

Tuyaux
3de Bachelor Wiskunde

WINAK

Eerste Semester
2011-2012

Inhoudsopgave

1	Inleiding	2
2	Maattheorie	3
2.1	Theorie	3
2.2	Oefeningen	3
2.2.1	Januari 2011	3
3	Differentiaalvergelijkingen en functieruimten	5
3.1	Theorie	5
3.2	Oefeningen	5
3.2.1	Januari 2011	5
4	Slotwoordje	6

Hoofdstuk 1

Inleiding

In deze tuyaux vind je de examenvragen van het eerste semester van vakken van derde bachelor wiskunde. Van veel vakken zijn er nog geen voorbeeldexamens, omdat dit het eerste jaar is dat er een tuyaux van derde bachelor wiskunde is. Veel valt er hier niet aan toe te voegen, behalve jullie nog veel succes te wensen met het studeren en de examens.

Elke Gijsbrechts
WINAK mentor wiskunde 10-11
WINAK mentor wiskunde 11-12

Hoofdstuk 2

Maattheorie

2.1 Theorie

2.2 Oefeningen

2.2.1 Januari 2011

1. Zij (Ω, \mathcal{F}) een meetbare ruimte en $(\mu_n)_n$ een familie eindige, positieve maten op (Ω, \mathcal{F}) zodat $\forall A \in \mathcal{F} : \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A) < \infty$. Toon aan dat

$$\mu : \mathcal{F} \rightarrow [0, \infty[: A \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n(A)$$

een eindige positieve maat op (Ω, \mathcal{F}) is. Toon aan dat voor een \mathcal{F} -meetbare afbeelding $f : \Omega \rightarrow [-\infty, \infty]$ geldt dat (i) f is μ -integreerbaar d.s.d.a. $\sum_{n=1}^{\infty} \int |f| d\mu_n < \infty$, en (ii) indien de voorwaarden uit (i) voldaan zijn, is $\int f d\mu = \dots$ (vul in en bewijs).

2. (a) Zij $\mathcal{A} := \{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{Q}, a < b\} \cup \{\emptyset\}$. Toon dat deze klasse van verzamelingen een semiring is en dat \mathcal{R} (= de Boreldelen van \mathbb{R}) de σ -algebra voortgebracht door deze klasse is. Gebruik zonder bewijs dat $\mathcal{R} = \sigma(\{]a, b[\mid a, b \in \mathbb{R}, a < b\})$.
(b) Zij $\mu : \mathcal{R} \rightarrow [0, \infty]$ een maat die eindig is voor de compacte delen van \mathbb{R} en zodanig dat

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall A \in \mathcal{R} : \mu(A + x) = \mu(A)$$

Bewijs dat

$$\exists c \in [0, \infty[: \mu = c\lambda$$

waar λ de Lebesguemaat is. (Hint: Stel $c := \mu([0, 1])$ en toon: (i) $\mu([0, 1/m]) = c/m$ voor alle $m \in \mathbb{N}_0$, (ii) $\mu([a, b]) = c\lambda([a, b])$ voor alle $a < b$ in \mathbb{Q} . Gebruik dan deel (a) samen met een stelling uit hoofdstuk 1 van de cursus om (b) te tonen.)

3. Stel $X_n, n \geq 1$ onafhankelijke toevalsvariabelen zodat voor alle $n \geq 1$

$$\mathbb{P}[X_n = n^{1/6}] = \mathbb{P}[X_n = -n^{1/6}] = \frac{1}{2} n^{-1/2}$$

en $\mathbb{P}[X_n = 0] = 1 - n^{-1/2}$. Toon dat met kans 1:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j = 0$$

(Hint: Het is voldoende (waarom?) aan te tonen dat

$$\forall \epsilon > 0 : \sum_{n=2}^{\infty} \mathbb{P} \left[\left| \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n X_j \right| \geq \epsilon \right] < \infty$$

Wat via de ongelijkheid van Chebyshev kan. Je mag ook gebruiken dat $\sum_{j=1}^n j^{-\alpha} \leq \int_0^n x^{-\alpha} dx = n^{1-\alpha}/(1-\alpha)$ (als $0 < \alpha < 1$).)

