Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2017-12-20 kl. 08.30–12.30

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Ivar Simonsson (alt. Peter Hegarty), telefon: 0317725325 (alt. 0705705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2017. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas via email senast den 10 januari och i Ladok senast den 15 januari. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Uppgifterna

1. Skriv följande argument i symbolisk logisk form. Alla predikat ska definieras tydligt ! (3p)

Alla giraffer är över två meter långa
Vissa människor är över två meter långa
– –
Vissa människor är giraffer

Argumentet är förstås ogiltigt. Visa med ett Euler-Venn diagram hur det kan te sig så.

2. (a) Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på $\mathbb{Z}_+$: (3p)

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}_+^2 : \mathrm{SGD}(a, b) > 1\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$? Motivera väl !

(b) Ange en oändlig delmängd $S \subset \mathbb{Z}_+$ så att restriktionen av $\mathcal{R}$ till S^2 är en ekvivalensrelation med två ekvivalensklasser. (1p)
(Obs! Ingen motivering behövs, ett korrekt S räcker.)

(c) Rita den riktade relationsgrafen för restriktionen av $\mathcal{R}$ till T^2, där (2p)

$$T = \{2, 4, 5, 6, 7, 9, 10\}.$$

3. Låt $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras rekursivt enligt (5p)

$$a_0 = 1, \quad a_1 = 3, \quad a_{n+2} = 6a_{n+1} - 8a_n + 2n \; \forall \, n \geq 0.$$

Bevisa, via induktion eller på något annat vis, att

$$a_n = \frac{1}{18} \left(11 \cdot 4^n - 9 \cdot 2^n + 12n + 16\right) \quad \forall \, n \geq 0.$$

Var god vänd!

4. (a) Bestäm $\Phi(354)$, $\Phi(252)$ samt SGD(354, 252). (2p)

(b) Bestäm den allmänna lösningen samt den minsta positiva lösningen till kongruensen (3p)

$$252x \equiv 30 \pmod{354}.$$

(c) Bestäm den allmänna lösningen till den Diofantiska ekvationen (3p)

$$354x - 252y = 300.$$

5. (a) Bestäm den allmänna lösningen samt den minsta positiva lösningen till följande system av kongruenser: (4.5p)

$$2x \equiv 1 \pmod 9, \quad 3x \equiv 1 \pmod 7, \quad 4x \equiv 1 \pmod{11}.$$

(b) Förklara varför systemet skulle sakna lösningar om man bytte plats på 9:an och 7:an. (1.5p)

(c) Bestäm $3^{2017} \pmod{23}$. (3p)

6. Låt S vara mängden av 6-siffriga tal utan nollor, dvs varje siffra är en av 1, 2, ..., 9. Hur många av elementen i S (8p)

(a) har exakt tre 2:or ?

(b) har en fler 2:or än 3:or (t.ex. tre 2:or och två 3:or) ?

(c) har exakt en 2:a, en 3:a och en 5:a, sådan att dessa tre ligger intill varandra ?

(d) har siffersumma 49 ?

(e) börjar med en 7:a och är sådana att siffrorna utgör en icke-växande följd då man läser dem från vänster till höger ?
(Obs! En talföljd $x_1, x_2, \ldots, x_6$ är icke-växande då $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq x_5 \geq x_6$).

Obs! För full poäng ska man ange svaret i (d) som ett explicit bas-10 tal. Detta behövs ej i de övriga deluppgifterna.

7. (a) En del av grannmatrisen M till en oriktad multigraf vars noder är märkta 1, 2, ..., 7 visas i Figur 1.

i. Rita grafen. (1p)

ii. Bestäm antalet vägar av längd 2 från nod 6 till nod 4. (1p)

iii. Ange en Eulerväg i grafen. (1p)

iv. Ange en Hamiltoncykel i grafen. (1p)

(b) Ange en isomorfi mellan graferna i Figur 2, dvs numrera noderna $1-7$ i båda graferna på ett lämpligt vis. (2p)

8. Följande är ett känt faktum (som ni kommer att lära er i envariabelanalys !): (5p)

Sats: *För $n \in \mathbb{Z}_+$, låt $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Talföljden $(a_n)_{n\in\mathbb{Z}_+}$ är strängt växande och $\lim_{n\to\infty} a_n = e$.*

Givet detta (som du alltså *inte* behöver bevisa), bevisa följande:

$$\forall\, n \in \mathbb{Z}_+ : \quad n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

(Obs! Om du lyckas bevisa olikheten utan tipset så får du ändå full poäng !).

