Funkcionálanalízis

Programtervező matematikus

szakos hallgatóknak az

Analízis 8.

nevű tárgyhoz

2007. tavaszi félév

Tartalomjegyzék

Bevezetés

1. Weierstrass approximációs (sűrűségi) tételei

1.1. Előzetes megjegyzések

Induljunk ki abból a jól ismert tényből, hogy minden $\mathbb{R}$-beli nemelfajuló intervallum tartalmaz racionális számot. Ebből az is következik, hogy minden valós szám tetszés szerinti pontossággal megközelíthető racionális számokkal, azaz

$$\forall\, a \in \mathbb{R}\text{-hez} \quad \exists\ (q_n) \subset \mathbb{Q} \quad : \quad q_n \to a \ (n \to +\infty). \tag{1.1}$$

A szemléletünkkel összhangban ezt úgy is mondjuk, hogy a *racionális számok sűrűn vannak* $\mathbb{R}$*-ben.* Mivel $\mathbb{Q}$ megszámlálható („kezelhető"), ezért az említett eredmény gyakorlati jelentősége nyilvánvaló.

Weierstrass első, illetve második approximációs tétele az (1.1) alatti állításnak a $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$, illetve a $\big(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty\big)$ függvényterekre vonatkozó általánosítása.

Emlékeztetünk arra, hogy $C[a,b]$-vel jelöljük a kompakt $[a,b] \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvények halmazát. A pontonkénti műveletekre nézve ez természetes térstruktúrával van ellátva, és az

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \qquad (f \in C[a,b])$$

képlet normát definiál a $C[a,b]$ lineáris téren. Ezzel a normával $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ teljes normált tér, azaz Banach-tér, és a norma által indukált konvergenciát az $[a,b]$-n vett *egyenletes konvergenciának* nevezzük.

Az $\mathbb{R}$ halmazon értelmezett 2π szerint periodikus folytonos függvények $C_{2\pi}$ lineáris tere is Banach-tér az

$$\|f\|_\infty := \max_{x\in\mathbb{R}} |f(x)| \qquad (f \in C_{2\pi})$$

normára nézve, és a megfelelő konvergencia ebben az esetben az $\mathbb{R}$-en vett egyenletes konvergencia.

Weierstrass tételei fontos szerepet játszottak a **funkcionálanalízis** kialakulásában. Az első motivációt adták a *sűrűség*, a *zártság* és a *teljesség* problémájának az általános felvetéséhez.

1.2. A tételek megfogalmazása

K. Weierstrass 1885-ben igazolta az analízis legalapvetőbb tételei közé sorolható alábbi eredményeket.

1. tétel (Weierstrass első approximációs tétele). *Minden $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényhez létezik algebrai polinomoknak olyan (P_n) sorozata, amelyik az $[a, b]$ intervallumon egyenletesen tart az f függvényhez. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy az algebrai polinomok sűrűn vannak a $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ Banach térben.*

A tétel Weierstrass által közölt eredeti bizonyítása óta több más bizonyítást is találtak. A következő pontban az Sz.N. Bernsteintől származó, 1912-ben publikált, valószínűségszámítási hátterű bizonyítást ismertetjük. *Szőkefavi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok* című tankönyve tartalmazza a tétel H. Lebesgue-féle bizonyítását.

Folytonos periodikus függvények trigonometrikus polinomokkal való közelítésére is hasonló állítás érvényes.

2. tétel (Weierstrass második approximációs tétele). *Minden 2π szerint periodikus folytonos f függvényhez létezik trigonometrikus polinomoknak olyan (T_n) sorozata, amelyik az egész számegyenesen egyenletesen tart az f függvényhez. Ezt röviden úgy mondjuk, hogy a trigonometrikus polinomok sűrűn vannak a $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach térben.*

Ch. J. de la Vallée Poussin 1918-ban mutatott rá arra, hogy a két approximációs tétel szoros kapcsolatban van egymással. Nevezetesen: egyik a másiknak a következménye.

3. tétel (de la Vallée Poussin). *Weierstrass két approximációs tétele ekvivalens egymással.*

A 2. és a 3. tételt nem bizonyítjuk. Az érdeklődőknek *I. P. Natanszon: Konstruktív függvénytan* című kiváló tankönyvét ajánljuk.

1.3. Az első approximációs tétel Bernstein-féle bizonyítása

Kezdjük azzal a speciális esettel, amikor az alapintervallum $[0, 1]$, azaz $[a, b] = [0, 1]$. A bizonyítást több lépésben végezzük el. Az önmagukban is érdekes és fontos részeket külön tételekben is megfogalmazzuk.

Definíció. Legyen n természetes szám. Az

$$N_{k,n}(x) := \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \qquad \big(x \in [0,1],\ k = 0,1,\dots,n\big)$$

polinomokat n-edfokú **Bernstein-féle alappolinomoknak** nevezzük.

4. tétel (az $N_{k,n}$ polinomok tulajdonságai).

(a) $N_{k,n}(x) \geq 0 \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$.

(b) $\sum_{k=0}^{n} N_{k,n}(x) = 1 \quad (x \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$.

(c) *Minden rögzített $\delta > 0$ és $x \in [0,1]$ szám esetén fennáll a*

$$\sum_{k:|x-\frac{k}{n}|\geq\delta} N_{k,n}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$$

egyenlőtlenség.

A (c) tulajdonságnak, durván kifejezve, az az értelme, hogy nagy n értékekre a

$$\sum_{k=0}^{n} N_{k,n}(x)$$

összegben csak azok a tagok lényegesek, amelyek k indexére

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta,$$

míg a többi tag az összeg értékét alig befolyásolja.

Bizonyítás. (a) A definíció alapján nyilvánvaló.

(b) Alkalmazzuk az

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \qquad (a, b \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

binomiális tételt az $a = x$ és $b = 1 - x$ szereposztással.

(c) Jelöljük $\Delta_n(x)$-szel a $0, 1, 2, \dots, n$ sorozatba tartozó azoknak a k számoknak a halmazát, amelyekre $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geq \delta$. Ha $k \in \Delta_n(x)$, akkor

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geq 1.$$

Ennélfogva

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)} N_{k,n}(x) \le \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k\in\Delta_n(x)} (k-nx)^2 N_{k,n}(x) \le \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 N_{k,n}(x).$$

Az utolsó összeg kiszámolásához tekintsük a következő átalakítást:

$$T := \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 N_{k,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(k(k-1) - (2nx-1)k + n^2x^2\right) N_{k,n}(x).$$

Mivel $\sum_{k=0}^{n} N_{k,n}(x) = 1$, továbbá

$$\sum_{k=0}^{n} kN_{k,n}(x) = nx \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n-1}{l} x^l (1-x)^{n-1-l} = nx,$$

$$\sum_{k=0}^{n} k(k-1)N_{k,n}(x) = n(n-1)x^2 \sum_{l=0}^{n-2} \binom{n-2}{l} x^l (1-x)^{n-2-l} = n(n-1)x^2,$$

ezért

$$T = n^2x^2 - (2nx-1)nx + n(n-1)x^2 = nx(1-x).$$

Az $x(1-x) \le \frac{1}{4}$ $(x \in [0,1])$ egyenlőtlenség felhasználásával tehát azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k\in\Delta_n(x)} N_{k,n}(x) \le \frac{1}{n^2\delta^2} T = \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \le \frac{1}{4n\delta^2},$$

és ez a (c) állítás bizonyítását jelenti. ■

Definíció. Legyen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ tetszőleges függvény. A

$$\big(B_n f\big)(x) := \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) N_{k,n}(x) \quad (x \in [0,1],\, n \in \mathbb{N})$$

polinomot az f függvény n-edik **Bernstein-féle polinomjának** nevezzük.

Könnyű előre látni, hogy ha f folytonos, akkor n nagy értékeire $(B_n f)(x)$ igen kevéssé különbözik $f(x)$-től. Ugyanis már megjegyeztük azt, hogy a

$$\sum_{k=0}^{n} N_{k,n}(x)$$

összegben azok tagok, amelyekre $\frac{k}{n}$ távol áll x-től, majdnem semmi szerepet nem játszanak. Ugyanez áll a $B_n f$ polinomra nézve is, mivel az $f(\frac{k}{n})$ tényezők korlátosak. Ennélfogva a $B_n f$ polinomban csak azok a tagok fontosak, amelyekre $\frac{k}{n}$ az x-hez nagyon közel esik. De az ilyen tagokra az $f(\frac{k}{n})$ tényező alig különbözik $f(x)$-től (a folytonosság miatt). Ez azt jelenti, hogy a $B_n f$ polinom alig változik, ha tagjaiban $f(\frac{k}{n})$-et $f(x)$-szel helyettesítjük. Más szóval fennáll a következő közelítő egyenlőség:

$$(B_n f)(x) \approx \sum_{k=0}^{n} f(x) N_{k,n}(x) \approx f(x).$$

Lényegében a fenti gondolatmenet pontosításával igazolta S.N. Bernstein 1912-ben a következő fontos eredményt.

5. tétel (Bernstein). *Tetszőleges $f \in C[0,1]$ függvény esetén a $(B_n f)$ polinom-sorozat a $[0,1]$ intervallumon egyenletesen konvergál az f függvényhez.*

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy ha $f \in C[0,1]$, akkor

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \;\; \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \;\; \text{hogy} \;\; \forall\, x \in [0,1] \;\; \text{és} \;\; \forall\, n \geq n_0 \;\; \text{esetén}$$
$$\bigl| f(x) - \bigl(B_n f\bigr)(x) \bigr| < \varepsilon.$$

Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot, és jelöljük M-mel $|f|$ maximumát. Az f függvény *egyenletes* folytonossága következtében ε-hoz

$$\exists\, \delta > 0 \;\; : |x - \bar{x}| < \delta \;\; \Rightarrow \;\; |f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon.$$

Válasszunk ezután a $[0,1]$ intervallumon egy tetszőleges x-et. Mivel $\sum_{k=0}^{n} N_{k,n}(x) = 1$, ezért

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) N_{k,n}(x),$$

és így

$$f(x) - \bigl(B_n f\bigr)(x) = \sum_{k=0}^{n} \Bigl(f(x) - f\bigl(\tfrac{k}{n}\bigr) \Bigr) N_{k,n}(x).$$

Osszuk fel a $0, 1, \ldots, n$ indexeket két részre. Az egyikbe tartozzanak azok a k számok, amelyekre

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta,$$

ezek halmazát jelöljük I_1-gyel. Legyen I_2 azon k indexek halmaza, amelyekre

$$\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$$

teljesül. Ennek megfelelően a fenti összeget is két részre bontjuk; ezeket $\sum_I$-gyel és $\sum_{II}$-vel jelöljük. Az elsőben $\bigl| f\bigl(\frac{k}{n}\bigr) - f(x) \bigr| < \varepsilon$, és ezért

$$\bigl| \textstyle\sum_I \bigr| \leq \varepsilon \displaystyle\sum_{k \in I_1} N_{k,n}(x) \leq \varepsilon \sum_{k=0}^{n} N_{k,n}(x) \leq \varepsilon.$$

A másik összegben $\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \le 2M$, és ezért az előző tétel (c) része alapján

$$\left|\sum\nolimits_{II}\right| \le 2M \sum_{k\in I_2} N_{k,n}(x) \le \frac{M}{2n\delta^2}.$$

A fentieket összegezve azt kapjuk, hogy

$$\left|f(x) - \big(B_n f\big)(x)\right| \le \varepsilon + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Ha n elegendően nagy ($n \ge n_0$), akkor $\frac{M}{2n\delta^2} < \varepsilon$ és

$$\left|f(x) - \big(B_n f\big)(x)\right| \le 2\varepsilon,$$

amivel a tétel be is van bizonyítva, mert a szóban forgó n_0 szám nem függ az x megválasztásától.
■

Az első approximációs tétel bizonyításához még azt kell megmutatni, hogy az állítás minden $[a, b]$ kompakt intervallumra is érvényes. Tegyük fel tehát, hogy $[a, b] \ne [0, 1]$. Vegyünk egy tetszőleges $f \in C[a, b]$ függvényt, és legyen

$$\varphi(y) := f(a + y(b - a)) \qquad (y \in [0, 1]).$$

A fentiek szerint ehhez a $\varphi \in C[0, 1]$ függvényhez minden $\varepsilon > 0$ esetén létezik olyan $Q(y) = \sum_{k=0}^{n} c_k y^k$ polinom, hogy

$$\left|\varphi(y) - Q(y)\right| < \varepsilon \qquad (y \in [0, 1]).$$

Ha x az $[a, b]$ tetszőleges pontja és $x = a + y(b - a)$, akkor $y = \frac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$, ezért az iménti egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy

$$\left|\varphi(y) - Q(y)\right| = \left|f(x) - Q\left(\tfrac{x-a}{b-a}\right)\right| < \varepsilon \qquad (x \in [a, b]),$$

és világos, hogy Q az x változónak is egy polinomja. Ez a polinom f-et a kívánt pontossággal megközelíti. Weierstrass első approximációs tételét tehát maradéktalanul igazoltuk.

1.4. Csebisev tétele a legjobban közelítő polinomokról

Kompakt intervallumon folytonos függvények egyszerű szerkezetű függvényekkel (például polinomokkal) való megközelítésének természetes mértéke a következő.

Definíció. Jelöljük $\mathcal{P}_n$-nel ($n \in \mathbb{N}$) a legfeljebb n-edfokú algebrai polinomok halmazát. Tetszőleges $f \in C[a, b]$ függvény esetén az

$$E_n(f) := \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty$$

számot az f függvény legfeljebb n-edfokú polinomokkal való **legjobb megközelítésének** nevezzük.

Nem nehéz látni, hogy a fenti infimum valóban létezik és minden $f \in C[a,b]$ függvényre

$$E_1(f) \geq E_2(f) \geq \cdots \geq 0.$$

Ebből és Weierstrass első approximációs tételéből következik, hogy

$$\lim_{n\to+\infty} E_n(f) = 0 \qquad (f \in C[a,b]).$$

Ha egy f függvényt polinomokkal kívánunk megközelíteni, akkor elég természetes az az igény, hogy a legfeljebb n-edfokú polinomok közül (tehát $\mathcal{P}_n$-ben) azt a polinomot válasszuk, amelyik legközelebb van f-hez. Az eddigiekből nem következik, és egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy általában létezik-e a $\mathcal{P}_n$ halmazban olyan P^* polinom, amelyre $E_n(f) = \|f - P^*\|_\infty$, vagy másképpen az $E_n(f)$ definíciójában az infimum vajon helyettesíthető-e minimummal. **P.L. Csebisev** 1859-ben — közel 30 évvel megelőzve Weierstrass tételeit — igazolta ilyen „legjobban közelítő” polinomok létezését.

6. tétel (Csebisev tétele). *Tetszőleges $f \in C[a,b]$ függvényhez és n természetes számhoz egyértelműen létezik olyan $P^* \in \mathcal{P}_n$ polinom, amelyre*

$$\|f - P^*\|_\infty = \inf_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty = \min_{P\in\mathcal{P}_n} \|f - P\|_\infty = E_n(f)$$

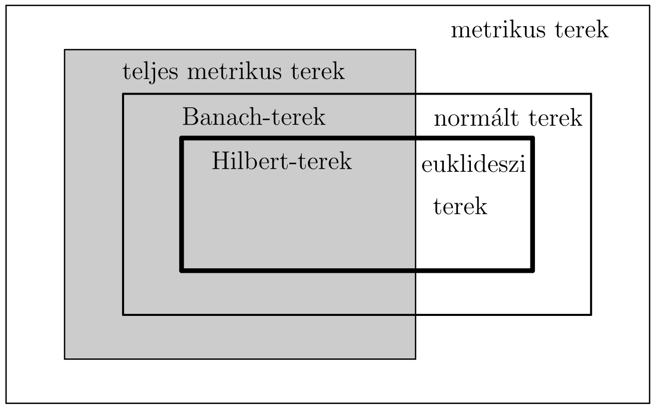
*teljesül. P^*-ot az f-et **legjobban megközelítő** $\mathcal{P}_n$-beli polinomnak nevezzük.*

Ennek a klasszikus tételnek a bizonyítása megtalálható *I. P. Natanszon: Konstruktív függvénytan (Budapest, 1952)* tankönyvének 33–45. oldalain. Itt csupán azt említjük meg, hogy a bizonyítás nem konstruktív jellegű, és az általános esetben remény sincs az f-et legjobban megközelítő polinomok *explicit* előállítására. Az ún. **Remez-algoritmus** segítségével a szóban forgó polinomok „jó közelítései” azonban explicit módon is megadhatók.

A **trigonometrikus polinomokkal** való közelítésre is hasonló állítás érvényes.

2. Térstruktúrák

A következő ábrán szemléltetjük a már megismert térstruktúrákat (bebizonyítható, hogy a jelzett tartalmazások mindegyike valódi tartalmazás abban az értelemben, hogy van olyan metrikus tér, amelyik metrikája nem származtatható normából, stb.):



Ebben a fejezetben összefoglaljuk és kiegészítjük a korábbi ismereteket.

2.1. Metrikus terek

2.1.1. A metrikus tér fogalma. Példák

Definíció. Az (M, ϱ) rendezett párt **metrikus térnek** nevezzük, ha M tetszőleges nemüres halmaz, $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ pedig olyan függvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) minden $x, y \in M$ esetén $\varrho(x, y) \geq 0$;
(ii) $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y \quad (x, y \in M)$;
(iii) bármely $x, y \in M$ elemekre

$$\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \quad (\textit{szimmetriatulajdonság});$$

(iv) tetszőleges $x, y, z \in M$ elemekkel fennáll a

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$$

háromszög-egyenlőtlenség. A ϱ leképezést *távolság-függvénynek* (vagy **metrikának**) mondjuk; a $\varrho(x, y)$ számot az $x, y \in M$ elemek *távolságának* nevezzük.

Hangsúlyozni kell, hogy metrikus tér esetében nem kívánunk meg semmiféle egyéb struktúrát (műveletek, rendezés, stb.) a halmazon.

Egyszerűen bebizonyítható az, hogy tetszőleges (M, ϱ) metrikus térben igazak a *háromszög-egyenlőtlenségek* alábbi változatai is:

$$\begin{aligned} \varrho\big(x_1, x_n\big) &\le \sum_{k=1}^{n-1} \varrho\big(x_k, x_{k+1}\big) \qquad && (x_1, \dots, x_n \in M, \quad n \ge 2); \\ \big|\rho(x,z) - \rho(y,z)\big| &\le \varrho(x,y) && (x, y \in M). \end{aligned}$$

Nyilvánvaló, hogy bármely $A \subset M$ részhalmaz esetén ϱ-nak az $A \times A$ halmazra vonatkozó leszűkítése metrika, és A ezzel a metrikával metrikus tér. Ezt az $\big(A, \varrho_{|A\times A}\big)$ metrikus teret az (M, ϱ) **alterének** nevezzük.

Példák metrikus terekre.

• $M := \mathbb{R}$ és $\varrho(x, y) := |x - y|$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ez $\mathbb{R}$ „szokásos” metrikája. A továbbiakban $\mathbb{R}$-et mindig ezel a metrikával látjuk el.

• **A diszkrét metrikus tér.** Adott M nemüres halmazon a

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y \\ 1, & \text{ha } x \ne y \end{cases}$$

képlet az úgynevezett *diszkrét metrikát* definiálja. Ekkor (M, ϱ)-t *diszkrét metrikus térnek* hívjuk.

• **Az $\big(\mathbb{R}^n, \varrho_p\big)$ terek.** Legyen n pozitív egész szám, $M := \mathbb{R}^n$, $1 \le p \le +\infty$ és $x = (x_1, \dots, x_n),\ y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \big(\sum_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p\big)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{1\le k\le n} |x_k - y_k|, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor $\big(\mathbb{R}^n, \varrho_p\big)$ metrikus tér.

• **A l^p terek.** Az előző példa „végtelen dimenziós” változataként tekintsük egy $1 \le p < +\infty$ mellett a sorozatok

$$l^p := \Big\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \ \Big|\ \sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p < +\infty\Big\},$$

halmazát. A $p = +\infty$-re való kiterjesztésként a következőt kapjuk:

$$l^\infty := \Big\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\Big|\; \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty\Big\}.$$

Legyen továbbá $x = (x_n), y = (y_n) \in l^p$ esetén

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k - y_k|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \sup\limits_{1 \le k \le n} |x_k - y_k|, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor $\left(l^p, \varrho_p\right)$ is metrikus tér.

• **A $\left(C[a,b], \varrho_p\right)$ függvényterek.** Valamely $[a, b]$ korlátos és zárt intervallum (tehát $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$) esetén jelöljük $C[a, b]$-vel az $[a, b]$-n értelmezett, valós értékű és folytonos függvények halmazát. Ha $1 \le p \le +\infty$, akkor tekintsük az iménti példák „folytonos” változatait:

$$\varrho_p(f, g) := \begin{cases} \left(\int_a^b |f - g|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x) - g(x)|, & \text{ha } p = +\infty \end{cases} \qquad (f, g \in C[a, b]).$$

(Emlékeztetünk arra, hogy $|f - g|^p$ bármely $p \ge 1$ mellett folytonos függvény, ezért Riemann-integrálható. Továbbá Weierstrass tétele szerint az $|f - g|$ folytonos függvénynek van maximuma, következésképpen a ϱ_p függvények „jól definiáltak”.)

Megmutatható, hogy $\left(C[a, b], \varrho_p\right)$ is metrikus tér.

2.1.2. Izometrikus terek

Definíció. Azt mondjuk, hogy az (M_1, ϱ_1) és az (M_2, ϱ_2) metrikus terek **izometrikusak**, ha létezik közöttük távolságtartó bijekció, vagyis létezik olyan $\varphi : M_1 \to M_2$ bijektív leképezés, hogy

$$\varrho_1(x, y) = \varrho_2\big(\varphi(x), \varphi(y)\big)$$

minden $x, y \in M$ esetén teljesül.

Metrikus terek izometriája azt jelenti, hogy az elemeik metrikus tulajdonságai ugyanazok, csak az elemeik „természete” különbözik. Ez azonban a metrikus terek elmélete szempontjából teljesen mellékes. Ezért az egymással izometrikus tereket azonosaknak tekintjük.

2.1.3. Környezetek, korlátos halmazok, ekvivalens metrikák

Definíció. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér, $a \in M$ és $r \in \mathbb{R}^+$. A

$$k_r(a) := k_r^\varrho(a) := \left\{ x \in M \mid \varrho(x, a) < r \right\}$$

halmazt az $a \in M$ pont r-sugarú **gömb-környezetének** vagy r-sugarú a középpontú *nyílt gömbnek* nevezzük. A

$$\overline{k_r(a)} := \overline{k_r^\varrho(a)} := \left\{ x \in M \mid \varrho(x, a) \leq r \right\}$$

halmazt pedig r-sugarú a középpontú **zárt gömbnek** mondjuk.

Példák. Szemléltessük az $\left(\mathbb{R}^2, \varrho_i\right)$ $(i = 1, 2, +\infty)$ metrikus terekben az origó 1 sugarú gömb-környezeteit.

Definíció. Az (M, ϱ) metrikus tér $A \subset M$ részhalmazát **korlátosnak** nevezzük, ha van olyan M-beli gömb, amely A-t tartalmazza, azaz

$$\exists\, a \in M \quad \text{és} \quad \exists\, r > 0 \quad \text{valós szám, hogy} \quad A \subset k_r^\varrho(a).$$

A háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával egyszerűen be lehet bizonyítani azt, hogy *az (M, ϱ) metrikus tér $A \subset M$ részhalmaza akkor és csak akkor korlátos, ha a tér minden elemének van olyan környezete, amely tartalmazza az A halmazt.*

Példák.

- Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $1 \leq p \leq +\infty$. A $H \subset \mathbb{R}^n$ halmaz esetén jelölje H_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ a H halmaz k-adik koordinátáiból álló $\mathbb{R}$-beli halmazt. A H halmaz pontosan akkor korlátos az $\left(\mathbb{R}^n, \varrho_p\right)$ metrikus térben, ha mindegyik H_k korlátos $\mathbb{R}$-ben.

- Legyen Φ a $C[0, 1]$ függvényhalmaznak az a részhalmaza, amelyik pontosan az alábbi módon értelmezett $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ függvényeket tartalmazza:

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x, & \text{ha } 0 \leq x \leq \frac{1}{2n} \\ 2n^2\left(\frac{1}{n} - x\right), & \text{ha } \frac{1}{2n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ekkor

(a) a $\Phi \subset C[0, 1]$ halmaz **nem korlátos** a $\left(C[0, 1], \varrho_\infty\right)$ metrikus térben;
(b) a $\Phi \subset C[0, 1]$ halmaz **korlátos** a $\left(C[0, 1], \varrho_1\right)$ metrikus térben.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az M halmazon értelmezett ϱ_1 és ϱ_2 metrikák **ekvivalensek**, ha léteznek olyan c_1, c_2 pozitív valós számok, amelyekkel minden $x, y \in M$ elemre fennáll a

$$c_1\varrho_1(x,y) \le \varrho_2(x,y) \le c_2\varrho_1(x,y)$$

egyenlőtlenség.

Példák.

- Az $\mathbb{R}^n$ halmazon ($n \in \mathbb{N}$) bevezetett ϱ_p $(1 \le p \le +\infty)$ metrikák egymással *ekvivalensek.*
- Az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett diszkrét metrika *nem ekvivalens* ϱ_∞-nel.
- A $C[0,1]$ halmazon értelmezett ϱ_∞ és ϱ_1 metrikák *nem ekvivalensek.*

2.1.4. Konvergens sorozatok metrikus terekben

Definíció. Az (M, ϱ) metrikus tér egy (a_n) sorozatát akkor nevezzük **konvergensnek**, ha létezik olyan $\alpha \in M$ elem, hogy ennek tetszőleges (sugarú) környezetén kívül a sorozatnak legfeljebb csak véges sok tagja van, azaz

$$\exists\, \alpha \in M, \text{ hogy } \forall\, \epsilon > 0 \text{ esetén az } \big\{ n \in \mathbb{N} \mid a_n \notin k_\epsilon(\alpha) \big\} \text{ halmaz véges.}$$

Az ellenkező esetben (vagyis akkor, ha nincs ilyen α) azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **divergens**.

A háromszög-egyenlőtlenségből következik, hogy legfeljebb egy olyan $\alpha \in M$ létezik, amelyre a fenti feltétel teljesül. Ezt a pontot az (a_n) sorozat **határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \overset{\varrho}{=} \alpha, \qquad \lim(a_n) \overset{\varrho}{=} \alpha, \qquad a_n \xrightarrow{\varrho} \alpha \ \ (n \to +\infty).$$

Ha nem okoz félreértést, akkor a metrikára utaló jelet elhagyjuk.

1. tétel. *Legyen (M, ϱ) metrikus tér és (a_n) tetszőleges M-beli sorozat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1^o *Az (a_n) sorozat határértéke az $\alpha \in M$ elem.*

2^o *Az $\alpha \in M$ pont tetszőleges (sugarú) környezetéhez van olyan $n_0 \in \mathbb{N}$ küszöbindex, hogy a sorozat minden ennél nagyobb indexű tagja benne van a szóban forgó környezetben, azaz*

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \text{ hogy } \ \forall\, n \ge n_0 \ \text{ esetén } \ a_n \in k_\varepsilon(\alpha).$$

3^o $\forall\,\varepsilon > 0$-*hoz* $\exists\, n_0 \in \mathbb{N}$, *hogy* $\forall\, n \geq n_0$ *esetén* $\varrho(a_n, \alpha) < \varepsilon$.

4^o $\lim\limits_{n\to+\infty} \varrho(a_n, \alpha) = 0$.

Egyszerűen bebizonyítható az, hogy a ϱ **metrika folytonos** a következő értelemben: Ha az M-beli (a_n) és a (b_n) sorozatok konvergensek, (a_n)-nek α, (b_n)-nek pedig β a határértéke, akkor

$$\lim_{n\to+\infty} \varrho(a_n, b_n) = \varrho(\alpha, \beta).$$

A konvergens valós sorozatok bizonyos tulajdonságai tetszőleges metrikus térben is megmaradnak.

2. tétel. *Legyen (a_n) az (M, ϱ) metrikus tér egy tetszőleges* ***konvergens*** *sorozata. Ekkor a következő állítások teljesülnek:*

1^o *Az (a_n) sorozat* ***korlátos****, azaz az értékkészlete korlátos M-beli halmaz.*

2^o *Az (a_n) minden részsorozata is konvergens, és a határértéke megegyezik a kiindulási sorozat határértékével.*

3^o *Ha az (a_n) sorozatnak van két különböző M-beli elemhez tartó részsorozata, akkor (a_n) divergens.*

Ugyanazon a halmazon többféle módon is meg lehet adni metrikát, és a konvergencia ténye függ attól, hogy azt melyik metrikában tekintjük. Előfordulhat az, hogy egy adott halmazbeli sorozat az egyik metrikában konvergens, a másikban pedig divergens. Sokkal kedvezőbb a helyzet akkor, ha a két metrika **ekvivalens**. Ebben az esetben a konvergencia szempontjából a két metrika között nincs különbség: mind a két metrikában ugyanazok lesznek a konvergens (divergens) sorozatok. Ezt fejezi ki a következő állítás.

3. tétel. *Legyen M nemüres halmaz. Tegyük fel, hogy az M-en értelmezett ϱ_1 és ϱ_2 metrikák ekvivalensek. Ekkor tetszőleges M-beli (a_n) sorozatra*

$$\lim\,(a_n) \overset{\varrho_1}{=} \alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \lim\,(a_n) \overset{\varrho_2}{=} \alpha.$$

$\mathbb{R}$-ben a **Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel** azt állítja, hogy *minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.* Ez metrikus térben általában nem igaz. Például az $\big(\mathbb{N},\ \varrho\big)$ *diszkrét* metrikus térben az $a_n := n$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat korlátos, de nincs konvergens részsorozata.

4. tétel. *Az $\big(\mathbb{R}^n, \varrho_p\big)$ metrikus terekben $(n \in \mathbb{N},\ 1 \leq p \leq +\infty)$ igaz a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel, azaz minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

Példa.

• A $\big(C[0,1], \varrho_\infty\big)$ metrikus térben **nem igaz** a *Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel*: van olyan korlátos (f_n) sorozat, aminek nincs konvergens részsorozata. (Ilyen például az

$$f_n(x) := \sin\big(2^n \pi x\big) \qquad (x \in [0,1], \quad n = 0,1,2,\ldots)$$

függvénysorozat, ui. $\varrho_\infty\big(f_n, f_m\big) \geq 1$, ha $n \neq m$.)

2.1.5. Teljes metrikus terek

Emlékeztetünk a valós analízis egyik legfontosabb tételére, a **Cauchy-féle konvergenciakritériumra**: *az (a_n) valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha (a_n) Cauchy-sorozat, azaz*

$$(a_n) \subset \mathbb{R} \;\text{ konvergens} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \;\exists\, n \in \mathbb{N}_0, \;\text{ hogy} \\ \forall\, n \geq n_0 \;\text{ esetén }\; |a_n - a_m| < \varepsilon. \end{cases}$$

Az analízis alapvető fogalmának, a sorozat konvergenciájának a definíciójában szerepel egy, a sorozat tagjain „kívüli” dolog is. Nevezetesen: a sorozat határértéke. Ez alapján a konvergenciát csak akkor tudjuk eldönteni, ha ismerjük a sorozat határértékét. A Cauchy-féle konvergenciakritérium azt állítja, hogy a konvergenciára megadható egy olyan *szükséges és elégséges* (tehát a konvergenciával ekvivalens) feltétel is, amely kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével dönt a sorozat konvergens vagy divergens voltáról.

Világos, hogy a Cauchy-sorozat fogalmát megadó tulajdonságot — tehát azt, hogy „a sorozat elég nagy indexű tagjai tetszőlegesen közel vannak egymáshoz” — metrikus térben is lehet értelmezni.

Definíció. Az (M, ϱ) metrikus térbeli (a_n) sorozatot akkor nevezzük **Cauchy-sorozatnak**, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\text{ számhoz }\; \exists\, n \in \mathbb{N}_0, \;\text{ hogy }\; \forall\, n \geq n_0 \;\text{ esetén }\; \varrho(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Metrikus térben a konvergens és a Cauchy-sorozatok kapcsolatáról általában a következőt mondhatjuk.

5. tétel.

1^o *Tetszőleges (M, ϱ) metrikus térben minden konvergens sorozat egyúttal Cauchy-sorozat is.*

2^o *Az állítás megfordítása általában nem igaz: Van olyan (M, ϱ) metrikus tér, amelyikben van olyan Cauchy-sorozat, amelyik nem konvergens.*

A valós számok példája is mutatja, hogy bizonyos metrikus terekben a konvergencia ténye ekvivalens lehet a Cauchy-tulajdonsággal. Az ilyen metrikus teret fogjuk **teljes metrikus térnek** nevezni.

Definíció. Az (M, ϱ) metrikus teret akkor nevezzük **teljes metrikus térnek**, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens, vagyis a tér teljes, ha igaz benne a Cauchy-féle konvergenciakritérium, azaz

$$(a_n) \subset M \text{ konvergens} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_n) \subset M \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Példák.

- A Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján $\mathbb{R}$ egy **teljes** metrikus tér.
- A racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát az $\mathbb{R}$-beli metrikával ellátva egy **nem teljes** metrikus teret kapunk. (Például minden $\sqrt{2}$-höz tartó racionális sorozat — ilyenek léteznek! — Cauchy-sorozat a $\mathbb{Q}$ metrikus térben, és itt nem konvergens.)
- A diszkrét metrikus terek **teljesek**. Egyszerűen bebizonyítható ui. az, hogy ezekben a terekben egy sorozat pontosan akkor konvergens, illetve Cauchy-sorozat, ha a tagjai valamilyen indextől kezdve ugyanazt az értéket veszik fel.
- Minden $n \in \mathbb{N}$ és $1 \le p \le +\infty$ esetén az $\big(R^n, \varrho_p\big)$ **teljes** metrikus tér.
- Minden $1 \le p \le +\infty$ esetén az $\big(l^p, \varrho_p\big)$ is **teljes** metrikus tér.
- A $\big(C[a,b], \varrho_\infty\big)$ metrikus tér **teljes**.
- A $\big(C[a,b], \varrho_p\big)$ metrikus terek $(1 \le p < +\infty)$ **nem teljesek**.

A teljes metrikus terek további vizsgálatához tekintsük ismét a jól megismert $\mathbb{R}$ metrikus teret. Ott alapvető jelentőségű volt az a tény, hogy $\mathbb{R}$ rendelkezik a **Cantor-tulajdonsággal**, vagyis azzal, hogy *minden egymásba skatulyázott korlátos és zárt intervallumsorozatnak van közös pontja.* Azt is tudjuk már, hogy ez „majdnem ekvivalens" az $\mathbb{R}$ teljességével. (Pontosabban: $\mathbb{R}$-ben az archimédeszi és a Cantor-tulajdonság együtt ekvivalens a teljességgel.) Tetszőleges metrikus térben — a Cantor-tulajdonság kiegészítésével — a teljességet ekvivalens módon lehet jellemezni bizonyos geometriai tulajdonsággal. Az állítás pontos megfogalmazása előtt emlékeztetünk még arra, hogy az (M, ϱ) metrikus térbeli

$$\overline{k_r(a)} := \overline{k_r^\varrho(a)} := \big\{\, x \in M \mid \varrho(x,a) \le r \,\big\} \qquad (a \in M,\ r > 0)$$

halmazt az a középpontú r-sugarú *zárt gömbnek* neveztük.

6. tétel (a Cantor-féle közösrész-tétel). *Egy metrikus tér akkor és csak akkor teljes, ha minden olyan zárt gömbökből álló* $\overline{k_{r_n}(a_n)}$ $(n \in \mathbb{N})$ *sorozatra, amelyre* *(i)* $\overline{k_{r_{n+1}}(a_{n+1})} \subset \overline{k_{r_n}(a_n)}$,

(ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} r_n = 0$,

a gömböknek egyetlen közös pontjuk van, azaz a

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{k_{r_n}(a_n)}$$

egyelemű halmaz.

Bizonyítás. $\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy a metrikus tér teljes, és tekintsük zárt gömböknek egy mondott tulajdonságú sorozatát. Ebből a feltételből következik, hogy a középpontokra fennáll a

$$\varrho(a_n, a_m) \le r_n \qquad (m \ge n)$$

egyenlőtlenség, ahonnan látható, hogy a középpontok (a_n) sorozata Cauchy-sorozat. A metrikus tér teljes, ezért ez konvergens. Jelölje a a határértékét. A fenti egyenlőtlenségből

$$\varrho(a_n, a) \le \varrho(a_n, a_m) + \varrho(a_m, a) \le r_n + \varrho(a_m, a) \qquad (m \ge n)$$

következik, ahonnan $m \to +\infty$ határátmenettel

$$\varrho(a_n, a) \le r_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

adódik. Ez azt jelenti, hogy az a pont mindegyik gömbnek eleme, tehát a közös részük nem üres. Indirekt módon kapjuk azt, hogy a gömböknek ez az egyetlen közös pontja van.

$\boxed{\Leftarrow}$ Most induljunk ki egy (a_n) Cauchy-sorozatból, és mutassuk meg, hogy az konvergens. Konstruálni fogunk zárt gömböknek egy egymásba skatulyázott sorozatát.

Az (a_n) sorozat Cauchy-tulajdonságából következik, hogy

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}\text{-hez} \;\; \exists\, n_1 \in \mathbb{N}, \;\; \text{hogy} \;\; \forall\, n \ge n_1 \;\; \text{esetén} \quad \varrho(a_n, a_{n_1}) < \tfrac{1}{2}.$$

Jelölje F_1 az a_{n_1} középpontú 1-sugarú zárt gömböt:

$$F_1 := \overline{k_1(a_{n_1})}.$$

Ismét a Cauchy-tulajdonságra hivatkozva kapjuk, hogy

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2^2}\text{-hez} \;\; \exists\, n_2 > n_1, \;\; \text{index, hogy} \;\; \forall\, n \ge n_2 \;\; \text{esetén} \quad \varrho(a_n, a_{n_2}) < \tfrac{1}{2^2}.$$

Legyen

$$F_2 := \overline{k_{\frac{1}{2}}(a_{n_2})}.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$F_2 \subset F_1.$$

Az eljárást folytatva tegyük fel, hogy az $a_{n_1}, \dots, a_{n_k}$ pontokat ($n_1 < \cdots < n_k$) már kiválasztottuk (a_n)-ből. Vegyünk ezután egy olyan $a_{n_{k+1}}$ tagot, amelyre

$$n_{k+1} > n_k \;\; \text{és} \;\; \varrho(a_n, a_{n_{k+1}}) < \tfrac{1}{2^{k+1}}$$

teljesül minden $n \geq n_{k+1}$ index esetén, és legyen

$$F_{k+1} := \overline{k_{\frac{1}{2^k}}(a_{n_{k+1}})}.$$

A konstrukció miatt

$$F_{k+1} \subset F_k.$$

Így kapunk egymásba skatulyázott zárt gömböknek egy olyan (F_k) sorozatát, amelyben F_k sugara $\frac{1}{2^{k-1}}$. A tétel feltétele szerint ezeknek a gömböknek egy közös pontja van. Jelöljük ezt a-val. Világos, hogy $\lim(a_{n_k}) = a$.

