Calculus (Informatica)

Calculus	
Richting	Informatica
Jaar	1BINF

Bespreking

Theorie

Sinds 2018 wordt dit vak gegeven door professor Werner Peeters, een trouwe Coca-Cola-fan. Hij hecht er enorm veel belang aan dat je in zijn les zit, dus zeker doen. Dit gaat je ook helpen met te weten welke bewijzen je wel en niet uit zijn cursus moet kennen, want op het einde van het jaar krijg je hier geen overzicht van. Alle theorie en bewijzen staan wel uitbundig beschreven in zijn cursus (notities van de lessen zijn al een goede samenvatting).

Sinds 2017 werd dit vak overgenomen door professor Sonja Hohloch, Een duitse vrouw die soms moeilijk te verstaan is. Ze heeft een cursus die te vinden is op haar webpagina.

Sinds 2013 werd dit vak overgenomen door professor Tom Vroegrijk. Iemand die duidelijk, gestructureerd te werk gaat en altijd te hulp schiet wanneer nodig. De theorie is tamelijk beknopt, to the point. Er is geen cursus beschikbaar zoals bij Discrete Wiskunde of handgeschreven notities zoals bij professor David Eelbode, je zal dus zelfs verantwoordelijkheid moeten dragen om de theorie op te schrijven en extra uitleg vragen wanneer hij te beknopt dingen opschrijft.

Sinds 2010 werd dit vak gegeven door professor Eelbode, een jonge energiekeling die met plezier (en goed!) les geeft. Het is aan te raden zijn lessen te volgen aangezien zijn lessen heel visueel ondersteund worden op het bord (zie pinguïns, hamsters,...). Ook zijn uitleg is heel goed dus als je last hebt om het handboek te volgen kan je gerust op je notities vertrouwen.

Oefeningen

Sinds 2018 geeft professor Peeters zowel de theorie als de oefeningen. Eenzelfde les kan dus zowel een stuk theorie als een oefeningengedeelte hebben. Je kan je oefeningen in LaTeX uittypen en online zetten om twee bonuspunten te krijgen voor dit vak, wat zeker de moeite is.

Sinds 2017 worden de oefensessies gegeven door Wouter van den Haute. Zijn lessen zijn zeker de moeite om naar te gaan voor de oplossingen van de oefeningen te hebben en te begrijpen hoe je ze moet oplossen, een beknopte oplossing verschijnt ook altijd online maar dit is vaak niet genoeg.

De oefensessies van dit vak worden gegeven door Tom Vroegrijk. Als je geen virtuele versies van zijn werkbladen hebt moet je er zelf eens achter vragen want hij heeft ze wel degelijk. Oplossingen van oefeningen worden weinig op het bord geschreven (en als dit al gebeurt, vrij summier) dus is het aan te raden bij deze praktijklessen aanwezig te zijn want ze worden meestal mondeling besproken. Oplossingen van de oefeningen worden na elke oefensessie online beschikbaar gemaakt, echter zijn dit geen werkwijzen, wat essentieel is. Lessen volgen is de boodschap!

Puntenverdeling en Examen

Theorie: 10/20. Oefeningen: 10/20. Taken: 2/20

Theorie

Er is een apart theorie examen, dat uit 3 vragen bestond: een vraag uit hoofdstuk 2 of 3, een uit hoofdstuk 4 of 5 en een uit hoofdstuk 6 of 7. Voor hoofdstuk 1 valt er dus geen theorie te kennen.

Oefeningen

Doorheen het jaar kan je de oefeningen die je in de les hebt gemaakt, uittypen in LaTeX en uploaden, om 2 bonuspunten te krijgen, zeker de moeite waard dus. Het oefeningenexamen in 2018-2019 bestond uit 14 vragen en iedere vraag stond op 10 punten. De moeilijkheidsgraad van de oefeningen op het examen komt overeen met de moeilijkheidsgraad van de oefeningen in de cursus.

Examenvragen onder prof. Werner Peeters

Academiejaar 2021 - 2022 - 1e zittijd

Theorie

1.
    - Gegeven een functie f:[a,b]→R geef de definities van convexiteit (Hint: 4 definities)
    - Hoe los je een integraal v/d vorm ∫sinnxcosmxdx op? Geef alle gevallen en geef van alle gevallen een voorbeeld.
    - Bewijs op zo veel mogelijk manieren dat de reeks ∑+∞n=11n divergent is en geef voor elk gebruikt criterium ook het bewijs. (Hint: er zijn er drie)
2.
    - Geef de 3 middelwaardestellingen (+ bewijs), geef hier ook een toepassing van. (+ bewijs)
    - Hoe los je integralen v/d vorm ∫dz(z2+1)n op?
    - f:R2→R, geef de definitie van differentieerbaarheid, afleidbaarheid en continuiteit. Geef ook de verbanden, bewijs de verbanden en geef tegenvoorbeelden.
3.
    - Bewijs: Alle veeltermen zijn differentieerbaar
    - F is riemann integreerbaar f∈R([a,b])

      Geef een niet riemann integreerbare functie
    - Taylorpolynoom Taylorreeksen Stelling van Taylor (2 gedaanten, 1 bewijs)
    - Formule van taylor
4.
    - Zet in juiste volgorde: f'(c) =0, f heeft een extremum in c, f wisselt van stijgen naar dalen of omgekeerd + tegenvoorbeelden in omgekeerde richting
    - Geef en bewijs de hoofdstelling van integraalrekening
    - Geef de kettingregel voor meerdere veranderlijken +voorbeeld
5.
    - "Alle veeltermen zijn continu", bewijs dit
    - Regel van Fuss 1, 2 en 3; Leg uit en geef voorbeelden
    - f: R^2 -> R ; continu, afleidbaar en differentieerbaar, Leg uit.; Geef de verbanden en geef voorbeelden.
6.
    - "Kettingregel in R"
    - "alle oneigenlijke integralen met correcte denonces"
    - "wat is een tailorpolynoom"
7.
    - Kettingregel in R
    - Geef de hoofdstelling van de integraalrekening
    - Fourierreeksen

Academiejaar 2020- 2021 - 2de zittijd

Opmerking: Omdat dit examen viel in de quarantaineperiode kreeg iedereen hetzelfde examen en was er één extra vraag.

Theorie

1. Zet volgende stellingen in logische volgorde, bewijs de implicatiepijlen en geef tegenvoorbeelden in de andere richting.
    1. f heeft een extremum in c
    2. $f'(c)=0$
    3. f gaat in c over van stijgen op dalen of omgekeerd.
2. Leg de regel van Fuss uit en geef voorbeelden voor gevallen 1, 2 en 3.
3. Geef de correcte definitie van een Taylorpolynoom van graad n en bewijs dat deze voor een n-maal differentieerbare functie $f:I\to R$ uniek is.
4. Zij $f:R2\to R$
    1. Geef de definities van partieel afleidbaar, afleidbaar en differentieerbaar in een punt $(a,b)\in R2$
    2. Bewijs dat diferentieerbaar afleidbaar impliceert en geef een tegenvoorbeeld voor het omgekeerde.

Oefeningen

Het oefeningenexamen met oplossing vind je terug in dit bestand:

Academiejaar 2020- 2021 - 1ste zittijd

Opmerking: Omdat dit examen viel in de quarantaineperiode kreeg iedereen hetzelfde examen en was er één extra vraag.

Theorie

1. Geef en bewijs de middelwaardestellingen van Rolle, Lagrange en Cauchy. Let ook op de correcte dénonces van de stelling!
2. Geef de correcte definitie van de oneigenlijke integralen van de eerste soort voor een functie $f:[a,+\infty[\to R$ en $f:]-\infty,+\infty[\to R$. (hint: ze zijn verschillend)
3. Bewijs op z veel mogelijk manieren dat de reeks ∑+∞n=11n divergent is en geef voor elk gebruikt criterium ook het bewijs. (hint: er zijn er drie)
4. Hoe vindt men de extrema van een functie van twee veranderlijken en hoe bepaalt men of dit een minimum, maximum of zadelpunt is? Geef van elk van deze drie gevallen een voorbeeld.

Oefeningen

Het oefeningenexamen met oplossing vind je terug in dit bestand:

Academiejaar 2019- 2020 - 2de zittijd

Opmerking: Omdat dit examen viel in de quarantaineperiode kreeg iedereen hetzelfde examen en was er één extra vraag.

Theorie

1. Geef de correcte definitie van convexiteit van een functie f:[a,b]→ℝ alsook de equivalente gedaanten hiervan
    1. in het algemeen geval
    2. als de functie 1 keer differentieerbaar is
    3. als de functie 2 keer differentieerbaar is. Bewijs al deze equivalenties.
2. Geef de algemene oplossingsmethode voor integralen van de vorm sinmxcosnxdx. Maak een onderscheid volgens het even/oneven zijn van m en n, en illustreer elk van de gevallen met een voorbeeld.
3. Geef de correcte definitie van een Taylorpolynoom van graad n, en bewijs dat deze voor een n maal differentieerbare functie f:I→Runiek is.
4. Geef een overzicht hoe we de extrema vinden van een functie f:R2→R. Illustreer elk van de gevallen met een voorbeeld.