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DI2, 171220

1. Låt universumet U bestå av alla levande varelser. Våra predikat är:
$G(x):\ x$ är en giraff.
$M(x):\ x$ är en människa.
$L(x):\ x$ är över två meter lång.

Argumentet lyder

$$\begin{array}{rl} \forall\, x: & G(x) \Rightarrow L(x) \\ \exists\, x: & M(x) \wedge L(x) \\ \hline \exists\, x: & G(x) \wedge M(x) \end{array}$$

Ett exempel på hur det kan se ut då slutsatsen inte gäller visas i Figur L.1.

2. (a) *Reflexivitet*: Nej, ty SGD(1, 1) = 1. Alla övriga tal i $\mathbb{Z}_+$ är relaterade till sig själva.
Symmetri: Ja, ty SGD(a, b) = SGD(b, a).
Transitivitet: Nej. T.ex. SGD(4, 6) = 2 och SGD(6, 9) = 3, men SGD(4, 9) = 1.

(b) T.ex. $S = \{2^n : n \in \mathbb{Z}_+\} \sqcup \{3^n : n \in \mathbb{Z}_+\}$.

(c) Se Figur L.2.

3. *Steg 1:* Basfallen $n = 0$, 1 måste kontrolleras:

$$n = 0: \ \frac{1}{18}\left(11\cdot 4^0 - 9\cdot 2^0 + 12\cdot 0 + 16\right) = \frac{1}{18}(11 - 9 + 0 + 16) = \frac{18}{18} = 1 = a_0, \text{ stämmer,}$$
$$n = 1: \ \frac{1}{18}\left(11\cdot 4^1 - 9\cdot 2^1 + 12\cdot 1 + 16\right) = \frac{1}{18}(44 - 18 + 12 + 16) = \frac{54}{18} = 3 = a_1, \text{ stämmer.}$$

Steg 2: Induktionssteget. Låt $P(n)$ vara påståendet att $a_n = \frac{1}{18}(11\cdot 4^n - 9\cdot 2^n + 12n + 16)$. Vi behöver visa att $(P(n) \wedge P(n+1)) \Rightarrow P(n+2)$, för godtyckligt $n \geq 0$. Antag alltså att

$$a_n = \frac{1}{18}(11\cdot 4^n - 9\cdot 2^n + 12n + 16), \text{ samt att} \tag{1}$$
$$a_{n+1} = \frac{1}{18}(11\cdot 4^{n+1} - 9\cdot 2^{n+1} + 12(n+1) + 16). \tag{2}$$

Vi måste härleda att

$$a_{n+2} = \frac{1}{18}(11\cdot 4^{n+2} - 9\cdot 2^{n+2} + 12(n+2) + 16) \tag{3}$$

Enligt rekursionen och (1), (2) har vi

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= 6a_{n+1} - 8b_n + 2n = \\ &= \frac{6}{18}(11\cdot 4^{n+1} - 9\cdot 2^{n+1} + 12(n+1) + 16) - \frac{8}{18}(11\cdot 4^n - 9\cdot 2^n + 12n + 16) + 2n = \\ &= \frac{1}{18}\left[11\cdot 4^n\cdot(4\cdot 6 - 8) - 9\cdot 2^n\cdot(2\cdot 6 - 8) + 12\cdot(6(n+1) - 8n) + 16\cdot(6-8) + 36n\right] = \\ &= \frac{1}{18}\left[11\cdot 4^n\cdot 4^2 - 9\cdot 2^n\cdot 2^2 + 12(6 - 2n) - 32 + 36n\right] = \\ &= \frac{1}{18}\left[11\cdot 4^{n+2} - 9\cdot 2^{n+2} + 12n + 40\right] = \\ &= \frac{1}{18}\left[11\cdot 4^{n+2} - 9\cdot 2^{n+2} + 12(n+2) + 16\right], \quad \text{v.s.v.} \end{aligned}$$

