

Hoofdstuk 4

Elektronica

4.1 De cursus, het vak, het examen

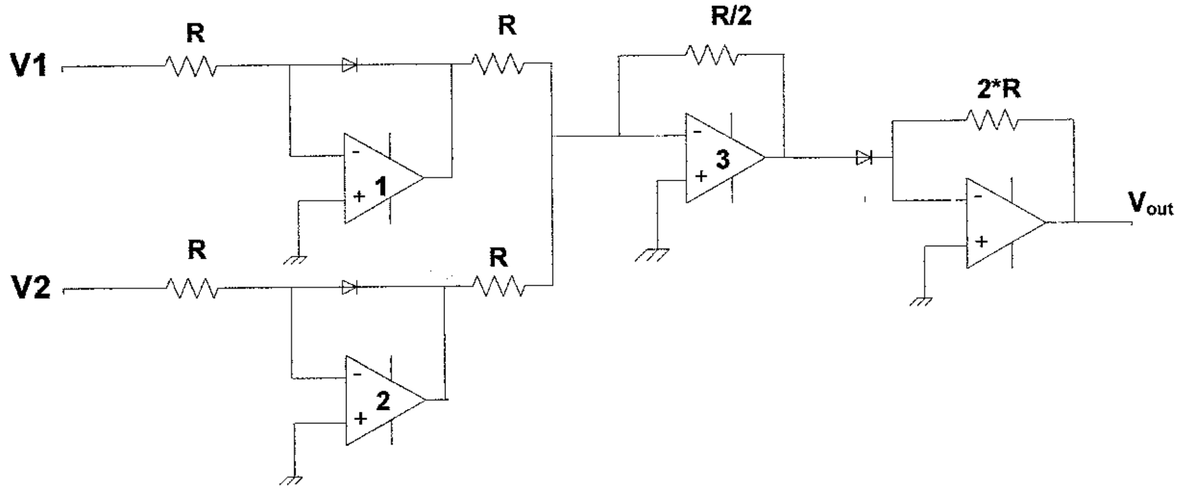
Dit vak bestaat uit twee delen. Het praktijk-gedeelte, waarbij schakelingen op een breadboard moeten gemaakt worden, en hiervan verslagen afgemaakt. Ondertussen hebben jullie die waarschijnlijk al afgewerkt. Het theoriegedeelte is erop toegespitst om enkele schakelingen analytisch te kunnen verwerken. Dit zijn dan ook de examenvragen.

Het examen gebeurt mondeling met schriftelijke voorbereiding: wanneer je klaar bent ga je vooraan naar Prof. S. Peeters, om mondelinge toelichting te geven.

