Analytische Mechanica

Analytische Mechanica

Keuzevak	Keuzevakken

Bespreking

Dit vak is een vervolgvak op het vak 'inleiding analytische mechanica'. Deze leerstof komt vooral in het eerste hoofdstuk aan bod. Verder is speciale relativiteit ook heel belangrijk in dit vak. Er zijn af en toe ook verwijzingen naar de kwantummechanica (Lagrangiaan voor de Schrödingervergelijking, storingstheorie, ...). Het laatste hoofdstuk 'Chaos' dient niet gekend te zijn voor het examen, maar kan heel interessant zijn. Indien je het vak 'Differentiaalvergelijkingen en dynamische systemen' volgde, zal dit zeker een goede aanvulling van je kennis zijn. Professor Partoens is sinds 2018-2019 begonnen met het opgeven van vrijblijvende taken (ook geen punten mee te verdienen of verliezen). Hierin worden theoriegerelateerde vragen gesteld. Aan de hand van de ingestuurde taken (via mail) kijkt hij naar waar de studenten de meeste moeilijkheden mee hadden. Hierop focust hij dan extra in de theorielessen. Op die manier hoopt hij dat de leerlingen sneller mee zijn in de les en dat de lessen zo efficiënter zijn voor de studenten.

Puntenverdeling

Het examen bestaat uit twee delen, een deel met inzichtsvragen (theorie) en een ander deel met oefeningen gelijkaardig aan deze die in de werkcolleges werden opgelost. Beide delen tellen voor 50% procent mee voor het eindcijfer.

Examenvragen

Academiejaar 2021-2022 1ste zit

Prof. Bart Partoens

Theorie

:

Analytische mechanica
2de bachelor fysica
academiejaar 2021-2022

Theorie-examen 8 juni 2022

Dr. Jonas Bekaert & Prof. Dr. Bart Partoens

1. a) Leid de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking voor een systeem met p bindingen af uit het principe van de minste actie, gebruik makend van de Lagrange-multiplicatoren.

   b) Wanneer herleidt dit zich tot het toepassen van het principe van de minste actie op de effectieve Lagrangiaan $\tilde{L} = L + \sum_{j=1}^{p} g_j \lambda_j$, met bindingsvoorwaarden $g_j = 0$? Leg uit.

   c) Leg het begrip 'virtuele arbeid' uit, en bewijs dat dwangkrachten ten gevolge van bindingen geen virtuele arbeid leveren.

2. a) Wat is een canonieke transformatie, en wat is de genererende functie van een canonieke transformatie?

   b) Beschouw de coördinatentransformatie $Q = -p$, $P = q + Ap^2$ (met A een constante).

   - Bewijs dat deze transformatie canoniek is.
   - Bepaal de genererende functie $F_1(q, Q)$ van deze transformatie.

3. a) Bepaal de tijdsafhankelijke uitwijking van de overgedempte harmonische oscillator.

   b) Beschouw nu aandrijving van de overgedempte harmonische oscillator met een constante drijfkracht f_0 die aangelegd wordt op $t = 0$ (de oscillator is in rust bij $t < 0$).

   - Bepaal de tijdsafhankelijke uitwijking.
   - Hoe gedraagt dit systeem zich in de *steady state*?
   - Wat is het verschil in het transiënte gedrag met de ondergedempte harmonische oscillator met constante drijfkracht?

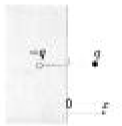
Vraag 2

Naast een geleidende wand, die alle ruimte waar $x < 0$ inneemt, bevindt zich een elektrisch geladen puntdeeltje met lading q. Het deeltje kan niet in de wand binnendringen. De elektrostatische interactie van het deeltje met de wand kan beschreven worden als een interactie met een zogenaamde beeldlading met lading $-q$, op positie $-x$ (zie onderstaande figuur). De potentiële energie van het deeltje is hierdoor $V(x) = \frac{-q^2}{(4\pi\epsilon_0)(4x)}$.

(a) Bepaal de Lagrangiaan en de Hamiltoniaan van het deeltje. Geef ook de behouden grootheid van het systeem.

(b) We laten de lading vertrekken op een positie $x = a$ t.o.v. de wand, vanuit rust. Bepaal $p(x)$ door gebruik te maken van de behouden grootheid.

(c) Maak een tekening van de paden en de stroom in de faseruimte.



Vraag 3

Een deeltje met rustmassa m vervalt en zendt hierbij een foton uit. Bij het verval verliest het deeltje rustmassa δ. Wat is de energie van het uitgezonden foton, in functie van δ, in het ruststelsel van het deeltje van voor het verval?

2

Oefeningen

:

Analytische mechanica
2de bachelor fysica
academiejaar 2021-2022

Oefeningenexamen 9 juni 2022

Dr. Jonas Bekaert & Prof. Dr. Bart Partoens

Vraag 1

Een deeltje met massa m beweegt op een cirkel met straal R die ronddraait met constante frequentie ω in een zwaartekrachtsveld met veldsterkte g, gericht langs de draaias (zie onderstaande tekening).

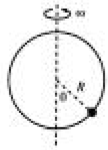
(a) Geef de veralgemeende coördinaten en de bindingsvoorwaarde. Welk type binding is dit?

(b) Bepaal de Lagrangiaan en de Hamiltoniaan van het deeltje. Is de Hamiltoniaan een behouden grootheid? Toon aan.

(c) *Je kan de Hamiltoniaan schrijven als $H = \tilde{T} + \tilde{V}(\theta)$, waarbij $\tilde{V}(\theta)$ de effectieve potentiaal is die alle termen in θ bevat. Aangezien $\tilde{V}(\theta)$ niet expliciet afhangt van de tijd, kan deze gebruikt worden om de evenwichtspunten te bepalen.*

Bepaal de evenwichtsposities van het deeltje aan de hand van $\tilde{V}(\theta)$. Maak telkens een tekening van de positie van het deeltje op de cirkel.

(d) Bepaal de stabiliteit van de verschillende evenwichtsposities aan de hand van $\tilde{V}(\theta)$. Maak een grafiek van alle evenwichtsposities als functie van ω, waarbij je aanduidt waar deze stabiel of onstabiel zijn.



:

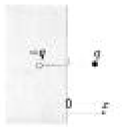
Vraag 2

Naast een geleidende wand, die alle ruimte waar $x < 0$ inneemt, bevindt zich een elektrisch geladen puntdeeltje met lading q. Het deeltje kan niet in de wand binnendringen. De elektrostatische interactie van het deeltje met de wand kan beschreven worden als een interactie met een zogenaamde beeldlading met lading $-q$, op positie $-x$ (zie onderstaande figuur). De potentiële energie van het deeltje is hierdoor $V(x) = \frac{-q^2}{(4\pi\epsilon_0)(4x)}$.

