Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek

Szili László

A lineáris differenciálegyenletek elméletéből tudjuk, hogy egy inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszer megoldásának előállításához elég ismernünk a homogén egyenlet egy alaprendszerét. Ennek előállítására azonban csak *állandó együtthatós esetben* van általános módszer. A két „klasszikus” eljárást ismerteti pl. Tóth János és Simon L. Péter könyve (*Differenciálegyenletek, Typotex Kiadó, 2005*). A továbbiakban B. van Rootselaar 1985-ben publikált (*Amer. Math. Monthly* **92** (1985), 321–327) eljárását ismertetjük.

1. Kezdetiérték-problémák megoldása

Adott $n \times n$-es komplex A mátrix esetén keressük az

$$x'(t) = Ax(t)$$

homogén lineáris differenciálegyenlet *komplex* értékű megoldásait.

Ismertnek vesszük azt a tényt, hogy minden $c \in \mathbb{C}^n$ vektorra az

$$x'(t) = Ax(t), \qquad x(0) = c \tag{1}$$

kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg, és a teljes megoldás az egész $\mathbb{R}$ intervallumon értelmezve van.

Tegyük fel, hogy a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ függvény (1) teljes megoldása, azaz

$$\varphi'(t) = A\varphi(t) \quad (t \in \mathbb{R}), \qquad \varphi(0) = c.$$

Ekkor $\varphi''(t) = A\varphi'(t) = A^2\varphi(t)$, $\varphi'''(t) = A^2\varphi'(t) = A^3\varphi(t), \ldots$ alapján

$$\varphi^{(k)}(t) = A^k\varphi(t), \quad \varphi^{(k)}(0) = A^k c \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{2}$$

Tekintsük az A mátrix karakterisztikus polinomját:

$$K_A(\lambda) := \det\big(\lambda E - A\big) = \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

ahol E az n-dimenziós egységmátrix. Jelölje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ ennek különböző komplex gyökeit, és legyen ezek multiplicitása rendre $m_1, m_2, \ldots, m_p$.

A lineáris algebrából ismert *Cayley–Hamilton-tétel* szerint az A mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának, azaz

$$A^n + a_{n-1}A^{n-1} + a_1A + a_0E = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^{n\times n},$$

ahol $\mathbf{0}$ az n-dimenziós nullmátrix. Ezt az egyenletet $\varphi(t)$-vel megszorozva

$$A^n\varphi(t) + a_{n-1}A^{n-1}\varphi(t) + \cdots + a_1A\varphi(t) + a_0\varphi(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n \qquad (t \in \mathbb{R})$$

adódik, amiből (2) felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\varphi^{(n)}(t) + a_{n-1}\varphi^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\varphi'(t) + a_0\varphi(t) = \mathbf{0} \in \mathbb{C}^n \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

(Az utóbbi két esetben $\mathbf{0}$ az n-dimenziós nullvektort jelöli.) Ez azt jelenti, hogy a $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ függvény megoldása az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = \mathbf{0} \tag{3}$$

vektoregyenletnek. Ennek mindegyik komponense egy n-edrendű, állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet, ezért az általános megoldása explicit alakban előállítható. Figyeljük meg azt is, hogy mindegyik egyenlet karakterisztikus polinomja éppen az A mátrix karakterisztikus polinomja.

Ismeretes, hogy mindegyik komponensben az m_j-szeres λ_j $(j = 1, 2, \ldots, p)$ gyökhöz tartozó lineárisan független megoldások:

$$\frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t} \qquad (k = 0, 1, \ldots, m_j - 1). \tag{4}$$

