

7.4. A programkonstrukciók és a kiszámíthatóság

Ebben az alfejezetben kis kitérőt teszünk a kiszámíthatóság-elmélet felé, és megmutatjuk, hogy az imént bevezetett három programkonstrukció segítségével minden – elméletileg megoldható – feladatot meg tudunk oldani. Ehhez kapcsolatot létesítünk a kiszámítható függvények és a “jól konstruált” programok között.

7.4.1. Parciális rekurzív függvények

A Church tézis szerint a kiszámítható függvények halmaza megegyezik a parciális rekurzív függvények halmazával. A kiszámíthatóság ezen modelljében csak $f \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ típusú függvények szerepelnek. Először az alapfüggvényeket definiáljuk:

- $suc : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}$:

$$suc(x) = x + 1,$$

- $\forall n \in \mathbb{N}_0 : \quad c_1^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$:

$$c_1^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = 1,$$

- $\forall n \in \mathbb{N} : \forall i \in [1..n] : \quad pr_i^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}, \quad \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n$:

$$pr_i^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_i.$$

A továbbiakban definiálunk néhány elemi függvény-operátort:

Kompozíció Legyen $f \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^n$ és $g \in \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^k$. Az f és g kompozíciója az alábbi függvény:

$$g \circ f \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^k, \quad \mathcal{D}_{g \circ f} = \{x \in \mathcal{D}_f \mid f(x) \in \mathcal{D}_g\} \text{ és } \forall x \in \mathcal{D}_{g \circ f}:$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Vegyük észre, hogy ez az operátor megegyezik az alapfogalmaknál bevezetett relációk közötti kompozícióval (tulajdonképpen a szigorú kompozícióval, de függvények esetén ez a kettő azonos).

Unió Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített, és $\forall i \in [1..k] : f_i \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^{n_i}$. E függvények

uniója $(f_1, f_2, \dots, f_k) \in \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^{n_1} \times \dots \times \mathbb{N}^{n_k}, \mathcal{D}_{(f_1, f_2, \dots, f_k)} = \bigcap_{i=1}^k \mathcal{D}_{f_i}$ és $\forall x \in \mathcal{D}_{(f_1, f_2, \dots, f_k)}$:

$$(f_1, f_2, \dots, f_k)(x) = (f_1(x), \dots, f_k(x)).$$

Rekurzió Legyen n rögzített, $f \in \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ és $g \in \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$. Az f függvény g szerinti rekurziója $\varrho(f, g) \in \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, és

$$\begin{aligned} \varrho(f, g)(x_1, \dots, x_n, 1) &= f(x_1, \dots, x_n), \\ \varrho(f, g)(x_1, \dots, x_n, k+1) &= g(x_1, \dots, x_n, k, \varrho(f, g)(x_1, \dots, x_n, k)). \end{aligned}$$

A függvényhez hasonlóan rekurzívan definiálhatnánk ennek a függvénynek az értelmezési tartományát, de ez kívül esik a jelenlegi vizsgálódásunk körén. Ezért csak azt mondjuk, hogy az értelmezési tartomány azon pontok halmaza, ahonnan kiindulva a fenti rekurzió elvégezhető.

μ -operátor Legyen $f \in \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$. A μ -operátort erre a függvényre alkalmazva azt a $\mu(f) \in \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ függvényt kapjuk, amelyre $\mathcal{D}_{\mu(f)} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{N}^n \mid \exists y \in \mathbb{N} : f(x_1, \dots, x_n, y) = 1 \wedge \forall i \in [1..y-1] : (x_1, \dots, x_n, i) \in \mathcal{D}_f\}$, és $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{D}_{\mu(f)} :$

$$\mu(f)(x_1, \dots, x_n) = \min\{y \mid f(x_1, \dots, x_n, y) = 1\}.$$

A fenti alapfüggvények és a bevezetett operátorok segítségével már definiálható a parciális rekurzív függvények halmaza.



30. DEFINÍCIÓ: PARCIÁLIS REKURZÍV FÜGGVÉNY

Az $f : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^n$ ($n, m \in \mathbb{N}$) függvény akkor és csak akkor parciális rekurzív, ha az alábbiak egyike teljesül:

- f az alapfüggvények valamelyike
- f kifejezhető a fenti operátorok parciális rekurzív függvényekre történő alkalmazásával.

