Wiskundige methoden voor de fysica I Lineaire algebra

tuyaux.winak.be/index.php/Wiskundige_methoden_voor_de_fysica_I_Lineaire_algebra

Lineaire algebra	
Richting	Fysica
Jaar	1BFYS

Bespreking

Dit vak wordt net als Calculus gegeven door David Eelbode. Voor dit vak is er echter geen tussentijdse test. Het is een zeer theoretisch vak en voor de meesten een volledig nieuwe vak met allemaal nieuwe begrippen. Daarom raad ik zeker aan om dit vak zeer goed bij te houden doorheen het jaar en voor elke les de vorige te herhalen omdat de lessen verder bouwen op de vorige, en al de begrippen waarschijnlijk nieuw zullen zijn. Net zoals de calculus zijn de lessen zeer goed gegeven en zeker een aanrader, en net zoals bij calculus kan je best uitgeslapen zijn want de lessen gaan snel. Ook hier is de cursus volledig door de prof zelf geschreven en loopt dus zeer goed samen met de lessen, toch loont het om naar de lessen te gaan om bepaalde materie is langs een ander perspectief te bekijken.

Voor de praktijklessen is er een cursus met oefeningen, hieruit worden oefeningen gekozen en vervolgens in de lessen uitgewerkt aan het bord, of individueel met vervolgens de oplossing op het bord. Daarom is het belangrijk om naar deze lessen te gaan zodat je de oplossingen hebt van de oefeningen.

Voor het exaam wordt er soms in de lessen 1 grote open vraag vermeld die zal gesteld worden, en dan is het de bedoeling dat je zeer goed alles hierover kent. De meeste vragen op het exaam gaan over de laatste hoofdstukken. Over de eerste hoofdstukken wordt zelden iets gevraagd maar zijn nodig om de later hoofdstukken te kunnen begrijpen, leer dus zeker ook de eerste hoofdstukken, anders zal je de rest niet kunnen begrijpen en de vragen op dit exaam hebben een goede inzicht nodig in de leerstof. Daarom moet je ook de leerstof begrijpen en niet gewoon van buiten leren. Voor dit vak is het zeker een aanrader om eens wat vragen van de vorige jaren te hermaken, om te zien of je wel diep genoeg inzicht in de leerstof hebt.

Puntenverdeling

De verdeling tussen theorie en praktijk is 50/50. Het volledig examen staat op 10 punten. Samen met Wiskundige methoden voor de fysica I Calculus dat op 20 punten staat wordt een totaal op 30 gevormd. Dit resultaat wordt herleid naar een resultaat op 20, en dat is het eindresultaat. Dit vak telt dus voor iets meer dan 6 punten mee van het eindresultaat.

Indien je er voor 1 deel niet door bent (Calculus of Algebra) maar in het totaal wel geslaagd bent heb je geen herexamen. Indien je er voor 1 deel door bent, en in het totaal niet geslaagd bent, dien je enkel herexamen te doen van het deel waarop je buisde.

Examenvragen

Academiejaar 2022-2023 1ste zit

Theorie en oefeningen

:

24 Januari 2023

Vraag 1:
Uit een onderzoek naar de avondlijke eetgewoonten van studenten op kot is gebleken dat er 3 invullingen zijn: studenten maken ofwel zelf spaghetti, gaan vettige troep eten in de stad, of overhalen een kotgenoot om iets voor hen te koken (en benadrukken daarbij op subtiele edoch dwingende wijze dat het best geen spaghetti wordt). Bovendien merkten de onderzoekers op dat er patronen zitten in dat eetgedrag:

- wie spaghetti eet zal de volgende dag ofwel terug spaghetti eten, ofwel naar de stad trekken voor een welverdiende dosis vettigheid (met gelijke kansen),
- wie uit gaat eten zal dat in de helft van de gevallen de volgende dag opnieuw doen, maar er is ook 25% kans dat ze voor spaghetti gaan en 25% kans dat ze aankloppen bij kotgenoten,
- wie bij kotgenoten eet heeft evenveel kans om de volgende dag opnieuw te parasiteren, of naar de stad te trekken (het is nog niet duidelijk of dit ligt aan de kookkunsten van de kotgenoten, dat hopen de onderzoekers uit te vissen in de toekomst).

We zullen nu een kolommatrix $C_n = (S_n, V_n, K_n)^T$ gebruiken, die iets zegt over de kans dat er op dag n respectievelijk spaghetti, vettigheid of kotmaaltijd (zonder 's' hier, voor alle duidelijkheid) op het menu staat.

(i) Stel de matrix M_E op die kan gebruikt worden om de evolutie te beschrijven van het eetgedrag van studenten op kot. Houd daarbij in het achterhoofd dat we gaan werken met kolommatrices voor de vermenigvuldiging (ter controle: de som van de getallen in elke kolom moet gelijk zijn aan 1). /1

(ii) Bepaal de eigenwaarden en bijhorende eigenvectoren van de matrix M_E. Het kan daarbij handig zijn om een gepast veelvoud van M_E te gebruiken (zodat je kan rekenen *zonder* breuken), maar vergeet dan niet om die aan het einde weer te 'compenseren'! /2

(iii) Stel een gepaste matrix Q op (geef daarbij goed aan wat die doet, i.e. van welke naar welke basis) en bereken de inverse Q^{-1} met een methode naar keuze. Je kan hier best ook de controle doen, dan weet je zeker dat je op het juiste pad zit (breuken voorop zetten, ook geen slecht idee hier). /1

(iv) Bepaal tenslotte de matrix $M_E^\infty := \lim_{n\to+\infty} M_E^n$ (hint: bereken eerst de limiet, en pas dan het product van de matrices). /1

(v) Wat is de kans dat een eeuwige student die de carrière begint met spaghetti (iedereen start met een schone lei) ook 'aan het einde' (in de limiet dus) nog spaghetti eet? /1

(vi) Als je M_E^∞ vergelijkt met je eigenvectoren uit deel (ii), dan zou er iets moeten opvallen. Kan je dat verklaren? /1

Vraag 2:
Toon aan dat elke reële symmetrische matrix $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ diagonaliseerbaar is. Stel daarvoor eerst de algemene vorm op van zo'n matrix, en gebruik dan een gepaste eigenschap van het spectrum. /2

Vraag 3:
Stel dat we op $V = \mathbb{R}^3$ de volgende afbeelding definiëren:

$$\langle\cdot,\cdot\rangle_s : V \times V \to \mathbb{R} : (\underline{v}, \underline{w}) \mapsto \langle \underline{v}, \underline{w}\rangle_s := \langle(\underline{v} \times \underline{w}), \underline{e}_x\rangle_E\ ,$$

waarbij $\langle\cdot,\cdot\rangle_E$ het gewone Euclidische inproduct is, en $\underline{e}_x$ de eerste vector in de klassieke ONB. *Is dit dan een inproduct?* /1

:

(1) Stel dat de functie $f(x)$ een bijectie is van $\mathbb{R}$ op het beeld $B \subset \mathbb{R}$ en dat we op $V = B$ de volgende bewerkingen definiëren:

$$\boxplus : V \times V \to V : (x, y) \mapsto x \boxplus y := f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))$$
$$\boxtimes : \mathbb{R} \times V \to V : (\mu, x) \mapsto \mu \boxtimes x := f(\mu f^{-1}(x)) .$$

Er geldt dat $(V, \boxplus, \boxtimes)$ een vectorruimte is (dat hoef je niet aan te tonen), maar ga expliciet na dat de vermenigvuldiging met scalairen distributief werkt ten opzichte van de optelling (i.e. een scalair maal de som van vectoren).

