Gyakorló feladatok 3.

(Vektoranalízis)

Programtervező matematikus

szakos hallgatóknak az

Analízis 7.

nevű tárgyhoz

2006. őszi félév

1. Jelölések, elnevezések

• Skalármezők

D1. Lerögzítjük a közönséges térben az O origót és a pontokat helyvektoraikkal azonosítjuk. Legyen D a közönséges tér pontjainak (helyvektorainak) egy részhalmaza. Az $U(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in D$) függvényt **skalármezőnek** (vagy *skalár-vektor függvénynek*) nevezzük, ha minden $\mathbf{r} \in D$ vektorhoz pontosan egy $U(\mathbf{r})$ valós számot rendel hozzá. (Ilyen függvények írják le például rögzített időpontban a hőmérséklet, a nyomás vagy a „potenciál” eloszlását a tér egy részében.)

Megjegyzés. Ha a térben az O origó mellett lerögzítjük az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázist, és az ezen alapuló Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, akkor minden helyvektor egyértelműen előállítható az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban, és a helyvektorok halmaza és a rendezett számhármasok között bijekció létesíthető. Ilyenkor az $U(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in D$) skalármező azal a háromváltozós $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvénnyel reprezentálható, amelyet az

$$f(x, y, z) := U(\mathbf{r}) \qquad (\mathbf{r} \in D)$$

összefüggés definiál, ha $\mathbf{r} := x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Azt is mondhatjuk, hogy **rögzített koordinátarendszerben** egy skalármező megadása ekvivalens egy háromváltozós függvény megadásával. A skalármező és a háromváltozós függvény fogalma között azonban *lényeges elvi különbség* van. Ha ugyanis egy helytől függő fizikai mennyiséget skalármezővel adunk meg, akkor e függvény kizárólag az adott mennyiség térbeli eloszlását (és az origó megválasztását), vagyis a *fizikai lényeget* tükrözi. (Az origó megválasztása ugyan önkényes, de ez az „önkény” matematikailag könnyen felismerhetően és egyszerűen tükröződik: az origó megváltoztatása egy állandó vektornak a független vektorhoz való hozzáadásával történik.) Ezzel szemben, ha a fizikai mennyiséget koordinátarendszer bevezetése után, háromváltozós függvénnyel adjuk meg, akkor e függvény nemcsak a fizikai lényeget, hanem a koordinátarendszer esetlegességét is tükrözi. Ugyanazon skalármező különböző koordinátarendszerben különböző háromváltozós függvénnyel ekvivalens. A továbbiakban az egyszerűség végett a skalármezőket azonosítani fogjuk az őket leíró háromváltozós függvénnyel (amit a rögzített, „szokásos” Descartes-féle koordinátarendszerben tekintünk), és jelölésükre is ugyanazt a szimbólumot fogjuk használni: $U(\mathbf{r}) \equiv U(x, y, z)$. ■

Skalármező szemléltetése. Skalármezőket *szintfelületekkel* lehet szemléltetni a háromdimenziós térben, azaz

$$\text{rögzített } c \in \mathbb{R} \text{ esetén ábrázoljuk az } \big\{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid U(\mathbf{r}) = c\big\} \subset \mathbb{R}^3 \text{ halmazt.}$$

■

D2. Tekintsünk egy

$$U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad U(\mathbf{r}) = U(x, y, z), \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

skalármezőt. Ha $\mathbf{r}_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_U$ és $U \in D\{\mathbf{r_0}\}$, akkor

$$U'(\mathbf{r}_0) = \big(\partial_1 U(\mathbf{r}_0), \partial_2 U(\mathbf{r}_0), \partial_3 U(\mathbf{r}_0)\big) =: \operatorname{grad} U(\mathbf{r}_0)$$

az U **skalármező gradiensvektora** az $\mathbf{r}_0$ pontban.

- **Vektormezők**

D3. Lerögzítjük a közönséges térben az O origót és a pontokat helyvektoraikkal azonosítjuk. Legyen D a közönséges tér pontjainak (helyvektorainak) egy részhalmaza. A $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in D$) függvényt **vektormezőnek** (vagy *vektor-vektor függvénynek*) nevezzük, ha minden $\mathbf{r} \in D$ vektorhoz pontosan egy $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ vektort rendel hozzá. (Ilyen függvények írják le például rögzített időpontban a folyadékok, gázok áramlás-viszonyait, az elektromos, mágneses, gravitációs erőtereket.)

