Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna <zsuzska@cs.elte.hu>

1. gyakorlat, 2005. február 15.

1. Minimalizáló sorozat-e az $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre a $x_k = k$, $k = 1, 2, \dots$ sorozat?
2. Minimalizáló sorozat-e az $f(u) = \frac{\|u\|}{1+\|u\|^2}$, $(u \in \mathbb{R}^n)$ függvényre az $u_k = k * \mathbf{1}$ sorozat, $k = 1, 2, \dots$, ahol $\mathbf{1} = (1, \dots, 1)$?
3. Definiáljuk a függvények folytonosságát!
4. Milyen összefüggést ismerünk a folytonos függvények és a minimalizáló sorozatok között?
5. Fog-e minden U-beli minimalizáló sorozat az $f(x)$ U-beli minimumhelyéhez konvergálni, ha
   (a) $U = \mathbb{R}^n$ és $f(u) = \|u\|^3$?
   (b) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x + 3y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ és $f(u) = x + y$?
6. Felveszi-e az $f(u)$ függvény a minimumát az U halmazon, ha
   (a) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ és $f(u) = x + \frac{1}{y}$?
   (b) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x \geq -15, x + 2y \leq 3\}$ és $f(u) = x + 2y$?
7. Határozzuk meg a következő függvények minimumát!
   (a) $f_1(x, y) = (x - 3)^2 + \sin y \cos y$
   (b) $f_2(x) = x^6 - 16x^3 + y^2 + 6y + 27$
8. Írjuk fel a nemlineáris programozási modelljét az alábbi feladatoknak!
   (a) Melyik az az egységsugarú körbe írt háromszög, melynek az oldalainak a négyzetösszege maximális?
   (b) Határozza meg az
   $$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 4, x + y \leq 1\}$$
   halmaznak a $(2, 0)$ ponthoz legközelebbi nemnegatív koordinátájú pontját!
9. Oldjuk meg a Lagrange multiplikátorok módszerével: (ne felejtsük el ellenőrizni a feltételeket)
   (a)
   $$\min x + y$$
   $$xy = 1$$
   (b)
   $$\min x^2 + y^2 + z^2$$
   $$z - xy = 5$$
10. Legyenek α, β, γ egy háromszög szögei. Igazoljuk (a Lagrange multiplikátorok módszerével) hogy
   $$\sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

2. gyakorlat, 2005. február 24.

1. Modellezzük matematikai programozási feladatként a következő problémát!
   Adott 3 kisváros, ezek koordinátái $(2; 2)$, $(4; 8)$, $(11; 4)$, továbbá egy nagyváros a $(9, 6)$ koordinátán. A területet keresztezi egy ipari vasútvonal, mely az $x + y = 10$ koordináta egyenes mentén halad a kérdéses régióban. Erőművet szeretnénk telepíteni olymódon, hogy a településektől vett távolságok összege minimális legyen, ne legyen 1 egységnél messzebb a vasútvonaltól, illetve ne legyen közelebb 3 egységnél a nagyvároshoz.
2. Lagrange multiplikátorok módszerével keressük meg az
   $$f(x, y, z) = x + z$$
   függvény szélső értékeit a
   $$U = \left\{ (x, y, z) : \begin{array}{l} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ g_2(x, y, z) = x + y = 1 \end{array} \right\}$$
   halmazon.
3. Előfordulhat-e, hogy egy függvénynek egy kompakt halmazon van lokális minimum helye, de nincs globális minimum helye? Válaszunkat bizonyítással vagy példával indokoljuk.
4. Legyen α, β, γ egy háromszög szögei. Mutassuk meg a Lagrange multiplikátorok módszerével hogy
   $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$
5. Modellezük a következő feladatot: Adott egy poliéder, illetve egy politóp:
   $$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 16 \\ -x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 - x_3 \geq 8 \end{array}$$
   illetve
   $$P = \mathrm{conv}\left\{ \begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 57 \\ 76 \\ 98 \end{pmatrix} \right\}$$
   a, Döntsük el, van-e a két halmaznak közös pontja.
   b, Ha nincs, akkor keressük meg a két objektum egymáshoz legközelebbi pontjait.
   c, Fogalmazzuk meg lineáris programozási feladatként is.
6. A Tarajospusztai Tejüzem különböző méretű kerek sajtokat állít elő, ezek átmérője 9,11 és 15cm. A szállításra szögletes dobozokat használnak, melyek mérete 40×30cm, magassága pedig azonos a sajtokéval. A megszokott rutin szerint, 1 dobozba legfeljebb csak 3 darab sajtot teszünk. A főnök azonban elbizonytalanodott, és arra lenne kíváncsi hány darabot lehetne maximálisan elhelyezni. Modellezük a feladatot nemlineáris programozási feladatként!
7. Csináljunk tetszőleges olyan optimalizációs feladatot, melynek pontosan $k \in \mathbb{Z}$ lokális minimuma van.

Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

3. gyakorlat, 2005. március 1.

1. Mutassuk meg hogy konvex függvény konvex halmazon vett lokális minimumai egyben globálisak is!
2. Bizonyítsuk be a számtani-mértani egyenlőtlenséget a Jensen tétel segítségével!
3. Mutassuk meg hogy egy poliéder mindig konvex!
4. Konvexek-e az alábbi halmazok?
   (a) $$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2 + 3y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 0 \\ -\ln(x) \leq 10\} \end{array}$$
   (b) $$U = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq z \\ x, y \geq 0\} \end{array}$$
   (c) $$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 9 \\ 3x + y \geq 0 \\ 2(x-1)^2 + y^2 \geq 1\} \end{array}$$
   (d) • $$U = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} (x+1)^{-2} + 3y^2 + e^{-2z^2} \geq 0 \\ x, y, z \geq 0\} \end{array}$$
5. Mutassuk meg hogy egy politóp mindig konvex!
6. • (Caratheodory tétele) Legyen $U \in \mathbb{R}^n$, konvex halmaz, $U \neq \emptyset$. Jelölje coU az U halmaz konvex burkát. Bizonyítsuk be, hogy $\forall u \in coU$ előállítható $n + 1$-nél nem több U-beli pont konvex kombinációjaként.
7. Bizonyítsuk be, hogy konvex halmazok tetszőleges metszete is konvex. Igaz-e ugyanez konvex halmazok uniójára, direkt szorzatára illetve különbségére?
8. Mutassuk meg, hogy minden $u_i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \dots, m)$, $\sum_{i=1}^m = 1$ esetén
   $$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i\right) \left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{u_i}\right) \geq 1$$

Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

4. gyakorlat, 2005. március 8.

1. Keressünk megengedett irányt az U halmazban az u_0 pontból, ha
   (a) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^3 + y \leq 0, x, y \geq 0\}$ és $u_0 = (0, 0)$.
   (b) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 5, x + y \leq 4\}$ és $u_0 = (1, 3)$.
   (c) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y + 3 \geq 0, -x^2 + y - 1 \geq 0, x, y \geq 0\}$ és $u_0 = (2, 5)$ illetve $u_0 = (1, 2)$.
2. A megengedett irányok módszerével ellenőrizzük, hogy az alábbi feladatokra a megadott pont optimális-e.
   (a)
   $$\begin{array}{r} x^2 + y \to \min \\ x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \leq 1 \end{array}$$
   és
   $$u_* = (x_*, y_*) = (0, -3)$$
   (b)
   $$\begin{array}{r} x + y \to \min \\ x^2 - y \leq 0 \\ 2y + x \leq 4 \end{array}$$
   és
   $$u_* = (x_*, y_*) = (0, 0)$$
3. Oldjuk meg a Lagrange multiplikátorok módszerével!
   $$\begin{array}{r} \min -2x^2 + 4xy + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

5. gyakorlat, 2005. március 17.

1. A megengedett irányok módszerével ellenőrizzük, hogy az alábbi feladatokra a megadott pont optimális-e.

   (a)

$$\begin{aligned} x + y &\to \min \\ x^2 - y &\leq 0 \\ 2y + x &\leq 4 \\ u_* = (x_*, y_*) &= (0, 0) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} y &\to \max \\ x^2 + 3y &\leq 3 \\ 2x + 3y &\leq 4 \\ x, y &\geq 0 \\ u_* = (x_*, y_*) &= (0, 1) \end{aligned}$$

2. A megengedett irányok módszerével az adott u_0 pontból kiindulva hajtsunk végre egy teljes iterációs lépést, majd írjuk fel a második megengedett irányt meghatározó feladatot!

   (a)

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 - 4x + 4 &\to \min \\ x - y + 3 &\leq 0 \\ -x^2 + y - 1 &\leq 0 \\ x, y &\geq 0 \\ u_0 = (x_0, y_0) &= (2, 5) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x^2 + xy + 2y^2 - 6x - 2y - 12z &\to \min \\ 2x^2 + y^2 &\leq 15 \\ -x + 2y + z &\leq 3 \\ x, y, z &\geq 0 \\ u_0 = (x_0, y_0, z_0) &= (1, 1, 1) \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} (x-2)^2 + (y-1)^2 &\to \min \\ x^2 - y &\leq 0 \\ -x + 2y &= 1 \\ u_0 = (x_0, y_0) &= (1, 1) \end{aligned}$$

Operációkutatás - Gyakorló feladatsor

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

2005. március

1. Modellezzük a következő feladatokat!
   Határozzuk meg az r sugarú gömbbe írt téglatestek közül azt, amelynek maximális a térfogata!
2. Adott V térfogatú dobozok (téglatestek) közül melyik az, amelyet minimális területű csomagolópapírral be tudjuk csomagolni?
3. A következő példáknak számát adom csak meg (ne haragudjatok, nagyon sok dolgom volt most), a Kovács Margit Tanárnő jegyzetére utalnak!
4. 11.oldal 2.4.2./3
5. 11.oldal 2.4.3./1, illetve ugyanez a $f(u) = \frac{u^4}{1+u^2}$ függvényre.
6. 11. oldal 2.4.5.
7. 16-17.oldal 3.1.3.5./1., 4., 7., 9.
8. 23. oldal 3.2.5.4./2.
9. 23. oldal 3.2.5.2./2.
10. 24. oldal 3.2.5.10.
11. 29. oldal 4.2.2.2.
12. 29. oldal 4.2.2.1./2.
13. 29. oldal 4.2.2.5./akármelyik
14. 40. oldal 4.3.4.2./4.
15. 41. oldal 4.3.4.4./1.,4.

Hát ennyi most, sajnálom, de nagyon el lettem havazva.
A Tanárnő jegyzetében több példa is van, letölthető:
< http://www.cs.elte.hu/~margo/info.html >