Szili László

Analízis feladatokban I.

Egyenlőtlenségek, függvények, számsorozatok, számsorok

ELTE
EÖTVÖS
KIADÓ

Írta: **Szili László egyetemi docens**

Lektorálta: **Dr. Fridli Sándor egyetemi docens**

Második, javított kiadás

ISBN 978 963 463 740 0

ELTE EÖTVÖS KIADÓ www.eotvoskiado.hu

Felelős kiadó: Hunyadi András, ügyvezető igazgató

Nyomdai munkák: Multiszolg Bt.

Tartalomjegyzék

Előszó

A jegyzet elsősorban a programozó (informatikus) szakos hallgatók számára készült, de reményeink szerint hasznos lehet mindazoknak, akik az analízis bevezető fejezeteivel ismerkednek.

A 2. fejezettől kezdve a témakörök előtt felsoroltuk a *legalapvetőbb* definíciókat és tételeket. Itt az értelemszerű rövidítéseket használtuk: **A.** (axióma), **D.** (definíció), **K.** (következény), **M.** (megjegyzés), **T.** (tétel).

A legtöbb témakörnél a feladatokat az alábbi szempontok szerint csoportosítottuk: az **A-feladatok**-hoz soroltuk a definíciók és tételek mélyebb megértését segítő feladatokat. Ezek jelentős részének a megoldása a definíciók és/vagy tételek egyszerű alkalmazását igényli. A **B-feladatok** az adott témakörrel kapcsolatos további *fontos* ismeretanyagot, illetve „technikákat" tartalmaznak. A **C-feladatok**-at gyakorló feladatoknak szánjuk.

Jelölések

$\forall$	minden egyes (univerzális kvantor)
$\exists$	létezik (egzisztenciális kvantor)
$:=$	definíció szerint egyenlő
$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$	$:= a_1 + a_2 + \cdots + a_n$
$\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$	$:= a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n$
$\mathbb{N} := \{1, 2, 3, \ldots\}$	a természetes számok halmaza
$\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$	a nemnegatív egész számok halmaza
$\mathbb{Z}$	az egész számok halmaza
$\mathbb{Q}$	a racionális számok halmaza
$\mathbb{Q}^*$	az irracionális számok halmaza
$\mathbb{R}$	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$	a pozitív valós számok halmaza
$\mathbb{R}_0^+$	a nemnegatív valós számok halmaza
$\mathbb{R}^-$	a negatív valós számok halmaza
$\mathbb{R}_0^-$	a nempozitív valós számok halmaza

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$ és $a < b$. Ekkor

(a, b)	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ az a, b *nyílt* intervallum
$[a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ az a, b *zárt* intervallum
$(a, b]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \le b\}$ az a, b *alulról nyílt és felülről zárt* intervallum
$[a, b)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x < b\}$ az a, b *alulról zárt és felülről nyílt* intervallum
$(-\infty, +\infty)$	$:= \mathbb{R}$
$[a, +\infty)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x\}$
$(a, +\infty)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$
$(-\infty, a]$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x \le a\}$
$(-\infty, a)$	$:= \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$

$f : A \to B$	az A halmazt a B halmazba képező függvény
$\lvert a \rvert$	$:= \begin{cases} a, & \text{ha } a \in \mathbb{R}_0^+ \\ -a, & \text{ha } a \in \mathbb{R}_-, \text{ az } a \textit{ abszolút értéke} \end{cases}$
abs	$: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \lvert x \rvert$, az abszolútérték-függvény
sign	$: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R}^+ \\ 0, & \text{ha } x = 0 \\ -1, & \text{ha } x \in \mathbb{R}_-, \end{cases}$ az *előjel-* vagy *szignumfüggvény*

A görög ábécé

A	α	alfa	I	ι	ióta	P	ρ	ró
B	β	béta	K	κ	kappa	Σ	σ	szigma
Γ	γ	gamma	Λ	λ	lambda	T	τ	tau
Δ	δ	delta	M	μ	mű	Υ	υ	üpszilon
E	ε	epszilon	N	ν	nű	Φ	φ	fí
Z	ζ	zéta	Ξ	ξ	kszí	X	χ	khí
H	η	éta	O	o	omikron	Ψ	ψ	pszí
Θ	ϑ v. θ	théta	Π	π	pí	Ω	ω	ómega

I. rész

Feladatok

1. Egyenletek és egyenlőtlenségek

1.1. Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása

1. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenleteket:

(a) $|x+3|+|x-1|=3x-5$; (b) $|2x-3|+|2x+3|=6$;

(c) $|2x-3|+|2x+3|=14$; (d) $\left|\dfrac{3x-2}{x-1}\right|=2$;

(e) $\big||x+1|-2\big|=\big||x-2|+1\big|$; (f) $\left|\dfrac{3|x|-2}{|x|-1}\right|=2$;

(g) $|x^2+3x|=|2x-6|$; (h) $\Big|\big||x-1|-2\big|-3\Big|=1$.

2. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a következő egyenlőtlenségeket, és a megoldáshalmazokat adja meg intervallumokkal:

(a) $(5-x)(2x+3)<0$; (b) $x^2-5x+6>0$;

(c) $\dfrac{3x^2+7x-4}{x^2+2x-3}<2$; (d) $\dfrac{3x+4}{1-2x}<\dfrac{x-1}{x+1}$;

(e) $|x+1|<0,01$; (f) $|x-2|>5$;

(g) $x(x^2-2)(x^2-3)>0$; (h) $|x(1-x)|<3$;

(i) $|x+2|-|x|\geq 1$; (j) $\big||x+1|-|x-1|\big|<1$.

3. A p valós paraméter mely értékei mellett lesz a

$$2x+\frac{1}{p-1}=1+x$$

egyenlet megoldása 1-nél nagyobb valós szám?

4. Oldja meg $\mathbb{R}$-en a

$$-\frac{x(x-p)}{x+p}+x-p=10-\frac{10x}{x+p}$$

egyenletet, ahol p valós paraméter.

5. Oldja meg $\mathbb{R}$-en az $x(x+3)+p(p-3)=2(px-1)$ egyenletet, ahol p valós paraméter.

6. Határozza meg a $p \in \mathbb{R}$ paramétert úgy, hogy a

$$(p^2-1)x^2+2(p-1)x+1>0$$

egyenlőtlenség minden $x \in \mathbb{R}$ esetén fennálljon.

7. Milyen $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ paraméter esetén áll fenn minden valós x számra az

$$x^2-px>\frac{2}{p}$$

egyenlőtlenség?

8. A p valós paraméter mely értékeire lesz a

$$(p-1)x^2-2px+p+3=0$$

egyenletnek két különböző pozitív gyöke?

9. Határozza meg a p valós paramétert úgy, hogy az

$$\left|\frac{x^2-px+1}{x^2+x+1}\right|<3$$

egyenlőtlenség minden x valós számra igaz legyen.

1.2. A teljes indukció

T. ***A teljes indukció elve.*** *Tegyük fel, hogy minden n természetes számra adott egy $A(n)$ állítás, és azt tudjuk, hogy*

(i) $A(1)$ *igaz,*
(ii) *ha* $A(n)$ *igaz, akkor* $A(n+1)$ *is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ állítás minden n természetes számra igaz.

M. 1^o Teljes indukcióval tehát minden n természetes számra fennálló állításokat bizonyíthatunk. A fenti tétel azt mondja ki, hogy ha minden $n \in \mathbb{N}$ számra adott egy $A(n)$ állítás (például egy egyenlőtlenség), akkor annak bizonyításához, hogy $A(1), A(2), \dots, A(n), \dots$ mindegyike igaz, elég belátni a következő két dolgot:

(i) az $A(1)$ állítás igaz,

(ii) ha valamilyen n természetes számra az $A(n)$ állítás igaz (ezt szoktuk „indukciós feltételnek” nevezni), akkor az $A(n+1)$ állítás is igaz.

2^0 Ha a teljes indukció elvében az 1 számot egy másik – m-mel jelölt – természetes számmal helyettesítjük, akkor az elv alkalmas annak bizonyítására, hogy a szóban forgó állítások m-től kezdve minden természetes számra igazak.

10. Mutassa meg, hogy

(a) $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{n}{n+1}\quad (n\in\mathbb{N});$$

(b) $$\sum_{k=1}^{n} k(3k+1)=n(n+1)^2\quad (n\in\mathbb{N});$$

(c) $$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k^2=(-1)^{n-1}\frac{n(n+1)}{2}\quad (n\in\mathbb{N}).$$

11. Bizonyítsa be, hogy

(a) $$2\sqrt{n+1}-2<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{n}-1\quad (n=2,3,\dots);$$

(b) $$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\dots\cdot\frac{2n-1}{2n}<\frac{1}{\sqrt{3n+1}}\quad (n=2,3,\dots);$$

(c) $$\frac{3n+5}{6}\le\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}\le\frac{6n-1}{6}\quad (n=2,3,\dots);$$

(d) $$n^{\frac{6}{7}}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt[7]{k}}\le\frac{7}{6}n^{\frac{6}{7}}\quad (n\in\mathbb{N}).$$

12. Teljes indukcióval lássa be, hogy

(a) $2^n>1+n\sqrt{2^{n-1}}\quad (n=2,3,\dots);$

(b) $2^n>n^2\quad (n=5,6,\dots);$

(c) $3^n>n^3\quad (n=4,5,\dots).$

1.3. Nevezetes azonosságok

13. Lássa be, hogy minden a, b valós számra és minden $n \geq 1$ természetes számra

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1}).$$

14. Mutassa meg, hogy ha n egy tetszőleges természetes szám, akkor

$$1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^{n-1} = \begin{cases} \dfrac{1-q^n}{1-q}, & \text{ha } q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \\ n, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$

15. Igazolja, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

16. Bizonyítsa be a **binomiális** („két tagra vonatkozó") **tételt:** Minden $a, b \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ számra

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \cdots + \binom{n}{n-1}a^1b^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

ahol $k, n \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$ esetében az $\binom{n}{k}$ *binomiális együtthatókat* így értelmezzük:

$$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad 0! := 1 \text{ és } n! := 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot n.$$

1.4. Nevezetes egyenlőtlenségek

17. Lássa be az alábbi **$\mathbb{R}$-beli háromszög-egyenlőtlenségeket:** Minden a és b valós számra

(a) $|a+b| \leq |a| + |b|$;

(b) $\big||a| - |b|\big| \leq |a-b|$.

18. Igazolja a **Bernoulli-egyenlőtlenséget:** Minden $h \geq -1$ valós számra és minden $n \in \mathbb{N}$ természetes számra

$$(1+h)^n \geq 1 + nh.$$

Ezekre a h és n értékekre egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $h = 0$ vagy $n = 1$.

19. Bizonyítsa be a **számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget:** Legyen $n \geq 2$ tetszőleges természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszés szerinti *nemnegatív* valós szám. Ekkor

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

M. Az $S_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, ill. az $M_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ számot az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok **számtani közepének**, ill. **mértani közepének** nevezzük. Az előző feladat tehát azt állítja, hogy nemnegatív számok mértani közepe kisebb vagy egyenlő (nem nagyobb) a számtani közepüknél, és a kettő pontosan akkor egyenlő, ha a számok mind egyenlők egymással. Ez az állítás a középiskolai tanulmányaink során megismert

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \qquad (a, b \in \mathbb{R}_0^+)$$

egyenlőtlenség általánosítása.

20. Legyen $n \geq 2$ tetszőleges természetes szám és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszés szerinti *pozitív* valós szám. Mutassa meg, hogy

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

M. A $H_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$ számot $a_1, a_2, \ldots, a_n$ **harmonikus közepének** nevezzük. Az előző feladat szerint a harmonikus, a mértani és a számtani közepek között az alábbi egyenlőtlenség teljesül:

$$H_n \leq M_n \leq S_n,$$

és egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha a számok egyenlők egymással.

21. Bizonyítsa be a **Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget:** Legyen n egy természetes szám. Ekkor minden $a_1, a_2, \ldots, a_n$ és $b_1, b_2, \ldots, b_n$ valós számra

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan $\lambda \in \mathbb{R}$, hogy $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, ..., $a_n = \lambda b_n$ vagy $b_1 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda a_2$, ..., $b_n = \lambda a_n$.

22. Igazolja a **Minkowski-egyenlőtlenséget:** Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_k, b_k \in \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Ekkor

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{n}\left(a_k + b_k\right)^2} \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha létezik olyan $\lambda \geq 0$ valós szám, hogy $a_1 = \lambda b_1, \ldots, a_n = \lambda b_n$ vagy $b_1 = \lambda a_1, \ldots, b_n = \lambda a_n$.

M. Az előző két állítás geometriai tartalma $n = 2$ esetén a következő: tekintsük az $\underline{a} = (a_1, a_2)$ és $\underline{b} = (b_1, b_2)$ síkbeli vektorokat. Ezek hossza $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $|\underline{b}| = = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, skaláris szorzata pedig $\underline{a} \cdot \underline{b} = |\underline{a}| \cdot |\underline{b}| \cdot \cos\gamma$ (γ az $\underline{a}$ és $\underline{b}$ vektorok által bezárt szög), amit koordinátákkal így fejezhetünk ki: $\underline{a} \cdot \underline{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Mivel $|\cos\gamma| \leq 1$, ezért ebből $|\underline{a} \cdot \underline{b}| \leq |\underline{a}| \cdot |\underline{b}|$, azaz

$$\left|a_1 b_1 + a_2 b_2\right| \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

következik. A *Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség* tehát ennek általánosítása.

A Minkowski-egyenlőtlenség ebben az esetben azt állítja, hogy $|\underline{a}+\underline{b}| \leq |\underline{a}|+|\underline{b}|$. Ha $\underline{a}$ és $\underline{b}$ nem egy egyenesbe eső vektorok, akkor az általuk meghatározott háromszög oldalainak a hossza $|\underline{a}|$, $|\underline{b}|$ és $|\underline{a} + \underline{b}|$. Az egyenlőtlenség tehát azt a geometriából ismert tényt fejezi ki, hogy egy háromszög bármelyik oldalának a hossza kisebb, mint a másik két oldal hosszának az összege.

1.5. Egyenlőtlenségek igazolása

23. Bizonyítsa be, hogy minden $a > 0$ valós számra $a + \dfrac{1}{a} \geq 2$. Mikor áll fenn egyenlőség? Mit tud mondani az $a + \dfrac{1}{a}$ összegről abban az esetben, amikor az a negatív valós szám?

24. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket (a, b és c tetszőleges valós számot jelöl):

(a) $\dfrac{a^2+2}{\sqrt{a^2+1}} \geq 2$;

(b) $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$;

(c) $2a^4-2a^3-a^2+1 \geq 0$;

(d) $a^2+b^2-ab-a-b+1 \geq 0$.

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

25. Mutassa meg, hogy ha az a és b valós számokra

(a) $|a| < 1$ és $|b| < 1$, akkor $|a+b| < |1+ab|$;

(b) $0 < a < 1$ és $0 < b < 1$, akkor $0 < a+b-ab < 1$.

26. Igazolja meg, hogy minden a_1, a_2, b_1, b_2 valós számra

$$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2}\right| \leq \left|a_1-b_1\right| + \left|a_2-b_2\right|.$$

27. Mutassa meg, hogy minden pozitív a, b és c valós számra fennáll az

$$(a+b)(b+c)(a+c) \geq 8abc$$

egyenlőtlenség, és az egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a = b = c$.

28. Igazolja, hogy ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pozitív valós számok szorzata 1, akkor

$$(1+a_1)(1+a_2)\ldots(1+a_n) \geq 2^n.$$

Mikor van itt egyenlőség?

29. Bizonyítsa be, hogy minden $a \geq -1/2$ valós számra fennáll az

$$(1-a)^5(1+a)(1+2a)^2 \leq 1$$

egyenlőtlenség.

30. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával bizonyítsa be, hogy

(a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4 \quad (n \in \mathbb{N})$;

(b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(c) $2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots)$.

31. Lássa be a Bernoulli-egyenlőtlenség alábbi általánosítását: Ha $n \in \mathbb{N}$ és a $h_1, h_2, \ldots, h_n$ valós számok előjele megegyezik, továbbá $h_k > -1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, akkor

$$(1+h_1)(1+h_2)\cdots(1+h_n) \geq 1 + h_1 + h_2 + \cdots + h_n.$$

32. Igazolja az alábbi egyenlőtlenségeket:

(a) $(n+1)^n < n^{n+1} \qquad (\mathbb{N} \ni n \geq 3)$;

(b) $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)^n \qquad (\mathbb{N} \ni n \geq 2)$;

(c) $1 + \frac{k}{n} \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^k \leq 1 + \frac{k}{n} + \frac{k^2}{n^2} \quad (n, k \in \mathbb{N};\ \ 1 \leq k \leq n)$;

(d) $n^n \leq (n!)^2 \qquad (n \in \mathbb{N})$;

(e) $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^n \leq \dfrac{a^n + b^n}{2} \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ a+b \geq 0,\ n \in \mathbb{N})$;

(f) $\dfrac{\sqrt{(2n+1)!}}{2^{n+1}} \leq \displaystyle\prod_{k=0}^{n}\left(k+\frac{1}{2}\right) \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^{n+1} \ (n \in \mathbb{N})$.

33. Bizonyítsa be, hogy ha $n \in \mathbb{N}$ és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tetszőleges pozitív valós számok, akkor

(a) $\dfrac{a_1}{a_2} + \dfrac{a_2}{a_3} + \cdots + \dfrac{a_{n-1}}{a_n} + \dfrac{a_n}{a_1} \geq n$;

(b) $a_1 a_2 \cdots a_n \leq \dfrac{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_n^n}{n}$.

Mikor van egyenlőség a fenti egyenlőtlenségekben?

34. Lássa be, hogy tetszőleges a, b, c és d valós számok esetén fennáll az

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(a^4+b^4+c^4+d^4) \geq (a^3+b^3+c^3+d^3)^2$$

egyenlőtlenség.

2. Halmazok, relációk és függvények

2.1. Matematikai logikai alapok

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. A matematikai logika matematikai módszereket használ a gondolkodás formális törvényeinek a tanulmányozására. Hangsúlyozzuk, hogy itt nem kívánunk szisztematikus áttekintést nyújtani erről a témakörről. Az ismertetendő fogalmak és eljárások csupán mint a későbbiek szempontjából hasznos **segédeszközök** jelennek meg számunkra. *Használatuk nagymértékben leegyszerűsíti és megkönnyíti az egyes matematikai gondolatok kifejtését, illetve leírását.*
A matematikai logika alapvető fogalmai a matematikai **ítéletek** (más néven **kijelentések** vagy **állítások**), és az ítéletek **igaz** vagy **hamis** volta, azaz az ítélet **logikai értéke.** A kijelentéseket általában egy-egy szimbólummal (például a $\mathtt{p}, \mathtt{q}, \mathtt{r} \ldots$ betűk valamelyikével), a logikai értékeket pedig az $\mathtt{i}$, illetve a $\mathtt{h}$ betűvel jelöljük. Megállapodunk abban, hogy bármelyik kijelentéstől – amelyeket csupán abból a szempontból vizsgálunk, hogy mi a logikai értéke – megköveteljük azt, hogy vagy igaz, vagy hamis legyen. Egy adott képre vonatkozóan tehát nem tekintjük ítéletnek például az „ez a kép szép” kijelentést.

D. A $\mathtt{p}$ és $\mathtt{q}$ ítéletek közötti logikai alapműveleteket: a **konjunkciót** ($\wedge$), a **diszjunkciót** ($\vee$), az **implikációt** ($\Rightarrow$) és az **ekvivalenciát** ($\Leftrightarrow$) így értelmezzük:

$\mathtt{p}$	$\mathtt{q}$	$\neg\mathtt{p}$	$\mathtt{p}\wedge\mathtt{q}$	$\mathtt{p}\vee\mathtt{q}$	$\mathtt{p}\Rightarrow\mathtt{q}$	$\mathtt{p}\Leftrightarrow\mathtt{q}$
i	i	h	i	i	i	i
i	h	h	h	i	h	h
h	i	i	h	i	i	h
h	h	i	h	h	i	i

D. Két logikai kifejezést akkor tekintünk **azonosan egyenlőnek** (**egyenértékűnek** vagy **ekvivalensnek**), ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely értékére azonos. Az azonosság jele $\equiv$.

M. Az implikációval kapcsolatban a továbbiakban igen sokszor alkalmazott szóhasználatra hívjuk most fel az Olvasó figyelmét. Matematikai eredmények (tételek, állítások) igen jelentős része „ha p, akkor q" ($p \Rightarrow q$) típusú, vagyis implikáció. Például: *Ha két háromszög egybevágó, akkor a szögeik egyenlőek.* Azt, hogy egy ilyen típusú eredmény igaz, úgy szoktuk belátni, hogy feltesszük, hogy p igaz, és ebből levezetjük, hogy q is igaz. Figyelje meg, hogy ezzel a gyakorlatunkkal összhangban van a táblázatban $p \Rightarrow q$-ra tett megállapodásunk, amely szerint ez a következtetés igaz, ha p is és q is igaz. A változatosabb kifejezésmód érdekében a fenti, példaként említett eredményt így is meg szoktuk fogalmazni: *Két háromszög egybevágóságának* **szükséges feltétele** *az, hogy a szögeik egyenlőek legyenek.* (A szögek egyenlősége szükséges ahhoz, hogy a két háromszög egybevágó legyen.) Ezt így is mondhatjuk: *Két háromszög egybevágósága* **elégséges feltétele** *annak, hogy a szögeik egyenlőek legyenek.* Általánosan: azt, hogy a $p \Rightarrow q$ implikáció igaz, a következő módok valamelyikével is kifejezhetjük:

„p-ből következik q";
„p csak akkor teljesül, ha q is teljesül";
„ahhoz, hogy q teljesüljön, **elégséges**, hogy p fennálljon";
„p **elégséges feltétele** annak, hogy q teljesüljön";
„ahhoz, hogy p teljesüljön, **szükséges**, hogy q fennálljon";
„q **szükséges feltétele** p-nek".

(Figyeljen majd ezeknek a kifejezéseknek a pontos használatára.)

A matematikai tételek másik jelentős része $p \Leftrightarrow q$ típusú ekvivalencia. Azt, hogy $p \Leftrightarrow q$ igaz, a következő módok valamelyikével is kifejezhetjük:

„p ekvivalens q-val";
„p **szükséges és elégséges feltétele** annak, hogy q teljesüljön";
„q **akkor és csak akkor** teljesül, ha p";
„q **pontosan akkor** teljesül, amikor p".

Ekvivalens állítást (tehát azt, hogy $p \Leftrightarrow q$ igaz) úgy bizonyítunk, hogy külön-külön belátjuk a $p \Rightarrow q$ és a $q \Rightarrow p$ implikációkat.

M. **Bizonyítási módszerek.** A matematikai tételek, állítások jelentős része

$$\text{„ha } p\text{, akkor } q\text{"} \quad \text{vagy „} p \Rightarrow q\text{"} \qquad (*)$$

típusú, vagyis implikáció. Itt p a tétel feltételeit jelöli, amelyeket *premisszáknak* is szokás nevezni („az, amit eleve tudunk"), q pedig a tétel állítását jelöli, amelyet *konklúziónak* is mondunk („az, amit tudni szeretnénk").

A lehető legtermészetesebbnek tűnő dolog egy $(*)$ alakú állítást úgy bebizonyítani, hogy a p premisszákból kiindulva logikailag helyes következtetések láncolatán keresztül lépésről lépésre eljussunk a q konklúzióig. A bizonyításnak ezt a módját **direkt bizonyításnak** nevezzük.

Néha viszont kényelmesebb a $p \Rightarrow q$ implikációt az ún. **inverz módon** bebizonyítani. Ez esetben abból indulunk ki, hogy q nem igaz, és ennek alapján (direkt módon) megmutatjuk, hogy akkor p sem lehet igaz. Ez teljesen megengedett dolog, ui. érvényes a következő azonosság:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg q \Rightarrow \neg p.$$

(Igazságtáblázat segítségével igazolja ezt az állítást.)
Van egy harmadik bizonyítási mód is, amely szintén sokszor bizonyul hatékonynak. Ez az ún. **indirekt bizonyítás**. Ez a módszer a következő logikai elven alapszik: igaz állításból helyes következtetések láncolatán keresztül lehetetlen hamis állításhoz jutni. Ha a p állítást akarjuk bebizonyítani, akkor a következőképpen járhatunk el. Feltételezzük p tagadását, vagyis azt, hogy $\neg p$ igaz; ha $\neg p$ implikál egy q állítást és q tagadását is, akkor $\neg p$ nem lehet igaz, tehát p igaz. Ez a módszer azért alkalmazható, mert a

$$(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q) \Rightarrow p$$

állítás azonosan igaz. (Igazságtáblázat segítségével bizonyítsa be.)
Az inverz bizonyítási mód ez utóbbinak nagyon leegyszerűsített változata, ezért sokan – teljes joggal – nem is tekintik külön bizonyítási módszernek.

M. **Logikai függvények.** A matematikai állítások általában valamilyen halmaz elemeire mondanak ki bizonyos tulajdonságokat. Ezek az állítások a következő alakúak: Az X halmaz x elemére $p(x)$ teljesül. (Vagy az X halmaz x, y elemeire $p(x, y)$ teljesül.) Az ilyen típusú *kijelentésformulákat* logikai függvényeknek nevezzük. Logikai függvényekben tehát egy vagy több úgynevezett *változó* szerepel, amelyek meghatározott objektumok lehetnek; ha a logikai függvény változóját specifikáljuk (rögzítjük egy lehetséges módon), kijelentést kapunk; ezeket a kijelentéseket a logikai függvény értékeinek nevezzük. Más szóval a logikai függvény bizonyos (matematikai) objektumokhoz rendel hozzá kifejezéseket.
Igen fontos, hogy logikai függvényekkel az eddigiektől eltérő módon is gyárthatunk kijelentést úgy, hogy a változót lekötjük az

univerzális kvantor (**minden** vagy **minden egyes**) $(\forall)$
vagy az
egzisztenciális kvantor (**létezik** vagy **van olyan**) $(\exists)$

egyikével. Absztrakt jelölésekkel: ha p egy logikai függvény, akkor kvantorokkal megalkothatjuk belőle a

$$\forall x \in X : p(x) \quad \text{vagy} \quad \forall x \in X \text{ esetén } p(x) \quad \text{vagy} \quad \forall x : p(x)$$
$$\exists x \in X : p(x) \quad \text{vagy} \quad \exists x \in X, \text{ hogy } p(x) \quad \text{vagy} \quad \exists x : p(x)$$

kijelentéseket. Például:
„minden egész szám osztható 3-mal” („$\forall x \in \mathbb{Z}$ esetén $3 \mid x$”),
„van olyan egész szám, amely osztható 3-mal” („$\exists x \in \mathbb{Z}$, hogy $3 \mid x$”).
Matematikai állításokban sokszor több halmaz elemei (vagy egy halmaz elemei többször) is felléphetnek kvantifikáltan, vagyis kvantorokkal ellátott elemek egész sorozatát zárhatja le egy állítás.

M. **Matematikai állítások tagadása.** Matematikai tételek bizonyításának igen gyakori módja az **indirekt bizonyítási** módszer (l. a $\sqrt{2}$ szám irracionalitásának a bizonyítását). Igen fontos tehát az, hogy helyesen tudjunk tagadni matematikai állításokat. **Megállapodunk abban**, hogy ha p logikai függvény, akkor

$$\neg\big(\forall x : p(x)\big) \equiv \exists x : \neg p(x),$$
$$\neg\big(\exists x : p(x)\big) \equiv \forall x : \neg p(x).$$

Figyelje meg, hogy ez a megállapodás összhangban van a „hétköznapi logikával”:

$\neg$ („$\forall$ ablak *nyitva* van”) $\equiv$ „$\exists$ ablak, amely *zárva* van”.

Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy a „minden ablak nyitva van” kijelentés tagadását **negatív ítélet** formájában is kifejezhetjük: „**nem** minden ablak van nyitva”. Az elsőként említett alakot **pozitív állítás** formájában megfogalmazott alaknak nevezhetnénk. *Matematikai állítások tagadását igyekezzünk mindig ebben a formában megfogalmazni.*

Összetett kijelentések több kvantort és többváltozós logikai függvényt is tartalmazhatnak. Szerencsére az ilyen állítások tagadását formális törvények egymás utáni alkalmazásával is megfogalmazhatjuk. Gondoljuk meg például a következőket:

$\neg$ („$\forall$ emeleten $\exists$ ablak, amely **nyitva** van”) $\equiv$ „$\exists$ emelet, ahol $\forall$ ablak **zárva** van”,

$\neg$ („$\forall\, x$ és $\forall\, y$ valós számra $x^2+y^2 < 1$”) $\equiv$ „$\exists\, x$ és $\exists\, y$ valós szám, hogy $x^2+y^2 \geq 1$”.

Hasonló példák tanulmányozása után vonjuk le az alábbi következtetést:

Olyan állítást, amely univerzális ($\forall$) és egzisztenciális ($\exists$) kvantorokat és végül egy lezáró állítást tartalmaz, úgy tagadunk, hogy minden $\forall$, illetve $\exists$ helyébe $\exists$-t, illetve $\forall$-t írunk, és a lezáró állítást a negációjával helyettesítjük.

M. **Axiomatikus módszer a matematikában.** Matematikai ismeretek axiomatikus tárgyalásának szükségességét már az i. e. IV. században az ókori görög matematikusok felismerték, és a geometriában mintát is mutattak erre a módszerre (l. Eukleidész *Elemek* című könyvét). Ebben az időben az ókori görög tudósok geometriai ismeretek elég széles körével rendelkeztek. Vélt gondolatmenetüket ma is felidézhetjük. Gondoljunk például a következő geometriai állításra, valamint a bizonyítására: *egy háromszög magasságvonalai egy pontban metszik egymást.* Világos, hogy maga az állítás és a bizonyítása is tartalmaz „korábbról már ismert” fogalmakat. A bizonyítás során pedig felhasználunk olyan állításokat, amelyeket korábban már bebizonyítottunk. Ez a folyamat visszafele a végtelenségig nyilván nem folytatható. Ez azt jelenti: kell, hogy legyenek olyan fogalmak, amelyeket nem vezetünk vissza „korábban már definiált” fogalmakra. Ezeket a nem definiált fogalmakat **alapfogalmaknak** szokás nevezni. Az állításokkal is hasonló a helyzet. Kell, hogy legyenek olyan állítások, amelyeket eleve igaznak tételezünk fel. Az ilyen állításokat szokás **axiómáknak** nevezni. A geometria alapfogalmai például a pont, az egyenes, a sík; egy axióma például a következő: két ponton át húzható egyenes.

Elképzelhető, hogy nem egyszerű feladat sok konkrét ismeretanyagból kiválasztani alapfogalmakat és axiómákat úgy, hogy azokból a logika szabályait követve levezethetők legyenek az adott témakörben megismert összefüggések. Másrészt az is hihetőnek tűnik, hogy egy adott témakörhöz több különböző axiómarendszer (alapfogalmak és axiómák együttese) is megalkotható (ilyenre példát a valós számokkal kapcsolatban mi is fogunk mondani).

Az axiomatikus módszer lényegét így szemléltetjük:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{sok konkrét}\\ \text{ismeret}\end{array}} \xrightarrow{\text{absztrakció}} \boxed{\begin{array}{c}\text{alapfogalmak,}\\ \text{axiómák}\end{array}} \xrightarrow[\text{következtetések}]{\text{logikai}} \boxed{\begin{array}{c}\text{régi és új ismeretek,}\\ \text{összefüggések}\end{array}}$$

A-feladatok

35. Jelöljön x tetszőleges négyszöget. Tekintsük a következő kijelentéseket:

$p(x)$: az x négyszög húrnégyszög,
$q(x)$: az x négyszög téglalap,
$r(x)$: az x négyszög szemközti szögeinek összege 180°,
$s(x)$: az x négyszög átlói felezik egymást.

Fogalmazza meg az alábbi összetett kijelentéseket, és határozza meg azok logikai értékét:

(a) $\forall x : \big(p(x) \Rightarrow q(x)\big)$; (b) $\forall x : \big(q(x) \Rightarrow p(x)\big)$;
(c) $\forall x : \big(p(x) \Leftrightarrow q(x)\big)$; (d) $\forall x : \big(p(x) \Leftrightarrow r(x)\big)$;
(e) $\forall x : \big(q(x) \Rightarrow s(x)\big)$; (f) $\forall x : \big(\neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)\big)$;
(g) $\forall x : \big[\big(p(x) \wedge \neg q(x)\big) \Rightarrow s(x)\big]$.

36. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg a következő kijelentések tagadását.

Egy adott épületet tekintve:

„$\forall$ ablak nyitva van” ;
„$\exists$ ablak, ami nyitva van” ;
„$\exists$ emelet, hogy $\forall$ ablak nyitva van” ;
„$\forall$ emeleten $\forall$ ablak nyitva van” .

Egy adott egyetemet tekintve:

„$\forall$ szak $\forall$ évfolyamán $\exists$ leány hallgató” ;
„$\exists$ szak, amelyiknek $\exists$ évfolyama, amelyben $\forall$ hallgató leány” .

B-feladatok

37. Igazolja direkt, inverz és indirekt módon azt, hogy $-x^2+5x-4 > 0 \Rightarrow$ $\Rightarrow x > 0$, ahol $x \in \mathbb{R}$.

38. Tekintsük a $2x + 5 \geq 13$ állítást, ahol x valós szám.

(a) Az állítás teljesülésének az $x \geq 0$ feltétel szükséges, elégséges vagy szükséges és elégséges feltétele?
(b) Válaszolja meg ugyanezt a kérdést $x \geq 0$ helyett $x \geq 50$-nel.
(c) Válaszolja meg ugyanezt a kérdést $x \geq 0$ helyett $x \geq 4$-gyel.

39. Tekintse az alábbi hat implikációt. Mindegyik esetben döntse el, hogy (i) igaz-e az implikáció, és (ii) igaz-e a megfordított implikáció (x, y és z valós számok).

(a) $x = 2$ és $y = 5 \Longrightarrow x + y = 7$;

(b) $(x - 1)(x - 2)(x - 3) = 0 \Longrightarrow x = 1$;

(c) $x^2 + y^2 = 0 \Longrightarrow x = 0$ vagy $y = 0$;

(d) $x = 0$ és $y = 0 \Longrightarrow x^2 + y^2 = 0$;

(e) $xy = xz \Longrightarrow y = z$;

(f) $x > y^2 \Longrightarrow x > 0$.

40. Egy adott épületre vonatkozóan tekintsük a „minden ajtón van kilincs” kijelentést. Írja ezt fel jelek és kvantorok segítségével, majd pozitív állítás formájában fogalmazza meg a tagadását.

■ C-feladatok

41. Jelöljön x pozitív egész számot, és tekintsük a következő állításokat:

$p(x)$: az x szám osztható 2-vel,
$q(x)$: az x szám osztható 5-tel,
$s(x)$: az x szám osztható 10-zel.

Melyik melyiknek szükséges, és melyik melyiknek elégséges feltétele?

42. Írja fel az alábbi állítások megfordítását, és döntse el az állításról és a tagadásáról is, hogy igaz-e vagy nem:

(a) Ha egy természetes szám osztható $a \cdot b$-vel, akkor osztható a-val és b-vel egyaránt.

(b) Derékszögű háromszögben a befogók négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével.

43. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg a következő kijelentések tagadását, és döntse el, hogy az állítások és tagadásuk közül melyek igazak.

(a) $\exists\, y \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}$ esetén $x < y^2$;

(b) $\exists\, y \in \mathbb{R}$, hogy $\forall\, x \in \mathbb{R}^-$ esetén $x < y^2$;

(c) $\exists\, x \in \mathbb{R}$ és $\exists\, y \in \mathbb{R}$, hogy $x^2 + y^2 = 1$.

2.2. Halmazok

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. A **halmaz** fogalmát nem definiáljuk, azt **alapfogalomnak** tekintjük; ugyanúgy alapfogalom a **halmazhoz való tartozás** (vagy a **halmaz elemének lenni**). Azt, hogy a az A halmazhoz tartozik (más szóval „a eleme A-nak” vagy „a benne van A-ban”), így jelöljük: $a \in A$. Az $a \notin A$ szimbólum pedig azt jelenti, hogy „a nem eleme A-nak”.

Halmazokkal kapcsolatban megköveteljük a következőt: bármely A halmaz és bármely (pontosan meghatározott) a (elem, dolog) esetén $a \in A$ és $a \notin A$ közül pontosan az egyik igaz. (Ennek megfelelően nincs értelme beszélni például „a jó könyvek halmazá”-ról.)

D. Az A és a B halmazt pontosan akkor tekintjük **egyenlőnek**, ha ugyanazok az elemeik. Az A és a B halmaz egyenlőségét az $A = B$ szimbólummal jelöljük. Ha A és B nem egyenlő, akkor azt írjuk, hogy $A \neq B$.

T. *Tetszőleges* A *és* B *halmazra*

$$1^\circ \ A = B \iff (\forall\, a \in A \Rightarrow a \in B) \text{ és } (\forall\, b \in B \Rightarrow b \in A),$$

$$2^\circ \ A \neq B \iff (\exists\, a \in A: \ a \notin B) \text{ vagy } (\exists\, b \in B: \ b \notin A).$$

D. Azt a halmazt, amelyiknek egyetlen eleme sincsen, **üres halmaznak** nevezzük és a $\emptyset$ szimbólummal jelöljük.

D. Azt mondjuk, hogy az A halmaz **részhalmaza** a B halmaznak (más szóval: „A benne van B-ben” vagy „B tartalmazza A-t”), jelben $A \subset B$ vagy $B \supset A$, ha A minden eleme hozzátartozik B-hez is. Formálisan tehát: $\forall\, a \in A$ esetén $a \in B$.
Ha A nem részhalmaza B-nek, akkor azt írjuk, hogy $A \not\subset B$.
Ha $A \subset B$ és $A \neq B$, akkor azt mondjuk, hogy A **valódi részhalmaza** B-nek.

T. *Tetszőleges* A *és* B *halmazra* $A \not\subset B \iff \exists\, a \in A$, *hogy* $a \notin B$.

T. *Minden* A, B *és* C *halmazra*

1° $\emptyset \subset A$, $A \subset A$;

2^o *ha* $A \subset B$ *és* $B \subset C$, *akkor* $A \subset C$;

3^o $A = B \iff A \subset B$ *és* $B \subset A$.

M. 1. Rendszerint 3^o alapján bizonyítjuk két halmaz egyenlőségét.

2. Egy halmaz akkor van meghatározva, ha pontosan tudjuk, mik az elemei. **Halmaz megadásának** két szokásos módja a következő. Az első: felsoroljuk a halmaz elemeit. Például az a, b és c elemekből álló halmaz $\{a, b, c\}$. A másik mód az, hogy egy már *ismert* halmaz bizonyos tulajdonságú elemeit elkülönítjük a többitől egy részhalmazba foglalva őket. Ha A egy *adott* halmaz, és A minden elemére $P(a)$ egy *kijelentés* (amire az teljesül, hogy $P(a)$ igaz vagy hamis), akkor $\{a \in A \mid P(a) \text{ igaz}\}$ jelenti A azon a elemeinek a halmazát, amelyekre $P(a)$ igaz. Például: $\{a \in \mathbb{N} \mid a \geq 7 \text{ és } a \text{ páratlan}\}$.

D. Az A halmaz **hatványhalmazának** nevezzük és a $\mathcal{P}(A)$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, amelynek elemei pontosan az A halmaz részhalmazai. Jelekkel: $a \in \mathcal{P}(A) \iff a \subset A$.

D. Azt mondjuk, hogy $\mathcal{A}$ egy **halmazrendszer**, ha $\mathcal{A} \neq \emptyset$ és $\mathcal{A}$ minden eleme halmaz.

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer **unióhalmazának** nevezzük és az $\cup\mathcal{A}$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, amely pontosan azokat az elemeket tartalmazza, amelyek a halmazrendszer *legalább egyik* halmazához hozzátartoznak. Formálisan tehát

$$a \in \cup\mathcal{A} \iff \exists\, A \in \mathcal{A}, \text{ hogy } a \in A.$$

Azt is mondjuk, hogy $\cup\mathcal{A}$ az $\mathcal{A}$ halmazrendszerhez tartozó halmazok **uniója** vagy **egyesítése**. Ha $\mathcal{A} := \{A, B\}$, akkor

$$a \in A \cup B := \cup\mathcal{A} \iff a \in A \text{ vagy } a \in B.$$

Az $\mathcal{A}$ halmazrendszer **metszethalmazának** nevezzük és az $\cap\mathcal{A}$ szimbólummal jelöljük azt a halmazt, amely pontosan azokat az elemeket tartalmazza, amelyek a halmazrendszer *mindegyik* halmazához hozzátartoznak. Formálisan tehát

$$a \in \cap\mathcal{A} \iff \forall\, A \in \mathcal{A} \text{ halmazra } a \in A.$$

Azt is mondjuk, hogy $\cap\mathcal{A}$ az $\mathcal{A}$ halmazrendszerhez tartozó halmazok **metszete** vagy **közös része**. Ha $\mathcal{A} := \{A, B\}$, akkor

$$a \in A \cap B := \cap\mathcal{A} \iff a \in A \text{ és } a \in B.$$

D. Az A és B halmazt **diszjunktnak** nevezzük, ha $A \cap B = \emptyset$. Egy $\mathcal{A}$ **halmazrendszer diszjunkt**, ha benne bármely két különböző halmaz diszjunkt.

D. Az A és B halmaz **különbségét** így értelmezzük:

$$A \setminus B := \{x \in A \mid x \notin B\}.$$

Ha $B \subset A$, akkor az $A \setminus B$ halmazt a B halmaz **A-ra vonatkozó komplementerének** nevezzük.

D. Bármely a és b esetén az $(a, b) := \big\{\{a\}, \{a, b\}\big\}$ halmazt **rendezett párnak** nevezzük. Ennek **első komponense** a, a **második komponense** pedig b.

T. *Két rendezett pár akkor és csak akkor egyenlő, ha komponenseik rendre megegyeznek, azaz* $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ *és* $b = d$. (L. az **55.** feladatot.)

T. *Legyen* A *és* B *tetszőleges halmaz. Ekkor minden* $a \in A$ *és minden* $b \in B$ *esetén* $(a, b) \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A \cup B)\big)$. (L. az **57.** feladatot.)

D. Az $A \times B := \big\{(a, b) \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A \cup B)\big) \mid a \in A \text{ és } b \in B\big\}$ halmazt az A és a B halmaz **Descartes-szozatának** nevezzük. Az $A = B$ speciális esetben az $A^2 := A \times A$ jelölést (is) használjuk. Az A^2 Descartes-szorzat elemei tehát az A halmaz elemeiből alkotott rendezett párok.

■ A-feladatok

44. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg a következő kijelentéseket:

(a) Az A halmaz nem egyenlő a B halmazzal.

(b) Az A halmaz nem részhalmaza a B halmaznak.

45. Legyen $A := \{1, 2, 10\}$, $B := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$ és $C := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \geq 1\}$. Bizonyítsa be, hogy $A \subset C$, $A \neq C$, $B \subset C$, $B \neq C$, $A \not\subset B$ és $B \not\subset A$.

46. Írja fel az $A := \{1, 2, 3\}$ halmaz hatványhalmazát.

47. Legyen $A := \{a, b\}$ $(a \neq b)$. Írja fel a $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big)$ halmazt, és válassza ki e halmaz elemei közül a rendezett párokat.

■ B-feladatok

48. Bizonyítsa be direkt és indirekt úton: Ha az A, B és C halmazokra $A \subset B \subset C$ teljesül, akkor $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) = \emptyset$.

49. Mutassa meg, hogy nincs olyan halmaz, amelynek minden dolog eleme, azaz nem létezik az összes halmazok halmaza.

50. Mutassa meg, hogy az A és B halmazokra a $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $A \subset B$ vagy $B \subset A$.

51. Legyen X halmaz, A és B az X halmaz részhalmazai. $Y \subset X$ esetén pedig $\overline{Y} := X \setminus Y$ jelölje Y-nak az X halmazra vonatkozó komplementerét. Bizonyítsa be, hogy az

$$\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cap B} = X$$

egyenlőség akkor és csak akkor igaz, ha $A = B$.

■ C-feladatok

52. Bizonyítsa be, hogy nem igaz a következő állítás: „Minden A és B halmazra $A \setminus B = B \setminus A$”. Van-e olyan A és B halmaz, amelyre $A \setminus B = B \setminus A$? Mi ennek a szükséges és elégséges feltétele?

53. Adja meg a $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)))$ halmaz elemeit.

54. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A és B halmaz esetén

(a) $A \subset B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$;

(b) $A = B \Leftrightarrow \mathcal{P}(A) = \mathcal{P}(B)$;

(c) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;

(d) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$.

Az utolsó feladatban igaz-e a fordított irányú tartalmazás?

55. Igazolja, hogy két rendezett pár pontosan akkor egyenlő, ha komponenseik rendre megegyeznek, azaz $(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c$ és $b = d$.

56. Példán keresztül mutassa meg, hogy az (a, b, c) *rendezett hármas* definiálására a szokásos $(a, b, c) := \big((a, b), c\big)$ helyett nem lenne megfelelő a kézenfekvőnek tűnő $\big\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}\big\}$ halmazrendszer.

57. Legyenek A és B tetszőleges halmazok. Mutassa meg, hogy minden $a \in A$ és minden $b \in B$ esetén $(a, b) \in \mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A \cup B)\big)$.

58. Mikor igaz az A, B halmazokra, hogy $A \times B = B \times A$?

2.3. Relációk és függvények

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. A középiskolai tanulmányaink során találkoztunk a **függvény** fogalmával, és érzékelhettük annak a matematikában betöltött alapvető szerepét. Emlékeztetünk erre a fogalomra. *Legyen A és B nemüres halmaz. Ha A minden eleméhez hozzárendeljük B valamelyik elemét, akkor azt mondjuk, hogy megadtunk egy A halmazon értelmezett, B-beli értékeket felvevő függvényt.* Figyelje meg, hogy ez a „definíció" nem tesz mást, mint a „függvény" szót helyettesíti a hétköznapi ember számára érthetőbb szinonímájával, a „hozzárendeléssel". Következésképpen a fenti szöveg a függvényfogalom körülírásának tekinthető, ebben a „hozzárendelést" (tehát magát a függvény fogalmát is) alapfogalomnak kell tekintenünk. A továbbiakban megmutatjuk, hogy a matematikának ezt az alapvető fogalmát hogyan lehet definiálni a halmazelmélet – jóval egyszerűbb – fogalmai segítségével. Ehhez szükségünk lesz a más szempontból is fontos fogalomnak, a relációnak az ismeretére.
A **reláció** (kapcsolat, viszony) fogalmát a hétköznapi életben is sokat használjuk, a matematikában pedig rendkívüli fontosságú. Tekintsünk például egy meghatározott évfolyamot, és tegyük fel, hogy a hallgatók közötti rokonszenvet mint kapcsolatot akarjuk leírni. Ezt matematikailag a rendezett párok segítségével meg is tehetjük. Vegyük a hallgatókból képezhető összes rendezett párok halmazát (ha A-val jelöljük a szóban forgó hallgatók halmazát, akkor vegyük tehát a $A \times A$ halmazt), és válogassuk szét őket: tartsuk meg azon (a, b) párokat, amelyekre igaz, hogy a-nak rokonszenves b, azaz képezzük az

$$\{(a, b) \in A \times A \mid a\text{-nak rokonszenves } b\}$$

halmazt. Nyilván ezzel pontosan le is írtuk a vizsgált viszonyt. Lényegében megadtuk a reláció absztrakt fogalmát.

D. Legyen A és B nemüres halmaz. Az $A \times B$ Descartes-szorzat nemüres r részhalmazait az **A és a B halmaz elemei közötti relációnak** hívjuk. Ha $(a, b) \in r \subset A \times B$, akkor azt mondjuk, hogy az a *elem az r relációban van b-vel.* A

$$\mathcal{D}_r := \{a \in A \mid \exists\, b \in B \text{ úgy, hogy } (a, b) \in r\}$$

halmazt az r reláció **értelmezési tartományának**, az

$$\mathcal{R}_r := \{b \in B \mid \exists\, a \in A \text{ úgy, hogy } (a, b) \in r\}$$

halmazt az r reláció **értékkészletének** nevezzük.

D. Az $r \subset A \times A$ reláció **homogén reláció** (vagy r **reláció az** A **halmazon**), ha $\mathcal{D}_r = A$. Azt mondjuk, hogy az $r \subset A \times A$ homogén reláció

(i) **reflexív**, ha minden $a \in A$ esetén $(a, a) \in r$,

(ii) **szimmetrikus**, ha minden $(a, b) \in r$ esetén $(b, a) \in r$,

(iii) **antiszimmetrikus**, ha minden $(a, b) \in r$, $(b, a) \in r$ esetén $a = b$,

(iv) **tranzitív**, ha minden $(a, b) \in r$ és $(b, c) \in r$ esetén $(a, c) \in r$.

D. Az $r \subset A \times A$ homogén reláció

(i) **ekvivalenciareláció**, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív,

(ii) **rendezési reláció** (vagy **parciális rendezés**), ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív,

(iii) **lineáris** (vagy **teljes**) **rendezés**, ha rendezési reláció és minden $a, b \in A$ esetén vagy $(a, b) \in r$ vagy $(b, a) \in r$ teljesül.

D. Az A és a B halmaz elemei közötti $r \subset A \times B$ reláció **inverze** az

$$r^{-1} := \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in r\}$$

reláció.

T. *Tetszőleges* $r \subset A \times B$ *reláció esetén* $\mathcal{D}_{r^{-1}} = \mathcal{R}_r$ *és* $\mathcal{R}_{r^{-1}} = \mathcal{D}_r$.

D. Tegyük fel, hogy az $r \subset A \times B$ és az $s \subset C \times D$ relációra $\mathcal{R}_s \cap \mathcal{D}_r \neq \emptyset$. Ekkor az r és az s reláció **kompozícióját** az $r \circ s$ (olv. „r kör s”) szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:

$$r \circ s := \{(c, b) \in C \times B \mid \exists\, a \in \mathcal{R}_s \cap \mathcal{D}_r : (c, a) \in s \text{ és } (a, b) \in r\}.$$

D. A nemüres A és B halmaz elemei közötti $f \subset A \times B$ (nemüres) relációt **függvénynek** nevezzük, ha minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemhez pontosan egy olyan $y \in B$ létezik, amelyre $(x, y) \in f$ teljesül, azaz

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f\text{-hez} \quad \text{egyértelműen } \exists\, y \in B, \quad \text{hogy} \quad (x, y) \in f.$$

Az y elemet az f függvény x helyen felvett **helyettesítési értékének** (vagy az f **által** x**-hez hozzárendelt függvényértéknek**) nevezzük, és az $f(x)$ szimbólummal is jelöljük.

T. *Az $f \subset A \times B$ reláció akkor és csak akkor függvény, ha*

$$\forall\, x \in \mathcal{D}_f \quad \textit{esetén} \quad (x, y_1) \in f \ \textit{és}\ (x, y_2) \in f \implies y_1 = y_2.$$

T. *Az a tény, hogy az $f \subset A \times B$ reláció nem függvény, azzal egyenértékű, hogy az f halmaznak van olyan (x, y_1) és (x, y_2) eleme, amelyekre $y_1 \neq$ $\neq y_2$ teljesül.*

T. *Az $f \subset A \times B$ és a $g \subset C \times D$ függvény pontosan akkor egyenlő, ha*

(a) *$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ és*

(b) *minden $x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$ elemre $f(x) = g(x)$.*

M. **Függvényt** többféleképpen is **megadhatunk**. Az iménti állításból következik, hogy egy függvényt az értelmezési tartománya és az ezekben a pontokban felvett helyettesítési értékei egyértelműen meghatározzák. Függvényeket gyakran az értelmezési tartományukkal és a „hozzárendelési szabály” (ez legtöbbször egy képlet vagy valamilyen utasítás lesz) leírásával fogunk megadni. Például az alábbi formulák mindegyike ugyanazt a függvényt írja le:

(a) $f(x) := x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$,
(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto x^2$,
(c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) := x^2$,
(d) $f : \mathbb{R} \ni x \mapsto x^2 \in \mathbb{R}$,
(e) $f := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$.

D. Az $f : A \to B$ jelölés azt jelenti, hogy f olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya *egyenlő* az A halmazzal, értékkészlete pedig a B halmaznak egy részhalmaza. Ilyenkor azt mondjuk, hogy f **az A halmazt a B halmazba képező függvény**.

Az $f \in A \to B$ jelölés azt jelenti, hogy f olyan függvény, amelynek az értelmezési tartománya az A halmaz *egy részhalmaza*, értékkészlete pedig a B halmaz részhalmaza. Ilyenkor azt mondjuk, hogy f **az A halmazból a B halmazba képező függvény**.

D. Legyen $f : A \to B$ egy tetszőleges függvény és C az A halmaz nemüres részhalmaza. Ekkor a $g : C \to B$, $g(x) := f(x)$ függvényt az f függvény C **halmazra vonatkozó leszűkítésének** nevezzük, és az $f_{|C}$ szimbólummal is jelöljük. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy f a g **függvény egy kiterjesztése**.

D. Legyen $f : A \to B$ egy adott függvény. $C \subset A$ esetén az

$$f[C] := \{f(x) \in B \mid x \in C\} = \{y \in B \mid \exists\, x \in C, \text{ hogy } f(x) = y\}$$

halmazt a C **halmaz** f **által létesített képének** nevezzük.
Ha $D \subset B$, akkor az

$$f^{-1}[D] := \{x \in A \mid f(x) \in D\} \subset A$$

halmazt a D **halmaz** f **által létesített ősképének** nevezzük.

T. *Minden* $f : A \to B$ *függvény esetén*

1° $f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f$ *és* $f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f$*;*

2° $f[\emptyset] = \emptyset$ *és* $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$*;*

3° *ha* $D \cap \mathcal{R}_f = \emptyset$*, akkor* $f^{-1}[D] = \emptyset$*.*

D. Az $f : A \to B$ függvényt **invertálhatónak** (vagy **injektívnek**) nevezzük, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékeket rendel, azaz

$$\forall\, x, t \in \mathcal{D}_f, \quad x \neq t \quad \Rightarrow \quad f(x) \neq f(t).$$

T. *Az a tény, hogy az* $f : A \to B$ *függvény nem invertálható, azzal egyenértékű, hogy* $\exists\, x, t \in \mathcal{D}_f$*,* $x \neq t$*, hogy* $f(x) = f(t)$*.*

T. *Tetszőleges* $f : A \to B$ *függvény esetén a következő állítások ekvivalensek:*

1° *az* f *függvény invertálható;*

2° *minden* $y \in \mathcal{R}_f$*-hez létezik egyetlen olyan* $x \in \mathcal{D}_f$ *elem, amelyre* $f(x) = y$ *teljesül;*

3° $\forall\, x, t \in \mathcal{D}_f$ *esetén* $f(x) = f(t) \Rightarrow x = t$*;*

4° *az* $f^{-1} = \{(y, x) \in B \times A \mid (x, y) \in f\}$ *inverz reláció is függvény.*

M. Egy $f : A \to B$ függvény invertálhatóságát sokszor a következő módszerrel dönthetjük el: megvizsgáljuk, hogy az $f(x) = f(t)$ egyenlőség milyen értelmezési tartománybeli x és t elemekre érvényes. Ha azt kapjuk, hogy ez csak az $x = t$ esetben áll fenn, akkor f invertálható. Ha viszont az $f(x) = f(t)$ legalább egy egymástól különböző értelmezési tartománybeli x, t párra fennáll, akkor f nem invertálható.

D. Legyen $f : A \to B$ invertálható függvény. Ekkor minden $y \in \mathcal{R}_f$ elemhez létezik egyetlen olyan $x \in \mathcal{D}_f$, amelyre $f(x) = y$. Értelmezhetjük tehát azt a függvényt, amelyik minden $y \in \mathcal{R}_f$ elemhez azt az egyértelműen meghatározott $x \in \mathcal{D}_f$ elemet rendeli, amelyre $f(x) = y$. Ezt a függvényt f **inverz függvényének** (vagy röviden **inverzének**) nevezzük, és az f^{-1} szimbólummal jelöljük. Formálisan tehát:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } f(x) = y.$$

T. *Tegyük fel, hogy az $f : A \to B$ függvény invertálható. Ekkor*

1° $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ *és* $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$*;*

2° *az f^{-1} inverz függvény is invertálható és* $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

(L. a **75.** feladatot.)

D. Az $f : A \to B$ függvényt az A **és a** B **halmaz közötti bijekciónak** (vagy az A és B halmaz elemi közötti **kölcsönösen egyértelmű megfeleltetésnek**) nevezzük, ha f invertálható, és $\mathcal{R}_f = B$.

M. Itt hívjuk fel a figyelmet egy, a jelölésekkel kapcsolatos látszólagos következetlenségre. Az $f^{-1}[D]$ szimbólum *tetszőleges* f függvény esetén a D halmaz f által létesített ősképét jelölte. Azonban ha f *invertálható* függvény, akkor ugyanezzel jelöltük – a fogalmilag igencsak különböző dolgot, nevezetesen – a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képét. Ez azért nem vezet félreértéshez – sőt némiképp egyszerűsíti a bevezetett jelelöléseket –, mert minden invertálható f függvény és minden $D \subset \mathcal{R}_f$ esetén a D halmaz f által létesített ősképe – azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\}$ halmaz – megegyezik a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével – azaz az $\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} \mid y \in D\}$ halmazzal. (L. a **72.** feladatot.)

M. Ha $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, akkor azt fogjuk mondani, hogy f **valós-valós függvény**. Ebben az esetben az $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathcal{D}_f\}$ halmazt (amit az f **függvény grafikonjának** is nevezünk) a Descartes-féle derékszögű koordináta-rendszerben ábrázolhatjuk. Ha f invertálható, akkor ugyanebben a koordináta-rendszerben az f^{-1}-et szemléltető halmazt f grafikonjának az $y = x$ egyenletű egyenesre való tükrözésével kapjuk.

D. Tegyük fel, hogy $f : A \to B$ és $g : C \to D$ olyan függvények, amelyekre $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f \neq \emptyset$ (azaz létezik olyan $x \in \mathcal{D}_g$ elem, amelyre $g(x) \in \mathcal{D}_f$).

Ebben az esetben az f (külső) és a g (belső) függvény **összetett függvényét** (vagy más szóval f és g **kompozícióját**) az $f \circ g$ (olv. „f kör g") szimbólummal jelöljük, és így értelmezzük:

$$f \circ g : \{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} \to B, \quad \big(f \circ g\big)(x) := f\big(g(x)\big).$$

M. 1° Ha $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f = \emptyset$, akkor f és g kompozícióját nem értelmezzük.

2° A definíciókból szinte közvetlenül adódik, hogy $\mathcal{D}_{f \circ g} = g^{-1}[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f]$. Ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, akkor $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g$.

■ A-feladatok

59. Legyen $A := \{a, b\}$ kételemű halmaz, azaz $a \neq b$. Írja fel az összes $r \subset A \times A$ relációt. Ezek közül melyek reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak? Válassza ki közülük a rendezési és az ekvivalenciarelációkat.

60. Írja fel az $r \cap s$ relációt, ha $r := \big\{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n \text{ osztható } k\text{-val}\big\}$ és $s := \big\{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n = k + 6\big\}$.

61. Határozza meg az $r \circ s$ kompozíciót, ha $s := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 2x + 1\big\}$ és $r := \big\{(y, z) \in \mathbb{R}^2 \mid z = y^2\big\}$.

62. Legyen $A := \{0, 1\}$, $B := \{1, 2\}$. Válassza ki $\mathcal{P}(A \times B)$-ből

(a) a függvényeket,

(b) az invertálható függvényeket.

63. Milyen A és B nemüres halmazok esetén lesz $A \times B$ függvény? Mikor lesz $A \times B$ invertálható függvény?

64. Igaz-e, hogy egy $C \subset \mathcal{D}_f$ halmaz valamely f függvény által létesített képének az f szerinti őspképe megegyezik C-vel?

■ B-feladatok

65. Határozza meg a $C := [0, 1]$ halmaznak az $f(x) := 3x^2 - 2$ $(x \in \mathbb{R})$ függvény által létesített képét és ősképét.

66. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy minden $C \subset A$ esetén $C \subset f^{-1}\big[f[C]\big]$. Mutassa meg, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn minden $C \subset A$-ra, ha f invertálható.

67. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy bármely $D_1, D_2 \subset B$ esetén

(a) $f^{-1}[\emptyset] = \emptyset$, $f^{-1}[\mathcal{R}_f] = \mathcal{D}_f$;

(b) $f^{-1}[D_1 \cup D_2] = f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$;

(c) $f^{-1}[D_1 \cap D_2] = f^{-1}[D_1] \cap f^{-1}[D_2]$;

(d) $f^{-1}[D_1 \setminus D_2] = f^{-1}[D_1] \setminus f^{-1}[D_2]$.

68. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy bármely $C_1, C_2 \subset A$ esetén

(a) $f[\emptyset] = \emptyset$, $f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f$;

(b) $f[C_1 \cup C_2] = f[C_1] \cup f[C_2]$;

(c) $f[C_1 \cap C_2] \subset f[C_1] \cap f[C_2]$;

(d) $f[C_1 \setminus C_2] \supset f[C_1] \setminus f[C_2]$.

A két utolsó formulában a $\subset$ jelet kicserélhetjük-e az egyenlőség jelével?

69. Mutassa meg, hogy az $(-\infty, 0] \ni x \mapsto x^2 - 2x + 3$ függvény invertálható, és állítsa elő az inverzét.

70. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges függvény. Tegyük fel, hogy a nemüres A_1 és A_2 halmazokra $A_1 \cup A_2 = A$ és $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ teljesül, továbbá az $f_{|A_1}$ és az $f_{|A_2}$ függvények mindegyike invertálható. Bizonyítsa be, hogy f akkor és csak akkor invertálható, ha $f[A_1] \cap f[A_2] = \emptyset$.

71. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } -\infty < x \leq 0 \\ x + 1, & \text{ha } 0 < x < +\infty \end{cases}$$

függvény invertálható, és állítsa elő az inverzét.

72. Legyen $f : A \to B$ invertálható függvény. Mutassa meg, hogy minden $D \subset \mathcal{R}_f$ esetén a D halmaz f által létesített ősképe – azaz az $\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\}$ halmaz – megegyezik a D halmaz f^{-1} inverz függvény által létesített képével – azaz az $\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} \mid y \in D\}$ halmazzal.

73. Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót, ha

$$f(x) := \sqrt{1-x} \quad (x \in (-\infty, 1]) \qquad \text{és} \qquad g(u) := u^2 \quad (u \in \mathbb{R}).$$

74. Tegyük fel, hogy f, g és h olyan függvények, amelyekre az $\mathcal{R}_h \subset \mathcal{D}_g$ és az $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ relációk teljesülnek. Mutassa meg, hogy ekkor

$$(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h).$$

(A kompozícióképzés asszociatív.)

75. Igazolja, hogy ha $f : A \to B$ invertálható függvény, akkor

(a) invertálható annak inverze is és $(f^{-1})^{-1} = f$,

(b) $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{|\mathcal{D}_f}$,

(c) $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{|\mathcal{R}_f}$.

(Tetszőleges $A \neq \emptyset$ halmaz esetén id_A jelöli az $A \ni x \mapsto x \in A$ *identitásfüggvényt.*)

76. Bizonyítsa be, hogy ha az f és a g függvény invertálható, továbbá $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, akkor $f \circ g$ is invertálható függvény, és

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}.$$

■ C-feladatok

77. Igaz-e, hogy ha az $f, g \subset A \times B$ relációk függvények, akkor az $f \cup g$, $f \cap g$, $f \setminus g$ és $f \circ g$ reláció is függvény?

78. Legyen r egy rendezési reláció a nemüres B halmazon. Legyen továbbá $A \neq \emptyset$ és $f : A \to B$ egy függvény. Értelmezzük az s relációt a következőképpen:

$$s := \big\{(x, y) \in A \times A \mid \big(f(x), f(y)\big) \in r\big\}.$$

Mikor lesz s rendezési, illetve teljes rendezési reláció?

79. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := 2 - x - x^2$, és $C := \{0\}$. Írja fel $f[C]$-t és $f^{-1}[C]$-t. Milyen $A \subset \mathbb{R}$ halmazokra lesz $f[A]$, illetve $f^{-1}[A]$ egyelemű halmaz?

80. Írja fel intervallumokkal az $\text{abs}\big[[-1,2)\big]$, $\text{abs}^{-1}\big[(1,4)\big]$, $\text{abs}^{-1}\big[[-1,2]\big]$ halmazokat.

81. Legyen

$$f(x) := \sqrt{|3x-7|} \quad (x \in \mathbb{R}) \quad \text{és} \quad D := [-1,2].$$

Határozza meg az $f^{-1}[D]$ halmazt.

82. Legyen $f(x) := 3x + 1$ $(x \in \mathbb{R})$. Az $a \le b$ feltételt kielégítő a és b valós paraméterek esetén határozza meg az $f\big[[a,b]\big]$ és az $f^{-1}\big[[a,b]\big]$ halmazt.

83. Igazolja, hogy az $f : A \to B$ függvényre az

$$f[C_1 \cap C_2] = f[C_1] \cap f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

84. Igazolja, hogy az $f : A \to B$ függvényre az

$$f[C_1 \setminus C_2] = f[C_1] \setminus f[C_2]$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

85. Legyen $f : A \to B$ tetszőleges függvény. Bizonyítsa be, hogy minden $D \subset B$ halmazra $f[f^{-1}[D]] \subset D$. Igazolja azt is, hogy az $f[f^{-1}[D]] = D$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $D \subset B$ halmazra, ha $\mathcal{R}_f = B$.

86. Legyen

$$f(x) := \alpha(\alpha+1)x^2 + (2\alpha+3)x + 1 \quad (x \in \mathbb{R}),$$

ahol α valós paraméter. Határozza meg azokat az α paramétereket, amelyekre $f^{-1}[\mathbb{R}_0^+] = \mathbb{R}$ teljesül.

87. Írja fel az összes $f : \{1,2,3\} \to \{1,2,3\}$ bijekciót. Ha f, g ilyen bijekciók, akkor határozza meg $f \circ g$-t.

88. Mutassa meg azt, hogy a $(-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x}{1-|x|}$ függvény injektív.

89. Bizonyítsa be, hogy az alábbi függvények nem invertálhatók:

(a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto |x^2 - 7x + 12|$;　(b) $[-1, 8] \ni x \mapsto x^2 - 5$;

(c) $[-3, 3] \ni x \mapsto \sqrt{9 - x^2}$;　(d) $\mathbb{R} \ni x \mapsto x - [x]$.

90. Mutassa meg, hogy az alábbi függvények invertálhatók, és állítsa elő az inverzüket:

(a) $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sqrt[3]{x+2}$;

(b) $\mathbb{R} \ni x \mapsto (1 - x^3)^{1/5} + 2$;

(c) $\mathbb{R} \setminus \{2\} \ni x \mapsto \dfrac{x+1}{x-2}$;

(d) $f(x) := \left(\dfrac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 \quad \big(x \in (-1, 1)\big)$;

(e) $f(x) := \begin{cases} \dfrac{7x-5}{3}, & \text{ha } -1 \le x < 1 \\ \dfrac{2}{1+x}, & \text{ha } 1 \le x \le 2; \end{cases}$

(f) $f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } -\infty < x < 1 \\ x^2, & \text{ha } 1 \le x \le 4 \\ 3x + 4, & \text{ha } 4 < x < +\infty. \end{cases}$

91. Igazolja, hogy az alábbi függvényeknek van inverzük, és adja meg az inverz függvényeket:

(a) $f(x) := x^3 + 6x^2 + 12x \ (x \in \mathbb{R})$;

(b) $f(x) := x^3 - 3x^2 + 3x + 4 \ (x \in \mathbb{R})$.

92. Milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ esetén invertálható az $f(x) := \alpha x + \beta \ (x \in \mathbb{R})$ függvény? Határozza meg ekkor f^{-1}-et. Mikor igaz az, hogy f^{-1} megegyezik f-fel?

93. Az $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter mely értékénél lesznek az

(a) $f(x) := \begin{cases} \alpha x + 1, & \text{ha } 0 \le x \le 1 \\ \alpha - x, & \text{ha } 1 < x \le 2, \end{cases}$

(b) $f(x) := \begin{cases} \alpha x^2, & \text{ha } -1 \le x \le 0 \\ 2\alpha - x, & \text{ha } 0 < x \le 1 \end{cases}$

függvények invertálhatók? Mi lesz akkor $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ és $\mathcal{R}_{f^{-1}}$, illetve mi lesz $f^{-1}(x)$ $(x \in \mathcal{D}_{f^{-1}})$?

94. Írja fel az $f \circ g$ és a $g \circ f$ kompozíciót a következő függvények esetében:

(a) $f(x) := 1 - x^2 \quad (x \in \mathbb{R})$, $\quad g(u) := \sqrt{u} \quad (u \in \mathbb{R}_0^+)$;

(b) $f(x) := \sqrt{|x|} \quad (x \in \mathbb{R})$, $\quad g(u) := u^2 \quad (u \in \mathbb{R})$;

(c) $f(x) := \operatorname{sign} x \quad (x \in \mathbb{R})$, $\quad g(u) := \dfrac{1}{u} \quad (u \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$;

(d) $f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in (-\infty, 0] \\ x, & \text{ha } x \in (0, +\infty), \end{cases}$

$g(u) := \begin{cases} 0, & \text{ha } u \in (-\infty, 0] \\ -u^2, & \text{ha } u \in (0, +\infty). \end{cases}$

95. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} 2x - 1, & \text{ha } x \in (-\infty, 1] \\ 2, & \text{ha } 1 < x \le 5, \end{cases}$$

$$g(x) := \begin{cases} \dfrac{6 - x}{7 - x} & \text{ha } x \in (-\infty, 6) \\ \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^6 & \text{ha } x \in [6, +\infty). \end{cases}$$

Határozza meg az $f \circ g$ függvényt.

96. Legyen $f(x) := x^2 \ (x \in \mathbb{R}^+)$ és $g(x) := x + 1 \ (x \in \mathbb{R}^+)$. Mutassa meg, hogy az $f \circ g$ függvény invertálható, és határozza meg az inverzét.

97. Legyen $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény és

$$g(x) := \frac{[x]}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

Határozza meg az $\mathcal{R}_g$ és a $\mathcal{D}_{f \circ g}$ halmazt.

98. Legyenek A, B, C nemüres halmazok és $f : B \to C, g : A \to B$ függvények. Tegyük fel, hogy $f \circ g$ invertálható. Következik-e ebből az, hogy az f függvény és g egyaránt invertálható?

3. A valós és a komplex számok struktúrája

3.1. A valós számok Dedekind-féle axiómarendszere

M. A valós számok matematikai fogalma a tudomány előrehaladása során több lépcsős absztrakció útján, igen hosszú fejlődési folyamat eredményeként a XIX. század végére alakult ki. Az első matematikai fogalmak és ismeretek éppen a valós számokra és műveleteikre vonatkoztak. Ahogy az elemi iskolában elindultunk, és jutottunk előre a számolás tudományában, lényegében ugyanúgy haladt az emberiség is. Először az azonos dolgok – például almák, szarvasmarhák vagy kardok – mennyiségének megállapításával kialakultak a természetes számok és ezek között az összeadás és a szorzás művelete, valamint a nagyság szerinti rendezésük. Azután a részekre osztás – például termény, zsákmány felezése, tizedelése – eredményezte a pozitív törtszámokat (a pozitív racionális számokat). Hosszú évszázadok után az adósság, a hiány leírására vezették be a negatív racionális számokat is. Végül az irracionális számokat már nem annyira a mindennapi élet, hanem inkább a matematikai vizsgálatokból származó szükségszerűség hívta életre. Az i. e. V. század környékén a görög tudósok fedezték fel az irracionális számokat. A matematikai elméletek felállításának ez volt az első ösztönzője. A matematika fejlődésében olyan jelentősége van e lépésnek, amelyet nehéz lenne túlbecsülni. A matematikában olyan fogalom jelent meg, amelyet közvetlen emberi tapasztalat nem támasztott alá, hanem csak bonyolult matematikai absztrakció. A számfogalom fokozatos bővítésének lényeges része az összeadás, a szorzás és a rendezés kiterjesztése az új és még újabb számokra.
A számfogalom matematikailag egzakt módon a halmazelmélet alapján is felépíthető. Igen érdekes matematikatörténeti érdekesség az, hogy 1872-ben egyetlen év leforgása alatt több ilyen – mai szemmel is – szigorú felépítés (axiómarendszer) látott napvilágot. A *Mathematische Annalen* folyóirat ekkor közölte Cantor (1845–1918) első művét az aritmetika megalapozásáról. Megjelent Dedekind (1831–1916) *Stetigkeit und Irrationalzahlen* című könyve, továbbá Meray (1835–1911) és Heine (1821–1881) hasonló témájú munkája. Ezek a művek mind egy célt tűztek maguk elé: a valós számok szigorú elméletének megadását. Néhány év elteltével ugyanezt a kérdést – az analitikus függvényekről tartott – híres előadásaiban Weierstrass (1815–1897) is megoldotta. Az említett vizsgálatokban a valós számoknak – a nagyfokú szigorúság követelményeit kielégítő – elmélete különböző formában jelent meg.

A valós számok struktúrájának a halmazelmélet alapján történő – meglehetősen hosszú, matematikailag egzakt – felépítésének az ismertetésétől eltekintünk. (Az érdeklődőknek P. R. Halmos: *Elemi halmazalmélet* című könyvét ajánljuk.) **A továbbiakban csupán felsoroljuk a valós számhalmaznak** azokat a **meghatározó tulajdonságait** (axiómáknak fogjuk ezeket nevezni), amelyekből az összes tulajdonság levezethető.

A. **A valós számok Dedekind-féle axiómarendszere.** Elfogadjuk, hogy létezik a valós számok – $\mathbb{R}$ szimbólummal jelölt – halmaza, amelyet a következő tulajdonságok jellemeznek.

$\boxed{\text{I.}}$ **Testaxiómák.** $\mathbb{R}$-en értelmezve van az **összeadás** és a **szorzás** művelete, és ezekre nézve $\mathbb{R}$ *test*et alkot, ami a következőket jelenti:

I.1. Értelmezve van egy

$$+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad +(x, y) =: x + y$$

függvény (az *összeadás művelete*), amelyre a következők teljesülnek:

(i) $x + y = y + x$ $(x, y \in \mathbb{R})$ (*kommutativitás*);

(ii) $(x + y) + z = x + (y + z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ (*asszociativitás*);

(iii) létezik olyan $0 \in \mathbb{R}$ elem, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $0 + x = x$ (*nullelem létezése*, 0 az $\mathbb{R}$ *nulleleme*);

(iv) minden x valós számhoz létezik olyan $-x$ szimbólummal jelölt valós szám úgy, hogy $x + (-x) = 0$ (*ellentett létezése*, $-x$ az $x \in \mathbb{R}$ *ellentettje*).

I.2. Értelmezve van továbbá egy

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \cdot(x, y) =: x \cdot y =: xy$$

függvény (a *szorzás művelete*), amelyre a következők teljesülnek:

(i) $x \cdot y = y \cdot x$ $(x, y \in \mathbb{R})$ (*kommutativitás*);

(ii) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$ (*asszociativitás*);

(iii) létezik olyan $1 \in \mathbb{R}$, $1 \neq 0$ elem, hogy $1 \cdot x = x$ minden $x \in \mathbb{R}$ esetén (*egység létezése*, 1 az $\mathbb{R}$ *egységeleme*);

(iv) minden nullától különböző x valós számhoz létezik olyan – az $\frac{1}{x}$ szimbólummal jelölt – valós szám, hogy $x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (*reciprok létezése*, $\frac{1}{x}$ az x *reciproka*).

I.3. Minden $x, y, z \in \mathbb{R}$ esetén $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ (*disztributivitás*).

$\boxed{\text{II.}}$ **Rendezési axiómák.** $\mathbb{R}$-en értelmezve van egy $\leq \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (**kisebb-egyenlőnek** nevezett) reláció, amelyre a következők teljesülnek:

II.1. A $\leq$ reláció lineáris rendezés $\mathbb{R}$-en, azaz

(i) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq x$ (*reflexivitás*),

(ii) ha $x, y \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ és $y \leq x$, akkor $x = y$ (*antiszimmetrikusság*),

(iii) ha $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x \leq y$ és $y \leq z$, akkor $x \leq z$ (*tranzitivitás*),

(iv) minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $x \leq y$ vagy $y \leq x$ (*trichotómia*).

II.2. A $\leq$ rendezést a műveletekkel az alábbi szabályok kapcsolják össze:

(i) $x \leq y \quad \Rightarrow \quad x + z \leq y + z \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$,

(ii) $x \leq y$ és $0 \leq z \quad \Rightarrow \quad x \cdot z \leq y \cdot z \quad (x, y, z \in \mathbb{R})$.

$\boxed{\text{III.}}$ **Teljességi axióma** (**Dedekind-axióma** vagy **szétválasztási axióma**). Legyen A és B a valós számok két nemüres részhalmaza. Ha minden $a \in A$ és minden $b \in B$ elemre $a \leq b$, akkor létezik olyan ξ valós szám, amelyre

$$\forall\, a \in A \quad \text{és} \quad \forall\, b \in B \quad \text{esetén} \quad a \leq \xi \leq b \quad \text{teljesül.}$$

M. Röviden azt is mondhatjuk, hogy $\mathbb{R}$ *egy rendezett teljes test*. Igazolható, hogy „lényegében” egy olyan struktúra van, amelyre a fenti axiómák teljesülnek.

Az $\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$, $\mathbb{R}_0^+ := \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$, $\mathbb{R}_0^- := \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ halmazok elemei a *pozitív*, a *nemnegatív*, a *negatív*, a *nempozitív* valós számok.

A test- és a rendezési axiómák következményei

D. Az összeadás és a szorzás mellett további műveleteket is értelmezhetünk: A **kivonás** művelete az

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto x - y := x + (-y).$$

függvény. Az $x - y$ számot x és y *különbségének* nevezzük. Az **osztás** művelete a következő függvény:

$$\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto \frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}.$$

Az $\frac{x}{y}$ számot x és y *hányadosának* mondjuk.

M. A műveletek axiómákban megfogalmazott tulajdonságaiból a valós számok jól ismert és sokszor alkalmazott tulajdonságai mind *levezethetők* (l. a **102.** feladatot).

M. A $\leq$ reláció mellett **további relációkat** is értelmezhetünk:

$<$ („kisebb"): $x < y \Leftrightarrow x \leq y$ és $x \neq y$,
$\geq$ („nagyobb vagy egyenlő"): $x \geq y \Leftrightarrow y \leq x$,
$>$ („nagyobb"): $x > y \Leftrightarrow x \geq y$ és $x \neq y$.

A rendezés egyéb jól ismert tulajdonságait is ismertnek vesszük (l. az **103.** feladatot).

A természetes számok halmaza

D. A $H \subset \mathbb{R}$ halmaz **induktív halmaz**, ha

(i) $1 \in H$,
(ii) minden $x \in H$ esetén $x + 1 \in H$.

T. 1° *Az* $\mathbb{R}$ *halmaz induktív halmaz.*
2° *Induktív halmazok közös része is induktív halmaz.*

D. Az $\mathbb{R}$ halmaz összes induktív részhalmazának a közös részét a **természetes számok halmazának** nevezzük, és az $\mathbb{N}$ szimbólummal jelöljük.

T. ***A teljes indukció elve.*** *Tegyük fel, hogy minden* n *természetes számra adott egy* $A(n)$ *állítás, és azt tudjuk, hogy*

(i) $A(1)$ *igaz,*
(ii) *ha* $A(n)$ *igaz, akkor* $A(n+1)$ *is igaz.*

Ekkor az $A(n)$ *állítás minden* n *természetes számra igaz.*

M. Az eddigiekből már bebizonyíthatóak a természetes számok megszokott tulajdonságai (l. a **104.** feladatot).

Az egész számok halmaza

D. Az x valós számot **egész számnak** nevezzük, ha $x = 0$ vagy $x \in \mathbb{N}$ vagy $-x \in \mathbb{N}$. Az egész számok halmazát a $\mathbb{Z}$ szimbólummal jelöljük.

T. 1° *Ha* $m, n \in \mathbb{Z}$, *akkor* $-n \in \mathbb{Z}$, $m + n \in \mathbb{Z}$ *és* $m \cdot n \in \mathbb{Z}$.

2° *Minden* $x \in \mathbb{R}$ *valós számhoz létezik egyetlen olyan* n *egész szám, amelyre* $n \leq x < n + 1$ *teljesül. Ezt az* n *egész számot az* x ***egész részének*** *nevezzük, és az* $[x]$ *szimbólummal jelöljük.*

A valós számok kibővített struktúrája

M. Több szempontból is hasznos, ha a valós számokhoz a végteleneket is hozzávesszük. Most megmutatjuk, hogy matematikailag egzakt módon hogyan lehet ezt megtenni. Ebben segítségünkre lesz persze a végtelenről kialakult intuitív képünk: a hétköznapi értelemben a végtelen „mindennél nagyobbat” jelent.
Induljunk ki abból, hogy kibővítjük a valós számok halmazát két elemmel, amelyeket **plusz végtelennek**, ill. **mínusz végtelennek** nevezünk, és a $+\infty$, ill. a $-\infty$ szimbólumokkal jelölünk. (Ugyanúgy, mint a valós számok esetében, a $+$ előjelet néhány esetben elhagyjuk.) A valós számok ezekkel bővített halmazára az

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

jelölést használjuk. A végtelennel kapcsolatban ne gondoljon az Olvasó semmi „misztikus” dologra! Kövessük a valós számoknál alkalmazott módszert (l. a **41.** oldalt): nem azt mondjuk meg, hogy mi a $+\infty$ és a $-\infty$ ($\mathbb{R}$-ben sem mondtuk meg, hogy mi a 0 és 1), hanem azt fogjuk megadni, hogy ezekre milyen műveleti és rendezési tulajdonságok lesznek érvényesek. Ezeket soroljuk fel az alábbi definícióban.

D. Tekintsük a valós számok $\mathbb{R}$ struktúráját. Az $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ halmazon a következő további műveleteket értelmezzük:

1° (i) Minden x valós számra

$$x + (+\infty) := (+\infty) + x := +\infty,$$
$$x + (-\infty) := (-\infty) + x := -\infty,$$

(ii) $\quad (+\infty) + (+\infty) := +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) := -\infty.$

2° (i) Minden x pozitív valós számra

$$x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := +\infty,$$
$$x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := -\infty.$$

(ii) Minden x negatív valós számra

$$x \cdot (+\infty) := (+\infty) \cdot x := -\infty,$$
$$x \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot x := +\infty.$$

(iii) $\quad (+\infty) \cdot (+\infty) := +\infty, \quad (-\infty) \cdot (-\infty) := +\infty,$
$\quad (+\infty) \cdot (-\infty) := (-\infty) \cdot (+\infty) := -\infty.$

3° Minden x valós számra

$$\frac{x}{+\infty} := \frac{x}{-\infty} := 0.$$

4^o Ha $x \in \mathbb{R}$ és $y \in \{-\infty, +\infty\}$ vagy $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $x \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor

$$\frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y}.$$

5^o A $<$ relációt az $\overline{\mathbb{R}}$ halmazra az alábbiak szerint terjesztjük ki:

$$\text{minden } x \text{ valós számra } -\infty < x < +\infty.$$

Az így kapott struktúrát a **valós számok kibővített struktúrájának** nevezzük, és (az egyszerűség végett ezt is) az $\overline{\mathbb{R}}$ szimbólummal jelöljük.

M. A matematikában gyakran különböző dolgok jelölésére ugyanazt a szimbólumot használjuk. A fenti megállapodásunknak megfelelően például a valós számok kibővített **struktúráját** és magát a **halmazt** is ugyanúgy jelöljük. Ez a pontatlanság megengedett, sőt célszerű is: a túl sok szimbólum az írásmódot áttekinthetetlenné tenné.

M. Figyelje meg az Olvasó, hogy a műveletek és rendezés definíciói összhangban vannak a végtelenről kialakult szemléletes képünkkel; pl. $x+(+\infty) := +\infty$ azzal, hogy egy valós szám és egy „mindennél nagyobb" szám összege „mindennél nagyobb".

M. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy $\overline{\mathbb{R}}$-on lényegében nem „igazi" műveleteket, azaz nem az $\overline{\mathbb{R}}\times\overline{\mathbb{R}}$ halmaz**on** értelmezett $\overline{\mathbb{R}}$-beli értékeket felvevő függvényeket értelmeztünk. (Az $\overline{\mathbb{R}}$ struktúra tehát **nem test**.) Bizonyos rendezett párokhoz ugyanis nem rendeltünk semmilyen $\overline{\mathbb{R}}$-beli elemet, vagyis bizonyos műveleteket nem definiáltunk.

Jegyezze meg jól, hogy **nem értelmeztük**

(a) a $+\infty$ és a $-\infty$ (illetve a $-\infty$ és a $+\infty$) elemek összegét,

(b) 0 és $+\infty$ (illetve 0 és $-\infty$) elemek szorzatát,

(c) az $\frac{x}{y}$ hányadost, ha $y = 0$, vagy ha $x \in \{-\infty, +\infty\}$ és $y \in \{-\infty, +\infty\}$.

Egyelőre fogadjuk el azt, hogy a fenti műveleteket „értelmes" módon nem is lehet definiálni. Később (l. a **75.** oldalt) majd megindokoljuk ezt a kijelentésünket.

■ Feladatok

99. Azt mondjuk, hogy a $c \in \mathbb{R}$ szám *szétválasztja* a nemüres A és B $\mathbb{R}$-beli halmazokat, ha az $a \le c \le b$ egyenlőtlenség minden $a \in A$ és minden $b \in B$ esetén teljesül. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy $c \in \mathbb{R}$ **nem** választja szét az A és a B halmazt.

100. Az $A := \{0, 1\}$ halmazon az összeadást ($\oplus$), a szorzást ($\odot$) és a rendezést (r) a következőképpen értelmezzük:

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	0

$\odot$	0	1
0	0	0
1	0	1

$$r := \{(0,0),\ (1,1),\ (0,1)\}.$$

Teljesülnek-e A-ban a testaxiómák, a rendezési axiómák, illetve a teljességi axióma?

101. Definiáljuk az $X \subset \mathbb{R}$ halmazt a következőképpen:

$$X := \{a + b\sqrt{2} \in \mathbb{R} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}.$$

Igazolja, hogy X a szokásos $\mathbb{R}$-beli összeadással és szorzással testet alkot. Mutassa meg, hogy $\mathbb{Q} \neq X \neq \mathbb{R}$.

102. A valós számokra vonatkozó testaxiómák felhasználásával igazolja az alábbi, jól ismert állításokat:

(a) Az $\mathbb{R}$-beli nullelem, az egység, az ellentett és a reciprok egyértelmű.

(b) Ha $x, y, z, w \in \mathbb{R}$, $w \neq 0$, akkor
  (α) $x + z = y + z \quad \Longrightarrow \quad x = y$,
  (β) $x \cdot w = y \cdot w \quad \Longrightarrow \quad x = y$;

(c) Minden $x \in \mathbb{R}$ valós számra $x \cdot 0 = 0$.

(d) Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $x \cdot y = 0 \iff x = 0$ vagy $y = 0$.

(e) Minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén $(-x) + (-y) = -(x + y)$.

(f) Bármely x valós számra $(-1) \cdot x = (-x)$ és $-(-x) = x$.

(g) Ha $x, y \in \mathbb{R}$, akkor $(-x) \cdot y = -(x \cdot y) = x \cdot (-y)$ és $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$.

(h) Ha $x, y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor
  (α) $x \cdot y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $(x \cdot y)^{-1} = x^{-1} \cdot y^{-1}$,
  (β) $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$;

(i) Ha $x, y, u, v \in \mathbb{R}$, $y \neq 0$, $v \neq 0$, akkor

(α) $\dfrac{x}{y} = \dfrac{u}{v} \quad \Longleftrightarrow \quad x \cdot v = y \cdot u$;

(β) $\dfrac{x}{y} + \dfrac{u}{v} = \dfrac{x \cdot v + y \cdot u}{y \cdot v}$;

(γ) $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{u}{v} = \dfrac{x \cdot u}{y \cdot v}$;

(δ) $\dfrac{x}{y} \cdot \left(\dfrac{u}{v}\right)^{-1} = \dfrac{x \cdot v}{y \cdot u}$, ha $u \neq 0$.

103. A valós számokra vonatkozó test- és rendezési axiómákat felhasználva mutassa meg az egyenlőtlenségekkel kapcsolatos alábbi, jól ismert állításokat ($a, b \in \mathbb{R}$):

(a) Ha $a \leq b$ és $c \leq d$, akkor $a + c \leq b + d$.

(b) Ha $0 \leq a \leq b$ és $0 \leq c \leq d$, akkor $a \cdot c \leq b \cdot d$.

(c) $a \leq b \Leftrightarrow (-a) \geq (-b) \Leftrightarrow (-1) \cdot a \geq (-1) \cdot b$.

(d) $a \cdot a \geq 0$.

(e) $a \cdot b \geq 0 \Leftrightarrow$ ha ($a \geq 0$ és $b \geq 0$) vagy ($a \leq 0$ és $b \leq 0$).

(f) $\dfrac{a}{b} \geq 0 \Leftrightarrow$ ha ($a \geq 0$ és $b > 0$) vagy ($a \leq 0$ és $b < 0$).

104. A természetes számok definícióját, valamint a teljes indukció módszerét alkalmazva igazolja az alábbi állításokat:

(a) Ha $m, n \in \mathbb{N}$, akkor $m + n \in \mathbb{N}$ és $m \cdot n \in \mathbb{N}$.

(b) Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $n \geq 1 > 0$.

(c) Ha $m, n \in \mathbb{N}$ és $m > n$, akkor $m - n \in \mathbb{N}$.

(d) Tetszőleges n természetes szám és a rákövetkezője (azaz $n+1$) között nincs természetes szám.

3.2. A teljességi axióma következményei

A szuprémum-elv

D. 1^o A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak **van legnagyobb eleme** (más szóval: **van maximuma**), ha

$$\exists\, \alpha \in H, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } x \le \alpha.$$

Az ilyen tulajdonságú α számot a H halmaz **legnagyobb elemének** (vagy **maximumának**) nevezzük, és a $\max H$ szimbólummal jelöljük.

2^o A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaznak **van legkisebb eleme** (más szóval: **van minimuma**), ha

$$\exists\, \beta \in H, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } \beta \le x.$$

Az ilyen tulajdonságú β számot H **legkisebb elemének** (vagy **minimumának**) nevezzük, és a $\min H$ szimbólummal jelöljük.

D. 1^o A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz **felülről korlátos**, ha

$$\exists\, K \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } x \le K.$$

Az ilyen K számot a H halmaz egy **felső korlátjának** nevezzük.

2^o A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz **alulról korlátos**, ha

$$\exists\, k \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, x \in H \text{ esetén } k \le x.$$

Az ilyen k számot a H halmaz egy **alsó korlátjának** nevezzük.

3^o A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz **korlátos**, ha alulról is, felülről is korlátos.

T. *A nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz akkor és csak akkor korlátos, ha $\exists\, K \in \mathbb{R}$, amelyre $|x| \le K$ teljesül $\forall\, x \in H$ esetén.*

T. ***A szuprémum-elv.*** *Legyen $H \subset \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy*

(i) $H \ne \emptyset$ *és*

(ii) H *felülről korlátos.*

Ekkor

$$\exists\, \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

Azaz $\mathbb{R}$ minden nemüres, felülről korlátos részhalmazának felső korlátjai között van legkisebb.

D. A nemüres és felülről korlátos $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legkisebb felső korlátját a H halmaz **szuprémumának** (vagy **felső határának**) nevezzük, és a $\sup H$ szimbólummal jelöljük:

$$\sup H := \min\{K \in \mathbb{R} \mid K \text{ felső korlátja } H\text{-nak}\}.$$

T. *A nemüres és felülről korlátos* $H \subset \mathbb{R}$ *halmaznak a* ξ *valós szám akkor és csak akkor szuprémuma, ha*

(i) $\forall x \in H$ *esetén* $x \le \xi$ (*azaz* ξ *felső korlátja* H*-nak*),

(ii) $\forall \alpha < \xi$ *számhoz* $\exists x \in H$, *amelyre* $x > \alpha$ (*azaz minden* ξ*-nél kisebb* α *szám már nem felső korlátja* H*-nak*).

T. *A teljességi axióma egyenértékű a szuprémum-elvvel.*

T. *Minden nemüres és alulról korlátos számhalmaznak van legnagyobb alsó korlátja.*

D. A nemüres és alulról korlátos $H \subset \mathbb{R}$ számhalmaz legnagyobb alsó korlátját a H halmaz **infimumának** (vagy **alsó határának**) nevezzük, és az $\inf H$ szimbólummal jelöljük:

$$\inf H := \max\{k \in \mathbb{R} \mid k \text{ alsó korlátja } H\text{-nak}\}.$$

T. *A nemüres és alulról korlátos* $H \subset \mathbb{R}$ *halmaznak a* ξ *valós szám akkor és csak akkor infimuma, ha*

(i) $\forall x \in H$ *esetén* $\xi \le x$ (*azaz* ξ *alsó korlátja* H*-nak*),

(ii) $\forall \alpha > \xi$ *számhoz* $\exists x \in H$, *amelyre* $x < \alpha$ (*azaz minden* ξ*-nél nagyobb* α *szám már nem alsó korlátja* H*-nak*).

D. Egy nemüres és felülről [alulról] nem korlátos $H \subset \mathbb{R}$ halmaz szuprémumát [infimumát] így értelmezzük:

$$\sup H := +\infty \qquad [\inf H := -\infty].$$

T. *Legyen* $H \subset \mathbb{R}$ *egy nemüres halmaz.*

1° H*-nak akkor és csak akkor van maximuma, ha* $\sup H \in H$.

2° *Ha* H*-nak van maximuma, akkor* $\max H = \sup H$.

3° *Ha* $\sup H \notin H$, *akkor* H*-nak nincs maximuma.*

T. *Legyen* $H \subset \mathbb{R}$ *egy nemüres halmaz.*

1° H*-nak pontosan akkor van minimuma, ha* $\inf H \in H$.

2° *Ha* H*-nak van minimuma, akkor* $\min H = \inf H$.

3° *Ha* $\inf H \notin H$*, akkor* H*-nak nincs minimuma.*

M. A szuprémum a maximum általánosításaként fogható fel. Egy halmaznak általában nincsen maximuma (például $H := \{1 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$). Ilyenkor ennek szerepét a szuprémum veszi át. Hasonló érvényes a minimum általánosításának tekinthető infimumra.

Az archimédészi tulajdonság és a Cantor-tulajdonság

T. ***Az archimédészi tulajdonság.*** *Minden* $a > 0$ *és minden* b *valós számhoz létezik olyan* n *természetes szám, hogy* $b < n \cdot a$*, azaz*

$$\forall\, a \in \mathbb{R}^+ \text{ és } \forall\, b \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad \exists\, n \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \quad b < n \cdot a.$$

K. 1° $\mathbb{N}$ *a valós számok felülről nem korlátos részhalmaza.*

2° $\mathbb{N}$ *bármely nemüres részhalmazának van minimuma.*

T. ***A Cantor-tulajdonság.*** *Ha minden* n *természetes számra adott az* $[a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ *zárt intervallum úgy, hogy*

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] \quad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor az intervallumrendszer közös része nem üres, azaz

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{hogy} \quad \xi \in [a_n, b_n] \quad \text{minden} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{esetén.}$$

M. A Cantor-tulajdonságot úgy szoktuk szavakba foglalni, hogy *egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumok közös része nem üres.*

M. Jegyezze meg jól, hogy ha a fenti tételben az intervallumokra akár a korlátosságot, akár a zártságot nem kötjük ki, akkor az állítás nem igaz. Íme az ellenpéldák:

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \Big(0, \frac{1}{n}\Big] = \emptyset, \qquad \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [n, +\infty) = \emptyset.$$

(Igazolja ezeket az állításokat.)

T. *Az archimédészi és a Cantor-tulajdonság együtt ekvivalens a teljességi axiómával.*

A gyökvonás

M. Idézzük fel a négyzetgyök középiskolában tanult fogalmát: *a nemnegatív α valós szám négyzetgyökén azt a nemnegatív számot értjük, amelynek a négyzete α.* Vegyük észre, hogy ennek a definíciónak csak akkor van értelme, ha minden nemnegatív α valós számhoz létezik egyetlen olyan nemnegatív valós szám, amelynek a négyzete α. Alapvető tény az, hogy a valós számok ismertetett axiómarendszeréből ez az állítás levezethető; sőt ennél több is bizonyítható.

T. ***Gyökvonás:*** *Minden $\alpha \geq 0$ valós számhoz és minden n természetes számhoz létezik egyetlen olyan $\xi \geq 0$ valós szám, amelyre $\xi^n = \alpha$. Ezt a nemnegatív ξ számot az α nemnegatív szám **n-edik gyökének** nevezzük, és az $\sqrt[n]{\alpha}$ vagy az $\alpha^{\frac{1}{n}}$ szimbólumok valamelyikével jelöljük.* (L. a **116.** feladatot.)

M. Az n számot az $\sqrt[n]{\alpha}$ kifejezés **gyökkitevőjének** nevezzük. Az $n = 2$ esetben – azaz **négyzetgyök** esetén – a gyökkitevőt elhagyva a $\sqrt{\alpha}$ jelölést használjuk. Megjegyezzük, hogy ha az n páros szám, akkor bármelyik α pozitív számhoz két olyan valós szám is létezik, amelynek n-edik hatványa α, az $\sqrt[n]{\alpha}$ és a $-\sqrt[n]{\alpha}$. Mivel minden valós szám páros kitevőjű hatványa nemnegatív, ezért a negatív számoknak – a korábban definiált módon – nem értelmezhető páros kitevőjű gyöke a valós számok körében. Ez teszi szükségessé a valós számok kibővítését.

M. A gyökvonás azonosságait nem részletezzük, azok ismeretét feltételezzük.

A racionális és az irracionális számok halmaza

D. Az x valós számot **racionális számnak** nevezzük, ha $x = \dfrac{p}{q}$ alakú, ahol $p \in \mathbb{Z}$ és $q \in \mathbb{N}$. A racionális számok halmazát a $\mathbb{Q}$ szimbólummal jelöljük.

T. *$\mathbb{Q}$ az $\mathbb{R}$-beli műveletekkel és rendezéssel*

1° *rendezett test, azaz teljesülnek benne a test- és a rendezési axiómák.*
2° *$\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$. A $\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazt az **irracionális számok** halmazának nevezzük.*
3° *$\mathbb{Q}$-ban a teljességi axióma nem teljesül.*

T. *Minden nemelfajuló $\mathbb{R}$-beli intervallum végtelen sok racionális számot és végtelen sok irracionális számot tartalmaz.*

M. Valós számokat **tizedes tört** alakban is felírhatjuk. A korábbi tanulmányokban megszerzett ismereteket feltételezzük. Azt azonban kiemeljük, hogy a racionális számokat *véges* vagy *végtelen szakaszos*, az irracionális számokat pedig *nem szakaszos végtelen tizedes tört* alakban lehet felírni. Később (l. a **103.** oldalt) majd vázoljuk, hogy a tizedes törteket matematikailag pontos módon hogyan lehet bevezetni.

M. $\sqrt[n]{\alpha}$ igen sok esetben (pl. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ stb.) irracionális szám. Alapvető kérdés az (gondoljon például a legegyszerűbb számológépekre), hogy az ilyen számokat hogyan lehet racionális számokkal közelíteni. A gyökvonásra vonatkozó tétel bizonyításából (l. a **116.** feladat megoldását)

$$\sqrt[n]{\alpha} = \sup\{\, x \in \mathbb{R} \mid x^n \leq \alpha \,\}$$

adódik. A Cantor-tulajdonság felhasználásával ez alapján $\sqrt[n]{\alpha}$-hoz „közeli” racionális számot egy egyszerű („intervallumfelezésen” alapuló) eljárással adhatunk meg (l. a **115.** feladatot). A sorozatoknál visszatérünk ehhez a fontos problémához, és ott (l. a **86.** oldal megjegyzését) majd egy másik, „hatékonyabb” eljárást ismertetünk az $\sqrt[n]{\alpha}$ szám racionális megközelítésére.

■ A-feladatok

105. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy a nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak

(a) *nincs* maximuma; (b) *nincs* minimuma.

106. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy a nemüres $H \subset \mathbb{R}$ halmaz

(a) felülről *nem* korlátos;

(b) alulról *nem* korlátos;

(c) *nem* korlátos.

107. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ nemüres halmaz és $\xi \in \mathbb{R}$. Mit jelent *a* H *halmaz elemeire nézve* az, hogy

(a) $\xi = \sup H$;

(b) $\xi = \inf H$;

(c) ξ *nem* szuprémuma H-nak;

(d) ξ *nem* infimuma H-nak?

108. Bizonyítsa be, hogy az

$$H := \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{2 - \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$$

halmaz infimuma 0 és szuprémuma 2. Van-e H-nak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

109. Legyen $H \subset \mathbb{R}$ egy *nem véges* halmaz és $\sup H = \alpha \in \mathbb{R}$. Igaz-e, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ esetén az α szám ε-sugarú környezetében végtelen sok eleme van H-nak?

■ B-feladatok

110. Határozza meg a

$$H := \left\{ \frac{2x+2}{3x+5} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [-1, +\infty) \right\}$$

halmaz szuprémumát. Van-e H-nak legnagyobb eleme?

111. Mivel egyenlő a

$$H := \left\{ \sqrt{x+1} - \sqrt{x} \mid x \in (0, +\infty) \right\}$$

halmaz infimuma? Van-e a halmaznak legkisebb eleme?

112. Mutassa meg, hogy ha A és B az $\mathbb{R}$ halmaz nemüres részhalmazai, akkor

$$\sup A \le \inf B \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, a \in A \text{ és } \forall\, b \in B \text{ esetén } a \le b.$$

113. Bizonyítsa be, hogy a szuprémum-elvből következik a teljességi axiómában megfogalmazott állítás.

114. Igazolja, hogy az archimédészi és a Cantor-tulajdonság együtteséből levezethető a teljességi axiómában megfogalmazott állítás.

115. **A $\sqrt{2}$ létezése.** Mutassa meg, hogy az $A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \le 2\}$ nemüres, felülről korlátos halmaz és a $\xi := \sup A$ jelöléssel $\xi^2 = 2$. A ξ számot a 2 valós szám *négyzetgyökének* nevezzük, és $\sqrt{2}$-vel jelöljük. Bizonyítsa be azt is, hogy $\sqrt{2}$ egy irracionális szám, és határozza meg az első három tizedesjegyét.

116. **Gyökvonás.** Lássa be, hogy minden $\alpha \ge 0$ valós számhoz és minden n természetes számhoz létezik egyetlen olyan $\xi \ge 0$ valós szám, amelyre $\xi^n = \alpha$. ξ-t az α szám n*-edik gyökének* nevezzük, és így jelöljük: $\sqrt[n]{\alpha}$.

117. Bizonyítsa be, hogy $\mathbb{Q}$-ban a teljességi axióma nem teljesül.

■ C-feladatok

118. Legyen

$$H_1 := \left\{\frac{1}{n} + (-1)^n \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$H_2 := \left\{1 + \frac{(-1)^n}{n} \in \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\right\},$$
$$H_3 := \left\{\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^m} \in \mathbb{R} \mid n, m \in \mathbb{N}\right\}.$$

Bizonyítsa be, hogy a fenti halmazok korlátosak, és határozza meg a szuprémumukat és az infimumukat. Van-e a halmazoknak maximuma, illetve minimuma?

119. Korlátos-e alulról, illetve felülről a

(a) $H := \left\{\frac{8x+3}{5x+4} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [0, +\infty)\right\};$

(b) $H := \left\{\frac{x^2+1}{3x^2+2} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\};$

(c) $H := \left\{\frac{|x|-2}{|x|+2} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \mathbb{R}\right\};$

(d) $H := \left\{\frac{1-x^2}{2x^2+5x+3} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in [-\frac{1}{2}, +\infty)\right\};$

(e) $H := \left\{\frac{2x+3}{3x+1} \in \mathbb{R} \;\middle|\; x \in \mathbb{Z}\right\};$

(f) $H := \left\{\frac{x}{y} \in \mathbb{R} \;\middle|\; 0 < x < 1,\ \ 0 < y < x\right\};$

(g) $H := \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{R} \;\middle|\; m, n \in \mathbb{N},\ \ m \leq n\right\};$

(h) $H := \left\{\frac{p}{q} \in \mathbb{R} \;\middle|\; p, q \in \mathbb{Z},\ \ p^2 < 2q^2\right\}$

halmaz? Ha igen, akkor számítsa ki $\sup H$-t és $\inf H$-t! Van-e a H halmaznak legnagyobb, illetve legkisebb eleme?

120. Tetszőleges nemüres $A \subset \mathbb{R}$ esetén legyen $-A := \{-a \in \mathbb{R} \mid a \in A\}$. Igazolja, hogy

(a) az A halmaz akkor és csak akkor alulról korlátos, ha $-A$ felülről korlátos, és ebben az esetben $\inf A = -\sup(-A)$;

(b) az A halmaz akkor és csak akkor felülről korlátos, ha $-A$ alulról korlátos, és ebben az esetben $\sup A = -\inf(-A)$;

(c) $\sup A = +\infty \iff \inf(-A) = -\infty$, illetve
$\inf A = -\infty \iff \sup(-A) = +\infty$.

121. Bizonyítsa be, hogy a valós számok tetszőleges A és B nemüres és korlátos részhalmazaira

(a) $\sup\{a + b \mid a \in A \text{ és } b \in B\} = \sup A + \sup B$,
$\inf\{a + b \mid a \in A \text{ és } b \in B\} = \inf A + \inf B$;

(b) ha A és B minden eleme pozitív, akkor
$\sup\{ab \mid a \in A \text{ és } b \in B\} = \sup A \cdot \sup B$,
$\inf\{ab \mid a \in A \text{ és } b \in B\} = \inf A \cdot \inf B$.

122. Igazolja, hogy bármely $A, B \subset \mathbb{R}$ nemüres, korlátos halmazok esetében

(a) $\inf(A \cup B) = \min\{\inf A, \inf B\}$,
$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$;

(b) ha $A \cap B \neq \emptyset$, akkor
$\inf(A \cap B) \geq \max\{\inf A, \inf B\}$,
$\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$;

(c) ha $A \subset B$, akkor $\inf A \geq \inf B$ és $\sup A \leq \sup B$.

Adjon példát olyan A, B halmazokra, hogy (b)-ben $\leq$ ($\geq$) helyett $<$ ($>$) legyen írható.

3.3. A komplex számtest

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. A valós számok matematikai fogalma a tudomány előrehaladása során több lépcsős absztrakció útján, igen hosszú fejlődési folyamat eredményeként a XIX. század végére alakult ki. A valós számkör bővítésének az igénye már a XVI. század elején felvetődött. Ekkor vált ismertté a harmadfokú egyenlet megoldására vonatkozó képlet. Ez azonban csődöt mondott az olyan esetekben, amikor az egyenletnek három pozitív valós gyöke van, mégpedig azért, mert ekkor a négyzetgyök alatt negatív valós számok lépnek fel. A kor (elsősorban itáliai) matematikusai sokat fáradoztak a képlet értelmezésén. Az a gyümölcsöző és merész vállalkozás, amely az ilyen esetek kezelésére irányult, R. Bombelli itáliai matematikus és mérnök nevéhez fűződik. 1572-ben megjelent könyvében vetette fel azt a gondolatot, hogy

az olyan kifejezéseket, amelyekben négyzetgyök alatt negatív valós szám szerepel, átmenetileg számoknak lehetne tekinteni. Megadta a velük végzett műveletek szabályait, és megmutatta, hogy ha ezekkel használják az említett képletet, akkor az eljárás végén az ilyen kifejezések kioltják egymást, és végeredményként valós szám adódik.
A matematikusok sokáig nem tudták megmagyarázni az ilyen célra bevezetett kifejezések pontos értelmét, s ezért valamiféle babonás tisztelettel kezelték azokat. Még ma is emlékeztet a „képzetes" elnevezés arra, hogy ezeket a kifejezéseket valamiképpen nem valóságosnak, kitaláltnak tekintették. A komplex számok alkalmazásának jogossága körüli kétségek csak a XIX. század elején tűntek el, amikor ezeknek a számoknak a fontossága a matematika sok ágában nyilvánvalóvá lett, és amikor a komplex számokkal végzett műveletek számára sikerült egyszerű geometriai interpretációt találni. A pontos értelmezés szempontjából természetesen felesleges minden geometriai szemléltetés. Az összeadás és a szorzás formális definíciója alapján közvetlenül adódnak a komplex számokkal végzett műveletek formális szabályai. De a geometriai értelmezés – amit körülbelül egy időben fedezett fel C. Wessel (1745–1818), J. R. Argand (1768–1822) és C. F. Gauss (1777–1855) – természetesebbé tette a komplex számokkal végzett műveleteket intuitív szempontból, s a komplex számok geometriai szemléltetése azóta is elsőrendű fontosságú.

T. *A rendezett valós számpárok* $\mathbb{R}^2 := \big\{(a,b) \mid a,b \in \mathbb{R}\big\}$ *halmaza az*

$$(a_1,b_1)+(a_2,b_2) := (a_1+a_2, b_1+b_2)$$
$$(a_1,b_1)\cdot(a_2,b_2) := (a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2-a_2b_1)$$

műveletekkel testet alkot, azaz teljesülnek a testaxiómákban megfogalmazott tulajdonságok (l. a **41**. *oldalt). Ezt a struktúrát* ***komplex számtestnek*** *nevezzük, és jelölésére a* $\mathbb{C}$ *szimbólumot használjuk.*

M. A következő tétel azt állítja, hogy a komplex számtest valóban a valós számok körének kibővítése.

T. *Legyen* $\widehat{\mathbb{R}} := \{(a,0) \mid a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$. *A*

$$\varphi : \mathbb{R} \to \widehat{\mathbb{R}}, \qquad \varphi(a) := (a,0)$$

leképezés egy művelettartó bijekció $\mathbb{R}$ *és* $\widehat{\mathbb{R}}$ *között (röviden* $\mathbb{R}$ *és* $\widehat{\mathbb{R}}$ ***izomorfak****), azaz* φ *bijekció és minden* $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ *számra*

$$\varphi(a_1+a_2) = \varphi(a_1)+\varphi(a_2)$$
$$\varphi(a_1\cdot a_2) = \varphi(a_1)\cdot\varphi(a_2).$$

M. A φ leképezés tehát $\mathbb{R}$-beli összeget, illetve szorzatot $\widehat{\mathbb{R}}$-beli összegbe, illetve szorzatba visz át, és ezért a két halmaz algebrai szempontból azonosnak tekinthető, más szóval izomorfak egymással. Az a valós számot tehát az $(a,0)$ rendezett párral azonosíthatjuk: $a \equiv (a, 0)$. Ebben az értelemben tehát $\mathbb{C}$ valóban az $\mathbb{R}$ egy bővítése.

Igen egyszerűvé válnak a jelölések, ha bevezetjük az

$$i := (0, 1)$$

képzetes (vagy **imaginárius**) **egységet**. Ekkor ugyanis

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b) = (a, 0) + (0, 1)(b, 0) \equiv a + ib.$$

Ez az azonosítás – csakúgy, mint a többi a számfogalom bővítése során – már annyira megszokott, hogy egyszerű tartalmazást és egyenlőséget írunk:

$$\mathbb{R} \subset \mathbb{C}, \qquad a = (a, 0) \qquad \text{és} \qquad (a, b) = a + ib.$$

A komplex számok szorzásának definíciója alapján kapjuk a következő fontos egyenlőséget:

$$i^2 = -1.$$

Természetesen egy komplex számot jelölhetünk egyetlen betűvel is: $z = a + ib$.

D. A $z = a + ib$ komplex számnak, ahol a és b valós, a **valós** (**reális**) **része** a, **képzetes** (**imaginárius**) **része** b. Jelölésben: $\operatorname{Re} z = a$, $\operatorname{Im} z = b$.

A $\bar{z} := a - ib$ komplex számot z **konjugáltjának** nevezzük. z **abszolút értékét** pedig így értelmezzük: $|z| := \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{z\bar{z}}$.

M. Komplex számokat a sík pontjaival szemléltetjük: a $z = a + ib$ komplex számot azzal a ponttal, amelynek a derékszögű koordinátái a és b. Célszerű a pontba mutató helyvektort is komplex számnak tekinteni. A vízszintes tengelyt **valós tengelynek**, a függőlegeset pedig **képzetes tengelynek** nevezzük.

M. Van tehát olyan komplex szám, amelynek a négyzete negatív valós szám: $i^2 = -1$, sőt minden negatív valós szám valamely komplex szám négyzete. A komplex számok bevezetésével tehát megoldódott a negatív számokból való gyökvonás problémája. Persze a komplex számok ennél sokkal többet tudnak: a kibővített számtest bármely elemének minden $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ esetén létezik n-edik gyöke.

Megelőlegezzük a szögek, valamint a szinusz- és koszinuszfüggvény ismeretét. Ezek szemléletes értelmezését és tulajdonságait illetően a középiskolai tanulmányokra utalunk. Ezek birtokában ugyanis a komplex számokat az eddigiektől eltérő módon, a szorzás, hatványozás, gyökvonás szempontjából jobban kezelhető formában (**trigonometrikus alakban**) adhatjuk meg.

T. *Minden $z \in \mathbb{C}$ komplex szám felírható a*

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

úgynevezett ***trigonometrikus alakban****, ahol $r \geq 0$ valós és $\varphi \in \mathbb{R}$; ha $r \neq 0$ (a komplex szám nem nulla), akkor az előállítás egyértelmű a $\varphi \in [0, 2\pi)$ kikötéssel.*

M. Ha a trigonometrikus alakban megadott $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ komplex számnak a síkon a P pontot feleltetjük meg, akkor r geometriai jelentése a P és az origó távolsága, ezért r-et a komplex szám **abszolút értékének** nevezzük. φ jelentése pedig az OP félegyenesnek a valós tengely pozitív ágával bezért szög, ezért φ-t a komplex szám **szögének** (vagy **argumentumának**) hívjuk.

T. *Ha $n \in \mathbb{N}$, akkor a $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ trigonometrikus alakban megadott komplex szám n-edik hatványára a*

$$z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$$

Moivre-formula *teljesül.*

D. Egy z komplex szám n-edik **gyökeinek** hívjuk azokat a komplex számokat, amelyeknek az n-edik hatványa z.

T. *Legyen $n \in \mathbb{N}$. Minden nem nulla komplex számnak pontosan n különböző n-edik gyöke van. A trigonometrikus alakban megadott $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r > 0)$ komplex szám különböző n-edik gyökei:*

$$\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

T. ***Az algebra alaptétele:*** *Minden*

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$
$$a_n \neq 0, \quad n \geq 1, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$$

polinomnak van gyöke a komplex számtestben, azaz létezik olyan z_0 komplex szám, amelyre $p(z_0) = 0$ teljesül.

■ Feladatok

123. Bizonyítsa be, hogy minden $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számra

(a) $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$; (b) $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$;

(c) $\overline{\overline{z}} = z$; (d) $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$;

(e) $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$, $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

124. Igazolja, hogy minden z komplex számra

(a) z akkor és csak akkor valós, ha $z = \overline{z}$;

(b) $\left|\operatorname{Re} z\right| \leq \left|z\right|$, $\left|\operatorname{Im} z\right| \leq \left|z\right|$;

(c) $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$, $\operatorname{Im}(iz) = \operatorname{Re} z$.

125. Mutassa meg, hogy a komplex számok abszolút értéke a valósakéhoz hasonló tulajdonságokkal rendelkezik: bármely $z, w \in \mathbb{C}$ komplex számra

(a) $|z| \geq 0$; $|z| = 0$ akkor és csak akkor, ha $z = 0$;

(b) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$;

(c) $|z + w| \leq |z| + |w|$;

(d) $\big||z| - |w|\big| \leq |z - w|$.

4. Számsorozatok

4.1. A valós sorozat fogalma. Elemi tulajdonságok

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

D. 1^o A természetes számok halmazán értelmezett függvényeket **sorozatoknak** hívjuk. Ha X egy nemüres halmaz, akkor $x : \mathbb{N} \to X$ egy **X-beli sorozat**. Ennek a függvénynek az $n \in \mathbb{N}$ helyen felvett $x(n)$ helyettesítési értékét az x sorozat **n-edik tagjának** nevezzük, és az x_n szimbólummal jelöljük, az n számot pedig az x_n tag **indexének** mondjuk. Ezt felhasználva magát a sorozatot gyakran úgy jelöljük, hogy $(x_n, n \in \mathbb{N})$ vagy (x_n).

2^o Egy $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt **valós sorozatnak** nevezünk.

M. 1^o Minden rögzített r egész szám esetén az $\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq r\} \to \mathbb{R}$ függvényeket is sorozatoknak tekintjük. A további definíciók, tételek (az értelemszerű módosításokkal) ezekre is érvényesek lesznek, de ezt külön nem fogjuk hangsúlyozni.

2^o **Sorozatok megadása.** Egy $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat megadása tehát azt jelenti, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén megadjuk a_n-et. Ez történhet **explicit módon**. Például:

(a) $a_n := 3n^2 + 2 \quad (n \in \mathbb{N})$;

(b) $a_n := \sqrt{n^2 - 100} \quad (n = 10, 11, 12, \ldots)$;

(c) $a_n := \begin{cases} 2n^2, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \\ n, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases}$

Sorozatot megadhatunk azonban úgy is, hogy megadjuk a sorozat első (néhány) tagját, a további tagokat pedig az előttük levő(k) felhasználásával definiáljuk. Az ilyen esetekben azt mondjuk, hogy a sorozatot **rekurzív módon** adtuk meg. Például:

(d) $a_1 := 1$, $a_n := a_{n-1} + 2$ $(n = 2, 3, \ldots)$;

(e) $a_1 := -1$, $a_n := 3 + a_{n-1}^2$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

Sorozatok ilyetén formán való megadását *egylépéses rekurziónak* nevezzük. k *lépéses rekurzióról* beszélünk akkor, ha a sorozat egy tagját az előtte levő k tag függvényében adjuk meg. Kétlépéses rekurzióra egy példa:

(f) $a_1 := 0$, $a_2 := 1$ és $a_n := a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

(Ezt a sorozatot *Fibonacci-sorozatnak* nevezzük.)

3° **A rekurzív sorozatokról** először azt jegyezzük meg, hogy a rekurzív összefüggésből kiindulva néhány esetben viszonylag egyszerűen meg lehet adni a sorozat n-edik tagját az n index függvényében (l. például a számtani sorozatokat).

Vessük fel azonban azt a kérdést is, hogy (például egylépéses) rekurzióval vajon „jól definiáltunk-e” egy sorozatot, azaz ha megadjuk a sorozat kezdőtagját és azt, hogy az $(n+1)$-edik tag hogyan függ az n-edik tagtól, akkor ezek már egyértelműen meghatározzák-e minden n természetes szám esetén a sorozat n-edik tagját. Az intuíciónk szerint erre a kérdésre annyira nyilvánvalóan „igen” a válaszunk, hogy az első pillanatban a kérdés felvetése sem tűnik indokoltnak. A megérzésünk természetesen helyes, és ezt be is lehet bizonyítani. Az egylépéses rekurziókra érvényes

a rekurziótétel: *Ha* $f : A \to A$ $(A \subset \mathbb{R},\ A \neq \emptyset)$ *egy tetszőleges függvény és* $\alpha \in \mathbb{R}$ *egy adott valós szám, akkor egyértelműen létezik olyan* (a_n) *valós sorozat, amelyre* $a_1 = \alpha$ *és* $a_{n+1} = f(a_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ *teljesül.*

Megjegyezzük még azt is, hogy többlépéses rekurziókra is hasonló állítás érvényes.

T. *Az* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *és a* $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat akkor és csak akkor egyenlő, ha bármely index esetén az azonos indexű tagok egyenlőek, azaz* $a_n = b_n$ *minden* $n \in \mathbb{N}$ *számra teljesül.*

D. Az (a_n) valós sorozat **monoton növekedő** [**szigorúan monoton növekedő**], ha

$$a_n \le a_{n+1} \qquad [a_n < a_{n+1}] \qquad (n \in \mathbb{N});$$

monoton csökkenő [**szigorúan monoton csökkenő**], ha

$$a_n \ge a_{n+1} \qquad [a_n > a_{n+1}] \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ezen sorozatok közös neve a **monoton sorozat**.

M. Sorozat monotonitását sokszor a teljes indukció elvével igazolhatjuk. Gyakran hasznos lehet, ha a monotonitás definíciójában szereplő egyenlőtlenség helyett egy vele ekvivalens egyenlőtlenséget próbálunk igazolni. Például:

$$a_{n+1} \ge a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{n+1} - a_n \ge 0 \quad (n \in \mathbb{N});$$

ha $a_n > 0$ ninden n-re, akkor

$$a_{n+1} \ge a_n \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

D. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat **alulról korlátos**, ha létezik olyan $k \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ indexre $a_n \geq k$; **felülről korlátos**, ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}$ szám, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $a_n \leq K$; **korlátos**, ha alulról is, felülről is korlátos.

T. *Az (a_n) valós sorozat pontosan akkor korlátos, ha az értékkészlete korlátos, azaz ha létezik olyan $K \in \mathbb{R}^+$ szám, hogy $|a_n| \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.*

M. Sorozat korlátosságát, például egy „megsejtett” felső korlátot sok esetben a teljes indukció módszerével igazolhatjuk.

D. Az $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat értékkészletének szuprémumát [infimumát] a **sorozat szuprémumának** [**infimumának**] nevezzük:

$$\sup a := \sup \mathcal{R}_a = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$
$$[\inf a := \inf \mathcal{R}_a = \inf\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}].$$

■ A-feladatok

126. Mutassa meg, hogy az $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra a következő teljesül: a második tagtól kezdve a sorozat mindegyik tagja a szomszédos tagok „harmonikus közepe”, azaz

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ezért szokás az $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot **harmonikus sorozatnak** nevezni.

127. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy az (a_n) valós sorozat

(a) felülről *nem* korlátos; (b) alulról *nem* korlátos;

(c) *nem* monoton növekedő; (d) *nem* monoton csökkenő;

(e) *nem* korlátos; (f) *nem* monoton.

■ B-feladatok

128. Adja meg az

$$a_0 := 0, \quad a_1 := 1, \quad a_n := a_{n-1} + a_{n-2} \quad (n = 2, 3, \ldots)$$

Fibonacci-sorozat n-edik tagját az n függvényeként.

129. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgálja meg az

$$a_n := \frac{8n+3}{5n+4} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot.

130. Egy lassú, de kitartó csiga elindul az egy méter hosszú gumiszalag egyik végétől a másik felé, és egy centimétert halad percenként. Minden egyes perc végén azonban a szalag másik végénél álló hasonlóan kitartó gonosz manó, akinek egyetlen célja a csiga életének a megkeserítése, megnyújtja a szalagot egy méterrel. Ha ez így folytatódik tovább, vajon eléri-e a csiga valaha is a szalag túlsó végét? (Feltesszük, hogy mindketten örök életűek, a gumiszalag a végtelenségig nyújtható, és a csiga pontszerű.)

131. Mutassa meg, hogy az

(a) $a_n := \dfrac{1}{1^2} + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$

sorozat monoton növekedő és felülről korlátos;

(b) $a_n := \dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \cdots + \dfrac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$

sorozat monoton növekedő és felülről nem korlátos.

M. Itt hívjuk fel a figyelmet a következőkre. A monotonitás mindkét esetben nyilvánvaló. Jóval nehezebb a korlátosság kérdése. A problémát az okozza, hogy nehéz előre látni azt, hogy a sorozatok tagjai nagy n indexek esetén hogyan viselkednek. Mindkét sorozat n-edik tagját úgy képezzük, hogy az előtte levő taghoz „nagy” n-ekre egy „kicsi” számot adunk. A feladat állítása szerint tehát az ilyen esetekben előfordulhat az is, hogy korlátos sorozatot kapunk, de az is előfordulhat, hogy az így képzett sorozat nem lesz korlátos. (Megjegyezzük még azt is, hogy a korlátosságra vonatkozó sejtést pl. „számítógépes kísérletezéssel” lehetne kialakítani.)

132. Mutassa meg, hogy az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat monoton növekedő és korlátos.

133. Bizonyítsa be, hogy az

$$a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat monoton csökkenő és korlátos.

■ C-feladatok

134. Mutassa meg, hogy a tetszőleges α, d és q valós számmal képzett

(a) $a_1 := \alpha$, $a_{n+1} := a_n + d \;\; (n \in \mathbb{N})$
számtani sorozat n-edik tagja $a_n = \alpha + (n-1)d \;\; (n \in \mathbb{N})$;

(b) $a_1 := \alpha$, $a_{n+1} := qa_n \; (n \in \mathbb{N})$
mértani sorozat n-edik tagja $a_n = \alpha q^{n-1} \;\; (n \in \mathbb{N})$.

135. Tetszőleges α, A és B valós számokból kiindulva képezzük az

$$a_1 := \alpha, \qquad a_{n+1} := Aa_n + B \;\; (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív módon megadott sorozatot. Az α, A, B és az n számok függvényeként adja meg a sorozat n-edik tagját. (Ha $A = 1$, akkor (a_n) egy számtani, ha $B = 0$ akkor pedig egy mértani sorozat.)

136. Határozza meg az alábbi sorozatok n-edik tagját az n index függvényeként:

(a) $a_1 := 1$ és $a_{n+1} := 2^n - a_n \;\; (n \in \mathbb{N})$;

(b) $a_1 := 0$ és $a_{n+1} := n^2 - a_n \;\; (n \in \mathbb{N})$;

(c) $a_1 := 1, a_2 := 2$ és $a_{n+2} := \dfrac{a_{n+1} + a_n}{2} \;\; (n \in \mathbb{N})$.

137. Tegyük fel, hogy adott n darab egyforma kártya és egy asztal. A kártyákat az asztal oldalaival párhuzamosan egymásra helyezzük. Keresse meg azt az elhelyezést, amelyik a gravitáció törvényének megfelelően a legtávolabbra nyúlik túl az asztal szélétől. Korlátos-e a kapott sorozat?

138. Korlátosság és monotonitás szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorozatokat:

(a) számtani sorozatok;

(b) mértani sorozatok;

(c) $\left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$;

(d) $a_n := 1 - \dfrac{(-1)^n}{n} \;\; (n \in \mathbb{N})$;

(e) $\big((-1)^n n^3\big)$; (f) $a_n := \dfrac{1-7n}{2n-1}$ $(n \in \mathbb{N})$.

139. Igazolja, hogy ha az $(a_n, n \in \mathbb{N})$ valós sorozat monoton, akkor a számtani közepekkel képzett

$$\sigma_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat is monoton. Mit lehet mondani a (σ_n) sorozat korlátosságáról?

140. Monoton-e az $a_n := \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat?

141. Határozza meg az alábbi sorozatok szuprémumát és infimumát, legkisebb és legnagyobb tagját, ha azok léteznek:

(a) $\left(\dfrac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}\right)$; (b) $((-1)^n n, n \in \mathbb{N})$;

(c) $\left(\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right)$; (d) $\left(\dfrac{6n+7}{2n-3}, n \in \mathbb{N}\right)$.

4.2. Konvergens és divergens sorozatok. Sorozatok határértéke

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. **A konvergencia szemléletes fogalma.** Valós sorozatok monotonitásának és korlátosságának a *pontos* definícióját a szemléletes jelentésükből kiindulva minden további nélkül meg lehet adni. Most más szempontból fogjuk vizsgálni a sorozatokat. Ábrázoljuk a számegyenesen például a következőket:

$$a_n := \frac{1}{n} \ (n \in \mathbb{N}), \qquad b_n := \frac{(-1)^n}{n} \ (n \in \mathbb{N}),$$

$$c_n := \begin{cases} -1 + \frac{1}{n}, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \dots \\ 1 + \frac{1}{n}, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \dots, \end{cases} \qquad d_n := n \ (n \in \mathbb{N}).$$

Szemléletesen világos, hogy (a_n) és (b_n) tagjai 0 körül „sűrűsödnek” (mondhatnánk azt is, hogy 0-hoz „közelednek”). A (c_n) sorozat tagjainak egyik része (-1) körül, a másik része 1 körül sűrűsödik, a (d_n) sorozatnak pedig egyetlen valós sűrűsödési helye sincs.

Fordítsuk figyelmünket az (a_n) és a (b_n) sorozatokra, és fogalmazuk meg *pontosan* az ezeknél tapasztalt tulajdonságot. Mondhatjuk például a következőt: az a tény, hogy a sorozat tagjai a 0 szám körül sűrűsödnek azt jelenti, hogy a 0 *tetszőleges környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok tagja van*, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ valós szám esetén az } \big\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin k_\varepsilon(0)\big\} \text{ halmaz véges.}$$

Gondolja meg azonban azt, hogy ez a tulajdonság ekvivalens a következővel: *ha a* 0 *pont tetszőleges környezetét vesszük, akkor ez egy indextől kezdve a sorozat minden egyes tagját tartalmazza*, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ valós számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre } a_n \in k_\varepsilon(0).$$

A továbbiakban azokat a sorozatokat, amelyek egyetlen szám körül sűrűsödnek **konvergensnek** fogjuk nevezni.
Végül még egy technikai jellegű megjegyzést teszünk: az A valós szám ε sugarú környezete az $(A-\varepsilon, A+\varepsilon) = k_\varepsilon(A)$ intervallum, ezért $a_n \in k_\varepsilon(A)$ azzal ekvivalens, hogy $|a_n - A| < \varepsilon$ (a_n és A távolsága ε-nál kisebb).

D. Az (a_n) valós sorozatot **konvergensnek** nevezzük, ha létezik olyan $A \in \mathbb{R}$ valós szám, hogy ennek minden $\varepsilon > 0$ sugarú környezetéhez létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ *küszöbindex*, hogy a sorozat minden n_0-nál nagyobb vagy egyenlő indexű a_n tagja benne van az A szám ε sugarú környezetében, azaz

$$(*) \qquad \begin{cases} \exists\, A \in \mathbb{R}, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ valós számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \\ \qquad\qquad \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre } |a_n - A| < \varepsilon. \end{cases}$$

T. *Ha az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat konvergens, akkor egyetlen olyan $A \in \mathbb{R}$ szám létezik, amelyre $(*)$ teljesül. Ezt az A számot az (a_n)* ***sorozat határértékének*** *nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:*

$$\lim_{n\to+\infty} a_n := A, \qquad \lim\,(a_n) := A, \qquad a_n \to A \quad (n \to +\infty).$$

Ezeket úgy olvassuk, hogy „limesz a_n, ha n tart $+\infty$-hez egyenlő A-val", „limesz a_n egyenlő A-val", „a_n tart – vagy konvergál – A-hoz, ha n tart $+\infty$-hez".

T. *Legyen (a_n) egy valós sorozat. Ekkor*

$$\lim\,(a_n) = A \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \textit{ valós számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \textit{ hogy} \\ \quad \forall\, n \geq n_0 \textit{ indexre } |a_n - A| < \varepsilon. \end{cases}$$

M. Szavakkal: Az (a_n) sorozatnak a $A \in \mathbb{R}$ valós szám akkor és csak akkor határértéke, ha az A szám minden környezetéhez létezik olyan küszöbindex, hogy a sorozat minden ennél nagyobb (vagy egyenlő) indexű tagja benne van a szóban forgó környezetben.
„Pongyolán" fogalmazva: Az a tény, hogy az (a_n) sorozatnak az $A \in \mathbb{R}$ valós szám a határértéke, azt jelenti, hogy *„a sorozat nagy indexű tagjai közel vannak az A számhoz"*.
Az $\varepsilon > 0$ számot *hibakorlátnak* is nevezik. Világos, hogy az n_0 küszöbindex függ az ε számtól, ezért n_0-at az *ε-hoz tartozó küszöbindexnek* is szokás hívni. Az is nyilvánvaló, hogy egy adott ε számhoz tartozó n_0 küszöbindex nem egyértelmű; ui. bármely n_0-nál nagyobb természetes szám is egy „jó" küszöbindex.

D. Az (a_n) valós sorozat **divergens**, ha nem konvergens, azaz (l. $(*)$-ot)

$$\begin{cases} \forall\, A \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\, \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ indexhez} \\ \qquad \exists\, n \geq n_0 \text{ index, amelyre } |a_n - A| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

D. 1° Az (a_n) valós sorozatnak **plusz végtelen a határértéke** (vagy az (a_n) sorozat **plusz végtelenhez tart**), ha minden P valós számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ indexre $a_n > P$ teljesül, azaz

$$\forall\, P \in \mathbb{R} \;\text{ számhoz }\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n \geq n_0 \;\text{ indexre }\; a_n > P.$$

Jelölés: $\lim\,(a_n) = +\infty$ vagy $a_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$.

2° Az (a_n) valós sorozatnak **mínusz végtelen a határértéke** (vagy az (a_n) sorozat **mínusz végtelenhez tart**), ha minden P valós számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_0$ indexre $a_n < P$ teljesül, azaz

$$\forall\, P \in \mathbb{R} \;\text{ számhoz }\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n \geq n_0 \;\text{ indexre }\; a_n < P.$$

Jelölés: $\lim\,(a_n) = -\infty$ vagy $a_n \to -\infty$ $(n \to +\infty)$.

D. A plusz, illetve a mínusz végtelen $\varepsilon > 0$ sugarú környezetét így értelmezzük:

$$k_\varepsilon(+\infty) := \left(\frac{1}{\varepsilon}, +\infty\right), \quad \text{illetve} \quad k_\varepsilon(-\infty) := \left(-\infty, -\frac{1}{\varepsilon}\right).$$

T. *Legyen* (a_n) *egy valós sorozat. Ekkor*

$$\lim(a_n) = +\infty \iff \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \textit{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \textit{ hogy} \\ \forall\, n \geq n_0 \textit{ indexre } a_n \in k_\varepsilon(+\infty), \end{cases}$$

$$\lim(a_n) = -\infty \iff \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \textit{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \textit{ hogy} \\ \forall\, n \geq n_0 \textit{ indexre } a_n \in k_\varepsilon(-\infty). \end{cases}$$

D. Azt mondjuk, hogy az (a_n) valós sorozatnak **van határértéke**, ha a sorozat konvergens vagy plusz végtelenhez vagy pedig mínusz végtelenhez tart. Ez azzal egyenértékű, hogy

$$\begin{cases} \exists\, A \in \overline{\mathbb{R}}, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ index, hogy} \\ \qquad \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre } \ a_n \in k_\varepsilon(A). \end{cases}$$

A fenti tulajdonsággal rendelkező $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem egyértelműen meghatározott. Ezt a sorozat **határértékének** nevezzük, és így jelöljük:

$$\lim(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

M. A továbbiakban $\lim(a_n) \in \mathbb{R}$ azt jelöli, hogy az (a_n) sorozat **konvergens** (azaz véges a határértéke), a $\lim(a_n) \in \overline{\mathbb{R}}$ jelölés pedig azt fejezi ki, hogy az (a_n) sorozatnak **van határértéke** (azaz a sorozat konvergens vagy $+\infty$ vagy pedig $-\infty$ a határértéke).