4.2 De examenvragen

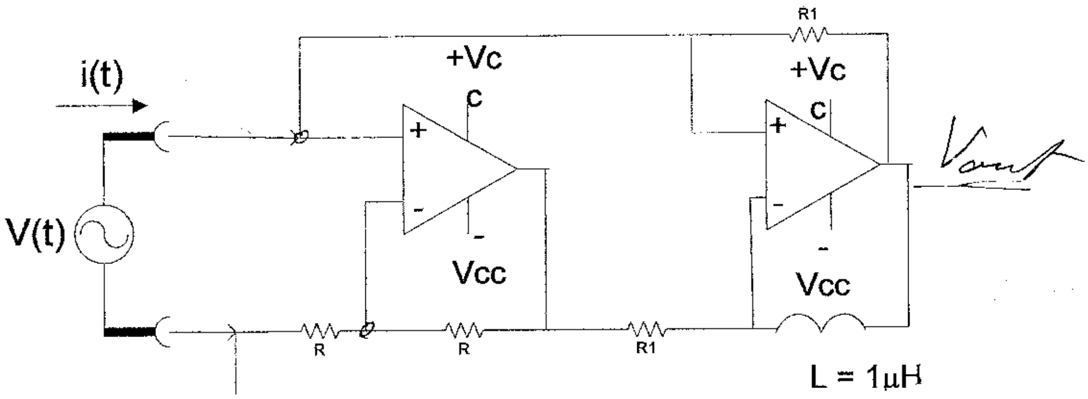
4.2.1 Januari 2006

Prof. Dr. Ir. Stefaan Peeters



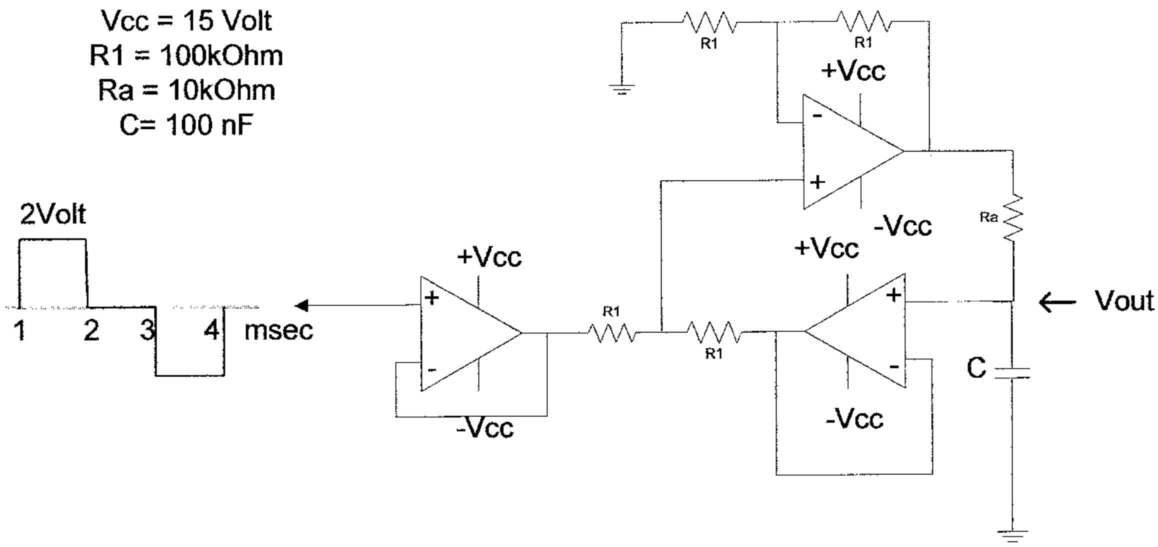
Figuur 4.1: Schakeling bij vraag 1

1. Zie schakeling 4.1. Waaraan is V_{out} gelijk? (V_1 en V_2 altijd > 0).



Figuur 4.2: Schakeling bij vraag 2

2. Zie schakeling 4.2. Bereken Z_{in}?

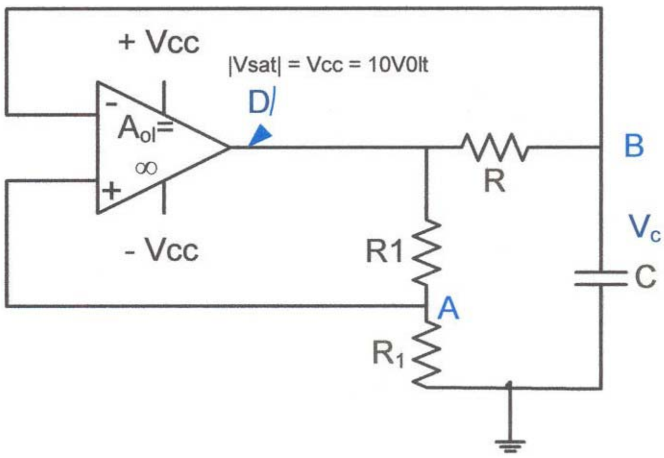


Figuur 4.3: Schakeling bij vraag 3

3. Zie schakeling 4.3. Bereken en teken V_{out} in functie van V_{in}.

4.2.2 Juni 2006

Prof. Dr. Ir. Stefaan Peeters

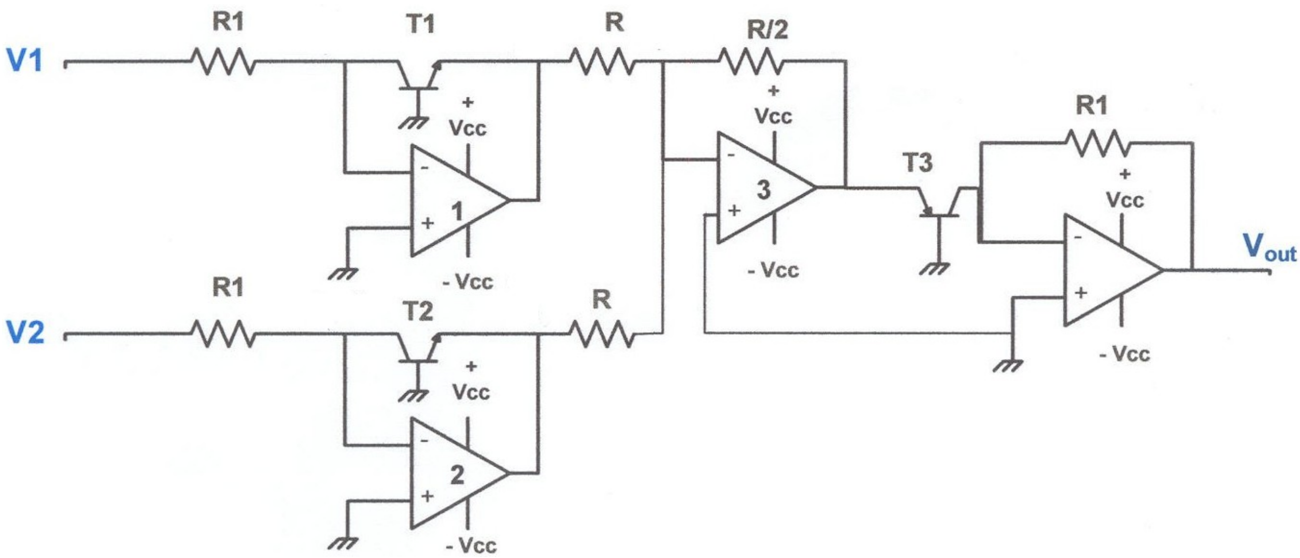


Figuur 4.4: Schakeling bij vraag 1

1. Schakeling 4.4: Neem aan dat op ogenblik $t = 0$ geldt: $V_c = -5V$, en knooppunt D is $V_{sat} = +10V$.
   (a) Schets en bereken de golfvorm in B en A
   (b) Bereken de periode van de golfvorm [1]

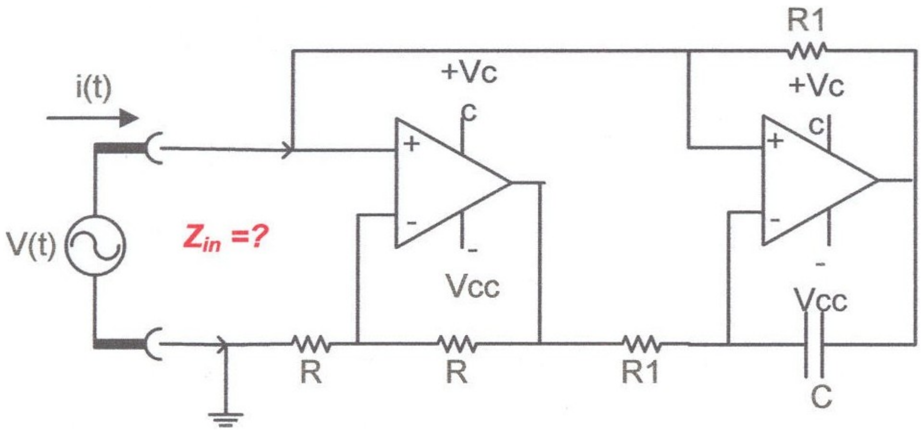
---

[1] oplossing:
$$\begin{aligned} v(t) &= -15e^{\frac{-t}{RC}} + 10 \\ 5 &= -15e^{\frac{-T}{2RC}} \\ -\frac{T}{2RC} &= \ln\frac{1}{3} \\ T &= 2RC\ln 3 \end{aligned}$$



Figuur 4.5: Schakeling bij vraag 2

2. Schakeling 4.5: Bereken $V_{out} = f(V_1, V_2)$, met aanname dat $V_1 > 0$ en $V_2 > 0$. [2]



Figuur 4.6: Schakeling bij vraag 3

3. Schakeling 4.6:
   (a) Bereken Z_in
   (b) Is de ingansimpedantie resistief, inductief, capacitief of een combinatie? [3]

4.2.3 Juni 2008

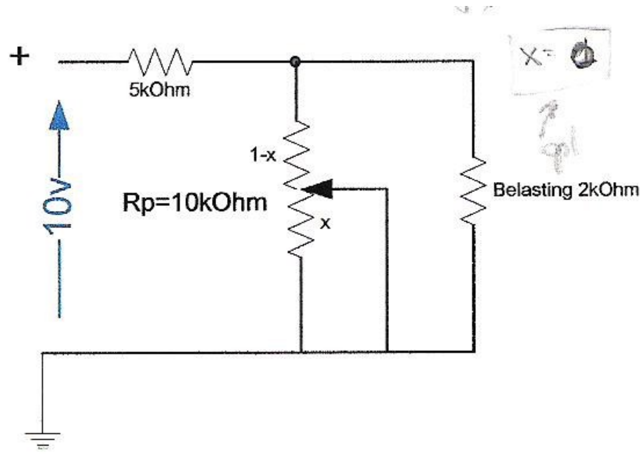
Prof. Dr. ir. S. Peeters

1. De voedingsspanning in ve figuur bedraagt 10 V dc. Een potentiometer Rp heeft een totale waarde van 10kOhm.

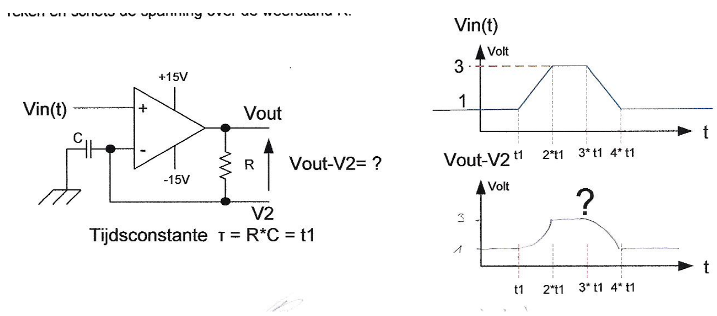
[2] oplossing: $V_{out} = \sqrt{V_1 V_2}$
[3] oplossing: complex getal met enkel i in teller, dus capacitief

(a) Regel de potentiometer zodat het maximale vermogen wordt afgeleverd in de belastingsweerstand van 2kOhm. Wat is x?

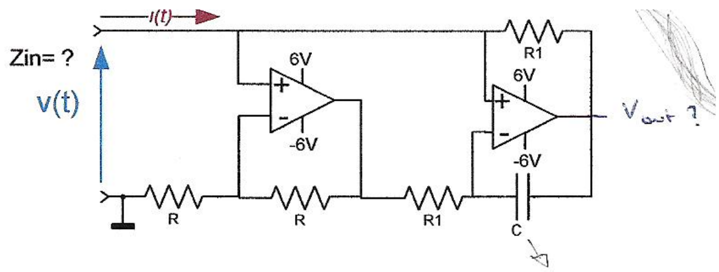
(b) Regel de potentiometer zodat de spanning over de belasting maximaal is. Wat is x?



2. Aan de positieve ingang van een operationele versterker (OPAMP) wordt een spanning aangelegd die varieert in de tijd (zie figuur). De negatieve ingang is verbonden met een capaciteit C naar de grond. De uitgang van de OPAMP is teruggekoppeld naar de negatieve ingang door een weerstand R. De waarde R*C is de tijdsconstante en is gelijk aan t1.
Bereken en schets de spanning over de weerstand R.



3. Bereken de ingangsimpedantie Zin

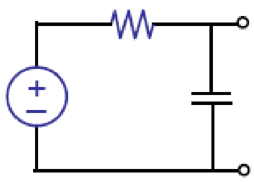
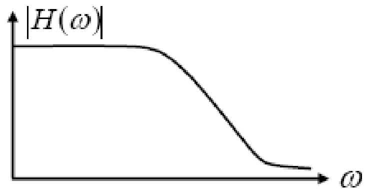


4.2.4 Juni 2009

Prof. Dr. Van Remortel

Prof Van Remortel laat je tijdens het examen gebruik maken van je nota's en van de handboeken die hij heeft opgegeven. Een tip is zeker om het volgende boek te gaan halen in de bib, de slides zijn immers een samenvatting van wat je moet weten en in het boek staat veel extra uitleg: het handboek Electronic Principles van A. Mavino en D.J. Bates 7de editie is zeer goed (en dik).

1. Gegeven: volgend netwerk (zie figuur 1).
   (a) Bepaal de H(ω) waarde.
   (b) Maak een bode plot met $|H(\omega)|$ op y-as en ω op x-as. (je moest LPF krijgen)
   (c) Maak een bode plot met de fasehoek.

2. Bekijk volgend netwerk: (dit was een negatieve clamper in het bovengenoemde handboek te vinden op p 126.) Je mag een ideale diode aannemen.
   (a) Als je nu de condensator wegneemt uit de keten, wat voor uitgangssignaal krijgt men dan (grafiek)? + Leg uit.
   (b) Als je nu de condensator niet wegneemt, wat voor uitgangssignaal krijgt men dan (grafiek)?
   (c) Als je nu geen ideale diode meer aanneemt en je bekijkt het volledige netwerk, wat voor uitgangssignaal krijgt men dan (grafiek)?
   (d) Wat is het nut van dit netwerk?
   (e) Kan je de spanning over de diode meten en zoniet, welke kleine aanpassing moet je maken in het netwerk opdat je dit wel kan?

