МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра дискретной математики и алгоритмики

РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ РАЗДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ (КВАДРАТЕ)

Лабораторная работа 2

Бинцаровского Леонида Петровича
студента 4 курса 3 группы,
специальность «информатика»

Минск, 2024

Вариант 4

Условие задачи:

$$u_{tt} = 49\left(u_{xx} + u_{yy}\right) \quad (1)$$

$$\begin{cases} u|_{x=0} = u|_{x=7} = u|_{y=0} = u|_{y=2} = 0 \\ 0 < x < 7 \\ 0 < y < 2 \\ t > 0 \\ u|_{t=0} = xy(7-x)\left(2-y\right) \\ u_t|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Решение:

Будем искать решение в виде

$$u(x,y,t) = V\left(x,y\right)T(t) \qquad (2)$$

Подставим (2) в (1):

$$V\left(x,y\right)T''(t) = 49(V''_{xx}\left(x,y\right) + \ V''_{yy}(x,y)) \bullet T(t)$$

Умножим на

$$\frac{1}{49V(x,y)T(t)}$$

$$\frac{T(t)''}{T(t)49} = \frac{V''_{xx}\left(x,y\right) + \ V''_{yy}(x,y)}{V(x,y)} = -\lambda^2$$

Рассмотрим первое уравнение

$$\frac{V''_{xx}\left(x,y\right) + \ V''_{yy}(x,y)}{V(x,y)} = -\lambda^2$$

Распишем $V\left(x,y\right) = X(x)Y(y)$ и подставим в уравнение выше, имеем

$$\frac{X''Y + XY''}{XY} = -\lambda^2$$

$$\frac{X''}{X} = -\lambda^2 - \frac{Y''}{Y} = -\beta^2$$

$$X(x) = C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x$$

Подставим данные из начальных условий, имеем

$$X(0) = X(7) = 0$$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin 7\beta = 0 \end{cases}$$

Далее

$$\sin 7 \bullet \beta = 0$$

$$\beta_n = \frac{\pi n}{7},\ n \in Z$$

$$X_n(x) = \sin(\frac{\pi n}{7} x),\ \ n \in Z$$

Теперь разрешим уравнение

$$-\lambda^2 - \frac{Y''}{Y} = -\beta^2$$

$$\frac{Y''}{Y} = \beta^2 - \lambda^2$$

$$Y(y) = C_1 \cos\sqrt{\lambda^2 - \beta^2} \bullet y + C_2 \sin\sqrt{\lambda^2 - \beta^2} \bullet y$$

Из начальных условий имеем $Y(0) = Y(2) = 0$

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 \sin 2\sqrt{\lambda^2 - \beta^2} = 0 \end{cases}$$

$$\sqrt{\lambda^2 - \beta^2} = \frac{\pi k}{2},\ k \in Z$$

$$Y_k(y) = \sin(\frac{\pi k}{2} y),\ \ k \in Z$$

$$\lambda_{nk} = \sqrt{(\frac{\pi k}{2})^2 + (\frac{\pi n}{7})^2},\ \ n, k \in Z$$

Получив λ_{nk} решаем

$$\frac{T''}{T} + 49{\lambda_{nk}}^2 = 0,$$

$$T_{nk}(t) = \ A_{nk}cos\left(7\lambda_{nk}t\right) + \ B_{nk}sin\left(7\lambda_{nk}t\right),$$

$$V_{nk}\left(x, y\right) = \ X_n(x)Y_k\left(y\right),$$

$$u\left(x, y, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{nk}cos\left(7\lambda_{nk}t\right) + \ B_{nk}sin\left(7\lambda_{nk}t\right)) \bullet sin(\frac{\pi n}{7}x) \bullet sin(\frac{\pi k}{2}y)$$

Подставим начальные условия

$$\begin{cases} u\,|_{t=0} = xy(7-x)(2-y), \\ u_t\,|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

Имеем

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(A_{nk}) \bullet sin(\frac{\pi n}{7}x) \bullet sin\left(\frac{\pi k}{2}y\right) = \ xy(7-x)(2-y)$$

