Gevorderde Kwantummechanica

Gevorderde Kwantummechanica	
Richting	Fysica
Jaar	MFYS

Bespreking

De eerste 4 delen (fundamenten v/d kwantummechanica, storingstheorie, verstrooiingstheorie en relativistische kwantummechanica) zijn gesloten boek.

Het laatste deel (Kwantumveldendtheorie) is open boek.

Bij de oefeningen mag appendix A gebruik worden die de oplossingen bevat van de exact oplosbare kwantummechanica-problemen (vrij deeltje, oneindig diepe put, harmonische oscillator en waterstofatoom)

Het is een schriftelijk examen waarbij je mondeling vragen met de professor kan bespreken. Voor dit mondelinge deel hoef je geen schrik te hebben, het is vooral bedoeld om je te helpen als je vast zit.

Puntenverdeling

Doorheen het jaar zijn er taken, deze kunnen zorgen voor bonus punten als je ze allemaal maakt.
Theorie: 12 punten
Oefeningen 8 punten

Examenvragen

Academiejaar 2021-2022 1ste zit

Theorie

1. De oplossing van de Lippmann-Schwingervergelijking voor verstrooiing aan de 3D korte-drachtpotentiaal V(r) wordt gegeven door
   $\psi(r)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ik\cdot r}-\frac{2m}{\hbar^2}\int dr' \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}V(r')\psi(r')$
    1. Bepaal hiermee een uitdrukking voor de differentieel werkzame doorsnede.
    2. Voldoet de eerste-orde Born benadering aan het optisch theorema? (Motiveer je antwoord.)

2.
    1. Bepaal de storingshamiltoniaan die de interactie van een deeltje met lading −e met een klassieke EM-golf beschrijft.
    2. Toon aan dat we het matrixelement ⟨ψn|→p|ψi⟩ moeten berekenen om de overgangswaarschijnlijkheid te kennen tussen twee atoomlevels t.g.v. invallende EM-straling.
    3. Wat is de elektrische dipoolbenadering?
3.
    1. Wat bedoelt men met 'lage-energie verstrooiing is s-golf verstrooiing'?
    2. Wat is een partiële golf? (Ik verwacht dat je antwoord start met 'Een partiële golf is ...')
    3. Wat bedoelt men met 'de l-de partiële golf is in resonantie'?
    4. Wat is de fysische interpretatie van een resonantie bij l=0?
    5. Wat is de fysische interpretatie van een resonantie bij l≥1?
    6. Wat is het verband tussen schaduwverstrooiing en het optisch theorema?
4.
    1. Stel de Klein-Gordon vergelijking op.
    2. Bepaal een uitdrukking voor de dichtheid op basis van deze Klein-Gordon vergelijking.
    3. Bepaal de niet-reltivistische limiet van deze dichtheid.
5. De Dirac vergelijking in de aanwezigheid van een potentiaal V wordt tot orde p4m3c2 gegeven door [p22m+V−p48m3c2+14m2c2(σ·p)V(σ·p)−18m2c2(p2V+Vp2)]¯ϕ=E¯ϕ.
    1. Toon aan dat deze vergelijking kan herschreven worden als [p22m+V−p48m3c2+ℏ4m2c2σ·(∇V×p)+ℏ28m2c2∇2V]¯ϕ=E¯ϕ.
    2. Welke term wordt de spin-baankoppeling genoemd, en verklaar de oorsprong van deze naam.

Veldentheorie

1. We hebben in het geval van het Schrödingerveld en het Klein-Gordon veld de propagator ⟨r,t|r′,t⟩ uitgerekend.
    1. Wat is de fysische betekenis van deze propagator?
    2. Welke conclusies kan men trekken uit de resultaten van de berekeningen die we gedaan hebben voor zowel het Schrödingerveld als het Klein-Gordon veld m.b.t. bovenstaande propagator of waarschijnlijkheidsamplitude?
    3. In het geval van het Schrödingerveld levert de propagator een divergent resultaat als r=r′. Hoe kan je dit resultaat toch een fysisch zinvolle interpretatie geven?
2. Waarom moet bij de kwantisatie van het Klein-Gordon veld commutatierelaties opgelegd worden en geen anti-commutatierelaties?

3. Veronderstel dat je beschikt over een gekwantiseerd Schrödingerveld ˆφ(r,t) dat op volgende wijze ontwikkeld is in de genormeerde eigenfuncties ˆϕ(r,t) die oplossingen zijn van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking: ˆφ(r,t)=∑nˆcn(t)ϕn(r)..
    1. Bespreek kort de fysische betekenis van de toestanden ˆc†n|0⟩ en ˆφ(r,t)|0⟩?
    2. Wat levert ˆφ(r,t)|0⟩ als resultaat?
    3. Geef de expliciete tijdsafhankelijkheid van de operator ˆcn(t).

Oefeningen

1. An experimenter has carefully prepared a particle of mass m in the first excited state of a one dimensional oscillator, when he sneezes and knocks the center of the potential well a **small** distance a to one side. It takes him a time T to blow his nose, and when he has done so, he immediately puts the center back where it was. Find, to lowest order in a, the probabilities that the oscillator will now be in any other state.

For t<0 and t>T: V=12mω2x2.

For 0<t<T: V=12mω2(x−a)2.

1. Consider a particle in a three-dimensional infinite cubical well V(x,y,z)={00≤x≤a;0≤y≤a;0≤z≤a;∞elsewhere.

The following perturbation is applied V(x,y,z)={V00≤x≤a/2;0≤y≤a/2;0≤z≤a;0elsewhere

with V0 a constant.

1.
    1. Find the energy correction to the first-excited state up to first order.
    2. Determine the zero order eigenstates.

(Hier zijn alle nodige sin en cos regels gegeven bij de vraag).

1. Een (niet-relativistisch) deeltje met massa m en energie E wordt verstrooid aan een centrale potentiaal V(r) gegeven door V(r)=ℏ22mW(r)

met W(r)=−2(λcoshλr)2 met λ een parameter. Beschouw nu lage-energieverstrooiing (s-golf). Bepaal de faseverschuiving δ0 en de overeenkomstige werkzame doorsnede. Hoe gedraagt de werkzame doorsnede zich als E→0? Maak hierbij gebruik van volgende oplossing. De differentiaalvergelijking d2u(r)dr2+Au(r)=W(r)u(r)

met A een positieve constante, heeft als algemene oplossing u(r)=α(λtanhλr−ik)eikr+β(λtanhλr+ik)e−ikr met k=√A, α en β de integratieconstanten en tanhx=ex−e−xex+e−x.

Academiejaar 2020-2021 2^de zit

Theorie

1. De oplossing van de Lippmann-Schwingervergelijking voor verstrooiing aan de 3D korte-drachtpotentiaal V(r) wordt gegeven door
   $\psi(r)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}e^{ik\cdot r}-\frac{2m}{\hbar^2}\int dr' \frac{e^{ik|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}V(r')\psi(r')$
    1. Bepaal hiermee een uitdrukking voor de differentieel werkzame doorsnede en de verstrooiingsamplitude.

