# Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna <zsuzska@cs.elte.hu>

1. gyakorlat, 2005. február 15.

1. Minimalizáló sorozat-e az $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ $(x \in \mathbb{R})$ függvényre a $x_k = k$, $k = 1, 2, \ldots$ sorozat?
2. Minimalizáló sorozat-e az $f(u) = \frac{||u||}{1+||u||^2}$, $(u \in \mathbb{R}^n)$ függvényre az $u_k = k * \mathbf{1}$ sorozat, $k = 1, 2, \ldots,$ ahol $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$?
3. Definiáljuk a függvények folytonosságát!
4. Milyen összefüggést ismerünk a folytonos függvények és a minimalizáló sorozatok között?
5. Fog-e minden $U$-beli minimalizáló sorozat az $f(x)$ $U$-beli minimumhelyéhez konvergálni, ha
   (a) $U = \mathbb{R}^n$ és $f(u) = \|u\|^3$?
   (b) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x + 3y \leq 4, x \geq 0, y \geq 0\}$ és $f(u) = x + y$?
6. Felveszi-e az $f(u)$ függvény a minimumát az $U$ halmazon, ha
   (a) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ és $f(u) = x + \frac{1}{y}$?
   (b) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 1, x \geq -15, x + 2y \leq 3\}$ és $f(u) = x + 2y$?
7. Határozzuk meg a következő függvények minimumát!
   (a) $f_1(x, y) = (x - 3)^2 + \sin y \cos y$
   (b) $f_2(x) = x^6 - 16x^3 + y^2 + 6y + 27$
8. Írjuk fel a nemlineáris programozási modelljét az alábbi feladatoknak!
   (a) Melyik az az egységsugarú körbe írt háromszög, melynek az oldalainak a négyzetösszege maximális?
   (b) Határozza meg az
   $$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 4, x + y \leq 1\}$$
   halmaznak a $(2, 0)$ ponthoz legközelebbi nemnegatív koordinátájú pontját!
9. Oldjuk meg a Lagrange multiplikátorok módszerével: (ne felejtsük el ellenőrizni a feltételeket)
   (a)
   $$\min x + y$$
   $$xy = 1$$
   (b)
   $$\min x^2 + y^2 + z^2$$
   $$z - xy = 5$$
10. Legyenek $\alpha, \beta, \gamma$ egy háromszög szögei. Igazoljuk (a Lagrange multiplikátorok módszerével) hogy
   $$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}.$$

# Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

2. gyakorlat, 2005. február 24.

1. Modellezzük matematikai programozási feladatként a következő problémát!
   Adott 3 kisváros, ezek koordinátái $(2;2)$, $(4;8)$, $(11;4)$, továbbá egy nagyváros a $(9,6)$ koordinátán. A területet keresztezi egy ipari vasútvonal, mely az $x + y = 10$ koordináta egyenes mentén halad a kérdéses régióban. Erőművet szeretnénk telepíteni olymódon, hogy a településektől vett távolságok összege minimális legyen, ne legyen 1 egységnél messzebb a vasútvonaltól, illetve ne legyen közelebb 3 egységnél a nagyvároshoz.
2. Lagrange multiplikátorok módszerével keressük meg az
   $$f(x, y, z) = x + z$$
   függvény szélső értékeit a
   $$U = \left\{(x, y, z) : \begin{array}{l} g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ g_2(x, y, z) = x + y = 1 \end{array}\right\}$$
   halmazon.
3. Előfordulhat-e, hogy egy függvénynek egy kompakt halmazon van lokális minimum helye, de nincs globális minimum helye? Válaszunkat bizonyítással vagy példával indokoljuk.
4. Legyen $\alpha, \beta, \gamma$ egy háromszög szögei. Mutassuk meg a Lagrange multiplikátorok módszerével hogy
   $$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}.$$
5. Modellezzük a következő feladatot: Adott egy poliéder, illetve egy politóp:
   $$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 16 \\ -x_2 + x_3 \geq 5 \\ x_1 - x_3 \geq 8 \end{array}$$
   illetve
   $$P = \text{conv}\left\{\begin{pmatrix} 100 \\ 200 \\ 300 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 200 \\ 300 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 300 \\ 200 \\ 100 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 57 \\ 76 \\ 98 \end{pmatrix}\right\}$$
   a, Döntsük el, van-e a két halmaznak közös pontja.
   b, Ha nincs, akkor keressük meg a két objektum egymáshoz legközelebbi pontjait.
   c, Fogalmazzuk meg lineáris programozási feladatként is.
6. A Tarajospusztai Tejüzem különböző méretű kerek sajtokat állít elő, ezek átmérője 9,11 és 15cm. A szállításra szögletes dobozokat használnak, melyek mérete 40×30cm, magassága pedig azonos a sajtokéval. A megszokott rutin szerint, 1 dobozba legfeljebb csak 3 darab sajtot teszünk. A főnök azonban elbizonytalanodott, és arra lenne kíváncsi hány darabot lehetne maximálisan elhelyezni. Modellezük a feladatot nemlineáris programozási feladatként!
7. Csináljunk tetszőleges olyan optimalizációs feladatot, melynek pontosan $k \in \mathbb{Z}$ lokális minimuma van.

# Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

3. gyakorlat, 2005. március 1.

1. Mutassuk meg hogy konvex függvény konvex halmazon vett lokális minimumai egyben globálisak is!
2. Bizonyítsuk be a számtani-mértani egyenlőtlenséget a Jensen tétel segítségével!
3. Mutassuk meg hogy egy poliéder mindig konvex!
4. Konvexek-e az alábbi halmazok?
   (a) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2 + 3y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 0 \\ -\ln(x) \leq 10\} \end{array}$
   (b) $U = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq z \\ x, y \geq 0\} \end{array}$
   (c) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 9 \\ 3x + y \geq 0 \\ 2(x-1)^2 + y^2 \geq 1\} \end{array}$
   (d) • $U = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} (x+1)^{-2} + 3y^2 + e^{-2z^2} \geq 0 \\ x, y, z \geq 0\} \end{array}$
5. Mutassuk meg hogy egy politóp mindig konvex!
6. • (Caratheodory tétele) Legyen $U \in \mathbb{R}^n$, konvex halmaz, $U \neq \emptyset$. Jelölje $coU$ az $U$ halmaz konvex burkát. Bizonyítsuk be, hogy $\forall u \in coU$ előállítható $n + 1$-nél nem több $U$-beli pont konvex kombinációjaként.
7. Bizonyítsuk be, hogy konvex halmazok tetszőleges metszete is konvex. Igaz-e ugyanez konvex halmazok uniójára, direkt szorzatára illetve különbségére?
8. Mutassuk meg, hogy minden $u_i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^{m} = 1$ esetén
   $$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{u_i}\right) \geq 1$$

# Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

4. gyakorlat, 2005. március 8.

1. Keressünk megengedett irányt az $U$ halmazban az $u_0$ pontból, ha
   (a) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^3 + y \leq 0, x, y \geq 0\}$ és $u_0 = (0, 0)$.
   (b) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 5, x + y \leq 4\}$ és $u_0 = (1, 3)$.
   (c) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y + 3 \geq 0, -x^2 + y - 1 \geq 0, x, y \geq 0\}$ és $u_0 = (2, 5)$ illetve $u_0 = (1, 2)$.
2. A megengedett irányok módszerével ellenőrizzük, hogy az alábbi feladatokra a megadott pont optimális-e.
   (a)
   $$\begin{array}{r} x^2 + y \to \min \\ x^2 + y^2 \leq 9 \\ x + y \leq 1 \end{array}$$
   és
   $$u_* = (x_*, y_*) = (0, -3)$$
   (b)
   $$\begin{array}{r} x + y \to \min \\ x^2 - y \leq 0 \\ 2y + x \leq 4 \end{array}$$
   és
   $$u_* = (x_*, y_*) = (0, 0)$$
3. Oldjuk meg a Lagrange multiplikátorok módszerével!
   $$\begin{array}{r} \min -2x^2 + 4xy + y^2 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$$

# Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < `http://www.cs.elte.hu/~zsuzska` >

5. gyakorlat, 2005. március 17.

1. A megengedett irányok módszerével ellenőrizzük, hogy az alábbi feladatokra a megadott pont optimális-e.

   (a)

$$\begin{aligned} x+y &\to \min \\ x^2-y &\le 0 \\ 2y+x &\le 4 \\ u_* = (x_*, y_*) &= (0,0) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} y &\to \max \\ x^2+3y &\le 3 \\ 2x+3y &\le 4 \\ x,y &\ge 0 \\ u_* = (x_*, y_*) &= (0,1) \end{aligned}$$

2. A megengedett irányok módszerével az adott $u_0$ pontból kiindulva hajtsunk végre egy teljes iterációs lépést, majd írjuk fel a második megengedett irányt meghatározó feladatot!