Найдем производную по t u(x, y, t):

$$u_t = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-7\lambda_{nk}A_{nk} \bullet \sin\left(7\lambda_{nk}t\right) + 7\lambda_{nk}B_{nk}\cos(7\lambda_{nk}t)) \bullet \sin(\frac{\pi n}{7}x) \bullet \sin\frac{\pi k}{2}y$$

При t = 0 имеем:

$$u_t\,|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}7\lambda_{nk}B_{nk} \bullet \sin(\frac{\pi n}{7}x) \bullet \sin\frac{\pi k}{2}y = 0$$

Следовательно, $B_{nk} = 0$*, тогда:*

$$u\left(x, y, t\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{nk}cos\left(7\lambda_{nk}t\right) \bullet sin(\frac{\pi n}{7}x) \bullet sin(\frac{\pi k}{2}y)$$

$$u\,|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}A_{nk} \bullet sin(\frac{\pi n}{7}x) \bullet sin\left(\frac{\pi k}{2}y\right) = xy(7-x)(2-y)$$

Тогда:

$$A_{nk} = \frac{2}{7}\int_0^7\int_0^2 xy(7-x)(2-y)\sin(\frac{\pi n}{7}x)\sin(\frac{\pi k}{2}y)dydx$$

$$A_{nk} = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ или } k \text{ четное} \\ \frac{12544}{k^3 \bullet n^3 \bullet \pi^6}, & \text{если } n \text{ и } k \text{ нечетные} \end{cases}$$

Сделаем замену для n, k вместо n (2n+1) и вместо k (2k+1)

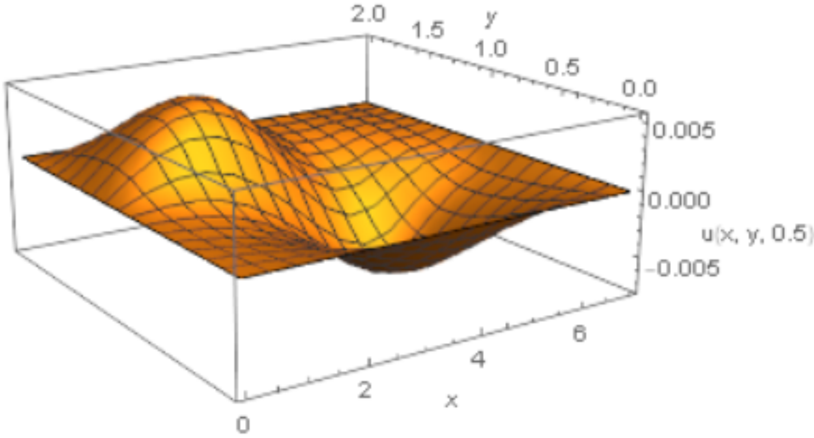
$$A_{nk} = \frac{12544}{(2n+1)^3 \bullet (2k+1)^3 \bullet \pi^6}$$

Итоговый ответ будет иметь вид
Ответ:

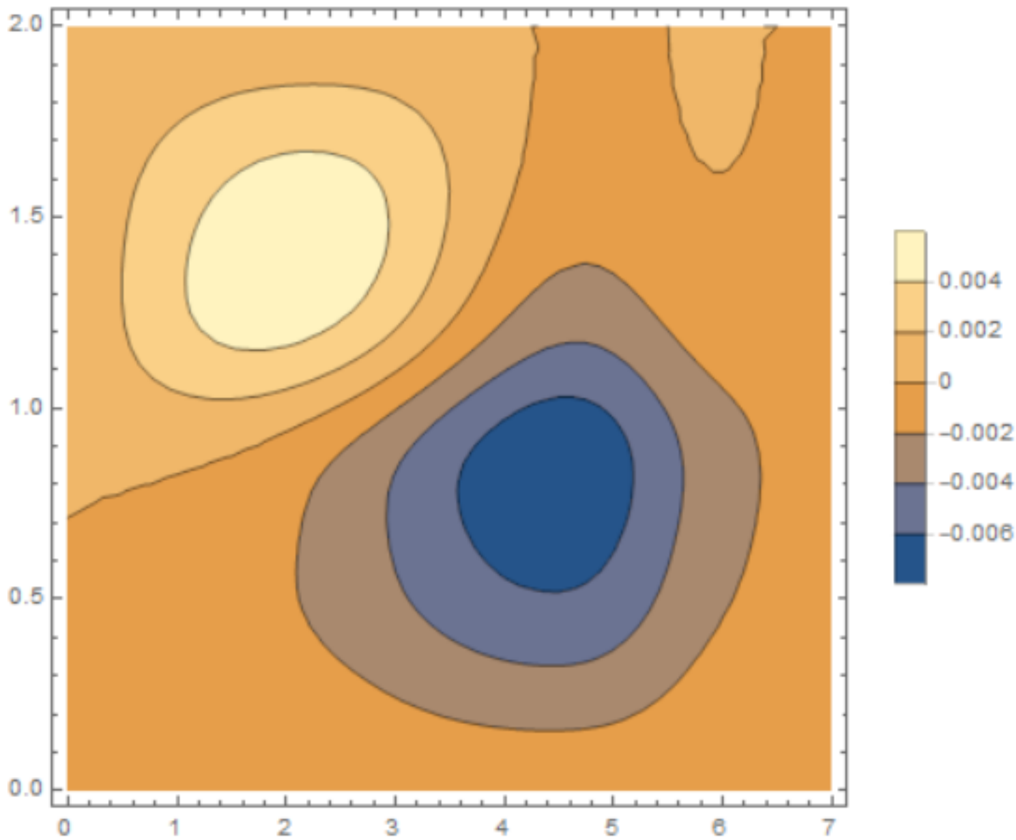
$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{12544}{(2n+1)^3 \bullet (2k+1)^3 \bullet \pi^6} \bullet \cos\left(7\sqrt{\frac{\pi^2(2n+1)^2}{49} + \frac{\pi^2(2k+1)^2}{4}}t\right) \bullet \\ \bullet \sin(\frac{\pi n}{7}x) \bullet \sin(\frac{\pi k}{2}y)$$

