Analízis

szigorlati tematika

2004–2005. tanév 2. félév

I. Összefoglaló tételek

1. Halmazok, relációk és függvények

A halmaz fogalma, műveletek halmazokkal. A rendezett pár fogalma. Halmazok Descartes-szorzata. Reláció értelmezése. Reláció értelmezési tartománya, értékkészlete. Ekvivalencia-reláció. Parciális rendezés. Lineáris (vagy teljes) rendezés.

A függvény fogalma. Injektív és bijektív leképezések. Halmaz függvény által létesített képe és ősképe. Két függvény kompozíciója. Függvények invertálhatósága, inverz függvény. A kompozícióra és az inverzre vonatkozó állítások. Számértékű függvények összege, szorzata és hányadosa.

2. Valós számok

A valós számok egy axiómarendszere (testaxiómák, rendezési axiómák, teljességi – vagy Dedekind-féle – axióma). A teljességi axióma következményei: a szuprémum elv, az archimédeszi- és a Cantor tulajdonság, gyökvonás.

A természetes számok halmaza ($\mathbb{N}$). A teljes indukció elve. A racionális számok halmaza ($\mathbb{Q}$). $\mathbb{Q}$ rendezett test. $\mathbb{Q}$-ban nem teljesül a Dedekind-féle axióma. Minden nyílt intervallumban van végtelen sok racionális szám és irracionális szám.

Az $\overline{\mathbb{R}}$ értelmezése.

Nevezetes egyenlőtlenségek: az abszolút értékre vonatkozó egyenlőtlenségek, a Bernoulli-egyenlőtlenség, a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség, a Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség.

3. A metrikus terek topológiája

Metrikus-, normált- és euklideszi-terek értelmezése. Példák. A Hölder- és a Minkowski-egyenlőtlenségek. E terek közötti kapcsolat (Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség, mikor létezik valós normált téren a normát indukáló skaláris szorzat).

Alterek, környezetek, korlátos halmazok metrikus terekben. Ekvivalens metrikák és normák értelmezése, az ekvivalencia jelentősége. Példák.

Torlódási pont, belső pont, izolált pont, nyílt halmaz, zárt halmaz. Ezekre vonatkozó tételek.

Metrikus tér összefüggő részhalmazai. Kompaktság metrikus terekben. (Ekvivalens jellemzések nyílt lefedésekkel és torlódási pontokkal.) A korlátosság és a zártság szerepe. Kompaktság $\mathbb{R}^n$-ben.

4. Sorozatok

Konvergens sorozatok metrikus terekben. A határérték egyértelmű. Korlátosság és konvergencia kapcsolata. Részsorozatok.

Cauchy-sorozat fogalma metrikus térben. Teljes metrikus terek. Banach-tér, Hilbert-tér. Példák.

Torlódási pont, zárt halmaz jellemzése sorozatokkal. A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel.

Konvergencia $\mathbb{R}^n$-ben (a koordináta-sorozatok szerepe). Műveletek konvergens sorozatokkal.

Konvergencia a $\big(C[a,b], \varrho_1\big)$ és a $\big(C[a,b], \varrho_\infty\big)$ metrikus terekben.

$\mathbb{R}$-beli sorozatok további tulajdonságai: a rendezés és a limesz kapcsolata, a közrefogási elv, monoton növő (csökkenő) sorozat konvergenciájáról szóló tétel, a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel, a gyökvonás értelmezése konvergens sorozatok segítségével. Tágabb értelemben vett határérték. A műveletek és a határérték kapcsolata. Valós sorozat limesz szuperiorja és limesz inferiorja. Ezek kapcsolata a konvergenciával.

Nevezetes sorozatok: a geometriai sorozat, az e szám bevezetése.

5. Végtelen sorok

A végtelen számsor fogalma és konvergenciája. Példák, nevezetes sorok. A Cauchy-kritérium és következményei (a konvergencia szükséges feltétele, abszolút konvergens sorok.) Pozitív tagú sorok konvergenciája. Az összehasonlító kritérium. Leibniz-típusú sorok (definíció, konvergencia, hibabecslés). A Cauchy-féle gyök és a D'Alembert-féle hányados-kritérium.

Sorok zárójelezése és átrendezése. Sorok szorzása; téglányszorzat, Cauchy-szorzat.

Hatványsorok. Cauchy–Hadamard-tétel. Nevezetes hatványsorok: az exp, sin, cos, sh, ch, a binomiális sor. Hatványsorok összege, szorzata és átrendezése.

6. Függvények határértéke és folytonossága

Metrikus terek közötti leképezések határértéke és folytonossága. Ekvivalens definíciók. Átviteli elvek. A folytonosság jellemzése nyílt halmazok segítségével.

Egyenletes folytonosság.

Kompakt halmazon folytonos függvények tulajdonságai: Heine-tétel, Weierstrass abszolút szélsőértékekre vonatkozó tétele, az inverz függvény folytonossága.

Összefüggő halmaz folytonos képe is összefüggő. Bolzano tétele, Darboux-tulajdonság.

Kontrakció. A Banach-féle fixpont-tétel.

Vektor-vektor függvények határértéke és folytonossága. A koordináta-függvények szerepe. Műveletek és határérték (folytonosság).

Hatványsorok határfüggvényének a folytonossága. Az exponenciális-, a logaritmus- és a hatványfüggvény értelmezése és folytonossága.

Egyoldali határérték és folytonosság. Monoton függvény határértéke és szakadási helyei.

7. $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvények differenciálhatósága

A differenciálhatóság fogalma a derivált értelmezése. Ekvivalens átfogalmazás. Egyoldali derivált. A differenciálhatóság és a folytonosság kapcsolata.

