Analytische topologie

tuyaux.winak.be/index.php/Analytische_topologie

Analytische topologie	
Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Bespreking

Theorie

Er zijn nog examenvragen uit 2009 en vroeger toen dit vak nog Lebesgue integraal en topologie noemde. De vragen over het stuk Lebesgue integraal zijn weggelaten. Het examen zelf is mondeling aan het bord. Professor Lowen verwacht dat je alle definities en stellingen heel goed kent. Meestal worden op examens de redelijk korte bewijzen gevraagd, omdat die het beste testen of je het begrepen hebt. Naast definities en stellingen vindt professor Lowen inzicht ook heel belangrijk en dit wordt zeker getest op het examen.

Oefeningen

De werkcolleges worden gegeven door Joris Mestdagh. Joris schrijft meestal een oefening op het bord en daar kan je dan zelf of samen met anderen aan werken. De oefeningen zijn van hoog niveau. Het oefeningen examen is open boek, je krijgt meestal 3 à 4 vragen.

Examenvragen

Theorie

Januari 2016

1. Convergentie: geef definitie, eigenschappen en motivatie (i.e. waarom filters in plaats van rijtjes?)
2. Initiale/finale structuren: geef definitie en eigenschappen van initiale topologie.
3. Bespreek de stabiliteit van separabiliteit. (i.e. blijft separabiliteit bewaard onder *deelruimten*, *quotiëntvorming*, ... ?)
4. Initiale structuren: hoe kunnen we daar karakteriseren dat een filter convergeert? Bijvraag: source (X→({0,1}(X→({0,1}, Sierpinski)) puntenscheidend en initiaal. Wat kan je zeggen over de topologie op XX? En hoe kunnen we dit nog anders karakteriseren? (XX kan je zien als inbedding in {0,1}{0,1}tot de macht I.)

5. Welke topologische eigenschappen blijven bewaard bij: initiale structuren, puntenscheidende initale structuren, producten, deelruimten. Bewijs er een van.
   Bijvraag
   f:(X,T)→(Y,S)

   $$f:(X,T)\to(Y,S)$$

   initiaal en surjectief. Bewijs dat YY samenhangend impliceert XX samenhangend.
6. Is de Alexandroff compactificatie van R/QR/Q T2,T1T2,T1en/of regulier?
7. Bespreek compactheid en Hausdorff + geef de verbanden.

Januari 2015

Groep 1

1. Convergentie: geef definitie, eigenschappen en motivatie (i.e. waarom filters in plaats van rijtjes?) (zonder bewijs)

   Bijvraag: geef twee verschillende topologieën op een verzameling waarin rijen op dezelfde manier convergeren (d.w.z. dezelfde rijen convergeren en, als ze convergeren, dan naar dezelfde punten)
2. Initiale/finale structuren: geef definitie en eigenschappen van initiale topologie (zonder bewijs).
   - Geef een voorbeeld van een source die initiaal is en van eentje die dat niet is.
   - Bijvraag: Zij f:X→Yf:X→Y een finale, niet-surjectieve source. Wat weet je over de *spoortopologie* op Y\f(X)Y\f(X)?
3. Compactheid: Geef alle topologische eigenschappen of non-eigenschapepn van de Alexandroff compactificatie van QQ. Geef telkens een korte argumentatie.
4. Samenhang: Is de sluiting van een wegsamenhangende verzameling wegsamenhangend? Bewijs of tegenvoorbeeld.

Groep 2

1. Bespreek *initiale structuren* en geef het verband tussen productruimten en metriseerbaarheid. (Bewijs dit verband.)
2. Definieer *convergentie*, op welke manier kan continuïteit beschreven worden aan de hand van convergentie.
   - Geef equivalente eigenschappen voor convergentie
   - Geef equivalente eigenschappen voor continuïteit
3. Wat is *separabiliteit*?

   Bespreek de stabiliteit van separabiliteit. (i.e. blijft separabiliteit bewaard onder *deelruimten*, *quotiëntvorming*, ... ?)

