Рассмотрим каноническую задачу ЛП:

$$c'x \to \max, Ax = b,\ d_* \le x \le d^*.$$

Разобьем множество J на два непересекающиеся подмножества $J_Б, J_Н: J = J_Б \bigcup J_Н,\ J_Б \bigcap J_Н = \varnothing,\ |J_Б| = m,\ |J_Н| = n - m$.

Определение 1. ***План*** x называется ***базисным***, если $n{-}m$ его компонент принимают граничные значения: $x_j = d_{*j} \vee d_j^*,\quad j \in J_Н$, а остальным m компонентам $x_j,\ j \in J_Б$, соответствуют линейно независимые векторы условий

$$a_j,\ j \in J_Б, \tag{1}$$

т. е. не вырождена матрица $A_Б = (a_j,\ j \in J_Б)$.

Назовем совокупность векторов (1) ***базисом*** базисного плана x, $J_Б$ – ***множеством базисных индексов***, $J_Н$ – ***множеством небазисных индексов***, x_j, $j \in J_Б$, – ***базисными компонентами*** базисного плана, x_j, $j \in J_Н$, – ***небазисными***, матрицу $A_Б$ – ***базисной матрицей***. Введем обозначения: $x_Б = (x_j, j \in J_Б)$, $x_Н = (x_j, j \in J_Н)$, $c_Б = (c_j, j \in J_Б)$, $c_Н = (c_j, j \in J_Н)$, $A_Н = (a_j, j \in J_Н)$.

Определение 2. ***Базисный план*** x называется ***невырожденным***, если $d_{*Б} < x_Б < d_Б^*$, где $d_{*Б} = (d_{*j},\ j \in J_Б),\ d_Б^* = (d_j^*,\ j \in J_Б)$.

Определение 1.5. ***Задача ЛП*** называется ***невырожденной***, если все ее базисные планы не вырождены.

Алгоритм симплекс метода

Пусть задан базисный план x с базисным множеством индексов $J_Б$ (с базисной матрицей $A_Б$). Алгоритм решения канонической задачи состоит из следующих шагов.

1. Вычисляем вектор потенциалов u по формуле $u' = c_Б' A_Б^{-1}$, или (что то же самое) решаем систему уравнений $a_j'u = c_j,\ j \in J_Б$, относительно потенциалов u_i, $i \in I$.
2. Вычисляем небазисные оценки по формулам $\Delta_j = c_j - a_j'u,\ j \in J_Н$.
3. Проверяем условия оптимальности

   $$\Delta_j \le 0 \ \textit{при}\ x_j = d_{*j};\ \Delta_j \ge 0 \ \textit{при}\ x_j = d_j^*,\ j \in J_Н.$$

   Если они выполняются, то решение заканчиваем: план x оптимален. В противном случае переходим к шагу 4.
4. Выбираем индекс $j_0 \in J_Н^-$, для которого не выполняются условия оптимальности. /
5. Строим направление $l = (l_Б,\ l_Н)$ по правилам

   $$l_{j_0} = \operatorname{sign}\Delta_{j_0},\ l_j = 0,\quad j \in J_Н \setminus \{j_0\},\ A_Б l_Б = -a_{j_0}\operatorname{sign}\Delta_{j_0}.$$

7. Находим величины $\theta_j,\ j \in J_Б$, по формулам

$$\theta_j = \begin{cases} \dfrac{d_j^* - x_j}{l_j}, \text{ если } l_j > 0; \\ \dfrac{d_{*j} - x_j}{l_j}, \text{ если } l_j < 0; \quad j \in J. \\ +\infty, \text{ если } l_j = 0; \end{cases} \qquad (2)$$

Замечание. Если в формуле (2), граничные значения равны бесконечности, то $\theta_j = +\infty$.

Определяем число θ^0 по формуле $\theta^0 = \min\limits_{j \in J} \theta_j = \theta_{j_*}$. Если $\theta^0 = \infty$, то исходная задача не имеет решения, поскольку целевая функция не ограничена. В противном случае новый базисный план $\bar{x}$ строим по правилу $\bar{x}_j = x_j + \theta^0 l_j,\ j \in J$. Заменяем базисное множество $J_Б$ на новое $\bar{J}_Б=(J_Б \backslash j_*) \bigcup j_0$ (или матрицу $A_Б$ на $\bar{A}_Б = A(I,\ \bar{J}_Б)$) и переходим к шагу 1.

Первая фаза

Первой фазой симплекс-метода называется метод построения начального базисного плана, если множество планов не пусто.

