Ringen & Modulen - Encyclopedia Academia

Ringen & Modulen

Ringen & Modulen	
Richting	Wiskunde
Jaar	2BWIS

Januari 2021

Prof. Wendy Lowen
Corona-examen, leerstof en moeilijkheidsgraad kan afwijken.

1. Zij RR een ring en MM een link RR-moduul. Noem een links deelmoduul N⊆MN⊆M echt als N≠MN≠M. Beschouw volgende uitspraak:
   (*) Voor elk echt links deelmoduul N⊆MN⊆M bestaat een maximaal echt deelmoduul Q⊆MQ⊆M met N⊆QN⊆Q
   (a) Formuleer en bewijs de stelling van Krull voor linkse idealen van RR.

   (b) Pas het bewijs uit (a) aan om (*) te bewijzen wanneer MM eindig voortgebracht is.

   (c) Leg uit op welke manier de stelling van Krull volgt uit de eigenschap die je bewezen hebt in (b).
   [Geef zo veel mogelijk details in je antwoorden. Bewijs ook eventuele hulpresultaten die je gebruikt]

2. Beschouw volgende ringen:
    - $A=C[x,y]A=C[x,y]$
    - $B=C[x,y]/(x2+y2+1)B=C[x,y]/(x2+y2+1)$

   (a) Is AA een hoofdideeldomein?
   Is AA een Euclidisch domein?
   Is AA een uniekfactorisatiedomein?

   (b) Is BB Noethers?

   (c) Beschouw BB als moduul over AA via het quotiënthomomorfisme $A \to BA \to B$. Is BB torsie? Is BB plat?

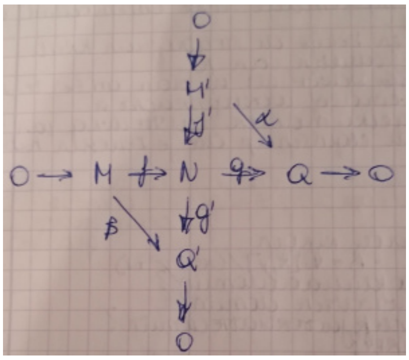
   (d) Geef een voorbeeld van een AA-moduul dat plat is, maar niet project.

   (e) Geef een voorbeeld van een moduul CC over een ring naar keuze) dat projectief is, maar niet vrij.
   [Bewijs alle antwoorden. In het bijzonder moet je voor (a) en (e) telkens een moduul over een ring geven en hiervoor 2 zaken aantonen. Geef aan welke algemene resultaten uit de cursus je gebruikt. Je hoeft deze resultaten niet te bewijzen. **hint** bij (a): welke constructie levert een plat moduul op, dat niet a priori ook projectief is?]

3. Zij R een ring. Beschouw onderstaande commutatief diagram van linkse R-modulen waarbij de horizontale rij en de verticale rij exacte rijen zijn.
   Bewijs:
   (a) α is surjectief $\Leftrightarrow\Leftrightarrow$ β is surjectief.

   (b) Als $\beta=0\beta=0$ dan bestaat een uniek morfisme van RR-modulen $\psi:Q\to Q'\psi:Q\to Q'$ met $\psi g=g'\psi g=g'$.

   (c) Geef voor elke situaties beschreven in (a) en (b) een voorbeeld waarbij niet alle modulen 0 zijn.
   [Denk voor (a) en (b) goed na welke techniek hiervoor geschikt is. Je mag alle eigenschappen uit de cursus gebruiken zonder deze te moeten bewijzen. Maak je voorbeelden in (c) zo concreet mogelijk; d.w.z. geef telkens een concrete ring RR en maak hierover een diagram met RR-modulen en morfismen van RR-modulen.]



voorbeeldschema

Categorieën:
- Wiskunde
- 2BWIS