Groep 3

1. Bespreek *initiale structuren* en *puntsgewijze convergentie*.
    - Bijvraag: Bewijs, als $(f_i:X\to X_i)_{i\in I}$ initiaal is, den geldt voor elke filter $\mathcal{F}$ op *X* en voor elke $x\in X$
    $$\mathcal{F}\to x \Leftrightarrow \forall i\in I: f_i(\mathcal{F})\to f_i(x)$$
    .
    - Bijvraag: Beschouw de ruimte Y^X waar convergentie overeenkomt met puntsgewijze convergentie. Welke topologische eigenschappen worden overgeëerfd van Y naar Y^X.
    - Bijvraag: Beschouw de verzameling Y^X met de topologie voortgebracht door de metriek die uniforme convergentie beschrijft (i.e. $d(f,g) \doteq \sup_{x\in X}(d(f(x),g(x))\vee 1)$) Wat zijn de topologische eigenschappen van deze ruimte?
2. Bespreek *convergentie* aan de hand van filters. Bespreek de topologische eigenschappen die te maken hebben met de convergentie van filters.
    Geef en bewijs *de stelling van Tychonoff*.
3. Definieer *samenhang* en *wegsamenhang*
    - Is een samenhangende ruimte altijd wegsamenhangend? (of omgekeerd, bewijs of tegenvoorbeeld)
    - Is het product van wegsamenhangende ruimten terug wegsamenhangend? (bewijs)
    - Is de sluiting van een wegsamenhangende ruimten terug wegsamenhangend? (bewijs)
4. Extra: Wat zijn de topologische eigenschappen van de Alexandroff compactificatie van $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Groep 4

1. Definieer *convergentie* en *continuïteit* aan de hand van convergentie.
    Geef van beide alternatieve definities.
2. Besrpeek *finale structuren* en *quotiëntruimten*.
    Bewijs: De afbeelding $\xi:(X,\mathcal{T})\to(X|R,\mathcal{T}|R)$ is een *quotiëntafbeelding*en een ruimte $(Y,\mathcal{U})$ is een *quotiëntruimte* van $(X,\mathcal{T})$ als en slechts als er een *quotiëntafbeelding* $f:(X,\mathcal{T})\to(Y,\mathcal{U})$ bestaat.
3. Bespreek de *metriseerbaarheid* van productruimten.
4. Definieer *separabiliteit* en bespreek de eigenshappen.
    Bewijs dat separabiliteit bewaard blijft onder open deelruimten.

Groep 5

1. Definieer *convergentie* en *continuïteit* aan de hand van convergentie.
2. Bespreek *finale structuren* en *quotiëntruimten*.
3. Definieer *separabiliteit* en bespreek de stabiliteit ervan.
    Bespreek $\mathbb{R}^2$ separabel aan de hand van $A_2 \Rightarrow$ separabel.

Januari 2014

1. Geef alles wat je weet over initiale structuren.
   - Waarvoor hebben we initiale structuren in het bijzonder gebruikt?
   - Stel ik heb een topologische eigenschap die over gaat op producten en deelruimten. Gaat ze ook over op initiale structuren? Wanneer wel, wanneer niet? Geef een tegenvoorbeeld wanneer niet.
2. Geef alle topologische eigenschappen vanQQ en R\QR\Q.
   - Waarom is QQ niet samenhangend?
   - Geef de Alexandroff compactificatie van QQ en alle topologische eigenschappen.
3. Als een verzameling wegsamenhangend is, is dan de sluiting wegsamenhangend? (Geef een tegenvoorbeeld)
4. Waarom hebben we topologische ruimten ingevoerd? Bewijs de stelling over het product van (pseudo-)metriseerbare ruimten.
5. Geef de definitie van continuïteit met filters. Bewijs een equivalentie.
6. Geef de belangrijke eigenschappen van finale structuren.

