Banach- en Hilbertruimten

Banach- en Hilbertruimten	
Richting	Fysica
Jaar	3BFYS

Bespreking

Vervolgvak op Metrische ruimten, het examen is dan ook gelijkaardig. Kijk ook naar de tuyaux van de wiskunde voor extra vragen. Dit vak werd niet altijd door dezelfde prof. gegeven, dus niet alle examenvragen zijn even relevant. Banach- en Hilbertruimten was vroeger gesplitst in Analyse 3 en 4, dus dit is hier een samenraapsel van.

Puntenverdeling

Komt nog.

Examenvragen

Theorie

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Groep 1:

1. Leg uit: projectie en orthogonaliteit, en wat is het verband tussen deze twee begrippen?
2. Waarom is L^2 separabel? M.a.w. er leg geef de rij functies die een basis vormen voor L^2 en leg uit waarom dit zo is. (Heel het hoofdstuk van Fourierreeksen in L^2 dus, algemeen uitleggen wat je doet om dit te bewijzen, geen details).
3. Compacte operatoren

Groep 2:

1. Wat is een toegevoegde operator? Bewijs dat dat bestaat, we gebruiken in dit bewijs nog een belangrijke stelling, welke en bewijs deze ook.
2. Waarom is L^2 separabel? M.a.w. er leg geef de rij functies die een basis vormen voor L^2 en leg uit waarom dit zo is. (Heel het hoofdstuk van Fourierreeksen in L^2 dus, algemeen uitleggen wat je doet om dit te bewijzen, geen details).
3. Compacte operator: Wat? Voorbeeld + tegenvoorbeeld. Wat weten we over de verzameling van compacte operatoren? Eigenschap over de samenstelling, gezien in de cursus. Geldt dit ook in de andere richting? Als A compact is, en de inverse operator bestaat. Is die inverse dan continu?
4. Wat zegt de spectraalstelling?

Juni 2009

Prof. Dr. R. Lowen

1. Geef de opbouw van de Lebesgue integraal (ingevoerde begrippen, stellingen,...).
2. Geef het correcte schema dat de verbanden uitdrukt tussen de verschillende convergenties: convergentie in L2L2 en L1L1, convergentie in maat, bijna overal,... (alle soorten convergenties). En bewijs een van deze verbanden (bv: convergentie-b.o., impliceert convergentie in maat).
3. Leg uit: initiale topologie.
4. Stel (X,τ1G−→X,S)(X,τ1G→X,S). Bewijs dat dit initiaal is. (Antwoord
   1−1G

   1G−1

   (1) = G, dus continu)
5. Welke topologie zorgt dat alle filters naar alle punten convergeren? (Antwoord: triviale)
6. Op alle XiXi staat de discrete topologie. Welke topologie staat er dan op ∏Xi∏Xi? (Antwoord: Bewijzen dat het niet de discrete is, welke het wel is moet je niet kunnen bewijzen.)

Januari 2009

dr. W. Peeters

Kies telkens 2 van de drie vragen die op bord komen, hierbij zullen dan nog kleine bijvraagjes gesteld worden.

Groep 1

1. Bespreek alles wat je weet ivm orthogonaliteit.

2. Cësaro- en Abelsommeerbaarheid en geef hier een toepassing van.
3. Fouriertransformatie (met een voorbeeld erbij).

Groep 2

1. lplp-ruimten zijn Banach, bespreek. Geef ook de stelling van Minkowski en Ho¨o¨lder.
2. Bespreek het 2D-Dirichlet probleem.
3. Bespreek het 1D-golfprobleem.

Groep 3

1. Bespreek alles wat je weet over operatoren: stellingen en voorbeelden.
2. Bespreek het 2D-Dirichlet probleem.
3. De Fouriertransformatie met Gausskern, en wat hebben deze met elkaar te maken?

Januari 2008

dr. W. Peeters

Geef alle eigenschappen in verband met orthogonaliteit en bewijs er enkele (dr. W. Peeters zegt je wel de welke)

Geef de bewijzen in verband met Cesaro sommeerbaarheid

Januari 2006, groepen 1 en 2

Prof. Dr. R. Lowen

Hierbij werden dezelfde vragen gesteld als bij [anal-jan-04], Januari 2004

Januari 2006, groepen 3 en 4

Prof. Dr. R. Lowen

1. Wat weet je over basissen in Hilbertruimten? Dus wat is een basis, welke basissen zijn de handigste, wat is de voorwaarde<ref>Hilbertruimte moet separabel zijn</ref>, enzovoort. Hierbij vraagt hij ook hoe je in een separabele Hilbertruimte een orthonormale basis creëert. Enkel Gramm-Schmidt is niet voldoende, want je hebt niet zo maar een voortbrengend stel L.O. vectoren.
2. Zeg wat compacte operatoren zijn. Hierbij verlangt prof. Lowen ook een voorbeeld en een tegenvoorbeeld. Ook een bewijs hiervan is gevraagd.

Januari 2004

[anal-jan-04] Prof. Dr. R. Lowen

1. Zeg wat je weet over orthonogaliteit en projecties en het verband tussen beide. Deze student moest nog bewijzen dat
   x−PFx⊥Fx−PFx⊥F
2. Zeg wat compacte operatoren zijn. Hierbij verlangt prof. Lowen ook een voorbeeld en een tegenvoorbeeld.
3. Spectraalstelling (geen echt bewijs) + als A compact is, dan geldt
   limλn→0

   limλn→0

   . Maar wat als A nu slechts een gewone operator moet zijn? Wat zijn dan de condities voor de λnλn? (Zie voetnoot voor een gedeeltelijke oplossing<ref>Ze moeten begrensd zijn! Want A is continu als ∑λk(x|xk)xk∑λk(x|xk)xk convergent. Dit betekent dat λk(x|xk)∈l2λk(x|xk)∈l2. (zie cursus 1.3.14)</ref>)

Oefeningen

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Joris Mestdagh

1. Zij XX een Banachruimte met gesloten deelruimtes FF en GG zodat F∩G={0}F∩G={0}. Beschouw F+G={x+y∈X|x∈F,y∈G}F+G={x+y∈X|x∈F,y∈G}. Bewijs dat
   1. Als er een C>0C>0 bestaat zodat voor elke x∈Fx∈F en y∈Gy∈G geldt dat ||x||≤C||x+y||||x||≤C||x+y||, dan is F+GF+G gesloten.
   2. Als XX een Hilbertruimte is en als FF eindige dimensie heeft, dan is F+GF+G gesloten.
2. Beschouw de functie f:[−π,π]→R:x→x(π−|x|)f:[−π,π]→R:x→x(π−|x|).
   1. Vind de Fourierreeks van ff.
   2. Bereken de reeks
      ∑n=1+∞(−1)n+1(2n−1)3

      ∑n=1+∞(−1)n+1(2n−1)3

      .

3. Zij HH een Hilbertruimte. Beschouw projecties Pi:H→HPi:H→H voor i∈{1,2,3}i∈{1,2,3}. Onderstel dat P1+P2+P3=IP1+P2+P3=I, waarbij I:H→H:x→xI:H→H:x→x. Onderstel verder dat pi∘pj=0pi∘pj=0 als i≠ji≠j. Definieer de begrense lineaire operator T=2P1+3P2+5P3T=2P1+3P2+5P3.
    1. Toon aan dat TT injectief is.
    2. Voor elke y∈Hy∈H, vind een x∈Hx∈H zodat T(x)=yT(x)=y.
    3. Bereken ||T||||T||.
    4. Bepaal de eigenwaarden van TT en bereken de bijhorende eigenruimten van TT
4. Zij HH een complexe Hilbertruimte met inproduct (|)(|). Als we H×HH×H uitrusten met het inproduct <(x,y),(x′,y′)>=(x|x′)+(y|y′),<(x,y),(x′,y′)>=(x|x′)+(y|y′), dat geeft dit weer een Hilbertruimte. Zij nu A:H→HA:H→H een begrensde lineaire operator. Definieer B:H×H→H×H:(x,y)→(iA(y),−iA∗(x))B:H×H→H×H:(x,y)→(iA(y),−iA∗(x)).
    1. Toon aan dat BB begrensd is. Vind ||B||||B||.
    2. Toon aan dat BB Hermitisch is.
    3. Als AA compact is, toon dat BB ook compact is.

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Joris Mestdagh

1. Zij HH een seperabele Hilbertruimte met orthonormale basis (en)n(en)n. Zij (yn)n(yn)n een rij in H zodat (||yn||)n(||yn||)n begrensd is. Definieer
   A={x∈H|⟨x,yn⟩→0}

   A={x∈H|⟨x,yn⟩→0}

   Toon aan dat AA een gesloten deelruimte is van HH. Toon verder dat als elke en∈Aen∈A, dan A=HA=H.

