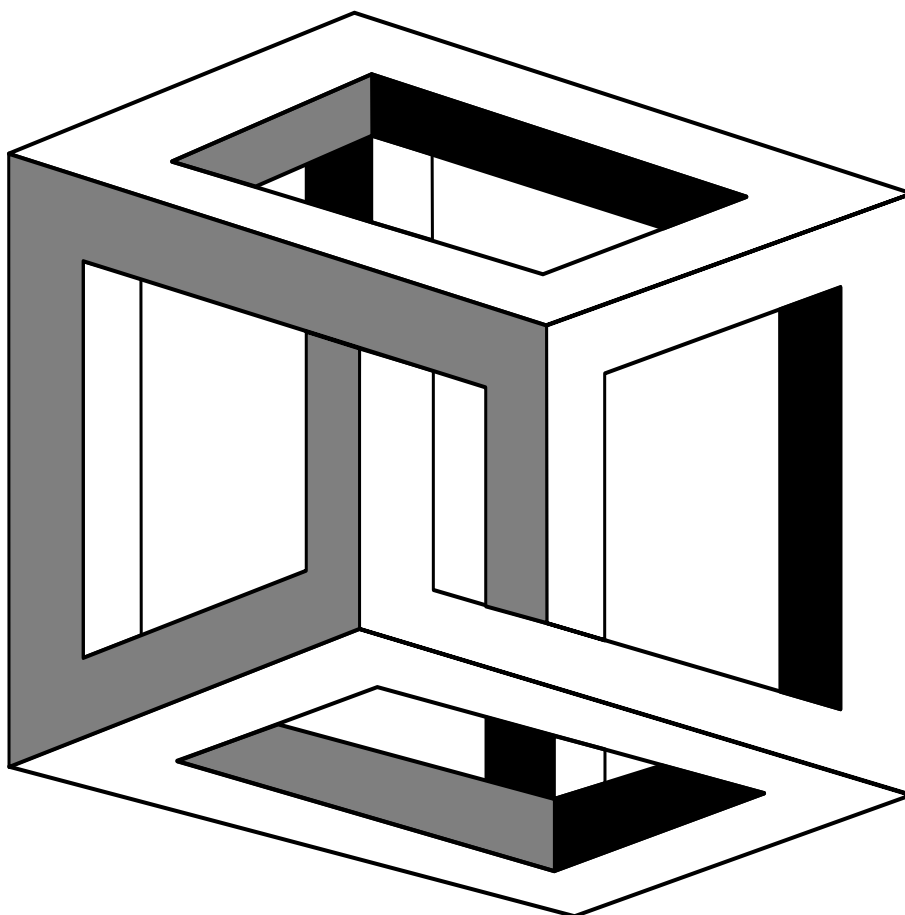


FÓTHI ÁKOS, STEINGART FERENC

Programozási módszertan

EGYETEMI JEGYZET



- © Ez a másolat egy készülő egyetemi jegyzet munkapéldánya. A teljes jegyzetről, vagy annak bármely részéről további egy vagy több másolat készítéséhez a szerzők előzetes írásbeli hozzájárulására van szükség. A másolatnak tartalmaznia kell a sokszorosításra vonatkozó korlátozó kitételt is. A jegyzet kizárólag egyetemi oktatási vagy tanulmányi célra használható.

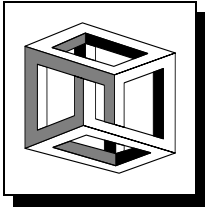
A szerzők hozzájárulásukat adják ahhoz, hogy az ELTE-n az 2000-2001-es tanévben elsőéves programozó-matematikusan hallgatók bármelyike saját maga részére, tanulmányaihoz egy példány másolatot készítsen a jegyzetből.

Minden észrevételt, amely valamilyen hibára vonatkozik örömmel fogadunk.

Budapest, 2000. szeptember 27.

A SZERZŐK

ELTE PROG-MAT. 2000-2001



Tartalomjegyzék

I. Bevezetés a programozáshoz	7
1. Alapfogalmak	9
1.1. Alaphalmazok	9
1.2. Sorozatok	10
1.3. Direktszorzat	10
1.4. Relációk	11
1.4.1. Logikai relációk	12
1.5. Példák	13
1.6. Feladatok	17
2. A programozás alapfogalmai	19
2.1. Az állapottér fogalma	19
2.2. A feladat	20
2.3. A program	20
2.4. A programfüggvény	21
2.5. Megoldás	22
2.6. Példák	22
2.7. Feladatok	25
3. Kiterjesztések	27
3.1. A feladat kiterjesztése	27
3.2. A program kiterjesztése	28
3.3. Kiterjesztési tételek	29
3.4. Példák	34
3.5. Feladatok	35

4. A típus	37
4.1. A típusspecifikáció	37
4.2. A típus	38
4.3. Példák	40
4.4. Feladatok	44
5. Specifikáció	45
5.1. A leggyengébb előfeltétel	45
5.2. A feladat specifikációja	47
5.3. A változó fogalma	49
5.4. A típusspecifikáció tétele	50
5.5. Példák	52
5.6. Feladatok	53
6. Elemi programok	57
6.1. Feladatok	60
7. Programkonstrukciók	63
7.1. Megengedett konstrukciók	63
7.2. A programkonstrukciók programfüggvénye	67
7.3. Levezetési szabályok	70
7.4. A programkonstrukciók és a kiszámíthatóság	77
7.4.1. Parciális rekurzív függvények	77
7.4.2. A parciális rekurzív függvények kiszámítása	78
7.4.3. Következmény	82
7.4.4. Relációk	83
8. Típuskonstrukciók	85
8.1. A megengedett konstrukciók	85
8.2. Szelektorfüggvények	89
8.3. Az iterált specifikációs függvényei	90
8.4. A függvénytípus	90
8.5. A típuskonstrukciók típusműveletei	92
II. Programozási módszertan	95
9. Alapvető programozási tételek	97
9.1. Összegzés	97
9.2. Számlálás	99
9.3. Maximumkeresés	101
9.4. Feltételes maximumkeresés	102
9.5. Lineáris keresés	103
9.6. Logaritmikus keresés	106

10. Függvényérték kiszámítása	109
10.1. Függvénykompozícióval adott függvény kiszámítása	109
10.2. Esetszétválasztással adott függvény kiszámítása	110
10.3. Rekurzív formulával adott függvény kiszámítása	110
10.4. Elemenként feldolgozható függvény	112
10.4.1. Egyváltozós-egyértékű eset	113
10.4.2. Kétváltozós-egyértékű eset	114
10.4.3. Egyváltozós kétértékű eset	115
10.4.4. Általános változat	116
11. Visszalépéses keresés	117
12. Programtranszformációk	121
12.1. Koordináta transzformációk	121
12.1.1. Típustranszformációk	121
12.2. Állapottér transzformáció	125
12.3. Egyszerű programtranszformációk	127
13. Szekvenciális megfelelő	131
14. Programinverzió	135
14.1. Egyváltozós eset	135
14.2. Kétváltozós eset	137
15. Időszerűsítés	139
15.1. Az idszerűsítés definíciója	139
15.2. Időszerűsítés egyértelmű módosítófile-lal	141
15.2.1. Visszavezetés halmazok uniójára	141
15.2.2. Visszavezetés egyváltozós elemenkénti feldolgozásra	144
15.2.3. Visszavezetés kétváltozós elemenkénti feldolgozásra	146
15.3. Időszerűsítés nem egyértelmű módosítófile-lal	146
15.3.1. Megoldás adatabsztrakcióval	146
15.3.2. Kulcsok egyértelműsítése	149
15.3.3. Megoldás függvényabsztrakcióval	150

I. rész

Bevezetés a programozáshoz

ELTE PROG-MAT. 2000-2001

1.

Alapfogalmak

Ahhoz, hogy bármiről érdemben beszélhessünk, meg kell állapodnunk egy jelölésrendszerben. Az alábbiakban bevezetjük azokat a jelöléseket és alapvető definíciókat amelyeket a továbbiakban gyakran fogunk használni.

1.1. Alaphalmazok

Először bevezetjük a matematikában gyakran használt számhalmazok jelöléseit.

- \mathbb{N} — a természetes számok halmaza,
- \mathbb{N}_0 — a nemnegatív egészek halmaza,
- \mathbb{Z} — az egész számok halmaza,
- \mathbb{Q} — a racionális számok halmaza,
- \mathbb{R} — a valós számok halmaza,
- \mathbb{C} — a komplex számok halmaza,
- \mathbb{L} — a logikai értékek halmaza,
 $\mathbb{L} = \{igaz, hamis\},$
- \emptyset — az üres halmaz.

Vegyük észre, hogy a természetes számok halmazát (\mathbb{N}) és a nemnegatív egészek halmazát (\mathbb{N}_0) külön jelöljük. Ennek az az oka, hogy az általunk használt jelölésrendszerben a természetes számok halmaza nem tartalmazza a nullát.

Megjegyezzük továbbá, hogy $[a..b]$ -vel fogjuk jelölni, a valós $[a, b]$ intervallum egész elemeinek halmazát, azaz

$$[a..b] = [a, b] \cap \mathbb{Z}.$$

Természetesen használni fogjuk a matematikában megszokott halmazelméleti műveleteket:

$$\begin{aligned} \cup & - \text{unió,} \\ \cap & - \text{metszet,} \end{aligned}$$

és relációkat:

$$\begin{aligned} \in & - \text{eleme,} \\ \subseteq & - \text{részhalmaza,} \\ \subset & - \text{valódi része.} \end{aligned}$$

1.2. Sorozatok

Ha A egy adott halmaz, akkor az $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots \rangle$, $\alpha_i \in A$ egy A -beli véges, vagy végtelen sorozatot jelöl.

Az A -beli véges sorozatokat $\alpha = \langle \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \rangle$, $\alpha_i \in A$ alakban írhatjuk le. A véges sorozat hosszát $|\alpha|$ jelöli.

Az A -beli véges sorozatok halmazát A^* -gal, a végtelen sorozatok halmazát A^∞ -nel jelöljük. Az előző két halmaz uniójaként előálló A -beli véges, vagy végtelen sorozatok halmazát A^{**} -gal jelöljük.

Egy $\alpha \in A^{**}$ sorozatot értelmezési tartományát \mathcal{D}_α -val jelöljük, és a következő halmazt értjük rajta:

$$\mathcal{D}_\alpha = \begin{cases} [1..|\alpha|], & \text{ha } \alpha \in A^* \\ \mathbb{N}, & \text{ha } \alpha \in A^\infty \end{cases}$$

Legyenek $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1} \in A^*$ és $\alpha^n \in A^{**}$. Ekkor azt a sorozatot, amit az $\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n$ sorozatok egymás után írásával kapunk, a fenti sorozatok *konkatenációjának* nevezzük, és $kon(\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^{n-1}, \alpha^n)$ -nel jelöljük.

Egy A^{**} -beli sorozat *redukáltjának* nevezzük azt a sorozatot, amit úgy kapunk, hogy az eredeti sorozat minden azonos elemekből álló véges részsorozatát a részsorozat egyetlen elemével helyettesítjük. Egy $\alpha \in A^{**}$ sorozat redukáltját $red(\alpha)$ -ával jelöljük.

Bevezetjük még a τ függvényt, ami egy véges sorozathoz hozzárendeli annak utolsó elemét: $\tau : A^* \rightarrow A$, $\forall \alpha \in A^*$:

$$\tau(\alpha) = \alpha_{|\alpha|}.$$

1.3. Direktszorzat

Legyenek A_1, A_2, \dots, A_n tetszőleges halmazok. Ekkor az

$$\times_{i=1}^n A_i = \{ (a_1, \dots, a_n) \mid a_i \in A_i, i \in [1..n] \}$$

halmazt a fenti halmazok *direktszorzatának* nevezzük.

Legyen $m, n \in \mathbb{N}, m \leq n, \{i_j \mid j \in [1..m]\} \subset [1..n]$,

$$A = \prod_{i=1}^n A_i \quad \text{és} \quad B = \prod_{j=1}^m A_{i_j}.$$

Ekkor a $pr_B : A \rightarrow B$ függvényt *projekciónak* nevezzük, ha

$$\forall a = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in A : pr_B(a) = (a_{i_1}, \dots, a_{i_m}).$$

A fenti esetben a B -t az A *alterének* nevezzük. Ha $m < n$, akkor valódi altérről beszélünk. Vegyük észre, hogy az $m = 0$ esetet nem engedjük meg, tehát az üres halmaz nem altere egyetlen direktszorzatnak sem. A projekciót az alábbi módon kiterjesztjük terek direkt szorzatára, és sorozatterekre is: legyen A és B mint fent, $(a_1, a_2) \in A \times A$, illetve $\alpha \in A^{**}$. Ekkor

$$\begin{aligned} pr_B((a_1, a_2)) &= (pr_B(a_1), pr_B(a_2)) \in B \times B \\ pr_B(\alpha) &= \beta \in B^{**}, \text{ ahol } \mathcal{D}_\beta = \mathcal{D}_\alpha \text{ és} \\ &\quad \forall i \in \mathcal{D}_\beta : \beta_i = pr_B(\alpha_i) \end{aligned}$$

1.4. Relációk

Relációnak nevezzük egy tetszőleges direktszorzat tetszőleges részhalmazát. A továbbiakban csak olyan relációkkal foglalkozunk, amelyek kétkomponensű direktszorzat részei. Ezeket a relációkat *bináris relációknak* nevezzük.

Legyenek A és B tetszőleges halmazok, $R \subseteq A \times B$ pedig egy tetszőleges reláció. Ekkor a reláció *értelmezési tartománya*:

$$\mathcal{D}_R = \{a \in A \mid \exists b \in B : (a, b) \in R\},$$

a reláció *értékkészlete*:

$$\mathcal{R}_R = \{b \in B \mid \exists a \in A : (a, b) \in R\},$$

a reláció *értéke* egy adott helyen:

$$R(a) = \{b \in B \mid (a, b) \in R\},$$

egy $H \subseteq A$ halmaz R szerinti *képe*

$$R(H) = \{b \in B \mid \exists a \in H : (a, b) \in R\},$$

Azt mondjuk, hogy egy reláció *determinisztikus*, vagy *parciális függvény*, ha

$$\forall a \in A : |R(a)| \leq 1.$$

Függvénynek nevezünk egy relációt akkor, ha

$$\forall a \in A : |R(a)| = 1.$$

Legyen $R \subseteq A \times B$. Ekkor az $R^{(-1)}$ reláció az R inverze, ha

$$R^{(-1)} = \{(b, a) \in B \times A \mid (a, b) \in R\}.$$

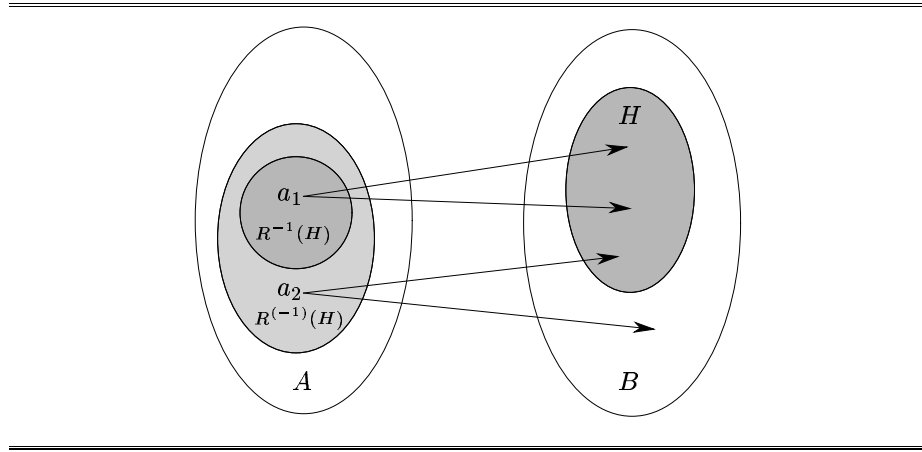
Legyen $H \subseteq B$ tetszőleges halmaz. Ekkor az

$$R^{(-1)}(H) = \{a \in A \mid R(a) \cap H \neq \emptyset\}$$

halmazt a H halmaz R reláció szerinti *inverz képének* nevezzük. Vegyük észre, hogy az inverz kép fogalma megegyezik az inverz reláció szerinti kép fogalmával. Ugyanekkor az

$$R^{-1}(H) = \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq H\}$$

halmazt a H halmaz R reláció szerinti *ősképeknek* nevezzük. Vegyük észre, hogy az ősképek mindig része inverz képnek. A két kép kapcsolatát mutatja az alábbi ábra:



1.1. ábra. Inverz kép és ősképek

A relációk között értelmezzünk műveleteket is. Legyen $P \subseteq A \times B$ és $Q \subseteq B \times C$. Ekkor az $R \subseteq A \times C$ relációt a P és Q relációk *kompozíciójának* nevezzük, ha

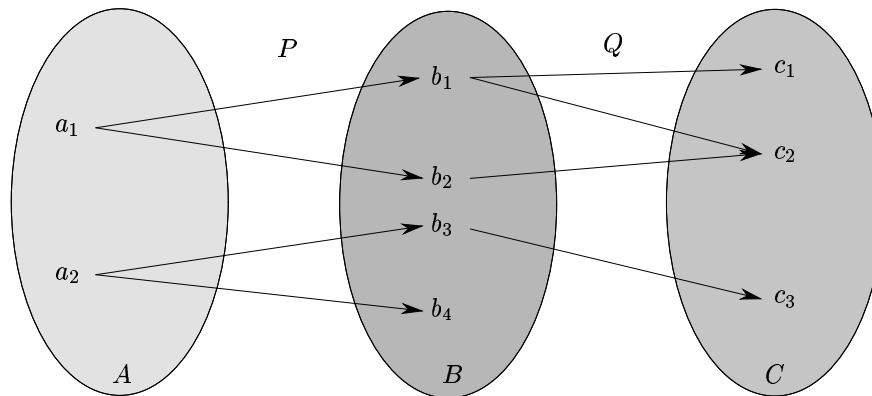
$$R = Q \circ P = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in P \wedge (b, c) \in Q\}.$$

Az $S \subseteq A \times C$ relációt a P és Q relációk *szigorú kompozíciójának* nevezzük, ha

$$S = Q \odot P = \{(a, c) \in A \times C \mid \exists b \in B : (a, b) \in P \wedge (b, c) \in Q \wedge P(a) \subseteq \mathcal{D}_Q\}.$$

1.4.1. Logikai relációk

Az $R \subseteq A \times \mathbb{L}$ típusú relációkat – ahol A tetszőleges halmaz –, logikai relációknak nevezzük. A logikai relációkra bevezetünk néhány jelölést:



1.2. ábra. Kompozíció és szigorú kompozíció

Legyen $R \subseteq A \times \mathbb{L}$. Ekkor az R gyenge igazsághalmaza:

$$\lfloor R \rfloor = R^{(-1)}(\{\text{igaz}\}),$$

erős igazsághalmaza:

$$\lceil R \rceil = R^{-1}(\{\text{igaz}\}).$$

Vegyük észre, hogy ha R függvény, akkor az erős és gyenge igazsághalmaz megegyezik. A függvényekre alkalmazott igazsághalmaz-képzésnek van egy inverz művelete, a karakterisztikus függvény megadása: legyen $H \subseteq A$. Ekkor a $\mathcal{P}(H) : A \rightarrow \mathbb{L}$ függvény a H halmaz karakterisztikus függvénye, ha

$$\lceil \mathcal{P}(H) \rceil = H.$$

A fenti definíciókból következik, hogy tulajdonképpen mindegy, hogy egy halmaz részhalmazairól, vagy a halmazon értelmezett logikai függvényekről (állításokról) beszélünk, hiszen ezen fogalmak kölcsönösen egyértelműen megfelelnek egymásnak.

1.5. Példák

1. példa: Írjuk fel az $A \times B$, $A \times C$, $(A \times B) \times C$, és $A \times B \times C$ halmazok elemeit, ha $A = \{0, 1\}$, $B = \{1, 2, 3\}$, $C = \{p, q\}$!

Megoldás:

$$\begin{aligned}
A \times B &= \{(0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 1), (1, 2), (1, 3)\}, \\
A \times C &= \{(0, p), (0, q), (1, p), (1, q)\}, \\
(A \times B) \times C &= \{((0, 1), p), ((0, 2), p), ((0, 3), p), ((1, 1), p), ((1, 2), p), ((1, 3), p), \\
&\quad ((0, 1), q), ((0, 2), q), ((0, 3), q), ((1, 1), q), ((1, 2), q), ((1, 3), q)\}, \\
A \times B \times C &= \{(0, 1, p), (0, 2, p), (0, 3, p), (1, 1, p), (1, 2, p), (1, 3, p), \\
&\quad (0, 1, q), (0, 2, q), (0, 3, q), (1, 1, q), (1, 2, q), (1, 3, q)\}.
\end{aligned}$$

2. példa: Legyen $R \subseteq \{1, 2, 3, 4, 5\} \times \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 5)\}.$$

- Mi a reláció értelmezési tartománya és értékkészlete?
- Determinisztikus-e, ill. függvény-e a reláció?
- Mi R^0 , 2 ., (-1) . hatványa?
- Mi a $\{4, 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?

Megoldás:

$$\begin{aligned}
a) \mathcal{D}_R &= \{1, 2, 3, 4\}, \\
\mathcal{R}_R &= \{1, 2, 3, 4, 5\}.
\end{aligned}$$

b) A reláció nem determinisztikus, ugyanis pl. $|R(1)| = 2!$ Mivel a reláció nem determinisztikus, függvény sem lehet.

c) A reláció 0 . hatványa az identikus leképezés, azaz:

$$R^0 = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)\}.$$

Mivel $R^2 = R \circ R$, azt kell megvizsgálnunk, hogy mely pontokból hogyan lehet a relációt egymás után kétszer alkalmazni:

$$\begin{aligned}
(1, 2) &\longrightarrow (2, 1) \\
(1, 4) &\longrightarrow (4, 5) \\
(2, 1) &\longrightarrow (1, 2) \\
(2, 1) &\longrightarrow (1, 4) \\
(3, 4) &\longrightarrow (4, 5) \\
(3, 3) &\longrightarrow (3, 4) \\
(3, 3) &\longrightarrow (3, 3) \\
(3, 3) &\longrightarrow (3, 5)
\end{aligned}$$

A fenti táblázat alapján:

$$R^2 = \{(1, 1), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (3, 5), (3, 4), (3, 3)\}.$$

$R^{(-1)}$ a reláció inverzének definíciója alapján:

$$R = \{(2, 1), (4, 1), (1, 2), (4, 3), (3, 3), (5, 3), (5, 4)\}.$$

d) Írjuk fel, hogy mit rendel a reláció az értelmezési tartomány egyes pontjaihoz:

$$\begin{aligned} R(1) &= \{2, 4\} \\ R(2) &= \{1\} \\ R(3) &= \{3, 4, 5\} \\ R(4) &= \{5\} \end{aligned}$$

Az inverz kép definíciója alapján:

$$R^{(-1)}(\{4, 5\}) = \{1, 3, 4\}.$$

Az ősképp definíciója alapján:

$$R^{-1}(\{4, 5\}) = \{4\}.$$

3. példa: Megadható-e valamilyen összefüggés egy H halmaz inverz képének képe, és a H halmaz között?

Megoldás: Legyen $R \subseteq A \times B$, $H \subseteq B$. Ekkor

$$\begin{aligned} R(R^{(-1)}(H)) &= R(\{a \in A \mid R(a) \cap H \neq \emptyset\}) = \\ &= \bigcup_{R(a) \cap H \neq \emptyset} R(a). \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy általános esetben nem tudunk mondani semmit a két halmaz viszonyáról, ugyanis

- i.) ha $H \not\subseteq \mathcal{R}_R$, akkor $H \not\subseteq R(R^{(-1)}(H))$ és
- ii.) ha $\exists a \in R^{(-1)}(H) : R(a) \not\subseteq H$, akkor $R(R^{(-1)}(H)) \not\subseteq H$.

Tekintsük e fenti esetet egy egyszerű számpéldán: Legyen $A = B = \{1, 2, 3\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Ekkor $H = \{2, 3\}$ esetén $R(R^{(-1)}(H)) = \{1, 2\}$, azaz egyik irányú tartalmazkodás sem áll fenn.

4. példa: Legyen $R \subseteq A \times B$, $P, Q \subseteq B$. Hogyan lehetne jellemezni az $R^{-1}(P \cup Q)$ és az $R^{-1}(P \cap Q)$ halmazt az $R^{-1}(P)$ és $R^{-1}(Q)$ halmaz segítségével?