   (vraag 1 t.e.m. vraag 4 zijn letterlijk over te nemen uit het boek, vraag 5 : antwoord is nee, je kan de spanning over de diode niet meten,de aanpassing wist niemand van de klas)

3. Gegeven: een netwerk van een transistor zoals te zien op p. 295 van het bovenvermeldde handboek; dit is een transistor met $V_{cc} = 12V$ en $V_e = 0,1V_{cc}$. V_e is de spanning over de emittor, V_c is de spanning over de collector, V_{ce} is de spanning over collector-emittor en je kreeg ook gegeven dat β_{dc} gelijk was aan 300. Bepaal de R_1, R_2, V_e, de transresistantie, de transconductantie en de spanningsversterkingsfactor.

   (Dit is analoog aan een numeriek voorbeeld uit de cursus, en om de transresistantie uit te rekenen mag je gebruik maken van het feit dat de weerstand over L groot is. (Dit is de weerstand die op p. 295 van het boek gelijk is aan 100 kOhm (dus groot))

4. Gegeven: een mosfet zoals op p. 509 in het bovenvermelde boek; E-MOSFET maar dan nog met een emitter weerstand erbij. De weerstanden R_1, R_2,... zijn gegeven (deze komen trouwens mooi overeen met die uit vraag 3) Bereken alles wat je nog niet weet,

ook wederom trandsconductanctie, de spanningsversterkingsfactor,... Extra vraag: Kan je de essentiele verschillen tussen dit netwerk en het netwerk van vraag 3 geven? Ook hier mag je de weerstand over L groot aannemen om de transresistantie uit te rekenen.

Hoofdstuk 5

Astrofysica

Dit examen is volledig schriftelijk en is vrij lang, je werkt dus best goed door. Op het eerste blad stonden een hoop fysische constanten (alle mogelijke constanten die je nodig zou kunnen hebben).

5.1 Juni 2008

Los alle korte vragen op en twee van de drie lange vragen

5.1.1 Korte vragen

Observationele technieken

Een paar lijnen volstaat, per vraag 4 ptn.

1. Geef twee redenen waarom de spiegels in moderne telescopen groot worden gemaakt
2. Schets hoe het licht gefocuseerd wordt op een prime-focus camera. Geef een voor en een nadeel van een prime-focus camera, bijvoorbeeld in vergelijking met een ander design
3. Ster A heeft een schijnbare magnistude $m_A = -5$. Ster B lijkt 10 keer helderder. Wat is de schijnbare magnitude van ster B, m_B? Hoeveel verder moet ster B staan zodat $m_a = m_B$
4. Beschrijf kort twee eigenschappen van een ster die je uit haar spectrum kan afleiden. Beschrijf ook hoe je die eigenschappen uit het spectrum zou halen
5. Schat de maximale duur van de occulatie van een ster door de maan. (hint: bereken de hoeksnelheid van de maan aan de hemel, en verwaarloos de rotatie van de aarde. Gebruik 0.5 graden voor de diameter van de maan.)

Sterren

1. wat is een Herzsprung-Russel diagram? Schets de hoofdreeks in zulk diagram. Schets de positie van Rode Reuzen en Witte Dwergen
2. Wat produceert de energie in de zon? Welke waarnemingen tonen dat aan? Wat bepaalt welke fractie van de zon deelneemt aan dit proces?

3. Veronderstel dat 10% van de zon deelneemt aan nucleaire fusie. Schat de hoofdreeks levensduur van de zon. Veronderstel dat dezelfde 10 % deelneemt aan de reactie $3He^4 \rightarrow C^{12}$ nadat de zon een rode reus geworden is. Als dit de enige energiebron is, wat is dan de verhouding tussen de levensduur van de hoogdreeks en het rode reus stadium? (hint: gebruik de massa's van H, He en C gegeven in de tabel en veronderstel dat de lichtkracht de hele tijd dezelfde blijft.)

4. Om de structuur van een ster te vinden gebruikten we onder andere de vergelijking voor hydrostatisch evenwicht,
$$\frac{Gm}{r^2} = -\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} \tag{5.1}$$
Wat drukt die vergelijking uit? Waarom is dit niet voldoende om de structuur te vinden? Welke andere vergelijking moesten we eerst nog afleiden? (hint: beschrijf de andere vergelijking, je hoeft haar niet af te leiden)

5. Wat is een gedegenereerd gas? Welk fysisch proces bepaalt de Chandrasekhar massa; M_C?

5.1.2 Langere vragen

Observationele technieken

Veronderstel gain van de CCD g = 1

1. De variantie van een Piosson proces met gemiddelde N_γ is $\sigma^2 = N_\gamma$. Fotonen gedetecteerd op een CCD volgen de Poisson statistiek. Toon aan dat de signaal/ruis verhouding voor een waarneming met $N_\gamma = 100$ fotonen gegeven is door $S/N = 10$. (2ptn)

2. Wat is read-out noise? Een CCD heeft een read-out noire $\sigma_R = 3$. Bereken hoe dit de vorige signaal-ruis verhouding beinvloedt. (2ptn)

3. Gedurende een waarneming valt er ook licht op de pixels afkomstig van de achtergrond. Veronderstel dat dit overeenkomt met $N_B = 20$. Bereken opnieuw de signaal/ruis verhouding. (2ptn)

4. Toon aan dat, wanneer de achtergrond de ruis domineert in waarnemingen van een ster, de signaal/ruis verhouding gegeven is door $\dot{N}_\gamma(\dot{N}_B)^{-1/2}t^{-1/2}$. De foton flux van een ster is $\dot{N}_\gamma$, die van de achtergrond is $\dot{N}_B$ en t is de integratietijd. (2ptn)

5. De *Vert Large Telescope* neemt een zwakke ster waar. Al het licht van de ster valt op 1 enkele pixel. De foton flulx van de ster op de detector is $\dot{N}_\gamma = 5 \times 10^{-2}/s$ en die van de achtergrond is $\dot{N}_B = 10^{-1}/s$ *per pixel*. De read-out noise per pixel is $\sigma_R = 3$. Hoelang moet je minstens integreren om een signaal/ruis verhouding van S/N = 3 te krijgen? (4ptn)

6. De volgende nacht is de seeing sterk toegenomen en daardoor is het licht van de ster verdeeld over $n = 9$ pixels. Gebruik opnieuw $\sigma_R = 3$ en bereken hoe dit de integratietijd voor S/N = 3 heeft veranderd. (hint: breng in rekening dat de achtergrond flux *per pixel* is) (4ptn)

7. De figuur toont hoeveel licht, E_B, we van de nachthemel detecteren, in energie per tijd, per oppervlakte, per angstrom per boogseconde. Veronderstel dat de filter waar doorheen we waarnemen een breedte van $W = 1000 Angstrom$, en dat een pixel overeenkomt met een schijfje met straal 0.1 Bgseconde. Schat hoeveel fotonen er per seconde per pixel gedetecteerd worden door de VLT. Veronderstel dat elk foton een golflengte heeft van $\lambda = 5000A$. (4ptn hint: $1erg = 10^{-7}J$, de diameter van de VLT spiegel is 8m)

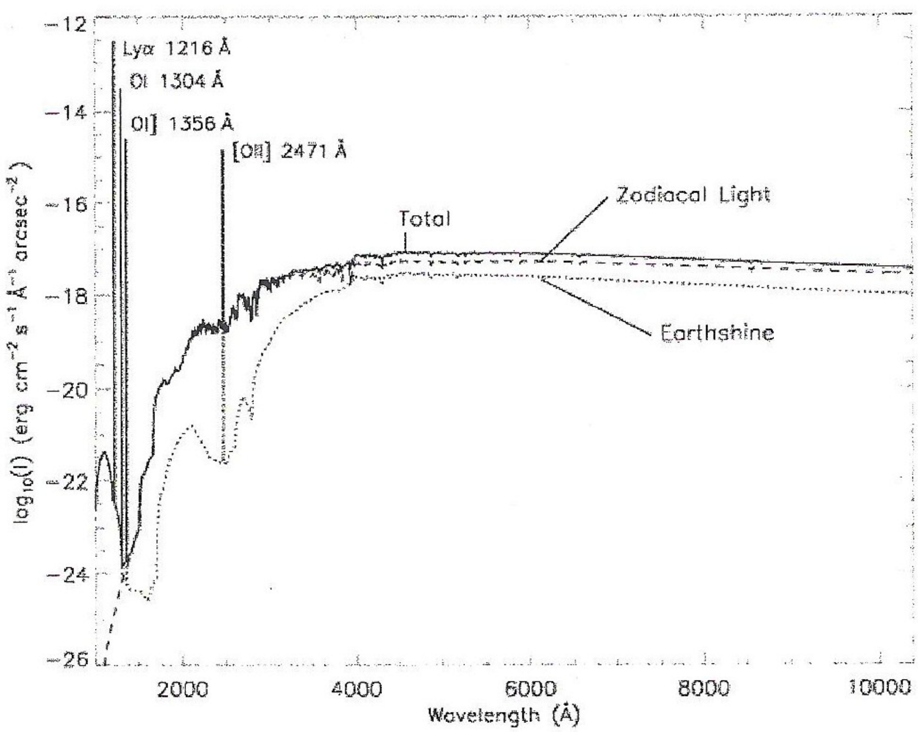


Figure 1: Helderheid van de nachthemel als funktie van goflengte.