2. Beschouw de functie f:[0,π]→sin(x)f:[0,π]→sin(x). Druk deze functie uit als cosinusreeks. Met andere woorden, vind coëfficiënten an,n≥0an,n≥0 zodat
   f(x)=a02+∑n=1+∞ancos(nx)

   f(x)=a02+∑n=1+∞ancos(nx)

   voor elke x∈]0,π[x∈]0,π[. Gebruik dit om de volgende reeks te berekenen:
   ∑n=1+∞(−1)n+14n2−1

   ∑n=1+∞(−1)n+14n2−1

3. Zij HH een Hilbertruimte en zij P1:H→HP1:H→H en P2:H→HP2:H→H projecties. Bewijs dat de volgende eigenschappen equivalent zijn:
    1. P2∘P1=P1∘P2=P1,P2∘P1=P1∘P2=P1,
    2. P1(H)⊆P2(H),P1(H)⊆P2(H),
    3. Ker(P2)⊆Ker(P1),Ker(P2)⊆Ker(P1),
    4. Voor elke x∈Hx∈H geldt ||P1(x)||≤||P2(x)||,||P1(x)||≤||P2(x)||,
    5. P2−P1P2−P1 is een projectie.

   Toon dat in dit geval, P2−P1P2−P1 een projectie is op P2(H)∩P1(H)⊥P2(H)∩P1(H)⊥.

4. Beschouw de volgende lineaire operator:
   T:l2→l2:(xn)n→(xn−xnn).

   T:l2→l2:(xn)n→(xn−xnn).

    - Toon aan dat TT begrensd is. Zoek ||T||||T||.
    - Vind T∗T∗. Is TT Hermitisch? Is TT een projectie?
    - Vind de eigenwaarden van TT.
    - Is TT Inverteerbaar? Is T−1T−1 begrensd?
    - Is TT compact?

Januari 2009

Anneleen Van Geenhoven

1. Zij (X,A,μ)(X,A,μ) een maatruimte waarvoor ∀x∈X:x∈A∀x∈X:x∈A. Een punt xx van XX wordt "positief" genoemd als en slechts als μ({x})>0μ({x})>0. De maat μμ noemen we diffuus als er geen positieve punten bestaan (m.a.w., als μ({x})=0,∀x∈Xμ({x})=0,∀x∈X).

    1. Geef een vb van een niet-diffuse maat op (R,RR,R).

    2. Zij μμ een maat op (R,RR,R) waarvoor μ(R)=1μ(R)=1. Bewijs dat er maten μ1μ1 en μ2μ2 op (R,RR,R) bestaan waarvoor

        - μ=μ1+μ2μ=μ1+μ2,

        - μ1=∑∞j=0ϵjδxjμ1=∑j=0∞ϵjδxj voor zekere x0,x1,...∈Rx0,x1,...∈R en ϵ0,ϵ1,...≥0ϵ0,ϵ1,...≥0,

        - μ2μ2 is diffuus.

2. Stel (X,A,μ)(X,A,μ) een maatruimte. Zij A∈AA∈A, dan beschouwen we de maatruimte (A,AA,μAA,AA,μA), waarbij

   AA:=A|A={B⊆A|B∈A}AA:=A|A={B⊆A|B∈A} en μA=μ|AAμA=μ|AA.

   1. Toon aan: als f∈L1(X,A,μ)f∈L1(X,A,μ), dan geldt f.1A∈L1(X,A,μ)f.1A∈L1(X,A,μ) en f|A∈L1(A,AA,μA)f|A∈L1(A,AA,μA) en ∫f1Adμ∫f1Adμ = ∫f|AdμA∫f|AdμA.
   2. Bepaal L1(A,AA,μA)L1(A,AA,μA).
3. Stel B:={R {x}|x∈R}B:={R{x}|x∈R}. Bewijs dat BB een filter op RR voortbrengt, en bepaal limBB en adhBB in de topologische ruimte (R,AR,A).
4. Definieer de volgende verzamelingen:

   - L0={(x,0)|x∈]0,1[}L0={(x,0)|x∈]0,1[}
   - Li={(x,1i)|x∈[0,1[}(∀i∈N)Li={(x,1i)|x∈[0,1[}(∀i∈N)
   - X=⋃i∈NLi=L0∪⋃i∈NLiX=⋃i∈NLi=L0∪⋃i∈NLi

   Bekijk de topologie TLTL op X, die bepaald wordt door volgende eigenschappen:

   - voor i ∈N∈N: elk punt van LiLi behalve (0,1i)(0,1i) is open
   - basisomgevingen van (0,1i)(0,1i) zijn deelverzamelingen van LiLi met eindig complement (voor i ∈N0∈N0)
   - de verzamelingen Ui(x,0)={(x,0)}∪{(x,1n)|n>i}Ui(x,0)={(x,0)}∪{(x,1n)|n>i} vormen een basis voor de omgevingen van (x,0)∈L0(x,0)∈L0.