Oefeningen

1. Bereken de nulpunten en de multipliciteiten van de volgende (gegeven) veelterm door Horner. Hint: er is één reëel nulpunt bijA(z)=z3−2z2+(6i−1)z−6−18i.
2. Bereken de volgende limieten zonder de regel van de l'Hôpital; maak waar nodig een onderscheid tussen linker- en rechterlimiet of +∞ en −∞.
    1. limx→∞(x−2x−3)2x+1
    2. limx→1x3+x2+x−3x4−3x3+3x2−x
    3. limx→2√x+7−32−√x+2
3. Bereken de tweede afgeleide van f(x)=ln(lnx).
4. Bereken ∫4x3+x2−x−1dx.
5. Bereken de oppervlakte van de letter L, gegeven door de poolkromme r(θ)=4θ2−2θπ+π in het eerste kwadrant. Maak eerst een tekening.
6. Bereken de fourierreeks van de functie \left\{ \begin{matrix}0 \text{ als } x \in [-\pi, 0] \\ 2 \sin x \text{ als } x \in [0, \pi] \end{matrix}\right.
7. Ga na of de volgende functie f:R2→R in 0=(0,0) continu, partieel afleidbaar, afleidbaar, differentieerbaar is: NOG SYNTAX KENNEN VOOR DEZE FORMULE

Academiejaar 2019- 2020 - 1ste zittijd

<u>Opmerking:</u> Omdat dit examen viel in de quarantaineperiode kreeg iedereen hetzelfde examen en was er één extra vraag.

Theorie

1. Geef de drie middelwaardestellingen (Rolle, Lagrange en Gauchy) met bewijs.
2. Hoe los je een integraal van de vorm ∫p+qx(ax2+bx+c)ndx met D < 0 op? Leg de Regel van Fuss IV uit (en bewijs).
3. Geef de somformules van een meetkundige- en rekenkundige rij + geef van beide een voorbeeld.
4. Geef de definitie van partiële afgeleide, richtingsafgeleide, totale afgeleide en gradient + bewijs ook continu impliceert afleidbaarheid en geef een tegenvoorbeeld hiervan.

Oefeningen

Het oefeningenexamen vind je terug met oplossingen in dit bestand: Bestand:INF CALC 1920 1.pdf

Academiejaar 2018 - 2019 - 2de zittijd

Theorie

1. Leg uit: oneigenlijke integralen
2. Leg uit: f convex
3. Leg uit: fourierreeksen

1. Bewijs dat alle veeltermen continu zijn in R (m.a.w. bewijs dat constante functies, lineaire functies, de som van functies, het product van functie en f komt na g continu is)
2. Bewijs op 3 verschillende manieren waarom de reeks 1n divergent is.
3. Geef de hoofdstelling van de integraalrekening en bewijs.

1. Geef en bewijs de middelwaardestellingen.
2. Leg uit: Net tot riemann.
3. Bewijs op zo veel mogelijk manieren dat de reeks 1n2 convergeert.

Oefeningen

Het oefeningenexamen vind je terug met oplossingen in dit bestand: Bestand:INF CALC 1819 2.pdf

Academiejaar 2018 - 2019 - 1ste zittijd

Theorie

Bij het theorie-examen schrijft de prof drie vragen op het bord, respectievelijk van hoofdstuk 2 of 3, 4 of 5 en 6 of 7. Je krijgt zeker genoeg tijd om hierover na te denken. Per vraag die af is wordt er gevraagd om even langs te gaan voor eventuele opmerkingen of bijvragen.

1. Geef de drie middelwaardestellingen met bewijs en geef hier een intelligente toepassing van.
    1. Bijvraag: Bewijs deze toepassing. (L'Hôpital)
2. Geef de definitie van de oneigenlijke limiet f:[a→∞[
    1. Bijvraag: Geef een voorbeeld van een divergente en convergente oneigenlijke integraal van deze vorm.
3. Bewijs op zoveel mogelijk manieren dat ∑∞i=11n divergent is.

1. Geef van cyclometrische functies de definitie, rekenregels en de bewijzen van hun afgeleiden.

2. Hoe los je een integraal van de vorm ∫p+qx(ax2+bx+c)ndx met D < 0 op? Leg de Regel van Fuss IV uit (en bewijs).
    1. Bewijs is redelijk onduidelijk, want tijdens de les hebben wij geen bewijzen voor de regels van Fuss gezien. Waarschijnlijk wordt hiermee eerder "toon aan" bedoeld.
3. Geef de Definitie voor partieel afleidbaar, de afgeleide en differentieerbaar voor een functie F:R2→R.

1. f gaat van stijgend naar dalend of omgekeerd, f bereikt een extremum, f′(c)=0. Zet in de juiste volgorde met de juiste pijlen en geef tegenvoorbeelden.
2. Wanneer is f op [a, b] Riemann integreerbaar? (net, selectie, ondersom/bovensom, onderintegraal/bovenintegraal)
3. Wat is een fourierreeks? Leg uit met even/oneven functies. Leg ook fouriercoefficienten uit. Pas dit allemaal toe op |x|.

1. De som, het product en het quotiënt van afleidbare functies zijn afleidbaar. Geef de definities hiervoor en bewijs.
2. Geef en bewijs de hoofdstelling van de integraalrekening.
3. Neem de functie f:R2→R.
    1. Geef de definities voor afleidbaarheid, differentieerbaarheid en partiële afgeleide.
    2. Zet de pijlen tussen partieel afleidbaar, afleidbaar en differentieerbaar in de juiste volgorde.
    3. Bewijs deze pijlen en geef ook tegenvoorbeelden.

1. Geef en bewijs alle lemmas die bewijzen dat een veelterm continu is.
2. Geef en bewijs de hoofdstelling van de integraalrekening.
3. Geef volgende dingen van Taylor: alle stellingen, verschil tussen reeks en polynoom (voor reeks is er een analytische functie nodig), de restterm van Taylor, de restterm van Lagrange en bewijs Taylorpolynoom en een van de twee resttermen.

1. Convex en concaaf: Geef de ϵ−δ-definities, andere notaties en een bewijs hiervoor.
2. Hoe los je integralen van de vorm ∫px+qax2+bx+xdx op?
3. Bewijs op drie manieren dat \dfrac{1}{n^2} convergent is. (twee manieren hiervoor waren met convergentiecriteria, de derde manier was met behulp van fourierreeksen)

Andere Richtingen

Wij waren het eerste jaar dat prof. Peeters had voor calculus, dus nog lang niet alle theorievragen staan hierop. We hebben wel gemerkt dat er opvallend veel vragen overeen kwamen met die uit andere richtingen, dus kan het zeker de moeite waard zijn om eens hiernaar te kijken: Bestand:CALC-theorievragen-andere.pdf

Oefeningen

De prof heeft zelf een modeloplossing voor het oefeningenexamen gepubliceert. Deze is te vinden op Blackboard of kan je hier raadplegen: Bestand:Calculus 18 1INF z1.pdf

Voorbeeldvragen

Omdat we het eerste jaar waren dat hem had en dus nog geen voorbeeldexamens hadden, heeft de prof. per hoofdstuk een paar voorbeeldvragen opgesteld die je hier kan terugvinden:
Bestand:INF CALC 2019 Examenvragen hoofdstuk 7.pdf
Bestand:INF CALC 2019 Examenvragen hoofdstuk 6.pdf
Bestand:INF CALC 2019 Examenvragen hoofdstuk 5.pdf
Bestand:INF CALC 2019 Examenvragen hoofdstuk 4.pdf
Bestand:INF CALC 2019 Examenvragen hoofdstuk 3.pdf
Bestand:INF CALC 2019 Examenvragen hoofdstuk 2.pdf
Bestand:INF CALC 2019 Examenvragen hoofdstuk 1.pdf

Examenvragen onder prof. Sonja Hohloch

Puntenverdeling en Examen

Theorie: 8/20. Oefeningen: 8/20. Taken: 4/20

Theorie

Er is geen apart theorie examen, de theorie wordt vooral gevraagd als toepassing. In 2017-2018 stond 14/60 punten op letterlijke theorie vragen zoals 'bewijs stelling x' en dus nog 16 punten op indirecte theorie vragen.

Oefeningen

Doorheen het jaar zijn er 6 taken, zorg dat je deze op tijd afgeeft aan Wouter want ze staan wel degelijk op punten! De taken hebben meestal 3 eenvoudigere vragen en dan een 4e heel moeilijke vraag, het is zeker aangeraden om hier iets op te antwoorden ook als je niet weet wat te antwoorden, want zelfs al trekt het antwoord op niets krijg je meestal er nog wel een punt voor. Als je de taken kon maken doorheen het jaar (buiten telkens vraag 4) dan zou het examen zelf ook moeten lukken, het grootste deel van de examen vragen is van het niveau van vraag 1-3. (Het kan dat in de volgende jaren vraag 4 niet meer onmogelijk gaat zijn want de assistent heeft een van de lessen aan ons gevraagd waarom bijna niemand die vraag invult, dus hopelijk voor jullie is deze vraag niet meer onmogelijk.)

Examenvragen

Vragen over theorie en oefeningen worden door prof. Sonja Hohloch niet op twee verschillende momenten gesteld. Het examen bestaat uit 6 hoofdvragen, onderverdeeld in kleinere vragen, die telkens op 10 punten staan.

Academiejaar 2017 - 2018 - 1ste zit

Vraag 1: Rijen en reeksen

1. Beschouw 2 rijen (an)n en (bn)n met limn→∞an=limn→∞bn=A. Toon aan dat er een N∈N bestaat zodat voor alle n≥N geldt dat |an−bn|<1.
2. Convergent, absoluut convergent of divergent + bewijs.
    1. ∑∞n=1nnn!
    2. ∑∞n=0(−1)n3√n2+1xn met x∈R
3. Waar / Niet waar + uitleg.
    1. Als limn→∞|an+1an|=2, dan is de convergentiestraal van ∑∞n=1anxn gelijk aan 2.
    2. Als limn→∞n√|an|=2, dan is de convergentiestraal van ∑∞n=1anxn gelijk aan 1/2.
    3. Toon aan dat, als x∈R een adherentiepunt van (xn)n∈R is, er een deelrij (xnk)k van (xn)n bestaat die naar x convergeert.
    4. Heeft de rij gegeven door xn:=5+nn2+ln(5n)−cos(en−42n) een adherentiepunt? Leg uit.

