Cours spécifique de Magistère

Chapitre 1

Le lemme de Baire

Théorème 1 (lemme de Baire, 1905). *Soit (X, d) un espace métrique complet, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ouverts denses de X.*

Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est encore dense.

Il en existe un énoncé équivalent portant sur les fermés :

Théorème 2. *Soit (X, d) un espace métrique complet, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fermés d'interieurs vides.*

Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est aussi d'intérieur vide.

Montrons qu'ils sont équivalents :

1.

$$\begin{array}{rcl} A \subset X & & \text{A dense dans X} \\ & \stackrel{\text{def}}{\iff} & (A \subset F, F \text{ fermé de } X \implies F = X) \\ & \iff & \left({}^C F \subset {}^C A, {}^C F \text{ ouvert de } X \implies {}^C F = \varnothing\right) \\ & \iff & \text{tout ouvert inclus dans } {}^C A \text{ est vide} \\ & \stackrel{\text{def}}{\iff} & {}^C A \text{ est d'intérieur vide} \end{array}$$

2. ${}^C\left(\bigcap A_n\right) = \bigcup {}^C A_n$

Remarque. — *X complet*

— $X = \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$

— $\bigcup_{\mathbb{N}}$ *ou* $\bigcap_{\mathbb{N}}$ *dénombrable*

— $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$\varnothing = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

Démonstration. (X, d) complet, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $V \subset X$ un ouvert non vide de X.

On va construire, par approximation successives un point $\alpha \in V \cap \left(\bigcap_{\mathbb{N}} U_n\right)$

L'ouvert U_0 est dense donc $V \cap U_0$ est un ouvert non vide donc contient une $B(a_0, R_0), R_0 > 0$.

On choisit $r_0 < R_0$, $r_9 \leq 1$.

$$B_f(a_0, r_0) \subset B(a_0, R_0) \subset V \cap U_0$$

À l'étape $p \in \mathbb{N}$ on avait construit $0 < r_p < 2^{-p}$ un point $a_p \in X$ tel que :

$$B_f(a_p, r_p) \subset V \cap (U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_p)$$

□