   Ga na of de topologische ruimte (X,TL)A1,A2(X,TL)A1,A2, separabel, Haussdorf, compact, samenhangend en/of totaal onsamenhangend is.

   L'_i := \Big\{ \Big(x, \frac{1}{i} \Big) | x \in]0,1[\Big\} } (\forall i \in \mathbb{N})L'_i := \Big\{ \Big(x, \frac{1}
   {i} \Big) | x \in]0,1[\Big\} } (\forall i \in \mathbb{N})

   (

   F:=⋃i∈N0L′iF:=⋃i∈N0Li′

   G:=⋃i∈N0{(0,1i)}G:=⋃i∈N0{(0,1i)}

Januari 2009

Wannes Rosiers

1. We strarten met volgende ruimte:

   F:={f:[0,1]→R|fctu,∃δ∈]0,1],∀x∈[0,1[:f(x)=0}F:={f:[0,1]→R|fctu,∃δ∈]0,1],∀x∈[0,1[:f(x)=0} met de supremumnorm.

   1. Is deze ruimte een Banachruimte? Zo nee, maak er een Banachruimte (F¯)(F¯) van.
   2. Is je oorspronkelijke ruimte een preHilbert- of Hilbertruimte? Indien je F¯F¯ gedefinieerd hebt, is deze ruimte een preHilbert- of Hilbertruimte? Zo nee, maak er een Hilbertruimte van.
   3. Is FF, of indien gedefinieerd F¯F¯, met 2-norm (en inproduct (f|g):=∫10f(x)g(x)dx(f|g):=∫01f(x)g(x)dx een prëHilbert- of Hilbertruimte?
2. Zijn volgende afbeeldingen operatoren, en zo ja wat is hun norm?

   1. A:([0,1])→C([0,1]),Af(t)=t2f(t)+tf(t2)A:([0,1])→C([0,1]),Af(t)=t2f(t)+tf(t2) met op beeld en domein de supremumnorm.
   2. T:l2→l2:(Tx)n=1n+1+∑nk=0xkk+1T:l2→l2:(Tx)n=1n+1+∑k=0nxkk+1
   3. A:L2→L2:Af(x):=x∫1−1f(t)dtA:L2→L2:Af(x):=x∫−11f(t)dt

3. Gebruik de definitie en alles wat je al weet over Legendre polynomen uit de cursus.

    1. Toon aan dat dit een totale familie (orthogonale) polynomen is.

    2. Schrijf de afgeleide van de polynoom PnPn in functie van andere Legendre polynomen. (hint: denk eerst goed na welke polynomen je allemaal nodig hebt)

    3. De Legendre polynomen zijn een gestandaardiseerde oplossing van de differentiaalvergelijking:

        ddx[(1−x2)ddxP(x)]+n(n+1)P(x)=0ddx[(1−x2)ddxP(x)]+n(n+1)P(x)=0

        Toch vonden we in de les dat ze niet genormeerd zijn, van waar zou dan de naam gestandariseerd komen? (We zoeken enkel een eenvoudige eigenschap van deze polynomen en geen stress: deze vraag staat niet op veel punten.)

4. Toon volgende gelijkheid aan:

    π332=∑n=1∞1(2n−1)3(−1)n+1π332=∑n=1∞1(2n−1)3(−1)n+1

    Door gebruik te maken van:

    f(x)=112(π2x−x3)f(x)=112(π2x−x3)

5. Bereken de fouriergetransformeerde van de functie cos(αx2)cos(αx2) waarbij αα een positief getal is. (hint: gebruik cosxx = eix+e−ix2eix+e−ix2 en soortgelijke formules. Maak je rekenwerk eenvoudiger door i=−1ii=−1i te gebruiken en maak een schets indien je i√i niet kent.)

September 2008

Wannes Rosiers

Men kan aantonen dat (f|g):=$^{1}_{-1}$ dx een hermitische vorm defini"eert op de ruimte L^{T}:={f:[-1,1] | $^{1}_{-1}$ dx < } Definieer nu volgende functies :T$_{n}$(x) := cos(n.arccos(x)), x . (de familie Tn)n∈NTn)n∈N noemen we *Tchebychef polynomen*)

Bewijs dat ∀n∈N∀n∈N: cos(n)=$_{m=0}$$^{[n/2]}$n 2m(-1)^{m}(1-cos^{2})^{m}cos^{n-2m}.

