OPERÁCIÓKUTATÁS II.

Programtervező matematikusok számára

Verzió: 2005. február 10.

Kovács Margit

docens

ELTE TTK Operációkutatási Tanszék

Tartalomjegyzék

1. A szélsőértékfeladatok osztályozása

1.1. Alapvető fogalmak

Legyen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ folytonos függvény.
Jelölje $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ az f függvény **értelmezési tartomány**át, azaz legyen

$$D(f) = \{u \in \mathbb{R}^n : -\infty < f(u) < \infty\}.$$

Az **általános feltételes szélsőértékprobléma** a következő:
Legyen $\emptyset \neq U \subseteq D(f)$. Keressük az

$$f_* = \inf_{u \in U} f(u) \tag{1.1.1}$$

vagy

$$f^* = \sup_{u \in U} f(u) \tag{1.1.2}$$

függvényértéket, és az az ezeket realizáló $u_* \in U$ resp. $u^* \in U$ pontokat (ha egyáltalán ilyenek léteznek).

Az U halmazt az (1.1.1) resp. (1.1.2) probléma **megengedett tartomány**ának, az f függvényt pedig a megfelelő probléma **célfüggvény**ének nevezzük.

Az (1.1.1) feladatot **minimalizálási feladat**nak, az (1.1.2) feladatot **maximalizálási feladat**nak nevezzük.
Mivel

$$\sup_{u \in U} f(u) = -\inf_{u \in U} (-f(u))$$

ezért a továbbiakban csak a minimalizálási feladattal foglalkozunk, a különböző optimalitási fogalmak, tételek, módszerek könnyen átfogalmazhatók maximalizálási feladatra is.

Az általános szélsőértékfeladatok körébe beletartoznak a lineáris programozási feladatok is, ahol az $f(u)$ célfüggvény lineáris, az U megengedett tartomány pedig egy poliéder.

Nemlineáris szélsőértékfeladatról akkor beszélünk, ha az

a) f nem lineáris,

b) U nem poliéder

feltételek közül legalább az egyik nem teljesül.

Egy általános feltételes szélsőértékfeladatot **matematikai programozási feladat**nak nevezünk, ha az (1.1.1) feladatban az U megengedett tartomány

$$U = \bigcap_{i \in I_1 \cup I_2 \cup J_1 \cup J_2 \cup \{0\}} U_i$$

alakú, ahol I_1, I_2, J_1, J_2 véges indexhalmazok, amelyek rendre a nemlineáris egyenlőtlenséggel, a lineáris egyenlőtlenséggel, a nemlineáris egyenlőséggel, ill. lineáris egyenlőséggel adott feltételi halmazokat indexelik, azaz

$$\begin{aligned}
U_i &= \{u \in D(g_i) : g_i(u) \leq 0\} \quad \text{ha} \quad i \in I_1,\ \text{és } g_i(u) \text{ nem lineáris} \\
U_i &= \{u \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, u\rangle \leq b_i\} \quad \text{ha} \quad i \in J_1,\ \text{és } a_i \in \mathbb{R}^n,\ \ b_i \in \mathbb{R} \\
U_i &= \{u \in D(g_i) : g_i(u) = 0\} \quad \text{ha} \quad i \in I_2,\ \text{és } g_i(u) \text{ nem lineáris} \\
U_i &= \{u \in \mathbb{R}^n : \langle a_i, u\rangle = b_i\} \quad \text{ha} \quad i \in J_2,\ \text{és } a_i \in \mathbb{R}^n, b_i \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

alakúak, I_0 pedig valamilyen egyszerű struktúrájú halmaz (pl. valamelyik ortáns, valamilyen speciális kúp), gyakran maga az $\mathbb{R}^n$. (Itt és a későbbiekben $\langle \cdot . \cdot \rangle$ vektorok skalárszorzatát jelöli.)

Az I_1, I_2, J_1, J_2 indexhalmazok bármelyike lehet üres is, azaz nem minden típusú korlátozó feltételnek kell szerepelnie.

Nemlineáris matematikai programozási feladatról akkor beszélünk, ha

a) az $f(u)$ célfüggvény nemlineáris,

b) $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$

feltételek közül legalább az egyik teljesül, azaz vagy a célfüggvény, vagy legalább egy korlátozó feltétel nemlineáris.

Ebben a tananyagban feltesszük, hogy $I_2 \neq \emptyset$ csak abban az esetben fordul elő, ha $I_1 \cup J_1 = \emptyset$, azaz ha csak egyenlőségtípusú feltételi halmazok szerepelnek, minden más esetben az egyszerűbb tárgyalás végett feltesszük, hogy $I_2 = \emptyset$.

A matematikai programozási feladatok egy speciális osztályát képezik a **konvex programozási feladatok**. Itt mind a célfüggvénytől, mind a megengedett tartománytól, illetve az őket leíró függvényektől elvárunk bizonyos, későbbiekben pontosan definiált, konvexitási tulajdonságot. Ez az osztály azért fontos, mert erre az osztályra ismerjük legpontosabban az optimalitási tulajdonságokat, és ezek numerikus megoldására ismerünk hatékony algoritmusokat.

1.2. Feladatok

1.2.1. Feladat. *Írja fel az alábbi feladatok modelljét nemlineáris programozási feladattal:*

1.) *Melyik az az egységsugarú körbe írt háromszög, melynek oldalainak a négyzetösszege maximális?*

2.) *Határozza meg az*

$$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 4,\ x + y \leq 1\}$$

halmaznak a $(2, 0)$ *ponthoz legközelebbi nemnegatív koordinátájú pontját!*

3.) *Határozza meg az*

$$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \leq 6,\ -2x + y \leq 6\}$$

halmaznak a $(1, 3)$ *ponthoz legközelebbi nemnegatív koordinátájú pontját!*

4.) *Legyenek* α, β, γ *egy háromszög szögei. Igazolja a következő egyenlőtlenséget:*

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \leq \frac{1}{8}!$$

5.) *Igazolja, hogy*

$$\ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{4}}) \leq \frac{1}{2}\ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}) + \frac{1}{2}\ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}})!$$

6.) *Igazolja, hogy minden* n *természetes számra*

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{1 + x_i^2}!$$

2. Az optimum végessége és az optimumpont létezése: Weierstrass tétele

2.1. Alapvető fogalmak

Egy gyakorlati (1.1.1) típusú feladat elemzésénél a következő problémák merülhetnek fel:

- az optimális célfüggvényérték véges-e;
- van-e az optimális célfüggvényértéket realizáló pont;
- ha egy pontsorozaton a függvényértékek sorozata az optimális függvényértékhez konvergál, akkor vajon a pontsorozat az azt realizáló ponthoz konvergál-e.

Vezessük be a következő definíciókat:

2.1. Definíció. *$u_* \in U$* **lokális minimumpont***ja az $f : D(f) \to \mathbb{R}$ függvénynek az $U \subseteq D(f)$ halmazon, ha $\exists O_\delta(u_*)$ környezete úgy, hogy*

$$f(u) \geq f(u_*) \quad \forall u \in U \cap O_\delta(u_*). \tag{2.1.1}$$

Ha (2.1.1) teljesül $\forall u \in U$, akkor u_* **globális minimumpont***.*

Itt és a későbbiekben is $O_\delta(u)$ az $u \in \mathbb{R}^n$ pont δ sugarú gömbkörnyezetét jelöli.

2.1.1. Definíció. *Az*

$$U_* = \{u \in U \subseteq D(f) : f(u) = f_* = \inf_{v \in U} f(v)\}$$

az $f : D(f) \to \mathbb{R}$ függvény **minimumhalmaza***, f_* pedig a* **minimumérték***e az $U \subseteq D(f)$ halmazon.*

2.1.2. Definíció. *Az $\{u_k\} \subset U$ az $f : D(f) \to \mathbb{R}$ függvény* **minimalizáló sorozat***a az $U \subseteq D(f)$ halmazon, ha*

$$\lim_{k\to\infty} f(u_k) = f_* = \inf_{u \in U} f(u).$$

2.1.3. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az $\{u_k\}$ sorozat tart az U_* halmazhoz, jelölésben: $u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} U_*$, ha $\varrho(u_k, U_*) = \inf_{u \in U_*} \varrho(u_k, u) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, ahol $\varrho(u, v)$ az $\mathbb{R}^n$ metrikája.*

Ezekkel a definíciókkal a fenti három probléma azt jelenti, hogy teljesülnek-e a következő feltételek

$$f_* > 0, \quad U_* \neq \emptyset, \quad u_k \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} U_* \text{minden minimalizáló sorozatra.} \tag{2.1.2}$$

Már egyváltozós függvények esetében könnyű példát mutatni olyan feltételes szélsőértékfeladatokra, ahol sérülnek ezek az állítások. Például:

1. Legyen $f(u) = \frac{1}{u}$, $U = [-1, 1]$. Ekkor $f_* = -\infty$, $U_* = \emptyset$.
2. Legyen $f(u) = \frac{1}{u}$, $U = [0, \infty)$. Ekkor $f_* = 0$, de $U_* = \emptyset$.
3. Legyen $f(u) = \frac{u}{1 + u^2}$, $U = [0, \infty)$. Ekkor $f_* = 0$, $U_* = \{0\}$. Az $u_k = k$, $k = 1, 2, \ldots$ sorozat minimalizáló sorozat, ugyanis $\lim_{k\to\infty} \frac{k}{1 + k^2} = 0 = f_*$, de $u_k \not\to 0$.

2.2. Weierstrass tétele

A következő tétel elégséges feltételeket ad arra, hogy a (2.1.2) feltételek egy minimalizálási feladatra teljesüljenek. Az egyik feltétel megadásához szükséges a következő definíció:

2.2.1. Definíció. *Az $U \subset \mathbb{R}^n$-en értelmezett $f(u)$ függvény* **alsó nívóhalmaz***ának az (röviden* **nívóhalmaz***ának) az*

$$\mathcal{L}_f(c) = \{u \in D(f) : f(u) \leq c\}, \quad c \in \mathbb{R}$$

halmazt nevezzük.

2.2.1. Tétel. (Weierstrass tétele) *Legyen az $f(u)$ függvény folytonos az $\emptyset \neq U \subset D(f)$ halmazon. Tegyük fel, hogy az alábbi feltételek egyike teljesül:*

a) U kompakt halmaz;

b) U zárt és valamilyen $v \in U$-ra

$$\mathcal{L}_f(f(v)) = \{u \in U : f(u) \leq f(v)\}$$

korlátos;

c) U zárt és

$$\lim_{k\to\infty} f(u_k) = +\infty$$

teljesül minden olyan $\{u_k\} \subset U$ sorozatra, amelyre $\lim_{k\to\infty} \| u_k \| = \infty$

Akkor

1. *$f_* = \inf_{u\in U} f(u) > -\infty$;*
2. *$U_* = \{u \in U : f(u) = f_*\} \neq \emptyset$ kompakt;*
3. *$f(u)$ minden minimalizáló sorozata U-n tart U_*-hoz.*

Bizonyítás.
a) Legyen $\{u_k\} \subset U$ minimalizáló sorozat, azaz $\lim_{k\to\infty} f(u_k) = f_*$. Mivel U kompakt, $\{u_k\}$ sorozatnak van legalább egy torlódási pontja, és minden torlódási pontja U-ban van. Legyen $u_* \in U$ egy torlódási pont. $\{u_k\}$-ból kiválasztható egy konvergens részsorozat: $\{u_{k_m}\}$, $u_{k_m} \to u_*$, ha $m \to \infty$. Kihasználva $f(u)$ folytonosságát és f_* definicióját:

$$f_* \leq f(u_*) = \liminf_{m\to\infty} f(u_{k_m}) = \lim_{k\to\infty} f(u_k) = f_*,$$

következésképpen $f(u_*) = f_*$. Ebből következik, hogy $f_* > -\infty$, $U_* \neq \emptyset$ és minden minimalizáló sorozat valamennyi torlódási pontja U_*-beli. Innét következik a 3. állítás.

Legyen $\{v_k\} \subset U_*$. Mivel U kompakt és $\{v_k\} \subset U$, ezért kiválasztható belőle konvergens részsorozat $\{v_{k_m}\} \to v_* \in U$. A $\{v_k\}$ sorozat minimalizáló $f(u)$-ra, mivel $f(v_k) = f_*$, ezért minden torlódási pontja, így v_* is U_*-beli, azaz U_* zárt. Tehát U_* egy kompakt halmaz zárt részhalmaza, így ő maga is kompakt.

b)Mivel

$$\begin{aligned} f(u) &> f(v), \text{ ha } u \in U \setminus \mathcal{L}_f(f(v)), \\ f(u) &\leq f(v), \text{ ha } u \in \mathcal{L}_f(f(v)), \end{aligned}$$

a $f(u)$ függvény nem veheti fel az infimumát az $U \setminus \mathcal{L}_f(f(v))$ halmazon. Ezért elég a vizsgálatot az $\mathcal{L}_f(f(v))$ halmazra szorítani.

A f folytonossága miatt $\mathcal{L}_f(f(v))$ zárt, a feltétel szerint korlátos, tehát kompakt. Az a) részből ezért következik a tétel minden állítása.

c) Ha U korlátos, akkor az a) rész alapján igaz az állítás.

Tegyük fel, hogy U nem korlátos. Akkor létezik legalább egy $\{u_k\} \subset U$ sorozat, melyre

$$\lim_{k\to\infty} \| u_k \| = +\infty.$$

Akkor a feltétel szerint

$$\lim_{k\to\infty} f(u_k) = +\infty.$$

Válasszunk tetszőleges olyan $v \in U$ pontot, melyre $f(v) > f_*$. Tekintsük az

$$\mathcal{L}_f(f(v)) = \{u \in U : f(u) \leq f(v)\}$$

szinthalmazt. $\mathcal{L}_f(f(v))$ korlátos, mert ha nem lenne az, akkor létezne $\{w_k\} \subset \mathcal{L}_f(f(v))$ sorozat, amelyikre $\lim\limits_{k\to\infty} \| w_k \| = +\infty$ és erre a sorozatra $\lim\limits_{k\to\infty} f(w_k) = +\infty$, ami ellentmond annak, hogy $f(w_k) \leq f(v) < +\infty$.

$\mathcal{L}_f(f(u))$ korlátossága miatt a tétel valamennyi állítása következik a b) részből. ■

Megjegyzések

- A fenti tétel 1. és 2. állítása az a) feltétel mellett az analízisből jól ismer "kompakt halmazon folytonos függvény felveszi a minimumát" állítást takarja, a 3. állítással és a kompaktságot feloldó b) és c) feltételekkel lényegesen általánosítja azt.
- A tétel c) feltételében szereplő norma az $\mathbb{R}^n$ tér bármely normája lehet, pl. választhatjuk a

  1. $\|u\|_2 = (\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^2)^{\frac{1}{2}}$;
  2. $\|u\|_1 = \sum\limits_{i=1}^{n} |u_i|$;
  3. $\|u\|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,n} u_i$;
  4. $\|u\|_p = (\sum\limits_{i=1}^{n} u_i^p)^{\frac{1}{p}}, \; p \geq 1$;
  5. $\|u\|_W = \langle u, Wu \rangle, \; W$ szimmetrikus pozitív definit mátrix.

2.3. Kidolgozott példa

Feladat

Igaz-e, hogy az

$$f(x,y) = 1 - \frac{x+y}{1+(x+y)^2}$$

függvény minden minimalizáló sorozata az

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

halmazon minimumhelyhez konvergál?

Megoldás

A függvény folytonos, de az U halmaz nem kompakt. Ezért azt kell ellenőríznünk, hogy a Weierstrass tétel b) ill. c) feltételei közül teljesül-e valamelyik.

Legyen $u = (x,y)$. Mivel a koordináták nemnegatívak, így $x + y = |x| + |y| = \|u\|_1$, vagyis a vizsgálandó célfüggvényünk:

$$f(u) = 1 - \frac{\|u\|_1}{1+\|u\|_1^2}$$

Innét

$$\lim_{\|u\|_1 \to \infty} \left(1 - \frac{\|u\|_1}{1+\|u\|_1^2}\right) = 1 \tag{2.3.1}$$

azaz a Weierstrass tétel c) feltétele nem segít a döntésben.

Vizsgáljuk a $\mathcal{L}_f(f(v))$ nívóhalmazt valamely $v = (\bar{x},\bar{y})$, $\bar{x} \geq 0$, $\bar{y} \geq 0$ választással. A függvény folytonossága és a (2.3.1) határérték miatt feltehetjük, hogy elég kis pozitív ε mellett $1 - 2\varepsilon \leq f(v) \leq 1 - \varepsilon$. Ekkor

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f(f(v)) &= \left\{u \in U : 1 - \frac{\|u\|_1}{1+\|u\|_1^2} \leq f(v)\right\} \\
&= \left\{u \in U : (1-f(v))\|u\|_1^2 - \|u\|_1 + 1 - f(v) \leq 0\right\} \\
&= \left\{u \in U : \frac{1-\sqrt{1-4(1-f(v))^2}}{2(1-f(v))} \leq \|u\|_1 \leq \frac{1+\sqrt{1-4(1-f(v))^2}}{2(1-f(v))}\right\} \\
&\subset \left\{u \in U : \|u\|_1 \leq 2 + \sqrt{3}\right\},
\end{aligned}$$

ami éppen a nívóhalmaz korlátosságát jelenti, vagyis teljesül a Weierstrass tétel b) feltétele. Így a feladat állítása igaz.

2.4. Feladatok

2.4.1. Feladat. *Minimalizáló sorozat-e*

1.) *az* $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x^4}$, $(x \in \mathbb{R})$ *függvényre az* $x_k = k$, $k = 1, 2, \dots$ *sorozat?*

2.) *az* $f(u) = \dfrac{||u||}{1+||u||^2}$, $(u \in \mathbb{R}^n)$ *függvényre az* $u_k = k \cdot \mathbf{1}$ *sorozat, ahol a* $\mathbf{1} = (1, 1, \dots, 1)$*?*

2.4.2. Feladat. *Indokolja meg, fog-e minden U-beli minimalizáló sorozat konvergálni az $f(u)$ függvény U-beli minimumhelyéhez, ha*

1.) $U = \mathbb{R}^n$ *és* $f(u) = ||u||^2$*?*

2.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + 3y \leq 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ *és* $f(u) = x + y$*?*

3.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \geq 3, x \geq 0, y \geq 0\}$ *és* $f(u) = x + 2y$*?*

2.4.3. Feladat. *Felveszi-e az $f(u)$ függvény a minimumát az U halmazon, ha*

1.) $U = \{u \in \mathbb{R} : 1 \leq u \leq \infty$ *és* $f(u) = \dfrac{u^2}{1+u^4}$*?*

2.) $U = \mathbb{R}^n$ *és* $f(u) = ||u||^3$*?*

3.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$ *és* $f(u) = x + \dfrac{1}{y}$*?*

4.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1,\ 0 \leq y \leq 1\}$ *és* $f(u) = x + \dfrac{1}{y}$*?*

2.4.4. Feladat. *Igaz-e, hogy az*

$$f(x, y) = 1 - \frac{x^2 + y^2}{1 + (x^2 + y^2)^2}$$

függvény minden minimalizáló sorozata az

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

halmazon minimumhelyhez konvergál?

2.4.5. Feladat. *Igaz-e, hogy az*

$$f(x, y) = \frac{(x + y)^3 + 1}{1 + x + y}$$

függvény minden minimalizáló sorozata az

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\}$$

halmazon minimumhelyhez konvergál?

2.4.6. Feladat. *Mutassa meg, hogy az*

$$x_k = (k-1)\pi + (-1)^k \frac{1}{k}$$

$$y_k = k\pi + (-1)^k \frac{1}{2k}$$

koordinátákkal definiált $u_k = (x_k, y_k)$ sorozat minimalizáló sorozata az $f(x, y) = \cos(x + y)$ függvénynek az

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 0\},$$

de nem minimumhelyhez konvergál!

2.4.7. Feladat. *Definiálja egy* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *függvényre a lokális és globális maximumpontnak, a maximumhelyek halmazának és a maximalizáló sorozatnak a fogalmát!*

2.4.8. Feladat. *Fogalmazza át a 2.2.1. Tételt maximalizálási feladatra!*

3. Konvexitás

3.1. Konvex halmazok

3.1.1. A konvex halmaz definíciója

3.1.1. Definíció. *$U \subset \mathbb{R}^n$ konvex, ha $\forall u, v \in U,\ \alpha \in [0,1]$ esetén:*

$$\alpha u + (1-\alpha)v \in U$$

3.1.2. Műveletek konvex halmazokkal

3.1.2.1. Definíció.

- *Halmazok összege: $A_i \subset \mathbb{R}^n,\ i = 1, \ldots, m$ esetén*

$$A = \sum_{i=1}^{m} A_i = \{a \in \mathbb{R}^n : a = \sum_{i=1}^{m} a_i,\ a_i \in A_i\}.$$

- *Halmazok különbsége: $A, B \subset \mathbb{R}^n$ esetén*

$$C = A - B = \{c \in \mathbb{R}^n : c = a - b,\ a \in A,\ b \in B\}.$$

- *Halmazok skalárszorosa: $A \subset \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}$ esetén*

$$B = \lambda A = \{b \in \mathbb{R}^n : b = \lambda a,\ a \in A\}.$$

- *Halmazok Descartes szorzata: $A_i \subset \mathbb{R}^{n_i},\ i = 1, \ldots, m$ esetén*

$$A = A_1 \times \ldots \times A_m = \mathop{\times}_{i=1}^{m} A_i =$$

$$\{a = (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^{n_1 + \ldots + n_m} : a_i \in A_i,\ \ i = 1, \ldots, m\}.$$

Megjegyzés. Általában $A + A \neq 2A$ és $A - A \neq \{0\}$, de $2A \subset A + A$ és $\{0\} \subset A - A$.

3.1.2.1. Tétel. *Ha $A_i,\ i = 1, \ldots, m,\ \ A, B$ az $\mathbb{R}^n$ konvex halmazai, akkor*

$$1)\ A = \sum_{i=1}^{m} A_i, \quad 2)\ C = A - B, \quad 3)\ B = \lambda A,\ \lambda \in \mathbb{R}$$

is konvex.

Bizonyítás.

1. $$a,b\in A \Longrightarrow \begin{array}{l} a\in \sum\limits_{i=1}^{m} a_i, \quad a_i\in A_i \\ b=\sum\limits_{i=1}^{m} b_i, \quad b_i\in A_i \end{array}$$

$$\Longrightarrow \alpha a+(1-\alpha)b=\sum_{i=1}^{m}(\underbrace{\alpha a_i+(1-\alpha)b_i}_{\in A_i})\in A.$$

2. $$c_1,c_2\in C \Longrightarrow \begin{array}{l} c_1=a_1-b_1, \quad a_1\in A, \quad b_1\in B \\ c_2=a_2-b_2, \quad a_2\in A, \quad b_2\in B \end{array}$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow \alpha c_1+(1-\alpha)c_2 &= \alpha(a_1-b_1)+(1-\alpha)(a_2-b_2)\\ &= (\underbrace{\alpha a_1+(1-\alpha)a_2}_{\in A})-(\underbrace{\alpha b_1+(1-\alpha)b_2}_{\in B})\in C.\end{aligned}$$

3. $$a,b\in B \Longrightarrow a=\lambda a_0,\ b=\lambda b_0,\ a_0,b_0\in A$$

$$\Longrightarrow \alpha a+(1-\alpha)b=\lambda(\underbrace{\alpha a_0+(1-\alpha)b_0}_{\in A})\in B.$$

■

3.1.2.2. Tétel. *Ha $A_i\subset\mathbb{R}^{n_i}$, $i=1,\dots,m$, konvex halmazok akkor $A=\bigtimes_{i=1}^{m} A_i$ is konvex.*

Bizonyítás.
$a,b\in \bigtimes_{i=1}^{m} A_i \Longrightarrow$

$$a=(a_1,\dots,a_m),\quad b=(b_1,\dots,b_m),\quad b_i\in A_i,\quad i=1,\dots,m \Longrightarrow$$

$$\lambda a+(1-\lambda)b=(\underbrace{\lambda a_1+(1-\lambda)b_1}_{\in A_1},\dots,\underbrace{\lambda a_m+(1-\lambda)b_m}_{\in A_m})\in \bigtimes_{i=1}^{m} A_i.$$ ■

3.1.2.3. Tétel. *Ha $A_i\subset\mathbb{R}^{n}$, $i=1,\dots,m$, konvex halmazok, akkor a $C=\bigcap\limits_{i=1}^{m} A_i$ halmaz is konvex.*

Bizonyítás.

$$a,b\in C \Longrightarrow a,b\in A_i \ \ \forall i=1,\dots,m \Longrightarrow \alpha a+(1-\alpha)b\in A_i \ \ \forall i=1,\dots,m$$

$$\Longrightarrow \alpha a+(1-\alpha)b\in \bigcap_{i=1}^{m} A_i=C.$$ ■

3.1.2.2. Definíció. *Az $\{u_1,\dots,u_m\}\subset U$ pontrendszer <u>konvex kombinációja</u> az $u=\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i u_i$ pont, ahol $\alpha_i\geq 0$ $(i=1,\dots,m)$ és $\sum\limits_{i=1}^{m}\alpha_i=1$.*

3.1.2.4. Tétel. *Az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ halmaz akkor és csak akkor konvex, ha tartalmazza bármely véges számú elemének konvex kombinációját.*

Bizonyítás.
Elégségesség. Ha U tartalmazza bármely véges számú elemének konvex kombinációját, akkor bármely két elemének konvex kombinációját is tartalmazza, így definíció szerint konvex.

Szükségesség. Teljes indukcióval bizonyítunk.

Mivel U konvex, tartalmazza bármely két elemének konvex kombinációját.

Tegyük fel, hogy U tartalmazza bármely $m-1$ elemének konvex kombinációját. Legyen

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i, \;\; 0 \le \alpha_i \le 1, \;\; \sum_{i=1}^{m} \alpha_i = 1.$$

Ha valamelyik $\alpha_i = 0$, akkor u előáll a többi, $(m-1)$ számú u_j $(j \ne i)$ konvex kombinációjaként, így $u \in U$.

Legyen $0 < \alpha_i < 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ és vezessük be a $\beta_i = \dfrac{\alpha_i}{1-\alpha_m}$ $(i = 1, \ldots, m-1)$ változókat. Nyilvánvalóan $0 < \beta_i < 1$ $(i = 1, \ldots, m)$ és $\sum_{i=1}^{m-1} \beta_i = 1$, továbbá $v = \sum_{i=1}^{m-1} \beta_i u_i \in U$.

Mivel $u = (1-\alpha_m)v + \alpha_m u_m$, így $u \in U$. ∎

3.1.2.3. Definíció. *Az U-t tartalmazó konvex halmazok metszete az U konvex burka. Jele: $\mathsf{co}\, U$.*

Nyilvánvalóan $\mathsf{co}\, U$ a legszűkebb U-t tartalmazó konvex halmaz.