Ez a pont azonban nem csak a részsorozatnak, hanem az egész sorozatnak is határértéke. Ez nyilvánvalóan következik a

$$\varrho(a, a_n) \leq \varrho(a, a_{n_k}) + \varrho(a_{n_k}, a_n)$$

egyenlőtlenségből, figyelembe véve, hogy (a_n) egy Cauchy-sorozat. Ez viszont azt jelenti, hogy az (a_n) sorozat valóban konvergens. ■

2.1.6. Metrikus tér teljessé tétele

2.1.7. Nyílt, zárt és kompakt halmazok metrikus terekben

Ebben a szakaszban metrikus terek legfontosabb halmaztípusairól, a *nyílt*, a *zárt* és a *kompakt* halmazokról, valamint halmaz *belsejéről* és *lezárásáról* lesz szó.

• Nyílt halmazok. Halmaz belseje

Definíció. Legyen (M, ϱ) egy metrikus tér és A az M egy *nemüres* részhalmaza. Az $a \in A$ pontot az A **halmaz belső pontjának** nevezzük, ha a-nak van olyan gömbkörnyezete, amely benne van A-ban, azaz van olyan $r > 0$ szám, hogy $k_r(a) \subset A$. Az A halmaz belső pontjainak a halmazát A **belsejének** nevezzük, és az $\operatorname{int} A$ szimbólummal jelöljük.

Definíció. Azt mondjuk, hogy a $G \subset M$ halmaz **nyílt az** (M, ϱ) **metrikus térben**, ha G minden pontja belső pont. A nyílt halmazok családját a $\mathcal{G}_M$ szimbólummal fogjuk jelölni.

Példák.

- Az $\mathbb{R}$-beli nyílt intervallumok a fenti értelemben nyílt halmazok.
- A félig zárt $[a, b)$ és $(a, b]$ intervallumok, ahol $-\infty < a < b < +\infty$ nem nyíltak; $\operatorname{int}[a, b) = (a, b)$ és $\operatorname{int}(a, b] = (a, b)$.
- Az $\mathbb{R}$ metrikus térben a racionális pontok $\mathbb{Q}$ halmaza nem nyílt; $\operatorname{int} \mathbb{Q} = \emptyset$.
- A diszkrét metrikus tér minden részhalmaza nyílt.

- Tetszőleges metrikus térben az $\emptyset$ és a M halmazok nyíltak.
- Tetszőleges (M, ϱ) metrikus térben a **gömb-környezetek**, vagyis a

$$k_r(a) := \big\{x \in M \mid \varrho(x,a) < r\big\} \qquad (a \in M,\ r > 0)$$

halmazok a fenti értelemben nyílt halmazok.

- Ha a $\big(C[a,b], \varrho_\infty\big)$ metrikus térben

$$A := \big\{f \in C[a,b] \ \big|\ |f(t)| \leq K < +\infty,\ \forall\, t \in [a,b]\big\},$$

akkor

$$\operatorname{int} A = \big\{f \in C[a,b] \ \big|\ |f(t)| < K < +\infty,\ \forall\, t \in [a,b]\big\}.$$

Íme a nyílt halmazok alaptulajdonságai:

7. tétel. *Az (M, ϱ) metrikus tér nyílt halmazainak a $\mathcal{G}_M$ családja a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*

1^o *az $A \subset M$ halmaz belseje egyenlő A legbővebb nyílt részhalmazával, azaz*

$$\operatorname{int} A = \bigcup_{\substack{G \subset A \\ G \in \mathcal{G}_M}} G;$$

2^o *a $G \subset M$ halmaz akkor és csak akkor nyílt, ha $G = \operatorname{int} G$;*

3^o *véges sok nyílt halmaz metszete is nyílt halmaz;*

4^o *tetszőlegesen sok nyílt halmaz egyesítése is nyílt halmaz;*

5^o *bármely két különböző M-beli pont szétválasztható nyílt halmazokkal, azaz ha a és b az M halmaz két tetszőleges különböző pontja, akkor vannak olyan diszjunkt U és V nyílt M-beli halmazok, hogy $a \in U$ és $b \in V$.*

• Zárt halmazok. Halmaz lezárása

Definíció. Az (M, ϱ) metrikus tér $F \subset M$ részhalmaza **zárt**, ha az F halmaznak M-re vonatkozó komplementuma – azaz az $M \setminus F$ halmaz – nyílt. A zárt halmazok családját az $\mathcal{F}_M$ szimbólummal fogjuk jelölni.

Példák.

- Az $\mathbb{R}$-beli zárt intervallumok a fenti értelemben zárt halmazok.

• A félig zárt $[a,b)$ és $(a,b]$ intervallumok, ahol $-\infty < a < b < +\infty$ se nem nyíltak, se nem zártak.

• Az $\mathbb{R}$ metrikus térben a racionális pontok halmaza nem zárt (és nem is nyílt).

• A diszkrét metrikus tér minden részhalmaza zárt (és nyílt is).

• Tetszőleges metrikus térben az $\emptyset$ és a M halmazok zártak is és nyíltak is.

• Metrikus térben minden véges sok pontból álló halmaz zárt.

• Tetszőleges (M,ϱ) metrikus térben a zárt gömbök, vagyis a

$$\overline{k_r(a)} := \big\{x \in M \mid \varrho(x,a) \le r\big\} \qquad (a \in M,\ r > 0)$$

halmazok a fenti értelemben zárt halmazok. Speciálisan a $\big(C[a,b], \varrho_\infty\big)$ metrikus térben minden $K > 0$ esetén az

$$A := \big\{f \in C[a,b] \mid \ |f(t)| \le K, \quad t \in [a,b]\big\}$$

halmaz zárt.

A zárt halmazok alaptulajdonságai:

8. tétel. *Az (M,ϱ) metrikus tér zárt halmazainak a családja a következő tulajdonságokkal rendelkezik:*
1^o *véges sok zárt halmaz egyesítése is zárt halmaz;*
2^o *tetszőlegesen sok zárt halmaz metszete is zárt halmaz.*

Zárt halmazok további jellemzéséhez bevezetjük a következő fontos fogalmakat:

Definíció.
1^o Az (M,ϱ) metrikus tér egy $a \in M$ pontját az $A \subset M$ részhalmaz egy **torlódási pontjának** nevezzük, ha az a pont minden gömb-környezete tartalmaz a-tól különböző pontot az A halmazból. Az A halmaz **torlódási pontjainak a halmazát** az A' szimbólummal jelöljük.
2^o Az (M,ϱ) metrikus tér A részhalmazának a **lezárásán** az

$$\overline{A} := A \cup A'$$

halmazt értjük.

Hangsúlyozzuk, hogy egy halmaz torlódási pontja nem feltétlenül tartozik hozzá a halmazhoz. Tekintsük például az $\mathbb{R}$ metrikus térben az $A := [0,1] \cap \mathbb{Q}$ halmazt, amelyre $\overline{A} = [0,1]$.

Példák.

- $\mathbb{R}$-ben $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$ és $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$.
- Tetszőleges (M, ϱ) metrikus tér bármelyik $k_r(a)$ *gömb-környezetének* a fenti értelemben való lezárása a neki megfelelő *zárt gömb*. (A zárt gömbökre bevezetett korábbi jelölésünk tehát összhangban van a lezárásra imént bevezetett jelöléssel.)

9. tétel. *Egy (M, ϱ) metrikus tér tetszőleges $A \subset M$ részhalmazára a következő állítások teljesülnek:*

1^o $a \in \overline{A} \iff \exists\,(x_n) \subset A$ *sorozat, hogy* $\lim(x_n) = a$*;*

2^o $a \notin \overline{A} \iff \exists\,\varepsilon > 0,$ *hogy* $k_\varepsilon(a) \cap A = \emptyset$*.*

10. tétel. *Az (M, ϱ) metrikus térbeli $A \subset M$ halmaz lezárása az A-t tartalmazó legszűkebb zárt halmaz, azaz*

$$\overline{A} = \bigcap_{\substack{A \subset F \\ F \in \mathcal{F}_M}} F.$$

11. tétel. *Az (M, ϱ) metrikus tér tetszőleges A, B részhalmazai esetén érvényesek a következők:*

1^o $\overline{\emptyset} = \emptyset$,

2^o $A \subset \overline{A}$,

3^o *ha* $A \subset B \implies \overline{A} \subset \overline{B}$,

4^o $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$,

5^o $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$,

6^o *az $A \subset M$ halmaz pontosan akkor zárt, ha $A = \overline{A}$,*

7^o *halmaz lezárásának a komplementere egyenlő a komplementer belsejével:*

$$M \setminus \overline{A} = \operatorname{int}(M \setminus A) \quad (A \subset M).$$

12. tétel (zárt halmazok jellemzése). *Az (M, ϱ) metrikus tér egy $F \subset M$ részhalmazára a következő állítások ekvivalensek:*

1^o *az F halmaz zárt az (M, ϱ) metrikus térben,*

2^o *az F halmaz minden torlódási pontját tartalmazza, azaz $F' \subset F$;*

3^o *minden F-beli konvergens sorozat határértéke is benne van F-ben.*

• Kompakt halmazok

Definíció. Az (M, ϱ) metrikus tér K részhalmazát **kompaktnak** nevezzük, ha minden K-beli sorozatnak van K-beli elemhez konvergáló részsorozata.

Definíció. Az (M, ϱ) metrikus tér A részhalmazának **nyílt lefedésén** M nyílt részhalmazainak olyan $\{G_\alpha\}$ összességét értjük, amelyre $A \subset \bigcup_\alpha G_\alpha$.

13. tétel. *Legyen (M, ϱ) metrikus tér. A következő állítások ekvivalensek:*

1^o *a $K \subset M$ halmaz kompakt;*
2^o *K minden nyílt lefedése tartalmaz véges lefedést*
*(ez a **Borel-féle lefedési tétel**);*
3^o *K minden végtelen részhalmazának van K-beli torlódási pontja.*

14. tétel. *Legyen K az (M, ϱ) metrikus tér egy kompakt részhalmaza. Ekkor*
1^o *a $K \subset M$ halmaz zárt az (M, ϱ) metrikus térben;*
2^o *a $K \subset M$ halmaz korlátos az (M, ϱ) metrikus térben.*
Van olyan metrikus tér, aminek van zárt és korlátos, de nem kompakt részhalmaza.

15. tétel. *$(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$-ben egy halmaz akkor és csak akkor kompakt, ha korlátos és zárt.*

2.1.8. Metrikus tér sűrű részhalmazai. Szeparábilis terek. A Baire-féle kategóriatétel

Tekintsük a valós számok szokásos metrikus terében a racionális számok $\mathbb{Q}$ halmazát. Abból a jól ismert tényből, hogy minden nemelfajuló intervallum tartalmaz racionális számot következik, hogy $\mathbb{Q}' = \mathbb{R}$, vagyis $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$. A szemléletre hivatkozva azt is mondtuk, hogy a racionális számok **sűrűn** vannak $\mathbb{R}$-ben. Könnyű meggondolni, hogy ez azt is jelenti, hogy minden $a \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan racionális számokból álló $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ sorozat, amelyik a-hoz konvergál. A sűrűségi tulajdonság tehát bizonyos *approximációs tulajdonsággal* hozható kapcsolatba.

További motivációként gondoljunk Weierstrass első approximációs tételére: *minden $f \in C[a, b]$ függvényhez van olyan polinomsorozat, amelyik egyenletesen (vagyis a ϱ_∞ metrikában) tart f-hez.* A szemléletre való hivatkozással itt is mondhatjuk azt, hogy az algebrai polinomok **sűrűn** vannak a $\big(C[a, b], \varrho_\infty\big)$ metrikus térben. Ezt a tényt a halmaz lezárásának a fogalmával kifejezhetjük úgy is (l. a 9. tételt), hogy az algebrai polinomok $\mathcal{P}$ halmazának lezárása a $\big(C[a, b], \varrho_\infty\big)$ metrikus térben az egész $C[a, b]$ tér, azaz $\overline{\mathcal{P}} = C[a, b]$.

A fentiek általánosításaként vezessük be a következő fogalmakat.

Definíció.
1^o Azt mondjuk, hogy az (M, ϱ) metrikus tér A részhalmaza **sűrű** az $M_0 \subset M$ halmazban, ha $M_0 \subset \overline{A}$.

2^o Az $A \subset M$ halmaz **mindenütt sűrű** az (M, ϱ) metrikus térben, ha $\overline{A} = M$.

3^o Az $A \subset M$ halmaz **sehol sem sűrű** az (M, ϱ) metrikus térben, ha egyetlen gömbben sem sűrű.

Példák.

- A racionális számok halmaza mindenütt sűrű $\mathbb{R}$-ben.
- $\mathbb{R}$-ben minden véges halmaz sehol sem sűrű.
- Az $\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\} \cup \left\{0\right\}$ sehol sem sűrű $\mathbb{R}$-ben.
- Az $\left(\mathbb{R}^2, \varrho_2\right)$ metrikus térben minden egyenes sehol sem sűrű halmaz.
- A $\left(C[a,b], \varrho_\infty\right)$ metrikus térben az $[a,b]$ intervallumon definiált valós értékű, folytonos „töröttvonal-függvények” A halmaza egy mindenütt sűrű halmaz. ($\varphi \in A$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan $n \in \mathbb{N}$ és $x_i \in [a,b]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ úgy, hogy $a =: x_0 < x_1 < \cdots < x_n := b$ és $\varphi_{|[x_{i-1}, x_i]}$ lineáris függvény.)

A 9. tétel felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók az alábbi állítások.

16. tétel. *Az (M, ϱ) metrikus tér tetszőleges A és M_0 részhalmazaira a következő állítások érvényesek:*

1^o *Az A halmaz akkor és csak akkor* ***sűrű*** *az $M_0 \subset M$ halmazban, ha M_0 minden x eleméhez létezik olyan A-beli (x_n) sorozat, amelyre* $\lim(x_n) = x$*, azaz M_0 minden pontja „tetszőleges pontossággal” megközelíthető A-beli pontokkal.*

2^o *Az $A \subset M$ halmaz pontosan akkor* ***nem sűrű*** *az $M_0 \subset M$ halmazban, ha*

$$\exists\, x \in M_0 \quad \textit{és} \quad \exists\, \varepsilon > 0, \quad \textit{hogy} \quad k_\varepsilon(x) \cap A = \emptyset.$$

17. tétel. *Az (M, ϱ) metrikus tér tetszőleges A részhalmaza esetén a következő állítások ekvivalensek:*

1^o *Az A halmaz sehol sem sűrű.*

2^o *Az A halmaz lezárása nem tartalmaz gömböt, azaz az $\overline{A}$ halmaznak nincs belső pontja, ami azt jelenti, hogy* $\operatorname{int} \overline{A} = \emptyset$.

3^o *Minden $x \in M$ pont minden $k_\varepsilon(x)$ gömb-környezete tartalmaz olyan $k_{\varepsilon_1}(x_1)$ gömböt, amelyben nincs A-beli elem.*

4^o *$M \setminus \overline{A}$ mindenütt sűrű M-ben.*

Különösen fontosak azok a metrikus terek, amelyekben van *megszámlálható*, mindenütt sűrű részhalmaz. Az ilyen terekben ui. ki lehet jelölni egy olyan, megszámlálható halmazt — ennek elemeit lehet kezelni — amelynek elemeivel a tér minden eleme „tetszőleges pontossággal” megközelíthető.

Definíció. Egy metrikus teret **szeparábilisnek** nevezünk, ha van megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza.

Példák.

- $\mathbb{R}$ szeparábilis, $\mathbb{Q}$ egy megszámlálható mindenütt sűrű részhalmaza.
- Az (M, ϱ) diszkrét metrikus tér pontosan akkor szeparábilis, ha M megszámlálható.
- Az $\big(\mathbb{R}^n, \varrho_p\big)$ $(n \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le +\infty)$ terek szeparábilisek, ezekben a racionális koordinátájú pontok halmaza egy megszámlálható mindenütt sűrű halmaz.
- Az $\big(l^p, \varrho_p\big)$ terek $1 \le p < +\infty$ esetén szeparábilisek, az $\big(l^\infty, \varrho_\infty\big)$ tér nem szeparábilis.
- Weierstrass első approximációs tételét felhasználva igazolható, hogy a racionális együtthatós algebrai polinomok halmaza — ami megszámlálható — sűrű a $\big(C[a, b], \varrho_\infty\big)$ metrikus térben, ezért ez is szeparábilis tér.

Teljes metrikus terek sűrűséggel kapcsolatos fontos tulajdonságát állítja a **Baire-lemma**, amelyet különböző formákban fogalmazunk meg.

18. tétel (a Baire-lemma). *Legyen (M, ϱ) teljes metrikus tér.*

1^o *Megszámlálható sok M-beli, mindenütt sűrű nyílt halmaz metszete is mindenütt sűrű M-ben, azaz ha (G_n) nyílt halmazoknak egy olyan M-beli sorozata, hogy*

$$\overline{G_n} = M \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} G_n} = M.$$

2^o *Megszámlálható sok M-beli, sehol sem sűrű zárt halmaz egyesítése is sehol sem sűrű M-ben, azaz ha $(F_n) \subset M$ zárt halmazoknak egy olyan sorozata, amelyre*

$$\operatorname{int} F_n = \emptyset \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

akkor

$$\operatorname{int} \Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n\Big) = \emptyset.$$

3^o *Ha M előállítható megszámlálható sok zárt halmaz egyesítéseként, akkor azok közül legalább az egyik tartalmaz nemüres nyílt gömb-környezetet, azaz ha (F_n) zárt halmazoknak egy olyan sorozata M-ben, amelyre*

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = M,$$

akkor valamelyik F_n halmaz belseje nemüres, azaz

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \textit{hogy} \quad \operatorname{int} F_{n_0} \neq \emptyset.$$

Megjegyzés. A teljesség feltétele lényeges: tekintsük például $M = \mathbb{Q}$-ban (a szokásos metrikával) a $\mathbb{Q} \setminus \{r\}$ nyílt halmazokat vagy az $\{r\}$ zárt halmazokat, ahol r végigfutja a racionális számokat.

Bizonyítás. 1^o Azt kell megmutatni, hogy tetszőleges $k_{r_0}(x_0) \subset M$ gömb-környezetben van $\cap_{n\in\mathbb{N}} G_n$ halmazbeli pont.

G_1 mindenütt sűrű M-ben, ezért található egy $x_1 \in G_1 \cap k_{r_0}(x_0)$ pont. Ez utóbbi halmaz nyílt, ezért van olyan $0 < r_1 < 1$ szám, hogy

$$\overline{k_{r_1}(x_1)} \subset G_1 \cap k_{r_0}(x_0).$$

De G_2 is mindenütt sűrű M-ben, ezért van egy $x_2 \in G_2 \cap k_{r_1}(x_1)$ pont is. Minthogy az utóbbi halmaz nyílt, ezért van olyan $0 < r_2 < 1/2$ szám, hogy

$$\overline{k_{r_2}(x_2)} \subset G_2 \cap k_{r_1}(x_1).$$

Rekurzióval folytatva a konstrukciót, zárt gömböknek olyan monoton fogyó sorozatát kapjuk, hogy

$$\overline{k_{r_n}(x_n)} \subset G_n$$

minden n-re, és $\lim(r_n) = 0$. A Cantor-féle közösrész-tétel szerint e gömböknek van egy x közös pontja. A konstrukció miatt $x \in \cap G_n$ és $x \in k_{r_0}(x_0)$.

2^o Legyen $G_n := M \setminus F_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Mivel F_n-ek zártak, ezért mindegyik G_n nyílt halmaz. Az egyszerűen bizonyítható

$$M \setminus \overline{H} = \operatorname{int}\big(M \setminus H\big) \qquad (H \subset M) \tag{2.1}$$

összefüggés alapján

$$M \setminus \overline{G_n} = \operatorname{int}\big(M \setminus G_n\big) = \operatorname{int} F_n = \emptyset,$$

ezért $\overline{G}_n = M$, tehát (l. 1^o-et)

$$\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n} = M.$$

Ezt az egyenlőséget, (2.1)-et, valamint a de Morgan-azonosságokat felhasználva kapjuk, hogy

$$\emptyset = M \setminus \Big(\overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n}\Big) = \operatorname{int}\Big(M \setminus \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n\Big) = \operatorname{int}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n\Big),$$

és ez a 2^o állítás bizonyítását jelenti.

Végül a 3^o állítás 2^o felhasználásával indirekt módon igazolható. ■

A most igazolt tételt — bevezetve az első és a második kategóriájú halmaz fogalmát — szokás más formában is megfogalmazni.

Definíció. Az (M, ϱ) metrikus tér A részhalmazát **első kategóriájúnak** nevezzük, ha A előállítható megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként. Ha A nem első kategóriájú, akkor **második kategóriájúnak** mondjuk.

19. tétel (a Baire-féle kategóriatétel). *Minden teljes metrikus tér második kategóriájú, azaz nem állítható elő megszámlálható sok sehol sem sűrű halmaz egyesítéseként.*

Bizonyítás. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy az M teljes metrikus tér első kategóriájú, vagyis előállítható

$$M = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n$$

alakban, ahol a H_n halmazok mindegyike sehol sem sűrű, azaz

$$\operatorname{int} \overline{H_n} = \emptyset \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor a Baire-lemma 2^o állítását alkalmazva kapjuk, hogy

$$\operatorname{int}\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} H_n\Big) = \emptyset = \operatorname{int} M,$$

azaz az M tér belseje az üres halmaz. Ezzel az ellentmondással az állítást igazoltuk. ∎

Példák.

- Mivel $\mathbb{R}$-ben minden véges halmaz sehol sem sűrű, ezért minden megszámlálható halmaz, így $\mathbb{Q}$ is **első kategóriájú**, noha $\mathbb{Q}$ mindenütt sűrű $\mathbb{R}$-ben.
- $\mathbb{R}^2$-ben a racionális koordinátájú pontok halmaza **első kategóriájú**.
- $\mathbb{R}$-ben az irracionális pontok $\mathbb{Q}^*$ halmaza **második kategóriájú**. Valóban, a Baire-féle kategóriatételből következik, hogy teljes metrikus térben első kategóriájú halmaz kiegészítő halmaza második kategóriájú; $\mathbb{Q}$ meg első kategóriájú.

2.1.9. Metrikus terek közötti függvények folytonossága

Definíció. Legyenek (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f \in M_1 \to M_2$ függvény **folytonos az** $a \in \mathcal{D}_f$ **pontban** (jelölésben $f \in C\{a\}$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \ \ \exists\, \delta > 0, \ \text{ hogy } \ \forall\, x \in \mathcal{D}_f, \ \varrho_1(x, a) < \delta \ \text{ esetén } \ \varrho_2\big(f(x), f(a)\big) < \varepsilon.$$

f **folytonos az** $A \subset \mathcal{D}_f$ **halmazon**, ha f folytonos az A halmaz minden pontjában.

20. tétel (az átviteli elv). *Legyenek (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) metrikus terek. Az $f \in M_1 \to M_2$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha minden $\mathcal{D}_f$-beli, a-hoz tartó (x_n) sorozat esetén a függvényértékek $\big(f(x_n)\big)$ sorozata az M_2 térben az $f(a)$ ponthoz konvergál.*

21. tétel. *Tegyük fel, hogy az M_i halmazon megadott ϱ_i és $\tilde{\varrho}_i$ $(i = 1, 2)$ metrikák ekvivalensek. Ekkor az*

$$f \in (M_1, \varrho_1) \to (M_2, \varrho_2)$$

függvény akkor és csak akkor folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban, ha

$$f \in (M_1, \tilde{\varrho}_1) \to (M_2, \tilde{\varrho}_2)$$

folytonos a-ban.

22. tétel (az összetett függvény folytonossága). *Tegyük fel, hogy (M_i, ϱ_i) $(i = 1, 2, 3)$ metrikus terek és a $g \in M_1 \to M_2$ függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_g$ pontban, az $f \in M_2 \to M_3$ függvény pedig folytonos a $g(a) \in \mathcal{D}_f$ pontban. Ekkor az $f \circ g$ összetett függvény folytonos a-ban.*

23. tétel (a folytonosság jellemzése nyílt halmazokkal). *Legyenek (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) metrikus terek. Az egész M_1 téren értelmezett $f : M_1 \to M_2$ függvény akkor és csak akkor folytonos M_1-en, ha minden M_2-beli nyílt B halmaz f által létesített őséképe M_1-beli nyílt halmaz.*

24. tétel. *Legyenek (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) metrikus terek és $A \subset M_1$. Az $f : A \to M_2$ függvény pontosan akkor folytonos az A halmazon, ha*

$$\forall\, B \subset M_2 \ \text{ nyílt halmazhoz } \ \exists\, G \subset M_1 \ \text{ nyílt halmaz, hogy } f^{-1}[B] = A \cap G.$$

25. tétel. *Legyenek (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) metrikus terek, és tegyük fel, hogy*

- *$A \subset M_1$ kompakt halmaz,*
- *az $f : A \to M_2$ függvény folytonos A-n.*

Ekkor

1^o *$\mathcal{R}_f \subset M_2$ kompakt halmaz;*

2^o *Ha $M_2 = \mathbb{R}$, akkor f-nek van maximuma és minimuma (**Weiersrass tétele**);*

3^o *ha f injektív, akkor f^{-1} is folytonos.*

Definíció. Legyenek (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) metrikus terek. Azt mondjuk, hogy az $f \in M_1 \to M_2$ függvény **egyenletesen folytonos** az $A \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \ \ \exists\, \delta > 0, \ \text{ hogy } \ \forall\, x, y \in A, \ \varrho_1(x, y) < \delta \ \text{ esetén } \ \varrho_2\big(f(x), f(y)\big) < \varepsilon.$$

26. tétel. *Legyenek (M_1, ϱ_1) és (M_2, ϱ_2) metrikus terek, és tegyük fel, hogy $f \in M_1 \to M_2$.*

1^o *Ha f egyenletesen folytonos az $A \subset \mathcal{D}_f$ halmazon, akkor folytonos is A-n.*

2^o *Ha $A \subset \mathcal{D}_f$ kompakt és f folytonos A-n, akkor f egyenletesen is folytonos az A halmazon.* (***Heine-tétel***).

27. tétel (a Banach-féle fixpont-tétel). *Tegyük fel, hogy*

- *(M, ϱ) teljes metrikus tér;*
- *az $f : M \to M$ leképezés egy* ***kontrakció****, azaz létezik olyan $\alpha \in [0, 1)$ szám, hogy*

$$\varrho\big(f(x), f(y)\big) \le \alpha\, \varrho(x, y) \qquad (\forall\, x, y \in M).$$

Ekkor

1^o *egyértelműen létezik olyan $x^* \in M$, hogy $f(x^*) = x^*$ (x^*-ot az f* ***fixpontjának*** *nevezzük).*

2^o *az*

$$\begin{aligned} &x_0 \in M \\ &x_{n+1} = f(x_n) \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

iterációs sorozat konvergens és x^* a határértéke.

3^o *A konvergenciára a*

$$\varrho(x^*, x_n) \le \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\varrho(x_0, x_1) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

hibabecslés érvényes.

2.2. Lineáris terek (vektorterek)

A már megismert fontos metrikus terekben nem csak pontok **távolságát**, hanem az elemek között különböző **műveleteket** is lehet értelmezni. Fordítsuk figyelmünket most csak a két legegyszerűbb műveletre: az összeadásra és a számmal való szorzásra. A tekintett fontos példák közös tulajdonságait keresve fogalmazhatunk úgy is, hogy a szóban forgó halmazok nem csak „metrikus”, hanem „lineáris térstruktúrával” is el vannak látva.

Feltételezzük a **lineáris terekkel** kapcsolatos alapvető fogalmak és eredmények ismeretét. A továbbiakban csak a $\mathbb{K} := \mathbb{R}$ vagy a $\mathbb{K} := \mathbb{C}$ számtest feletti lineáris terekről lesz szó, és röviden egy X lineáris térről fogunk majd beszélni. A tér nullaelemét a θ szimbólummal fogjuk jelölni.

Az X_1 és az X_2 lineáris tér **izomorf**, ha elemeik között létezik művelettartó bijekció. Az izomorf lineáris tereket ugyanazon tér különböző realizációjának tekinthetjük.

Az X lineáris tér tetszőleges M részhalmaza esetén az $[M]$ szimbólummal fogjuk jelölni az M halmaz **lineáris burkát**, vagyis az M-et tartalmazó legszűkebb (lineáris) alteret. Ez az altér, amelyet a *M által generált altérnek* is szokás nevezni, megegyezik az M elemeiből képzett összes (véges) lineáris kombinációk halmazával, azaz

$$[M] = \{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \cdots + \lambda_n x_n \mid \lambda_i \in \mathbb{K},\ x_i \in M,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Egy X-beli tetszőleges M halmazt **lineárisan függetlennek** nevezünk akkor, ha bármelyik véges sok M-beli vektor lineárisan független.

Az X lineáris tér **véges dimenziós**, ha van olyan n természetes szám és van olyan n elemet tartalmazó lineárisan független M részhalmaza, amelyre $[M] = X$. Ekkor azt mondjuk, hogy X egy n-dimenziós lineáris tér (jelölésben $\dim X = n$). Az M-beli vektorrendszert ilyenkor az X tér egy **bázisának** hívjuk, és azt is mondjuk, hogy *az M halmaz vektorai kifeszítik az X teret*. Az X lineáris tér **végtelen dimenziós**, ha nem véges dimenziójú.

A lineáris algebrában megismertük a *véges dimenziós* terek tulajdonságait. Ezek közül megemlítjük azt, hogy bármelyik két n-dimenziós lineáris tér izomorf egymással. Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy lényegében $\mathbb{R}^n$ az egyetlen n-dimenziós lineáris tér. Az analízis szempontjából alapvető fontosságúak a *végtelen dimenziós* lineáris terek. Érdemes meggondolni, hogy a $C[a, b]$ és az l^p terek mindegyike ilyen.

Véges dimenziós terekben láttuk a *bázis* fogalmának a jelentőségét. Végtelen dimenziós esetben is bevezethetjük ezt a fogalmat.

Definíció. Az X lineáris tér egy $H \subset X$ részhalmazát **Hamel-bázisának** nevezzük, ha lineárisan független vektorokból áll, és a halmaz lineáris burka az egész X tér, azaz $[H] = X$.

1. tétel. *Minden lineáris térben van Hamel-bázis, és bármely két ilyen bázis ugyanolyan számosságú. Ezt a közös számosságot a tér **algebrai dimenziójának** nevezzük.*

2. tétel. *Az X lineáris tér H részhalmaza a térnek akkor és csak akkor Hamel-bázisa, ha minden x vektor egyértelműen előállítható **véges sok** H-beli vektor lineáris kombinációjával.*

2.3. Normált terek és Banach-terek

Az előző pontban már volt arról szó, hogy a megismert metrikus tereink nem csak „metrikus”, hanem „lineáris térstruktúrával” is el vannak látva. Megtehetnénk a következőt: tekintünk egy lineáris teret, és feltételezzük, hogy azon a téren az e-lemek között valamilyen távolságfogalmat is értelmeztünk. Általános szempontból ezután vizsgálhatnánk az így adódó — mondjuk — „lineáris metrikus térnek” el-nevezhető struktúra tulajdonságait. Egy lineáris téren nem célszerű akármilyen metrikát bevezetni, hanem csak olyat, amelyre teljesülnek a műveletek és a metrika kacsolatára vonatkozó bizonyos természetes elvárások. Itt csak azt emeljük ki, hogy *egy* ilyen fontos elvárás az, hogy a műveletek legyenek **folytonosak** az adott metrikára nézve.

E követelés megfogalmazása lényegesen egyszerűbb, ha a lineáris téren nem közvetlenül a metrikát, hanem az ún. **normát** értelmezzük. A *norma* az $\mathbb{R}^3$-beli vektorok hosszának (abszolút értékének) absztrakciója. Íly módon jutunk el a **lineáris normált tér** (a továbbiakban röviden **normált tér**) fogalmához.

Definíció. Az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ rendezett párt **normált térnek** nevezzük, ha

1^o X egy lineáris tér a $\mathbb{K}$ számtest felett;

2^o a $\|\cdot\|$ pedig egy olyan $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ függvény, amelyik tetszőleges $x, y, z \in X$ elemre és $\lambda \in \mathbb{K}$ számra eleget tesz az alábbi követelményeknek:

(i) $\|x\| \geq 0$,

(ii) $\|x\| = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \theta \qquad$ (θ az X lineáris tér nulleleme),

(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Az utolsó tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük. Az $\|\cdot\|$ leképezést **normának**, az $\|x\|$ számot pedig az x elem *normájának* mondjuk.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor **valós**, ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor pedig **komplex** normált térről beszélünk. Ha a norma a szövegkörnyezetből nyilvánvaló, akkor egyszerűen X-et írunk $\big(X, \|\cdot\|\big)$ helyett. X elemeit *vektoroknak* is nevezzük.

Példák normált terekre.

• $X = \mathbb{R}$, $\|x\| := |x|$ $(x \in \mathbb{R})$. Ez $\mathbb{R}$ szokásos normája. A továbbiakban $\mathbb{R}$-et mindig ezzel a normával látjuk el.

• **Az $\mathbb{R}^n$ terek**. Egy pozitív egész n szám esetén tekintsük a szokásos műveletekkel ellátott $X := \mathbb{R}^n$ lineáris teret. Legyen $1 \leq p \leq +\infty$ és $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén

$$\|x\|_p := \begin{cases} \Big(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\Big)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max\limits_{1 \leq k \leq n} \{|x_k|\}, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor $\big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\big)$ normált tér. Ezt az $\mathbb{R}^n_p$ szimbólummal is jelölni fogjuk.

• **Mátrixnormák**. Az $m \times n$-es valós mátrixok $\mathbb{R}^{m\times n}$ lineáris terében az alábbi kifejezések mindegyike normát értelmez:

$$\|A\| := \Big(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2\Big)^{1/2} \qquad \text{(euklideszi norma)},$$

$$\|A\| := \max_{1\le j\le n}\sum_{i=1}^{m}|a_{ij}| \qquad \text{(oszlopösszegnorma)},$$

$$\|A\| := \max_{1\le i\le m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}| \qquad \text{(sorösszegnorma)},$$

ahol $A := [a_{ij}] \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

• **A l^p terek**. Tekintsük $1 \le p < +\infty$ esetén a **valós** sorozatok

$$l^p := \Big\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\Big|\; \sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p < +\infty\Big\},$$

$p = +\infty$ esetén pedig a

$$l^\infty := \Big\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\Big|\; \sup_{k\in\mathbb{N}}|x_k| < +\infty\Big\}$$

(szokásos műveletekkel ellátott) lineáris terét. Ha $x = (x_n) \in l^p$, akkor legyen

$$\|x\|_p := \|x\|_{l^p} := \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{+\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\{|x_k|\}, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor $\big(l^p, \|\cdot\|_{l^p}\big)$ normált tér.

• **A $C[a,b]$ függvényterek**. A $C[a,b]$ halmazt a függvények közötti szokásos műveletekkel ellátva nyilván egy valós lineáris teret kapunk; ezen a

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{x\in[a,b]}|f(x) - g(x)|, & \text{ha } p = +\infty \end{cases} \qquad (f \in C[a,b])$$

függvény norma, tehát $\big(C[a,b], \|\cdot\|_p\big)$ valós normált tér.

• **A L^p terek**. Ezekről a függvényterekről a 2.4. pontban lesz szó.

1. tétel. *Ha* $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *normált tér, akkor a*

$$\varrho(x,y) := \|x-y\| \qquad (x,y \in X)$$

függvény metrika az X halmazon, azaz (X,ϱ) metrikus tér. Következésképpen minden normált tér egyúttal metrikus tér is. Ezt a ϱ metrikát a $\|\cdot\|$ norma által ***indukált metrikának*** *nevezzük.*

Minden X lineáris téren értelmezett norma tehát egy metrikát indukál az X halmazon. Felvetődik az a kérdés, hogy egy lineáris téren értelmezett tetszőleges metrika vajon származtatható-e alkalmas normából? A válasz az, hogy nem.

Példa. Jelölje $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ a valós sorozatok szokásos műveletekkel ellátott lineáris terét, és legyen

$$\varrho(x,y) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|} \qquad \big(x = (x_n),\, y = (y_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\big).$$

Ekkor ϱ olyan metrika $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$-en, amelyik nem származtatható normából, vagyis nincs olyan norma ezen a téren, amelyik a ϱ metrikát indukálja.

Definíció. Az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált térbeli (x_n) sorozatot akkor nevezzük **konvergensnek**, ha (x_n) a norma álta indukált metrikában konvergens. Ez pontosan azt jelenti, hogy

$$\exists\, \alpha \in X \quad : \qquad \lim_{n\to+\infty} \|x_n - \alpha\| = 0.$$

Konvergencia esetén a fenti α elem egyértelműen meg van határozva, ezt a sorozat **határértékének** nevezzük (azt is mondjuk, hogy (x_n) sorozat a $\|\cdot\|$ **normában tart** α-hoz). Ezt tényt az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \overset{\|\cdot\|}{=} \alpha, \qquad \lim(a_n) \overset{\|\cdot\|}{=} \alpha, \qquad a_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \alpha \ \ (n \to +\infty).$$

Ha nem okoz félreértést, akkor a normára utaló jelet elhagyjuk.

A következő tétel azt állítja, hogy a norma által indukált metrika valóban teljesíti a bevezetésben jelzett elvárást: a műveletek folytonosak a metrikára nézve. Ezen kívül a metrika invariáns a „párhuzamos eltolással" szemben és arányosan változik a vektorok nyújtásának a hatására.