(Az $\frac{1}{k!}$ helyett bármilyen 0-tól különböző számokat vehetnénk. Az együtthatók ezen megválasztásának az előnyét később lehet majd látni.) Rendezzük ezeket a függvényeket egyetlen oszlopvektorba növekvő j indexek és csökkenő t hatványok szerint, és az így kapott $\mathbb{R} \to \mathbb{C}^n$ típusú vektorfüggvényt jelöljük f-fel:

$$f(t) := \begin{bmatrix} \frac{t^{m_1-1}}{(m_1-1)!}e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ te^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_1 t} \\ \vdots \\ \frac{t^{m_p-1}}{(m_p-1)!}e^{\lambda_p t} \\ \vdots \\ te^{\lambda_p t} \\ e^{\lambda_p t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{5}$$

Egyszerűen meggondolható az, hogy (3) általános megoldása $Rf(t)$ $(t \in \mathbb{R})$, ahol R tetszőleges $n \times n$-es komplex mátrix. Következésképpen az (1) kezdetiérték-problémának a φ teljes megoldásához létezik olyan $R \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix, hogy

$$\varphi(t) = Rf(t) \quad (t \in \mathbb{R}). \tag{6}$$

Ezután már csak az R mátrixot kell meghatároznunk. (6)-ból

$$\varphi^{(k)}(t) = Rf^{(k)}(t) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1)$$

adódik, ezért

$$\varphi^{(k)}(0) = Rf^{(k)}(0) \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{7}$$

Vezessük most be a következő jelöléseket:

$$\begin{aligned} W\big[\varphi; t\big] &:= \big[\varphi(t), \varphi'(t), \varphi''(t), \ldots, \varphi^{(n-1)}(t)\big] \in \mathbb{C}^{n\times n} \qquad (t \in \mathbb{R}); \\ &\qquad \text{(a } \varphi \text{ függvény Wronszki-féle mátrixa)} \\ G(c) &:= W\big[\varphi; 0\big] = \big[\varphi(0), \varphi'(0), \varphi''(0), \ldots, \varphi^{(n-1)}(0)\big] = \text{ (l. (2))} \\ &= \big[c, Ac, A^2c, \ldots, A^{n-1}c\big] \in \mathbb{C}^{n\times n}; \\ F(0) &:= W\big[f; 0\big] = \big[f(0), f'(0), f''(0), \ldots, f^{(n-1)}(0)\big] \in \mathbb{C}^{n\times n}. \end{aligned} \tag{8}$$

Vegyük észre azt, hogy ezekkel (7) így is írható:

$$G(c) = RF(0).$$

Az $F(0) \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix invertálható, ezért

$$R = G(c)F^{-1}(0).$$

A fenti gondolatmenetet visszafele alkalmazva adódik, hogy ezzel az R mátrixszal képzett $\varphi(t) = Rf(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ függvény valóban megoldása a (1) kezdetiérték-problémának. Beláttuk tehát a következő állítást:

Tétel. *Tetszőleges $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix és $c \in \mathbb{C}^n$ vektor esetén az*

$$x'(t) = Ax(t), \qquad x(0) = c$$

kezdetiérték-probléma teljes megoldása a

$$\varphi(t) = G(c)F^{-1}(0)f(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{9}$$

függvény, ahol f az (5) *alatti vektorfüggvény, $G(c)$ és $F(0)$ pedig a* (8)*-ban értelmezett mátrixok.*

2. Az általános megoldás előállítása

Ismeretes, hogy az

$$x'(t) = Ax(t) \tag{10}$$

homogén lineáris differenciálegyenlet teljes megoldásainak $\mathcal{M}_h$-val jelölt halmaza a $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{C}^n)$ – $\mathbb{C}$ feletti – lineáris tér egy n-dimenziós altere. Ennek egy bázisát (azaz (10) n számú lineárisan független megoldását, vagyis a fenti homogén lineáris differenciálegyenlet-rendzser egy alaprendszerét) megkapjuk, ha (1)-ben c-nek például az e_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ kanonikus egységvektorokat választjuk. A

$$\varphi_i(t) := G(e_i)F^{-1}(0)f(t) \qquad (t \in \mathbb{R};\ \ i = 1, 2, \ldots, n) \tag{11}$$

vektorértékű függvények tehát a (10) egyenlet lineárisan független megoldásai, és (10) általános megoldása

