3.5.3.3. Másodrendű felületek, az egyenletek normálalakja

1. Centrális felületek A következőkben ismertetésre kerülő egyenletek, amelyeket a másodrendű felületek normálalakban felírt egyenleteinek nevezünk, a másodrendű felületek általános egyenletéből (lásd 220. old.) adódnak abban az esetben, amikor a középpont és a koordinátarendszer kezdőpontja egybeesik. A középpont felezi a rajta áthaladó húrokat. A koordinátatengelyek a felületek szimmetriatengelyeiben fekszenek, úgyhogy a koordinátasíkok egyben szimmetriasíkok is.

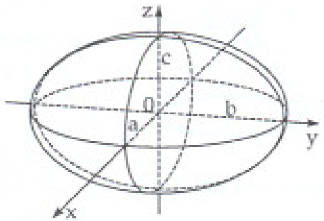
2. Ellipszoidok Az a, b, c féltengelyek (**3.181. ábra**) használatával az egyenlet:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\,. \tag{3.383}$$

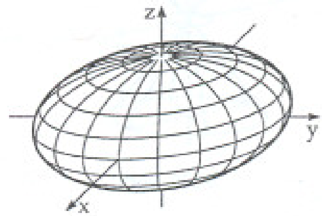
A következő speciális eseteket különböztetjük meg: **a)** $a=b>c$: összenyomott forgásellipszoid (*lencsealak*) (**3.182. ábra**).
b) $a=b<c$: elnyújtott forgásellipszoid (*szivaralak*) (**3.183. ábra**).
c) $a=b=c$: gömb, amelynek egyenlete $x^2+y^2+z^2=a^2$.

A kétféle forgásellipszoid egy x, z-síkbeli, a és c féltengelyű ellipszisnek a z-tengely körüli forgatásával, a gömb egy körnek valamelyik tengely körül való forgatásával áll elő. Ellipszoidot metsző sík metszési alakzata ellipszis, speciális esetben kör. Az ellipszoid térfogata

$$V=\frac{4\pi abc}{3}\,. \tag{3.384}$$



3.181. ábra.



3.182. ábra.

3. Hiperboloidok

1. Egyköpenyű hiperboloid (3.184. ábra) Az a és b valós, valamint a c képzetes féltengellyel fennáll

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1\,. \qquad \text{(Az alkotókról lásd 219. old.)} \tag{3.385}$$

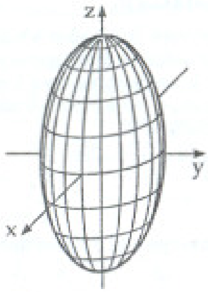
2. Kétköpenyű hiperboloid (3.185. ábra) A c valós és a, b képzetes féltengelyekkel fennáll

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1\,. \tag{3.386}$$

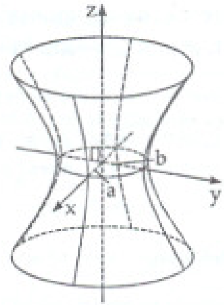
A z-tengellyel párhuzamos síkmetszetek mindkét hiperboloidnál hiperbolák. Az egyköpenyű hiperboloid esetében a metszet lehet metsző egyenespár is. Az x, y-síkkal párhuzamos síkmetszetek ellipszisek. Ha $a=b$, a hiperboloidot egy a és c féltengelyű hiperbolának a $2c$ tengely körüli forgatásával lehet származtatni. Ez utóbbi tengely az egyköpenyű hiperboloid esetében képzetes, a kétköpenyű esetében valós.

4. Kúpok (3.186. ábra) Ha a csúcs a koordinátarendszer kezdőpontjában helyezkedik el, akkor az egyenlet:

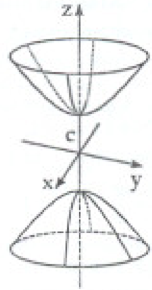
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0\,. \tag{3.387}$$



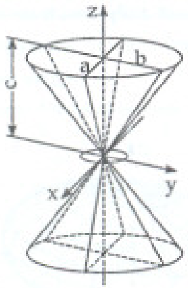
3.183. ábra.



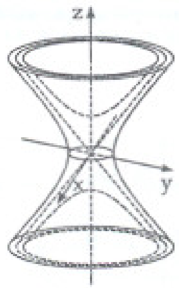
3.184. ábra.



3.185. ábra.



3.186. ábra.



3.187. ábra.

Vezérgörbéje egy olyan a és b féltengelyű ellipszis lehet, amelynek síkja a z-tengelyre merőleges és a koordinátarendszer kezdőpontjától c távolságra van. Ennél az előállításnál a kúp az

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1 \qquad (3.388)$$

hiperboloidok aszimptotikus kúpjának fogható fel, amelynek alkotója a végtelenben mindkét hiperboloidot határtalanul megközelíti (**3.187. ábra**). Ha $a = b$, akkor egyenes körkúpot kapunk (lásd 153. old.).

5. Paraboloidok Mivel a paraboloidoknak nincs középpontjuk, a következő egyenletekben abból indulunk ki, hogy a paraboloid csúcspontja a koordinátarendszer kezdőpontjában helyezkedik el, a z-tengely szimmetriatengely, az x, z- és az y, z-sík pedig szimmetriasík.

1. Elliptikus paraboloid (3.188. ábra):

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}. \qquad (3.389)$$

A z-tengellyel párhuzamos síkmetszetek parabolák, az x, y-síkkal párhuzamos síkmetszetek ellipszisek.