(2) Een vlak $\pi \subset \mathbb{R}^3$ door de oorsprong, met daarbij $\mathbb{R}^3$ de gekende Euclidische vectorruimte, kan je ook opvatten als de kern van een lineaire afbeelding. Als dat vlak π beschreven wordt door de vergelijking $ax + by + cz = 0$, definieer dan die lineaire afbeelding.

(3) Geef een basis voor de deelruimte $\mathrm{ASym}(3) \leq \mathbb{R}^{3\times 3}$ van anti-symmetrische matrices. Je hoeft het niet te bewijzen (maar de dimensie moet uiteraard wel kloppen, en ze moeten voldoen aan de juiste eigenschappen).

(4) Stel dat we onderstaande matrix A opvatten als een lineaire afbeelding. Geef dan een basis voor het beeld van die lineaire afbeelding:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 4 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 2 \end{pmatrix} .$$

(5) Stel dat we de volgende lineaire afbeelding definiëren:

$$\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2} : M \mapsto \varphi(M) := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M^T - M \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} .$$

Stel dan de matrix $\Phi = [\varphi]$ op ten opzichte van de standaardbasis voor de ruimte $\mathbb{R}^{2\times 2}$.

(6) Stel dat $\varphi \in \mathrm{Hom}(V, W)$, met daarbij $V = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ en $W = \mathrm{End}(\mathbb{R}_3[x])$. Als je dan voor φ een matrixvoorstelling zou maken ten opzichte van gepaste basissen voor V en W, welk formaat heeft die matrix dan? Je antwoord is dus van de vorm $[\varphi] \in \mathbb{R}^{a\times b}$, met $a, b \in \mathbb{N}$ (plus een verklaring).

(7) Stel dat je van een matrix $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ weet dat $\det(M) = 0$, en dat de karakteristieke veelterm gelijk is aan $p_M(\lambda) = P_1(\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda + 6)$, met $P_1(\lambda)$ een veelterm waar je verder niets over weet[1]. Wat is dan het spoor van de matrix M?

(8) In de cursus hebben we op de ruimte $\mathbb{R}^{2\times 2}$ een Euclidisch inproduct gedefinieerd. Geef de definitie voor dat inproduct, en ga ook alle eisen na!

(9) Ga expliciet na dat het vectorieel product op $\mathbb{R}^3$ niet associatief is, door $\vec{e}_x \times (\vec{e}_y \times \vec{v})$ te vergelijken met $(\vec{e}_x \times \vec{e}_y) \times \vec{v}$. De vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ is daarbij willekeurig, de andere twee zijn uiteraard deel van een orthonormale basis.

(10) Leg uit waarom de vergelijking $\det(M - \lambda \mathrm{Id}_m) = 0$, met Id_m de eenheidsmatrix, de eigenwaarden geeft: welke redenering zit daar precies achter?

[1] Wat niet helemaal waar is, in feite kan je $P_1(\lambda)$ makkelijk bepalen (maar dat is niet gevraagd).

Academiejaar 2021-2022 1ste zit

Theorie

:

Lineaire Algebra: theorie (Z1)

Dinsdag 25 januari 2022

Veel succes!

---

(1) Stel dat de functie $f(x)$ een bijectie is van $\mathbb{R}$ op het beeld $B \subset \mathbb{R}$ en dat we op $V = B$ de volgende bewerkingen definiëren:

$$\boxplus : V \times V \to V : (x, y) \mapsto x \boxplus y := f(f^{-1}(x) + f^{-1}(y))$$
$$\boxtimes : \mathbb{R} \times V \to V : (\mu, x) \mapsto \mu \boxtimes x := f(\mu f^{-1}(x)) \,.$$

Er geldt dat $(V, \boxplus, \boxtimes)$ een vectorruimte is (dat hoef je niet aan te tonen), maar bepaal de nulvector $n \in B$ (toon ook expliciet aan dat die voldoet aan de vereiste eigenschap).

(2) Geef zelf een voorbeeld van 2 *eigenlijke*[1] deelruimten $W_1 < \mathbb{R}_3[x]$ en $W_2 < \mathbb{R}_3[x]$ die als eigenschap hebben dat $\mathbb{R}_3[x] = W_1 + W_2$, maar zodanig dat $\mathbb{R}_3[x]$ niet gelijk is aan de directe som $W_1 \oplus W_2$. Uit je antwoord moet uiteraard ook blijken waar het verschil ligt.

(3) Geef een basis voor de deelruimte $\mathrm{Sym}(2) \leq \mathbb{R}^{2\times 2}$ van symmetrische matrices, en ga ook expliciet na dat jouw basis voldoet aan de 2 relevante eigenschappen.

(4) Stel dat B_1 en B_2 basissen zijn voor $\mathbb{R}^2$, waarbij er geldt dat

$$B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad \text{en} \quad B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Geef dan de matrix Q van de basisovergang van B_1 ('oud') naar B_2 ('nieuw').

(5) Stel dat we de volgende lineaire afbeelding definiëren:

$$\varphi : \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}_2[x] : P_3(x) \mapsto \varphi(P_3(x)) := 3x^2 P_3'''(x) + x P_3''(x) - 2P_3'(x) \,.$$

Stel dan de matrix $M = [\varphi]$ op ten opzichte van de standaardbasissen voor die ruimten.

(6) Stel dat $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^{3\times 3}, \mathbb{R}^{2\times 2})$ surjectief is. Als we nu een verzameling $S = \{M_j : 1 \leq j \leq 6\} \subset \ker(\varphi)$ beschouwen, leg dan uit waarom die verzameling nooit vrij kan zijn.

(7) **Waar/Vals:** er zijn oneindig veel matrices $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ waarvoor geldt dat $M^2 = M$.

(8) Geef de definitie van een inproduct $\langle \cdot, \cdot \rangle$ op een complexe vectorruimte V en leg dan uit wanneer we kunnen zeggen dat $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een unitaire ruimte is.

(9) Bepaal de nulliteit van de transformatie $\varphi \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^{2\times 2})$ met

$$\varphi(M) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} M^T + M \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

waarbij $\bullet^T$ staat voor transponeren.

(10) Leg uit waarom de vergelijking $\det(M - \lambda \mathrm{Id}_m) = 0$, met Id_m de eenheidsmatrix, de eigenwaarden geeft: welke redenering zit daar precies achter?

[1] Je mag dus *niet* de keuze $W_j = \mathbb{R}_3[x]$ of $W_j = \{0\}$ maken.

Academiejaar 2020-2021 (2de zit)

Oefeningen

1. Stel dat V een vectrorruimte is met deelruimten W1 en W2. Gebruik dan het criterium om aan te tonen dat de doorsnede W:=W1∩W2 ook een deelruimte is.