Megjegyzés. A skalármezőkhöz hasonlóan **rögzített koordinátarendszerben** egy vektormezőt három darab háromváltozós függvénnyel adhatunk meg. A továbbiakban nekünk ez a koordinátarendszer a „szokásos” Descartes-féle koordinátarendszer lesz, és a vektormezőt, valamint az őt leíró háromváltozós függvényeket ugyanazzal a szimbólummal fogjuk jelölni:

$$\mathbf{V} = \big(V_1, V_2, V_3\big) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \big(V_1(\mathbf{r}), V_2(\mathbf{r}), V_3(\mathbf{r})\big) \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

Azt is mondjuk, hogy vektormezőn $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényt értünk. ■

Vektormező szemléltetése. A vektormezők szemléltetésére azok a görbék a legalkalmasabbak, amelyek érintői a tér minden pontjában párhuzamosak a görbeponthoz rendelt vektorral. Ezeket a görbéket *vektorvonalaknak* nevezzük. A vektorvonalak csupán a vektormező irányáról adnak szemléletes képet. A vektormezőnek nemcsak az irányáról, hanem a nagyságáról is szemléletes képet adnak az ún. **erővonalak** (vagy *áramvonalak*). Ezekhez a következőképpen juthatunk el: a vektorvonalak közül csak néhányat „rajzolunk meg” olyan módon, hogy a megmaradó vektorvonalak (erővonalak, áramvonalak) sűrűsége arányos legyen a vektormező nagyságával. Ezen azt értjük, hogy ha az $\mathbf{r}_0$ ponthoz rendelt vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)$, akkor erre merőleges egységnyi területű felületdarabon $|\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)|$ számú erővonal halad át. ■

D4. Legyen $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy vektormező. Ha $\mathbf{r}_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\mathbf{V}}$ és $\mathbf{V} \in D\{\mathbf{r_0}\}$, akkor az $\mathbf{r}_0$ pontbeli **deriváltmátrix** (vagy Jacobi-mátrix):

$$\mathbf{V}'(\mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix} \partial_1 V_1(\mathbf{r}_0) & \partial_2 V_1(\mathbf{r}_0) & \partial_3 V_1(\mathbf{r}_0) \\ \partial_1 V_2(\mathbf{r}_0) & \partial_2 V_2(\mathbf{r}_0) & \partial_3 V_2(\mathbf{r}_0) \\ \partial_1 V_3(\mathbf{r}_0) & \partial_2 V_3(\mathbf{r}_0) & \partial_3 V_3(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés. A derváltmátrix elemei függenek a vektormezőt megadó függvény leírásához használt koordinátarendszer megválasztásától. Kiderült, hogy a deriváltmátrix elemeiből képzett bizonyos kifejezések *függetlenek a koordinátarendszer* megválasztásától, és *csak* a vektormezőtől függenek, ezért ezek a vektormezőt közvetlenül jellemző mennyiségek. Két ilyen *invariáns* jellemző van: az egyik a **divergencia** (ez egy szám, ezért ezt *skalár-invariánsnak* szokás nevezni), a másik egy vektor, ezt **rotációnak** szokás nevezni; ez a deriváltmátrix *vektorinvariánsa*. ■

D5. A $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény (vektormező) $\mathbf{V}'$ deriváltmátrixának főátlójában álló elemeinek összegét a $\mathbf{V}$ vektor-vektor függvény (vektormező) **divergenciájának** nevezzük és a $\operatorname{div}\mathbf{V}$ szimbólummal jelöljük:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} := \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3 = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

Megjegyzés. A divergencia fizikai tartalma: *az erőtér forrása.* A $\mathbf{V}$ vektormező az adott pontban *forrásmentes*, ha ott a $\operatorname{div}\mathbf{V} = 0$, ha $\operatorname{div}\mathbf{V} > 0$, akkor *forrása van*, és *nyelője van*, ha $\operatorname{div}\mathbf{V} < 0$. ■

D6. A $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény (vektormező) **rotációjának** a

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} := \big(\partial_2 V_3 - \partial_3 V_2, \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3, \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1\big)$$

függvényt nevezzük.

Megjegyzés. Kiderült, hogy a rotációvektorral a vektortér *örvényeit* vagy másképp fogalmazva az erővonalrendszerének a *csavarodását* lehet jellemezni. Sőt némi ügyeskedéssel nemcsak a csavarodás mértékét, hanem a csavarodás tengelyének az irányát is meg lehet adni. ■

• A „nabla szimbolika”

Megjegyzés. Skalármezők gradiensének, vektormezők divergenciájának és rotációjának felírását, az ezekkel a mennyiségekkel végzett számításokat megkönnyíti az ún. „nabla-szimbolika” használata. ■

D7. Azt a „(vektor)differenciál-operátort”, amelyet az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban a

$$\nabla := \big(\partial_1, \partial_2, \partial_3\big) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}$$

szimbólum jelöl, **nabla-operátornak** (vagy **Hamilton-féle differenciál-operátornak** nevezzük (ezt „virtuális vektornak” is tekinthetjük).

Ezzel a jelöléssel az $U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező esetén

$$\operatorname{grad} U = \nabla\, U = \big(\partial_1 U, \partial_2 U, \partial_3 U\big);$$

a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vektormező esetén:

$$\operatorname{div}\mathbf{V} = \langle\, \nabla, \mathbf{V}\,\rangle = \nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3,$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix}.$$

D8. A nabla vektor önmagával vett skaláris szorzatát **Laplace-operátornak** nevezik, és a $\triangle$ szimbólummal jelölik:

$$\triangle := \langle \nabla, \nabla \rangle = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Ha egy skalármezőt a Descates-féle derékszögű koordinátarendszerben az $U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvény reprezentál, akkor

$$\triangle U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Megjegyzés. A nabla vektor többszöri alkalmazása lehetséges, de nem történhet „vaktában". Például a $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V}$ értelmezhető, de a $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{V}) = \operatorname{rot} \operatorname{div} \mathbf{V}$ nem, mert $\operatorname{div} \mathbf{V}$ skalár és ennek nem értelmezhető a rotációja. ■

• Reguláris tartományok

D9. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ halmaznak $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ egy **határpontja**, ha $\mathbf{a}$ minden környezetében van Ω-hoz tartozó és Ω-hoz nem tartozó pont is, azaz

$$\forall\, r > 0 \quad \text{esetén } k_r(\mathbf{a}) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \text{és} \quad k_r(\mathbf{a}) \cap \left(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega\right) \neq \emptyset.$$

Az Ω halmaz határpontjainak a halmazát a $\partial\Omega$ szimbólummal fogjuk jelölni.

D10. A reguláris $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ felületet **egyszerű zárt felületnek** nevezzük, ha a teret két részre V_1-re és V_2-re bontja úgy, hogy

(a) $V_1 \cup \mathcal{F} \cup V_2 = \mathbb{R}^3$,

(b) $V_1 \cap \mathcal{F} = \emptyset$, $V_2 \cap \mathcal{F} = \emptyset$ és $V_1 \cap V_2 = \emptyset$;

(c) $V_1 \cup V_2$ nem összefüggő halmaz;

(d) V_1 és V_2 is összefüggő halmaz;

(e) közülük az egyik, pl. V_1 korlátos halmaz.

Megjegyzés. A továbbiakban olyan korlátos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartományokat fogunk tekinteni, amelyeknek a $\partial\Omega$ határa egyszerű zárt felület. Megengedjük azt is, hogy a határhalmaz „élekben cstalakozó" reguláris felületdarabokból álljon. Az ilyen tartományokat röviden „jó" tartományoknak fogjuk majd nevezni. ■

• Feladatok

F1. Állapítsa meg, hogy mik lesznek az alábbi skalármezők szintfelületei:

(a) $U(\mathbf{r}) := z - x^2 - y^2$, $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(b) $U(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^2$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

F2. Számítsa ki az alábbi vektomezők gradiensét a megadott pontokban:

(a) $U(\mathbf{r}) := z - x^2 - y^2$, $P_0(-1, 2, -3)$;

(b) $U(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^2$, $\mathbf{r}_0(1, 2, 3)$.

F3. Szemléltesse az alábbi vektor-vektor függvényeket (vektormezőket):

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := \mathbf{r}$ $\big(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\big)$;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ $\big(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$;

(c) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := -\mathbf{r}$ $\big(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\big)$.

F4. Számítsa ki az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját a megadott pontokban:

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ $(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{r}_0$ tetszőleges;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (3x - 4y^2)\mathbf{i} + (x - 4y + z^2)\mathbf{j} - (3y + 5z)\mathbf{k}$ $\big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$, $\mathbf{r}_0 = (1, 2, -3)$.

