МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра дискретной математики и алгоритмики

РЕШЕНИЕ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА В КОЛЬЦЕ

Лабораторная работа 5

Бинцаровского Леонида Петровича
студента 4 курса 3 группы,
специальность «информатика»

Минск, 2024

Вариант 4

№14

Условие задачи:

$$U_{xx} + U_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$U|_{\rho=1} = 1 + x^2 + y^2$$

$$U_\rho|_{\rho=2} = 1$$

$$1 < \rho < 2$$

Решение:

Переведем в полярную систему координат:
$\rho^2 U_{\rho\rho} + \rho U_\rho + U_{\varphi\varphi} = \rho^3 cos2\varphi$
$U(1, \varphi) = 1 + \rho^2 = 2$
$U_\rho(2, \varphi) = 1$

Далее будем искать решение в виде: $U(\rho, \varphi) = P(\rho, \varphi) + Q(\rho, \varphi)$. И разобьем задачу на две:

1) $\rho^2 P_{\rho\rho} + \rho P_\rho + P_{\varphi\varphi} = 0$
   $P(1, \varphi) = 2$
   $P_\rho(2, \varphi) = 1$

И

2) $\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi} = \rho^3 cos2\varphi$
   $Q(1, \varphi) = 0$
   $Q_\rho(2, \varphi) = 0$

1) Начнем с решения пункта 1. Его будем искать в виде:

$$P(\rho, \varphi) = a_0 ln(\rho) + b_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k \rho^k + b_k \rho^{-k}) cosk\varphi + (c_k \rho^k + b_k \rho^{-k}) sink\varphi]$$

Тогда подставив в начальные условия, получим:

$$P(1, \varphi) = b_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k \rho^k + b_k \rho^{-k}) cosk\varphi + (c_k \rho^k + b_k \rho^{-k}) sink\varphi] = 2$$

$$P_\rho(2, \varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} [(k a_k 2^{k-1} - k b_k 2^{-k-1}) cosk\varphi + (k c_k 2^{k-1} - k b_k 2^{-k-1}) sink\varphi] = 1$$

Приравняв коэффициенты, получим:
$a_0 = 2$
$b_0 = 2$
$a_k = b_k = c_k = d_k = 0, \forall k$

Тогда $P(\rho,\ \varphi) = 2ln\rho + 2$

2) Искать решение для пункта 2 будем в виде: $Q = R(\rho)cos2\varphi$
Тогда получаем такое уравнение:
$\rho^2R"cos2\varphi + \rho R'cos2\varphi - 4Rcos2\varphi = \rho^3cos2\varphi$
$\rho^2R" + \rho R' - 4R = \rho^3$

Сделаем замену переменных: $\rho = e^t;\ t = ln\rho$
$R'' - 4R = e^{3t}$
$R_{oo} = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t}$

Частное неоднородное решение будем искать в виде: $R_{чн} = C_3e^{3t}$, тогда получаем

$$9C_3e^{3t} - 4C_3e^{3t} = e^{3t} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{5}$$

Общее решение будет иметь вид: $R = C_1e^{2t} + C_2e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}$. Сделав обратную замену переменных получим

$$R = C_1\rho^2 + C_2\rho^{-2} + \frac{1}{5}\rho^3$$

Подставив в начальные условия, найдем константы $C_1\ и\ C_2$:
$R(1) = C_1 + C_2 + \frac{1}{5} = 0$
$R'(2) = 4C_1 - \frac{1}{4}C_2 + \frac{12}{5} = 0$
Получаем, что $C_1 = -\frac{33}{85},\ C_2 = \frac{16}{85}$

