Gyakorló feladatok 2.

(Felületek)

Programtervező matematikus

szakos hallgatóknak az

Analízis 7.

nevű tárgyhoz

2006. őszi félév

0. Jelölések

$\boxed{1.}$ Vektor-skalár (azaz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú) függvény **deriváltjaira**:
Ha $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ (vagy $\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n,\ t \in [\alpha, \beta]$), akkor

$$\dot{\varphi}(t_0) := \frac{d\,\varphi}{d\,t}\big(t_0\big) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n \qquad \big(t_0 \in (\alpha, \beta)\big).$$

A másod- és a harmadrendű deriváltakat így jelöljük:

$$\ddot{\varphi}(t_0), \quad \dddot{\varphi}(t_0).$$

$\boxed{2.}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **típusú függvényekre:**
Ha $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (nyít, zárt, stb.) intervallum, akkor

$\mathbb{I}^2 := I_1 \times I_2$ $\quad$ $\mathbb{R}^2$-beli téglalap (intervallum) $\quad$ és $\quad w = (u, v) \in \mathbb{I}^2$ $\quad$ a pontjai.

A felületeknél *végig* F egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényt fog jelölni:

$F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3; \qquad F = \big(F_1, F_2, F_3\big), \quad F_i(\in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ a koordinátafüggvények.

$C^r\big(\mathbb{I}^2, \mathbb{R}^3\big)$ az $\mathbb{I}^2$ téglalapon értelmezett, $\mathbb{R}^3$-ba képező, r-szer ($r = 1, 2, \ldots$) folytonosan deriválható függvények halmaza.

Ha $F \in C^1\big(\mathbb{I}^2, \mathbb{R}^3\big)$ és $w = (u, v) \in \mathbb{I}^2$, akkor F **derivált mátrixa** (vagy **Jacobi-mátrixa**) a w pontban:

$$F'(u, v) = F'(w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(w) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(w) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(w) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(w) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(w) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(w) \end{bmatrix}.$$

Ennek az első oszlopvektorát $\partial_u F$-fel, a másodikat pedig $\partial_v F$-fel fogjuk jelölni:

$$\partial_u F(w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(w) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(w) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(w) \end{bmatrix}, \qquad \partial_v F(w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v}(w) \\ \frac{\partial F_2}{\partial v}(w) \\ \frac{\partial F_3}{\partial v}(w) \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3.}$ **Skaláris szorzatra:** Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzatának jelölésére az alábbi szimbólumok valamelyikét használjuk:

$$\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}\, \rangle, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

$\boxed{4.}$ **Mátrixokra:** Az $\mathbf{A} = \big[a_{ij}\big] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix főátlójában álló elemek összegét a mátrix **nyomának** nevezzük, és a $\operatorname{tr}(\mathbf{A})$ szimbólummal (trace = nyom) jelöljük:

$$\operatorname{tr}(\mathbf{A}) := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

1. Felület értelmezése és megadásának módjai

Mj1. **Megadási módok:**

1. Explicit- (vagy **Euler–Monge)-féle**: Ha $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor ennek képe (grafikonja) a háromdimenziós térben egy $\mathcal{F}$ felület:

$$\mathcal{F} = \Big\{ \big(x, y, g(x,y)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \in \mathcal{D}_g \Big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ilyenkor a $z = g(x,y)$ egyenletű felületről is szokás beszélni.

2. Implicit megadási mód: $G\big(x,y,z\big) = 0$.
Ekkor $G \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy adott „alkalmas" függvény. Ha például egy $\mathbb{R}^3$-beli $\big(x_0, y_0, z_0\big)$ pontban $G\big(x_0, y_0, z_0\big) = 0$ és z_0 egy környezetében a $G(x,y,z) = 0$ egyenletből z kifejezhető az x és y függvényeként (ez igaz, ha $\frac{\partial G}{\partial z}\big(x_0, y_0, z_0\big) \neq 0$; l. az *implicit függvény tételt*), akkor van olyan $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyikre $G\big(x, y, g(x,y)\big) = 0$ $\big((x,y) \in \mathcal{D}_g\big)$ teljesül. Ennek a g függvénynek a képe, azaz az

$$\Big\{ \big(x, y, g(x,y)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid G\big(x, y, g(x,y)\big) = 0 \Big\}$$

halmaz egy $\mathbb{R}^3$-beli felület. Általában adott „jó" $G \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény esetén az

$$\Big\{ \big(x, y, z\big) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x,y,z) = 0 \Big\} \subset \mathbb{R}^3$$

halmaz egy *felület*. Gondoljunk a térben az origó középpontú R-sugarú gömbfelületre:

$$\mathcal{F} = \Big\{ \big(x, y, z\big) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0 \Big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

3. A Gauss-féle vagy (**két**)**paraméteres** megadási mód:
A görbék paraméteres megadásához hasonló. A felület azonban nem egyparaméteres ponthalmaz a térben, mint a görbe, hanem térbeli pontok *kétparaméteres* halmaza. Gondoljuk meg például azt, hogy egy gömbfelületet vagy egy hengerfelületet hogyan lehet két alkalmas paraméterrel jellemezni. (A pontos fogalmat illetően l. a következő definíciót.)