F5. (a) Határozza meg $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$ értékét az $\mathbf{r}_0(-1, 0, 2)$ helyvektorú pontban, ha

$$U(x, y, z) := xe^y + x^2z^2 - y^3x \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

(b) Határozza meg a $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}$ vektort a $P_0(1, 2, 3)$ pontban, ha

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k} \quad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

F6. (a) Írja át az

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

kétdimenziós Laplace-féle differenciálegyenletet polárkoordinátákba.

(b) Írja fel térbeli polárkoordinátákban a (háromdimenziós) Laplace-operátort.

2. Skalármezők térfogati integrálja. Vektormezők vonal- és felületi integrálja

- **Skalármező térfogati integrálja**

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ korlátos, „jó” tartomány, és tegyük fel, hogy az

$$U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

skalármező folytonos az $\Omega \cup \partial\Omega$ halmazon. Az U **skalármező térfogati integráljának** nevezzük és

$$\iiint\limits_{\Omega} U(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$$

szimbólummal jelöljük az $U(x, y, z)$ függvény Ω-n vett hármas integrálját.

- **Vektormező vonalintegrálja**

D11. Legyen $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormező. Tegyük fel, hogy a szakaszonként sima $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ görbének $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ egy paraméterezése. A $\mathbf{V}$ vektormező Γ görbén vett **vonalintegrálján** a

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} := \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathbf{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

számot értjük.

Megjegyzés. A vonalintegrál fizikai jelentése: az erőtér által végzett munka. ■

Ismételni: primitív függvény; a vonalintegrál úttól való függetlensége. ■

- **Vektormező felületi integrálja**

  Motiváció:

D12. Legyen $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonos vektormező. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima felületdarab és $F : T \to \mathcal{F}$ $(T \subset \mathbb{I}^2)$ ennek egy paraméterezése. A $\mathbf{V}$ vektormező $\mathcal{F}$ felületre vett **felületi integrálján** az

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma := \iint\limits_{T} \mathbf{V}\big(F(u, v)\big) \cdot \partial_u F(u, v) \cdot \partial_v F(u, v)\, du\, dv$$

számot értjük.

Fizikai tartalom: fluxus. Áramlásoknál: $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ a sebesség, az integrál a folyadékmennyiség. Az erőtereknél a normális irányában áthaladó erővonalak száma. ■

• **Feladatok**

F7. Számítsa ki az

$$U(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

függvény térfogati integrálját arra az egységnyi élhosszúságú kockára, amelynek egyik csúcsa az origóban van, az ebből a csúcsból kiinduló élei pedig a koordinátatengelyek pozitív felére illeszkednek.

F8. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (xy - z)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + (zx - y)\mathbf{k} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvény vonalintegrálját a

$$\gamma(t) := (t^2 + 1)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + (t^3 - t)\mathbf{k} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletű görbe $A(1,1,0)$ pontjától a görbe $B(5,-1,6)$ pontjáig terjedő íve mentén.

F9. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (2xy + z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvény vonalintegrálját a $P_1(2,1,3)$ pontot a $P_2(-1,3,-2)$ ponttal összekötő egyenesszakasz mentén P_1-től P_2 felé haladva.

F10. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (z^2 - y)\mathbf{i} + (z^3 + x)\mathbf{j} + (xy)\mathbf{k} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvény vonalintegrálját az x, y síkkal párhuzamos síkban elhelyezkedő $C(2,3,4)$ középpontú 5 sugarú körvonal mentén.

F11. Mutassa meg, hogy a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvénynek (vektormezőnek) egy (csillagszerű) tartományban pontosan akkor van primitív függvénye (potenciálja), ha a vektormező ott rotációmentes.

F12. (a) Bizonyítsa be, hogy a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (2xy + z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvénynek van potenciálja. Határozza meg a potenciált.

(b) Számítsa ki a vektormező vonalintegrálját tetszőleges görbe mentén az $A(2,1,3)$ és $B(-1,3,-2)$ pontok között.

F13. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvény felületi integrálját az

$$F(u, v) := [(3 + \cos u) \cos v]\mathbf{i} + [(3 + \cos u) \sin v]\mathbf{j} + (\sin u)\mathbf{k}$$

egyenletű tórusz x, y sík feletti darabja mentén „felfelé mutató” normális mellett.