De expansie van een vlakke golf met golfvector $\vec{k}$ in de *z*-richting in partiële golven wordt gegeven door $e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}=e^{ikz}=\sum_{l=0}^{\infty} i^l(2l+1)j_l(kr)P_l(\cos\theta)$

Voor een bol-symmetrische verstrooiingspotentiaal zal de verstrooiingsamplitude ook enkel afhangen van de hoek θ, en deze verstrooiingsamplitude kan ook geëxpandeerd worden in partiële golven als volgt $f(\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)f_lP_l(\cos\theta)$

1.
    1. Bepaal de uitdrukking voor de totale werkzame doorsnede in functie van de expansiecoëfficiënten f_l.
    2. Toon aan dat $1+2ikf_l$ gewoon de fasefactor is (dus kan geschreven worden als $e^{2i\delta_l}$.
    3. Bepaal de uitdrukking voor de totale werkzame doorsnede in functie van deze fases δ_l.
    4. Wat bedoelt men met "de *l*-de partiële golf is in resonantie"?
    5. Wat is de fysische interpretatie van een resonantie bij *l=0*?
    6. Wat is de fysische interpretatie van een resonantie bij $l\geq1$?
    7. Wat is schaduwverstrooiing?
2. Beschouw twee waterstof atomen op een grote afstand van mekaar (zoals bij Academiejaar 2017-2018 2de zit theorie vraag 1). Voor grote *r* wordt de interactiepotentiaal tussen beide elektronen tot laagste orde gegeven door $V=\frac{e^2}{r^3}(x_1x_2+y_1y_2-2z_1z_2)$.
    1. Onderstel nu dit systeem eerst in de grondtoestand
        1. Toon aan dat de interactie-energie evenredig is met r^{-6}.
        2. Toon aan dat deze interactie de energie verlaagt
    2. Beschouw nu de eerste geëxciteerde toestand van dit systeem bestaande uit twee waterstofatomen.
        1. Bepaal nu eerst het eerste geëxciteerde niveau van dit systeem.
        2. Schets (geef aan welke matrixelementen nul zijn, andere matrixelementen moet je niet expliciet uitrekenen) hoe je de laagste orde energiecorrecte t.g.v. V (dus de interactie-energie) kan bepalen voor dit geëxciteerde systeem.
        3. Is deze interactie-energie ook evenredig met r^{-6}?

3.
    1. Bepaal de uitdrukking voor de stroomdichtheid uit de Diracvergelijking
    2. Wat bedoelen we met de grote en de kleine component van de oplossing van de Diracvergelijking? Bepaal hun relatie.
    3. Beschouw de Diracvergelijking, inclusief een koppeling met een elektromagnetisch veld. Bepaal nu de niet-relativistische limiet van de Diracvergelijking (i.e. de Paulivergelijking). Bespreek het verschil met de Schrödingervergelijking.
    4. Stel een Diracvergelijking op voor een vrij deeltje in een (1+1)-dimensionale ruimte.

Gegeven: Orthogonaliteitsrelatie Legendrepolynomen, Paulimatrices, relaties van de matrices horende bij de Diracvergelijking en de vrije deeltjesoplossing van de Diracvergelijking.

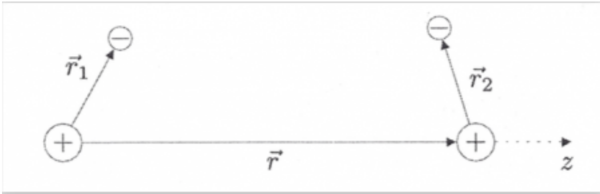
Oefeningen

1. Consider the harmonic oscillator H0=p22m+12mω2r2, and the relativistic kinetic energy correction H′=−p48m3c2
    1. Find the first-order correction due to H′ to the ground state of the one dimensional harmonic oscillator
    2. Use your result to find the second-order correction to the ground state of the harmonic oscillator in two and three dimensions
2. A particle of charge e is confined to a three-dimensional cubical box of side *2b*. It is subject to a uniform, time-dependent electric field of the form E(t)=E0exp(−αt)θ(t); where θ(t) is the Heaviside function. E is perpendicular to one of the surfaces of the box. Calculate to first order the probability that the charged particle, in the ground state at t=0, is excited to a first excited state after a very long time (t→∞).
3. Een deeltje met massa *m* verstrooit aan een bol met straal *R*. De potentiaal binnen de bol is V≈−V0 met V0>0. Op de schil van de bol bevindt zich een potentiaal Uδ(r−R) met U>0.
    1. Beschouw *s*-golf verstrooiing en bepaal de faseverschuiving δ0.
    2. Wat wordt deze faseverschuiving in de limiet U→∞. Hoe gedraagt het systeem zich?
    3. Voor welke energieën van het inkomend deeltje is de amplitude van de toestand groot binnen in de bol?

Academiejaar 2017-2018 2^{de} zit

Theorie

1. Beschouw twee waterstofatomen op een grote afstand r van mekaar. Voor grote r wordt de interactiepotentiaal tussen beide elektronen tot laagste orde gegeven door V=e2r3(x1x2+y1y2−2z1z2)

   Met xi, yi, zi de positie van het elektron ten opzichte van de i-de waterstofkern. Met r de afstand tussen de kernen. Onderstel nu dat dit systeem in de grondtoestand zit.
    1. Toon aan dat de interactie-energie evenredig is met r−6.
    2. Toon aan dat deze interactie de energie verlaagt.
2. Bepaal de storingshamiltoniaan die de interactie van een deeltje met lading −e met een klassiek stralingsveld beschrijft.
3. De oplossing van de Lippman-Schwingervergelijking voor verstrooiing aan de 3D korte-drachtpotentiaal V(r) wordt gegeven door ψ(r)=1(2π)3/2eik·r−2mℏ2∫dr′eik|r−r′|4π|r−r′|V(r′)ψ(r′)
    1. Bepaal hiermee een uitdrukking voor de verstrooingsamplitude.
    2. Bepaal de tweede-orde Born benadering voor deze verstrooiingsamplitude.
4. De expansie van een vlakke golf met golfvector →k in de z-richting in partiële golven wordt gegeven door: ei→k·→r=eikz=∞∑l=0il(2l+1)jl(kr)Pl(cos(θ)) Voor een bol-symmetrische verstrooingspotentiaal zal de verstrooingsamplitude ook enkel afhangen van de hoek θ, en deze verstrooiingsamplitude kan ook geëxpandeerd worden in partiële golven als volgt f(θ)=∞∑l=0(2l+1)flPl(cosθ)
    1. Bepaal de uitdrukking voor de totale werkzame doorsnede in functie van de expansiecoëfficienten fl.
    2. Toon aan dat 1+2ikfl gewoon een fase factor is (dus kan geschreven worden als e2iδl
    3. Bepaal de uitdrukking voor de totale werkzame doorsnede in functie van deze fases δl.
    4. Wat bedoelt men met "de l-de partiële golf is in resonantie"?
    5. Wat is de fysische interpretatie van een resonantie bij l=0?
    6. Wat is de fysische interpretatie van een resonantie bij l≥1?
5.
    1. Waarom is de Klein-Gordon vergelijking geen goede kandidaat voor een relativistische golfvergelijking voor het elektron?
    2. Toon aan dat de oplossing voor een (3+1) dimensionale Dirac vergelijking een spinor moet zijn.
    3. Wat bedoelen we met de grote en de kleine component van de oplossing van de Dirac vergelijking? Bepaal hun relatie. (Dirac vergelijking en vrije deeltjes oplossingen zijn gegeven)

