Analízis szigorlat

Szili László előadásai nyomán készítette Utasi Róbert és Sántha Attila *

1999 szeptember - 2000 december

*A szerzők a jegyzet tartalmáért, annak helyességéért, illetve teljességéért semmiféle felelősséget nem vállalnak. A jegyzetet mindenki csak és kizárólag a saját felelősségére használhatja, a jegyzet tartalmára a szigorlat során nem hivatkozhat!

Tartalomjegyzék

1 Halmazok, relációk és függvények

1.1 Halmazok

1. Definíció. *Az $\mathcal{A}$ halmaz esetén beszélhetünk:*
$a \in \mathcal{A}$; $a \notin \mathcal{A}$; $\emptyset$;
$\mathcal{A} \subset \mathcal{B}$; $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$
$\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \Leftrightarrow \forall a \in \mathcal{A} : a \in \mathcal{B}$
$\mathcal{A} = \mathcal{B} \Leftrightarrow \mathcal{A} \subset \mathcal{B} \wedge \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$
Halmazok megadása: 1. $\mathcal{A} := \{a, b, c\}$
2. $\mathcal{A} := \{\, x \mid s(x) = \text{igaz} \,\}$; $s : \mathcal{A} \to \{\text{igaz}, \text{hamis}\}$

2. Definíció. *Műveletek halmazokkal*
$\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$
$\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$
$\mathcal{A} \setminus \mathcal{B}$
Hatványhalmaz: $\mathcal{P}(\mathcal{A}) = \{\, \mathcal{X} \mid \mathcal{X} \subset \mathcal{A} \,\}$

3. Definíció. *Descartes szorzat:*
$\mathcal{A}, \mathcal{B}$ *halmazok* ; $\mathcal{A} \times \mathcal{B} := \{\, (a, b) \mid a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B} \,\}$

4. Definíció. *Reláció: Legyenek $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ halmazok.*
R *az $\mathcal{A}$ és a $\mathcal{B}$ halmazok közötti reláció, ha* $\mathrm{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$, *azaz* $(a, b) \in \mathrm{R} \leftrightarrow : a\mathrm{R}b$

5. Definíció.
Reláció értelmezési tartománya: $\mathcal{D}_{\mathrm{R}}$
értékészlete $\mathcal{R}_{\mathrm{R}}$.
$\mathcal{D}_{\mathrm{R}} := \{\, a \in \mathcal{A} \mid \exists b \in \mathcal{B} : (a, b) \in \mathrm{R} \,\}$
$\mathcal{R}_{\mathrm{R}} := \{\, b \in \mathcal{B} \mid \exists a \in \mathcal{A} : (a, b) \in \mathrm{R} \,\}$

6. Definíció. *Bináris reláció:*
$\mathcal{A}$ *halmaz,* R *bináris reláció, ha* $\mathrm{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$.

7. Definíció.

$\mathrm{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$	*reflexív:*	$\forall a \in \mathcal{A} : a\mathrm{R}a$
	szimmetrikus:	$(a, b) \in \mathrm{R} \Leftrightarrow (b, a) \in \mathrm{R}$
	antiszimmetrikus:	$(a, b) \in \mathrm{R} \wedge (b, a) \in \mathrm{R} \Rightarrow a = b$
	tranzitív:	$(a, b) \in \mathrm{R} \wedge (b, c) \in \mathrm{R} \Rightarrow (a, c) \in \mathrm{R}$
	ekvivalenciareláció:	*reflexív, szimmetrikus, tranzitív*

8. Definíció. *Az* $\mathrm{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *bináris reláció <u>parciális rendezés</u> az $\mathcal{A}$-n, ha reflexív, antiszimmetrikus, és tranzitív.*
Az $\mathrm{R} \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ *bináris reláció <u>teljes rendezés</u> az $\mathcal{A}$-n, ha parciális rendezés, és bármely két eleme összehasonlítható, azaz* $\forall a, b \in \mathcal{A} : (a, b) \in \mathrm{R}$ *vagy* $(b, a) \in \mathrm{R}$

1.2 Függvények bevezetése, mint speciális relációk

9. Definíció. $\mathcal{A} \neq \emptyset$; $\mathcal{B} \neq \emptyset$; *az* $f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ *reláció függvény, ha* $\forall a \in \mathcal{D}_f$ <u>pontosan</u> *egy olyan* $b \in \mathcal{B}$ *tartozik, amelyre* $(a, b) \in f$, *azaz:*

$$f \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B} \text{ függvény} \Leftrightarrow \left.\begin{array}{c} (a, b_1) \in f \\ \wedge \\ (a, b_2) \in f \end{array}\right\} \Rightarrow b_1 = b_2.$$

Jelölések:	$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B} :$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{D}_f = \mathcal{A}$
	$f \in \mathcal{A} \to \mathcal{B} :$	$\Leftrightarrow$	$\mathcal{D}_f \subset \mathcal{A}$
	$\mathcal{B}$ *képhalmaz*	$\Rightarrow$	$\mathcal{R}_f \subset \mathcal{B}$.

Függvények megadása: *értelmezési tartomány megadása,*
képhalmaz megadása,
hozzárendelés módjának megadása.

1. Tétel. $f = g \Leftrightarrow \begin{array}{l} \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g \\ \forall x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g : f(x) = g(x). \end{array}$

10. Definíció. *Az $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ függvény*

a. *injektív, ha különböző elemek képe különböző,*
azaz $x, y \in \mathcal{A}, x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$,

b. *szürjektív, ha $\mathcal{B} = \mathcal{R}_f$,*

c. *bijektív, ha injektív és szürjektív.*

11. Definíció. *f függvény ; $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_f$.*
$f\big|_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{R}_f$, $x \to f(x)$ az f függvény $\mathcal{A}$-ra való leszűkítése.

12. Definíció. *$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$*

1. *$\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$; $f(\mathcal{C}) := \left\{ f(x) \in \mathcal{B} \big| x \in \mathcal{C} \right\}$. A $\mathcal{C}$ halmaz f függvény által létesített képe.*
2. *$\mathcal{D} \subset \mathcal{B}$; $f^{(-1)}(\mathcal{D}) := \left\{ x \in \mathcal{A} \big| f(x) \in \mathcal{D} \right\}$. A $\mathcal{D}$ halmaz f függvény által létesített ősképe.*

13. Definíció. *$f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$; $g : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$; $\mathcal{R}_g \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$. Ekkor az f és a g függvények ebben a sorrendben vett kompozíciója az $f \circ g$-vel jelölt alábbi függvény:*
$\mathcal{D}_{f \circ g} : g^{(-1)}(\mathcal{R}_g \cap \mathcal{A})$ és $(f \circ g)(x) := f(g(x))$.
Ekkor $\mathcal{D}_{f \circ g} \subset \mathcal{C}$; $\mathcal{R}_{f \circ g} \subset \mathcal{B}$.
g belső függvény,
f külső függvény.

14. Definíció. *Az f függvény invertálható, ha $\forall x \neq y$; $x, y \in \mathcal{D}_f$ esetén $f(x) \neq f(y)$.*

15. Definíció. *Legyen f invertálható függvény. Ekkor*
$f^{-1} : \mathcal{R}_f \to \mathcal{D}_f$; $y \to x$, amelyre $f(x) = y$, az f inverz függvénye.

2. Tétel.

1. *f, g, h függvények ; $\mathcal{R}_h \subset \mathcal{D}_g$; $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$. Ekkor $(f \circ g) \circ h = f \circ (g \circ h)$,*
azaz a kompozícióképzés asszociatív.
2. *Ha f invertálható, akkor*
   - *i)* $(f^{-1})^{-1} = f$,
   - *ii)* $f \circ f^{-1} = id_{\mathcal{R}_f}$ *($\mathcal{R}_f$-re vonatkozó identitásfüggvény),*
   - *iii)* $f^{-1} \circ f = id_{\mathcal{D}_f}$.
3. *Legyen f, g invertálható, és $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$.*
Ekkor az $f \circ g$ is invertálható, és $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

3. Tétel. *Műveletek számértékű függvényekkel ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$)*
$f, g \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \neq \emptyset$. Ekkor

$$\begin{array}{rl} f + g : & \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \ni x \longrightarrow f(x) + g(x), \\ f \cdot g : & \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g \ni x \longrightarrow f(x) \cdot g(x), \\ \lambda \cdot f : & \mathcal{D}_f \ni x \longrightarrow \lambda \cdot f(x) \ ; \ \lambda \in \mathbb{R}, \\ f/g : & (\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g) \setminus \left\{ x \in \mathcal{D}_g \,\big|\, g(x) = 0 \right\} \ni x \longrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}. \end{array}$$

1.3 valós-valós függvények néhány tulajdonsága

16. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény*
monoton növekvő ($\nearrow$), ha $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leqslant f(x_2)$,
szigorúan monoton növekvő ($\uparrow$), ha $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$,
monoton csökkenő ($\searrow$) analóg,
szigorúan monoton csökkenő ($\downarrow$) analóg.

17. Definíció. *Az $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény korlátos, ha $\mathcal{R}_f \subset \mathbb{R}$ korlátos, azaz*
$\forall x \in \mathcal{D}_f \exists K > 0 : |f(x)| \leqslant K$.
Alulról korlátos, felülről korlátos - értelemszerűen.

2 Valós számok

Valós számok egy axiómarendszere

2.1 Testaxiómák

1. Axióma. *Értelmezve van egy* $+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $+(x, y) =: x + y$ *függvény (az összeadás művelete), melyre*

i) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x + y = y + x$ *kommutatív,*
ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x + (y + z) = (x + y) + z$ *asszociatív,*
iii) $\exists \Theta \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ x + \Theta = x$ *(Θ az $\mathbb{R}$ nulleleme),*
iv) $\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \tilde{x} \in \mathbb{R} : x + \tilde{x} = \Theta$ *($\tilde{x}$ az x ellentettje).*

2. Axióma. *Értelmezve van egy* $\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $\cdot(x, y) =: x \cdot y$ *függvény (a szorzás művelete), melyre*

i) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \cdot y = y \cdot x$ *kommutatív,*
ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ *asszociatív,*
iii) $\exists \varepsilon \in \mathbb{R} \setminus \{\Theta\}\ \forall x \in \mathbb{R} : x \cdot \varepsilon = x$ *(ε az $\mathbb{R}$ egységeleme),*
iv) $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\Theta\}\ \exists \hat{x} \in \mathbb{R} : x \cdot \hat{x} = \varepsilon$ *($\hat{x}$ az x reciproka)* $\hat{x} =: x^{-1} = \frac{1}{x}$.

3. Axióma. ***(Disztributivitás)***
$\forall x, y, z \in \mathbb{R} : (x + y) \cdot z = xz + yz.$

2.2 Rendezési axiómák

$\mathbb{R}$-en értelmezve van egy $\leqslant$ reláció ($\leqslant \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$), melyre a következők teljesülnek:

4. Axióma. $\leqslant$ *reláció lineáris rendezés, azaz*

i) $\forall x \in \mathbb{R} : x \leqslant x$ *reflexív,*
ii) $\forall x, y \in \mathbb{R} : x \leqslant y, y \leqslant x \Rightarrow x = y$ *antiszimmetrikus,*
iii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y, y \leqslant z \Rightarrow x \leqslant z$ *tranzitív,*
iv) $\forall x, y \in \mathbb{R}$: *vagy* $x \leqslant y$ *vagy* $y \leqslant x$ *azaz bármely két elem összehasonlítható.*

5. Axióma. *A* $\leqslant$ *rendezésre és a műveletekre fennáll:*

i) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y \Rightarrow x + z \leqslant y + z,$
ii) $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : x \leqslant y, z \geqslant 0 \Rightarrow x \cdot z \leqslant y \cdot z.$

2.3 Teljességi axióma (Dedekind- vagy szétválasztási axióma)

6. Axióma.

$$\left.\begin{array}{ll} & \mathcal{A}, \mathcal{B} \subset \mathbb{R} \text{ és} \\ i) & \mathcal{A} \neq \emptyset \ ; \ \mathcal{B} \neq \emptyset \\ ii) & \forall a \in \mathcal{A} \text{ és } \forall b \in \mathcal{B} \text{ esetén } a \leqslant b \end{array}\right\} \Rightarrow \exists \xi \in \mathbb{R} \text{ úgy, hogy } \forall a \in \mathcal{A} \text{ és } \forall b \in \mathcal{B} \text{ esetén } a \leqslant \xi \leqslant b.$$

(nem biztos, hogy $\mathcal{A}$-nak van legnagyobb eleme)

2.4 $\mathbb{R}$ részhalmazai

18. Definíció.

1) $\mathbb{R}^+$; $\mathbb{R}^+_0$; $\mathbb{R}^-$; $\mathbb{R}^-_0$
2) *intervallumok:* $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$

$$[a, b] := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \right\}$$
$$(a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x < b \right\}$$
$$[a, b) := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a \leqslant x < b \right\}$$
$$(a, b] := \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, a < x \leqslant b \right\}$$

2.5 A teljességi axióma néhány következménye

2.5.1 szuprémum elv előkészítése

19. Definíció. $\emptyset \neq \mathcal{H} \subseteq \mathbb{R}$. *A $\mathcal{H}$-nak van maximuma, ha* $\exists \alpha \in \mathcal{H}\ \forall x \in \mathcal{H} : x \leqslant \alpha$
Jelölés: $\max \mathcal{H} := \alpha$
$\min \mathcal{H}$ *hasonlóan*

Példák: $\{1,2\}$; $[1,2]$; $(1,2)$; $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\right\}$

20. Definíció. *$\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos, ha $\exists K \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathcal{H} : x \leqslant K$*
Alulról korlátos - analóg,
korlátos $\Leftrightarrow$ alulról is, felülről is korlátos

4. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor a felső korlátok között van legkisebb, azaz $\exists \min \left\{ K \in \mathbb{R} \,\middle|\, K \text{ felső korlátja } \mathcal{H}\text{-nak} \right\}$*

21. Definíció. *Ezt a minimális elemet a halmaz felső határának ill. szuprémumának nevezzük, azaz: $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R} : \sup \mathcal{H} = \min \left\{ K \in \mathbb{R} \,\middle|\, K \text{ felső korlátja } \mathcal{H}\text{-nak} \right\}$*

22. Definíció. *A szuprémum elve kimondja, hogy minden nemüres, felülről korlátos halmaznak van szuprémuma.*

5. Tétel. *Legyen $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ felülről korlátos. Ekkor*

$$\rho = \sup \mathcal{H} \iff \begin{array}{ll} i) & \forall x \in \mathcal{H} \ ;\ x \leqslant \rho \ (\rho \text{ felső korlát}) \\ ii) & \text{Ha } K \text{ felső korlát} \Rightarrow \rho \leqslant K \end{array}$$

$$\rho = \sup \mathcal{H} \iff \begin{array}{ll} i) & \forall x \in \mathcal{H} \ ;\ x \leqslant \rho \ (\rho \text{ felső korlát}) \\ ii) & \forall \alpha < \rho \exists x \in \mathcal{H} : x > \alpha \end{array}$$

Megj.: infímum - ($\inf \mathcal{H}$) analóg módon, min helyett max.

2.5.2 Archimedesi és Cantor axiómák

23. Definíció. ***Archimedesi tulajdonság:*** *$\forall a, b \in \mathbb{R}^+ \exists n \in \mathbb{N} : b < n \cdot a$ azaz akárhányszor felvehetem az a-t$\Rightarrow$bármilyen számon túl léphetek.*

Köv.: $\mathbb{N}$ felülről nem korlátos halmaz
$\forall K \subset \mathbb{N}$; $K \neq \emptyset$ halmaznak van minimuma.

24. Definíció. ***Cantor tulajdonság:*** *Ha $\forall n \in \mathbb{N} \exists [a_n, b_n]$ zárt intervallumok sorozata úgy, hogy $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$, akkor $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty} [a_n, b_n] \neq \emptyset$ azaz egymásba skatulyázott intervallumoknak a közös része nem üres halmaz.*

Megj.: a zártság nem hagyható el!

2.5.3 Gyökvonás

6. Tétel. *Legyen $n > 2$; $n \in \mathbb{N}$. Ekkor $\forall \alpha \in \mathbb{R}_0^+ \exists! \rho \in \mathbb{R}_0^+ : \rho^n = \alpha$*

25. Definíció. *Legyen $n > 2$ rögzített ; $n \in \mathbb{N}$.*
Ekkor az $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ n-edik gyöke az az egyértelműen létező $\rho \in \mathbb{R}_0^+ : \rho^n = \alpha$.
Jelölés: $\sqrt[n]{\alpha} := \alpha^{\frac{1}{n}} = \rho$

2.6 Természetes számok ($\mathbb{N}$) bevezetése

26. Definíció. *A $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ <u>induktív halmaz</u>, ha*
i) $0 \in \mathcal{H}$
ii) $x \in \mathcal{H} \Rightarrow x + 1 \in \mathcal{H}$

7. Tétel.
a) *$\mathbb{R}$ induktív halmaz*
b) *induktív halmazok metszete is induktív*

27. Definíció. *Az $\mathbb{R}$ induktív részhalmazainak a közös részét a természetes számok halmazának nevezzük, és $\mathbb{N}$-el jelöljük. Azaz ha $\mathcal{I}$ jelöli az induktív halmazok rendszerét, akkor $\mathbb{N} := \bigcap \mathcal{I}$, azaz $\mathbb{N} = \left\{ x \in \mathbb{R} \,\middle|\, x \in \mathcal{I}, \forall \mathcal{I} \subset \mathbb{R} \text{ induktív halmaz} \right\}$*

Köv.: a. $\mathbb{N}$ induktív halmaz.
b. a legszűkebb induktív halmaz.

8. Tétel. ***Teljes indukció elve:***
Tfh $A(n)$ állítás $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén adott, továbbá:

$$\left.\begin{array}{ll} i) & a(0) \text{ igaz} \\ ii) & A(n) \text{ igaz} \Rightarrow A(n+1) \text{ igaz} \end{array}\right\} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : A(n) \text{ igaz}$$

Megj.: $\mathbb{N}$-ből felépíthető $\mathbb{Z}$, továbbá $\mathbb{Z}$-ből és $\mathbb{N}$-ből felépíthető $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{Q} = \left\{ r = \frac{p}{q} \in \mathbb{R} \;\middle|\; p \in \mathbb{Z} \wedge q \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$$

2.7 Racionális és valós számok közötti kapcsolat

9. Tétel. *$\mathbb{Q}$ az $\mathbb{R}$-beli műveletekkel és rendezéssel*
i) *rendezett test*
ii) $\mathbb{Q} \neq \mathbb{R}$; $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ $(\mathbb{Q}^* := \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$
$\mathbb{Q}^*$ elemei irracionális számok
iii) *$\mathbb{Q}$-ban a Dedekind-féle teljességi axióma nem teljesül.*

10. Tétel. *Ha az $a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$ $\Rightarrow$*
i) $(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$ *(minden intervallum tartalmaz racionális számot)*
ii) $(a, b) \cap \mathbb{Q}^* \neq \emptyset$ *(minden intervallum tartalmaz irracionális számot is)*
Megj.: *minden nyílt intervallum végtelen sok racionális és irracionális számot tartalmaz.*

2.8 Valós számok kibővített halmaza

28. Definíció. $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
rendezés: $\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$.
műveletek:
a)
$$(+\infty) + x := x + (+\infty) := +\infty \quad \text{ha } x \in \mathbb{R} \text{ vagy } x = +\infty$$
$$(-\infty) + x := x + (-\infty) := -\infty \quad \text{ha } x \in \mathbb{R} \text{ vagy } x = -\infty$$
b)
$$(+\infty) \cdot x := x \cdot (+\infty) := \begin{cases} +\infty & \text{ha } x \in \mathbb{R}^+ \text{ vagy } x = +\infty \\ -\infty & \text{ha } x \in \mathbb{R}^- \text{ vagy } x = -\infty \end{cases}$$
$$(-\infty) \cdot x := x \cdot (-\infty) := \begin{cases} +\infty & \text{ha } x \in \mathbb{R}^- \text{ vagy } x = -\infty \\ -\infty & \text{ha } x \in \mathbb{R}^+ \text{ vagy } x = +\infty \end{cases}$$
c)
$$\forall x \in \mathbb{R} : \frac{x}{+\infty} := \frac{x}{-\infty} = 0$$
$$\frac{x}{y} := x \cdot \frac{1}{y} \quad (y \in \overline{\mathbb{R}} \setminus \{0\}).$$

Megj.: *nem értelmezzük:* $(-\infty) + (+\infty)$; $0 \cdot (\pm\infty)$; $\dfrac{\pm\infty}{\pm\infty}$.

29. Definíció.
Ha $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ felülről nem korlátos, akkor $\Rightarrow$ $\sup \mathcal{H} := +\infty$.
Ha $\emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathbb{R}$ alulról nem korlátos, akkor $\Rightarrow$ $\inf \mathcal{H} := -\infty$.

2.9 Nevezetes egyenlőtlenségek

2.9.1 Abszolútértékre vonatkozó (háromszög-) egyenlőtlenségek:

minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén
a) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$,
b) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$.

2.9.2 Számtani-mértani középre vonatkozó egyenlőtlenség:

$$n \in \mathbb{N} \;;\; a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}_0^+ : a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \leqslant \left(\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)^n$$

Egyenlőség akkor és csak akkor, ha $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

2.9.3 Bernoulli-egyenlőtlenség:

$$h \in \mathbb{R} \;;\; h > -1 \;;\; n \in \mathbb{N} \;:\; (1 + h)^n \geqslant 1 + n \cdot h.$$

2.9.4 Cauchy-Bunyakovszkij-Schwarz egyenlőtlenség:

Legyen $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$. Ekkor
$|a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n| \leqslant \sqrt{(a_1^2 + \cdots + a_n^2)} \cdot \sqrt{(b_1^2 + \cdots + b_n^2)}$,
egyenlőség akkor és csak akkor, ha
$\exists \lambda \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $a_i = \lambda b_i$ minden $i = 1, 2, ..., n$ esetén.

3 Metrikus terek topológiája

3.1 Metrikus terek értelmezése (bevezetés)

Motiváció:	számsorozat határértéke
	$(a_n): \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konv., ha $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N}: \lvert a_n - A \rvert < \varepsilon$
Általánosítás:	$\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow$ metrikus terek.

30. Definíció. *Az $(\mathcal{M}, \rho)$ rendezett pár metrikus tér, ha*
$\mathcal{M} \neq \emptyset$ halmaz ; $\rho : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\forall x, y, z \in \mathcal{M}$-re:
- $\rho(x, y) \geqslant 0$ *és* $= 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(háromszögegyenlőtlenség)*

Az ilyen tulajdonságú ρ függvényt $\mathcal{M}$-en értelmezett metrikának vagy távolságfüggvénynek nevezzük, a $\rho(x, y)$ számot pedig az x és az y távolságának.

3.1.1 Diszkrét metrikus tér

11. Tétel. *$\mathcal{M} \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz ; $\rho(x, y) := \begin{cases} 0 \ ha \ x = y \\ 1 \ ha \ x \neq y \end{cases}$ $(x, y \in \mathcal{M})$.*
Ekkor $(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér.

3.1.2 Valós metrikus tér

12. Tétel. $(\mathcal{M}, \rho) := (\mathbb{R}, \rho)$; $\rho(x, y) := \lvert x - y \rvert$ $(x, y \in \mathbb{R})$. *Ekkor $(\mathbb{R}, \rho)$ metrikus tér.*

3.1.3 $\mathbb{R}^n$ tér különböző metrikákkal

$n \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^n := \left\{ (x_1, ..., x_n) \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1..n \right\}$ $n \in \mathbb{N}$ rögz. $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

13. Tétel. $\rho_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. *Ekkor $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ metrikus tér.*

Megj.: $n = 2$: befogók hosszának az összege

14. Tétel. $\rho_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \lvert x_i - y_i \rvert^2}$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. *Ekkor $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ metrikus tér.*

Megj.: Euklideszi metrika: $n = 2$-re: átfogó hossza.

15. Tétel. $\rho_\infty(x, y) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \lvert x_i - y_i \rvert$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. *Ekkor $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ metrikus tér.*

Megj.: $n = 2$: a hosszabb befogó hossza.

3.1.4 $\mathrm{C}[a, b]$ tér különböző metrikákkal

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt int.; $\mathrm{C}[a, b]$ az $[a, b]$-n folytonos függvények halmaza.

16. Tétel. *Legyen $f, g \in \mathrm{C}[a, b] : \rho_\infty(f, g) := \max_{x \in [a,b]} \lvert f(x) - g(x) \rvert$ (Weierstrass)*
ahol ρ_∞ jól definiált függvény.
Ekkor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_\infty)$ metrikus tér (maximum metrika, Csebisev metrika)

17. Tétel. *$f, g \in \mathrm{C}[a, b] : \rho_1(f, g) := \int_a^b \lvert f - g \rvert$. Ekkor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_1)$ metrikus tér.*
(ρ_1 jól definiált, ui. minden folytonos függvény invertálható)

18. Tétel.
$f, g \in \mathrm{C}[a, b] : \rho_2(f, g) := \sqrt{\int_a^b \lvert f - g \rvert^2}$ (ρ_2 jól def.). Ekkor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_2)$ metrikus tér.

3.2 Környezetek, ekvivalens metrikák értelmezése, példák

31. Definíció. *Legyen* $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér,* $a \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$,
$\mathrm{K}^{\rho}_{\varepsilon}(a) := \left\{ x \in \mathcal{M} \;\middle|\; \rho(x,a) < \varepsilon \right\}$ *Az* $a \in \mathcal{M}$ *pont* ε *sugarú környezete.*

1. Példa: $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ $\mathrm{K}^{\rho_1}_{\varepsilon}(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i| < \varepsilon \right\}$

$n = 2$: $a = (0,0)$ $\mathrm{K}^{\rho_1}_{\varepsilon}(a) := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x_1| + |x_2| < \varepsilon \right\}$

2. Példa: $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ $\mathrm{K}^{\rho_2}_{\varepsilon}(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - a_i|^2} < \varepsilon \right\}$

$n = 2$: $a = (0,0)$ $\mathrm{K}^{\rho_2}_{\varepsilon}(a) := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon \right\}$

3. Példa: $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ $\mathrm{K}^{\rho_\infty}_{\varepsilon}(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - a_i| < \varepsilon \right\}$

$n = 2$: $a = (0,0)$ $\mathrm{K}^{\rho_\infty}_{\varepsilon}(a) := \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max\{|x_1|, |x_2|\} < \varepsilon \right\}$

32. Definíció. *Legyenek* $(\mathcal{M}, \rho_1)$, $(\mathcal{M}, \rho_2)$ *metrikus terek. Ekkor a* $\rho_1 \wedge \rho_2$ *metrika ekvivalens, ha* $\exists c_1, c_2 > 0 \forall x, y \in \mathcal{M} :\ c_1 \cdot \rho_1(x,y) \le \rho_2(x,y) \le c_2 \cdot \rho_1(x,y)$
Jelölés: $\rho_1 \backsim \rho_2$

Állítás: $\backsim$ ekvivalenciareláció.

19. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$, $i := 1, 2, \infty$, $(\mathbb{R}^n, \rho_i)$ *metrikus tér. Ekkor* $\rho_1 \backsim \rho_2 \backsim \rho_\infty$ *azaz*
1. $\rho_\infty \le \rho_1 \le n \cdot \rho_\infty$
2. $\rho_\infty \le \rho_2 \le \sqrt{n} \cdot \rho_\infty$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \rho_1 \le \rho_2 \le \rho_1$

20. Tétel. $\mathbb{R}^n$*-ben bármely két metrika ekvivalens.*

21. Tétel. *A* $\mathrm{C}[a,b]$ *téren a* ρ_1 *és a* ρ_∞ *nem ekvivalens metrikák.*

3.3 Topológiai fogalmak metrikus terekben

33. Definíció. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
Az $a \in \mathcal{M}$ *az* $\mathcal{A}$ *halmaz torlódási pontja, ha* $\forall \mathrm{K}_r(a) : (\mathrm{K}_r(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Jelölés: $\mathcal{A}' := \left\{ a \in \mathcal{M} \;\middle|\; a \text{ torlódási pontja } \mathcal{A}\text{-nak} \right\}$

22. Tétel. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér,* $\mathcal{A} \neq \emptyset$; $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. *Ekkor*
a) $a \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow \mathrm{K}_r(a) \cap \mathcal{A}$ *végtelen halmaz*
b) $a \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow \exists (a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ *invertálható, konvergens és* $\lim_{k \to \infty} (a_k) = a$

34. Definíció. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
a) $a \in \mathcal{A}$ *az* $\mathcal{A}$ *belső pontja, ha* $\exists \mathrm{K}_r(a) : \mathrm{K}_r(a) \subset \mathcal{A}$
$\mathrm{int}\mathcal{A} := \left\{ a \in \mathcal{A} \;\middle|\; a \text{ belső pontja } \mathcal{A}\text{-nak.} \right\}$
b) $a \in \mathcal{A}$ *izolált pontja* $\mathcal{A}$*-nak, ha* $\exists \mathrm{K}_r(a) : (\mathrm{K}_r(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$

35. Definíció. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
a) $\mathcal{A}$ *nyilt halmaz, ha minden pontja belső pont, azaz* $\forall a \in \mathcal{A} : \exists \mathrm{K}_r(a) \subset \mathcal{A}$ *(az* $\emptyset$ *nyilt halmaz)*
b) $\mathcal{A}$ *zárt halmaz, ha* $\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}$ *nyilt halmaz* $\mathcal{M}$*-ben. (komplementer)*

Példák: 1. $\mathcal{M}$ zárt is, nyilt is.
2. $K_r(a)$ nyilt halmaz
3. $\forall$ véges halmaz zárt.
4. $[a, b) \subset \mathbb{R}$ se nem nyilt, se nem zárt.

