

Лабораторная 1

Бинцаровский Леонид

Задача о рюкзаке в терминах целочисленного линейного программирования

Постановка задачи

Есть рюкзак с ограниченной вместимостью C и набор из n предметов. Каждый предмет i имеет вес w_i и стоимость v_i . Необходимо выбрать предметы так, чтобы максимизировать суммарную стоимость при условии, что общий вес не превышает C .

А) Переменные

Пусть x_i — бинарные переменные, где $x_i = 1$, если предмет i выбран, и $x_i = 0$, если предмет i не выбран.

$i \in \{1, 2, \dots, n\}$, где n — количество предметов.

Б) Ограничения

1. Ограничение на вместимость рюкзака:

$$\sum (w_i * x_i) \leq C, \text{ где } i = 1, \dots, n$$

Пояснение: Это ограничение гарантирует, что общий вес предметов, которые мы кладем в рюкзак, не превысит доступный объем.

2. Ограничения на переменные:

$$x_i \in \{0, 1\}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

Пояснение: Переменные x_i принимают только два значения: 1 (предмет выбран) или 0 (предмет не выбран).

В) Целевая функция

Максимизация суммарной стоимости предметов:

$$\text{Maximize } Z = \sum (v_i * x_i), \text{ где } i = 1, \dots, n$$

Пояснение: Целевая функция суммирует стоимости v_i всех предметов, которые мы выбрали ($x_i = 1$).

Г) Параметры

1. n — количество предметов.

2. w_i — вес предмета i .

3. v_i — стоимость предмета i .

4. C — вместимость рюкзака.

Пояснение: Параметры w_i , v_i и C задаются исходными данными задачи и являются фиксированными значениями.

Пример численных данных

Рассмотрим простой пример:

$n = 4$ (4 предмета)

$C = 10$ (вместимость рюкзака = 10)

Веса: $w = [2, 3, 4, 5]$

Стоимости: $v = [3, 4, 5, 6]$

Модель будет выглядеть так:

Целевая функция:

$$\text{Maximize } Z = 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4$$

Ограничение:

$$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 \leq 10$$

Переменные:

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \{0, 1\}$$

Код генерации задачи и ее решения

```
import pulp
import random

def generate_and_save_knapsack(n, C, seed=42, solver_name="HiGHS",
                               output_file="knapsack_model.lp"):
    random.seed(seed)

    weights = [random.randint(1, 20) for _ in range(n)]
    values = [random.randint(10, 100) for _ in range(n)]

    model = pulp.LpProblem("Knapsack_Problem", pulp.LpMinimize)

    x = [pulp.LpVariable(f"x_{i}", cat="Binary") for i in range(n)]
    model += pulp.lpSum(-values[i] * x[i] for i in range(n)), "Total_Value"
    model += pulp.lpSum(weights[i] * x[i] for i in range(n)) <= C,
    "Capacity_Constraint"

    model.writeLP(output_file)
    print(f"Модель сохранена в файл: {output_file}")

    solver = pulp.getSolver(solver_name)
    model.solve(solver)

    print(f"Status: {pulp.LpStatus[model.status]}")
    print(f"Общая стоимость: {pulp.value(model.objective)}")
    print("Выбранные предметы:")
    for i in range(n):
        if pulp.value(x[i]) == 1:
            print(f" - Предмет {i + 1}: вес = {weights[i]}, стоимость = {values[i]}")

    return output_file

if __name__ == "__main__":
    output_path = "knapsack_model.lp"
    generate_and_save_knapsack(n=10, C=50, output_file=output_path)
```

Вот части вывода решения моделей 10 на 50

```
Модель сохранена в файл: knapsack_model_2.lp
Running HiGHS 1.8.1 (git hash: 4a7f24a): Copyright (c) 2024 HiGHS under MIT licence terms
Coefficient ranges:
  Matrix [1e+00, 2e+01]
  Cost   [1e+01, 9e+01]
  Bound  [1e+00, 1e+00]
  RHS    [5e+01, 5e+01]
Presolving model
1 rows, 10 cols, 10 nonzeros 0s
1 rows, 10 cols, 10 nonzeros 0s
Objective function is integral with scale 1

Solving MIP model with:
  1 rows
  10 cols (10 binary, 0 integer, 0 implied int., 0 continuous)
  10 nonzeros

Src: B => Branching; C => Central rounding; F => Feasibility pump; H => Heuristic; L => Sub-MIP;
     P => Empty MIP; R => Randomized rounding; S => Solve LP; T => Evaluate node; U => Unbounded;
     z => Trivial zero; l => Trivial lower; u => Trivial upper; p => Trivial point

  Nodes | B&B Tree | Objective Bounds | Dynamic Constraints | Work
Src Proc. InQueue | Leaves Expl. | BestBound BestSol | Gap | Cuts InLp Confl. | LpIters Time
-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----
z      0      0      0 0.00% -inf      0      Large      0     -1      0      0      0.0s
MIP-Timing: 0.0007 - starting analytic centre calculation
S      0      0      0 0.00% -443     -328     35.06%      0      0      0      0      0.0s

20.0% inactive integer columns, restarting
Model after restart has 1 rows, 8 cols (8 bin., 0 int., 0 impl., 0 cont.), and 8 nonzeros

MIP-Timing: 0.0015 - starting analytic centre calculation
      0      0      0 0.00% -357.8421053 -328     9.10%      0      0      0      1      0.0s
R      0      0      0 0.00% -357.8421053 -335     6.82%      0      0      0      1      0.0s

12.5% inactive integer columns, restarting
Model after restart has 1 rows, 4 cols (2 bin., 0 int., 0 impl., 0 cont.), and 4 nonzeros

MIP-Timing: 0.0021 - starting analytic centre calculation
      0      0      0 0.00% -357.8421053 -335     6.82%      0      0      0      1      0.0s
R      0      0      0 100.00% -351.3333333 -345     1.84%      0      0      0      2      0.0s
      1      0      1 100.00% -345     -345     0.00%      0      0      0      2      0.0s

Solving report
Status      Optimal
Primal bound -345
Dual bound  -345
Gap          0% (tolerance: 0.01%)
P-D integral 0.000114399746439
Solution status feasible
              -345 (objective)
              0 (bound viol.)
              0 (int. viol.)
              0 (row viol.)
Timing       0.00 (total)
              0.00 (presolve)
              0.00 (solve)
              0.00 (postsolve)

Max sub-MIP depth 0
Nodes            1
Repair LPs       0 (0 feasible; 0 iterations)
LP iterations    2 (total)
                  0 (strong br.)
                  0 (separation)
                  0 (heuristics)

Status: Optimal
Общая стоимость: -345.0
Выбранные предметы:
- Предмет 1: вес = 4, стоимость = 64
- Предмет 6: вес = 5, стоимость = 39
- Предмет 7: вес = 4, стоимость = 74
- Предмет 8: вес = 18, стоимость = 87
- Предмет 10: вес = 19, стоимость = 81
leanidbintsarouski@Leanid-Bintsarouski---MacBook-Pro Dermo %
```

