Többváltozós analízis
(gyakorló feladatok)

Programtervező matematikus szakos hallgatóknak
az Analízis 4. című tárgyhoz

2005. tavaszi félév

1. Metrikus terek

• A metrikus tér fogalma. Példák

F1. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \mathbb{R}$ esetén legyen

$$\begin{aligned} \rho_1(x,y) &:= (x-y)^2\,; \\ \rho_2(x,y) &:= \sqrt{|x-y|}\,; \\ \rho_3(x,y) &:= \left|x^2-y^2\right|; \\ \rho_4(x,y) &:= |x-2y|\,; \\ \rho_5(x,y) &:= \frac{|x-y|}{1+|x-y|}\,. \end{aligned}$$

Döntse el mindegyik függvényről, hogy metrika-e vagy sem.

F2. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ egy szigorúan monoton növekedő függvény és

$$\rho(x,y) := \left|f(x)-f(y)\right| \qquad (x,y \in \mathbb{R})\,.$$

Bizonyítsa be, hogy ρ metrika az $\mathbb{R}$ halmazon. Ha $f(x) := x$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor a „szokásos” metrikát kapjuk. Mutassa meg, hogy az $f(x) := \operatorname{arctg} x$ $(x \in \mathbb{R})$ választás is lehetséges, és az ezzel képzett metrikában bármelyik két $\mathbb{R}$-beli elem távolsága $< \pi$.

F3. Legyen $\rho(n,m) := \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right|$ $(n,m \in \mathbb{N})$. Igazolja, hogy a ρ függvény metrika az $\mathbb{N}$ halmazon.

F4. Legyen $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, és definiáljuk ρ-t a következőképpen:

$$\rho(x,y) := \begin{cases} \dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}, & \text{ha } x,y \in \mathbb{R} \\ \rho(y,x) := 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R},\ y = \pm\infty \\ \rho(-\infty,+\infty) := 1, & \text{ha } x = +\infty,\ y = -\infty \\ 0, & \text{ha } x = y = \pm\infty. \end{cases}$$

Bizonyítsa be, hogy ρ metrika az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazon.

F5. Jelöljük M-mel azoknak a valós sorozatoknak a halmazát, amelyeknek mindegyik tagja természetes szám. A $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ függvényt a következőképpen értelmezzük: $\rho\big((x_n),(y_n)\big) := 0$, ha $(x_n) = (y_n) \in M$, és $\rho\big((x_n),(y_n)\big) := \frac{1}{N+1}$, ha a két sorozat különböző és N a legkisebb olyan index, amire $x_N \neq y_N$. Lássa be, hogy ρ metrika M-en.

F6. Tegyük fel, hogy $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ olyan monoton növekedő függvény, amelyre $f(x) = 0 \iff x = 0$ és $f(x+y) \le f(x) + f(y) \quad (x, y \ge 0)$. Bizonyítsa be, hogy ha ρ metrika a nemüres M halmazon, akkor $f \circ \rho$ is az.

F7. Igazolja, hogy az $f(x) = \sqrt{x}$; $\dfrac{x}{1+x}$; $\ln(1+x)$ $(x \ge 0)$ függvények eleget tesznek az előző feladat feltételeinek. Következésképpen, ha $\big(M, \rho\big)$ metrikus tér, akkor

$$\big(M, \sqrt{\rho}\big), \quad \Big(M, \frac{\rho}{1+\rho}\Big) \text{ és } \big(M, \ln(1+\rho)\big)$$

is az.

F8. Legyen (M, ρ) metrikus tér és H olyan (nem üres) halmaz, hogy van egy $f : H \to M$ bijekció. Mutassa meg, hogy ekkor a

$$\sigma(x, y) := \rho\big(f(x), f(y)\big) \qquad (x, y \in H)$$

függvény metrika a H halmazon.

F9. Bizonyítsa be, hogy az $x = (x_n)$ valós sorozatok M halmazában a

(a) $\rho(x, y) := \sup\Big\{\dfrac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \;\Big|\; n \in \mathbb{N}\Big\} \quad (x, y \in M)$;

(b) $\rho(x, y) := \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \quad (x, y \in M)$

függvény mindegyike metrika.

F10. Tegyük fel, hogy ρ_1 és ρ_2 metrika a nemüres M halmazon. Igaz-e az, hogy

(a) $\rho_1 + \rho_2$;

(b) $\rho_1 \cdot \rho_2$;

(c) $M \times M \ni (x, y) \mapsto \max\big\{\, \rho_1(x, y),\ \rho_2(x, y) \,\big\}$;

(d) $M \times M \ni (x, y) \mapsto \min\big\{\, 1,\ \rho_1(x, y) \,\big\}$

metrika M-en?

