Gyakorló feladatok

(Vonalintegrálok, többszörös integrálok, differenciálegyenletek, függvénysorok)

Programtervező matematikus szakos hallgatóknak
az Analízis 5. című tárgyhoz

2005. őszi félév

I. Vonalintegrálok

Jelölések: (a) Ha $f := (g, h) \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ folytonos függvény és a $\varphi \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ sima út a G síkbeli görbe egy paraméterezése, akkor

$$\int_{\varphi} f =: \int_{g} \big(g(x,y)\,dx + h(x,y)\,dy\big).$$

(b) Az

$$\int_{(a,b)}^{(c,d)} f$$

szimbólum az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ függvény vonalintegrálját jelöli a síkbeli (a, b) pontot a (c, d) ponttal összekötő irányított szakaszon.

F1. Számítsa ki az $\int_{\varphi} f$ integrált, ha

(a) $f(x,y) := (x^2 - 2xy, y^2 - 2xy)$
$\big((x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \varphi(t) := (t, t^2),\ t \in [0,1]\big)$;

(b) $f(x,y) := (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$
$\big((x,y) \in \mathbb{R}^2;\ \varphi(t) := (t, 1 - |1 - t|),\ t \in [0,2]\big)$;

(c) $f(x,y) := \left(\dfrac{x+y}{x^2+y^2}, \dfrac{x-y}{x^2+y^2}\right)$
$\big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\};\ \varphi(t) := (r\cos t, r\sin t)\ (r > 0,\ t \in [0, 2\pi])\big)$;

(d) $f(x,y) := (\sin y, \sin x)$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$ és φ a $(0,\pi)$ pontot a $(\pi, 0)$ ponttal összekötő irányított szakasz;

(e) $f(x,y) := \big(-1, \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x}\big)$ $(x > 0,\ y \in \mathbb{R})$ és φ az $(1,1)$ pontot a $(2,4)$ ponttal összekötő $y = x^2$ egyenletű parabolaívnek és a $(2,4)$ pontot az $(1,1)$ ponttal összekötő irányított egyenes szakasznak az egyesítése;

(f) $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(2,3)} y\,dx + x\,dy$;

(g) $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$.

F2. Van-e primitív függvénye az alábbi függvényeknek? Ha igen, határozza is meg *közvetlenül*, valamint *integrálfüggvényként* is:

(a) $f(x,y) := (x - y, x + y)$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(b) $f(x,y) := (x^2+2xy-y^2, x^2-2xy-y^2)\ \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big)$;

(c) $f(x,y) = \left(\dfrac{y}{3x^2-2xy+3y^2}, \dfrac{-x}{3x^2-2xy+3y^2}\right)\ (x,y>0)$;

(d) $f(x,y,z) := \left(1-\dfrac{1}{y}+\dfrac{y}{z}, \dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{y^2}, \dfrac{-xy}{z^2}\right)\ (x,y,z>0)$.

F3. Számítsa ki az alábbi vonalintegrálokat:

(a) $\displaystyle\int_{(-1,1)}^{(2,3)} (y\,dx + x\,dy)$;

(b) $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(a,b)} f(x+y)\,(dx+dy)$, ahol $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f\in C$;

(c) $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)} \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2}$;

(d) $\displaystyle\int_{(1,0)}^{(6,8)} \frac{x\,dx + y\,dy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(e) $\displaystyle\int_{(a,b)}^{(c,d)} (g(x)\,dx + h(y)\,dy)$, ahol $g,h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g,h\in C$.

F4. Bizonyítsa be, hogya ha $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ folytonos függvény és φ szakaszonként sima zárt út, akkor $\int_{\varphi} f(x^2+y^2)(x\,dx+y\,dy)=0$.

F5. Mutassa meg, hogy

$$\lim_{r\to+\infty} \int_{x^2+y^2=r^2} \frac{y\,dx - x\,dy}{(x^2+xy+y^2)^2} = 0.$$

II. Többszörös integrálok

F6. A definíció alapján számolja ki az $\int_I f$ integrált, ha

$$I = [0,1] \times [0,1] \quad \text{és} \quad f(x,y) = xy \quad ((x,y) \in I).$$

(Mind a két tengelyen vegye az egyenletes felosztást.)

F7. Legyen $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ és } y \text{ racionális,} \\ 1, & \text{különben.} \end{cases}$$

Mutassa meg, hogy f nem integrálható a $[0,1] \times [0,1]$ halmazon.

F8. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \text{ vagy } y \text{ irracionális,} \\ \dfrac{1}{q}, & \text{ha } x \text{ és} y \text{ racionális és } x = \frac{p}{q} \\ & (p \text{ és } q \text{ relatív prímek}) \end{cases}$$

függvény integráható az $I := [0,1] \times [0,1]$ halmazon, $\int_I f = 0$, de racionális x esetén az $\int_0^1 f(x,y)\, dy$ integrál nem létezik; fennáll azonban az

$$\int_I f = \int_0^1 \Big(\int_0^1 f(x,y)\, dx \Big) dy = 0$$

egyenlőség.

F9. Legyen $f : [-1,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) := \begin{cases} x, & \text{ha } y \text{ racionális,} \\ 0, & \text{ha } y \text{ irracionális.} \end{cases}$$

Igazolja, hogy

$$\int_0^1 \Big(\int_{-1}^1 f(x,y)\, dx \Big)\, dy = 0,$$

de f nem integrálható $[-1,1] \times [0,1]$-en.

- **Az integrál kiszámítása többdimenziós *intervallumokon* (szukcesszív integrálással).**

F10. Számolja ki az alábbi kettős integrálokat:

(a) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[0,1]} x\sqrt{y}\,dx\,dy;$ (b) $\displaystyle\int\limits_{[0,1]\times[-1,0]} xe^{xy}\,dx\,dy;$

(c) $\displaystyle\int_0^3\int_0^1 \sqrt{x+y}\,dx\,dy;$ (d) $\displaystyle\int_1^4\int_1^2 \Big(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\Big)\,dy\,dx;$

(e) $\displaystyle\int\limits_D \frac{xy^2}{x^2+1}\,dx\,dy, \quad D := \{(x,y)\ |\ 0 \le x \le 1,\ -3 \le y \le 3\};$

(f) $\displaystyle\int\limits_D x\sin(x+y)\,dx\,dy, \quad D := [0,\pi/6]\times[0,\pi/3].$

F11. Legyen $f \in R[a,b]$, $g \in R[c,d]$. Mutassa meg, hogy a $h : [a,b]\times[c,d] \to \mathbb{R}$, $h(x,y) := f(x)g(y)$ függvény integrálható az $[a,b]\times[c,d]$ halmazon, és

$$\int\limits_{[a,b]\times[c,d]} h = \Big(\int_a^b f\Big)\Big(\int_c^d g\Big).$$

- **Az integrál kiszámítása *normáltartományokon.***

F12. Határozza meg a következő kettős integrálokat:

(a) $\displaystyle\int\limits_D xy^2\,dx\,dy$, ahol D az $y=\sqrt{x}$ és az $y=x^2$ egyenletű görbék által határolt síkrész;

(b) $\displaystyle\int\limits_D ye^x\,dx\,dy$, ahol D a $(0,2)$, az $(1,1)$ és a $(3,2)$ csúcspontú háromszöglap;

(c) $\displaystyle\int\limits_D \big(6x^2y^3-5y^4\big)\,dx\,dy$, ahol $D := \big\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ -x\le y\le x\big\};$

(d) $\displaystyle\int_0^1\int_y^{e^y} \sqrt{x}\,dx\,dy;$ (e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos\theta} e^{\sin\theta}\,dr\,d\theta;$

(f) $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x+2y)\,dy\,dx$; (g) $\int_0^1 \int_0^{v} \sqrt{1-v^2}\,du\,dv$;

(h) $\int_D (x^2+y^2)\,dx\,dy$, ahol D a $(0,0)$, a $(3,0)$, az $(1,1)$ és a $(2,1)$ csúcspontú négyszöglap.

