Metrische ruimte en differentiaalrekenen (Fysica)

Metrische ruimte en differentiaalrekenen	
Jaar	2BFYS
Keuzevak	Keuzevakken

Bespreking

Sinds de introductie van wiskundige methoden 3 is dit een keuzevak voor de 2de bachelor Fysica. Het vak is vrij gelijkaardig aan Wiskundige Methoden 3, veel van dezelfde onderwerpen komen aanbod, echter worden deze onderwerpen verder uitgediept en komen er een paar nieuwe begrippen aanbod en is dit vak iets theoretischer. Het loont zeker om dit keuzevak op te nemen aangezien het nodig is volgens de volgtijdigheidstabel om later Banach en Hilbertruimten op te kunnen nemen als keuze vak, wat voor zij met interesse in theoretische fysica zeker een aanrader is.

Vroeger werd dit vak gegeven door Bob Lowen, maar sinds 2013 wordt dit gegeven door Sonja Hohloch samen met de tweede bachelor wiskunde, voor wie dit een verplicht vak is (Kijk ook eens bij de wiskunde voor extra vragen).

Puntenverdeling

De theorie en oefeningen staan op ongeveer evenveel punten. De prof houdt wel rekening met je resultaat op de oefeningen wanneer hij je de punten voor de theorie geeft.

Examenvragen

Academiejaar 2012-2013 1ste zit

Theorie

1. Groep A
    1. Geef alle stellingen die je kent tussen continuïteit en compactheid (bewijs uiteindelijk Heine-Borel).
    2. Geef het verband tussen continu differentieerbaar en continu afleidbaar (en bewijs) en definieer eerst deze begrippen.
    3. Wat is D(Df(a)).
    4. Definieer convergentie van een reeks en absolute convergentie en bewijs het verband tussen de twee.
    5. Bewijs als je weet dat de reeks un absoluut convergent is dat de reeks (un/(un+1)) ook absoluut convergent is.

Praktijk

1. Zij (an)n(an)n en (bn)n(bn)n rijen in RR. Veronderstel dat (an)n(an)n een nulrij is en dat er een constante C∈R+0C∈R0+ en een index n0∈Nn0∈N bestaan zodanig dat voor iedere n>n0n>n0 geldt dat |bn|≤C/n|bn|≤C/n. Bewijs nu dat (bn∑nk=1ak)n(bn∑k=1nak)n een nulrij is.
2. Ga na of de volgende rijen convergent zijn:
    1. ∑nlognn∑nlognn
    2. ∑1n(1+n2)√∑1n(1+n2)
3. Beschouw de functie f:R2→Rf:R2→R gedefineerd door
   f(x,y)={xarctany+yarctanxx2+y2√0als(x,y)≠(0,0)als(x,y)=(0,0)
   f(x,y)={xarctany+yarctanxx2+y2als(x,y)≠(0,0)0als(x,y)=(0,0)

   Ga na of de functie partieel afleidbaar, continu partieel afleidbaar, lokaal begrensd partieel afleidbaar, continu, continu differentieerbaar en differentieerbaar is.

4. Bepaal de aard, ligging en grootte van de (lokale) extrema van de functie f:D→Rf:D→R als je weet dat D={(x,y)∈R2|x2+y2≤1}D={(x,y)∈R2|x2+y2≤1} en f(x,y)=(y2−x−1)(y2+x−1)f(x,y)=(y2−x−1)(y2+x−1).

Academiejaar 2011-2012 2de zit

Theorie

1. Definieer:
    1. Convergente rij
    2. Adherente rij
    3. Cauchyrij

    Geef en bewijs het verband.
2. Definieer:
    1. Afleidbaarheid
    2. Differentieerbaarheid
    - Geef en bewijs het verband.
    - Bijvraag: D(Df(a)) = ? (oplossing: totnogtoe onbekend, niet 2e differentiaal van f of D²f(a) ° Df(a), wat wordt afgedaan als "onzin")

Praktijk

1. Zijn de volgende reeksen convergent?
   - ∑n(logn)n∑n(logn)n
   - ∑11+sin(1/n)∑11+sin(1/n)
2. Gegeven de functie f(x,y)={(x2+y2)sin1x2+y2√0(x,y)≠(0,0)(x,y)=(0,0)f(x,y)={(x2+y2)sin1x2+y2(x,y)≠(0,0)0(x,y)=(0,0)

   Ga na of de functie partieel afleidbaar, continu partieel afleidbaar, continu,... is.
3. Extremaonderzoek. f:D←R:(x,y)=(y2−x−1)(y2+x−1)f:D←R:(x,y)=(y2−x−1)(y2+x−1) met D=(x,y)∈R2|x2+y2≤1D=(x,y)∈R2|x2+y2≤1.
4. Een rij x_n is Césaroconvergent als de deelrij x1,x1+x22,x1+x2+x33,⋯ x1,x1+x22,x1+x2+x33,⋯ convergent is.
   - Bewijs: als een rij convergent is, is ze ook Césaroconvergent.
   - Het omgekeerde is niet waar; geef een tegenvoorbeeld.

