Statistische en wiskundige natuurkunde

Strategische bedrijfscommunicatie

Richting	Fysica
Jaar	MFYS

Bespreking

Tot voor het Academiejaar 2014-2015 hoorde dit vak bij Wiskundige methoden in theoretische fysica, sindsdien is het een apart vak met een wat uitgebreider examen. Meestal is het eerst oefeningen examen en dag nadien theorie (meestal opgesplitst in groepen voor voormiddag en namiddag.)

Puntenverdeling

Theorie 50% Schriftelijk met mondelinge toelichting.

Oefeningen 50%.

Examenvragen

Academiejaar 2020-2021 2de zit

Prof. Michiel Wouters

Theorie

1. Leid het Wiener-Khintchine theorema af, dat het verband geeft tussen de autocorrelatiefunctie en het vermogenspectrum.
2. Schets de afleiding van de Vlasovvergelijking. Bespreek reversibiliteit.
3. Bespreek de faseovergang van het Isingmodel in de gemiddeld veldbenadering. Bespreek de kritische exponenten voor de spontane magnetisatie en voor de magnetische susceptibiliteit. Kan je de kritische exponent voor de soortelijke warmte in deze benadering berekenen? Zo niet, via welke benadering wel (je hoeft dit niet te doen)?

Oefeningen

1. (4 punten4 punten) SDESDE: Gegeven is de stochastische differentiaalvergelijking $dx=(-2x+1)dt+2x−−\surd dW$

$$dx=(-2x+1)dt+2xdW$$

   waarbij $dW_tdW_{t'}=dtdt'\delta(t-t')dW_tdW_{t'}=dtdt'\delta(t-t')$ ongecorreleerde Gaussische ruis is en $x>0x>0$.
   - Transformeer de vergelijking naar de nieuwe variabele yy, $x=y2x=y2$. (1 punt1 punt)
   - Vind vervolgens een uitdrukking voor $\langle y(t)\rangle\langle y(t)\rangle$. (1 punt1 punt)
   - Vind $\langle y2(t)-\langle y(t)\rangle 2\rangle\langle y2(t)-\langle y(t)\rangle 2\rangle$. (1 punt1 punt)
   - Bepaal tot slot $\langle x2(t)\rangle\langle x2(t)\rangle$. (1 punt1 punt)
2. (5 punten5 punten) MarkovketenMarkovketen: Een leverancier staat in voor de levering van online bestellingen in de steden Brussel, Antwerpen en Gent. Iedere ochtend vooraleer hij begint te werken kiest hij willekeurig één van deze steden door een dobbelsteen te werpen:

- 1: Hij rijdt richting Antwerpen
- 6: Hij rijdt richting Gent
- 2, 3, 4, 5: Hij gaat naar Brussel

Echter, aangezien het aantal klanten in zowel Gent als Antwerpen veel kleiner is dan in Brussel gaat hij nooit twee dagen op rij naar eenzelfde van deze twee steden. Vandaar hanteert hij de volgende strategie: Als hij gisteren in Antwerpen (Gent) heeft geleverd, en de dobbelsteen zegt hem vandaag om nogmaals naar Antwerpen (Gent) te gaan, dan werpt hij de dobbelsteen nog een keer en rijdt hij naar één van de twee andere steden. Afhankelijk van de uitkomst

- 1, 2, 3: gaat hij naar Brussel
- 4, 5, 6: gaat hij naar Gent (Antwerpen)

(a) Maak een toestandsdiagram met alle overgangswaarschijnlijkheden. (1 punt1 punt)

(b) Bepaal de overgangsmatrix en bereken de stationaire waarschijnlijkheidsdistributie. (2 punten2 punten)

(c) Hoe groot is de kans dat hij, beginnend op een willekeurige dag, drie dagen op een rij in Brussel gaat leveren? (0,5 punt0,5 punt)

(d) Als je weet dat hij vandaag niet in Gent levert, wat is dan de kans dat hij daar (in Gent) morgen en overmorgen ook niet komt? (1,5 punt1,5 punt)

