Differenciálegyenletek

Modellek és algoritmusok
Programtervező informatikus szak
(B szakirány)
2014-2015. tanév tavaszi félév

Összeállította:
Szili László

A feladatok megfogalmazásánál követjük a differenciálegyenletek elméletében szokásos megállapodást: az $f \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ függvénnyel megadott

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad \text{vagy} \qquad x' = f \circ (\mathrm{id}, x)$$

differenciálegyenlet jobb oldalának, vagyis az f függvénynek az értelmezési tartományán $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$-nek azt a lehető legbővebb részhalmazát értjük, amelyen a megadott kifejezések értelmezhetők.

2015. március

1. Alapvető fogalmak és tételek

Definíció.

Adott: $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány,
$f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény.

Keresünk: $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallumot és $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvényt, amelyre

1) $\big(t, \varphi(t)\big) \in D \qquad (\forall\, t \in I)$,
2) $\varphi'(t) = f\big(t, \varphi(t)\big) \qquad (\forall\, t \in I)$.

Ezt a feladatot **explicit elsőrendű közönséges differenciálegyenletnek** nevezzük, és a jelölésére az alábbi szimbólumok valamelyikét használjuk:

$$x'(t) = f(t, x(t)) \qquad \text{vagy} \qquad x' = f \circ (\mathrm{id}, x) \tag{1}$$

Ha ilyen I intervallum és φ függvény létezik, akkor azt mondjuk, hogy φ az (1) **differenciálegyenlet megoldása I-n**.

Kezdetiérték-probléma. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartomány és $f : D \to \mathbb{R}^n$ folytonos függvény, $(\tau, \xi) \in D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pedig tetszőleges pont. A $\varphi : I \to \mathbb{R}^n$ differenciálható függvény az

$$x' = f \circ (\mathrm{id}, x), \qquad x(\tau) = \xi \tag{2}$$

kezdetiérték-probléma egy megoldása, ha

(i) φ az $x' = f \circ (\mathrm{id}, x)$ differenciálegyenlet egy megoldása I-n,
(ii) $\tau \in I$,
(iii) $\varphi(\tau) = \xi$.

Tétel. (Cauchy–Peano-féle egzisztenciatétel.) *Tegyük fel, hogy a $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ tartományon értelmezett $f : D \to \mathbb{R}^n$ függvény folytonos. Ekkor bármely $(\tau, \xi) \in D$ esetén az*

$$x' = f \circ (\mathrm{id}, x), \qquad x(\tau) = \xi$$

kezdetiérték-problémának van megoldása.

Definíció. Az $x' = f \circ (\mathrm{id}, x)$, $x(\tau) = \xi$ kezdetiérték-probléma **globálisan egyértelműen oldható meg**, ha létezik olyan $\tilde{I} \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és olyan $\tilde{\varphi} : \tilde{I} \to \mathbb{R}^n$ megoldása a kezdetiérték-problémának, hogy annak bármely más megoldása $\tilde{\varphi}$ egy leszűkítése.

Ebben az esetben a $\tilde{\varphi}$ függvényt a kezdetiérték-probléma **teljes megoldásának** nevezzük.

Definíció. Az $x' = f \circ (\mathrm{id}, x)$ $x(\tau) = \xi$ kezdetiérték-probléma **lokálisan egyértelműen oldható meg**, ha a $(\tau, \xi) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ pontnak létezik olyan $k(\tau, \xi) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$

környezete, hogy az f függvényt erre leszűkítve a megfelelő kezdetiérték-probléma megoldása már globálisan egyértelmű.

Tétel. *Ha az* $x' = f \circ (\mathrm{id}, x), \quad x(\tau) = \xi$ *kezdetiérték-probléma minden* $(\tau, \xi) \in D$ *esetén lokálisan egyértelműen oldható meg, akkor minden kezdetiérték-probléma megoldása globálisan is egyértelmű.*

Tétel. (Picard–Lindelöf-féle egzisztencia- és unicitástétel.) *Legyen* $n \in \mathbb{N}$, $D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ *egy tartomány és* $(\tau, \xi) \in D$. *Tegyük fel, hogy*

(i) *az* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *függvény folytonos* D*-n,*

(ii) *az* f *függvény a* (τ, ξ) *pontban a* ***második változójában lokális Lipschitz-feltételnek tesz eleget****, azaz*

$$\exists\, k(\tau, \xi) \subset D \qquad \textit{és} \qquad L_{(\tau,\xi)} > 0, \quad \textit{hogy}$$

$$\|f(t, \overline{u}\,) - f(t, \overline{\overline{u}}\,)\| \leq L_{(\tau,\xi)} \|\overline{u} - \overline{\overline{u}}\,\| \qquad \big(\forall \quad (t, \overline{u}\,), (t, \overline{\overline{u}}\,) \in k(\tau, \xi)\big).$$

Ekkor az $x' = f \circ (\mathrm{id}, x) \quad x(\tau) = \xi$ *kezdetiérték-problémának létezik megoldása, és az lokálisan (sőt globálisan) egyértelmű.*

2. Szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenletek

Definíció. Tegyük fel, hogy $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $\Omega := I \times J$ és

$$g : I \to \mathbb{R}, \qquad h : J \to \mathbb{R}$$

folytonos függvények. Ekkor az

$$x'(t) = g(t)h\big(x(t)\big) \qquad \text{vagy} \qquad x' = g \cdot h \circ x \tag{3}$$

feladatot **szétválasztható változójú** (vagy **szeparábilis**) differenciálegyenletnek nevezzük.

Ha $(\tau, \xi) \in I \times J$, akkor az

$$x' = g \cdot h \circ x, \qquad x(\tau) = \xi \tag{4}$$

feladat a (3) egyenletre vonatkozó **kezdetiérték-probléma**.

Megjegyzés. Legyen $f(t,p) := g(t)h(p)$ $\big((t,p) \in \Omega\big)$. Ekkor (3) az f jobboldalú explicit közönséges elsőrendű differenciálegyenlet (l. (1)).

Tétel. *Legyen $I, J \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy*

(a) $g : I \to \mathbb{R}$ *és* $h : J \to \mathbb{R}$ *folytonos függvény,*
(b) $0 \notin \mathcal{R}_h$.

Ekkor minden $(\tau, \xi) \in I \times J$ esetén az

$$x' = g \cdot h \circ x, \qquad x(\tau) = \xi$$

kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg. A $\tilde{\varphi}$ teljes megoldás kielégíti az alábbi implicit egyenletet:

$$\int_\xi^{\tilde{\varphi}(t)} \frac{1}{h(s)}\, ds = \int_\tau^t g(s)\, ds \qquad (t \in \mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}).$$

Legyen

$$I^* := \left\{ t \in I \;\Big|\; \inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} < \int_\tau^t g < \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} \right\}.$$

A $\tilde{\varphi}$ teljes megoldás $\tilde{I}$ értelmezési tartománya a τ pontot tartalmazó maximális I^*-beli nyílt intervallum.

1. megjegyzés. A $0 \notin \mathcal{R}_h$ feltétel *lényeges*, l. az $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$, $x(1) = 0$ kezdetiérték-problémát.

2. megjegyzés. Az $I^* \subset I$ nyílt halmaz, ezért diszjunkt nyílt intervallumok egyesítése. Ha $0 \notin \mathcal{R}_g$, akkor I^* egy $\mathbb{R}$-beli nyílt intervallum.

3. megjegyzés. Vegyük észre, hogy ebben a speciális esetben az általános tételben szereplő szigorú regularitási feltétel, a Lipschitz-féle feltétel helyett enyhébb (a folytonosság) is elegendő volt az egyértelműséghez az egyenlet speciális szerkezete és a h függvény értékkészletére vonatkozó feltevés miatt.

F1. Oldja meg az alábbi egyenleteket, és szemléltesse a megoldásokat:

(a) $x'(t) = \sqrt{|x(t)|}$;

(b) $x'(t) = \dfrac{1}{2+t} \cdot \dfrac{x^2(t) - 1}{x(t)}$;

(c) $x'(t) = x(t)(1 - x(t))$;

(d) $x'(t) = x(t) + x^2(t)$.

F2. Oldja meg a következő kezdetiérték-problémákat, és szemléltesse a megoldásokat:

(a) $2tx(t)x'(t) = 1 - x^2(t), \quad x(1) = \frac{1}{2}$;

(b) $x'(t)\operatorname{ctg} t + x(t) = 2, \quad x(0) = -1$;

(c) $(t^2 - 1)x'(t) + 2tx^2(t) = 0, \quad x(0) = 1$;

(d) $x'(t) - tx^2(t) = 2tx(t)$;

(e) $(t^2 - 1)x(t)x'(t) = t(1 - x^2(t)), \quad x(0) = 2$;

(f) $x'(t) = \dfrac{t^3}{\big(1 + x(t)\big)^2}, \quad x(0) = 0$;

(g) $x'(t) = \dfrac{1}{t} \cdot \sqrt{1 - x^2(t)}, \quad x\left(e^{\pi/2}\right) = 0$.

F3. Mi a megoldása az alábbi feladatoknak:

(a) $x'(t) = f(at + bx(t) + c)$,

ahol $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$ és $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény;

(b) $x'(t) = \cos(t + x(t)), \quad x(0) = \frac{\pi}{2}$;

(c) $x'(t) = \sin(t + x(t))$;

(d) $x'(t) = \sqrt{x(t) - 2t}$;

(e) $x'(t) = 2x(t) + t + 1$;

(f) $x'(t) = -2(2t + 3x(t))^2$?

F4. Oldja meg az alábbi differenciálegyenleteket:

(a) $x'(t) = f\left(\frac{x(t)}{t}\right)$,

ahol $f \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adott függvény (*homogén fokszámú differenciálegyenlet*);

(b) $x'(t) = t + x(t)$;

(c) $x'(t) = -\dfrac{t + x(t)}{t}$;

(d) $x'(t) = \dfrac{x(t)}{t} + \sqrt{1 - \dfrac{x^2(t)}{t^2}}$.

F5. Mutassa meg, hogy az

$$x'(t) = \sqrt[3]{\left(x^2(t) + 1\right)\left(t^4 + 1\right)}$$

differenciálegyenlet minden teljes megoldásának két vízszintes aszimptotája van, az egyik $-\infty$-ben, a másik pedig $+\infty$-ben.

F6. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvény. Tegyük fel, hogy x_0 a g izolált zérushelye. Bizonyítsa be, hogy az

$$x' = g \circ x, \qquad x(\tau) = x_0$$

kezdetiérték-probléma ($\tau \in \mathbb{R}$ tetszőleges) $\varphi(t) := x_0$ ($t \in \mathbb{R}$) megoldása pontosan akkor globálisan egyértelmű, ha valamely $a \in I \setminus \{x_0\}$ pont esetén az

$$\int_{x_0}^{a} \frac{1}{g}$$

improprius integrál divergens.

3. Elsőrendű lineáris differenciálegyenletek

Definíció. Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Ekkor az

$$x'(t) + f(t)x(t) = g(t) \qquad (t \in I) \tag{5}$$

feladatot **elsőrendű lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük.

Ha $(\tau, \xi) \in I \times \mathbb{R}$, akkor az

$$x'(t) + f(t)x(t) = g(t), \quad x(\tau) = \xi \qquad (t \in I)$$

feladat az (5) egyenletre vonatkozó **kezdetiérték-probléma**.

Megjegyzés. A fenti feladatok megoldására két, egyszerű észrevételeken alapuló módszert ismertetünk:

1. módszer: integráló tényezővel. Ennek alapja az az észrevétel, hogy ha az (5) egyenlet mindkét oldalát megszorozzuk az

$$e^{\int_a^t f(s)\,ds} \qquad (t \in I, \quad a \in I \ \text{ rögzített})$$

függvénnyel (ez az *integráló tényező*), akkor (5) bal oldalán egy szorzatfüggvény deriváltja szerepel. Ezután az egyenlet már egyszerűen megoldható. (Vegyük észre, hogy ez a módszer lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre nem alkalmazható.)

2. módszer: a homogén-inhomogén módszer, aminek motiválására a lineáris (algebrai) egyenletrendszerek elméletére utalunk.

Tekintsük először az

$$x' + f\,x = 0 \tag{6}$$

homogén lineáris differenciálegyenletet, amelynek az általános megoldását a szétválasztható változójú egyenletek megoldásánál kidolgozott módszerrel állítjuk elő. Az összes teljes megoldás

$$\varphi(t) = c\,e^{-\int_a^t f(s)\,ds} = c\,\varphi_0(t) \qquad (t \in I)$$

alakú, ahol $a \in I$ rögzített pont és c tetszőleges valós szám.