Toon aan dat, voor elke n∈Nn∈N, TnTn een polynoom is van graad nn.

Ga na dat (Tn)n(Tn)n orthogonaal is in LTLT en bereken ||Tn||||Tn||.

Bewijs dat de polynomen (Tn)n(Tn)n aan volgende recursiebetrekking voldoen: T_{n+1}(x)+T_{n-1}(x)=2xT_{n}(x)

Bereken Tn(x)Tn(x) voor n∈{0,1,2,3,4,5}n∈{0,1,2,3,4,5} Je mag gebruiken dat de familie(Tn)n(Tn)n totaal is in LTLT

Stel f:[-1,1] : x x^{3}, F:=, bereken dan d(f,F)d(f,F) in LTLT

Neem α∉Zα∉Z en toon aan dat cos()==$_{n}$(++++…+)

Stel (αn)n∈N(αn)n∈N een rij van 0 verschillende re"ele getallen die naar 1 convergeren. Defini"eer T:l2→l2x=(xn)n∈N↦T(X)T:l2→l2x=(xn)n∈N↦T(X) door (T(x))$_{n}$:={

lll $_{n}$x$_{n}$ &n &even
x$_{n-1}$ & n &oneven

.

Toon aan dat dit een welgedefini"eerde operator is.

Bepaal ||T||||T||

Toon aan dat de afbeelding f:[0,1]→L2(0,1):t↦f(t)f:[0,1]→L2(0,1):t↦f(t), met x : f(t)(x):={

l 1, x t
0, x > t

. continu is. Toon ook aan dat, voor elke a,b,c,d∈[0,1]a,b,c,d∈[0,1] met a≤b≤c≤da≤b≤c≤d, (f(a)-f(b)) (f(c)-f(d))

Bereken de fouriergetransformeerde van een eindige consinus golf. Zij α>0α>0 en ω>0ω>0, bekijk: f(t):={

ll cos(t) & |t|
0 & |t| >

.

Januari 2008

Wannes Rosiers

We noteren c voor de deelruimte van l^2 van convergente rijen. Is het nemen van de limiet een operator, en zo ja wat is zijn norm? ($x_n \to x$ in K dan $T((x_n)_n) := x$)

Bereken de Fouriergetransformeerde van de functie

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: x\mapsto \begin{cases}1-|x| & \text{als } |x|\le 1,\\ 0 & \text{anders}\end{cases}$

Beschouw $\mathbb{R}^2$ met de norm $||(x_1,x_2)|| = |x_1|+|x_2|$:

Bereken de afstand van de oorsprong tot de rechte $x_1+x_2=1$.

Bepaal alle punten op de rechte die op deze afstand van de oorsprong liggen.

Laat zien dat deze norm niet afgeleid is uit een inproduct op $\mathbb{R}^2$.

Bereken $\sum_{n=1}^{\infty} 1/(2n-1)^2$ met behulp van

$f := \begin{cases} 0 & -\pi < x \le 0 \\ x & 0 < x \le \pi \end{cases}$

Is in de pre-Hilbertruimte $H := C([0,1],\mathbb{R})$ met inproduct $(f,g) := \int_0^1 f(x)g(x)dx$ de deelruimte $V := \{f \in H | f(0)=0\}$ volledig?

Definieer $L^2_{e^{-x}}(\mathbb{R}_+)$ analoog aan $L^2_{e^{-x^2}}(\mathbb{R}_+)$, dit is een separabele Hilbertruimte. Definieer nu volgende functies: n : $L_n := (-1)^n e^x D^{(n)}(x^n e^{-x})$ (de familie $(L_n)_n$ van hierboven noemen we de *Laguerre polynomen*).

Toon aan dat L_n een polynoom is van graad n.

Toon aan

n

n

is een even getal als en slechts als L_n een even functie is.
Toon aan dat $(L_n)_n$ orthogonaal is in $L^2_{e^{-x}}(\mathbb{R}_+)$

Bereken $(L_n|L_n)$

Januari 2006

Stijn Verwulgen

1. Definieer

   $f(x):=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$ $f(x):=\sum_{n\in\mathbb{N}_0}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin nx$

   en

   $A:=\mathrm{vct}\{\mathrm{id},x\mapsto x^3\}$ $A:=\mathrm{vct}\{\mathrm{id},x\mapsto x^3\}$

   1. Toon aan dat $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ een welgedefiniëerde functie is.<ref><p>Dus er wordt gevraagd of dit zin heeft, en of dit 1 punt definieert.

