Kwantummechanica

Kwantummechanica	
Jaar	3BFYS
Keuzevak	Keuzevakken

Bespreking

Vervolg op Inleiding Kwantummechanica, hier probeert men de abstracte noties binnen de kwantum mechanica aan te leren. De link met abstracte begrippen uit de Wiskunde als Hilbertruimten en Lie groepen worden hier gelegd. Op deze mannier wordt er aan geleerd om op de juiste (meer abstractere) mannier na te denken over quantum mechanica. Het vak wordt gegeven door prof. Tempère de lessen zijn het dus zeker waard om bij te wonen!

Puntenverdeling

Doorheen het jaar zijn er zelf test op Blackboard, deze tellen mee voor 40% van het eind cijfer! Ze zijn niet moeilijk indien je de stof begrijpt, dus hou het vak best goed bij doorheen het jaar. Je mag voor de testjes ook samenwerken, zo kan je meestal wel slagen op de zelf testjes. Het examen is een deel theorie en een deel oefeningen, elks tellen voor 10 punten mee.

Examenvragen

Academiejaar 2022-2023 1ste zit

Professor Jaques Tempere

Theorie Groep A

1. Beargumenteer a.d.h.v. Stern-Gerlach experimenten dat een meting van een kwantumsysteem de vorige toestand uitwist.
2. Een operator ˆA commuteert met ˆH. Wat kan je daaruit afleiden? Wat is een kwantumgetal?
3. Leid de Heisenberg bewegingsvergelijking af.
4. Een pure toestand heeft Von Neumann-entropie nul. Maar ook al is de toestand van het ganse universum een pure toestand, toch kan de entropie van het subsysteem een eindige entropie hebben. Leg dit uit.

5. Wat zijn de twee postulaten waarop padintegraaltheorie gebaseerd is?

Oefeningen Groep A

1. Gegeven $\hat{A}$ en $\hat{B}$, waarvoor geldt $[\hat{A},\hat{B}]=0$ en neem een willekeurige analytische functie *f*. Toon aan dat $[\hat{A},f(\hat{B})]=0$ of geef een tegenvoorbeeld
2. Bestudeer een spin-1 deeltje in de toestand$|\Psi_0\rangle=(100)$Laat er een rotatie op inwerken volgens de tijdsafhankelijke hoek $\theta_y t=2\pi t$. Bereken $\langle\hat{S}_z(t)\rangle$ na t=34.
3. Toon aan dat voor een gegeven dichtheidsmatrix ρ geldt dat $Tr(\rho^2)\leq 1$ waarbij de gelijkheid enkel geldt voor een pure toestand.

Gegeven$\hat{S}_x,\hat{S}_y,\hat{S}_z$

voor 3D representatie van *SU(2)*

Academiejaar 2019-2020 1ste zit

Professor Jaques Tempere

Theorie

1. Een belangrijke soort operatoren in de kwantummechanica zijn de projectie-operatoren. Gegeven een willekeurige kwantumtoestand $|\psi\rangle$ is de overeenkomstige projectie-operator $\hat{P}=|\psi\rangle\langle\psi|$. Toon aan dat deze operator:
   1. idempotent is.
   2. hermitisch is.
   3. niet unitair is.
2. Begin met een spin 12 atoom in de toestand $|\rightarrow\rangle=1\sqrt{2}(|\uparrow\rangle+|\downarrow\rangle)$, waarbij $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$ de basistoestanden in de z-richting zijn. Roteer de spin over 90 graden rondom de y-as. Roteer dan de spin 90 graden omheen de x-as. Wat is de kans dat het geroteerde atoom doorheen een Stern-Gerlach filter voor spin-op in de z-richting komt? Staaf je antwoord met een berekening.
3. Beschouw een tweeniveausysteem, hiermee komt een tweedimensionale Hilbertruimte overeen. In de basis $|\phi_1\rangle$, $|\phi_2\rangle$ is de Hamiltoniaan gegeven door H=[0Keiα Ke−iα0] met K en α reëel. Op tijdstip t=0 start het kwantumsysteem in toestand $|\psi(t=0)\rangle=|\phi_1\rangle$. Wat is de kans P(t) om het kwantumsysteem op een willekeurige tijd t te vinden in een gelijke amplitude superpositie van $|\phi_1\rangle$ en $|\phi_2\rangle$? Wat wordt deze kans voor α=0 en voor α=π2? Geef ook een fysisch argument voor het resultaat dat je vindt voor deze kans bij α=0.
4.
   1. Bewijs dat voor een spin 12 systeem de straal van de Bloch sfeer, en dus de lengte van de Bloch spinvector, voor **pure toestanden** steeds gelijk is aan ℏ2.
   2. Toon eveneens aan dat de lengte van de Blochvector voor **gemengde toestanden** kleiner kan zijn dan ℏ2, maar nooit groter. Hint: bewijs dat als de verwachtingswaarde van een operator begrensd is, de kwantumstatistische verwachtingswaarde ook begrensd is.