Academiejaar 2011-2012 1^ste^ zit

Theorie

Elke student krijgt verschillende vragen, hier de vragen van 1 student:

1. Geef alle verschillende manieren om continuïteit te definiëren.

   Bewijs de equivalentie tussen de basisdefinitie en de ε, δ definitie.
2. Geef de definitie van afleidbaarheid en differentieerbaarheid, en geef en bewijs het verband tussen de twee.
3. Gegeven zijn 3 reeksen in RR ∑nxn,∑n|xn|en∑nx2n

   ∑nxn,∑n|xn|en∑nxn2

   . Geef voor alle verbanden van de convergentie van die reeksen een tegenvoorbeeld of een bewijs.

Een tweede vragenreeks:

1. Continuiteit alle equivalenties geven

   1<=>4 bewijzen
2. Definitie continu differentieerbaar, continu afleidbaar

   CD<=>CA<=>CPA
3. Criterium van d'Alembert geven (niet bewijzen).

   van daaruit een reeks opstellen die convergent is maar waarvan de verzameling van de quotienten van opeenvolgende termen niet begrensd is.

Een derde vragenreeks:

1. Geef de stellingen die verband houden met continuïteit en compactheid.

   bewijs Heine-Borel

2. Zoek het verband tussen continu en adherent continu (als x_n adhereert aan x, adhereert $f(x)_n$ aan f(x)), (oplossing: equivalent).
3. Definieer continu afleidbaar en continu differentieerbaar en bewijs de verbanden ertussen buiten dat ene lange.

Een vierde vragenreeks:

1. Stellingen van combinatie continuiteit en compactheid:
    - Bewijs het eerste (met resultaat f(X) compact)
    - Beschouw functies R→RR→R; compact is equivalent met begrensd en gesloten. Geef aan waarom het bewijs niet geleverd kan worden vanuit die begrippen (m.a.w. geef een voorbeeld van een continue functie die een gesloten interval afbeeldt op een niet gesloten interval en een continue functie die een begrensd interval afbeeldt op een niet-begrensd interval).
2. Definieer de kettingregel
    - Beschouw de functies u,v
      Rn→Rp

      Rn→Rp

      en bewijs dat daarvoor geldt D(u+v) = Du + Dv (hij gaf hints: je moest f en g van het bewijs op een slimme manier definiëren om dan de kettingregel om te vormen om uiteindelijk het resultaat te krijgen en hij gaf als tweede hint om g en f te definiëren t.o.v. R^n-->R^2p en R^2p-->R^p).
    - Geef en bewijs de middelwaardestelling
3. Gegeven zijn 3 reeksen in RR
   ∑nxn,∑n|xn|en∑nx2n

   ∑nxn,∑n|xn|en∑nxn2

   . Er zijn 6 verbanden voor convergentie tussen de 3 reeksen, welke verbanden kloppen en welke niet (tegenvoorbeeld).

Praktijk

1. Zij C10([0,1])C01([0,1]) de reële vectorruimte van alle functiesf:[0,1]→Rf:[0,1]→R die continu differentieerbaar zijn en de eigenschap hebben dat f(0)=0.f(0)=0.
    1. Toon aan: de afbeelding ||.||∗:C10([0,1])→R+:f↦supx∈[0,1]|f′(x)|||.||∗:C01([0,1])→R+:f↦supx∈[0,1]|f′(x)| is welgedefinieerd en een norm op C10([0,1])C01([0,1]).
    2. Toon aan: voor iedere functie f∈C10([0,1])f∈C01([0,1]) is de ongelijkheid ||f||∞≤||f||∗||f||∞≤||f||∗

   Hint
   f:[0,1]→R

   f:[0,1]→R

   continu, differentieerbaar op]0,1[, k≥0k≥0: f k-lipschitz ⇔∀x∈]0,1[:|f′(x)|≤k⇔∀x∈]0,1[:|f′(x)|≤k.

2. Ga na of de volgende reeksen convergent zijn.
    1. ∑n1n(1+n3)√3∑n1n(1+n3)3
    2. ∑n1nlog(n)log(log(n))∑n1nlog(n)log(log(n))
3. Beschouw de functie f:R2→Rf:R2→R gedefinieerd door f(x,y)={xsiny+ysinxx2+y2√0als(x,y)≠(0,0)als(x,y)=(0,0).

    f(x,y)={xsiny+ysinxx2+y2als(x,y)≠(0,0)0als(x,y)=(0,0).

    Ga na of f partieel afleidbaar, lokaal begrensd partieel afleidbaar, continu partieel afleidbaar, continu, differentieerbaar, continu differentieerbaar is.