   (a)

$$\begin{aligned} x^2+y^2-4x+4 &\to \min \\ x-y+3 &\le 0 \\ -x^2+y-1 &\le 0 \\ x,y &\ge 0 \\ u_0 = (x_0, y_0) &= (2,5) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} x^2+xy+2y^2-6x-2y-12z &\to \min \\ 2x^2+y^2 &\le 15 \\ -x+2y+z &\le 3 \\ x,y,z &\ge 0 \\ u_0 = (x_0, y_0, z_0) &= (1,1,1) \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} (x-2)^2+(y-1)^2 &\to \min \\ x^2-y &\le 0 \\ -x+2y &= 1 \\ u_0 = (x_0, y_0) &= (1,1) \end{aligned}$$

# Operációkutatás - Gyakorló feladatsor

Vaik Zsuzsanna < `http://www.cs.elte.hu/~zsuzska` >

2005. március

1. Modellezzük a következő feladatokat!
   Határozzuk meg az $r$ sugarú gömbbe írt téglatestek közül azt, amelynek maximális a térfogata!
2. Adott $V$ térfogatú dobozok (téglatestek) közül melyik az, amelyet minimális területű csomagolópapírral be tudjuk csomagolni?
3. A következő példáknak számát adom csak meg (ne haragudjatok, nagyon sok dolgom volt most), a Kovács Margit Tanárnő jegyzetére utalnak!
4. 11.oldal 2.4.2./3
5. 11.oldal 2.4.3./1, illetve ugyanez a $f(u) = \frac{u^4}{1+u^2}$ függvényre.
6. 11. oldal 2.4.5.
7. 16-17.oldal 3.1.3.5./1., 4., 7., 9.
8. 23. oldal 3.2.5.4./2.
9. 23. oldal 3.2.5.2./2.
10. 24. oldal 3.2.5.10.
11. 29. oldal 4.2.2.2.
12. 29. oldal 4.2.2.1./2.
13. 29. oldal 4.2.2.5./akármelyik
14. 40. oldal 4.3.4.2./4.
15. 41. oldal 4.3.4.4./1.,4.

Hát ennyi most, sajnálom, de nagyon el lettem havazva.
A Tanárnő jegyetében több példa is van, letölthető:
< `http://www.cs.elte.hu/~margo/info.html` >

Vaik Zsuzsanna < `http://www.cs.elte.hu/~zsuzska` >

7. gyakorlat, 2005. áprlis 14.

*Kuhn-Tucker féle szükséges optimalitási kritérium:* Legyenek $f, g_1, \dots, g_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonosan differenciálható függvények, és legyen $U = \{u \in \mathbb{R}^n : g_1(u) \le 0, \dots g_s(u) \le 0\}$.

Tegyük fel, hogy $u \in U$-ra $f(u)$ lokális minimuma $f$-nek az $U$ halmazon, és a $G'(u)$ mátrix rangja $s$. Ekkor léteznek olyan $\lambda_1, \dots \lambda_s \ge 0$ valós számok, hogy

$$f'(u) + \sum_{i=1}^{s} \lambda_i g_i'(u) = 0$$

és $\forall i = 1, \dots, s$-re $\lambda_i g_i(u) = 0$

1. Teljesül-e a Kuhn-Tucker feltétel az alábbi feladatoknál?

   (a)

$$\begin{aligned} &\min\ x^2+y \\ &x^2+y^2 \le 9 \\ &x+y \le 1 \\ &u = (0,-3) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} &\min\ x+y \\ &x^2-y \le 0 \\ &2y+x \le 4 \\ &u = (0,0) \end{aligned}$$

   (c)

$$\begin{aligned} &\max y \\ &x^2+3y \le 3 \\ &2x+3y \le 4 \\ &x,y \ge 0 \\ &u = (0,1) \end{aligned}$$

# Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < `http://www.cs.elte.hu/~zsuzska` >

8. gyakorlat, 2005. áprlis 21.