   Geef een voorbeeld van een quotiënt dat we in de les vaak nodig gehad hebben.
7. En uiteraard:
   - In welke ruimte convergeren alle filters naar alle punten?
   - In welke ruimte convergeren alleen de puntfilters?

Januari 2013

GROEP 1

1. We hebben convergentie ingevoerd in topologische ruimten aan de hand van filters. Geef de definities, belangrijke karakterisaties en belangrijke eigenschappen.
2. Ik heb een topologische ruimte waarin alle filters naar alle punten convergeren, welke topologie heb ik op die ruimte?
3. Geef een analoge karakterisatie van de discrete topologie.
4. Initiale structuren: definitie, voorbeelden.
5. We hebben gezien dat je een initiale afbeelding soms kan factoriseren met als eerste factorisatie-afbeelding een inbedding, wanneer kan dit en hoe zien de afbeeldingen eruit?
6. Alexandroff compactificatie: leg uit en bewijs dat X∗X∗ compact is aan de hand van ultrafilters, dus niet met open overdekkingen!
7. RR en de cirkel hebben topologische eigenschappen, welke verschillen, welke zijn hetzelfde.
8. Deelruimten van R2R2 zijn altijd separabel, waarom?
9. Waar verschillen het gesloten interval [0,1] en de cirkel topologisch gezien.
10. RR en R2R2 verschillen voor geen enkele topologische eigenschap, maar je kan bewijzen dat ze niet homeomorf zijn door te onderstellen dat er een homeomorfisme tussen bestaat en dan op een contradictie uit te komen. Bewijs!

Groep 2

1. We hebben convergentie ingevoerd in topologische ruimten. Geef definities en belangrijke eigenschappen.
   Bijvraag: wat is de topologie als je weet dat alle filters convergeren naar alle punten?
2. Metriseerbaarheid: wanneer is het product van metrische ruimten metriseerbaar? Toon aan.
3. Beschouw de source $f:R\to R f:R\to R$ van alle functies van RR naar RR. Stel dat op de beeldruimte de euclidische topologie staat. Wat is dan de initiale topologie op RR (domein)?
4. Wat kan je zeggen over de topologie als het volgende moet gelden
   $\forall$filter F op X:$F \dashv x \Leftrightarrow x \in \bigcap_{F \in F} cl(F)$

$$\forall \text{filter} F \text{op} X: F \dashv x \Leftrightarrow x \in \bigcap_{F \in F} cl(F)$$

Groep 3

1. Convergentie in topologische ruimten. Geef definities, equivalente eigenschappen, ...
   - Bijvraag: Bewijs volgende equivalentie
     $F \dashv x \Leftrightarrow \exists$ een ultrafilter fijner dan $F: U \to x$

$$F \dashv x \Leftrightarrow \exists \text{een ultrafilter fijner dan} F: U \to x$$

   - Bijvraag: Waaraan is $\bigcap\{U|U\to x\}\bigcap\{U|U\to x\}$ gelijk?
2. Initiale structuren. Geef definitie, belangrijke eigenschappen, ...
   - Bijvraag: Beschouw de source van alle continue functies $(f:R\to(R,T_{Euclidisch}))(f:R\to(R,T_{Euclidisch}))$. Hoe ziet de initiale topologie op RR (domein) eruit?
   - Bijvraag: Beschouw de finale sink $(f:X\to Y)(f:X\to Y)$, hoe ziet de topologie op $Y\setminus f(X)Y\setminus f(X)$ eruit?
3. Samenhang. Geef definitie en eigenschappen.
   Bijvraag: We hebben gezien dat als $f:X\to Y f:X\to Y$ continue surjectie is en XX is samenhangend dan is ook YY samenhangend. Welke extra voorwaarde heb je nu nodig op ff (dus surjectief + ...) zodanig dat geldt
   Y

$$Y$$

   samenhangend impliceert XX samenhangend?
4. Topologische eigenschappen. Gegeven een rechte en een vierkant als deelruimten van R^2R^2. Geef alle topologische eigenschappen (A_1,A_2A_1,A_2, separabel, compact, lokaal compact, ...). Het blijkt dat er maar één eigenschap verschillend is, de rechte is niet compact, maar het vierkant wel. Stel dat de rechte in een gesloten interval verandert wordt. Hoe zit het nu?