Az

$$x' + f\,x = g \tag{7}$$

inhomogén egyenletre a következő teljesül: ha ψ_1 és ψ_2 (7) megoldásai, akkor a $\psi := \psi_1 - \psi_2$ függvény kielégíti a (6) egyenletet. Ebből következik, hogy ha ismerjük az inhomogén egyenlet egy ψ_p megoldását (ezt *partikuláris megoldásnak* szokás nevezni), akkor (7) tetszőleges megoldása

$$\psi = \varphi + \psi_p$$

alakú, ahol φ a homogén egyenlet egy megoldása. Ezt az állítást így is megjegyezhetjük:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{az inhomogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{a homogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{az inhomogén egyenlet}\\ \text{egy partikuláris megoldása}\end{array}}$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását a Lagrange-tól eredő **állandók variálásának** a módszerével határozzuk meg.

Tétel. *Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények és $(\tau, \xi) \in I \times \mathbb{R}$. Ekkor az*

$$x' + fx = g, \qquad x(\tau) = \xi$$

kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg. A ψ teljes megoldás értelmezési tartománya az egész I intervallum, és a teljes megoldás

$$\psi(t) = \xi \cdot \varphi_0(t) + \varphi_0(t) \int_\tau^t \big(\varphi_0(s)\big)^{-1} g(s)\, ds \qquad (t \in I)$$

(*ez a **Cauchy-féle formula***), *ahol*

$$\varphi_0(t) := e^{-\int_\tau^t f(s)\, ds} \qquad (t \in I)$$

a homogén egyenlet egy megoldása.

Az $x' + f\,x = g$ inhomogén egyenlet megoldásai a

$$\begin{aligned}\psi(t) &= c\,\varphi_0(t) + \psi_{part}(t) = \\ &= c\,\varphi_0(t) + \varphi_0(t) \int_\tau^t \big(\varphi_0(s)\big)^{-1} g(s)\, ds \qquad (t \in I,\ c \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

függvények, illetve ezek leszűkítései.

Tétel. (A szuperpozíció elve.) *Tegyük fel, hogy ψ_1 megoldása az*

$$x' + f\,x = g_1$$

egyenletnek, ψ_2 pedig megoldása az

$$x' + f\,x = g_2$$

egyenletnek, akkor $\psi_1 + \psi_2$ megoldása az

$$x' + f\,x = g_1 + g_2$$

egyenletnek.

F7. Oldja meg a következő egyenleteket, illetve kezdetiérték-problémákat:

(a) $x'(t) + \frac{1}{t}x(t) = -1;$

(b) $x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = t^3, \;\; x(1) = 1;$

(c) $x'(t)\sin t - x(t)\cos t = -1;$

(d) $(t-2)x'(t) - x(t) = 2(t-2)^3;$

(e) $x'(t) + \frac{2-3t^2}{t^3}x(t) = 1;$

(f) $x'(t) + x(t)\mathrm{ctg}\, t = 5e^{\cos t}, \;\; x(\pi/2) = -4.$

F8. Tegyük fel, hogy $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, $f, g : I \to \mathbb{R}$ folytonos függvények és $\alpha \in \mathbb{R}$. Tekintsük a fölső félsíkon az

$$x'(t) + f(t)x(t) = g(t)\big(x(t)\big)^\alpha$$

Bernoulli-egyenletet. Mutassa meg, hogy a

$$z := x^{-\alpha+1}$$

függvényre nézve ez lineáris egyenletet jelent.

F9. Oldja meg az alábbi Bernoulli-féle differenciálegyenleteket:

(a) $x'(t) + \frac{2}{t}x(t) = \frac{1}{t^3}x^3(t);$

(b) $x'(t) - \frac{x(t)}{t} = -t^3x^4(t);$

(c) $t^2x'(t) + tx(t) + \sqrt{x(t)} = 0.$

4. Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

■ Általános eredmények

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy az

$$A : I \to \mathbb{R}^{n \times n} \qquad \text{és a} \qquad b : I \to \mathbb{R}^n$$

folytonos függvények. Ekkor az

$$x'(t) = A(t) \cdot x(t) + b(t) \qquad (t \in I) \tag{8}$$

feladatot **elsőrendű lineáris differenciálegyenlet-rendszernek** nevezzük. Ha $b \equiv 0$, akkor az egyenlet **homogén**, az ellenkező esetben **inhomogén**. Ha az A függvény konstans (mátrixértékű!) függvény, akkor az egyenletet **állandó együtthatósnak** nevezzük.

Ha $(\tau, \xi) \in I \times \mathbb{R}^n$, akkor az

$$x' = Ax + b, \qquad x(\tau) = \xi$$

feladat a (8) egyenletre vonatkozó **kezdetiérték-probléma**.

Tétel. (A megoldások létezése és egyértelműsége.) *A lineáris differenciálegyenlet-rendszerre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg, és minden teljes megoldás értelmezési tartománya az egész I intervallum.*

$\boxed{\text{Az } x' = Ax \text{ homogén egyenlet megoldásai.}}$

Tétel. *Jelölje $\mathcal{M}_h$ az $x' = Ax$ homogén egyenlet teljes megoldásainak a halmazát. Ekkor*

1^o $\mathcal{M}_h \subset C^1(I, \mathbb{R}^n) := \big\{f : \ I \to \mathbb{R}^n, \ f \in C^1\big\}$ *egy n-dimenziós altér.*

2^o $\big\{\varphi_i : \ i = 1, 2, \ldots, m\big\} \subset \mathcal{M}_h$ *pontosan akkor lineárisan független, ha*

$$\exists\, t_0 \in I, \quad \big\{\varphi_i(t_0) : \ i = 1, 2, \ldots, m\big\} \subset \mathbb{R}^n$$

vektorok lineárisan függetlenek.

Definíció. A homogén egyenlet $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmazának egy $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ bázisát a homogén egyenlet egy **alaprendszerének**, az ezekből mint oszlopvektorokból képzett

$$\Phi(t) := \big(\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)\big) \qquad (t \in I)$$

mátrixfüggvényt az egyenlet egy **alapmátrixának** nevezzük.

Tétel. *Legyen $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ az $x' = Ax$ egyenlet egy alaprendszere és Φ egy alapmátrixa. Ekkor*

1^o $\Phi'(t) = A(t)\Phi(t)$ *minden* $t \in I$ *pontban.*

2^o $\mathcal{M}_h = \left\{\sum_{k=1}^n c_k\varphi_k : \; c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}\right\} = \left\{\Phi \cdot c : \; c = (c_1, \dots, c_n)^T \in \mathbb{R}^n\right\}.$

$\boxed{\text{Az } x' = Ax + b \text{ inhomogén egyenlet megoldásai.}}$

Tétel. *Legyen ψ_p az* ***inhomogén*** *lineáris differenciálegyenlet-rendszer egy (partikuláris) megoldása. Ekkor az egyenlet tetszőleges megoldása*

$$\psi = \varphi + \psi_p$$

alakú, ahol φ a homogén egyenlet egy megoldása.

1. megjegyzés. A tétel állítását így is megjegyezhetjük:

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{az inhomogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{a homogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{array}} + \boxed{\begin{array}{c}\text{az inhomogén egyenlet}\\ \text{egy partikuláris megoldása}\end{array}}$$

2. megjegyzés. Inhomogén egyenlet megoldásának előállításához tehát ismernünk kell

(a) a homogén egyenlet egy alaprendszerét és

(b) az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

Az **állandók variálásának a módszerével** a homogén egyenlet alaprendszerének (n lineárisan független megoldásának) az ismeretében egy partikuláris megoldás már előállítható.

Ez azt jelenti, hogy inhomogén egyenlet megoldásához elegendő a homogén egyenlet egy alaprendszerét meghatározni. Az alaprendszer előállítására azonban *csak* az állandó együtthatós egyenlet esetében van általános módszer.

3. megjegyzés. Az állandók variálásának a módszere. Keressük az inhomogén egyenlet egy megoldását $\Phi\, c$ alakban, valamilyen ismeretlen folytonosan deriválható $c : I \to \mathbb{R}^n$ függvénnyel. Behelyettesítve ezt az alakot az $x' = Ax + b$ egyenletbe, és felhasználva a $\Phi' = A\Phi$ azonosságot azt kapjuk, hogy

$$\left(\Phi\, c\right)' = \Phi'\, c + \Phi\, c' = A\Phi\, c + b \quad \Longrightarrow \quad \Phi\, c' = b,$$

ahonnan kifejezve c deriváltját: $c' = \Phi^{-1}\, b$, tehát $c = \int_a \left(\Phi^{-1} \cdot b\right)$ adódik (itt $a \in I$ egy tetszőlegesen rögzített pont). Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát:

$$\psi_p(t) = \Phi(t) \int_a^t [\Phi(s)]^{-1}\, b(s)\, ds \qquad (t \in I).$$

Tétel. (Az inhomogén egyenlet megoldóképlete.) *Legyen* Φ *az* $x' = Ax + b$ *egyenlet egy alapmátrixa.*

1^o *Az* $x' = Ax + b$ *egyenlet összes teljes megoldása*

$$\psi(t) = \Phi(t)\, c + \Phi(t) \int_a^t [\Phi(s)]^{-1}\, b(s)\, ds \qquad (t \in I)$$

alakú, ahol c *tetszőleges* $\mathbb{R}^n$*-beli oszlopvektor.*

2^o *Ha* $(\tau, \xi) \in I \times \mathbb{R}^n$*, akkor az* $x' = Ax + b$*,* $x(\tau) = \xi$ *kezdetiérték-probléma teljes megoldása:*

$$\psi(t) = \Phi(t)[\Phi(\tau)]^{-1}\xi + \Phi(t) \int_\tau^t [\Phi(s)]^{-1}\, b(s)\, ds \qquad (t \in I).$$

(*Ez a* ***Cauchy-formula***.)

■ Állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ egy mátrix. Ekkor az

$$x'(t) = A\, x(t) \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{9}$$

feladatot $n > 1$ esetén **állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszernek** nevezzük.

1. megjegyzés. Az általános eredményekből következik, hogy a (9) egyenletnek van n számú lineárisan független, az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett teljes megoldása, és ezekből mint oszlopvektorokból képzett mátrixot neveztük az egyenlet **alapmátrixának**. A jelen esetben egy alapmátrix explicit módon megadható, azonban *tetszőleges* A mátrixot tekintve ez sem elméleti, sem gyakorlati szempontból nem egyszerű feladat. A probléma jelentőségének megfelelően erre több eljárást is kidolgoztak. Ezek közül a legegyszerűbb *B. van Rootselaar* 1985-ben az *Amer. Math. Monthly* folyóiratban közölt módszere.

2. megjegyzés. Az $x'(t) = Ax(t)$ egyenlet alapmátrixának, vagyis n számú lineárisan független megoldásának meghatározásához a következő *igen egyszerű észrevételből* indulunk ki. Keressünk speciális alakú megoldásokat. Ha $n = 1$, akkor az $x'(t) = Ax(t)$ egyenlet megoldásai a ce^{At} $(t \in \mathbb{R})$ exponenciális függvények, ahol $c \in \mathbb{R}$. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ mellett tehát természetes ötlet az, hogy keressük a megoldásokat az

$$e^{\lambda t} \cdot c \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakú függvények körében, ahol $\lambda \in \mathbb{R}$ és $c \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ paraméterek. Mivel $\left(e^{\lambda t} \cdot c\right)' = \lambda e^{\lambda t} \cdot c$, ezért az

$$\left(e^{\lambda t} \cdot c\right)' = \lambda e^{\lambda t} \cdot c = A \cdot e^{\lambda t} \cdot c \qquad \Longleftrightarrow \qquad A \cdot c = \lambda\, c$$

egyenlőségből következik, hogy *egy* megoldást kapunk pontosan akkor, ha λ az A mátrix sajátértéke, c pedig a hozzá tartozó sajátvektor.

Az alapmátrix előállításának problémája tehát a lineáris algebrából ismert (igen mély tételeket is tartalmazó) **sajátérték-problémával** kapcsolatos.

Az elmondottakat figyelembe véve persze *igen egyszerűen* igazolható eredményeket is kaphatunk. Ez a helyzet akkor, ha az A mátrix sajátértékei valósak és különbözőek. Ennél általánosabb és még viszonylag egyszerűen igazolható például a következő állítás.

Tétel. *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak van n lineárisan független valós sajátvektora:*

$$s^{(1)}, s^{(2)}, \ldots, s^{(n)} \in \mathbb{R}^n.$$

Jelölje $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ a hozzájuk tartozó (nem feltétlenül különböző) valós sajátértékeket. Ekkor az $x'(t) = A\, x(t)$ egyenlet egy alaprendszere:

$$\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda_1 t} \cdot s^{(1)}, \quad \varphi^{(2)}(t) = e^{\lambda_2 t} \cdot s^{(2)}, \quad \ldots \quad , \quad \varphi^{(n)}(t) = e^{\lambda_n t} \cdot s^{(n)} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

és az általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1 \varphi^{(1)}(t) + c_2 \varphi^{(2)}(t) + \cdots + c_n \varphi^{(n)}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tetszőleges valós számok.

1. megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy a $\lambda \in \mathbb{R}$ szám pontosan akkor sajátértéke az $A = [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixnak, ha λ gyöke az A mátrix $K(\lambda)$-val jelölt *karakterisztikus polinomjának*, azaz

$$K(\lambda) := \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0.$$

A λ sajátértékhez tartozó $s = (s_1, \ldots, s_n)^T \in \mathbb{R}^n$ sajátvektor(ok) az

$$\begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

homogén lináris egyenletrendszer megoldása(i).

2. megjegyzés. Az eddigiekben csak *valós egyenleteket és azok valós megoldásait vizsgáltuk.* Bizonyos esetekben azonban, így pl. állandó együtthatós lineáris egyenletek megoldásánál könnyebb először a valós egyenletek **komplex megoldásait** előállítani és azután kiválasztani belőlük a valós megoldásokat. Komplex értékű függvények esetében is értelmezhető a differenciálegyenlet, és a komplex megoldásokra a valós megoldásokhoz hasonló eredmények érvényesek. Ennek részleteire azonban itt nem térünk ki; azonban ennek a differenciálegyenletnek a komplex megoldásaihoz az alábbi megjegyzéseket tesszük.

Az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *valós mátrix* $K(\lambda)$ karakterisztikus polinomja egy *valós együtthatós* pontosan n-edfokú polinom, amelynek multiplicitással számolva pontosan n számú (általában komplex) gyöke van. Ezért célszerű a sajátértékeket $\mathbb{R}$ helyett $\mathbb{C}$-ben, a sajátvektorokat pedig $\mathbb{R}^n$ helyett $\mathbb{C}^n$-ben tekinteni, és az $x'(t) = Ax(t)$ egyenlet komplex megoldásait vizsgálni.

Ha $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ az A mátrix egy sajátértéke és $s \in \mathbb{C}^n$ egy sajátvektora, akkor a

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} \cdot s = e^{\alpha t + i\beta t} \cdot s = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big) \cdot s \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény a homogén egyenlet egy *komplex megoldása.*

Ha A valós mátrix, akkor $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ is sajátérték, $\overline{s} \in \mathbb{C}^n$ a hozzá tartozó sajátvektor és a

$$\begin{aligned} &\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda t} s, \\ &\varphi^{(2)}(t) = e^{\bar{\lambda} t}\bar{s} = \overline{e^{\lambda t} s} = \overline{\varphi^{(1)}(t)} \end{aligned} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények az $x'(t) = Ax(t)$ egyenlet lineárisan független komplex megoldásai.

Két komplex értékű megoldás összege, illetve különbsége is megoldás, továbbá bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2} \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i} \in \mathbb{R}$. Így a $\lambda, \bar{\lambda}$ komplex konjugált sajátértékpárhoz az alábbi alakban adható meg két lineárisan független, **valós** megoldás:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \ni \mapsto \operatorname{Re}\varphi^{(1)}(t), \\ &\mathbb{R} \ni \mapsto \operatorname{Im}\varphi^{(1)}(t). \end{aligned}$$

3. megjegyzés. Most összefoglaljuk valós $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix esetén az $x' = Ax$ egyenlet valós alaprendszerének előállítására vonatkozó eljárás lépéseit.

1. lépés. Meghatározzuk az A mátrix (esetleg komplex) sajátértékeit (azaz a $K(\lambda)$ karakterisztikus polinom gyökeit) és sajátvektorait.

2. lépés. A $K(\lambda)$ polinom gyökeitől függően állapítjuk meg az egyenlet lineárisan független megoldásait.

1. eset. Ha λ egyszeres valós gyöke A-nak, akkor a hozzá tartozó megoldás

$$\varphi(t) := e^{\lambda t} \cdot s \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol s a λ-hoz tarozó sajátvektor.

2. eset. A λ és a $\overline{\lambda}$ komplex számok az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix egyszeres sajátértékei és $s \in \mathbb{C}^n$ a λ-hoz tartozó komplex (!) sajátvektor. Ekkor a $\lambda, \bar{\lambda}$ komplex konjugált sajátérték-párhoz tartozó két lineárisan független, valós megoldás:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(t) &= \operatorname{Re}\left(e^{\lambda t}\cdot s\right), \\ \varphi^{(2)}(t) &= \operatorname{Im}\left(e^{\lambda t}\cdot s\right) \end{aligned} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

3. eset. A λ valós szám az $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix $K(\lambda)$ karakterisztikus polinomjának m-szeres gyöke. Ekkor két eset lehetséges:

3. (a) eset. A $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékhez van m lineárisan független $s^{(1)}, \ldots, s^{(m)} \in \mathbb{R}^n$ sajátvektor. Ekkor az $x' = Ax$ egyenletnek

$$\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda t}s^{(1)}, \ldots, \varphi^{(m)}(t) = e^{\lambda t}s^{(m)} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

m számú lineárisan független megoldása.

3. (b) eset. Az m-szeres λ gyökhöz csak $k < m$ darab lineárisan független sajátvektor tartozik. Ekkor a lineárisan független sajátvektorokkal előállítjuk az egyenlet k számú lineárisan függetlem megoldását. További $m-k$ megoldást pedig a következő alakban kereshetjük:

$$\begin{cases} \varphi_1(t) = (a + bt + \cdots + dt^{m-k})e^{\lambda t}, \\ \quad\vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ \varphi_n(t) = (p + qt + \cdots + st^{m-k})e^{\lambda t}. \end{cases}$$

4. eset. Többszörös komplex gyök az előzőekhez hasonlóan kezelhető.

■ Az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

Megjegyzés. Először előállítjuk a homogén egyenlet általános megoldását, majd meghatározzuk az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását. Az **állandók variálásának** a módszerét minden esetben alkalmazhatjuk. Ez sokszor sok számolást igényel. Az n-edrendű egyenletekhez hasonlóan azonban speciális b függvények esetén itt is alkalmazhatjuk a **próbafüggvény módszert**. Általános eredményt nem fogalmazunk meg, csupán azt jegyezzük meg, hogy az inhomogén egyenlet egy megoldását kereshetjük a b függvényhez hasonló alakban. Például könnyen meg lehet mutatni azt, hogy *konstans inhomogenitás eseteén az inhomogén egyenletnek van konstans megoldása.*

F10. Határozza meg az alábbi homogén lineáris rendszerek, illetve kezdetiérték-problémák megoldását:

(a) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 & x_2(0) = 1, \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5)$;

(b) $\begin{cases} x_1' = 3x_1, \\ x_2' = 3x_2, \end{cases}$

$(\lambda_{1,2} = 3)$;

(c) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2, \\ x_2' = 5x_1 + 2x_2, \end{cases}$

$(\lambda_1 = 3 + 2i, \lambda_2 = 3 - 2i)$;

(d) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2, \\ x_2' = -x_1 + x_2, \end{cases}$

$(\lambda_{1,2} = 2)$;

F11. Határozza meg az alábbi homogén lineáris rendszerek, illetve kezdetiérték-problémák megoldását:

(a) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + 2x_2, \\ x_2' = 2x_1 + 6x_2, \end{cases}$

$(\lambda_1 = 7, \lambda_2 = 2)$;

(b) $\begin{cases} x_1' = 5x_1, \\ x_2' = 5x_2, \end{cases}$

$(\lambda_{1,2} = 5)$;

(c) $\begin{cases} x_1' = -3x_1 + 2x_2, \\ x_2' = -2x_1 + x_2, \end{cases}$

$(\lambda_{1,2} = -1)$;

(d) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2, \quad x_1(0) = 0, \\ x_2' = 4x_1 - x_2, \quad x_2(0) = 0, \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i)$;

(e) $\begin{cases} x_1' = x_1 - x_2 + x_3, \\ x_2' = x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' = 2x_1 - x_2, \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$;

(f) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - 2x_2 - x_3, \\ x_2' = 3x_1 - 4x_2 - 3x_3, \\ x_3' = 2x_1 - 4x_2; \end{cases}$

$(\lambda_1 = -5, \lambda_{2,3} = 2)$.

(g) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 - x_3, \\ x_2' = 2x_1 + 2x_2 - x_3, \\ x_3' = 2x_1, \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1, \lambda_{2,3} = 2)$;

(h) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2, \\ x_2' = 3x_1 + x_2 - x_3, \\ x_3' = x_1 + x_3, \end{cases}$

$(\lambda_{1,2,3} = 2)$.

F12. Határozza meg az alábbi inhomogén lineáris rendszerek, illetve kezdetiérték-problémák megoldását:

(a) $\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + e^{2t} \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 6x_2(t); \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 1 \\ x_2'(t) = 4x_2(t) - 2x_1(t) - 2, \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0;$

(c) $\begin{cases} x_1'(t) = -5x_2(t) - 10 \\ x_2'(t) = x_1(t) - 2x_2(t), \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0;$

(d) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1 - x_2(t) + 6 \\ x_2'(t) = x_2(t) - 4x_2(t) - 12, \end{cases} \qquad x_1(0) = -2, \quad x_2(0) = 4;$

(e) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + 2x_2(t) + e^t \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + x_2(t) + 1; \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) - x_2(t) + \dfrac{1}{\cos t} \\ x_2'(t) = 2x_1(t) - x_2(t); \end{cases}$

(g) $\begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + x_2(t) \\ x_2'(t) = -x_1(t) + x_2(t) + e^{2t}. \end{cases}$

5. n-edrendű lineáris differenciálegyenletek

■ Általános eredmények

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy az $a_i : I \to \mathbb{R}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ és a $b : I \to \mathbb{R}$ függvények folytonosak. Ekkor az

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = b$$

feladatot **n-edrendű lineáris differenciálegyenletnek** nevezzük. Ha $b \equiv 0$, akkor az egyenlet **homogén**, az ellenkező esetben **inhomogén**. **Állandó együtthatós** az egyenlet, ha az a_i $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ együtthatók valós számok.

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum, és tegyük fel, hogy az

$$a_i : I \to \mathbb{R} \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1) \quad \text{és a} \quad b : I \to \mathbb{R}$$

függvények folytonosak. Ha $\tau \in I$ és $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1} \in \mathbb{R}$, akkor az

$$\begin{gathered} x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = b, \\ x(\tau) = \xi_0, \; x'(\tau) = \xi_1, \; \ldots, \; x^{(n-1)}(\tau) = \xi_{n-1} \end{gathered}$$

feladatot az n-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó **kezdetiérték-problémának**nevezzük.

Tétel. (A megoldások létezése és egyértelműsége.) *Az n-edrendű lineáris differenciálegyenletre vonatkozó tetszőleges kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg, és minden teljes megoldás értelmezési tartománya az egész I intervallum.*

Tétel. (A megoldáshalmaz szerkezete.)

1^o *A **homogén** n-edrendű lineáris differenciálegyenlet teljes megoldásainak az $\mathcal{M}_h$ halmaza n-dimenziós lineáris tér $\mathbb{R}$ felett.*

2^o *Legyen ψ_p az **inhomogén** n-edrendű lineáris differenciálegyenlet egy (partikuláris) megoldása. Ekkor az egyenlet tetszőleges megoldása*

$$\psi = \varphi + \psi_p$$

alakú, ahol φ a homogén egyenlet egy megoldása.

Definíció. A homogén egyenlet $\mathcal{M}_h$ megoldáshalmazának egy bázisát a homogén egyenlet egy **alaprendszerének** nevezzük.

1. megjegyzés. A fenti tétel 2^o állítását így is megjegyezhetjük:

$$\boxed{\begin{matrix}\text{az inhomogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{matrix}} = \boxed{\begin{matrix}\text{a homogén egyenlet}\\ \text{általános megoldása}\end{matrix}} + \boxed{\begin{matrix}\text{az inhomogén egyenlet}\\ \text{egy partikuláris megoldása}\end{matrix}}$$

2. megjegyzés. Inhomogén egyenlet megoldásának előállításához tehát ismernünk kell

(a) a homogén egyenlet egy alaprendszerét és

(b) az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását.

Az **állandók variálásának a módszerével** a homogén egyenlet alaprendszerének (n lineárisan független megoldásának) az ismeretében egy partikuláris megoldás már előállítható.

Ez azt jelenti, hogy inhomogén egyenlet megoldásához elegendő a homogén egyenlet egy alaprendszerét meghatározni. Az alaprendszer előállítására azonban *csak* az állandó együtthatós egyenletek esetében van általános módszer.

Tétel. (Az állandók variálásának a módszere.) *Tekintsük az*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = b(t) \qquad (t \in I)$$

inhomogén egyenletet, valamint a neki megfelelő

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) = 0 \qquad (t \in I)$$

homogén egyenletet.

