Gyakorló feladatok 1.

(Görbék)

Programtervező matematikus

szakos hallgatóknak az

Analízis 7.

nevű tárgyhoz

2006. őszi félév

1. Görbék megadásának módjai és szemléltetésük

F1. A paraméter kiküszöbölésével adja meg az alábbi síkgörbéket $F(x,y) = 0$ implicit alakban, majd ábrázolja mindegyiket:

(a) $\varphi(t) := \big(\sin^2 t,\, \cos^2 t\big) \qquad (t \in \mathbb{R});$

(b) $\varphi(t) := \big(\cos t,\, \cos 2t\big) \qquad (t \in \mathbb{R});$

(c) $\varphi(t) := \big(t^2 - 2t,\, t+1\big) \qquad (t \in \mathbb{R});$

(d) $\varphi(t) := \big(\ln t,\, \sqrt{t}\big) \qquad (t \in \mathbb{R});$

(e) $\varphi(t) := \big(\operatorname{ch} t,\, \operatorname{sh} t\big) \qquad (t \in \mathbb{R}).$

F2. Vázolja az alábbi, polárkoordinátákban megadott görbéket:

(a) $r(\varphi) := a\varphi \;\; (\varphi \geq 0,\; a > 0)$ (az archimédeszi spirális);

(b) $r(\varphi) := \dfrac{a}{\varphi} \;\; (\varphi > 0,\; a > 0)$ (a hiperbolikus spirális);

(c) $r(\varphi) := ae^{k\varphi} \;\; (\varphi \geq 0,\; a > 0,\; k > 0)$ (a logaritmikus spirális);

(d) $r(\varphi) := \cos\varphi \;\; \big(\varphi \in \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]\big);$

(e) $r(\varphi) := \cos 2\varphi \;\; \big(\varphi \in \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]\big);$

(f) $r(\varphi) := |\cos 2\varphi| \;\; \big(\varphi \in \mathbb{R}\big);$

(g) $r(\varphi) := a(1 + \cos\varphi) \;\; \big(\varphi \in [0, 2\pi],\; a > 0\big)$ (a kardiodid);

(h) $r(\varphi) := a\sqrt{2\cos 2\varphi} \;\; \big(\varphi \in \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big] \cup \big[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\big]\big)$
(a Bermoulli-féle lemniszkáta).

F3. Szemléltesse az alábbi síkgörbéket:

(a) $y^2 - 2x^3 = 0;$

(b) $x^3 + y^3 = 3\alpha xy \qquad (\alpha > 0)$ (a Descartes-féle levél);

(c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}} \qquad (\alpha > 0)$ (az asztrois).

2. Görbék ívhossza, természetes paraméterezése

F4. Vázolja az alábbi térgörbéket és határozza meg az ívhosszukat:

(a) $\varphi(t) := \big(a\cos t, a\sin t, bt\big) \quad (t \in [0, 2\pi], a > 0, b > 0),$
(az origó középpontú a sugarú hengerre írt csavarvonal, $2\pi b$ a menet magassága);

(b) $\varphi(t) := \big(e^{4t}\cos t, e^{4t}\sin t, \sqrt{2}e^{4t}\big) \quad (t \in [0, 1]),$
(egy kúpra írt csavarvonal).

F5. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) \qquad \big(x \in [a,b]\big) \qquad \text{explicit-,}$$

illetve az

$$r(\varphi) \qquad \big(\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\big) \qquad \text{polárkoordinátás}$$

alakban megadott egyszerű sima görbe rektifikálható és az ívhossza az

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx,$$

illetve az

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + \big[r'(\varphi)\big]^2}\, d\varphi$$

képlettel számítható ki.

F6. Számítsa ki az alábbi görbék ívhosszát:

(a) $f(x) := \sqrt{x^3} \qquad \big(x \in [0,4]\big)$;

(b) az archimédeszi spirális első menete.

F7. Adja meg az alábbi görbék természetes (ívhossz szerinti) paraméterezését:

(a) az $(1,2)$ pontból a $(3,4)$ pontba vezető szakasz;

(b) az origó középpontú 4 sugarú kör;

(c) $\varphi(t) := \big(a\cos t,\, a\sin t,\, bt\big) \qquad \big(t \in \mathbb{R},\ a > 0,\, b > 0\big)$.

F8. Bizonyítsa be, hogy ha egy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ függvénnyel megadott térgörbe érintővektorainak hossza azonosan egy, akkor a t paraméter a görbe valamely pontjától mért ívhossz vagy attól csak egy additív állandóban különbözik.

3. Görbék érintője

F9. Írja fel a megadott pontokban az alábbi görbék érintőjének az egyenletét, és adja meg az egyenletrendszerét is:

(a) $\varphi(t) := \big(\frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2}\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; $t_0 := 1$;

(b) $\varphi(t) := \big(\frac{t}{1+t}, 2\ln(1+t), \frac{1}{\cos t}\big)$ $(t > -1)$; $t_0 := 0$;

(c) $\varphi(t) := \big(e^t\cos t, e^t\sin t, e^t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; $t_0 := 0$.