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \qquad \big(c_i \in \mathbb{C},\ \ i = 1, 2, \ldots, n\big),$$

azaz

$$\mathcal{M}_h = \big\{\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i \mid c_i \in \mathbb{C},\ \ i = 1, 2, \ldots, n\big\}.$$

A fentiek alapján egy állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet általános megoldását a következőképpen állítjuk elő:

1. lépés: meghatározzuk az A mátrix sajátértékeit;
2. lépés: felírjuk a (5) alatti $f : \mathbb{R} \to C^n$ vektorfüggvényt;
3. lépés: kiszámoljuk az $F(0)$ mátrixot (l. (8)), majd ezt invertáljuk;
4. lépés: meghatározzuk a $G(e_i) = \big[e_i, Ae_i, A^2e_i, \ldots, A^{n-1}e_i\big]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ mátrixokat;
5. lépés: végül kiszámítjuk a $G(e_i)F^{-1}(0)f(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ szorzatokat, és felírjuk az általános megoldást.

3. Valós megoldások

Valós együtthatómátrix (azaz $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) esetén kereshetjük az $x' = Ax$ egyenlet valós értékű ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú) megoldásait.

A lineáris differenciálegyenletek általános elméletéből azt is tudjuk, hogy ennek megoldáshalmaza a $C^1\big(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n\big)$ – $\mathbb{R}$-feletti – lineáris tér egy n-dimenziós altere.

Az ismertetett módszert ekkor is használhatjuk; sőt azt is láthatjuk, hogy a (11)-ben definiált függvények mindegyike $\mathbb{R}^n$ (valós!!) értékű, mivel ezek az

$$x' = Ax, \qquad x(0) = e_i$$

kezdetiérték-problémák teljes megoldásai. (Érdemes megfigyelni, hogy $f(t)$-nek, illetve $F^{-1}(0)$-nak lehetnek ugyan komplex komponensei, de a fentiek alapján az $F^{-1}(0)f(t)$ szorzat mindegyik komponense már szükségképpen valós!!!)

A valós általános megoldás tehát

$$\sum_{i=1}^{n} c_i\varphi_i, \quad \text{ahol } c_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

4. Példák

1. példa. *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer komplex, illetve valós értékű általános megoldását.

1. megoldás (a Tétel alapján): Az $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei a

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

Az f vektorfüggvény (l. (5)) tehát

$$f(t) := \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{t} \\ e^{5t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

így (l. (8))

$$F(0) := \big[f(0), f'(0)\big] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix},$$

következésképpen

$$F^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix}.$$

Mivel $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ezért

$$G(e_1) = \big[e_1, Ae_1\big] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad G(e_2) = \big[e_2, Ae_2\big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletünk két lineárisan független megoldása tehát

$$\varphi_1(t) := G(e_1)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} \\ -\frac{3}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} \end{bmatrix};$$

$$\varphi_2(t) := G(e_2)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ e^{5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} \\ \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Az egyenlet *komplex* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbb{R};\quad c_1, c_2 \in \mathbb{C});$$

a *valós* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbb{R};\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}).\ \blacksquare$$

2. megoldás (sajátvektorokkal): Az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$, sajátvektorai pedig:

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad s^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},$$

ezért a

$$\varphi_1(t) := s^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} -e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \qquad \varphi_2(t) := s^{(2)}e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények az egyenletünk lineárisan független megoldásai. A *komplex* általános megoldást most a következő alakban kapjuk:

$$\varphi(t) := \begin{bmatrix} -c_1e^t + c_2e^{5t} \\ c_1e^t + 3c_2e^{5t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges komplex számok. A *valós* megoldásokat is ugyanebben az alakban kapjuk meg, tetszőleges c_1, c_2 valós együtthatókkal. $\blacksquare$

2. példa. *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer komplex, illetve valós értékű általános megoldását.