Legyen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ a homogén egyenlet egy alaprendszere. Ekkor az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása előállítható a

$$\psi_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + \cdots + c_n(t)\varphi_n(t) \qquad (t \in I)$$

alakban, ahol a $c'(t) := \big(c_1'(t), \ldots, c_n'(t)\big)^T$ függvények a következő lineáris algebrai egyenletrendszer megoldásai

(10)
$$\Phi(t) \cdot c'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ b(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in I),$$

ahol

$$\Phi(t) := \begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \ldots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \ldots & \varphi_n'(t) \\ \vdots & \ldots & \vdots \\ \varphi_1^{(n-1)}(t) & \ldots & \varphi_n^{(n-1)}(t) \end{bmatrix} \qquad (t \in I)$$

a Wronski-féle mátrix.

Megjegyzés. A ψ_p partikuláris megoldás előállításához tehát először meg kell oldani a (10) lineáris *algebrai* egyenletrendszert a $c_1'(t), \dots, c_n'(t)$ ismeretlen függvényekre, amelyekből már integrálással előállíthatók a számunkra szükséges $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ $(t \in \mathbb{R})$ függvények.

Tétel. (A szuperpozíció elve.) *Tegyük fel, hogy* ψ_1 *az*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b_1,$$

ψ_2 *pedig az*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b_2$$

egyenletnek a megoldásai. Ekkor $\psi_1 + \psi_2$ *megoldása az*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_0 x = b_1 + b_2$$

egyenletnek.

■ Az állandó együtthatós n-edrendű homogén lineáris differenciálegyenlet egy alaprendszerének az előállítása

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$. Az

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \tag{11}$$

feladatot **n-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris** differenciálegyenletnek nevezzük.

Megjegyzés. Az általános eredményekből következik, hogy a (11) egyenletnek van n számú lineárisan független, az egész $\mathbb{R}$-en értelmezett teljes megoldása; ezt neveztük az egyenlet **alaprendszerének**. A jelen esetben egy alaprendszer explicit módon megadható.

Ehhez az alábbi *észrevételből* indulunk ki: Keressünk megoldásokat az

$$e^{\lambda t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakú függvények körében, ahol λ egy valós paraméter. Egyszerűen igazolható, hogy *egy* megoldást pontosan akkor kapunk, ha λ-ra fennáll a

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0$$

egyenlőség. Ez a motivációja a következő fogalomnak.

Definíció. Az

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0$$
$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R})$$

egyenlet **karakterisztikus polinomjának** nevezzük a

$$K(z) := z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

n-edfokú polinomot.

1. megjegyzés. Emlékeztetünk az alábbi két állításra:

1^o Az algebra alaptételéből következik, hogy minden n-edfokú polinomnak multiplicitással számolva pontosan n számú (általában) komplex gyöke van.

2^o Ha egy *valós együtthatós* polinomnak a $\lambda = \alpha + i\beta$ komplex szám m-szeres gyöke, akkor $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ is m-szeres gyöke a polinomnak.

2. megjegyzés. A következő tételben explicit képletet adunk meg a homogén egyenlet egy alaprendszerére, vagyis n számú lineárisan független megoldására abban az esetben, ha *ismerjük* az egyenlet $K(z)$ karakterisztikus polinomjának a gyökeit. Az előző megjegyzés állításai alapján elég az m-szeres valós gyökhöz m, az m-szeres (valódi) komplex gyökhöz pedig $2m$ számú lineárisan független valós megoldást megadni.

Tétel. *Tegyük fel, hogy az*

$$x^{(n)} + a_{n-1}x^{(n-1)} + \cdots + a_1 x' + a_0 x = 0 \qquad (a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}) \tag{12}$$

egyenlet

$$K(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

karakterisztikus polinomjának a λ szám m-szeres gyöke.

(i) *Ha $\lambda \in \mathbb{R}$ **valós** szám, akkor a*

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda t}, \quad \varphi_2(t) = te^{\lambda t}, \quad \ldots, \quad \varphi_m(t) = t^{m-1}e^{\lambda t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények a (12) egyenlet lineárisan független valós megoldásai.

(ii) *Ha $\lambda = \alpha + i\beta$ $(\beta \neq 0)$ **komplex** szám, akkor $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$ is m-szeres gyöke a $K(z)$ polinomnak. Ebben az esetben a*

$$\begin{array}{cc}
\varphi_1(t) = e^{\alpha t}\cos(\beta t), & \varphi_2(t) = e^{\alpha t}\sin(\beta t), \\
\varphi_3(t) = te^{\alpha t}\cos(\beta t), & \varphi_4(t) = te^{\alpha t}\sin(\beta t), \\
\vdots & \vdots \\
\varphi_{2m-1}(t) = t^{m-1}e^{\alpha t}\cos(\beta t), & \varphi_{2m}(t) = t^{m-1}e^{\alpha t}\sin(\beta t)
\end{array}$$
$$(t \in \mathbb{R})$$

függvények a (12) lineárisan független valós megoldásai.

Megjegyzés. Az eddigiekben csak *valós egyenleteket és azok valós megoldásait vizsgáltuk.* A (12) egyenlet **komplex megoldásait** is tekinthetnénk. Komplex értékű függvények esetében is értelmezhető a differenciálegyenlet, és a komplex megoldásokra a valós megoldásokhoz hasonló eredmények érvényesek.

Igazolható például az, hogy ha a $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ komplex szám gyöke a $K(z)$ karakterisztikus polinomnak, akkor a

$$\varphi(t) = e^{\lambda t} = e^{\alpha t + i\beta t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény a homogén egyenlet egy *komplex megoldása.*

Abban az esetben, ha $K(z)$ *valós* együtthatós, akkor $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta \in \mathbb{C}$ is gyöke $K(z)$-nek, és a

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\lambda t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big) \\ \varphi_2(t) &= e^{\bar{\lambda} t} = \overline{e^{\lambda t}} = \overline{\varphi_1(t)} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) - i\sin(\beta t)\big) \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

függvények a homogén egyenlet lineárisan független *komplex* megoldásai.

Két komplex értékű megoldás összege, illetve különbsége is megoldás, továbbá bármely $z \in \mathbb{C}$ esetén $\operatorname{Re} z = \frac{z+\bar{z}}{2} \in \mathbb{R}$, $\operatorname{Im} z = \frac{z-\bar{z}}{2i} \in \mathbb{R}$. Így a $K(z)$ polinom $\lambda, \bar{\lambda}$ komplex konjugált gyök-párhoz az alábbi alakban adható meg két lineárisan független, **valós** megoldás:

$$\begin{aligned} &\mathbb{R} \ni \mapsto \operatorname{Re} \varphi_1(t), \\ &\mathbb{R} \ni \mapsto \operatorname{Im} \varphi_1(t). \end{aligned}$$

■ Az állandó együtthatós n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának az előállítása

Megjegyzés. Az

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = b(t) \qquad (t \in I)$$

állandó együtthatós n-edrendű inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldásának az előállításához felhasználhatjuk az **állandók variálásának a módszerét**. Ez elvben mindig célhoz vezet, azonban esetenként meglehetősen fáradságos, sok számolást igénylő eljárás. Ezért „megbecsülendők” azok a módszerek, amelyek révén más úton juthatunk el egy partikuláris megoldáshoz. Egy ilyen módszer a **próbafüggvény-módszer**, amelyik bizonyos speciális jobboldal, vagyis b függvény esetén alkalmazható.

Tétel. (Próbafüggvény-módszer.) *Tekintsük az*

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1 x'(t) + a_0 x(t) = P(t)e^{\alpha t}\big(c\sin(\beta t) + d\cos(\beta t)\big) \quad (t \in \mathbb{R})$$

egyenletet, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}; c, d; \alpha, \beta$ *valós számok és* P *egy polinom. Legyen*

$$\mu := \alpha + i\beta \quad \textit{és}$$

$$\tilde{k} := \begin{cases} 0, & \textit{ha } \mu \textit{ nem gyöke a homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának,} \\ k, & \textit{ha } \mu \textit{ k-szoros gyöke a homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának.} \end{cases}$$

Ekkor az egyenletnek létezik

$$\psi_p(t) = t^{\tilde{k}} G(t) \cdot e^{\alpha t} \big(A \sin(\beta t) + B \cos(\beta t) \big)$$

alakú megoldása, ahol $A, B \in \mathbb{R}$ *és* G *egy legfeljebb* $(\deg P)$*-edfokú polinom.*

F13. Adja meg az alábbi állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását:

(a) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0;$

(b) $x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 0;$

(c) $x''(t) + 6x'(t) + 34x(t) = 0;$

(d) $2x''(t) - x'(t) - x(t) = 0;$

(e) $3x''(t) = 5x'(t);$

(f) $x''(t) - 6x'(t) + 4x(t) = 0;$

(g) $16x''(t) + 24x'(t) + 9x(t) = 0;$

(h) $x''(t) - 4x'(t) + 8x(t) = 0;$

(i) $9x''(t) + 4x(t) = 0.$

F14. Határozza meg az alábbi egyenletek általános megoldásait:

(a) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \dfrac{1}{1+e^t};$

(b) $x''(t) + x(t) = \dfrac{1}{\cos t} \qquad \big(t \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)\big);$

(c) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \dfrac{e^t}{t} \qquad (t > 0);$

(d) $x''(t) + 2x'(t) + 5x(t) = \dfrac{e^{-t}}{\cos(2t)};$

(e) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = \dfrac{e^{2t}}{\sqrt{1-t^2}}.$

(A partikuláris megoldás meghatározásához használjuk az állandók variálásának a módszerét.)

F15. Oldja meg az

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = t$$

differenciálegyenletet. A partikuláris megoldás meghatározásához használja az állandók variálásának a módszerét és a próbafüggvény módszert is.

F16. Milyen alakban keresi az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását a probafüggvény-módszer alapján, ha adottak a homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának a gyökei és az inhomogén egyenlet jobb oldala:

(a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2; \quad b(t) = at^2 + bt + c;$

(b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1; \quad b(t) = at^2 + bt + c;$

(c) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0; \quad b(t) = at^2 + bt + c;$

(d) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1; \quad b(t) = (at + b)e^{-t};$

(e) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1; \quad b(t) = \sin t;$

(f) $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i; \quad b(t) = \cos t;$

(g) $\lambda_1 = k,\ \lambda_2 = k; \quad b(t) = (at^2 + bt + c)e^{kt}.$

F17. Határozza meg az alábbi inhomogén másodrendű differenciálegyenletek általános megoldását. (A partikuláris megoldás meghatározásához használja a próbafüggvény-módszert.)

(a) $x''(t) - x(t) = (2t + 3)e^t;$

(b) $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 3t + 2\cos t;$

(c) $x''(t) - x(t) = 2e^t - t^2;$

(d) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = \sin t;$

(e) $x''(t) - 5x'(t) + 4x(t) = 4t^2e^{2t};$

(f) $x''(t) + 3x'(t) - 4x(t) = e^{-4t} + te^{-t};$

(g) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t\cos t;$

(h) $x^{(4)}(t) + x^{(2)}(t) = t - \sin t.$

F18. Oldja meg a következő kezdetiérték-problémákat:

(a) $x''(t) - 2x'(t) = 2e^t, \qquad x(1) = -1, \quad x'(1) = 0;$

(b) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 1 + 14e^{-t}, \qquad x(0) = 5, \quad x'(0) = 1;$

(c) $x''(t) + x'(t) = 3 + 2\cos t, \qquad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$

Néhány feladat megoldása

Szétválasztható változójú (szeparábilis) differenciálegyenletek

1. példa. *Oldjuk meg az*

$$x'(t) = \frac{1}{2+t} \cdot \frac{x^2(t) - 1}{x(t)} \tag{13}$$

differenciálegyenletet, és szemléltessük a megoldásokat.

Megoldás. (13) szétválasztható változójú differenciálegyenlet. Az erre vonatkozó tétel alkalmazásához tekintsük az alábbi függvényeket:

$$g(s) := \frac{1}{2+s}, \qquad s \in I := \begin{cases} (-\infty, -2), \\ (-2, +\infty). \end{cases}$$

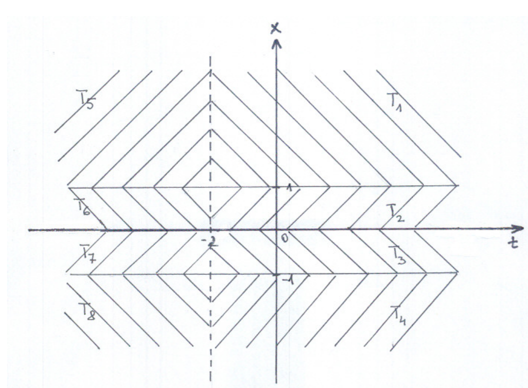
Ezek a függvények folytonosak az I intervallumon.

Legyen továbbá

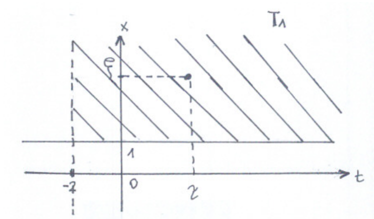
$$h(s) := \frac{s^2 - 1}{s}, \qquad s \in J := \begin{cases} (-\infty, -1), \\ (-1, 0), \\ (0, 1), \\ (1, +\infty). \end{cases}$$

A h függvények folytonosak a J intervallumon, és ott nem veszik fel a 0 értéket.