23. Tétel. *$(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*
1. $\mathcal{A}$ zárt halmaz $(\mathcal{M}, \rho)$-ban.
2. $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$
3. $\forall (a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ konvergens, és $\lim\limits_{k\to\infty} (a_k) \in \mathcal{A}$

3.4 Metrikus terek összefüggő részhalmazai

24. Tétel. *$(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{M}$ nyilt halmaz ($i \in \Gamma$ tesz. ind. halmaz)$\Rightarrow$*
a) $\bigcup\limits_{i\in\Gamma} \mathcal{A}_i$ nyilt
b) ha Γ véges, $\bigcap\limits_{i\in\Gamma} \mathcal{A}_i$ nyilt.

25. Tétel. *$(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér, $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{M}$ zárt halmaz ($i \in \Gamma$ tesz. ind. halmaz)$\Rightarrow$*
a) $\bigcap\limits_{i\in\Gamma} \mathcal{A}_i$ zárt
b) ha Γ véges, $\bigcup\limits_{i\in\Gamma} \mathcal{A}_i$ zárt.

3.5 Metrikus terek kompakt részhalmazai

Eml.: $\mathbb{R}$-ben kompakt halmaz def.: sorozatokkal$\Leftrightarrow$ korlátos, zárt

36. Definíció. *$(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér.*
Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ kompakt, ha $\forall (a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ $\exists (a_{k_\nu})$ részs.: (a_{k_ν}) konvergens, és $\lim\limits_{k\to\infty} (a_{k_\nu}) \in \mathcal{A}$.

37. Definíció. *$(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér. Az $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ nyilt lefedésén egy*
$\left\{ \mathcal{G}_i \subset \mathcal{M} \;\middle|\; i \in \Gamma \text{ tetsz.}, \mathcal{G}_i \neq \emptyset \text{ nyilt} \right\}$ halmazrendszert értünk, ha $\bigcup\limits_{i\in\Gamma} \mathcal{G}_i \supset \mathcal{A}$ (befedés)

26. Tétel. *$(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*
a) $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ kompakt
b) az $\mathcal{A}$ minden nyilt lefedése tartalmaz <u>véges</u> lefedést. (Borel-féle befedési tétel)
c) Az $\mathcal{A}$ minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja.

Példák: Legyen $(\mathcal{M}, \rho) = (\mathbb{R}, \rho)$
1. $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ nem kompakt.
2. $\mathcal{A} = (-1, +1)$ nem kompakt. Pl.:
$\mathcal{A} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \left(-1 + \frac{1}{k} \, , \, 1 - \frac{1}{k} \right)$ lefedi, de nem tartalamaz véges lefedést.

3.6 A korlátosság, és a zártság szerepe, kompaktság $\mathbb{R}^n$-ben

27. Tétel. *$(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér, $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ kompakt.*
a) az $\mathcal{A}$ zárt halmaz is
b) az $\mathcal{A}$ korlátos is
c) ha $\mathcal{A}$ korlátos, és zárt $\not\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ kompakt.

28. Tétel. *$n \in \mathbb{N}$ rögzített. Ekkor az $(\mathbb{R}^n, \rho_i)$ $i = 1, 2, \infty$ metrikus terekben az*
$\mathcal{A} \subset (\mathbb{R}^n, \rho_i)$ kompakt $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ korlátos, és zárt.

4 Sorozatok

38. Definíció. *Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ függvényt (valós) számsorozatnak nevezzük.*
Jelölés: a ; a_n ; (a_n) $n \in \mathbb{N}$

Megj.: $\overset{\text{függvény}}{a(n)} \neq \overset{\text{sorozat}}{a_n}$!
Megj.: $a : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ is sorozat!
Példák: $a_n := \alpha + n \cdot d$ számtani sorozat (α kezdőtag, d differencia)
$a_n := \alpha \cdot q^n$ mértani sorozat (q hányados)
$a_n := \frac{1}{n}$ harmónikus sorozat

29. Tétel. *Legyen* $a := (a_n)$; $b := (b_n)$; $\lambda \in \mathbb{R}$. *Ekkor*
i. $\lambda \cdot a$ *sorozat*
ii. $a + b$ *sorozat*
iii. $a \cdot b$ *sorozat*
iv. $\frac{a}{b} : \mathbb{N} \setminus \{ n \in \mathbb{N} \,|\, b_n = 0 \} \to \mathbb{R}$
$n \to \frac{a_n}{b_n}$ *általában nem sorozat*

Megj.: $\frac{a}{b}$ sorozat $\Leftrightarrow$ $0 \notin \mathcal{R}_b$
Megj.: Értelmezhetünk monoton és korlátos sorozatokat: $a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$; $\uparrow, \downarrow, \nearrow, \searrow$

4.1 Sorozat szuprémuma, infímuma

39. Definíció.
$$a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} : \begin{array}{l} \sup a := \sup \mathcal{R}_a \\ \inf a := \inf \mathcal{R}_a \end{array}$$

30. Tétel.
$$M = \sup a \Leftrightarrow \begin{array}{ll} i. & \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant M \\ ii. & \forall M' < M \exists n_0 \in \mathbb{N} : a_{n_0} > M' \end{array}$$

40. Definíció. ***Indexsorozat:***
A $\nu := (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *sorozat indexsorozat, ha* ν *szig.mon.növekvő.*

41. Definíció.
Legyen $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *(valós sorozat), és* $\nu := (\nu_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *indexsorozat. Ekkor az* $a \circ \nu = (a_{\nu_n})$ *sorozatot az* a *sorozat* ν *által indukált (generált, meghatározott) részsorozatának nevezzük.*

42. Definíció.
$p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *az* $\mathbb{N}$ *egy átrendezése vagy permutációja, ha* p *bijekció* $\mathbb{N}$ *és* $\mathbb{N}$ *között.*

43. Definíció.
Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *a* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *permutáció által indukált átrendezése az* $a \circ p$ *sorozat.*

44. Definíció. *Az* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat határértéke az* $A \in \mathbb{R}$ *szám, ha* A *minden környezetén kívül a sorozatnak csak véges sok eleme van, azaz*
$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n - A| < \varepsilon$
Jelölés: $\lim(a_n) = A$; $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = A$

45. Definíció. *Az* $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat* <u>*konvergens*</u>*, ha* $\exists A \in \mathbb{R}$ *olyan, hogy az* A *szám az* a *sorozatnak határértéke.*
Az $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat* <u>*divergens*</u>*, ha nem konvergens.*

46. Definíció. $\forall n \in \mathbb{N}$: $T(n)$ *"tulajdonság".*
Azt mondjuk, hogy a T *tulajdonság majdnem minden (m.m.)* n*-re teljesül,*
ha $\exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : T(n)$ *fennáll.*

31. Tétel. *Konvergens sorozat határértéke egyértelműen meghatározott.*

32. Tétel.
$$\left.\begin{array}{r}(a_n),(b_n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}\\ m.m.n\in\mathbb{N}:a_n=b_n\end{array}\right\}\Longrightarrow (a_n)\ \textit{konv.}\ \Leftrightarrow\ (b_n)\ \textit{konv.}$$

4.2 Konvergens sorozatok

Legyen $(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér , $(a_k):\mathbb{N}\to\mathcal{M}$ $\mathcal{M}$-beli sorozat.

47. Definíció. *Az $(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér egy $(a_k):\mathbb{N}\to\mathcal{M}$ sorozatra konvergens, ha $\exists\alpha\in\mathcal{M}\forall\varepsilon>0\exists k_0\in\mathbb{N}\forall k>k_0:\rho(\alpha,a_k)<\varepsilon$ ahol α a sorozat határértéke.*
Jelölés: $\lim\limits_{k\to+\infty}(a_k)=\alpha\quad a_k\overset{\rho}{\to}\alpha\ (k\to+\infty)$

Megj.: ha $(\mathcal{M},\rho)$ a szokásos $(|\ |)$, akkor ez a definíció a korábbival megegyezik.

33. Tétel. $\alpha^\rho=\lim\limits_{k\to+\infty}(a_k)\Leftrightarrow\lim\limits_{k\to+\infty}\rho(\alpha,a_k)=0\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\exists k_0\in\mathbb{N}\forall k>k_0:a_k\in\mathrm{K}_\varepsilon(\alpha)\Leftrightarrow\ \forall\varepsilon>0:$ $\left\{k\in\mathbb{N}\,\middle|\,a_k\notin\mathrm{K}_\varepsilon(\alpha)\right\}$ *véges.*

34. Tétel. *Konvergens sorozat határértéke egyértelműen meghatározott*

35. Tétel. *Legyen $(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér. $(a_k):\mathbb{N}\to\mathcal{M}$ konvergens, és $\lim(a_k)=\alpha$. Ekkor*
1) az (a_k) korlátos, azaz $\mathcal{R}_{(a_k)}\subset\mathcal{M}$ korlátos, azaz $\exists r>0$ és $y\in\mathcal{M}:\mathcal{R}_{(a_k)}\subset\mathrm{K}_r(y)$
2) $\forall\nu:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ind.s. esetén $a\circ\nu$ konvergens, és $\lim a\circ\nu=\alpha$

48. Definíció. *Legyen $(\mathcal{M},\rho_1),(\mathcal{M},\rho_2)$.*
Ekkor $\rho_1\sim\rho_2$, ha $\forall x,y\in\mathcal{M}\ \exists c_1,c_2>0:c_1\cdot\rho_2(x,y)\le\rho_1(x,y)\le c_2\cdot\rho_2(x,y)$

36. Tétel. *$(\mathcal{M},\rho_1),(\mathcal{M},\rho_2)$ metrikus terek, $(a_k):\mathbb{N}\to\mathcal{M}$; $\rho_!\sim\rho_2$. Ekkor*
$(a_k)\overset{\rho_1}{\to}\alpha\Leftrightarrow(a_k)\overset{\rho_2}{\to}\alpha\quad(k\to+\infty)$

4.3 $\mathbb{R}^n$ konvergens sorozatai

Megj.: mindegy milyen metrikát veszünk egy feladat megoldásánál.
$n\in\mathbb{N}\quad(a_k)_{k\in\mathbb{N}}:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n\quad a_k\in\mathbb{R}^n\quad a_k=(a_k^{(1)},...,a_k^{(n)})$

37. Tétel. *$(\mathbb{R}^n,\rho_l)\quad(l=1,2,+\infty)$ metrikus tér. Ekkor az $(a_k):\mathbb{N}\to\mathbb{R}^n\quad(a_k)\overset{\rho_l}{\to}\alpha=(\alpha^{(1)},...,\alpha^{(n)})\Leftrightarrow\forall i\in[1..n]:(a_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ koordinátasorozat konvergens, és $\lim\limits_{k\to+\infty}(a_k^{(i)})=\alpha^{(i)}$*

4.4 Teljes metrikus terek (Cauchy-sorozatok)

Eml.: $\mathbb{R}$-ben $(a_k):\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, ha $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k,l>k_0:|a_k-a_l|<\varepsilon$
Cauchy-féle konvergenciakritérium: (a_k) konvergens$\Leftrightarrow$ (a_k) Cauchy-sorozat

49. Definíció. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér.*
Az $(a_k):\mathbb{N}\to\mathcal{M}$ Cauchy-sorozat, ha $\forall\varepsilon>0\ \exists k_0\in\mathbb{N}\ \forall k,l>k_0:\rho(a_k,a_l)<\varepsilon$

38. Tétel. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér ; $(a_k):\mathbb{N}\to\mathcal{M}$*
a) ha (a_k) konvergens $\Rightarrow(a_k)$ Cauchy-sorozat
b) $\not\Leftarrow$

50. Definíció.
Az $(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér teljes, ha minden Cauchy-sorozat konvergens $\mathcal{M}$-ben.

Megj.: $(\mathcal{M},\rho)$ teljes $\Longrightarrow\big[(a_k)$ konvergens $\Leftrightarrow(a_k)$ Cauchy-sorozat $\big]$

4.5 Példák

1. Diszkrét metrikus tér teljes
2.a. $(\mathbb{R}, \rho)$ ahol $\rho = |\ |$ teljes metrikus tér.
2.b. $(\mathbb{Q}, \rho)$ ahol $\rho = |\ |$ nem teljes metrikus tér.
3. $n \in \mathbb{N}$ rögzített: $(\mathbb{R}^n, \rho_i)$ $i = 1, 2, \infty$ teljes metrikus tér.
4. $(\mathrm{C}[a,b], \rho_\infty)$ ahol $\rho_\infty = \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$ teljes metrikus tér.
5. $(\mathrm{C}[a,b], \rho_1)$ ahol $\rho_1 = \int |f - g|$ nem teljes metrikus tér.

4.6 A rendezés és a határérték kapcsolata

39. Tétel. ***Közrefogási elv:*** *Legyen* $(a_n), (b_n), (c_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

$$\left.\begin{array}{r} m.m.n \in \mathbb{N} : a_n \leqslant b_n \leqslant c_n \\ A := \lim(a_n) = \lim(c_n) \end{array}\right\} \Rightarrow b_n \textit{ is konvergens és } \lim(b_n) = A$$

40. Tétel. *Legyen* $(a_n), (b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *konvergensek. Ekkor*
1. $m.m.n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant b_n \quad \Rightarrow \quad \lim(a_n) \geqslant \lim(b_n)$
2. $\lim(a_n) \geqslant \lim(b_n) \quad \Rightarrow \quad m.m.n \in \mathbb{N} : a_n \geqslant b_n$

41. Tétel. ***Monoton sorozatokra vonatkozó konvergenciatétel:***

$$\left.\begin{array}{r} (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ \textit{monoton} \\ \textit{korlátos} \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \textit{ konvergens (elégséges feltétel)}$$

$\lim(a_n) = \sup(a_n)$, *ha* $(a_n) \nearrow$ *mon.növ.*
$\lim(a_n) = \inf(a_n)$, *ha* $(a_n) \searrow$ *mon.csökk.*

42. Tétel. ***Bolzano-Weierstrass kiválasztási tétel:***
Minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.
(Minden végtelen, korlátos halmaznak van torlódási pontja)

4.7 Tágabb értelemben vett határérték

51. Definíció. *Azt mondjuk, hogy a valós* (a_n) *számsorozatnak a* $+\infty$ $[-\infty]$ *a határértéke, ha* $\forall p \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : a_n > p$ $[a_n < p]$
Jelölés: $\lim(a_n) = +\infty$ $[\lim(a_n) = -\infty]$

52. Definíció. *Tetszőleges* $\varepsilon > 0$ *számra:* $\mathrm{K}_\varepsilon(+\infty) := (\frac{1}{\varepsilon}, +\infty)$; $\mathrm{K}_\varepsilon(-\infty) := (-\infty, -\frac{1}{\varepsilon})$ *halmazokat a* $+\infty$ $\frac{1}{\varepsilon}$ *kezdőpontú* $[-\infty$ $-\frac{1}{\varepsilon}$ *végpontú] környezetének nevezzük. Ezzel a kiterjesztéssel a határérték definiciója változtatás nélkül kimondható!*

4.8 A műveletek és a határérték kapcsolata

53. Definíció.
$(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *nullsorozat*, *ha* $\lim(a_n) = 0$, *azaz* $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |a_n| < \varepsilon$

43. Tétel.
1. $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *nullsorozat* $\Leftrightarrow$ $(|a_n|)$ *nullsorozat*
2. $\lim(a_n) = A$ $\Leftrightarrow$ $(a_n - A)$ *nullsorozat*
3.
$$\left.\begin{array}{r} m.m.n \in \mathbb{N} : |a_n| < \alpha_n \\ \alpha_n \to 0\ (n \to +\infty) \end{array}\right\} \Rightarrow (a_n) \textit{ nullsorozat}$$

44. Tétel.

1. $(a_n), (b_n)$ *nullsorozat* $\Rightarrow$ $(a_n + b_n)$ *nullsorozat*
2. $\left.\begin{array}{r}(a_n)\ \textit{nullsorozat}\\ (b_n)\textit{korlátos sorozat}\end{array}\right\}$ $\Rightarrow$ $(a_n \cdot b_n)$ *nullsorozat*

54. Definíció. ***Egy konstruktív definíció a*** $\overline{\lim}, \underline{\lim}$***-re:***
Legyen $a := (a_n)$ *tetszőleges, valós, felülről [alulról] korlátos számsorozat, és a tagjaiból képezzük:*

$$\begin{array}{l} A_n = \sup\left\{ a_k \,\middle|\, k = n, n+1, n+2, \dots \right\}\ n \in \mathbb{N} \\ B_n = \inf\left\{ a_k \,\middle|\, k = n, n+1, n+2, \dots \right\}\ n \in \mathbb{N} \end{array} \quad \textit{számsorozatokat.}$$

Mivel $\forall n \in \mathbb{N}$ *számra* $\left\{ a_k \,\middle|\, k = n, n+1, n+2, \dots \right\} \supset \left\{ a_k \,\middle|\, k = n+1, n+2, \dots \right\}$,
ezért $A_n \geqslant A_{n+1}$; $B_n \geqslant B_{n+1}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\Rightarrow$ $\exists \lim A_n$; $\exists \lim B_n$ *határértékek.*
Ezek ismeretében azt mondhatjuk, hogy tetszőleges $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *számsorozatra legyen*

$$\limsup a_n := \begin{cases} +\infty & \textit{ha } a_n \textit{ felülről nem korlátos} \\ \lim A_n & \textit{különben} \end{cases}$$

$$\liminf a_n := \begin{cases} -\infty & \textit{ha } a_n \textit{ alulról nem korlátos} \\ \lim B_n & \textit{különben} \end{cases}$$

Jelölés: $\limsup = \overline{\lim}$; $\liminf = \underline{\lim}$

45. Tétel. $a = (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *sorozat. Ekkor:*

1. $\forall K < \overline{\lim}\, a$ $[k > \underline{\lim}\, a]$ *számnál a-nak* ∞ *sok tagja nagyobb [kisebb], és*
   $\forall L > \overline{\lim}\, a$ $[\ell < \underline{\lim}\, a]$ *számnál a-nak véges sok tagja nagyobb [kisebb].*
2. $\underline{\lim}\, a \leqslant \lim a \circ \nu \leqslant \overline{\lim}\, a$, *és*
   $\forall (a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\ \exists \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ind.s. melyre az = fennáll.*
3. (a_n)*-nek létezik határértéke* $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim}\, a = \underline{\lim}\, a = \lim a$
4. *tetszőleges* $\lambda > 0 : \overline{\lim}\,(\lambda a) = \lambda\, \overline{\lim}\, a$; $\underline{\lim}\,(\lambda a) = \lambda\, \underline{\lim}\, a$

4.9 Nevezetes sorozatok

55. Definíció. ***Geometriai sorozat:*** $q \in \mathbb{R}$; (q^n) *geometriai sorozat*

$$\lim_{n\to+\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \textit{ha } |q| < 1 \\ 1 & \textit{ha } q = 1 \\ \textit{divergens} & \textit{egyébként} \end{cases}$$

56. Definíció. *Tekintsük* $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$; $n \in \mathbb{N}$ *sorozatot. Ekkor*

$$\left.\begin{array}{r}\textit{monoton növő}\\ \textit{felülről korlátos}\end{array}\right\} \Rightarrow \textit{konvergens, és jelöljük: } \lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =: e$$

Az e szám irracionális szám.

5 Végtelen sorok

57. Definíció.
$S(\mathbb{R}) = \{a_n : \mathbb{N} \to \mathbb{R}\}$ az összes lehetséges számsorozatok halmaza
$\sum : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ függvény ; $a = a_n \longrightarrow (a_1 + a_2 + \cdots + a_n \quad n \in \mathbb{N}) =: \sum a_n$

58. Definíció.
Legyen $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ valós sorozat. A fenti módon értelmezett $\sum a_n$ sorozatot az a_n sorozatból képzett (végtelen, numerikus, szám-) sornak nevezzük.
Az $a_1 + \cdots + a_n =: s_n$ a $\sum a_n$ sor n-edik részletösszege, vagy n-edik szelete.

46. Tétel.
1. *$\sum : S(\mathbb{R}) \to S(\mathbb{R})$ függvény lineáris, azaz $\sum(\alpha a + \beta b) = \alpha \sum a + \beta \sum b$*
   $(\alpha, \beta \in \mathbb{R} \ ; \ a, b \in S(\mathbb{R}))$
2. *A $\sum$ leképezés bijekció.*

5.1 Sorok konvergenciája

59. Definíció.
$\sum a_n$ konvergens, ha a részletösszegek sorozatának - azaz az $a_1 + \cdots + a_n$ sorozatnak - van határértéke, és ez véges. Ellenkező esetben $\sum a_n$ sor divergens.

Ha a $\sum a_n$ konvergens, akkor $\exists \lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + \cdots + a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(s_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.
Ezt a számot a sor összegének nevezzük.

5.2 Példák

5.2.1 geometriai sor

47. Tétel.
Legyen $q \in \mathbb{R}$; $1, q, q^2, q^3, \ldots$ geometriai sorozat.
Ekkor $\sum\limits_0 q^n = (1 + q + \cdots + q^n) \quad n \in \mathbb{N}$ geometriai sor.

$$1 + q + \cdots + q^n = \begin{cases} \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q} & \text{ha } q \neq 1 \\ n + 1 & \text{ha } q = 1 \end{cases}$$

A (q^n) geometriai sorozat konvergens $\iff$ $|q| < 1$; $\lim\limits_{n\to\infty}(q^n) = 0$
vagy $q = 1$.

48. Tétel.
A $\sum\limits_0 q^n$ sor konvergens $\iff |q| < 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1 - q} \qquad (|q| < 1).$$

5.2.2 Harmónikus sor

49. Tétel.
A $\sum \frac{1}{n}$ harmónikus sor divergens.

5.2.3 $\sum \frac{1}{n^2}$ sor

50. Tétel.
A $\sum \frac{1}{n^2}$ sor konvergens.

Megj.: $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$

Megj.: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

51. Tétel. ***Cauchy-féle konvergenciakritérium***
$\sum a_n$ *konvergens* $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall m > n > n_0 : \left| \sum_{i=n+1}^{m} a_i \right| < \varepsilon$

52. Tétel. ***Következmény: sorok konvergenciájának szükséges feltétele***
Ha $\sum a_n$ *konvergens* $\Rightarrow$ $\lim(a_n) = 0$

Megj.: $\sum 2^n$ divergens u.i. $\lim_{n\to\infty}(2^n) \neq 0$

Megj.: $\not\Leftarrow$ nem elégséges pl.: $\sum \frac{1}{n}$ div. de $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$

53. Tétel. ***Következmény***
Legyen $\left.\begin{array}{c}(a_n),(b_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ a_n = b_n \ (m.m.\ n \in \mathbb{N})\end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{c}\sum a_n \\ \sum b_n\end{array}$ *sorok* *ekvikonvergensek*
azaz az egyik pontosan akkor konvergens, ha a másik is konvergens.

60. Definíció. *A* $\sum a_n$ *sor abszolútkonvergens, ha* $\sum |a_n|$ *sor konvergens.*

54. Tétel. ***Következmény***
Ha a $\sum a_n$ *sor abszolútkonvergens* $\overset{!}{\Rightarrow}$ $\sum a_n$ *sor konvergens is.*

Megj.: $\not\Leftarrow$ nem igaz!
példa: $\sum (-1)^n \frac{1}{n}$ sor konv (biz. később) de $\sum \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum \frac{1}{n}$ divergens.

5.3 Pozitív tagú sorok

61. Definíció. $\sum a_n$ *pozitív tagú sor, ha* $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \geq 0$.

Megj.: jobb lenne nemnegatív tagú sornak nevezni, de ez az elterjedt.

55. Tétel.
A $\sum a_n$ *pozitív tagú sor konvergens* $\Leftrightarrow$ *a részletösszegek sorozata, azaz az* $(a_1 + \cdots + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sorozat korlátos.*

56. Tétel. ***Összehasonlítókritérium***
tfh $0 \leqslant a_n \leqslant b_n$ *m.m.* $n \in \mathbb{N}$. *Ekkor*
1. *Ha* $\sum b_n$ *sor konvergens* $\Rightarrow$ $\sum a_n$ *sor konvergens* ($\sum b_n$ *majorálja* $\sum a_n$*-t*)
2. *Ha* $\sum a_n$ *sor divergens* $\Rightarrow$ $\sum b_n$ *sor divergens*

57. Tétel. ***Cauchy-féle gyökkritérium***
Ha $\sum a_n$ *sorra:*
1. $\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) < 1 \Rightarrow$ $\sum a_n$ *sor abszolútkonvergens (tehát konvergens is)*
2. $\overline{\lim}\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) > 1 \Rightarrow$ $\sum a_n$ *sor divergens*

58. Tétel. ***Következmény***
Ha a $\sum a_n$ *sorra* $\exists \lim\left(\sqrt[n]{|a_n|}\right) =: \alpha$ *és*
ha $0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow$ $\sum a_n$ *abszolútkonvergens*
ha $\alpha > 1 \Rightarrow$ $\sum a_n$ *divergens*
ha $\alpha = 1 \Rightarrow$ *bármi lehet*

59. Tétel. ***D'Alembert-féle hányadoskritérium***
Ha $\sum a_n$ *sorra* $(a_n \neq 0)$*:*
1. $\overline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 \Rightarrow$ $\sum a_n$ *sor abszolútkonvergens (tehát konvergens is)*
2. $\underline{\lim}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 \Rightarrow$ $\sum a_n$ *sor divergens*

60. Tétel. ***Következmény***
Ha a $\sum a_n$ *sorra* $a_n \neq 0$; $\exists \lim \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: \alpha$ *és*

ha	$0 \leq \alpha < 1$	$\Rightarrow$	$\sum a_n$ *abszolútkonvergens*
ha	$\alpha > 1$	$\Rightarrow$	$\sum a_n$ *divergens*
ha	$\alpha = 1$	$\Rightarrow$	*nem alkalmazható*

5.4 Leibniz-típusú sorok

62. Definíció. *Ha* $\forall n \in \mathbb{N} : 0 \leqslant a_{n+1} \leqslant a_n$, *akkor*
a $\sum(-1)^{n-1}a_n$ *sort Leibniz-típusú (vagy váltakozó előjelű) sornak nevezzük.*

Megj.: vigyázni a definiciónál, u.i. $\searrow$ fontos!

61. Tétel. *Legyen* $\sum(-1)^{n-1}a_n$ *Leibniz-típusú sor. Ekkor*
1. *(konvergencia) A Leibniz-típusú sor konvergens* $\Leftrightarrow \lim(a_n) = 0$
2. *(konvergenciasebesség) tfh konv, és* $\alpha = \sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$; $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$.
Ekkor $\forall n \in \mathbb{N} : |\alpha - s_n| \leqslant a_n$

Megj.: α nem ismert
$s_n = (a_1 - a_2 + a_3 - \dots + (-1)^{n-1}a_n)$ $\forall n$-re ismert
$|\alpha - s_n| \Leftrightarrow s_n - a_n < \alpha < s_n + a_n$
Ha a_n kicsi, akkor $\alpha \in \mathrm{K}_{a_n}(s_n)$,
így alkalmas részletösszeggel $\alpha \sim s_n$

Példa: $\sum(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$
$\frac{1}{n} \searrow$; $\lim\left(\frac{1}{n}\right) = 0$ + Leibniz $\Rightarrow$ konvergens

5.5 Számok p-adikus tört előállítása

62. Tétel. *Legyen* $p \geqslant 2$; $(a_n) : \mathbb{N} \to \{0, 1, ..., p-1\}$. *Ekkor* $\forall x \in [0,1) \exists \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ *alakú pozitív tagú sor, amelynek összege* x, *és minden* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ *alakú pozitív tagú sor összege valamely, a* $[0,1]$ *intervallumba eső szám.*
Az x*-hez a fenti módon hozzárendelt sort az* x *szám végtelen p-adikus tört előállításának, az* a_n $(n \in \mathbb{N})$ *számot pedig az előállítás jegyeinek nevezzük.*

Megj.: Legyen $u \in \mathbb{N}$. Ekkor u felírható $\sum_{n=0}^{r} a_n \cdot p^n = \sum_{n=-r}^{0} \frac{a_n}{p^n}$ alakban.
Ez alapján bármely $x \geqslant 0$ valós szám felírható $\sum_{n=-r}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ alakban.