      </ref></p>
   2. Toon aan dat de restrictie van f f tot $[-\pi,\pi]$ $[-\pi,\pi]$ kwadratisch integreerbaar is.

   3. Bewijs<ref><p>Aantonen, niet bewijzen

      </ref> dat $d_{L^2(-\pi,\pi)}(f,A)=0$ $d_{L^2(-\pi,\pi)}(f,A)=0$.<ref>
      Dit is de Hilbertruimte-afstand.

      </ref></p>
      Hint: <ref><p>Dit is dus de Fourier-ontwikkeling

      </ref></p>
      $x^3 \overset{L^2(-\pi,\pi)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$ $x^3 \overset{L^2(-\pi,\pi)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{12}{n^3}-\frac{2\pi^2}{n}\right)\sin nx$

   4. Geef een methode<ref><p>Methode, dus de lastig uit te rekenen integralen (maar ze moeten wel doenbaar zijn) mag je laten staan.

      </ref> om $d_{L^2(-\pi,\pi)}(f,\mathrm{vct}\{\mathrm{id}\})$ $d_{L^2(-\pi,\pi)}(f,\mathrm{vct}\{\mathrm{id}\})$ te berekenen.</p>

5. Stel

   L2e−x2(R):={f:R→K|f(x)e−x2/2∈L2(R)}Le−x22(R):={f:R→K|f(x)e−x2/2∈L2(R)}

   Men kan aantonen dat met bijhorend inproduct

   (f|g):=∫Rf(x)g(x)¯¯¯¯¯¯¯¯¯¯e−x2dx(f|g):=∫Rf(x)g(x)¯e−x2dx

   deze ruimte een separabele Hilbertruimte is.

   De nn-de Hermite polynoom wordt gegeven door

   Hn:=(−1)nex2D(n)(e−x2).Hn:=(−1)nex2D(n)(e−x2).

   1. [anal-jan06-hermgraad] Toon aan dat D(n)(e−x2)=Vn(x)e−x2D(n)(e−x2)=Vn(x)e−x2, met Vn(x)Vn(x) een veelterm van graad nn.
   2. Toon aan dat HnHn een veelterm van graad nn is.
   3. Bereken de hoogstegraadscoëfficiënt van graad nn.<ref><p>dit volgt onmiddelijk uit [anal-jan06-hermgraad]

      </ref></p>
   4. HnHn is een (on)even functie als en slechts als nn (on)even is. Waarom?
   5. Toon aan dat (Hn)n(Hn)n een orthogonale rij is in L2e−x2(R)Le−x22(R).
   6. Bereken de norm van HnHn.

7. Voor $x=(x_n)_n\in l^2$ definiëren we een rij Tx door

   $$(Tx)_n:=\begin{cases}\frac{1}{4}(x_n-x_{n+1}) & n \text{ even},\\ 0 & n \text{ oneven}.\end{cases}$$

   1. Toon aan dat $T:l^2\to l^2$ een welgedefiniëerde lineare operator is.<ref><p>dus ligt het beeld in l^2, is T lineair, is T continu?

      </ref></p>
   2. Bereken de toegevoegde van T.
   3. Is T compact?
   4. Berekende de Eigenwaarden met bijhorende Eigenvectoren.
   5. Voor elke $x\in l^2$ geldt $\lim_{n\to\infty}T^nx=0$. Waarom?

Augustus 2005

Stijn Verwulgen

1. Stel (f_n) een rij in een Hilbertruimte die zwak convergeert naar f en bovendien dat $(\|f_n\|)_n$ ook naar $\|f\|$ convergeert. Toon aan dat $(f_n)_n$ dan ook naar f convergeert.
2. In deze opgave werken we met

   $$A:=\operatorname{vct}\{\sin(nx)\mid\in\mathbb{N},n>3\}\subset L^2(-\pi,\pi)$$

   en $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$, gegeven door volgend voorschrift:

   $$x\mapsto\begin{cases}-\pi-x & x\leq-\frac{\pi}{2}\\ x & -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}\\ \pi-x & \frac{\pi}{2}\leq x\end{cases}$$

   1. Geef de Fourierreeks van f.
   2. Bereken $\|f\|^2$.
   3. Bereken $d(f,\overline{A})$.
   4. Bereken $d(f,A^{\perp})$.
3. We hebben aangetoond dat de Legendre polynomen

   $$P_n(x):=\frac{1}{2^nn!}D^n((x^2-1)^n)$$

   een orthogonale familie vormen in de Hilbertruimte $L^2([-1,1])$.