Veldentheorie

1. Schets bondig de canonische kwantisatieprocedure van een veldentheorie volgens het Dirac recept.
2. In de cursus wordt de canonische kwantisatieprocedure toegepast op het Schrödingerveld. Veronderstel dat we vrije elektronen willen beschrijven m.b.v het gekwantiseerde Schrödingerveld. Het startpunt is dan de niet-gekwantiseerde Schrödingervergelijking voor vrije deeltjes. $i\hbar\partial\Phi(r,t)\partial t=-\hbar 22m\nabla 2\Phi(r,t)$ met als algemene oplossing voor het veld Ψ $\Phi(r,t)=\sum kck(t)\phi k(r)$ en waarbijdus de ééndeeltjes eigentoestanden uiteraard beschreven worden door de boxgenormeerde vlakke golven $\phi k(r)=1\sqrt{}Vek\cdot r$
    1. Gebruik de canonische kwantisatieprocedure om een uitdrukking te vinden voor de stroomdichtheidsoperator ˆj in termen van de creatie- en annihilatieoperatoren
    2. Wat is de stroomdichtheid gedragen door de tweedeeltjestoestand $|k1,k2\rangle$?

Oefeningen

1. A particle with mass m and charge q is confined by an isotropic three-dimensional harmonic oscillator potential with frequency ω. A magnetic field is added which gives rise to a perturbation $Hp=-q2mBLx$ with Lx the x-component of the angular momentum operator.
    1. Express Lx in ladder operators.
    2. Determine the splitting of the first excited state to first order in B.
    3. Determine also the corresponding zeroth order eigenstates.
2. Consider an infinitly deep potential well of width Lz centered around z=0 with an electron that is initially in the ground. From time =0 to t=T we apply a uniform electric field across the well, adding a term αz to the Hamiltonian, which is thus time-dependent. We assume that the field is quite weak.
    1. Using first order time-dependent perturbation theory, derive an expression for the probability of finding the electron in the first excited state of the well after the field is switched off.
    2. What is the largest possible value for this probability? For what duration T is it attained?
    3. What is the probability that the electron will be found in the second excited state after the field is switched off?
3. Consider s-wave scattering from an attractive potential shell (V0>0) $V(r)=\{-V0a\leq r\leq b0$elsewhere Remember that the radial Schrödinger equation for l=0 is given by $1r2ddr(r2dR0dr)+2m\hbar 2(E-V(r))R0=0$ where R0(r) is the radial wave function.
    1. Find the general solution in the three regions. Hint: use the substitution $u(r)=rR0(r)$ to simplify the radial equation
    2. Use the boundary conditions to find an expression for $\tan(kb+\delta 0)$.
    3. Show that you obtain the result for the spherical potential well $V(r)=-V0\theta(b-r)$ in the limit $a\to 0$ given by

$\delta 0=-kb+\arctan(k\tan(qb)q)$

Academiejaar 2016-2017 1ste zit

Theorie

1.
    1. Bepaal de overgangswaarschijnlijkheid om een overgang te maken van toestand a naar toestand b onder invloed van een tijdsafhankelijke storing V(t) in de Bornbenadering.
    2. Beschouw nu een tijdsonafhankelijke storing in je vorige resultaat. Toon aan dat dit leidt tot de uitdrukking voor de energiecorrectie op toestand a gekend voor tijdsonafhankelijke storingsrekening.
    3. Bepaal de storingshamiltoniaan die de interactie van een deeltje met lading — e met een klassiek stralingsveld beschrijft.
    4. Toon aan dat de eerste Born-benadering niet voldoet aan het optisch theorema.
    5. Leid de uitdrukking voor de vormfactor af. Wat kan men leren uit de meting van de vormfactor?
2.
    1. Wat bedoelt men met 'lage-energie verstrooiing is s-golf verstrooiing'?
    2. Wat zijn partiële golven?
    3. Wat zijn resonanties? Wanneer treden resonanties op?
    4. Wat is schaduwverstrooiing?
3. Leid de Dirac-vergelijking af voor een 2+1 dimensionale ruimte, en bepaal de dichtheid en stroomdichtheid.
4. Welke vergelijking wordt hieronder getoond? Bespreek kort elke term.
   [p22m+V−p48m3c2+ℏ4m2c2σ·(∇V×p)+ℏ28m2c2∇2V]¯ϕ=E¯ϕ
5. Beschouw de volgende 'alternatieve' dichtheid voor de Klein-Gordon vergelijking die wel steeds positief isρ(r)=ℏ2|∂ψ∂t|2+ℏ2c2(∇ψ)·(∇ψ∗)+m2c4|ψ|2Toon aan dat deze uitdrukking inderdaad kan geïnterpreteerd worden als een dichtheid voor de Klein-Gordon vergelijking. (Bonusvraag: Waarom is dit toch geen nuttige definitie voor de dichtheid van de Klein-Gordon vergelijking?)

Oefeningen

1. A particle of mass m is confined to a circle of radius a, but is otherwise free. A perturbing potential V=Acos(θ)sin(θ) is applied (with A constant and small).
    1. Find the unperturbed wave functions and energy levels, and discuss the degeneracies of the latter. Hint: Use the periodic boundary condition ψ(θ)=ψ(θ+2π) of this system.
    2. Prove that the wave functions are orthonormal. This property will come in handy in (c).
    3. Calculate the energy corrections due to the perturbation for the lowest two levels to second order.

2. A hydrogen atom in its ground state at $t=0$ is subject to a uniform, time-dependent electric field of the form $E(t)=E_0\exp(-\Gamma t)\Theta(t)$, where $\Theta(t)$ is the Heaviside function.
    1. Calculate the probabilities of the atom being in any of the $n=2$ states after a long time ($t\to\infty$), to first order (consider all possible final states). Hint: Choose the coordinate system wisely.
    2. Which selection rules for the transitions did you thus obtain?
3. Consider scattering at a spherically symmetric potential of the form $V(r)=\begin{cases}-V_1 & \text{for } 0<r<a\\ V_2 & \text{for } a<r<b\\ 0 & \text{for } b<r\end{cases}$ where $V_1,V_2>0$ are constants.
    1. Calculate the s-wave phase shift and scattering cross section. Hint: Substituting $u(r)=rR_0(r)$ simplifies the mathematics for this problem.
    2. Based on the obtained result, show that resonances occur for certain bound states in this system. Which bound states are these and for which wave vector of incoming plane waves does the resonance occur? What does this become in the case of states inside the well characterized by the wave vector with norm $\sim\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_1+V_2)}$?
       Hint: To obtain the condition for the bound states, you can let $b\to\infty$ (but not for the scattering).