■ A-feladatok

142. Mit jelent az, hogy az (a_n) sorozatnak $-\frac{1}{2}$ nem határértéke? Lehet-e egy ilyen sorozat konvergens?

143. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy az (a_n) valós sorozat nem konvergens. Ez alapján igazolja, hogy a $\big((-1)^n, n \in \mathbb{N}\big)$ sorozat nem konvergens, azaz divergens.

144. Tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}$ szám minden környezete az (a_n) sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza. Következik-e ebből az, hogy az (a_n) sorozat konvergens?

145. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat határértéke az $A \in \mathbb{R}$ szám. Igaz-e az, hogy

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \text{hogy}\ \forall\, \varepsilon > 0\ \text{számra és}\ \forall\, n \geq n_0\ \text{indexre}\ |a_n - A| < \varepsilon?$$

146. Konvergens-e az (a_n) valós sorozat, ha

(a) $\exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$ esetén;

(b) $\exists\, A \in \mathbb{R}\ :\ \forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}\ :\ |a_{n_0} - A| < \varepsilon$;

(c) $\exists\, A \in \mathbb{R}$ és $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n > n_0$ indexre és $\forall\, \varepsilon > 0$ számra $|a_n - A| < \varepsilon$?

147. Fogalmazza meg pozitív állítás formájában azt, hogy az (a_n) valós sorozatnak nincs határértéke.

148. Mutassa meg, hogy ha egy sorozat konvergens és a határértéke pozitív, akkor egy indextől kezdve a sorozat mindegyik tagja szintén pozitív.

149. Igaz-e az, hogy ha (a_n) konvergens és $\lim(a_n) =: A \geq 0$, akkor van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $a_n \geq 0$ minden $n \geq n_0$ esetén?

■ B-feladatok

150. A határérték definíciója alapján mutassa meg, hogy

(a) $\lim\left(\dfrac{3n+4}{2n-1}\right) = \dfrac{3}{2}$;

(b) $\lim\left(\dfrac{n^3-12n+1}{2n^3+7n^2+2}\right) = \dfrac{1}{2}$;

(c) $\lim\left(\dfrac{n^2+3n+1}{n+3}\right) = +\infty$;

(d) $\lim\left(\dfrac{2-3n^2}{n+1}\right) = -\infty$.

151. A definíció alapján döntse el, hogy van-e határértéke az alábbi sorozatoknak:

(a) $\left(\dfrac{1+n^2}{2+n+2n^2}\right)$; (b) $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$;

(c) $\left(\sqrt{\dfrac{n^2+n+1}{n^2+2}}\right)$; (d) $\left(\dfrac{1-n^2}{n+4}\right)$.

152. Tegyük fel, hogy a nemnegatív tagú (a_n) sorozat az A valós számhoz konvergál. Bizonyítsa be, hogy

(a) $A \geq 0$;

(b) a $\left(\sqrt{a_n}\right)$ sorozat is konvergens, és $\lim\left(\sqrt{a_n}\right) = \sqrt{A}$.

Mit lehet mondani az $\left(\sqrt{a_n}\right)$ sorozat határértékéről akkor, ha az (a_n) sorozat $+\infty$-hez tart?

■ C-feladatok

153. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg a számtani sorozatokat.

154. A definíció alapján döntse el, hogy van-e határértéke az alábbi sorozatoknak. Melyik sorozat konvergens?

(a) $\left(\dfrac{n}{n^2+1}\right)$;

(b) $\left(\dfrac{n-\sqrt{n}-1}{n+\sqrt{n}+1}\right)$;

(c) $\left(\dfrac{5n^3+2n^2-1}{2n^3+n+1}\right)$;

(d) $\left(\sqrt{\dfrac{n^3+n^2-2n}{n^2+3}}\right)$;

(e) $\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$;

(f) $\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{n+3}\right)$.

155. Legyen $m > 2$ természetes szám, és tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat konvergens, és $\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$. Mutassa meg, hogy ekkor $A \geq 0$, továbbá az $\left(\sqrt[m]{a_n}, n \in \mathbb{N}\right)$ sorozat is konvergens, és

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{A}.$$

Mit lehet mondani az $\left(\sqrt[m]{a_n}, n \in \mathbb{N}\right)$ sorozat határértékéről akkor, ha $\lim(a_n) = +\infty$?

156. Igazolja, hogy ha $\lim(a_n) = +\infty$ és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n \leq b_n$ minden $n \geq N$ indexre, akkor $\lim(b_n) = +\infty$. Fogalmazza meg a megfelelő állítást a $-\infty$ határérték esetére is.

4.3. Sorozatok konvergenciájának és határértékének a vizsgálata

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. Sorozatok konvergenciájának a vizsgálata és határértékének a meghatározása a *definíció alapján* igen sok esetben nem egyszerű feladat. A továbbiakban olyan alapvető eredményeket ismertetünk, amelyek megkönnyítik az ilyen feladatok megoldását.

A definíció egyszerű következményei

T. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és a (b_n) olyan valós sorozatok, amelyekhez*

$$\exists\, N \in \mathbb{N},\ \textit{hogy}\ \ a_n = b_n \ \ \forall\, n \geq N \ \textit{indexre.}$$

Ekkor az (a_n) sorozatnak akkor és csak akkor van határértéke, ha a (b_n) sorozatnak is van, és ekkor $\lim(a_n) = \lim(b_n)$.

M. Ez a nyilvánvaló állítás azt fejezi ki, hogy a határérték szempontjából közömbös, hogy mi van a sorozat „elején”, csupán az számít, hogy a sorozat „elég nagy” indexű tagjaira mi érvényesül. A sorozat határértékének a létezése és értéke nem változik, ha a sorozat véges sok tagját megváltoztatjuk, véges sok tagot beiktatunk vagy akár elhagyunk.

T. ***A konvergencia egy szükséges feltétele:*** *Ha egy valós sorozat konvergens, akkor egyúttal korlátos is.*

K. *Ha egy valós sorozat nem korlátos, akkor divergens (azaz nem konvergens).*

M. A korlátosság tehát a konvergenciának egy **szükséges** feltétele. A korlátosság a konvergenciának azonban **nem elégséges** feltétele, azaz a korlátosságból nem következik a konvergencia. Például a $\big((-1)^n\big)$ sorozat korlátos, de nem konvergens.

D. Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ egy sorozat és $\nu = (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növekedő sorozat (az ilyen ν-t **indexsorozatnak** fogjuk nevezni). Ekkor az

$$a \circ \nu = \big(a_{\nu_n}\big)$$

sorozatot az a sorozat ν indexsorozat által meghatározott **részsorozatának** nevezzük.

M. 1° Szemléletesen szólva: az $a = (a_n)$ sorozatból az $a \circ \nu = (a_{\nu_n})$ részsorozatot úgy kapjuk, hogy az $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sorozatból kiválasztjuk a $\nu_1 < \nu_2 < \nu_3 \ldots$ indexű tagokat. Az $a \circ \nu$ sorozat n-edik tagja tehát a_{ν_n}, azaz az (a_n) sorozat ν_n-edik tagja.

2° Mivel a és ν egyaránt az $\mathbb{N}$ halmazon értelmezett függvények, ezért az $a \circ \nu$ kompozíció is az $\mathbb{N}$ halmazon értelmezett függvény (ui. $\mathcal{D}_{a \circ \nu} = \{n \in \mathbb{N} \mid \nu_n \in \in \mathcal{D}_a = \mathbb{N}\} = \mathbb{N}$), tehát $a \circ \nu$ valóban egy sorozat.

T. ***Részsorozatok határértéke:*** *Ha az* a *sorozatnak van határértéke, akkor tetszőleges* ν *indexsorozattal képzett* $a \circ \nu$ *részsorozatának is van határértéke, és a részsorozat határértéke megegyezik az eredeti sorozat határértékével:* $\lim a \circ \nu = \lim a$.

K. *Ha egy valós sorozatnak van két olyan részsorozata, amelyek határértéke különböző, akkor a sorozatnak nincs határértéke.*

Monoton sorozatok konvergenciája és határértéke

T. 1° *Ha az* (a_n) *valós sorozat monoton növekedő és felülről korlátos [monoton csökkenő és alulról korlátos], akkor* ***konvergens*** *is, és*

$$\lim(a_n) = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathbb{R} \quad [\lim(a_n) = \inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \in \mathbb{R}].$$

2° *Ha az* (a_n) *valós sorozat monoton növekedő [monoton csökkenő], akkor* ***van határértéke****, és*

$$\lim(a_n) = \sup\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \in \overline{\mathbb{R}} \quad [\lim(a_n) = \inf\{\, a_n \mid n \in \mathbb{N} \,\} \in \overline{\mathbb{R}}].$$

M. Az 1° alatti állítás szerint a *monotonitás és a korlátosság* együtt a konvergenciának egy **elégséges** feltételele. Jegyezze meg jól, hogy ezek együttese a konvergenciának **nem szükséges** feltétele, azaz ha egy sorozat konvergens, akkor ebből – általában – nem következik, hogy a sorozat monoton. A $\left((-1)^n/n\right)$ sorozat például konvergens (0 a határértéke), de nem monoton.

M. A későbbiekben sokszor olyan sorozatokat kell vizsgálnunk, amelyekre a monotonitás csak bizonyos indextől kezdve teljesül. Ennek a fontos tételnek az állításai az ilyen esetekre is kiterjeszthetők (l. a **164.** feladatot).

T. ***A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel:*** *Minden korlátos valós sorozatnak van konvergens részsorozata.*

T. *Ha egy sorozat felülről nem korlátos, akkor van* $+\infty$*-hez tartó monoton részsorozata, ha alulról nem korlátos, akkor van* $-\infty$*-hez tartó monoton részsorozata.*

A rendezés és a határérték kapcsolata

T. ***A közrefogási elv:*** *Tegyük fel, hogy az (a_n), (b_n) és (c_n) valós sorozatokra teljesülnek a következők:*

(i) *létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy*

$$a_n \le b_n \le c_n \quad \textit{minden } n \ge N \textit{ indexre},$$

(ii) *az (a_n) és a (c_n) sorozatnak van határértéke és*

$$\lim(a_n) = \lim(c_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor a (b_n) sorozatnak is van határértéke, és $\lim(b_n) = A$.

T. *Tegyük fel, hogy az (a_n) és (b_n) valós sorozatoknak van határértéke.*

1° *Ha $\lim(a_n) > \lim(b_n)$, akkor van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > b_n$ teljesül minden $n \ge N$ indexre.*

2° *Ha van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n \ge b_n$ minden $n \ge N$ esetén, akkor $\lim(a_n) \ge \lim(b_n)$.*

M. Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy az előző tétel 1° része nem pontos megfordítása a 2° résznek. Az 1°-ben ui. a határértékre a $\lim(a_n) > \lim(b_n)$ *szigorú egyenlőtlenséget* tettük fel, a 2° részben viszont csak a $\lim(a_n) \ge \lim(b_n)$ relációra tudtunk következtetni. Ennél többet még akkor sem állíthatunk, ha az (a_n) és (b_n) sorozat tagjaira a szigorúbb $a_n > b_n$ $(n \ge N)$ feltételt tesszük. Például: az

$$a_n := 1 + \frac{1}{n}, \qquad b_n := 1 - \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatokra nyilván $a_n > b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ teljesül, de $\lim(a_n) = \lim(b_n) = 1$.

A műveletek és a határérték kapcsolata

D. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ **nullasorozat**, ha $\lim(a_n) = 0$, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n \ge n_0 \text{ indexre } |a_n| < \varepsilon.$$

M. „Pongyolán” fogalmazva: Az (a_n) nullasorozat, ha $|a_n|$ tetszőlegesen kicsi elég nagy n esetén.

T. 1° *Az (a_n) sorozat pontosan akkor nullasorozat, ha $\big(|a_n|\big)$ nullasorozat.*

2° *Az* (a_n) *sorozatnak az* $A \in \mathbb{R}$ *valós szám akkor és csak akkor határértéke, ha* $(a_n - A)$ *nullasorozat, azaz*

$$\lim(a_n) = A \in \mathbb{R} \iff \lim(a_n - A) = 0.$$

3° *Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és* (α_n) *valós sorozatokra teljesülnek a következők:*

(i) *az* $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ *nullasorozat,*

(ii) $\exists\, N \in \mathbb{N}$, *hogy* $|a_n| \leq \alpha_n \quad \forall\, n \geq N$ *esetén.*

Ekkor (a_n) *is nullasorozat.*

T. 1° *Ha* (a_n) *és* (b_n) *nullasorozatok, akkor* (a_n+b_n) *is nullasorozat.*

2° *Ha* (a_n) *nullasorozat és* (c_n) *tetszőleges korlátos sorozat, akkor* $(a_n c_n)$ *nullasorozat.*

M. 2°-ből persze következik az is, hogy nullasorozatok **szorzata** is nullasorozat. Hangsúlyozzuk, hogy az előző tételben nullasorozatok **hányadosáról** nem mondtunk semmit. Ennek oka az, hogy két nullasorozat hányadosánál minden elméletileg lehetséges eset valóban előfordulhat (l. a **166.** feladatot).

T. ***Műveletek konvergens sorozatokkal:*** *Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és a* (b_n) *valós sorozat konvergens, és*

$$\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor

1° *az* $(a_n + b_n)$ *sorozat is konvergens, és* $\lim(a_n + b_n) = A + B$*;*

2° *az* $(a_n b_n)$ *sorozat is konvergens, és* $\lim(a_n b_n) = A \cdot B$*;*

3° *minden* $\lambda \in \mathbb{R}$ *esetén a* (λa_n) *sorozat is konvergens, és*

$$\lim(\lambda a_n) = \lambda A;$$

4° *ha még* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *és* $B = \lim(b_n) \neq 0$ *is teljesül, akkor az* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *sorozat is konvergens, és*

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B}.$$

T. ***A műveletek és a határérték kapcsolata:*** *Tegyük fel, hogy az* (a_n) *és a* (b_n) *valós sorozatoknak van határértéke, és*

$$\lim(a_n) =: A \in \overline{\mathbb{R}}, \qquad \lim(b_n) =: B \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Ekkor

1° *az* $(a_n + b_n)$ *sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim(a_n + b_n) = A + B,$$

feltéve, hogy $A + B$ *értelmezve van;*

2° *az* $(a_n b_n)$ *sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim(a_n b_n) = A \cdot B,$$

feltéve, hogy AB *értelmezve van;*

3° *ha* $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$, *akkor az* $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ *sorozatnak is van határértéke, és*

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{A}{B},$$

feltéve, hogy $\frac{A}{B}$ *értelmezve van.*

M. Ha az előző tételben szereplő műveletek valamelyikének nincs értelme (l. a **44.** oldalt), akkor az egyenlőségek bal oldalán álló sorozatok határértékének a létezéséről általában semmit sem tudunk mondani. Ezeket a **kritikus határértékeket** röviden a

$$(+\infty) + (-\infty) \text{ (vagy } +\infty - \infty), \qquad 0 \cdot (\pm\infty), \qquad \tfrac{0}{0}, \qquad \tfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$$

szimbólumokkal szoktuk jelölni. Az ilyen esetekben nincs „általános szabály". Ha például $A = +\infty$, $B = -\infty$, akkor az (a_n) és a (b_n) sorozat megválasztásától függően „minden" előfordulhat. Lehetséges, hogy az $(a_n + b_n)$ sorozatnak véges vagy végtelen a határértéke, de az is előfordulhat, hogy nincs határértéke. Hasonló a helyzet a többi kritikus esetben is (l. a feladatokat). Ezért nem értelmeztünk $\overline{\mathbb{R}}$-ben bizonyos műveleteket. Megjegyezzük azonban, hogy vannak olyan eljárások, amelyekkel az említett kritikus esetek egy jelentős része is kezelhető. Ilyen a differenciálhatóság fogalmára épülő ún. **L'Hospital-szabály**.

A Cauchy-féle konvergenciakritérium

M. Emlékeztetjük az Olvasót arra, hogy az analízis alapvető fogalmának, a sorozat konvergenciájának a definíciójában szerepel egy, a sorozat tagjain „kívüli" dolog is. Nevezetesen: a sorozat határértéke. Ez alapján a konvergenciát csak akkor tudjuk eldönteni, ha ismerjük a sorozat határértékét. Néhány eredmény azonban egyszerűsíti a helyzetet. Például, ha egy sorozat nem korlátos, akkor nem konvergens. Ennél sokkal lényegesebb a monoton és korlátos sorozatokra vonatkozó tétel. Ebben az esetben tehát akkor is eldönthető egy sorozat konvergenciája, ha nem ismerjük a határértékét. A szóban forgó tétel azonban nem egyenértékű a konvergenciával, annak „csak” egy elégséges feltétele. Alapvető jelentőségű az a tény, hogy a konvergenciára megadható egy olyan **szükséges és elégséges** (tehát a konvergenciával ekvivalens) feltétel is, amely kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével dönt a sorozat konvergens vagy divergens voltáról. Ennek megfogalmazása előtt bevezetjük a következő fogalmat.

D. Az (a_n) valós sorozatot **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, m, n \geq n_0 \text{ indexre } |a_n - a_m| < \varepsilon.$$

M. „Pongyolán” fogalmazva: (a_n) akkor Cauchy-sorozat, ha az „elég nagy” indexű tagjai „tetszőlegesen közel” vannak egymáshoz.

T. ***A Cauchy-féle konvergenciakritérium:*** *Egy valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

M. Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy az iménti tétel **konvergens** (tehát véges határértékű) sorozatokról szól. Végtelen határértékekre az analóg állítás nem igaz: például az (n) sorozatnak a határértéke $+\infty$, de ez nem Cauchy-sorozat. A sok hasonlóság mellett ez az egyik leglényegesebb különbség a konvergens, ill. a $\pm\infty$-hez tartó sorozatok között.

■ A-feladatok

157. Az alábbi sorozatok közül melyek az $(n, n \in \mathbb{N})$ sorozat részsorozatai:

(a) $(1, 2, 3, \ldots)$; (b) $(2, 4, 6, 8, \ldots)$;

(c) $(2, 1, 4, 3, 6, 5, \ldots)$; (d) $(1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots)$.

158. Határozza meg az $(1/n^2, n \in \mathbb{N})$ sorozatnak az alábbi $\nu = (\nu_n, n \in \mathbb{N})$ indexsorozatokhoz tartozó részsorozatait:

(a) $\nu := (11, 12, 13, \ldots)$; (b) $\nu := (1, 4, 7, 10, 13, \ldots)$.

159. Tetszőleges ν indexsorozatra igazolja, hogy $\nu_n \geq n$ $(n \in \mathbb{N})$.

160. Bizonyítsa be, hogy hogy ha ν, μ indexsorozatok, akkor $\nu \circ \mu$ is az.

161. Egy a sorozatról azt tudjuk, hogy az értékkészlete véges halmaz. Mutassa meg, hogy van olyan ν indexsorozat, amellyel az $a \circ \nu$ részsorozat egy konstans sorozat.

162. Mutassa meg, hogy egy a valós sorozat pontosan akkor nem korlátos felülről, ha van olyan ν indexsorozat, hogy $\lim a \circ \nu = +\infty$.

163. Mutassa meg, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens és $\lim(a_n) = A \in \mathbb{R}$, akkor az $(|a_n|)$ sorozat is konvergens, és $\lim(|a_n|) = |A|$. Igaz-e az állítás megfordítása?

164. Bizonyítsa be, hogy ha az (a_n) sorozat **egy indextől kezdve monoton növekedő** (azaz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $a_n \leq a_{n+1}$ minden $n \geq n_0$ indexre) és **felülről korlátos**, akkor (a_n) konvergens, és

$$\lim(a_n) = \sup\{\, a_n \mid n \geq n_0 \,\}.$$

Fogalmazza meg az analóg állítást egy indextől kezdve monoton csökkenő sorozatok esetére is.

165. Legyen (b_n) olyan nullasorozat, amelyre $b_n \neq 0$ is teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Mit lehet mondani az $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ sorozat határértékéről?

166. Adjon meg olyan (a_n) és (b_n) nullasorozatokat, amelyekre $b_n \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \begin{cases} = +\infty, & \text{vagy} \\ = -\infty, & \text{vagy} \\ = c, & (c \text{ egy adott valós szám) vagy} \\ \text{nem létezik.} \end{cases}$$

167. Igaz-e, hogy ha

(a) (a_n) konvergens és $(a_n + b_n)$ konvergens $\Rightarrow$ (b_n) konvergens;

(b) (a_n) konvergens és $(a_n \cdot b_n)$ konvergens $\Rightarrow$ (b_n) konvergens;

(c) (a_n) konvergens és (b_n) divergens $\Rightarrow$ $(a_n + b_n)$ divergens;

(d) (a_n) konvergens és (b_n) divergens $\Rightarrow$ $(a_n \cdot b_n)$ divergens;

(e) (a_n) divergens és (b_n) divergens $\Rightarrow$ $(a_n + b_n)$ divergens;

(f) (a_n) divergens és (b_n) divergens $\Rightarrow$ $(a_n \cdot b_n)$ divergens?

168. Keressen olyan $(a_n), (b_n)$ sorozatokat, amelyekre $\lim(a_n) = +\infty$ és $\lim(b_n) = -\infty$ teljesül, és

$$\lim(a_n + b_n) \begin{cases} = +\infty, & \text{vagy} \\ = -\infty, & \text{vagy} \\ = c, & (c \text{ egy adott valós szám) vagy} \\ \text{nem létezik.} \end{cases}$$

169. Keressen olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim(a_n) = 0$ és $\lim(b_n) = +\infty$ teljesül, és

$$\lim(a_n \cdot b_n) \begin{cases} = +\infty, & \text{vagy} \\ = -\infty, & \text{vagy} \\ = c, & (c \text{ egy adott valós szám) vagy} \\ \text{nem létezik.} \end{cases}$$

170. Adjon meg olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim(a_n) = +\infty$ és $\lim(b_n) = +\infty$ $(b_n \neq 0, n \in \mathbb{N})$ teljesül, és

$$\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) \begin{cases} = +\infty, & \text{vagy} \\ = c, & (c \geq 0 \text{ egy adott valós szám) vagy} \\ \text{nem létezik.} \end{cases}$$

171. Pozitív állítás formájában fogalmazza meg azt, hogy az (a_n) sorozat *nem* Cauchy-sorozat.

172. Mutassa meg, hogy minden Cauchy-sorozat korlátos.

173. Van-e olyan Cauchy-sorozat, amelyiknek $+\infty$ a határértéke?

■ B-feladatok

174. Legyen $q \in \mathbb{R}$. Bizonyítsa be, hogy a (q^n) **mértani** (vagy **geometriai**) **sorozat** határértékére a következők teljesülnek:

$$\lim_{n\to+\infty} q^n \begin{cases} = 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ = 1, & \text{ha } q = 1 \\ = +\infty, & \text{ha } q > 1 \\ \text{nem létezik,} & \text{ha } q \leq -1. \end{cases}$$

A (q^n) mértani sorozat tehát pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$ vagy $q = 1$.

175. Igazolja a következő állításokat:

(a) Minden $a > 0$ valós számra az $\left(\sqrt[n]{a}\right)$ sorozat konvergens, és

$$\lim\left(\sqrt[n]{a}\right) = 1.$$

(b) Az $\left(\sqrt[n]{n}\right)$ sorozat konvergens, és $\lim\left(\sqrt[n]{n}\right) = 1$.

(c) Az $\left(\sqrt[n]{n!}\right)$ sorozat divergens, de $\lim\left(\sqrt[n]{n!}\right) = +\infty$.

176. Az e szám értelmezése: Bizonyítsa be, hogy az $\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$ sorozat monoton növekedő és felülről korlátos, tehát konvergens. Legyen

$$e := \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

M. Az $\left((1+1/n)^n\right)$ sorozat határértékére külön szimbólum bevezetésének indoka a következő. Igazolható, hogy ez a határérték irracionális, sőt **transzcendens szám**. Ez utóbbi azt jelenti, hogy nincs olyan egész együtthatós polinom, aminek ez a szám gyöke lenne. (A $\sqrt{2}$ szám például irracionális, de nem transzcendens szám, mert $\sqrt{2}$ gyöke az $x^2 - 2 = 0$ egyenletnek.) Egy valós számot **algebrai számnak** nevezünk akkor, ha van olyan egész együtthatós polinom, amelynek ez a szám gyöke. ($\sqrt{2}$ tehát algebrai szám.) Az egész matematikában fontos szerepet játszó e számot **Euler** vezette be 1748-ban.

177. Bizonyítsa be, hogy az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton csökkenve tart az e számhoz:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e.$$

178. Mutassa meg, hogy az $\left(\frac{n}{\sqrt[n]{n!}}\right)$ sorozat az e számhoz konvergál:

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

179. Bizonyítsa be az alábbi állításokat:

(a) Ha k rögzített természetes szám és $a > 1$ rögzített valós szám, akkor $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^k}{a^n} = 0$.

(b) Tetszőlegesen rögzített $k \in \mathbb{N}$ természetes és $|q| < 1$ valós szám esetén $\lim\limits_{n\to\infty} n^k \cdot q^n = 0$.

(c) Minden $a \in \mathbb{R}$ esetén $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$.

(d) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$.

M. Tekintse például az $\left(\frac{n^3}{2^n}\right)$ sorozatot. Mivel $\lim(n^3) = \lim(2^n) = +\infty$ (n^3 és 2^n is „akármilyen nagy" lehet, ha n „elég nagy"), ezért a hányados határértékére vonatkozó tétel erre a sorozatra nem alkalmazható („kritikus határérték"). A feladat (a) részéből azonban az következik, hogy

$$\frac{n^3}{2^n} \to 0 \quad (n \to +\infty),$$

ami azt jelenti, hogy a $\frac{n^3}{2^n}$ tört „akármilyen kicsi" lehet, ha n „elég nagy", azaz 2^n „sokkal nagyobb", mint n^3, ha n „elég nagy". Röviden azt mondjuk, hogy a (2^n) sorozat *erősebben tart* $+\infty$-hez, mint az (n^3) sorozat.

Általában: ha az (a_n) és a (b_n) sorozatnak is $+\infty$ a határértéke, akkor azt mondjuk, hogy (b_n) **erősebben** (vagy **sokkal gyorsabban**) **tart** $+\infty$**-hez**, mint (a_n), ha

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Ebben az esetben azt is mondjuk, hogy b_n **sokkal nagyobb**, mint a_n, ha n elég nagy; és ezt így jelöljük:

$$a_n \ll b_n, \quad \text{ha } n \text{ nagy}.$$

A most bevezetett jelöléssel a feladat állításait így fejezhetjük ki: ha $a > 1$ rögzített valós és k rögzített természetes szám, akkor

$$n^k \ll a^n \ll n! \ll n^n, \quad \text{ha } n \text{ nagy}.$$

■ C-feladatok

180. Bizonyítsa be a műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételt (l. a **75.** oldalt).

181. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét. Döntse el azt is, hogy a sorozat konvergens vagy divergens.

(a) $\left(\dfrac{n^3 - 2n + 3}{2n^3 + 6n + 1}\right)$; (b) $\left(\dfrac{n^2 + 3n - 1}{n^7 + 7n + 5}\right)$;

(c) $\left(\dfrac{n^7 + 4n - 3}{n^2 + 3n + 2}\right)$; (d) $\left(\dfrac{1 - n^3}{n^2 + 1}\right)$;

(e) $\left(\dfrac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}\right)$; (f) $\left(\left(\dfrac{1 - 3n}{4n + 12}\right)^7\right)$;

(g) $\left(\dfrac{1 + 2 + \cdots + n}{n + 2} - \dfrac{n}{2}\right)$; (h) $\left(\dfrac{1 + 3 + \cdots + 2n + 1}{n^3 + 1}\right)$.

182. (a) Legyen

$$P(x) := \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \dots + \alpha_1 x + \alpha_0$$
$$(x \in \mathbb{R}, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}, i = 0, 1, 2, \dots, k)$$

egy pontosan k-adfokú polinom (azaz $\alpha_k \neq 0$). Mutassa meg, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} P(n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } \alpha_k > 0 \\ -\infty, & \text{ha } \alpha_k < 0. \end{cases}$$

(Egy polinom nagy $n \in \mathbb{N}$ helyeken való „viselkedése” tehát csak a főegyütthatójának – azaz α_k-nak – az előjelétől függ.)

(b) Határérték szempontjából vizsgálja meg a

$$R_n := \frac{P(n)}{Q(n)} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot, ahol P és Q polinomok, továbbá $Q(n) \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

183. Legyen P egy tetszőleges pontosan k-adfokú ($k \in \mathbb{N}$) polinom. Mutassa meg, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{P(n+1)}{P(n)} = 1.$$

184. Konvergensek-e a következő sorozatok? Ha igen, akkor mi a határértékük?

(a) $\left(\sqrt{n^2 + 3n - 1} - 2n\right)$; (b) $\left(n^2(n - \sqrt{n^2 + 1})\right)$;

(c) $\left(\dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n} - \sqrt{n-1}}\right)$;

(d) $\left(n^{3/2}\big((\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) - (\sqrt{n} - \sqrt{n-1})\big)\right)$;

(e) $\left(\sqrt[3]{n+1} - \sqrt[3]{n}\right)$; (f) $\left(\sqrt[3]{n^2 - n^3} + n\right)$.

185. Legyen (a_n) nemnegatív, 1-hez konvergáló sorozat, (b_n) pedig egy tetszőleges korlátos sorozat. Mutassa meg, hogy ekkor

$$\lim(a_n^{b_n}) = 1.$$

186. Bizonyítsa be, hogy ha (a_n) konvergens és $\lim(a_n) = A$, akkor

$$\lim(a_n^n) = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } A > 1 \\ 0, & \text{ha } |A| < 1. \end{cases}$$

Mit lehet mondani az $A = 1$ esetben?

187. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozat konvergens és $\lim(a_n) > 0$. Mutassa meg, hogy ekkor

$$\lim(\sqrt[n]{a_n}) = 1.$$

188. Tegyük fel, hogy az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$ sorozatra

(a) $\lim(a_n) = +\infty$;

(b) $\lim(a_n) = 0$

teljesül. Vizsgálja meg határérték szempontjából az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozatot.

189. Konvergens-e az $a_n := \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat?

190. Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\left(1 + \dfrac{1}{2n}\right)^{2n+1}\right)$; (b) $\left(\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n\right)$;

(c) $a_n := \left(\dfrac{n^3 - 3}{n^3 + 2}\right)^{n^3}$ $(n = 2, 3, \ldots)$.

191. Legyen $(\alpha_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ olyan sorozat, amelyre $\lim(\alpha_n) = +\infty$ teljesül. Igazolja, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n} = e.$$

192. Határozza meg a következő sorozatok határértékét:

(a) $\left(\left(\dfrac{n+1}{n-1}\right)^n\right)$; (b) $\left(\left(\dfrac{6n-7}{6n+4}\right)^{3n+2}\right)$;

(c) $a_n := \left(\dfrac{n+5}{n-7}\right)^{n/6}$ $(n = 8, 9, \ldots)$;

(d) $\left(\left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^n\right)$; (e) $\left(\left(\dfrac{4n+3}{5n}\right)^{5n^2}\right)$;

(f) $\left(\left(\dfrac{3n+1}{n+2}\right)^{n+2}\right)$; (g) $\left(\left(\dfrac{(n+3)!}{n!n^3}\right)^{n-1}\right)$.

193. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét. Döntse el azt is, hogy a sorozat konvergens vagy divergens.

(a) $\left(\sqrt[n]{2n},\ n \in \mathbb{N}\right)$; (b) $\left(\sqrt[n]{n^2+100}, n \in \mathbb{N}\right)$;

(c) $\left(\dfrac{3}{1-\sqrt[n]{2}}\right)$; (d) $\left(\dfrac{2^n+2^{-n}}{2^{-n}+3^n}\right)$;

(e) $\left(\dfrac{n+1}{\sqrt[3]{n^2+3}}\right)$; (f) $\left(\dfrac{n+\sqrt{n^4+3}}{2n^2+5}\right)$;

(g) $\left(\sqrt[n]{3^n+2^n}\right)$; (h) $\left(\sqrt[n]{3^n-2^n}\right)$;

(i) $\left(\sqrt[n]{\dfrac{n}{2^n}+2^n}\right)$; (j) $\left(\dfrac{2^{n^2}+1}{\sqrt{n^4+n^3}}\right)$;

(k) $\left(\dfrac{n^3 2^{2n}}{3^{n+1}\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}\right)$; (l) $\left(\sqrt[n]{\left(\frac{11n+4}{3n+1}\right)^n+n6^n}\right)$;

(m) $\left(\left(\dfrac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5}\right)$; (n) $\left(\left(\dfrac{4n+1}{5n+3}\right)^{n-5}\right)$;

(o) $a_n := \left(\dfrac{n^2+n}{2n^2+n+1}\right)^n \quad (n = 1, 2, \ldots)$;

(p) $a_n := \dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$;

(q) $a_n := \dfrac{1}{\sqrt{n}}+\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{2n}} \quad (n = 1, 2, \ldots)$;

(r) $a_n := \sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2} \quad (n = 1, 2, \ldots)$.

194. Legyen (a_n) egy olyan konvergens sorozat, amelynek egyik tagja sem 0. Konvergencia szempontjából mit tud mondani az $\left(\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozatról?

195. Legyen $a \geq 0$ és $b \geq 0$ valós szám. Konvergensek-e az alábbi sorozatok:

(a) $\left(\sqrt[n]{a^n+b^n}\right)$; (b) $\left(\sqrt[n]{|a^n-b^n|}\right)$?

Ha igen, akkor mi a határértékük?

196. Határozza meg az $a, b, c \in \mathbb{R}$ paramétereket úgy, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} n\big(an - \sqrt{cn^2 + bn - 2}\big) = 1$$

legyen.

197. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat konvergens és $A := \lim\big(a_n\big)$. Mutassa meg, hogy

(a) $|A+1| < 1$ esetén az $\big((1+a_n)^n\big)$ sorozat konvergens,

(b) $|A+1| > 1$ esetén az $\big((1+a_n)^n\big)$ sorozat divergens.

Mit lehet mondani konvergencia szempontjából az $\big((1+a_n)^n\big)$ sorozatról, ha $|A+1| = 1$?

198. Tegyük fel, hogy az (a_n) valós sorozat konvergens. Bizonyítsa be, hogy a

$$\sigma_n := \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat is konvergens, és $\lim(a_n) = \lim(\sigma_n)$. Adjon példát olyan (a_n) sorozatra, amely divergens, de a fenti (σ_n) konvergens. Mutassa meg azt is, hogy ha $\lim(a_n) = +\infty$, akkor $\lim(\sigma_n) = +\infty$.

199. Legyen (a_n) olyan valós sorozat, amelyre $a_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és

$$h_n := \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) ha (a_n) konvergens, akkor (h_n) is konvergens, továbbá $\lim(h_n) = \lim(a_n)$;

(b) ha $\lim(a_n) = +\infty$, akkor $\lim(h_n) = +\infty$.

200. Legyen (a_n) olyan valós sorozat, amelyre $a_n > 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén és

$$g_n := \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mutassa meg, hogy

(a) ha (a_n) konvergens, akkor (g_n) is konvergens, és $\lim(g_n) = \lim(a_n)$;

(b) ha $\lim(a_n) = +\infty$, akkor $\lim(g_n) = +\infty$.

201. Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ egy tetszőleges sorozat,

$$b_1 := a_1, \quad b_{n+1} := \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{és} \quad c_n := \sqrt[n]{a_n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Igazolja, hogy

(a) ha (b_n) konvergens, akkor (c_n) is konvergens, és $\lim(c_n) = \lim(b_n)$;

(b) ha $\lim(b_n) = +\infty$, akkor $\lim(c_n) = +\infty$.

Adjon meg olyan (a_n) sorozatot, amelyre (c_n) konvergens, de (b_n) divergens.

202. Az előző feladat eredményét felhasználva adjon újabb bizonyítást arra, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

203. Tegyük fel, hogy (a_n) olyan sorozat, amelyre a

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} |a_{k+1} - a_k|, n \in \mathbb{N}\Big)$$

sorozat korlátos. (Az ilyen (a_n) sorozatot **korlátos változású sorozatnak** nevezzük.) Mutassa meg, hogy ekkor (a_n) konvergens. Igaz-e ez fordítva is?

4.4. Rekurzív sorozatok határértéke

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. Az eddig felsorolt tételeket sorozatok konvergenciájának vizsgálatához csak abban az esetben tudjuk felhasználni, ha a sorozat explicit alakban van megadva. Az alkalmazások jelentős részében azonban rekurzív módon megadott sorozatok lépnek fel. A **61.** oldalon már megjegyeztük, hogy a rekurzív összefüggésből kiindulva néhány esetben viszonylag egyszerűen meg lehet adni a sorozat n-edik tagját az n index függvényében. Hogyan lehet megállapítani a határértéket akkor, ha ez nem lehetséges? Sokszor (de nem mindig!) használható a következő **módszer**. Ha sikerül bebizonyítani azt, hogy a sorozat **monoton** (esetleg csak egy indextől kezdve) és **korlátos**, akkor ebből már következik, hogy a sorozat konvergens (l. a

164. feladatot). A sorozat határértékét pedig a rekurzív összefüggésből nyerhető egyenlet gyökeiből próbáljuk kiválasztani.
Ezel a módszerrel igazolható az m-edik gyök létezésére vonatkozó alábbi fontos állítás.

T. *Legyen* $m \in \mathbb{N}$, $m > 1$ *és* $A > 0$ *adott valós szám. Ekkor az*

$$\begin{cases} a_1 > 0 \text{ tetszőleges valós,} \\ a_{n+1} := \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{A}{a_n^{m-1}} + (m-1)a_n\right) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

rekurzív módon megadott sorozat konvergens, és $\sqrt[m]{A}$ *a határértéke:*

$$\lim (a_n) = \sqrt[m]{A}.$$

M. A fenti tételből egy igen egyszerű konstruktív eljárást kapunk bizonyos irracionális számok racionálisakkal való megközelítésére. Ez a helyzet például akkor, ha A és a_1 racionális és $\sqrt[m]{A}$ irracionális.

■ A-feladatok

204. Adjon meg olyan, csupa racionális számokból álló sorozatot, amelynek $\sqrt{2}$ a határértéke.

205. Mutassa meg, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor az **elcsúsztatott sorozat**, azaz $b_n := a_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ is konvergens, és a két sorozat határértéke megegyezik.

■ B-feladatok

206. Konvergens-e az

$$a_1 := \sqrt{2}, \quad a_{n+1} := \sqrt{2a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

207. Mutassa meg, hogy az

$$a_1 := 0, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^3 + 1}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét.

208. Bizonyítsa be, hogy az

$$a_1 := 0, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^3 + 30}{19} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat *konvergens*, a

$$b_1 := 5, \quad b_{n+1} := \frac{b_n^3 + 30}{19} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat pedig *divergens*.

M. Ez a feladat rámutat a kezdőértékek szerepére: ugyanazon rekurzív képletet különböző kezdőértékekkel indítva a konvergencia szempontjából különböző sorozatokat *is* kaphatunk.

■ C-feladatok

209. Számítsa ki az alábbi sorozatok határértékét:

(a) $a_1 := \sqrt{3}$, $a_{n+1} := \sqrt{3 + 2a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(b) $a_1 := 6$, $a_{n+1} := 5 - \dfrac{6}{a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(c) $a_1 := 1$, $a_{n+1} := a_n + \dfrac{1}{a_n^3 + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(d) $a_1 := 1/2$, $a_{n+1} := \sqrt[3]{4a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$.

210. Bizonyítsa be, hogy ha $\alpha \in [0, 1]$, akkor az

$$a_1 := \frac{\alpha}{2}, \quad a_{n+1} := \frac{a_n^2 + \alpha}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét.

211. Legyen $\alpha \in \mathbb{R}^+$,

$$a_1 \in \mathbb{R}^+, \quad a_{n+1} := \frac{2\alpha a_n}{a_n + \alpha} \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Mikor konvergens az (a_n) sorozat, és mi ekkor a határértéke?

212. Az $\alpha > 0$ valós paraméter mely értékeire konvergens az

$$a_1 := \sqrt{\alpha}, \qquad a_{n+1} := \sqrt{\alpha + a_n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat, és ekkor mi a határértéke?

213. A nemnegatív $\alpha < \beta$ valós számokból kiindulva a következőképpen képezzük az (a_n) és a (b_n) sorozatot:

$$a_1 := \alpha, \quad b_1 := \beta \text{ és } a_{n+1} := \sqrt{a_n b_n}, \quad b_{n+1} := \frac{a_n + b_n}{2} \ (n \in \mathbb{N}).$$

Igazolja, hogy a sorozatok konvergensek, és a határértékük egyenlő. Lényeges-e az $\alpha < \beta$ feltétel? (C. F. Gauss nyomán ezt a közös értéket az α és a β számok **számtani-mértani közepének** nevezzük.)

4.5. Sorozat limesz szuperiorja és limesz inferiorja

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

D. Az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elemet az (a_n) valós sorozat egy **sűrűsödési helyének** (vagy **torlódási helyének**) nevezzük, ha A minden környezete a sorozatnak végtelen sok tagját tartalmazza, azaz

$$\begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ valós szám esetén} \\ \text{az } \ \{\, n \in \mathbb{N} \mid a_n \in k_\varepsilon(A) \,\} \ \text{ végtelen halmaz.} \end{cases}$$

Az $a = (a_n)$ sorozat sűrűsödési helyeinek a halmazát H_a-val fogjuk jelölni:

$$H_a := \{\, A \in \overline{\mathbb{R}} \mid A \text{ sűrűsödési helye az } a \text{ sorozatnak} \,\} \subset \overline{\mathbb{R}}.$$

M. Az $A \in \overline{\mathbb{R}}$ elem pontosan akkor **nem** sűrűsödési helye az (a_n) sorozatnak, ha van olyan $\varepsilon > 0$ valós szám, amelyre az $\{\, n \in \mathbb{N} \mid a_n \in k_\varepsilon(A) \,\}$ halmaz véges.

M. Egy sorozatnak több sűrűsödési helye is lehet. A sűrűsödési hely lehet véges, de lehet $+\infty$ és $-\infty$ is. Érdemes meggondolni például a következőket:
Ha $a := (\frac{1}{n})$, akkor $H_a = \{0\}$; ha $a := \big((-1)^n\big)$, akkor $H_a = \{-1, 1\}$; ha $a := (n)$, akkor $H_a = \{+\infty\}$; ha $a := \big((-1)^n n\big)$, akkor $H_a = \{+\infty, -\infty\}$.

T. *Az a valós sorozatnak $A \in \overline{\mathbb{R}}$ akkor és csak akkor sűrűsödési helye, ha a sorozatnak van A-hoz tartó részsorozata, azaz*

$$A \in H_a \iff \begin{cases} \exists\, \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \ \textit{ indexsorozat, amelyre} \\ \lim a \circ \nu = A. \end{cases}$$

T. *Minden valós sorozatnak van sűrűsödési helye, azaz*

$$\forall\, a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ \textit{ sorozat esetén } \ H_a \neq \emptyset.$$

D. Legyen a egy valós sorozat és H_a a sűrűsödési helyeinek a halmaza. A H_a halmaz szuprémumát, illetve infimumát a sorozat **limesz szuperiorjának**, illetve **limesz inferiorjának** nevezzük, és a $\overline{\lim}\; a$, illetve a $\underline{\lim}\; a$ szimbólumokkal jelöljük. Azaz:

$$\overline{\lim}\; a := \sup H_a \in \overline{\mathbb{R}}, \quad \text{illetve} \quad \underline{\lim}\; a := \inf H_a \in \overline{\mathbb{R}}.$$

M. Mivel minden a sorozatra $H_a \neq \emptyset$, ezért a H_a halmaznak van szuprémuma és infimuma egyaránt; tehát **minden** valós sorozatnak **van** limesz szuperiorja is, limesz inferiorja is. A definíció nyilvánvaló következményei:

(a) minden $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatra $\underline{\lim}\; a \leq \overline{\lim}\; a$;

(b) az a sorozatnak minden olyan $a \circ \nu$ részsorozatára, amelyiknek van határértéke, fennáll a $\underline{\lim}\; a \leq \lim a \circ \nu \leq \overline{\lim}\; a$ egyenlőtlenség.

M. Az (a_n) sorozat limesz szuperiorját, illetve limesz inferiorját az (a_n) sorozat **felső határértékének**, illetve **alsó határértékének** is nevezik, és jelölésükre a

$$\limsup_{n\to+\infty} a_n, \quad \limsup(a_n) \qquad \text{illetve} \qquad \liminf_{n\to+\infty} a_n, \quad \liminf(a_n)$$

szimbólumokat is használják.

M. A következő tétel azt mondja meg, hogy egy sorozat limesz szuperiorját és limesz inferiorját hogyan lehet a *sorozat tagjainak* segítségével *jellemezni.*

T. *Legyen* (a_n) *egy tetszőleges valós sorozat. Ekkor*

$$\overline{\lim}\,(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \text{(i) } \forall\, L > A \textit{ számnál a sorozatnak csak véges sok tagja} \\ \quad \textit{nagyobb, és} \\ \text{(ii) } \forall\, K < A \textit{ számnál a sorozatnak végtelen sok tagja} \\ \quad \textit{nagyobb;} \end{cases}$$

$$\underline{\lim}\,(a_n) = A \in \overline{\mathbb{R}} \iff$$

$$\iff \begin{cases} \text{(i) } \forall\, l < A \textit{ számnál a sorozatnak csak véges sok tagja} \\ \quad \textit{kisebb, és} \\ \text{(ii) } \forall\, k > A \textit{ számnál a sorozatnak végtelen sok tagja} \\ \quad \textit{kisebb.} \end{cases}$$

M. Azt a tényt például, hogy „$\forall L > A$ számnál a sorozatnak csak véges sok tagja nagyobb” így is írhatjuk: $\forall L > A$ számhoz $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $a_n \leq L\ \forall n \geq n_0$ indexre.

T. *Egy a valós sorozatra*

$$\underline{\lim}\ a = \overline{\lim}\ a \in \overline{\mathbb{R}} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \ \textit{ha a sorozatnak egyetlen sűrűsödési helye van;}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \textit{ha a sorozatnak van határértéke, és ekkor} \\ \lim a = \underline{\lim}\ a = \overline{\lim}\ a. \end{cases}$$

T. 1° *Ha az* (a) *valós sorozat*

(a) *felülről nem korlátos, akkor* $\overline{\lim}\ a = +\infty$*;*

(b) *alulról nem korlátos, akkor* $\underline{\lim}\ a = -\infty$*;*

(c) *korlátos, akkor a* H_a *halmaznak van maximuma is, minimuma is, továbbá*

$$\max H_a = \overline{\lim}\ a \qquad \textit{és} \qquad \min H_a = \underline{\lim}\ a,$$

azaz korlátos sorozat esetén $\overline{\lim}\ a$ (*ill.* $\underline{\lim}\ a$) *a sorozat legnagyobb* (*ill. legkisebb*) *sűrűsödési helye.*

2° *Minden* a *valós sorozatnak van olyan részsorozata, amelyiknek a határértéke* $\overline{\lim}\ a$*, és van olyan részsorozata is, amelyik* $\underline{\lim}\ a$*-hoz tart.*

M. **Jegyezze meg jól** tehát azt, hogy minden valós sorozatnak van limesz szuperiorja és limesz inferiorja; határértéke azonban csak bizonyos sorozatoknak létezik. A limesz szuperior és limesz inferior több vonatkozásban pótolja a határértéket azokban az esetekben, amikor az nem létezik.

■ A-feladatok

214. Tegyük fel, hogy a *pozitív* tagú a valós sorozat limesz szuperiorja 0. Következik-e ebből az, hogy a konvergens?

215. Van-e határértéke az a sorozatnak akkor, ha $\underline{\lim}\ a = +\infty$?

216. Van-e olyan Cauchy-sorozat, amelynek a limesz inferiorja $-\infty$?

217. Adjon meg olyan valós sorozatot, amelyiknek pontosan 3 sűrűsödési helye van.

218. Van-e olyan valós sorozat, amelyik sűrűsödési helyeinek a halmaza $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{R}$?

■ B-feladatok

219. Keresse meg az alábbi sorozatok összes sűrűsödési helyét, és határozza meg a sorozatok limesz szuperiorját és limesz inferiorját:

(a) $a_n := (-1)^n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$;

(b) $a_n := 1 + (-1)^n + \dfrac{n+2}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(c) $a_n := \dfrac{3^n + (-4)^n}{2^{2n} + 1} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(d) $a_n := \sqrt{n^2 + (-1)^n n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$.

220. Legyen

$$a_n := \frac{1}{2^{-n} + (-1)^n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Határozza meg $\sup(a_n)$-et, $\inf(a_n)$-et, $\overline{\lim}\,(a_n)$-et és $\underline{\lim}\ n(a_n)$-et. Van-e a sorozatnak legkisebb, illetve legnagyobb tagja? Konvergens-e a sorozat? Ha igen, akkor mi a határértéke?

221. Legyen (a_n) egy valós sorozat, és képezzük az

$$A_n := \sup\left\{\, a_k \mid k = n, n+1, n+2, \ldots \right\} \quad (n \in \mathbb{N}),$$
$$B_n := \inf\left\{\, a_k \mid k = n, n+1, n+2, \ldots \right\} \quad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatokat. Mutassa meg, hogy (A_n) és (B_n) konvergens, és

$$\lim(A_n) = \overline{\lim}(a_n) \qquad \text{és} \qquad \lim(B_n) = \underline{\lim}(a_n).$$

M. Sorozat limesz szuperiorját, ill. limesz inferiorját a fenti (A_n), ill. (B_n) sorozatok határértékeként is lehetne értelmezni. Ez ekvivalens lenne az itteni definícióval.

■ C-feladatok

222. Igazolja, hogy ha az alábbi műveletek elvégezhetők, akkor

(a) $\underline{\lim}(a_n) + \underline{\lim}(b_n) \le \underline{\lim}(a_n + b_n) \le \underline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$,

(b) $\underline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n) \le \overline{\lim}(a_n + b_n) \le \overline{\lim}(a_n) + \overline{\lim}(b_n)$.

223. Legyen $a_n \geq 0$, $b_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Igazolja, hogy ekkor

(a) $\underline{\lim}(a_n) \cdot \underline{\lim}(b_n) \leq \underline{\lim}(a_n \cdot b_n) \leq \underline{\lim}(a_n) \cdot \overline{\lim}(b_n)$,

(b) $\underline{\lim}(a_n) \cdot \overline{\lim}(b_n) \leq \overline{\lim}(a_n \cdot b_n) \leq \overline{\lim}(a_n) \cdot \overline{\lim}(b_n)$.

224. Tegyük fel, hogy $a_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Igazolja, hogy

(a) ha $\underline{\lim}(a_n) \neq 0$, akkor $\dfrac{1}{\underline{\lim}(a_n)} = \overline{\lim}\, \dfrac{1}{a_n}$,

(b) ha $\overline{\lim}(a_n) \neq 0$, akkor $\dfrac{1}{\overline{\lim}(a_n)} = \underline{\lim}\, \dfrac{1}{a_n}$.

4.6. Komplex tagú sorozatok konvergenciája

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

D. Legyen $\varepsilon > 0$ valós szám. A $z_0 \in \mathbb{C}$ komplex **szám** ε **sugarú környezete** a

$$k_\varepsilon(z_0) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon \right\},$$

a $\infty \in \overline{\mathbb{C}}$ **elem** ε **sugarú környezete** pedig a

$$k_\varepsilon(\infty) := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z| > \tfrac{1}{\varepsilon} \right\}$$

halmaz.

M. A $k_\varepsilon(z_0)$ halmaz a komplex számsíkon az origó középpontú ε sugarú nyílt körlapnak felel meg. $k_\varepsilon(\infty)$ pedig a komplex számsíknak az origó középpontú ε sugarú zárt körlapon kívüli része.

D. A $(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ komplex sorozat **korlátos**, ha létezik olyan K pozitív valós szám, hogy $|z_n| \leq K$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

M. Szemléletesen ez azt jelenti, hogy van olyan origó középpontú körlap, amelyik a sorozat minden tagját tartalmaza.

M. $\mathbb{C}$-ben nincs rendezés, ezért a monotonitás fogalmát nem értelmezzük.

D. A $(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ **komplex sorozat konvergens**, ha

$$\begin{cases} \exists\, w \in \mathbb{C}, \text{ hogy } \forall\, \varepsilon > 0 \text{ valós számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy} \\ \qquad\qquad \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre } |z_n - w| < \varepsilon; \end{cases}$$

divergens, ha nem konvergens.

A (z_n) **komplex sorozat határértéke végtelen**, ha

$$\forall\, P \in \mathbb{R}^+ \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre } |z_n| > P.$$

M. A valós esethez hasonlóan igazolható az, hogy ha az iménti definícióban szereplő w szám létezik, akkor az egyértelműen meghatározott. Ezt a számot a (z_n) **sorozat határértékének** nevezzük, és jelölésére a valós esetben megszokott szimbólumokat használjuk.

Az a tény tehát, hogy $\lim(z_n) = w$ azzal ekvivalens, hogy a $\big(|z_n - w|\big)$ valós sorozat nullasorozat. A komplex számsíkon ennek szemléletes jelentése a következő: minden $\varepsilon > 0$ valós számhoz létezik olyan (ε-tól függő) n_0 küszöbindex, hogy a w körüli ε sugarú nyílt körlap tartalmazza a sorozat minden n_0-nál nagyobb indexű tagját.

M. Gondolja meg, hogy ha $(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ egy **valós** sorozat, akkor a **konvergencia** itteni definíciója a valós sorozatokra megadott definícióval (l. a **66.** oldalt) ekvivalens.

Más a helyzet a **végtelen határértékek** esetén. Ha például $(-n)$-et valós sorozatnak tekintjük, akkor a határértéke $-\infty$, komplex sorozatnak tekintve azonban ∞ határérték adódik.

T. *A* $z_n := x_n + iy_n$ $(n \in \mathbb{N})$ *komplex számsorozat akkor és csak akkor konvergens, ha a valós és a képzetes részekből alkotott* (x_n) *és* (y_n) *valós sorozatok külön-külön konvergensek, és*

$$\lim(z_n) = \lim(x_n) + i \lim(y_n).$$

M. Konvergens komplex sorozatokra ugyanazok a műveleti szabályok érvényesek, mint a valósakra (l. a **74.** oldalt).

T. ***A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel:*** *Minden korlátos komplex számsorozatnak van konvergens részsorozata.*

D. A (z_n) komplex sorozatot **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, m, n \geq n_0 \text{ indexre } |z_n - z_m| < \varepsilon.$$

T. ***A Cauchy-féle konvergenciakritérium:*** *Egy komplex sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha Cauchy-sorozat.*

A-feladatok

225. Bizonyítsa be az alábbi állításokat:

(a) Minden konvergens komplex sorozat korlátos.

(b) Ha egy komplex sorozat konvergens, akkor annak minden részsorozata is konvergens, és a részsorozatok határértéke az eredeti sorozat határértékével egyenlő.

226. Lássa be, hogy a (z_n) komplex sorozat akkor és csak akkor nullasorozat, ha $\big(|z_n|\big)$ is az.

227. Mutassa meg, hogy ha a (z_n) komplex sorozat konvergens, akkor a $\big(|z_n|\big)$ (valós) sorozat is konvergens. Igaz-e az állítás megfordítása?

228. Igazolja, hogy a (z_n) komplex sorozat határértéke akkor és csak akkor ∞, ha a $\big(|z_n|\big)$ valós sorozat $+\infty$-hez tart.

B-feladatok

229. Bizonyítsa be, hogy $q \in \mathbb{C}$ esetén a $\big(q^n\big)$ **geometriai sorozat** akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$ vagy $q = 1$, és ekkor

$$\lim\,(q^n) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |q| < 1 \\ 1, & \text{ha } q = 1. \end{cases}$$

230. Határérték szempontjából vizsgálja az $R_n := \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot, ahol P és Q komplex együtthatós polinomok és $Q(n) \neq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

C-feladatok

231. Konvergensek-e az alábbi sorozatok? Ha igen, akkor számítsa ki a határértéküket:

(a) $z_n := \dfrac{n - i}{n + 1}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(b) $z_n := \dfrac{1 + 2ni}{n + i}$ $(n \in \mathbb{N})$,

(c) $z_n := (1-i)^n \ (n \in \mathbb{N})$,

(d) $z_n := 1 + \dfrac{i^n}{n} \ (n \in \mathbb{N})$,

(e) $z_n := i^n\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big) \ (n \in \mathbb{N})$,

(f) $z_n := \Big(\dfrac{2+i}{3}\Big)^n \ (n \in \mathbb{N})$,

(g) $z_n := \dfrac{(1+i)^{2n}}{3^n} \ (n \in \mathbb{N})$,

(h) $z_n := (2+i)^n \ (n \in \mathbb{N})$.

5. Számsorok

5.1. Valós számsor konvergenciája és összege

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. Az előző fejezet sorozatok konvergenciájának vizsgálatához használható *alapvető* eredményeket tartalmazza. Vannak persze olyan sorozatok is, amelyek konvergenciáját az ismertetett eszközökkel nem lehet kezelni.

Ez a fejezet olyan további eredményeket tartalmaz, amelyek alkalmazásával a konvergencia szempontjából vizsgálható sorozatok körét *lényegesen* ki lehet bővíteni. Olyan (s_n) sorozatokról van szó, amelyek n-edik tagját úgy képezzük, hogy az előtte levő tagjához egy valós számot – mondjuk a_n-et – adunk: $s_n = s_{n-1} + a_n$ $(n = 2, 3, \ldots)$. Ha $a_1 = s_1$, akkor nyilván $s_n = a_1 + \cdots + a_n$, ezért (s_n)-et az (a_n) sorozat egyértelműen meghatározza. Kiderült, hogy az (a_n) generáló sorozatra több olyan kritérium adható meg, amelyek segítségével az ilyen *speciális képzésű* (s_n) sorozatok konvergenciáját vagy divergenciáját igen sok esetben *egyszerűen* el lehet dönteni. Többek között ez az indoka annak, hogy az ilyen sorozatokra külön elnevezést vezetünk be: az (s_n) sorozatot az (a_n) sorozat által meghatározott *számsornak* fogjuk nevezni.

D. Az $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozatból képzett

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot az (a_n) által generált **végtelen sornak** (vagy **számsornak**) nevezzük, és így jelöljük:

$$\sum a_n \quad \text{vagy} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{vagy} \quad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots .$$

s_n-et a $\sum a_n$ sor **n-edik részletösszegének** hívjuk.

M. A korábbi megállapodásunknak megfelelően (l. az **60.** oldal 1° megjegyzését) minden r egész szám esetén az $(a_n) : \{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq r\} \to \mathbb{R}$ függvények is sorozatok. Az ilyenekből képzett

$$s_n := a_r + a_{r+1} + \dots + a_n \quad (r \leq n \in \mathbb{Z})$$

sorozatot is **végtelen sornak tekintjük**, és jelölésükre a

$$\sum_{n=r} a_n$$

szimbólumot fogjuk használni. A további definíciók és tételek (az értelemszerű módosításokkal) ezekre is érvényesek lesznek, de ezt nem fogjuk külön hangsúlyozni.

D. A $\sum a_n$ sor **konvergens**, ha részletösszegeinek a sorozata konvergens, azaz (s_n)-nek véges a határértéke. Ekkor a $\lim(s_n)$ számot a $\sum a_n$ sor **összegének** nevezzük, és így jelöljük:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n := \lim(s_n).$$

A $\sum a_n$ sor **divergens**, ha az (s_n) sorozat nem konvergens (azaz vagy $\pm\infty$ a határértéke vagy nincs határértéke).

M. 1° A végtelen sort lényegében a véges sok tagú összeg végtelen sok tagra való általánosításának is tekinthetjük. Az $a_1, a_2, a_3, \dots$ számok összegén a $\sum a_n$ sor összegét értjük, ha a sor konvergens. Az ellenkező esetben e számok összegét nem értelmezzük.

2° Sorok pontos összegét „viszonylag kevés” esetben lehet meghatározni (l. például a **236.**, **237.** és **240.** feladatokat). Konvergenciájukat azonban több, jól használható eredmény segítségével is vizsgálhatjuk.

3° Végtelen sor tehát egy sorozathoz rendelt sorozat: (a_n)-hez a részletösszegeinek az (s_n) sorozatát rendeltük. Mondhatjuk azt is, hogy a sorozatok ($\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ szimbólummal jelölt) halmazán megadtuk az

$$\mathbb{R}^{\mathbb{N}} \ni (a_n) \mapsto (s_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$

leképezést. Jelöljük ezt a görög ábécé $\sum$ („szigma”) betűjével. Megállapodunk abban, hogy $\sum$-nak az (a_n) sorozaton felvett helyettesítési értékét így jelöljük: $\sum a_n$. (Elég nehézkes lenne az egyébként pontos $\sum\big((a_n)\big)$ jelölésmód használata.)

Egyszerűen bebizonyítható, hogy a $\sum$ leképezés különböző sorozatokhoz különböző sorozatokat rendel (vagyis *injektív*), továbbá $\sum$ értékkészlete $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Valóban, ha (s_n) egy tetszőleges értékkészletbeli sorozat és

$$a_1 := s_1, \quad a_n := s_n - s_{n-1} \quad (n = 2, 3, \dots),$$

akkor $\sum$ ehhez az (a_n) sorozathoz nyilván (s_n)-et rendeli. Fennáll tehát a következő tétel.

T. *A* $\sum : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\sum\big((a_n)\big) := \sum a_n := \big(a_1 + a_2 + \cdots + a_n, n \in \mathbb{N}\big)$ *leképezés bijekció.*

M. Sorozatokra vonatkozó tételek sok esetben egyszerűen átfogalmazhatók végtelen sorokra. Például egy sor részletösszegeinek sorozatára alkalmazva a Caychy-féle konvergenciakritériumot (l. a **76.** oldalt) az alábbi fontos állítást kapjuk.

T. ***A sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium:*** *A* $\sum a_n$ *sor akkor és csak akkor konvergens, ha*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \ \textit{számhoz} \ \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \ \textit{hogy}$$
$$\forall\, m > n \geq n_0 \ \ \textit{indexre} \ \ |a_n + a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon.$$

T. ***Sorok konvergenciájának szükséges feltételei:***

1° *Ha a* $\sum a_n$ *sor konvergens, akkor a generáló* (a_n) *sorozat nullasorozat.*

2° *Ha egy sor konvergens, akkor részletösszegeinek a sorozata korlátos.*

M. Ezek a konvergenciának csak **szükséges**, de **nem elégséges** feltételei. Az $\left(\frac{1}{n}\right)$ nullasorozatból képzett $\sum \frac{1}{n}$ harmonikus sor például divergens (l. a **238.** feladatot). Másrészt a $\sum (-1)^n$ sor részletösszegeinek a sorozata korlátos, de ez a sor divergens.

K. 1° *Ha az* (a_n) *sorozat nem nullasorozat, akkor a* $\sum a_n$ *sor divergens.*

2° *Ha egy sor részletösszegeinek a sorozata nem korlátos, akkor a sor divergens.*

T. *Tegyük fel, hogy a* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *sorok konvergensek. Ekkor*

1° *a* $\sum (a_n + b_n)$ *sor is konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n + \sum_{n=1}^{+\infty} b_n;$$

2° *a* $\sum (\lambda a_n)$ *sor is konvergens, és* $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} (\lambda a_n) = \lambda \sum\limits_{n=1}^{+\infty} a_n \ (\lambda \in \mathbb{R})$.

M. Végtelen sorok **szorzatát** többféleképpen is lehet/kell értelmezni. Erről az **5.3.** pontban lesz majd szó.

■ A-feladatok

232. Mutassa meg, hogy a $\sum\limits_{n=1} (-1)^n$ sor divergens.

233. Konvergensek-e az alábbi sorok:

(a) $\sum \sqrt[n]{0,1}$; (b) $\sum \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n$?

234. Lehet-e konvergens a $\sum(a_n + b_n)$ sor, ha $\sum a_n$ konvergens és $\sum b_n$ divergens?

235. Konvergencia szempontjából mit lehet mondani a $\sum(a_n + b_n)$ sorról, ha $\sum a_n$ is és $\sum b_n$ is divergens?

■ B-feladatok

236. Legyen $q \in \mathbb{R}$. Mutassa meg, hogy a $\sum\limits_{n=0} q^n$ **mértani** (vagy **geometriai**) **sor** pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

237. Bizonyítsa be, hogy a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n(n+1)}$ sor konvergens, és az összege 1, azaz

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

238. Igazolja, hogy a

(a) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n}$ **harmonikus sor** divergens;

(b) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ sor divergens;

(c) $\sum\limits_{n=1} \dfrac{1}{n^2}$ sor konvergens.

239. Legyen α rögzített valós szám. Lássa be, hogy a

$$\sum_{n=1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \textbf{hiperharmonikus sor} \quad \begin{cases} \text{konvergens}, & \text{ha } \alpha > 1 \\ \text{divergens}, & \text{ha } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

240. Bizonyítsa be, hogy a $\sum_{n=0} \frac{1}{n!}$ sor konvergens, és e az összege, azaz

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \cdots = e.$$

(Emlékeztetőül: az e számot az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat határértékeként értelmeztük.)

241. Mutassa meg, hogy

(a) minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n \cdot n!};$$

(b) az e szám irracionális és $2{,}7180 < e < 2{,}7183.$

■ C-feladatok

242. Konvergens-e a $\sum a_n$ sor, ha a

$$\lim_{n \to +\infty} \left(a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+p}\right) = 0$$

egyenlőség minden $p = 1, 2, 3, \ldots$ számra teljesül.

243. Határozza meg az alábbi sorok összegét:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right);$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n + 4}{5^n};$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+2)};$ (d) $\displaystyle\sum_{n=3} \frac{1}{n^2 - 4};$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{(3n-2)(3n+1)};$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)};$

(g) $\sum_{n=1} (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+1)}$; (h) $\sum_{n=1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$;

(i) $\sum_{n=1} \frac{n}{(n+1)!}$; (j) $\sum_{n=1} \frac{n^2+3n+1}{(n+2)!}$.

244. Keressen „zárt” alakot a $\sum_{n=1} nq^n$ sor részletösszegeire. Ez alapján határozza meg, hogy milyen $q \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a sor. Ha konvergens, akkor mi az összege?

245. Számítsa ki a $\sum_{n=1} \frac{2n-1}{2^n}$ sor összegét.

246. Mutassa meg, hogy a $\sum_{n=1} \frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$ sor konvergens, és számítsa ki az összegét.

247. Milyen $x \in \mathbb{R}$ esetén konvergens a $\sum_{n=1} (x^n - x^{n-1})(x^n + x^{n-1})$ sor, és mennyi akkor a sor összege?