   Verder weten we dat

   $$\|P_n\|_2^2=\frac{2}{2n+1}$$

   Voor $f\in L^2([-1,1])$ definiëren we

   $$Tf:=\sum_{n\in\mathbb{N}}(\cos(2\pi nx)|f)p_n,$$

   met

   $$p_n(x):=\frac{1}{\|P_n\|}P_n(x).$$

   1. Toon aan dat $T:L^2([-1,1])\to L^2([-1,1])$ een welgedefiniëeerde operator is.
   2. Bereken de kern en het beeld van T
   3. Bereken de toegevoegde van T
   4. Is T compact?

Januari 2005

Stijn Verwulgen

1. Stel A:={(en−2en+1)|n⊂N}⊂l2A:={(en−2en+1)|n⊂N}⊂l2.
    1. Bereken A⊥A⊥
    2. Toon aan dat vct(A∪{(1n+1)n∈N})vct(A∪{(1n+1)n∈N}) dicht is in l2l2.
    3. Stel b:=(13n)n∈Nb:=(13n)n∈N. Bereken dan d(b,A⊥)d(b,A⊥) en d(b,A⊥⊥)d(b,A⊥⊥).<ref><p>dit is de projectie van bb op de basis van A⊥A⊥ of A⊥⊥A⊥⊥

       </ref></p>

2. Neem α∉Zα∉Z en toon aan dat

   cosαπ=sinαππlimn→∞(1α+2αα2−12+2αα2−22+2αα2−32+…+2αα2−n2)cosαπ=sinαππlimn→∞(1α+2αα2−12+2αα
   +2αα2−n2)

   Hint: beschouw de Fourierreeks van de functie x↦cosαxx↦cosαx.
3. Stel ff een continue functie op [0,π][0,π]. Toon aan dat

   limn→∞∫π0f(x)sin(2nx)dx=0limn→∞∫0πf(x)sin(2nx)dx=0
4. Schrijf de functie eαxeαx als een reekssom van de Hermite ploynomen in L2e−x2Le−x22.
5. De afbeelding T:L2(−π,π)→L2(−π,π):f↦TfT:L2(−π,π)→L2(−π,π):f↦Tf is gedefiniëerd door

   Tf(x):=∫π−π(f(t)costsinx+2f(t)sintcosx)dtTf(x):=∫−ππ(f(t)costsinx+2f(t)sintcosx)dt
    1. Toon aan dat dit een welgedefiniëerde operator is.
    2. Bepaal de toegevoegde T∗T∗.
    3. Bepaal de eigenwaarden, zo deze bestaan.
    4. Ga na of TT al dan niet compact is.
    5. Bepaal ‖T‖‖T‖.

   Bij dit examen werden nog volgende dingen gegeven:

   a) Geziene eigenschappn van Hermite Polynomen

    1. Definitie

       Hn:=(−1)nex2(e−x2)(n)Hn:=(−1)nex2(e−x2)(n)
    2. De rij (Hn)n(Hn)n is, in de ruimte L2e−x2(R={f:R→K|f(x)e−x2/2∈L2(R)}Le−x22(R={f:R→K|f(x)e−x2/2∈L2(R)}, met bijhorend inproduct (f|g)=∫Rf(x)g(x)¯e−x2dx(f|g)=∫Rf(x)g(x)¯e−x2dx, een totale orthogonale familie.
    3. Elke HnHn is een veelterm van graad nn
    4. HnHn is een (on)even functie als en slechts als nn een (on)even getal is.
    5. ‖Hn‖2=2nn!π−−√‖Hn‖2=2nn!π
    6. We hebben de volgende recursierelatie

       Hn+1(x)=2xHn(x)−2nHn−1(x)(x∈R,n∈N0).Hn+1(x)=2xHn(x)−2nHn−1(x)(x∈R,n∈N0).

       (Hn)n(Hn)n bekomt men als eigenvectoren van een (zelftoegevoegde) differentiaaloperator

       f↦f″−2xf′.f↦f″−2xf′.

   b) Enkele gelijkheden

    1. ∫Reαxe−x2dx=eα24π−−√,∫Reαxe−x2dx=eα24π,
    2. cosαcosβ=12(cos(α−β)+cos(α+β)).cosαcosβ=12(cos(α−β)+cos(α+β)).
    3. ∑i=0∞xi=11−x,|x|≤1.∑i=0∞xi=11−x,|x|≤1.