4. Beschouw de kansruimte $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ waar $\Omega := [0, 1]$, $\mathcal{F} := \mathcal{R}[0, 1]$ en $\mathbb{P} = \lambda|_{\mathcal{F}}$. Beschouw de rij $(X_n)_n$ waar

$$X_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : \omega \mapsto \omega^{-1/2} I_{[1/2^{n+1}, 1/2^n]}(\omega), n \geq 1$$

Convergeert de rij $(X_n)_n$ in L_1 , L_2 , in kans, bijna overal? Is $(X_n)_n$ uniform integreerbaar?

Hoofdstuk 3

Differentiaalvergelijkingen en functieruimten

3.1 Theorie

3.1.1 Januari 2011

1. (a) We zagen 3 topologieën op functieruimten. Definieer deze, en geef verbanden.
(b) Zij $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continu, $\mathcal{H} := \{f_n | n \in \mathbb{N}\}$ equicontinu, en $f_n \rightarrow^P f$. Kunnen we dan besluiten dat $f_n \rightarrow^U f$?
2. Wat weet je over de evaluatie-afbeelding? (de bedoeling hier is de stelling te geven dat als Y lokaal compact en Hausdorff is, dat de evaluatie-afbeelding dan continu is voor de compact-open topologie op de functieruimte)
Geldt dit ook voor de puntsgewijze en/of de uniforme topologie?
3. (a) Schets wat je weet over convergentie van machtreeksen.
(b) Bewijs de stelling over de convergentiestraal, i.e. dat als $x \in]-R, R[\Rightarrow \sum_n a_n x^n$ convergent, $x \in]-\infty, R[\cup]R, \infty[\Rightarrow \sum_n a_n x^n$ divergent.
(c) Bewijs de stelling over:
 $\sum_n a_n x_0^n$ convergent, $0 < r < |x_0| \Rightarrow \sum_n a_n x^n$ uniform absoluut convergen op $[-r, r]$.
(d) We weten dat voor algemene functies geldt: $\rightarrow^u \Rightarrow \rightarrow^{uc} \Rightarrow \rightarrow^P$. Beschouw nu de twee gevallen $\sum_n a_n x^n$ op $[-r, r]$ en $\sum_n a_n x^n$ op $] -r, r[$. Gelden er in deze gevallen andere implicaties?

3.2 Oefeningen

3.2.1 Januari 2011

1. Los de volgende differentiaalvergelijking op door middel van machtreeksen:

$$(x^2 + 2)y'' + 3xy' - y = 0$$

Een benadering met een veelterm van graad 5 is voldoende.

2. Herinner je dat we een verzameling $\mathcal{H} \subseteq Y^X$ zwak equicontinu genoemd hebben aesa voor elke $x \in X$ het volgende geldt:

$$\forall y \in Y \forall U \in \mathcal{V}(x) \exists W \in \mathcal{V}(y) \forall f \in \mathcal{H} : (f(x) \in W \Rightarrow f(V) \subseteq U)$$

Veronderstel dat Y regulier is. Toon aan dat de puntsgewijze sluiting van \mathcal{H} zwak equicontinu is, als \mathcal{H} zwak equicontinu is.

3. Zij \mathbb{R}_l de verzameling van reële getallen met daarop de left ray topologie. Deze topologie, waarvan de verzameling van open delen gelijk is aan $\{] - \infty, a[\mid a \in \mathbb{R} \}$, is niet regulier. Een deel $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_l)$ is zwak equicontinu als voor elke $x \in \mathbb{R}$ en elk rijtje $(f_n)_n$ in \mathcal{H} geldt dat

$$(x_n \rightarrow x \text{ en } f_n(x) \rightarrow y) \Rightarrow f_n(x_n) \rightarrow y$$

Gebruik $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R}_l)$ om aan te tonen dat regulariteit van de beeldruimte een noodzakelijke voorwaarde is in de vorige oefening.

4. Definieer \mathcal{A} als de verzameling van alle functies $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ met de volgende eigenschap

$$\exists n \in \mathbb{N} \forall x \geq n : f(x) = 0$$

Bewijs dat \mathcal{A} dicht is in $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ met de compact-open topologie.

Hoofdstuk 4

Slotwoordje

Ik wil vooral nog de studenten bedanken die examenvragen hebben bijgehouden en hebben doorgestuurd naar de mentoren, want zonder deze studenten zou de tuyaux niet tot stand kunnen komen. Hopelijk maken jullie er nuttig gebruik van. Ten slotte wensen alle mentoren jullie nog veel succes bij het studeren en het afleggen van de examens.