Разобьем множество J на два подмножества $J_*,\ J^*$ и построим вектор $\tilde{x} = (\tilde{x}_j = d_{*j},\ j \in J_*,\ \tilde{x}_j = d_j^*,\ j \in J^*)$. Подсчитаем вектор невязок основных ограничений $\omega = b - A\tilde{x}$.

Введем вспомогательную задачу (***задачу первой фазы для канонической задачи***)

$$-\sum_{i \in I^+ \bigcup I^-} x_{n+i} \to \max,$$

$$\begin{cases} A(i,\ J)x + x_{n+i} = b_i,\ i \in I^+ \bigcup I^0, \\ A(i,\ J)x - x_{n+i} = b_i,\ i \in I^-, \end{cases} \qquad (3)$$

$$d_* \le x \le d^*, \quad 0 \le x_{n+i} \le |\omega_i|, \quad i \in I,$$

где $I^+ = \{i \in I : \omega_i > 0\}$, $I^- = \{i \in I : \omega_i < 0\}$, $I^0 = \{i \in I : \omega_i = 0\}$. Задачу (3) решаем симплекс-методом по алгоритму, описанному выше. В качестве начального базисного плана этой задачи возьмем вектор $(\tilde{x},\ x_{n+i} = |\omega_i|,\ i \in I)$ с базисной матрицей $A_Б = (a_{n+i} = e_i, i \in I^+ \bigcup I^0,\ \ a_{n+i} = -e_i, i \in I^-)$. Задача имеет решение, поскольку целевая функция ограничена сверху нулем и множество планов задачи не пусто (выше указан начальный базисный план).

Обозначим через $x_И = (x_{n+i}, i \in I)$ вектор искусственных переменных. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1.1. *Для совместности ограничений канонической задачи* ($X \neq \varnothing$) *необходимо и достаточно, чтобы в решении* (x^*, $x^*_И$) *задачи* (3) *все искусственные переменные были нулевыми:* $x^*_И = 0$.

Решение задачи (3) симплекс-методом называется ***первой фазой симплекс-метода***.

После первой фазы будут построены оптимальный план (x^*, $x^*_И$) и базисное множество индексов $J^*_Б$ задачи (1.64), обладающие одним из трех свойств:

1) $x^*_И \neq 0$;

2) $x^*_И = 0$ и в базисе нет искусственных векторов, т. е. $J^*_Б \cap J_И = \varnothing$, где $J_И = \{n+i,\ i \in I\}$;

3) $x^*_И = 0$, а в базисе есть искусственные векторы, т. е. $J^*_Б \cap J_И \neq \varnothing$.

Проанализируем каждое из указанных свойств.

В первом случае, согласно лемме 1.1, $X = \varnothing$ и решение прекращаем.

Во втором случае получаем начальный базисный план x^* с базисным множеством $J_Б = J^*_Б$ для исходной задачи. С него и начинаем решать задачу (1.60).

В третьем случае полагаем $I_ф = \{i \in I:\ n+i \in J^*_Б\}$ и решаем симплекс-методом “буферную” задачу

$$c'x \to \max,$$
$$\begin{cases} A(i,\ J)x + x_{n+i} = b_i,\ i \in I_ф, \\ A(i,\ J)x \qquad\quad = b_i,\ i \in I \setminus I_ф, \end{cases} \tag{4}$$
$$d_* \leq x \leq d^*, \quad 0 \leq x_{n+i} \leq 0, \quad i \in I_ф,$$

взяв в качестве начального базисного плана пару $(x^*,\ x^*_{n+i} = 0,\ i \in I_ф)$ с базисным множеством $J^*_Б$.

Замечание 2. Можно после каждой итерации, в результате которой искусственная переменная обращается в ноль, удалять эту переменную из задачи вместе с соответствующим вектором условий, если они не являются базисными. Если же они базисные, то переводим их в разряд фиктивных, а на переменную накладываем нулевые ограничения.

