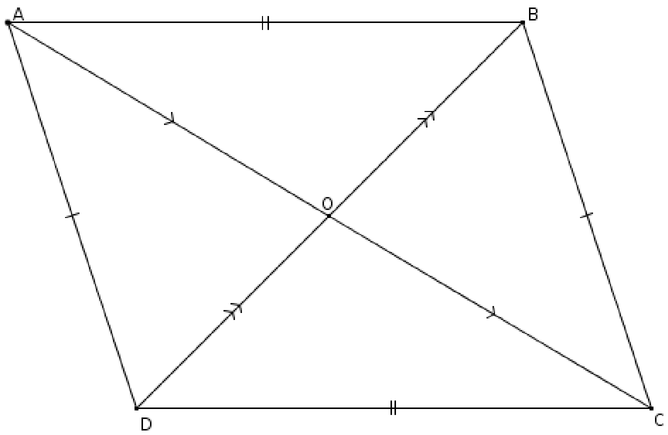
Cours de mathématiques – Seconde

Chapitre 1 – Vecteurs et translations

I – Définitions et premières propriétés

<u>a) Rappels sur le parallélogramme</u>

Les définitions suivantes du parallélogramme sont équivalentes :

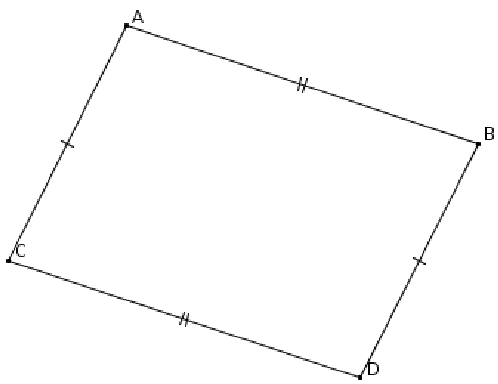
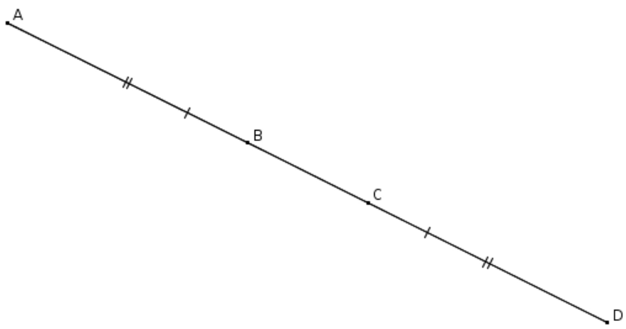


- Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés parallèles.
- Un parallélogramme est un quadrilatère ayant ses côtés opposés de même longueur.
- Un parallélogramme est un quadrilatère ayant deux côtés de même longueur et parallèles.
- Un parallélogramme est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu.

<u>b) Translation</u>

<u>Définition :</u> Soient A et B deux points du plan.

La <u>translation</u> qui transforme A en B est la transformation qui associe à tout point C du plan l'*unique* point D tel que $ABDC$ soit un <u>parallélogramme</u>, *éventuellement aplati*.

1er cas : A , B et C ne sont pas alignés	2d cas : A , B et C sont alignés.
	

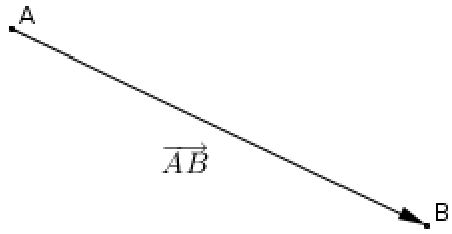
La translation peut être vue comme un *glissement rectiligne*. Pour la définir, on indique la direction, le sens, et la longueur du mouvement.

c) Vecteur

Définitions : La translation qui transforme A en B est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.
On dira que B est l'image de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Caractérisation d'un vecteur : Un vecteur $\overrightarrow{AB}$, ou la translation correspondante, se définit par trois caractéristiques :

- **Sa direction : c'est la direction de la droite (AB).**
- **Son sens : pour une direction, il y a deux sens possibles. Ici, c'est de A vers B.**
- **Sa longueur, ou norme : c'est la longueur du segment $[AB]$. La norme se note $\|\overrightarrow{AB}\|$. On a donc $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$.**

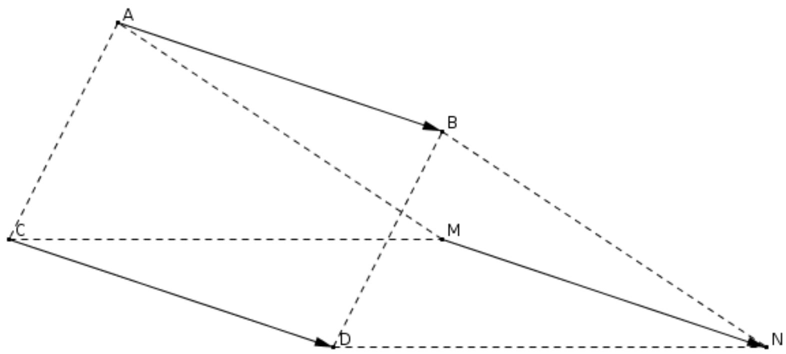


La flèche indique le sens : de A vers B.

Deux droites ont la même direction si et seulement si elles sont parallèles.

d) Vecteurs égaux

Si D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$, alors pour tout point M du plan, la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ et la translation de vecteur $\overrightarrow{CD}$ associent le même point N.



En effet, si $ABDC$ et $ABNM$ sont des parallélogrammes, alors $CDNM$ est également un parallélogramme.

Définition : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si la translation qui transforme A en B transforme C en D. On note $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$.

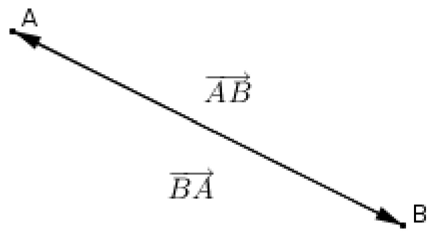
Définitions : Si deux vecteurs sont égaux, on dit que ce sont deux représentants d'un même vecteur, que l'on notera $\vec{u}$ par exemple. Ce vecteur peut donc être représenté n'importe où. Sur la figure précédente, comme $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CD}$, ce sont trois représentants du même vecteur. $\overrightarrow{AB}$ est le représentant d'origine A, $\overrightarrow{CD}$ est le représentant d'origine C, *etc.*

e) Vecteurs opposés, vecteur nul

Définition : Le vecteur nul, noté $\vec{0}$, est associé à la translation qui transforme A en A , B en B , *etc*.

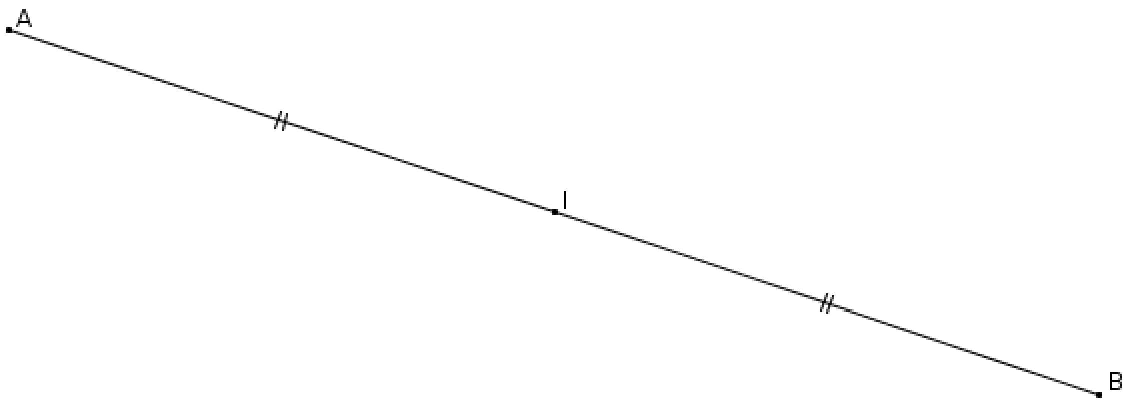
$\vec{0}=\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\ldots$

Définition : Le vecteur opposé au vecteur $\overrightarrow{AB}$, noté $-\overrightarrow{AB}$, est le vecteur associé à la translation qui transforme B en A . C'est donc le vecteur $\overrightarrow{BA}$: on a donc $-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$.



Propriété : Deux vecteurs sont opposés si et seulement si ils ont même direction, même longueur, mais sens opposés.

Propriété : I est le milieu de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$.

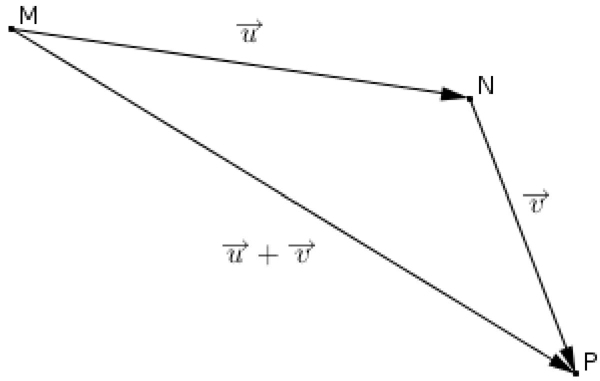


II – Opérations sur les vecteurs

a) Addition de vecteurs

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, et M un point.

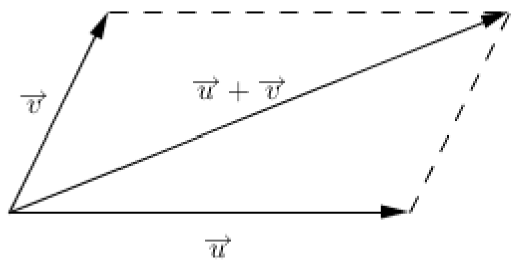
Si N est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$, et si P est l'image de N par la translation de vecteur $\vec{v}$, alors P est l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}+\vec{v}$.



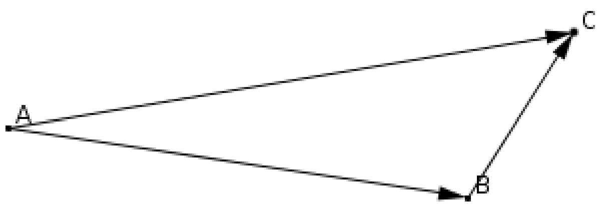
$\vec{u}+\vec{v}$ est le vecteur associé à la translation résultant de l'enchainement des deux translations associées à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

La construction de la somme peut se faire de deux manières :

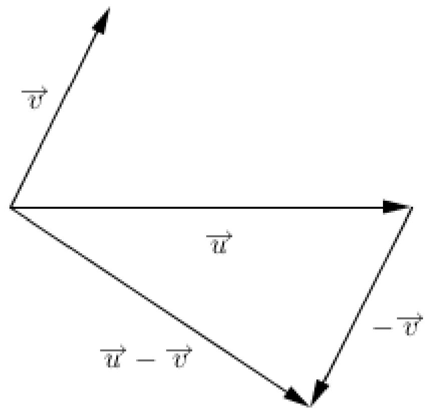
- soit en les disposant bout-à-bout, comme sur la figure précédente,
- soit en représentant un parallélogramme, les trois vecteurs partant du même point :



<u>Relation de Chasles :</u> Pour tous points A, B et C du plan, on a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.



b) Soustraction de deux vecteurs



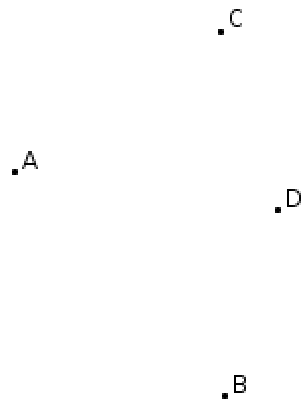
Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé :
$\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+(-\vec{v})$.

c) Relations algébriques

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

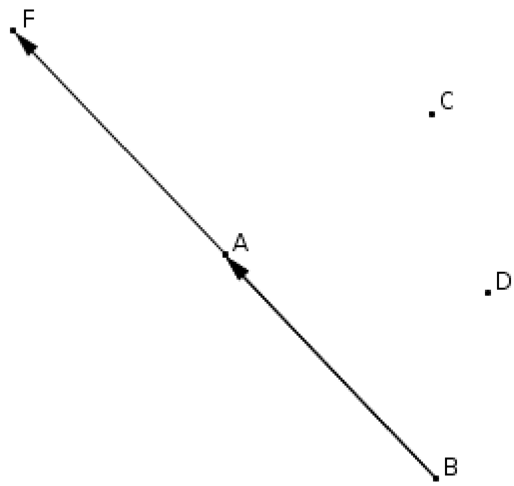
- $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}}$
- $\boldsymbol{\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}}$
- $\boldsymbol{\vec{u}-\vec{u}=\vec{0}}$
- $\boldsymbol{(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})}$

Application : Construisons le point F tel que $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}$.



On cherche à simplifier l'expression :
$\overrightarrow{DC}-\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CA}=\underbrace{\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}}_{Chasles}+\overrightarrow{CA}=\underbrace{\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}}_{Chasles}=\overrightarrow{BA}$.

On a donc $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BA}$, ce qui permet de construire le point F .



III – Coordonnées d'un vecteur

Définition : Un repère du plan est noté $(O;I,J)$: O est l'origine, I le point de coordonnées $(1;0)$ et J le point de coordonnées $(0;1)$.

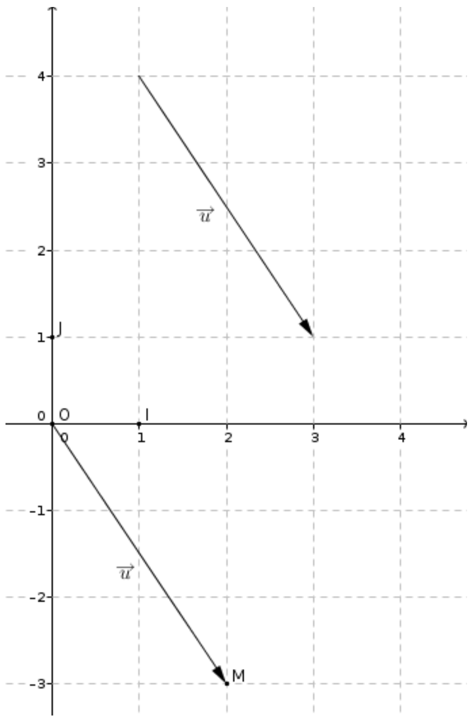
Le repère peut aussi se noter $(O;\vec{i},\vec{j})$ où $\vec{i}=\overrightarrow{OI}$ et $\vec{j}=\overrightarrow{OJ}$.

a) Coordonnées d'un vecteur

Définition : Les coordonnées de $\vec{u}$ sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{OM}=\vec{u}$.

Les coordonnées $(x;y)$ d'un vecteur peuvent se noter en colonne $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, alors que pour les points seule la notation en ligne est utilisée.

Exemple : Le représentant d'origine O du vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ puisque M a pour coordonnées $(2;-3)$.
Par la translation de vecteur $\vec{u}$, l'abscisse du point image est égale à celle du point augmentée de 2, l'ordonnée du point image est égale à celle du point diminuée de 3.



Propriété : Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les même coordonnées.

Preuve: Supposons que M soit l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$, et N soit l'image de O par la translation de vecteur $\vec{v}$.

$\vec{u}=\vec{v} \Leftrightarrow M=N \Leftrightarrow M$ et N ont les mêmes coordonnées $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les mêmes coordonnées.

b) Calculs des coordonnées

Propriété : **Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A)$.**

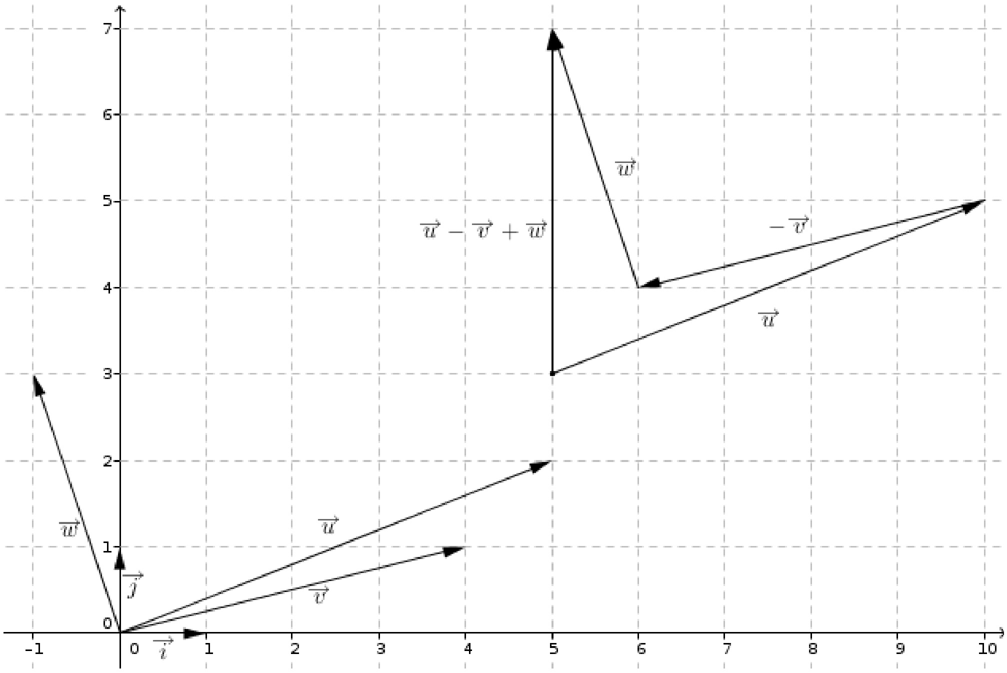
Exemple : *Si $A(5;3)$ et $B(7;-5)$, alors $\overrightarrow{AB}(7-5;-5-3) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}(2;-8)$.*

Propriété : **On déduit de cette propriété que si $\vec{u}(x;y)$, alors $-\vec{u}(-x;-y)$.**

Propriétés : **Si $\vec{u}(x;y)$ et $\vec{v}(x';y')$, alors $\vec{u}+\vec{v}(x+x';y+y')$ et $\vec{u}-\vec{v}(x-x';y-y')$.**

Exemple : *Supposons que $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}$.*

Alors $\vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}5-4+(-1)\\2-1+3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{u}-\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$.



c) Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Définition : **On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels. C'est l'ensemble de tous les nombres rencontrés jusqu'à maintenant. Ces nombres peuvent être représentés sur une droite graduée.**

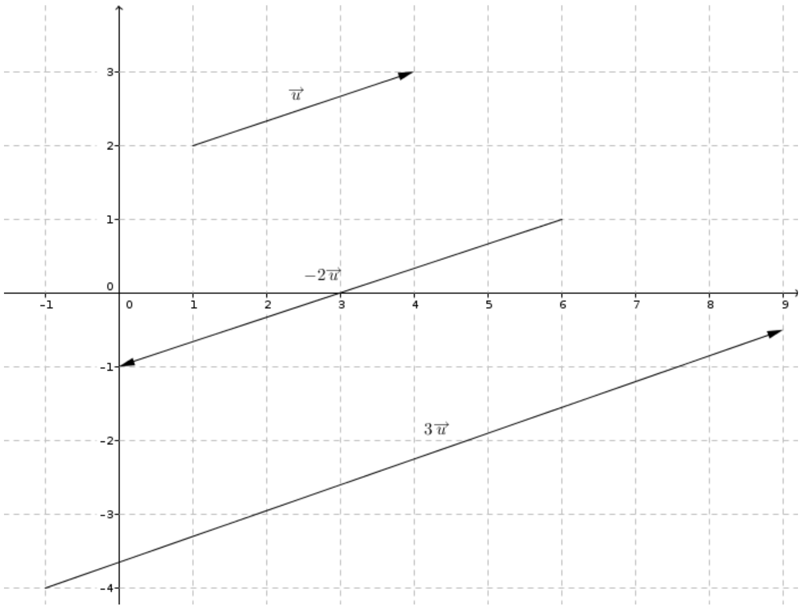
Exemples : *5 ; -8 ; $\frac{1}{6}$; $-5{,}956$; $\sqrt{2}$; $\frac{-1+\sqrt{5}}{8}$; … sont des nombres réels.*

On dit aussi qu'ils appartiennent à $\mathbb{R}$, ce qui se note : $5 \in \mathbb{R}$, $\pi \in \mathbb{R}$ ...

Définition : **Soient $k\in\mathbb{R}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère. Le vecteur $k\times\vec{u}$, aussi noté $k\vec{u}$, est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix}k\,x\\k\,y\end{pmatrix}$. Ce vecteur ne dépend pas du repère choisi.**

Exemple :

$\vec{u}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$, *donc* $-2\vec{u}\begin{pmatrix}-6\\-2\end{pmatrix}$ *et* $3\vec{u}\begin{pmatrix}9\\3\end{pmatrix}$.



Propriété : **Soit k un réel non nul et $\vec{u}$ un vecteur non nul. Alors les vecteurs $\vec{u}$ et $k\vec{u}$ ont la même direction. De plus :**

- **Si $k>0$, alors ils ont le même sens.**
- **Si $k<0$, alors ils ont des sens opposés.**

Réciproquement, si deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, alors il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=k\vec{v}$.

Propriété : **Soient A et B deux points distincts et k un réel non nul.**
Soit C tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$. Alors avec la propriété précédente :

Si $k>0$	**Si $k<0$**
$C\in[AB]$ **et** $AC=k\,AB$ 	$C\in(AB)$ **(mais** $C\notin[AB]$ **) et** $AC=-k\,AB$ 

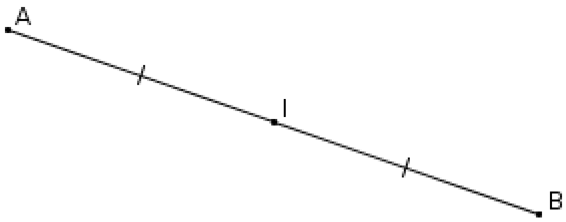
Propriétés : **Soient k et h des réels, et $\vec{u}$ et $\vec{v}$ des vecteurs.**

- $k\vec{u}=\vec{0} \Leftrightarrow k=0$ **ou** $\vec{u}=\vec{0}$
- $1\vec{u}=\vec{u}$ **et** $-1\vec{u}=-\vec{u}$
- $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
- $(k+h)\vec{u}=k\vec{u}+h\vec{u}$
- $(kh)\vec{u}=k(h\vec{u})$
- $(k+h)(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}+h\vec{u}+h\vec{v}$

Ces relations se prouvent notamment en utilisant les coordonnées des vecteurs.

d) Milieu d'un segment

Propriété : **I est le milieu de $[AB] \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=\overrightarrow{BI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{IB}$.**



Propriété : **Si $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, alors I milieu de $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2}\right)$.**

Exemple : *Soient $A(4;3)$ et $B(5;-7)$. Alors I milieu de $[AB]$ aura pour coordonnées $\left(\frac{4+5}{2};\frac{3+(-7)}{2}\right)$, donc $\left(\frac{9}{2};-2\right)$.*

Preuve de la propriété : Comme $I(x_I;y_I)$ est le milieu de $[AB]$, $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AI}$. On en déduit donc que $\begin{cases} x_B-x_A=2(x_I-x_A) \\ y_B-y_A=2(y_I-y_A) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B-x_A=2x_I-2x_A \\ y_B-y_A=2y_I-2y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B+x_A=2x_I \\ y_B+y_A=2y_I \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x_B+x_A}{2}=x_I \\ \frac{y_B+y_A}{2}=y_I \end{cases}$.

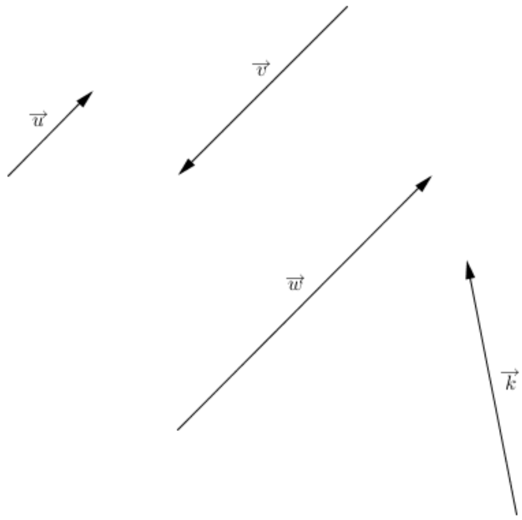
IV – Vecteurs colinéaires

<u>Définition :</u> Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont <u>colinéaires</u> si et seulement s'il existe un réel k tel que $\vec{u}=k\vec{v}$, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction.

<u>*Exemple :*</u>

Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires.



<u>Remarque :</u> On considère que le vecteur nul $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.

Deux vecteurs étant colinéaires si et seulement si leurs coordonnées sont proportionnelles, on en déduit la propriété suivante :

<u>Propriété :</u> Deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ sont colinéaires si et seulement si $xy'=x'y$.

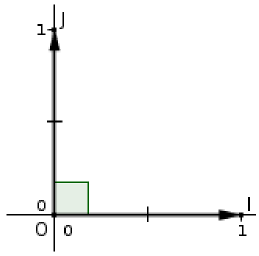
<u>Exemple :</u> Soient $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 9 \\ 4 \end{pmatrix}$. $7\times4-9\times8=-44\neq0$ donc les vecteurs ne sont pas colinéaires.

<u>Propriétés :</u>

- **Trois points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.**
- **Deux droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.**

V – Longueur d'un segment, norme d'un vecteur

<u>Définition :</u> Un repère est orthonormé (ou orthonormal) si et seulement si ses axes sont perpendiculaires et on a la même unité de longueur sur chaque axe : $(OI)\perp(OJ)$ et $OI=OJ$.

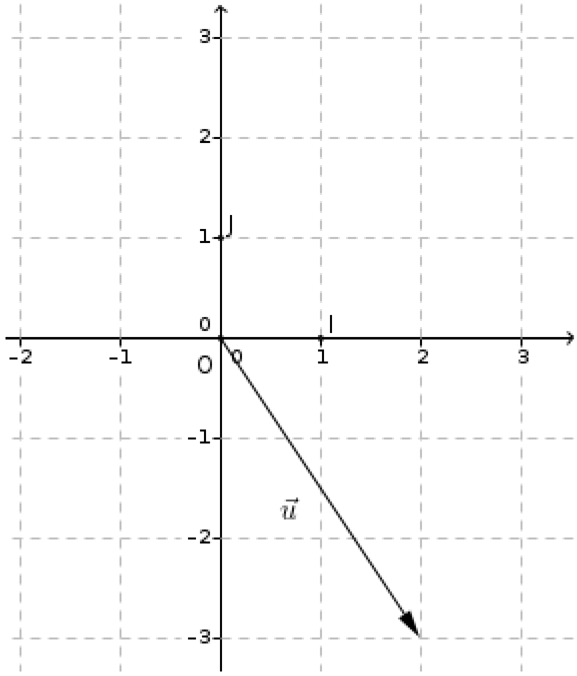


a) Norme d'un vecteur

<u>Rappel :</u> La *norme* d'un vecteur $\vec{u}$ est la longueur de ce vecteur. Celle-ci est notée $\|\vec{u}\|$.

<u>Théorème</u> : Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ dans un <u>repère orthonormé</u> ; alors $\|\vec{u}\|=\sqrt{x^2+y^2}$.

<u>Exemple :</u> Soit $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ un vecteur dans un repère orthonormé. $\|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+(-3)^2}=\sqrt{4+9}=\sqrt{13}$.



b) Longueur d'un segment

Pour tous points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, $\|\overrightarrow{AB}\|=AB$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\y_B-y_A\end{pmatrix}$. On a donc :

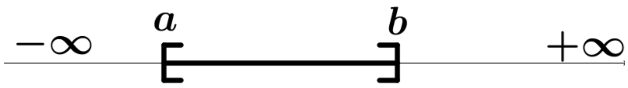
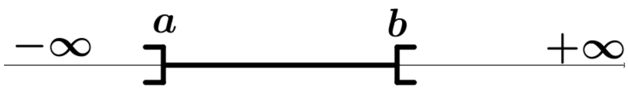
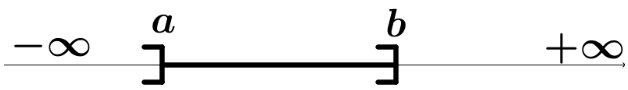
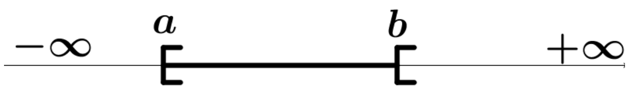
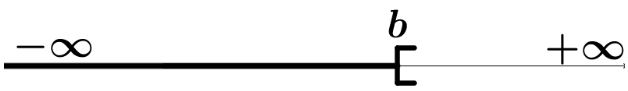
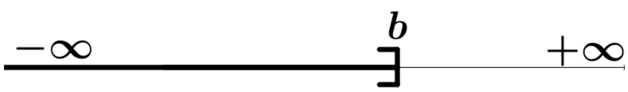
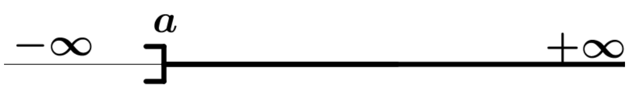
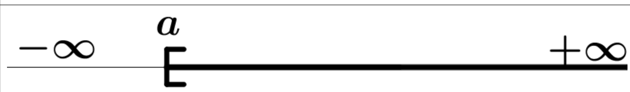
<u>Théorème :</u> Dans un repère orthonormé, pour tous points $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$, $AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}$.

Chapitre 2 – Fonctions

I – Intervalles

$\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres <u>réels</u>. Comme cet ensemble contient des nombres aussi grands ou aussi petit que l'on veut, on peut le représenter par une droite graduée. Le symbole ∞ représente l'infini.

Certaines parties de $\mathbb{R}$ sont des <u>intervalles</u> ; on les note avec des crochets.

Ensemble des réels x tels que	**Représentation graphique**	**Intervalle auquel appartient x**
$a \leqslant x \leqslant b$		$[a;b]$
$a < x < b$		$]a;b[$
$a < x \leqslant b$		$]a;b]$
$a \leqslant x < b$		$[a;b[$
$x < b$		$]-\infty;b[$
$x \leqslant b$		$]-\infty;b]$
$x > a$		$]a;+\infty[$
$x \geqslant a$		$[a;+\infty[$

Vocabulaire :

- Pour $]a;b[$, $]a;+\infty[$, $]-\infty;b[$, on dira que les crochets sont « vers l'extérieur », ou « ouverts ».
- Pour $[a;b]$, on dira que les crochets sont « vers l'intérieur », ou « fermés ».

Remarque : $-\infty$ et $+\infty$ n'étant pas des nombres, ils ne sont jamais inclus dans les intervalles, donc leurs crochets sont vers l'extérieur. On a donc $\mathbb{R}=]-\infty;+\infty[$.

II – Définir une fonction

a) Vocabulaire

Définitions :

- Définir une fonction f sur une partie D de $\mathbb{R}$, c'est associer à tout réel $x\in D$ un *unique* nombre réel appelé image de x , et noté $f(x)$. La fonction f est parfois notée $x\rightarrow f(x)$.
- D est l'ensemble de définition de la fonction f .
- Si $f(a)=b$ (avec $a\in D$), on dit que a est un antécédent de b .

Remarque : L'ensemble de définition de la fonction dépend de contraintes mathématiques – par exemple, on ne peut pas diviser par zéro, ou prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif – et de contraintes liées à des problèmes – par exemple, si x désigne une longueur dans un problème, x ne peut pas être un nombre strictement négatif.

Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$.

- *Déterminons son ensemble de définition : comme on ne peut pas prendre la racine carrée d'un nombre strictement négatif, le domaine de définition est $[0;+\infty[$.*
- *Cherchons l'image de 5 : 5 appartient au domaine, et $f(5)=\sqrt{5}$.*
- *Cherchons les antécédents éventuels de 9 : on résout donc sur $[0;+\infty[$ l'équation $f(x)=9\Leftrightarrow\sqrt{x}=9\Leftrightarrow x=9^2\Leftrightarrow x=81$. L'antécédent de 9 est 81.*
- *Cherchons les antécédents éventuels de -6 : on résout donc sur $[0;+\infty[$ l'équation $f(x)=-6\Leftrightarrow\sqrt{x}=-6$ or une racine carrée n'est jamais strictement négative. Donc l'équation n'a pas de solution, donc -6 n'a pas d'antécédent.*

b) Représentation graphique

Définition : Soit f une fonction définie sur un ensemble D. La courbe représentative de la fonction f dans un repère $(O;I,J)$ est l'ensemble C_f des points de coordonnées $(x;f(x))$ où $x\in D$.

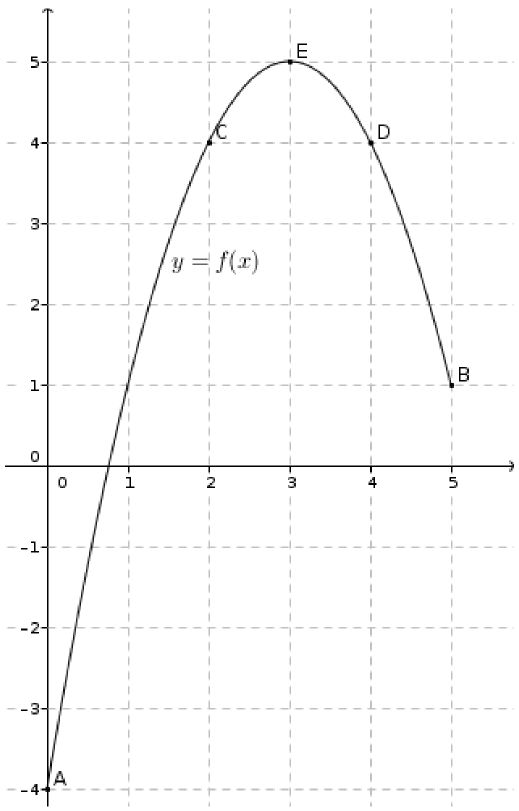
Remarques :

- Un point $M(x;y)$ appartient à C_f si et seulement si $x\in D$ et $y=f(x)$.
- Le tracé peut s'obtenir avec la calculatrice.

Méthode :

- Pour déterminer le domaine de définition d'une fonction, on cherche l'ensemble des réels correspondant à des abscisses de points de la courbe.
- Pour déterminer l'image d'un réel a appartenant au domaine, on cherche l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.
- Pour déterminer les antécédents éventuelles d'un réel b, on cherche les abscisses des éventuels points de la courbe d'ordonnée b.

Exemple :



- *La courbe C_f partant en abscisse de 0 (A) et allant jusqu'à 5 (B), le domaine est $[0;5]$.*
- *Cherchons l'image de 3 : $3\in[0;5]$ et $E(3;5)$ appartenant à la courbe, on en déduit que $f(3)=5$.*
- *Cherchons les antécédents éventuelles de 4 : $C(2;4)$ et $D(4;4)$ sont les seuls points de la courbe d'ordonnée 4, donc 4 a pour antécédents 2 et 4. On pouvait tracer la droite $y=4$ pour bien les observer.*

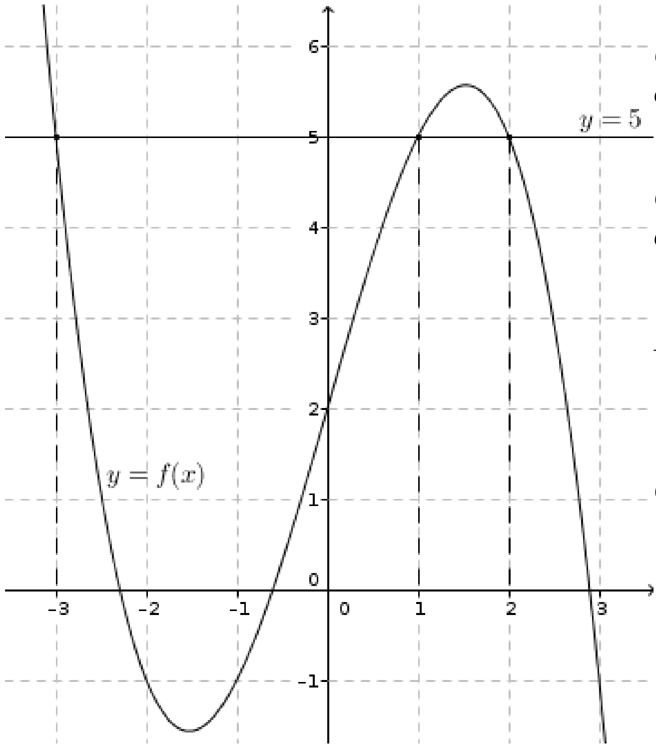
Remarque : La précision du graphique empêche, par exemple, de déterminer de manière rigoureuse l'image de 4,61…

III – Résolutions graphiques

a) Équations

<u>Propriété :</u> Les solutions de l'équation $f(x)=k$ sont les *abscisses* des points d'intersection de la courbe C_f avec la droite d'équation $y=k$.

<u>Exemple :</u> On considère la fonction f ci-dessous définie sur $\mathbb{R}$. On veut résoudre $f(x)=5$.



Cela revient donc à chercher les antécédents éventuels de 5.

On trace la droite $y=5$. Il y a trois points d'intersection, donc 3 solutions.

Les solutions sont les abscisses de ces points : -3 ; -1 et 2 .

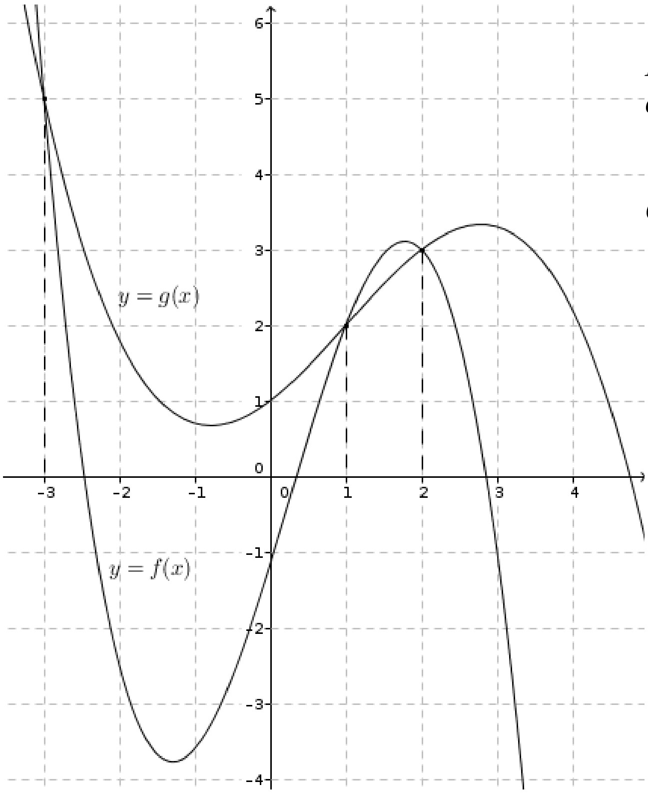
On note $\boldsymbol{S=\{-3;1;2\}}$.

<u>Remarque :</u> Cette méthode a deux défauts :

- La précision de lecture.
- On ne voit pas toujours la courbe en entier (notamment quand elle est définie sur $\mathbb{R}$). Donc certaines solutions peuvent ne pas être visibles.

<u>Propriété :</u> Les solutions de l'équation $f(x)=g(x)$ sont les *abscisses* des points d'intersection des courbes C_f et C_g .

Exemple : *On considère les fonctions* f *et* g *ci-dessous définies sur* $\mathbb{R}$. *On veut résoudre* $f(x)=g(x)$.

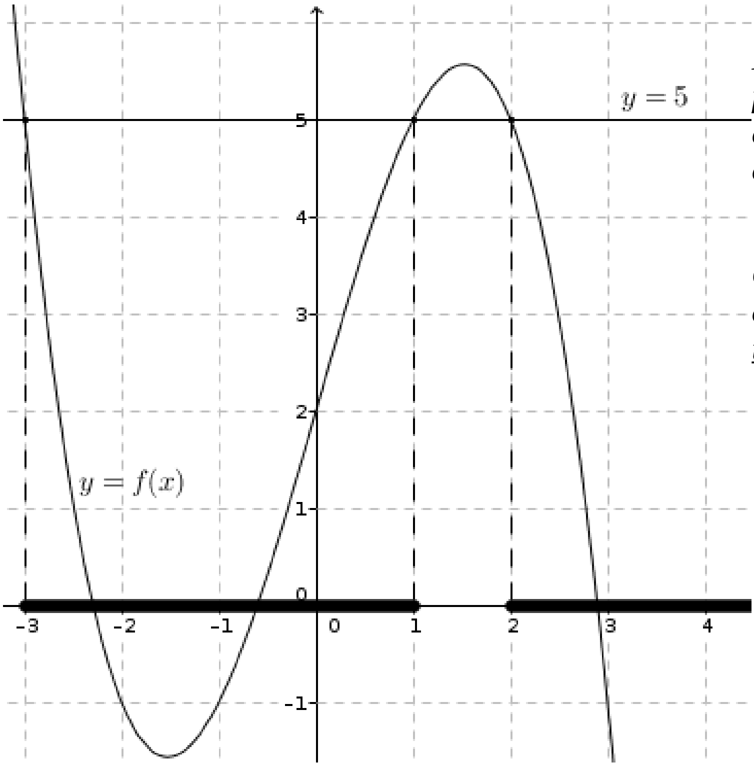


Les courbes ont trois points d'intersection. Les abscisses de ces points sont -3, 1 *et* 2.