Januari 2011

GROEP 1

1. We hebben convergentie ingevoerd in topologische ruimten. Waarom? Leg uit waarom en hoe convergentie rijen tekort schoot in topologische ruimten. Geef een voorbeeld.
2. Initiale structuren: definitie, belangrijke eigenschappen, voorbeelden.
3. Samenhang: definitie, equivalente eigenschappen

Augustus 2011

1. Initiale structuren: leg uit + voorbeelden.
2. Alexandroff compactificatie: leg uit. Bewijs dat deze nieuwe topologische ruimte effectief compact is.
3. Som alle eigenschappen op die je kent over topologische ruimten (A1,A2,T0,T1A1,A2,T0,T1,samenhangend, compact, ...). Welke van deze eigenschappen gaan over op initiale topologie, finale topologie, producten, quotienten en deelruimten ? (Maak een tabel en vul deze gewoon aan met een plusteken of minteken en eventueel een voorwaarde).

Januari 2010

GROEP 1

1. Leg uit: initiale structuren
2. Leg uit: Lokale compactheid
3. Vertel een verhaaltje over de fundamentaalgroep van een cirkel.

GROEP 2

1. Convergentie: vertel alles wat je weet. Geef een niet-triviaal voorbeeld van een filter. Stel (X,T)(X,T) een topologische ruimte waarin elke filter naar elk punt convergeert, wat kan je zeggen over de topologie?
2. Metriseerbaarheid: wat was het probleem bij metrische ruimten en producten? Hoe hebben we dat nu in topologie opgelost? Geef een voorbeeld van een niet metriseerbare ruimte.
3. Wat zijn overdekkingsruimten? Wat is de fundamentele groep van de cirkel? En die van de torus? (bewijs: fundamentele groep van product is isomorf met product van fundamentele groepen.)

GROEP 3

1. Definieer puntsgewijze convergentie.
2. Geef een voorbeeld van een topologie waar alle filters convergeren naar alle punten.
3. T2T2 : wat is hier allemaal equivalent mee? Geef 2 bewijzen uit die lijst. Geef een voorbeeld dat T2T2 niet bewaard blijft bij quotienten.
4. Geef de fundamentaalgroep van S2S2.

GROEP 4

1. Convergentie van rijen volstaat niet in algemene topologische ruimtes. Hoe hebben we convergentie ingevoerd in algemene topologische ruimtes? Geef eigenschappen van convergentie. Bijvragen hierbij:
    - Bewijs eigenschap 2.3 hoofdstuk 3.
    - Als in een topologische ruimte, de enkele convergente filters de puntfilters zijn en de puntfilters een uniek convergentiepunt hebben. Wat is dan de topologie?
2. Hausdorff: definitie en eigenschappen. Bijvragen hierbij:
    - Bewijs eigenschap 2.8 hoofdstuk 5 en geef een stelling waarin we dit resultaat gebruiken.
    - Bewijs eigenschap 1.14 hoofdstuk 6.
3. Wat is de fundamentele groep van S2S2? Leg uit.

Juni 2009

1. Wat weet je over convergentie in topologische ruimten?
    - ∀x∈X,∀F filter: F→x⇒ T={∅,X}triviale topologie∀x∈X,∀Ffilter:F→x⇒T={∅,X}triviale topologie
    - Stel XX een ruimte en TT en T′T′ twee topologieen en als de topologische ruimten (X,T)(X,T) en (X,T′)(X,T′) dezelfde convergente filters hebben dan geldt T=T′T=T′.
2. Wat versta je onder initiale structuren?