1. Milyen $p$ paraméter esetén lehet a $(2,1)$ pont optimális megoldása az alábbi feladatnak?

$$\begin{aligned} &\min\ y^2 - px - 4y \\ &x^2-y^2-4y \le 5,\ x^2+y \le 5,\ x+y \ge 3,\ x,y \ge 0 \end{aligned}$$

2. Ellenőriük az alábbi feladatokra a Slater feltételt és a Kuhn–Tucker feltételek eljesülését az adott pontban.

   (a)

$$\begin{aligned} &\max xy \\ &x^2+y^2 \le 100 \\ &x+y \le 14 \\ &x,y \ge 0 \\ &u = (7,7) \end{aligned}$$

   (b)

$$\begin{aligned} &\min y \\ &x^2+y^2 \le 1 \\ &-x+y^2 \le 0 \\ &x+y \ge 0 \\ &u = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2) \end{aligned}$$

3. Milyen $p$ paraméterre lehet az alábbi rendszernek olyan optimumpontja, amire pontosan a 2. és a 3. feltétel aktív?

$$\begin{aligned} &\min x^2 - py \\ &x^2+y^2 \le 9 \\ &x+y^2 \le 3 \\ &x+y \ge 1 \end{aligned}$$

4. Tekintsük a

$$\begin{aligned} -u &\to \min\nolimits_{u \in U} \\ U &= \{u \in \mathbb{R} : u \ge 0,\ u^2 \le 0\} \end{aligned}$$

   feladatot. Mutassuk meg, hogy a feladathoz rendelt Lagrange függvénynek nincs nyeregpontja.

5. Tekintsük az

$$\begin{aligned} u &\to \min\nolimits_{u \in U} \\ U &= \{u \in \mathbb{R} : u \ge 0,\ u^2 \le 0\} \end{aligned}$$

   feladatot. Mutassuk meg, hogy a feladathoz rendelt Lagrange függvénynek $(0, 1, \lambda_2^*)$ nyeregpontja minden $\lambda_2^* \ge 0$ esetén.

6. Van-e az

$$\begin{aligned} x^2+y &\to \max \\ x^2+y^2 &\le 9 \\ x+y^2 &\le 3 \\ x+y &\le 1 \end{aligned}$$

   feladatnak olyan nyeregpontja, ahol pontosan a két utolsó korlátozó feltétel aktív.

# Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

10. gyakorlat, 2005. áprlis 28.

1. Kerresük a lineáris komplementaritási feladat megoldását, ha

   (a)
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \ q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

   (b)
$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \ q = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Határozzuk meg a lineáris komplementaritási feladat induló majdnem tökéletes bázisát, ha
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

3. Legyen $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -0.5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Oldjuk meg a lineáris komplementaritási feladatot Lemke algoritmussal. Hogyan viselkedik a Lemke módszer, ha az $M$ mátrix 2. és 3. oszlopát felcseréljük.

4. Valaki a lineáris komplementaritási feladat végtelen irányaként a
$$(0, 5, -2, 0, -1, 0, 3, 1, 2) + \lambda(2, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 0), \qquad \lambda \in \mathbb{R}$$
   vektort határozta meg. Adjunk minél több indokot arra, hogy a megoldás biztosan hibás!

5. Kopozitív, illetve kopozitív plusz tulajdonságú-e a következő mátrix:
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

# Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < http://www.cs.elte.hu/~zsuzska >

12. gyakorlat, 2005. május 5.

1. Ird át lineáris komplementaritási feladattá az alábbi feladatot!
$$x^2 + 3xy + y^2 - 2xz - 4yz + x - 3y \to \min$$
$$x + y + z \le 10$$
$$2x - y \ge 0$$
$$x, y, z \ge 0$$

2. Add meg azt a kvadratikus programozási feladatot, amely az alábbi halmazaz adott ponthoz legközelebbi nemnegatív koordinátájú pontját határozza meg, majd ird át lineáris komplementaritási feladattá!
$$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 2x + y \ge 6, \ 3x - 2y \le 2\}, \ u = (4, 3).$$

3. Hogy viselkedik a Lemke-algoritmus a $p$ paraméter különböző negatív értékei mellett arra a lineáris komplementaritási feladatra, ahol
$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & p \end{pmatrix}, \ q = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

4. Ellenörizzük le, hogy az alábbi hiperbolikus programozási feladatok megoldhatóak-e Charnes-Cooper eljárással. Ha igen oldjuk meg!

   (a)
$$\begin{array}{rl} \frac{-2x-y+2}{x+y+1} & \to \min \\ x + y & \le 4 \\ x - y & \le 2 \\ x, y & \ge 0 \end{array},$$

   (b)
$$\begin{array}{rl} \frac{-2x+y+2}{x+3y+4} & \to \min \\ -x + y & \le 4 \\ y \le 6 & \\ 2x + y & \le 14 \\ x, y & \ge 0 \end{array}.$$