Formális nyelvek és automaták
1. zh, mintafeladatok

I. feladatsor

A1. $L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{b, ba\}$.
Adja meg az elemei felsorolásával:

$L_1 L_2 =$

A2. Mi a szükséges és elégséges feltétele: $L^+ = L^* \setminus \{\varepsilon\}$

A3. Adjon az L_1^* nyelvhez reguláris nyelvtant!

B1. $L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{b, ba\}$.
Adja meg az elemei felsorolásával:

$L_2^2 =$

B2. Adjon példát olyan nyelvre, amelyre $L = L^*$

B3. Adjon az L_2^+ nyelvhez olyan környezetfüggetlen nyelvtant, ami nem reguláris!

I. feladatsor, megoldási kulcs:

A1. $L_1L_2 = \{ab, abb, aba, abba\}$

A2. $\varepsilon \notin L$

A3. $S \to \varepsilon|aS|abS$

B1. $L_2^2 = \{bb, bab, bba, baba\}$

B2. Pl. $L = \{\varepsilon\}$
($L = L^*$ **ha** L maga is egy nyelv lezártja)

B3. $S \to b|ba|SS$

II. feladatsor

A1. $G_1 : K \to S|\varepsilon$, $S \to aSB|aB$, $aB \to Ba$, $B \to b$
Mely állítások igazak és melyek hamisak?
$G_1 \in \mathcal{G}_0$, $G_1 \in \mathcal{G}_1$, $G_1 \in \mathcal{G}_2$, $G_1 \in \mathcal{G}_3$, $G_1 \in \mathcal{G}_{3nf}$

A2. Helyettesítse $L(G_1)$ leírásában a ... -ot a megfelelő formulával (amely nem függ expliciten G_1-től)! $L(G_1) = \{u \in \{a, b\}^* | \ldots\}$

A3. $G_2 : S \to aS|bS$
Egészítse ki a G_2 nyelvtant egyetlen szabállyal úgy, hogy a következő állítás igaz legyen! $L(G_2) = \{a, b\}^*$

B1. $G_1 : S \to aSa|bSb|\varepsilon|a|b$
Mely állítások igazak és melyek hamisak?
$G_1 \in \mathcal{G}_0$, $G_1 \in \mathcal{G}_1$, $G_1 \in \mathcal{G}_2$, $G_1 \in \mathcal{G}_3$, $G_1 \in \mathcal{G}_{3nf}$

B2. Helyettesítse $L(G_1)$ leírásában a ... -ot a megfelelő formulával (amely nem függ expliciten G_1-től)!
$L(G_1) = \{u \in \{a, b\}^* | \ldots\}$

II. feladatsor, megoldási kulcs:

A1:
$G_1 \in \mathcal{G}_0$ ui. G_1 Chomsky-féle nyelvtan.
$G_1 \notin \mathcal{G}_1$ ui. $aB \to Ba$ nem egyes típusú szabály.
$G_1 \notin \mathcal{G}_2$ ui. az $aB \to Ba$ szabály nem környezetfüggetlen (nem kfl): egy kfl szabály baloldala csak egy nyelvtani jel lehet.
$G_1 \notin \mathcal{G}_3$, $G_1 \notin \mathcal{G}_{3nf}$ mivel $G_1 \notin \mathcal{G}_2$

A2:
$L(G_1) = \{u \in \{a, b\}^* | l_a(u) = l_b(u)\}$

A3:
Kiegészítve: $G_2 : S \to aS|bS|\varepsilon$

B1:
$G_1 \in \mathcal{G}_0$ ui. G_1 Chomsky-féle nyelvtan.
$G_1 \notin \mathcal{G}_1$, ui. $S \to \varepsilon$ nem-korlátozott ε-szabály pl. $S \to aSa$ miatt.
$G_1 \in \mathcal{G}_2$ ui. mindegyik szabálya környezetfüggetlen.
$G_1 \notin \mathcal{G}_3$, $G_1 \notin \mathcal{G}_{3nf}$ hiszen pl. az $S \to aSa$ szabály nemreguláris.

B2:
$L(G_1) = \{u \in \{a, b\}^* | u = u^{-1}\}$

III. feladatsor

A: Adjunk az alábbi EBNF-fel ekvivalens alap BNF-et!

A_1**:**
$< L > ::= \{b\}_1^\infty \{\{a\}_0^1 \{b|c\}\}_0^\infty$

A_2**:**
$< L > ::= \{p|m\}_0^1 t \{\{p|m\}_1^\infty t\}_0^\infty$

B: Adjunk az alábbi alap BNF-fel ekvivalens EBNF-et úgy, hogy az EBNF egyetlen szabályból állhat, aminek a jobb oldalán csak terminálisok szerepelhetnek, BNF fogalmak (nyelvtani jelek) nem.