4. (a) Primtalsfaktoriseringarna lyder

$$354 = 2\cdot 3\cdot 59, \qquad 252 = 2^2\cdot 3^2\cdot 7.$$

Så

$$\begin{aligned} \Phi(354) &= (2-1)(3-1)(59-1) = 2\cdot 58 = 116, \\ \Phi(252) &= (2^2 - 2^1)(3^2 - 3^1)(7-1) = 2\cdot 6\cdot 6 = 72, \\ \text{SGD}(354,\, 252) &= 2\cdot 3 = 6. \end{aligned}$$

(b) Kongruensen är lösbar ty SGD(354, 252) = 6 och $6 \mid 30$. Vi delar igenom med 6 och får den ekvivalenta kongruensen

$$42x \equiv 5 \pmod{59}.$$

Vi måste hitta inversen till 42 (modulo 59). Vi kör Euklides algoritm. Först framåt:

$$\begin{aligned} 59 &= 1 \cdot 42 + 17, \\ 42 &= 2 \cdot 17 + 8, \\ 17 &= 2 \cdot 8 + 1. \end{aligned}$$

Sedan bakåt:

$$\begin{aligned} 1 &= 17 - 2 \cdot 8 \\ &= 17 - 2 \cdot (42 - 2 \cdot 17) \\ &= 5 \cdot 17 - 2 \cdot 42 \\ &= 5 \cdot (59 - 42) - 2 \cdot 42 \\ &= 5 \cdot 59 - 7 \cdot 42. \end{aligned}$$

Detta innebär att $42^{-1} \equiv -7 \pmod{59}$. Så den allmänna lösningen till vår kongruens ges av

$$x \equiv 42^{-1} \cdot 5 \equiv -7 \cdot 5 \equiv -35 \equiv 24 \pmod{59},$$

och den minsta positiva lösningen är uppenbarligen $x = 24$.

(c) Vi kan dela igenom med 6 igen för att få den ekvivalenta ekvationen

$$59x - 42y = 50.$$

I del (b) har vi sett att

$$1 = 5 \cdot 59 - 7 \cdot 42.$$

Multiplicera igenom med 50 så har vi vår baslösning

$$x_0 = 250, \qquad y_0 = 350.$$

Den allmänna lösningen lyder

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n = 250 + 42n, \\ y &= y_0 + \left(\frac{a}{d}\right) n = 350 + 59n, \quad n \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

5. (a) Först notera att

$$2^{-1} \equiv 5 \pmod{9}, \quad 3^{-1} \equiv 5 \pmod{7}, \quad 4^{-1} \equiv 3 \pmod{11}.$$

Det innebär att kongruenserna kan skrivas om till den enklare formen

$$x \equiv 5 \pmod{9}, \quad x \equiv 5 \pmod{7}, \quad x \equiv 3 \pmod{11}.$$

Den allmänna lösningen ges av

$$x \equiv 5 \cdot b_1 \cdot 7 \cdot 11 + 5 \cdot b_2 \cdot 9 \cdot 11 + 3 \cdot b_3 \cdot 9 \cdot 7 \pmod{9 \cdot 7 \cdot 11}, \tag{4}$$

där

$$\begin{aligned} 7 \cdot 11 \cdot b_1 \equiv 1 \pmod{9} &\Rightarrow 5b_1 \equiv 1 \Rightarrow \text{ tag } b_1 = 2, \\ 9 \cdot 11 \cdot b_2 \equiv 1 \pmod{7} &\Rightarrow b_1 \equiv 1 \Rightarrow \text{ tag } b_1 = 1, \\ 9 \cdot 7 \cdot b_3 \equiv 1 \pmod{11} &\Rightarrow -3b_1 \equiv 1 \Rightarrow \text{ tag } b_1 = -4. \end{aligned}$$

Insättning in i (4) ger

$$x \equiv 5 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 11 + 5 \cdot 1 \cdot 9 \cdot 11 - 3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 7 \pmod{693} \equiv 770 + 495 - 756 \equiv 509 \pmod{693},$$

och den minsta positiva lösningen är tydligen $x = 509$.

(b) I så fall skulle den andra kongruensen lyda $3x \equiv 1 \pmod 9$. Detta är olösbart ty en multipel av 3 kan endast lämna rest 0, 3 eller 6 (modulo 9).

(c) Notera att 23 är ett primtal så Fermats sats gäller: $3^{22} \equiv 1 \pmod{23}$. Vi har $2017 = 91 \cdot 22 + 15$ så

$$3^{2017} = (3^{22})^{91} \cdot 3^{15} \equiv 1^{91} \cdot 3^{15} = 3^{15} =$$
$$= (3^3)^5 = 27^5 \equiv 4^5 = (4^2)^2 \cdot 4 \equiv (-7)^2 \cdot 4 = 49 \cdot 4 \equiv 3 \cdot 4 \equiv 12 \pmod{23}.$$

6. (a) Det finns $\binom{6}{3}$ sätt att välja 2:ornas positioner i talet och sedan 8 val för var och en av de återstående tre siffrorna. Antalet möjligheter är således, enligt multiplikationsprincipen, $\binom{6}{3} \times 8^3 = 10240$.

(b) Om det t.ex. finns tre 2:or och två 3:or så finns det $\binom{6}{3}$ sätt att välja 2:ornas positioner, sedan $\binom{3}{2}$ sätt att välja 3:ornas positioner och slutligen 7 val för den sista siffran. Antalet möjliga tal i detta fall är således $\binom{6}{3} \times \binom{3}{2} \times 7 = 420$.

På samma sätt finns det $\binom{6}{2} \times \binom{4}{1} \times 7^3 = 20580$ möjliga tal med två 2:or och en 3:a, samt $\binom{6}{1} \times \binom{5}{0} \times 7^5 = 100842$ möjliga tal med en 2:a och inga 3:or.

Totalt finns det då, enligt additionsprincipen, $100842 + 20580 + 420 = 121842$ möjliga tal.

(c) Det finns 4 val för läget hos $2-3-5$ kombinationen, sedan $3! = 6$ möjliga inbördesordningar, sedan 6 val för var och en av de återstående tre siffrorna. Antalet möjliga tal är således $4 \times 6 \times 6^3 = 5184$.

(d) Låt $x_i = 9 - i$:te siffran. Då är $x_1 + x_2 + \cdots + x_6 = 5$ och varje $x_i \geq 0$. Det finns inga ytterligare begränsingar på de x_i:en. Antalet möjliga tal sammanfaller alltså med antalet lösningar till ekvationen, som är $\binom{6+5-1}{5} = \binom{10}{5} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 9 \cdot 4 \cdot 7 = 252$.

(e) Låt x_i vara den i:te siffran. Vi vet att $x_1 = 7$ och att $x_{i+1} \leq x_i$ för varje $i = 1, \ldots, 5$. Sätt $y_i = x_i - x_{i+1}$, för $i = 1, \ldots, 5$. Eftersom $x_6 \geq 1$ så har vi att

$$y_i \geq 0 \; \forall i \quad \text{och} \quad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \leq 6.$$

Om summan av y:en är k så är antalet lösningar till ekvationen $\binom{6+k-1}{k} = \binom{k+5}{k}$. Det totala antalet möjligheter är således

$$\sum_{k=0}^{6} \binom{k+5}{k} = \cdots = 924.$$

7. (a) i. Se Figur L.3.

ii. Notera att M är symmetrisk kring diagonalen, eftersom G är oriktad. Antalet vägar av längd 2 mellan noder 6 och 4 fås genom att ta skalärprodukten av rad 6 med kolonn 4 i M. Alltså,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$= 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 = 5.$$

iii. Notera att endast noderna 3 och 4 har udda grad, så en Eulerväg måste gå mellan dessa två. Ett exempel på en Eulerväg är

$$3 \to 4 \to 5 \to 4 \to 6 \to 5 \to 2 \to 3 \to 7 \to 1 \to 6 \to 3 \to 6 \to 2 \to 1 \to 4.$$

iv. Ett exempel på en Hamiltoncykel är

$$1 \to 2 \to 6 \to 5 \to 4 \to 3 \to 7 \to 1.$$

(b) Se Figur L.4.

8. Vi kan bevisa olikheten med induktion på n.

Steg 1: Kontrollera basfallet $n = 1$. VL är $1! = 1$ och HL är $(1/e)^1 = 1/e < 1$, v.s.v.

Steg 2: Låt $P(n)$ beteckna påståendet att $n! > (n/e)^n$. Vi måste bevisa att $P(n) \Rightarrow P(n+1)$. Så vi antar att

$$n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{5}$$

och vill härleda att

$$(n+1)! > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}. \tag{6}$$

Vi har till att börja med

$$(n+1)! = (n+1) \times n! > (n+1) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n, \quad \text{enligt (5).}$$

Således räcker det att visa att

$$(n+1) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n > \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}.$$

Om vi kancellerar en faktor $n+1$ från båda leden så får vi den ekvivalenta olikheten

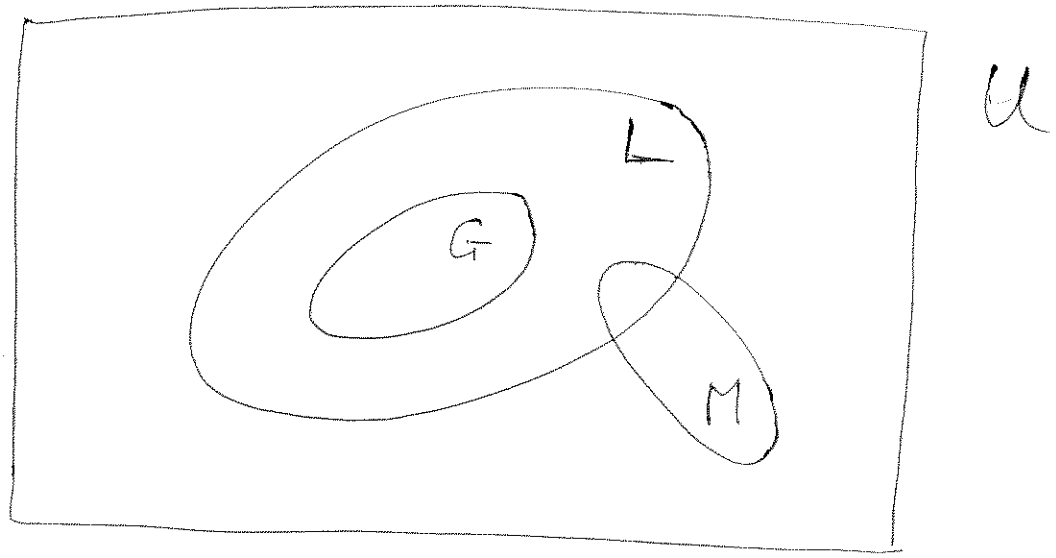
$$\frac{n^n}{e^n} > \frac{(n+1)^n}{e^{n+1}}.$$

Vi kan också kancellera e^n och med hjälp av lite algebra få de ekvivalenta olikheterna

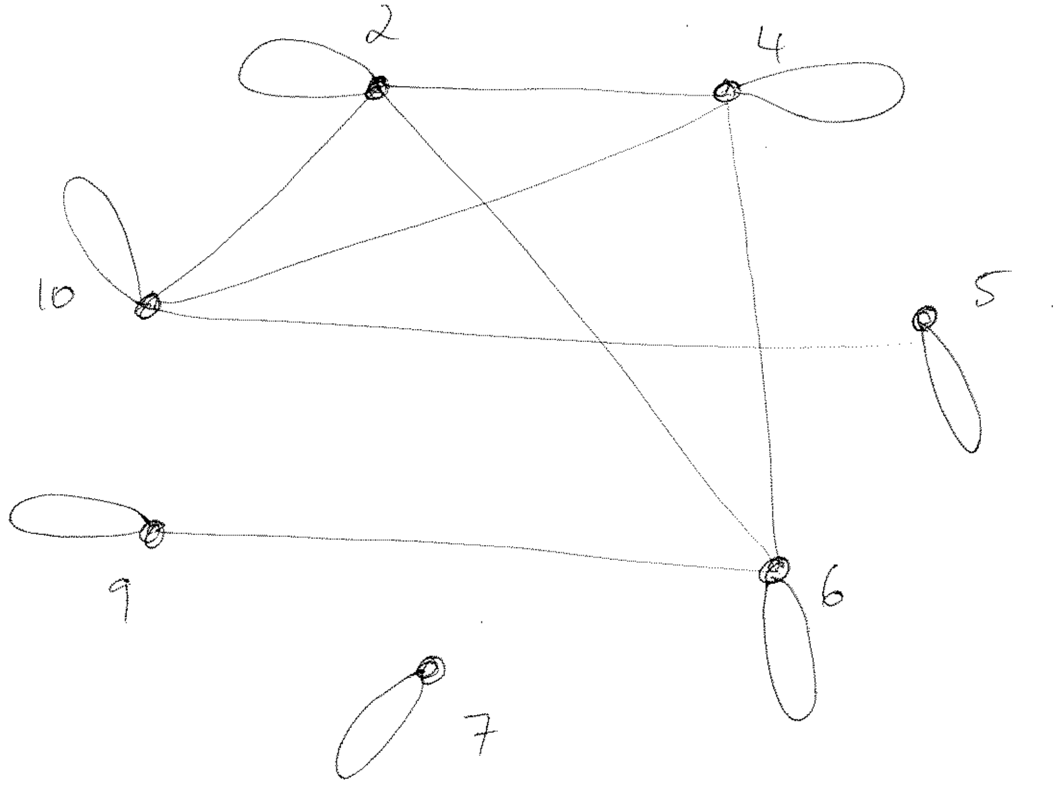
$$n^n > \frac{(n+1)^n}{e} \Leftrightarrow e > \frac{(n+1)^n}{n^n} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow e > \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \Leftrightarrow e > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Men den sista olikheten är sann, enligt den givna satsen. Detta bevisar (6), v.s.v.

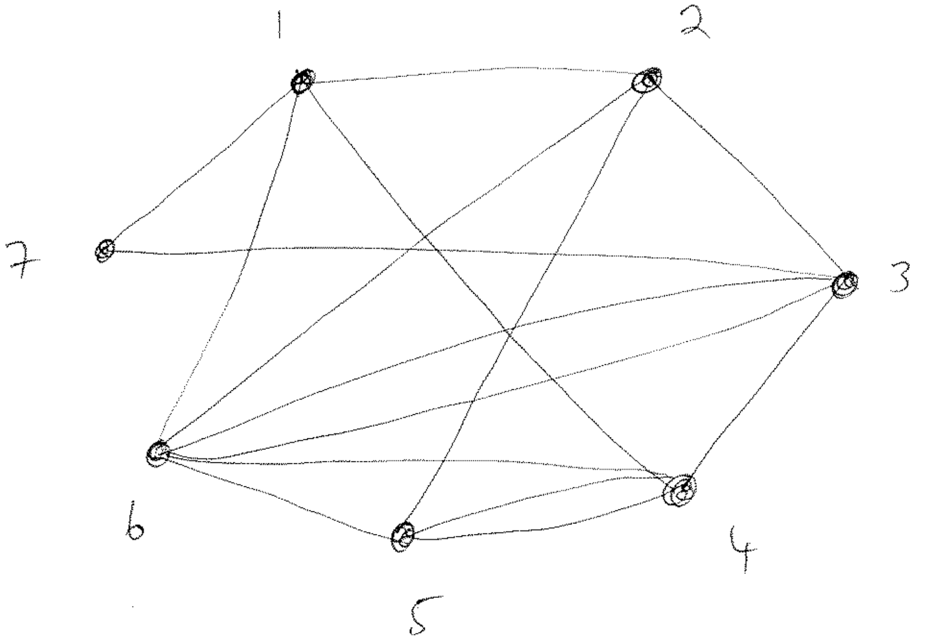
Figur L.1



Figur L.2



Figur L.3



Figur L.4