Пример 1.11. Решим следующую задачу

$$2x_1 + x_2 + 3x_3 \to \max,$$
$$\begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 = 5, \\ \ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 7, \end{cases}$$
$$1 \leq x_1 \leq 3,\ 0 \leq x_2 \leq 4,\ 1 \leq x_3 \leq 2.$$

Возьмем вектор $\tilde{x} = (1;\ 0;\ 1)$. Подсчитаем невязки: $\omega_1 = 5 - 5{\cdot}1 - 1{\cdot}0 - 3{\cdot}1 = -3$; $\omega_2 = 7 - 1{\cdot}1 - 2{\cdot}0 - 4{\cdot}1 = 2$. Задача первой фазы имеет вид

$$-x_4 - x_5 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 + 3x_3 - x_4 \qquad = 5, \\ \ \ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \qquad + x_5 = 7, \end{cases}$$

$$1 \le x_1 \le 3,\ 0 \le x_2 \le 4,\ 1 \le x_3 \le 2,\ 0 \le x_4 \le 3,\ 0 \le x_5 \le 2.$$

Начальный базисный план для нее $x = (1;\ 0;\ 1;\ 3;\ 2)$, $J_{Á} = \{4,\ 5\}$, $J_{Í} = \{1,\ 2,\ 3\}$.

Итерация 1.

1. $u_1 = 1$; $u_2 = -1$.
2. $\Delta_1 = -5 + 1 = -4 < 0$ при $x_1 = d_{*1} = 1$ (+); $\Delta_2 = -1 + 2 = 1 > 0$ при $x_2 = d_{*2} = 0$ (–); $\Delta_3 = -3 + 4 = 1 > 0$ при $x_3 = d_{*3} = 1$ (–).
3. $j_0 = 2$, $l_2 = 1$, $l_1 = l_3 = 0$.
4. $l_4 = 1$; $l_5 = -2$.
5. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 4 - 0 = 4$; $\theta_4 = (3-3):1 = 0$; $\theta_5 = (0-2):(-2) = 1$; $\theta^0 = \theta_4 = 0 = \theta_{j_*}$; $j_* = 4$.
6. План остается прежним, поскольку $\theta^0 = 0$: $x = (1;\ 0;\ 1;\ 3;\ 2)$. Меняется $J_{Б}$: $J_{Б} = \{2,\ 5\}$. Тогда $J_{Í} = \{1,\ 3,\ 4\}$.

Итерация 2.

1. $u_1 + 2u_2 = 0$, $u_2 = -1$. Отсюда получаем $u_1 = 2$, $u_2 = -1$.
2. $\Delta_1 = -9 < 0$ при $x_1 = d_{*1} = 1$ (+); $\Delta_3 = -2 < 0$ при $x_3 = d_{*3} = 1$ (+); $\Delta_4 = -1 - -(-1) \cdot 2 = 1 > 0$ при $x_4 = d_4^* = 3$ (+).

План оптимальный. Но искусственные переменные ненулевые ($x_4 = 3$, $x_5 = 2$), поэтому ограничения исходной задачи несовместны.

Пример 1.12. Рассмотрим задачу

$$-5x_1 + 7x_2 - 11x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 = 15, \\ \ \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = \ \ 6, \\ 6x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 21, \end{cases}$$

$$3 \le x_1 \le 4,\ -17 \le x_2 \le 3,\ -8 \le x_3 \le 3.$$

Пусть $\tilde{x} = (4;\ 3;\ 3)$. Тогда $\omega_1 = 15 - 20 - 3 + 3 = -5 < 0$, $\omega_2 = 6 - 4 + 6 - 9 = \ = -1 < 0$, $\omega_3 = 21 - 24 + 3 - 6 = -6 < 0$. Задача первой фазы имеет вид

$$-x_4 - x_5 - x_6 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + \ \ x_2 - \ \ x_3 - x_4 \qquad\qquad = 15, \\ \ \ x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad - x_5 \qquad = \ \ 6, \\ 6x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 \qquad\qquad - x_6 = 21, \end{cases}$$

$$3 \le x_1 \le 4,\ -17 \le x_2 \le 3,\ -8 \le x_3 \le 3,$$

$$0 \le x_4 \le 5,\ 0 \le x_5 \le 1,\ 0 \le x_6 \le 6.$$

В качестве начального базисного плана возьмем $x^1 = (4;\ 3;\ 3;\ 5;\ 1;\ 6)$, $J_{Б} = \{4,\ 5,\ 6\}$, $J_{Н} = \{1,\ 2,\ 3\}$.

Итерация 1.

1. $u_1 = u_2 = u_3 = 1$.

2. $\Delta_1 = -5-1-6 = -12 < 0$ при $x_1 = d_1^*$ $(-)$, $\Delta_2 = -1+2+1 = 2 > 0$ при $x_2 = d_2^*$ $(+)$, $\Delta_3 = 1-3-2 = -4 < 0$ при $x_3 = d_3^*$ $(-)$.