(a) Bepaal de Lagrangiaan en de Hamiltoniaan van het deeltje. Geef ook de behouden grootheid van het systeem.

(b) We laten de lading vertrekken op een positie $x = a$ t.o.v. de wand, vanuit rust. Bepaal $p(x)$ door gebruik te maken van de behouden grootheid.

(c) Maak een tekening van de paden en de stroom in de faseruimte.



Vraag 3

Een deeltje met rustmassa m vervalt en zendt hierbij een foton uit. Bij het verval verliest het deeltje rustmassa δ. Wat is de energie van het uitgezonden foton, in functie van δ, in het ruststelsel van het deeltje van voor het verval?

2

Academiejaar 2019-2020 1ste zit

Prof. Bart Partoens

Theorie

Vraag 1

- Bewijs het theorema van Noether.
- Beschrijf dit ook in eigen woorden.

- Beschouw een massapunt in een uniform zwaarteveld, kies nu $\vec{r} \to \vec{r} + \vec{a}$ r→→r→+a→ met $\vec{a}$ a→ een constante. Voldoet dit nog steeds aan het theorema van Noether, indien ja, bepaal dan de Noetherstroom.

Vraag 2

Gegeven volgende Hamiltoniaan

$H=\omega(q2+1)p$

$$H=\omega(q2+1)p$$

- Wat zijn de Hamilton bewegingsvergelijkingen?
- Schets de faseruimte, vergeet ook niet de zin aan te duiden.
- Beschouw volgende transformatie
  $P=\alpha p$–√

$$P=\alpha p$$

  $Q=\beta qp$–√

$$Q=\beta qp$$

  Wanneer is deze transformatie canoniek?
- Transformeer de Hamiltoniaan met zo'n canonieke transformatie.
- Wat zijn de bewegingsvergelijkingen voor P(t)P(t) en Q(t)Q(t)?
- Bepaal hiermee de bewegingsvergelijkingen voor p(t)p(t) en q(t)q(t).

Vraag 3
Beschouw volgende diffentiaalvergelijking van een harmonische oscillator

$\ddot{q}+2\dot{q}+q=f(t)$

$$\ddot{q}+2\dot{q}+q=f(t)$$

- Bepaal de Greense functie van dit systeem.
- Geef de algemene oplossing van dit systeem.

Vraag 4
Toon aan dat de stroom vier-vector jμ=ρdxμdt=(cρ,ρ$\vec{v}$)jμ=ρdxμdt=(cρ,ρv→) inderdaad transformeert als een cotravariante vier-vector. (In deze uitdrukking is tt niet de eigentijd.)

Vraag 5
We hebben volgende contravariante bewegingsvergelijkingen afgeleid voor een deeltje in een elektromagnetisch veld:

mcduμds=ec(∂Aν∂xμ−∂Aμ∂xν)uν=ecFμνuν

mcduμds=ec(∂Aν∂xμ−∂Aμ∂xν)uν=ecFμνuν

De covariante veldtensor wordt gegeven door

Fμv=⎡⎣⎢⎢⎢⎢0ExEyEz−Ex0Bz−By−Ey−Bz0Bx−EzBy−Bx0⎤⎦⎥⎥⎥⎥
Fμv=[0−Ex−Ey−EzEx0−BzByEyBz0−BxEz−ByBx0]

- Wat is het verband tussen FμvFμv en FμvFμv in tensornotatie? Bepaal ook FμvFμv.
- Schrijf de bewegingsvergelijking op die je krijgt voor μ=1,2,3μ=1,2,3. Gebruik de vergelijking met gekend niet-relativistisch deel (niet-relativistisch deel moet niet afgeleid worden).

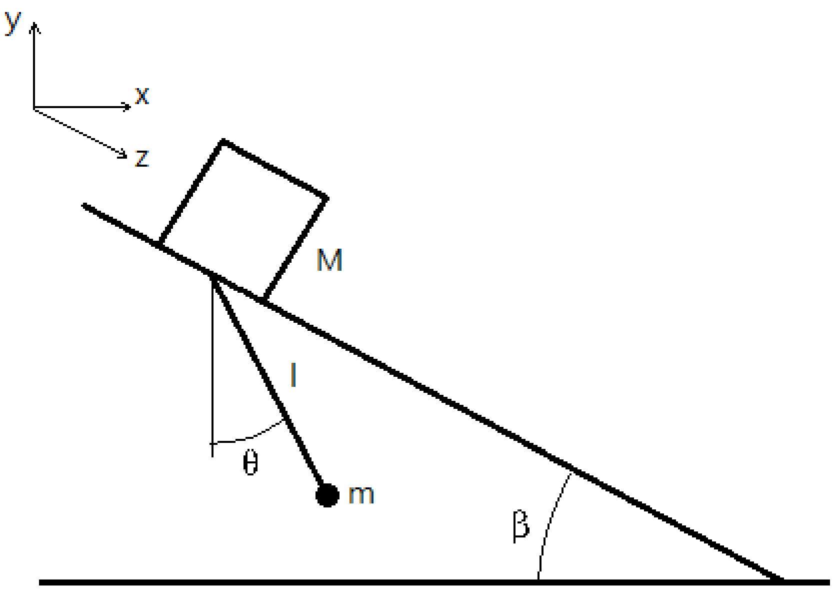
Vraag 6

- Wat is SO(3,1)?
- Beschouw g(x1,...,xN)g(x1,...,xN) een element van een Lie-groep met N parameters. Wat zijn de generatoren van zo'n Lie-groep en hoe genereer je elementen van de groep met behulp van deze generatoren?
- Beschouw in SO(3,1) volgende matrix ⎡⎣⎢⎢⎢10000cosθ−sinθ00sinθcosθ00001⎤⎦⎥⎥⎥[10000cosθsinθ00−sinθcosθ00001] die een rotatie rond de z-as voorstelt. Bepaal de generator van dit groepselement.

Oefeningen

Vraag 1

:



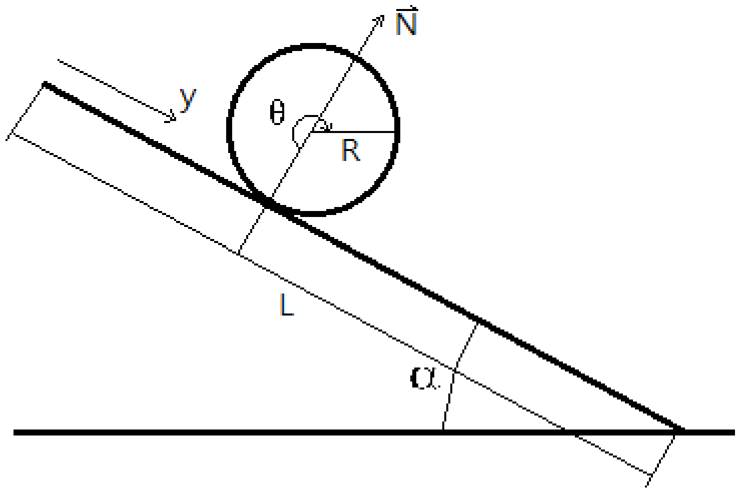
- Bepaal de Lagrangiaan van dit systeem in de veralgemeende coördinaten. Ter controle is onderaan de Lagrangiaan. (De controle was er inderdaad op het examen zelf)
- Bepaal de bewegingsvergelijkingen via Euler-Lagrange, deze moeten niet opgelost worden.
- Bepaal de voorwaarden voor evenwicht van dit systeem en de evenwichtspunten zelf.
- Onderzoek de stabiliteit van het evenwicht door $\theta \to \theta_{ev}+\epsilon\theta$$\theta \to \theta_{ev}+\epsilon\theta$. Dit moet maar tot 1ste orde.