3.1.2.5. Tétel. *U konvex burka a véges sok U-beli elem konvex kombinációjaként előálló pontok halmaza.*

Bizonyítás.
Legyen W az U-beli elemek végeselemű konvex kombinációinak a halmaza. Nyilvánvalóan $U \subseteq W$. Mivel $U \subseteq \mathsf{co}\, U$ és $\mathsf{co}\, U$ konvex, így tartalmazza a $\mathsf{co}\, U$-beli elemek véges elemszámú konvex kombinációit, így az U-beliekét is, azaz $\mathsf{co}\, U \supseteq W$.

Másrészt, W konvex. Ugyanis, ha

$$u = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i u_i, \;\; u_i \in W, \; 0 \le \alpha_i \le 1 \; (i = 1, \ldots, p), \;\; \sum_{i=1}^{p} \alpha_i = 1$$

és

$$v = \sum_{i=1}^{q} \beta_i v_i, \;\; v_i \in W, \; 0 \le \beta_i \le 1 \; (i = 1, \ldots, q), \;\; \sum_{i=1}^{q} \beta_i = 1,$$

akkor

$$v_\alpha = \alpha u + (1-\alpha) v = \sum_{i=1}^{p} \underbrace{\alpha \alpha_i}_{\ge 0} u_i + \sum_{i=1}^{q} \underbrace{(1-\alpha)\beta_i}_{\ge 0} v_i;$$

$$\sum_{i=1}^{p} \alpha \alpha_i + \sum_{i=1}^{q} (1-\alpha)\beta_i = 1,$$

így v_α konvex kombinációja $p+q$ számú elemnek, azaz $v_\alpha \in W$.
Mivel $\mathsf{co}\, U$ a legszűkebb U-t tartalmazó konvex halmaz, ezért $\mathsf{co}\, U \subseteq W$. ∎

3.1.3. Feladatok

3.1.3.1. Feladat. (Carathèodory tétele) *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, konvex halmaz, $U \neq \emptyset$. Jelölje $\mathsf{co}\, U$ az U halmaz konvex burkát. Bizonyítsuk be, hogy $\forall u \in \mathsf{co}\, U$ előállítható $n+1$-nél nem több U-beli pont konvex kombinációjaként.*

Bizonyítás.

Legyen $u \in \mathsf{co}\, U$. Mivel $\mathsf{co}\, U$ konvex, így $u = \sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$, ahol $\sum\limits_{i=1}^{m} \alpha_i = 1$ és $\alpha_i > 0$, $u_i \in U$ $(i = 1, \ldots, m)$. (Az α_i-k pozitivitásának feltételezése jogos, mert u előállításában a 0 együtthatójú tagok elhagyása csökkenti az előállító pontok számát.)

Ha $m \leq n+1$, akkor a tétel állítása nyilván teljesül.

Legyen $m > n+1$. Vegyük az

$$\overline{u}_i \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \overline{u}_i = (u_i, 1)$$

pontokat. Mivel $m > n+1$, ezek lineárisan összefüggők. Következésképpen $\exists \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, melyre $\sum\limits_{i=1}^{m} |\gamma_i| \neq 0$ és $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i \overline{u}_i = 0$, vagyis

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i &= 0 \\ \sum_{i=1}^{m} \gamma_i &= 0. \end{aligned}$$

Innét

$$u = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i - t \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i u_i}_{=0} = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - t\gamma_i) u_i.$$

Ha t elég kis pozitív szám, akkor $\alpha_i - t\gamma_i \geq 0$. Mivel $\sum\limits_{i=1}^{m} |\gamma_i| \neq 0$, de $\sum\limits_{i=1}^{m} \gamma_i = 0$, ezért $\exists \gamma_i > 0$.

Jelölje

$$t = \frac{\alpha_s}{\gamma_s} = \min_{\gamma_i > 0} \frac{\alpha_i}{\gamma_i}.$$

Innét $\alpha_i - t\gamma_i \geq 0 \ \ (i = 1, \ldots, m)$, miközben

$$\alpha_s - t\gamma_s = 0 \ \text{ és } \ \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i - t\gamma_i) = 1,$$

így $u = \sum\limits_{i=1, i \neq s}^{m} (\alpha_i - t\gamma_i) u_i$, azaz az u-t előállító pontok száma eggyel csökkent. Ez a csökkentés mindaddig folytatható az előbbiek szerint amíg az $\{\overline{u}_i\}$ vektorrendszer lineáris összefüggősége meg nem szűnik, azaz az előállító komponensek száma legfeljebb $n+1$ nem lesz. ■

3.1.3.2. Feladat. *Legyenek $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ nemüres halmazok. Mutassuk meg, hogy*

$$\mathsf{co}\,(U \cap V) \subseteq (\mathsf{co}\, U) \cap (\mathsf{co}\, V).$$

Mutassunk példát, amikor szigorú tartalmazás teljesül.

3.1.3.3. Feladat. *Jelölje $\mathsf{int}\, U$ és $\overline{U}$ az $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmaz belsejét ill. lezártját. Legyen $u \in \mathsf{int}\, U$ és $v \in \overline{U}$. Mutassuk meg, hogy $w = \alpha u + (1-\alpha) v \in \mathsf{int}\, U$ minden $\alpha \in (0, 1]$ esetén.*

3.1.3.4. Feladat. *Mutassuk meg, hogy $\mathsf{int}\, U$ és $\overline{U}$ konvex halmazok, ha $U \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex.*

3.1.3.5. Feladat. *Konvexek-e az alábbi halmazok (használhatja a következő fejezet eredményeit is):*

1.) $$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} x^2 + 3y^2 \leq 8, \\ 3x - 7y \geq 1, \\ x^3 + 2x^2 + y^2 + y \leq 7, \\ x, y \geq 0\}; \end{array}$$

2.) $U = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z\}$;

3.) $U = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x + y < 3, \\ -x + y + z \leq 5, \\ x, y, z \geq 0\}; \end{array}$

4.) $U = \{u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 \leq 4, \\ x + y + z = 1\}; \end{array}$

5.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2, \\ (x-3)^2 + (y-2)^2 \leq 2, \\ 2y + x \geq 3, \\ x - (y-3)^2 \geq 3\}; \end{array}$

6.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2, \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 \leq 2, \\ y - x \leq 1, \\ (x-1)^2 + y \leq 1\}; \end{array}$

7.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2\pi, \\ y \geq 0, \\ y - \sin(x) \leq 0, \\ y + (x-1)^2 \leq 2\}; \end{array}$

8.) $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 8x + y + 2z \geq 7, \\ x^2 + 3y^2 + 7z \leq 10, \\ (x+1)^{-2} + 3y^2 + \mathrm{e}^{-2z^2} \geq 0, \\ x, y, z \geq 0\}; \end{array}$

9.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 1, \\ y \geq 0, \\ x^2 + y^2 \leq 2, \\ y - \frac{1}{x} \leq 1, \\ x + 3y \leq 3\}? \end{array}$

3.1.3.6. Feladat. *Mi a 3.1.3.5. Feladatban definiált halmazok belseje, lezártja, határa?*

3.2. Konvex függvények

3.2.1. A konvex függvények definíciója

3.2.1.1. Definíció. *Az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény konvex a konvex $U \subset D(f)$ halmazon, ha $\forall u, v \in U$ és $\lambda \in [0,1]$ esetén*

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) \le \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v). \tag{3.2.1}$$

Az $f(u)$ függvény szigorúan konvex, ha a (3.2.1)-ben az egyenlőség csak $\lambda = 0$ és $\lambda = 1$ esetén áll fenn, azaz

$$f(\lambda u + (1-\lambda)v) < \lambda f(u) + (1-\lambda) f(v) \ \ \forall \lambda \in (0,1).$$

$f(u)$ konkáv, ha $-f(u)$ konvex.

3.2.2. Konvex függvények karakterizációi

3.2.2.1. Tétel. (Jensen egyenlőtlenség) *Ha az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény konvex a konvex $U \subset D(f)$ halmazon, akkor $\forall u_i \in U$, $\lambda_i \ge 0$, $i = 1, \ldots, m$ és $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ esetén*

$$f(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i) \le \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(u_i).$$

Bizonyítás.
U konvexitása miatt $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \in U$. Teljes indukcióval a bizonyítás triviális. ■

3.2.2.2. Tétel. *Legyen $f \in C^1(U)$ (egyszer folytonosan differenciálható) a konvex $U \subset D(f)$ halmazon. $f(u)$ konvex $\iff$*

$$f(u) \ge f(v) + \langle f'(v), u - v \rangle \quad \forall u, v \in U. \tag{3.2.2}$$

Bizonyítás.
Szükségesség. $f(u)$ konvex $\Longrightarrow$

$$f(v + \alpha(u-v)) - f(v) \le \alpha[f(u) - f(v)] \ \ \forall u, v \in U \text{ és } \alpha > 0.$$

A Lagrange középértéktétel szerint:

$$\alpha \langle f'(v + \vartheta\alpha(u-v)), u - v \rangle \le \alpha[f(u) - f(v)] \tag{3.2.3}$$

$\forall u, v \in U$ és valamilyen $\vartheta \in [0,1]$ esetén. Az $\alpha > 0$-val osztva és $\alpha \to 0$ esetén (3.2.3)-ból kapjuk, hogy

$$\langle f'(v), u - v \rangle \le f(u) - f(v).$$

Elégségesség. Tegyük fel, hogy teljesül a (3.2.2) feltétel. Legyen $u, v \in U$ és $u_\alpha = \alpha u + (1-\alpha)v$. Akkor

$$\begin{aligned} f(u) - f(u_\alpha) &\ge \langle f'(u_\alpha), u - u_\alpha \rangle \\ f(v) - f(u_\alpha) &\ge \langle f'(u_\alpha), v - u_\alpha \rangle. \end{aligned}$$

Itt az első egyenlőtlenséget α-val, a másodikat $1-\alpha$-val szorozva és a két egyenlőtlenséget összeadva kapjuk, hogy

$$\alpha f(u) + (1-\alpha)f(v) - f(u_\alpha) \geq \langle f'(u_\alpha), \underbrace{\alpha u + (1-\alpha)v - u_\alpha}_{=0}\rangle = 0. \qquad \blacksquare$$

3.2.2.3. Tétel. *Legyen $f(u) \in C^1(U)$ (egyszer folytonosan differenciálható) az $U \subset D(f)$ konvex halmazon. $f(u)$ konvex U-n $\iff$*

$$\langle f'(u) - f'(v), u - v\rangle \geq 0 \quad \forall u, v \in U. \tag{3.2.4}$$

Bizonyítás.
Szükségesség. Ha $f(u)$ konvex, akkor a 3.2.2.2.Tétel alapján

$$\begin{aligned} f(u) - f(v) &\geq \langle f'(v), u - v\rangle, \\ f(v) - f(u) &\geq \langle f'(u), v - u\rangle. \end{aligned}$$

A két egyenlőtlenséget összeadva:

$$0 \geq \langle f'(v) - f'(u), u - v\rangle.$$

Elégségesség.

$$\begin{aligned}
&\alpha f(u) + (1-\alpha)f(v) - f(\alpha u + (1-\alpha)v) \\
&= \alpha[f(u) - f(\alpha u + (1-\alpha)v)] + (1-\alpha)[f(v) - f(\alpha u + (1-\alpha)v)] \\
&= \alpha \int_0^1 \langle f'(\alpha u + (1-\alpha)v + t(u - \alpha u - (1-\alpha)v)), u - \alpha u - (1-\alpha)v\rangle dt + \\
&\quad +(1-\alpha)\int_0^1 \langle f'(\alpha u + (1-\alpha)v + t(v - \alpha u - (1-\alpha)v)), v - \alpha u - (1-\alpha)v\rangle dt \\
&= \alpha(1-\alpha)\int_0^1 \langle f'(\underbrace{\alpha u + (1-\alpha)v + t(1-\alpha)(u-v)}_{=z_1}) \\
&\qquad\qquad - f'(\underbrace{\alpha u + (1-\alpha)v + t\alpha(v-u)}_{=z_2}), u - v\rangle dt \\
&= \alpha(1-\alpha)\int_0^1 \underbrace{\langle f'(z_1) - f'(z_2), z_1 - z_2\rangle}_{\geq 0} \frac{1}{t} dt \geq 0.
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3.2.2.4. Tétel. *Legyen $f(u) \in C^2(U)$ (kétszer folytonosan differenciálható) a nyílt konvex $U \subset \mathbb{R}^n$ halmazon. $f(u)$ konvex U-n $\iff$*

$$\langle f''(u)\xi, \xi\rangle \geq 0 \quad \forall u \in U, \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2.5}$$

Bizonyítás.
Szükségesség. Legyen $u \in U$ és válasszunk tetszőleges $\xi \in \mathbb{R}^n$ vektort. U nyíltsága miatt $\exists \varepsilon_0 > 0$ úgy, hogy $\forall \varepsilon : |\varepsilon| < \varepsilon_0$ esetén $u + \varepsilon\xi \in U$. A 3.2.2.3. Tétel szerint

$$\langle f'(u + \varepsilon\xi) - f'(u), \varepsilon\xi \rangle \geq 0.$$

A Lagrange középértéktételt alkalmazva:

$$\langle f''(u + \vartheta\varepsilon\xi)\xi, \xi \rangle \varepsilon^2 \geq 0,$$

azaz

$$\langle f''(u + \vartheta\varepsilon\xi)\xi, \xi \rangle \geq 0 \;\; \forall 0 \leq \vartheta \leq 1 \text{ és } \forall \varepsilon : |\varepsilon| \leq \varepsilon_0.$$

Mivel $f''(u)$ folytonos, $\varepsilon \downarrow 0$-val kapjuk a tétel állítását.

Elégségesség. Legyen $u, v \in U$, $\alpha \in [0, 1]$, $\xi = u - v$. A Lagrange középértéktétel szerint $\exists \vartheta \in [0, 1]$, hogy

$$\begin{aligned} \langle f'(u) - f'(v), u - v \rangle &= \langle f''(v + \vartheta(u - v))(u - v), u - v \rangle \\ &= \langle f''(v + \vartheta\xi)\xi, \xi \rangle \geq 0 \end{aligned}$$

a tétel feltétele miatt, ami a 3.2.2.3 Tétel szerint biztosítja f konvexitását. ∎

3.2.3. Konvex függvények függvényei

3.2.3.1. Tétel. *Legyenek az $f_i(u), i = 1, \ldots, m$, konvexek a konvex $U \subset \bigcap_{i=1}^{n} D(f_i)$ halmazon. Akkor a $f(u) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(u)$ függvény is konvex U-n minden $\alpha_i \geq 0, i = 1, \ldots, m$, esetén.*

Bizonyítás.
Legyen $u, v \in U$, $\beta \in [0, 1]$.

$$f(\beta u + (1 - \beta)v) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(\beta u + (1 - \beta)v) \leq \sum_{i=1}^{m} \alpha_i [\beta f_i(u) + (1 - \beta) f_i(v)]$$

$$= \beta \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(u) + (1 - \beta) \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f_i(v) = \beta f(u) + (1 - \beta) f(v).$$ ∎

3.2.3.2. Tétel. *Legyenek az $f_i(u), i = 1, \ldots, m$, konvexek a konvex $U \subset \bigcap_{i=1}^{m} D(f_i)$ halmazon. Akkor az $f(u) = \sup_{i=1,\ldots,m} f_i(u)$ függvény is konvex U-n.*

Bizonyítás.
Legyen $u, v \in U$, $\beta \in [0, 1]$ és $u_\beta = \beta u + (1 - \beta)v$. Ekkor $\forall \varepsilon > 0$-hoz $\exists i = i(\varepsilon, \beta) \in \{1, \ldots, m\}$ úgy, hogy

$$f(u_\beta) \leq f_i(u_\beta) + \varepsilon \leq \beta f_i(u) + (1 - \beta) f_i(v) + \varepsilon, \; \forall \varepsilon > 0.$$

$\varepsilon \to 0$ -val kapjuk a tétel állítását. ∎

3.2.3.2.1. Következmény. $g^+(u) = \max(g(u), 0)$ *konvex, ha* $g(u)$ *konvex.*

Bizonyítás.
Triviális.

3.2.3.3. Tétel. *Ha $\varphi(t)$ monoton növő konvex függvény az $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon és a $g(u)$ függvény konvex a konvex $U \subset D(f)$ halmazon, továbbá $\forall u \in U: \; g(u) \in [a,b]$, akkor az $f(u) = \varphi(g(u))$ függvény is konvex U-n.*

Bizonyítás.
Legyen $u, v \in U$, és $\beta \in [0,1]$.
g konvexitása miatt

$$g(\beta u + (1-\beta)v) = \beta g(u) + (1-\beta)g(v)$$

φ monoton növekedése miatt

$$\varphi(g(\beta u + (1-\beta)v)) \leq \varphi(\beta g(u) + (1-\beta)g(v)) \tag{3.2.6}$$

φ konvexitása miatt

$$\varphi(\beta g(u) + (1-\beta)g(v)) \leq \beta\varphi(g(u)) + (1-\beta)\varphi(g(v)) \tag{3.2.7}$$

(3.2.6) és (3.2.7) együtt

$$f(\beta u + (1-\beta)v) = \varphi(g(\beta u + (1-\beta)v)) \leq \beta\varphi(g(u)) + (1-\beta)\varphi(g(v)) = \beta f(u) + (1-\beta)f(v)$$

egyenlőtlenséget adja, ami épp f konvexitását jelenti. ■

3.2.3.3.1. Következmény. *Ha $g(u)$ konvex függvény a konvex $U \subset D(g)$ halmazon, akkor az*

$$\begin{aligned}
f(u) &= g^p(u), \; p \geq 1, \\
f(u) &= (\max(0, g(u)))^p = g^+(u)^p, \; p \geq 1, \\
f(u) &= -\frac{1}{g(u)}, \text{ha } g(u) < 0 \;\; \forall u \in U, \\
f(u) &= \max(0, \ln\frac{1}{-g(u)})^p, \text{ha } g(u) < 0 \;\; \forall u \in U, \; p \geq 1
\end{aligned}$$

függvények is konvexek U-n.

Bizonyítás.
Triviális.

3.2.4. Konvex függvényekkel definiált halmazok

3.2.4.1. Definíció. *Az $U \subset \mathbb{R}^n$-en értelmezett $f(u)$ függvény epigráfjának az*

$$\operatorname{epi} f = \{(u, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1} : u \in U, \; \eta \geq f(u)\}$$

halmazt nevezzük.

3.2.4.1. Tétel. *A konvex $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett $f(u)$ függvény akkor és csak akkor konvex, ha $\operatorname{epi} f$ konvex.*

Bizonyítás.
Szükségesség. Legyen

$$z_1 = (u_1, \eta_1) \in \operatorname{epi} f, \quad z_2 = (u_2, \eta_2) \in \operatorname{epi} f,$$

és

$$z_\alpha = (\underbrace{\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2}_{=u_\alpha \in U}, \alpha\eta_1 + (1-\alpha)\eta_2).$$

$f(u)$ konvexitása miatt

$$f(u_\alpha) \le \alpha f(u_1) + (1-\alpha) f(u_2) \le \alpha\eta_1 + (1-\alpha)\eta_2,$$

következésképpen $z_\alpha \in \operatorname{epi} f$.

Elégségesség. Legyen

$$u_1, u_2 \in U,\ z_1 = (u_1, f(u_1)) \in \operatorname{epi} f,\ z_2 = (u_2, f(u_2)) \in \operatorname{epi} f.$$

Az U halmaz és az $\operatorname{epi} f$ konvexitása miatt

$$z_\alpha = (\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2, \alpha f(u_1) + (1-\alpha) f(u_2)) \in \operatorname{epi} f,$$

következésképpen

$$\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2 \in U, \quad \text{és} \quad \alpha f(u_1) + (1-\alpha) f(u_2) \ge f(\alpha u_1 + (1-\alpha)u_2).$$ ■

3.2.4.2. Tétel. *Legyen $f(u)$ konvex a konvex $U \subset D(f)$ halmazon. Akkor az*

$$\mathcal{L}_f(c) = \{u \in U : f(u) \le c\}$$

szinthalmaz is konvex $\forall c \in \mathbb{R}$.

Bizonyítás.
Legyen $c \in \mathbb{R}$.

$$u, v \in \mathcal{L}_f(c) \Longrightarrow f(u) \le c \text{ és } f(v) \le c$$

$$\Longrightarrow f(\alpha u + (1-\alpha)v) \le \alpha f(u) + (1-\alpha) f(v) \le c \quad \forall \alpha \in [0,1]$$

$$\Longrightarrow \alpha u + (1-\alpha)v \in \mathcal{L}_f(c).$$ ■

3.2.4.3. Tétel. *Legyen $U_0 \subseteq \bigcap_{i=1}^{m} D(g_i)$ konvex és legyenek a $g_i(u), \quad i = 1, \dots, m$ függvények konvexek U_0-n, továbbá legyenek a $h_i(u)$; $i = m+1, \dots, s$ függvények lineárisak, azaz $h_i(u) = \langle a_i, u\rangle - b_i, \ \ i = m+1, \dots, s$. Akkor az*

$$U = \{u \in U_0 : g_i(u) \le 0, \ \ i = 1, \dots, m, \ \ h_i(u) = 0, \ \ i = m+1, \dots, s\}$$

halmaz is konvex.

Bizonyítás.
$U = \bigcap_{i=1}^{s} U_i$, ahol

$$\begin{aligned} U_i &= \{u \in U_0 : g_i(u) \le 0\}, \ \ i = 1, \dots, m, \\ U_i &= \{u \in U_0 : h_i(u) = 0\}, \ \ i = m+1, \dots, s. \end{aligned}$$

A 3.2.4.2. Tétel alapján az $U_i, \quad i = 1, \dots, m$ halmazok konvexek. Az $U_i, \quad i = m+1, \dots, s$ halmazok alterek, így szintén konvexek. A 3.1.2.1. Tétel szerint a konvex halmazok metszete is konvex. ■

3.2.5. Feladatok

3.2.5.1. Feladat. *Konvexek-e az alábbi függvények:*

1.) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \;\; f(u) = \| u \|,$

2.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n, \;\; f(u_1, u_2) = u_1^2 + 2u_1u_2 - 10u_1 + 5u_2,$

3.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^n, \;\; f(u_1, u_2) = u_1 e^{-(u_1+u_2)}.$

3.2.5.2. Feladat. *Konvexek-e az alábbi f függvények az adott U halmazon?*

1.) $f : U \to \mathbb{R}, \;\; f(u) = -\sqrt{u}, \;\; U = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0\},$

2.) $f : U \to \mathbb{R}, \;\; f(u_1, u_2) = (\max(\ln \dfrac{1}{20 - (u_1^2 + u_2^4)}, 0))^p, \;\; p \geq 1,$
$U = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^4 < 20\},$

3.) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \;\; f(u_1, u_2) = 2(u_2 - u_1^2)^2 - 10,$
$U = \{(u_1, u_2) : -1 \leq u_1 \leq 1, \;\; -1 \leq u_2 \leq 1\}.$

3.2.5.3. Feladat. *Legyen $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex függvény. Mutassuk meg, hogy az*

1.) $f(u) = \max(g(u), 0), \;\; U = \mathbb{R}^n$*;*

2.) $f(u) = -\dfrac{1}{g(u)}, \;\; U = \{u \in \mathbb{R}^n : g(u) \leq 0\}$

függvények is konvexek az adott U halmazon.

3.2.5.4. Feladat. *Határozza meg az alábbi függvények konvexitási és konkávitási tartományait:*

1.) $f(x, y) = \sin(x + y + z), \;\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

2.) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2), \;\; (x, y) \in \mathbb{R}^2;$

3.) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2), \;\; (x, y, z) \in \mathbb{R}^3;$

3.2.5.5. Feladat. *Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény olyan, hogy $|f(u)|$ konvex. Mutassuk meg, hogy az $U = \{u \in \mathbb{R}^n : f(u) = 0\}$ halmaz konvex.*

3.2.5.6. Feladat. *Mutassuk meg, hogy minden $u_i \in \mathbb{R}, \; \lambda_i \geq 0 \;\; (i = 1, \ldots, m), \; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ esetén*

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \leq \ln \left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \mathrm{e}^{u_i} \right)!$$

3.2.5.7. Feladat. *Mutassa meg, hogy minden $u_i > 0, \; \lambda_i \geq 0 \;\; (i = 1, \ldots, m), \; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ esetén*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right) \left(\sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{u_i} \right) \geq 1!$$

3.2.5.8. Feladat. *Mutassa meg, hogy minden $u_i > 0, \; \lambda_i \geq 0 \; (i = 1, \ldots, m), \; \sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ esetén*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i \right) \geq \prod_{i}^{m} u_i^{\lambda_i}!$$

3.2.5.9. Feladat. *Igazolja, hogy minden n természetes számra*

$$1 + \mathrm{e}^{\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i} \leq \prod_{i=1}^{n} (1 + \mathrm{e}^{x_i})^{\frac{1}{n}}!$$

3.2.5.10. Feladat. *Igazolja, hogy*

$$\ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{x^2+y^2}{4}}) \leq \frac{1}{2}\ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{x^2}{2}}) + \frac{1}{2}\ln(1 + \mathrm{e}^{\frac{y^2}{2}})!$$

3.2.5.11. Feladat. *Igazolja, hogy minden n természetes számra*

$$\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}(\sum_{i=1}^{n} x_i)^2} \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + x_i^2}!$$

3.2.5.12. Feladat. *Írja fel a konkáv függvény (3.2.1)-gyel analóg definícióját!*

3.2.5.13. Feladat. *Fogalmalmazza át a 3.2.2.1., 3.2.2.2., 3.2.2.3. és 3.2.2.4. karakterizációs tételeket konkáv függvényekre!*

3.2.5.14. Feladat. *Fogalmalmazza át a 3.2.3.1. és 3.2.3.2 tételeket konkáv függvényekre!*

3.2.5.15. Feladat. *Konvex vagy konkáv lesz az $f(u) = \varphi(g(u))$ függvény, ha*

1.) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton csökkenő konkáv függvény;*

2.) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konkáv,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton növő konkáv függvény;*

3.) $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *konvex,* $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *monoton csökkenő konvex függvény*

3.2.5.16. Feladat. *Mutassa meg, hogy a 3.2.3.3.Tételben és az előző feladatban szereplő eseteken kívül az $f(u) = \varphi(g(u))$ függvényről nem dönthető el egyértelműen, hogy konkáv lesz-e vagy konvex!*

3.2.5.17. Feladat. *Az $U \subset \mathbb{R}^n$-en értelmezett $f(u)$ függvény* **hipográf***jának az*

$$\mathsf{hipo}\, f = \{(u, \eta) \in \mathbb{R}^{n+1} : u \in U,\ \eta \leq f(u)\}$$

halmazt nevezzük. Mutassa meg, hogy a konvex $D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ halmazon értelmezett $f(u)$ függvény akkor és csak akkor konkáv, ha $\mathsf{hipo}\, f$ *konvex.*

3.2.5.18. Feladat. *Legyen $f(u)$ konkáv függvény a konvex $U \subset D(f)$ halmazon. Mutassa meg, hogy az*

$$\mathcal{U}_f(c) = \{u \in U : f(u) \geq c\}$$

felső nívóhalmaz *konvex* $\forall c \in \mathbb{R}$.