Academiejaar 2015-2016 1ste zit

Theorie

Kwantummechanica

1. Beschouw het n-de energieniveau van een niet-ontaard storingsprobleem beschreven door de Hamiltoniaan $H=H_0+\lambda V$, waarbij de oplossingen van het ongestoord probleem gegeven worden door $H_0|\psi_n^0\rangle=E_n^0|\psi_n^0\rangle$ de verwachtingswaarde van H van de golffunctie tot eerste orde?

2. Beschouw hoge-energieverstrooiing van een elektron op een proton. Een vereenvoudigd model voor de ladingsverdeling van een proton is $\rho(r)\propto \frac{e^{-r/R}}{r}$.

   Bepaal de differentiaal werkzame doorsnede in de Born benadering. Hoe wijkt de verstrooiing van een elektron aan dit proton nu af van verstrooiing aan een puntlading? Hoe kunnen we dit gebruiken om de grootte van een proton af te schatten?

3. Beschouw een massaloos deeltje dat beschreven wordt door de 3+1 dimensionale Dirac vergelijking dat loodrecht invalt op een potentiaalstap. Toon aan dat de transmissiewaarschijnlijkheid 100% is.

4. Enkele vragen met een kort antwoord:

   a. Wat zijn partiële golven?

   b. Waarom is de verstrooiingsamplitude in voorwaartse richting gerelateerd aan de totale werkzame doorsnede?

   c. Wat betekent het begrip ‘elektrische dipoolbenadering’?

   d. Toon aan dat de dichtheid bekomen uit de Klein-Gordon vergelijking reduceert tot ρ=ψ∗zψ in de niet-relativistische limiet.

Veldentheorie

Beschouw een lineaire keten met lengte L bestaande uit N massapunten. Elk individueel massapunt is via een ideale veer met veerconstante K gekoppeld met zijn naaste buur. De evenwichtsafstand van iedere veer wordt gegeven door a. De uitwijking van het n-de massapunt (n=1,2,...,N) op ieder tijdstip t uit de evenwichtspositie wordt genoteerd als qn(t). Elk massapunt is bovendien ook nog opgesloten in een parabolische potentiaalput die voor het n-de massapunt gegeven wordt doorVn=12mω20q2n.

We veronderstellen periodieke randvoorwaarden waarbij q1(t)=qN(t). De totale Hamiltoniaan van dit systeem wordt gegeven doorH=N−1∑n=1p2n2m+K2(qn+1−qn)2+12mω20q2n waarbij pn=m˙qn de impuls van het n-de massadeeltje is.

1. Leid de bewegingsvergelijking af waaraan qn(t) voldoet in de continuümlimiet (a→0 en N→∞ met L=(N−1)a constant). Maak gebruik van de Young modulus Y=Ka en de definieer een lineaire massadichtheid μ=m/ a en een snelheid v2=Y/μ. Aan welke bekende bewegingsvergelijking voldoet het veld q(x,t) indien men v=c stelt?
2. Leg een kwantitatief verband tussen de pulsatie ω0 en de massa M van het deeltje dat het veld q(x,t) beschrijft?
3. Schets bondig hoe je het recept van de canonische kwantisatie zou toepassen op dit systeem?

Oefeningen

1. **Perturbation theory.** The potential energy between a static charge Ze located in the origin and a charge —e moving with constant velocity v can be written as (in Gaussian units)V(r)=−Ze2√r2−(r×vc)2 where r is the position vector of the moving charge. This potential takes into account that the Coulomb interaction propagates with the speed of light, resulting in a retarda-tion effect for moving charges, which is essentially a relativistic effect.
   1. Expand the expression for V(r) and find the lowest-order correction to the poten-tial energy of static charges.
   2. Consider this *retardation* correction to the potential as a perturbation to the hydrogen-like atom and find the first-order correction to the energy levels. You do not need to calculate the radial matrix element explicitly.

2. **Scattering.** Consider a particle of mass m that scatters at the repulsive potential $V(r)=\frac{\lambda}{r^2}, \lambda>0$.
    1. Calculate the differential cross section in the first Born approximation.
    2. Solve the scattering problem exactly and use the asymptotic form $j_\alpha(kr) \propto \frac{e^{-ikr}}{r}-e^{-i\pi\alpha}\frac{e^{ikr}}{r}$, to find the phase shift δ_l. Make sure you obtain the free result $\lim_{\lambda\to 0}\delta_l=0$.
    3. Expand the phase shift to first order in $m\lambda/\hbar^2$.
    4. Use this result to calculate the scattering amplitude to first order and show that you obtain the same result as the first Born approximation.
3. **Relativistic quantum mechanics.** Show that the energy spectrum of a relativistic spinless boson with charge q in a uniform magnetic field $\mathbf{B}=B\hat{z}$ is given by $E^2_n(k_z)=m^2c^4+\hbar^2k^2_zc^2+2mc^2\hbar\omega(n+\frac{1}{2})$, with $\omega=|qB|/(mc)$ and $n=0,1,...$ Reduce the problem to a well-known non-relativistic problem to find the solution. Use minimal coupling $\mathbf{p}\to\mathbf{p}-q\mathbf{A}/c$ with the Landau gauge $\mathbf{A}=Bx\hat{y}$ to introduce the magnetic field.

Academiejaar 2014-2015 2^de zit

Theorie

Gevorderde Kwantummechanica (onvolledig)

1. *Coming soon (1)*
2. *Coming soon (2)*
3. *Coming soon (3)*
4.
    a. Toon aan dat de oplossing voor een (3+1) dimensionale Dirac vergelijking en 4-spinor moet zijn.
    b. Wat bedoelen we met de grote en kleine component van de oplossing van de Dirac vergelijking? Bepaal hun relatie.
    c. Bepaal de uitdrukking voor de stroomdichtheid uit de Dirac vergelijking.
    d. Bepaal de niet-relativistische limiet van deze stroomdichtheid in laagste orde en vergelijk met de stroomdichtheid bekomen uit de Schrödingervergelijking.
    e. Stel een Dirac vergelijking op voor een vrij deeltje in een (1+1)-dimensionale ruimte.

Gegeven: de Paulimatrices σ_i, $\alpha_i=\begin{pmatrix}0 & \sigma_i\\ \sigma_i & 0\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}I & 0\\ 0 & -I\end{pmatrix}$

$\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k$ $\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$ de Dirac vergelijking $i\hbar\frac{\partial\phi}{\partial t}=(\alpha\cdot p+\beta m_0c^2)\phi$ en de vrije deeltjesoplossing van de Dirac vergelijking.

Inleiding Kwantumvelden

1. Veronderstel dat je beschikt over een gekwantiseerd Schödingerveld $\hat{\varphi}(r,t)$ dat op volgende wijze ontwikkeld is in de genormeerde eigenfuncties $\phi_n(r)$ die oplossingen zijn van de tijdsonafhankelijke Schrödingervergelijking: $\hat{\varphi}(r,t)=\sum_n\hat{c}_n(t)\phi_n(r)$
    a. Bespreek kort de fysische betekenis van de toestanden $\hat{c}^\dagger_n|0\rangle$ en $\hat{\varphi}^\dagger(r,t)|0\rangle$.
    b. Geef de expliciete tijdsafhankelijkheid van de operator $\hat{c}_n$?
    c. Toon aan dat dat $\langle r|\hat{c}^\dagger_n|0\rangle=\phi(r)$.

