Komplex függvénytani feladatok II.

(Analitikus függvények)

Programozó matematikus hallgatóknak

Összeállította:

Szili László

2002. március

$\boxed{\text{A Cauchy–Riemann-egyenletek}}$

1. feladat. *A definíció alapján vizsgálja meg deriválhatóság szempontjából a következő függvényeket:*

(a) $f(z) := z^3 \ (z \in \mathbb{C})$, *(b)* $f(z) := \dfrac{1}{z} \ (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, *(c)* $f(z) := z|z| \ (z \in \mathbb{C})$,

(d) $f(z) := z\mathrm{Re}\, z \ (z \in \mathbb{C})$, *(e)* $f(z) := \overline{z}^2 \ (z \in \mathbb{C})$, *(f)* $f(z) := \overline{z}z^2 \ (z \in \mathbb{C})$.

(g) $f(z) := |z| \ (z \in \mathbb{C})$, *(h)* $f(z) := \overline{z} \ (z \in \mathbb{C})$, *(i)* $f(z) := e^{z^2} \ (z \in \mathbb{C})$.

Megoldás. Az $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény **deriválható** az értelmezési tartományának egy z_0 *belső* pontjában, ha a

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

határérték létezik és véges. Ezt a határértéket az f függvény z_0 pontbeli **deriváltjá**nak nevezzük, és az $f'(z_0)$ szimbólummal jelöljük.

Példaként a (b) és az (e) feladat megoldását mutatjuk meg.

(b) Legyen $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Ekkor

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{\frac{1}{z} - \frac{1}{z_0}}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} -\frac{1}{zz_0} = -\frac{1}{z_0^2},$$

ezért ez az f függvény minden $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pontban deriválható és $f'(z_0) = -1/z_0^2$. (Mint az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetben!)

(e) Legyen $z_0 \in \mathbb{C}$ és $z = z_0 + h$. Ekkor

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} = \frac{(\overline{z_0 + h})^2 - \overline{z_0}^2}{h} = \frac{2\overline{z_0}\overline{h} + \overline{h}^2}{h}.$$

Ha $z_0 = 0$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{h}^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|\overline{h}|^2}{|h|^2} = \lim_{h \to 0} |h| = 0,$$

ezért f deriválható 0-ban és $f'(0) = 0$.

Ha $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, akkor viszont a különbségi hányadosfüggvénynek z_0-ban nincs határértéke, ti. a valós, illetve a képzetes tengelyekkel párhuzamos egyenesek mentén vett határértékek különbözőek. Ha ui. $h \in \mathbb{R}$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{2\overline{z_0}\overline{h} + \overline{h}^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2\overline{z_0}h + h^2}{h} = 2\overline{z_0}.$$

Ha h tiszta képzetes szám, azaz $h = ir \ (r \in \mathbb{R})$, akkor

$$\lim_{h \to 0} \frac{2\overline{z_0}\overline{h} + \overline{h}^2}{h} = \lim_{r \to 0} \frac{2\overline{z_0}(-ir) - r^2}{ir} = -2\overline{z_0},$$

ezért ez az f függvény egyetlen $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pontban sem deriválható. ■

$\boxed{\textbf{2. feladat.}}$ *A Cauchy–Riemann-féle differenciálegyenletekkel vizsgálja meg deriválhatóság szempontjából az előző feladatban megadott függvényeket.*

Megoldás. A következő állítást fogjuk felhasználni: *Az*

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y) \qquad (z = x + iy \in T \subset \mathbb{C})$$

függvény a T egy $z_0 = x_0 + iy_0$ belső pontjában akkor és csak akkor deriválható, ha az $u, v \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók az (x_0, y_0) pontban és

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) =& \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0), \\ \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) =& - \frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) \end{aligned}$$

*(ezek a **Cauchy–Riemann-egyenletek**), továbbá*

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Példaként ismét a (b) és az (e) feladatokat oldjuk meg.

(b) Először az f valós, illetve képzetes részét határozzuk meg:

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2},$$

tehát

$$\begin{aligned} u(x,y) =& \frac{x}{x^2+y^2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big), \\ v(x,y) =& - \frac{y}{x^2+y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big). \end{aligned}$$

Ezek a függvények minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pontban deriválhatók. Most megvizsgáljuk azt, hogy milyen pontokban teljesülnek a Cauchy–Riemann-egyenletek. Mivel

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x_0,y_0) =& \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(x_0,y_0) =& \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2+y_0^2)^2}, \end{aligned}$$

valamint

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y}(x_0,y_0) =& \frac{-2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2} \\ -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0,y_0) =& \frac{-2x_0y_0}{(x_0^2+y_0^2)^2}, \end{aligned}$$

ezért a Cauchy–Riemann-egyenletek az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ halmaz minden pontjában teljesülnek, ami azt jelenti, hogy az f függvény minden $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pontban deriválható.

Állítsuk most elő az f függvény deriváltját a valós- és a képzetes részekkel. Ha $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, akkor

$$f'(z_0) = f'(x_0 + iy_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) =$$

$$= \frac{y_0^2 - x_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} + i\frac{2x_0y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = -\frac{x_0^2 - 2ix_0y_0 - y_0^2}{(x_0^2 + y_0^2)^2} = -\frac{(x_0 - iy_0)^2}{(z_0\overline{z_0})^2} = -\frac{\overline{z_0}^2}{(z_0\overline{z_0})^2} = -\frac{1}{z_0^2}$$

összhangban az előző feladatban kapott eredménnyel.

(e) Mivel

$$f(z) = \overline{z}^2 = (x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2xyi \qquad (z = x + iy \in \mathbb{C}),$$

ezért f valós és képzetes része

$$u(x, y) = x^2 - y^2, \qquad v(x, y) = -2xy \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Ezek a függvények az egész $\mathbb{R}^2$-ön deriválhatók. A parciális deriváltjaik

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y, \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = -2x, \quad -\frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2y, \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

ezért a Cauchy–Riemann-egyenletek csak a $(0, 0)$ pontban teljesülnek. Az f függvény tehát csak a $0 \in \mathbb{C}$ pontban deriválható és $f'(0) = 0$. ■

3. feladat. *Bizonyítsa be, hogy ha a $T \subset \mathbb{C}$ tartományon értelmezett* ***valós*** *értékű függvény analitikus T-n, akkor az szükségképpen állandó T-n.*

Megoldás. Mivel f valós értékű, ezért a képzetes része nulla a T-nek megfelelő $\mathbb{R}^2$-beli R tartományon. A Cauchy–Riemann-egyenletek alapján tehát f valós részének parciális deriváltjai is eltűnnek R-en, ami csak úgy lehetséges, ha a valós rész állandó R-en. ■

4. feladat. *Igazolja, hogy ha f és $\overline{f}$ analitikus a $T \subset \mathbb{C}$ tartományon, akkor f állandó T-n.*

5. feladat. *Mutassa meg, hogy ha f holomorf a $T \subset \mathbb{C}$ tartományon, akkor a*

$$g := -\mathrm{Im}\, f + i\mathrm{Re}\, f$$

függvény is holomorf T-n.

6. feladat. *Döntse el azt, hogy az*

$$u(x, y) := 2x(1 - y) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvényhez van-e olyan $v \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, hogy az

$$f(z) := f(x + iy) := u(x, y) + iv(x, y) \qquad (z = x + iy \in \mathbb{C})$$

analitikus $\mathbb{C}$-n. Ha van ilyen v függvény (ezt az u ***harmonikus társá****nak nevezik), akkor határozza is meg, továbbá adja meg f-et a z változó függvényeként is.*

Megoldás. Analitikus komplex függvény valós (és képzetes) része harmonikus függvény. Mivel a megadott u függvényre

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)=0 \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$

ezért u harmonikus $\mathbb{R}^2$-őn.

Ha u-nak van v harmonikus társa, akkor fennállnak a Cauchy–Riemann-egyenletek:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) =& 2(1-y)=\frac{\partial v}{\partial y}(x,y)\\ \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) =& -2x=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,y).\end{aligned}$$

Az első egyenletből azt kapjuk, hogy

$$v(x,y)=-(1-y)^2+h(x) \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),$$

ahol $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tetszőleges deriválható függvény. Ezt a második egyenletbe beírva az adódik, hogy

$$\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)=h'(x)=2x,$$

azaz $h(x)=x^2+c$ $(x\in\mathbb{R})$.

Azt kaptuk tehát, hogy tetszőleges c valós szám esetén a

$$v(x,y):=x^2-(1-y)^2+c \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$$

deriválható függvénnyel a Cauchy–Riemann-egyenletek az egész R^2-őn teljesülnek, ami azt jelenti, hogy u-nak van harmonikus társa, és ez(ek) a fenti v függvény(ek).

