Analízis 8. vizsgakérdések
Programtervező matematikus szak
2006-2007. tanév 2. félév

• Weierstrass tételei

1. Fogalmazza meg Weierstrass első approximációs tételét.

Válasz. Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez létezik algebrai polinomoknak olyan (P_n) sorozata, amelyik az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen tart az f függvényhez. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy az algebrai polinomok sűrűn vannak a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ Banach térben.

2. Fogalmazza meg Weierstrass második approximációs tételét.

Válasz. Minden 2π szerint periodikus folytonos f függvényhez létezik trigonometrikus polinomoknak olyan (T_n) sorozata, amelyik az egész számegyenesen egyenletesen tart az f függvényhez. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a trigonometrikus polinomok sűrűn vannak a $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach térben.

3. Definiálja a Bernstein-féle alappolinomokat, és sorolja fel a tulajdonságait.

Válasz.

$$N_{k,n}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \big(x \in [0,1],\ k = 0, 1, \ldots, n;\quad n \in \mathbb{N}\big).$$

(a) $N_{k,n}(x) \geq 0 \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$.

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} N_{k,n}(x) = 1 \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$.

(c) Minden rögzített $\delta > 0$ és $x \in [0,1]$ szám esetén fennáll a

$$\sum_{k:|x-\frac{k}{n}|\geq\delta} N_{k,n}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

egyenlőtlenség.

4. Definiálja függvény Bernstein polinomjait.

Válasz. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges függvény. A

$$\big(B_n f\big)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) N_{k,n}(x) \quad (x \in [0,1],\, n \in \mathbb{N})$$

polinomot az f függvény n-edik **Bernstein-féle polinomjának** nevezzük.

5. Milyen tételt ismer függvény Bernstein-polinomjainak a konvergenciájával kapcsolatban?

Válasz. Tetszőleges $f \in C[0,1]$ függvény esetén a $(B_n f)$ polinomsorozat a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen konvergál az f függvényhez.

6. Definiálja függvény polinomokkal való legjobb megközelítését.

Válasz. Jelöljük $\mathcal{P}_n$-nel ($n \in \mathbb{N}$) a legfeljebb n-edfokú algebrai polinomok halmazát. Tetszőleges $f \in C[a,b]$ függvény esetén az

$$E_n(f) := \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty$$

számot az f függvény legfeljebb n-edfokú polinomokkal való **legjobb megközelítésének** nevezzük.

7. Fogalmazza meg Csebisev tételét.

Válasz. Tetszőleges $f \in C[a,b]$ függvényhez és n természetes számhoz egyértelműen létezik olyan $P^* \in \mathcal{P}_n$ polinom, amelyre

$$\|f - P^*\|_\infty = \inf_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty = \min_{P \in \mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty = E_n(f)$$

teljesül. P^*-ot az f-et **legjobban megközelítő** $\mathcal{P}_n$-beli polinomnak nevezzük.

• Térstruktúrák

8. Írja le a metrikus tér definícióját.

Válasz. Az (M, ϱ) rendezett párt **metrikus térnek** nevezzük, ha M tetszőleges nemüres halmaz, $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ pedig egy olyan függvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) minden $x, y \in M$ esetén $\varrho(x,y) \geq 0$;

(ii) $\varrho(x,y) = 0 \iff x = y \quad (x, y \in M)$;

(iii) bármely $x, y \in M$ elemekre

$$\varrho(x,y) = \varrho(y,x) \quad (\textit{szimmetriatulajdonság});$$

(iv) tetszőleges $x, y, z \in M$ elemekkel fennáll a

$$\varrho(x,y) \leq \varrho(x,z) + \varrho(z,y)$$

háromszög-egyenlőtlenség. A ϱ leképezést *távolság-függvénynek* (vagy **metrikának**) mondjuk; a $\varrho(x,y)$ számot az $x, y \in M$ elemek *távolságának* nevezzük.

9. Mit jelent az, hogy az (M, ϱ) metrikus térbeli (a_n) sorozat határértéke $\alpha \in M$?

Válasz. Az $\alpha \in M$ pont tetszőleges (sugarú) környezetéhez van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy a sorozat minden ennél nagyobb indexű tagja benne van a szóban forgó környezetben, azaz

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \forall n \geq n_0 \text{ esetén } a_n \in k_\varepsilon(\alpha).$$

10. Mit jelent az, hogy két metrika ekvivalens?

Válasz. Azt mondjuk, hogy az M halmazon értelmezett ϱ_1 és ϱ_2 metrikák **ekvivalensek**, ha léteznek olyan c_1, c_2 pozitív valós számok, amelyekkel minden $x, y \in M$ elemre fennáll a

$$c_1 \varrho_1(x,y) \leq \varrho_2(x,y) \leq c_2 \varrho_1(x,y)$$

egyenlőtlenség.

11. Milyen kapcsolat van metrikus térben sorozatok határértéke és az ekvivalens metrikák között?

Válasz. Legyen M egy nemüres halmaz. Tegyük fel, hogy az M-en értelmezett ϱ_1 és ϱ_2 metrikák ekvivalensek. Ekkor tetszőleges M-beli (a_n) sorozatra

$$\lim (a_n) \overset{\varrho_1}{=} \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim (a_n) \overset{\varrho_2}{=} \alpha.$$

12. Adja meg metrikus térben a Cauchy-sorozat definícióját.

Válasz. Az (M, ϱ) metrikus térbeli (a_n) sorozatot **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists n \in \mathbb{N}_0, \text{ hogy } \forall n \geq n_0 \text{ esetén } \varrho(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

13. Milyen kapcsolat van metrikus térben a konvergens és a Cauchy-sorozatok között?

Válasz. 1^o Tetszőleges (M, ϱ) metrikus térben minden konvergens sorozat egyúttal Cauchy-sorozat is.

2^o Az állítás megfordítása általában nem igaz: Van olyan (M, ϱ) metrikus tér, amiben van olyan Cauchy-sorozat, amelyik nem konvergens.