Juni 2008

1. Definieer initiale topologie en schrijf alles op wat je erover weet (tot het bord vol staat). Geef daarna het bewijs van de stelling die we als eerste in de cursus gezien hebben, i.e.,de belangrijkste karakterisatie van de initiale topologie.
2. Als ff en gg continu zijn en f∘gf∘g initiaal dan is ook gg initiaal. Geef nu een voorbeeld waar gg en f∘gf∘g initiaal zijn, maar waarbij gg niet continu is.
3. Leg uit: initiale structuur.
4. Stel f:X→Yf:X→Y continu en surjectief:
    - Stel dat XX samenhangend is, is YY dan ook samenhangend?
    - Stel dat YY samenhangend is. Wanneer impliceert dit dat XX ook samenhangend is?

Oefeningen

Januari 2016

1. Bewijs
   X∈intA⇔∀F filters on X:F→X⇒A∈F

X∈intA⇔∀F filters on X:F→X⇒A∈F

2. $(X,T)(X,T)$ locally compact Hausdorff. $A\subset XA\subset X$ subspace, where $TATA$ subspace topology.
    - $(A,TA)(A,TA)$ locally compact?
    - Proof that there exists a U,VU,V open $\in T\in T$ such that $A=U\cap VA=U\cap V$.
    - AA open in $clAclA$?
    - Proof that there exists an open neighbourhood U of AU of A such that $A\cap UA\cap U$ is open in $clAclA$.
3. $X=[-1,1]X=[-1,1]$. Collection of $[-1,b[,b>0[-1,b[,b>0$ and $]a,1],a<0]a,1],a<0$ subbasis BB for TT.
    - BB basis?
    - Hausdorff?
    - Connected?
    - $A2A2$?
    - Compact?
4. XX uncoutable. $T=\{U\subseteq X|\text{ if } x0\in U\Rightarrow XU \text{ finite }\}T=\{U\subseteq X|\text{ if } x0\in U\Rightarrow XU \text{ finite }\}$
    - Proof TT topology.
    - Proof that TT is the Alexandroffcompactification of the discrete space.
    - Connected? Samenhangscomponenten?
    - Hausdorff?
    - $A1A1$?
5. Idem ex. 6 but ff is a decrease function.

Augustus 2016

---

1. Let $\beta\beta$ be a filterbase on a set YY and $f:X\to Yf:X\to Y$ be a map. Let $f-1=\{f-1(C)|C\in\beta\}f-1=\{f-1(C)|C\in\beta\}$. Prove that $f-1(\beta)f-1(\beta)$ is a filterbase $\Leftrightarrow C\bigcap f(X)\neq o\Leftrightarrow C\bigcap f(X)\neq o$ for every $C\in\beta C\in\beta$.
2. Suppose $f:(X,T)\to(Y,S)f:(X,T)\to(Y,S)$ continuous map between topological spaces. Let $\beta\beta$ be a base for the topology TT and let $f(\beta)=\{f(A)|A\in\beta\}f(\beta)=\{f(A)|A\in\beta\}$ Prove that:
    - ff surjective and open, then $f(\beta)f(\beta)$ is also a base for the topology SS.
    - In (a) if we omnit the condition "surjective", is it still true? Prove or give counter-example.
    - In (a) if we omnit the condition "open", is it still true? Prove or give counter-example.
    - Let $f:(X,T)\to(Y,S)f:(X,T)\to(Y,S)$ quotiëntimage. Suppose that ff is open, prove that if $(X,T)(X,T)$ is $A2A2$-countable, so is $(Y,S)(Y,S)$.
3. Let $X=RX=R$. Find the initial topology on XX corresponding to the family of maps $\{X\to(R,TE)|Im(f)<\infty\}\{X\to(R,TE)|Im(f)<\infty\}$.