F10. Határozza meg az alábbi térgörbék megadott tulajdonságú érintőinek egyenletrendszerét és egyenletük paraméteres alakját, ha

(a) $\varphi(t) := \big(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; az érintő párhuzamos az $x + 3y + 2z = 0$ egyenletű síkkal;

(b) $\varphi(t) := \big(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; az érintő párhuzamos a $3x + y + z + 2 = 0$ egyenletű síkkal;

(c) $\varphi(t) := \big(\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t, \sin t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; az érintő párhuzamos az yz-koordinátasíkkal.

F11. Írja fel a

$$\varphi(t) := \big(a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t)\big) \qquad \big(t \in \mathbb{R},\ a > 0\big)$$

egyenletű ciklois érintőjének az egyenletét a $t_0 := \frac{\pi}{3}$ pontban. Mely pontokban vízszintes az érintő, és melyekben függőleges? Számolja ki az egy cikloisív alatti területet.

F12. Tekintse a

$$\varphi(t) := \big(t^2,\ t^3 - 3t\big) \qquad \big(t \in \mathbb{R}\big)$$

egyenletű görbét.

(a) Mutassa meg, hogy a görbének a $(3, 0)$ pontban két érintője van.

(b) Keresse meg azokat a pontokat, amelyekben az érintő vízszintes, illetve függőleges.

(c) Ábrázolja a görbét.

F13. Határozza meg az $r(\varphi) := 1 + \cos\varphi$ $(\varphi \in [0, 2\pi])$ kardiodid érintőjének az egyenletét a $\varphi_0 := \pi/3$ pontban. Keresse meg azokat a pontokat, amelyekben az érintő vízszintes, illetve függőleges.

F14. Legyen a Γ görbe polárkoordinátákban adott egyenlete $r = r(\varphi)$ $(\varphi \in I)$. Tegyük fel, hogy az $r(\varphi)$ függvény deriválható és $0 \notin \mathcal{R}_{r'}$. Ekkor a Γ görbének tetszőleges $P_0 = \big(r(\varphi_0), \varphi_0\big)$ pontjában van érintője. Az érintőegyenesnek és az OP_0 félegyenesnek az ω hajlásszögére a

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)}$$

képlet érvényes.

F15. Mutassa meg, hogy a logaritmikus spirális olyan görbe, amelyik a koordinátarendszer O kezdőpontjából kiinduló minden félegyenest azonos ω szög alatt metsz. Ez azt jelenti, hogy a görbe minden M pontjában az M-beli érintőnek és az OM félegyenesnek a szöge ugyanannyi (ω).

4. Görbület, simulósík, kísérő triéder, simulókör, torzió, Frenet-formulák

• A természetes paraméterezés alapvető tulajdonságai

F16. Tegyük fel, hogy $\Phi : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ a $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima görbe egy kétszer folytonosan deriválható természetes paraméterezése. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\big|\Phi'(s)\big| = 1$ minden $s \in [0, L]$ esetén;

(b) a $\Phi'(s)$ és $\Phi''(s)$ vektorok *merőlegesek* egymásra, azaz

$$\langle \Phi'(s), \Phi''(s)\rangle = 0 \qquad \big(s \in [0, L]\big).$$

• Görbület

D1. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ egy egyszerű sima görbe. Tegyük fel, hogy $\Phi : [0, L] \to \Gamma$ ennek az ívhossz szerinti, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése (L a Γ ívhossza.) Az $s \in [0, L]$-ben (azaz a $\Phi(s)$ pontban) a Γ *görbe görbületén* a $\kappa(s) := |\Phi''(s)|$ számot értjük.

F17. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima (tér)görbe, és tegyük fel, hogy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy tetszőleges, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése. Mutassa meg, hogy a görbének minden $t_0 \in (\alpha, \beta)$ paraméterű $\varphi(t_0) = P_0 \in \Gamma$ pontjában van görbülete és ez a

$$\kappa(t_0) = \frac{\big|\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big|}{|\varphi'(t_0)|^3}$$

képlettel számítható ki. Mi a görbület szemléletes jelentése?

Útmutatás. Legyen $\Phi : [0, L] \to \Gamma$ a görbe természetes paraméterezése (L a Γ ívhossza). Jelölje $S(t) := L_{\Gamma_t}$ $(t \in [\alpha, \beta])$ a $\Gamma_t := \big\{\varphi(u) \mid \alpha \le u \le t\big\}$ görbe ívhosszát és T ennek a függvénynek az inverzét: $T := S^{-1}$. Ekkor $\Phi = \varphi \circ T$. A tett feltételekből következik, hogy $\Phi \in C^2$, ezért a göbének minden pontban van görbülete.

A $\Phi = \varphi \circ T$ függvényre az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \varphi' \circ T \cdot T' \\ \Phi'' &= \varphi'' \circ T \cdot \big[T'\big]^2 + \varphi' \circ T \cdot T'' = \big[T'\big]^2 \cdot \varphi'' \circ T + \frac{T''}{T'} \cdot \Phi'. \end{aligned} \tag{1}$$

(Φ'' tehát a $\varphi'' \circ T$ és a Φ' vektorok lineáris kombinációja.)

Legyen $s_0 := S(t_0)$, $T(s_0) = t_0$, $\varphi(t_0) = \varphi\big(T(s_0)\big) = \Phi(s_0)$.