D1. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ halmaz egy **egyszerű sima felületdarab** (röviden: ESF), ha létezik olyan $F \in C^1\big(\mathbb{I}^2, \mathbb{R}^3\big)$ leképezés, hogy
(i) $F : \mathbb{I}^2 \to \mathcal{F}$ bijekció és
(ii) $\operatorname{rang} F'(w) = 2$ minden $w \in \mathbb{I}^2$ pontban.
Ekkor a F függvényt az $\mathcal{F}$ egy **paraméterezésének** nevezzük.

Mj2. A felületek elméletének *általános* tárgyalása igen messzire vezetne, ezért itt csak azt a felületfogalmat adtuk meg, amely a differenciálgeometriában szükséges. Ezt némiképp általánosítva a továbbiakban **felületen** olyan térbeli ponthalmazt értünk, amelyek „összerakhatók" egyszerű sima felületdarabokból.

F1. Az $f(x) \geq 0$ $\big(x \in [a,b]\big)$ függvénnyel megadott görbét forgassuk meg az x-tengely körül. Adja meg az így kapott forgásfelületet implicit alakban és paraméteres alakban is.

F2. Az xz-koordinátasíkban elhelyezkedő $A(a,0,0)$ középpontú, b sugarú körívet forgassuk meg a z-tengely körül ($a > b > 0$). Határozza meg az így kapott **tóruszfelület** egy paraméteres alakját.

F3. **Másodrendű felületek.**
Szemléltesse az alábbi, implicit alakban megadott felületeket. Milyen a, b, c paraméterek esetén kapunk forgásfelületet?

(a) *ellipszoidok*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$;

(b) *hiperboloidok*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{egyköpenyű hiperboloid,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{kétköpenyű hiperboloid;}$$

(c) *kúpok*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$;

(d) *paraboloidok*:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{elliptikus paraboloid,}$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{hiperbolikus paraboloid;}$$

(e) *hengerek*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elliptikus henger,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hiperbolikus henger,}$$

$$y^2 = 2px \quad \text{parabolikus henger.}$$

Keressen paraméteres előállítást.

2. Paramétervonalak és felületi görbék

F4. Állapítsa meg, hogy az

(a) $F(u,v) := \big(u\cos v, u\sin v, v\big)$,

(b) $F(u,v) := \big(\frac{a}{2}(u+v), \frac{b}{2}(u-v), \frac{uv}{2}\big)$,

(c) $F(u,v) := \big(\cos u \operatorname{ch} v, \sin u \operatorname{sh} v, u\big)$

függvénnyel megadott felületek paramétervonalai milyen görbék.

3. Érintősík, felületi normális

T1. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése, $(u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ egy rögzített pont a paramétertartományban és $P_0 := F(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$ a megfelelő felületi pont. Ekkor

1^o Minden P_0-on átmenő reguláris felületi görbe érintői valamennyien egy síkban vannak. Ezt a síkot a felület P_0 **pontbeli érintősíkjának** nevezzük.

2^o A felület P_0 pontbeli érintősíkjának

(a) egy **bázisa** az $\mathbb{R}^3$-beli $\partial_u F(u_0, v_0)$ és $\partial_v F(u_0, v_0)$ vektorok;

(b) egy **normálvektora** az

$$\mathbf{m}(u_0, v_0) := \frac{\partial_u F(u_0, v_0) \times \partial_v F(u_0, v_0)}{|\partial_u F(u_0, v_0) \times \partial_v F(u_0, v_0)|}$$

felületi normális egységvektor;

(c) egyenlete (az $\mathbf{x} := (x, y, z)$ jelöléssel):

$$0 = \langle\, \mathbf{x} - F(u_0, v_0), \mathbf{m}(u_0, v_0)\,\rangle = (\mathbf{x} - F(u_0, v_0)) \cdot \partial_u F(u_0, v_0) \cdot \partial_v F(u_0, v_0) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial u}\big(u_0, v_0\big) & \frac{\partial F_2}{\partial u}\big(u_0, v_0\big) & \frac{\partial F_3}{\partial u}\big(u_0, v_0\big) \\ \frac{\partial F_1}{\partial v}\big(u_0, v_0\big) & \frac{\partial F_2}{\partial v}\big(u_0, v_0\big) & \frac{\partial F_3}{\partial v}\big(u_0, v_0\big) \end{bmatrix} = 0.$$

