ANALÍZIS 7. **1. ZÁRTHELYI megoldása** **2006. november 27.**

Programtervező matematikus szak

1. feladat. *Határozza meg a*

$$\varphi(t) := \left(t,\, \tfrac{t^2}{2},\, \tfrac{t^3}{6}\right) \qquad \left(x \in \mathbb{R}\right)$$

térgörbének azt a pontját, amelyben a simulósík merőleges a $2x-2y+z-3=0$ egyenletű síkra. Írja fel ebben a pontban a simulósík egyenletét. $\boxed{10 \text{ pont}}$

Megoldás: A simulósík egy normálvektora a t_0 paraméterű pontban

$$\mathbf{n}_1(t_0) = \varphi'(t_0) \times \varphi''(t_0) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t_0 & \frac{t_0^2}{2} \\ 0 & 1 & t_0 \end{bmatrix} = \left(\tfrac{t_0^2}{2},\, -t_0,\, 1\right). \qquad (\underline{\textbf{3 pont}})$$

A megadott sík egy normálvektora $\mathbf{n}_2 = (2, -2, 1)$. (<u>**1 pont**</u>) A két sík akkor merőleges egymásra, ha a normálvektoraik merőlegesek, vagyis

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = t_0^2 + 2t_0 + 1 = (t_0+1)^2 = 0, \qquad \text{azaz, ha} \quad t_0 = -1. \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

A keresett pont tehát $P_0 = \varphi(t_0) = \left(-1,\, \frac{1}{2},\, -\frac{1}{6}\right)$. Ebben a pontban a simulósík egy normálvektora

$$\mathbf{n}_1(-1) = \left(\tfrac{1}{2},\, 1,\, 1\right), \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

ezért a simulósík egyenlete:

$$\tfrac{1}{2}(x+1) + 1\cdot\left(y - \tfrac{1}{2}\right) + 1\cdot\left(z + \tfrac{1}{6}\right) = 0, \qquad \text{azaz} \quad 3x + 6y + 6z + 1 = 0. \qquad (\underline{\textbf{2 pont}}) \ \blacksquare$$

2. feladat. *Határozza meg az $y = \ln x$ ($x > 0$) egyenletű síkgörbének azon pontjait, amelyben a simulókör sugara szélsőértéket vesz fel.* $\boxed{12 \text{ pont}}$

Megoldás: A görbe $\left(x, \ln x\right)$ $(x > 0)$ pontjában a görbület:

$$\kappa(x) = \frac{\left|\ln'' x\right|}{\left(1 + [\ln' x]^2\right)^{3/2}} = \frac{\frac{1}{x^2}}{\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \frac{x}{(x^2+1)^{3/2}} \qquad (x > 0), \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

ezért a simulókör sugara (azaz a görbületi sugár):

$$\varrho(x) = \frac{1}{\kappa(x)} = \frac{(x^2+1)^{3/2}}{x} \qquad (x > 0). \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

Ennek a függvénynek keressük az abszolút szélsőértékeit. Mivel

$$\varrho'(x) = \frac{\frac{3}{2}(x^2+1)^{1/2}\cdot 2x \cdot x - (x^2+1)^{3/2}}{x^2} = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x^2}\left(2x^2 - 1\right) \qquad (x > 0), \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

ezért

$$\varrho'(x) < 0, \ \text{ha} \ 0 < x < \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{azaz a } g \text{ függvény} \downarrow \text{a} \left(0, \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \text{ intervallumon;} \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

$$\varrho'(x) > 0, \ \text{ha} \ x > \tfrac{1}{\sqrt{2}}, \qquad \text{azaz a } g \text{ függvény} \uparrow \text{az} \left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \text{ intervallumon.} \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

A határértékek:

$$\lim_{x\to 0+0} \varrho(x) = +\infty \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to+\infty} \varrho(x) = +\infty. \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

ϱ-nak tehát nincs abszolút maximuma. Ez azt jelenti, hogy a simulókör sugara bizonyos pontokban (a 0 ponthoz és a $(+\infty)$-hez közeli helyeken) akármilyen nagy is lehet. (<u>**1 pont**</u>)

A ϱ függvénynek viszont van abszolút minimuma. Ezt az $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ pontban veszi fel, és az értéke

$$\varrho\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\left(\frac{1}{2}+1\right)^{3/2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{3\sqrt{3}}{2}. \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