1. megoldás (a Tétel alapján): Az $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei $\lambda_{1,2} = 3 =: \lambda$.

Az f vektorfüggvény (l. (5)) ebben az esetben

$$f(t) := \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

így (l. (8))

$$F(0) := \big[f(0), f'(0)\big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix},$$

következésképpen

$$F^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ezért

$$G(e_1) = \big[e_1, Ae_1\big] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G(e_2) = \big[e_2, Ae_2\big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletünk két lineárisan független megoldása tehát

$$\varphi_1(t) := G(e_1)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\varphi_2(t) := G(e_2)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{3t} \\ e^{3t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix}.$$

Az egyenlet *komplex* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} \\ c_2e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

A *valós* megoldásokat is ugyanebben az alakban kapjuk meg, tetszőleges c_1, c_2 valós együtthatókkal. ■

2. megoldás (sajátvektorokkal): Az A mátrix sajátértékei $\lambda_{1,2} = 3 =: \lambda$. Ehhez a kétszeres sajátértékhez most két lineárisan független sajátvektor tartozik (a sík minden vektora sajátvektor), ilyenek például az

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vektorok, ezért a

$$\varphi_1(t) := s^{(1)}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi_2(t) := s^{(2)}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények az egyenletünk lineárisan független megoldásai. Az általános megoldást most ugyanabban az alakban kapjuk, mint az 1. megoldásban. ■

3. példa. *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer komplex, illetve valós értékű általános megoldását.

Megoldás (a Tétel alapján): Az $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei $\lambda_{1,2} = 2 =: \lambda$.

Az f vektorfüggvény (l. (5)) ebben az esetben

$$f(t) := \begin{bmatrix} te^{\lambda t} \\ e^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

így (l. (8))

$$F(0) := \big[f(0), f'(0)\big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

következésképpen

$$F^{-1}(0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ezért

$$G(e_1) = \big[e_1, Ae_1\big] = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G(e_2) = \big[e_2, Ae_2\big] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletünk két lineárisan független megoldása tehát

$$\varphi_1(t) := G(e_1)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (t+1)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{bmatrix};$$

$$\varphi_2(t) := G(e_2)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} te^{2t} \\ (1-t)e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Az egyenlet *komplex* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = \begin{bmatrix} \big((c_1+c_2)t + c_1\big)e^{2t} \\ \big(-(c_1+c_2)t + c_2\big)e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C}).$$

A *valós* megoldásokat is ugyanebben az alakban kapjuk meg, tetszőleges c_1, c_2 valós együtthatókkal. ■

Megjegyzés. A feladatbeli A mátrix kétszeres sajátértékéhez most csak egy lineárisan független sajátvektor tartozik (ez a mátrix nem diagonalizálható), ezért a sajátvektorokkal tanult tétel most nem alkalmazható. ■

4. példa. *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer komplex, illetve valós értékű általános megoldását.

1. megoldás (a Tétel alapján): Az $A := \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$.

Az f vektorfüggvény (l. (5)) tehát

$$f(t) := \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{(3+2i)t} \\ e^{(3-2i)t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

így (l. (8))

$$F(0) := \big[f(0), f'(0)\big] = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_1 \\ 1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3+2i \\ 1 & 3-2i \end{bmatrix},$$

következésképpen

$$F^{-1}(0) = \begin{bmatrix} \frac{2+3i}{4} & \frac{2-3i}{4} \\ -\frac{i}{4} & \frac{i}{4} \end{bmatrix}.$$