F13. Alakítsa át az $\int_D f(x,y)\,dx\,dy$ kettős integrált kétszeres integrállá kétféleképpen, ha a D tartomány

(a) a $(0,0)$, az $(a,0)$ és a $(0,a)$ csúcspontú háromszöglap, ahol $a>0$;

(b) az $y=x^2$ és az $y=-x+2$ egyenletű görbék által határolt síkrész.

F14. Szemléltese a

$$\int_{-2}^{1} \int_{x^2+2x}^{4-x^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

integrál integrálási tartományát.

F15. Cserélje fel az integrálás sorrendjét az alábbi integrálokban:

(a) $\int_0^1 \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x,y)\,dx\,dy$;

(b) $\int_0^a \int_{\frac{1-x}{2}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)\,dy\,dx$, ahol $0<a<1$;

(c) $\int_1^4 \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$.

F16. Számítsa ki a következő kettős integrálokat. (Először cserélje fel az integrálás sorrendjét. Miért?)

(a) $\int_0^1 \int_{3y}^{3} e^{x^2}\,dx\,dy$; (b) $\int_0^3 \int_{y^2}^{9} y\cos(x^2)\,dx\,dy$;

(c) $\int_0^1 \int_x^1 \frac{x\sin y}{y}\,dy\,dx$; (d) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^{1} \sqrt{1+x^3}\,dx\,dy$;

(e) $\displaystyle\int_0^1 \int_{\arcsin y}^{\pi/2} \cos x \sqrt{1+\cos^2 x}\, dx\, dy;$

(f) $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^{1} x^3 \sin(y^3)\, dy\, dx.$

- **Az integrál kiszámítása *egyéb halmazokon* (integráltranszformációval).**

F17. Írja fel az integráltranszformációra vonatkozó tételt sík- és térbeli polártranszformáció, valamint térbeli hengertranszformáció esetén. Határozza meg a formulákban fellépő determinánsokat is.

F18. Számolja ki az alábbi integrálokat

(a) $\displaystyle\int_{1\le x^2+y^2\le 2} \ln(x^2+y^2)\, dx\, dy;$

(b) $\displaystyle\int_{x^2+y^2\le 2} e^{x^2+y^2}\, dx\, dy;$

(c) $\displaystyle\int_H (x^2+y^2)\, dx\, dy\, dz$, ahol H az $x^2+y^2=2z$ felület és a $z=2$ sík által határolt térrész;

(d) $\displaystyle\int_H x^2yz\, dx\, dy\, dz$, ahol H az egységsugarú gömb.

F19. Számítsa ki az

$$I_R := \int_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

kettős integrált, ahol D_R az origú középpontú R sugarú körlap, és határozza meg a

$$\lim_{R\to+\infty} I_R =: \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

határértéket.

F20. Lássa be, hogy

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy \Big(= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy\Big) = \Big(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx\Big)^2.$$

Ezt és az előző feladat eredményét felhasználva mutassa meg, hogy

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

(Ez a *Gauss-féle hibaintegrál.*)

- **Alkalmazások**

F21. Számítsa ki többszörös integrállal az

(a) R sugarú félkör területét;

(b) R sugarú félgömb térfogatát;

(c) az ellipszoid térfogatát.

F22. Határozza meg

(a) az R sugarú 2α nyílásszögű gömbcikk térfogatát;

(b) az $x^2+y^2+z^2=4R^2$ gömb és az $(x-R)^2+y^2=R^2$ henger közös részének a térfogatát (*Viviani-féle test*);

(c) a $z=\sqrt{x^2+y^2}$ kúpfelület, az $(x-2)^2+y^2=4$ körhengerpalást és az xy sík közöti térrész térfogatát.

III. Differenciálegyenletek

- **Differenciálegyenletek felállítása**

F23. Egy h magasságú, forgástest alakú homogén oszlop A területű fedőlapját F nagyságú függőleges irányú erő terheli. Tervezze meg az oszlop alakját úgy, hogy a megépítéséhez a lehető legkevesebb anyagra legyen szükség.

F24. Forgásfelület alakú tükörről a forgástengellyel párhuzamosan érkező fénysugarak a visszaverődés után egy ponton mennek át. Határozza meg a forgásfelület meridiángörbéjét.

