МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ФАКУЛЬТЕТ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАТИКИ

Кафедра дискретной математики и алгоритмики

КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНОЙ С УПРУГО ЗАКРЕПЛЕННЫМИ КОНЦАМИ СТРУНЫ

Лабораторная работа 1

Бинцаровского Леонида Петровича
студента 4 курса 3 группы,
специальность «информатика»

Минск, 2024

Вариант 4

Условие задачи:

$u_{tt} = a^2 u_{xx}$

$$\begin{cases} u_x(0, t) + hu(0, t) = 0 \\ u_x(l,\ t) - hu(l,\ t) = 0 \\ u(x, 0) = x \\ u_t(x, 0) = -x \end{cases}$$

Решение:

(1) $u(x, t) = X(x)T(t)$

$XT'' = a^2 X''T$

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda^2$$

Получаем:

(2) $T'' + \lambda^2 a^2 T = 0$

(3) $X'' + \lambda^2 X = 0$

Решаем (2). В случаях $\lambda < 0$ и $\lambda = 0$ получаем тривиальное решение $X(x) = 0$.
Значит полагаем $\lambda > 0$.
В результате решения (2) получаем:
$X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$
Подставляя граничные условия получим:

(4) $hC_1 + \lambda C_2 = 0$

(5) $(\lambda C_2 - hC_1)\cos\lambda l - (\lambda C_1 + hC_2)\sin\lambda l = 0$

Выразим из (3) C_2:

$$C_2 = \frac{-hC_1}{\lambda}$$

И подставим в (4):

$$2hC_1\cos\lambda l - \left(C_1 \frac{\lambda^2 - h^2}{\lambda} \right)\sin\lambda l = 0$$

Полагаем $C_1 \neq 0$.

$$2h\cos\lambda l - \left(\frac{\lambda^2 - h^2}{\lambda} \right)\sin\lambda l = 0$$

Разделим на $\sin\lambda l$:

$$2h\cot\lambda l - \left(\frac{\lambda^2 - h^2}{\lambda} \right) = 0$$

Получаем уравнение

$$\cot\lambda l = \left(\frac{\lambda^2 - h^2}{\lambda 2h}\right)$$

Это уравнение имеет множество корней $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3, \ldots$ Тогда $\lambda = \ \lambda_n,\ n = 1, 2, 3, \ldots$

Имеем:

$X_n(x) = C_1\cos\lambda_n x + C_2\sin\lambda_n x$

Пусть $C_1 = \lambda_n,\ тогда\ C_2 = -h$. И в итоге получаем:

(6) $\quad X_n(x) = \lambda_n\cos\lambda_n x - h\sin\lambda_n x$

Вернемся к (1), подставив λ_n.

$T'' + \ {\lambda_n}^2 a^2 T = 0$

Получаем решение:

(7) $\quad T_n(t) = A_n\cos a\lambda_n t + B_n\sin a\lambda_n t$

Подставив (6) и (7) в (1) получим:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos a\lambda_n t + B_n\sin a\lambda_n t)(\lambda_n\cos\lambda_n x - h\sin\lambda_n x)$$

Подставив начальные условия, получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\lambda_n\cos\lambda_n x - h\sin\lambda_n x) = x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a\lambda_n B_n(\lambda_n\cos\lambda_n x - h\sin\lambda_n x) = -x$$

Вычисляем коэффициенты Фурье $A_n,\ B_n$

$$A_n = \frac{1}{\left\|X_n\right\|^2}\int_0^l s(\lambda_n\cos\lambda_n s - h\sin\lambda_n s)ds$$

$$B_n = -\frac{1}{\left\|X_n\right\|^2}\int_0^l s(\lambda_n\cos\lambda_n s - h\sin\lambda_n s)ds$$

Где $\left\|X_n\right\|^2 = \int_0^l (\lambda_n\cos\lambda_n x - h\sin\lambda_n x)dx$

Вычислениями в Wolfram Mathematica было получено, что

$$\left\|X_n\right\|^2 = \frac{l{\lambda_n}^2 + h^2 l - 2h}{2}$$

Тогда получаем, что:

$$(8)\qquad A_n = \frac{2}{l\lambda_n{}^2 + h^2 l - 2h} \int_0^l s(\lambda_n \cos\lambda_n s - h\sin\lambda_n s)ds$$

$$(9)\qquad B_n = -\frac{2}{(l\lambda_n{}^2 + h^2 l - 2h)a\lambda_n} \int_0^l s(\lambda_n \cos\lambda_n s - h\sin\lambda_n s)ds$$

Вычисляем (8) и (9) в Wolfram и получаем:

$$A_n = \frac{-2\lambda_n + 2\left(1 + hl\right)\lambda_n \cos\lambda_n l - 2(h - l\lambda_n{}^2)\sin\lambda_n l}{h\left(hl - 2\right)\lambda_n{}^2 + l\lambda_n{}^4}$$

$$B_n = -\frac{-2\lambda_n + 2\left(1 + hl\right)\lambda_n \cos\lambda_n l - 2(h - l\lambda_n{}^2)\sin\lambda_n l}{(h\left(hl - 2\right)\lambda_n{}^2 + l\lambda_n{}^4)a\lambda_n}$$

Подставив полученные коэффициенты, получим итоговую функцию.

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-2\lambda_n + 2\left(1 + hl\right)\lambda_n \cos\lambda_n l - 2(h - l\lambda_n{}^2)\sin\lambda_n l}{h\left(hl - 2\right)\lambda_n{}^2 + l\lambda_n{}^4}\cos a\lambda_n t - -\frac{-2\lambda_n + 2\left(1 + hl\right)\lambda_n \cos\lambda_n l - 2(h - l\lambda_n{}^2)\sin\lambda_n l}{(h\left(hl - 2\right)\lambda_n{}^2 + l\lambda_n{}^4)a\lambda_n}\sin a\lambda_n t\right)(\lambda_n \cos\lambda_n x - -h\sin\lambda_n x)$$

В системе Wolfram Mathematica можно найти значения λ_n при различных значениях h. Результаты представлены ниже:

h = 1:

```
In[86]:= root[n_] := NSolve[Cot[2*x] == (1 - x^2) / (2*x) && 100*n < x ≤ 100*(n + 1), Reals];
         list = {};
         h = 1;
         list = Join[list, Values[root[h]]]
         len = list // Length
         list[[1]]

Out[89]= {{100.521}, {102.092}, {103.663}, {105.234}, {106.805}, {108.376}, {109.947}, {111.518}, {113.088}, {114.659}, {116.23}, {117.801}, {119.372}, {120.943}, {122.514}, {124.085},
         {125.656}, {127.227}, {128.798}, {130.368}, {131.939}, {133.51}, {135.081}, {136.652}, {138.223}, {139.794}, {141.365}, {142.935}, {144.506}, {146.077}, {147.648}, {149.219},
         {150.79}, {152.361}, {153.932}, {155.502}, {157.073}, {158.644}, {160.215}, {161.786}, {163.357}, {164.928}, {166.498}, {168.069}, {169.64}, {171.211}, {172.782}, {174.353},
         {175.924}, {177.494}, {179.065}, {180.636}, {182.207}, {183.778}, {185.349}, {186.919}, {188.49}, {190.061}, {191.632}, {193.203}, {194.774}, {196.344}, {197.915}, {199.486}}
```

h = 10:

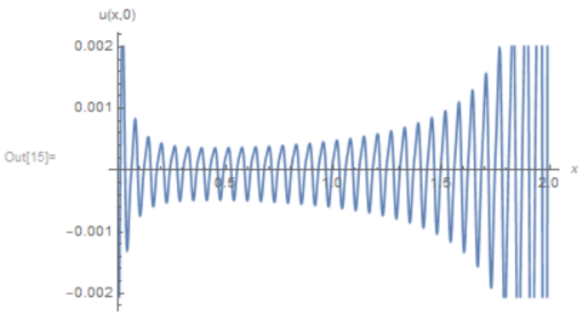
```
In[92]:= root[n_] := NSolve[Cot[2*x] == (100 - x^2) / (20*x) && 100*n < x ≤ 100*(n + 1), Reals];
         list = {};
         h = 1;
         list = Join[list, Values[root[h]]]
         len = list // Length
         list[[1]]

Out[95]= {{100.432}, {102.004}, {103.576}, {105.149}, {106.721}, {108.293}, {109.865}, {111.437}, {113.009}, {114.581}, {116.153}, {117.725}, {119.297}, {120.869}, {122.441}, {124.012},
         {125.584}, {127.156}, {128.728}, {130.299}, {131.871}, {133.443}, {135.015}, {136.586}, {138.158}, {139.729}, {141.301}, {142.873}, {144.444}, {146.016}, {147.587}, {149.159},
         {150.73}, {152.302}, {153.873}, {155.445}, {157.016}, {158.587}, {160.159}, {161.73}, {163.302}, {164.873}, {166.444}, {168.016}, {169.587}, {171.158}, {172.73}, {174.301},
         {175.872}, {177.444}, {179.015}, {180.586}, {182.158}, {183.729}, {185.3}, {186.871}, {188.443}, {190.014}, {191.585}, {193.156}, {194.727}, {196.299}, {197.87}, {199.441}}
```

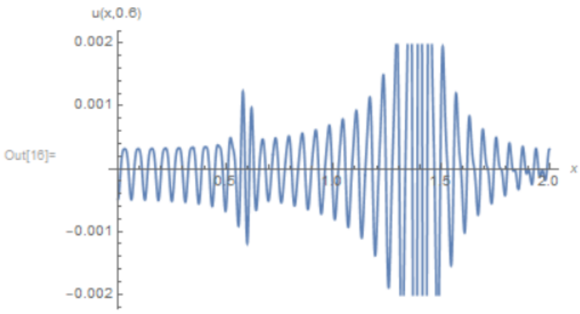
h = 0.5:

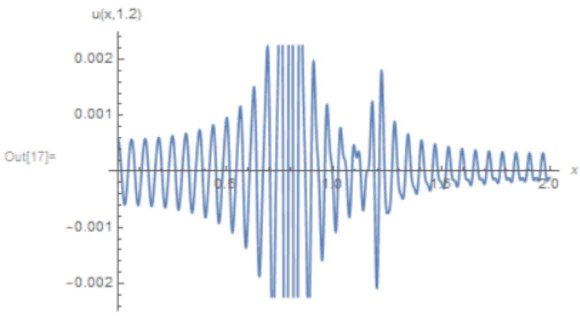
```
In[114]:= root[n_] := NSolve[Cot[2*x] == (0.25 - x^2) / x && 100*n < x ≤ 100*(n + 1), Reals];
          list = {};
          h = 0.5;
          list = Join[list, Values[root[1]]]
          len = list // Length
          list[[1]]

Out[117]= {{100.526}, {102.097}, {103.668}, {105.239}, {106.809}, {108.38}, {109.951}, {111.522}, {113.093}, {114.664}, {116.235}, {117.805}, {119.376}, {120.947}, {122.518}, {124.089},
          {125.66}, {127.231}, {128.801}, {130.372}, {131.943}, {133.514}, {135.085}, {136.656}, {138.226}, {139.797}, {141.368}, {142.939}, {144.51}, {146.081}, {147.651}, {149.222},
          {150.793}, {152.364}, {153.935}, {155.506}, {157.076}, {158.647}, {160.218}, {161.789}, {163.36}, {164.931}, {166.501}, {168.072}, {169.643}, {171.214}, {172.785}, {174.356},
          {175.926}, {177.497}, {179.068}, {180.639}, {182.21}, {183.78}, {185.351}, {186.922}, {188.493}, {190.064}, {191.635}, {193.205}, {194.776}, {196.347}, {197.918}, {199.489}}
```

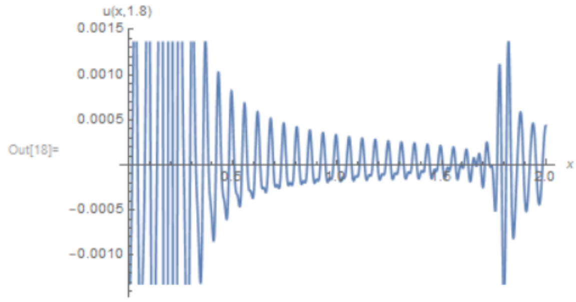
Также была получена визуализация профиля струны во времени в конкретный момент времени и на всем промежутке. Результаты представлены на картинках ниже.

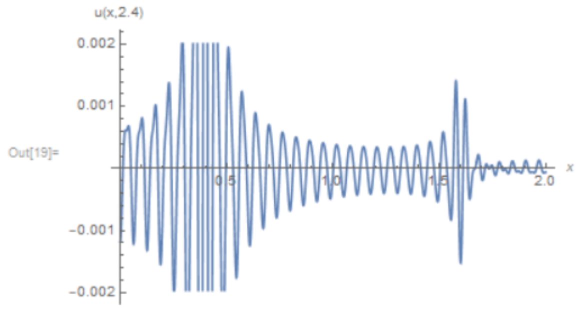
a = 1, h = 1, l = 2

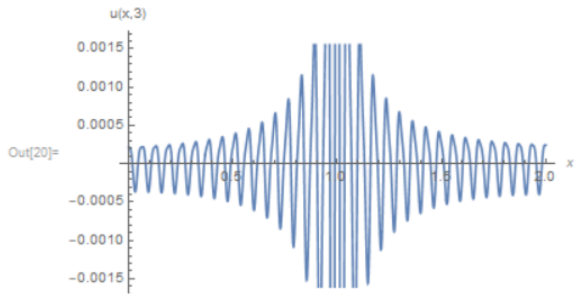




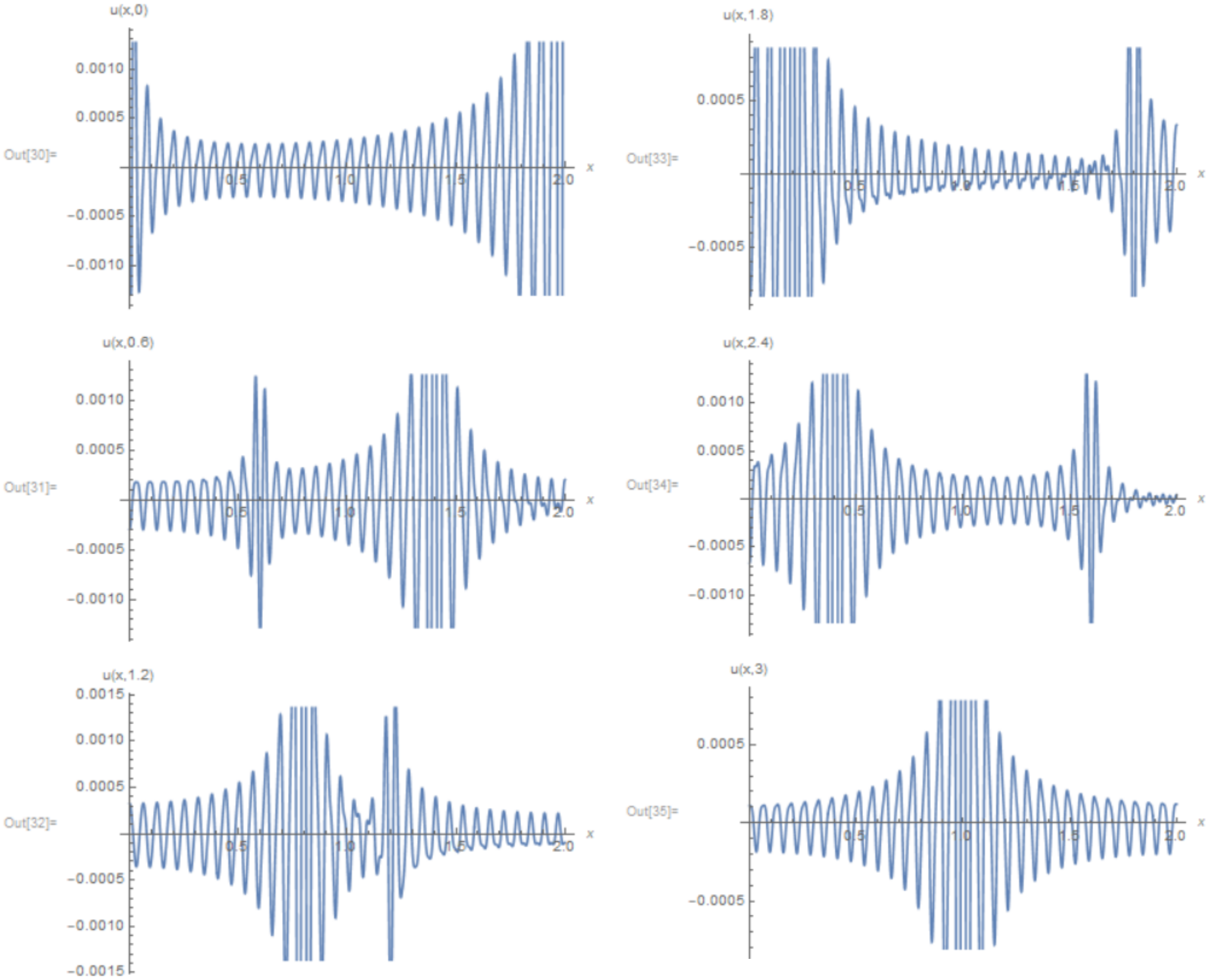




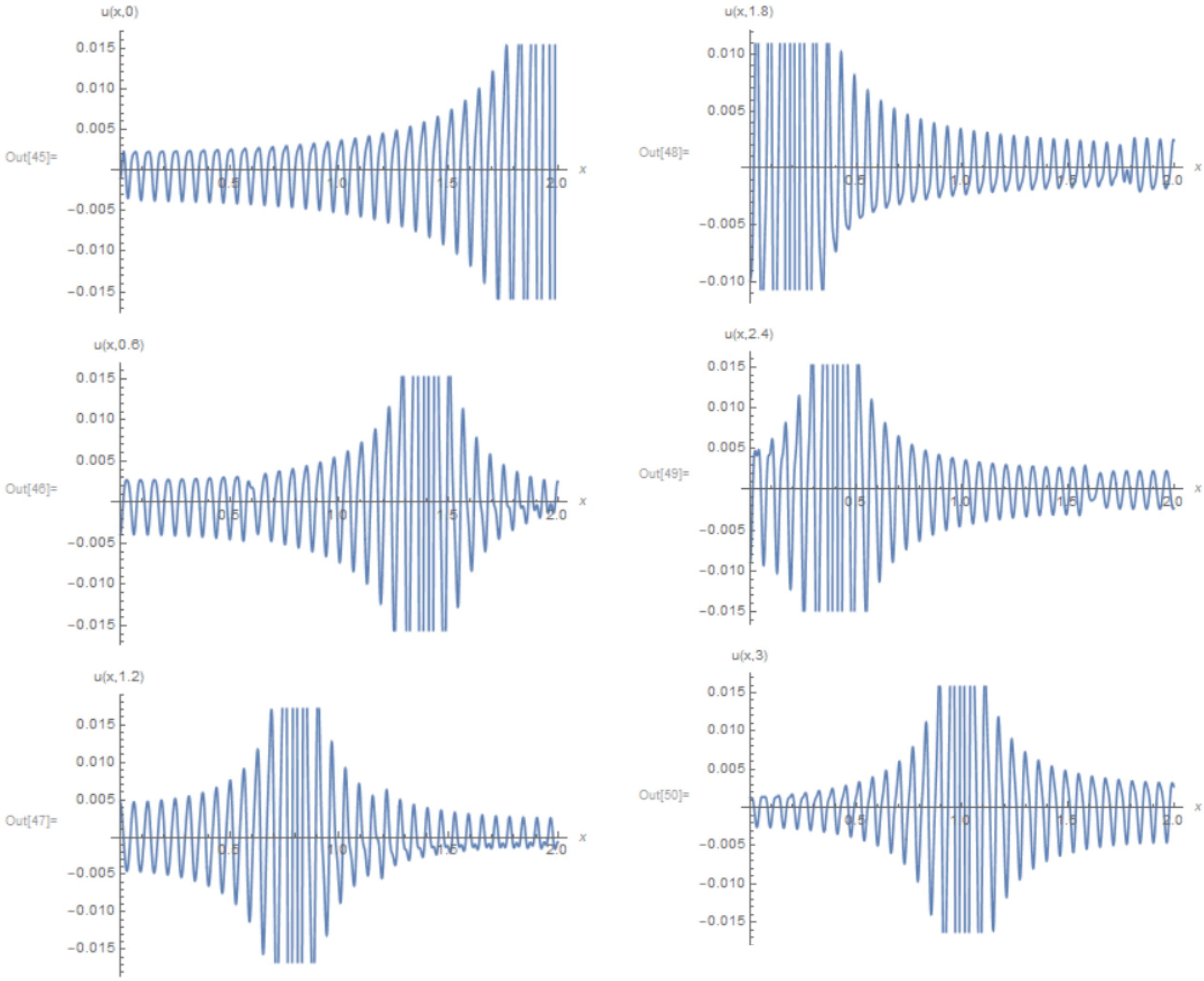




$a = 1,\ h = 0.5,\ l = 2$


Out[30]=
u(x,0)
0.0010
0.0005
−0.0005
−0.0010
0.5
1.0
1.5
2.0
x
Out[33]=
u(x,1.8)
0.0005
−0.0005
Out[31]=
u(x,0.6)
Out[34]=
u(x,2.4)
Out[32]=
u(x,1.2)
0.0015
−0.0015
Out[35]=
u(x,3)

a = 1, h = 10, l = 2


Out[45]=
u(x,0)
Out[48]=
u(x,1.8)
Out[46]=
u(x,0.6)
Out[49]=
u(x,2.4)
Out[47]=
u(x,1.2)
Out[50]=
u(x,3)
x