Megj.: Az $x = \sum_{n=1}^{r} \frac{a_n}{p^n}$ $(r < \infty$; $a_r \neq 0)$ alakú számokat
p-adikus racionális számoknak nevezzük. Belátható, hogy minden ilyen
számhoz két olyan $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{p^n}$ alakú sor is rendelhető, amelynek az összege x.

5.6 Műveletek sorokkal

63. Definíció. *Legyenek* $\sum a_n$; $\sum b_n$ *tetszőleges sorok. Ekkor*
1. $\sum(a_n + b_n)$ *sort ezek összegének*
2. $\sum(\lambda a_n)$ *sort a* $\sum a_n$ *sor és a* λ *szám számszorosának nevezzük.*

63. Tétel. *Legyenek* $\sum a_n$; $\sum b_n$ *sorok konvergensek, és* $A := \sum_{n=1}^{\infty} a_n$; $B := \sum_{n=1}^{\infty} b_n$. *Ekkor*
1. $\sum(a_n + b_n)$ *sor konvergens, és* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = A + B$
2. $\sum(\lambda a_n)$ *sor konvergens, és* $\sum_{n=1}^{\infty}(\lambda a_n) = \lambda A$

5.7 Sorok zárójelezése (csoportosíthatóság)

64. Definíció. *Legyen* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ *tetsz. sorozat* ; $(m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ $\uparrow$ *indexsorozat. Ekkor a* $\sum a_n$ *sor az* (m_n) *indexsorozat által meghatározott (generált) zárójelezésén a* $\sum \alpha_n$ *sort értjük, ahol* $\alpha_n := \sum_{i=m_{(n-1)}+1}^{m_n} a_i$ $(n \in \mathbb{N})$

64. Tétel.
Ha $\sum a_n$ *konvergens* $\Rightarrow \forall$*zárójelezés mellett a* $\sum \alpha_n$ *zárójelezett sor is konvergens, és* $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

65. Tétel.
tfh 1. $(m_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \uparrow$
2. $(m_{n+1} - m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *korlátos*
3. $\lim(a_n) = 0$
4. $\sum a_n$ *sor* (m_n) *által meghatározott* $\sum \alpha_n$ *zárójelezése konvergens*

Ekkor $\sum a_n$ *sor konvergens.*

5.8 Sorok átrendezése

65. Definíció. *Legyen* $p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekció (az* $\mathbb{N}$ *egy permutációja). Ekkor a* $\sum a_n$ *sor* p *által meghatározott átrendezésének nevezzük a* $\sum a_{p_n}$ $(\sum a_n \circ p)$ *sort.*

66. Tétel. *Ha a* $\sum a_n$ *sor abszolút konvergens* $\Rightarrow \forall p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekcióra a* $\sum a_{p_n}$ *sor is konvergens és* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

67. Tétel. ***Riemann:***
Ha a $\sum a_n$ *sor konvergens, de nem abszolútkonvergens (a sor feltételesen konvergens) akkor*
1. $\forall A \in \mathbb{R} \exists p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekció, hogy* $\sum a_{p_n}$ *konvergens, és* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{p_n} = A$
2. $\exists p : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *bijekció, melyre* $\sum a_{p_n}$ *sor divergens*

Megj.: Az abszolút konvergens sorok tudják megtartani az asszociatív, és a kommutatív tulajdonságokat.

5.9 Sorok szorzása

Megj.: véges összeg - $(a_1 + \cdots + a_n) \cdot (b_1 + \cdots + b_m) = \sum a_i b_j$
probléma - hogyan értelmezzük két sor szorzatát?
többféle módon is értelmezhetjük.

$\times$	a_1	a_2	a_3	a_4	$\cdots$
b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_4b_1	$\cdots$
b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	a_4b_2	$\cdots$
b_3	a_1b_3	a_2b_3	a_3b_3	a_4b_3	$\cdots$
b_4	a_1b_4	a_2b_4	a_3b_4	a_4b_4	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\nearrow \uparrow \uparrow$
$\rightarrow \nearrow \uparrow$ téglányszorzat
$\rightarrow \rightarrow \nearrow$

$\nearrow\nearrow\nearrow\nearrow$
$\nearrow\nearrow\nearrow$ Cauchy-szorzat
$\nearrow\nearrow$
$\nearrow$

66. Definíció. *A* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *sor téglányszorzatának nevezzük, és* $(\sum a_n) \cdot (\sum b_n)$*-nel jelöljük a következő sort:*
$(\sum a_n) \cdot (\sum b_n) := \sum t_n$ *ahol* $t_n = a_n b_1 + a_n b_2 + \cdots + a_n b_n + a_{n-1} b_n + \cdots + a_1 b_n$ $(n \in \mathbb{N})$

67. Definíció. *A* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *sor Cauchy-szorzatának nevezzük, és* $(\sum a_n) \times (\sum b_n)$*-nel jelöljük a következő sort:*
$(\sum a_n) \times (\sum b_n) := \sum c_n$ *ahol* $c_n = \sum\limits_{i+j=n+1} a_i b_j$ $(n \in \mathbb{N})$

68. Tétel.
1. *Ha a* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *sor konvergens* $\Rightarrow$ *téglányszorzat konvergens, és a téglányszorzat összege* $= (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$
2. *Ha a* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *sor abszolút konvergens* $\Rightarrow$ *téglányszorzat és a Cauchy-szorzat is konvergens, és az összegük* $= (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$
3. *(Mertens-tétel) Ha a* $\sum a_n$ *és a* $\sum b_n$ *konvergens, és legalább az egyik abszolút konvergens* $\Rightarrow$ *Cauchy-szorzat is konvergens és az összege* $= (\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$

5.10 Komplex tagú sorozatok és sorok

68. Definíció.
$(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ *sorozat konvergens, ha* $\exists v \in \mathbb{C} \forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0 : |z_n - v| < \varepsilon$
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Megj.: komplex sorozatokra ugyanazok a tételek érvényesek, mint a valós számokra, kivéve amelyek a rendezési tulajdonságokat használják

Megj.: komplex sorok: $(z_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$; $\sum z_n = (z_1 + z_2 + \cdots + z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

5.11 Függvénysorozatok, függvénysorok

69. Definíció. *Legyen* $\mathcal{A} \subset \mathbb{K}$ *rögzített.* $\forall n \in \mathbb{N}$*-re adott* $f_n : \mathcal{A} \to \mathbb{K}$ *függvény*
$\mathbb{K}^{\mathcal{A}} := \{ g | g : \mathcal{A} \to \mathbb{K} \}$ *függvényhalmaz.*
$(f_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathcal{A}}$ *függvénysorozat.*

70. Definíció. *Az* $(f_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}^{\mathcal{A}}$ *függvénysorozatból képzett* $\sum f_n$ *függvénysoron a következő függvénysorozatot értjük:* $(f_0 + f_1 + \cdots + f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

71. Definíció. *A függvénysor konvergenciahalmaza* $(\mathcal{KH})$
1. $\mathcal{KH}(\sum f_n) := \{ x \in \mathcal{A} | \sum f_n(x) \text{ számsor konvergens} \} \subset \mathcal{A}$
2. *A függvénysor összegfüggvénye* $\mathcal{KH}(\sum f_n) \to \mathbb{K} \;;\; x \to \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \in \mathbb{K}$

Megj.: függvénysor konvergenciahalmaza általában nehezen jellemezhető.
Ha az f_n függvények hatványfüggvények, akkor a $\sum f_n$ hatványsor konvergenciahalmazát igen egyszerűen lehet jellemezni.

72. Definíció. *Legyen* $x_0 \in \mathbb{K}$ *tetszőleges, rögzített pont, és* $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ *tetszőleges számsorozat. Ekkor a* $\sum_0 a_n(x - x_0)^n \quad (x \in \mathbb{K})$ *függvénysort hatványsornak nevezzük.* (a_n) *a hatványsor együtthatói,* x_0 *a konvergenciaközéppont.*

69. Tétel. ***Cauchy-Hadamard:***

$$\text{Legyen } R := \begin{cases} 0 & ha\ \overline{\lim}(\sqrt[n]{|a_n|}) = +\infty \\ +\infty & ha\ \overline{\lim}(\sqrt[n]{|a_n|}) = 0 \\ \frac{1}{\overline{\lim}(\sqrt[n]{|a_n|})} & különben \end{cases} \qquad \text{ahol } R \text{ a konvergenciasugár.}$$

Ekkor a $\sum_0 a_n(x - x_0)^n$ *hatványsor a* $\mathrm{K}_R(x_0) := \{ x \in \mathbb{K} | \, |x - x_0| < R \}$ *pontjaiban konvergens, sőt abszolútkonvergens, és az olyan* $x \in \mathbb{K}$ *pontjaiban, ahol* $|x - x_0| > R$*, ott divergens.*

Megj.: a konvergenciahatáron lehet konevergens is és divergens is.
Itt külön vizsgálat kell ennek eldöntésére.

73. Definíció. *Legyen* $\sum a_n(x - x_0)^n \quad (x \in \mathbb{K})$ *hatványsor konvergenciasugara* $R > 0$*. Ekkor az* $f : \mathrm{K}_R(x_0) \to \mathbb{K} \;;\; x \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ *függvény a hatványsor összegfüggvénye.*

70. Tétel. ***Műveletek hatványsorokkal:***
$\sum_0 a_n(x - x_0)^n \quad (x \in \mathbb{K})$ *hatványsor konvsugara* $R_a > 0$
$\sum_0 b_n(x - x_0)^n \quad (x \in \mathbb{K})$ *hatványsor konvsugara* $R_b > 0$
$\rho := \min\{R_a, R_b\}$*. Ekkor*
1. $\forall x \in \mathrm{K}_\rho(x_0) : \sum_0 (a_n + b_n)(x - x_0)^n$ *hatványsor konvergens, és*
$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n + b_n)(x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$
2. *A két sor Cauchy-szorzata hatványsor, és* $(\sum a_n(x - x_0)^n) \times (\sum b_n(x - x_0)^n) =$
$\sum(a_n b_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_0 b_n)(x - x_0)^n$ *konvergens,*
és az összege= $(\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n) \cdot (\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n)$

71. Tétel. ***Hatványsor átrendezése:***
Legyen $\sum_0 a_n(x - x_0)^n \quad (a_n, x_0, x \in \mathbb{K})$ *hatványsor konvergenciasugara* $R_a > 0$,
és $f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in \mathrm{K}_R(x_0))$*. Legyen* $x_1 \in \mathrm{K}_R(x_0) \;;\; 0 < \rho < R - |x_0 - x_1|$
Ekkor az f *összegfüggvény a* $\mathrm{K}_\rho(x_1)$*-ben előállítható az* $(x - x_1)$ *hatványai szerint, azaz* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(x - x_1)^k \quad (x \in \mathrm{K}_\rho(x_1))$ *ahol* $A_k = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} a_n(x_1 - x_0)^{n-k} \quad k = 0, 1, \ldots$

5.12 Elemi függvények, addiciós tételek, Euler összefüggések

72. Tétel. *Tfh* $\forall n \in \mathbb{N} : \varepsilon_n \in \{0, 1, -1\}$*. Ekkor a*
$\sum_0 \varepsilon_n \frac{z^n}{n!}$ *hatványsor* $\forall z \in \mathbb{C}$*-re abszolútkonvergens, és a konvergenciasugara végtelen.*

74. Definíció.

$$\begin{array}{rcllc}
\exp(z) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} & z \in \mathbb{C} & \textit{az } e \textit{ alapú exponenciális függvény} \\
\sin(z) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} & z \in \mathbb{C} & \textit{színuszfüggvény} \\
\cos(z) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} & z \in \mathbb{C} & \textit{koszinuszfüggvény} \\
\operatorname{sh}(z) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} & z \in \mathbb{C} & \textit{színusz-hiperolikusz függvény} \\
\operatorname{ch}(z) & := & \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} & z \in \mathbb{C} & \textit{koszinusz-hiperbolikusz függvény}
\end{array}$$

73. Tétel.

1. $\exp(0) = 1$

$$\exp(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots = e \quad \left(= \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)$$

2. $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(z_1 + z_2) = (\exp(z_1)) \cdot (\exp(z_2))$

3. $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(-z) = \dfrac{1}{\exp(z)}$

Megj.: $\forall z \in \mathbb{C} : \exp(z) = e^z$
2^π később

74. Tétel.

1. $\sin, \operatorname{sh}$ *páratlan*

$$\begin{array}{rcll}
\sin(-z) & = & -\sin(z) & (z \in \mathbb{C}) \\
\operatorname{sh}(-z) & = & -\operatorname{sh}(z) & (z \in \mathbb{C})
\end{array}$$

2. $\cos, \operatorname{ch}$ *páros*

$$\begin{array}{rcll}
\cos(-z) & = & \cos(z) & (z \in \mathbb{C}) \\
\operatorname{ch}(-z) & = & \operatorname{ch}(z) & (z \in \mathbb{C})
\end{array}$$

75. Tétel. ***Euler összefüggések:***

$$\begin{array}{lrcll}
1. & \exp(iz) & = & \cos(z) + i\sin(z) & z \in \mathbb{C} \\
2. & \cos(z) & = & \dfrac{\exp(iz) + \exp(-iz)}{2} & z \in \mathbb{C} \\
3. & \sin(z) & = & \dfrac{\exp(iz) - \exp(-iz)}{2i} & z \in \mathbb{C}
\end{array}$$

76. Tétel. ***Addiciós tételek:***

$$\begin{array}{lrclcll}
1. & \sin(z_1 + z_2) & = & \sin(z_1) \cdot \cos(z_2) & + & \cos(z_1) \cdot \sin(z_2) & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\
2. & \cos(z_1 + z_2) & = & \cos(z_1) \cdot \cos(z_2) & - & \sin(z_1) \cdot \sin(z_2) & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\
3. & \operatorname{sh}(z_1 + z_2) & = & \operatorname{sh}(z_1) \cdot \operatorname{ch}(z_2) & + & \operatorname{ch}(z_1) \cdot \operatorname{sh}(z_2) & z_1, z_2 \in \mathbb{C} \\
4. & \operatorname{ch}(z_1 + z_2) & = & \operatorname{ch}(z_1) \cdot \operatorname{ch}(z_2) & + & \operatorname{sh}(z_1) \cdot \operatorname{sh}(z_2) & z_1, z_2 \in \mathbb{C}
\end{array}$$

77. Tétel.

$$\begin{array}{lrcl}
1. & \operatorname{ch}(iz) & = & \cos(z) \\
2. & \operatorname{sh}(iz) & = & i\sin(z)
\end{array}$$

78. Tétel.

$$\begin{array}{lrcll}
1. & \sin^2(z) + \cos^2(z) & = & 1 & \forall z \in \mathbb{C} \\
2. & \operatorname{ch}^2(z) - \operatorname{sh}^2(z) & = & 1 & \forall z \in \mathbb{C}
\end{array}$$

79. Tétel.

Ha $z = x + iy \in \mathbb{C}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ *akkor* $\exp(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x \overbrace{(\cos y + i \sin y)}^{=e^{iy}}$

6 Függvények határértéke, folytonossága

Eddig $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ határérték, folytonosság, deriválhatóság, integrálhatóság
Általánosítás: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n \quad \longrightarrow$ metrikus terek.

6.1 Metrikus terek (bevezetés)

Motiváció: számsorozat határértéke
$(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ konv., ha $\exists A \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 \in \mathbb{N} : |a_n - A| < \varepsilon$

75. Definíció. *Az $(\mathcal{M}, \rho)$ rendezett pár metrikus tér, ha*
$\mathcal{M} \neq \emptyset$ halmaz ; $\rho : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ olyan függvény, melyre $\forall x, y, z \in \mathcal{M}$-re:
- $\rho(x, y) \geqslant 0$ *és* $= 0 \Leftrightarrow x = y$
- $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
- $\rho(x, y) \leqslant \rho(x, z) + \rho(z, y)$ *(háromszögegyenlőtlenség)*

Az ilyen tulajdonságú ρ függvényt $\mathcal{M}$-en értelmezett metrikának vagy távolságfüggvénynek nevezzük, a $\rho(x, y)$ számot pedig az x és az y távolságának.

6.1.1 Diszkrét metrikus tér

80. Tétel. *$\mathcal{M} \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz ; $\rho(x, y) := \begin{cases} 0 \ ha\ x = y \\ 1 \ ha\ x \neq y \end{cases}$ $(x, y \in \mathcal{M})$. Ekkor $(\mathcal{M}, \rho)$ metrikus tér.*

6.1.2 Valós metrikus tér

81. Tétel. *$(\mathcal{M}, \rho) := (\mathbb{R}, \rho)$; $\rho(x, y) := |x - y| (x, y \in \mathbb{R})$. Ekkor $(\mathbb{R}, \rho)$ metrikus tér.*

6.1.3 $\mathbb{R}^n$ tér különböző metrikákkal

$n \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^n := \left\{ (x_1, ..., x_n) \;\middle|\; x_i \in \mathbb{R}\ ,\ i = 1..n \right\}$ $n \in \mathbb{N}$ rögz. $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$

82. Tétel. *$\rho_1(x, y) := \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. Ekkor $(\mathbb{R}^n, \rho_1)$ metrikus tér.*

83. Tétel. *$\rho_2(x, y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. Ekkor $(\mathbb{R}^n, \rho_2)$ metrikus tér.*

84. Tétel. *$\rho_\infty(x, y) := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$ $(x, y \in \mathbb{R}^n)$. Ekkor $(\mathbb{R}^n, \rho_\infty)$ metrikus tér.*

6.2 $\mathrm{C}[a, b]$ tér különböző metrikákkal

Legyen $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kompakt int.; $\mathrm{C}[a, b]$ az $[a, b]$-n folytonos függvények halmaza.

85. Tétel. *Legyen $f, g \in \mathrm{C}[a, b]$ esetén $\rho_\infty(f, g) := \max_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|$.*
(ρ_∞ jól definiált függvény, lsd Weierstrass-tétel.)
Ekkor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_\infty)$ metrikus tér (maximum metrika, Csebisev metrika)

86. Tétel. *$f, g \in \mathrm{C}[a, b] : \rho_1(f, g) := \int_a^b |f - g|$. Ekkor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_1)$ metrikus tér.*
(ρ_1 jól definiált, ui. minden folytonos függvény integrálható)

87. Tétel.
$f, g \in \mathrm{C}[a, b] : \rho_2(f, g) := \sqrt{\int_a^b |f - g|^2}$ (ρ_2 jól def.). Ekkor $(\mathrm{C}[a, b], \rho_2)$ metrikus tér.

6.3 Környezetek, ekvivalens metrikák

76. Definíció. *Legyen* $(\mathcal{M},\rho)$ *metrikus tér,* $a \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$,
$\mathrm{K}_\varepsilon^\rho(a) := \left\{ x \in \mathcal{M} \;\middle|\; \rho(x,a) < \varepsilon \right\}$ *Az* $a \in \mathcal{M}$ *pont* ε *sugarú környezete.*

1. Példa: $(\mathbb{R}^n,\rho_1)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ $\mathrm{K}_\varepsilon^{\rho_1}(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^n |x_i - a_i| < \varepsilon \right\}$

$n = 2$: $a = (0,0)$ $\mathrm{K}_\varepsilon^{\rho_1}(a) := \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; |x_1| + |x_2| < \varepsilon \right\}$

2. Példa: $(\mathbb{R}^n,\rho_2)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ $\mathrm{K}_\varepsilon^{\rho_2}(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - a_i|^2} < \varepsilon \right\}$

$n = 2$: $a = (0,0)$ $\mathrm{K}_\varepsilon^{\rho_2}(a) := \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \sqrt{x_1^2 + x_2^2} < \varepsilon \right\}$

3. Példa: $(\mathbb{R}^n,\rho_\infty)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon > 0$ $\mathrm{K}_\varepsilon^{\rho_\infty}(a) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - a_i| < \varepsilon \right\}$

$n = 2$: $a = (0,0)$ $\mathrm{K}_\varepsilon^{\rho_\infty}(a) := \left\{ (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \max\{|x_1|,|x_2|\} < \varepsilon \right\}$

77. Definíció. *Legyenek* $(\mathcal{M},\rho_1)$, $(\mathcal{M},\rho_2)$ *metrikus terek. Ekkor a* $\rho_1 \wedge \rho_2$ *metrika ekvivalens, ha*
$\exists c_1, c_2 > 0 \forall x,y \in \mathcal{M} :\ c_1 \cdot \rho_1(x,y) \leq \rho_2(x,y) \leq c_2 \cdot \rho_1(x,y)$
Jelölés: $\rho_1 \backsim \rho_2$

Állítás: $\backsim$ ekvivalenciareláció.

88. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$, $i := 1,2,\infty$, $(\mathbb{R}^n,\rho_i)$ *metrikus tér. Ekkor* $\rho_1 \backsim \rho_2 \backsim \rho_\infty$ *azaz*
1. $\rho_\infty \leq \rho_1 \leq n \cdot \rho_\infty$
2. $\rho_\infty \leq \rho_2 \leq \sqrt{n} \cdot \rho_\infty$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{n}} \cdot \rho_1 \leq \rho_2 \leq \rho_1$

89. Tétel. $\mathbb{R}^n$*-ben bármely két metrika ekvivalens.*

90. Tétel. *A* $\mathrm{C}[a,b]$ *téren a* ρ_1 *és a* ρ_∞ *nem ekvivalens metrikák.*

Legyen $(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér , $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ $\mathcal{M}$-beli sorozat.

78. Definíció. *Az* $(\mathcal{M},\rho)$ *metrikus tér egy* $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ *sorozatra konvergens, ha*
$\exists \alpha \in \mathcal{M} \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k > k_0 : \rho(\alpha, a_k) < \varepsilon$ *ahol* α *a sorozat határértéke.*
Jelölés: $\lim\limits_{k \to +\infty} (a_k) = \alpha$ $a_k \xrightarrow{\rho} \alpha$ $(k \to +\infty)$

Megj.: ha $(\mathcal{M},\rho)$ a szokásos $(|\ |)$, akkor ez a definíció a korábbival megegyezik.

91. Tétel. $\alpha^\rho = \lim\limits_{k \to +\infty} (a_k) \Leftrightarrow \lim\limits_{k \to +\infty} \rho(\alpha, a_k) = 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists k_0 \in \mathbb{N} \forall k > k_0 : a_k \in \mathrm{K}_\varepsilon(\alpha) \Leftrightarrow (\blacktriangle)\ \forall \varepsilon > 0 :$
$\left\{ k \in \mathbb{N} \;\middle|\; a_k \notin \mathrm{K}_\varepsilon(\alpha) \right\}$ *véges.*

92. Tétel. *Konvergens sorozat határértéke egyértelműen meghatározott*

93. Tétel. *Legyen* $(\mathcal{M},\rho)$ *metrikus tér.* $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ *konvergens, és* $\lim(a_k) = \alpha$*. Ekkor*
1) az (a_k) *korlátos, azaz* $\mathcal{R}_{(a_k)} \subset \mathcal{M}$ *korlátos, azaz* $\exists r > 0$ *és* $y \in \mathcal{M} : \mathcal{R}_{(a_k)} \subset \mathrm{K}_r(y)$
2) $\forall \nu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ *ind.s. esetén* $a \circ \nu$ *konvergens, és* $\lim a \circ \nu = \alpha$

94. Tétel. $(\mathcal{M},\rho_1),(\mathcal{M},\rho_2)$ *metrikus terek,* $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$; $\rho_! \sim \rho_2$*. Ekkor*
$(a_k) \xrightarrow{\rho_1} \alpha \Leftrightarrow (a_k) \xrightarrow{\rho_2} \alpha \quad (k \to +\infty)$

6.4 $\mathbb{R}^n$ konvergens sorozatai

Megj.: Tétel+előző megj. $\Rightarrow$ mindegy milyen metrikát veszünk egy feladat megoldásánál.
$n \in \mathbb{N}$ $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ $a_k \in \mathbb{R}^n$ $a_k = (a_k^{(1)}, ..., a_k^{(n)})$

95. Tétel. $(\mathbb{R}^n, \rho_l)$ $(l = 1, 2, +\infty)$ *metrikus tér. Ekkor az*
$(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ $(a_k) \xrightarrow{\rho_l} \alpha = (\alpha^{(1)}, ..., \alpha^{(n)}) \Leftrightarrow \forall i \in [1..n] : (a_k^{(i)})_{k\in\mathbb{N}}$ *koordinátasor konvergens, és* $\lim\limits_{k\to+\infty}(a_k^{(i)}) = \alpha^{(i)}$

6.5 Teljes metrikus terek (Cauchy-sorozatok)

Eml.: $\mathbb{R}$-ben $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ Cauchy-sorozat, ha $\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k, l > k_0 : |a_k - a_l| < \varepsilon$
Cauchy-féle konvergenciakritérium: (a_k) konvergens$\Leftrightarrow$ (a_k) Cauchy-sorozat

79. Definíció. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér.*
Az $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$ *Cauchy-sorozat, ha* $\forall\varepsilon > 0\ \exists k_0 \in \mathbb{N}\ \forall k, l > k_0 : \rho(a_k, a_l) < \varepsilon$

96. Tétel. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér ;* $(a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{M}$
a) ha (a_k) *konvergens* $\Rightarrow$ (a_k) *Cauchy-sorozat*
b) $\not\Leftarrow$

80. Definíció. *Az* $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér teljes, ha minden Cauchy-sorozat konvergens* $\mathcal{M}$*-ben.*

Megj.: $(\mathcal{M}, \rho)$ teljes $\Longrightarrow \big[(a_k)$ konvergens $\Leftrightarrow (a_k)$ Cauchy-sorozat $\big]$

6.6 Példák

1. Diszkrét metrikus tér teljes
2.a. $(\mathbb{R}, \rho)$ ahol $\rho = |\ |$ teljes metrikus tér.
2.b. $(\mathbb{Q}, \rho)$ ahol $\rho = |\ |$ nem teljes metrikus tér.
3. $n \in \mathbb{N}$ rögzített: $(\mathbb{R}^n, \rho_i)$ $i = 1, 2, \infty$ teljes metrikus tér.
4. $(\mathrm{C}[a, b], \rho_\infty)$ ahol $\rho_\infty = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)|$ teljes metrikus tér.
5. $(\mathrm{C}[a, b], \rho_1)$ ahol $\rho_1 = \displaystyle\int |f - g|$ nem teljes metrikus tér.

81. Definíció. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
Az $a \in \mathcal{M}$ *az* $\mathcal{A}$ *halmaz torlódási pontja, ha* $\forall\mathrm{K}_r(a) : (\mathrm{K}_r(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{A} \neq \emptyset$.

Jelölés: $\mathcal{A}' := \left\{ a \in \mathcal{M}\ \middle|\ a \text{ torlódási pontja } \mathcal{A}\text{-nak} \right\}$

97. Tétel. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér,* $\mathcal{A} \neq \emptyset$; $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. *Ekkor*
a) $a \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow \mathrm{K}_r(a) \cap \mathcal{A}$ *végtelen halmaz*
b) $a \in \mathcal{A}' \Leftrightarrow \exists(a_k) : \mathbb{N} \to \mathcal{A}$ *invertálható, konvergens és* $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k) = a$

82. Definíció. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
a) $a \in \mathcal{A}$ *az* $\mathcal{A}$ *belső pontja, ha* $\exists\mathrm{K}_r(a) : \mathrm{K}_r(a) \subset \mathcal{A}$
$\mathrm{int}\mathcal{A} := \left\{ a \in \mathcal{A}\ \middle|\ a \textit{ belső pontja } \mathcal{A}\textit{-nak.} \right\}$
b) $a \in \mathcal{A}$ *izolált pontja* $\mathcal{A}$*-nak, ha* $\exists\mathrm{K}_r(a) : (\mathrm{K}_r(a) \setminus \{a\}) \cap \mathcal{A} = \emptyset$

83. Definíció. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér,* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$.
a) $\mathcal{A}$ *nyilt halmaz, ha minden pontja belső pont, azaz* $\forall a \in \mathcal{A} : \exists\mathrm{K}_r(a) \subset \mathcal{A}$ *(az* $\emptyset$ *nyilt halmaz)*
b) $\mathcal{A}$ *zárt halmaz, ha* $\mathcal{M} \setminus \mathcal{A}$ *nyilt halmaz* $\mathcal{M}$*-ben. (komplementer)*

Példák:
1. $\mathcal{M}$ zárt is, nyilt is.
2. $\mathrm{K}_r(a)$ nyilt halmaz
3. $\forall$ véges halmaz zárt.
4. $[a, b) \subset \mathbb{R}$ se nem nyilt, se nem zárt.