14. Definiálja a teljes metrikus teret.

Válasz. Az (M, ϱ) metrikus teret akkor nevezzük **teljes metrikus térnek**, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens, vagyis a tér teljes, ha igaz benne a Cauchy-féle konvergenciakritérium, azaz

$$(a_n) \subset M \text{ konvergens} \quad \Longleftrightarrow \quad (a_n) \subset M \text{ Cauchy-sorozat.}$$

15. Fogalmazza meg metrikus terekben a Cantor-féle közösrész-tételt.

Válasz. Egy metrikus tér akkor és csak akkor teljes, ha minden olyan zárt gömbökből álló $\overline{k_{r_n}(a_n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozatra, amelyre

(i) $\overline{k_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subset \overline{k_{r_n}(a_n)}$,

(ii) $\lim\limits_{n \to +\infty} r_n = 0$,

a gömböknek egyetlen közös pontjuk van, azaz a

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \overline{k_{r_n}(a_n)}$$

egyelemű halmaz.

16. Mikor nevezünk egy metrikus térbeli halmazt nyíltnak, illetve zártnak?

Válasz. Azt mondjuk, hogy a $G \subset M$ halmaz **nyílt az** (M, ϱ) **metrikus térben**, ha G minden pontja belső pont, azaz ha minden pontjának van olyan gömb-környezete, amely benne van G-ben. Az $F \subset M$ halmaz **zárt**, ha az $M \setminus F$ halmaz nyílt.

17. Definiálja metrikus térben a torlódási pont, illetve a halmaz lezárásának a fogalmát.

Válasz. 1^o Az (M, ϱ) metrikus tér egy $a \in M$ pontját az $A \subset M$ részhalmaz egy **torlódási pontjának** nevezzük, ha az a pont minden gömb-környezete tartalmaz a-tól különböző pontot az A halmazból. Az A halmaz **torlódási pontjainak a halmazát** az A' szimbólummal jelöljük.

2^o Az (M, ϱ) metrikus tér A részhalmazának a **lezárásán** az $\overline{A} := A \cup A'$ halmazt értjük.

18. Hogyan lehet metrikus térben a zárt halmazokat jellemezni?

Válasz. Az (M, ϱ) metrikus tér egy $F \subset M$ részhalmazára a következő állítások ekvivalensek:

1^o az F halmaz zárt az (M, ϱ) metrikus térben,

2^o az F halmaz minden torlódási pontját tartalmazza, azaz $F' \subset F$;

3^o minden F-beli konvergens sorozat határértéke is benne van F-ben.

19. Definiálja metrikus térben a következő fogalmakat: sűrű halmaz, mindenütt sűrű halmaz, sehol sem sűrű halmaz.

Válasz. 1^o Azt mondjuk, hogy az (M, ϱ) metrikus tér A részhalmaza **sűrű** az $M_0 \subset M$ halmazban, ha $M_0 \subset \overline{A}$.

2^o Az $A \subset M$ halmaz **mindenütt sűrű** az (M, ϱ) metrikus térben, ha $\overline{A} = M$.

3^o Az $A \subset M$ halmaz **sehol sem sűrű** az (M, ϱ) metrikus térben, ha egyetlen gömbben sem sűrű.

20. Fogalmazza meg a Baire-lemmát.

Válasz. Legyen (M, ϱ) egy teljes metrikus tér.

1^o Megszámlálható sok M-beli, mindenütt sűrű nyílt halmaz metszete is mindenütt sűrű M-ben, azaz ha (G_n) nyílt halmazoknak egy olyan M-beli sorozata, hogy

$$\overline{G_n} = M \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n} = M.$$

2^o Megszámlálható sok M-beli, sehol sem sűrű zárt halmaz egyesítése is sehol sem sűrű M-ben, azaz ha $(F_n) \subset M$ zárt halmazoknak egy olyan sorozata, amelyre

$$\operatorname{int} F_n = \emptyset \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\operatorname{int} \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \Big) = \emptyset.$$

3^o Ha M előállítható megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként, akkor azok közül legalább az egyik tartalmaz nemüres nyílt gömb-környezetet, azaz ha (F_n) zárt halmazoknak egy olyan sorozata M-ben, amelyre

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = M,$$

akkor valamelyik F_n halmaz belseje nemüres, azaz

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \text{hogy} \quad \operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset.$$

21. Írja le a normált tér definícióját.

Válasz. Az $(X, \|\cdot\|)$ rendezett párt **normált térnek** nevezzük, ha

1^o X egy lineáris tér a $\mathbb{K}$ számtest felett;

2^o a $\|\cdot\|$ pedig egy olyan $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ függvény, amelyik tetszőleges $x, y, z \in X$ elemre és $\lambda \in \mathbb{K}$ számra eleget tesz az alábbi követelményeknek:

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ (θ az X lineáris tér nulleleme),

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Az utolsó tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük. Az $\|\cdot\|$ leképezést **normának**, az $\|x\|$ számot pedig az x elem *normájának* mondjuk.

22. Definiálja az $\mathbb{R}^n_p$ tereket.

Válasz. Egy pozitív n egész szám esetén tekintsük a szokásos műveletekkel ellátott $X := \mathbb{R}^n$ lineáris teret. Legyen $1 \leq p \leq +\infty$ és $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max\limits_{1 \leq k \leq n} \{|x_k|\}, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ normált tér.

23. Definiálja a l^p tereket.

Válasz. Tekintsük $1 \leq p < +\infty$ esetén a **valós** sorozatok

$$l^p := \Big\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty\Big\},$$

$p = +\infty$ esetén pedig a

$$l^\infty := \Big\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty\Big\}$$

(szokásos műveletekkel ellátott) lineáris terét. Ha $x = (x_n) \in l^p$, akkor legyen

$$\|x\|_p := \|x\|_{l^p} := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \sup\limits_{k \in \mathbb{N}} \{|x_k|\}, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor $(l^p, \|\cdot\|_{l^p})$ normált tér.