A $\kappa(s_0) := \big|\Phi''(s_0)\big|$ görbület kiszámolásához felhasznájuk azt, hogy $\Phi'(s_0)$ egységvektor és $\Phi'(s_0) \perp \Phi''(s_0)$. Ez alapján (egy kis „cselt” is alkalmazva!!)

$$\kappa(s_0) = \big|\Phi''(s_0)\big| = \big|\Phi'(s_0) \times \Phi''(s_0)\big|.$$

Ebbe (1)-et behelyettesítve, és felhasználva a vektoriális szorzat tulajdonságait (linearitás; egy vektor önmagával vett vektoriális szorzata nulla) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\kappa(t_0) = \kappa(s_0) = \big|\Phi''(s_0)\big| &= \big[T'(s_0)\big]^2 \cdot \big|\Phi'(s_0) \times \varphi''\big(T(s_0)\big)\big| = \\ &= \big[T'(s_0)\big]^2 \cdot \big|\Phi'(s_0) \times \varphi''(t_0)\big| = \big[T'(s_0)\big]^3 \cdot \big|\varphi'\big(T(s_0)\big) \times \varphi''(t_0)\big| = \\ &= \big[T'(s_0)\big]^3 \cdot \big|\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big|.\end{aligned}$$

Mivel

$$S(t) = \int_\alpha^t \big|\varphi'(u)\big|\, du \qquad \big(t \in (\alpha, \beta)\big),$$

ezért

$$S'(t) = \big|\varphi'(t)\big| \qquad \big(t \in (\alpha, \beta)\big),$$

és $T := S^{-1}$ miatt az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$T'(s) = \frac{1}{S'\big(T(s)\big)} = \frac{1}{\big|\varphi'\big(T(s)\big)\big|} = \frac{1}{\big|\varphi'(t)\big|}$$
$$\big(s \in (0, L),\ t \in (\alpha, \beta)\big),$$

következésképpen fennáll a

$$\kappa(t_0) = \frac{\big|\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big|}{|\varphi'(t_0)|^3} \qquad \big(t_0 \in (\alpha, \beta)\big)$$

egyenlőség.

A görbület szemléletes jelentése: Egy görbe P pontbeli görbületével az egyenestől való eltérését mérjük. Ezt a görbe érintőjének átlagos irányváltozási sebességével jellemezhetjük: Ha a görbe P, Q pontjaiban vett érintők hajlásszöge $\triangle\alpha$, $\triangle s$ pedig a P és Q közötti ívhossz, akkor a görbület „természetes” értelmezése a $\triangle\alpha/\triangle s$ hányados határértéke, midőn a Q pont a görbén a P ponthoz tart. Ennek „alkalmas” átalakítása volt számunkra a görbület definíciójának a motivációja. ■

F18. Mutassa meg, hogy az $y = f(x)$ $\big(x \in [a, b]\big)$ egyenlettel *explicit alakban* megadott síkbeli görbe görbülete az $\big(x_0, f(x_0)\big)$ $\big(x_0 \in (a, b)\big)$ pontban a

$$\kappa = \frac{\big|f''(x_0)\big|}{\big(1 + [f'(x)]^2\big)^{3/2}}$$

képlettel számítható ki, ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ legalább kétszer folytonosan deriválható.

F19. Számítsa ki az alábbi görbék görbületét a megadott pontokban:

(a) $\varphi(t) := \big(2\sin t, 2\cos t, 4t\big)\ (t \in \mathbb{R});\ \ t_0 := \frac{\pi}{4};$

(b) $\varphi(t) := \big(e^{-2t}, 2t, 4)\ (t \in \mathbb{R});\ \ t_0 := 0;$

(c) $\varphi(t) := \big(2, \sin \pi t, \ln t\big)\ (t > 0);\ \ t_0 := 1;$

(d) $\varphi(t) := \big(t, \sin(2t), 3t\big)\ (t \in \mathbb{R});\ \ t_0 := 0;$

(e) $\varphi(t) := \big(t, t^2 + t - 1, t\big)\ (t \in \mathbb{R});\ \ t_0 := 0;$

(f) $f(x) := x^3 - 1\ (x \in \mathbb{R});\quad x_0 := 1;$

(g) $f(x) := \sin x\ (x \in \mathbb{R});\quad x_0 := \frac{\pi}{2};$

(h) $f(x) := e^{-3x}\ (x \in \mathbb{R});\quad x_0 := 0.$

F20. Mi lesz $x \to +\infty$ esetén a görbület határértéke az alábbi egyenletekkel explicit alakban megadott görbéknél:

(a) $y = ax^2 + bx + x$ (a, b, c valós paraméterek);

(b) $y = e^{2x}$;

(c) $y = x^3$;

(d) $y = \sqrt{x}$?

F21. Határozza meg az alábbi, polárkoordinátás alakban megadott görbék görbületét a kijelölt pontokban:

(a) $r(\varphi) := |\sin 3\varphi|\ \big(\varphi \in \mathbb{R}\big),\quad \varphi_0 = 0,\ \frac{\pi}{6};$

(b) $r(\varphi) := 3 + 2\cos(3\varphi)\ \big(\varphi \in \mathbb{R}\big),\quad \varphi_0 = 0,\ \frac{\pi}{2};$

(c) $r(\varphi) := 3e^{2\varphi}\ \big(\varphi \in \mathbb{R}\big),\quad \varphi_0 = 0,\ 1.$

F22. Keresse meg a következő görbék maximális és minimális görbületű pontjait:

(a) $\varphi(t) := \big(2\cos t, 3\sin t);$

(b) $y = 4x^2 - 3;$

(c) $y = \sin x.$

F23. Számítsa ki az

$$F(x, y) = 0$$

implicit egyenlettel adott görbe görbületét.

