№ 10 (3(6 + 6) mod 27) + 1

E: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение эллипса

$A(x_0; y_0)$ – произвольная точка на плоскости

Составим задачу:

Пусть $\rho(E; A) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ – расстояние от точки A до точки $(x; y)$ лежащей на контуре эллипса. Тогда, для простоты можно минимизировать $\rho^2(E; A) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Получаем:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \longrightarrow \min$$
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Решение

$$F(x, \lambda, \mu) = \lambda_0 \left((x - x_0)^2 + (y - y_0)^2\right) + \mu \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \lambda_0 (2x - 2x_0) + \frac{2\mu x}{a^2} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \lambda_0 (2y - 2y_0) + \frac{2\mu y}{b^2} = 0$$

Если $\lambda_0 = 0$, тогда $\mu \neq 0 \Rightarrow (x; y) = (0; 0)$, но $(0; 0) \notin E \Rightarrow \lambda_0 = 1$

Получаем:

$$\begin{cases} 2(x - x_0) + \frac{2\mu x}{a^2} = 0 \\ 2(y - y_0) + \frac{2\mu y}{b^2} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} x = \frac{a^2 x_0}{a^2 + \mu} \\ y = \frac{b^2 y_0}{b^2 + \mu} \end{cases} \Rightarrow \text{Получаем:}$$

$$\frac{1}{a^2}\left(\frac{a^2 x_0}{a^2 + \mu}\right)^2 + \frac{1}{b^2}\left(\frac{b^2 y_0}{b^2 + \mu}\right)^2 = 1$$

$$\frac{a^2 x_0^2}{(a^2 + \mu)^2} + \frac{b^2 y_0^2}{(b^2 + \mu)^2} = 1 \quad (1)$$

Получим равенство (1), в общем виде это уравнение 4 степени относительно $\mu$ и решить довольно трудно. Однако для заданных a и b и точки $(x_0; y_0)$ это возможно сделать $\Rightarrow$ из этого уравнения находим $\mu$, подставляем в x и y, ищем min среди получившихся точек и находим $\rho(E; A)$ с вычисленными $(x; y)$ и известными $(x_0; y_0)$.

Известно, что есть кривая (астроида), разделяющая области, где число нормалей равно 2, от области где число нормалей равно 4. Для этой кривой справедливо два условие:

$$\begin{cases} \frac{a^2 x_0^2}{(a^2 + \mu)^2} + \frac{b^2 y_0^2}{(b^2 + \mu)^2} = 1 \\ -\frac{a^2 x_0^2}{(a^2 + \mu)^3} - \frac{b^2 y_0^2}{(b^2 + \mu)^3} = 0 \end{cases} ; \quad \begin{cases} \frac{a^2 x_0^2}{(a^2 + \mu)^2} + \frac{b^2 y_0^2}{(b^2 + \mu)^2} = 1 \\ a^2 + \mu = \frac{(a^2 - b^2)(x_0 a)^{\frac{2}{3}}}{(x_0 a)^{\frac{2}{3}} + (y_0 b)^{\frac{2}{3}}} \\ b^2 + \mu = \frac{(b^2 - a^2)(y_0 b)^{\frac{2}{3}}}{(x_0 a)^{\frac{2}{3}} + (y_0 b)^{\frac{2}{3}}} \end{cases} \Rightarrow$$

подставив в (1) получ.:

$$(x_0 a)^{\frac{2}{3}} + (y_0 b)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}$$

а это и есть ур-ие астроиды, тогда вне этого множества будет 2 нормали, внутри – 4, а на самой кривой – 3