B_1**:**
$< L > ::= < e >< t >$
$< e > ::= < s > \mid < s >< e >$
$< t > ::= \varepsilon | c < v >$
$< v > ::= \varepsilon | < s >< v >$
$< s > ::= a|b$

B_2**:**
$< L > ::= () | (< e >< v >)$
$< v > ::= \varepsilon |, < e >< v >$
$< e > ::= < b > \mid < b >< e >$
$< b > ::= 0|1$

III. feladatsor, megoldási kulcs:

A_1**:**

Vezessük be a köv. jelöléseket:

$< bk > ::= \{b\}_1^\infty$

$< oa > ::= \{a\}_0^1$

$< bvc > ::= \{b|c\}$

$< av > ::= \{< oa >< bvc >\}_0^\infty$

Ekkor a megoldás:

$< L > ::= < bk >< av >$

$< bk > ::= b|b < bk >$

$< av > ::= \varepsilon| < oa >< bvc >< av >$

$< oa > ::= \varepsilon|a$

$< bvc > ::= b|c$

B_1**:**

Írjuk át az egyes szabályokat tömörített, nemrekurzív EBNF alakba:

$< L > ::= < e >< t >$

$< e > ::= \{< s >\}_1^\infty$

$< t > ::= \{c < v >\}_0^1$

$< v > ::= \{< s >\}_0^\infty$

$< s > ::= a|b$

A fenti EBNF fogalmakba a szabály jobboldalakat visszahelyettesítve adódik a megoldás:

$< L > ::= \{a|b\}_1^\infty \{c\{a|b\}_0^\infty\}_0^1$

IV. feladatsor

1. $L = \{a^i b^j | i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i \neq j\}$

1.a Adjuk meg az L nyelv $EBNF$ leírását úgy, hogy a szabályok között csak *egy* lehet rekurzív! (Több szabály-alternatíva is több szabálynak számít.)

1.b Írjuk le az L nyelvet környezetfüggetlen nyelvtannal!

2. $G : S \to BZJ, Z \to XZY|\varepsilon, XY \to YaX,$
. $\quad Xa \to aX, aY \to Ya, XJ \to J, BY \to B,$
. $\quad Ba \to aB, BJ \to \varepsilon$
Adjunk az $L(G)$ nyelvhez olyan leírást, ami nem függ expliciten G-től!
Indokoljuk is az állítást!

IV. feladatsor, megoldási kulcs:

1. $L = \{a^i b^j | i, j \in \mathbb{N}_0 \wedge i \neq j\}$

1.a $< L >::= \{a\}_1^\infty | \{b\}_1^\infty | a < L > b$

1.b $S \to aSb|A|B, A \to aA|a, B \to bB|b$

2. $L(G) = \{a^{n^2} | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Minden G-beli levezetés az $S \to BZJ$ szabályt alkalmazza először, majd a $Z \to XZY$ szabályt alkalmazza valamely $n \in \mathbb{N}_0$ számszor, és a $Z \to \varepsilon$ szabállyal folytatja. Ezután létrejön a BX^nY^nJ szó, amire pontosan n^2-szer kell alkalmazni az $XY \to YaX$ szabályt, hogy az X-ek az $XJ \to J$, az Y-ok pedig a $BY \to B$ szabály segítségével törlődhessenek. Mivel csak az $XY \to YaX$ szabály hoz létre terminálist, az eredményben biztosan n^2 darab a betű lesz, azaz csak a^{n^2} alakú lehet. Az ilyen alakú szavak viszont mind előállíthatók, mert az X-ek és az Y-ok az útjukba kerülő a betűkön átlépve, egymással megcserélődve el tudnak jutni a J illetve B betűkhöz, ahol törlődnek. Közben pontosan n^2 darab a betűt hoznak létre, ha a levezetés elején a $Z \to XZY$ szabályt n-szer alkalmaztuk. Az utolsó két szabály segítségével pedig a B és a J betűket tudjuk törölni.

V. feladatsor

1.
$L_1 = \{a, ab\}$, $L_2 = \{\varepsilon, ba\}$.

a) Adja meg – elemei felsorolásával – az alábbi nyelveket!
a1) $L_1 L_2 =$
a2) $L_2 L_1 =$
a3) $L_1^2 =$
a4) $L_2^2 =$

b1) Sorolja fel az L_1^* nyelv 2 hosszú szavait!
b2) Sorolja fel az L_1^* nyelv 3 hosszú szavait!
b3) Sorolja fel az L_2^* nyelv 3 hosszú szavait!
b4) Sorolja fel az L_2^* nyelv legfeljebb 4 hosszú szavait!