Útmutatás.

$$\kappa = \frac{\left| \det \begin{bmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{bmatrix} \right|}{\big(F'^2_x + F'^2_y\big)^{3/2}}$$

■

- **A kísérő triéder élei és síkjai**

D2. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe, $\Phi : [0, L] \to \Gamma$, $\Phi \in C^2$ a természetes paraméterezése, és tegyük fel, hogy $\Phi''(s) \neq 0$ (L a Γ ívhossza). Legyen $s \in [0, L]$ esetén

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(s) &:= \Phi'(s) && \text{(ez az ún. \textit{érintő} egységvektor)},\\ \mathbf{n}(s) &:= \frac{\Phi''(s)}{|\Phi''(s)|} && \text{(ez az ún. \textit{főnormális} egységvektor)},\\ \mathbf{b}(s) &:= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s) && \text{(ez az ún. \textit{binormális} egységvektor)}. \end{aligned}$$

A páronként egymásra merőleges $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ egységvektorokból álló rendszert a **görbe kisérő triéderének** nevezzük.

Az $\mathbf{e}(s)$ és $\mathbf{n}(s)$ vektorok által kifeszített sík a **simulósík**,

az $\mathbf{n}(s)$ és $\mathbf{b}(s)$ vektorok által kifeszített sík a **normálsík**,

az $\mathbf{e}(s)$ és $\mathbf{b}(s)$ vektorok által kifeszített sík a **rektifikálósík**.

F24. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima (tér)görbe, és tegyük fel, hogy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy tetszőleges, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése; $t_0 \in (\alpha, \beta)$ és $\varphi(t_0) = P_0 \in \Gamma$. A görbe P_0 pontjához tartozó kísérő triéder **éleire** vonatkozóan mutassa meg a következőket:

(a) Az **érintő** irányába mutató vektor

$$\varphi'(t_0).$$

(b) A **főnormális** irányába mutató vektor

$$\big(\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big) \times \varphi'(t_0).$$

(c) A **binormális** irányába mutató vektor

$$\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0).$$

Útmutatás. Legyen $\Phi : [0, L] \to \Gamma$ a görbe természetes paraméterezése (L a Γ ívhossza). Az állítás *egyszerű* következménye a $\Phi = \varphi \circ T$ alapvető képletünk deriváltjaira vonatkozó

$$\begin{aligned} \Phi' &= \varphi' \circ T \cdot T' \\ \Phi'' &= \varphi'' \circ T \cdot \big[T'\big]^2 + \varphi' \circ T \cdot T'' = \big[T'\big]^2 \cdot \varphi'' \circ T + \frac{T''}{T'} \cdot \Phi'. \end{aligned} \tag{2}$$

összefüggéseknek.

(a) Görbe érintőjének irányvektora **definíció szerint** a $\varphi'(t_0)$ vektor. (A fentiek alapján a $\varphi'(t_0)$ és a $\Phi'(s_0)$ ($t_0 = T(s_0)$) vektorok párhuzamosak. Ezért neveztük *érintő egységvektornak* a kísérő triéder $\mathbf{e}(s_0) := \Phi'(s_0)$ vektorát.)

(c) *igazolása*: Tekintsük a $\mathbf{b} := \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}(t_0)$ binormális egységvektorral párhuzamos és egyirányú $\Phi'(s_0) \times \Phi''(s_0)$ vektort. (2) alapján

$$\Phi'(s_0) \times \Phi''(s_0) = \lambda\, \varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0),$$

ahol λ egy alkalmas pozitív szám (miért?), ezért $\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)$ valóban egy, a binormális irányába mutató vektor.

(b) *igazolása*: Az $\mathbf{e}, \mathbf{n}$ és $\mathbf{b}$ vektorok definíciójából következik (miért?), hogy

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{e},$$

és ez a (b) állításunkat bizonyítja. ■

F25. Határozza meg az alábbi görbék t_0 paraméterű pontjában a kísérő triéder vektorait és az élegyeneseinek az egyenletét:

(a) $\varphi(t) := \big(t^3 - 1,\, 2t^2 + 1,\, 3t - 2\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(b) $\varphi(t) := \big(1 + t^2,\, \frac{2}{1-t^2},\, t - t^3\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(c) $\varphi(t) := \big(\sin^2 t,\, \cos(2t),\, -\frac{1}{\sin t}\big)$ $(t \in (0, \pi))$, $\quad t_0 := \frac{\pi}{4}$.

Útmutatás. (a) A szóban forgó pont: $P_0 = \varphi(t_0) = \varphi(1) = (0,\, 3,\, 1)$.