5. Een register van drie qubits bevindt zich in de toestand $1\sqrt{2}(|000\rangle+|111\rangle)$.
    1. Is dit een verstrengelde toestand (leg uit)?
    2. De eerste qubit wordt geobserveerd en men vindt dat de qubit zich na de meting in de toestand $|X\rangle=1\sqrt{2}(|0\rangle+|1\rangle)$ bevindt. Wat gebeurt er met de verstrengeling tussen de deeltjes bij deze eerste meting?
    3. De tweede qubit wordt op zijn beurt gemeten (met behulp van een andere operator) en men vindt dat die zich in de toestand $|Y\rangle=1\sqrt{2}(|0\rangle+i|1\rangle)$ bevindt. Wat is na deze twee metingen de toestand van de derde qubit?
6. Wat zijn volgens jou de voordelen van de padintegraaltheorie van de kwantummechanica ten opzichte van de Hamiltoniaanse versie van de kwantummechanica?

Academiejaar 2017-2018 2de zit

Professor Jaques Tempere

Theorie

1. Gegeven een vectorruimte, wat is de duale ruimte? Wat is de rol van duale vectoren in de kwantummechanica? Wat is een kwantumgetal?
2. Toon aan dat een basistransformatie in de Hilbertruimte van kwantumtoestanden overeenkomt met een unitaire transformatie.
3. Vertrekkend van een tijdevolutie-operator, toon aan dat de Hamiltoniaan hermitisch moet zijn.
4. Wat is de link tussen behouden observabelen en symmetrieën van de Hamiltoniaan?
5. Wat is de Bloch sfeer en hoe interpreteer je een Bloch spinvector? Wat is de link met de klassieke draaiimpuls?
6. Wat zijn *pure toestanden, gemengde toestanden* en *verstrengelde toestanden*? Leg uit en geef voorbeelden aan de hand van spin- $1/2$ atomen.
7. Leg uit wat kwantumteleportatie is en hoe het werkt.
8. Hoe maak je het onderscheid tussen een bundel atomen die in een pure toestand geprepareerd zijn en een bundel atomen die in een gemengde toestand geprepareerd zijn?
9. Wat is verstrengelingsentropie?
10. Wat zijn de postulaten van de kwantummechanica volgens de Feynman padintegraaltheorie?

Academiejaar 2017-2018 1ste zit

Professor Jaques Tempere

Theorie

Groep A

1. Wat zijn pure toestanden, gemengde toestanden en verstrengelde toestanden? Leg uit en geef voorbeelden aan de hand van spin-1/2-atomen en leg ook het verschil uit tussen deze toestanden.
2. Gebruik de Heisenberg bewegingsvergelijking om de tijdsevolutie van $\langle \hat{}Sz \rangle$ uit te rekenen van een spin in een magneetveld. Op tijdstip nul is $\langle \hat{}Sx \rangle = \langle \hat{}Sy \rangle = 0$ en $\langle \hat{}Sz \rangle = \hbar/2$ en de Hamiltoniaan is $\hat{}H=eBm\hat{}Sx$.
3. Leid de kwantum-Liouville-vergelijking af, alsook een vergelijking voor de tijdsevolutie van kwantumstatistische verwachtingswaarden.
4. Schets het basisprincipe van de padintegraaltheorie van kwantummechanica.

Oefeningen

Groep A

1. Hilbertruimten
   1. De lineaire operatoren $\hat{}A$ en $\hat{}B$ zijn hermitische operatoren. Toon aan dat, als hun commutator een complex getal c is, dat Re[c]=0.
   2. Bewijs voor de operator $\hat{}A$, via inductie, dat $(\hat{}A)n=\sum i\lambda ni|\varphi i\rangle\langle\varphi i|$ (met $n\in N$). Gebruik dit resultaat om vervolgens te bewijzen dat, voor een analytische functie f, geldt dat $f(\hat{}A)=\sum if(\lambda i)|\varphi i\rangle\langle\varphi i|$
2. Rotatie van spins
   1. Een deeltje met spin 1/2 bevindt zich in de toestand $|\chi\rangle=1\sqrt{5}[-i2]$ In welke toestand bevindt het deeltjes zich na een rotatie om de z-as met de hoek θz? Wat is de kans om daarna het deeltjes terug te vinden in de begintoestand?
3. Superpositie van 3 deeltjes
   1. Alberto, meneer de Burgemeester en Octaaf krijgen van Gert elk één spin-1/2-atoom die tesamen volgende kwantumtoestand beschrijven: $|\Psi\rangle=|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle ABC+|\downarrow\downarrow\downarrow\rangle ABC\sqrt{2}$ De spintoestanden van de atomen liggen langs de z-as. Wat is de dichtheidsmatrix van deze toestand (toon zeker de volgorde van je basis)? Is atoom A volledig verstrengeld met de andere atomen? Van Leemhuyzen ontdekt echter het atoom van meneer de Burgemeester (atoom B) en is jaloers. In een poging de verstrengelde toestand van de drie atomen te verbreken, voert hij een meting uit op het atoom dat hij vindt. Onhandig als hij is, geeft zijn meting het resultaat $|x+\rangle$; hij heeft de meting langs de x-as uitgeveoerd! In welke toestand bevinden de andere twee atomen zich na de meting en zijn deze twee toestanden nog verstrengeld?
4. Bijlagen

De spin matrices voor een spin 1/2-deeltje zijn$Sx=\hbar 2(0110),Sy=\hbar 2(0-ii0),Sz=\hbar 2(100-1)$

Academiejaar 2016-2017 1ste zit

Theorie

1. Is Kwantum Mechanica een determinische theorie? Leg uit.

2. Wat zijn het Schödingerbeeld en het Heisenbergbeeld? Geef de Schrödingervergelijking en de Heisenbergvergelijking en leg uit waarom beide rekenwijzes altijd hetzelfde resultaat geven voor fysisch meetbare grootheden.
3. Wat is het Stone Theorema? Leg uit hoe dit een link legt tussen een symmetrie van de Hamiltoniaan enerzijds en behouden grootheden anderzijds.
4. Leg anticrossing en level-repulsie uit (gebruik als voorbeeld de Hamiltoniaan van het ammoniak-molecuul, en maak de grafiek van de eigenwaarden als functie van het extern elektrisch veld).
5. Stel de rotatie operator op voor een spin-1/2 atoom, en toon hiermee aan dat je deze atomen over 720° moet draaien alvorens ze zich opnieuw in de oorspronkelijke kwantumtoestand bevinden. Kan je een manier bedenken om het onderscheid te maken tussen de spin-1/2 atomen gedraaid over 360° en deze gedraaid over 720°?
6. Wat zijn pure toestanden, gemengde toestanden, en verstrengelde toestanden? Leg uit en geef voorbeelden aan de hand van spin-1/2 atomen.
7. Hoe maak je onderscheid tussen een bundel atmen die in een pure toestand geprepareerd zijn en een bundel atomen die in een gemengde toestand geprepareerd zijn?
8. Wat is het verschil tussen kwantummechanische onbepaaldheid en statistische onbepaaldheid, en hoe worden beide in rekening gebracht in een kwantumstatistische verwachtingswaarde?
9. Je hebt twee subsystemen, A en B, in je labo geprepareerd in een toestand, hoe kan je nagaan of de twee subsystemen verstrengeld zijn?
10. Bewijs dat je een onbekende kwantumtoestand niet kan klonen (het non-cloning theorema).

Oefeningen

Groep A

1. Een bundel atomen bestaat uit spin 1/2 atomen die allen geprepareerd zijn in een pure |↑⟩ toestand. De atomen worden eerst geroteerd over 120o omheen de x-as, en erna worden ze geroteerd over 90o omheen de z-as. Van de 1000 atomen in de bundel, hoeveel verwacht je dat er doorheen een Ster-Gerlach spin-up |↑⟩ filter komen? Hoe groot is de standaard afwijking op dit aantal?

2. Een bundel atomen bestaat uit spin 1/2 atomen die allen geprepareerd zijn in een pure |↑⟩ toestand op tijdstip t=0. De Hamiltoniaan voor deze atomen is gegeven in de |↑⟩, |↓⟩ basis door de matrix
ˆH=ℏΩ(0223)
De atomen verblijven precies een tijdsduur T=π/(2Ω) onder invloed van deze Hamiltoniaan. Van de 1000 atomen zo behandeld, hoeveel verwacht je dat er doorheen een Stern-Gerlach spin-op |↑⟩ filter komen? Na hoeveel tijd komt een atoom opnieuw in de oorspronkelijke kwantumtoestand terecht?

3. Drie spin-1/2 atomen A,B,C bevinden zich in de toestand $|\psi\rangle=1\sqrt{3}(|\uparrow\rangle A|\uparrow\rangle B|\downarrow\rangle C+|\uparrow\rangle A|\downarrow\rangle B|\uparrow\rangle C+|\downarrow\rangle A|\uparrow\rangle B|\uparrow\rangle C)$
    1. Bereken de verstrengelingsentropie van atoom C met atomen A en B. Is atoom C verstrengeld met atomen AB of niet?
    2. Als atoom C door een Stern-Gerlach filter gestuurd wordt, die enkel spin in de op-richting $|\uparrow\rangle C$ doorlaat, wat is de kans dat atoom C doorheen deze filter komt?
    3. Als atoom C door de filter komt van vraag 2 uit deze oefening, wat is dan de kwantumtoestand van de drie atomen na deze meting?
    4. Zijn atomen A en B na de meting verstrengeld of niet meer? Is atoom C na de meting verstrengeld met atomen A en B of niet?
    5. Stel dat we eerst gemeten hebben dat atoom A spin neer heeft, wat is dan de kans dat atoom C door de spin-op Stern-Gerlach filter gaat?

Academiejaar 2014-2015 1ste zit

Theorie

Groep A

1. Wat is het theorema van Stone, en waarom is dit belangrijk om het verband te leggen tussen behoudwetten en symmetrieën?
2. Wat is het verschil tussen Heisenbergbeeld en Schrödingerbeeld, en hoe ga je over van de ene beschrijving naar de andere? Leid kort zowel de Schrödingervergelijking als de de Heisenbergvergelijking af, vertrekkende van de tijdsevolutieoperator $e-i\hat{H}t/\hbar$.
3. Leg uit wat Clebsch-Gordan coëfficiënten zijn, en leg uit aan de hand van een simpel voorbeeld hoe ze berekent worden.
4. Bespreek het Aharnov-Bohm effect. Hints: Wat is de generator van translaties? Wat gebeurt er met de golffunctie van een deeltje wanneer het deeltje langs een lus wordt bewogen en terug in zijn beginpunt terechtkomt? Wat als het deeltje geladen is?