98. Tétel. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér, $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*
1. $\mathcal{A}$ zárt halmaz $(\mathcal{M},\rho)$-ban.
2. $\mathcal{A}'\subset\mathcal{A}$
3. $\forall(a_k):\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ konvergens, és $\lim\limits_{k\to\infty}(a_k)\in\mathcal{A}$

99. Tétel. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér, $\mathcal{A}_i\subset\mathcal{M}$ nyilt halmaz ($i\in\Gamma$ tesz. ind. halmaz)$\Rightarrow$*
a) $\bigcup\limits_{i\in\Gamma}\mathcal{A}_i$ nyilt
b) ha Γ véges, $\bigcap\limits_{i\in\Gamma}\mathcal{A}_i$ nyilt.

100. Tétel. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér, $\mathcal{A}_i\subset\mathcal{M}$ zárt halmaz ($i\in\Gamma$ tesz. ind. halmaz)$\Rightarrow$*
a) $\bigcap\limits_{i\in\Gamma}\mathcal{A}_i$ zárt
b) ha Γ véges, $\bigcup\limits_{i\in\Gamma}\mathcal{A}_i$ zárt.

84. Definíció. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér.*
Az $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$ kompakt, ha $\forall(a_k):\mathbb{N}\to\mathcal{A}$ $\exists(a_{k_\nu})$ részs.: (a_{k_ν}) konvergens, és $\lim\limits_{k\to\infty}(a_{k_\nu})\in\mathcal{A}$.

85. Definíció. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér. Az $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$ nyilt lefedésén egy*
$\left\{\mathcal{G}_i\subset\mathcal{M}\;\middle|\; i\in\Gamma \text{ tetsz.}, \mathcal{G}_i\neq\emptyset \text{ nyilt}\right\}$ halmazrendszert értünk, ha $\bigcup\limits_{i\in\Gamma}\mathcal{G}_i\supset\mathcal{A}$ (befedés)

101. Tétel. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*
a) $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$ kompakt,
b) az $\mathcal{A}$ minden nyilt lefedése tartalmaz <u>véges</u> lefedést. (Borel-féle befedési tétel)
c) Az $\mathcal{A}$ minden végtelen részhalmazának van torlódási pontja.

102. Tétel. *$(\mathcal{M},\rho)$ metrikus tér, $\mathcal{A}\subset\mathcal{M}$ kompakt.*
a) az $\mathcal{A}$ zárt halmaz is
b) az $\mathcal{A}$ korlátos is
c) ha $\mathcal{A}$ korlátos, és zárt $\not\Rightarrow$ $\mathcal{A}$ kompakt.

103. Tétel. *$n\in\mathbb{N}$ rögzített. Ekkor az $(\mathbb{R}^n,\rho_i)$ $i=1,2,\infty$ metrikus terekben az $\mathcal{A}\subset(\mathbb{R}^n,\rho_i)$ kompakt $\Leftrightarrow$ $\mathcal{A}$ korlátos, és zárt.*

6.7 Függvények folytonossága, határértéke

$(\mathcal{M}_1,\rho_1),(\mathcal{M}_2,\rho_2)$ metrikus terek ;
$f:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$; $x\in\mathcal{M}_1:\mathrm{K}^{\rho_1}(x):=\mathrm{K}^{(1)}(x)$; $y\in\mathcal{M}_2:\mathrm{K}^{\rho_2}(y):=\mathrm{K}^{(2)}(y)$.

86. Definíció. *$f:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$; $a\in\mathcal{D}_f$.*
Az f függvénynek van határértéke az $a\in\mathcal{D}'_f$ pontban, ha
$\exists A\in\mathcal{M}_2:\forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0\;\forall x\in(\mathrm{K}^{(1)}_\delta(A)\setminus\{a\})\cap\mathcal{D}_f:f(x)\in\mathrm{K}^{(2)}_\varepsilon(A)$.

Jelölés: $\lim\limits_a f=A$.

104. Tétel. *Ha $\exists A\in\mathcal{M}_2$, akkor egyértelmű.*

105. Tétel. ***(Átviteli elv)*** *$f:\mathcal{M}_1\to\mathcal{M}_2$; $a\in\mathcal{D}'_f$.*
$\lim\limits_a f=A\Leftrightarrow\forall(x_n):\mathbb{N}\to\mathcal{D}_f\setminus\{a\},\lim\limits_{n\to\infty}(x_n)=a\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

87. Definíció. *Az f függvény folytonos az $a\in\mathcal{D}_f$-ben ($f\in\mathrm{C}\{a\}$),*
ha $\forall\varepsilon>0\;\exists\delta>0\;\forall x\in\mathrm{K}^{(1)}_\delta(a):f(x)\in\mathrm{K}^{(2)}_\varepsilon(f(a))$.

106. Tétel. *Ha $a\in\mathcal{D}_f\cap\mathcal{D}'_f$, akkor $f\in\mathrm{C}\{a\}\Leftrightarrow\exists\lim\limits_a f$ és $\lim\limits_a f=f(a)$.*

107. Tétel. ***(Folytonosságra vonatkozó átviteli elv)*** $f \in C\{a\} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \forall (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ \lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = a \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (f(x_n)) = f(a)$.

Műveletek: kompozíció (csak!).
A többi nem biztos, hogy értelmezve van tetszőleges metrikus térben. Pl.: $(+, \cdot)$

108. Tétel. $f \in \mathcal{M}_2 \to \mathcal{M}_1$; $g \in \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_2$
Ha $g \in C\{a\}$; $a \in \mathcal{D}_g \subset \mathcal{M}_3$; $f \in C\{g(a)\}$; $g(a) \in \mathcal{D}_f \subset \mathcal{M}_2 \Rightarrow$
$\Rightarrow f \circ g \in \mathcal{M}_3 \to \mathcal{M}_1$; $f \circ g \in C\{a\}$.

6.8 Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai

109. Tétel.
$(\mathcal{M}_1, \rho_1), (\mathcal{M}_2, \rho_2)$ *metrikus terek* ; $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ *kompakt* ; $f : \mathcal{A} \to \mathcal{M}_2$; f *folytonos. Ekkor*
a) $f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_2$ *is kompakt*
b) *Ha* $(\mathcal{M}_2, \rho_2) = (\mathbb{R}, |\,|) \Rightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathcal{A} : \begin{matrix} f(\alpha) = \inf \mathcal{R}_f = \min \mathcal{R}_f \\ f(\beta) = \sup \mathcal{R}_f = \max \mathcal{R}_f \end{matrix}$ *(Weierstrass)*

88. Definíció. ***Egyenletes folytonosság:***
Az $f \in \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *függvény egyenletesen folytonos az* $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_f$ *halmazon, ha*
$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x, y \in \mathcal{A} : \rho_1(x, y) < \delta : \rho_2(f(x), f(y)) < \varepsilon$.

110. Tétel. *Ha* f *egyenletesen folytonos az* $\mathcal{A}$*-n* $\Rightarrow$ f *folytonos az* $\mathcal{A}$*-n.*

111. Tétel. ***(Heine)***
Ha $f : \mathcal{A} \to \mathcal{M}_2$ *folytonos, és* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1$ *kompakt* $\Rightarrow f$ *egyenletesen folytonos az* $\mathcal{A}$*-n.*

6.9 Összefüggő halmazok

89. Definíció. $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér.*
a) *Az* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ *halmaz* <u>*nem összefüggő*</u>*, ha* $\exists \mathcal{G}_1, \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{M}$ *nyilt halmazok,*
$\mathcal{G}_1 \cap \mathcal{G}_2 = \emptyset$; $\mathcal{G}_1 \neq \emptyset$; $\mathcal{G}_2 \neq \emptyset$; *és*
$(\mathcal{A} \cap \mathcal{G}_1) \cap (\mathcal{A} \cap \mathcal{G}_2) = \emptyset$; $(\mathcal{A} \cap \mathcal{G}_1) \cup (\mathcal{A} \cap \mathcal{G}_2) = \mathcal{A}$.
b) *Az* $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ <u>*összefüggő*</u>*, ha a) nem teljesül.*

112. Tétel. $(\mathcal{M}, \rho_1), (\mathcal{M}, \rho_2)$ *metrikus terek* ; $f \in \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ *folytonos függvény.*
Ekkor ha $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ *összefüggő* $\Rightarrow f(\mathcal{A}) \subset \mathcal{M}_2$ *is összefüggő.*

Megj.: $\mathbb{R}$-ben intervallumok

113. Tétel. ***Bolzano:*** $(\mathcal{M}, \rho)$ *metrikus tér* ; $f \in \mathcal{M} \to \mathbb{R}$; $f \in C$; $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_f$ *összefüggő.*
Ekkor $\forall a, b \in \mathcal{A}$ *és* $\forall c \in \big[f(a), f(b)\big] \ \vee\ \big[f(b), f(a)\big]$ *esetén* $\exists \xi \in \mathcal{A}$ *melyre* $f(\xi) = c$.

6.10 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények folytonossága

$(\mathbb{R}^n, \rho_i)$ $(i = 1, 2, \infty)$. Ekkor $\mathbb{R}^n$-ben $\rho_1 \sim \rho_2 \sim \rho_\infty \Rightarrow f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folytonossága független attól, hogy $\mathbb{R}^n$ illetve $\mathbb{R}^m$-ben melyik metrikát választjuk.

90. Definíció. *Az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *az* $a \in \mathcal{D}_f$*-ben folytonos, ha*
$f \in (\mathbb{R}^n, \rho^{(1)}) \to (\mathbb{R}^m, \rho^{(2)})$ *függvény folytonos* $a \in D_f$*-ben,*
ahol $\rho^{(1)}$ *az* $\mathbb{R}^n$*-beli,* $\rho^{(2)}$ *az* $\mathbb{R}^m$*-beli metrikák valamelyike.*

114. Tétel. $f = (f_1, ..., f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in \mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$.
Ekkor $f \in C\{a\} \Leftrightarrow$ $i = 1, 2, ..., m$ *esetén* $f_i \in C\{a\}$.

6.11 Műveletek folytonos $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények körében

115. Tétel. *$g, f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$; $f, g \in \mathrm{C}\{a\}$. Ekkor*

$$\begin{aligned} f+g &\in \mathrm{C}\{a\}, \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda f &\in \mathrm{C}\{a\}. \end{aligned}$$

116. Tétel. *$g, f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g$; $f, g \in \mathrm{C}\{a\}$. Ekkor*

$$\begin{aligned} f \cdot g &\in \mathrm{C}\{a\}, \\ g(a) \neq 0 : \frac{f}{g} &\in \mathrm{C}\{a\}. \end{aligned}$$

6.12 Bolzano féle fixponttétel

$(\mathcal{M}, \rho^{(1)})$; $(\mathcal{M}, \rho^{(2)})$; $f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$

91. Definíció. *$f : \mathcal{M}_1 \to \mathcal{M}_2$ kontrakció, ha*
$\exists \alpha \in [0,1) : \ \forall x, y \in \mathcal{M}_1 : \rho^{(2)}(f(x), f(y)) \leq \alpha \cdot \rho^{(1)}(x, y)$.

92. Definíció. *$f \in \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, $a \in \mathcal{M}$ az f fixpontja, ha $f(a) = a$.*

117. Tétel. *Tegyük fel, hogy $(\mathcal{M}, \rho)$ teljes metrikus tér, és az $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ függvény kontrakció. Ekkor*

a) $\exists! x^* \in \mathcal{M} : f(x^*) = x^*$,

b) *$x_0 \in \mathcal{M}$, $x_{n+1} = f(x_n)$ $n \in \mathbb{N}$ iterációs sorozat konvergens, és $\lim(x_n) = x^*$.*

c) *Hibabecslés: $\rho(x_n, x^*) \leq \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha} \cdot \rho(x_0, x_1) \quad (n \in \mathbb{N})$.*

7 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények differenciálhatósága

93. Definíció. *$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $a \in \text{int}\mathcal{D}_f$. Ekkor azt mondjuk, hogy az f deriválható vagy differenciálható az a pontban ($f \in \text{D}\{a\}$), ha $\exists \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ és véges.*
Jelölés: $f'(a)$ a függvény pontbeli deriváltja.

Megj.: $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ a szelő meredeksége.

118. Tétel.
$f \in \text{D}\{a\} \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}$ *és* $\exists \varepsilon : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0 : f(x) - f(a) = A(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad x \in \mathcal{D}_f$

94. Definíció. *$f \in \text{D}\{a\}$. Az f függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontbeli érintője az $y - f(a) = f'(a)(x-a)$ egyenes.*

119. Tétel.
1. *Ha* $f \in \text{D}\{a\} \quad \Rightarrow \quad f \in \text{C}\{a\}$.
2. $\quad\quad\quad\quad\quad\quad \not\Leftarrow$

120. Tétel. ***(Hatványsor deriválása)*** *$x_0 \in \mathbb{R}$; $(a_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ együttható sorozat, a $\sum a_n(x - x_0)^n$ hatványsor konvergenciasugara (R) pozitív $(R > 0)$,*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad (x \in \text{K}_R(x_0)).$$

Ekkor $\forall \alpha \in \text{K}_R(x_0)$ esetén $f \in \text{D}\{a\}$ és $f'(\alpha) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n(\alpha - x_0)^{n-1}$.

121. Tétel. ***(Műveleti tételek)*** *Legyen $f, g \in \text{D}\{a\}$. Ekkor*

i.	$f + g \in \text{D}\{a\}$	*és*	$(f+g)'(a)$	$=$	$f'(a) + g'(a)$,
ii.	$f \cdot g \in \text{D}\{a\}$	*és*	$(f \cdot g)'(a)$	$=$	$f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
iii.	$g(a) \neq 0 : \dfrac{f}{g} \in \text{D}\{a\}$	*és*	$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a)$	$=$	$\dfrac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$.

122. Tétel. ***(összetett függvény deriválása)***
Ha $f \in \text{D}\{a\}$; $g \in \text{D}\{f(a)\} \Rightarrow g \circ f \in \text{D}\{a\}$ *és* $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

123. Tétel. ***(inverz függvény deriválása)***
$f \in (a, b) \to \mathbb{R}$; $\uparrow$; $f \in \text{C}$; $f \in \text{D}(\xi)$; $\xi \in (a, b)$; $f'(\xi) \neq 0$; $\eta = f(\xi) \Rightarrow$
$\Rightarrow f^{-1} \in \text{D}\{\eta\}$ *és* $(f^{-1})'(\eta) = \dfrac{1}{f'(\xi)} = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(\eta))}$ *ahol* $\xi = f^{-1}(f(\xi)) = f^{-1}(\eta)$.

124. Tétel.
$\log_a'(x) = \dfrac{1}{\ln(a) \cdot \exp_a(\log_a(x))} = \dfrac{1}{x \cdot \ln(a)} \quad (x \in \mathbb{R})$
$a = e$ *esetén* $\ln'(x) = \dfrac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R})$ *mivel* $\ln(e) = 1$.

125. Tétel. x^n ; $x > 0$; $n \in \mathbb{R}$ *hatványfüggvényre:* $(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$

126. Tétel. $\forall x \in \mathbb{R}$ *esetén* exp, sin, cos, sh, ch *függvények differenciálhatók, és*

$$\begin{aligned}
\exp'(x) &= \exp(x)\\
\sin'(x) &= \cos(x)\\
\cos'(x) &= -\sin(x)\\
\text{sh}'(x) &= \text{ch}(x)\\
\text{ch}'(x) &= \text{sh}(x)
\end{aligned}$$

95. Definíció. *Vegyük észre hogy:*

$$\mathrm{tg}\Big|_{\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)} \uparrow \; ; \; \mathrm{ctg}\Big|_{(0,\Pi)} \downarrow \; ; \; \sin\Big|_{\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]} \uparrow \; ; \; \cos\Big|_{[0,\Pi]} \downarrow . \; \forall \in \mathrm{C}.$$

Ez alapján
$$\begin{array}{llll} \exists\, \mathrm{tg}\Big|^{-1}_{\left(-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right)} = \mathrm{arctg} & & \exists \sin\Big|^{-1}_{\left[-\frac{\pi}{2},+\frac{\pi}{2}\right]} = \arcsin \\ \exists\, \mathrm{ctg}\Big|^{-1}_{(0,\Pi)} = \mathrm{arcctg} & & \exists \cos\Big|^{-1}_{[0,\Pi]} = \arccos \end{array}$$

127. Tétel.
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(x))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-(\sin(\arcsin(x)))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\arcsin'(x) = -\arccos'(x) \Rightarrow \arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$\mathrm{arctg}'(x) = \frac{1}{\mathrm{tg}'(\mathrm{arctg}(x))} = \frac{1}{1+\mathrm{tg}^2(\mathrm{arctg}(x))} = \frac{1}{1+x^2}$$
$$\mathrm{arctg}'(x) = -\mathrm{arcctg}'(x) \Rightarrow \mathrm{arcctg}'(x) = -\frac{1}{1+x^2}$$

96. Definíció.
$$\begin{array}{lclcl} \exists\, \mathrm{sh}^{-1} & = & \mathrm{arsh} & \uparrow & \in \mathrm{C} \\ \exists\, \mathrm{ch}\Big|^{-1}_{[0,+\infty)} & = & \mathrm{arch} & \uparrow & \in \mathrm{C} \\ \exists\, \mathrm{th}^{-1} & = & \mathrm{arth} & \uparrow & \in \mathrm{C} \\ \exists\, \mathrm{cth}^{-1} & = & \mathrm{arcth} & \uparrow & \in \mathrm{C} \end{array}$$

128. Tétel.
$$\mathrm{arsh}'(x) = \frac{1}{\mathrm{sh}'(\mathrm{arsh}(x))} = \frac{1}{\mathrm{ch}(\mathrm{arsh}(x))} = \frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{sh}^2(\mathrm{arsh}(x))}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\mathrm{arch}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}'(\mathrm{arch}(x))} = \frac{1}{\mathrm{sh}(\mathrm{arch}(x))} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{ch}^2(\mathrm{arch}(x))-1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$
$$\mathrm{arth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \; !$$
$$\mathrm{arcth}'(x) = \frac{1}{1-x^2} \; !$$

129. Tétel. ***(Rolle)*** *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f \in \mathrm{C}[a,b]$; $f \in \mathrm{D}(a,b)$; $f(a) = f(b)$.
Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = 0$.

130. Tétel. ***(Cauchy)***
Legyen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f, g \in \mathrm{C}[a,b]$; $f, g \in \mathrm{D}(a,b)$; $\forall x \in (a,b) : g'(x) \neq 0$.
Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$.

131. Tétel. ***(Lagrange)*** *Legyen* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $f \in \mathrm{C}[a,b]$; $f \in \mathrm{D}(a,b)$.
Ekkor $\exists \xi \in (a,b) : \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$.

97. Definíció. *Az* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *Darboux tulajdonságú, ha*
$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2$ *esetén az* f *minden* $f(x_1)$ *és* $f(x_2)$ *közötti értéket felvesz, azaz*
$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \;\wedge\; \begin{array}{l} f(x_1) < f(x_2) \wedge c \in \big(f(x_1), f(x_2)\big) \\ f(x_2) < f(x_1) \wedge c \in \big(f(x_2), f(x_1)\big) \end{array} \Rightarrow \exists \xi \in (x_1, x_2) : f(\xi) = c$$

132. Tétel. *Ha* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *folytonos* $\Rightarrow f$ *Darboux tulajdonságú.*

133. Tétel. ***Darboux-tétele:***
Ha az $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *deriválható, akkor az* f' *deriváltfüggvény Darboux tulajdonságú, azaz*
$$\forall x_1, x_2 \in (a,b), x_1 < x_2 \;\wedge\; \begin{array}{l} f'(x_1) < f'(x_2) \wedge c \in \big(f'(x_1), f'(x_2)\big) \\ f'(x_2) < f'(x_1) \wedge c \in \big(f'(x_2), f'(x_1)\big) \end{array} \Rightarrow \exists \xi \in (a,b) : f'(\xi) = c$$

7.1 Többször deriválható függvények

98. Definíció.
$f \in \mathrm{D}\{a\} \quad \Leftrightarrow \quad f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ a \in Int\mathcal{D}_f,\ f$ *deriválható az* a*-ban*
$f \in \mathrm{D}(\mathcal{H}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{H} \subset \mathbb{R},\ \forall a \in \mathcal{H} : f \in \mathrm{D}\{a\}$

99. Definíció. $f \in \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{D}(\mathcal{H})$, $f' \in \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $x \to f'(x)$ *az* f *derivált függvénye, ahol* $f'(x)$ *az* x*-beli derivált étéke.*

100. Definíció. *Legyen* $f \in \mathcal{H} \to \mathbb{R}$, $f \in \mathrm{D}(\mathcal{H})$. *Ha* $f' \in \mathrm{D}\{a\}$, *akkor azt mondjuk, hogy az* f *függvény kétszer deriválható az* a*-ban, és* $(f')'(a) = f''(a)$ *(az* f *második deriváltja az* a*-ban.*

Ennek megfelelően definiálható a *második derivált függvény.* s.í.t.
Következmény: $f^{(n+1)}(a) := \left(f^{(n)}\right)'(a) \quad (n \in \mathbb{N})$.
Jelölések: $f^{I}(a), f^{II}(a), f^{III}(a), f^{IV}(a), f^{(500)}(a), stb.$
$\mathrm{D}^n\{a\} \quad (n \in \mathbb{N})$
$\mathrm{D}^n(\mathcal{H}) \quad (n \in \mathbb{N})$

101. Definíció. *Az* $f \in \mathrm{D}^\infty\{a\}$, *az* f *végtelen sokszor deriválható az* a*-ban* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N} : f \in \mathrm{D}^n\{a\}$.
Jelölés: $f \in \mathrm{D}^\infty(\mathcal{H})$.

134. Tétel. $f, g \in \mathrm{D}^n(\mathcal{H}) \quad (n \in \mathbb{N}, \text{rögz.})$
1. $\lambda f + \mu g \in \mathrm{D}^n(\mathcal{H})$ *és* $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)} \quad (\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R})$.
2. $f \cdot g \in \mathrm{D}^n(\mathcal{H})$ *és* $(f \cdot g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} \cdot g^{(n-k)}$. *Leibniz szabály, ahol* $g^{(0)} = g$.

7.2 Hatványsor összegfüggvényének a deriválása

135. Tétel. *Legyen* $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k$ *hatványsor olyan, ahol* $\mathrm{R}_\alpha := \dfrac{1}{\overline{\lim} \sqrt[k]{|\alpha_k|}} > 0$ *továbbá*

$$f(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k \quad (x \in \mathrm{K}_{\mathrm{R}_\alpha}(a), \quad \alpha_k, a \in \mathbb{K}).$$ *Ekkor* $f \in \mathrm{D}^\infty(\mathrm{K}_{\mathrm{R}_\alpha}(a))$ *és*

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)\alpha_k (x-a)^{k-n} \quad \Big(n = 1, 2, 3, \ldots \ x \in \mathrm{K}_{\mathrm{R}_\alpha}(a)\Big)$$

136. Tétel. *Ha az* f *(adott) függvény egy* $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k$ *hatványsor összegfüggvénye (ahol az* α_k *együtthatók ismeretlenek), akkor* $\forall k \in \mathbb{N}_0 : \ \alpha_k = \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}$.

102. Definíció. *Legyen* $f \in \mathbb{K} \to \mathbb{K}$, *elég sokszor deriválható,* $a \in \mathrm{Int}\mathcal{D}_f, n \in \mathbb{N}$. *Ekkor a* $\mathrm{T}_{n,a}(f;x) := \sum_{k=0}^{n} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, $(x \in \mathbb{K})$ *polinomot az* f *függvénynek az* a *ponthoz tartozó* n*-edrendű Taylorpolinomjának nevezzük.*

103. Definíció. *Ha* $f \in \mathrm{D}^\infty$,
akkor a $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$, $(x \in \mathbb{K})$ *az* f *függvény* a*-hoz tartozó Taylor sora.*

137. Tétel. *Taylor-formula*: $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ f \in \mathrm{D}^{n+1}(\mathrm{K}_r(a)) \ ; \ a \in \mathrm{Int}\mathcal{D}_f$.
Ekkor $\forall x \in \mathrm{K}_r(a) \exists \xi$ *az* x *és az* a *között:*

$$f(x) - \mathrm{T}_{n,a}(f;x) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

138. Tétel. *Ha* $f \in \mathrm{D}^\infty(\mathrm{K}_r(a))$ *és* ($\blacktriangle$) $\exists \mathrm{M} > 0 \forall n \in \mathbb{N} : \left|f^{(n)}(x)\right| < \mathrm{M} \quad (x \in \mathrm{K}_r(a))$. *Ekkor* $\sum \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ *hatványsor konvergens* $\mathrm{K}_r(a)$*-ban és* $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

8 Függvényvizsgálat

8.1 Előzetes vizsgálatok

8.1.1 Paritásvizsgálat

Páros: $f(x) = f(-x)$; Páratlan: $f(x) = -f(-x)$

8.1.2 Periodicitásvizsgálat

104. Definíció. *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény periodikus, ha $\exists p \in \mathbb{R} \forall x \in \mathbb{R} : f(x+p) = f(x)$, ahol p az f-nek egy periodusa.*
Ha p periodusa f -nek $\Rightarrow \forall k \in \mathbb{Z} : k \cdot p$ is periodusa f -nek.

8.1.3 Zérushelyek meghatározása

NO COMMENT

8.2 Monotonitásvizsgálat

105. Definíció. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$; $x_0 \in (a,b)$.*
Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény az x_0 pontban növő [fogyó], ha $\exists \mathrm{K}(x_0)$ környezet, melyre $x_1, x_2 \in \mathrm{K}(x_0), x_1 \leqslant x_0 \leqslant x_2$ esetén $\begin{matrix} f(x_1) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_2) \\ [f(x_1) \geqslant f(x_0) \geqslant f(x_2)] \end{matrix}$
Megj.: f x_0-ban növő $\not\Rightarrow$ f monoton növő!

106. Definíció. *Az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$-nek az $x_0 \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$ pontjában lokális $\begin{matrix} \text{maximuma} \\ [\text{minimuma}] \end{matrix}$ van, ha $\exists \mathrm{K}(x_0)$: $f\big|_{\mathcal{D}_f \cap \mathrm{K}(x_0)}$-nek $\begin{matrix} \text{maximuma} \\ [\text{minimuma}] \end{matrix}$ az x_0-ban van.*

139. Tétel. *Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$; $f \in \mathrm{D}(\{x_1\})$. Ekkor*

a. ***szükséges feltétel*** *Ha f az $x_0 \in (a,b)$-ben $\begin{matrix} \text{növő} \\ \text{fogyó} \end{matrix}$, akkor $\begin{matrix} f'(x_0) \geqslant 0 \\ f'(x_0) \leqslant 0 \end{matrix}$*

b. ***elégséges feltétel*** *Ha $\begin{matrix} f'(x_0) > 0 \\ f'(x_0) < 0 \end{matrix}$, akkor az f $\begin{matrix} \text{szig növő} \\ \text{szig. fogyó} \end{matrix}$*

8.3 Konvexitásvizsgálat

Az, hogy egy függvény konvex, szemléletes módon azt jelenti, hogy *bármely* két belső pontjában felvett *értékpont*ja között a függvény képe az ugyanezen pontok által meghatározott húr *alatt* helyezkedik el. A konvexitás numerikus megközelítése a következő: Legyenek $x_1, x_2 \in \mathcal{D}_f$ pontok. Ekkor az $f(x_1), f(x_2)$ pontok által meghatározott húr valamely $f(x_1)$ és $f(x_2)$ pontjai között elhelyezkedő pontja $\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$. Belátható, hogy a húr tképpen egy lineális függvény képe ($l \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$), azaz $(\lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)) \in \mathcal{R}_l$. Ekkor vehetjük ennek a pontnak az ősképét, ami $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$-vel egyenlő, ahol $\lambda \in [0,1] \subset \mathbb{R}$, $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \in \mathcal{R}_l^{-1} = \mathcal{D}_l \subseteq \mathcal{D}_f$.

107. Definíció. *A $(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2)$ kifejezést konvex lineális kombinációnak nevezzük, ahol $\lambda \in [0,1]$ és $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$.*

108. Definíció. *Legyen $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Azt mondjuk, hogy az f függvény $\begin{matrix} \text{konvex} \\ \text{konkáv} \end{matrix}$, ha*

$\forall a < x_1 < x_2 < b \quad \forall \lambda \in [0,1] : f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \begin{matrix} \leqslant \\ \geqslant \end{matrix} \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2)$ *teljesül.*

140. Tétel.
Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$; $f \in \mathrm{D}$. Ekkor f konvex $\Leftrightarrow f'$ monoton növő.
Legyen $f : (a,b) \to \mathbb{R}$; $f \in \mathrm{D}^2$. Ekkor f konvex $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b) : f''(x) \geq 0$.