5.2. Nemnegatív tagú sorok. Leibniz-típusú sorok

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

D. A $\sum a_n$ **nemnegatív tagú sor**, ha $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén.

T. *Egy nemnegatív tagú sor akkor és csak akkor konvergens, ha részletösszegeinek a sorozata korlátos.*

T. ***Az összehasonlító kritérium:*** *Tegyük fel, hogy a nemnegatív tagú (a_n) és (b_n) számsorozatokhoz létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy*

$$0 \leq a_n \leq b_n \qquad \textit{minden } n \geq N \textit{ esetén.}$$

1° *Ha a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens (**majoráns kritérium**).*

2^o *Ha a* $\sum a_n$ *sor divergens, akkor a* $\sum b_n$ *sor is divergens* (***minoráns kritérium***).

D. Legyen (a_n) egy nemnegatív és monoton fogyó számsorozat. Ekkor a

$$\sum_{n=1}(-1)^{n+1}a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 + \cdots$$

sort **Leibniz-típusú sornak** nevezzük.

T. 1^o *A* $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor akkor és csak akkor konvergens, ha* $\lim(a_n) = 0$.

2^o *Ha a* $\sum\limits_{n=1}(-1)^{n+1}a_n$ *Leibniz-típusú sor konvergens és* A *az összege, akkor*

$$\left|A - s_n\right| = \left|A - \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k\right| \leq a_{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

D. A $\sum a_n$ sor **abszolút konvergens**, ha a $\sum |a_n|$ sor konvergens.

T. *Ha egy végtelen sor abszolút konvergens, akkor egyúttal konvergens is. Az állítás megfordítása nem igaz: a* $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ *sor konvergens, de nem abszolút konvergens.*

D. A $\sum a_n$ sort **feltételesen konvergensnek** nevezzük akkor, ha a $\sum a_n$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens (azaz a $\sum |a_n|$ sor divergens).

T. ***A Cauchy-féle gyökkritérium I:*** *Tekintsük a* $\sum a_n$ *sort, és tegyük fel, hogy létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

határérték. Ekkor

1^o $A < 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens* (*tehát konvergens is*),

2^o $A > 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor divergens,*

3^o $A = 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens is, divergens is.*

T. ***A D'Alembert-féle hányadoskritérium I:*** *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sor tagjai közül egyik sem 0 és létezik az*

$$A := \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

határérték. Ekkor

1° $A < 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is),*

2° $A > 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor divergens,*

3° $A = 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens is, divergens is.*

M. Az előző két tétel feltételeit a következőképpen lehet gyengíteni.

T. ***A Cauchy-féle gyökkritérium II:*** *Tekintsük a $\sum a_n$ sort, és legyen*

$$A := \overline{\lim}\,\big(\sqrt[n]{|a_n|}\,\big).$$

Ekkor

1° $A < 1$*esetén a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is).*

2° $A > 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor divergens.*

3° $A = 1$ *esetén a* $\sum a_n$ *sor lehet konvergens is, divergens is.*

T. ***A D'Alembert-féle hányadoskritérium II:*** *Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sor tagjai közül egyik sem 0.*

1° *Ha* $\overline{\lim}\big(\big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\big|\big) < 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens (tehát konvergens is).*

2° *Ha* $\underline{\lim}\big(\big|\frac{a_{n+1}}{a_n}\big|\big) > 1$, *akkor a* $\sum a_n$ *sor divergens.*

Tizedes törtek

M. Az előző fejezetekben már volt szó tizedes törtekről, és akkor a korábbi tanulmányokból megszerzett ismeretekre támaszkodtunk. Tizedes törteket lényegében a valós számokkal azonosítottuk, pontosabban azok egy reprezentációjának tekintettük. Most **vázoljuk**, hogy a végtelen sorok segítségével hogyan lehet ezt matematikailag pontos módon leírni. A következő két állításból indulunk ki.

T. *Tetszőleges* $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ $(a_0 \in \mathbb{N}_0,\ a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\}, n \in \mathbb{N})$ *sorozat esetén a* $\sum\limits_{n=0} \frac{a_n}{10^n}$ *sor konvergens, és az összege egy* $[a_0, a_0+1]$ *intervallumbeli szám, azaz*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} =: A \in [a_0, a_0+1].$$

T. *Minden* $A \in \mathbb{R}_0^+$ *számhoz egyértelműen létezik olyan* $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ $(a_0 \in \mathbb{N}_0, a_n \in \{0,1,2,\ldots,9\},\ n \in \mathbb{N})$ *sorozat, amelyre*

$$A = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n}$$

teljesül, ha eltekintünk azoktól az $(a_0, a_1, a_2, \ldots)$ *sorozatoktól, amelyek egy indextől kezdve csupán a 9-es számjegyet tartalmazzák.*

M. Ha az előző tételben az egy indextől kezdve csupa 9-es számjegyet tartalmazó sorozatokat is megengedjük, akkor az egyértelműség nem teljesül. Vannak ugyanis olyan A számok, amelyekhez (legalább) két ilyen (a_n) sorozat is létezik. Ha például $A = \frac{3}{10}$, akkor

$$\frac{3}{10} = \frac{3}{10} + \frac{0}{10^2} + \frac{0}{10^3} + \cdots = \frac{2}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \cdots.$$

(Az egyértelműséget illetően l. a **266.** feladatot.)

M. A tizedes törteket a következőképpen definiáljuk: Jelöljük T_+-szal az összes olyan $(a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots)$ sorozatok halmazát, amelyekben $a_0 \in \mathbb{N}_0$ és minden $n = 1,2,3,\ldots$ esetén $a_n \in \{0,1,\ldots,9\}$. A T_+ halmaz elemeit **nemnegatív tizedes törteknek** nevezzük, és jelölésükre bevezetjük az

$$a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$$

szimbólumot. (A „ , ” jelet *tizedesvesszőnek* hívjuk.)

Legyen T_- a T_+ halmaz (-1)-szerese, azaz a $(-a_0, -a_1, -a_2, \ldots)$ sorozatok halmaza, ahol $(a_0, a_1, a_2, \ldots) \in T_+$. T_- elemei a **nempozitív tizedes törtek**, és ezeket így is jelöljük:

$$-a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots.$$

Ha $(-a_0, -a_1, -a_2, \ldots) \in T_-$, akkor a fentiek alapján a $\sum\limits_{n=0} \frac{-a_n}{10^n}$ sor konvergens, és az összege egy $\mathbb{R}_0^-$-beli szám.

Tizedes törteknek a $T := T_+ \cup T_-$ halmaz elemeit fogjuk nevezni.

M. A tizedes törtek és a valós számok azonosításának első lépéseként vegyük észre azt, hogy egy „természetes” megfeleltetés létesíthető a T és az $\mathbb{R}$ halmaz között:

$$\varphi : T \to \mathbb{R}, \quad (b_n) \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}, \quad (b_n) \in T.$$

Az előző megjegyzések egyikében mutatott példa igazolja, hogy φ nem bijekció T és $\mathbb{R}$ között, ui. például $\frac{3}{10}$-hez két T-beli elem is tartozik. Hagyjuk el azonban T-ből azokat a sorozatokat, amelyek egy indextől kezdve csupán 9-et vagy csupán (-9)-et tartalmaznak. Jelöljük ezt a halmazt T^*-gal. Egyszerűen bebizonyítható, hogy a

$$\varphi^* : T^* \to \mathbb{R}, \quad b \mapsto \varphi(b)$$

leképezés egy bijekció a T^* és az $\mathbb{R}$ halmaz között, vagyis az ilyen tizedes törtek és a valós számok kölcsönösen párba állíthatók.

Ennél azonban sokkal több is igaz. Az $\mathbb{R}$ struktúrájának (műveletek és rendezés) megfelelő struktúrát is lehet T^*-on értelmezni. A pontos definíciók leírásától itt eltekintünk, és csak azt jegyezzük meg, hogy φ^* inverzének a segítségével a T^* halmazon „természetes” módon lehet értelmezni az összeadás ($\oplus$) és a szorzás ($\odot$) műveleteket. (Ezek véges tizedes törtek esetén a „szokásos” műveletekkel egyeznek meg.) Az is igaz, hogy minden $a, b \in T^*$ esetén

$$\varphi^*(a \oplus b) = \varphi^*(a) + \varphi^*(b),$$
$$\varphi^*(a \odot b) = \varphi^*(a) \cdot \varphi^*(b);$$

a $\varphi^* : T^* \to \mathbb{R}$ leképezés tehát egy művelettartó bijekció T^* és $\mathbb{R}$ között (röviden T^* és $\mathbb{R}$ izomorfak). Ez azt is jelenti, hogy a két halmaz algebrai szempontból azonosnak tekinthető.

T^*-on – például az $\mathbb{R}$-beli $<$ relációt alapul véve – a tagonkénti összehasonlítással egy $\lessdot$ rendezést lehet definiálni (javasoljuk az Olvasónak, gondolja meg, hogy ezt hogyan lehet megtenni). φ^* a rendezést is megtartja, azaz

$$a \lessdot b \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi^*(a) < \varphi^*(b) \qquad (a, b \in T^*).$$

A fentiek alapján tehát valóban azonosíthatjuk a tizedes törteket a valós számokkal.

M. A $b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots \in T$ egy **véges tizedes tört**, ha van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $b_n = 0$ minden $n \geq N$ természetes számra.

Ha a számjegyek egy bizonyos indextől kezdve ismétlődnek, azaz ha léteznek olyan N és M természetes számok, amelyekkel

$$a_{N+n} = a_{N+M+n} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

akkor $b_0, b_1 b_2 b_3 \ldots$-at **végtelen szakaszos tizedes törtnek** nevezzük, és így jelöljük:

$$b_0, b_1 b_2 \ldots b_{N-1} \dot{b}_N b_{N+1} \ldots \dot{b}_{N+M-1}, \qquad \text{ha} \quad N > 1,$$
$$b_0, \dot{b}_1 b_2 \ldots \dot{b}_M, \qquad \text{ha} \quad N = 1.$$

A fennmaradó esetekben **végtelen nem szakaszos tizedes törtről** beszélünk.

T. *Egy valós szám akkor és csak akkor racionális, ha tizedes tört alakja véges vagy végtelen szakaszos, és pontosan akkor irracionális, ha végtelen nem szakaszos tizedes tört alakban írható fel.*

M. A megfogalmazott tételekkel analóg állítások is igazak lesznek, ha 10 helyett egy 1-nél nagyobb p természetes számot választunk, továbbá a $\{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ halmaz helyett a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmazt tekintjük. Ekkor az $a_0, a_1 a_2 a_3 \ldots$ számot **p-adikus törtnek** nevezzük. Ha $p = 2$, akkor a **diadikus tört** elnevezést használjuk.

■ A-feladatok

248. Adjon meg egy feltételesen konvergens végtelen sort.

249. Konvergens-e az $1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \cdots$ sor?

250. Mutassa meg, hogy az összehasonlító kritériumban a nemnegativitás feltétele nem hagyható el. Adjon meg tehát olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $a_n \le b_n$ $(n \in \mathbb{N})$ teljesül, a $\sum b_n$ sor konvergens, de a $\sum a_n$ sor divergens.

251. Igazolja, hogy a Leibniz-típusú sorok konvergenciájára vonatkozó tételben a monotonitásra tett feltétel nem hagyható el: keressen olyan nemnegatív 0-hoz tartó (a_n) sorozatot, amelyre a $\sum_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ (váltakozó előjelű) sor divergens.

■ B-feladatok

252. Konvergencia szempontjából vizsgálja meg az alábbi sorokat:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n}{2n-1}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{2^{n^2}}{n!}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}}$;

(f) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

253. Az x valós szám milyen értéke mellett konvergensek az alábbi végtelen sorok:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{x^{2n}}{1+x^{4n}};$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{(3x^2+8x+6)^n}?$

254. Bizonyítsa be, hogy a D'Alembert-féle hányadoskritérium „gyengébb", mint a Cauchy-féle gyökkritérium. Mutassa meg tehát egyrészt azt, hogy minden olyan esetben, amikor a hányadoskritérium alkalmazható, akkor a gyökkritérium is alkalmazható. Másrészt lássa be azt, hogy például az

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots$$

sor a gyökkritérium alapján konvergens, de a hányadoskritérium nem alkalmazható.

255. **A Cauchy-féle kondenzációs elv:** Ha $0 \le a_{n+1} \le a_n$ $(n \in \mathbb{N})$, akkor a $\sum a_n$ és a $\sum \left(2^n a_{2^n}\right)$ sorok egyszerre konvergensek, illetve divergensek (röviden: a két sor *ekvikonvergens*).

256. A Cauchy-féle kondenzációs elv felhasználásával vizsgálja meg konvergencia szempontjából a $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sort, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$. (Vö. az **239**. feladattal.)

257. Írja fel $\frac{p}{q}$ alakban (p és q relatív prím természetes számok) a $0,2\dot{3}2\dot{1}$ tizedes törtet.

■ C-feladatok

258. Az alábbi sorok közül melyek konvergensek?

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}};$ (b) $\displaystyle\sum_{n=2} \frac{1}{n\sqrt{n-1}};$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(n!)^2}{(2n)!};$ (d) $\displaystyle\sum_{n=50} \frac{\left((n+2)!\right)^3}{(2n)!\,(n-1)!};$

(e) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{n!}{2^n};$ (f) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{n^2}{2^n};$

(g) $\sum_{n=1} \frac{2n+1}{3^n}$; (h) $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n(n+2)}{(2n+3)(2n+5)}$;

(i) $\sum_{n=1} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$; (j) $\sum_{n=1} \frac{n+1}{n^2}$;

(k) $\sum_{n=1} \frac{n^n}{n!}$; (l) $\sum_{k=1} \frac{n^n}{(2n)!}$;

(m) $\sum_{n=1} \frac{1}{n^{(1+1/n)}}$; (n) $\sum_{k=1} \frac{4^n n!}{n^n}$;

(o) $\sum_{n=1} \frac{3^{n+1}+5^n}{2^{3n}+7^{n-1}}$; (p) $\sum_{k=1} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}}$;

(q) $\sum_{n=1} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$; (r) $\sum_{n=1} \left(\prod_{k=1}^{n}(2-\sqrt[2k+1]{2})\right)$.

259. Az x valós szám milyen értéke mellett konvergensek az alábbi végtelen sorok:

(a) $\sum_{n=2} \frac{\left((n-1)!\right)^2}{\left(2(n-1)\right)!}x^n$; (b) $\sum_{n=1} \frac{2^{n-1}}{2n-1}x^n$;

(c) $\sum_{n=1} \frac{x^{2^{n-1}}}{1-x^{2^n}}$; (d) $\sum_{n=1} \frac{(x-7)^n}{(2n^2-5n)4^n}$;

(e) $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; (f) $\sum_{n=1} \frac{1}{n+3}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n$;

(g) $\sum_{n=1} \frac{2n^3}{n^3+2}\cdot\frac{1}{(3x^2+10x+9)^n}$;

(h) $\sum_{n=1} \frac{1}{n}\frac{x^n}{1-x^n}$; (i) $\sum_{n=1} \frac{(-1)^n}{x^2-n^2}$?

260. Tekintsük azokat a természetes számokat, amelyek tízes számrendszerbeli alakjában nem fordul elő a 7 számjegy. Igazolja, hogy ezen számok reciprokainak az összege véges. Mutassa meg, hogy az összeg kisebb 80-nál.

261. Tegyük fel, hogy (a_n) olyan nemnegatív tagú sorozat, amelyre a $\sum a_n$ sor konvergens. Igazolja, hogy ekkor a $\sum a_n^2$ sor is konvergens. Igaz-e ez fordítva is? Elhagyható-e az $a_n \geq 0$ feltétel?

262. Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ sor konvergens és $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 1$ (ilyenkor azt mondjuk, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozat *aszimptotikusan egyenlő*). Következik-e ezekből az, hogy a $\sum b_n$ sor is konvergens?

263. Legyen $a_n, b_n > 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Igazolja, hogy

(a) ha $0 < \lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) < +\infty$ (ilyenkor azt mondjuk, hogy az (a_n) és a (b_n) sorozatok *azonos nagyságrendűek*), akkor a $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum b_n$ sor konvergens;

(b) ha $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = 0$ és a $\sum b_n$ sor konvergens, akkor a $\sum a_n$ sor is konvergens;

(c) ha $\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = +\infty$ és a $\sum b_n$ divergens, akkor a $\sum a_n$ sor is divergens.

264. Tegyük fel, hogy az (a_n) sorozat monoton csökkenve tart nullához. Mutassa meg, hogy ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor $\lim(na_n) = 0$.

265. A Dirichlet-féle konvergenciakritérium: Tegyük fel, hogy a $\sum a_n$ végtelen sor részletösszegei egyenletesen korlátosak, azaz van olyan $K > 0$ valós szám, hogy

$$|a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq K \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá a $(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ sorozat monoton csökkenve tart 0-hoz. Mutassa meg, hogy ekkor a

$$\sum_{n=1} (a_n b_n)$$

sor konvergens.

266. Mutassa meg, hogy ha $a_n, b_n \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, akkor a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{10^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{b_n}{10^n}$$

egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $a_n = b_n$ $(n \in \mathbb{N})$; vagy van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n = b_n$ minden $n < N$ indexre, $a_N = b_N + 1$ és $a_n = 0, b_n = 9$ minden $n > N$ természetes számra; vagy van olyan $N \in \mathbb{N}$, hogy $a_n = b_n$ minden $n < N$ indexre, $a_N + 1 = b_N$ és $a_n = 9, b_n = 0$ minden $n > N$ esetén.

267. (a) Adja meg az $\frac{1}{3}, \frac{7}{9}, \frac{2}{5}$ számok tizedes tört alakját.

(b) Írja fel $\frac{p}{q}$ alakban $(p, q \in \mathbb{N})$ a következő számokat: $0,123$; $-7,000352$; $0,\dot{7}$; $0,12\dot{7}6\dot{3}$; $0,2\dot{3}2\dot{1}$.

268. (a) Írja fel az $\frac{1}{3}, \frac{7}{9}, \frac{2}{5}$ számokat diadikus tört alakban.

(b) Írja fel $\frac{p}{q}$ alakban $(p, q \in \mathbb{N})$ az alábbi, diadikus tört alakban adott számokat:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{2^{12}} + \cdots + \frac{1}{2^{5n-4}} + \frac{1}{2^{5n}} + \cdots,$$
$$\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{2^{20}} + \cdots + \frac{1}{2^{10n}} + \cdots.$$

269. Igazolja, hogy az alábbi sorok konvergensek. Számítsa ki az s_4 részletösszeget, és becsülje meg s_4-nek a sor összegétől való eltérését. Ezek alapján adjon meg olyan intervallumot, amelyben a sor összege benne van.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{1}{n!}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{1}{n!2^n}$.

270. Mutassa meg, hogy az alábbi sorok konvergensek. Határozza meg, hogy milyen n indexű részletösszegei közelítik meg a sor összegét a megadott ε-nál kisebb hibával. Számítsa ki a megfelelő s_n részletösszeget, és ezek alapján adja meg azt az intervallumot, amelyben a sor összege benne van. Hány tizedesjegyig pontos a közelítés?

(a) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{1}{n!}$, $\varepsilon = 10^{-2}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$, $\varepsilon = 10^{-2}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$, $\varepsilon = 10^{-4}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n!4^n}$, $\varepsilon = 10^{-4}$.

271. „Hópehely alakzat”:

1. lépés. Tekintsünk egy egységoldalú szabályos háromszöget.

2. lépés. Minden oldalt osszunk fel három egyenlő részre. Emeljünk a középső részek fölé kifelé egy-egy egyenlő oldalú háromszöget, majd töröljük ki a középső részeket.

$(n+1)$. lépés. Az n-edik alakzat mindegyik oldalát osszuk fel három egyenlő részre. Emeljünk a középső részek fölé kifelé egy-egy egyenlő oldalú háromszöget, majd töröljük ki a középső részeket.

Jelöljük az n-edik lépésben kapott alakzatot H_n-nel. Továbbá jelölje h_n a H_n oldalszámát, k_n a kerületét, t_n pedig a területét.

Mutassa meg, hogy $\lim(k_n) = +\infty$, de $\lim(t_n) < +\infty$. (A határalakzat a „hópehely”, amelynek véges területe, de végtelen kerülete van.)

5.3. Műveletek számsorokkal

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. A végtelen sorok a véges összegek általánosításának tekinthetők. Ebben a pontban arról lesz szó, hogy a véges összegek megszokott (és nagyon hasznos) tulajdonságai (asszociativitás, kommutativitás, disztributivitás) vajon érvényben maradnak-e a végtelen összegekre is.

Elöljáróban a következőket jegyezzük meg: Az első feladat azt tisztázni, hogy ezeket a tulajdonságokat végtelen sorokra hogyan lehet/kell *értelmezni.* Ki fog derülni, hogy a szóban forgó tulajdonságok végtelen összegekre csak bizonyos feltételek teljesülése esetén maradnak meg. A „legerősebb” követelmény az *abszolút konvergencia* lesz. Kiemelten érdemes megjegyezni azt a tényt, hogy *abszolút konvergens sorokra a véges összegek minden említett tulajdonsága teljesül; az ilyen végtelen összegekkel úgy számolhatunk, mint a végesekkel.*

Számsorok zárójelezése (asszociativitás)

D. Legyen (a_n) egy valós sorozat és $(m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy szigorúan monoton növő sorozat (azaz (m_n) egy indexsorozat). A $\sum a_n$ sor (m_n) indexsorozat által meghatározott **zárójelezésén** a $\sum \alpha_n$ sort értjük, ahol

$$\alpha_n := \sum_{i=m_{n-1}+1}^{m_n} a_i \qquad (n \in \mathbb{N}, \quad m_0 := 0).$$

T. ***Zárójelek elhelyezése:*** *Konvergens sor bármely zárójelezése is konvergens, és az összege a zárójelezéssel nem változik.*

T. ***Zárójelek elhagyása:*** *Legyen* (a_n) *egy valós sorozat, és tegyük fel, hogy*

(i) $(m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *szigorúan monoton növekedő,*

(ii) *az* $(m_{n+1} - m_n, n \in \mathbb{N})$ *sorozat korlátos,*

(iii) $\lim(a_n) = 0$,

(iv) *a* $\sum a_n$ *sor* (m_n) *indexsorozat által meghatározott* $\sum \alpha_n$ *zárójelezett sora konvergens.*

Ekkor a zárójelek elhagyásával kapott $\sum a_n$ *sor is konvergens, és*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n.$$

Számsorok átrendezése (kommutativitás)

D. Legyen $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ egy bijekció (p az $\mathbb{N}$ halmaz egy átrendezése vagy permutációja). A $\sum a_n$ végtelen sor p által meghatározott **átrendezésén** vagy **permutációján** a $\sum a_{p(n)}$ sort értjük.

T. *Abszolút konvergens végtelen sor bármely átrendezése is abszolút konvergens, és a sor összege az átrendezéssel nem változik.*

T. ***Riemann-tétel:*** *Tegyük fel, hogy a* $\sum a_n$ *egy feltételesen konvergens sor (azaz* $\sum a_n$ *konvergens, de* $\sum |a_n|$ *divergens). Ekkor a sornak*

1° *minden* $A \in \overline{\mathbb{R}}$ *esetén létezik olyan átrendezése, amelynek összege* A*;*

2° *van olyan átrendezése, aminek nincs határértéke.*

Számsorok szorzása

M. Konvergens végtelen sorok összeadására és számmal való szorzására a véges összegekkel analóg tulajdonságok érvényesek (l. a **98.** oldalt). Most arról lesz szó, hogy a véges összegek szorzatára vonatkozó

$$\left(\sum_{k=1}^{p} a_k\right)\left(\sum_{l=1}^{q} b_l\right) = \sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{q} a_k b_l$$

azonosság milyen formában terjeszthető ki végtelen sorokra.

Az első kérdés persze az, hogy két végtelen sor (végtelen összeg) szorzatát hogyan értelmezzük. A $\sum_{n=0} a_n$ és a $\sum_{n=0} b_n$ sorok szorzatát úgy kell definiálni, hogy a szorzatsor minden tag minden taggal való szorzatát tartalmazza. Az $a_k b_l$ számokat az alábbi végtelen mátrixba rendezzük:

$$(*)\qquad \begin{array}{c|cccccc} & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots \\ \hline b_0 & a_0b_0 & a_1b_0 & a_2b_0 & a_3b_0 & \dots \\ b_1 & a_0b_1 & a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\ b_2 & a_0b_2 & a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\ b_3 & a_0b_3 & a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Ebből a mátrixból sokféleképpen képezhetünk végtelen sort, és mindegyiket – joggal – tekinthetjük a két sor szorzatának. A két legfontosabb eset a következő.

D. A $\sum_{n=0} a_n$ és a $\sum_{n=0} b_n$ végtelen sorok **téglányszorzatának** a

$$\sum_{n=0} \sum_{\max\{i,j\}=n} a_i b_j,$$

Cauchy-szorzatának pedig a

$$\sum_{n=0} \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

végtelen sort nevezzük.

M. 1° A téglányszorzatban tehát a saroknégyzetek mentén lévő tagokat gyűjtjük össze egy tagba, a Cauchy-szorzatban pedig az említett négyzetek átlói mentén álló tagokat csoportosítottuk.

2° A Cauchy-szorzat n-edik tagját így is írhatjuk:

$$\sum_{i+j=n} a_i b_j = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}.$$

3° Az értelemszerű módosításokkal értelmezhetjük a $\sum_{n=r} a_n$ és $\sum_{n=s} b_n$ számsorok (l. a **97.** oldalon az első megjegyzést) szorzatát is.

T. *Konvergens végtelen sorok téglányszorzata is konvergens, és a téglányszorzat összege a tényezők összegének a szorzatával egyezik meg.*

T. *Tegyük fel, hogy a* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *sorok abszolút konvergensek, és a* $(*)$ *mátrixból tetszőleges módon képezzünk egy* $\sum c_n$ *végtelen sort. Ekkor a* $\sum c_n$ *sor is abszolút konvergens, és az összege a* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *sorok összegének a szorzatával egyenlő:*

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n\Big).$$

Speciálisan: *abszolút konvergens sorok téglányszorzata és Cauchy-szorzata egyaránt abszolút konvergens, és mindkét sor összege a kiindulásul tekintett két sor összegének a szorzatával egyenlő.*

M. A $(*)$ mátrixból tetszőleges módon képzett $\sum c_n$ sor a következőt jelenti: Legyen Γ_n $(n \in \mathbb{N}_0)$ az $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ halmaz egy tetszőleges, páronként diszjunkt felbontása, vagyis

$$\Gamma_j \cap \Gamma_k = \emptyset, \quad \text{ha} \quad j \neq k \qquad \text{és} \quad \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \Gamma_n = \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0,$$

továbbá

$$c_n := \sum_{(j,k) \in \Gamma_n} a_j b_k \qquad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Világos, hogy a téglányszorzat a $\Gamma_n = \big\{(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid j + k = n\big\}$, a Cauchy-szorzat pedig a $\Gamma_n = \big\{(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid \max\{j,k\} = n\big\}$ $(n \in \mathbb{N}_0)$ halmazrendszernek felel meg.

T. ***Mertens-tétel:*** *Egy abszolút konvergens és egy konvergens sor Cauchy-szorzata konvergens, és a szorzatsor összege a sorok összegének a szorzatával egyenlő.*

■ A-feladatok

272. Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = 0$. Igazolja, hogy a $\sum a_n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum(a_{2n} + a_{2n+1})$ sor konvergens.

273. Adjon meg olyan divergens sor, amelyiknek van konvergens zárójelezése.

274. Van-e olyan *nullasorozat* által generált divergens sor, amelyiknek van konvergens zárójelezése.

■ B-feladatok

275. Mutassa meg, hogy a

(a) $\sum\limits_{n=0} \dfrac{(-1)^n}{n+1} \times \sum\limits_{n=0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ sor konvergens;

(b) $\sum\limits_{n=0} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}} \times \sum\limits_{n=0} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ sor divergens,

ahol $\times$ a Cauchy-szorzást jelöli.

276. A $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ feltételesen konvergens sornak adjon meg egy olyan átrendezését, amelyiknek az összege 12. Átrendezhető-e ez a sor úgy, hogy az összege $+\infty$ legyen?

277. Képezze a $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor önmagával vett Cauchy-szorzatát. Ennek felhasználásával mutassa meg, hogy minden $|q| < 1$ valós számra

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n.$$

Határozza meg a $\sum\limits_{n=1} nq^n$ $(|q| < 1)$ sor összegét is. (Vö. a **244.** feladattal.)

M. **Sorok összegének a meghatározásáról.** Korábban már hangsúlyoztuk, hogy „viszonylag kevés” sor összegét tudjuk meghatározni. Ilyenek voltak a *geometriai*, a *teleszkopikus sorok*, valamint az e *számot előállító sor*. Egyedi eszközök (trükkök) felhasználásával persze további sorok összegét is meghatározhatjuk. Erre mutattunk egy példát az **244.** feladatban. Az előző feladat azt is illusztrálja, hogy sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tételeinknek az elméleti jelentősége mellett gyakorlati „haszna” is van. Ugyanis ha sikerül egy sort két ismert összegű sor Cauchy-szorzataként előállítani, akkor a kiindulási sor összege a két tényező összegének a szorzata.

■ C-feladatok

278. Adjon meg olyan $\sum a_n$ valós sort, amelyre a következő teljesül: minden $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén a sornak van olyan zárójelezése, hogy a zárójelezett sor összege α.

279. Határozza meg a $\sum\limits_{n=0} \left(-\frac{1}{3}\right)^n$ és a $\sum\limits_{n=0} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ sorok $\sum\limits_{n=0} c_n$-nel jelölt Cauchy-szorzatát. Lássa be, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n.$$

280. Bizonyítsa be, hogy

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}.$$

281. Mutassa meg, hogy a

$$\sum_{n=0} a_n := 1 - \sum_{n=1} \left(\frac{3}{2}\right)^n \quad \text{és a} \quad \sum_{n=0} b_n := 1 + \sum_{n=1} \left(\frac{3}{2}\right)^n \left(2^n + \frac{1}{2^n}\right)$$

sorok divergensek, de a Cauchy-szorzatuk abszolút konvergens.

282. Bizonyítsa be, hogy minden $|a| \leq 1$ és $|x| < 1$ számra fennáll a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(ax)^k}{1 - x^k} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{ax^n}{1 - ax^n}$$

egyenlőség.

5.4. Komplex tagú sorok

■ Definíciók, tételek és megjegyzések

M. A komplex tagú sorozatokból kiindulva komplex sorokat, ezek konvergenciáját és divergenciáját a valós esethez hasonlóan értelmezzük.

A valós sorokra ismertetett tételek többsége komplex sorokra is kiterjeszthető. Így igazak például az **5.1.** pontbeli állítások:

- a Cauchy-féle konvergenciakritérium,
- a sorok konvergenciájának szükséges feltételeire, valamint
- az összeg és a számszoros konvergenciájára vonatkozó tételek.

T. *A $\sum z_n$ komplex sor akkor és csak akkor konvergens, ha a $\sum \operatorname{Re} z_n$ és az $\sum \operatorname{Im} z_n$ valós sorok mindegyike konvergens, és ekkor*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} z_n = \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{Im} z_n.$$

D. A $\sum z_n$ komplex sor **abszolút konvergens**, ha a $\sum |z_n|$ valós sor konvergens.

T. *Ha egy végtelen komplex sor abszolút konvergens, akkor egyúttal konvergens is. Az állítás megfordítása nem igaz: a $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ sor konvergens, de nem abszolút konvergens.*

T. ***Az összehasonlító kritérium:*** *Ha a $\sum z_n$ sor abszolút konvergens, és létezik olyan $N \in \mathbb{N}$, amelyre $|w_n| \le |z_n|$ $(n \ge N)$, akkor a $\sum w_n$ komplex sor is abszolút konvergens, és így konvergens is.*

T. ***A Cauchy-féle gyökkritérium:*** *Tekintsük a $\sum z_n$ komplex sort, és legyen*

$$A := \overline{\lim} \left(\sqrt[n]{|z_n|} \right).$$

Ekkor

1^o $A < 1$ *esetén a $\sum z_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is).*

2^o $A > 1$ *esetén a $\sum z_n$ sor divergens.*

3^o $A = 1$ *esetén a $\sum z_n$ sor lehet konvergens is, divergens is.*

T. ***A D'Alembert-féle hányadoskritérium:*** *Tegyük fel, hogy a $\sum z_n$ komplex sor tagjai közül egyik sem 0.*

1^o *Ha $\overline{\lim}\left(\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right) < 1$, akkor a $\sum z_n$ sor abszolút konvergens (tehát konvergens is).*

2^o *Ha $\underline{\lim}\left(\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right|\right) > 1$, akkor a $\sum z_n$ sor divergens.*

M. Komplex sorok **átrendezését**, **téglányszorzatát** és **Cauchy-szorzatát** ugyanúgy értelmezzük, mint a valós esetben (l. a **113.** oldalt).

T. *Ha egy komplex sor abszolút konvergens, akkor bármely átrendezése is abszolút konvergens, és a sor összege az átrendezéssel nem változik.*

T. *Konvergens komplex sorok téglányszorzata is konvergens, és a téglányszorzat összege a tényezők összegének a szorzatával egyezik meg.*

T. *Abszolút konvergens komplex sorok Cauchy-szorzata is abszolút konvergens, és a szorzatsor összege a kiindulásul tekintett két sor összegének a szorzatával egyenlő.*

■ Feladatok

283. Legyen $q \in \mathbb{C}$. Mutassa meg, hogy a $\sum_{n=0} q^n$ geometriai sor pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = 1 + q + q^2 + q^3 + q^4 + \cdots = \frac{1}{1-q} \qquad (|q| < 1).$$

284. Konvergensek-e az alábbi sorok:

(a) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{1}{n+i}$; (b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{i^n}{n}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{1}{\sqrt{n}+i}$; (d) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{n(2+i)^n}{2^n}$;

(e) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{1}{n(3+i)^n}$; (f) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(1+i)^n}{(n+i)^2}$?

285. Milyen $z \in \mathbb{C}$ komplex szám esetén konvergensek az alábbi sorok:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{(z-7)^n}{(2n^2-5n)4^n}$;

(b) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{z^{2n}}{1+z^{4n}}$;

(c) $\displaystyle\sum_{n=0} \frac{2^n+n^3}{n^2} z^n$;

(d) $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{5^n+n3^n}{n^2+n+1} z^n$?

286. Milyen $z \in \mathbb{C}$ esetén konvergens a $\displaystyle\sum_{n=1} \frac{z^n}{n}$ sor?

II. rész

Megoldások

1. Egyenletek és egyenlőtlenségek

1.1. Egyenletek és egyenlőtlenségek megoldása

1. (a) Az abszolút érték definíciója szerint

$$|x+3| = \begin{cases} x+3, & \text{ha } x \geq -3 \\ -(x+3), & \text{ha } x < -3, \end{cases}$$

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \geq 1 \\ -(x-1), & \text{ha } x < 1. \end{cases}$$

Az első abszolútérték-jelek között álló kifejezés $x = -3$-nál, a másodikban levő pedig $x = 1$-nél vált előjelet. Az $\mathbb{R}$ halmazt tehát az alábbi intervallumokra célszerű felbontani:

$$I_1 := (-\infty, -3), \qquad I_2 := [-3, 1), \qquad I_3 := [1, +\infty).$$

(Világos, hogy $I_1 \cup I_2 \cup I_3 = \mathbb{R}$.) Mivel

$$|x+3| + |x-1| = \begin{cases} -(x+3)-(x-1), & \text{ha } x \in I_1 \\ x+3-(x-1), & \text{ha } x \in I_2 \\ x+3+x-1, & \text{ha } x \in I_3 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} -2x-2, & \text{ha } x \in I_1 \\ 4, & \text{ha } x \in I_2 \\ 2x+2, & \text{ha } x \in I_3, \end{cases}$$

ezért egyenletünk az $I_1 = (-\infty, -3)$ halmazon a $-2x - 2 = 3x - 5$ egyenlettel ekvivalens. Ebből $x = \frac{3}{5}$, ami nem eleme I_1-nek, ezért ezen a halmazon az egyenletünknek nincs megoldása.

Az $I_2 = [-3, 1)$ halmazon az eredetivel ekvivalens egyenlet $4 = 3x - 5$. Az ebből adódó $x = 3$ nem tartozik hozzá az I_2 halmazhoz, ezért ezen az intervallumon sincs megoldás.

Az $I_3 = [1, +\infty)$ intervallumon ekvivalens egyenlet $2x + 2 = 3x - 5$, amiből $x = 7$ adódik. Mivel $7 \in I_3$, ezért ezen az intervallumon ez az egyetlen megoldás.

Mindent összevetve az eredeti egyenletnek pontosan egy megoldása van: $x = 7$. ■

(b) A megoldáshalmaz a $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ intervallum. ■

(c) $x_1 = \frac{7}{2}$ vagy $x_2 = -\frac{7}{2}$. ■

(d) A megoldáshalmaz: $\left\{0, \frac{4}{5}\right\}$. ■

(e) A külső abszolútérték-jeleket nem kell az argumentumok előjele szerint felbontani. Vegyük észre, hogy

$$\forall\, a, b \in \mathbb{R} \ \text{ esetén } \ |a| = |b| \quad \Longleftrightarrow \quad a = b \ \text{ vagy } \ a = -b.$$

Ennek felhasználásával két egyenletet kapunk:

(i) $|x + 1| - 2 = |x - 2| + 1$, (ii) $-|x + 1| + 2 = |x - 2| + 1$,

és az eredeti egyenlet megoldáshalmaza ezek megoldáshalmazainak az egyesítése.
Az első egyenlet megoldása: ha $x < -1$, akkor $-x-1-2 = 2-x+1$, és ennek nincs gyöke; ha $-1 \le x \le 2$, akkor $x+1-2 = 2-x+1$, amiből $x = 2$ adódik; ha $2 < x$, akkor $x + 1 - 2 = x - 2 + 1$, és ez minden szóba jövő x valós számra fennáll. Az (i) egyenlet megoldáshalmaza tehát a $[2, +\infty)$ intervallum.
Hasonlóan igazolhatjuk, hogy a (ii) egyenletnek nincs megoldása, így az eredeti egyenlet megoldáshalmaza a $[2, +\infty)$ intervallum.

(f) A megoldáshalmaz: $\left\{-\frac{4}{5}, 0, \frac{4}{5}\right\}$. ■

(g) $x_1 = 1$ vagy $x_2 = -6$. ■

(h) A megoldáshalmaz: $\left\{-5, -3, 1, 5, 7\right\}$. ■

2. (a) **Algebrai megoldás.** Egy kéttényezős szorzat akkor és csak akkor negatív, ha mindkét tényezője különböző előjelű. Az egyenlőtlenségünk tehát az alábbi két egyenlőtlenség-rendszerrel ekvivalens:

(i) $5 - x < 0$ és $2x + 3 > 0$

vagy

(ii) $5 - x > 0$ és $2x + 3 < 0$.

Az (i) rendszer megoldása $x > 5$, (ii) megoldása pedig $x < -\frac{3}{2}$, ezért az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza: $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (5, +\infty)$.

Grafikus megoldás. Ábrázoljuk az $(5-x)(2x+3)$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényt! Ennek képe egy „lefele nyitott" parabola, amely az x tengelyt az $x_1 = 5$ és $x_2 = -\frac{3}{2}$ pontban metszi. Ez a függvény pontosan akkor vesz fel negatív értéket, ha $x \in (-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (5, +\infty)$. ■

(b) A megoldáshalmaz: $(-\infty, 2) \cup (3, +\infty)$. ■

(c) Rendezzük 0-ra az egyenlőtlenséget:

$$\frac{3x^2 + 7x - 4}{x^2 + 2x - 3} - 2 < 0 \iff \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 2x - 3} < 0.$$

Mivel egy tört pontosan akkor negatív, ha a számlálója és a nevezője különböző előjelű, ezért a fenti egyenlőtlenség pontosan olyan $x \in \mathbb{R}$ számokra teljesül, amelyekre

(i) $x^2 + 3x + 2 < 0$ és $x^2 + 2x - 3 > 0$

vagy

(ii) $x^2 + 3x + 2 > 0$ és $x^2 + 2x - 3 < 0$.

Ezeket a másodfokú egyenlőtlenségeket érdemes grafikus úton megoldani. A másodfokú kifejezéseket először szorzattá alakítjuk:

$$x^2 + 3x + 2 = (x + 2)(x + 1) \text{ és } x^2 + 2x - 3 = (x - 1)(x + 3).$$

Azt kapjuk, hogy az (i) rendszernek nincs megoldása, (ii) megoldáshalmaza pedig $(-3, -2) \cup (-1, 1)$, ezért ez lesz az eredeti egyenlőtlenség megoldáshalmaza is. ■

(d) A megoldáshalmaz: $(-\infty, -1) \cup (\frac{1}{2}, +\infty)$. ■

(e) A megoldáshalmaz a $(-1,01; -0,99)$ intervallum. ■

(f) A megoldáshalmaz: $(-\infty, -3) \cup (7, +\infty)$. ■

(g) A megoldáshalmaz: $(-\sqrt{3}, -\sqrt{2}) \cup (0, \sqrt{2}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$. ■

(h) A megoldáshalmaz az $\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ intervallum. ■

(i) A megoldáshalmaz a $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$ intervallum. ■

(j) A megoldáshalmaz a $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ intervallum. ■

3. $x = 1 - \frac{1}{p-1} > 1 \iff -\frac{1}{p-1} > 0 \iff p < 1$. ■

4. $x \neq -p$; rendezés után $px = 10p + p^2$ adódik. Ha $p = 0$, akkor $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; ha $p \in \mathbb{R} \setminus \{0, -5\}$, akkor $\{10 + p\}$; ha $p = -5$, akkor $\emptyset$ a megoldáshalmaz. ■

5. Rendezés után azt kapjuk, hogy $x^2 + (3-2p)x + p^2 - 3p + 2 = 0$. Ennek megoldása

$$x_{1,2} = \frac{-(3-2p) \pm \sqrt{(3-2p)^2 - 4(p^2-3p+2)}}{2} = \frac{-(3-2p) \pm 1}{2}.$$

Az egyenletnek tehát minden $p \in \mathbb{R}$ esetén két különböző gyöke van: $p-2$ és $p-1$. ■

6. Ha $p^2 - 1 \neq 0$, azaz $p \neq 1$ és $p \neq -1$, akkor x-ben másodfokú egyenlőtlenségről van szó. *Az x-ben másodfokú polinom-függvény minden valós x-re akkor és csak akkor pozitív, ha a képe olyan felülről nyitott parabola, amelynek nincs közös pontja az x tengellyel.* Ez azt jelenti, hogy a hozzá tartozó másodfokú egyenletnek a főegyütthatója pozitív, és nincs valós gyöke. Ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy a diszkriminánsa negatív. Azokat a $p \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$ számokat kell tehát meghatároznunk, amelyekre

$$p^2 - 1 > 0 \qquad \text{és} \qquad 4(p-1)^2 - 4(p^2-1) < 0.$$

Ennek az egyenlőtlenség-rendszernek a megoldása: $p > 1$.

Ha $p = -1$, akkor a $-4x + 1 > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ez nem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, tehát $p = -1$ nem megoldása a feladatnak.

Ha $p = 1$, akkor az $1 > 0$ egyenlőtlenséget kapjuk, ami x-től függetlenül igaz, ezért megoldás.

A feladat megoldása tehát $p \geq 1$. ■

7. A feladat azzal ekvivalens, hogy az $x^2 - px - \frac{2}{p}$ polinom diszkriminánsa negatív, azaz $p^2 + \frac{8}{p} < 0$. Ennek megoldáshalmaza a $(-2, 0)$ intervallum, ezért a feladat megoldása $-2 < p < 0$. ■

8. Az egyenletnek pontosan akkor van két különböző valós gyöke, ha az egyenlet másodfokú (azaz $p \neq 1$) és a diszkriminánsa pozitív, azaz

$$4p^2 - 4(p+3)(p-1) = -8p + 12 > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p < \frac{3}{2}.$$

Ha $p \in (-\infty, \frac{3}{2}) \setminus \{1\}$, akkor a két különböző gyök (x_1 és x_2) pontosan akkor pozitív, ha

$$x_1 + x_2 = \frac{2p}{p-1} > 0 \ \text{ és } \ x_1 x_2 = \frac{p+3}{p-1} > 0$$

(l. a gyökök és együtthatók közötti összefüggéseket). Ezeket az egyenlőtlenségeket megoldva, és figyelembe véve a $p < \frac{3}{2}$, $p \neq 1$ feltételeket is, azt kapjuk, hogy az egyenletnek

$$p \in (-\infty, -3) \cup \left(1, \frac{3}{2}\right)$$

esetén van két különböző valós gyöke. ■

9. $-5 < p < 1$. ■

1.2. A teljes indukció

10. (a) Az állítást teljes indukcióval bizonyítjuk.

(i) Az $n = 1$ esetben azt kapjuk, hogy $\frac{1}{1 \cdot 2} = \frac{1}{2}$, az állítás tehát igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy valamely n természetes számra fennáll az egyenlőség, azaz

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Ekkor

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\dots+\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{n}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)}=$$
$$=\frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n+2},$$

ami azt jelenti, hogy a feladat állítása $(n+1)$-re is igaz. ■

Megjegyzés. A feladatot az

$$\frac{1}{k\cdot(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1} \qquad (k\in\mathbb{N})$$

azonosság felhasználásával is megoldhatjuk. ■

11. (a) Teljes indukcióval igazoljuk azt, hogy

(I) $2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}$ $(n=2,3,4,\dots)$,

és

(II) $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$ $(n=2,3,4,\dots)$.

Az (I) *egyenlőtlenség bizonyítása:*

(i) Ha $n=2$, akkor

$$2\sqrt{3}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}} \;\Leftrightarrow\; 2\sqrt{6}<3\sqrt{2}+1 \;\Leftrightarrow\; 24<19+6\sqrt{2} \;\Leftrightarrow\; 25<72,$$

az állítás tehát igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy valamely $n\in\mathbb{N}$ számra fennáll az egyenlőtlenség, azaz

$$2\sqrt{n+1}-2<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ennek felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

Ha igazoljuk, hogy

$$2\sqrt{n+1}-2+\frac{1}{\sqrt{n+1}}>2\sqrt{n+2}-2, \tag{$*$}$$

akkor ezzel azt látjuk be, hogy az (I)-beli állítás $(n+1)$-re is igaz. Ez utóbbi egyenlőtlenség ekvivalens a következőkkel:

$$2(n+1)+1>2\sqrt{(n+1)(n+2)} \iff$$
$$\iff (2n+3)^2>4(n+1)(n+2) \iff 9>8,$$

és ez azt jelenti, hogy $(*)$ valóban fennáll.

A (II) egyenlőtlenséget hasonlóan bizonyíthatjuk. ■

(c) Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $n=2$, akkor

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6} \quad \text{és} \quad \frac{3\cdot 2+5}{6}=\frac{6\cdot 2-1}{6}=\frac{11}{6},$$

és ez azt jelenti, hogy az állítás ebben az esetben igaz.

Tegyük fel, hogy valamilyen $n\in\mathbb{N}$ mellett fennállnak a feladatbeli egyenlőtlenségek. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{2^n-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}$$

felbontás miatt egyrészt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}\le\frac{6n-1}{6}+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}\le$$
$$\le\frac{6n-1}{6}+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{2^n}=\frac{6n-1}{6}+1=\frac{6(n+1)-1}{6},$$

azaz a jobb oldali egyenlőtlenség $(n+1)$-re is igaz. Másrészt

$$\sum_{k=1}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}\ge\frac{3n+5}{6}+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{k}\ge$$
$$\ge\frac{3n+5}{6}+\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}\frac{1}{2^{n+1}}=\frac{3n+5}{6}+\frac{1}{2}=\frac{3(n+1)+5}{6},$$

tehát a bal oldali egyenlőtlenség is igaz $(n+1)$-re. ■

(d) Teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$\text{(I)}\quad n^{\frac{6}{7}} \le 1 + \frac{1}{\sqrt[7]{2}} + \frac{1}{\sqrt[7]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[7]{n}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

$$\text{(II)}\quad 1 + \frac{1}{\sqrt[7]{2}} + \frac{1}{\sqrt[7]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[7]{n}} \le \frac{7}{6} n^{\frac{6}{7}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(I) *igazolása:* (i) Ha $n = 1$, akkor $1 \le 1$, ami igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy $n \in \mathbb{N}$ számra. Ekkor

$$1 + \frac{1}{\sqrt[7]{2}} + \frac{1}{\sqrt[7]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[7]{n}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n+1}} \ge n^{\frac{6}{7}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n+1}}.$$

Ha igazoljuk, hogy

$$(*)\qquad n^{\frac{6}{7}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n+1}} \ge (n+1)^{\frac{6}{7}},$$

akkor ezzel azt látjuk be, hogy az állítás $(n+1)$-re is teljesül. Mivel

$$n^{\frac{6}{7}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n+1}} \ge (n+1)^{\frac{6}{7}} \iff \sqrt[7]{n^6(n+1)} + 1 \ge (n+1)$$
$$\iff n+1 \ge n$$

minden $n \in \mathbb{N}$ számra, ezért $(*)$ valóban teljesül.

(II) *igazolása:* (i) Ha $n = 1$, akkor $1 \le \frac{7}{6}$, ami igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy az állítás igaz egy $n \in \mathbb{N}$ számra. Ekkor

$$1 + \frac{1}{\sqrt[7]{2}} + \frac{1}{\sqrt[7]{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt[7]{n}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n+1}} \le \frac{7}{6} n^{\frac{6}{7}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n+1}}.$$

Elég azt igazolni, hogy

$$(**)\qquad \frac{7}{6} n^{\frac{6}{7}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n+1}} \le \frac{7}{6}(n+1)^{\frac{6}{7}}.$$

Ezt átalakítva azt kapjuk, hogy

$$\frac{7}{6} n^{\frac{6}{7}} + \frac{1}{\sqrt[7]{n+1}} \le \frac{7}{6}(n+1)^{\frac{6}{7}} \iff \frac{7}{6}\sqrt[7]{n^6(n+1)} + 1 \le \frac{7}{6}(n+1) \iff$$
$$\iff \sqrt[7]{n^6(n+1)} \le n + \frac{1}{7} \iff n^7 + n^6 \le \left(n + \frac{1}{7}\right)^7 \overset{\text{Bin. t.}}{\iff}$$
$$\overset{\text{Bin. t.}}{\iff} n^7 + n^6 \le n^7 + \binom{7}{1} n^6 \cdot \frac{1}{7} + \binom{7}{2} n^5 \left(\frac{1}{7}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{7}\right)^7.$$

Mivel $\binom{7}{1}n^6 \cdot \frac{1}{7} = n^6$, ezért az utolsó egyenlőtlenség, következésképp $(**)$ is igaz. Az állítás tehát $(n+1)$-re is teljesül. ■

12. (a) Az $n = 2$ esetben az egyenlőtlenség teljesül, mivel $4 > 1 + 2\sqrt{2}$ ekvivalens a nyilvánvalóan igaz $9 > 8$ egyenlőtlenséggel.

Tegyük fel, hogy valamilyen $n \geq 2$ természetes számra $2^n > 1+$ $+n\sqrt{2^{n-1}}$. Ezt az indukciós feltételt felhasználva kapjuk, hogy $2^{n+1} =$ $= 2 \cdot 2^n > 2(1 + n\sqrt{2^{n-1}})$. Ha igazoljuk, hogy

$$2(1 + n\sqrt{2^{n-1}})>1 + (n + 1)\sqrt{2^n},$$

akkor ezzel azt látjuk be, hogy az állítás $(n + 1)$-re is igaz. Mivel az indukciós feltételben $n \geq 2$ tetszőleges szám lehet, ezért ezt az egyenlőtlenséget is minden ilyen természetes számra kell bizonyítanunk. Mivel $2(1 + n\sqrt{2^{n-1}}) = 2 + 2n\sqrt{2^{n-1}} = 2 + \sqrt{2}n\sqrt{2^n}$, ezért a fenti egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$1 + \sqrt{2}n\sqrt{2^n} > (n + 1)\sqrt{2^n}. \qquad (*)$$

Ennek igazolásához az átalakítások mechanikus megkezdése előtt figyeljük meg inkább az egyenlőtlenséget. Hasonlítsuk össze a $\sqrt{2^n}$ együtthatóit: várható, hogy $\sqrt{2}n$ már nagyobb, mint $(n+1)$, és ekkor az egyenlőtlenség nyilván teljesül. Nézzük ezt meg pontosan is:

$$\sqrt{2}n > n + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad (\sqrt{2} - 1)n > 1 \quad \Longleftrightarrow \quad n > \sqrt{2} + 1,$$

és ez azt jelenti, hogy a $(*)$ egyenlőtlenség minden $n \geq 3$ természetes számra igaz. Ha $n = 2$, akkor $1 + \sqrt{2} \cdot 2 \cdot 2>3 \cdot 2 \iff 32>25$. Megmutattuk tehát, hogy $(*)$ minden $n = 2, 3, \ldots$ számra teljesül, azaz ha az egyenlőtlenség fennáll n-re, akkor $(n + 1)$-re is. ■

(c) Ha $n = 4$, akkor $3^4 > 4^3$, azaz $81 > 64$ adódik, ami igaz.

Tegyük fel, hogy egy $n \geq 4$ természetes számra fennáll az egyenlőtlenség. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$3^{n+1} = 3 \cdot 3^n > 3n^3.$$

Ha igazoljuk, hogy $3n^3 > (n + 1)^3$, akkor ezzel belátjuk azt, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség $(n + 1)$-re is igaz. De $3n^3 > (n + 1)^3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^3 < 3$; és ez $n \geq 4$ esetén

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^3 \leq \left(1+\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{5^3}{4^3} = \frac{125}{64} < 3$$

miatt nyilván igaz. ■

1.3. Nevezetes azonosságok

13. Tekintsük az $(a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$ szorzatot. A szorzást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &a^n + a^{n-1}b + a^{n-2}b^2 + \cdots + a^2b^{n-2} + ab^{n-1} - \\ &\quad - a^{n-1}b - a^{n-2}b^2 - \cdots - a^2b^{n-2} - ab^{n-1} - b^n = a^n - b^n, \end{aligned}$$

ami az állítás bizonyítását jelenti. ■

14. Ha $q = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $q \neq 1$ valós szám, akkor alkalmazzuk az előző feladatban igazolt állítást az $a := 1$ és $b := q$ szereposztással. ■

15. (a) Az egyenlőséget teljes indukcióval bizonyítjuk.
(i) Az $n = 1$ esetben az állítás igaz, ui. ekkor az egyenlőség mindkét oldalán 1 áll.
(ii) Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n \geq 1$ természetes számra, azaz

$$1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \\ &= (n+1)\left(\frac{n}{2}+1\right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}, \end{aligned}$$

ami azt jelenti, hogy az állítás ekkor $(n+1)$-re is igaz.

(b) Ezt az állítást is teljes indukcióval látjuk be.
(i) Az egyenlőség az $n = 1$ esetben igaz, hiszen $1 = \frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}$.

(ii) Tegyük fel, hogy az állítás igaz valamely $n \geq 1$ természetes számra, azaz

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Adjuk hozzá mind a két oldalhoz az $(n+1)^2$ természetes számot, és alakítsuk át a jobb oldalt a következőképpen:

$$\begin{gathered}
1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 = \\
= \frac{n+1}{6}\big(n(2n+1) + 6(n+1)\big) = \frac{n+1}{6}\big(2n^2 + 7n + 6\big) = \\
= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.
\end{gathered}$$

Ez azt jelenti, hogy az egyenlőség az $n+1$ természetes számra is igaz. A teljes indukció elve alapján tehát (b) minden természetes számra igaz. ■

16. Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Rögzítsük a tetszés szerinti a és b valós számokat.

(i) Az egyenlőség az $n = 1$ esetben igaz, mert

$$(a+b)^1 = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^{1-k} b^k = \binom{1}{0} a^1 b^0 + \binom{1}{1} a^0 b^1 = a + b.$$

(ii) Tegyük fel, hogy az egyenlőség fennáll valamely n természetes számra. Szorozzuk meg ennek az egyenlőségnek mindkét oldalát $(a+$ $+b)$-vel. Ekkor egyszerű átalakítások után a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k (a+b) = \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k+1} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1} =
\end{aligned}$$

$$= \binom{n}{0} a^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left\{ \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right\} a^{n+1-k} b^k + \binom{n}{n} b^{n+1}.$$

A $\{\ldots\}$-ben levő összeget így alakítjuk át:

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!}=$$
$$=\frac{n!(n-k+1)+n!k}{k!(n+1-k)!}=\frac{n!(n+1)}{k!(n+1-k)!}=\binom{n+1}{k}.$$

A kapott eredményt helyettesítsük vissza az előző egyenlőségbe. Ekkor, figyelembe véve még, hogy

$$\binom{n+1}{0}=\binom{n}{0}=\binom{n}{n}=\binom{n+1}{n+1}=1,$$

azt kapjuk, hogy

$$(a+b)^{n+1}=$$
$$=\binom{n+1}{0}a^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k+\binom{n+1}{n+1}b^{n+1}=$$
$$=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k,$$

vagyis az egyenlőség érvényben marad akkor is, ha n helyébe $(n+1)$-et helyettesítünk.

A binomiális tételt tehát bebizonyítottuk. ■

1.4. Nevezetes egyenlőtlenségek

17. Háromszög-egyenlőtlenségek. (a) Az abszolút érték definíciója alapján

$$-|a|\le a\le|a| \qquad \text{és} \qquad -|b|\le b\le|b|.$$

Az egyenlőtlenségek összeadásából

$$-(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b| \tag{$*$}$$

adódik. Mivel minden $x, y\in\mathbb{R}$ esetén

$$|x|\le y \quad \text{egyenértékű azzal, hogy} \quad -y\le x\le y, \tag{$**$}$$

ezért ennek felhasználásával a $(*)$ alatti egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$|a+b| \leq |a|+|b|,$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti.

(b) Az (a) alatti egyenlőtlenség alapján

$$|a| = |(a-b)+b| \leq |a-b|+|b|,$$
$$|b| = |(b-a)+a| \leq |b-a|+|a|,$$

tehát

$$-|a-b| \leq |a|-|b| \leq |a-b|,$$

ezért ismét a $(**)$ felhasználásával kapjuk a bizonyítandó

$$\big||a|-|b|\big| \leq |a-b|$$

egyenlőtlenséget. ■

18. **A Bernoulli-egyenlőtlenség**et n-re vonatkozó teljes indukcióval látjuk be. Rögzítsünk egy tetszőleges $h \geq -1$ valós számot.

(i) Ha $n = 1$, akkor $(1+h)^1 = 1 + 1 \cdot h$, ezért az állítás igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség egy $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül, vagyis $(1+h)^n \geq 1 + nh$ a $h \geq -1$, azaz $1 + h \geq 0$ feltétel mellett. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$(1+h)^{n+1} = (1+h)^n(1+h) \geq (1+nh)(1+h) =$$
$$= 1 + (n+1)h + nh^2 \geq 1 + (n+1)h,$$

és így az egyenlőtlenséget az $(n+1)$ természetes számra is igazoltuk.

Az egyenlőségre vonatkozó állítás igazolása.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha $h = 0$ vagy $n = 1$, akkor nyilván $(1+h)^n = 1 + nh$.

$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $(1+h)^n = 1 + nh$ valamilyen $n \in \mathbb{N}$ és $h \in [-1, +\infty)$ esetén. Tegyük még fel azt is, hogy $n \geq 2$. Azt kell igazolnunk, hogy ekkor h csak 0-val lehet egyenlő. Mivel

$$(1+h)^n = 1 + nh \iff h\big((1+h)^{n-1} + (1+h)^{n-2} + \cdots + 1\big) = hn,$$

ezért $h > 0$ nem lehet, mert ekkor $(1+h)^{n-1} + (1+h)^{n-2} + \cdots + 1 > n$. Viszont $h < 0$ sem lehet, mert ebben az esetben $0 \leq (1+h)^{n-1} + (1+ +h)^{n-2} + \cdots + 1 < n$.

A Bernoulli-egyenlőtlenséget tehát bebizonyítottuk. ■

19. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség.

1. bizonyítás. A teljes indukció módszerét (n-re vonatkozóan) alkalmazzuk a Bernoulli-egyenlőtlenség felhasználásával.

(i) Az $n = 2$ esetben a $\sqrt{a_1a_2} \le \frac{a_1+a_2}{2}$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ez egyenértékű az

$$\left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2 - a_1a_2 = \frac{a_1^2 - 2a_1a_2 + a_2^2}{4} = \left(\frac{a_1-a_2}{2}\right)^2 \ge 0$$

egyenlőtlenséggel, amelyből az is következik, hogy egyenlőség pontosan akkor van, ha $a_1 = a_2$.

(ii) Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ mellett minden $a_1, \dots, a_n \in \in \mathbb{R}_0^+$ esetén teljesül az egyenlőtlenség, azaz

$$S_n^n := \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}\right)^n \ge a_1a_2\cdots a_n. \qquad (*)$$

Vegyünk tetszőleges $(n+1)$ darab $a_1, a_2, \dots, a_{n+1}$ nemnegatív számot. Ekkor

$$S_{n+1}^{n+1} = \left(\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{nS_n + a_{n+1}}{n+1}\right)^{n+1} =$$
$$= \left(S_n + \frac{a_{n+1} - S_n}{n+1}\right)^{n+1} = S_n^{n+1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - S_n}{(n+1)S_n}\right)^{n+1},$$

ha $S_n \ne 0$. Mivel $\frac{a_{n+1}-S_n}{(n+1)S_n} \ge -1$, ezért a Bernoulli-egyenlőtlenséget, majd a $(*)$ indukciós feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$S_{n+1}^{n+1} = S_n^{n+1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - S_n}{(n+1)S_n}\right)^{n+1} \ge$$
$$\ge S_n^{n+1}\left(1 + \frac{a_{n+1} - S_n}{(n+1)S_n}(n+1)\right) = S_n^n a_{n+1} \ge a_1a_2\cdots a_na_{n+1}.$$

Ha $S_n = 0$ (azaz $a_1 = \dots = a_n = 0$), akkor az $S_{n+1}^{n+1} \ge a_1a_2\cdots a_{n+1}$ egyenlőtlenség nyilván igaz. Megmutattuk tehát azt, hogy az egyenlőtlenség bármely $(n+1)$ darab nemnegatív valós számra is igaz.

Az egyenlőségre vonatkozó állítás igazolása.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, akkor az állítás nyilvánvaló.

$\boxed{\Rightarrow}$ Indirekt módon bizonyítunk: Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ mellett bizonyos $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}_0^+$ esetén fennáll az $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ egyenlőség, és az $a_1, a_2, \dots, a_n$ számok nem egyenlők egymással, azaz van közöttük legalább két különböző. Feltehetjük például azt, hogy $a_1 \neq a_2$. Ekkor (i) szerint $\sqrt{a_1 a_2} < \frac{a_1+a_2}{2}$, azaz $a_1 a_2 < \left(\frac{a_1+a_2}{2}\right)^2$. Ezért

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} < \sqrt[n]{\frac{a_1+a_2}{2} \cdot \frac{a_1+a_2}{2} \cdot a_3 \cdots a_n} \leq$$
$$\leq \frac{\frac{a_1+a_2}{2} + \frac{a_1+a_2}{2} + a_3 + \dots + a_n}{n} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n},$$

ami ellentmond az $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} = \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$ feltételünknek.

A feladat állítását tehát maradéktalanul igazoltuk.

2. bizonyítás. Ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, akkor a két oldal egyenlő, ezért az állítás igaz. Tegyük most fel, hogy az a_k számok nem mind egyenlők egymással. Jelölje a_1 a legkisebb, a_2 pedig a legnagyobb számot az a_k-k között. Legyen továbbá $S_n := \frac{a_1+a_2+\dots+a_n}{n}$. Ekkor $a_1 < S_n < a_2$. Írjuk most a_1 helyébe S_n-et, a_2 helyébe pedig $(a_1 + a_2 - S_n)$-et. Az így kapott

$$S_n, a_1 + a_2 - S_n, a_3, a_4, \dots, a_n \tag{$\triangle$}$$

számok számtani közepe nyilván S_n, és a mértani közepükre az

$$S_n(a_1 + a_2 - S_n) - a_1 a_2 = (S_n - a_1)(a_2 - S_n) > 0$$

miatt az

$$\sqrt[n]{S_n(a_1 + a_2 - S_n) a_3 a_4 \cdots a_n} > \sqrt[n]{a_1 a_2 a_3 a_4 \cdots a_n}$$

egyenlőtlenség teljesül. Ez azt jelenti, hogy a számtani közép változatlan maradt, a mértani közép pedig növekedett. Ha a $(\triangle)$ alatti számok nem mind egyenlők egymással, akkor folytatjuk az eljárást. Végül legfeljebb $n-1$ lépésben mindegyik szám S_n lesz. A számtani közép nem változott, a mértani mindig nőtt, most egyenlőség lett, tehát eredetileg a mértani közép kisebb volt, mint a számtani közép. ∎

20. A jobb oldali egyenlőtlenség a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség (l. az előző feladatot). Ezt az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ helyett az $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$ számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sqrt[n]{\frac{1}{a_1}\frac{1}{a_2}\cdots\frac{1}{a_n}} \le \frac{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}{n},$$

és ebből átrendezés után adódik a bal oldali egyenlőtlenség. ■

21. **A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.** Rögzítsük az $n \in \mathbb{N}$ és az $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ számokat, és tekintsük a következő polinomfüggvényt:

$$P(\lambda) := \sum_{k=1}^{n} (\lambda a_k + b_k)^2 = \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\lambda^2 + 2\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)\lambda + \sum_{k=1}^{n} b_k^2,$$

ahol $\lambda \in \mathbb{R}$.

Ha $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 = 0$, azaz $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$ és b_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ tetszés szerinti valós szám, akkor a feladatbeli egyenlőtlenség mindkét oldalán 0 van, ezért az állítás igaz.

Ha $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2 \ne 0$, akkor $P(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ egy olyan másodfokú polinomfüggvény, amelyik *minden* λ valós számra nemnegatív értéket vesz fel, azaz $P(\lambda) \ge 0$ $(\lambda \in \mathbb{R})$. Ez pedig azzal egyenértékű, hogy P diszkriminánsa nempozitív valós szám

$$4\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\Big)^2 - 4\Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\Big)\Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\Big) \le 0,$$

amiből a $\sqrt{x^2} = |x|$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget.

Az egyenlőségre vonatkozó állítás igazolása.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha $a_1 = \lambda b_1, a_2 = \lambda b_2, \ldots a_n = \lambda b_n$ vagy pedig $b_1 = \lambda a_1, b_2 = \lambda a_2, \ldots, b_n = \lambda a_n$ valamely $\lambda \in \mathbb{R}$ számra, akkor a bizonyítandó egyenlőtlenség mindkét oldalán ugyanaz áll, tehát valóban egyenlőség van.