2. tétel. *Legyen* $\big(X, \|\cdot\|\big)$ *egy normált tér, és jelölje ϱ a norma által indukált metrikát. Ekkor*

1^o *$\varrho(x+z, y+z) = \varrho(x,y) \qquad (x, y \in X);$*
2^o *$\varrho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\varrho(x,y) \qquad (x, y \in X,\ \lambda \in \mathbb{K});$*
3^o *ha $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \xi$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \eta$ és $\lambda_n \to \lambda \in \mathbb{K}$, akkor*

$$\lambda_n x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \lambda\xi, \qquad x_n + y_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \xi + \eta.$$

3. tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér. A norma, mint $X \to \mathbb{R}$ típusú függvény folytonos.*

Definíció. Azt mondjuk, hogy az X lineáris téren adott $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma **ekvivalens** (jelben $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), ha léteznek olyan c_1, c_2 pozitív valós számok, hogy

$$c_1\|x\|_1 \le \|x\|_2 \le c_2\|x\|_1$$

minden $x \in X$-re.

Ekvivalens normák ekvivalens metrikákat indukálnak. Egyszerűen igazolható, hogy normát vele ekvivalens normára cserélve a halmazok nyílt, zárt, kompakt, korlátos volta, a sorozatok konvergenciája vagy Cauchy-tulajdonsága nem változik.

Példa. A $C[a,b]$ lineáris téren a $\|\cdot\|_\infty$ és az $\|\cdot\|_1$ normák **nem** ekvivalensek, sőt tetszőleges $1 \le p < \infty$ esetén a $\|\cdot\|_p$ norma nem ekvivalens a $\|\cdot\|_\infty$ normával.

4. tétel. *Véges dimenziós X lineáris téren értelmezett bármely két norma ekvivalens egymással.*

5. tétel. *Legyen $\big(X, \|\cdot\|\big)$ véges dimenziós normált tér. Ekkor*
1^o *X teljes;*
2^o *egy X-beli halmaz pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt;*
3^o *X szeparábilis;*
4^o *minden X-beli korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

A metrikus terekhez hasonlóan a normált terekben is fontos szerepe van a **teljességnek**.

Definíció. Az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált teret **Banach-térnek** nevezzük, ha a tér a norma által indukált metrikára nézve teljes metrikus tér.

Példák.

- $\mathbb{R}$ Banach-tér, a $\mathbb{Q}$ normált tér nem Banach-tér.

- Minden véges dimenziós normált tér Banach-tér.
- Minden $1 \le p \le +\infty$ esetén az $\big(l^p, \|\cdot\|_p\big)$ normált tér Banach-tér.
- A $\big(C[a,b], \|\cdot\|_p\big)$ normált tér egyetlen $1 \le p < +\infty$ esetén sem Banach-tér.

- A $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált tér Banach-tér.
- Tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktér és $1 \le p \le +\infty$ kitevő esetén az

$$\big(L^p(X, \Omega, \mu), \|\cdot\|_{L^p}\big)$$

normált tér Banach-tér.

Lineáris terekben a **mindenütt sűrű** halmazok helyett inkább *zárt rendszerekről* szokás beszélni.

Definíció. Legyen $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált tér. A $Z \subset X$ részhalmazt **zárt rendszernek** nevezzük X-ben, ha Z lineáris burka (vagyis a $[Z]$ halmaz) mindenütt sűrű a norma által indukált metrikus térben, azaz

$$\overline{[Z]} = X.$$

Ez pontosan azt jelenti, hogy minden X-beli elem tetszőleges pontossággal megközelíthető Z-beli vektorok alkalmaz lineáris kombinációjával, azaz

$$\forall\, x \in X \quad \text{vektorhoz és} \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad \text{számhoz}$$
$$\exists\, n \in \mathbb{N}, \quad \exists\, z_1, \dots, z_n \in Z \text{ és } \exists\, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \quad \text{hogy}$$
$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k z_k \Big\| < \varepsilon.$$

Definíció. Az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált teret akkor nevezzük **szeparábilisnek**, ha X a norma által indukált metrikával szeparábilis metrikus tér, vagyis X-nek van megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaza. Ez azzal ekvivalens, hogy X-ben van megszámlálhatóan végtelen zárt rendszer.

2.4. A L^p és a l^p terek

2.4.1. Előzetes megjegyzések

- **A** $\big(C[a,b],\, \|\cdot\|_p\big)$ **függvényterek**

Emlékeztetünk arra, hogy a $C[a,b]$ függvénytéren minden $1 \le p \le +\infty$ számra értelmeztük a $\|\cdot\|_p$ szimbólummal jelölt normát. Ha $p = +\infty$, akkor a függvényértékek maximumával, ha $1 \le p < +\infty$, akkor pedig az

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f|^p\right)^{1/p} \qquad (f \in C[a,b]) \tag{2.2}$$

képlettel (ezért neveztük ezeket *integrálnormáknak*). Itt az integrált a Riemann-féle értelemben tekintettük. Az így értelmezett $\big(C[a,b], \|\cdot\|_p\big)$ normált terek közötti legfontosabb különbség az, hogy ez a tér a maximumnormában ($p = +\infty$) **teljes**, az integrálnormákban ($1 \le p < +\infty$) azonban **nem teljes**. (A teljesség jelentőségét már elég sokszor hangsúlyoztuk!)

A fenti képletben a Riemann-integrál helyett Lebesgue-integrált is vehetnénk. Ez az ártatlannak tűnő módosítás azonban számos kérdést vet fel, amelyek megfogalmazása előtt címszavakban emlékeztetünk a Lebesgue-integrál elméletével kapcsolatos ismeretekre.

• A Lebesgue-integrál mértékterekben

Tetszőleges (X, Ω, μ) mértéktérből (X tehát egy nemüres halmaz, Ω az X halmaz részhalmazaiból álló σ-algebra és $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mérték) kiindulva felépíthető a Lebesgue-integrál elmélete. Arról van szó, hogy az X-en értelmezett $\overline{\mathbb{R}}$-beli értékeket felvevő f függvények „többségéhez” hozzá lehet rendelni egy $\overline{\mathbb{R}}$-beli számot, amit az $\int_X f \, d\mu$ szimbólummal jelölünk, és az f függvény μ mérték szerinti integráljának nevezünk. Ez az integrálfogalom rendelkezik a Riemann-integrálnál megismert tulajdonságokkal, sőt sok szempontból annál lényegesen kedvezőbb is.

A tekintett függvények körét az ún. **mérhető függvényekre** korlátoztuk, ezek halmazát az $\mathcal{M}(X, \Omega)$ szimbólummal jelöltük:

$$f \in \mathcal{M}(X,\Omega) \iff \forall\, \alpha \in \mathbb{R}\text{-re } \ \{f > \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) > \alpha\} \in \Omega.$$

(Ez a megszorítás igen keveset követel az f-től; az analízisben (!) előforduló valós-valós függvények szinte mindegyike rendelkezik ezzel a tulajdonsággal.)

Az elmélet felépítése során minden nemnegatív f mérhető függvényhez hozzárendeltünk egy $[0, +\infty]$-beli számot. Így értelmeztük tetszőleges $f \in \mathcal{M}(X, \Omega)$ függvény pozitív, illetve negatív részének (f^+-nak, illetve f^--nak) az integrálját: $I^+ := \int_X f^+ \, d\mu$-t, illetve $I^- := \int_X f^- \, \mu$-t. Ezután azoknak a mérhető függvényeknek az integrálját definiáltuk, amelyekre I^+ és I^- közül legalább az egyik véges. Egy mérhető függvény integrálja tehát lehet véges, de lehet $\pm\infty$ is. A továbbiakban figyelmünket azokra a függvényekre fordítottuk, amelyeknek az így értelmezett integrálja **véges**. Az ilyen mérhető függvényeket neveztük (az X halmazon a μ mérték szerint) **Lebesgue-integrálhatóknak**, és ezek halmazát így jelöltük:

$$L(X, \Omega, \mu) := \left\{ f \in \mathcal{M}(X, \Omega) \;\middle|\; \int_X f\,d\mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

$L(X, \Omega, \mu)$ helyett a továbbiakban gyakran csak L-et fogunk írni. L^+-szal a nemnegatív L-beli elemek halmazát jelöljük.

• **A probléma felvetése**

Struktúrával szeretnénk ellátni a Lebesgue-integrálható függvények halmazát.

L nyilván egy $\mathbb{R}$ feletti **lineáris tér** (vagy *vektortér*), ha a műveleteket a valós értékű függvények körében megszokott módon (pontonként) értelmezzük.

A **norma** bevezetésének a problémája már jóval érdekesebb (mert nehezebb). A (2.2) képletből kiindulva fogjuk definiálni minden $1 \le p \le +\infty$ esetén a

$$\big(L^p(X, \Omega, \mu),\ \|\cdot\|_{L^p}\big)$$

normált teret. (Ki fog majd derülni, hogy különböző p-kre a $C[a, b]$ függvénytértől eltérően itt már maguk a halmazok is különbözők lesznek.) Ezeknek a függvénytereknek az egyik legfontosabb tulajdonsága az, hogy **teljesek**, vagyis **Banach-terek** (l. a Riesz–Fischer-tételt). Ez az eredmény egyike volt a legelsőknek azok közül az általános érdeklődést felkeltő, fontos tételek közül, amelyek a Lebesgue-féle integrálon alapulnak, s amelyek így az új integrálfogalom teljesítő képességét demonstrálják.

2.4.2. A Lebesgue-integrálra vonatkozó néhány alapvető eredmény

1. tétel. *Legyen (X, Ω, μ) mértéktér és $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy Ω-mérhető függvény. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

1^o *az f függvény Lebesgue-integrálható, azaz $f \in L$;*

2^o $f^+, f^- \in L$;

3^o $\exists\, g, h \in L; g, h \ge 0\ : f = g - h$;

4^o $\exists\, G \in L : |f| \le G$ *(f-nek van integrálható majoránsa);*

5^o $|f| \in L$.

Legyen (X, Ω, μ) tetszőleges mértéktér. Tegyük fel, hogy T az X elemeire vonatkozó „logikai kifejezés” (tulajdonság, kijelentés), azaz $\forall\, x \in X$-re $T(x)$ vagy igaz, vagy hamis. Azt mondjuk, hogy a T tulajdonság az X-en **μ-majdnem mindenütt** (röviden: **μ-m.m. az X-en**) teljesül, ha

$\exists\, A \in \Omega,\ \mu(A) = 0$ halmaz, hogy $\forall\, x \in X \setminus A$ elemre a $T(x)$ tulajdonság igaz.

A Lebesgue-integrál „érzéketlen” a μ-nullamértékű halmazokra.

2. tétel. 1^o *Bármely nemnegatív Legesgue-integrálható f függvény esetén*

$$\int_X f\,d\mu = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f = 0 \ \mu\text{-m.m. } X\text{-en.}$$

2^o *Ha az f és g mérhető függvények μ-m.m. egyenlők az X halmazon, valamint f Lebesgue-integrálható, akkor g is Lebesgue-integrálható a Lebesgue-integráljuk is egyenlő.*

3^o *Minden L-beli f függvényre igaz, hogy $|f| < +\infty$ μ-m.m.*

3. tétel (Beppo Levi tétele). *Tegyük fel, hogy*

(a) $f_n \in L$ $(n \in \mathbb{N})$,

(b) *az (f_n) függvénysorozat monoton növekedő, és $f := \lim_{n\to\infty} f_n$,*

(c) *az integrálok $\int_X f_n\,d\mu$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozata korlátos.*

Ekkor az f függvény Lebesgue-integrálható és

$$\int_X f\,d\mu = \int_X \lim_n (f_n)\,d\mu = \lim_n \int_X f_n\,d\mu.$$

4. tétel (Fatou tétele).

1^o *Bármely $f_n \in L^+$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatra*

$$\int_X \Big(\liminf_n f_n\Big)\,d\mu \leq \liminf_n \Big(\int_X f_n\,d\mu\Big).$$

2^o *Ha $\exists\, F \in L : f_n \leq F$ ($\forall n \in \mathbb{N}$ μ-m.m. az X-en), akkor*

$$\limsup_n \Big(\int_X f_n\,d\mu\Big) \leq \int_X (\limsup_n f_n)\,d\mu.$$

5. tétel (Lebesgue-tétele). *Legyen (X, Ω, μ) tetszőleges mértéktér, és tegyük fel, hogy*

(a) $f_n \in L \quad (n \in \mathbb{N})$,

(b) *a függvénysorozatnak van integrálható majoránsa, azaz $\exists\, g \in L : |f_n| \leq g$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-m.m. X-en,*

(c) *az (f_n) függvénysorozat az X-en μ-m.m. konvergál az f függvényhez.*

Ekkor $f \in L(X, \Omega, \mu)$ *és*

$$\int\limits_X f\,d\mu = \int\limits_X \Big(\lim_n f_n\Big)\,d\mu = \lim_n \int\limits_X f_n\,d\mu.$$

2.4.3. A $\mathbb{L}^p$ függvényterek

Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér. Vezessük be minden $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvényre a következő kifejezéseket:

$$\begin{aligned} \|f\|_p &:= \Big(\int\limits_X |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}, \quad \text{ha } 0 < p < +\infty, \\ \|f\|_\infty &:= \inf\big\{c \geq 0 \;\big|\; |f| \leq c \;\; \mu\text{-m.m. az } X\text{-en}\,\big\}, \\ &= \inf\big\{\sup_{X\setminus E}|f| \;\big|\; E \in \Omega \;\; \text{és} \;\; \mu(E) = 0\,\big\} \\ &\text{(megállapodva abban, hogy } \inf\emptyset := +\infty). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Mivel minden f mérhető függvény esetén az $|f|^p$ függvény is mérhető (ui. bármely $\alpha \geq 0$ számra az $\{|f|^p \geq \alpha\}$ és $\{|f| \geq \alpha^{1/p}\}$ nívóhalmazok egyenlők), ezért a definíciók korrektek. Tetszőleges f mérhető függvény esetén $\|f\|_p$ nemnegatív szám vagy $+\infty$.

Az $\|f\|_\infty$ számot szokás az $|f|$ függvény *lényeges felső korlátjának* is nevezni. Ennek megfelelően használatos rá a $\sup\operatorname{ess} f := \|f\|_\infty$ jelölés is a francia *„supremum essentiel”* kifejezés alapján.

A fenti kifejezések néhány tulajdonsága ($1 \leq p \leq +\infty$):

- $\|f\|_p \iff f = 0$ μ-m.m. az X-en;
- $\|f\|_p = \|g\|_p \iff f = g$ μ-m.m. az X-en;
- $\|f\|_\infty < +\infty \iff \exists\, c \geq 0 :\; |f| \leq c$ μ-m.m. az X-en;
- $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-m.m. az X-en;
- ha $\exists\, q \in (0, +\infty)$, hogy $\int\limits_X |f|^q\,d\mu < +\infty$, akkor

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty;$$

- ha a μ mérték véges és $\|f\|_\infty < +\infty$, akkor

$$\lim_{p\to+\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

Mivel a Lebesgue-integrál „érzéketlen” a μ-nullamértékű halmazokra, ezért a μ-m.m. egyenlő függvények között nem célszerű különbséget tenni. Azonosítsuk az ilyen függvényeket! Pontosabban arról van szó, hogy a Lebesgue-integrálható függvények

$$L := L(X, \Omega, \mu) \tag{2.4}$$

halmazán értelmezzük a következő relációt:

$$f, g \in L : \quad f \quad \sim g \quad :\Longleftrightarrow f = g \ \mu\text{-m.m. az } X\text{-en.}$$

Könnyen belátható, hogy $\sim$ ekvivalenciareláció, ami L-nek egy osztályfelbontását indukálja. Az így kapott ekvivalenciaosztályok halmazát az

$$\mathbb{L} := \mathbb{L}(X, \Omega, \mu) \tag{2.5}$$

szimbólummal fogjuk jelölni.

Az L halmaz elemei valós értékű függvények, ezek között az algebrai műveleteket a szokásos módon (pontonként) értelmezük. A bevezetett ekvivalenciareláció kompatíbilis ezekkel az algebrai műveletekkel: ha $f_1 = f_2$ és $g_1 = g_2$ μ-m.m., akkor

$$\begin{aligned} f_1 \pm f_2 = g_1 \pm g_2 \quad &\mu\text{-m.m.}, \\ f_1 f_2 = g_1 g_2 \quad &\mu\text{-m.m.}; \end{aligned}$$

és hasonló érvényes a (2.3) alatt értelmezett kifejezésekre is.

> *A* (2.4) *és* (2.5) *alatt bevezetett jelöléseket csak ebben a pontban fogjuk használni. A jegyzet többi részében — a szokásoknak megfelelően — nem teszünk jelölésbeli különbséget L és $\mathbb{L}$ között, azaz L minden f eleme egyúttal az összes olyan $g : X \to \overline{\mathbb{R}}$ mérhető függvényt is jelöli, amelyik μ-m.m. egyenlő f-fel. Ha $f \in \mathbb{L}$-et írunk, akkor f egy ekvivalenciaosztályt jelöl. A fentiek alapján azonban megállapodhatunk abban, hogy ekkor f nem ekvivalenciosztályt, hanem egyetlen függvényt, a szóban forgó ekvivalenciosztály egy tetszőleges elemét jelöli.*

Az $\mathbb{L}$ halmaz természetes vektortérstruktúrával van ellátva. Az ekvivalenciaosztályok összegét, illetve számszorosát reprezentánselemek (ezek valós értékű függvények!) összegével, illetve számszorosával a szokásos módon (pontonként) értelmezzük. Megmutatható, hogy ez független a reprezentánselemek megválasztásától. $\mathbb{L}$ tehát $\mathbb{R}$ feletti **lineáris tér** (vagy vektortér).

Definíció. Tetszőleges $0 < p \leq +\infty$ esetén $\mathbb{L}^p(X, \Omega, \mu)$-vel vagy röviden $\mathbb{L}^p$-vel jelöljük azoknak az $\mathbb{L}$-beli elemeknek a halmazát, amelyekre $\|f\|_p$ véges:

$$\mathbb{L}^p := \mathbb{L}^p(X, \Omega, \mu) := \left\{ f \in \mathbb{L} \;\middle|\; \|f\|_p < +\infty \right\}.$$

Gyakran fogjuk használni a következő fogalmat:

Definíció. Az $1 \le p \le +\infty$ szám **konjugált kitevőjén** az

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

egyenlőségnek eleget tevő $q \in [1 + \infty]$ számot értjük ($\frac{1}{+\infty}$-n 0-t értve); és ilyenkor azt is mondjuk, hogy p és q *konjugált kitevők.*

Ebben a pontban a fő célunk annak igazolása, hogy minden $1 \le p \le +\infty$ esetén $\mathbb{L}^p$ lineáris tér és a (2.3) kifejezések normák. A bizonyításban alapvető fontosságúak lesznek a következő egyenlőtlenségek.

6. tétel. *Legyenek $1 \le p, q \le +\infty$ konjugált kitevők: $p^{-1} + q^{-1} = 1$.*

1^o (***Young-egyenlőtlenség***) *Ha $a, b \ge 0$ és a p, q kitevők végesek, akkor*

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

2^o (***Hölder-egyenlőtlenség***[1]) *Ha $f \in \mathbb{L}^p$ és $g \in \mathbb{L}^q$, akkor $fg \in \mathbb{L}^1$ és*

$$\int_X |fg|\, d\mu = \|fg\|_1 \le \|f\|_p \cdot \|g\|_q.$$

*(A $p = q = 2$ esetben ez a **Cauchy–Bunyakovszkij-egyenlőtlenség**.)*

3^o (***Minkowski-egyenlőtlenség***) *Ha $f, g \in \mathbb{L}^p$ akkor $f + g \in \mathbb{L}^p$ és*

$$\|f + g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_q. \tag{2.6}$$

Bizonyítás. 1^o *A Young-egyenlőtlenség.* Átrendezés után $0 \le \frac{a^p}{p} - ab + \frac{b^q}{q}$ adódik. Rögzített $b > 0$ esetén (ha $b = 0$, akkor az állítás nyilvánvaló) tekintsük a

$$\varphi(x) := \frac{x^p}{p} - xb + \frac{b^q}{q} \qquad (x \ge 0)$$

függvényt. A φ függvény abszolút szélsőérték-helyeit keressük. Ehhez φ-t deriválva kapjuk, hogy

$$\varphi'(x) = x^{p-1} - b = 0 \qquad \iff \qquad x = b^{\frac{1}{p-1}} \quad (p \ne 1),$$

[1]Otto Hölder eredetileg a számsorokra vonatkozó egyenlőtlenséget bizonyította be; integrálokra az egyenlőtlenséget először Riesz Frigyes igazolta.

$\varphi''(x) > 0$, ha $x > 0$, következésképpen φ szigorúan csökkenő a $\left(0, b^{1/(p-1)}\right)$ és szigorúan növő a $\left(b^{1/(p-1)}, +\infty\right)$ intervallumon, a $b^{1/(p-1}$ pontban tehát abszolút minimuma van. Ennek értéke

$$\begin{aligned} \varphi\left(b^{\frac{1}{p-1}}\right) &= \frac{1}{p}\, b^{\frac{p}{p-1}} - b^{1+\frac{1}{p-1}} + \frac{b^q}{q} \qquad\qquad \left(\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 \ \Rightarrow\ q = \tfrac{p}{p-1}\right) \\ &= \frac{1}{p} b^q - b^q + \frac{b^q}{q} = b^q \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - b^q \\ &= 0 \end{aligned}$$

ezért $\varphi(x) \geq 0$ minden $x \geq 0$, tehát $x = a$ esetén is, azaz

$$\varphi(a) = \frac{a^p}{p} - ab + \frac{b^q}{q} \geq 0,$$

és ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

2^o *A Hölder-egyenlőtlenség igazolása.* A $p = 1, q = +\infty$ esetben (és ezzel együtt a $p = +\infty, q = 1$ esetben is a bizonyítás egyszerű:

$$|f(x)g(x)| \leq |f(x)| \cdot \|g\|_\infty \qquad \mu\text{-m.m.},$$

tehát

$$\|fg\|_1 = \int_X fg\, d\mu \leq \Big(|f|\, d\mu\Big) \cdot \|g\|_\infty = \|f\|_\infty \cdot \|g\|_\infty.$$

tekintsük most az $1 < p < +\infty$ esetet (ekkor egyben $1 < q < +\infty$). Ha $\|f\|_p$ és $\|g\|_q$ közül csak egyik is 0-val egyenlő, akkor $fg = 0$ μ-m.m., s így az integrálja is 0, az állítás tehát triviálisan teljesül. Feltehetjük, hogy $\|f\|_p$ és $\|g\|_q$ mindegyike 0-tól különböző. Legyen

$$a := \frac{|f(x)|}{\|f\|_p} \quad (\|f\|_p \neq 0), \qquad b := \frac{|g(x)|}{\|g\|_q} \quad (\|g\|_q \neq 0).$$

Írjuk fel a Young-egyenlőtlenséget ezekra az a, b számokra:

$$\frac{|f(x) \cdot g(x)|}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q} \cdot \frac{|g(x)|^q}{\|g\|_p^q} \qquad (\mu\text{-m.m } \ x \in X).$$

Az integrál monotonitását felhasználva kapjuk, hogy:

$$\frac{1}{\|f\|_p \cdot \|g\|_q} \cdot \int\limits_X |fg|\, d\mu \leq \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{\|f\|_p^p} \cdot \int\limits_X |f|^p\, d\mu + \frac{1}{q} \cdot \frac{1}{\|g\|_q^q} \cdot \int\limits_X |g|^q\, d\mu = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \tag{2.7}$$

ugyanis $\int\limits_X |f|^p\, d\mu = \|f\|_p^p$, valamint $\int\limits_X |g|^q\, d\mu = \|g\|_q^q$. A (2.7) egyenletőtlenséget $\|f\|_p \cdot \|g\|_q$-val beszorozva $\int\limits_X |f \cdot g|\, d\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q$ adódik, és ez éppen a bizonyítandó egyenlőtlenség.

3^o *A Minkowski-egyenlőtlenség igazolása.* A $p = 1$ és $p = +\infty$ esetek nyilvánvalók, ekkor ugyanis arról van szó, hogy két integrálható függvény összege is integrálható és

$$\int_X |f + g|\, d\mu \leq \int_X |f|\, d\mu + \int_X |g|\, d\mu,$$

illetve hogy két lényegében korlátos mérhető függvény összege is ilyen, és $|f+g| \le |f|+|g|$ miatt

$$\|f+g\|_\infty \le \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$$

is teljesül.

Marad tehát az $1<p<+\infty$ eset. Először azt mutatjuk meg, hogy $f,g\in\mathbb{L}^p$ esetén $f+g\in\mathbb{L}^p$. f és g mérhetők lévén $f+g$, következésképpen $|f+g|^p$ is mérhető. Ez a függvény azonban integrálható is, mert van integrálható majoránsa. Ez következik az

$$|f+g|^p \le \big(|f|+|g|\big)^p \le 2^{p-1}\big(|f|^p+|g|^p\big)$$

egyenlőtlenségből, amit a $h(x) := x^p$ $(x\ge 0)$ függvény konvexitását felhasználva lehet bebizonyítani. (A h függvény konvex, mert $h''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$, ha $x>0$, ui. a feltétel szerint $p>1$. A konvexitás definíciója szerint

$$h(\alpha\cdot a + (1-\alpha)\cdot b) \le \alpha h(a) + (1-\alpha)\cdot h(b).$$

Alkalmazzuk ezt az $\alpha := 1/2$, az $a := |f|$ és a $b := |g|$ szereposztással.) Így $f+g\in\mathbb{L}^p$ valóban teljesül.

Legyen p konjugált kitevője q, azaz $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Mivel $(p-1)q=p$, ezért ebből következik, hogy $|f+g|^{p-1}\in\mathbb{L}^q$ és

$$\big\||f+g|^{p-1}\big\|_q = \Big(\int_X |f+g|^p\Big)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Alkalmazzuk a Hölder-egyenlőtlenséget az $\mathbb{L}^p$-be tartozó $|f|,|g|$ és az $\mathbb{L}^q$-ba tartozó $|f+g|^{p-1}$ függvényekre:

$$\begin{aligned}
\|f+g\|_p^p &= \int_X |f+g|^{p-1}\cdot|f+g|\,d\mu \le \int_X |f+g|^{p-1}\cdot|f|\,d\mu + \int_X |f+g|^{p-1}\cdot|g|\,\mu \le \\
&\le \big\|\,|f+g|^{p-1}\,\big\|_q\cdot\|f\|_p + \big\|\,|f+g|^{p-1}\,\big\|_q\cdot\|g\|_p \le \\
&\le \big\|\,|f+g|^{p-1}\,\big\|_q\cdot(\|f\|_p+\|g\|_p) = \\
&= (\|f\|_p+\|g\|_p)\cdot\|f+g\|_p^{p/q}.
\end{aligned}$$

Ha $\|f+g\|_p>0$, akkor az utolsó tényezővel át lehet osztani, és mivel p,q konjugált kitevők, ezért

$$p-\frac{p}{q} = p\left(1-\frac{1}{q}\right) = p\,\frac{1}{p} = 1,$$

kapjuk a kívánt (2.6) egyenlőtlenséget. Az $\|f+g\|=0$ esetben (2.6) nyilvávalóan szintén teljesül.

Ezzel a Minkowski-egyenlőtlenséget minden $p\in[1,+\infty]$ kitevő esetére bebizonyítottuk. ■

7. tétel. *Legyen $\big(X,\Omega,\mu\big)$ tetszőleges mértéktér és $1\le p\le+\infty$. Ekkor $\mathbb{L}^p := \mathbb{L}^p\big(X,\Omega,\mu\big)$ a szokásos műveletekkel lineáris tér $\mathbb{R}$ felett. Az*

$$\left.\begin{aligned}
\|f\|_p := \|f\|_{\mathbb{L}^p} :&= \Big(\int_X |f|^p\,d\mu\Big)^{1/p}, \quad \text{ha } 1\le p<+\infty,\\
\|f\|_\infty := \|f\|_{\mathbb{L}^\infty} :&= \inf\big\{c\ge 0 \;\big|\; |f|\le c \;\; \mu\text{-m.m. az } X\text{-en}\big\},
\end{aligned}\right. \qquad \big(f\in\mathbb{L}^p\big)$$

függvény norma a $\mathbb{L}^p$ lineáris téren, vagyis $\big(\mathbb{L}^p,\|\cdot\|_p\big)$ normált tér.

Példák $\mathbb{L}^p(X,\Omega,\mu)$ terekre.

• Legyen $n \in \mathbb{N}$ és (X,Ω,μ) az $\mathbb{R}^n$-beli Legesgue-féle mértéktér, vagyis $X \subset \mathbb{R}^n$ egy nyílt halmaz, Ω az X Lebesgue-mérhető halmazainak a σ-algebrája és $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ a Lebesgue-mérték. $\mathbb{L}^p$ elemei tehát n változós valós értékű függvények, az integrál pedig a többszörös integrál általánosítása.

• Legyen $(X,\Omega,\mu) := (\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$, ahol μ a $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ hatványhalmazon értelmezett *elemszám-mérték* (vagyis $\mu(\{n\}) = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ számra). Ekkor bármely $1 \le p < +\infty$ esetén $\mathbb{L}^p(\mathbb{N},\mathcal{P}(\mathbb{N}),\mu)$ elemei olyan $x = (x_n)$ valós sorozatok, amelyekre

$$\|x\|_{\mathbb{L}^p} = \left(\int\limits_{\mathbb{N}} |x|^p \, d\mu \right)^{1/p} = \left(\sum_{k=1}^{+\infty} |x_k|^p \right)^{1/p} < +\infty,$$

tehát ez a speciális eset a korábban már bevezetett $\big(l^p, \|\cdot\|_p\big)$ térnek felel meg.

Ha $p = +\infty$, akkor $\mathbb{L}^\infty\big(\mathbb{N},\, \mathcal{P}(\mathbb{N}),\, \mu\big)$ elemei a korlátos valós sorozatok:

$$\mathbb{L}^\infty\big(\mathbb{N},\, \mathcal{P}(\mathbb{N}),\, \mu\big) = \big\{ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\big|\; \sup_k |x_k| < +\infty \big\}.$$

Mivel $\|x\|_{\mathbb{L}^\infty} = \sup_k |x_k|$, ezért a $\mathbb{L}^\infty\big(\mathbb{N},\, \mathcal{P}(\mathbb{N}),\, \mu\big)$ tér is a korábban már bevezetett $\big(l^\infty, \|\cdot\|_\infty\big)$ térrel egyezik meg. Ezekben az esetekben $A \subset \Omega = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ halmaz nyilván akkor és csak akkor nullamértékű, ha $A = \emptyset$. Ezért a $\mathbb{L}^p$-t (azaz a l^p-t) alkotó ekvivalenciosztályok egyeleműek.

• **A $\mathbb{L}^p_w(I)$ függvényterek**. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ *nyílt* (nem feltétlenül korlátos) intervallum, $w : I \to \mathbb{R}$ pedig a szokásos Lebesgue-mértékre vonatkozólag mérhető, m.m. nemnegatív függvény. Tegyük fel, hogy w integrálható I minden *kompakt* részintervallumán, és jelöljük $\mathcal{P}$-vel azon korlátos intervallumok félgyűrűjét, amelynek a lezárása is I-ben van. A $\mu(J) := \int_J w(t)\, dt$ képlet véges mértéket definiál $\mathcal{P}$-n. Tekintsük a hozzátartozó integrálelméletet, és $1 \le p \le +\infty$ esetén jelöljük $\mathbb{L}^p_w(I)$-vel a megfelelő $\mathbb{L}^p$ tereket. A $w = 1$ esetben visszakapjuk a szokásos $\mathbb{L}^p(I)$ tereket.

Megjegyzés. A 7. tételben lényeges a $p \ge 1$ feltétel, ui. a $0 < p < 1$ eseteknek megfelelő $\mathbb{L}^p$ terekben a (2.3) kifejezésre nem teljesül a normára megkövetelt háromszög-egyenlőtlenség. Legyen ui. (X,Ω,μ) a $(0,1)$ intervallumra vonatkozó szokásos Lebesgue-féle mértéktér, és tekintsük az

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } 0 < x < \frac12 \\ 0, & \text{ha } \frac12 \le x < 1, \end{cases} \qquad g(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } 0 < x < \frac12 \\ 1, & \text{ha } \frac12 \le x < 1. \end{cases}$$

függvényeket. Ekkor minden $0 < p < 1$ esetén

$$\|f+g\|_p = 1,\ \|f\|_p = \|g\|_p = \left(\tfrac12\right)^{1/p} \quad \Rightarrow \|f\|_p + \|g\|_p < 1,$$

ezért a háromszög-egyenlőtlenség ezekre a függvényekre nem teljesül.

2.4.4. Kapcsolat a $\mathbb{L}^p$ terek között

Érdemes megjegyezni, hogy **véges** μ mérték esetén a $\mathbb{L}^p$ terek $\mathbb{L}^1$-től kezdve „egymásba vannak skatulyázva”.

8. tétel. *Tegyük fel, hogy (X, Ω, μ) **véges** mértéktér (vagyis $\mu(X) < +\infty$). Ekkor minden $1 \le p < q \le +\infty$ esetén $\mathbb{L}^q \subset \mathbb{L}^p$.*

Bizonyítás. A Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazzuk a

$$\widetilde{p} := \frac{q}{p} \quad \text{és} \quad \widetilde{q} := \frac{q}{q-p}$$

konjugált kitevőkkel a következő módon ($\mathbf{1}$ jelöli az X-en mindenütt 1-et felvevő konstans függvényt):

$$\|f\|_p^p = \big\| \, |f|^p \cdot \mathbf{1} \big\|_1 \le \big\| \, |f|^p \big\|_{\widetilde{p}} \cdot \|\mathbf{1}\|_{\widetilde{q}} = \Big(\int_X (|f|^p)^{\frac{q}{p}} \, d\mu \Big)^{\frac{p}{q}} \cdot \Big(\int_X \mathbf{1}^{\widetilde{q}} \, d\mu \Big)^{\frac{1}{\widetilde{q}}} =$$
$$= \big\| \, f \|_q^p \cdot \big(\mu(X)\big)^{\frac{1}{\widetilde{q}}}.$$

Mivel μ véges mérték (azaz $\mu(X) < +\infty$) és $f \in \mathbb{L}^q$ (vagyis $\|f\|_q < +\infty$), ezért a fenti egyenlőtlenségből

$$\|f\|_p \le c \, \|f\|_q < +\infty$$

adódik, ahol $c := \big(\mu(X)\big)^{1/p - 1/q} < +\infty$. Ez azt jelenti, hogy minden $f \in \mathbb{L}^q$ esetén $f \in \mathbb{L}^p$ is teljesül. Az $\mathbb{L}^q \subset \mathbb{L}^p$ tartalmazás tehát valóban igaz. ■

Megjegyzések. $\mathbf{1}^o$ Egyszerűen megmutatható, hogy (például) a $\mathbb{L}^p(0,1)$ terek szigorúan egymásba vannak skatulyázva. Valóban, ha $f_\alpha(x) := \frac{1}{x^\alpha}$ $(x \in (0,1))$, akkor

$$f_\alpha \in \mathbb{L}^p(0,1) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \alpha < \tfrac{1}{p},$$

ezért

$$f_\alpha \in \mathbb{L}^p \setminus \mathbb{L}^q, \quad \text{ha } p < \tfrac{1}{\alpha} < q,$$

tehát tetszőleges $p < q$ esetén $\mathbb{L}^p \setminus \mathbb{L}^q \ne \emptyset$.

$\mathbf{2}^o$ Az előbbi tételben lényeges a mérték végességére tett feltétel.

2.4.5. Normakonvergencia. A $\mathbb{L}^p$ terek teljessége

Az $\mathbb{L}^p$ tereken definiált normával függvénysorozat **normakonvergenciáját** lehet (természetes módon) értelmezni.

Definíció. Legyen $1 \le p \le +\infty$. Azt mondjuk, hogy az $(f_n) \subset \mathbb{L}^P$ függvénysorozat az $\mathbb{L}^p$ tér **normájában konvergens**, ha

$$\exists \; f \in \mathbb{L}^p : \quad \lim_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Nyilván $\mathbb{L}^p$-beli sorozatok Cauchy-tulajdonsága is értelmezhető:

Definíció. Legyen $1 \leq p \leq +\infty$. Az $(f_n) \subset \mathbb{L}^P$ függvénysorozatot **Cauchy-sorozatnak** nevezzük, ha

$$\forall\ \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\ N \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m \geq N\text{-re} \quad \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon.$$

Az $\mathbb{L}^p$ terek egyik legfontosabb tulajdonsága az, hogy $\mathbb{R}$-hez hasonlóan itt is igaz a *Cauchy-féle konvergenciakritérium*, azaz függvénysorozat (norma)konvergenciája ekvivalens a függvénysorozat Cauchy-tulajdonságával.

9. tétel (Riesz–Fischer-tétel[2]). *Legyen (X, Ω, μ) egy tetszéleges mértéktér. Ekkor minden $1 \leq p \leq +\infty$ kitevő mellett a $\big(\mathbb{L}^p, \|\cdot\|_p\big)$ normált tér teljes, azaz Banach-tér. Ez azt jelenti, hogy minden $\mathbb{L}^p$-beli (f_n) Cauchy-sorozat az $\mathbb{L}^p$ tér normájában konvergens, vagyis létezik olyan $f \in \mathbb{L}^p$ függvény, hogy*

$$\lim_{n \to +\infty} \|f - f_n\|_p = 0.$$

Bizonyítás. Az állítás bizonyításának Riesz Frigyes-féle *alapgondolata* a következő:

> *Az $\mathbb{L}^p$ tér tetszőleges (f_n) Cauchy-sorozatából kiválasztható olyan $\big(f_{n_k}\big)$ részsorozat, amelyik az X-en μ-m.m. (pontonként) konvergál egy $f \in \mathbb{L}^p$ függvényhez.*

Ezt felhasználva már viszonylag egyszerűen meg lehet mutatni, hogy az egész (f_n) sorozat ehhez az f függvényhez tart az $\mathbb{L}^p$ tér normájában.