Structuur en evolutie van een isotherme ster

Eens ster heeft straal R_0, dichtheidsprofiel:

$$\rho(R) = \rho_0(R_0/R)^2 voor R \leq R_0 \tag{5.2}$$

$$\rho(R) = 0 voor R < R_0 \tag{5.3}$$

en een constante temperatuur $T(R) = T_0$ doorheen de ster. Veronderstel dat het gas de ideale gawet volgt:

$$p = \frac{k_B}{\mu m_h}\rho T \tag{5.4}$$

met μ het gemiddelde moluculaire gewicht. Veronderstel verder dat de ster uit volledig geioniseerd waterstof bestaat

1. Deze ster heeft massa $M = M_{zon}$ en straal $R = R_{zon}$. Bereken ρ_0 (2 ptn) (hint: voor een sferische distributie is de massa $M(< R)$ in een bol met straal R, $M(< R) = \int_0^R \rho(r)4\pi r^2 dr$

2. Toon aan dat deze ster aan de vergtelijning voor hydrostatisch evenwicht voldoet (vgl zie korte vragen) voor een goede keuze van T_0 en bereken die waarde van T_0. Gebruik de waarde $mu = 1/2$ voor volledig geioniseerd waterstof.

3. De oppervlakte temperatuur van deze ster is fT_0 met $f = 10^{-3}$. Bebruik de stralingswetten voor een zwarte straler en berekend de verhouding L/L_{zon}, van de lichtkracht L van de ster over die van de zon. (hint de geemiteerde intensiteit voor een zwarte straler met temperatuur T is $I = \sigma T^4$) (4 ptn)

4. Door fusie wordt al het waterstof omgezet in Helium en verandert de waarde van T_0, maar niet die van R_0, M noch f. Als het helium volledig geioniseerd is, bereken de nieuwe waarde van μ en L/L_{zon}. (5ptn)

5. Veronderstel dat alle sterren dezelfde *gemiddelde dichtheid* en waarde van f hebben. Bereken en schets de hoofdreeks in een Herzsprung-Russel diagram en berken en schet waar de sterren liggen die Helium verbranden (5 ptn, hint: Duid goed aan wat er op de assen staat, en welke curve de H en He-sterren precies volgen.)

De groei van zwarte gaten en de Eddington lichtkracht

De groei van een zwart gat is beperkt doordat de straling kan verhinderen dat nog meer materie in het gat valt. We berekenen hoe groot de stralingsdruk is als de fotonen interageren met stof in de omgeving van het zwarte gat. Botsingen tussen stof en gas zorgen ervoor dat de fotonendruk ook op het gas werkt. Veronderstel dat de (sferische) stofdeeltjes massa m_d en straal r_d hebben. Veronderstel ook nog dat het gas dichtheid ρ_g heeft en dat de verhouding tussen de dichtheid van stof over gas gelijk is aan $\eta = \rho_d/\rho_g$. Het zwarte gat heeft massa M.

1. Als de lichtkracht L is, toon aan dat de stralingskracht op een stofdeeltje op afstand r gegeven is door:

$$f_d = \frac{L}{4\pi r^2}\frac{\pi r_d^2}{c} \tag{5.5}$$

(2 ptn, hint: gebruik dat het momentum van een foton met energie E gegeven is door E/c)

2. Bekijk een sferische schil met volume V op afstand r van de lichtbron. Toon aan dat de totale stralingskracht, F_r, op de schil, gegeven is door:

$$F_d = \frac{\eta \rho_g V}{m_d} \frac{L}{4\pi r^2} \frac{\pi r_d^2}{c} \tag{5.6}$$

   (4ptn)

3. Bereken de gravitatiekracht, F_g, op die schil uitgeoefend door het zwarte gat. WAt is de Eddington lichtkracht? Toon aan dat

$$L_{Edd} = 4\pi GMc \frac{1+\eta}{\eta} \frac{m_d}{\pi r_d^2} \tag{5.7}$$

   (4ptn)

4. De massa van het zwarte gat neemt doe door accretie van gas en stof. Veronderstel dat een fractie ϵ van de rustmassa van materie dat in het zwarte gat valt, omgezet wordt in straling, toon dan aan dat de lichttkracht gegeven wordt door:

$$L = \epsilon \dot{M} c^2 \tag{5.8}$$

   (2ptn)

5. Veronderstel dat de lichtkracht $L = L_{Edd}$. Toon aan dat de massa van het zwarte gat groeit als

$$M(t) = M_0 e^{t/t_{Edd}} \tag{5.9}$$

   Bereken $t_E dd$ in het geval dat $\epsilon = 0.10$, $\eta = 0.010$, $r_d = 1.0 \times 10^{-4} cm$, $m_d = 1.0 \times 10^{-8} g$ (8ptn)

5.2 Juni 2009

Los alle korte vragen op en twee van de drie lange vragen

5.2.1 Korte vragen (20 punten)

Een paar lijnen volstaat per antwoord, elke vraag staat op 4 punten.

Observationele Technieken

1. Definieer lichtkracht, L, flux F, schijnbare en absolute magnitude van een ster.

2. Geef twee belangrijke vereisten voor de lokatie van een observatorium.

3. Schets hoe het licht gefocuseerd wordt in een Cassegrain design.

4. Beschrijf kort twee belangrijke stappen die je moet doen met CCD waarnemingen om de ruwe data in wetenschappelijk bruikbare data om te zetten.

5. De CCD camera op teleskopen wordt meestal gekoeld. Waarom?

Sterren

1. Schets een Herzsprung-Russel diagram. Duid duidelijk aan wat er op de assen staat. Wat is de 'hoofdreeks' in zulk een diagram? Welk process genereert de energie in hoofdreeks sterren?

2. Hoe kan je de temperatuur aan het oppervlakte van de zon meten? Hoe kan je de massa van de zon bepalen?

3. Schat de thermische tijdschaal van de zon. [Hint: gebruik de gegeven zonne-constanten, en veronderstel dat de gravitationele energie, GM^2/R vergelijkbaar is met de thermische energie.

4. Het verschil $(M_i - A_i amu).c^2$ tussen de massa M_i van element i, en A_i keer de atomaire massa eenheid amu, heet het 'massa verschil' van het element. (Ai is het aantal nucleonen in de kern.) Voor waterstof en Helium is het massa verschil

$$(M_H - 1amu).c^2 = 7.289MeV$$
$$(M_He - 4amu).c^2 = 2.425MeV$$

   (Zie lijst met constanten voor de waarde van de fysische constanten). Bereken hiermee de efficientie, ϵ, van waterstof fusie in de zon.

5. De lichtkracht L op de hoofdreeks hangt af van de massa M van een ster als $L \propto M^3$. Gebruik dit om de levensverwachting (t_*) van een ster te vinden als functie van haar massa, in termen van de levensverwachting van de zon, t_0.

5.2.2 Lange vragen (20 punten)

Observationele Technieken

In deze oefening onderzoeken we hoe lang we met de Hubble Space Telescope moeten integreren om een planeet zoals Jupiter te kunnen zien rond een naburige ster, gelijkaardig aan de Zon. Voor de eigenschappen van die extra-solaire planeet en haar ster, gebruiken we daarom de waarden voor Jupiter en de Zon zelf, en veronderstellen dat we waarnemen vanuit een naburige ster, op afstand r_*. Om dit te berekenen moeten we

1. Vinden hoeveel zonlicht Jupiter reflecteert.

2. Hoeveel fotonen de HST daarvan kan waarnemen, per seconde.

3. Hoeveel achtergrond noise HST heeft.

4. Gegeven deze twee waarden, hoe lang we moeten integreren om een goede detectie van Jupiter te maken.

Gebruik deze waarden:

- D = 2.4m (diameter van de HST primaire spiegel)
- p = 0.1 (resolutie van HST, in boog seconden)
- d = 1 x 10^9 km (afstand Zon-Jupiter)
- r = 3.5 x 10^4 km (straal van Jupiter)

1. Veronderstel dat Jupiter al het zonlicht dat er op valt naar ons toe reflecteert. Toon aan dat de lichtkracht van Jupiter dan gegeven is door

$$L_J = \frac{L_0 \pi r^2}{4\pi d^2} = 3,06.10^{-10} L_0$$

2. Veronderstel dat we deze planeet waarnemen in het visuele, $\lambda = 5000\mathring{A}$. Toon aan dat

$$F_J = \frac{L_J}{4\pi {r_*}^2}$$
$$\dot{N}_J = \frac{F_J \pi (D/2)^2}{E}$$

waarin F_J de flux is die van van Jupiter meten, E de energie van een foton met golflengte λ, en $\dot{N}_J$ het aantal fotonen dat de HST detecteert van deze planeet per seconde en bereken $\dot{N}_J$.