3. (2 punten2 punten) DichtheidsmatrixDichtheidsmatrix: Gegeven de twee-qubit-toestand:
$|\varphi\rangle=110−−\surd(3|\uparrow\uparrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)$

$$|\varphi\rangle=110(3|\uparrow\uparrow\rangle-|\downarrow\uparrow\rangle)$$

- Bereken de gereduceerde dichtheidsmatrix $\rho\hat{}(2)\rho\hat{}(2)$ voor de tweede spin. (1 punt1 punt)
- Gebruik deze dichtheidsmatrix nu om $\langle\sigma\hat{}z\rangle 2\langle\sigma\hat{}z\rangle 2$. (1 punt1 punt)

4. (4 punten4 punten) Het klassieke HalleffectHet klassieke Halleffect: Gegeven een 2D-gas van geladen deeltjes in de aanwezigheid van een zwakzwak homogeen magnetisch veld $\vec{B}$ B→ in de transversale richting. In de relaxatietijdsbenadering wordt de Boltzmannvergelijking gegeven door
$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\cdot\vec{\nabla}_r f+\vec{F}\cdot\vec{\nabla}_p f=-\frac{f-f^{(0)}}{\tau}$.

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\frac{\vec{p}}{m}\cdot\vec{\nabla}_r f+\vec{F}\cdot\vec{\nabla}_p f=-\frac{f-f^{(0)}}{\tau}.$$

De krachtterm is hier de Lorentzkracht $\vec{F}=q(\vec{v}\times\vec{B})$ F→=q(v→×B→) die wordt uitgeoefend op de deeltjes, $\vec{B}$ B→ gericht langs de z-as. Veronderstel dat we de evenwichtsdistributie kunnen benaderen als $f=f^{(0)}+\delta f$f=f(0)+δf, met $f^{(0)}$f(0) de tweedimensionale Boltzmannverdeling met een gemiddelde impuls PP in de xx-richting
$f^{(0)}(p_x,p_y)=\left(\frac{1}{2\pi mk_BT}\right)\exp\left[-\frac{(p_x-P)^2+p_y^2}{2mk_BT}\right]$.

$$f^{(0)}(p_x,p_y)=\left(\frac{1}{2\pi mk_BT}\right)\exp\left[-\frac{(p_x-P)^2+p_y^2}{2mk_BT}\right].$$

- Bepaal δfδf door de Boltzmannvergelijking te lineariseren voor kleine δfδf en $\vec{B}$ B→. Je mag aannemen dat δfδf ruimtelijk homogeen is in het (x,y)x,y)-vlak. (2 punten)(2 punten)
- Vind de Hallstroom $\vec{j}=n\langle\vec{v}\rangle$ j→=n⟨v→⟩. In welke richting loopt de stroom? (2 punten)(2 punten)

Extra vraagExtra vraag: Kan je de Hallstroom vinden als $P=0$P=0 en $\vec{F}=q\vec{E}+q\vec{v}\times\vec{B}$ F→=qE→+qv→×B→, met $\vec{E}$ E→ een zwak elektrisch veld in de xx-richting?

Academiejaar 2020-2021 1ste zit

Prof. Michiel Wouters

Theorie

1. Bespreek Markovketens. Leid de mastervergelijking af. Wat is detailed balance? Pas toe op de random walk en bespreek het verband hiervan met de diffusievergelijking. Bespreek aan de hand van het centrale limiettheorema (je hoeft dit niet te bewijzen) in welke limiet de random walk en het Wienerproces aan elkaar gelijk zijn.
2. Leid de van der Waals toestandsvergelijking af. Bespreek de Maxwellconstructie.
3. Bespreek de soortelijke warmte in het Gaussische model voor tweede orde faseovergangen in de Ising-universaliteitsklasse. Bespreek hoe ze afhangt van de dimensie. Wat is de kritische exponent voor de soortelijke warmte binnen de Gaussische benadering?

Academiejaar 2018-2019 1ste zit

Theorie

Groep A

1. Leid de Fokker-Plack vergelijking af. Bespreek diffusie vanuit verschillende invalshoeken.
2. Leid de Boltzmann vergelijking af. Bespreek reversibiliteit.
3. Bespreek de Landau theorie voor fase-overgangen. Wat is spontane symmetriebreking? Wat zijn de kritische exponenten in deze theorie?
4. Bespreek soortelijke warmte voor het Gaussische model voor tweede-orde fase-overgangen in d-dimensies.