1. Legyen először $1 \leq p < +\infty$, és vegyünk egy tetszőleges (f_n) Cauchy-sorozatot az $\mathbb{L}^p$ térből, azaz tegyük fel, hogy

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz} \;\; \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m \geq N\text{-re} \;\; \|f_n - f_m\|_p < \varepsilon. \tag{2.8}$$

Ekkor kiválasztható egy $n_1 < n_2 < \cdots$ indexsorozat úgy, hogy

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p < \frac{1}{2^k} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

[Valóban, (2.8) miatt van olyan n_1 index, hogy $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2}$ minden $m, n \geq n_1$-re; vegyük ezután $n_2 > n_1$-et úgy, hogy $\|f_m - f_n\|_p < \frac{1}{2^2}$ teljesüljön minden $m, n \geq n_2$ esetén, s.í.t]

(a) Megmutatjuk, hogy az így kiválasztott (f_{n_k}) részsorozat az X-en μ-m.m. konvergál egy $f : X \to \mathbb{R}$ függvényhez. Legyen

$$g_K := \sum_{k=1}^{K} \big|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big| \qquad \text{és} \qquad g := \lim_{K \to +\infty} g_K = \sum_{k=1}^{+\infty} \big|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\big|. \tag{2.9}$$

[2]Riesz Frigyes és a német E. Fischer egymástól függetlenül találták 1907-ben; mindketten a párizsi akadémia *Comptes Rendus*-jében közölték, Riesz két hónappal előbb, mint Fischer.

(Mivel a (g_K) függvénysorozat monoton növekedő, ezért g valóban „jól definiált” $X \to \overline{\mathbb{R}}$ típusú függvény.) Világos, hogy minden K természetes számra $g_K \in \mathbb{L}^p$ (vagyis $g_k^p \in \mathbb{L}^1$) és a normára vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség miatt

$$\|g_K\|_p = \Big(\int\limits_X g_K^p \, d\mu \Big)^{1/p} \leq \sum_{k=1}^{K} \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_p \leq \sum_{k=1}^{K} \frac{1}{2^k} \leq 1,$$

továbbá $g_K^p \nearrow g^p$ $(K \to +\infty)$ pontonként az X halmazon. A Beppo Levi-tételt alkalmazva kapjuk, hogy

$$\int\limits_X g^p \, d\mu = \int\limits_X \lim_{K\to+\infty} (g_K^p) \, \mu = \lim_{K\to+\infty} \int\limits_X g_K^p \, d\mu \leq 1,$$

és ez azt jelenti, hogy g^p Lebesgue-integrálható ($g^p \in \mathbb{L}^1$, illetve $g \in \mathbb{L}^p$), következésképpen g^p, tehát g is véges értéket vesz fel μ-m.m. az X-en. Ezt viszont úgy is fogalmazhatjuk, hogy a

$$\sum_{k=1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k})$$

függvénysor az X-en μ-m.m. abszolút konvergens. Az abszolút konvergencia maga után vonja a konvergenciát is. Legyen

$$f := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{+\infty} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}).$$

(Ez a függvény X-en μ-m.m. egyértelműen van definiálva.) f tehát az

$$s_K := f_{n_1} + \sum_{k=1}^{K-1} (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) = f_{n_K} \qquad (K \in \mathbb{N})$$

függvénysorozat μ-m.m. határfüggvénye. Igazoltuk tehát azt, hogy a kiválasztott (f_{n_k}) részsorozat μ-m.m. konvergens.

(b) Most megmutatjuk, hogy az (f_{n_K}) sorozat az $\mathbb{L}^p$ tér normájában is tart az f függvényhez. Valóban, a fentiek szerint

$$|f - s_K| = |f - f_{n_K}| \leq \sum_{k=K}^{+\infty} |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \leq g \qquad (K \in \mathbb{N}).$$

Ebből és $g \in \mathbb{L}^p$-ből következik, hogy $f - f_{n_K} \in \mathbb{L}^p$, és ezért $f \in \mathbb{L}^p$ is teljesül. Az $\big(|f - f_{n_K}|^p, K \in \mathbb{N}\big)$ függvénysorozatra a Lebesgue-féle konvergenciatételt alkalmazva

$$\|f - f_{n_K}\|_p \to 0 \qquad (K \to +\infty) \tag{2.10}$$

adódik.

(c) Végül az

$$\|f - f_n\|_p \leq \|f - f_{n_K}\|_p + \|f_{n_K} - f_n\|_p$$

egyenlőtlenségből következik, hogy az egész (f_n) sorozat is f-hez tart az $\mathbb{L}^p$-normában. Valóban, az utolsó összeg első tagja (2.10) miatt, a második tagja pedig (f_n) Cauchy-tulajdonsága miatt tart 0-hoz, ha $n, n_K \to +\infty$.

A Riesz–Fischer-tételt az $1 \leq p < +\infty$ esetben tehát bebizonyítottuk.

2. Ha $p = +\infty$, akkor a fenti bizonyításban csak a

$$\lim_K \|f - f_{n_K}\|_p = 0$$

reláció igazolása igényel némi módosítást, ti. ekkor a Lebesgue-tétel nem alkalmazható. Azonban

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_\infty < \tfrac{1}{2^k} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

amiből egyszerűen kapjuk a

$$\|f_{n_{k+m}} - f_{n_k}\|_\infty < \tfrac{1}{2^{k-1}} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

becslést. Innen viszont $|f - f_{n_k}| < \frac{1}{2^{k-1}}$ μ-m.m. $(k \in \mathbb{N})$ adódik, azaz

$$\|f - f_{n_k}\|_\infty < \tfrac{1}{2^{k-1}} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

következésképpen $\lim\limits_k \|f - f_{n_k}\|_\infty = 0$. $\blacksquare$

Megjegyzés. A $p = +\infty$ **határesetben** az $\mathbb{L}^\infty$ tér teljességét a $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ tér teljességének bizonyításánál követett módon **is** beláthatjuk: Legyen (f_n) egy $\mathbb{L}^\infty$-beli Cauchy-sorozat. Adott k természetes számhoz tehát létezik olyan N_k index, hogy

$$\|f_m - f_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \le \frac{1}{k} \qquad \forall\, m, n \ge N_k\text{-ra}.$$

A $\|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty}$ norma definíciója alapján létezik olyan $E_k \subset X$ μ-nullamértékű halmaz, hogy

$$|f_m(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{k} \qquad \forall\, x \in X \setminus E_k\text{-ra és } \forall\, m, n \ge N_k\text{-ra}. \tag{2.11}$$

Világos, hogy az $E := \cup_k E_k \subset X$ halmaz is μ-nullamértékű. A fentiek alapján tehát minden $x \in X \setminus E$ pontban $\big(f_n(x)\big)$ egy $\mathbb{R}$-beli Cauchy-sorozat; jelöljük $f(x)$-szel a határértékét. A (2.11) egyenlőtlenségben az $m \to +\infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk, hogy

$$|f(x) - f_n(x)| \le \frac{1}{k} \qquad \forall\, x \in X \setminus E\text{-re és } \forall\, n \ge N_k\text{-ra},$$

amiből következik, hogy $f \in \mathbb{L}^p$ és $\|f - f_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \le \frac{1}{k}$ minden $n \ge N_k$ indexre, és ez azt jelenti, hogy $\|f - f_n\|_{\mathbb{L}^\infty} \to 0$, ha $n \to +\infty$. Az $\big(\mathbb{L}^\infty, \|\cdot\|_{\mathbb{L}^\infty}\big)$ normált tér tehát valóban teljes.

2.5. Euklideszi terek és Hilbert-terek

Motiváció: $\mathbb{R}^3$-ban a **skaláris szorzat**. Skaláris szorzattal fejezhető ki vektorok szöge, merőlegessége, vetülete, távolsága, és maga a norma, a vektor abszolút értéke is. Ezért azok a lineáris terek, amelyekben $\mathbb{R}^3$ példájára a skaláris szorzat van értelmezve, várhatóan sokkal több hasonlóságot mutatnak a közönséges háromdimenziós vektortérrel, mint azok, amelyekben nincs skaláris szorzat.

Definíció. Az $\big(X, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ rendezett párt **euklideszi térnek** nevezzük, ha

1^o X lineáris tér a $\mathbb{K}$ számtest felett;

2^o $\langle\cdot,\cdot\rangle$ pedig olyan $\langle\cdot,\cdot\rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ függvény, amelyik tetszőleges $x, y, z \in X$ elemre és $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ számra eleget tesz az alábbi követelményeknek:

(i) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$;

(ii) $\langle \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y\rangle = \lambda_1\langle x_1, y\rangle + \lambda_2\langle x_2, y\rangle$;

(iii) $\langle x, x\rangle \geq 0$;

(iv) $\langle x, x\rangle = 0 \iff x = \theta$.

A $\langle\cdot,\cdot\rangle$ leképezést **skaláris szorzatnak** nevezzük.

Ha $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, akkor **valós**, ha $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, akkor pedig **komplex** euklideszi térről beszélünk. Ha a skaláris szorzat a szövegkörnyezetből nyilvánvaló, akkor egyszerűen X-et írunk $\big(X, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ helyett. X elemeit *vektoroknak* is nevezzük.

Minden euklideszi térnek van természetes normája:

1. tétel. *Az $\big(X, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ euklideszi téren az*

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle} \qquad (x \in X)$$

*függvény norma az X lineáris téren, tehát minden euklideszi tér egyúttal normált (tehát metrikus) tér is. Ezt a normát a skaláris szorzat által **indukált normának** nevezzük.*

Minden X euklideszi térben igaz a **Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség**:

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (x, y \in X)$$

és a **paralelogramma-azonosság**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \qquad (x, y \in X).$$

2. tétel (Neumann János tétele). *A valós $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált térben a norma akkor és csak akkor származtatható skaláris szorzatból (azaz X euklideszi tér), ha minden $x, y \in X$ esetén igaz az*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big)$$

ún. paralelogramma-egyenlőség.

Definíció. Az $\big(X, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ euklideszi teret **Hilbert-térnek** nevezzük, ha a skaláris szorzat által indukált normával nyert normált tér teljes.

3. tétel. *Az*

(a) $\mathbb{R}^n$ $(n \in \mathbb{N})$*;*

(b) l_p*;*

(c) $C[0,1]$*;*

(d) $L[0,1]$*;*

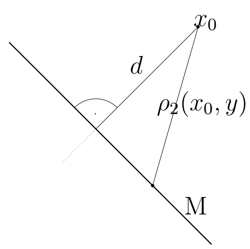
tereken értelmezett $\|\cdot\|_p$ $(1 \le p \le +\infty)$ *norma akkor és csak akkor elégíti ki a paralelogramma-egyenlőséget, ha* $p = 2$*.*

3. A legjobb approximáció problémaköre

Ebben a fejezetben az approximációelmélet néhány alapfeladatával foglalkozunk.

3.1. A probléma felvetése és absztrakt negfogalmazása

Az elemi geometriában láttuk, hogy milyen fontos szerepet játszik pont és egyenes távolságának a fogalma. Az x_0 pontnak és az M egyenesnek a távolságán a pontból az egyenesre állított merőleges szakasz d hosszát értettük, és ezt a definíciót ekvivalens módon átfogalmaztuk:



Vegyük x_0-nak és az egyenes tetszőleges y pontjának a $\varrho_2(x_0, y)$-nal jelölt távolságát. Ekkor d ezek közül a lehető legkisebb:

$$d = \min\{\varrho_2(x_0, y) \mid y \in M\} = \varrho_2(x_0, y_0).$$

Ugyanígy értelmeztük pont és sík távolságát. Nyilvánvaló, hogy ez a fogalom tetszőleges metrikus térben is bevezethető. Motivációként gondoljunk még Csebisev klasszikus tételére. A $\big(C[a, b], \varrho_\infty\big)$ metrikus térben hasonló módon értelmezhetjük egy $f \in C[a, b]$ függvénynek $\mathcal{P}_n$-től, vagyis a legfeljebb n-edfokú polinomok halmazától vett távolságát. Csebisev tétele azt állítja, hogy $\mathcal{P}_n$-ben pontosan egy f-hez legközelebbi polinom található. Már ez az egyetlen példa is elég indok arra, hogy a szóban forgó fogalmat érdemes (első közelítésben metrikus térre) általánosítani.

Definíció. Az (X, ϱ) metrikus térben az x_0 pont és a nemüres $M \subset X$ halmaz **távolságát** így értelmezzük:

$$d(x_0, M) := \inf\big\{\varrho(x_0, y) \bigm| y \in M\big\}.$$

Ezt a számot az x_0 **pont M-beli elemekkel való legjobb közelítésének** is nevezzük.

Lássuk először a definíció néhány egyszerű következményét. Tetszőleges $x_0 \in X$ pont és nemüres $M \subset X$ halmaz esetén a következő állítások érvényesek.

- A szóban forgó infimum létezik és $d(x_0, M) \geq 0$.

- Van olyan M-beli (y_n) sorozat, amelyre $\varrho(x_0, y_n) \to d(x_0, M)$ $(n \to +\infty)$. Valóban, az infimum definíciója alapján minden $n \in \mathbb{N}$ esetén létezik olyan $y_n \in M$, hogy

$$d(x_0, M) \leq \varrho(x_0, y_n) \leq d(x_0, M) + \tfrac{1}{n}.$$

Az $(y_n) \subset M$ sorozatot az x_0 pont egy **minimalizáló sorozatának** nevezzük.

• A $d(x_0, M) = 0$ speciális esetre az alábbi ekvivalenciák érvényesek:

$$\begin{aligned} d(x_0, M) = 0 \quad &\iff \quad \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \;\; \exists\, y \in M : \quad \varrho(x_0, y) < \varepsilon; \\ &\iff \quad x_0 \in \overline{M}; \\ &\iff \quad \exists\, (y_n) \subset M : \quad \varrho(x_0, y_n) \to 0 \;\, (n \to +\infty). \end{aligned}$$

A $d(x_0, M) = 0$ egyenlőség tehát azt jelenti, hogy az x_0 pont tetszőleges pontossággal megközelíthető (approximálható) M-beli elemekkel.

• A $\{\varrho(x_0, y) \mid y \in M\} \subset M$ számhalmaznak általában nincs legkisebb eleme. Ha van, akkor a halmaznak van minimuma, és ez az infimummal egyenlő. Ekkor tehát létezik olyan $y_0 \in M$, amelyre a

$$d(x_0, M) = \varrho(x_0, y_0) \, (= \min\{\varrho(x_0, y) \mid y \in M\})$$

egyenlőség teljesül. Ilyenkor azt is mondjuk, hogy a $d(x_0, M)$ *távolság* y_0*-lal realizálódik*. A változatosság kedvéért y_0-ra is több elnevezést használunk. Azt fogjuk mondani, hogy y_0

— egy, az x_0 ponthoz legközelebbi M-beli elem,
— minimális távolságra van x_0-tól,
— az x_0 pont egy minimalizáló eleme,
— egy, az x_0 pontot legjobban megközelítő M-beli elem.

A következő kérdéseket vetjük fel.

1. **A létezés problémája**. Adott $x_0 \in X$ és $M \subset X$ esetén vajon létezik-e x_0-at legjobban megközelítő M-beli y_0 elem? Milyen feltételek mellett igaz az, hogy minden $x_0 \in X$-hez van ilyen y_0?

2. **Az egyértelműség problémája**. Ha x_0-hoz létezik legjobban közelítő elem, akkor az milyen feltételek mellett lesz egyértelmű?

3. **A jellemzés problémája**. Létezés és egyértelműség esetén hogyan lehet jellemezni a legjobban közelítő elemet.

4. **Az előállítás problémája**. Ha az első két (három) kérdésre pozitív a válasz, akkor hogyan lehet a legjobban közelítő elemet explicit módon (pontosan) vagy numerikusan előállítani.

5. Meg lehet-e határozni $d(x_0, M)$-et? Ha nem, akkor milyen „jó” felső becslést lehet erre megadni?

Az **approximációelmélet** a fenti problémákra ad teljes vagy részleges választ akkor, amikor különböző függvényosztályokban, különböző normált terekben levő függvényeket közelítünk M-beli elemekkel, ahol M bizonyos „jól” kezelhető függvényekből (pl. algebrai vagy trigonometrikus polinomok, spline-függvények) álló halmaz.

A részletek ismertetése előtt lássunk néhány egyszerű példát.

• A közönséges háromdimenziós térben (vagyis az $\left(\mathbb{R}^3, \varrho_2\right)$ metrikus térben) tetszőleges x_0 pont és M egyenes esetén pontosan egy x_0-t legjobban megközelítő $y_0 \in M$ pont létezik, és ezt a merőlegességgel lehet jellemezni.

• Ha az $\left(\mathbb{R}^2, \varrho_2\right)$ metrikus térben M az origó középpontú 1-sugarú *nyílt* körlap, x_0 pedig a $(2,0)$ koordinátájú pont, akkor M-ben nyilván nincs x_0-hoz legközelebbi pont. Ha a zárt körlapot vesszük, akkor egyetlen x_0-hoz legközelebbi pont van.

• Ha az $\left(\mathbb{R}^2, \varrho_\infty\right)$ metrikus térben M az origó középpontú 1-suagrú *zárt* körlap, x_0 pedig a $(2,0)$ koordinátájú pont, akkor M-ben végtelen sok x_0-hoz legközelebbi pont van. (Melyek ezek?)

• Ha az előző példában megadott M halmazt és x_0 pontot az $\left(\mathbb{R}^2, \varrho_\infty\right)$ metrikus térben tekintjük, akkor viszont több legjobban közelítő elem is van.

• Csebisev tétele azt állítja, hogy az $\left(C[a,b], \varrho_\infty\right)$ metrikus térben minden $f \in C[a,b]$ függvény esetén $\mathcal{P}_n$-ben pontosan egy f-hez legközelebbi polinom található.

A továbbiakban a felvetett problémák közül az csak első kettővel foglalkozunk. Az iménti példák azt mutatják, hogy *pozitív válaszhoz egyrészt az X térre, másrészt pedig az M halmazra is kell kiegészítő feltételeket tenni.*

3.2. A legjobban közelítő elem létezése metrikus terekben

A legáltalánosabb térstruktúránkban, vagyis metrikus terekben kompakt részhalmazok esetén már biztosítható a legjobban közelítő elemnek a létezése.

1. tétel. *Az (X,ϱ) metrikus tér tetszőleges $M \subset X$* ***kompakt*** *részhalmaza esetén minden $x_0 \in X$ ponthoz van legközelebbi M-beli y_0 pont, azaz*

$$\forall\, x_0 \in X\text{-hez} \quad \exists\, y_0 \in M: \quad \varrho(x_0, y_0) = d(x_0, M).$$

Bizonyítás. Legyen $d := d(x_0, M) = \inf\{\varrho(x_0, y) \mid y \in M\}$, és vegyünk egy minimalizáló sorozatot, azaz tegyük fel, hogy

$$(y_n) \subset M: \quad \varrho(x_0, y_n) \to d, \quad \text{ha} \ \ n \to +\infty.$$

Mivel M kompakt, ezért (y_n)-nek van olyan konvergens (y_{n_k}) részsorozata, amelyiknek az y_0 határértéke M-ben van. Megmutatjuk, hogy y_0 az x_0 ponthoz legközelebbi M-beli elem, azaz

$\varrho(x_0, y_0) = d$. Valóban, a háromszög-egyenlőtlenség miatt $\varrho(x_0, y_0) \leq \varrho(x_0, y_n) + \varrho(y_n, y_0)$. A bal oldal itt n-től független, a jobb oldal pedig $n \to +\infty$ esetén d-hez tart, ezért $\varrho(x_0, y_0) \leq d$. Másrészt $y_0 \in M$, ezért a $\varrho(x_0, y_0) \geq d$ egyenlőtlenség is igaz, következésképpen $\varrho(x_0, y_0) = d$. ■

3.3. Approximációs tételek normált terekben

Most *valós* $(X, \|\cdot\|)$ normált terekben tanulmányozzuk a legjobban közelítő elem *létezésének* és *egyértelműségének* a problémáját. Az $x_0 \in X$ pontnak és a nemüres $M \subset X$ halmaznak a távolsága ebben az esetben

$$d(x_0, M) = \inf \{\|x_0 - y\| \mid y \in M\}.$$

Az M halmazra vonatkozóan két esetet fogunk vizsgálni:

- *M véges dimenziós altér* X-ben,
- *$M \subset X$ konvex* és *zárt* halmaz.

3.3.1. Altértől vett távolság

A létezés problémája

Tegyük fel, hogy M az X normált (tehát speciálisan metrikus) tér egy altere. Ez általában nem kompakt, ezért az előző tételünk közvetlenül nem alkalmazható. Emlékezzünk viszont arra, hogy egy *véges dimenziós térnek* egy részhalmaza pontosan akkor kompakt, ha korlátos és zárt, és ilyen halmazokat könnyen ki tudunk jelölni. Ezeket az észrevételeket felhasználva megmutatjuk, hogy normált tér tetszőleges *véges dimenziós* alterében mindig van minimalizáló vektor.

2. tétel (a legjobban közelítő elem létezése). *Legyen M az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér* ***véges dimenziós*** *altere. Ekkor bármely $x_0 \in X$ elemhez van hozzá legközelebbi M-beli y_0 vektor, azaz*

$$\forall\ x_0 \in X\text{-hez}\ \ \exists\ y_0 \in M: \ \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

Bizonyítás. Vegyük az altér egy $\xi \in M$ rögzített pontját, és jelöljük M^*-gal azon $y \in M$ vektorok halmazát, melyekre az $\|y - x_0\| \leq \|x_0 - \xi\|$ egyenlőtlenség teljesül:

$$M^* := \{y \in M \mid \|y - x_0\| \leq \|x_0 - \xi\|\} \subset M.$$

Ekkor M^* a véges dimenziós M altér egy korlátos és zárt, következésképpen kompakt részhalmaza. Az 1. tételből tehát következik az állítás. ■

Az egyértelműség problémája

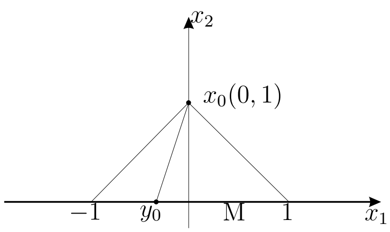
Ez a létezés problémájánál már nehezebb. Érdemes megint egyszerű példákból kiindulni. Tekintsük a különböző normákkal ellátott $\mathbb{R}^2$ síkot. Egyszerű észrevenni, hogy a norma megválasztásától függ a legközelebbi elem egyértelműsége.

• Tekintsük az *euklideszi normával* ellátott síkot, azaz legyen $X := \mathbb{R}^2$ és $\|\cdot\| := \|\cdot\|_2$. Vegyünk egy $M \subset \mathbb{R}^2$ alteret, vagyis egy origón átmenő egyenest és egy $x_0 \in \mathbb{R}^2$ pontot. Az elemi geometriából tudjuk, hogy ekkor bármelyik $x_0 \in \mathbb{R}^2$ pont esetén az M egyenesen *egyetlen* olyan $y_0 \in M$ pont van, amelyik legközelebb van az x_0-hoz.

• Vegyük most a *maximum-normával* ellátott síkot ($X := \mathbb{R}^2, \|\cdot\| := \|\cdot\|_\infty$), és tekintsük az $x_0 := (0, 1)$ pontot, valamint az $y = 0$ egyenletű egyenest, vagyis az

$$M := \{(x_1, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^2$$

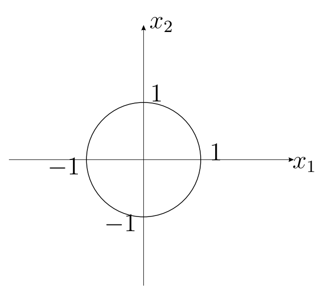
alteret. Világos, hogy ekkor M-ben *végtelen sok* x_0-hoz legközelebbi $y_0 \in M$ pont van.

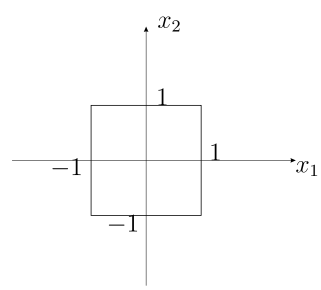


Ha $y_0 := (y, 0)$ és $|y| \le 1$, akkor $\|x_0 - y_0\|_\infty = 1$, tehát minden ilyen y_0 pontra igaz, hogy

$$\|x_0 - y_0\| = d(x_0, M) = 1.$$

Ez a két egyszerű példa azt mutatja, hogy az egyértelműséghez a normára további feltételt kell tennünk. A kérdés persze az, hogy a normának milyen tulajdonságán múlik az egyértelműség. A válasz kereséséhez nézzük meg a fenti két esetben az *egységgömböket*!





Az első szembetűnő különbség az, hogy a második esetben az egységgömb-felület *tartalmaz szakaszt*, az első esetben pedig nem. Kiderült (és ezt hamarosan meg is fogjuk mutatni), hogy az egyértelműség az egységgömb-felületnek ezen geometriai tulajdonságán múlik. A részletek pontosítása előtt ennek a szemléletes fogalomnak a „geometriától mentes” értelmezését kell megadnunk tetszőleges normált térre. Ezek után elég „természetes” a következő

Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált teret **szigorúan konvexnek** nevezzük akkor, ha az X-beli egységgömb-felület nem tartalmaz szakaszt, azaz ha

$$\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1 \quad \Longrightarrow \quad x = y.$$

Érdekes az a (nem nyilvánvaló) tény, hogy ezt a geometriai tulajdonságot tisztán algebrai úton is lehet jellemezni. Induljunk ki a normált terekben alapvető szerepet játszó

$$\|x + y\| \le \|x\| + \|y\| \tag{3.1}$$

háromszög-egyenlőtlenségből, és vessük fel azt a kérdést, hogy vajon mikor áll itt fenn az egyenlőség. Az világos, hogy tetszőleges normált térben az *egyirányú* vektorokra (x és y ilyenek, ha $y = \lambda x$ valamely $\lambda > 0$ számra) (3.1)-ben egyenlőség van. A fenti két példában könnyű ellenőrizni, hogy az euklideszi norma esetén (3.1)-ben *csak az egyirányú* vektorokra van egyenlőség, a maximum-normára ez azonban nem igaz (tekintsük például az egységgömb-felület valamelyik szakaszát). Ez azt jelenti, hogy tetszőleges normált térben a normától függ, hogy milyen vektorokra áll fenn az egyenlőség a háromszög-egyenlőtlenségben. *Szigorúan normált térnek* fogjuk nevezni a teret akkor, ha a háromszög-egyenlőtlenségben csak az egyirányú vektorok esetén áll fenn az egyenlőség. Meg fogjuk mutatni, hogy a normának ez az algebrai tulajdonsága *ekvivalens* a fentebb bevezetett geometriai tulajdonsággal.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér **szigorúan normált**, ha minden nullvektortól különböző $x, y \in X$ esetén

$$\|x + y\| = \|x\| + \|y\| \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, \lambda > 0 : \quad y = \lambda x.$$

3. tétel. *Az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér akkor és csak akkor szigorúan konvex, ha szigorúan normált.*

Bizonyítás. $\boxed{\Leftarrow}$ Tegyük fel először azt, hogy a tér szigorúan normált, és mutassuk meg, hogy ekkor szigorúan konvex is. Vegyünk olyan $x, y \in X$ vektorokat, amelyekre fennáll az

$$\|x\| = \|y\| = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| = 1$$

egyenlőség. Ebből az következik, hogy

$$\left\|\frac{x}{2} + \frac{y}{2}\right\| = \left\|\frac{x}{2}\right\| + \left\|\frac{x}{2}\right\|.$$

Mivel az X tér szigorúan normált, ezért $\frac{y}{2} = \lambda\frac{x}{2}$, azaz $y = \lambda x$ valamilyen $\lambda > 0$ számra. x és y normája azonban 1, ezért $\lambda = 1$, azaz $x = y$. Ez azt jelenti, hogy a tér szigorúan konvex.

$\boxed{\Rightarrow}$ Most tegyük fel, hogy az X szigorúan konvex tér, és lássuk be, hogy szigorúan normált is. Ehhez elég bebizonyítani azt, hogy ha a nemnulla vektorokra fennáll az $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ egyenlőség, akkor $\exists\,\lambda > 0:\ y = \lambda x$. Tegyük fel tehát, hogy $x, y \in X \setminus \{\theta\}$ és

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\|. \tag{3.2}$$

Abban az esetben, ha x és y normája megegyezik, már készen is vagyunk, ti. a szigorú konvexitásból (a norma homogenitásának a felhasználásával) rögtön következik az $x = y$ egyenlőség.

Az (3.2)-ben azonban nyugodtan feltehetjük, hogy $\|x\| = \|y\|$, mert

$$\|x+y\| = \|x\| + \|y\| \quad \Longrightarrow \quad \forall\,\mu > 0\text{-ra}: \quad \|x+\mu y\| = \|x\| + \|\mu y\|. \tag{3.3}$$

Ennek az állításnak a bizonyítása $0 < \mu \le 1$ esetén az

$$\begin{aligned} \|x\| + \|y\| = \|x+y\| = \|x + \mu y + (1-\mu)y\| \le \|x+\mu y\| + (1-\mu)\|y\| \le \\ \le \|x\| + \|\mu y\| + (1-\mu)\|y\| = \|x\| + \mu\|y\| + (1-\mu)\|y\| = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

egyenlőtlenség- (de valójában egyenlőség-) láncból következik. Az x és y szerepét felcserélve ebből a minden $0 < \nu \le 1$-re igaz $\|\nu x + y\| = \|\nu x\| + \|y\|$ egyenlőséget kapjuk, és ebből ν-vel való osztás után adódik (3.3) a $\mu \ge 1$ esetre is. ■

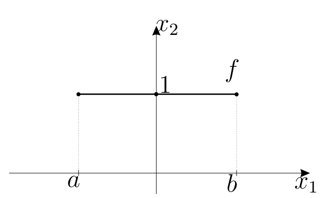
A nevezetes normált tereinkre ebből a szempontból a következők érvényesek.

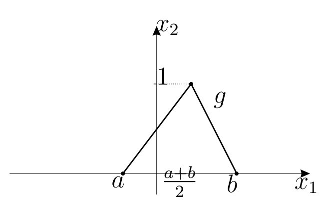
Példák.

- Az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ terek $1 < p < +\infty$ esetén szigorúan normáltak/konvexek, de ha $p = 1$ és $p = +\infty$, akkor nem azok.
- Az $(l^p, \|\cdot\|_p)$ terek $1 < p < +\infty$ esetén szigorúan normáltak/konvexek, de ha $p = 1$ és $p = +\infty$, akkor nem azok.
- A $(L^p(I), \|\cdot\|_{L^p})$ ($I \subset \mathbb{R}$ nemelfajuló intervallum) terek $1 < p < +\infty$ esetén szigorúan normáltak/konvexek, de ha $p = 1$ és $p = +\infty$, akkor nem azok.

(A pozitív állítások a megfelelő Minkowski-egyenlőtlenségekből vezethetők le. A negatív esetekben pedig viszonylag egyszerű ellenpéldákat lehet megadni.)

- A $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ normált tér *nem* szigorúan konvex/normált. Tekintsük ui. a következő függvényeket:





Világos, hogy $\|f+g\|_\infty = \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$, de nincs olyan $\lambda > 0$ szám, hogy $f = \lambda g$, ezért a tér nem szigorúan konvex.

- Minden $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ Hilbert-tér szigorúan normált/konvex. Ez az alábbi (egyszerűen bebizonyítható) állításokból következik: ha $x, y \in H$ és

$$\begin{aligned} |\,\langle x,y\rangle\,| = \|x\|\cdot\|y\| \quad &\Longleftrightarrow \quad y = \lambda y \ (\lambda\in\mathbb{R}), \\ \|x+y\| = \|x\|+\|y\| \quad &\Longleftrightarrow \quad \langle x,y\rangle = \|x\|\cdot\|y\|. \end{aligned}$$

Most megmutatjuk, hogy szigorúan konvex/normált terekben tetszőleges pontot és bármelyik véges dimenziós alteret véve pontosan egy olyan altérbeli pont van, amelyik legközelebb van a kiválasztott ponthoz.

4. tétel (a legjobban közelítő elem egyértelműsége). *Legyen M egy véges dimenziós altér az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ szigorúan konvex/normált térben. Ekkor minden $x_0 \in X$ ponthoz létezik pontosan egy, tőle minimális távolságra levő y_0 pont M-ben, azaz*

$$\forall \ x_0 \in X\text{-hez} \quad \exists!\ y_0 \in M: \quad \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

Bizonyítás. Az y_0 pont *létezése* az 2. tételből következik.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy az y_0 és y_0' M-beli elem mindegyike minimalizáló vektor, azaz

$$\|x_0 - y_0\| = \|x_0 - y_0'\| = d(x_0, M) =: d. \tag{3.4}$$

Először azt mutatjuk meg, hogy ekkor az y_0, y_0' pontokat összekötő szakasz felezőpontja, vagyis az az $\frac{y_0+y_0'}{2}$ pont is egy legjobban közelítő elem. A háromszög-egyenlőtlenség alapján egyrészt

$$\left\|x_0 - \frac{y_0+y_0'}{2}\right\| = \frac{\|(x_0-y_0)+(x_0-y_0')\|}{2} \le \frac{\|x_0-y_0\|+\|x_0-y_0'\|}{2} \le d.$$

Másrészt az M egy altér, ezért a felezőpont is hozzá tartozik M-hez, azaz $\frac{y_0+y_0'}{2} \in M$. Ekkor viszont d értelmezése miatt $\left\|x_0 - \frac{y_0+y_0'}{2}\right\| \ge d$, tehát

$$\left\|x_0 - \frac{y_0+y_0'}{2}\right\| = d. \tag{3.5}$$

Ha $d=0$, akkor nyilván $x_0 = y_0 = y_0'$. Ha $d>0$, akkor (3.4) és (3.5) alapján kapjuk, hogy

$$\left\|\frac{x_0-y_0}{d}\right\| = \left\|\frac{x_0-y_0'}{d}\right\| = \left\|\frac{x_0 - \frac{y_0+y_0'}{2}}{d}\right\| = 1.$$

Mivel az X tér szigorúan konvex, ezért ebből az következik, hogy $y_0 = y_0'$, és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

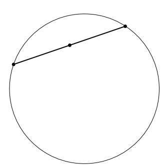
3.3.2. Zárt és konvex halmazoktól vett távolság

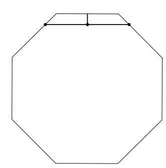
Most nézzük a legjobb approximáció problémáját abban az esetben, ha M nem altere az X normált térnek. Nem túl nehéz meggondolni, hogy a minimalizáló elem létezéséhez és egyértelműségéhez M-nek legalább *zártnak* és *konvexnek* kell lenni. Az is várható, hogy az egyértelműséghez a normára is kell tenni valamilyen feltételt. Ezt nem egyszerű megtalálni. A végeredmény:

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér **egyenletesen konvex**, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists\, \delta > 0: \quad \|x\| = \|y\| = 1 \ \text{ és } \ \left\|\frac{x+y}{2}\right\| > 1 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|x - y\| < \varepsilon.$$

Az egyenletes konvexitás az egységgömb-felület egy geometriai tulajdonságát fejezi ki: ha azon olyan pontokat veszünk, amelyeket összekötő szakasz felezőpontja közel van a felülethez, akkor a két pont közel van egymáshoz:


egyenletesen konvex


nem egyenletesen konvex

Megjegyzés. Az egyenletes konvexitásnak egyfajta algebrai interpretációja is adható. Emlékeztetünk arra, hogy euklideszi terek fontos tulajdonsága a paralelogramma-azonosság:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Ez normált terekben általában nem igaz. Az egyenletes konvexitást felfoghatjuk úgy is, mint ennek az azonosságnak egy gyengített változatát.

5. tétel (az egyenletes konvexitás és a szigorú konvexitás kapcsolata). *Ha az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér egyenletesen konvex, akkor szigorúan konvex is.*

Ha az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér szigorúan konvex és véges dimenziós, akkor egyenletesen konvex is.

- Véges dimenzióban a két fogalom ekvivalens.
- A tétel első felében levő állítás megfordítása nem igaz!
- A korábbi szigorúan konvex példák mindegyike egyenletesen konvex is.

Az alaptétel: Szőkefalvi-Nagy Béla, 1942.

6. tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egyenletesen konvex Banach tér és $M \subset X$ tetszőleges nemüres konvex zárt halmaz. Ekkor minden $x_0 \in X$ ponthoz létezik pontosan egy, tőle minimális távolságra lévő M-beli y_0 pont.*

3.3.3. Approximációs tételek konkrét függvényterekben

Alkalmazzuk most a legjobban közelítő elem létezésére és egyértelműségére vonatkozó általános eredményeket (l. a 2. és a 4. tételeket) konkrét függvényterekre. Tekintsük először a folytonos függvények $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált terét. A 2. tétel közvetlen következménye az alábbi

7. tétel. *Legyen $f \in C[a,b]$ folytonos függvény. Ekkor minden n természetes számhoz létezik f-et egyenletesen legjobban megközelítő legfeljebb n-edfokú p_n algebrai polinom, az*

$$\forall\, f \in C[a,b]\text{-hez és } \forall\, n \in \mathbb{N}\text{-hez } \ \exists\, p_n \in \mathcal{P}_n :$$

$$\|f - p_n\|_\infty = \inf\{\|f-p\|_\infty \mid p \in \mathcal{P}_n\}.$$

Az egyértelműségre vonatkozó általános tétel nem alkalmazható, mert a maximum-normával ellátott $C[a,b]$ tér nem szigorúan normált. Az egyértelműség azonban igaz. Ez Csebisev tételéből következik.

Nézzük most a $\big(L^p(a,b), \|\cdot\|_{L^p}\big)$ tereket. Ezek $1 < p < +\infty$ esetén szigorúan normáltak, ezért a 2. és a 4. tételekből kapjuk a következő állítást.

8. tétel. *Legyen $1 \le p \le +\infty$. Ekkor bármely $f \in L^p(a,b)$ függvényhez és minden n természetes számhoz létezik f-et az L^p-normában legjobban megközelítő legfeljebb n-edfokú p_n polinom, azaz*

$$\forall\, f \in L^p(a,b)\text{-hez és } \forall\, n \in \mathbb{N}\text{-hez } \ \exists\, p_n \in \mathcal{P}_n :$$

$$\|f - p_n\|_{L^p} = \inf\{\|f-p\|_{L^p} \mid p \in \mathcal{P}_n\}.$$

Ha $1 < p < +\infty$, akkor p_n egyértelműen meghatározott.

Könnyű látni, hogy $p = 1$ esetén az egyértelműség nem igaz. Tekintsük az

$$f(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } -1 \le x \le 0 \\ 1, & \text{ha } 0 < x \le 1 \end{cases}$$

függvényt és a konstans polinomokat.