4. $X=[0,1]\subset\mathbb{R}, P=\{U\subseteq X \mid x\in U \Rightarrow x^3\in U\}$
    - Topology?
    - T_0, T_1, T_2?
    - Compact?
    - Connected?
    - A_2, A_1?
    - Separable?
5. Let R be an equivalent relation on the space $(X,\mathcal{T})$. Let $\phi: X\to X|R$ be a canonical quotient map. For each subset $A\subseteq$, let
$$\Omega(A)=\{x\in X \mid \forall y\in X, \text{ if } xRy, \text{then } y\in A\}$$
. Prove that ϕ is open $\Leftrightarrow$ for each closed set $A\subseteq X, \Omega(A)$ closed in X.

Januari 2015

---

1. Stel $(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte, R een equivalentierelatie en $p: X\to X\|R$ de bijhorende quotiëntafbeelding. Bewijs dat:
    - $X\|R$ Hausdorff $\Rightarrow \{(x,y)\in X\times X \mid xRy\}$ een gesloten deel van $X\times X$.
    - $\{(x,y)\in X\times X \mid xRy\}$ gesloten in $X\times X$ en p een open afbeelding $\Rightarrow X\|R$ Hausdorff.
    - Is vorige eigenschap nog steeds geldig als p niet noodzakelijk open is? (Bewijs of tegenvoorbeeld.)
2. Stel $X=[-1,1]$ en definieer $\mathcal{T}=\{A\subseteq X \mid \text{als } 0\in A \text{ dan }]-1,1[\subseteq A\}$.
    - Bewijs dat $\mathcal{T}$ een topologie definieert op X.
    - Is $(X,\mathcal{T})$ Hausdorff, T_1 en/of T_0.
    - Is $(X,\mathcal{T})$ compact?
    - Is $(X,\mathcal{T})$ samenhangend?
    - Is $(X,\mathcal{T})$ separabel, A_1 en/of A_2.
3. Beschouw de *Sierpinski-ruimte* $(S,\mathcal{T})$ met $S=\{0,1\}$ en $\mathcal{T}=\{\phi,\{0\},\{0,1\}\}$. Zij verder X een willekeurige topologische ruimte.
    - Stel I de verzameling van alle continue functies $f: X\to S$. Toon aan dat $(f: X\to S)_{f\in I}$ een initiale source is.
    - Stel J de verzameling van alle continue functies $f: S\to X$. Is $(f: S\to X)_{f\in J}$ altijd een finale sink? Beschrijf de finale structuur op X indien $X=\mathbb{R}$ met de *Euclidische topologie*.

4. Beschouw $\mathbb{R}$ met de Euclidische topologie. Zijn volgende uitspraken waar of vals? Bewijs of geef een tegenvoorbeeld:
    - Als $(X,\mathcal{T})$ een compacte topologische ruimte is, dan is elke continue functie $f:X\to\mathbb{R}$ begrensd.
    - Als $(X,\mathcal{T})$een rijencompacte topologische ruimte is, dan is elke continue functie $f:X\to\mathbb{R}$ begrensd.
    - Als voor $(X,\mathcal{T})$ geldt dat elke functie $f:X\to\mathbb{R}$ begrensd is, dan is X compact.
    - Als $(X,\mathcal{T})$ een samenhangende topologische ruimte is, dan is $f(X)$ samenhangen voor elke continue functie $f:X\to\mathbb{R}$.
    - Als voor $(X,\mathcal{T})$ geldt dat $f(X)$ samenhangend is voor elke continue functie $f:X\to\mathbb{R}$, dan is X samenhangend.

September 2014

Van deze vragen dienen er drie opgelost te worden.