Oefeningen

1. (5 punten)(5 punten) Beschouw een 1-dimensionaal spinsysteem waarbij de interacties tussen de spins afwisselen, zoals weergegeven op de figuur (de spins kunnen elk twee waarden aannemen si=±1si=±1). Verder willen de spins zich gelijkrichten met een extern magneetveld.
    1. Schrijf de energie van een serie spins met bovenstaande interacties, die zich bevinden in een homogeen magneetveld h, neer. (1 punt)(1 punt)
    2. Hoe zou de grondtoestand van dit model eruit zien bij h=0h=0? Wat zou dan een goede ordeparameter zijn om de faseovergang te beschrijven?
    3. Schrijf de energie van de spins in de gemiddelde veldbenadering neer en bereken daaruit de toestandsom. Hint: denk aan goede subroosters voor dit systeem. (2 punten)(2 punten)
    4. Wat is de kritische temperatuur? (1 punt)(1 punt)

2. (5 punten)(5 punten) Beschouw volgende stochastische differentiaalvergelijking
   $dy=1ydt+\alpha ydW$
   $$dy=1ydt+\alpha ydW$$
   met ⟨dWtdW′t⟩=dtdt′δ(t−t′)⟨dWtdWt′⟩=dtdt′δ(t−t′) ongecorreleerde Gaussische ruis.
   1. Bewijs de Ito-productregel voor algemene xx en yy (1 punt)(1 punt)
      $d(xy)=xdy+ydx+dxdy.$
      $$d(xy)=xdy+ydx+dxdy.$$
   2. Beschouw volgende differentiaalvergelijking
      $dx=a(t)dt+b(t)dW,$
      $$dx=a(t)dt+b(t)dW,$$
      vul deze vergelijking samen met de vergelijking voor dydy in in de Ito productregel. Bepaal vervolgens a(t) en b(t)a(t) en b(t) opdat de rechterzijde van de productregel geen lineaire contributies van y(t)y(t) meer heeft. (1 punt)(1 punt)
   3. Bepaal de oplossing van x(t)x(t) door eerst een transformatie van de variabele door te voeren die je de vergelijking
      $dz=-\alpha zdW,$
      $$dz=-\alpha zdW,$$
      geeft en vervolgens de transformatie naar de variabele u=ln(z)u=ln(z) te maken. Kies x(0)=1x(0)=1. (1 punt)(1 punt)
   4. Bereken nu de oplossing van y(t)y(t) door gebruik te maken van de substitutie u(t)=x(t)y(t)u(t)=x(t)y(t) en deze in te vullen in de vereenvoudigde productregel die je bekomen bent in (2). Vervolgens terug transformeren naar y(t)y(t) geeft de gevraagde oplossing. (1 punt)(1 punt)
   5. Bereken ⟨y(t)⟩⟨y(t)⟩.(1 punt)(1 punt)
3. (6 punten)(6 punten) **Het Bernoulli-Laplace model:** Beschouw twee reservoirs die ieder gevuld zijn met NN deeltjes. Het totaal aantal deeltjes van beide reservoirs kan opgedeeld worden in bb zwarte deeltjes en ww witte deeltjes. Iedere tijdstap wordt er in ieder reservoir een deeltje gekozen. Dat deeltje wordt dan overgebracht naar het ander reservoir.
   1. Teken een toestandsdiagram met overgangswaarschijnlijkheden. Bespreek kort de situaties waarbij b=w,b<w en b>wb=w,b<w en b>w. (2 punten)(2 punten)
   2. Stel de transitiematrix op voor de situatie waarbij b=w=Nb=w=N. (1 punt)(1 punt)
   3. Wat is de evenwichtstoestand van dit systeem wanneer N=4N=4? (2 punten)(2 punten)
   4. Hoe groot is de kans dat het systeem zich drie opeenvolgende tijdstippen in de configuratie bevindt waarbij er zich evenveel zwarte als witte deeltjes in zowel reservoir 1 als reservoir 2 bevinden? (1 punt)(1 punt)

4. (4 punten)(4 punten) **Het klassieke Halleffect:** Gegeven een 2D-gas van geladen deeltjes in de aanwezigheid van een zwakzwak homogeen magnetisch veld B⃗ B→ in de transversale richting. In de relaxatietijdsbenadering wordt de Boltzmannvergelijking gegeven door
∂f∂t+p⃗ m·∇⃗ rf+F⃗ ·∇⃗ pf=−f−f(0)τ.