3.4. Approximációs tételek Hilbert-terekben

A vizsgált általános térstruktúráink közül a Hilbert-terek vannak legközelebb a háromdimenziós térhez, illetve $\mathbb{R}^n$-hez. Idézzük fel $\mathbb{R}^3$-ban a legjobb approximáció problémájának elemi geometriából ismert megoldását. Tekintsünk egy x_0 pontot és egy origón átmenő M síkot (alteret). Ekkor M-ben egyetlen x_0-hoz legközelebbi y_0 pont van. Ez a pont az x_0-ból a síkra állított merőleges egyenesnek és a síknak a metszéspontja. Ez azt is jelenti, hogy y_0 az az egyetlen M-beli elem, amelyikre az $x_0 - y_0$ vektor merőleges a síkra, azaz merőleges az M altér minden vektorára. Megmutatjuk, hogy hasonló állítás Hilbert-terekben is érvényes.

Legyen $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ *valós* Hilbert-tér, és jelölje $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ a skaláris szorzat által indukált normát. Mivel minden Hilbert-tér szigorúan normált, ezért az előző pont tételeiből a legjobb approximáció létezésére és egyértelműségére vonatkozó állításokat megkapjuk abban az esetben, ha az altér *véges dimenziós.* Ezt a feltételt a gyengébb *zárt altér* feltétellel fogjuk helyettesíteni. Világos, hogy minden véges dimenziós altér egyúttal zárt altér is; a zártság pedig szükséges a legjobban közelítő elem létezéséhez. Megjegyezzük még azt is, hogy egy Hilbert-tér altere nem feltétlenül zárt halmaz.

9. tétel. *Legyen M a $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ Hilbert-tér egy* ***zárt altere*** *és x_0 a H tér egy tetszőleges pontja. Ekkor pontosan egy olyan M-beli y_0 pont létezik, amelyik minimális távolságra van x_0-tól, azaz*

$$\forall\, x_0 \in H\text{-hoz } \exists!\ y_0 \in M : \|x_0 - y_0\| = d(x_0, M).$$

Az $x_0 - y_0$ vektor merőleges az M altérre, azaz

$$\langle x_0 - y_0, y\rangle = 0 \quad (\forall\ y \in M). \tag{3.6}$$

Bizonyítás. *Létezés.* Legyen $d := d(x_0, M) = \inf\{\|x_0 - y\| \mid y \in M\}$, és vegyünk egy tetszőleges M-beli minimalizáló sorozatot, azaz legyen $(y_n) \subset M$ egy olyan sorozat, amelyre

$$d_n := \|x_0 - y_n\| \to d \ \ (n \to +\infty). \tag{3.7}$$

Megmutatjuk, hogy (y_n) Cauchy-sorozat. Írjuk fel az

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

paralelogramma-azonosságot az x, y helyett az $x_0 - y_n$ és $x_0 - y_m$ vektorokra. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{gathered}\|(x_0 - y_n) + (x_0 - y_m)\|^2 + \|(x_0 - y_n) - (x_0 - y_m)\|^2 = \\ = \|2x_0 - (y_n + y_m)\|^2 + \|y_n - y_m\|^2 = 2\big(\|x_0 - y_n\|^2 + 2\|x_0 - y_m\|^2\big) = 2(d_n^2 + d_m^2),\end{gathered}$$

azaz

$$\|y_n - y_m\|^2 = 2\big(d_n^2 + d_m^2\big) - 4\left\|x_0 - \frac{y_n + y_m}{2}\right\|^2. \tag{3.8}$$

Minthogy az y_n, y_m vektorokkal együtt ezek számtani közepe is az M altérben van és d értelmezése alapján

$$\left\|x_0 - \frac{y_n + y_m}{2}\right\| \geq d,$$

ezért (3.8)-ból következik, hogy minden $n, m \in \mathbb{N}$ esetén

$$\|y_n - y_m\|^2 \leq 2\big(d_n^2 + d_m^2\big) - 4d^2.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a jobb oldala $d_n \to d$ miatt 0-hoz tart, ha $n, m \to +\infty$, de akkor a bal oldala is 0-hoz tart, ami azt jelenti, hogy (y_n) valóban Cauchy-sorozat, ezért a H tér teljessége miatt a sorozat konvergens. Legyen y_0 ennek a sorozatnak a határértéke. Mivel M zárt altér, ezért $y_0 \in M$. A norma folytonossága miatt

$$d_n = \|x_0 - y_n\| \to \|x_0 - y_0\| \quad (n \to +\infty), \tag{3.9}$$

másrészt $d_n \to d$ $(n \to +\infty)$, így $\|x_0 - y_0\| = d$. Ezzel igazoltuk, hogy a $d(x_0, M)$ távolság az $y_0 \in M$ ponttal realizálódik, azaz $\|x_0 - y_0\| = d(x_0, M)$. Megmutattuk tehát azt, hogy *tetszőleges minimalizáló sorozat konvergens, és a határértéke egy minimalizáló vektor.*

Egyértelműség. Most megmutatjuk a minimalizáló vektor egyértelműségét. Tegyük fel, hogy $y_0, y_0' \in M$ olyan tetszőleges vektorok, amelyekre $d(x_0, M) = \|x_0 - y_0\| = \|x_0 - y_0'\|$ teljesül, és definiáljuk a következő (y_n) sorozatot:

$$y_n := y_0, \text{ ha } n = 2, 4, \ldots \qquad \text{és} \qquad y_n := y_0' \text{ ha } n = 1, 3, \ldots.$$

Ekkor (y_n) nyilván egy minimalizáló sorozat, ami a fentiek alapján szükségképpen konvergens. Ez pedig csak úgy lehetséges, ha $y_0 = y_0'$.

Az ortogonalitás igazolása. Az (3.6) reláció bizonyításához legyen $v_0 := x_0 - y_0$. Tetszőleges $y \in M$ vektorral tekintsük a

$$p(t) := \|x_0 - (y_0 + ty)\|^2 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

függvényt. Ez a

$$p(t) = \|v_0 - ty\|^2 = \|v_0\|^2 - 2\langle v_0, y\rangle\, t + \|y\|^2\, t^2 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

alakban is írható, azaz p valós együtthatós másodfokú polinom, ha $y \neq \theta$. Mivel minden $t \in \mathbb{R}$ mellett $y_0 + ty \in M$, ezért a $d = d(x_0, M)$ távolság értelmezése miatt $\|x_0 - (y_0 + ty)\| \geq d$, következésképpen $p(t) \geq d^2$ minden $t \in \mathbb{R}$ esetén, míg $p(0) = \|x_0 - y_0\|^2 = d^2$. Ebből következik, hogy $t = 0$ mellett a p polinomnak minimuma van, ezért $p'(0) = -2\langle v_0, y\rangle = 0$, vagyis minden $y \in M$ esetén $\langle v_0, y\rangle = 0$, és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

3.4.1. Projekciós (vetítő) operátorok

10. tétel (a Riesz-féle felbontási tétel). *Legyen M a H Hilbert-tér egy zárt altere. Ekkor minden $x \in H$ vektor egyértelműen állítható elő az*

$$x = x_1 + x_2$$

alakban, ahol $x_1 \in M$ és $x_2 \perp M$. Ezt az x_1 vektort az x-nek az M altérre való ***ortogonális vetületének*** *(vagy projekciójának) nevezzük.*

Bizonyítás. Az előző tétel szerint minden $x \in H$ vektorhoz létezik egyetlen olyan $x_1 \in M$ vektor, amelyre $d(x, M) = \|x - x_1\|$. Legyen $x_2 := x - x_1$. Ekkor $x = x_1 + x_2$ és (3.6) alapján $x_2 \perp M$.

A felbontás egyértelműségének a bizonyításához tegyük fel, hogy az $x = x_1 + x_2$ és $x = y_1 + y_2$ az x elem két kívánt tulajdonságú felbontása, azaz legyen $x_1, y_1 \in M$ és $x_2, y_2 \perp M$. Ekkor $x_1 - y_1 \in M$ és $y_2 - y_1 \perp M$. Minthogy $z := x_1 - y_1 = y_2 - x_2$, ezért $z \in M$ és $z \perp M$, következésképpen $\langle z, z\rangle = 0$, azaz $z = \theta$. Innen $x_1 = y_1$ és $x_2 = y_2$ következik. Ezzel a felbontás egyértelműségét igazoltuk. ■

Az $x \in H$ vektor ortogonális felbontásában szereplő x_1, x_2 vektorokra fennáll az

$$\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2 \tag{3.10}$$

egyenlőség, ami a **Pitagorasz-tétel** Hilbert-térbeli változataként interpretálható. Valóban,

$$\|x\|^2 = \langle x_1 + x_2, x_1 + x_2\rangle = \|x_1\|^2 + 2\langle x_1, x_2\rangle + \|x_2\|^2,$$

ezért az x_1, x_2 vektorok ortogonalitását figyelembe véve adódik a (3.10) egyenlőség.

A Riesz-féle felbontási tételből kiindulva bevezetjük a *projekciós operátor* fogalmát.

Definíció. Legyen M a $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ Hilbert-tér zárt altere és

$$x = x_1 + x_2, \qquad x_1 \in M, \quad x_2 \perp M$$

az $x \in H$ vektor ortogonális felbontása. A

$$P_M : H \to M, \ \ P_M(x) := x_1$$

utasítással értelmezett leképezést az M zárt altérre való **ortogonális projekciós** (vagy **vetítő**) operátornak nevezzük.

3.4.2. A projekciós operátor explicit előállítása

Gyakran szükség van valamely $x \in H$ vektor legjobb M-beli közelítésének explicit, numerikus szempontból is használható előállítására. Ha $M \subset H$ véges dimenziós ($\dim M = n$) altér, akkor ilyen előállítás igen egyszerűen magadható. Ebben az esetben ui. M zárt altér, ezért x-nek az M altérre vett $y := P_M(x)$ vetülete lesz az x-et legjobban közelítő M-beli elem. $P_M(x)$ explicit alakjának előállításához tekintsünk M-ben egy $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ortonormált bázist, azaz tegyük fel, hogy

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 0, & \text{ha } i \neq j \\ 1, & \text{ha } i = j. \end{cases}$$

(Később majd megmutatjuk, hogy az M tetszőleges lineárisan független $f_1, f_2, \ldots, f_n$ bázisából az ún. *Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással* hogyan kapható meg egy ilyen ortonormált bázis.)

Vegyünk egy tetszőleges H-beli x elemet. A $P_M(x)$ ortogonális vetületet írjuk fel az e_k vektorok lineáris kombinációjaként:

$$P_M(x) = x_1 = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot e_k.$$

Ezt az egyenlőséget skalárisan megszorozva e_j-vel ($j = 1, 2, \ldots, n$) kapjuk, hogy:

$$\langle P_M(x), e_j \rangle = \langle x_1, e_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot \langle e_k, e_j \rangle = \lambda_j,$$

ui. a különböző indexű $\langle e_k, e_j \rangle$ tagok mind nullák, az azonos indexűek pedig eggyel egyenlők. Ez azt jelenti, hogy

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x_1, e_k \rangle \cdot e_k.$$

Mivel $x_2 := x - x_1 \perp M$, ezért minden $j = 1, 2, \ldots, n$ esetén $\langle x - x_1, e_j \rangle = 0$, következésképpen

$$\langle x_1, e_j \rangle = \langle x, e_j \rangle \qquad (j = 1, 2, \ldots, n),$$

azaz

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k.$$

A fentieket összefoglalva adódik a

11. tétel. *Ha M a H hilbert tér egy véges dimenziós altere és $e_1, e_2, \ldots, e_n$ ennek altérnek egy ortonormált bázisa, akkor a projekciós operátor a következő explicit alakban adható meg:*

$$P_M(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \; e_k \qquad (x \in H).$$

4. Hilbert-terekben a Fourier-sorok elmélete

4.1. A probléma felvetése

Most ismét bizonyos **elemi geometriai** ismeretekre utalunk. Láttuk a (közönséges) sík, illetve tér vektorai között értelmezett **skaláris szorzat** jelentőségét: segítségével vektoroknak nemcsak a merőlegessége, hanem a hosszúsága, szöge is értelmezhető. Egyik alapvető eredmény az volt, hogy minden vektor egyértelműen írható fel a merőleges egységvektorok lineáris kombinációjával, ahol az együtthatók éppen az adott vektornak a megfelelő egységvektorokra eső merőleges vetületei.

A **lineáris algebrában** ezt az eredményt tetszőleges **véges dimenziós** euklideszi térre általánosítottuk. Ott meg azt láttuk, hogy minden véges dimenziós $\big(E, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ valós euklideszi térben (legyen $\dim E = n$) van $e_1, e_2, \dots, e_n$ ortonormált bázis, és minden $x \in E$ vektor az

$$x = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle\, e_k$$

alakban írható fel.

Ebben a fejezetben ezt az eredményt általánosítjuk **végtelen dimenziós** terekre. Számos fogalom és eredmény euklideszi terekben is értelmezhető. Az egyszerűség végett a továbbiakban mi csak teljes euklideszi tereket, azaz Hilbert-tereket, ezen belül is csak **valós Hilbert-tereket** fogunk tekinteni.

A fejezet fő célja annak igazolása, hogy minden (végtelen dimenziós) **szeparábilis** Hilbert-térben van $(e_n, n \in \mathbb{N})$ ortonormált **bázis** és minden $x \in H$ esetén

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle\, e_n.$$

Egy ilyen (e_n) rendszer tehát a „derékszögű koordináta-rendszer" szerepét játssza a végtelen dimenziós terekben. Meg fogjuk mutatni azt is, hogy minden szeparábilis Hilbert-tér izometrikusan izomorf az l^2 Hilbert-térrel, azaz lényegében egyetlen szeparábilis Hilbert-tér létezik.

4.2. Hilbert-terek

Ebben a fejezetben végig csak **valós Hilbert-terekről** lesz szó. Jelölésükre a $\big(H, \langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ — vagy röviden a H — szimbólumot fogjunk használni. Feltesszük tehát, hogy H egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris tér, $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{R}$ skaláris szorzat H-n és a tér teljes a skaláris szorzat által indukált

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (x \in H)$$

normával. H nullelemét a θ szimbólummal jelöljük.

Példák Hilbert-terekre

- **Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér.** A szokásos műveletekkel ellátott $\mathbb{R}^n$ lineáris téren az

$$\langle x, y \rangle := \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \qquad \big(x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n\big)$$

függvény skaláris szorzat. Az indukált

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle} \qquad (x \in \mathbb{R}^n)$$

normával $\mathbb{R}^n$ teljes, tehát $\big(\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ egy véges dimenziós Hilbert-tér.

- **A l^2-tér.** Az

$$l^2 := \Big\{(x_n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \;\Big|\; \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 < +\infty\Big\}$$

halmaz a sorozatok közötti szokásos műveletekkel egy $\mathbb{R}$ feletti lineáris tér, ezen az

$$\langle x, y \rangle := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n y_n \qquad \big(x = (x_n), y = (y_n) \in l^2\big)$$

függvény skaláris szorzat. Az indukált norma ebben az esetben

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} = \|x\|_{l^2} \qquad (x \in l^2).$$

l^2 ezzel a normával teljes, ezért $\big(l^2, \langle \cdot, \cdot \rangle\big)$ Hilbert-tér.

- **A L^2-terek.** Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér. Tekintsük az

$$L^2(X, \Omega, \mu) := \Big\{f : X \to \overline{\mathbb{R}} \;\Big|\; \int_X |f|^2 < +\infty\Big\}$$

függvényteret, és legyen

$$\|f\|_{L^2} := \sqrt{\int_X |f|^2 \, d\mu} \qquad \big(f \in L^2(X, \Omega, \mu)\big), \tag{4.1}$$

ahol nem teszünk különbséget két függvény között, ha azok μ-m.m. egyenlők. Emlékeztetünk a *Riesz–Fischer-tételre*, amely szerint $L^2(X,\Omega,\mu)$ ezzel a normával Banach-tér.

Egyszerűen igazolható, hogy az

$$\langle f,g\rangle := \int_X fg\,d\mu \qquad \big(f,g\in L^2(X,\Omega,\mu)\big)$$

egyenlőséggel értelmezett függvény kielégíti a skaláris szorzat követelményeit, emellett ebből a skaláris szorzatból származtatott

$$\|f\| := \sqrt{\langle f,f\rangle} \qquad \big(f\in L^2(X,\Omega,\mu)\big)$$

norma megegyezik a tér (4.1) alatti normájával, ezért $\big(L^2(X,\Omega,\mu),\langle\cdot,\cdot\rangle\big)$ **Hilbert-tér**.

- **Az $L^2(I)$-tér.** Legyen $I\subset R$ egy nemdegenerált $\mathbb{R}$-beli (korlátos vagy nem korlátos) intervallum, és tekintsük ezen a Lebesgue-féle mértékteret. $L^2(I)$-vel fogjuk jelölni az előző példa speciális eseteként adódó Hilbert-teret.

Megjegyzés. Legyen $I\subset\mathbb{R}$ egy nemdegenerált *korlátos* intervallum. Jelölje $C(\overline{I})$ az $\overline{I}$ kompakt intervallumon értelmezett valós értékű folytonos függvények „szokásos” lineáris terét. Azt már tudjuk, hogy $C(\overline{I})$ euklideszi tér az

$$\langle f,g\rangle := \int_I f(x)g(x)\,dx \qquad \big(f,g\in C(\overline{I})\big)$$

skaláris szorzatra nézve, sőt azt is láttuk, hogy ez a tér *nem teljes*, tehát *nem Hilbert-tér*.

Megmutatható, hogy a $C(\overline{I})$ halmazhoz „alkalmas” függvényeket hozzávéve ez a tér teljessé tehető, vagyis alkalmas Hilbert-tér sűrű alterének tekinthető. Bebizonyítható, hogy **a $C(\overline{I})$ teljessé tételével kapott Hilbert-tér éppen az $L^2(I)$ Hilbert-tér lesz.**

- **Az $L^2_w(I)$ Hilbert-terek.** Tegyük fel, hogy I egy $\mathbb{R}$-beli nyílt intervallum és $w: I\to\mathbb{R}$ pedig a szokásos Lebesgue-mértékre vonatkozólag mérhető, m.m. nemnegatív függvény. Tegyük fel, hogy w integrálható I minden *kompakt* részintervallumán, és jelöljük $\mathcal{I}$-vel azon korlátos intervallumok félgyűrűjét, amelyek lezárása is I-ben van. A $\mu(J) := \int_J w(t)\,dt$ képlet véges mértéket definiál $\mathcal{I}$-n. Tekintsük a hozzá tartozó integrálelméletet, és jelöljük $L^2_w(I)$-vel a megfelelő L^2 teret. A $w\equiv 1$ esetben visszakapjuk az $L^2(I)$ teret.

Nem nehéz igazolni azt, hogy $L^2_w(I)$ az

$$\langle f,g\rangle := \int_I f(t)g(t)w(t)\,dt \qquad \big(f,g\in L^2_w(I)\big)$$

skaláris szorzattal szintén Hilbert-tér. A fenti tulajdonságú w függvényt *súlyfüggvénynek* szokás nevezni.

A H Hilbert-tér egy tetszőleges M részhalmaza esetén is az $\big[M\big]$ szimbólummal jelöljük az M halmaz **lineáris burkát**, vagyis az M halmazt tartalmazó legszűkebb lineáris alteret. Ez az altér, amelyet a M *által generált altérnek* is szokás nevezni, megegyezik az M elemeiből képzett összes (véges) lineáris kombinációk halmazával, azaz

$$\big[M\big] = \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \cdots + \lambda_n f_n \mid \lambda_i \in \mathbb{R},\ f_i \in M,\ i = 1, 2, \ldots, n;\ \ n \in \mathbb{N}\}\,.$$

A H Hilbert-térbeli M **halmaz lezárásának** nevezzük — és az $\overline{M}$ szimbólummal jelöljük — az M-et tartalmazó legszűkebb zárt halmazt. $\overline{M}$ pontosan azokat a H-beli elemeket tartalmazza, amelyek tetszőleges (sugarú) környezetében van M-beli elem.

A metrikus terekhez hasonlóan a H Hilbert-teret is akkor nevezzük **szeparábilisnek**, ha létezik benne egy megszámlálható, mindenütt sűrű részhalmaz, vagyis van olyan megszámlálható $M \subset H$ halmaz, amelyre $\overline{M} = H$ teljesül. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in H$ elemhez és minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan M-beli y elem, hogy $\|x - y\| < \varepsilon$. Könnyű meggondolni, hogy normált — speciálisan Hilbert — terekben a szeparabilitás azzal ekvivalens, hogy *a H térnek van olyan megszámlálható M részhalmaza, amelynek a lineáris burka mindenütt sűrű H-ban, azaz $\overline{[M]} = H$.*

1. tétel. *Az alábbi Hilbert-terek mindegyike szeparábilis:*

- *az l^2-tér,*
- *tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ nemdegenerált intervallum esetén az $L^2(I)$-tér,*
- *tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ nyílt intervallum és $w : I \to \mathbb{R}$ súlyfüggvény esetén az $L^2_w(I)$-tér.*

4.3. Ortogonalitás. A Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció

Egy Hilbert-térben alapvető fogalom az ortogonalitás. A H-beli x **és** y **vektorok egymásra ortogonálisak** (merőlegesek) — jelölésben $x \perp y$ —, ha $\langle x, y\rangle = 0$, azaz a két vektor skaláris szorzata nulla. Azt mondjuk, hogy az $x \in H$ *vektor ortogonális az $M \subset H$ halmazra* — jelölésben $x \perp M$ —, ha x ortogonális az M minden elemére. Végül a H Hilbert-tér M_1 *és* M_2 *részhalmazát egymásra ortogonálisnak* nevezzük — jelölésben $M_1 \perp M_2$ —, ha M_1 bármely eleme ortogonális M_2 minden elemére. Nyilvánvaló, hogy a θ nullvektor ortogonális H minden elemére és egyúttal H minden részhalmazára.

Definíció. Tetszőleges $M \subset H$ részhalmaz mellett jelölje $M^\perp$ az M halmazra ortogonális H-beli vektorok halmazát, vagyis

$$M^\perp := \big\{x \in H \mid x \perp M\big\}.$$

Ezt az $M^\perp$ halmazt az M halmaz **ortogonális komplementumának** nevezzük.

2. tétel. *A H Hilbert-tér bármely M részhalmaza esetén*

- *$M^\perp$ zárt altér H-ban, emellett*
- *$M^\perp = \overline{[M]}^{\,\perp}$.*

Bizonyítás. Legyenek $x_1, x_2 \in M^\perp$ tetszőleges vektorok, azaz $x_1 \perp M$, $x_2 \perp M$, legyenek továbbá $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ tetszőleges számok. Ekkor minden $y \in M$ mellett

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y\rangle = \alpha_1 \langle x_1, y\rangle + \alpha_2 \langle x_2, y\rangle = 0,$$

ami azt jelenti, hogy $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ ortogonális M-re, vagyis $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 \in M^\perp$, amivel igazoltuk, hogy $M^\perp$ altere H-nak.

Legyen most (x_n) $M^\perp$-beli konvergens sorozat, tehát van olyan $x \in H$, hogy $x_n \to x$. Ha $y \in M$ egy tetszőleges vektor, akkor minden n indexre $\langle x_n, y\rangle = 0$, de mivel a skaláris szorzat folytonossága miatt $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$, azért $\langle x, y\rangle = 0$, tehát x ortogonális M-re, azaz $x \in M^\perp$. Igazoltuk tehát, hogy minden $M^\perp$-beli konvergens vektorsorozat határértéke is $M^\perp$-beli vektor, ami egyenértékű azzal, hogy az $M^\perp$ altér zárt.

Legyen $x \in M^\perp$ egy tetszőleges vektor, vagyis $x \perp M$. Nyilvánvaló, hogy $x \perp [M]$, de akkor a skaláris szorzat folytonossága miatt $x \perp \overline{[M]}$, azaz $x \in \overline{[M]}^{\,\perp}$, amivel igazoltuk, hogy $M^\perp \subset \overline{[M]}^{\,\perp}$. Megfordítva, ha $x \in \overline{[M]}^{\,\perp}$, azaz $x \perp \overline{[M]}$, akkor nyilvánvaló, hogy $x \perp M$, azaz $x \in M^\perp$, tehát $\overline{[M]}^{\,\perp} \subset M^\perp$. Ezekből már következik, hogy $M^\perp = \overline{[M]}^{\,\perp}$. ■

A továbbiakban egy H Hilbert-tér bizonyos **véges** vagy **megszámlálhatóan végtelen** részhalmazaira fogunk különböző elnevezéseket bevezetni. Ennek megfelelően a részhalmaz elemeit az $\mathcal{N} := \{0, 1, 2, \dots, m\}$ vagy az $\mathcal{N} := \mathbb{N}$ halmaz elemeivel indexeljük:

$$F := \{f_n \mid n \in \mathcal{N}\}.$$

Az F halmazt — némi, de elfogadható következetlenséggel — az (f_n) szimbólummal is jelöljük, és — vektorsorozat helyett — az $(f_n) \subset H$ **vektorrendszerről** beszélünk.

Definíció. A H Hilbert-tér (e_n) vektorrendszerét **ortonormált rendszernek** nevezzük, ha minden n-re $\|e_n\| = 1$ és bármely $n \neq m$ indexre $e_n \perp e_m$, azaz a vektorrendszer tagjai páronként ortogonálisak egymásra. Másként kifejezve: (e_n) ortonormált rendszer, ha bármelyik n, m indexre fennáll az

$$\langle e_n, e_m\rangle = \delta_{n,m} := \begin{cases} 1, & \text{ha } n = m \\ 0, & \text{ha } n \neq m \end{cases}$$

egyenlőség. ($\delta_{n,m}$ az ún. *Kronecker-féle szimbólum.*)

Az $(e_n) \subset H$ vektorrendszert *ortogonális rendszernek* nevezzük akkor, ha nem tartalmazza a H tér θ elemét és bármely két tagja ortogonális egymásra. Világos, hogy ebben az esetben

$$\frac{e_n}{\|e_n\|} \qquad (n \in \mathcal{N})$$

ortonormált rendszer. Egyszerűen bebizonyítható az is, hogy *minden* (e_n) *ortogonális rendszer lineárisan független is*, azaz bármelyik véges részrendszere lineárisan független.

Kiindulva valamely véges vagy megszámlálhatóan végtelen lineárisan független $(f_n) \subset H$ vektorrendszerből az ún. **Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárással** ortonormált rendszert konstruálhatunk.

3. tétel (a Gram–Schmidt-féle ortogonalizáció). *Tegyük fel, hogy (f_n) a H Hilbert-tér egy lineárisan független vektorrendszere, azaz a rendszer bármely véges sok tagja lineárisan független. Ekkor megadható olyan (e_n) ortonormált rendszer, hogy minden n indexre az e_n vektor előáll az $f_1, f_2, \dots, f_n$ vektorok olyan lineáris kombinációjaként, amelyben f_n együtthatója nem nulla.*

Bizonyítás. Az (f_n) vektorrendszer függetlenségéből következik, hogy a rendszer egyetlen tagja sem θ. Vezessük be az

$$e_1 := \frac{f_1}{\|f_1\|}$$

jelölést. Nyilvánvaló, hogy $\|e_1\| = 1$. Tegyük fel, hogy valamely n index mellett az $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorokat már előállítottuk a kívánt módon, vagyis $\langle e_i, e_k \rangle = \delta_{i,k}$ $(i, k = 1, 2, \dots, n)$, továbbá minden $k = 1, 2, \dots, n$ esetén az e_k vektor előáll az $f_1, f_2, \dots, f_k$ vektorok olyan lineáris kombinációjaként, amelyben az f_k vektor együtthatója nem 0.

Próbáljuk most a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ számokat úgy megválasztani, hogy a

$$g_{n+1} := f_{n+1} - \lambda_1 e_1 - \lambda_2 e_2 - \cdots - \lambda_n e_n$$

egyenlőséggel értelmezett vektor ortogonális legyen az $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorok mindegyikére, vagyis hogy minden $k = 1, 2, \dots, n$ mellett fennálljon a $\langle g_{n+1}, e_k \rangle = 0$ egyenlőség. Könnyen látható, hogy ez teljesül a $\lambda_k = \langle f_{n+1}, e_k \rangle$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ mellett. Az $e_1, e_2, \dots, e_n$ vektorokra tett indukciós feltevésből következik, hogy a g_{n+1} vektor előáll az $f_1, f_2, \dots, f_n, f_{n+1}$ vektorok nem csupa 0 együtthatós lineáris kombinációjaként (ui. az f_{n+1} vektor együtthatója 1), ezért a szóban forgó vektorok lineáris függetlensége miatt $g_{n+1} \neq \mathbf{0}$. Ezek után legyen

$$e_{n+1} := \frac{g_{n+1}}{\|g_{n+1}\|}.$$

Ekkor $e_1, \dots, e_n, e_{n+1}$ olyan $(n+1)$-tagú ortonormált rendszer, amelynek minden tagja rendelkezik a kívánt tulajdonsággal, vagyis minden $k = 1, 2, \dots, n, n+1$ mellett az e_k vektor előáll az $f_1, \dots, f_k$ vektorok olyan lineáris kombinációjaként, ahol f_k együtthatója nem nulla.

A fentiekből teljes indukcióval már következik a kívánt tulajdonságú (e_n) ortonormált rendszer létezése. ■

A konstrukcióból látható, hogy az (e_n) ortonormált rendszer tagjai előállnak

$$\begin{aligned} e_1 &= \lambda_{11} f_1, \\ e_2 &= \lambda_{21} f_1 + \lambda_{22} f_2, \quad \cdots, \\ &\vdots \\ e_n &= \lambda_{n1} f_1 + \lambda_{n2} f_2 + \cdots + \lambda_{nn} f_n, \\ &\vdots \end{aligned}$$

alakban, ahol $\lambda_{ik} \in \mathbb{R}$, és minden n-re $\lambda_{nn} \neq 0$. Ebből nyilvávalóan következik az alábbi állítás: *Ha (f_n) lineárisan független vektorrendszer, akkor a fenti ortogonalizációs eljárással nyert (e_n) ortonormált rendszer lineáris burka azonos az (f_n) vektorrendszer lineáris burkával.*

Példák ortonormált rendszerekre

1. Az l^2 térben az

$$e_n := (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

vektorsorozat egy ortonormált rendszer.

2. Tetszőleges 2π hosszúságú I intervallumon az

$$e_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad e_{2n-1} := \frac{\sin(nt)}{\sqrt{\pi}}, \quad e_{2n} := \frac{\cos(nt)}{\sqrt{\pi}} \quad n = 1, 2, \ldots$$

trigonometrikus rendszer ortonormált rendszer az $L^2(I)$ Hilbert-térben.

3. A $\sqrt{2/\pi}\sin(nt)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvények ortonormált sorozatot alkotnak az $L^2(0, \pi)$ Hilbert-térben.

4. Az $1/\sqrt{\pi}$ és a $\sqrt{2/\pi}\cos(nt)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ függvények ortonormált sorozatot alkotnak az $L^2(0, \pi)$ Hilbert-térben.

5. **Ortogonális polinomok.** Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) nyílt intervallum és $w : I \to \mathbb{R}$ egy tetszőleges súlyfüggvény. Tekintsük az $\langle f, g \rangle := \int_I f(t)g(t)w(t)\, dt$ skaláris szorzattal ellátott $L^2_w(I)$ Hilbert-teret. Ha az $I \ni t \mapsto t^n w(t)$ függvények minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ esetén integrálhatók (ez a helyzet például akkor, ha I *korlátos* és w (Lebesgue-)integrálható I-n), akkor az algebrai polinomok mind $L^2_w(I)$-hez tartoznak. Az algebra alaptételéből következik, hogy az

$$e_0(t) := 1, \quad e_1(t) := t, \quad e_2(t) := t^2, \ \ldots \qquad (t \in I)$$

hatványfüggvények lineárisan függetlenek az $L^2_w(I)$ térben. Ezekre alkalmazva a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációt olyan (p_n) ortonormált polinomsorozatot kapunk az $L^2_w(I)$ Hilbert-térben, hogy $\deg p_n = n$ minden n-re. Azt mondjuk, hogy (p_n) **az I intervallumon a w súlyfüggvényre nézve ortonormált polinomsorozat**.

Különösen fontosak az ún. **klasszikus ortogonális polinomok**. Ezek a következők:

- a **Legendre-polinomok**, amelyekre $I = (-1, 1)$ és $w(t) = 1$ $(t \in I)$;
- a **Csebisev-polinomok**, amelyekre
$$I := (-1, 1) \quad \text{és} \quad w(t) := \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} \quad (t \in I);$$
- a **Jacobi-polinomok**, amelyekre
$$I := (-1, 1) \quad \text{és} \quad w(t) := (1-t)^\alpha (1+t)^\beta \quad (t \in I),$$

ahol $\alpha, \beta > -1$ rögzített paraméterek;

- az **Hermite-polinomok**, amelyekre
$$I = (-\infty, +\infty) \quad \text{és} \quad w(t) := e^{-t^2} \quad (t \in \mathbb{R});$$
- a **Laguerre-polinomok**, amelyekre
$$I = (0, +\infty) \quad \text{és} \quad w(t) := t^\alpha e^{-t} \quad \big(t \in (0, +\infty)\big),$$

ahol $\alpha > -1$ rögzített paraméter.

4.4. Zárt és teljes rendszerek Hilbert-terekben

A Fourier-sorok elméletében szükségünk lesz az alábbi két fontos fogalomra.

Definíció. A H Hilbert-térben egy $F = (f_n) \subset H$ vektorrendszert **zárt rendszernek** mondunk, ha az F halmaz lineáris burka mindenütt sűrű a H-ban, vagyis ha
$$\overline{[\,F\,]} = H.$$
Ez azt jelenti, hogy H minden eleme tetszőleges pontossággal megközelíthető F-beli elemek alkalmas (véges) lineáris kombinációjával, azaz
$$\forall\, x \in H \text{ és } \forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, m \in \mathbb{N},\ \lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R},\ \text{és } f_1, \dots, f_m \in F,\ \text{hogy}$$
$$\Big\| x - \sum_{i=1}^m \lambda_i f_i \Big\| < \varepsilon.$$

Definíció. A H Hilbert-térben egy (e_n) ortonormált rendszert akkor nevezünk **teljesnek**, ha ortogonálisan nem bővíthető, azaz ha nincs a térnek olyan $f \neq \theta$ eleme, amelyik ortogonális az (e_n) rendszer mindegyik vektorára. Másként fogalmazva: (e_n) *teljes rendszer*, ha

$$f \in H \quad \text{és} \quad \langle f, e_n \rangle = 0 \quad (n \in \mathcal{N}) \qquad \Longrightarrow \qquad f = \theta.$$

(Természetesen a teljesség fenti definícióban megadott fogalma semmilyen kapcsolatban nincs a metrikus — tehát speciálisan Hilbert — terek teljességének a fogalmával.)

4. tétel. *A H Hilbert-térben az (e_n) ortonormált rendszer pontosan akkor zárt, ha teljes.*

Bizonyítás. Induljunk ki abból, hogy az $E := \{e_n \mid n \in \mathcal{N}\}$ ortonormált rendszer zárt, azaz

$$\overline{[\,E\,]} = H,$$

és mutassuk meg, hogy a rendszer teljes is. Vegyünk egy olyan $f \in H$ elemet, amelyre $\langle f, e_n \rangle = 0$ teljesül minden n indexre. A skaláris szorzat linearitását és folytonosságát felhasználva ebből következik, hogy

$$f \in \overline{[\,E\,]} = H.$$

Speciálisan $f \perp f$, következésképpen $f = \theta$, és ez azt jelenti, hogy az (e_n) rendszer teljes.

A fordított irányú állítást indirekt módon igazoljuk. Tegyük fel, hogy (e_n) teljes, de nem zárt. Ekkor a $H_1 := \overline{[\,E\,]}$ halmaz a H Hilbert-térnek egy valódi zárt altere, ezért a Riesz-féle felbontási tétel alapján a H térnek van olyan *nemnulla f vektora*, amelyik ortogonális H_1-re, amiből következik, hogy f ortogonális az (e_n) rendszer minden vektorára. Ez az (e_n) teljessége miatt csak úgy lehetséges, ha $f = \theta$. A kapott ellentmondás azt bizonyítja, hogy a rendszer teljességéből következik a rendszer zártsága. ■

Példák teljes (zárt) ortonormált rendszerekre

5. tétel. *Az előző pontban a konkrét Hilbert-terekben definiált ortonormált rendszerek mindegyike teljes (zárt) rendszer.*

4.5. Végtelen sorok Hilbert-terekben

A valós esetből kiindulva értelmezhetjük Hilbert-terekben a *végtelen sor* fogalmát: Legyen $(x_n) : \mathbb{N} \to H$ egy tetszőleges sorozat a H Hilbert-térben. Az ebből képzett

$$s_n := x_1 + x_1 + \cdots x_n \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot az (x_n) által generált **(végtelen) sornak** nevezzük és jelölésére a

$$\sum x_n$$

szimbólumot használjuk. s_n-et a $\sum x_n$ sor n-edik **részletösszegének** (vagy *n-edik szeletének*) hívjuk.

A $\sum x_n$ végtelen sort akkor nevezzük **konvergensnek**, ha a részletösszegeinek (s_n) sorozata konvergens a H Hilbert-térben, vagyis ha létezik olyan $x \in H$ vektor, amelyre

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = x, \qquad \text{azaz} \quad \lim_{n\to+\infty} \|s_n - x\| = 0$$

teljesül. Ezt az $x \in H$ vektort a $\sum x_n$ sor **összegének** nevezzük, emellett annak kifejezésére, hogy a $\sum x_n$ sor összege azonos x-szel, az

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$$

jelölést használjuk. Hilbert-tér esetén ez az egyenlőség tehát azt jelenti, hogy a $\sum x_n$ sor részletösszegeinek sorozata a tér normájában tart az x elemhez, tehát

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to+\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| = 0.$$

A H Hilbert-térbeli $\sum x_n$ végtelen sort **abszolút konvergensnek** mondjuk, ha az (x_n) sorozat normáiból képzett $\sum \|x_n\|$ pozitív tagú *valós sor* konvergens. A valós esethez hasonlóan tetszőleges Hilbert-tér esetén is könnyű bebizonyítani azt, hogy *ha a $\sum x_n$ sor abszolút konvergens, akkor egyúttal konvergens is; emellett ha x jelöli a sor összegét, akkor fennáll az*

$$\|x\| \le \sum_{n=1}^{+\infty} \|x_n\|$$

egyenlőtlenség.