109. Definíció. *$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, f előjelet vált az $x_0 \in (a,b)$-ben, ha*
$\exists \delta > 0 \begin{matrix} \forall x : x_0 - \delta < x < x_0 : f(x) \leqslant 0 \\ \forall x : x_0 + \delta > x > x_0 : f(x) \geqslant 0 \end{matrix}$, *illetve fordítva.*

110. Definíció. *Legyen* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\in\mathrm{D}$. *Ekkor az* x_0 *az* f *inflexiós pontja, ha* $\varphi(x):=f(x)-[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$ $(x\in(a,b))$ *függvény előjelet vált az* x_0*-ban. Itt az* $[f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)]$ *kifejezés a függvény értintőjének az egyenlete.*

141. Tétel.
Ha $f\in\mathrm{D}(a,b)$; f *az* (a,x_0)*-ban konvex ;* (x_0,b)*-ben konkáv* $\Rightarrow$ *az* x_0 *inflexiós pont.*

8.4 Szélsőértékvizsgálat

111. Definíció. ***Globális szélsőérték:*** *Legyen* $f\in\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
Ekkor az $x_0\in\mathcal{D}_f$ *az* f *függvénynek globális maximumhelye, ha* $\forall x\in\mathcal{D}_f : f(x)\le f(x_0)$*, ahol az* x_0 *pont az* f *függvény globális maximuma.*
A globális minimumot analóg módon adhatjuk meg.

Használható:
- Weierstrass tétele
- lokálisnál használható eredmények.

112. Definíció. ***Lokális szélsőérték:*** $f:(a,b)\to\mathbb{R}$.
Az $x_0\in(a,b)$ *az* f *lokális maximumhelye, ha* $\exists\delta>0\forall x\in(x_0-\delta,x_0+\delta): f(x)\le f(x_0)$*, és* $f(x_0)$ *az* f *egy lokális maximuma.*
A lokális minimumot analóg módon adhatjuk meg.

Használható eredmények:

142. Tétel. ***Elsőrendű szükséges:***
Legyen $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, $f\in\mathrm{D}$. *Ekkor ha* $x_0\in(a,b)$ *lokális szésőértékhely,* $\Rightarrow f'(x_0)=0$.

Megj.: Ott lehet szélsőérték, ahol $f'(x_0)=0$, de nem biztos pl.: $f(x):=x^3(x\in\mathbb{R})$ ekkor $f'(0)=0$ de a 0 **nem** lokális szélsőértékhely.

143. Tétel. ***Elsőrendű elégséges:*** *Legyen* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$; $f\in\mathrm{D}$. *Ekkor ha* $x_0\in(a,b)$; $f'(x_0)=0$ *és* $f'(x_0)$*-ban előjelet vált, akkor az* x_0 *lokális szélsőértékhely.*

144. Tétel. ***Másodrendű elégséges:*** *Legyen* $f:(a,b)\to\mathbb{R}$; $f\in\mathrm{D}^2$.
Ekkor ha x_0 *olyan pontja* (a,b)*-nek, melyre* $f'(x_0)=0$ *és* $f''(x_0)>0$ $[f''(x_0)<0]$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ *az* x_0 *pont lokális minimum [maximum].*

145. Tétel. ***Másodrendű szükséges:***
Legyen $f:(a,b)\to\mathbb{R}$; $f\in\mathrm{D}^2$; f*-nek az* $x_0\in\mathrm{int}\mathcal{D}_f$ *pontban lokális* $\begin{matrix}\textit{minimuma}\\ \textit{maximuma}\end{matrix}$ *van.*
Ekkor $f'(x_0)=0$ *és* $\begin{matrix}f''(x_0)>0\\ f''(x_0)<0\end{matrix}$

8.5 Határértékek

A $\mathcal{D}_f$-nek a $\mathcal{D}_f$-hez **nem** tartozó torlódási pontjaiban kell a határértékeket vizsgálni.

146. Tétel. *(L'Hospital)* $-\infty\le a<b<+\infty$, $f,g\in\mathrm{D}\,(a,b)$, $\forall x\in(a,b): g'(x)\ne 0$,
$\lim\limits_{a+0} f=\lim\limits_{a+0} g=0$ *továbbá* $\exists\lim\limits_{a+0}\dfrac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor* $\exists\lim\limits_{a+0}\dfrac{f}{g}$ *és* $\lim\limits_{a+0}\dfrac{f}{g}=\lim\limits_{a+0}\dfrac{f'}{g'}$.

147. Tétel. *(L'Hospital)* $-\infty\le a<b<+\infty$, $f,g\in\mathrm{D}\,(a,b)$, $\forall x\in(a,b): g'(x)\ne 0$,
$\lim\limits_{a+0} f=\lim\limits_{a+0} g=+\infty$ *továbbá* $\exists\lim\limits_{a+0}\dfrac{f'}{g'}\in\overline{\mathbb{R}}$. *Ekkor* $\exists\lim\limits_{a+0}\dfrac{f}{g}$ *és* $\lim\limits_{a+0}\dfrac{f}{g}=\lim\limits_{a+0}\dfrac{f'}{g'}$.

8.6 Asszimptoták

113. Definíció. *Legyen* $f : (a, +\infty) \to \mathbb{R}$. *Azt mondjuk, hogy az* f *függvénynek a* $+\infty$*-ben van asszimptotája, ha* $\exists \ell : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\ell(x) = \alpha x + \beta$ *elsőfokú függvény, melyre*
$\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \ell(x)) = 0$, *ahol* $\alpha = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ *és* $\beta = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \alpha x)$.
A $-\infty$*-ben asszimptotákat analóg módon adhatjuk meg.*

9 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények differenciálhatósága I.

(metrikus terek, lineáris terek, normált terek, Banach-tér, Euklideszi terek, Hilbert-tér)

9.1 Metrikus terek

O.K.

9.2 Lineáris terek (lsd.: linalg)

1.) $(\mathcal{X}, +, \lambda\cdot, \mathbb{K})$ lineáris tér vagy vektortér. $(\lambda \in \mathbb{K})$
2.) lineáris függőség, függetlenség
3.) alterek:

114. Definíció. *A $\mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ halmaz lineáris burka:* $\bigcap\limits_{\substack{\mathcal{H} \subset \mathcal{X}_0 \\ \mathcal{X}_0 \subset \mathcal{X} \text{ altér}}} \mathcal{X}_0$

Jelölés: $L(\mathcal{H})$.

115. Definíció. *$\forall \emptyset \neq \mathcal{H} \subset \mathcal{X}$ esetén $L(\mathcal{H})$ altér $\mathcal{X}$-ben.*

4.) dimenzió:

116. Definíció. *Az $\mathcal{X}$ lineáris tér véges dimenziós, ha:*
$\exists n \in \mathbb{N}$ *és* $\overset{\text{lin. független}}{e_1, ..., e_n} \in \mathcal{X} : L(\{e_1, ..., e_n\}) = \mathcal{X}$
Végtelen dimenziós, ha $\forall n \in \mathbb{N} \exists e_1, ..., e_n$ lin független elem.

Példa: $n \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^n$ n-dimenziós tér.
Példa: C$[a, b]$ a szokásos műveletekkel lineáris tér.
C$[a, b]$ végtelen dimenziós tér u.i.:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad \begin{array}{ll} f_0(x) := 1 & x \in [a, b] \\ f_1(x) := x & x \in [a, b] \\ \vdots & \\ f_{n-1}(x) := x^{n-1} & x \in [a, b] \end{array}$$

lin függetlenek ui.: $\sum\limits_{i=0}^{n} \alpha_i x^i = 0$
polinom csak trivi módon 0

Példa: mátrixok $m, n \in \mathbb{N} : \mathbb{R}^{n \times m}$ lineáris tér, $dim = n \cdot m$.

9.3 Normált terek

117. Definíció. *Az $(\mathcal{X}, || \, ||)$ normált tér, ha*
1. *$\mathcal{X}$ lineáris tér $\mathbb{R}$ felett*
2. *$|| \, || : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ olyan:* $||x|| \geqslant 0 \;\; (\forall x \in \mathcal{X})$ *és* $= 0 \Leftrightarrow x = 0$
   $||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| \;\; (\forall x \in \mathcal{X} \forall \lambda \in \mathbb{R})$
   $||x + y|| \leqslant ||x|| + ||y|| \;\; (\forall x, y \in \mathcal{X})$ $\triangle$*egyenlőtlenség*

   $||x||$ az x elem normája; $|| \, ||$ normafüggvény

148. Tétel. *$(\mathcal{X}, || \, ||)$ normált tér. Ekkor*
$\rho(x, y) := ||x - y|| \;\; (\forall x, y \in \mathcal{X})$ függvény metrika az $\mathcal{X}$-en, és ρ a $|| \, ||$ által indukált metrika.

Megj.: Minden norma indukál egy metrikát.
Minden normált tér egyúttal metrikus tér is.

118. Definíció. *$(\mathcal{X}, || \, ||)$ normált tér; $(x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{X}$ sorozat $|| \, ||$-ban konvergens,ha*
$\exists \xi \in \mathcal{X} : \lim\limits_{n \to \infty}(||x_n - \xi||) = 0$ azaz $x_n \xrightarrow{|| \, ||} \xi \;\; (n \longrightarrow \infty)$
$\rho(x_n, \xi) = ||x_n - \xi||$
(x_n) konvergens az $(\mathcal{X}, \rho)$ metrikus térben $\Leftrightarrow$ $x_n \xrightarrow{|| \, ||} \xi \;\; (n \longrightarrow \infty)$
$x_n \xrightarrow{|| \, ||} \xi$ $\Leftrightarrow$ Ha az indukált metrikában konvergens, és ξ a határértéke.

9.3.1 Példák: $\mathbb{R}^n$ tér különböző normákkal $x = (x_1, ..., x_n)$

$$(\mathbb{R}^n, \| \|_1) \quad \|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$(\mathbb{R}^n, \| \|_2) \quad \|x\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$$

$$(\mathbb{R}^n, \| \|_\infty) \quad \|x\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i|$$

$$\|x-y\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| = \rho_1(x,y)$$

$$\|x-y\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i - y_i|^2} = \rho_2(x,y)$$

$$\|x-y\|_\infty := \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i| = \rho_\infty(x,y)$$

149. Tétel. $(\mathbb{R}^n, \| \|_i)$ $i = 1, 2, \infty$ *normált terek.*

150. Tétel. $1 < n \in \mathbb{N}$; $1 \leqslant p < +\infty (\mathbb{R}^n, \| \|_p)$ $\|x\|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}$ *is normált terek.*

9.3.2 Példák: $C[a,b]$ tér különböző normákkal $f \in C[a,b]$

$$(C[a,b], \| \|_1) \quad \|f\|_1 := \int_a^b |f|$$

$$(C[a,b], \| \|_2) \quad \|f\|_2 := \sqrt{\int_a^b |f|^2}$$

$$(C[a,b], \| \|_\infty) \quad \|f\|_\infty := \max_{x \in [a,b]} |f(x)|$$

vö: $C[a,b]$ metrikáival.

151. Tétel. $(C[a,b], \| \|_i)$ $i = 1, 2, \infty$ *normált tér, sőt*
$\forall 1 \leqslant p < +\infty : \|f\|_p := \sqrt[p]{\int_a^b |f|^p}$ $f \in C[a,b]$ *esetén*
$(C[a,b], \| \|_p)$ *normált tér.*

9.4 Banach terek

119. Definíció. *Ha az $(\mathcal{X}, \| \|)$ normált tér a norma által indukált metrikával teljes metrikus tér, akkor az $(\mathcal{X}, \| \|)$-t Banach térnek nevezzük.*

Példák:	$1 \leqslant n \in \mathbb{N}$ $1 \leqslant p \leqslant +\infty$:	$(\mathbb{R}^n, \| \|_p)$	Banach terek.
		$(C[a,b], \| \|_\infty)$	Banach tér.
		$(C[a,b], \| \|_1)$	nem Banach tér
		$(C[a,b], \| \|_2)$	nem Banach tér
	sőt $1 \leqslant p < +\infty$:	$(C[a,b], \| \|_p)$	nem Banach terek,

azaz $\exists f$ olyan, hogy f Cauchy-sor, de f nem konvergens.
pl.: $\frac{1}{n^2}$ $(C[a,b], \| \|_1)$ $\|f\|_1$ túl kicsi.

9.5 Euklideszi terek

Minta: $\mathbb{R}^2$ sík, $\mathbb{R}^3$ tér + skaláris szorzat.

120. Definíció. *Az $(\mathcal{X}, <>)$ (valós) euklideszi tér, ha*
1. *$\mathcal{X}$ lineáris tér $\mathbb{R}$ felett,*
2. *$<>$: $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ amelyre*
$$< x, y > = < y, x > \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$$
$$< \lambda x, y > = \lambda < x, y > \quad \forall x, y \in \mathcal{X}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$$
$$< x_1 + x_2, y > = < x_1, y > + < x_2, y > \quad \forall x_1, x_2, y \in \mathcal{X}$$
$$< x, x > \geqslant 0 \text{ és } = 0 \Leftrightarrow x = \mathbf{0}$$

Megj.: $\mathbb{R}^2$-beli skaláris szorzat rendelkezik a fenti tulajdonságokkal.

152. Tétel. $(\mathcal{X}, <>)$ *e.t. Ekkor* $\|x\| := \sqrt{< x, x >}$ $(x \in \mathcal{X})$ *fýggvény norma az* $\mathcal{X}$*-en*
$\|\ \|$ *a skaláris szorzat által indukált norma.*

153. Tétel. *Cauchy-Bunyakovszkij egyenlőtlenség: Ha* $(\mathcal{X}, <>)$ *e.t. és* $\|\ \|$ *az indukált norma, akkor* $|M x, y >| \leqslant \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in \mathcal{X}$.

Megj.: minden euklideszi tér egyben mormált tér is.

9.5.1 Vektorok szöge

154. Tétel. $(\mathcal{X}, <>)$ *euklideszi tér. Ekkor* $\forall x, y \in \mathcal{X} \setminus \{\mathbf{0}\} \exists! 0 < \varphi \leqslant \pi : \cos\varphi = \dfrac{< x, y >}{\|x\| \cdot \|y\|}$

121. Definíció. *A fenti* φ *az* x *és az* y *szöge.*

122. Definíció. $(\mathcal{X}, <>)$ *euklideszi tér.*
Ekkor az x *és az* y $(\in \mathcal{X})$ *merőlegesek (ortogonálisak), ha* $< x, y >= 0$.
Jelölés: $x \perp y$.

1. Példa: $n \in \mathbb{N}$; $(\mathbb{R}^n, <>)$; $< x, y > := \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i \quad (x, y \in \mathbb{R}^n)$ euklideszi tér (trivi 1,2,3,4)

   Az indukált norma: $\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i|^2} \quad (= \rho_2)$

   vö: síkbeli vektorok skaláris szorzata.

2. Példa: $(\mathrm{C}[a, b], <>)$; $< f, g > := \int_a^b fg$; $f, g \in \mathrm{C}[a, b]$ euklideszi tér.

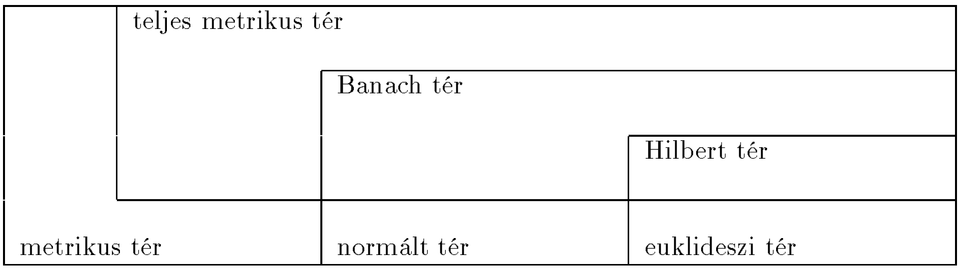
   Az indukált norma: $\|f\| = \sqrt{< f, f >} = \sqrt{\int_a^b f^2} \quad (= \rho_2)$

9.6 Hilbert terek

123. Definíció. *Az* $(\mathcal{X}, <>)$ *euklideszi teret Hilbert térnek nevezzük, ha a skaláris szorzat által indukált normával teljes normált teret kapunk.*

Példák:	$n \in \mathbb{N}$; $(\mathbb{R}^n, <>)$	Hilbert tér
	$(\mathrm{C}[a, b], <>)$	nem Hibert tér

Összefoglalva halmazos ábrázolással:



Megj.:
1. Valódi tartalmazások.
2. $\mathbb{R}^2$ sík,$\mathbb{R}^3$ tér $\longrightarrow$ Hilbert terek kapcsolódnak legjobban a vektoraik tulajdonságaihoz.
3. Funkcionál-analízis foglalkozik ezekkel.
4. Probléma: adott $(\mathcal{X}, \|\ \|)$ normált térhez van-e olyan skaláris szorzat, ami az adott normát indukálja?
   Nem minden normához lehet ilyet találni.

155. Tétel. $(\mathcal{X}, \|\ \|)$ *valós normált tér. Ekkor* $\exists$ *a* $\|\ \|$*-t indukáló skaláris szorzat* $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (\blacktriangle)$ $\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2 \cdot (\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *paralelogramma szabály.*

Megj.: a, b befogók; e, f átfogók: $e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$

Megj.: $(\mathbb{R}^n, \| \|_p)$; $\| \|_p = \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} x_i^p}$. A (▲) teljesül $\Leftrightarrow p = 2$

9.7 Differenciálszámítás ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$)

Megj.: normált terekben megcsinálható.
Eml.:

$$F \in \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ ; \ a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f \ ; \ f \in \mathrm{D}\{a\} \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R} \exists \varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0 : (\blacktriangle) f(a+h) - f(a) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

ahol $A \cdot h$ lineáris függénnyel jól helyettesíthető.

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} \longrightarrow A \quad (h \longrightarrow 0)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{|f(a+h) - f(a) - A \cdot h|}{|h|} \longrightarrow 0 \quad (h \longrightarrow 0)$$

9.7.1 $\mathbb{R}^n$-beli normák

156. Tétel. *$n \in \mathbb{N}$: $\mathbb{R}^n$-ben bármelyik két norma ekvivalens, azaz*
$\| \|_1, \| \|_2$ *normák $\mathbb{R}^n$-ben:* $\forall x \in \mathbb{R}^n \exists m, M > 0 : m \cdot \|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M \cdot \|x\|_1$

9.7.2 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineáris leképezései (lsd linalg)

124. Definíció. $\mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $\mathrm{L}(\alpha x + \beta y) = \alpha \mathrm{L}(x) + \beta \mathrm{L}(y)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$	lineáris leképezések halmaza	(lin. tér)
$\mathbb{R}^{m\times n}$	$m \times n$-es mátrixok halmaza	(lin. tér)

Ekkor $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m\times n}$ azaz $\exists \mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} : \mathrm{L}(x) = A(x)$ és fordítva.
Megj.: $n = m = 1$; $\mathrm{L} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lin. $\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \exists A \in \mathbb{R} : \mathrm{L}(x) = A(x)$

125. Definíció. *$m, n \in \mathbb{N}$; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$.*
Ekkor az f differenciálható az 'a' pontban ($f \in \mathrm{D}\{a\}$), ha

$$\exists \mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) : \lim_{h \to \mathbf{0} \in \mathbb{R}^n} \frac{\|f(a+h) - f(a) - \mathrm{L}(h)\|_1}{\|h\|_2} = 0$$

ahol $\| \|_1$ $\mathbb{R}^m$-beli , $\| \|_2$ $\mathbb{R}^n$-beli norma.
Az f 'a' pontbeli deriváltja $f'(a) = \mathrm{L}$

157. Tétel. *Ha $\exists \mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$, akkor az egyértelműen meghatározott.*

158. Tétel. *A deriválhatóság ténye, és a derivált független attól, hogy $\mathbb{R}^n$-ben, illetve $\mathbb{R}^m$-ben melyik normát választjuk.*

9.8 Ekvivalens átfogalmazások

159. Tétel. $f \in \mathrm{D}\{a\} \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} : \lim_{h\to\mathbf{0}} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|_1}{\|h\|_2} = 0$

160. Tétel. $f \in \mathrm{D}\{a\} \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{R}^{m\times n} \exists \varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény, melyre* $\lim_0 \varepsilon = 0$. *Ekkor* $f(a+h) - f(a) = Ah + \varepsilon(h) \cdot \|h\|_2$ $(\forall h \in \mathbb{R}^n;\ a + h \in \mathcal{D}_f)$

Példák: 1. $c \in \mathbb{R}^m; f(x) := c$ konstans függvény $(x \in \mathbb{R}^n)$. Ekkor
$\forall a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f (= \mathbb{R}^n) : f'(a) = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ nullmátrix.

2. $\mathrm{L} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m); \mathrm{L} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m (\mathrm{L} \sim A \in \mathbb{R}^{m\times n})$
$\forall a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_\mathrm{L} (= \mathbb{R}^n) : \mathrm{L} \in \mathrm{D}\{a\}$ és $\mathrm{L}'(a) = \mathrm{L}(\sim A)$
mert $\mathrm{L}(a+h) = \underbrace{A(a+h)}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{A \cdot a}_{\in \mathbb{R}^n} + \underbrace{A \cdot h}_{\in \mathbb{R}^n}$

Speciális esetek:

1.	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$	$f'(a) \in \mathbb{R}^{1\times n}$	sorvektor
2.	$f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^n$	$f'(a) \in \mathbb{R}^{n\times 1}$	oszlopvektor
3.	$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$	$f'(a) \in \mathbb{R}^{m\times n}$	mátrix

161. Tétel. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. *Ekkor* $f \in \mathrm{D}\{a\} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \in \mathrm{C}\{a\}$.

162. Tétel. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *(vagyis* $f = (f_1, ..., f_m)$*) ; ahol* $\forall i = 1...m : f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
Ekkor $f \in \mathrm{D}\{a\} \Leftrightarrow \forall i = 1...m : f_i \in \mathrm{D}\{a\}$ *és* $f'(a) = (f_1'(a), ..., f_m'(a)) \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

9.9 Műveletek és a derivált kapcsolata

163. Tétel. $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in (\mathrm{int}\mathcal{D}_f \cap \mathrm{int}\mathcal{D}_g)$; $f, g \in \mathrm{D}\{a\}$. *Ekkor*

$$\begin{array}{rcrcl} (f+g) \in \mathrm{D}\{a\} & \text{és} & (f+g)'(a) & = & f'(a) + g'(a) \\ \forall \lambda \in \mathbb{R} : \lambda f \in \mathrm{D}\{a\} & \text{és} & (\lambda f)'(a) & = & \lambda \cdot f'(a). \end{array}$$

164. Tétel. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$; $f \in \mathrm{D}\{a\}$; $g \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^r$; $\mathcal{R}_f \subset \mathcal{D}_g$; $g \in \mathrm{D}\{f(a)\}$.
Ekkor $(g \circ f) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r$; $(g \circ f) \in \mathrm{D}\{a\}$ *és* $(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$.

Megj.:

$$\begin{array}{rll} f'(a) & \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) & \Rightarrow A \in \mathbb{R}^{m\times n} \\ g'(f(a)) & \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^r) & \Rightarrow B \in \mathbb{R}^{r\times m} \\ (g\circ f)'(a) & \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^r) & \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{r\times n} \end{array}$$

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

$$^{r}[\ ]_{n} = {}^{r}[\ ]_{m} \cdot {}^{m}[\ ]_{n}$$

126. Definíció. *Parciális derivált (deriváltmátrix előállításához)*
Pl.: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$; $a = (a_1, a_2)$; $f(x_1, x_2)$

$$x_1 \to (f(x_1, a_2))'_{x_1 = a_1} \overset{\text{def}}{=} \partial_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot (a_1, a_2)$$

Az első változó szerinti parciális derivált

$$x_2 \to (f(a_1, x_2))'_{x_2 = a_2} \overset{\text{def}}{=} \partial_2 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot (a_1, a_2)$$

Az második változó szerinti parciális derivált

127. Definíció. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$; $e_1, ..., e_n$ *az* $\mathbb{R}^n$*-beli kanonikus bázis. Ekkor azt mondjuk, hogy* $\exists$ *az* f*-nek az* i*-edik változó szerinti parciális deriváltja az* $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$ *pontban, ha* $\mathrm{F} : \underbrace{t}_{\in \mathrm{K}_r(0)} \to \underbrace{f(a + t\cdot e_i)}_{\in \mathbb{R}^n}$ *deriválható a* $0 \in \mathbb{R}$ *pontban.*
Jelölés: $\partial_i f(a) := \mathrm{F}'(0)$.

Megj.:

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ ;\ f(x_1, ..., x_n)$$

$$\partial_1 f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \ ;\ \cdots \ ;\ \partial_i f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \ ;\ \cdots \ ;\ \partial_n f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)$$

165. Tétel. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$; $f = [f_1, ..., f_m]^{-1}$; $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Ha $f \in \mathrm{D}\{a\}$ *akkor* $f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}$

128. Definíció. *Spec. eset: gradiens vektor (fizikai elnevezés)*
$m = 1$; $n \in \mathbb{N}$; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $f \in \mathrm{D}\{a\}$; $a \in \mathrm{int}\mathcal{D}_f$.
Ekkor $\mathbb{R}^{1\times n} \ni f'(a) = [\partial_1 f(a), ..., \partial_n f(a)] =: \mathrm{grad}\, f(a)$ *az* f *gradiense az* a*-ban.*

166. Tétel. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ahol* $f := \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$; $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Ekkor*
$f \in \mathrm{D}\{a\} \Leftrightarrow \forall i = 1..m : f_i \in \mathrm{D}\{a\}$

167. Tétel. $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. *Ekkor* $f \in \mathrm{D}\{a\} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall i = 1..n \exists \partial_i f(a)$

168. Tétel. ***Elégséges feltétel a deriválhatóságra:***

$$\left.\begin{array}{r} f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \;\; ; \;\; a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f \;\; ; \\ \forall i = 1..n : \exists \partial_i f(x) \;\; (\forall x \in \mathrm{K}_r(a)) \;\; ; \\ \forall i = 1..n : \partial_i f : \mathrm{K}_r(a) \ni x \to \partial_i f(x) \;\; ; \\ \forall i = 1..n : \partial_i f \in \mathrm{C}\{a\} \;\; . \end{array}\right\} \Rightarrow f \in \mathrm{D}\{a\}$$

9.10 Iránymenti deriváltak

129. Definíció. *$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $a \in \mathbb{R}^n$ ahol $f : \mathrm{K}_r(a) \to \mathbb{R}^m$; $e \in \mathbb{R}^n$ egységvektor ($\|e\|_2 = 1$). Azt mondjuk, hogy az f függvénynek az a-ban $\exists$ az e iránymentén vett deriváltja, ha $F : (-r, +r) \ni t \to f(a + t \cdot e) \in \mathbb{R}^m$ differenciálható a 0-ban.*
Az $F'(0) \in \mathbb{R}^m$ vektor az f függvény a-beli e-mentén vett iránymenti deriváltja ($\partial_e f(a)$).

Megj.: a parciális derivált fogalmának általánosítása.
$e \to e_i = (\overset{1}{0}, ..., 0, \overset{i}{1}, 0, ..., \overset{n}{0})$ így $\partial_e f(a) = \partial_i f(a)$

169. Tétel. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$; $d \in \mathrm{D}\{a\} \overset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} \forall e \in \mathbb{R}^n$ *irányban* $\exists \partial_e f(a)$ *és*

$$\underset{\in \mathbb{R}^m}{\partial_e f(a)} = \underset{\in \mathbb{R}^{m \times n}}{f'(a)} \cdot \underset{\in \mathbb{R}^n}{e}$$

Spec. eset: $m = 1$; $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $e \in \mathbb{R}^n$(azaz $\|e\|_2 = 1$). Ekkor
$\partial_e f(a) =< f'(a), e >$ azaz $< \operatorname{grad} f(a), e >$
ahol $\operatorname{grad} f(a) = (\partial_1 f(a), ..., \partial_n f(a))$.

Megj.: pontbeli deriválhatóság (totális deriválhatóság) jel:$f'(a)$
parciális deriválhatóság
iránymenti deriválhatóság

10 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények differenciálhatósága II.

10.1 Középértéktételek: csak Lagrange féle középértéktétel

Eml.: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$; $f \in \mathrm{C}[a, b]$; $f \in \mathrm{D}(a, b) \Rightarrow \exists \xi \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(\xi) \cdot (b - a)$
Megj.: a szelő meredeksége.