Megoldás:

$$\begin{aligned} R^{-1}(P \cup Q) &= \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq (P \cup Q)\} = \\ &\supseteq \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P\} \cup \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq Q\}. \end{aligned}$$

A másik irányú tartalmazkodás sajnos nem áll fenn, ugyanis lehet olyan $a \in \mathcal{D}_R$ amelyre

$$R(a) \not\subseteq P, \text{ és } R(a) \not\subseteq Q, \text{ de } R(a) \subseteq P \cup Q.$$

Nézzük ezt egy számpéldán: Legyen $A = B = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 1), (1, 2)\}$, $P = \{1\}$, $Q = \{2\}$. Ekkor $R^{-1}(P)$ és $R^{-1}(Q)$ üres, de $R^{-1}(P \cup Q) = \{1\}$.

Vizsgáljuk most meg a metszetet!

$$\begin{aligned} R^{-1}(P \cap Q) &= \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq (P \cap Q)\} = \\ &= \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq P\} \cap \{a \in \mathcal{D}_R \mid R(a) \subseteq Q\} = \\ &= R^{-1}(P) \cap R^{-1}(Q). \end{aligned}$$

Tehát bebizonyítottuk, hogy két tetszőleges halmaz metszetének ősképe egyenlő a két halmaz ősképeinek metszetével.

5. példa: Legyenek $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy

$$(G \circ F)^{(-1)} = F^{(-1)} \circ G^{(-1)}?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} (G \circ F)^{(-1)} &= \{(c, a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (a, b) \in F \wedge (b, c) \in G\} = \\ &= \{(c, a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (b, a) \in F^{(-1)} \wedge (c, b) \in G^{(-1)}\} = \\ &= F^{(-1)} \circ G^{(-1)}. \end{aligned}$$

6. példa: Legyenek $F \subseteq A \times B, G \subseteq B \times C$. Igaz-e, hogy

$$(G \odot F)^{(-1)} = F^{(-1)} \odot G^{(-1)}?$$

Megoldás:

$$\begin{aligned} (G \odot F)^{(-1)} &= \{(c, a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (a, b) \in F \wedge (b, c) \in G \wedge \\ &\quad \wedge F(a) \subseteq \mathcal{D}_G\} = \\ &= \{(c, a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (b, a) \in F^{(-1)} \wedge (c, b) \in G^{(-1)} \wedge \\ &\quad \wedge F(a) \subseteq \mathcal{D}_G\} = \\ &\neq \{(c, a) \in C \times A \mid \exists b \in B : (b, a) \in F^{(-1)} \wedge (c, b) \in G^{(-1)} \wedge \\ &\quad \wedge G^{(-1)}(c) \subseteq \mathcal{D}_{F^{(-1)}}\} = \\ &= F^{(-1)} \odot G^{(-1)}. \end{aligned}$$

Számpéldán szemlélítve: legyen $A = B = C = \{1, 2\}$, $F = G = \{(1, 1), (1, 2)\}$. Ekkor

$$\begin{aligned} (G \odot F)^{(-1)} &= \emptyset, \\ F^{(-1)} \odot G^{(-1)} &= \{(1, 1), (2, 1)\}. \end{aligned}$$

7. példa: $W = N_1 \times N_2 \times N_3$. $\alpha \in W^{**}$, ahol $N_i = \mathbb{N}$ ($i = 1, 2, 3$). $\alpha_1 = (1, 1, 1)$. Az α sorozat további elemeit úgy kapjuk meg, hogy a pontok koordinátáit az első koordinátával kezdve ciklikusan 1-gyel növeljük. $\text{red}(pr_{N_1 \times N_3}(\alpha)) = ?$

Megoldás: Írjuk fel először a sorozat első néhány tagját:

$$\alpha = \langle (1, 1, 1), (2, 1, 1), (2, 2, 1), (2, 2, 2), (3, 2, 2), (3, 3, 2) \cdots \rangle$$

Az α sorozat projekciója $N_1 \times N_3$ -ra:

$$pr_{N_1 \times N_3}(\alpha) = \langle (1, 1), (2, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2), (3, 2) \cdots \rangle$$

A fenti sorozat redukáltja:

$$red(pr_{N_1 \times N_3}(\alpha)) = \langle (1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 2) \cdots \rangle$$

A fentiekből jól látható, hogy a redukció pontosan azokat az elemeket hagyja ki a sorozatból, amelyekben a növelés a második komponensben történt, így az eredményssorozat elemeit is a koordináták ciklikus eggyel növelésével kapjuk meg, az $(1, 1)$ pontból kiindulva.

