Tömningstiden av cylindriskt kärl

Lukas Ejvinsson[1]*, Jakub Eliasz[1]*, Rasmus Englund[1]*

Abstract
This experiment aimed at finding a reliable equation for the drain time of a cylinder through dimensional analysis. The cylinder was filled with water and the drain time was determined by the cylinder's diameter *D*, the diameter of the hole in the disk through which the water flows through *d*, and the height of the water in the cylinder *h*. The aim of the experiment was to compare the theoretical results, using selected variables, with the experimental values. By applying dimensional analysis, we were able to derive an equation that described the drain time. We found with the help of the derived equation $T = (0.85 \pm 0.04) * D^{2.0}h^{0.55}d^{-1.93}$ and a 95%-confidence interval, that the difference was 4.94% from the actual experimental value. This shows that it is possible to use dimensional analysis to determine physical models from experimental data.

nyckelord
Dimensionsanalys — regressionsanalys — Tömningstid

[1] *Department of Physics, Umeå University, Umeå, Sweden*
***Corresponding authors**: luej0002@student.umu.se, jael0035@student.umu.se, raen0009@student.umu.se
***Supervisor**: patrik.norqvist@umu.se

Innehåll

1. Inledning

För att bestämma tömningstiden av ett cylindriskt kärl av godtycklig storlek krävs en modell som relaterar tiden till andra, kända variabler. Detta kan göras genom att analysera de variabler som lätt går att bestämma och sedan använda dimensionsanalys för att hitta en modell. Ingenjörer använder sig ofta av dimensionsanalys för att ta fram begripliga ekvationer. Det finns ofta problem som beror på komplicerade förhållanden mellan olika variabler, men med hjälp av dimensionsanalys kan komplexiteten reduceras.[2] Denna laboration undersöker hur detta kan göras i praktiken.

I detta experiment undersöks tömningstiden av vattnet i en cylinder. Denna tid beror på flera variabler som, till exempel, höjden av vattnet i cylindern, diametern av cylindern och diametern av hålet i skivan. Syftet med experimentet är att bestämma hur de olika variablerna kommer att påverka tömningstiden. Målet är att med hjälp av dimensionsanalys och den insamlade datan hitta en modell som beskriver förhållande mellan tömningstiden och de olika faktorerna. Modellen kommer sedan att appliceras och testas mot tidigare okända variabler.

2. Metod

2.1 Teori

Beräkningen av tömningstiden för en cylinder fylld med vatten beror på flera faktorer som cylinderns diameter, höjden av vattnet, diametern på det lilla hål vilket vattnet rinner ut genom och gravitationskonstanten. Alla dessa variabler påverka tömningstiden på olika sätt och följande ekvationer visar på hur tömningstiden beräknades. Alla variabler ovan påverkar tömningsten och eftersom vi inte vet hur dessa påverkar tömningstiden applicerar vi en dimensionsanalys för att undersöka dess inverkan, antagandet är,

$$T = CD^x h^y d^z \tag{1}$$

Där T är tömningstiden som beror på stora cylinderns diameter D, höjden av vattnet h, lilla diametern på skivan d och de enhetslösa konstanterna C, x, y, z.

För att analysera relationen mellan tömningstiden och de övriga variablerna omvandlas dessa värden med hjälp av 10-logaritmen, eftersom tömningstiden antas bero på en potensfunktion. De omvandlade värdena representeras sedan i formatet,

$$Log(T) = KLog(h) + m \tag{2}$$

Där T är den logarimerade tömningstiden som beror på lutningskofficienten K, exempelvis höjden h och interceptet i y ledet m. Observera att höjden inte är det enda variabeln som logaritmeras och polynom anpassas från (1).

Lutningen k i den logaritmerade funktionen motsvarar exponenten i den ursprungliga funktionen (1) mellan tiden och exempelvis höjden på vattnet i cylindern. Detta innebär att omvandlar tillbaka logaritmen för att uttrycka C beroende av variablerna

$$C = \frac{T}{D^x h^y d^z} \tag{3}$$

Där C är en konstant som motsvarar respektive variabels antagande för konstanten. För att vidare bestämma medelvärdet i C används

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{4}$$

Där $\bar{x}$ är medelvärdet av summan av alla mätvärden x dividerat på antalet mätningar n.

För att kunna beräkna en skillnad mellan det teoretiska värdet $T_{\text{teoretiska}}$ och det experimentella värdet $T_{\text{experimentell}}$ används ekvationen

$$\Delta T = T_{\text{experimentell}} - T_{\text{teoretisk}} \tag{5}$$

där ΔT är skillnaden i tömningstid mellan det experimentella och det teoretiska värdet. Detta värde kan användas i följande ekvation för att beräkna den procentuella skillnaden mellan $T_{\text{teoretiska}}$ och $T_{\text{experimentella}}$

$$\Delta T_{\text{procent}} = 100\left(\frac{\Delta T}{T_{\text{experimentella}}}\right) \tag{6}$$

där $\Delta T_{\text{procent}}$ är det procentuella skillnaden mellan det teoretiska och faktiska värdet.
[1]

2.1.1 osäkerhet med 95% konfidens

För att beräkna en osäkerhet behöver man först bestämma ett intervall. Standardavvikelsen beräknas enligt formeln:

$$S_x = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \tag{7}$$

Där μ är medelvärdet och n är antalet mätvärden. För konstanten C kan osäkerheten beräknas baserat på vilken mätdata som användes för att bestämma den. Detta görs genom att beräkna medelfelet:

$$S_{\bar{x}} = \frac{s_x}{sqrt(n)} \tag{8}$$

[1] Samtlig teori är hämtad ur häftet om experimentell metodik [1]

där S_x är standardavvikelsen för alla mätvärden. Sedan multipliceras medelfelet med antalet standardavvikelser som krävs för att nå ett 95% konfidensintervall

$$S_{\bar{x}} \cdot (t \cdot s_x) \tag{9}$$

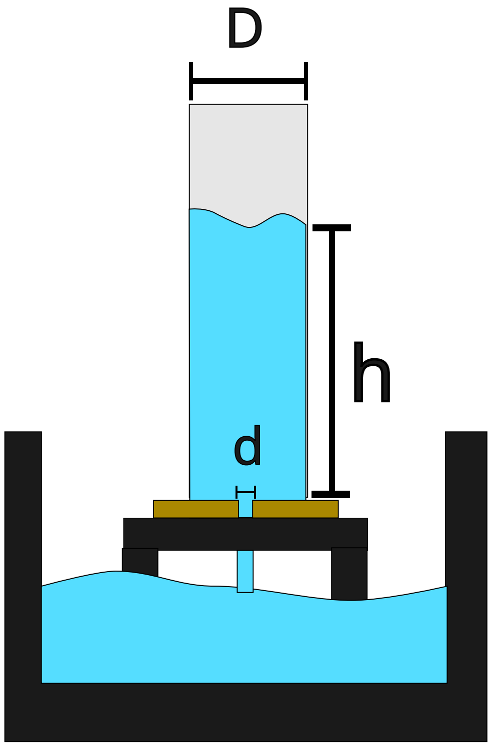
där t är antalet standardavvikelser enligt en t-fördelningstabell givet ett antal mätvärden.[3]

2.2 Experimentell metod

Vi utförde experimentet genom att låta vatten rinna ut ur en genomskinlig cylinder och igenom ett hål i en metallskiva. cylindern monterades ovanpå metallskivan och fästes sedan i en ställning. Denna ställning placerades sedan i en balja för att fånga upp det utrunna vattnet. Se Figur 1 för illustration av testanordningen.

För att kunna beräkna expontenterna krävdes det att vi kunde variera d, D och h enskilt. Detta åstadkoms genom att använda cylindrar med olika diametrar D och metallskivor med olika håldiametrar d. Höjden h varierades genom att fylla vattnet till olika nivåer. Genom att variera dessa fem gånger vardera kunde tabellerna A2, A3 och A4 skapas.

För att mäta d och D användes ett skjutmått. För att mäta höjden h användes en linjal. För att bestämma den experimentella tömningstiden användes en telefon med ett tidtagarur.



Figur 1. Ritning över testanordningen. D är diametern på en cylinder fylld med vatten, och h är vattenhöjden i cylindern. Under cylindern fylld med vatten finns en metalldisk med ett cirkulärt hål i mitten. Detta hål har diametern d. Tömningstiden T definerades som tiden det tog för vattennivån att sjunka ner höjden ner till metallplattan h

3. Resultat

I experimentet mättes tömmningstiden T beroende på de tre variablarna, höjden av vattnet i cylindern h, cylinderns diameter D och diskens hål diameter d. Dessa värden hittas i appendix (A2, A3 och A4).

3.1 Beräkning av exponeter och kofficient

De samlade mätvärdena användes till beräkningen av exponenterna i ekvation 1. Med hjälp av ekvation 2 beräknades exponenterna till 0.55 för h, 2.0 för D, -1.93 för D.

Med hjälp av alla beräknade exponenter och ekvation 3 kunde värden för C beräknas för alla experimentella mätningar:

Mätserie:	1	2	3	4	5
h	0.8400	0.8086	0.8462	0.8462	0.8310
D	0.7822	0.8010	0.8447	0.7838	0.8000
d	0.8256	0.9237	0.9293	0.8588	1.0882

Tabell 1. Olika experimentella värden för konstanten C beroende på vilken variabel *h, D eller d* som varierades.

Dessa värden användes i ekvation (4) för att beräkna medelvärdet av konstanten C, vilket gav

$$\bar{C} = 0.8540 \tag{10}$$

Där $\bar{C}$ är medelvärdet av konstanten C. Detta medelvärde applicerades sedan för att härleda den slutliga modellen för tömningstiden. Genom att utnyttja exponenterna som bestämdes via dimensionsanalys och de insamlade mätvärdena för (x, y, z), resulterade detta i följande ekvation:

$$T = 0.8540 * D^{2.0} h^{0.55} d^{-1.93} \tag{11}$$

3.2 Osäkerhet i C

Mätosäkerheten i konstanten C beräknades med hjälp av ekvation 8 och ekvation 9. Denna mätosäkerhet uttrycks med 95% konfidensintervall och ger en slutgiltig ekvation:

$$T = (0.85 \pm 0.04) * D^{2.0} h^{0.55} d^{-1.93} \tag{12}$$

3.3 Jämförelsen mellan dom teoretiska och experimentella tömningstiderna

Del två av experiementet bestod av att beräkna ett teoretisk värde på tömmningstiden för ett slummässigt givet värde på de olika variablerna D, d, och ett intervall för h. Det givna värderna var, 0.0063m för d, 0.0902m för D och intervallet mellan 0.32m och 0.07m för h. Detta enligt ekvation 1 gav

$$T_{\text{teoretisk}} = 36.92s \tag{13}$$

Där $T_{\text{teoretisk}}$ är den teoretiska tömmningstiden beroende av dom givna parametrarna. För att bekräfta den teoretiska tiden gjordes ett experimentelt försök baserat på parametrarna, vilket gav

$$T_{\text{experimetell}} = 38.84s \tag{14}$$

Beräknad med 95%

Där $T_{\text{experimetell}}$ är det faktiska värdet på tömmningstiden beroende av de givna parametrarna. För att beräkna skillnaden mellan det teoretiska och experimentella värdet användes ekvation 5 för skillnadsberäkning.

$$\Delta T = 1.92s \tag{15}$$

Där ΔT är skillnaden i tid och den procentuella skillnaden beräknas enligt ekvation (6) från det faktiska värdet är

$$\Delta T_{\text{procent}} = 4.94\% \tag{16}$$

4. Diskussion och sammanfattning

Laborationens syfte var att ta fram en ekvation för tömningstiden av en cylinder med okänd volym som har ett hål med en okänd diameter i botten.. Vi undersökte hur tömningstiden varierade med olika parametrar såsom höjden på vattnet i cylindern (h), cylinderns, diameter (D), och hålets diameter i skivan (d). Genom dimensionsanalys utvecklades en ekvation som beskriver tömningstiden. Denna presenterades i *Ekvation 11*

Denna ekvation visade sig passa väl med de experimentella data då den en procentuell skillnaden var endast 4.94% mellan det teoretiska och faktiska värdet av tömningstiden.

Den mest avgörande felfaktorn ligger i hur tid-tagandet gick till. Eftersom att tiden startar och stannas manuellt av människor, så kommer det bli fel i hur exakt tid-tagendet blir till den verkliga tiden. Det finns även felfaktorer i mätningen av höjd av vattnet i cylindern, men även i att veta exakt vart tiden ska stanna i mätningarna. Dessa felfaktorer gör att resultaten kan variera, men ändå kommer ligga nära varandra.

De första mätningar som genomfördes användes 10cm från 0cm på höjden som vår nollpunkt, detta upptäckte vi sedan vara problematisk då den negativa exponentiella kurvan på tömningstiden blir längre när mindre vatten finns i cylindern. Detta problem löstes genom att komma fram till en punkt som ligger så nära 0 som möjligt, och kan konsekvent mätas lika.

På grund av att de mätinstrument som användes inte kan mäta mer noggrant än ±0.01cm så förekom det mätfel. Det kan även mätas fel i och med att vi som människor kan uppfatta mätningen på ett värde som inte är det faktiska värdet, då vi kan tolka mätvärdet fel. För att minska den mänskliga felet gjordes mätningarna av tre personer där det var möjligt, och medelvärdet av all tre olika mätningarna togs som ett slutgiltigt mätvärde.

När vi först läste laborations instruktionerna fick vi en uppfattning om vad som ska lösas, det gjordes ett antagande att ekvationen vi kan skulle behöva ta fram kommer var oberoende av variablerna, volym, diameter och höjd. Hypotesen var även att det kommer finnas en konstant som ekvationen beror på. Detta antagande stämmer med vårt resultat. Denna konstant varierar lite beroende på hur bra mätvärden som mäts upp, men är generellt väldigt lika. Vi gjorde ett antagande att vart vårt nollpunkt på höjden in kommer spela någon roll, vilket bevisades vara fel. Men trots detta kom vi till slut fram till värden som överensstämmer med vår hypotes i att ekvationen är oberoende av variablerna, och i att den är beroende av konstanten.

Ekvationen visar på att det går att räkna ut tömningstiden med god precision, bara man har mätvärden på diametern på stora cylindern, diametern på hålet i botten, och höjden på vattnet i cylindern.

Sammanfattningsvis så har vi bevisat att denna ekvation för tömningstiden fungerar med hög precision, och detta experiment går att återskapa med liknande resultat. Detta stämmer även in med den teoretiska hypotesen till viss mån, med några justeringar.

Referenser

[1] Cedergren, M. och Eklund, J., Experimentell metodik med mätvärdesbehandling, Umeå universitet, Instutitionen för fysik, (2006)

[2] Norberg, C., Dimensionsanalys och likformighetslagar, Lunds Tekniska Högskola, (u.å.)

[3] Lang, H., Formelsamling och Tabeller i Statistik och Sannolikhetsteori, KTH Teknikvetenskap, (2010)

Appendix

Tabell A2 visar resultatet på mätningarna av höjden (m) av vattnet i cylindern beroende av tiden (s), då cylinderns diameter D var 0,0799m och lilla diametern d 0.00525m

Mätning nr:	1	2	3	4	5
Tid	38	25	70	82	55
Höjd	0.1	0.05	0.3	0.4	0.2

Tabell A2. Tömmningstiden beroende av höjden på vattnet i cylindern h

Tabell A3 visar resultatet på tömmningstiderna beroende av lilla diametern av disken d, då cylinderns diameter D var 0,0799m och vattnets höjd i cylindern h 0.4m

Mätning nr:	1	2	3	4	5
Tid	80	67	43	182	155
diskens diameter	0.00525	0.0061	0.0077	0.0035	0.0043

Tabell A3. Mätningar av tömmningstiden beroende av lilla diametern d

Tabell A4 visar resultatet på tömmningstiderna beroende av cyliderns diameter D, då diskens diameter d var 0.0043m och vattnets höjd i cylindern h 0.4m

Mätning nr:	1	2	3	4	5
Tid	142	148	76	31	114
cylinderns diameter	0.0902	0.091	0.0635	0.0421	0.0799

Tabell A4. Mätningar av tömmningstiden beroende av cyliderns diamtern D