№5.18 $((6+4) \bmod 20)+1$

$$X = \{x:\ 2x_1^2 + (-\tfrac{1}{2})x_1x_2 + (-3)x_2^2 \le 0,\ x_2 \ge 0\} \quad (1)$$

Решение

$\forall \lambda \ge 0:$

$$2\lambda^2x_1^2 - \tfrac{1}{2}\lambda^2x_1x_2 - 3\lambda^2x_2^2 = \overset{\ge 0}{\lambda^2}\overset{\le 0}{(2x_1^2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 - 3x_2^2)} \le 0$$

$\lambda x_2 \ge 0$, т.к. $\lambda \ge 0$ и $x_2 \ge 0$

Возьмём $\forall\ x(x_1;x_2)$, $y(y_1;y_2)$ и преобразуем (1):

$$\cancel{2(x_1+y_1)^2 - \tfrac{1}{2}(x_1+y_1)(x_2+y_2) - 3(x_2+y_2)^2 = 2x_1^2 + \underline{4x_1y_1} + 2y_1^2 - \tfrac{1}{2}x_1x_2 -}$$

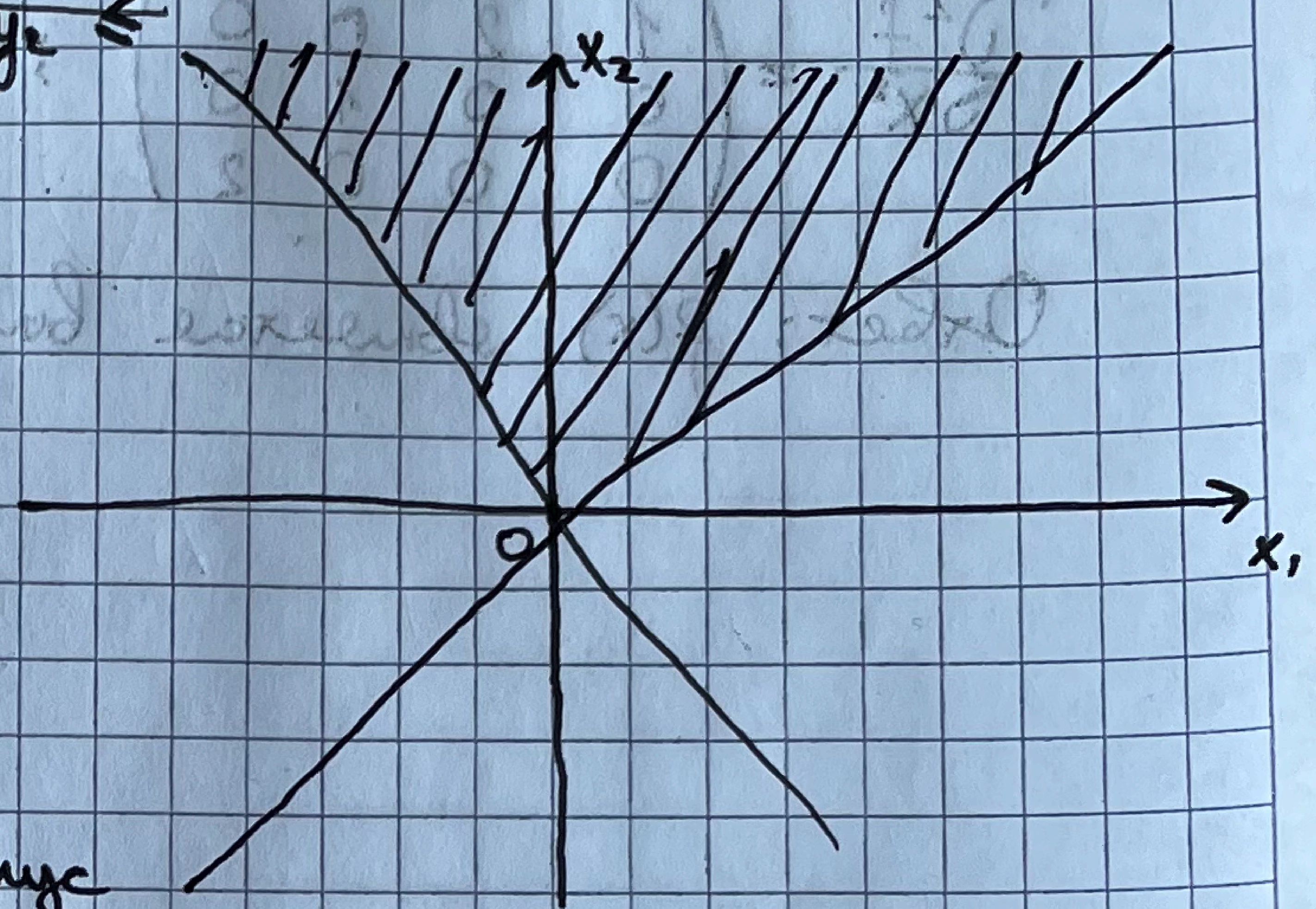
$$\cancel{-\underline{\tfrac{1}{2}y_1x_2} - \underline{\tfrac{1}{2}x_1y_2} - \tfrac{1}{2}y_1y_2 - 3x_2^2 - \underline{6x_2y_2} - 3y_2^2 \le 4x_1y_1 - \tfrac{1}{2}y_1x_2 - \tfrac{1}{2}x_1y_2 -}$$