t = 0.5

Out[56]=

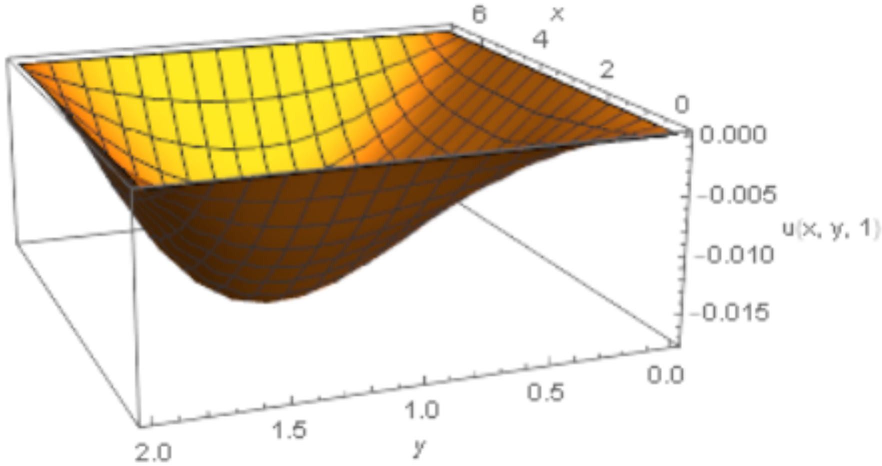


Out[57]=

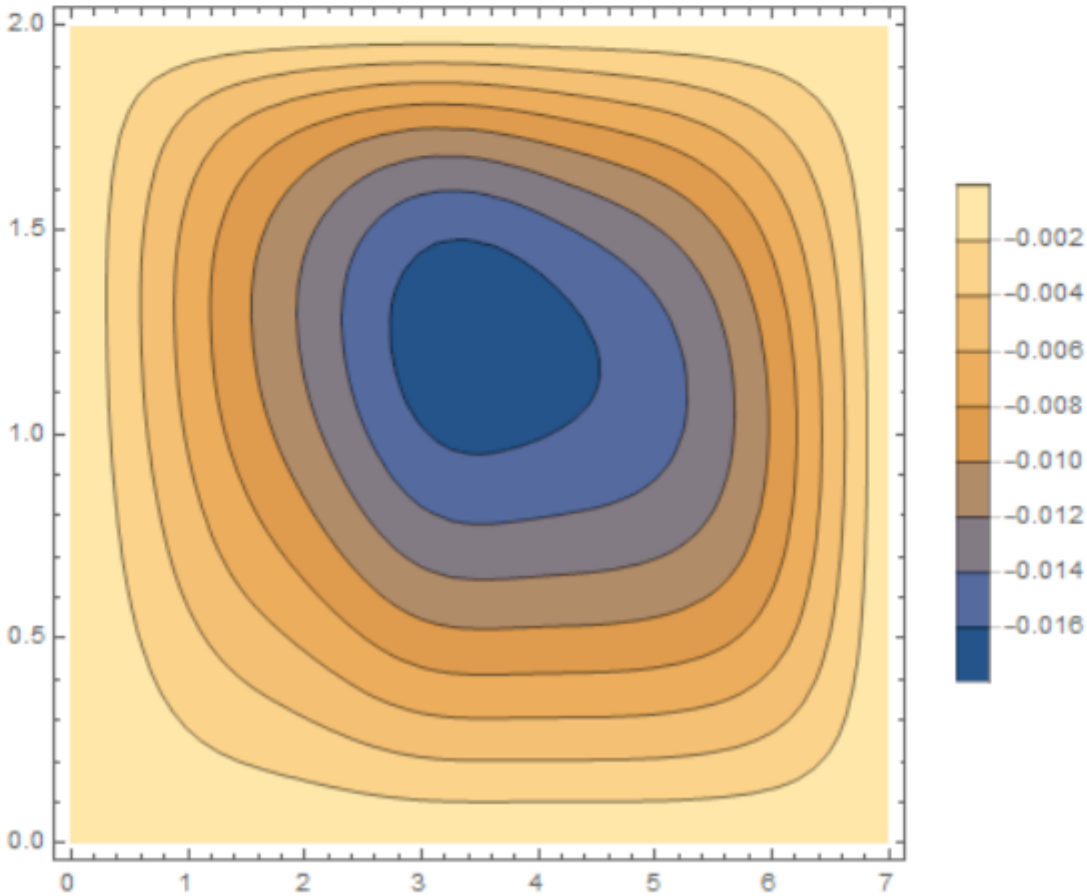


t = 1

Out[58]=

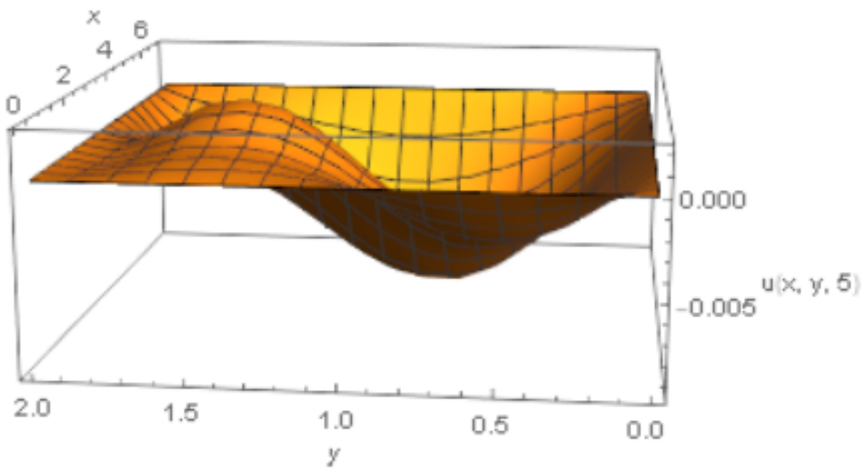


Out[59]=



t = 5

Out[60]=



Out[61]=