$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $\left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k\right| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k^2}$. Ha az a_1, a_2, ..., a_n számok mindegyike 0, akkor az $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, ..., $a_n = \lambda b_n$ egyenlőségek $\lambda = 0$-val teljesülnek. Ha az $a_1, a_2, \ldots, a_n$ számok nem mindegyike 0, akkor a fentebb bevezetett $P(\lambda)$ $(\lambda \in \mathbb{R})$ másodfokú függvénynek pontosan egy valós gyöke van, azaz van egyetlen olyan $\lambda^* \in \mathbb{R}$, amelyre $P(\lambda^*) = P(\lambda^*) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\lambda^* a_k + b_k)^2$, és ez csak úgy lehetséges, ha ennek az összegnek minden tagja 0, azaz $b_k = -\lambda^* a_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, ami az állítást bizonyítja. ■

22. **A Minkowski-egyenlőtlenség.** A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség alapján

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + 2\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2} + \sum_{k=1}^{n} b_k^2 = \left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2} + \sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}\right)^2.$$

Innen mindkét oldalból négyzetgyököt vonva kapjuk a bizonyítandó egyenlőtlenséget. Az egyenlőségre vonatkozó állítás ugyanúgy bizonyítható, mint az előző feladatban. ■

1.5. Egyenlőtlenségek igazolása

23. Ha $a > 0$, akkor $a + \dfrac{1}{a} \geq 2 \Leftrightarrow (a-1)^2 \geq 0$. Ha $a < 0$, akkor $a + \dfrac{1}{a} \leq -2$. ■

24. Ekvivalens átalakítások elvégzése után azt kapjuk, hogy

(a) $(\sqrt{a^2+1} - 1)^2 \geq 0$;

(b) $(a-b)^2 + (b-c)^2 + (a-c)^2 \geq 0$;

(c) $(a^2-1)^2 + (a^2-a)^2 \geq 0$;

(d) $(a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$. ■

25. (a) Nyilván

$$|a+b| < |1+ab| \iff (a+b)^2 < (1+ab)^2 \iff$$
$$\iff 0 < 1 + a^2b^2 - a^2 - b^2 = (1-a^2)(1-b^2).$$

Itt mindkét tényező pozitív, mert $|a| < 1$ és $|b| < 1$ pontosan azt jelenti, hogy $1 - a^2 > 0$ és $1 - b^2 > 0$.

(b) A $0 < a < 1$ egyenlőtlenséget az $1 - b > 0$ számmal szorozva adódik az állítás. ■

26. Ha az a_1, a_2, b_1, b_2 számok mindegyike 0, akkor az egyenlőtlenség nyilván fennáll. Az ellenkező esetben először „gyöktelenítünk”:

$$\sqrt{a_1^2+a_2^2} - \sqrt{b_1^2+b_2^2} =$$
$$= \left(\sqrt{a_1^2+a_2^2} - \sqrt{b_1^2+b_2^2}\right) \cdot \frac{\sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}}{\sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

Így

$$\left|\sqrt{a_1^2+a_2^2} - \sqrt{b_1^2+b_2^2}\right| = \frac{\left|\left(a_1^2-b_1^2\right)+\left(a_2^2-b_2^2\right)\right|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2} + \sqrt{b_1^2+b_2^2}} \le$$
$$\le \left|a_1-b_1\right| \cdot \frac{|a_1|+|b_1|}{\sqrt{a_1^2}+\sqrt{b_1^2}} + \left|a_2-b_2\right| \cdot \frac{|a_2|+|b_2|}{\sqrt{a_2^2}+\sqrt{b_2^2}} =$$
$$= \left|a_1-b_1\right| + \left|a_2-b_2\right|. \ ■$$

27. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab}, \quad \frac{b+c}{2} \ge \sqrt{bc}, \quad \frac{a+c}{2} \ge \sqrt{ac},$$

és ezekben egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b$, $b = c$, illetve $a = c$. Az egyenlőtlenségeket összeszorozva adódik az állítás. ■

28. Használja fel az $\frac{1+a_k}{2} \ge \sqrt{a_k}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ egyenlőtlenségeket. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$. ■

29. Ha $a > 1$, akkor az egyenlőtlenség teljesül, mert a bal oldalán negatív szám áll. Ha $-1/2 \le a \le 1$, akkor alkalmazza a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget az

$$a_1 = \cdots = a_5 = 1 - a, \quad a_6 = 1 + a, \quad a_7 = a_8 = 1 + 2a$$

szereposztással. ■

30. (a) Írja fel az $(n+2)$ darab

$$a_1 := \frac{1}{2}, \quad a_2 := \frac{1}{2}, \quad a_3 := 1 + \frac{1}{n}, \quad a_4 := 1 + \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad a_{n+2} := 1 + \frac{1}{n}$$

számra a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

(b) Alkalmazza az $(n+1)$ darab

$$a_1 := 1, \quad a_2 := 1 + \frac{1}{n}, \quad a_3 := 1 + \frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad a_{n+1} := 1 + \frac{1}{n}$$

számra a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget.

(c) $2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1$ miatt

$$2^n > 1 + n\sqrt{2^{n-1}} \quad \Longleftrightarrow \quad \sqrt{2^{n-1}} < \frac{2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 1}{n},$$

és ez egyenértékű a $2^{n-1}, 2^{n-2}, \ldots, 1$ számokra vonatkozó számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséggel. ■

31. Teljes indukcióval. ■

32. (d) **1. megoldás.** Teljes indukcióval: $n = 1$ és $n = 2$ esetén az állítás nyilván igaz. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség egy $n \in \mathbb{N}$ számra teljesül. Ezt és a $4n^n > (n+1)^n$ egyenlőtlenséget (l. a **30.** feladatot) felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}((n+1)!)^2 = \left(n!\right)^2 (n+1)^2 \ge n^n (n+1)^2 > \frac{(n+1)^n}{4}(n+1)^2 = \\ = \frac{n+1}{4}(n+1)^{n+1} \ge (n+1)^{n+1}, \qquad \text{ha } n \ge 3.\end{aligned}$$

2. megoldás. A $(2n)$-tényezős $(n!)^2$ szorzatból n-tényezős szorzatot készítünk úgy, hogy a tényezőket fordított sorrendben csoportosítjuk:

$$\left(n!\right)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1).$$

Itt már mindegyik tényező n-nel alulról becsülhető, mert

$$k(n-k+1) \geq n \quad \Longleftrightarrow \quad (n-k)(k-1) \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Ez viszont azt jelenti, hogy

$$(n!)^2 = \prod_{k=1}^{n} k(n-k+1) \geq n^n. \ \blacksquare$$

(e) Teljes indukcióval bizonyítunk. $n = 1$ esetén $\frac{a+b}{2} \leq \frac{a+b}{2}$ adódik, az állítás tehát igaz.

Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra fennáll a feladatbeli egyenlőtlenség. Ezt és az $a + b \geq 0$ feltételt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n+1} = \frac{a+b}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^{n} \leq \frac{a+b}{2} \cdot \frac{a^n + b^n}{2} = \\ = \frac{a^{n+1} + a^n b + ab^n + b^{n+1}}{4}.$$

Ha belátjuk az

$$\frac{a^{n+1} + a^n b + ab^n + b^{n+1}}{4} \leq \frac{a^{n+1} + b^{n+1}}{2}$$

vagy a vele ekvivalens

$$(*) \qquad 0 \leq a^{n+1} + b^{n+1} - a^n b - ab^n = (a^n - b^n)(a - b)$$

egyenlőtlenséget, akkor bebizonyítjuk azt, hogy a feladatbeli egyenlőtlenség $(n+1)$-re is igaz.

$(*)$ bizonyításához feltehetjük, hogy $a \geq b$, azaz $a - b \geq 0$. Ekkor az $a + b \geq 0$ (azaz $a \geq -b$) feltétel miatt $a \geq |b| \geq 0$, tehát

$$a^n = |a|^n \geq |b|^n \geq b^n, \qquad \text{vagyis} \qquad a^n - b^n \geq 0.$$

$(*)$ jobb oldalán tehát két nemnegatív szám szorzata áll, ami szintén nemnegatív, ezért $(*)$ valóban igaz. $\blacksquare$

33. Alkalmazza a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget az (a) esetben az

$$\frac{a_1}{a_2},\ \ \frac{a_2}{a_3},\ \ \frac{a_{n-1}}{a_n},\ \ \ldots,\ \ \frac{a_n}{a_1},$$

(b)-ben pedig az

$$a_1^n,\ \ a_2^n,\ \ \ldots,\ \ a_n^n$$

számokra. Egyenlőség mindkét esetben akkor és csak akkor van, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. ■

34. A Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenséget alkalmazza az

$$\begin{array}{llll} a_1 := a^2, & a_2 := b^2, & a_3 := c^2, & a_4 := d^2, \\ b_1 := a, & b_2 := b, & b_3 := c, & b_4 := d \end{array}$$

szereposztással. ■

2. Halmazok, relációk és függvények

2.1. Matematikai logikai alapok

■ A-feladatok

35. (a) Ha egy négyszög húrnégyszög, akkor téglalap is. Az állítás hamis.
(b) Ha egy négyszög téglalap, akkor húrnégyszög is. Az állítás igaz.
(c) Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha téglalap. Az állítás hamis.
(d) Egy négyszög akkor és csak akkor húrnégyszög, ha szemközti szögeinek az összege 180°. Az állítás igaz.
(e) Minden téglalap átlói felezik egymást. Az állítás igaz.
(f) Ha egy négyszög átlói nem felezik egymást, akkor a négyszög nem téglalap. Az állítás igaz. (Mivel a $q(x) \Rightarrow s(x)$ kijelentés igaz minden x-re, és $q(x) \Rightarrow s(x) \equiv \neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)$, ezért a $\neg s(x) \Rightarrow \neg q(x)$ is igaz minden x-re.)
(g) Ha egy négyszög húrnégyszög, de nem téglalap, akkor az átlói felezik egymást. Az állítás hamis. ■

36. L. az állítások tagadására vonatkozó megjegyzést a **21.** oldalon. ■

■ B-feladatok

37. *Direkt bizonyítás.* Tegyük fel, hogy $-x^2 + 5x - 4 > 0$. Ekkor $5x >$ $> x^2 + 4 \geq 4$, ezért $5x > 4$, azaz $x > 4/5$ is igaz. Persze ekkor $x > 0$ is teljesül.

Inverz bizonyítás. Tegyük fel, hogy $x \le 0$. Ekkor $5x \le 0$, és így $-x^2 + 5x - 4$ mint három nempozitív szám összege is ≤ 0.

Indirekt bizonyítás. Tegyük fel, hogy az állításunk nem igaz. Ekkor létezik olyan $x \in \mathbb{R}$ szám, amelyre $-x^2 + 5x - 4 > 0$, és (mégis) $x \le 0$. Azonban ha $x \le 0$, akkor $0 < -x^2 + 5x - 4 \le -x^2 - 4 \le -4$, így ellentmondásra jutottunk. ■

38. Jelölje $x \in \mathbb{R}$ esetén $p(x)$ a $2x + 5 \ge 13$, $q(x)$ az $x \ge 0$, $s(x)$ pedig az $x \ge 50$ kijelentést.

(a) Mivel $p(x) \Rightarrow q(x)$, ezért $q(x)$ a $p(x)$-nek szükséges feltétele. (Világos, hogy $q(x)$ nem elégséges feltétele $p(x)$-nek, mert pl. $x = 0$-ra $q(x)$ igaz és $p(x)$ hamis.)

(b) Mivel $s(x) \Rightarrow p(x)$, ezért $s(x)$ a $p(x)$-nek elégséges feltétele. ($s(x)$ nem szükséges feltétele $p(x)$-nek, mert pl. $x = 5$-re $s(x)$ hamis, $p(x)$ pedig igaz.)

(c) Az $x \ge 4$ a $2x+5 \ge 13$-nak szükséges és elégséges feltétele ($2x+5 \ge 13 \Leftrightarrow x \ge 4$). ■

39. (a) Az implikáció igaz, a megfordítása hamis.

(b) Az implikáció nem igaz, a megfordítása igaz.

(c) Az implikáció igaz, a megfordítása nem igaz.

(d) Az implikáció és a megfordítása is igaz. (Az $x = 0$ és $y = 0$ ekvivalens azzal, hogy $x^2 + y^2 = 0$.)

(e) Az implikáció nem igaz, a megfordítása igaz.

(f) Az implikáció igaz, a megfordítása hamis. ■

40. Jelölje A az ajtók, K pedig a kilincsek halmazát, és $p(x, y)$ azt a kijelentést, hogy y rajta van x-en. Ezekkel a jelölésekkel a „minden ajtón van kilincs” kijelentést így formalizálhatjuk:

$$\forall x \in A \;\; \exists y \in K : \;\; p(x, y),$$

aminek a tagadása (l. az állítások tagadására vonatkozó megjegyzést a **21.** oldalon):

$$\exists x \in A \;\; \forall y \in K : \;\; \neg p(x, y).$$

Szavakban tehát: „van olyan ajtó, amelyen nincs kilincs”. ■

■ C-feladatok

41. Mivel minden pozitív egész x-re $s(x) \Rightarrow p(x)$ és $s(x) \Rightarrow q(x)$, ezért

$p(x)$-nek $s(x)$ elégséges feltétele,
$q(x)$-nek $s(x)$ elégséges feltétele,
$s(x)$-nek $p(x)$ szükséges feltétele,
$s(x)$-nek $q(x)$ szükséges feltétele. ■

42. (a) Az állítás igaz. A megfordítása: Ha egy természetes szám osztható a-val és b-vel egyaránt, akkor $a \cdot b$-vel is osztható. Ez az állítás nem igaz: például $2 \mid 4$ és $4 \mid 4$, de 4 nem osztható $2 \cdot 4$-gyel.

(b) Az állításunkat $p \Rightarrow q$ alakban így lehet megfogalmazni: Ha egy háromszög derékszögű, akkor a befogók négyzetösszege egyenlő az átfogó négyzetével. Ez éppen Pitagorasz tétele, tehát igaz állítás. A megfordítása: Ha egy háromszögben két oldal négyzetösszege egyenlő a harmadik oldal négyzetével, akkor a háromszög derékszögű. A középiskolai tanulmányaink során bebizonyítottuk, hogy ez az állítás is igaz. ■

43. (a) Az állítás tagdása: $\forall y \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists x \in \mathbb{R}$, hogy $x \geq y^2$. Ez igaz (legyen ui. $y \in \mathbb{R}$ esetén $x := y^2$), ezért az eredeti állítás hamis.
(b) Az állítás igaz (legyen pl. $y := 0$), ezért a tagadása (azaz a „$\forall y \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists x \in \mathbb{R}^-$, hogy $x \geq y^2$" állítás) nem igaz.
(c) Az állítás igaz (legyen pl. $x := 0$ és $y := 1$), ezért a tagadása (azaz a „$\forall x \in \mathbb{R}$ és $\forall y \in \mathbb{R}$ esetén $x^2 + y^2 \neq 1$" állítás) nem igaz.
(Figyelje meg, hogy egy állítás igaz – vagy hamis – voltát bizonyos esetekben egyszerűbb úgy bebizonyítani, hogy az állítás tagadásáról mutatjuk meg, hogy az hamis – vagy igaz.) ■

2.2. Halmazok

■ A-feladatok

44. (a) $A \neq B \iff (\exists a \in A: \ a \notin B)$ vagy $(\exists b \in B: \ b \notin A)$.
(b) $A \not\subset B \iff \exists a \in A$, hogy $a \notin B$. ■

45. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor $x^2 \geq 1 \Leftrightarrow |x| \geq 1$, ezért $C = (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

$A \subset C$, mert $\forall x \in A$ (azaz $x = 1, 2, 10$) esetén $|x| \geq 1$ is teljesül.

$A \neq C$, mert $\exists x \in C$ (például $x := 3$), hogy $x \notin A$.

$B \subset C$, mert $\forall x > 1 \Rightarrow x^2 \geq 1$.

$B \neq C$, mert $\exists x \in C$ (például $x := -1$), hogy $x \notin B$.

$A \not\subset B$, mert $\exists x \in A$ (például $x := 1$), hogy $x \notin B$.

$B \not\subset A$, mert $\exists x \in B$ (például $x := 5$), hogy $x \notin A$. ■

46. $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{3\},\ \{1,2\},\ \{1,3\},\ \{2,3\},\ \{1,2,3\}\big\}$. ■

47. Mivel $\mathcal{P}(A) = \big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\big\}$, ezért

$$\begin{gathered}\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(A)\big) = \Big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \boxed{\{\{\mathbf{a}\}\}},\ \boxed{\{\{\mathbf{b}\}\}},\ \big\{\{a,b\}\big\},\\ \big\{\emptyset,\{a\}\big\},\ \big\{\emptyset,\{b\}\big\},\ \big\{\emptyset,\{a,b\}\big\},\ \big\{\{a\},\{b\}\big\},\\ \boxed{\{\{\mathbf{a}\},\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}\}},\ \boxed{\{\{\mathbf{b}\},\{\mathbf{a},\mathbf{b}\}\}},\\ \big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\}\big\},\ \big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{a,b\}\big\},\ \big\{\emptyset,\ \{b\},\ \{a,b\}\big\},\ \big\{\{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\big\},\\ \big\{\emptyset,\ \{a\},\ \{b\},\ \{a,b\}\big\}\Big\}.\end{gathered}$$

A vastag betűtípussal szedett halmazok a rendezett párok:

$$\begin{gathered}\big\{\{a\}\big\} = (a,a),\ \big\{\{b\}\big\} = (b,b),\\ \big\{\{a\},\{a,b\}\big\} = (a,b),\ \big\{\{b\},\{a,b\}\big\} = (b,a).\ ■\end{gathered}$$

■ B-feladatok

48. (a) *Direkt bizonyítás.* Mivel $A \subset B$, ezért $A \setminus B = \emptyset$, és $B \subset C$ miatt $B \setminus C = \emptyset$. Az állítás tehát az $\emptyset \cup \emptyset = \emptyset$ egyenlőségből következik.

(b) *Indirekt bizonyítás.* Tegyük fel, hogy az A, B, C halmazokra $A \subset B \subset C$ teljesül, és az állítással ellentétben $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \neq \emptyset$. Ekkor $A \setminus B \neq \emptyset$ (azaz $\exists\, a \in A$, hogy $a \notin B$) vagy $B \setminus C \neq \emptyset$ (azaz $\exists\, b \in B$, hogy $b \notin C$). Az első tehát azt jelenti, hogy $A \not\subset B$, a második pedig azt, hogy $B \not\subset C$, és ez ellentmond az $A \subset B \subset C$ feltételünknek. ■

49. Az állítást indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy van olyan H-val jelölt halmaz, amelynek az *összes* halmaz eleme. Ez a H tehát olyan halmaz, amely önmagának eleme, azaz $H \in H$. Van tehát olyan halmaz, amely elemként tartalmazza önmagát. Az ilyen tulajdonságú halmazokat nevezzük el **tartalmazkodónak**. Az olyan halmazokat pedig, amelyek önmagukat elemként nem tartalmazzák, **nem tartalmazkodónak** fogjuk nevezni.
Vizsgáljuk most meg, hogy ebből a szempontból milyen halmaz az összes nem tartalmazkodó halmazok halmaza. Ezt a halmazt jelöljük S-sel:

$$S := \{X \in H \mid X \notin X\}.$$

Két eset lehetséges: $S \in S$ (azaz S tartalmazkodó) vagy $S \notin S$ (azaz S nem tartalmazkodó). Ha azt tesszük fel, hogy S tartalmazkodó, akkor S eleme S-nek. Azonban S elemei a nem tartalmazkodó halmazok, ezért S nem lehet tartalmazkodó. Ellentmondásra jutottunk, ami azt jelenti, hogy ez az eset nem lehetséges. S tehát nem tartalmazkodó halmaz, azaz $S \notin S$. Azok a halmazok azonban, amelyek S-ben nincsenek benne, S definíciója miatt, éppen a tartalmazkodó halmazok. Eszerint S-nek tartalmazkodónak kell lennie. Tehát ismét ellentmondásra jutottunk. Meggondolásunk szerint S sem tartalmazkodó, sem nem tartalmazkodó nem lehet. Csak úgy kerülhetjük ki ezt az ellentmondást, ha elvetjük azt a feltételezésünket, hogy létezik az összes halmazok H halmaza. ■

50. $\boxed{\Leftarrow}$ Legyen pl. $B \subset A$. Ekkor $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A)$ és $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A)$.
$\boxed{\Rightarrow}$ Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, de az állítással ellentétben nem igaz az, hogy $A \subset B$ vagy $B \subset A$. Ez azt jelenti, hogy $A \not\subset B$ *és* $B \not\subset A$, azaz vannak olyan $a \in A$ és $b \in B$ elemek, amelyekre $a \notin B$ és $b \notin A$ teljesül. Ekkor $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, de $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A)$ és $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(B)$. Ezekből $\{a, b\} \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ következik. Mivel $\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, ezért azt kapjuk, hogy $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. ■

51. Két állítást kell bebizonyítani:

$\boxed{\Rightarrow}$ Ha az $A, B \subset X$ halmazokra fennáll az $\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cap B} = X$ egyenlőség, akkor ebből $A = B$ következik.

$\boxed{\Leftarrow}$ Ha $A = B \subset X$, akkor $\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cap B} = X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ *igazolása.* Tegyük fel tehát, hogy $A = B$ az X egy tetszőleges részhalmaza. Ekkor $A \cap \overline{B} = \emptyset$. Mivel $\overline{\emptyset} = X$, ezért $\overline{A \cap \overline{A}} = X$, tehát az $\overline{A \cap \overline{A}} \cap \overline{\overline{A} \cap A} = X \cap X = X$ egyenlőség valóban teljesül.

$\boxed{\Rightarrow}$ *igazolása.* Indirekt módon bizonyítunk. Tegyük fel, hogy az $A, B \subset X$ halmazokra fennáll az $\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cap B} = X$ egyenlőség, de az állítással ellentétben $A \neq B$. Ekkor (i) $\exists\, a \in A$, hogy $a \notin B$, vagy (ii) $\exists\, b \in B$, hogy $b \notin A$. Az (i)-beli a elemre $a \in A \cap \overline{B}$, azaz $a \notin \overline{A \cap \overline{B}}$, ami viszont ellentmond az $\overline{A \cap \overline{B}} \cap \overline{\overline{A} \cap B} = X$ feltételünknek. Az (ii) esetben is hasonló ellentmondásra jutunk, ami az állításunk bizonyítását jelenti. ■

■ C-feladatok

52. Azt kell megmutatni, hogy vannak olyan A és B halmazok, amelyekre $A \setminus B \neq B \setminus A$. Igen egyszerűen találhatunk példá(ka)t ilyen halmazokra. Legyen például $A := \{1\}$ és $B := \{2\}$. Szintén könnyű *észrevenni* azt, hogy ha $A = B$, akkor $A \setminus B = B \setminus A$ (ti. ekkor $A \setminus B = \emptyset$ és $B \setminus A = \emptyset$), amit kifejezhetünk úgy is, hogy az $A \setminus B = B \setminus A$-nak $A = B$ egy elégséges feltétele. Vajon fennállhat-e a vizsgált egyenlőségünk más esetben is? Szükséges-e az $A = B$ feltétel? Azaz: következik-e $A \setminus B = B \setminus A$-ból az, hogy $A = B$? *Próbáljuk meg ezt indirekt módon bebizonyítani.*
Tegyük fel tehát, hogy $A \setminus B = B \setminus A$, de $A \neq B$. Ekkor vagy az igaz, hogy (i) $\exists\, a \in A$, hogy $a \notin B$, vagy pedig az, hogy (ii) $\exists\, b \in B$, hogy $b \notin A$. Az első esetben $a \in A \setminus B$ és $a \notin B \setminus A$, ami ellentmond az $A \setminus B = B \setminus A$ feltételünknek. A második esetben is hasonló ellentmondást kapunk, ami azt jelenti, hogy $A \setminus B = B \setminus A \Rightarrow A = B$, azaz $A = B$ az $A \setminus B = B \setminus A$ egyenlőségnek szükséges feltétele is.
Bebizonyítottuk tehát azt, hogy az $A \setminus B = B \setminus A$ egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $A = B$. ■

53. $\mathcal{P}\big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\emptyset)\big)\big) = \mathcal{P}\big(\mathcal{P}\big(\{\emptyset\}\big)\big) = \mathcal{P}\big(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big) = \big\{\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\{\emptyset\}\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}$. ■

54. (a) $\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy $A \subset B$, és legyen $X \in \mathcal{P}(A)$ egy tetszőleges elem. Ekkor $X \subset A \subset B$, ezért $X \in \mathcal{P}(B)$, így $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel, hogy $\mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$, és vegyünk egy tetszőleges $a \in A$ elemet. Ekkor $\{a\} \subset A$, azaz $\{a\} \in \mathcal{P}(A)$. Tehát $\{a\} \in \mathcal{P}(B)$, azaz $\{a\} \subset B$ is teljesül, ami azt jelenti, hogy $a \in B$. Ezekből következik, hogy $A \subset B$ is fennáll. ■

(b) Az (a)-ból következik. ■

(c) Először megmutatjuk, hogy a bal oldali halmaz részhalmaza a jobb oldali halmaznak:

(i) Feltehetjük, hogy $\mathcal{P}(A \cap B) \neq \emptyset$. Ha $X \in \mathcal{P}(A \cap B)$, akkor $X \subset A \cap B$, ami azt jelenti, hogy $X \subset A$ és $X \subset B$, azaz $X \in \mathcal{P}(A)$ és $X \in \mathcal{P}(B)$, tehát $X \in \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}(A \cap B) \subset \subset \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

Most azt igazoljuk, hogy a jobb oldali halmaz részhalmaza a bal oldali halmaznak:

(ii) Ismét feltehetjük, hogy $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \neq \emptyset$. Legyen most Y a $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$ halmaz egy tetszőleges eleme. Ekkor $Y \in \mathcal{P}(A)$ és $Y \in \mathcal{P}(B)$, ami azt jelenti, hogy $Y \subset A$ és $Y \subset B$, és így $Y \subset A \cap B$, azaz $Y \in \mathcal{P}(A \cap B)$. Ebből következik, hogy $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cap B)$.

(i) és (ii)-ből következik, hogy a két halmaz egyenlő. ■

(d) Feltehető, hogy $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \neq \emptyset$. Ha $X \in \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, akkor $X \in \mathcal{P}(A)$ vagy $X \in \mathcal{P}(B)$, azaz $X \subset A$ vagy $X \subset B$. Ekkor viszont $X \subset A \cup B$, azaz $X \in \mathcal{P}(A \cup B)$ teljesül, ezért $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. *Próbáljuk meg* a fordított irányú tartalmazást is igazolni. Legyen $X \in \in \mathcal{P}(A \cup B)$ egy tetszőleges elem. Ekkor $X \subset A \cup B$. Ebből azonban *nem* következik az, hogy $X \subset A$ vagy $X \subset B$. (Adjon példát ilyen halmazokra!) Ez azt „sejteti”, hogy a fordított irányú tartalmazás *nem igaz*, ami azt jelenti, hogy vannak olyan A és B halmazok, amelyekre $\mathcal{P}(A \cup B) \not\subset \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$ teljesül. Könnyű találni ilyen halmazokat. Legyen pl. $A := \{1\}$ és $B := \{2\}$. Ekkor $\{1, 2\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$, de $\{1, 2\} \notin \notin \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$. ■

55. $\boxed{\Leftarrow}$ Ha $a = c$ és $b = d$, akkor az $(a, b) = (c, d)$ egyenlőség mindkét oldalán ugyanaz a halmaz áll.

$\boxed{\Rightarrow}$ Induljunk ki most abból, hogy $(a, b) = (c, d)$. Két eset lehetséges: (i) $a = b$, illetve (ii) $a \neq b$.

(i) Ha $a = b$, akkor $(a, b) = \{\{a\}\}$, azaz (a, b) egyelemű halmaz. Ez fordítva is igaz: ha (a, b) egyelemű halmaz, akkor $\{a\} = \{a, b\}$, így $b \in \{a\}$, tehát $b = a$. Az $(a, a) = (c, d)$ egyenlőség miatt (c, d) is egyelemű halmaz, azaz $c = d$. Így fennáll az $\{\{a\}\} = \{\{c\}\}$ egyenlőség, amely pontosan akkor teljesül, ha $a = c$. Az $a = b$ esetben tehát $a = b = c = d$, vagyis ekkor valóban $a = c$ és $b = d$.

(ii) Ha $a \neq b$, akkor (a, b) kételemű halmaz, tehát kételemű a vele egyenlő (c, d) is, azaz $c \neq d$. Mivel (a, b)-nek és (c, d)-nek is pontosan egy egyelemű és egy kételemű halmaz az eleme, ezért egyenlőség közöttük akkor és csak akkor lehetséges, ha a két egyelemű, illetve a két kételemű halmaz egyenlő, azaz ha $\{a\} = \{c\}$ és $\{a, b\} = \{c, d\}$. De az első egyenlőségből $a = c$ adódik, a másodikból pedig az $\{a, b\} = \{a, d\}$ egyenlőség alapján azt kapjuk, hogy $b \in \{a, d\}$, de mivel $b \neq a$, ezért $b = d$. Tehát most is $a = c$ és $b = d$.
Az állítást tehát bebizonyítottuk. ■

56. A rendezett hármast úgy érdemes értelmezni, hogy igaz legyen a következő: két rendezett hármas akkor és csak akkor egyenlő, ha a komponenseik rendre megegyeznek. Ha (a, b, c) definíciója a kézenfekvőnek tűnő $\big\{\{a\},\ \{a, b\},\ \{a, b, c\}\big\}$ halmazrendszer lenne, akkor például az

$$(1, 2, 1) = \big\{\{1\},\ \{1, 2\},\ \{1, 2, 1\}\big\} = \big\{\{1\},\ \{1, 2\}\big\}$$

és az

$$(1, 1, 2) = \big\{\{1\},\ \{1, 1\},\ \{1, 1, 2\}\big\} = \big\{\{1\},\ \{1, 2\}\big\}$$

hármasok nem lennének különbözők.
(Érdemes meggondolni, hogy a rendezett hármas $(a, b, c) := \big((a, b), c\big)$ értelmezése esetén már igaz lesz az egyenlőségre vonatkozó, fentebb említett állítás.) ■

57. A definíció szerint $(a, b) := \big\{\{a\},\{a, b\}\big\}$. Mivel $a \in A$ és $b \in B$, ezért $\{a\} \subset A \subset A \cup B$ és $\{a, b\} \subset A \cup B$, azaz $\{a\},\{a, b\} \in \mathcal{P}(A \cup B)$. Ezt írhatjuk úgy is, hogy $\big\{\{a\},\{a, b\}\big\} \subset \mathcal{P}(A \cup B)$. Az $\big\{\{a\},\{a, b\}\big\}$ halmaz tehát eleme a $\mathcal{P}(A \cup B)$ halmaz hatványhalmazának, azaz $\big\{\{a\},\{a, b\}\big\} \in \mathcal{P}(\mathcal{P}(A \cup B))$. ■

58. Ha $A = \emptyset$ vagy $B = \emptyset$, akkor az állítás igaz, mert ekkor $A \times B = \emptyset$ és $B \times A = \emptyset$. Megmutatjuk azt, hogy ha A és B nemüres halmazok, akkor

$$A \times B = B \times A \qquad \Leftrightarrow \qquad A = B.$$

Valóban, ha $A = B$, akkor $A \times B = B \times A$ nyilván igaz. Megfordítva, tegyük fel, hogy $A \times B = B \times A$, és az állítással ellentétben $A \neq B$. Ekkor van olyan $a \in A$, amelyre $a \notin B$, vagy pedig van olyan $b \in B$, amelyre $b \notin A$ teljesül. Válasszuk pl. az első esetet. Ha most veszünk egy $b \in B$ elemet (ilyen van, mert $B \neq \emptyset$), akkor $(a, b) \in A \times B$, de $(a, b) \notin B \times A$, azaz $A \times B \neq B \times A$, és ez ellentmondás. ■

2.3. Relációk és függvények

■ A-feladatok

60. Az $s = \big\{(k, n) \in \mathbb{N}^2 \mid n = k + 6\} = \big\{(k, k + 6) \in \mathbb{N}^2 \mid k \in \mathbb{N}\big\}$ reláció egy $(k, k+6)$ eleme pontosan akkor tartozik hozzá az r relációhoz, ha $k + 6$ osztható k-val. Ez csak úgy lehetséges, ha $k = 1, 2, 3$ vagy 6, ezért $r \cap s = \big\{(1, 7),\ (2, 8),\ (3, 9),\ (6, 12)\big\}$. ■

61. $r \circ s = \big\{\big(x, (2x + 1)^2\big) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}$. ■

62. Mivel $A \times B = \big\{(0, 1),\ (0, 2),\ (1, 1),\ (1, 2)\big\}$, ezért

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(A \times B) = \Big\{\emptyset,\ & \boxed{\{\mathbf{(0,1)}\}},\ \boxed{\{\mathbf{(0,2)}\}},\ \boxed{\{\mathbf{(1,1)}\}},\ \boxed{\{\mathbf{(1,2)}\}}, \\
& \{(0,1),(0,2)\},\ \{\mathbf{(0,1)},\mathbf{(1,1)}\},\ \boxed{\{\mathbf{(0,1)},\mathbf{(1,2)}\}}, \\
& \boxed{\{\mathbf{(0,2)},\mathbf{(1,1)}\}},\ \{\mathbf{(0,2)},\mathbf{(1,2)}\},\ \{(1,1),(1,2)\}, \\
& \{(0,1),(0,2),(1,1)\},\ \{(0,1),(0,2),(1,2)\}, \\
& \{(0,1),(1,1),(1,2)\},\ \{(0,2),(1,1),(1,2)\}, \\
& \{(0,1),(0,2),(1,1),(1,2)\}\Big\}
\end{aligned}$$

A vastag betűtípussal szedett relációk függvények, a többi nem az. A bekeretezett relációk – és csak azok – az invertálható függvények. ■

63. Az $A \times B$ reláció akkor és csak akkor függvény, ha B egyelemű halmaz. Az $A \times B$ reláció pontosan akkor invertálható függvény, ha az A és a B is egyelemű halmaz. ■

64. Az állítás nem igaz. Nem invertálható függvényeknél fordulhat elő ilyen eset. Ha például $f(x) := x^2$ $(x \in \mathbb{R})$, akkor a $C := \{2\}$ halmaz f által létesített *képe* az

$$f[C] = \{f(x) \mid x \in C\} = \{4\}$$

halmaz. Ennek az f által létesített *ősképe* azonban az

$$f^{-1}[\{4\}] = \big\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \{4\}\big\} = \big\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 = 4\big\} = \big\{-2, 2\big\}$$

halmaz, ami nem egyenlő A-val. ■

■ B-feladatok

65. Halmaz függvény által létesített képének a definíciója (l. **32.** oldal) szerint

$$\begin{aligned} f[C] &= f\big[[0,1]\big] \\ &= \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [0,1]\} \\ &= \{3x^2 - 2 \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 1\}. \end{aligned}$$

Minden $x \in [0,1]$ számra $3 \cdot 0 - 2 = -2 \le 3x^2 - 2 \le 3 \cdot 1 - 2 = 1$, ezért $f[C] \subset [-2,1]$. A fordított irányú tartalmazás megvizsgálása végett vegyünk egy tetszőleges $y \in [-2,1]$ számot. Ekkor $3x^2 - 2 = y$, ha $x = \pm\sqrt{(y+2)/3}$. Mivel $\sqrt{(y+2)/3} \in [0,1]$, és f ezen a helyen éppen y-t vesz fel, ezért $y \in f[C]$ is fennáll, azaz $[-2,1] \subset f[C]$. Megmutattuk tehát azt, hogy $f[C] = [-2,1]$.

Az őskép meghatározásához is a definíciót (l. **32.** oldal) használjuk:

$$\begin{aligned} f^{-1}[C] &= f^{-1}\big[[0,1]\big] \\ &= \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in [0,1]\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le 3x^2 - 2 \le 1\}. \end{aligned}$$

$f^{-1}[C]$ tehát a $0 \le 3x^2 - 2 \le 1$ $(x \in \mathbb{R})$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza, ezért $f^{-1}[C] = \big[\sqrt{\tfrac{2}{3}}, 1\big] \cup \big[-1, -\sqrt{\tfrac{2}{3}}\big]$.

(Érdemes a koordináta-rendszerben szemléltetni az f függvényt, és a megfelelő tengelyeken a C, az $f[C]$ és az $f^{-1}[C]$ halmazt.) ■

66. Feltehetjük, hogy $C \neq \emptyset$. Ha $x \in C$, akkor $f(x) \in f[C]$, és ebből $x \in f^{-1}\big[f[C]\big]$ következik, tehát $C \subset f^{-1}\big[f[C]\big]$ valóban fennáll minden f függvény és minden $C \subset A$ halmaz esetén.

Most megmutatjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül minden $C \subset A$ halmazra, ha f invertálható.

Először tegyük fel, hogy f invertálható, és legyen $x \in f^{-1}\big[f[C]\big]$. Ekkor $f(x) \in f[C]$, és ebből f invertálhatósága miatt $x \in C$ következik, tehát $f^{-1}\big[f[C]\big] \subset C$ is fennáll. A megoldás első részének felhasználásával kapjuk, hogy $f^{-1}\big[f[C]\big] = C$.

Ezután tegyük fel, hogy minden $C \subset A$ esetén $f^{-1}\big[f[C]\big] = C$, de az állítással ellentétben f nem invertálható. Ekkor van olyan $u, v \in A$, $u \neq v$, amelyre $f(u) = f(v)$. Jelöljük ezt a közös értéket y-nal, és legyen $C := \{u\}$. Ekkor $f[C] = \{y\}$ és $f^{-1}\big[f[C]\big] \supset \{u, v\}$, így $u \neq v$ miatt $C \neq f^{-1}\big[f[C]\big]$, és ez ellentmondás. ■

67. (a) A definíció közvetlen következménye. ■

(b) Azt mutatjuk meg, hogy

(i) $f^{-1}[D_1 \cup D_2] \subset f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$ és

(ii) $f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2] \subset f^{-1}[D_1 \cup D_2]$.

(i) Elég azt az esetet vizsgálni, amikor a bal oldalon nem az üres halmaz áll. Legyen $f^{-1}[D_1 \cup D_2] \neq \emptyset$ és $x \in f^{-1}[D_1 \cup D_2]$ tetszés szerinti. Ekkor $f(x) \in D_1 \cup D_2$, azaz $f(x) \in D_1$ vagy $f(x) \in D_2$. Ez azt jelenti, hogy $x \in f^{-1}[D_1]$ vagy $x \in f^{-1}[D_2]$. Tehát $x \in f^{-1}[D_1] \cup$ $\cup f^{-1}[D_2]$, így $f^{-1}[D_1 \cup D_2] \subset f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$ valóban teljesül.

(ii) Elég azt az esetet vizsgálni, amikor a bal oldalon nem az üres halmaz áll. Legyen $f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2] \neq \emptyset$ és $x \in f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2]$ egy tetszőleges elem. Ekkor $x \in f^{-1}[D_1]$ vagy $x \in f^{-1}[D_2]$, azaz $f(x) \in D_1$ vagy $f(x) \in D_2$, amiből $f(x) \in D_1 \cup D_2$ következik. Ez pedig azt jelenti, hogy $x \in f^{-1}[D_1 \cup D_2]$, ezért $f^{-1}[D_1] \cup f^{-1}[D_2] \subset f^{-1}[D_1 \cup D_2]$ is igaz. ■

(c) és (d) a (b)-hez hasonlóan bizonyítható. ■

68. (a) A definíció közvetlen következménye. ■

(b) Megmutatjuk, hogy

(i) $f[C_1 \cup C_2] \subset f[C_1] \cup f[C_2]$ és

(ii) $f[C_1] \cup f[C_2] \subset f[C_1 \cup C_2]$;

és ez azt jelenti, hogy a (b) állítás valóban igaz.
Mind a két tartalmazási reláció igazolásakor elegendő a $C_1 \cup C_2 \neq \emptyset$ esetre szorítkozni: ebben – és csakis ebben – az esetben (b) mindkét oldalán nemüres halmaz áll.

(i) Legyen $y \in f[C_1 \cup C_2]$. Ekkor van olyan $x \in C_1 \cup C_2$, hogy $f(x) = y$, azaz van olyan $x_1 \in C_1$, amelyre $f(x_1) = y$, vagy pedig van olyan $x_2 \in C_2$, amelyre $f(x_2) = y$ teljesül. Tehát $y \in f[C_1]$ vagy $y \in f[C_2]$, vagyis $y \in f[C_1] \cup f[C_2]$. Ezért $f[C_1 \cup C_2] \subset f[C_1] \cup f[C_2]$.

(ii) Legyen $y \in f[C_1] \cup f[C_2]$. Ekkor $y \in f[C_1]$ vagy $y \in f[C_2]$. Létezik tehát olyan $x_1 \in C_1$, amelyre $f(x_1) = y$, vagy pedig létezik olyan $x_2 \in C_2$, amelyre $f(x_2) = y$. Így van olyan $x \in C_1 \cup C_2$, hogy $f(x) = y$, ami azt jelenti, hogy $\big(f(x) =\big) y \in f[C_1 \cup C_2]$. Az $f[C_1] \cup f[C_2] \subset f[C_1 \cup C_2]$ reláció tehát valóban fennáll. ■

(c) Ha $f[C_1 \cap C_2] = \emptyset$ (azaz $C_1 \cap C_2 = \emptyset$), akkor az állítás nyilván igaz. Az $f[C_1 \cap C_2] \neq \emptyset$ esetben legyen $y \in f[C_1 \cap C_2]$. Ez azt jelenti, hogy van olyan $x \in C_1 \cap C_2$, hogy $f(x) = y$. Így mind $x \in C_1$, mind $x \in C_2$ fennáll, tehát $y = f(x) \in f[C_1]$ és $y = f(x) \in f[C_2]$ egyaránt igaz, amiből az következik, hogy $y \in f[C_1] \cap f[C_2]$, tehát $f[C_1 \cap C_2] \subset f[C_1] \cap f[C_2]$ valóban teljesül.
A $\subset$ jel helyett általában nem írhatjuk az $=$ jelet. Valóban, ha van olyan x_1 és $x_2 (\neq x_1)$ eleme az f függvény értelmezési tartományának, hogy $f(x_1) = f(x_2)$ (azaz ha a függvény nem invertálható), akkor a $C_1 := \{x_1\}$, $C_2 := \{x_2\}$ választás mellett $f[C_1 \cap C_2] = \emptyset \neq \{f(x_1)\} = f[C_1] \cap f[C_2]$. ■

(d) a (c)-hez hasonlóan igazolható. ■

69. **Az invertálhatóság igazolása.** Jelöljük f-fel a megadott függvényt. Nézzük meg először azt, hogy az $f(x) = f(t)$ egyenlőség milyen *értelmezési tartománybeli* x és t esetén teljesül:

$$f(x) = f(t) \iff x^2 - 2x + 3 = t^2 - 2t + 3 \iff$$
$$\iff (x-t)(x+t-2) = 0 \iff x = t \text{ vagy } x + t = 2.$$

Ha $x, t \in \mathcal{D}_f$, azaz $x \leq 0$ és $t \leq 0$, akkor $x + t \leq 0$, ezért $\forall x, t \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) = f(t) \Leftrightarrow x = t$, ami azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz függvény előállítása. Meg kell határoznunk a $\mathcal{D}_{f^{-1}}$ halmazt. Ez $\mathcal{R}_f$-fel egyenlő. Könnyen kialakíthatjuk azt a *sejtést*, hogy $\mathcal{R}_f = [3, +\infty)$. (Ábrázoljuk pl. f-et a derékszögű koordinátarendszerben.) Ezt az egyenlőséget így *bizonyíthatjuk* be: ha $x \in \mathcal{D}_f$ (azaz $x \leq 0$), akkor $f(x) = x^2 - 2x + 3 \geq 3$, azaz $\mathcal{R}_f \subset [3, +\infty)$. Fordítva:

$$[3, +\infty) \subset \mathcal{R}_f \quad \iff \quad \forall y \in [3, +\infty) \text{ elemhez } \exists x \in \mathcal{D}_f : \ f(x) = y.$$

Ez azonban igaz, mert

$$f(x) = y \quad \iff \quad x^2 - 2x + 3 - y = 0 \quad \iff x_{1,2} = 1 \pm \sqrt{y - 2},$$

és $y \geq 3$ miatt $x = 1 - \sqrt{y-2} \leq 0$. Megmutattuk tehát azt, hogy $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}} = [3, +\infty)$.

Az inverz függvény definíciója alapján minden $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ esetén $f^{-1}(y)$ az az egyértelműen meghatározott $x \in \mathcal{D}_f$ érték, amelyre $f(x) = y$ teljesül. A fentiek szerint így $f^{-1}(y) = 1 - \sqrt{y-2}$. Az inverz függvény tehát az

$$f^{-1} : [3, +\infty) \ni y \mapsto 1 - \sqrt{y - 2}$$

függvény. ■

70. Tegyük fel, hogy f invertálható, és az állítással ellentétben

$$f[A_1] \cap f[A_2] \neq \emptyset.$$

Ekkor az $f[A_1] \cap f[A_2]$ halmaznak van (legalább) egy y eleme, így $y \in f[A_1]$ és $y \in f[A_2]$. Ez azt jelenti, hogy $\exists x_1 \in A_1$ úgy, hogy $f(x_1) = y$ és $\exists x_2 \in A_2$ úgy, hogy $f(x_2) = y$. Mivel $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, ezért $x_1 \neq x_2$, és ez ellentmond annak, hogy f invertálható.

Az állítás megfordításának igazolásához tegyük fel, hogy $f[A_1] \cap$ $\cap f[A_2] = \emptyset$. Megmutatjuk, hogy az adott feltételek mellett f invertálható. Legyen $x, t \in A$, $x \neq t$. A következő esetek lehetségesek:

(i) $x \in A_1$ és $t \in A_1$,
(ii) $x \in A_2$ és $t \in A_2$,
(iii) $x \in A_1$ és $t \in A_2$.

Az első és a második esetben az $f_{|A_1}$ és az $f_{|A_2}$ invertálhatóságából következik, hogy $f(x) \neq f(t)$. A harmadikban az $f(x) \neq f(t)$ azért igaz, mert $f[A_1] \cap f[A_2] = \emptyset$. ■

71. Ábrázoljuk az f függvényt a derékszögű koordináta-rendszerben. Azt a szemléletesen nyilvánvaló tényt, hogy f *invertálható*, az előző feladat eredményének felhasználásával *bizonyítjuk* be. Legyen $A_1 := (-\infty, 0]$ és $A_2 := (0, +\infty)$. Ekkor $A_1 \cup A_2 = \mathbb{R} = \mathcal{D}_f$ és $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, továbbá az $f_{|A_1}$ és $f_{|A_2}$ függvények invertálhatók (miért?). Mivel

$$f[A_1] = \{f(x) \in \mathcal{R}_f \mid x \in A_1\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\} = (-\infty, 0],$$
$$f[A_2] = \{f(x) \in \mathcal{R}_f \mid x \in A_2\} = \{x + 1 \in \mathbb{R} \mid x > 0\} = (1, +\infty),$$

ezért $f[A_1] \cap f[A_2] = (-\infty, 0] \cap (1, +\infty) = \emptyset$, és ez azt jelenti, hogy f invertálható.

Az *inverz függvény előállításához* először f^{-1} értelmezési tartományát kell meghatározni. Tudjuk azonban, hogy $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$. Kölcsönös tartalmazással egyszerűen bizonyítható, hogy

$$\mathcal{R}_f = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty) = \mathcal{D}_{f^{-1}}.$$

Az inverz függvény definíciója alapján minden $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}$ esetén $f^{-1}(y)$ az az egyértelműen meghatározott $x \in \mathcal{D}_f$ érték, amelyre

$$y = f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } -\infty < x \leq 0 \\ x + 1, & \text{ha } 0 < x < +\infty \end{cases}$$

teljesül. Az $y \in \mathcal{R}_f$ paraméter esetén ennek megoldása $x = y$, ha $-\infty < y \leq 0$ és $x = y - 1$, ha $1 < y < +\infty$. Az inverz függvény tehát

$$\mathcal{D}_{f^{-1}} = (-\infty, 0] \cup (1, +\infty), \quad y \mapsto \begin{cases} y, & \text{ha } -\infty < y \leq 0 \\ y - 1, & \text{ha } 1 < y < +\infty. \end{cases} \blacksquare$$

72. Jelölje $f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$ az f inverz függvényét, és legyen $D \subset \mathcal{R}_f$ egy tetszőleges halmaz. Ennek f által létesített őesképe:

$$\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\}.$$

Mivel $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$ és minden $x \in \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$ esetén $x = f^{-1}(y) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow f(x) = y$, ezért a D halmaz f^{-1} függvény által létesített képe pedig:

$$\{f^{-1}(y) \in \mathcal{R}_{f^{-1}} \mid y \in D\} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid \exists\, y \in D,\ f^{-1}(y) = x\} =$$
$$= \{x \in \mathcal{D}_f \mid \exists\, y \in D,\ f(x) = y\} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in D\}.$$

A szóban forgó két halmaz tehát valóban megegyezik. $\blacksquare$

73. Az $f \circ g$ kompozíció képezhető, mert $\mathcal{R}_g = [0, +\infty)$ (igazolja!) és $\mathcal{D}_f = (-\infty, 1]$ miatt $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}_g = [0, 1] \neq \emptyset$. Mivel $f \circ g$ értelmezési tatománya

$$\{x \in \mathcal{D}_g \mid g(x) \in \mathcal{D}_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\} = [-1, 1],$$

ezért

$$f \circ g : [-1, 1] \ni x \mapsto f\big(g(x)\big) = \sqrt{1 - x^2}.$$

A $g \circ f$ kompozíció is képezhető, mert $\mathcal{R}_f = [0, 1]$ (igazolja!) és $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ miatt $\mathcal{R}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$. A $g \circ f$ függvény értelmezési tartománya

$$\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\} = \{x \in (-\infty, 1] \mid \sqrt{1 - x} \in \mathbb{R}\} = (-\infty, 1],$$

ezért

$$g \circ f : (-\infty, 1] \ni x \mapsto g\big(f(x)\big) = (\sqrt{1 - x})^2 = 1 - x.$$

(Figyelje meg, hogy $f \circ g \neq g \circ f$.) ■

74. Legyen $u := (f \circ g) \circ h$ és $v := f \circ (g \circ h)$. Az u függvény az $f \circ g$ külső és a h belső függvény kompozíciója. Az $f \circ g$ külső függvény szintén összetett függvény, amelynek $\mathcal{D}_{f \circ g}$ értelmezési tartománya $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ miatt $\mathcal{D}_g$-vel egyenlő: $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g$. Ez tartalmazza $\mathcal{R}_h$-t, amiből u definíciója alapján következik, hogy $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_h$. Teljesen hasonló okoskodással az is belátható, hogy $\mathcal{D}_v = \mathcal{D}_h$, vagyis $\mathcal{D}_u = \mathcal{D}_v$. Másrészt, bármely $x \in \mathcal{D}_h (= \mathcal{D}_u = \mathcal{D}_v)$ esetében az összetett függvény értelmezése alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} u(x) &= \big((f \circ g) \circ h\big)(x) = \big(f \circ g\big)(h(x)) = f\big(g(h(x))\big), \\ v(x) &= \big(f \circ (g \circ h)\big)(x) = f\big((g \circ h)(x)\big) = f\big(g(h(x))\big), \end{aligned}$$

vagyis $u(x) = v(x)$ $(x \in \mathcal{D}_u = \mathcal{D}_v)$, ami azt jelenti, hogy $u = v$, és ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

75. (a) Az f^{-1} értelmezése szerint $\forall x \in \mathcal{R}_{f^{-1}} (= \mathcal{D}_f)$ esetében pontosan egy olyan $y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} (= \mathcal{R}_f)$ elem van, amire $x = f^{-1}(y)$ teljesül. Ez az $y := f(x)$ elem. Az f^{-1} függvény tehát invertálható, és

$$\big(f^{-1}\big)^{-1} : \mathcal{D}_f \to \mathcal{R}_f, \qquad x \mapsto y, \quad \text{amelyre } \; f^{-1}(y) = x,$$

vagyis x-hez $\left(f^{-1}\right)^{-1}$ éppen $f(x)$-et rendeli hozzá. Ez azt jelenti, hogy $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$. ■

(b) Mivel $\mathcal{R}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}}$, ezért $\mathcal{D}_{f^{-1}\circ f} = \mathcal{D}_f$. Legyen $x \in \mathcal{D}_f$ és $y := f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$ miatt

$$\left(f^{-1} \circ f\right)(x) = f^{-1}\big(f(x)\big) = f^{-1}(y) = x \qquad (x \in \mathcal{D}_f),$$

ami azt jelenti, hogy $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{|\mathcal{D}_f}$. ■

(c) Mivel $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$, ezért $\mathcal{D}_{f\circ f^{-1}} = \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$. Legyen $y \in \mathcal{R}_f$ és $x := f^{-1}(y)$. Mivel f invertálható, ezért $f(x) = y$, tehát

$$\left(f \circ f^{-1}\right)(y) = f\big(f^{-1}(y)\big) = f(x) = y \qquad (y \in \mathcal{R}_f),$$

ami azt jelenti, hogy $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{|\mathcal{R}_f}$. ■

76. (Az f és a g függvényeket érdemes Venn-diagramokkal is szemléltetni!) Az $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ feltételünkből következik, hogy $\mathcal{D}_{f\circ g} = \mathcal{D}_g$.

Igazoljuk, hogy az $f \circ g$ függvény invertálható. Tegyük fel, hogy valamely $x, y \in \mathcal{D}_{f\circ g}$ esetén $\big(f \circ g\big)(x) = \big(f \circ g\big)(y)$, azaz $f\big(g(x)\big) = f\big(g(y)\big)$. Mivel f invertálható, ezért ez csak úgy lehetséges, ha $g(x) = g(y)$. Mivel g invertálható, ezért ebből az következik, hogy $x = y$. Így $f \circ g$ valóban invertálható.

Az $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ feltételünk miatt $\mathcal{D}_{(f\circ g)^{-1}} = \mathcal{R}_{f\circ g} = f[\mathcal{R}_g]$. A $g^{-1}\circ f^{-1}$ kompozíció képezhető, mert

$$\mathcal{R}_{f^{-1}} \cap \mathcal{D}_{g^{-1}} = \mathcal{D}_f \cap \mathcal{R}_g = \mathcal{R}_g \neq \emptyset,$$

továbbá

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_{g^{-1}\circ f^{-1}} &= \{x \in \mathcal{D}_{f^{-1}} \mid f^{-1}(x) \in \mathcal{D}_{g^{-1}}\} \\
&= \{x \in \mathcal{R}_f \mid f^{-1}(x) \in \mathcal{R}_g\} \\
&= \{f(y) \in \mathcal{R}_f \mid y \in \mathcal{R}_g\} \\
&= f[\mathcal{R}_g],
\end{aligned}$$

tehát az $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ egyenlőség két oldalán álló függvények értelmezési tartományai megegyeznek.

Most megmutatjuk, hogy

$$(*) \quad \forall\, y \in \mathcal{D}_{(f\circ g)^{-1}} = \mathcal{D}_{g^{-1}\circ f^{-1}} \ \text{ esetén } \ \big(f \circ g\big)^{-1}(y) = \big(g^{-1} \circ f^{-1}\big)(y).$$

Legyen $y \in \mathcal{D}_{(f\circ g)^{-1}}$ és $x := \big(f \circ g\big)^{-1}(y)$. Ez azt jelenti, hogy

$$\big(f \circ g\big)(x) = f\big(g(x)\big) = y.$$

Mivel f invertálható, ezért $g(x) = f^{-1}(y)$, amiből g invertálhatósága miatt $x = g^{-1}\big(f^{-1}(y)\big) = \big(g^{-1} \circ f^{-1}\big)(y)$ következik, ezért $(*)$ valóban igaz.

A feladat állításásait tehát bebizonyítottuk. ■

■ C-feladatok

78. s pontosan akkor rendezési reláció, ha f injektív, és akkor és csak akkor teljes rendezés, ha $f : A \to B$ bijekció. ■

79. A definíciók alapján

$$\begin{aligned} f[C] &= f[\{0\}] = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in \{0\}\} = \{f(0)\} \\ &= \{2\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f^{-1}[C] &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in C\} = \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \in \{0\}\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 - x - x^2 = 0\} \\ &= \{1, -2\}. \end{aligned}$$

Az $f[A]$ halmaz pontosan akkor egyelemű, ha A egyelemű. Az $f^{-1}[A]$ egyelemű halmaz akkor és csak akkor, ha $A = \{\frac{9}{4}\}$. ■

80. Halmaz függvény által létesített képének a definíciója (l. **32.** oldal) szerint

$$\begin{aligned} \text{abs}\,\big[[-1,2)\big] &= \{\text{abs}\,(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [-1,2)\} = \\ &= \{|x| \in \mathbb{R} \mid -1 \le x < 2\}. \end{aligned}$$

Mivel minden $x \in [-1, 2)$ esetén $0 \le |x| < 2$, ezért $\text{abs}\big[[-1,2)\big] \subset \subset [0,2)$. A fordított irányú tartalmazás is igaz, mert ha $y \in [0, 2)$ egy tetszőleges szám, akkor $-1 \le y < 2$ és $y = |y|$ miatt $y \in \text{abs}\big[[-1,2)\big]$ is fennáll, tehát $[0, 2) \subset \text{abs}\big[[-1,2)\big]$. Ezért

$$\text{abs}\,\big[[-1,2)\big] = [0,2).$$

A soron következő halmazt ismét a definíció (l. **32.** oldal) alapján így írhatjuk fel:

$$\mathrm{abs}^{-1}\big[(1,4)\big] = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \in (1,4)\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 1 < |x| < 4\}.$$

Ez utóbbi halmaz tehát az $1 < |x| < 4$ egyenlőtlenség-rendszer megoldáshalmaza: $(-4,-1) \cup (1,4)$. Ezért

$$\mathrm{abs}^{-1}\big[(1,4)\big] = (-4,-1) \cup (1,4).$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\mathrm{abs}^{-1}\big[[-1,2]\big] = [-2,2].$$

(Ábrázolja koordináta-rendszerben az abszolútérték-függvényt, és a megfelelő tengelyeken is szemléltesse a kapott intervallumokat.) ■

81. $f^{-1}[D] = [1, \frac{11}{3}]$. ■

82. Halmaz függvény által létesített képének a definíciója (l. **32.** oldal) alapján

$$f\big[[a,b]\big] = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b]\} = \{3x+1 \in \mathbb{R} \mid x \in [a,b]\}.$$

Ha $a \le x \le b$, akkor $f(a) = 3a+1 \le 3x+1 \le 3b+1 = f(b)$, ezért $f\big[[a,b]\big] \subset [f(a), f(b)]$. Fordítva: ha $y \in [f(a), f(b)] = [3a+1, 3b+1]$, akkor $3x+1 = y$ alapján $x = \frac{y-1}{3}$. Mivel

$$a = \frac{3a+1-1}{3} \le x = \frac{y-1}{3} \le \frac{3b+1-1}{3} = b,$$

ezért $y \in f\big[[a,b]\big]$ is teljesül, így $[f(a), f(b)] \subset f\big[[a,b]\big]$ is igaz. Azt kaptuk tehát, hogy

$$f\big[[a,b]\big] = [f(a), f(b)] = [3a+1, 3b+1] \quad \text{minden } a \le b \text{ esetén.}$$

Az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ halmaz f által létesített őseképe:

$$\begin{aligned} f^{-1}\big[[a,b]\big] &= \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in [a,b]\} = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le 3x+1 \le b\} \\ &= \Big[\frac{a-1}{3}, \frac{b-1}{3}\Big]. \ ■ \end{aligned}$$

83. A **68.** feladat (c) állítása szerint az $f[C_1 \cap C_2] \subset f[C_1] \cap f[C_2]$ reláció *minden* $f : A \to B$ függvényre és *minden* $C_1, C_2 \subset A$ halmazra teljesül. Azt kell tehát megmutatni, hogy a fordított tartalmazás akkor és csak akkor igaz, ha f invertálható.

Legyen f invertálható és $y \in f[C_1] \cap f[C_2] \neq \emptyset$. Ekkor $y \in f[C_1]$ és $y \in f[C_2]$. Mivel minden $y \in B$ esetén legfeljebb egy olyan $x \in A$ létezik, amelyre $y = f(x)$, ezért van olyan $x \in C_1 \cap C_2$ elem, amelyre $y = f(x)$ teljesül, ami azt jelenti, hogy $y \in f[C_1 \cap C_2]$. Ezért

$$f[C_1] \cap f[C_2] \subset f[C_1 \cap C_2].$$

Az állítás megfordítását indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy minden $C_1, C_2 \subset A$ halmazra $f[C_1] \cap f[C_2] \subset f[C_1 \cap C_2]$, de az állítással ellentétben f nem invertálható. Ekkor van olyan $u, v \in A$, $u \neq v$, amelyekre $f(u) = f(v)$ teljesül. Jelöljük ezt a közös értéket y-nal, és legyen $C_1 := \{u\}, C_2 := \{v\}$. Ekkor $f[C_1 \cap C_2] = \emptyset$ és $f[C_1] \cap$ $\cap f[C_2] = \{y\}$, ezért ezekre a halmazokra nem teljesül az $f[C_1] \cap f[C_2] \subset$ $\subset f[C_1 \cap C_2]$ feltétel. ■

85. Ha $f\big[f^{-1}[D]\big] = \emptyset$, akkor $f\big[f^{-1}[D]\big] \subset D$ nyilván teljesül. Ha $D \subset B$ és $f\big[f^{-1}[D]\big] \neq \emptyset$, akkor

$$y \in f\big[f^{-1}[D]\big] \quad \Rightarrow \quad \exists\, x \in f^{-1}[D] \text{ úgy, hogy } f(x) = y \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad y = f(x) \in D, \text{ azaz } f\big[f^{-1}[D]\big] \subset D$$

valóban fennáll minden $D \subset B$ halmazra.

A feladat második része így írható: ha $f : A \to B$ tetszőleges függvény, akkor

$$\forall\, D \subset B \text{ esetén } f\big[f^{-1}[D]\big] = D \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{R}_f = B.$$

$\boxed{\Rightarrow}$ Legyen $D := B$. Ekkor $f^{-1}[B] = \mathcal{D}_f$ és $f[\mathcal{D}_f] = \mathcal{R}_f$. Az egyenlőség erre a D halmazra is teljesül, ezért $f\big[f^{-1}[B]\big] = B = \mathcal{R}_f$ valóban fennáll.
$\boxed{\Leftarrow}$ A feladat első része miatt elég megmutatni azt, hogy

$$\forall\, D \subset B (= \mathcal{R}_f) \text{ esetén} \quad D \subset f\big[f^{-1}[D]\big].$$

Feltehető, hogy D a B halmaz egy tetszőleges nemüres részhalmaza. Ekkor

$$y \in D \subset B = \mathcal{R}_f \;\Rightarrow\; \exists\, x \in \mathcal{D}_f, \text{ amelyre } f(x) = y \in D \;\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x \in f^{-1}[D] \;\Rightarrow\; f(x) \in f\big[f^{-1}[D]\big], \text{ és}$$
$$y = f(x) \text{ miatt } y \in f\big[f^{-1}[D]\big] \text{ is fennáll, azaz } D \subset f\big[f^{-1}[D]\big]. \;\blacksquare$$

86. A definíció szerint

$$f^{-1}[\mathbb{R}_0^+] = \left\{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathbb{R}_0^+\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\right\}.$$

Mivel

$$\left\{x \in \mathbb{R} \mid f(x) \geq 0\right\} = \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ esetén } f(x) \geq 0,$$

ezért azokat az $\alpha \in \mathbb{R}$ számokat kell meghatározni, amelyekre az

$$f(x) = \alpha(\alpha+1)x^2 + (2\alpha+3)x + 1 \geq 0$$

egyenlőtlenség minden x valós számra fennáll.

Ha $\alpha(\alpha+1) \neq 0$, azaz $\alpha \neq 0$ vagy $\alpha \neq -1$, akkor x-ben másodfokú egyenlőtlenségről van szó. Az x-ben másodfokú polinomfüggvény minden valós x-re akkor és csak akkor nemnegatív, ha a képe olyan felülről nyitott parabola, amelynek legfeljebb egy közös pontja van az x tengellyel. Ez azt jelenti, hogy a főegyütthatója pozitív, és nincs két különböző valós zérushelye. Ez utóbbi azzal ekvivalens, hogy a diszkriminánsa nempozitív. Azokat az $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$ számokat kell tehát meghatároznunk, amelyekre

$$\alpha(\alpha+1) > 0 \qquad \text{és} \qquad (2\alpha+3)^2 - 4\alpha(\alpha+1) \leq 0.$$

Ennek az egyenlőtlenség-rendszernek a megoldása: $\alpha \leq -\frac{9}{8}$.

Ha $\alpha = 0$, akkor a $3x + 1 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ez nem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, tehát $\alpha = 0$ nem megoldása a feladatnak.

Ha $\alpha = -1$, akkor az $x + 1 \geq 0$ egyenlőtlenséget kapjuk. Ez nem minden $x \in \mathbb{R}$ esetén teljesül, tehát $\alpha = -1$ sem megoldása a feladatnak.

A feladat megoldása tehát $\alpha - \frac{9}{8}$. ■

88. Azt kell bebizonyítani, hogy az $f(x) = f(t)$ egyenlőség a $(-1, 1)$ intervallumbeli x és t számokra akkor és csak akkor teljesül, ha $x = t$. Ha $x, t \in (-1, 0]$, akkor

$$f(x) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1-|x|} = \frac{t}{1-|t|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1+x} = \frac{t}{1+t} \quad \Leftrightarrow \quad x = t,$$

Ha $x, t \in (0,1)$, akkor

$$f(x) = f(t) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1-|x|} = \frac{t}{1-|t|} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x}{1-x} = \frac{t}{1-t} \quad \Leftrightarrow \quad x = t.$$

Ha $x \in (-1,0]$ és $t \in (0,1)$, akkor $f(x) = f(t)$ nem állhat fenn. Az f függvény tehát invertálható. ∎

89. Jelöljük f-fel a megadott függvényeket. Elég megmutatni azt, hogy $\mathcal{D}_f$-nek van két olyan különböző pontja, amelyekben a függvényértékek megegyeznek.

(a) Mivel $x^2 - 7x + 12 = (x-3)(x-4)$, ezért $f(3) = f(4) = 0$ és $3, 4 \in \mathcal{D}_f$. ∎

(b) Mivel $x^2 - 5 = t^2 - 5 \Leftrightarrow x = t$ vagy $x = -t$, ezért például $f(1) = f(-1) = -4$ és $-1, 1 \in \mathcal{D}_f$. ∎

(c) $f(1) = f(-1) = \sqrt{8}$ és $1, -1 \in \mathcal{D}_f$. ∎

(d) $f(0) = f(1) = 0$ és $0, 1 \in \mathcal{D}_f$. ∎

90. (a) $f^{-1}(y) = y^3 - 2$ $(y \in \mathbb{R})$. ∎

(b) $f^{-1} : \mathbb{R} \ni y \mapsto \big(1 - (y-2)^5\big)^{1/3}$. ∎

(c) $f^{-1} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \ni y \mapsto \dfrac{2y+1}{y-1}$. ∎

(d) *Invertálhatóság:* Legyen $x, t \in (-1,1)$. Ekkor

$$f(x) = f(t) \Longleftrightarrow \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 = \left(\frac{t-1}{1+t}\right)^2 \Longleftrightarrow \left|\frac{x-1}{1+x}\right| = \left|\frac{t-1}{1+t}\right|.$$

Mivel $x, t \in (-1,1)$, ezért

$$\left|\frac{x-1}{1+x}\right| = \frac{1-x}{1+x} \ \ (>0) \quad \text{és} \quad \left|\frac{t-1}{1+t}\right| = \frac{1-t}{1+t} \ \ (>0),$$

így

$$f(x) = f(t) \Longleftrightarrow \frac{1-x}{1+x} = \frac{1-t}{1+t} \Longleftrightarrow x = t,$$

ami azt jelenti, hogy f invertálható.