$$\cancel{-6x_2y_2 \le 8x_1y_1 - y_1x_2 - x_1y_2 - 12x_2y_2 \le}$$

$$4x_1^2 - x_1x_2 - 6x_2^2 \le 0$$

$$4\left(x_1 - \frac{x_2(1+\sqrt{97})}{8}\right)\left(x_1 - \frac{x_2(1-\sqrt{97})}{8}\right) \le 0$$

$+$ $\quad \frac{x_2(1-\sqrt{97})}{8} \quad - \quad \frac{x_2(1+\sqrt{97})}{8} \quad +$ $\quad x_1$



$$\begin{cases} x_1 \le \dfrac{x_2(1+\sqrt{97})}{8} \\ x_1 \ge \dfrac{x_2(1-\sqrt{97})}{8} \end{cases} \Rightarrow \text{подставим } x \text{ и } y:$$

$$\begin{cases} x_1+y_1 \le \dfrac{(x_2+y_2)(1+\sqrt{97})}{8} \\ x_1+y_1 \ge \dfrac{(x_2+y_2)(1-\sqrt{97})}{8} \end{cases} \text{– верно} \Rightarrow$$

X – выпуклый конус

№5.22 $((6+5) \bmod 30)+1$

$$X = \{x:\ x_3 \ge x_1^2 + x_2^2\};\quad A\left(\tfrac{1}{3};\tfrac{2}{3};\tfrac{3}{9}\right)$$

Решение

Проверим, является ли множество X выпуклым, для этого проверим функцию $f(x) = x_1^2 + x_2^2$: $\frac{\partial^2 f}{\partial x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Все миноры $\ge 0 \Rightarrow f(x)$ – выпуклая функция, а X – выпуклое множество. Значит X имеет опорную плоскость в каждой своей граничной точке.

Найдём граничную точку: построим прямую через точку $(0;0;0)$ и A, найдём точку пересечения с множеством X (не нулевую), это и будет наша точка.

$$\frac{x-0}{\frac{1}{3}-0} = \frac{y-0}{\frac{2}{3}-0} = \frac{z-0}{\frac{3}{9}-0} \Rightarrow 3x = \frac{3}{2}y = 3z \Rightarrow 2x = y = 2z$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 2x_1 \end{cases} \qquad (2x_1 = x_2 = 2x_3) \Rightarrow$$

$x_3 = x_1^2 + x_2^2$ – граничная точка $\Rightarrow$ $x_3 = x_1^2 + 4x_1^2 = 5x_1^2$

$$x_1 = 5x_1^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1 = 0 \\ x_1 = \frac{1}{5} \end{array}\right.$$

Получим точку $x_0\left(\tfrac{1}{5};\tfrac{2}{5};\tfrac{1}{5}\right)$.

Построим гиперплоскость через точку x_0:

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x}(x - x_0) = 0 \Rightarrow (2x_{10}, 2x_{20}, -1)\begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{5} \\ x_2 - \frac{2}{5} \\ x_3 - \frac{1}{5} \end{pmatrix} = 0$$

$$\left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{4}{5}, -1\right)\begin{pmatrix} x_1 - \frac{1}{5} \\ x_2 - \frac{2}{5} \\ x_3 - \frac{1}{5} \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{2}{5}x_1 - \frac{2}{25} + \frac{4}{5}x_2 - \frac{8}{25} - x_3 + \frac{1}{5} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_3 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 - \frac{1}{5}$$

Ответ: $x_3 = \frac{2}{5}x_1 + \frac{4}{5}x_2 - \frac{1}{5}$