2. Geef zelf een voorbeeld van 2 eigenlijke deelruimten 0_⊊W1,W2⊊R2×2 die als eigenschap hebben dat R2×2=W1+W2 maar zondanig dat R2×2 niet gelijk is aan de directe som W1⊕W2. Uit je antwoord moet uiteraard ook blijken waar het verschil ligt.
3. (Waar/Vals): De verzameling R:={m∈Rm×m:Rang(M)<m} is een deelruimte van Rm×m.
4. Stel dat B1 en B2 basissen zijn voor C2, waarbij geldt datB1={[01],[11]} en B2={[22],[1−1]} Geef dan de matrix Q van de basisovergang van B1 naar B2.
5. Bepaal de (complexe) eigenwaarden van de matrix Rθ die een rotatie voorstelt in het vlak over een hoek θ∈R, uitgedrukt t.o.v. een orthogonale basis voor R2.
6. Beschouw ϕ∈Hom(R5[x],R2[x]). Wat kan je zeggen over de dimensie van de kern?
7. Leg uit, door gepaste eigenschappen of definities uit de cursus te gebruiken, waarom de determinant van een bovendriehoeksmatrix gelijk is aan het product van de elementen op de diagonaal.
8. Gegeven 2 vectoren v,w∈R3. Geef dan de (volledige) definitie van het vectoriëel product v×w (voor alle duidelijkheid: het antwoord is geen formule).
9. Bepaal de nulliteit van de transformatie ϕ∈End(R2×2) metϕ(m):=[1100]m+m[0011]. Vermeld daarbij ook hoe de nulliteit precies gedefiniëerd is.
10. Stel dat je van een matrix M∈C2×2 weet dat die dezelfde determinant dA heeft als een matrix A∈C2×2, en het zelfde spoor tB als een matrix B∈C2×2. Kan je dan het spectrum σ(M) bepalen of ontbreken er nog gegevens? Verklaar je antwoord!

Academiejaar 2020-2021 (1ste zit)

Theorie

Stel dat er gegeven wordt dat A=[101010101]∈C3×3

bepaal dan het spectrum van de matrix M=A3−A2+A.

- **Waar/Vals:** de enige matrix M∈Cn×n die equivalent is met de eenheidsmatrix 1n in Cn×n is deze eenheidsmatrix zelf (geef eerst de definitie van equivalente matrices, dat helpt je in het denkproces).
- Stel dat we twee willekeurige vectoren →v1 en →v2 in de Euclidische ruimte R3 nemen (allebei verschillend van de nulvector), met daarbij ⟨→v1;→v2⟩=0. We voeren dan de verzameling W12 als volgt in: W12:={→v∈R3:→v1×→v∈spanR(→v2)}.

Waar/Vals: de verzameling W12⊂R3 is een deelruimte.

Stel dat B1 en B2 bassissen zijn voor C2, waarbij geldt dat B1={[10],[01]}

en B2={[12],[21]}

Geef dan de matrix M die je kan gebuiken in de vergelijking X1=MX2, waarbij Xj staat voor de coördinaten van een vector ten opzichte van de basis Bj (als je hierbij een matrix zou moeten inverteren, dan moet je dat ook expliciet doen).

Stel dat we de verzameling $\mathbb{R}^2$ beschouwen, met daarop twee bewerkingen: + (de 'normale' optelling van elementen in $\mathbb{R}^2$) en een product $\otimes$ met scalairen dat we definiëren als $\otimes:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(\lambda,(x,y))\mapsto\lambda\otimes(x,y):=(\lambda x,-\lambda y)$.

Waar/Vals: er geldt dat $(\mathbb{R}^2,+,\otimes)$ een vectorruimte is.

- In de cursus hebben we een inproduct ingevoerd op de ruimte $\mathbb{R}^{2\times2}$ (met standaard bewerkingen). Geef de definitie van dit inproduct, en toon aan dat het effectief een inproduct is door de definiërende eigenschappen na te gaan
- Stel dat $\phi\in\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}^{2\times2})$ met $\phi(M):=-iM^\dagger$, en dat we voor een vectorruimte $V<\mathbb{C}^{2\times2}$ de basis B nemen met $B:=\{E_{11},iE_{12},iE_{21},E_{22}\}$. Hierbij is E_{ab} de matrix met $(E_{ab})_{kl}=\delta_{ak}\delta_{bl}$ (zoals in de cursus). Stel dan de matrix $[\phi]_B$ op (denk hierbij goed na over het formaat van de matrix).
- Stel dat $A,B\in\mathbb{R}^{3\times3}$, met daarbij $B\neq-A$. **Waar/Vals:** er geldt dat de rang r_{A+B} van de matrix $A+B$ gelijk is aan $\max(r_A,r_B)$, met r_M de korte notatie voor de rang van matrix M.
- Stel dat je van een matrix $M\in\mathbb{R}^{3\times3}$ weet dat M^3 singulier is, en dat de karakteristieke veelterm $p_M(t)$ deelbaar is door $P(t)=t^2-1$. Wat is dan het spoor van de matrix M?
- Hoe bereken je de geadjungeerde van een matrix $M\in\mathbb{C}^{n\times n}$? Leg daarbij de methode uit.

Oefeningen

Vraag 1:

Gegeven het vlak $\pi\leftrightarrow 2x-y+z=0$ in de Euclidische ruimte $\mathbb{R}^3$. We definiëren dan de lineaire afbeelding ϕ in $\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ als de loodrechte projectie op dat vlak. Voor wie zich daar niets bij kan voorstellen: wanneer je loodrecht op dat vlak kijkt naar een willekeurige vector (volgens de richting van de loodlijn op dat vlak), dan zie je de zogezegde schaduw van die vector, en dat is dan de projectie.

Gevraagd:

(i) Stel de matrix $[\phi]_\pi$ op ten opzichte van de standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$. Doe dit door eerst $[\phi]_{B'}$ te bepalen ten opzichte van een zelf gekozen (en handigere) basis B'. Vermijd matrices met breuken in door die voorop te zetten: zo kan je in de matrix zelf steeds met gehele getallen werken (dat rekent uiteraard makkelijker).

(ii) Stel dat iemand op zolder een vector $\vec{v}\in\mathbb{R}^3$ gevonden heeft met coördinaten $(1,2,1)_\beta$ ten opzichte van de iets minder voor de hand liggende basis $\beta=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\vec{v}_3\}$ met daarbij volgende uitdrukkingen voor die basisvectoren in β ten opzichte van de standaardbasis: $\vec{v}_1=(1,0,-1)$ $\vec{v}_2=(2,-1,2)$ $\vec{v}_3=(-1,2,0)$

Hoe bepaal je dan het beeld $\phi(\vec{v})$? Dit moet je niet volledig uitrekenen: het is voldoende om goed aan te geven welke matrices je zal nodig hebben (stel ze uiteraard wel op) en welk product je zou moeten berekenen.

(iii) Projecties zijn bijzondere transformaties, omdat er geldt dat ‘de projectie van de projectie diezelfde vector geeft’. Hoe druk je dit uit in matrixtaal? Klopt dit voor de matrix $[\phi]B$ die je gevonden hebt?