4. Optimalitási kritériumok és azok alkalmazásai

4.1. Optimalitási kritériumok az általános feltételes szélsőértékfeladatra

4.1.1. A lokális optimum szükséges feltétele

4.1.1.1. Tétel. *Legyen $f : D(f) \to \mathbb{R}$, $u_* \in U \subseteq D(f) \subseteq \mathbb{R}^n$ és $f \in C^1(U \cap O_\varepsilon(u_*))$ (folytonosan differenciálható). Akkor*

$$\langle f'(u_*), u - u_* \rangle \geq 0 \quad \forall u \in U \cap O_\varepsilon(u_*) \tag{4.1.1}$$

szükséges feltétele annak, hogy u_* az f függvény lokális minimumpontja legyen az U halmazon. Ha $O_\varepsilon(u_*) \subseteq U$, akkor a szükséges feltétel az $f'(u_*) = 0$ alakot ölti.

Bizonyítás.
Legyen $u_* \in U$ lokális minimumpontja az $f(u)$ függvénynek, továbbá legyen $u \in U \cap O_\varepsilon(u_*)$ és $\alpha \in [0, 1]$. Akkor a függvény Taylor sorából

$$f(u_* + \alpha(u - u_*)) - f(u_*) = \alpha\langle f'(u_*), u - u_* \rangle + o(\alpha) \geq 0.$$

Innét

$$\langle f'(u_*), u - u_* \rangle + \frac{o(\alpha)}{\alpha} \geq 0 \ \ \forall \alpha \in (0, 1).$$

$\alpha \downarrow 0$-val kapjuk a (4.1.1) egyenlőtlenséget.

Ha $O_\varepsilon(u_*) \subseteq U$, akkor $\forall v \in \mathbb{R}^n$-hez $\exists \varepsilon_0 > 0$ úgy, hogy $u = u_* + \varepsilon v \in O_\varepsilon(u_*)$ $\forall \varepsilon : |\varepsilon| < \varepsilon_0$, ezért

$$\langle f'(u_*), u_* + \varepsilon v - u_* \rangle \geq 0 \ \ \forall \varepsilon : |\varepsilon| < \varepsilon_0, \ v \in \mathbb{R}^n.$$

Innét

$$\varepsilon\langle f'(u_*), v \rangle \geq 0 \ \ \forall \varepsilon : |\varepsilon| < \varepsilon_0, \ v \in \mathbb{R}^n,$$

vagyis $\langle f'(u_*), v \rangle = 0 \ \ \forall v \in \mathbb{R}^n$, ami csak $f'(u_*) = 0$ mellett teljesül. ■

4.1.2. Az optimalitás egy szükséges és elégséges feltétele

4.1.2.1. Tétel. *Legyen az (1.1.1) feladatban a megengedett tartomány*

$$U = \bigcap_{i=0}^{m} U_i$$

alakban adott. Akkor az $u_* \in U$ pontosan akkor lesz optimumpontja az (1.1.1) feladatnak, ha $\bigcap_{i=-1}^{m} U_i = U \cap U_{-1} = \emptyset$, ahol $U_{-1} = \{u \in \mathbb{R}^n : f(u) < f(u_*)\}$.

Bizonyítás.
Szükségesség. Tegyük fel, hogy $\exists v \in \bigcap_{i=-1}^{m} U_i$. Mivel $v \in U_{-1}$, így $f(v) < f(u_*)$, azaz u_* nem minimumpont, ami ellentmondás.

Elégségesség. Legyen $\bigcap_{i=-1}^{m} U_i = \emptyset$. Akkor $\forall u \in U$ esetén $u \notin U_{-1}$, azaz $f(u) \geq f(u_*)$, azaz u_* minimumpont. ■

4.2. Az optimalitás szükséges feltétele egyenlőség-feltételek mellett

4.2.1. Lagrange multiplikátorok módszere

Ha csak egyenlőség típusú feltételek szerepelnek, azaz ha $f, g_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $(i = 1, \ldots, m)$, akkor az

$$f_* = \inf_{u \in U} f(u) \tag{4.2.1}$$

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n : g_i(u) = 0 \ \ (i = 1, \ldots, s)\}, \tag{4.2.2}$$

feladatra az optimalitás szükséges feltételét a klasszikus analízisből ismert Lagrange multiplikátororok tétele adja. A tétel egyszerűbb kezelése érdekében vezessünk be néhány fogalmat.

4.2.1.1. Definíció. *$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ függvény vektorfüggvény, ha*

$$F = (f_1, \ldots, f_s) \text{ és } f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \ \ (i = 1, \ldots, s).$$

Az F vektorfüggvény értelmezési tartománya $D(f) = \bigcap_{i=1}^{s} D(f_i)$.

4.2.1.2. Definíció. *Az $F = (f_1, \ldots, f_s) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$ vektorfüggvény folytonos az $u \in \mathbb{R}^n$ pontban, ha ott minden f_i $(i = 1, \ldots, s)$ függvény folytonos.*

4.2.1.3. Definíció. *Legyen $u = (v, w) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. Az $F = (f_1, \ldots, f_s) : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m} \to \mathbb{R}^s$ vektorfüggvény [folytonosan] differenciálható az $u \in \mathbb{R}^m$, ill. a $v \in \mathbb{R}^{n-m}$ változója szerint, ha minden f_i $(i = 1, \ldots, s)$ [folytonosan] differenciálható u, ill. v szerint.*
Az $f_i(u, v)$ függvények $u \in \mathbb{R}^m$, ill.$v \in \mathbb{R}^{n-m}$, változója szerinti gradienseiből, mint sorvektorokból álló $(s \times m)$, ill. $(s \times (n - m))$ mátrixot jelöljük $F'_u(u, v)$-vel ill. $F'_v(u, v)$-vel.

Megjegyzés: A deriváltaknál csak akkor jelezzük alsó indexkent, hogy melyik változó szerinti parciális deriváltról van szó, ha az csak egy részvektora a függvény változó-vektorának.

A vektorfüggvényekkel a feladat a következő alakot ölti:

$$f_* = \inf_{u \in U} f(u) \tag{4.2.3}$$

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n : G(u) = 0, \tag{4.2.4}$$

ahol $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, $G = (g_1, \ldots, g_s) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ vektorfüggvény.

A következő két, a klasszikus analízisből ugyancsak jól ismert tételre szükségünk lesz a bizonyításhoz, ezeket emlékeztetőül bizonyítás nélkül közöljük.

4.2.1.1. Tétel. (Implicit-függvény tétel) *Legyen $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$, $F : U \times V \to \mathbb{R}^n$, $(u_0, v_0) \in U \times V$ és teljesüljenek az alábbi feltételek:*

1.) *F folytonos az (u_0, v_0) pontban;*

2.) *$F(u_0, v_0) = 0$;*

3.) *létezik az $(u_0, v_0) \in U \times V$ pontnak olyan $O_\varepsilon((u_0, v_0)) \subseteq U \times V$ környezete, hogy $\forall (u, v) \in O_\varepsilon((u, v))$ pontban F folytonosan differenciálható u szerint és $F'_u(u_0, v_0)$ nem szinguláris.*

Akkor az

$$F(u,v)=0$$

egyenlet az (u_0,v_0) *pont valamely környezetében megoldható, azaz léteznek olyan* $\delta_1,\delta_2>0$ *számok, és egy, az* $O_{\delta_1}(v_0)$ *környezetben értelmezett és a* v_0 *pontban folytonos* $\varphi=(\varphi_1,\dots,\varphi_n):\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ *vektorfüggvény, hogy minden olyan* (u,v) *esetén, melyre* $v\in O_{\delta_1}(v_0)$ *és* $u=\varphi(v)$*, teljesül az* $F(u,v)=0$ *egyenlet, és megfordítva, minden olyan* (u,v) *esetén, melyre* $F(u,v)=0$, $u\in O_{\delta_1}(u_0)$ *és* $v\in O_{\delta_2}(v_0)$*, fennáll az* $u=\varphi(v)$ *összefüggés.*

Ha F v *szerint is folytonosan differenciálható az* $O_\varepsilon((u_0,v_0))$ *környezetben, akkor a* φ *vektorfüggvény differenciálható a* v_0 *pontban és*

$$\varphi'(v_0)=-\left[F'_u(u_0,v_0)\right]^{-1}F'_v(u_0,v_0).$$

4.2.1.2. Tétel. *Legyen* $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *vektorfüggvény folytonosan differenciálható az* $u_0\in\mathbb{R}^n$ *pont* $O_\delta(u_0)$ *környezetében és tegyük fel, hogy* $F'_u(u_0)$ *nem szinguláris. Ha* $F(u_0)=b_0$*, akkor bármely elég kis* $\delta>0$*-hoz* $\exists\varepsilon>0$*, hogy* $\forall b\in O_\varepsilon(b_0)$ *esetén az* $F(u)=b$ *egyenletnek pontosan egy* $u=\varphi(b)\in O_\delta(u_0)$ *megoldása van és* φ *folytonosan differenciálható az* $O_\delta(b_0)$ *környezetben.*

A (4.2.3)-(4.2.4) feladatra a következő optimalitási kritériumot adhatjuk meg:

4.2.1.3. Tétel. (Lagrange multiplikátorok tétele) *Tegyük fel, hogy a (4.2.1)-(4.2.2) feladatban a* $G'(u_*)$ *mátrix rangja* s*, azaz az* u_* *pontban a* g_i *függvények gradiensvektorai lineárisan függetlenek. Ahhoz, hogy* $u_*\in U_*=\{u\in U:f(u)=f_*\}$ *legyen, szükséges, hogy létezzen olyan* $\lambda^*=(\lambda_1^*,\dots,\lambda_s^*)\in\mathbb{R}^s$ *vektor úgy, hogy az* (u_*,λ^*) *vektorpár elégítse ki a*

$$f'(u)+\sum_{i=1}^{s}\lambda_i g_i'(u)=0, \tag{4.2.5}$$

$$g_i(u)=0\qquad(i=1,\dots,s), \tag{4.2.6}$$

vagy vektoralakban

$$f'(u)+G'^T(u)\lambda=0, \tag{4.2.7}$$

$$G(u)=0 \tag{4.2.8}$$

egyenletrendszert, ahol G'^T *a* G' *mátrix transzponáltját jelöli.*

Bizonyítás.
Legyen $u_*\in U_*$ minimumpont. Ha $s=n$, akkor a 4.2.1.2. Tétel szerint az U halmaz egyetlen u_* ponból áll és $G'(u_*)$ nem szingularitása miatt ebben a pontban

$$\lambda=-\left[G'^T(u_*)\right]^{-1}f'(u_*)$$

kielégíti a (4.2.7) feltételt.

Legyen $s<n$. Particionáljuk az u vektorok koordinátáit $u=(v,w),\quad v\in\mathbb{R}^s,\quad w\in\mathbb{R}^{n-s}$ alakban úgy, hogy az $u_*=(v_*,w_*)$ pontban a $G'(u_*)=[G'_v(v_*,w_*)\ \ G'_w(v_*,w_*)]$ mátrixban a $G'_v(v_*,w_*)$ $(s\times s)$ almátrix nem szinguláris.

Mivel $u_*\in U$, így $G(u_*)=G(v_*,w_*)=0$. Az implicit-függvény tétel szerint a w_* pont létezik olyan $\varphi(w)$ differenciálható függvény, melyre

$$v_*=\varphi(w_*);\quad G(\varphi(w_*),w_*)=0$$

és

$$\varphi'(w) = -\left[G'_v(\varphi(w), w)\right]^{-1} G'_w(\varphi(w), w). \tag{4.2.9}$$

Legyen $w \in O_\delta(w_*)$. Mivel itt $G(\varphi(w), w) = 0$, ezért $u = (\varphi(w), w) \in U$. Így

$$f(\varphi(w_*), w_*) = f(v_*, w_*) = f(u_*) \leq f(u) = f(\varphi(w), w).$$

Következésképpen az $f(\varphi(w), w) = h(w)$ függvénynek a $w = w_*$ pontban lokális minimuma van. Az optimalitás szükséges feltétele szerint $h'(w_*) = 0$. Az összetett függvény differenciálási szabálya szerint

$$h'(w_*) = \varphi'^T(w^*) f'_v(\varphi(w_*), w_*) + f'_w(\varphi(w_*), w_*).$$

Figyelembe véve (4.2.9)-t és a $\varphi(w_*) = v_*$ összefüggést azt kapjuk, hogy

$$h'(w_*) = -G'{}_w(v_*, w_*)^T \left[G'_v(v_*, w_*)^T\right]^{-1} f'_v(v_*, w_*) + f'_w(v_*, w_*) = 0. \tag{4.2.10}$$

Jelölje

$$\lambda^* = -\left[G'_v(v_*, w_*)^T\right]^{-1} f'_v(v_*, w_*). \tag{4.2.11}$$

A (4.2.10) és (4.2.11) összefüggések a

$$\begin{aligned} -\left[G'_v(v_*, w_*)^T\right] \lambda^* + f'_v(v_*, w_*) &= 0 \\ -\left[G'_w(v_*, w_*)^T\right] \lambda^* + f'_w(v_*, w_*) &= 0 \end{aligned}$$

rendszert adják, ami ekvivalens a

$$G'(u_*)^T \lambda^* + f'(u_*) = 0$$

egyenlettel, ami azt jelenti, hogy az (u_*, λ^*) vektorpár kielégíti a tétel állítását. ∎

Vegyük észre, hogy a tételben szereplő (4.2.5) egyenlőség a

$$L(u, \lambda) = f(u) + \sum_{i=1}^{s} g_i(u)$$

Lagrange függvény segítségével

$$L'_u(u_*, \lambda^*) = 0$$

alakot ölti.

4.2.2. Feladatok

4.2.2.1. Feladat. *Oldja meg Lagrange multiplikátorok módszerével a következő feladatokat:*

1.) $\begin{array}{l} -2x^2 + 4xy + y^2 \to \min \\ x^2 + y^2 = 1 \end{array}$.

2.) $\begin{array}{l} \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \to \min \\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 0 \\ x + y + z = 0 \end{array}$.

3.) $\begin{array}{l} \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2) \to \min \\ z - xy = 5 \end{array}$.

4.2.2.2. Feladat. *Keressük meg a minimumát és a maximumát az*

$$f(x, y, z) = 2x^2 + 5y^2 + 11z^2 + 20xy - 4xz + 16yz$$

függvénynek az egységgömb felületén?

4.2.2.3. Feladat. *Határozza meg az origónak az*

$$z - xy = 5$$

felülettől való távolságát.

4.2.2.4. Feladat. *Határozza meg az* $(1, 2, 1)$ *pontnak az*

$$2x - y + z = 4$$

síktól való távolságát.

4.2.2.5. Feladat. *Legyenek* α, β, γ *egy háromszög szögei. A Lagrange multiplikátorok módszere segítségével igazolja a következő egyenlőtlenségeket:*

1.) $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \le \frac{3\sqrt{3}}{2}$;

2.) $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \dfrac{3}{2}$;

3.) $\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2} \le \frac{1}{8}$.

4.2.2.6. Feladat. *Írjon az egységkörbe olyan háromszöget, melynek oldalainak négyzetösszege maximális. Oldja meg a feladatot a Lagrange multiplikátorok módszerével.*

4.2.2.7. Feladat. *A 1.2.1. Feladat melyik részfeladata oldható meg Lagrange multiplikátorok módszerébel? Oldja meg a feladatokat!*

4.3. Az optimalitás jellemzése csökkenési és megengedett irányokkal

4.3.1. A megengedett csökkenési irányok kritériuma

Tekintsük az

$$f(u) \to \min_{u \in U} \tag{4.3.1}$$

feladatot, ahol

$$\begin{aligned} U = \{u \in \mathbb{R}^n : g_i(u) &\le 0 \ \ (i \in I), \\ g_j(u) &= \langle a_j, u\rangle - b_j \le 0 \ \ (j \in J_1), \\ g_j(u) &= \langle a_j, u\rangle - b_j = 0 \ \ (j \in J_2)\}, \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

ahol $f, g_i \ \ (i \in I) \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $a_j \in \mathbb{R}^n$, $\ b_j \in \mathbb{R} \ \ (j \in J_1 \cup J_2)$, I, J_1 és J_2 véges indexhalmazok.

Megengedett, hogy az I, J_1, J_2 indexhalmazok bármelyike üres legyen, azaz valamelyik típusú korlátozó feltétel hiánya. Ha mindhárom indexhalmaz üres akkor feltétel nélküli, azaz $\mathbb{R}^n$-en történő mimimalizálásról van szó.

Az U halmaz előállítható $U = U_1 \cap U_2 \cap U_3$ alakban, ahol

$$\begin{aligned} U_1 &= \{u \in \mathbb{R}^n : g_i(u) \le 0, \ \ i \in I\}, \\ U_2 &= \{u \in \mathbb{R}^n : g_i(u) = \langle a_j, u\rangle - b_j \le 0, \ \ j \in J_1\}, \\ U_3 &= \{u \in \mathbb{R}^n : g_i(u) = \langle a_j, u\rangle - b_j = 0, \ \ j \in J_2\}. \end{aligned}$$

4.3.1.1. Definíció. $0 \ne s \in \mathbb{R}^n$ **megengedett iránya** *az U halmaznak az $u \in U$ pontból, ha $\exists \varepsilon_0 > 0$ konstans, hogy $u + \varepsilon s \in U \ \ \forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.*

Legyen $\operatorname{int} U \ne \emptyset$ azaz $\exists u \in U$, hogy annak valamely nyílt $O_\delta(u)$ környezetére $O_\delta(u) \subset U$. Nyilvánvaló, ekkor $\forall s \in \mathbb{R}^n$ megengedett irány az $u \in \operatorname{int} U$ pontból.

Legyen $\operatorname{ri} U \ne \emptyset$, azaz ha H a legszűkebb U-t tartalmazó affin halmaz, akkor $\exists u \in U$, hogy annak valamely nyílt $O_\delta(u)$ környezetére $O_\delta(u) \cap H \subset U$. Nyilvánvalóan ekkor $H \subseteq U_3$ és $\forall s \in H$ megengedett irány az $u \in \operatorname{ri} U$ pontból.

4.3.1.2. Definíció. *A $g_i(u) \le 0 \ \ (i \in I \cup J_1)$ feltétel* **aktív** *az $u \in U$ pontban, ha $g_i(u) = 0 \ \ (i \in I \cup J_1)$. (Az egyenlőségtípusú feltételek konstrukciójukból adódóan mindig aktívak). Az u-beli aktív feltételek indexhalmazát jelölje $I(u) \cup J_1(u) \cup J_2$, ahol*

$$\begin{aligned} I(u) &= \{i \in I : g_i(u) = 0\} \\ J_1(u) &= \{j \in J_1 : \langle a_j, u\rangle - b_j = 0\}. \end{aligned}$$

4.3.1.1. Tétel. *Ha $0 \ne s \in \mathbb{R}^n$ megengedett iránya az U halmaznak az $u \in U$ pontból, akkor $\exists \sigma \ge 0$ konstans, hogy $(s, \sigma) \in \mathbb{R}^{n+1}$ kielégíti a*

$$\langle g_i'(u), s\rangle + \sigma \le 0 \ \ (i \in I(u)) \tag{4.3.3}$$

$$\langle a_j, s\rangle \le 0 \ \ (j \in J_1(u)) \tag{4.3.4}$$

$$\langle a_j, s\rangle = 0 \ \ (j \in J_2) \tag{4.3.5}$$

redszert.
Ha a (4.3.3)-(4.3.5) rendszernek (s, σ), $\ s \ne 0$, $\ \sigma > 0$ megoldása, akkor s megengedett irány az u pontból.

Bizonyítás.

Szükségesség. Legyen $s \in \mathbb{R}^n$ egy megengedett irány az $u \in U$ pontból. A (4.3.5) feltétel teljesülése szükséges, mert ha $s \in \mathbb{R}^n$ egy megengedett irány az $u \in U$ pontból, akkor $\forall j \in J_2$ esetén $\forall \varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$-re

$$\langle a_j, u + \varepsilon s \rangle = b_j \iff \underbrace{\langle a_j, u \rangle - b_j}_{=0} + \varepsilon \langle a_j, s \rangle = 0,$$

ahonnan következik (4.3.5).

Így ha a (4.3.3)-(4.3.5) rendszernek (4.3.5) teljesülése mellett nem lenne a kívánt tulajdonságú megoldása, akkor $\forall 0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ és $\sigma \geq 0$ esetén vagy

$$\langle g_i'(u), s \rangle + \sigma > 0,$$

valamely $i \in I(u)$-ra, vagy

$$\langle a_j, s \rangle > 0$$

valamely $j \in J_1(u)$-ra. Az előbbi esetben $\sigma = 0$-val

$$\langle g_i'(u), s \rangle > 0.$$

Minthogy $\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, ha $\varepsilon \to 0$, így

$$g_i(u + \varepsilon s) = \underbrace{g(u)}_{=0} + \varepsilon \underbrace{\langle g_i'(u), s \rangle}_{>0} + o(\varepsilon) > 0.$$

A második esetben

$$\langle a_j, u + \varepsilon s \rangle = \underbrace{\langle a_j, u \rangle}_{=0} + \varepsilon \underbrace{\langle a_j, s \rangle}_{>0} > 0.$$

Vagyis azt kapjuk, hogy s egyik esetben sem lenne megengedett irány, ami ellentmondás.

Elégségesség. Legyen $u \in U$ és tegyük fel, hogy a (4.3.3)-(4.3.5) rendszernek (s, σ), $s \neq 0$, $\sigma > 0$ megoldása.

Ha $i \in I(u)$, akkor

$$g_i(u + \varepsilon s) = \underbrace{g(u)}_{=0} + \varepsilon \underbrace{\langle g_i'(u), s \rangle}_{<-\sigma<0} + o(\varepsilon) < \varepsilon(-\sigma + \underbrace{\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}}_{>0}) < 0,$$

ha ε elég kicsi.
Ha $j \in J_1(u)$, akkor

$$\langle a_j, u + \varepsilon s \rangle - b_j = \underbrace{\langle a_j, u \rangle - b_j}_{=0} + \varepsilon \underbrace{\langle a_j, s \rangle}_{\leq 0} \leq 0.$$

Ha $j \in J_2$, akkor

$$\langle a_j, u + \varepsilon s \rangle - b_j = \underbrace{\langle a_j, u \rangle - b_j}_{=0} + \varepsilon \underbrace{\langle a_j, s \rangle}_{=0} = 0.$$

Ha $i \notin I(u)$, akkor $g_i(u) < 0$, ha $j \notin J(u)$, akkor $\langle a_j, u \rangle - b_j < 0$ és g_i ill. $\langle a_j, u \rangle$ folytonossága miatt elég kis $\varepsilon > 0$ esetén $g_i(u + \varepsilon s) > 0$ ill. $\langle a_j, u + \varepsilon s \rangle - b_j < 0$ is teljesül. Vagyis s megengedett irány. ∎

4.3.1.3. Definíció. *A $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ vektor az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény* **csökkenési iránya** *az $u \in \mathbb{R}^n$ pontból, ha $\exists \varepsilon_0 > 0$, hogy*

$$f(u + \varepsilon s) < f(u) \quad \forall \varepsilon \in (0, \varepsilon_0].$$

4.3.1.2. Tétel. *Ha $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ csökkenési iránya az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek akkor $\exists \sigma \geq 0$, hogy (s, σ) kielégíti a*

$$\langle f'(u), s \rangle + \sigma \leq 0 \tag{4.3.6}$$

egyenlőtlenséget.
Ha a (4.3.6) egyenlőtlenségnek (s, σ) olyan megoldása, hogy $s \neq 0$ és $\sigma > 0$, akkor s csökkenési iránya f-nek.

Bizonyítás.
Szükségesség. Ha $0 \neq s \in \mathbb{R}^n$ csökkenési iránya az $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvénynek, akkor

$$f(u + \varepsilon s) = f(u) + \varepsilon \langle f'(u), s \rangle + o(\varepsilon) < f(u)$$

miatt

$$\langle f'(u), s \rangle + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} < 0.$$

Minthogy $\frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$, ha $\varepsilon \to 0$, így

$$\langle f'(u), s \rangle \leq 0,$$

amiből következik a tételbeli $\sigma \geq 0$ létezése.

Elégségesség. Ha a (4.3.5) egyenlőtlenség (s, σ) megoldására $\sigma > 0$, akkor

$$\begin{aligned} f(u + \varepsilon s) &= f(u) + \varepsilon \langle f'(u), s \rangle + o(\varepsilon) \\ &= f(u) + \varepsilon (\langle f'(u), s \rangle + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}) \\ &\leq f(u) + \varepsilon (-\sigma + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}) < f(u), \end{aligned}$$

ha ε elég kicsi. ∎

4.3.1.3. Tétel. *Annak, hogy az $u \in U$ pont lokális minimumpontja legyen a (4.3.1)-(4.3.2) feladatnak, szükséges feltétele, hogy a (4.3.3)-(4.3.6) egyenlőtlenségrendszer minden (s, σ) megoldására $\sigma \leq 0$ legyen.*

Bizonyítás.
Ha a $\sigma \geq 0$ feltétel teljesülne a (4.3.3)-(4.3.6) egyenlőtlenségrendszer valamely (s, σ) megoldására, akkor a 4.3.1.1. és 4.3.1.2. Tételek szerint s megengedett iránya lenne U-nak az $u \in U$ pontból, ugyanakkor ebből a pontból csökkenési iránya lenne az f függvénynek, vagyis létezne olyan $\varepsilon_0 > 0$, hogy $u + \varepsilon s \in U$ és $f(u + \varepsilon s) < f(u)$ $\forall \varepsilon \leq \varepsilon_0$, vagyis u nem lenne lokális minimumpont. ∎

4.3.2. Megengedett csökkenési irányok numerikus algoritmusa

A 4.3.1.3 tétel alkalmas arra, hogy segítségével megoldási módszert konstruáljunk. Ehhez ugyanis csak a (4.3.3)-(4.3.6) rendszer (s, σ) megoldásait kell megkeresnünk és σ előjelét vizsgálnunk. Vegyük azonban észre, hogy ha (s, σ) egy megoldása (4.3.3)-(4.3.6)-nak, akkor $(\alpha s, \alpha\sigma)$ is az $\forall\alpha \geq 0$ esetén. Ezért elegendő az a normában felülről korlátozott megengedett/csökkenési irányokat vizsgálni.

