1. Найти расстояние между началом координат и кривой $x_2 = 1/x_1^2$.
2. Среди всех прямоугольных параллелепипедов, сумма ребер которых имеет заданную длину $l$, найти параллелепипед наибольшего объема.
3. Данное положительное число $a$ представить в виде суммы $n$ положительных слагаемых так, чтобы сумма их квадратов была наименьшей.
4. Каковы должны быть размеры прямоугольного бассейна данного объема $V$, при которых на облицовку боковой поверхности и дна потребуется наименьшее количество материала?
5. Среди всех вписанных в данный круг радиуса $R$ прямоугольников найти тот, площадь которого наибольшая.
6. Среди треугольных пирамид с заданным основанием и высотой найти ту, которая имеет наименьшую площадь боковой поверхности.
7. Среди цилиндров, вписанных в единичный шар, найти цилиндр с максимальным объемом (*задача Кеплера*)[1].
8. На данной прямой найти точку $C$, чтобы сумма расстояний от $C$ до точек $A$ и $B$, лежащих по одну сторону от прямой, была минимальной (*задача Герона*).
9. Даны угол и точка внутри него. Через эту точку провести прямую, отсекающую от угла треугольник наименьшей площади.
10. Найти расстояние от точки до эллипса. Сколько нормалей можно провести из точки к эллипсу (*задача Апполония*)?
11. Каковы должны быть размеры открытого сверху цилиндрического бака максимальной вместимости, если для его изготовления отпущено $27\pi$ м$^2$ материала?
12. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна его ширине $b$ и квадрату высоты $h$. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно вырезать из бревна радиусом $2\sqrt{3}$ м.
13. Требуется изготовить закрытый цилиндрический бак вместимостью $16\pi$ м$^3$. Каковы должны быть размеры бака, чтобы на его изготовление пошло наименьшее количество материала?
14. Найти высоту конуса наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса $R$.
15. Найти стороны прямоугольного параллелепипеда наибольшего объема, вписанного в эллипсоид $\dfrac{x_1^2}{a^2} + \dfrac{x_2^2}{b^2} + \dfrac{x_3^2}{c^2} = 1$, с ребрами, параллельными осям координат.
16. Вырезанный из круга сектор с центральным углом $\alpha$ и площадью $S$ свернут в коническую поверхность. При каком значении угла $\alpha$ объем полученного конуса будет наибольшим?
17. В данный треугольник $ABC$ вписать параллелограмм $ADEF$ ($DE \| AC$, $FE \| AB$) наибольшей площади (*задача Евклида*).
18. Найти высоту $H$ цилиндра наибольшего объема, который можно вписать в шар радиуса $R$.
19. Требуется изготовить коническую воронку с образующей, равной 20 см. Какой должна быть высота воронки, чтобы ее объем был наибольшим?
20. Полотняный шатер объемом $V$ имеет форму кругового конуса. Каково должно быть отношение высоты конуса к радиусу основания, чтобы на шатер пошло наименьшее количество полотна?
21. Проволокой, длина которой $l$ м, необходимо огородить клумбу, имеющую форму кругового сектора. Каким должен быть радиус круга, чтобы площадь клумбы была наибольшей?

---

[1] Эта задача была поставлена и решена геометрически Кеплером в 1615 г. в “Стереометрии винных бочек”.

22. Определить наибольшую площадь прямоугольника, вписанного в полукруг радиусом $a$, со стороной, лежащей на диаметре.
23. С корабля, который стоит на якоре в 9 км от берега, нужно послать гонца в лагерь, расположенный на берегу в 15 км от ближайшей к кораблю точке берега. Скорость посыльного при движении пешком 5 км/ч, а на лодке — 4 км/ч. В каком месте он должен пристать к берегу, чтобы попасть в лагерь за кратчайшее время?
24. Найти прямоугольный треугольник наибольшей площади, если задана сумма длин его катетов (*задача Ферма*).
25. Найти в плоскости такую точку, чтобы сумма расстояний от нее до трех заданных точек была минимальной (*задача Штейнера*).
26. Свет, исходящий из точки $A$ и попадающий в точку $B$, распространяется по траектории, для прохождения которой требуется минимум времени (*принцип Ферма*). Точки $A$ и $B$ расположены в различных оптических средах, разделенных плоскостью. В первой среде скорость распространения света $v_1$, а во второй — $v_2$. Вывести закон преломления света, т. е. прохождение его из $A$ в $B$ (*задача Снеллиуса*).
27. Среди шаровых сегментов с заданной площадью сферической поверхности найти тот, объем которого наибольший (*задача Архимеда*).
28. Найти наименьшее значение суммы $a^2 + b^2$, если $a$ и $b$ — числа, при которых уравнение $x^4 + ax^3 + bx^2 + ax + 1 = 0$ имеет хотя бы один действительный корень.

**9.3.** Решить задачу

$$f(x) = ax_1^2 + 2x_1x_2 + bx_2^2 \to \min(\max),$$
$$g(x) = 4x_1^2 + cx_2^2 - 9 = 0,$$

где числа $a, b, c$ заданы в табл. 9.1.