Az inverz előállítása: Nyilvánvaló, hogy $f(x) > -1$ $(x \in (-1,1))$. Nem nehéz kialakítani azt a *sejtést*, hogy $\mathcal{R}_f = (-1, +\infty)$ (ui. ha x „közel” van (-1)-hez, akkor $f(x)$ „nagy”). Vegyünk tehát egy tetszőleges $y \in$

$\in (-1, +\infty)$ számot, és vizsgáljuk meg, hogy ehhez van-e olyan $x \in \in \mathcal{D}_f = (-1, 1)$, hogy $f(x) = y$. Nézzük:

$$f(x) = y \iff \left(\frac{x-1}{1+x}\right)^2 - 1 = y \iff \left|\frac{x-1}{1+x}\right| = \sqrt{y+1} \overset{x\in(-1,1)}{\iff}$$
$$\overset{x\in(-1,1)}{\iff} \frac{1-x}{x+1} = \sqrt{y+1} \iff x = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}.$$

Mivel $y \in (-1, +\infty)$, ezért

$$-1 < x = \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}} < 1$$

is teljesül, ui. ez egyenértékű a nyilvánvaló

$$-1 - \sqrt{y+1} < 1 - \sqrt{y+1} < 1 + \sqrt{y+1}$$

egyenlőtlenség-rendszerrel. Megmutattuk tehát azt, hogy

$$\mathcal{R}_f = (-1, +\infty) = \mathcal{D}_{f^{-1}}.$$

A fentiek alapján f inverze az

$$f^{-1} : (-1, \infty) \ni y \mapsto \frac{1-\sqrt{y+1}}{1+\sqrt{y+1}}$$

függvény. ■

(e) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [-4, 1], \quad y \mapsto \begin{cases} \dfrac{3y+5}{7}, & \text{ha } -4 \le y < \frac{2}{3} \\ \dfrac{2}{y} - 1, & \text{ha } \frac{2}{3} \le y \le 1. \end{cases}$ ■

(f) $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}, \quad y \mapsto \begin{cases} y, & \text{ha } -\infty < y < 1 \\ \sqrt{y}, & \text{ha } 1 \le y \le 16 \\ \dfrac{y-4}{3}, & \text{ha } 16 < y < +\infty. \end{cases}$ ■

91. (a) *Vegyük észre*, hogy

$$x^3 + 6x^2 + 12x = (x+2)^3 - 8 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezt felhasználva már nyilvánvaló, hogy

$$\forall x, t \in \mathcal{D}_f (= \mathbb{R}) \text{ esetén } f(x) = f(t) \iff$$
$$\iff (x+2)^3 - 8 = (t+2)^3 - 8 \iff x = t,$$

és ez azt jelenti, hogy az f függvény invertálható.

Az inverz függvény meghatározásához az f értékkészletét kell megállapítanunk. Könnyen kialakíthatjuk azt a *sejtést*, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$. (Képzeljük el pl. az f függvény képét a derékszögű koordináta-rendszerben.) Most *igazoljuk* ezt az állítást. Nyilvánvaló, hogy $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}$. A fordított irányú tartalmazás igazolásához vegyünk egy tetszőleges $y \in \mathbb{R}$ számot. Az $f(x) = (x+2)^3 - 8 = y$ egyenlőség $x = \sqrt[3]{y+8} - 2 \in \mathbb{R}(= \mathcal{D}_f)$ esetén teljesül, ami azt jelenti, hogy $y \in \mathcal{R}_f$. Ezért $\mathbb{R} \subset \mathcal{R}_f$. Igazoltuk tehát azt, hogy $\mathcal{R}_f = \mathbb{R}$, így $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}(= \mathcal{R}_f)$. Mivel

$$y \in \mathcal{D}_{f^{-1}} \quad \text{esetén} \quad f^{-1}(y) = x \quad \Longleftrightarrow \quad f(x) = y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{y+8} - 2,$$

ezért $f^{-1}(y) = \sqrt[3]{y+8} - 2$. Az f függvény inverze tehát az

$$f^{-1} : \mathbb{R} \ni y \mapsto \sqrt[3]{y+8} - 2$$

függvény.

(b) Az $x^3 - 3x^2 + 3x + 4 = (x-1)^3 + 5$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosság felhasználásával hasonló módon láthatjuk be, hogy

$$f^{-1} : \mathbb{R} \ni y \mapsto \sqrt[3]{y-5} + 1. \ \blacksquare$$

92. Minden $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ és $x, t \in \mathcal{D}_f = \mathbb{R}$ esetén

$$f(x) = f(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha x + \beta = \alpha t + \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(x - t) = 0.$$

Ebből következik, hogy $\alpha = 0$ esetén a függvény nem invertálható, és ha $\alpha \neq 0$, akkor f invertálható.
Ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor egyszerűen igazolható, hogy

$$f^{-1} : \mathbb{R} \ni y \mapsto \frac{y - \beta}{\alpha}.$$

Most megvizsgáljuk azt, hogy milyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ paraméterekre teljesül az $f^{-1} = f$ egyenlőség. Mivel $\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R}$, ezért

$$\begin{aligned}
f = f^{-1} &\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ esetén } \ f(x) = f^{-1}(x) \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ esetén } \ \alpha x + \beta = \frac{x - \beta}{\alpha} \\
&\Longleftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \ \text{ esetén } \ (\alpha^2 - 1)x = -\beta(1 + \alpha) \\
&\Longleftrightarrow \alpha = -1 \ \text{ és } \ \beta \in \mathbb{R} \ \text{ vagy } \ \alpha = 1 \ \text{ és } \ \beta = 0.
\end{aligned}$$

Összefoglalva: Az f függvény akkor és csak akkor invertálható, ha $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, és ekkor $f^{-1}(y) = \dfrac{y-\beta}{\alpha}$ $(y \in \mathbb{R})$. Az $f = f^{-1}$ pontosan akkor áll fenn, ha $\alpha = -1$ és $\beta \in \mathbb{R}$ vagy $\alpha = 1$ és $\beta = 0$. ■

93. (a) Az elsőfokú függvények jól ismert tulajdonságaiból kiindulva alakíthatunk ki elképzelést különböző α paraméterek esetén az f függvény viselkedéséről. Ez azt sugallja, hogy az $\mathbb{R}$ paramétertartományt célszerű az alábbi három részre felbontani:

$$\alpha = 0, \qquad \alpha \in (0, +\infty) \quad \text{és} \quad \alpha \in (-\infty, 0).$$

Ha $\alpha = 0$, akkor az f függvény nem invertálható, mert ekkor a $[0, 1]$ intervallum minden pontjában ugyanaz a függvényérték.

Legyen $\alpha > 0$. Egyszerűen igazolható, hogy $f_{|[0,1]}$ és $f_{|(1,2]}$ invertálható, továbbá

$$f\big[[0,1]\big] = [1, 1+\alpha] \quad \text{és} \quad f\big[(1,2]\big] = [\alpha-2, \alpha-1).$$

A **70.** feladat alapján f akkor és csak akkor invertálható, ha

$$f\big[[0,1]\big] \cap f\big[(1,2]\big] = \emptyset, \quad \text{azaz} \quad [1, 1+\alpha] \cap [\alpha-2, \alpha-1) = \emptyset.$$

Ez $\alpha > 0$ miatt pontosan akkor teljesül, ha $\alpha - 1 \le 1$. Így $\alpha \in (0, +\infty)$ esetén az f függvény akkor és csak akkor invertálható, ha $0 < \alpha \le 2$. Ekkor az inverz függvény:

$$(*) \qquad \begin{cases} \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [\alpha-2, \alpha-1) \cup [1, 1+\alpha], \\ \qquad \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f = [0, 2] \quad \text{és} \\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \alpha - y, & \text{ha } y \in [\alpha-2, \alpha-1) \\ \dfrac{y-1}{\alpha}, & \text{ha } y \in [1, 1+\alpha]. \end{cases} \end{cases}$$

Ha $\alpha \in (-\infty, 0)$, akkor $f_{|[0,1]}$ invertálható, és $f\big[[0,1]\big] = [1+\alpha, 1]$. Az $f_{|(1,2]}$ függvény is invertálható, és $f\big[(1,2]\big] = [\alpha-2, \alpha-1)$. Az f akkor és csak akkor invertálható, ha

$$f\big[[0,1]\big] \cap f\big[(1,2]\big] = \emptyset, \quad \text{azaz} \quad [1+\alpha, 1] \cap [\alpha-2, \alpha-1) = \emptyset.$$

Ez $\alpha < 0$ miatt pontosan akkor teljesül, ha $\alpha - 1 \le \alpha + 1$, és ez minden α-ra igaz. Így az f függvény minden $\alpha \in (-\infty, 0)$ paraméter esetén invertálható. Ekkor az inverz függvény:

$$(**)\qquad \begin{cases} \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [\alpha-2,\alpha-1)\cup[1+\alpha,1], \\ \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f = [0,2] \text{ és} \\ f^{-1}(y) = \begin{cases} \alpha - y, & \text{ha } y\in[\alpha-2,\alpha-1) \\ \dfrac{y-1}{\alpha}, & \text{ha } y\in[1+\alpha,1]. \end{cases} \end{cases}$$

Összefoglalva: f akkor és csak akkor invertálható, ha $\alpha\in(-\infty,0]\cup$ $\cup(0,2]$, és az inverz függvény $(*)$, illetve $(**)$.

(b) Hasonló módon igazolhatjuk azt, hogy az f függvény akkor és csak akkor invertálható, ha $\alpha\in(-\infty,0)\cup[1,+\infty)$. Ha $\alpha\in[1,+\infty)$, akkor az inverz függvény:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [0,\alpha]\cup[2\alpha-1,2\alpha],\ \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f = [-1,1] \text{ és} \\ f^{-1}(y) = \begin{cases} 2\alpha - y, & \text{ha } y\in[2\alpha-1,2\alpha] \\ -\sqrt{y/\alpha}, & \text{ha } y\in[0,\alpha]. \end{cases} \end{cases}$$

Ha $\alpha\in(-\infty,0)$, akkor az inverz függvény:

$$\begin{cases} \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f = [\alpha,0]\cup[2\alpha-1,2\alpha],\ \mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f = [-1,1] \text{ és} \\ f^{-1}(y) = \begin{cases} 2\alpha - y, & \text{ha } y\in[2\alpha-1,2\alpha] \\ \sqrt{y/\alpha}, & \text{ha } y\in[\alpha,0]. \end{cases} \end{cases}$$

■

94. (a) $\big(f\circ g\big)(x) = 1-x \quad (x\in[0,+\infty))$;

$\big(g\circ f\big)(x) = \sqrt{1-x^2} \quad (x\in[-1,1])$.

(b) $f\circ g = g\circ f = \mathrm{Abs}$.

(c) $f\circ g = g\circ f := \mathbb{R}\setminus\{0\}\ni x\mapsto \begin{cases} 1, & \text{ha } x\in(0,+\infty) \\ -1, & \text{ha } x\in(-\infty,0). \end{cases}$

(d) $f\big(g(x)\big) = 0 \quad (x\in\mathbb{R})$; $g\big(f(x)\big) = g(x) \quad (x\in\mathbb{R})$. ■

95. Ha $x<6$, akkor $g(x) = \frac{6-x}{7-x} = 1-\frac{1}{7-x} < 1$, így

$$(f\circ g)(x) = 2\frac{6-x}{7-x} - 1 \qquad (x<6).$$

Ha $x \geq 6$, akkor $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^6 \leq \left(1 + \frac{1}{6}\right)^6 < 4$. Az utolsó lépésnél a $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 4$ $(n \in \mathbb{N},\ n \geq 1)$ becslést alkalmaztuk (l. a **30.** feladatot). Másrészt, $g(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^6 > 1^6 = 1$. Következésképpen

$$(f \circ g)(x) = 2 \qquad (x \geq 6).$$

Összefoglalva

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} 2\,\frac{6-x}{7-x} - 1, & \text{ha } x < 6 \\ 2, & \text{ha } x \geq 6. \end{cases} \quad \blacksquare$$

97. Mivel

$0 < x < 1$ esetén $g(x) = 0$,

$1 \leq x < 2$ esetén $g(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow g(x) \in (\frac{1}{2}, 1]$, és g itt minden értéket felvesz,

$2 \leq x < 3$ esetén $g(x) = \frac{2}{x} \Rightarrow g(x) \in (\frac{2}{3}, 1]$, és g itt minden értéket felvesz, ez alapján könnyen látható, hogy

$k \leq x < k = 1$ esetén $g(x) = \frac{k}{x} \Rightarrow g(x) \in (\frac{k}{k+1}, 1]$, és g itt minden értéket felvesz,

ezért $\mathcal{R}_{g_{|\mathbb{R}^+}} = \{0\} \cup \left(\frac{1}{2}, 1\right]$.

Ha $x < 0$, akkor $[x] \leq x < [x] + 1$ miatt $\frac{[x]}{x} \geq 1$. Ha $-1 \leq x < 0$, akkor $g(x) = -\dfrac{1}{x}$, tehát $g(x) \in [1, +\infty)$, és itt g minden értéket felvesz. Ezért $\mathcal{R}_{g_{|\mathbb{R}^-}} = [1, +\infty)$. A g függvény értékkészlete tehát az

$$\mathcal{R}_g = \{0\} \cup \left(\tfrac{1}{2}, +\infty\right)$$

halmaz.

Az $f \circ g$ függvény értelmezési tartománya pedig a

$$\mathcal{D}_{f \circ g} = g^{-1}[\mathcal{R}_g \cap \mathcal{D}_f] = g^{-1}\left[\left(\tfrac{1}{2}, 1\right)\right] = [1, +\infty) \setminus \mathbb{N}$$

halmaz. $\blacksquare$

3. A valós és a komplex számok struktúrája

3.1. A valós számok Dedekind-féle axiómarendszere

99. A c szám szétválasztja az A és a B halmazt, ha

$$\forall\, a \in A \;\text{ és }\; \forall\, b \in B \;\text{ esetén }\quad a \le c \le b.$$

c *nem* választja szét A-t és B-t, ha

$$\exists\, a \in A, \text{ hogy } c < a, \quad \text{vagy} \quad \exists\, b \in B, \text{ hogy } b < c. \;\blacksquare$$

100. A *testaxiómák* (l. a **41.** oldalt) A-ban teljesülnek; 0 a nullelem és 1 az egységelem.

r egy *lineáris rendezés* A-n, azaz fennállnak a **42.** oldalon a **II. 1**-ben megfogalmazott tulajdonságok ($\mathbb{R}$ helyett persze A-val). A rendezést és a műveleteket összekapcsoló **II. 2.** (i) *nem igaz* $x := 0, y := 1$ és $z := 1$ esetén. **II. 2.** (ii) azonban igaz.

A *teljességi axióma* teljesül A-n. $\blacksquare$

101. Ahhoz, hogy X-ben a testaxiómák teljesülnek, elég belátni azt, hogy minden X-beli elem (-1)-szerese, 0-tól különböző X-beli elem reciproka, két X-beli elem összege és szorzata is benne van X-ben.

Gondolja meg, hogy $\mathbb{Q} \subset X$, de $\mathbb{Q} \neq X$, mert például $\sqrt{2} \in X$ és $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$; továbbá $X \neq \mathbb{R}$ is igaz, mert például $\sqrt{3} \in \mathbb{R}$ és $\sqrt{3} \notin X$. $\blacksquare$

3.2. A teljességi axióma következményei

■ A-feladatok

105. (a) $\forall y \in H$ számhoz $\exists x \in H$, hogy $x > y$, azaz a halmaz tetszőleges eleménél van nagyobb halmazbeli elem. ■

(b) $\forall y \in H$ számhoz $\exists x \in H$, hogy $x < y$, azaz a halmaz tetszőleges eleménél van kisebb halmazbeli elem. ■

106. (a) $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists x \in H$, hogy $x > K$, azaz tetszőleges K valós számot véve a halmaznak van ennél nagyobb x eleme. ■

(b) $\forall k \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists x \in H$, hogy $x < k$, azaz tetszőleges valós k számot véve a halmaznak van ennél kisebb x eleme. ■

(c) Vagy az igaz, hogy $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists x \in H$, hogy $x > K$, vagy pedig az, hogy $\forall k \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists x \in H$, hogy $x < k$. (Ez azzal ekvivalens, hogy $\forall K > 0$ számhoz $\exists x \in H$, hogy $|x| > K$.) ■

107. (a) Ez két dolgot jelent. Egyrészt azt, hogy

(i) ξ felső korlátja H-nak, azaz $\forall x \in H$ esetén $x \leq \xi$,

másrészt pedig azt, hogy

(ii) ξ a H halmaz legkisebb felső korlátja, azaz minden ξ-nél kisebb szám már nem felső korlátja H-nak. Tehát $\forall \alpha < \xi$ számhoz $\exists x \in H$, amelyre $x > \alpha$. (Ezt még a következőképpen is írhatjuk: $\forall \varepsilon > 0$ számhoz $\exists x \in H$, amelyre $x > \xi - \varepsilon$ teljesül.) ■

(b) (i) $\forall x \in H$-ra $\xi \leq x$ és

(ii) $\forall \alpha > \xi$ számhoz $\exists x \in H$, amelyre $x < \alpha$ (vagy $\forall \varepsilon > 0$ valós számhoz $\exists x \in H$, amelyre $x < \xi + \varepsilon$). ■

(c) Vagy az igaz, hogy

(i) ξ nem felső korlátja H-nak, azaz $\exists x \in H$, hogy $x > \xi$,

vagy pedig az igaz, hogy

(ii) ξ nem a legkisebb felső korlátja H-nak, azaz $\exists \alpha < \xi$, hogy $\forall x \in H$ esetén $x \leq \alpha$. ■

(d) Vagy az igaz, hogy

(i) ξ nem alsó korlátja H-nak, azaz $\exists x \in H$, hogy $x < \xi$,

vagy pedig az igaz, hogy

(ii) ξ nem a legnagyobb alsó korlátja H-nak, azaz $\exists\,\alpha > \xi$, hogy $\forall\, x \in H$ esetén $x \geq \alpha$. ■

108. Az infimumra és a szuprémumra vonatkozó tételeket alkalmazzuk (l. a **49.** oldalt).

A H halmaz infimuma 0, mert

(i) 0 egy alsó korlátja H-nak, ui. $0 \leq \frac{1}{n}$ és $0 \leq 2 - \frac{1}{n}$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;

(ii) 0 a legnagyobb alsó korlátja H-nak, ui. $\forall\,\alpha > 0$ számhoz $\exists\, x \in H$, amelyre $x < \alpha$; legyen ui. $x := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan szám, amelyre $\frac{1}{n} < \alpha$ teljesül. Ilyen n természetes szám az archimédészi tulajdonság miatt létezik.
H-nak nincs minimuma, mert $\inf H = 0 \notin H$.

A H halmaz szuprémuma 2, mert

(i) 2 egy felső korlátja H-nak, ui. $\frac{1}{n} \leq 2$ és $2 - \frac{1}{n} \leq 2$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén;

(ii) 2 a legkisebb felső korlátja H-nak, ui. $\forall\,\varepsilon > 0$ valós számhoz $\exists\, x \in H$, hogy $x > 2 - \varepsilon$; legyen ui. $x := 2 - \frac{1}{n}$, ahol n olyan természetes szám, amelyre $\frac{1}{n} < \varepsilon$ teljesül. Ilyen n létezése az archimédészi tulajdonság következménye.
H-nak nincs maximuma, mert $\sup H = 2 \notin H$. ■

109. Az állítás *nem* igaz. A

$$H := \Big\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\Big\} \cup \{2\}$$

egy végtelen halmaz, $\sup H = 2$, és 2-nek például az $\frac{1}{2}$ sugarú környezetében a halmaznak csak egyetlen eleme van. ■

■ B-feladatok

110. A halmaz szuprémumát először meg kell *sejtenünk*, majd a sejtésünket be kell *bizonyítanunk*. A nehézséget az okozza, hogy H elemeinek a nagysága a megadott $\frac{2x+2}{3x+5}$ alakból nem látható. Egy egyszerű *észrevé-*

tel segíteni fog: végezzük el a következő átalakítást:

$$\begin{aligned}\frac{2x+2}{3x+5} &= \frac{\frac{2}{3}(3x+5)-\frac{2}{3}\cdot 5+2}{3x+5} = \\ &= \frac{2}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3x+5} \quad (x \geq -1).\end{aligned} \tag{$*$}$$

A jobb oldalon változó már csak a nevezőben szerepel, és ebből már világosabb képet kaphatunk a halmaz elemeinek a nagyságáról. Valóban, mivel $x \geq -1$ esetén $3x+5>0$, ezért $(*)$-ból rögtön adódik, hogy H felülről korlátos, és $\frac{2}{3}$ egy felső korlátja. $(*)$ jobb oldalából azonban az látszik, hogy elég nagy x értékekre a halmaz elemei $\frac{2}{3}$-hoz akármilyen közel kerülhetnek. (Ha x nagy, akkor az $\frac{1}{3x+5}$ tört nevezője is nagy, a tört értéke tehát kicsi pozitív szám.) Ezek alapján alakíthatjuk ki azt a (megalapozott) *sejtést*, hogy

$$\sup H = \frac{2}{3}.$$

A bizonyítás: (i) $\frac{2}{3}$ felső korlátja H-nak, mert

$$\frac{2x+2}{3x+5} = \frac{2}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3x+5} < \frac{2}{3} \quad (x \geq -1).$$

(ii) Megmutatjuk, hogy $\frac{2}{3}$ a legkisebb felső korlátja H-nak, azaz $\frac{2}{3}$-nál kisebb szám már nem felső korlát. Ez azt jelenti, hogy

$$(**) \qquad \forall\, \varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\, x \geq -1, \text{ hogy } \frac{2}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3x+5} > \frac{2}{3}-\varepsilon.$$

Mivel

$$\frac{2}{3}-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3x+5} > \frac{2}{3}-\varepsilon \iff \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{3x+5} < \varepsilon \iff \frac{1}{3}\left(\frac{4}{3\varepsilon}-5\right) < x,$$

ezért pl. $x := \frac{4}{9\varepsilon} (> 0 \geq -1)$ választással H-nak egy $\left(\frac{2}{3}-\varepsilon\right)$-nál nagyobb elemét kapjuk. A $\sup H = \frac{2}{3}$ egyenlőséget tehát bebizonyítottuk.

Láttuk azt, hogy a halmaz mindegyik eleme kisebb $\frac{2}{3}$-nál. Mivel $\sup H = \frac{2}{3} \notin H$, ezért a halmaznak nincs maximuma. ■

111. Mivel $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}>0$ minden $x>0$ valós számra, ezért H alulról korlátos, és 0 egy alsó korlátja. A legnagyobb alsó korlát (tehát az infimum) megállapításához azt kell tudnunk, hogy mekkorák a halmaz elemei. Ez a megadott $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$ alakból azonban nem látszik. Vegyük észre, hogy a

$$\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}$$

átalakítás („gyöktelenítés") után már világosabb képet kapunk a halmaz elemeinek a nagyságáról. Ez a tört (ami a halmaznak egy eleme) nagy x értékekre 0-hoz közeli érték. A (megalapozott) *sejtésünk* tehát az, hogy

$$\inf H=0.$$

A bizonyítás: (i) Azt már láttuk, hogy 0 egy alsó korlát.

(ii) Annak igazolásához, hogy ez a legnagyobb alsó korlát, azt kell megmutatni, hogy

$$\forall\,\varepsilon>0 \text{ számhoz } \exists\,x>0, \text{ amelyre } H\ni\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\varepsilon.$$

Ez azonban következik az alábbi „trükkös" egyenlőtlenségből:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}=\frac{1}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x}}<\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon, \quad \text{ha } x>\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Megmutattuk tehát azt, hogy $\inf H=0$.

Mivel $\inf H=0\notin H$, ezért H-nak nincs legkisebb eleme. ■

M. Az iménti megoldásban felhasznált (és az analízisben gyakran alkalmazott) „trükkhöz" az alábbi megjegyzéseket fűzzük. A kérdés az volt, hogy adott $\varepsilon>0$ számhoz vajon **van-e olyan** $x>0$ szám, amelyre

$$(*)\qquad \sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\varepsilon$$

teljesül. Erre válaszolhatnánk úgy is, hogy megoldjuk ezt az egyenlőtlenséget (hogyan?). Ennél lényegesen egyszerűbb utat követtünk. A „trükk" lényege az volt, hogy a fenti egyenlőtlenség bal oldalát növeltük $\frac{1}{\sqrt{x}}$-re, és a már igen egyszerűen megoldható

$$\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$$

egyenlőtlenséget tekintettük. Azokra az x-ekre, amelyekre ez fennáll (tehát az $1/\varepsilon^2$-nél nagyobbakra) nyilván $(*)$ is teljesülni fog.

112. Ha $\sup A \le \inf B$, akkor $\inf B$ az A halmaz egy felső korlátja, ezért $a \le \inf B$ minden $a \in A$ esetén. Viszont $\inf B$ a B halmaz alsó korlátja, ezért $\inf B \le b$ minden $b \in B$ esetében. Így $a \le b$ valóban fennáll $\forall\, a \in A$ és $\forall\, b \in B$ esetén.

Ha $a \le b$ az A, illetve a B minden a, illetve minden b elemére, akkor minden b az A egy felső korlátja, ezért $\sup A \le b$ minden $b \in B$-re. Ez azt jelenti, hogy $\sup A$ a B halmaz egy alsó korlátja, és így $\sup A \le \inf B$. ■

113. Tegyük fel, hogy $A \subset \mathbb{R}$ és $B \subset \mathbb{R}$ olyan nemüres halmazok, hogy minden $a \in A$ és minden $b \in B$ esetén $a \le b$ is teljesül. Ekkor A felülről korlátos is, ezért a szuprémum-elvből következik, hogy A felső korlátai között van legkisebb. Jelöljük ezt a számot ξ-vel. Igazoljuk, hogy

$$\forall\, a \in A \quad \text{és} \quad \forall\, b \in B \quad \text{esetén} \quad a \le \xi \le b \quad \text{teljesül.}$$

Valóban, mivel ξ felső korlátja A-nak, ezért $a \le \xi$ $(a \in A)$. Másrészt minden $b \in B$ felső korlátja A-nak. ξ azonban A legkisebb felső korlátja, ezért $\xi \le b$ $(b \in B)$ is fennáll.
A feladat állítását tehát bebizonyítottuk. ■

114. Vegyünk $\mathbb{R}$-nek két olyan nemüres A és B részhalmazát, amelyre még az is teljesül, hogy minden $a \in A$ és minden $b \in B$ esetén $a \le b$. Azt kell igazolnunk, hogy az archimédészi és a Cantor-tulajdonságból következik, hogy létezik az A és a B halmazt elválasztó $\xi \in \mathbb{R}$ elem, azaz

$$\exists\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \text{hogy} \quad \forall\, a \in A \text{ és } \forall\, b \in B \text{ esetén } a \le \xi \le b.$$

Ilyen elválasztó elem létezését egy alkalmasan konstruált intervallumrendszer közös pontjaként fogjuk megkapni.
A konstrukció első lépéseként vegyük az A és a B halmaz egy-egy tetszőleges $a_1 \in A$ és $b_1 \in B$ elemét. Tekintsük az $[a_1, b_1] \subset \mathbb{R}$ (korlátos és zárt) intervallumot. Legyen c_1 ennek a felezőpontja: $c_1 := \dfrac{a_1 + b_1}{2}$.
Világos, hogy két eset lehetséges.
1. eset. *A c_1 egy A-t és B-t elválasztó elem.* Ekkor legyen $[a_2, b_2] :=$ $:= [a_1, c_1]$. (A másikat is vehetnénk!)

2. eset. *A* c_1 *nem választja el az* A *és a* B *halmazt.* Ez azt jelenti, hogy

(a) vagy $\exists\, b \in B : b < c_1$,

(b) vagy $\exists\, a \in A : c_1 < a$.

Az (a) esetben legyen $[a_2, b_2] := [a_1, c_1]$, a (b) esetben pedig $[a_2, b_2] :=$ $:= [c_1, b_1]$. Más szóval, válasszuk ki az $[a_1, b_1]$ intervallum felezése által keletkezett félintervallumok közül azt, amelyik tartalmaz A-beli vagy B-beli elemet. Világos, hogy $b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$.
Ezt az eljárást folytatjuk. Ez azt jelenti, hogy ha valamilyen n természetes számra az $[a_n, b_n]$ intervallumot már meghatároztuk, akkor az imént leírt módon megválasztjuk az $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ intervallumot.
Így minden n természetes számra kapunk olyan (korlátos és zárt) $[a_n, b_n]$ intervallumot, hogy

$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n],$$
$$[a_n, b_n] \text{ tartalmaz } A\text{-beli vagy } B\text{-beli elemet és}$$
$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

A Cantor-tulajdonságból következik, hogy

$$\exists\, \xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$

Igazoljuk, hogy ez a ξ egy A-t és B-t elválasztó elem, azaz

$$\forall\, a \in A \text{ és } \forall\, b \in B \text{ esetén } \ a \le \xi \le b.$$

Ezt az állítást indirekt módon látjuk be. Tegyük fel, hogy ξ nem elválasztó elem. Ez azt jelenti, hogy

(i) vagy $\exists\ a \in A$, hogy $\xi < a$,

(ii) vagy $\exists\ b \in B$, hogy $b < \xi$.

Csak az (i) esettel foglalkozunk, mert (ii) hasonlóan kezelhető. A konstrukció miatt

$$a_n \le \xi \le b_n \quad \text{minden} \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Az indirekt feltétel miatt

$$\xi < a,$$

sőt ismét a konstrukció miatt $a \le b_n$ is fennáll minden n természetes számra. Ezért

$$0 < a - \xi \le b_n - a_n \le \frac{b_1 - a_1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami azt jelenti, hogy

$$n(a - \xi) \le (b_1 - a_1) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ez ellentmond az archimédészi tulajdonságnak. ξ tehát valóban elválasztó elem. ■

115. Az A halmaz nem üres (ui. $0 \in A$) és felülről korlátos (ui. 2 például egy felső korlátja), ezért a szuprémum-elv szerint $\xi := \sup A$ létezik.

Megmutatjuk, hogy $\xi^2 \le 2$ és $2 \le \xi^2$, amiből $\xi^2 = 2$ következik.

Vegyünk egy tetszőleges $0 < \varepsilon < \xi$ számot. Mivel $\xi - \varepsilon$ nem felső korlátja A-nak, ezért van olyan $x \in A$ elem, amelyre $0 < \xi - \varepsilon \le x$, azaz $(\xi - \varepsilon)^2 \le x^2 \le 2$ teljesül. Mivel

$$2 \ge (\xi - \varepsilon)^2 = \xi^2 - 2\xi\varepsilon + \varepsilon^2 \ge \xi^2 - 2\xi\varepsilon,$$

ezért a $\xi^2 - 2 \le 2\xi\varepsilon$ minden $\varepsilon \in (0, \xi)$ számra fennáll, ami csak úgy lehetséges, ha $\xi^2 - 2 \le 0$, vagyis $\xi^2 \le 2$.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon \in (0, 1)$ számot. ξ a legkisebb felső korlátja A-nak, tehát $\xi + \varepsilon$ egy A-hoz nem tartozó felső korlát, azaz $(\xi + \varepsilon)^2 > 2$. Mivel

$$2 < (\xi + \varepsilon)^2 < \xi^2 + 2\xi\varepsilon + \varepsilon^2 < \xi^2 + \varepsilon(2\xi + 1),$$

ezért $2 - \xi^2 < \varepsilon(2\xi + 1)$ minden $\varepsilon \in (0, 1)$ esetén. Ez csak úgy lehetséges, ha $2 - \xi^2 \le 0$, azaz $2 \le \xi^2$ is fennáll.

A $\xi^2 = 2$ egyenlőséget tehát bebizonyítottuk.

Indirekt módon igazolható, hogy $\sqrt{2}$ egy irracionális szám.

$\sqrt{2}$ tizedesjegyeit a következő *intervallumfelezési eljárással* határozhatjuk meg: Induljunk ki az $[a_1, a_2] := [1, 2]$ intervallumból. Mivel

$1 \in A$ és $2 \notin A$, ezért $\sqrt{2} \in [1, 2]$. Felezzük meg ezt az intervallumot, és legyen c_1 a felezőpont. Mivel $c_1^2 = 1,5^2 > 2$, ezért $\sqrt{2} \in$ $\in [a_2, b_2] := [a_1, c_1] = [1; 1,5]$. Az $[a_2, b_2]$ intervallumot is megfelezzük. A $c_2 := (1 + 1,5)/2 = 1,25$ felezőpontban $c_2^2 = 1,25^2 < 2$, ezért $c_2 \in A$, tehát $\sqrt{2} \in [a_3, b_3] := [c_2, b_2] = [1,25; 1,5]$. Ezt az eljárást folytatva olyan egyre szűkebb intervallumokat kapunk, amelyek mindegyike tartalmazza $\sqrt{2}$-t. A szükséges lépésszám meghatározásához vegyük figyelembe, hogy az n-edik lépésben kapott $[a_n, b_n]$ intervallum hossza $\frac{1}{2^{n-1}}$. ■

116. (1) Először a ξ szám **egyértelműségét** látjuk be. Világos, hogy ha $0 \leq \xi_1 < \xi_2$, akkor $\xi_1^n < \xi_2^n$ is teljesül, ami azt jelenti, hogy legfeljebb egy olyan $\xi \in \mathbb{R}_0^+$ szám létezik, amelyre $\xi^n = \alpha$.

(2) Most a ξ szám **létezését** igazoljuk. Mivel az $\alpha = 0$ esetben $\xi = 0$ megfelelő, ezért elegendő pozitív α-val foglalkozni. Legyen tehát $\alpha > 0$, és vezessük be az

$$A := \{x \in \mathbb{R} \mid x^n \leq \alpha\}$$

halmazt. Mivel $0 \in A$, ezért $A \neq \emptyset$. Az A halmaz felülről korlátos is, ugyanis $\alpha \leq 1$ esetén az 1 szám, $\alpha > 1$ esetén pedig az α szám egy felső korlátja A-nak. A szuprémum-elv szerint $\xi := \sup A$ létezik. Be fogjuk bizonyítani, hogy $\xi^n = \alpha$.

Először azt mutatjuk meg, hogy $\xi^n \leq \alpha$. Vegyünk egy tetszőleges $0 < \varepsilon < \xi$ számot. Mivel $\xi - \varepsilon$ nem felső korlátja A-nak, ezért van olyan $x \in A$ elem, amelyre $\xi - \varepsilon \leq x$ teljesül, amiből a $(\xi - \varepsilon)^n \leq x^n \leq \alpha$ egyenlőtlenség is következik. A Bernoulli-egyenlőtlenség miatt

$$(\xi - \varepsilon)^n = \xi^n\Big(1 - \frac{\varepsilon}{\xi}\Big)^n \geq \xi^n\Big(1 - \frac{\varepsilon}{\xi}n\Big) = \xi^n - \varepsilon\xi^{n-1}n,$$

tehát $\alpha \geq (\xi - \varepsilon)^n \geq \xi^n - \varepsilon\xi^{n-1}n$, azaz $\xi^n - \alpha \leq \varepsilon\xi^{n-1}n$. Ez az egyenlőtlenség minden (elég kicsi) ε pozitív számra fennáll, amiből azt kapjuk, hogy $\xi^n - \alpha \leq 0$, azaz $\xi^n \leq \alpha$.

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához felhasználjuk a teljes indukcióval egyszerűen bizonyítható

$$(1 + \varepsilon)^n < 1 + 3^n\varepsilon \qquad \big(0 < \varepsilon < 1,\ n \in \mathbb{N}\big) \tag{$*$}$$

egyenlőtlenséget. Vegyünk egy tetszőleges $\varepsilon \in (0, 1)$ számot. A-nak ξ egy felső korlátja, ezért $(\xi + \varepsilon)^n > \alpha$. A $(*)$ egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$(\xi + \varepsilon)^n = \xi^n\big(1 + \frac{\varepsilon}{\xi}\big)^n < \xi^n\big(1 + 3^n\frac{\varepsilon}{\xi}\big) = \xi^n + 3^n\varepsilon\xi^{n-1},$$

tehát $\alpha < (\xi + \varepsilon)^n < \xi^n + 3^n\varepsilon\xi^{n-1}$. Így az $\alpha - \xi^n < 3^n\varepsilon\xi^{n-1}$ egyenlőtlenség minden (elég kicsi) ε számra fennáll, amiből az következik, hogy $\alpha \le \xi^n$. Ebből és a fentebb igazolt $\xi^n \le \alpha$ egyenlőtleségből az következik, hogy a ξ számra valóban fennáll a $\xi^n = \alpha$ egyenlőség.

A feladat állítását tehát bebizonyítottuk. ■

117. Mivel a teljességi axióma ekvivalens a szuprémum-elvvel, ezért elég azt igazolni, hogy $\mathbb{Q}$-ban nem igaz a szuprémum-elv, azaz $\exists\, A \subset \mathbb{Q}$ *korlátos halmaz, hogy az* A *halmaz* $\mathbb{Q}$*-beli felső korlátjai között nincs legkisebb.*
Legyen például

$$A := \{r \in \mathbb{Q}^+ \mid r^2 < 2\} \qquad \text{és} \qquad B := \{s \in \mathbb{Q}^+ \mid s^2 > 2\}.$$

Az $A \subset \mathbb{Q}$ halmaz felülről korlátos, és egy $K \in \mathbb{Q}^+$ szám A-nak akkor és csak akkor felső korlátja, ha $K \in B$. Megmutatjuk, hogy a B halmaznak *nincs* $\mathbb{Q}$-beli minimuma, vagyis minden B-beli s elemnél van kisebb B-beli s_0 elem. Legyen $s \in B$ egy tetszőleges elem. Ekkor az $\varepsilon > 0$ szám megválasztható úgy, hogy az $s_0 := s - \varepsilon$ szám benne legyen B-ben. Mivel

$$s_0^2 = (s - \varepsilon)^2 = s^2 - 2s\varepsilon + \varepsilon^2 > s^2 - 2s\varepsilon > 2,$$

ha $\varepsilon < \frac{s^2-2}{2s}$ $(< s)$, ezért az ilyen ε számmal $s_0 \in B$ és $0 < s_0 < s$ is teljesül. ■

■ C-feladatok

118. $\max H_1 = \sup H_1 = \frac{3}{2}$, H_1-nek nincs minimuma, és $\inf H_1 = -1$.

$\min H_2 = \inf H_2 = 0$, $\max H_2 = \sup H_2 = \frac{3}{2}$.

$\max H_3 = \sup H_3 = 1$, H_3-nak nincs minimuma, és $\inf H_3 = 0$. ■

119. Előzetes megjegyzések. A feltett kérdésekre a válaszokat először meg kell *sejtenünk*, majd a sejtéseinket be kell *bizonyítanunk*. A sejtés kialakításához a halmaz elemeit megadó kifejezést (ha ez szükséges) úgy *alakítjuk át*, hogy abból már világosabb képet kaphassunk a halmaz elemeinek a nagyságáról.

(a) Alkalmazza a

$$\frac{8x+3}{5x+4} = \frac{\frac{8}{5}(5x+4) - \frac{8}{5}\cdot 4 + 3}{5x+4} = \frac{8}{5} - \frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5x+4} \qquad (x \geq 0)$$

egyenlőséget. Ezt felhasználva igazolja, hogy a H halmaz korlátos, $\min H = \inf H = \frac{3}{4}$, H-nak nincs maximuma, és $\sup H = \frac{8}{5}$. ■

(b) A H halmaz korlátos, $\max H = \sup H = \frac{1}{2}$, H-nak nincs minimuma, és $\inf H = \frac{1}{3}$. ■

(c) Végezzük el az

$$\frac{|x|-2}{|x|+2} = 1 - \frac{4}{|x|+2} \qquad (x \in \mathbb{R}) \qquad (*)$$

átalakítást. Ez alapján a *sejtésünk* ($|x|$ növelésével $\frac{4}{|x|+2}$ értéke csökken, azaz $1-\frac{4}{|x|+2}$ értéke nő; a H halmaz legkisebb elemét $x = 0$ választással kapjuk) az, hogy

$$\min H = -1 = \inf H.$$

A bizonyítás:

$$\frac{|x|-2}{|x|+2} = 1 - \frac{4}{|x|+2} \geq 1 - \frac{4}{0+2} = -1$$

minden $x \in \mathbb{R}$ esetén és $-1 \in H$.

A szuprémumra vonatkozó *sejtésünk* pedig az, hogy

$$\sup H = 1.$$

A bizonyítás: (i) 1 felső korlátja H-nak, mert az

$$1 - \frac{4}{|x|+2} < 1 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenség nyilván igaz.

(ii) Bármely 1-nél kisebb szám már nem felső korlátja H-nak, mert $\forall\,\varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy

$$1 - \frac{4}{|x| + 2} > 1 - \varepsilon.$$

Ez az egyenlőtlenség teljesül, ha $|x| > 4/\varepsilon - 2$.

Mivel $\sup H = 1 \notin H$, ezért H-nak nincs maximuma.

Összefoglalva: H alulról korlátos, van minimuma, és $\min H = \inf H = -1$; felülről korlátos, nincs maximuma, de $\sup H = 1$. ■

(d) Először átalakítjuk a halmaz elemeit megadó kifejezést: ha $x \geq -\frac{1}{2}$, akkor

$$(*)\quad \frac{1-x^2}{(2x+3)(x+1)} = \frac{(1-x)(1+x)}{(2x+3)(x+1)} = \frac{1-x}{2x+3} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2x+3}.$$

A H *halmaz korlátos*, mert minden $x \geq -\frac{1}{2}$ esetén

$$-\frac{1}{2} < -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} \leq -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2 \cdot (-\frac{1}{2}) + 3} = \frac{3}{4}.$$

A H *halmaznak van legnagyobb eleme:* $\max H = \frac{3}{4}$, ui. $3/4 \in H$ (l. $x = -1/2$), és $3/4$ egy felső korlát is. Ezért

$$\max H = \sup H = \frac{3}{4}.$$

Igazoljuk, hogy *a* H *halmaz infimuma* $-\frac{1}{2}$.

(i) Azt már láttuk, hogy $-\frac{1}{2}$ egy alsó korlát.

(ii) Megmutatjuk, hogy ez a legnagyobb alsó korlát, azaz

$$(**)\quad \begin{gathered} \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, x \geq -\frac{1}{2}, \text{ hogy} \\ \frac{1-x^2}{(2x+3)(x+1)} = -\frac{1}{2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} < -\frac{1}{2} + \varepsilon. \end{gathered}$$

Mivel

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} + \varepsilon \quad &\iff \quad \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{2x+3} < \varepsilon \quad \iff \\ &\iff \quad x > \frac{1}{2}\Big(\frac{5}{2\varepsilon} - 3\Big), \end{aligned}$$

ezért $(**)$ pl. az $x := \frac{5}{4\varepsilon} (> 0 \geq -\frac{1}{2})$ választással teljesül.

A halmaznak *nincs minimuma*, mert $\inf H = -\frac{1}{2} \notin H$.

Összefoglalva: H korlátos, van maximuma, és $\max H = \sup H = \frac{3}{4}$; nincs minimuma, de $\inf H = -\frac{1}{2}$. ■

(e) Legyen $x \in \mathbb{Z}$. Ekkor

$$\frac{2x+3}{3x+1} = \frac{\frac{2}{3}(3x+1) - \frac{2}{3} + 3}{3x+1} = \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3x+1}.$$

Figyeljünk itt arra, hogy $x \in \mathbb{Z}$ esetén $\frac{1}{3x+1}$ pozitív és negatív egyaránt lehet!

Ha $x \geq 0$, akkor $0 \leq \frac{1}{3x+1} \leq 1$. Ezért

$$\frac{2x+3}{3x+1} \leq \frac{2}{3} + \frac{7}{3} = 3$$

és $x = 0$-ra $\frac{2x+3}{3x+1} = 3$. Ez azt jelenti, hogy a H halmaznak *van maximuma*, és $\max H = 3$, következésképpen $\sup H = 3$.

Ha $x < 0$, akkor $\frac{1}{3x+1} < 0$, ezért $\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3x+1}$ akkor a legkisebb, ha $\frac{1}{3x+1}$ a lehető legnagyobb, azaz akkor, ha $x = -1$. Formálisan tehát:

$$\frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3x+1} \geq \frac{2}{3} + \frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3 \cdot (-1) + 1} = -\frac{1}{2}.$$

Ez azt jelenti, hogy $\min H = -\frac{1}{2}$, ezért $\inf H = \min H = -\frac{1}{2}$.

Összefoglalva: H korlátos, van maximuma, és $\max H = \sup H = 3$; van minimuma is, és $\min H = \inf H = -\frac{1}{2}$. ■

(f) A H halmaz alulról korlátos, nincs minimuma, és $\inf H = 1$. A halmaz felülről nem korlátos, ezért $\sup H = +\infty$. ■

(g) A H halmaz korlátos, $\max H = \sup H = 1$, H-nak nincs minimuma, de $\inf H = 0$. ■

(h) A H halmaz korlátos, nincs minimuma és nincs maximuma; $\inf H = -\sqrt{2}$ és $\sup H = \sqrt{2}$. ■

120. (a) A feladat mindkét állítása az alábbi ekvivalencia egyszerű következménye:

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ és } \forall y \in \mathbb{R} \quad \text{esetén} \quad x \leq y \Leftrightarrow -y \leq -x.$$

Valóban, ebből következik, hogy $k \in \mathbb{R}$ az A halmaznak akkor és csak akkor egy alsó korlátja, ha $-k$ a $-A$-nak egy felső korlátja. Így $-A$ pontosan akkor felülről korlátos, ha A alulról korlátos.
Legyenek $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$, $k_1 \leq k_2$ az A halmaz alsó korlátjai. Ekkor $-k_1$ és $-k_2$ a $-A$ felső korlátjai és $-k_2 \leq -k_1$. Mivel $\inf A$ az A halmaz legnagyobb alsó korlátja, ezért $-\inf A$ a $-A$ halmaz legkisebb felső korlátja, azaz $-\inf A = \sup(-A)$. ■

(b) A bizonyítás (a)-hoz hasonló. ■

(c) $\sup A = +\infty \Leftrightarrow$ az A halmaz felülről nem korlátos $\Leftrightarrow$ a $-A$ halmaz alulról nem korlátos $\Leftrightarrow \inf(-A) = -\infty$.
$\inf A = -\infty \Leftrightarrow$ az A halmaz alulról nem korlátos $\Leftrightarrow$ a $-A$ halmaz felülről nem korlátos $\Leftrightarrow \sup(-A) = +\infty$. ■

121. (a) Legyen $\alpha := \sup A \in \mathbb{R}$ és $\beta := \sup B \in \mathbb{R}$. Azt kell megmutatni, hogy $\alpha + \beta$ a

$$C := \{a + b \mid a \in A \quad \text{és} \quad b \in B\}$$

halmaz legkisebb felső korlátja.

(i) Mivel minden $a \in A$ és minden $b \in B$ esetén $a \leq \alpha$ és $b \leq \beta$, ezért $a + b \leq \alpha + \beta$, ami azt jelenti, hogy $\alpha + \beta$ a C halmaz egy felső korlátja.

(ii) Azt a tényt, hogy $\alpha + \beta$ a C halmaznak a legkisebb felső korlátja, úgy igazoljuk, hogy belátjuk a következőt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ valós számhoz } \ \exists\, c_0 \in C, \quad \text{hogy} \quad c_0 > (\alpha + \beta) - \varepsilon.$$

Válasszunk egy tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ valós számot. Az α és a β definíciója szerint léteznek olyan $a_0 \in A$ és $b_0 \in B$ számok, amelyekre

$$a_0 > \alpha - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{és} \quad b_0 > \beta - \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{teljesül,}$$

és ez azt jelenti, hogy $C \ni c_0 := a_0 + b_0 > (\alpha + \beta) - \varepsilon$. Így az állítás első részét igazoltuk.
Az infimumra vonatkozó egyenlőség hasonlóan bizonyítható. ■

(b) Legyen $\alpha := \sup A \in \mathbb{R}$, $\beta := \sup B \in \mathbb{R}$ és

$$C := \{ab \mid a \in A \quad \text{és} \quad b \in B\}.$$

Azt kell megmutatni, hogy $\alpha\beta$ a C halmaz legkisebb felső korlátja.

(i) Mivel minden $a \in A$ és minden $b \in B$ esetén $0 < a \leq \alpha$ és $0 < b \leq \beta$, ezért $0 < ab \leq \alpha\beta$, ami azt jelenti, hogy $\alpha\beta$ a C halmaz egy felső korlátja.

(ii) Azt a tényt, hogy $(0 <)\alpha\beta$ a C halmaznak a legkisebb felső korlátja, úgy igazoljuk, hogy belátjuk a következőt:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ valós számhoz } \exists\, c_0 \in C, \text{ hogy } c_0 > \alpha\beta - \varepsilon.$$

Lássuk be először azt, hogy $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon}{\alpha+\beta}$ választással

$$(\alpha - \varepsilon^*)(\beta - \varepsilon^*) \geq \alpha\beta - \varepsilon.$$

Vegyünk most egy tetszés szerinti $\varepsilon > 0$ valós számot. Az α és a β definíciója szerint van olyan $a_0 \in A$ és $b_0 \in B$, amelyekre

$$a_0 > \alpha - \varepsilon^* \quad \text{és} \quad b_0 > \beta - \varepsilon^* \text{ teljesül,}$$

és ez azt jelenti, hogy

$$C \ni c_0 := a_0 b_0 > (\alpha - \varepsilon^*)(\beta - \varepsilon^*) \geq \alpha\beta - \varepsilon.$$

Megmutattuk tehát azt, hogy $\alpha\beta$ a C halmaznak valóban a legkisebb felső korlátja. Így az állítás első részét igazoltuk.
Az infimumra vonatkozó egyenlőség hasonlóan bizonyítható. ■

122. (a) A két állítás igazolása hasonló lépéseket igényel, ezért csak a második egyenlőséggel foglalkozunk.

Tegyük fel, hogy pl. $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$; a másik lehetőség ugyanígy tárgyalható. Ekkor bármely $x \in A \cup B$ esetében vagy $x \in A$, és ekkor $x \leq \sup A$, vagy $x \in B$, és ekkor $x \leq \sup B \leq \sup A$. Tehát $\sup A$ egy felső korlátja az $A \cup B$ halmaznak.

Legyen $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ tetszés szerinti. Mivel $\sup A$ az A halmaz legkisebb felső korlátja, ezért van olyan $y \in A$ (egyben $y \in A \cup B$), hogy $y >$ $> \sup A - \varepsilon$. Tehát $\sup(A \cup B) = \sup A$. ■

(b) Ha $x \in A \cap B$, akkor $x \in A$ és $x \in B$. Mivel $x \in A$, ezért $x \geq \inf A$, de $x \in B$ is teljesül, ezért $x \geq \inf B$ is fennáll. Tehát $x \geq \max\{\inf A, \inf B\}$ minden $x \in A \cap B$ esetében, ami azt jelenti, hogy

$\max\{\inf A, \inf B\}$ egy alsó korlátja az $A \cap B$ halmaznak, ezért az $A \cap B$ infimuma ennél a számnál csak nagyobb vagy vele egyenlő lehet.

A második egyenlőtlenség hasonló módon igazolható.
Van olyan A és B halmaz, amelyekre

$$\max\{\inf A, \inf B\} < \inf(A \cap B) < \\ < \sup(A \cap B) < \min\{\sup A, \sup B\}.$$

Legyen pl. $A := \{0, 2, 3, 4\}$ és $B := \{1, 2, 3, 5\}$. ■

(c) Ha $x \in A$, akkor $x \in B$ is, ezért $x \geq \inf B$. Tehát $\inf B$ egy alsó korlátja az A halmaznak. Ezért az A halmaz alsó határa ($\inf A$) csak nagyobb vagy egyenlő lehet a B halmaz alsó határánál ($\inf B$-nél).

A második egyenlőtlenség hasonlóan látható be. ■

3.3. A komplex számtest

123. Az állítások a definíciók közvetlen következményei. ■

124. Az állítások a definíciók közvetlen következményei. ■

125. (a) Legyen $z = a + ib$. Ekkor $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ nyilván nemnegatív. $|z| = 0$ akkor és csak akkor áll fenn, ha $a^2 + b^2 = 0$. Minthogy a és b valós számok, ez pontosan akkor lehetséges, ha $a = b = 0$, azaz $z = 0$. ■

(b) $|zw|^2 = (zw) \cdot (\overline{zw}) = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2 \cdot |w|^2$. Mivel az abszolút érték nemnegatív, ezért ebből $|zw| = |z| \cdot |w|$ adódik. ■

(c) Az előző feladat állításait felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} |z + w|^2 &= (z + w)(\overline{z} + \overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + w\overline{z} = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\mathrm{Re}\,(z\overline{w}) \leq \\ &\leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w| = \big(|z| + |w|\big)^2. \end{aligned}$$

Ebből az abszolút érték nemnegativitására hivatkozva adódik, hogy $|z + w| \leq |z| + |w|$. ■

(d) A (c) rész alapján

$$
\begin{aligned}
|z| &= \big|(z-w)+w\big| \le |z-w|+|w|, \\
|w| &= \big|(w-z)+z\big| \le |w-z|+|z|.
\end{aligned}
$$

Mivel $|z-w| = |w-z|$, ezért

$$-|z-w| \le |z|-|w| \le |z-w|$$

is fennáll, amiből a bizonyítandó $\big||z|-|w|\big| \le |z-w|$ egyenlőtlenség adódik. ■

4. Számsorozatok

4.1. A valós sorozat fogalma. Elemi tulajdonságok

■ A-feladatok

127. (a) $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > K$. ■

(b) $\forall k \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $a_n < k$. ■

(c) $\exists n \in \mathbb{N}$, amelyre $a_n > a_{n+1}$ teljesül. ■

(d) $\exists n \in \mathbb{N}$, amelyre $a_{n+1} > a_n$ teljesül. ■

(e) Vagy az igaz, hogy $\forall K \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > K$, vagy pedig az, hogy $\forall k \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists n \in \mathbb{N}$, hogy $a_n < k$. ■

(f) $\exists n_1 \in \mathbb{N}$, amelyre $a_{n_1} > a_{n_1+1}$ *és* $\exists n_2 \in \mathbb{N}$, amelyre $a_{n_2+1} > a_{n_2}$. ■

■ B-feladatok

128. A Fibonacci-sorozat. Fogadjuk el azt (az intuíciónk alapján nyilvánvaló, de a többlépéses rekurziókra vonatkozó *rekurziótétel* alapján formálisan is bebizonyítható) tényt, hogy a fenti feltételek egyetlen sorozatot határoznak meg. Több ötlet felhasználásával meg fogunk adni az n függvényében *egy* ilyen sorozatot, így ez csak a Fibonacci-sorozat lehet.

Az *alapötlet* az, hogy először az a_0, a_1 kezdőértékek figyelembevétele nélkül csak az $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ $(n = 2, 3, \dots)$ rekurziós formulára koncentrálunk, és az $1, q, q^2, \dots$ alakú geometriai sorozatok között keresünk olyanokat, amelyek kielégítik ezt az összefüggést. Tegyük fel, hogy q egy ilyen valós szám. Ekkor $q^n = q^{n-1} + q^{n-2}$, azaz $q^2 = q + 1$. Ebből

$$q_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

adódik. Világos, hogy az $1, q_1, q_1^2, \ldots$ és $1, q_2, q_2^2, \ldots$ sorozatok mindegyikére teljesül a szóban forgó rekurzív összefüggés.

A következő (igen egyszerűen bebizonyítható) *észrevétel* az, hogy ennek a két sorozatnak tetszőleges lineáris kombinációja, azaz minden α és β valós szám esetén az $x_n := \alpha q_1^n + \beta q_2^n$ $(n = 0, 1, 2, \cdots)$ sorozat is kielégíti a rekurzív összefüggésünket. Az (x_n) sorozatok kezdőértékei: $x_0 = \alpha + \beta$ és $x_1 = \alpha q_1 + \beta q_2$. Az

$$\alpha + \beta = 0, \qquad \alpha q_1 + \beta q_2 = \alpha\frac{1+\sqrt{5}}{2} + \beta\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1$$

egyenletrendszernek egyetlen megoldása van: $\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$ és $\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$. A fentiek szerint ezekkel a paraméterekkel képzett

$$x_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat a feladatban megadott kezdőértéket és a rekurzív összefüggést is kielégíti, ezért ez a Fibonacci-sorozat. ■

129. Az

$$a_n = \frac{8n+3}{5n+4} = \frac{\frac{8}{5}(5n+4) - 4\cdot\frac{8}{5} + 3}{5n+4} = \\ = \frac{8}{5} - \frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5n+4}$$

átalakításból már látható, hogy

$$\frac{8\cdot 1+3}{5\cdot 1+4} = \frac{11}{9} \le a_n < \frac{8}{5} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért a sorozat korlátos. Mivel

$$a_n = \frac{8}{5} - \frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5n+4} < \frac{8}{5} - \frac{17}{5}\cdot\frac{1}{5(n+1)+4} = a_{n+1}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ számra igaz, ezért (a_n) szigorúan monoton növekedő. ■

130. Amikor a gonosz manó megnyújtja a szalagot, a csiga által megtett és hátralevő út aránya nem változik. A csiga tehát $\frac{1}{100}$-ad hosszt mászik az első, $\frac{1}{200}$-adot a második, $\frac{1}{300}$-adot a harmadik percben és így tovább. n perc után a megtett útnak a szalag hosszához viszonyított aránya tehát

$$\frac{1}{100}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right).$$

A csiga akkor éri el a szalag végét, ha ez az arány 1. A kérdés tehát az, hogy van-e olyan n természetes szám, amelyre az

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}$$

összeg legalább 100. Hogyan viselkedik ez az összeg, ha n nő? Nyilvánvaló az, hogy szigorúan monoton növekszik, de az, hogy eléri-e vagy túllépi-e 100-at, már nem látszik. Számítógépes kísérletek segíthetnek abban, hogy képet alkothassunk az összeg viselkedéséről. Azt a *sejtést* lehetne kialakítani, hogy a fenti összeg *nem korlátos* (a következő megoldásban megmutatjuk, hogyan lehet ezt *bizonyítani*). Ha $n = 10^{43}$, akkor $99{,}5884$-et, $n = 10^{44}$ esetén pedig $101{,}891$-et kapunk. A csiga tehát beér a célba, igaz, úgy 10^{44} perc (ami $2\cdot 10^{35}$ évezred körül van) mászás után. Ekkorra a gumiszalag több, mint 10^{27} fényév hosszú lesz, még a benne levő molekulák is jó messze kerülnek egymástól. (A következő feladat megoldásában a szóban forgó összegre egy becslést is mutatunk, melynek felhasználásával számítógép segítsége nélkül is válaszolhatunk a feltett kérdésre.) ■

131. (a) A sorozat nyilván monoton növekedő. A korlátosságot pedig így igazoljuk:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 3}+\dots+\frac{1}{n\cdot n}\le$$
$$\le 1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\dots+\frac{1}{(n-1)\cdot n}=$$
$$=1+\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\dots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=$$
$$=2-\frac{1}{n}\le 2 \quad (n\in\mathbb{N}).$$

(Érdemes megjegyezni az alkalmazott *ötletet*: Az $\dfrac{1}{k(k+1)}$ alakú törtet két „egyszerűbb szerkezetű" tört különbségeként lehet felírni

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}.)$$

(b) A sorozat nyilván monoton növekedő. Az, hogy felülről nem korlátos, azt jelenti, hogy

$$(*)\qquad \forall\, P\in\mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\, n_0\in\mathbb{N},\ \text{hogy } \sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}>P.$$

A fenti összeg triviális alsó becslése (mindegyik tag helyett a legkisebbet véve) nyilván „nem jó", ennél „finomabb" alsó becsléssel igazolhatjuk csak $(*)$-ot.

Adott P számhoz $n_0=2^{m_0+1}$ alakú index létezését látjuk be. Az *alapötlet* a következő: a $\sum\limits_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}$ összeget így csoportosítjuk:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\right)+$$
$$+\cdots+\left(\frac{1}{2^{m_0}+1}+\cdots+\frac{1}{2^{m_0}+2^{m_0}}\right).$$

Mivel

$$\frac{1}{2^k+1}+\frac{1}{2^k+2}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k}\ge 2^k\frac{1}{2^k+2^k}=\frac{1}{2},$$

ezért mindegyik zárójelpár közötti összeg $\ge\frac{1}{2}$. Így minden $n_0=2^{m_0+1}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n_0}\frac{1}{k}\ge 1+\frac{m_0+1}{2},\quad \text{és ez}\quad >P,\ \text{ha } m_0>2P-3.$$

(Ilyen $m_0\in\mathbb{N}$ szám létezése az archimédeszi tulajdonságból következik.) A $(*)$ állítást tehát bebizonyítottuk. ■

132. 1. megoldás. Mivel n növekedésével a tényezők száma nő, ugyanakkor mindegyik tényező csökken, ezért sem a monotonitás, sem a korlátosság nem látszik közvetlenül a sorozat definíciójából. Egy „természetes” elindulási lehetőség a binomiális tétel alkalmazása:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}\quad (n\in\mathbb{N}).$$

Mivel $k=1,2,\ldots,n$ esetén

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}\frac{1}{n^k}&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{n(n-1)\cdots\big(n-(k-1)\big)}{n^k}\cdot\frac{1}{k!}=\\&=\frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n}\cdots\frac{n-(k-1)}{n}\cdot\frac{1}{k!}=\\&=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!},\end{aligned}$$

ezért

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}.$$

A sorozat $(n+1)$-edik tagját is így írjuk fel:

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\\&=1+\sum_{k=1}^{n+1}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n+1}\right)\cdot\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Ezekből az alakokból az $1-\frac{k}{n}<1-\frac{k}{n+1}$ egyenlőtlenségek felhasználásával már azonnal adódik, hogy (a_n) monoton (sőt szigorúan monoton) növekedő.

A monoton növekedés miatt $a_1=2$ egy alsó korlátja (a_n)-nek. A sorozat azonban felülről korlátos is, mert minden n-re

$$\begin{aligned}a_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}\le\\&\le\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\le\\&\le 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}=\\&=1+1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)=3-\frac{1}{n}<3.\end{aligned}$$

2. megoldás. A feladatot megoldhatjuk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alábbi *trükkös* alkalmazásaival:

A monoton növekedés bizonyításához ezt az egyenlőtlenséget alkalmazzuk az $(n+1)$ darab $1, (1+\frac{1}{n}), (1+\frac{1}{n}), \ldots, (1+\frac{1}{n})$ számra:

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) \le$$
$$\le \left(\frac{1+n(1+\frac{1}{n})}{n+1}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = a_{n+1}.$$

A korlátosság igazolásához a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget az $(n+2)$ darab $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, (1+\frac{1}{n}), (1+\frac{1}{n}), \ldots, (1+\frac{1}{n})$ számra alkalmazzuk:

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right) \le$$
$$\le \left(\frac{2\cdot\frac{1}{2}+n(1+\frac{1}{n})}{n+2}\right)^{n+2} = 1.$$

Ebből következik, hogy

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \le 4 \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért a sorozat felülről korlátos. A monoton növekedés miatt nyilván alulról is korlátos. ■

133. Alkalmazza $(n+1)$ darab $\left(1+\frac{1}{n}\right)$ számra és 1-re a harmonikus és a mértani közép közötti egyenlőtlenséget. ■

■ C-feladatok

134. Az állítás teljes indukcióval igazolható. ■

135. A sorozat első néhány tagjának felírása után könnyen *megsejthető*, hogy

$$a_n = A^{n-1}\alpha + B\sum_{k=0}^{n-2} A^k \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

amit teljes indukcióval lehet *bebizonyítani.* ■

136. (a) $a_n = \dfrac{(-1)^{n+1} + 2^n}{3} \quad (n \in \mathbb{N})$. ■

(b) $a_n = \dfrac{n(n-1)}{2} \quad (n \in \mathbb{N})$. ■

(c) $a_n = \dfrac{1}{3}\left(5 + \dfrac{(-1)^n}{2^{n-2}}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$. ■

139. Vegye figyelembe, hogy

$$\sigma_{n+1} - \sigma_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n + a_{n+1}}{n+1} - \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} =$$
$$= \frac{-a_1 - a_2 - \cdots - a_n + na_{n+1}}{n(n+1)} =$$
$$= \frac{(a_{n+1} - a_1) + (a_{n+1} - a_2) + \cdots + (a_{n+1} - a_n)}{n(n+1)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$ ■

140. Mivel

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} =$$
$$= \frac{1}{\left(1 + \dfrac{1}{n-1}\right)^n},$$

és az $\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat monoton csökkenő (l. a **133.** feladatot), ezért (a_n) monoton növekedő. ■

4.2. Konvergens és divergens sorozatok. Sorozatok határértéke

■ A-feladatok

142. $\exists\, \varepsilon > 0$, hogy $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$ indexhez $\exists\, n \geq n_0$, amelyre $|a_n + \frac{1}{2}| \geq \varepsilon$.

Egy ilyen sorozat is lehet konvergens. Például $(0, n \in \mathbb{N})$ konvergens, és a határértéke nem $-1/2$ (hanem 0). ■

143. Az, hogy az (a_n) valós sorozat nem konvergens (azaz divergens) azzal ekvivalens, hogy

$$\begin{cases} \forall\, A \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\, \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ indexhez} \\ \qquad \exists\, n \geq n_0 \text{ index, amelyre } |a_n - A| \geq \varepsilon. \end{cases}$$

A $\big((-1)^n\big)$ sorozat nem konvergens. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}$ szám esetén tekintse ennek (például) az 1 sugarú környezetét. ■

144. Nem. A $\big((-1)^n, n \in \mathbb{N}\big)$ sorozat divergens, de az $A = 1$ szám minden környezete tartalmazza ennek a sorozatnak végtelen sok (minden páros indexű) tagját. ■

145. Az (a_n) sorozatra felírt tulajdonság pontosan azt jelenti, hogy a sorozat n_0-nál nagyobb indexű tagjai mind A-val egyenlőek. Bár ennek a sorozatnak is A a határértéke, azonban más, például az $(A + \frac{1}{n})$ sorozatnak is A a határértéke. Az állítás tehát nem igaz. ■

146. (a) Nem. (b) Nem. (c) Igen. ■

147. Az, hogy az (a_n) valós sorozatnak *nincs* határértéke, pontosan azt jelenti, hogy

$$\forall\, A \in \overline{\mathbb{R}} \text{ elemhez } \exists\, \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ számhoz}$$
$$\exists\, n \geq n_0 \text{ index, amelyre } a_n \notin k_\varepsilon(A).$$

M. Felhívjuk az Olvasó figyelmét arra, hogy itt $a_n \notin k_\varepsilon(A)$ helyett nem írhatjuk azt, hogy $|a_n - A| \geq \varepsilon$. Ezt csak akkor tehetnénk meg, ha A véges, azaz $A \in \mathbb{R}$.

