Analízis 3. vizsgatematika

II. éves programtervező matematikus szak

2004–2005. tanév 1. félév

1. A differenciálszámítás középértéktételei (Rolle-, Cauchy-, Lagrange-tétel).

2. A középértéktételek alkalmazásai: a deriváltak egyenlősége, a monotonitásra vonatkozó elégséges, szükséges és elégséges feltételek, a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges, illetve elsőrendű elégséges feltétel.

3. A deriváltfüggvény Darboux-tulajdonságú.

4. A π szám bevezetése. Periodikus függvény fogalma. A sin és a cos függvény periodicitása.

5. L'Hospital-szabályok.

6. Többször differenciálható függvény fogalma. Hatványsor összegfüggvénye akárhányszor differenciálható. Az együtthatókra vonatkozó összefüggés. A Taylor-polinom és a Taylor-sor fogalma.

7. A Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal. Egy elégséges feltétel arra, hogy egy függvény Taylor-sora előállítsa a függvényt.

8. Konvexitás, konkávitás, inflexiós pont. Definíciók, szükséges és elégséges feltételek többször differenciálható függvény esetében.

9. A konvexitásból következik a folytonosság, valamint az is, hogy a függvény legfeljebb megszámlálható sok pont kivételével deriválható.

10. A Jensen-egyenlőtlenség.

11. A függvényvizsgálat során megválaszolandó kérdések, valamint a felhasználható eredmények felsorolása.

12. A Banach-féle fixponttétel.

13. A primitív függvény és a határozatlan integrál fogalma. Alaptulajdonságok. Linearitás, parciális integrálás, helyettesítési szabályok.

14. A határozott integrál fogalma. (Az $I = [a, b]$ intervallum felosztásai; a $s(f, \tau)$ és a $S(f, \tau)$ közelítő összegek értelmezése és tulajdonságai $f : I \to \mathbb{R}$ korlátos függvény esetén; az alsó- és a felső integrál, valamint a Riemann-integrálhatóság fogalmának értelmezése.) Az $f(x) := x^2$ $(x \in [0, 1])$ függvény határozott integráljának kiszámítása a definícióból.

15. Oszcillációs összeg. A Riemann-féle közelítő összegek. Az integrálhatóság jellemzése az oszcillációs összegek határértékével, az alsó- és a felső közelítő összegekkel, valamint a Riemann-féle közelítő összegekkel (ez utóbbi bizonyítás nélkül).

16. Műveletek integrálható függvényekkel (számmal való szorzás, összeg, szorzat, illetve hányados.)

17. A Riemann-integrál intervallum szerinti additivitása.

18. Integrálható függvények néhány osztálya: folytonos, monoton, szakaszonként folytonos, illetve szakaszonként monoton függvények integrálhatósága.

19. A határozott integrálokra vonatkozó egyenlőtlenségek. Az integrálszámítás középértéktételei. A Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség.

20. A Newton–Leibniz-tétel. Az integrálfüggvény fogalma és tulajdonságai. Határozott integrál kiszámítása parciális integrálással, illetve helyettesítéssel.

21. Lebesgue-szerint nullamértékű halmaz értelmezése, példák. A Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle kritériuma.

22. Improprius integrálok: definíciók és tételek (bizonyítások nélkül). Példák:

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx, \quad \int_{-1}^{1} \frac{1}{1-x^2}\,dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$$

23. Taylor-formula az integrál maradéktaggal. A binomiális sor.

24. A Wallis-formula, a Stirling-formula.

25. A metrikus tér fogalma. Példák:

(a) a diszkrét metrikus tér,

(b) az $\big(\mathbb{R}^n, \varrho_i\big)$ $(i = 1, 2, \infty)$ metrikus terek,

(c) a $\big(C[a, b], \varrho_i\big)$ $(i = 1, 2, \infty)$ metrikus terek,

(d) az $\big(\mathbb{R}^n, \varrho_p\big)$ $(1 \le p \le +\infty)$ metrikus terek (Young-, Hölder-, Minkowski-egyenlőtlenség),

(e) a $\big(l_p, \varrho_p\big)$ $(1 \le p \le +\infty)$ metrikus terek,

(f) a $\big(C[a, b], \varrho_p\big)$ $(1 \le p \le +\infty)$ metrikus terek (Young-, Hölder-, Minkowski-egyenlőtlenség).