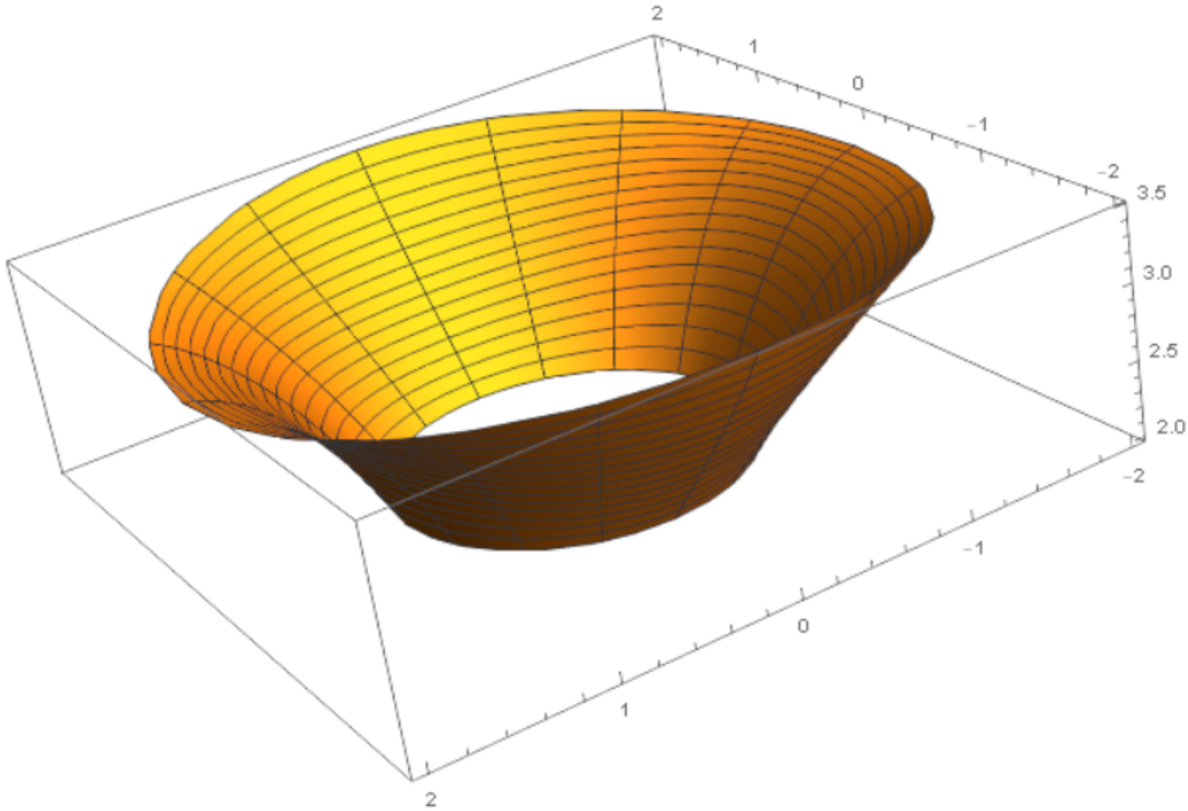
Тогда конечный вид Q будет:

$$Q = (-\frac{33}{85}\rho^2 + \frac{16}{85}\rho^{-2} + \frac{1}{5}\rho^3)cos2\varphi$$

Сложив Q и P, получим итоговый вид решения уравнения:
$U(\rho,\ \varphi) = 2ln\rho + 2 + (-\frac{33}{85}\rho^2 + \frac{16}{85}\rho^{-2} + \frac{1}{5}\rho^3)cos2\varphi$

Визуализация решения при $\rho \in (1,\,2),\ \varphi \in [0,\ 2\pi)$

[4]=



№15
Условие задачи:

$$U_{xx} + U_{yy} = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

$$U_\rho|_{\rho=1} = xy$$

$$U|_{\rho=5} = 0$$

$$1 < \rho < 5$$

Решение:

Переведем в полярную систему координат:

$$\rho^2 U_{\rho\rho} + \rho U_\rho + U_{\varphi\varphi} = \rho^3 cos2\varphi$$

$$U_\rho(1, \varphi) = \frac{\rho^2}{2} cos2\varphi = \frac{1}{2} cos2\varphi$$

$$U(5, \varphi) = 0$$

Далее будем искать решение в виде: $U(\rho, \varphi) = P(\rho, \varphi) + Q(\rho, \varphi)$. И разобьем задачу на две:

1) $\rho^2 P_{\rho\rho} + \rho P_\rho + P_{\varphi\varphi} = 0$

$$P_\rho(1, \varphi) = \frac{1}{2} cos2\varphi$$

$$P(5, \varphi) = 0$$

И

2) $\rho^2 Q_{\rho\rho} + \rho Q_\rho + Q_{\varphi\varphi} = \rho^3 cos2\varphi$

$$Q_\rho(1, \varphi) = 0$$

$$Q(5, \varphi) = 0$$

1) Начнем с решения пункта 1. Его будем искать в виде:

$$P(\rho, \varphi) = a_0 ln(\rho) + b_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k \rho^k + b_k \rho^{-k}) cosk\varphi + (c_k \rho^k + b_k \rho^{-k}) sink\varphi]$$

Тогда подставив в начальные условия, получим:

$$P_\rho(1, \varphi) = a_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [(k a_k \rho^{k-1} - k b_k \rho^{-k-1}) cosk\varphi + (k c_k \rho^{k-1} - k b_k \rho^{-k-1}) sink\varphi] = \frac{1}{2} cos2\varphi$$

$$P(2, \varphi) = a_0 ln5 + b_0 + \sum_{k=0}^{\infty} [(a_k 2^k + b_k 2^{-k}) cosk\varphi + (c_k 2^k + b_k 2^{-k}) sink\varphi] = 0$$

Приравняв коэффициенты, получим:
$a_0 = 0$
$b_0 = 0$
$a_2 = b_2 = 0;\ c_2 = -\frac{1}{1246};\ d_2 = -\frac{625}{2492}$
$a_k = b_k = c_k = d_k = 0,\ \forall k \neq 2$

Тогда $P(\rho,\ \varphi) = (-\frac{1}{1246}\rho^2 - \frac{625}{2492}\rho^{-2})sin2\varphi$

2) Искать решение для пункта 2 будем в виде: $Q = R(\rho)cos2\varphi$
Тогда получаем такое уравнение:
$\rho^2 R"cos2\varphi + \rho R'cos2\varphi - 4Rcos2\varphi = \rho^3 cos2\varphi$
$\rho^2 R" + \rho R' - 4R = \rho^3$

Сделаем замену переменных: $\rho = e^t;\ t = ln\rho$
$R'' - 4R = e^{3t}$
$R_{oo} = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}$

Частное неоднородное решение будем искать в виде: $R_{чн} = C_3 e^{3t}$, тогда получаем

$$9C_3 e^{3t} - 4C_3 e^{3t} = e^{3t} \Rightarrow C_3 = \frac{1}{5}$$

Общее решение будет иметь вид: $R = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{3t}$. Сделав обратную замену переменных получим $R = C_1\rho^2 + C_2\rho^{-2} + \frac{1}{5}\rho^3$

Подставив в начальные условия, найдем константы C_1 и C_2:
$R'(1) = 2C_1 - 2C_2 + \frac{1}{5} = 0$
$R(5) = 25C_1 - \frac{1}{25}C_2 + 25 = 0$
Получаем, что $C_1 = -\frac{6251}{6260},\ C_2 = \frac{1125}{1252}$
Тогда конечный вид Q будет: $Q = (-\frac{6251}{6260}\rho^2 + \frac{1125}{1252}\rho^{-2} + \frac{1}{5}\rho^3)cos2\varphi$

Сложив Q и P, получим итоговый вид решения уравнения:
$U(\rho,\ \varphi) = (-\frac{1}{1246}\rho^2 - \frac{625}{2492}\rho^{-2})sin2\varphi + (-\frac{33}{85}\rho^2 + \frac{16}{85}\rho^{-2} + \frac{1}{5}\rho^3)cos2\varphi$

Визуализация решения при $\rho \in (1,\ 5),\ \varphi \in [0,\ 2\pi)$