Vraag 2:

Gegeven een grootschalige studie uitgevoerd aan de Fort Itou Université in Québec. Daaruit blijkt dat er twee soorten mensen zijn: zij die speciale betekenis gaan hechten aan het getal 42, en zij die het werkelijk geen bal kan schelen. Professor Douglas Adams (beter bekend als de uitvinder van het getal 42), ontwikkelde ook een soort pil waarmee hij de haters kan ‘genezen’ om ze toch fan te maken: in 90% van de gevallen blijkt inderdaad dat die van kamp wisselen. Alleen blijkt het geneesmiddel nog niet op punt te staan: voor de fans is er een kleine 20% dat die na het nemen van de pil plots niet meer van het getal 42 moet weten.

Gevraagd:

(i) Vertaal bovenstaand proces in matrixtaal. Gebruik hierbij de notatie Ln en Hn voor het aantal lovers & haters na het nemen van n pilletjes (elke maand een pil). Hoe ziet met andere woorden de evolutie van maand n naar maand (n+1) eruit? Vermijd ook hier breuken in de matrix, zet die gewoon voorop (maar vergeet die niet mee te nemen wanneer je machten gaat berekenen).

(ii) Stel dat mensen jaren aan een stuk elke maand een pil nemen: hoe loopt de evolutie dan? (lees: bereken de n-de macht van de matrix die je net opstelde, door een geschikte techniek te gebruiken)

(iii) Indien we aan de start van het onderzoek zitten met een verdeling (L0,H0)=(0.2,0.8), wat gebeurt er dan in de limiet? Hoe verdeelt de bevolking zich dan (asymptotisch)? Breuken mag je gewoon laten staan, maar vereenvoudig ze eventueel wel.

Academiejaar 2019-2020 (1ste zit)

Theorie

Vraag 1

Stel dat we voor een vectorruimte V van dimensie m twee verschillende basissen B en B' kiezen. Verder nemen we ook aan dat $\phi \in End(V)$ een lineaire afbeelding is.

-
  1. Voer de matrix Q in die we kunnen gebruiken om coördinaten X=[v_]B en X′=[v_]B′ voor een vector v_∈V met elkaar te vergelijken, en geef dan ook dat verband. Leg vervolgens ook uit hoe diezelfde matrix Q ook iets zegt over het verband tussen B en B′.
  2. Verklaar hoe we Q kunnen gebruiken om de matrices M=[ϕ]B en M′=[ϕ]B′ die het endorfisme ϕ:V→V beschrijven met elkaar in verband brengen (geef zowel de formule, als de afleiding ervan).
  3. Zullen die matrices altijd dezelfde eigenwaarden hebben? Verklaar waarom wel/niet?
- Vraag 2
  1. Stel dat er gegeven wordt dat A=(12−10−1300i)∈C3x3
     Bepaal dan het spectrum van de matrix A42∈C3x3.
  2. Stel dat ϕ1:V1→V2 en ϕ2:V2→V3. Wat kan je dan zeggen over het verband tussen de dimensies van ker(ϕ2∘ϕ1) en ker(ϕ1)? Zijn ze gelijk? Is de ene altijd groter dan de andere? Of is alles mogelijk?
  3. Stel dat V=R3 en dat →0≠→v∈V. Als we nu ϕv∈End(R3) invoeren door middel van ϕv(→u)=→v×→u, verklaar dan waarom we kunnen zeggen dat V=R→v⊕Im(ϕv). Wees volledig in je verklaring!
  4. Van een niet-inverteerbare matrix M∈R3x3 is gegeven dat het stelsel (M−2Id3)X=0 een niet-triviale oplossing X≠(0,0,0)T heeft, en dat het spoor gelijk is aan Tr(M)=2. Wat is dan de karakteristieke veelterm pm(t) van die matrix?
  5. Stel dat we de lineaire functionaal α∈V∗=Hom(V,C) invoeren op V=Cm×m door middel van α(A)=a1,m+a2,m−1+...+am−1,2+am,1. Hierbij is dan uiteraard A=(ai,j) met 1≤i,j≤m.
     Waar/Vals: De verzameling A∈V:α(A)=0 is een deelruimte van V.
  6. Verzin zelf een inproduct op V=R2×2 dat indefiniet is.

Oefeningen

Vraag 1

Uit een grootschalig onderzoek aan the Kvelertak Institute in Slipnothingam blijkt dat mensen die beslisten om een editie van Graspop over te slaan in jaar jn in 50% van de gevallen terug een ricket kopen voor dat festival in jaar jn+1, omdat ze de geur van verrige worst, schraal bier en ongewassen mannen in lange zwarte jassen missen. Daarentegen is het zo dat 10% die naar Graspop ging in jaar jn beslist om het jaar erop een editie over te slaan, meestal na een iets te directe confrontatie met een veel te harige Noor die het hoofd van 3 kanaries afbeet tijdens een optreden van zijn favoriete black metalband.

-
    1. Stel de matrix MG op die de transitie beschrijft van jaar n naar jaar (n+1), waarbij we 2 groepen onderscheiden: de groep Gn die op Graspop was dat jaar, en de groep Tn die thuis zat dat jaar.
    2. Als je weet dat 60% van alle inwoners van Neder-Over-Slayerbeek in 2020 naar Graspop naar Graspop zullen gaan voor de 25^{ste} verjaardag, hoeveel procent van de bevolking gaat dan binnen k jaar nog naar Graspop? Werk dit probleem uit via een gepaste diagonalisatie.
    3. Welke conclusie kan je trekken wanneer we de limiet voor $k \to +\infty$ zouden nemen?
- Vraag 2

Gegeven het vlak $\pi \leftrightarrow 2x-y+3z=0$ in R3. Als we de (loodrechte) projectie op dit vlak noteren door middel van de afbeelding ϕπ, stel dan de matrix [ϕπ]B op ten opzichte van de basis B=→v1,→v2,→v3 met daarbij →v1=(2,−1,0)→v2=(1,1,−1)→v3=(0,3,2)

Hint: eerst alles uitwerken ten opzichte van een geschikte andere basis en dan de matrix van de basisovergang gebruiken is hier geen slecht idee.

Vraag 3

Construeer een orthonormale basis voor de vectorruimte V=R1[x], als je weet dat het inproduct op die ruimte wordt gegeven door de formule 〈P1(x),P2(x)〉 =12π∫+1−1P1(x)P2(x)dx

Academiejaar 2017-2018 (2^{de} zit)

Oefeningen

Vraag 1 (4 punten):

We noemen V de deelruimte van C∞(R) opgespannen, door de verzameling S={sin(t),cos(t),sin(2t),cos(2t)}, en voeren dan de volgende operator in: ϕ:V→V:f(t)↦ϕ[f(t)]:=dfdt

.

1. Stel de matrix op die het endomorfisme ϕ beschrijft. (/1)
2. Is ϕ een isomorfisme? Verklaar je antwoord!
3. Diagonaliseer de matrix indien mogelijk, of verklaar waarom dit niet mogelijk is.

Vraag 2 (4 punten):

We vertrekken van de vectorruimte V=Rnxn en beschouwen de afbeelding σ:V→V:M↦σ(M)=12(M+MT)

.

1. Ga na dat σ∈ End(V). (1/)

2. Beschrijf het beeld im(σ) en geef de dimensie van die ruimte (het kan hier helpen om eerste de gevallen n∈{2,3}te bekijken als je niet meteen het beeld herkent). (1,5)
3. Beschrijf tenslotte de ruimte ker(σ) en geef de dimensie van die ruimte. (/1,5)

   Vraag 3 (2 punten):

Op de ruimte R2[x] leggen we het inproduct ⟨⋅,⋅⟩:R2[x]xR2[x]→R:(p(x),q(x))↦⟨p(x),q(x)⟩=∫+1−1p(x)q(x)dx

. De afbeelding v:R2[x]→R:p(x)↦v(p):=p(0) is een lineaire functionaal. Vind het polynoom pv(x) in R2[x] zodanig dat er voor alle polynomen p(x) geldt dat v(p)=⟨p(x),pv(x)⟩. Merk hierbij op dat dit polynoom volledig bepaald wordt door v, en niet door p(x). Anders gezegd: wanneer p(x)=ax2+bx+c, dan kunnen de getallen a,b en c niet voorkomen in je antwoord (de veelterm pv(x) is dezelfde voor alle p(x)∈R2[x]). Het kan ook bijzonder handig zijn om eerst de waarde γk:=∫+1−1xkdx te bepalen.

Academiejaar 2017-2018 (1ste zit)

Theorie

Vraag 1:

1. Stel dat we een voor een vectorruimte V van dimensie m twee verschillende basissen B en B' kiezen. Verder nemen we ook aan dat ϕ∈End(V) een lineaire afbeelding is.
   1. Voer de matrix Q in die we kunnen gebruiken om coördinaten X=[v_]B en X′=[v_]B′ voor een vector v_∈V met elkaar te vergelijken, en geef dan ook dat verband. Leg vervolgens ook uit hoe diezelfde matrix Q ook iets zegt over het verband tussen B en B′.
   2. Verklaar hoe we Q kunnen gebruiken om de matrices M=[ϕ]B en M′=[ϕ]B′ die het endorfisme ϕ:V→V beschrijven met elkaar in verband brengen (geef zowel de formule, als de afleiding ervan).
   3. Zullen die matrices altijd dezelfde eigenwaarden hebben? Verklaar waarom wel/niet?

Vraag 2:

1. Gegeven een matrix M∈Cmxm waarvan er nog gegeven is dat det(M)=2. Gebruik dan een gepaste stelling uit de cursus om det(adj(M)) te bepalen.
2. Stel dat Φ∈HomR(R3x3,R5[x]) een surjectieve lineaire afbeelding is, en dat ker(Φ)=spanR((−231161001),(2147−1−22−1−3),(04a8a−12−1−2)) Verklaar dan waarom er een restrictie op a∈R moet gelegd worden (niet elke waarde is hier mogelijk), en geef daarbij duidelijk aan welke stelling uit de cursus je gebruikt.

3. Stel dat je een matrix M∈R4x4 weet dat er een vector X∈R4 bestaat waarvoor MX=−3X, dat de karakteristieke veelterm van M kan geschreven worden als pM(t)=(t2−1)Q2(t) met Q2(t) een niet nader te bepalen veelterm van graad 2, en dat de determinant van M−1 gelijk is aan 1. Wat is dan het spoor (de trace) van de matrix M? Verklaar hierbij hoe je daaraan komt (het is niet de bedoeling om M zelf te bepalen)?
4. Definieer een Euclidisch inproduct (naar keuze) op de ruimte V=R2x2. Bewijs wel dat het inderdaad voldoet aan de voorwaarden (i.e. een inproduct is, en Euclidisch).
5. Waar/Vals: voor alle matrices A,B∈Cmxm geldt dat tr([A,B])=0
6. Noem een matrix M 'vierkant gestoord van orde m' als M∈Cmxm voldoet aan volgende eigenschap: de som van alle elementen op een willekeurige rij of kolom geeft altijd een vaste constante (afhankelijk van die matrix). Is de verzameling Gm van vierkant gestoorde matrices dan een deelruimte?

Academiejaar 2015-2016 (1ste zit)

Theorie

1.
    1. Er is een stelling die ons toelaat om de dimensie van een willekeurige vectorruimte in te voeren. Formuleer deze stelling en leg uit waarom ze leidt tot een ondubbelzinnige definitie van het begrip dimensie.
    2. Is de volgende uitspraak waar of vals? Leg ook uit waarom. Zij V een reële vectorruimte, T⊂V een eindige voortbrengend deel, en S⊂V een lineair onafhankelijk deel. Dan is het aantal elementen in S kleinder dan of gelijk aan het aantal elementen in T.
2.
    1. Definieer het begrip rang van een matrix A∈Rm×n.
    2. Beschouw de matrix (abbbab)∈R2×3. Onder welke condities op a en b heeft deze matrix rang 2?
3.
    1. De determinant op vierkante matrices van orde n wordt gekarakteriseerd als de unieke afbeelding det :Rn×n→R met drie eigenschappen. Benoem deze eigenschappen en illustreer ze voor algemene vierkante matrices van orde 3.
    2. Zij a,b,c,d,e,f,g,h∈R. Toon aan datdet(abcdefghdcbaae+bdaf+bcag+b2ab+ah)=0

    Door te steunen op de eigenschappen in 3.(a)

4. Zij V een reële vectorruimte met geordende basissen B1=(e1,...,en) en B0=(f1,...,fn) en T:V→Veen lineaire afbeelding.
    1. Leg uit hoe je de matrix $[T]_{B_1}$ construeert.
    2. Geef het verband tussen de matrices $[T]_{B_1}$ en $[T]_{B_2}$.
    3. Is steeds det$[T]_{B_1}$ = det $[T]_{B_2}$? Leg uit.

Oefeningen

1. Gegeven een (eindig-dimensionale) vectorruimte V en een deelverzameling u⊂V.
   De annihilator van U is gedefinieerd als:
   Uo:={f∈V∗:f(u)=0,∀u∈U}.
   Toon aan dat Uo een deelruimte is van V∗.

Academiejaar 2012-2013 (2de zit)

Theorie

1. Indien twee waarnemers elk een eigen basis kiezen voor een vectorruimte V van dimensie n, dan kunnen ze via de overgangsmatrix Q hun coördinaten voor een vector →v∈V met elkaar vergelijken.
   1. Leg uit wat er bedoeld wordt met bovenstaande zin, door de matrix Q te definiëren en het verband tussen de coördinaten expliciet op te stellen
   2. Verklaar ook hoe diezelfde waarnemers de matrix van een endomorfisme φ:V→V met elkaar kunnen vergelijken.
   3. Leg uit hoe we diagonalisatie hebben gebruikt om machten van een vierkante matrix M∈R2×2 te berekenen.
2. Geef van volgende beweringen aan of ze waar/vals zijn, en uiteraard ook waarom:
   1. De vectorruimte der afleidbare functies op de reële rechte is oneindig-dimensionaal.
   2. Voor reguliere vierkante matrices M∈Rm×m geldt er dat det(M)=tr[Madj(M)].
   3. Gegeven een willekeurige veelterm p(t)=at2+bt+c met (a,b,c)∈R3, dan bestaat er altijd een niet-diagonaalmatrix M∈C2×2 waarvoor dan geldt dat pm(t)=p(t) met pm(t) de karakteristieke veelterm.
   4. Er bestaat een getal k∈N zodanig dat de vectorruimte Rk[x] er polynomen van graad hoogstens k isomorf is met de reële vectorruimte Cm×m.
3. in de cursus kwantummechanica zullen jullie de lie-algebra so(3) der angulaire spin-operatoren invoeren. In het algemeen is het zo dat de orthogonale Lie-algebra so(m) alle matrices M∈Cm×m bevat waardoor geldt dat M+MT=0.
   1. Toon aan dat so(m) een complexe vectorruimte is.
   2. Toon aan dat als M1,M2∈so(m), dat dan ook [M1,M2]∈so(m). Net deze eigenschap, die dus zegt dat de commutator van de elementen in so(m) opnieuw een element van so(m) geeft, zorgt ervoor dat so(m) een zogenaamde Lie-algebra is.