T2. A $z = g(x,y)$ $\big(g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g \in C^1\big)$ *explicit alakban*, illetve a $G(x,y,z) = 0$ $\big(G \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ G \in C^1\big)$ *implicit alakban* megadott $\mathcal{F}$ egyszerű sima felületdarab $P_0 = (x_0,y_0,z_0) \in \mathcal{F}$ pontjában az érintősík $\mathbf{m}(P_0)$ normálvektora, valamint az egyenlete:

$$\mathbf{m}(P_0) = \big(g'_x(x_0,y_0), g'_y(x_0,y_0), -1\big)\,, \quad \text{valamint}$$

$$z - z_0 = g'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + g'_y(x_0,y_0)(y-y_0);$$

illetve

$$\mathbf{m}(P_0) = \big(G'_x(P_0), G'_y(P_0), G'_z(P_0)\big)\,, \quad \text{valamint}$$

$$= G'_x(P_0)(x-x_0) + G'_y(P_0)(y-y_0) + G'_z(P_0)(z-z_0) = 0.$$

F5. Vannak-e az alábbi függvénnyel megadott felületnek olyan P_0 pontjai, amelyben nem teljesül a rang $F'(u_0,v_0) = 2$ feltétel (azaz a $\partial_u F(u_0,v_0)$ és $\partial_v F(u_0,v_0)$ vektorok párhuzamosak):

(a) $F(u,v) := \big(u^2+v^2, uv, \cos u \cos v\big)$;

(b) $F(u,v) := \big(u^2-v^2, uv, -1+\cos u, v - e^v\big)$.

F6. Írja fel az alábbi függvények által megadott felületek kijelölt pontjában az *érintősík egyenletét* és a *felületi merőleges egyenes egyenletrendszerét*:

(a) $F(u,v) := \big(u^2-v^2, 2uv, u^2+v^2\big)$, $(u_0,v_0) := (1,2)$;

(b) $F(u,v) := \big(\cos u - v\sin u, \sin u + v\cos u, v\big)$, $P_0 := (1,1,1)$;

(c) $F(u,v) := \big(u, (1+u)\cos v, (1+u)\sin v\big)$, $(u_0,v_0) := \big(1, \frac{\pi}{3}\big)$;

(d) $z = x^2 - y^2$, $P_0 := (2,1,3)$;

(e) $z = 4x^2y - 2xy^2$, $P_0 := (-1,1,6)$;

(f) $x^2+y^2+z^2 = 169$, $P_0 := (x_0,y_0,z_0)$;

(g) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$, $P_0 := (3,1,-1)$.

F7. Írja fel a *tórusz* $\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\big)$ paraméterű pontjához tartozó érintősík egyenletét. Mutassa meg, hogy a tórusz minden pontjában a paramétervonalak merőlegesen metszik egymást.

F8. Határozza meg az $x^2 + y^2 - 2z = 18$ egyenletű felület $x + 2y + z + 1 = 0$ egyenletű síkkal párhuzamos érintősíkjának az egyenletét.

F9. Az $y = 8x^2$, $z = 0$ egyenletű parabolát forgassuk meg az x-tengely körül. A kapott forgásfelület $P(1,4,4\sqrt{3})$ pontjában írja fel az érintősík egyenletét és a felületi merőleges egyenes egyenletrendszerét.

F10. Bizonyítsa be, hogy ha $a > 0$ állandó, akkor a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

egyenletű felület érintősíkjai a koordináta-tengelyekből állandó összegű darabokat vágnak le.

4. A Gauss-féle első alapmennyiségek
Felületi görbék ívhossza, hajlásszöge. Felületek felszíne

• **A Gauss-féle első alapmennyiségek értelmezése**

D2. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése. A $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ pontban az **első Gauss-féle alapmennyiségeket** így értelmezzük:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(w_0) &:= \mathbb{E}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big)\,\rangle\,,\\
\mathbb{F}(w_0) &:= \mathbb{F}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big)\,\rangle\,,\\
\mathbb{G}(w_0) &:= \mathbb{G}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big)\,\rangle\,.
\end{aligned}$$

A

$$G(w) := \begin{bmatrix} \mathbb{E}(w) & \mathbb{F}(w) \\ \mathbb{F}(w) & \mathbb{G}(w) \end{bmatrix} \qquad \big(w \in \mathbb{I}^2\big)$$

szimmetrikus mátrixszal képzett

$$\begin{aligned}
Q\big(\mathbf{x}\big) :&= Q\big(x_1, x_2\big) := \langle\, G(w)\mathbf{x},\, \mathbf{x}\,\rangle =\\
&= \mathbb{E}(w)\, x_1^2 + 2\,\mathbb{F}(w)\, x_1 x_2 + \mathbb{G}(w)\, x_2^2 \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\big)
\end{aligned}$$

kvadratikus alakot a **felület első alapformájának** nevezzük.

• **Felületi görbék ívhossza**

T3. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése. Tegyük fel, hogy $\Gamma \subset \mathcal{F}$ egy sima *felületi görbe* és $\varphi = F \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}$ ennek egy parméterezése. Ekkor Γ **rektifikálható** és az **ívhossza** az alábbi képletek valamelyikével számolható ki:

$$\ell_\Gamma = \int_\alpha^\beta \big|\dot\varphi(t)\big|\,dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot\varphi_1^2(t) + \dot\varphi_2^2(t) + \dot\varphi_3^2(t)}\,dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle\, G\big(\gamma(t)\big)\,\dot\gamma(t),\ \dot\gamma(t)\,\rangle}\ dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathbb{E}(t)\,\dot\gamma_1^2(t) + 2\mathbb{F}(t)\,\dot\gamma_1(t)\,\dot\gamma_2(t) + \mathbb{G}(t)\,\dot\gamma_2^2(t)}\ dt =$$

$$\Big(= \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2 + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1\,\dot\gamma_2 + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2}\ dt.\Big)$$

• **Felületek felszíne**

D3. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : T \to \mathbb{R}^3$ $(T \subset \mathbb{I}^2)$ ennek egy folytonosan deriválható paraméterezése. Ekkor $\mathcal{F}$ felszínén az

$$\mathcal{S} := \iint_T |\partial_u F(u,v) \times \partial_v F(u,v)|\ du\,dv \quad \left(=: \iint_T |\partial_u F \times \partial_v F|\ du\,dv \right)$$

számot értjük.

T4. Egyszerű sima felületdarab felszíne független a paraméterezéstől, megengedett paramétertranszformációval szemben invariáns.

T5. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab.

1^o Ha $F : T \to \mathbb{R}^3$ $(T \subset \mathbb{I}^2)$ az $\mathcal{F}$ felület egy folytonosan deriválható paraméterezése, akkor van felszíne és az a

$$\mathcal{S} = \iint_T \sqrt{\mathbb{E}(u,v)\,\mathbb{G}(u,v) - \mathbb{F}^2(u,v)}\,du\,dv \quad \left(=: \iint_T \sqrt{\mathbb{E}\cdot\mathbb{G} - \mathbb{F}^2}du\,dv \right)$$

képlettel is meghatározható.

2^o Ha az $\mathcal{F}$ felület a $z = g(x,y)$ $\big((x,y) \in T\big)$ explicit alakban van megadva, akkor a felszíne:

$$\mathcal{S} = \iint\limits_T \sqrt{1 + g_x^2(x,y) + g_y^2(x,y)}\, dx\, dy \left(=: \iint\limits_T \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dx\, dy \right),$$

feltéve, hogy a $g : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan deriválható.

3^o A $G(x,y,z) = 0$ implicit alakban megadott felület felszíne pedig az

$$\mathcal{S} = \iint\limits_T \frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{|G_z|}\, dx\, dy$$

képlettel számítható ki.

F11. Írja fel az alábbi felületek megadott pontjában a Gauss-féle első alapmennyiségeket és az első alapformát

(a) $F(u,v) := \big(u^2 - v^2, uv - v^3, u^4 - 2v\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = (-1, 1);$

(b) $F(u,v) := \big(\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, \operatorname{th}(uv)\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = \big(0, \frac{\pi}{2}\big);$

(c) $F(u,v) := \big(e^u, e^v, u - v\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = (0, 1);$

(d) $F(u,v) := \big((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v\big)$
$w_0 = (u_0, v_0) \quad (a > b > 0);$

(e) $z = 4x^2y + 2xy^2, \quad P_0(-1, 2, 0);$

(f) $z = \sqrt{2xy}, \quad P_0(2, 2, 4).$

F12. Számítsa ki a megadott felületre illeszkedő felületi görbék ívhosszát:

(a) $F(u,v) := \big(v\cos u, v\sin u, v\big); \quad u = t,\ v = e^t;\ 0 \le t \le t_0;$

(b) $F(u,v) := \big(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2\big); \quad u = \sin t,\ v = \sin t;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2};$

(c) $F(u,v) := \big(e^u \cos v, e^u \sin v, e^u\big); \quad u = -t,\ v = 2t;\ 0 \le t \le t_0.$

F13. Keressen képletet felületi görbék hajlásszögének a kiszámolására.

F14. Forgassuk meg az $y = f(x)$ $(x \in [a,b])$ egyenlettel megadott görbét $(f \in C^1)$ az x-tengely körül. Mutassa meg, hogy az így kapott forgásfelület felszíne

$$2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx.$$

F15. Számítsa ki az alábbi felületek felszínét:

(a) $F(u,v) := \big(u\cos v,\ u\sin v,\ v\big)$ $\quad (0 \le u \le 1,\ \ 0 \le v \le 2\pi)$ (csavarfelület);

(b) $F(u,v) := \big(\cos u - v\sin u,\ (\sin u + v\cos u),\ (u+v)\big)$ $(0 \le u \le \pi,\ \ 0 \le v \le 1)$;

(c) $z = \frac{x^2}{2y},\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 1 \le y \le 2.$;

(d) $z = x^2 - y^2$ és a T taromámy az $x^2 + y^2 \le 1$ körlap.

F16. Számítsa ki a tóruszfelület felszínét.