F11. Két síkbeli kör távolságát definiáljuk a szimmetrikus differencia területeként. Igazolja, hogy így metrikát kapunk a síkbeli körök halmazán.

- **Az axiómák néhány egyszerű következménye**

F12. Legyen M egy nemüres halmaz és $\rho : M \times M \to \mathbb{R}$ olyan függvény, amelyikre minden $x, y, z \in M$ esetén

(i) $\rho(x, y) = 0$ akkor és csak akkor, ha $x = y$;

(ii) $\rho(x, y) \le \rho(x, z) + \rho(y, z)$.

Mutassa meg, hogy ρ metrika az M halmazon.

F13. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges (M, ρ) metrikus térben igazak a *háromszög-egyenlőtlenség* alábbi változatai is:

(a) Tetszőleges $x_1, x_2, \dots, x_n \in M$ elemekre $(n \ge 2)$

$$\rho\big(x_1, x_n\big) \le \sum_{k=1}^{n-1} \rho\big(x_k, x_{k+1}\big).$$

(b) Minden $x, y, z \in M$ esetén

$$\big|\rho(x, z) - \rho(y, z)\big| \le \rho(x, y).$$

F14. Vezessük be a nemüres M halmazon a *félmetrika fogalmát* úgy, hogy a metrika definíciójából kihagyjuk a $\rho(x, y) = 0 \;\Rightarrow\; x = y$ feltételt. (Ekkor (M, ρ)-t *félmetrikus térnek* nevezzük.)

(a) Mutassa meg, hogy $x \sim y \;\Leftrightarrow\; \rho(x, y) = 0$ módon értelmezett reláció ekvivalencia reláció M-en.

(b) Jelöljük $\widehat{x}$-pal az $x \in M$ elem által generált ekvivalenciaosztályt. Bizonyítsa be, hogy

$$\widehat{\rho}(\hat{x}, \hat{y}) := \rho(x, y)$$

metrika lesz az ekvivalenciaosztályok halmazán.

Alkalmazza a feladatot az $M := R[0, 1]$, $\rho(f, g) := \int_0^1 |f - g|$ $(f, g \in M)$ esetre.

- **Környezetek, korlátos halmazok**

F15. Legyen (M, ρ) egy metrikus tér, $a \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. A

$$k_r(a) := k_r(a) := \big\{\, x \in M \mid \rho(x, a) < r \,\big\}$$

halmazt az $a \in M$ *pont* r-*sugarú környezetének* vagy r-*sugarú* a *középpontú nyílt gömbnek* nevezzük. Bizonyítsa be, hogy minden $a, b \in M$, $a \ne b$ esetén létezik olyan $r > 0$ szám, amellyel

$$k_r(a) \cap k_r(b) = \emptyset.$$

Útmutatás. Legyen $0 < r < \frac{\rho(a,b)}{2}$. Ha létezik $x \in k_r(a) \cap k_r(b)$, akkor a háromszögegyenlőtlenség alapján

$$\rho(a,b) \le \rho(a,x) + \rho(x,b) < r + r < \rho(a,b),$$

és ez ellentmondás. ■

F16. Mutasson példát olyan metrikus térre, amelyben van olyan gömb, amelyik tartalmaz egy nagyobb sugarú valódi részgömböt.

Útmutatás. Legyen $M := (-4, 4]$ és $\rho(x,y) := |x-y|$ $(x, y \in M)$. Ekkor $k_4^\rho(4) \subset k_3^\rho(2)$. ■

F17. Az (M, ρ) metrikus tér $A \subset M$ részhalmazát *korlátosnak* nevezzük, ha van olyan M-beli gömb, ami A-t tartalmazza, azaz

$$\exists\, a \in M \ \text{ és } \ \exists\, r > 0 \ \text{ valós szám, hogy } \ A \subset k_r(a).$$

Bizonyítsa be, hogy az (M, ρ) metrikus tér $A \subset M$ részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha

$$\forall\, b \in M \ \text{ elemhez } \ \exists\, R > 0 \ \text{ valós szám, hogy } \ A \subset k_R(b).$$

Útmutatás. $\boxed{\Leftarrow}$ nyilvánvaló.
$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $A \subset k_r(a)$. Legyen $b \in M$ egy tetszőleges elem és $R := \rho(a,b) + r$. Ekkor $A \subset k_R(b)$ is igaz, mert ha $x \in A$, akkor a háromszög-egyenlőtlenség alapján

$$\rho(x,b) \le \rho(x,a) + \rho(a,b) < r + \rho(a,b) = R$$

is teljesül, tehát $x \in k_R(b)$ is fennáll. ■

F18. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $1 \le p \le +\infty$. Egy $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz esetén jelölje H_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ a H halmaz i-edik koordinátáiból álló $\mathbb{R}$-beli halmaz. Lássa be, hogy a H halmaz pontosan akkor korlátos az $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ metrikus térben, ha mindegyik H_i korlátos $\mathbb{R}$-ben.