148. Legyen $\lim(a_n) = A \in (0, +\infty)$. A **66.** oldal tételét az $\varepsilon := \frac{A}{2} > 0$ számra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy} \quad \forall\, n \geq n_0 \quad \text{indexre} \quad \big|a_n - A\big| < \frac{A}{2}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy $0 < \frac{A}{2} < a_n < \frac{3}{2}A$ teljesül minden $n \geq n_0$ természetes számra. ■

149. Az állítás nem igaz. Tekintse például a $\dfrac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatot. ■

■ B-feladatok

150. (a) Azt kell igazolni, hogy *minden* $\varepsilon > 0$ *valós számhoz létezik olyan* n_0 *természetes szám, hogy minden* $n \geq n_0$ *indexre*

$$(*) \qquad \left|\frac{3n+4}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon.$$

Legyen $\varepsilon > 0$ egy rögzített valós szám. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\frac{3n+4}{2n-1} - \frac{3}{2}\right| < \varepsilon \iff \frac{11}{2(2n-1)} < \varepsilon \iff \frac{1}{2}\left(\frac{11}{2\varepsilon} + 1\right) < n,$$

ami azt jelenti, hogy a $(*)$ egyenlőtlenség minden

$$n \geq n_0 := \left[\frac{1}{2}\left(\frac{11}{2\varepsilon} + 1\right)\right] + 1$$

természetes számra teljesül. (Itt $[x]$ az x szám egészrészét jelöli.) ■

(b) Most is azt kell megmutatni, hogy *minden* $\varepsilon > 0$ *valós számhoz létezik olyan* n_0 *természetes szám, hogy minden* $n \geq n_0$ *indexre*

$$(\triangle) \qquad \left|\frac{n^3 - 12n + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon.$$

Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\frac{n^3 - 12n + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} - \frac{1}{2}\right| = \left|\frac{-7n^2 - 24n}{2(2n^3 + 7n^2 + 2)}\right| = \frac{7n^2 + 24n}{2(2n^3 + 7n^2 + 2)},$$

ezért $(\triangle)$ ekvivalens a

$$\frac{7n^2 + 24n}{2(2n^3 + 7n^2 + 2)} < \varepsilon$$

egyenlőtlenséggel. Ennek *megoldása* már nem egyszerű, ezért a következő *ötletet* alkalmazzuk: egy, a bal oldalnál nagyobb kifejezésről fogjuk megmutatni, hogy még az is kisebb ε-nál bizonyos indextől kezdve.

A bal oldalt például így növelhetjük:

$$\frac{7n^2 + 24n}{2(2n^3 + 7n^2 + 2)} \leq \frac{7n^2 + 24n^2}{n^3} = \frac{31}{n}.$$

Legyen tehát $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges valós szám. Mivel $\frac{31}{n} < \varepsilon$, ha $n \geq n_0 := [31/\varepsilon] + 1$, ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$ esetén az

$$\left|\frac{n^3 - 12n + 1}{2n^3 + 7n^2 + 2} - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

egyenlőtlenség is fennáll minden $n \geq n_0$ természetes számra. Ez pedig azt jelenti, hogy a sorozat határértéke $\frac{1}{2}$. ■

(c) Azt kell bebizonyítani, hogy *minden* $P \in \mathbb{R}$ *számhoz létezik olyan* $n_0 \in \mathbb{N}$*, hogy minden* $n \geq n_0$ *indexre*

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} > P.$$

Legyen P egy rögzített valós szám. Feltehető, hogy $P > 0$. Most a bal oldalnál **kisebb** kifejezésről fogjuk megmutatni, hogy még az is nagyobb P-nél bizonyos indextől kezdve. A bal oldal például így csökkenthető:

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} > \frac{n^2}{n + 3n} = \frac{n}{4} \qquad \text{(ez minden } n \in \mathbb{N} \text{ esetén igaz).}$$

Mivel $\frac{n}{4} > P$, ha $n \geq n_0 = [4P] + 1$, ezért tetszőleges $P > 0$ esetén

$$\frac{n^2 + 3n + 1}{n + 3} > P, \quad \text{ha} \;\; n \geq n_0,$$

tehát $\lim \left(\dfrac{n^2 + 3n + 1}{n + 3}\right) = +\infty$. ■

(d) Azt kell igazolni, hogy *minden* $P \in \mathbb{R}$ *számhoz létezik olyan* $n_0 \in \mathbb{N}$*, hogy minden* $n \geq n_0$ *indexre*

$$\frac{-3n^2 + 2}{n + 1} < P.$$

Legyen P egy rögzített valós szám. Feltehető, hogy $P < 0$. Most a bal oldalnál **nagyobb** kifejezésről fogjuk megmutatni azt, hogy még az is kisebb P-nél bizonyos indextől kezdve. A bal oldal például így növelhető:

$$\frac{-3n^2 + 2}{n + 1} < \frac{-3n^2 + 2n^2}{n + 1} = \frac{-n^2}{n + 1} < \frac{-n^2}{n + n} = -\frac{n}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(Gondoljon arra, hogy negatív törteket hogyan lehet növelni!) Mivel $-\frac{n}{2} < P(< 0)$, ha $n \geq n_0 = [-2P] + 1$, ezért tetszőleges $P < 0$ esetén a

$$\frac{-3n^2 + 2}{n + 1} < P$$

egyenlőtlenség is fennáll minden $n \geq n_0$ természetes számra. Ez azt jelenti, hogy a sorozat határértéke $-\infty$. ■

M. Érdemes jól megjegyezni a fenti feladatokban bemutatott **módszert** (ez már több, mint „trükk”).

Sorozat határértékének a vizsgálatánál azt kell eldönteni, hogy egy egyenlőtlenség fennáll-e *valamilyen indextől kezdve.* Egyenlőtlenség megoldása azonban igen sok esetben nem egyszerű feladat, ezért úgy jártunk el, hogy az adott kifejezést egy egyszerűbbel becsültük (szükség szerint alulról vagy felülről). Ha erre egy indextől kezdve fennáll a megkívánt egyenlőtlenség, akkor ez az eredeti kifejezésre is teljesülni fog.

A becslések módjáról általában csak a következőt mondhatjuk: Az adott kifejezésben igyekszünk megtalálni a „domináns” tagokat. Ezeket megtartjuk, a többbit azok felhasználásával becsüljük.

151. Az a kérdés, hogy a sorozat nagy indexű tagjai közel vannak-e valamilyen $\overline{\mathbb{R}}$-beli A elemhez. A megadott alakokból ezt nehéz látni. Érdemes olyan **átalakításokat** keresni, amelyek elvégzése után már világosabb képet kaphatunk a sorozat viselkedéséről. Ebből egy **sejtést** alakíthatunk ki magunknak a határértékről, amit persze be is kell **bizonyítanunk**.

(a) Most osszuk el a számlálót és a nevezőt egyaránt n^2-tel (a tört értéke ekkor nem változik):

$$a_n = \frac{\frac{1}{n^2} + 1}{\frac{2}{n^2} + \frac{1}{n} + 2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Nagy n-ekre a számláló 1-hez, a nevező 2-höz, a hányados tehát $1/2$-hez van közel. Ez alapján a **sejtésünk** az, hogy

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1 + n^2}{2 + n + 2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left| \frac{1 + n^2}{2 + n + n^2} - \frac{1}{2} \right| = \frac{n}{2(2 + n + 2n^2)} < \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}, \quad \text{és ez} < \varepsilon,$$

ha $n \geq n_0 := [1/\varepsilon]+1$, ami a definíció szerint valóban azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1+n^2}{2+n+2n^2} = \frac{1}{2}. \blacksquare$$

(b) Most pedig „gyöktelenítsünk”, azaz:

$$a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \\ = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ez alapján a **sejtésünk**:

$$\lim \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0.$$

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right| = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}} < \varepsilon,$$

ha $n \geq n_0 := [1/\varepsilon^2] + 1$, ami a definíció szerint valóban azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) = 0. \blacksquare$$

(c) Mivel minden n természetes számra

$$\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n^2}}},$$

ezért a **sejtésünk** az, hogy a sorozat konvergens, és

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+2}} = 1.$$

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ tetszőleges valós szám. Ekkor minden

$n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\left|\sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+2}}-1\right| = \left|\frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+2}}\right| =$$

$$= \left|\frac{\sqrt{n^2+n+1}-\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+2}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2}}{\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2}}\right| =$$

$$= \frac{n-1}{\sqrt{n^2+2}\left(\sqrt{n^2+n+1}+\sqrt{n^2+2}\right)} \leq \frac{n}{n \cdot n} = \frac{1}{n}, \quad \text{és ez} < \varepsilon,$$

ha $n \geq n_0 := [1/\varepsilon]+1$, ami a definíció szerint valóban azt jelenti, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{\frac{n^2+n+1}{n^2+2}} = 1. \blacksquare$$

152. Indirekt módon igazoljuk, hogy $A \geq 0$. Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = A < 0$. Ekkor a definíció alapján az

$$\varepsilon = \frac{|A|}{2} > 0 \ \text{ számhoz } \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \text{ hogy}$$
$$\forall n \geq n_0 \text{ indexre } \ a_n \in k_{\frac{|A|}{2}}(A).$$

Azonban

$$a_n \in k_{|A|/2}(A) \iff a_n \in \left(A - \frac{|A|}{2}, A + \frac{|A|}{2}\right) = \left(\frac{3A}{2}, \frac{A}{2}\right) \subset (-\infty, 0),$$

és ez azt jelenti, hogy $a_n < 0$ minden $n \geq n_0$ esetén, ami ellentmond az $a_n \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$ feltételünknek. Tehát $A \geq 0$ valóban igaz.

A konvergencia bizonyításához végezzük el a következő *átalakítást* („gyöktelenítsünk”):

$$\sqrt{a_n} - \sqrt{A} = \left(\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right) \cdot \frac{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{a_n} + \sqrt{A}} \cdot \left(a_n - A\right) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $\lim(a_n) = A > 0$, akkor ebből azt kapjuk, hogy

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| \leq \frac{1}{\sqrt{A}} |a_n - A| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $\lim(a_n) = A$, ezért $\forall\,\varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq$ $\geq n_0$ indexre $|a_n - A| < \varepsilon$. Következésképpen $\forall\,\varepsilon^* := \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}}$ pozitív valós számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy az

$$\left|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}\right| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{A}} = \varepsilon^*$$

egyenlőtlenség minden $n \geq n_0$ index esetén fennáll, ami éppen azt jelenti, hogy $\lim\big(\sqrt{a_n}\,\big) = \sqrt{A}$.

Tekintsük az $A = 0$ esetet. Ekkor $\forall\,\varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$ indexre $|a_n| = a_n < \varepsilon$. Ezért $\sqrt{a_n} < \sqrt{\varepsilon}$ minden $n \geq n_0$ esetén, ami azt jelenti, hogy $\lim(\sqrt{a_n}) = 0$.

Tegyük most fel, hogy $\lim(a_n) = +\infty$, azaz

$$\forall\, P \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre } a_n > P.$$

Ekkor $\forall\, P \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$ esetén $\sqrt{a_n} > \sqrt{P}$, ezért $\lim(\sqrt{a_n}\,) = +\infty$. ■

■ C-feladatok

153. Az $a_n := \alpha + (n-1)d$ $(n \in \mathbb{N})$ számtani sorozatra (itt α és d adott valós számok) a következők teljesülnek:

(a) a sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha $d = 0$, és ekkor $\lim(a_n) = \alpha$;

(b) ha $d > 0$, akkor $\lim(a_n) = +\infty$;

(c) ha $d < 0$, akkor $\lim(a_n) = -\infty$. ■

154. (c) Mivel

$$a_n = \frac{5n^3 + 2n^2 - 1}{2n^3 + n + 1} = \frac{5 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^3}}{2 + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért a **sejtés** az, hogy $\lim(a_n) = \frac{5}{2}$.

Bizonyítás: Legyen $\varepsilon > 0$ egy tetszőleges valós szám. Ekkor

$$\left|a_n - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon \iff \left|\frac{5n^3 + 2n^2 - 1}{2n^3 + n + 1} - \frac{5}{2}\right| < \varepsilon \iff \frac{|4n^2 - 5n - 7|}{2(2n^3 + n + 1)} < \varepsilon.$$

Mivel
$$\frac{|4n^2-5n-7|}{2(2n^3+n+1)} \le \frac{4n^2+5n^2+7n^2}{4n^3} = \frac{4}{n} < \varepsilon,$$
ha $n \ge n_0 := [4/\varepsilon]+1$, ezért az $|a_n - 5/2| < \varepsilon$ egyenlőtlenség is teljesül minden $n \ge n_0$ indexre, ami valóban azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = 5/2$. A sorozat tehát konvergens, és $5/2$ a határétéke. ■

(d) Mivel
$$a_n = \sqrt{\frac{n^3+n^2-2n}{n^2+3}} = \sqrt{\frac{n+1-\frac{2}{n}}{1+\frac{3}{n}}} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$
ezért a **sejtés** az, hogy $\lim(a_n) = +\infty$.

Bizonyítás: Legyen $P > 0$ egy tetszőleges valós szám. Ekkor
$$a_n = \sqrt{\frac{n^3+n^2-2n}{n^2+3}} = \sqrt{\frac{n^3+n(n-2)}{n^2+3}} \overset{\text{ha } n \ge 2}{\ge} \sqrt{\frac{n^3}{n^2+3n^2}} =$$
$$= \frac{\sqrt{n}}{2} > P,$$
ha $n \ge n_0 := \max\{2, 4P^2\}$, és ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n) = +\infty$. A sorozat tehát divergens, de $\lim(a_n) = +\infty$. ■

(f) Végezzük el a következő átalakításokat:
$$\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3} = \left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}\right) \cdot \frac{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}} =$$
$$= \frac{n-2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}} = \frac{\sqrt{n}-\frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{2+\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}.$$
Ez alapján a **sejtésünk** az, hogy a sorozat divergens, de
$$\lim_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}\right) = +\infty.$$
Bizonyítás: Legyen $P > 0$ egy tetszőleges valós szám. Ekkor
$$\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3} =$$
$$= \frac{n-2}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}} \overset{\text{ha } n > 4}{>} \frac{\frac{n}{2}}{\sqrt{2n+1}+\sqrt{n+3}} >$$
$$> \frac{\frac{n}{2}}{\sqrt{2n+2n}+\sqrt{n+3n}} = \frac{\frac{n}{2}}{4\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{8},$$

és $\frac{\sqrt{n}}{8} > P$, ha $n > (8P)^2$. Azt kaptuk tehát, hogy minden $P > 0$ valós szám esetén

$$\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3} > P, \qquad \text{ha } n \geq n_0 = \max\{\,5, [64P^2] + 1\,\},$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim\left(\sqrt{2n+1} - \sqrt{n+3}\right) = +\infty$. ■

155. A **152.** feladat megoldásához hasonló. Itt alkalmazza az

$$a^m - b^m = (a-b)\left(a^{m-1} + a^{m-2}b + \cdots + ab^{m-2} + b^{m-1}\right) \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

azonosságot. ■

156. Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = +\infty$, azaz $\forall\, P \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$ természetes számra $a_n > P$. A (b_n)-re vonatkozó feltételből következik, hogy $b_n \geq a_n > P$ is igaz, ha $n \geq \max\{\,n_0, N\,\}$. Ez pedig azt jelenti, hogy $\lim(b_n) = +\infty$.

A $-\infty$ határértékre az analóg állítás: ha $\lim(a_n) = -\infty$ és $\exists\, N \in \mathbb{N}$, hogy $b_n \leq a_n$ minden $n \geq N$ esetén, akkor $\lim(b_n) = -\infty$. ■

4.3. Sorozatok konvergenciájának és határértékének a vizsgálata

■ A-feladatok

163. Az állítás az $\big||a_n| - |A|\big| \leq |a_n - A|$ háromszög-egyenlőtlenség és a konvergencia definíciójának közvetlen következménye.

Az állítás megfordítása nem igaz, l. például a $\left((-1)^n\right)$ sorozatot. ■

165. Tegyük fel itt végig azt, hogy $\lim(b_n) = 0$ és $b_n \neq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. A reciprok sorozatra az alábbi három egymást kizáró eset lehetséges:

(i) $\lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = +\infty$, ha például $b_n = \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Egyszerűen bebizonyítható azonban az is, hogy

$$\lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = +\infty \iff \exists\, N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } b_n > 0 \ \ \forall\, n \geq N \text{ esetén.}$$

(ii) $\lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = -\infty$ például akkor, ha $b_n = -\frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$. Az is igaz, hogy

$$\lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = -\infty \iff \exists N \in \mathbb{N}, \text{ hogy } b_n < 0 \ \ \forall n \geq N \text{ esetén.}$$

(iii) Az $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ sorozatnak nincs határértéke. Ilyenre egy példa a $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat. Ez az eset akkor és csak akkor áll fenn, ha a (b_n)-nek végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagja is van. ■

166. Legyen

(i) $a_n := \frac{1}{n},\ b_n := \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(ii) $a_n := \frac{1}{n},\ b_n := -\frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$;

(iii) $a_n := \frac{c}{n},\ b_n := \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N},\ c \in \mathbb{R})$;

(iv) $a_n := \frac{(-1)^n}{n},\ b_n := \frac{1}{n}$, vagy $b_n := \frac{1}{n^2} \quad (n \in \mathbb{N})$. ■

167. (a) Igaz: Ha (a_n) konvergens, akkor $(-a_n)$ is az. Az $(a_n + b_n)$ és $(-a_n)$ konvergens sorozatok összege, tehát a (b_n) sorozat is konvergens. ■

(b) Nem igaz. Legyen például $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $b_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$. ■

(c) Igaz. Ezt indirekt módon látjuk be: ha az $(a_n + b_n)$ konvergens lenne, akkor ennek és a szintén konvergens $(-a_n)$ sorozatnak az összege, vagyis (b_n) is konvergens lenne. ■

(d) Nem igaz. L. pl. az $a_n := \frac{1}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$ és $b_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatokat. ■

(e) Nem igaz. L. pl. az $a_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ és $b_n := (-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatokat. ■

(f) Nem igaz. L. pl. az $a_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ és $b_n := (-1)^{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatokat. ■

168. Legyen

(i) $a_n := n^2,\ b_n := -n \quad (n \in \mathbb{N})$;

(ii) $a_n := n,\ b_n := -n^2\ (n \in \mathbb{N})$;

(iii) $a_n := n + c,\ b_n := -n\quad (n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R})$;

(iv) $a_n := n + (-1)^n,\ b_n := -n\ (n \in \mathbb{N})$. ■

169. Legyen

(i) $a_n := \frac{1}{n},\ b_n := n^2\quad (n \in \mathbb{N})$;

(ii) $a_n := -\frac{1}{n},\ b_n := n^2\ (n \in \mathbb{N})$;

(iii) $a_n := \frac{c}{n},\ b_n := n\quad (n \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R})$;

(iv) $a_n := \frac{(-1)^n}{n},\ b_n := n\ (n \in \mathbb{N})$. ■

170. Legyen

(i) $a_n := n^2,\ b_n := n\quad (n \in \mathbb{N})$;

(ii) $a_n := cn,\ b_n := n\ (n \in \mathbb{N},\ \ c > 0)$;
$a_n := n,\ b_n := n^2\ (n \in \mathbb{N})$;

(iii) $a_n := 2n + (-1)^n n,\ b_n := n\quad (n \in \mathbb{N})$. ■

171. Az (a_n) sorozat pontosan akkor *nem* Cauchy-sorozat, ha

$$\exists\, \varepsilon > 0 \text{ valós szám, hogy } \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \text{ számhoz}$$
$$\exists\, m, n \geq n_0 \text{ indexek, amelyekre } |a_n - a_m| \geq \varepsilon$$

teljesül. ■

172. Ha (a_n) Cauchy-sorozat, akkor az $\varepsilon = 1$ számhoz van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n, m \geq n_0$ indexre $|a_n - a_m| < 1$. Ezért minden $n \geq n_0$ esetén

$$|a_n| = \big|(a_n - a_{n_0}) + a_{n_0}\big| \leq \big|a_n - a_{n_0}\big| + \big|a_{n_0}\big| < 1 + \big|a_{n_0}\big|.$$

Ebből következik, hogy minden $n \geq n_0$ számra

$$|a_n| \leq \max\big\{\,|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{n_0+1}|, 1 + |a_{n_0}|\,\big\}.$$

(a_n) tehát valóban korlátos. ■

173. Nincs $+\infty$-hez tartó Cauchy-sorozat. Valóban, ha $\lim(a_n) = +\infty$, akkor (a_n) nem korlátos; és az előző feladat alapján minden Cauchy-sorozat korlátos. ■

■ B-feladatok

174. A mértani sorozat. *Legyen* $|q| < 1$. Ha $q = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló. Ha $0 < |q| < 1$, akkor az $\frac{1}{|q|} > 1$ számot írjuk fel az $\frac{1}{|q|} = 1 + h$ $(h > 0)$ alakban. A Bernoulli-egyenlőtlenséget alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$0 < |q|^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{|q|}\right)^n} = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{1+hn} \leq \frac{1}{hn} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A jobb oldalon álló sorozat 0-hoz tart, ezért a közrefogási elv alapján $\lim(q^n) = 0$.

Ha $q = 1$, akkor az $(1, n \in \mathbb{N})$ konstans sorozatot kapjuk, ami konvergens, és 1 a határértéke.

Legyen $q > 1$. Írjuk fel ezt a számot $q = 1 + h$ $(h > 0)$ alakban. A Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$q^n = (1+h)^n \geq 1 + nh > nh \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

amiből már következik, hogy $\lim(q^n) = +\infty$.

Ha $q \leq -1$, akkor a $\left(q^n\right)$ sorozat páros, illetve páratlan indexű részsorozatainak különböző a határértéke (a páros indexű részsorozat határértéke $+\infty$, a páratlan indexű részsorozaté pedig $-\infty$), ezért a (q^n) sorozatnak nincs határértéke. ■

175. (a) (i) Tegyük fel először azt, hogy $a > 1$ rögzített valós szám, és írjuk fel az $\sqrt[n]{a}$ $(n \in \mathbb{N})$ számokat

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n \qquad (h_n > 0, n \in \mathbb{N})$$

alakban. Elég azt igazolni, hogy (h_n) nullasorozat. A Bernoulli-egyenlőtlenség alapján

$$a = (1 + h_n)^n \geq 1 + h_n n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért

$$0 < h_n \leq \frac{a-1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A jobb oldalon álló sorozat 0-hoz tart, ezért a közrefogási elv miatt $\lim(h_n) = 0$, tehát $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

(ii) Ha $a = 1$, akkor az $(1, n \in \mathbb{N})$ konstans sorozatot kapjuk, aminek 1 a határértéke.

(iii) Ha $0 < a < 1$, akkor $\frac{1}{a} > 1$, ezért (i) és a konvergens sorozatokra vonatkozó műveleti tétel alapján

$$a^n = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^n} \to 1 \qquad (n \to +\infty). \blacksquare$$

(b) Írjuk fel az $\sqrt[n]{n}$ számokat

$$\sqrt[n]{n} = 1 + h_n \quad (h_n \geq 0, \quad n \in \mathbb{N})$$

alakban. Mivel $h_n \geq 0$, ezért a binomiális tétel alapján

$$n = (1+h_n)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} h_n + \binom{n}{2} h_n^2 + \cdots + \binom{n}{n} h_n^2 \geq$$
$$\geq \binom{n}{2} h_n^2 = \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Rendezés után azt kapjuk, hogy

$$0 \leq h_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}} \qquad (n = 2, 3, \ldots),$$

amiből következik, hogy (h_n) egy nullasorozat. Ezért $\lim(\sqrt[n]{n}) = 1$. $\blacksquare$

(c) Először teljes indukcióval igazoljuk az

$$(*) \qquad n! \geq \left(\frac{n}{4}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenséget: Az állítás $n = 1$ esetén igaz. Tegyük fel, hogy egy $n \in \mathbb{N}$ számra is igaz. Ekkor

$$(n+1)! = n!(n+1) \geq \left(\frac{n}{4}\right)^n (n+1) \geq \left(\frac{n+1}{4}\right)^{n+1},$$

ui. $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 4$ minden n természetes számra (l. **132.** feladatot), azaz az egyenlőtlenség $(n+1)$-re is teljesül.

A $(*)$ egyenlőtlenségekből azt kapjuk, hogy $\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{4}$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt[n]{n!} = +\infty$. $\blacksquare$

1. Megjegyzés. Az (a) állítás (i) részét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alábbi „trükkös” alkalmazásával is bizonyíthatjuk:

$$1 \le \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{a \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1} \le \frac{a+n-1}{n} = 1 + \frac{a-1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(A második gyökjel alatt az 1 tényező $(n-1)$-szer szerepel.) Ebből a közrefogási elv felhasználásával adódik az állítás.

2. Megjegyzés. A (b) állítást a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alábbi „trükkös” alkalmazásával is bizonyíthatjuk:

$$1 \le \sqrt[n]{n} = \sqrt[n]{\sqrt{n} \cdot \sqrt{n} \cdot 1 \cdot 1 \cdots 1} \le$$
$$\le \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2}{\sqrt{n}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(A második gyökjel alatt az 1 tényező $(n-2)$-szer szerepel.) Ebből a közrefogási elv felhasználásával adódik az állítás. ■

176. L. a **132.** feladat megoldását. ■

177. A **133.** feladat alapján a sorozat monoton csökkenő. Mivel

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \qquad \text{és} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1,$$

ezért

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = e$$

valóban fennáll. ■

178. Először teljes indukcióval igazoljuk, hogy

$$(*) \qquad \left(\frac{n}{e}\right)^{n} \le n! \le 4n\left(\frac{n}{e}\right)^{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(i) *A bal oldali egyenlőtlenség igazolása:* Ha $n = 1$, akkor $\frac{1}{e} \le 1$, ami igaz. Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség fennáll n-re. Ekkor

$$(n+1)! = n!(n+1) \ge \left(\frac{n}{e}\right)^{n}(n+1) \ge \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

mert $e \ge \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n} = (1+\frac{1}{n})^{n}$ (l. a **176.** feladatot).

(ii) *A jobb oldali egyenlőtlenség igazolása:* Ha $n = 1$, akkor $1 \le 4 \cdot \frac{1}{e}$, ami igaz (l. a **132.** feladatot). Tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség fennáll n-re. Ekkor

$$(n+1)! = n!(n+1) \le 4n\left(\frac{n}{e}\right)^n (n+1) \le 4(n+1)\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1},$$

mert $e \le \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}$ (l. a **177.** feladatot).

A $(*)$ egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\frac{e}{\sqrt[n]{4n}} \le \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \le e \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $\lim(\sqrt[n]{4n}) = 1$, ezért a közrefogási elv alapján $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e$. ■

179. Segédtétel. *Tegyük fel, hogy az* $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ *egy olyan sorozat, amelyre az* $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ $(n \in \mathbb{N})$ *sorozat konvergens és*

$$0 \le \lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} < 1.$$

Ekkor (x_n) *egy nullasorozat.*

A segédtétel bizonyítása. Legyen $A := \lim(x_{n+1}/x_n) < 1$. Vegyünk egy $(A, 1)$ intervallumba eső q valós számot, és tekintsük az A pont $\varepsilon := q - A$ sugarú környezetét. Mivel $\lim\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right) = A$, ezért ehhez az ε számhoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ index, amelyre

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} < q \qquad (\forall\, n \ge n_0, n \in \mathbb{N}).$$

Ezért

$$\frac{x_{n_0+1}}{x_{n_0}} < q, \quad \frac{x_{n_0+2}}{x_{n_0+1}} < q, \quad \frac{x_{n_0+3}}{x_{n_0+2}} < q, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n+1}}{x_n} < q \quad (n \ge n_0).$$

Ezt az $(n - n_0)$ darab $(n + 1 = n_0 + 1 + n - n_0)$ egyenlőtlenséget összeszorozva a

$$0 < x_{n+1} < \frac{x_{n_0}}{q^{n_0}} q^n \qquad (\forall\, n \ge n_0,\ n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenségeket kapjuk. Mivel $0 < q < 1$, ezért $\lim(q^n) = 0$. A közrefogási elvből következik, hogy $\lim(x_n) = 0$. A segédtételt tehát bebizonyítottuk. ■

Az (a) állítás igazolása. A segédtételt az $x_n := \frac{n^k}{a^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \frac{1}{a} =$$

$$= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \frac{1}{a} \to \frac{1}{a} < 1 \qquad (n \to +\infty),$$

ezért $\lim(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$. ■

A (b) állítás igazolása. Ha $q = 0$, akkor az állítás igaz. Ha $0 < |q| < 1$, akkor a segédtételt az $x_n := n^k|q|^n$ $(n \in \mathbb{N})$ pozitív tagú sorozatra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)^k|q|^{n+1}}{n^k|q|^n} = q \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k \to |q| \qquad (n \to +\infty),$$

ezért $\lim(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty}(n^k|q|^n) = 0$. Ebből $\lim\limits_{n\to+\infty}(n^k q^n) = 0$ is következik. ■

A (c) állítás igazolása. Ha $a = 0$, akkor az állítás nyilván igaz. Ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, akkor a segédtételt az $x_n := \frac{|a|^n}{n!}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra alkalmazva kapjuk, hogy

$$0 < \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\frac{|a|^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{|a|^n}{n!}} = \frac{|a|}{n+1} \to 0 < 1 \qquad (n \to +\infty),$$

azaz $\lim(x_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{|a|^n}{n!} = 0$, de akkor $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ is teljesül. ■

A (d) állítás a nyilvánvaló

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenség közvetlen következménye. ■

■ C-feladatok

180. 1° **Az összegre vonatkozó állítás igazolása.** Emlékeztetünk arra, hogy ha $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor az $A + B$ összeg akkor van értelmezve, ha

(i) $A, B \in \mathbb{R}$;

(ii) $A = +\infty$ és $B \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ = +\infty, \end{cases}$ és ekkor $A + B = \begin{cases} +\infty \\ +\infty; \end{cases}$

(iii) $A = -\infty$ és $B \begin{cases} \in \mathbb{R} \\ = -\infty, \end{cases}$ és ekkor $A + B = \begin{cases} -\infty \\ -\infty; \end{cases}$

(iv) $A \in \mathbb{R}$ és $B = \begin{cases} +\infty \\ -\infty, \end{cases}$ és ekkor $A + B = \begin{cases} +\infty \\ -\infty. \end{cases}$

(Tehát csak $(+\infty)$ és $(-\infty)$, valamint $(-\infty)$ és $(+\infty)$ összegét nem definiáltuk.)

Az (i) esetben az állítás a konvergens sorozatok összegére vonatkozó tételből következik.

Az (ii) eset igazolása. (a) Tegyük fel először azt, hogy

$$\lim(a_n) = A = +\infty \quad \text{és} \quad \lim(b_n) = B \in \mathbb{R}.$$

Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim(a_n+b_n) = +\infty$. Mivel (b_n) konvergens, ezért korlátos (alulról is!), azaz

$$\exists\, M \in \mathbb{R}, \text{ hogy } b_n \geq M \ \forall\, n \in \mathbb{N} \text{ esetén.}$$

A $\lim(a_n) = +\infty$ feltételből pedig az következik, hogy

$$\forall\, P \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } a_n > P - M \ \ \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre.}$$

Ezért $\forall\, P \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$a_n + b_n > P - M + M = P \ \ \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre,}$$

és ez valóban azt jelenti, hogy $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.

(b) Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = \lim(b_n) = +\infty$. Ekkor

$$\forall P \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists n_1 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } a_n > \frac{P}{2} \quad \forall n \geq n_1 \text{ indexre},$$
$$\forall P \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists n_2 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } b_n > \frac{P}{2} \quad \forall n \geq n_2 \text{ indexre},$$

tehát

$$\forall P \in \mathbb{R} \text{ számhoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } a_n + b_n > \frac{P}{2} + \frac{P}{2} = P$$

teljesül minden $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ index esetén, ami azt jelenti, hogy $\lim(a_n + b_n) = +\infty$.

Az (iii) és az (iv) eset hasonlóan igazolható.

2° **A szorzatra vonatkozó állítás igazolása.** Emlékeztetünk arra, hogy ha $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$, akkor az $A \cdot B$ szorzatot akkor értelmeztük, ha

(i) $A, B \in \mathbb{R}$;

(ii) $A = +\infty$ és $B \begin{cases} > 0 \text{ valós} \\ < 0 \text{ valós} \\ = +\infty \\ = -\infty, \end{cases}$ és ekkor $A \cdot B = \begin{cases} +\infty \\ -\infty \\ +\infty \\ -\infty; \end{cases}$

(iii) $A = -\infty$ és $B \begin{cases} > 0 \text{ valós} \\ < 0 \text{ valós} \\ = +\infty \\ = -\infty, \end{cases}$ és ekkor $A \cdot B = \begin{cases} -\infty \\ +\infty \\ -\infty \\ +\infty; \end{cases}$

(iv) $B = +\infty$ és $A \begin{cases} > 0 \text{ valós} \\ < 0 \text{ valós} \end{cases}$ és ekkor $A \cdot B = \begin{cases} +\infty \\ -\infty; \end{cases}$

(v) $B = -\infty$ és $A \begin{cases} > 0 \text{ valós} \\ < 0 \text{ valós} \end{cases}$ és ekkor $A \cdot B = \begin{cases} -\infty \\ +\infty. \end{cases}$

(Tehát csak 0-nak $(+\infty)$-nel és $(-\infty)$-nel való szorzatát – és fordítva – nem értelmeztük.)

A szorzatra vonatkozó tétel tehát 13 állítást tartalmaz. Az $A, B \in \mathbb{R}$ eset a konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tételből következik.

A fennmaradó 12 állítás közül csak kettőt igazolunk, a többit hasonlóan lehet belátni.

(a) Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = +\infty$ és $\lim(b_n) = B > 0$ valós szám. Megmutatjuk, hogy ekkor $\lim(a_n b_n) = +\infty$.

Mivel $\lim(b_n) = B > 0$, ezért a $\frac{B}{2}>0$ számhoz $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $b_n > \frac{B}{2}(>0)$ fennáll $\forall\, n \geq n_1$ természetes számra. A $\lim(a_n) = +\infty$ feltételből pedig az következik, hogy $\forall\, P \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > \frac{P}{B/2}(>0)$ $\forall\, n \geq n_2$ esetén. Így

$$\forall\, P \in \mathbb{R}^+ \quad \text{számhoz} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy} \quad a_n b_n > \frac{P}{B/2} \cdot (B/2) = P(>0)$$

teljesül minden $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ indexre, ami valóban azt jelenti, hogy $\lim(a_n b_n) = +\infty$.

(b) Tegyük fel, hogy $\lim(a_n) = \lim(b_n) = +\infty$. Ekkor $\forall\, P \in \mathbb{R}^+$ számhoz $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > P(>0)$ $\forall\, n \geq n_1$ indexre, és az 1 számhoz $\exists\, n_2 \in \mathbb{N}$, hogy $b_n > 1(>0)$ $\forall\, n \geq n_2$ indexre. Ezért

$$\forall\, P \in \mathbb{R}^+ \quad \text{számhoz} \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy} \quad a_n b_n > P$$

teljesül minden $n \geq n_0 := \max\{n_1, n_2\}$ index esetén, és ez azt jelenti, hogy $\lim(a_n b_n) = +\infty$.

3^o **A hányadosra vonatkozó állítás igazolása.** Most is emlékeztetünk arra, hogy $A, B \in \overline{\mathbb{R}}$ esetén az A/B hányadost akkor értelmeztük, ha

(i) $A \in \mathbb{R}, B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

(ii) $A \in \mathbb{R}$ és $B \begin{cases} = +\infty \\ = -\infty, \end{cases}$ és ekkor $\dfrac{A}{B} = 0$;

(iii) $B \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $A = \begin{cases} = +\infty \\ = -\infty, \end{cases}$ és ekkor

$$\frac{A}{B} = \begin{cases} +\infty, & \text{ha } B > 0 \text{ és } A = +\infty \\ -\infty, & \text{ha } B < 0 \text{ és } A = +\infty \\ -\infty, & \text{ha } B > 0 \text{ és } A = -\infty \\ +\infty, & \text{ha } B < 0 \text{ és } A = -\infty. \end{cases}$$

Vegyük észre azt, hogy

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right) = (a_n) \cdot \left(\frac{1}{b_n}\right)$$

(azaz $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ az (a_n) és az $\left(\frac{1}{b_n}\right)$ sorozat szorzata). Ezért a szorzatra vonatkozó állítás miatt elég igazolni a következőt: ha $\lim(b_n) \in$ $\in \{+\infty, -\infty\}$, akkor $\lim(\frac{1}{b_n}) = 0$.

Tegyük fel pl. azt, hogy $\lim(b_n) = +\infty$. Ekkor

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy} \quad b_n > \frac{1}{\varepsilon} \ \ \forall\, n \geq n_0 \quad \text{indexre.}$$

Ebből az következik, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy} \quad (0 <)\frac{1}{b_n} < \varepsilon \ \ \forall\, n \geq n_1 \quad \text{indexre.}$$

Ezzel a $\lim(b_n) = +\infty$ esetben megmutattuk, hogy $\lim\left(\frac{1}{b_n}\right) = 0$. A $\lim(b_n) = -\infty$ esetben az állítás hasonlóan igazolható. ■

181. (b) $a_n = \dfrac{n^2 + 3n - 1}{n^7 + 7n + 5} = \dfrac{\frac{1}{n^5} + \frac{3}{n^6} - \frac{1}{n^7}}{1 + \frac{7}{n^6} + \frac{5}{n^7}} \to 0 \ (n \to +\infty)$; ■

(d) $a_n = \dfrac{1 - n^3}{n^2 + 1} = \dfrac{\frac{1}{n^2} - n}{1 + \frac{1}{n^2}} \to -\infty \ (n \to +\infty)$; ■

(e) $a_n = \dfrac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1} = \dfrac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)^3}{1 + \frac{1}{n^3}}$ alapján a sorozat határértéke 2. ■

182. (a) Végezzük el a következő átalakítást:

$$P(n) = n^k\left(\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_0}{n^k}\right).$$

Mivel $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, ezért a konvergens sorozatokra vonatkozó műveleti tételek alapján

$$\lim_{n \to +\infty}\left(\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_0}{n^k}\right) = \alpha_k.$$

Vegyük figyelembe, hogy $\lim(n) = +\infty$, és alkalmazzuk a műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételt (l. a **75.** oldalt). ■

(b) Legyen a két polinom

$$P(x) := \alpha_k x^k + \alpha_{k-1} x^{k-1} + \cdots + \alpha_0,$$
$$Q(x) := \beta_l x^l + \beta_{l-1} x^{l-1} + \cdots + \beta_0,$$

ahol $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \dots, k;\ j = 0, 1, \dots, l)$ és $\alpha_k \beta_l \neq 0$. Ekkor

$$R_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = n^{k-l} \cdot \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \cdots + \frac{\beta_0}{n^l}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Világos, hogy a

$$c_n := n^{k-l} \qquad \text{és} \qquad d_n := \frac{\alpha_k + \frac{\alpha_{k-1}}{n} + \cdots + \frac{\alpha_0}{n^k}}{\beta_l + \frac{\beta_{l-1}}{n} + \cdots + \frac{\beta_0}{n^l}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatokra $\lim(d_n) = \dfrac{\alpha_k}{\beta_l}$ és

$$\lim(c_n) = \begin{cases} 1, & \text{ha } k = l \\ +\infty, & \text{ha } k > l \\ 0, & \text{ha } k < l \end{cases}$$

teljesül. Ezért a műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tétel (l. a **75.** oldalt) alapján

$$\lim(q_n) = \begin{cases} \frac{\alpha_k}{\beta_l}, & \text{ha } k = l \\ 0, & \text{ha } k < l \\ +\infty, & \text{ha } k > l \text{ és } \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_l}\right) = 1 \\ -\infty, & \text{ha } k > l \text{ és } \operatorname{sign}\left(\frac{\alpha_k}{\beta_l}\right) = -1. \ \blacksquare \end{cases}$$

184. (a)

$$\sqrt{n^2 + 3n - 1} - 2n =$$
$$= \left(\sqrt{n^2 + 3n - 1} - \sqrt{4n^2}\right) \cdot \frac{\sqrt{n^2 + 3n - 1} + \sqrt{4n^2}}{\sqrt{n^2 + 3n - 1} + \sqrt{4n^2}} =$$
$$= \frac{-3n^2 + 3n - 1}{\sqrt{n^2 + 3n - 1} + \sqrt{4n^2}} =$$
$$= \frac{-3n + 3 - \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{3}{n} - \frac{1}{n^2}} + 2} \to -\infty \quad (n \to +\infty); \ \blacksquare$$

(c) Minden $n \in \mathbb{N}$ számra

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} = \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}-\sqrt{n-1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \\
&= \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})} \cdot \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \\
&= \frac{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}.
\end{aligned}$$

Mivel $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ és $\lim\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = 1$, ezért a konvergens sorozatok határértékére vonatkozó tétel alapján a számlálóban levő sorozat határértéke 2. Hasonlóan: a nevezőben levő sorozat határértéke is 2. A hányadosuk határértéke 1, tehát $\lim(a_n) = 1$. ■

(e) Az $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$ azonosság alapján

$$\begin{aligned}
&\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n} = \\
&= \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right) \cdot \frac{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n(n+1)} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n(n+1)} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2} = \\
&= \frac{1}{\left(\sqrt[3]{n+1}\right)^2 + \sqrt[3]{n(n+1)} + \left(\sqrt[3]{n}\right)^2} \to 0 \quad (n \to +\infty). \ ■
\end{aligned}$$

185. (b_n) korlátos, ezért létezik olyan $K > 0$ valós szám, amellyel $-K \leq b_n \leq K$ teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ esetén. Nyilván feltehetjük, hogy K egy természetes szám. A feladatbeli sorozatra tehát az

$$(*) \qquad a_n^{-K} \leq a_n^{b_n} \leq a_n^{K} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

becslés érvényes. A $\lim(a_n) = 1$ feltételből és a konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tételből következik, hogy az $\left(a_n^K, n \in \mathbb{N}\right)$ és az $\left(a_n^{-K}, n \in \mathbb{N}\right)$ sorozat határértéke is 1 (itt használtuk fel azt, hogy $K \in \mathbb{N}$). A $(*)$ egyenlőtlenségből a közrefogási elv alapján kapjuk a bizonyítandó $\lim\left(a_n^{b_n}\right) = 1$ egyenlőséget. ■

186. *Legyen* $A > 1$, és vegyünk egy $q \in (1, A)$ számot. Mivel $\lim(a_n) = A$, ezért q-hoz létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > q$ minden $n \geq n_0$ indexre (gondolja meg, hogy ez miért igaz). Így

$$a_n^n > q^n \quad (n \geq n_0).$$

$q > 1$ miatt a jobb oldali geometriai sorozat $+\infty$-hez tart, ezért ez igaz a nála nagyobb sorozatra is (l. a **156.** feladatot).

Ha $|A| < 1$, akkor egy $q \in (|A|, 1)$ számot választunk. A $\lim(a_n) = A$ feltételünkből most az következik, hogy létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n| \leq q$ minden $n \geq n_0$ természetes számra. Ezért

$$0 \leq |a_n|^n \leq q^n \quad (n \geq n_0).$$

A $0 \leq q < 1$ választás miatt a jobb oldalon levő geometriai sorozat 0-hoz tart, amiből $\lim\big(|a_n|^n\big) = 0$, következésképpen $\lim\big(a_n^n\big) = 0$ adódik.

Az $A = 1$ *esetet* illetően tekintse a következő példákat:

$$a_n := \sqrt[n]{c} \;\; (n \in \mathbb{N}), \quad c \in (0, +\infty);$$
$$a_n := \sqrt[n]{n} \;\; (n \in \mathbb{N});$$
$$a_n := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \ldots \\ \sqrt[n]{2}, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \ldots. \end{cases} \blacksquare$$

187. Legyen $\lim(a_n) =: A > 0$. Ekkor az $\varepsilon := A/2 > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, n \geq n_0$ indexre $\frac{A}{2} < a_n < \frac{3A}{2}$. Ezért

$$\sqrt[n]{\frac{A}{2}} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{\frac{3A}{2}} \qquad (n \geq n_0).$$

Mivel $\lim\big(\sqrt[n]{\alpha}\big) = 1$ minden $\alpha > 0$ valós szám esetén, ezért a közrefogási elv alapján $\lim\big(\sqrt[n]{a_n}\big) = 1$. $\blacksquare$

188. (a) Két hasonló „nevezetes sorozatot” is ismerünk:

$$\lim\big(\sqrt[n]{n}\big) = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim\big(\sqrt[n]{n!}\big) = +\infty$$

(l. a **175.** feladatot). Ebből rögtön következik, hogy olyan (a_n) sorozatot is meg lehet adni, amelyre az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozatnak nincs határértéke. Például:

$$a_n := \begin{cases} \sqrt[n]{n}, & \text{ha } n = 1, 3, 5, \dots \\ \sqrt[n]{n!}, & \text{ha } n = 2, 4, 6, \dots \end{cases}$$

(a páratlan indexű részsorozatnak 1, a páros indexűnek pedig $+\infty$ a határértéke).

Azt is egyszerű észrevenni, hogy olyan (a_n) sorozat is van, amelyre az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozatnak egy előre megadott $c > 1$ valós szám a határértéke. Ha például

$$a_n := c^n \quad (n \in \mathbb{N}), \quad \text{akkor} \quad \lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = c.$$

(Itt a $c > 1$ feltételből következik, hogy $\lim(a_n) = +\infty$.)

Egy kérdés maradt még: ha $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ konvergens, akkor lehet-e 1-nél kisebb szám a határértéke. A $\lim(a_n) = +\infty$ feltételünkből következik, hogy

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \text{hogy} \ \ \forall n \geq n_0 \ \text{indexre} \ \ a_n > 1,$$

ezért $\sqrt[n]{a_n} > 1$ minden $n \geq n_0$ esetén. A rendezés és a határérték kapcsolatára vonatkozó tétel miatt $\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right) \geq 1$ teljesül.

Összefoglalva: Az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozat lehet konvergens, de ekkor a határértéke ≥ 1; és minden $c \geq 1$ számhoz van olyan (a_n) sorozat, amelyre $\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right) = c$. Az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozat határértéke $+\infty$ is lehet. Van olyan (a_n) sorozat is, amelyre az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozatnak nincs határértéke. ■

(b) Ha $\lim(a_n) = 0$, akkor az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozat lehet konvergens, de ekkor a határértéke a $[0, 1]$ intervallumban van. Minden $c \in [0, 1]$ számhoz van olyan (a_n) nullasorozat, amelyre az $\lim\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozat határértéke a c szám. Van olyan (a_n) sorozat is, amelyre az $\left(\sqrt[n]{a_n}\right)$ sorozatnak nincs határértéke. ■

189. Tekintsük az

$$\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

átalakítást. Mivel $\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}$ $(n \in \mathbb{N})$ az e-hez tartó $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat egy részsorozata, ezért annak határértéke szintén az e szám. A **187.** feladat eredményét alkalmazva kapjuk, hogy a kérdezett sorozat konvergens és 1 a határértéke. ■

190. (a) A sorozat tagjait megadó kifejezést *átalakítjuk*:

$$\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n+1}=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}\cdot\left(1+\frac{1}{2n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Az $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$ az e-hez tartó $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat (páros indexű) részsorozata, ezért a határértéke szintén e. A másik tényező $n \to +\infty$ esetén 1-hez tart, ezért a konvergens sorozatok szorzatára vonatkozó tétel alapján a feladatbeli sorozat határértéke az e szám. ■

(b) Most a következő *átalakítást* célszerű elvégezni:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n=\left(\frac{n-1}{n}\right)^n=\frac{1}{\left(\frac{n}{n-1}\right)^n}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{n-1}}.$$

Az előzőhöz hasonlóan kapjuk, hogy a kérdezett határérték $\frac{1}{e}$. ■

191. Vegyük az $\alpha_n \in \mathbb{R}$ szám $[\alpha_n]$ egészrészét. Ekkor

$$[\alpha_n] \le \alpha_n < [\alpha_n]+1 \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $\lim(\alpha_n)=+\infty$, ezért az $y_n := [\alpha_n]$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat is $+\infty$-hez tart. Nyilván feltehetjük, hogy $\alpha_n \ge 1$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért

$$\frac{\left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)^{y_n+1}}{1+\frac{1}{y_n+1}}<\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)^{\alpha_n}<\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}\cdot\left(1+\frac{1}{y_n}\right).$$

A közrefogási elv és

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_n+1}\right)=1$$

alapján elég belátni azt, hogy a természetes számok tetszőleges $+\infty$-hez tartó (y_n) sorozatára

$$(*) \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n}=e.$$

Ezt az állítást így bizonyítjuk be: Az $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat az e számhoz konvergál (l. a **176.** feladatot), azaz $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$\left|\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - e\right| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_0 \text{ indexre.}$$

Mivel $\lim(y_n) = +\infty$, ezért n_0-hoz $\exists\, n_1 \in \mathbb{N}$, hogy minden $n \geq n_1$ esetén $y_n \geq n_0$. Tehát

$$\left|\left(1+\frac{1}{y_n}\right)^{y_n} - e\right| < \varepsilon \qquad \forall\, n \geq n_1 \text{ esetén,}$$

és azt jelenti, hogy $(*)$ valóban igaz. ■

192. (a)

$$\left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n = \left[\left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right)^{(n-1)/2}\right]^2 \cdot \left(1+\frac{1}{\frac{n-1}{2}}\right) \to e^2 \quad (n \to +\infty). \ ■$$

(d) **1. megoldás:**

$$a_n = \left(\frac{4n+3}{5n}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left(\frac{n+\frac{3}{4}}{n}\right)^n = \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot \left[\left(1+\frac{1}{\frac{4n}{3}}\right)^{\frac{4n}{3}}\right]^{\frac{3}{4}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \quad \text{és} \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{4n}{3}}\right)^{\frac{4n}{3}} = e,$$

ezért $\lim(a_n) = 0$.

2. megoldás. Az alap nagy n-ekre $\frac{4}{5}$-höz van közel, ui. $\lim\left(\frac{4n+3}{5n}\right) = \frac{4}{5}$. Ebből „sejthető", hogy a sorozat egy egynél kisebb hányadosú geometriai sorozattal felülről becsülhető, amiből következik, hogy a sorozat nullasorozat. *A pontos bizonyítás:* Mivel $\lim\left(\frac{4n+3}{5n}\right) = \frac{4}{5}$, ezért $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$0 \leq \frac{4n+3}{5n} \leq \frac{9}{10}, \quad \text{ha } n \geq n_0.$$

(Ezt az n_0 számot a fenti egyenlőtlenségből meg is lehetne határozni, de ez nem szükséges.) Így

$$0 < a_n = \left(\frac{4n+3}{5n}\right)^n \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n \qquad (n \geq n_0).$$

Mivel $\lim\left((9/10)^n\right) = 0$, ezért $\lim(a_n) = 0$ is teljesül. ■

193. (g) A sejtés kialakítása itt nehezebb, mint a bizonyítása. A *sejtés* az, hogy a sorozat határértéke 3 (ui. nagy n-ekre a gyök alatt 3^n körüli szám áll). A *bizonyításhoz* a közrefogási elvet alkalmazhatjuk: a sorozatot alulról és felülről becsüljük 3-hoz tartó sorozatokkal. (Ha eddig eljutunk, akkor innen már minden egyszerű.) Mivel

$$3 < \sqrt[n]{3^n + 2^n} < \sqrt[n]{2 \cdot 3^n} = 3\sqrt[n]{2} \quad (n \in \mathbb{N})$$

és $\lim\big(\sqrt[n]{2}\big) = 1$, ezért a megadott sorozat valóban konvergens és, 3 a határértéke. ■

(h) Alkalmazza a következő becslést:

$$\frac{3}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\frac{1}{2} \cdot 3^n} \le \sqrt[n]{3^n - 2^n} \le 3 \qquad (n \in \mathbb{N}). \ ■$$

(m) Tekintsük a következő átalakításokat:

$$a_n = \left(\frac{3n+1}{3n+2}\right)^{6n+5} = \frac{1}{\left(\frac{3n+2}{3n+1}\right)^{6n+5}} =$$

$$= \frac{1}{\left[\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}\right]^2} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{3n+1}\right)^3}.$$

Az $\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)^{3n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat az e számhoz tartó $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat részsorozata, ezért a határétéke e. Másrészt $\lim\left(1+\frac{1}{3n+1}\right) = 1$, ezért $\lim(a_n) = e^{-2}$. ■

(n) A sorozat tagjait most így alakítjuk át:

$$a_n = \left(\frac{4n+1}{5n+3}\right)^{n-5} = \left(\frac{4(n+\frac{1}{4})}{5(n+\frac{3}{5})}\right)^{n-5} = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-5}\left(\frac{n+\frac{1}{4}}{n+\frac{3}{5}}\right)^{n-5}$$

Mivel $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{4}{5}\right)^{n-5} = 0$ (geometriai sorozat!) és a másik tényező korlátos (ui. $(n + 1/4)/(n + 3/5) < 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén), ezért $\lim(a_n) = 0$. ■

(p) a_n-re zárt alak nem várható, ezért becslésekkel próbálkozunk. A „triviális” alsó, ill. felső becslést (mindegyik tagot a legkisebbel, ill. a legnagyobbal helyettesítjük) alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{4n} = \frac{n}{(2n)^2} \le \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2n)^2} \le \frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$$

minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, következésképpen $\lim(a_n) = 0$. (Figyeljük meg azt az érdekes tényt, hogy ez az összeg nagy n-ekre – annak ellenére, hogy a tagok száma nő – kicsi marad.) ■

(q) A „triviális” alsó, ill. felső becslést alkalmazuk. Mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2}} = \frac{n}{\sqrt{2n}} \le \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{2n}} \le \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n},$$

ezért $\lim(a_n) = +\infty$. ■

194. Legyen $A := \lim(a_n)$. Ekkor $\lim(a_{n+1}) = A$. Ha $A \neq 0$, akkor a hányados sorozatra vonatkozó tétel miatt

$$\lim\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = \frac{\lim(a_{n+1})}{\lim(a_n)} = \frac{A}{A} = 1.$$

Tegyük most fel, hogy $\lim(a_n) = 0$. Ekkor lehet, hogy az $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ sorozat nem konvergens. Ilyen sorozatra egy példa a következő:
$a_n := \dfrac{2 + (-1)^n}{n}$ $(n \in \mathbb{N})$.

Ha $\lim(a_n) = 0$ és $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ konvergens, akkor ez utóbbi B-vel jelölt határértékére $|B| \le 1$ igazolható (pl. indirekt módon). Sőt minden $B \in [-1, 1]$ számhoz megadható olyan (a_n) nullasorozat, amelyre $\lim(\frac{a_{n+1}}{a_n}) = B$. Tekintsük az $(\frac{1}{n})$, $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ és $|B| < 1$ esetén az (nB^n) sorozatokat. ■

195. (a) Feltehetjük, hogy $a \le b$ és $b > 0$. Ekkor a

$$b = \sqrt[n]{b^n} \le \sqrt[n]{a^n + b^n} \le \sqrt[n]{b^n + b^n} = b\sqrt[n]{2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenségekből a közrefogási elvet alkalmazva kapjuk, hogy az $\left(\sqrt[n]{a^n + b^n}\right)$ sorozat konvergens, és $\max\{a, b\}$ a határértéke. ■

196. Az

$$n\left(an - \sqrt{cn^2 - bn + 2}\right) =$$
$$= n\left(an - \sqrt{cn^2 - bn + 2}\right) \cdot \frac{an + \sqrt{cn^2 - bn + 2}}{an + \sqrt{cn^2 - bn + 2}} =$$
$$= n \cdot \frac{(a^2 - c)n^2 - bn + 2}{an + \sqrt{cn^2 + bn - 2}} = \frac{(a^2 - c)n^2 - bn + 2}{a + \sqrt{cn + \frac{b}{n} - \frac{2}{n^2}}}$$

átalakítást felhasználva mutassa meg, hogy a feladatbeli egyenlőség *pontosan* akkor teljesül, ha $a^2 - c = 0 = b$ és $a + \sqrt{c} = 2$, ami azzal ekvivalens, hogy $a = c = 1$ és $b = 0$. ■

198. Legyen $\lim(a_n) =: A \in \mathbb{R}$. Azt kell megmutatni, hogy $\lim(\sigma_n) = 0$, azaz $\lim(\sigma_n - A) = 0$. (Vagyis: a $|\sigma_n - A|$ különbség tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy.)

Írjuk fel ezt a különbséget a

$$\sigma_n - A = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - A = \\ = \frac{(a_1 - A) + (a_2 - A) + \cdots + (a_n - A)}{n}$$

alakban. Mivel $\lim(a_n) = A$, ezért $\forall\, \varepsilon > 0$ valós számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $|a_n - A| < \varepsilon \ \ \forall\, n \geq n_0$ index esetén. (Vagyis: $|a_n - A|$ akármilyen kicsi lehet, ha n elég nagy.)

Most egy kis *ötletet* alkalmazunk. Veszünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és a hozzá tartozó n_0 küszöbindex alapján a fenti összeget két részre osztjuk:

$$\sigma_n - A = \frac{(a_1 - A) + \cdots + (a_{n_0-1} - A)}{n} + \frac{(a_{n_0} - A) + \cdots + (a_n - A)}{n}.$$

(Ebből már látható, hogy $|\sigma_n - A|$ akármilyen kicsi lehet, ha n elég nagy: az első tagra ez az n nevező miatt igaz, a másodiknál meg a számláló mindegyik tagja kicsi.)

Ezek alapján tehát

$$\left|\sigma_n - A\right| \leq \frac{K}{n} + \frac{(n - n_0)\varepsilon}{n} < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

ha $n \geq \max\left\{ n_0, \frac{K}{\varepsilon} \right\}$, ahol K az $|a_1 - A|, \ldots, |a_{n_0-1} - A|$ számok maximuma, és ez azt jelenti, hogy $\lim(\sigma_n - A) = 0$.

Az $a_n := (-1)^n$ $(n \in \mathbb{N})$ divergens, de a számtani közepeinek (σ_n) sorozata 0-hoz konvergál.

Tegyük most fel, hogy $\lim(a_n) = +\infty$, azaz $\forall\, P \in \mathbb{R}$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $a_n > P \ \ \forall\, n \geq n_0$ esetén. Ekkor

$$\sigma_n = \frac{a_1 + \cdots + a_{n_0} + \cdots + a_n}{n} > \frac{n - n_0}{n} P > \frac{1}{2} P, \quad \text{ha } n \geq 2n_0,$$

tehát $\lim(\sigma_n) = +\infty$. ■

199. Alkalmazza az előző feladat eredményét az $\left(\frac{1}{a_n}\right)$ sorozatra.

(a) Tekintse először a $\lim(a_n) > 0$, majd a $\lim(a_n) = 0$ esetet.

(b) Ha $\lim(a_n) = +\infty$, akkor $\lim\left(\frac{1}{a_n}\right) = 0$, tehát $\lim\left(\frac{1}{h_n}\right) = 0$, azaz $\lim(h_n) = +\infty$. ■

200. Használja fel az előző két feladat eredményét, valamint a harmonikus, a mértani és a számtani közepek közötti egyenlőtlenségeket (l. a **20.** feladatot). ■

201. A (b_n) sorozatra alkalmazza az előző feladat eredményét. ■

4.4. Rekurzív sorozatok határértéke

■ A-feladatok

204. A **86.** oldal tétele alapján például az

$$a_1 := 2, \quad a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

egy olyan sorozat, amelynek $\sqrt{2}$ a határértéke. Nyilvánvaló, hogy ennek mindegyik tagja racionális.

A 2 kezdőérték helyett *bármely* más pozitív racionális számot választva egy másik, de ugyancsak $\sqrt{2}$-höz konvergáló racionális sorozatot kapunk. ■

205. A konvergens sorozat definíciójának (l. a **66.** oldalt) közvetlen következménye. ■

■ B-feladatok

206. A **85.** oldal megjegyzésében vázolt utat követjük.

Írjuk fel a sorozat első néhány tagját:

$$\sqrt{2}, \quad \sqrt{2\sqrt{2}}, \quad \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}.$$

Monotonitás. A *sejtésünk* az, hogy az (a_n) sorozat monoton növekedő.

Bizonyítás: teljes indukcióval.

(i) $n = 1$-re $(a_1 =)\sqrt{2} \leq \sqrt{2\sqrt{2}}(= a_2) \;\; \Leftrightarrow 1 \leq 2$, ezért az állítás $n = 1$ esetén igaz.

(ii) Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \leq a_{n+1}$. Ekkor

$$(a_{n+1} =)\sqrt{2a_n} \leq \sqrt{2a_{n+1}}(= a_{n+2}) \quad \Leftrightarrow \quad a_n \leq a_{n+1},$$

ezért $a_{n+1} \leq a_{n+2}$ is igaz. Az (a_n) sorozat tehát valóban monoton növekedő.

Korlátosság. A sorozat tagjait figyelve alakulhat ki az a *sejtés,* hogy az (a_n) sorozat felülről korlátos, és 2 egy felső korlátja, azaz $a_n \leq 2$ $(n \in \mathbb{N})$.

Bizonyítás: teljes indukcióval.

(i) $n = 1$-re $a_1 = \sqrt{2} \leq 2$ miatt igaz az állítás.

(ii) Ha egy $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \leq 2$, akkor $a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \leq \sqrt{2 \cdot 2} = {}$ $= 2$ is teljesül, ezért a sorozat felülről korlátos.

Konvergencia. Mivel (a_n) monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens. Jelölje A a sorozat határértékét. A sorozat tagjai között fennálló

$$a_{n+1} = \sqrt{2a_n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rekurzív összefüggésben vegyük az $n \to +\infty$ határátmenetet. Ekkor $\lim(a_{n+1}) = A$ és $\lim(\sqrt{2a_n}) = \sqrt{2A}$ felhasználásával azt kapjuk, hogy $A = \sqrt{2A}$. A sorozat határértéke tehát megoldása az

$$A^2 - 2A = A(A - 2) = 0$$

egyenletnek. Ennek gyökei 0 és 2. A monoton növekedés és $a_1 = \sqrt{2}$ miatt (a_n) minden tagja $\geq \sqrt{2}$, így 0 nem lehet a sorozat határértéke. Ezért $\lim(a_n) = 2$.

Összefoglalva: Az (a_n) sorozat konvergens, és 2 a határértéke. ■

207. A monotonitásra vonatkozó *sejtés* az első néhány tag alapján az, hogy (a_n) monoton növekedő.

Bizonyítás: teljes indukcióval.

(i) $n = 1$-re $(a_1 =)0 \leq \frac{1}{2}(= a_2)$ miatt igaz az állítás.

(ii) Tegyük fel, hogy valamilyen $n \in \mathbb{N}$ számra $a_n \leq a_{n+1}$. Ekkor

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 1}{2} \leq \frac{a_{n+1}^3 + 1}{2} = a_{n+2},$$

ezért a sorozat valóban monoton növekedő.

Egy felső korlát keresése: A rekurzív összefüggésből és az első néhány tagból sok esetben nem egyszerű feladat egy alsó vagy felső korlát meghatározása. Egy korlát „megsejtésére” a következő *ötletet* alkalmazhatjuk: *Feltételezzük* azt, hogy a sorozat konvergens, és $A := \lim(a_n)$. Ha (a_n) például monoton növekedő, akkor $A = \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, ami azt jelenti, hogy a sorozat határértéke egyúttal a sorozat egy felső korlátja is. Ha a rekurzív összefüggésben vesszük az $n \to +\infty$ határátmenetet, akkor a lehetséges határértékre (azaz A-ra) egy egyenletet kapunk. Ennek megoldásai közül választunk egyet, és – pl. teljes indukcióval – megpróbáljuk **igazolni**, hogy az a sorozatnak egy felső korlátja.

Esetünkben az $a_{n+1} = \frac{a_n^3+1}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$ rekurzív összefüggés alapján azt kapjuk, hogy ha (a_n) konvergens, és A a határértéke, akkor $A = \frac{A^3+1}{2}$, azaz A gyöke az $A^3 - 2A + 1 = 0$ egyenletnek. Az

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2) \qquad (a, b \in \mathbb{R})$$

azonosság alapján

$$A^3 - 2A + 1 = A^3 - 1^3 - 2(A - 1) = (A - 1)(A^2 + A - 1),$$

ezért az egyenlet gyökei $1, \dfrac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, ami azt jelenti, hogy ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor a határértéke csak az előbbi három szám valamelyike lehet. Nyilvánvaló, hogy $a_n \geq 0$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén, ezért $\dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2}$ nem lehet határértéke a sorozatnak. A másik két gyök között a $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2} < 1$ reláció áll fenn. Próbáljuk meg igazolni azt, hogy a kisebbik szám már felső korlátja az (a_n) sorozatnak, azaz

$$a_n \le \frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás: teljes indukcióval.

(i) $n = 1$-re $0 \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ miatt igaz az állítás.

(ii) Ha $a_n \le \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ valamilyen n természetes számra, akkor

$$a_{n+1} = \frac{a_n^3+1}{2} \le \frac{\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^3+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

ezért $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ valóban egy felső korlátja az (a_n) sorozatnak.

Konvergencia. Mivel (a_n) monoton növő és felülről korlátos, ezért konvergens. A fentiek szerint a határértéke csak $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ vagy a nála nagyobb 1 szám lehet. Mivel $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ a sorozatnak egy felső korlátja, ezért 1 nem lehet a határértéke. Következésképpen a sorozat határértéke $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Összefoglalva: Az (a_n) sorozat konvergens, és $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ a határértéke. ■

208. Teljes indukcióval egyszerűen bebizonyítható, hogy mindkét sorozat monoton növekedő. Ha konvergensek, akkor az A határértékükre az $A = \frac{A^3+30}{19}$ egyenlőség teljesül. Ennek megoldásai -5, 2 és 3. Ebből már rögtön következik az, hogy a (b_n) sorozat nem konvergens ($b_2 = \frac{155}{19} > 5$). Teljes indukcióval egyszerű bebizonyítani, hogy az (a_n) sorozatnak 2 egy felső korlátja. Következésképpen ez a sorozat 2-höz konvergál. ■

■ C-feladatok

209. (a) **A monotonitásra** vonatkozó *sejtés:* az (a_n) sorozat monoton növekedő.

Bizonyítás: teljes indukcióval. Nyilvánvaló, hogy

$$a_1 = \sqrt{3} \le \sqrt{3+2\sqrt{3}} = a_2.$$

Tegyük fel, hogy $a_n \le a_{n+1}$. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} \le \sqrt{3 + 2a_{n+1}} = a_{n+2},$$

a sorozat tehát valóban monoton növekedő.

Egy felső korlát keresése: tegyük fel, hogy (a_n) konvergens, és $\lim(a_n) =: A$. A rekurzív összefüggésben az $n \to +\infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk az $A = \sqrt{3 + 2A}$ egyenletet. (Közben felhasználtuk azt, hogy $\lim(a_{n+1}) = A$ és $\lim(\sqrt{3 + 2a_n}) = \sqrt{3 + 2A}$.) Az egyenlet egyetlen megoldása $A = 3$. Ha a sorozat konvergens, akkor csak 3 lehet a határértéke. A sorozat azonban monoton növekedő, ezért ha felülről korlátos, akkor 3 egy felső korlátja is.

Sejtés: A sorozat felülről korlátos, és 3 egy felső korlátja.

Bizonyítás: teljes indukcióval. $n = 1$-re $a_1 = \sqrt{3} \le 3$ nyilván igaz. Tegyük fel, hogy $a_n \le 3$ egy $n \in \mathbb{N}$ indexre. Ekkor

$$a_{n+1} = \sqrt{3 + 2a_n} \le \sqrt{3 + 2 \cdot 3} = 3,$$

amiből az következik, hogy (a_n)-nek 3 valóban egy felső korlátja.