Mondelinge bijvragen:

1. Bij b: Hoe kan je de tijdsafhankelijkheid van een operator afleiden?
2. Bij c was $\langle r|n\rangle=\phi(r)$ is niet voldoende, werk dit verder uit.

Oefeningen

1. **Perturbation theory.** Consider the harmonic oscillator $H_0=\frac{p^2}{2m}+\frac{1}{2}m\omega^2r^2$ and the relativistic energy correction $H'=-\frac{p^4}{8m^3c^2}$
   a. Find the first-order correction due to H' to the ground state of the one-dimensional harmonic oscillator.
   b. Use your result to find the first-order correction to the ground state of the harmonic oscillator in two and three dimensions.

   Recall that the momentum operator can be written as $p_x=i\sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}(a^\dagger-a)$ where a and $a^\dagger$ are the annihilation operators for which $a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$ $a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$
2. **Variational method.** Use a variational wavefunction with a single parameter α and find the best approximation to the ground-state energy of a particle moving in one dimension in a quartic potential. The Hamiltonian is $H=\frac{p^2}{2m}+Ax^4$
3. **Partial waves.** Consider s-wave scattering from an attractive potential shell ($V_0>0$) $V(r)=\begin{cases}-V_0 & a\leq r\leq b\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$ Remember that the radial Schrödinger equation for $l=0$ is given by $\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR_0}{dr}\right)+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(r))R_0=0$ where $R_0(r)$ is the radial wave function.
   a. Find the general solution in the three regions. Hint: use the substitution $u(r)=rR_0(r)$ to simplify the radial equation.
   b. Use the boundary conditions to find an expression for $\tan(kb+\delta_0)$.
   c. Show that you obtain the result for the spherical potential well $V(r)=-V_0\theta(b-r)$ in the limit $a\to 0$ given by $\delta_0=-kb+\arctan\left(\frac{k\tan(qb)}{q}\right)$ and with $\theta(x)=\begin{cases}1 & x>0\\ 0 & x<0\end{cases}$

Academiejaar 2014-2015 1ste zit

Theorie

Groep A

Gevorderde kwantummechanica

1. Beschouw de Hamiltoniaan $H=H_0+\lambda V$ met λV een storing en $H_0|\psi^{(0)}_n\rangle=E^{(0)}_n|\psi^{(0)}_n\rangle$. Onderstel dat $E^{(0)}_n$ een niet-ontaarde eigenwaarde is van H_0. Noem $|\psi(\lambda)\rangle$ de eigentoestand van de gestoorde Hamiltoniaan H.
   1. Om de uitdrukking te bepalen voor de energiecorrecties op $E^{(0)}_n$ hebben we de volgende normalisatie gekozen: $\langle\psi^{(0)}_n|\psi(\lambda)\rangle=1$.
   2. Bepaal de uitdrukking voor de eerste orde correctie tot de energie $E^{(1)}_n$ zonder deze keuze van de normalisatie van $|\psi(\lambda)\rangle$.
   3. Toon aan dat zonder deze keuze van de normalisatie van $|\psi(\lambda)\rangle$ de tweede orde energie-correctie gegeven wordt door $E^{(2)}_n=\langle\psi^{(0)}_n|V-E^{(1)}_n|\psi^{(1)}_n\rangle$ met $|\psi^{(1)}_n\rangle$ de eerste orde correctie op de eigentoestand.

2. Beschouw een **twee-dimensionaal** verstrooiingsprobleem.
    1. Stel de Lippmann-Schwinger vergelijking op, en geef de overeenkomstige coördinatenrepresentatie. Je mag gebruik maken van G+(→x,→x′)=∫d→pei(→x−→x′)·→p/ℏ(2πℏ)21E−p2/2m+iϵ=−2mℏ2i4H(1)0(k|→x−→x′|) G−(→x,→x′)=∫d→pei(→x−→x′)·→p/ℏ(2πℏ)21E−p2/2m−iϵ=−2mℏ2i4H(2)0(k|→x−→x′|)
       met H(1)0 en H(2)0 de gewone Hankel functies. Hun asymptotisch gedrag wordt gegeven door H(1)0(z)→√2πzexp(i(z−π/4))
       H(2)0(z)→√2πzexp(−i(z−π/4))
       voor z→∞.
    2. Bepaal hiermee de uitdrukking voor de differentieel werkzame doorsnede.
    3. Geef de eerste Born-benadering voor twee-dimensionale verstrooiing.
    4. Leidt het optisch theorema af voor twee-dimensionale verstrooiing.
3. Beschouw een **massaloos** deeltje dat beschreven wordt door de 3+1 dimensionale Diracvergelijking dat loodrecht invalt op een potentiaalstap. Toon aan dat de transmissiewaarschijnlijkheid 100% is. Geef een interpretatie van je resultaat.
4. Toon aan dat de dichtheid bekomen uit de Klein-Gorden vergelijking reduceert tot ρ=ψ∗ψ in de niet relativistische limiet.

Gegeven bij dit examen: Diracvergelijking en de vrije deeltjesoplossing van de Diracvergelijking.

Inleiding kwantumvelden

De waarschijnlijkheidsamplitude ⟨r,t|r′,t⟩ wordt ook een propagator genoemd.

1. Leg uit op welke manier deze propagator wordt berekend m.b.v. veldoperatoren.
2. Geef de fysische interpretatie van deze propagator.
3. Wat is het verschil tussen deze propagator berekend m.b.v. het Schrödingerveld en het Klein-Gordon veld en welke belangrijke conclusie kan hieruit getrokken worden?

Groep B

Gevorderde kwantummechanica

1.
    1. Bepaal de storingshamiltoniaan van een deeltje met lading -*e* met een klassiek stralingsveld beschrijft.
    2. Beschouw een elektron in de grondtoestand in een atoom |ψ0>. Laat hierop elektromagnetische straling invallen (onderstel →ez de voortplantingsrichting en →ex de polarisatierichting). Toon aan dat om de overgangswaarschijnlijkheid om dit elektron te exciteren naar toestand |ψn> we het matrixelement <ψn|x|ψ0> moeten berekenen.
2. Beschouw een ééndimensionaal systeem beschreven door de Hamiltoniaan H=p22m+V(|x|) Toon aan dat voor een probeergolffunctie ψ(x)=xf(|x|) geldt dat <ψ|H|ψ>≥E1
   met E1 de energie van de eerste geëxciteerde toestand.