2. Forgásparaboloid: Ha $a = b$, akkor forgásparaboloidot kapunk, amely a $z = x^2/a^2$ parabolának az x, z-síkban fekvő tengelye körüli forgatásával származtatható.

Azon paraboloidcsésze térfogata, amelyet egy a z-tengelyre merőleges sík h magasságban vág le,

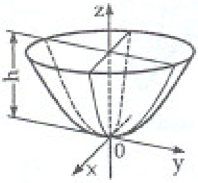
$$V = \frac{1}{2}\pi abh, \qquad (3.390)$$

vagyis a vele azonos fedőlapú és magasságú elliptikus henger térfogatának a fele.

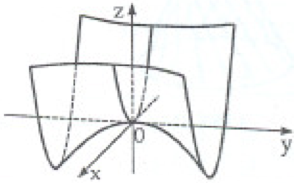
3. Hiperbolikus paraboloid (3.189. ábra):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}. \tag{3.391}$$

Az y, z-síkkal párhuzamos síkmetszetek és az x, z-síkkal párhuzamos síkmetszetek egybevágó parabolák, az x, y-síkkal párhuzamos síkmetszetek pedig hiperbolák és egy metsző egyenespár.



3.188. ábra.



3.189. ábra.

6. Felület alkotói a teljesen a felületben fekvő egyenesek. Példák a kúp- és a hengerfelület alkotói.

1. Egyköpenyű hiperboloid (3.190. ábra):

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{3.392}$$

Az egyköpenyű hiperboloidnak két alkotóserege van; ezek egyenletei

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = u\left(1 + \frac{y}{b}\right), \quad u\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 - \frac{y}{b}; \tag{3.393a}$$

$$\frac{x}{a} + \frac{z}{c} = v\left(1 - \frac{y}{b}\right), \quad v\left(\frac{x}{a} - \frac{z}{c}\right) = 1 + \frac{y}{b}, \tag{3.393b}$$

ahol u és v tetszőleges érték.

2. Hiperbolikus paraboloid (3.191. ábra):

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \tag{3.394}$$

A hiperbolikus paraboloidnak szintén két alkotóserege van; ezek egyenletei a következők:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = u, \quad u\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) = z; \text{(3.395a)} \qquad \frac{x}{a} - \frac{y}{b} = v, \quad v\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = z. \text{(3.395b)}$$

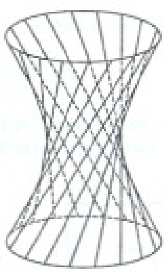
Itt u és v megint tetszőleges érték. Mindkét esetben a felület minden pontján két egyenes, seregenként egy alkotó, megy át, de a **3.190., 3.191. ábrákon** a kettő közül mindenütt csak az egyik van berajzolva.

7. Hengerek

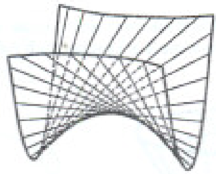
1. Elliptikus henger (3.192. ábra): $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.396}$$

2. Hiperbolikus henger (3.193. ábra): $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{3.397}$$

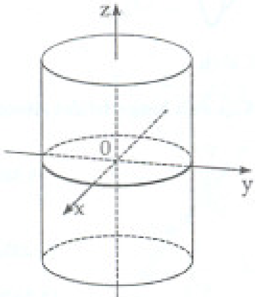
3. Parabolikus henger (3.194. ábra): $$y^2 = 2px. \tag{3.398}$$



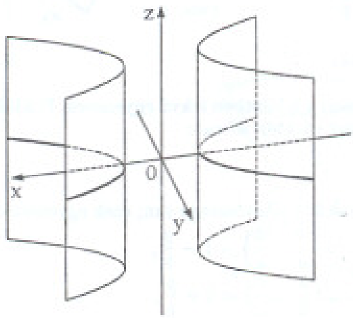
3.190. ábra.



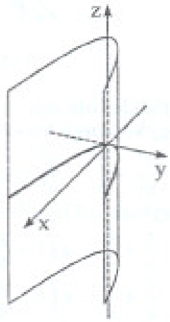
3.191. ábra.



3.192. ábra.



3.193. ábra.



3.194. ábra.

3.5.3.4. Másodrendű felületek, általános elmélet

1. Másodrendű felület általános egyenlete

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{23}yz + 2a_{31}zx + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0\,. \quad (3.399)$$

2. Másodrendű felület alakjának megállapítása a felület egyenletéből Másodrendű felület alakját, ha a felület egyenletét ismerjük, a Δ, δ, S, T invariánsok előjele alapján, a **3.22.** és **3.23. táblázatból** határozhatjuk meg. E táblázatokban, a felület megnevezésén kívül, megtalálhatjuk egyenletének normálalakját is, amelyre egy megadott egyenlet átalakítható. Az ún. képzetes felületek egyenleteiből semmilyen valós pont koordinátáit sem lehet kiszámítani, kivéve a képzetes kúp csúcsát és két képzetes sík metszésvonalát.

3. Másodrendű felület invariánsai Az $a_{ik} = a_{ki}$ jelöléssel legyen

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}; \quad (3.400a) \qquad \delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad (3.400b)$$

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33}\,; \quad (3.400c)$$

$$T = a_{22}a_{33} + a_{33}a_{11} + a_{11}a_{22} - a_{23}^2 - a_{31}^2 - a_{12}^2\,. \quad (3.400d)$$

A koordinátatengelyek eltolása vagy elforgatása során ezek a mennyiségek nem változnak meg.