2.
$G : S \to \varepsilon | aSb | Z, Z \to bSa | BA, B \to bS, A \to aZ$
a) Mutassa meg, hogy $abaabbab \in L(G)$!
(Adja meg egy legbal levezetését, vagy a szintaxisfáját!)
b) Mutassa meg kétféleképpen, hogy $bababa \in L(G)$!
(Adja meg két legbal levezetését, vagy két, különböző szintaxisfáját!)

A 3. feladat nem aktuális.

4.
$L_1 = \{\varepsilon, ba\}^*$
$L_2 = \{a, ab\}^*\{a, ab\}$
$L_3 = (\{a\}\{b, \varepsilon\})^*\{b\}$

L_4 = { Olyan programok, amelyek egyetlen utasításból állnak. Az utasítás lehet struktúrált, úgymint C-szerű *while* utasítás, *if-else* utasítás és nemüres utasítássorozat C-szerűen bezárójelezve; vagy lehet elemi utasítás, amit az egyszerűség kedvéért mindig kis u betűvel jelölünk. A *while* és *if-else* utasítások feltételeit pedig mindenütt egy-egy kis f betűvel jelöljük. A struktúrált utasítások – mint C-ben – korlátozás nélkül egymásba ágyazhatók, de a legbelső mindig egy elemi utasítás. Két egymás után jövő utasítást mindig egy pontosvesszővel kell elválasztani. } Például:

```
{
    u;
    while(f){
        if(f) while(f)u
        else if(f)u
        else u;
        u
    }
}
```

a) Írja le olyan 2-es típusú nyelvtanokkal a fenti nyelveket, amelyek *nem* 3-as típusúak; azaz $\mathcal{G}_2 \setminus \mathcal{G}_3$ -beliek!

b) Írja le 3-as típusú nyelvtanokkal a fenti L_1, L_2, L_3 nyelveket!

c) Adjon alap BNF leírást a fenti nyelvekhez!

d) Adjon minél tömörebb EBNF leírást a fenti nyelvekhez!

5. Adjunk az alábbi EBNF-fel ekvivalens alap BNF-et!

5.a $< L > ::= \{b\{a\}_0^1\}_1^\infty\{aa|b\}_0^\infty$

5.b $< L > ::= c|b\{\{a\}_0^1\{b|c\}_1^\infty\}_0^\infty$

V. feladatsor, megoldási kulcs:

1.a1
$L_1L_2 = \{a, ab\}\{\varepsilon, ba\} = \{a, aba, ab, abba\}$

1.a2
$L_2L_1 = \{\varepsilon, ba\}\{a, ab\} = \{a, ab, baa, baab\}$

1.a3
$L_1^2 = \{a, ab\}\{a, ab\} = \{aa, aab, aba, abab\}$

1.a4
$L_2^2 = \{\varepsilon, ba\}\{\varepsilon, ba\} = \{\varepsilon, ba, baba\}$

1.b1
$\{u \in L_1^* | l(u) = 2\} = \{ab, aa\}$

1.b2
$\{u \in L_1^* | l(u) = 3\} = \{aab, aba, aaa\}$

1.b3
$\{u \in L_2^* | l(u) = 3\} = \{\}$

1.b4
$\{u \in L_2^* | l(u) \leq 4\} = \{\varepsilon, ba, baba\}$

2.a $S \to aSb \to aZb \to abSab \to abaSbab \to abaaSbbab \to abaabbab$

$(G : S \to \varepsilon | aSb | Z, Z \to bSa | BA, B \to bS, A \to aZ)$
(Ebben a feladatmegoldásban, az alábbi szintaxisfákban – pusztán nyomdatechnikai okokból – ε helyett # jelöli az üres szót.)

```
(2.a)              (2.b1)              (2.b2)
  S                  S                   S
 /|\                 |                   |
a S b                Z                   Z
  |                 /|\                 / \
  Z                b S a               B   A
 /|\                /|\               /|   |\
b S a              a S b             b S   a Z
 /|\                 |                 |    / \
a S b                Z                 #   B   A
 /|\                /|\                   /|   |\
a S b              b S a                 b S   a Z
  |                  |                     |    /|\
  #                  #                     #   b S a
                                                 |
                                                 #
```

4.
Vegyük észre, hogy
$L_1 = \{ba\}^*$
$L_2 = \{a, ab\}^+$
$L_3 = \{ab, a\}^*\{b\}$

4.a.1
$S \to \varepsilon | Sba$

4.b.1
$S \to \varepsilon | baS$

4.c.1
$< L1 > ::= \varepsilon | ba < L1 >$

4.d.1
$< L1 > ::= \{ba\}_0^\infty$

4.a.2
$S \to a | ab | SS$

4.b.2
$S \to a | ab | aS | abS$

4.c.2
$< L2 > ::= a | ab | < L2 >< L2 >$

4.d.2
$< L2 > ::= \{a | ab\}_1^\infty$

4.a.3
$S \to AS | b$
$A \to ab | a$

4.b.3
$S \to abS|aS|b$

4.c.3
$< L3 >::=< abva >< L3 > |b$
$< abva >::= ab|a$

4.d.3
$< L3 >::= \{ab|a\}_0^\infty b$
Más megoldás:
$< L3 >::= \{ab_0^1\}_0^\infty b$

4.a.4
$S \to W|F|B|u$
$W \to while(f)S$
$F \to if(f)SelseS$
$B \to \{K\}$
$K \to S|S;K$

4.c.4
alap BNF-fel:
$< L_4 >::=< utasitas >$
$< utasitas >::=< while - ut > | < if - ut > | < blokk > |u$
$< while - ut >::= while(f) < utasitas >$
$< if - ut >::= if(f) < utasitas > else < utasitas >$
$< blokk >::=$ '**{**' $< ut - sor >$ '**}**'
$< ut - sor >::=< utasitas > | < utasitas >; < ut - sor >$

4.d.4
EBNF-fel kiküszöbölhetjük az $< ut - sor >$ fogalmát:
$< blokk >::=$ '**{**' $< utasitas > \{; < utasitas >\}_0^\infty$ '**}**'

5.a

$< L >::=< E >< N >$

$< E >::= b < A > |b < A >< E >$

$< A >::= \varepsilon|a$

$< N >::= \varepsilon|aa < N > |b < N >$

5.b

$< L >::= c|b < abck >$

$< abck >::= \varepsilon| < A >< bcK >< abck >$

$< A >::= \varepsilon|a$

$< bcK >::=< bvc > | < bvc >< bcK >$

$< bvc >::= b|c$

VI. feladatsor

1. Adjon DA-t az $L = \{a\}^*\{b\}$ nyelvhez!

2. Adjon az alábbi DA-val ekvivalens $G \in \mathcal{G}_{3nf}$ nyelvtant! (A redundanciákat lehetőség szerint küszöbölje ki!)

	a	b
$\rightleftarrows$ A	B	A
B	A	C
C	C	C

3. Adjon DA-t az alábbi nyelvhez!
$L = \{u \in \{a, b\}^* | (l_a(u) mod 2) = 1 \wedge bb$ nem részszava u-nak $\}$

4. Adjon az alábbi nyelvekhez DA-t!
 4.A $L = (\{a, b\}\{c, \varepsilon\})^*$
 4.B $L = (\{aa\}\{b, c\})^*$
 4.C $L = ((b|\varepsilon)a)^*b$

VI. feladatsor, megoldási kulcs:

1.

	a	b
$\rightarrow$ S	S	A
$\leftarrow$ A	H	H
H	H	H

2. $G: A \rightarrow aB|bA|\varepsilon,\ B \rightarrow aA$

3.

Jelölje p az automata által elemzett szó eddig beolvasott prefixét! Jelölje $B(p)$ azt az állítást, hogy bb részszava p-nek! A DA a következő esetekben kerül az alábbi állapotokba:

A_0: $(l_a(p) mod 2) = 0 \wedge (p = \varepsilon \vee p_{[|p|]} = a) \wedge \neg B(p)$
B_0: $(l_a(p) mod 2) = 0 \wedge p \neq \varepsilon \wedge p_{[|p|]} = b \wedge \neg B(p)$
A_1: $(l_a(p) mod 2) = 1 \wedge p_{[|p|]} = a \wedge \neg B(p)$
B_1: $(l_a(p) mod 2) = 1 \wedge p_{[|p|]} = b \wedge \neg B(p)$
H: $B(p)$

Így az automata:

	a	b
$\rightarrow A_0$	A_1	B_0
$\leftarrow A_1$	A_0	B_1
B_0	A_1	H
$\leftarrow B_1$	A_0	H
H	H	H

4.

4.A

	a	b	c
$\rightleftarrows S$	A	A	H
$\leftarrow A$	A	A	S
H	H	H	H

4.B

	a	b	c
$\rightleftarrows S$	A	H	H
A	A_2	H	H
A_2	H	S	S
H	H	H	H

4.C

	a	b
$\rightarrow S$	S	B
$\leftarrow B$	S	H
H	H	H