3. Integrálátalakító tételek

T1. **Gauss–Osztrogradszkij-tétel**. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ egy olyan korlátos, mérhető térfogatú tartomány, amelynek $\partial\Omega$ határa olyan egyszerű zárt felület, amely „élekben csatlakozó” reguláris felületdarabokból áll. Tegyük fel továbbá azt, hogy a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény (vektormező) folytonosan deriválható a $\Omega \cup \partial\Omega$ halmazon. A $\partial\Omega$ felület minden pontjában a felületi merőlegeseket a térrészből kifelé irányítjuk. Ekkor

$$\iint_{\partial\Omega} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r},$$

vagyis a $\mathbf{V}$ függvénynek a $\partial\Omega$ felületen vett felületi integrálja egyenlő divergenciájának $\mathbf{V}$-re vonatkozó hármas integráljával.

T2. **Stokes tétele.** Legyen $\mathcal{F}_1$ reguláris felületdarab, Γ pedig egy egyszerű, reguláris, zárt felületi görbe $\mathcal{F}_1$-en. $\mathcal{F}_1$ normálvektorát irányítsuk úgy, hogy annak irányából nézve a Γ-n kijelölt haladási irány pozitív (az óramutató járásával ellenkező) legyen. $\mathcal{F}_1$-nek Γ által határolt darabját $\mathcal{F}$-fel jelöljük. Legyen továbbá a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező folytonosan deriválható az $\mathcal{F} \cup \Gamma$ halmazon. Ekkor $\mathbf{V}$-nek Γ-ra vonatkozó vonalintegrálja egyenlő $\mathbf{V}$ rotációjának $\mathcal{F}$-re vett felületi integráljával:

$$\int_{\Gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma.$$

T3. **„Szimmetrikus Green-tétel”.** Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ egy olyan korlátos, mérhető térfogatú tartomány, amelynek $\partial\Omega$ határa egyszerű zárt, reguláris felület kifelé irányított normálvektorral. Legyenek továbbá az $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármezők az $\Omega \cup \partial\Omega$ halmazon folytonosan deriválhatók. Ekkor

$$\iint_{\partial\Omega} \big(U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1\big)\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \big(U_1 \triangle U_2 - U_2 \triangle_1 U_1\big)\, d\mathbf{r}.$$

- **Feladatok**

F14. Legyen a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (-x^2 + y + z)\mathbf{i} + (x - y^2 + z)\mathbf{j} + (x + y - z^2)\mathbf{k}$$

vektormező a $0 \le x \le 2$, $0 \le y \le 2$, $0 \le z \le 2$ feltételekkel megadott kockán értelmezve. Igazolja a Gauss–Osztrogradszkij-tétel helyességét erre az alakzatra úgy, hogy egymástól függetlenül kiszámolja a tétel két oldalán álló integrálokat, belátja ezek egyenlőségét.

F15. Szemléltesse az alábbi feladatokon a Gauss–Osztrogradszkij-tételt úgy, hogy mind a felületi, mind a térfogati integrált kiszámolja:

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$;
a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $y \ge 0$, $z \ge 0$;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (x - 2z)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} + (x - y + z)\mathbf{k}$;
a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \le 4$.

F16. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektormező felületi integrálját az $x^2 + y^2 = 4$, $z = -2$, $z = 3$ egyenletekkel megadott körhenger felületére, kifelé mutató normálisok mellett.

F17. Tekintsük a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (-x^2 + y + z)\mathbf{i} + (x - y^2 + z)\mathbf{j} + (x + y - z^2)\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektormezőt és azt a felületet, amelyet az $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ és $C(0, 0, 2)$ csúcspontú háromszöglap és az a két háromszöglap határol, amit az ABC sík az xz és az yz síkból kivág. (Az OAB háromszöglap tehát nem tartozik a felülethez.) Igazolja az alakzatra Stokes tételét.

F18. Szemléltesse az alábbi feladatokon a Stokes-tételt úgy, hogy mind a felületi, mind a vonalintegrált kiszámolja:

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (x + z)\mathbf{i} + (3y - 2z)\mathbf{j} + (5x - 3y)\mathbf{k}$;
a felület: $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$ alapkörű és $(0, 0, 5)$ csúcspontú kúppalást;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := xz^2\mathbf{i} + zy^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$; a felület a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid azon része, amelyre $x^2 + y^2 \le 4$.

F19. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} - 2xyz^2\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektormező felületi integrálját az $x^2+y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 6$ zárt hengerfelületre, kifele mutató normális mellett.