Állítsuk most elő f-et a z változó függvényeként. Ehhez a $z=x+iy$, $\overline{z}=x-iy$-ból adódó

$$x=\frac{z+\overline{z}}{2}, \qquad y=\frac{z-\overline{z}}{2i}$$

egyenlőségeket használjuk fel:

$$\begin{aligned}f(z)&=u(x,y)+iv(x,y)=2x(1-y)+i\big(x^2-(1-y)^2+c\big)=\\ &=2\frac{z+\overline{z}}{2}\Big(1-\frac{z-\overline{z}}{2i}\Big)+i\Big(\big(\frac{z+\overline{z}}{2}\big)^2-\big(\frac{z-\overline{z}}{2i}\big)^2+2\frac{z-\overline{z}}{2}+c\Big)=\\ &=2z+i(z^2+c) \qquad (z\in\mathbb{C}).\end{aligned}$$

Az

$$f(z)=2z+i(z^2+c) \qquad (z\in\mathbb{C},\ c\in\mathbb{R})$$

(nyilván) analitikus függvények valós része a feladatban megadott u függvény. ■

$\boxed{\textbf{7. feladat.}}$ *Az alábbi $u,v\in\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ függvények lehetnek-e egy analitikus komplex függvény valós, illetve képzetes részei? Amennyiben lehetnek, keresse meg a harmonikus társukat, és adja meg az $f=u+iv$ függvényt a z függvényében.*

(a) $v(x,y):=3x^2y-y^3$ $((x,y)\in\mathbb{R}^2$,

(b) $u(x,y) := e^x \cos y \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2,$

(c) $v(x,y) := \cos x sh\, y \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2,$

(d) $u(x,y) := \dfrac{y}{x^2+y^2} \ ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$

$\boxed{\textbf{8. feladat.}}$ *(a) Igazolja, hogy az*

$$u(x,y) := \ln(x^2+y^2) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}).$$

függvénynek ***nincs*** *harmonikus társa az* $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ *tartományon.*

(b) Mutassa meg azonban azt is, hogy az

$$u(x,y) := \ln(x^2+y^2) \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R})$$

függvénynek viszont ***van*** *harmonikus társa az* $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$ *tartományon.*

Megoldás. (a) Mivel

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 2\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} + 2\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big),$$

ezért u harmonikus az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon.

Az állítást indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel tehát azt, hogy v az u harmonikus társa az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon. Ellentmondásra a v egységköríven felvett értékeiből fogunk jutni. Tekintsük a

$$g(t) := v(\cos t, \sin t) \qquad (t \in [0, 2\pi])$$

függvényt. A feltételünk szerint ez folytonosan deriválható, és

$$g'(t) = \frac{\partial v}{\partial x}(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t) + \frac{\partial v}{\partial y}(\cos t, \sin t) \cdot (\cos t).$$

Mivel u és v kielégítik a Cauchy–Riemann-egyenleteket, ezért

$$g'(t) = -\frac{\partial u}{\partial y}(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t) + \frac{\partial u}{\partial x}(\cos t, \sin t) \cdot (\cos t) =$$

$$= 2\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} + 2\frac{\cos^2 t}{\cos^2 t + \sin^2 t} \qquad (t \in [0, 2\pi]).$$

Ebből az következik, hogy

$$g(t) = g(0) + 2t \qquad (t \in [0, 2\pi]),$$

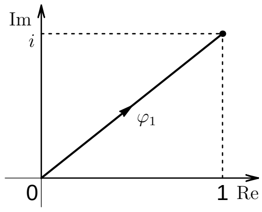
és ez ellentmond a g definíciójából következő $g(0) = g(2\pi)$ egyenlőségnek, tehát u-nak valóban nincs harmonikus társa az $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ tartományon.

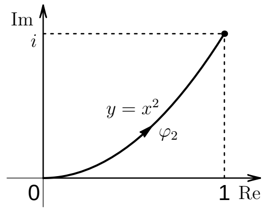
(b) A $v(x,y) := 2\mathrm{arctg}\, \frac{y}{x} + c \ ((x,y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R},\ c \in \mathbb{R})$ függvények az u harmonikus társai. ■

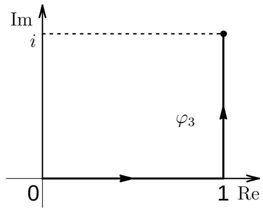
$\boxed{\textbf{9. feladat.}}$ *Legyen* $u \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *az* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ *pont egy környezetében harmonikus függvény. Mutassa meg, hogy* u*-nak van harmonikus társa. Ha* v *és* v_1 *harmonikus társa* u*-nak, akkor* $v - v_1$ *állandó.*

Vonalintegrál

$\boxed{\textbf{1. feladat.}}$ *Számítsa ki az $f(z) := z^2$ $(z \in \mathbb{C})$ függvény integrálját az alábbi ábrákon feltüntetett utak mentén:*







Van-e „mélyebb” oka annak, hogy mindhárom esetben ugyanazt az értéket kapjuk?

Megoldás. Először a görbék egy paraméteres előállítását adjuk meg:

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = (1+i)t \qquad (t \in [0,1]),\\
&\varphi_2(t) = t + it^2 \qquad (t \in [0,1]),\\
&\varphi_3(t) = \begin{cases} t, & \text{ha } t \in [0,1]\\ 1 + i(t-1), & \text{ha } t \in [1,2]. \end{cases}
\end{aligned}$$

A vonalintegrál definíciója alapján

$$\int_\varphi f = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt \qquad (\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}),$$

ezért

$$\int_{\varphi_1} f = \int_0^1 \big[(1+i)t\big]^2 (1+i)dt = (1+i)^3 \int_0^1 t^2 dt = (-2+2i)\big[\frac{t^3}{3}\big]_0^1 = -\frac{2}{3}(1-i),$$

$$\int_{\varphi_2} f = \int_0^1 (t+it^2)^2(1+2it)dt = \int_0^1 (t^2 + 2it^3 - t^4)(1+2it)dt =$$

$$= \int_0^1 \big[(-5t^4 + t^2) + i(4t^3 - 2t^5)\big]dt = \big[-t^5 + \frac{t^3}{3}\big]_0^1 + i\big[t^4 - \frac{t^6}{3}\big]_0^1 = -\frac{2}{3}(1-i),$$

valamint

$$\int_{\varphi_3} f = \int_0^2 f(\varphi_3(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_0^1 t^2 \cdot 1dt + \int_1^2 (1 + i(t-1))^2 \cdot idt =$$

$$= \big[\frac{t^3}{3}\big]_0^1 + i\int_1^2 \big[(1-(t-1)^2) + 2i(t-1)\big]dt =$$

$$= \frac{1}{3} - 2\int_1^2 (t-1)dt + i\int_1^2 \big[1 - (t-1)^2\big]dt =$$

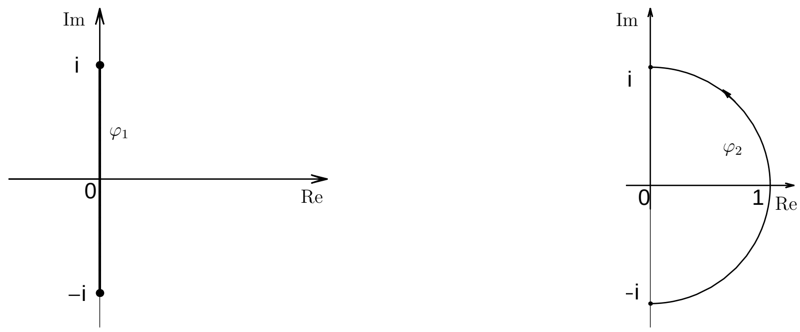
$$= \frac{1}{3} - 2\big[\frac{(t-1)^2}{2}\big]_1^2 + i\big[(t-1) - \frac{(t-1)^3}{3}\big]_1^2 = -\frac{2}{3}(1-i).$$

Az $f(z) = z^2$ $(z \in \mathbb{C})$ az egész $\mathbb{C}$-n analitikus lévén, a Cauchy-féle integráltétel miatt bármely szakaszonként sima, egyszerű zárt görbén vett integrálja 0. Ebből pedig az következik, hogy két adott pont közötti vonalintegrál független az úttól. Ezért az alaptételből is következik, hogy az integrál mindhárom esetben ugyanaz az érték. ■

$\boxed{\textbf{2. feladat.}}$ *Számítsa ki az $f(z) := z^2$ $(z \in \mathbb{C})$ függvény integrálját az alábbi ábrákon feltüntetett utak mentén:*

Van-e „mélyebb” oka annak, hogy mindkét esetben ugyanazt az értéket kapjuk?