$L=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}m[\dot{z}^2+l^2\dot{\theta}^2+2\dot{z}\dot{\theta}l\cos\theta\cos\beta-2\dot{z}\dot{\theta}l\sin\theta\sin\beta]+Mgz\sin\beta+mgz\sin\beta+mgl\cos\theta$

$$L=\frac{1}{2}M\dot{z}^2+\frac{1}{2}m[\dot{z}^2+l^2\dot{\theta}^2+2\dot{z}\dot{\theta}l\cos\theta\cos\beta-2\dot{z}\dot{\theta}l\sin\theta\sin\beta]+Mgz\sin\beta+mgz\sin\beta+mgl\cos\theta$$

<u>Vraag 2</u>

:



Gegeven is de Lagrangiaan van de rollende munt zonder wrijving

$L=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-mgy\sin\alpha$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{y}^2+\frac{1}{2}I\dot{\theta}^2-mgy\sin\alpha$$

Met $I=\frac{1}{2}mR^2$$I=\frac{1}{2}mR^2$

- Geef de bindingsvoorwaarden, welke soort binding is dit?
- Bepaal $F_k$$F_k$ via Lagrange multiplicatoren.

Vraag 3
Een deeltje met massa MM en energie EE wordt op een stilstaand deeltje met massa mm geschoten. Toon aan dat de energie na de botsing E′E′ gelijk is aan

E′=2mM2c2+(m2+M2)E(m2+M2)+2mEc2

E′=2mM2c2+(m2+M2)E(m2+M2)+2mEc2

- Geef de 4-impulsen PMPMμμ, PmPmμμ, P′MPM′μμ en P′mPm′μμ, hierbij moet je P′mPm′μμ niet expliciet bepalen, aangezien we deze niet nodig hebben.
- Bepaal −|p⃗ ′||p⃗ |−|p→′||p→| in functie van MM, mm, EE en E′E′. (Hint. P′mPm′μμ is niet expliciet nodig, we kennen namelijk P′mPm′22.)
- Gebruik het behoud van energie en impuls om |p⃗ ′||p⃗ ||p→′||p→| te herschrijven in functie van mm, MM en EE.
- Kwadrateer beide leden en los op naar E′E′.

Academiejaar 2018-2019 2de zit

Prof. Bart Partoens

Theorie

Vraag 1
Beschouw de Lagrangiaan

L(q,q˙)=m2(q˙2−ω2q2)

L(q,q˙)=m2(q˙2−ω2q2)

en volgende transformatie:
q→q+ϵsin(ωt) met ϵ≪1

q→q+ϵsin(ωt) met ϵ≪1

- Toon aan dat er een behouden grootheid behoort bij deze transformatie.
- Bepaal deze behouden grootheid.

- Toon ook expliciet aan dat deze grootheid behouden is.

Vraag 2
Beschouw de genererende functie F4(p,P,t)F4(p,P,t) van een canonieke transformatie, met als variabelen de oude en de nieuwe canonieke momenta en de tijd. Bepaal de

uitdrukkingen voor de oude en nieuwe coördinaten.

Vraag 3

Beschouw een ondergedempte harmonische oscillator, die vanaf tijdstip t=0t=0 aangedreven wordt door een sinusoïdale drijfkracht F(t)=cos(ωt)F(t)=cos(ωt). Toon aan dat als de aandrijffrequentie kleiner is dan de resonantiefrequentie van de oscillator, de drijfkracht en de respons van de oscillator in fase zijn en als de aandrijffrequentie groter is dan de resonantiefrequentie, de drijfkracht en de respons in tegenfase zijn.

Vraag 4

We hebben volgende contravariante bewegingsvergelijkingen afgeleid voor een deeltje in een elektromagnetisch veld:

mcduμds=ec(∂Av∂xμ−∂Aμ∂xv)uv=ecFμvuv

mcduμds=ec(∂Av∂xμ−∂Aμ∂xv)uv=ecFμvuv

∂Fμv∂xv=−4πcjμ

∂Fμv∂xv=−4πcjμ

Dit definiëert ook de elektromagnetische veldtensor FμvFμv.

- Toon aan dat deze covariante vergelijkingen leiden tot de vier Maxwell-vergelijkingen. Je afleiding moet dus expliciet starten van bovenstaande vergelijkingen.
- Wat is de relatie tussen FμvFμv en FμvFμv?
- Leid de uitdrukking voor FμvFμv en FμvFμv af (dus niet gewoon geven, maar afleiden) in termen van de componenten van het elektrisch en magnetisch veld.
- Als je in een welbepaald referentiestelsel een elektrisch veld hebt, dan zal je in een ander stelsel een combinatie hebben van een elektrisch en magnetisch veld. Toon dit aan met een voorbeeld.

- Bereken FμvFμvFμvFμv. Stel dat je een puur elektrisch veld hebt in een bepaald referentiestelsel, is het dan mogelijk om een ander referentiestelsel te vinden waarin je een puur magnetisch veld hebt?

Vraag 5

Toon aan dat de stroom vier-vector jμ=ρdxμdt=(cρ,ρ$\vec{v}$)jμ=ρdxμdt=(cρ,ρv→) inderdaad transformeert als een cotravariante vier-vector. (In deze uitdrukking is tt niet de eigentijd.)

Academiejaar 2018-2019 1^ste^ zit

Prof. Bart Partoens

Theorie

<u>Vraag 1</u>

- Leid een uitdrukking af voor de Noetherstroom en geef de betekenis ervan.
- Beschouw een deeltje met massa m in drie dimensies, beschreven door de cylindercoördinaten r,θ,z. De potentiaal die het deeltje ondervindt is enkel een functie van r en $k\theta+z$,

  V=V(r,kθ+z),

  $$V=V(r,k\theta+z),$$

  met k een reëel getal. Bepaal een symmetrie van dit systeem en de overeenkomstige behouden grootheid.