A görbe $\left(x_0, \ln x_0\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{\ln 2}{2}\right)$ pontjában legkisebb tehát a simulókör sugara, és az $\frac{3\sqrt{3}}{2}$-vel egyenlő. Ez azt is jelenti, hogy az ln függvény grafikonja az $x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$ abszcisszájú pontban görbül a legjobban, itt legnagyobb a görbülete. (<u>**1 pont**</u>) $\blacksquare$

3. feladat. *Forgassuk meg az $y = \cos x$ $\left(x \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ egyenletű görbét az x tengely körül. A kapott forgásfelület $P_0 = \left(\frac{\pi}{4},\, \frac{1}{2},\, \frac{1}{2}\right)$ pontjában írja fel az érintősík egyenletét. Mekkora térfogatú részt vág le ez a sík az első térnyolcadból?* $\boxed{\textit{12 pont}}$

Megoldás: A forgásfelület a

$$G(x,y,z) = \cos^2 x - y^2 - z^2 = 0 \qquad (\underline{\textbf{4 pont}})$$

implicit alakban adható meg. A $P_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0)$ pont valóban rajt van a felületen.

Ebben a pontban az érintősík egyenlete:

$$\begin{aligned} &G'_x(P_0)(x - x_0) + G'_y(P_0)(y - y_0) + G'_z(P_0)(z - z_0) = \\ &(-2\cos x_0 \sin x_0)(x - x_0) - 2y_0(y - y_0) - 2z_0(z - z_0) = \qquad (\underline{\textbf{3 pont}}) \\ &\left(x - \tfrac{\pi}{4}\right) + \left(y - \tfrac{1}{2}\right) + \left(z - \tfrac{1}{2}\right) = 0, \qquad \text{azaz} \qquad x + y + z = \tfrac{\pi}{4} + 1. \end{aligned}$$

Ennek a síknak az x, y, illetve a z tengellyel vett metszéspontjai rendre az

$$A = \left(\tfrac{\pi}{4} + 1,\, 0,\, 0\right), \quad B = \left(0,\, \tfrac{\pi}{4} + 1,\, 0\right), \quad C = \left(0,\, 0,\, \tfrac{\pi}{4} + 1\right) \qquad (\underline{\textbf{3 pont}})$$

pontok. Az $OABCD$ tetraéder térfogata $\frac{1}{6}\left(\frac{\pi}{4} + 1\right)^3$. $\quad (\underline{\textbf{2 pont}})$ ■

4. feladat. *Határozza meg az*

$$x^2 - 4y^2 = 8z$$

egyenletű felület $P_0 = (4,\, 2,\, 0)$ pontjában a főirányokat és a pont típusát. $\boxed{\textit{15 pont}}$

Megoldás: Mivel $4^2 - 4 \cdot 2^2 = 8 \cdot 0$, ezért a P_0 pont valóban a felületen helyezkedik el.
A felület egy paraméteres előállítása:

$$F(u,v) = \left(u,\, v,\, \tfrac{1}{8}u^2 - \tfrac{1}{2}v^2\right), \qquad w_0 = (u_0,\, v_0) = (4,\, 2). \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

A szükséges számolások:

$$\begin{aligned} \partial_u F(w_0) &= \partial_u F(u_0,\, v_0) = \left(1,\, 0,\, \tfrac{1}{4}u_0\right) = \left(1,\, 0,\, 1\right), \\ \partial_v F(w_0) &= \partial_v F(u_0,\, v_0) = \left(0,\, 1,\, -v_0\right) = \left(0,\, 1,\, -2\right); \end{aligned} \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(w_0) &= \partial_u F(w_0) \cdot \partial_u F(w_0) = 2, \\ \mathbb{F}(w_0) &= \partial_u F(w_0) \cdot \partial_v F(w_0) = -2, \\ \mathbb{G}(w_0) &= \partial_v F(w_0) \cdot \partial_v F(w_0) = 5; \end{aligned} \quad G(w_0) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}; \quad G^{-1}(w_0) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}; \quad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

Mivel

$$\partial_u F(w_0) \times \partial_v F(w_0) = \det \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \text{ezért} \quad \mathbf{m}(w_0) = \tfrac{1}{\sqrt{6}}\left(-1,\, 2,\, 1\right). \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

$$\begin{aligned} \partial_{uu} F(w_0) &= \partial_{uu} F(u_0,\, v_0) = \left(0,\, 0,\, \tfrac{1}{4}\right), \\ \partial_{uv} F(w_0) &= \partial_{uv} F(u_0,\, v_0) = \left(0,\, 0,\, 0\right), \\ \partial_{vv} F(w_0) &= \partial_{vv} F(u_0,\, v_0) = \left(0,\, 0,\, -1\right); \end{aligned} \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{L}(w_0) &= \partial_{uu} F(w_0) \cdot \mathbf{m}(w_0) = \tfrac{1}{4\sqrt{6}}, \\ \mathbb{M}(w_0) &= \partial_{uv} F(w_0) \cdot \mathbf{m}(w_0) = 0, \\ \mathbb{N}(w_0) &= \partial_{vv} F(w_0) \cdot \mathbf{m}(w_0) = -\tfrac{1}{\sqrt{6}}; \end{aligned} \qquad H(w_0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{4\sqrt{6}} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}. \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

A főirányokat meghatározó másodfokú egyenlet:

$$0=\det\begin{bmatrix}\eta^2 & -\eta\xi & \xi^2\\ \mathbb{E}(w_0) & \mathbb{F}(w_0) & \mathbb{G}(w_0)\\ \mathbb{L}(w_0) & \mathbb{M}(w_0) & \mathbb{N}(w_0)\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix}\eta^2 & -\eta\xi & \xi^2\\ 2 & -2 & 5\\ \frac{1}{4\sqrt{6}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}=$$

$$=\det\begin{bmatrix}\eta^2 & -\eta\xi & \xi^2+4\eta^2\\ 2 & -2 & 13\\ \frac{1}{4\sqrt{6}} & 0 & 0\end{bmatrix}=$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{6}}\big(-13\eta\xi+2(\xi^2+4\eta^2)\big)=\frac{\eta^2}{4\sqrt{6}}\Big[2\big(\tfrac{\xi}{\eta}\big)^2-13\big(\tfrac{\xi}{\eta}\big)+8\Big]=0. \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

Ebből $\big(\frac{\xi}{\eta}\big)_{1,2}=\frac{13\pm\sqrt{105}}{4}$ adódik, tehát a főirányokat meghatározó együtthatók:

$$\begin{aligned}\xi_1&=13+\sqrt{105}, & \eta_1&=4,\\ \xi_2&=13-\sqrt{105}, & \eta_1&=4.\end{aligned} \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

A főirányok:

$$\xi_1\partial_uF(w_0)+\eta_1\partial_vF(w_0)=(13+\sqrt{105})\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13+\sqrt{105}\\4\\5+\sqrt{105}\end{bmatrix}; \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

$$\xi_2\partial_uF(w_0)+\eta_2\partial_vF(w_0)=(13-\sqrt{105})\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}0\\1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}13-\sqrt{105}\\4\\5-\sqrt{105}\end{bmatrix}. \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

A szorzatgörbület

$$\mathcal{K}=\kappa_1\cdot\kappa_2=\det\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big)=\frac{1}{6}\det\left(\begin{bmatrix}\frac{1}{4\sqrt{6}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}\right)=$$

$$=\frac{1}{6}\det\begin{bmatrix}\frac{1}{4\sqrt{6}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}\cdot\det\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 2\end{bmatrix}<0, \qquad (\underline{\textbf{1 pont}})$$

ezért P_0 a felületnek *hiperbolikus pontja.* ($\underline{\textbf{1 pont}}$) ■

5. feladat. *Tekintsük a*

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}):=(y+3z)\mathbf{i}-(x+2z)\mathbf{j}-(3x-2y)\mathbf{k} \qquad \big(\mathbf{r}=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big)$$

vektormezőt és azt a felületet, amelyet az $x^2+y^2+z^2=4$ gömbfelület azon része határoz meg, amelyre a $z\geq 0$ feltétel is teljesül. Igazolja az alakzatra Stokes tételét. $\boxed{\textit{11 pont}}$

Megoldás: *A vonalintegrál meghatározása.* A Γ konturgörbe az (x,y) síkban az origó középpontú 2 sugarú körvonal. Ennek egy paraméteres előállítása:

$$\varphi(t)=\big(2\cos t,\,2\sin t,\,0\big) \qquad \big(t\in[0,2\pi]\big). \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