F19. Legyen Φ a $C[0,1]$ függvényhalmaznak az a részhalmaza, amelyik pontosan az alábbi módon értelmezett $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényeket tartalmazza:

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2n^2\left(\frac{1}{n} - x\right), & \text{ha } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Igazolja, hogy

(a) a $\Phi \subset C[0,1]$ halmaz *nem korlátos* a $(C[0,1], \rho_\infty)$ metrikus térben;

(b) a $\Phi \subset C[0,1]$ halmaz *korlátos* a $(C[0,1], \rho_1)$ metrikus térben.

Útmutatás. **(a)** Az **F17.** feladat szerint az, hogy a $\Phi \subset C[0,1]$ halmaz *nem* korlátos a $\big(C[0,1], \rho_\infty\big)$ metrikus térben azt jelenti, hogy

$$(*) \qquad \exists\, F \in C[0,1], \text{ hogy } \forall\, R > 0 \text{ valós szám esetén } \Phi \not\subset k_R^{\rho_\infty}(F).$$

Nem nehéz *észrevenni*, hogy a megadott Φ halmazhoz a $[0,1]$-en azonosan nulla F függvényre $(*)$ teljesül. Ennek igazolásához először azt jegyezzük meg, hogy a definícó alapján

$$g \in k_R^{\rho_\infty}(F) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big|g(x)\big| \le R \ \ (x \in [0,1]).$$

Azonban

$$\rho_\infty(F, f_n) = \max_{x\in[0,1]} \big|f_n(x)\big| = n,$$

és ez azt jelenti, hogy adott $R > 0$ esetén az $f_n \in \Phi$, $n > R$ függvény például nem eleme $k_R^{\rho_\infty}(F)$-nek, így $(*)$ valóban igaz.

(b) A korlátosság definíciójából és az $\int_0^1 |f_n| = \frac{1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ egyenlőségekből következik, hogy $\Phi \subset k_1^{\rho_1}(F)$, ahol $F(x) = 0$ $(x \in [0,1])$. ■

F20. Az (M, ρ) metrikus tér $A \subset M$ részhalmazának *átmérőjét* így értelmezzük:

$$\operatorname{diam} A := \sup \big\{\, \rho(x,y) \mid x, y \in A \,\big\}.$$

Mutassa meg, hogy

(a) $0 \le \operatorname{diam} A \le +\infty$ minden $A \subset M$ halmazra;

(b) a sup helyett max nem vehető;

(c) az $A \subset M$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha $\operatorname{diam} A < +\infty$.

F21. Bizonyítsa be, hogy az (M, ρ) metrikus tér egy $H \subset M$ korlátos halmazának minden $G \subset H$ részhalmaza is korlátos és $\operatorname{diam} G \le \operatorname{diam} H$.

• Ekvivalens metrikák

F22. Legyen M egy nem üres halmaz, és tegyük fel, hogy ρ_1 és ρ_2 ekvivalens metrikák M-en. Mutassa meg, hogy

(a) $\forall\, a \in M$ és $\forall\, r_1 > 0$ számhoz $\exists\, r_2 > 0$: $k_{r_2}^{\rho_2}(a) \subset k_{r_1}^{\rho_1}(a)$;

(b) $\forall\, a \in M$ és $\forall\, r_2 > 0$ számhoz $\exists\, r_1 > 0$: $k_{r_1}^{\rho_1}(a) \subset k_{r_2}^{\rho_2}(a)$.