Mivel $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ezért

$$G(e_1) = \big[e_1, Ae_1\big] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}, \quad G(e_2) = \big[e_2, Ae_2\big] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletünk két lineárisan független megoldása tehát

$$\varphi_1(t) := G(e_1)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2+3i}{4} & \frac{2-3i}{4} \\ -\frac{i}{4} & \frac{i}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(3+2i)t} \\ e^{(3-2i)t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{2+i}{4}e^{(3-2i)t} + \frac{2-i}{4}e^{(3+2i)t} \\ \frac{5i}{4}e^{(3-2i)t} - \frac{5i}{4}e^{(3+2i)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{3t}\big(2\cos(2t) + \sin(2t)\big) \\ \frac{5}{2}e^{3t}\sin(2t) \end{bmatrix};$$

$$\varphi_2(t) := G(e_2)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2+3i}{4} & \frac{2-3i}{4} \\ -\frac{i}{4} & \frac{i}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{(3+2i)t} \\ e^{(3-2i)t} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{i}{4}e^{(3-2i)t} + \frac{i}{4}e^{(3+2i)t} \\ \frac{2-i}{4}e^{(3-2i)t} + \frac{2+i}{4}e^{(3+2i)t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}e^{3t}\sin(2t) \\ \frac{1}{2}e^{3t}\big(2\cos(2t) - \sin(2t)\big) \end{bmatrix}.$$

Az egyenlet *komplex* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbb{R};\quad c_1, c_2 \in \mathbb{C});$$

a *valós* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbb{R};\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

2. megoldás (sajátvektorokkal): Az A mátrix sajátértékei $\lambda_1 = 3+2i$, $\lambda_2 = 3-2i$, sajátvektorai pedig:

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1+2i \\ 5 \end{bmatrix}, \qquad s^{(2)} = \begin{bmatrix} 1-2i \\ 5 \end{bmatrix},$$

ezért a

$$\varphi_1(t) := s^{(1)}e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} (1+2i)e^{(3+2i)t} \\ 5e^{(3+2i)t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\varphi_2(t) := s^{(2)}e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} (1-2i)e^{(3-2i)t} \\ 5e^{(3-2i)t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények az egyenletünk lineárisan független *komplex* megoldásai. A *komplex* általános megoldás:

$$\varphi(t) := c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges komplex számok.

A valós megoldások előállítása. Mivel az A együtthatómátrix valós, ezért az egyenletnek van két lineárisan független valós megoldása is. Az A mátrix valós voltából az is következik, hogy

$$\lambda_2 = \overline{\lambda_1}, \quad s^{(2)} = \overline{s^{(1)}} \quad \text{és} \quad \varphi_2(t) = \overline{\varphi_1(t)},$$

ahol tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén $\overline{z}$ a z komplex szám konjugáltja.

Azt is tudjuk azonban, hogy ebben az esetben a φ_1 komplex megoldás valós része és képzetes része az $x' = Ax$ egyenlet lineárisan független *valós* megoldásai. Következésképpen a

$$\operatorname{Re}\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \big(\cos(2t) - 2\sin(2t)\big)e^{3t} \\ 5e^{3t}\cos(2t) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

$$\operatorname{Im}\varphi_1(t) = \begin{bmatrix} \big(2\cos(2t) + \sin(2t)\big)e^{3t} \\ 5e^{3t}\sin(2t) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények az egyenletünk lineárisan független valós megoldásai. A valós általános megoldás tehát ezek valós lineáris kombinációja. ■

5. Az $F(0)$ mátrix meghatározása

Figyeljük meg, hogy az $x' = Ax$ egyenlet megoldásainak előállításához a 2. pontban vázolt eljárás mátrix sajátértékeinek és inverzének meghatározásán túl egyetlen „kritikus” lépést, nevezetesen az $F(0)$ mátrix kiszámolását tartalmazza. $F(0)$ elemei $\frac{t^k}{k!}e^{\lambda t}$ $(t \in \mathbb{R})$ alakú függvények deriváltjainak a 0 pontban vett helyettesítési értékei. Ezek „közvetlen” meghatározása tartalmaz némi technikai nehézséget, ezért érdemes más lehetőséget keresni.