   ∂f∂t+p→m·∇→rf+F→·∇→pf=−f−f(0)τ.

   De krachtterm is hier de Lorentzkracht F⃗ =q(x⃗ ×B⃗)F→=q(x→×B→) die wordt uitgeoefend op de deeltjes, B⃗ B→ gericht langs de z-as.\\ Veronderstel dat we de evenwichtsdistributie kunnen benaderen als f=f(0)+ϵf(1),f=f(0)+ϵf(1), met f(0)f(0) de tweedimensionale Boltzmannverdeling met een gemiddelde impuls PP in de x-richting
f(0)(px,py)=(12πmkBT)exp[−(px−P)2+P2y2mkBT].

   f(0)(px,py)=(12πmkBT)exp[−(px−P)2+Py22mkBT].

   1. Bepaal de evenwichtsoplossing van f(1)f(1) door de Boltzmannvergelijking te lineariseren voor kleine ϵf(1)ϵf(1) en B⃗ B→. Je mag aannemen dat f(1)f(1) ruimtelijk homogeen is in het (x,y)-vlak. (2 punten)(2 punten)
   2. Vind de Hallstroom j⃗ =n⟨v⃗ ⟩j→=n⟨v→⟩. In welke richting loopt de stroom? (2 punten)(2 punten)

Herinner:

v⃗ ×B⃗ =∣∣∣∣∣e⃗ xvxBxe⃗ yvyBye⃗ zvzBz∣∣∣∣∣

v→×B→=|e→xe→ye→zvxvyvzBxByBz|

Figuur

Academiejaar 2016-2017 1ste zit

Theorie

1. Leid het centrale limiet theorema af. Wat is het belang voor stochastische calculus?
2. Bespreek het qualitatieve gedrag van de correlatie functies in het Ising model. Wat is het verband tussen fluctuaties en de respons?
3. Bewijs het Wiener-Khintchine theorema. Pas het toe op de autocorrelatie functie van de snelheid in het Langevin model voor de Brownse beweging te vinden in het geval van gekleurde ruis (waarvan de autocorrelatie functie geen delta functie is)
4. Bereken de soortelijke warmte van het Gaussische model voor tweede-orde fase overgangen in d dimensies.
5. Leid de Boltzman vergelijking af. Wat is het verband met de masterergelijking voor een Markovproces?

Academiejaar 2015-2016 1ste zit

Theorie

1. Leid het centrale limiet theorema af
2. Geeft het tweede fluctuatie-dissipatie theorema van de Brownse beweging. Dus de wrijving relateren aan de random kracht.
3. Bewijs het Boltzmann H-theorema.
4. Bereken de soortelijke warmte van het Gaussische model voor tweede-orde fase overgangen in d dimensies.
5. Bespreek de kritische exponenten voor de soortelijke warmte en de correlatielengte aan de hand van de renormalisatiegroep.

Academiejaar 2014-2015 1ste zit

Theorie

Groep A

1. Leid de Fokker-Planck vergelijking af voor het Langevin model. Wat is het gevolg voor de Brownse beweging?
2. Schets de afleiding van de Pauli Master equation
3. Wat is verband tussen de correlatiefunctie van het Ising model en de magnetische susceptibiliteit?
4. Afleiding van de kritische exponenten bij 1 koppelingsconstante & scaling law

Groep B

1. Leid de diffusievergelijking in de reële ruimte (Einstein-Smolukovski) af uit de Langevinvergelijking voor Brownse beweging in de adiabatische benadering. Leid ook het verband af tussen de diffusie-coëfficiënt en de mobiliteit (Einstein relatie).
2. Bewijs het Boltzmann H-theorema.Wat is de betekenis in verband met de tweede hoofdwet van de thermodynamica?
3. Leid de Van der Waals toestandsvergelijking af door gemiddeld-veld theorie te gebruiken voor een interagerend gas. Licht de Maxwell-constructie toe om de fase-overgang te beschrijven.
4. Bespreek de kritische exponenten voor de soortelijke warmte (αα) en de correlatielength (νν) aan de hand van de renormalisatiegroep.