Minthogy a (4.3.3)-(4.3.6) rendszer (s, σ)-ban lineáris, célszerű az $\mathbb{R}^n$-beli maximum-normát alkalmazni, hogy a rendszer linearitását ne rontsuk el, azaz legyen $||s|| = \max\limits_{i=1,\ldots,n} |s_i|$, ahol $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$. Ezzel az (4.3.3)-(4.3.6) rendszer az

$$\max_{i=1,\ldots,n} |s_i| \leq 1$$

feltétellel bővül, ami ekvivalens a

$$-1 \leq s_i \leq 1, \;\; i = 1, \ldots, n \tag{4.3.7}$$

feltételrendszerrel.

Így a megoldandó feladat

$$\begin{aligned}
\sigma &\rightarrow \max && (4.3.8)\\
\langle f'(u_k), s\rangle + \sigma &\leq 0, && (4.3.9)\\
\langle g_i'(u_k), s\rangle + \sigma &\leq 0, \;\; (i \in I(u_k)), && (4.3.10)\\
\langle a_j, s\rangle &\leq 0, \;\; (j \in J_1(u_k)), && (4.3.11)\\
\langle a_j, s\rangle &= 0, \;\; (j \in J_2), && (4.3.12)\\
-1 \leq s_i &\leq 1, \;\; (i = 1, \ldots, n) && (4.3.13)\\
\sigma &\geq 0 && (4.3.14)
\end{aligned}$$

Célszerű azonban ezt a lineáris programozási feladatot egy transzformációval olyan alakra hozni, hogy a vátozókra teljesüljenek a nemnegatívitási feltételek. Ehhez vezessük be

$$d_i = s_1 + 1, \;\; i = 1, \ldots, n$$

vektoralakban

$$d = s + \mathbf{1}$$

új változókat, ahol $\mathbf{1}$ a csupa egyesből álló sorvektor.

Az új változókkal a (4.3.8)-(4.3.14) a következő lineáris programozási feladatba transzformálódik:

$$\begin{aligned}
\sigma &\rightarrow \max && (4.3.15)\\
\langle f'(u_k), d\rangle + \sigma &\leq \langle f'(u_k), \mathbf{1}\rangle && (4.3.16)\\
\langle g_i'(u_k), d\rangle + \sigma &\leq \langle g_i'(u_k), \mathbf{1}\rangle, \;\; (i \in I(u_k)), && (4.3.17)\\
\langle a_j, d\rangle &\leq \langle a_j, \mathbf{1}\rangle, \;\; (j \in J_1(u_k)), && (4.3.18)\\
\langle a_j, d\rangle &= \langle a_j, \mathbf{1}\rangle, \;\; (j \in J_2), && (4.3.19)\\
0 \leq d_i &\leq 2, \;\; (i = 1, \ldots, n) && (4.3.20)\\
\sigma &\geq 0 && (4.3.21)
\end{aligned}$$

Ennek megoldására valamelyik szimplex módszert választhatjuk, pl., ha a jobboldalon mindenütt nemnegatív értékek vannak és nincsenek egyenlőségfeltételek, akkor a primál szimplex algoritmust, de ha vannak egyenlőségfeltételek, vagy a jobboldalra került negatív érték is, akkor a kétfázisú szimplex módszerrel oldhatjuk meg a feladatot. Ehhez új változók bevezetésével a negatív jobboldalú sorokat egyenlőségfeltétellé alakítjuk, és ezen sorok, valamint az eredetiegyenlőségfeltételek sorainak összegéből képződik a másodlagos célfüggvény.

Ha a lineári programozási feladat megoldásában $\sigma > 0$, akkor a d-ből visszatranszformált s vektor megengedett csökkenési irány, ezen irány mentén egy újabb megengedett pontba lépünk, ahol a célfüggvény értéke kisebb az előzőnél.

Ha a lineáris programozás eredménye $\sigma = 0$, akkor megállunk, ekkor teljesül az optimalitás szükséges feltétele.

A következő két részben megmutajuk, hogy az utóbbi esetben az optimalitási kritérium más, a gyakorlatban nagyon jól kezelhető formulákban is megadható.

Az algoritmus proramszerő menete tehát a következő:

Algoritmus:

1.lépés: (Inicializálás) Legyen $k := 1$, és választunk egy $u_1 \in U$ pontot.

2.lépés: Meghatározzuk az aktív feltételek $I(u_k) \cup J_1(u_k) \cup J_2$ indexhalamazát.

3.lépés: Meghatározzuk az optimalit'si kritériumot adó (4.3.8)-(4.3.14) LP feladatot.

4.lépés: Elvégezzűk a megfelelő koordinátatranszformációt, és megoldjuk a 4.3.15)-(4.3.21) lineáris programozási feladatot, és visszatranszformáljuk a d vektort s-be.

5.lépés: Ha $\sigma = 0$, akkor KÉSZ. $u_* = u_k$ kielégíti az optimalitás szükséges feltételt, egyébként GOTO 6. lépés.

6.lépés: $u_{k+1} := u_k + \varepsilon s$ az $\varepsilon > 0$ olyan választásával, hogy $f(u_{k+1}) \leq f(u_k)$, $u_{k+1} \in U$ legyen (pl. $\varepsilon \in \operatorname*{argmin}_{\varepsilon > 0} f(u_k + \varepsilon s)$), k:=k+1, GOTO 2. lépés.

Az algoritmus egyes iterációiban tehát azt vizsgáljuk, hogy az iteráció induló pontja lehet-e minimumpont, és amennyiben nem teljesűl rá az optimalitás szükséges feltétele, akkor melyik irányba mozduljunk el a célfüggvény értékének csökkentése érdekében.

4.3.3. Kidolgozott példa

Feladat

A megengedett csökkenési irányok módszerével a $(6,8)$ pontból kiindulva hajtson végre legalább két iterációt a

$$\begin{aligned} xy &\rightarrow \max && (4.3.22)\\ x^2+y^2 &\leq 100 && (4.3.23)\\ x+y &\leq 14 && (4.3.24)\\ x &\geq 0 && (4.3.25)\\ y &\geq 0 && (4.3.26) \end{aligned}$$

feladat optimumpontjának megkeresésére!

Megoldás

Áttérünk minimalizálási feladatra mindenütt $\leq$ típusú korlátozásokkal:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= -xy \rightarrow \min && (4.3.27)\\ g_1(x,y) &= x^2+y^2 \leq 100 && (4.3.28)\\ g_2(x,y) &= x+y \leq 14 && (4.3.29)\\ g_3(x,y) &= -x \leq 0 && (4.3.30)\\ g_4(x,y) &= -y \leq 0 && (4.3.31) \end{aligned}$$

1. iteráció:

Az adott $(6,8)$ pontban a (4.3.28) és a (4.3.29) feltételek aktívak és az utóbbi lineáris. Így a megengedett csökkenési irány kereséséhez a

$$\begin{aligned} \sigma &\rightarrow \max \\ \langle f'(6,8), s\rangle + \sigma &\leq 0 \\ \langle g_1'(6,8), s\rangle + \sigma &\leq 0 \\ \langle g_2'(6,8), s\rangle &\leq 0 \\ \|s\|_1 &\leq 1 \\ \sigma &\geq 0 \end{aligned} \qquad (4.3.32)$$

LP feladatot kell megoldanunk.

Minthogy

$$f'(x,y)\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$g_1'(x,y)\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix},$$

és

$$g_2'(x,y)\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

az (4.3.32) LP feladat a mi esetünkben

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ -8s_1 - 6s_2 + \sigma & \leq & 0 \\ 12s_1 + 16s_2 + \sigma & \leq & 0 \\ s_1 + s_2 & \leq & 0 \\ -1 \leq s_1 & \leq & 1 \\ -1 \leq s_2 & \leq & 1 \\ \sigma & \geq & 0 \end{array} \tag{4.3.33}$$

Mivel a megengedett tartomány negatív koordinátájú pontokat is tartalmaz, először egy transzformációval ezt szüntetjük meg. Vezessük be a

$$d_i = s_i + 1, \quad i = 1, 2$$

vátozókat. Ezekkel az új változókkal az (4.3.33) feladat

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ -8d_1 - 6d_2 + \sigma & \leq & -14 \\ 12d_1 + 16d_2 + \sigma & \leq & 28 \\ d_1 + d_2 & \leq & 2 \\ d_1 & \leq & 2 \\ d_2 & \leq & 2 \\ d_1, d_2, \sigma & \geq & 0 \end{array} \tag{4.3.34}$$

feladattá transzformálódik.

Mivel (4.3.34) első feltételében a jobboldalon negatív érték van, -1-gyel szorozva és a w kiegészítő változót bevezetve ezt a feltételt pozitív jobboldalú egyenlőségfeltétellé alakítjuk:

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ 8d_1 + 6d_2 - \sigma - w & = & 14 \\ 12d_1 + 16d_2 + \sigma & \leq & 28 \\ d_1 + d_2 & \leq & 2 \\ d_1 & \leq & 2 \\ d_2 & \leq & 2 \\ d_1, d_2, \sigma, w & \geq & 0 \end{array} \tag{4.3.35}$$

Minthogy szigorúan megkövetelt egyenlőség-feltételünk is van, a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk.

Az induló szimplex-tábla:

	d_1	d_2	σ	w	u_1^*	u_2	u_3	u_4	u_5	
u_1^*	$\boxed{8}$	6	-1	-1	1	0	0	0	0	14
u_2	12	16	1	0	0	1	0	0	0	28
u_3	1	1	0	0	0	0	1	0	0	2
u_4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
u_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
z^*	8	6	-1	-1	1	0	0	0	0	14

ahol u_1 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Első lépésben a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	d_1	d_2	σ	w	u_1^*	u_2	u_3	u_4	u_5	
d_1	1	$\frac{6}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	$\frac{14}{8}$
u_2	0	7	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	0	7
u_3	0	$\frac{2}{8}$	$\boxed{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	1	0	0	$\frac{2}{8}$
u_4	0	$-\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	1	0	$\frac{2}{8}$
u_5	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
z^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Mivel a másodlagos célfüggvény értéke 0, az elsődleges célfüggvény szerint folytatjuk a bázistranszformációt (a szimplex-táblázatból elhagyhatjuk a másodlagos célfüggvény sorát és és az u_1^* eltérésváltozó oszlopát):

	d_1	d_2	σ	w	u_2	u_3	u_4	u_5	
d_1	1	1	0	0	0	1	0	0	2
u_2	0	2	0	−1	1	−20	0	0	2
σ	0	2	1	1	0	8	0	0	2
u_4	0	−1	0	0	0	−1	1	0	0
u_5	0	1	0	0	0	0	0	1	2
z	0	−2	0	−1	0	−8	0	0	−2

Nincs az elsődleges célfüggvény sorában pozitív elem, tehát optimális megoldáshoz jutottunk, ahol

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 0, \quad \sigma = 2,$$

ill.

$$s_1 = 1, \quad s_2 = -1, \quad \sigma = 2.$$

Mivel $\sigma \neq 0$, így a $(6,8)$ pont nem optimális és az $(s_1, s_2) = (1, -1)$ megengedett csökkenési irány.

Azt kell megvizsgálnunk, hogy ebben az irányban melyik megengedett pontban minimális az (4.3.22) célfüggvény.

A $(6,8)$ pontból kiinduló félegyenes $[0, \lambda]$ szakasza az (4.3.23)–(4.3.26) által meghatározott tartományban van, azaz megengedett, ha $\lambda > 0$ kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$(6+\lambda)^2 + (8-\lambda)^2 \leq 100 \tag{4.3.36}$$

$$6+\lambda+8-\lambda \leq 14 \tag{4.3.37}$$

$$6+\lambda \geq 0 \tag{4.3.38}$$

$$8-\lambda \geq 0. \tag{4.3.39}$$

A (4.3.36)-t a $[0,2]$,(4.3.37)-t a $(-\infty, \infty)$, a (4.3.38)-t a $[-6, \infty)$, a (4.3.39)-t a $(-\infty, 8]$ intervallumok elégítik ki, a rendszert pedig ezek metszete, azaz a $[0,2]$ intervallum a maximális megengedett intervallum.

A célfüggvény ebben az irányban

$$f(\lambda) = -(6+\lambda)(8-\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 48$$

szigorúan konvex függvény. Mivel $f(0) = f(2) = -48$, így az $f(\lambda)$ függvény a $[0,2]$ intervallum belsejében veszi fel a minimumát, ahol $f'(\lambda) = 2\lambda - 2 = 0$, vagyis $\lambda = 1$-nél.

A következő iteráció kezdőpontja tehát: $(6+1, 8-1) = (7,7)$.

2. iteráció

A $(7,7)$ pontban a (4.3.29) feltétel aktív és ez lineáris. Így, ha az adott pont optimális, akkor tételünk szerint szükséges, hogy a

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ \langle f'(7,7), s\rangle + \sigma & \leq & 0 \\ \langle g_2'(7,7), s\rangle & \leq & 0 \\ \|s\|_1 & \leq & 1 \\ \sigma & \geq & 0 \end{array} \tag{4.3.40}$$

feladat optimális megoldására $\sigma = 0$ adódjon.

Minthogy

$$f'(x,y)\Big|_{(x,y)=(7,7)} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(7,7)} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}$$

és

$$g_2'(x,y)\Big|_{(x,y)=(7,7)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

az (4.3.40) LP feladat a mi esetünkben

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ -7s_1 - 7s_2 + \sigma & \leq & 0 \\ s_1 + s_2 & \leq & 0 \\ -1 \leq s_1 & \leq & 1 \\ -1 \leq s_2 & \leq & 1 \\ \sigma & \geq & 0 \end{array} \tag{4.3.41}$$

Mivel a megengedett tartomány negatív koordinátájú pontokat is tartalmaz, először egy transzformációval ezt szüntetjük meg. Vezessük be a

$$d_i = s_i + 1, \quad i = 1,2$$

vátozókat. Ezekkel az új változókkal az (4.3.41) feladat

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ -7d_1 - 7d_2 + \sigma & \leq & -14 \\ d_1 + d_2 & \leq & 2 \\ d_1 & \leq & 2 \\ d_2 & \leq & 2 \\ d_1, d_2, \sigma & \geq & 0 \end{array} \tag{4.3.42}$$

feladattá transzformálódik.

Mivel (4.3.42) első feltételében a jobboldalon negatív érték van, -1-gyel szorozva és a w kiegészítő változót bevezetve ezt a feltételt pozitív jobboldalú egyenlőség-feltétellé alakítjuk:

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ 7d_1 + 7d_2 - \sigma - w & = & 14 \\ d_1 + d_2 & \leq & 2 \\ d_1 & \leq & 2 \\ d_2 & \leq & 2 \\ d_1, d_2, \sigma, w & \geq & 0 \end{array} \tag{4.3.43}$$

Minthogy szigorúan megkövetelt egyenlőség-feltételünk is van, a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk.

Az induló szimplex-tábla:

	d_1	d_2	σ	w	u_1^*	u_2	u_3	u_4	
u_1^*	$\boxed{7}$	7	-1	-1	1	0	0	0	14
u_2	1	1	0	0	0	1	0	0	2
u_3	1	0	0	0	0	0	1	0	2
u_4	0	1	0	0	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	0	0	0
z^*	7	7	1	-1	1	0	0	0	14

ahol u_1 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Első lépésben a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	d_1	d_2	σ	w	u_1^*	u_2	u_3	u_4	
d_1	1	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	0	2
u_2	0	0	$\boxed{\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	0
u_3	0	-1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	0	0
u_4	0	1	0	0	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	0	0	0
z^*	0	0	0	0	-1	0	0	0	0

Mivel a másodlagos célfüggvény értéke 0, az elsődleges célfüggvény szerint folytatjuk a bázistranszformációt (a szimplex-táblázatból elhagyhatjuk a másodlagos célfüggvény sorát és az u_1^* eltérésváltozó oszlopát):

	d_1	d_2	σ	w	u_2	u_3	u_4	
d_1	1	1	-0	-0	0	0	0	2
σ	0	0	1	1	7	0	0	0
u_3	0	-1	0	0	1	1	0	0
u_4	0	1	0	0	0	0	1	2
z	0	0	0	-1	-7	0	0	0

Nincs az elsődleges célfüggvény sorában pozitív elem, tehát optimális megoldáshoz jutottunk, ahol

$$d_1 = 2, \;\; d_2 = 0, \;\; \sigma = 0,$$

ill.

$$s_1 = 1, \;\; s_2 = -1, \;\; \sigma = 0.$$

Mivel teljesül, hogy a $(7,7)$ pontból indulva $\sigma = 0$, így ez a pont teljesíti az optimálitás szükséges feltételét.

4.3.4. Feladatok

4.3.4.1. Feladat. *Mi a megengedett iránya*

1.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -x^3 + y \leq 0,\ x, y \geq 0\}$ *halmaznak az* $u = (0, 0)$ *pontban?*

2.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 4,\ x + y \leq 1\}$ *halmaznak az* $(1, 3)$ *pontban?*

3.) $U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y + 3 \geq 0,\ -x^2 + y - 1 \geq 0,\ x, y \geq 0\}$ *halmaznak a* $(2, 5)$ *ill. a* $(1, 2)$ *pontokban?*

4.3.4.2. Feladat. *A megengedett csökkenési irányok módszerével ellenőrizze hogy, az alábbi feladatokra a megadott pont teljesíti-e az optimalitás szükséges feltételét?*

1.)

$$\begin{aligned} x^2 + y &\to \min \\ x^2 + y^2 &\leq 9 \\ x + y &\leq 1. \end{aligned}$$

$u_* = (x_*, y_*) = (0, -3)$.

2.)

$$\begin{aligned} y &\to \max \\ x^2 + 3y &\leq 3 \\ 2x + 3y &\leq 4 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

$u_* = (x_*, y_*) = (0, 1)$.

3.)

$$\begin{aligned} x + y &\to \min \\ x^2 - y &\leq 0 \\ 2y + x &\leq 4 \end{aligned}$$

$u_* = (x_*, y_*) = (0, 0)$.

4.)

$$\begin{aligned} 2x + y^2 &\to \max \\ 4x^2 - y &\leq 2 \\ y - x &\leq 1 \\ 2x + y &\geq -1 \end{aligned}$$

4.3.4.3. Feladat. *Határozza meg az alábbi halmazoknak az adott* u_0 *pontokhoz legközelebbi nemnegatív koordinátájú pontját megengedett irányok módszerével az optimumponttól különböző kezdőpontból kiindulva:*

1.) $$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 4,\ x + y \leq 1\}$$

$u_0 = (2, 0)$.

2.) $$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \leq 6,\ -2x + y \leq 6\}$$

$u_0 = (1, 3)$.

3.) $$U = \{u = (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - 2y \leq 4,\ x + y \geq 5\}$$

$u_0 = (1, 0)$.

4.3.4.4. Feladat. *Az alábbi feladatokra a megengedett irányok módszerével az adott $u_0 = (x_0, y_0)$ pontból kiindulva hajtson végre egy teljes iterációs lépést, majd írja fel a második megengedett irányt meghatározó feladatot!*

1.)

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y^2 - 4x + 4 & \to & \min \\ x - y + 3 & \geq & 0 \\ -x^2 + y - 1 & \geq & 0 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

$u_0 = (2, 5)$.

2.)

$$\begin{array}{rcl} x^2 + xy + 2y^2 - 6x - 2y - 12z & \to & \min \\ x + y + z & = & 2 \\ -x + 2y & \leq & 3 \\ x, y, z \geq 0 & & \end{array}$$

$u_0 = (1, 0, 1)$.

3.)

$$\begin{array}{rcl} x^2 + xy + 2y^2 - 6x - 2y - 12z & \to & \min \\ 2x^2 + y^2 & \leq & 15 \\ -x + 2y + z & \leq & 3 \\ x, y, z \geq 0 & & \end{array}$$

$u_0 = (1, 1, 1)$.

4.)

$$\begin{array}{rcl} (x-2)^2 + (y-1)^2 & \to & \min \\ x^2 - y & \leq & 0 \\ -x + 2y & = & 1 \end{array}$$

$u_0 = (1, 1)$.

4.4. A Lagrange multiplikátorok kiterjesztése egyenlőtlenségfeltételek esetére

4.4.1. Fritz-John és Kuhn-Tucker optimalitási kritériumok

Az alábbi tételek a 4.3.1.3. Tételből a lineáris algebrából jól ismert Farkas-lemma segítségével egyszerűen levezethetők:

4.4.1.1. Tétel. (Fritz-John feltétel) *Legyen az $u \in U$ pont lokális minimumpontja a (4.3.1)-(4.3.2) feladatnak Akkor léteznek olyan $\lambda_0 \geq 0,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in I,\ \mu_j \geq 0,\ j \in J_1$ és $\vartheta \in \mathbb{R},\ j \in J_2$ nem mind zérus konstansok, hogy*

$$\lambda_0 f'(u) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i'(u) + \sum_{j\in J_1} \mu_j a_j + \sum_{j\in J_2} \vartheta_j a_j = 0, \tag{4.4.1}$$

.

$$\begin{array}{ll} \lambda_i g_i(u) = 0, & i \in I, \\ \mu_j(\langle a_j, u\rangle - b_j) = 0, & j \in J_1 \end{array} \tag{4.4.2}$$

.

Bizonyítás.
A 4.3.1.3. Tétel szerint, ha $\sigma \leq 0$ következménye a

$$\langle f(u), s\rangle + \sigma \leq 0 \tag{4.4.3}$$
$$\langle g_i(u), s\rangle + \sigma \leq 0, \quad i \in I \tag{4.4.4}$$
$$\langle a_j, s\rangle \leq 0, \quad j \in J_1 \tag{4.4.5}$$
$$\langle a_j, s\rangle = 0, \quad j \in J_2 \tag{4.4.6}$$

egyenlH́ otlenségrendszer teljesülésének, ami a Farkas lemma szerint csak akkor teljesülhet, léteznek olyan $\lambda_0 \geq 0,\ \lambda_i \geq 0,\ i \in I(u),\ \mu_j \geq 0,\ j \in J_1(u)$ és $\vartheta_j \in \mathbb{R},\ j \in J_2$ skalárok, hogy

$$\lambda_0 f'(u) + \sum_{i\in I(u)} \lambda_i g_i'(u) + \sum_{j\in J_1(u)} \mu_j a_j + \sum_{j\in J_2} \vartheta_j a_j = 0, \tag{4.4.7}$$

és

$$\lambda_0 + \sum_{i\in I(u)} \lambda_i = 1.$$

Az utóbbi feltétel garantálja, hogy már a fenti egyenletben szereplő paraméterek nem mindegyike zérus. A $\lambda_i = 0 \ \ (i \in I \setminus I(u)$ és $\mu_j = 0 \ \ (j \in J_1 \setminus J_1(u)$ választással a tétel bizonyítása teljessé tehető. ∎

4.4.1.2. Tétel. (Kuhn-Tucker-féle szükséges feltétel) *Legyen az $u \in U$ pont lokális minimumpontja a (4.3.1)-(4.3.2) feladatnak és tegyük fel, hogy a $g_i'(u),\ i \in I(u),\ a_j,\ j \in J_1(u) \cup J_2$ vektorrendszer lineárisan független. Akkor léteznek olyan $\lambda_i \geq 0,\ i \in I,\ \mu_j \geq 0,\ j \in J_1$ és $\vartheta \in \mathbb{R},\ j \in J_2$ skalárok, hogy*

$$f'(u) + \sum_{i\in I} \lambda_i g_i'(u) + \sum_{j\in J_1} \mu_j a_j + \sum_{j\in J_2} \vartheta_j a_j = 0, \tag{4.4.8}$$

és

$$\sum_{i\in I} \lambda_i g_i(u) + \sum_{j\in J_1} \mu_j(\langle a_j, u\rangle - b_j) = 0. \tag{4.4.9}$$

Bizonyítás.
A tétel feltételei mellett teljesülnek a 4.4.1.1. Tétel feltételei. De most $\lambda_0 > 0$ lehetséges csak, mert $\lambda_0 = 0$ esetén ellentmondásra jutnánk a tételbeli lineáris függetlenségi feltétellel. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $\lambda_0 = 1$. Bevezetve a $\lambda_i = 0$, ha $i \notin I(u)$ és $\mu_j = 0$, ha $j \notin J_1(u)$ paramétereket, a (4.4.8) és (4.4.7) egyenlőségek ekvivalensek. Ugyanakkor fennállnak a

$$\lambda_i g_i(u) = 0 \;\; (i \in I) \quad \text{és} \quad \mu_j(\langle a_j, u\rangle - b_j) = 0 \;\; (j \in J_1)$$

feltételek, amiből (4.4.9) azonnal adódik. ■

4.4.2. Feladatok

4.4.2.1. Feladat. *Teljesül-e a 4.3.4.2. Feladat problémáira az adott pontokban*

1.) *a Fritz-John optimalitási kritérium?*

2.) *a Kuhn-Tucker-féle szükséges optimalitási kritérium?*

4.4.2.2. Feladat. *Írja fel a Kuhn-Tucker optimalitási feltételeket az alábbi feladatokra, és oldja meg őket:*

1.) $$3u_1 - u_2 + u_3^2 \to \min_{(u_1,u_2)\in U},$$

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1 + u_2 + u_3 \leq 0, -u_1 + 2u_2 + u_3^2 \leq 0\}.$$

2.) $$u_1^2 + 4u_1u_2 + u_2^2 \to \min_{(u_1,u_2)\in U},$$

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : (u_1 - 1)^2 + u_2^2 \leq 1\}.$$

3.) $$(u_1 - 3)^2 + (u_2 - 2)^2 \to \min_{(u_1,u_2)} \in U$$

$$U = \{(u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 : u_1^2 + u_2^2 \leq 5,\ u_1 + 2u_2^2 \leq 4,\ u_1, u_2 \geq 0\}.$$

4.4.2.3. Feladat. *Milyen p paraméter mellett lehet az*

$$\begin{aligned} y^2 - px - 4y &\to \min \\ x^2 + y^2 - 4y &\leq 5 \\ x^2 + y &\leq 5 \\ x + y &\geq 3 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

feladatnak a $(2, 1)$ pontban optimumpontja?

4.5. Konvex matematikai programozási feladatok

4.5.1. Az optimalitás szükséges és elégséges feltételei

Tegyük fel, hogy a (4.3.1)-(4.3.2) feladatban az f és $g_i, i \in I$ függvények konvexek. Ekkor a 3.2.4.3. Tétel értelmében az U halmaz is konvex. Ezt a feladatot **konvex programozási feladat**nak nevezzük.

4.5.1.1. Definíció. *Az (4.3.2)-val definiált U halmaz* **reguláris**, *ha minden $(i \in I)$ esetén létezik olyan $\overline{u}_i \in U$, melyre $g_i(\overline{u}_i) < 0$.*

4.5.1.2. Definíció. *Az (4.3.2)-val definiált U halmaz kielégíti a* **Slater feltétel**t, *ha létezik olyan $\overline{u} \in U$, melyre $g_i(\overline{u}) < 0$, $\forall i \in I$. Az $\overline{u}$ pontot* **Slater pont**nak *nevezzük.*

A Slater ponttal rendelkező konvex programozási feladatot **Slater-reguláris**nak nevezzük.

4.5.1.1. Tétel. *A Slater feltétel teljesüléséből következik a regularitási feltétel teljesülése. Konvex programozási feladat esetén a két feltétel ekvivalens.*

Bizonyítás.
Ha létezik $\overline{u}$ Slater pont, akkor az $\overline{u}_i = \overline{u}$ $(i \in I)$ választással teljesül a regularitási feltétel.
Ha az U halmaz konvex és reguláris, akkor az $\overline{u} = \sum\limits_{k \in I} \alpha_k \overline{u}_k$ Slater pont. Valóban, mivel $g_i(\overline{u}_i) < 0$ és a g_i függvények konvexek, így

$$g_i(\overline{u}) = g_i(\sum_{k \in I} \alpha_k \overline{u}_k) \leq \sum_{k \in I} \alpha_k g_i(\overline{u}_k) = \alpha_i \underbrace{g_i(\overline{u}_i)}_{<0} + \sum_{k \neq i} \alpha_k \underbrace{g(\overline{u}_k)}_{\leq 0} < 0$$

■

4.5.1.2. Tétel. (Kuhn-Tucker optimalitási tétel) *Legyen a (4.3.1)-(4.3.2) konvex programozási feladat, és az U halmaz legyen Slater reguláris. $u \in U$ akkor és csak akkor optimumpontja a (4.3.1)-(4.3.2) feladatnak, ha léteznek olyan $\lambda_i \geq 0$ $(i \in I)$, $\mu_j \geq 0$ $j \in J_1$ és $\vartheta_j \in \mathbb{R}$ $j \in J_2$ konstansok, hogy*

$$f'(u) + \sum_{i \in I} \lambda_i g_i'(u) + \sum_{j \in J_1} \mu_j a_j + \sum_{j \in J_2} \vartheta_j a_j = 0. \tag{4.5.1}$$

és teljesülnek a

$$\begin{aligned} &\lambda_i g_i(u) = 0, && i \in I, \\ &\mu_j(\langle a_j, u\rangle - b_j) = 0, && j \in J_1 \end{aligned} \tag{4.5.2}$$

. komplementaritási feltételek.

Bizonyítás.
Szükségesség. Hasonlóan mint a 4.4.1.2. Tétel bizonyításánál léteznek olyan $\lambda_0 \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$, $i \in I(u)$, $\mu_j \geq 0$, $j \in J_1(u)$ és $\vartheta_j \in \mathbb{R}$, $j \in J_2$ skalárok, hogy

$$\lambda_0 f'(u) + \sum_{i \in I(u)} \lambda_i g_i'(u) + \sum_{j \in J_1(u)} \mu_j a_j + \sum_{j \in J_2} \vartheta_j a_j = 0, \tag{4.5.3}$$

és

$$\lambda_0 + \sum_{i\in I(u)} \lambda_i = 1. \tag{4.5.4}$$

Azt kell belátnunk, hogy $\lambda_0 > 0$. Tegyük fel az ellenkezőjét, vagyis legyen $\lambda_0 = 0$. A(4.5.4)-ből következik, hogy van legalább egy olyan $k \in I(u)$ index, hogy $\lambda_k > 0$ és $g_k(u) = 0$. Ha $z \in U$ a Slater pont, akkor $s = z - u$ megengedett irány. Valóban, minthogy $g_i(z) < 0 \ \ (i \in I)$, $\langle a_j, z\rangle - b_j \leq 0 \ \ (j \in J_1)$ és $\langle a_j, z\rangle - b_j = 0 \ \ (j \in J_2)$, így $\forall 0 < \varepsilon \leq 1 = \varepsilon_0$ esetén

$$g_i(u+\varepsilon s) = g_i(\varepsilon z + (1-\varepsilon)u) \leq \varepsilon \underbrace{g_i(z)}_{<0} + (1-\varepsilon)\underbrace{g_i(u)}_{\leq 0} < 0, \qquad (i \in I),$$

$$\langle a_j, u+\varepsilon s\rangle - b_j = \varepsilon(\underbrace{\langle a_j, z\rangle - b_j}_{\leq 0}) + (1-\varepsilon)(\underbrace{\langle a_j, u\rangle - b_j}_{\leq 0}) \leq 0, \qquad (j \in J_1)$$

és

$$\langle a_j, u+\varepsilon s\rangle - b_j = \varepsilon(\underbrace{\langle a_j, z\rangle - b_j}_{=0}) + (1-\varepsilon)(\underbrace{\langle a_j, u\rangle - b_j}_{=0}) = 0, \qquad (j \in J_2).$$

(4.5.3)-t skalárisan s-sel szorozva

$$\sum_{i\in I(u)} \lambda_i \langle g_i'(u), s\rangle + \sum_{j\in J_1(u)} \mu_j \langle a_j, s\rangle + \sum_{j\in J_2} \vartheta_j \langle a_j, s\rangle = 0. \tag{4.5.5}$$

Mivel s megengedett irány, a 4.3.1.1. Tétel szerint (4.5.5) baloldalán minden tag nempozitív, és figyelembe véve g_k konvexitását (ld. 3.2.2.2. Tétel)

$$0 > g_k(z) = g_k(z) - g_k(u) \geq \langle g_k'(u), z-u\rangle = \langle g_k'(u), s\rangle,$$

vagyis (4.5.5) baloldala határozottan negatív, így ellentmondáashoz jutottunk.

A (4.5.2) komplementaritási feltételek teljesülése most is a $\lambda_i = 0 \ \ (i \in I \setminus I(u)$ és $\mu_j = 0 \ \ (j \in J_1 \setminus J_1(u)$ választással biztosítható.

Elégségesség. Legyen $y \in U$ tetszőleges. f konvexitása, valamint (4.5.1) miatt

$$f(y) - f(u) \geq \langle f'(u), y-u\rangle = -\langle \sum_{i\in I} \lambda_i g_i'(u) + \sum_{j\in J_1} \mu_j a_j + \sum_{j\in J_2} \vartheta_j a_j, y-u\rangle \tag{4.5.6}$$

U konvexitása miatt $s = y - u$ megengedett iránya U-nak az u pontból (bizonyítása analóg az előbbiekkel), így a 4.3.1.1. Tétel szerint $\langle g_i'(u), s\rangle \leq 0 \ \ (i \in I)$, $\langle a_j, s\rangle \leq 0 \ \ (j \in J_1)$ és $\langle a_j, s\rangle = 0 \ \ (j \in J_2)$. Ezért (4.5.6)-ből

$$f(y) - f(u) \geq 0,$$

vagyis u valóban minimumpont. ■

4.5.2. Kidolgozott példa

Feladat

A Kuhn-Tucker tétel segítségével ellenőrizze, hogy a

$$\begin{aligned} x^2+y &\to \min && (4.5.7)\\ x^2+y^2 &\leq 9 && (4.5.8)\\ x+y^2 &\leq 3 && (4.5.9)\\ x+y &\leq 1 && (4.5.10)\end{aligned}$$

lehet-e feladat optimumpontjában pontosan az első két korlátozó feltétel aktív!

Megoldás

Ha az optimumpontban pontosan az első két feltétel aktív, akkor ez a pont ki kell elégítse az

$$\begin{aligned} x^2+y^2 &\leq 9\\ x+y^2 &\leq 3\end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ennek 3 pont tesz eleget:

$$u_1=(x_1,y_1)=(-2,-\sqrt{5}),\quad u_2=(x_2,y_2)=(-2,\sqrt{5}),\quad u_3=(x_3,y_3)=(3,0)$$

Azonban az optimumpontnak megengedettnek kell lennie, ezért a 3. feltételi egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell, ez kizárja u_3 optimalitását.

A feladat konvex programozási feladat (ellenőrizze!) és teljesíti a Slater feltételt (találjon Slater pontot!), így a két lehetséges pont valamelyike pontosan akkor optimumpont, ha az adott pontban létezik a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2x\\ 1\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix} 2x\\ 2y\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 1\\ 2y\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix} 1\\ 1\end{pmatrix} &= 0 && (4.5.11)\\ \lambda_1(x^2+y^2-9) &= 0 && (4.5.12)\\ \lambda_2(x+y^2-3) &= 0 && (4.5.13)\\ \lambda_3(x+y-1) &= 0 && (4.5.14)\end{aligned}$$

rendszernek $\lambda_i\geq 0,\ \ i=1,2,3,\ \ \sum_{i=1,2,3}\lambda_i\neq 0$ megoldása.

A aktivitási feltétel miatt az első két komplementaritási feltétel triviálisan teljesül mindkét pontban bármely $\lambda_1\geq 0, \lambda_g e0$-ra, a harmadik komplementaritási feltételből pedig

$$\lambda_3=0$$

adódik mindkét esetben.

λ_1 és λ_2 meghatározása a (4.5.11) egyenletrendszerből történik.

Tegyük fel, hogy $u_1=(x_1,y_1)=(-2,-\sqrt{5})$ optimális. Akkor a (4.5.11) feltétel alakja

$$\begin{pmatrix} -4\\ 1\end{pmatrix}+\lambda_1\begin{pmatrix} -4\\ -2\sqrt{5}\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix} 1\\ -2\sqrt{5}\end{pmatrix}=0.$$

Innét

$$\lambda_1=-\frac{8\sqrt{5}-1}{10\sqrt{5}}<0,$$

ami ellentmond a nemnegatívitási feltételnek, tehát u_1 nem lehet optimális.

Tegyük fel, hogy $u_2 = (x_2, y_2) = (-2, \sqrt{5})$ optimális. Akkor a (4.5.11) feltétel alakja

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = 0.$$

Innét

$$\lambda_1 = -\frac{8\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}} < 0,$$

ami szintén ellentmond a nemnegatívitási feltételnek, tehát u_2 sem lehet optimális.

4.5.3. Feladatok

4.5.3.1. Feladat. *Konvex programozási feladatok-e az alábbi problémák:*

1.)

$$\begin{aligned} x + \frac{2}{xy} &\rightarrow \min \\ y + \frac{150}{xy} &\leq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

2.)

$$\begin{aligned} x + xy &\rightarrow \min \\ y + \sin xy &\leq 1 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

3.)

$$\begin{aligned} x + y &\rightarrow \min \\ x^2 + y &= 5 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

4.5.3.2. Feladat. *Mutassa meg, hogy az alábbi feladat konvex programozási feladat, teljesíti a Slater feltételt és a* $(\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2)$ *pontban teljesülnek a a Kuhn-Tucker optimalitási feltételek. Határozza meg a megfelelő Lagrange szorzókat.*

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \min \\ x^2 + y^2 &\leq 1 \\ -x + y^2 &\leq 0 \\ x + y &\geq 0 \end{aligned}$$

4.5.3.3. Feladat. *Ellenőrizze az alábbi feladatokra a Slater feltételt és a Kuhn-Tucker feltételek teljesülését az adott pontban*

1.)

$$\begin{aligned} y &\rightarrow \max \\ x^2 + 3y &\leq 3 \\ 2x + 3y &\leq 4 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$u_* = (x_*, y_*) = (0, 1).$$

2.)

$$\begin{aligned} xy &\rightarrow \max \\ x^2 + y^2 &\leq 100 \\ x + y &\leq 14 \\ x, y &\geq 0 \end{aligned}$$

$$u_* = (x_*, y_*) = (7, 7).$$

3.)

$$\begin{array}{rcl} -x+y & \to & \min \\ x^2+y^2+2x & \leq & 1 \\ |x| & \leq & 1 \\ |y| & \leq & 1 \end{array}$$

$u_* = (x_*, y_*) = (0, -1)$.

4.)

$$\begin{array}{rcl} y & \to & \max \\ x^2+3y & \leq & 3 \\ 2x+3y & \leq & 4 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

$u_* = (x_*, y_*) = (0, 1)$.

4.5.3.4. Feladat. *Milyen p paraméter mellett lehet a*

$$\begin{array}{rcl} x^2-py & \to & \min \\ x^2+y^2 & \leq & 9 \\ x+y^2 & \leq & 3 \\ x+y & \geq & 1 \end{array}$$

feladatnak olyan optimumpontja, amelyre pontosan 2. és a 3. korlátozó feltétel aktív?

4.6. Nyeregpont

4.6.1. A Lagrange függvény nyeregpontja, mint optimalitási kritérium

Legyenek a továbbiakban $I = \{1, \dots, m\}$, $J_1 = \{m+1, \dots, p\}$ és $J_2 = \{p+1, \dots, s\}$ a korlátozó feltételek indexhalmazai, $G_1 = (g_1, \dots, g_m)$, $G_2 = (g_{m+1}, \dots, g_p)$ és $G_1 = (g_{p+1}, \dots, g_s)$ a korlátozó feltételek vektorfüggvényei, azaz legyen

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n : G_1(u) \le 0,\ G_2(u) = \mathsf{A}_1 u - \mathbf{b}_1 \le \mathbf{0}, G_3(u) = \mathsf{A}_2 u - \mathbf{b}_2 = \mathbf{0}\}, \tag{4.6.1}$$

ahol A_1 és A_2 $(p-m) \times n$ ill. $(s-p) \times n$ típusú mátrixok, $\mathbf{b}_1 \in \mathbb{R}^{p-m}, \mathbf{b}_2 \in \mathbb{R}^{s-p}$. ($\mathbf{0}$ mindenütt a megfelelő méretű nullvektort jelöli.)

Legyen $\Lambda = \{(\lambda, \mu, \vartheta) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{p-m} \times \mathbb{R}^{s-p} : \lambda \ge \mathbf{0}, \mu \ge \mathbf{0}\}$.

4.6.1.1. Definíció. *Az*

$$f(u) \to \min_{u \in U} \tag{4.6.2}$$

feladathoz rendelt $L : \mathbb{R}^n \times \Lambda \to \mathbb{R}$ **Lagrange függvény***:*

$$L(u, \lambda, \mu, \theta) = f(u) + \langle \lambda, G_1(u) \rangle + \langle \mu, G_2(u) \rangle + \langle \vartheta, G_3(u) \rangle. \tag{4.6.3}$$

4.6.1.2. Definíció. *Az* $(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$ *az* $L(u, \lambda, \mu, \vartheta)$ *Lagrange függvény nyeregpontja az* $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ *halmazon, ha minden* $u \in \mathbb{R}^n$ *és* $(\lambda, \mu, \vartheta) \in \Lambda$ *esetén*

$$L(u_*, \lambda, \mu, \vartheta) \le L(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) \le L(u, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*). \tag{4.6.4}$$

4.6.1.1. Tétel. *Ahhoz, hogy az*$(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$ *nyeregponja legyen a (4.6.2)-(4.6.1) nemlineáris programozási feladatnak, szükséges, hogy teljesüljenek az alábbi feltételek:*

$$
\begin{aligned}
L'_u(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) &= \mathbf{0}, && (4.6.5)\\
L'_\lambda(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) &= G_1(u_*) \le \mathbf{0}, && (4.6.6)\\
L'_\mu(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) &= G_2(u_*) = \mathsf{A}_1 u_* - \mathbf{b}_1 \le 0, && (4.6.7)\\
L'_\vartheta(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) &= G_3(u_*) = \mathsf{A}_2 u_* - \mathbf{b}_2 = 0, && (4.6.8)\\
\langle \lambda^*, G_1(u_*) \rangle &= 0, && (4.6.9)\\
\langle \mu^*, G_2(u^*) \rangle &= \langle \mu^*, \mathsf{A}_1 u_* - \mathbf{b}_1 \rangle = 0. && (4.6.10)
\end{aligned}
$$

Ha a (4.6.2)-(4.6.1) feladat konvex programozási feladat, akkor a (4.6.5)-4.6.10) feltételek elégségesek is.

Bizonyítás.
Szükségesség. A (4.6.4) nyeregpontfeltétel jobboldali egyenlőtlenségéből az

$$u = (u_{1*}, \dots, u_{k-1*}, u_k, u_{k+1*}, \dots, u_{n*})$$

választással a

$$L(u_{1*}, \dots, u_{k-1*}, u_{k*}, u_{k+1*}, \dots, u_{n*}, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) \le$$
$$L(u_{1*}, \dots, u_{k-1*}, u_k, u_{k+1*}, \dots, u_{n*}, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) \ \ \forall u_k \in \mathbb{R}$$

azaz $L(u_{1*},\ldots,u_{k-1*},u_k,u_{k+1*},\ldots,u_{n*},\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*)$, mint u_k függvénye az u_{k*} pontban veszi fel a minimumát. (4.6.5) az optimalitás szükséges feltétele.

A (4.6.4) feltétel baloldalából

$$\langle\lambda-\lambda^*,G_1(u_*)\rangle+\langle\mu-\mu^*,G_2(u_*)\rangle+\langle\vartheta-\vartheta^*,G_3(u_*)\rangle\le 0\ \ \forall(\lambda,\mu,\vartheta)\in\Lambda. \tag{4.6.11}$$

Legyen $\lambda=\lambda^*+e_k$, ahol e_k az $\mathbb{R}^m$ tér k. egységvektora és legyen továbbá $\mu=\mu^*$ és $\vartheta=\vartheta^*$. Akkor (4.6.11)-ból a

$$g_k(u_*)\le 0$$

egyenlőtlenséget kapjuk, és ez igaz minden $k=1,\ldots,m$-re, azaz (4.6.6) teljesül.

Hasonló technikával, ha $\mu=\mu^*+e_k$, ahol e_k az $\mathbb{R}^{p-m}$ tér k. egységvektora, továbbá $\lambda=\lambda^*$ és $\vartheta=\vartheta^*$, akkor $\forall k=m+1,\ldots,p$ esetén

$$\langle a_k,u_*\rangle-b_k\le 0,$$

azaz fennáll (4.6.7).

Végül, ha $\vartheta=\vartheta^*\pm e_k$, ahol e_k az $\mathbb{R}^{s-p}$ tér k. egységvektora, továbbá $\lambda=\lambda^*$ és $\mu=\mu^*$, akkor $\forall k=p+1,\ldots,s$-re

$$\begin{aligned}\langle a_k,u_*\rangle-b_k &\le 0,\\ -(\langle a_k,u_*\rangle-b_k) &\le 0.\end{aligned}$$

Ezzel (4.6.8)-t is igazoltuk.

Figyelembe véve λ és μ nemnegativitását, valamint a már belátott (4.6.6), (4.6.7) és (4.6.8) állításokat, a

$$\begin{aligned}\langle\lambda^*,G_1(u_*)\rangle &\le 0,\\ \langle\mu^*,G_2(u_*)\rangle &= \langle\mu^*,\mathsf{A}_1u_*-\mathbf{b}_1\rangle\le 0.\end{aligned}$$

egyenlőtlenségeket kapjuk. Másrészt a (4.6.11) feltételből $\lambda=0,\ \ \mu=0,\ \ \vartheta=0$ választással

$$\langle\lambda^*,G_1(u_*)\rangle+\langle\mu^*,G_2(u_*)\rangle+\langle\vartheta^*,G_3(u_*)\rangle\ge 0$$

adódik, ami az összeadandók bármelyikének negatívitása mellett nem lehetséges, vagyis teljesülnie kell a (4.6.9) és (4.6.10) feltételeknek.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy a (4.6.2)-(4.6.1) feladat konvex és $(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*)\in\mathbb{R}^n\times\Lambda$ teljesíti az (4.6.5)-(4.6.10) feltételeket.

Mivel az $f(u),g_i(u)(i=1,\ldots,s)$ függvények konvexek, az $L(u,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*)$ Lagrange függvény is konvex u-ban, és a konvexitás elsőrendű feltételét, valamint a (4.6.5) feltételt felhasználva

$$L(u,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*)\ge L(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*)+\underbrace{\langle L'_u(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*),u-u_*\rangle}_{\ge 0}\ge L(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*),$$

azaz (4.6.4) feltétel jobboldala teljesül.

Az $L(u_*,\lambda,\mu,\vartheta)$ Lagrange függvény lineáris (λ,μ,ϑ)-ban, így felhasználva a (4.6.6)-(4.6.10) feltételeket:

$$\begin{aligned}L(u_*,\lambda,\mu,\vartheta) &= L(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*)+\langle L'_\lambda(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*),\lambda-\lambda^*\rangle+\\ &\qquad\langle L'_\mu(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*),\mu-\mu^*\rangle+\langle L'_\vartheta(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*),\vartheta-\vartheta^*\rangle\\ &= L(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*)+\\ &\qquad\langle G_1(u_*),\lambda-\lambda^*\rangle+\langle G_2(u_*),\mu-\mu^*\rangle+\langle G_3(u_*),\vartheta-\vartheta^*\rangle\\ &= L(u_*,\lambda^*,\mu^*,\vartheta^*)+\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& \langle \underbrace{G_1(u_*)}_{\leq 0}, \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \rangle + \langle \underbrace{G_2(u_*)}_{\leq 0}, \underbrace{\mu}_{\geq 0} \rangle + \langle \underbrace{G_3(u_*)}_{=0}, \vartheta \rangle - \\
& (\underbrace{\langle G_1(u_*), \lambda^* \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle G_2(u_*), \mu^* \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle G_3(u_*), \vartheta^* \rangle}_{=0}) \\
\leq \quad & L(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*),
\end{aligned}
$$

azaz a (4.6.4) feltétel baloldali egyenlőtlensége is igaz. ∎

4.6.1.2. Tétel. *Ha az $(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$ nyeregpontja a (4.6.2)-(4.6.1) feladathoz rendelt Lagrange függvénynek az $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ halmazon, akkor $u_* \in U_* = \{u_* \in U : f(u_*) = \inf_{u \in U} f(u)\}$. Ha (4.6.2)-(4.6.1) konvex programozási feladat, és teljesíti a Slater regularitási feltételt, akkor a feltétel szükséges is.*

Bizonyítás.
Szükségesség. Legyen $(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) \in \mathbb{R}^n \times \Lambda$ nyeregpontja a (4.6.2)-(4.6.1) feladathoz rendelt Lagrange függvénynek az $\mathbb{R}^n \times \Lambda$ halmazon. Akkor szükséges a (4.6.6)-(4.6.8) feltételek teljesülése, vagyis $u_* \in U$, továbbá a nyeregpontfeltétel jobboldala teljesül minden $u \in U$-ra, így $\forall u \in U$ esetén

$$
\begin{aligned}
L(u_*, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) = f(u_*) \quad & \leq \quad L(u, \lambda^*, \mu^*, \vartheta^*) \\
& = \quad f(u) + \langle \underbrace{G_1(u_*)}_{\leq 0}, \underbrace{\lambda}_{\geq 0} \rangle + \langle \underbrace{G_2(u_*)}_{\leq 0}, \underbrace{\mu}_{\geq 0} \rangle + \langle \underbrace{G_3(u_*)}_{=0}, \vartheta \rangle \leq f(u)
\end{aligned}
$$

Elégségesség. Mint láttuk korábban, a Slater feltételt teljesítő konvex programozási feladatra a 4.5.1.2. Tétel feltételei elégségesek is ahhoz, hogy egy $u_* \in U$ pont optimális legyen. Ezek a feltételek ekvivalensek a (4.6.5)-(4.6.10) feltételekkel. ∎

4.6.2. Kidolgozott példa

Feladat

Milyen p paraméter mellett lehet a

$$\begin{aligned} x^2 - py &\to \min && (4.6.12)\\ x^2 + y^2 &\leq 9 && (4.6.13)\\ x + y^2 &\leq 3 && (4.6.14)\\ x + y &\geq 1 && (4.6.15)\end{aligned}$$

feladatnak olyan nyeregpontja, amelyre pontosan 2. és a 3. korlátozó feltétel aktív?

Megoldás

Ha a nyeregpontban a 2. és a 3. feltétel aktív, akkor ez a pont megoldása az

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 3 && (4.6.16)\\ x + y &= 1 && (4.6.17)\end{aligned}$$

egyenletrendszernek, azaz az

$$u_1 = (x_1, y_1) = (-1, 2) \qquad u_2 = (x_2, y_2) = (2, -1)$$

pontok jöhetnek számításba. Ezek megengedettek is, mivel kielégítik az első korlátozó feltételt is.

Ahhoz, hogy a két lehetséges pont valamelyike nyeregpont lehessen, ki kell elégítenie a nyeregpontfeltételeket.

A jegyzet jelöléseinek megfelelően legyen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - py\\ g_1(x,y) &= x^2 + y^2 - 9 \leq 0\\ g_2(x,y) &= x + y^2 - 3 \leq 0\\ g_3(x,y) &= -x - y + 1 \leq 0\end{aligned}$$

és a megfelelő

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda_1 g_1(x,y) + \lambda_2 g_2(x,y) + \lambda_3 g_3(x,y)$$

Lagrange függvénnyel a nyeregpontfeltételek az

$$\mathcal{L}'_{x,y} = \begin{pmatrix} 2x \\ -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}\lambda_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix}\lambda_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}\lambda_3 = 0 \qquad (4.6.18)$$

$$\lambda_1(x^2 + y^2 - 9) = 0 \qquad (4.6.19)$$

$$\lambda_2(x + y^2 - 3) = 0 \qquad (4.6.20)$$

$$\lambda_3(-x - y + 1) = 0 \qquad (4.6.21)$$

alakot öltik, azaz az adott pontban léteznie kell a (4.6.18)-(4.6.21) rendszernek olyan $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$ megoldásának, ahol λ_1, λ_2, λ_3 nem mindegyike 0.

A (4.6.20) és a (4.6.21) komplementaritási feltételek mindkét pontban triviálisan teljesülnek bármely $\lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$ esetén, a (4.6.19) pedig mindkét esetben csak akkor, ha $\lambda_1 = 0$.

A λ_2 és λ_3 paraméterek meghatározása a (4.6.18)-ből történik:

<u>1.eset:</u> Ha $(x,y) = (-1, 2)$, akkor a (4.6.18)

$$\begin{aligned} -2 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0\\ -p + 4\lambda_2 - \lambda_3 &= 0\end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása

$$\lambda_2 = \frac{p-2}{3}, \qquad \lambda_3 = \frac{p-8}{3}.$$

Innét

$\lambda_2 \geq 0$, ha $p \geq 2$.

$\lambda_3 \geq 0$, ha $p \geq 8$.

Vagyis, ha $p \geq 8$, akkor teljesülnek a nyeregpont-feltételek a $(-1, 2)$ pontban.

2.eset: Ha $(x, y) = (2, -1)$, akkor a (4.6.18)

$$\begin{aligned} 4 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ -p + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása

$$\lambda_2 = \frac{-p-4}{3}, \qquad \lambda_3 = \frac{-p+8}{3}.$$

Innét

$\lambda_2 \geq 0$, ha $p \leq -4$.

$\lambda_3 \geq 0$, ha $p \leq 8$.

Vagyis, ha $p \leq -4$, akkor teljesülnek a nyeregpont-feltételek a $(2, -1)$ pontban.