A szükséges deriváltak és a helyettesítési értékek:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \big(3t^2,\, 4t,\, 3\big), \\ \varphi'(1) &= \big(3,\, 4,\, 3\big); \\ \varphi''(t) &= \big(6t,\, 4,\, 0\big), \\ \varphi''(1) &= \big(6,\, 4,\, 0\big). \end{aligned}$$

A kísérő triédert kifeszítő **három egységvektor**:

Az *érintő egységvektor*:

$$\mathbf{e}(1) = \frac{\varphi'(1)}{\big|\varphi'(1)\big|} = \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{34}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{k}.$$

Mivel

$$\varphi'(1) \times \varphi''(1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -12\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 12\mathbf{k},$$

ezért a *binormális egységvektor*:

$$\mathbf{b}(1) = \frac{\varphi'(1) \times \varphi''(1)}{\big|\varphi'(1) \times \varphi''(1)\big|} = -\frac{12}{\sqrt{612}}\mathbf{i} + \frac{18}{\sqrt{612}}\mathbf{j} - \frac{12}{\sqrt{612}}\mathbf{k}.$$

Végül a *főnormális egységvektor*:

$$\begin{aligned}\mathbf{n}(1) = \mathbf{b}(1) \times \mathbf{e}(1) &= \frac{6}{\sqrt{34}\sqrt{612}} \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{17\sqrt{2}}\big(17\mathbf{i} - 17\mathbf{k}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Az **érintő** egy irányvektora $\varphi'(1) = (3,4,3)$, ezért az *érintőegyenes* egyenleteinek különböző alakjai:

a *vektoregyenlete*

$$\mathbf{W}(t) = \varphi(1) + t\varphi'(1) = 3t\mathbf{i} + (3+4t)\mathbf{j} + (1+3t)\mathbf{k} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

a *paraméteres egyenletrendszere*

$$\begin{aligned} x &= 3t \\ y &= 3+4t \qquad (t \in \mathbb{R}), \\ z &= 1+3t \end{aligned}$$

az *egyenletrendszere*

$$\frac{x}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{3}.$$

A **binormális** egyenes egy irányvektora $\varphi'(1) \times \varphi''(1)$, azaz

$$\varphi'(1) \times \varphi''(1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -12\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 12\mathbf{k},$$

ezért az irányvektor a $\mathbf{b}_1 = (2,-3,2)$ vektor is lehet. A binormális egyenesnek (például) a vektoregyenlete:

$$\mathbf{W}(t) = \varphi(1) + t\mathbf{b}_1 = 2t\mathbf{i} + (3-3t)\mathbf{j} + (1+2t)\mathbf{k} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A **főnormális** egyenes egy irányvektora $\big(\varphi'(1) \times \varphi''(1)\big) \times \varphi'(1)$. Esetünkben

$$\big(\varphi'(1) \times \varphi''(1)\big) \times \varphi'(1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -12 & 18 & -12 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 102\mathbf{i} - 102\mathbf{k},$$

ezért az irányvektor a $\mathbf{n}_1 = (1,0,-1)$ vektor is lehet. A főnormális egyenesnek (például) a vektoregyenlete:

$$\mathbf{W}(t) = \varphi(1) + t\mathbf{n}_1 = t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (1-t)\mathbf{k} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

■

F26. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima (tér)görbe, és tegyük fel, hogy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy tetszőleges, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése; $t_0 \in (\alpha, \beta)$ és $\varphi(t_0) = P_0 \in \Gamma$. A görbe P_0 pontjához tartozó kísérő triéder **síkjaira** vonatkozóan mutassa meg a következőket:

(a) A **simulósík** egy normálvektora

$$\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0).$$

(b) A **normálsík** egy normálvektora

$$\varphi'(t_0).$$

(c) A **rektifikálósík** egy normálvektora

$$\big(\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big) \times \varphi'(t_0).$$

Útmutatás. Az **F**24. feladatból rögtön következik. ■

F27. Határozza meg az alábbi görbék t_0 paraméterű pontjában a kísérő triéder síkjainak az egyenletét:

(a) $\varphi(t) := \big(t^3 - 1,\, 2t^2 + 1,\, 3t - 2\big)\ (t \in \mathbb{R}), \quad t_0 := 1;$

(b) $\varphi(t) := \big(1 + t^2,\, \frac{2}{1-t^2},\, t - t^3\big)\ (t \in \mathbb{R}), \quad t_0 := 1;$

(c) $\varphi(t) := \big(\sin^2 t,\, \cos(2t),\, -\frac{1}{\sin t}\big)\ (t \in (0, \pi)), \quad t_0 := \frac{\pi}{4}.$

Útmutatás. (a) Az **F**25. feladat eredményeit használjuk.

A **simulósík** egy normálvektora a $\varphi'(1) \times \varphi''(1) = (-12, 18, -12)$ vektor, egy pontja $P_0 = \varphi(1) = (0, 3, 1)$, ezért az egyenlete

$$-12(x - 0) + 18(y - 3) - 12(z - 1) = 0,$$

illetve rendezés után

$$2x - 3y + 2z + 7 = 0.$$

A **normálsík** egy normálvektora a $\varphi'(1) = (3, 4, 3)$ vektor, egy pontja $P_0 = \varphi(1) = (0, 3, 1)$, ezért az egyenlete

$$3(x - 0) + 4(y - 3) + 3(z - 1) = 0,$$

illetve

$$3x + 4y + 3z - 15 = 0.$$

A **rektifikáló sík** egy normálvektora a $\big(\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big) \times \varphi'(t_0)$ vektorral párhuzamos $\mathbf{n}_1 = (1, 0, -1)$ vektor, egy pontja $P_0 = \varphi(1) = (0, 3, 1)$, ezért az egyenlete

$$x - z + 1 = 0.$$

■

F28. Bizonyítsa be, hogy a

$$\varphi(t) := \big(e^t \cos t,\ e^t \sin t,\ e^t\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

térgörbe kísérő triéderének élei állandó szöget zárnak be a z-tengellyel.