Oefeningen

1. Definieer R3 als {A∈R3×3|A3=1}.
   1. Is R3 een deelruimte van R3×3? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.
   2. Toon aan dat een matrix A∈R3 altijd inverteerbaar is. Wat is de inverse van A?
   3. Hoeveel verschillende eigenwaarden kan een matrix uit R3 hoogstens hebben? Kan je deze eigenwaarden bepalen?

2. De volgende matrix is gegeven:
   (240310−1−41)
   Bepaal de matrix N met behulp van de volgende gegevens:
   - N beeldt de deelruimte {(0,y,z)|y,z∈R} op zichzelf af,
   - (0,1,0) is een eigenvector van N met eigenwaarde 1,
   - M en N commuteren,
   - de determinant van N is gelijk aan 2.
3. Bewijs dat als A en B symmetrische matrices zijn waarvan het product AB ook symmetrisch is, de matrices A en B commuteren.
4. Neem twee kwadratische veeltermen p en q. Definieer ⟨p,q⟩ als volgt:
   1∫0p′(x)q′(x)dx
   1. Toon aan dat ⟨⋅,⋅⟩ geen inproduct is op R2[X].
   2. Geef een tweedimensionale deelruimte van R2[X] waarop deze functie wel een inproduct is. Toon dit ook aan.
5. geef de eigenwaarden en bijhorende eigenruimten van de volgende matrix. Is deze matrix diagonaliseerbaar?
   (−1200−45000010−40012−4)

Academiejaar 2012-2013 (1ste zit)

Theorie

1. Deze vraag is te verwachten, professor Eelbode kondigt deze vraag aan en je kan je maar beter goed voorbereiden. Indien 2 waarnemers een eigen basis kiezen voor een vectorruimte V met dim(V)=n, dan kunnen ze via de overgangsmatrix Q hun coördinaten voor een vector v_∈V met elkaar vergelijken.
   1. Leg uit wat er bedoeld wordt met de bovenstaande zin, door matrix Q te definiëren en het verband tussen de coördinaten expliciet op te stellen.
   2. Verklaar hoe diezelfde waarnemers de matrix van een endomorfisme ϕ:V↦V met elkaar kunnen vergelijken.
   3. Bij wijze van lemma: toon aan dat als ∀a,b,c,d∈C geldt dat:
      (abcd)(αβγδ)=(αβγδ)(abcd)
      dat automatisch volgt dat β=γ=0 en α=δ
   4. Stel dat ϕ∈End(C2) een lineaire afbeelding is met de eigenschap dat de matrixvoorstelling ten opzicht van gelijk welke basis steeds dezelfde matrix oplevert. Maw[ϕ]B=A∈C2x2 met A een vaste matrix, en B={e_1,e_2} willekeurig. Verklaar waarom moet gelden dat ϕ=λI met λ∈C en I de identieke afbeelding.

2. Eén van de meest cruciale stellingen uit de lineaire algebra is de stelling van Cayley-Hamilton. Deze geeft het verband tussen een vierkante matrix A∈Cnxn en haar karakteristieke veelterm pA(t)∈Cn[t].
    1. Geef de definitie van de karakteristieke veelterm van een matrix A, en vermeld het verband met de eigenwaarden en de determinant van A.
    2. Geef een geschikte matrix A waarvoorpA(t)=t4−t2. Opgelet: géén diagonaalmatrix!
    3. Stel dat je van een matrix A∈Rnxn enkel pA(t) gegeven krijgt. Is het dan mogelijk om op basis van deze veelterm te voorspellen of de matrix diagonaliseerbaar is?
    4. Ga expliciet na voor n=2 dat pA(A)=02 waarbij je elke macht van t∈C in de berekening formeel mag veranderen door A=(abcd) met A0 de identiteitsmatrix.
    5. Bovenstaande eigenschap geldt voor algemene n∈N: de stelling van Cayley-Hamilton zegt namelijk dat pA(A)=0,∀A∈Cnxn. Als we stellen dat pA(t)=tn+c1tn−1+⋯+cn−1t+cn, verklaar dan waarom de volgende bewering correct is: *de inverse van een inverteerbare matrix* A∈Cnxn*kan altijd geschreven worden als een polynoom van graad (n−1) in de matrix A.*
3. De meeste snaar- en quantumveldentheorieën zijn conform invariant, wat wil zeggen dat de wiskundige vergelijkingen invariant blijven onder conforme transformaties. in m+2 dimensies behoren deze transformaties tot de Lie-algebra so(1,m+1):={A∈Rm+2,m+2:AD1,m+1+D1,m+1AT=0m+2} met D1,m+1∈R(m+2)x(m+2) de diagonaalmatrix diag(+1,−1,…,−1).
    1. Formuleer het criterium waarmee je kan testen of een deelverzameling W⊂V een deelruimte is van de vectorruimte over veld R.
    2. Soms zijn de deelverzamelingen W⊂V van een complexe ruimte wel een reële deelruimte, maar geen complexe deelruimte. Geef hiervan een voorbeeld. (Je mag de ruimte V zelf kiezen.)
    3. Toon aan dat als A1enA2∈so(1,m+1), dat dan ook [A1,A2]∈so(1,m+1). Hiermee bewijs je dat deze vectorruimte effectief een Lie-algebra is.

Praktijk

1. Definieer de volgende vectoroptelling en scalaire vermenigvuldiging op R2(x1,y1)+(x2,y2)=(x1+x2+1,y1+y2) en a(x,y)=(ax,ay). Bepalen deze bewerkingen een vectorruimtestructuur op R2? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.
2. Definieer W als {p(x)∈R3[x] | p(x)heeft een horizontale raaklijn in0} en f: W→W: f(p(x))=p(x)−2xp′(x)
    1. Toon aan dat W een deelruimte is van R3[x].
    2. Is {p∈R3[x] | p heeft een lokaal maximum in 0} ook een deelruimte? Toon aan of geef een voorbeeld.
    3. Bewijs dat (−x3,x2+1,x3−x2) een basis is voor W.
    4. Geef de matrixvoorstelling van f t.o.v. deze basis.