$\boxed{\textbf{3. feladat.}}$ *Határozza meg az $f(z) := |z|$ $(z \in \mathbb{C})$ függvény integrálját az alábbi ábrákon feltüntetett utak mentén:*



Megoldás. Mivel $\varphi_1(t) = it$ $(t \in [-1, 1])$, ezért

$$\int_{\varphi_1} |z|dz = \int_{-1}^{1} |\varphi_1(t)| \cdot \varphi_1'(t)dt = \int_{-1}^{1} |t| \cdot idt = 2i\Big[\frac{t^2}{2}\Big]_0^1 = i.$$

A jobb oldali görbe egy paraméteres előállítása: $\varphi_2(t) = e^{it}$ $(t \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])$, ezért

$$\int_{\varphi_2} |z|dz = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |e^{it}| \cdot ie^{it}dt = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} ie^{it}dt =$$

$$= \big[e^{it}\big]_{-\pi/2}^{\pi/2} = e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}} = \Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big) - \Big(\cos\big(-\frac{\pi}{2}\big) + i\sin\big(-\frac{\pi}{2}\big)\Big) = 2i.$$

■

$\boxed{\textbf{4. feladat.}}$ *Számítsa ki az $\int_\varphi (z - z_0)^n dz$ vonalintegrált, ahol φ a pozitív körüljárással tekintett z_0 középpontú, r sugarú kör és n egész szám.*

Megoldás. A megadott görbe egy paraméteres előállítása

$$\varphi(t) = z_0 + re^{it} \qquad (t \in [0, 2\pi]),$$

ezért a definíció alapján

$$\int_\varphi (z-z_0)^n dz = \int_0^{2\pi} (re^{it})^n rie^{it} dt = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt.$$

Ha $n=-1$, akkor

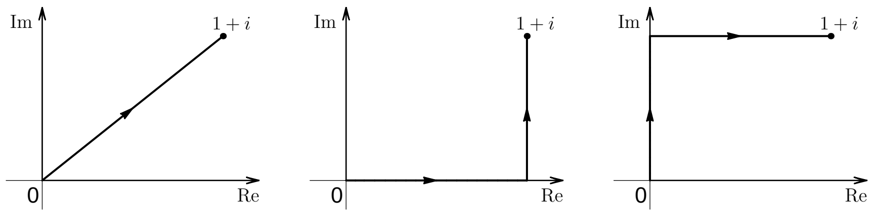
$$\int_\varphi \frac{1}{z-z_0} dz = 2\pi,$$

ha $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, akkor pedig

$$\int_\varphi (z-z_0)^n dz = r^{n+1} i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = r^{n+1} i \left[\frac{e^{i(n+1)t}}{i(n+1)}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

(Ha $n \geq 0$, akkor az integrandus az egész $\mathbb{C}$-n analitikus, ezért az integrál 0 értéke a Cauchy-féle integráltételből is következik.) ■

5. feladat. *Határozza meg az $f(z) := \overline{z}$ $(z \in \mathbb{C})$ függvény integrálját az alábbi ábrákon feltüntetett utak mentén:*



6. feladat. *Határozza meg az $\int_\varphi f$ vonalintegrált, ha*

(a) $f(z) := \dfrac{z}{\overline{z}}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, $\varphi(t) := t + it^2$ $(t \in [0,1])$,

(b) $f(z) := z^3$ $(z \in \mathbb{C})$, $\varphi(t) := t + i\sqrt{t}$ $(t \in [0,1])$,

(c) $f(z) := z^3$ $(z \in \mathbb{C})$, $\varphi(t) := re^{it}$ $(t \in [0,2\pi],\ r > 0)$.

$\boxed{\text{Cauchy-féle integrálformulák}}$

A továbbiakban az egyszerű, zárt, szakaszonként sima görbét (utat) röviden **Jordan-görbé**nek (**út**nak) fogjuk nevezni.

A **Cauchy-féle integrálformula**: Ha az $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény analitikus a $T \subset \mathbb{C}$ tartományban, akkor az

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(t)}{t - z_0} dt$$

összefüggés érvényes *minden* olyan, pozitív értelemben befutott φ Jordan-görbére, amely belsejével együtt benne van T-ben, és amely a z_0 pontot belsejében tartalmazza. (E tétel szerint, ha a φ Jordan-görbe és belseje a függvény holomorfitási tartományában fekszik, akkor *a függvénynek a φ-n felvett értékei egyértelműen meghatározzák a függvény értékeit a φ belsejének minden pontjában is.*)

A **deriváltakra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulák**: Ha az $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény analitikus a $T \subset \mathbb{C}$ tartományban, akkor ott akárhányszor deriválható. Ha z_0 a T tetszőleges pontja, φ pedig egy olyan Jordan-görbe T-ben, amely a z_0 pontot pozitív értelemben megkerüli, akkor minden $k = 1, 2, \ldots$ esetén

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(t)}{(t - z_0)^{k+1}} dt.$$

$\boxed{\textbf{1. feladat.}}$ *Számítsa ki a következő integrálokat:*

$$(a) \quad \int_\varphi \frac{dz}{z - z_0}, \qquad (b) \quad \int_\varphi \frac{z}{z - z_0} dz, \qquad (c) \quad \int_\varphi \frac{e^z}{z - z_0} dz,$$

ahol $z_0 \in \mathbb{C}$ rögzített szám és φ a z_0 pontot pozitív irányban megkerülő Jordan-görbe.

Megoldás. Az

$$\begin{aligned} f_a(z) :=& 1 \qquad (z \in \mathbb{C}), \\ f_b(z) :=& z \qquad (z \in \mathbb{C}), \\ f_c(z) :=& e^z \qquad (z \in \mathbb{C}) \end{aligned}$$

függvényekre, valamint a φ görbére a Cauchy-féle integrálformula alkalmazható, ezért

$$\int_\varphi \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f_a(z_0) = 2\pi i,$$

$$\int_\varphi \frac{z}{z - z_0} dz = 2\pi i f_b(z_0) = 2\pi i z_0,$$

$$\int_\varphi \frac{e^z}{z - z_0} dz = 2\pi i f_c(z_0) = 2\pi i e^{z_0}.$$

■

$\boxed{\textbf{2. feladat.}}$ *Határozza meg az alábbi vonalintegrálokat:*

(a) $$\int_\varphi \frac{e^{iz}\sin^7 z}{z-\frac{\pi}{2}}dz, \qquad \varphi: \quad |z-2|=2, \quad \textit{pozitív körüljárás};$$

(b) $$\int_\varphi \frac{e^{z^2}}{z^2-1}dz, \qquad \varphi: \quad |z-1|=1, \quad \textit{negatív körüljárás};$$

(c) $$\int_\varphi \frac{z^8 e^{\pi z}}{z^2-1}dz, \qquad \varphi: \quad |z-1|=\frac{3}{2}, \quad \textit{pozitív körüljárás}.$$

Adjon meg egyéb olyan Jordan-görbéket is, amelyekre vonatkozó vonalintegrál a megadott görbére vonatkozó vonalintegrállal egyenlő.

Megoldás. (a) Az $f(z) := e^{iz}\sin^7 z$ $(z \in \mathbb{C})$ függvény analitikus $\mathbb{C}$-n; φ a pozitív forgásirányban tekintett 2 középpontú, 2 sugarú körív, amely belsejében tartalmazza a $\frac{\pi}{2}$ pontot. A Cauchy-féle integrálformula alapján

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-\frac{\pi}{2}}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^{iz}\sin^7 z}{z-\frac{\pi}{2}}dz,$$

ezért

$$\int_\varphi \frac{e^{iz}\sin^7 z}{z-\frac{\pi}{2}}dz = 2\pi i f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\pi i e^{i\frac{\pi}{2}}\sin^7\frac{\pi}{2} = -2\pi.$$

A vonalintegrál értéke nem változik akkor, ha φ helyett tetszőleges olyan Jordan-görbét veszünk, amely belsejében tartalmazza a $\pi/2$ pontot.

(b) Az

$$f(z) := \frac{e^{z^2}}{z+1} \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\})$$

függvény analitikus a $\mathbb{C}\setminus\{-1\}$ tartományon, φ pedig a negatív forgásirányban tekintett 1 középpontú, 1 sugarú körív. A Cauchy-féle integrálformula alapján

$$f(1) = -\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{z-1}dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{\frac{e^{z^2}}{z+1}}{z-1}dz = -\frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{e^{z^2}}{z^2-1}dz$$

(az egyenlőségjelek utáni negatív előjel a negatív forgásirány miatt van), ezért

$$\int_\varphi \frac{e^{z^2}}{z^2-1}dz = -2\pi i f(1) = -ie\pi.$$

A vonalintegrál értéke nem változik akkor, ha φ helyett tetszőleges olyan Jordan-görbét veszünk, amely belsejében tartalmazza az 1 pontot, a -1 pont pedig a külsejében van. ■

$\boxed{\textbf{3. feladat.}}$ *Számítsa ki az*

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)}dz$$

integrált, ha

(a) $\varphi : |z - 4i| = 1$, *pozitív körüljárás;*
(b) $\varphi : |z - 1| = \frac{1}{2}$, *negatív körüljárás;*
(c) $\varphi : |z| = \frac{1}{2}$, *pozitív körüljárás;*
(d) $\varphi : |z + 1| = \frac{3}{4}$, *negatív körüljárás.*

Megoldás. (a) Az integrandus szinguláris pontjai: $0, +1$ és -1. A φ görbe a pozitív körüljárással tekintett $4i$ középpontú, 1 sugarú körív. Az integrandus szingularitásai ezen kívül helyezkednek el, ezért a Cauchy-féle integráltétel alapján a vonalintegrál 0.