и 10000 на 50000

```
Модель сохранена в файл: knapsack_model_2.lp
Running HiGHS 1.8.1 (git hash: 4a7f24a): Copyright (c) 2024 HiGHS under MIT licence terms
Coefficient ranges:
  Matrix [1e+00, 2e+01]
  Cost   [1e+01, 1e+02]
  Bound  [1e+00, 1e+00]
  RHS    [5e+04, 5e+04]
Presolving model
1 rows, 10000 cols, 10000 nonzeros 0s
1 rows, 1695 cols, 1695 nonzeros 0s
1 rows, 1332 cols, 1332 nonzeros 0s
1 rows, 1261 cols, 1261 nonzeros 0s
Objective function is integral with scale 1

Solving MIP model with:
  1 rows
  1261 cols (18 binary, 1243 integer, 0 implied int., 0 continuous)
  1261 nonzeros

Src: B => Branching; C => Central rounding; F => Feasibility pump; H => Heuristic; L => Sub-MIP;
P => Empty MIP; R => Randomized rounding; S => Solve LP; T => Evaluate node; U => Unbounded;
z => Trivial zero; l => Trivial lower; u => Trivial upper; p => Trivial point



| Src         | Nodes |         | B&B Tree                                    |         | Objective Bounds |         | Gap    | Dynamic Constraints |      |        | Work    |      | Time |
|-------------|-------|---------|---------------------------------------------|---------|------------------|---------|--------|---------------------|------|--------|---------|------|------|
|             | Proc. | InQueue | Leaves                                      | Expl.   | BestBound        | BestSol |        | Cuts                | InLp | Confl. | LpIters |      |      |
| z           | 0     | 0       | 0                                           | 0.00%   | -inf             | 0       | Large  | 0                   | -1   | 0      | 0       | 0.2s |      |
| MIP-Timing: |       |         | 0.23 - starting analytic centre calculation |         |                  |         |        |                     |      |        |         |      |      |
| S           | 0     | 0       | 0                                           | 0.00%   | -546416          | -412188 | 32.56% | 0                   | 0    | 0      | 0       | 0.3s |      |
|             | 1     | 0       | 1                                           | 100.00% | -412204.6        | -412188 | 0.00%  | 0                   | 0    | 0      | 1       | 0.3s |      |



Solving report
Status: Optimal
Primal bound: -412188
Dual bound: -412204
Gap: 0.00388% (tolerance: 0.01%)
P-D integral: 1.7752980597e-05
Solution status: feasible
-412188 (objective)
0 (bound viol.)
0 (int. viol.)
0 (row viol.)
Timing:
0.28 (total)
0.00 (presolve)
0.00 (solve)
0.00 (postsolve)
Max sub-MIP depth: 0
Nodes: 1
Repair LPs: 0 (0 feasible; 0 iterations)
LP iterations: 1 (total)
0 (strong br.)
0 (separation)
0 (heuristics)

Status: Optimal
Общая стоимость: -412188.0
Выбранные предметы:
- Предмет 1: вес = 4, стоимость = 84
- Предмет 2: вес = 1, стоимость = 40
- Предмет 3: вес = 9, стоимость = 71
- Предмет 4: вес = 8, стоимость = 72
- Предмет 5: вес = 8, стоимость = 96
- Предмет 6: вес = 5, стоимость = 22
- Предмет 9: вес = 3, стоимость = 44
- Предмет 11: вес = 14, стоимость = 95
- Предмет 12: вес = 2, стоимость = 84
- Предмет 13: вес = 1, стоимость = 15
- Предмет 14: вес = 3, стоимость = 22
- Предмет 15: вес = 7, стоимость = 37
- Предмет 16: вес = 8, стоимость = 76
- Предмет 19: вес = 1, стоимость = 87
- Предмет 20: вес = 18, стоимость = 76
- Предмет 21: вес = 7, стоимость = 44
- Предмет 23: вес = 14, стоимость = 70
- Предмет 24: вес = 8, стоимость = 53
- Предмет 25: вес = 15, стоимость = 87
- Предмет 27: вес = 9, стоимость = 53
- Предмет 28: вес = 1, стоимость = 57
```