Groep B

1. De verschillende opstellingen met Stern-Gerlach (SG) filters kan je ook demonstreren met behulp van polarisatiefilters en licht; vervang de SG filters door polarisatie filters. Maar om lich dat door polarisatiefilters gaat te beschrijven heb je eigenlijk genoeg aan de klassieke golftheorie van Maxwell. Waar zal het verschil tussen kwantumdeeltjes en klassieke golven in deze experimenten dan verschijnen?
2. Toon aan dat de toestand van een spin 1/2 deeltje niet dezelfde blijft wanneer je dit deeltje over 360° gedraaid hebt.
3. Wat bedoelt men als men zegt dat een dichtheidsmatrix een algemenere beschrijving geeft dan een golffunctie? Leid een vergelijking af voor de tijdsevolutie van een kwantumstatistische verwachtingswaarde.

4. Leg het concept van de padintegraalbeschrijving van de kwantummechanica uit. Opmerking: je moet de Schrödingervergelijking niet afleiden uit de padintegraal.

Oefeningen

Groep A

1. **Opgave 1**: Hilbertruimten
    1. Gegeven dat we twee operatoren →a en →b hebben die voldoen aan de commutatierelatie:
       [→a,→b]=→1
       Aan wat is dan de commutator [ei→a.→b,→b] gelijk?
    2. Als [→a,→b]=0 en [→b,→c]=0, dan geldt er [→a,→c]=0. Is deze stelling waar? Bewijs of ontkracht.
2. **Opgave 2**: Rotatie van een kwantumtoestand
    1. Gegeven de begintoestand
       |ϕb⟩=1√2(−i1)
       Waaraan wordt deze gelijk na een rotatie rond de y-as over een algemene hoek θ gegeven dat dit een spin 1/2-deeltje is?
    2. Wat is de kans als functie van θ dat het systeem na een rotatie over θ gemeten wordt in de begintoestand |ϕb⟩?
3. **Opgave 3**: Optellen van spins
    1. Gegeven dat we twee deeltjes hebben met spins S1=5/2 en S2=3/2 Als deze intereageren volgens de hamiltoniaan:
       H=αˆS1⋅ˆS2
       dus een spinkoppeling, wat zijn dan de mogelijke energieniveaus? Geef ook van elk energieniveau de bijhorende ontaarding.
4. **Opgave 4**: De Dichtheidsmatrix
    1. Toon aan dat
       ρ=14(1i−i3)
       een dichtheidsmatrix kan zijn. als ρ een dichtheidsmatrix is, beschrijft deze dan een pure toestand?
    2. Gegeven de operator
       A=ℏ2(0110)
       , wat zijn kwantumstatistische verwachtingswaarde, gegeven bovenstaande ρ?

Groep B

1. **Opgave 1**: Hilbertruimten
    1. Gegeven dat we twee operatoren →a en →b hebben die voldoen aan de commutatierelatie:
       [→a,→b]=→1
       Aan wat is dan de commutator [→b→a→b,→b] gelijk?
    2. Als [→a,→b]=0 en [→b,→c]=0, dan geldt er [→a,→c]=0. Is deze stelling waar? Bewijs of ontkracht.

2. **Opgave 2**: Evolutie in de tijd
    1. Gegeven de begintoestand
       $|\phi b\rangle=(10)$
       Wat is dan de toestand na een tijdsverloop $|\phi(t)\rangle$, gegeven dat het systeem gedreven wordt door de Hamiltoniaan:
       $H=(2i-i2)$
    2. Wat is de kans als functie van de tijd t dat het systeem na tijdsverloop t gemeten wordt in de begintoestand $|\phi b\rangle$?
3. **Opgave 3**: Optellen van spins
    1. Gegeven dat we twee deeltjes hebben met spins S1=5/2 en S2=2 wat is dan de Clebsh-Gordon coëfficiënt
       $\langle 52,32:2,2|72,72\rangle$
       aan gelijk? We zoeken dus een ontbinding van de $|7?2,7/2\rangle$ basistoestand van de opgetelde spins in de productbasis van de twee aparte spins.
4. **Opgave 4**: De Dichtheidsmatrix
    1. Toon aan dat
       $\rho=16(3113)$
       een dichtheidsmatrix kan zijn. als ρ een dichtheidsmatrix is, beschrijft deze dan een pure toestand?
    2. Gegeven de operator
       $A=\hbar 2(1i-i1)$
       , wat zijn kwantumstatistische verwachtingswaarde, gegeven bovenstaande ρ?

Academiejaar 2013-2014 2de zit

Theorie

1. Gegeven een observabele ˆA gekarakteriseerd door een matrix Anm bekomen in een basis $|en\rangle$, bepaal de matrix die deze operator karakteriseert in een andere basis $|fn\rangle=\sum mTmn|em\rangle$. Schrijf de coëfficiënten van de nieuwe matrix als functie van de Anm's en de Tnm's.
2. Wat weet je over Rabi oscillaties? Leg dit uit aan de hand van een voorbeeld, bvb. het ammoniakmolecuul onderworpen aan een radiofrequent veld op resonantie.
3. Wat is een kwantumstatistische verwachtingswaarde? Leid met behulp van dichtheidsmatrices de vergelijking af die de tijdsevolutie van kwantumstatistische verwachtingswaarden beschrijft.
4. Wat is het verband tussen symmetrietransformaties en generatoren van een groep? Hoe hangt dit samen met behouden grootheden en met symmetrieën van de Hamiltoniaan?