Konvergencia. Mivel (a_n) monoton növekedő és felülről korlátos, ezért konvergens. Fentebb megmutattuk azt, hogy az A-val jelölt határértékére az $A = \sqrt{3 + 2A}$ egyenlet teljesül. Ennek egyetlen gyöke 3. A sorozatnak a határértéke tehát 3.

Összefoglalva: a sorozat konvergens, és 3 a határértéke. ■

210. Teljes indukcióval egyszerűen belátható az, hogy minden $\alpha \in [0, 1]$ esetén az (a_n) sorozat monoton növekedő.

Ha az (a_n) sorozat konvergens, akkor a határértéke vagy $1 + \sqrt{1 - \alpha}$, vagy pedig $1 - \sqrt{1 - \alpha}$. Teljes indukcióval egyszerűen belátható az, hogy minden $\alpha \in [0, 1]$ esetén az (a_n) sorozatnak $1 - \sqrt{1 - \alpha}$ egy felső korlátja.

Ezek alapján a sorozat minden $\alpha \in [0, 1]$ paraméter esetén konvergens, és $\lim(a_n) = 1 - \sqrt{1 - \alpha}$. ■

211. A monotonitás vizsgálatához vegye a sorozat két szomszédos tagjának a különbségét.

Ha $0 < \alpha \le a_1$, akkor az (a_n) sorozat monoton csökkenő, és α egy alsó korlátja.

Ha $a_1 < \alpha$, akkor az (a_n) sorozat monoton növekedő, és α egy felső korlátja.

Mindkét esetben a sorozat határértéke α. ■

212. Minden $\alpha > 0$ esetén az (a_n) sorozat monoton növekedő, és

$$\frac{1+\sqrt{1+4\alpha}}{2}$$

egy felső korlátja. Ez a szám egyúttal a sorozat határértéke is. ■

213. Mivel $a_n \ge 0$ és $b_n \ge 0$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért a sorozatok „jól definiáltak”.

Az első néhány tagból kiindulva alakíthatunk ki szemléletes képet a sorozatokról:

$$a_1 = \alpha < \beta = b_1$$

és

$$a_1 = \alpha < a_2 = \sqrt{\alpha\beta} < \frac{\alpha+\beta}{2} = b_2 < b_1 = \beta.$$

(Itt egyrészt az $\alpha < \beta$ számok számtani és mértani közepeik között fennálló egyenlőtlenséget használtuk fel, másrészt pedig azt a nyilvánvaló tényt, hogy ezek a közepek az α és β számok között vannak.) Ebből az következik, hogy $[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1]$, sőt a következő tagokat is figyelembe véve kialakíthatjuk azt a sejtést, hogy

$$\ldots \subset [a_3, b_3] \subset [a_2, b_2] \subset [a_1, b_1] = [\alpha, \beta].$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy minden $n = 2, 3, \ldots$ esetén

$$\alpha = a_1 < a_n < a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} < \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1} < b_n < b_1 = \beta,$$

amit teljes indukcióval lehet bebizonyítani.

Azt kaptuk tehát, hogy az (a_n) sorozat (szigorúan) monoton növekedő és felülről korlátos, a (b_n) pedig (szigorúan) monoton csökkenő és alulról korlátos. Ezért mindkettő konvergens. Legyen

$$\lim(a_n) =: A \qquad \text{és} \qquad \lim(b_n) =: B.$$

Mivel $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért az $n \to +\infty$ határátmenetet véve $B = \frac{A+B}{2}$, azaz $A = B$ adódik. A feladat állítását az $\alpha < \beta$ esetben tehát bebizonyítottuk.

Az állítás igaz akkor is, ha $\alpha \geq \beta$. ■

4.5. Sorozat limesz szuperiorja és limesz inferiorja

■ A-feladatok

214. Ha a minden tagja *pozitív*, akkor nincs negatív számhoz tartó részsorozata, következésképpen $\underline{\lim}\ a \geq 0$. Mivel $0 \leq \underline{\lim}\ a \leq \overline{\lim}\ a = 0$, ezért $\underline{\lim}\ a = \overline{\lim}\ a = \lim a = 0$, tehát az a sorozat konvergens, és 0 a határértéke. ■

215. A sorozatnak van határértéke, és ez $+\infty$, mert $+\infty = \underline{\lim}\ a \leq \overline{\lim}\ a \leq$ $\leq +\infty$ miatt $\underline{\lim}\ a = \overline{\lim}\ a = +\infty = \lim a$. ■

216. Nincs ilyen Cauchy-sorozat. A $\underline{\lim}\ a = -\infty$ feltételből ui. következik, hogy a (alulról) nem korlátos, következésképpen nem Cauchy-sorozat (l. a **172.** feladatot). ■

217. Az $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$, a $\left(2 + \frac{1}{n}\right)$ és a $\left(3 + \frac{1}{n}\right)$ sorozatok határértéke rendre 1, 2 és 3. Ezeket „összefésülve" kapjuk az

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{k+1}, & \text{ha } n = 3k+1 \\ 2 + \frac{1}{k+1}, & \text{ha } n = 3k+2 \\ 3 + \frac{1}{k+1}, & \text{ha } n = 3k+3 \end{cases} \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

sorozatot. Ennek pontosan 3 sűrűsödési helye van: 1, 2 és 3. ■

218. **Van olyan** a sorozat, amelyik sűrűsödési helyeinek halmaza $\mathbb{N}$-nel egyenlő. Minden rögzített $k \in \mathbb{N}$ esetén a $\left(k + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\right)$ sorozat k-hoz konvergál. Ebből a *megszámlálható sok* sorozatból a „Cantor-féle átlós eljárással" *egyetlen* a sorozat képezhető. Erre $H_a = \mathbb{N}$ teljesül.

Nincs olyan a sorozat, amelyikre $H_a = \mathbb{Q}$, ui. ha lenne ilyen sorozat, akkor annak minden irracionális szám is sűrűsödési helye lenne. (Emlékeztetünk arra, hogy minden nemelfajuló intervallum tartalmaz racionális számot és irracionális számot egyaránt.)

Van olyan sorozat, amelyiknek minden valós szám sűrűsödési helye. A racionális számok halmaza a „Cantor-féle átlós eljárással" sorozatba rendezhető (röviden: $\mathbb{Q}$ megszámlálható). Erre az a sorozatra $H_a = \mathbb{R}$ teljesül. ■

■ B-feladatok

219. (a) $H_a = \{-1, 1\}$, $\underline{\lim}\ a = -1$, $\overline{\lim}\ a = 1$. ■

(b) $H_a = \{1, 3\}$, $\underline{\lim}\ a = 1$, $\overline{\lim}\ a = 3$. ■

(c) A sorozat $a_n = \dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^n + (-1)^n}{1 + \frac{1}{4^n}}$ $(n \in \mathbb{N})$ alakjából következik, hogy ha a sorozat egy részsorozatának van határértéke, akkor ez csak -1 vagy 1 lehet. Ezért $H_a = \{-1, 1\}$, $\underline{\lim}\ a = -1$, $\overline{\lim}\ a = 1$. ■

(d) $H_a = \{0, +\infty\}$, $\underline{\lim}\ a = 0$, $\overline{\lim}\ a = +\infty$. ■

220. $\sup(a_n) = \overline{\lim}\,(a_n) = 1$, de a sorozatnak nincs legnagyobb tagja.

$\min(a_n) = \inf(a_n) = -2 (= a_1)$, ezért a_1 a sorozat legkisebb tagja, azonban $\underline{\lim}\,(a_n) = -1$.

Mivel $\underline{\lim}\,(a_n) \neq \overline{\lim}\,(a_n)$, ezért a sorozat nem konvergens. ■

4.6. Komplex tagú sorozatok konvergenciája

■ A-feladatok

225. Az állítások a definíciók közvetlen következményei. ■

226. Alkalmazza a definíciót. ■

227. Használja fel a $\big||z_n| - |w|\big| \le |z_n - w|$ háromszög-egyenlőtlenséget.

Az állítás megfordítása nem igaz, l. pl. a $\big((-1)^n\big)$ sorozatot. ■

228. Az állítások a definíciók közvetlen következményei. ■

■ B-feladatok

229. Legyen $|q| < 1$. Ekkor a $\big(|q|^n\big)$ (valós!) geometriai sorozat konvergens, és 0 a határértéke (l. a **174.** feladatot). Mivel $\big|q^n\big| = |q|^n$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért a **226.** feladat alapján a $\big(q^n\big)$ komplex sorozat is 0-hoz tart.

Ha $q = 1$, akkor az állítás nyilvánvaló.

Azt kell még belátni, hogy az összes többi esetben (tehát akkor, ha $|q| > 1$ vagy q az egységkörvonal 1-től különböző pontja) a $\big(q^n\big)$ sorozat divergens.

Ha $|q| > 1$, akkor a $\big(|q|^n\big)$ valós sorozat határértéke $+\infty$ (l. a **174.** feladatot), ezért a $\big(q^n\big)$ sorozat nem korlátos, következésképpen nem is konvergens.

Tekintsük most azt az esetet, amikor q az egységkörvonal 1-től különböző pontja, azaz $|q| = 1$ és $q \neq 1$. A $z_n := q^n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat divergenciáját indirekt módon látjuk be. Tegyük fel, hogy $\lim(z_n) = A$. *Vegyük a (z_{n+1}) elcsúsztatott sorozat és a (z_n) sorozat különbségét!* Ennek határértéke

$$\lim\big(z_{n+1} - z_n\big) = \lim\big(z_{n+1}\big) - \lim\big(z_n\big) = A - A = 0,$$

ezért $\big|z_{n+1} - z_n\big| \to 0$, ha $n \to +\infty$. Ez azonban ellentmond a q-ra tett feltételekből adódó

$$\big|z_{n+1} - z_n\big| = \big|q^{n+1} - q^n\big| = |q|^n \cdot |q - 1| > 0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenségeknek. ■

230. A **182.** feladat megoldásához hasonló. Az egyetlen különbség a $\big(cn\big)$ alakú sorozatok határértékénél van. Vegye figyelembe, hogy minden 0-tól különböző komplex c szám esetén a $\big(cn\big)$ sorozatnak a határértéke ∞. ■

■ C-feladatok

231. (a) Mivel $z_n = \frac{1}{1+\frac{1}{n}} - \frac{i}{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért a valós részek sorozata 1-hez, a képzetes részeké pedig 0-hoz tart. A sorozat tehát konvergens, és a határértéke $1 + i \cdot 0 = 1$. ■

(b) $z_n = \dfrac{\frac{1}{n} + 2i}{1 + i\frac{1}{n}}$ $(n \in \mathbb{N})$. A számlálóban levő sorozat $2i$-hez, a nevezőben levő pedig 1-hez tart. A határérték és a műveletek kapcsolatára vonatkozó tétel alapján (z_n) konvergens, és $2i$ a határértéke. ■

(c) A $q = 1 - i$ hányadosú geometriai sorozatról van szó. Elegendő meghatározni $q = 1 - i$ abszolút értékét. A q szám valós része 1, képzetes része -1, így $|q| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2} > 1$, ezért a (z_n) sorozat divergens (l. a **174.** feladatot). ■

(e) Vegyük figyelembe, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$i^n = \begin{cases} 1, & \text{ha } n = 4k, \\ i, & \text{ha } n = 4k+1 \\ -1, & \text{ha } n = 4k+2 \\ -i, & \text{ha } n = 4k+3, \end{cases}$$

ahol $k \in \mathbb{N}$. A (z_n) sorozatnak van legalább két (sőt 4) olyan részsorozata, amelyeknek a határértéke különböző, ezért divergens. Világos, hogy

$$z_{4k} \to 1, \quad z_{4k_1} \to i, \quad z_{4k+2} \to -1, \quad z_{4k+3} \to -i, \quad \text{ha} \quad k \to +\infty.$$ ■

(g) A (z_n) olyan geometriai sorozat, melynek a hányadosa $q = \frac{(1+i)^2}{3}$. Mivel $|q| = \frac{2}{3} < 1$, így (z_n) konvergens, és 0 a határértéke. ■

5. Számsorok

5.1. Valós számsor konvergenciája és összege

■ A-feladatok

232. A részletösszegek sorozata: $-1, 0, -1, 0, \dots$, és ez nem konvergens. ■

233. (a) A sort generáló $\left(\sqrt[n]{0,1}\right)$ sorozat határértéke 1 (l. a **175.** feladatot), tehát nem nullasorozat. A sor tehát divergens. ■

(b) Mivel

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} =$$
$$= \frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}} \cdot \frac{1}{1+\dfrac{1}{n-1}} \to \frac{1}{e} \quad (n \to +\infty),$$

ezért a sort generáló sorozat nem nullasorozat. Így a feladatban megadott sor divergens. ■

234. Nem lehet, és ezt indirekt módon igazoljuk. Ha $\sum(a_n + b_n)$ konvergens lenne, akkor ennek és a szintén konvergens $\sum(-a_n)$ sornak az összege, azaz a $\sum b_n$ sor is konvergens lenne. Ez ellentmond annak a feltételünknek, hogy $\sum b_n$ divergens. ■

235. Két divergens sor összege lehet divergens, de lehet konvergens is. Például a $\sum(-1)^n$ és $\sum(-1)^n$ divergens sorok összege – a $\sum 2(-1)^n$ sor – divergens, a $\sum(-1)^{n+1}$ és $\sum(-1)^n$ divergens sorok összege, a $\sum 0$ sor azonban konvergens. ■

■ B-feladatok

236. A $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor részletösszegeinek a sorozata:

$$s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}, & \text{ha } q \in \mathbb{R}\setminus\{1\} \\ n+1, & \text{ha } q = 1 \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ha $q = 1$, akkor (s_n) divergens, ha $q \neq 1$ valós szám, akkor a $\left(q^{n+1}\right)$ geometriai sorozat pontosan akkor konvergens, ha $|q| < 1$, és ekkor 0 a határértéke (l. a **174.** feladatot), tehát

$$\sum_{n=0}^{+\infty} q^n = \lim\left(s_n\right) = \frac{1}{1-q} \qquad \left(|q| < 1\right).\ ■$$

237. Mivel

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért a megadott sor n-edik részletösszege

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} = \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right). \end{aligned}$$

Ez egy „teleszkopikus" összeg: az egymást követő tagok $-\frac{1}{2}$-től $\frac{1}{n}$-ig kiejtik egymást, ezért $s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$. A feladatbeli sor tehát konvergens, és az összege:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \lim\left(s_n\right) = \lim\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1.\ ■$$

238. (a) **1. bizonyítás.** A $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ harmonikus sor részletösszegeinek a sorozata
$$s_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
monoton növekedő és felülről nem korlátos (l. a **131.** feladatot), ezért nem konvergens, tehát $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ divergens.

2. bizonyítás. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy a $\sum_{n=1} \frac{1}{n}$ konvergens, és jelöljük A-val az összegét, s_n-nel pedig az n-edik részletösszegét. Ekkor
$$\lim(s_{2n} - s_n) = \lim(s_{2n}) - \lim(s_n) = A - A = 0.$$
Vizsgáljuk meg az
$$s_{2n} - s_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$$
különbséget. A jobb oldal csökken, ha bármely benne szereplő tag helyébe $\frac{1}{2n}$-et írunk. Így
$$s_{2n} - s_n > n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$
Ebből pedig következik, hogy $\lim(s_{2n} - s_n) = 0$ lehetetlen. ■

(b) A $\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor részletösszegeire az
$$s_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} >$$
$$> 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
becslés érvényes. A jobb oldal felülről nem korlátos (l. a **131.** feladatot), ezért (s_n) sem az, következésképpen az (s_n) sorozat – tehát a $\sum_{n=1} \frac{1}{\sqrt{n}}$ sor – divergens. ■

(c) A $\sum_{n=1} \frac{1}{n^2}$ sor részletösszegeinek az
$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \qquad (n \in \mathbb{N})$$
sorozata nyilván monoton növekedő és a **131.** feladat alapján felülről korlátos, ezért konvergens. ■

239. Az előző feladat szerint a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens. Mivel minden $\alpha < 1$ valós számra $\frac{1}{n} \le \frac{1}{n^\alpha}$ $(n \in \mathbb{N})$, ezért a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor részletösszegeinek sorozata felülről nem korlátos, ezért divergens.

Legyen $\alpha > 1$. Megmutatjuk, hogy a $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor részletösszegeinek a sorozata felülről korlátos. Ennek igazolásához kettőhatványok közötti csoportokat képezünk. Egy ilyen csoportra az

$$\frac{1}{(2^k+1)^\alpha} + \frac{1}{(2^k+2)^\alpha} + \cdots + \frac{1}{(2^k+2^k)^\alpha} \le 2^k \frac{1}{(2^k)^\alpha} = \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$$

egyenlőtlenség teljesül. Mivel $\alpha > 1$ miatt $\frac{1}{2^{\alpha-1}} < 1$, ezért a $\sum\limits_{k=0} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k$ geometriai sor konvergens, következésképpen

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha} < \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^{\alpha-1}}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{\alpha-1}}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

(s_n) tehát valóban felülről korlátos. Mivel monoton növekedő is, ezért konvergens. A $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n^\alpha}$ sor tehát minden $\alpha > 1$ esetén konvergens. ■

240. Először azt jegyezzük meg, hogy a $\sum\limits_{n=0} \frac{1}{n!}$ sor konvergenciája a minden $n \in \mathbb{N}$ esetén érvényes

$$\begin{aligned} s_n &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \le \\ &\le 1 + 1 + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 3 - \frac{1}{n} < 3 \end{aligned}$$

egyenlőtlenségekből és (s_n) monoton növekedéséből következik (l. **237.** feladatot).

Jóval nehezebb annak az igazolása, hogy a sor összege az e szám. Azt kell tehát belátni, hogy az

$$x_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és az

$$y_n := 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatok határértéke megegyezik.

Az *alapvető észrevétel* az, hogy fennállnak az

$$(*)\qquad x_n \le y_n \le e \qquad (n \in \mathbb{N})$$

egyenlőtlenségek.

(∗) *bal oldali egyenlőtlenségének igazolása.* A binomiális tétel alapján

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k}.$$

Az összeg tagjait $k = 1, 2, \ldots, n$ esetén így alakítjuk át:

$$\begin{aligned}\frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{1}{n^k} &= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdots \frac{n-k+1}{n} \cdot \frac{1}{k!} = \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}.\end{aligned}$$

Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}x_n &= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!} \le \\ &\le \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = y_n \qquad (n \in \mathbb{N}),\end{aligned}$$

azaz (∗) bal oldali egyenlőtlensége valóban teljesül.

(∗) *jobb oldali egyenlőtlenségének igazolása.* Rögzítsük az $n \in \mathbb{N}$ számot, és legyen m egy n-nél nagyobb tetszőleges természetes szám. Az előzőek alapján

$$x_m = \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = 1 + \sum_{k=1}^{m} \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \cdot \frac{1}{k!}.$$

Ennek az $(m+1)$ tagú összegnek mindegyik tagja pozitív, ezért ezt csökkentjük, ha csak az első $(n+1)$ tagját tartjuk meg, azaz

$$x_m > 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right) \cdot \frac{1}{k!} \quad (m > n).$$

Vegyük az $m \to +\infty$ határátmenetet! Ekkor a bal oldalon levő sorozat e-hez, a jobb oldalon álló pedig (itt rögzített számú – pontosan $(n+1)$ – tag van!) y_n-hez tart. Ezért

$$e \geq y_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

tehát $(*)$ jobb oldali egyenlőtlensége is fennáll.

$(*)$-ból a közrefogási elv és $\lim(x_n) = e$ felhasználásával kapjuk a bizonyítandó

$$\lim(y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$$

egyenlőséget. ■

241. (a) Az előző feladat alapján $\sum\limits_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$, ezért minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned}
0 < e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+2)!} + \frac{1}{(n+3)!} + \cdots = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \frac{1}{(n+2)(n+3)} + \cdots \right) \leq \\
&\leq \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{n+2} + \left(\frac{1}{n+2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n+2}\right)^3 + \cdots \right) = \\
&= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{n+2}} = \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{n(n+2)}{(n+1)^2} = \\
&= \frac{1}{n \cdot n!} \cdot \frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1} < \frac{1}{n \cdot n!}. \ ■
\end{aligned}$$

(b) Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy e racionális szám, azaz $e = \frac{p}{q}$, ahol p és q relatív prím természetes számok. Alkalmazzuk az (a)-beli egyenlőtlenséget az $n = q$ számra:

$$0 < e - \sum_{k=0}^{q} \frac{1}{k!} = \frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q \cdot q!}.$$

Ebből azt kapjuk, hogy

$$0 < \left(\frac{p}{q} - \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{q!}\right)\right) q \cdot q! =: B < 1.$$

B nyilván egész szám, és ez ellentmond a fenti egyenlőtlenségnek, ezért e valóban irracionális.

A feladat (a) része és az előző feladat alapján e-re az alábbi alsó és felső becslés adható meg:

$$(*) \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{n \cdot n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

$n = 6$ esetén adódik a bizonyítandó egyenlőtlenség. ■

M. $(*)$-ban egyre nagyobb n-eket véve az e számnak egyre pontosabb racionális közelítését kapjuk. Érdemes meggondolni azt, hogy az e szám – mondjuk – első húsz tizedesjegyének a meghatározásához mekkora n-et kell választanunk.

■ C-feladatok

242. Nem. A $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens, de erre teljesülnek a feladatbeli relációk. (Hasonlítsa össze a feladat feltételét a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériummal!) ■

243. (a) A sor két geometriai sor összege: $\sum\limits_{n=1} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \sum\limits_{n=1} \frac{1}{2^n} + \sum\limits_{n=1} \frac{1}{3^n}$. A jobb oldali két sor mindegyike konvergens, hiszen mértani sorok abszolút értékben 1-nél kisebb hányadossal. A mértani sor összegképlete szerint $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1$. (Itt fontos volt, hogy a bal oldalon az index csak 1-től fut, így a mértani sor összegképletéből az $n = 0$-hoz tartozó tagot le kell vonni: $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{2^0} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} - 1$.) Hasonlóan kapjuk, hogy $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1$, ezért

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n}\right) = \frac{3}{2}. \ \blacksquare$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n + 4}{5^n} = \sum_{n=1}^{+\infty} \left(-\frac{1}{5}\right)^n + 4 \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n =$$
$$= \left(\frac{1}{1-(-\frac{1}{5})} - 1\right) + 4\left(\frac{1}{1-\frac{1}{5}} - 1\right) = \frac{5}{6}. \blacksquare$$

(c) A $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ sornál ismertetett *trükköt* alkalmazzuk. Az $\frac{1}{n(n+2)}$ törtet két tört összegére bontjuk:

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right).$$

Ezt felhasználva a vizsgált sor n-edik részletösszege így írható:

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{4\cdot 6} + \cdots + \frac{1}{(n-1)(n+1)} + \frac{1}{n(n+2)} =$$
$$= \frac{1}{2}\Bigg(\left(1-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\right) + \cdots$$
$$\cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\Bigg).$$

Ez egy „teleszkopikus” összeg. A $3, 4, \ldots, n$ nevezőjű törtek kiejtik egymást, ezért

$$s_n = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A sor összege tehát

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+2)} = \lim(s_n) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}. \blacksquare$$

(f) Az $\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ törtet is fel lehet bontani egyszerűbb nevezőjű törtek összegére:

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{n+2} =$$
$$= \frac{1}{n(n+2)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} =$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{n} - \frac{1}{n+1} + \frac{\frac{1}{2}}{n+2}.$$

Ezt felhasználva írjuk fel a sor n-edik részletösszegét:

$$\begin{aligned} s_n = &\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}+\cdots \\ &\cdots+\frac{1}{(n-1)n(n+1)}+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}= \\ =&\left(\frac{\frac12}{1}-\frac{1}{2}+\frac{\frac12}{3}\right)+\left(\frac{\frac12}{2}-\frac{1}{3}+\frac{\frac12}{4}\right)+\left(\frac{\frac12}{3}-\frac{1}{4}+\frac{\frac12}{5}\right)+\cdots \\ &\cdots+\left(\frac{\frac12}{n-1}-\frac{1}{n}+\frac{\frac12}{n+1}\right)+\left(\frac{\frac12}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{\frac12}{n+2}\right). \end{aligned}$$

Ebben az összegben számos tag „teleszkopikusan” kiejti egymást. Figyeljük meg például az első három zárójelpár közötti, 3 nevezőjű törtet. Végül azt kapjuk, hogy

$$s_n=\frac{\frac12}{1}-\frac{1}{2}+\frac{\frac12}{2}-\frac{\frac12}{n+1}+\frac{\frac12}{n+2}\quad (n\in\mathbb{N}),$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\lim(s_n)=\frac{1}{4}.\ ■$$

(g) Alkalmazza a

$$\frac{2n+1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\quad (n\in\mathbb{N})$$

azonosságot. ■

(h) Alkalmazza a

$$\frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=\frac{1}{n^2}-\frac{1}{(n+1)^2}\quad (n\in\mathbb{N})$$

egyenlőségeket. ■

(i) Mivel a **240.** feladat alapján $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}=e$ és

$$\sum_{n=1}\frac{n}{(n+1)!}=\sum_{n=1}\frac{(n+1)-1}{(n+1)!}=\sum_{n=1}\frac{1}{n!}-\sum_{n=1}\frac{1}{(n+1)!},$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{(n+1)!} = \big(e-1\big) - \big(e-1-1\big) = 1. \ \blacksquare$$

(j) Vegye figyelembe, hogy $n^2+3n+1 = (n+1)(n+2)-1$ $(n \in \mathbb{N})$, és $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$. ■

244. A zárt alak megtalálásához alkalmazzuk a következő *trükköt*. Legyen $s_N := \sum_{n=1}^{N} nq^n$, és tekintsük az $s_N - qs_N$ különbséget:

$$\begin{aligned} s_N - qs_N = & \\ &= (q + 2q^2 + 3q^3 + \cdots + Nq^N) - \\ &\quad - (q^2 + 2q^3 + \cdots + (N-1)q^N + Nq^{N+1}) = \\ &= (q + q^2 + \cdots + q^N) - Nq^{N+1} = \\ &= q\frac{1-q^N}{1-q} - Nq^{N+1}, \end{aligned}$$

ha $q \neq 1$. Ebből

$$s_N = \frac{q}{(1-q)^2}(1-q^N) - \frac{1}{1-q}Nq^{N+1} \qquad (N \in \mathbb{N})$$

adódik. A **174.** és a **179.** feladatok alapján egyszerűen belátható, hogy a $\sum nq^n$ sor akkor és csak akkor konvergens, ha $|q| < 1$. Ebben az esetben az összege

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \frac{q}{(q-1)^2}. \ \blacksquare$$

245. Végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1} \frac{2n-1}{2^n} &= \sum_{n=1} n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \sum_{n=1} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \\ &= 2\sum_{n=1} n\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}\left(\frac{1}{2}\right)^n. \end{aligned}$$

Az első sor az előző feladat alapján konvergens, és az összege $2\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}$.

A második egy $\frac{1}{2}$ hányadosú geometriai sor. Ennek összege $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}}$. A feladatban megadott sor összege tehát 3. ■

246. Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\cdot\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}}.
\end{aligned}$$

A feladatbeli sor N-edik részletösszege tehát egy „teleszkopikus" összeg:

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}} = 1-\frac{1}{\sqrt{N+1}} \qquad (N\in\mathbb{N}).$$

A sor tehát konvergens, és az összege 1. ■

5.2. Nemnegatív tagú sorok. Leibniz-típusú sorok

■ A-feladatok

248. Ilyen például a $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ végtelen sor. Mivel az $\left(\frac{1}{n}\right)$ sorozat monoton csökkenő, ezért a sor Leibniz-típusú. De $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ is igaz, így a $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sor konvergens (l. a **102.** oldalt). Az abszolút értékekből képzett $\sum\limits_{n=1} \frac{1}{n}$ harmonikus sor divergens (l. a **238.** feladatot), ezért $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ valóban egy feltételesen konvergens sor. ■

249. A sor abszolút konvergens, mert a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor a **238.** feladat alapján konvergens. Ebből következik, hogy a feladatban megadott sor konvergens. ■

250. Tekintse például az $a_n := -\frac{1}{n}$ és $b_n := \frac{1}{n^2}$ $(n\in\mathbb{N})$ sorozatokat. ■

251. Mutassa meg, hogy az

$$a_n := \begin{cases} \dfrac{2}{k}, & \text{ha } n = 2k-1 \\ \dfrac{1}{k}, & \text{ha } n = 2k \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

sorozat egy nullasorozat, de a $\sum\limits_{n=1} (-1)^{n+1} a_n$ sor divergens. ■

■ B-feladatok

252. (a) A sort generáló $\left(\frac{n}{2n-1}\right)$ sorozat nem nullasorozat ($\frac{1}{2}$ a határértéke), ezért a sor divergens. ■

(b) Nézzük meg, hogy a hányadoskritérium vajon alkalmazható-e. Mivel

$$\frac{2^{(n+1)^2}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{2^{n^2}} = \frac{2^{2n+1}}{n+1} \to +\infty \quad (n \to +\infty)$$

(l. a **179.** feladatot), ezért a hányadoskritérium alkalmazható, és ez alapján a szóban forgó sor konvergens. ■

(c) A sort generáló sorozat azt sugallja, hogy a gyökkritériummal érdemes próbálkozni:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{n}{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}}.$$

Az első tényező határértéke $\frac{1}{e}$, a másodiké 1. A harmadik tényező

$$\frac{1}{\sqrt[n]{2}} = \sqrt[n]{\frac{n}{n+n}} \leq \sqrt[n]{\frac{n}{n+1}} \leq \sqrt[n]{\frac{n+1}{n+1}} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és $\sqrt[n]{2} \to 1$ $(n \to +\infty)$ miatt szintén 1-hez tart. Ezért

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2+n+1}} = \frac{1}{e} < 1.$$

A gyökkritérium alapján tehát a sor konvergens. ■

(d) Gondolja meg, hogy itt sem a hányados-, sem a gyökkritérium nem használható. Nézzük az összehasonlító kritériumot! Ennek alkalmazásához azonban egy *sejtést* kell kialakítanunk a konvergenciát vagy a divergenciát illetően. (Ettől függ ugyanis, hogy alulról vagy felülről becsüljük az adott kifejezést. Ha konvergenciát sejtünk, akkor felső becslést kell adnunk, divergencia sejtése esetén pedig alulról kell becsülnünk.) A sejtés kialakításához a „domináns" tagokat kell megtalálnunk. Itt egyszerű a dolgunk: $\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ nevezője nagy n-ekre n körül van. Így a $\sum \frac{1}{n}$ divergens sort kapjuk. A *sejtésünk* tehát az, hogy a megadott sor divergens. A *bizonyítás* ezek után már egyszerű: mivel

$$\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}} \geq \frac{1}{n+1} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

továbbá a $\sum \frac{1}{n+1}$ sor divergens (l. a **238.** feladatot), ezért a minoráns kritérium alapján a $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ sor divergens. ■

(e) Itt ismét az összehasonlító kritériummal próbálkozunk. A *sejtésünk* az, hogy a sor konvergens (ui. a nevező nagy n-ekre $n^{3/2}$ nagyságrendű, és a $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ sor konvergens). A *bizonyítás:* mivel minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2)}} \leq \frac{1}{n^{3/2}},$$

továbbá a $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ hiperharmonikus sor konvergens (l. a **239.** feladatot), ezért a majoráns kritérium alapján a feladatban megadott sor konvergens. ■

(f) Mivel az $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ sorozat monoton csökkenő (igazolja!), ezért Leibniz-típusú sorról van szó. De a sorozat nullasorozat is, és ebben az esetben a Leibniz-típusú sor (tehát a megadott sor is) konvergens. ■

253. (a) A sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve van. Nézzük most meg az $\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}}$ tört nagyságrendjét. A geometriai sorozattal kapcsolatos ismereteink (l. a **174.** feladatot) alapján a nevezőben a „domináns" tag 1, ha $|x| < 1$, és x^{4n}, ha $|x| > 1$. Ezt figyelembe véve egyszerű geometriai sort kapunk mind a két esetben. Azt a *sejtést* alakíthatjuk tehát ki, hogy a sor $|x| < 1$ és $|x| > 1$ esetén is konvergens.

A *bizonyítás:* Tegyük fel, hogy $|x| < 1$. Ekkor

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \le x^{2n}.$$

A $\sum x^{2n}$ geomertiai sor $|x| < 1$ esetén konvergens, ezért – a majoráns kritérium alapján – ilyen x-ekre a feladatban megadott sor is konvergens.

Ha $|x| > 1$, akkor

$$\frac{x^{2n}}{1+x^{4n}} \le \frac{x^{2n}}{x^{4n}} = \left(\frac{1}{x^2}\right)^n.$$

Mivel $\frac{1}{x^2} < 1$, ezért a $\sum\left(\frac{1}{x^2}\right)^n$ geometriai sor, következésképpen a feladatbeli sor is konvergens.

Ha $x = 1$ vagy $x = -1$, akkor $\sum \frac{1}{2}$ divergens sort kapjuk.

Összefoglalva: a megadott sor $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$ pontokban konvergens, $x = 1$ és $x = -1$ esetén pedig divergens. ∎

(b) A sor minden $x \in \mathbb{R}$ esetén értelmezve van, mert $3x^2 + 8x + 6$ diszkriminánsa $(8^2 - 4 \cdot 3 \cdot 6)$ negatív, ezért $3x^2 + 8x + 6 > 0$ minden x valós számra.

Elég „természetes” kiindulópont a gyökkritérium alkalmazásával próbálkozni. (Vehetnénk persze a hányadoskritériumot is.) Mivel

$$\sqrt[n]{\frac{n2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{|3x^2+8x+6|^n}} =$$

$$= \frac{2\sqrt[n]{n}}{\sqrt[n]{n+1}} \cdot \frac{1}{|3x^3+8x+6|} \to \frac{2}{|3x^2+8x+6|} \quad (n \to +\infty),$$

és

$$0 < \frac{2}{|3x^2+8x+6|} < 1 \iff 0 < 3x^2+8x+4$$

$$\iff x \in (-\infty, -2) \cup (-2/3, +\infty),$$

ezért a gyökkritérium alapján ilyen x-ekre a sor konvergens.

Mivel

$$\frac{2}{|3x^2+8x+6|} > 1 \iff 0 > 3x^2+8x+4 \iff x \in (-2, -2/3),$$

ezért ezekben az esetekben a sor divergens.

Ha $x = -2$ vagy $x = -\frac{2}{3}$, akkor a

$$\sum_{n=1} \frac{n2^n}{n+1} \cdot \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1} \frac{n}{n+1}$$

sor adódik, ami divergens, mert az $\left(\frac{n}{n+1}\right)$ nem nullasorozat.

Összefoglalva: a megadott sor az $x \in (-\infty, -2) \cup (-\frac{2}{3}, +\infty)$ pontokban konvergens, az $x \in [-2, -\frac{2}{3}]$ pontokban pedig divergens. ■

255. Használja fel, hogy

$$a_1 + (a_2 + a_3) + \dots + (a_{2^n} + \dots + a_{2^{n+1}-1}) \le a_1 + 2a_2 + \dots + 2^n a_{2^n},$$

illetve

$$a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{2^{n-1}+1} + \dots + a_{2^n}) \ge$$
$$\ge \frac{1}{2}a_1 + a_2 + 2a_4 + \dots + 2^{n-1}a_{2^n} = \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \dots + 2^n a_{2^n}).$$

■

257. 1. megoldás.

$$0{,}2\dot{3}2\dot{1} = \frac{2}{10} + \left(\frac{3}{10^2} + \frac{2}{10^3} + \frac{1}{10^4}\right) + \left(\frac{3}{10^5} + \frac{2}{10^6} + \frac{1}{10^7}\right) + \dots =$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots\right) + \frac{2}{10^3}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots\right) +$$
$$+ \frac{1}{10^4}\left(1 + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^6} + \dots\right) =$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{3}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} + \frac{2}{10^3} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} + \frac{1}{10^4} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^3}} =$$
$$= \frac{2}{10} + \frac{30}{999} + \frac{2}{999} + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{999} =$$
$$= \frac{2 \cdot 999 + 300 + 20 + 1}{9990} = \frac{2319}{9990} = \frac{773}{3330}.$$

2. megoldás. Legyen $A := 0{,}2\dot{3}2\dot{1}$. Ekkor $10^3 A = 232{,}1\dot{3}2\dot{1}$. *Vegyük észre* azt, hogy ha ebből A-t levonunk, akkor az ismétlődő szakaszok kiesnek, és egy véges tizedes törtet (azaz racionális számot) kapunk: $999A = 231{,}9$. Ezért

$$A = \frac{2319}{9990} = \frac{773}{3330}. \blacksquare$$

■ C-feladatok

258. (c) Legyen $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Mivel

$$\lim\left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|\right) = \lim\Big(\frac{1+n}{2+4n}\Big) = \frac{1}{4} < 1,$$

ezért a sor a hányadoskritérium alapján konvergens. ■

(i) A gyökkritérium alapján a sor konvergens, mert

$$\sqrt[n]{\left|\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n\right|} = \frac{1}{2}+\frac{1}{n} \to \frac{1}{2} < 1, \quad \text{ha} \to +\infty. \ ■$$

(m) A sor divergens, mert az n-edik tag nemnegatív és alulról becsülhető egy divergens sor n-edik tagjával: $\frac{1}{n^{(1+1/n)}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \geq \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{2}$, ha $n \geq N$, alkalmas $N \geq 1$ küszöbindexszel (amely létezik, mert $\sqrt[n]{n} \to 1$, ha $n \to +\infty$). ■

(p) Az összehasonlító kritériumot érdemes alkalmazni. Ehhez egy sejtést kell kialakítani arról, hogy a sor konvergens-e vagy sem. Az $\frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}}$ tört „nagy n-ekre $\frac{n}{\sqrt{n^4}} = \frac{1}{n}$ nagyságrendű”, továbbá a $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens, ezért a *sejtés* az, hogy a megadott sor divergens. Ezután már a bizonyítás igen egyszerű: mivel

$$\frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}} \geq \frac{n}{\sqrt{n^4+2n^4+3n^4}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

valamint a $\sum \frac{1}{n}$ sor (meg persze a $\sum \frac{1}{\sqrt{6}n}$ sor is) divergens, ezért a minoráns kritérium alapján a $\sum_{n=1} \frac{n+1}{\sqrt{n^4+2n^2+3}}$ sor divergens. ■

(q) A gyökkritériumot alkalmazzuk:

$$\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to \frac{e}{3} \quad (n \to +\infty).$$

Mivel $0 < \frac{e}{3} < 1$, ezért a $\sum_{n=1} \frac{1}{3^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2}$ sor konvergens. ■

(r) Legyen $\sqrt[2k+1]{2} = 1 + h_k$. Ekkor a Bernoulli-egyenlőtlenség szerint $2 > 1 + (2k+1)h_k$. Ebből az következik, hogy $h_k < \dfrac{1}{2k+1}$, azaz

$$2 - \sqrt[2k+1]{2} = 1 - h_k > 1 - \frac{1}{2k+1} = \frac{2k}{2k+1}.$$

Következésképpen $\prod_{k=1}^{n}\left(2-\sqrt[2k+1]{2}\right) \geq \prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}$. Mivel $h_k < \frac{1}{2k}$ is igaz, ezért a fenti gondolatmenet alapján

$$\prod_{k=1}^{n}\left(2-\sqrt[2k+1]{2}\right) \geq \prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}.$$

A két becslés kombinációjából azt kapjuk, hogy

$$\prod_{k=1}^{n}\left(2-\sqrt[2k+1]{2}\right) \geq \left(\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}\cdot\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Innen az összehasonlító kritérium szerint a sor divergens. ■

259. (e) A sor minden $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ esetén értelmezve van. Az $x = 1$ pontban nyilván konvergens; ha $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1, 1\}$, akkor a hányadoskritériumot alkalmazzuk:

$$\frac{\left|\frac{1}{2n+1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n+1}\right|}{\left|\frac{1}{2n-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{n}\right|} = \frac{2n-1}{2n+1}\left|\frac{1-x}{1+x}\right| \to \left|\frac{1-x}{1+x}\right| \qquad (n\to+\infty).$$

(A gyökkritériumból is ugyanezt kapnánk.)

A hányadoskritérium szerint az $x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ pontban a sor konvergens, ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-x}{1+x}\right| < 1 &\iff -1 < \frac{1-x}{1+x} < 1\\ &\iff -1 < \frac{1-x}{1+x} \text{ és } \frac{1-x}{1+x} < 1\\ &\iff 0 < \frac{2}{1+x} \text{ és } 0 < \frac{2x}{1+x}\\ &\iff x > -1 \text{ és } (x > 0 \text{ vagy } x < -1)\\ &\iff x > 0;\end{aligned}$$

és divergens, ha

$$\begin{aligned}\left|\frac{1-x}{1+x}\right| > 1 &\iff \frac{1-x}{1+x} > 1 \text{ vagy } \frac{1-x}{1+x} < -1\\ &\iff \frac{-2x}{1+x} > 0 \text{ vagy } \frac{2}{1+x} < 0\\ &\iff x \in (-1, 0) \text{ vagy } x < -1.\end{aligned}$$

Ha $x=0$, akkor a $\sum \frac{(-1)^n}{2n-1}$ sort kapjuk. Az $\left(\frac{1}{2n-1}\right)$ sorozat monoton csökkenve tart 0-hoz, ezért ez a Leibniz-típusú sor konvergens.

Összefoglalva: a megadott sor konvergens az $x \in [0,+\infty)$ pontokban és divergens, ha $x \in (-\infty, 0) \setminus \{-1\}$. ■

260. A $10^{m-1}-1$ és 10^m-1 között azon természetes számok száma, amelyek nem tartalmazzák a 7 számjegyet 9^m-9^{m-1}. Ezért a kérdezett összeg kisebb, mint

$$\frac{9-1}{1}+\frac{9^2-9}{10}+\frac{9^3-9^2}{10^2}+\cdots=80. \quad ■$$

261. Mivel a $\sum a_n$ sor konvergens, ezért $\lim(a_n)=0$, tehát létezik olyan $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $0 \le a_n \le 1$ minden $n \ge n_0$ természetes számra. Ezekre az indexekre akkor $0 \le a_n^2 \le a_n$ is teljesül. Az állítás tehát a majoráns kritérium alapján igaz. Az állítás megfordítása azonban nem igaz, mert például a $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens, de a $\sum \frac{1}{n}$ sor divergens. Az $a_n \ge 0$ feltétel sem hagyható el, mert a $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ sor konvergens, a $\sum \frac{1}{n}$ sor azonban divergens. ■

262. Nem. Legyen például

$$a_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}, \qquad b_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}+\frac{1}{n} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Gondolja meg, hogy $\sum a_n$ konvergens, $\sum b_n$ divergens és az $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ sorozat aszimptotikusan egyenlő, azaz 1-hez konvergál. ■

263. (a) A $0<\lim\left(\frac{a_n}{b_n}\right)<+\infty$ feltételből következik, hogy léteznek olyan c_1, c_2 pozitív számok és $n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$c_1 b_n \le a_n \le c_2 b_n \qquad \text{minden } n \ge n_0 \text{ esetén.}$$

Alkalmazza most a majoráns kritériumot. ■

264. A $\sum a_n$ sor konvergens, ezért a sorozatokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján $\forall\, \varepsilon>0$ számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy

$$\left|a_n+a_{n+1}+\cdots+a_{2n}\right|<\varepsilon \qquad \forall\, n \ge n_0 \text{ esetén.}$$

Az (a_n) sorozat monoton csökkenve tart nullához (így $a_n \geq 0$ is teljesül minden $n \in \mathbb{N}$ számra), ezért

$$\varepsilon > \left|a_n + \cdots + a_{2n}\right| = a_n + \cdots + a_{2n} \geq n a_{2n} \qquad (n \geq n_0),$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim(2n a_{2n}) = 0$. Hasonlóan igazolható, hogy $\lim\big((2n+1)a_{2n+1}\big) = 0$, tehát $\lim(n a_n) = 0$ valóban fennáll. ■

265. **A Dirichlet-féle konvergenciakritérium.** Jelöljük s_n-nel a $\sum a_n$ sor n-edik részletösszegét:

$$s_n := a_1 + a_2 + \cdots + a_n.$$

A feladat állítását a sorokra vonatkozó Cauchy-féle konvergenciakritériummal fogjuk bizonyítani. Azt kell tehát belátni, hogy $\forall\, \varepsilon > 0$ valós számhoz $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, hogy $\forall\, p \in \mathbb{N}$ és $\forall\, n \geq n_0$ esetén

$$(*) \qquad \left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| < \varepsilon.$$

Ennek bizonyításához az ún. **Abel-féle átalakítást** használjuk fel:

$$\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=n}^{n+p} s_k\big(b_k - b_{k+1}\big) - \big(s_{n-1}b_n - s_{n+p}b_{n+p+1}\big).$$

A feladat feltételei szerint

$$|s_n| \leq K \ (n \in \mathbb{N}), \text{ és } b_1 \geq b_2 \geq \cdots \geq b_n \geq \cdots \to 0, \text{ ha } n \to +\infty,$$

ezért

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p} a_k b_k\right| \leq K\Big(\sum_{k=n}^{n+p}\big(b_k - b_{k+1}\big) + b_n + b_{n+p+1}\Big) \leq 3Kb_n < \varepsilon,$$

ha $n \geq n_0 := [\varepsilon/(3K)] + 1$, azaz $(*)$ valóban fennáll. ■

269. (b) A sor konvergenciáját illetően l. a **238.** feladatot. Az első 4 tagot összeadva $s_4 = \frac{205}{144}$ adódik. s_4 eltérését a sorösszegtől például így becsülhetjük:

$$0 < \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{4} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n^2} <$$

$$< \sum_{n=5}^{+\infty} \frac{1}{n(n-1)} = \sum_{n=5}^{+\infty} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sum_{n=5}^{N} \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = \lim_{N\to+\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{N} \right) = \frac{1}{4}.$$

Mivel a részletösszegek sorozata szigorúan monoton növő, ezekből azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \in \left(\frac{205}{144}, \frac{205}{144} + \frac{1}{4} \right) = \left(\frac{205}{144}, \frac{241}{144} \right) \subset (1,4236\dot{1} \ ; \ 1,6736\dot{1}).$$

Megjegyezzük, hogy $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ pontos értéke $\frac{\pi^2}{6} \approx 1,64493$. ■

270. (c) Az $\left(\frac{1}{n!}\right)$ sorozat monoton csökkenő, így Leibniz-típusú sorról van szó, ami ebben az esetben konvergens, mert az $\left(\frac{1}{n!}\right)$ nullasorozat.

Legyen $A := \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n!}$. A Leibniz-típusú sorokra vonatkozó hibabecslés alapján

$$\left|A - s_n\right| = \left|A - \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}\right| \le \frac{1}{(n+1)!}.$$

Mivel $\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-4} = \frac{1}{10000}$, ha $n \ge 7$ (ui. $8! = 40320$), ezért

$$s_7 = \frac{177}{280} = 0,632\dot{1}4285\dot{7}$$

már 10^{-4}-nél (sőt $\frac{1}{8!} = \frac{1}{40320}$-nál) közelebb van a sor A összegéhez:

$$A \in \left[s_7 - \frac{1}{8!}, s_7 + \frac{1}{8!} \right] \subset [0,632118; 0,632167].$$

Az s_7 közelítés tehát legalább 4 tizedesjegyig pontos. (Egyébként megmutatható – hogyan? –, hogy a sor összege $1 - \frac{1}{e}$.) ■

5.3. Műveletek számsorokkal

■ A-feladatok

272. A $\sum(a_{2n}+a_{2n+1})$ sor a $\sum a_n$ sor egy zárójelezett sora, ezért a zárójelek elhelyezésére vonatkozó tétel alapján, ha $\sum a_n$ konvergens, akkor $\sum(a_{2n}+a_{2n+1})$ is az. Az állítás megfordításának az igazolásához ellenőrizze, hogy teljesülnek a zárójelek elhagyására vonatkozó tétel feltételei. ■

273. Az $1-1+1-1+1+\cdots$ sor divergens, az $(1-1)+(1-1)+\cdots$ pedig konvergens. ■

274. Van ilyen sor. Legyen $\sum a_n$ az

$$(1-1)+\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{3}\right)+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{5}+\tfrac{1}{6}+\tfrac{1}{7}-\tfrac{1}{4}-\tfrac{1}{5}-\tfrac{1}{6}-\tfrac{1}{7}\right)+$$
$$\cdots+\left(\tfrac{1}{2^k}+\tfrac{1}{2^k+1}+\cdots+\tfrac{1}{2^k+2^k-1}-\tfrac{1}{2^k}-\tfrac{1}{2^k+1}-\cdots-\tfrac{1}{2^k+2^k-1}\right)+\cdots$$

sorból a zárójelek elhagyásával kapott sor. Ezt nyilván egy nullasorozat generálja, továbbá $\sum a_n$-nek a fenti zárójelezése konvergens. Azt kell még megmutatni, hogy $\sum a_n$ divergens. Valóban, a $\sum a_n$ sor részletösszegeinek van olyan részsorozata, amelynek mindegyik tagja nulla. Másrészt

$$\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k+1}+\cdots+\frac{1}{2^k+2^k-1}>2^k\cdot\frac{1}{2^{k+1}}=\frac{1}{2}\qquad(n\in\mathbb{N})$$

miatt a $\sum a_n$ sor részletösszegeinek van olyan részsorozata is, amelyiknek mindegyik tagja $>\frac{1}{2}$. Ez pedig azt jelenti, hogy a részletösszegek sorozata nem konvergens, azaz a $\sum a_n$ sor divergens. ■

■ B-feladatok

275. (a) A két sor Cauchy-szorzata a definíció (l. a **113.** oldalt) szerint a

$$c_n=\sum_{i+j=n}\frac{(-1)^i}{i+1}\cdot\frac{(-1)^j}{j+1}=$$
$$=(-1)^n\sum_{i=0}^{n}\frac{1}{i+1}\cdot\frac{1}{n+1-i}\qquad(n=0,1,2,\ldots)$$

sorozat által generált váltakozó előjelű sor. Ha megmutatjuk, hogy a $(|c_n|)$ sorozat monoton csökkenve tart 0-hoz, akkor a Leibniz-típusú sorokra vonatkozó tételből (l. a **102.** oldalt) már következik a bizonyítandó állítás, ti. az, hogy $\sum c_n$ konvergens.

Vegyük észre, hogy c_n a következő alakban írható fel:

$$c_n = (-1)^n \left(\frac{1}{1 \cdot (n+1)} + \frac{1}{2 \cdot n} + \cdots + \frac{1}{n \cdot 2} + \frac{1}{(n+1) \cdot 1} \right) =$$
$$= (-1)^n \frac{2}{n+2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n+1} \right),$$

mivel $\frac{1}{k(n+2-k)} = \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{n+2-k} \right)$.

A $(|c_n|/2)$ sorozat tehát a $\left(0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right)$ sorozat számtani közepeiből képzett sorozat. Ez egyrészt monoton csökkenő, másrészt a **198.** feladat alapján nullasorozat. Így tehát a $\sum c_n$ szorzatsor valóban konvergens. ■

(b) A két sor Cauchy-szorzata a

$$c_n = \sum_{i+j=n} \frac{(-1)^i}{\sqrt{i+1}} \cdot \frac{(-1)^j}{\sqrt{j+1}} =$$
$$= (-1)^n \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i+1}\sqrt{n+1-i}} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat által generált sor. Mivel

$$|c_n| = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{i+1}\sqrt{n+1-i}} \geq \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{\sqrt{n+1}\sqrt{n+1}} = \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{n+1} = 1,$$

ezért (c_n) nem nullasorozat, következésképpen a $\sum\limits_{n=0} c_n$ sor nem konvergens. ■

276. A $\sum\limits_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ sor valóban egy feltételesen konvergens sor (l. a **248.** feladatot). *Vegyük észre* azt, hogy ez a sor végtelen sok pozitív és végtelen sok negatív tagot tartalmaz, továbbá a pozitív tagokból képzett

$$\sum b_n := 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots$$

sor divergens, és az összege $+\infty$, azaz

$$\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N} b_n = +\infty =: \sum_{n=1}^{+\infty} b_n.$$

A negatív tagokból képzett

$$\sum c_n := -\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} - \cdots$$

sor összege pedig $-\infty$. (Egyébként érdemes meggondolni, hogy ezek nemcsak a fenti sorra, hanem *minden* feltételesen konvergens sorra is teljesülnek.)

A sornak egy alkalmas átrendezését így adhatjuk meg: Válasszunk a $\sum b_n$ sorból annyi pozitív tagot, amíg az összeg 12-nél nagyobb lesz

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} > 12,$$

de

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1-1} < 12.$$

(Mivel $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n = +\infty$, ezért ilyen k_1 index nyilván létezik.) Ehhez az összeghez a $\sum c_n$ sorból annyi negatív tagot adunk, hogy 12 alá kerüljünk

$$b_1 + \cdots + b_{k_1} + c_1 + \cdots + c_{j_1} < 12$$

de

$$b_1 + \cdots + b_{k_1} + c_1 + \cdots + c_{j_1-1} > 12.$$

(Ilyen j_1 index is van, mert $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n = -\infty$.) Gondolja meg, hogy ez az eljárás hasonló módon folytatható.

Annak igazolásához, hogy az ilyen módon átrendezett sor összege valóban 12, mutassa meg, hogy $|s_n - 12|$ nem nagyobb, mint az s_n-ben szereplő utolsó pozitív tag és az s_n-ben szereplő utolsó negatív tag abszolút értékének a maximuma.

A feladatban megadott sor átrendezhető úgy is, hogy az összege $+\infty$ legyen. Vegyünk most egy tetszőleges, $+\infty$-hez tartó szigorúan monoton növő (p_n) sorozatot. Válasszunk ki a $\sum b_n$ pozitív tagú sorból annyi tagot, amíg az összeg nagyobb lesz $p_1 + \frac{1}{2}$-nél ($-\frac{1}{2}$ a $\sum c_n$ sor első tagja!)

$$b_1 + b_2 + \cdots + b_{k_1} \geq p_1 + \frac{1}{2}.$$

Vonjunk le ebből $\frac{1}{2}$-et. Folytassuk ezt az eljárást. ■

277. A $\sum\limits_{n=0} q^n$ geometriai sor önmagával vett Cauchy-szorzata a

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} q^i q^{n-i} = (n+1)q^n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

sorozat által generált sor. Mivel $|q| < 1$ esetén a $\sum q^n$ geometriai sor abszolút konvergens, ezért a Cauchy-szorzatuk is abszolút konvergens, és az összege

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1)q^n = \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{+\infty} q^n\Big) = \left(\frac{1}{1-q}\right)^2.$$

A $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} nq^n$ sor összegét a

$$\sum_{n=1}^{+\infty} nq^n = \sum_{n=1}^{+\infty} (n+1)q^n - \sum_{n=1}^{+\infty} q^n$$

egyenlőség felhasználásával számíthatjuk ki. (Ezt az összeget a **244.** feladatban más módszerrel határoztuk meg.) ■

■ C-feladatok

278. A „Cantor-féle átlós eljárással” igazolható, hogy a racionális számok halmaza sorozatba rendezhető, azaz létezik egy $(r_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ bijekció. Legyen

$$a_0 := 0,$$
$$a_1 := r_1,$$
$$a_n := r_n - r_{n-1} \qquad (n = 2, 3, \ldots).$$

Ekkor a

$$\sum_{n=0} a_n := \sum_{n=0} (r_n - r_{n-1}) \qquad (r_{-1} := 0)$$

sor rendelkezik a kívánt tulajdonsággal. Ezt igazolandó mutassa meg a következőket:

(i) Tetszőleges $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$ elemhez van olyan $(t_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$ injektív sorozat, amelyikre $\lim(t_n) = \alpha$ teljesül.

(ii) A (t_n) sorozat bármelyik átrendezése konvergens, és a határértéke α.

(iii) A (t_n) sorozatnak van olyan átrendezése, amelyik az (r_n) sorozatnak egy (ν_n) indexsorozat által generált részsorozata.

(iv) A $\sum a_n$ sor (ν_n) indexsorozat által meghatározott zárójelezése konvergens, és az összege α. ■

279. A Cauchy-szorzat definíciója szerint

$$c_n = \sum_{i=0}^{n} \left(-\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{1}{3}\right)^{n-i} = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i,$$

amiből látjuk, hogy ha n páratlan, akkor $c_n = 0$, míg ha n páros, akkor $c_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$. Így $\sum_{n=0} c_n = \sum_{n=0} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n}$.
Másrészt a mértani sorok összegképleteiből

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}, \qquad \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{3}{2},$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{2n} = \frac{1}{1-\frac{1}{3^2}} = \frac{9}{8},$$

tehát valóban

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n,$$

mivel $\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{8}$. ■

Megjegyzés. Mivel két abszolút konvergens (mértani) sor Cauchy-szorzatáról van szó, a feladat állítása az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tételből eleve következik. Ezt tehát most a tételtől függetlenül ellenőriztük. ■

280. Jelölje $\sum_{n=0} c_n$ a $\sum_{n=0} \frac{2^n}{n!}$ és a $\sum_{n=0} \frac{3^n}{n!}$ sor Cauchy-szorzatát. A Cauchy-szorzat definíciója szerint $c_n = \sum_{i=0}^{n} \frac{2^i}{i!} \cdot \frac{3^{n-i}}{(n-i)!}$. Először megmutatjuk, hogy $c_n = \frac{5^n}{n!}$. Valóban, alkalmazva a binomiális tételt $5^n \equiv (2+3)^n$-re, és felhasználva, hogy $\binom{n}{i} = \frac{n!}{i!(n-i)!}$, kapjuk, hogy

$$\frac{1}{n!}(2+3)^n = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^i \cdot 3^{n-i} = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}2^i \cdot 3^{n-i},$$

ez utóbbi kifejezés viszont éppen c_n-nel egyenlő. Tehát

$$\Big(\sum_{n=0} \frac{2^n}{n!}\Big) \times \Big(\sum_{n=0} \frac{3^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0} \frac{5^n}{n!},$$

ahol $\times$ a Cauchy-szorzást jelöli. A Cauchy-szorzat mindkét tényezője abszolút konvergens (ami például a hányadoskritériummal látható), ezért az abszolút konvergens sorok Cauchy-szorzatára vonatkozó tétel alapján a Cauchy-szorzat összege egyenlő a tényező-sorok összegének a szorzatával, azaz a

$$\Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!}\Big) \cdot \Big(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{n!}\Big) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!}$$

egyenlőség valóban teljesül. ■

282. Kezdjük a megfelelő sorok konvergenciájának a vizsgálatával. Egyszerűen megmutathatjuk azt, hogy a

$$\sum_{k=1} \frac{(ax)^k}{1-x^k} \quad \text{és a} \quad \sum_{n=1} \frac{ax^n}{1-ax^n} \qquad (|a| \le 1, |x| < 1)$$

sorok abszolút konvergensek. Valóban, a bal oldali sornak az

$$\frac{1}{1-|x|}\sum_{k=1} |ax|^k$$

egy majoráns sora, és ez utóbbi az $|ax| < 1$ hányadosú konvergens geometriai sor. (Itt felhasználtuk még azt is, hogy $|x| < 1$ esetén $1 - x^k \ge 1 - |x|$ teljesül minden $k = 1, 2, \ldots$ számra.) A jobb oldali sornál pedig alkalmazzuk az

$$\left|\frac{ax^n}{1-ax^n}\right| \le \frac{|a|}{1-|ax|}|x|^n$$

egyenlőtlenséget.

A folytatás már nem ilyen egyszerű. A megoldás kulcsa az, hogy az $\frac{1}{1-x^k}$ és az $\frac{1}{1-ax^n}$ törtet geometriai sor összegeként fogjuk fel:

$$\frac{1}{1-x^k} = 1 + x^k + (x^k)^2 + (x^k)^3 + \cdots$$
$$(|x| < 1, k = 1, 2, \ldots),$$
$$\frac{1}{1-ax^n} = 1 + ax^n + (ax^n)^2 + (ax^n)^3 + \cdots$$
$$(|a| \le 1, |x| < 1, n = 1, 2, \ldots).$$

Ezek alapján a feladatbeli bal oldali összeget így:

$$\begin{aligned} B := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(ax)^k}{1-x^k} &= \\ = a\big(x + x^2 + x^3 + \cdots\big) + a^2\big(x^2 + (x^2)^2 &+ (x^2)^3 + \cdots\big) + \\ + a^3\big(x^3 + (x^3)^2 + (x^3)^3 &+ \cdots\big) + \cdots, \end{aligned} \tag{$*$}$$

a jobb oldali összeget pedig így írhatjuk fel:

$$\begin{aligned} J := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{ax^n}{1-ax^n} &= \\ = \big[(ax) + (ax)^2 + (ax)^3 + \cdots\big] + \big[(ax^2) &+ (ax^2)^2 + (ax^2)^3 + \cdots\big] + \\ + \big[(ax^3) + (ax^3)^2 + (ax^3)^3 &+ \cdots\big) + \cdots. \end{aligned} \tag{$**$}$$

A geometriai sor összegképletét használva igazolható, hogy

$$B = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} a^k \Big(\sum_{n=1}^{+\infty} (x^k)^n\Big) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{k=1}^{N} \sum_{n=1}^{N} (ax^n)^k,$$

illetve

$$J = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \Big(\sum_{k=1}^{+\infty} (ax^n)^k\Big) = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \sum_{k=1}^{N} (ax^n)^k,$$

ezért a $B = J$ egyenlőség valóban fennáll. ■

Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a $(**)$ összeg első tagját $([\cdots])$ úgy kapjuk meg, hogy $(*)$ jobb oldalán szereplő tagokban $\big(a(\cdots)\big)$ az első tagokat „összeadjuk”, azaz: $(*)$ jobb oldalán a zárójeleket elhagyjuk, majd a tagokat átrendezzük. A feladat állítását bebizonyíthatjuk úgy is, ha megmutatjuk azt, hogy ezek a műveletek valóban elvégezhetők. Megjegyezzük, hogy ez az állítás nemcsak a fenti *geometriai sorokra*, hanem jóval általánosabban minden *abszolút konvergens sorra* is teljesül; és éppen ezt állítja az ún. *nagy átrendezési tétel.* ■

5.4. Komplex tagú sorok

283. A bizonyítás ugyanaz, mint a valós esetben (l. a **236.** feladatot). Itt persze a komplex geometriai sorozat konvergenciájára vonatkozó eredményt (l. a **229.** feladatot) kell felhasználni. ■

284. (c) Szétbontva a törtet valós és képzetes részre (a szokásos módon: a $\sqrt{n}-i$ konjugálttal bővítve)

$$\frac{1}{\sqrt{n}+i}=\frac{\sqrt{n}}{n+1}-i\frac{1}{n+1}$$

adódik. Az eredeti sor divergens, mert a valós része és a képzetes része egyaránt divergens (hiszen a tagok nagyságrendje $\frac{1}{\sqrt{n}}$, illetve $\frac{1}{n}$). ■

(d) A sort generáló $\frac{n(2+i)^n}{2^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat nem nullasorozat (vegyük ugyanis a tagok abszolút értékét), ezért a sor divergens. ■

(e) Mivel

$$\left|\frac{1}{n(3+i)^n}\right| \leq \frac{1}{|3+i|^n}=\frac{1}{(\sqrt{10})^n} \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és a $\sum\left(\frac{1}{\sqrt{10}}\right)^n$ geometriai sor konvergens, ezért az összehasonlító kritérium alapján a feladatbeli sor abszolút konvergens. ■

285. (a) A $|z-7|=0$ esetben a sor nyilván konvergens. Ha $|z-7|\neq 0$, akkor a hányadoskritériumot (l. a **95.** oldalt) alkalmazzuk:

$$\frac{|z-7|^{n+1}}{\left(2(n+1)^2-5(n+1)\right)4^{n+1}} \cdot \frac{(2n^2-5n)4^n}{|z-7|^n} =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2-\frac{5}{n}}{2\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 5\left(1+\frac{1}{n}\right)} \cdot |z-7| \to \frac{|z-7|}{4}, \quad \text{ha } n \to +\infty,$$

ezért $|z-7| < 4$ esetén (vagyis a 7 középpontú, 4 sugarú nyílt körlapon) a sor konvergens, $|z-7| > 4$ esetén pedig divergens.

A 7 középpontú 4 sugarú körvonal pontjaiban a hányadoskritérium nem alkalmazható, itt külön vizsgálatra van szükség. Ha z ezen a körvonalon van, akkor a sorunk (szerencsére!) abszolút konvergens, tehát konvergens is, mert a

$$\sum_{n=1} \frac{|z-7|^n}{|2n^2-5n|4^n} = \sum_{n=1} \frac{1}{|2n^2-5n|}$$

sor konvergens (ui. ennek a $\sum \frac{1}{n^2}$ konvergens sor egy majoráns sora). ■

286. A hányadoskritériumból következik, hogy a sor $|z| < 1$ esetén konvergens, ha $|z| > 1$, akkor pedig divergens. Az egységkör kerületén a konvergenciát a *Dirichlet-kritériummal* (l. a **265.** feladatot) lehet vizsgálni. Először gondolja meg, hogy a szóban forgó állítás igaz akkor is, ha a $\sum a_n$ sor *komplex*, és a (b_n) *valós* sorozat monoton csökkenve tart nullához. Ezután mutassa meg, hogy $|z| = 1$ és $z \neq 1$ esetén a kritérium feltételei teljesülnek, ezért a sor ezekben a pontokban konvergens, a $z = 1$ esetben pedig divergens. ■

Irodalomjegyzék

[1] Császár Á., *Végtelen sorok*, (Egyetemi jegyzet), ELTE, Budapest, 1974.

[2] Graham, R. L., Knuth, D. E. és Patashnik, O., *Konkrét matematika*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1998.

[3] Gyemidovics, B. P., *Matematikai analízis (feladatgyűjtemény)*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[4] Halmos, P. R., *Elemi halmazelmélet* és Siegler, L. E., *Halmazelméleti feladatok* (egy kötetben), Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[5] Járai A. (szerkesztő), *Bevezetés a matematikába*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2005.

[6] Kósa A., *Ismerkedés a matematikai analízissel*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[7] Kósa A., Mezei I. és S. Gyarmati E., *Analízis-példatár*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1986.

[8] Leindler L. és Schipp F., *Analízis I.*, (Egyetemi jegyzet), ELTE, Budapest, 1998.

[9] Ljasko, I. I., Bojarcsuk, A. K., Gay, J. G. és Golovacs, G. P., *Matematikai analízis feladatokban I., II.*, Kijev, 1974, 1977.

[10] Matolcsi T., *Analízis I.*, (Egyetemi jegyzet), ELTE, Budapest, 1995.

[11] Monostory I. (szerkesztő), *Matematikai példatár I–II.*, (Egyetemi jegyzet), BME, Budapest, 1980.

[12 Rimán J., *Matematikai analízis feladatgyűjtemény I., II.*, (Egyetemi jegyzet), KLTE, 1992.

[13] Rudin, W., *A matematikai analízis alapjai*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1978.

[14] Schipp F., *Analízis I.*, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs, 1994.

[15] Simon P., *Fejezetek az analízisből*, (Egyetemi jegyzet), ELTE, Budapest, 1997.

[16] T. Sós Vera, *Analízis I/1.*, (Egyetemi jegyzet), ELTE, Budapest, 1973.