A következő tétel azt állítja, hogy Hilbert-térbeli konvergens végtelen sorokat szabad tagonként skalárisan szorozni.

6. tétel. *Ha a H Hilbert-térbeli $\sum x_n$ végtelen sor konvergens és $x := \sum_{n=1}^{+\infty} x_n$ a sor összege, akkor minden $y \in H$ esetén igaz az*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x_n, y \rangle$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $s_n := \sum_{k=1}^{n} x_k$ a szóban forgó konvergens sor n-edik szelete. A sorösszeg értelmezése szerint ekkor $s_n \to x$ a H normájában, de akkor a skaláris szorzat folytonossága miatt bármely $y \in H$ esetén $\langle s_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ is teljesül. Másrészt

$$\langle s_n, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} \langle x_k, y\rangle$$

is fennáll, amiből a tétel már egyszerűen következik. ■

4.6. Fourier-sorok

A továbbiakban csak végtelen dimenziós Hilbert-tereket tekintünk.

Definíció. Legyen H Hilbert-tér, és rögzítsünk ebben egy (e_n) ortonormált rendszert. A tetszőleges c_n valós együtthatókkal képzett H-beli

$$\sum c_n e_n$$

végtelen sort az (e_n) **rendszer szerint haladó általános ortogonális sornak** nevezzük.

Megjegyzés. Az $L^2(0, 2\pi)$ Hilbert-térben az

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\quad \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\cos 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \frac{\sin 2x}{\sqrt{\pi}},\quad \ldots \qquad (x \in \mathbb{R})$$

trigonometrikus rendszer egy ortonormált rendszer, az e szerint haladó általános ortogonális sor tehát a korábban már tanulmányozott

$$\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big) \qquad \big(x \in \mathbb{R},\quad a_n, b_n \in \mathbb{R}\big)$$

trigonometrikus sor. A fő kérdésünk ezek konvergenciájának a vizsgálata volt. Láttuk, hogy a konvergenciát többféle értelemben is tekinthetjük: **pontonként**, **egyenletesen** vagy a négyzetintegrálra (a mostani szóhasználatunkkal ezt úgy is mondhatjuk, hogy az $L^2(0, 2\pi)$ Hilbert-tér **normájára**) vonatkozóan. Akkor elég természetes módon jutottunk el ahhoz a megállapításhoz, hogy az általános trigonometrikus sorok helyett (első közelítésben) azokat a trigonometrikus sorokat érdemes tekinteni, amelyeknél az együtthatókat speciális módon választjuk meg. Pontosabban szólva azt mutattuk meg, hogy ha egy trigonometrikus sor *egyenletesen* konvergens, akkor az együtthatói és a sor összegfüggvénye között szoros kapcsolat van; az együtthatók ui. kifejezhetők az összegfüggvény segítségével. Az így adódó együtthatókat neveztük **trigonometrikus Fourier-együtthatóknak**.

Az ott megismert gondolatokat (természetesen a megfelelő módosításokkal) az általános keretek között is alkalmazhatjuk. A következő tételben azt mutatjuk meg, hogy igen egyszerű és természetes lépéseken keresztül hogyan juthatunk el ahhoz az első fontos megállapításhoz, hogy Hilbert-térben is az általános ortogonális sorok helyett (első közelítésben) miért érdemes speciális együtthatókkal képzett (ezek az együtthatók lesznek a **Fourier-együthatók**) ortogonális sorokat tekinteni. A trigonometrikus esethez hasonlóan megmarad az a „dallam", hogy ha egy általános ortogonális sor konvergens a H Hilbert-térbeli normára vonatkozóan, akkor a sor együtthatói kifejezhetők a sor összegével.

Hilbert-térbeli általános ortogonális sorok konvergenciájára az alábbi állítások érvényesek.

7. tétel. *Legyen $\sum c_n e_n$ egy H Hilbert-térbeli, az (e_n) ortonormált rendszer szerint haladó általános ortogonális sor. Ez pontosan akkor konvergens, ha az együtthatói négyzetösszegéből képzett számsor konvergens, vagyis ha*

$$\sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2 < +\infty.$$

E követelmény teljesülése mellett legyen

$$x := \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$$

az ortogonális sor összege. Ekkor a sor együtthatói az x vektor segítségével előállíthatók a

$$c_n = \langle x, e_n \rangle \qquad (n \in \mathbb{N})$$

alakban. Emellett az $x \in H$ vektorra fennáll az alábbi ***Parseval-egyenlőség****:*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=1}^{+\infty} |c_n|^2. \tag{4.2}$$

Bizonyítás. Jelölje s_n a $\sum c_n e_n$, S_n pedig a $\sum |c_n|^2$ sor n-edik szeletét, vagyis $s_n = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k$ és $S_n = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$ $(n \in \mathbb{N})$.

Legyen $n > m$. Mivel (e_n) ortonormált rendszer, ezért

$$\|s_n - s_m\|^2 = \Big\| \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k \Big\|^2 = \Big\langle \sum_{k=m+1}^{n} c_k e_k, \sum_{l=m+1}^{n} c_l e_l \Big\rangle = \sum_{k=m+1}^{n} |c_k|^2 = S_n - S_m,$$

és ez azt jelenti, hogy az (s_n) vektorsorozat pontosan akkor Cauchy-sorozat a H Hilbert-térben, ha (S_n) Cauchy-sorozat az $\mathbb{R}$-ben. H és $\mathbb{R}$ teljessége miatt ezekből a tétel első állítása már következik.

Tegyük most fel, hogy a $\sum c_n e_n$ sor konvergens és $x = \sum_{n=1}^{+\infty} c_n e_n$ a sor összege. A $\sum c_n e_n$ sort szabad tagonként skalárisan szorozni, ezért

$$\langle x, e_n \rangle = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \langle e_k, e_n \rangle = c_n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

és ez a tétel második állítását bizonyítja.

A *Parseval-egyenlőség* igazolásához először azt jegyezzük meg, hogy az (e_n) ortonormáltsága miatt minden n indexre fennáll az

$$\|s_n\|^2 = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

egyenlőség. Mivel $s_n \to x$ a H tér normájában, ezért a norma folytonossága miatt $\|s_n\| \to \|x\|$, így a fenti egyenlőségből az $n \to +\infty$ határátmenettel már következik a Parseval-egyenlőség. ■

Az iménti tétel motiválja az alábbi fontos fogalom bevezetését.

Definíció. Ha (e_n) ortonormált rendszer a H Hilbert-térben és $x \in H$ egy tetszőleges vektor, akkor az

$$\langle x, e_n \rangle \qquad (n \in \mathbb{N})$$

számokat az x vektornak az (e_n) ortonormált rendszerre vonatkozó **Fourier-együtthatóinak** nevezzük. Ezen együtthatókkal képzett

$$\sum \langle x, e_n \rangle \, e_n$$

ortogonális sort az x vektor (e_n) rendszer szerinti **Fourier-sorának** mondjuk.

Érdemes meggondolni, hogy az $L^2(0, 2\pi)$ Hilbert-térben egy f függvénynek az (e_n) trigonometrikus rendszer szerinti Fourier-sora, vagyis a

$$\frac{a_0}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=1} \big(a_n \cos nx + b_n \sin nx\big) \qquad \big(x \in (0, 2\pi)\big)$$

sor, ahol tehát

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \cos nt \, dt, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(t) \sin nt \, dt \qquad \big(n = 0, 1, 2 \ldots\big),$$

éppen az f függvénynek a korábban értelmezett **trigonometrikus Fourier-sora**.

Megjegyzés. Feladatunk ezek után annak vizsgálata, hogy egy Hilbert-térben valamely ortonormált rendszer szerinti Fourier-sor a tér normájában konvergens-e. Most ehhez fűzünk néhány előzetes megjegyzést.

A konkrét Hilbert-terek közül a legfontosabbak és a legérdekesebbek a különböző függvényterek. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben ui. a konvergencia kérdése lineáris algebrai eszközök felhasználásával viszonylag egyszerűen „rendezhető”. Ezekből az eredményekből az $n \to +\infty$ határátmenettel szintén viszonylag egyszerűen kaphatjuk meg az l^2 Hilbert-térre vonatkozó állításokat.

A **függvényterek** esete azért érdekesebb, mert ezekben — az alkalmazások szempontjából is fontos — további kérdések vethetők fel elég természetes módon. Tekintsük például az $L^2(0, 2\pi)$ Hilbert-teret és ebben a trigonometrikus rendszert. Világos, hogy a Fourier-sor konvergenciáját többféle értelemben is vizsgálhatjuk:

• **Pontonkénti** értelemben. Ekkor azt kérdezhetjük meg, hogy a sor egy rögzített pontban konvergens-e, és ha igen, akkor mit lehet mondani az összegéről.

• **Egyenletes** értelemben. Itt meg azt kérdezhetjük, hogy milyen f függvény esetén lesz a Fourier-sor egyenletesen konvergens, és ekkor milyen kapcsolat van f és az összegfüggvény között.

• Az $L^2(0, 2\pi)$ Hilbert-tér természetes **normájában** (ebben a konkrét esetben ezt a konvergenciát **négyzetintegrálra** vonatkozó konvergenciának neveztük) is vizsgálhatjuk a Fourier-sor konvergenciáját.

A trigonometrikus eset korábbi, részletesebb tanulmányozása során láttuk, hogy a **normakonvergencia** szempontjából a trigonometrikus Fourier-sorok „barátságosan" viselkednek abban az értelemben, hogy viszonylag egyszerű meggondolásokkal adódnak fontos, általános jellegű eredmények.

Célunk éppen annak megmutatása, hogy az ott elmondott gondolatok messzemenően általánosíthatók tetszőleges Hilbert-terekre. Ezekből az egyszerűen adódó általános tételekből aztán az alkalmazások szempontjából is fontos eredményeket lehet kapni.

A továbbiakban tehát az $x \in H$ vektor Fourier-sorának a konvergenciáját fogjuk megvizsgálni. A következő — természetes módon felvethető — kérdésekre keressük a válaszokat:

1^o *Milyen $x \in H$ vektor esetén lesz a szóban forgó Fourier-sor konvergens?*

2^o *Ha egy $x \in H$ vektor esetén a Fourier-sor konvergens, akkor az összege vajon megegyezik-e az x vektorral, azaz a Fourier-sor előállítja-e az x vektort.*

Bevezetjük a következő elnevezést.

Definíció. A H Hilbert-térbeli x vektort az (e_n) **ortonormált rendszer szerint Fourier-sorba fejthetőnek** nevezzük, ha az x vektor (e_n) rendszer szerinti Fourier-sorának összege azonos x-szel.

Az előző tételből azonnal adódik a következő állítás.

8. tétel. *Egy $\sum c_n e_n$ konvergens ortogonális sor azonos az összegének a Fourier-sorával, amiből természetesen következik, hogy az összegvektor Fourier-sora konvergens.*

Ebből persze még nem következik az, hogy *minden* $x \in H$ vektornak az (e_n) ortonormált rendszer szerinti Fourier-sora konvergens. Ez az állítás egyébként igaz, és ezt a továbbiakban igazolni fogjuk. A bizonyításhoz felhasználjuk azt az önmagában is fontos és érdekes tényt, hogy a **Fourier-sorok részletösszegei egy nevezetes minimum-tulajdonsággal rendelkeznek.**

Pontosan a következőről van szó: Legyen (e_n) adott ortonormált rendszer a H Hilbert-térben, és vegyük a H tér egy tetszőleges elemét. Tekintsük a következő *minimumfeladatot*: keressük meg az $e_1, \dots, e_n$ vektorok lineáris kombinációi, azaz a

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \cdots + c_ne_n$$

alakú vektorok közül (c_k-k valós számok) azt, amelyik x-et a H térbeli távolság értelmében a legjobban megközelíti. Azt kérdezzük tehát, hogy adott n esetén az

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \Big\|$$

kifejezésnek egyáltalán van-e minimuma, ha a $c_k \in R$ együtthatók változnak; és ha van, akkor ezt a minimumot milyen együtthatók esetén veszi fel a kifejezés. Az alábbi tétel azt állítja, hogy ennek a minimumfeladatnak a megoldását éppen az x vektor Fourier-együtthatói adják.

9. tétel. *Legyen (e_n) egy teszőleges ortonormált rendszer a H Hilbert-térben. Ekkor minden $x \in H$ vektorra és minden n természetes számra*

$$\min\Big\{ \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \Big\| \;\Big|\; c_k \in \mathbb{R}, k = 1, \ldots, n \Big\} = \Big\| x - \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle e_k \Big\|,$$

azaz minden $x \in H$ és minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az $x \in H$ vektor Fourier-sorának n-edik részletösszege az a $H_n := [\{e_1, \ldots, e_n\}]$ altérbeli vektor, amelyik a H tér normájában legközelebb van az x vektorhoz.

Bizonyítás. Rögzítsük a c_k együtthatókat. A skaláris szorzat tulajdonságait és az (e_n) rendszer ortonormáltságát felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \Big\|^2 &= \Big\langle x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, x - \sum_{l=1}^{n} c_l e_l \Big\rangle = \\
&= \langle x, x \rangle - 2 \sum_{k=1}^{n} c_k \langle x, e_k \rangle + \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2 = \\
&= \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle - c_k|^2.
\end{aligned}$$

Ebből az azonosságból világos, hogy a szóban forgó kifejezésnek van minimuma, és azt akkor veszi fel, ha az utolsó négyzetösszeg minden tagja 0-val egyenlő, azaz ha

$$c_k = \langle x, e_k \rangle \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

A minimumot szolgáltató c_k együtthatók tehát n-től nem függenek. Ezekkel az értékekkel a fenti kifejezés a következő alakot veszi fel:

$$\Big\| x - \sum_{k=1}^{n} c_k e_k \Big\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2. \tag{4.3}$$

Ez az ún. **Bessel-féle azonosság**. ■

10. tétel (a Bessel-féle egyenlőtlenség). *Legyen (e_n) egy ortonormált rendszer a H Hilbert-térben. Ekkor tetszőleges $x \in H$ vektornak az (e_n) rendszerre vonatkozó $\langle x, e_n \rangle$ $(n \in \mathbb{N})$ Fourier-együtthatóira fennáll az alábbi, ún.* ***Bessel-féle egyenlőtlenség***

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \big| \langle x, e_n \rangle \big|^2 \le \|x\|^2 \qquad (x \in H), \tag{4.4}$$

ezért a Fourier-együtthatók 0-hoz tartanak, azaz

$$\lim_{n \to +\infty} \langle x, e_n \rangle = 0 \qquad \text{minden } x \in H \text{ esetén.}$$

Bizonyítás. Mivel a (4.3) alatti Bessel-féle azonosság bal oldala nemnegatív, ezért egyenlőség jobb oldala is nemnegatív, amiből következik, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\sum_{k=1}^{n} |\langle x, e_k \rangle|^2 \le \|x\|^2.$$

Itt az $n \to +\infty$ határátmenetet elvégezve kapjuk a Bessel-féle egyenlőtlenséget.

A $\sum |\langle x, e_k \rangle|^2$ valós sor konvergens, ezért a generáló sorozata nullsorozat, és ebből következik, hogy a Fourier-együtthatók 0-hoz tartanak. ■

Az 1^o kérdésünkre a válasz a

11. tétel. *Legyen (e_n) ortonormált rendszer a H Hilbert-térben. Ekkor minden $x \in H$ vektornak az (e_n) rendszer szerinti Fourier-sora* ***konvergens****.*

Bizonyítás. A (4.4) alatti Bessel-féle egyenlőtlenségből következik, hogy az x vektor Fourier-együtthatói abszolútértékének négyzetösszege konvergens, ezért az 7. tétel szerint az x vektor $\sum \langle x, e_k \rangle e_k$ Fourier-sora valóban konvergens. ■

Hangsúlyozzuk, hogy az iménti tétel csak a Fourier-sor konvergenciáját állítja, és nem mond semmit a sor összegéről. A következő tétel azt fejezi ki, hogy milyen kapcsolat van egy $x \in H$ vektor Fourier-sorának összege és az x vektor között.

12. tétel. *Legyen (e_n) egy tetszőleges ortonormált rendszer a H Hilbert-térben. Jelölje H_1 az (e_n) rendszer lineáris burkának a lezárását (azaz azt a legszűkebb H-beli alteret, amely tartalmazza a rendszer minden tagját):*

$$H_1 := \overline{[\,(e_n)\,]}.$$

Ekkor bármelyik H-beli x vektor (e_n) ortonormált rendszer szerinti Fourier-sorának összege azonos x-nek a H_1 altérre való ortogonális vetületével.

Bizonyítás. Tekintsük az $x \in H$ vektor $\sum \langle x, e_n \rangle \, e_n$ Fourier-sorát. Az előző tétel szerint ez a sor konvergens. Jelölje u a sor összegét, vagyis legyen

$$u := \sum_{n=1}^{+\infty} \langle x, e_n \rangle \, e_n.$$

A sorösszeg értelmezése alapján

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle \, e_k \ \to \ u \quad \text{az } H \text{ tér normájában, ha } n \to +\infty.$$

Mivel minden minden n-re $s_n \in \big[\{e_1, \ldots, e_n\}\big]$, ezért nyilvánvaló, hogy $u \in \overline{[(e_n)]} = H_1$. Másrészt az 7. tétel szerint a sor együtthatói kifejezhetők a sor összege segítségével, éspedig

$$\langle x, e_n \rangle = \langle u, e_n \rangle \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Ebből következik, hogy hogy a $v := x - u$ vektorra

$$\langle v, e_n \rangle = \langle x, e_n \rangle - \langle u, e_n \rangle = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ami azt jelenti, hogy a v vektor ortogonális az (e_n) sorozat minden tagjára, de akkor $v \perp H_1$, azaz $v \in H_1^{\perp}$. Mivel $x = u + v$, ahol $u \in H_1$ és $v \in H_1^{\perp}$, ezért a Riesz-féle ortogonális felbontási tételből következik, hogy u azonos az x vektor H_1-re való ortogonális vetületével. ∎

A 4. és a 12. tételből nyilvánvalóan következik, hogy az alábbi fontos

13. tétel. *A H Hilbert-térben pontosan akkor lesz minden $x \in H$ vektor Fourier-sorba fejthető az (e_n) ortonormált rendszer szerint (azaz x-nek az (e_n) rendszer szerinti Fourier-sorának az összege azonos x-szel), ha az (e_n) rendszer zárt, illetve teljes.*

Felmerül ezek után az a kérdés, hogy melyek azok a Hilbert-terek, amelyekben létezik zárt, vagyis teljes ortonormált rendszer. Lineáris algebrából tudjuk, hogy minden véges dimenziós térben van teljes ortonormált rendszer, ezért elég csak a végtelen dimenziós esetet tekintenünk. Legyen az (e_n) *sorozat* egy zárt rendszer H-ban. Az értelmezés szerint ekkor az $[(e_n)]$ halmaz sűrű a H-ban. Könnyen be lehet látni azt, hogy az (e_n) tagjaiból képzett racionális együtthatós lineáris kombinációk halmaza is sűrű H-ban. Mivel ez a halmaz *megszámlálható*, ezért H-nak van megszámlálható sűrű részhalmaza, vagyis H szükségképpen egy **szeparábilis** Hilbert-tér. Ennek az állításnak a megfordítása is igaz, ezért fenáll a következő fontos

14. tétel. *Egy H Hilbert-térben pontosan akkor létezik zárt (teljes) ortonormált rendszer, ha H szeparábilis.*

Bizonyítás. Az előzőek szerint elég azt igazolni, hogy minden szeparábilis Hilbert-térben van zárt (teljes) ortonormált rendszer. Tegyük fel tehát, hogy H szeparábilis, vagyis van benne egy olyan $M \subset H$ megszámlálható halmaz, amelyre $\overline{M} = H$. Az M halmaz alkalmas megritkításával könnyen nyerhető egy olyan (x_n) lineárisan független M-beli sorozat, amelyre $[(x_n)] = [M]$. Alkalmazzuk erre a vektorsorozatra a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást, akkor az így kapott (e_n) ortonormált sorozatra nyilván $[(e_n)] = [M]$ teljesül. Mivel M-mel együtt $[M]$ is sűrű H-ban, ezért $\overline{[(e_n)]} = H$, ami azt jelenti, hogy az (e_n) rendszer zárt a H térben. ■

4.7. Szaparábilis Hilbert-terek izomorfiája

Ebben a pontban megmutatjuk, hogy a végtelen dimenziós szeparábilis Hilbert-terek között sem algebrai szempontból sem metrikus tulajdonságait tekintve nincs különbség.

15. tétel (Riesz–Fischer-tétel). *Minden végtelen dimenziós szeparábilis H Hilbert-tér izometrikusan izomorf az l^2 Hilbert-térrel. Ez azt jelenti, hogy H és l^2 között létezik egy olyan*

$$\varphi : H \to l^2$$

bijektív lineáris leképezés, ami normatartó is, azaz

$$\|x\| = \|\varphi(x)\|_{l^2} \qquad (x \in H).$$

Bizonyítás. Mivel H szeparábilis Hilbert-tér, ezért ebben létezik egy (e_n) teljes ortonormált rendszer. Jelölje φ azt a leképezést, amelyik minden $x \in H$ elemhez hozzárendeli az x vektor (e_n) szerinti Fourier-együtthatóinak a sorozatát:

$$\varphi(x) := \big(\langle x, e_n\rangle, n \in \mathbb{N}\big) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

A 7. tételből következik, hogy φ minden H-beli elemhez l^2-beli sorozatot rendel, ezért φ valóban egy $H \to l^2$ típusú függvény.

A φ leképezés lineáris. Valóban, a skaláris szorzat tulajdonságai alapján minden $x, y \in H$, $\lambda \in \mathbb{R}$ és $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$\begin{aligned} \langle x + y, e_n\rangle &= \langle x, e_n\rangle + \langle y, e_n\rangle, \\ \langle \lambda x, e_n\rangle &= \lambda\langle x, e_n\rangle, \end{aligned}$$

következésképpen

$$\begin{aligned} \varphi(x + y) &= \big(\langle x + y, e_n\rangle\big) = \big(\langle x, e_n\rangle\big) + \big(\langle y, e_n\rangle\big) = \varphi(x) + \varphi(y), \\ \varphi(\lambda x) &= \big(\langle \lambda x, e_n\rangle\big) = \lambda\big(\langle x, e_n\rangle\big) = \lambda\varphi(x), \end{aligned}$$

és ez azt jelenti, hogy φ lineáris leképezés.

A φ leképezés injektivitása. Tegyük fel, hogy az $x_1, x_2 \in H$ elemekre $\varphi(x_1) = \varphi(x_2)$ teljesül. Mivel φ lineáris, ezért ebből

$$\varphi(x_1 - x_2) = \big(\langle x_1 - x_2, e_n\rangle\big) = \big(\langle x_1, e_n\rangle - \langle x_2, e_n\rangle\big) = \big(0, 0, 0, \ldots\big) = \mathbf{0} \in l^2$$

következik. Ez azt jelenti, hogy az $x := x_1 - x_2$ H-beli elem az (e_n) rendszer mindegyik vektorára ortogonális, és ez az (e_n) teljessége miatt csak úgy lehetséges, ha $x = \theta$ $(\in H)$, azaz $x_1 = x_2$. A φ leképezés tehát injektív,

Most azt igazoljuk, hogy φ *szürjektív*. Ennek bizonyításához induljunk ki egy l^2-térbeli (c_n) sorozatból, és mutassuk meg azt, hogy van olyan $x \in H$, amelyre

$$\varphi(x) = \big(\langle x, e_n\rangle\big) = (c_n),$$

vagyis $\langle x, e_n\rangle = c_n$ teljesül minden n indexre. Ehhez tekintsük a $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k$ sor

$$s_n := \sum_{k=0}^{n} c_k e_k \qquad (n \in \mathbb{N})$$

részletösszegeit. Megmutatjuk, hogy ez Cauchy-sorozat. Valóban, felhasználva, hogy (e_n) ortonormált rendszer azt kapjuk, hogy minden $m > n$ indexre

$$\|s_m - s_n\|^2 = \Big\|\sum_{k=n+1}^{m} c_k e_k\Big\|^2 = \sum_{k=n+1}^{n} |c_k|^2.$$

Minthogy $(c_n) \in l^2$, ezért (s_n) valóban Cauchy-sorozat, s így a H tér teljessége alapján konvergens. Jelöljük x-szel a szóban forgó sorozat határértékét, azaz

$$s_n \to x \ \ (n \to +\infty) \ \text{ a } H \text{ tér normájában.}$$

Ekkor a skaláris szorzat folytonossága alapján

$$\langle x, e_k\rangle = \lim_{n\to+\infty} \langle s_n, e_k\rangle \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Minthogy minden $n \geq k$ esetén $\langle s_n, e_k\rangle = c_k$, ezért c_k az x elem Fourier-együtthatója, azaz $\langle x, e_k\rangle = c_k$ minden $k \in \mathbb{N}$ indexre. Ezzel megmutattuk, hogy a most konstruált $x \in H$ elemre $\varphi(x) = (c_n)$. A φ leképezés tehát szürjektív.

A *Parseval-egyenlőségből* (l. a 7. tételt) következik, hogy

$$\|x\|^2 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \big|\langle x, e_k\rangle\big|^2 = \|\varphi(x)\|_{l^2}^2 \qquad (x \in H),$$

és ez azt jelenti, hogy a $\varphi : H \to l^2$ lineáris bijekció normatartó. ■

Bármely euklideszi térben (tehát Hilbert-térben is) a skaláris szorzat kifejezhető a normával. Egyszerűen igazolható, hogy valós eulideszi tér esetén fennáll az

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2\Big) \qquad (x, y \in H)$$

azonosság. Ezekből nyilvánvaló, hogy minden izometria egyben a *skaláris szorzatot is megtartja*, azaz

$$\langle x, y\rangle = \langle \varphi(x), \varphi(y)\rangle \qquad (x, y \in H).$$

5. Lineáris operátorok és funkcionálok

Legyenek X és Y *valós* (vagyis $\mathbb{R}$ feletti) lineáris terek (más szóval vektorterek). A nullelemeket θ_X, ill. θ_Y jelöli. A lineáris terek elemeit vektoroknak is fogjuk nevezni. Feltesszük még azt is, hogy az X, ill. az Y lineáris tereken norma is van értelmezve, ezeket a $\|\cdot\|_X$, ill. a $\|\cdot\|_Y$ szimbólumokkal jelöljük. Több definícióban és állításban X-nek csak a vektortérstruktúrájára lesz szükségünk. Ezekben az esetekben az X **lineáris térről** beszélünk. Ha azt mondjuk, hogy X **normált tér**, akkor pedig az $(X, \|\cdot\|_X)$ térstruktúrára gondolunk.

Ebben a fejezetben normált terek közötti leképezések közül a legegyszerűbbekkel, a **lineáris leképezésekkel** foglalkozunk.

5.1. A lineáris operátorok $L(X,Y)$ vektortere

Definíció. Legyenek X és Y lineáris terek. Az $A : X \to Y$ függvényt **lineáris operátornak** (vagy **lineáris leképezésnek**) nevezzük, ha minden $x, y \in X$ elempárra és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra

(i) $A(x+y) = A(x) + A(y)$,

(ii) $A(\lambda x) = \lambda A(x)$.

A valós értékű lineáris leképezéseket **lineáris funkcionáloknak** hívjuk.

A definíció (i), ill. (ii) feltétele azt jelenti, hogy az A operátor az X-beli összegeket Y-beli összegekbe, ill. X-beli elemek számszorosát a megfelelő Y-beli elemek számszorosába viszi át. Az A leképezésnek ezt a két tulajdonságát kifejezve azt szoktuk mondani, hogy a leképezés **műveletttartó**, vagy — az algebrában szokásos szóhasználattal élve — az A függvény **homomorfizmus**. Az A leképezés x helyen felvett értékének jelölésére a szokásos $A(x)$ mellett az Ax szimbólumot is használni fogjuk.

Lineáris leképezésekkel kapcsolatban két kitüntetett alteret szokás bevezetni. A

$$\operatorname{Ker} A := \{x \in X \mid Ax = \theta_Y\} \subset X,$$
$$\operatorname{Im} A := \{Ax \mid x \in X\} = \mathcal{R}_A \subset Y$$

halmazokat az A operátor **magterének**, illetve **képterének** nevezzük.

Érdemes megjegyezni az alábbi — egyszerűen bebizonyítható — állításokat. Legyenek X és Y lineáris terek és $A : X \to Y$ egy tetszőleges lineáris operátor. Ekkor

- $A\theta_X = \theta_Y$;
- $\operatorname{Ker} A$ altér X-ben, $\operatorname{Im} A$ altér Y-ban;

- A pontosan akkor *injektív*, ha $\operatorname{Ker} A = \{\theta_X\}$;
- A akkor és csak akkor *szürjektív*, ha $\operatorname{Im} A = Y$.

Minthogy az $A : X \to Y$ függvény értékei vektorok, ezért értelmezve van ezek összege és számmal való szorzata. Ezt felhasználva értelmezhetjük az $A, B : X \to Y$ lineáris operátorok $A + B$ *összegét* és az A operátor λ *számszorosát*:

$$(A + B)(x) := Ax + Bx \qquad (x \in X),$$
$$(\lambda A)(x) := \lambda Ax \qquad (x \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}).$$

Egyszerűen igazolható az alábbi fontos állítás.

1. tétel. *Legyenek X és Y tetszőleges lineáris terek. Az összes $X \to Y$ lineáris operátort tartalmazó halmaz $\mathbb{R}$ feletti vektorteret alkot az imént definiált műveletekre nézve. Ezt a vektorteret az*

$$L(X, Y) := \{A : X \to Y \mid\ A \text{ lineáris operátor}\}$$

szimbólummal jelöljük.

Emlékeztetünk arra, hogy az X_1 és az X_2 valós lineáris tereket akkor neveztük **izomorfaknak** (jelölésben $X_1 \cong X_2$), ha elemeik között létezik művelettartó bijekció, vagyis ha

$$\exists\ T : X_1 \to X_2 \ \text{ bijekció, hogy}$$
$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y) \qquad (x, y \in X_1,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}).$$

Az izomorf lineáris tereket ugyanazon tér különböző realizációjának tekintjük, ezért az ilyenek között nem teszünk különbséget.

Példák lineáris leképezésekre

- $X = Y = \mathbb{R}$ esetén pontosan az $A(x) = cx$ $(x \in \mathbb{R})$ alakú függvények a lineáris leképezések, ahol c tetszőleges valós szám. (Ezek képei az origón átmenő egyenesek.) Egyszerűen látható, hogy

$$L(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}.$$

- Legyenek n és m rögzített természetes számok, $X := \mathbb{R}^n$ és $Y := \mathbb{R}^m$. Korábban már láttuk, hogy rögzített X-, illetve Y-beli bázisok esetén az $L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ lineáris tér azonosítható az $(m \times n)$-es valós mátrixok lineáris terével, azaz

$$L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) \cong \mathbb{R}^{m \times n}.$$

A **lineáris algebrában** megismertük a *véges dimenziós lineáris terek* közötti lineáris leképezések (ezen keresztül a mátrixok) legfontosabb tulajdonságait. Az analízisben fontos szerepet játszó lineáris terek *végtelen dimenziósak.* A **funkcionálanalízis** feladata az ilyen terek közötti (lineáris) leképezések vizsgálata.

5.2. Folytonosság és korlátosság

Emlékeztetünk arra, hogy korábban már értelmeztük normált terek közötti leképezések folytonosságát. Ha X és Y normált terek, akkor azt mondtuk, hogy az $f : X \to Y$ függvény **folytonos az** $a \in X$ **pontban**, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz}\ \ \exists\, \delta > 0 :\ \ \forall\, x \in X,\ \|x-a\|_X < \delta \quad\Longrightarrow\quad \|f(x) - f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

A valós-valós függvényekhez hasonlóan itt is érvényes az **átviteli elv**: az $f : X \to Y$ függvény akkor és csak akkor folytonos az $a \in X$ pontban, ha minden $x_n \to a$ sorozatra $f(x_n) \to f(a)$. Az $f : X \to Y$ függvényt **folytonosnak** nevezzük, ha minden $a \in X$ pontban folytonos.

Érdekes és fontos tény, hogy *lineáris operátorok* esetén az egyetlen pontbeli folytonosságból már következik az egész téren való folytonosság.

2. tétel. *Tegyük fel, hogy az $A : X \to Y$ lineáris leképezés folytonos egy $a \in X$ pontban. Ekkor A folytonos az összes $x \in X$ pontban.*

Bizonyítás. Rögzítsük az $x \in X$ pontot, és vegyünk egy olyan $(x_n) \subset X$ sorozatot, amelyre $x_n \to x$ az X térben. Megmutatjuk, hogy ekkor $Ax_n \to Ax$ az Y térben, ami az átviteli elv alapján azt jelenti, hogy A folytonos x-ben. Tekintsük a következő átalakítást:

$$Ax_n = A\big(a+(x_n-x)+(x-a)\big) = A\big(a+(x_n-x)\big)+A(x-a) = A\big(a+(x_n-x)\big)+A(x)-A(a)\ \ (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel $x_n \to x$, ezért $\lim\big(a + (x_n - x)\big) = a$. Az A operátor a-beli folytonossága miatt az (Ax_n) sorozat tehát valóban $A(a) + A(x) - A(a) = A(x)$-hez tart. ■

Lineáris operátor folytonossága ekvivalens módon jellemezhető a korlátosságnak elnevezett tulajdonsággal.

Definíció. Az $A : X \to Y$ lineáris operátort akkor mondjuk **korlátosnak**, ha létezik olyan $C > 0$ szám, hogy

$$\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X \qquad (x \in X). \tag{5.1}$$

Figyeljük meg, hogy az $X = Y = \mathbb{R}$ esetben a korlátosságnak a fenti fogalma *különbözik* a valós-valós függvények körében korábban értelmezett korlátosság fogalmától. A továbbiakban ezt a fogalmat mindig a fenti értelemben értjük.

3. tétel. *Az $A : X \to Y$ lineáris operátor akkor és csak akkor folytonos X-en, ha korlátos.*

Bizonyítás. $\boxed{\Leftarrow}$ A folytonosság definíciója alapján (5.1)-ből következik, hogy A folytonos a θ_X pontban, ezért a 2. tétel miatt minden $x \in X$ pontban is folytonos.

$\boxed{\Rightarrow}$ A fordított irányú állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy A nem korlátos. Ekkor (5.1) alapján

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\text{-hez} \ \ \exists\, x_n \in X \setminus \{\theta_X\} : \quad \|Ax_n\|_Y > n\|x_n\|_X.$$

Tekintsük az

$$y_n := \frac{1}{n}\,\frac{x_n}{\|x_n\|_X} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozatot. Ekkor $\|y_n\|_X = \frac{1}{n} \to 0$, tehát $y_n \to \theta_X$ az X térben. Az A operátor folytonos a θ_X pontban, ezért $Ay_n \to \theta_Y$ az Y térben. Ekkor azonban a normák sorozata 0-hoz tart, azaz $\|Ay_n\|_Y \to 0$. Másrészt az indirekt feltétel miatt a normák sorozatára

$$\|Ay_n\|_Y = \left\| A\left(\frac{1}{n}\cdot\frac{x_n}{\|x_n\|_X}\right)\right\|_Y = \frac{1}{n}\cdot\frac{\|Ax_n\|_Y}{\|x_n\|_X} > 1$$

adódik minden n számra, és ez azt jelenti, hogy az $\|Ay_n\|_Y$ normák sorozata nem tart nullához. Ez az ellentmondás az állításunkat bizonyítja. ■

Véges dimenziós terek közötti lineáris leképezések folytonosak. Sőt ennél több is igaz.

4. tétel. *Tegyük fel, hogy X véges dimenziós, Y pedig tetszőleges normált tér. Ekkor minden $A : X \to Y$ lineáris operátor folytonos.*

Bizonyítás. Véges dimenziós tereken bármely két norma ekvivalens, ezért feltehető, hogy $X = \mathbb{R}^n$ és $\|\cdot\|_X = \|\cdot\|_1$. Jelölje $e_1, e_2, \dots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér kanonikus bázisát. Ekkor minden $x \in \mathbb{R}^n$ esetén $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ $(x_k \in \mathbb{R})$ és $\|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$. Mivel A lineáris, ezért $Ax = A(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k Ae_k$, következésképpen

$$\|Ax\|_Y \le \sum_{k=1}^{n} |x_k|\|Ae_k\|_Y \le C\|x\|_1, \quad \text{ahol} \qquad C := \max\{\|Ae_1\|_Y, \dots, \|Ae_n\|_Y\}.$$

Ez azt jelenti, hogy A korlátos, tehát folytonos lineáris operátor. ■

Érdekes és meglepő, hogy *végtelen dimenziós* terek között az ilyen egyszerű (vagyis lineáris) leképezések között is vannak már olyanok, amelyek nem folytonosak.

Példa. *A differenciáloperátor nem folytonos lineáris operátor.*

- Legyen $\big(X, \|\cdot\|_X\big) := \big(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ és $\big(Y, \|\cdot\|_Y\big) := \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$. Jelölje D a **differenciáloperátort**:

$$D : X \to Y, \qquad Df := f'.$$

Ekkor D lineáris, de nem korlátos, tehát nem folytonos operátor. Valóban, a linearitás nyilvánvaló. Annak igazolására, hogy D nem korlátos, tekintsük az

$$f_n(t) := t^n \qquad (t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$$

függvényeket. Mivel minden n-re

$$\|Df_n\|_\infty = \|f_n'\|_\infty = \|nt^{n-1}\|_\infty = n = n\|f_n\|_\infty > \frac{n}{2}\|f_n\|_\infty,$$

ezért D valóban nem korlátos, tehát nem is folytonos operátor.

Megjegyzések. **1**^{o} Az operátorok közül az analízis szempontjából az egyik legfontosabb a differenciáloperátor. A differenciáloperátort különféle terekben lehet vizsgálni, és amint az láttuk, az általában nem folytonos. Ez a tény indokolttá teszi az analízisben a nem folytonos operátorok tanulmányozását is. A továbbiakban ezekkel mi nem foglalkozunk.

2^o Bizonyos esetekben a norma alkalmas megválasztásával tehetünk egy nem korlátos operátort korlátossá. Az előző példánál maradva, ha az X-beli normát az

$$\|f\|_X := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty \qquad \big(f \in C^1[0,1]\big)$$

képlettel értelmezzük, akkor az így kapott differenciáloperátor már korlátos/folytonos lineáris operátor lesz.

5.3. Operátor normája. A $B(X,Y)$ normált tér

A továbbiakban csak a folytonos/korlátos lineáris operátorokkal foglalkozunk. Adott X, Y normált terek esetén ezek halmazát így fogjuk jelölni:

$$B(X,Y) := \{A : X \to Y \mid A \text{ lineáris és folytonos/korlátos}\}.$$

A folytonos/korlátos lineáris operátorok között is értelmezve van az összeadás és a számmal való szorzás művelete. Egyszerűen belátható, hogy $B(X,Y)$ ezekkel a műveletekkel egy $\mathbb{R}$ feletti vektortér, az $L(X,Y)$ tér egy altere. A 4. tételből az is következik, hogy $B(X,Y) = L(X,Y)$, ha X véges dimenziós normált tér.

További struktúrával, nevezetesen *normával* fogjuk ellátni a $B(X,Y)$ lineáris teret. Ehhez felhasználjuk a korlátosság fogalmának (l. (5.1)) alábbi ekvivalens átfogalmazásait. Legyen $A : X \to Y$ egy lineáris operátor. Ekkor

$$\exists C > 0 : \|Ax\|_Y \le C\|x\|_X \ (\forall\, x \in X);$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists C > 0 : \|Ax\|_Y \le C \quad (\forall\, x \in X, \quad \|x\|_X \le 1);$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists C > 0 : \|Ax\|_Y \le C \quad (\forall\, x \in S_1 := S_{1,X} := \{x \in X \,|\, \|x\|_X = 1\})$$

($S_{1,X}$-et az X *egységgömb-felületének* nevezzük);

$$\Updownarrow$$

$$\forall\, M \subset X \ \text{ korlátos halmazra } \ A(M) \subset Y \ \text{ korlátos halmaz.}$$

Definíció. Tetszőleges $A \in B(X, Y)$ esetén az

$$\begin{aligned}\|A\| := \|A\|_{XY} &:= \sup\{\|Ax\|_Y \mid x \in X,\ \|x\|_X = 1\} \\ &= \sup\{\|Ax\|_Y \mid x \in X,\ \|x\|_X \le 1\}\end{aligned}$$

számot az A **operátor normájának** nevezzük.

Hamarosan megmutatjuk, hogy ez a leképezés valóban norma a $B(X, Y)$ lineáris téren. Először a fent definiált szám néhány egyszerűen bebizonyítható és a továbbiakban gyakran használt tulajdonságát fogalmazzuk meg.

5. tétel. *Tetszőleges $A \in B(X, Y)$ operátor esetén*

- $\|A\|$ *véges, nemnegatív valós szám;*
- $\|Ax\|_Y \le \|A\| \cdot \|x\|_X$ $(\forall\, x \in X)$*;*
- $\|A\| = \min\{C \ge 0 \mid \forall\, x \in X \ : \ \|Ax\|_Y \le C \cdot \|x\|_X\}$

(az $\|A\|$ tehát a legkisebb olyan $C \ge 0$ szám, amelyre az $\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X$ egyenlőtlenség minden $x \in X$ elemre fennáll.)

Az utolsó állítást leggyakrabban a következő formában fogjuk alkalmazni: ha egy $C \ge 0$ számra fennáll az

$$\|Ax\|_Y \le C\|x\|_X \qquad (\forall\, x \in X)$$

egyenlőtlenség, akkor $\|A\| \le C$.

Operátor normájának a következő *szemléletes jelentés* tulajdonítható: az operátor korlátosságával ekvivalens

$$\|Ax\|_Y \le C \qquad (x \in X,\ \|x\|_X = 1)$$

egyenlőtlenség azt jelenti, hogy az X-beli S_1 egységgömb-felület $A(S_1)$ képe benne van az Y tér egy origó középpontú gömbjében. A legkisebb sugarú ilyen tulajdonságú gömbnek a sugara éppen $\|A\|$.

A következő tételben a $B(X, Y)$ tér alapvető tulajdonságait soroljuk fel.

6. tétel. *Legyenek X és Y normált terek. Ekkor*

- *$B(X,Y)$ lineáris altér az $L(X,Y)$ vektortérben;*
- *ha X véges dimenziós, akkor $B(X,Y) = L(X,Y)$.*
- *az $A \mapsto \|A\|$ leképezés norma a $B(X,Y)$ lineáris téren;*
- *ha az Y normált tér teljes (vagyis Banach-tér), akkor ezzel a normával $B(X,Y)$ Banach-tér.*

Bizonyítás. *Az első* állítás nyilvávaló, a *második* pedig a 4. tétel következménye.

A harmadik állítás bizonyítása: A norma meghatározó tulajdonságait ellenőrizzük. Legyen $A, B \in B(X,Y)$.

(i) Nyilvánvaló, hogy $\|A\| \geq 0$. Tegyük most fel, hogy $\|A\| = 0$. Ez azt jelenti, hogy minden $x \in X$, $\|x\|_X \leq 1$ vektorra $\|Ax\|_Y = 0$, következésképpen $Ax = \theta_Y$, ha $\|x\|_X \leq 1$. A norma homogenitását felhasználva ebből az adódik, hogy minden $x \in X$ esetén $Ax = \theta_Y$. Az A operátor tehát valóban a $B(X,Y)$ tér nulleleme.

(ii) Hasonlóan igazolható, hogy $\|\lambda A\| = |\lambda|\,\|A\|$ minden $\lambda \in \mathbb{R}$ számra.

(iii) A háromszög-egyenlőtlenség igazolásához az Y-beli norma, valamint az operátornorma tulajdonságait használva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\|(A+B)(x)\|_Y = \|Ax + By\|_Y \leq \|Ax\|_Y + \|Bx\|_Y \leq \\ \leq \|A\| \cdot \|x\|_X + \|B\| \cdot \|x\|_X = \big(\|A\| + \|B\|\big) \cdot \|x\|_X \qquad (x \in X),\end{aligned}$$

amiből a 5. tétel alapján adódik, hogy $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$.

A negyedik állítás bizonyítása. Tegyük fel, hogy $\big(Y, \|\cdot\|_Y\big)$ teljes, és igazoljuk, hogy akkor a $\big(B(X,Y), \|\cdot\|\big)$ tér is teljes. Legyen $(A_n) \subset B(X,Y)$ egy Cauchy-sorozat. Megmutatjuk, hogy ekkor (A_n) konvergens, azaz van olyan $A \in B(X,Y)$ operátor, amelyre

$$\lim_{n\to+\infty} \|A - A_n\| = 0. \tag{5.2}$$

Mivel (A_n) Cauchy-sorozat, ezért

$$\forall \varepsilon > 0\text{-hoz } \exists n_0 \in \mathbb{N}: \quad \forall n, m \geq n_0\text{-ra} \quad \|A_n - A_m\| < \varepsilon. \tag{5.3}$$

Így tetszőleges rőgzített $x \in X$ esetén fennállnak az

$$\|A_n x - A_m x\| = \|(A_n - A_m)x\|_Y \leq \|A_n - A_m\| \cdot \|x\|_X < \varepsilon \|x\|_X \qquad (n, m \geq n_0)$$

egyenlőtlenségek. Ez azt jelenti, hogy $(A_n x) \subset Y$ Cauchy-sorozat. Mivel Y teljes, ezért $(A_n x)$ konvergens Y-ban. Jelöljük Ax-szel a határértékét. Így tehát értelmeztünk egy $A : X \to Y$ operátort. A következőket kell igazolnunk:

(i) A lineáris,

(ii) A folytonos/korlátos,

(iii) $\|A - A_n\| \to 0$ $(n \to +\infty)$.

Lássuk a bizonyításokat:

(i) Ez nyilvánvaló, mivel a limesz lineáris.

(ii) Vegyünk egy tetszőleges $x \in X$ vektort. A norma folytonossága és (5.3) alapján kapjuk, hogy

$$\|Ax - A_n x\|_Y = \lim_{m\to+\infty} \|A_m x - A_n x\|_Y \leq \varepsilon \cdot \|x\|_X \qquad (n > n_0). \tag{5.4}$$

Ez azt jelenti, hogy a $V := A - A_n$ korlátos/folytonos lineáris operátor. A feltételünk szerint A_n is ilyen, ezért az összegük, vagyis a $V + A_n = A$ operátor is korlátos/folytonos lineáris operátor.

(iii) Az (5.4) egyenlőtlenségből az is következik, hogy

$$\|A - A_n\| \le \varepsilon \qquad (n > n_0),$$

és ez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to+\infty} \|A - A_n\| = 0$. ■

5.4. Példák funkcionálokra és operátorokra

1. példa. Legyen

$$\big(X, \|\cdot\|_X\big) := \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big) \text{ és } \big(Y, \|\cdot\|_Y\big) := \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big).$$

Adott $a \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n \le b$ pontrendszer és $c_1, c_2, \ldots, c_n$ valós számok esetén tekintsük az

$$\Phi : C[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \Phi f := \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)$$

funkcionált. Ekkor Φ folytonos lineáris **funkcionál** és a normája

$$\|\Phi\| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Bizonyítás. A linearitás nyilvánvaló, mert minden $f, g \in C[a,b]$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda f + \mu g) &= \sum_{k=1}^{n} c_k\big(\lambda f + \mu g\big)(t_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k\left(\lambda f(t_k) + \mu g(t_k)\right) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k) + \mu \sum_{k=1}^{n} c_k g(t_k) = \\ &= \lambda\Phi(f) + \mu\Phi(g).\end{aligned}$$

A funkcionál korlátossága (tehát folytonossága) a

$$|\Phi f| = \Big|\sum_{k=1}^{n} c_k f(t_k)\Big| \le \Big(\sum_{k=1}^{n} |c_k|\Big) \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in C[a,b])$$

egyenlőtlenségből következik, amiből az is adódik, hogy

$$\|\Phi\| \le \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

A fordított irányú egyenlőtlenséget úgy igazoljuk, hogy megadunk olyan $f_o \in C[a,b]$ függvényt, amelyre $\|f_o\|_\infty \le 1$ és

$$|\Phi f_o| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Ekkor

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} |\Phi f| \ge |\Phi f_o| = \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Φ definíciójából kiindulva most könnyű ilyen $f_o : [a,b] \to \mathbb{R}$ folytonos függvényt konstruálni: a t_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) pontban a függvényérték legyen $f_o(t_k) := \operatorname{sign} c_k$; legyen f_o lineáris a $[t_k, t_{k+1}]$ ($k = 1, 2, \ldots, n-1$) intervallumon és állandó az $[a, t_1]$, $[t_n, b]$ intervallumon.

Világos, hogy ekkor $\|f_o\|_\infty \le 1$ és

$$\Phi f_o = \sum_{k=1}^{n} c_k f_o(t_k) = \sum_{k=1}^{n} c_k \operatorname{sign} c_k = \sum_{k=1}^{n} |c_k|,$$

ezzel az állítást bebizonyítottuk. ■

2. példa. Legyen

$$\big(X, \|\cdot\|_X\big) := \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big), \qquad \big(Y, \|\cdot\|_Y\big) := \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big)$$

és $g \in C[a,b]$ egy rögzített függvény. Ekkor

$$\Phi : C[a,b] \to \mathbb{R}, \qquad \Phi f := \int_a^b fg$$

olyan folytonos lineáris **funkcionál**, amelynek a normája

$$\|\Phi\| = \int_a^b |g|.$$

Bizonyítás. Mivel folytonos függvények szorzata folytonos, és minden $[a,b]$-n folytonos függvény Riemann-integrálható, ezért Φ „jól definiált” leképezés. Φ linearitása az integrál linearitásából következik. A

$$|\Phi f| = \Big|\int_a^b fg\Big| \le \Big(\int_a^b |g|\Big) \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in C[a,b])$$

egyenlőtlenség alapján Φ korlátos, tehát folytonos és

$$\|\Phi\| \le \int_a^b |g|.$$

A fordított egyenlőtlenség bizonyítása most nehezebb, mint az előző példánál. Azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, f_o \in C[a,b] : \ \ \|f_o\|_\infty \le 1 \ \text{ és } \ |\Phi f_o| = \Big|\int_a^b f_o \cdot g\Big| > \Big(\int_a^b |g|\Big) - \varepsilon. \tag{5.5}$$

Ezt felhasználva kapjuk a minden $\varepsilon > 0$ számra fennálló

$$\|\Phi\| = \sup_{\|f\|_\infty \le 1} |\Phi f| \ge |\Phi f_o| \ge \Big(\int_a^b |g| \Big) - \varepsilon$$

egyenlőtlenséget. Ebből pedig már következik, hogy

$$\|\Phi\| \ge \int_a^b |g|.$$

Az (5.5) feltételeket kielégítő f_o függvényt a következő módon konstruáljuk meg: Rögzítsük az $\varepsilon > 0$ számot, és osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot az $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ osztópontokkal úgy, hogy a g függvény megváltozása mindegyik intervallumon kisebb legyen az ε számnál. Ilyen felosztás létezése g egyenletes folytonosságából következik. Az így kapott intervallumokat most két csoportba soroljuk: az első csoportba tartoznak azok a $\triangle_1', \triangle_2', \ldots, \triangle_r'$ intervallumok, amelyeken a g függvény nem vált előjelet. A fennmaradó $\triangle_1'', \triangle_2'', \ldots, \triangle_s''$ intervallumokat pedig a második csoportba soroljuk. Mivel g előjelet vált a $\triangle_k''$ $(k = 1, 2, \ldots, s)$ intervallumon és a függvényértékek megváltozása ezen ε-nál kisebb, ezért

$$|g(t)| \le \varepsilon \qquad \big(t \in \triangle_k'',\ k = 1, 2, \ldots, s\big).$$

Az $f_o \in C[a, b]$ függvényt így értelmezzük: az első csoportba tartozó intervallumokon legyen

$$f_o(t) := \operatorname{sign} g(t) \qquad (t \in \triangle_j',\ j = 1, 2, \ldots, r),$$

a fennmaradó intervallumokon pedig lineáris. Ha a (vagy b) a második csoporthoz tartozó intervallum végpontja, akkor legyen $f_o(a) := 0$ $(f_o(b) := 0)$.

A $-1 \le f_o(t) \le 1$ $(a \le t \le b)$ egyenlőtlenség felhasználásával a

$$\Phi(f_o) = \int_a^b f_o \cdot g$$

integrálra a kívánt alsó becslés most már könnyen igazolható:

$$\int_a^b f_o \cdot g = \sum_{j=1}^r \int_{\triangle_j'} f_o \cdot g + \sum_{k=1}^s \int_{\triangle_k''} f_o \cdot g \ge \sum_{j=1}^r \int_{\triangle_j'} |g| - \sum_{k=1}^s \int_{\triangle_k''} |g| =$$

$$= \int_a^b |g| - 2 \sum_{k=1}^s \int_{\triangle_k''} |g| > \int_a^b |g(t)|\, dt - 2\varepsilon(b - a).$$

Ezzel az (5.5) állítást, következésképpen a 2. példa állítását is bebizonyítottuk. ■

3. példa. Legyen

$$\big(X, \|\cdot\|_X\big) := \big(C[a, b], \|\cdot\|_\infty\big), \qquad \big(Y, \|\cdot\|_Y\big) := \big(C[a, b], \|\cdot\|_\infty\big)$$

és $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ egy rögzített folytonos függvény. Ekkor

$$A : C[a,b] \to C[a,b], \qquad \big(Af\big)(x) := \int_a^b f(t)K(x,t)\,dt \quad (x \in [a,b])$$

olyan folytonos lineáris **operátor**, amelynek a normája

$$\|A\| = \max_{a \le x \le b} \int_a^b |K(x,t)|\,dt =: M.$$

Bizonyítás. A tett feltételekből következik, hogy A „jól definiált". Az A operátor linearitása nyilvánvaló, és az

$$\|Af\|_\infty = \max_{a \le x \le b} \Big| \int_a^b f(t)K(x,t)\,dt \Big| \le \Big(\max_{a \le x \le b} \int_a^b |K(x,t)|\,dt \Big) \cdot \|f\|_\infty = M \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in C[a,b])$$

egyenlőtlenségből következik A folytonossága, valamint az, hogy $\|A\| \le M$. Most igazoljuk a fordított irányú egyenlőtlenséget. Mivel az

$$[a,b] \ni x \mapsto \int_a^b |K(x,t)|\,dt$$

függvény folytonos, ezért van olyan $x_0 \in [a,b]$ pont, amelyre

$$M = \max_{a \le x \le b} \int_a^b |K(x,t)|\,dt = \int_a^b |K(x_0,t)|\,dt.$$

Tekintsük a $C[a,b]$ téren a $g(t) := K(x_0,t)$ $(t \in [a,b])$ folytonos függvénnyel képzett

$$\Phi f := \int_a^b f(t)K(x_0,t)\,dt \qquad (f \in C[a,b])$$

folytonos lineáris funkcionált. Az előző példában láttuk, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz van olyan $f_o \in C[a,b]$ függvény, hogy $\|f_o\|_\infty \le 1$ és

$$|\Phi f_o| \ge \|\Phi\| - \varepsilon = \int_a^b |K(x_0,t)|\,dt - \varepsilon = M - \varepsilon.$$

Ekkor

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup\{\|Af\|_\infty \mid f \in C[a,b],\ \|f\|_\infty \le 1\} \ge \\ &\ge \|Af_o\|_\infty \ge \big(Af_o\big)(x_0) = \int_a^b K(x_0,t)f_o(t)\,dt = |\Phi f_o| \ge M - \varepsilon. \end{aligned}$$

Mivel $\varepsilon > 0$ tetszőleges, ezért az $\|A\| \ge M$ egyenlőtlenség valóban teljesül. ■

4. példa. Véges dimenziós terek közötti lineáris operátorok.

Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ most véges dimenziós normált terek. Tegyük fel, hogy $\dim X = n$ és $e_1, \dots, e_n$ az X lineáris tér egy bázisa; $\dim Y = n$ és $f_1, \dots, f_m$ az Y tér egy bázisa.

Vegyünk egy $A : X \to Y$ lineáris operátort. Ha x az X tér egy vektora, akkor

$$x = \sum_{j=1}^{n} x_j e_j,$$

így az A operátor linearitása miatt

$$Ax = \sum_{j=1}^{n} x_j A e_j.$$

Az A leképezés tehát mindenütt adott, ha ismertek A-nak az $e_1, \dots, e_n$ bázisvektorokon felvett értékei. Tekintsük most az Ae_j vektornak az Y-beli $f_1, \dots, f_m$ bázisvektorokkal felírt alakját:

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} f_i \qquad (j = 1, 2, \dots, n).$$

Az a_{ij} együtthatókat egy $(m \times n)$-es $\mathbf{A}$ mátrixba rendezzük úgy, hogy $\mathbf{A}$ j-edik oszlopába az Ae_j vektor $f_1, \dots, f_m$ bázisra vonatkozó koordinátáit, vagyis az $a_{1j}, \dots, a_{mj}$ számokat írjuk. Így az $A \in L(X, Y)$ operátorhoz hozzárendeltünk egy $(m \times n)$-es $\mathbf{A}$ mátrixot, amit az A leképezés rögzített $e_1, \dots, e_n$ és $f_1, \dots, f_m$ bázisokra vonatkozó **mátrixreprezentációjának** nevezünk.

Megadtunk tehát egy

$$T : L(X, Y) \to \mathbb{R}^{m \times n}, \qquad TA := \mathbf{A}$$

leképezést. Egyszerűen igazolható, hogy T lineáris bijekció (izomorfia) $L(X, Y)$ és $\mathbb{R}^{m \times n}$ között, és ezt úgy is mondjuk, hogy a két tér izomorf egymással (jelölésben: $L(X, Y) \cong \mathbb{R}^{m \times n}$). Izomorf tereket azonosíthatjuk, és ebben az értelemben azonosíthatjuk az $A \in L(X, Y)$ lineáris operátort a fentiek alapján megadott $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mátrixszal.

Azt is tudjuk már azonban, hogy minden véges dimenziós normált téren értelmezett lineáris leképezés folytonos is, ezért

$$L(X, Y) = B(X, Y) \cong \mathbb{R}^{m \times n}.$$

A $B(X,Y)$ téren értelmezett

$$\|A\| := \sup\{\|Ax\|_Y \ \mid \ x \in X, \ \ \|x\|_X \le 1\} \qquad (A \in B(X,Y))$$

operátornorma a fenti izomorfia alapján normát indukál a mátrixok lineáris terén. Ennek értéke az X, illetve Y-beli normák konkrét megválasztásától függ.

Lássunk most néhány „szokásos” **mátrixnormát**. Az egyszerűség érdekében csak az

$$(X, \|\cdot\|_X) := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p) =: \mathbb{R}^n_p, \qquad (Y, \|\cdot\|_Y) := (\mathbb{R}^m, \|\cdot\|_p) =: \mathbb{R}^m_p$$

normált tereket tekintjük, ahol $1 \le p \le +\infty$, és mindkét térben a kanonikus bázisokat rögzítjük. A $B(\mathbb{R}^n_p, \mathbb{R}^m_p)$ téren értelmezett operátornorma a mátrixok $\mathbb{R}^{m\times n}$ lineáris terén az

$$\|\mathbf{A}\|_p = \sup\{\|\mathbf{A}\cdot x\|_p \mid x \in \mathbb{R}^n_p, \ \ \|x\|_p \le 1\} \qquad (\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n})$$

normát indukálja, és ez a mátrix elemeivel is kifejezhető. Igazolhatók például az alábbi összefüggések:

$$\|\mathbf{A}\|_\infty = \max_{1\le i\le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}| \qquad \big(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}\big)$$

(ez a mátrix **sorösszegnormája**);

$$\|\mathbf{A}\|_1 = \max_{1\le j\le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}| \qquad \big(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}\big)$$

(ez az **oszlopösszegnorma**);

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\Lambda_1} \qquad \big(\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}\big),$$

ahol Λ_1 az $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$ mátrix legnagyobb abszolút értékű sajátértéke ($\mathbf{A}^T$ az $\mathbf{A}$ mátrix transzponáltja). Ezt a mátrixnormát **spektrálnormának** nevezik.

5. példa. Hilbert-terek projekciós operátorai.

Legyen $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ valós Hilbert-tér és jelölje $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $(x \in H)$ a skaláris szorzat által indukált normát. Tetszőleges $\{\theta\} \ne M \subset H$ zárt altér esetén tekintsük a P_M projekciós operátort:

$$P_M : H \to M, \qquad P_M(x) := x_1 \ \ (x \in H),$$

ahol $x = x_1 + x_2$ az $x \in H$ vektor ortogonális felbontása, azaz $x_1 \in M$ és $x_2 \perp M$. Ekkor P_M egy 1-normájú folytonos lineáris operátor.

Bizonyítás. A Riesz-féle felbontási tétel szerint az $x \in H$ ortogonális felbontása egyértelmű, ezért P_M „jól definiált”.

P_M lineáris operátor. Valóban, legyen $x, y \in H$ és $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Tekintsük x és y ortogonális felbontását:

$$\begin{aligned} x &= x_1 + x_2, \qquad x_1 \in M \text{ és } x_2 \perp M, \\ y &= y_1 + y_2, \qquad y_1 \in M \text{ és } y_2 \perp M. \end{aligned}$$

Ekkor $\lambda x + \mu y = (\lambda x_1 + \mu y_1) + (\lambda x_2 + \mu y_2)$. Mivel $\lambda x_1 + \mu y_1 \in M$ (M altér) és $\lambda x_2 + \mu y_2 \perp M$ (ui. $\langle \lambda x_2 + \mu y_2, m\rangle = \lambda\langle x_2, m\rangle + \mu\langle y_2, m\rangle = 0$ minden $m \in M$ esetén, mert $x_2 \perp m$ és $y_2 \perp m$), ezért

$$P_M(\lambda x + \mu y) = \lambda x_1 + \mu y_1 = \lambda P_M(x) + \mu P_M(y),$$

és ez azt jelenti, hogy a P_M operátor lineáris.

Folytonosság. Az $x = x_1 + x_2$ ($x_1 \in M,\ x_2 \perp M$) ortogonális felbontásra érvényes $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$ Pitagorasz-tétel alapján

$$\|P_M(x)\| = \|x_1\| \le \|x\| \qquad (x \in H),$$

ezért P_M korlátos, következésképpen folytonos lineáris operátor. Ebből az egyenlőtlenségből még az is következik, hogy $\|P_M\| \le 1$. A fordított irányú egyenlőtlenség bizonyításához vegyünk egy $x_0 \in M$, $\|x_0\| = 1$ vektort. (Az $M \neq \{\theta\}$ feltétel miatt van ilyen x_0.) Ekkor $P_M(x_0) = x_0$ és

$$\|P_M\| = \sup_{\|x\| \le 1} \|P_M(x)\| \ge \|P_M(x_0)\| = \|x_0\| = 1,$$

tehát $\|P_M\| = 1$ valóban fennáll. ■

5.5. A duális tér

Ebben a pontban normált téren értelmezett *valós értékű folytonos lineáris* leképezéseket, más szóval **folytonos lineáris funkcionálokat** fogunk vizsgálni. Ezek összességét a normált tér **duális terének** nevezzük. Az előző pontban láttunk néhány konkrét példát ilyen leképezésekre. Az általános eredmények alkalmazásához sok esetben fontos tudni azt, hogy egy adott normált téren hogyan lehet megadni, illetve jellemezni az *összes* folytonos lineáris funkcionált. Megjegyezzük, hogy a **funkcionálanalízis** elnevezés onnan ered, hogy a matematikának ez az ága a különféle speciális normált terek duálisainak a jellemzéséből nőtte ki magát. Az ilyen irányú kutatások az 1900-as évek elején kezdődtek, és ebben úttörő szerepe volt — többek között — **Riesz Frigyesnek**.

5.5.1. A duális tér definíciója

Az előző pontban tetszőleges $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ valós normált terek esetén az $X \to Y$ típusú folytonos lineáris leképezések $B(X, Y)$-nal jelölt halmazát vizsgáltuk.

Műveleteket és (operátor)normát értelmeztünk ezen a halmazon. Azt is láttuk, hogy ha az $(Y, \|\cdot\|_Y)$ tér teljes, akkor az így kapott $(B(X,Y), \|\cdot\|_{XY})$ normált tér is teljes, azaz Banach-tér. Most csak a *valós értékű* folytonos lineáris leképezéseket, vagyis a *folytonos lineáris funkcionálokat* fogjuk tekinteni. Ebben az esetben tehát $(Y, \|\cdot\|_Y) = (\mathbb{R}, |\cdot|)$. Mivel $\mathbb{R}$ teljes, ezért $(B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{X\mathbb{R}})$ Banach-tér.

Definíció. Legyen $\big(X, \|\cdot\|_X\big)$ tetszőleges normált tér. Az X-en értelmezett valós értékű folytonos lineáris leképezések halmazát $B(X,\mathbb{R})$ helyett X^*-gal jelöljük:

$$X^* := B(X,Y).$$

A $(B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{X\mathbb{R}})$ Banach-teret az $\big(X, \|\cdot\|_X\big)$ normált tér **duális terének** nevezzük, és jelölésére az $(X^*, \|\cdot\|_*)$ szimbólumot használjuk:

$$(X^*, \|\cdot\|_*) := (B(X,\mathbb{R}), \|\cdot\|_{X\mathbb{R}}).$$

A továbbiakban $(X^*, \|\cdot\|_*)$ helyett gyakran X^*-ot írunk, és az X^* *duális térről* beszélünk. X^* elemeit általában görög nagybetűkkel (Φ, Ψ, stb.) jelöljük. A $\Phi \in X^*$ szimbólumon azt értjük, hogy Φ eleme az X^* duális térnek. Érdemes összefoglalni, hogy mi mindent fejez ki ez a rövid jelsorozat:

$\Phi \in X^*$ *jelentése*:

- adott egy $(X, \|\cdot\|_X)$ normált tér;
- a $\Phi : X \to \mathbb{R}$ leképezés lineáris, azaz

$$\Phi(\lambda x + \mu y) = \lambda\Phi(x) + \mu\Phi(y) \qquad (x, y \in X,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R});$$

- Φ korlátos, azaz

$$\exists\, C > 0 : \quad |\Phi(x)| \le C\|x\|_X \quad (\forall\, x \in X);$$

- a $\|\Phi\|_* = \sup\{|\Phi(x)| \;\mid\; x \in X \text{ és } \|x\|_X \le 1\}$ képlettel értelmezve van a Φ funkcionál normája.

5.5.2. Konkrét normált terek duális terei

A duális terek leírásánál hasznos, ha bizonyos normált tereket azonosítunk egymással. Ezzel kapcsolatos a következő

Definíció. Az $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek **izometrikusan izomorfak** (jelölésben $X \cong Y$), ha van olyan $T : X \to Y$ lineáris bijekció, hogy az

$$\|T(x)\|_Y = \|x\|_X$$

egyenlőség minden $x \in X$-re fennáll.

Az izometrikusan izomorf tereket ugyanazon tér különböző realizációjának tekinthetjük, ezért ezek között nem teszünk különbséget, azonosítjuk őket.

Megjegyzés. Vannak olyan esetek is, amikor ezt az azonosítást nem célszerű megtenni.

Ebben a szakaszban végig p és q **konjugált kitevőpárokat** jelöl, azaz

$$1 \leq p, q \leq +\infty, \quad \text{és} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \left(\tfrac{1}{+\infty} := 0\right).$$

Ilyenkor azt is mondjuk, hogy q a p szám *konjugált kitevője.*

• Az $\mathbb{R}_p^n$ terek duális terei

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $1 \leq p \leq +\infty$. Jelölje $\mathbb{R}_p^n$ az $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\right)$ normált (Banach-) teret, és $e_1, \ldots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ tér kanonikus bázisát. Ekkor az $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektorra

$$\|x\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|, & \text{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

7. tétel. *Tetszőleges* $1 \leq p \leq +\infty$ *esetén*

$$\left(\mathbb{R}_p^n\right)^* \cong \mathbb{R}_q^n,$$

vagyis az $\mathbb{R}_p^n$ *tér duális tere azonosítható* $\mathbb{R}_q^n$*-val, ahol* q *a* p *konjugált kitevője.*

Bizonyítás. (a) Először azt jegyezzük meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren „természetes módon” meg lehet adni lineáris funkcionálokat. Nevezetesen, nyilvánvaló, hogy ha $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ egy tetszőleges vektor, akkor a

$$\Phi_a(x) := \sum_{k=1}^n a_k x_k \qquad (x \in \mathbb{R}^n) \tag{5.6}$$

leképezés lineáris funkcionál, amit az $a \in \mathbb{R}^n$ *vektor által generált* funkcionálnak nevezünk. Az is világos, hogy különböző vektorok különböző funkcionálokat generálnak.

Most megmutatjuk, hogy minden $a \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén Φ_a olyan *folytonos* lineáris funkcionál az $\mathbb{R}_p^n$ téren, amelynek a normája $\|a\|_q$:

$$\|\Phi_a\|_* = \|a\|_q.$$

Ha a az $\mathbb{R}^n$ tér nulleleme, akkor az állítás nyilvánvaló. Legyen tehát $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. A Hölder-egyenlőtlenséget alkalmazva kapjuk, hogy

$$|\Phi_a(x)| = \left|\sum_{k=1}^n a_k x_k\right| \leq \|a\|_q \cdot \|x\|_p \qquad (x \in \mathbb{R}_p^n),$$

ezért Φ_a korlátos, következésképpen folytonos lineáris funkcionál. Ebből az egyenlőtlenségből az is következik, hogy

$$\|\Phi_a\|_* \leq \|a\|_q.$$

A fordított irányú egyenlőtlenség bizonyításához elég megadni olyan nemnulla $x^o \in \mathbb{R}^n_p$ vektort, amelyre a

$$|\Phi_a(x^o)| = \|a\|_q \|x^o\|_p \tag{5.7}$$

egyenlőség teljesül. Ebből ui. már következik, hogy

$$\|\Phi_a\|_* = \sup_{\|x\|_p \neq 0} \frac{|\Phi_a(x)|}{\|x\|_p} \geq \frac{|\Phi_a(x^o)|}{\|x^o\|_p} = \|a\|_q.$$

Ha $p = 1$, akkor jelöljön j egy olyan indexet, amelyre $|a_j| = \|a\|_\infty$ és legyen

$$x_k^o := \begin{cases} \operatorname{sign} a_j, & \text{ha } k = j, \\ 0, & \text{ha } k \neq j \end{cases} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Ekkor a nemnulla $x^o := (x_1^o, \ldots, x_n^o)$ vektorra az (5.7) egyenlőség teljesül, ui.

$$|\Phi_a(x^o)| = \Big|\sum_{k=1}^n a_k x_k^o\Big| = |a_j| = \|a\|_\infty = \|a\|_\infty \cdot \|x^o\|_1.$$

A $p = 1$ esetben tehát igazoltuk, hogy $\|\Phi_a\|_* = \|a\|_\infty$.

Tegyük most fel, hogy $1 < p \leq +\infty$, tehát a q konjugált kitevő $1 \leq q < +\infty$. Ebben az esetben az $x^o := (x_1, \ldots, x_n)$ vektort az

$$x_k^o := |a_k|^{q-1} \operatorname{sign} a_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

képlettel értelmezzük. Egyszerű átalakítások után kapjuk, hogy

$$|\Phi_a(x^o)| = \Big|\sum_{k=1}^n a_k x_k^o\Big| = \sum_{k=1}^n |a_k|^q = \ \left(\tfrac{1}{p} + \tfrac{1}{q} = 1 \text{ miatt}\right) \ = \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^q\Big)^{1/q} \cdot \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^q\Big)^{1/p} =$$

$$\text{(felhasználva, hogy } q = p(q-1) \text{ és } \ |a_k|^q = |a_k|^{p(q-1)} = |x_k^o|^p)$$

$$= \Big(\sum_{k=1}^n |a_k|^q\Big)^{1/q} \cdot \Big(\sum_{k=1}^n |x_k^o|^p\Big)^{1/p} =$$

$$= \|a\|_q \cdot \|x^o\|_p.$$

Az (5.7) egyenlőség tehát valóban fennáll, következésképpen $\|\Phi_a\|_* = \|a\|_p$ az $1 < p \leq +\infty$ esetben is.

(b) Tegyük most fel, hogy Φ tetszőleges folytonos lineáris funkcionál az $\mathbb{R}^n_p$ téren, azaz $\Phi \in (\mathbb{R}^n_p)^*$. Mivel Φ lineáris, ezért

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^n x_k \Phi(e_k) \qquad (x \in \mathbb{R}^n_p).$$

Tekintsük az $a := (\Phi(e_1), \ldots, \Phi(e_n))$ vektor által indukált Φ_a funkcionált. Nyilvánvaló, hogy

$$\Phi(x) = \Phi_a(x) \qquad (x \in \mathbb{R}^n_p),$$

és azt is beláttuk már, hogy $\|\Phi\|_* = \|a\|_q = \|\Phi_a\|_*$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{R}^n_p$ téren *minden* folytonos lineáris funkcionál valamilyen alkalmas (egyértelműen meghatározott) vektor által generált funkcionállal egyezik meg.

(c) A fentiekből következik, hogy minden $1 \le p, q \le +\infty$ konjugált kitevőpár esetén a

$$T : \mathbb{R}_q^n \to \left(\mathbb{R}_p^n\right)^*, \quad Ta := \Phi_a,$$

leképezés egy izometrikus izomorfia az $\left(\mathbb{R}_p^n\right)^*$ és az $\mathbb{R}_q^n$ terek között. ■

• A l^p terek duális terei

Tekintsük most a $(l^p, \|\cdot\|_p)$ $(1 \le p \le +\infty)$ sorozattereket. Az $x = (x_n) \in l^p$ sorozat normáját $1 \le p < +\infty$ esetén az

$$\|x\|_p := \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p\right)^{1/p},$$

ha $p = +\infty$, akkor pedig az

$$\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$$

képlettel értelmeztük, és azt is láttuk már, hogy e terek mindegyike Banach-tér.

A duális terek leírásához felhasználjuk az alábbi, önmagában is fontos állítást.

8. tétel. *Ha $1 \le p < +\infty$, akkor az*

$$e^n := (\underbrace{0, \dots, 0}_{n-1}, 1, 0, \dots) \qquad n = 1, 2, \dots$$

kanonikus egységvektorok *kifeszítik az $(l^p, \|\cdot\|_p)$ teret, azaz minden $x = (x_n) \in l^p$ elem előállítható az*

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} x_n e^n$$

alakban. Ez az egyenlőség azt jelenti, hogy a $\sum x_n e^n$ sor részletösszegeinek a sorozata az l^p tér normájában tart az x elemhez, tehát

$$\lim_{n\to+\infty} \left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e^k \right\|_p = 0.$$

Valóban, tetszőlegesen adott $x = (x_n) \in l^p$ esetén az

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x_k e^k \right\|_p = \sum_{k=n+1}^{+\infty} |x_k|^p \to 0 \quad (k \to +\infty)$$

reláció teljesül, mert a $\sum_n |x_n|^p$ sor konvergens.

A véges dimenziós esetben megszokott szóhasználattal élve azt mondjuk, hogy $1 \le p < +\infty$ esetén az e^n $(n = 1, 2, \ldots)$ vektorrendszer a l^p tér **egy bázisa** (vagy **kanonikus bázisa**).

Megjegyzés. A 8. tétel $p = +\infty$ esetén nem igaz: az e^n $(n = 1, 2, \ldots)$ kanonikus egységvektorok nem feszítik ki a l^∞ teret. Tekintsük pl. az azonosan 1 sorozatot.

9. tétel. *Bármely* $1 \le p < +\infty$ *esetén*

$$\left(l^p\right)^* \cong l^q,$$

vagyis az $(l^p, \|\cdot\|_p)$ *tér duális tere azonosítható az* $(l^q, \|\cdot\|_q)$ *térrel, ahol* q *a* p *konjugált kitevője.*

Bizonyítás. (a) Először azt mutatjuk meg, hogy ha $a = (a_n) \in l^q$ egy tetszőleges sorozat, akkor

$$\Phi_a(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n \qquad (x = (x_n) \in l^p)$$

olyan folytonos lineáris funkcionál az l^p téren, amelynek a normája $\|a\|_q$, azaz

$$\|\Phi_a\|_* = \|a\|_q.$$

Valóban, a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával látható, hogy a definíció korrekt, és

$$|\Phi_a(x)| = \left|\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x_n\right| \le \|a\|_q \cdot \|x\|_p \qquad (x \in l^p). \tag{5.8}$$

Φ_a linearitása a végtelen sorok összegére és számszorosára vonatkozó állításból következik. (5.8) alapján Φ_a korlátos, tehát folytonos lineáris funkcionál és

$$\|\Phi_a\|_* \le \|a\|_q$$

minden $a \in l^q$ esetén. A fordított egyenlőtlenség a 7. tétel bizonyításában látott módon mutatható meg.