F17. Tekintsük az xy-síkon a

$$\gamma(t) := \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big(t \in [\alpha,\beta]\big)$$

paraméteres alakban megadott görbét. Tegyük fel, hogy $\gamma \in C^1([\alpha,\beta], R^2)$ és

$$\gamma_1(t) \ne 0 \quad \text{és} \quad \dot\gamma_1^2(t) + \dot\gamma_2^2(t) \ne 0 \qquad \big(t \in [\alpha,\beta]\big).$$

Forgassuk meg a görbét a x tengely körül. Mutassa meg, hogy az így kapott forgásfelület felszíne

$$\mathcal{S} = 2\pi \int_\alpha^\beta \big|\gamma_1(t)\big| \sqrt{\dot\gamma_1^2(t) + \dot\gamma_2^2(t)}\, dt.$$

F18. Forgassukmeg a következő görbéket az x tengely körül, és számítsuk ki az így kapott forgásfelület felszínét:

(a) $\gamma(t) := \big(t - \sin t, 1 - \cos t\big) \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big)$;

(b) $\gamma(t) := \big(2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t)\big) \qquad \big(t \in [0,\pi]\big)$;

(c) $f(x) := \operatorname{ch} x \qquad \big(x \in [0,2]\big)$;

(d) $f(x) := \sqrt{x} \qquad \big(x \in [1,5]\big)$.

5. A Gauss-féle második alapmennyiségek

D4. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése. Jelölje $\mathbf{m}(w_0)$ a felület $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ paraméterű pontjában a felületi normális egységvektort (azaz az érintősík egy normálvektorát). Ekkor a felület w_0 paraméterű $P_0 := F(w_0) = F(u_0, v_0)$ pontjában a **Gauss-féle második alapmennyiségeket** így értelmezzük:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(w_0) := \mathbb{L}\big(u_0, v_0\big) &:= \langle\, \partial_{uu} F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{uu} F\big(w_0\big) \cdot \mathbf{m}(w_0),\\
\mathbb{M}(w_0) := \mathbb{M}\big(u_0, v_0\big) &:= \langle\, \partial_{uv} F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{uv} F\big(w_0\big) \cdot \mathbf{m}(w_0),\\
\mathbb{N}(w_0) := \mathbb{N}\big(u_0, v_0\big) &:= \langle\, \partial_{vv} F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{vv} F\big(w_0\big) \cdot \mathbf{m}(w_0).
\end{aligned}$$

A

$$H(w) := \begin{bmatrix} \mathbb{L}(w) & \mathbb{M}(w) \\ \mathbb{M}(w) & \mathbb{N}(w) \end{bmatrix} \qquad \big(w \in \mathbb{I}^2\big)$$

szimmetrikus mátrixszal képzett

$$\begin{aligned}
Q\big(\mathbf{x}\big) : = Q\big(x_1, x_2\big) &:= \langle\, H(w)\mathbf{x},\, \mathbf{x}\,\rangle = \\
&= \mathbb{L}(w)\, x_1^2 + 2\,\mathbb{M}(w)\, x_1 x_2 + \mathbb{N}(w)\, x_2^2 \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\big)
\end{aligned}$$

kvadratikus alakot a **felület második alapformájának** nevezzük.

F19. Írja fel az alábbi felületek megadott pontjában a Gauss-féle második alapmennyiségeket és a második alapformát

(a) $F(u, v) := \big(u^2 - v^2, uv - v^3, u^4 - 2v\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = (-1, 1);$

(b) $F(u, v) := \big(e^u, e^v, u - v\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = (0, 1);$

(c) $F(u, v) := \big((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v\big)$
$w_0 = (u_0, v_0) \quad (a > b > 0);$

(d) $z = 4x^2y + 2xy^2, \quad P_0(-1, 2, 0);$

(e) $z = x^3 - y^3, \quad P_0(2, -1, 9);$

(f) $z = \sqrt{2xy}, \quad P_0(2, 2, 4).$

6. Felületi görbék görbülete. Felületi pontok osztályozása

(Meusnier-tétel, normálgörbületek, főgörbületek, főirányok, Euler-tétel)

T6. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy folytonosan deriválható paraméterezése. Tegyük fel, hogy $\Gamma \subset \mathcal{F}$ egy sima *felületi görbe* és $\varphi = F \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}$ ennek egy parméterezése. Tekintsük a felületnek egy olyan P_0 pontját, amelyen ez a görbe átmegy:

$$\mathcal{F} \ni P_0 = \varphi(t_0) = F\big(\gamma(t_0)\big) = F(u_0, v_0) = F(w_0).$$

Tegyük fel még azt is, hogy a felület P_0 pontbeli érintősíkja (ennek normálvektora az $\mathbf{m}(w_0)$ felületi normális egységvektor) nem egyezik meg a görbe P_0 pontbeli simulósíkjával, azaz $\mathbf{n}(P_0) \cdot \mathbf{m}(w_0) \neq 0$, ahol $\mathbf{n}(P_0)$ a görbe főnormális egységvektora. Ekkor a görbe P_0 pontjában a görbületre a következő képlet érvényes:

$$\begin{aligned}\kappa(P_0) &= \frac{1}{\mathbf{n}(P_0) \cdot \mathbf{m}(w_0)} \cdot \frac{\langle H(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle}{\langle G(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle} = \\ &= \frac{1}{\mathbf{n}(P_0) \cdot \mathbf{m}(w_0)} \cdot \frac{\mathbb{L}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{M}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{N}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}.\end{aligned}$$