7.4.2. A parciális rekurzív függvények kiszámítása

Ahhoz, hogy a fenti függvényeket kiszámító programokat tudjunk adni, definiálnunk kell az ilyen függvények által meghatározott feladatot. Legyen $f : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^n$ egy tetszőleges függvény (m, n rögzített). Az f által meghatározott feladat specifikációja:

$$A = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$$\quad \quad \quad x_1 \quad \quad \quad x_m \quad y_1 \quad \quad \quad y_m$$

$$B = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$$\quad \quad \quad x'_1 \quad \quad \quad x'_m$$

$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_f)$$

$$R : (Q \wedge (y_1, \dots, y_n) = f(x'_1, \dots, x'_m))$$

Most megmutatjuk, hogy minden parciális rekurzív függvény által meghatározott feladat megoldható "jól konstruált" programmal (jól konstruálnak tekintünk egy programot, ha elemi programokból a fenti három konstrukcióval megkapható). A bizonyításhoz csak annyit kell feltételeznünk, hogy az alapfüggvények kiszámíthatók (megengedett) elemi programokkal.

A fenti feltételezést felhasználva elegendő azt megmutatni, hogy az elemi függvény-operátorok (kompozíció, unió, rekurzió, μ -operátor) kiszámíthatók jól konstruált programokkal.

Kompozíció

Legyen $f \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^n$ és $g \in \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}^k$. Ekkor az $g \circ f$ által meghatározott feladat specifikációja:

$$A = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$$\quad \quad \quad x_1 \quad \quad \quad x_m \quad y_1 \quad \quad \quad y_k$$

$$B = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$$\quad \quad \quad x'_1 \quad \quad \quad x'_m$$

$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{g \circ f})$$

$$R : (Q \wedge (y_1, \dots, y_n) = (g \circ f)(x'_1, \dots, x'_m))$$

Jelöljük $z_1, \dots, z_n := f(x_1, \dots, x_m)$ -mel azt a programot, amely kiszámítja f -et, és hasonlóan $y_1, \dots, y_k := g(z_1, \dots, z_n)$ -nel azt, amelyik kiszámítja g -t. Tegyük fel, hogy ez a két program vagy elemi értékadás, vagy jól konstruált program. Ebben az esetben a két program szekvenciája kiszámítja $g \circ f$ -et, azaz megoldja a fent specifikált feladatot. Legyen Q' a második program R utófeltételéhez tartozó leggyengébb előfeltétele:

$$Q' : (Q \wedge g(z_1, \dots, z_n) = (g \circ f)(x'_1, \dots, x'_m) \wedge (z_1, \dots, z_n) \in \mathcal{D}_g)$$

Most vizsgáljuk meg az első program ezen Q' utófeltételéhez tartozó leggyengébb előfeltételét:

$$lf(z_1, \dots, z_n := f(x_1, \dots, x_m), Q') = (Q \wedge g(f(x_1, \dots, x_m)) = (g \circ f)(x'_1, \dots, x'_m) \wedge f(x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_g \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_f)$$

Könnyen látható, hogy ez a leggyengébb előfeltétel következik Q -ból, és így a szekvencia levezetési szabálya és a specifikáció tételének alkalmazásával beláttuk, hogy a

$z_1, \dots, z_n := f(x_1, \dots, x_m)$
$y_1, \dots, y_k := g(z_1, \dots, z_n)$

program megoldja a fent specifikált feladatot, azaz kiszámítja f és g kompozícióját.

Unió

Legyen $k \in \mathbb{N}$ rögzített, és $\forall i \in [1..k] : f_i \in \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}^{n_i}$. Ekkor az e függvények uniója által meghatározott feladat specifikációja:

$$A = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \times$$

$$\quad \quad \quad x_1 \quad \quad \quad x_m$$

$$\times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$$\quad \quad \quad y_{1_1} \quad \quad \quad y_{1_{n_1}}$$

$$\vdots$$

$$\times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$$\quad \quad \quad y_{k_1} \quad \quad \quad y_{k_{n_k}}$$

$$B = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$$\quad \quad \quad x'_1 \quad \quad \quad x'_m$$

$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_m = x'_m \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{(f_1, \dots, f_k)})$$

$$R : (Q \wedge (y_{11}, \dots, y_{1n_1} \dots y_{k1}, \dots, y_{kn_k}) = (f_1, \dots, f_k)(x'_1, \dots, x'_m))$$

Tegyük fel, hogy a komponens függvények kiszámíthatók jól konstruált programmal, vagy elemi értékadással. Jelölje $y_{i1}, \dots, y_{in_i} := f_i(x_1, \dots, x_m)$ az i -edik függvényt ($1 \leq i \leq k$) kiszámító programot. Ekkor ezeknek a programoknak a szekvenciája megoldja a fenti feladatot. Legyen Q_k a k -adik program R utófeltételhez tartozó leggyengébb előfeltételét:

$$Q_k : (Q \wedge (y_{11}, \dots, y_{1n_1} \dots y_{k-11}, \dots, y_{k-1n_{k-1}}, f_k(x_1, \dots, x_m)) = (f_1, \dots, f_k)(x'_1, \dots, x'_m) \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{f_k})$$

Továbbá minden $i \in [1..k-1]$ esetén jelölje Q_i az i -edik program Q_{i+1} -hez tartozó leggyengébb előfeltételét. Könnyen látható, hogy az értékadás leggyengébb előfeltételére vonatkozó szabályt alkalmazva:

$$Q_1 : (Q \wedge (f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, f_k(x_1, \dots, x_m)) = (f_1, \dots, f_k)(x'_1, \dots, x'_m) \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{f_1} \wedge \dots \wedge (x_1, \dots, x_m) \in \mathcal{D}_{f_k})$$

Ha most Q -t és Q_1 -et összehasonlítjuk, észrevehetjük, hogy megegyeznek. A szekven-
cia levezetési szabálya és a specifikáció tétele alapján a

$y_{11}, \dots, y_{1n_1} := f_1(x_1, \dots, x_m)$
\vdots
$y_{k1}, \dots, y_{kn_k} := f_k(x_1, \dots, x_m)$

program megoldása a fent specifikált feladatnak, azaz kiszámítja (f_1, \dots, f_k) -t.

Rekurzió

Legyen n rögzített, $f \in \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$ és $g \in \mathbb{N}^{n+2} \rightarrow \mathbb{N}$. Tegyük fel, hogy mindket-
ten kiszámíthatók jól konstruált programokkal vagy egyszerű értékadásokkal. Az f
függvény g szerinti rekurziója által meghatározott feladat specifikációja:

$$A = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \quad \times \mathbb{N}$$

$$x_1 \quad x_{n+1} \quad y$$

$$B = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$$x'_1 \quad x'_{n+1}$$

$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_{n+1} = x'_{n+1} \wedge (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}_{\varrho(f,g)})$$

$$R : (Q \wedge y = \varrho(f,g)(x'_1, \dots, x'_{n+1}))$$

Jelölje az f -et és a g -t kiszámító programot $y := f(x_1, \dots, x_n)$ illetve $y := g(x_1, \dots, x_{n+2})$. Oldjuk meg a feladatot egy olyan ciklussal, amelynek invariáns tulajdonsága:

$$P : (Q \wedge k \in [1..x_{n+1}] \wedge y = \varrho(f,g)(x'_1, \dots, x_n, k))$$

A ciklus levezetési szabályát vizsgálva azt találjuk, hogy Q -ból nem következik P . Ezért adunk egy olyan Q' feltételt, amelyből már következik P , és adunk egy programot, amely Q -ból Q' -be jut (így a megoldóprogram egy szekven-
cia lesz, amelynek második része egy ciklus). Legyen Q' az alábbi:

$$P : (Q \wedge k = 1 \wedge y = f(x_1, \dots, x_n))$$

Ez a $k, y := 1, f(x_1, \dots, x_n)$ szimultán értékadással elérhető. Az értékadás leggyengébb előfeltételére vonatkozó szabály felhasználásával könnyen látható, hogy az következik Q -ből.

A ciklus levezetési szabályának második pontja alapján a ciklusfeltétel $k \neq x_{n+1}$ lesz.

A harmadik pontnak megfelelően válasszuk a $t = x_{n+1} - k$ kifejezést termináló függvénynek.

Az ötödik pont azt írja le, hogy az imént definiált termináló függvény értékének a ciklusmagban csökkennie kell. Ez elérhető a k eggyel való növelésével.

A négyes pont kielégítéséhez vizsgáljuk meg, hogy mi lesz a leggyengébb előfeltétele a k -t növelő értékadásnak a P -re vonatkozóan.

$$Q'' = lf(k := k + 1, P) = (Q \wedge k + 1 \in [1..x_{n+1}] \wedge y = \varrho(f, g)(x'_1, \dots, x'_n, k + 1)).$$

Most már – a szekvencia levezetési szabálya alapján – csak egy olyan programot kell találnunk, amelyre $P \wedge (k \neq x_{n+1}) \Rightarrow lf(S, Q'')$. Ez a program a rekúzió definíciójához illeszkedően épp $y := g(x_1, \dots, x_n, k, y)$ lesz.

Így a szekvencia és a ciklus levezetés szabálya valamint a specifikáció tétele garantálja, hogy a

$k, y := 1, f(x_1, \dots, x_n)$
$k \neq x_{n+1}$
$y := g(x_1, \dots, x_n, k, y)$
$k := k + 1$

program megoldja a $\varrho(f, g)$ által meghatározott feladatot, azaz kiszámítja f g szerinti rekúzióját.

μ -operátor

Legyen $f \in \mathbb{N}^{n+1} \rightarrow \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy f kiszámítható egyszerű értékadással vagy jól konstruált programmal. Tekintsük a $\mu(f)$ által meghatározott feladatot:

$$A = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$

$x_1 \qquad x_n \qquad y$

$$B = \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}$$

$x'_1 \qquad x'_n$

$$Q : (x_1 = x'_1 \wedge \dots \wedge x_n = x'_n \wedge (x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathcal{D}_{\mu(f)})$$

$$R : (Q \wedge y = \mu(f)(x'_1, \dots, x'_n))$$

Jelölje $z := f(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ az f -et kiszámító programot. Oldjuk meg a feladatot egy olyan ciklussal, melynek invariánsa:

$$P : (Q \wedge z = f(x_1, \dots, x_n, y) \wedge \forall i \in [1..y - 1] : f(x_1, \dots, x_n, i) \neq 1)$$

Az invariáns a $z, y := f(x_1, \dots, x_n, 1), 1$ szimultán értékadással teljesíthető. Könnyen látható, hogy ennek a programnak a P -re vonatkozó leggyengébb előfeltétele

$$lf(z, y := f(x_1, \dots, x_n, 1), 1; P) = (Q \wedge f(x_1, \dots, x_n, 1) = f(x_1, \dots, x_n, 1) \wedge \forall i \in [1..1 - 1] : f(x_1, \dots, x_n, i) \neq 1)$$

következik Q -ból. A ciklus levezetési szabályának második pontja alapján a ciklusfeltétel $z \neq 1$ lesz.

A feladat előfeltétele garantálja, hogy van olyan $m \in \mathbb{N}$ szám, amelyre $f(x_1, \dots, x_n, m) = 1$ fennáll. Legyen N egy ilyen tulajdonságú, rögzített természetes szám. Ennek az értéknek a segítségével definiálhatjuk a termináló függvényt: $t = N - y$. Ez kielégíti a levezetés szabály harmadik pontját.

Az ötödik pont megkívánja, hogy a termináló függvény a ciklusmag lefutása során csökkenjen. Ezt elérhetjük y eggyel való növelésével.

A negyedik pont teljesítéséhez legyen Q' ennek a növelésnek a P -re vonatkozó leggyengébb előfeltétele:

$$Q' : (Q \wedge z = f(x_1, \dots, x_n, y + 1) \wedge \forall i \in [1..y - 1] : f(x_1, \dots, x_n, i) \neq 1)$$

Most már csak találnunk kell egy programot a $P \wedge (z \neq 1)$ és Q' állítások közé. A $z := f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$ értékadásra teljesül, hogy

$$P \wedge (z \neq 1) \Rightarrow lf(z := f(x_1, \dots, x_n, y + 1), Q').$$

A specifikáció tétele, valamint a ciklus és a szekvencia levezetési szabálya garantálja, hogy a

$z, y := f(x_1, \dots, x_n, 1), 1$
$z \neq 1$
$z := f(x_1, \dots, x_n, y + 1)$
$y := y + 1$

program megoldja a $\mu(f)$ által meghatározott feladatot, azaz kiszámítja $\mu(f)$ -et.