(b) φ a negatív körüljárással tekintett 1 középpontú, 1/2 sugarú körív. Alakítsuk át az integrandust a következőképpen:

$$\frac{1}{z(z^2-1)} = \frac{\frac{1}{z(z+1)}}{z-1}.$$

Az $f(z) := \frac{1}{z(z+1)}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1\})$ függvény analitikus a $\mathbb{C} \setminus \{0, -1\}$ tartományon, ami belsejével együtt tartalmazza φ-t, ezért a Cauchy-féle integrálformula alapján

$$f(1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z-1} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{\frac{1}{z(z+1)}}{z-1} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)} dz$$

(a negatív előjel a negatív forgásirány miatt van), ezért

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)} dz = -2\pi i f(1) = -i\pi.$$

(c) Most az $f(z) := \frac{1}{z^2-1}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 1\})$ analitikus függvényt tekintjük. φ a pozitív körüljárással tekintett origó középpontú, 1/2 sugarú körív, aminek belsejében az integrandusnak csak a 0 szinguláris pontja van. A Cauchy-féle integrálformula alapján

$$f(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)} dz,$$

így

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)} dz = 2\pi i f(0) = -2\pi i.$$

(d) Ebben az esetben az $f(z) := \frac{1}{z(z-1)}$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ analitikus függvényre alkalmazzuk a Cauchy-féle integrálformulát:

$$f(-1) = -\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{f(z)}{z+1} dz = -\frac{1}{2\pi i} \int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)} dz,$$

azaz

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)} dz = -2\pi f(-1) = i\pi.$$

■

$\boxed{\textbf{4. feladat.}}$ *Számítsa ki az*

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)}dz$$

integrált, ha φ a pozitív körüljárással tekintett origó középpontú 2 sugarú körív.

Megoldás. Az előző feladattól eltérően ennek a Jordan-görbének a belsejében az integrandusnak egynél több szingularitása van. Az ilyen és az ehhez hasonló esetekben a következőképpen járhatunk el: vegyük körül az f-fel jelölt integrandus szingularitásait (ezek számát jelöljük p-vel) olyan, a φ belsejében haladó $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$ Jordan-görbékkel, amelyek egymásnak kölcsönösen a külsejükben helyezkednek el. A Cauchy-féle integráltétel következményeként láttuk azt, hogy

$$\int_\varphi f(z)dz = \sum_{k=1}^{p} \int_{\varphi_k} f(z)dz,$$

feltéve, hogy mindegyik φ_k görbén ugyanazon befutási értelemben integrálunk. Az $\int_{\varphi_k} f$ integrálokat pedig az előző feladat megoldásában ismertetett módon számolhatjuk ki.

A feladatban megadott φ kör az integrandus $-1, 0, 1$ szingularitásait tartalmazza. Vegyük körül ezeket a pontokat (például) $1/8$ sugarú körökkel. Jelöljük ezeket, a pozitív körüljárással tekintett köröket rendre $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$-mal. Az előző feladat (d) része alapján:

$$\int_{\varphi_1} \frac{1}{z(z^2-1)}dz = -i\pi.$$

Az előjelet a pozitív körüljárás miatt kellett megváltoztatni. Felhasználtuk még azt a tényt is, hogy az integrál nem változik akkor, ha olyan Jordan-görbén integrálunk, amely belsejében tartalmazza a -1 pontot, a 0 és az 1 szingularitások pedig a külsejében vannak.

Az előző feladat (c) és (b) része szerint

$$\int_{\varphi_2} \frac{1}{z(z^2-1)}dz = -2\pi i \quad \text{és} \quad \int_{\varphi_3} \frac{1}{z(z^2-1)}dz = i\pi,$$

ezért

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^2-1)}dz = \sum_{k=1}^{3} \int_{\varphi_k} \frac{1}{z(z^2-1)}dz = -i\pi - 2\pi i + i\pi = -2\pi i.$$

■

$\boxed{\textbf{5. feladat.}}$ *Számítsa ki a*

$$\int_\varphi \frac{dz}{1+z^2}$$

integrált, ha

(a) $\varphi : |z-5| = 1$, pozitív körüljárás;
(b) $\varphi : |z-i| = 1$, pozitív körüljárás;
(c) $\varphi : |z+i| = 1$, negatív körüljárás;
(d) $\varphi : |z| = 2$, pozitív körüljárás.

$\boxed{\textbf{6. feladat.}}$ *Számítsa ki a*

$$\int_\varphi \frac{1}{z(z^2+1)}dz$$

integrált, ha φ olyan szakaszonként sima, egyszerű zárt görbe, amely

(a) belsejében tartalmazza a $z = 0$ pontot, a $z = i$ és a $z = -i$ pontok pedig φ külsejében vannak;

(b) belsejében tartalmazza a $z = i$ pontot, a $z = 0$ és a $z = -i$ pontok pedig φ külsejében vannak;

(c) belsejében tartalmazza a $z = 0$, a $z = i$ és a $z = -i$ pontokat.

$\boxed{\textbf{7. feladat.}}$ *Határozza meg a következő vonalintegrálokat (mindegyik esetben pozitív körüljárási irányt tekintve):*

(a) $\displaystyle\int_\varphi \frac{1}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad \varphi: \quad |z-z_0| = r > 0, \quad (z_0 \in \mathbb{C},\ n = 1,2,\ldots);$

(b) $\displaystyle\int_\varphi \frac{z}{(z-z_0)^{n+1}}dz, \qquad \varphi: \quad |z-z_0| = r > 0, \quad (z_0 \in \mathbb{C},\ n = 1,2,\ldots);$

(c) $\displaystyle\int_\varphi \frac{\sin^2 z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}dz, \qquad \varphi: \quad |z-2| = 2;$

(d) $\displaystyle\int_\varphi \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}dz, \qquad \varphi: \quad |z-i| = \frac{3}{2};$

Megoldás. Az ilyen és az ehhez hasonló integráloknál a deriváltakra vonatkozó Cauchy-féle integrálformulák alkalmazásával próbálkozhatunk.

(a) Legyen $f(z) := 1$ $(z \in \mathbb{C})$. Ekkor $f^{(n)}(z) = 0$ $(z \in \mathbb{C}, \quad n = 1,2,\ldots)$, tehát

$$0 = f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz.$$

(b) Itt $f(z) := z$ $(z \in \mathbb{C})$; $f'(z) = 1$ és $f^{(n)}(z) = 0$ $(z \in \mathbb{C}, \quad n = 2,3,\ldots)$, ezért

$$\begin{aligned}\int_\varphi \frac{z}{(z-z_0)^2}dz &= 2\pi i,\\ \int_\varphi \frac{z}{(z-z_0)^{n+1}}dz &= 0, \quad \text{ha } n = 2,3,\ldots.\end{aligned}$$

(c) Legyen $f(z) := \sin^2 z$ $(z \in \mathbb{C})$. Ekkor $f''(z) = 2\cos 2z$ $(z \in \mathbb{C})$, tehát

$$\int_\varphi \frac{\sin^2 z}{(z-\frac{\pi}{2})^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}f''\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2\pi i}{2!}2\cos 2\frac{\pi}{2} = -2\pi i.$$

(d) Az integrandusnak most két szinguláris helye van: $z^2+1=0$ miatt az i és a $-i$ pont. A φ görbe az i középpontú $3/2$ sugarú körív, ami nem tartalmazza az integrandus $-i$ szingularitását. Az

$$\frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2} = \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}$$

átalakítást végezzük el, és tekintjük az

$$f(z) := \frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\})$$

analitikus függvényt. Ennek deriváltja:

$$f'(z) = e^{\pi z}\frac{\pi(z+i)-2}{(z+i)^3} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{-i\}).$$

A Cauchy-féle integrálformulát erre az f-re, a $z_0 = i$ pontra és $n = 1$-re alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$f'(i) = \frac{1!}{2\pi i}\int_\varphi \frac{f(z)}{(z-z_0)^2}dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\varphi \frac{\frac{e^{\pi z}}{(z+i)^2}}{(z-i)^2}dz.$$

Ezért

$$\int_\varphi \frac{e^{\pi z}}{(z^2+1)^2}dz = 2\pi i \cdot f'(i) = 2\pi i \cdot e^{\pi i}\frac{\pi(2i)-2}{(2i)^3} = -\frac{\pi}{2}(1-\pi i).$$

■

$\boxed{\textbf{8. feladat.}}$ *Határozza meg a következő vonalintegrálokat (mindegyik esetben pozitív körüljárási irányt tekintve):*

(a) $\displaystyle\int_\varphi \frac{ze^z}{(z-z_0)^3}dz,$ $\quad\varphi$ *a z_0 pontot belsejében tartalmazó egyszerű, szakaszonként sima zárt görbe;*

(b) $\displaystyle\int_\varphi \frac{e^z}{z(1-z)^3}dz,$ $\quad\varphi$ *olyan egyszerű, szakaszonként sima zárt görbe, amelyik*

(i) belsejében tartalmazza a $z=0$ pontot, a $z=1$ pont pedig φ külsejében van;
(ii) belsejében tartalmazza a $z=1$ pontot, a $z=0$ pont pedig φ külsejében van;
(iii) belsejében tartalmazza a $z=0$ és a $z=1$ pontokat.