170. Tétel. *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $[a, a+h] := \left\{ a + t \cdot h \in \mathbb{R}^n \middle| 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\} \subset \mathcal{U}$ azaz bármely két pontját összekötő szakasz benne van $\mathcal{U}$-ban ; $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diffható az $\mathcal{U}$ minden pontjában.*
Ekkor $\exists \nu \in (0, 1) : \underbrace{\varphi(a+h) - \varphi(a)}_{\text{szám}} = \underbrace{\varphi'(a + \nu \cdot h)}_{\text{vektor}} \cdot \underbrace{h}_{\text{vektor}} =< \operatorname{grad} \varphi(a + \nu \cdot h), h >$

171. Tétel. *$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$ diffható az $\mathcal{U}$ minden pontjában. Ekkor*
$\|f(a+h) - f(a)\| \leqslant \left(\sup_{\nu \in (0,1)} \underbrace{\|f'(a + \nu \cdot h)\|}_{\text{mátrixnorma}} \right) \cdot \|h\|_\infty$ $(\blacktriangle)$

10.2 Többször deriválható függvények

130. Definíció. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_\varphi$.
Ekkor azt mondjuk, hogy a φ kétszer deriválható az a-ban ($\varphi \in \mathrm{D}^2\{a\}$), ha
- $\exists \mathrm{K}_r(a) \subset \mathcal{D}_\varphi : \varphi \in \mathrm{D}(\mathrm{K}_r(a))$ *és*
- $\varphi' : \mathrm{K}_r(a) \to \mathbb{R}^n$; $x \to \varphi'(x)$ *függvény deriválható az a-ban.*

Megj.: $\varphi' = (\partial_1 \varphi, ..., \partial_n \varphi)$ ezért $\varphi \in \mathrm{D}\{a\} \Leftrightarrow \forall i = 1..n : \partial_i \varphi \in \mathrm{D}\{a\}$

Megj.: $\partial_i \varphi \in \mathrm{D}\{a\} \Rightarrow \underbrace{\forall \partial_j(\partial_i \varphi)(a)}_{\substack{\text{léteznek a parciális deriváltak} \\ \text{bármely változó szerint}}}$ $j = 1..n$ vegyes parciális deriváltak

131. Definíció. $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_\varphi$.
Ekkor azt mondjuk, hogy a φ s-szer differenciálható az a-ban ($\varphi \in \mathrm{D}^s\{a\}$), ha
- $\exists \mathrm{K}_r(a) \subset \mathcal{D}\varphi : \varphi$ *$(s-1)$-szer differenciálható (ronda a függvénykép)*
- $\underbrace{\partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_{s-1}} \varphi}_{\substack{1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_{s-1} \leqslant n \\ \text{az összes lehetséges módon}}}$ *Vegyes parciális deriváltak az a-ban léteznek.*

132. Definíció. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(m > 1)$; $f = \begin{bmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}$.
Ekkor $f \in \mathrm{D}^s\{a\} \Leftrightarrow \forall i = 1..m : f_i \in \mathrm{D}^s\{a\}$

Probléma: $\partial_j(\partial_i \varphi) \stackrel{?}{=} \partial_i(\partial_j \varphi)$

172. Tétel. *Young*: $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.
Ha $\varphi \in \mathrm{D}^2\{a\} \Rightarrow \forall i = 1..n : \partial_j(\partial_i \varphi)(a) = \partial_i(\partial_j \varphi)(a)$

Megj.: $\varphi \in \mathrm{D}^2\{a\}$ nem hagyható el, ugyanis $\exists \varphi$ melyre
$\exists \partial_j(\partial_i \varphi)(a)$ és $\exists \partial_i(\partial_j \varphi)(a)$ de nem esnek egybe.

Köv.: $\varphi \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; $s \in \mathbb{N}$ rögz. Ekkor
ha $\varphi \in \mathrm{D}^s\{a\} \Rightarrow \forall 1 \leqslant i_1, i_2, ..., i_s \leqslant n : \partial_{i_1} \partial_{i_2} \cdots \partial_{i_s} \varphi(a) = \partial_{\sigma_1} \partial_{\sigma_2} \cdots \partial_{\sigma_s} \varphi(a)$
ahol $\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_s$ az $i_1, i_2, ..., i_s$ egy tetszőleges permutációja.

10.3 Taylor-formula - bevezetés az általánosításhoz

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $m \in \mathbb{N}$; $f \in \mathrm{D}^{m+1}\{\mathrm{K}_r(a)\}$; $h \in \mathbb{R}$; $a + h \in \mathrm{K}_r(a)$. Ekkor

$$\exists v \in (0, 1) : f(a+h) = \underbrace{f(a) + \sum_{k=1}^{m} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} h^k}_{\text{m-edrendű Taylor-polinom}} + \underbrace{\frac{f^{(m+1)}(a + v \cdot h)}{(m+1)!} h^{m+1}}_{\text{Lagrange féle maradéktag}}$$

133. Definíció. ***Multiindexes jelölések***

multiindex: $n \in \mathbb{N}$; $i = (i_1, ..., i_n) \in \mathbb{N}_0^n$ ($i_k \geqslant 0$ *egész*)

multiindex rendje: $|i| := i_1 + i_2 + \cdots + i_n$

multifaktoriális: $i! := i_1! \cdot i_2! \cdots i_n!$

$x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$; *i multiindex. Ekkor x hatványai:* $x^i := x_1^{i_1} \cdot x_2^{i_2} \cdots x_n^{i_n}$

$\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$; *i multiindex. Ekkor* $\partial^i \varphi = \partial_1^{i_1} \partial_2^{i_2} \cdots \partial_n^{i_n} \varphi$ *ahol* $\partial_j^0 \varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi$

134. Definíció. ***Homogén n-változós m-edfokú polinomok***

$n \in \mathbb{N}$; $m \in \mathbb{N}_0$; $i \in \mathbb{N}_0^n$ *multiindex* ; $|i| = m$.

Ekkor $\mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow \sum_{|i|=m} a_i x^i \in \mathbb{R}$ *polinom, ahol* $a_i = a_{i_1, i_2, \ldots, i_n}$ *adott valós számok.*

Példák:

1. $n = 1$; $m \in \mathbb{N}_0$; $\mathbb{R} \ni x \to a x^m$
2. $n = 2$; $m = 1$; $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \to \overset{=a}{a_{1,0}} \cdot x_1^1 \cdot \overset{=1}{x_2^0} + \overset{=b}{a_{0,1}} \cdot \overset{=1}{x_1^0} \cdot x_2^1 = a \cdot x_1 + b \cdot x_2$
   $i = (i_1, i_2)$ itt $(0, 1)$ és $(1, 0)$ mivel a rendje 1.
3. $n = 2$; $m = 2$; $\mathbb{R}^2 \ni (x_1, x_2) \to a \cdot x_1^2 + b x_1 x_2 + c x_2^2$ (kvadratikus alak)
   $i = (i_1, i_2)$; $|i| = 2 : (2,0), (1,1), (0,2)$

173. Tétel. ***Taylor-formula:*** $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$; $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt* ; $a \in \mathcal{U}$; $h \in \mathbb{R}^n$;

$\underbrace{[a, a+h]}_{\text{összekötő szakasz}} = \{ a + th \,|\, 0 \leqslant t \leqslant 1 \} \subset \mathcal{U}$; $m \in \mathbb{N}$; $\varphi \in \mathrm{D}^{(m+1)}\{[a, a+h]\}$. *Ekkor*

$$\exists v \in [0,1] : \varphi(a+h) = \varphi(a) + \sum_{k=1}^{m} \underbrace{\left(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i \varphi(a)}{i!} h^i \right)}_{n\text{-változós } k\text{-adfokú}} + \underbrace{\sum_{|i|=m+1} \frac{\partial^i \varphi(a+vh)}{i!} h^i}_{\text{maradéktag}}$$

10.4 Inverz függvények

174. Tétel. $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *nyílt* ; $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$; *f folytonosan differenciálható* ; $a \in \Omega$; $\det(f'(a)) \neq 0$. *Ekkor*

$\exists \mathcal{U} = \mathrm{K}_r(a) \exists \mathcal{V} = \mathrm{K}_r(f(a)) : f\Big|_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ *bij. azaz* $\exists f^{-1} := f\Big|_{\mathcal{U}}^{-1}$ *melyre*

$f^{-1} \in \mathrm{D}(\mathcal{V})$ *és* $(f^{-1})'(x) = \underbrace{[f'(f^{-1}(x))]^{-1}}_{\text{mátrix inverze}}$

Megj.: $\mathrm{K}_r(f(a))$; $\det(f'(a)) \neq 0$ *- lokális tétel!*

Alkalmazás: tekintsük a következő nemlineáris egyenletrendszert:

$y_1 := f_1(x_1, ..., x_n)$

$\vdots$

$y_n := f_n(x_1, ..., x_n)$

inverzfüggvénytételből elégséges feltétel a megoldhatóságra

kell: a, b ; $f(a) = b$

$\det(f'(a)) = b \Rightarrow$ van inverz, ekkor $x_1, ..., x_n$ kifejezhető.

10.5 Implicit függvények

$f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $\mathcal{H} := \{ (x, y) \in \mathcal{D}_f \,|\, f(x, y) = 0 \} \neq \emptyset$

? $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$ nilyen halmaz?

Példa: $f(x, y) := x^2 + y^2 - 1$ (körvonal)

$2x + 3y + 4e^{xy} = 0$

$x^3 + y^3 - 3x^2 y = 0$

Kérdés: Megadható-e olyan függvény, melynek a $\mathcal{H}$ halmaz a képe?
Általában nincs, de megadható olyan részhalmaz, melyre van,
azaz megadható $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alakú függvény.

135. Definíció. $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$; $\exists \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$; $\exists \varphi : \mathcal{I} \to \mathbb{R} : f(x, \varphi(x)) = 0$ $(x \in \mathcal{I})$.
Ekkor a φ *függvény az* $f(x, y) = 0$ *implicit egyenlet egy megoldása.*
(vagy a φ *az* $f(x, y) = 0$ *egyenlettel van megadva).*

Probléma:
- $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $f(x,y) = 0$. y kifejezhető-e az x egyértékű függvényeként? (Általában nem)
- Ha $(x_0, y_0) : f(x_0, y_0) = 0$ akkor esetleg az (x_0, y_0) egy környezetében kifejezhető-e az x egyértékű függvényeként? (pl. körvonal esetén $y = 0$ pontokban nem jó)

Megj.:
1. lokális eredményt várunk.
2. $(f(x, y(x)) = 0)' = f'_x(x, y(x)) + \overbrace{f'_y(x, y(x))}^{\text{ha ez 0 akkor gond van}} \cdot y'(x) = 0 \quad (\blacktriangle) \quad (x \in \mathcal{I})$
   $f'_y(x_0, y_0) = \partial_2 f(x_0, y_0) \neq 0$ így jó.
   (pl. körvonal $y = 0$ pontjaiban $\partial_2 f(x_0, y_0) = 0$ ezért rossz)
   tetszőleges függvényre is igaz az állítás

175. Tétel. ***lokális létezésre egy elégséges feltétel:***
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; f folyt.deriv. ; $f(a,b) = 0$; $\partial_2 f(a,b) \neq 0$. Ekkor
a) $\exists \mathrm{K}_r(a) \subset \mathbb{R} \exists \mathrm{K}_r(b) \forall x \in \mathrm{K}_r(a) \exists! \varphi(x) \in \mathrm{K}_r(b) : f(x, \varphi(x)) = 0$
b) $\varphi : \mathrm{K}_r(a) \to \mathbb{R}$ *folyt. deriv.* ; $\varphi'(x) \overset{(\blacktriangle)}{=} -\dfrac{\partial_1 f(x, \varphi(x))}{\partial_2 f(x, \varphi(x))} \quad (x \in \mathrm{K}_r(a))$

Megj.: $\partial_2 f(a,b) \neq 0 \overset{\partial_2 f \text{ folyt.}}{\Rightarrow} \exists \mathrm{K}_r(a), \mathrm{K}_r(b) : \partial_2 f(x,y) \neq 0 \quad (x \in \mathrm{K}_r(a)\ ,\ y \in \mathrm{K}_r(b))$

Megj.: Implicit alakban megadott függvények: $x^3 + y^3 = 0 \quad (f(x,y) = 0)$
$y(x) = ?$
(x_0, y_0) tetsz. pontja a görbének $(x_0, y_0) : (0, -\sqrt[3]{2}), (-\sqrt[3]{2}, 0)$. (hozzátartoznak)
$\partial_2 f(0, -\sqrt[3]{2}) \neq 0 \Rightarrow \exists \mathrm{K}_r(a)$
$\varphi'(0) = -\dfrac{\overbrace{\partial_1 f(0, -\sqrt[3]{2})}^{=0}}{\partial_2 f(0, -\sqrt[3]{2})}$ tehát 0 az érintő meredeksége a $(0, -\sqrt[3]{2})$ pontban.

136. Definíció. ***Általánosítás:*** $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$; $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{n_1}$; $\Omega_2 \subset \mathbb{R}^{n_2}$ *nyíltak* ;
$f : \overset{\subset \mathbb{R}^{n_1}}{\Omega_1} \times \overset{\subset \mathbb{R}^{n_2}}{\Omega_2} \to \mathbb{R}^{n_2}$; $(a,b) \in \Omega_1 \times \Omega_2$; $f(a,b) = 0$
$\partial_1 f(a,b) := \underbrace{(\Omega_1 \ni x \to f(x,b))'_{x=a}}_{\mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}^{n_2}}$ *első* *<u>változócsoport</u>* *szerinti*
$\partial_2 f(a,b) := \underbrace{(\Omega_2 \ni x \to f(a,y))'_{y=b}}_{\mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}^{n_2} \text{ azaz mátrix}}$ *második* *<u>változócsoport</u>* *szerinti*

176. Tétel. ***Implicit függvénytétel általánosítása***
a fenti jelölések mellett f folyt.deriv. ; $f(a,b) = \mathbf{0} (\in \mathbb{R}^{n_2})$; $\det(\partial_2 f(a,b)) \neq 0$. *Ekkor*
a) $\exists \mathcal{U}_1 := \mathrm{K}_r(a) \subset \mathbb{R}^{n_1} \exists \mathcal{U}_2 := \mathrm{K}_r(b) \subset \mathbb{R}^{n_2} \forall x \in \mathcal{U}_1 \exists! \varphi(x) \in \mathcal{U}_2 : f(x, \varphi(x)) = 0$
b) $\varphi : \mathcal{U}_1 \to \mathcal{U}_2$ *folyt.deriv. és* $\varphi'(x) = -\underbrace{[\partial_2 f(x, \varphi(x))]^{-1}}_{\text{inverzmátrix}} \cdot \partial_1 f(x, \varphi(x)) \quad (x \in \mathcal{U}_1)$

Megj.:
1. φ explicit alakjáról nem szól a tétel.
2. Egyenletrendszerek megoldásának létezése
   $f_1(x_1, \; , x_n, y_1, \; y_m) = 0$
   $\vdots$
   $f_m(x_1, \; , x_n, y_1, \; y_m) = 0$
   Ha van olyan pont $(x_{01}, \; , x_{0n}, y_{01}, \; , y_{0m})$ melyre $f(\underline{x_0}, \underline{y_0}) = \underline{0}$ és $\det(\partial_2 f(\underline{x_0}, \underline{y_0})) \neq 0$, akkor $y_1, \; , y_m$ kifejezhetőek az $x_1, \; , x_n$ segítségével.

11 $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények differenciálhatósága III.

11.1 Lokális szélsőérték

137. Definíció. ***Kvadratikus alak (forma):*** *homogén másodfokú polinom, azaz*
$\mathrm{Q} : \mathbb{R}^n \ni x \longrightarrow \sum\limits_{|i|=2} a_i x^i \quad \in \mathbb{R}$, *ahol i multiindex ; $a_i \in \mathbb{R}$*

177. Tétel. *Q kvadratikus alak* $\Leftrightarrow \exists A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *szimmetrikus mátrix, melyre*
$\mathrm{Q}(x) =< Ax, x >= \sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$

178. Tétel. *Q kvadratikus alak. Ekkor*
1. $\mathrm{Q}(\lambda x) = \lambda^2 \mathrm{Q}(x) \quad (x \in \mathbb{R}^n \ ; \ \lambda \in \mathbb{R})$
2. $\exists m, M > 0 : m \cdot \|x\|^2 \leqslant \mathrm{Q}(x) \leqslant M \cdot \|x\|^2 \quad (x \in \mathbb{R}^n)$

138. Definíció.

A Q kvadratikus forma	*pozitív definit,*	*ha*	$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \mathrm{Q}(x) > 0$
	pozitív szemidefinit,	*ha*	$\forall x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{Q}(x) \geqslant 0$
	negatív definit,	*ha*	$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} : \mathrm{Q}(x) < 0$
	negatív szemidefinit,	*ha*	$\forall x \in \mathbb{R}^n : \mathrm{Q}(x) \leqslant 0$

Megj.:
1. $\mathrm{Q}(\mathbf{0}) = 0$
2. pozitív definit csak **0**-ban vehet fel 0-t.
3. pozitív szemidefinit **0**-n kívül is felvesz valahol 0-t.
4. van olyan kvadratikus alak, amely nem tartozik egyik definitmeghatározáshoz sem a 4 közül.

179. Tétel. ***Sylvester-kritérium:***
$\mathrm{Q}(x) =< Ax, x > \quad (x \in \mathbb{R}^n)$ *kvadratikus forma*
$\mathrm{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *szimmetrikus mátrix*

$$\Delta_k := \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad (k = 1..n) \quad \text{az A sarok-aldeterminánsai.}$$

Ekkor *pozitív definit* $\Leftrightarrow \quad \Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ..., \Delta_n > 0$ *azaz* $\operatorname*{sign}\limits_{k=1}^{n} \Delta_k = 1$
negatív definit $\Leftrightarrow \quad \Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ...$ *azaz* $\operatorname*{sign}\limits_{k=1}^{n} \Delta_k = (-1)^k$

139. Definíció. *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$. Ekkor φ-nek az $a \in \mathcal{U}$-ban lokális minimuma van, ha* $\exists \mathrm{K}_r(a) \subset \mathcal{U} \forall x \in \mathrm{K}_r(a) : \varphi(a) \leqslant \varphi(x)$

180. Tétel. ***elsőrendű szükséges:***
$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$
1. $\varphi \in \mathrm{D}\{a\}$
2. φ-nek a-ban lokális szelsőértéke van
Ekkor $\varphi'(a) = \mathbf{0}$

Megj.:
1. ott lehet szelsőérték, ahol $\varphi'(a) = \mathbf{0}$.
2. nem elégséges! pl.: $n = 1$ esetén x^3 függvény.

181. Tétel. ***Másodrendű elégséges:*** *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ továbbá*
1. $\varphi \in \mathrm{D}^2\{a\}$
2. $\varphi'(a) = \mathbf{0}$
3. $\mathrm{Q}(h) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j \varphi(a) h_i h_j \quad (h \in \mathbb{R}^n)$ *kvadratikus forma pozitív [negatív] definit.*

Ekkor φ-nek az a-ban lokális szélsőértéke van, és
pozitív definit esetén lokális minimum
negatív definit esetén lokális maximum

Megj.: Ha nem alkalmazható, akkor egyedi módon kell meghatározni.
Az elégséges feltétel *nincs túlságosan messze* a szükségestől.

182. Tétel. ***Másodrendű szükséges:*** *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ továbbá*
1. $\varphi \in \mathrm{D}^2\{a\}$; $\varphi \in \mathrm{C}^2\{a\}$!!
2. φ-nek az a-ban lokális minimuma [maximuma] van

Ekkor $\varphi'(a) = \mathbf{0}$ *és* $\mathrm{Q}(h) = \sum_{i,j=1}^{n} \partial_i \partial_j \varphi(a) h_i h_j \quad (h \in \mathbb{R}^n)$ *kvadratikus forma pozitív [negatív] szemidefinit.*

11.2 Abszolút szélsőérték vizsgálata

Deriválás technikájával csak lokálisat tudunk

Eml.: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vagy belül van, vagy a határon, ami két pontot jelent.

itt: 1. Weierstrass: kompakt halmazon folytonos függvénynek van szélsőértéke
2. Abszolút szélsőérték: $\underset{\text{külön vizsgálat kell}}{\text{vagy a határon}}$, $\underset{\text{deriválással megadható}}{\text{vagy belső pontban}}$.

pl.: téglalap határvonala egy egyváltozós függvénnyel megadható, de nem mindíg ilyen egyszerű.

11.3 Feltételes szélsőérték

Példa: $x + y = 2$ egyenes mely pontja esik legközelebb az origóhoz, azaz milyen P-re lesz $\overline{\mathrm{OP}}$ minimális?

$\overline{\mathrm{OP}}^2 = f(x,y) := x^2 + y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$
$\mathcal{H} := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x + y - 2 = 0 \}$
$?f\big|_{\mathcal{H}} \overset{?}{\to} \min$

Példa: egységsugarú körbe beírt téglalap mikor lesz maximális területű?

$\mathrm{T}(x,y) := 4xy \quad (0 < x, y < 1)$
$\mathcal{H} := \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 = 0 \}$
$?\mathrm{T}\big|_{\mathcal{H}} \overset{?}{\to} \max$

Általánosan: adott $m, n \in \mathbb{N}$; $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$; $g_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R} \quad (i = 1..m)$
$\mathcal{H} := \{ z \in \mathcal{U} \mid g_i(z) = 0 \quad (i = 1..m) \}$
Határozzuk meg $f\big|_{\mathcal{H}}$ szélsőértékeit.
Ezt nevezzük feltételes szélsőértéknek.

140. Definíció.
Az $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \mathcal{U}$-ban a $g_i(z) = 0 \quad (i = 1..m)$ feltételekre vonatkozóan <u>lokális feltételes minimuma</u> van, ha $\exists \mathrm{K}_r(a) \subset \mathcal{U} \forall x \in \mathrm{K}_r(a) \cap \mathcal{H} : f(x) \geqslant f(a)$.

1. Példa megoldás: $f(x,y) = x^2 + y^2 \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$
$g(x,y) = x + y - 2 = 0 \Rightarrow y = 2 - x$
$\varphi(x) := f(x, 2-x) = x^2 + (2-x)^2 \quad (x \in \mathbb{R}^2)$ már egyváltozós
keresem az abszolút minimumot

Megj.: $g(x,y) = 0$-ból könnyen kifejezhető volt az y
Általánosan ez nem megy.

Megj.: $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ lokális szélsőérték-meghatározását már ismerjük ha deriválható, azaz $\mathcal{D}_f$ belső pontjaiban tudjuk meghatározni,
de a $\mathcal{H}$ az görbe - nincs belső pontja - így itt ez a módszer nem alkalmazható.

Ötlet: (Lagrange) visszavezetni feltétel nélküli szélsőértékproblémára.
Adott f ; g_i $(i = 1..m)$; keresni olyan $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényt, melyre

$$(\blacktriangle)\begin{cases} x \in \mathcal{H} \text{ esetén } f(x) = F(x) \ ; \ x \notin \mathcal{H} \text{ esetén nem szükséges} \\ \mathrm{D}_f \subset \mathbb{R}^n \text{ nyílt} \\ F\text{-nek a } \mathcal{H} \text{ egy pontjában lokális szélsőértéke van} \end{cases}$$

Lagrange: $F(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$ $(\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $x \in \mathcal{U})$
λ_i-k megválszthatók úgy, hogy $(\blacktriangle)$ teljesüljön.
(λ_i - Lagrange féle multiplikátor)

183. Tétel. ***Feltételes szélsőértékre vonatkozó szükséges feltétel:***
$m, n \in \mathbb{N}$; $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$; $g_i : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ $(i = 1..m)$; f, g folyt.deriv. ; f-nek $a \in \mathcal{U}$-ban a $g_i(z) = 0$ $(i = 1..m)$ feltételek mellett lokális szélsőértéke van ; $g_i'(a)$ $(i = 1..m)$ vektorok lineárisan függetlenek. Ekkor
$\exists \lambda_1, \ , \lambda_m \in \mathbb{R} : F(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$ $(x \in \mathcal{U})$ függvényre $F'(a) = \mathbf{0}$

Megj.: Hogyan alkalmazzuk ezt a tételt?
$F(x) = f(x) + \lambda_1 g_1(x) + \cdots + \lambda_m g_m(x)$; $F'(a) = \mathbf{0} \Rightarrow n$ db egyenlet,
ahol $g_1(a) = 0, \ , g_m(a) = 0$ ugyanis rajta van a $\mathcal{H}$ halmazon

$$\text{ismeretlenek: } \left.\begin{matrix} a = (a_1, ..., a_n) \\ \lambda_1, ..., \lambda_m \end{matrix}\right\} \ m + n \text{ db ismeretlen}$$

1. Példa: megoldás (Lagrange): $f(x, y) := x^2 + y^2$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$ $g(x, y) := x + y - 2 = 0$
$F'(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) = (x^2 + y^2) + \lambda(x + y - 2)$
Szüks.f.: $F'(x, y) = 0 = (\partial_x F(x, y), \partial_y F(x, y))$

$$\left.\begin{aligned} 2x - \lambda &= 0 \\ 2y + \lambda &= 0 \\ x + y - 2 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x_0, y_0) = (1, 1) \quad \lambda = -2 \quad \text{itt lehet lokális szélsőérték.}$$

Elégséges feltétel lehetne, de most nem fogalmazzuk meg.

2. Példa: megoldás: $f(x, y) = 4xy$ $((x, y) \in \mathbb{R}^2)$; $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$
Szüks.f.: $F(x, y) := f(x, y) + \lambda g(x, y) = 4xy + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= 4y + 2\lambda x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 4x + 2\lambda y = 0 \\ -x^2 + y^2 - 1 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow x^2 = y^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Elég az első síknegyedben nézni $(x, y > 0) \Rightarrow (x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$
a lehetséges feltételes lokális szélsőértékhely.

12 Primitív függvények

141. Definíció. *Legyen $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Az $F:(a,b)\to\mathbb{R}$ az f egy primitív függvénye, ha F deriválható (a,b)-n és $\forall x\in(a,b): F'(x)=f(x)$.*

Jelölés: $\displaystyle\int f := \left\{ F \;\middle|\; F \text{ primitív függvénye } f\text{-nek} \right\}$

184. Tétel. *Ha $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ és f-nek van primitív függvénye, akkor*

$$\int f = \left\{ F + c \;\middle|\; F \text{ az } f\text{-nek } \underline{\text{egy}} \text{ primitív függvénye} \wedge c\in\mathbb{R} \right\}$$

Jelölés: $\displaystyle\int f$ függvényhalmaz.

142. Definíció. *Legyen $x_0\in(a,b)$; $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Ekkor az $\displaystyle\int_{x_0} f$ x_0 pontban eltűnő primitív fv-e, azaz $\forall x\in(a,b):$ $\left[F(x_0)=\left(\int_{x_0} f\right)(x_0)=0\ ,\ F'(x)=\left(\int_{x_0} f\right)'(x)=f(x)\right]$.*

$\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_F$	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	x^n $(n\in\mathbb{N})$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$(-\infty,0)\vee(0,\infty)$	x^n $(n=-2,-3,\dots)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$
$(0,+\infty)$	x^μ $(\mu\in\mathbb{R},\mu\neq-1)$	$\frac{x^{\mu+1}}{\mu+1}$
$(-\infty,0)\vee(0,\infty)$	$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x$
$k\pi\neq x$ $(k\in\mathbb{Z})$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x$
$(k-\frac{1}{2})\pi\neq x$ $(k\in\mathbb{Z})$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x$

$\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}_F$	$f(x)$	$F(x)$
$(-1,1)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\mathbb{R}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
$\mathbb{R}\setminus 0$	$\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$	$\coth x$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$	$\tanh x$

185. Tétel. ***Hatványsor primitív függvénye**:*
Legyen $f(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\alpha_n(x-x_0)^n$ $(x\in \mathrm{K}_R(x_0)\ ,\ R>0)$. Ekkor f-nek van primitív függvénye és $F(x)=\sum_{x=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ $(x\in\mathrm{K}_R(x_0))$.

12.1 Integrálási szabályok

186. Tétel. *Legyen $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, mindegyiknek van primitív függvénye.*
Ekkor $\lambda f+\mu g$-nek is van primitív függvénye, és $\displaystyle\int_{x_0}(\lambda f+\mu g)=\lambda\int_{x_0} f+\mu\int_{x_0} g$.

187. Tétel. ***Parciális integrálás**:*
Legyen $f,g:(a,b)\to\mathbb{R}$, $g,f\in\mathrm{D}$, és $f'g$-nek van primitív függvénye.
Ekkor fg'-nek is van primitív függvénye, és $\displaystyle\int_{x_0} fg' = fg - f(x_0)g(x_0)-\int_{x_0} f'g$.