F25. Függesszünk fel az A és B pontok között egy homogén és állandó keresztmetszetű kötelet, amelyet csak a saját súlya terhel. Határozza meg a kötél egyensúlyi alakját.

F26. Az 50 méter hosszúságú és 20 méter szélességű téglalap alapú úszómedence 2 méter magasságig van vízzel megtöltve. A medence alján 20 cm sugarú, kör alakú nyílás van. Határozza meg, mennyi idő alatt ürül ki a medence. (A tapasztalat azt mutatja, hogy ha a medencében h magasságú a vízoszlop, akkor a surlódás következtében kör alakú nyílás esetén a víz kifolyási sebessége $v = 0,6\sqrt{2gh}$, ahol g a gravitációs állandó.)

F27. Folyami hajók megállítására a kikötőben egy kötelet dobnak ki a hajóról, amelyet rátekernek a rakparton álló henger alakú oszlopra. Milyen erő fékezi le a hajót, ha a kötelet háromszor tekerik körül az oszlopon és a kötél szabad végét egy munkás 100 N erővel húzza? (A kötél és az oszlop között a surlódási együttható $\nu = 1/3$.)

F28. Egy sík-domború optikai lencse domború oldala forgásfelület. Határozza meg e felület meridiángörbéjét úgy, hogy az optikai tengellyel párhuzamosan a síkfelületre eső egyszínű fénysugarak a lencse domború oldalán túljutva egy ponton menjenek keresztül.

- **Szétválasztható változójú differenciálegyenletek**

F29. Oldja meg a következő egyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat, és szemléltesse a megoldásokat:

(a) $x' = x(1-x)$;

(b) $x' = x + x^2$;

(c) $x'(t) = \dfrac{1}{2+t} \cdot \dfrac{x^2(t)-1}{x(t)}$;

(d) $x'(t)\operatorname{ctg} t + x(t) = 2, \quad x(0) = -1$;

(e) $(t^2-1)x'(t) + 2tx^2(t) = 0, \quad x(0) = 1$;

(f) $x'(t) - tx^2(t) = 2tx(t)$;

(g) $x'(t) = \dfrac{t^3}{\big(1+x(t)\big)^2}$.

F30. Mutassa meg, hogy az

$$x'(t) = \sqrt[3]{\big(x^2(t)+1\big)\big(t^4+1\big)}$$

differenciálegyenlet minden teljes megoldásának két vízszintes aszimptotája van, az egyik $-\infty$-ben, a másik pedig $+\infty$-ben.

F31. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy x_0 a g izolált zérushelye. Bizonyítsa be, hogy az

$$x' = g \circ x, \qquad x(\tau) = x_0$$

kezdetiérték-probléma ($\tau \in \mathbb{R}$ tetszőleges) $\varphi(t) := x_0$ ($t \in \mathbb{R}$) megoldása pontosan akkor globálisan egyértelmű, ha valamely $a \in I \setminus \{x_0\}$ pont esetén az

$$\int_{x_0}^{a} \frac{1}{g}$$

improprius integrál divergens.

F32. Oldja meg a következő egyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat, és szemléltesse a megoldásokat:

(a) $x'(t) = \mathrm{tg}\big(x(t) - t\big)$;

(b) $\big(t + 2x(t)\big)x'(t) = 1, \quad x(0) = -1$;

(c) $x'(t) = \sin\big(t + x(t)\big)$;

(d) $x'(t) = \sqrt{x(t) - 2t}$;

(e) $x'(t) = -2\big(2t + 3x(t)\big)^2$;

(f) $x'(t) = -\dfrac{t + x(t)}{t}$;

(g) $x'(t) = \dfrac{x(t)}{t} + \sqrt{1 - \dfrac{x^2(t)}{t^2}}$.

• Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

F33. Oldja meg a következő egyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat, és szemléltesse a megoldásokat:

(a) $x'(t) + \dfrac{1}{t}x(t) = -1$;

(b) $x'(t) + \dfrac{2}{t}x(t) = t^3, \; x(1) = 1$;

(c) $x'(t)\sin t - x(t)\cos t = -1$;

(d) $(t-2)x'(t) - x(t) = 2(t-2)^3$;

(e) $x'(t) + x(t)\,\mathrm{ctg}\, t = 5e^{\cos t}, \; x(\pi/2) = -4$.

F34. Szemléltesse az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenletek megoldásait:

(a) $x'(t) + \dfrac{2}{t}x(t) = \dfrac{1}{t^3}x^3(t)$;

(b) $x'(t) - \dfrac{x(t)}{t} = -t^3x^4(t)$;

(c) $t^2x'(t) + tx(t) + \sqrt{x(t)} = 0$.

• Egzakt differenciálegyenletek

F35. Oldja meg az alábbi egzakt egyenleteket:

(a) $x'(t) = \dfrac{2tx(t) + 3x^2(t)}{2x(t) - 6tx(t) - t^2}$;

(b) $x'(t) = \dfrac{2t + x(t)}{2x(t) - t}$;

(c) $3t^2(1 + \ln x(t))\,dt + \left(\frac{t^3}{x(t)} - 2x(t)\right)dx = 0$;

(d) $\left(x^2e^{tx^2} + 4t^3\right)dt + \left(2txe^{tx^2} - 3x^2\right)dx = 0$;

(e) $t^2\,dt + xe^x\,dx = 0, \quad x(0) = 1$.

F36. Vezesse vissza egzakt egyenletre:

(a) $\left(t^2 + x^2 + t\right)dt + tx\,dt = 0$
(szorzás t-vel);

(b) $\left(x - t^2x^2\right)dt + t\,dt = 0$
(osztás t^2x^2-tel);

(c) $\left(2tx^4e^x + 2tx^3 + x\right)dt + \left(t^2x^4e^x - t^2x^2 - 3t\right)dt = 0$
(osztás x^4-nel).

• Állandó együtthatós lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

F37. Határozza meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszerek megoldásait:

(a)

$$\begin{aligned} x_1' &= 2x_1 + x_2 \\ x_2' &= 3x_1 + 4x_2; \end{aligned}$$

(b)

$$x_1' = 3x_1 + 2x_2$$
$$x_2' = 2x_1 + 6x_2;$$

(c)

$$x_1' = -3x_1 + 4x_2 - 2x_3$$
$$x_2' = x_1 + x_3$$
$$x_3' = 6x_1 - 6x_2 + 5x_3;$$

(d) $x' = Ax, \quad A := \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$

(e) $x' = Ax, \quad A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};$

(f) $x' = Ax, \quad A := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix};$

(g)

$$x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + e^{2t}$$
$$x_2'(t) = 2x_1(t) + 6x_2(t) + t;$$

(h)

$$x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + e^{t}$$
$$x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 1;$$

(i)

$$x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + \frac{1}{\cos t}$$
$$x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t).$$

- **Magasabbrendű lineáris differenciálegyenletek**

F38. Adja meg az alábbi állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását:

(a) $x'' - 4x' + 8x = 0;$

(b) $2x'' - x' - x = 0$;

(c) $3x'' = 5x'$;

(d) $16x'' + 24x' + 9x = 0$;

(e) $9x'' + 4x = 0$;

(f) $x'' - 6x' + 4x = 0$.

F39. A *próbafüggvény-módszerrel* keresse meg az alábbi differenciálegyenletek megoldásait:

(a) $x''(t) - 2x'(t) - x(t) = e^{4t}$;

(b) $x''(t) - x(t) = 2e^{t} - t^{2}$;

(c) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \sin t$;

(d) $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 4t^{2}e^{2t}$;

(e) $x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = e^{-4t} + te^{-t}$;

(f) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t\cos t$;

(g) $x^{(4)}(t) + x^{(2)}(t) = t - \sin t$;

(h) $x''(t) - 2x'(t) = 2e^{t}, \quad x(1) = -1, \quad x'(1) = 0$;

(i) $x''(t) + x'(t) = 2t - \pi, \quad x(0) = 0, \quad x'(\pi) = 0$.