24. Milyen normákat értelmeztünk a $C[a, b]$ függvénytéren?

Válasz. A $C[a, b]$ halmazt a függvények közötti szokásos műveletekkel ellátva nyilván egy valós lineáris teret kapunk; ezen a

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, & \text{ha } p = +\infty \end{cases} \qquad (f \in C[a, b])$$

függvény egy norma, tehát $(C[a, b], \|\cdot\|_p)$ valós normált tér.

25. Mit jelent az, hogy két norma ekvivalens?

Válasz. Azt mondjuk, hogy az X lineáris téren adott $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma **ekvivalens** (jelben $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), ha léteznek olyan c_1, c_2 pozitív valós számok, hogy

$$c_1\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2\|x\|_1$$

minden $x \in X$-re.

26. Teljesség szempontjából jellemezze a „nevezetes” tereinket.

Válasz.
- $\mathbb{R}$ Banach-tér, a $\mathbb{Q}$ normált tér nem Banach-tér.
- Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér.
- Minden $1 \leq p \leq +\infty$ esetén az $\big(l^p, \|\cdot\|_p\big)$ normált tér Banach-tér.
- Minden $1 \leq p < +\infty$ esetén a $\big(C[a,b], \|\cdot\|_p\big)$ normált tér nem Banach-tér.
- A $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált tér Banach-tér.
- Tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér és $1 \leq p \leq +\infty$ kitevő esetén az

$$\big(L^p(X, \Omega, \mu), \|\cdot\|_{L^p}\big)$$

normált tér Banach-tér.

27. Definiálja normált térben a zárt rendszer fogalmát.

Válasz. Legyen $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált tér. A $Z \subset X$ részhalmazt **zárt rendszernek** nevezzük X-ben, ha Z lineáris burka (vagyis a $[Z]$ halmaz) mindenütt sűrű a norma álta indukált metrikus térben, azaz

$$\overline{[Z]} = X.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy minden X-beli elem tetszőleges pontossággal megközelíthető Z-beli vektorok alkalmaz lineáris kombinációjával, azaz

$$\begin{gathered}\forall\, x \in X \ \text{ vektorhoz és } \ \forall\, \varepsilon > 0 \ \text{ számhoz} \\ \exists\, n \in \mathbb{N}, \ \ \exists\, z_1, \ldots, z_n \in Z \text{ és } \ \exists\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \ \text{ hogy} \\ \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \Big\| < \varepsilon.\end{gathered}$$

28. Mit jelent az, hogy egy normált tér szeparábilis?

Válasz. Az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált teret akkor nevezzük **szeparábilisnek**, ha X a norma által indukált metrikával egy szeparábilis metrikus tér, vagyis X-nek van megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza. Ez azzal ekvivalens, hogy X-ben van megszámlálhatóan végtelen zárt rendszer.

• A legjobb approximáció

29. Definiálja metrikus térben pont és halmaz távolságát.

Válasz. Az (X, ϱ) metrikus térben az x_0 pont és a nemüres $M \subset X$ halmaz **távolságát** így értelmezzük:

$$d(x_0, M) := \inf\{\varrho(x_0, y) \mid y \in M\}.$$

Ezt a számot az x_0 **pont M-beli elemekkel való legjobb megközelítésének** is nevezzük.

30. Milyen kérdéseket vetettünk fel a legjobb közelítéssel kapcsolatban? Ezek közül melyeket vizgáltuk?

Válasz. **1**. A létezés problémája.

2. Az egyértelműség problémája.

3. A jellemzés problémája

4. Az előállítás problémája.

5. Meg lehet-e határozni $d(x_0, M)$-et? Ha nem, akkor milyen „jó" felső becslést lehet erre megadni?

Az első kettőt vizsgáltuk meg részletesen.

31. Milyen tételt ismer metrikus térben a legjobb közelítésről?

Válasz. Az (X, ϱ) metrikus tér tetszőleges $M \subset X$ **kompakt** részhalmaza esetén minden $x_0 \in X$ ponthoz van legközelebbi M-beli y_0 pont, azaz

$$\forall\, x_0 \in X\text{-hez} \quad \exists\, y_0 \in M: \quad \varrho(x_0, y_0) = d(x_0, M).$$

32. Milyen tételt ismer normált térben a legjobb közelítő elem létezéséről?

Válasz. Legyen M az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér egy **véges dimenziós** altere. Ekkor bármely $x_0 \in X$ elemhez van hozzá legközelebbi M-beli y_0 vektor, azaz

$$\forall\ x_0 \in X\text{-hez} \ \exists\ y_0 \in M: \ \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

33. Mit jelent az, hogy egy normált tér szigorúan konvex?

Válasz. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált teret **szigorúan konvexnek** nevezzük akkor, ha az X-beli egységgömb-felület nem tartalmaz szakaszt, azaz ha

$$\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

34. Mit jelent az, hogy egy normált tér szigorúan normált?

Válasz. Azt mondjuk, hogy az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér **szigorúan normált**, ha minden nullvektortól különböző $x, y \in X$ esetén

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda > 0: \ \ y = \lambda x.$$

35. Mi a kapcsolat a szigorúan konvex és a szigorúan normált terek között?

Válasz. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha szigorúan normált.

36. Milyen állítást ismer normált terekben a legjobban közelítő elem egyértelműségéről?

Válasz. Legyen M egy véges dimenziós altér az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ szigorúan konvex/normált térben. Ekkor minden $x_0 \in X$ ponthoz létezik pontosan egy, tőle minimális távolságra levő y_0 pont M-ben, azaz

$$\forall\ x_0 \in X\text{-hez}\quad \exists\,!\ y_0 \in M:\quad \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

37. Mit jelent az, hogy egy normált tér egyenleetsen konvex, és mi ennek a geometriai jelentése?

Válasz. Azt mondjuk, hogy az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér **egyenletesen konvex**, ha

$$\forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz}\ \exists\,\delta > 0:\quad \|x\| = \|y\| = 1\ \text{ és }\ \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta \implies \|x - y\| < \varepsilon.$$

Az egyenletes konvexitás az egységgömb-felület egy geometriai tulajdonságát fejezi ki: ha azon olyan pontokat veszünk, amelyeket összekötő szakasz felezőpontja közel van a felülethez, akkor a két pont közel van egymáshoz

38. Fogalmazza meg Szőkefalvi-Nagy Béla legjobb közelítésre vonatkozó tételét.

Válasz. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egyenletesen konvex Banach tér és $M \subset X$ egy tetszőleges nemüres konvex zárt halmaz. Ekkor minden $x_0 \in X$ ponthoz létezik pontosan egy, tőle minimális távolságra lévő M-beli y_0 pont.

39. Milyen tételt ismer a L^p terekben a polinomokkal való legjobb megközelítésről?

Válasz. Legyen $1 \le p \le +\infty$. Ekkor bármely $f \in L^p(a, b)$ függvényhez és minden n természetes számhoz létezik f-et az L^p-normában legjobban megközelítő legfeljebb n-edfokú p_n polinom, azaz

$$\forall\,f \in L^p(a, b)\text{-hez és }\forall\,n \in \mathbb{N}\text{-hez}\quad \exists\,p_n \in \mathcal{P}_n:$$

$$\|f - p_n\|_{L^p} = \inf\{\|f - p\|_{L^p} \mid p \in \mathcal{P}_n\}.$$

Ha $1 < p < +\infty$, akkor p_n egyértelműen meghatározott.

40. Milyen tételt ismer Hilbert-terekben a legjobb megközelítésről?

Válasz. Legyen M a $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ Hilbert-tér egy **zárt altere** és x_0 a H egy tetszőleges pontja. Ekkor pontosan egy olyan M-beli y_0 pont létezik, amelyik minimális távolságra van x_0-tól, azaz

$$\forall\,x_0 \in H\text{-hoz}\ \exists\,!\ y_0 \in M: \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

Az $x_0 - y_0$ vektor merőleges az M altérre, azaz

$$\langle x_0 - y_0, y\rangle = 0 \quad (\forall\ y \in M).$$

41. Fogalmazza meg a Riesz-féle felbontási tételt.

Válasz. Legyen M a H Hilbert-tér egy zárt altere. Ekkor minden $x \in H$ vektor egyértelműen állítható elő az

$$x = x_1 + x_2$$

alakban, ahol $x_1 \in M$ és $x_2 \perp M$. Ezt az x_1 vektort az x-nek az M altérre való **ortogonális vetületének** (vagy projekciójának) nevezzük.

42. Definiálja Hilbert-térben a projekciós operátort.

Válasz. Legyen M a $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ Hilbert-tér egy zárt altere és

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in M, \quad x_2 \perp M$$

az $x \in H$ vektor ortogonális felbontása. A

$$P_M : H \to M, \quad P_M(x) := x_1$$

utasítással értelmezett leképezést az M zárt alterérre való **ortogonális projekciós** (vagy **vetítő**) operátornak nevezzük.

43. Milyen explicit előállítást ismer Hilbert-térben a projekciós operátorra?

Válasz. Ha M a H hilbert tér egy véges dimenziós altere és $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ennek altérnek egy ortonormált bázisa, akkor a projekciós operátor a következő explicit alakban adható meg:

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle\, e_k \qquad (x \in H).$$

• Lineáris operátorok

44. Adja meg a lineáris operátor definícióját.

Válasz. Legyenek X és Y lineáris terek. Az $A : X \to Y$ függvényt **lineáris operátornak** (vagy **lineáris leképezésnek**) nevezzük, ha minden $x, y \in X$ elempárra és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra

(i) $A(x + y) = A(x) + A(y)$,

(ii) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

A valós értékű lineáris leképezéseket **lineáris funkcionáloknak** hívjuk.

45. Mit jelent normált terek közötti leképezések folytonossága? Fogalmazza meg az átviteli elvet is.

Válasz. Ha X és Y normált terek, akkor azt mondtuk, hogy az $f : X \to Y$ függvény **folytonos az $a \in X$ pontban**, ha

$$\forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\,\delta > 0 : \ \forall\,x \in X,\ \|x - a\|_X < \delta \implies \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

A valós-valós függvényekhez hasonlóan itt is érvényes az **átviteli elv**: az $f : X \to Y$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $a \in X$ pontban, ha minden $x_n \to a$ sorozatra $f(x_n) \to f(a)$. Az $f : X \to Y$ függvényt **folytonosnak** nevezzük, ha minden $a \in X$ pontban folytonos.

46. Mit jelent az, hogy egy normált terek közötti lineáris leképezés korlátos?

Válasz. Az $(X, \|\cdot\|_X)$ és az $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek közötti $A : X \to Y$ lineáris operátort akkor mondjuk **korlátosnak**, ha létezik olyan $C > 0$ szám, hogy

$$\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X \qquad (x \in X).$$

47. Milyen kapcsolat van lineáris operátorok esetén a folytonosság és a korlátosság között?

Válasz. Az $(X, \|\cdot\|_X)$ és az $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek közötti $A : X \to Y$ lineáris operátor akkor és csak akkor folytonos X-en, ha korlátos.

48. Meg lehet-e adni véges dimenziós normált téren nem folytonos lineáris operátort?

Válasz. Nem, mert ha egy X véges dimenziós, Y pedig tetszőleges normált tér, akkor minden $A : X \to Y$ lineáris operátor folytonos.

49. Van-e a normált terek közötti lineáris leképezések között olyan amelyik nem folytonos?

Válasz. Igen. Legyen $\big(X, \|\cdot\|_X\big) := \big(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ és $\big(Y, \|\cdot\|_Y\big) := \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$. Jelölje D a **differenciáloperátort**:

$$D : X \to Y, \qquad Df := f'.$$

Ekkor D lineáris, de nem folytonos operátor.

50. Definiálja az operátornormát.

Válasz. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek és $A : X \to Y$ egy tetszőleges korlátos lineáris leképezés, aza $A \in B(X, Y)$. Az

$$\begin{aligned}\|A\| := \|A\|_{XY} &:= \sup\{\|Ax\|_Y \mid x \in X,\ \|x\|_X = 1\}\\ &= \sup\{\|Ax\|_Y \mid x \in X,\ \|x\|_X \le 1\}\end{aligned}$$

számot az A **operátor normájának** nevezzük.

51. Milyen alaptulajdonságokkal rendelkezik az operátornorma?

Válasz. Tetszőleges $A \in B(X, Y)$ operátor esetén

- $\|A\|$ véges, nemnegatív valós szám;
- $\|Ax\|_Y \le \|A\| \cdot \|x\|_X$ $(\forall\, x \in X)$;
- $\|A\| = \min\{C \ge 0 \mid \forall\, x \in X\ :\ \|Ax\|_Y \le C \cdot \|x\|_X\}$

(az $\|A\|$ tehát a legkisebb olyan $C \ge 0$ szám, amelyre az $\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X$ egyenlőtlenség minden $x \in X$ elemre fennáll.)

52. Sorolja fel a folytonos lineáris operátorok $B(X, Y)$ terének alaptulajdonságait.

Válasz. Legyenek X és Y normált terek. Ekkor

- $B(X, Y)$ lineáris altér az $L(X, Y)$ vektortérben;
- ha X véges dimenziós, akkor $B(X, Y) = L(X, Y)$.
- az $A \mapsto \|A\|$ leképezés norma a $B(X, Y)$ lineáris téren;
- ha az Y normált tér teljes (vagyis Banach-tér), akkor ezzel a normával $B(X, Y)$ Banach-tér.

53. Adjon meg legalább két példát lineáris funkcionálra vagy operátorra a normájának megadásával.

Válasz. A következők közül válogathatunk:

1. példa. Legyen

$$\big(X, \|\cdot\|_X\big) := \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big) \quad \text{és} \quad \big(Y, \|\cdot\|_Y\big) := \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big).$$

Adott $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b$ pontrendszer és $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valós számok esetén tekintsük az

$$\Phi : C[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \Phi f := \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)$$

funkcionált. Ekkor Φ folytonos lineáris **funkcionál** és a normája

$$\|\Phi\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

2. példa. Legyen

$$\big(X, \|\cdot\|_X\big) := \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big), \qquad \big(Y, \|\cdot\|_Y\big) := \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$$

és $g \in C[a,b]$ egy rögzített függvény. Ekkor a

$$\Phi : C[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \Phi f := \int_a^b fg$$

egy olyan folytonos lineáris **funkcionál**, amelynek a normája

$$\|\Phi\| = \int_a^b |g|.$$

3. példa. Legyen

$$\big(X, \|\cdot\|_X\big) := \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big), \qquad \big(Y, \|\cdot\|_Y\big) := \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$$

és $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ egy rögzített folytonos függvény. Ekkor az

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \qquad \big(Af\big)(x) := \int_a^b f(t) K(x,t)\, dt \quad (x \in [a,b])$$

egy olyan folytonos lineáris **operátor**, amelynek a normája

$$\|A\| = \max_{a \le x \le b} \int_a^b |K(x,t)|\, dt =: M.$$

4. példa. Hilbert-terek projekciós operátorai. Legyen $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle\,)$ valós Hilbert-tér és jelölje $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $(x \in H)$ a skaláris szorzat által indukált normát. Tetszőleges $\{\theta\} \ne M \subset H$ zárt altér esetén tekintsük a P_M projekciós operátort:

$$P_M : H \to M, \qquad P_M(x) := x_1 \quad (x \in H),$$

ahol $x = x_1 + x_2$ az $x \in H$ vektor ortogonális felbontása, azaz $x_1 \in M$ és $x_2 \perp M$. Ekkor P_M egy 1-normájú folytonos lineáris operátor.

54. Definiálja a duális teret.

Válasz. Legyen $\big(X, \|\cdot\|_X\big)$ tetszőleges normált tér. Az X-en értelmezett valós értékű folytonos lineáris leképezések halmazát $B(X,\mathbb{R})$ helyett X^*-gal jelöljük:

$$X^* := B(X,Y).$$

A $(B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{X\mathbb{R}})$ Banach-teret az $\big(X, \|\cdot\|_X\big)$ normált tér **duális terének** nevezzük, és jelölésére az $(X^*, \|\cdot\|_*)$ szimbólumot használjuk:

$$(X^*, \|\cdot\|_*) := (B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{X\mathbb{R}}).$$

55. Mi a jelentése a $\Phi \in X^*$ jelsorozatnak?

Válasz. • Adott egy $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér;

• a $\Phi : X \to \mathbb{R}$ leképezés lineáris, azaz

$$\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y) \qquad (x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R});$$

• Φ korlátos, azaz

$$\exists\, C > 0: \quad |\Phi(x)| \le C\|x\|_X \quad (\forall\, x \in X);$$

• a $\|\Phi\|_* = \sup\{|\Phi(x)| \mid x \in X \text{ és } \|x\|_X \le 1\}$ képlettel értelmezve van a Φ funkcionál normája.

56. Mit jelent az izometrikus izomorfia?

Válasz. Az $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek **izometrikusan izomorfak** (jelölésben $X \cong Y$), ha van olyan $T : X \to Y$ lineáris bijekció, hogy az

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$$

egyenlőség minden $x \in X$-re fennáll.

57. Mik a konjugált kitevők?

Válasz. A p és q számok **konjugált kitevőpárok**, ha

$$1 \le p, q \le +\infty, \quad \text{és} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \left(\frac{1}{+\infty} := 0\right).$$

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy q a p szám *kunjugált kitevője.*

58. Mikor azonosíthatunk két normált teret?

Válasz. Ha a két normált tér izometrikusan izomorf.

59. Adja meg legalább két konkrét normált tér duális terét.

Válasz. A következők közül válogathatunk:

1. Legyen $\mathbb{R}^n_p$ a szokásos p-normával ellátott $\mathbb{R}^n$ tér. Tetszőleges $1 \le p \le +\infty$ esetén

$$\big(\mathbb{R}^n_p\big)^* \cong \mathbb{R}^n_q,$$

vagyis az $\mathbb{R}^n_p$ tér duális tere azonosítható $\mathbb{R}^n_q$-val, ahol q a p konjugált kitevője.

2. Bármely $1 \le p < +\infty$ esetén

$$(l^p)^* \cong l^q,$$

vagyis az $(l^p, \|\cdot\|_p)$ tér duális tere azonosítható az $(l^q, \|\cdot\|_q)$ térrel, ahol q a p konjugált kitevője.

3. Legyen (X, Ω, μ) egy σ-véges mértéktér és $1 \le p < +\infty$. Ekkor a

$$L^p := \big(L^p(X, \Omega, \mu),\ \|\cdot\|_{L^p}\big)$$

függvénytér duális tere azonoítható a L^q függvénytérrel, ahol q a p konjugált kitevője, azaz

$$(L^p)^* \cong L^q.$$

4. Ha H egy tetszőleges valós Hilbert tér, akkor

$$H^* \cong H,$$

azaz H duális tere azonosítható magával a H Hilbert térrel.

• A funkcionálanalízis alapvető tételei

60. Írja le a Hahn–Banach-tétel analitikus alakját vektortér esetén.

Válasz. Legyen X egy valós vektortér és tegyük fel, hogy a $p : X \to \mathbb{R}$ egy olyan leképezés, amelyre a következők teljesülnek:

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \qquad (\forall\, x, y \in X) \qquad \text{(szubadditív)};$$
$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad (\forall\, x \in X,\ \lambda > 0) \qquad \text{(pozitív homogén)}.$$

Másrészt legyen $X_0 \subset X$ altér és $\Phi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ olyan lineáris funkcionál, amelyet az X_0 altéren p majorál, azaz

$$\Phi_0(x) \le p(x) \qquad (\forall\, x \in X_0).$$

Ekkor van olyan, az egész X téren értelmezett $\Phi : X \to \mathbb{R}$ lineáris funkcionál, hogy

- Φ kiterjesztése Φ_0-nak, azaz $\Phi(x) = \Phi_0(x)$ $(\forall\, x \in X_0)$ és
- $\Phi(x) \le p(x)$ $(\forall\, x \in X)$.

61. Fogalmazza meg a Zorn-lemmát.

Válasz. Legyen $(\mathcal{F}, \le)$ egy parciálisan rendezett halmaz. Ha $\mathcal{F}$ minden teljesen rendezett részhalmazának van $\mathcal{F}$-beli felső korlája, akkor $\mathcal{F}$-nek van maximális eleme.

62. Írja le a Hahn–Banach-tétel analitikus alakját normált tér esetén.

Válasz. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér, $X_0 \subset X$ tetszőleges altér és $\Phi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ folytonos linàris funkcionál a

$$\|\Phi_0\|_* = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X \le 1}} |\Phi_0(x)|$$

képlettel értelmezett normával.

Ekkor van olyan folytonos lineáris Φ funkcionál az X téren (vagyis $\exists\ \Phi \in X^*$), amelyik az X_0 altéren megegyezik Φ_0-lal és $\|\Phi\|_* = \|\Phi_0\|_*$. **Azaz:** egy normált tér tetszőleges alterén értelmezett folytonos lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész X térre a folytonosság, a linearitás és a norma megtartásával.

63. Fogalmazza meg a Hahn–Banach-tételnek legalább két következményét.

Válasz. A következők közül válogathatunk:

1. Ha $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér és $x_0 \in X$, akkor az X^* duális térben létezik egy olyan folytonos lineáris Φ funkcionál, amelyre

$$\Phi(x_0) = \|x_0\|^2 \quad \text{és} \quad \|\Phi\|_* = \|x_0\|$$

teljesül.

2. Legyen X_0 az X normált tér egy tetszőleges **zárt** altere és $e \in X \setminus X_0$. Ekkor van olyan folytonos lineáris Φ funkcionál az X téren , amelyre

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in X_0 \\ 1, & x = e. \end{cases}$$

3. Az $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér tetszőleges x elemének a normájára az

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{\Phi \in X^* \\ \|\Phi\|_* \le 1}} |\Phi(x)|$$

képlet érvényes.

64. Definiálja vektortér hipersíkjait.

Válasz. Az X vektortér **hipersíkjainak** nevezzük az

$$S_{\Phi,\alpha} := \{x \in X \mid \Phi(x) = \alpha\}$$

alakú részhalmazokat, ahol Φ egy nem azonosan nulla lineáris funkcionál és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor azt is mondjuk, hogy $S_{\Phi,\alpha}$ az X tér $[\Phi = \alpha]$ egyenletű hipersíkja.

65. Mit jelent az, hogy egy normált tér valamely hipersíkja tágabb értelemben szétválasztja a tér két halmazát?

Válasz. Legyenek A és B az X normált tér részhalmazai. Azt mondjuk, hogy az $S_{\Phi,\alpha}$ hipersík **tágabb értelemben szétválasztja** A-t és B-t, ha

$$\Phi(x) \le \alpha \quad \forall\, x \in A\text{-ra} \quad \text{és} \quad \Phi(x) \ge \alpha \quad \forall\, x \in B\text{-re};$$

66. Mit jelent az, hogy egy normált tér valamely hipersíkja szigorúbb értelemben szétválasztja a tér két halmazát?

Válasz. Legyenek A és B az X normált tér részhalmazai. Azt mondjuk, hogy az $S_{\Phi,\alpha}$ hipersík **szigorúbb értelemben szétválasztja** A-t és B-t, ha

$$\exists\, \varepsilon > 0: \quad \Phi(x) \le \alpha - \varepsilon \quad \forall\, x \in A\text{-ra} \qquad \text{és} \qquad \Phi(x) \ge \alpha + \varepsilon \quad \forall\, x \in B\text{-re}.$$

67. Fogalmazza meg a Hahn–Banach-tétel első geometriai alakját.

Válasz. Legyen A és B két diszjunkt nemüres konvex halmaz az X normált térben. Ha A nyílt, akkor van olyan zárt hipersík, amelyik tágabb értelemben szétválasztja A-t és B-t.

68. Fogalmazza meg a Hahn–Banach-tétel második geometriai alakját.

Válasz. Legyen A és B két diszjunkt nemüres konvex halmaz az X normált térben. Ha A zárt és B kompakt, akkor van olyan zárt hipersík, amelyik szigorúbb értelemben szétválasztja A-t és B-t.

69. Mit jelent az, hogy egy operátorsorozat normában konvergens?

Válasz. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek. Jelölje $B(X,Y)$ az $X \to Y$ típusú folytonos lineáris leképezések

$$\|A\| := \sup_{\substack{x \in X \\ \|x\|_X \le 1}} \|Ax\|_Y \qquad (A \in B(X,Y))$$

(operátor)normával ellátott normált terét. Azt mondjuk, hogy az $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat **normában** (vagy *erősen*) tart az $A \in B(X,Y)$ operátorhoz, ha:

$$\lim_{n \to +\infty} \|A - A_n\| = 0.$$

70. Mit jelent az, hogy egy operátorsorozat pontonként konvergens?

Válasz. Azt mondjuk, hogy az $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat az $M \subset X$ halmazon **pontonként** tart az $A \in B(X,Y)$ operátorhoz, ha minden $x \in M$ vektorra az $(A_n x) \subset Y$ sorozat Ax-hez konvergál az Y térben, azaz

$$\lim_{n \to +\infty} \|A_n x - Ax\|_Y = 0 \qquad (x \in M).$$

71. Fogalmazza meg az egyenletes korlátosság tételét.

Válasz. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-tér, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ pedig egy normált tér. Tegyük fel, hogy az $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat pontonként korlátos az X téren, tehát minden $x \in X$ elemre az $(A_n x)$ vektorsorozat korlátos az Y térben, azaz

$$\forall\, x \in X \text{ elemhez } \exists \text{ (x-től függő) } C_x > 0 : \quad \|A_n x\|_Y \le C_x \quad (\forall\, x \in X).$$

Ekkor az operátornormák $(\|A_n\|)$ sorozata egyenletesen korlátos, azaz

$$\exists\, C > 0 : \quad \|A_n\| \le C \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

72. Írja le az egyenletes korlátosság tételének divergenciára vonatkozó átfogalmazását.

Válasz. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-tér, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ pedig egy normált tér. Tegyük fel, hogy az $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat normáinak az $(\|A_n\|)$ sorozata nem korlátos, azaz

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = +\infty.$$

Ekkor van olyan $x_0 \in X$ elem, hogy az Y térbeli $(A_n x_0)$ sorozat nem korlátos, azaz

$$\sup_n \|A x_0\|_Y = +\infty,$$

következésképpen az $(A_n x_0) \subset Y$ sorozat nem konvergens.

73. Milyen tételt ismer operátorsorozat pontonkénti limeszére vonatkozóan?

Válasz. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-tér és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér. Tegyük fel, hogy az $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat minden $x \in X$ pontban konvergens, vagyis minden $x \in X$ vektorra az Y-beli $(A_n x)$ vektorsorozat konvergens. Jelölje

$$A(x) := \lim_{n\to+\infty} A_n x \qquad (x \in X)$$

a limesz-operátort. Ekkor A is egy folytonos lineáris operátor, azaz $A \in B(X,Y)$ és

$$\|A\| \leq \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|.$$

74. Fogalmazza meg a Banach–Steinhaus-tétel első változatát.

Válasz. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-tér és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér, továbbá $(A_n) \subset B(X,Y)$ és $A \in B(X,Y)$. Ekkor a következő két állítás egymással ekvivalens:

1^o Az (A_n) operátorsorozat az X-en pontonként tart az A operátorhoz, azaz

$$\lim_{n\to+\infty} A_n x = Ax \qquad (x \in X).$$

2^o (a) Van olyan $Z \subset X$ zárt rendszer, hogy (A_n) a Z-n pontonként tart A-hoz, azaz

$$\lim_{n\to+\infty} A_n z = Az \qquad (z \in Z) \quad \text{és}$$

(b) az operátornormák $(\|A_n\|)$ sorozata egyenletesen korlátos, azaz

$$\exists\, C > 0: \quad \|A_n\| \leq C \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

75. Fogalmazza meg a Banach–Steinhaus-tétel második változatát.

Válasz. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-terek. Ekkor a folytonos lineáris operátoroknak az $(A_n) \subset B(X,Y)$ sorozata akkor és csak akkor konvergál minden $x \in X$ pontban, ha

(a) van olyan $Z \subset X$ zárt rendszer, amelynek $z \in Z$ pontjaiban az $(A_n z)$ sorozat konvergens, és

(b) az operátornormák $(\|A_n\|)$ sorozata egyenletesen korlátos, azaz

$$\exists\, C > 0: \quad \|A_n\| \leq C \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

76. Milyen tételeket ismer Fourier-sorok divergenciájára vonatkozóan?

Válasz.

1. Van olyan 2π szerint periodikus folytonos f függvény, amelyik trigonometrikus Fourier-sorának $(S_n f)$ részletösszegei nem konvergálnak egyenletesen az $\mathbb{R}$-en, sőt $\sup_n \|S_n f\|_\infty = +\infty$.

2. Tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ ponthoz van olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény, amelynek a trigonometrikus Fourier-sora x_0-ban divergens, sőt $\sup_n |S_n f(x_0)| = +\infty$.