Vraag 2: Continue functies

---

1. Geef en bewijs de **tussenwaardestelling**
2. Heeft de functie f:R→R,f(x):=2x3−x2+5 nulpunten? Leg uit.
3. Bereikt de functie f:R→R,f(x):=x2sinh(x)+ex5 een maximum en/of minimum in het interval [1, 2]? Leg uit.
4. Wat zijn de complexe/reële oplossingen van de vergelijking z3=−1?

Vraag 3: Differentiaalrekening

---

1. leid af, waar deze bestaat
    1. f(x):=3(5x2+sin(2x))3/2
    2. f(x):=x2arctan(5x)
    3. f(x):=ln(cos(2x))+e9x2+8x+7
2. Bereken limx→0sin(x2)x
3. We noemen een functie f:D→R **K-Lipschitz** (met K∈R>0 als ∀x,y∈D:|f(x)−f(y)|≤K|x−y|.
   Gegeven een functie f:[0,1]→R die afleidbaar is zodat f' continu is. Toon aan dat f K-Lipschitz is en geef een afschatting voor K.
   "Hint": Gebruik 2 belangrijke stellingen uit de cursus.
4. Een printer moet een poster printen waarvan de totale oppervlakte 200 cm^2 bedraagt en die 1 cm marge heeft aan de zijkanten, 2 cm aan de bovenkant en 1.5 cm aan de onderkant. Welke afmetingen van de poster geven de grootste bedrukte oppervlakte? Bewijs ook dat dit ook echt een maximum is.

Vraag 4: Integraalrekening

---

1. Bereken ∫x4x3−x2+x−1
2. Bereken de oppervlakte van het gebied in R2 begrensd door de grafieken van de volgende functies f(x):=2x3−x2−5x en g(x):=−x2+3x

3. Stel $f,g:[a,\infty[\to R_{\geq 0}$ positieve functies die integreerbaar zijn op [a, R] voor alle $R\in R$ met a < R en zodat $f(x)\leq g(x)$ voor alle $x\in[a,\infty[$. Veronderstel verder dat $\int\infty ag(x)dx=K\in R$.
   1. Toon aan dat $\int Raf(x)dx\leq K$ voor alle $R\in R$ met $a<R$.
   2. Toon aan dat $\int\infty af(x)dx$ bestaat en eindig is met $\int\infty af(x)dx\leq K$.
   3. Geldt het vorige nog altijd als $f,g:[a,\infty[\to R$ niet meer noodzakelijk positief zijn? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld.

Vraag 5: Verschillende fenomenen

1. Waar zitten de maxima van $f:R\to R, f(x):=\sin(2\pi x+\pi 2)$?
2. Schrijf de Taylorreeks met ontwikkelingspunt a = O van de sinus op.
3. Vind een continue functie die niet differentieerbaar is en bewijs
4. Schrijf de **Stelling van Rolle** op, maak een tekening en bewijs de stelling.
5. Geef een voorbeeld voor een functie die een fixpunt heeft. Maak een tekening hiervan en leg uit hoe men meetkundig fixpunten vindt.

Vraag 6: Fourierreeksen

De formules voor Fourierreeksen waren gegeven, namelijk die van $Ff,a0(f),ak(f)$ en $bk(f)$

1. We breiden fe functie $f:[0,2\pi[\to R$ gegeven door $f(x) := 2x$ uit naar een 2π-periodieke functie $f:R\to R$ gedefinieerd door $f(x+2\pi k):=2x$ waarin $x\in[0,2\pi[$ en $k\in 2$. Bereken de Fourierreeks (F)f van f.
2. Fourierreeksen zijn met behulp van een scalair product en een orthonormaalsysteem gedefinieerd. Schrijf beide op en verklaar wat $a0(f),ak(f)$ en $bk(f)$ daarmee te maken hebben.
3. Wat kan mislopen wanneer men f door (F)f wil benaderen?
4. Gegeven een continue, integreerbare functie $f:R\to R$, dan definiëren we de bijhorende Fouriergetransformeerde $\hat{}f:R\to R$ door $\hat{}f(x):=1\sqrt{2\pi}\int+\infty-\infty f(s)e-ixsds$ waarin i de imaginaire eenheid is.
   Let op dat s en niet x de integratievariabele is.
   Toon aan dat de Fouriergetransformeerde aan volgende ongelijkheid voldoetsup$x\to R|\hat{}f(x)|\leq 1\sqrt{2\pi}\int+\infty-\infty|f(s)|ds$.

Examenvragen onder prof. Tom Vroegrijk

Academiejaar 2015 - 2016 - 1ste zittijd

Theorie

Deel 1

1. Toon met een tegenvoorbeeld aan dat de volgende bewerkingen niet kloppen:
    1. Als de linker- en de rechterlimiet van een functie f(x) een afleidbare functie is op een interval [a,b] zodat f(a)=f(b), er een c ∈]a,b[bestaat zodat f′(c)=0
    2. Als f(x) een afleidbare functie is van R naar [0,1], dan bestaat er een M>=0 zodat abs(f′(x)<=M) voor elke x∈R
2. Bewijs de productformule voor afgeleiden.
3. De stelling van Rolle zegt dat als f(x) een afleidbare functie is op een interval [a,b] zodat f(a)=f(b), er een c∈]a,b[bestaat zodat f′(c)=0
    1. Gebruik deze stelling van Rolle om de middelwaardestelling te bewijzen
    2. Toon aan dat als g(x) afleidbaar is op [1,4] zodat g(1)=−2 en g′(x)>2 voor elke x∈[1,4], er zeker geldt dat g(4)>4
4. Geef de definitie van de bepaalde integraal van een functie f(x) op een interval [a,b]. Definieer het begrip primitieve en verduidelijk met een voorbeeld.

Deel 2

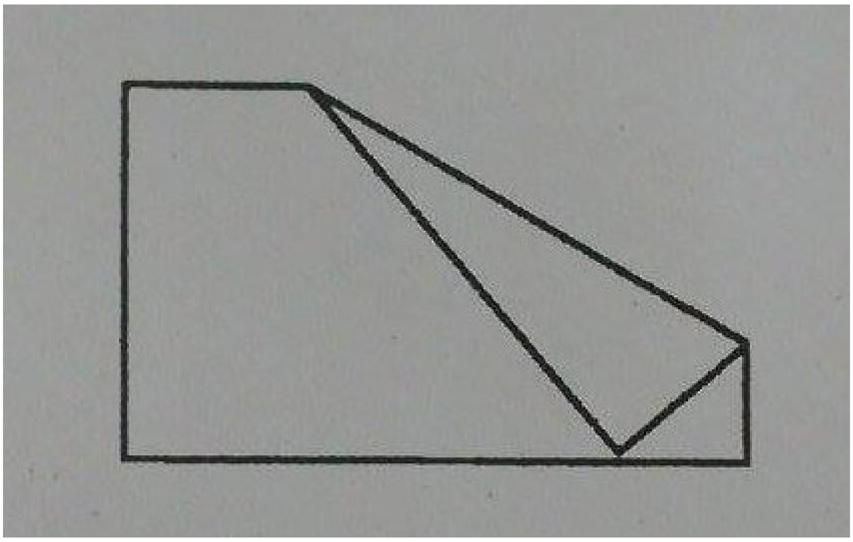
1. Leg uit wat de poolcoördinaten van een punt in het vlak zijn. Geef de formules waarmee je poolcoördinaten naar Cartesische coördinaten kunt omzetten en vice versa.
2. Leg uit hoe we lokale extrema van een functie in twee veranderlijke kunnen bepalen aan de hand van partiële afgeleiden. Definieer de Hessiaan van een functie in een punt en verklaar hoe we deze kunnen gebruiken om extrema te classificeren.
3. Laat met een tegenvoorbeeld zien dat onderstaande bewerkingen niet waar zijn.
    1. Als (xn)n en (yn)n divergente rijen zijn, dan is (xn+yn)n ook een divergente rij.
    2. Als de reeks∞∑n=0xn convergeert, dan is∞∑n=0x2n ook convergent.
4. Bewijs dat elke absoluut convergente reeks convergent is

Oefeningen

Deel 1

1. Toon aan dat de onderstaand vergelijking minstens één oplossing heeftx13=1+13x
2. De onderstaande functie heeft één verticale asymptoot en één schuine asymptoot die door de oorsprong gaat. Geef de vergelijkingen van deze asymptotenf(x)=x2√3x2+4−2x

3. Een blad papier met A4-formaat is 30 centimeter breed en 20 centimeter hoog. Stel dat ik één van de hoeken omvouw zodat de punt van deze hoek op de overstaande zijde komt te liggen. Wat is de minimale lengte van de vouw?