   September 2003

   Hier was nog een achterkant aan het blad, maar deze had ik niet.

1. Neem 2 Hilbertruimten E en F.
    1. Beschouw een continue lineaire afbeelding $T:E\to F$ en neem $\phi_T=(Tx|y)$. Ga na dat $\phi_T:E\times F\to\mathbb{C}$ een sesquilineaire afbeelding is en dan $||\phi_T||=\sup_{||x||\leq 1,||y||\leq 1}||\phi_T(x,y)||=||T||$.
    2. Bewijs dat iedere begrensde sesquilineaire afbeelding $\phi:E\times F\to\mathbb{C}$ te schrijven is als ϕ_T voor een zekere $T:E\to F$ continu en lineair (definieer T en ga expliciet continuïteit en lineariteit na).
2. Neem $l^2(\mathbb{C})$ en beschouw volgende functie

    $$A:l^2\to l^2:(x_n)_{(n\in\mathbb{N})}\mapsto(y_n)_n \quad (y_n)_n=\begin{cases}5x_n-x_{n-1} & n\in 2\mathbb{N}\\ 3x_n & n\in 2\mathbb{N}+1\end{cases}$$

    1. Bewijs dat dit een goed gedefinieerde continue lineaire functie is
    2. Bepaal de eigenwaarden
    3. Bepaal de toegevoegde operator
    4. Is deze operator compact?
3. Neem twee separabele Hilbertruimten E en F en een Hilbert-Schmidt operator $A:E\to F$.
    1. Neem een orthonormale basis $(e_n)_n\subset E$ en een orthonormale basis $(e'_n)_n\subset F$. Bewijs

        $$|A|^2=\sum_{i=1}^{\infty}||Ae_i||^2=\sum_{j=1}^{\infty}||A^*e'_j||^2=|A^*|^2$$

    2. Bewijs dat $|\cdot|$ een zinnige notatie is, met andere woorden, bewijs dat $|A|$ onafhankelijk is van de orthonormale basis $(e_n)_n$.
    3. Bewijs dat als $|A|<\infty$ en $|B|<\infty$, dat dan $|A+B|\leq|A|+|B|$ en $||A||\leq|A|$
4. Neem $0<a<\pi$ en definieer

    $$f(x):=\begin{cases}x & -a\leq x\leq a\\ a\frac{\pi-x}{\pi-a} & a<x<\pi\\ a\frac{\pi+x}{a-\pi} & -\pi<x<-a\end{cases}$$

    1. Teken de grafiek van f
    2. (blad ten einde)

Januari 2003

---

1. Bepaal de Fourierreeks van de functie

    $$f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}:x\mapsto\frac{1}{1-2\lambda\cos(x)+\lambda^2}$$

    waarbij λ reëel is en $|\lambda|<1$.
    Bewijs dat voor $n\geq 0$ geldt dat:

    $$\cos nx=-\frac{1}{1-2\lambda\cos x+\lambda^2}(\lambda\cos(n+1)x-(1+\lambda^2)\cos(nx)+\lambda\cos(n-1)x)$$

2. Neem ϕ een sesquilineaire functionaal op een (pre-)Hilbertruimte en associeer met ϕ een quadratische vorm $\hat{\phi}$ door $\hat{\phi}(x)=\phi(x,x)$. Stel

    $$||\phi||=\inf\{\alpha \mid |\phi(x,y)|\leq\alpha||x||\,||y||\}$$

    $$||\hat{\phi}||=\inf\{\beta \mid |\hat{\phi}(x)|\leq\beta||x||^2\}$$

    Toon aan dat als ϕ symmetrisch is en $||\phi||<\infty$, dat dan $||\phi||=||\hat{\phi}||$.
3. Definieer, voor elke $a\in\mathbb{R}^+$, de functie $f_a:\mathbb{R}\to\mathbb{R}:x\mapsto e^{-ax^2/2}$. Bereken door middel van de Fouriertransformatie het convolutieproduct f_a*f_a.

4. Neem $T:l2(C)\to l2(C):x=(xn)n\in N\mapsto TxT:l2(C)\to l2(C):x=(xn)n\in N\mapsto Tx$ met

   $(Txn)n=\{xn-1+xnxn+xn+1n\in 2N+1n\in 2N(Txn)n=\{xn-1+xnn\in 2N+1xn+xn+1n\in 2N$

    1. Bewijs dat TT een operator is.
    2. Bepaal $||T||||T||$ en de eigenwaarden van T.
    3. Bepaal $T*T*$.
    4. Is TT compact?