Tentamen
TMV210 Inledande Diskret Matematik, D1/DI2

2017-10-21 kl. 14.00–18.00

Examinator: Peter Hegarty, Matematiska vetenskaper, Chalmers

Telefonvakt: Jonatan Kallus (alt. Peter Hegarty), telefon: 0317725325 (alt. 0705705475)

Hjälpmedel: Inga hjälpmedel, ej heller räknedosa

För godkänt på tentan krävs 21 poäng, inklusive bonus från kryssuppgifterna under HT-2017. Preliminärt så krävs 31 poäng för betyget 4 och 41 poäng för betyget 5. Dessa gränser kan minskas men inte höjas i efterhand.

Lösningar läggs ut på kursens webbsida direkt efter tentamen. Tentan rättas och bedöms anonymt. Resultatet meddelas senast den 13 november. Första granskningstillfälle meddelas på kurswebbsidan och via Ping Pong, efter detta sker granskning enligt överenskommelse med kursansvarig.
Dessutom granskning alla vardagar utom onsdagar 11-13, MV:s exp.

OBS!

Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret.

Uppgifterna

1. Avgör om följande argument är giltigt eller ej. Motivera väl ! (3p)

$$\begin{array}{r} p \to \neg r \\ \neg s \wedge \neg t \to r \\ \neg(\neg p \wedge \neg q) \\ \neg r \wedge t \to s \\ \neg q \vee s \\ -------- \\ s \end{array}$$

2. Låt $\mathcal{R}$ vara följande relation på $\mathbb{Z}$: (3p)

$$\mathcal{R} = \{(a, b) \in \mathbb{Z}^2 : ab \geq 0\}.$$

Vilken/vilka av de tre egenskaperna reflexivitet, symmetri och transitivitet har $\mathcal{R}$? Motivera väl !

3. (a) Låt $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ vara talföljden som definieras rekursivt enligt följande regel: (2p)

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_n = \sqrt{a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2}\ \forall\, n \geq 3.$$

Beräkna a_3 och a_4.

(b) Låt $(b_n)_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden som definieras rekursivt enligt (5p)

$$b_0 = 1, \quad b_1 = 9, \quad b_{n+2} = 6b_{n+1} - 9b_n\ \forall\, n \geq 0.$$

Bevisa, via induktion eller på något annat vis, att $b_n = (2n+1) \cdot 3^n$ för alla $n \geq 0$.

Var god vänd!

4. (a) Bestäm, för den Diofantiska ekvationen

$$19x + 49y = 2000,$$

i. den allmänna lösningen. (3p)

ii. alla lösningarna där både $x \geq 0$ och $y \geq 0$. (2p)
(TIPS: $49 \times 735 = 36015$).

(b) Bestäm den allmänna lösningen samt den minsta positiva lösningen till kongruensen (3p)

$$38x \equiv 14 \pmod{98}.$$

5. (a) Bestäm $\Phi(936)$. (3p)

(b) Bestäm $1883^{2883} \pmod{936}$. (3p)

(c) Bestäm $1885^{2883} \pmod{936}$. (3p)

OBS! För full poäng ska svaren i (b) och (c) vara heltal i intervallet [0, 935].

6. Hackesat TV har i sitt utbud 6 sportkanaler, 6 musikkanaler, 7 filmkanaler och 8 nyhetskanaler. De erbjuder två olika fastprispaket till sina kunder: (8p)

Paket A (enkel): 6 valfria kanaler.

Paket B (deluxe): 8 valfria kanaler, av vilka tre designeras som ens 1:a, 2:a och 3:e favoriter (dessa kommer med extra rättigheter som vi inte behöver gå in på ...).

(a) Hur många olika paket av typ A kan en kund beställa ?

(b) Hur många möjligheter finns det för ett paket av typ A om vi bara tar hänsyn till antalet kanaler av varje kategori, inte till de exakta kanalerna som väljs ?

(c) Hur många olika paket av typ B finns det ?

