Analízis 7. vizsgatematika

Programtervező matematikus szak

2006–2007. tanév 1. félév

Az előadáson nem szereplő, de kért bizonyításokat a hivatkozások megadásával jelöltem meg. Az alkalmazott rövidítések: SP= Simon Péter, *Analízis V* c. jegyzete. SZNB=Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok* c. tankönyve

Sikeres írásbeli esetén a vizsgán az alábbi témakörökből kettőt kapnak. Egyiket az első nyolcból, másikat pedig a többiből.

1. Felületek megadásának módjai, példák. Felület értelmezése. Áttérés az explicit alakról a paraméteres alakra. Különböző paraméterezések.
2. Paramétervonalak. A felületi görbe fogalma. Érintősík, felületi normális.
3. Felületi görbe ívhossza. A felület első alapformája. Felület felszíne. Forgásfelület felszíne.
4. A második alapmennyiségek.
5. Felületi görbék görbülete. Meusnier tétele.
6. Egy általános szélsőérték-feladat. Főgörbületek, főirányok. Euler tétele. Felületi pontok osztályozása.
7. Skalármezők, vektormezők. Divergencia, rotáció, a nabla szimbolika. Reguláris tartományok.
8. Vonal-, felületi- és térfogati integrál. Integrálátalakító tételek.
9. A Riemann-integrálra vonatkozó alapvető eredmények. A Riemann-integrál „kritikája”, példák.
10. Előzetes megjegyzések a mértékelmélethez: halmazok mértéke $\mathbb{R}^p$-ben, a mérték Lebesgue–Carathéodory-féle általánosítása.
11. A mértékelmélet alapvető fogalmai.
12. Az $\mathbb{R}^p$-beli intervallumok $\mathbb{I}^p$ rendszere, mértéke, ezek alapvető tulajdonságai.
13. Félgyűrű, gyűrű, generált gyűrű; előmérték, kvázimérték. Az első kiterjesztési tétel.
14. A második kiterjesztési tétel.
15. A kiterjesztési tétellel kapcsolatos kérdések és válaszok.
16. Lebesgue- és Borel-mérhető halmazok, illetve mértékek.
17. Mérhető függvények értelmezése, nívóhalmazok. Mérhető függvények tulajdonságai (1., 2., 3.).
18. Lépcsős függvények. Jegorov és Luzin tételei.
19. Lebesgue-integrál mértékterekben:
   (a) Lépcsősfüggvények integrálja, az integrál alaptulajdonságai.
   (b) Nemnegatív mérhető függvények integrálja. Az integrál alaptulajdonságai.
   (c) Beppo Levi tétele (l. SP 90. oldal).
   (d) Mérhető függvények integrálja. Lebesgue-integrálható függvények értelmezése.
20. Az $L(X, \Omega, \mu)$ függvénytér alaptulajdonságai:
   (a) Ekvivalens feltételek a Lebesgue-integrálhatóságra (l. SP 95. oldal).
   (b) Linearitás, egyenlőtlenségek (l. SP 97. oldal).
   (c) A Lebesgue-integrál nullamértékű halmazra „érzéketlen”. (l. SP 99. oldal).

21. A határátmenet és az integrálás sorrendjének felcserélhetőségére vonatkozó alapvető eredmények.

22. A Lebesgue-integrál Riesz-féle felépítése (l. a gyakorlat, ill. SZNB 141–157. oldal):

(a) Lebesgue-értelemben nullamértékű halmazok.

(b) Lépcsősfüggvény integrálja,

(c) az **A** lemma (bizonyítással),

(d) a **B** lemma (bizonyítással).

(e) Az integrálfogalom kiterjesztése. (Bizonyítások nélkül.)

(f) Beppo Levi-tétel, Lebesgue-tétel, Fatou-féle lemma. (Bizonyítások nélkül.)