Útmutatás. A ρ_1 és ρ_2 ekvivalenciája azt jelenti, hogy $\exists\, c_1, c_2 > 0$, hogy

$$c_1\rho_2(x,y) \le \rho_1(x,y) \le c_2\rho_2(x,y) \qquad (\forall\, x, y \in M).$$

Legyen $r_2 := \frac{r_1}{c_2}$ és $x \in k_{r_2}^{\rho_2}(a)$. Ekkor $\rho_2(x,a) < r_2$, ezért

$$\rho_1(x,a) \le c_2\rho_2(x,a) < c_2 r_2 = r_1.$$

Ez azt jelenti, hogy $x \in k_{r_1}^{\rho_1}$ is teljesül, tehát $k_{r_1}^{\rho_1}(a) \subset k_{r_2}^{\rho_2}(a)$. ■

F23. Bizonyítsa be, hogy a nemüres M halmazon értelmezett ρ_1 és ρ_2 metrikák *nem* ekvivalensek, ha van olyan $A \subset M$ halmaz, amelyik korlátos az (M, ρ_1) metrikus térben, de nem korlátos az (M, ρ_2) metrikus térben.

Útmutatás. Először gondolja meg azt, hogy ha a két metrika ekvivalens, akkor az (M, ρ_1) és (M, ρ_2) metrikus terekben ugyanazok a korlátos halmazok. Ezt felhasználva az állítást indirekt módon igazolja. ■

F24. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ halmazon $(n \in \mathbb{N})$ bevezetett ρ_p $(1 \le p \le +\infty)$ metrikák egymással ekvivalensek. Adjon meg $\mathbb{R}^n$-en olyan metrikát, amelyik nem ekvivalens – például – a ρ_∞ metrikával.

Útmutatás. Elég igazolni (miért?), hogy minden $p \in [1, +\infty)$ esetén ρ_p és ρ_∞ ekvivalensek. Ez viszont következik a

$$\max_{1 \le k \le n} |a_k| \le \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^p \right)^{1/p} \le \sqrt[n]{n} \max_{1 \le k \le n} |a_k| \qquad \big(a_k \in \mathbb{R}\big)$$

egyenlőtlenségből.
Az $\mathbb{R}^n$-en vett *diszkrét* metrika nem ekvivalens ρ_∞-nel (miért?). ■

F25. Bizonyítsa be, hogy a $C[0,1]$ halmazon értelmezett ρ_∞ és ρ_1 metrikák *nem ekvivalensek.*

Útmutatás. **1. lehetőség.** Világos, hogy

$$\rho_1(f, g) = \int_0^1 |f - g| \le \max |f - g| = \rho_\infty(f, g) \qquad (f, g \in C[0,1]).$$

A fordított irányú egyenlőtlenség, vagyis az, hogy létezik olyan $c > 0$ valós szám, hogy

$$\rho_\infty(f, g) \le c\, \rho_1(f, g) \qquad (f, g \in C[0,1])$$

azonban nem igaz. Ezt indirekt módon láthatjuk be. Azt kell megmutatni, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz léteznek olyan $f_n, g_n \in C[0,1]$ függvények, amelyekre $\rho_\infty(f_n, g_n) > n\, \rho_1(f_n, g_n)$. Tekintsük most minden $n \in \mathbb{N}$ esetén a $g_n(x) = 0$ $(x \in [0,1])$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2\big(\frac{1}{n} - x\big), & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

függvényeket.

2. lehetőség. Az állítás az **F19.** és az **F23.** feladatok eredményeinek felhasználásával is igazolható. ■

• Konvergens sorozatok metrikus terekben. Teljes metrikus terek

F26. Az (M, ρ) metrikus tér egy $(a_n) : \mathbb{N} \to M$ sorozaata **konvergens**, ha

$$\exists\, \alpha \in M, \quad \text{hogy} \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{esetén} \quad a_n \in k_\varepsilon(\alpha).$$

Az (a_n) sorozat **divergens**, ha nem konvergens.
Mutassa meg, hogy ha van ilyen $\alpha \in M$, akkor az egyértelműen meghatározott. Ezt az α-t az (a_n) **sorozat határértékének** nevezzük, és így jelöljük:

$$\lim{(a_n)} = \alpha \qquad \text{vagy} \qquad a_n \to \alpha \;\; (n \to +\infty).$$

Útmutatás. A valós esethez hasonlóan indirekt módon igazoljuk az állítást: Tegyük fel, hogy α-ra és $\overline{\alpha}$-ra $\alpha \neq \overline{\alpha}$ is teljesül a fenti tulajdonság. Legyen $\varepsilon := \frac{\rho(\alpha, \overline{\alpha})}{4}$. Ekkor

$$k_\varepsilon(\alpha) \cap k_\varepsilon(\overline{\alpha}) = \emptyset$$

(l. a **F15.** feladatot). Ekkor α-nak is és $\overline{\alpha}$-nak is az ε-sugarú környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van; és ez ellentmondás. ■