Így a görbén a haladási irány pozitív. ($\underline{\textbf{1 pont}}$)

$$\iint_\Gamma \mathbf{V}(\mathbf{r})\,d\mathbf{r}=\int_0^{2\pi}\left\langle\begin{bmatrix}2\sin t\\ -2\cos t\\ -6\cos t+4\sin t\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-2\sin t\\ 2\cos t\\ 0\end{bmatrix}\right\rangle dt=$$

$$=\int_0^{2\pi}\big(-4\sin^2 t-4\cos^2 t\big)\,dt=(-4)\int_0^{2\pi}1\,dt=-8\pi. \qquad (\underline{\textbf{2 pont}})$$

A felületi integrál meghatározása.

$$\operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial_1 & \partial_2 & \partial_3 \\ y+3z & -x-2z & -3x+2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}. \qquad (\underline{\mathbf{1\ pont}})$$

A gömbfelület paraméteres előállítása:

$$F(u,v) = \big(2\sin v\cos u,\ 2\sin v\sin u,\ 2\cos v\big) \qquad \big(0 \le u \le 2\pi, 0 \le v \le \tfrac{\pi}{2}\big). \qquad (\underline{\mathbf{1\ pont}})$$

$$\partial_u F(u,v) \times \partial_v F(u,v) = \det\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2\sin v\sin u & 2\sin v\cos u & 0 \\ 2\cos v\cos u & 2\cos v\sin u & -2\sin v \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4\sin^2 v\cos u \\ -4\sin^2 v\sin u \\ -4\sin v\cos v \end{bmatrix}. \qquad (\underline{\mathbf{1\ pont}})$$

Ez a felületi normális vektor. A harmadik koordinátából látható, hogy így lefele van irányítva. A görbén már kijelölt haladási irányt figyelembe véve a Stokes-tétel úgy lesz igaz, ha a felületi normálist felfele irányítjuk, azaz a fenti vektor (-1)-szeresét vesszük. $(\underline{\mathbf{1\ pont}})$ Így

$$\iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \langle \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \sin^2 v\cos u \\ \sin^2 v\sin u \\ \sin v\cos v \end{bmatrix} \rangle\, du\, dv =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} \big(4\sin^2 v\cos u + 6\sin^2 v\sin u - 2\sin v\cos v\big)\, du\, dv =$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} (-2\sin v\cos v)\cdot 2\pi\, dv = -8\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2v\, dv = -8\pi\left[-\frac{\cos 2v}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= -8\pi. \qquad (\underline{\mathbf{2\ pont}})$$

Azt kaptuk, hogy

$$\iint_{\Gamma} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{F}} \operatorname{rot}\mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma = -8\pi,$$

és ez a Stokes-tétel állítását igazolja a megadott esetben. ■

6. feladat. *Határozza meg a*

$$\mathbf{V}(\mathbf{r}) := (3x + 2y^2 z)\mathbf{i} + (2x^2 z + y)\mathbf{j} + (xy^2 + 2z)\mathbf{k} \qquad \big(\mathbf{r} = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3\big)$$

vektormező felületi integrálját az $A = (0,\,0,\,0)$, $B = (2,\,0,\,0)$, $C = (0,\,1,\,0)$ és $D = (0,\,0,\,3)$ csúcspontú tetraéder oldallapjai által meghatározott $\mathcal{F}$ felületre. A felület minden pontjában a felületi normálist a térrészből kifele irányítjuk. $\boxed{\textit{10 pont}}$

Megoldás: *Vegyük észre*, hogy a vektormező divergenciája minden pontban állandó, ui.

$$\operatorname{div}\mathbf{V}(\mathbf{r}) = \frac{\partial\,(3x+2y^2z)}{\partial\,x} + \frac{\partial\,(2x^2z+y)}{\partial\,y} + \frac{\partial\,(xy^2+2z)}{\partial\,z} = 3+1+2 = 6 \qquad \big((x,y,z)\in\mathbb{R}^3\big).$$

Ezért a felületi integrált a Gauss–Osztrogradszkij-tétel felhasználásával érdemes kiszámolni:

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div}\mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \iiint_{\Omega} 6\, d\mathbf{r} = 6\iiint_{\Omega} 1\, d\mathbf{r}.$$

Itt a térfogati integrál a szóban forgó tetraéder térfogata, és az $\frac{2\cdot 1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1}{3} = 1$, ezért

$$\iint_{\mathcal{F}} \mathbf{V}(\mathbf{r})\, d\sigma = 6. \ ■$$