Mivel a feladat konvex programozási feladat (ellenőrízze!) a kapott feltételek mellett mindkét pont nyeregpont is.

4.6.3. Feladatok

4.6.3.1. Feladat. *Tekintsük a*

$$-u \to \min_{u \in U}$$

$$U = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0, u^2 \leq 0\};$$

feladatot. Mutassuk meg, hogy a feladathoz rendelt Lagrange függvénynek nincs nyeregpontja.

4.6.3.2. Feladat. *Tekintsük az*

$$u \to \min_{u \in U}$$

$$U = \{u \in \mathbb{R} : u \geq 0, u^2 \leq 0\}$$

feladatot. Mutassuk meg, hogy a feladathoz rendelt Lagrange függvénynek $(0, 1, \lambda_2^*)$ *nyeregpontja* $\forall \lambda_2^* \geq 0$ *esetén .*

4.6.3.3. Feladat. *Tekintsük az*

$$|u|^2 \to \min_{u \in U}$$

$$U = \{u \in \mathbb{R} : |u|^2 - 1 \leq 0\}$$

feladatot. Mutassuk meg, hogy $u_* = 0, \lambda^* = 0$ *nyeregpont.*

4.6.3.4. Feladat. *Nyeregpont-e az*

$$\begin{array}{rcl} y & \to & \min \\ x^2 + y^2 & \leq & 1 \\ -x + y^2 & \leq & 0 \\ x + y & \geq & 0 \end{array}$$

feladatra (u_*, λ^*)*, ha* $u_* = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}),\ \ \lambda^* = (1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2} + 1, 0)$*?*

4.6.3.5. Feladat. *Van-e az*

$$\begin{array}{rcl} x^2 + y & \to & \max \\ x^2 + y^2 & \leq & 9 \\ x + y^2 & \leq & 3 \\ x + y & \leq & 1 \end{array}$$

feladatnak olyan nyeregpontja, ahol pontosan a két utolsó korlátozó feltétel aktív?

5. Kvadratikus programozás és a lineáris komplementaritási feladat

5.1. A kvadratikus programozás és a lineáris komplementaritási feladat kapcsolata

A kvadratikus programozás feladatának a kvadratikus célfüggvény optimalizálását tekintjük lineáris korlátozó, valamint a változók nemnegatívitási feltéteei mellett, azaz a

$$\frac{1}{2}\langle u, \mathsf{H}u\rangle + \langle c, u\rangle \to \min_{u\in U} \tag{5.1.1}$$

$$U = \{u \in \mathbb{R}^n : \mathsf{A}u \le b, \ \ u \ge 0\} \tag{5.1.2}$$

nemlineáris programozási feladatot, ahol H – szimmetrikus $n\times n$-mátrix, $c \in \mathbb{R}^n$, A – $m\times n$-mátrix, $b \in \mathbb{R}^m$.

Ha H pozitív szemidefinit, akkor a fenti feladat konvex programozási feladat.

A feladathoz rendelt Lagrange függvény:

$$L(u, \lambda) = f(u) + \langle \lambda, \mathsf{A}u - b\rangle - \langle \mu, u\rangle.$$

A Kuhn-Tucker tételt alkalmazva, ha u_* minimumpont, akkor $\exists\lambda^* \in \mathbb{R}^m_+, \mu^* \in \mathbb{R}^n_+$ Úgy, hogy (u_*, λ^*, μ^*) kielégíti a

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}u + c + \mathsf{A}^T\lambda - \mu &= 0 && (5.1.3)\\
\mathsf{A}u - b &\le 0 && (5.1.4)\\
u, \lambda, \mu &\ge 0 && (5.1.5)\\
\langle \lambda, \mathsf{A}u - b\rangle &= 0 && (5.1.6)\\
\langle \mu, u\rangle &= 0 && (5.1.7)
\end{aligned}$$

rendszert.

Bevezetve az $y \in \mathbb{R}^m_+$ változót, (5.1.3)-(5.1.7) a következő alakba írható át:

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}u + c + \mathsf{A}^T\lambda - \mu &= 0 && (5.1.8)\\
\mathsf{A}u - b + y &= 0 && (5.1.9)\\
u, \lambda, \mu, y &\ge 0 && (5.1.10)\\
\langle \lambda, y\rangle &= 0 && (5.1.11)\\
\langle \mu, u\rangle &= 0 && (5.1.12)
\end{aligned}$$

vagy mátrix alakban:

$$\begin{pmatrix} \mu \\ y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathsf{H} & \mathsf{A}^T \\ -\mathsf{A} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix} \tag{5.1.13}$$

$$u, \lambda, \mu, y \ge 0 \tag{5.1.14}$$

$$\langle \lambda, y\rangle = 0 \quad \langle \mu, u\rangle = 0 \tag{5.1.15}$$

A kvadratikus programozás feladata tehát ekvivalens a következő **lineáris komplementaritási feladattal**: Keresünk olyan $w, z \in \mathbb{R}^{n+m}_+$ vektorokat, amelyek kielégítik a

$$\begin{aligned}
w - \mathsf{M}z &= q && (5.1.16)\\
\langle w, z\rangle &= 0 && (5.1.17)\\
w, z &\ge 0 && (5.1.18)
\end{aligned}$$

rendszert, ahol

$$\mathsf{M} = \begin{pmatrix} \mathsf{H} & \mathsf{A}^T \\ -\mathsf{A} & \mathsf{0} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} c \\ b \end{pmatrix}, \quad w = \begin{pmatrix} \mu \\ y \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} u \\ \lambda \end{pmatrix}. \tag{5.1.19}$$

(5.1.18) miatt (5.1.17) nyilvánvalóan

$$w_j z_j = 0, \quad (j = 1, \ldots, m+n)$$

5.1.1. Feladatok

5.1.1. Feladat. *Írja át lineáris komplementaritási feladattá az alábbi feladatokat*

1.)
$$\begin{array}{c} x^2+3xy+y^2-2xz-4yz+x-3y \to \min \\ x+y+z \le 10 \\ 2x-y \ge 0 \\ x,y,z \ge 0 \end{array}.$$

2.)
$$\begin{array}{c} x^2+6xy+y^2-3xz-4yz-5x-3y \to \min \\ x+y+2z \le 10 \\ 2x-y \ge 1 \\ x,y,z \ge 0 \end{array}.$$

5.1.2. Feladat. *Adja meg azokat a kvadratikus programozási feladatokat, emelyek az alábbi halmazoknak az adott ponthoz legközelebbi nemnegatív koordinátájú pontját határozzák meg:*

1.) $U = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x+y \ge 6,\ 3x-2y \le 2\}$
$u = (4,3)$;

2.) $U = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x+2y \le 2,\ x-y \ge 3\}$
$u = (7,2)$;

3.) $U = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : -x+3y \le 6,\ x-y \ge 3\}$
$u = (5,7)$

4.) $U = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 3x+2y \le 24,\ x-y \ge 3\}$
$u = (8,7)$.

Írja át a kapott feladatokat lineáris komplementaritási feladattá!

5.2. A lineáris komplementaritási feladat

5.2.1. Lemke algoritmus

Legyen M tetszőleges $p \times p$ mátrix, és $q \in \mathbb{R}^p$. Keressük olyan $w, z \in \mathbb{R}^p$ vektorokat, amelyek kielégítik a

$$w - \mathsf{M}z = q \tag{5.2.1}$$

$$w_j \geq 0, \;\; z_j \geq 0 \;\; (j = 1, \ldots, p) \tag{5.2.2}$$

$$w_j z_j = 0, \;\; (j = 1, \ldots, m) \tag{5.2.3}$$

rendszert.

A (w_j, z_j) változókat **komplementáris változók**nak nevezzük.

5.2.1. Definíció. *A (w, z) pár* **tökéletes megengedett bázis megoldás***a az (5.2.1-5.2.3) feladatnak, ha kielégítik (5.2.1-5.2.2)-t és minden j-re a (w_j, z_j) párnak pontosan az egyik komponense bázisbeli.*

Ha $q_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, p$, akkor (5.2.1-5.2.3)-nak nyilvánvalóan megoldása a $w = q, \;\; z = 0$ pár.

Ha legalább egy $j \in \{1, \ldots, p\}$-re $q_j < 0$), akkor az eredeti feladat megoldása helyett keressük a (w, z, z_0) megoldását a

$$w - \mathsf{M}z - \mathbf{1}z_0 = q \tag{5.2.4}$$

$$w_j \geq 0, \;\; z_j \geq 0 \;\; (j = 1, \ldots, p) \tag{5.2.5}$$

$$w_j z_j = 0, \;\; (j = 1, \ldots, m) \tag{5.2.6}$$

rendszernek, ahol $\mathbf{1} = \{1, \ldots, 1\}$.

Nyilvánvalóan,

$$z_0 = -\min_{i=1,\ldots,p} q_i, \;\; z = 0, \;\; w = q + z_0 \mathbf{1} \tag{5.2.7}$$

egy megengedett megoldása az (5.2.4)-(5.2.6) rendszernek. Megfelelő bázistranszformációkkal megkisérelünk olyan megengedett megoldást keresni, ahol $z_0 = 0$ teljesül.

5.2.2. Definíció. *A (w, z, z_0) hármas* **majdnem tökéletes megengedett bázis megoldás***a az (5.2.4-5.2.6) feladatnak, ha*

1. *kielégíti (5.2.4-5.2.5)-t;*
2. *létezik olyan $1 \leq s \leq p$, hogy sem z_j, sem w_j nem bázisbeli;*
3. *minden $j \neq s$-re a (w_j, z_j) párnak pontosan az egyik komponense bázisbeli.*

A definícióból következik, hogy majdnem tökéletes megengedett bázis megoldás esetén z_0 bázisbeli kell legyen. Másrészt az is látszik, hogy (5.2.7) egy majdnem tökéletes megengedett bázis megoldás.

A (w, z, z_0) majdnem tökéletes megengedett bázis megoldás **szomszédos majdnem tökéletes megengedett bázis megoldás**ához úgy juthatunk, hogy a bázisban eddig nem szereplő (w_s, z_s) párból valamelyiket bevonjuk a bázisba, feltéve, hogy ezzel z_0 nem kerül ki a bázisból.

A **Lemke algoritmus** alapgondolata a következő: (5.2.7) majdenem tökéletes megengedett bázis megoldásból kiindulva bázistranszformációkkal szomszédos majdenem tökéletes megengedett bázis megoldásokon haladva javítjuk a megoldást.

Algoritmus:

1.lépés: Ha $q_i \geq 0 \;\; \forall i = 1, \ldots, p$, akkor $w = q, \; z = 0$ megoldás. KÉSZ!

Ha $\exists i \in \{1, \ldots, p\}$, melyre $q_i < 0$, akkor az induló majdenem tökéletes megengedett bázis megoldás előállítása: Legyen $q_s = -\min\limits_{i=1,\ldots,p} q_i$. A z_0 oszlopából az s-edik elemet választva pivot elemként, a w_s-t kivonjuk a bázisból, s helyére z_0 kerül.

k.lépés: $((k > 1))$ Jelölje v_s a $(k-1)$-dik lépésben a bázisból kivont változót és y_s annak a párját. Most y_s-t (ami szintén nincs a bázisban) kell bevonnunk a bázisba, ha ez lehetséges. Jelölje a $(k-1)$-dik lépésben kapott szimplex táblában az y_s-nek megfelelő oszlopvektort d_s, a transzformált jobboldali vektort pedig $\overline{q}$.

A következő esetek lehetségesek:

- Ha $\exists i \in \{1, \ldots, p\}$, melyre $d_{is} > 0$, akkor legyen

$$\frac{\overline{q}_r}{d_{rs}} = \min_{i=1,\ldots,p} \left\{ \frac{\overline{q}_i}{d_{is}} : d_{is} > 0 \right\}$$

  - Ha az r-edik sor a bázisban valamelyik w- vagy z-komponensnek felel meg, akkor a bázistranszformációt a d_{rs} pivot elemmel végrehajtva, ez lesz ebben a lépésben a bázisból kivont v_s változó. $k := k + 1$-gyel megismételjük a k-dik lépést.
  - Ha az r-edik sor a bázisban a z_0 változónak felel meg, akkor a z_0 változót kivonva a bázisból egy tökéletes megengedett bázist kapunk és megállunk.

- Ha $d_{is} \leq 0 \;\; \forall i \in \{1, \ldots, p\}$, akkor egy

$$R = \{(w, z, z_0) + \lambda(e_w, e_z, e_{z_0}), \;\; \lambda \geq 0\}$$

végtelen sugárhoz jutunk. Itt az $e = (e_w, e_z, e_{z_0})$ végtelen irányvektor koordinátáit a következőképpen kapjuk meg:

$$e_j = \begin{cases} 1, & \text{az } y_s\text{-nek megfelelő sorban} \\ -d_{is}, & \text{az } i\text{-edik bázisváltozó sorában} \\ 0, & \text{egyébként} \end{cases} .$$

A Kidolgozott példák fejezetben az algoritmus menetét illusztráljuk a két különböző leállás esetén.

A Lemke algoritmus végességét mondja ki a következő

5.2.1.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy (5.2.4)-(5.2.6) minden majdnem tökéletes megengedett bázisa nemdegenerált (azaz minden bázisbeli elem pozitív). Akkor a Lemke algoritmus véges számú lépésben befejeződik, miközben az iterációk során egyetlen generált majdnem tökéletes megengedett bázismegoldás sem ismétlődik.*

Bizonyítás.
Jelölje $(w, z, z_0)_k, \;\; k = 1, 2, \ldots$ a k. iterációban generált majdnem tökéletes megengedett bázist. Mivel a feladatról feltételeztük a nemdegeneráltságot, a lehetséges majdnem tökéletes megengedett bázisok száma véges, így az algoritmus végességéhez elegendő belátnunk, hogy egyetlen majdnem tökéletes megengedett bázis sem ismétlődik meg.

Tegyük fel az ellenkezőjét. Legyen $(w, z, z_0)_k$ az első olyan majdnem tökéletes megengedett bázis, amely már szerepelt egy korábbi iterációban. Jelölje ennek az iterációnak az indexét $k - \alpha$, azaz legyen $(w, z, z_0)_k = (w, z, z_0)_{k-\alpha}$. A nemdegeneráltsági feltételből, valamint az algoritmus konstrukciójából következik, hogy $\alpha > 2$. Vegyük ugyanis észre, hogy az induló majdnem tökéletes megengedett bázisnak egy, minden többinek két szomszédos majdnem tökéletes megengedett bázisa van. Az első esetben a w_s bevonásával, a második esetben vagy a w_s vagy a z_s bevonáával kaphatunk szomszédos majdnem tökéletes megengedett bázist. Mivel $(w, z, z_0)_{k-1}$ szomszédos $(w, z, z_0)_k$-val, így szomszédos $(w, z, z_0)_{k-\alpha}$-val is.

Ha $k - \alpha = 1$, akkor annak csak egy szomszédja van, így $(w, z, z_0)_{k-1} = (w, z, z_0)_{k-\alpha+1}$, azaz lenne a k. iteráció előtt ismétlődés, ami ellentmondás.

Legyen $k - \alpha > 1$. Mivel $(w, z, z_0)_{k-1}$ szomszédos $(w, z, z_0)_{k-\alpha}$-val, így vagy $(w, z, z_0)_{k-1} = (w, z, z_0)_{k-\alpha-1}$, vagy $(w, z, z_0)_{k-1} = (w, z, z_0)_{k-\alpha+1}$, azaz ebben az esetben is lenne a k. iteráció előtt ismétlődés, ami ellentmondás. ■

5.2.2. A megoldások tulajdonságai és a a lineáráris komplementaritási feladat negoldhatósága

Az alábbi tételben vizsgáljuk a végtelen irány tulajdonságait.

5.2.2.1. Tétel. *Tegyük fel, hogy (5.2.4)-(5.2.6) minden majdnem tökéletes megengedett bázisa nemdegenerált és a Lemke algoritmus*

$$R = \{(w, z, z_0) + \lambda(e_w, e_z, e_{z_0}),\ \ \lambda \geq 0\}$$

végtelen sugár megtalálásával fejeződik be, ahol (w, z, z_0) *majdnem tökéletes megengedett bázis és* (e_w, e_z, e_{z_0}) *a végtelen irányvektor. Akkor fennállnak a következő összefüggések:*

1.) $(e_w, e_z, e_{z_0}) \neq (0, 0, 0),\ \ e_w, e_z, e_{z_0} \geq 0$;

2.) $e_w - \mathsf{M}e_z - \mathbf{1}e_{z_0} = 0$;

3.) $\langle w, z\rangle = \langle w, e_z\rangle = \langle e_w, z\rangle = \langle e_w, e_z\rangle = 0$;

4.) $e_z \neq 0$;

5.) $\langle e_z, \mathsf{M}e_z\rangle = -\langle \mathbf{1}, e_z\rangle e_{z_0}$.

Bizonyítás.
1.) és 2.) közvetlenül adódik a végtelen irány definiciójából.

A végtelen sugár minden pontja kielégíti a komplementaritási feltételt, ezért

$$\langle w + \lambda e_w, z + \lambda e_z\rangle = 0\ \ \forall\lambda \geq 0.$$

Elvégezve a szorzást, valamennyi összeadandó zérus kell legyen, figyelembe véve a változók nemnegativitását. Ez 3.) teljesülését jelenti.

Tegyük fel, hogy $e_z = 0$. Ekkor 2.) miatt csak $e_{z_0} > 0$ lehet, mert ellenkező esetben $e_w = 0$ is teljesülne, ami ellentmondana a $(e_w, e_z, e_{z_0}) \neq (0, 0, 0)$ feltételnek. Ugyancsak 2.)-ből $e_w = \mathbf{1}e_{z_0}$. Ezt skalárisan z-vel szorozva és felhasználva 3.)-t

$$0 = \langle e_w, z\rangle = \langle z, \mathbf{1}\rangle e_{z_0}.$$

Innét $\langle z, \mathbf{1}\rangle = 0$. Mivel $z \geq 0$, ez csak $z = 0$ mellett leheséges. Figyelembe véve a feladat feltételezett nemdegeneráltságát, ez azt jelenti, hogy z egyetlen koordinátája sem bázisbeli. Minthogy z_0 bázisbeli, így w-nek $p-1$ bázisbeli koordinátája van. $w - \mathsf{M}z - \mathbf{1}z_0 = q$-ból és $z = 0$-ból következik, hogy ez akkor teljesül, ha $z_0 = -\min_{i=1,\dots,p} q_i$, vagyis ha a kezdő majdnem tökéletes megengedett bázisunk van. Ez viszont ellentmond annak, hogy a majdnem tökéletes megengedett bázisok nem ismétlődnek. Így $e_z = 0$ nem lehet igaz.

Végezetül, az $e_w - \mathsf{M}e_z - \mathbf{1}e_{z_0} = 0$ egyenletet skalárisan e_z-vel szorozva és felhasználva, hogy $\langle e_z, e_w\rangle = 0$, valamint $e_z, e_{z_0} \geq 0$ kapjuk, hogy $\langle e_z, \mathsf{M}e_z\rangle = -\langle e_z, \mathbf{1}\rangle e_{z_0} \leq 0$. ∎

A továbbiakban azt vizsgáljuk, hogy milyen feltételek mellett lehet eldönteni, hogy a kapott megoldás optimális-e? Ehhez az M mátrixok egy speciális osztályára van szükségünk.

5.2.2.1. Definíció. *Legyen* M $(p \times p)$ *típusú mátrix. Azt mondjuk, hogy* M **kopzitív**, *ha*

$$\langle z, \mathsf{M}z\rangle \geq 0\ \ \forall z \geq 0. \tag{5.2.8}$$

M **kopozitív-plusz**, *ha kopozitív és*

$$z \geq 0,\ \ \langle z, \mathsf{M}z\rangle = 0 \Longrightarrow (\mathsf{M} + \mathsf{M}^T)z = 0. \tag{5.2.9}$$

Az alábbi állítások a mátrixok kopozitív ill. kopozitív-plusz tulajdonságára ad meg kritériumot.

5.2.2.2. Tétel. *Legyen* M *nemnegatív elemű mátrix. Akkor* M *kopozitív. Ha a nemnegatív elemű mátrix fődiagonálisában az elemek pozitívak, akkor* M *kopozitív-plusz.*

Bizonyítás.
Mivel M nemnegatív, minden $z \geq 0$-ra $\mathsf{M}z \geq 0$, így ugyancsak teljesül a $\langle z, \mathsf{M}z \rangle \geq 0$ feltétel.

Ha M diagonális elemei pozitívak, akkor az $\mathsf{M}z$ és $\mathsf{M}^T z$ vektorok mindegyikének van legalább egy pozitív komponense minden $z \geq 0$ esetén, ha $z \neq 0$. Nevezetesen, ha z i. koordinátája pozitív, akkor $\mathsf{M}z$ i. koordinátája is pozitív. Ha tehát $\langle z, \mathsf{M}z \rangle = 0$ valamely $z \geq 0$ esetén, akkor $z = 0$ és az $(\mathsf{M} + \mathsf{M}^T)z = 0$ triviálisan teljesül. ■

5.2.2.3. Tétel. *Ha az* M *pozitív szemidefinit mátrix, akkor kopozitív. Ha* M *még szimmetrikus is, akkor kopozitív-plusz tulajdonságú is.*

Bizonyítás.
A pozitív szemidefinitség automatikusan maga után vonja a kopozitivitást, mivel a kívánt $\langle z, \mathsf{M}z \rangle \geq 0$ feltétel teljesül minden z-re, így $z \geq 0$-ra is.

Ha M szimmetrikus szemidefinit mátrix, akkor a kopozitív-plusz tulajdonság belátásához elég belátni, hogy

$$\langle z, \mathsf{M}z \rangle = 0 \Longrightarrow \mathsf{M}z = 0.$$

Jelölje $d = \mathsf{M}z$. A pozitív szemidefinitségből következik, hogy

$$\langle z - \lambda d, \mathsf{M}(z - \lambda d) \rangle \geq 0 \ \ \forall \lambda > 0,$$

azaz

$$0 \leq \langle z \mathsf{M}z \rangle - \lambda \langle d, \mathsf{M}z \rangle - \lambda \langle z, \mathsf{M}d \rangle + \lambda^2 \langle d, \mathsf{M}d \rangle = -\lambda(2||d||^2 + \lambda \langle d, \mathsf{M}d \rangle).$$

$\lambda > 0$-val osztva és a $\lambda \downarrow 0$ határátmenettel $0 \leq -||d||^2 \leq 0$, amiből következik, hogy $d = \mathsf{M}z = 0$.
■

5.2.2.4. Tétel. *Legyenek* M_1, M_2 *és* A $m \times m$, $p \times p$ *ill.* $p \times m$ *típusú mátrixok és legyen* $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} \mathsf{M}_1 & \mathsf{A}^T \\ -\mathsf{A} & \mathsf{M}_2 \end{pmatrix}$ $(m+p) \times (m+p)$ *típusú mátrix. Akkor*

1.) *ha* M_1 *és* M_2 *kopozitívak, akkor* M *is az;*

2.) *ha* M_1 *és* M_2 *kopozitív-plusz tulajdonságú, akkor* M *is az.*

Bizonyítás.
1.) Legyen $z = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \geq 0$, ahol az $x \geq 0$, $\ y \geq 0$ az M_1 és M_2 mátrixoknak megfelelő particionálása z-nek. Ekkor M_1 és M_2 kopozitívitása miatt

$$\begin{aligned} \langle z, \mathsf{M}z \rangle &= \langle x, \mathsf{M}_1 x \rangle + \langle x, \mathsf{A}^T y \rangle - \langle y, \mathsf{A}x \rangle + \langle y, \mathsf{M}_2 y \rangle \\ &= \langle x, \mathsf{M}_1 x \rangle + \langle y, \mathsf{M}_2 y \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

2.) Ha $\langle z, \mathsf{M}z \rangle = \langle x, \mathsf{M}_1 x \rangle + \langle y, \mathsf{M}_2 y \rangle = 0$ valamely $z \geq 0$-ra, akkor M_1 és M_2 kopozitívitása miatt $\langle x, \mathsf{M}x \rangle = 0$ és $\langle y, \mathsf{M}y \rangle = 0$. Az M_1 és M_2 mátrixok kopozitív-plusz tulajdonsága miatt

$$(\mathsf{M} + \mathsf{M}^T)z = \begin{pmatrix} \mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_1^T & 0 \\ 0 & \mathsf{M}_2 + \mathsf{M}_2^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathsf{M}_1 + \mathsf{M}_1^T)x \\ (\mathsf{M}_2 + \mathsf{M}_2^T)y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

5.2.2.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (5.2.4)-(5.2.6) lineáris komplementaritási feladat nemdegenerált és az* M *mátrix kopozitív-plusz tulajdonságú.*

1.) *A Lemke algoritmus pontosan akkor határoz meg egy végtelen sugarat, ha a (5.2.1)-(5.2.2) rendszer inkonzisztens.*

2.) *A Lemke algoritmus az eredeti (5.2.1)-(5.2.3) tökéletes bázismegoldásával pontosan akkor fejeződik be, ha az (5.2.1)-(5.2.2) rendszer konzisztens.*

Bizonyítás.
A tétel feltételei mellett a Lemke algoritmusnak pontosan két megállási lehetősége van.

1) Nyilvánvaló, ha az (5.2.1)-(5.2.2) rendszer inkonzisztens, akkor nem fejeződhet be az algoritmus az eredeti feladat tökéletes megengedett bázisával.

Tegyük fel, hogy az algoritmus az $R = (w, z, z_0) + \lambda(e_w, e_z, e_{z_0}),\quad \lambda \geq 0$ sugárral fejeződik be, ahol (w, z, z_0) majdnem tökéletes megengedett bázis, (e_w, e_z, e_{z_0}) pedig végtelen irány. Az 5.2.2.1. Tétel szerint

$$e_z \geq 0,\;\; e_z \neq 0,\;\; \langle e_z, \mathsf{M}e_z\rangle = -\langle \mathbf{1}, e_z\rangle e_{z_0} \leq 0,$$

másrészt M kopozitívitása miatt $\langle e_z, \mathsf{M}e_z\rangle \geq 0$, így $0 = \langle e_z, \mathsf{M}e_z\rangle = -\langle \mathbf{1}, e_z\rangle e_{z_0}$. Innét következik, hogy $e_{z_0} = 0$, mivel $e_z \neq 0$. Ez az 5.2.2.1. Tétel 2.) állításával együtt a $0 \leq e_w = \mathsf{M}e_z$ összefüggéshez vezet. Felhasználva mindezeket, valamint az M mátrix kopozitív-plusz tulajdonságát és azt a tényt, hogy (w, z, z_0) majdnem tökéletes megengedett bázis, a következő összefüggéseket kapjuk:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle w, e_z\rangle = \langle q + \mathsf{M}z + \mathbf{1}z_0, e_z\rangle \\
&= \langle q, e_z\rangle + \langle z, \mathsf{M}^T e_z\rangle + \langle \mathbf{1}, e_z\rangle z_0 \\
&= \langle q, e_z\rangle - \langle z, \mathsf{M}e_z\rangle + \langle \mathbf{1}, e_z\rangle z_0 \\
&> \langle q, e_z\rangle - \langle z, e_w\rangle = \langle q, e_z\rangle
\end{aligned}$$

A fentiek azt jelentik, hogy az

$$\begin{aligned}
\mathsf{M}^T y &= -\mathsf{M}y \leq 0 \\
-y &\leq 0 \\
\langle q, y\rangle &< 0
\end{aligned}$$

rendszernek van megoldása, nevezetesen $y = e_z$. Akkor a Farkas lemma szerint nincs megoldása a

$$\begin{aligned}
w - \mathsf{M}z &= q \\
w &\geq 0 \\
z &\geq 0
\end{aligned}$$

rendszernek.