(13) jobb oldalának az értelmezési tartományát (ami $\mathbb{R}^2$ egy részhalmaza) a fenti intervallumokkal az alábbi 8 tartományra osztjuk (ezek mindegyikén már teljesülnek a szétválasztható változójú differenciálegyenletre vonatkozó tétel feltételei), majd ezeken oldjuk meg az egyenletet.



$\boxed{T_1 := I \times J = (-2, +\infty) \times (1, +\infty)}$ Vegyünk egy $(\tau, \xi) \in T_1$ kezdeti értéket:



Az

$$(14) \qquad x' = g \cdot h \circ x, \qquad x(\tau) = \xi$$

kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg. Jelöljük $\tilde{\varphi}$-mal a teljes megoldást. Ennek értelmezési tartománya az a τ-t tartalmazó maximális intervallum, amely benne van az

$$I^* = \left\{ t \in I \;\middle|\; \inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} < \int_\tau^t g < \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} \right\}$$

halmazban.

Mivel

$$\int_\tau^t g(s)\, ds = \int_\tau^t \frac{1}{2+s}\, ds = \ln \frac{2+t}{2+\tau},$$
$$\int_\xi^u \frac{1}{h(s)}\, ds = \int_\xi^u \frac{s}{s^2-1}\, ds = \left[\tfrac{1}{2}\ln(s^2-1)\right]_\xi^u = \tfrac{1}{2} \ln \frac{u^2-1}{\xi^2-1},$$

és

$$\inf_{u>1} \int_\xi^u \frac{1}{h(s)}\, ds = \inf_{u>1} \tfrac{1}{2} \ln \frac{u^2-1}{\xi^2-1} = -\infty,$$
$$\sup_{u>1} \int_\xi^u \frac{1}{h(s)}\, ds = \sup_{u>1} \tfrac{1}{2} \ln \frac{u^2-1}{\xi^2-1} = +\infty,$$

ezért

$$I^* = \left\{ t > -2 \mid -\infty < \ln \frac{2+t}{2+\tau} < +\infty \right\} = (-2, +\infty),$$

amiből következik, hogy a teljes megoldás értelmezési tartománya a $(-2, +\infty)$ intervallum:

$$\mathcal{D}_{\tilde{\varphi}} = (-2, +\infty).$$

A megoldóképlet:

$$\int_\xi^{\tilde{\varphi}(t)} \frac{1}{h(s)}\, ds = \int_\tau^t g(s)\, ds \qquad (t \in \tilde{I}),$$

ezért

$$\frac{\tilde{\varphi}^2(t)-1}{\xi^2-1}=\left(\frac{t+2}{\tau-2}\right)^2 \qquad \big(t\in\tilde{I}=(-2,+\infty)\big). \tag{15}$$

A (14) kezdetiérték-probléma teljes megoldását a (15) képlet implicit alakban adja meg. A megoldás szemléltetésére a következő lehetőségünk kínálkozik: a (15) egyenletből $\tilde{\varphi}(t)$-t kifejezzük (ezt most meg lehet tenni), majd (most meglehetősen hosszú) teljes függvényvizsgálatot végzünk. Sokkal egyszerűbben kaphatunk gyors információt a megoldás viselkedéséről, ha figyelembe vesszük, hogy $\tilde{\varphi}$ megoldása a (13) differenciálegyenletnek, továbbá T_1-en

$$\tilde{\varphi}'(t)=\frac{1}{2+t}\cdot\frac{\tilde{\varphi}^2(t)-1}{\tilde{\varphi}(t)}>0 \qquad \forall t\in\tilde{I}=(-2,+\infty).$$

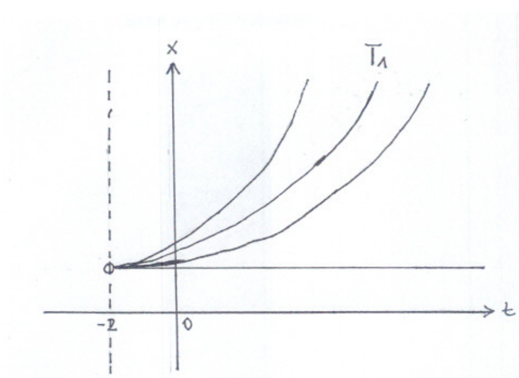
Ez azt jelenti, hogy $\tilde{\varphi}(t)$ szigorúan monoton növekedő $\tilde{I}$-n. (15)-ből az is közvetlenül leolvasható, hogy

$$\lim_{t\to-2+0}\tilde{\varphi}(t)=1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{t\to+\infty}\tilde{\varphi}(t)=+\infty.$$

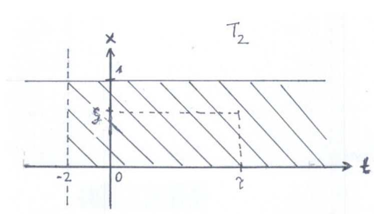
A $\tilde{\varphi}'=g\cdot h\circ\tilde{\varphi}$ egyenlőséget deriválva azt kapjuk, hogy

$$\tilde{\varphi}''(t)>0 \quad (t\in\tilde{I}),$$

ezért $\tilde{\varphi}$ konvex az $\tilde{I}$ intervallumon. $\tilde{\varphi}$ fenti tulajdonságai tetszőleges $(\tau,\xi)\in T_1$ kezdeti érték esetén érvényesek. A T_1 tartományon a teljes megoldásokat az alábbi ábrán szemléltetjük:



$\boxed{T_2:=I\times J=(-2,+\infty)\times(0,1)}$ Vegyünk egy $(\tau,\xi)\in T_2$ kezdeti értéket:



Jelöljük most is $\tilde{\varphi}$-vel a globálisan egyértelműen megoldható (14) kezdetiérték-probléma teljes megoldását. Az előző számolások felhasználásával azt kapjuk, hogy

$$\inf_{0<u<1} \int_{\xi}^{u} \frac{1}{h(s)}\, ds = \inf_{0<u<1} \tfrac{1}{2} \ln \frac{1-u^2}{1-\xi^2} = -\infty,$$
$$\sup_{0<u<1} \int_{\xi}^{u} \frac{1}{h(s)}\, ds = \sup_{0<u<1} \tfrac{1}{2} \ln \frac{1-u^2}{1-\xi^2} = \tfrac{1}{2} \ln \frac{1}{1-\xi^2},$$

ezért

$$I^* = \left\{ t > -2 \mid -\infty < \ln \frac{2+t}{2+\tau} < \ln \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} \right\} = \left(-2, -2 + \frac{2+\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) =: (-2, t_1).$$

A teljes megoldás értelmezési tartománya ebben esetben tehát a $(-2, t_1)$ intervallum:

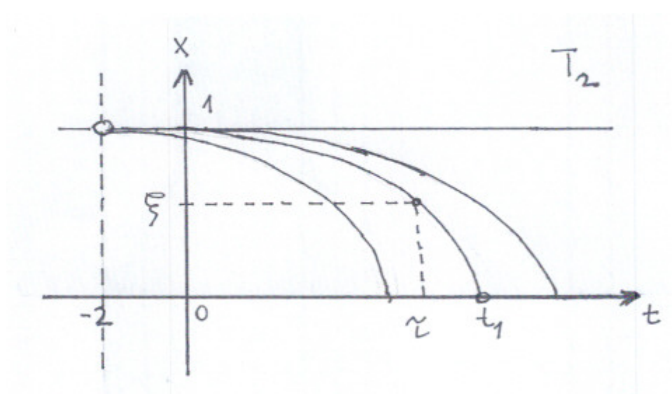
$$\mathcal{D}_{\tilde{\varphi}} = \left(-2, -2 + \frac{2+\tau}{\sqrt{1-\xi^2}} \right).$$

A megoldóképlet most is (15). Ebből és a $\tilde{\varphi}$-ra vonatkozó differenciálegyenletből azt kapjuk, hogy minden $(\tau, \xi) \in T_2$ esetén $\tilde{\varphi} \downarrow \tilde{I}$-n,

$$\lim_{t \to -2+0} \tilde{\varphi}(t) = 1, \qquad \lim_{t \to t_1 - 0} \tilde{\varphi}(t) = 0$$

és $\tilde{\varphi}'' < 0$ $\tilde{I}$-n.

A T_2 tartományon a megoldásokat az alábbi ábrán szemléltetjük:



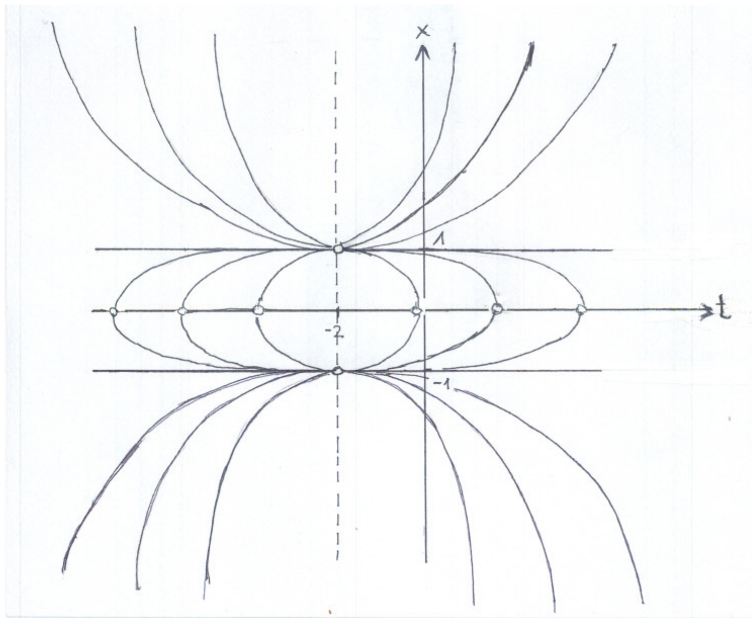
A T_3–T_8 tartományokon a differenciálegyenlet hasonló módon oldható meg. Vegyük azonban észre azt, hogy a fentieken kívül egyéb számolásokat nem kell elvégezni; a szimmetriákat figyelembe véve szinte közvetlenül felrajzolhatjuk a megoldásokat.

Meg kell még vizsgálnunk azt az esetet, amikor (14)-ben $\xi = \pm 1$. Ekkor a

$$(-\infty, -2) \ni t \mapsto \pm 1,$$
$$(-2, +\infty) \ni t \mapsto \pm 1$$

függvények teljes megoldások.

Az (13) egyenlet teljes megoldásait az alábbi ábrán szemléltetjük:



2. példa. *Oldjuk meg a*

$$2tx(t)x'(t) = 1 - x^2(t), \quad x(1) = \tfrac{1}{2}$$

kezdetiérték-problémát, és szemléltessük a megoldást.

Megoldás. Mivel

$$x'(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1 - x^2(t)}{2x(t)},$$

ezért szétválasztható változójú differenciálegyenletről van szó. A kezdeti feltételt figyelembe véve az egyenletet az $\mathbb{R}^+ \times (0,1) \subset \mathbb{R}^2$ tartományon tekintjük.

A

$$g(t) := \frac{1}{t} \quad (t \in \mathbb{R}^+ =: I), \qquad h(u) := \frac{1 - u^2}{2u} \quad (u \in (0,1) =: J)$$

jelölésekkel a feladat így írható:

$$x'(t) = g(t)h\big(x(t)\big), \qquad x(1) = \tfrac{1}{2}.$$

Mivel mindegyik függvény folytonos, továbbá $0 \notin \mathcal{R}_h$, ezért a fenti kezdetiérték-probléma globálisan egyértelműen oldható meg. Jelöljük $\tilde{\varphi}$-mal a teljes megoldást. Ennek értelmezési tartománya az a τ-t tartalmazó maximális intervallum, amely benne van az

$$I^* = \left\{ t \in I \;\middle|\; \inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} < \int_\tau^t g < \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} \right\}$$

halmazban.

Mivel

$$\int_{1/2}^u \frac{1}{h(s)}\,ds = \int_{1/2}^u \frac{2s}{1-s^2}\,ds = \big[-\ln(1-s^2)\big]_{1/2}^u = \ln\frac{3/4}{1-u^2}$$

és

$$\int_1^t g(s)\,ds = \int_1^t \frac{1}{s}\,ds = \ln t,$$

ezért

$$\inf_{u \in J} \int_{1/2}^u \frac{1}{h} = \inf_{0<u<1} \ln\frac{3/4}{1-u^2} = \ln\frac{3}{4},$$
$$\sup_{u \in J} \int_{1/2}^u \frac{1}{h} = \sup_{0<u<1} \ln\frac{3/4}{1-u^2} = +\infty,$$

következésképpen

$$I^* = \left\{ t \in \mathbb{R}^+ \mid \ln\frac{3}{4} < \ln t < +\infty \right\} = \big(\tfrac{3}{4}, +\infty\big),$$

tehát

$$\mathcal{D}_{\tilde{\varphi}} = \big(\tfrac{3}{4}, +\infty\big).$$

Azt is tudjuk, hogy a $\tilde{\varphi}$ teljes megoldásra

$$\int_{1/2}^{\tilde{\varphi}(t)} \frac{1}{h} = \int_1^t g \qquad (t \in \mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}),$$

vagyis

$$\ln\frac{3/4}{1-\tilde{\varphi}^2(t)} = \ln t \qquad \big(t \in (\tfrac{3}{4}, +\infty)\big)$$

teljesül. Ebből az egyenletből $\tilde{\varphi}(t)$ kifejezhető. A kezdetiérték-probléma teljes megoldása tehát:

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{1 - \frac{3}{4t}} \qquad \big(t \in (\tfrac{3}{4}, +\infty)\big).$$

Mivel

$$\tilde{\varphi}'(t) = \frac{3}{4t^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4t}}} > 0 \qquad \big(t \in (\tfrac{3}{4}, +\infty)\big)$$

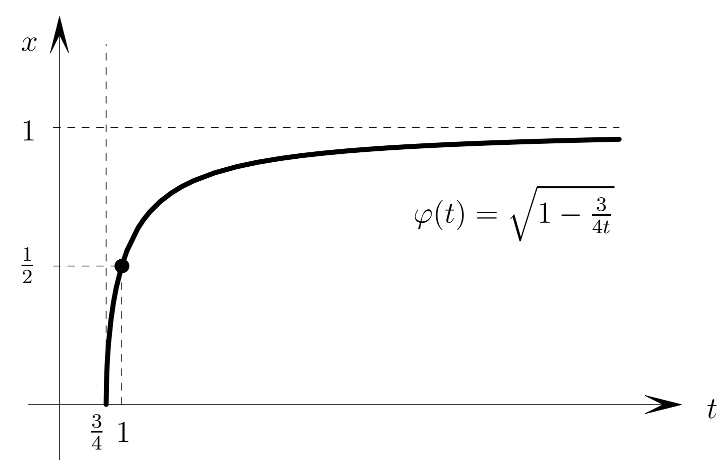
(vagy $\tilde{\varphi}'(t) = \frac{1}{t} \cdot \frac{1-\tilde{\varphi}^2(t)}{2\tilde{\varphi}(t)} > 0$, mivel $\tilde{\varphi}(t) \in (0,1)$) és

$$\tilde{\varphi}''(t) = -\frac{3}{2t^3} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\frac{3}{4t}}} + \frac{3}{4t^2} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{1}{\big(1-\frac{3}{4t}\big)^{3/2}} \cdot \frac{3}{4t^2} < 0 \qquad \big(t \in (\tfrac{3}{4}, +\infty)\big),$$

ezért $\tilde{\varphi}$ szigorúan növekedő és konkáv $\mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}$-n. A határértékek:

$$\lim_{t \to \frac{3}{4}+0} \tilde{\varphi}(t) = 0, \qquad \lim_{t \to +\infty} \tilde{\varphi}(t) = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{t \to \frac{3}{4}+0} \tilde{\varphi}'(t) = +\infty.$$

A kezdetiérték-probléma teljes megoldásának a képe:



3. példa. *Oldjuk meg*

$$x'(t) = \cos t \cdot \frac{1-x^2(t)}{x(t)}, \quad x(0) = \sqrt{1-e^{-1}}$$

kezdetiérték-problémát, és szemléltessük a megoldást.

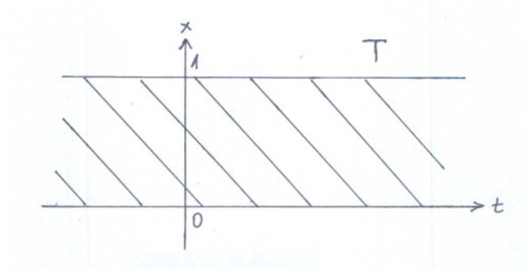
Megoldás. Legyen

$$g(s) := \cos s \qquad (s \in I := \mathbb{R}),$$
$$h(s) := \frac{1-s^2}{s} \qquad \big(s \in J := (0,1)\big),$$

és tekintsük az

$$x'(t) = f(t) \cdot g\big(x(t)\big), \qquad x(0) = \sqrt{1-e^{-1}} =: \xi$$

kezdetiérték-problémát a $T := I \times J = \mathbb{R} \times (0,1)$ tartományon.



A g és a h függvény folytonos, továbbá $0 \notin \mathcal{D}_h$, ezért a fenti probléma globálisan egyértelműen oldható meg. A $\tilde{\varphi}$ teljes megoldás értelmezési tartományának a meghatározásához tekintsük az

$$I^* := \left\{ t \in I \;\middle|\; \inf_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} < \int_\tau^t g < \sup_{u \in J} \int_\xi^u \frac{1}{h} \right\}$$

halmazt. Mivel

$$\int_0^t g = \int_0^t \cos s \, ds = \sin t \qquad (t \in I),$$
$$\int_\xi^u \frac{1}{h} = \int_\xi^u \frac{s}{1-s^2} \, s = \ln \sqrt{\frac{1-\xi^2}{1-u^2}} = \ln \sqrt{\frac{1}{e(1-u^2)}} \qquad (u \in J),$$

ezért

$$\inf_{0<u<1} \int_\xi^u \frac{1}{h} = \inf_{0<u<1} \ln \sqrt{\frac{1}{e(1-u^2)}} = \ln e^{-1/2} = -\tfrac{1}{2},$$
$$\sup_{0<u<1} \int_\xi^u \frac{1}{h} = \sup_{0<u<1} \ln \sqrt{\frac{1}{e(1-u^2)}} = +\infty,$$

tehát

$$I^* = \left\{ t \in \mathbb{R} \mid -\tfrac{1}{2} < \sin t \right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left(-\tfrac{\pi}{6} + 2k\pi, \tfrac{7\pi}{6} + 2k\pi \right).$$

Az I^* halmaz ebben az esetben *nem intervallum*; $\mathcal{D}_{\tilde{\varphi}}$ a legbővebb 0-t tartalmazó I^*-beli intervallum:

$$\mathcal{D}_{\tilde{\varphi}} = \left(-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6} \right).$$

A

$$\int_\xi^{\tilde{\varphi}(t)} \frac{s}{1-s^2} \, ds = \int_0^t \cos s \, ds \qquad \left(t \in (-\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{7\pi}{6}) \right)$$

megoldóképletből azt kapjuk, hogy

$$(*) \qquad \ln \frac{1}{\sqrt{e(1-\tilde{\varphi}^2(t))}} = \sin t \qquad \left(t \in \left(-\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{7\pi}{6}\right)\right),$$

azaz

$$\tilde{\varphi}(t) = \sqrt{1 - e^{-(1+2\sin t)}} \qquad \left(t \in \left(-\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{7\pi}{6}\right)\right).$$

A megoldás szemléltetéséhez vegyük észre azt, hogy a $\tilde{\varphi}$-re fennálló differenciálegyenletből látható, hogy

$$\tilde{\varphi}'(t) < 0, \quad \text{ha } -\tfrac{\pi}{6} < t < \tfrac{\pi}{2}, \qquad \tilde{\varphi}'(t) > 0, \quad \text{ha } \tfrac{\pi}{2} < t < \tfrac{7\pi}{6},$$

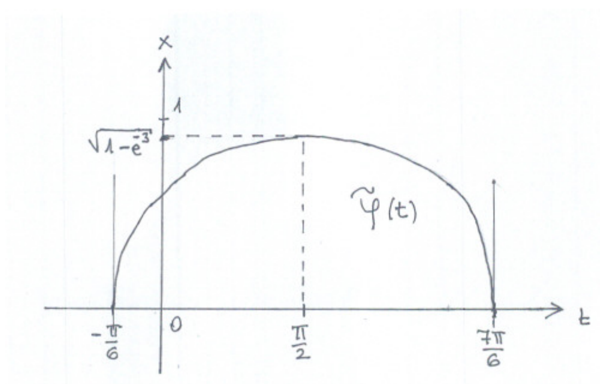
ezért

$$\tilde{\varphi}' \quad \uparrow \quad \left(-\tfrac{\pi}{6}, \tfrac{\pi}{2}\right)\text{-en}, \qquad \tilde{\varphi}' \quad \downarrow \quad \left(\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{7\pi}{6}\right)\text{-on}.$$

A $(*)$ képletből következik, hogy

$$\lim_{t \to -\pi/6} \tilde{\varphi}(t) = \lim_{t \to 7\pi/6} \tilde{\varphi}(t) = 0.$$

Belátható az is, hogy $\tilde{\varphi}$ konkáv a $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right)$ intervallumon. A fentiek alapján a teljes megoldás képe:



Lineáris differenciálegyenlet-rendszerek

1. példa. *Határozza meg az alábbi homogén lineáris rendszerek, illetve kezdetiérték-problémák megoldását:*

(a) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 + x_2, & x_1(0) = 0, \\ x_2' = 3x_1 + 4x_2 & x_2(0) = 1, \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5)$;

(b) $\begin{cases} x_1' = 3x_1, \\ x_2' = 3x_2, \end{cases}$

$(\lambda_{1,2} = 3)$;

(c) $\begin{cases} x_1' = 4x_1 - x_2, \\ x_2' = 5x_1 + 2x_2, \end{cases}$

$(\lambda_1 = 3 + 2i, \lambda_2 = 3 - 2i)$;

(d) $\begin{cases} x_1' = 3x_1 + x_2, \\ x_2' = -x_1 + x_2, \end{cases}$

$(\lambda_{1,2} = 2)$;

Megoldás. (a) Az $A := \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ együtthatómátrix sajátértékei a

$$\det \begin{bmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 3 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = (\lambda - 1)(\lambda - 5)$$

karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$.

A $\lambda_1 = 1$ sajátértékhez tartozó $s^{(1)} = (s_1, s_2)^T$ sajátvektor az

$$(A - 1 \cdot E_3)s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad s_1 + s_2 = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer egy (nemtriviális) megoldása: $s^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A $\lambda_2 = 5$ sajátértékhez tartozó $s^{(2)} = (s_1, s_2)^T$ sajátvektor pedig az

$$(A - 5 \cdot E_3)s^{(1)} = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad -3s_1 + s_2 = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer egy (nemtriviális) megoldása: $s^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$.

A

$$\varphi^{(1)}(t) := s^{(1)} e^{\lambda_1 t} = \begin{bmatrix} -e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \qquad \varphi^{(2)}(t) := s^{(2)} e^{\lambda_2 t} = \begin{bmatrix} e^{5t} \\ 3e^{5t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények a differenciálegyenlet lineárisan független megoldásai. Az általános megoldás:

$$\varphi(t) := \begin{bmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \end{bmatrix} = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} -c_1e^t + c_2e^{5t} \\ c_1e^t + 3c_2e^{5t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges valós számok.

A kezdetiérték-probléma megoldása: Mivel

$$\varphi(0) = \begin{bmatrix} \varphi_1(0) \\ \varphi_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c_1 + c_2 \\ c_1 + 3c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} -c_1 + c_2 &= 0, \\ c_1 + 3c_2 &= 1, \end{aligned}$$

ezért $c_1 = c_2 = \frac{1}{4}$. A kezdetiérték-probléma megoldása tehát:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{5t} \\ \frac{1}{4}e^t + \frac{3}{4}e^{5t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

(b) Az $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ együtthatómátrix karakterisztikus polinomja

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 0 \\ 0 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (\lambda - 3)^2.$$

Az A mátrixnak tehát $\lambda_{1,2} = \lambda = 3$ kétszeres valós sajátértéke. A hozzá tarozó sajátvektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

és ez azt jelenti, hogy minden $s = (s_1, s_2)^T \in \mathbb{R}^2$ vektor sajátvektor, tehát ehhez a kétszeres sajátértékhez most tartozik két lineárisan független sajátvektor. Ilyenek például az

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad s^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

vektorok, ezért a

$$\varphi^{(1)}(t) := s^{(1)}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \varphi^{(2)}(t) := s^{(2)}e^{\lambda t} = \begin{bmatrix} 0 \\ e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények az egyenletünk lineárisan független (valós) megoldásai. Az általános megoldás tehát:

$$\varphi(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{3t} \\ c_2 e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

(c) Az $A := \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ együtthatómátrix sajátértékei a

$$\det \begin{bmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 13$$

karakterisztikus polinom gyökei: $\lambda_1 = 3 + 2i$, $\lambda_2 = 3 - 2i$ komplex konjugált párok. Most a *komplex* sajátvektorokat kell meghatároznunk. A λ_1-hez tartozó sajátvektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} 1-2i & -1 \\ 5 & -1-2i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

azaz

$$\begin{aligned} (1-2i)s_1 - s_2 &= 0 \\ 5s_1 - (1+2i)s_2 &= 0. \end{aligned}$$

Vegyük észre, hogy a második egyenlet az elsőnek az $(1 + 2i)$-szerese. Az első egyenletből (például) a következő komplex sajátvektort kapjuk:

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix}.$$

Tudjuk, hogy az

$$e^{\lambda_1 t} s^{(1)} \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvény az egyenlet egy *komplex* megoldása, és ennek valós és képzetes része az egyenlet két lineárisan független *valós* megoldása, ezért a fenti függvény valós és képzetes részét kell most meghatároznunk:

$$\begin{aligned} e^{\lambda_1 t} s^{(1)} = e^{(3+2i)t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1-2i \end{bmatrix} &= e^{3t}\big(\cos(2t) + i\sin(2t)\big) \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \\ = e^{3t} \left(\cos(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \sin(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) &+ i\, e^{3t} \left(\sin(2t) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \cos(2t) \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} \right) = \\ = \begin{bmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}\big(\cos(2t) + 2\sin(2t)\big) \end{bmatrix} &+ i \begin{bmatrix} e^{3t}\sin(2t) \\ e^{3t}\big(\sin(2t) - 2\cos(2t)\big) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Az egyenletünk két lineárisan független valós megoldása tehát:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(t) &= \begin{bmatrix} e^{3t}\cos(2t) \\ e^{3t}\big(\cos(2t) + 2\sin(2t)\big) \end{bmatrix}, \\ \varphi^{(2)}(t) &= \begin{bmatrix} e^{3t}\sin(2t) \\ e^{3t}\big(\sin(2t) - 2\cos(2t)\big) \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

és az általános megoldás:

$$\varphi(t) := c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol c_1, c_2 tetszőleges valós számok. ■

(d) Az $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ együtthatómátrix karakterisztikus polinomja

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2.$$

Az A mátrixnak tehát $\lambda_{1,2} = \lambda = 2$ kétszeres valós sajátértéke. A hozzá tarozó sajátvektoregyenlet:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad s_1 + s_2 = 0,$$

tehát

$$s = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

egy sajátvektor, és

$$\varphi^{(1)}(t) = e^{\lambda t} s = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

egy megoldása az egyenletnek.

Az s-től független más sajátvektora nincs az A mátrixnak, ezért az egyenlet egy $\varphi^{(1)}$-től független megoldását

$$\begin{bmatrix} (at+b)e^{2t} \\ (ct+d)e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}) \tag{16}$$

alakban keressük, ahol a, b, c, d valós paraméterek. Ezeket a függvényeket az egyenletrendszerbe beírva, majd rendezve azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 2at + (a+b) &= (3a+c)t + (3b+d), \\ 2ct + (c+d) &= (-a+c)t + (-b+d). \end{aligned}$$

Az együtthatókat összehasonlítjuk:

$$a + c = 0 \qquad \text{és} \qquad b + d = a.$$

Tetszőleges ilyen a, b, c, d esetén az (16) alatti függvény tehát megoldása a differenciálegyenletnek. Legyen (például)

$$a = 1, \quad c = -1, \quad b = 1 \;\text{ és }\; d = 0.$$

Ekkor a

$$\varphi^{(2)}(t) = e^{\lambda t} s = \begin{bmatrix} (1+t)e^{2t} \\ -te^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény a differenciálegyenlet egy $\varphi^{(1)}$-től független megoldása, ezért az általános megoldás:

$$\varphi(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{2t} + c_2(1+t)e^{2t} \\ -c_1e^{2t} - c_2te^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \ \blacksquare$$

2. példa. *Határozza meg az alábbi inhomogén lineáris rendszer, illetve kezdetiérték-probléma megoldását:*

$$\text{(a)} \quad \begin{cases} x_1'(t) = 3x_1(t) + 2x_2(t) + e^{2t} \\ x_2'(t) = 2x_1(t) + 6x_2(t); \end{cases}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{cases} x_1'(t) = x_1(t) + x_2(t) + 1 \\ x_2'(t) = 4x_2(t) - 2x_1(t) - 2, \end{cases} \qquad x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0.$$

Megoldás. (a) • *A homogén egyenlet* $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$ együtthatómátrixának a sajátértékei a

$$\det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(6-\lambda) - 4 = \lambda^2 - 9\lambda + 14 = (\lambda-7)(\lambda-2) = 0$$

egyenlet alapján $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 7$. A megfelelő sajátvektorok:

$$s^{(1)} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad s^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A homogén egyenlet két lineárisan független megoldása:

$$\begin{aligned} \varphi^{(1)}(t) &= e^{\lambda_1 t} s^{(1)} = \begin{bmatrix} -2e^{2t} \\ e^{2t} \end{bmatrix} \\ \varphi^{(2)}(t) &= e^{\lambda_2 t} s^{(2)} = \begin{bmatrix} e^{7t} \\ 2e^{7t} \end{bmatrix} \end{aligned} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

az alapmátrixa:

$$\Phi(t) = \begin{bmatrix} -2e^{2t} & e^{7t} \\ e^{2t} & 2e^{7t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

az általános megoldása:

$$\varphi(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) = \Phi(t)\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R};\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet* egy partikuláris megoldását az állandók variálásának a módszerével határozzuk meg. Tudjuk, hogy a

$$\psi_p(t) = \Phi(t)\int \Phi^{-1}(t)\cdot b(t)\,dt \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvények megoldásai az inhomogén egyenletnek. Mivel

$$\Phi^{(-1)}(t) = -\frac{1}{5e^{9t}}\begin{bmatrix} 2e^{7t} & -e^{7t} \\ -e^{2t} & -2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{1}{5}e^{-7t} & \frac{2}{5}e^{-7t} \end{bmatrix},$$

ezért

$$\int \Phi^{-1}(t)\cdot b(t)\,dt = \int \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}e^{-2t} & \frac{1}{5}e^{-2t} \\ \frac{1}{5}e^{-7t} & \frac{2}{5}e^{-7t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int -\frac{2}{5}\,dt \\ \int \frac{1}{5}e^{-5t}\,dt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{2}{5}t \\ -\frac{1}{25}e^{-5t} \end{bmatrix},$$

így a

$$\psi_p(t) = \begin{bmatrix} -2e^{2t} & e^{7t} \\ e^{2t} & 2e^{7t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\frac{2}{5}t \\ -\frac{1}{25}e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{5}te^{2t} - \frac{1}{25}e^{2t} \\ -\frac{2}{5}te^{2t} - \frac{2}{25}e^{2t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvény egy partikuláris megoldása az inhomogén egyenletnek.

• *Az inhomogén egyenlet általános megoldása*

$$\psi(t) = c_1\varphi^{(1)}(t) + c_2\varphi^{(2)}(t) + \psi_p(t) \qquad (t \in \mathbb{R},\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}).\ \blacksquare$$

(b) • *A homogén egyenlet* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ együtthatómátrixának sajátértékei a

$$\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

egyenlet alapján $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = 3$.

A $\lambda_1 = 2$ sajátétékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad -s_1 + s_2 = 0; \qquad s^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

A $\lambda_2 = 3$ sajátétékhez tartozó sajátvektor:

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Longleftrightarrow \quad -2s_1 + s_2 = 0; \qquad s^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

A homogén egyenlet általános megoldása tehát:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} s^{(1)} + c_2 e^{\lambda_2 t} s^{(2)} = c_1 e^{2t} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 e^{3t} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} \\ c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását* a konstans inhomogenitás miatt a

$$\psi_p(t) = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$

alakban keressük. Ekkor $\psi_p'(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, amit az eredeti egyenletbe visszahelyettesítve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= A + B + 1 \\ 0 &= 4B - 2A - 2. \end{aligned}$$

Ezt a lineáris egyenletrendszert megoldva azt kapjuk, hogy $A = -1$ és $B = 0$, ezért egy partikuláris megoldás:

$$\psi_p(t) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet általános megoldása:*

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_1(t) \\ \psi_2(t) \end{bmatrix} = \varphi(t) + \psi_p(t) = \begin{bmatrix} c_1 e^{2t} + c_2 e^{3t} - 1 \\ c_1 e^{2t} + 2c_2 e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

• *A kezdeti értékeket* figyelembe véve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} 0 &= \psi_1(0) = c_1 + c_2 - 1, \\ 0 &= \psi_2(0) = c_1 + 2c_2, \end{aligned}$$

amiből $c_1 = 2$ és $c_2 = -1$ adódik, és így a kezdetiérték-probléma teljes megoldása:

$$\psi(t) = \begin{bmatrix} 2e^{2t} - e^{3t} - 1 \\ 2e^{2t} - 2e^{3t} \end{bmatrix} \qquad (t \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

n-edrendű lineáris differenciálegyenletek

1. példa. *Írjuk fel az alábbi állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenletek általános megoldását:*

(a) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$;

(b) $x''(t) - 8x'(t) + 16x(t) = 0$;

(c) $x''(t) + 6x'(t) + 34x(t) = 0$.

Megoldás. (a) A karakterisztikus polinom:

$$K(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1).$$

Ennek gyökei valósak és különbözőek: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -1$, ezért a

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\lambda_1 t} = e^{-2t} \\ \varphi_2(t) &= e^{\lambda_2 t} = e^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

függvények az egyenlet lineárisan független valós megoldásai. Az egyenlet általános megoldása tehát:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol c_1 és c_2 tetszőleges valós számok. ■

(b) A karakterisztikus polinom:

$$K(\lambda) = \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2.$$

Ennek $\lambda = 4$ kétszeres valós gyöke, ezért a

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= e^{\lambda t} = e^{4t} \\ \varphi_2(t) &= e^{\lambda t} = te^{4t} \qquad (t \in \mathbb{R}) \end{aligned}$$

függvények az egyenlet lineárisan független valós teljes megoldásai. Az egyenlet általános megoldása tehát:

$$\varphi(t) = c_1 e^{\lambda t} + c_2 t e^{\lambda t} = c_1 e^{4t} + c_2 t e^{4t} \qquad (t \in \mathbb{R};\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}).\ \blacksquare$$

(c) A karakterisztikus polinom:

$$K(\lambda) = \lambda^2 + 6\lambda + 34.$$

Ennek gyökei a

$$\lambda_1 = \alpha - i\beta = -3 + 5i \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = -3 - 5i$$

komplex konjugált párok. Ebben az esetben a

$$\begin{aligned}\varphi_1(t) &= e^{\alpha t}\cos(\beta t) = e^{-3t}\cos(5t)\\ \varphi_2(t) &= e^{\alpha t}\sin(\beta t) = e^{-3t}\sin(5t) \qquad (t \in \mathbb{R})\end{aligned}$$

függvények lesznek az egyenlet lineárisan független valós teljes megoldásai. Az egyenlet általános megoldása tehát:

$$\varphi(t) = c_1 e^{-3t}\cos(5t) + c_2 e^{-3t}\sin(5t) \qquad (t \in \mathbb{R};\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}) \ \blacksquare$$

2. példa. *Határozzuk meg az alábbi egyenletek általános megoldásait:*

(a) $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = \dfrac{1}{1+e^t}$;

(b) $x''(t) + x(t) = \dfrac{1}{\cos t} \qquad \big(t \in \big(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big)\big)$;

(c) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \dfrac{e^t}{t} \qquad (t > 0)$.

(A partikuláris megoldás meghatározásához használjuk az állandók variálásának a módszerét.)

Megoldás. (a)

- *A homogén egyenlet:* $x''(t) + 3x'(t) + 2x(t) = 0$. A karakterisztikus polinom

$$K(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1),$$

ennek gyökei $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$, ezért

$$\varphi_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{-t}, \qquad \varphi_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{-2t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a homogén egyenlet lineárisan független teljes megoldásai. A homogén egyenlet általános megoldása

$$\varphi(t) = c_1\varphi_1(t) + c_2\varphi_2(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} \qquad (t \in \mathbb{R};\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

- *Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását* a

$$\psi_p(t) = c_1(t)\varphi_1(t) + c_2(t)\varphi_2(t) = c_1(t)e^{-t} + c_2(t)e^{-2t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Az ismeretlen $c_1, c_2 \in C^1(\mathbb{R})$ függvények c_1', c_2' deriváltjára a

$$\begin{aligned}\varphi_1(t)c_1'(t) + \varphi_2(t)c_2'(t) &= 0\\ \varphi_1'(t)c_1'(t) + \varphi_2'(t)c_2'(t) &= \frac{1}{1+e^t},\end{aligned}$$

vagyis az

$$
\begin{aligned}
e^{-t}c_1'(t) + e^{-2t}c_2'(t) &= 0 \\
-e^{-t}c_1'(t) - 2e^{-2t}c_2'(t) &= \frac{1}{1+e^t}
\end{aligned}
$$

egyenletrendszer teljesül. Ennek megoldása:

$$
\begin{aligned}
c_1'(t) &= \frac{e^t}{1+e^t}, \\
c_2'(t) &= -\frac{e^{2t}}{1+e^t},
\end{aligned}
$$

ezért

$$
\begin{aligned}
c_1(t) &= \int \frac{e^t}{1+e^t}\,dt = \ln(e^t+1), \\
c_2(t) &= -\int \frac{e^{2t}}{1+e^t}\,dt = -\int \frac{e^t(e^t+1)-e^t}{1+e^t}\,dt = -e^t + \ln(1+e^t).
\end{aligned}
$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$\psi_p(t) = e^{-t}\ln(1+e^t) + e^{-2t}\big(\ln(1+e^t) - e^t\big) \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Az adott differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$\psi(t) = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t} + e^{-t}\ln(1+e^t) + e^{-2t}\big(\ln(1+e^t) - e^t\big) \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

ahol c_1 és c_2 tetszőleges valós szám. ■

(b) • *A homogén egyenlet:* $x''(t) + x(t) = 0$. A karakterisztikus polinom

$$K(\lambda) = \lambda^2 + 1,$$

ennek gyökei $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$, ezért

$$\varphi_1(t) = \cos t, \qquad \varphi_2(t) = \sin t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a homogén egyenlet lineárisan független teljes valós megoldásai. A homogén egyenlet általános megoldása

$$\varphi(t) = c_1\cos t + c_2\sin t \qquad (t \in \mathbb{R};\quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását* a

$$\psi_p(t) = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban keressük. Az ismeretlen $c_1, c_2 \in C^1(\mathbb{R})$ függvények c_1', c_2' deriváltjára a

$$\begin{aligned} \cos t \cdot c_1'(t) + \sin t \cdot c_2'(t) &= 0 \\ -\sin t \cdot c_1'(t) + \cos t \cdot c_2'(t) &= \frac{1}{\cos t} \end{aligned}$$

egyenletrendszer teljesül. Ennek megoldása:

$$c_1'(t) = -\operatorname{tg} t, \qquad c_2'(t) = 1 \qquad \left(t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right),$$

ezért

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \ln(\cos t) \\ c_2(t) &= t \end{aligned} \qquad \left(t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$\psi_p(t) = \cos t \cdot \ln(\cos t) + t \sin t \qquad \left(t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right).$$

Az adott differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$\psi(t) = c_1 \cos t + c_2 \sin t + \cos t \cdot \ln(\cos t) + t \sin t \qquad \left(t \in \left(-\tfrac{\pi}{2}, \tfrac{\pi}{2}\right)\right),$$

ahol c_1 és c_2 tetszőleges valós szám. ■

(c) • *A homogén egyenlet:* $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = 0$. A karakterisztikus polinom

$$K(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2.$$

Ennek $\lambda = 1$ kétszeres gyöke, ezért

$$\varphi_1(t) = e^t, \qquad \varphi_2(t) = te^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a homogén egyenlet lineárisan független teljes valós megoldásai. A homogén egyenlet általános megoldása

$$\varphi(t) = c_1 e^t + c_2 te^t \qquad (t \in \mathbb{R};\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldását* a

$$\psi_p(t) = c_1(t)e^t + c_2(t)te^t \qquad (t > 0)$$

alakban keressük. Az ismeretlen $c_1, c_2 \in C^1(\mathbb{R})$ függvények c_1', c_2' deriváltjára a

$$\begin{aligned} e^t c_1'(t) + te^t c_2'(t) &= 0 \\ e^t c_1'(t) + (e^t + te^t) c_2'(t) &= \frac{e^t}{t} \end{aligned}$$

egyenletrendszer teljesül. Ennek megoldása:

$$c_1'(t) = -1, \qquad c_2'(t) = \frac{1}{t} \qquad (t > 0),$$

ezért

$$c_1(t) = -t$$
$$c_2(t) = \ln t \qquad (t > 0).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$\psi_p(t) = te^t(\ln t - 1) \qquad (t > 0).$$

Az adott differenciálegyenlet általános megoldása tehát:

$$\psi(t) = c_1 e^t + c_2 te^t + te^t(\ln t - 1) \qquad (t > 0),$$

ahol c_1 és c_2 tetszőleges valós szám. ■

3. példa. *Írjuk fel az állandó együtthatós inhomogén lineáris differenciálegyenlet egy partikuláris megoldását a próbafüggvény-módszer alapján, ha adottak a homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának a gyökei, valamint az inhomogén egyenlet jobb oldala:*

(a) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2; \quad b(t) = at^2 + bt + c;$

(b) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1; \quad b(t) = at^2 + bt + c;$

(c) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0; \quad b(t) = at^2 + bt + c;$

(d) $\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = -1; \quad b(t) = (at + b)e^{-t};$

(e) $\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1; \quad b(t) = \sin t;$

(f) $\lambda_1 = i,\ \lambda_2 = -i; \quad b(t) = \cos t;$

(g) $\lambda_1 = k,\ \lambda_2 = k; \quad b(t) = (at^2 + bt + c)e^{kt}.$

Megoldás. Az inhomogén egyenlet jobb oldalán álló

$$P(t)e^{\alpha t}\big(c\sin(\beta t) + d\cos(\beta t)\big) \quad (t \in \mathbb{R})$$

függvény alapján képezzük a

$$\mu = \alpha + i\beta$$

komplex számot, és azt figyeljük, hogy ez vajon gyöke-e a homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának.

(a) $\mu = 0$, ezért $\psi_p(t) = At^2 + Bt + C$;
(b) $\mu = 0$, ezért $\psi_p(t) = t(At^2 + Bt + C)$;

(c) $\mu = 0$, ezért $\psi_p(t) = t^2(At^2 + Bt + C)$;
(d) $\mu = -1$, ezért $\psi_p(t) = t^2(At + B)e^{-t}$;
(e) $\mu = i$, ezért $\psi_p(t) = A\cos t + B\sin t$;
(f) $\mu = i$, ezért $\psi_p(t) = t(A\cos t + B\sin t)$;
(g) $\mu = k$, ezért $\psi_p(t) = t^2(At^2 + Bt + C)$. ■

4. példa. *Oldjuk meg az*

$$x''(t) + x'(t) - 6x(t) = t$$

differenciálegyenletet. A partikuláris megoldás meghatározásához használjuk az állandók variálásának a módszerét és a próbafüggvény-módszert is.

Megoldás. • *A homogén egyenlet:* $x''(t) + x'(t) - 6x(t) = 0$. A karakterisztikus polinom

$$K(\lambda) = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2),$$

ennek gyökei $\lambda_1 = -3$ és $\lambda_2 = 2$, ezért

$$\varphi_1(t) = e^{-3t}, \qquad \varphi_2(t) = e^{2t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

a homogén egyenlet lineárisan független teljes valós megoldásai. A homogén egyenlet általános megoldása

$$\varphi(t) = c_1 e^{-3t} + c_2 e^{2t} \qquad (t \in \mathbb{R};\ \ c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása* az állandók variálásának a módszerével. Keressük a megoldást

$$\psi_p(t) = c_1(t)e^{-3t} + c_2(t)e^{2t} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban. Az ismeretlen $c_1, c_2 \in C^1(\mathbb{R})$ függvényekre a megoldandó egyenletrendszer:

$$\begin{aligned} e^{-3t}c_1'(t) + e^{2t}c_2'(t) &= 0 \\ -3e^{-3t}c_1'(t) + 2e^{2t}c_2'(t) &= t. \end{aligned}$$

Az első egyenletet (-2)-vel megszorozzuk és a két egyenletet összeadjuk:

$$-5c_1'(t)e^{-3t} = t, \qquad c_1'(t) = -\frac{1}{5}te^{3t}.$$

Parciálisan integrálunk:

$$c_1(t) = -\frac{1}{15}te^{3t} + \frac{1}{45}e^{3t} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

c_1' értékét az első egyenletbe visszaírva

$$c_2'(t)e^{2t} = \frac{1}{5}t, \qquad c_2'(t) = \frac{1}{5}te^{-2t}$$

adódik. Integrálás után azt kapjuk, hogy

$$c_2(t) = -\frac{1}{10}te^{-2t} - \frac{1}{20}e^{-2t} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát:

$$\psi_p(t) = c_1(t)e^{-3t} + c_2(t)e^{2t} = -\frac{1}{15}t + \frac{1}{45} - \frac{1}{10}t - \frac{1}{20} = -\frac{1}{6}t - \frac{1}{36} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása* a próbafüggvény-módszerrel. Keressük a megoldást a

$$\psi_p(t) = At + B \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban. Ekkor $\psi_p'(t) = A$, $\psi_p''(t) = 0$. Ezeket az inhomogén egyenletbe behelyettesítjük és rendezünk:

$$A - 6At - 6B = -6At + (A - 6B) = t.$$

Az együtthatókat összehasonlítva

$$-6A = 1, \qquad A - 6B = 0,$$

vagyis

$$A = -\frac{1}{6} \qquad \text{és} \qquad B = -\frac{1}{36}$$

adódik. Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása tehát:

$$\psi_p(t) = -\frac{1}{6}t - \frac{1}{36} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet általános megoldása* tehát:

$$\psi(t) = c_1e^{-3t} + c_2e^{2t} - \frac{1}{6}t - \frac{1}{36} \qquad (t \in \mathbb{R};\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \ \blacksquare$$

Megjegyzés. Ez az összehasonlítás meggyőzően bizonyítja, hogy – amikor választhatunk – célszerű a próbafüggvény-módszerrel dolgozni.

5. példa. *Határozzuk meg az alábbi inhomogén másodrendű differenciálegyenletek általános megoldását. (A partikuláris megoldás meghatározásához használjuk a próba-függvény-módszert.)*

(a) $x''(t) - x(t) = (2t+3)e^t$;

(b) $x''(t) + x'(t) - 2x(t) = 3t + 2\cos t$.

Meogoldás. (a)

• *A homogén egyenlet:* $x''(t) - x(t) = 0$. Ennek általános megoldása:

$$\lambda^2 - 1 = 0; \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1,$$

$$\varphi(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t} \qquad (t \in \mathbb{R}; \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet* jobb oldalából adódó $\mu = 1 + i\,0$ szám egyszeres gyöke a homogén egyenlet karakterisztikus polinomjának, ezért a partikuláris megoldást

$$\psi_p(t) = t(At+B)e^t = At^2e^t + Bte^t \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban keressük, ezért

$$\psi_p'(t) = At^2e^t + (2A+B)te^t + Be^t,$$
$$\psi_p''(t) = At^2e^t + (4A+B)te^t + (2A+2B)e^t.$$

Behelyettesítés és összevonás után azt kapjuk, hogy

$$4Ate^t + (2A+2B)e^t = (2t+3)e^t.$$

Az együtthatókat összehasonlítjuk:

$$4A = 2,$$
$$2A + 2B = 3.$$

Ebből

$$A = \tfrac{1}{2} \qquad \text{és} \qquad B = 1.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$\psi_p(t) = \tfrac{1}{2}t^2e^t + te^t \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát:

$$\psi(t) = c_1e^t + c_2e^{-t} + \left(\tfrac{1}{2}t^2 + t\right)e^t \qquad (t \in \mathbb{R}; c_1, c_2 \in \mathbb{R}). \quad \blacksquare$$

(b) • *A homogén egyenlet:* $x''(t)+x'(t)-2x(t)=0$. Ennek általános megoldása:

$$\lambda^2+\lambda-2=(\lambda+2)(\lambda-1)=0; \qquad \lambda_1=-2, \quad \lambda_2=1,$$

$$\varphi(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^t \qquad (t\in\mathbb{R}; \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}).$$

• *Az inhomogén egyenlet* partikuláris megoldását a szuperpozíció elvének is felhasználásával most a következő alakban keressük:

$$\psi_p(t)=(At+B)+(C\cos t+D\sin t) \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\psi_p'(t)&=A-C\sin t+D\cos t,\\ \psi_p''(t)&=-C\cos t-D\sin t.\end{aligned}$$

Behelyettesítés és összevonás után azt kapjuk, hogy

$$-2At+A-2B+(D-3C)\cos t-(C+3D)\sin t=3t+2\cos t.$$

Az együtthatókat összehasonlítjuk:

$$\begin{aligned}-2A&=3,\\ A-2B&=0,\\ D-3C&=2,\\ C+3D&=0.\end{aligned}$$

Ebből

$$A=-\frac{3}{2}, \quad B=-\frac{3}{4}, \quad C=-\frac{3}{5} \quad \text{és} \quad D=\frac{1}{5}.$$

Az inhomogén egyenlet egy partikuláris megoldása:

$$\psi_p(t)=-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t \qquad (t\in\mathbb{R}).$$

Az inhomogén egyenlet általános megoldása tehát:

$$\psi(t)=c_1e^{-2t}+c_2e^t+-\frac{3}{2}t-\frac{3}{4}-\frac{3}{5}\cos t+\frac{1}{5}\sin t \qquad (t\in\mathbb{R}; \quad c_1,c_2\in\mathbb{R}). \ \blacksquare$$