3. Onze waarneming wordt bemoeilijkt doordat de telescoop ook nog fotonen detecteert die niet van Jupiter afkomstig zijn, maar bijvoorbeeld ook van andere sterren, en van stof in het zonnestelsel. De figuur (van de HST web-site) toont hoeveel licht, E_B, we van de nachthemel detecteren, in energie, per eenheid van tijd, per eenheid van oppervlakte, per Angstrom, per boogseconde^2. Veronderstel dat de filter waar doorheen we waarnemen een breedte van $W = 1000\mathring{A}$ heeft. Veronderstel verder dat het licht van Jupiter of HST verdeeld wordt over de diffractie limiet van de teleskoop, namelijk een schijfje met straal gelijk aan de resolutie, p = 0.1 boog seconden. Vind een uitdrukking voor $\dot{N}_B$, het aantal achtergrond fotonen dat HST waarneemt per eenheid van tijd.

4. Gegeven dat we N_J fotonen per seconde detecteren van Jupiter, en N_B van de 'achtergrond' toon aan dat de signaal-ruis verhouding voor integratie tijd t, gegeven is door

$$\frac{S}{N} = \frac{\dot{N}_J t}{[(\dot{N}_J + \dot{N}_B)t]^{1/2}}$$

5. Geef een formule voor t zodat $S/N > 3$ en bereken t voor je eerdere gevonden waarden [Hint: 1 erg = 10^{-7} J].

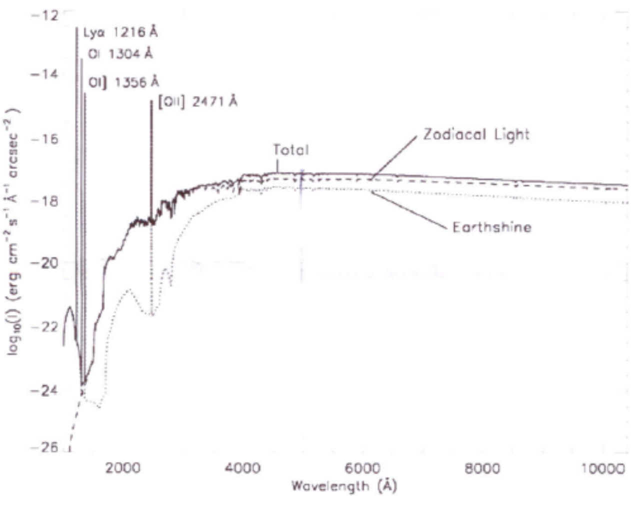


Figure 1: Helderheid van de nachthemel als funktie van goflengte.

Figuur 5.1: Helderheid van de nachthemel als functie van golflengte

Sterren

1. Lane-Emden vergelijking en Chandrasekhar massa (20 punten)

1. Toon aan dat in een sferische massa verdeling, de massa, dM, in een schil met straal r en dikte dr, $dr \ll r$, gelijk is aan $dM = 4\pi r^2 \rho dr$.

2. Gebruik dit om de vergelijking voor hydrostatisch evenwicht in een sferische ster af te leiden:

$$\frac{GM(<r)}{r^2} = \frac{-1dp}{\rho dr}$$

   (M($< r$) is de massa in de bol met straal r.) [Hint: vergelijk de gravitatie kracht op de schil met de druk kracht op de schil.]

3. Wat is een toestandsvergelijking (equation of state)?

4. Veronderstel dat $p = K\rho^\gamma$ (K en γ constant). Substitueer dit in de vergelijking van het 2de deel van deze vraag en toon aan dat

$$\frac{S}{N} = \frac{\dot{N}_J t}{[(\dot{N}_J + \dot{N}_B)t]^{1/2}}$$

   (de Lane- Emden vergelijking), waarin

   - $r = \alpha\xi$
   - $\rho = \rho_c \theta^n$
   - $\alpha^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G(\rho_c)^{((n-1)/n)}}$
   - $\gamma = 1 + 1/n$

5. Toon aan dat de massa van de ster $M = \int_0^R 4\pi r^2 \rho dr = -4\pi\alpha^3 \rho_c {\xi_1}^2 \frac{d\theta}{d\xi}_1$ De index '1' , betekent de waarde aan de oppervlakte van de ster.

6. Combineer de vergelijkingen van r, α en M om het verband tussen de straal R, en de massa M, van de ster te vinden, $\frac{M}{-{\xi_1}^2(\frac{d\theta}{d\xi}_1}\Big)^{n-1} = \frac{1}{4\pi}(\frac{R}{\xi_1})^{n-3}[\frac{(n+1)K}{G}]^n$

7. Voor een relativistisch gedegenereerd Helium gas is $p = \frac{hc}{8}\left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3}\left(\frac{\rho}{2m_p}\right)^{4/3}$

2. Stralingsdruk, massa verlies, en een limiet op de massa van sterren die Witte Dwergen worden (20 punten)

Stofdeeltjes in de atmosfeer van een ster absorberen een deel van de flux. Aangezien de geabsorbeerde fotonen ook momentum hebben resulteert dit in een kracht die de stofdeeltjes naar buiten duwt. Botsingen tussen stof en gas deeltjes sleuren het gas ook mee naar buiten. Dit resulteert in een stellaire wind, en de ster verliest massa. We leiden eerst een uitdrukking voor de kracht op het gas ten gevolge van dit effect (vergelijkbaar met de berekening van de Eddington lichtkracht), en gaan daarna na wat het effect van massa verlies is op de evolutie van de ster.

1. Een ster met massa M heeft sferische stofdeeltjes met massa m_s, en straal d in zijn atmosfeer. Voor een stofdeeltje op afstand r van een ster met lichtkracht L, toon aan dat de stralingskracht F_s, op het deeltje gegeven is door

$$F_S = \frac{L}{4\pi r^2}\frac{\pi d^2}{c}$$

[Hint: het momentum van een foton met energie E is E/c.]

2. Beschouw een schil op afstand r met dikte dr, gas massa M_g en stofmassa $M_s = \epsilon M_g$ ($\epsilon \ll 1$). Toon aan dat het aantal stofdeeljes in deze schil $N_s = \epsilon M_g / m_s$. Toon aan dat de stralingskracht, F_S, en gravitatiekracht, F_G, op de schil gelijk zijn aan

$$F_S = \frac{\epsilon M_g F_s}{m_s}$$
$$F_G = \frac{GMM_g}{r^2}$$

3. Toon aan dat je verwacht dat de wind start wanneer

$$L \geq \frac{\epsilon M_g F_s}{m_s}$$

4. Door de wind verliest de ster een deel van zijn massa M. Veronderstel dat we dit schrijven als

$$\dot{M} = -\alpha L$$

Vind $M(t)$, veronderstel $M(O) = M_o$. Door verbranding neemt de massa van de kern, M_k, toe. Veronderstel dat de verbranding een hoeveelheid energie Q per eenheid van massa produceert. Toon dat

$$M(t) = M_0 = \alpha L t$$
$$M_k(t) = M_0 = \frac{Lt}{Q}$$

Wat is de massa van de ster op het ogenblik dat de mantel geheel verloren is (en dus $M = M_k$)? [Hint: veronderstel dat de lichtkracht L constant is, en dat $M_k(t = 0) = 0$.]

5. Toon aan dat

$$Q = 6.5.10^{14} Jkg^{-1}$$

voor waterstof fusie.

6. Op het einde van de verbranding moet de massa van de kern kleiner zijn dan de Chandrasekhar massa $M_C h \approx 1.4 M_0$ om nog een stabiel te zijn. Vind de limiet voor de oorspronkelijke massa van de ster opdat dit zou gebeuren. Veronderstel $\alpha = 10^{-14} kgJ^{-1}$.

5.3 Juni 2010

Los alle korte vragen op en twee van de drie lange vragen

5.3.1 Korte vragen (20 punten)

Een paar lijnen volstaat per antwoord, elke vraag staat op 4 punten.

Observationele Technieken

1. Geef twee belangrijke redenen waarom grote, moderne telescopen spiegels gebruiken i.p.v. lenzen.
2. Wat is *seeiing* en wat veroorzaakt het?
3. Schets de $Nasmyth$ focus van de telescoop. Moderne spectrografen zijn erg groot en zwaar. Geef twee redenen waarom het dus veel beter is deze op de Nasmyth focus te installeren in plaats van op de prime focus.
4. Definieer de angulaire resolutie van een telescoop. Wat bepaalt de angulaire resolutie van de $HubbleSpaceTelescope$? Hangt dit af van de golflengte?
5. Twee sterren, A en B, hebben dezelfde lichtkracht. A heeft schijnbare magnitude $m_A = 4$ en staat op afstand $d_A = 4pc$; B heeft $m_B = 10$. Bereken de afstand tot ster B (verwaarloos absorptie). Hoe zou je kunnen onderzoeken of er absorptie is door stof (dust) in de richting van ster B?

Sterren

1. Schets een Herzsprung-Russel diagram. Duid duidelijk aan wat er op de assen staat. Schets de positie van (a) de hoofdreeks, (b) Rode Reuzen en (c) Witte dwergen.
2. Helium fusie genereert de energie in Rode Reuzen. Waarom treedt dit proces niet op in de zon? Welk proces vindt plaats op het einde van de hoofdreeks evolutie van een ster zoals de zon, zodat He fusie plots wel mogelijk wordt?
3. Wat is gedegenereerde materie? Welk type ster bestaat bijvoorbeeld uit gedegenereerde materie?
4. Bereken hoeveel waterstofatomen er per seconde worden omgezet in He in de zon.
5. Zware sterren produceren elementen zwaarder dan He zowel tijdens hun evolutie als tijdens de super nova explosie. Bespreek kort de evolutie van (a) lichte sterren en (b) heel zware sterren en verklaar waarom deze geen zwaardere elementen produceren gedurende hun leven.

5.3.2 Lange vragen (20 punten)

Observationele Technieken

Rond een ster op afstand $d = 1pc$ is er een planeet met leven. Toevallig hebben de astronomen op die planeet ook een ruimte telescoop met precies de eigenschappen van een HIST: diameter $D = 2.4m$, een CCD met read-out noise $\sigma_R^2 = 0.2$, dark current $\dot{N}_d = 0.1s^{-1}$ en gain $g = 1$. Astronoom Andy heeft waarnemingstijd op de ruimte telescoop en wil proberen het zonlicht dat reflecteert van de aarde te meten. Hij weet dat de vergelijking voor de signaal-ruis verhouding in een waarneming gegeven wordt door:

$$\frac{S}{N} = \frac{\sum \dot{N}_\gamma t}{(\sum[\dot{N}_\gamma t + \dot{N}_B t + \sigma_R^2 + \dot{N}_d t])^{1/2}} \tag{5.10}$$

Maak de benadering dat al het zonlicht dat wordt uitgestraald (en ook wordt gereflecteerd) golflengte $\lambda = 5000\mathring{A}$ heeft.

1. Bespreek kort de verschillende termen in deze vergelijking, wat betekent de som? (2pt)

2. De grootte van de Airy schijf is $\theta = 1.22\lambda/D$. Bereken of hun HST voldoende resolutie heeft om de zon en de aarde gescheiden te kunnen waarnemen. (4pt)

3. Toon aan dat de flux F van door de aarde gereflecteerd zonlicht gemeten door Andy, maximaal gelijk is aan
$$F = L_o \frac{\pi r^2}{4\pi AU^2} \frac{1}{4\pi d^2}, \tag{5.11}$$
waarin r = 6000 km de straal van de aarde is. (4pt)

4. Bereken die flux. (2pt)

5. Bereken het aantal fotonen $\dot{N}_\gamma$ dat per seconde op de HST spiegel valt. (4pt)

6. De waarnemingen worden bemoeilijkt doordat een deel f van het direkte zonlicht op de detector valt, net op de plaats waar het beeld van de aarde ook valt. Veronderstel dat $f = 0.01$. Bereken de minimale integratietijd zodat de signaal-ruis verhouding $S/N = 3$. (4pt)

Sterren

1.Lane-Emden vergelijking en Chandrasekhar massa (20 punten)

1. Toon aan dat in een sferische massaverdeling, de massa, dM, in een schil met straal r en dikte dr, $dr \ll r$, gelijk is aan $dM = 4\pi r^2 \rho dr$. (2pt)

2. Gebruik dit om de vergelijking voor hydrostatisch evenwicht in een sferische ster af te leiden:
$$\frac{GM(<r)}{r^2} = \frac{-1dp}{\rho dr}$$
(M($< r$) is de massa in de bol met straal r.) (2pt) [Hint: vergelijk de gravitatie kracht op de schil met de druk kracht op de schil.]

3. Wat is een toestandsvergelijking (equation of state)? (2pt)

4. Veronderstel dat $p = K\rho^\gamma$ (K en γ constant). Substitueer dit in de vergelijking van het 2de deel van deze vraag en toon aan dat
$$\frac{S}{N} = \frac{\dot{N}_J t}{[(\dot{N}_J + \dot{N}_B)t]^{1/2}}$$
(de Lane- Emden vergelijking), waarin
   - $r = \alpha\xi$
   - $\rho = \rho_c \theta^n$
   - $\alpha^2 = \frac{(n+1)K}{4\pi G(\rho_c)^{((n-1)/n)}}$
   - $\gamma = 1 + 1/n$

5. Bereken de structuur van een ster met $n = 1$. (4pt)

6. Bereken haar massa en straal in termen van α en ρ_c. (4pt)

7. Deze ster heeft dezelfde massa en straal als de zon. Bereken haar centrale dichtheid ρ_c. (2pt)

2. Stralingsdruk, massa verlies, en een limiet op de massa van sterren die Witte Dwergen worden (20 punten)

Stofdeeltjes in de atmosfeer van een ster absorberen een deel van de flux. Aangezien de geabsorbeerde fotonen ook momentum hebben resulteert dit in een kracht die de stofdeeltjes naar buiten duwt. Botsingen tussen stof en gas deeltjes sleuren het gas ook mee naar buiten. Dit resulteert in een stellaire wind, en de ster verliest massa. We leiden eerst een uitdrukking voor de kracht op het gas ten gevolge van dit effect (vergelijkbaar met de berekening van de Eddington lichtkracht), en gaan daarna na wat het effect van massa verlies is op de evolutie van de ster.

1. Een ster met massa M heeft sferische stofdeeltjes met massa m_s, en straal d in zijn atmosfeer. Voor een stofdeeltje op afstand r van een ster met lichtkracht L, toon aan dat de stralingskracht F_s, op het deeltje gegeven is door

   $$F_S = \frac{L}{4\pi r^2}\frac{\pi d^2}{c}$$

   [Hint: het momentum van een foton met energie E is E/c.] (4pt)

2. Beschouw een schil op afstand r met dikte dr, gas massa M_g en stofmassa $M_s = \epsilon M_g$ ($\epsilon \ll 1$). Toon aan dat het aantal stofdeeljes in deze schil $N_s = \epsilon M_g/m_s$. Toon aan dat de stralingskracht, F_S, en gravitatiekracht, F_G, op de schil gelijk zijn aan

   $$F_S = \frac{\epsilon M_g F_s}{m_s}$$
   $$F_G = \frac{GMM_g}{r^2}$$

   (2pt)

3. Toon aan dat je verwacht dat de wind start wanneer

   $$L \geq \frac{\epsilon M_g F_s}{m_s}$$

   (2pt)

4. Door de wind verliest de ster een deel van zijn massa M. Veronderstel dat we dit schrijven als

   $$\dot{M} = -\alpha L$$

   Vind $M(t)$, veronderstel $M(O) = M_o$. Door verbranding neemt de massa van de kern, M_k, toe. Veronderstel dat de verbranding een hoeveelheid energie Q per eenheid van massa produceert. Toon dat

   $$M(t) = M_0 = \alpha Lt$$
   $$M_k(t) = M_0 = \frac{Lt}{Q}$$

   (2pt) Wat is de massa van de ster op het ogenblik dat de mantel geheel verloren is (en dus $M = M_k$)? (2pt) [Hint: veronderstel dat de lichtkracht L constant is, en dat $M_k(t = 0) = 0$.]