2.) Ha az (5.2.1)-(5.2.2) rendszer konzisztens, akkor az előbbiek szerint a Lemke algoritmus nem fejeződhet be végtelen sugárral, csak az (5.2.1)-(5.2.3) tökéletes bázismegoldásával. Másrészt (5.2.1)-(5.2.3) tökéletes bázismegoldás létezése (5.2.1)-(5.2.2) konzisztenciáját is jelenti. ■

5.2.2.5.1. Következmény. *Ha* M *nemnegatív mátrix pozitív diagonális elemekkal, akkor a Lemke algoritmus véges sok lépésben az (5.2.1)-(5.2.3) tökéletes bázismegoldását szolgáltatja.*

Bizonyítás.
A tétel feltételei mellett M kopozitív-plusz tulajdonságú. Továbbá (5.2.1)-(5.2.2) konzisztens, ugyanis megoldása minden olyan $w \geq 0,\quad z \geq 0$ ahol z koordinátái elég nagyok ahhoz, hogy $w = \mathsf{M}z + q \geq 0$ legyen. ■

5.2.3. Kidolgozott példák

1.<u>**Feladat**</u>

Alkalmazzuk a Lemke-algoritmust az alábbi M mátrixszal és q vektorral:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix}$$

0.lépés: Induló szimplex tábla

	w_1 d_1	w_2 d_2	w_3 d_3	w_4 d_4	z_1 d_5	z_2 d_6	z_3 d_7	z_4 d_8	z_0 d_9	q
w_1	1	0	0	0	0	0	1	1	−1	2
w_2	0	1	0	0	0	0	−1	2	−1	2
w_3	0	0	1	0	−1	1	−2	2	−1	−2
w_4	0	0	0	1	−1	−2	2	−4	$\boxed{-1}$	−6

Induló bázis: $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$$(z_0 \xrightarrow{\text{be}} B) \bigwedge (\min_{1\le i\le 4} q_i = q_4) \qquad \Longrightarrow \qquad B \xrightarrow{\text{ki}} w_4$$

Pivot elem: d_{49}

1.lépés: Új szimplex tábla

	w_1 d_1	w_2 d_2	w_3 d_3	w_4 d_4	z_1 d_5	z_2 d_6	z_3 d_7	z_4 d_8	z_0 d_9	q
w_1	1	0	0	−1	1	2	−1	5	0	8
w_2	0	1	0	−1	1	2	−3	6	0	8
w_3	0	0	1	−1	0	3	−4	$\boxed{6}$	0	4
z_0	0	0	0	−1	1	2	−2	4	1	6

Aktuális bázis: $B = \{w_1, w_2, w_3, z_0\}$

$$(z_4 \xrightarrow{\text{be}} B) \bigwedge (\min_{\substack{1\le i\le 4 \\ d_{i8}>0}} \frac{q_i}{d_{i8}} = \frac{q_3}{d_{38}}) \qquad \Longrightarrow \qquad B \xrightarrow{\text{ki}} w_3$$

Pivot elem: d_{38}

2.lépés: Új szimplex tábla

	w_1 d_1	w_2 d_2	w_3 d_3	w_4 d_4	z_1 d_5	z_2 d_6	z_3 d_7	z_4 d_8	z_0 d_9	q
w_1	1	0	$-\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{6}$	1	$-\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{7}{3}}$	0	0	$\frac{14}{3}$
w_2	0	1	−1	0	1	−1	1	0	0	4
z_4	0	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$
z_0	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	0	1	$\frac{10}{3}$

Aktuális bázis: $B = \{w_1, w_2, z_4, z_0\}$

$$(z_3 \xrightarrow{\text{be}} B) \bigwedge (\min_{\substack{\{1 \le i \le 4 \\ d_{i7} > 0}} \frac{q_i}{d_{i7}} = \frac{q_1}{d_{17}}) \qquad \Longrightarrow \qquad B \xrightarrow{\text{ki}} w_1$$

Pivot elem: d_{17}

3.lépés: Új szimplex tábla

	w_1 d_1	w_2 d_2	w_3 d_3	w_4 d_4	z_1 d_5	z_2 d_6	z_3 d_7	z_4 d_8	z_0 d_9	q
z_3	$\frac{3}{7}$	0	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{1}{14}$	$\frac{3}{7}$	$-\frac{3}{14}$	1	0	0	2
w_2	$-\frac{3}{7}$	1	$-\frac{9}{14}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{4}{7}$	$-\frac{11}{14}$	0	0	0	2
z_4	$\frac{2}{7}$	0	$-\frac{1}{14}$	$-\frac{3}{14}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{5}{14}$	0	1	0	2
z_0	$-\frac{2}{7}$	0	$-\frac{3}{7}$	$-\frac{2}{7}$	$\boxed{\frac{5}{7}}$	$\frac{1}{7}$	0	0	1	2

Aktuális bázis: $B = \{w_1, w_2, z_4, z_0\}$

$$(z_1 \xrightarrow{\text{be}} B) \bigwedge (\min_{\substack{1 \le i \le 4 \\ d_{i5} > 0}} \frac{q_i}{d_{i5}} = \frac{q_4}{d_{45}}) \qquad \Longrightarrow \qquad B \xrightarrow{\text{ki}} z_0$$

Pivot elem: d_{45}

4.lépés: Végső szimplex tábla

	w_1 d_1	w_2 d_2	w_3 d_3	w_4 d_4	z_1 d_5	z_2 d_6	z_3 d_7	z_4 d_8	z_0 d_9	q
z_3	$\frac{3}{5}$	0	$-\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0	$-\frac{3}{10}$	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$
w_2	$-\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{10}$	$\frac{3}{10}$	0	$-\frac{9}{10}$	0	0	$-\frac{4}{5}$	$\frac{2}{5}$
z_4	$\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{10}$	0	$\frac{3}{10}$	0	1	$-\frac{2}{5}$	$\frac{6}{5}$
z_1	$-\frac{2}{5}$	0	$-\frac{3}{5}$	$-\frac{2}{5}$	1	$\frac{1}{5}$	0	0	$\frac{7}{5}$	$\frac{14}{5}$

Megoldás:

$$\begin{array}{llllllllll} (w,z) = & (w_1, & w_2, & w_3, & w_4, & z_1, & z_2, & z_3, & z_4) & = \\ & (0, & \frac{2}{5}, & 0, & 0, & \frac{14}{5}, & 0, & \frac{4}{5}, & \frac{6}{5}) & \end{array}$$

2.<u>Feladat</u>

Legyen most a lineŕis komplementaritási feladat M mátrixa és q vektora:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \end{bmatrix}, \qquad q = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}$$

0.lépés: Induló szimplex tábla

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	
w_1	1	0	0	0	0	0	-1	1	-1	1
w_2	0	1	0	0	0	0	1	-2	-1	4
w_3	0	0	1	0	1	-1	-2	2	-1	-2
w_4	0	0	0	1	-1	2	2	-2	$\boxed{-1}$	-4

Induló bázis: $B = \{w_1, w_2, w_3, w_4\}$

$$(z_0 \xrightarrow{\text{be}} B) \bigwedge (\min_{1 \le i \le 4} q_i = q_4) \qquad \Longrightarrow \qquad B \xrightarrow{\text{ki}} w_4$$

Pivot elem: d_{49}

1.lépés: Új szimplex tábla

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	
w_1	1	0	0	-1	1	-2	-3	3	0	5
w_2	0	1	0	-1	1	-2	-1	0	0	8
w_3	0	0	1	-1	2	-3	-4	$\boxed{4}$	0	2
z_0	0	0	0	-1	1	-2	-2	2	1	4

Aktuális bázis: $B = \{w_1, w_2, w_3, z_0\}$

$$(z_4 \xrightarrow{\text{be}} B) \bigwedge (\min_{\substack{1 \le i \le 4 \\ d_{i8} > 0}} \frac{q_i}{d_{i8}} = \frac{q_3}{d_{38}}) \qquad \Longrightarrow \qquad B \xrightarrow{\text{ki}} w_3$$

Pivot elem: d_{38}

2.lépés: Új szimplex tábla

	w_1	w_2	w_3	w_4	z_1	z_2	z_3	z_4	z_0	q
	d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6	d_7	d_8	d_9	
w_1	1	0	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	0	0	0	$\frac{7}{2}$
w_2	0	1	0	-1	1	-2	-1	0	0	8
z_4	0	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
z_0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	3

$$z_3 \xrightarrow{\text{be}} B$$

de

$$\{i : d_{i7} > 0\} = \emptyset$$

Végtelen sugár:

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrl}
R = \{ & (& w_1, & w_2, & w_3, & w_4, & z_1, & z_2, & z_3, & z_4, & z_0) & + \\
& \lambda(& e_{w_1}, & e_{w_2}, & e_{w_3}, & e_{w_4}, & e_{z_1}, & e_{z_2}, & e_{z_3}, & e_{z_4}, & e_{z_0}) & = \\
& (& w_1, & w_2, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & z_4, & z_0) & + \\
& \lambda(& -d_{17}, & -d_{27}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & -d_{37}, & -d_{47}) & = \\
& (& \frac{7}{2}, & 8, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & 3) & + \\
& \lambda(& 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 1, & 0) & : \ \lambda \geq 0\}
\end{array}
$$

5.2.4. Feladatok

5.2.4.1. Feladat. *Keressük a lineáris komplementaritási feladat megoldását, ha*

1.) $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$.

2.) $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$.

5.2.4.2. Feladat. *Legyen* $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} -.5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. *Oldjuk meg a lineáris komplementaritási feladatot a Lemke módszerrel. Hogyan viselkedik a Lemke módszere, ha az M mátrix 2. és 3. oszlopát felcseréljük.*

5.2.4.3. Feladat. *Határozza meg a lineáris komplementaritási feladat induló majdnem tökéletes bázisát, ha*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

5.2.4.4. Feladat. *Egy lineáris komplementaritási feladat első iterációja után a következő táblázatot kapjuk:*

	$w1$	$w2$	$w3$	$w4$	$z1$	$z2$	$z3$	$z4$	$z0$	q
$w1$	1.00	0.00	−0.75	−0.25	−0.50	0.25	0.00	0.00	0.00	3.50
$w2$	0.00	1.00	0.00	−1.00	1.00	−2.00	−1.00	0.00	0.00	8.00
$z4$	0.00	0.00	0.25	−0.25	0.50	−0.75	−1.00	1.00	0.00	0.50
$z0$	0.00	0.00	−0.50	−0.50	0.00	−0.50	0.00	0.00	1.00	3.00

Mit tud mondani az eredeti feladat megoldhatóságáról? (Ha van megoldás akkor azt, ha végtelen sugár van, akkor azt írja fel, megfelelő indoklással).

5.2.4.5. Feladat. *Hogyan viselkedik a Lemke algoritmus a p paraméter $[-2, 0]$-beli értékei mellett arra a lineáris komplementaritási feladatra, ahol*

$$M = \begin{pmatrix} -p-2 & -1 \\ p & 2 \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

5.2.4.6. Feladat. *Hogyan viselkedik a Lemke algoritmus a p paraméter különböző negatív értékei mellett arra a lineáris komplementaritási feladatra, ahol*

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & p \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

5.2.4.7. Feladat. *Valaki egy lineáris komplementáritási feladatnak végtelen irányaként a*

$$(0, 5, -2, 0, -1, 0, 3, 1, 2) + \lambda(2, 0, 0, 1, 2, 1, 0, 0, 0), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

vektort határozta meg. Adjon minél több indokot arra, hogy megoldása biztosan hibás!

5.2.4.8. Feladat. *Legyen* M_1 *és* M_1 $m \times m$ *ill.* $p \times p$ *típusú mátrixok és legyen* $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} \mathsf{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathsf{M}_2 \end{pmatrix}$ $(m+p) \times (m+p)$ *típusú mátrix. Mutassa meg, hogy*

1.) *ha* M_1 *és* M_2 *kopozitívak, akkor* M *is az;*

2.) *ha* M_1 *és* M_2 *kopozitív-plusz tulajdonságú, akkor* M *is az.*

5.2.4.9. Feladat. *Kopozitívak ill. kopozitív-plusz tulajdonságúak a következő mátrixok:*

1.) $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

2.) $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix};$

3.) $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$

4.) $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix};$

5.) $\mathsf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

5.3. Kvadratikus programozás

5.3.1. Kvadratikus programozás megoldhatósága

5.3.1.1. Tétel. *A kvadratikus programozásból nyert* M *mátrix kopozitív, ha* H *kopozitív és kopozitív-plusz, ha* H *is az.*

Bizonyítás.
Az állítás az 5.2.2.4. Tétel speciális esete. ■

5.3.1.2. Tétel. *Ha* H *pozitív szemidefinit szimmetrikus mátrix, akkor* M *kopozitív-plusz.*

Bizonyítás.
Az állítás az 5.3.1.1. és az 5.2.2.3. Tételek következménye. ■

5.3.1.3. Tétel. *Ha* H *nemnegatív mátrix, akkor* M *kopozitív. Ha a nemnegatív* H *mátrix diagonális elemei pozitívak, akkor* M *kopozitív-plusz.*

Bizonyítás.
Az állítás az 5.3.1.1. és az 5.2.2.2. Tételek következménye. ■

5.3.1.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy az (5.1.1)-(5.1.2) kvadratikus programozási feladat megengedett tartománya nem üres és a problémához rendelt (5.1.16)-(5.1.18) lineáris komplementaritási feladat nem degenerált. Akkor a Lemke algoritmus a*

1.) H *pozitív szemidefinit és* $c = 0$*;*

2.) H *pozitív definit;*

3.) H *nemnegatív mátrix pozitív fődiagonálisbeli elemekkel*

feltételek bármelyike mellett véges sok lépésben meghatározza az (5.1.1)-(5.1.2) probléma Kuhn-Tucker pontját.

Pozitív szemidefinit H *mátrix esetén, ha a Lemke algoritmus végtelen sugarat határoz meg, akkor az (5.1.1)-(5.1.2) probléma optimális megoldása nem korlátos.*

Bizonyítás.
Mivel a H-ra adott feltételek bármelyike mellett M kopozitív-plusz tulajdonságú, így az 5.2.2.5. Tétel szerint, azt kell belátnunk, hogy az 1.)-3.) feltételek mellett a Lemke algoritmus nem állhat meg sugárnál. Tegyük fel, hogy fel az ellenkezőjét. Akkor az (5.1.13)-5.1.14) rendszer inkonzisztens, ezért a Farkas lemma szerint létezik a

$$\begin{aligned}
\mathsf{H}d - \mathsf{A}^T e &\leq 0 && (5.3.1)\\
\mathsf{A}d &\leq 0 && (5.3.2)\\
d &\geq 0 && (5.3.3)\\
e &\geq 0 && (5.3.4)\\
\langle c, d\rangle + \langle b, e\rangle &< 0 && (5.3.5)
\end{aligned}$$

rendszernek megoldása.

Az (5.3.1) egyenlőtlenséget d-vel skalárisan szorozva

$$0 \geq \langle d, \mathsf{H}d \rangle - \langle d, \mathsf{A}^T e \rangle = \langle d, \mathsf{H}d \rangle - \langle \mathsf{A}d, e \rangle \geq \langle d, \mathsf{H}d \rangle \geq 0,$$

azaz $\langle d, \mathsf{H}d \rangle = 0$. Innét H kopozitív-plusz tulajdonsága miatt $\mathsf{H}d = 0$.

A tétel feltétele szerint létezik olyan $u' \geq 0$, $y' \geq 0$, melyre $\mathsf{A}u' + y' = b$. (5.3.5)-ből

$$\begin{aligned} 0 &> \langle c, d \rangle + \langle b, e \rangle = \langle c, d \rangle + \langle \mathsf{A}u' + y', e \rangle \geq \langle c, d \rangle + \langle \mathsf{A}u', e \rangle \\ &\geq \langle c, d \rangle + \langle u', \mathsf{H}d \rangle. \end{aligned} \tag{5.3.6}$$

A 2.) és 3.) feltételek mellett $\langle d, \mathsf{H}d \rangle = 0$ feltételből $d = 0$, az 1. feltétellel $\mathsf{H}d = 0$ és $c = 0$, így mindegyik ellentmond (5.3.6)-nak.

Tegyük fel, hogy pozitív szemidefinit H mátrix mellett a Lemke algoritmus végtelen sugarat határoz meg. Mivel $\mathsf{H}d = 0$, (5.3.6)-ból $\langle c, d \rangle < 0$ adódik. (5.3.2) és (5.3.3) miatt d a megengedett tartomány végtelen iránya, azaz $u' + \lambda d$ megengedett pont minden $\lambda \geq 0$ esetén.

Jelölje a kvadratikus programozás célfüggvényét $f(u)$. Akkor, figyelembe véve, hogy $\mathsf{H}d = 0$, azt kapjuk, hogy

$$f(u' + \lambda d) = f(u') + \lambda \langle c + \mathsf{H}u', d \rangle + \frac{1}{2}\lambda^2 \langle d, Hd \rangle = f(u') + \lambda \langle c, d \rangle.$$

Mivel $\langle c, d \rangle < 0$, ha $\lambda \to \infty$, akkor $f(u' + \lambda d) \to -\infty$. ■

5.3.2. Feladatok

5.3.2.1. Feladat. *Oldja meg a 5.1.1.Feladat részfeladatait Lemke algoritmussal!*

5.3.2.2. Feladat. *Oldja meg a 5.1.2.Feladat részfeladatait Lemke algoritmussal!*

5.3.2.3. Feladat. *Hogyan viselkedik a Lemke algoritmus a p paraméter különböző értékei mellett az*

$$\begin{array}{rcl} \frac{1}{2}px^2 + 4y^2 - 2x + y & \rightarrow & \min \\ px + y & \leq & 6 \\ x, y & \geq & 0 \end{array}$$

kvadratikus programozási feladatra?

6. Hiperbolikus programozás

6.1. Charnes-Cooper eljárás

Tekintsük a következő optimalizálási feladatot:

$$\frac{\langle p, u\rangle + \alpha}{\langle q, u\rangle + \beta} \to \min \tag{6.1.1}$$

$$\begin{aligned} \mathsf{A}u &\leq b & (6.1.2)\\ u &\geq 0, & (6.1.3) \end{aligned}$$

ahol $p, q, u \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $\mathsf{A} - m \times n$ mátrix, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Feltesszük, hogy a

$$C = \{u \in \mathbb{R}^n : \mathsf{A}u \leq u, \ \ u \geq 0\}$$

halmaz kompakt és $\langle q, u\rangle + \beta$ a C halmazon azonos előjelű és nem veszi fel a nulla értéket (az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy pozitív, ellenkező esetben a célfüggvény számlálóját és nevezőjét is megszorozzuk -1-gyel).

Charnes-Cooper eljárás

Vezessük be a következő új változókat:

$$z = \frac{1}{\langle q, u\rangle + \beta}, \quad y = zu.$$

A nevező pozitívitási feltétele miatt $z > 0$.

Ezekkel a változókkal:

$$\begin{aligned} \frac{\langle p, u\rangle + \alpha}{\langle q, u\rangle + \beta} &= \langle p, \frac{u}{\langle q, u\rangle + \beta}\rangle + \frac{\alpha}{\langle q, u\rangle + \beta}\\ &= \langle p, zu\rangle + \alpha z\\ &= \langle p, y\rangle + \alpha z; \end{aligned}$$

$$\mathsf{A}y = \mathsf{A}uz \leq bz$$

és

$$z(\langle q, u\rangle + \beta) = \langle q, y\rangle + z\beta = 1.$$

Azaz az eredeti feladat a következő feladatba transzformálódik:

$$\langle p, y\rangle + \alpha z \to \min$$

$$\begin{aligned} \mathsf{A}y - bz &\leq 0\\ \langle q, y\rangle + \beta z &= 1\\ y &\geq 0\\ z &> 0. \end{aligned}$$

Valójában a (6.1.4) feltétel a

$$z \geq 0$$

feltételre cserélhető, ugyanis ez utóbbi esetben sem lehet az $(y, 0)$ megengedett pont. Ha ugyanis $z = 0$ lenne, akkor (6.1.4) miatt $y \neq 0$, de $\mathsf{A}y \leq 0$, $\ y \geq 0$ lenne, vagyis y végtelen iránya lenne a C tartománynak, ami ellentmond annak, hogy C kompakt.

6.1.1. Tétel. *Ha* (y^*, z^*) *optimális megoldása a*

$$\langle p, y\rangle + \alpha z \to \min$$

$$\begin{aligned} \mathsf{A}y - bz &\leq 0 \\ \langle q, y\rangle + \beta z &= 1 \\ y &\geq 0 \\ z &\geq 0. \end{aligned}$$

lineáris programozási feladatnak, akkor $u^* = y^*/z^*$ *optimális megoldása az eredeti hiperbolikus programozási feladatnak.*

Megjegyzések:

- A kompaktság ellenőrzése a

  $$\sum_{i=1}^{n} x_i \to \max_C$$

  LP feladat megoldásával lehetséges, ha ez nem végtelen iránnyal fejeződik be, akkor korlátos a C halmaz.

- A nevező azonos előjelűségének vizsgálata a következő eljárással történhet:

  Legyen u_0 a megengedett tartomány egy pontja. (Ilyen pontnak pl. választhtó a megengedett tartomány korlátosságát vizysgáló feladat optimális megoldása) Jelölje a célfüggvény nevezőjének értékét az u_0 pontban $q_0 = \langle q, 0\rangle$. Oldjuk meg

  $$\langle q, y\rangle \to \min_C$$

  lineáris programozási feladatot, ha $f_0 > 0$, ill. a

  $$\langle q, y\rangle \to \max_C$$

  lineáris programozási feladatot, ha $f_0 < 0$.

  Jelölje a megfelelő LP feladat optimális célfüggvényértékét q^*. Ha $q_0 = q^*$, akkor a nevező nem vált előjelet.

- A hiperbolikus programozási feladatból a Charnes-Cooper transzformációval kapott LP feladat mindig tartalmaz egy szigorúan megkövetelt egyenlőség típusú feltételt, így az LP megoldására a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk.

6.2. Kidolgozott példa

Feladat

Ellenőrizze, hogy megoldható-e az

$$\begin{aligned} \frac{x+y-1}{x-4y-6} &\rightarrow \max \\ 2x+y &\geq 4 \\ 3x-4y &\leq 12 \\ -x+2y &\leq 12 \\ x,y &\geq 0 \end{aligned}$$

hiperbolikus programozási feladat a Charnes-Cooper eljárással és pozitív válasz esetén oldja is meg ezzel a módszerrel!

Megoldás

A feladat Charnes-Cooper algoritmussal való megoldhatóságának két feltétele van:
a) a korlátozó tartomány korlátos legyen,
b) a nevező a korlátozó tartományon ne váltson előjelet.

A korlátosság ellenőrzése:

A korlátozó tartomány korlátos, ha minden hozzá tartozó pont $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ normája véges. Mivel a tartomány csak nemnegatív koordinátájú pontokat tartalmaz, ennek ellenőrzése az

$$\begin{aligned} x+y &\rightarrow \max \\ 2x+y-w &= 4 \\ 3x-4y &\leq 12 \\ -x+2y &\leq 12 \\ x,y,w &\geq 0 \end{aligned}$$

LP feladat megoldását igényli, ahol az első, $\geq$ típusú feltételi egyenlőtlenséget kiegészítő változóval egyenlőség-feltétellé alakítottuk.

A szigorúan megkövetelt egyenlőségfeltétel miatt a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk. Ehhez az alábbi induló szimplex-táblázat tartozik:

	x	y	w	u_1^*	u_2	u_3	
u_1^*	$\boxed{2}$	1	-1	1	0	0	4
u_2	3	-4	0	0	1	0	12
u_3	-1	2	0	0	0	1	12
z	1	1	0	0	0	0	
z^*	2	1	-1	1	0	0	4

ahol u_1 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Első lépésben a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	x	y	w	u_1^*	u_2	u_3	
x	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	2
u_2	0	$-\frac{11}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	6
u_3	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	14
z	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2
z^*	0	0	0	0	0	0	14

Mivel a másodlagos célfüggvány értéke 0, az elsődleges célfüggvény szerint folytatjuk a bázistranszformációt (a szimplex-táblázatból elhagyhatjuk a másodlagos célfüggvény sorát és és az u_1^* eltérésváltozó oszlopát):

	x	y	w	u_2	u_3	
x	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	4
w	0	$-\frac{11}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	4
u_3	0	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	$\frac{1}{3}$	1	16
z	0	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	-4

	x	y	w	u_2	u_3	
x	1	0	0	1	2	36
w	0	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	92
y	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	24
z	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-60

Minthogy a tábla utolsó sorában nincs pozitív elem, a célfüggvény értéke véges ($z = 60$), a korlátozó tartomány korlátos. A korlátozó tartomány origótól leftávolabbi pontja $(36, 24)$.

A nevező előjelváltásának vizsgálata:

Minthogy a $(36, 24)$ pont megengedett, és ebben a pontban a nevező függvényértéke -66, azaz negatív, a nevező nem vált előjelet, ha az egész megengedett tartományon negatív marad, azaz a nevezőnek, mint célfüggvénynek a megengedett tartományon vett maximuma is negatív kell legyen. Ennek eldöntésére a

$$\begin{array}{rcl} x - 4y - 6 & \rightarrow & \max \\ 2x + y - w & = & 4 \\ 3x - 4y & \leq & 12 \\ -x + 2y & \leq & 12 \\ x, y, w & \geq & 0 \end{array}$$

LP feladatot kell megoldanunk, ahol az első, $\geq$ típusú feltételi egyenlőtlenséget már egyenlőségfeltétellé alakítottuk.