Megjegyzés. Gondoljuk meg, hogy konkrét esetekben a tétel alkalmazásához elég sok számolásra lenne szükség. A képletnek nem gyakorlati, inkább *elméleti* jelentősége van. A belőle levonható alábbi egyszerű észrevételek igen érdekesek:

Egy felületi görbe görbületét a pontbeli érintőjének az iránya – a $\dot\gamma_1(t_0)/\dot\gamma_2(t_0)$ hányados – és a görbe $\mathbf{n}(P_0)$ főnormálisa már egyértelműen meghatározza. Ez azt jelenti, hogy a közös irányú érintővel és főnormálissal rendelkező görbék görbülete azonos. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a görbe simulósíkját az érintője és a főnormálisa határoza meg, akkor a fenti tételből rögtön megkapjuk az alábbi **következményt**: ∎

T7. Egy tetszőleges Γ felületi görbe P_0 pontbeli görbülete megegyezik a görbe P_0 pontjához tartozó simulósíkja által a felületből kimetszett felületi síkgörbe P_0 pontbeli görbületével. Ezért a felület P_0 pontján áthaladó görbék görbületének vizsgálatánál **elegendő a síkmetszetek görbületét** tekinteni.

D5. A felület valamely pontjabeli érintősíkra e pontban merőleges síkokat **normálsíkoknak**, a normálsík által kimetszett görbét **normálmetszetnek**, a normálmetszet görbületét pedig **normálgörbületnek** nevezzük. Minden más síkmetszetet **ferdemetszetnek** hívunk.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy adott érintőjű síkmetszetek közül a normálmetszet a legkisebb görbületű az adott pontban. Ebben az esetben ui. az $\mathbf{m}$ és az $\mathbf{n}$ vektorok párhuzamosak, tehát $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \pm 1$.

Most megállapodunk abban, hogy a normálgörbületnek előjelet is adunk; az előjel *pozitív* (illetve *negatív*), ha görbe főnormális egységvektora a felület egységnyi normálvektorával *megegyező* (illetve *ellentétes* irányú). Ezt az $\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{m}(w_0)$ skaláris szorzat mutatja, amely az első esetben $+1$, a másodikban pedig -1. A korábbi jelöléseinket használva vegyünk fel a felület P_0 pontbeli érintősíkjában egy e egyenest (ez jelöli ki az adott érintő irányát). Jelöljük $\kappa_e(P_0)$-lal a megfelelő **előjelezett normálgörbületet**. Ekkor a **T6.** tétel képletéből azonnal adódik, hogy

$$\kappa_e(P_0) = \frac{\langle H(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle}{\langle G(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle} = \frac{\mathbb{L}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{M}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{N}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}.$$

■

T8. **Meusnier** – olv. Mönié – **tétele**: Tekintsük a reguláris $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$ felület P_0 pontjára és az ehhez tartozó érintősík egy e egyenesére illeszkedő tetszőleges (de az érintősíktől különböző) σ síkot. Legyen $\kappa(P_0)$ a σ sík által kimetszett felületi görbe görbülete és $\kappa_e(P_0)$ az e irányhoz tartozó normálmetszet előjeles görbülete. Ekkor

$$\kappa(P_0) = \frac{\kappa_e(P_0)}{\cos\alpha},$$

ahol α ($\alpha \in (0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$) a felület P_0 pontjában felületi normális egységvektora és a felületi görbe fönormális egységvektora által bezárt szög.

Megjegyzés. A tétel tehát azt állítja, hogy adott felületen **elegendő a normálmetszetek görbületét ismerni**, mert egy adott érintőirányú felületi görbék esetében a ferdemetszetek görbülete kifejezhető a normálmetszet görbületével. ■

Megjegyzés. Az eddigieket összefoglalva *egyelőre* (!!!) itt tartunk: Ha egy sima felület adott P_0 pontján átmenő *tetszőleges* görbéket vizsgálunk – pl. a görbület szempontjából –, akkor elegendő a P_0-on átmenő és az érintősíkra merőleges *síkmetszeteket* (azaz a normálmetszeteket) tekintenünk.

A további fontos és alapvető eredmény „dallama” az, hogy az érintősíkban van olyan, két egymásra merőleges irány – ezeket fogjuk majd **főirányoknak** nevezni –, amelyekben vett normálgörbületekkel (azaz a normálmetszetek görbületeivel) már *tetszőleges* irányú normálmetszetek görbülete kifejezhető. Ezt fejezi ki **Euler tétetele**.