Útmutatás. A $\varphi'(t) = \big(e^t(\cos t - \sin t),\ e^t(\sin t + \cos t),\ e^t\big)$ és a $\mathbf{k} = (0,0,1)$ vektor hajlásszöge minden $t \in \mathbb{R}$ pontban

$$\cos(\varphi'(t), \mathbf{k}) = \frac{e^t}{e^t\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

tehát állandó.

A $\varphi'(t) \times \varphi''(t) = \big(e^{2t}(\sin t - \cos t),\ -e^{2t}(\sin t + \cos t),\ 2e^{2t}\big)$ és a $\mathbf{k} = (0,0,1)$ vektor hajlásszöge minden $t \in \mathbb{R}$ pontban

$$\cos(\varphi'(t) \times \varphi''(t), \mathbf{k}) = \frac{2e^{2t}}{e^{2t}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

ez is állandó.

A $\big(\varphi'(t) \times \varphi''(t)\big) \times \varphi'(t) = \big(-3e^{3t}(\sin t + \cos t),\ -3e^{3t}(\sin t - \cos t),\ 0\big)$ és a $\mathbf{k} = (0,0,1)$ vektorok esetében pedig

$$\big(\varphi'(t) \times \varphi''(t)\big) \times \varphi'(t) \ \perp\ \mathbf{k}$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. ■

• Simulósík, simulókör, görbületi sugár, görbületi középpont

T1. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima görbe. Tegyük fel, hogy ennek $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése. Ha a görbe P_1, P_2 és P_3 pontja a

$$P_0 = \varphi(t_0) = \big(x_0, y_0, z_0\big) \qquad \big(t_0 \in (\alpha, \beta)\big)$$

ponthoz tart, és e pontban $\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0) \neq 0$ (azaz $\varphi'(t_0) \nparallel \varphi''(t_0)$), akkor a P_1, P_2 és P_3 pontokon átfektetett síkok *egy* olyan síkhoz tartanak, amelynek egy normálvektora a

$$\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)$$

vektor. Ezt (a korábbi definíciónkkal összhangban) a görbe P_0 pontbeli **simulósíkjának** nevezzük.

A *simulósík egyenlete*:

$$< \mathbf{r} - \varphi(t_0),\ \varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0) > =$$

$$= \det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \varphi_3'(t_0) \\ \varphi_1''(t_0) & \varphi_2''(t_0) & \varphi_3''(t_0) \end{bmatrix} = 0.$$

(Itt $\varphi = \big(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\big)$).

D3. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe, $\Phi : [0, L] \to \Gamma,\ \Phi \in C^2$ a természetes paraméterezése, és tegyük fel, hogy $\Phi''(s) \neq 0$. A görbének a $\Phi(s)$ $(s \in [0, L])$ pontban a

(a) görbülete: $\kappa(s) := |\Phi''(s)|$,

(b) görbületi sugara: $\varrho(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$,

(c) görbületi középpontja: $\Psi(s) := \Phi(s) + \frac{\Phi''(s)}{|\Phi''(s)|^2}$.

F29. Írja fel a *simulósík* egyenletét a megadott pontokban:

(a) $\varphi(t) := \big(t, 2t, t^2\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 0,\ t_0 := 1$;

(b) $\varphi(t) := \big(t^3 - 2, t + 1, \frac{t^3}{3}\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(c) $\varphi(t) := \big(4\cos(\pi t), 4\sin(\pi t), t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 0,\ t_0 := 1$;

(d) $\varphi(t) := \big(3\cos(2\pi t), t, \sin(2\pi t)\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 0,\ t_0 := 1$.

F30. Írja fel a

$$\varphi(t) := \big(t,\ t^2,\ t^3\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

térgörbe $P\big(2,\ -\frac{1}{3},\ -6\big)$ ponton átmenő simulósíkjának az egyenletét.

Útmutatás. A görbe nem tartalmazza a megadott P pontot. A t_0 paraméterű pontban a simulósík egyenlete:

$$3t_0^2\, x - 3t_0\, y + z - t_0^3 = 0.$$

Mivel ez a sík tartalmazza a P pontot, ezért a koordinátáinak behelyettesítése után

$$t_0^3 - 6t_0^2 - t_0 - 6 = (t_0 - 1)(t_0 - 6)(t_0 + 1) = 0$$

adódik. A keresett simulósíkok egyenletei rendre

$$\begin{aligned} 3x - 3y + z - 1 &= 0, \\ 108x - 18y + z - 216 &= 0, \\ 3x + 3y + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

■

F31. Igazolja, hogy a

$$\varphi(t) := \big(t^2 - 2t,\ 3t - 5,\ -t^2 - 2\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

síkgörbe, és írja fel a görbe síkjának az egyenletetét.

F32. Írja fel a *simulókör* egyenletét a megadott pontokban:

(a) $\varphi(t) := \big(t, t^2\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 0$;

(b) $\varphi(t) := \big(t^3 - 2t^2, 3t + 2, t^2 - 5\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(c) $\varphi(t) := \big(\cos(2t), \sin(2t)\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := \frac{\pi}{4}$;

(d) $\varphi(t) := \big(2\cos t, 3\sin t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := \frac{\pi}{4}$.

F33. Határozza meg az alábbi térgörbék pontjaihoz tartozó simulókörök középpontjainak mértani helyét:

(a) $\varphi(t) := \big(a\cos t,\ a\sin t,\ bt\big)$ $\ (t \in \mathbb{R},\quad a > 0, b > 0)$;

(b) $\varphi(t) := \big(e^t,\ e^{-t},\ \sqrt{2}t\big)$ $\ (t \in \mathbb{R})$;

(c) $\varphi(t) := \big(\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t,\ t\big)$ $\ (t \in \mathbb{R})$.

F34. Bizonyítsa be, hogy a $\varphi(t) := \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ síkgörbe esetében a t_0 paraméterű ponthoz tartozó simulókör középpontjának ξ, η koordinátáira a következő képletek érvényesek:

$$\xi = \varphi_1(t_0) - \varphi_2'(t_0)\frac{[\varphi_1'(t_0)]^2 + [\varphi_2'(t_0)]^2}{\varphi_1'(t_0)\varphi_2''(t_0) - \varphi_1''(t_0)\varphi_2'(t_0)}$$

$$\eta = \varphi_2(t_0) + \varphi_1'(t_0)\frac{[\varphi_1'(t_0)]^2 + [\varphi_2'(t_0)]^2}{\varphi_1'(t_0)\varphi_2''(t_0) - \varphi_1''(t_0)\varphi_2'(t_0)},$$

ha $\varphi_1'(t_0)\varphi_2''(t_0) - \varphi_1''(t_0)\varphi_2'(t_0) \neq 0$.

F35. Mutassa meg, hogy az $y = f(x)$ egyenletű síkgörbe esetében a simulókörök középpontjának ξ, η koordinátáit a

$$\xi = x - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''},$$

$$\eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

képletekkel lehet kiszámolni, ha $y'' \neq 0$.

F36. Határozza meg a következő síkgörbék azon pontjait, amelyekben a simulókör sugara szélsőértéket vesz fel:

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(b) $y = e^x$;

(c) $y = \ln x$;

(d) $x = a(t - \sin t)$, $\ y = a(1 - \cos t)$ $\ (a > 0)$.

• Torzió, Frenet-formulák

D4. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe, $\Phi : [0, L] \to \Gamma$, $\Phi \in C^3$ a természetes paraméterezése, és tegyük fel, hogy $\Phi''(s) \neq 0$ (L a Γ ívhossza). A Γ görbe $\Phi(s)$ ($s \in [0, L]$) pontbeli **torzióját** így értelmezzük:

$$\tau(s) :=< \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) > .$$

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy egy görbe *görbülete* arról tájékoztat minket, hogy a görbe *mennyire tér el az egyenestől*. A görbe egy másik fontos tulajdonsága az, hogy *mennyire tér el egy síkgörbétől*. Ezt jellemzi a görbe **torziója**. Ha a görbe síkgörbe, akkor az a sík, amelyben a görbe elhelyezkedik, a görbe simulósíkja; ha a görbe nem síkgörbe, akkor a simulósíkja pontról pontra változhat, és ezt a csavarodást a simulósík normálvektorának, azaz a görbe binormálisának a változásával lehet mérni. *A torzió lényegében a binormális egységvektor ívhossz szerinti szögsebessége.* Részletesebben: ha a térgörbe P_0 és Q pontjában vett simulósíkok hajlásszöge $\triangle\beta$, és $\triangle s$ a PQ ív hossza, akkor a változás sebességét nyilván a

$$\tau = \lim_{Q \to P_0} \frac{\triangle\beta}{\triangle s}$$

szám méri. Ezt „alkalmas” módon célszerű átalakítani; hasonlóan ahhoz, ahogy ezt a görbületnél megmutattuk. A részleteket itt nem ismertetjük, az érdeklők ezt megtalálják *Szőkefalvi–Nagy Gyula, ...* tankönyvének 26. oldalán. Itt csupán azt emeljük ki, hogy kiderül, ez a szám minden esetben nemnegatív. További érdekesség az, hogy τ-nak előjelet is célszerű tulajdonítani; és ennek érdekes geometriai jelentése is van. (A görbét – pl. egy csavar menetének az élét – *jobb-* vagy *balcsavarodásúnak* szokás nevezni aszerint, amint a torzió pozitív vagy negatív; sőt éppen ez a geometriai motivációja a torzió előjelezésének.) A számolások azt mutatnák, hogy

$$\kappa = \kappa(P_0) = \kappa(s_0) = -\langle\, \mathbf{b}'(s_0),\, \mathbf{n}(s_0)\,\rangle$$

(itt $\mathbf{b}$ a binormális-, $\mathbf{n}$ pedig a főnormális egységvektorok.)