A szigorúan megkövetelt egyenlőségfeltétel miatt a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk. Ehhez az alábbi induló szimplex-tábla tartozik:

	x	y	w	u_1^*	u_2	u_3	
u_1^*	$\boxed{2}$	1	-1	1	0	0	4
u_2	3	-4	0	0	1	0	12
u_3	-1	2	0	0	0	1	12
z	1	-4	0	0	0	0	6
z^*	2	1	-1	1	0	0	4

ahol u_1 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Első lépésben a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	x	y	w	u_1^*	u_2	u_3	
x	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	2
u_2	0	$-\frac{11}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	6
u_3	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	14
z	0	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
z^*	0	0	-0	0	0	0	0

A másodlagos célfüggvény értéke 0, tehát teljesíthető az egyenlőségfeltétel. Így a másodlagos célfüggvény sorát és a most már felesleges u_1^* eltérésváltozó oszlopát elhagyhatjuk, és az eredeti célfüggvény szerint folytathatjuk az algoritmust.

	x	y	w	u_2	u_3	
x	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	4
w	0	$-\frac{11}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	4
u_3	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	16
z	0	$-\frac{8}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	2

Mivel az utolsó sorban nincs pozitív elem, optimális megoldáshoz jutottunk, vagyis a nevező maximális értéke -2, vagyis negatív, így beláttuk, hogy a nevező nem vált előjelet.

<u>A Charnes-Cooper algoritmus alkalmazása:</u>

Mivel sem a célfüggvény értéke, sem az optimum helye nem változik, ha célfüggvény számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a számmal megszorozzuk, ezért változtassuk pozitív nevezőjűvé a célfüggvényt, azaz szorozzuk meg a célfuggvény számlálóját és nevezőjét is -1-gyel, azaz az új ekvivalens feladatunk a következő:

$$\begin{aligned}
\frac{-x-y+1}{-x+4y+6} &\rightarrow \max \\
2x+y &\geq 4 \\
3x-4y &\leq 12 \\
-x+2y &\leq 12 \\
x, y &\geq 0
\end{aligned}$$

Vezessük be a

$$t = \frac{1}{-x+4y+6}, \quad \bar{x} = tx, \quad \bar{y} = ty$$

változókat.

Figyelembe véve, hogy $t \geq 0$ (ezért volt célszerű az eredeti célfüggvény számlálójának és nevezőjének is -1-gyel való szorzása), az új változók bevezetésével

$$\frac{-x-y+1}{-x+4y+6} = -tx - ty + t = -\bar{x} - \bar{y} + t \to \max$$

$$t(-2x - y + 4) = -2\bar{x} - \bar{y} + 4t \leq 0$$

$$t(3x - 4y - 12) = 3\bar{x} - 4\bar{y} - 12t \leq 0$$

$$t(-x + 2y - 12) = -\bar{x} + 2\bar{y} - 12t \leq 0$$

$$t(-x + 4y + 6) = -\bar{x} + 4\bar{y} + 6t = 1$$

$$tx = \bar{x} \geq 0$$

$$ty = \bar{y} \geq 0$$

így a HP feladat a következő LP feladatba transzformálódik:

$$\begin{array}{rcl}
-\bar{x} - \bar{y} + t & \to & \max \\
-2\bar{x} - \bar{y} + 4t & \leq & 0 \\
3\bar{x} - 4\bar{y} - 12t & \leq & 0 \\
-\bar{x} + 2\bar{y} - 12t & \leq & 0 \\
-\bar{x} + 4\bar{y} + 6t & = & 1 \\
\bar{x}, \bar{y}, t & \geq & 0
\end{array}$$

Mivel szigorúan teljesítendő egyenlőség-feltételünk is van, a megoldásra a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk. Ennek induló szimplex táblázata:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	t	u_1	u_2	u_3	u_4^*	
u_1	-2	-1	$\boxed{4}$	1	0	0	0	0
u_2	3	-4	-12	0	1	0	0	0
u_3	-1	2	-12	0	0	1	0	0
u_4^*	-1	4	6	0	0	0	1	1
z	-1	-1	1	0	0	0	0	
z^*	-1	4	6	0	0	0	1	1

ahol u_4 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Először a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	t	u_1	u_2	u_3	u_4^*	
t	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
u_2	-3	-7	0	3	1	0	0	0
u_3	-7	-1	0	3	0	1	0	0
u_4^*	2	$\boxed{\frac{11}{2}}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	1
z	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0
z^*	2	$\frac{11}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	1

$$
\begin{array}{r|rrrrrrr|r}
 & \bar{x} & \bar{y} & t & u_1 & u_2 & u_3 & u_4^* & \\
\hline
t & -\frac{9}{22} & 0 & 1 & \frac{2}{11} & 0 & 0 & \frac{1}{22} & \frac{1}{22} \\
u_2 & -\frac{5}{11} & 0 & 0 & \frac{12}{11} & 1 & 0 & \frac{14}{11} & \frac{14}{11} \\
u_3 & -\frac{73}{11} & 0 & 0 & \frac{30}{11} & 0 & 1 & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} \\
\bar{y} & \frac{4}{11} & 1 & 0 & -\frac{3}{11} & 0 & 0 & \frac{2}{11} & \frac{2}{11} \\
\hline
z & -\frac{5}{22} & 0 & 0 & -\frac{5}{11} & 0 & 0 & \frac{3}{22} & \frac{3}{22} \\
z^* & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
$$

A másodlagos célfüggvény értéke 0, tehát teljesíthető az egyenlőségfeltétel. Így a másodlagos célfüggvény sorát és a most már felesleges u_4^* eltérésváltozó oszlopát elhagyjuk, és az eredeti célfüggvény szerint folytatjuk az algoritmust. Azonban a megmaradt szimplex tábla utolsó sorában, azaz az elsődleges célfüggvény sorában nincs pozitív elem, így a tábla máris az optimális megoldást tartalmazza, nevezetesen

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{2}{11}, \quad t = \frac{1}{22}, \quad z = -\frac{3}{22}$$

Innét, visszatérve az eredeti változókra

$$x = 0, \quad y = 4$$

és a célfüggvény optimális értéke $-\frac{3}{22}$.

6.3. Feladatok

6.3.1. Feladat. *Ellenőrízze, hogy az alábbi hiperbolikus programozási feladatok megoldhatók-e a Charnes-Cooper eljárással. Pozitív válasz esetén oldja meg őket:*

1.)

$$\begin{aligned}
\frac{-2x-y+2}{x+y+1} &\rightarrow \min\\
x+y &\leq 4\\
x-y &\leq 2\\
x,y &\geq 0.
\end{aligned}$$

2.)

$$\begin{aligned}
\frac{-2x+y+2}{x+3y+4} &\rightarrow \min\\
-x+y &\leq 4\\
y &\leq 6\\
2x+y &\leq 14\\
x,y &\geq 0.
\end{aligned}$$

3.)

$$\begin{aligned}
\frac{y}{x+y+1} &\rightarrow \min\\
x-y &\leq 2\\
x+3y &\leq 4\\
x,y &\geq 0.
\end{aligned}$$

7. Egyváltozós unimodális függvények minimalizálása

7.1. Unimodális függvények minimalizálása

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ és $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Tekintsük az

$$f(u) \to \min_{u \in [a,b]}$$

egyváltozós optimalizálási feladatot.

7.1.1. Definíció. *Az $f(u)$ függvényt* **unimodális***nak nevezzük az $[a, b]$ intervallumon, ha folytonos $[a, b]$-n és létezik olyan α és β $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok:*

1. *$f(u)$ szigorúan csökken $[a, \alpha]$-n, feltéve, hogy $a < \alpha$;*
2. *$f(u)$ szigorúan nő $[\beta, b]$-n, feltéve, hogy $\beta < b$;*
3. *$f(u) = f_* = \inf_{u \in [a,b]} f(u)$ $\forall u \in [\alpha, \beta]$, azaz a minimumpontok halmaza $U_* = [\alpha, \beta]$.*

Ha $\alpha = \beta$, akkor $f(u)$ szigorúan unimodális.

7.1.1. Intervallumfelezési eljárás

A módszer akkor alkalmazható, ha $f(u)$ unimodális az $[a, b]$ intervallumon.

Legyen adott $0 < \delta < b - a$ és $\varepsilon > \delta$ pontossági kritérium.

Algoritmus:

1.lépés: Legyen

$$u_1 = \frac{a + b - \delta}{2}, \qquad u_2 = \frac{a + b + \delta}{2}.$$

Ha $f(u_1) < f(u_2)$, akkor legyen $a_1 = a$ és $b_1 = u_2$, egyébként legyen $a_1 = u_1$ és $b_1 = b$.

k.lépés: Legyen $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ a minimumhalmazt tartalmazó részhalmaz. Ha $|b_{k-1} - a_{k-1}| < \varepsilon$, akkor STOP, egyébként legyen

$$u_{2k-1} = \frac{a_{k-1} + b_{k-1} - \delta}{2}, \qquad u_{2k} = \frac{a_{k-1} + b_{k-1} + \delta}{2}.$$

Ha $f(u_{2k-1}) < f(u_{2k})$, akkor legyen $a_k = a_{k-1}$ és $b_k = u_{2k}$, egyébként legyen $a_k = u_{2k-1}$ és $b_k = b_{k-1}$. k:=k+1, GO TO k. lépés.

7.1.1.1. Tétel. *Az intervallumfelezési eljárással a k. iteráció után a minimumhalmaz közelítésére*

$$b_k - a_k = \frac{b - a - \delta}{2^k} + \delta > \delta$$

hosszúságú intervallumot kapunk. Az $\varepsilon > \delta$ pontosságú intervallum eléréséhez

$$n = 2k \geq 2 \log_2\left(\frac{b - a - \delta}{\varepsilon - \delta}\right)$$

lépésszámra van szükség.

Bizonyítás.
Az algoritmus szerint

$$b_k - a_k = \frac{b_{k-1} - a_{k-1} - \delta}{2} + \delta,$$

ugyanis ha $f(u_{2k-1}) < f(u_{2k})$, akkor $b_k - a_k = u_{2k} - a_{k-1}$, egyébként $b_k - a_k = b_k - u_{2k-1}$, és u_{2k-1}, u_{2k} algoritmusbeli definicióját figyelembe véve kapjuk az intervallum hosszát az előző iterációhoz viszonyítva. A tételbeli becslés innét teljes indukcióval könnyen megkapható.

A lépésszám a $b_n - a_n \leq \varepsilon$ formula megfelelő átrendezéséből adódik. ■

7.1.2. Aranymetszés módszere

Az intervallumfelezési eljárásnál minden lépésben két új függvényérték kiszámításárea van szükség. Ez a módszer minden lépésben csak egy új pontban számít függvényértéket, a másikat az előző iterációból veszi.

7.1.2.1. Definíció. *Egy pont az $[a, b]$ intervallumot aranymetszésben osztja, ha a kisebbik rész hossza úgy aránylik a nagyobbikéhoz, mint a nagyobbiké az egészhez.*

Az aranymetszésre közismert az alábbi két tétel:

7.1.2.1. Tétel. *Minden $[a, b]$ intervallumhoz két szimmetrikusan elhelyezkedő aranymetszési pont tartozik:*

$$u_1 = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a), \qquad u_2 = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a).$$

7.1.2.2. Tétel. *Ha u_1 és u_2 aranymetszésben metszi az $[a, b]$ intervallumot és $u_1 < u_2$, akkor u_1 a nagyobbik aranymetszése az $[a, u_2]$ intervallumnak és u_2 a kisebbik aranymetszése az $[u_1, b]$ intervallumnak.*

Algoritmus:

1.lépés: Legyen $a_0 = a$, $b_0 = b$, és $k = 1$. Legyen $u_1 < u_2$ az $[a_{k-1}, b_{k-1}]$ intervallum aranymetszési pontjai.

k.lépés: Ha $f(u_1) < f(u_2)$, akkor legyen

$$a_k = a_{k-1},\ \ b_k = u_2,\ \ u_2 = u_1,\ \ u_1 = a_{k-1} + b_{k-1} - u_2,\ \ v_k = u_2,$$

ellenkező esetben legyen

$$a_k = u_1,\ \ b_k = b_{k-1}\ \ u_1 = u_2,\ \ u_2 = a_{k-1} + b_{k-1} - u_1,\ \ v_k = u_1.$$

Ha $b_k - a_k < \varepsilon$, akkor $u_* = v_k$ és STOP, ellenkező esetben $k := k + 1$ és GOTO k.lépés.

7.1.2.3. Tétel. *Az n-edik lépésben történő megállás esetén az optimális megoldástól való eltérésre*

$$\rho(u_*, U_*) \leq (\frac{\sqrt{5} - 1}{2})^{n+1}(b - a).$$

Bizonyítás.
Az algoritmus szerint, ha $f(u_1) < f(u_2)$, akkor $b_k - a_k = u_2 - a_{k-1}$ egyébként $b_k - a_k = b_{k-1} - a_k$. Mindkét esetben – u_1 és u_2 definícióját figyelembe véve

$$b_k - a_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2})(b_{k-1} - a_{k-1}).$$

Innét teljes indukcióval

$$b_k - a_k = \frac{\sqrt{5}-1}{2})^k(b - a).$$

Ezt felhasználva
$\rho(u_*, U_*) \leq \max(b_n - v_n, v_n - a_n) = \frac{\sqrt{5}-1}{2}(b_n - a_n) = (\frac{\sqrt{5}-1}{2})^{n+1}(b - a).$ ■

7.2. Nem unimodális függvények minimalizálása

7.2.1. A töröttvonal módszer

7.2.1.1. Definíció. *A $f(u)$ függvény kielégíti a* **Lipschitz feltétel***t az $[a, b]$ intervallumon, ha létezik olyan $L > 0$ konstans, hogy*

$$|f(u) - f(v)| \leq L|u - v| \quad \forall u, v \in [a, b].$$

(Jelölésben $f \in \mathrm{Lip}([a, b], L)$.)

7.2.1.1. Tétel. *Legyen $[a, b] = \bigcup_{i=0}^{m-1} [u_i, u_{i+1}]$, ahol $u_0 = a$ és $u_m = b$. Tegyük fel, hogy az $f(u)$ függvény minden $[u_i, u_{i+1}]$ intervallumon kielégíti a Lipschitz feltételt L_i konstanssal. Akkor az $f(u)$ függvény kielégíti a Lipschitz feltételt az $[a, b]$ intervallumon is $L = \max_{i=0,\ldots,m-1} L_i$.*

Bizonyítás.
Legyen $u, v \in [a, b]$ tetszőleges két pont, és az őket tartalmazó részintervallumok: $u \in [u_p, u_{p+1}]$ ill. $v \in [u_s, u_{s+1}]$. Az általánosítás megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $u < v$, azaz $p \leq s$. Ekkor

$$\begin{aligned}
|f(u) - f(v)| &= |f(u) - f(u_p) + \sum_{i=p+1} s - 1(f(u_i) - f(u_{i+1})) + f(u_s) - f(v)| \\
&\leq |f(u) - f(u_{p+1})| + \sum_{i=p+1}^{s-1} |f(u_i) - f(u_{i+1}| + |f(u_s) - f(v)| \\
&\leq L_p|u - u_{p+1}| + \sum_{i=p+1}^{s-1} L_i|u_i - u_{i+1}| + L_s|u_s - v| \\
&\leq (\max_{p \leq s} L_i)(|u - u_{p+1}| + \sum_{i=p+1}^{s-1} |u_i - u_{i+1}| + |u_s - v| \\
&\leq L|u - v|.
\end{aligned}$$

■

7.2.1.2. Tétel. *Ha $f(u)$ differenciálható a nyílt (a, b) intervallumon, akkor az $[a, b]$ intevallumon kielégíti a Lipschitz feltételt az $L = \sup_{u \in (a,b)} f^{'}(u)$ konstanssal.*

Bizonyítás.
A Lagrange középértéktétel szerint $\forall u, v \in [a, b]$ esetén

$$f(u) - f(v) = \langle f'(v + \vartheta(u = v)), (u - v)\rangle$$

valamely $\vartheta \in (0, 1)$ mellett. Innét és $f'(u)$ korlátosságából következik az állítás. ■

Tegyük fel, hogy az $f \in \mathrm{Lip}([a, b], L)$.

Megengedjük, hogy a függvénynek több lokális minimuma is legyen. Az algoritmussal a globális optimum megkeresését kívánjuk elérni.

Legyen $v \in [a, b]$ tetszőleges rögzített pont. Definiáljuk a v ponthoz tartozó törött vonalat a

$$g(u, v) = f(v) - L|u - v|$$

egyenlettel.

Az $u_0, u_1, \ldots, u_n$ pontokhoz tartozó töröttvonal

$$p_n(u) = \max_{0 \le i \le n} g(u, u_i).$$

Nyilvánvalóan igazak a következő állítások:

1. $p_n(u)$ szakaszonként lineáris L ill. $-L$ iránytangenssel
2. $p_n \in \mathrm{Lip}([a,b], L)$;
3. $p_n(u) = \max\{g(u, u_n), p_{n-1}(u)\} \ge p_{n-1}(u)$;
4. $g(u, u_i) \le f(u)$, $g(u_i, u_i) = f(u_i)$, következésképpen $p_n(u) \le f(u)$.

Algoritmus:

0. lépés: Meghatározzuk a függvény Lipschitz konstansát az $[a, b]$ intervallumon és választunk egy induló $u_0 \in [a, b]$ pontot, és egy ε pontossági korlátot. Legyen $k := 0$;

1. lépés: $p_0(u) = g(u, u_0) = f(u_0) - L|u - u_0|$ és $u_1 = \operatorname*{argmin}_{u \in [a,b]} p_0(u)$.

k. lépés: Ha $f(u_{k+1}) - p_k(u_{k+1}) \le \varepsilon$, akkor $u_* = u_{k+1}$ és STOP, egyébként legyen $k := k + 1$, $p_k(u) = \max\{g(u, u_k), p_{k-1}(u)\}$ és $u_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{u \in [a,b]} p_k(u)$ és GOTO k.lépés.

7.2.1.3. Tétel. *Ha $f \in \mathrm{Lip}([a, b], L)$, akkor a töröttvonal módszerrel kapott u_k sorozatra igazak a következő állítások:*

1. $\lim_{k \to \infty} f(u_k) = \lim_{k \to \infty} p_k(u_{k+1}) = f_* = \inf_{u \in [a,b]} f(u)$;

2. $0 \le f(u_{k+1}) - f_* \le f(u_{k+1}) - p_k(u_{k+1}), \quad k = 0, 1, \ldots$;

3. az u_k sorozat tart a minimumpontok U_* halmazához, azaz $\inf_{u \in [a,b]} |u_k - u| \to 0$, ha $k \to \infty$.

Bizonyítás.
Legyen $u_* \in U_*$. Az algoritmus és az azt meghatározó töröttvonal fent említett tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned} p_{k-1}(u_k) &= \min_{u \in [a,b]} p_{k-1}(u) \le p_{k-1}(u_{k+1}) \le p_k(u_{k+1}) \\ &= \min_{u \in [a,b]} p_k(u) \le p_k(u_*) \le f(u_*) = f_* \le f(u_{k+1}). \end{aligned}$$

Innét a 2. becslés azonnal adódik. Továbbá következik ebből az is, hogy a $\{p_k(u_{k+1})\}$ sorozat monoton nő és felülről korlátos, ezért létezik a $\lim_{k \to \infty} p_k(u_{k+1}) = p_* \le f_*$ határérték.

Belátjuk, hogy $p_* = f_*$. Az $\{u_k\}$ pontsorozat korlátos, ezért a Bolzano-Weierstrass tétel szerint van legalább egy torlódási pontja. Legyen v_* egy torlódási pont és u_{k_n} az u_k sorozat egy v_*-hoz konvergáló részsorozata, ahol feltehetjük, hogy $\{k_n\}$ monoton növő indexsorozat. Mivel

$$f(u_i) = g(u_i, u_i) \le p_k(u_i) \le f(u_i),$$

azaz $f(u_i) = p_k(u_i) \ \forall i = 0, \ldots, k$, ezért bármely k és $i \in \{0, \ldots, k\}$ esetén

$$\begin{aligned} 0 \le p_k(u_i) - \min_{u \in [a,b]} p_k(u) &= f(u_i) - p_k(u_{k+1}) \\ &= p_k(u_i) - p_k(u_{k+1}) \le L|u_i - u_{k+1}|. \end{aligned}$$

Alkalmazva ezt az egyenlőtlenséget az $k = n_k - 1$ és $i = k_{n-1}$ indexekkel $k_n \geq 2$ esetén, azt kapjuk, hogy

$$0 \leq f(u_{k_{n-1}}) - p_{k_n - 1}(u_{k_n}) \leq L|u_{k_{n-1}} - u_{k_n}|.$$

Innét $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$f_* \leq f(v_*) = \lim_{k\to\infty} f(u_{k_{n-1}}) = \lim_{n\to\infty} p_{k_n-1}(u_{k_n}) = p_* \leq f_*,$$

azaz

$$\lim_{k\to\infty} f(u_{k_n}) = \lim_{k\to\infty} p_{k_n-1}(u_{k_n}) = p_* = f_*.$$

Mivel v_* tetszőleges torlódási pont volt, a tétel 1. állítását bebizonyítottuk.

Mivel $f \in \mathrm{Lip}([a, b], L)$ folytonos, a definiált u_k sorozat minimalizáló sorozat, Weierstrass tételéből következik a 3. állítás. ∎

7.3. Differenciálható konvex f-ggvények minimalizálása

7.3.1. Érintő módszer

Tegyük fel, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény konvex és differenciálható az $[a, b]$ intervallumon. Ekkor léteznek az $f^{'}(a+0)$ és $f^{'}(b-0)$ jobb ill. baloldali deriváltak.

7.3.1.1. Tétel. *Ha az f függvény konvex az $[a, b]$ intervallumon és az $f^{'}(a+0)$ és $f^{'}(b-0)$ jobb ill. baloldali deriváltak végesek, akkor $f \in \mathrm{Lip}([a, b], L)$, ahol $L = \max(|f^{'}(a+0)|, |f^{'}(b-0)|)$.*

A fenti tétel azt jelenti, hogy ebben az esetben alkalmazható a töröttvonal módszer. Azonban a módszer javítható úgy, hogy a v pontbeli $g(u, v)$ törött vonalat átdefiniáljuk a v pontbeli érintőre:

$$g(u, v) = f(v) + f^{'}(v)(u - v).$$

A konvexitás miatt fennáll a $g(u, v) \leq f(v)$ egyenlőtlenség $\forall u \in [a, b]$ esetén. Ezzel a módosítással a töröttvonal módszer lépéseitől csak kis mértékben különböző algoritmus definiálható és arra fennállnak ugyanazok a konvergencia állítások, mint a töröttvonal módszerre.

1. Algoritmus:

***0. lépés*:** Választunk egy induló $u_0 \in [a, b]$ pontot. Legyen $k := 0$;

***1. lépés*:** $p_0(u) = g(u, u_0) = f(u_0) + f^{'}(u_0)(u - u_0)$ és $u_1 = \operatorname*{argmin}_{u\in[a,b]} p_0(u)$.

***k. lépés*:** Ha $u_{k+1} \in (a, b)$ és $f^{'}(u_{k+1}) = 0$, akkor $u_* = u_{k+1}$ és STOP.
Ha $u_{k+1} = a$ és $f^{'}(a+0) \geq 0$, akkor $u_* = a$ és STOP.
Ha $u_{k+1} = b$ és $f^{'}(b-0) \leq 0$, akkor $u_* = b$ és STOP.
Egyébként $p_{k+1}(u) = \max\{g(u, u_{k+1}), p_k(u)\}$, $k := k + 1$ és $u_{k+1} \in \operatorname*{argmin}_{u\in[a,b]} p_k(u)$. GOTO k.lépés.

A konvexitás miatt az U_* halmaz maga is egy intervallum, a konvergencia U_*-hoz tehát azt jelenti, hogy az u_k sorozatnak legfeljebb két torlódási pontja van, az $U_* = [a_*, b_*]$ két végponja.

Ugyancsak a konvexitás miatt, amennyiben találunk olyan $a_k \leq b_k$ pontokat az $[a, b]$ intervallumban, hogy $f^{'}(a_k + 0) \geq 0$, akkor $U_* \subseteq [a, a_k]$, ha $f^{'}(b_k - 0) \leq 0$, akkor $U^* \subseteq [b_k, b]$, egyébként $U_* \subseteq [a_k, b_k]$. Ennek megfelelően az érintő módszer algoritmusa a következő lépésekkel is felírható:

2. Algoritmus:

***0. lépés*:** Legyen $a_0 = a,\ b_0 = b,\ f^{'}(a_0) = f^{'}(a+0),\ f^{'}(b_0) = f^{'}(b-0).\ k := 0.$

***k. lépés*:** Ha $f^{'}(a_k) \geq 0$, akkor $a_k \in U_*$, STOP.
Ha $f^{'}(b_k) \leq 0$, akkor $b_k \in U_*$, STOP.
Kiszámítjuk a $g(u, a_k)$ és $g(u, b_k)$ érintők

$$u_{k+1} = \frac{f(a_k) - f(b_k) + b_k f^{'}(b_k) - a_k f^{'}(a_k)}{f^{'}(b_k) - f^{'}(a_k)}$$

metszéspontját. Ha $f^{'}(u_{k+1}) = 0$, akkor $u_{k+1} \in U_*$, STOP. Ellenkező esetben legyen

$$a_{k+1} = \begin{cases} a_k & \text{ha } f^{'}(u_{k+1}) \geq 0 \\ u_{k+1} & \text{ha } f^{'}(u_{k+1}) \leq 0 \end{cases} \qquad b_{k+1} = \begin{cases} b_k & \text{ha } f^{'}(u_{k+1}) \leq 0 \\ u_{k+1} & \text{ha } f^{'}(u_{k+1}) \geq 0 \end{cases}$$

Legyen $k := k + 1$, GOTO k. lépés.

7.4. Feladatok

7.4.1. Feladat. *Unimodálisak-e az alábbi függvények az adott intervallumon? Indokolja!*

1.) $$f(x) = ||x-3| - x|,$$
$U = [0, 4]$

2.) $$f(x) = ||x^2 - 2| - x^3|$$
$U = [-1, 5]$

7.4.2. Feladat. *Alkalmas-e az intervallumfelező és az aranymetszés módszere az alábbi függvények minimalizálásŕa az adott intervallumon:*

1.) $$f(x) = |x-1| + |3x-1|$$
$U = [0, 2]$.

2.) $$f(x) = ||x^2 - 2| - x|$$

- $U = [-2, 3]$
- $U = [-3, 1]$.

Pozitív válasz esetén mindkét algoritmussal hajtson végre néhány iterációt!

7.4.3. Feladat. *Mekkora pontosságot tud elérni a 7.4.2. Feladataiban az aranymetszés és intervallumfelez módszerekkel 10 iteráció után?*

7.4.4. Feladat. *Megoldhatók-e a 7.4.2. feladat problémái töröttvonal módszerrel, vagy érintő módszerrel. Oldja meg őket a lehetséges módszerrel!*

7.4.5. Feladat. *Melyik módszerrel oldaná meg a tanultak közül az alábbi problémákat:*

1.) $$f(x) = |x-1| + |3x-1|$$
$U = [-1, 3]$;

2.) $$f(x) = (x-3)^4 - 2(y-2x)$$
$U = [0, 2]$.