Primitív függvény

1. feladat. *Mutassa meg, hogy az* ***egyszeresen összefüggő*** $T \subset \mathbb{C}$ *tartományon analitikus* $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *függvénynek van primitív függvénye. Minden* $a \in T$ *esetén az*

$$F(z) := \int_{\widehat{az}} f(t)dt \qquad (z \in T)$$

(jól definiált!!) függvény f *egy primitív függvénye, ahol* $\widehat{az}$ *az* $a \in T$ *pontot a* z*-vel összekötő tetszőleges,* T*-ben haladó szakaszonként sima görbe.*

2. feladat. *Határozza meg az*

$$\exp, \quad \sin, \quad \cos, \quad \mathrm{sh}, \quad \mathrm{ch}$$

függvények primitív függvényeit.

Megoldás. Hatványsorok összegfüggvényének deriválására vonatkozó tétel alapján az $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esetben megismert függvényeket kapjuk. ■

3. feladat. *(a) Mutassa meg, hogy az*

$$f(z) := \frac{1}{z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

függvénynek ***nincs*** *primitív függvénye.*

(b) A valós tengely negatív ágával bemetszett

$$T_0 := \mathbb{C} \setminus \big\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \le 0 \ \ \text{\textit{és}} \ \ \mathrm{Im}\, z = 0 \big\}$$

(egyszeresen összefüggő) tartományon értelmezett

$$f_0(x) := \frac{1}{z} \qquad (z \in T_0)$$

függvénynek azonban ***van*** *primitív függvénye. Igazolja, hogy a* Log *függvény* f_0 *egy primitív függvénye.*

(c) Határozza meg a valós tengely pozitív ágával bemetszett

$$T_1 := \big\{ z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \ge 0 \ \ \text{\textit{és}} \ \ \mathrm{Im}\, z = 0 \big\}$$

(egyszeresen összefüggő) tartományon értelmezett

$$f_1(x) := \frac{1}{z} \qquad (z \in T_1)$$

függvény ***összes*** *primitív függvényeit.*

Megoldás. (a) A Newton–Leibniz-tétel alapján, ha a $T \subset \mathbb{C}$ tartományon analitikus f függvénynek van primitív függvénye, akkor bármely, T-ben haladó szakaszonként sima, egyszerű zárt φ görbe esetén $\int_\varphi f(z)dz = 0$. A megadott függvény analitikus a $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ tartományon, és az origó középpontú, egységsugarú köríven vett integrálja $2\pi i \ne 0$, ezért ezen a tartományon nincs primitív függvénye.

(b) Emlékeztetünk arra, hogy a Log függvény felírható a következő alakban:

$$\mathrm{Log}\, z = \ln |z| + i \arg z \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

ahol $\arg z \in (-\pi, \pi]$. A függvény valós része:

$$u(x,y) = \ln \sqrt{x^2+y^2}, \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big),$$

képzetes része pedig:

$$v(x,y) = \begin{cases} \mathrm{arctg}\, \frac{y}{x}, & \text{ha } x > 0 \\ \mathrm{arctg}\, \frac{y}{x} + \pi, & \text{ha } x < 0, y \geq 0 \\ \mathrm{arctg}\, \frac{y}{x} - \pi, & \text{ha } x < 0, y > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0, y > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & \text{ha } x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Az u és a v függvények deriválhatók a T_0-nak megfelelő $\mathbb{R}^2$-beli tartományon (miért?), és itt a Cauchy–Riemann-egyenletek is teljesülnek (miért?), ezért a Log függvény deriválható T_0-on. A deriváltja:

$$\mathrm{Log}\,'(z) = \mathrm{Log}\,'(x+iy) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x,y) =$$
$$= \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{1}{z}.$$

■

$\boxed{\text{Taylor-sor és Laurent-sor}}$

$\boxed{\textbf{1. feladat.}}$ *Határozza meg a következő hatványsorok konvergenciahalmazát,*

$$(a)\ \sum_{n=0} z^n, \qquad (b)\ \sum_{n=0} \frac{z^n}{n}, \qquad (c)\ \sum_{n=0} \frac{z^n}{n^2}, \qquad (d)\ \sum_{n=0} \frac{(-1)^n}{n} z^n.$$

$\boxed{\textbf{2. feladat.}}$ *Állítsa elő az alábbi függvények megadott z_0 pont körüli* ***Taylor-sor****át, és adjon meg olyan tartományt, amelyen a Taylor-sor előállítja a függvényt:*

(a) $\mathbb{C} \setminus \{-2/3\} \ni z \mapsto \frac{1}{3z+2}, \quad z_0 := 0,$

(b) $\mathbb{C} \setminus \{z_0, \overline{z_0}\} \ni z \mapsto \frac{z}{z^2-2z+4}, \quad z_0 := 0,$ *ahol* $z_0 = 1 + \sqrt{3}i$*;*

(c) $\exp, \quad z_0 := 1,$

(d) $\sin^2, \quad z_0 := 0,$

(e) $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z}, \quad z_0 := 1,$

(f) $\mathbb{C} \setminus \{0\} \ni z \mapsto \frac{1}{z^2}, \quad z_0 := -1.$

Megoldás. (b) A nevező zérushelyei valóban a

$$z_0 = 1 + \sqrt{3}i = 2\big(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\big), \qquad \overline{z_0} = 1 - \sqrt{3}i = 2\big(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\big)$$

számok.

A Taylor-sorfejtést parciális törtekre bontás után a geometriai sor összegképletének felhasználásával fogjuk megkapni:

$$\frac{z}{z^2-2z+4} = \frac{z}{(z-z_0)(z-\overline{z_0})} = \frac{z}{z_0-\overline{z_0}}\Big(\frac{1}{z-z_0} - \frac{1}{z-\overline{z_0}}\Big) =$$

$$= \frac{z}{2\sqrt{3}i}\Big(\frac{1}{\overline{z_0}} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{\overline{z_0}}} - \frac{1}{z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{z_0}}\Big) =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}i}\frac{z}{\overline{z_0}}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{z}{\overline{z_0}}\big)^k - \frac{1}{2\sqrt{3}i}\frac{z}{z_0}\sum_{k=0}^{\infty}\big(\frac{z}{z_0}\big)^k = \frac{1}{2\sqrt{3}i}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\big(\frac{1}{\overline{z_0}}\big)^{k+1} - \big(\frac{1}{z_0}\big)^{k+1}\Big]z^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}i}\sum_{k=0}^{\infty}\Big[\big(\frac{z_0}{4}\big)^{k+1} - \big(\frac{\overline{z_0}}{4}\big)^{k+1}\Big]z^{k+1} =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}i}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2i\sin(k+1)\frac{\pi}{3}}{2^{k+1}}z^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k+1)\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}2^{k+1}}z^{k+1}.$$

A fenti egyenlőségek minden $|z| < |z_0| = 2$ számra érvényesek, és ezen a tartományon a Taylor-sor összegfüggvénye a megadott függvénnyel egyenlő:

$$\frac{z}{z^2-2z+4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\sin(k+1)\frac{\pi}{3}}{\sqrt{3}2^{k+1}}z^{k+1} \qquad (|z| < 2).$$

(c) Az exp függvény az egész $\mathbb{C}$-n deriválható, ezért az 1 pont körül Taylor-sorba fejthető, azaz a Taylor-sor összegfüggvénye az egész $\mathbb{C}$-n előállítja az exp függvényt. Mivel

$\exp^{(n)}(1) = \exp(1) = e$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, ezért

$$\exp(z) = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!}(z-1)^n \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

Ezt a sorfejtést az exp függvény definíciójának, valamint az $e^z = e^{z-1+1} = e \cdot e^{z-1}$ $(z \in \mathbb{C})$ azonosságnak a felhasználásával **is** megkaphatjuk.

(d) Most is két megoldást mutatunk be. Mivel a $\sin^2$ függvény magasabb rendű deriváltjai aránylag egyszerűen kiszámolhatók, t.i.

$$\big(\sin^2\big)'(z) = \sin 2z, \quad \big(\sin^2\big)''(z) = 2\cos 2z, \quad \big(\sin^2\big)'''(z) = -4\sin 2z, \quad \ldots,$$

ezért a Taylor-sor definíciója alapján

$$z^2 - \frac{1}{3}z^4 + \frac{2}{45}z^6 + \cdots .$$

Az általános tételünkből az is következik, hogy ennek a Taylor-sornak az összegfüggvénye az egész $\mathbb{C}$-n egyenlő $\sin^2$-tel.