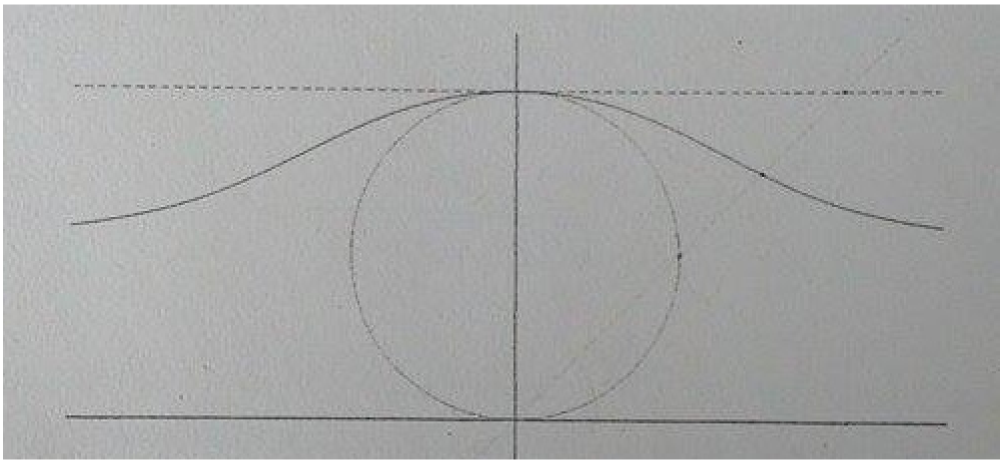


4. Bepaal de volgende primitieve$\int 4e2x-2ex+14e2x+1dx$

Deel 2

1. Zoals jullie ongetwijfeld weten is een parabool een verzameling punten die even ver liggen van een vast gekozen punt als van een vast gekozen rechte. Voor een parabool met vergelijkingy=x24a is dit gelijk aan (0,a) en heeft deze rechte vergelijking y = -a. De verhouding van de booglengte van de parabool tussen de punten die op dezelfde hoogte als het brandpunt liggen tot de afstand tussen het brandpunt en de rechte is voor elke parabool gelijk. Deze waarde noemen we de parabolische constante. Bereken deze parabolische constante.

2. Neem een a > 0 en definieer C als de cirkel met straal a en middelpunt (0, a). Een rechte R door de oorsprong snijdt de cirkel in een punt Q1 en de rechte y=2a in een punt Q2. Het midden van Q1 en Q2 noemen we P en de collectie van alle punten die we op deze manier bekomen noemen we de 'Longbow Curve'



    1. Neem de hoek die de rechte R met de x-as maakt θ. Toon aan dat Q1 de volgende coördinaten heeft(2atan(θ)1+tan2(θ),2atan2(θ)1+tan2(θ))
    2. Toon aan dat deze Longbow Curve de volgende parametervergelijking heeftx(θ)=acot(θ)+asin(θ)cos(θ) y(θ)=a+asin2(θ)
    3. Bepaal de vergelijkingen van de raaklijnen aan deze curve in de snijpunten met de rechte y=3a2
3. De Taylorreeks rond 0 van de functie 1√1+x wordt gegeven door+∞∑0(−1)k(2k)!(k!2k)2xk
    1. Gebruik de Taylorpolynoom van graad 2 van deze functie om een benadering van √32 te geven. Toon aan dat de benaderingsfout kleiner is dan 0,02.
    2. Bepaal de Taylorreeks rond 0 van arcsin(x).

Academiejaar 2014 - 2015 - 1ste zittijd

Theorie

Deel 1

1. Leg uit hoe je met behulp van limieten de verschillende asymptoten van een functie kunt bepalen. Leg ook uit hoe je in het geval van rationale functies de Euclidische deling kunt gebruiken om de vergelijking van een schuine asymptoot te berekenen.
2. De tussenwaardestelling zegt dat als f(x) continu is op R en c tussen f(a) en f(b) ligt, er steeds een x tussen a en b bestaat zodat f(x)=c. Stel nu dat f(x) een functie is op R die aan deze eigenschap voldoet? Volgt hier uit dat f(x) continu is? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.
3.
    - Geef en bewijs de productregel voor afgeleiden.
    - Leg aan de hand van een voorbeeld uit hoe we de afgeleide van een functie met een impliciet voorschrift bepalen.

4. Stel dat f(x) een dalende, positieve functie is op $[0,+\infty]$ en dat de oneigenlijke integraal $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ convergeert. Verklaar waarom je zeker weet dat de oneigenlijke integraal $\int_0^{+\infty} (f(x))^3 dx$ ook convergent is.

Deel 2

1. De volgende begrippen komen we tegen als we werken met functies in meerdere veranderlijken:
    1. Definieer partiële afgeleiden van een functie in twee veranderlijken.
    2. Leg met een voorbeeld uit hoe we partiële afgeleiden gebruiken om de vergelijking van een raakvlak aan een grafiek te bepalen.
    3. Geef de stelling van Clairaut.
    4. Verklaar hoe je het vectorieel product kunt gebruiken om uit de richtingsvectoren van een vlak een normaalvector te bepalen.
2. Stel dat $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ een reeks is met enkel positieve termen. De ratiotest zegt dat deze divergeert als $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$
   Toon dit aan. Laat met een voorbeeld zien hoe je de ratiotest kunt gebruiken om aan te tonen dat een reeks *wel* convergeert.
3.
    1. Leg uit wat de convergentiestraal is van een machtreeks.
    2. Stel dat de functie f(x) volledig wordt beschreven door de machtreeks $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+3)!}(x-3)^n$. Bepaal de vergelijking van de raaklijn in x=3.

Oefeningen

Deel 1

1. Stel dat f(x) een afleidbare functie is van R naar R zodat $f(n\pi)=0$ voor elk geheel getal $n\in Z$. Toon aan dat er een oneindig aantal getallen $z\in R$ zodat $f'(z)=\cos(z)$. De stelling van Rolle kan hierbij van pas komen.
2. Een blad papier met A4-formaat is 20 centimeter breed en 30 centimeter hoog. Stel dat ik één van de hoeken omvouw zodat de punt van deze hoek op de overstaande zijde komt te liggen. Wat is de minimale lengte van de vouw?
   Insert pic here
3. Bereken de volgende oneigenlijke integraal $\int_2^{+\infty}\frac{x-4}{(x+1)(x^2+4)}dx$

Deel 2

1. De cirkel op de tekening hieronder heeft diameter 2 en raakt de y−as in de oorsprong. De andere kromme die te zien is noemen we een cissoïde. Deze figuur heeft een bijzondere eigenschap. Neem een rechte door de oorsprong en noem de snijpunten van deze rechte met de cirkel en de lijn x=2 respectievelijk K en N. Als Q het snijpunt is van deze rechte met de cissoïde, dan geldt steeds dat de afstand tot de oorsprong O tot Q gelijk is aan de afstand van K tot N.
    1. Neem een rechte door de oorsprong met vergelijking y=tx. Bepaal de coordinaten van K en N.
    2. Toon aan dat de afstand van K tot N gelijk is aan 2t2√1+t2.
    3. Bewijs nu dat de cissoïde wordt gegeven door de volgende parametervergelijkingx=2t21+t2y=2t31+t2
    4. Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan de cossoïde in het bovenste snijpunt van de kromme met de cirkel.
       insert pic here
2. Is de volgende reeks convergent, absoluut convergent of divergent? Beargumenteer.∞∑n=1(−1)nn!(2n)n
3. Het gebied A is het gebied ingesloten door de krommen x=1,x=9,xy=1,xy=4. Bepaal de volgende meervoudige integraal door gebruik te maken van de substitutie u=√x en v=√xy∫∫A√xe√x2ydA

Academiejaar 2013 - 2014 - 1ste zittijd

Tussentijdse test

Theorie

1. Leg met voorbeelden het verschil tussen limieten en linker- en rechterlimieten uit. Tekeningen zijn niet voldoende. Geef telkens een functievoorschrift. Geef het verband tussen limieten en continuiteit.
2. Is de volgende bewering waar of vals? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld: Als f(x) een functie is van R naar R zodat |f(x)| continu is, dan is f(x) zelf ook continu.
3. Gebruik de middelwaardestelling (Mean Value Theorem) om te verklaren waarom er geen afleidbare functie f(x) op het interval [0,2] kan bestaan zodat f(0)=−1, f(2)=4 en f′(x)≤2 voor elke x∈[0,2].
4. De middelwaardestelling volgt uit de stelling van Rolle. Geef het bewijs van de middelwaardestelling en geef duidelijk aan waar je de stelling van Rolle gebruikt.
5. Wat bedoelen we met een primitieve van een functie? Leg uit en geef een voorbeeld.
6. Geef de twee fundamentele stellingen van de Calculus (je moet ze niet bewijzen).
7. Stel dat f(x) een functie is op [0,2]en dat we g(x) definieren als∫x0f(t)dt. Als g(x) een lokaal maximum bereikt in a∈]0,1[, dan heeft f(x) een nulpunt in a. Verklaar.