<u>Vraag 2</u>

- Wat is een canonieke transformatie?
- Wat is een genererende functie van een canonieke transformatie?

- Beschouw een deeltje dat beweegt op een lijn. Onderstel dat de dynamica van het deeltje bepaald wordt door de Hamiltoniaan
  H=q4p22μ+λq2
  H=q4p22μ+λq2

  met μμ en λλ positieve en reële constanten.
  - Geef de bewegingsvergelijkingen van Hamilton voor dit systeem (niet oplossen).
  - Bepaal de Lagrangiaan van dit systeem en de overeenkomstige Euler-Lagrange beweginsvergelijking (niet oplossen).
  - Beschouw nu de transformatie (q,p)→(q˜,p˜)(q,p)→(q~,p~) met
    q˜=αqap, p˜=βqb,
    q~=αqap, p~=βqb,

    met α,β,aα,β,a en bb reële parameters.
    - Bepaal aa en bb zodat dit een canonieke transformatie is.
    - Gebruik deze canonieke transformatie om de Hamiltoniaan van dit probleem te transformeren.
    - Bepaal de bewegingsvergelijken en los het probleem op, i.e. bepaal q(t)q(t) en p(t)p(t).

Vraag 3

- Bepaal de Greense functie van de *ondergedempte*, harmonische oscillator.
- Beschouw een *eenvoudige*, harmonische oscillator (met natuurlijke frequentie 11) waarvan de uitwijking, voor t<0t<0, gegeven wordt door
  x(t)=x0cos(t)+v0sin(t)
  x(t)=x0cos(t)+v0sin(t)

  Leg nu vanaf tijdstip t=0t=0 een externe drijfkracht F(t)=e−γtF(t)=e−γt op (met γγ een reëel, positief getal) aan de harmonische oscillator.
  - Bepaal de uitwijking x(t)x(t) voor t>0t>0.
  - Bepaal de constanten x0x0 en v0v0 zodanig dat het systeem aymptotisch evolueert naar een toestand van statisch evenwicht, i.e. x(t)→0x(t)→0 als t→∞t→∞.

Vraag 4

Toon aan dat de stroom vier-vector jμ=ρdxμdt=(cρ,ρv⃗)jμ=ρdxμdt=(cρ,ρv→) inderdaad transformeert als een cotravariante vier-vector. (In deze uitdrukking is tt niet de eigentijd.)

Vraag 5

We hebben volgende contravariante bewegingsvergelijkingen afgeleid voor een deeltje in een elektromagnetisch veld:

mcduμds=ec(∂Avdxμ−∂Aμdxv)uv=ecFμvuv

mcduμds=ec(∂Avdxμ−∂Aμdxv)uv=ecFμvuv

∂Fμv∂xv=−4πcjμ

∂Fμv∂xv=−4πcjμ

Dit definiëert ook de elektromagnetische veldtensor FμvFμv.

- Geef de uitdrukking voor FμvFμv en FμvFμv in termen van de componenten van het elektrisch en magnetisch veld.

- Toon aan dat deze covariante vergelijkingen leiden tot de vier Maxwell-vergelijkingen.

Vraag 6

- Bepaal de algemene voorwaarde waaraan Lorentz-transformaties moeten voldoen (in termen van de Minkowski-metriek).
- De Lorentztransformaties vormen de speciale, orthogonale groep SO(3,1)SO(3,1). Hoeveel parameters beschrijven deze groep? Wat is de betekenis van deze parameters?
- Definieer de generator van een groep.
- Bepaal de voorwaarde waaraan de generatoren van de Lorentz-groep SO(3,1)SO(3,1) moeten voldoen.

Oefeningen

Vraag 1

Beschouw een mathematische slinger met lengte ll in een lift. De slinger kan bewegen in het (x,y)(x,y)-vlak. De lift kan zowel naar boven als beneden versnellen, de beweging van de lift zelf wordt gegeven door d(t)=y0+v0t+a2t2d(t)=y0+v0t+a2t2.

- Geef de bindingsvoorwaarde f(x,y,t)=0f(x,y,t)=0. Wat voor type binding is dit?
- Bepaal de Lagrangiaan in functie van de veralgemeende coördinaat θθ in het systeem.
- Bepaal de Euler-Lagrange bewegingsvergelijking.

- Bepaal de evenwichtspunten van het systeem.
- Wat kan je zeggen over de stabiliteit van de evenwichtspunten? Bespreek!

Vraag 2
Zoek een differentiaalvergelijking voor de functie $q(t)$ die voldaan moet zijn opdat de integraal

$$\int_a^b dt\, F(q,\dot{q},\ddot{q},t)$$

stationair is, aan de hand van de variatierekening $q(t) \to q(t)+\delta q(t)$. Neem aan dat zowel q als $\dot{q}$ een vaste waarde hebben op de rand, ongeacht de variatie.

Vraag 3
Een elektrisch geladen puntdeeltje met lading q bevindt zich op een afstand x van een geleidende wand die alle ruimte waar $x<0$ inneemt. De elektrostatische interactie van het deeltje met de wand kan beschreven worden als een ineractie met een zogenaamde beeldlading met lading $-q$, op positie $-x$, zoals getoond in de onderstaande figuur. De potentiële energie van het deeltje aan de wand is hierdoor $V(x) = -\frac{q^2}{(4\pi\epsilon_0)(4x)}$.

- Bepaal de Lagrangiaan en de Hamiltoniaan van het deeltje aan de wand. Geef ook de behouden grootheid van het systeem.
- We laten de lading vertrekken op een positie $x=a$ t.o.v. de plaat, met snelheid 0. Bepaal hieruit de canonieke impuls $p(x)$, door gebruik te maken van de behouden grootheid.
- Maak ook een tekening van de paden en de stroom in de faseruimte en bespreek de beweging die het deeltje uitvoert.

Vraag 4
Een ongeladen pion π^0 met rustmassa m word geproduceerd in een deeltjesbotsing waarna het vervalt in twee fotonen.

- Zoek de vierimpuls van het pion en de twee fotonen in het ruststelsel van het pion en bepaal de energie en golflengte van de fotonen in dit stelsel.
- In het labostelsel beweegt het pion langs de X-as met snelheid βc. Stel nu dat de fotonen in het ruststelsel loodrecht op deze richting worden uitgezonden. Bepaal in dit geval de vierimpuls van de fotonen in het labostelsel.

- Gebruik je vorige resultaat om de energie en golflengte van de fotonen te vinden in het labostelsel en de hoek te bepalen waaronder ze worden uitgezonden in het labostelsel ten opzichte van de bewegingsrichting van het pion. Druk deze resultaten uit in functie van β.