A $\sin^2 z = \frac{1}{2}(1 - \cos 2z)$ $(z \in \mathbb{C})$ azonosságot, valamint a cos függvény definícióját is felhasználhatjuk a feladat megoldásához:

$$\sin^2 z = \frac{1}{2}(1-\cos 2z) = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \cdot \frac{(2z)^{2k}}{(2k)!}\Big) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}2^{2k-1}}{(2k)!} z^{2k} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

■

$\boxed{\textbf{3. feladat.}}$ *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény analitikus $k_R(z_0)$-ban ($z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$) és itt nem veszi a 0 értéket. Az f függvény z_0 körüli Taylor-sorának ismeretében hogyan lehet előállítani az $1/f$ függvény z_0 pont körüli Taylor-sorát?*

Megoldás. A $k_R(z_0)$ környezetben az $1/f$ is analitikus, tehát itt Taylor-sorba fejthető. Jelöljük a_n-nel $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ az f, c_n-nel $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ pedig az $1/f$ függvény Taylor-sorának az együtthatóit:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \qquad \Big(\frac{1}{f}\Big)(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n \qquad (z \in k_R(z_0)).$$

A feladat tehát a_n-ek ismeretében a c_n együtthatók meghatározása. A fenti sorok $k_R(z_0)$-ban abszolút konvergensek, ezért Cauchy-szorzatuk is konvergens, és az összege a két sor összegének a szorzata:

$$f(z) \cdot \Big(\frac{1}{f}\Big)(z) = 1 \qquad (z \in k_R(z_0)).$$

A két sor Cauchy-szorzata:

$$\sum_{n=0} \Big(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k}\Big)(z-z_0)^n,$$

amelynek együtthatói tehát

$$a_0c_0 = 1 \quad \text{és} \quad \sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

A keresett c_n együtthatók ebből az egyenletrendszerből már meghatározhatók. ■

4. feladat. *Állítsa elő az*

$$\mathbb{C} \setminus \{0, -1\} \ni z \mapsto \frac{z}{\operatorname{Log}(1+z)}$$

függvény 0 *pont körüli **Taylor-sor**át, és adjon meg olyan tartományt, amelyen a Taylor-sor előállítja a függvényt*

5. feladat. *Fejtse a $z_0 = 1$ pont körül **Taylor-sor**ba a* Log *függvényt.*

1. megoldás. A Log függvény deriválható a

$$T_0 := \mathbb{C} \setminus \Big\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \le 0 \;\; \text{és} \;\; \operatorname{Im} z = 0 \Big\}$$

halmazon, ezért ott akárhányszor is deriválható, továbbá T_0 minden z_0 pontja körül Taylor-sorba fejthető, azaz

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0).$$

Ez az egyenlőség érvényes a z_0-nak minden olyan környezetében, amely benne van a T_0 tartományban.

Egyszerűen igazolható, hogy

$$\operatorname{Log}^{(n)}(1) = (-1)^{n+1}(n-1)! \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

ezért

$$\boxed{\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n \qquad (|z-1| < 1).}$$

Világos, hogy az 1 pont körül az 1 sugarú kör a legnagyobb olyan környezet, amelyben ez az egyenlőség fennáll. ■

2. megoldás. A

$$\operatorname{Log} z = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n \qquad (|z-1| < 1)$$

egyenlőség így is igazolható: A $\sum_{n=1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n$ hatványsor konvergenciasugara 1 (miért?). Jelöljük g-vel a sor összegfüggvényét:

$$g(z) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(z-1)^n \qquad (|z-1| < 1).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételünk alapján g deriválható és

$$g'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(1-z)^n = \frac{1}{1-(1-z)} = \frac{1}{z}.$$

Mivel $\operatorname{Log}'(z) = 1/z$ is érvényes $k_1(1)$-ben, ezért

$$(\operatorname{Log} - g)'(z) = 0 \qquad (z \in k_1(1)),$$

amiből az következik, hogy

$$\operatorname{Log}(z) - g(z) = c \qquad (z \in k_1(1))$$

valamely $c \in \mathbb{C}$ számmal. De $\operatorname{Log}(1) - g(1) = c = 0$, és ez az állításunkat igazolja. ■

$\boxed{\textbf{6. feladat.}}$ *Állítsa elő az*

$$f(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1, 2\})$$

függvény 0*-körüli* ***Laurent-sor****át az alábbi tartományokon:*

(a) $T_1 : |z| < 1,$ *(b)* $T_2 : 1 < |z| < 2,$ *(c)* $T_3 : |z| > 2.$

Megoldás. (a) A T_1 tartományon f analitikus, ezért a 0 körüli Taylor-sora előállítja a függvényt. Parciális törtekre bontás után a geometriai sor összegképletét felhasználva minden $|z| < 1$ számra azt kapjuk, hogy

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{z}{2}} + \frac{1}{1-z} =$$
$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right)z^k.$$

(b) Ha $|z| < 2$, azaz $\left|\frac{z}{2}\right| < 1$, akkor

$$\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k.$$

Ha $|z| > 1$, azaz $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$, akkor pedig

$$\frac{1}{1-\frac{1}{z}}\left(= \frac{z}{z-1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^k,$$

ezért az $1 < |z| < 2$ körgyűrűben

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{2}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{z}{2}\Big)^k - \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{1}{z}\Big)^k = -\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}} - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}} =$$

$$= -\sum_{k=-\infty}^{-1} z^k - \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{2^{k+1}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k.$$

(c) Ha $|z| > 2$, azaz $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$, akkor

$$\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{2}{z}\Big)^k,$$

ezért T_3-ban

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}} =$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}(2^k-1)\frac{1}{z^k} == \frac{1}{z}\sum_{k=1}^{\infty}(2^k-1)\frac{1}{z^k} = \sum_{k=-\infty}^{-2}(2^{-k-1}-1)z^k.$$

■

$\boxed{\textbf{7. feladat.}}$ *Fejtse* ***Laurent-sor****ba a $z_0 := 1$ pont körül az*

$$f(z) := \frac{z^2+z+3}{z^2-1} \qquad (z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,1\})$$

függvényt.

$\boxed{\textbf{Szinguláris pontok osztályozása}}$

$\boxed{\textbf{1. feladat.}}$ *Az f függvénynek milyen típusú szinguláris helye a z_0 pont, ha*

(a) $f(z) := \dfrac{1-\cos z}{z^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z_0 := 0),$

(b) $f(z) := \dfrac{e^z - 1}{z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z_0 := 0),$

(c) $f(z) := \dfrac{ch\, z}{z^4} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z_0 := 0),$

(d) $f(z) := e^{1/z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\},\ z_0 := 0).$

Megoldás. Az adott szinguláris pontok körüli Laurent-sorok egyszerűen felírhatók, ezért az osztályozást a definíció alapján végezzük el.

(a) Mivel

$$f(z) = \frac{1-\cos z}{z^2} = \frac{1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \cdots\right)}{z^2} = \frac{1}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \cdots \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

ezért z_0 az f függvény megszüntethető szingularitása.

(b) Mivel

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-1} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

ezért a 0 pont ennek a függvénynek is megszüntethető szingularitása.

(c) Az f függvény Laurent-sorfejtése:

$$f(z) = \frac{1}{z^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2(k-2)}}{(2k)!} = \sum_{k=-2}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k+4)!} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

ami azt jelenti, hogy 0 a függvény negyedrendű pólusa.

(d) A Laurent-sorfejtés ebben az esetben:

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! z^k} = \sum_{-\infty}^{0} \frac{z^k}{(-k)!} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

A 0 pont az f függvénynek tehát lényeges szingularitása. ■

$\boxed{\textbf{2. feladat.}}$ *Mutassa meg, hogy ha a $T \subset \mathbb{C}$ tartományon analitikus $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvénynek a $z_0 \in T$ pont m-szeres zérushelye, akkor z_0 egy $k_R(z_0)$ környezetében $(R > 0)$ f a következő alakban írható fel:*

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) \qquad (z \in k_R(z_0)),$$

ahol $g : k_R(z_0) \to \mathbb{C}$ olyan analitikus függvény, amelyre $g(z_0) \neq 0$.

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy a $T \subset \mathbb{C}$ tartományon analitikus $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvénynek a $z_0 \in T$ pont m**-szeres zérushelye** ($m \geq 1$ egész), ha

$$f(z_0) = f'(z_0) = f''(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{és} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0.$$

Megoldás. Mivel f analitikus T-n, ezért a z_0 pont egy $k_R(z_0)$ környezetében ($R > 0$) Taylor-sorba fejthető:

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!}(z - z_0)^k \qquad (z \in k_R(z_0)).$$

A z_0 pont m-szeres zérushely, ezért a feladat állítása az alábbi egyenlőségek következménye:

$$f(z) = \frac{f^{(m)}(z_0)}{m!}(z - z_0)^m + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0)^{m+1} + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z - z_0)^{m+2} + \cdots =$$
$$= (z - z_0)^m \Big[\frac{f^{(m)}(z_0)}{(m)!} + \frac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}(z - z_0) + \frac{f^{(m+2)}(z_0)}{(m+2)!}(z - z_0)^2 + \cdots\Big] =:$$
$$=: (z - z_0)^m g(z) \quad (z \in k_R(z_0)). \quad \blacksquare$$

$\boxed{\textbf{3. feladat.}}$ *Az f függvénynek milyen típusú szinguláris helye a z_0 pont, ha*

(a) $f = 1/h$ *és* z_0 *az analitikus* h *függvénynek* m*-szeres zérushelye,*

(b) $f(z) := \dfrac{z^2}{1 - \cos z} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z \mid \cos z = 1\},\ z_0 := 0)$,

(c) $f(z) := \dfrac{z}{e^z - 1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z \mid e^z \neq 1\},\ z_0 := 0)$,

(d) $f := ctg,\ \ z_0 := 0$,

(e) $f(z) := \dfrac{1}{\sin z^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z \mid \sin z^2 = 0\},\ z_0 := 0)$.