3. $j_0 = 1;\ l_1 = -1,\ l_2 = l_3 = 0.$ Тогда: $l_4 = -5,\ l_5 = -1,\ l_6 = -6.$

4. $\theta_{j_0} = \theta_1 = 1;\ \theta_4 = 1,\ \theta_5 = 1,\ \theta_6 = 1.$ Таким образом, $\theta^0 = 1$.

5. Новый план $x^2 = (3;\ 3;\ 3;\ 0;\ 0;\ 0)$.

Поскольку на данном шаге все искусственные переменные нулевые, то можно поступить двояко: либо продолжить решение задачи первой фазы (условия оптимальности не выполняются), в частности, взяв $\theta^0 = \theta_{j_0} = \theta_1$ или, например, $\theta^0 = \theta_{j*} = \theta_4$, либо перейти к решению “буферной” задачи. В последнем случае достаточно сделать две искусственные переменные фиктивными и базисными, а третью удалить и в качестве базисной переменной взять x_1. Итак, получим “буферную” задачу

$$-5x_1 + 7x_2 - 11x_3 \to \max,$$

$$\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 15, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_5 = 6, \\ 6x_1 - x_2 + 2x_3 = 21, \end{cases}$$

$$3 \le x_1 \le 4,\ -17 \le x_2 \le 3,\ -8 \le x_3 \le 3,$$

$$0 \le x_4 \le 0,\ 0 \le x_5 \le 0.$$

В качестве начального базисного плана берем вектор $x = (3;\ 3;\ 3;\ 0;\ 0)$ и $J_Б = \{1,\ 4,\ 5\}$.

Итерация 1.

1. $u_1 = 0,\ u_2 = 0,\ 6u_3 = -5,$ откуда получим $u_3 = -5/6$.

2. $\Delta_2 = 7 - 5/6 > 0$ при $x_2 = d_2^*$ $(+)$, $\Delta_3 = -11 - 2\cdot(-5/6) < 0$ при $x_3 = d_3^*$ $(-)$.

3. $j_0 = 3;\ l_3 = -1,\ l_2 = 0.$ Тогда уравнения для $l_Б$: $5l_1 + 1 + l_4 = 0,\ l_1 - 3 + l_5 = 0,\ 6l_1 - 2 = 0,$ откуда получим $l_1 = 1/3,\ l_4 = -(5/3+1) = -8/3,\ l_5 = -(1/3-3) = -8/3.$

4. $\theta_{j_0} = \theta_3 = 11;\ \theta_1 = 3,\ \theta_4 = 0,\ \theta_5 = 0.$ Таким образом, $\theta^0 = \theta_5 = 0$, т.е. $j_* = 5$.

5. Удаляем фиктивную переменную x_5 из задачи. План остался прежним $x = (3;\ 3;\ 3;\ 0)$ с $J_Б = \{1,\ 3,\ 4\}$, $J_Н = \{2\}$.

Итерация 2.

1. Уравнения для потенциалов: $5u_1 + u_2 + 6u_3 = -5,\ -u_1 + 3u_2 + 2u_3 = -11,\ u_1 = 0.$ Отсюда получаем $u_1 = 0,\ u_2 = -7/2,\ u_3 = -1/4.$

2. $\Delta_2 = 7 - 2\cdot 7/2 - 1/4 = -1/4 < 0$ при $x_2 = d_2^*$ $(-)$.

3. $j_0 = 2;\ l_2 = -1.$ Тогда уравнения для $l_Б$: $5l_1 - 1 - l_3 + l_4 = 0,\ l_1 + 2 + 3l_3 = 0,$ $6l_1 + 1 + 2l_3 = 0,$ откуда получим $l_1 = 1/16,\ l_3 = -11/16,\ l_4 = 0.$

4. $\theta_{j_0} = \theta_2 = 20;\ \theta_1 = 16,\ \theta_3 = 16,\ \theta_4 = \infty.$ Таким образом, $\theta^0 = \theta_1 = 16$, т. е. $j_* = 1$.

5. Новый план $x = (4; -13;\ -8;\ 0)$ с $J_Б = \{2,\ 3,\ 4\}$, $J_Н = \{1\}$.

Итерация 3.

1. Уравнения для потенциалов: $u_1 - 2u_2 - u_3 = 7,\ -u_1 + 3u_2 + 2u_3 = -11,\ u_1 = 0.$ Отсюда получаем $u_1 = 0,\ u_2 = -3,\ u_3 = -1.$

2. $\Delta_1 = -5 + 3 + 6 > 0$ при $x_1 = d_{*1}$ $(+)$.

Условия оптимальности выполняются – получен оптимальный план $x^0 = (4; -13;\ -8)$, $\varphi_{\max} = -23$.