Oefeningen

1. In een tweedimensionale Hilbertruimte (met basis $|e1\rangle$, $|e2\rangle$) wordt de operator ˆA gedefinieerd door $\hat{A}|e1\rangle=0$ en $\hat{A}|e2\rangle=-|e1\rangle$. Toon aan dat de anti-commutator van ˆA met ˆA† gelijk is aan ˆ1.

2. De generatoren van de rotatie van een spin-1/2 deeltje zijn Sxℏ=12(0110),Syℏ=12(0−ii0),Szℏ=12(100−1) Gegeven een bundel spin-1/2 deeltjes in een superpositie van spin-op en spin-neer, |ψ⟩=(|↑⟩+|↓⟩)/√2. Eerst wordt de toestand geroteerd over 180 graden omheen de y-as. Daarna wordt de toestand geroteerd over 90 graden omheen de x-as. Hoeveel procent van de resulterende deeltjes komen er door een |↑⟩ Stern-Gerlach filter?
3. Beschouw een operator ˆa die voldoet aan [ˆa,ˆa†]=ˆ1. De Hamiltoniaan is gegeven door ˆH=ℏω(ˆa†ˆa+12) (voor diegenen die zich kwantummechanica 1 herinneren, dit is de harmonische oscillator met creatie- en annihilatie-operatoren).
    1. Stel de Heisenberg bewegingsvergelijking op voor ˆa(t) en ˆa†(t) en los ze op.
    2. Voor een "coherente toestand" |ψc⟩ geldt ˆa(t=0)|ψc⟩=α|ψc⟩ met α=|α|eiθ een complex getal. Bepaal hoe de verwachtingswaarde ⟨ψc|ˆx|ψc⟩ met ˆx=ˆa†+ˆa evolueert in de tijd.

Academiejaar 2013-2014 1ste zit

Theorie

Groep A

1. Gegeven een vectorruimte V, wat is de duale vectorruimte? En gegeven een operator ˆA op een vectorruimte V, hoe wordt de hermitisch toegevoegde operator formeel gedefinieerd?
2. Hoe toon je met behulp van Stern-Gerlach experimenten aan dat de meting van de spin de informatie over de spintoestand vóór de meting "uitwist"?
3. Wat is het verschil tussen een pure toestand, een gemengde toestand en een klassieke toestand? Leid een vergelijking af voor de tijdsafhankelijkheid van kwantumstatistische verwachtingswaarden van operatoren.
4. Wat zijn padintegralen en hoe beschrijven we hiermee kwantummechanica?

Groep B

1. Waarom zijn transformaties unitaire operatoren? Waarom zijn observabelen hermitische operatoren?
2. Wat is het verschil tussen Heisenbergbeeld en Schrödingerbeeld, en hoe ga je over van de ene beschrijving naar de andere? Leid kort zowel de Schrödingervergelijking als de Heisenbergvergelijking af, vertrekkende van de tijdsevolutieoperator e−iˆHt/ℏ
3. Wat is het verband tussen symmetrietransformaties en generatoren van een groep? Hoe hangt dit samen bet behouden grootheden en met symmetrieën van de Hamiltoniaan?
4. Toon aan, met behulp van Stern-Gerlach experimenten, dat de toestand van een spin-1/2 deeltje *niet* dezelfde blijft wanneer je dit deeltje over 360° gedraaid hebt.

Oefeningen

Groep A

1. Beschouw drie lineaire operatoren, gekarakteriseerd door de matrices
   ˆA=(1201),ˆB=(100i),ˆC=(1√2√20)
   in een basis |e1〉,|e2〉, en beschouw een toestand
   |ψ〉→(1/√2i/√2)
   met componenten in dezelfde basis.
   a. Welke van deze matrices zijn unitair? Welke zijn hermitisch?
   b. Bereken 〈ˆC〉.
   c. Bereken de onbepaaldheid ΔC op 〈ˆC〉.
   d. In welke basis is ˆC diagonaal?
   e. Bereken de componenten van |ψ〉 in de basis waarin ˆC diagonaal is.
   f. Stel dat de Hamiltoniaan ˆH=ℏˆC is. Hoe evolueeert |ψ(t)〉 in de tijd? Bereken hiertoe de tijdsafhankelijkheid van de coëfficiënten
      |ψ(t)〉→(c1(t)c2(t))
      in de oorspronkelijke basis.
   g. Op welke tijdsstippen bevindt de toestand zich opnieuw in de oorspronkelijke toestand?
   h. Wat is de kans dat de toestand zich in |e1〉 bevindt na tijd t?
2. De generatoren van de rotatie van een spin-1/2 deeltje zijn
   Sxℏ=12(0110),Syℏ=12(0−ii0),Szℏ=12(100−1). Gegeven een spin-1/2 deeltje met spin-op en spin-neer componenten gegeven door
   |ψ〉→(1/√2i/√2). Bereken de componenten van deze toestand na een rotatie over 90° omheen de y-as. Kijk ook naar de rotatie over 360° om je antwoord te controleren.

Groep B

1. (15%) Gebruik de Baker-Campbell-Haussdorf formule (de formule kon gevraagd worden, maar dit werd opgeschreven, de mensen die de formule van buiten kregen werden hier dus voor beloond) om een uitdrukking voor a te vinden in
   eˆx+ˆp=aeˆx/2eˆpeˆx/2.
2. (60%, elke deelvraag is 10%) Beschouw drie lineaire operatoren, gekarakteriseerd door de matrices
   ˆA≡(1i−i1),ˆB≡(1i00),ˆC≡(11−11) in een basis |e1〉,|e2〉, en beschouw een bundel waarin een derde van de atomen zich in toestand |ψ〉→(1/√2i/√2) bevinden, en twee derde in de toestand |e1〉.
   1. Welke van deze matrices zijn unitair? Welke zijn hermitisch?
   2. Bereken de dichtheidsmatrix die met de bunden overeenkomt.
   3. Bereken hiermee de kwantumstatistische verwachtingswaarde 〈〈ˆC〉〉.
   4. Bereken de Von Neumann entropie van deze toestand.
   5. Nu starten we in de pure toestand |ψ〉, zodat op tijdstip nul ρ(0)=|ψ〉〈ψ|. Stel dat de Hamiltoniaan ˆH=ℏˆC is. Hoe verandert ρ als functie van de tijd, voor korte tijden? Bereken hiertoe δρ=ρ(δt)−ρ(0) tot op orde δt, voor een klein tijdsstapje, gegeven.
   6. Bereken ook hoe de verwachtingswaarde verandert 〈〈δˆC〉〉=〈〈ˆC〉〉(δt)−〈〈ˆC〉〉(0) tot op orde δt.

3. (25%) De generatoren van de rotatie van een spin-1/2 deeltje zijn $Sx\hbar=12(0110),Sy\hbar=12(0-ii0),Sz\hbar=12(100-1)$. Gegeven een spin-1/2 deeltje met spin-op en spin-neer componenten gegeven door $\psi\rangle\rightarrow(-1/\surd3\surd2/3)$ Bereken de componenten van deze toestand na een rotatie over 90° omheen de x-as. Kijk ook naar de rotatie over 360° om je antwoord te controleren. Hoeveel percent van de deeltjes komen door een spin-op filter?

Academiejaar 2012-2013 2de zit

1. Toon aan dat transformaties tussen verschillende kwantummechanische basissen unitaire operatoren zijn.
2. Wat weet je over dichtheidsmatrices? In je antwoord bespreek je hoe ze worden gebruikt om kwantumstatistische verwachtingswaarden uit te rekenen, en je leidt af aan welke differentiaalvergelijking ze moeten voldoen om het tijdsverloop ervan te beschrijven.
3. Bespreek de precessie van een spin-1/2 (op tijd t=0 in toestand $|z+\rangle$) in een magneetveld langs de x-richting. De Hamiltoniaan hiervan is dus $H=-eBSx/m$.
    Gebruik bij je bespreking het concept van een rotatie-operator. Leg de link met de beschrijving van spinprecessie in Heisenberg en Schrodingerbeeld

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Oefeningen

1. We beschouwen de operatoren
   $\hat{}A=(1110)\hat{}B=(0001)$
   en een systeem in toestand
   $|\psi\rangle\rightarrow14(\surd3+i3-i\surd3)=14(\surd3+i\surd3(\surd3-i))$
   ga volgende eigenschappen na:
    1. Zijn de operatoren $\hat{}A$ en $\hat{}B$ observabelen?
    2. Zijn de matrices $\hat{}A$ en $\hat{}B$ unitair?
    3. bereken $[\hat{}A,\hat{}B]$. Commuteren $\hat{}A$ en $\hat{}B$?
    4. is de toestand $|\psi\rangle$
2. Beschouw twee observabelen $\hat{}A$ en $\hat{}B$. Toon aan dat $[\hat{}A,\hat{}B]$ zelf geen observabele is, tenzij $\hat{}A$ en $\hat{}B$ commuteren.
3. Overgang tussen plaats- en impulsrepresentatie is mogelijk via de relatie
   $\langle r|p\rangle=1(2\pi\hbar)3/2\exp\{ip\cdot r\hbar\}$.
   Toon aan dat
   $\langle p|\hat{}r|\psi\rangle=i\hbar\nabla p\psi(p)$

