Chalmers Tekniska Högskola

Lösningar till tentamen på TMV211: Inledande diskret matematik
Den 24 Oktober 2020 kl 14:00-18:00
Examinator: Jonathan Nilsson

Alla hjälpmedel är tillåtna, dock är ingen form av samarbete eller kommunikation tillåten. Denna tes har sju frågor. Maxpoäng är 60p. För godkänt krävs minst 30p (inklusive eventuella bonuspoäng). För full poäng på en uppgift krävs en fullständig och välmotiverad lösning som går att följa. Skriv tydligt vad ditt svar är på varje uppgift. Lösningar som är oläsliga eller inte går att följa eller som innehåller endast svar bedöms som noll poäng. Börja varje uppgift på en ny sida. Du har en extra halvtimme på dig efter tentans slut till att skanna in och ladda upp dina lösningar. Inlämningen ska bestå av en enda Pdf-fil innehållande alla lösningarna i ordning. Det är ditt eget ansvar att se till att detta fungerar.

1. Hitta alla heltalslösningar till den diofantiska ekvationen $13x + 8y = 250$. [9p]
Ange också de lösningar där både $x \geq 0$ och $y \geq 0$.

Standardmetoden är att använda Euklides algoritm för att först bestämma $\gcd(13, 8)$: $13 = 1 \cdot 8 + 5$ men redan här har vi $13 \cdot 1 + 8 \cdot (-1) = 5$ och därför $13 \cdot 50 + 8 \cdot (-50) = 250$. Så $(x, y) = (50, -50)$ är en lösning till ekvationen. För varje heltal k får vi dessutom $250 = 13 \cdot 50 + 8 \cdot (-50) + k(13 \cdot 8 - 8 \cdot 13) = 13 \cdot (50 - 8k) + 8 \cdot (-50 + 13k)$ så den allmänna lösningen är $(x, y) = (50 - 8k, -50 + 13k)$ för varje $k \in \mathbb{Z}$.

För att $x, y \geq 0$ ska vi alltså ha $50 - 8k \geq 0 \wedge -50 + 13k \geq 0$ vilket är ekvivalent med $\frac{50}{13} \leq k \leq \frac{50}{8}$ och eftersom k ska vara ett heltal får vi $k \in \{4, 5, 6\}$. Dessa värden på k motsvarar de tre lösningarna $\{(18, 2), (10, 15), (2, 28)\}$

Svar: Alla lösningar ges av $(x, y) = (50 - 8k, -50 + 13k)$ för $k \in \mathbb{Z}$. De lösningar (x, y) där både $x \geq 0$ och $y \geq 0$ är $\{(18, 2), (10, 15), (2, 28)\}$

2. Hitta alla heltal x som löser följande ekvationssystem: [9p]

$$\begin{cases} x \equiv 3 \mod 4 \\ x \equiv 1 \mod 5 \\ x \equiv 6 \mod 9. \end{cases}$$

Eftersom $(n_1, n_2, n_3) = (4, 5, 9)$ är parvis relativt prima kommer systemet att ha en unik lösning modulo $N = n_1 n_2 n_3 = 180$ enligt kineskiska restsatsen. Vi använder formeln från kursen. Högerleden är $(a_1, a_2, a_3) = (3, 1, 6)$. Vi beräknar $N_1 = N/n_1 = 45$, $N_2 = N/n_2 = 36$, $N_2 = N/n_1 = 20$. Vi hittar nu inversen b_i till N_i i $\mathbb{Z}_{n_i}$: $b_1 \cdot N_1 \equiv 1 \pmod{n_1} \Leftrightarrow b_1 \cdot 45 \equiv 1 \pmod 4 \Leftrightarrow b_1 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 4$. Vi väljer därför $b_1 = 1$. Analogt får vi $b_2 \cdot 36 \equiv 1 \pmod 5 \Leftrightarrow b_2 \cdot 1 \equiv 1 \pmod 5$, så vi tar också $b_2 = 1$. Till slut har vi $b_3 \cdot 20 \equiv 1 \pmod 9 \Leftrightarrow b_3 \cdot 2 \equiv 1 \pmod 9$, så vi tar $b_3 = 5$.

Nu får vi en lösning till ekvationssystemet: $x = a_1 b_1 N_1 + a_2 b_2 N_2 + a_3 b_3 N_3 = 3 \cdot 1 \cdot 45 + 1 \cdot 1 \cdot 36 + 6 \cdot 5 \cdot 20 = 7711$. Reducerar vi modulo 180 får vi den minsta positiva lösningen $x = 51$. Enligt kinesiska restsatsen får vi:

svar: Alla heltalslösningar till ekvationen är $\{51 + 180k \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

3. Vi ska konstruera "ord" som kan formas av alla tolv bokstäverna i ordet [8p]

ERATOSTHENES

(a) Hur många olika ord kan bildas av alla tolv bokstäverna?
(Ett exempel på ett sådant ord är ESTNEEROSTAH)

(b) Hur många av orden i (a) innehåller ordet RETHOSTA?
(Ett exempel på ett sådant ord är NESRETHOSTAE)

(c) Hur många av orden i (a) innehåller *inget* av orden STOR eller HETSA?

(a) Bokstäverna kan skrivas i en sekvens på $12!$ vis. Lika bokstäver kan permuteras inom ordet, och vi har tre E, två T och två S. Vi får alltså $\frac{12!}{3!2!2!} = \frac{11!}{2}$ olika ord.

(b) Vi ska permutera de fem sybolerna RETHOSTA,E,E,N,S. Detta kan göras på $\frac{5!}{2!} = 60$ sätt eftersom det finns två E.

(c) Med samma metod som i (b) ser vi att $\frac{9!}{3!}$ ord innehåller STOR och $\frac{8!}{2!}$ ord innehåller HETSA. Vidare finns det $\frac{5!}{2!}$ ord som innehåller både STOR och HETSA. Enligt principen om inklusion och exklusion blir det sökta antalet ord $\frac{11!}{2} - \frac{9!}{6} - \frac{8!}{2} + \frac{5!}{2}$

---

4. Använd induktion för att visa att för varje heltal $m \geq 1$ så gäller [8p]

$$\sum_{k=1}^{2m} (-1)^k (2k+1) = 2m.$$

Vi kallar utsagan i uppgiften $P(m)$.
Bassteg: Tar vi $m = 1$ blir vänsterledet $\sum_{k=1}^{2} (-1)^k (2k+1) = -3 + 5 = 2$ vilket är samma som högerledet när $m = 1$. Alltså är $P(1)$ sann.

Induktionssteg: Vi antar att $P(n)$ är sann för något $n \geq 1$ och vi ska visa att $P(n+1)$ då också blir sann. Vänsterledet i $P(n+1)$ kan förenklas:
$\sum_{k=1}^{2n+2} (-1)^k (2k+1) = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k (2k+1) + \sum_{k=2n+1}^{2n+2} (-1)^k (2k+1) =$
$2n + (-1)^{2n+1}(2(2n+1)+1) + (-1)^{2n+2}(2(2n+2)+1) = 2n - (4n+3) + (4n+5) = 2(n+1)$ där vi i andra likheten använde induktionsantagandet $P(n)$. Alltså vänsterledel i $P(n+1)$ är lika med högerledet i $P(n+1)$ så $P(n+1)$ är sann. Alltså gäller $P(1)$ och $\forall n : P(n) \to P(n+1)$. Enligt induktionsprincipen håller påståendet $P(m)$ för alla värden på m.

