# Cours spécifique de Magistère

# Chapitre 1

# Le lemme de Baire

**Théorème 1** (lemme de Baire, 1905)**.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique complet, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dénombrable d'ouverts denses de $X$.*

*Alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ est encore dense.*

Il en existe un énoncé équivalent portant sur les fermés :

**Théorème 2.** *Soit $(X, d)$ un espace métrique complet, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des fermés d'interieurs vides.*

*Alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est aussi d'intérieur vide.*

Montrons qu'ils sont équivalents :

1.

$$\begin{array}{rcl} A \subset X & & \text{A dense dans X} \\ & \stackrel{\text{def}}{\iff} & (A \subset F, F \text{ fermé de } X \implies F = X) \\ & \iff & \left({}^C F \subset {}^C A, {}^C F \text{ ouvert de } X \implies {}^C F = \varnothing\right) \\ & \iff & \text{tout ouvert inclus dans } {}^C A \text{ est vide} \\ & \stackrel{\text{def}}{\iff} & {}^C A \text{ est d'intérieur vide} \end{array}$$

2. ${}^C\left(\bigcap A_n\right) = \bigcup {}^C A_n$

**Remarque.** — *$X$ complet*

— $X = \mathbb{Q} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}$

— $\bigcup_{\mathbb{N}}$ *ou* $\bigcap_{\mathbb{N}}$ *dénombrable*

— $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

$\varnothing = \mathbb{Q} \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$

*Démonstration.* $(X, d)$ complet, $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Soit $V \subset X$ un ouvert non vide de $X$.

On va construire, par approximation successives un point $\alpha \in V \cap \left(\bigcap_{\mathbb{N}} U_n\right)$

L'ouvert $U_0$ est dense donc $V \cap U_0$ est un ouvert non vide donc contient une $B(a_0, R_0), R_0 > 0$.

On choisit $r_0 < R_0$, $r_9 \leq 1$.

$$B_f(a_0, r_0) \subset B(a_0, R_0) \subset V \cap U_0$$

À l'étape $p \in \mathbb{N}$ on avait construit $0 < r_p < 2^{-p}$ un point $a_p \in X$ tel que :

$$B_f(a_p, r_p) \subset V \cap (U_0 \cap U_1 \cap \cdots \cap U_p)$$

$$*B(a_p, r_p) \cup \underbrace{U_{p+1}}_{\text{ouvert dense}} = \text{ouvert non vide}$$

Comme en $p = 0$, on récupère $0 < r_{p+1} \leq 2^{-(p+1)}$, un point $a_{p+1} \in X$ avec

$$B_f(a_{p+1}, r_{+1}) \subset B(a_p, r_p) \cap U_{p+1} \subset V \cap (U_0 \cap \cdots \cap U_{p+1})$$

On constate que $d(a_p, a_{p+1}) \leq 2^{-p}$.

Par inégalité triangulaire et $\sum 2^{-p} < \infty$, on a que $(a_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $X$. Comme $X$ est complet, cette suite converge vers $\alpha \in X$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$, pour tous $p \geq n$, $a_p \in B_f(a_n, r_n) \subset V \cap (U_0 \cap \cdots \cap U_n)$. Donc $\alpha = \lim_{p \to +\infty} a_p \in B_f(a_n, r_n) \subset V \cap (U_0 \cap \cdots \cap U_n)$ i.e. $\forall n \in \mathbb{N}, \alpha \in V \cap (U_0 \cap \cdots \cap U_n)$, donc finalement :

$$\alpha \in V \cap \left( \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right)$$

$\square$