4. Wanneer we een bundel atomen door een Stern-Gerlach apparaat met een magnetische veldgradiënt langs de z-richting sturen, wordt de bundel gesplitst volgens het draaimoment in de z-richting. De corresponderende kwantumtoestanden kunnen aangeduid worden als $|J,M\rangle$, met $J\in N$ en $M=-J, -J+1,...,+J$.
   We sturen een bundel spin-1 atomen (J=1) door Stern-Gerlach apparaat A (magnetische veldgradiënt in z-richting) en we selecteren de $|1,-1\rangle$-bundel uit de drie eindbundels. Vervolgens roteren we deze bundel over 60° rond de y-as. De geroteerde toestand noemen we $|\psi\rangle$. Deze toestand sturen we door Stern-Gerlach apparaat B (magnetische veldgradiënt in z' richting), zoals weegegeven in de figuur. We willen de toestand van de bundels na rotatie beschrijven.
   In drie dimensies, wordt de matrixrepresentatie van de draaiimpulsoperator gegeven door
   $Jx=\hbar\sqrt{}2(010101010)$ $Jy=\hbar\sqrt{}2(0-i0i0-i0i0)$ $Jz=\hbar\sqrt{}2(10000000-1)$.
      <insert image>
   1. Zoek een uitdrukking voor $(\hat{}Jy\hbar)2n$ en $(\hat{}Jy\hbar)2n+1$met $n\in N0$.
   2. Bereken de rotatiematrix
      $R\theta$ rond $y=\exp\{i\hat{}Jy\hbar\theta\}$.
      Toon aan dat deze voor een rotatiehoek θ van 60° gelijk is aan
      R60^{\circ} rond $y=14(3\sqrt{}61\sqrt{}62\sqrt{}61\sqrt{}63)$
   3. pas de rotatie (5) toe op $|1,-1\rangle$ toestand en bereken de coëfficiënten $c-$, $c0$ en $c+$ van de geroteerde toestand
      $|\psi\rangle=c-|1,-1\rangle+c0|1,0\rangle+c+|1,+1\rangle$.
   4. Hoeveel van de oorsprongkelijke deeltjes in de $|1,-1\rangle$-bundel komen er door de $|1,-1\rangle$ bundel van Stern-gerlach apparaat B?

Academiejaar 2011-2012 1ste zit

Groep A

Theorie

1. Wat is het verschil tussen een kwantumtoestand en een klassieke toestand? Hoe wordt de tijdsevolutie van een kwantumtoestand berekend? Leg het Schrödingerbeeld en het Heisenbergbeeld uit, en het verband tussen de twee.
2. Wat is het verband in de kwantummechanica tussen symmetrieën en behoudswetten? Gebruik als voorbeeld translatiesymmetrie.
3. Beschouw twee spin-12 deeltjes (met spin-operatoren S1 en S2). De eigentoestanden van Sz,1 voor het eerste deeltje zijn $|12,+12\rangle1$ en $|12,-12\rangle1$ met eigenwaarden +12 en −12, respectievelijk. Voor het tweede deeltje hebben we analoog de $|12,+12\rangle2$ en $|12,-12\rangle2$ als eigentoestanden van Sz,2. Welke basis diagonaliseert de Hamiltoniaan $H=\gamma S1S2$, en wat zijn de energieniveaus die met de basisvectoren overeenkomen?
4. Wat is de kwantummechanische dichtheidsmatrix, en wat is de rol van dit object bij kwantum-statistische fysica? (bij deze vraag hoef je niets te vertellen over de tijdsevolutie van de dichtheidsmatrix!)

Praktijk

1. Toon aan dat [[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0
2. Overgang tussen plaats- en impulsrepresentatie is mogelijk via de relatie
   $\langle r|p\rangle=(12\pi\hbar)3/2\exp\{i(pr)\hbar\}$
   Toon aan dat $\langle p|r|\phi\rangle=i\hbar\nabla p\phi(p)$.
3. We beschouwen een ammoniakmolecule (NH_3). Als we de benadering maken dat alle andere vrijheidsgraden (zoals rotaties, vibraties, ...) vastgelegd worden, blijven er twee basistoestanden over. Deze worden bepaald door de oriëntatie van het stikstofatoom t.o.v. het vlak van de waterstofatomen (boven of onder). We duiden ze aan met $|\uparrow\rangle$ en $|\downarrow\rangle$. De matrixrepresentatie van de hamiltoniaan van dit systeem wordt gegeven door
   $H=(E0-K-KE0)$
   1. Bereken de tijdsevolutie van de dichtheidsmatrix $\rho(t)$ voor een systeem dat zich op tijdstip nul met 100% zekerheid in de $|\uparrow\rangle$-toestand bevindt. Maak hiervoor gebruik van de reeksontwikkeling:
      $\rho(t)=+\infty\sum n=01n![H,[H,...[H,\rho(0)]...]](-it\hbar)n$
   2. Bereken de kwantumstatistische verwachtingswaarden van de spinoperatoren ˆSx, ˆSy en ˆSz. De spinoperatoren in matrixrepresentatie werden gegeven.
   3. Wat is de fysische interpretatie van dit resultaat (kort)?

Groep B

Theorie

1. Wat is de rol van unitaire matrices en van hermitische matrices in de kwantummechanica? Hoe linkt het theorema van Stone unitaire en hermitische operatoren?
2. Wat is het verband tussen symmetrie en behoudswetten?
3. We hebben in de theorie het ammoniakmolecuul bekeken als voorbeeld van een algemeen tweeniveausysteem. We vertrokken daarbij van twee toestanden ($|\uparrow\rangle$ stikstof boven het vlak van de waterstoffen en $|\downarrow\rangle$ stikstof onder het vlak van de waterstoffen), en een koppeling tussen deze twee toestanden. Hoe evolueert de toestand van het ammoniakmolecuul als de toestand op tijdstip nul gegeven is door $|\uparrow\rangle$? Bespreek het fenomeen "anticrossing en level-repulsie" aan de hand van het voorbeeld van de ammoniakmolecule.
4. Bespreek de kwantum-Liouville vergelijking voor dichtheidsmatrices. Welke vergelijking kan je eruit afleiden voor de kwantumstatistische verwachtingswaarde van een operator?