F27. Az (M, ρ) metrikus térben legyen adott egy konvergens (a_n) sorozat. Igazolja, hogy ha $\alpha := \lim(a_n)$, akkor bármely $x \in M$ esetén a $\big(\rho(a_n, x)\big)$ számsorozat konvergens, és

$$\lim\big(\rho(a_n, x)\big) = \rho(\alpha, x).$$

Útmutatás. Alkalmazza a $\big|\rho(a_n, x) - \rho(\alpha, x)\big| \leq \rho(a_n, \alpha)$ egyenlőtlenséget. ■

F28. Melyek a konvergens sorozatok a diszkrét metrikus térben. Teljes-e a diszkrét metrikus tér?

F29. Tegyük fel, hogy az $M \neq \emptyset$ halmazon értelmezett ρ_1 és ρ_2 metrikák *ekvivalensek*. Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \to M$. Lássa be, hogy

(a) $\lim{(a_n)} \overset{1}{=} \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim{(a_n)} \overset{2}{=} \alpha$, azaz ekvivalens metrikák esetén egy sorozat konvergenciája és a határértéke nem változik akkor, ha az egyik metrikát a másikkal felcseréljük; másképp fogalmazva: ekvivalens metrikák esetén ugyanazok a konvergens sorozatok.

(b) az (a_n) sorozat akkor és csak akkor Cauchy-sorozat az $\big(M, \rho_1\big)$ metrikus térben, ha az $\big(M, \rho_2\big)$ metrikus térben is az.

F30. Mutassa meg, hogy abból, hogy az (M, ρ_1) és (M, ρ_2) metrikus terekben ugyanazok a konvergens sorozatok nem következik, hogy a ρ_1 és a ρ_2 metrikák ekvivalensek.

Útmutatás. Legyen $M := \mathbb{N}$, ρ_1 a *diszkrét*, $\rho_2(x,y) := |x-y|$ $(x,y \in \mathbb{N})$ pedig a „szokásos" metrika. Az $(\mathbb{N}, \rho_1)$ és (M, ρ_2) metrikus terekben pontosan a kvázikonstans sorozatok (egy indextől kezdve azonos értékeket felvevő sorozatok) konvergensek. Ez a két metrika azonban nem ekvivalens. ■

F31. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $1 \le p \le +\infty$. Ekkor az

$$(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, \qquad a_k := \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens az $\left(\mathrm{R}^n, \rho_p\right)$ metrikus térben, és

$$\lim \left(a_k\right) \stackrel{p}{=} \alpha = \left(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}\right),$$

ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén az $\left(a_k^{(i)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ valós sorozat (az i-edik koordinátasorozat) konvergens, és

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)}.$$

F32. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az $\left(\mathbb{R}^2, \rho_p\right)$ $(1 \le p \le +\infty)$ metrikus terekben az alábbi sorozatokat

(a) $a_k := \left(\frac{1}{2^k}, \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k\right) \in \mathbb{R}^2 \quad (k \in \mathbb{N})$;

(b) $a_k := \left((-1)^k, \frac{1}{k}\right) \in \mathbb{R}^2 \quad (k \in \mathbb{N})$.

F33. Bizonyítsa be, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ és minden $1 \le p \le +\infty$ esetén az $\left(\mathrm{R}^n, \rho_p\right)$ *teljes metrikus tér*, azaz a tér minden Cauchy-sorozata konvergens.

Útmutatás. Mivel $\mathbb{R}^n$-en a ρ_p $(1 \le p \le +\infty)$ metrikák ekvivalensek, ezért az állítást elég $p = +\infty$ esetére igazolni.
Tegyük fel, hogy $a_k := \left(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \dots, a_k^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n$ $(k \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat $\left(\mathrm{R}^n, \rho_\infty\right)$-ben, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, k_0 \in \mathbb{N}: \quad \rho_\infty(a_k, a_l) = \max_{1\le i\le n} \left|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\right| < \varepsilon$$

minden $k, l \ge k_0$ indexre. Ekkor persze minden $i = 1, 2, \dots, n$ esetén

$$\left|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\right| < \varepsilon \qquad (\forall\, k, l \ge k_0)$$

is teljesül, ami azt jelenti, hogy az i-edik koordináták $\left(a_k^{(i)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ sorozata $\mathbb{R}$-beli Cauchy-sorozat is, következésképpen konvergens. Legyen

$$\alpha^{(i)} := \lim_{k\to+\infty} a_k^{(i)} \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \qquad \text{és} \qquad \alpha := \left(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}\right) \in \mathbb{R}^n.$$

Bizonyítsa be, hogy az (a_k) sorozat a ρ_∞ metrikában α-hoz tart, azaz az (a_k) Cauchy-sorozat konvergens. ■

F34. Igaz-e minden metrikus térben a *Bolzano–Weierstrass-féle* kiválasztási tétel, azaz az, hogy minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata?

Útmutatás. Nem. Például az (N, ρ) *diszkrét* metrikus térben az $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat korlátos, de nincs konvergens részsorozata. ■

F35. Mutassa meg, hogy az $(\mathbb{R}^n, \rho_p)$ metrikus terekben $(n \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le +\infty)$ igaz a *Bolzano–Weierstrass-féle* kiválasztási tétel, azaz minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.

F36. Adjon meg a $(C[0,1], \rho_\infty)$ metrikus térben olyan korlátos (f_n) sorozatot, aminek nincs konvergens részsorozata.

Útmutatás. Tekintse az

$$f_n(x) := \sin \frac{2^n x}{2\pi} \qquad (x \in [0,1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots)$$

függvénysorozatot. ■

F37. Bizonyítsa be, hogy a

(a) $(C[a,b], \rho_\infty)$ metrikus tér *teljes*;

(b) $(C[a,b], \rho_1)$ metrikus tér *nem teljes*.

Útmutatás. **(a)** Legyen (f_n) egy $(C[a,b], \rho_\infty)$ térbeli Cauchy-sorozat:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, k_0 \in \mathbb{N}: \ \forall\, k, l \ge k_0 \text{ esetén } \rho_\infty(f_k, f_l) = \max_{x \in [a,b]} \left| f_k(x) - f_l(x) \right| < \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in [a,b]$ pontban az $(f_k(x))$ számsorozat Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, következésképpen konvergens. Legyen

$$f(x) := \lim_{k \to +\infty} f_k(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Így értelmeztünk egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt. (Ezt az (f_n) függvénysorozat **pontonkénti határfüggvényének** nevezzük.) Az

$$\left| f_k(x) - f_l(x) \right| < \varepsilon \quad \left(k, l \ge k_0, \quad x \in [a,b]\right)$$

egyenlőtlenségekben rögzített k esetén az $l \to +\infty$ határátmenetet véve adódik f-re az

$$\left| f_k(x) - f(x) \right| < \varepsilon \quad \left(k \ge k_0, \quad x \in [a,b]\right)$$

egyenlőtlenség. Ezt és az f_k függvények folytonosságát felhasználva mutassa meg, hogy az f függvény folytonos $[a,b]$-en, és (f_n) a ρ_∞ metrikában f-hez konvergál.

(b) Az állítást az $[a,b] := [-1,1]$ intervallumra igazoljuk. Azt kell megmutatni, hogy van olyan $(f_n) : \mathbb{N} \to C[-1,1]$ függvénysorozat, ami a ρ_1 metrikában Cauchy-sorozat, de ebben a metrikában nem konvergens. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } -1 \le x \le -\frac{1}{n} \\ nx & \text{ha } -\frac{1}{n} \le x \le \frac{1}{n} \\ \ \ 1, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Ha $l > k$, akkor $\int_{-1}^{1} |f_k - f_l| = \frac{1}{k} - \frac{1}{l} = \frac{l-k}{l \cdot k} \leq \frac{1}{k}$. (Készítsen ábrát! A szóban forgó integrál két egybevágó háromszög területének az összege. A háromszög egyik oldala $\frac{1}{k} - \frac{1}{l}$, a magassága pedig 1.) Ebből következik, hogy (f_n) Cauchy-sorozat a ρ_1 metrikában.

Mutassa meg, hogy tetszőleges $f \in C[-1, 1]$ függvényre

$$\int_{-1}^{1} \big|f - \mathrm{sign}\big| > 0,$$

és ezt felhasználva indirket módon lássa be, hogy az (f_n) függvénysorozat nem konvergens a ρ_1 metrikában.

Adjon meg *tetszőleges* $[a, b]$ intervallum esetén olyan $(f_n) : [a, b] \to C[a, b]$ függvénysorozatot, amelyik a $\big(C[a, b], \rho_1\big)$ metrikus térben Cauchy-sorozat, de nem konvergens. ■

F38. Konvergensek-e a $\big(C(I), \rho_\infty\big)$, illetve a $\big(C(I), \rho_1\big)$ metrikus terekben az alábbi függvénysorozatok:

(a) $f_n(x) := x^n \quad \big(x \in I := [0, 1],\ n \in \mathbb{N}_0\big)$;

(b) $f_n(x) := x^n \quad \big(x \in I := [0, \frac{1}{2}],\ n \in \mathbb{N}_0\big)$;

(c) $f_n(x) := \frac{1}{x+n} \quad \big(x \in I := [0, 2],\ n = 1, 2, 3, \ldots\big)$;

(d) $f_n(x) := \frac{nx}{1+n^2x^2} \quad \big(x \in I := [0, 2],\ n = 1, 2, 3, \ldots\big)$;

(e) $f_n(x) := x^n - x^{n+1} \quad \big(x \in I := [0, 1],\ n \in \mathbb{N}_0\big)$?

• Topológiai fogalmak metrikus terekben

F39. Legyen (M, ρ) metrikus tér és $A \subset M$. Mutassa meg, hogy A akkor és csak akkor zárt, ha minden $(a_n) : \mathbb{N} \to A$ konvergens sorozat esetén $\lim(a_n) \in A$.

F40. Adjon példát a $(0, 1)$ intervallum olyan nyílt lefedésére, amelyikből nem választható ki véges lefedőrendszer.

F41. Tekintsük a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát metrikus térnek, a $\rho(x, y) := |x-y|$ távolságfüggvénnyel. Legyen A mindazon $x \in \mathbb{Q}$ számok halmaza, amelyekre $2 < x^2 < 3$ teljesül. Lássa be, hogy A zárt és korlátos $\mathbb{Q}$-ban, de nem kompakt. Igaz-e, hogy A nyílt $\mathbb{Q}$-ban?

F42. Igazolja, hogy ha (M, ρ) nem teljes metrikus tér, akkor van benne olyan korlátos és zárt halmaz, amelyik nem kompakt.

F43. Legyen $\Gamma \neq \emptyset$ indexhalmaz, (M, ρ) egy metrikus tér és $A \ \subset M$ kompakt halmaz $(\gamma \in \Gamma)$. Bizonyítsa be, hogy ekkor $\bigcap_{g\in} A$ kompakt, és hogy véges Γ esetén $\bigcup_{\in} A$ is kompakt.

F44. Mutassa meg, hogy kompakt halmaz zárt részhalmaza kompakt.

F45. Tekintsük a $\big(C[0,1], \rho_\infty\big)$ metrikus teret. Legyen $n \in \mathbb{N}$. Jelölje A azon legfeljebb n-edfokú polinomok halmazát, amelyek együtthatói legfeljebb 1 abszolút értékűek. Mutassa meg, hogy A kompakt. (Általában, ha az együtthatók halmaza kompakt $\mathbb{R}^n$-ben, akkor a polinomok halmaza is kompakt.)

F46. Legyen (M, ρ) metrikus tér és $\emptyset \neq A \subset M$. Bizonyítsa be, hogy az $(A, \rho|_{A \times A})$ metrikus térben pontosan azok a nyílt halmazok, amelyek előállnak egy, az eredeti térben nyílt halmaznak az A-val való metszeteként.

F47. Legyen (M, ρ) metrikus tér, $x \in M$ és $A \subset M$. Definiáljuk *pont és halmaz távolságát* a következőképpen

$$\rho(x, A) := \inf \big\{ \rho(x, a) \ : \ a \in A \big\}.$$

Mutassa meg, hogy *kompakt* A halmaz esetén a halmaz távolsága „felvétetik”, azaz létezik olyan $a^* \in A$, amelyre $\rho(x, A) = \rho(x, a^*)$. Másként fogalmazva: A-ban van x-hez legközelebbi elem.

Útmutatás. Legyen $d := \inf \big\{ \rho(x, a) \ : \ a \in A \big\}$. Az infimum definíciójából következik, hogy van A-ban olyan (a_n) sorozat, amelyre $\rho(a_n, x) \to d$, ha $n \to +\infty$. Mivel A kompakt, ezért (a_n)-nek van olyan konvergens (a_{n_k}) részsorozata, amelyiknek az a^* határértéke A-ban van. Megmutatjuk, hogy $\rho(x, A) = d = \rho(x, a^*)$. Valóban, a háromszög-egyenlőtlenség miatt $\rho(x, a^*) \leq \rho(x, a_n) + \rho(a_n, a^*)$. A bal oldal itt n-től független, a jobb oldal pedig $n \to +\infty$ esetén d-hez tart, ezért $\rho(x, a^*) \leq d$. Másrészt $a^* \in A$, így $\rho(x, a^*) \geq d$ is igaz, tehát $\rho(x, a^*) = d$. ∎