Megjegyzés. Idézzük fel a következő eredményeket:

$\boxed{\textbf{A}}$ A $z_0 \in \mathbb{C}$ pont az analitikus $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvénynek akkor és csak akkor megszüntethető szingularitása, ha

$$\exists\, R > 0 \ : \ k_R(z_0) \setminus \{z_0\} \subset \mathcal{D}_f \quad \text{és} \quad f \text{ korlátos a } k_R(z_0) \setminus \{z_0\} \text{ halmazon.}$$

$\boxed{\textbf{B}}$ A $z_0 \in \mathbb{C}$ pont az analitikus $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvénynek pontosan akkor m-edrendű pólusa ($m \geq 1$ egész), ha

$$\exists\, R > 0 \ : \ f(z) = \frac{g(z)}{(z - z_0)^m} \qquad k_R(z_0) \setminus \{z_0\},$$

ahol g a $k_R(z_0)$ halmazon analitikus és $g(z_0) \neq 0$. $\blacksquare$

Megoldás. (a) Az előző feladat szerint z_0 egy $k_R(z_0)$ környezetében h felírható az $h(z) = (z - z_0)^m g(z)$ ($z \in k_R(z_0)$) alakban, ahol $g : k_R(z_0) \to \mathbb{C}$ olyan analitikus függvény, amelyre $g(z_0) \neq 0$. Ezért

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{1}{(z-z_0)^m} \cdot \frac{1}{g(z)}.$$

Mivel $g(z_0) \neq 0$, ezért z_0 egy $R' \leq R$ sugarú környezetében g nullától különböző, és a

$$G(z) := \frac{1}{g(z)} \qquad (z \in k_{R'}(z_0))$$

analitikus $k_{R'}(z_0)$-ban, ezért

$$f(z) = \frac{1}{h(z)} = \frac{G(z)}{(z-z_0)^m} \qquad (z \in k_R(z_0)),$$

ahol G a $k_R(z_0)$ halmazon analitikus és $G(z_0) \neq 0$, ami a $\boxed{\mathbf{B}}$ állítás szerint azt jelenti, hogy z_0 az f függvénynek m-edrendű pólusa.

(b) Az f függvény nyilván deriválható a $\mathbb{C} \setminus \{z \mid \cos z = 1\}$ halmazon. A $h(z) := 1 - \cos z$ $(z \in \mathbb{C})$ függvénynek a $z_0 = 0$ pont kétszeres zérushelye, ui.

$$h(0) = h'(0)\big(= \sin 0\big) = 0 \quad \text{és} \quad h''(0) = \cos 0 \neq 0,$$

ezért

$$h(z) = z^2 g(z) \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

ahol g analitikus $\mathbb{C}$-n és $g(0) \neq 0$. Ebből következik, hogy a 0 pontnak van olyan környezete, amelyben g nem vesz fel 0 értéket. Ebben a környezetben az $1/g$ függvény analitikus, ezért 0 egy $k_R(0)$ környezetében korlátos is. Ez azt jelenti, hogy

$$f(z) = \frac{z^2}{1-\cos z} = \frac{z^2}{z^2 g(z)} = \frac{1}{g(z)}$$

is korlátos a $k_R(0) \setminus \{0\}$ halmazon. Az $\boxed{\mathbf{A}}$ állításból következik, hogy a $z_0 = 0$ pont f-nek megszüntethető szingularitása.

$\boxed{\textbf{4. feladat.}}$ *Jellemezze az alábbi függvények összes szingularitását:*

(a) $f(z) := \dfrac{z^8+1}{(z^2+1)(z-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i, 1\}),$

(b) $f(z) := \dfrac{1}{\sin z + \cos z} \quad (z \in \mathbb{C}, \quad \textit{és} \quad \sin z + \cos z \neq 0),$

(c) $f(z) := \dfrac{1-e^z}{1+e^z} \quad (z \in \mathbb{C}, \quad \textit{és} \quad 1 + e^z \neq 0),$

(d) $f(z) := \dfrac{e^{\frac{1}{z-2}}}{e^z - 1} \quad (z \in \mathbb{C},\ e^z - 1 \neq 0,\ z \neq 2).$

$\boxed{\text{Reziduum}}$

$\boxed{\textbf{1. feladat.}}$ *Bizonyítsa be, hogy ha a $z_0 \in \mathbb{C}$ pont az $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény n-edrendű pólusa ($n \geq 1$ egész), akkor*

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big[f(z)(z - z_0)^n \big].$$

Megoldás. Ha a z_0 pont az f függvény n-edrendű pólusa, akkor létezik olyan $R > 0$ szám, hogy $k_R(z_0)$-ban f Laurent-sorfejtése

$$f(z) = \frac{c_{-n}}{(z - z_0)^n} + \frac{c_{-(n-1)}}{(z - z_0)^{n-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k \qquad (z \in k_R(z_0) \setminus \{z_0\})$$

alakú, ahol $c_{-n} \neq 0$. Ekkor a

$$F : k_R(z_0) \ni z \mapsto \begin{cases} f(z)(z - z_0)^n, & \text{ha } z \neq z_0 \\ c_{-n}, & \text{ha } z = z_0 \end{cases}$$

függvény analitikus $k_R(z_0)$-ban, és Taylor-sorfejtése

$$F(z) = f(z)(z - z_0)^n = c_{-n} + c_{-(n-1)}(z - z_0) + c_{-(n-2)}(z - z_0)^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} c_{k-n} (z - z_0)^k,$$

ahol

$$c_{k-n} = \frac{F^{(k)}(z_0)}{k!} = \frac{1}{k!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^k}{dz^k} \big[f(z)(z - z_0)^n \big] \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Az f függvény Laurent-sorfejtésének c_{-1} együtthatóját (azaz $\operatorname*{Res}_{z_0} f$-et) $k = n - 1$ esetén kapjuk meg:

$$\operatorname*{Res}_{z_0} f = c_{-1} = \frac{F^{(n-1)}(z_0)}{(n-1)!} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \big[f(z)(z - z_0)^n \big].$$

■

$\boxed{\textbf{2. feladat.}}$ *Határozza meg $\operatorname*{Res}_{z_0} f$-et, ha*

(a) $f(z) := \dfrac{e^{\pi z}}{z^2 + 1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}, \quad z_0 := i)$,

(b) $f(z) := \dfrac{z^2}{e^z - 1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid e^z \neq 1\}, \quad z_0 := 2\pi i)$,

(c) $f(z) := \dfrac{z^3}{(z-1)^2} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \quad z_0 := 1)$.

Megoldás. (a) Mivel

$$f(z) = \frac{e^{\pi z}}{z + i} \cdot \frac{1}{z - i} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{\pm i\}),$$

ezért i az f elsőrendű pólusa. Az előző feladat alapján tehát

$$\operatorname*{Res}_i f = \lim_{z\to i} f(z)(z-i) = \lim_{z\to i}\frac{e^{\pi z}}{z+i} = \frac{e^{i\pi}}{2i} = -\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}.$$

(b) A $z_0 = 2\pi i$ a nevező egyszeres zérushelye, ezért ez az f függvény elsőrendű pólusa. Az előző feladat alapján tehát

$$\operatorname*{Res}_{2\pi i} f = \lim_{z\to 2\pi i} f(z)(z-2\pi i) = \lim_{z\to 2\pi i}\frac{e^{\pi z}}{e^z-1}\cdot(z-2\pi i) = \lim_{z\to 2\pi i}\frac{z^2}{\frac{e^z-1}{z-2\pi i}}.$$

Mivel

$$\lim_{z\to 2\pi i}\frac{e^z-1}{z-2\pi i} = e^{2\pi i},$$

ezért

$$\operatorname*{Res}_{2\pi i} f = \frac{(2\pi i)^2}{e^{2\pi i}} = -4\pi^2.$$

(c) A $z_0 = 1$ pont az f függvény másodrendű pólusa, így

$$\operatorname*{Res}_1 \frac{z^3}{(z-1)^2} = \lim_{z\to 1}(z^3)' = 3.$$

■

$\boxed{\textbf{3. feladat.}}$ *Határozza meg* $\operatorname*{Res}_{z_0} f$*-et, ha*

(a) $f(z) := \dfrac{e^{iz/2}}{\sin z} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} \mid \sin z \neq 0\},\quad z_0 := \pi),$

(b) $f(z) := \dfrac{z^4}{(z-1)^3} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{1\},\quad z_0 := 1).$

$\boxed{\textbf{4. feladat.}}$ *Határozza meg az alábbi függvények összes szinguláris pontjára vonatkozó reziduumát:*

(a) $f(z) := \dfrac{1}{\sin z} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C} \mid \sin z \neq 0\}),$

(b) $f(z) := \dfrac{e^z}{1+z} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}).$

$\boxed{\textbf{5. feladat.}}$ *Számítsa ki* $\int_\varphi f$*-et a* φ*-beli izolált szingularitásra vonatkozó reziduum meghatározásával (a* φ *görbéken pozitív körüljárási irányt vegyünk):*

(a) $f(z) := \dfrac{e^z-1}{z^3} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}),\quad \varphi : |z| = 2),$

(b) $f(z) := e^{\frac{1}{z}} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}),\quad \varphi : |z-1| = 2),$

(c) $f(z) := \dfrac{e^{\pi z}}{z^2+1} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{\pm i\}),\quad \varphi : |z-i| = 1),$

(d) $f(z) := \dfrac{1}{\operatorname{Log}(1+z)} \quad (z \in \mathbb{C}\setminus\{0,-1\}),\quad \varphi : |z| = 1/2),$

(e) $f(z) := \dfrac{z^2}{e^z - 1} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid e^z \neq 1\}), \quad \varphi : |z - 2\pi i| = 1).$

(Figyelje meg, hogy milyen kellemetlen integrálok kiszámítását teszi lehetővé a reziduum-tétel!)