1.6. Feladatok

1. Milyen összefüggés van egy H halmaz R relációra vonatkozó inverz képe és ősképe között? És ha R függvény?
2. $R = \{((x, y), (x + y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$. Mi a $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?
3. $R = \{((x, y), (x + y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\} \cup \{((x, y), (x - y, y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$. Mi a $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz inverz képe, ill. ősképe?
4. $R = \{((x, y), (f(x, y), y)) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$, ahol $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. Mi a $H = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{N} \wedge a + b < 5\}$ halmaz ősképe ill. inverz képe?
5. $R \subseteq A \times B$, $Q \subseteq B$. Van-e valamilyen összefüggés az $R^{-1}(B \setminus Q)$ halmaz és az $A \setminus (R^{-1}(Q))$ halmaz között?
6. Készíts olyan nem üres relációt, amelyre igaz, hogy értékkészlete minden valódi részhalmazának ősképe üres halmaz!
7. Legyen $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $R \subseteq A \times A$, $R = \{(1, 2), (1, 4), (2, 1), (3, 4), (3, 3), (3, 5), (4, 5)\}$, $f \subseteq A \times \mathbb{L}$ és $f = \{(1, i), (2, i), (3, i), (4, h), (5, i)\}$. Mi f , ill. $(f \circ R)$ igazsághalmaza?
8. $R, Q \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R \odot Q)^{(-1)} = Q^{(-1)} \circ R^{(-1)}$?
9. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $(R^{(-1)})^2 = (R^2)^{(-1)}$?
10. $R \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy $\forall H \subseteq A : R^{-1}(R^{-1}(H)) = (R^2)^{-1}(H)$?
11. $P, Q \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$. $Q = \{(a, b) \mid 2 \mid a \wedge b \mid a \wedge \text{prim}(b)\}$.
 a) $P = \{(a, b) \mid b \mid a \wedge b \neq 1 \wedge b \neq a\}$
 b) $P = \{(a, b) \mid b \mid a\}$
 Add meg a $Q^{(-1)}$, $Q \circ P$ és $Q \odot P$ -t relációt!

12. Legyen $Q, R, S \subseteq A \times A$, és vezessük be az alábbi jelölést: ha $X \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció, akkor X komplementere:

$$\hat{X} = \{(a, b) \in A \times A \mid (a, b) \notin X\}.$$

Igaz-e, hogy

$$Q \odot R \subseteq S \iff Q^{(-1)} \odot \hat{S} \subseteq \hat{R}?$$

Igaz-e a fenti állítás nem-szigorú kompozíció esetén?

13. Legyen $Q, R, S \subseteq A \times A$. Igaz-e, hogy

$$\begin{aligned} R \subseteq S &\Rightarrow R \odot Q \subseteq S \odot Q, \\ R \subseteq S &\Rightarrow Q \odot R \subseteq Q \odot S? \end{aligned}$$

14. Legyen R és Q két reláció a természetes számok halmazán! R egy természetes számhoz rendeli önmagát és a kétszeresét, Q egy páros természetes számhoz a felét.

- Írd fel a két relációt, és add meg az értelmezési tartományukat!
- Írd fel az R reláció k . hatványát ($k \geq 1$) és ennek az értelmezési tartományát!
- Írd fel a $Q \circ R$ relációt és az értelmezési tartományát!
- $F = Q \odot R$! Írd fel az F relációt és az értelmezési tartományát!

15. Legfeljebb ill. legalább milyen hosszú egy m és egy n hosszúságú sorozat redukáltjának konkatenációja, ill. konkatenációjának redukáltja?

16. Igaz-e, hogy egy α sorozat redukáltjának projekciója ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

17. Igaz-e, hogy egy α sorozat projekciójának redukáltja ugyanolyan hosszú, mint az α sorozat redukáltja?

18. Legyen $A = N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4$, $B = N_4 \times N_1$, ahol $N_i = \mathbb{N}$ ($i = 1..4$).

$$\alpha = \langle (1, 1, 1, 1), (1, 2, 1, 1), (1, 2, 3, 1), (1, 2, 3, 4), \\ (5, 2, 3, 4), (5, 7, 3, 4), (5, 7, 10, 4), \dots \rangle$$

- $pr_B(\alpha) = ?$
- $red(pr_B(\alpha)) = ?$