Formális nyelvek és automaták
2. zh, mintafeladatok

I. feladatsor

1. Adjon DA-t az $L = \{a\}^*\{b\}$ nyelvhez!

2. Adjon az alábbi DA-val ekvivalens $G \in \mathcal{G}_{3nf}$ nyelvtant! (A redundanciákat lehetőség szerint küszöbölje ki!)

	a	b
$\rightleftarrows$ A	B	A
B	A	C
C	C	C

3. A gyakorlatról ismert algoritmust alkalmazva adjon NDA-t majd DA-t az alábbi nyelvtanhoz!
$G : S \to aA|aB,\ A \to aA|bS,\ B \to aS|\varepsilon$

4. Adjon DA-t az alábbi nyelvhez!
$L = \{u \in \{a,b\}^* | (l_a(u) mod 2) = 1 \wedge bb$ nem részszava u-nak $\}$

5. A gyakorlatról ismert algoritmusokat alkalmazva adjon az alábbi nyelvtanhoz $\mathcal{G}_{3nf}$-beli nyelvtant, majd NDA-t és végül DA-t!
$G : S \to bab|A|bB,\ A \to aA|B,\ B \to A|aS|aC|\varepsilon,\ C \to aC|a$

I. feladatsor, megoldási kulcs:

1.

	a	b
$\rightarrow$ S	S	A
$\leftarrow$ A	H	H
H	H	H

2. $G : A \rightarrow aB|bA|\varepsilon,\ B \rightarrow aA$

3.

NDA:

	a	b
$\rightarrow$ S	{A,B}	{}
A	{A}	{S}
$\leftarrow$ B	{S}	{}

DA:

	a	b
$\rightarrow$ {S}	{A,B}	{}
$\leftarrow$ {A,B}	{S,A}	{S}
{S,A}	{A,B}	{S}
{}	{}	{}

4.

Jelölje p az automata által elemzett szó eddig beolvasott prefixét! Jelölje $B(p)$ azt az állítást, hogy bb részszava p-nek! A DA a következő esetekben kerül az alábbi állapotokba:

A_0: $(l_a(p) mod 2) = 0 \wedge (p = \varepsilon \vee p_{[|p|]} = a) \wedge \neg B(p)$
B_0: $(l_a(p) mod 2) = 0 \wedge p \neq \varepsilon \wedge p_{[|p|]} = b \wedge \neg B(p)$
A_1: $(l_a(p) mod 2) = 1 \wedge p_{[|p|]} = a \wedge \neg B(p)$
B_1: $(l_a(p) mod 2) = 1 \wedge p_{[|p|]} = b \wedge \neg B(p)$
H: $B(p)$

Így az automata:

	a	b
$\rightarrow A_0$	A_1	B_0
$\leftarrow A_1$	A_0	B_1
B_0	A_1	H
$\leftarrow B_1$	A_0	H
H	H	H

II. feladatsor

A1. Melyek az $L = (\{a, b\}\{c, \varepsilon\})^*$ nyelv maradéknyelvei?

A2. Adja meg a maradéknyelvekből adódó DA-t!

B1. Melyek az $L = (\{aa\}\{b, c\})^*$ nyelv maradéknyelvei?

B2. Adja meg a maradéknyelvekből adódó DA-t!

C1. Melyek az $L = ((b|\varepsilon)a)^*b$ nyelv maradéknyelvei?

C2. Adja meg a maradéknyelvekből adódó DA-t!

II. feladatsor, megoldási kulcs:

Mj.: A kezdő maradéknyelvet *jobbra nyíl*, az üres szót is tartalmazó új maradéknyelveket *balra nyíl*, a kezdő maradéknyelvtől különböző, üres szót nem tartalmazó új maradéknyelveket pedig *gondolatjel* előtéttel emeltük ki.

A1:

$\rightleftarrows L_\varepsilon = (\{a, b\}\{c, \varepsilon\})^*$
$\leftarrow L_a = \{c, \varepsilon\}L_\varepsilon$
$L_b = \{c, \varepsilon\}L_\varepsilon = L_a$
– $L_c = \{\}$
$L_{aa} = (L_a)_a = L_a$
$L_{ab} = (L_a)_b = L_b = L_a$
$L_{ac} = (L_a)_c = L_\varepsilon$

A2:

	a	b	c
$\rightleftarrows L_\varepsilon$	L_a	L_a	$\{\}$
$\leftarrow L_a$	L_a	L_a	L_ε
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

B1:

$\rightleftarrows L_\varepsilon = (\{aa\}\{b,c\})^*$

– $L_a = \{a\}\{b,c\}L_\varepsilon$

– $L_b = \{\}$

$L_c = \{\}$

– $L_{aa} = (L_a)_a = \{b,c\}L_\varepsilon$

$L_{ab} = (L_a)_b = \{\}$

$L_{ac} = (L_a)_c = \{\}$

$L_{aaa} = (L_{aa})_a = \{\}$

$L_{aab} = (L_{aa})_b = L_\varepsilon$

$L_{aac} = (L_{aa})_c = L_\varepsilon$

B2:

	a	b	c
$\rightleftarrows L_\varepsilon$	L_a	$\{\}$	$\{\}$
L_a	L_{aa}	$\{\}$	$\{\}$
L_{aa}	$\{\}$	L_ε	L_ε
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

C1:

$\rightarrow L_\varepsilon = ((b|\varepsilon)a)^*b$

$L_a = L_\varepsilon$

$\leftarrow L_b = a((b|\varepsilon)a)^*b|\varepsilon$

$L_{ba} = L_\varepsilon$

– $L_{bb} = \{\}$

C2:

	a	b
$\rightarrow L_\varepsilon$	L_ε	L_b
$\leftarrow L_b$	L_ε	$\{\}$
$\{\}$	$\{\}$	$\{\}$

III. feladatsor

1.

(1) $(S, a, \#) \to (S, a)$
(2) $(S, a, a) \to (S, aa)$
(3) $(S, \varepsilon, a) \to (S, \varepsilon)$
(4) $(S, b, a) \to (S, \varepsilon)$

Rajzoljuk fel a fenti egy vermes, üres veremmel elfogadó automata konfigurációs gráfját, ha az elemzendő szó az aab ! Jelöljük a gráfban az elfogadó konfigurációkat és a zsákutcákat is!

2.

(1) $(S, a, \#) \to (S, a)$
(2) $(S, a, a) \to (S, aa)$
(3) $(S, a, a) \to (V, \varepsilon)$
(4) $(V, a, a) \to (V, \varepsilon)$

Rajzoljuk fel a fenti egy vermes, üres veremmel elfogadó automata konfigurációs gráfját, ha az elemzendő szó az $aaaa$! Jelöljük a gráfban az elfogadó konfigurációkat és a zsákutcákat is!

III. feladatsor, megoldási kulcs:

Megjegyzés a megoldási kulcshoz: A zsákutcákat a konfiguráció mellé írt $[X]$ jellel, míg az elfogadó konfigurációkat $[+]$ jellel jelöltük.

1.

$$
\begin{tikzcd}
< S, aab, \# > \arrow[d, "(1)"] & & \\
< S, ab, a > \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "(2)"] & < S, ab, \varepsilon > [X] & \\
< S, b, aa > \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "(4)"] & < S, b, a > \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "(4)"] & < S, b, \varepsilon > [X] \\
< S, \varepsilon, a > \arrow[d, "(3)"] & < S, \varepsilon, \varepsilon > [+] & \\
< S, \varepsilon, \varepsilon > [+] & &
\end{tikzcd}
$$

2.

$$
\begin{tikzcd}
< S, aaaa, \# > \arrow[d, "(1)"] & & \\
< S, aaa, a > \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "(2)"] & < V, aa, \varepsilon > [X] & \\
< S, aa, aa > \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "(2)"] & < V, a, a > \arrow[r, "(4)"] & < V, \varepsilon, \varepsilon > [+] \\
< S, a, aaa > \arrow[r, "(3)"] \arrow[d, "(2)"] & < V, \varepsilon, aa > [X] & \\
< S, \varepsilon, aaaa > [X] & &
\end{tikzcd}
$$

IV. feladatsor

1. $G = (\{a, b\}, \{S, A, B\},$
. $\{S \to aA|aB, A \to bA|\varepsilon, B \to aS|aB\}, S)$

A gyakorlaton tanult algoritmust szemléltetve adjuk meg a G-vel ekvivalens NDA-t majd VDA-t, mindkettőt táblázatos formában!

2. A gyakorlaton tanult algoritmust szemléltetve adjuk meg az alábbi DA redukáltját!

	a	b
$\to$ 1	4	3
2	4	2
3	2	1
$\leftarrow$ 4	6	3
5	10	9
$\leftarrow$ 6	8	7
$\leftarrow$ 7	4	7
8	4	8
9	8	5
$\leftarrow$ 10	4	10

3. Adjunk az L nyelvhez egy vermes, üres veremmel elfogadó automatát!

3.a $L = \{uu^{-1}|u \in \{a, b\}^*\}$
3.b $L = \{u \in \{a, b\}^*|u = u^{-1}\}$
3.c $L = \{u \in \{a, b\}^*|l_a(u) = l_b(u)\}$
3.d $L = \{u \in \{a, b\}^*|l_a(u) = 2 * l_b(u)\}$
3.e $L = L(G)$, ahol $G : S \to \varepsilon|aSb|SS|aS$

IV. feladatsor, megoldási kulcs:

1.

NDA:

	a	b
$\rightarrow$ S	{A,B}	{}
$\leftarrow$ A	{}	{A}
B	{S,B}	{}

VDA:

	a	b
$\rightarrow$ {S}	{A,B}	{}
$\leftarrow$ {A,B}	{S,B}	{A}
{S,B}	{S,A,B}	{}
$\leftarrow$ {A}	{}	{A}
$\leftarrow$ {S,A,B}	{S,A,B}	{A}
{}	{}	{}

2. Legyen A' a kezdőállapotból elérhető állapotok halmaza!
$A'_0 = \{1\}$, $A'_1 = \{1\}U\{3,4\}$, $A'_2 = \{1,3,4\}U\{2,6\}$,
$A'_3 = \{1,2,3,4,6\}U\{7,8\}$, $A'_4 = \{1,2,3,4,6,7,8\}U\{\}$
$A' = \{1,2,3,4,6,7,8\}$ $\qquad A \setminus A' = \{5,9,10\}$

Az ekvivalencia osztályok:
$\sim_0 = \{1,2,3,8\}, \{4,6,7\}$
$\sim_1 = \{1,2,8\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}$
$\sim_2 = \{1\}, \{2,8\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}$
$\sim_3 = \{1\}, \{2,8\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}$
$\sim\ = \{1\}, \{2,8\}, \{3\}, \{4\}, \{6\}, \{7\}$

Így a redukált automata:

	a	b
$\rightarrow$ 1	4	3
28	4	28
3	28	1
$\leftarrow$ 4	6	3
$\leftarrow$ 6	28	7
$\leftarrow$ 7	4	7

3.a

$(S, \varepsilon, \#) \to (S, \varepsilon)$

$(S, a, \#) \to (S, a), \qquad (S, b, \#) \to (S, b)$

$(S, a, a) \to (V, \varepsilon)|(S, aa)$

$(S, a, b) \to (S, ab), \qquad (S, b, a) \to (S, ba)$

$(S, b, b) \to (V, \varepsilon)|(S, bb)$

$(V, a, a) \to (V, \varepsilon), \qquad (V, b, b) \to (V, \varepsilon)$

3.d

$(S, \varepsilon, \#) \to (S, \varepsilon)$

$(S, a, \#) \to (S, a\#), \qquad (S, a, a) \to (S, aa)$

$(S, b, \#) \to (S, bb\#), \qquad (S, b, b) \to (S, bbb)$

$(S, a, b) \to (S, \varepsilon), \qquad (S, b, a) \to (A, \varepsilon)$

$(A, \varepsilon, a) \to (S, \varepsilon), \qquad (A, \varepsilon, \#) \to (S, b\#)$

3.e

$(S, \varepsilon, x) \to (S, \varepsilon)$

$(S, a, x) \to (S, ax) \qquad x \in \{a, \#\}$

$(S, b, a) \to (S, \varepsilon)$

V. feladatsor

1. $L = \{a^i b^j | i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i \neq j\}$

1.a Írjuk le az L nyelvet egy vermes, üres veremmel elfogadó automatával!

1.b Mi az L szigorú típusa? (Bizonyítás)

2.* $L = \{\ a^p | p \text{ prímszám}\}$.
Bizonyítsuk be, hogy $L \notin \mathcal{L}_2$![1]

3. $G_2 : S \to \varepsilon | abS | A,\ A \to a$
Adjon a G_2 nyelvtannal ekvivalens $\mathcal{G}_{3nf}$-beli nyelvtant!

4. Hozzuk kiterjesztett Chomsky normálformára az alábbi nyelvtant, a gyakorlatról ismert, négy lépéses algoritmus segítségével!
$G : S \to aSB | SS | \varepsilon, B \to b | S$

5. Döntsük el a CYK algoritmus segítségével, hogy igaz-e az $aaabb \in L(G_{Ch})$ állítás! Szemléltessük az algoritmus működését a gyakorlatról ismert módon!
G_{Ch}:
$S \to AB | \hat{a}S | \hat{a}B | a | SS$
$B \to b | AB$
$\hat{a} \to a$
$A \to \hat{a}S$

[1] Ez a feladat csak azokban a félévekben aktuális, amikor vesszük a gyakorlaton a „Nagy Bar-Hillel” lemmát.

V. feladatsor, megoldási kulcs:

1. $L = \{a^i b^j | i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i \neq j\}$

1.a
$(S, a, \#) \to (S, a\#)$
$(S, a, a) \to (S, aa)$
$(S, \varepsilon, a) \to (A, \varepsilon)$
$(S, b, a) \to (B, \varepsilon)$
$(S, b, \#) \to (B, b)$
$(A, \varepsilon, a) \to (A, \varepsilon)$
$(A, \varepsilon, \#) \to (A, \varepsilon)$
$(B, b, b) \to (B, b)$
$(B, \varepsilon, b) \to (B, \varepsilon)$
$(B, b, a) \to (B, \varepsilon)$
$(B, b, \#) \to (B, b)$
$(B, \varepsilon, a) \to (A, \varepsilon)$

1.b L szigorú típusa kettes. L ugyanis egyrészt kettes típusú, hiszen leírtuk veremautomatával. Másrészt L nem hármas típusú, ehhez ti. a Myhill-Nerode tétel szerint elég belátni, hogy végtelen sok maradéknyelve van. Ez utóbbi állítás pedig következik abból, hogy az $\{L_{a^i} | i \in \mathbb{N}_0\}$ maradéknyelv halmaz végtelen, aminek elégséges feltétele, hogy $i \neq j$ esetén $L_{a^i} \neq L_{a^j}$. Ez viszont közvetlenül adódik abból, hogy $b^i \notin L_{a^i}$, de $b^i \in L_{a^j}$, ami a maradéknyelv fogalma alapján nyilvánvaló az $a^i b^i \notin L$ és az $a^j b^i \in L$ állításokból. Az $a^i b^i$ szó pedig nem lehet L eleme, hiszen benne a és b kitevője megegyezik. Az $a^j b^i \in L$ viszont $j \neq i$ miatt igaz.

2. $L = \{\ a^p | p \text{ prímszám}\}$.
$L \notin \mathcal{L}_2$. Tegyük fel ugyanis, hogy $L \in \mathcal{L}_2$! Ekkor a *nagy Bar-Hillel lemma* szerint van olyan n konstans, hogy az ennél hosszabb szavaknak van olyan $xyzvw$ felbontása, amelyben $k := |yv|$ pozitív egész és $xy^i zv^i w \in L$ tetszőleges $i \in \mathbb{N}_0$ kitevőre. Mivel a prímszámok halmaza végtelen, biztosan van olyan p prímszám,

amelyre $p > n$, azaz $|a^p| > n$, és így a^p-nek létezik a fenti típusú felbontása. Tekintsük most az $xy^{1+p}zv^{1+p}w \in L$ szót! $|xy^{1+p}zv^{1+p}w| = |xyzvw| + |y^p v^p| = p + k * p = (1 + k) * p$, ami nem prímszám, márpedig az L szavainak hossza prímszám. Az ellentmondásból következik, hogy $L \notin \mathcal{L}_2$.

3. $G_2 : S \to \varepsilon|aB|aZ,\ B \to bS,\ Z \to \varepsilon$

4. $G : S \to aSB|SS|\varepsilon, B \to b|S$
4.1. **Korlátozott ε-mentesítés:**
$E_1 = \{S\}, E_2 = \{S\} \cup \{B\}, E_3 = \{S, B\} \cup \{\} = E_2, E = \{S, B\}$
Mivel $S \in E$, KES szükséges. Mivel S szerepel szabály jobboldalon is, új kezdőszimbólumot (K) vezetünk be.
$K \to S|\varepsilon, S \to aSB|aS|aB|a|SS, B \to b|S$
4.2. **Láncmentesítés:**
$L(K) = \{K, S\}$
$K \to \varepsilon|aSB|aS|aB|a|SS$
$S \to aSB|aS|aB|a|SS$
$L(B) = \{B, S\}$
$B \to b|aSB|aS|aB|a|SS$
4.3 **Álterminálisok bevezetése:**
$K \to \varepsilon|\hat{a}SB|\hat{a}S|\hat{a}B|a|SS$
$S \to \hat{a}SB|\hat{a}S|\hat{a}B|a|SS$
$B \to b|\hat{a}SB|\hat{a}S|\hat{a}B|a|SS$
$\hat{a} \to a$
4.4 **Hosszú jobboldalak kiküszöbölése:**
$G_{Chomsky\_nf\varepsilon}$:
$K \to \varepsilon|AB|\hat{a}S|\hat{a}B|a|SS$
$S \to AB|\hat{a}S|\hat{a}B|a|SS$
$B \to b|AB|\hat{a}S|\hat{a}B|a|SS$
$\hat{a} \to a$
$A \to \hat{a}S$