A kiindulópontunk az előjelezett normálgörbületekre vonatkozó

$$\kappa_e(P_0) = \frac{\langle H(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle}{\langle G(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle} = \frac{\mathbb{L}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{M}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{N}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}.$$

korábbi képletünk, amelyet *két kvadratikus alak hányadosának* is tekinthetünk. Azt fogjuk megvizsgálni közelebbről, hogy miképpen változik a normálgörbület az érintőiránnyal. Ez a kifejezés az érintőirányokat meghatározó $\dot\varphi_1$ és $\dot\varphi_2$ racionális törtfüggvénye. Azt tudjuk, hogy a nevező pozitív defint kvadratikus alak. A fentit tehát a $\dot\varphi_1\dot\varphi_2 = 0$ pont kivételével a $\dot\varphi_1$ és $\dot\varphi_2$ változó *folytonos* függvényének tekinthetjük. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy ez a kifejezés $\dot\varphi_1$-nak és $\dot\varphi_2$-nak homogén függvénye (azaz az értéke nem változik akkor, ha $\dot{\varphi}_1$ és $\dot{\varphi}_2$ helyébe a $\lambda\dot{\varphi}_1$ és $\lambda\dot{\varphi}_2$ számokat írjuk), akkor azt kapjuk $\kappa_e(P_0)$ tetszőleges sugarú körvonalon felveszi minden értékét. Mivel a körvonalon folytonos is, ezért létezik mind maximuma, mind minimuma. A továbbiak *első* lépéseként ezeket az értékeket fogjuk megkeresni. Jóval általánosabb keretek között fogjuk tekinteni a következő – önmagában is érdekes – **szélsőérték-feladatot.** ■

T9. Legyen

$$f(x) := \frac{\langle\, \mathbf{Ax}, \mathbf{x}\,\rangle}{\langle\, \mathbf{Bx}, \mathbf{x}\,\rangle} \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\big),$$

ahol $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixok és $\mathbf{B}$ pozitív definit. Tekintsük az $\mathbf{AB}^{-1}$ szimmetrikus (!!!) mátrixot, és jelölje

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ ennek a sajátértékeit,
$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ pedig a megfelelő sajátvektorokat.

Ekkor

(a) az f függvénynek létezik abszolút maximuma és minimuma;

(b) $\min f = \lambda_1 = f\big(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_1\big), \qquad \max f = \lambda_n = f\big(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_n\big).$

Megjegyzés. Alkalmazzuk ezt az állítást az előjelezett normálgörbületre, azaz tekintsük az

$$f(\mathbf{x}) := \kappa_e\big(P_0\big) := \frac{\langle\, H(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle}{\langle\, G(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle} = \frac{\mathbb{L}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{M}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{N}(w_0)x_2^2}{\mathbb{E}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{F}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{G}(w_0)x_2^2}$$

$$\big(\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$$

függvényt, ahol az (x_1, x_2) (paramétertartománybeli) pont az érintősíkon az

$$\mathbf{e} = x_1\partial_u F(w_0) + x_2\partial_v F(w_0)$$

érintőirányt határozza meg. Az alábbi állítás a fentinek szinte nyilvávaló következménye. ■

T10. **Főgörbületek:** Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése és $P_0 = F(w_0)$ a felület egy pontja.

1^o Ekkor az

$$f(\mathbf{x}) := \kappa_e\big(P_0\big) := \frac{\langle\, H(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle}{\langle\, G(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle} = \frac{\mathbb{L}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{M}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{N}(w_0)x_2^2}{\mathbb{E}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{F}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{G}(w_0)x_2^2}$$

$$\big(\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$$

függvénynek van abszolút minimuma (κ_1) és maximuma (κ_2). Ezeket a számokat **fő(normál)görbületeknek** nevezzük.

2^o A κ_1 és κ_2 **főgörbületek** a $H(w_0)G^{-1}(w_0)$ mátrix sajátértékei, ezért összegükre és szorzatukra a következők teljesülnek:

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \operatorname{tr}\left(H(w_0)G^{-1}(w_0)\right) =: \mathcal{H}$$

(ez az ún. *összeggörbület*)

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det\left(H(w_0)G^{-1}(w_0)\right) =: \mathcal{K}$$

(ez az ún. *szorzat-* vagy *Gauss-féle görbület*).

A főgörbületeket tehát a

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}\left(H(w_0)G^{-1}(w_0)\right)\lambda + \det\left(H(w_0)G^{-1}(w_0)\right) = 0 \qquad (1)$$

sajátérték-egyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Ennek csak valós gyökei vannak.

T11. **Főirányok.** Az előző tételben értelmezett f függvény szélsőérték-helyei (ezek tehát a paramétertartományban vannak) az érintősíkban (ξ, η) koordinátájú irányokat határoznak meg a

$$\xi\, \partial_u F(w_0) + \eta\, \partial_v F(w_0)$$

képlet alapján, ezeket **főirányoknak** (vagy **főgörbületi irányoknak**) nevezzük. Ha a (1) egyenlet gyökei különbözők, akkor két főirány van, és ezek merőlegesek egymásra. Ha $\kappa_1 = \kappa_2$, akkor minden irány főirány, tehát tetszőlegesen kijelölhető két egymásra merőleges főirány. A főirányokat adó (ξ, η) értékek a

$$\det \begin{bmatrix} \eta^2 & \xi\eta & \xi^2 \\ \mathbb{E}(w_0) & \mathbb{F}(w_0) & \mathbb{G}(w_0) \\ \mathbb{L}(w_0) & \mathbb{M}(w_0) & \mathbb{N}(w_0) \end{bmatrix} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei.

T12. **Euler tétele:** Tetszőleges felületi pontban bármely normálmetszet κ görbülete kifejezhető a főnormális-görbületekkel; az összefüggés:

$$\kappa = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta,$$

ahol ϑ a görbeérintő és a κ_1-nek megfelelő főgörbületi irány bezárta szög.

D6. Ha a felület egy pontjában a $\mathcal{K}$ szorzatgörbület pozitív, negatív, illetve zérus, akkor azt mondjuk, hogy ez a pont a felületnek **elliptikus**, **hiperbolikus**, illetve **parabolikus** pontja. Ha $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$, akkor a pont (amely nyilván elliptikus) **szférikus pont**; ha $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, akkor a pontot (amely nyilván parabolikus) **planáris pontnak** nevezzük.

F20. Számítsa ki az alábbi függvénnyel megadott felület kijelölt pontjában a megadott **e** érintővektorú normálmetszet előjeles görbületét:

(a) $F(u,v) := \big(u^2+v^2, u^2-v^2, uv\big)$, $\quad (u_0,v_0) = (1,1)$, $\quad \mathbf{e} := (2,6,z)$;

(b) $F(u,v) := \big(u^2-2uv, u^2v^2-v^3, u^4-2v^2\big)$, $\quad (u_0,v_0) = (1,-1)$, $\mathbf{e} := (2,-11,z)$;

(c) $F(u,v) := \big(u, (1+u)\cos v, (1+u)\sin v\big)$, $\quad (u_0,v_0) = (1,0)$, $\mathbf{e} := (3,3,z)$;

(d) $F(u,v) := \big(u\cos v, u\sin v, u^2\big)$, $\quad (u_0,v_0) = \big(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\big)$, $\quad \mathbf{e} := (-2,4,z)$.

F21. Határozza meg a következő felületek megadott pontjában a κ_1 és κ_2 főgörbületeket és főirányokat:

(a) $F\big(u,v\big) := \big(u^2+v^2, 2uv, u-v\big)$, $\qquad w_0 = \big(u_0,v_0\big) := (-1,-1)$;

(b) $F\big(u,v\big) := \big(u\cos v, u\sin v, v\big)$, $\qquad w_0 = \big(u_0,v_0\big) := \big(1, \frac{\pi}{4}\big)$;

(c) a gömbfelület egy tetszőleges pontja;

(d) $z = xy$, $\quad P_0 := (2,2,4)$;

(e) $z = \sqrt{xy}$, $\quad P_0 := (1,1,1)$;

(f) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$, $\; P_0 := (0,0,0)$;

(g) $4x^2+4y^2+z^2 = 9$, $\; P_0 := (1,-1,1)$;

(h) $z^2 = x^2y$, $\; P_0 := (2,1,2)$.

F22. Mutassa meg, hogy a $z = \ln(cosx) - \ln(\cos y)$ egyenletű felület minden pontjában az összeggörbület nulla.

F23. Határozza meg az

$$F(u,v) := e^u\mathbf{i} + e^v\mathbf{j} + (u-v)\mathbf{k}$$

felület $(u_0,v_0) := (0,0)$ paraméterű pontjában az $\dot{u}/\dot{v} = 2$ feltétellel megadott normálsíkjával $\vartheta = 30^o$-os szöget bezáró ferdemetszet görbületét.

F24. Meusnier és Euler tételének felhasználásával határozza meg a $2a$ nagytengelyű és a $2b$ kistengelyű ellipszis tengelypontjaiban a görbületet.

F25. Mutassa meg, hogy

(a) egy gömb minden pontja szférikus pont;

(b) egy sík minden pontja planáris pont.

F26. Határozza meg az alábbi felületek megadott pontjának típusát:

(a) $F\big(u,v\big) := \big(u^2+v^2, 2uv, u-v\big), \qquad w_0 = \big(u_0, v_0\big) := (-1,-1);$

(b) $F\big(u,v\big) := \big(u, \sin u \cos v, \sin u \cos v\big), \qquad w_0 = \big(u_0, v_0\big) := \big(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\big);$

(c) $z = xy, \ \ P(2,2,4);$

(d) $z = 4x^2y - 2xy^2, \ \ P(1,0,0).$

F27. Forgassuk meg az l tengely körül egy sehol el nem tűnő görbületű L görbét. Bizonyítsa be, hogy ha az L görbe a forgástengely felől nézve konkáv, akkor a keletkező felület pontjai elliptikus pontok, ha konvex, akkor hiperbolikus pontok; annak a paralell körnek a pontjai, amelyet a görbe inflexiós pontja söpör végig, parabolikus pontok.

F28. Határozza meg az

$$F(u,v) := \begin{bmatrix} (a+b\cos u)\cos v \\ (a+b\cos u)\sin v \\ b\sin u \end{bmatrix} \qquad (a>b>0)$$

tóruszfelület elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait.