Gyakorló feladatok 1.

(Görbék)

Programtervező matematikus

szakos hallgatóknak az

Analízis 7.

nevű tárgyhoz

2006. őszi félév

1. Görbék megadásának módjai és szemléltetésük

F1. A paraméter kiküszöbölésével adja meg az alábbi síkgörbéket $F(x, y) = 0$ implicit alakban, majd ábrázolja mindegyiket:

(a) $\varphi(t) := \big(\sin^2 t,\ \cos^2 t\big) \qquad (t \in \mathbb{R});$

(b) $\varphi(t) := \big(\cos t,\ \cos 2t\big) \qquad (t \in \mathbb{R});$

(c) $\varphi(t) := \big(t^2 - 2t,\ t + 1\big) \qquad (t \in \mathbb{R});$

(d) $\varphi(t) := \big(\ln t,\ \sqrt{t}\big) \qquad (t \in \mathbb{R});$

(e) $\varphi(t) := \big(\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t\big) \qquad (t \in \mathbb{R}).$

F2. Vázolja az alábbi, polárkoordinátákban megadott görbéket:

(a) $r(\varphi) := a\varphi \quad (\varphi \geq 0,\ a > 0)$ (az archimédeszi spirális);

(b) $r(\varphi) := \dfrac{a}{\varphi} \quad (\varphi > 0,\ a > 0)$ (a hiperbolikus spirális);

(c) $r(\varphi) := ae^{k\varphi} \quad (\varphi \geq 0,\ a > 0,\ k > 0)$ (a logaritmikus spirális);

(d) $r(\varphi) := \cos\varphi \quad \big(\varphi \in \big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]\big);$

(e) $r(\varphi) := \cos 2\varphi \quad \big(\varphi \in \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big]\big);$

(f) $r(\varphi) := |\cos 2\varphi| \quad \big(\varphi \in \mathbb{R}\big);$

(g) $r(\varphi) := a(1 + \cos\varphi) \quad \big(\varphi \in [0, 2\pi],\ a > 0\big)$ (a kardiodid);

(h) $r(\varphi) := a\sqrt{2\cos 2\varphi} \quad \big(\varphi \in \big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\big] \cup \big[\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\big]\big)$
(a Bermoulli-féle lemniszkáta).

F3. Szemléltesse az alábbi síkgörbéket:

(a) $y^2 - 2x^3 = 0;$

(b) $x^3 + y^3 = 3\alpha xy \qquad (\alpha > 0)$ (a Descartes-féle levél);

(c) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \alpha^{\frac{2}{3}} \qquad (\alpha > 0)$ (az asztrois).

2. Görbék ívhossza, természetes paraméterezése

F4. Vázolja az alábbi térgörbéket és határozza meg az ívhosszukat:

(a) $\varphi(t) := \big(a\cos t, a\sin t, bt\big) \quad (t \in [0, 2\pi], a > 0, b > 0),$
(az origó középpontú a sugarú hengerre írt csavarvonal, $2\pi b$ a menet magassága);

(b) $\varphi(t) := \big(e^{4t}\cos t, e^{4t}\sin t, \sqrt{2}e^{4t}\big) \quad (t \in [0, 1]),$
(egy kúpra írt csavarvonal).

F5. Mutassa meg, hogy az

$$f(x) \qquad \big(x \in [a,b]\big) \qquad \text{explicit-,}$$

illetve az

$$r(\varphi) \qquad \big(\varphi \in [\varphi_1, \varphi_2]\big) \qquad \text{polárkoordinátás}$$

alakban megadott egyszerű sima görbe rektifikálható és az ívhossza az

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx,$$

illetve az

$$l = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2(\varphi) + \big[r'(\varphi)\big]^2}\, d\varphi$$

képlettel számítható ki.

F6. Számítsa ki az alábbi görbék ívhosszát:

(a) $f(x) := \sqrt{x^3} \qquad \big(x \in [0,4]\big)$;

(b) az archimédeszi spirális első menete.

F7. Adja meg az alábbi görbék természetes (ívhossz szerinti) paraméterezését:

(a) az $(1,2)$ pontból a $(3,4)$ pontba vezető szakasz;

(b) az origó középpontú 4 sugarú kör;

(c) $\varphi(t) := \big(a\cos t,\ a\sin t,\ bt\big) \qquad \big(t \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 0\big)$.

F8. Bizonyítsa be, hogy ha egy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$ függvénnyel megadott térgörbe érintővektorainak hossza azonosan egy, akkor a t paraméter a görbe valamely pontjától mért ívhossz vagy attól csak egy additív állandóban különbözik.

3. Görbék érintője

F9. Írja fel a megadott pontokban az alábbi görbék érintőjének az egyenletét, és adja meg az egyenletrendszerét is:

(a) $\varphi(t) := \big(\frac{t^2}{2}, \frac{2t^3}{3}, \frac{t^4}{2}\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; $t_0 := 1$;

(b) $\varphi(t) := \big(\frac{t}{1+t}, 2\ln(1+t), \frac{1}{\cos t}\big)$ $(t > -1)$; $t_0 := 0$;

(c) $\varphi(t) := \big(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; $t_0 := 0$.

F10. Határozza meg az alábbi térgörbék megadott tulajdonságú érintőinek egyenletrendszerét és egyenletük paraméteres alakját, ha

(a) $\varphi(t) := \left(\frac{t^4}{4}, \frac{t^3}{3}, \frac{t^2}{2}\right)$ $(t \in \mathbb{R})$; az érintő párhuzamos az $x + 3y + 2z = 0$ egyenletű síkkal;

(b) $\varphi(t) := \left(3t - t^3, 3t^2, 3t + t^3\right)$ $(t \in \mathbb{R})$; az érintő párhuzamos a $3x + y + z + 2 = 0$ egyenletű síkkal;

(c) $\varphi(t) := \left(\sin t - t\cos t, t\sin t + \cos t, \sin t\right)$ $(t \in \mathbb{R})$; az érintő párhuzamos az yz-koordinátasíkkal.

F11. Írja fel a

$$\varphi(t) := \big(a(t - \sin t),\ a(1 - \cos t)\big) \qquad \big(t \in \mathbb{R},\ a > 0\big)$$

egyenletű ciklois érintőjének az egyenletét a $t_0 := \frac{\pi}{3}$ pontban. Mely pontokban vízszintes az érintő, és melyekben függőleges? Számolja ki az egy cikloisív alatti területet.

F12. Tekintse a

$$\varphi(t) := \big(t^2,\ t^3 - 3t\big) \qquad \big(t \in \mathbb{R}\big)$$

egyenletű görbét.

(a) Mutassa meg, hogy a görbének a $(3, 0)$ pontban két érintője van.

(b) Keresse meg azokat a pontokat, amelyekben az érintő vízszintes, illetve függőleges.

(c) Ábrázolja a görbét.

F13. Határozza meg az $r(\varphi) := 1 + \cos\varphi$ $(\varphi \in [0, 2\pi])$ kardiodid érintőjének az egyenletét a $\varphi_0 := \pi/3$ pontban. Keresse meg azokat a pontokat, amelyekben az érintő vízszintes, illetve függőleges.

F14. Legyen a Γ görbe polárkoordinátákban adott egyenlete $r = r(\varphi)$ $(\varphi \in I)$. Tegyük fel, hogy az $r(\varphi)$ függvény deriválható és $0 \notin \mathcal{R}_{r'}$. Ekkor a Γ görbének tetszőleges $P_0 = \big(r(\varphi_0), \varphi_0\big)$ pontjában van érintője. Az érintőegyenesnek és az OP_0 félegyenesnek az ω hajlásszögére a

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)}$$

képlet érvényes.

F15. Mutassa meg, hogy a logaritmikus spirális olyan görbe, amelyik a koordinátarendszer O kezdőpontjából kiinduló minden félegyenest azonos ω szög alatt metsz. Ez azt jelenti, hogy a görbe minden M pontjában az M-beli érintőnek és az OM félegyenesnek a szöge ugyanannyi (ω).

4. Görbület, simulósík, kísérő triéder, simulókör, torzió, Frenet-formulák

• A természetes paraméterezés alapvető tulajdonságai

F16. Tegyük fel, hogy $\Phi : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ a $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima görbe egy kétszer folytonosan deriválható természetes paraméterezése. Bizonyítsa be, hogy

(a) $\left|\Phi'(s)\right| = 1$ minden $s \in [0, L]$ esetén;

(b) a $\Phi'(s)$ és $\Phi''(s)$ vektorok *merőlegesek* egymásra, azaz

$$\langle \Phi'(s), \Phi''(s) \rangle = 0 \qquad \big(s \in [0, L]\big).$$

• Görbület

D1. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ egy egyszerű sima görbe. Tegyük fel, hogy $\Phi : [0, L] \to \Gamma$ ennek az ívhossz szerinti, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése (L a Γ ívhossza.) Az $s \in [0, L]$-ben (azaz a $\Phi(s)$ pontban) a Γ *görbe görbületén* a $\kappa(s) := |\Phi''(s)|$ számot értjük.

F17. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima (tér)görbe, és tegyük fel, hogy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy tetszőleges, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése. Mutassa meg, hogy a görbének minden $t_0 \in (\alpha, \beta)$ paraméterű $\varphi(t_0) = P_0 \in \Gamma$ pontjában van görbülete és ez a

$$\kappa(t_0) = \frac{\left|\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\right|}{|\varphi'(t_0)|^3}$$

képlettel számítható ki. Mi a görbület szemléletes jelentése?

Útmutatás. Legyen $\Phi : [0, L] \to \Gamma$ a görbe természetes paraméterezése (L a Γ ívhossza). Jelölje $S(t) := L_{\Gamma_t}$ ($t \in [\alpha, \beta]$) a $\Gamma_t := \big\{\varphi(u) \mid \alpha \le u \le t\big\}$ görbe ívhosszát és T ennek a függvénynek az inverzét: $T := S^{-1}$. Ekkor $\Phi = \varphi \circ T$. A tett feltételekből következik, hogy $\Phi \in C^2$, ezért a göbének minden pontban van görbülete.

A $\Phi = \varphi \circ T$ függvényre az összetett függvény deriválási szabályát alkalmazzuk:

$$\begin{aligned} \Phi' &= \varphi' \circ T \cdot T' \\ \Phi'' &= \varphi'' \circ T \cdot \big[T'\big]^2 + \varphi' \circ T \cdot T'' = \big[T'\big]^2 \cdot \varphi'' \circ T + \frac{T''}{T'} \cdot \Phi'. \end{aligned} \tag{1}$$

(Φ'' tehát a $\varphi'' \circ T$ és a Φ' vektorok lineáris kombinációja.)

Legyen $s_0 := S(t_0)$, $T(s_0) = t_0$, $\varphi(t_0) = \varphi\big(T(s_0)\big) = \Phi(s_0)$.

A $\kappa(s_0) := \big|\Phi''(s_0)\big|$ görbület kiszámolásához felhasznájuk azt, hogy $\Phi'(s_0)$ egységvektor és $\Phi'(s_0) \perp \Phi''(s_0)$. Ez alapján (egy kis „cselt" is alkalmazva!!)

$$\kappa(s_0) = \big|\Phi''(s_0)\big| = \big|\Phi'(s_0) \times \Phi''(s_0)\big|.$$

Ebbe (1)-et behelyettesítve, és felhasználva a vektoriális szorzat tulajdonságait (linearitás; egy vektor önmagával vett vektoriális szorzata nulla) azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\kappa(t_0) = \kappa(s_0) = \big|\Phi''(s_0)\big| &= \big[T'(s_0)\big]^2 \cdot \big|\Phi'(s_0) \times \varphi''\big(T(s_0)\big)\big| = \\
&= \big[T'(s_0)\big]^2 \cdot \big|\Phi'(s_0) \times \varphi''(t_0)\big| = \big[T'(s_0)\big]^3 \cdot \big|\varphi'\big(T(s_0)\big) \times \varphi''(t_0)\big| = \\
&= \big[T'(s_0)\big]^3 \cdot \big|\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big|.
\end{aligned}$$

Mivel

$$S(t) = \int_\alpha^t \big|\varphi'(u)\big|\, du \qquad \big(t \in (\alpha, \beta)\big),$$

ezért

$$S'(t) = \big|\varphi'(t)\big| \qquad \big(t \in (\alpha, \beta)\big),$$

és $T := S^{-1}$ miatt az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$T'(s) = \frac{1}{S'\big(T(s)\big)} = \frac{1}{\big|\varphi'\big(T(s)\big)\big|} = \frac{1}{\big|\varphi'(t)\big|}$$
$$\big(s \in (0, L),\ t \in (\alpha, \beta)\big),$$

következésképpen fennáll a

$$\kappa(t_0) = \frac{\big|\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big|}{|\varphi'(t_0)|^3} \qquad \big(t_0 \in (\alpha, \beta)\big)$$

egyenlőség.

A görbület szemléletes jelentése: Egy görbe P pontbeli görbületével az egyenestől való eltérését mérjük. Ezt a görbe érintőjének átlagos irányváltozási sebességével jellemezhetjük: Ha a görbe P, Q pontjaiban vett érintők hajlásszöge $\triangle\alpha$, $\triangle s$ pedig a P és Q közötti ívhossz, akkor a görbület „természetes" értelmezése a $\triangle\alpha/\triangle s$ hányados határértéke, midőn a Q pont a görbén a P ponthoz tart. Ennek „alkalmas" átalakítása volt számunkra a görbület definíciójának a motivációja. ■

F18. Mutassa meg, hogy az $y = f(x)$ $\big(x \in [a, b]\big)$ egyenlettel *explicit alakban* megadott síkbeli görbe görbülete az $\big(x_0, f(x_0)\big)$ $\big(x_0 \in (a, b)\big)$ pontban a

$$\kappa = \frac{\big|f''(x_0)\big|}{\big(1 + [f'(x)]^2\big)^{3/2}}$$

képlettel számítható ki, ha $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ legalább kétszer folytonosan deriválható.

F19. Számítsa ki az alábbi görbék görbületét a megadott pontokban:

(a) $\varphi(t) := \big(2\sin t, 2\cos t, 4t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; $t_0 := \frac{\pi}{4}$;

(b) $\varphi(t) := \big(e^{-2t}, 2t, 4)$ $(t \in \mathbb{R})$; $t_0 := 0$;

(c) $\varphi(t) := \big(2, \sin \pi t, \ln t\big)$ $(t > 0)$; $t_0 := 1$;

(d) $\varphi(t) := \big(t, \sin(2t), 3t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; $t_0 := 0$;

(e) $\varphi(t) := \big(t, t^2 + t - 1, t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$; $t_0 := 0$;

(f) $f(x) := x^3 - 1$ $(x \in \mathbb{R})$; $x_0 := 1$;

(g) $f(x) := \sin x$ $(x \in \mathbb{R})$; $x_0 := \frac{\pi}{2}$;

(h) $f(x) := e^{-3x}$ $(x \in \mathbb{R})$; $x_0 := 0$.

F20. Mi lesz $x \to +\infty$ esetén a görbület határértéke az alábbi egyenletekkel explicit alakban megadott görbéknél:

(a) $y = ax^2 + bx + x$ $(a, b, c$ valós paraméterek);

(b) $y = e^{2x}$;

(c) $y = x^3$;

(d) $y = \sqrt{x}$?

F21. Határozza meg az alábbi, polárkoordinátás alakban megadott görbék görbületét a kijelölt pontokban:

(a) $r(\varphi) := |\sin 3\varphi|$ $\big(\varphi \in \mathbb{R}\big)$, $\varphi_0 = 0,\ \frac{\pi}{6}$;

(b) $r(\varphi) := 3 + 2\cos(3\varphi)$ $\big(\varphi \in \mathbb{R}\big)$, $\varphi_0 = 0,\ \frac{\pi}{2}$;

(c) $r(\varphi) := 3e^{2\varphi}$ $\big(\varphi \in \mathbb{R}\big)$, $\varphi_0 = 0,\ 1$.

F22. Keresse meg a következő görbék maximális és minimális görbületű pontjait:

(a) $\varphi(t) := \big(2\cos t, 3\sin t\big)$;

(b) $y = 4x^2 - 3$;

(c) $y = \sin x$.

F23. Számítsa ki az

$$F(x, y) = 0$$

implicit egyenlettel adott görbe görbületét.

Útmutatás.

$$\kappa = \frac{\left| \det \begin{bmatrix} F''_{xx} & F''_{xy} & F'_x \\ F''_{yx} & F''_{yy} & F'_y \\ F'_x & F'_y & 0 \end{bmatrix} \right|}{\big(F'^2_x + F'^2_y\big)^{3/2}}$$

■

- **A kísérő triéder élei és síkjai**

D2. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe, $\Phi : [0, L] \to \Gamma$, $\Phi \in C^2$ a természetes paraméterezése, és tegyük fel, hogy $\Phi''(s) \neq 0$ (L a Γ ívhossza). Legyen $s \in [0, L]$ esetén

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}(s) &:= \Phi'(s) && \text{(ez az ún. \textit{érintő} egységvektor)},\\
\mathbf{n}(s) &:= \frac{\Phi''(s)}{|\Phi''(s)|} && \text{(ez az ún. \textit{főnormális} egységvektor)},\\
\mathbf{b}(s) &:= \mathbf{e}(s) \times \mathbf{n}(s) && \text{(ez az ún. \textit{binormális} egységvektor)}.
\end{aligned}$$

A páronként egymásra merőleges $\mathbf{e}(s)$, $\mathbf{n}(s)$, $\mathbf{b}(s)$ egységvektorokból álló rendszert a **görbe kisérő triéderének** nevezzük.

Az $\mathbf{e}(s)$ és $\mathbf{n}(s)$ vektorok által kifeszített sík a **simulósík**,

az $\mathbf{n}(s)$ és $\mathbf{b}(s)$ vektorok által kifeszített sík a **normálsík**,

az $\mathbf{e}(s)$ és $\mathbf{b}(s)$ vektorok által kifeszített sík a **rektifikálósík**.

F24. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima (tér)görbe, és tegyük fel, hogy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy tetszőleges, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése; $t_0 \in (\alpha, \beta)$ és $\varphi(t_0) = P_0 \in \Gamma$. A görbe P_0 pontjához tartozó kísérő triéder **éleire** vonatkozóan mutassa meg a következőket:

(a) Az **érintő** irányába mutató vektor

$$\varphi'(t_0).$$

(b) A **főnormális** irányába mutató vektor

$$\big(\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big) \times \varphi'(t_0).$$

(c) A **binormális** irányába mutató vektor

$$\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0).$$

Útmutatás. Legyen $\Phi : [0, L] \to \Gamma$ a görbe természetes paraméterezése (L a Γ ívhossza). Az állítás *egyszerű* következménye a $\Phi = \varphi \circ T$ alapvető képletünk deriváltjaira vonatkozó

$$\begin{aligned}
\Phi' &= \varphi' \circ T \cdot T'\\
\Phi'' &= \varphi'' \circ T \cdot \big[T'\big]^2 + \varphi' \circ T \cdot T'' = \big[T'\big]^2 \cdot \varphi'' \circ T + \frac{T''}{T'} \cdot \Phi'.
\end{aligned} \tag{2}$$

összefüggéseknek.

(a) Görbe érintőjének irányvektora **definíció szerint** a $\varphi'(t_0)$ vektor. (A fentiek alapján a $\varphi'(t_0)$ és a $\Phi'(s_0)$ $(t_0 = T(s_0))$ vektorok párhuzamosak. Ezért neveztük *érintő egységvektornak* a kísérő triéder $\mathbf{e}(s_0) := \Phi'(s_0)$ vektorát.)

(c) *igazolása*: Tekintsük a $\mathbf{b} := \mathbf{b}(s_0) = \mathbf{b}(t_0)$ binormális egységvektorral párhuzamos és egyirányú $\Phi'(s_0) \times \Phi''(s_0)$ vektort. (2) alapján

$$\Phi'(s_0) \times \Phi''(s_0) = \lambda\, \varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0),$$

ahol λ egy alkalmas pozitív szám (miért?), ezért $\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)$ valóban egy, a binormális irányába mutató vektor.

(b) *igazolása*: Az $\mathbf{e}, \mathbf{n}$ és $\mathbf{b}$ vektorok definíciójából következik (miért?), hogy

$$\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{e},$$

és ez a (b) állításunkat bizonyítja. ■

F25. Határozza meg az alábbi görbék t_0 paraméterű pontjában a kísérő triéder vektorait és az élegyeneseinek az egyenletét:

(a) $\varphi(t) := \big(t^3 - 1,\, 2t^2 + 1,\, 3t - 2\big)\ (t \in \mathbb{R}), \quad t_0 := 1;$

(b) $\varphi(t) := \big(1 + t^2,\, \frac{2}{1-t^2},\, t - t^3\big)\ (t \in \mathbb{R}), \quad t_0 := 1;$

(c) $\varphi(t) := \big(\sin^2 t,\, \cos(2t),\, -\frac{1}{\sin t}\big)\ (t \in (0, \pi)), \quad t_0 := \frac{\pi}{4}.$

Útmutatás. (a) A szóban forgó pont: $P_0 = \varphi(t_0) = \varphi(1) = (0,\, 3,\, 1)$.

A szükséges deriváltak és a helyettesítési értékek:

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= \big(3t^2,\, 4t,\, 3\big), \\ \varphi'(1) &= \big(3,\, 4,\, 3\big); \\ \varphi''(t) &= \big(6t,\, 4,\, 0\big), \\ \varphi''(1) &= \big(6,\, 4,\, 0\big). \end{aligned}$$

A kísérő triédert kifeszítő **három egységvektor**:

Az *érintő egységvektor*:

$$\mathbf{e}(1) = \frac{\varphi'(1)}{\big|\varphi'(1)\big|} = \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{i} + \frac{4}{\sqrt{34}}\mathbf{j} + \frac{3}{\sqrt{34}}\mathbf{k}.$$

Mivel

$$\varphi'(1) \times \varphi''(1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -12\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 12\mathbf{k},$$

ezért a *binormális egységvektor*:

$$\mathbf{b}(1) = \frac{\varphi'(1) \times \varphi''(1)}{\big|\varphi'(1) \times \varphi''(1)\big|} = -\frac{12}{\sqrt{612}}\mathbf{i} + \frac{18}{\sqrt{612}}\mathbf{j} - \frac{12}{\sqrt{612}}\mathbf{k}.$$

Végül a *főnormális egységvektor*:

$$\begin{aligned}
\mathbf{n}(1) = \mathbf{b}(1) \times \mathbf{e}(1) &= \frac{6}{\sqrt{34}\sqrt{612}} \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{17\sqrt{2}}\big(17\mathbf{i} - 17\mathbf{k}\big) = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{k}.
\end{aligned}$$

Az **érintő** egy irányvektora $\varphi'(1) = (3, 4, 3)$, ezért az *érintőegyenes* egyenleteinek különböző alakjai:

a *vektoregyenlete*

$$\mathbf{W}(t) = \varphi(1) + t\varphi'(1) = 3t\mathbf{i} + (3 + 4t)\mathbf{j} + (1 + 3t)\mathbf{k} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

a *paraméteres egyenletrendszere*

$$\begin{aligned} x &= 3t \\ y &= 3 + 4t \qquad (t \in \mathbb{R}), \\ z &= 1 + 3t \end{aligned}$$

az *egyenletrendszere*

$$\frac{x}{3} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-1}{3}.$$

A **binormális** egyenes egy irányvektora $\varphi'(1) \times \varphi''(1)$, azaz

$$\varphi'(1) \times \varphi''(1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 4 & 3 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} = -12\mathbf{i} + 18\mathbf{j} - 12\mathbf{k},$$

ezért az irányvektor a $\mathbf{b}_1 = (2, -3, 2)$ vektor is lehet. A binormális egyenesnek (például) a vektoregyenlete:

$$\mathbf{W}(t) = \varphi(1) + t\mathbf{b}_1 = 2t\mathbf{i} + (3 - 3t)\mathbf{j} + (1 + 2t)\mathbf{k} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A **főnormális** egyenes egy irányvektora $\big(\varphi'(1) \times \varphi''(1)\big) \times \varphi'(1)$. Esetünkben

$$\big(\varphi'(1) \times \varphi''(1)\big) \times \varphi'(1) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -12 & 18 & -12 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix} = 102\mathbf{i} - 102\mathbf{k},$$

ezért az irányvektor a $\mathbf{n}_1 = (1, 0, -1)$ vektor is lehet. A főnormális egyenesnek (például) a vektoregyenlete:

$$\mathbf{W}(t) = \varphi(1) + t\mathbf{n}_1 = t\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + (1 - t)\mathbf{k} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

■

F26. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima (tér)görbe, és tegyük fel, hogy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy tetszőleges, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése; $t_0 \in (\alpha, \beta)$ és $\varphi(t_0) = P_0 \in \Gamma$. A görbe P_0 pontjához tartozó kísérő triéder **síkjaira** vonatkozóan mutassa meg a következőket:

(a) A **simulósík** egy normálvektora

$$\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0).$$

(b) A **normálsík** egy normálvektora

$$\varphi'(t_0).$$

(c) A **rektifikálósík** egy normálvektora

$$\big(\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big) \times \varphi'(t_0).$$

Útmutatás. Az **F**24. feladatból rögtön következik. ■

F27. Határozza meg az alábbi görbék t_0 paraméterű pontjában a kísérő triéder síkjainak az egyenletét:

(a) $\varphi(t) := \big(t^3 - 1,\, 2t^2 + 1,\, 3t - 2\big)\ (t \in \mathbb{R}), \quad t_0 := 1;$

(b) $\varphi(t) := \big(1 + t^2,\, \frac{2}{1-t^2},\, t - t^3\big)\ (t \in \mathbb{R}), \quad t_0 := 1;$

(c) $\varphi(t) := \big(\sin^2 t,\, \cos(2t),\, -\frac{1}{\sin t}\big)\ (t \in (0, \pi)), \quad t_0 := \frac{\pi}{4}.$

Útmutatás. (a) Az **F**25. feladat eredményeit használjuk.

A **simulósík** egy normálvektora a $\varphi'(1) \times \varphi''(1) = (-12, 18, -12)$ vektor, egy pontja $P_0 = \varphi(1) = (0, 3, 1)$, ezért az egyenlete

$$-12(x - 0) + 18(y - 3) - 12(z - 1) = 0,$$

illetve rendezés után

$$2x - 3y + 2z + 7 = 0.$$

A **normálsík** egy normálvektora a $\varphi'(1) = (3, 4, 3)$ vektor, egy pontja $P_0 = \varphi(1) = (0, 3, 1)$, ezért az egyenlete

$$3(x - 0) + 4(y - 3) + 3(z - 1) = 0,$$

illetve

$$3x + 4y + 3z - 15 = 0.$$

A **rektifikáló sík** egy normálvektora a $\big(\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)\big) \times \varphi'(t_0)$ vektorral párhuzamos $\mathbf{n}_1 = (1, 0, -1)$ vektor, egy pontja $P_0 = \varphi(1) = (0, 3, 1)$, ezért az egyenlete

$$x - z + 1 = 0.$$

■

F28. Bizonyítsa be, hogy a

$$\varphi(t) := \big(e^t \cos t,\, e^t \sin t,\, e^t\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

térgörbe kísérő triéderének élei állandó szöget zárnak be a z-tengellyel.

Útmutatás. A $\varphi'(t) = \big(e^t(\cos t - \sin t),\, e^t(\sin t + \cos t),\, e^t\big)$ és a $\mathbf{k} = (0,0,1)$ vektor hajlásszöge minden $t \in \mathbb{R}$ pontban

$$\cos(\varphi'(t), \mathbf{k}) = \frac{e^t}{e^t\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3},$$

tehát állandó.

A $\varphi'(t) \times \varphi''(t) = \big(e^{2t}(\sin t - \cos t),\, -e^{2t}(\sin t + \cos t),\, 2e^{2t}\big)$ és a $\mathbf{k} = (0,0,1)$ vektor hajlásszöge minden $t \in \mathbb{R}$ pontban

$$\cos(\varphi'(t) \times \varphi''(t), \mathbf{k}) = \frac{2e^{2t}}{e^{2t}\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

ez is állandó.

A $\big(\varphi'(t) \times \varphi''(t)\big) \times \varphi'(t) = \big(-3e^{3t}(\sin t + \cos t),\, -3e^{3t}(\sin t - \cos t),\, 0\big)$ és a $\mathbf{k} = (0,0,1)$ vektorok esetében pedig

$$\big(\varphi'(t) \times \varphi''(t)\big) \times \varphi'(t) \;\perp\; \mathbf{k}$$

teljesül minden $t \in \mathbb{R}$ számra. $\blacksquare$

• Simulósík, simulókör, görbületi sugár, görbületi középpont

T1. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima görbe. Tegyük fel, hogy ennek $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése. Ha a görbe P_1, P_2 és P_3 pontja a

$$P_0 = \varphi(t_0) = \big(x_0, y_0, z_0\big) \qquad \big(t_0 \in (\alpha, \beta)\big)$$

ponthoz tart, és e pontban $\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0) \neq 0$ (azaz $\varphi'(t_0) \nparallel \varphi''(t_0)$), akkor a P_1, P_2 és P_3 pontokon átfektetett síkok *egy* olyan síkhoz tartanak, amelynek egy normálvektora a

$$\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)$$

vektor. Ezt (a korábbi definíciónkkal összhangban) a görbe P_0 pontbeli **simuló-síkjának** nevezzük.

A *simulósík egyenlete*:

$$< \mathbf{r} - \varphi(t_0),\, \varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0) > =$$

$$= \det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \varphi_1'(t_0) & \varphi_2'(t_0) & \varphi_3'(t_0) \\ \varphi_1''(t_0) & \varphi_2''(t_0) & \varphi_3''(t_0) \end{bmatrix} = 0.$$

(Itt $\varphi = \big(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\big)$).

D3. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe, $\Phi : [0, L] \to \Gamma,\ \Phi \in C^2$ a természetes paraméterezése, és tegyük fel, hogy $\Phi''(s) \neq 0$. A görbének a $\Phi(s)$ $(s \in [0, L])$ pontban a

(a) görbülete: $\kappa(s) := |\Phi''(s)|$,

(b) görbületi sugara: $\varrho(s) := \frac{1}{\kappa(s)}$,

(c) görbületi középpontja: $\Psi(s) := \Phi(s) + \frac{\Phi''(s)}{|\Phi''(s)|^2}$.

F29. Írja fel a *simulósík* egyenletét a megadott pontokban:

(a) $\varphi(t) := \big(t, 2t, t^2\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 0,\ t_0 := 1$;

(b) $\varphi(t) := \big(t^3 - 2, t + 1, \frac{t^3}{3}\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(c) $\varphi(t) := \big(4\cos(\pi t), 4\sin(\pi t), t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 0,\ t_0 := 1$;

(d) $\varphi(t) := \big(3\cos(2\pi t), t, \sin(2\pi t)\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 0,\ t_0 := 1$.

F30. Írja fel a

$$\varphi(t) := \big(t,\ t^2,\ t^3\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

térgörbe $P\big(2,\ -\frac{1}{3},\ -6\big)$ ponton átmenő simulósíkjának az egyenletét.

Útmutatás. A görbe nem tartalmazza a megadott P pontot. A t_0 paraméterű pontban a simulósík egyenlete:

$$3t_0^2\,x - 3t_0\,y + z - t_0^3 = 0.$$

Mivel ez a sík tartalmazza a P pontot, ezért a koordinátáinak behelyettesítése után

$$t_0^3 - 6t_0^2 - t_0 - 6 = (t_0 - 1)(t_0 - 6)(t_0 + 1) = 0$$

adódik. A keresett simulósíkok egyenletei rendre

$$\begin{aligned} 3x - 3y + z - 1 &= 0, \\ 108x - 18y + z - 216 &= 0, \\ 3x + 3y + z + 1 &= 0. \end{aligned}$$

■

F31. Igazolja, hogy a

$$\varphi(t) := \big(t^2 - 2t,\ 3t - 5,\ -t^2 - 2\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

síkgörbe, és írja fel a görbe síkjának az egyenletetét.

F32. Írja fel a *simulókör* egyenletét a megadott pontokban:

(a) $\varphi(t) := \big(t, t^2\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 0$;

(b) $\varphi(t) := \big(t^3 - 2t^2, 3t + 2, t^2 - 5\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(c) $\varphi(t) := \big(\cos(2t), \sin(2t)\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := \frac{\pi}{4}$;

(d) $\varphi(t) := \big(2\cos t, 3\sin t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := \frac{\pi}{4}$.

F33. Határozza meg az alábbi térgörbék pontjaihoz tartozó simulókörök középpontjainak mértani helyét:

(a) $\varphi(t) := \big(a\cos t,\ a\sin t,\ bt\big)$ $\ (t \in \mathbb{R},\quad a > 0, b > 0)$;

(b) $\varphi(t) := \big(e^t,\ e^{-t},\ \sqrt{2}t\big)$ $\ (t \in \mathbb{R})$;

(c) $\varphi(t) := \big(\operatorname{ch} t,\ \operatorname{sh} t,\ t\big)$ $\ (t \in \mathbb{R})$.

F34. Bizonyítsa be, hogy a $\varphi(t) := \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t)\big)$ $(t \in [\alpha, \beta])$ síkgörbe esetében a t_0 paraméterű ponthoz tartozó simulókör középpontjának ξ, η koordinátáira a következő képletek érvényesek:

$$\xi = \varphi_1(t_0) - \varphi_2'(t_0)\frac{[\varphi_1'(t_0)]^2 + [\varphi_2'(t_0)]^2}{\varphi_1'(t_0)\varphi_2''(t_0) - \varphi_1''(t_0)\varphi_2'(t_0)}$$

$$\eta = \varphi_2(t_0) + \varphi_1'(t_0)\frac{[\varphi_1'(t_0)]^2 + [\varphi_2'(t_0)]^2}{\varphi_1'(t_0)\varphi_2''(t_0) - \varphi_1''(t_0)\varphi_2'(t_0)},$$

ha $\varphi_1'(t_0)\varphi_2''(t_0) - \varphi_1''(t_0)\varphi_2'(t_0) \neq 0$.

F35. Mutassa meg, hogy az $y = f(x)$ egyenletű síkgörbe esetében a simulókörök középpontjának ξ, η koordinátáit a

$$\xi = x - \frac{y'(1 + (y')^2)}{y''},$$

$$\eta = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}$$

képletekkel lehet kiszámolni, ha $y'' \neq 0$.

F36. Határozza meg a következő síkgörbék azon pontjait, amelyekben a simulókör sugara szélsőértéket vesz fel:

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$;

(b) $y = e^x$;

(c) $y = \ln x$;

(d) $x = a(t - \sin t)$, $\quad y = a(1 - \cos t)$ $\quad (a > 0)$.

- **Torzió, Frenet-formulák**

D4. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe, $\Phi : [0, L] \to \Gamma$, $\Phi \in C^3$ a természetes paraméterezése, és tegyük fel, hogy $\Phi''(s) \neq 0$ (L a Γ ívhossza). A Γ görbe $\Phi(s)$ ($s \in [0, L]$) pontbeli **torzióját** így értelmezzük:

$$\tau(s) := < \mathbf{n}'(s), \mathbf{b}(s) > .$$

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy egy görbe *görbülete* arról tájékoztat minket, hogy a görbe *mennyire tér el az egyenestől*. A görbe egy másik fontos tulajdonsága az, hogy *mennyire tér el egy síkgörbétől*. Ezt jellemzi a görbe **torziója**. Ha a görbe síkgörbe, akkor az a sík, amelyben a görbe elhelyezkedik, a görbe simulósíkja; ha a görbe nem síkgörbe, akkor a simulósíkja pontról pontra változhat, és ezt a csavarodást a simulósík normálvektorának, azaz a görbe binormálisának a változásával lehet mérni. *A torzió lényegében a binormális egységvektor ívhossz szerinti szögsebessége.* Részletesebben: ha a térgörbe P_0 és Q pontjában vett simulósíkok hajlásszöge $\triangle\beta$, és $\triangle s$ a PQ ív hossza, akkor a változás sebességét nyilván a

$$\tau = \lim_{Q \to P_0} \frac{\triangle\beta}{\triangle s}$$

szám méri. Ezt „alkalmas" módon célszerű átalakítani; hasonlóan ahhoz, ahogy ezt a görbületnél megmutattuk. A részleteket itt nem ismertetjük, az érdeklők ezt megtalálják *Szőkefalvi–Nagy Gyula, ...* tankönyvének 26. oldalán. Itt csupán azt emeljük ki, hogy kiderül, ez a szám minden esetben nemnegatív. További érdekesség az, hogy τ-nak előjelet is célszerű tulajdonítani; és ennek érdekes geometriai jelentése is van. (A görbét – pl. egy csavar menetének az élét – *jobb*- vagy *balcsavarodásúnak* szokás nevezni aszerint, amint a torzió pozitív vagy negatív; sőt éppen ez a geometriai motivációja a torzió előjelezésének.) A számolások azt mutatnák, hogy

$$\kappa = \kappa(P_0) = \kappa(s_0) = -\langle\, \mathbf{b}'(s_0),\, \mathbf{n}(s_0)\,\rangle$$

(itt $\mathbf{b}$ a binormális-, $\mathbf{n}$ pedig a főnormális egységvektorok.)

Ezután a 2. és a 3. Frenet-formulákból adódik az, hogy az fenti „természetes" módon megközelített torzió valóban az általunk *definiált* torzióval egyezik meg. ■

T2. **Frenet-formulák:** Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima görbe, L az ívhossza, $\kappa(s)$ a görbülete és $\tau(s)$ a torziója ($s \in [0, L]$). Tegyük fel, hogy Γ-nak van háromszor folytonosan deriválható paraméterezése. Ekkor a kísérő triédert megadó $\mathbf{e}, \mathbf{n}, \mathbf{b} : [0, L] \to \mathbb{R}^3$ folytonosan deriválható függvények az alábbi lineáris differenciálegyenlet-rendszernek tesznek eleget:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}'(s) &= \kappa(s) \cdot \mathbf{n}(s),\\
\mathbf{n}'(s) &= -\kappa(s) \cdot \mathbf{e}(s) + \tau(s) \cdot \mathbf{b}(s),\\
\mathbf{b}'(s) &= -\tau(s) \cdot \mathbf{n}(s).
\end{aligned}$$

F37. Legyen $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima (tér)görbe, és tegyük fel, hogy $\varphi : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ ennek egy tetszőleges, kétszer folytonosan deriválható paraméterezése; $t_0 \in (\alpha, \beta)$ és $\varphi(t_0) = P_0 \in \Gamma$. Igazolja, hogy a görbe P_0 pontjában a torzióra a

$$\tau(P_0) = \frac{\varphi'(t_0)\,\varphi''(t_0)\,\varphi'''(t_0)}{|\varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0)|^2}$$

képlet érvényes. (Itt a számlálóban a három vektor *vegyesszorzata* áll.)

Megjegyzés. Ennek az állításnak a bizonyítását – ami megtalálható *Szőkefalvi–Nagy Gyula, ...* tankönyvének 27. oldalán – nem kérjük, a megjegyzését azonban elvárjuk. ■

F38. Számítsa ki az alábbi görbék torzióját a megadott pontokban:

(a) $\varphi(t) := \big(a\cos t, a\sin t, bt\big)$ $(t \in \mathbb{R}, a, b > 0)$, $\quad t_0 := 3$;

(b) $\varphi(t) := \big(t^3 - 2t^2, 3t + 2, t^2 - 5\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(c) $\varphi(t) := \big(e^t, e^{-t}, \sqrt{2}t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := 1$;

(d) $\varphi(t) := \big(2t - \sin(2t), \cos(2t), 4\sin t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad t_0 := \frac{\pi}{4}$;

(e) $\varphi(t) := \big(2abt, a^2\ln t, b^2t^2\big)$ $(t > 0,\ a, b > 0)$, $\quad t_0 := 1$;

(f) $\varphi(t) := \big(3t^2 - 2t, t^3, 1 - t\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad P_0 := (8, 8, -1)$;

(g) $\varphi(t) := \big(3t^2, 2t + 3, 3t^3\big)$ $(t \in \mathbb{R})$, $\quad P_0 := (3, 1, -3)$;

(h) $\varphi(t) := \big(t, \frac{t^3}{3a^2}, \frac{a^2}{2t}\big)$ $(t > 0,\ a > 0)$, $\quad P_0 := \big(1, \frac{1}{3a^2}, \frac{a^2}{2}\big)$.

F39. Bizonyítsa be, hogy egy térgörbe akkor és csak akkor síkgörbe, ha a torziója minden pontban nulla.

Útmutatás. Ha a görbe síkgörbe, akkor bármely két pontjához tartozó simulósíkok hajlásszögére $\triangle\beta = 0$, ezért a görbe minden pontjában a torzió nulla.

Ha viszont a görbe minden pontjában a torzió nulla, akkor az $\mathbf{b}'(s) = -\tau(s)\mathbf{n}(s)$ 3. Frenet-formula miatt $\mathbf{b}' \equiv 0$, azaz $\mathbf{b}(s) \equiv \mathbf{b}_0$, ahol $\mathbf{b}_0$ egy állandó vektor. Ha a görbét ívhossz szerint paraméterezzük, akkor a görbeív minden $\mathbf{r}$ pontjában

$$(\langle\,\mathbf{r}, \mathbf{b}_0\rangle)' = \langle\,\mathbf{r}', \mathbf{b}_0\rangle = \langle\,\mathbf{e}, \mathbf{b}_0\rangle,$$

azaz $\langle\,\mathbf{r}, \mathbf{b}_0\rangle = \langle\,\mathbf{r}_0, \mathbf{b}_0\rangle$, ahol $\mathbf{r}_0$ szintén egy állandó vektor. Mivel $\langle\,\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{b}_0\rangle = 0$, ezért a görbeív minden pontja benne van a $\mathbf{b}_0$ normálvektorú, $\mathbf{r}_0$ helyvektorú P_0 ponton átmenő síkban. ■

F40. Igazolja, hogy az alábbi görbék mindegyike síkgörbe, és írja fel a görbe síkjának az egyenletetét:

(a) $\varphi(t) := \big(t^2 - 2t,\ 3t - 5,\ -t^2 - 2\big)$ $\qquad (t \in \mathbb{R})$;

(b) $\varphi(t) := \big(5\cos t,\ 5\sin t,\ \cos t\big)$ $\qquad (t \in \mathbb{R})$;

(c) $\varphi(t) := \big(e^t\cos t,\ e^t\sin t,\ e^t(\cos t + \sin t)\big)$ $\qquad (t \in \mathbb{R})$;

(d) $\varphi(t) := \big(\frac{1+t}{1-t},\ \frac{1}{1-t^2},\ \frac{t}{1+t}\big)$ $\qquad (t \in (-1, 1))$.

Gyakorló feladatok 2.

(Felületek)

Programtervező matematikus

szakos hallgatóknak az

Analízis 7.

nevű tárgyhoz

2006. őszi félév

0. Jelölések

$\boxed{1.}$ Vektor-skalár (azaz $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ típusú) függvény **deriváltjaira**:
Ha $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^n$ (vagy $\varphi(t) = \big(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)\big) \in \mathbb{R}^n,\ t \in [\alpha, \beta]$), akkor

$$\dot{\varphi}(t_0) := \frac{d\,\varphi}{d\,t}\big(t_0\big) = \lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0} \in \mathbb{R}^n \qquad \big(t_0 \in (\alpha, \beta)\big).$$

A másod- és a harmadrendű deriváltakat így jelöljük:

$$\ddot{\varphi}(t_0), \quad \dddot{\varphi}(t_0).$$

$\boxed{2.}$ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ **típusú függvényekre:**
Ha $I_1, I_2 \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (nyít, zárt, stb.) intervallum, akkor

$\mathbb{I}^2 := I_1 \times I_2$ $\quad$ $\mathbb{R}^2$-beli téglalap (intervallum) $\quad$ és $\quad w = (u, v) \in \mathbb{I}^2$ $\quad$ a pontjai.

A felületeknél *végig* F egy $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényt fog jelölni:

$F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3; \qquad F = \big(F_1, F_2, F_3\big), \quad F_i(\in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$ a koordinátafüggvények.

$C^r\big(\mathbb{I}^2, \mathbb{R}^3\big)$ az $\mathbb{I}^2$ téglalapon értelmezett, $\mathbb{R}^3$-ba képező, r-szer ($r = 1, 2, \dots$) folytonosan deriválható függvények halmaza.

Ha $F \in C^1\big(\mathbb{I}^2, \mathbb{R}^3\big)$ és $w = (u, v) \in \mathbb{I}^2$, akkor F **derivált mátrixa** (vagy **Jacobi-mátrixa**) a w pontban:

$$F'(u, v) = F'(w) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(w) & \frac{\partial F_1}{\partial v}(w) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(w) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(w) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(w) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(w) \end{bmatrix}.$$

Ennek az első oszlopvektorát $\partial_u F$-fel, a másodikat pedig $\partial_v F$-fel fogjuk jelölni:

$$\partial_u F(w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u}(w) \\ \frac{\partial F_2}{\partial u}(w) \\ \frac{\partial F_3}{\partial u}(w) \end{bmatrix}, \qquad \partial_v F(w) := \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial v}(w) \\ \frac{\partial F_2}{\partial v}(w) \\ \frac{\partial F_3}{\partial v}(w) \end{bmatrix}.$$

$\boxed{3.}$ **Skaláris szorzatra:** Az $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektorok skaláris szorzatának jelölésére az alábbi szimbólumok valamelyikét használjuk:

$$\langle\, \mathbf{a}, \mathbf{b}\, \rangle, \qquad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

$\boxed{4.}$ **Mátrixokra:** Az $\mathbf{A} = \big[a_{ij}\big] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ négyzetes mátrix főátlójában álló elemek összegét a mátrix **nyomának** nevezzük, és a $\mathrm{tr}\,(\mathbf{A})$ szimbólummal (trace = nyom) jelöljük:

$$\mathrm{tr}\,(\mathbf{A}) := \sum_{k=1}^{n} a_{kk}.$$

1. Felület értelmezése és megadásának módjai

Mj1. Megadási módok:

1. Explicit- (vagy **Euler–Monge)-féle**: Ha $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ egy folytonosan differenciálható függvény, akkor ennek képe (grafikonja) a háromdimenziós térben egy $\mathcal{F}$ felület:

$$\mathcal{F} = \big\{\big(x, y, g(x, y)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathcal{D}_g\big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

Ilyenkor a $z = g(x, y)$ egyenletű felületről is szokás beszélni.

2. Implicit megadási mód: $G\big(x, y, z\big) = 0$.
Ekkor $G \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ egy adott „alkalmas” függvény. Ha például egy $\mathbb{R}^3$-beli $\big(x_0, y_0, z_0\big)$ pontban $G\big(x_0, y_0, z_0\big) = 0$ és z_0 egy környezetében a $G(x, y, z) = 0$ egyenletből z kifejezhető az x és y függvényeként (ez igaz, ha $\frac{\partial G}{\partial z}\big(x_0, y_0, z_0\big) \neq 0$; l. az *implicit függvény tételt*), akkor van olyan $g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyikre $G\big(x, y, g(x, y)\big) = 0$ $\big((x, y) \in \mathcal{D}_g\big)$ teljesül. Ennek a g függvénynek a képe, azaz az

$$\big\{\big(x, y, g(x, y)\big) \in \mathbb{R}^3 \mid G\big(x, y, g(x, y)\big) = 0\big\}$$

halmaz egy $\mathbb{R}^3$-beli felület. Általában adott „jó” $G \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvény esetén az

$$\big\{\big(x, y, z\big) \in \mathbb{R}^3 \mid G(x, y, z) = 0\big\} \subset \mathbb{R}^3$$

halmaz egy *felület*. Gondoljunk a térben az origó középpontú R-sugarú gömbfelületre:

$$\mathcal{F} = \big\{\big(x, y, z\big) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0\big\} \subset \mathbb{R}^3.$$

3. A Gauss-féle vagy (**két**)**paraméteres** megadási mód:
A görbék paraméteres megadásához hasonló. A felület azonban nem egyparaméteres ponthalmaz a térben, mint a görbe, hanem térbeli pontok *kétparaméteres* halmaza. Gondoljuk meg például azt, hogy egy gömbfelületet vagy egy hengerfelületet hogyan lehet két alkalmas paraméterrel jellemezni. (A pontos fogalmat illetően l. a következő definíciót.)

D1. Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ halmaz egy **egyszerű sima felületdarab** (röviden: ESF), ha létezik olyan $F \in C^1\big(\mathbb{I}^2, \mathbb{R}^3\big)$ leképezés, hogy
(i) $F : \mathbb{I}^2 \to \mathcal{F}$ bijekció és
(ii) $\operatorname{rang} F'(w) = 2$ minden $w \in \mathbb{I}^2$ pontban.
Ekkor a F függvényt az $\mathcal{F}$ egy **paraméterezésének** nevezzük.

Mj2. A felületek elméletének *általános* tárgyalása igen messzire vezetne, ezért itt csak azt a felületfogalmat adtuk meg, amely a differenciálgeometriában szükséges. Ezt némiképp általánosítva a továbbiakban **felületen** olyan térbeli ponthalmazt értünk, amelyek „összerakhatók” egyszerű sima felületdarabokból.

F1. Az $f(x) \geq 0$ $\big(x \in [a,b]\big)$ függvénnyel megadott görbét forgassuk meg az x-tengely körül. Adja meg az így kapott forgásfelületet implicit alakban és paraméteres alakban is.

F2. Az xz-koordinátasíkban elhelyezkedő $A(a,0,0)$ középpontú, b sugarú körívet forgassuk meg a z-tengely körül ($a > b > 0$). Határozza meg az így kapott **tóruszfelület** egy paraméteres alakját.

F3. **Másodrendű felületek.**
Szemléltesse az alábbi, implicit alakban megadott felületeket. Milyen a, b, c paraméterek esetén kapunk forgásfelületet?

(a) *ellipszoidok*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$

(b) *hiperboloidok*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{egyköpenyű hiperboloid,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \quad \text{kétköpenyű hiperboloid;}$$

(c) *kúpok*: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0;$

(d) *paraboloidok*:

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \quad \text{elliptikus paraboloid,}$$

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \quad \text{hiperbolikus paraboloid;}$$

(e) *hengerek*:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{elliptikus henger,}$$

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{hiperbolikus henger,}$$

$$y^2 = 2px \quad \text{parabolikus henger.}$$

Keressen paraméteres előállítást.

2. Paramétervonalak és felületi görbék

F4. Állapítsa meg, hogy az

(a) $F(u,v) := \big(u\cos v, u\sin v, v\big)$,

(b) $F(u,v) := \big(\frac{a}{2}(u+v), \frac{b}{2}(u-v), \frac{uv}{2}\big)$,

(c) $F(u,v) := \big(\cos u \operatorname{ch} v, \sin u \operatorname{sh} v, u\big)$

függvénnyel megadott felületek paramétervonalai milyen görbék.

3. Érintősík, felületi normális

T1. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése, $(u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ egy rögzített pont a paraméter-tartományban és $P_0 := F(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$ a megfelelő felületi pont. Ekkor

1^o Minden P_0-on átmenő reguláris felületi görbe érintői valamennyien egy síkban vannak. Ezt a síkot a felület P_0 **pontbeli érintősíkjának** nevezzük.

2^o A felület P_0 pontbeli érintősíkjának

(a) egy **bázisa** az $\mathbb{R}^3$-beli $\partial_u F(u_0, v_0)$ és $\partial_v F(u_0, v_0)$ vektorok;

(b) egy **normálvektora** az

$$\mathbf{m}(u_0, v_0) := \frac{\partial_u F(u_0, v_0) \times \partial_v F(u_0, v_0)}{|\partial_u F(u_0, v_0) \times \partial_v F(u_0, v_0)|}$$

felületi normális egységvektor;

(c) egyenlete (az $\mathbf{x} := (x, y, z)$ jelöléssel):

$$0 = \langle\, \mathbf{x} - F(u_0, v_0), \mathbf{m}(u_0, v_0)\,\rangle = (\mathbf{x} - F(u_0, v_0)) \cdot \partial_u F(u_0, v_0) \cdot \partial_v F(u_0, v_0) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial u}\big(u_0, v_0\big) & \frac{\partial F_2}{\partial u}\big(u_0, v_0\big) & \frac{\partial F_3}{\partial u}\big(u_0, v_0\big) \\ \frac{\partial F_1}{\partial v}\big(u_0, v_0\big) & \frac{\partial F_2}{\partial v}\big(u_0, v_0\big) & \frac{\partial F_3}{\partial v}\big(u_0, v_0\big) \end{bmatrix} = 0.$$

T2. A $z = g(x, y)$ $\big(g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ g \in C^1\big)$ *explicit alakban*, illetve a $G(x, y, z) = 0$ $\big(G \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ G \in C^1\big)$ *implicit alakban* megadott $\mathcal{F}$ egyszerű sima felületdarab $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$ pontjában az érintősík $\mathbf{m}(P_0)$ normálvektora, valamint az egyenlete:

$$\mathbf{m}(P_0) = \big(g'_x(x_0, y_0), g'_y(x_0, y_0), -1\big)\,, \quad \text{valamint}$$

$$z - z_0 = g'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + g'_y(x_0, y_0)(y - y_0);$$

illetve

$$\mathbf{m}(P_0) = \big(G'_x(P_0), G'_y(P_0), G'_z(P_0)\big)\,, \quad \text{valamint}$$

$$= G'_x(P_0)(x - x_0) + G'_y(P_0)(y - y_0) + G'_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

F5. Vannak-e az alábbi függvénnyel megadott felületnek olyan P_0 pontjai, amelyben nem teljesül a rang $F'(u_0, v_0) = 2$ feltétel (azaz a $\partial_u F(u_0, v_0)$ és $\partial_v F(u_0, v_0)$ vektorok párhuzamosak):

(a) $F(u, v) := \big(u^2 + v^2, uv, \cos u \cos v\big)$;

(b) $F(u, v) := \big(u^2 - v^2, uv, -1 + \cos u, v - e^v\big)$.

F6. Írja fel az alábbi függvények által megadott felületek kijelölt pontjában az *érintősík egyenletét* és a *felületi merőleges egyenes egyenletrendszerét*:

(a) $F(u, v) := \big(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2\big)$, $(u_0, v_0) := (1, 2)$;

(b) $F(u, v) := \big(\cos u - v \sin u, \sin u + v \cos u, v\big)$, $P_0 := (1, 1, 1)$;

(c) $F(u, v) := \big(u, (1 + u) \cos v, (1 + u) \sin v\big)$, $(u_0, v_0) := \big(1, \frac{\pi}{3}\big)$;

(d) $z = x^2 - y^2$, $P_0 := (2, 1, 3)$;

(e) $z = 4x^2y - 2xy^2$, $P_0 := (-1, 1, 6)$;

(f) $x^2 + y^2 + z^2 = 169$, $P_0 := (x_0, y_0, z_0)$;

(g) $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$, $P_0 := (3, 1, -1)$.

F7. Írja fel a *tórusz* $\big(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}\big)$ paraméterű pontjához tartozó érintősík egyenletét. Mutassa meg, hogy a tórusz minden pontjában a paramétervonalak merőlegesen metszik egymást.

F8. Határozza meg az $x^2 + y^2 - 2z = 18$ egyenletű felület $x + 2y + z + 1 = 0$ egyenletű síkkal párhuzamos érintősíkjának az egyenletét.

F9. Az $y = 8x^2$, $z = 0$ egyenletű parabolát forgassuk meg az x-tengely körül. A kapott forgásfelület $P(1, 4, 4\sqrt{3})$ pontjában írja fel az érintősík egyenletét és a felületi merőleges egyenes egyenletrendszerét.

F10. Bizonyítsa be, hogy ha $a > 0$ állandó, akkor a

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} = \sqrt{a}$$

egyenletű felület érintősíkjai a koordináta-tengelyekből állandó összegű darabokat vágnak le.

4. A Gauss-féle első alapmennyiségek
Felületi görbék ívhossza, hajlásszöge. Felületek felszíne

- **A Gauss-féle első alapmennyiségek értelmezése**

D2. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése. A $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ pontban az **első Gauss-féle alapmennyiségeket** így értelmezzük:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(w_0) &:= \mathbb{E}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big)\,\rangle\,, \\ \mathbb{F}(w_0) &:= \mathbb{F}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big)\,\rangle\,, \\ \mathbb{G}(w_0) &:= \mathbb{G}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big)\,\rangle\,. \end{aligned}$$

A

$$G(w) := \begin{bmatrix} \mathbb{E}(w) & \mathbb{F}(w) \\ \mathbb{F}(w) & \mathbb{G}(w) \end{bmatrix} \qquad \big(w \in \mathbb{I}^2\big)$$

szimmetrikus mátrixszal képzett

$$\begin{aligned} Q\big(\mathbf{x}\big) :&= Q\big(x_1, x_2\big) := \langle\, G(w)\mathbf{x},\, \mathbf{x}\,\rangle\; = \\ &= \mathbb{E}(w)\, x_1^2 + 2\,\mathbb{F}(w)\, x_1 x_2 + \mathbb{G}(w)\, x_2^2 \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\big) \end{aligned}$$

kvadratikus alakot a **felület első alapformájának** nevezzük.

- **Felületi görbék ívhossza**

T3. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése. Tegyük fel, hogy $\Gamma \subset \mathcal{F}$ egy sima *felületi görbe* és $\varphi = F \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}$ ennek egy parméterezése. Ekkor Γ **rektifikálható** és az **ívhossza** az alábbi képletek valamelyikével számolható ki:

$$\ell_\Gamma = \int_\alpha^\beta \big|\dot{\varphi}(t)\big|\, dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{\varphi}_1^2(t) + \dot{\varphi}_2^2(t) + \dot{\varphi}_3^2(t)}\, dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\langle\, G\big(\gamma(t)\big)\, \dot{\gamma}(t),\, \dot{\gamma}(t)\,\rangle}\; dt =$$

$$= \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathbb{E}(t)\, \dot{\gamma}_1^2(t) + 2\mathbb{F}(t)\, \dot{\gamma}_1(t)\, \dot{\gamma}_2(t) + \mathbb{G}(t)\, \dot{\gamma}_2^2(t)}\; dt =$$

$$\Big(= \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathbb{E}\, \dot{\gamma}_1^2 + 2\mathbb{F}\, \dot{\gamma}_1\, \dot{\gamma}_2 + \mathbb{G}\, \dot{\gamma}_2^2}\; dt.\Big)$$

• **Felületek felszíne**

D3. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : T \to \mathbb{R}^3$ $(T \subset \mathbb{I}^2)$ ennek egy folytonosan deriválható paraméterezése. Ekkor $\mathcal{F}$ felszínén az

$$\mathcal{S} := \iint_T |\partial_u F(u,v) \times \partial_v F(u,v)|\; du\, dv \; \left(=: \iint_T |\partial_u F \times \partial_v F|\; du\, dv \right)$$

számot értjük.

T4. Egyszerű sima felületdarab felszíne független a paraméterezéstől, megengedett paramétertranszformációval szemben invariáns.

T5. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab.

1^o Ha $F : T \to \mathbb{R}^3$ $(T \subset \mathbb{I}^2)$ az $\mathcal{F}$ felület egy folytonosan deriválható paraméterezése, akkor van felszíne és az a

$$\mathcal{S} = \iint_T \sqrt{\mathbb{E}(u,v)\, \mathbb{G}(u,v) - \mathbb{F}^2(u,v)}\, du\, dv \; \left(=: \iint_T \sqrt{\mathbb{E} \cdot \mathbb{G} - \mathbb{F}^2} du\, dv \right)$$

képlettel is meghatározható.

2^o Ha az $\mathcal{F}$ felület a $z = g(x,y)$ $\big((x,y) \in T\big)$ explicit alakban van megadva, akkor a felszíne:

$$\mathcal{S} = \iint\limits_T \sqrt{1 + g_x^2(x,y) + g_y^2(x,y)}\, dx\, dy \left(=: \iint\limits_T \sqrt{1 + g_x^2 + g_y^2}\, dx\, dy \right),$$

feltéve, hogy a $g : T \to \mathbb{R}$ függvény folytonosan deriválható.

3^o A $G(x,y,z) = 0$ implicit alakban megadott felület felszíne pedig az

$$\mathcal{S} = \iint\limits_T \frac{\sqrt{G_x^2 + G_y^2 + G_z^2}}{\big|G_z\big|}\, dx\, dy$$

képlettel számítható ki.

F11. Írja fel az alábbi felületek megadott pontjában a Gauss-féle első alapmennyiségeket és az első alapformát

(a) $F(u,v) := \big(u^2 - v^2, uv - v^3, u^4 - 2v\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = (-1, 1);$

(b) $F(u,v) := \big(\mathrm{ch}\, u \cos v, \mathrm{sh}\, u \sin v, \mathrm{th}\,(uv)\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = \big(0, \frac{\pi}{2}\big);$

(c) $F(u,v) := \big(e^u, e^v, u - v\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = (0, 1);$

(d) $F(u,v) := \big((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b \sin v\big)$
$w_0 = (u_0, v_0) \quad (a > b > 0);$

(e) $z = 4x^2y + 2xy^2, \quad P_0(-1, 2, 0);$

(f) $z = \sqrt{2xy}, \quad P_0(2, 2, 4).$

F12. Számítsa ki a megadott felületre illeszkedő felületi görbék ívhosszát:

(a) $F(u,v) := \big(v\cos u, v \sin u, v\big); \quad u = t,\ v = e^t;\ 0 \le t \le t_0;$

(b) $F(u,v) := \big(u^2 - v^2, 2uv, u^2 + v^2\big); \quad u = \sin t,\ v = \sin t;\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2};$

(c) $F(u,v) := \big(e^u \cos v, e^u \sin v, e^u\big); \quad u = -t,\ v = 2t;\ 0 \le t \le t_0.$

F13. Keressen képletet felületi görbék hajlásszögének a kiszámolására.

F14. Forgassuk meg az $y = f(x)$ $(x \in [a,b])$ egyenlettel megadott görbét $(f \in C^1)$ az x-tengely körül. Mutassa meg, hogy az így kapott forgásfelület felszíne

$$2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + \big[f'(x)\big]^2}\, dx.$$

F15. Számítsa ki az alábbi felületek felszínét:

(a) $F(u,v) := \big(u\cos v,\ u\sin v,\ v\big)$ $\quad (0 \le u \le 1,\ \ 0 \le v \le 2\pi)$ (csavarfelület);

(b) $F(u,v) := \big(\cos u - v\sin u,\ (\sin u + v\cos u),\ (u+v)\big)$ $(0 \le u \le \pi,\ \ 0 \le v \le 1)$;

(c) $z = \frac{x^2}{2y},\ \ 0 \le x \le 1,\ \ 1 \le y \le 2.$;

(d) $z = x^2 - y^2$ és a T taromámy az $x^2 + y^2 \le 1$ körlap.

F16. Számítsa ki a tóruszfelület felszínét.

F17. Tekintsük az xy-síkon a

$$\gamma(t) := \big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big) \in \mathbb{R}^2 \qquad \big(t \in [\alpha, \beta]\big)$$

paraméteres alakban megadott görbét. Tegyük fel, hogy $\gamma \in C^1([\alpha,\beta], R^2)$ és

$$\gamma_1(t) \ne 0 \quad \text{és} \quad \dot\gamma_1^2(t) + \dot\gamma_2^2(t) \ne 0 \qquad \big(t \in [\alpha,\beta]\big).$$

Forgassuk meg a görbét a x tengely körül. Mutassa meg, hogy az így kapott forgásfelület felszíne

$$\mathcal{S} = 2\pi \int_\alpha^\beta \big|\gamma_1(t)\big| \sqrt{\dot\gamma_1^2(t) + \dot\gamma_2^2(t)}\, dt.$$

F18. Forgassukmeg a következő görbéket az x tengely körül, és számítsuk ki az így kapott forgásfelület felszínét:

(a) $\gamma(t) := \big(t - \sin t, 1 - \cos t\big) \qquad \big(t \in [0, 2\pi]\big)$;

(b) $\gamma(t) := \big(2\cos t - \cos(2t), 2\sin t - \sin(2t)\big) \qquad \big(t \in [0,\pi]\big)$;

(c) $f(x) := \operatorname{ch} x \qquad \big(x \in [0,2]\big)$;

(d) $f(x) := \sqrt{x} \qquad \big(x \in [1,5]\big)$.

5. A Gauss-féle második alapmennyiségek

D4. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése. Jelölje $\mathbf{m}(w_0)$ a felület $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ paraméterű pontjában a felületi normális egységvektort (azaz az érintősík egy normálvektorát). Ekkor a felület w_0 paraméterű $P_0 := F(w_0) = F(u_0, v_0)$ pontjában a **Gauss-féle második alapmennyiségeket** így értelmezzük:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(w_0) &:= \mathbb{L}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_{uu}F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{uu}F\big(w_0\big)\cdot \mathbf{m}(w_0),\\
\mathbb{M}(w_0) &:= \mathbb{M}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_{uv}F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{uv}F\big(w_0\big)\cdot \mathbf{m}(w_0),\\
\mathbb{N}(w_0) &:= \mathbb{N}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_{vv}F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{vv}F\big(w_0\big)\cdot \mathbf{m}(w_0).
\end{aligned}$$

A

$$H(w) := \begin{bmatrix} \mathbb{L}(w) & \mathbb{M}(w) \\ \mathbb{M}(w) & \mathbb{N}(w) \end{bmatrix} \qquad \big(w \in \mathbb{I}^2\big)$$

szimmetrikus mátrixszal képzett

$$\begin{aligned}
Q\big(\mathbf{x}\big) :&= Q\big(x_1, x_2\big) := \langle\, H(w)\mathbf{x},\, \mathbf{x}\,\rangle = \\
&= \mathbb{L}(w)\, x_1^2 + 2\,\mathbb{M}(w)\, x_1 x_2 + \mathbb{N}(w)\, x_2^2 \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\big)
\end{aligned}$$

kvadratikus alakot a **felület második alapformájának** nevezzük.

F19. Írja fel az alábbi felületek megadott pontjában a Gauss-féle második alapmennyiségeket és a második alapformát

(a) $F(u,v) := \big(u^2 - v^2, uv - v^3, u^4 - 2v\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = (-1, 1);$

(b) $F(u,v) := \big(e^u, e^v, u - v\big), \quad w_0 = (u_0, v_0) = (0, 1);$

(c) $F(u,v) := \big((a + b\cos v)\cos u, (a + b\cos v)\sin u, b\sin v\big)$
$w_0 = (u_0, v_0) \quad (a > b > 0);$

(d) $z = 4x^2y + 2xy^2, \quad P_0(-1, 2, 0);$

(e) $z = x^3 - y^3, \quad P_0(2, -1, 9);$

(f) $z = \sqrt{2xy}, \quad P_0(2, 2, 4).$

6. Felületi görbék görbülete. Felületi pontok osztályozása

(Meusnier-tétel, normálgörbületek, főgörbületek, főirányok, Euler-tétel)

T6. Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy folytonosan deriválható paraméterezése. Tegyük fel, hogy $\Gamma \subset \mathcal{F}$ egy sima *felületi görbe* és $\varphi = F \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}$ ennek egy parméterezése. Tekintsük a felületnek egy olyan P_0 pontját, amelyen ez a görbe átmegy:

$$\mathcal{F} \ni P_0 = \varphi(t_0) = F\big(\gamma(t_0)\big) = F(u_0, v_0) = F(w_0).$$

Tegyük fel még azt is, hogy a felület P_0 pontbeli érintősíkja (ennek normálvektora az $\mathbf{m}(w_0)$ felületi normális egységvektor) nem egyezik meg a görbe P_0 pontbeli simulósíkjával, azaz $\mathbf{n}(P_0) \cdot \mathbf{m}(w_0) \neq 0$, ahol $\mathbf{n}(P_0)$ a görbe főnormális egységvektora. Ekkor a görbe P_0 pontjában a görbületre a következő képlet érvényes:

$$\begin{aligned}\kappa(P_0) &= \frac{1}{\mathbf{n}(P_0) \cdot \mathbf{m}(w_0)} \cdot \frac{\langle H(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle}{\langle G(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle} = \\ &= \frac{1}{\mathbf{n}(P_0) \cdot \mathbf{m}(w_0)} \cdot \frac{\mathbb{L}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{M}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{N}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}.\end{aligned}$$

Megjegyzés. Gondoljuk meg, hogy konkrét esetekben a tétel alkalmazásához elég sok számolásra lenne szükség. A képletnek nem gyakorlati, inkább *elméleti* jelentősége van. A belőle levonható alábbi egyszerű észrevételek igen érdekesek:

Egy felületi görbe görbületét a pontbeli érintőjének az iránya – a $\dot\gamma_1(t_0)/\dot\gamma_2(t_0)$ hányados – és a görbe $\mathbf{n}(P_0)$ főnormálisa már egyértelműen meghatározza. Ez azt jelenti, hogy a közös irányú érintővel és főnormálissal rendelkező görbék görbülete azonos. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy a görbe simulósíkját az érintője és a főnormálisa határoza meg, akkor a fenti tételből rögtön megkapjuk az alábbi **következményt**: ■

T7. Egy tetszőleges Γ felületi görbe P_0 pontbeli görbülete megegyezik a görbe P_0 pontjához tartozó simulósíkja által a felületből kimetszett felületi síkgörbe P_0 pontbeli görbületével. Ezért a felület P_0 pontján áthaladó görbék görbületének vizsgálatánál **elegendő a síkmetszetek görbületét** tekinteni.

D5. A felület valamely pontjabeli érintősíkra e pontban merőleges síkokat **normálsíkoknak**, a normálsík által kimetszett görbét **normálmetszetnek**, a normálmetszet görbületét pedig **normálgörbületnek** nevezzük. Minden más síkmetszetet **ferdemetszetnek** hívunk.

Megjegyzés. Vegyük észre, hogy adott érintőjű síkmetszetek közül a normálmetszet a legkisebb görbületű az adott pontban. Ebben az esetben ui. az $\mathbf{m}$ és az $\mathbf{n}$ vektorok párhuzamosak, tehát $\mathbf{n} \cdot \mathbf{m} = \pm 1$.

Most megállapodunk abban, hogy a normálgörbületnek előjelet is adunk; az előjel *pozitív* (illetve *negatív*), ha görbe főnormális egységvektora a felület egységnyi normálvektorával *megegyező* (illetve *ellentétes* irányú). Ezt az $\mathbf{n}(P) \cdot \mathbf{m}(w_0)$ skaláris szorzat mutatja, amely az első esetben $+1$, a másodikban pedig -1. A korábbi jelöléseinket használva vegyünk fel a felület P_0 pontbeli érintősíkjában egy e egyenest (ez jelöli ki az adott érintő irányát). Jelöljük $\kappa_e(P_0)$-lal a megfelelő **előjelezett normálgörbületet**. Ekkor a **T6.** tétel képletéből azonnal adódik, hogy

$$\kappa_e(P_0) = \frac{\langle H(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle}{\langle G(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle} = \frac{\mathbb{L}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{M}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{N}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}.$$

■

T8. Meusnier – olv. Mönié – **tétele**: Tekintsük a reguláris $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$ felület P_0 pontjára és az ehhez tartozó érintősík egy e egyenesére illeszkedő tetszőleges (de az érintősíktől különböző) σ síkot. Legyen $\kappa(P_0)$ a σ sík által kimetszett felületi görbe görbülete és $\kappa_e(P_0)$ az e irányhoz tartozó normálmetszet előjeles görbülete. Ekkor

$$\kappa(P_0) = \frac{\kappa_e(P_0)}{\cos\alpha},$$

ahol α ($\alpha \in (0,\pi) \setminus \{\frac{\pi}{2}\}$) a felület P_0 pontjában felületi normális egységvektora és a felületi görbe fönormális egységvektora által bezárt szög.

Megjegyzés. A tétel tehát azt állítja, hogy adott felületen **elegendő a normálmetszetek görbületét ismerni**, mert egy adott érintőirányú felületi görbék esetében a ferdemetszetek görbülete kifejezhető a normálmetszet görbületével. ■

Megjegyzés. Az eddigieket összefoglalva *egyelőre* (!!!) itt tartunk: Ha egy sima felület adott P_0 pontján átmenő *tetszőleges* görbéket vizsgálunk – pl. a görbület szempontjából –, akkor elegendő a P_0-on átmenő és az érintősíkra merőleges *síkmetszeteket* (azaz a normálmetszeteket) tekintenünk.

A további fontos és alapvető eredmény „dallama" az, hogy az érintősíkban van olyan, két egymásra merőleges irány – ezeket fogjuk majd **főirányoknak** nevezni –, amelyekben vett normálgörbületekkel (azaz a normálmetszetek görbületeivel) már *tetszőleges* irányú normálmetszetek görbülete kifejezhető. Ezt fejezi ki **Euler tétetele**.

A kiindulópontunk az előjelezett normálgörbületekre vonatkozó

$$\kappa_e(P_0) = \frac{\langle H(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle}{\langle G(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle} = \frac{\mathbb{L}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{M}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{N}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}.$$

korábbi képletünk, amelyet *két kvadratikus alak hányadosának* is tekinthetünk. Azt fogjuk megvizsgálni közelebbről, hogy miképpen változik a normálgörbület az érintőiránnyal. Ez a kifejezés az érintőirányokat meghatározó $\dot\varphi_1$ és $\dot\varphi_2$ racionális törtfüggvénye. Azt tudjuk, hogy a nevező pozitív defint kvadratikus alak. A fentit tehát a $\dot\varphi_1\dot\varphi_2 = 0$ pont kivételével a $\dot\varphi_1$ és $\dot\varphi_2$ változó *folytonos* függvényének tekinthetjük. Ha még azt is figyelembe vesszük, hogy ez a kifejezés $\dot\varphi_1$-nak és $\dot\varphi_2$-nak homogén függvénye (azaz az értéke nem változik akkor, ha $\dot{\varphi}_1$ és $\dot{\varphi}_2$ helyébe a $\lambda\dot{\varphi}_1$ és $\lambda\dot{\varphi}_2$ számokat írjuk), akkor azt kapjuk $\kappa_e(P_0)$ tetszőleges sugarú körvonalon felveszi minden értékét. Mivel a körvonalon folytonos is, ezért létezik mind maximuma, mind minimuma. A továbbiak *első* lépéseként ezeket az értékeket fogjuk megkeresni. Jóval általánosabb keretek között fogjuk tekinteni a következő – önmagában is érdekes – **szélsőérték-feladatot.** ■

T9. Legyen

$$f(x) := \frac{\langle\, \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \,\rangle}{\langle\, \mathbf{Bx}, \mathbf{x} \,\rangle} \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\big),$$

ahol $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ szimmetrikus mátrixok és $\mathbf{B}$ pozitív definit. Tekintsük az $\mathbf{AB}^{-1}$ szimmetrikus (!!!) mátrixot, és jelölje

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ ennek a sajátértékeit,

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ pedig a megfelelő sajátvektorokat.

Ekkor

(a) az f függvénynek létezik abszolút maximuma és minimuma;

(b) $\min f = \lambda_1 = f\big(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_1\big), \qquad \max f = \lambda_n = f\big(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_n\big).$

Megjegyzés. Alkalmazzuk ezt az állítást az előjelezett normálgörbületre, azaz tekintsük az

$$f(\mathbf{x}) := \kappa_e\big(P_0\big) := \frac{\langle\, H(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle}{\langle\, G(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle} = \frac{\mathbb{L}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{M}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{N}(w_0)x_2^2}{\mathbb{E}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{F}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{G}(w_0)x_2^2}$$

$$\big(\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$$

függvényt, ahol az (x_1, x_2) (paramétertartománybeli) pont az érintősíkon az

$$\mathbf{e} = x_1\partial_u F(w_0) + x_2\partial_v F(w_0)$$

érintőirányt határozza meg. Az alábbi állítás a fentinek szinte nyilvávaló következménye. ■

T10. **Főgörbületek:** Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése és $P_0 = F(w_0)$ a felület egy pontja.

1^o Ekkor az

$$f(\mathbf{x}) := \kappa_e\big(P_0\big) := \frac{\langle\, H(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle}{\langle\, G(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x} \,\rangle} = \frac{\mathbb{L}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{M}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{N}(w_0)x_2^2}{\mathbb{E}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{F}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{G}(w_0)x_2^2}$$

$$\big(\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$$

függvénynek van abszolút minimuma (κ_1) és maximuma (κ_2). Ezeket a számokat **fő(normál)görbületeknek** nevezzük.

2^o A κ_1 és κ_2 **főgörbületek** a $H(w_0)G^{-1}(w_0)$ mátrix sajátértékei, ezért összegükre és szorzatukra a következők teljesülnek:

$$\kappa_1 + \kappa_2 = \operatorname{tr}\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big) =: \mathcal{H}$$

(ez az ún. *összeggörbület*)

$$\kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big) =: \mathcal{K}$$

(ez az ún. *szorzat-* vagy *Gauss-féle görbület*).

A főgörbületeket tehát a

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big)\lambda + \det\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big) = 0 \tag{1}$$

sajátérték-egyenlet megoldásával határozhatjuk meg. Ennek csak valós gyökei vannak.

T11. **Főirányok.** Az előző tételben értelmezett f függvény szélsőérték-helyei (ezek tehát a paramétertartományban vannak) az érintősíkban (ξ, η) koordinátájú irányokat határoznak meg a

$$\xi\, \partial_u F(w_0) + \eta\, \partial_v F(w_0)$$

képlet alapján, ezeket **főirányoknak** (vagy **főgörbületi irányoknak**) nevezzük. Ha a (1) egyenlet gyökei különbözők, akkor két főirány van, és ezek merőlegesek egymásra. Ha $\kappa_1 = \kappa_2$, akkor minden irány főirány, tehát tetszőlegesen kijelölhető két egymásra merőleges főirány. A főirányokat adó (ξ, η) értékek a

$$\det \begin{bmatrix} \eta^2 & \xi\eta & \xi^2 \\ \mathbb{E}(w_0) & \mathbb{F}(w_0) & \mathbb{G}(w_0) \\ \mathbb{L}(w_0) & \mathbb{M}(w_0) & \mathbb{N}(w_0) \end{bmatrix} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökei.

T12. **Euler tétele:** Tetszőleges felületi pontban bármely normálmetszet κ görbülete kifejezhető a főnormális-görbületekkel; az összefüggés:

$$\kappa = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta,$$

ahol ϑ a görbeérintő és a κ_1-nek megfelelő főgörbületi irány bezárta szög.

D6. Ha a felület egy pontjában a $\mathcal{K}$ szorzatgörbület pozitív, negatív, illetve zérus, akkor azt mondjuk, hogy ez a pont a felületnek **elliptikus**, **hiperbolikus**, illetve **parabolikus** pontja. Ha $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$, akkor a pont (amely nyilván elliptikus) **szférikus pont**; ha $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, akkor a pontot (amely nyilván parabolikus) **planáris pontnak** nevezzük.

F20. Számítsa ki az alábbi függvénnyel megadott felület kijelölt pontjában a megadott $\mathbf{e}$ érintővektorú normálmetszet előjeles görbületét:

(a) $F(u,v) := \big(u^2+v^2, u^2-v^2, uv\big), \quad (u_0,v_0)=(1,1), \quad \mathbf{e} := (2,6,z);$

(b) $F(u,v) := \big(u^2-2uv, u^2v^2-v^3, u^4-2v^2\big), \quad (u_0,v_0)=(1,-1),$
$\mathbf{e} := (2,-11,z);$

(c) $F(u,v) := \big(u, (1+u)\cos v, (1+u)\sin v\big), \quad (u_0,v_0)=(1,0),$
$\mathbf{e} := (3,3,z);$

(d) $F(u,v) := \big(u\cos v, u\sin v, u^2\big), \quad (u_0,v_0)=\big(\sqrt{2},\frac{\pi}{4}\big), \quad \mathbf{e} := (-2,4,z).$

F21. Határozza meg a következő felületek megadott pontjában a κ_1 és κ_2 főgörbületeket és főirányokat:

(a) $F\big(u,v\big) := \big(u^2+v^2, 2uv, u-v\big), \qquad w_0=\big(u_0,v_0\big) := (-1,-1);$

(b) $F\big(u,v\big) := \big(u\cos v, u\sin v, v\big), \qquad w_0=\big(u_0,v_0\big) := \big(1,\frac{\pi}{4}\big);$

(c) a gömbfelület egy tetszőleges pontja;

(d) $z=xy, \quad P_0 := (2,2,4);$

(e) $z=\sqrt{xy}, \quad P_0 := (1,1,1);$

(f) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z, \ \ P_0 := (0,0,0);$

(g) $4x^2+4y^2+z^2=9, \ \ P_0 := (1,-1,1);$

(h) $z^2=x^2y, \ \ P_0 := (2,1,2).$

F22. Mutassa meg, hogy a $z=\ln(cosx)-\ln(\cos y)$ egyenletű felület minden pontjában az összeggörbület nulla.

F23. Határozza meg az

$$F(u,v) := e^u\mathbf{i}+e^v\mathbf{j}+(u-v)\mathbf{k}$$

felület $(u_0,v_0) := (0,0)$ paraméterű pontjában az $\dot{u}/\dot{v}=2$ feltétellel megadott normálsíkjával $\vartheta=30^o$-os szöget bezáró ferdemetszet görbületét.

F24. Meusnier és Euler tételének felhasználásával határozza meg a $2a$ nagytengelyű és a $2b$ kistengelyű ellipszis tengelypontjaiban a görbületet.

F25. Mutassa meg, hogy

(a) egy gömb minden pontja szférikus pont;

(b) egy sík minden pontja planáris pont.

F26. Határozza meg az alábbi felületek megadott pontjának típusát:

(a) $F\big(u,v\big) := \big(u^2+v^2, 2uv, u-v\big), \qquad w_0 = \big(u_0, v_0\big) := (-1,-1);$

(b) $F\big(u,v\big) := \big(u, \sin u \cos v, \sin u \cos v\big), \qquad w_0 = \big(u_0, v_0\big) := \big(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\big);$

(c) $z = xy, \ \ P(2,2,4);$

(d) $z = 4x^2y - 2xy^2, \ \ P(1,0,0).$

F27. Forgassuk meg az l tengely körül egy sehol el nem tűnő görbületű L görbét. Bizonyítsa be, hogy ha az L görbe a forgástengely felől nézve konkáv, akkor a keletkező felület pontjai elliptikus pontok, ha konvex, akkor hiperbolikus pontok; annak a paralell körnek a pontjai, amelyet a görbe inflexiós pontja söpör végig, parabolikus pontok.

F28. Határozza meg az

$$F(u,v) := \begin{bmatrix} (a + b\cos u)\cos v \\ (a + b\cos u)\sin v \\ b\sin u \end{bmatrix} \qquad (a > b > 0)$$

tóruszfelület elliptikus, parabolikus és hiperbolikus pontjait.

Gyakorló feladatok 3.

(Vektoranalízis)

Programtervező matematikus

szakos hallgatóknak az

Analízis 7.

nevű tárgyhoz

2006. őszi félév

1. Jelölések, elnevezések

• **Skalármezők**

D1. Lerögzítjük a közönséges térben az O origót és a pontokat helyvektoraikkal azonosítjuk. Legyen D a közönséges tér pontjainak (helyvektorainak) egy részhalmaza. Az $U(\mathbf{r})$ $(\mathbf{r} \in D)$ függvényt **skalármezőnek** (vagy *skalár-vektor függvénynek*) nevezzük, ha minden $\mathbf{r} \in D$ vektorhoz pontosan egy $U(\mathbf{r})$ valós számot rendel hozzá. (Ilyen függvények írják le például rögzített időpontban a hőmérséklet, a nyomás vagy a „potenciál” eloszlását a tér egy részében.)

Megjegyzés. Ha a térben az O origó mellett lerögzítjük az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázist, és az ezen alapuló Descartes-féle derékszögű koordinátarendszert, akkor minden helyvektor egyértelműen előállítható az $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ alakban, és a helyvektorok halmaza és a rendezett számhármasok között bijekció létesíthető. Ilyenkor az $U(\mathbf{r})$ $(\mathbf{r} \in D)$ skalármező azal a háromváltozós $f \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ függvénnyel reprezentálható, amelyet az

$$f(x, y, z) := U(\mathbf{r}) \qquad (\mathbf{r} \in D)$$

összefüggés definiál, ha $\mathbf{r} := x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Azt is mondhatjuk, hogy **rögzített koordinátarendszerben** egy skalármező megadása ekvivalens egy háromváltozós függvény megadásával. A skalármező és a háromváltozós függvény fogalma között azonban *lényeges elvi különbség* van. Ha ugyanis egy helytől függő fizikai mennyiséget skalármezővel adunk meg, akkor e függvény kizárólag az adott mennyiség térbeli eloszlását (és az origó megválasztását), vagyis a *fizikai lényeget* tükrözi. (Az origó megválasztása ugyan önkényes, de ez az „önkény” matematikailag könnyen felismerhetően és egyszerűen tükröződik: az origó megváltoztatása egy állandó vektornak a független vektorhoz való hozzáadásával történik.) Ezzel szemben, ha a fizikai mennyiséget koordinátarendszer bevezetése után, háromváltozós függvénnyel adjuk meg, akkor e függvény nemcsak a fizikai lényeget, hanem a koordinátarendszer esetlegességét is tükrözi. Ugyanazon skalármező különböző koordinátarendszerben különböző háromváltozós függvénnyel ekvivalens. A továbbiakban az egyszerűség végett a skalármezőket azonosítani fogjuk az őket leíró háromváltozós függvénnyel (amit a rögzített, „szokásos” Descartes-féle koordinátarendszerben tekintünk), és jelölésükre is ugyanazt a szimbólumot fogjuk használni: $U(\mathbf{r}) \equiv U(x, y, z)$. ■

Skalármező szemléltetése. Skalármezőket *szintfelületekkel* lehet szemléltetni a háromdimenziós térben, azaz

$$\text{rögzített } \ c \in \mathbb{R} \ \text{ esetén ábrázoljuk az } \ \{\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \mid U(\mathbf{r}) = c\} \subset \mathbb{R}^3 \quad \text{halmazt.}$$

■

D2. Tekintsünk egy

$$U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \quad U(\mathbf{r}) = U(x, y, z), \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

skalármezőt. Ha $\mathbf{r}_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_U$ és $U \in D\{\mathbf{r_0}\}$, akkor

$$U'(\mathbf{r}_0) = \big(\partial_1 U(\mathbf{r}_0), \partial_2 U(\mathbf{r}_0), \partial_3 U(\mathbf{r}_0)\big) =: \operatorname{grad} U(\mathbf{r}_0)$$

az U **skalármező gradiensvektora** az $\mathbf{r}_0$ pontban.

- **Vektormezők**

D3. Lerögzítjük a közönséges térben az O origót és a pontokat helyvektoraikkal azonosítjuk. Legyen D a közönséges tér pontjainak (helyvektorainak) egy részhalmaza. A $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ ($\mathbf{r} \in D$) függvényt **vektormezőnek** (vagy *vektor-vektor függvénynek*) nevezzük, ha minden $\mathbf{r} \in D$ vektorhoz pontosan egy $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ vektort rendel hozzá. (Ilyen függvények írják le például rögzített időpontban a folyadékok, gázok áramlás-viszonyait, az elektromos, mágneses, gravitációs erőtereket.)

Megjegyzés. A skalármezőkhöz hasonlóan **rögzített koordinátarendszerben** egy vektormezőt három darab háromváltozós függvénnyel adhatunk meg. A továbbiakban nekünk ez a koordinátarendszer a „szokásos” Descartes-féle koordinátarendszer lesz, és a vektormezőt, valamint az őt leíró háromváltozós függvényeket ugyanazzal a szimbólummal fogjuk jelölni:

$$\mathbf{V} = \big(V_1, V_2, V_3\big) \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \mathbf{V}(\mathbf{r}) = \big(V_1(\mathbf{r}), V_2(\mathbf{r}), V_3(\mathbf{r})\big) \quad \mathbf{r} = (x, y, z).$$

Azt is mondjuk, hogy vektormezőn $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ típusú függvényt értünk. ∎

Vektormező szemléltetése. A vektormezők szemléltetésére azok a görbék a legalkalmasabbak, amelyek érintői a tér minden pontjában párhuzamosak a görbeponthoz rendelt vektorral. Ezeket a görbéket *vektorvonalaknak* nevezzük. A vektorvonalak csupán a vektormező irányáról adnak szemléletes képet. A vektormezőnek nemcsak az irányáról, hanem a nagyságáról is szemléletes képet adnak az ún. **erővonalak** (vagy *áramvonalak*). Ezekhez a következőképpen juthatunk el: a vektorvonalak közül csak néhányat „rajzolunk meg” olyan módon, hogy a megmaradó vektorvonalak (erővonalak, áramvonalak) sűrűsége arányos legyen a vektormező nagyságával. Ezen azt értjük, hogy ha az $\mathbf{r}_0$ ponthoz rendelt vektor $\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)$, akkor erre merőleges egységnyi területű felületdarabon $|\mathbf{V}(\mathbf{r}_0)|$ számú erővonal halad át. ∎

D4. Legyen $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy vektormező. Ha $\mathbf{r}_0 \in \operatorname{int} \mathcal{D}_{\mathbf{V}}$ és $\mathbf{V} \in D\{\mathbf{r_0}\}$, akkor az $\mathbf{r}_0$ pontbeli **deriváltmátrix** (vagy Jacobi-mátrix):

$$\mathbf{V}'(\mathbf{r}_0) = \begin{bmatrix} \partial_1 V_1(\mathbf{r}_0) & \partial_2 V_1(\mathbf{r}_0) & \partial_3 V_1(\mathbf{r}_0) \\ \partial_1 V_2(\mathbf{r}_0) & \partial_2 V_2(\mathbf{r}_0) & \partial_3 V_2(\mathbf{r}_0) \\ \partial_1 V_3(\mathbf{r}_0) & \partial_2 V_3(\mathbf{r}_0) & \partial_3 V_3(\mathbf{r}_0) \end{bmatrix}.$$

Megjegyzés. A derváltmátrix elemei függenek a vektormezőt megadó függvény leírásához használt koordinátarendszer megválasztásától. Kiderült, hogy a deriváltmátrix elemeiből képzett bizonyos kifejezések *függetlenek a koordinátarendszer* megválasztásától, és *csak* a vektormezőtől függenek, ezért ezek a vektormezőt közvetlenül jellemző mennyiségek. Két ilyen *invariáns* jellemző van: az egyik a **divergencia** (ez egy szám, ezért ezt *skalárinvariánsnak* szokás nevezni), a másik egy vektor, ezt **rotációnak** szokás nevezni; ez a deriváltmátrix *vektorinvariánsa*. ∎

D5. A $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény (vektormező) $\mathbf{V}'$ deriváltmátrixának főátlójában álló elemeinek összegét a $\mathbf{V}$ vektor-vektor függvény (vektormező) **divergenciájának** nevezzük és a $\operatorname{div} \mathbf{V}$ szimbólummal jelöljük:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} := \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3 = \frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z}.$$

Megjegyzés. A divergencia fizikai tartalma: *az erőtér forrása.* A $\mathbf{V}$ vektormező az adott pontban *forrásmentes*, ha ott a $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$, ha $\operatorname{div} \mathbf{V} > 0$, akkor *forrása van*, és *nyelője van*, ha $\operatorname{div} \mathbf{V} < 0$. ■

D6. A $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény (vektormező) **rotációjának** a

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} := \big(\partial_2 V_3 - \partial_3 V_2, \partial_3 V_1 - \partial_1 V_3, \partial_1 V_2 - \partial_2 V_1\big)$$

függvényt nevezzük.

Megjegyzés. Kiderült, hogy a rotációvektorral a vektortér *örvényeit* vagy másképp fogalmazva az erővonalrendszerének a *csavarodását* lehet jellemezni. Sőt némi ügyeskedéssel nemcsak a csavarodás mértékét, hanem a csavarodás tengelyének az irányát is meg lehet adni. ■

• A „nabla szimbolika"

Megjegyzés. Skalármezők gradiensének, vektormezők divergenciájának és rotációjának felírását, az ezekkel a mennyiségekkel végzett számításokat megkönnyíti az ún. „nabla-szimbolika" használata. ■

D7. Azt a „(vektor)differenciál-operátort", amelyet az $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ bázisban a

$$\nabla := \big(\partial_1, \partial_2, \partial_3\big) = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial y}$$

szimbólum jelöl, **nabla-operátornak** (vagy **Hamilton-féle differenciál-operátornak** nevezzük (ezt „virtuális vektornak" is tekinthetjük).

Ezzel a jelöléssel az $U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármező esetén

$$\operatorname{grad} U = \nabla\, U = \big(\partial_1 U, \partial_2 U, \partial_3 U\big);$$

a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ vektormező esetén:

$$\operatorname{div} \mathbf{V} = \langle\, \nabla, \mathbf{V}\,\rangle = \nabla \cdot \mathbf{V} = \partial_1 V_1 + \partial_2 V_2 + \partial_3 V_3,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix}.$$

D8. A nabla vektor önmagával vett skaláris szorzatát **Laplace-operátornak** nevezik, és a $\triangle$ szimbólummal jelölik:

$$\triangle := \langle \nabla, \nabla \rangle = \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right).$$

Ha egy skalármezőt a Descates-féle derékszögű koordinátarendszerben az $U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ háromváltozós függvény reprezentál, akkor

$$\triangle U = \operatorname{div} \operatorname{grad} U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Megjegyzés. A nabla vektor többszöri alkalmazása lehetséges, de nem történhet „vaktában". Például a $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{V}) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V}$ értelmezhető, de a $\nabla \times (\nabla \cdot \mathbf{V}) = \operatorname{rot} \operatorname{div} \mathbf{V}$ nem, mert $\operatorname{div} \mathbf{V}$ skalár és ennek nem értelmezhető a rotációja. ■

• Reguláris tartományok

D9. Az $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ halmaznak $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$ egy **határpontja**, ha $\mathbf{a}$ minden környezetében van Ω-hoz tartozó és Ω-hoz nem tartozó pont is, azaz

$$\forall\, r > 0 \quad \text{esetén } k_r(\mathbf{a}) \cap \Omega \neq \emptyset \quad \text{és} \quad k_r(\mathbf{a}) \cap \big(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega\big) \neq \emptyset.$$

Az Ω halmaz határpontjainak a halmazát a $\partial\Omega$ szimbólummal fogjuk jelölni.

D10. A reguláris $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ felületet **egyszerű zárt felületnek** nevezzük, ha a teret két részre V_1-re és V_2-re bontja úgy, hogy

(a) $V_1 \cup \mathcal{F} \cup V_2 = \mathbb{R}^3$,

(b) $V_1 \cap \mathcal{F} = \emptyset$, $V_2 \cap \mathcal{F} = \emptyset$ és $V_1 \cap V_2 = \emptyset$;

(c) $V_1 \cup V_2$ nem összefüggő halmaz;

(d) V_1 és V_2 is összefüggő halmaz;

(e) közülük az egyik, pl. V_1 korlátos halmaz.

Megjegyzés. A továbbiakban olyan korlátos $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ tartományokat fogunk tekinteni, amelyeknek a $\partial\Omega$ határa egyszerű zárt felület. Megengedjük azt is, hogy a határhalmaz „élekben cstalakozó" reguláris felületdarabokból álljon. Az ilyen tartományokat röviden „jó" tartományoknak fogjuk majd nevezni. ■

• Feladatok

F1. Állapítsa meg, hogy mik lesznek az alábbi skalármezők szintfelületei:

(a) $U(\mathbf{r}) := z - x^2 - y^2$, $x, y, z \in \mathbb{R}$;

(b) $U(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^2$, $\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3$.

F2. Számítsa ki az alábbi vektomezők gradiensét a megadott pontokban:

(a) $U(\mathbf{r}) := z - x^2 - y^2$, $P_0(-1, 2, -3)$;

(b) $U(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^2$, $\mathbf{r}_0(1, 2, 3)$.

F3. Szemléltesse az alábbi vektor-vektor függvényeket (vektormezőket):

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := \mathbf{r}\ \big(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\big)$;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}\ \big(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$;

(c) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := -\mathbf{r}\ \big(\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3\big)$.

F4. Számítsa ki az alábbi vektormezők divergenciáját és rotációját a megadott pontokban:

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}\ \ (\mathbf{r} \in \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{r}_0$ tetszőleges;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (3x - 4y^2)\mathbf{i} + (x - 4y + z^2)\mathbf{j} - (3y + 5z)\mathbf{k}\ \ \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$, $\mathbf{r}_0 = (1, 2, -3)$.

F5. (a) Határozza meg $\operatorname{div}\operatorname{grad} U$ értékét az $\mathbf{r}_0(-1, 0, 2)$ helyvektorú pontban, ha

$$U(x, y, z) := xe^y + x^2z^2 - y^3x \qquad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

(b) Határozza meg a $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{V}$ vektort a $P_0(1, 2, 3)$ pontban, ha

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} + xyz^2\mathbf{k} \quad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

F6. (a) Írja át az

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

kétdimenziós Laplace-féle differenciálegyenletet polárkoordinátákba.

(b) Írja fel térbeli polárkoordinátákban a (háromdimenziós) Laplace-operátort.

2. Skalármezők térfogati integrálja. Vektormezők vonal- és felületi integrálja

• Skalármező térfogati integrálja

Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ korlátos, „jó” tartomány, és tegyük fel, hogy az

$$U \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

skalármező folytonos az $\Omega \cup \partial\Omega$ halmazon. Az U **skalármező térfogati integráljának** nevezzük és

$$\iiint\limits_{\Omega} U(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$$

szimbólummal jelöljük az $U(x, y, z)$ függvény Ω-n vett hármas integrálját.

- **Vektormező vonalintegrálja**

D11. Legyen $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ folytonosan differenciálható vektormező. Tegyük fel, hogy a szakaszonként sima $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ görbének $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma$ egy paraméterezése. A $\mathbf{V}$ vektormező Γ görbén vett **vonalintegrálján** a

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} := \int\limits_{\alpha}^{\beta} \mathbf{V}\big(\gamma(t)\big) \cdot \dot{\gamma}(t)\, dt$$

számot értjük.

Megjegyzés. A vonalintegrál fizikai jelentése: az erőtér által végzett munka. ■

Ismételni: primitív függvény; a vonalintegrál úttól való függetlensége. ■

- **Vektormező felületi integrálja**

Motiváció:

D12. Legyen $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonos vektormező. Tegyük fel, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima felületdarab és $F : T \to \mathcal{F}$ ($T \subset \mathbb{I}^2$) ennek egy paraméterezése. A $\mathbf{V}$ vektormező $\mathcal{F}$ felületre vett **felületi integrálján** az

$$\iint\limits_{\mathcal{F}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma := \iint\limits_{T} \mathbf{V}\big(F(u, v)\big) \cdot \partial_u F(u, v) \cdot \partial_v F(u, v)\, du\, dv$$

számot értjük.

Fizikai tartalom: fluxus. Áramlásoknál: $\mathbf{V}(\mathbf{r})$ a sebesség, az integrál a folyadékmennyiség. Az erőtereknél a normális irányában áthaladó erővonalak száma. ■

- **Feladatok**

F7. Számítsa ki az

$$U(\mathbf{r}) := \mathbf{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

függvény térfogati integrálját arra az egységnyi élhosszúságú kockára, amelynek egyik csúcsa az origóban van, az ebből a csúcsból kiinduló élei pedig a koordinátatengelyek pozitív felére illeszkednek.

F8. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (xy - z)\mathbf{i} + (yz - x)\mathbf{j} + (zx - y)\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvény vonalintegrálját a

$$\gamma(t) := (t^2 + 1)\mathbf{i} + (1 - t)\mathbf{j} + (t^3 - t)\mathbf{k} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletű görbe $A(1, 1, 0)$ pontjától a görbe $B(5, -1, 6)$ pontjáig terjedő íve mentén.

F9. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (2xy + z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvény vonalintegrálját a $P_1(2, 1, 3)$ pontot a $P_2(-1, 3, -2)$ ponttal összekötő egyenesszakasz mentén P_1-től P_2 felé haladva.

F10. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (z^2 - y)\mathbf{i} + (z^3 + x)\mathbf{j} + (xy)\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvény vonalintegrálját az x, y síkkal párhuzamos síkban elhelyezkedő $C(2, 3, 4)$ középpontú 5 sugarú körvonal mentén.

F11. Mutassa meg, hogy a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvénynek (vektormezőnek) egy (csillagszerű) tartományban pontosan akkor van primitív függvénye (potenciálja), ha a vektormező ott rotációmentes.

F12. (a) Bizonyítsa be, hogy a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (2xy + z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvénynek van potenciálja. Határozza meg a potenciált.

(b) Számítsa ki a vektormező vonalintegrálját tetszőleges görbe mentén az $A(2, 1, 3)$ és $B(-1, 3, -2)$ pontok között.

F13. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \qquad \big((x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektor-vektor függvény felületi integrálját az

$$F(u,v) := [(3+\cos u)\cos v]\mathbf{i} + [(3+\cos u)\sin v]\mathbf{j} + (\sin u)\mathbf{k}$$

egyenletű tórusz x, y sík feletti darabja mentén „felfelé mutató” normális mellett.

3. Integrálátalakító tételek

T1. **Gauss–Osztrogradszkij-tétel**. Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ egy olyan korlátos, mérhető térfogatú tartomány, amelynek $\partial\Omega$ határa olyan egyszerű zárt felület, amely „élekben csatlakozó” reguláris felületdarabokból áll. Tegyük fel továbbá azt, hogy a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektor-vektor függvény (vektormező) folytonosan deriválható a $\Omega \cup \partial\Omega$ halmazon. A $\partial\Omega$ felület minden pontjában a felületi merőlegeseket a térrészből kifelé irányítjuk. Ekkor

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r},$$

vagyis a $\mathbf{V}$ függvénynek a $\partial\Omega$ felületen vett felületi integrálja egyenlő divergenciájának $\mathbf{V}$-re vonatkozó hármas integráljával.

T2. **Stokes tétele.** Legyen $\mathcal{F}_1$ reguláris felületdarab, Γ pedig egy egyszerű, reguláris, zárt felületi görbe $\mathcal{F}_1$-en. $\mathcal{F}_1$ normálvektorát irányítsuk úgy, hogy annak irányából nézve a Γ-n kijelölt haladási irány pozitív (az óramutató járásával ellenkező) legyen. $\mathcal{F}_1$-nek Γ által határolt darabját $\mathcal{F}$-fel jelöljük. Legyen továbbá a $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektormező folytonosan deriválható az $\mathcal{F} \cup \Gamma$ halmazon. Ekkor $\mathbf{V}$-nek Γ-ra vonatkozó vonalintegrálja egyenlő $\mathbf{V}$ rotációjának $\mathcal{F}$-re vett felületi integráljával:

$$\int\limits_{\Gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \iint\limits_{\mathcal{F}} \operatorname{rot} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma.$$

T3. **„Szimmetrikus Green-tétel”.** Legyen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ egy olyan korlátos, mérhető térfogatú tartomány, amelynek $\partial\Omega$ határa egyszerű zárt, reguláris felület kifelé irányított normálvektorral. Legyenek továbbá az $U_1, U_2 \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalármezők az $\Omega \cup \partial\Omega$ halmazon folytonosan deriválhatók. Ekkor

$$\iint\limits_{\partial\Omega} \big(U_1 \operatorname{grad} U_2 - U_2 \operatorname{grad} U_1\big)\, d\sigma = \iiint\limits_{\Omega} \big(U_1 \triangle U_2 - U_2 \triangle_1 U_1\big)\, d\mathbf{r}.$$

- **Feladatok**

F14. Legyen a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (-x^2 + y + z)\mathbf{i} + (x - y^2 + z)\mathbf{j} + (x + y - z^2)\mathbf{k}$$

vektormező a $0 \leq x \leq 2$, $0 \leq y \leq 2$, $0 \leq z \leq 2$ feltételekkel megadott kockán értelmezve. Igazolja a Gauss–Osztrogradszkij-tétel helyességét erre az alakzatra úgy, hogy egymástól függetlenül kiszámolja a tétel két oldalán álló integrálokat, belátja ezek egyenlőségét.

F15. Szemléltesse az alábbi feladatokon a Gauss–Osztrogradszkij-tételt úgy, hogy mind a felületi, mind a térfogati integrált kiszámolja:

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$;
a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, $y \geq 0$, $z \geq 0$;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (x - 2z)\mathbf{i} + (2x + y)\mathbf{j} + (x - y + z)\mathbf{k}$;
a térrész: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$.

F16. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektormező felületi integrálját az $x^2 + y^2 = 4$, $z = -2$, $z = 3$ egyenletekkel megadott körhenger felületére, kifelé mutató normálisok mellett.

F17. Tekintsük a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (-x^2 + y + z)\mathbf{i} + (x - y^2 + z)\mathbf{j} + (x + y - z^2)\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektormezőt és azt a felületet, amelyet az $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$ és $C(0, 0, 2)$ csúcspontú háromszöglap és az a két háromszöglap határol, amit az ABC sík az xz és az yz síkból kivág. (Az OAB háromszöglap tehát nem tartozik a felülethez.) Igazolja az alakzatra Stokes tételét.

F18. Szemléltesse az alábbi feladatokon a Stokes-tételt úgy, hogy mind a felületi, mind a vonalintegrált kiszámolja:

(a) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (x + z)\mathbf{i} + (3y - 2z)\mathbf{j} + (5x - 3y)\mathbf{k}$;
a felület: $x^2+y^2 = 1$, $z = 0$ alapkörű és $(0, 0, 5)$ csúcspontú kúppalást;

(b) $\mathbf{V}(\mathbf{r}) := xz^2\mathbf{i} + zy^2\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$; a felület a $z = x^2 + y^2$ forgásparaboloid azon része, amelyre $x^2 + y^2 \leq 4$.

F19. Számítsa ki a

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := x^2yz\mathbf{i} + xy^2z\mathbf{j} - 2xyz^2\mathbf{k} \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektormező felületi integrálját az $x^2+y^2 = 4$, $z = 0$, $z = 6$ zárt hengerfelületre, kifele mutató normális mellett.