Academiejaar 2015-2016 1ste zit

Prof. Bart Partoens

Theorie

<u>Vraag 1</u>
Beschouw volgende langrangiaan van een eendimensionaal probleem

$\frac{1}{2}\dot{x}^2-V(x)$

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2-V(x)$$

. Toon aan dat de transformatie $x\rightarrow x+\epsilon\dot{x}$ met ($\epsilon<<1$) leidt tot een ijktransformatie. Bepaal de corresponderende behouden grootheid.

<u>Vraag 2</u>
Beschouw een canonieke transformatie die de coordinaten en canonieke impuls transformeert als $q\rightarrow Q(q,P)$ en $p\rightarrow P(q,p)$. Onderstel dat de genererende functie van deze canonieke transformatie een functie is van de variabelen q,P. Bepaal de uitdrukking voor de andere variablelen p en Q.

<u>Vraag 3</u>
Definieer L' als $L'(P,\dot{P},t)=-\dot{P}_i q_i-H(q,P,t)$. Geef de bewegingsvergelijking in termen van L'.

<u>Vraag 4</u>
Bepaal de Greense functie voor de kritisch gedempte harmonische oscillator.

Vraag 5
Bepaal de voorwaarde waaraan de generatoren van de Lorentz groep SO(3,1) moeten voldoen.

Vraag 6

De elektromagnetische veldtensor wordt gegeven door:
Fμν=⎡⎣⎢⎢⎢⎢0ExEyEz−Ex0Bz−By−Ey−Bz0Bx−EzBy−Bx0⎤⎦⎥⎥⎥⎥Fμν=
[0−Ex−Ey−EzEx0−BzByEyBz0−BxEz−ByBx0]
Als je in een welbepaald referentie stelsel een elektrisch veld hebt, dan zal je in een ander stelsel een combinatie hebben van een elektrisch en een magnetisch veld. Toon dit aan met een voorbeeld.

Vraag 7
Toon aan dat de stroom vier-vectoren jμ=ρdxμdt=(cρ,ρv→)jμ=ρdxμdt=(cρ,ρv→) inderdaad transformeert als een contravariante viervector (in deze uitdrukking is t niet de eigentijd).

Vraag 8
Beantwoord bondig volgende vragen:

- Beschrijf hoe anharmonische effecten leiden tot hysteresis voor een gedreven oscillator.
- Onder welke voorwaarden is de transformatie canoniek (αα en ββ zijn constanten):
  Q=αPxP=βx2Q=αPxP=βx2
- Wat is de betekenis van de onderstaande uitdrukking en van elke term afzonderlijk?
  −∑mic∫dsi−∑eic∫dsiuμiAμ({xvi})−116πc∫d4xFμvFμv−∑mic∫dsi−∑eic∫dsiuiμAμ({xiv})
  −116πc∫d4xFμvFμv

Oefeningen

Vraag 1
Een mathematische slinger met massa m en lengte l is opgehangen aan een punt dat verticaal beweegt volgens d(t)=Acos(ωt)d(t)=Acos(ωt), in een zwaarteveld met veldsterkte g.

- Maak een tekening van de opstelling en geef de veralgemeende coördinaten. Welk type binding is dit?

- Bepaal de Langrangiaan van het systeem en stel hiermee de bewegingsvergelijkingen op.

- Bestudeer op basis van de bewegingsvergelijking (zonder deze expliciet op te lossen) het evenwicht van de slinger die ondersteboven staat. Bepaal de voorwaarden waaronder deze positie stabiel of labiel is en bespreek.

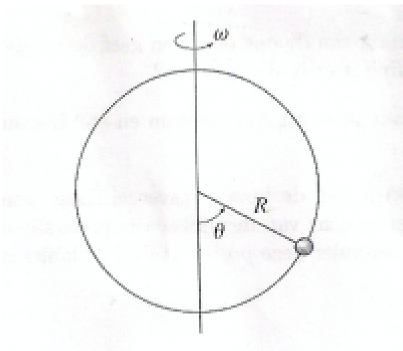
<u>Vraag 2</u>
Een puntdeeltje met massa m glijdt van een halve cirkel met straal R, vanaf hoek θ0θ0 en met initiele hoeksnelheid vθ,0vθ,0, in een zwaarteveldsterkte g, en zonder wrijving.

- Maak een tekening van de opstelling en geef de veralgemeende coördinaten. Welke type binding is dit?
- Stel de Langrangiaan van het systeem op en vind hiermee de bewegingsvergelijkingen, door gebruik te maken van Lagrange-multiplicatoren.

- Los de bewegingsvergelijkingen op. Bij welke hoek komt het deeltje los van de halve cirkel? Hint: Herschrijf de bewegingsvergelijkingen door gebruik te maken van ddt(θ˙2)=2θ˙θ¨ddt(θ˙2)=2θ˙θ¨.

<u>Vraag 3</u>

Een massapunt met massa m beweegt op een cirkel met straal R die ronddraait met constante frequentie ωω, zoals te zien is op onderstaande tekening, in een zwaarteveld met veldsterkte g, gericht langs de centrale as.



- Welk type binding is er in dit systeem? Bepaal de Langrangiaan en de Hamiltoniaan van het deeltje.

- Bepaal de evenwichtsposities van $\theta\theta$, alsook de voorwaarden op deze evenwichtsposities, door gebruik te maken van de effectieve potentiaal in de Hamiltoniaan. Teken de paden en de stroom in de faseruimte ($\theta\theta$, p) rond de evenwichtsposities en bespreek kort de beweging.

Vraag 4
Een phi meson (massa $m\phi m\phi$), in rust t.o.v. het labstelsel, vervalt in drie pionen (massa's $m\pi 0 m\pi 0$ en $m\pi\pm m\pi\pm$)

$\phi\rightarrow\pi+\pi-\pi 0$

$$\phi\rightarrow\pi+\pi-\pi 0$$

Het neutrale pion vervalt daarna in twee fotonen
$\pi 0\rightarrow 2\gamma$

$$\pi 0\rightarrow 2\gamma$$

Bepaal de minimale hoek tussen de fotonen in het labstelsel als functie van de massa's $m\phi m\phi$, $m\pi 0 m\pi 0$ en $m\pi\pm m\pi\pm$.

Academiejaar 2014-2015 1ste zit

Prof. Bart Partoens

Theorie

Vraag 1
Beschouw de langrangiaan van de Harmonische Oscillator $\dot{q}2-q2\dot{q}2-q2$ Toon aan dat de transformatie $q->q+\epsilon\dot{q}q->q+\epsilon\dot{q}$ leidt tot een ijktransformatie van de langrangiaan bepaal de behouden grootheid met het theorema van Noether.