1. Zij $(X,\mathcal{T})$ een *Hausdorff ruimte* en zij $(X',\mathcal{T}')$ een lokaal compacte *Hausdorff ruimte*. Zij $f:X\to X'$ een continue bijectie. Bewijs dat f een homeomorfisme is als en slechts als voor elk compact deel $K\subseteq X'$ geldt dat $f^{-1}(K)$ compact is.
2. Beschouw $\mathbb{R}^2$ met de Euclidische topologie. Zij $X\subseteq\mathbb{R}^2$ de verzameling bestaande uit punten (x,y) zodat ofwel x irrationaal is met $0\leq y\leq 1$, ofwel x rationaal is met $-1\leq y<0$. We rusten X uit met de deelruimte topologie.
    - Is X compact?
    - Is X separabel?
    - Is X samenhangend?
    - Als $f:[0,1]\to X$ continu is en als $p_1:X\to\mathbb{R}:(x,y)\mapsto x$, dan is $p_1\circ f$ constant. Leid af dat X niet wegsamenhangend is.

Januari 2014

1. Stel$(X,\mathcal{T})$ een topologische ruimte. Veronderstel dat $\ldots A_n\subseteq A_{n-1}\ldots\subseteq A_1\subseteq A_0$ en voor alle n geldt dat A_n gesloten is. Veronderstel verder dat er een n_0 bestaat zodanig dat A_{n_0}compact is. Stel dat $U\subseteq X$ open is en $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\subseteq U$. Bewijs dat er dan een eindig deel J bestaat zodanig dat $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}A_n\subseteq\bigcap_{j\in J}A_j\subseteq U$.
2. Stel X is overaftelbaar en $x_0\in X$ een vast punt. En stel $\mathcal{T}=\{U\subseteq X|\text{als} x_0\in U \text{dan is } X\setminus U \text{ eindig }\}$.
    - Bewijs dat dit een topologie is.
    - Bewijs dat dit de Alexandroff compactificatie van X met de discrete topologie is.
    - Is deze ruimte Hausdorff?
    - Is X samenhangend? Geef de samenhangscomponenten.
    - Is X A1?

3. Stel (X,T) een topologische ruimte. En (Y,S) een quotientruimte met de quotienttopologie. Stel verder X x X de productruimte met de producttopologie. Bewijs:
    - (X|R) Hausdorff $\Rightarrow \{(x,y)|xRy\}$ is gesloten in X x X.
    - Indien φ open is, geldt de andere richting ook.
4. Bewijs volgende equivalentie:
    - X is T_1.
    - $\forall x \in X, A \subset X: x$ een ophopingspunt van $A \Leftrightarrow \forall V \in \mathcal{V}(x): V$ bevat een oneindig aantal punten van A.

Januari 2013

1. Zij (X,T) een lokaal compacte Hausdorff ruimte. Zij K $\subseteq$ X een compacte verzameling. Toon dat er een open deel G bestaat in X zodat K $\subseteq$ G en cl(G) compact is.
2. Beschouw de topologische ruimte $X=\mathbb{R}\times\mathbb{Z}$ met de deelruimte topologie van $\mathbb{R}^2$. Als $(x,z),(x',z')\in X$, dan definiëren we dat $(x,z)\sim(x',z')$ Als een van volgende voorwaarden voldaan is:
    - x=x' en z=z'
    - x=x' en x $\neq$ 0.

Definieer $Y=X/\sim$ met de quotiënttopologie. Bewijs volgende uitspraken:

1.
    - Elk element van Y heeft een compacte omgeving.
    - Er bestaat een basis $\mathcal{B}$ voor de topologie van Y zodat voor elke $B\in\mathcal{B}$ geldt dat cl(B) compact is.
    - De ruimte Y is niet Hausdorff.
    - De ruimte Y is niet pseudo-metrizeerbaar.
2. Beschouw $\mathbb{R}^2$ met de euclidische topologie. Definieer de deelverzameling $X_n=\{\frac{1}{n}\}\times[-n,n]$ van $\mathbb{R}^2$. Beschouw de deelruimte $Y=\mathbb{R}^2\setminus\bigcup_{n\geq1}X_n$ van $\mathbb{R}^2$. Bewijs dat Y samenhangend is, maar niet wegsamenhangend. Onderzoek verder of Y lokaal samenhangend is.

Categorieën:
- Wiskunde
- 2BWIS