7.4.3. Következmény

Az előzőekben megmutattuk, hogy ha az alapfüggvények kiszámíthatók egyszerű értékadással, akkor a belőlük – a parciális rekurzív függvényeknél megengedett – operátorokkal felépített függvények kiszámíthatók jól konstruált programokkal. A Church tézis szerint a kiszámítható függvények halmaza megegyezik a parciális rekurzív függvények halmazával. Ezek alapján kimondhatjuk az alábbi tételt:



17. TÉTEL: STRUKTURÁLT PROGRAMOZÁS ÉS KISZÁMÍTHATÓSÁG

Minden kiszámítható függvény kiszámítható egy jól konstruált programmal.

7.4.4. Relációk

Eljutván az előző tételhez, fordítsuk most figyelmünket a relációk felé. Ahhoz, hogy a relációk kiszámíthatóságát megvizsgálhassuk, definiálnunk kell a kiszámítható reláció fogalmát.

31. DEFINÍCIÓ: REKURZÍVAN FELSOROLHATÓ RELÁCIÓ

Legyen $R \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k$ tetszőleges reláció. R akkor és csak akkor rekurzívan felsorolható, ha van olyan $f \in \mathbb{N}^{2k} \rightarrow \mathbb{N}$ parciális rekurzív függvény, amelynek értelmezési tartományára: $\mathcal{D}_f = R$.



A kiszámíthatóság-elmélethez igazodva, a továbbiakban csak rekurzívan felsorolható relációkkal fogunk foglalkozni. Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy minden kiszámítható (rekurzívan felsorolható) feladat – emlékezzünk, hogy minden feladat egy reláció – megoldható strukturált programmal, először megadjuk a rekurzívan felsorolható relációk egy másik jellemzését.

18. TÉTEL: KLEENE[1936]

Ha R egy tetszőleges reláció, akkor az alábbi három állítás ekvivalens:



- (1) R rekurzívan felsorolható
- (2) R egy f parciális rekurzív függvény értékkészlete
- (3) $R = \emptyset$ vagy R egy φ rekurzív függvény értékkészlete.

Ennek a tételnek a bizonyítása lásd Ref??? konstruktív, azaz megadja mind f , mind pedig φ felépítését. Mi ezt a φ függvényt fogjuk használni a kiszámítható feladatunk megoldóprogramjában.

Legyen $F \subseteq \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k$ egy rekurzívan felsorolható reláció, és jelölje φ az előző tétel konstrukciójával kapott (totális) rekurzív függvényt. Specifikáljuk a feladatot az alábbi módon:

$$A = \mathbb{N}^k \times \mathbb{N}^k$$

$$\begin{matrix} x & y \end{matrix}$$

$$B = \mathbb{N}^k$$

$$x'$$

$$Q : (x = x' \wedge x \in \mathcal{D}_F)$$

$$R : (Q \wedge (x, y) \in F)$$

Ez a feladat megoldható egy olyan ciklussal, amelynek invariáns tulajdonsága:

$$P : (Q \wedge i \in \mathbb{N} \wedge (z, y) = \varphi(i))$$

A ciklus levezetési szabályának felhasználásával könnyen belátható, hogy az alábbi program megoldása a fenti feladatnak:

$i, (z, y) := 1, \varphi(1)$
$z \neq x$
$(z, y) := \varphi(i + 1)$
$i := i + 1$

A bizonyításban a termináló függvény megadásánál ugyanazt a technikát alkalmazzuk, mint a μ -operátornál.

Ezzel az előzőleg függvényekre kimondott tételünket általánosíthatjuk relációkra:



19. TÉTEL: STRUKTURÁLT PROGRAMOZÁS ÉS KISZÁMÍTHATÓ RELÁCIÓK

Minden kiszámítható reláció kiszámítható egy jól konstruált programmal.

Megjegyzés

Az egyetlen feltevés, amit a fenti megfontolásokban használtunk az volt, hogy az alapfüggvények kiszámíthatóak. Így aztán ezek az eredmények kiterjeszthetők a relatíve kiszámítható függvények (ugyanezen operátorokkal egy tetszőleges alaphalmazból képzett függvények), vagy a parciális rekurzív funkcionálok halmazára is (Ref[1, page 174]).