Hatványsor összegfüggvényének a deriváltja. Differenciálható függvények összege, szorzata, hányadosa. Differenciálható függvények kompozíciója. Az inverz függvény deriváltja. A logaritmus- és a hatványfüggvény deriválása. Az arkusz és az area függvények.

A differenciálszámítás középértéktételei (Rolle-, Cauchy-, Lagrange-tétel). A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú.

Többször differenciálható függvény fogalma. A Leibniz-féle szabály. Hatványsor összegfüggvénye akárhányszor differenciálható. Taylor-polinom, Taylor-sor, Taylor-formula (Lagrange- és az integrál-maradéktaggal). Függvények hatványsor előállítása.

A binomiális sor.

8. **Függvényvizsgálat**

Lokális növekedés (fogyás) és lokális szélsőérték értelmezése $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények esetében. Szükséges, illetve elégséges feltételek, ha a függvény egyszer differenciálható. Differenciálható függvények monotonitása. L'Hospital-szabályok. Konvexitás, konkávitás, inflexiós pont. Definíciók, szükséges és elégséges feltételek többször differenciálható függvény esetében.

Lokális szélsőérték. Szükséges, illetve elégséges feltételek.

Aszimptoták.

9. **$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények differenciálhatósága I.**

$\mathbb{R}^n$-beli normák. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú lineáris leképezések (definíció, kapcsolat a mátrixokkal, az $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ normált tér).

A totális differenciálhatóság fogalma. Ekvivalens átfogalmazások. Speciális esetek. Deriválhatóság és folytonosság. Műveletek differenciálható függvényekkel.

Parciális derivált. Deriváltmátrix. A differenciálhatóság és a parciális differenciálhatóság kapcsolata.

Iránymenti derivált. A differenciálhatóság és az iránymenti differenciálhatóság kapcsolata.

10. **$\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények differenciálhatósága II.**

A Lagrange-féle középértéktétel. Többször differenciálható függvények. Young tétele. Taylor-formula.

Az inverz függvény differenciálhatósága és deriváltja. Implicit alakban megadott függvények.

Kvadratikus formák definíciója, jellemzése.

Többváltozós függvények szélsőértékei. Szükséges, elégséges feltételek differenciálható és kétszer differenciálható függvények esetén.

Feltételes szélsőérték (szükséges, illetve elégséges feltétel).

Paraméteres integrál.

11. **Egyváltozós Riemann-integrál**

A határozott integrál fogalmára vezető problémák. A határozott integrál fogalma. (Az $I = [a, b]$ intervallum felosztásai; a $s(f, \tau)$ és a $S(f, \tau)$ közelítő összegek értelmezése és tulajdonságai az $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén; az alsó- és a felső integrál, valamint a Riemann-integrálhatóság fogalmának értelmezése.)

Integrálható függvények néhány osztálya. (Folytonos, monoton, szakaszonként folytonos, illetve szakaszonként monoton függvények integrálhatósága.)

A folytonosság és az integrálhatóság kapcsolata. A Lebesgue-kritérium.

Műveletek integrálható függvényekkel (számmal való szorzás, összeg, szorzat, hányados). A Riemann-integrál intervallum szerinti additivitása.

A Newton–Leibniz-tétel. Az integrálfüggvény fogalma, folytonossága és differenciálhatósága. Határozott integrál kiszámítása parciális integrálással, illetve helyettesítéssel.

$f : I \to \mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$ korlátos intervallum) primitív függvényei, határozatlan integrálja. Linearitás, parciális integrálás, helyettesítési szabályok.

Terület, ívhossz, térfogat, felszín (forgásfelület).

Improprius integrál.

12. Vonalintegrál

Sima út, szakaszonként sima út. Egyesítés, ellentett út. Tartomány fogalma, jellemzése sima utakkal.

A vonalintegrál fogalma. Linearitás. Integrálás egyesített és ellentett úton.

Primitív függvény. Newton–Leibniz-formula. Zárt utakra vett integrálok és a primitív függvény kapcsolata. Integrálfüggvény.

Primitív függvény létezésére vonatkozó szükséges feltétel, illetve elégséges feltétel (csillagtartományon).

13. Többszörös integrálok

A többszörös integrál fogalma intervallumon, illetve korlátos halmazon értelmezett függvények esetén. Az integrál alapvető tulajdonságai. Az integrál kiszámítása szukcesszív integrálással inervallumon, illetve normál tartományokon. Integráltranszformáció. Példa.

II. Bizonyítással kért tételek

1. $\mathbb{R}^n$-beli normák ekvivalenciájára vonatkozó tétel.

2. Valós euklideszi téren a skaláris szorzat által indukált norma bevezetése.

3. Metrikus terek közötti függvények folytonossága. Folytonos függvény jellemzése ősképekkel.

4. A Banach-féle fixpont-tétel.

5. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvények differenciálhatósága. A derivált egyértelmű. Ekvivalens átfogalmazások. A deriváltmátrix előállítása a parciális deriváltakkal.

6. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvény differenciálhatóságára vonatkozó elégséges feltétel. (Bizonyítás az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ esetben.)

7. A többváltozós Taylor-formula.

8. Kvadratikus formák. Többváltozós szélsőértékekre vonatkozó tételek.

9. A vonalintegrál fogalma. $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ típusú függvények primitív függvényei. A Newton–Leibniz-formula.

10. A zárt utakra vett integrál és a primitív függvény kapcsolata. Az integrálfüggvény értelmezése és deriválhatósága.

11. Primitív függvény létezésének szükséges feltétele, illetve elégséges feltétele (csillagtartományon).