Megoldás. (a)

$$\int_{|z|=2} \frac{e^z - 1}{z^3} dz = 2\pi i \cdot \operatorname*{Res}_0 f = 2\pi i \cdot \frac{1}{2} = \pi i,$$

ugyanis az

$$\frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{z} + \cdots \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

miatt

$$\operatorname*{Res}_0 \frac{e^z - 1}{z^3} = \frac{1}{2}.$$

(b) f-nek a 0 most lényeges szingularitása. Mivel

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \frac{1}{z^k} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}),$$

ezért

$$\operatorname*{Res}_0 e^{\frac{1}{z}} = 1,$$

tehát

$$\int_{|z-1|=2} e^{\frac{1}{z}} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_0 e^{\frac{1}{z}} = 2\pi i.$$

(c) Az i elsőrendű pólus, ezért

$$\int_{|z-i|=1} \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_i \frac{e^{\pi z}}{z^2 + 1} = 2\pi i \cdot \lim_{z \to i} \frac{e^{\pi z}}{z + i} = -\pi.$$

(d) A $|z| = 1/2$ kör az f függvény egyetlen szingularitását, a 0 pontot tartalmazza, ezért

$$\int_{|z|=1/2} \frac{1}{\operatorname{Log}(1+z)} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_0 \frac{1}{\operatorname{Log}(1+z)}.$$

A 0 pont a $\operatorname{Log}(1+z)$ egyszeres zérushelye (t.i. $\operatorname{Log}(1+0) = 0$ és $\operatorname{Log}'(1+0) = 1 \neq 0$), ezért 0 az f függvény elsőrendű pólusa, így

$$\operatorname*{Res}_0 \frac{1}{\operatorname{Log}(1+z)} = \lim_{z \to 0} \frac{z}{\operatorname{Log}(1+z)}.$$

Ezt a határértéket a $\operatorname{Log}(1+z)$ Taylor-sorfejtéséből határozzuk meg. Mivel

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} z^k \qquad (|z| < 1),$$

ezért

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{Log}(1+z)}{z} = \lim_{z \to 0} \left(1 - \frac{z}{2} + \frac{z^2}{3} - \frac{z^3}{4} - \cdots\right) = 1,$$

amiből az is következik, hogy

$$\lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{Log}(1+z)} = 1,$$

tehát

$$\int_{|z|=1/2} \frac{1}{\operatorname{Log}(1+z)} dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_0 \frac{1}{\operatorname{Log}(1+z)} = 2\pi i \lim_{z\to 0} \frac{z}{\operatorname{Log}(1+z)} = 2\pi i.$$

■

$\boxed{\textbf{6. feladat.}}$ *Számítsa ki a következő vonalintegrálokat:*

(a) $\int_{|z|=8} \dfrac{dz}{\sin z}$,

(b) $\int_{|z-1/\sqrt{2}|=1} \dfrac{z^8}{(1+z^4)} dz$,

(c) $\int_{|z-2|=2} \dfrac{z^3}{(z-1)(z-2)(z-3)} dz$.

Megoldás. Ezeket az integrálokat a reziduum-tétel alapján számolhatjuk ki. Emlékeztetünk arra, hogy a **reziduum-tétel** azt állítja, hogy ha

(i) $T \subset \mathbb{C}$ tartomány,

(ii) $a_1, a_2, \ldots, a_p \in T$ és $f \in D(T \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_p\})$,

(iii) φ a T-ben haladó, $a_1, \ldots, a_p$-t körülvevő, pozitív körüljárással tekintett Jordan-görbe, akkor

$$\int_\varphi f = 2\pi i \sum_{k=1}^{p} \operatorname*{Res}_{a_k} f.$$

■

$\boxed{\text{Valós integrálok}}$

Meglepő tény az, hogy komplex függvénytani eszközökkel (Cauchy-féle integráltétel, Cauchy-féle integrálformulák, reziduum-tétel) felhasználásával *bizonyos* valós változós függvények valós határok közötti integráljait is kiszámíthatjuk. Ezt a módszert akkor lehet használni, ha a kiszámítandó valós integrált kapcsolatba tudjuk hozni egy $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvény alkalmas komplex görbén vett vonalintegráljával.

1. feladat. *Számítsa ki az alábbi integrálokat:*

(a)
$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2} \qquad (0 < p < 1),$$

(b)
$$I := \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(p + q\cos x)^2} \qquad (0 < q < p).$$

Megoldás. Itt aránylag egyszerűen találhatunk olyan $f \in \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ függvényt és φ komplex görbét, amelyre $I = \int_\varphi f$ teljesül.

(a) A

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad z = e^{ix}, \quad \cos x = \frac{1}{2}\Big(z + \frac{1}{z}\Big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenlőségek alapján

$$\frac{1}{1 - 2p\cos x + p^2} = \frac{1}{1 - p(z + \frac{1}{z}) + p^2} = -\frac{z}{pz^2 - (1+p^2)z + p} =$$
$$= i\frac{1}{pz^2 - (1+p^2)z + p} \cdot \big(e^{ix}\big)' \qquad (z = e^{ix},\ x \in [0, 2\pi)).$$

Ha

$$f(z) := \frac{i}{pz^2 - (1+p^2)z + p} \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{p, 1/p\}), \quad \text{és} \quad \varphi(t) := e^{it} \qquad (t \in [0, 2\pi)),$$

akkor valóban $I = \int_\varphi f(z)dz$. Az origó középpontú egységsugarú φ körvonal belsejében $0 < p < 1$ miatt az f függvénynek csak a $z_0 = p$ szingularitása helyezkedik el, ezért a reziduum-tétel alapján

$$I = \int_\varphi f(z)dz = 2\pi i \operatorname*{Res}_{z_0} f.$$

A $z_0 = p$ pont az f függvénynek elsőrendű pólusa, ezért

$$\operatorname*{Res}_{z_0} = \lim_{z \to z_0} f(z)(z - z_0) = \lim_{z \to p} \frac{i}{p(z-p)(z-1/p)}(z - p) =$$
$$= \lim_{z \to p} \frac{i}{p(z - 1/p)} = \frac{i}{p^2 - 1},$$

tehát

$$I = 2\pi \operatorname*{Res}_{z_0} f = 2\pi i \cdot \frac{i}{p^2 - 1} = \frac{2\pi}{1 - p^2}.$$

(b) A fenti módszert követve azt kapjuk, hogy

$$I = \frac{2p\pi}{(p^2 - q^2)^{3/2}}. \quad \blacksquare$$

Megjegyzés. A fenti megoldásban bemutatott módszerrel az

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx$$

alakú integrálok is meghatározhatók, ahol R egy kétváltozós racionális függvény.

Ilyen integrálokat korábban tanult módszerekkel is kiszámíthatjuk. Az integrandus primitív függvényei ugyanis meghatározhatók (az $x = \operatorname{tg} t/2$ helyettesítés elvégzése után egy racionális függvény primitív függvényét kell meghatározni).

A feladat tehát megoldható az integrandusok primitív függvényeinek a meghatározásával is. A számolások elvégzése után azt kapjuk, hogy

$$\int \frac{dx}{1 - 2p\cos x + p^2} = \frac{2}{1 - p^2} \operatorname{arctg} \frac{(p+1)^2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 - p^2} \quad (0 < p < 1),$$

$$\int \frac{dx}{(p + q\cos x)^2} = \frac{q \sin x}{(p^2 - q^2)(p + q\cos x)} - \frac{p}{q^2 - p^2} \int \frac{dx}{p + q\cos x}.$$

$\blacksquare$

$\boxed{\textbf{2. feladat.}}$ *Mutassa meg, hogy*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Megoldás. L. Szőkefalvi-Nagy Béla: Komplex függvénytan című jegyzetének 116. oldalát. $\blacksquare$

$\boxed{\textbf{3. feladat.}}$ *Legyen P és Q olyan polinom, amelyekre*

$$\deg Q \geq \deg P + 2 \quad \textit{és} \quad Q(x) \neq 0 \quad (x \in \mathbb{R})$$

teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{\substack{a: Q(a)=0 \\ \operatorname{Im} a > 0}} \operatorname*{Res}_a \frac{P}{Q}.$$

Megoldás. L. Szőkefalvi-Nagy Béla: Komplex függvénytan című jegyzetének 123. oldalát. $\blacksquare$