5. Toon aan dat

   $$Q = 6.5.10^{14} Jkg^{-1}$$

   voor waterstof fusie. (4pt)

6. Op het einde van de verbranding moet de massa van de kern kleiner zijn dan de Chandrasekhar massa $M_Ch \approx 1.4M_0$ om nog een stabiel te zijn. Vind de limiet voor de oorspronkelijke massa van de ster opdat dit zou gebeuren. Veronderstel $\alpha = 10^{-14} kgJ^{-1}$. (4pt)

Hoofdstuk 6

Medische fysica

6.1 Theorie

6.1.1 Juni 2007

Door prof. dr. Flossie

1. Wat is de functie van het evenwichtssysteem
2. Hoe reageert het SCC op een stapfunctie in hoofdsnelheid (model zonder veer)
3. Welke systemen genereren vnl de sensaties in een lift? Hoe werkt dat?
4. Wat is de rol van het velocity storage mechanisme

6.1.2 Juni 2009

1. Beschrijf de werking van het evenwichtssysteem (schema)
2. Leg uit: post-rotaxy hystagmus
3. Hoe reageert een semi-circulair kanaal op een stapfunctie? (Bode-plot) Leg helemaal uit
4. Geef de oorzaken van reisziekten
5. Aan welke zijde heb je stok en waarom? (Bij heupfractuur)
6. Wat zijn F_T, de hoek θ, en F_b wanneer je op de bal van je voet steunt? (zie figuur)

6.1.3 Juni 2010

1. Situeer de rol van de VOB (vestibulo oculaire reflex) in het behoud van evenwicht bij de mens.
2. Waarom heeft men bij een verandering van brilglazen gedurende een korte tijd last van duizeligheid?
3. Waaruit bestaat fysisch gezien de ambiguïteit van het otoliet systeem?
4. Beschrijf wat het effect is van een stapfunctie in snelheid op een vrij bewegende cupula in een semi-circulair kanaal. Tip: Beschouw een circulaire buis waarin een vloeistof zit met densiteit ρ en viscositeit μ. De buis heeft een doormeter $2r$ en een kromtestraal R. Op t_0 begint het gehele systeem te roteren in tegenwijzerzin.

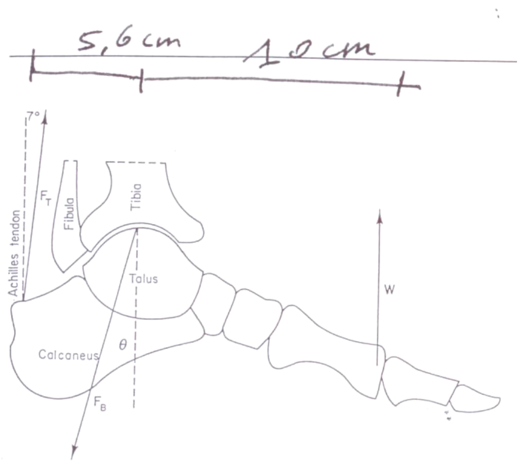


FIGURE 1.8. Simplified anatomy of the foot.

5. Gegeven een arm die een bal vasthoudt van 4 kg op een afstand van 30 cm van de elleboog en de voorarm maakt een hoek van 30 graden met de horizontale. Wat is de kracht in de armspier (biceps)? Wat is de reactiekracht in het ellebooggewricht en wat is de richting?
   Leg de x-as volgens de voorarm en de y-as loodracht daarop. De armspier maakt een hoek van 45 graden met de voorarm en de plaats van aanhechting is 5 cm van het ellebooggewricht. Het massamiddelpunt van de voorarm met gewicht 20N kan men plaatsen op 15 cm van het ellebooggewricht.

6. Beschrijf het evenwichtssysteem in termen van een biologisch regelsysteem.

7. Wat verstaat men onder een stapresponsie bij lineaire systemen?

8. Wat is typisch voor een lineair systeem?

Hoofdstuk 7

Structuur van de Vaste stoffysica

7.1 De cursus, het vak, het examen

Sinds vorig jaar wordt dit vak in tweede bachelor gegeven, mits een aanpassing van de cursusinhoud (van het vroegere vak Kristalkunde). Hopelijk hebben jullie toch nog iets aan de vragen van de voorbije jaren! Deze examens werden volledig schriftelijk afgenomen. Bij een aantal vragen had je soms de mogelijkheid een 3D kristalmodel te bekijken.

7.2 Theorie

7.2.1 Juni 2005

Prof. Dr. J. Hadermann

1. **Algemeen**

   (a) Wat is (kort):

      i. een zone?

      ii. algemene positie en speciale positie?

      iii. asymmetrische eenheidscel?

      iv. rooster?

      v. reciproke rooster? (wat het is, niet constructie ervan!)

   (b) Is er altijd maar 1 mogelijke keuze van eenheidscel? Zo ja, wat zijn dan de eisen? Zo nee, welke eenheidscel is dan de beste?

   (c) Geef 2 verschillende situaties waarin we multipliciteit gedefinieerd hebben en maak een gedetailleerde vergelijking van het concept multipliciteit voor deze twee gevallen.

2. **Morfologie**
   Zullen alle kristallen van een zelfde materiaal dezelfde polen hebben, d.w.z.

   (a) liggen de polen met eenzelfde index altijd op dezelfde positie?

   (b) Zijn het er altijd evenveel voor elk groeiend kristal?

   Leg duidelijk uit waarom!

3. **Puntgroepen**

(a) Waarom hebben we geen combinaties van slechts twee assen bekeken? Ondersteun je antwoord grafisch.

(b) Waarom staat bij een orthorhombische puntgroep de a-as op de eerste plaats en bij een tetragonale puntgroep slechts op de tweede plaats in het symbool van de puntgroep?

(c) Wat is het verband tussen de symmetrie van een bepaald kristalsysteem en de eisen die worden gesteld aan de celparameters?

(d) Wat is het verband tussen de symmetrie en de fysische eigenschappen van een materiaal?

4. **Ruimtegroepen**

   (a) Wat is het verschil tussen een puntgroep en een ruimtegroep?

   (b) Wat is het strikte minimum aan informatie dat je nodig hebt om een kristalstructuur exact op schaal te kunnen tekenen?

   (c) Leg uit wat *Pnma* wil zeggen. Tot welk kristalsysteem behoort deze ruimtegroep?

   (d) $P\frac{4}{m}mm$:

      i. Is dit een verkorte of volledige vorm? Leg uit.

      ii. Wat is de Laue groep van $\frac{4}{m}mm$?

   (e) Als er een 2_1-as aanwezig is in je kristalstructuur, is er dan ook altijd een 2-as aanwezig? En omgekeerd?

5. **Bravaisroosters**

   (a) Waarom bestaat er geen Bravaisrooster dat tetragonaal C heet?

   (b) Wat is er speciaal aan de ruimtegroepen van Bravaisroosters?

   (c) Zegt het Bravaisrooster van een kristal hoeveel atomen je in de eenheidscel hebt?

   (d) Wat moet gelden voor elk atoom dat aanwezig is in een A-gecenterd rooster?

6. **X-stralendiffractie**

   (a) Waarom zijn X-stralen geschikt om kristalstructuren te onderzoeken?

   (b) Waarom krijg je met de poedermethode ringen op je fotoplaat?

   (c) Welke informatie over de kristalstructuur kan je afleiden uit een goed XRD patroon en hoe haal je die informatie er telkens uit?

   (d) Structuurfactor:

      i. Leg uit wat de structuurfactor is.

      ii. Wat is het verband tussen de structuurfactor van een materiaal en het XRD patroon van dat materiaal?

      iii. Wat is het verband tussen de structuurfactor van een materiaal en de ruimtegroep van een materiaal?

7. **Kristalchemie**

   (a) Wat zijn de mogelijke *dichtst* gestapelde bolstapelingen? Voor welk soort materialen komen deze voor?

   (b) Welke opeenvolgende coördinaties gaat men doorlopen voor een ionaire structuur als men de straal van het kation telkens gaat verkleinen? Geef niet alleen de naam, maar maak telkens ook een kleine schets.

7.2.2 Juni 2006

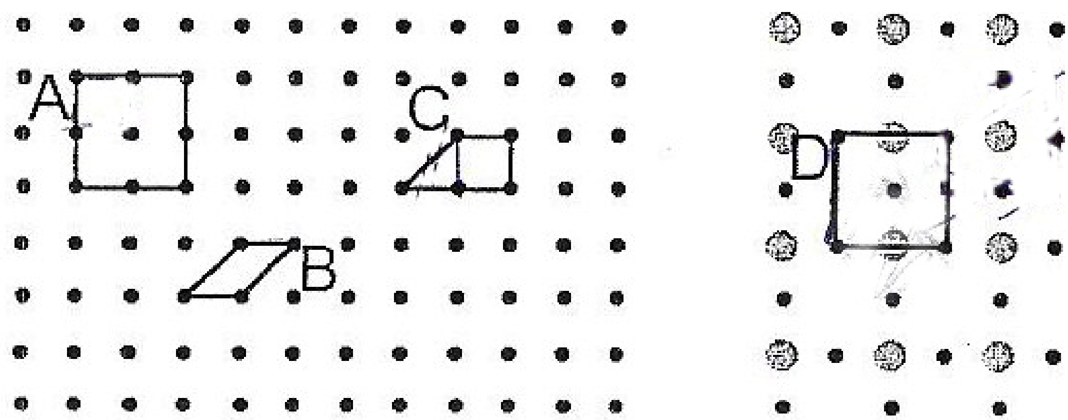
Prof. Dr. J. Hadermann

1. Hoe kies je stap voor stap de beste eenheidscel voor een bepaalde structuur?
2. (a) Wat is een rooster?
   (b) En wat is een reciprook rooster?
3. Als je wil nagaan of een bepaalde puntgroep kan bestaan, welke stappen moet je dan achtereenvolgens ondernemen?
4. Wat bepaalt de volgorde van de symmetrie-elementen in de symbolen voor de puntgroepen? Ondersteun je antwoord ook met enkele voorbeelden.
5. (a) Waarom is tetragonaal C geen Bravaisrooster?
   (b) Hoeveel atomen heb je in een C-rooster
   (c) Wat moet gelden voor elk atoom dat aanwezig is in een C-rooster?
   (d) Bestaat er een tetragonaal A-rooster?
6. Als je een $\bar{3}$ hebt, heb je dan automatisch ook een 3? En omgekeerd?
7. Wat betekent $Pnm2_1$? En tot welk kristalsysteem behoort deze ruimtegroep?
8. Illustreer op overtuigende wijze het belang van symmetrie voor de fysische eigenschappen.
9. Leg uit in volzinnen wat het concept is van het hoofdstuk matrixkristallografie: wat is de bedoeling van wat we daar doen, hoe doen we dit, waarom is het nodig dit te kunnen doen, etc. Laat zien dat je begrepen hebt waar het allemaal om gaat.
10. Wat is het verband tussen het reciproke rooster van een materiaal en het experimentele stralenpatroon van een materiaal?
11. Welke informatie zie er allemaal vervat in een goed XRD patroon, en in welke vorm zit die informatie er telkens in (stel bvb, “de kleur van de atomen kan je zien aan de kleur van de pieken”,...)?
12. Wat is een structuurfactor? Leg dit uit in volzinnen!
13. (a) Wat is het verschil tussen een algemene en een speciale positie?
    (b) Wat is het verband tussen een speciale positie en een speciale vorm?
14. Zullen alle kristallen van een zelfde materiaal dezelfde polen hebben?
15. (a) Beschrijf de FCC en HCP structuren.
    (b) Wat zijn de streefdoelen voor het aannemen van een bepaalde structuur?
    (c) Waarom zijn er nog andere structuren dan FCC en HCP?

7.2.3 Juni 2008

Prof. Dr. J. Hadermann

1. Op onderstaande tekening, beantwoord voor A tot D telkens:
   (a) Is dit een geldige eenheidscel? Ja/neen.
   (b) Zo ja: waarom? Zo neen: waarom niet?
   (c) Zo ja: is het de best mogelijke of kan er nog een betere eenheidscel gekozen worden en hoe/waarom/waarom niet?



2. (a) Kan 5-tallige rotatie-symmetrie voorkomen in een kristal? Waarom wel/niet? 1 sluitende uitleg is voldoende.
   (b) Zou voor moleculen dezelfde redenering opgaan? Waarom wel/niet?
3. 4/mmm en 4mm: slechts 1 van deze twee is een correcte verkorte schrijfwijze voor de puntgroep 4/m 2/m 2/m. Welke en waarom die wel en de andere niet?
4. Wat is het verschil tussen 23 en 32. leg ook hoe je dit kan zien zonder dat je dit verschil van buiten had hoeven te leren.
5. $2\bar{3}\bar{3}$ is gelijk aan een andere puntgroep die we wel behouden hebben al een van de 32 puntgroepen. Welke en leg stap voor stap uit hoe je tot die equivalentie komt.
6. (a) Wat is het verband tussen een $\bar{4}$-as en een 2-as? Voeg een tekening toe.
   (b) Wat is het verband tussen een 4_2-as en een 2-as? Voeg een tekening toe.
7. Waarom staat er tussen de 14 Bravaisroosters geen:
   (a) kubisch A?
   (b) orthorhombisch A?
8. Leg uit waarom het geven van één enkele brekingsindex in optica voor een kristallijn materiaal een benadering is in veel gevallen.
9. Leg uit wat het verband is tussen symmetrie en het feti dat vaak bepaalde fysische eigenschappen slechts optreden in een materiaal afkoeling of opwarming voorbij een bepaalde kritische temperatuur.

10. Wanneer je een diffractiepatroon (X-stralen zowel als elektronendiffractie) indexeert, zal je vaak merken dat verschillende reflecties op systematische wijze ontbreken.
    (a) Wat is de oorzaak hiervan?
    (b) Hoe kan je dit in je voordeel gebruiken om iets te weten te komen over de structuur?
11. Waarom kan je uit een X-stralendiffractiepatroon niet het onderscheid maken tussen bijvoorbeeld de puntgroepen 2, m en 2/m?
12. Leg uit op welke manier matrixkristallografie nuttig is bij de studie van nieuwe materialen
13. Wat is het verband tussen de grootte van het centrale ion in een polyëder en het co¨ordinaatgetal van dat ion?
14. Wat is het verschil tussen een speciale pool, een speciale positie en een speciale vorm? Is er een verband tussen de 3? Of is er geen verschil?
15. Zijn er voor verschillende kristallen gegroeid van eenzelfde materiaal
    (a) altijd evenveel polen? Waarom?
    (b) vaste plaatsen voor de polen met bepaalde indices? Waarom?

7.3 Oefeningen

7.3.1 Juni 2005

Lessen gegeven door Bert Willems, examen door Prof. Dr. J. Hadermann

1. Noteer of u de structuur met *blauw-rood-grijs* of de structuur met *oranje-rood-grijs* hebt.[1]
    (a) Beschrijf deze structuur met *minimale* en voldoende informatie, zodanig dat een willekeurig ander persoon deze structuur uit uw beschrijving kan reconstrueren. Duid op de foto aan welke eenheidscel u gekozen hebt en noteer er het nummer 1 bij.
    (b) Zoek nu nog een tweede eenheidscel, verschillend van degene waarmee u hebt gewerkt in vraag (a). Duid op de foto aan welke eenheidscel u gekozen hebt en noteer er het nummer 2 bij.
    (c) Tot welk kristalsysteem behoort deze tweede eenheidscel?
    (d) Welke centering heeft deze tweede eenheidscel?
    (e) Bepaal de transformatiematrix van uw eerste naar uw tweede eenheidscel.
2. Noteer op uw blad of u het *grijs-rode* of het *grijs-gele* model hebt.
    (a) Teken de projectie van de eenheidscel, geprojecteerd op het *ab*-vlak. De assen en de eenheidscel zijn aangeduid op de foto. Gebruik de notaties zoals in de internationale tabellen en maak een duidelijk verschil tussen de gele of rode en de grijze atomen.
    (b) Teken datzelfde grondvlak, maar duidt er nu alle symmetrie-elementen op aan die u in de structuur vindt.
    (c) Bepaal de ruimtegroep van deze structuur.

[1] Bij vraag 1 en 2 kan de student 20min. beschikken over een structuur om de vragen op te lossen.

(d) Bepaal de structuurfactor van deze structuur.

(e) Als we van dit materiaal een X-stralendiffractiepatroon zouden maken, welke reflectievoorwaarden zouden daarin dan aanwezig zijn?

(f) Toon ook met uw gevonden structuurfactor de aanwezigheid aan van deze reflectievoorwaarden.

3. Gebruik voor deze vraag het X-stralendiffractiepatroon.

   (a) Bepaal uit het XRD patroon de celparameters van de eenheidscel van het onderzochte materiaal. Gebruik $CuK_\alpha = 1,54\text{Å}$.

   (b) Bepaal de reflectievoorwaarden voor dit materiaal.

   (c) Bepaal de ruimtegroep van dit materiaal.

4. Teken op het Wulff-net dat u gegeven werd de voornaamste polen (d.w.z. de polen met $h, k, l \leq 1$) van het onderstaand materiaal. Duid ook de zonecirkels aan waarvoor geldt $u, v, w \leq 1$.

   Ruimtegroep: $P\,\frac{4_2}{m}\,n\,m$

   $a = 4,59\text{Å}$

   $c = 2,96\text{Å}$

   Basis: Ti op $(0,0,0)$ $\quad$ O op $(0,3;0,3;0,3)$

Dankwoordje

Met dank aan:

- Alle vorige WINAK mentoren die aan deze tuyaux hun steentje hebben bijgedragen.
- Mijn medementoren Elke en Christophe voor de leuke samenwerking.
- Al de mensen die mij hun examenvragen hebben bezorgd en zo deze nieuwe Tuyaux mee hebben mogelijk gemaakt.
- De mensen die me mijn schrijffouten en typfouten vergeven en doormailen naar julie@winak.be.