Groep C

1. Bewijs het Wiener-Khintchine theorema. Pas het toe op het Langevin model voor Brownse beweging om de autocorrelatiefunctie voor de snelheid te berekenen.
2. Schets de afleiding van de Vlasov-vergelijking.
3. Bereken de soortelijke warmte van het Gaussische model voor tweede-orde fase-overgangen in *d* dimensies.
4. Bespreek het kwalitatieve gedrag van de correlatiefuncties in het Ising model. Wat is het verband tussen de fluctuaties en de respons?

Oefeningen

1. Frank en Tom spelen een spel waarin ze elk een aantal munten bezitten. Iedere beurt kiezen ze een van hun munten en leggen hem met kop of munt naar boven. zender dat de andere het kan zien. Daarna vergelijken ze hun munten: als beide munten met dezelfde kant naar boven liggen (twee maal kop of tweemaal munt), krijgt Tom ze allebei, maar als ze elk met de andere kant naar boven liggen (een kop en een munt) gaan ze allebei naar Frank. Wanneer een van hen al zijn munten heeft verloren, geeft de andere persoon hem een van zijn munten om verder te blijven spelen.
    - Stel dat er nn munten in het spel zijn. Teken het toestandsdiagram.
    - Vind de stationaire toestand voor n=5n=5.
    - Op een bepaald punt heeft Frank nog maar één munt over. Wat is de kans dat hij binnen drie beurten (dus na drie beurten of ervoor) geen munten meer over heeft?
2. Beschouw volgend systeem van stochastische differentaalvergelijkingen dx=pdt+αdVdp=−γpdt−βdW

   dx=pdt+αdVdp=−γpdt−βdW

   met dVdV en dWdW twee ongecorreleerde stochastische variabelen.
    - Los het systeem op voor x(t)x(t) en p(t)p(t), i.e. vind uitdrukkingen waarin enkel nog *stochastische* variabelen voorkomen.
    - Bereken ⟨x(t)⟩⟨x(t)⟩.
    - Bereken ⟨(x(t)−⟨x(t)⟩)2⟩⟨(x(t)−⟨x(t)⟩)2⟩.
3. We bereiden een 2-qubitsysteem in volgende toestand |ψ⟩=3–√2|↑↓⟩−12|↓↑⟩.

   |ψ⟩=32|↑↓⟩−12|↓↑⟩.

   Bereken de gereduceerde dichtheidsmatrix van de eerste qubit ρ(1)=tr2ρρ(1)=tr2ρ.
4. **De Boltzmannvergelijking voor een kwantumgas:** De Boltzmanvergelijking kan rechtstreeks veralgemeend worden om deeltjesstatistiek mee in rekening te nemen. Het enige extra ingrediënt dat meegenomen dient te worden is dat de verstrooiingswaarschijnlijkheid nu ook afhangt van de bezetting van de finale toestanden i.e. er moet een extra factor (n′k±1)(nk′1±1)(nk′±1)(nk1′±1) meegenomen worden, waar '++' is voor bosonen en '−−' voor fermionen. k′k′ en k′lk′l zijn de golfvectoren van de eindtoestanden.
    - Schrijf de Boltzmanvergelijking voor kwantumgassen neer.
    - Toon aan dat de Fermi-Diracdistributie de evenwichtsoplossing is van de fermionische Boltzmannvergelijkìng.