4. Beschouw f:R2→R2:(x,y)→(x+y,2xy2)f:R2→R2:(x,y)→(x+y,2xy2)
    1. Is f surjectief? Is f injectief?
    2. In welke punten van R2R2 voldoet de functie aan de voorwaarden voor de inverse functie stelling?
    3. U=]0,∞][×]0,1[U=]0,∞][×]0,1[, is f injectief? Bereken f|U(U)f|U(U) in (12,126)(12,126)

Academiejaar 2010-2011 1ste zit

Theorie

Hierbij de vragen van drie personen. Bij dit examen krijgt iedereen individueel vragen.

1.
    - Definieer
        - Continu differentieerbaar
        - Continu afleidbaar
        - Verband tussen de twee
    - Bewijs f is continu differentieerbaar --> f is continu afleidbaar.
    - Bewijs de kettingregel.
    - Definieer
        - Convergente rij
        - Adherente rij
        - Cauchy rij
        - Geef verband tussen de 3.
        - Welke 2 belangrijke eigenschappen van ruimtes worden hier uit afgeleid?

            Oplossing: volledigheid en rijencompact.
        - Bewijs X rijencompact --> X is volledig met behulp van het verband tussen rijen.
        - Waarom is de ruimte waarin alle rijen convergeren oninteressant?

2.
    - Definieer
        - Continuïteit
        - Uniform continu
        - Lipschitz
        - Verband tussen de drie.
        - Hieruit heine borel bewijzen.
    - Definieer
        - Continu afleidbaar
        - Continu differentieerbaar
        - Verband tussen de twee.
    - Bewijs de kettingregel.
        - Gegeven f en g differentieerbaar.
        - Bewijs: f+g is differentieerbaar en geef een uitdrukking voor D(f+g).
        - Bewijs dit laatste, tip: Gebruik hiervoor de kettingregel.
3.
    - Defineer
        - Convergente rij
        - Adherente rij
        - Verband tussen de twee
        - In welk deel van de cursus komt dit aan bod?
        - Bewijs convergent continu <=> continu
    - Defineer
        - Differentieerbaar in a
        - Afleidbaar in a
        - Bewijs verband
    - Extrema
        - Lokaal extrema
        - Verband met differentiaal
        - Verband met afgeleide in een punt

Praktijk

1. Zij $C^1_0([0,1])$ de reële vectorruimte van alle functies $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ die continu differentieerbaar zijn en de eigenschap hebben dat $f(0)=0$. Zij verder $\jmath$ de deelcollectie van $C^1_0([0,1])$ bestaande uit alle stijgende functies f in de zin dat voor $0\leq s<t\leq 1$ geldig is dat $f(s)\leq f(t)$.
   1. Toon aan: De volgende afbeelding is welgedefineerd en een norm op $C^1_0([0,1])$.
   2. $$\|.\|_*:C^1_0([0,1])\to\mathbb{R}^+:f\mapsto\int_0^1|f'(s)|ds$$
   3. Toon aan: Voor iedere functie $f\in\jmath$ is ongelijkheid $\|f\|_1\leq\|f\|_*$ geldig.
      - Hint: Een continu differentieerbare functie $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ voldoet steeds aan de betrekking $\int_a^b f'(s)ds=f(b)-f(a)$.
      - Herinner je dat $\|f\|_1=\int_0^1|f(s)|ds$.
2. Ga na of de volgende reeksen convergent zijn.
   1. $\sum_n \sqrt[n]{\frac{n^2}{\log n}}$
   2. $\sum_n \frac{1+(-1)^n n}{n^2}$
3. Beschouw de functie $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ gedefinieerd door
   $$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^3}{x^4+y^4} & \text{als } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{als } (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

   Ga na of f partieel afleidbaar, lokaal begrensd partieel afleidbaar, continu partieel afleidbaar, continu, differentieerbaar, continu differentieerbaar is.

4. Beschouw de functie
   $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2:(x,y)\mapsto(x^4-6x^2y^2+y^4,4x^3y-4xy^3)$
   en merk op dat voor getallen $x,y\in\mathbb{R}$ de betrekking
   $(x+yi)^4=(x^4-6x^2y^2+y^4)+(4x^3y-4xy^3)i$
   steeds geldig is in $\mathbb{C}$.
   1. Is f injectief? is f surjectief?
   2. In welke punten van $\mathbb{R}^2$ voldoet f aan de voorwaarden van de inverse functie-stelling?
   3. Beschouw de verzameling $U=\mathbb{R}_0^+\times\mathbb{R}_0^+$. Toon aan dat $f|_U$ injectief is en bepaal de verzameling $V=f|_U(U)$.

Vroegere examenvragen

`Doordat dit een keuzevak is dat door een beperkt aantal studenten wordt gevolgd is dit nog niet volledig omgezet, hier de oude pdf`