Vraag 2

Drie van de vier volgende vergelijkingen zijn equivalent. Welke is niet equivalent? Bewijs de equivalentie van de drie equivalente vergelijkingen.
$dLdt=0\delta L\delta t=0dHdt=0\delta H\delta t=0dLdt=0\delta L\delta t=0dHdt=0\delta H\delta t=0$

Vraag 3

Gegeven de Hamiltoniaan H(z,pz)=p2z2μ+μgzH(z,pz)=pz22μ+μgz Beschouw de transformatie:
P=p2z2μ+μgzQ=f(pz)P=pz22μ+μgzQ=f(pz)
Bepaal voor welke functie van f(pz)f(pz) de transformatie canoniek is, en geef de nieuwe Hamiltoniaan H(Q,P). Geef de bijhorende bewegingsvergelijkingen voor P en Q. Wat is de interpretatie van P en Q?

Vraag 4
Bepaal de Greense functie voor de overgedempte Harmonische oscillator.

Vraag 5

De elektromagnetische veldvector wordt gegeven door:
Fμv=⎡⎣⎢⎢⎢⎢0ExEyEz−Ex0Bz−By−Ey−Bz0Bx−EzBy−Bx0⎤⎦⎥⎥⎥⎥Fμv=
[0−Ex−Ey−EzEx0−BzByEyBz0−BxEz−ByBx0]

- Bereken FμvFμvFμvFμv

- Als je in een welbepaald stelsel een elektrisch veld hebt , dan zal je in een ander stelsel een combinatie hebben van electrisch en magnetisch veld. Stel dat je een puur elektrisch veldhebt in een stelsel, is het dan mogelijk om een ander referentie stelsel te vinden waarin je puur een magnetisch veld hebt? (Gebruik FμvFμvFμvFμv)

Vraag 6
Beantwoord:

- Wat is een "Genererende functie" bij een canonische transformatie
- Beschrijf anharmonische effecten die tot de hysteresis lijden bij de gedreven oscillator.
- Definieer de generator van een groep.
- De lorentztransformaties vormen een specifieke Orthogonale groep SO(3,1). Hoeveel parameters beschrijven deze groep? Wat is de betekenis van deze parameters?

Oefeningen

Vraag 1

Een massapunt met massa μμ is opgehangen in een zwaarteveld met sterkte g gericht langs de y-as, aan een veer (evenwichtslengte l, veerconstante k), die kan slingeren in het xy-vlak. Het ophangpunt van deze elastische slinger beweegt langs de x-as volgens:
d(t)=a2t2+v0t+d0d(t)=a2t2+v0t+d0

- Maak een tekening van het systeem en geef de veralgemeende coördinaten. Welk type binding is er in dit systeem?
- Bepaalde langrangiaan van alle veralgemeende coördinaten.

- Zoek de evenwichtsconstante van de veralgemeende coördinaten. Maak ook grafieken van de evenwichtswaarden als functie van a. Ter informatie:

  sin(arctan(x))=x1+x2√cos(arctan(x))=11+x2√sin(arctan(x))=x1+x2cos(arctan(x))=11+x2

Vraag 2

Een massapunt met massa μμ beweegt op het oppervlak van een ellipsoïde in een zwaarteveld met veldsterkte g. De ellipsoïde wordt beschouwd door:
x2a2+y2b2+z2c2=1x2a2+y2b2+z2c2=1

- Geef de functie die de binding van het deeltje beschrijft. Tot welke categorie behoort deze binding?
- Stel de effectieve Langrangiaan F(x,y,z,x˙,y˙,z˙)F(x,y,z,x˙,y˙,z˙) van dit systeem met binding via de methode van Lagrange multiplicatoren. Bepaal met deze langrangiaan de beweging vergelijkingen.
- Wat is het verband tussen de binding de lagrange multiplicatoren en de dwangkracht die het deeltje op de ellipsoïde behouden?

- Bewijs dat de energie E=x˙px+y˙py+z˙pz−FE=x˙px+y˙py+z˙pz−F behouden is.

Vraag 3

Een elektrisch geladen puntdeeltje met lading q bevindt zich op een afstand x van een geleidende wand die alle ruimte waar x < 0 inneemt. De electrostatische interactie van het deeltje met de wand kan beschreven worden als een interactie met een zogenaamde beeldlading met lading -q, op positie -x. De potentiele energie van het deeltje voor de wand is hierdoor
V(x)=−q24πϵ04xV(x)=−q24πϵ04x

- Bepaal de Langrangiaan, Hamiltoniaan en geef de behouden grootheid van het systeem.

- We laten de lading vertrekken op positie x=a tov de plaat met snelheid 0. Bepaal hieruit p(x), door gebruik te maken van de behouden grootheid. Maak ook een tekening van de polen en van de stroom in de faseruimte en bespreek de beweging die het deeltje uitvoert.

Vraag 4
Een elektron botst op een positron in rust tov het botsstelsel. Het elektron en het positron zijn elkaars antideeltje, waardoor ze elkaar bij botsing annihileren. Tijdens deze annihilatie wordt alle massa omgezet in fotonen.

- Veronderstel eerst dat een foton wordt geproduceerd tijdens de annihilatie. Is deze reactie mogelijk volgens de behoudwetten? Werk hiervoor in het middelpuntstelsel van voor de botsing.

- Veronderstel nu dat twee fotonen geproduceerd worden bij de annihilatie. Vind de energie van beide fotonen in het botsstelsel als functie van de energie en de drie impuls van het electron en van de verstrooiingshoek. Voor welke hoek is de fotonenergie minimaal en voor welke maximaal?

Academiejaar 2012-2013 2de zit

Theorie

Vraag 1
Gedwongen trilling met wrijving

Vraag 2
Driehoeksmap + afleiding Lyapounov exponent

Vraag 3
Leidt de Schrodingervergelijking af uit het beginsel van minste actie

---

Oefeningen

Vraag 1

Een schijf met straal rr, massa mm en traagheidsmoment I=12mr2I=12mr2 rolt in een groeve (zie tekening). De groeve heeft de vorm van een halve cirkel met straal RR, een breedte van 2l2l en een massa MM. Je mag de breedte van de zijkanten verwaarlozen (dit zijn constanten die toch wegvallen maar je mag niet zeggen datR=lR=l. De groeve is zowel langs links als langs rechts verbonden met vaste punten op een afstand ll van de groeve via een veer (k,l)(k,l) en kan enkel horizontaal bewegen. Het hele systeem is wrijvingsloos, en de plaatscoordinaten worden gegeven door xx: de verticale positie van de groeve ten opzichte van het linkse vaste punt), θθ:de hoek waaronder de schijf zich bevindt ten opzichte van het middelpunt van de groeve, en ϕϕ: de hoek waaronder de schijf is gedraaid ten opzichte van zijn evenwichtspositie. Je kan een verband vinden tussen ϕϕ en θθ om ϕϕ uit de langrangiaan te elimineren.

- Stel de langrangiaan op (4 punten)
- Vind de evenwichtsposities en schrijf de langrangiaan in evenwichtscoördinaten (3 punten)

- Bepaal en bespreek de eigentrillingen van het systeem in het vereenvoudigde geval M=mM=m (3 punten)

Vraag 2

Een deeltje dat met een snelheid van 0.6c in de x-richting beweegt volgens het labstelsel, schiet een elektron af met een snelheid van 0.75c. Wat is de snelheid...
Relativistische optelwet voor snelheden was gegeven

v‾‾‾=V‾‾‾‾+v‾‾‾′+(1γ−1)·v‾‾‾′⊥1+V‾‾‾‾·v‾‾‾′c2

v‾=V‾+v‾′+(1γ−1)·v‾⊥′1+V‾·v‾′c2

- in het stelsel van het deeltje, wanneer het deeltje in de x-richting wordt afgeschoten (2 punten)
- in het stelsel van het deeltje, wanneer het deeltje onder een hoek van π3π3 tov de x-richting (2 punten)

- in het labstelsel, wanneer het deeltje in de y-richting wordt afgeschoten (1 punt)

Vraag 3

Een deeltje met een kinetische energie van T=2mc2T=2mc2 en een rustmassa van mm botst met een stilstaand deeltje met rustmassa 2m2m ter vorming van 1 deeltje. Bepaal de rustmassa m0m0 en de snelheid cc van het nieuw gevormde deeltje in functie van mm. (5 punten)

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

Groep 1

Vraag 1
Parametrische resonantie t/m Bloch

Vraag 2
deeltje in elektrisch veld + Maxwell

Vraag 3
Fractale dimensie + 2 voorbeelden

Groep 2

Vraag 1
Leidt de bewegingsvergelijkingen af voor een stelsel met bindingsvoorwaarden (Multiplicatoren van Lagrange)

Vraag 2
Minkowski metriek + Lorentz transformaties

Vraag 3
Logistieke map

Oefeningen

Vraag 1
Zie figuur 1, een massapunt met massa m2 ligt op een tafel en is verbonden met een muur door een veer met krachtconstante k2 en evenwichtslengte L2. Aan dit massapunt is een kabel met vaste lengte verbonden, die loopt van punt a tot punt b. Noem de totale lengte van deze kabel Lk. Aan deze kabel hangt een veer met krachtsconstante k1 en evenwichtslengte L1 waaraan een massapunt met massa m1 hangt in het zwaarteveld. De lengtes van de twee massapunten mogen worden verwaarloosd. De afstand van de muur tot het punt c wordt Lh genoemt (10 pt)

Fout bij het aanmaken van de miniatuurafbeelding: Bestand is zoek

- Stel de Lagrangiaan op voor dit systeem (4 pt) (Deze kan je gaan controleren bij de assistent voor je verder doet.)
- Bepaal de evenwichtsposities van beide massapunten en schrijf de Lagrangiaan in evenwichtscoordinaten (3pt)

- Bepaal en bespreek de eigentrillingen van het systeem in het vereenvoudigde geval m1=m2, k1=k2=k (3pt)

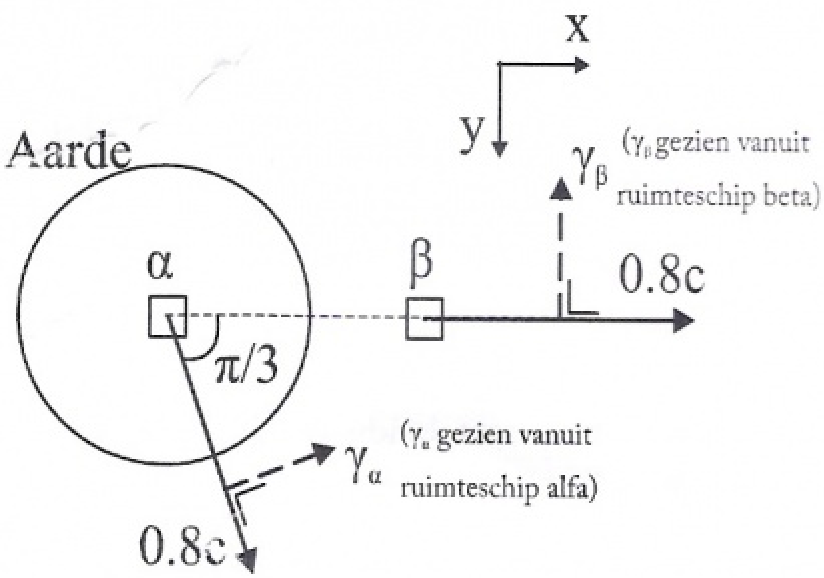
Vraag 2
Twee ruimteschepen αα en ββ bewegen ten opzichte van de aarde. Ruimteschip αα beweegt met snelheid 0.8c en onder een hoek π/3π/3 ten opzichte van de x-as in het stelsel van de aarde. Ruimteschip ββ beweegt met snelheid 0.8c en evenwijdig met de x-as in het stelsel van de aarde.
Gegeven formule (relativistische doppler verschuiving)

$\overline{v}=\overline{V}+\overline{v}'+(1\gamma-1)\cdot\overline{v}'_{\perp}1+\overline{V}\cdot\overline{v}'c2$

$$\overline{v}=\overline{V}+\overline{v}'+(1\gamma-1)\cdot\overline{v}_{\perp}'1+\overline{V}\cdot\overline{v}'c2$$

- Wat is de snelheid van ruimteschip αα gezien vanuit het stelsel van ruimteschip ββ? Onder welke hoek(t.o.v de x-as) beweegt αα zich in het stelsel van ββ?
- Ruimteschip ββ vuurt een foton γβγβ af loodrecht op zijn eigen bewegingsrichting(dus evenwijdig met de y-as) gezien vanuit het stelsel van ββ. Onder welke hoek beweegt het foton γβγβ zich ten opzichte van de x-as, gezien vanuit het stelsel van de aarde?

- Ook ruimteschip αα vuurt een foton af loodrecht op zijn bewegingsrichting (gezien vanuit het stelsel van αα). Wat is de hoek tussen de banen van de fotonen γαγα en γβγβ, gezien vanuit het stelsel van de aarde?