3.
    1. Stel de Lippmann-Schwinger vergelijking op, en geef de overeenkomstige coördinatenrepresentatie. Je mag gebruik maken van $G_+(x,x')=\int dp\, e^{i(x-x')p/\hbar}\frac{1}{\pi\hbar}\frac{1}{E-p^2/2m+i\epsilon}=-\frac{im}{\hbar^2 k}e^{ik|x-x'|}$
    2. Bepaal de uitdrukking voor de differentieel werkzame doorsnede en de totale werkzame doorsnede voor een één-dimensionale verstrooiing.
4.
    1. Wat bedoelt men met 'Lage-energie verstrooiing is s-golf verstrooiing'?
    2. Wat zijn resonanties? Wanneer treden resonanties op?
5.
    1. Leid de uitdrukking af voor de stroomdichtheid uit de Dirac vergelijking.
    2. Bepaal de niet-relativistische limiet van deze uitdrukking.
6. Leid de Dirac vergelijking af voor een tweedimensionaal probleem. Hoeveel componenten heeft de eigenvector?

Gegeven: de Paulimatrices, $\alpha_i=\begin{pmatrix}0&\sigma_i\\\sigma_i&0\end{pmatrix}$, $\beta=\begin{pmatrix}I&0\\0&-I\end{pmatrix}$

, $\sigma_i\sigma_j=\delta_{ij}+i\epsilon_{ijk}\sigma_k$, $\vec{\sigma}\cdot\vec{a}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}+i\vec{\sigma}\cdot(\vec{a}\times\vec{b})$, de Dirac vergelijking en de vrije deeltjesoplossing van de Dirac vergelijking.

Inleiding kwantumvelden

1. Maak een schematische samenvatting van bladzijde van de Dirac of canonische kwantisatieprocedure voor 1ste en 2de kwantisatie. Gebruik de Lagrangiaan(se dichtheid) als startpunt.

Oefeningen

Groep A

1. Consider a two-dimensional harmonic oscillator with the pertubation $V=x^2y^2$.

    a. Find the energy correction to the second-excited state up to first order, together with the corresponding eigenstates. Draw an energy diagram.

    b. Now consider the pertubation $V=x^2f(y)$, wehre $f(y)$ is an *analytic* (operator-valued) function. Show that there is no first-order correction for the second-excited state if $f(y)$ is an odd function.

    Recall that the position operator can be written as $x=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a+a^\dagger)$,

    where a and $a^\dagger$ are the annihilation and creation operators, for which $a|n\rangle=\sqrt{n}|n-1\rangle$ $a^\dagger|n\rangle=\sqrt{n+1}|n+1\rangle$.

2. The spherical potential well is given by$V(r)=\{V0r\leq a0r>a$.

    a. Calculate the scattering amplitude in the (first) Born approximation.

    b. Expand your result for small qa up to the second order.

    c. Write down the differential cross section and use your approximate result to find the total cross section in the low-energy limit.

3. Scattering resonances of the delta-shell potential,$V(r)=\lambda\delta(r-a)$.

    a. Consider s-waves and find an equation for $u(r)=rR0(r)$. Find approximate boundary conditions and use these to determine the s-wave phase shift $\delta0$. Show that you recover the result of the hard sphere if $\mu\equiv2m\lambda/\hbar2k\gg1$ in case cot(ka) does not go to negative infinity, where k is the length of the incident wave vector.

    b. Consider $\delta0$ as a function of a while keeping k fixed for different values of μ and find the condition for resonances ($\delta0=\pi/2$).

    c. Determine the s-wave bound states of the infinite spherical *well* of radius a and discuss their relationship with the delta-shell resonances in case $\mu\gg1$.

    The radial Schrödinger equation is given by$[1r2ddrr2ddr-l(l+1)r2+2m\hbar2(E-V(r))]Rl(r)=0$

Groep B

1. **Perturbation theory.** Consider a hydrogen atom with a finitesized nucleus. Model the proton as a uniformly charged ball of radius b with total charge e. The The corresponding potential is given by$V(r)=\{-e22b(3-r2b2)2r\leq b-e2rr>b$.

    - Find the corresponding perturbation to the hydrogen atom with point nucleus.
    - Calculate the first-order correction to the ground-state energy and show that the leading order is proportional to $(b/a)2$.
    - Does the perturbation affect higher angular-momentum states more or less? Give a simple argument without performing any calculation.
    - Now consider the first-excited state. Is the original basis of the 4-dimensional degenerate subspace {2s,2px,2py,2pz} diagonal in the pertubation?

    The normalized ground-state wave function of the (unperturbed)hydrogen atm is given by (a is the Bohr radius)$\psi(r)=1\sqrt{\pi a3}e-r/a$.

2. **Born approximation.** An electron scatters at an electric dipole composed of charges $-Ze$ and $+Ze$ separated by the vector $\mathbf{d}$.

    - Make a drawing and find the scattering potential.

    - Calculate the differential cross section in the (first) Born approximation. You can use the result for Rutherford scattering $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_R$.

3. **Partial waves.** Consider p-wave scattering from a hard sphere of radius a.

    - Find the phase shift $\delta_1(k)$ for p-wave scattering and evaluate it in the low-energy limit up to lowest order.

    - Compare this result with the s-wave phase shift. Which channel dominates in the low-energy limit?

    The radial wave function of the l-th partial wave outside the scattering region is $R^{>}_l(r)=e^{i\delta_l}h^{(1)}_l(kr)+e^{-i\delta_l}h^{(2)}_l(kr)$,

    and the spherical Hankel functions are given by (for x real) $h^{(1)}_l=-ix^l\left(-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^l\frac{e^{ix}}{x}$, $h^{(2)}_l=h^{(1)}_l(x)^*$.

Academiejaar 2013-2014 2^{e} zit

Theorie

1. Beschouw het n-de energieniveau van een niet-ontaard storingsprobleem beschreven door de Hamiltoniaan $H=H_0+\lambda V$, waarbij de oplossingen van het ongestoord probleem gegeven worden door $H_0|\psi^{(n)}_0\rangle=E^{(n)}_0|\psi^{(n)}_0\rangle$. Is $E^{(n)}_0+\lambda\langle\psi^{(n)}_0|V|\psi^{(n)}_0\rangle$ de verwachtingswaarde van de energie horende bij de golffunctie tot eerste orde?
2. Toon aan dat het aanleggen van een tijdsafhankelijke harmonische storing leidt tot de fenomenen van gestimuleerde emissie en absorptie.
3.
    - Waarom is de Klein-Gordon vergelijking geen goede kandidaat voor een relativistische golfvergelijking voor het elektron?
    - Toon aan dat de dichtheid bekomen uit de Klein-Gordon vergelijking reduceert tot $p=\psi^*\psi$ in de niet-relativistische limiet.
4.
    - Wat is de methode van de partiële golven? Wanneer is deze methode geldig?
    - Omschrijf wat er bedoeld wordt met de uitdrukking: "Lage-energieverstrooiing is s-golfverstrooiing."

5.
    - Waarom is de oplossing van de Dirac vergelijking een vier-spinor? Wat is de fysische betekenis hiervan?
    - Leid de Dirac vergelijking af voor een (2+1)-dimensionaal probleem (2 ruimtelijke dimensies en de tijd). Hoeveel componenten heeft de eigenvector?