2. Metrikus terek közötti leképezések folytonossága

F48. Szemléltesse a síkon azoknak az (x, y) koordinátájú pontoknak a legbővebb halmazát, amelyekre az alábbi kifejezések értelmezhetők:

(a) $\ln \sqrt{x^2 + y^2}$;

(b) $\sqrt{x^2 - y^2}$;

(c) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y^2}}$;

(d) $\dfrac{1}{4 - x^2 - y^2}$;

(e) $\ln(x + y)$;

(f) $\sqrt{xy}$;

(g) $\sqrt{1 - x^2 - 2y^2}$;

(h) $\arcsin(y - x)$.

F49. Határozza meg az alábbi $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeknek a koordinátasíkokkal párhuzamos síkmetszeteit (*szintvonalait*). Szemléltesse az (x, y) síkon a szintvonalakat. Alkalmas síkmetszetek alapján állapítsa meg, hogy milyen felülettel szemléltethető a függvény az (x, y, z) térbeli koordináta-rendszerben. Készítsen ábrát a felületről.

(a) $f(x,y) := x^2 + y^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(b) $f(x,y) := \sqrt{x^2 + y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(c) $f(x,y) := \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 + y^2 \leq 1\big)$;

(d) $f(x,y) := y^2 - 2x \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(e) $f(x,y) := \sqrt{x + y} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x + y \geq 0\big)$;

(f) $f(x,y) := e^{x+y} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(g) $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(h) $f(x,y) := xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(i) $f(x,y) := \cos(x + \sqrt{3}y) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(j) $f(x,y) := \ln \sqrt{x^2 + y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$;

(k) $f(x,y) := \sqrt{2x^2 + 3y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(l) $f(x,y) := \dfrac{1}{2x^2 + 3y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$.

F50. Jelölje x_i az $x \in \mathbb{R}^n$ vektor i-edik koordinátáját. Mutassa meg, hogy a

$$P_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \qquad P_i(x) := x_i$$

projekció folytonos.

F51. Mit jelent az, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvénynek az $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}'_f$ pontban $A \in \mathbb{R}$ a határértéke? Mi ennek a szemléletes jelentése?

F52. Legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ és $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}'_f$. Mutassa meg, hogy ha vannak olyan

$$\big(x_n^{(1)}, y_n^{(1)}\big) \in \mathcal{D}_f \qquad \big(x_n^{(2)}, y_n^{(2)}\big) \in \mathcal{D}_f \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatok, amelyekre a függvényértékek sorozatainak a határértékei különbözők, akkor f-nek (x_0, y_0)-ban nincs határértéke.

F53. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x - y}{x + y} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x \neq -y\big).$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $\exists \lim\limits_{x \to 0} \big(\lim\limits_{y \to 0} f(x,y)\big)$;

(b) $\exists \lim\limits_{y \to 0} \big(\lim\limits_{x \to 0} f(x,y)\big)$;

(c) $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f$.

F54. Igazolja az előző feladatbeli állításokat az

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$$

függvényre.

F55. Mutassa meg, hogy ha

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x=y=0 \end{cases}$$

akkor

(a) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x,y)$ függvény folytonos;

(b) minden $y \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x,y)$ függvény folytonos;

(c) f nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

F56. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x=y=0 \end{cases}$$

függvény nem folytonos az origóban, de „minden az origon átmenő egyenes mentén folytonos".

F57. Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallumok, és $g : I \to \mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Mutassa meg, hogy az $F(x) := \big(f(x), g(x)\big)$ $(x \in I)$ függvény is folytonos.

F58. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket.

(a) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$;

(b) $\displaystyle\lim_{(6,3)} xy\cos(x-2y)$;

(c) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(d) $\displaystyle\lim_{(0,0,0)} \frac{xy+yz+zx}{x^2+y^2+z^2}$;

(e) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$;

(f) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

(g) $\displaystyle\lim_{(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(h) $\displaystyle\lim_{(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

F59. Folytonosak-e az alábbi függvények?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 1, & \text{ha } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

F60. Egyenletesen folytonosak-e az értelmezési tartományukon az alábbi függvények:

(a) $f(x,y) := 2x - 3y + 5 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(b) $f(x,y) := \sin(x^2+y^2) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(c) $f(x,y) := e^{-|y|}\cos(x^2+y^2) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(d) $f(x,y) := \sin\dfrac{\pi}{1-x^2-y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \ x^2+y^2 < 1\big)$;