Figuur 2: Vraag 2

<u>Vraag 3</u>
Een proton met bepaalde snelheid gaat een botsing aan met een proton in rust. Na de botsing vliegen beide protonen op een symmetrische wijze weg (zie figuur). Geef de hoek ϕ2ϕ2 in functie van EE en E0E0

Anmech-3.JPG

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Oefeningen

Vraag 1

Zie figuur 1, een massapunt met massa m2 ligt op een tafel en is verbonden met een muur door een veer met krachtconstante k2 en evenwichtslengte L2. Aan dit massapunt is een kabel met vaste lengte verbonden, die loopt van punt a tot punt b. Noem de totale lengte van deze kabel Lk. Aan deze kabel hangt een veer met krachtsconstante k1 en evenwichtslengte L1 waaraan een massapunt met massa m1 hangt in het zwaarteveld. De lengtes van de twee massapunten mogen worden verwaarloosd. De afstand van de muur tot het punt c wordt Lh genoemt (10 pt)

Fout bij het aanmaken van de miniatuurafbeelding: Bestand is zoek

- Stel de Lagrangiaan op voor dit systeem (4 pt) (Deze kan je gaan controleren bij de assistent voor je verder doet.)
- Bepaal de evenwichtsposities van beide massapunten en schrijf de Lagrangiaan in evenwichtscoordinaten (3pt)

- Bepaal en bespreek de eigentrillingen van het systeem in het vereenvoudigde geval m1=m2, k1=k2=k (3pt)

Vraag 2

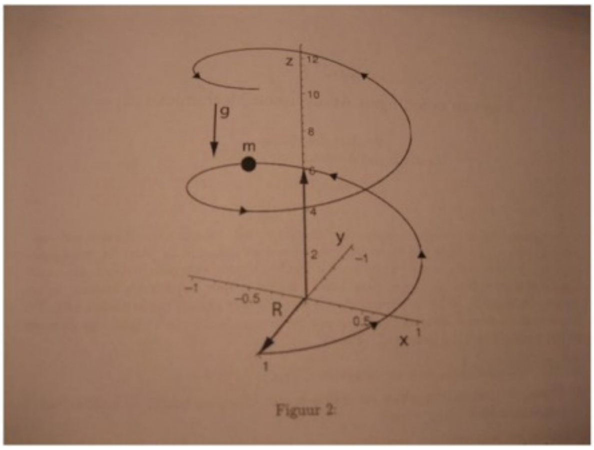
Een deeltje(vanaf nu alfa genoemd) met snelheid 0.6c in de x-richting in het laboratoriumstelsel, zendt een elektron uit dat in het ruststelsel van alfa een snelheid met grootte 0.75c heeft. Bereken de snelheid van dit elektron in het laboratoriumstelsel(5pt)

- Als het elektron in de x-richting wordt uitgezonden in het ruststelsel van alfa(2pt)
- als het elektron onder een hoek pi/3 ten opzichte van de x-richting wordt uitgezonden in het ruststelsel van alfa(2pt)

- als het elektron in de y-richting wordt uitgezonden in het laboratoriumstelsel(1pt)

Vraag 3

Een massapunt met massa m beweegt langs een helix in het zwaarteveld. De straal van de helix wordt gegeven door R en de hoogte van het massapunt is evenredig met het aantal gemaakte omwentelingen, waarbij de evenredigheidsconstante wordt gegeven door a. Op t=0 bevindt het massapunt zich op een hoogte h en heeft het beginsnelheid nul(5pt)

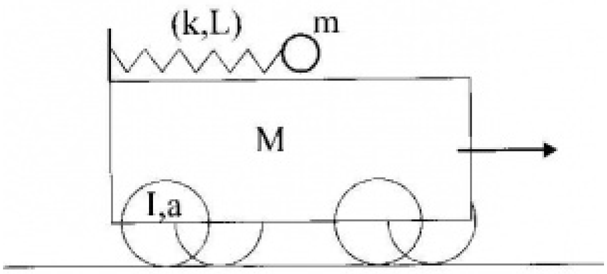


- Bewijs dat de bewegingsvergelijking van het massapunt wordt gegeven door z¨=−ga2R2+a2z¨=−ga2R2+a2 met de methode van Lagrange (2pt)
- Leid diezelfde bewegingsvergelijking af via de methode van d'Alembert, en bepaal via deze methode eveneens de reactiekrachten die op het massapunt inwerken. (3pt)

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Oefeningen

<u>Vraag 1</u>
Een karretje met vier wielen beweegt wrijvingsloos over een horizontale weg. De massa van het karretje plus de massa van de vier wielen is gelijk aan M. De wielen hebben straal a en traagheidsmoment I. Bovenop het karretje ligt een bal met massa m die wrijvingsloos kan bewegen op een horizontale. De bal is verbonden met het karretje via een veer met krachtsconstante k en evenwichtslengte L. Bepaal en bespreek de eigentrillingen.(10pt)



Vraag 2
Twee ruimteschepen A en B bewegen ten opzichte van de aarde. Ruimteschip A beweegt met snelheid 0.8c en onder een hoek π/3π/3 ten opzichte van de x-as in het stelsel van de aarde. Ruimteschip B beweegt met snelheid 0.8c en evenwijdig met de x-as in het stelsel van de aarde.

- Wat is de snelheid van ruimteschip A gezien vanuit het stelsel van ruimteschip B? Onder welke hoek(t.o.v de x-as) beweegt A zich in het stelsel van B?(2pt)
- Ruimteschip B vuurt een foton γBγB af loodrecht op zijn eigen bewegingsrichting(dus evenwijdig met de y-as) gezien vanuit het stelsel van B. Onder welke hoek beweegt het foton γBγB zich ten opzichte van de x-as, gezien vanuit het stelsel van de aarde?(2pt)

Academiejaar 2009-2010 1ste zit

Prof. Dr. D. Van Dyck

Theorie

Groep A

Vraag 1
Gedwongen trilling met wrijving

Vraag 2
Relativistische botsingen

Vraag 3
Driehoeksmap

Groep B

Vraag 1
Parametrische resonantie

Vraag 2
Stel de Minkovski metriek en Lorentztransformatie op

Vraag 3
Relativiteitstheorie → geladen deeltje in EM veld

Academiejaar 2008-2009 1ste zit

Prof. Dr. D. Van Dyck

Theorie

Vraag 1
Leid de Schrödinger vergelijking af uit het beginsel van de minste actie

Vraag 2
Stel de Minkovski metriek en Lorentztransformatie op

Vraag 3
Relativiteitstheorie → geladen deeltje in EM veld

Academiejaar 2007-2008 1ste zit

Prof. Dr. D. Van Dyck

Theorie

Vraag 1
Gedwongen trillingen met wrijving

Vraag 2
Stel de Minkovski metriek en Lorentztransformatie op

Vraag 3
Driehoeksmap + afleiding Lyapounov exponent

Academiejaar 2004-2005 2^{de} zit

Prof. Dr. D. Van Dyck

Theorie

Vraag 1
Parametrische resonantie tot en met Bloch functies.

Vraag 2
Stel de Minkowski metriek en Lorentz transformatie op. (relativiteitstheorie)

Vraag 3
Geef de driehoeksmap inclusief het bewijs van de Lyapunov exponent. (Chaos)

Academiejaar 2004-2005 1ste zit

Prof. Dr. D. Van Dyck

Theorie

Vraag 1

Parametrische resonantie t/m Bloch functies

Vraag 2

Relativiteitstheorie → geladen deeltje in EM veld

Vraag 3

Driehoeksmap + afleiding Lyapounov exponent