Oefeningen

1. **Delta storing in 3D oneindige potentiaal put**
   Beschouw een 3 dimensionale oneindige potentiaal put $V(x,y,z)=\begin{cases}0 & 0<x<a, 0<y<a, 0<z<a\\ \infty & \text{elders}\end{cases}$ Op het punt $(\frac{a}{4},\frac{a}{2},\frac{3a}{4})$ plaatsten we een storing van de vorm $H'=a^3V_0\delta(x-\frac{a}{4})\delta(y-\frac{a}{2})\delta(z-\frac{3a}{4})$
    - Bereken de eerste orde correctie op de energie van de grondtoestand en die van de eerste aangeslagen toestand.
    - Geef de bijhorende eigentoestanden tot op nulde orde.
2. **Variatierekening**
   Behandel de grondtoestandsenergie van een deeltje in een 1D (oneindige) potentiaalput op het interval [0,a] variationeel met een probeerfunctie van de vorm $x(a-x)$ Vergelijk de benaderde energie met de exacte.
3. **Tijdsafhankelijke storingsrekening**
   Beschouw een 1D harmonische oscillator in de grondtoestand. Op tijdstip $t=0$ leggen we een oscillerend krachtveld aan dat langzaam uitdempt $F(t)=F_0e^{i\Omega t}e^{-t/r}$
    - Bereken de waarschijnlijkheid dat de oscillator na lange tijd ($t \ggg r$) in de eerste aangeslagen toestand eindigt.
    - Op welk punt is de bekomen overgangswaarschijnlijkheid maximaal?
    - Komt deze overgangswaarschijnlijkheid je bekend voor?
      Hint: [...]

Academiejaar 2013-2014 1ste zit

Oefeningen

1. Beschouw een deeltje met massa m dat beweegt in een 1D potentiaal $V(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ \frac{1}{2}m\omega^2x^2 & x>0\end{cases}$
    - Gebruik de volgende probeer golffunctie om een benadering te vinden voor de grondtoestandsenergie $\psi(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 2\lambda^{3/2}xe^{-\lambda x} & x>0\end{cases}$
    - Dit probleem kan eveneens exact opgelost worden. Wat is de exacte grondtoestandsenergie? *(hiervoor moet je niet beginnen rekenen, gewoon nadenken).*
    - Vergelijk de benaderende met de exacte oplossing.

2. Beschouw een kwantum systeem bestaande uit 2 toestanden, beschreven door de volgende Hamiltoniaan$H=\begin{pmatrix} E_{01} & \lambda\Delta \\ \lambda\Delta & E_{02}\end{pmatrix}$
    - Geef de eigenvectoren en eigenwaarden van de ongestoorde Hamiltoniaan ($\lambda=0$).
    - Bereken de eigenvectoren ψ_1 en ψ_2 en de corresponderende eigenwaarden exact.
    - Veronderstel dat $\lambda|\Delta| \ll |E_{01}-E_{02}|$. Los hetzelfde probleem op gebruik makende van niet-ontaarde tijdsafhankelijke storingstheorie tot tweede orde in de energie en tot eerste orde in de eigentoestanden. Vergelijk met de exacte uitkomst.
    - Veronderstel dat de twee niet gestoorde enegieën bijna ontaard zijn$|E_{01}-E_{02}| \ll \lambda|\Delta|$ Toon aan dat de exacte resultaten zeer gelijkaardig zijn aan deze bekomen met ontaarde storingsrekening als we E_{01} gelijkstellen aan E_{02}.

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

1. Een aantal vragen met een kort antwoord.
    - Toon aan dat we het matrixelement $\langle\psi_n|\vec{p}|\psi_i\rangle$ moeten berekenen om de overgangswaarschijnlijkheid te kennen tussen twee atoomlevels t.g.v. invallende elektromagnetische straling ($|\psi_i\rangle\to|\psi_n\rangle$).
    - Waarom is de verstrooiingsamplitude in voorwaartse richting gerelateerd aan de totale werkzame doorsnede?
    - Waarom worden commuterende observabelen ook compatibele observabelen genoemd?
    - Bij de studie van de interactie van een systeem met een klassiek stralingsveld hebben we de effecten van gestimuleerde emissie en absorptie beschreven. Waarom volgt het effect van spontane emissie niet uit onze aanpak?
    - Toon aan dat de Klein-Gordon vergelijking reduceert tot de Schrodinger vergelijking in de niet-relativistische limiet.
2. Stel de Lippman-Schwinger vergelijking op voor een 1D verstrooiingsprobleem, en leid de overeenkomstige coordinatenrepresentatie af.
3. Beschouw een massaloos deeltje dat beschreven wordt door de 3+1 dimensionale Dirac vergelijking dat loodrecht invalt op een potentiaalstap. Toon aan dat de transmissiewaarschijnlijkheid 100% is.

Kwantumveldentheorie

Beschouw een lineaire keten met lengt L bestaande uit N massapunten. Elk individueel massapunt is via een ideale veer met veerconstante K gekoppeld met zijn naaste buur. De evenwichtsafstand van iedere veer wordt gegeven door a. De uitwijking van het n-de massapunt (n=1,2,..., N) op ieder tijdstip t uit de evenwichtspositie wordt genoteerd als $q_n(t)$. Elk massapunt is bovendien ook nog opgesloten in een parabolische potentiaalput die voor het n-de massapunt gegeven wordt door $Vn=12m\omega20q2n$. We veronderstellen periodieke randvoorwaarden waarbij $q1(t)=qN(t)$. De totale Hamiltoniaan van dit systeem wordt gegeven door$H=N-1\sum n=1p2n2m+K2(qn+1-qn)2+12m\omega20q2n$

waarbij pn de impuls van het n-de massadeeltje is.

- Leid de bewegingsvergelijking af waaraan $qn(t)$ voldoet in de continuumlimiet ($a\to0$ en $N\to\infty$ met $L=(N-1)a$ constant). Maak gebruik van de Young modulus $Y=Ka$ en definieer een lineaire massadichtheid $\mu=m/a$ en een snelheid $v2=Y/\mu$. Aan welke bekende bewegingsvergelijking voldoet het veld $q(x,t)$ indien men $v=c$ stelt?
- Leg een kwalitatief verband tussen de pulsatie $\omega0$ en de massa M van het deeltje dat het veld $q(x,t)$ beschrijft?
- Schets bondig hoe je het recept van de canonische kwantisatie zou toepassen op dit systeem?

  Bijvraag op mondeling: wat is de betekenis van ϕ en zijn toegevoegde ?

Oefeningen

1. Beschouw een 2D oneindig diepe potentiaalput$V(x,y)=0$ als $0\le x,y\le a$ en $V(x,y)=\infty$ elders. We leggen een storing aan van de vorm $\lambda\delta(x-y)$.
   - Bereken de eerste orde correctie op de grondtoestand en de eerste aangeslagen toestand.
   - Geef de bijhorende eigenvectoren tot op nulde orde.

     Hint$\sin(x)\sin(y)=\cos(x-y)-\cos(x+y)2$
2. Beschouw een potentiaal van de vorm$V(x)=|x|$. Bereken een benadering voor de grondtoestandsenergie.
3. Bereken de faseverschuiving voor s-golf ($l=0$) verstrooiing aan de volgende 3D potentiaal$V(r)=-V0+\hbar2\Omega2ma\delta(r-a)$ voor $r\le a$ en gelijk aan nul elders, waarbij $V0,\Omega>0$. Bekijk en bespreek (kort) de limieten $E\to\infty$ en $N\to\infty$.