Ezután a 2. és a 3. Frenet-formulákból adódik az, hogy az fenti „természetes” módon megközelített torzió valóban az általunk *definiált* torzióval egyezik meg. ■

T2. **Frenet-formulák:** Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe, L az ívhossza, $\kappa(s)$ a görbülete és $\tau(s)$ a torziója ($s \in [0, L]$). Tegyük fel, hogy Γ-nak van háromszor folytonosan deriválható paraméterezése. Ekkor a kísérő triédert megadó $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ folytonosan deriválható függvények az alábbi lineáris differenciálegyenlet-rendszernek tesznek eleget:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'(s) &= \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s), \\
\mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s) \cdot \mathbf{e}(s) + \tau(s) \cdot \mathbf{b}(s), \\
\mathbf{b}'(s) &= -\tau(s) \cdot \mathbf{n}(s).
\end{aligned}$$

F37. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima (tér)görbe, és tegyük fel, hogy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy tetszőleges, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése; $t_0 \in (\alpha, \beta)$ és $\varphi(t_0) = P_0 \in \Gamma$. Igazolja, hogy a görbe P_0 pontjában a torzióra a

$$\tau(P_0) = \frac{\varphi'(t_0)\,\varphi''(t_0)\,\varphi'''(t_0)}{|\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)|^2}$$

képlet érvényes. (Itt a számlálóban a három vektor *vegyesszorzata* áll.)

Megjegyzés. Ennek az állításnak a bizonyítását – ami megtalálható *Szőkefalvi–Nagy Gyula, ...* tankönyvének 27. oldalán – nem kérjük, a megjegyzését azonban elvárjuk. ■

F38. Számítsa ki az alábbi görbék torzióját a megadott pontokban:

(a) $\varphi(t) := \big(a\cos t, a\sin t, bt\big)$ $(t \in \mathbb{R}, a, b > 0)$, $\quad t_0 := 3$;

(b) $\varphi(t) := \big(t^3 - 2t^2, 3t + 2, t^2 - 5\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(c) $\varphi(t) := \big(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(d) $\varphi(t) := \big(2t - \sin(2t), \cos(2t), 4\sin t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := \frac{\pi}{4}$;

(e) $\varphi(t) := \big(2abt, a^2\ln t, b^2t^2\big)$ $(t > 0,\ a, b > 0)$, $\quad t_0 := 1$;

(f) $\varphi(t) := \big(3t^2 - 2t, t^3, 1 - t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad P_0 := (8, 8, -1)$;

(g) $\varphi(t) := \big(3t^2, 2t + 3, 3t^3\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad P_0 := (3, 1, -3)$;

(h) $\varphi(t) := \big(t, \frac{t^3}{3a^2}, \frac{a^2}{2t}\big)$ $(t > 0,\ a > 0)$, $\quad P_0 := \big(1, \frac{1}{3a^2}, \frac{a^2}{2}\big)$.

F39. Bizonyítsa be, hogy egy térgörbe akkor és csak akkor síkgörbe, ha a torziója minden pontban nulla.

Útmutatás. Ha a görbe síkgörbe, akkor bármely két pontjához tartozó simulósíkok hajlásszögére $\triangle\beta = 0$, ezért a görbe minden pontjában a torzió nulla.

Ha viszont a görbe minden pontjában a torzió nulla, akkor az $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$ 3. Frenet-formula miatt $\mathbf{b}' \equiv 0$, azaz $\mathbf{b}(s) \equiv \mathbf{b}_0$, ahol $\mathbf{b}_0$ egy állandó vektor. Ha a görbét ívhossz szerint paraméterezzük, akkor a görbeív minden $\mathbf{r}$ pontjában

$$(\langle \mathbf{r}, \mathbf{b}_0 \rangle)' = \langle \mathbf{r}', \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \mathbf{e}, \mathbf{b}_0 \rangle,$$

azaz $\langle \mathbf{r}, \mathbf{b}_0 \rangle = \langle \mathbf{r}_0, \mathbf{b}_0 \rangle$, ahol $\mathbf{r}_0$ szintén egy állandó vektor. Mivel $\langle \mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{b}_0 \rangle = 0$, ezért a görbeív minden pontja benne van a $\mathbf{b}_0$ normálvektorú, $\mathbf{r}_0$ helyvektorú P_0 ponton átmenő síkban. ■

F40. Igazolja, hogy az alábbi görbék mindegyike síkgörbe, és írja fel a görbe síkjának az egyenletetét:

(a) $\varphi(t) := \big(t^2 - 2t,\ 3t - 5,\ -t^2 - 2\big)$ $\qquad (t \in \mathbb{R})$;

(b) $\varphi(t) := \big(5\cos t,\ 5\sin t,\ \cos t\big)$ $\qquad (t \in \mathbb{R})$;

(c) $\varphi(t) := \big(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t(\cos t + \sin t)\big)$ $\qquad (t \in \mathbb{R})$;

(d) $\varphi(t) := \big(\frac{1+t}{1-t},\ \frac{1}{1-t^2},\ \frac{t}{1+t}\big)$ $\qquad (t \in (-1, 1))$.