Corrigé de interro du 12 mai 2023

Développement en série de Fourier

Exercice 1

Soit f(t) une fonction périodique paire, tel que f(t)=f(-t). Son développement en série de Fourier :

- (●) Ne contient que des termes en cosinus plus éventuellement un terme constant ✔
- ( ) Je ne sais pas
- ( ) Ne contient que des termes en cosinus
- ( ) Ne contient que des termes en sinus
- ( ) Ne contient que des termes paires tels que k=2p avec p entier naturel

Exercice 2

Soit f(t) une fonction périodique impaire, tel que f(t)=-f(-t). Son développement en série de Fourier :

- (●) Ne contient que des termes en sinus ✔
- ( ) Ne contient que des termes en sinus plus éventuellement un terme constant
- ( ) Ne contient que des termes en cosinus
- ( ) Ne contient que des termes impaires tels que k=(2p+1) avec p entier naturel
- ( ) Je ne sais pas

Pour ces deux exercices, partir de la définition du DSF

$$\underbrace{a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t)}_{\text{Composante paire}} + \underbrace{b_n \sin(n\omega t)}_{\text{Composante impaire}}), \qquad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

Une fonction T-périodique et de moyenne nulle, peut s'exprimer au moyen :

- ◯ D'une somme de fonctions périodiques quelconques et de même pulsation
- ◯ De la somme d'un sinus et d'un cosinus de même pulsation
- ◯ D'une somme de fonction sinus (ou de cosinus) de période k.T ou k est un entier naturel et f=1/T
- ◯ Je ne sais pas
- ◉ D'une somme de fonction sinus (ou cosinus) de fréquence k.f ou k est un entier naturel et f=1/T ✔

Partir encore de la définition

$$\cancel{a_0} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \underbrace{\cos(k\omega t)} + b_k \underbrace{\sin(k\omega t)}\right), \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\omega = \frac{2\pi}{T}$

$a_0 \to 0$

Moyenne nulle

$\sin\left(k\frac{2\pi}{T} t\right)$

$\cos\left(k\frac{2\pi}{T} . t\right)$

$\sin(2\pi . \underbrace{kf} . t)$

$\cos(2\pi . \underbrace{kf} . t)$

Exercice 4

Soit $f(t) = sin^2(t).cos(t)$

Son développement en série de Fourier est donné par :

- $S(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}sin(2t) - \frac{1}{4}sin(4t)$
- $S(t) = -\frac{1}{4} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n} sin(2nt)$
- $S(t) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2}cos(2t) - \frac{1}{4}cos(4t)$
- Je ne sais pas ✔
- $S(t) = -\frac{1}{4} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{2n} cos(2nt)$

Ici, surtout ne pas partir de la définition (Trop long)

$$a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} (a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)), \qquad t \in \mathbb{R}$$

$\boxed{\text{Partir sur la piste de la linéarisation de la forme trigonométique}}$

$$f(t) = \sin^2(t)\cos t = \left(\frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\right)^2 \cdot \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{1}{8}\left(e^{2it} + e^{-2it} - 2\right)\left(e^{it} + e^{-it}\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{1}{8}\left(e^{3it} + e^{it} + e^{-it} + e^{-3it} - 2\left(e^{it} + e^{-it}\right)\right)$$

$$\Rightarrow f(t) = -\frac{1}{8}\left(2\cos(3t) - 2\cos(t)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{f(t) = \frac{1}{4}\cos(t) - \frac{1}{4}\cos(3t) \Rightarrow \text{Aucune bonne réponse}}$$

Mais je dois reconnaître que l'exercice est piégeux. Donc : Je sort du barème de l'éval sauf pour les étudiants ayant bien répondu.

Exercice 5

Soit une fonction f(t) T-périodique dont le DSF est défini par
$f(t) = 3 + 6sin(\omega t) - 2cos(2\omega t)$ avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Nous avons alors :

- ○ $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 11$
- ◉ $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 29$ ✔
- ○ $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 25$
- ○ $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 7$
- ○ Je ne sais pas

Application immédiate de Parseval

$$\frac{1}{T}\int_0^T |f(t)|^2 dt = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

$f(t) = 3 + 6\sin\omega t - 2\cos(2\omega t)$

Ici : $a_0 = 3$ $a_2 = -2$ $a_n = 0 \ \forall n \neq 2$

et $b_1 = 6$ $b_n = 0 \ \forall n \neq 1$

Donc : $\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)dt = 3^2 + \frac{1}{2}\left((-2)^2 + (6)^2\right) = 9 + \frac{1}{2}40 = 29$