   Hint: De Schrodinger vergelijking voor het radiale gedeelte van de golffunctie is$[1r2ddrr2ddr-l(l+1)r2+2m\bar{}h2(E-V(r))]Rl(r)=0$ voor $l=0$ is de substitutie $R0(r)=u(r)/r$ aan te raden.
4. In de les hebben we gezien dat de laagste orde relativistische correctie, bekomen met storingsrekening, gegeven is door$E1r=-12mc2[E2-2E\langle V\rangle+\langle V2\rangle]$. Gebruik deze formule om de laagste orde relativistische correctie voor een 1D harmonische oscillator te berekenen.

   Hint: Gebruik maken van ladderoperatoren lijkt mij de meest zinnige aanpak...

Academiejaar 2011-2012 1ste zit

Theorie

1. Beschouw een tijdsonafhankelijk storingsprobleem. Onderstel dat ϵ een ontaarde eigenwaardi is van het ongestoord probleem. Noem |χ(0)i⟩ de nulde orde eigenvecotren (dus waarbij de limiet van de storing naar nul genomen is) die horen bij ϵ, en i=1,...,N met N de graad van ontaarding. Geef nu de eerste orde energiecorrecties in termen van |χ(0)i⟩
2.
   - Geef, interpreteer en bewijs de gouden regel van Fermi
   - Toon aan dat om de overgangswaarschijnlijkheid tussen twee atomaire niveaus door invallende elektromagnetische straling te kennen (|ψi⟩→|ψn⟩), je het matrix element ⟨ψn|→p|ψi⟩ moet berekenen
3.
   - Waarom is de Klein-Gordon vergelijking geen goede kandidaat voor een relativistische golfvergelijking voor het elektron?
   - Toon aan dat de dichtheid bekomen uit de Klein-Gordon vergelijking reduceert tot ρ=ψ∗ψ in het niet-relativistische limiet.
   - Wat is de Klein paradox?
4.
   - Geef en interpreteer de Lippman-Schwingervergelijking.
   - Wat is de eerste Born benadering? Wanneer is deze geldig?
   - Wat is de methode van de partiele golven? Wanneer is deze methode geldig?

Oefeningen

1. Storingsrekening: Beschouw een kwantum systeem met 3 lineair onafhankelijke toestanden. De Hamiltoniaan in maxtrix vorm isH=V0((1−ϵ)0001ϵ0ϵ2) met V0 een constante en ϵ een klein getal.
   1. Bepaal de eigenvectoren en eigenwaarden van de ongestoorde Hamiloniaan (ϵ=0)
   2. Bereken de eigenwaarde van H exact. Maak een taylorontwikkeling in functie van \epsilon
   3. Gebruik eerste en tweede orde niet-ontaarde storingsrekening om een energie correctie te vinden op de niet-ontaarde eigentoestand.
   4. Vind een energie correctie voor de twee initieel ontaarde toestanden (1ste orde)
   5. Vergelijk de exacte uitkomst met benaderende die volgen uit storingsrekening.

2. Variatierekening: Als een foton een zekere massa zou hebben moet de Coulomb potentiaal vervangen worden door een Yukawa potentiaal, van de vorm $V(\vec{r})=-\frac{e^2e^{-\mu r}}{4\pi\epsilon_0 r}$ met $\mu=\frac{m_\gamma c}{\hbar}$
    - Gebruik de volgende probeer golffunctie$\psi=\frac{e^{-r/b}}{\sqrt{\pi b^3}}$ om een schatting te vinden van de bindingsenergie van een waterstofattom met deze potentiaal. Voor het bepalen van de kleinste bovengrens mag je benaderend te werk gaan(Taylorexpansie)
    - De golffunctie is dezelfde als voor het gewone waterstofatoom maar met $a\rightarrow b$, waarbij $a=\frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2}$ de Bohrstraal is en b nu variabel

        Hints
        - Als $\mu=0$ dan is $b=a$, hieruit volgt dat $\mu a\ll 1\Rightarrow \mu b\ll 1$, je mag veronderstellen dat $\mu b\ll 1$
        - Taylorexpansie$(1+\mu b/2)^{-3}\approx 1-3\frac{\mu b}{2}+64\left(\frac{\mu b}{2}\right)^2-...$
        - op 2de orde mag je stellen dat $a\approx b$
3. Verstrooiing aan een potentiaalstap: Beschouw de sferische potentiaalstap $V(\vec{r})=V_0\Theta(r<a), V_0>0$
    1. Zoek de faseverschuiving δ_0 bij s-golf verstrooiing voor $E< V_0$
    2. Geef de werkzame doorsnede. Beschouw de limietsituatie voor zeer grote V_0. Bespreek deze (zeer kort)
    3. Zijn er resonanties bij $l=0$(s-golf versrooiing)?
       Hint: De Schrodinger vergelijking voor het radiale gedeelte van de golffunctie is$\left[\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}r^2\frac{d}{dr}-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2m}{\hbar^2}(E-V(r))\right]R_l(r)=0$ voor $l=0$ is de substitutie $R_0(r)=u(r)/r$ aan te raden.
4. relativistische correctie op de energieniveaus van de 1D harmonische oscillator. In de les hebben we gezien dat de laagste orde relativistische correctie, bekomen met storingsrekening, gegeven is door$E^r_1=-\frac{1}{2mc^2}[E^2-2E\langle V\rangle+\langle V^2\rangle]$. Gebruik deze formule om de laagste orde relativistische correctie voor een 1D harmonische oscillator te berekenen.

    Hint: Gebruik maken van ladderoperatoren lijkt mij de meest zinnige aanpak...

Veldkwantisatie

Beschouw de eendeeltjes toestand $|x,t\rangle$ die onstaan door inwerking van de veldoperator $\hat{\varphi}^\dagger(x,t)$ op de vacuumtoestand $|0\rangle$. De veldoperator $\hat{\varphi}(x,t)$ is afkomstig van de canonische kwantisatie van het eendimensionaal Schrodingerveld $\varphi(x,t)$ dat voldoet aan de Schrodingervergelijking waarbij de stationaire of tijdsonafhangkelijke oplossing $\phi_k(x)=\langle x|k\rangle$ voldoen aan$\hat{H}\phi_k(x)=E_k\phi_k(x)$

. Hierbij is k een dischreet kwantumgetal en E_k vormt het discreet energiespectrum.

- Toon aan dat $\langle k|x,t\rangle=\phi^*_k(x)e^{iE_kt/\hbar}$ door gebruik te maken van de ontwikkeling van $\hat{\varphi}(x,t)$ in de eigentoestanden $\phi_k(x)$:$\hat{\varphi}(x,t)=\sum_k\hat{c}_k(t)\phi_k(x)$.
- Wat is de fysische betekenis van de operatoren $\hat{c}_k$?
- Bespreek kort het verschil tussen de fysische toestanden $\hat{c}^\dagger_k|0\rangle$ en $\varphi^\dagger(x,t)|0\rangle$