3. Toon aan dat de volgende matrix niet geschreven kan worden als AAT voor één of andere 3 x 3-matrix A. (Hint: gebruik de eigenschappen van determinanten).
   A=(120−20111−1)
4. Gegeven:
   A=(11012−12−23) en B=(−21−1011−3−1−1)
   De functies fA:R3→R3 en fB:R3→R3 zijn geassocieerd aan A en B.
    1. Geef de matrixvoorstelling (t.o.v. de canonieke basis) van fB∘fA.
    2. bepaal alle ¯x∈R:fA(¯x)=fB(¯x)
5. Gegeven:
   M=(−14−2−340−313)
    1. bereken de determinant van M
    2. geef alle eigenwaarden van M en bepaal of M diagonaliseerbaar is.

Academiejaar 2011-2012

Theorie

1. Deze vraag is te verwachten, professor Eelbode kondigt deze vraag aan en je kan je maar beter goed voorbereiden. (1/3 van de punten!)
    > Leg uit wat er wordt bedoeld met de overgangsmatrix tussen twee verschillende bassissen B en B′ voor een vectorruimte V, en leg uit hoe deze precies gebruikt wordt om de coördinaten X=[v_]B en X′=[v_]B′ van een willekeurige vector v_∈V t.o.v. deze basissen met elkaar in verband te brengen. Leg vervolgens ook uit hoe deze matrix opduikt in de formule die een verband legt tussen de matrixvoorstellingen van een endomorfisme ϕ∈End(V) t.o.v. deze twee basissen.
2. Waar/Vals en waarom?
    1. Voor alle matrices A ∈Kn×n geldt er dat det(A)=tr(A.adj(A))/n
    2. Als je van een (eindige) deelverzameling S van een vectorruimte V weet dat lineair afhankelijk is, dan kan elke vector v_j∈ S geschreven worden als een lineaire combinatie van de andere vectoren in S.
3. Gegeven: Een afbeelding Φ∈Hom(V,W) is injectief asa Ker(ϕ)=0_V
    > Bewijs: Stel dat Φ injectief is en dat Φ(v_)=0_W. Dan_ volgt_ er_ uiteraard dat Φ(v1−v2)=0_W, en dus ook v1=v2. Dit bewijst het gestelde.
    1. Gevraagd: Verklaar de onderstreepte stap, zo nauwkeurig mogelijk.(vermeld elke definitie en toon elke eigenschap expliciet aan.)
    2. Wat kan je in volle algemeenheid zeggen over dat matrix M=[Φ]B van een injectief endomorfisme op een vectorruimte V (met B een basis voor V)
4. In de eerste zogenaamde GUT(Grand Unified Theory) speelt volgende inclusie een belangrijke rol. SU(3)×SU(2)×U(1)⊂SU(5). Aan het object SU(5) in het rechterlid (Een Lie-groep) is de volgende Lie -algebra gerelateerd. su(5):={A∈C5×5:A+At=0∧tr(A)=0}Verklaar dan volgende bewering:su(5) is een vectorruimte over R, maar niet over C.

5. Stel dat de matrix $A \in Rn\times n$ diagonaliseerbaar is en dat de karakteristieke veelterm van A wordt gegeven door $pA(t)=\sum nj=0cjtj$.
   Toon aan dat $pA(A):=cnAn+...+c1A1+c0In=0$
   Hint: gebruik het feit dat A diagonaliseerbaar is (i.e.pas de definitie toe)

Praktijk

1. Zijn volgende uitspraken juist of fout? Toon aan of geef een tegenvoorbeeld.
   - {M|-1 is een eigenwaarde van M} is een deelruimte van R2×2
   - de afbeelding tr(AB) is een inproduct op R2×2
2. Voor welke waarden van α is 2 een eigenwaarde van M?
   $M=(1\alpha 01111-2\alpha)$
3. Een lineaire afbeelding $f:R3\leftrightarrow R2$ wordt voorgesteld door volgende matrix t.o.v. de canonieke basis$A=(-12524-12323)$
   1. De vector $\bar{v}$ wordt door f afgebeeld op (5,2) en staat loodrecht op (-2,1,0). Geef de vector $\bar{v}$.
   2. Wat wordt de matrixvoorstelling als we in het domein de nieuwe basis ((1,-1,1),(1,1,0),(-1,1,0)) nemen?
   3. Na een basisverandering (de basis in het domein blijft dezelfde als in 2.) wordt de matrixvoorstelling van f gelijk aan (101011). Geef de nieuwe basis
4. Is de volgende matrix diagonaliseerbaar? Indien ja, geef dan een basis die deze matrix diagonaliseert.
   1. $(12421-4003)$

Academiejaar 2010-2011 2^de zit

Theorie

1. Deze vraag is te verwachten, professor Eelbode kondigt deze vraag aan en je kan je maar beter goed voorbereiden.
   1. Leg uit wat een overgangsmatrix is.
   2. Hoe gebruikt men dit bij basissen
   3. Hoe kan men bij een homomorfisme $\psi:=HOM(V,W)$ de verschillende matrices in verband met elkaar brengen
2. Waar/Vals, kort bewijsje of tegenvoorbeeld.
   1. Bij het endomorfisme $\psi\in Rn$ heeft men dat Ker+Im=Rn, dan weet men ook zeker dat $Ker\cap Im=\{\hat{0}\}$
3. We hebben de volgende redenering die niet helemaal correct is.
   1. Geef een tegenvoorbeeld
   2. Waar is het misgelopen?
   $AB+BA=0\Rightarrow AB=-BA\Rightarrow \det(A)\det(B)=-\det(B)\det(A)\Rightarrow \det(A)\det(B)=0\Rightarrow$ minstens een matrix is singulier

Praktijk

1. ∫10xf(x)dx=0
   Bewijs dat alle functies f die aan deze eis voldoen een deelvectorruimte vormen in RR
2. f:R2[X]→R2
3. p↦(p(0),p(1))
   1. Bewijs dat dit lineair is
   2. Bereken een basis voor de kern en het beeld
4. Construeer een matrix A die aan volgende eisen voldoet:
   - (1,1,-1) zit in de kern
   - (1,0,1) wordt op zichzelf afgebeeld
   - (0,1,1) en (1,1,1) worden op dezelfde vector afgebeeld
5. We hebben de matrix
   (4−153−14−32−3)
   1. Bereken de kern en het beeld
   2. Bereken alle eigenwaarden en de bijhorende eigenruimtes
   3. Is deze matrix diagonaliseerbaar? beargumenteer
   4. Heeft deze matrix een inverse? Zoja, bereken deze.

Januari 2008

Theorie

1. bespreek de algebraïsche en geometische multipliciteit
2. Geef de dimensie formule en bewijs (Bewijs dim(VxW) = dim(V) + dim(W))
3. We zagen twee definities over de rang van een matrix, bewijs dat deze equivalent zijn.
4. Zij f: V-> W een lineaire afbeelding. Wat is dan de matrix van f. Hoe worden de coordinaten van V omgezet in coordinaten van W?
5. Bewijs: als de eigenvectoren onderling verschillend zijn, bewijs dat ze dan lineair onafhankelijk zijn. En als A een symmetrische matrix is, bewijs dan dat de eigenvectoren onderling orthogonaal zijn.
6. bewijsdet(A−1)=det(A)−1 Dit moest ik gewoon als laatste vraag snel oplossen, om te kijken of je met gemak van die kleine dingetjes kunt bewijzen.
7. Bewijs dat dim(K(A)) + dim (N(A) = n
8. Bewijs dat als V' C V deelruimte f(V') deelruimte is van W en dat als W' C W deelruimtef−1(W′)deelruimte is van V opmerkingf−1is niet de inverse van de lineaire afbeelding
9. Geef de matrixvoorstelling van f, f: U→V en hoe zet je een vector u element van U om aan de hand van deze matrixvoorstelling

praktijk

Hans Heymans

1. Goed of fout: er is maar 1 oneindig dimensionale deelruimte vanR[x]en dat isR[x]zelf. Beargumenteer.
2. Geef een basis voor de kern en het beeld van de onderstaande lineaire afbeelding en ga na of f surjectief is. f:R5→R4:x_→M.x_ M=(42611231526213311204−3)
3. Stel (a,b)≠(0,0) inR2 Geef de matrix van de loodrechte projectie op vect{(a,b)} (de projectie kan als een lineaire afbeelding vanR2→R2beschouwd worden)
    1. t. o. v.B={(1,0),(0,1)}
    2. t. o. v.B′={(a,b),(b,−a)}
4.
    1. Stelλ1,…,λkde (verschillende) eigenwaarden van een vierkante matrix M met bijbehorende eigenruimtenVλ1,…,Vλk Wat zijn dan de eigenwaarden en eigenruimten van de matrixN=αM(α≠0)
    2. Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van de matrix A. Geef zo mogelijk een matrix die A diagonaliseert of leg uit waarom zo'n matrix niet bestaat A=1/3(1−22−212221)
5. De matrix A uit de opgave 4b induceert een bilineaire afbeeldingga:R3×R3→R:(v_,w_)→tv_.A.w_,Toon aan datgageen inproduct is.
    HINT: de oplossing van 4b kan nuttig zijn

September 2008

Hans Heymans

1. Goed of fout, argumenteer: elke oneindige deelverzameling van R3 is voortbrengend.
2. Bewijs dat ϕ lineair is en geef de matrix van ϕ ten opzichte van de (geordende) basissenlB1={X,1}⊂R1[X]B2={X2,X,1}⊂R2[X]ϕ:R1[X]→R2[X]:F↦∫X0F(t)dt
3. StelM=[K1K2K3]∈M5,3(R)en beschouw de lineaire afbeelding f:R3→R5:x↦Mx
    Wat is de dimensie vanKer(f)(bewijs) als je weet dat:
    1. ∀α,β∈R:αK1+βK2=0⇒α=β=0
    2. ∃α1,α2,α3∈R:∃i:αi≠0enα1K1+α2K2+α3K3=0
4. Bewijs dat voor alle lineair onafhankelijke vectorenvenwinR2geldt: er bestaat een inproduct opR2ten opzichte waarvanvenworthogonaal zijn.
5. Bereken de eigenwaarden en bijbehorende eigenruimten van de matrix A.is A diagonaliseerbaar? A=1/√2(01−1110−101)

Januari 2007

1. ZijAeenn×1matrix zodanig dattA.A=1 Definieer dan de matrixH:=In−2A.tA
    1. Toon aan datHeen symmetrische matrix is
    2. Toon aan datH−1=tH

2. ZijVde deelruimte vanR2[X]voortgebracht door de veeltermenX2+XenX2−2X Beschouw de lineaire afbeeldingf:V→R2gegeven doorf(X2+X)=[22]enf(X2−2X)=[−1−1]
   1. Geef de matrix vanft.o.v. de geordende basissenB=X2+X,X2−2XinVenC=[22],[−1−1]inR2
   2. Bereken de matrix van de lineaire afbeelding t.o.v. de twee standaardbasissen : we bedoelen de basissenB′=X2,XenC′=[10],[01]
   3. BepaalKer(f)enIm(f)
3. We werken in de complexe vectorruimteC4 Is de matrixAdiagonaliseerbaar ? Zo ja, geef dan een diagonaliserende matrixS(d.w.z.S−1AS=D , zo neen, toon dit dan aan. [A=[000100−100100−1000]\]
4. Geef een inproduct opR[X]met de volgende eigenschappen (en toon aan dat ze voldaan zijn) :
   1. Even en oneven veeltermfuncties staan loodrecht op elkaar fis even alsf(−x)=f(x) oneven alsf(−x)=−f(x) .
   2. De lengte (norm) van elke constante veeltermcis gelijk aan|c|
5. We beschouwen de functie ϕ:R2[X]→R2[X]:aX2+bX+c↦aX2+(b−2a)X+(a−b+c)
   1. Beschrijf geometrisch wat deze functie met de veeltermen doet.
   2. Isϕlineair ? Motiveer je antwoord (kort).

Januari 2009

1.
   1. Toon aan dat B3={(−158−5),(7−84),(−14−40)} een basis is voor R3
   2. Zij verder de basis B2={(13),(−2−5)} voor R2 (Dit hoef je niet aan te tonen).
   3. Bepaal de matrix van T:R3→R2:(x1x2x3)↦(x2+3x3x1−x2−x3) ten opzichte van deze basissen B3 en B2
   4. Een andere basis van R3 is B′3={(−912−6),(0−208),(−15−21)} (dit hoef je weer niet te bewijzen).Bepaal de matrix van de basisovergang van B3 naar B′3
   5. Een nieuwe basis van R2 is B′2={(−7−16),(821)}(niet bewijzen). Bepaal ook hiervoor de overgangsmatrix van B2 naar B′2
   6. Bepaal aan de hand van de voorgaande resultaten de matrix T te opzichte van de basissen B′3 en B′2
2.
   1. Ga na of de volgende matrix A diagonaliseerbaar is over R Indien dit zo is, bepaal dan ook een matrix P die A diagonaliseert, en geef de bijbehorende diagonaalmatrix D Geef ook het verband tussen de 3 matrices A P en D A=[−45275−185125−3152453−97]
   2. Wat kan je hieruit besluiten voor de diagonaliseerbaarheid van A−1

augustus 2009

groep1

1. Geef een basis voor de vectorruimte {(a−2b+5c,2a+5b−8c,−a−4b+7c,3a+b+c)∈R4|a,b,c∈R}

2. Los het volgende stelsel op{x1−2x3+x4=62x1−x2+x3−3x4=09x1−3x2−x3−7x4=4−8x1+2x2+4x3+3x4=−10
3. Zij a=(2,1,−1) b=(−4,3,1) en c=(0,1,2) Bepaala×((b×c)×(a×c))
4. Ga na of de volgende matrix A diagonaliseerbaar is over R Indien dit zo is, bepaal dan ook een matrix P die A diagonaliseert, en geef de bijbehorende diagonaalmatrix D Geef ook het verband tussen de 3 matrices A P en D

A=[12−11014−45]

groep2

1. Bepaal voor welke waarden van h de verzameling B={(1−14),(3−57),(−15h)} een basis is van R4 (Verklaar voldoende!)
2. Bereken de inverse matrix van [1000130013501357]
3. Zij V een complexe vectorruimte en u,v,w∈V zodat ⟨u,v⟩=3+i,⟨u,w⟩=2−2i,⟨v,w⟩=−4i,||u||=3,||v||=1en||w||=5 Bereken ⟨+v−3w,2u−v⟩
4. Bepaal alle eigenwaarden en eigenvectoren van de matrix A=[0−1−232−4−304]