МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра дискретной математики и алгоритмики

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В КРУГЕ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ

Лабораторная работа 4

Бинцаровского Леонида Петровича,
студента 4 курса 3 группы,
специальность «информатика»

Минск, 2024

Вариант 4

Задание 1.

Условие:

$$u_{tt} = a^2 \Delta u, \quad 0 < r < l, \quad t > 0$$
$$\begin{cases} \left| u(0, t) \right| < \infty \quad u(l, t) = 0 \\ u(r, 0) = l^2 - r^2; \quad u_t(r, 0) = 0 \end{cases}$$

Решение:

В случае симметричной круглой мембраны без зависимости от высоты и угла имеем формулу лапласиана $\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})$.

Имеем:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\frac{\partial u}{\partial r})$$

Если раскрыть дифференциал, то получим:

$$u_{tt} = a^2 \frac{1}{r} u_r + a^2 u_{rr}$$

Представим решение в виде $u(r, t) = R(r)T(t)$:

$$R(r)T''(t) = a^2 \frac{1}{r} R'(r)T(t) + a^2 R''(r)T(t)$$

Разделим на RT:

$$\frac{T''}{T} = a^2 \frac{1}{r}\frac{R'}{R} + a^2 \frac{R''}{R} = -\lambda^2$$

Получаем:

$$\begin{cases} T'' + \lambda^2 T = 0 \\ a^2 R'' + a^2 \frac{1}{r} R' + \lambda^2 R = 0 \end{cases}$$

Будем рассматривать второе уравнение. Домножим его на r^2

$$a^2 r^2 R'' + a^2 r R' + \lambda^2 r^2 R = 0$$

Данное уравнение является уравнением Бесселя со значением $\nu = 0$ и его общее решение представимо в виде $R(r) = C_1 J_0(x) + C_2 Y_0(x)$.

В нашем случае $x = \lambda\, r$ и коэффициент $C_2 = 0$, т.к. функция Y_0 является неограниченной. Положим $C_1 = 1$

Подставляем граничные условия:

$R(l) = J_0(l\lambda) = 0$ => $l\lambda$=μ_k – k-ый корень функции Бесселя.

Получаем λ=$\frac{\mu_k}{l}$.

$$R(r) = J_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right)$$

Рассмотрим 1-ое уравнение:

$$T'' + \lambda^2 T = 0$$

$$T_k'' + (\frac{\mu_k}{l})^2 T_k = 0$$

$$T_k = A_k \cos\frac{\mu_k}{l}t + B_k \sin\frac{\mu_k}{l}t$$

Запишем полный вид уравнения $u(r,t)$:

$$u(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos\frac{\mu_k}{l}t + B_k \sin\frac{\mu_k}{l}t) J_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right)$$

$$u_t(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (- \frac{\mu_k}{l}A_k \sin\frac{\mu_k}{l}t + \frac{\mu_k}{l}B_k \cos\frac{\mu_k}{l}t) J_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right)$$

$$u_t(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{l}B_k J_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) = 0 => \; B_k = 0$$

$$u(r,0) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(\frac{\mu_k}{l}r\right) = l^2 - r^2$$

Далее используя свойство функции Бесселя найдем коэффициент A_k (преждевременно делаем замену $\frac{r}{l} = x$):

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k \int_0^1 x J_0(\mu_k x) J_0(\mu_m x)\, d(x) = l^2 \int_0^1 (1 - x^2) x\, J_0(\mu_m x)\, d(x)$$

Принимая во внимание ортогональность имеем:

$$A_m \frac{1}{2}(J_0{}'(\mu_m))^2 = l^2 \int_0^1 (1 - x^2) x \, J_0(\mu_m x) d(x)$$

Далее используя свойство имеем $\frac{d}{dx}\left(x \, J_1(x)\right) = x \, J_0(x)$.

Во втором интеграле вносим $\mu_m x$ под знак дифференциала

$$A_m \frac{1}{2}(J_0{}'(\mu_m))^2 = \frac{l^2}{\mu_m{}^2} \int_0^1 \left(1 - x^2\right) \left(\mu_m x \, J_1(\mu_m x)\right)' d(\mu_m x)$$

Вносим $\mu_m x \, J_1(\mu_m x)$ под знак дифференциала и делаем замену $\mu_m x = z$:

$$A_m \frac{1}{2}(J_0{}'(\mu_m))^2 = \frac{l^2}{\mu_m{}^2} \int_0^1 \left(1 - (\frac{z}{\mu_m})^2\right) d\left(z \, J_1(z)\right) = [по\ частям] =$$

$$= \frac{l^2}{\mu_m{}^2} \left[z \, J_1(z) \left(1 - \left(\frac{z}{\mu_m}\right)^2 \right) \right]_0^{\mu_m} + \frac{l^2}{\mu_m{}^2} \int_0^1 z \, J_1(z) \frac{2z}{\mu_m{}^2} dz =$$

$$= \frac{2l^2}{\mu_m{}^4} \int_0^1 z^2 \, J_1(z) dz = \left[используем \ \frac{d}{dz}\left(z^2 \, J_2(z)\right) = z^2 \, J_1(z) \right] =$$

$$= \frac{2l^2}{\mu_m{}^4} \int_0^1 (z^2 \, J_2(z))' dz = \frac{2l^2}{\mu_m{}^4} \left[z^2 \, J_2(z)\right]_0^{\mu_m} = \frac{2l^2}{\mu_m{}^2} J_2(\mu_m) \ .$$

Получаем равенство содержащее только коэффициент A_m, функции Бесселя и их корни:

$$A_m \frac{1}{2}(J_0{}'(\mu_m))^2 = \frac{2l^2}{\mu_m{}^2} J_2(\mu_m)$$

Выражаем A_m:

$$A_m = \frac{4l^2 \, J_2(\mu_m)}{\mu_m{}^2 (J_0{}'(\mu_m))^2}$$

Теперь можно записать конечный вид функции $u(r, t)$:

$$u(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} (\frac{4l^2\, J_2\left(\mu_m\right)}{{\mu_m}^2(J_0^{'}(\mu_m))^2} \cos\frac{\mu_k}{l} t)\; J_0\left(\frac{\mu_k}{l} r\right).$$

Визуализация $u(r, t)$ *для* $a = 1,\, l = 10,\, t \in [0,5]$: