

Félév : 1/I

Tantárgy : Analízis

1. Igazolja a következő egyenlőtlenséget :

$$n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \quad (n \in \mathbf{N}).$$

Mikor van egyenlőség ?

2. Legyenek X, Y, Z nem üres halmazok, és $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow Z$. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $B \subset Z$ esetén

$$(g \circ f)^{-1}[B] = f^{-1}[g^{-1}[B]].$$

3. Állapítsa meg az alábbi halmaz szuprémumát, maximumát, infimumát, minimumát, amennyiben ezek léteznek !

$$H := \left\{ \frac{k}{n} : n \in \mathbf{N}, k \in \mathbf{Z}, -n \leq k < n \right\}.$$

4. Legyen

$$a_n := \left(\frac{n^2 + n + 1}{n^2 + n} \right)^n \quad (n \in \mathbf{N})$$

Határozza meg (a_n) sorozat határértékét, ha létezik !

5. Legyen

$$b_n := \frac{\sqrt[k]{\frac{n-1}{n+1}} - 1}{\sqrt[l]{\frac{n-1}{n+1}} - 1} \quad (n \in \mathbf{N}),$$

ahol k, l tetszőleges, de rögzített természetes számok. Határozza meg a (b_n) sorozat határértékét !

6. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} x-1 & , \text{ ha } 0 \leq x \leq 1 \\ (x-1)^2 & , \text{ ha } 1 < x \leq 2 \end{cases}.$$

Invertálható-e az f függvény ? Ha igen, akkor írja fel az inverzét !