Praktijk

1. De onderstaande functie heeft twee asymptoten√4x2+1−2x
       Bepaal de vergelijkingen van deze twee asymptoten.

2. Gegeven de grafiek van de functiex2x−1
   - Bepaal de vergelijking van de raaklijn aan deze functie in een punt x=a.
   - Er zijn twee raaklijnen aan deze grafiek die door het punt(2,0) gaan. Geef de vergelijkingen van deze twee raaklijnen.
3. Vorig jaar konden we zien hoe Frank, Eddy en Waldek in de ongelooflijk spannende tv-serie *Thuis* een brouwerij kochten. In deze brouwerij staat een metalen ketel met de vorm van een cilinder die langs beide kanten is afgesloten door een halve bol. Als je weet dat de oppervlakte van deze ketel gelijk is aan 6 vierkante meter, wat is dan het maximale volume van deze ketel?
4. Bereken volgende integraal∫√π0x3cos(x2)dx

Theorie

Deel 1

1. Beargumenteer volgende vragen:
   - Stel dat A een deel is van R. Wat bedoelen we met een bovengrens van A? Wanneer noemen we een bovengrens een supremum?
   - Stel dat f(x) een stijgende, reële functie is en a het supremum van A. Is f(a) dan altijd het supremum van f(A)?
2. De Brouwer-fixpuntstelling zegt dat een continue functie van [0,1] naar [0,1] altijd een fixpunt heeft, i.e. een punt x∈[0,1] met de eigenschap f(x)=x. Klopt deze stelling nog steeds als we het interval [0,1] vervangen door het open interval]0,1[? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.
3. De stelling van Fermat geeft een verband tussen lokale extrema en kritieke punten. Geef en bewijs deze stelling.
4. Veronderstel dat f(x) een continue, reële functie is en dat de oneigenlijke integraal∫1∞f(x)dx convergent is. Verklaar waarom∫0∞f(x)dx ook zeker convergent is.

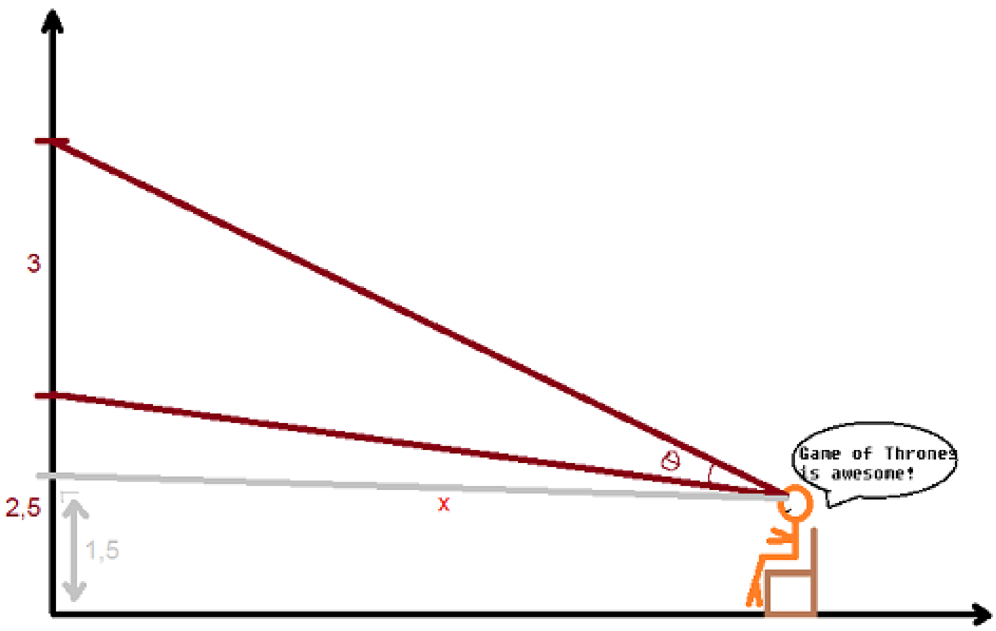
Deel 2

1. Geef de definitie van partiële afgeleiden en richtingsafgeleiden. Als een functie in meerdere veranderlijken differentieerbaar is, dan kunnen we een richtingsafgeleide berekenen met behulp van de partiële afgeleiden. Leg uit en geef een voorbeeld.
2. Geef de monotone convergentiestelling.
3. Is de volgende bewering juist of fout? Toon aan of geef een tegenvoorbeeldAls(xn)neenstijgenderijiszodatvoorelkengeldtdatxn<a,dangeldtlimnxn<a
4. Is de som van twee divergente reeksen altijd terug divergent? Beargumenteer.
5. Toon aan of leg uit
   - Wat bedoelen we met absolute convergentie van een reeks? Maak met behulp van een voorbeeld het verschil duidelijk tussen absolute en gewone convergentie.
   - Toon aan dat elke absoluut convergente reeks ook convergent is.

Praktijk

Deel 1

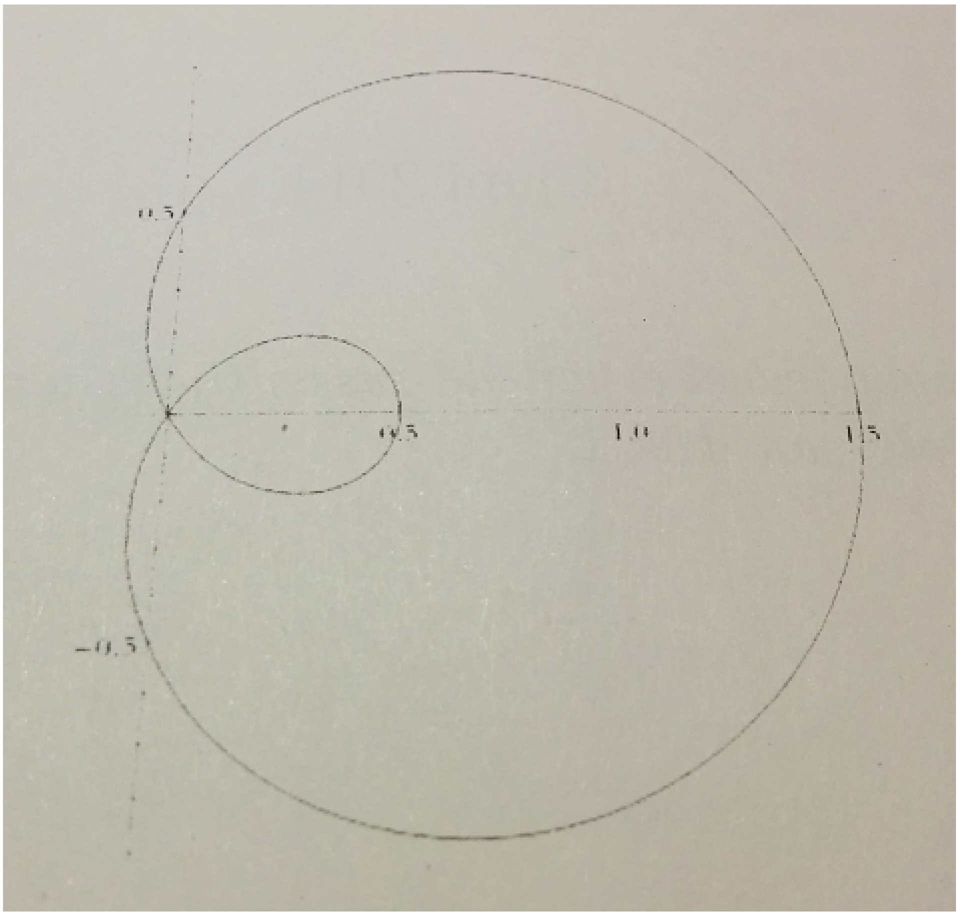
1. We noemen een punt a∈R een fixpunt van een functie f(x) als f(a)=a. Stel dat f(x) gedefinieerd is op gans R zodat f′(x) overal verschillend is van 1. Toon aan dat f(x) hoogstens één fixpunt kan hebben.
2. Een informatica-student bekijkt Game of Thrones op een groot scherm in de aula van de universiteit. Gezeten op zijn stoel is zijn ooghoogte anderhalve meter. Het scherm bevindt zich twee en een halve meter van de grond en is drie meter hoog. Hoe ver moet onze student van het scherm gaan zitten opdat de hoek die het scherm inneemt in zijn gezichtsveld maximaal is?



3. Toon aan dat de volgende oneigenlijke integraal(−1)n∫+∞0xne−(m+1)xdx gelijk is aan(−1)nn!(m+1)n+1 De eigenschappen van de Gamma-functie kunnen hierbij van pas komenΓ(t)=∫∞0xt−1e−xdx

Deel 2

1. Bepaal de oppervlakte tussen de grote en kleine lus van de onderstaande figuur. De vergelijking in poolcoordinaten van deze kromme isr=12+cos(θ)



2. Bepaal de minimale en de maximalewaarde die de functie4xy2−x2y2−xy3 bereikt op de driehoek met hoekpunten (0, 0), (0, 6) en (6, 0).
3. Geef de eerste drie termen van de Taylorreeks van de functie14√1+x rond 0. Gebruik deze veelterm om een benadering van4√34 te geven. Toon aan dat de benaderingsfout in dit geval kleiner is dan 1500.
4. De verzameling R⊆R2 is gedefinieerd als het gebied rechts van de rechte x=1 dat tussen de x-as en de grafiek van de functie 1x ligt. Bepaal de volgende meervoudige integraal∫R3x+2y(1+x)dR

Academiejaar 2012 - 2013 - 1ste zittijd

Theorie

1. Toon de volgende stelling aan: als de functie f(x) continu is op [a,b] en afleidbaar is op]a,b[dan F:[a,b]→R:x↦∫xaf(t)dt afleidbaar in]a,b[met F′(x)=f(x). (Geen lemma bewijzen)

2. Geef aan of de volgende stellingen waar of vals zijn (en verduidelijk waarom).
    - De Fourier-extensie van $f:]-L,+L]\to\mathbb{R}:x\mapsto x^3\ln(1+x^2)$ zal uit enkel cosinusfuncties bestaan.
    - Alle functies $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto f(x)$ waarvoor geldt $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ voldoen aan de volgende eigenschap $M\in\mathbb{R}^+:f(x)$ convex is $\forall x\geq M$
    - Indien de afleidbare functie $f(x)$ voldoet aan $f(0)=0$ en $f(1)=1$ dan geldt $2f'(c)f(c)-1=0$ een oplossing heeft in het open interval $]0,1[$. Hint $F(x)=f^2(x)$
3. Los volgende vragen op:
    - Geef de correcte algemene formulering van de integraaltest.
    - Illustreer de integraaltest adhv 2 zelf te kiezen reeksen (1 convergerende en 1 divergerende)
    - Wat is de betekenis van het convergeren van een oneigenlijke integraal?
4. Beschrijf in een aantal stappen hoe we de formule opstellen voor de lengte van een kromme in het vlak als die gedefinieerd wordt door $x\mapsto f(x)$ met $f(x)$ afleidbaar.
5. Toon om te beginnen aan waarom we kunnen zeggen dat $\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\ldots(|x|<1)$. Verklaar vervolgens hoe we met bovenstaande info en Taylorreeks kunnen opstellen om de waarde $\pi=4\arctan(1)$ te benaderen.
6. Gegeven: een afleidbare functie $f(x,y)$ in 2 veranderlijken met domein $D\subset\mathbb{R}^2$
    - Geef de definitie voor de richtingsafgeleide $D_uf(x_0,y_0)$ van de functie $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+ha,y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h}$ met $u\langle a,b\rangle$
    - Leg uit wat gradiënt ∇f van de functie is en geef de meetkundige betekenis van de vector.
    - Bewijs het verband tussen de max. waarde voor de richtingsafgeleide $D_uf(x_0,y_0)$ in het gegeven punt $(x_0,y_0)\in D$ en de gradiënt.

Praktijk

1. Toon aan dat de veelterm $x^3-15x+1$ drie nulpunten heeft in het interval $[-4,4]$. Hoeveel nulpunten heeft deze veelterm buiten dit interval?
2. Een man gehuld in een lange regenjas loopt 's nachts aan een snelheid van een halve meter per seconde over een recht pad door een park. De intenties van de man zijn onduidelijk, doch deze zijn voor het verloop van deze oefening ook niet van belang. Drie meter van het pad verwijderd staat een lantaarnpaal. De lamp van deze lantaarnpaal bevindt zich op vijf meter hoogte. Hoe snel neemt de lengte van de schaduw van de man toe op het moment dat hij zich op een afstand van vier meter bevindt van het punt op het pad dat het dichtst bij de lantaarnpaal ligt? De man is zelf twee meter groot.
3. Bepaal de volgende integraal $\int\frac{dx}{(e^{2x}-1)e^x}$

4. Een figuur wordt gevormd door een gelijkbenige driehoek op een rechthoek te plaatsen. De omtrek is gelijk aan 4. (De figuur is in de vorm van een huis, de 'vloer' is x, de hoogte van de 'muur' is y en de zijde van het 'dak' is z.
    - Toon aan dat de oppervlakte gegeven wordt door de functie f(x,z) die gedefinieerd als volgt2x−zx−x22+x2√4z2−x24
    - Als je weet dat de gegeven figuur een maximale oppervlakte heeft en dat dit maximum zich bevindt in een kritiek punt van de functie f(x,z), wat zijn dan de waarden van x,y en z?
5. De functie F(x) is gedefinieerd als volgt∫1+x1ln(t)t−1dt
    - Geef de Taylorreeksontwikkeling rond 0 van de functie F(x)
    - Gebruik de Taylorpolynoom van graad 3 om een benadering te geven van de volgende bepaalde integraal∫431ln(t)t−1dt
    - Bij deze Taylorreeks geldt dat de benaderingsfout met een Taylorpolynoom van graad n in een punt a kleiner is dan de absolute waarde van de daarop volgende term, geëvalueerd in het punt a. Gebruik dit gegeven om aan te tonen dat de benadering uit de vorige oefening tot op een duizendste nauwkeurig is.
6. De functie g:[−π,π]→R is gedefinieerd zodat g(x)=x3. Geef de Fourierreeks van deze functie.

Academiejaar 2010 - 2011 - 1ste zittijd

Theorie

1. Toon de volgende stelling aan: Zij de functie f continue is op [a,b] en afleidbaar op]a,b[, dan gelden voor de functie F:[a,b]→R:x↦∫xaf(t)dt volgende eigenschappen:
    - continue in [a,b].
    - afleidbaar in]a,b[en F′(x)=f(x).
2. Geef aan of de volgende stellingen waar of vals zijn (en verduidelijk je antwoord d.m.v. een (tegen)bewijs).
    - f bereikt een maximum in x=a, de functie f wordt hier gegeven door de taylorpolynoom:
    - T5(f,a)(x)=−1+3(x−a)2−(x−a)32+12(x−a)5
    - De volgende integraal is convergent:
    - I:=∫inf1dx√x+√x.
3. Verklaar(d.m.v. een tekening) waarom f1(x)=log0.5(x) en f2(x)=x5 zeker een snijpunt hebben. Met welke stelling (uit de cursus) zou je dit snijpunt kunnen benaderen + leg uit.
4. Onderzoek de convergentie, gebruik hiervoor de majorantenregel en de integraaltest en geef duidelijk weer waar je deze gebruikt.

    S:=∑infn=12n2+4n3+1
5. Gegeven een functie f met Df=]−π,π[
    - Geef de formule voor de fourierreeks (Volledig!).
    - Geef het convergentiegedrag.

1. f(x,y) met Df∈R2
    - Gegeven →u(a,b) geef voor de richtingsafgeleide Duf(x0,y0) in het punt (x0,y0)∈D de definitie als limiet.
    - Leg uit wat de gradiënt van de functie is, en geef de formule die het verband uitdrukt tussen ▽f en Duf(x0,y0) (zonder bewijs).
    - Leg uit hoe je de maximale waarde voor de richtingsafgeleide Du(x0,y0) in het gegeven punt (x0,y0) zou bepalen.

Praktijk

1. Schets f(x)=(x+0.5)ex2 en bespreek de functie in de volgende gevallen:
    - Extrema
    - Limieten naar oneindig
    - Asymptoten
    - Stijgen en dalen
    - Convex/Concaaf
    - Snijpunten met x-en y-as.
2. Los volgende integraal op:

    ∫x3cos2x2
3. Bepaal het volume dat ontstaat bij omwenteling rond de x-as tussen x=0,x=1 van f(x)=ax3−ax+1

    Voor welke waarde voor a is het volume minimaal
4. Benader 3√32 tot op een honderdste nauwkeurig.
5. f(x,y)=2ycos(x)−2y2−cos(2x)+y

    Bespreek alle kritieke punten voor de volgende functie. (De formules voor de voorwaarden worden gegeven)

Academiejaar 2009 - 2010 - 1ste zittijd

Theorie

1.
    - Gebruik een tekening om te illustreren wat de middelwaardestelling van de integraalrekening zegt. (zonder bewijs)
    - Gebruik voorgaand resultaat om dan volgende stelling te bewijzen: Als de functie f continue is op [a,b] en afleidbaar op]a,b[, dan gelden voor de functie F:[a,b]→R:x↦∫xaf(t)dt volgende eigenschappen:
        - continue in [a,b].
        - afleidbaar in [a,b[en F′(x)=f(x).
    - Illustreer ook bovenstaand resultaat m.b.v. een tekening.

2. Zijn volgende uitspraken waar of vals, en waarom?
    - Als voor een (voldoende afleidbare) functie f:D→R geldt dat f″(a)=0, met a∈D dan is a een buigpunt.
    - Als voor een functie f:[0,10]↦R geldt dat f(2)<0 en f(3)>0 dan bestaat er een waarde c∈]2,3[waarvoor geldt f(c)=0.
    - Als f(x)>g(x) voor alle x∈R dan is (f−g) een stijgende functie op R.
    - Indien p>1, dan zal volgende integraal convergeren∫∞acos2(x)x2(ln(x)))dx.
3. Bepaal volgende integralen, en verklaar (waar nodig) heel kort je antwoord.
    - ∫10ddxe−x2dx
    - ddx∫10e−x2dx
    - ddx∫x0e−t2dt
4. Gegeven een afleidbare functie f(x) met domein D⊂R, waarvoor f′(x) continue is
    - Leg in je eigen woorden uit hoe we de formule hebben opgesteld voor de zijdelingse oppervlakte van het lichaam dat ontstaat door deze grafiek rond de x-as te wentelen.
    - Wat verandert er aan de redenering als we het lichaam rond de Y-as gaan wendelen.
5. Gegeven de functie f(x,y) in 2 verranderlijken met domein D⊂R2
    - Leg uit wat de richting →u(a,b) is, en geef voor de richtingsafgeleide Duf(x0,y0) in het punt (x0,y0)∈D als limiet.
    - Leg uit wat de gradiënt van de functie is, en geef de formule die het verband uitdrukt tussen ▽f en Duf(x0,y0) (zonder bewijs).
    - Leg uit hoe je de maximale waarde voor de richtingsafgeleide Du(x0,y0) in het gegeven punt (x0,y0) zou bepalen.
    - Verklaar hoe ▽f grafisch geïnterpreteerd zal worden.

Praktijk

1. Ter gelegenheid van het 500-jarig bestaan van de gatenkaas Eulertaler besluit een Zwitserse fabrikant een speciale versie voor echte wiskundigen op de markt te brengen: sneetjes kaas in de vorm van vijfhoeken, die worden geconstrueerd door op een rechthoek (basis b en hoogte h) een gelijkbenige driehoek te plaatsen (met 2 gelijke zijden z). Uiteraard wil men de kaas zodanig fabriceren dat het vervelende randje plastic rond de sneetjes, dat een constante lengte P heeft, een maximale hoeveelheid kaas omsluit.
    1. Stel een functie op in 2 veranderlijken die de totale oppervlakte van de 5-hoek voorstelt. (Hint: gebruik (b,z) als onafhankelijke variabelen)
    2. Bepaal de afmetingen van de 5-hoek in functie van P, die ervoor zorgen dat de oppervlakte van de vijfhoekige sneetjes geoptimaliseerd wordt.
2. Stel een Taylor-polynoom op van graad 4 dat je kan gebruiken om 3√7,97 te benaderen, door een relevante functie f(x) te ontwikkelen rond een geschikt punt a∈R.
3. Bereken de lengte van de curve y=f(x) in een vlak met x∈[π4,π3] en f(x)=∫xπ4√arctan(2t−1)dt.
4. Bepaal de volgende limiet in 2 veranderlijken lim(x,y)→(0,0)x2y4x4+y8.

5. De geluidssterkte op Graspop wordt gegeven door de functie $G(x,y,z)=1001+x2+y2+2*z2$ met (x,y,z) de positie tegenover de luidsprekers. Benny de metal-kever bevindt zich ergens rechts vooraan het podium, op positie $(2,3,-1)$. Daar staat de muziek toch iets te stil naar zijn zin, en daarom besluit hij een paar stappen dichter te komen. In welke richting moet hij wandelen opdat de geluidsverandering maximaal zou zijn?
6. Schets de grafiek van de functie $f(x)=2-x$. Indien nodig kan je hierbij gebruik maken van het feit dat $\ln(2)\approx 0,7$.
7. Bepaal volgende limieten in 1 veranderlijke:
   1. limx→11+ln(x)2x−1
   2. limx→2f(2x+2)−f(3x)x2−4 met f(x) afleidbaar in R.
8. Bepaal volgende primitieve ∫√2x−1+x32x+3dx.
9. Beschouw de vaste punten a(0,2) en b(3,5) in het vlak, alsook het variabel punt p(x,0). Construeer dan de lijnstukken |an| en |bn|. Hoe moet je dan de waarde $x\in[0,3]$ kiezen opdat de hoek θ tussen de lijnstukken maximaal zal zijn. (Hint: Maak op gepaste wijze gebruik van de formule tan(α+β)=tan(α)+tan(β)1−tan(α)tan(β).

Academiejaar 2009 - 2010 - 2de zittijd

Theorie

1. Geef de stelling van Rolle en bewijs ze.
2. Geef de 2 hoofdstellingen van de Calculus (zonder bewijs).
3. Waar of vals -- en waarom (kort bewijsje of tegenvoorbeeld)
   1. Als f(x)=|x2−x| dan is f′(x)=|2x−1|.
   2. Indien f(x)=Tn(f,a)(x)+Rn(f,a)(x) met |Rn(f,a)(x)|\seq1/(n2tan(1/n))(x−a)(n+1) (voor alle |x−a|<1). Dan geldt dat de Taylor-reeks convergeert voor |x−a|<1.
   3. Stel dat f(x)=Σnk=0c2kx2k, met c2k∈R0, een willekeurig polynoom is van graad n≥4. Indien je weet dat f′(1)=0 en f"(1)>0, dan geldt er dat f(x) een lokaal maximum heeft voor x=−1.
4. Gegeven een afleidbare functie f(x), met domein D⊂R, waarvoor f′(x) continu is. Leg dan uit in eigen woorden hoe we de formule hebben opgesteld voor de booglengte van de kromme y=f(x).
5. Dezelfde vraag als de laatste van de theorie uit eerste zit.

Praktijk

1. Beschouw 3 punten in de ruimtep1(a,0,0),p2(0,b,0),p3(0,0,c) met (a,b,c)>0 Als we de punten verbinden ontstaat een piramide in het eerste octant, met de oorsprong als top.
    1. Bewijs dat de inhoud van dit lichaam gegeven wordt door V=16abc door gebruik te maken van een volume-integraal. Gebruik daarvoor de formule die we hebben opgesteld voor niet-omwentelingslichamen. HINT: bereken de oppervlakte van een snede op hoogte z=z0 (met z0 een constante)
    2. Als je nu weet dat de vergelijking van het vlak V door deze punten wordt gegeven door V↔xa+yb+zc=1 en dat p(1,2,3)∈V, zoek dan het minimale volume van de piramide die wordt afgesneden uit het eerste octant. Verklaar [i]fysisch[/i] waarom dit een minimum moet zijn (i.e. zonder de stelling te gebruiken die we gezien hebben om dit aan te tonen).
2. Stel een Taylor-polynoom op van graad 7 dat je kan gebruiken om de waarde arctan(0,2) te benaderen, door een relevante functie f(x) te ontwikkelen rond een geschikt punt a∈R. Opmerking: Opstellen van de polynoom is vereist, ook al ken je deze uit het hoofd.
3. Bepaal het domein van volgende functie f(x,y)=√2x+3y−13x−y
4. De temperatuur T(x,y,z) in een kamer wordt gegeven door T(x,y,z)=24−x2−3y2−9z2 met (x,y,z) de positie in de kamer. In welke richting verandert de temperatuur het snelst als je in p(2,−1,2) staat?
5. Schets de grafiek van de functie f(x)=x|x−1|+2
6. Bepaal volgende limieten in één veranderlijke:
    1. limx→21x−2∫x2cos(t)tdt (1e hoofdstelling van de calculus gebruiken!)
    2. limx→0tan(x)−xsin(x)
7. Bereken volgende primitieve ∫x2−6x+5x2−6x+10dx
8. Bio-ingenieurs hebben een wiskunde model opgesteld voor de opbrengst Y voor een gewas in termen van het stikstofgehalte N in de bodem (beiden in gepaste eenheden uitgedrukt). Er geldt namelijk dat Y=λN1+N2. Welk stikstofgehalte moet men nastreven om de opbrengst te maximaliseren?

Examenvragen onder prof. Soetens

Academiejaar 2007 - 2008 - 1ste zittijd

De studenten werden in verschillende groepen verdeeld. Van maandag tot en met donderdag werd er telkens in de voormiddag en namiddag een mondeling examen afgelegd. Er waren dus 8 groepen/examens en dit zorgt ervoor dat er ook veel vragen zijn. Om alles duidelijk te houden zijn deze onderverdeeld per groep.

Theorie maandagvoormiddag

1. Geef de definitie van continuïteit, en bewijs dat sin en cos continue functies zijn.
2. Geef het integraalcriterium (volledig en formeel!) en bewijs het.

3.
    1. Wat is de binomiaalreeks?
    2. Is deze convergent?
    3. Met welke functie komt deze overeen en waarom?

Theorie maandagnamiddag

---

1. Geef de definitie van continuïteit en bewijs dat de n√ continu is.
2. We zagen het majoranten criterium en daaruit volgde de limiettest. Formuleer en bewijs beide.
3. Wat weet je over limx→+∞(lnx)axb en welke eigenschap voor exp volgt hieruit.

Theorie dinsdagvoormiddag

---

1. Geef de definitie van continuïteit, en bewijs dat sin en cos continue functies zijn.
2. Machtreeksen:
    1. Wat is het?
    2. Wat is convergentie? Geet het bewijs hieromtrent.
    3. Verband tussen machtreeksen en functies.
3. Geef de hoofdstellingen van de calculus en bewijs en leid hieruit substitutie af.

Theorie dinsdagnamiddag

1.
    1. Wat is afleidbaarheid en een afgeleide?
    2. Geef de meetkundige betekenis van de afgeleide.
    3. Wat is het verband tussen afgeleide en continuïteit?
    4. Geef de formule van de afgeleide van √x louter steunend op het voorgaande.
2. Machtreeksen:
    1. Wat is het?
    2. Wat is convergentie? Geet het bewijs hieromtrent.
    3. Verband tussen machtreeksen en functies.
3. Het gemiddelde van een functie:
    1. Wat is het?
    2. Geef de stelling en bewijs deze.
    3. Deze stelling wordt gebruikt in een van de hoofdstellingen van de calculus: toon aan.

Theorie woensdagvoormiddag

---

1. Onderzoek de convergentie van volgende rijen met r reëel:
    1. (rn)n
    2. (nr)n
2. Geef de stelling van Rolle, van Cauchy en van de l'Hôpital, inclusief bewijs.
3. Geef het integraalcriterium en bewijs. Pas het toe op de hyperharmonische reeks.

Theorie woensdagnamiddag

---

1. Geef de definitie van continuïteit en bewijs dat de n√ continu is.
2. Machtreeksen:
    1. Wat is het?
    2. Wat is convergentie? Geet het bewijs hieromtrent.
    3. Verband tussen machtreeksen en functies.
3. Werk de oppervlakte en booglengte in poolcoördinaten uit.

Theorie donderdagvoormiddag

1.
    1. Wat is afleidbaarheid en een afgeleide?
    2. Geef de meetkundige betekenis van de afgeleide.
    3. Wat is het verband tussen afgeleide en continuïteit?
    4. Geef de formule van de afgeleide van n√x louter steunend op het voorgaande. Eventueel mag je enkel √x geven.
2. Machtreeksen:
    1. Wat is het?
    2. Geef het criterium van d’Alembert en bewijs.
    3. Geef het criterium van Cauchy en bewijs.
3.
    1. limx→∞ln3(x)x
    2. limx→∞x2ex

Theorie donderdagnamiddag

1. De sinusfunctie:
    1. We hebben 2 bijzondere limieten gezien in verband met de sinusfunctie, geef deze.
    2. Toon aan dat de sinusfunctie continu is.
    3. Toon aan dat de sinusfunctie differentieerbaar is.
2. Reeksen:
    1. Wat is een reeks en wanneer convergeert deze?
    2. Geef het criterium waarmee men kan controleren of een alternerende reeks convergeert (+ bewijs)
    3. Hoe kan men convergentie aantonen vertekkende van Absolute convergentie.
3. Geef de hoofdstellingen van de calculus en bewijs en leid hieruit substitutie af.

Oefeningen

1. Werk volgende limieten uitlimx→0sin(x)−sin(2x)sin(3x)limx→π2sin(x)−sin(2x)sin(3x)limx→πsin(x)−sin(2x)sin(3x) limx→+∞ln(5x)ln(7x)limx→1ln(5x)ln(7x)limx→0+ln(5x)ln(7x)
2. Geef een volledig functieonderzoek van3√x3+8x2
3. Bewijs dat deze stuksgewijs gedefinieerde functie f:]−π,π[→R continu en differentieerbaar isf(x)={xsinxx≠01x=0
4. Gegeven ellipsoïde met halve assen a, b, c. Bereken de extrema van de inhouden van die ellipsoïde als a+b+c=6 en 4abc3π de inhoud is.

5. Bereken:
    1. ∫log9xxdx
    2. ∫4x4x−4dx
6. Bereken het volume van een bol met straal R, waar een kegel uitgesneden is. De hoek tussen de kegel en zijn middelijn is π4.
7. Convergentie van reeksen:
    1. ∑ln(3n)n√3
    2. ∑ln(3n)n√3
    3. ∑(−1)nln(3n)n√3
    4. ∑(−1)nln(3n)n√3
    5. ∑−n3nln(3)
    6. ∑narctann2n3+2
8.
    1. Bereken de machtreeks van de functie in oef 3)
    2. Geef de eerste 4 termen van die reeks
    3. Kan je met de geziene theorie de convergentiestraal bepalen? Leg uit.
    4. Heeft ze een Taylor-ontwikkeling?

Academiejaar 2007 - 2008 - 2de zittijd

Theorie donderdag voormiddag

1. Leg uit:
    1. Partieel afgeleide (+ definitie)
    2. Gradient
    3. Richtingsafgeleide (+ verklaren)
    4. Waar is de verandering van de functie het grootste en wanneer.

1. Bewijs de hyperharmonische reek. Geef de definitie van convergentie en bespreek alle gevallen. Alles wat je gebruikt buiten de definitie moet je bewijzen.
2. Geef de hoofdstelling van de calculus deel 1 en deel 2 en bewijs een van beide delen. Leidt hieruit de substitutie regel af.

Theorie vrijdag namiddag

1. Geef de stelling en het bewijs van convergentie van reeksen.
2. Bewijs de stelling van Rolle en de regel van Hopital. Geef alle stellingen die je hierbij gebruikt (zonder bewijs).
3. Definieer convergentie van reeksen. Onderzoek de convergentie van de hyperharmonische reeks 1/np. Bewijs ook alle stellingen die je hiervoor gebruikt.

Academiejaar 2006 - 2007

Theorie

1. De natuurlijke logaritmische functie
    - Wat is het? (definitie)
    - Geef de hoofdeigenschappen met hun bewijs.
    - Er is een eigenschap limx→+∞lnx, wat gebeurt er met limx→+∞lnxxa met a>0?
2. Machtreeksen
    - Wat is het?
    - Er wordt gesproken over het begrip ‘convergentiestraal’. Hoe zijn we tot dit begrip gekomen?
    - Geef de formule voor het berekenen van de convergentiestraal
3. (Extra)

   f:[a,b]↦Rcontinu, strikt stijgendg=−1f:[f(a),f(b)]↦Rf differentieerbaar in]a,b[

   Het verband tussen f′(x) en g′(y) is gekend en aan alle voorwaarden is voldaan. Wat is dan het verband tussen ∫baf(x)dx en ∫f(b)f(a)g(y)dy

Oefeningen

1. Afgeleiden
    1. Bepaal de volgende limieten, zo ze bestaan, eventueel als oneindige limiet. Zo nodig moet er ook een onderscheid gemaakt worden tussen linker- en rechterlimiet.
       limx→03√x−5√xxlimx→03√x−x√xlimx→+∞3√x−5√xxlimx→+∞3√x−x√x
    2. Onderzoek de functie met voorschrift y=arctanx2−1x en bepaal haar grafiek. Er wordt een volledig functieonderzoek verwacht en het verloop moet eveneens duidelijk zijn in de omgeving van punten waar de functie niet gedefinïeerd is (in geval er zulke punten zijn).
    3. Een kade bevindt zich 3m boven de waterlijn. Sel dat je van op de kade een touw, vastgemaakt aan een boot, intrekt met een gelijkmatige snelheid van 0.5 m/s. De boot blijft op het wateroppervlak. Met welke snelheid nadert de boot de kade, i.h.b. als hij 10m van de kade verwijderd is. Versnelt of vertraagt de boot bij nadering van de kade, of nadert hij steeds even snel?
2. Beide delen
    1. f:R↦R:x↦∫x2−x3e−t2dt bepaal f′(x) en f″(x)

3. Integralen
    1. Bereken ∫+∞1dxx√1+x in zo compact mogelijke vorm
    2. Onderzoek de convergentie en de absolute convergentie van volgende reeksen
        1. ∑(−1)n(2n)!22n(n!)2
        2. ∑sinnπ2100√x99
    3. Een functie f:R↦R voldoet an volgende voorwaarden:
        - f is periodiek met periode π,
        - f is oneven,
        - f(x)=4xπ als x∈[0,π4],
        - f(x)=1 als x∈]π4,π2].

        1. Geef de grafiek van f in het interval [−π2,π2].
        2. Geef de grafiek van f in het interval [−2π,2π].
        3. Bepaal de fourierreeks van f.

Academiejaar 2004 - 2005 - 1ste zittijd

1. Bereken de volgende limieten mits deze bestaan (maak eventueel onderscheid tussen linker- en rechterlimiet) limx→0|3x+1|−|3x−1|xlimx→+∞|3x+1|−|3x−1|xlimx→03√1+2x−1x
2. Beschouw de functie y=√x−√x Bepaal haar domein, onderzoek of deze functie asymptoten heeft. Bepaal de afgeleide functie en, zo deze bestaat, de vergelijking van de raaklijn aan haar grafiek voor x=4.
3. Beschouw de functie g, g(x)={√x+1voor x∈[−1,0[√1−xvoor x∈[0,1]. Bepaal, zo deze bestaat, de afgeleide aan deze functie voor x=0. Zo ze niet bestaat, leg uit waarom. Leid dan, zo mogelijk, de vergelijking van de raaklijn af.
4. Gegeven is de functie F(x)=∫x3x√t3+1dt. Wat is het domein van deze functie. Bepaal haar afgeleide functie F′(x).
5. Onderzoek of volgende numerieke reeksen convergent zijn ∑lnnnnn∑(lnnn)n∑(lnnn)2 Verklaar je bevindingen.
6. Gegeven is de functie g(x)= \left\{ \begin{array}{ll} \sqrt{x+1} & \textrm{voor \)x[-1,0[\(} \\ \sqrt{1-x} & \textrm{voor \)x[0,1]\(.} \end{array} \right.
   Zij S het deel van het vlak, ingesloten door de x-as en de grafiek van g.
    1. Geef de grafiek van deze functie zo nauwkeurig mogelijk.
    2. Bepaal het volume dat men bekomt door S te wentelen om de x-as.
    3. Bepaal het volume dat men bekomt door S te wentelen om de y-as.

Academiejaar 2004 - 2005 - 2de zittijd

1. Gegeven is de functie y=√|x−√|x||.
    1. Wat is het domein van deze functie?
    2. Geef haar functievoorschrift opnieuw, maar zonder gebruik te maken van het absolute-waardesymbool, door haar domein op te spliten in geschikte deelintervallen.
    3. Is deze functie even of oneven? Leg uit.

1. Gegeven is de volgende functie van twee veranderlijken f(x,y)=xysin(x−y)1+x2+y2
    1. Bepaal de partiële afgeleiden van deze functie in een willekeurig punt.
    2. Ga na dat (1,1,0) op de grafiek van f in R3 ligt en geef dan de vergelijking van het raakvlak aan de grafiek van f in dat punt.
2. Schets het gebied in het xy-vlak dat bepaald is door de ongelijkheden x−2y2≥0 en1−x−|y|≥0. Bepaal de oppervlakte van dit gebied.
3. Zij g:[0,π]→R:{x→xals 0≤x<π2x→π4als π2≤x<π Zij dan f een periodieke functie, met periode 2π, welke voldoet aan de twee voorwaarden f|[0,π]=gf is een even functie
    1. Teken de grafiek van f, zowel in het interval [−π,π] als in het interval [−4π,4π].
    2. Bepaal de Fourier reeks van f en schrijf haar eerste 8 termen.
    3. Naar welke waarde verwacht je dat deze Fourier reeks convergeert, voor x=0, x=π2 en voor x=−π? Leg uit waarom.
    4. Ga na dat deze convergenties kloppen, door de waarden in de reeks in te vullen, steunend op onze kennis van de convergentie van bepaalde numerieke reeksen die voorkomen in deze berekening.
4. Onderzoek de convergentie van volgende numerieke reeksen ∑sin2nn√n∑(lnn)3n2De reeks ∑an, waarbij a1=1 en verder inductief ∀n∈N0:an+1=2+cosn√nan