---

5. Vi definierar en relation $\sim$ på de naturliga talen $\mathbb{N}$ enligt $x \sim y \Leftrightarrow x^2 \geq y$. Då gäller exempelvis $3 \sim 5$ eftersom $3^2 \geq 5$. För var och en av utsagorna nedan, ange om den är sann eller falsk. Motivera svaren mycket kortfattat. Kvantorerna nedan refererar till universumet bestående av alla naturliga tal $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$. [8p]

(a) $\forall x : \forall y : x \sim y$

(b) $\exists y : \forall x : x \sim y$

(c) $\forall x : \exists y : x \not\sim y$

(d) $\forall z : z^2 \sim z^3$

(e) Relationen $\sim$ är reflexiv

(f) Relationen $\sim$ är symmetrisk

(g) Relationen $\sim$ är antisymmetrisk

(h) Relationen $\sim$ är transitiv

(a) Falskt, tag t.ex. $x = 0$ och $y = 1$.

(b) Sant, tag t.ex. $y = 0$.

(c) Sant, för varje x kan vi ta $y = x^2 + 1$

(d) Sant, $0 \geq 0$ och $z^4 \geq z^3 \Leftrightarrow z \geq 1$ då $z \neq 0$

(e) Sant, $x^2 \geq x$ för naturliga tal x

(f) Falskt, $1 \sim 0$ men $0 \not\sim 1$ exempelvis

(g) Falskt, t.ex. gäller $2 \sim 3$ och $3 \sim 2$ men $2 \neq 3$.

(h) Falskt, t.ex. gäller $2 \sim 3$ och $3 \sim 5$ men $2 \not\sim 5$

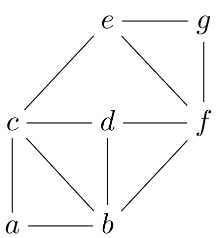
6. Låt G vara grafen med nodmängd $V = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ och kantmängd $E = \{\{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{b, f\}, \{c, d\}, \{c, e\}, \{d, f\}, \{e, f\}, \{e, g\}, \{f, g\}\}$. Kanterna saknar alltså riktning. [8p]

(a) Rita grafen G så att inga kanter korsar varandra.

(b) Hitta en Hamiltoncykel i G.

(c) Hitta en Eulerväg i G.

(a)



(b) Exempelvis $a - b - d - f - g - e - c - a$

(c) Exempelvis $e - g - f - e - c - a - b - c - d - b - f - d$

---

7. Kom ihåg att mängden $\mathbb{R}^2$ består av alla ordnade par (x, y) av reella tal. Vi definierar en binär operation $\star$ på $\mathbb{R}^2$ enligt följande: [10p]

$$(a, b) \star (c, d) = (a + c, b \cdot d)$$

(a) Är operationen $\star$ associativ? Är den kommutativ?

(b) Finns det ett identitetselement? I så fall vilket?

(c) Vilka element i $\mathbb{R}^2$ har inverser?

(d) Hitta alla $X \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller $\big((2, 1) \star X\big) \star (3, 7) = (1, 5)$

(e) Hitta alla $X \in \mathbb{R}^2$ som uppfyller $X \star X = X$

(a) $((a, b) \star (c, d)) \star (e, f) = (a + c + e, b \cdot d \cdot f) = (a, b) \star ((c, d) \star (e, f))$ så operationen är associativ. $(a, b) \star (c, d) = (a + c, b \cdot d) = (c, d) \star (a, b)$ så operationen är också kommutativ. (Egenskaperna följer från motsvarande egenskaper för addition och multiplikation).

(b) Ja $(0, 1)$ är identitetselement eftersom $(0, 1) \star (a, b) = (a + 0, 1 \cdot b) = (a, b) = (a, b) \star (0, 1)$ för alla $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

(c) Alla element (a, b) där $b \neq 0$ har en invers, nämligen $(-a, \frac{1}{b})$.

(d) Med $X = (x, y)$ blir ekvationen $(2 + x + 3, 1 \cdot y \cdot 7) = (1, 5)$. Detta ger den enda lösningen $(x, y) = (-4, \frac{5}{7})$.

(e) Med $X = (x, y)$ blir ekvationen $(x + x, y^2) = (x, y)$. Detta ger $x = 0$ och $y \in \{0, 1\}$. Ekvationen har alltså två lösningar: $X = (0, 0)$ och $X = (0, 1)$.