On note $\boldsymbol{S=\{-3;1;2\}}$.

b) Inéquations

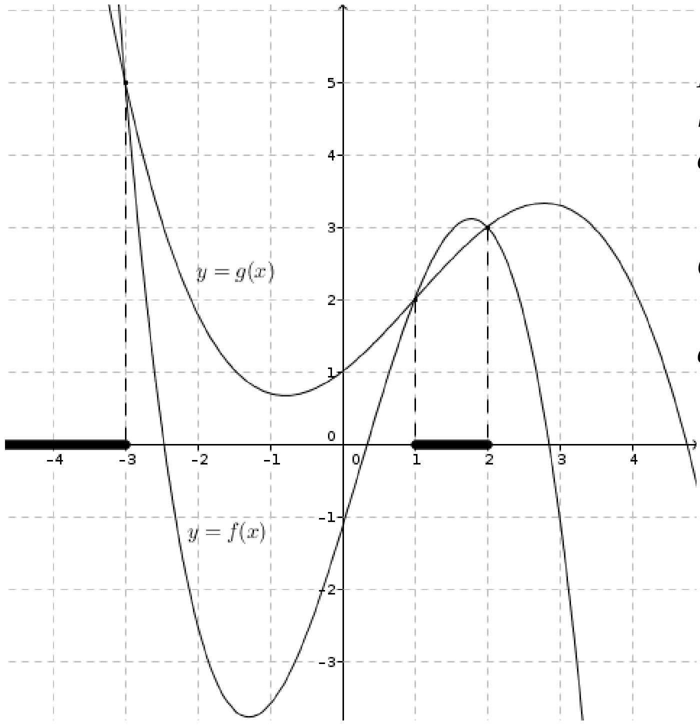
Exemple : *On considère la fonction* f *ci-dessous définie sur* $\mathbb{R}$. *On veut résoudre* $f(x)\leqslant 5$.



Les solutions sont les abscisses des points de la courbe au-dessous de la droite ou sur la droite, puisque l'on a une égalité au sens large.

On a donc comme solutions $-3\leqslant x\leqslant -1$ *ou* $x\geqslant 2$, *que l'on peut noter par une* *union* *de deux intervalles :*
$\boldsymbol{S=[-3;-1]\cup[2;+\infty[}$.

<u>Exemple :</u> On considère les fonctions f et g ci-dessous définies sur $\mathbb{R}$. On veut résoudre $f(x)>g(x)$.

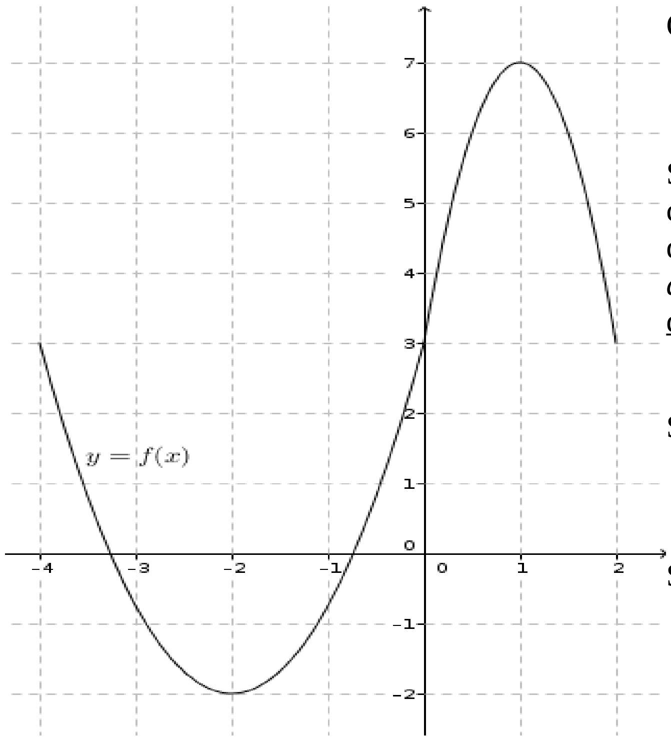


Les solutions sont les abscisses des points de la courbe C_f <u>strictement</u> au-dessus de ceux de la courbe C_g.

On a donc comme solutions $x<-3$ ou $1<x<2$, que l'on peut noter par une <u>union</u> de deux intervalles : $\boldsymbol{S=]-\infty;-3[\cup]1;2[}$.

IV – Sens de variation et extrema

<u>a) Illustration graphique du sens de variation</u>



On considère la fonction f ci-contre définie sur $[-4;2]$.

Si on parcourt l'axe des abscisses dans le sens croissant (donc de gauche à droite), on remarque que sur l'intervalle $[-4;-2]$ la courbe *descend*. On dit alors que f est <u>strictement décroissante</u> sur $[-4;-2]$.

Sur $[-2;1]$ la courbe *monte*. On dit alors que f est <u>strictement croissante</u> sur $[-2;1]$.

Sur $[1;2]$, f est <u>strictement décroissante</u>.

On peut résumer ces variations par un tableau de variation :

x	-4		-2		1		2
$f(x)$	3	$\searrow$	-2	$\nearrow$	7	$\searrow$	3

<u>Remarques :</u>

- En ligne x, on ne met que des abscisses.
- En ligne $f(x)$ (ou f), on ne met que des ordonnées.
- Les flèches sont toujours orientées vers la droite.
- Les flèches sont droites, mais cela ne veut pas dire que la fonction est représentée par des segments de droite.

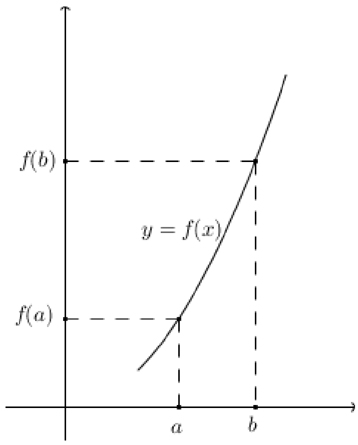
On ne peut pas dire que f est strictement décroissante sur $[-4;2]$ car son sens de variation change.

<u>b) Définition algébrique du sens de variation</u>

Soit f une fonction définie sur un <u>intervalle</u> I.

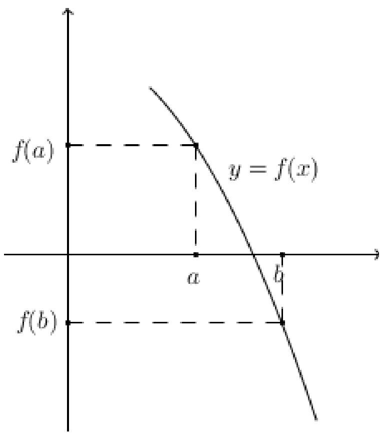
- **On dit que f est *strictement croissante* sur I si et seulement si pour tous $a<b$ de I, $f(a)<f(b)$.**

  Dans ce cas, on dit que f <u>conserve</u> l'ordre.



- **On dit que f est *strictement décroissante* sur I si et seulement si pour tous $a<b$ de I, $f(a)>f(b)$.**

  Dans ce cas, on dit que f <u>inverse</u> l'ordre.



Remarque : On peut affaiblir ces définitions en enlevant le terme « strictement ».

- f est *croissante* sur I si et seulement si pour tous $a<b$ de I, $f(a)\leqslant f(b)$.
- f est *décroissante* sur I si et seulement si pour tous $a<b$ de I, $f(a)\geqslant f(b)$.

Dans ces cas, les fonctions peuvent avoir des paliers constants, ce qui se traduit graphiquement par des segments horizontaux.

c) Extrema

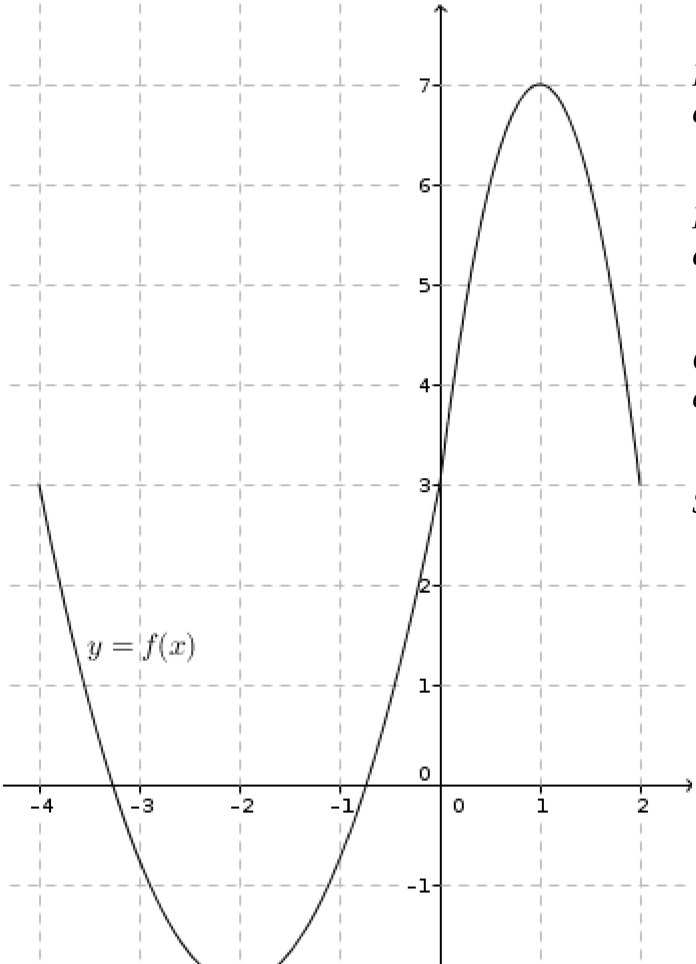
Définition : Un extremum (pluriel : extrema) désigne un maximum ou un minimum.

Définition : Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $a\in I$.

- **$f(a)$ est le maximum de f sur I si et seulement si pour tout $x\in I$, $f(x)\geqslant f(a)$.**
- **$f(a)$ est le minimum de f sur I si et seulement si pour tout $x\in I$, $f(x)\leqslant f(a)$.**

Remarque : Une extremum est toujours une valeur atteinte.

Exemple : On considère la fonction f ci-dessous définie sur $[-4;2]$.



Le maximum de la fonction f sur $[-4;2]$ est 7, atteint en $x=1$.

Le minimum de la fonction f sur $[-4;2]$ est -2, atteint en $x=-2$.

On ne peut pas dire que 8 est le maximum, car aucun nombre n'a pour image 8.

Sur $[-3;0]$, le maximum est 3, atteint en $x=0$.

Chapitre 3 – Statistiques

I – Présentation d'une série statistique

Un **caractère** (ou une **variable**) est une propriété commune aux **éléments** d'une **population**.

L'**étude statistique** d'un caractère consiste à partager la population en groupes d'éléments ayant la même valeur du caractère.

L'**effectif** d'une valeur d'un caractère est le nombre d'éléments ayant cette valeur du caractère.

<u>Exemple :</u> *On considère une classe de seconde. La population sera donc l'ensemble des élèves de cette classe, les éléments seront les élèves.*

- *La couleur des cheveux est un caractère **qualitatif** (il peut prendre pour valeur « brun », « blond », « roux »...).*
- *L'âge est un caractère **quantitatif** (il prend des valeurs numériques : 15 ans, 16 ans...).*

Une **série statistique** est l'ensemble des résultats d'une étude statistique, c'est-à-dire les valeurs prises par le caractère et leurs effectifs correspondants.

a) Effectifs cumulés, fréquences cumulées

On considère un caractère quantitatif.
Ce caractère peut prendre p valeurs différentes, notées x_1, x_2, ..., x_p.
L'effectif de la population ayant pour valeur du caractère x_i sera noté n_i.

On peut résumer la situation par un tableau :

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

- **L'effectif total sera noté N. On a donc $N=n_1+n_2+\ldots+n_p$.**
- **On peut remplacer les effectifs par les fréquences. Pour chaque valeur x_i, l'effectif n_i peut être remplacé par la fréquence f_i. On a donc $f_i=\dfrac{n_i}{N}$.**

<u>**Propriété :**</u> **La somme des fréquences égale 1.**

<u>Preuve :</u> $f_1+f_2+\ldots+f_p=\dfrac{n_1}{N}+\dfrac{n_2}{N}+\ldots+\dfrac{n_p}{N}=\dfrac{n_1+n_2+\ldots+n_p}{N}=\dfrac{N}{N}=1$.

<u>Définitions :</u> L'*effectif cumulé croissant* (respectivement *décroissant*) de x_i est la somme des effectifs des valeurs inférieures (respectivement supérieures) ou égales à x_i.
On définit de même les *fréquences cumulées croissantes* (respectivement *décroissantes*).

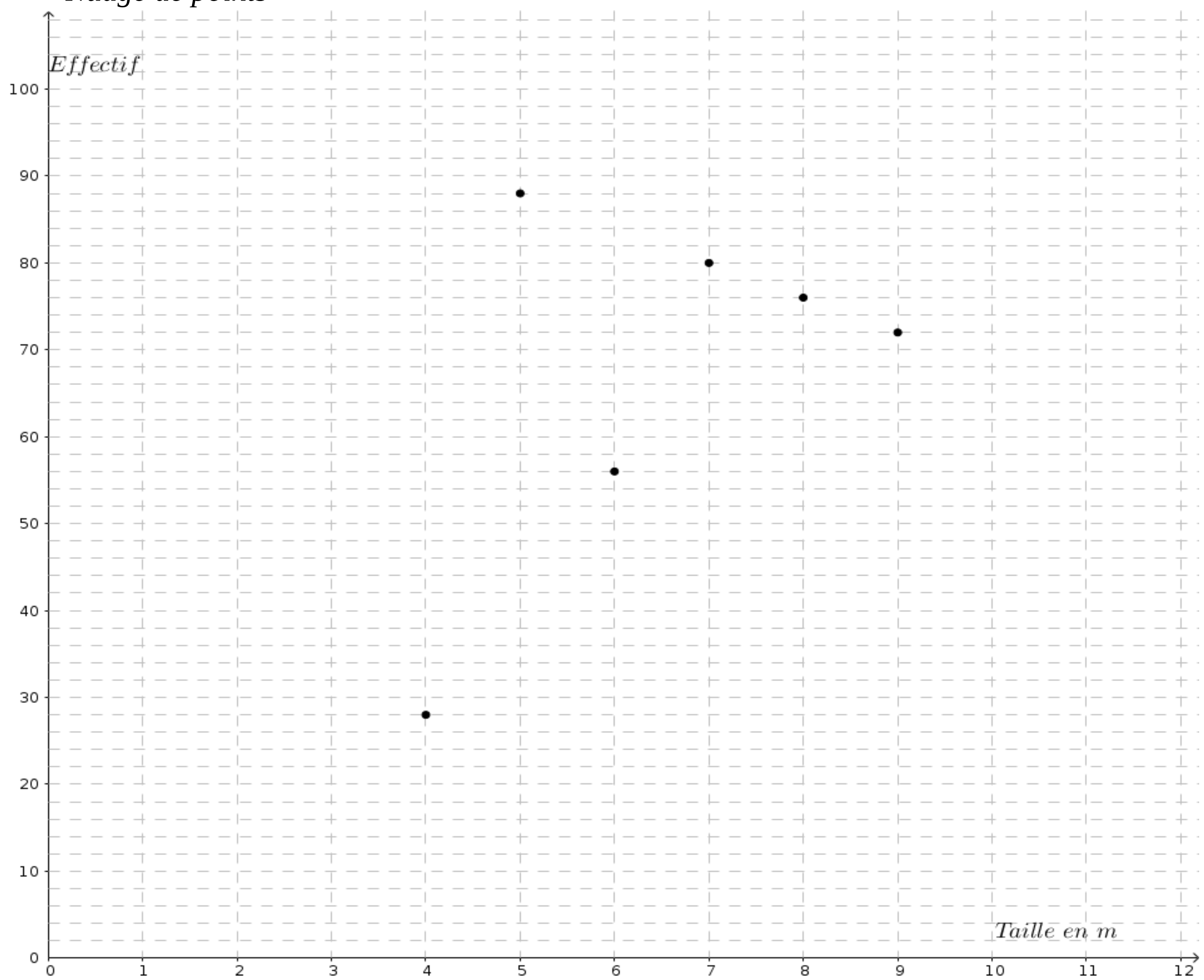
<u>Exemple :</u> Les anacondas sont des serpents aquatiques d'Amérique du Sud. Dans le tableau ci-contre, on a relevé les tailles de femelles adultes.

Taille (en m)	***4***	***5***	***6***	***7***	***8***	***9***
Effectif	*28*	*88*	*56*	*80*	*76*	*72*
Effectif cumulé croissant	*28*	*116*	*172*	*252*	*328*	*400*
Effectif cumulé décroissant	*400*	*372*	*284*	*228*	*148*	*72*
Fréquence	*0,07*	*0,22*	*0,14*	*0,2*	*0,19*	*0,18*
Fréquence cumulée croissante	*0,07*	*0,29*	*0,43*	*0,63*	*0,82*	*1*
Fréquence cumulée décroissante	*1*	*0,93*	*0,71*	*0,57*	*0,37*	*0,18*

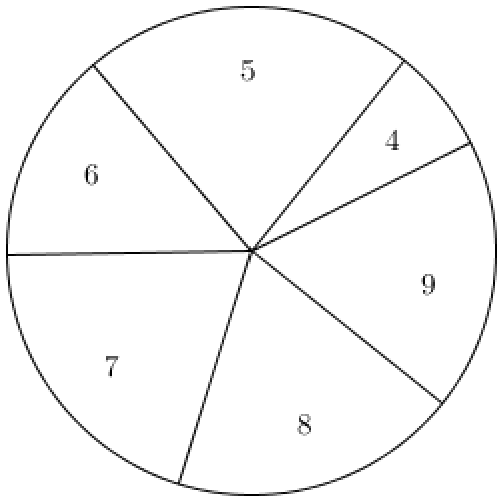
<u>b) Représentations graphiques</u>

Pour l'étude sur la taille des anacondas, on peut utiliser plusieurs représentations :

- *Nuage de points*

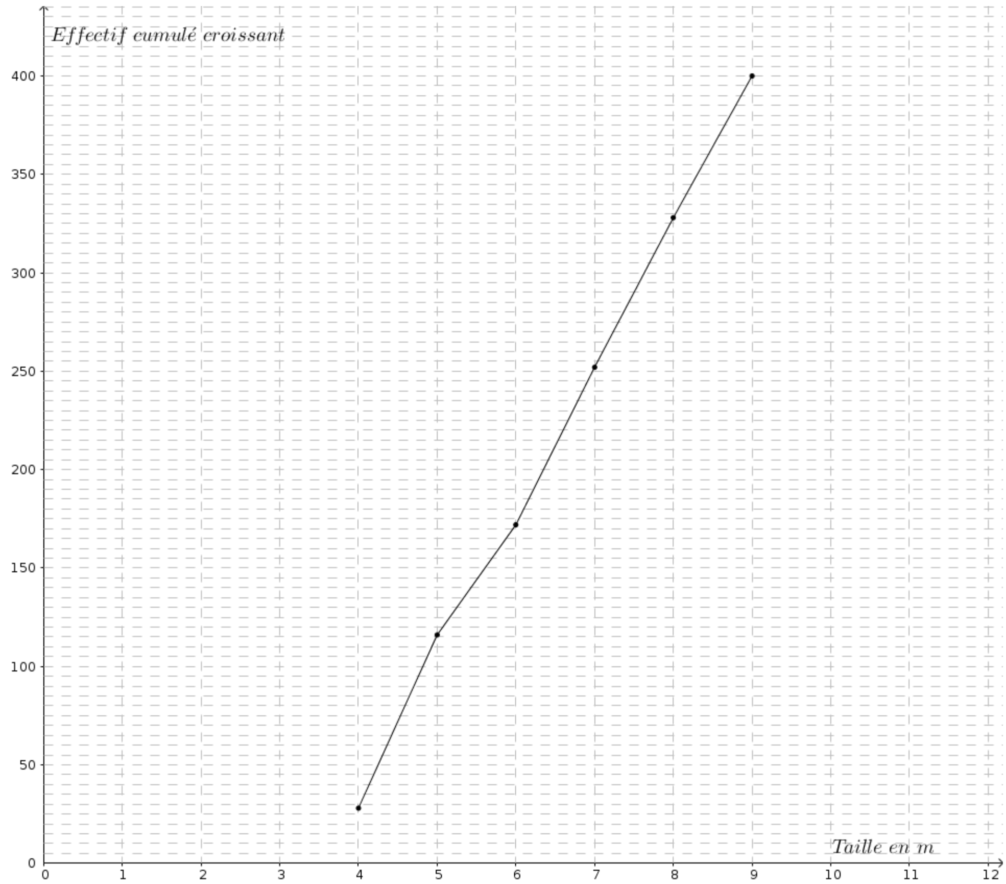


- *Diagramme circulaire (camembert)*
  Chaque part est proportionnelle à son effectif.



Taille des anacondas en m

- *Courbe des effectifs cumulés*
  On place les points correspondants aux effectifs cumulés croissants (ou décroissants), puis on les joint par des segments de droites.



On peut procéder de même avec les fréquences cumulées.

II – Paramètres de position et de dispersion

a) Mesures de tendance centrale

- *La moyenne*

Valeur du caractère	x_1	x_2	...	x_p
Effectif	n_1	n_2	...	n_p

La moyenne de cette série statistique (d'effectif N) est le réel $\overline{x}$ tel que

$$\overline{x}=\frac{n_1 x_1+n_2 x_2+\ldots+n_p x_p}{N}$$

Propriété : **On peut aussi calculer la moyenne avec les fréquences :**

$$\overline{x}=f_1 x_1+f_2 x_2+\ldots f_p x_p$$

Preuve : $\overline{x}=\frac{n_1 x_1+n_2 x_2+\ldots+n_p x_p}{N}=\frac{n_1 x_1}{N}+\frac{n_2 x_2}{N}+\ldots+\frac{n_p x_p}{N}=f_1 x_1+f_2 x_2+\ldots+f_p x_p$

- *La médiane*

On considère que les N données sont classées, et numérotées par ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N$. Chaque valeur est répétée autant de fois que son effectif.

La médiane partage la série en deux sous-séries de même effectif :

- **Si N est impair, la médiane est la donnée de rang $\frac{N+1}{2}$ $\left(Me=x_{\frac{N+1}{2}}\right)$.**
- **Si N est pair, la médiane est la moyenne des données de rang $\frac{N}{2}$ et $\frac{N}{2}+1$ $\left(Me=\frac{x_{\frac{N}{2}}+x_{\frac{N}{2}+1}}{2}\right)$.**

- *Les quartiles*

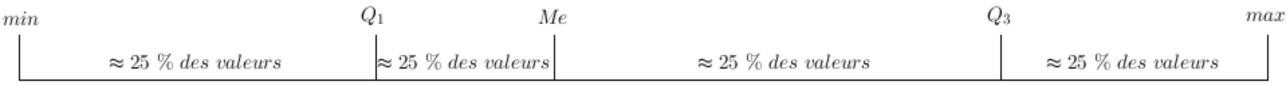
On considère que les N données sont classées, et numérotées par ordre croissant : $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_N$. Chaque valeur est répétée autant de fois que son effectif.

- **Le *premier quartile* Q_1 est la plus petite donnée de la liste telle qu'*au moins un quart des données de la liste sont inférieurs ou égales* à Q_1.**
- **Le *troisième quartile* Q_3 est la plus petite donnée de la liste telle qu'*au moins les trois quarts des données de la liste sont inférieurs ou égales* à Q_3.**

Remarques :

- Le deuxième quartile correspond à la médiane Me .
- Lorsque l'effectif n'est pas divisible par 4, d'après la définition des quartiles, on arrondit le numéro de la valeur toujours à l'entier supérieur ; pour $N=49$ par exemple, comme $\frac{N}{4}=12{,}25$, $Q_1=x_{13}$ (Q_1 sera la treizième valeur).

On peut résumer ceci par un schéma :



<u>Exemple :</u> On considère la série suivante :

1	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*7*	*8*	*8*	*9*
10	*12*	*13*	*23*	*55*	*57*	*58*	*59*	*60*	*61*

Déterminons la moyenne $\bar{x}$:

$N=20$ donc

$$\bar{x}=\frac{1+1+2+3+4+5+7+8+8+9+10+12+13+23+55+57+58+59+60+61}{20}=22{,}8$$

Déterminons la médiane Me :

N *est pair et les valeurs sont classées, donc* $Me=\frac{x_{10}+x_{11}}{2}=\frac{9+10}{2}=9{,}5$.

Déterminons les quartiles Q_1 et Q_3 :

$\frac{N}{4}=5$ donc $Q_1=x_5=4$.

$\frac{3N}{4}=15$ donc $Q_3=x_{15}=55$.

<u>b) Mesures de dispersion</u>

- **La différence entre la plus grande et la plus petite valeur est l'*étendue* de la série.**
- **La différence entre Q_3 et Q_1 est l'*écart interquartile*.**

<u>Exemple :</u> Déterminons ces deux mesures de dispersion pour la série précédente.

L'étendue est $61-1=60$.

L'écart interquartile est $Q_3-Q_1=55-4=51$.

Chapitre 4 – Échantillonnage et estimation

I – Principe de l'échantillonnage et de l'estimation

On illustre la situation ainsi : on dispose d'une grande urne où se trouvent un très grand nombre de boules rouges et bleues.

Cas 1 : la proportion p des boules rouges est connue	**Cas 2 : la proportion p des boules rouges est inconnue**
On tire au hasard avec remise n boules de l'urne. On obtient donc une fréquence f de boules rouges sur cet échantillon. On s'attend à ce que la fréquence f observée soit « proche » de p, fréquence théorique. On est ici dans le cadre d'un échantillonnage.	On veut donc estimer la proportion p de boules rouges dans l'urne. Comme il y en a beaucoup, on ne peut pas toutes les compter. On tire donc au hasard avec remise n boules de l'urne. On obtient donc une fréquence f de boules rouges sur cet échantillon. On s'attend à ce que la fréquence p théorique soit « proche » de f, fréquence observée. On est ici dans le cadre d'une estimation.

II – Intervalles de fluctuation et de confiance

<u>**a) Calcul des intervalles de fluctuation et de confiance**</u>

Échantillonnage	**Estimation**
On connait p, fréquence théorique d'un caractère sur une population. On a un échantillon de taille n. **L'intervalle** $\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ **est appelé intervalle de *fluctuation* au seuil 95 %** de la fréquence de ce caractère aléatoire de taille n issu de la population. <u>Conditions de validité :</u> $n \geqslant 30$, $np \geqslant 5$ et $n(1-p) \geqslant 5$.	On connait f, fréquence observée d'un caractère sur un échantillon de taille n d'une population. **L'intervalle** $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ **est appelé intervalle de *confiance* au seuil 95 %** de la proportion p de ce caractère aléatoire de la population.

b) Signification des intervalles

Échantillonnage	Estimation
La fréquence observée f sur un échantillon de taille n appartient à l'**intervalle de fluctuation au seuil 95 %** dans 95 % des cas.	Au moins 95 % des **intervalles de confiance au seuil 95 %** contiennent la fréquence théorique p.

Exemples :

- *On considère une pièce de monnaie équilibrée. La fréquence théorique (ou probabilité) de l'issue « Pile » est $p=0,5$.*

  Imaginons qu'on lance cette pièce 10000 fois ; on obtiendrait un échantillon de taille $n=10000$.

  Comme $n\geqslant 30$, $np=5000\geqslant 5$ et $n(1-p)=5000\geqslant 5$, on peut calculer l'intervalle de fluctuation au seuil 95 % du caractère « Pile » :

  $$\left[p-\frac{1}{\sqrt{n}};p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,5-\frac{1}{\sqrt{10000}};0,5+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right]=[0,49;0,51].$$

  Il y a donc 95 % de chance que la fréquence observée de l'issue « Pile » sur un échantillon de taille 10000 appartienne à cet intervalle.

- *On dispose d'une pièce de monnaie que l'on sait truquée. On veut estimer la probabilité p de l'issue « Pile » pour cette pièce.*

  On procède à 10000 tirages. La fréquence observée sur cet échantillon de taille $n=10000$ de l'issue « Pile » est $f=0,423$.

  On calcule l'intervalle de confiance au seuil 95 % :

  $$\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}};f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]=\left[0,423-\frac{1}{\sqrt{10000}};0,423+\frac{1}{\sqrt{10000}}\right]=[0,413;0,433].$$

  Il y a donc 95 % de chance que la probabilité p de l'issue « Pile » appartienne à cet intervalle.

c) Prise de décision à partir d'un échantillon

Propriété : On considère une population dans laquelle on **suppose** que la proportion d'un caractère est p. On **observe** sur un échantillon de taille n une fréquence f du caractère.

On veut tester l'hypothèse : « La proportion de ce caractère dans la population est p ».

Si I est l'intervalle de fluctuation au seuil 95 % (en respectant les conditions de validité), la règle de décision est la suivante :

– Si $f\in I$, on considère que l'hypothèse selon laquelle la proportion est p dans la population n'est pas remise en question, et on l'**accepte au seuil de confiance 95 %**.

*– Si $f\notin I$, on **rejette** l'hypothèse selon laquelle cette proportion est p **au seuil de confiance 95 %**.*

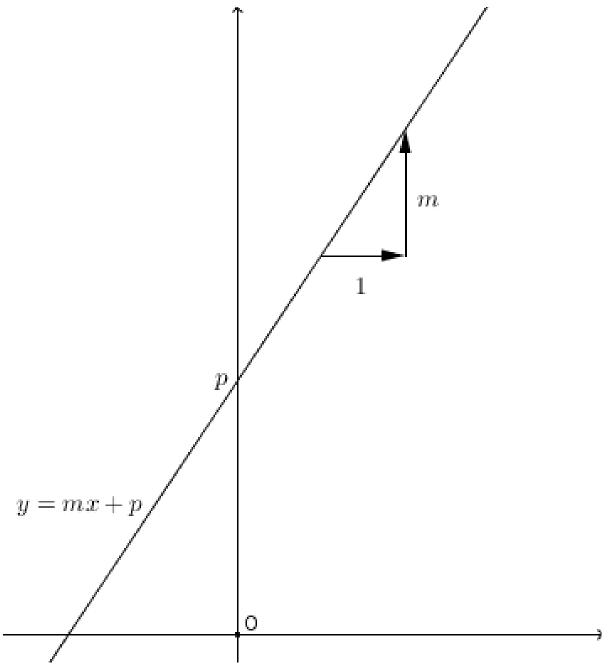
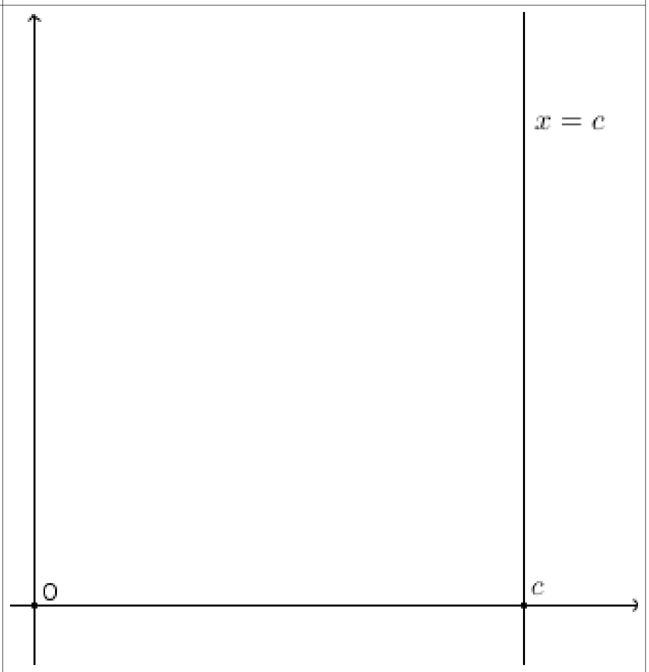
Chapitre 5 – Droites et systèmes

Dans tout le chapitre, on considère des droites dans un plan muni d'un repère. m , p et c sont des nombres réels.

I – Équations de droite

a) Caractérisation analytique d'une droite

<u>Propriété :</u> L'ensemble des points $M(x;y)$ tels que $y=mx+p$ ou $x=c$ est une droite.

<table>
<tr><th>Cas $y=mx+p$</th><th>Cas $x=c$</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>p est l'ordonnée à l'origine, c'est l'ordonnée du point d'intersection entre la droite et l'axe des ordonnées.
m est le coefficient directeur (ou pente), c'est la quantité (positive ou négative) dont on doit se déplacer verticalement afin de retrouver la droite si partant d'un point de la droite, on s'est déplacé horizontalement de 1.
Si $m=0$, la droite est horizontale.</td><td>c est l'abscisse du point d'intersection entre la droite et l'axe des abscisses.</td></tr>
</table>

Méthode pour tracer une droite :

- Pour tracer une droite d'équation $x=c$, on trace une droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point $(c\,;0)$.
- Pour tracer une droite d'équation $y=m\,x+p$, on *choisit* deux valeurs x_1 et x_2 , on calcule leurs images y_1 et y_2 par la fonction $x \rightarrow m\,x+p$, et on trace la droite passant par les points de coordonnées $(x_1;y_1)$ et $(x_2;y_2)$.

  ou

  On place un point de la droite, et pour obtenir un autre point, on lui applique la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$.

Exemple : *On veut tracer la droite* D *d'équation* $y=-2\,x+3$.

- *On choisit deux nombres dont on calcule leurs images par la fonction* $x \rightarrow -2\,x+3$ *:*

  0 a pour image $-2\times 0+3=3$ *et 2 a pour image* $-2\times 2+3=-1$.

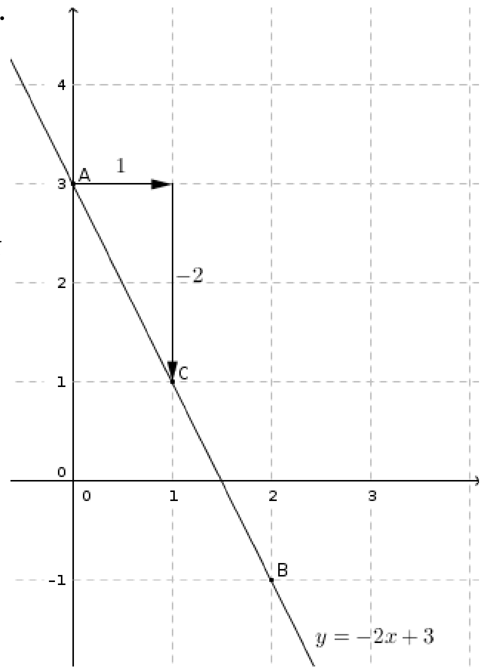
  La droite D *est donc la droite* (AB) *avec* $A(0\,;3)$ *et* $B(2;-1)$.

  ou

- *On choisit un nombre dont on calcule l'image par la fonction* $x \rightarrow -2\,x+3$ *:* $A(0\,;3)$.

  On applique la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$ *au point* A *, on obtient* $C(1;-1)$.

  La droite D *est donc la droite* (AC) .



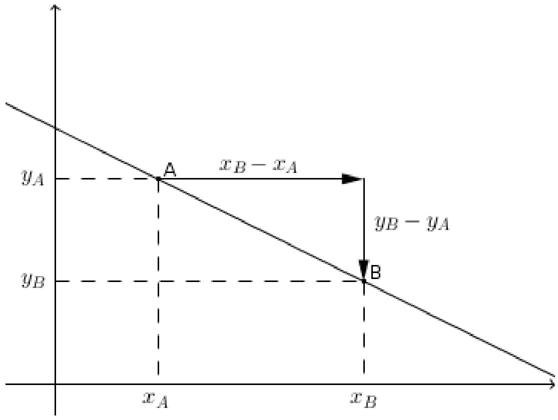
Propriété réciproque : **Dans un repère, toute droite a une équation de la forme** $\boldsymbol{y=m\,x+p}$ **ou** $\boldsymbol{x=c}$ **.**

Remarque : Une droite d'équation $y=m\,x+p$ est la représentation graphique de la fonction affine $f(x)=m\,x+p$ (définie sur $\mathbb{R}$).

b) Coefficient directeur

<u>Propriété :</u> Dans un repère, $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ sont deux points tels que $x_A \neq x_B$.

Le coefficient directeur de (AB) est $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.



<u>Preuve :</u> $x_A \neq x_B \Leftrightarrow (AB)$ n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées $\Leftrightarrow (AB)$ a une équation de la forme $y=mx+p$. Les coordonnées de A et B vérifient l'équation, donc :

- $y_B=mx_B+p$
- $y_A=mx_A+p$

En soustrayant membre-à-membre, on obtient :

$y_B-y_A=mx_B+p-(mx_A+p) \Leftrightarrow y_B-y_A=mx_B+p-mx_A-p \Leftrightarrow \boldsymbol{y_B-y_A=m(x_B-x_A)}$.

Comme $x_A \neq x_B$, $x_B-x_A \neq 0$, donc on peut diviser par x_B-x_A. On obtient $\boldsymbol{m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}}$.

<u>Méthode pour déterminer l'équation d'une droite :</u>

- Si la droite est parallèle à l'axe des ordonnées, on cherche l'abscisse c d'un point de la droite. Son équation est alors $x=c$.
- Sinon, on cherche deux points $A(x_A ; y_A)$ et $B(x_B ; y_B)$ appartenant à la droite qui a pour équation $y=mx+p$. On calcule $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$.

  Pour déterminer p, on résout l'équation $y_A=mx_A+p$ ou l'équation $y_B=mx_B+p$.

<u>Exemple :</u> On veut déterminer l'équation de (AB) avec $A(2;-1)$ et $B(5;3)$.

$2 \neq 5$ donc (AB) a pour équation $y=mx+p$ avec $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{3-(-1)}{5-2}=\dfrac{4}{3}$.

$A \in (AB)$ donc $y_A=mx_A+p \Leftrightarrow -1=\dfrac{4}{3}\times 2+p \Leftrightarrow -1-\dfrac{8}{3}=p \Leftrightarrow -\dfrac{3}{3}-\dfrac{8}{3}=p \Leftrightarrow \boldsymbol{-\dfrac{11}{3}=p}$.

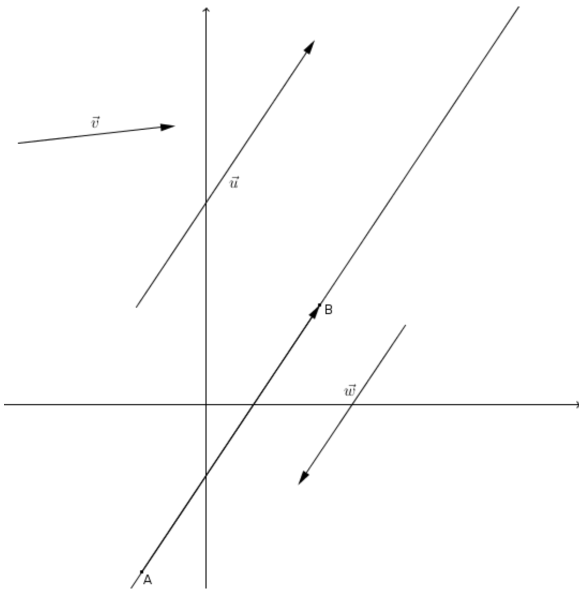
(AB) a pour équation $y=\dfrac{4}{3}x-\dfrac{11}{3}$.

c) Vecteur directeur

Définition : Soit (AB) une droite. Tout vecteur colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est directeur de la droite (AB).

Remarque : Un vecteur est directeur d'une droite si et seulement si il a la même direction que la droite.

Exemple : Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}$ sont directeurs de (AB), $\vec{v}$ n'est pas directeur de (AB).

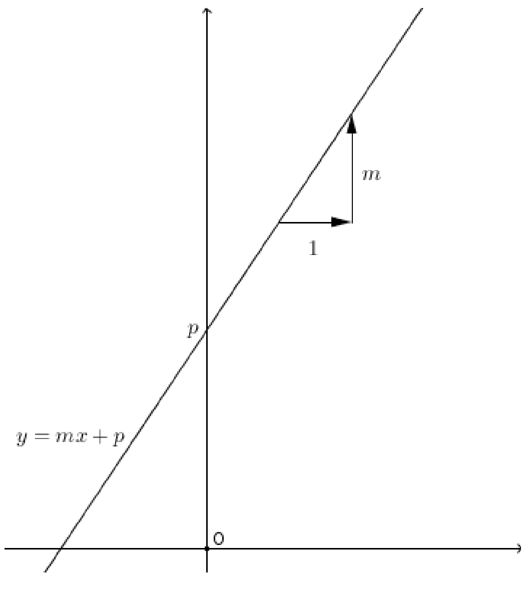


Remarque : Si (AB) n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, son coefficient directeur est $m=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$. Le vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} y_B-y_A \\ x_B-x_A \end{pmatrix}$ est directeur de (AB), ainsi que tout vecteur qui lui est colinéaire.

Or un vecteur $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ si et seulement si il existe $k\in\mathbb{R}$ tel que $\vec{u}=k\overrightarrow{AB}$.

On remarque que si $k=\frac{1}{x_B-x_A}$, alors $\vec{u}$ a pour coordonnées $\frac{1}{x_B-x_A}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{pmatrix} \frac{x_B-x_A}{x_B-x_A} \\ \frac{y_B-y_A}{x_B-x_A} \end{pmatrix}$, soit $\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$.

On retrouve la définition de m :



II – Droites parallèles

<u>Propriété :</u> **Soient d et d' deux droites non parallèles à l'axe des ordonnées.**
d et d' sont parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.

<u>Preuve :</u> Comme d et d' ne sont pas parallèles à l'axe des ordonnées, d a pour équation $y=mx+p$ et d' a pour équation $y=m'x+p'$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$ est directeur de d.

$\vec{u}'\begin{pmatrix}1\\m'\end{pmatrix}$ est directeur de d'.

d et d' sont parallèles $\Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires $\Leftrightarrow 1\times m'=1\times m \Leftrightarrow m'=m \Leftrightarrow d$ et d' ont le même coefficient directeur.

III – Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

<u>Définition :</u> **Une équation linéaire à deux inconnues x et y est une équation de la forme $ax+by=c$ avec a et b deux réels non nuls en même temps, et c un réel quelconque.**

<u>Exemples :</u>

- *$2x-3y=0$ est une équation linéaire.*
- *$-3x=5$ est une équation linéaire.*
- *$x^2+y=5$ n'est pas une équation linéaire.*

<u>Remarque :</u> On peut facilement démontrer qu'une équation est linéaire si et seulement si elle est équivalente à une équation de droite. Une équation linéaire est donc une équation de droite.

<u>Définition :</u> **Les solutions d'une équation linéaire à deux inconnues x et y $ax+by=c$ sont les couples $(x;y)$ qui correspondent aux coordonnées des points de la droite d'équation $ax+by=c$.**

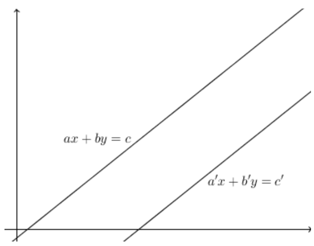
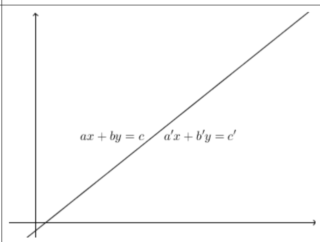
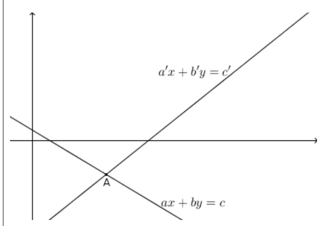
a) Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

On considère le système suivant de deux équations *linéaires* à deux inconnues x et y :

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}.$$

Résoudre ce système, c'est déterminer les éventuels couples de coordonnées $(x;y)$ des points *communs* aux droites d'équations $ax+by=c$ et $a'x+b'y=c'$.

On a donc trois cas de figure :

Position relative des deux droites	Parallèles		Non parallèles
	Strictement parallèles	**Confondues**	**Sécantes**
Illustration			
Nombre de solutions	0	Une infinité	1
Solutions	$\varnothing$	Tous les couples $(x;y)$ correspondant aux coordonnées de points de la droite	Le couple $(x;y)$ coordonnées de A, intersection des deux droites

b) Condition de colinéarité pour un système de deux équations linéaires à deux inconnues

<u>Théorème :</u> Les droites du système de deux équations linéaires $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ sont parallèles si et seulement si $ab'-ba'=0$.

<u>Exemple :</u> Soit $\begin{cases} 2x+5y=21 \\ -x+9y=3 \end{cases}$.

$2\times 9-5\times(-1)=23\neq 0$ *donc les deux droites ne sont pas parallèles.*

c) Résolution d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues

Méthode :

- On vérifie la condition de colinéarité.
  - Si elle vaut 0, on réduit les deux équations sous la forme $y=mx+p$ ou $x=c$ le cas échéant. On conclue alors, suivant si les droites sont strictement parallèles ou confondues.
  - Sinon, la solution est unique : on la détermine par *combinaison linéaire* ou *substitution*.
- On écrit l'ensemble solution.

Exemple 1 : Soit $\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 8x+12y=12 \end{cases}$.

$2\times 12-3\times 8=0$ *donc les droites sont parallèles.*

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ 8x+12y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y=-2x+3 \\ 12y=-8x+12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+\frac{3}{3} \\ y=-\frac{8}{12}x+\frac{12}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\frac{2}{3}x+1 \\ y=-\frac{2}{3}x+1 \end{cases}.$$

Les droites sont confondues, il y a une infinité de solutions. $\boldsymbol{S=\left\{\left(x;-\frac{2}{3}x+1\right) \text{ avec } x\in\mathbb{R}\right\}}$.

Exemple 2 : Soit $\begin{cases} 2x-y=5 \\ -6x+3y=9 \end{cases}$.

$2\times 3-(-1)\times -6=0$ *donc les droites sont parallèles.*

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ -6x+3y=9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y=-2x+5 \\ 3y=6x+9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ y=\frac{6}{3}x+\frac{9}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2x-5 \\ y=2x+3 \end{cases}.$$

Les droites sont strictement parallèles, il n'y a pas de solution. $\boldsymbol{S=\emptyset}$.

Exemple 3 : *Soit* $\begin{cases} x-y=8 \\ 2x+5y=65 \end{cases}$.

$1\times 5-(-1)\times 2=7$ *donc les droites sont sécantes. Il y a une unique solution.*

- *Par combinaison linéaire :* *on multiplie chaque équation par des nombres bien choisis, de façon à éliminer une inconnue en ajoutant ou soustrayant les deux équations.*

  Ici, on peut éliminer les x *en multipliant la première équation par* -2 *, puis en ajoutant les deux équations membre-à-membre. On garde l'une des équations de manière à toujours en avoir deux dans le système.*

  $\begin{cases} x-y=8 \\ 2x+5y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x+2y=-16 \\ 2x+5y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7y=49 \\ 2x+5y=65 \end{cases}$.

  On résout l'équation avec une seule inconnue, et on remplace dans l'autre.

  $\begin{cases} 7y=49 \\ 2x+5y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ 2x+5\times 7=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ 2x=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=7 \\ x=15 \end{cases}$. $\boldsymbol{S=\{(15;7)\}}$.

- *Par substitution :* *on isole une inconnue dans une équation, que l'on remplace dans l'autre équation.*

  Ici, on peut isoler x *dans la première équation, et donc remplacer* x *dans la seconde équation.*

  $\begin{cases} x-y=8 \\ 2x+5y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+8 \\ 2(y+8)+5y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+8 \\ 2y+16+5y=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+8 \\ 7y=49 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y+8 \\ y=7 \end{cases}$.

  On remplace l'inconnue trouvée dans l'autre équation.

  $\begin{cases} x=y+8 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7+8 \\ y=7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=15 \\ y=7 \end{cases}$. $\boldsymbol{S=\{(15;7)\}}$.

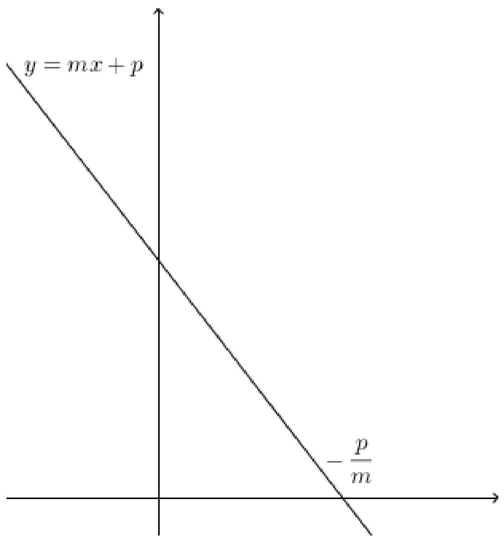
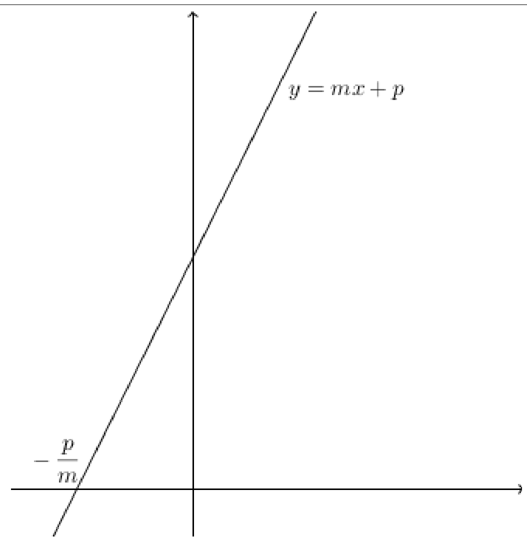
Chapitre 6 – Fonctions affines et inéquations

I – Signe d'une fonction affine

<u>Théorème :</u> Soit $f(x)=mx+p$ une fonction affine (définie sur $\mathbb{R}$) telle que $m\neq 0$.

- **La fonction f s'annule en $x=-\dfrac{p}{m}$.**
- **Si $m>0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.**
- **Si $m<0$, f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.**

On peut résumer ceci graphiquement :

$m<0$	$m>0$
	

<u>Preuve :</u> $f(x)=0 \Leftrightarrow mx+p=0 \Leftrightarrow mx=-p \Leftrightarrow x=-\dfrac{p}{m}$ (on peut effectuer la division car $m\neq 0$).

Soient a et b deux réels tels que $a<b$. Étudions le signe de $f(b)-f(a)$:

$f(b)-f(a)=mb+p-(ma+p)=mb+p-ma-p=\boldsymbol{m(b-a)}$.

- Si $m<0$, comme $a<b$, $b-a>0$ donc d'après la règle des signes, $m(b-a)<0$ donc $f(b)-f(a)<0 \Leftrightarrow f(b)<f(a)$. La fonction f est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- Si $m>0$, comme $a<b$, $b-a>0$ donc d'après la règle des signes, $m(b-a)>0$ donc $f(b)-f(a)>0 \Leftrightarrow f(b)>f(a)$. La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Ce théorème permet de déduire le tableau de signe d'une fonction affine :

$m<0$	$m>0$
<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad -\frac{p}{m} \quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$mx+p$</td><td>$-$ $\quad 0 \quad$ $+$</td></tr></table>	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$ $\quad -\frac{p}{m} \quad$ $+\infty$</td></tr><tr><td>$mx+p$</td><td>$+$ $\quad 0 \quad$ $-$</td></tr></table>
$mx+p>0 \Leftrightarrow x>-\frac{p}{m}$ $mx+p<0 \Leftrightarrow x<-\frac{p}{m}$	$mx+p>0 \Leftrightarrow x<-\frac{p}{m}$ $mx+p<0 \Leftrightarrow x>-\frac{p}{m}$

II – Tableau de signe

<u>Principe :</u> Le tableau de signe permet d'étudier le signe d'une expression *factorisée*.

Il contient :

- Une ligne donnant les valeurs classées de la variable qui annulent les facteurs.
- Une ligne de signe par facteur.
- Une ligne donnant le signe de l'expression.

Une double-barre symbolisera une valeur interdite.

<u>Illustration 1 :</u> Résoudre sur $\mathbb{R}$ $(4x+3)(3-2x)>0$.

En italique, des commentaires explicatifs qui n'apparaitront pas dans la rédaction de la solution.

1) On cherche les valeurs qui annulent chacun des facteurs :

- $4x+3=0 \Leftrightarrow 4x=-3 \Leftrightarrow x=-\frac{3}{4}$
- $3-2x=0 \Leftrightarrow -2x=-3 \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$

On pouvait aussi utiliser le résultat du I : $mx+p=0 \Leftrightarrow x=-\frac{p}{m}$.

2) On dresse le tableau de signe :

- *On place dans la première ligne entre* $-\infty$ *et* $+\infty$ *les valeurs trouvées en 1) classées.*
- *Dans les lignes suivantes, on indique le signe des expressions affines avec le résultat du I.*
- *Pour la ligne donnant le signe de l'expression, on utilise la règle des signes.*

x	$-\infty$			$-\frac{3}{4}$			$\frac{3}{2}$			$+\infty$
$4x+3$			–	0	+		|	+		
$3-2x$			+	|	+		|	+		
$(4x+3)(3-2x)$			–	0	+		0	–		

3) On écrit l'ensemble solution : on voulait résoudre $(4x+3)(3-2x)>0$, or d'après le tableau, $(4x+3)(3-2x)>0 \Leftrightarrow -\frac{3}{4}<x<\frac{3}{2}$.

$\boldsymbol{S=\left]-\frac{3}{4};\frac{3}{2}\right[}$ **.**

<u>Illustration 2:</u> Résoudre sur $\mathbb{R}$ $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}\leqslant 0$.

1) Pour utiliser le tableau de signe, il faut une forme factorisée, ce qui n'est pas le cas ici. On factorise donc, ce qui revient à mettre au même dénominateur, soit $(x+3)(x-2)$.

$$\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-2}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{1\boldsymbol{(x-2)}}{(x+3)\boldsymbol{(x-2)}}+\frac{1\boldsymbol{(x+3)}}{(x-2)\boldsymbol{(x+3)}}\leqslant 0 \Leftrightarrow \frac{x-2+x+3}{(x-2)\boldsymbol{(x+3)}}\leqslant 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{\frac{2x+1}{(x-2)(x+3)}\leqslant 0}$$

2) On cherche les valeurs qui annulent chacun des facteurs. Cependant, les valeurs annulant le dénominateur sont considérées comme valeurs interdites, puisque une fraction ne peut avoir zéro au dénominateur.

- $2x+1=0 \Leftrightarrow 2x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$
- $x+3=0 \Leftrightarrow x=-3$ valeur interdite
- $x-2=0 \Leftrightarrow x=2$ valeur interdite

x	$-\infty$		-3		$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x+1$		–	|	–	0	+	|	+	
$x+3$		–	0	+	|	+	|	+	
$x-2$		–	|	–	|	–	0	+	
$\frac{2x+1}{(x+3)(x-2)}$		–	||	+	0	–	||	+	

Les doubles barres marquent les valeurs interdites. Elles ne peuvent jamais être des solutions.

$\boldsymbol{S=]-\infty;-3[\cup\left[-\frac{1}{2};2\right[}$ **.**

Chapitre 7 – Probabilités

I – Probabilités sur un ensemble fini

a) Loi de probabilité sur un ensemble fini

Définition : Une expérience est dite *aléatoire* lorsqu'elle a plusieurs issues (ou résultats) possibles, et que l'on ne peut pas prévoir laquelle sera réalisée.

On notera Ω l'ensemble des issues possibles. On appelle cet ensemble « l'univers ».

Exemple : On lance un dé cubique classique, on lit la valeur indiquée par la face supérieure.
On a donc $\Omega=\{1;2;3;4;5;6\}$.

Par la suite, on considèrera que Ω comporte n issues notées ω_1 , ω_2 , …, ω_n .

Définition : Définir une loi de probabilité sur $\Omega=\{\omega_1;\omega_2;\ldots;\omega_n\}$, c'est associer à chaque issue ω_i un nombre $p_i > 0$ tel que $p_1+p_2+\ldots+p_n=1$.
Ce nombre p_i est appelé probabilité de l'issue ω_i .

Exemple : Si le dé de l'exemple précédent est bien équilibré, on a comme loi :

Issue	1	2	3	4	5	6
Probabilité	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Définition : Lorsque la loi de probabilité associe à toutes les issues d'une expérience aléatoire la même probabilité, on parle de loi équirépartie. On dit aussi que l'on est dans une situation d'équiprobabilité. Si Ω possède n issues, chaque issue a comme probabilité $\frac{1}{n}$.

b) Loi de probabilité et distribution des fréquences

Après avoir retenu un modèle pour une expérience aléatoire, on peut simuler cette expérience. On obtient alors, après N simulations, une *série statistique* d'effectif N .
Il y a un lien entre les *fréquences* des issues obtenues et les *probabilités* de ces issues :

Loi des grands nombres : Pour une expérience donnée, les fréquences calculées à l'issue de N simulations se rapprochent des probabilités lorsque N devient grand.

Exemple : Si on lance un dé équilibré un très grand nombre de fois, la fréquence (observée) de chaque issue sera proche de $\frac{1}{6}$.

II – Probabilité d'un évènement

a) Évènement

<u>Définition :</u> Ω est l'ensemble des issues d'une expérience aléatoire. Un évènement est une partie de Ω.

- Lorsqu'une issue ω appartient à un évènement A, on dit que ω réalise A ($\omega \in A$).
- $\varnothing$ est appelé évènement *impossible*, aucune issue ne le réalise.
- Ω est appelé évènement *certain*, toutes les issues le réalisent.
- Un évènement constitué d'une seule issue est appelé évènement élémentaire.

<u>Exemples :</u> Pour notre lancer de dé équilibré, soit A l'évènement « Le résultat est un nombre pair ». On a $A=\{2;4;6\}$. Soit B « Le résultat est un nombre négatif ». B est impossible.

b) Probabilité d'un évènement

<u>Définition :</u> On dispose d'une loi de probabilité sur Ω ; la *probabilité* de l'évènement A est la somme des probabilités des issues réalisant A. On note cette probabilité $P(A)$.

<u>Exemple :</u> On dispose d'un dé pipé, dont voici les probabilités d'apparition des différentes faces :

Issue	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Probabilité	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$

A est l'évènement « Obtenir un résultat pair ». On a $P(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{3}{12}+\frac{2}{12}+\frac{3}{12}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$.

<u>Conséquences :</u>

- Aucune issue ne réalise l'évènement impossible, donc $P(\varnothing)=0$.
- Toutes les issues réalisent l'évènement certain, donc $P(\Omega)=1$.
- Pour tout évènement A, on a $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

<u>Théorème :</u> Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un évènement A est donnée par : $P(A)=\dfrac{\text{nombre d'issues réalisant A}}{\text{nombre total d'issues}}$.

<u>Preuve :</u> Soit $n \geqslant 1$ le nombre d'issues de Ω. Par équiprobabilité, chaque issue a pour probabilité $\frac{1}{n}$. Soit r le nombre d'issues réalisant A. On a donc $P(A)=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{r \text{ termes}}=\frac{r}{n}$.

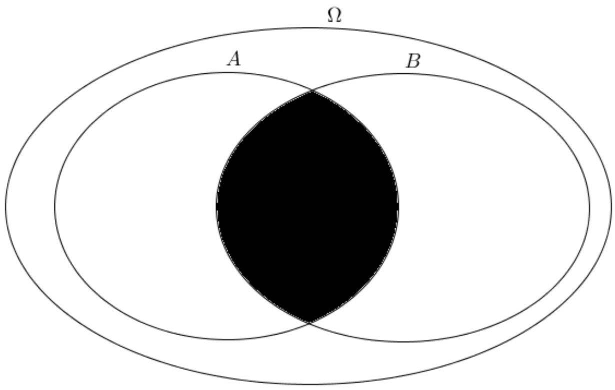
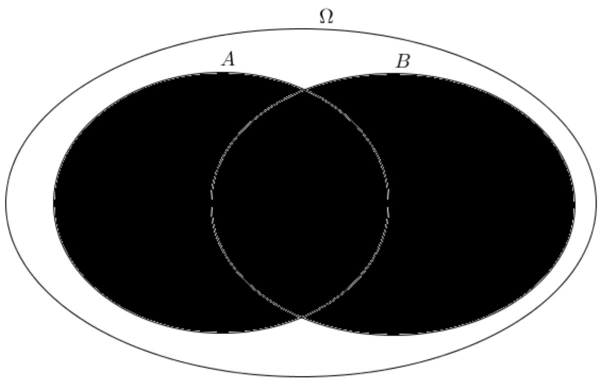
III – Calcul de probabilités

a) Union et intersection d'évènements

<u>Définitions :</u> Soient A et B deux évènements.

- **$A \cap B$ (se lit A inter B) est l'évènement formé des issues qui réalisent *à la fois* A et B.**

- **$A \cup B$ (se lit A union B) est l'évènement formé des issues qui réalisent *au moins* l'un des évènements A et B.**

$A \cap B$	$A \cup B$
	

<u>Exemple :</u> Concernant le lancer d'un dé, si A est l'évènement « Le résultat est un nombre pair » et B est l'évènement « Le résultat est supérieur ou égal à 4 », on a donc $A \cap B = \{4;6\}$, et $A \cup B = \{2;4;5;6\}$.

<u>Définition :</u> Lorsque aucune issue ne réalise A et B, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont <u>incompatibles</u>.

b) Calcul de la probabilité d'une union

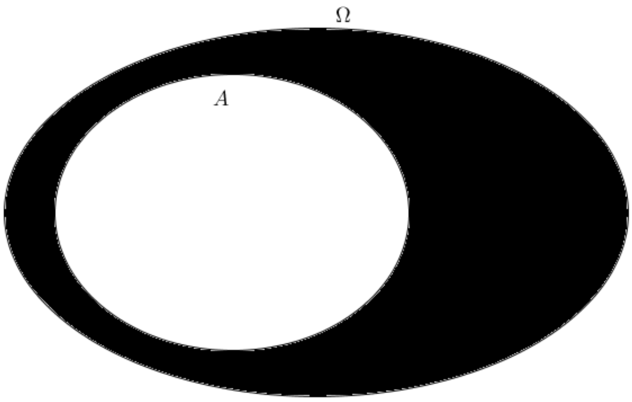
<u>Théorème :</u> Une loi de probabilité étant définie sur un ensemble Ω, pour tous évènements A et B, on a :
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

<u>Preuve :</u> La probabilité d'un évènement est la somme des probabilités des issues qui le réalisent.
La somme $P(A)+P(B)$ est donc la probabilité de l'évènement $A \cup B$ augmentée de la probabilité de l'évènement $A \cap B$ puisque cette probabilité est comptée deux fois, donc une fois de trop.
On en déduit donc que $P(A)+P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B)$, ce qui prouve le théorème.

<u>Remarque :</u> A et B sont incompatibles si et seulement si $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

c) Probabilité de l'évènement contraire

<u>Définition :</u> L'évènement contraire de l'évènement A est formé des issues qui ne réalisent pas A. On le note $\overline{A}$.



<u>Exemple :</u> Pour le lancer d'une pièce de monnaie, si F est l'évènement « réaliser face », $\overline{F}$ est l'évènement « ne pas réaliser face », c'est-à-dire « réaliser pile ».

<u>Théorème :</u> Une loi de probabilité étant définie sur un ensemble Ω, pour tout évènement A on $P(\overline{A})=1-P(A)$.

<u>Preuve :</u> On a $A \cup \overline{A}=\Omega$ et $A \cap \overline{A}=\varnothing$ donc $1=P(\Omega)=P(A)+P(\overline{A})$.

Chapitre 8 – Fonctions de référence

I – La fonction carré

La fonction carré est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2$.

a) Parité de la fonction carré

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$: Deux nombres opposés ont la même image.

On dit que la fonction carré est paire.

b) Signe de la fonction carré

- Si $x=0$, $x^2=0$.
- Si $x>0$, $x^2>0$ car c'est le produit de deux nombres strictement positifs.
- Si $x<0$, $x^2>0$ car c'est le produit de deux nombres strictement négatifs.

On en déduit ce tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		+	0	+	

c) Sens de variations de la fonction carré

Théorème : La fonction carré est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$ et strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

Preuve :

- Sur $]-\infty;0]$: soient a et b appartenant à $]-\infty;0]$ tels que $a<b$. On a donc $a<b\leqslant 0$.
  $a^2-b^2=(a+b)(a+b)$; $a+b<0$ (car $a<0$ et $b\leqslant 0$) et $a-b<0$ car $a<b$. On en déduit d'après la règle des signes que $a^2-b^2>0\Leftrightarrow a^2>b^2$. La fonction carré est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0]$.
- Sur $[0;+\infty[$: soient a et b appartenant à $[0;+\infty[$ tels que $a<b$. On a donc $0\leqslant a<b$.
  $a^2-b^2=(a+b)(a+b)$; $a+b>0$ (car $a\geqslant 0$ et $b>0$) et $a-b<0$ car $a<b$. On en déduit d'après la règle des signes que $a^2-b^2<0\Leftrightarrow a^2<b^2$. La fonction carré est donc strictement croissante sur $[0;+\infty[$.

On a donc ce tableau de variation :

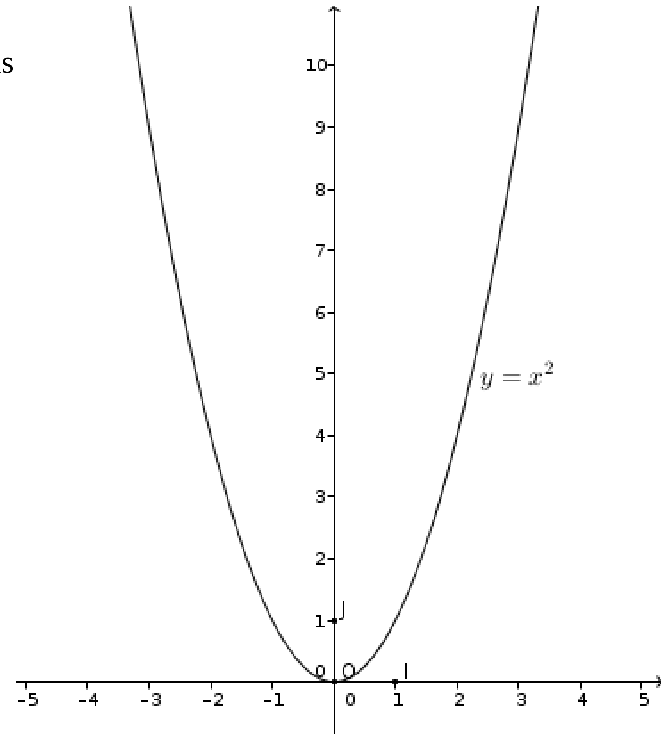
x	$-\infty$ \hfill 0 \hfill $+\infty$
x^2	$\searrow$ 0 $\nearrow$

d) Représentation graphique de la fonction carré

Dans un repère orthonormal $(O;I,J)$, la fonction carré est représentée par une parabole.

On retrouve les résultats concernant les variations et le signe de la fonction carré.

La courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. C'est l'interprétation graphique de la parité de la fonction carré.



e) Équations avec un carré

Théorème : On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ $x^2 = k$ où $k \in \mathbb{R}$.

- **Si $k=0$, l'équation a une seule solution : $x=0$.**
- **Si $k>0$, l'équation a deux solutions : $x=\sqrt{k}$ ou $x=-\sqrt{k}$.**
- **Si $k<0$, l'équation n'a pas de solution.**

Exemples :

- *On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=49$:*

  $x^2=49 \Leftrightarrow x=\sqrt{49}$ *ou* $x=-\sqrt{49} \Leftrightarrow x=7$ *ou* $x=-7$. $\boldsymbol{S=\{-7;7\}}$.
- *On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation $x^2=-3$:*

  Il n'y a pas de solution. $\boldsymbol{S=\emptyset}$.

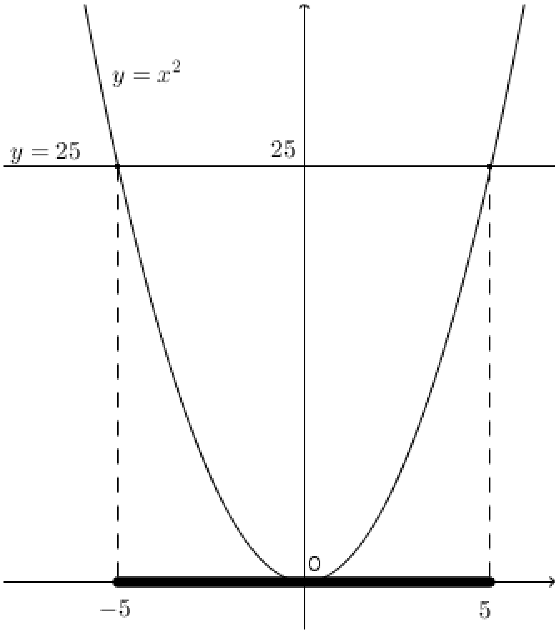
f) Inéquations avec un carré

La méthode utilisée est celle vue dans le chapitre 2 (on trace la fonction carré et des droites horizontales), cependant les tracés sont faits à main levée.

Les abscisses des points d'intersections étant calculées avec le théorème du e), la méthode est rigoureuse et exacte.

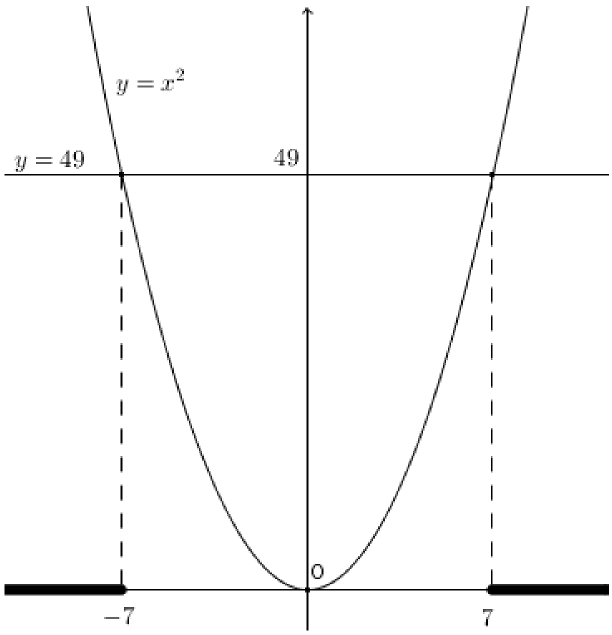
Exemple 1 : *On résout* $x^2 \leqslant 25$.

- *On trace à main levée la parabole correspondant à la fonction carré.*
- *On trace la droite* $y=25$.
- *On marque les points d'intersection, et on note leurs abscisses (ici* $-\sqrt{25}=-5$ *et* $\sqrt{25}=5$ *).*
- *On met en évidence sur l'axe des abscisses les solutions (ici, ce sont les abscisses pour lesquelles la parabole est en-dessous de la droite ainsi que les abscisses des points d'intersection).*
- *On écrit l'ensemble solution.*



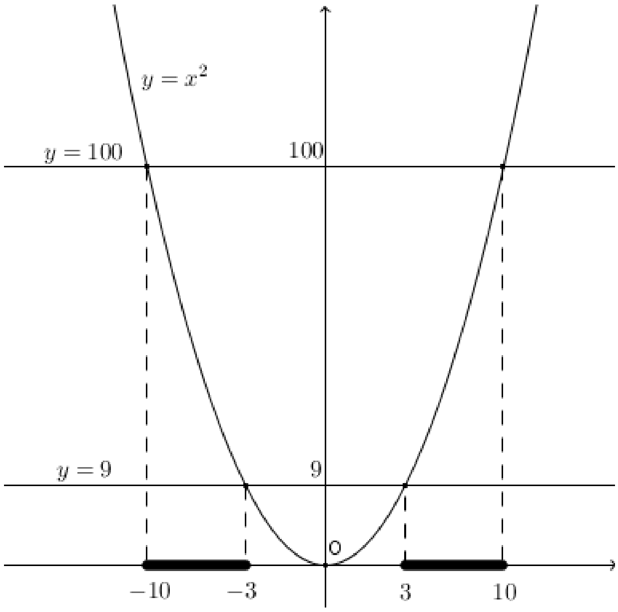
$\boldsymbol{S=[-5;5]}$.

Exemple 2 : *On résout* $x^2 \geqslant 49$.



$\boldsymbol{S=]-\infty;-7]\cup[7;+\infty[}$.

Exemple 3 : *On résout* $9<x^2<100$.



$$\boldsymbol{S=]-10;-3[\cup]3;10[}.$$

II – La fonction inverse

La fonction inverse est la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*=]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

a) Imparité de la fonction inverse

Pour tout $x\neq 0$, $f(-x)=\dfrac{1}{-x}=-\dfrac{1}{x}=-f(x)$.

On dit que la fonction inverse est impaire.

b) Signe de la fonction inverse

- Si $x<0$, $\dfrac{1}{x}<0$ d'après la règle des signes.
- Si $x>0$, $\dfrac{1}{x}>0$ d'après la règle des signes.

On en déduit ce tableau de signe : (0 étant la valeur interdite, on met une double-barre)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\dfrac{1}{x}$	$-$	‖	$+$

c) Sens de variation de la fonction inverse

Théorème : La fonction inverse est strictement décroissante sur $]-\infty;0[$ et strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

Remarque : La fonction inverse n'est pas strictement décroissante sur $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$.

Preuve :

- Sur $]-\infty;0[$: Soient a et b appartenant à $]-\infty;0[$ tels que $a<b$.
  $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1\times b}{a\times b}-\frac{1\times a}{a\times b}=\frac{b-a}{ab}$; $b-a>0$ car $a<b$ et $ab>0$ car a et b sont strictement négatifs. On en déduit d'après la règle des signes que $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

  La fonction inverse est donc strictement décroissante sur $]-\infty;0[$.
- Sur $]0;+\infty[$: Soient a et b appartenant à $]0;+\infty[$ tels que $a<b$.
  $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1\times b}{a\times b}-\frac{1\times a}{a\times b}=\frac{b-a}{ab}$; $b-a>0$ car $a<b$ et $ab>0$ car a et b sont strictement positifs. On en déduit d'après la règle des signes que $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}>0 \Leftrightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$.

  La fonction inverse est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

On a donc ce tableau de variation :

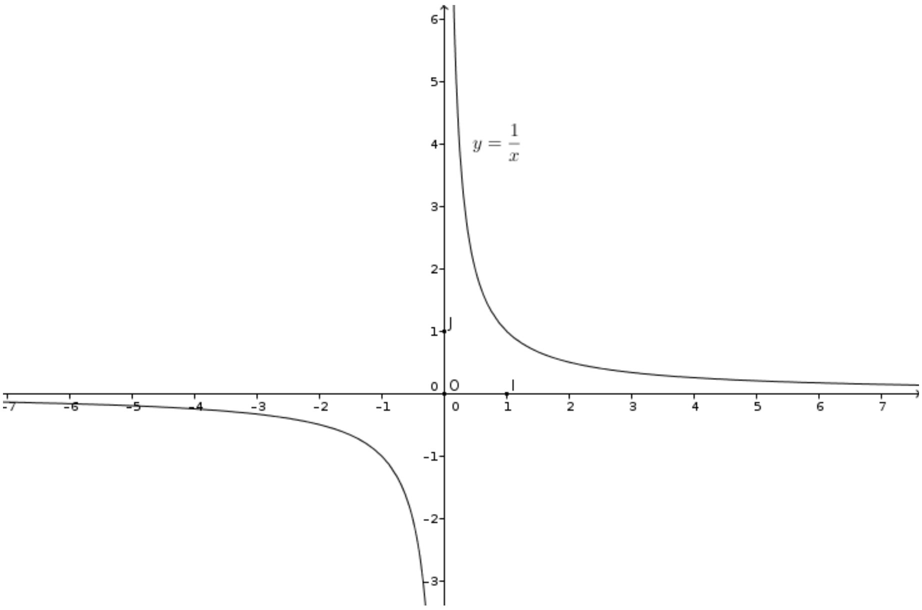
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

d) Représentation graphique de la fonction inverse

Dans un repère orthonormal $(O;I,J)$, la fonction inverse est représentée par une hyperbole.

On retrouve les résultats concernant les variations et le signe de la fonction inverse.

La courbe est symétrique par rapport à l'origine. C'est l'interprétation graphique de l'imparité de la fonction inverse.



e) Équations avec un inverse

Théorème : On considère l'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ $\frac{1}{x}=k$ où $k \in \mathbb{R}$.

- **Si $k \neq 0$, l'équation a une seule solution : $x=\frac{1}{k}$.**
- **Si $k=0$, l'équation n'a pas de solution.**

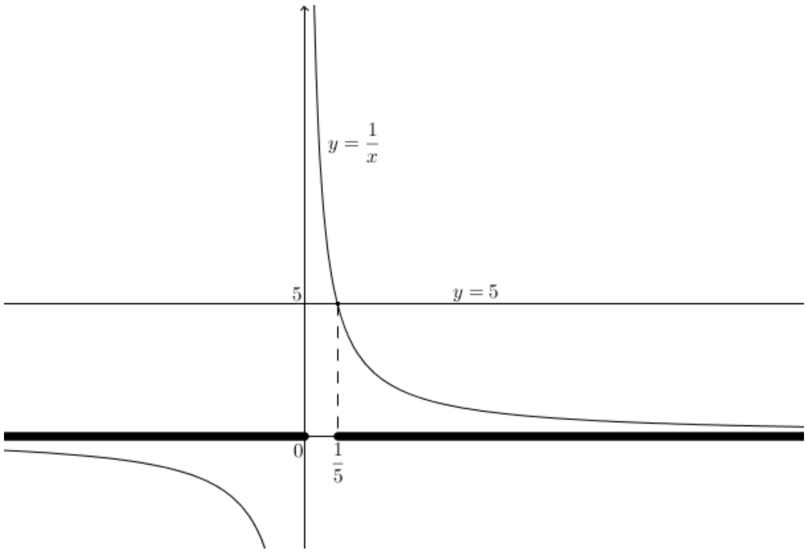
Exemple : On résout sur $\mathbb{R}$ l'équation $\frac{1}{x}=8$: $\frac{1}{x}=8 \Leftrightarrow x=\frac{1}{8}$. $\boldsymbol{S=\left\{\frac{1}{8}\right\}}$.

Remarque : Pour $x \neq 0$, l'inverse de x peut aussi se noter x^{-1} : $\frac{1}{x}=x^{-1}$.

f) Inéquations avec un inverse

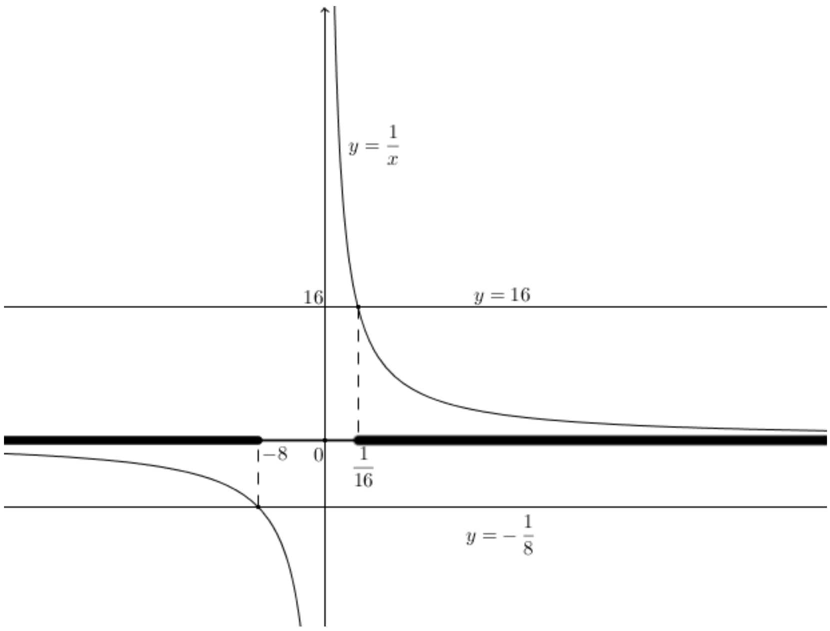
La méthode est la même que pour les inéquations avec un carré, sauf bien sûr que l'on trace l'hyperbole à main levée plutôt que la parabole. 0 étant la valeur interdite, elle ne fera jamais partie des solutions.

Exemple 1 : *On résout* $\frac{1}{x} \leqslant 5$.



$$S =]-\infty ; 0[\cup [0 ; +\infty[.$$

Exemple 2 : *On résout* $-\frac{1}{8} \leqslant \frac{1}{x} < 16$.



$$S =]-\infty ; -8] \cup \left] \frac{1}{16} ; +\infty \right[.$$

III – Fonctions polynômes du deuxième degré

a) Forme développée

<u>Définition :</u> Une <u>fonction polynôme du deuxième degré</u> est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ qui peut se mettre sous la forme $f(x)=ax^2+bx+c$ avec $a\neq 0$, $b\in\mathbb{R}$, $c\in\mathbb{R}$. Cette forme s'appelle la forme <u>développée</u>.

<u>Exemple :</u> la fonction $f(x)=x^2+9x-1$ définie sur $\mathbb{R}$ est une fonction polynôme du deuxième degré avec $\begin{cases} a=1 \\ b=9 \\ c=-1 \end{cases}$.

<u>Théorème :</u> Une fonction polynôme du deuxième degré est représentée par une parabole.

<u>Remarque :</u> Si la fonction polynôme du second degré a pour forme développée $f(x)=ax^2+bx+c$, alors la parabole la représentant passe par le point de coordonnées $(0;c)$ puisque $f(0)=a\times 0^2+b\times 0+c=c$.

b) Forme canonique

<u>Théorème :</u> Toute fonction polynôme du deuxième degré f peut se mettre sous la forme $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$, avec $a\neq 0$, $\alpha\in\mathbb{R}$, $\beta\in\mathbb{R}$. Cette forme s'appelle la forme <u>canonique</u>.

<u>Remarques :</u>

- Le coefficient « a » des formes développée et canonique correspond au même nombre, ce qui justifie l'emploi de la même lettre.
- Cette fonction peut être vue par cet enchainement :

  $x \rightarrow x-\alpha \rightarrow (x-\alpha)^2 \rightarrow a(x-\alpha)^2 \rightarrow a(x-\alpha)^2+\beta$

<u>Théorème :</u> Soit f une fonction polynôme du deuxième degré de forme canonique $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ avec $a\neq 0$. Cette fonction admet comme tableau de variation :

Si $a<0$				**Si $a>0$**			
x	$-\infty$	α	$+\infty$	x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	β	$\searrow$	$f(x)$	$\searrow$	β	$\nearrow$

<u>Exemple :</u> Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-(x+2)^2+3$.

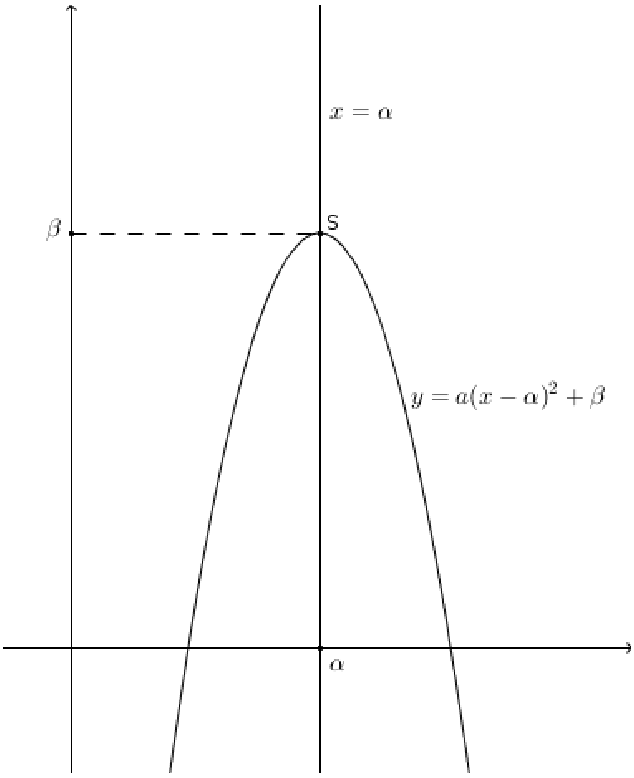
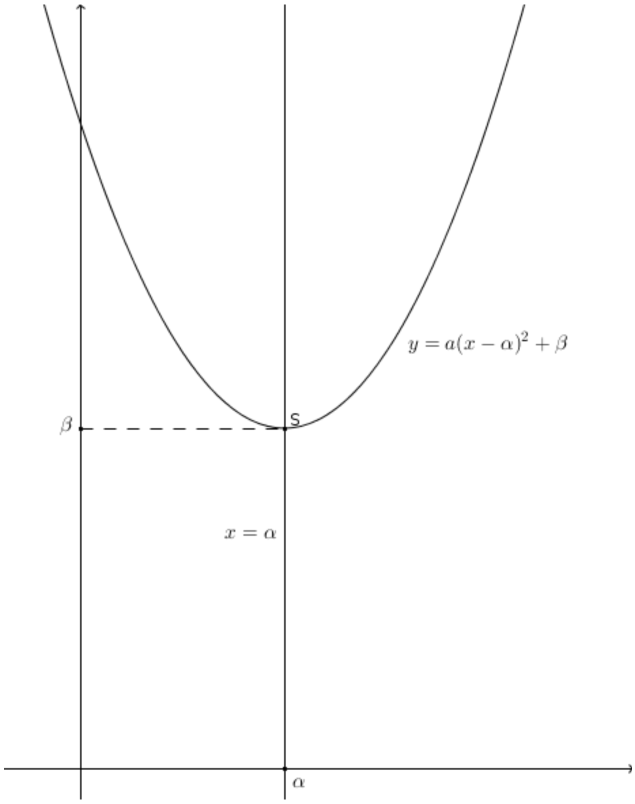
f est une fonction polynôme du deuxième degré sous forme canonique avec $\begin{cases} a=-1 \\ \alpha=-2 \\ \beta=3 \end{cases}$. Comme $a<0$, on en déduit son tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	3	$\searrow$

<u>Preuve :</u> On traitera le cas $a<0$, le cas $a>0$ étant analogue. On utilise l'enchainement vu dans la remarque.

Sur $]-\infty;\alpha]$	Sur $[\alpha;+\infty[$
Soient x_1 et x_2 appartenant à $]-\infty;\alpha]$ tels que $x_1<x_2$. On a donc $x_1<x_2\leqslant\alpha$ 1) On soustrait α : $x_1-\alpha<x_2-\alpha\leqslant 0$ 2) On applique la fonction carré qui est strictement décroissante sur $]-\infty;0]$: $(x_1-\alpha)^2>(x_2-\alpha)^2$ 3) On multiplie par $a<0$: $a(x_1-\alpha)^2<a(x_2-\alpha)^2$ 4) On ajoute β : $a(x_1-\alpha)^2+\beta<a(x_2-\alpha)^2+\beta\Leftrightarrow f(x_1)<f(x_2)$ La fonction f est strictement croissante sur $]-\infty;\alpha]$.	Soient x_1 et x_2 appartenant à $[\alpha;+\infty[$ tels que $x_1<x_2$. On a donc $\alpha\leqslant x_1<x_2$ 1) On soustrait α : $0\leqslant x_1-\alpha<x_2-\alpha$ 2) On applique la fonction carré qui est strictement croissante sur $[0;+\infty[$: $(x_1-\alpha)^2<(x_2-\alpha)^2$ 3) On multiplie par $a<0$: $a(x_1-\alpha)^2>a(x_2-\alpha)^2$ 4) On ajoute β : $a(x_1-\alpha)^2+\beta>a(x_2-\alpha)^2+\beta\Leftrightarrow f(x_1)>f(x_2)$ La fonction f est strictement décroissante sur $[\alpha;+\infty[$.

<u>Théorème :</u> La fonction $f(x)=a(x-\alpha)^2+\beta$ définie sur $\mathbb{R}$ avec $a\neq 0$ est représentée dans un repère orthonormal par une parabole de sommet $S(\alpha;\beta)$. Cette parabole est symétrique par rapport à la droite d'équation $x=\alpha$.

Si $a<0$	Si $a>0$
	
Le sommet S correspond au maximum de la fonction. La parabole est orientée vers le bas.	Le sommet S correspond au minimum de la fonction. La parabole est orientée vers le haut.

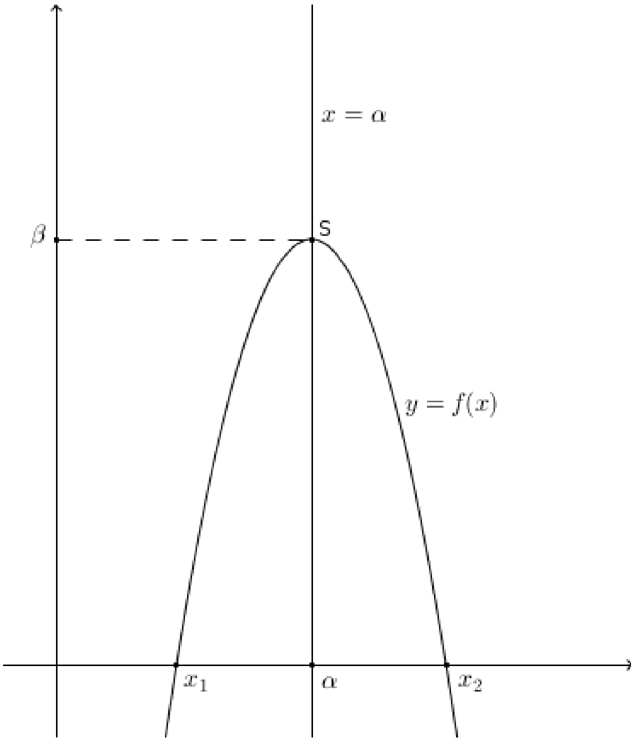
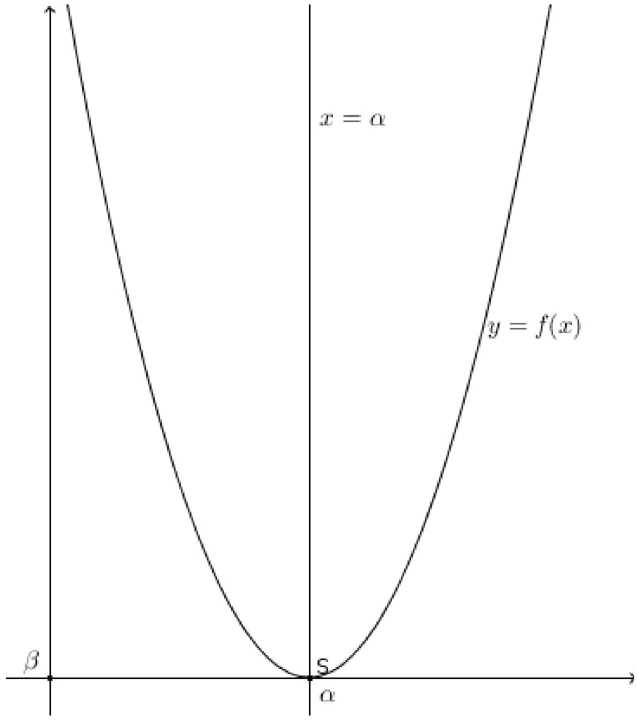
<u>c) Forme factorisée</u>

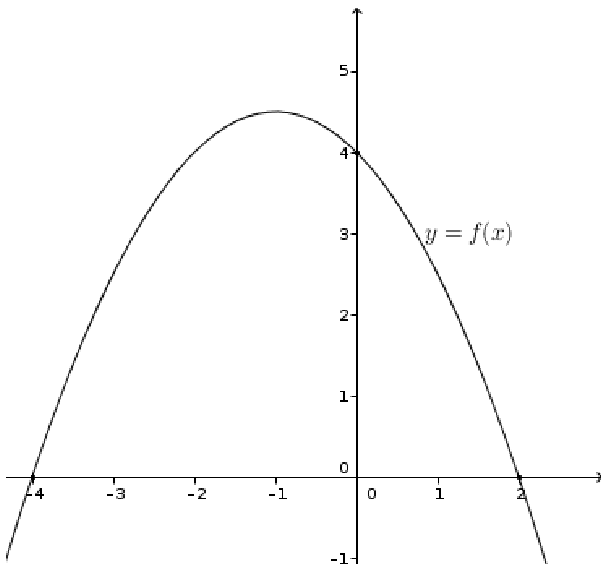
<u>Théorème :</u> Soit f une fonction polynôme du deuxième degré. On admet que l'on peut factoriser $f(x)$ si et seulement si la parabole coupe l'axe des abscisses :

- **Si l'axe des abscisses est coupé deux fois en x_1 et x_2, la forme <u>factorisée</u> est $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$.**

  De plus, par symétrie de la courbe par rapport à la droite d'équation $x=\alpha$, α est la moyenne de x_1 et x_2 : $\alpha=\dfrac{x_1+x_2}{2}$.
- **Si l'axe des abscisses est coupé une seule fois, c'est nécessairement en α. On a alors $\beta=0$, et la forme canonique et la forme <u>factorisée</u> sont identiques : $f(x)=a(x-\alpha)^2$.**

<u>Remarque :</u> Le coefficient « a » des trois formes correspond au même nombre.

Si l'axe des abscisses est coupé deux fois	Si l'axe des abscisses est coupé une fois
	
Forme factorisée : $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)$	Forme factorisée : $f(x)=a(x-\alpha)^2$



<u>Exemple :</u> Soit f une fonction polynôme du deuxième degré représentée par cette parabole.

On cherche les trois formes de $f(x)$:

*La parabole coupe deux fois l'axe des abscisses en $x_1=-4$ et $x_2=2$, donc sa forme factorisée est $f(x)=a(x-x_1)(x-x_2)=a(x-(-4))(x-2)$, donc $f(x)=a(x+4)(x-2)$. Or $f(0)=4$ donc $4=a(0+4)(0-2)\Leftrightarrow 4=a\times 4\times(-2)\Leftrightarrow 4=-8a$ donc $a=-\frac{1}{2}$. **La forme factorisée est donc** $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{2}(x+4)(x-2)}$ **.***

On développe : $f(x)=-\frac{1}{2}(x+4)(x-2)=-\frac{1}{2}(x^2-2x+4x-8)=-\frac{1}{2}x^2+x-2x+4=-\frac{1}{2}x^2-x+4$.

La forme développée est donc** $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{2}x^2-x+4}$ **.

Le sommet a pour abscisse $\alpha=\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{-4+2}{2}=-1$. $\beta=f(\alpha)=f(-1)=-\frac{1}{2}\times(-1)^2-(-1)+4$

*donc $\beta=\frac{9}{2}$. **La forme canonique est donc** $\boldsymbol{f(x)=-\frac{1}{2}(x+1)^2+\frac{9}{2}}$ **.***

Chapitre 9 – Trigonométrie

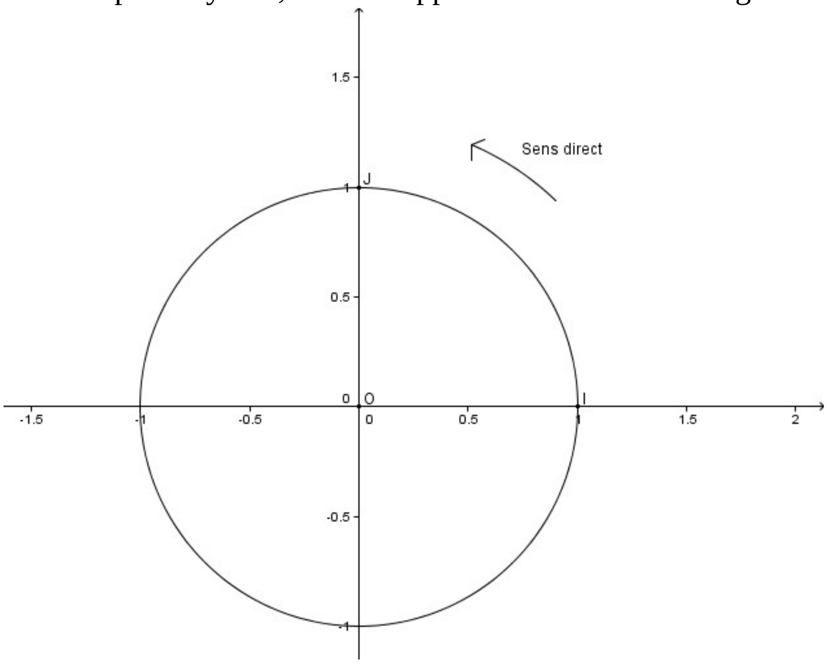
I – Enroulement de la droite des réels sur le cercle trigonométrique

$(O;I,J)$ est un repère orthonormal du plan.

a) Le cercle trigonométrique

Définition : Le cercle de centre O et de rayon 1 est appelé cercle trigonométrique ; il est orienté dans le sens indiqué par la flèche, appelé sens *direct* (c'est le sens inverse des aiguilles d'une montre).

Remarques :
- Le sens des aiguilles d'une montre est le sens *indirect*.
- Comme le cercle a pour rayon 1, I et J appartiennent au cercle trigonométrique.



b) Principe de l'enroulement

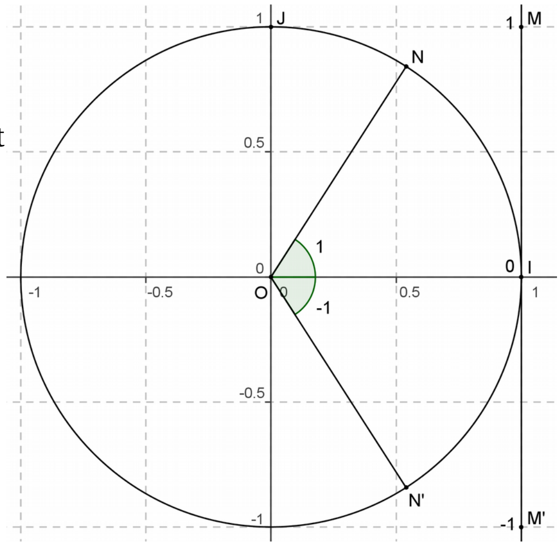
- On place en I la droite des réels, tangente au cercle – c'est donc une droite graduée parallèle à l'axe des ordonnées, dont l'origine est en I.
- On considère un point M de la droite à la graduation x.
- On enroule la droite des réels autour du cercle, le point M va donc coïncider avec un *unique* point N du cercle.

L'exemple qui suit illustre la situation pour M, de graduation 1, et M', de graduation -1.

La longueur de l'arc NI est donc la même que celle du segment $[MI]$, c'est-à-dire 1.

Par exemple, le point de la droite des réels correspondant à la graduation $\frac{\pi}{2}$ va venir coïncider avec le point J, le point de la droite des réels correspondant à la graduation 0 coïncidant avec le point I.

Remarque : Lorsque la graduation x du point M de la droite des réels appartient à l'intervalle $[0;2\pi]$, elle est égale à la longueur de l'arc de cercle d'origine I et d'extrémité N sur lequel M se superpose.



Conséquence de l'orientation : On enroule la droite à partir du point I, en tournant *dans le sens inverse des aiguilles d'une montre* (pour les mesures positives). Pour les mesures négatives, on enroule *dans le sens des aiguilles d'une montre...*

Définition : Soit $x \in [0;2\pi]$. Lorsque le point M correspondant à la graduation x se superpose avec le point N du cercle trigonométrique, on dit que x est la mesure en radians de l'arc de cercle IN.
Si $x \in [0;2\pi]$, x est appelé aussi mesure en radians de l'angle $\widehat{ION}$.

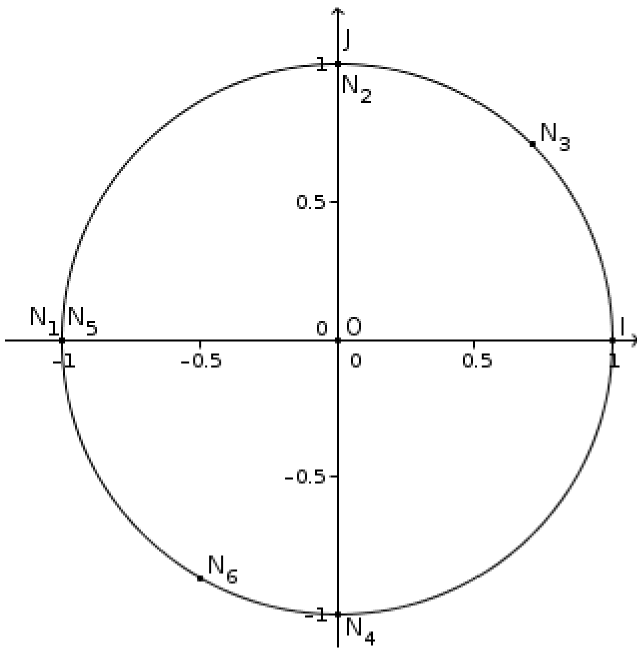
Lien avec les degrés : Par proportionnalité, on remarque que pour passer d'une mesure en degrés à une mesure en radians, on multiplie par $\frac{\pi}{180}$. Pour passer d'une mesure en radians à une mesure en degrés, on multiplie par $\frac{180}{\pi}$.

Exemples : 90° correspond à $\frac{\pi}{2}$; $\frac{\pi}{3}$ correspond à 60°.

Remarque : Pour les radians, on n'écrit pas l'unité.

Exemples : En convertissant en degrés et en étant attentif au sens de rotation, on a :

N_1 correspond au réel π
N_2 correspond au réel $\frac{\pi}{2}$
N_3 correspond au réel $\frac{\pi}{4}$
N_4 correspond au réel $\frac{3\pi}{2}$
N_5 correspond au réel $-\pi$
N_6 correspond au réel $-\frac{2\pi}{3}$



Remarque : Les points du cercle correspondant aux réels $\frac{\pi}{6}$; $\frac{\pi}{6}+2\pi$; $\frac{\pi}{6}+4\pi$; $\frac{\pi}{6}+6\pi$,… ainsi que les points du cercle correspondant aux $\frac{\pi}{6}-2\pi$; $\frac{\pi}{6}-4\pi$; $\frac{\pi}{6}-6\pi$,… sont confondus.

Conséquence : Pour un angle, on remarque que la mesure n'est pas unique ; comme 2π est une mesure de l'angle total, on en déduit que si x est une mesure d'un angle donné, toutes les mesures de cet angle sont données par $x+2\pi k$, avec $k\in\mathbb{Z}$.
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des nombres entiers relatifs : $\mathbb{Z}=\{\ldots;-2;-1;0;1;2;\ldots\}$.

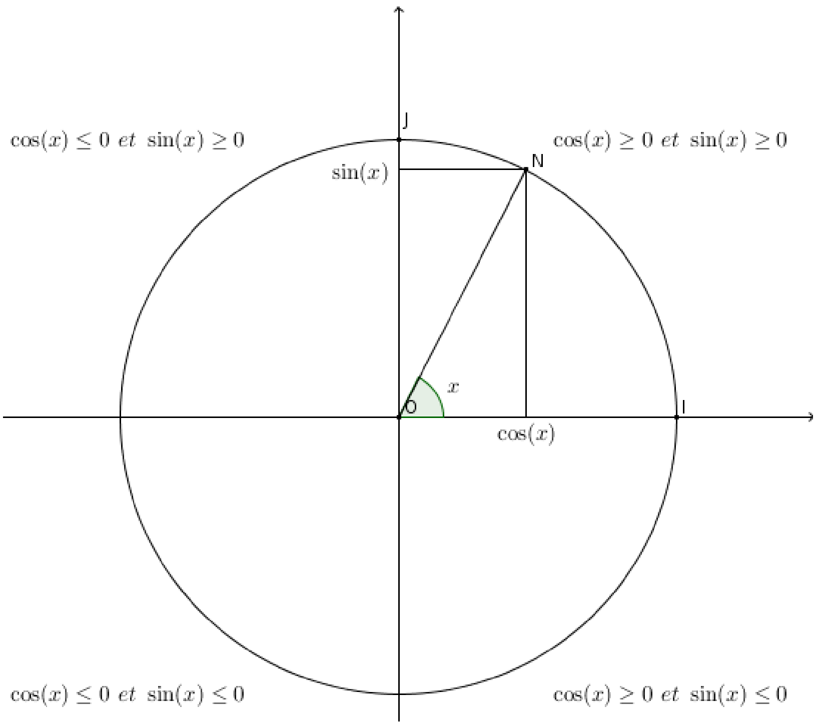
II – Fonctions cosinus et sinus

$(O;I,J)$ est un repère orthonormal du plan, C est le cercle trigonométrique de centre O .

a) Cosinus et sinus d'un réel

Définitions : N est le point de C image du réel x .
Le cosinus de x noté $\cos(x)$ est l'abscisse de N dans le repère $(O;I,J)$.
Le sinus de x noté $\sin(x)$ est l'ordonnée de N dans le repère $(O;I,J)$.

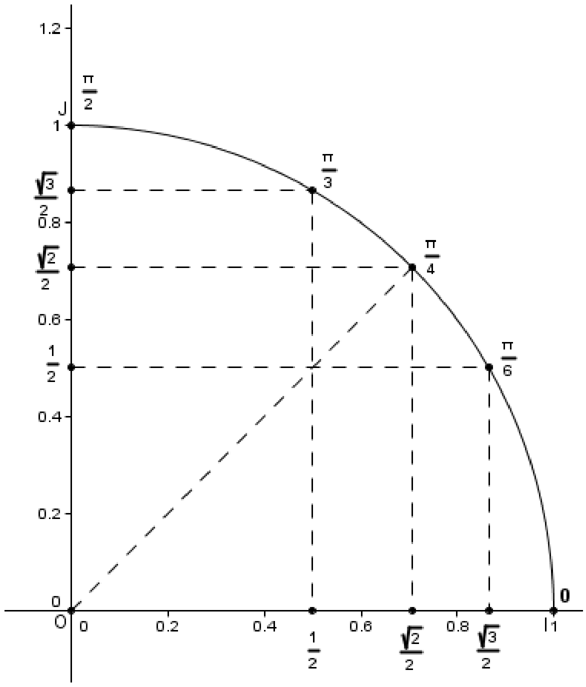
cos et *sin* sont donc deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$.



Propriétés fondamentales : Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et tout $k\in\mathbb{Z}$, on a :

- **$-1\leq\cos(x)\leq 1$ et $-1\leq\sin(x)\leq 1$**
- **$\cos(x+2\pi k)=\cos(x)$ et $\sin(x+2\pi k)=\sin(x)$; on dit que les fonctions *cos* et *sin* sont périodiques, de période 2π .**
- **$\cos^2(x)+\sin^2(x)=1$; c'est le théorème de Pythagore.**

b) Valeurs usuelles



Angle $\widehat{ION}$	0°	30°	45°	60°	90°
$\boldsymbol{x}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\mathbf{cos}(\boldsymbol{x})$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathbf{sin}(\boldsymbol{x})$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

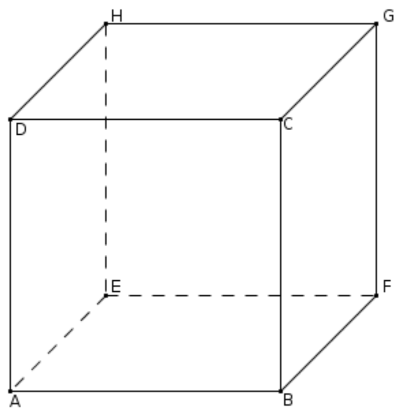
Chapitre 10 – Géométrie dans l'espace

I – La perspective cavalière

Règles de représentation d'un solide :

- Une figure située dans un plan vu de face est représentée en vraie grandeur (sans changer sa forme).
- Deux droites parallèles sont représentées par deux droites parallèles.
- Des points alignés sont représentés par des points alignés.
- Le milieu d'un segment est représenté par le milieu du segment dessiné.
- Les éléments visibles sont dessinés en traits pleins, les éléments cachés sont dessinés en pointillés.

Exemple : $ABCDEFGH$ *est un cube.*

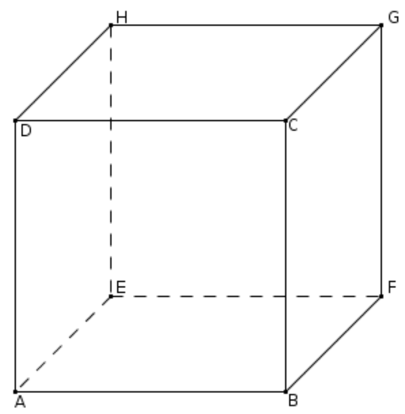


- $ABCD$ *et* $EFGH$ *sont des carrés représentés de face, donc sur la figure, ce sont également des carrés.*
- $BFGC$ *est un carré, mais il n'est pas de face, donc sur la figure* $BF<CB$ *: on a choisi d'appliquer un coefficient de 0,5, ce qui explique pourquoi* $BF=0{,}5\,CB$ *.*
- $\widehat{BAE}=90^\circ$ *, mais cet angle n'est pas de face, donc on a choisi de le réduire à* 45° *sur la figure.*
- (DH) *et* (CG) *sont parallèles, ce qui est toujours le cas sur la figure.*

II – Plans et droites

- Dans l'espace, par deux points distincts, il passe une seule droite, on la note avec les deux points entre parenthèses.
- Dans l'espace, un plan est une surface plane infinie qui n'a pas de bords. Un plan est caractérisé par trois points non alignés de l'espace, c'est-à-dire que par trois points non alignés de l'espace, il passe un unique plan. On le note avec les trois points entre parenthèses.
- Si deux points distincts A et B *appartiennent* à un plan P , la droite (AB) est *incluse* dans le plan P . On note $A\in P$ et $B\in P\Leftrightarrow(AB)\subset P$.
- Des objets sont coplanaires si et seulement si ils appartiennent au même plan.

<u>Exemple :</u> $ABCDEFGH$ *est un cube.*

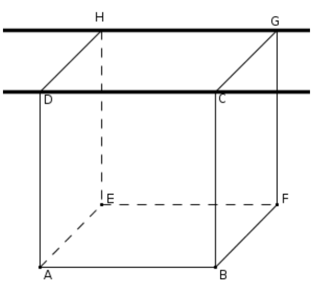
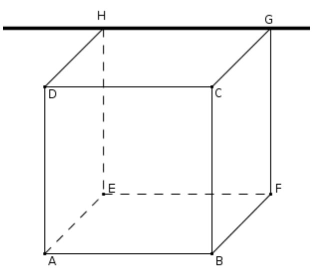
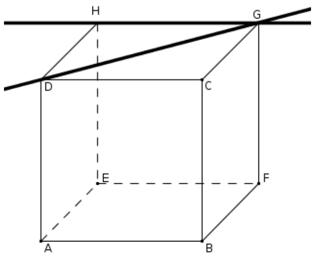
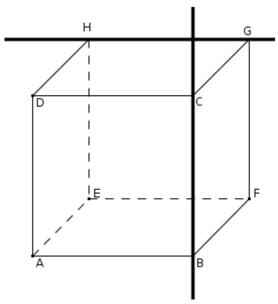


- *A , B et C ne sont pas alignés, ils définissent donc un plan, le plan (ABC) . Ce plan ne se limite pas au triangle ABC ; c'est l'étendue plane infinie sans bords qui contient le triangle ABC . Le point D appartient donc au plan (ABC) , les droites (AB) , (AD) , (BC) , … sont incluses dans le plan (ABC) .*
- *(HG) , C , (DG) , DCG , sont coplanaires, car (DHG) les contient tous.*

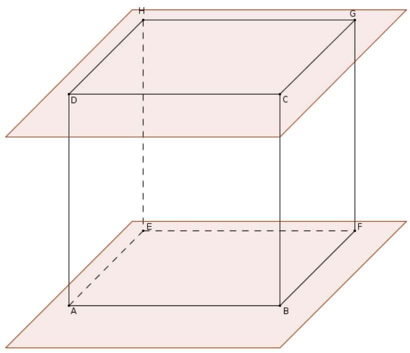
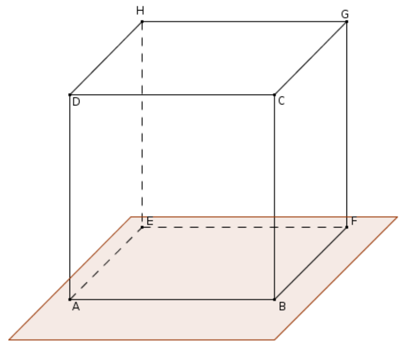
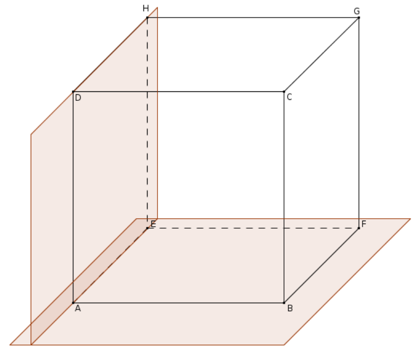
III – Position relative de droites et plans

Dans cette partie, $ABCDEFGH$ est un cube.

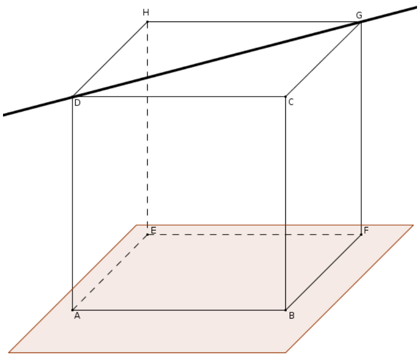
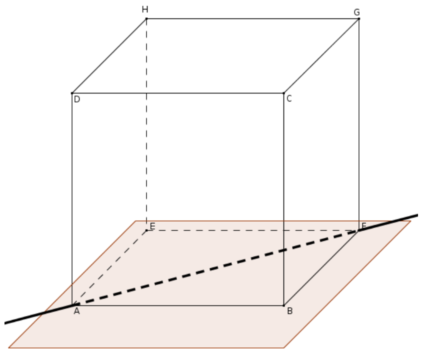
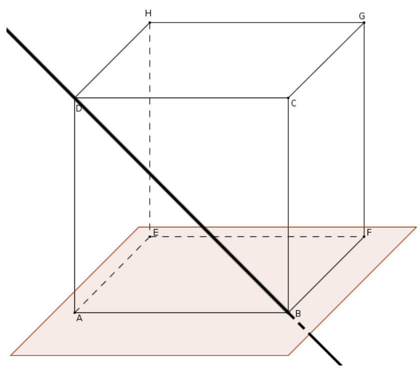
<u>a) Position relative de deux droites</u>

Deux droites de l'espace peuvent être :			
Coplanaires			**Non coplanaires**
Parallèles		***Sécantes***	
Strictement parallèles	***Confondues***		
Pas de point commun	Une infinité de points communs (une droite)	Un unique point commun	Pas de point commun
			
(GH) et (CD) sont strictement parallèles : elles sont coplanaires sans avoir de point commun.	(GH) et (GH) sont confondues.	(GD) et (GH) sont sécantes en G .	(GH) et (CB) ne sont pas coplanaires : elles ne sont pas parallèles et n'ont pas de point commun.

b) Position relative de deux plans

<table>
<tr><td colspan="3">Deux plans de l'espace peuvent être :</td></tr>
<tr><td colspan="2">Parallèles</td><td rowspan="2">Sécants</td></tr>
<tr><td>Strictement parallèles</td><td>Confondus</td></tr>
<tr><td>Pas de point commun</td><td>Une infinité de points communs (un plan)</td><td>Une infinité de points communs (une droite)</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(ABE) et (DCH) sont strictement parallèles.</td><td>(ABE) et (ABE) sont confondus.</td><td>(ABE) et (ADH) sont sécants, leur intersection est la droite (AE).</td></tr>
</table>

c) Position relative d'une droite et d'un plan

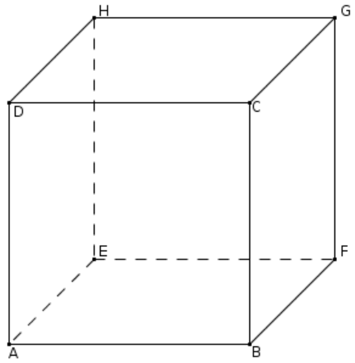
<table>
<tr><td colspan="3">Une droite de l'espace peut être :</td></tr>
<tr><td colspan="2">Parallèle au plan</td><td rowspan="2">Sécante au plan</td></tr>
<tr><td>Strictement parallèle au plan</td><td>Incluse dans le plan</td></tr>
<tr><td>Pas de point commun</td><td>Une infinité de points communs (une droite)</td><td>Un unique point commun</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>(ABE) et (DG) sont strictement parallèles.</td><td>(AF) est incluse dans (ABE).</td><td>(ABE) et (BD) sont sécantes en B.</td></tr>
</table>

IV – Parallélisme dans l'espace

- Si deux droites sont parallèles à une troisième, alors elles sont parallèles entre elles.
- Si deux plans sont parallèles à un troisième, alors ils sont parallèles entre eux.

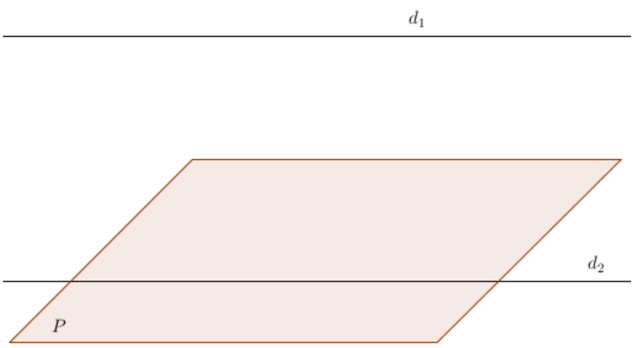
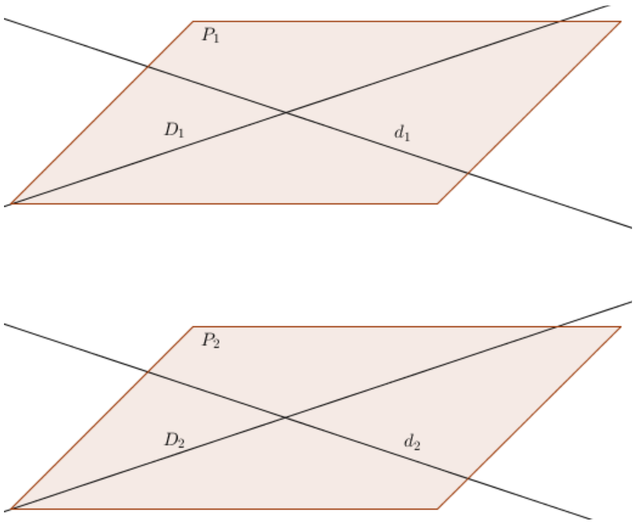
<u>Remarque :</u> Les théorèmes mélangeant droites et plans sont faux !

<u>*Exemple :*</u> *$ABCDEFGH$ est un cube.*



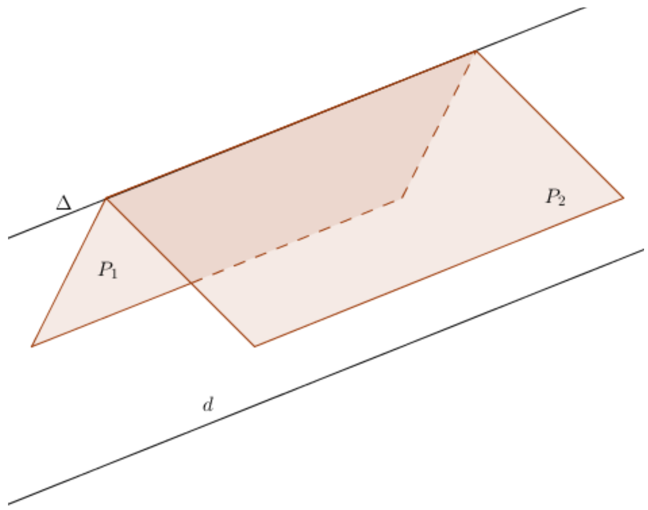
- *(CD) et (AB) sont parallèles, (CD) et (GH) sont parallèles, donc (AB) et (GH) sont parallèles.*
- *(AB) et (EFG) sont parallèles, (AB) et (DCH) sont parallèles, mais (EFG) et (DCH) ne sont pas parallèles.*

a) Caractérisation du parallélisme

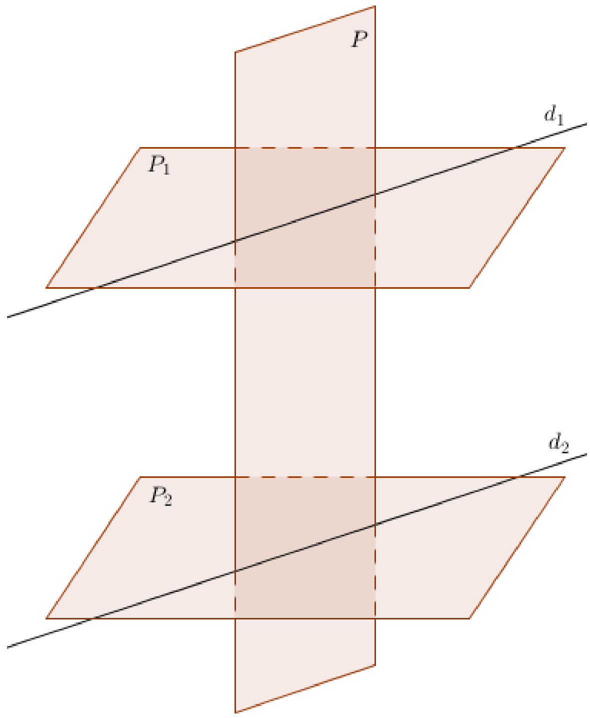
Caractériser une droite parallèle à un plan	**Caractériser deux plans parallèles**
Une droite est parallèle à un plan si et seulement si elle est parallèle à une droite de ce plan.	Deux plans sont parallèles si et seulement si l'un contient deux droites sécantes qui sont parallèles à deux droites sécantes incluses dans l'autre plan.
	
d_1 et d_2 sont parallèles et d_2 est incluse dans le plan P donc d_1 est parallèle à P.	D_1 et d_1 sont deux droites sécantes incluses dans P_1 ; D_2 et d_2 sont deux droites sécantes incluses dans P_2 ; D_1 et D_2 sont parallèles ; d_1 et d_2 sont parallèles ; donc P_1 et P_2 sont parallèles.

b) Théorèmes relatifs au parallélisme

Théorème : Si P_1 et P_2 sont deux plans sécants selon une droite Δ et si une droite d est parallèle à Δ , alors d est parallèle aux plans P_1 et P_2 .



Théorème : Si deux plans parallèles P_1 et P_2 sont sécants avec un troisième plan P , alors les deux droites d'intersection d_1 et d_2 sont parallèles.



<u>Théorème du toit :</u> Si :

- **d_1 et d_2 sont deux droites parallèles,**
- **d_1 est incluse dans le plan P_1 et d_2 est incluse dans le plan P_2 ,**
- **P_1 et P_2 sont sécants et ont pour intersection la droite Δ ,**

alors Δ est parallèle à d_1 et d_2 .