Operációkutatás

Vaik Zsuzsanna < `http://www.cs.elte.hu/~zsuzska` >

3. gyakorlat, 2005. március 1.

1. Mutassuk meg hogy konvex függvény konvex halmazon vett lokális minimumai egyben globálisak is!

2. Bizonyítsuk be a számtani-mértani egyenlőtlenséget a Jensen tétel segítségével!

3. Mutassuk meg hogy egy poliéder mindig konvex!

4. Konvexek-e az alábbi halmazok?

   (a) $$U = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \begin{array}{l} x^2 + 3y^2 \leq 4 \\ x + y \geq 0 \\ -\ln(x) \leq 10\} \end{array}$$

   (b) $$U = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq z \\ x, y \geq 0\} \end{array}$$

   (c) $$U = \{u = (x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad \begin{array}{l} x^2 + y^2 \leq 9 \\ 3x + y \geq 0 \\ 2(x-1)^2 + y^2 \geq 1\} \end{array}$$

   (d) • $$U = \{u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{array}{l} (x+1)^{-2} + 3y^2 + e^{-2z^2} \geq 0 \\ x, y, z \geq 0\} \end{array}$$

5. Mutassuk meg hogy egy politóp mindig konvex!

6. • (Caratheodory tétele) Legyen $U \in \mathbb{R}^n$, konvex halmaz, $U \neq \emptyset$. Jelölje coU az U halmaz konvex burkát. Bizonyítsuk be, hogy $\forall u \in coU$ előállítható $n+1$-nél nem több U-beli pont konvex kombinációjaként.

7. Bizonyítsuk be, hogy konvex halmazok tetszőleges metszete is konvex. Igaz-e ugyanez konvex halmazok uniójára, direkt szorzatára illetve különbségére?

8. Mutassuk meg, hogy minden $u_i \geq 0$, $\lambda_i \geq 0$ $(i = 1, \ldots, m)$, $\sum_{i=1}^m = 1$ esetén

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i u_i\right)\left(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i}{u_i}\right) \geq 1$$