(d) Hur många paket av typ A finns det där minst 4 sportkanaler ingår ?

(e) Om sex olika kunder väljer varsitt paket, hur många möjligheter finns det för deras sammanlagda val om vi vet att tre st har valt typ A och tre st har valt typ B ? (OBS! Kunderna är åtskiljbara).

OBS! För full poäng ska man ange svaret i (b) som ett explicit bas-10 tal. Detta behövs ej i de övriga deluppgifterna.
OBS! I deluppgifter (c), (d) och (e) gäller samma förutsättningar som i (a), dvs det spelar roll exakt vilka kanaler som väljs.

7. (a) Skriv ner grannmatrisen för den riktade grafen med öglor i Figur 1. (2p)

(b) Låt G vara den oriktade grafen utan öglor som man får då man tar bort öglorna och pilarna i Figur 1. Ange både en Hamiltonväg och en Eulerväg i G. (2p)

(c) Ange en isomorfi mellan graferna i Figur 2, dvs numrera noderna $1-6$ i båda graferna på ett lämpligt vis. (2p)

8. (a) Beskriv, för varje $n \in \mathbb{Z}_+$, ett exempel på en enkel graf som har $2n$ noder, n^2 kanter och inga trianglar. (1p)

(b) Bevisa att om $G = (V, E)$ är en enkel graf med $2n$ noder och fler än n^2 kanter, så måste G innehålla en triangel. (5p)
(TIPS: Betrakta $\sum_{\{v,w\} \in E}(d_v + d_w)$. Du får använda, utan motivering, den s.k. *Cauchy-Schwarz olikheten:* För godtyckliga reella tal $x_1, \ldots, x_k$, så gäller att $\sum_{i=1}^k x_i^2 \geq \frac{1}{k}\left(\sum_{i=1}^k x_i\right)^2$).

Lycka till!

Lösningar Inledande Diskret Matematik D1/DI2, 171021

1. Argumentet är giltigt. Vi för ett motsägelsebevis.

Antag att slutsatsen är falsk men alla hypoteserna sanna. Så $s = 0$. Då är $q = 0$ enligt H5. H3 är logiskt ekvivalent med $p \vee q$, så vi härleder att $p = 1$. Då är $r = 0$ enligt H1. Eftersom $\neg s$ är sann och r falsk, så måste $\neg t$ vara falsk om H2 ska stämma. Alltså $t = 1$. Men nu har vi en motsägelse till H4, ty $\neg r = t = 1$ men $s = 0$.

2. *Reflexivitet*: $a\mathcal{R}a \Leftrightarrow a^2 \geq 0$, vilket ju stämmer för alla $a \in \mathbb{Z}$. Så $\mathcal{R}$ är reflexiv.
Symmetri: $a\mathcal{R}b \Leftrightarrow ab \geq 0 \Leftrightarrow ba \geq 0 \Leftrightarrow b\mathcal{R}a$. Så $\mathcal{R}$ är symmetrisk.
Transitivitet: $\mathcal{R}$ är inte transitiv. Antag att $a < 0$, $b = 0$ och $c > 0$. Då stämmer det att $(a\mathcal{R}b) \wedge (b\mathcal{R}c)$, ty $ab = bc = 0$. Men $(a, c) \notin \mathcal{R}$ ty $ac < 0$.

3. (a)

$$n = 3: \; a_3 = \sqrt{a_2^2 + a_1^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5},$$
$$n = 4: \; a_4 = \sqrt{a_3^2 + a_2^2} = \sqrt{(\sqrt{5})^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3.$$

(b) *Steg 1:* Basfallen $n = 0, 1$ måste kontrolleras:

$$n = 0: \; (2 \cdot 0 + 1) \cdot 3^0 = 1 \cdot 1 = 1 = b_0, \text{ stämmer,}$$
$$n = 1: \; (2 \cdot 1 + 1) \cdot 3^1 = 3 \cdot 3 = 9 = b_1, \text{ stämmer.}$$