5. **Antiferromagnetisme in een spin-I-rooster:** Beschouw de energiefunctie van een rooster met spin-I-componenten
   E=J∑⟨ij⟩sisj−h∑isi.
   $$E=J\sum_{\langle ij\rangle}s_is_j-h\sum_i s_i.$$
   De som ⟨ij⟩⟨ij⟩ loopt hier over alle naburige spins en hh is een extern magneetveld. Ieder roosterpunt kan nu echter drie waarden aannemen: -1, 0 of +1.
   - Hoe verwacht je dat de grondtoestand eruit ziet? Wat zou een goede ordeparameter zijn om dit systeem te beschrijven?
   - Herschrijf de energie in de mean-fieldbenadering, uitgaande van deze overwegingen.
   - Bepaal de kritische temperatuur.
   - Net onder de kritische temperatuur voldoet de ordeparameter aan een machtswet ψ=(−t)βψ=(−t)β, met t=(T−Tc)/Tct=(T−Tc)/Tc. Vind de kritische temperatuur.
6. **Deeltjes op een 1D-rooster:** Twee deeltjes zitten op een ééndimensionaal rooster met oneindige lengte. Iedere tijdstap kunnen ze springen naar het volgende roosterpunt rechts van hen. Het eerste deeltje doet dit met een waarschijnlijkheid ββ en het laatste met waarschijnlijkheid γγ. Als de twee deeltjes zich net naast elkaar bevinden, zit het laatste deeltje geblokkeerd en kan het niet springen tot het eerste is verdergegaan (zie figuur).
   - Maak en schematische weergave van het toestandsdiagram, waarin de toestanden worden weergegeven door het aantal lege roosterpunten tussen de deeltjes. Welke voorwaarde moet je opleggen aan ββ en γγ om een stationaire distributie te vinden?
   - Als PnPn de waarschijnlijkheid is om nn loege roosterpunten tussen de deeltjes te vinden, bepaal dan volgende verhoudingen via *detailed balance*.
     - Pn+1PnPn+1Pn, met n>1n>1
     - P1P0P1P0

     Extra: Kan je een algemene uitdrukking bepalden voor PnPn?

Academiejaar 2012-2013 2de zit

Theorie

1. Stel de Landau vrije energie functionaal op op basis van symmetrie-argumenten en expansies. Wat is de waarde van de kritische exponent voor de magnetisatie in deze theorie? Waarom is deze niet exact?
2. Bespreek de kritische exponenten voor de correlatielengte en de vrije energie in de renormalisatiegroeptheorie. Leid de Josephson schalingswet af, die het verband tussen beide geeft.

Oefeningen

1. Het XY model bestaat uit spins op een rooster, die een willekeurige hoek θ met de x-as maken, met θ gelegen tussen $[0,2\pi[$. De energie wordt gegeven door $E=-J\sum_{\langle ij\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j)-H\sum_i\cos(\theta_i)$, waarbij de som $\langle ij\rangle$ loopt over de naaste buren. Bespreek kwalitatief de fasen van dit model bij lage en bij hoge temperatuur, zowel voor $J>0$ als voor $J<0$. Wat is een goede ordeparameter voor dit systeem? Stel een uitdrukking voor de Landau vrije energie op voor $J>0$.
2. Bereken de vrije energie van een ferromagnetisch Ising model met 3 spintoestanden in gemiddeld veld benadering. De energie is $E=-J\sum_{\langle ij\rangle}s_is_j-H\sum_{\langle i\rangle}s_i$ waarbij s_i de waarden -1, 0, 1 kan aannemen. Wat is de kritische temperatuur voor $H=0$?

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

1. Leid de van der Waals toestandsvergelijking af.
   Hint: Z ideaal gas $=Z=\frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\Lambda_{db}^3}\right)^N$ voor N atomen bij temperatuur T in een volume V en zonder externe potentiaal.
2. Bespreek het Girburg criterium.
   Hint: Bij een herschaling van de integratievariabele x in de Landau vrije energie
   $E=\int\left[\frac{K}{2}(\nabla_x\eta)^2+\omega\eta^2+\frac{b}{2}\eta^4\right]d^dx$
   $$E=\int\left[\frac{K}{2}(\nabla_x\eta)^2+\omega\eta^2+\frac{b}{2}\eta^4\right]d^dx$$
   met een factor l moeten we de constante ω en b herschalen als:
   $\omega'=\omega l^2, b'=bl^{4-d},$
   $$\omega'=\omega l^2, b'=bl^{4-d},$$
   waarbij d de dimensie is.