Praktijk

1. Toon aan dat [[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B]=0
2. Bereken $\langle r|[px,eikx]|\psi\rangle$, uitgaande van $\langle r|px|\psi\rangle=-i\hbar\partial\partial x\psi(r)$

3. Wanneer we een bundel atomen door een Stern-Gerlach apparaat met een magnetische veldgradiënt langs de z-richting sturen, wordt de bundel gesplitst volgens het draaimoment in de z-richting. De corresponderende kwantumtoestanden kunnen aangeduid worden als |J,M> met J element van N en M = -J, -J+1, .., +J.
   We sturen een bundel spin-1 atomen (J=1) door Stern-Gerlach apparaat A (magnetische veldgradient in z-richting) en we selecteren de |1,0>-bundel uit de drie eindbundels. Vervolgens roteren we deze bundel over 45° rond de y-as. De geroteerde toestand noemen we |ψ>. Deze toestand sturen we door Stern-Gerlach apparaat B (magnetische veldgradient in z'-richting) zoals weergegeven in de figuur. We willen de toestand |ψ> beschrijven als functie van de basistoestand |J,M>B van apparaat B
    1. Gebruik
       $J_+|J,M\rangle=\hbar\sqrt{J(J+1)-M(M+1)}\ |J,M+1\rangle$
       $J_-|J,M\rangle=\hbar\sqrt{J(J+1)-M(M-1)}\ |J,M-1\rangle$
       om aan te tonen dat de matrixrepresentatie van J_+ en J_- voor J=1 gegeven worden door
       uitdrukking J+ en J-
       Bereken vervolgens de matrixrepresentatie van J_x en J_y via:
       $J_x=J_-+J_+2$
       $J_y=J_--J_+2$
    2. Zoek een uitdrukking voor $(J_yh)2n$ en $(J_yh)2n+1$ met $n\in N$
    3. Bereken de rotatiematrix
       $R\theta$ rond $y=\exp\{iJ_yh\theta\}$
       voor een rotatie van 45°
    4. De toestand |ψ> van de $|1,0\rangle$-bundel na rotatie kan geschreven worden als $|\psi\rangle=c_-|1,-1>_B+c_0|1,0\rangle_B+c_+|1,1\rangle_B$ in de basis van het SG-apparaat B.
       Bepaal de coefficienten c_-,c_0,c_+.
    5. Hoeveel van de oorspronkelijke deeltjes is de $|1,0\rangle$-bundel komen er door de onderste bundel van SG-apparaat B?

Academiejaar 2010-2011 1ste zit

Praktijk

1. Beschouw de operator $\hat{U}_s=\exp\{s(\hat{a}^\dagger-\hat{a})\}$. Hierin zijn $\hat{a},\hat{a}^\dagger$ de ladderoperatoren, die voldoen aan $[\hat{a},\hat{a}^\dagger]=1,[\hat{a},\hat{a}]=0=[\hat{a}^\dagger,\hat{a}^\dagger]$. Toon aan dat $\hat{U}$ een unitaire operator is, als s reëel is.
2. Transformeer de Hamiltoniaan
   $\hat{H}=\overbrace{H0}\hbar\Omega(\hat{a}^\dagger\hat{a}+12)-\overbrace{\text{storing}}k(\hat{a}^\dagger+\hat{a})$
   met behulp van de unitaire transformatie $\hat{U}_s$ uit vraag 1. Dit wil zeggen: reken $\hat{U}^\dagger_s\hat{H}\hat{U}_s$ uit. Hierbij gebruik je dat $(A=\hat{A},B=\hat{B})$
   $e^{-B}Ae^{B}=A+[A,B]+12![[A,B],B]+...+1n![...[[A,B],B],...,\underbrace{B}_{n \text{ commutatoren}}+...$

3. Gegeven dat
   H0|n⟩=ℏΩ(n+12)|n⟩
   met ˆH0=ℏΩ(ˆa†ˆa+12),
   bereken dan de verwachtingswaarde van
   ˆH=ℏΩ(ˆa†ˆa+12)−k(ˆa†+ˆa)
   in de toestand
   |ψ⟩=exp{kℏΩ(ˆa†−ˆa)}|n⟩
4. Bereken de eerste-orde correctie in storingsrekening op |n⟩, waarbij je −k(ˆa†+ˆa) als storing opvat en ˆH0 als ongestoorde Hamiltonian. Gebruik ˆa†|n⟩=√n+1|n+1⟩ en ˆa|n⟩=√n|n−1⟩ (waarbij ˆa|0⟩=0). Vergelijk je resultaat met |ψ⟩
5. Gebruik de plaats-impuls communtatieregels [ˆx,ˆpx]=[ˆy,ˆpy]=[ˆz,ˆpz]=iℏ om aan te tonen dat voor de Hamiltoniaan van een geladen deeltje in een homogeen magneetveld in de z-richting,
   ˆH=12m[ˆp−qA(ˆr)]2
   met ∇×A=Bez, de draaiimpuls in de z-richting
   ˆLz=ˆxˆpy−ˆyˆpx
   een behouden grootheid is. Hiervoor gebruik je best de symmetrische ijk. Om een rotatie van dit (3D) systeem over de z-as uit te voeren, welke unitaire operator moet je toepassen? Zoek de hamiltoniaan na een rotatie van π/6 radialen omheen de z-as.