## Двойственные задачи

Рассмотрим задачу в канонической форме

$$\varphi(x) = c'x \to \max\,, \quad Ax = b\,, \quad d_* \le x \le d^*, \qquad (1)$$

которую впредь будем называть ***прямой канонической задачей ЛП***.

Каждому $i$-му основному ограничению прямой задачи соответствует ***двойственная переменная*** $y_i$, каждому $j$-му левому прямому ограничению прямой задачи соответствует ***двойственная переменная*** $v_j$, правому – $w_j$, а ***двойственная задача к канонической задаче*** (1) имеет вид

$$\psi(\lambda) = b'y + d^{*\prime} w - d_*' \, v \to \min\,,$$

$$A'y + w - v = c\,, \qquad (2)$$

$$w \ge 0,\ \ v \ge 0,$$

где $\lambda = (y,\, w,\, v)$. Ограничения $A'y + w - v = c$ называются ***основными ограничениями***, ограничения $w \ge 0,\ v \ge 0$– ***прямыми ограничениями*** двойственной задачи (2.3).

Совокупность $\lambda$=($y$, $v$, $w$) двойственных переменных назовем ***планом*** задачи (2) (***двойственным планом***), если она удовлетворяет как прямым, так и основным ограничениям. Множество двойственных планов обозначим через $\Lambda$ . Двойственный план $\lambda^0$=($y^0$, $v^0$, $w^0$) называется ***оптимальным***, если на нем двойственная целевая функция достигает минимума:

$$\psi(\lambda^0) = \min \psi(\lambda),\ \ \lambda \in \Lambda.$$

Пусть $x^0$ – оптимальный базисный план задачи (1), $A_Б^0 = A(I,\, J_Б^0)$ базисная матрица, с которой выполняются соотношения оптимальности

$$\Delta_j^0 \le 0, \text{ если } x_j^0 = d_{*j} \ \ (j \in\ J_Н^{0-}),$$

$$\Delta_j^0 \ge 0, \text{ если } x_j^0 = d_j^* \ \ (j \in J_Н^{0+}),$$

$$\Delta_j^0 = 0, \text{ если } j \in J_Б^0,$$

где

$$\Delta_j^0 = c_j - u^{0\prime} a_j,\ \ j \in J,$$

– ***оценки***,

$$u^{0\prime} = c_Б'(A_Б^0)^{-1}$$

– ***вектор потенциалов***.

Положим

$$v_j^0 = -\Delta_j^0,\ w_j^0 = 0,\ \ j \in J_{\text{Н}}^{0-},$$
$$v_j^0 = 0,\ w_j^0 = \Delta_j^0,\ \ j \in J_{\text{Н}}^{0+}, \qquad (2.4)$$
$$v_j^0 = w_j^0 = 0,\ \ j \in J_{\text{Б}}^0.$$

Вектор $\lambda^0 = (u^0, v^0, w^0)$ является решением двойственной задачи.

Можно указать общие правила построения двойственной задачи для задачи ЛП в любой форме (не обязательно канонической). Приведем эти правила.

1. Каждому основному ограничению прямой задачи ставим в соответствие двойственную переменную.

2. max (min) заменяем на min (max).

3. $A \to A'$, $b \leftrightarrow c$.

4. *а*) *При переходе от задачи на максимум к задаче на минимум*, если на переменную прямой задачи наложено ограничение $\geq 0$ ($\leq 0$), тогда в двойственной задаче соответствующее основное ограничение имеет тот же знак $\geq$ ($\leq$). Наоборот, если основное ограничение прямой задачи имеет знак $\geq$ ($\leq$), то в двойственной задаче прямое ограничение на соответствующую переменную имеет противоположный знак $\leq$ ($\geq$).
*б*) *При переходе от задачи на минимум к задаче на максимум* все знаки, указанные выше для двойственной задачи, меняются на противоположные.
*в*) Наконец, в *обоих случаях*, если на переменную нет прямого ограничения, то соответствующее основное ограничение двойственной задачи имеет знак $=$, и наоборот, если основное ограничение прямой задачи имеет знак $=$, тогда в двойственной задаче для соответствующей двойственной переменной нет прямого ограничения.

Решением двойственной задачи будет оптимальный вектор потенциалов в прямой задаче.