Oefeningen

1. Het XY model bestaat uit spins op een rooster, die een willekeurige hoek θ met de x-as maken, met θ gelegen tussen $[0,2\pi[$. De energie wordt gegeven door $E=-J\sum_{\langle ij\rangle}\cos(\theta_i-\theta_j)-H\sum_i\cos(\theta_i)$, waarbij de som $\langle ij\rangle$ loopt over de naaste buren. Bespreek kwalitatief de fasen van dit model bij lage en bij hoge temperatuur, zowel voor $J>0$ als voor $J<0$. Wat is een goede ordeparameter voor dit systeem? Stel een uitdrukking voor de Landau vrije energie op voor $J>0$.

2. Bereken de spontane magnetisatie, de soortelijke warme en de magnetische susceptibiliteit bij $H=0$ uit de Landau vrije energie voor het Ising model $L_V=atM^2+\frac{1}{2}bM^4-HM$, waarbij M de magnetisatie is, t de gereduceerde temperatuur, H het magneetveld en a en b positieve parameters zijn.

Academiejaar 2011-2012 2de zit

Theorie

1. Bespreek de gemiddelde veld benadering van het Ising model. Bereken de kritische exponent β voor de spontane magnetisatie (als je een taylor-expansie van een functie nodig hebt mag je die vragen).
2. Leid de kritische schaling voor de spontane magnetisatie af uit de renormalizatiegroepvergelijkingen.
3. Bespreek spontane symmetriebreking in het kader van Landau-theorie van 2de orde fase-overgangen.

Academiejaar 2011-2012 1ste zit

Theorie

1. Hoe wordt de correlatiefunctie voor het Ising-model gedefinieerd? Hoe gedraagt de correlatiefunctie zich kwalitatief bij hoge en bij lage temperatuur? Wat is het verband tussen de correlatie-functie en de magnetische susceptibiliteit?
2. Leid de kritische schaling voor de soortelijke warmte af uit de renormalizatiegroepvergelijkingen.
3. Bespreek fenomenologische Landau-Theorie voor tweede-orde fase-overgangen.

Oefeningen

1. Bereken de magnetisatie voor een spin-1 Ising model (dwz drie verschillende spintoestanden) in gemiddeld veld theorie. De energie voor een spinconfiguratie is $E=-J\sum_{\langle i,j\rangle}s_is_j$, waarbij s_i de waarde $s_i=0,\pm1$ aannemen en de som over naaste buren gaat. De koppeling is positief $J>0$. Expandeer de zelfconsistentievergelijking voor de magnetisatie om de kritische temperatuur te berekenen.

2. Bereken in Gaussische benadering de soortlijke warmte van het Landau-Wilson model beneden de kritische temperatuur t<0. De partitiesom is $Z=\int D\varphi \exp[-L(\varphi)]$, waarbij $L(\varphi)=\int d^dx[-1/2\varphi(x)\nabla^2\varphi(x)+rt\varphi^2(x)+a\varphi(x)^4]$, ga als volgt te werk
    1. Vind het ruimtelijk homgene $\varphi(x)=\varphi_0$ veld dat L minimizeert.
    2. Expandeer de Landau-vrije energie als $\varphi(x)=\varphi_0+\delta\varphi(x)$ tot op kwadratische orde in $\delta\varphi(x)$
    3. Werk de Gaussische integraal in $\delta\varphi(x)$ uit
    4. Bereken de vrije energie en soortelijke warmte uit de partitiesom.

    Hints

    - $\int -1/2\varphi(x)\nabla^2\varphi(x)d^dx=\int[0.5(\nabla\varphi(x))^2]d^dx$ met partiele integratie en verwaarlozing van oppervlakteterm
    - Gaussische integraal $\int D\varphi \exp[-0.5\int\varphi(x)A\varphi(x)]=\sqrt{\frac{2\pi}{\det(A)}}$ waarbij A een lineaire operator is
    - $\det(A)$ = product eigenwaarden van A

Categorieën:

- Fysica
- MFYS