12.2 Helyettesítéssel való integrálás

188. Tétel. *Legyen $\mathrm{I},\mathrm{J}\subset\mathbb{R}$ int., $g\in\mathrm{D}(\mathrm{I})$, $f:\mathrm{J}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{R}_g\subset\mathrm{J}$ ($\Rightarrow$ $f\circ g$ értelmezhető).*

Ha f-nek van primitív függvénye $\Rightarrow$ $(f\circ g)g'$-nek is van primitív függvénye, és

$$\int_{t_0}(f\circ g)g'=\left(\int_{g(t_0)} f\right)\circ g \qquad (t_0\in\mathrm{I}\ ,\ g(t_0)\in\mathrm{J})$$

189. Tétel. *Legyen* $\mathrm{I},\mathrm{J}\subset\mathbb{R}$ *int.,* $g\in\mathrm{D(I)}$, $f:\mathrm{J}\to\mathbb{R}$, $\mathcal{R}_g\subset\mathrm{J}$ ($\Rightarrow$ $f\circ g$ *értelmezhető).*
Ha f*-nek van primitív függvénye, és* $\exists g^{-1}$*, akkor* $\int_{g(t_0)} f = \left(\int_{t_0}(f\circ g)g'\right)\circ g^{-1}$ *azaz*

$$\int_{x_0} f(x)\mathrm{d}x = \left(\int_{g^{-1}(x_0)} f(g(t))\cdot g'(t)\mathrm{d}t\right)_{t=g^{-1}(x)}$$

12.3 Elemi függvények

143. Definíció. *Az* $x\to 1$, $x\to x$, $\exp$, $\ln$, $\sin$, $\arcsin$ *függvényekből az* $(+,\cdot,:,\circ)$ *műveletek véges sokszori alkalmazásával kapott függvényeket elemi függvényeknek nevezzük.* $f\in\mathrm{E}$ *, mind folytonosak.*

190. Tétel.
Ha $f\in\mathrm{E}\Rightarrow f'\in\mathrm{E}$
Ha $f\in\mathrm{E}\Rightarrow f$*-nek van primitív függvénye.*

Vannak olyan elemi fv-ek, melyeknek van primitív függvénye, de az nem elemi függvény.

Példa: $x\to e^{x^2}$, $x\to\sin(x^2)$, $x\to\cos(x^2)$, $x\to\dfrac{\sin x}{x}$
$x\to\dfrac{\cos x}{x}$, $x\to\dfrac{e^x}{x}$, $x\to\dfrac{1}{\ln x}$, $x\to\sqrt{x^3+1}$

Példa: $\displaystyle\int\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\int\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k+1)!}\,\mathrm{d}x=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)(2k+1)!}$

12.4 Racionális fv-ek integráljára visszavezethető helyettesítések

Racionális törtfüggvények általános alakja: $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, ahol
$P_m(x)=b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0$, és $Q_n(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$

Ha R valódi rac. törtfv., akkor $m<n$, ellenkező esetben $m\geq n$ és $R(x)=\dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}=$
$=c_{m-n}x^{m-n}+\cdots+c_1x+c_0+\dfrac{S_k(x)}{Q_n(x)}$, ahol $S_k(x)=d_kx^k+\cdots+d_1x+d_0$ és $k<n$.

Tehát $\displaystyle\int R(x)=\int c_{m-n}x^{m-n}+\cdots+\int c_1x+\int c_0+\int\frac{S_k(x)}{Q_n(x)}$ ahol $\dfrac{S_k(x)}{Q_n(x)}:=\hat{R}(x)$

$Q_n(x)$ valós együtthatójú polinom egyértelműen felírható a gyöktényezős alakjában, azaz:
$Q_n(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0=a_n(x-x_1)^{k_1}\cdots(x-x_s)^{k_s}(x^2+p_1x+q_1)^{l_1}\cdots(x^2+p_tx+q_t)^{l_t}$,
ahol
$k_1+\cdots+k_s+2(l_1+\cdots+l_t)=n$ és $k_1,\ldots,k_s,l_1,\ldots,l_t\in\mathbb{N}$.

Tehát az $\hat{R}(x)$ valódi racionális törtfüggvény. Ekkor $\hat{R}(x)$ egyértelműen felbontható parciális törtek összegére az alábbi módon:

$$\sum_{i=1}^{s}\sum_{u=1}^{k_i}\frac{\mathbf{A}_{i,u}}{(x-x_i)^u}+\sum_{j=1}^{t}\sum_{v=1}^{l_j}\frac{\mathbf{B}_{j,v}x+\mathbf{C}_{j,v}}{(x^2+p_jx+q_j)^v}$$

ahol $\forall i\in[1,s]\ \forall u\in[1,k_i]\ \forall j\in[1,t]\ \forall v\in[1,l_t]:\ \mathbf{A}_{i,u},\mathbf{B}_{j,v},\mathbf{C}_{j,v}\in\mathbb{R}$, és egyértelműek.

$$\text{Tehát}\int\hat{R}(x)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{u=1}^{k_i}\int\frac{\mathbf{A}_{i,u}}{(x-x_i)^u}\,\mathrm{d}x+\sum_{j=1}^{t}\sum_{v=1}^{l_j}\int\frac{\mathbf{B}_{j,v}x+\mathbf{C}_{j,v}}{(x^2+p_jx+q_j)^v}\,\mathrm{d}x$$

Határozzuk meg $\displaystyle\int\frac{\mathbf{A}_{i,u}}{(x-x_i)^u}\,\mathrm{d}x$ és $\displaystyle\int\frac{\mathbf{B}_{j,v}x+\mathbf{C}_{j,v}}{(x^2+p_jx+q_j)^v}\,\mathrm{d}x$ értékét.

$$\int\frac{\mathbf{A}_{i,u}}{(x-x_i)^u}\,\mathrm{d}x=\mathbf{A}_{i,u}\int\frac{1}{(x-x_i)^u}\,\mathrm{d}x=\mathbf{A}_{i,u}\int(x-x_i)^{-u}\,\mathrm{d}x=\underline{\mathbf{A}_{i,u}\frac{(x-x_i)^{-u+1}}{-u+1}}+c$$

De $u=1$ esetén $\displaystyle\int\frac{\mathbf{A}_{i,u}}{x-x_i}\,\mathrm{d}x=\mathbf{A}_{i,u}\int\frac{1}{x-x_i}\,\mathrm{d}x=\underline{\mathbf{A}_{i,u}\ln|x-x_i|+c}$

$$\int\frac{\mathbf{B}_{j,v}x+\mathbf{C}_{j,v}}{(x^2+p_jx+q_j)^v}\,\mathrm{d}x$$

A továbbiakban $\displaystyle\int\frac{\mathbf{B}_{j,v}x+\mathbf{C}_{j,v}}{(x^2+p_jx+q_j)^v}\,\mathrm{d}x:=\int\frac{\mathbf{B}x+\mathbf{C}}{(x^2+px+q)^v}\,\mathrm{d}x$.

Írjuk fel $[\mathbf{B}x+\mathbf{C}]$-t $[\mathbf{M}(2x+p)+\mathbf{N}]$ alakban, ahol $\mathbf{B}=2\mathbf{M}$, $\mathbf{C}=\mathbf{M}p+\mathbf{N}\Rightarrow\mathbf{M}=\dfrac{\mathbf{B}}{2}$, $\mathbf{N}=\mathbf{C}-\dfrac{\mathbf{B}}{2}p$

$$v=1:\int\frac{\mathbf{B}x+\mathbf{C}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\mathbf{M}(2x+p)+\mathbf{N}}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x==\mathbf{M}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x+\mathbf{N}\int\frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x$$

$$\text{ahol }\mathbf{N}\int\frac{1}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x=\mathbf{N}\int\frac{1}{\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)}\,\mathrm{d}x=$$

$$=\frac{2\mathbf{N}}{4q-p^2}\int\frac{1}{\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\left[\frac{2\mathbf{C}-\mathbf{B}p}{\sqrt{4p-q^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}\right)\right]}+c$$

$$\text{és }\mathbf{M}\int\frac{2x+p}{x^2+px+q}\,\mathrm{d}x=\underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{\mathbf{B}}{2}\ln(x^2+px+q)}+c$$

$$v>1:\int_0\frac{\mathbf{B}x+\mathbf{C}}{(x^2+px+q)^v}\,\mathrm{d}x=\frac{\mathbf{B}_1x+\mathbf{C}_1}{(x^2+px+q)^{v-1}}+\mathbf{D}_1\int_0\frac{1}{(x^2+px+q)^{v-1}}\,\mathrm{d}x+\mathbf{E}_1\ \text{(rekurzív)}$$

12.5 Racionális fv-ek integráljára visszavezethető típusok

144. Definíció. *Legyenek* $n\in\mathbb{N}:\forall i,j\in[0,n]:a_{i,j}\in\mathbb{R}$. *Ekkor*

$$\mathbb{R}^2\ni(x,y)\to P(x,y):=\sum_{i,j=0}^{n}a_{i,j}x^iy^j$$

$R^2\to\mathbb{R}$ *típusu függvényt valós kétváltozós polinomnak nevezzük.*

145. Definíció.
Legyenek P,Q *kétváltozós polinomok, és* $A:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\;\middle|\;Q(x,y)=0\right\}$. *Ekkor*

$$\mathbb{R}^2\setminus A\ni(x,y)\to R(x,y):=\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$$

$R^2\to\mathbb{R}$ *típusu kétváltozós racionális függvénynek nevezzük.*

Legyen $\mathbb{I}\subset\mathbb{R}$ intervallum, $\varphi_1,\varphi_2\in\mathbb{I}\to\mathbb{R}$, $(\varphi_1(t),\varphi_2(t))\notin A$, és
$t\in\mathbb{I}:t\to(\varphi_1(t),\varphi_2(t))$ elemien integrálható.

12.5.1 $\int R(\sin t,\cos t)\,\mathrm{d}t$

$$\text{Legyen }\mathbb{I}\subset(-\Pi,+\Pi).\ \mathbb{I}\ni t\to\varphi(t):=\operatorname{tg}\frac{t}{2}\in\mathrm{D}(\mathbb{I}).$$

$$\sin t=\frac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}=\frac{2x}{1+x^2}$$

$$\cos t=\frac{\cos^2\frac{t}{2}-\sin^2\frac{t}{2}}{\sin^2\frac{t}{2}+\cos^2\frac{t}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{t}{2}}=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

$$t:=2\operatorname{arctg}x\ ,\ \tfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\tfrac{2}{1+x^2}.\ \text{Ekkor}$$

$$\int R(\sin t,\cos t)=\int R\left(\frac{2x}{1+x^2},\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)\cdot\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\Bigg|_{x=\operatorname{tg}\frac{t}{2}}$$

És ezzel a $t\to R(\sin t,\cos t)$ integrálját racionális függvény integráljára vezettük vissza.

12.5.2 $\int R\left(t,\sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)\mathrm{d}t$ ahol $ad-bc\neq 0$.

$$x:=\sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\Rightarrow\ x^n=\frac{at+b}{ct+d}\ ;\ t:=\frac{dx^n-b}{a-cx^n}\ ;\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{nx^{n-1}(ad-bc)}{(a-cx^n)^2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\int R\left(t,\sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)\mathrm{d}t=\int R\left(\frac{dx^n-b}{a-cx^n},x\right)\cdot\frac{n(ad-bc)x^{n-1}}{(a-cx^n)^2}\,\mathrm{d}x\,\Bigg|_{x=\sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}}$$

És ezzel a $\int R\left(t,\sqrt[n]{\frac{at+b}{ct+d}}\right)\mathrm{d}t$ integrálját racionális függvény integráljára vezettük vissza.

13 Határozott integrál

Motiváció: -görbe ívhossza, terület, térfogat
-munka (fizika) $w = F \cdot s$

13.1 A határozott integrál fogalma

Alapfeltételek(**AF**): $\mathbb{I} : [a,b]$ kompakt intervallum
$f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény

146. Definíció. *$\mathcal{F}(\mathbb{I}) \ni \mathcal{T} \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \mathcal{T} = \{x_0, \ldots, x_n\} \subset \mathbb{I}; a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ az $\mathbb{I}$ felosztások halmaza.*

147. Definíció. *$\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{I})$ A $\mathcal{T}_1$ a $\mathcal{T}_2$ felosztás finomítása, ha $\mathcal{T}_2 \subset \mathcal{T}_1$*

148. Definíció. *Tfh **AF** teljesül, $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathbb{I})$*

$$S(f,\mathcal{T}) := \sum_{i=1}^{n} \left(\sup_{x_{i-1} \le x \le x_i} \{f(x)\} \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$$

Az f $\mathcal{T}$ felosztásához tartozó felső közelítő összeg.

$$s(f,\mathcal{T}) := \sum_{i=1}^{n} \left(\inf_{x_{i-1} \le x \le x_i} \{f(x)\} \right) \cdot (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$$

Az f $\mathcal{T}$ felosztásához tartozó alsó közelítő összeg.

Megj.: $\exists m_i, M_i$ mert feltettük,hogy a függvény korlátos.

191. Tétel. *Tfh **AF** teljesül.*

a) *Ha $\mathcal{T}_1 \subset \mathcal{T}_2$; $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{I})$:* $s(f,\mathcal{T}_1) \le s(f,\mathcal{T}_2)$
$S(f,\mathcal{T}_1) \ge S(f,\mathcal{T}_2)$

b) $\forall \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2 \in \mathcal{F}(\mathbb{I}) \Rightarrow$ $s(f,\mathcal{T}_1) \le S(f,\mathcal{T}_2)$

192. Tétel. *(Következmény)*

a) $\{ s(f,\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathbb{I}) \}$ *halmaz felülről korlátos*
$\Rightarrow \exists \sup \{ s(f,\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathbb{I}) \} := \mathcal{I}_*(f)$ *az f Darboux féle alsó integrálja.*

b) $\{ S(f,\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathbb{I}) \}$ *halmaz alulról korlátos*
$\Rightarrow \exists \inf \{ S(f,\mathcal{T}) \mid \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathbb{I}) \} := \mathcal{I}^*(f)$ *az f Darboux féle felső integrálja.*

c) *$\forall$**AF**-et kielégítő f-re: $\mathcal{I}_*(f) \le \mathcal{I}^*(f)$ ahol $\mathcal{I}_*(f), \mathcal{I}^*(f)$ $\forall f$-re értelmezve van.*

149. Definíció. *Legyen $\mathbb{I} := [a,b] \subset \mathbb{R}$ kompakt; $f : \mathbb{I} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor az f Riemann integrálható ($f \in \mathrm{R}[a,b]$), ha $\mathcal{I}_*(f) = \mathcal{I}^*(f)$. Ezt a számot az f $\mathbb{I}$-n vett Riemann integráljának nevezzük, és $\int_a^b f$, $\int_{\mathbb{I}} f$, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ valamelyikével jelöljük.*

150. Definíció. *Tfh **AF** teljesül f-re; $\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathbb{I})$. Az $\Omega(f,\mathcal{T}) := S(f,\mathcal{T}) - s(f,\mathcal{T})$ értéket az f $\mathcal{T}$-hoz tartozó oszcillációs összegének nevezzük.*

193. Tétel. *$f \in \mathrm{R}[a,b] \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathbb{I}) : \Omega(f,\mathcal{T}) < \varepsilon$*

194. Tétel. *Ha $f \in \mathrm{C}[a,b] \Rightarrow f$ integrálható.*

13.2 Az integrál meghatározása a definícióból

Példa: $f(x) := x^2$, $x \in [0,1] =: \mathbb{I}$ Bizonyítsuk be, hogy $f \in \mathrm{R}[0,1]$, és $\int_0^1 f$.

Legyen $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}_n := \left\{ \frac{k}{n} \;\middle|\; k = 0, ..., n \right\}$ $m_k = \left(\frac{k-1}{n}\right)^2$ $M_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2$ $x_k - x_{k-1} = \frac{1}{n}$

$$S(f,\mathcal{T}_n) := \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^2} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^3} \cdot \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n^3} \cdot \frac{n(n-1)(2n+1)}{6} \to \frac{1}{3} \quad (n \to \infty)$$

$$s(f,\mathcal{T}_n)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k-1)^2}{n^2}\cdot\frac{1}{n}=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}\to\frac{1}{3}\quad(n\to\infty)$$
$$\frac{1}{3}=\sup_n\overset{\text{részhalmaza az összes lehetséges felosztásnak}}{s(f,\mathcal{T}_n)}\le\mathcal{I}_*(f)\le\mathcal{I}^*(f)\le\inf_n\overset{\text{részhalmaza az összes lehetséges felosztásnak}}{S(f,\mathcal{T}_n)}=\frac{1}{3}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow\mathcal{I}_*(f)=\mathcal{I}^*(f)=\int_0^1 f=\frac{1}{3}$$

Általában a definícióból körülményes (itt volt zárt képlet - szerencse)

13.3 Műveletek és az integrál kapcsolata

195. Tétel. *$f,g\in \mathrm{R}[a,b]$, $\lambda\in\mathbb{R}\Rightarrow$*

$$f+g\in\mathrm{R}[a,b]\text{ és }\int_a^b(f+g)=\int_a^b f+\int_a^b g$$
$$\lambda f\in\mathrm{R}[a,b]\text{ és }\int_a^b(\lambda f)=\lambda\int_a^b f$$
$$fg\in\mathrm{R}[a,b]\text{ de nincs szép összefüggés}$$
$$\text{Ha }\inf\mathcal{R}_g\overset{!}{=}:m>0\Rightarrow\frac{f}{g}\in\mathrm{R}[a,b].\ \text{Pl.: }\forall n\in\mathbb{N}:\frac{1}{n}>0\text{ de }\inf_n\frac{1}{n}=0$$

Következmény: $\mathrm{R}[a,b]$ lineáris tér $\mathbb{R}$ felett $(+,\lambda\cdot)$

13.4 Az integrál intervallum szerinti additivitása

196. Tétel. *Tfh $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ korlátos; $b\in(a,c)$ $f_1:=f\Big|_{[a,b]}$ $f_2:=f\Big|_{[b,c]}$. Ekkor*

1) $f\in\mathrm{R}[a,c]\Leftrightarrow f_1\in\mathrm{R}[a,b]$; $f_2\in\mathrm{R}[b,c]$

2) $\displaystyle\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$

197. Tétel. *(Következmény) Tfh $f:[A,B]\to\mathbb{R}$ korlátos, $a,b,c\in[A,B]$; $f\in\mathrm{R}[A,B]$. Ekkor $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^c f+\int_c^b f$ függetlenül, hogy hol vannak a pontok.*

151. Definíció. $\displaystyle\int_a^a f:=0$ *és* $a>b:\displaystyle\int_a^b f=-\int_b^a f$

13.5 Integrálható függvények

198. Tétel. *Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ folytonos $\Rightarrow f$ integrálható.* $(\mathrm{C}[a,b]\subset\mathrm{R}[a,b])$

199. Tétel. *$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ monoton $\Rightarrow f$ integrálható.*

200. Tétel. *Ha $f\in\mathrm{R}[a,b]$, és f értékét véges sok pontban megváltoztatjuk, akkor a kapott $\tilde f\in\mathrm{R}[a,b]$, és $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^b\tilde f$.*

152. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $f\in\mathrm{R}[a,b]$ szakaszosan folytonos,*

ha $\exists\mathcal{T}=\{x_0,...,x_n\}\in\mathcal{F}([a,b])$ és
1) $f\big|_{(x_{i-1},x_i)}\in\mathrm{C}$
2) $\forall i\in[1,n]:\exists\lim\limits_{x_{i-1}+0}f$, $\exists\lim\limits_{x_i-0}f$ végesek.

201. Tétel. *Ha $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ szakaszosan folytonos ; $\mathcal{T}=\{x_0,...,x_n\}\in\mathcal{F}([a,b])\Rightarrow$*

$\Rightarrow$ $f\in\mathrm{R}[a,b]$ és $\displaystyle\int_a^b f-\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}f.$

13.6 Egyenlőtlenségek

202. Tétel.

1. $f \in \mathrm{R}[a,b] \;;\; f \geqslant 0 \quad \Longrightarrow \int_a^b f \geqslant 0$
2. $f,g \in \mathrm{R}[a,b] \;;\; f \leqslant g \quad [a,b]\text{-n} \quad \Longrightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g.$

203. Tétel. $f \in \mathrm{R}[a,b] \Rightarrow 1.\, |f| \in \mathrm{R}[a,b] \quad 2. \left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|$

204. Tétel. ***Az integrálszámítás első középértéktétele:***

$f,g \in \mathrm{R}[a,b]\;,\; g \geq 0\;,\; m := \inf \mathcal{R}_f\;,\; M := \sup \mathcal{R}_f \Longrightarrow\; m \cdot \int_a^b g \leq \int_a^b (f \cdot g) \leq M \cdot \int_a^b g$

205. Tétel. ***Az integrálszámítás második középértéktétele:***

$f \in \mathrm{C}[a,b]\;,\; g \in \mathrm{R}[a,b]\;,\; g \geq 0 \;\Rightarrow\; \exists \xi \in (a,b) : \int_a^b (fg) = f(\xi) \cdot \int_a^b g$

13.7 Az integrál kiszámítása

206. Tétel. ***Newton-Leibniz:*** *$f \in \mathrm{R}[a,b]$, $\exists F$ primitív függvénye f-nek* $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a) =: [F]_a^b$

Megj.: A N-L tételben egyik feltétel sem hagyható el.
$\exists f \in \mathrm{R}[a,b] : \nexists F$. Példa:
$f = \mathrm{sign}$. Derivált függvény Darboux de sign nem Darboux,
szakaszonként folytonos $\Rightarrow$ sign integrálható.
$\exists f : \exists F \wedge f$ nem integrálható. Példa: Volterra példája (nehéz).

207. Tétel. ***Parciális integrálás:***

$f,g \in \mathrm{D}[a,b] \;;\; f,g' \in \mathrm{R}[a,b] \Rightarrow \int_a^b (fg') = f(b)\cdot g(b) - f(a)\cdot g(a) - \int_a^b (f'g)$

208. Tétel. ***Helyettesítéssel való integrálás:***
$f \in \mathrm{C}(a,b) \;;\; \varphi : [\alpha,\beta] \to [a,b] \;;\; \varphi$ folytonosan deriválható (a,b)-n $\Rightarrow$

$\Rightarrow \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi) \cdot \varphi'$

13.8 Integrálfüggvény

153. Definíció. *Legyen $f \in \mathrm{R}[a,b]$; $x_n \in [a,b]$ tetszőlegesen rögzített.*
Ekkor $[a,b] \ni x \to \int_{x_0}^x f$ az f függvény x_0-ban eltűnő deriváltfüggvénye.

209. Tétel. ***A differenciál- és integrálszámítás alaptétele:***
Legyen $f \in \mathrm{R}[a,b]$; $x_0 \in [a,b]$ tetsz. ; $F(x) := \int_{x_0}^x f$; $(x \in [a,b])$. Ekkor

1. *$F \in \mathrm{C}[a,b]$ azaz $\forall$ integrálható függvénynek az integrálfüggvénye folytonos függvény.*
2. *Ha még $f \in \mathrm{C}\{d\}$, $d \in (a,b) \Rightarrow F \in \mathrm{D}\{d\} \wedge F'(d) = f(d)$ azaz ha f folytonos, akkor az integrálfüggvény deriválható, és a deriváltja egyenlő az f függvénnyel.*

13.9 Az integrálszámítás alkalmazásai

Jelölés: $f \in \mathrm{C}^{(n)}(\mathcal{H}) \;\Leftrightarrow$ az f a $\mathcal{H}$-n n-szer folytonosan deriválható.

210. Tétel. ***Taylor-formula az integrálmaradéktaggal:***

$$n \in \mathbb{N} \;;\; f \in \mathrm{C}(\alpha,\beta) \;;\; a \in (\alpha,\beta) \;\Rightarrow\; \forall x \in (\alpha,\beta) : f(x) - \mathrm{T}_{n,a}(f;x) =$$
$$= f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k = \frac{1}{n!}\int_a^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^h \mathrm{d}t$$

211. Tétel. *Legyen* $n \in \mathbb{N}$; $f \in \mathrm{C}(\alpha,\beta)$; $a \in (\alpha,\beta)$. *Ekkor* $\exists \xi \in (\alpha,\beta)$ *melyre* $f(x) - \mathrm{T}_{n,a}(f;x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ *azaz Taylor-formula a Lagrange maradéktaggal.*

13.10 Binomiális sor

212. Tétel. ***Binomiális tétel:***

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \ \wedge \ (1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \qquad n \in \mathbb{N}$$

$$n \in \mathbb{N} : \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{(n-k+1)(n-k+2)\cdots(n)}{k!}$$

154. Definíció.
$\alpha \in \mathbb{R} : \dbinom{\alpha}{k} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \ \wedge \ \sum\limits_{k=0} \dbinom{\alpha}{k} x^k$ *binomiális sor.*

213. Tétel. $\forall |x| < 1 : \sum\limits_{k=0} \dbinom{\alpha}{k} x^k$ *abszolút konvergens, és* $(1+x)^\alpha = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dbinom{\alpha}{k} x^k$

Következmény:

$$\forall |x| < 1 : \arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$(\blacktriangle)\ \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|<1) \quad = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Binom: } \alpha = -\frac{1}{2} : \quad \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-k+1\right)}{k!} = (-1)^k \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2k)}$$

$$\text{Binom: } (1+x)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 - \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \cdots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \cdots \Rightarrow$$

$$(\blacktriangle)\ \arcsin x = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{x^7}{7} + \cdots$$

Megj.: elemi fv-ek: 1 , x , $\exp$, $\sin$, $\arcsin$, $\ln$ $\Rightarrow +, -, \cdot, /, \circ$ véges sokszori alkalmazásával az összes függvény előállítható.

13.11 Síkidom területe

Megj.: a terület problémája.
$f : [a,b] \to \mathbb{R}$; $f \geq 0$; $f \in \mathrm{R}[a,b]$
$A := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ \middle| \ a \leq x \leq b \ , \ 0 \leq y \leq f(y) \right\}$
$T(A) := \displaystyle\int_a^b f$
Példa: **A kör területe**

$$f(x) := \sqrt{R^2 - x^2} \ ; \ x \in [-R,R] \ ; \ f \in \mathrm{R}[-1,1]$$

$$T = \int_{-1}^{1} \sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} (R^2-x^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-\frac{\Pi}{2}}^{\frac{\Pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2\sin^2 t}\,R\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$\left(x := R\sin t \ ; \ -\frac{\Pi}{2} \leq t \leq +\frac{\Pi}{2} \ ; \ x \in [-1,+1] \Rightarrow t \in \left(-\frac{\Pi}{2}, +\frac{\Pi}{2}\right)\right)$$

$$= R^2 \int_{-\frac{\Pi}{2}}^{+\frac{\Pi}{2}} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 t}}_{\cos t}\cos t\,\mathrm{d}t = R^2 \int_{-\frac{\Pi}{2}}^{+\frac{\Pi}{2}} \underbrace{\cos^2 t\,\mathrm{d}t}_{\frac{1+\cos 2t\,\mathrm{d}t}{2}} = R^2 \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_{-\frac{\Pi}{2}}^{+\frac{\Pi}{2}} =$$

$$= R^2 \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\Pi}{2} - \left(-\frac{\Pi}{2}\right)\right)}_{\Pi} = \frac{R^2\Pi}{2} \leftarrow$$

13.12 Görbe ívhossza

$\mathbb{R}^n$-beli görbék $(n \in \mathbb{N})$

13.12.1 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú függvények

$f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) \in \mathbb{R}^n$
$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x))$
$f_i \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1...n)$
$f = (f_1, \ldots, f_n)$ koordinátafüggvények

13.12.2 fontos fogalmak $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ függvényekre

- folytonosság
- differenciálhatóság
(koordinátafüggvényenként érvényesül)

155. Definíció. *Az $f := (f_1, \ldots, f_n) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ folytonosan deriválható, azaz $f \in \mathrm{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$, ha $\forall i \in [1..n] : f_i \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonosan deriválható, és $f' = (f_1', \ldots, f_n')$ a deriváltfüggvény.*

13.12.3 Sima elemi görbe

A $\Gamma \in \mathbb{R}^n$ halmaz <u>sima elemi görbe</u>, ha $\exists[\alpha, \beta] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in \mathrm{C}^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^n)$:
- $\varphi'(t) \neq \underline{0}$ $(\forall t \in [\alpha, \beta])$
- $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ bijektív
A φ a Γ-nak egy paraméteres előállítása.
Példa: $f(t) := \sqrt{1 - t^2}$ $(t \in [-1, +1])$
$\varphi_1 : [-1, +1] \to (t, f(t))$ a Γ egy paraméteres előállítása
$\varphi_2 : [0, \Pi] \to (\cos \xi, \sin \xi)(\xi$ szög) szintén a Γ egy paraméteres előállítása.
Megj.: Egy adott görbéhez általában sok paraméterezés adható.

13.12.4 Síkbeli görbe ívhossza ($\mathbb{R}^2$)

Γ sima elemi görbe, $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ egy paraméteres előállítás
$\varphi(t_i) = (\varphi_1(t_i), \varphi_2(t_i))$; $\mathcal{T} := \{t_0, ..., t_n\} \in \mathcal{F}([\alpha, \beta])$; $\ell(\varphi, \mathcal{T})$ a töröttvonal hossza.

156. Definíció. *A $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sima elemi görbének van ívhossza (a Γ rektifikálható), ha $\left\{ \ell(\varphi, \mathcal{T}) \;\middle|\; \mathcal{T} \in \mathcal{F}([\alpha, \beta]) \right\}$ $(\subseteq \mathbb{R})$ korlátos (alulról jó, nemnegatív számok), $\sup \left\{ \ell(\varphi, \mathcal{T}) \;\middle|\; \mathcal{T} \in \mathcal{F}([\alpha, \beta]) \right\}$-t a Γ ívhosszának nevezzük.*

214. Tétel. *$\ell(\Gamma)$ független a Γ paraméteres előállításától.*

215. Tétel.
Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sima elemi görbe. $\varphi := (\varphi_1, \varphi_2) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ paraméterezése Γ-nak. Ekkor Γ rektifikálható, és $\ell(\Gamma) = \displaystyle\int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi_1'(t)]^2 + [\varphi_2'(t)]^2}\,\mathrm{d}t$

1. Példa: A kör kerülete: $\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \to (R\cos t, R\sin t)$
   $$\ell(\Gamma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t}\,\mathrm{d}t = 2R\pi$$
2. példa: $f \in \mathrm{C}^1[a, b]$; $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}^2$; $(t, f(t))$
   $$\ell(\Gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t \ (\blacktriangle)$$
3. Példa: kör kerülete $(\blacktriangle)$ formulával

13.13 Impropius integrálok

Eddig: f-re vett feltételek $\mathcal{D}_f := [a,b]$ kompakt ; f korlátos $(\#)$; $f \in \mathrm{R}[a,b]$; $f \to \int_a^b f$

Most: $(\#\#)$ tfh $-\infty < a < b \leq +\infty$; $f : [a,b) \to \mathbb{R} : \forall \omega \in (a,b) : f \in R[a,\omega]$

$(\#\#\#)$ vagy $-\infty \leqslant c < a < +\infty$; $f : (c,a] \to \mathbb{R} : \forall \omega \in (c,a) : f \in \mathrm{R}[\omega,a]$

157. Definíció. *f-re teljesül $(\#\#)$.*
Ha $F(\omega) := \int_a^\omega f \quad \omega \in (a,b)$ függvénynek b-ben $\exists$bal oldali véges határértéke, akkor az $\int_a^b f$ impropius integrál konvergens, és $\int_a^b f := \lim_{\omega \to b-0} F(\omega)$
Az $\int_a^b f$ impropius integrál divergens, ha $\nexists \lim_{\omega \to b-0} F(\omega)$ (véges).

Megj.: hasonlóan $(\#\#\#)$ is.

13.13.1 Műveletek

216. Tétel. $\int_a^b f$; $\int_a^b g$ *impropius integrálok konvergensek. Ekkor*
$\Rightarrow \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} : \lambda_1 \int f + \lambda_2 \int g$ *konvergens, és* $\int_a^b (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int_a^b f + \lambda_2 \int_a^b g.$

Megj.: impropius integrál konvergenciája $F(\omega) := \int_a^\omega f + \lim_{\omega \to b} F(\omega)$ bonyolult lehet.

217. Tétel. ***Majoráns kritérium**: tfh $0 \leq f \leq g$.*
Ha $\int_a^b g$ impropius integrál konvergens, $\Rightarrow \int_a^b f$ impropius integrál is konvergens
Ha $\int_a^b f$ impropius integrál divergens, $\Rightarrow \int_a^b g$ impropius integrál is divergens

14 Többszörös integrálok

Példa: $N = 2$; $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ felület. Pl.: térfogat kiszámítására jó.
A következők kellenek:
- $\mathbb{R}^N$-beli intervallumok értelmezése
- az intervallumok mértékének az értelmezése
- az intervallumok felosztásának az értelmezése

158. Definíció.
$\mathcal{I}^j := [a^j, b^j] \subset \mathbb{R}$ korlátos, zárt (kompakt) $N \in \mathbb{N}$; $j = 1..N$; $a^j, b^j \in \mathbb{R}$ *indexelés <u>nem</u> hatványok*

$\mathcal{I} := \bigtimes_{j=1}^{N} \mathcal{I}^j$ *N-dimenziós intervallum.*

159. Definíció. *$\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$ intervallum. Ekkor $\mu(\mathcal{I}) := \prod_{j=1}^N (b^j - a^j)$ az intervallum mértéke.*

160. Definíció. *$\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$ intervallum. Ekkor $d(\mathcal{I}) := \sqrt{\sum_{j=1}^N (b^j - a^j)^2}$ az intervallum átmérője.*

Megj.: $N = 1, 2, 3$. Mi a jelentése? (hossz,terület,térfogat)

Megj.: $\mathcal{I}$ intervallum felosztásai: a koordinátatengelyekkel párhuzamosan, és ezekenek a Descartes szorzatai.
$j = 1, 2, ..., N : \mathcal{I}^j \subset \mathbb{R}$ egy felosztása:
$a^j = x_0^j < x_1^j < \cdots < x_{m_j}^j = b^j \quad m_j + 1$ db osztópont, azaz
$\mathcal{T}^j := \left\{ \left[x_{r_j-1}^j \,,\, x_{r_j}^j \right] = \mathcal{I}_{r_j}^j \;\middle|\; 1 \leqslant r_j \leqslant m_j \right\}$
$\mathbb{R}$-beli kompakt intervallumok halmaza

161. Definíció. *Az $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$ intervallum egy felosztása:*
$\mathcal{T} := \mathcal{T}^1 \times \mathcal{T}^2 \times \quad \times \mathcal{T}^N = \left\{ \mathcal{I}^1 \times \quad \times \mathcal{I}^N \,\middle|\, 1 \leqslant r_j \leqslant m_j \;\; ; \;\; j = 1..N \right\}$ *intervallumrendszer*
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$ az $\mathcal{I}$ felosztásainak a halmaza.

Megj.: Világos: $\mathcal{I} = \bigcup_{\mathbb{J} \in \mathcal{T}} \mathbb{J} \;\; ; \;\; \mu(\mathcal{I}) = \sum_{\mathbb{J} \in \mathcal{T}} \mu(\mathbb{J})$
$\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$; $\mathbb{J}$ részintervallum

14.1 Többszörös integrál értelmezése

1. lépés: $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$; $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$ intervallum ; f korlátos
2. lépés: tetszőleges korlátos halmazon értelmezett függvényekre való áttérés

162. Definíció. *$\mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$. Ekkor*

$$s(f, \mathcal{T}) := \sum_{\mathbb{J} \in \mathcal{T}} \inf \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{J} \right\} \cdot \mu(\mathbb{J})$$
az f függvény $\mathcal{T}$ felosztáshoz tartozó alsó közelítő összege.

$$S(f, \mathcal{T}) := \sum_{\mathbb{J} \in \mathcal{T}} \sup \left\{ f(x) \,\middle|\, x \in \mathbb{J} \right\} \cdot \mu(\mathbb{J})$$
az f függvény $\mathcal{T}$ felosztáshoz tartozó felső közelítő összege.

218. Tétel.
$\left\{ s(f, \mathcal{T}) \,\middle|\, \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \right\} \subset \mathbb{R}$
$\left\{ S(f, \mathcal{T}) \,\middle|\, \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \right\} \subset \mathbb{R}$
halmazok korlátosak.

163. Definíció. *$\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$ intervallum ; $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ korlátos függvény. Ekkor*
$\mathrm{I}_* f := \sup \left\{ s(f, \mathcal{T}) \,\middle|\, \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \right\}$ *az f függvény Darboux-féle alsó integrálja.*
$\mathrm{I}^* f := \inf \left\{ S(f, \mathcal{T}) \,\middle|\, \mathcal{T} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \right\}$ *az f függvény Darboux-féle felső integrálja.*

164. Definíció. *Az f Riemann-integrálható az $\mathcal{I}$-n, ha $\mathrm{I}_* f = \mathrm{I}^* f$.*
Jelölés: $\int_{\mathcal{I}} f$ *az integrál értéke.*

Problémák: - milyen függvények integrálhatóak?
- ha igen, hogyan?

14.2 Műveletek és az integrál kapcsolata

- $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$; $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$ intervallumok ; $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$; $\mathrm{I}_*(f) \leqslant \mathrm{I}^*(f)$
- Oszcillációs összegek
- Integrálhatóság oszcillációs összegekkel

219. Tétel. *$\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$; $f, g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$; $f, g \in \mathrm{R}(\mathcal{I})$; $\lambda \in \mathbb{R}$. Ekkor*

$$f + g \in \mathrm{R}(\mathcal{I}) \quad \text{és} \quad \int_{\mathcal{I}} (f + g) = \int_{\mathcal{I}} f + \int_{\mathcal{I}} g$$
$$\lambda f \in \mathrm{R}(\mathcal{I}) \quad \text{és} \quad \int_{\mathcal{I}} (\lambda f) = \lambda \int_{\mathcal{I}} f$$

220. Tétel. *$\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$; $f, g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$; $f, g \in \mathrm{R}(\mathcal{I})$. Ekkor*

$$f \leqslant g \quad \Rightarrow \quad \int_{\mathcal{I}} f \leqslant \int_{\mathcal{I}} g$$
$$|f| \in \mathrm{R}(\mathcal{I}) \quad \Rightarrow \quad \left| \int_{\mathcal{I}} f \right| \leqslant \int_{\mathcal{I}} |f|$$

221. Tétel. ***középértéktétel:*** *$\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$ intv. ; $f \in \mathrm{R}(\mathcal{I})$; $\rho \to [0, +\infty)$; $\rho \in \mathrm{R}(\mathcal{I})$.*
Ekkor $f \cdot \rho \in \mathrm{R}(\mathcal{I})$ és $m \cdot \int_{\mathcal{I}} \rho \leqslant \int_{\mathcal{I}} f\rho \leqslant M \cdot \int_{\mathcal{I}} \rho$ *ahol $m = \inf \mathcal{R}_f$; $M = \sup \mathcal{R}_f$*
ha még $f \in \mathrm{C}(\mathcal{I})$ akkor $\exists \xi \in \mathcal{I} : \int_{\mathcal{I}} f\rho = f(\xi) \cdot \int_{\mathcal{I}} \rho$

222. Tétel. ***Elégséges feltétel az integrálhatóságra:*** *Ha* $f \in \mathrm{C}(\mathcal{I}) \Rightarrow f \in \mathrm{R}(\mathcal{I})$.

Megj.: lásd N=1 eset ; Heine+oszcillációs összegek.

14.3 Lebesgue féle kritérium (szükséges-elégséges feltétel)

165. Definíció. *Az* $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ *Lebesgue értelemben nullmértékű, ha*
$\forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{I}_n \subset \mathbb{R}^N \quad (n \in \mathbb{N})$ *intervallumsorozat, melyre*

$$\mathcal{A} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{I}_n \qquad \text{(azaz lefedi } \mathcal{A}\text{-t)}$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\mathcal{I}_n) < \varepsilon \qquad \text{összmérték.}$$

Példák: 1. $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ véges halmaz $\Rightarrow \mathcal{A}$ Lebesgue értelemben nullmértékű.
2. $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ megszámlálható $\Rightarrow \mathcal{A}$ Lebesgue értelemben nullmértékű.

$$\varepsilon > 0 : \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2 \quad \text{ekkor} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \varepsilon$$

223. Tétel. ***Lebesgue kritérium:***

$$f \in \mathrm{R}(\mathcal{I}) \Leftrightarrow \underbrace{\exists \mathcal{A} \subset \mathcal{I}\ ,\ \mathcal{A} \text{ Lebesgue értelemben nullmértékű} : f \in \mathrm{C}(\mathcal{I} \setminus \mathcal{A})}^{\Leftrightarrow \text{ m.m. (majdnem minden)}}$$

166. Definíció. ***Az integrál értelmezése tetszőleges*** $\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$ ***korlátos halmazon:***
$\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^N$ *korlátos halmaz* ; $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R} \Rightarrow \exists \mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$; $\mathcal{H} \subset \mathcal{I}$

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{ha } x \in \mathcal{H} \\ 0 & \text{ha } x \in \mathcal{I} \setminus \mathcal{H} \end{cases}$$

Megj.: $\mathcal{H}$ a határon nem folytonos, de ott viszont Lebesgue értelemben nullmértékű.

167. Definíció. $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható, ha* $\tilde{f} : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *Riemann-integrálható, azaz* $\displaystyle\int_{\mathcal{H}} f = \int_{\mathcal{I}} \tilde{f}$

14.4 Integrál kiszámítása (szukcesszív integrálással)

Megj.: 2 db egymás utáni egyváltozós integrál kiszámításával

14.4.1 intervallumon

$\mathcal{I} \subset \mathbb{R}^N$; $N = 2$; $\mathcal{I} = [a, b] \times [c, d]$

$$\int_{\mathcal{I}} = \int_a^b \left(x \to \underbrace{\int_c^d (y \to f(x,y))\,\mathrm{d}y}_{x\text{-nek egy függvénye}} \right) \mathrm{d}x \overset{\text{jelölés}}{=} \int_a^b \int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x \overset{!}{=} \int_c^d \int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

14.4.2 normáltartományon

$\varphi, \psi : [a,b] \to \mathbb{R}$; $\varphi \leqslant \psi$; φ, ψ folytonos függvények.
$\mathcal{A} := \left\{ (x,y) \,\middle|\, a \leqslant x \leqslant b \ ; \ \varphi(x) \leqslant y \leqslant \psi(x) \right\}$

224. Tétel.
$\mathcal{H} \subset \mathbb{R}^2$; *x-re nézve normáltartomány* ; $f : \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ *folytonos* ; $(\Rightarrow f \in \mathrm{R}(\mathcal{H}))$. *Ekkor*

$$\int_{\mathcal{H}} f = \int_a^b \left(\int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} f(x,y)\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

14.5 Integráltranszformáció

Eml.: helyettesítéssel való integrálás:

N=1 ; $(\mathbb{R} \to \mathbb{R})$; $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$; $x = \varphi(t)$; $t \in [a,b]$; $\varphi \in \mathrm{D}$;

φ szig.mon, azaz invertálható $(\exists \varphi^{-1})$; $\varphi(\alpha) = a$; $\varphi(\beta) = b$.

Ekkor $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\mathrm{d}t$

168. Definíció.

$\mathcal{T} := \left\{ \varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V} \;\middle|\; \mathcal{U}, \mathcal{V} \subset \mathbb{R}^N \textit{ nyílt} \;\; ; \;\; \varphi \textit{ folyt.der.} \;\; ; \;\; \det \varphi' \neq 0 \right\}$

$\mathrm{C}_\varphi := \left\{ f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} \;\middle|\; \overset{\text{tartó,support}}{\mathrm{supp} f} \subset \mathcal{R}_\varphi \;\; ; \;\; \mathrm{supp} f \textit{ kompakt} \right\}$

$\mathrm{supp} f := \overline{\left\{ x \in \mathcal{D}_f \;\middle|\; f(x) \neq 0 \right\}}$ ← lezárás, hozzávesszük az összes torlódási pontot.

225. Tétel. $\varphi \in \mathcal{T}$; $\varphi : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$; $f \in \mathrm{C}_\varphi \;\; \Rightarrow \;\; \int_\mathcal{V} f = \int_\mathcal{U} f \circ \varphi \cdot |\det \varphi'|$

Megj.: (példák jegyzetben)
pl. körcikk esetén polárkoordinátákra célszerű áttérni.
Alkalmazások: terület, térfogat.

14.5.1 R-sugarú félkör területe

$\mathcal{A} := \left\{ (x,y) \;\middle|\; -R \leqslant x \leqslant +R \;\; ; \;\; 0 \leqslant y \leqslant \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$

$\mathrm{T}(\mathcal{A}) = \int_{-R}^{+R} \sqrt{R^2 - x^2}\mathrm{d}x = \frac{R^2\pi}{2}$ ahol $\mathrm{T}(\mathcal{A}) := \int_\mathcal{A} 1$

$\Phi \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$; $\Phi : \underset{\in(0,R)\times(0,\pi)}{(r,\varphi)} \to \underset{\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}}{(r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)}$; $\Phi(r,\varphi) = (r \cdot \cos\varphi, r \cdot \sin\varphi)$

$\mathcal{R}_\Phi = \overline{\mathcal{A}} = \left\{ (x,y) \;\middle|\; -R \leqslant x \leqslant +R \;\; ; \;\; 0 < y < \sqrt{R^2 - x^2} \right\}$

$\Phi \in \mathcal{T}$; $(x,y) \in \mathcal{A} : f(x,y) = 1$ konstans fv. ; $\mathrm{supp} f = \mathcal{A}$; $\mathcal{A}$ kompakt

15 Vonalintegrál

15.1 Paraméteres integrál

169. Definíció. *$n \in \mathbb{N}$; $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $\mathcal{I} = [a,b] \subset \mathbb{R}^n$ intervallum ; $f : \mathcal{U} \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Ekkor $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$; $x = (x_1, ..., x_n)$; $\varphi(x) := \int_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$ függvényt paraméteres integrálnak nevezzük.*

226. Tétel. ***Parciális integrálás tétele:***
a) $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$; $f : \mathcal{U} \times \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény $\Rightarrow$ $\varphi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ folytonos
b) $\forall i = 1..n : \exists \partial_i f$ és $\partial_i f \in \mathrm{C} \Rightarrow \varphi$ folytonasn deriválható az $\mathcal{U}$-n,
és $\partial_i \varphi(x) = \int_a^b \partial_i f(x,t)\mathrm{d}t \quad (x \in \mathcal{U})$

15.2 Cauchy-Riemann egyenletek

170. Definíció. *$\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ nyílt ; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$; $a \in \mathcal{U}$.*
Ekkor az f differenciálható az $a \in \mathcal{U}$-ban ($f \in \mathrm{D}\{a\}$), ha $\exists \lim\limits_{z \to a} \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a}$, és $\in \mathbb{C}$.

227. Tétel.
$f \in \mathrm{D}\{a\} \Leftrightarrow \exists A \in \mathbb{C} \exists \varepsilon : \mathcal{U} \to \mathbb{C}, \lim\limits_a \varepsilon = 0 \quad : \quad f(z) - f(a) = A(z-a) + \varepsilon(z)(z-a) \quad (z \in \mathcal{U})$

228. Tétel. ***Cauchy-Riemann egyenletek:*** *$\mathcal{U} \subset \mathbb{C}$ nyílt ; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{C}$; $f = u + iv$;*
$u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $a = a_1 + i \cdot a_2 \in \mathcal{U}$; $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$. Ekkor
$f \in \mathrm{D}\{a\} \Leftrightarrow$ 1. $u, v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvények deriválhatók az a_1 ill a_2-ben, továbbá
2. teljesülnek a Cauchy-Riemann egyenletek, azaz

$$\partial_1 u(a_1, a_2) = \partial_2 v(a_1, a_2)$$
$$\partial_2 u(a_1, a_2) = -\partial_1 v(a_1, a_2)$$

15.3 Vektor-vektor függvény vonalintegrálja ($\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$)

Példa: $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ fizikában erőterek
$\forall x \in \mathbb{R}^3$-höz hozzá van rendelve egy $f(x) \in \mathbb{R}^3$ érték
Probléma: pl. gravitációs erőtér $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$
egységnyi tömeget elmozdítunk egy görbén,
mennyi munkát végzünk? $W = F \cdot s$; $W = |\underline{F}| \cdot \underline{s}$; $W = \langle F, s \rangle$
ötlet: görbe felbontása szakaszokra

15.4 sima utak

171. Definíció. *$n \in \mathbb{N}$; $\mathbb{R}^n$; $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ $(a < b$; $a, b \in \mathbb{R})$ folytonosan deriválható függvényt $\mathbb{R}^n$-beli sima útnak nevezzük.*

172. Definíció. *$\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ sima görbe, ha $\exists \varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ sima út, melyre $\mathcal{R}_\varphi = \Gamma$. Ilyenkor a φ a Γ görbének egy paraméteres előállítása.*

Megj.: A φ a-beli deriváltja $\varphi'(a) = \lim\limits_{t \to 0+0} \dfrac{\varphi(a+t) - \varphi(a)}{t}$

173. Definíció.
$a, b \in \mathbb{R}$; $a < b$; $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ függvény $\mathbb{R}^n$-beli szakaszonként sima út, ha
1. $\varphi \in \mathrm{C}$
2. $\exists a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b : \varphi|_{[t_i, t_{i+1}]}$ sima út

Példa:
1. $a, b \in \mathbb{R}^n$; szakasz $\varphi(t) := a + t(b-a) \quad (t \in [0,1])$

2. töröttvonal $m \in \mathbb{N}$; $a_0, \ , a_m \in \mathbb{R}^n$;
$\varphi : [0,m] \to \mathbb{R}^n$; $\varphi(t) := a_i + (t-i)(a_{i+1} - a_i)$;
$t \in [i, i+1]$; $i = 0..m-1$ szakaszonként sima út.

3. $\varphi(t) := (\cos t, \sin t)$; $t \in [0, 2\pi]$;
$\varphi : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^n$ egységsugarú kör.

174. Definíció. *$\varphi : [a, a+h] \to \mathbb{R}^n$; $\psi : [b, b+k] \to \mathbb{R}^n$, ahol $\varphi(a+h) = \psi(b)$.*
Ekkor a φ és a ψ utak egyesítése ($\varphi \cup \psi$):

$$\Phi(t) := \begin{cases} \varphi(t) & \text{ha } t \in [a, a+h] \\ \psi(t-a-h+b) & \text{ha } t \in [a+h, a+h+k] \end{cases}$$

A φ-vel ellentétes irányítású út $\tilde{\varphi}(t) := \varphi(2a+h-t)$; $t \in [a, a+h]$

229. Tétel. *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ nyílt ; $\mathcal{U}$ összefüggő $\Leftrightarrow$ $\forall x, y \in \mathcal{U}$ pont összeköthető $\mathcal{U}$-beli szakaszonként sima úttal.*

175. Definíció. *Az $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartomány, ha $\mathcal{U}$ nyílt, és $\mathcal{U}$ összefüggő.*

176. Definíció. ***Vonalintegrál:** $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartomány ; $\varphi : [a, b] \to \mathcal{U}$ szakaszonként sima út; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$.*
Ekkor a $\displaystyle\int_a^b \langle f \circ \varphi\ ,\ \varphi' \rangle$ számot az f függvény φ útra vett vonalintegráljának nevezzük, és $\displaystyle\int_\varphi f$-el jelöljük.

15.5 A vonalintegrál egyszerű tulajdonságai

230. Tétel. *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartomány ; $n \in \mathbb{N}$; $f, g : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvények;*
$\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$; $\varphi : [a, a+h] \to \mathcal{U}$; $\psi : [b, b+k] \to \mathcal{U}$ szakaszonként sima utak ;
$\varphi(a+h) = \psi(b)$. Ekkor

1. $\displaystyle\int_\varphi (\lambda_1 f + \lambda_2 g) = \lambda_1 \int_\varphi + \lambda_2 \int_\varphi g$
2. $\displaystyle\int_\varphi f = -\int_{\tilde{\varphi}} f$ — *$\tilde{\varphi}$ a φ ellentettje (visszafele, fordított paraméterezéssel)*
3. $\displaystyle\int_{\varphi \cup \psi} f = \int_\varphi f + \int_\psi$ — *intervallum szerinti additivitás*
4. $\displaystyle\left|\int_\varphi f\right| \leqslant M \cdot \ell(\varphi)$ — *ahol $M := \max\left\{ \|f(x)\|_2 \mid x \in \mathcal{R}_\varphi \right\}$; (f kompakt halmazon folytonos, $\exists M$) ; $\ell(\varphi) = \mathcal{R}_\varphi$ görbe hossza.*

Megj.: f-nek lehet értelmezni F primitív függvényét
$f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \Rightarrow F \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ - igaz N-L
f erőtér $\Rightarrow$ F potenciál

15.6 Primitív függvények

177. Definíció. *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartomány ; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$.*
Az $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ függvényt az f primitív függvényének nevezzük, ha
$F \in \mathrm{D}(\mathcal{U})$
$\forall x \in \mathcal{U} : F'(x) = f(x)$

Megj.: Ha $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ diffható, akkor $F'(x) = (\partial_1 F(x), ..., \partial_n F(x))$

231. Tétel. *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartomány ; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$. Ekkor*
Ha $F : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ primitív függvénye f-nek $\Rightarrow$ $F + c$ is primitív függvénye f-nek ($c \in \mathbb{R}$)
Ha $F_1, F_2 : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ primitív függvénye f-nek $\Rightarrow$ $\exists c_0 \in \mathbb{R} \forall x \in \mathcal{U} : F_1(x) - F_2(x) = c_0$

232. Tétel. ***Newton-Leibniz:***

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ tartomány ; } f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \text{ folytonos} \\ \varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n \text{ szakaszonként sima út} \\ f\text{-nek } \exists F \text{ primitív függvénye} \end{array}\right\} \Rightarrow \int_\varphi f = F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big)$$

15.7 Primitív függvény létezése

233. Tétel. *Ha $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ függvénynek van primitív függvénye, akkor*
$\forall \varphi$ szakaszonként sima, zárt útra: $\displaystyle\int_\varphi f = 0$.

Köv.: Ha f-nek van primitív függvénye $\Rightarrow \int_{\overline{AB}} f$ vonalintegrál független attól, hogy milyen úton jutunk el oda (A-ból B-be).

φ_1, φ_2 tetszőleges szakaszosan sima út ;
$\varphi_1 : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$; $\varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^n$;
$\varphi_1(\alpha) = \varphi_2(a)$; $\varphi_2(\beta) = \varphi_2(b)$; $\int_{\varphi_1} f = \int_{\varphi_2} f$
$\tilde{\varphi_2} :=$ visszafele φ_2 azaz $\int_{\tilde{\varphi_2}} f = -\int_{\varphi_2} \Rightarrow \int_{\varphi_1} f = \int_{\varphi_2} f$

Megj.: (Konzervatív) erőterek.

15.8 Integrálfüggvény

178. Definíció. *$f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$, melyre $\forall \varphi$ szakaszosan sima, zárt útra $\oint_\varphi f = 0$.*

Legyen $a \in \mathcal{U}$ rögz. Ekkor a $\Phi(x) := \int_{\overline{ax}} f$ az f egy integrálfüggvénye.
(ahol $\overline{ax}$ tetszőleges szakaszosan sima a-t és x-et összekötő út)

234. Tétel. *$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartomány ; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$ folyt. ; $\oint_\varphi f = 0$.*
Ekkor a Φ integrálfüggvény ($\forall a \in \mathcal{U}$ esetén) deriválható, és $\Phi'(x) = f(x)$ $(x \in \mathcal{U})$.

15.9 Feltételek primitív függvények létezéséhez

235. Tétel. ***primitív függvény létezésének szükséges feltétele:***
$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ tartomány ; $f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n$; $f \in D$; f-nek $\exists F$ primitív függvénye.
Ekkor az f' deriváltmátrix szimmetrikus, azaz $\partial_j f_i = \partial_i f_j$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n$; $f = (f_1, ..., f_n))$

179. Definíció.
$\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ halmaz az $a \in \mathcal{U}$ pontra nézve csillagtartomány, ha $\forall x \in \mathcal{U} : \overset{\text{szakasz}}{[a, x]} \subset \mathcal{U}$.

236. Tétel. ***Elégséges feltétel primitív függvény létezésére:***

$$\left.\begin{array}{r} \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n \text{ az } a \in \mathcal{U}\text{-ra nézve csillagtartomány} \\ f : \mathcal{U} \to \mathbb{R}^n \text{ folytonosan deriválható} \\ \text{az } f' \text{ deriváltmátrix szimmetrikus} \end{array}\right\} \Rightarrow f\text{-nek létezik primitív függvénye.}$$

1. Példa: $f(x, y) := \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \end{pmatrix}$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Van-e primitív függvénye? Ha igen, határozzuk meg.
$\exists ? F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $F \in D$;
$F'(x, y) = (\partial_x F(x, y), \partial_y F(x, y)) = (x + y, x - y)$
$\partial_x F(x, y) = x + y \Rightarrow F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy + h(y)$
$\partial_y F(x, y) = x + h'(y) = x - y$. Ha $h'(y) = -y$ azaz $h(y) = \frac{-y^2}{2} + c$ akkor
$F(x, y) = \frac{x^2}{2} + xy - \frac{y^2}{2} + c$ $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

Megj.: Ez egy általánosan alkalmazható módszer.

Megj.: $\underset{\text{mátrix}}{f'(x, y)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$-re szimmetrikus és az egész sík csillagtartomány

2. Példa: $f(x,y) := \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2$

Van-e primitív függvénye? Ha igen, határozzuk meg.

$\exists ? F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \;;\; F \in \mathrm{D} \;;$

$F'(x,y) = (\partial_x F(x,y), \partial_y F(x,y)) = (x-y, x+y)$

$\partial_x F(x,y) = x - y \Rightarrow F(x,y) = \dfrac{x^2}{2} - xy + h(y)$

$\partial_y F(x,y) = -x + h'(y) = x - y \;\Rightarrow$

$\underbrace{2x}_{\substack{\text{csak} \\ x\text{-től} \\ \text{függ}}} = \underbrace{h'(y) - y}_{\substack{\text{csak } y\text{-tól} \\ \text{függ}}} \;\Rightarrow\; \nexists$ primitív függvénye f-nek

Megj.: $\underbrace{f'(x,y)}_{\text{mátrix}} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$-re <u>nem</u> szimmetrikus
$\nexists F$ primitív függvénye f-nek

Megj.: Azokat az $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvényeket, melyeknek $\exists$ primitív függvénye konzervatív erőtereknek nevezzük. (örvénymentes erőterek)