Vezessük be az

$$f_{j,k}(t) := \frac{t^k}{k!}e^{\lambda_j t} \qquad (t \in \mathbb{R};\ \ j = 1, 2, \ldots, p,\ \ k = 0, 1, \ldots, m_j - 1)$$

függvényeket. Az f függvény (l. (5)) tehát

$$f = \begin{bmatrix} f_{1,m_1-1} \\ \vdots \\ f_{1,0} \\ \vdots \\ f_{p,m_p-1} \\ \vdots \\ f_{p,0} \end{bmatrix}.$$

A $K_A(\lambda)$ karakterisztikus polinom m_j-szeres λ_j gyökéhez az $F(0)$ mátrixban m_j számú sor tartozik. Ezekben a sorokban rendre a következő elemek állnak:

$$\begin{array}{ccccc} f_{j,m_j-1}(0), & f'_{j,m_j-1}(0), & f''_{j,m_j-1}(0), & \ldots, & f^{(n-1)}_{j,m_j-1}(0) \\ & & \vdots & & \\ f_{j,1}(0), & f'_{j,1}(0), & f''_{j,1}(0), & \ldots, & f^{(n-1)}_{j,1}(0) \\ f_{j,0}(0), & f'_{j,0}(0), & f''_{j,0}(0), & \ldots, & f^{(n-1)}_{j,0}(0). \end{array}$$

Itt az utolsó sor elemei az $f_{j,0}(t) = e^{\lambda_j t}$ és $f_{j,0}^{(i)}(t) = \lambda_j^i e^{\lambda_j t}$ $(t \in \mathbb{R};\quad i = 0, 1, 2, \ldots)$ felhasználásával

$$(12) \qquad 1, \qquad \lambda_j, \qquad \lambda_j^2, \qquad \lambda_j^3, \qquad \ldots, \qquad \lambda_j^{n-1}.$$

Mivel $k = 1, 2, \ldots$ esetén

$$f'_{j,k}(t) = \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} e^{\lambda_j t} + \lambda_j \frac{t^k}{k!} e^{\lambda_j t} = f_{j,k-1}(t) + \lambda_j f_{j,k}(t),$$

ezért

$$f_{j,k}^{(i)}(t) = f_{j,k-1}^{(i-1)}(t) + \lambda_j f_{j,k}^{(i-1)}(t) \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

következésképpen a kiszámolandó elemekre az

$$(13) \qquad f_{j,k}^{(i)}(0) = f_{j,k-1}^{(i-1)}(0) + \lambda_j f_{j,k}^{(i-1)}(0) \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

rekurzív formula érvényes az

$$(14) \qquad \begin{aligned} &f_{j,k}^{(0)}(0) = f_{j,k}(0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots), \\ &f_{j,0}^{(i)}(0) = \lambda_j^i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots) \end{aligned}$$

kezdőértékekkel.

Ezek felhasználásával az $F(0)$ mátrix szóban forgó része már egyszerűen megadható (λ_j helyett λ-t írunk):

$$(15) \qquad \begin{array}{cccccccccc}
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 8\lambda & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 7\lambda & 28\lambda^2 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6\lambda & 21\lambda^2 & 56\lambda^3 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5\lambda & 15\lambda^2 & 35\lambda^3 & 70\lambda^4 & \ldots \\
0 & 0 & 0 & 1 & 4\lambda & 10\lambda^2 & 20\lambda^3 & 35\lambda^4 & 56\lambda^5 & \ldots \\
0 & 0 & 1 & 3\lambda & 6\lambda^2 & 10\lambda^3 & 15\lambda^4 & 21\lambda^5 & 28\lambda^6 & \ldots \\
0 & 1 & 2\lambda & 3\lambda^2 & 4\lambda^3 & 5\lambda^4 & 6\lambda^5 & 7\lambda^6 & 8\lambda^7 & \ldots \\
1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \lambda^4 & \lambda^5 & \lambda^6 & \lambda^7 & \lambda^8 & \ldots
\end{array}$$

Vegyük észre, hogy a λ-hatványok 0-tól különböző együtthatói a Pascal-háromszög elemei (a (4) formulában ezért vettük az $\frac{1}{k!}$ együtthatót), így könnyű memorizálni és programozni is a fenti mátrixot.