Steg 2: Induktionssteget. Låt $P(n)$ vara påståendet att $b_n = (2n + 1) \cdot 3^n$. Vi behöver visa att $(P(n) \wedge P(n + 1)) \Rightarrow P(n + 2)$, för godtyckligt $n \geq 0$. Antag alltså att

$$b_n = (2n + 1) \cdot 3^n, \text{ samt att } b_{n+1} = (2(n + 1) + 1) \cdot 3^{n+1} = (2n + 3) \cdot 3^{n+1}. \tag{1}$$

Vi måste härleda att

$$b_{n+2} = (2(n + 2) + 1) \cdot 3^{n+2} = (2n + 5) \cdot 3^{n+2}. \tag{2}$$

Enligt rekursionen och (1) har vi

$$b_{n+2} = 6b_{n+1} - 9b_n = 6(2n + 3) \cdot 3^{n+1} - 9(2n + 1) \cdot 3^n = 3^n[3 \cdot 6(2n + 3) - 9(2n + 1)] =$$
$$= 3^n[18n + 45] = 3^n \cdot 9(2n + 5) = 3^n \cdot 3^2(2n + 5) = 3^{n+2} \cdot (2n + 5), \text{ v.s.v.}$$

4. (a) i. Vi kör Euklides algoritm på (49, 19). Först framåt:

$$\begin{aligned} 49 &= 2 \cdot 19 + 11, \\ 19 &= 1 \cdot 11 + 8, \\ 11 &= 1 \cdot 8 + 3, \\ 8 &= 2 \cdot 3 + 2, \\ 3 &= 1 \cdot 2 + 1. \end{aligned}$$

I detta läge vet vi att SGD(49, 19) $= 1$ och eftersom 1 delar 2000, så har den Diofantiska ekvationen en lösning. Euklides bakåt ger

$$\begin{aligned} 1 &= 3 - 2 \\ &= 3 - (8 - 2 \cdot 3) \\ &= 3 \cdot 3 - 8 \\ &= 3(11 - 8) - 8 \\ &= 3 \cdot 11 - 4 \cdot 8 \\ &= 3 \cdot 11 - 4(19 - 11) \\ &= 7 \cdot 11 - 4 \cdot 19 \\ &= 7(49 - 2 \cdot 19) - 4 \cdot 19 \\ &= -18 \cdot 19 + 7 \cdot 49. \end{aligned}$$

Alltså,

$$1 = -18 \cdot 19 + 7 \cdot 49. \tag{3}$$

Multiplicera igenom med 2000 så har vi vår baslösning

$$2000 = -36000 \cdot 19 + 14000 \cdot 49,$$

dvs $x_0 = -36000$, $y_0 = 14000$. Den allmänna lösningen lyder

$$x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right) n = -36000 + 49n,$$
$$y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right) n = 14000 - 19n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

ii. Från tipset ser vi att det minsta värdet av n för vilket x blir positiv är $n = 735$, som ger $x = 15$. Motsvarande värdet på y är kanske lättast att beräkna genom insättning i ekvationen: $y = \frac{1}{49}(2000 - 19 \cdot 15) = 35$. Så för $n = 735$ har vi den positiva lösningen $x = 15$, $y = 35$. Ökar vi till $n = 736$ så ökas x med 49 medan y minskas med 19. Så vi får då en till positv lösning: $x = 64$, $y = 16$. Ökar vi n ytterligare så blir y negativ.
SLUTSATS: Det finns två positiva lösningar: (15, 35) och (64, 16).

(b) Det är nog enklast att primtalsfaktorisera allt i sikte:

$$38 = 2 \cdot 19, \quad 14 = 2 \cdot 7, \quad 98 = 2 \cdot 7^2.$$

Så SGD(38, 98) = 2 och eftersom 2 delar 14 så är kongruensen lösbar och är ekvivalent med kongruensen

$$19x \equiv 7 \pmod{49}.$$

Lösningen till detta är $x \equiv 19^{-1} \cdot 7 \pmod{49}$. Från (3) ser vi att $19^{-1} \equiv -18 \pmod{49}$. Så $x \equiv -18 \cdot 7 = -126 \equiv -28 \equiv 21 \pmod{49}$.

5. (a)

$$\Phi(936) = \Phi(2^3 \cdot 3^2 \cdot 13) = (2^3 - 2^2)(3^2 - 3^1)(13 - 1) = 4 \cdot 6 \cdot 12 = 288.$$

(b) Notera att $1883 = 2 \cdot 936 + 11$ och $2883 = 10 \cdot 288 + 3$. Eftersom SGD(11, 936) = 1 så medför Eulers sats att

$$1883^{2883} \equiv 11^3 = 1331 \equiv 395 \pmod{936}.$$

(c) $1885 \equiv 13 \pmod{936}$ och eftersom SGD(13, 936) = 13 > 1 så kan vi inte använda Eulers sats direkt. I stället sätt $x := 13^{2883} \pmod{936}$ och betrakta först x separat modulo 2^3, 3^2 och 13.
Mod 8*:* $13^{2883} \equiv 5^{2883} \equiv (5^2)^{1441} \cdot 5^1 \equiv 1^{1441} \cdot 5 \equiv 5$.
Mod 9*:* $13^{2883} \equiv 4^{2883} \equiv (4^3)^{961} \equiv 1^{961} \equiv 1$.
Mod 13*:* $13^{2883} \equiv 0^{2883} \equiv 0$.

Så vi söker lösningen till systemet av kongruenser:

$$x \equiv 5 \pmod{8}, \quad x \equiv 1 \pmod{9}, \quad x \equiv 0 \pmod{13}.$$

Lösningen är

$$x \equiv 5 \cdot (9 \cdot 13 \cdot b_1) + 1 \cdot (8 \cdot 13 \cdot b_2) \pmod{936}, \tag{4}$$

där

$$9 \cdot 13 \cdot b_1 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 5b_1 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow \text{tag } b_1 = 5,$$
$$8 \cdot 13 \cdot b_2 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow -4b_2 \equiv 1 \pmod{9} \Rightarrow \text{tag } b_2 = 2.$$

Insättning in i (4) ger

$$x \equiv 5 \cdot 9 \cdot 13 \cdot 5 + 8 \cdot 13 \cdot 2 \pmod{936} \equiv$$
$$\equiv 13(225 + 16) = 13 \cdot 241 = 13(3 \cdot 72 + 25) \equiv 13 \cdot 25 \equiv 325 \pmod{936}.$$

6. (a) Det finns totalt $6+6+7+8=27$ kanaler att välja på och man ska välja 6 av dem. Antalet möjligheter är således $\binom{27}{6}$.

(b) Låt x_1, x_2, x_3 resp. x_4 vara antalet sportkanaler, musikkanaler, filmkanaler resp. nyhetskanaler som väljs. Då gäller att varje $x_i \in \mathbb{N}$ och $x_1+x_2+x_3+x_4=6$. Eftersom det finns minst 6 kanaler i varje kategori så finns det inga ytterligare begränsingar på de x_i. Antalet lösningar till ekvationen sammanfaller alltså med antalet möjligheter för paketet och ges av $\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 84$.

(c) Det finns 27 val för 1:a favoriten, sedan 26 val för 2:a favoriten, sedan 25 val för 3:e favoriten, sedan $\binom{24}{5}$ val för de resterande fem kanalerna. Antalet möjligheter för paketet är således, enligt multiplikationsprincipen, $27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot \binom{24}{5}$.

(Anmärkning: Man kan i stället tänka att man först väljer ut de åtta kanalerna, sedan väljer ut de tre favoriterna ur dessa. Detta angreppssätt skulle leda till formeln $\binom{27}{8} \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6$. Man kan kontrollera att det blir samma som ovan.)

(d) Om paketet innehåller k sportkanaler och $6-k$ övriga kanaler så finns det $\binom{6}{k}$ val för sportkanalerna och $\binom{21}{k}$ val för övriga kanaler. Enligt additions- och multiplikationsprinciperna härleder vi att antalet möjligheter för paketet under givna förutsättningar är

$$\binom{6}{4}\binom{21}{2} + \binom{6}{5}\binom{21}{1} + \binom{6}{6}\binom{21}{0} = \cdots = 3277.$$

(e) Låt n_A (resp. n_B) vara antalet möjligheter för ett paket av typ A (resp. typ B). Notera att n_A och n_B har redan beräknats i deluppgifter (a) resp. (c). Om nu sex kunder ska välja varsitt paket och vi vet att exakt tre av dem valde typ A, så ges antalet möjligheter för det sammanlagda valet, enligt multiplikationsprincipen, av

$$\binom{6}{3} \cdot n_A^3 \cdot n_B^3 = 20 \cdot \binom{27}{6}^3 \cdot \left[27 \cdot 26 \cdot 25 \cdot \binom{24}{5}\right]^3.$$

7. (a)

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Ett exempel på en Hamiltonväg är

$$1 \to 2 \to 5 \to 7 \to 4 \to 3 \to 6.$$

Notera att endast noderna 1 och 2 har udda grad, så en Eulerväg måste gå mellan dessa två. Ett exempel på en Eulerväg är

$$1 \to 3 \to 1 \to 2 \to 4 \to 2 \to 5 \to 7 \to 4 \to 3 \to 6 \to 7 \to 2.$$

(c) Se Figur L.2.

8. (a) Den kompletta bipartita grafen $K_{n,n}$ har den egenskapen.

(b) Å ena sidan, eftersom G inte har några trianglar, om $\{v, w\}$ är en kant i G så kan inte v och w ha någon gemensam granne. Enligt lådprincipen medför detta att $d_v + d_w \leq 2n$, ty G har totalt $2n$ noder. Således gäller att

$$\sum_{\{v,w\} \in E} (d_v + d_w) \leq 2n \cdot |E|. \tag{5}$$

Å andra sidan, för varje $v \in V$ så är v en nod i exakt d_v olika kanter, så d_v kommer att finnas med i d_v olika termer i summan. Således är

$$\sum_{\{v,w\} \in E} (d_v + d_w) = \sum_{v \in V} d_v^2. \tag{6}$$

Nu tillämpar vi Cauchy-Schwarz (kom ihåg att G har $2n$ noder):

$$\sum_{v \in V} d_v^2 \geq \frac{1}{2n} \left(\sum_{v \in V} d_v \right)^2. \tag{7}$$

Men enligt Sats 7.3 i boken är

$$\sum_{v \in V} d_v = 2 \cdot |E|. \tag{8}$$

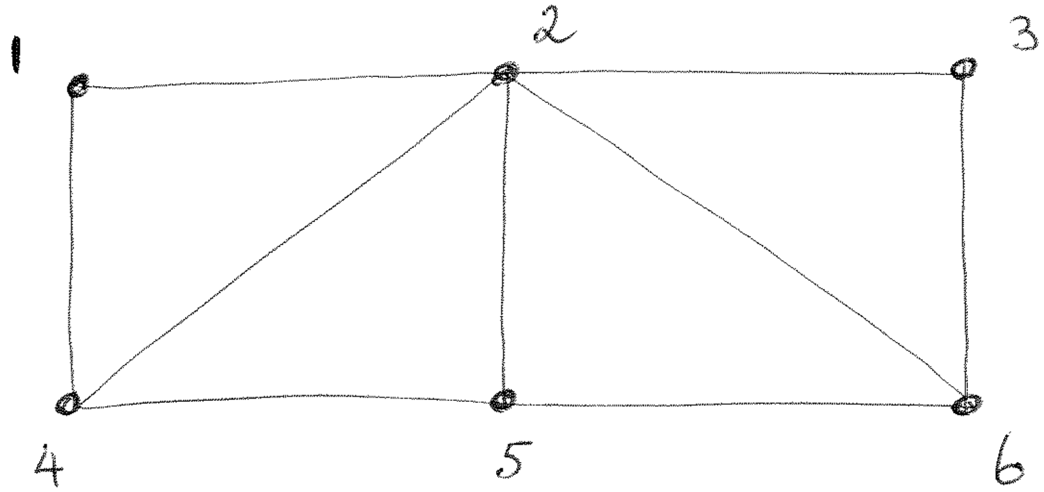
Från (6), (7) och (8) härleder vi att

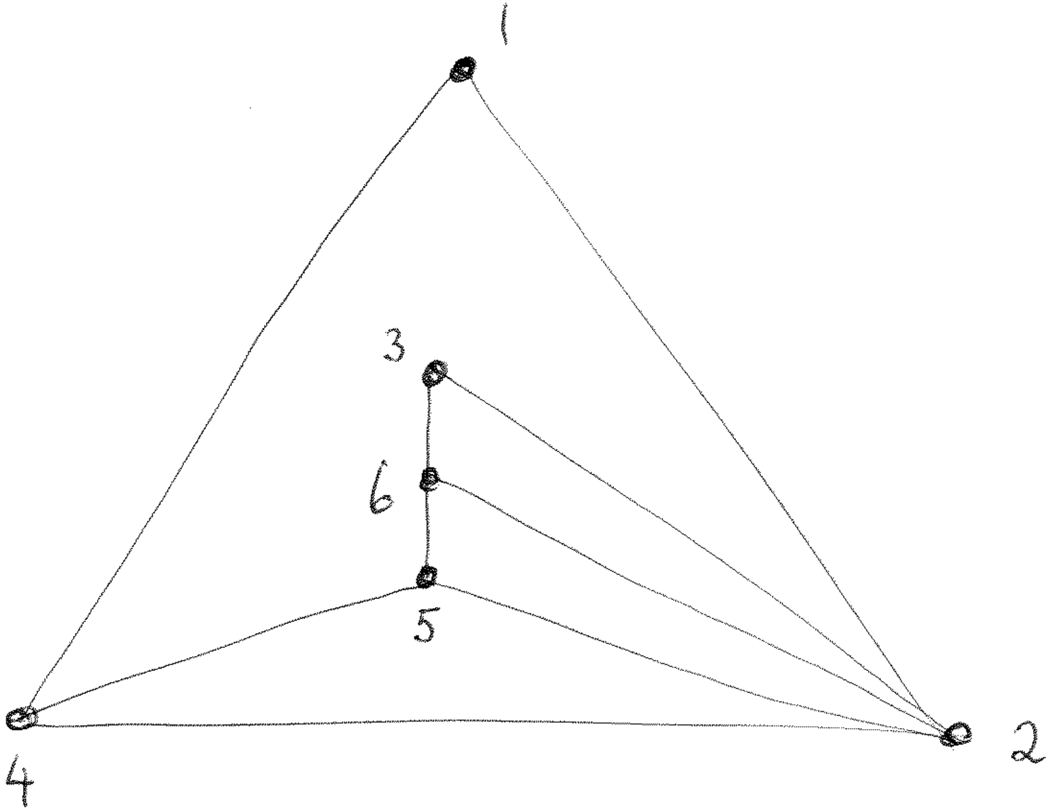
$$\sum_{\{v,w\} \in E} (d_v + d_w) \geq \frac{(2 \cdot |E|)^2}{2n} = \frac{2 \cdot |E|^2}{n}. \tag{9}$$

Då medför (5) och (9) att

$$\frac{2 \cdot |E|^2}{n} \leq 2n \cdot |E| \Rightarrow \cdots \Rightarrow |E| \leq n^2, \quad \text{v.s.v.}$$

Figur L. 2





Figur 2