77. Fogalmazza meg Fejér szummációs tételét.

Válasz. Minden 2π szerint periodikus folytonos f függvény trigonometrikus Fourier-sorának $S_n f$ részletösszegeiből képzett számtani közepek

$$\big(\sigma_n f\big)(x) := \frac{\big(S_0 f\big)(x) + \big(S_1 f\big)(x) + \cdots + \big(S_n f\big)(x)}{n+1} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

sorozata az egész számegyenesen egyenletesen konvergál az f függvényhez.

78. Fogalmazza meg az általános kvadratúra eljárás konvergenciájára vonatkozó Pólya–Szegő-tételt.

Válasz. Legyen $[a, b]$ egy tetszőleges kompakt intervallum, w egy súlyfüggvény $[a, b]$-n, és tegyük fel, hogy adott az alappontoknak egy

$$a \leq x_{1,n} < x_{2,n} < x_{3,n} < \cdots < x_{n,n} \leq b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és az együtthatóknak egy

$$A_{1,n},\ A_{2,n},\ \ldots,\ A_{n,n} \in \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rendszere. Tekintsük a

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(x_{k,n}) \qquad (f \in C[a, b],\ n \in \mathbb{N})$$

kvadratúra eljárást.

Ekkor a

$$\lim_{n \to +\infty} Q_n f = \int_a^b f(x) w(x)\, dx \qquad (f \in C[a, b])$$

egyenlőségeknek, vagyis a kvadratúra eljárás konvergenciájának a szükséges és elégséges feltétele az, hogy

(a) az eljárás minden polinomra konvergens legyen és

(b) $\exists M > 0$: $\sum\limits_{k=0}^{n} |A_{k,n}| \leq M \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

79. Fogalmazza meg az interpolációs kvadratúra eljárás konvergenciájára vonatkozó Stieltjes-tételt.

Válasz. Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges intervallum és w egy tetszőleges súlyfüggvény (a, b)-n. Jelölje (p_n) a w súlyfüggvényre ortonormált polinomrendszert és $y_{k,n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a p_n $(n \in \mathbb{N})$ gyökeit. Ekkor az

$$A_{k,n} := \int_a^b l_{k,n}(x) w(x)\, dx \qquad (k, n \in \mathbb{N})$$

együtthatókkal képzett

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(y_{k,n}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

interpolációs kvadratúra eljárás konvergens, azaz a

$$\lim_{n \to +\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x) w(x)\, dx$$

egyenlőség minden $f \in C(a, b)$ függvényre teljesül.

80. Definiálja a nyílt leképezés fogalmát.

Válasz. Az X és az Y normált terek közötti $f : X \to Y$ függvényt **nyílt leképezésnek** nevezzük, ha minden X-beli nyílt halmaz f által létesített képe Y-beli nyílt halmaz, azaz

$$\forall\ G \subset X \ \text{ nyílt halmaz esetén } \ f(G) \subset Y \ \text{ is nyílt halmaz.}$$

81. Adjon meg olyan injektív, folytonos és lineáris leképezést, amelyiknek az inverze nem folytonos.

Válasz. Legyen $X := l^2$ és $A : X \ni x \mapsto Ax := \left(\frac{x_n}{n}\right)$ $\big(x = (x_n) \in l^2\big)$.

82. Fogalmazza meg a nyílt leképezések tételét.

Válasz. Legyenek X és Y **Banach-terek**. Ha a folytonos lineáris $A : X \to Y$ operátor szürjektív, akkor A egy nyílt leképezés is, vagyis A minden X-beli nyílt halmazt Y-beli nyílt halmazba visz át.

83. Fogalmazza meg a Banach-féle homeomorfia tételt.

Válasz. Legyenek X és Y **Banach-terek**. Ha $A : X \to Y$ folytonos lineáris bijekció, akkor A^{-1} folytonos lineáris operátor, azaz $A^{-1} \in B(X, Y)$

84. Fogalmazza meg az ekvivalens normákra vonatkozó tételt.

Válasz. Legyenek $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach-terek, és tegyük fel, hogy van olyan $c > 0$ állandó, hogy

$$\|x\|_2 \le c\|x\|_1 \qquad (\forall\ x \in X).$$

Ekkor a két norma ekvivalens, azaz létezik olyan $C > 0$ állandó is, hogy

$$\|x\|_1 \le C\,\|x\|_2 \qquad (\forall\ x \in X).$$

85. Definiálja normált terek Descartes-szorzatát.

Válasz. Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ tetszőleges normált terek. Egyszerűen bebizonyítható, hogy $X \times Y$ lineáris tér ($\mathbb{R}$ felett) és az

$$\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y \qquad \big((x, y) \in X \times Y\big)$$

függvény norma ezen a lineáris téren. Ax $\big(X \times Y, \|\cdot\|\big)$ normált teret az X és Y normált terek **Descates-szorzatának** nevezzük.

86. Definiálja lineáris leképezés gráfját.

Válasz. Az X és az Y normált terek közötti $A : X \to Y$ lineáris leképezés **grafikonján** vagy **gráfján** a

$$\Gamma(A) := \big\{(x, Ax) \mid x \in X\big\} \subset X \times Y$$

halmazt értjük.

87. Írja le a zárt gráfú operátor definícióját.

Válasz. Az $A : X \to Y$ leképezést **zárt gráfú operátornak** nevezzük, ha a $\Gamma(A)$ gráfja az $X \times Y$ normált térnek egy zárt részhalmaza, azaz ha

$$\forall \ \ x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x, \ \ Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y \qquad \text{esetén} \qquad y = Ax.$$

88. Adjon meg egy példát nem folytonos lineáris zárt gráfú leképezésre.

Válasz. Legyen $X := \big(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\big), \ \ Y := \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ és $D : X \to Y, \ \ Df := f'$.

89. Fogalmazza meg a zárt gráf tételt.

Válasz. Legyenek X és Y Banach-terek és tegyük fel, hogy $A : X \to Y$ egy lineáris zárt gráfú operátor, azaz az A lineáris leképezés $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in X\}$ grafikonja az $(X \times Y, \|\cdot\|)$ Banach-tér egy zárt részhalmaza. Ekkor A folytonos is, azaz $A \in B(X, Y)$.