6. További példák

5. példa. *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer komplex, illetve valós értékű általános megoldását.

Megoldás (a Tétel alapján): Az $A := \begin{bmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_{2,3} = 2$.

Az f vektorfüggvény (l. (5)) tehát

$$f(t) := \begin{bmatrix} e^t \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Az $F(0)$ mátrix:

$$F(0) := \left[f(0), f'(0), f''(0)\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Itt az első sor elemeit rögtön felírhatjuk. A 2. és a 3. sor a $\lambda_{2,3} = 2$ kétszeres sajátértékhez tartozik, ezért az elemeit legegyszerűbben a (15) mátrix utolsó két sorából kapjuk meg ($\lambda = 2$-vel).

$$F^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Mivel $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ezért

$$G(e_1) = \left[e_1, Ae_1, A^2e_1\right] = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad G(e_2) = \left[e_2, Ae_2, A^2e_2\right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$G(e_3) = \left[e_3, Ae_3, A^2e_3\right] = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Az egyenletünk három lineárisan független megoldása tehát

$$\varphi_1(t) = G(e_1)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 0 & 2 & 8 \\ 0 & 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -e^t + 2e^{2t} \\ 2te^{2t} \\ -2e^t + 2e^{2t} \end{bmatrix};$$

$$\varphi_2(t) = G(e_2)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\varphi_3(t) = G(e_3)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -4 & -3 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^t \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^t - e^{2t} \\ -te^{2t} \\ 2e^t - e^{2t} \end{bmatrix}$$

Az egyenlet *komplex* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) \qquad (t \in \mathbb{R}; \quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C});$$

a *valós* általános megoldást ugyanebből valós c_1, c_2, c_3 együtthatókkal kapjuk meg. ■

Megjegyzés. Az együtthatómátrix kétszeres sajátértékéhez ebben az esetben csak egy lineárisan független sajátvektor tartozik (a mátrix nem diagonalizálható), ezért a sajátvektorokkal tanult tétel most nem alkalmazható.

6. példa. *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer komplex, illetve valós értékű általános megoldását.

Megoldás (a Tétel alapján): Az $A := \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_{1,2,3} = 2$.

Az f vektorfüggvény (l. (5)) tehát

$$f(t) := \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2}e^{2t} \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Az $F(0)$ mátrix:

$$F(0) := \big[f(0), f'(0), f''(0)\big] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

A sajátérték most háromszoros, ezért $F(0)$ elemeit legegyszerűbben a (15) mátrix utolsó három sorából kapjuk meg ($\lambda = 2$-vel).

$$F^{-1}(0) = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mivel $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$, $e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ és $A^2 = \begin{bmatrix}13 & -5 & 1\\ 14 & -2 & -2\\ 5 & -1 & 1\end{bmatrix}$, ezért

$$G(e_1) = \left[e_1, Ae_1, A^2e_1\right] = \begin{bmatrix}1 & 4 & 13\\ 0 & 3 & 14\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}, \quad G(e_2) = \left[e_2, Ae_2, A^2e_2\right] = \begin{bmatrix}0 & -1 & -5\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

$$G(e_3) = \left[e_3, Ae_3, A^2e_3\right] = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

Az egyenletünk három lineárisan független megoldása tehát

$$\varphi_1(t) = G(e_1)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix}1 & 4 & 13\\ 0 & 3 & 14\\ 0 & 1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t}\\ te^{2t}\\ e^{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{t^2+4t+2}{2}e^{2t}\\ t(t+3)e^{2t}\\ \frac{t(t+2)}{2}e^{2t}\end{bmatrix};$$

$$\varphi_2(t) = G(e_2)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix}0 & -1 & -5\\ 1 & 1 & -2\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t}\\ te^{2t}\\ e^{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-\frac{t^2+2t}{2}e^{2t}\\ -(t^2+t-1)e^{2t}\\ -\frac{t^2}{2}e^{2t}\end{bmatrix};$$

$$\varphi_3(t) = G(e_3)F^{-1}(0)f(t) = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -2\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2 & 1\\ -4 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t}\\ te^{2t}\\ e^{2t}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\frac{t^2}{2}e^{2t}\\ (t^2-t)e^{2t}\\ \frac{t^2-2t+2}{2}e^{2t}\end{bmatrix}.$$

Az egyenlet *komplex* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) \qquad (t \in \mathbb{R};\quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C});$$

a *valós* általános megoldást ugyanebből valós c_1, c_2, c_3 együtthatókkal kapjuk meg. ■

Megjegyzés. Az együtthatómátrix háromszoros sajátértékéhez ebben az esetben csak egy lineárisan független sajátvektor tartozik (a mátrix nem diagonalizálható), ezért a sajátvektorokkal tanult tétel most nem alkalmazható.

7. példa. *Határozzuk meg az*

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}' = \begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ 3 & -4 & -3\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}$$

differenciálegyenlet-rendszer komplex, illetve valós értékű általános megoldását.

Megoldás (a Tétel alapján): Az $A := \begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ 3 & -4 & -3\\ 2 & -4 & 0\end{bmatrix}$ mátrix sajátértékei: $\lambda_1 = -5$, $\lambda_{2,3} = 2$.

$$f(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ te^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}, \quad F(0) = [f(0),\, f'(0)\, f''(0)] = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 25 \\ 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix};$$

$$F^{-1}(0) = \frac{1}{49}\begin{bmatrix} 4 & -70 & 45 \\ -4 & 21 & 4 \\ 1 & 7 & -1 \end{bmatrix};$$

$$G(e_1) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -9 \\ 0 & 2 & -6 \end{bmatrix}, \qquad G(e_2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 1 & -4 & 22 \\ 0 & -4 & 12 \end{bmatrix}, \qquad G(e_3) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 9 \\ 1 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Az egyenlet három lineárisan független megoldása:

$$\varphi_1(t) = G(e_1)F^{-1}(0)f(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} -e^{-5t} + 8e^{2t} \\ -3e^{-5t} + 3e^{2t} \\ -2e^{-5t} + 2e^{2t} \end{bmatrix};$$

$$\varphi_2(t) = G(e_2)F^{-1}(0)f(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2e^{-5t} - 2e^{2t} \\ 6e^{-5t} + e^{2t} \\ 4e^{-5t} - 4e^{2t} \end{bmatrix};$$

$$\varphi_3(t) = G(e_3)F^{-1}(0)f(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-5t} - e^{2t} \\ 3e^{-5t} - 3e^{2t} \\ 2e^{-5t} + 5e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Az egyenlet *komplex* általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) + c_3\varphi_3(t) \qquad (t \in \mathbb{R};\quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{C});$$

a *valós* általános megoldást ugyanebből valós c_1, c_2, c_3 együtthatókkal kapjuk meg.
■

Megjegyzés. Az A együtthatómátrixnak van három lineárisan független saját-vektora (azaz A diagonalizálható). A kétszeres 2 sajátértékhez most tartozik két lineárisan független sajátvektor: például

$$s^{(2)} := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad s^{(3)} := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda_1 = -5$-höz tartozó sajátvektor pedig például

$$s^{(1)} := \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Az egyenlet általános megoldása tehát:

$$\varphi(t) = c_1 s^{(1)} e^{-5t} + c_2 s^{(2)} e^{2t} + c_3 s^{(3)} e^{2t} \qquad (t \in \mathbb{R},\quad c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R} \text{ vagy } \mathbb{C}).$$