(b) Most azt igazoljuk, hogy tetszőlegesen rögzített $\Phi \in \left(l^p\right)^*$ funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan $a \in l^q$ sorozat, amelyre $\Phi_a = \Phi$ és $\|\Phi\|_* = \|a\|_q$.

Ha van ilyen $a \in l^q$ sorozat, akkor szükségképpen

$$\Phi(e^n) = \Phi_a(e^n) = a_n$$

minden n-re, ahonnan

$$a_n = \Phi(e^n) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{5.9}$$

Ez azt jelenti, hogy legfeljebb egy kívánt tulajdonságú $a \in l^q$ sorozat létezik.

Megmuatatjuk, hogy az (5.9) képlettel definiált $a = (a_n)$ sorozat valóban kielégíti a megkívánt feltételeket, azaz

(i) $a \in l^q$ és

(ii) $\Phi = \Phi_a$.

Az (i) állítást először $p = 1$ esetére igazoljuk: ekkor

$$|a_n| = |\Phi(e^n)| \le \|\Phi\|_* \cdot \|e^n\|_p = \|\Phi\|_*$$

minden n-re, úgyhogy $a \in l^\infty$.

Ha $p > 1$ és így $q < +\infty$, akkor tekintsük minden egyes rögzített $N = 1, 2, \dots$ számra az

$$x_k^N := \begin{cases} |a_k|^{q-1} \operatorname{sign} a_k, & \text{ha } k \le N \\ 0, & \text{ha } k > N \end{cases}$$

képlettel definiált $x^N := \big(x_k^N,\ k \in \mathbb{N}\big)$ sorozatot. Világos, hogy $x^N \in l^p$ minden N-re (hiszen csak véges sok nemnulla tagja van a sorozatnak). Mivel

$$\left|x_k^N\right|^p = |a_k|^q \qquad (k \le n)$$

(ui. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ miatt $p(q-1) = q$), ezért

$$\Phi(x^N) = \Phi\Big(\sum_{k=1}^N x_k^N e^k\Big) = \sum_{k=1}^N x_k^N \Phi(e^k) = \sum_{k=1}^N |a_k|^q = \\ = \sum_{k=1}^N \left|x_k^N\right|^p = \|x^N\|_p^p.$$

Φ korlátos, ezért

$$\left|\Phi(x^N)\right| \le \|\Phi\|_* \cdot \|x^N\|_p,$$

amiből azt kapjuk, hogy

$$\|x^N\|_p^p \le \|\Phi\|_* \cdot \|x^N\|_p,$$

és így

$$\|x^N\|_p^{p-1} = \Big(\sum_{k=1}^N |x_k^N|^p\Big)^{(p-1)/p} = \Big(\sum_{k=1}^N |a_k|^q\Big)^{1/q} \le \|\Phi\|_* \qquad (N \in \mathbb{N}).$$

Innen $N \to +\infty$ esetén következik, hogy

$$\Big(\sum_{k=1}^{+\infty} |a_k|^q\Big)^{1/q} = \|a\|_q < +\infty,$$

tehát $a \in l^q$ valóban fennáll a $q < +\infty$ $(p > 1)$ esetben is.

Hátra van még a $\Phi = \Phi_a$ egyenlőség igazolása. Mivel a folytonos és lineáris Φ és Φ_a funkcionálok definíció szerint megegyeznek minden e^n pontban, ezért a 8. tétel alapján (csak itt használjuk fel, hogy $p \ne +\infty$) megegyeznek az egész l^p téren is. ■

Megjegyzés. A 9. tétel $p = +\infty$ esetén nem igaz, vagyis a korlátos sorozatok l^∞ terének a duálisa nem az l^1 tér. Az igaz, hogy minden $a \in l^1$ sorozatra Φ_a korlátos lineáris funkcionál az l^∞ téren, azonban $\big(l^\infty\big)^*$ ezeken kívül más elemeket is tartalmaz. Az $\big(l^\infty\big)^*$ tér elemeinek általános alakja $\mathbb{N}$ végesen additív mértékeivel adható meg.

A sorozatoknak azonban megadhatók olyan terei, amelyek duálisa az l^1 térrel azonosítható. Ezek a c_0 **és a** c **sorozatterek**. Jelölje c a valós konvergens, c_0 pedig a zérussorozatok halmazát. Könnyen igazolható, hogy minden $1 < p \le +\infty$ paraméterre

$$l^1 \subset l^p \subset c_0 \subset c \subset l^\infty,$$

továbbá a felsorolásban előforduló halmazok mindegyike lineáris altere a rákövetkezőnek.

Bebizonyítható az is, hogy a $(c, \|\cdot\|_\infty)$ és a $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$ terek az $(l^p, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-tér zárt alterei, következésképpen maguk is Banach-terek. A 9. tételhez hasonlóan igazolható, hogy

$$c^* \cong l^1 \qquad \text{és} \qquad c_0^* \cong l^1.$$

- **A L^p terek duális terei**

Legyen (X, Ω, μ) egy σ*-véges* mértéktér, és tekintsük a

$$L^p := L^p\big((X, \Omega, \mu), \|\cdot\|_{L^p}\big) \qquad (1 \le p \le +\infty)$$

függvénytereket.

Az előző példák figyelembevételével „természetes módon” meg lehet adni folytonos lineáris funkcionálokat a L^p $(1 \le p \le +\infty)$ téren: a Hölder-egyenlőtlenség alkalmazásával ui. egyszerűen bizonyítható, hogy ha $g \in L^q$ egy tetszőleges függvény, akkor a

$$\Phi_g : L^p \to \mathbb{R}, \quad \Phi_g(f) := \int\limits_X f g \, d\mu$$

leképezés folytonos lineáris funkcionál a L^p téren és $\|\Phi\|_* = \|g\|_{L^q}$.

Jóval nehezebb annak az eldöntése, hogy így minden folytonos lineáris funkcionált elő lehet-e állítani. A következő fontos tétel azt állítja, hogy az $1 \le p < +\infty$ esetben a fenti Φ_g leképezéseken kívül *nincsenek más* folytonos lineáris funkcionálok a L^p téren.

10. tétel (a Riesz-féle reprezentációs tétel). *Legyen $1 \le p < +\infty$. Ekkor minden $\Phi \in (L^p)^*$ funkcionálhoz egyértelműen létezik olyan $g \in L^q$ függvény, hogy*

$$\Phi(f) = \Phi_g(f) = \int\limits_X f g \, d\mu \qquad (f \in L^p)$$

és $\|\Phi\|_* = \|g\|_{L^q}$.

Fennáll tehát a

11. tétel. *Legyen (X, Ω, μ) egy σ-véges mértéktér és $1 \le p < +\infty$. Ekkor a*

$$L^p := \big(L^p(X, \Omega, \mu), \|\cdot\|_{L^p}\big)$$

függvénytér duális tere azonoítható a L^q függvénytérrel, ahol q a p konjugált kitevője, azaz

$$(L^p)^* \cong L^q.$$

• A $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ tér duális tere

• Hilbert-tér duális tere

Legyen $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ egy valós Hilbert-tér, és jelölje $\|x\| := \sqrt{\langle x, x\rangle}$ $(x \in H)$ a skaláris szorzat által indukált normát.

A H-n értelmezett folytonos lineáris funkcionálok leírásához abból az egyszerű észrevételből fogunk majd kiindulni, hogy természetes módon meg lehet adni ilyen leképezéseket: minden $a \in H$ vektor esetén

$$\Phi_a(x) := \langle x, a\rangle \qquad (x \in H)$$

folytonos lineáris funkcionál a H Hilbert téren. Kevésbé nyilvánvaló, hogy *minden* folytonos lineáris funkcionál alkalmas $a \in H$ vektorral ilyen alakban adható meg. Ezeket az eredményeket röviden a következő formában fogalmazzuk meg:

12. tétel. *Ha H tetszőleges valós Hilbert tér, akkor*

$$H^* \cong H,$$

azaz H duális tere azonosítható magával a H Hilbert térrel.

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy H és H^* izometrikusan izomorfak, azaz van olyan $T : H \to H^*$ lineáris bijekció, amelyre $\|Tx\|_* = \|x\|$ is teljesül minden $x \in H$ vektorra.

(a) Tetszőlegesen rögzített $a \in H$ vektor esetén tekintsük a

$$\Phi_a(x) := \langle x, a\rangle \quad (x \in H)$$

leképezést. A skaláris szorzat tulajdonságai alapján ez nyilván lineáris. A Cauchy–Schwarz-egyenlőtlenség miatt

$$|\Phi_a(x)| = |\langle x, a\rangle| \le \|a\| \cdot \|x\| \qquad (x \in H),$$

ezért Φ_a korlátos, tehát folytonos. Az operátornorma definíciója alapján ebből az is következik, hogy

$$\|\Phi_a\|_* \le \|a\|. \tag{5.10}$$

A fordított irányú egyenlőtlenség igazolásához tegyük fel, hogy $a \ne \theta$ és legyen $x_0 := \frac{a}{\|a\|}$. Ekkor

$$\Phi_a(x_0) = \left\langle \frac{a}{\|a\|}, a \right\rangle = \frac{\langle a, a\rangle}{\|a\|} = \frac{\|a\|^2}{\|a\|} = \|a\|.$$

Mivel $\|x_0\| = 1$, ezért

$$\|\Phi_a\|_* = \sup\{|\Phi_a(x)| \mid x \in H,\ \|x\| \le 1\} \ge |\Phi_a(x_0)| = \|a\|.$$

Ezt egybevetve (5.10)-zel a bizonyítandó $\|\Phi_a\|_* = \|a\|$ egyenlőséget kapjuk. Nyilvánvaló, hogy az állítás $a = \theta$ esetén is fennáll.

(b) Most megmutatjuk, hogy minden H-n értelmezett folytonos lineáris funkcionál Φ_a alakú, ahol $a \in H$. Ez a

Riesz–Fréchet-féle reprezentációs tétel. *Legyen $\Phi : H \to \mathbb{R}$ egy folytonos lineáris funkcionál a H Hilbert-téren. Ekkor egyértelműen létezik olyan $a \in H$ vektor, amelyre $\Phi(x) = \Phi_a(x)$ $(x \in H)$ teljesül, emellett a $\|\Phi\|_* = \|a\|$ egyenlőség is érvényes.*

A Riesz–Fréchet-féle reprezentációs tétel bizonyítása. A kívánt tulajdonságú $a \in H$ vektort a Φ leképezés magterére ortogonális vektorként lehet megkapni.

Legyen tehát $\Phi \in H^*$. Mivel $\Phi \equiv 0$ esetén $a = \theta$ megfelelő választás, ezért feltehető, hogy $\Phi \not\equiv 0$. Jelölje H_0 a Φ magterét:

$$H_0 := \operatorname{Ker} \Phi = \{x \in H \mid \Phi(x) = 0\}.$$

Minthogy Φ folytonos és lineáris, ezért H_0 zárt altér és $\Phi \not\equiv 0$ miatt ez valódi altér is. A Riesz-féle felbontási tétel szerint létezik olyan nemnulla vektor, amelyik merőleges a H_0 altérre. Jelöljön e egy ilyen *egységvektort*. Megmutatjuk, hogy

$$a := \Phi(e)\, e$$

megfelelő választás, azaz $\Phi = \Phi_a$. Valóban, tetszőleges $x \in H$-ra legyen $\lambda := \Phi(x)/\Phi(e)$ és $z := x - \lambda e$. Ekkor $\Phi(z) = 0$, tehát $x \in H_0$, és így $z \perp e$. Következésképpen

$$\Phi(x) = \Phi(\lambda e + z) = \lambda \Phi(e)$$

és

$$\langle x, a\rangle = \Phi(e)\langle x, e\rangle = \lambda\Phi(e)\langle e, e\rangle + \Phi(e)\langle z, e\rangle = \lambda\Phi(e).$$

A $\Phi \equiv \Phi_a$ egyenlőség tehát valóban érvényes. Ezért $\|\Phi\|_* = \|a\|$.

Az egyértelműség bizonyításához tegyük fel, hogy az $a_1, a_2 \in H$ elemekre $\Phi_{a_1} = \Phi_{a_2} = \Phi$ teljesül. Ekkor

$$\Phi_{a_1}(x) = \Phi_{a_2}(x) = \langle x, a_1 - a_2\rangle = 0 \qquad (\forall x \in H).$$

Itt az $x := a_1 - a_2$ vektort véve $\|a_1 - a_2\|^2 = 0$, azaz $a_1 = a_2$ adódik. A Riesz–Fréchet-féle reprezentációs tételt tehát bebizonyítottuk.

(c) A fentiekből már következik, hogy a

$$T : H \to H^*, \qquad T(a) := \Phi_a$$

leképezés lineáris bijekció és $\|a\| = \|\Phi_a\|$ miatt izometria is, tehát H és H^* valóban izometrikusan izomorfak. ■

6. A Hahn–Banach-tételek

6.1. Előzetes megjegyzések

A funkcionálanalízis alapvető célja (pl.) normált terek közötti leképezések vizsgálata. Ezek közül a legegyszerűbbeknek, nevezetesen a **lineáris leképezéseknek** a leírása sem egyszerű feladat.

Ebben a fejezetben a valós értékű lineáris leképezéseket, vagyis a lineáris funkcionálokat fogjuk általános szempontból vizsgálni. Az előző fejezetben számos példát láttunk *konkrét* normált tereken értelmezett funkcionálokra, sőt több esetben jellemeztük is a lineáris funkcionálok halmazát, azaz az adott tér duális terét. A duális tér számos tulajdonsága szoros kapcsolatban van az eredeti tér tulajdonságával, másrészt több szempontból kezelhetőbb az eredeti térnél. Ezért fontos feladat ezek vizsgálata.

Az előző fejezetben láttuk, hogy ha X **véges dimenziós** lineáris tér, akkor ezen minden lineáris funkcionál

$$\Phi(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k \alpha_k$$

alakú, ahol x_k-k az x vektor valamely rögzített bázisra vonatkozó koordinátái és α_k-k a funkcionált meghatározó tetszőleges állandók. **Végtelen dimenziós terek** esetén a helyzet lényegesen bonyolultabb. Már az sem nyilvánvaló, hogy egy ilyen Banach-téren egyáltalán léteznek-e nemnulla lineáris funkcionálok. Mivel véges dimenziós téren igen egyszerűen meg lehet adni lineáris funkcionálokat, ezért egy természetes kiindulópont annak vizsgálata, hogy egy ilyen leképezést vajon ki lehet-e terjeszteni az egész térre. A **Hahn–Banach-tétel** éppen azt állítja, hogy ez a kiterjesztés lehetséges. A fentiek alapján a Hahn–Banach-tételt a **funkcionálanalízis egyik alapvető tételének** mondjuk.

A következő pontokban ismertetjük az általános tételeket, és csupán megemlítjük azt, hogy ezeknek az eredményeknek igen sok fontos alkalmazása van többek között a parciális differenciálegyenletek elméletében, az irányításelméletben, a játékelméletben, sőt a fizikában is.

6.2. A Hahn–Banach-tétel analitikus alakjai: lineáris funkcionálok kiterjesztése

1. tétel (a Hahn–Banach-tétel analitikus alakja vektortér esetén). *Legyen X valós vektortér és tegyük fel, hogy $p : X \to \mathbb{R}$ olyan leképezés, amelyre a következők* *teljesülnek:*

$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \qquad (\forall\ x, y \in X) \qquad (p \text{ szubadditív});$$
$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad (\forall\ x \in X,\ \lambda > 0) \qquad (p \text{ pozitív homogén}).$$

Másrészt legyen $X_0 \subset X$ *altér és* $\Phi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ *olyan lineáris funkcionál, amelyet az* X_0 *altéren* p *majorál, azaz*

$$\Phi_0(x) \le p(x) \qquad (\forall\, x \in X_0).$$

Ekkor van olyan, az egész X *téren értelmezett* $\Phi : X \to \mathbb{R}$ *lineáris funkcionál, hogy*

- Φ *kiterjesztése* Φ_0*-nak, azaz* $\Phi(x) = \Phi_0(x)\ \ (\forall\ x \in X_0)$ *és*
- $\Phi(x) \le p(x)\ \ (\forall\ x \in X)$.

A tétel bizonyításához a **Zorn-lemmát** fogjuk alkalmazni. Ennek megfogalmazása előtt felidézzük a *rendezett halmazok elméletének* néhány fogalmát.

Jelöljön $(\mathcal{F}, \le)$ *parciálisan rendezett* halmazt, azaz legyen $\mathcal{F}$ nemüres halmaz és $\le\ \subset \mathcal{F} \times \mathcal{F}$ egy reflexív, antiszimetrikus és tranzitív reláció.

A $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ egy *teljesen rendezett* részhalmaz, ha $\mathcal{G}$ bármely két eleme összehasonlítható, azaz az $a \le b$ és $b \le a$ relációk közül legalább az egyik teljesül.

A $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ részhalmaznak $c \in \mathcal{F}$ *egy felső korlátja*, ha bármely $\mathcal{G}$-beli g elem esetén $g \le c$.

Azt mondjuk, hogy $m \in \mathcal{F}$ az $\mathcal{F}$ halmaznak *egy maximális eleme*, ha abból, hogy $m \le a$ valamely $\mathcal{F}$-beli a elemre, az következik, hogy $a = m$. Másképpen fogalmazva: nincs m-nél nagyobb $\mathcal{F}$-beli elem.

Zorn-lemma. *Legyen* $(\mathcal{F}, \le)$ *egy parciálisan rendezett halmaz. Ha* $\mathcal{F}$ *minden teljesen rendezett részhalmazának van* $\mathcal{F}$*-beli felső korlája, akkor* $\mathcal{F}$*-nek van maximális eleme.*

Megjegyzés. A Zorn-lemma jól használható segédeszköz matematikai objektumok **létezésének** a bizonyításánál.

A Hahn–Banach-tétel bizonyítása. Tekintsük a következő halmazt:

$$\mathcal{F} := \left\{ \Psi \in X \to \mathbb{R} \,\middle|\, \begin{array}{l} \mathcal{D}_\Psi \subset X \ \text{ altér}, \ \ \Psi \ \text{ lineáris}, \\ X_0 \subset \mathcal{D}_\Psi, \ \ \Psi \text{ kiterjesztése } \ \Psi_0\text{-nak és } \ \Psi(x) \le p(x) \quad \forall\, x \in \mathcal{D}_\Psi \end{array} \right\}.$$

$\mathcal{F}$ nem üres halmaz, mert $\Phi_0 \in \mathcal{F}$. Értelmezzük $\mathcal{F}$-en a következő relációt:

$$\Psi_1 \le \Psi_2 \quad :\Longleftrightarrow \quad D_{\Psi_1} \subset D_{\Psi_2} \text{ és } \Psi_2 \text{ kiterjesztése } \Psi_1\text{-nek}.$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $(\mathcal{F}, \le)$ *parciálisan rendezett halmaz.* Az is igaz, hogy $\mathcal{F}$ minden *teljesen rendezett* $\mathcal{G}$ *részhalmazának van* $\mathcal{F}$*-beli felső korlátja.* Vegyünk ugyanis egy ilyen $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ részhalmazt, és definiáljuk a Ψ^* leképezést a következő módon:

$$\mathcal{D}_{\Psi^*} := \bigcup_{\Psi \in \mathcal{G}} \mathcal{D}_\Psi, \qquad \Psi^*(x) := \Psi_i(x), \ \text{ ha } \ x \in \mathcal{D}_{\Psi_i} \ \text{ és } \ \Psi_i \in \mathcal{G}.$$

Nem nehéz megmutatni, hogy Ψ^* egy jól definiált $X \to \mathbb{R}$ függvény és Ψ^* felső korlátja $\mathcal{G}$-nek.

A Zorn-lemma feltételei tehát teljesülnek, következésképpen $\mathcal{F}$-nek van maximális eleme. Jelöljünk egy maximális elemet Φ-vel.

A tétel bizonyításához elég azt igazolni, hogy a Φ maximális elem értelmezési tartománya az egész X tér, azaz $\mathcal{D}_\Phi = X$. Ezt indirekt módon látjuk be. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy $\mathcal{D}_\Phi \neq X$, azaz az X térnek van olyan x_0 eleme, ami nem tartozik hozzá a $\mathcal{D}_\Psi$ halmazhoz.

Definiálni fogunk egy olyan $\Phi_1 \in \mathcal{F}$ leképezést, melyre $\Phi < \Phi_1$, és ez ellentmond annak, hogy Φ maximális elem.

A szóban forgó Φ_1 értelmezéséhez vegyünk egy $x_0 \in X \setminus \mathcal{D}_\Phi \neq \emptyset$ vektort. Legyen

$$\mathcal{D}_{\Phi_1} := \{x + tx_0 \mid x \in D_\Phi, t \in \mathbb{R}\} \subset X$$

és

$$\Phi_1(x + tx_0) := \Phi(x) + t\alpha \quad (x \in D_\Phi \text{ és } t \in \mathbb{R}),$$

ahol α tetszőlegesen rögzített valós szám.

Világos, hogy $\mathcal{D}_{\Phi_1} \subset X$ egy altér és Φ_1 lineáris kiterjesztése Φ-nek.
Most megmutatjuk, hogy az α szám megválasztható úgy, hogy $\Phi_1 \in \mathcal{F}$ is igaz legyen, azaz teljesüljön a

$$\Phi_1(x + tx_0) = \Phi(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \quad (\forall\, x \in D_\Phi \text{ és } \forall\, t \in \mathbb{R})$$

egyenlőtlenség is. Φ linearitása és p pozitív homogenitása miatt ezt az egyenlőtlenséget elég a $t = \pm 1$ értékekre tekinteni. Ez azt jelenti, hogy az α-t oly módon kell megválasztani, hogy minden $x, y \in \mathcal{D}_\Psi$ esetén fennálljanak a

$$\begin{aligned} \Phi(x) + \alpha &\leq p(x + x_0) \\ \Phi(y) - \alpha &\leq p(y - x_0) \end{aligned} \tag{6.1}$$

egyenlőtlenségek.

Mivel Φ lineáris és p szubadditív, ezért minden $x, y \in \mathcal{D}_\Phi$ esetén

$$\Phi(x) + \Phi(y) = \Phi(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0),$$

amiből átrendezés után azt kapjuk, hogy

$$\Phi(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - \Phi(x).$$

Ez az egyenlőtlenség tehát minden $x, y \in \mathcal{D}_\Phi$ esetén teljesül. Ezért a bal oldal szuprémuma nem lehet nagyobb a jobb oldal infimumánál, azaz

$$A := \sup_{y \in \mathcal{D}_\Phi} (\Phi(y) - p(y - x_0)) \leq \inf_{x \in \mathcal{D}_\Phi} (p(x + x_0) - \Phi(x)) =: B.$$

Ekkor bármelyik $\alpha \in [A, B]$ jó választás, ugyanis ezekre az α értékekre fennáll a

$$\Phi(y) - p(y - x_0) \leq \alpha \leq p(x + x_0) - \Phi(x) \qquad (x, y \in \mathcal{D}_\Phi)$$

egyenlőtlenség, amiből átrendezéssel (6.1) adódik. ■

2. tétel (a Hahn–Banach-tétel analitikus alakja normált tér esetén).
Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ *normált tér,* $X_0 \subset X$ *tetszőleges altér és* $\Phi_0 : X_0 \to \mathbb{R}$ *folytonos lineáris funkcionál a*

$$\|\Phi_0\|_* = \sup_{\substack{x \in X_0 \\ \|x\|_X \le 1}} |\Phi_0(x)|$$

képlettel értelmezett normával.

Ekkor van olyan folytonos lineáris Φ *funkcionál az* X *téren* (*vagyis* $\exists\ \Phi \in X^*$), *amelyik az* X_0 *altéren megegyezik* Φ_0*-lal és* $\|\Phi\|_* = \|\Phi_0\|_*$. ***Azaz:*** *egy normált tér tetszőleges alterén értelmezett folytonos lineáris funkcionál kiterjeszthető az egész* X *térre a folytonosság, a linearitás és a norma megtartásával.*

Bizonyítás. Alkalmazzuk az előző tételt a

$$p(x) := \|\Phi_0\|_* \cdot \|x\| \quad (x \in X)$$

szubadditív és pozitív homogén függvénnyel. ■

1. következmény. *Ha* $(X, \|\cdot\|_X)$ *normált tér és* $x_0 \in X$, *akkor az* X^* *duális térben létezik olyan folytonos lineáris* Φ *funkcionál, amelyre*

$$\Phi(x_0) = \|x_0\|^2 \qquad \textit{és} \qquad \|\Phi\|_* = \|x_0\|$$

teljesül.

Bizonyítás. Jelöljük a x_0 által meghatározott alteret X_0-lal:

$$X_0 := \{t \cdot x_0 \mid t \in \mathbb{R}\} \subset X,$$

és értelmezzük a

$$\Phi_0(t \cdot x_0) := t \cdot \|x_0\|^2 \qquad (t \in \mathbb{R})$$

leképezést. Ekkor Φ_0 olyan folytonos lineáris funkcionál az X_0 altéren, amelynek a normája $\|x_0\|$. Az előző tétel szerint ez a norma megtartásával kiterjeszthető az egész X térre. ■

2. következmény. *Legyen* X_0 *az* X *normált tér egy tetszőleges* ***zárt*** *altere és* $e \in X \setminus X_0$. *Ekkor van olyan folytonos lineáris* Φ *funkcionál az* X *téren , amelyre*

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0, & x \in X_0 \\ 1, & x = e. \end{cases}$$

3. következmény. *Az* $(X, \|\cdot\|_X)$ *normált tér tetszőleges* x *elemének a normájára az*

$$\|x\|_X = \sup_{\substack{\Phi \in X^* \\ \|\Phi\|_* \le 1}} |\Phi(x)|$$

képlet érvényes.

6.3. A Hahn–Banach-tétel geometriai alakjai: konvex halmazok szétválasztása síkokkal

Először vektortér **síkjait** értelmezzük. Ehhez a közönséges tér síkjaiból indulunk ki. Az $\mathbb{R}^3$ tér adott x_0 pontján átmenő n normálvektorú síkon az

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x - x_0, n\rangle = 0\right\}$$

halmazt értjük.

Az $\langle x - x_0, n\rangle = 0$ egyenlőséget írjuk át az $\langle x, n\rangle = \langle x_0, n\rangle$ alakra. Az $\langle x, n\rangle$ pedig felfogható úgy is, mint a $\Phi : \mathbb{R}^3 \ni x \longmapsto \langle x, n\rangle$ *lineáris* funkcionálnak az x helyen vett helyettesítési értéke. Az S sík tehát a Φ függvény $\alpha = \langle x_0, n\rangle$ paraméterhez tartozó *szintfelülete*:

$$S = \left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \Phi(x) = \alpha\right\}.$$

Az itt használt fogalmakat tetszőleges vektortérben is értelmezhetjük, ezért tetszőleges vektortérben a síkokat lineáris funkcionálok szintfelületeként definiálhatjuk.

Definíció. Az X vektortér **hipersíkjainak** nevezzük az

$$S_{\Phi,\alpha} := \{x \in X \mid \Phi(x) = \alpha\}$$

alakú részhalmazokat, ahol Φ egy nem azonosan nulla lineáris funkcionál és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor azt is mondjuk, hogy $S_{\Phi,\alpha}$ az X tér $[\Phi = \alpha]$ egyenletű hipersíkja.

Az $S_{\Phi,\alpha}$ hipersík az X teret két részre, úgynevezett **félterekre** osztja:

$$\{x \in X \mid \Phi(x) \geq \alpha\}, \qquad \{x \in X \mid \Phi(x) \leq \alpha\},$$

amelyek közös része az $S_{\Phi,\alpha}$ sík.

3. tétel. *Az X normált tér $[\Phi = \alpha]$ egyenletű hipersíkja akkor és csak akkor **zárt** halmaz, ha Φ **folytonos** lineáris funkcionál.*

Definíció. Legyenek A és B az X normált tér részhalmazai. Azt mondjuk, hogy az $S_{\Phi,\alpha}$ hipersík

(a) **tágabb értelemben szétválasztja** A-t és B-t, ha

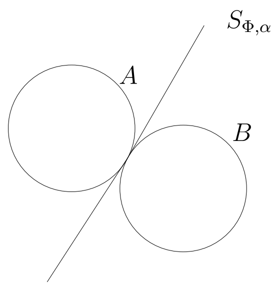
$$\Phi(x) \leq \alpha \quad \forall\ x \in A\text{-ra} \quad \text{és} \quad \Phi(x) \geq \alpha \quad \forall\ x \in B\text{-re};$$

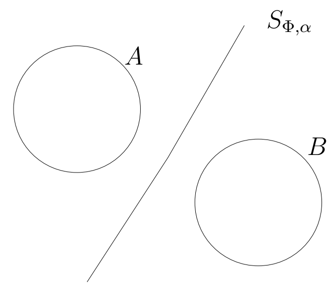
(b) **szigorúbb értelemben szétválasztja** A-t és B-t, ha

$$\exists\ \varepsilon > 0 : \quad \Phi(x) \leq \alpha - \varepsilon \ \ \forall\ x \in A\text{-ra} \qquad \text{és} \qquad \Phi(x) \geq \alpha + \varepsilon \quad \forall\ x \in B\text{-re}.$$

Szemléletesen:

tágabb értelemben vett szétválasztás szigorúbb értelemben vett szétválasztás





Definíció. Az X lineáris tér egy A részhalmaza **konvex**, ha

$$\forall\ x, y \in A \ \text{ és } \ \forall\ t \in [0,1]: \qquad tx + (1-t)y \in A.$$

4. tétel (a Hahn–Banach-tétel első geometriai alakja.). *Legyen A és B két diszjunkt nemüres konvex halmaz az X normált térben. Ha A nyílt, akkor van olyan zárt hipersík, amelyik tágabb értelemben szétválasztja A-t és B-t.*

5. tétel (a Hahn–Banach-tétel második geometriai alakja.). *Legyen A és B két diszjunkt nemüres konvex halmaz az X normált térben. Ha A zárt és B kompakt, akkor van olyan zárt hipersík, amelyik szigorúbb értelemben szétválasztja A-t és B-t.*

7. A Banach–Steinhaus-tételek

7.1. Operátorsorozat konvergenciája

Tetszőleges $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált terek esetén értelmeztük a folytonos (korlátos) lineáris leképezések $B(X,Y)$ lineáris terét, és ezt elláttuk az

$$\|A\| := \|A\|_{XY} := \sup_{\substack{x\in X\\ \|x\|_X\le 1}} \|Ax\|_Y \qquad (A \in B(X,Y))$$

(operátor)normával. Ez a norma az $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat alábbi konvergenciáját indukálja.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat **normában** (vagy *erősen*) tart az $A \in B(X,Y)$ operátorhoz, ha:

$$\lim_{n\to+\infty} \|A - A_n\| = 0.$$

Szintén természetes a következő konvergencia-típus bevezetése.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az $(A_n) \subset B(X,Y)$ operátorsorozat az $M \subset X$ halmazon **pontonként** tart az $A \in B(X,Y)$ operátorhoz, ha minden $x \in M$ vektorra az $(A_n x) \subset Y$ sorozat Ax-hez konvergál az Y térben, azaz

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_n x - Ax\|_Y = 0 \qquad (x \in M).$$

Mivel

$$\|A_n x - Ax\|_Y = \|(A_n - A)x\|_Y \le \|A_n - A\| \cdot \|x\|_X \qquad (x \in X,\ n \in \mathbb{N}),$$

ezért a normakonvergenciából következik a pontonkénti konvergencia az egész X halmazon.

Ennek az állításnak a megfordítása nem igaz, vagyis a pontonkénti konvergenciából általában nem következik a normakonvergencia. Legyen ui. H Hilbert-tér és vegyünk benne egy $(e_n) \subset H$ ortonormált rendszert. Minden $n \in \mathbb{N}$ számra tekintsük az

$$L_n x := \langle x, e_n \rangle \quad (x \in H)$$

funkcionálokat. A Bessel-egyenlőtlenségből következik, hogy minden $x \in H$ vektorra

$$\lim_{n\to+\infty} \langle x, e_n \rangle = \lim_{n\to+\infty} L_n(x) = 0,$$

és ez azt jelenti, hogy az (L_n) funkcionálsorozat *pontonként tart* az azonosan nulla funkcionálhoz. Viszont (L_n) nem konvergál normában ehhez a funkcionálhoz, hiszen $\|L_n\| = \|e_n\| = 1$.

A **Banach–Steinhaus-tétel** operátorsorozat pontonkénti konvergenciájára ad meg szükséges és elégséges feltételt. Ezt az eredményt is a **funkcionálanalízis alapvető tételei** közé szokás sorolni.

7.2. Az általános eredmények

• Az egyenletes korlátosság tétele

1. tétel (az egyenletes korlátosság tétele). *Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-tér, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ pedig normált tér. Tegyük fel, hogy az $(A_n) \subset B(X, Y)$ operátorsorozat pontonként korlátos az X téren, tehát minden $x \in X$ elemre az $(A_n x)$ vektorsorozat korlátos az Y térben, azaz*

$$\forall\, x \in X \text{ elemhez } \exists \text{ (x-től függő) } C_x > 0 : \quad \|A_n x\|_Y \le C_x \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{7.1}$$

Ekkor az operátornormák $(\|A_n\|)$ sorozata egyenletesen korlátos, azaz

$$\exists\, C > 0 : \quad \|A_n\| \le C \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{7.2}$$

Bizonyítás. A Baire-féle kategóriatétel felhasználásával azt fogjuk megmutatni, hogy

$$\exists\, C > 0 : \quad \|A_n z\|_Y \le C \quad (\forall\, z \in X,\ \|z\|_X \le 1 \text{ és } \forall\, n \in \mathbb{N}). \tag{7.3}$$

Az operátornorma definíciója alapján ebből már következik a (7.2) egyenlőtlenség.

Tekintsük az

$$X_m := \{x \in X \mid \sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n x\|_Y \le m\} \qquad (m \in \mathbb{N})$$

halmazokat. X_m $(m \in \mathbb{N})$ **zárt** halmaz. Valóban, legyen $x_k \in X_m$ $(k \in \mathbb{N})$ konvergens sorozat. Azt kell igazolni, hogy az $x := \lim_{k \to +\infty} x_k$ határérték is X_m-hez tartozik. Az $x_k \in X_m$ feltétel azzal ekvivalens, hogy

$$\|A_n x_k\|_Y \le m \qquad (\forall\, n, k \in \mathbb{N}).$$

Ebből az A_n operátorok és a norma folytonossága alapján

$$\|A_n x_k\|_Y = \lim_{k \to +\infty} \|A_n x_k\|_Y \le m \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N})$$

adódik, és ez azt jelenti, hogy $x \in X_m$.

A pontonkénti korlátosságra tett (7.1) feltételünkből következik, hogy

$$\bigcup_{m \in \mathbb{N}} X_m = X.$$

Az X teljes és az X_m halmazok zártak, ezért a Baire-féle kategóriatétel alapján $\operatorname{int} X_{m_0} \neq \emptyset$ valamilyen m_0-ra, így az X_m (zárt) halmazok közül legalább az egyik tartalmaz (zárt) gömböt, azaz

$$\exists\, m_0 \in \mathbb{N},\ \exists\, x_0 \in X \text{ és } \exists\, r > 0$$
$$\overline{k_r(x_0)} = \big\{x \in X \mid \|x - x_0\|_X \leq r\big\} \subset X_{m_0}.$$

Ennek a halmaznak az x elemeit az $x = x_0 + rz$ ($\|z\|_X \leq 1$) alakban lehet felírni. Az X_{m_0} definíciója alapján tehát fennáll az

$$\|A_n(x_0 + rz)\|_Y \leq m_0 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N} \text{ és } \forall\, \|z\|_X \leq 1) \tag{7.4}$$

egyenlőtlenség.

Legyen $z \in X$, $\|z\|_X \leq 1$ egy tetszőleges vektor és $n \in \mathbb{N}$ egy tetszőleges index. A_n linearitása miatt

$$rA_n(z) = rA_n(z) + A_n(x_0) - A_n(x_0) = A_n(x_0 + rz) - A_n(x_0),$$

ezért (7.4) alapján kapjuk, hogy

$$\|rA_n(z)\|_Y \leq \|A_n(x_0 + rz)\|_Y + \|A_n(x_0)\|_Y \leq m_0 + C_{x_0},$$

ahol C_{x_0} a (7.1) feltételből az x_0 ponthoz tartozó állandó. Következésképpen

$$\|A_n(z)\|_Y \leq \tfrac{1}{r}(m_0 + C_{x_0}) \qquad (\forall\, z \in X,\ \|z\|_X \leq 1 \ \text{ és } \forall\, n \in \mathbb{N})$$

és ez azt jelenti, hogy a (7.3) egyenlőség a $C := \frac{1}{r}(m_0 + C_{x_0})$ állandóval teljesül. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Az egyenletes korlátosság tételének egy átfogalmazása a

2. tétel (divergencia-tétel.). *Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-tér, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ pedig normált tér. Tegyük fel, hogy az $(A_n) \subset B(X, Y)$ operátorsorozat normáinak az $(\|A_n\|)$ sorozata nem korlátos, azaz*

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \|A_n\| = +\infty.$$

Ekkor van olyan $x_0 \in X$ elem, hogy az Y térbeli $(A_n x_0)$ sorozat nem korlátos, azaz

$$\sup_n \|A_n x_0\|_Y = +\infty,$$

következésképpen az $(A_n x_0) \subset Y$ sorozat nem konvergens.

• Operátorsorozat pontonkénti konvergenciája

3. tétel. *Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-tér és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér. Tegyük fel, hogy az $(A_n) \subset B(X, Y)$ operátorsorozat minden $x \in X$ pontban konvergens, vagyis minden $x \in X$ vektorra az Y-beli $(A_n x)$ vektorsorozat konvergens. Jelölje*

$$A(x) := \lim_{n \to +\infty} A_n x \qquad (x \in X)$$

a limesz-operátort. Ekkor A is folytonos lineáris operátor, azaz $A \in B(X,Y)$ és

$$\|A\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|.$$

Bizonyítás. A linearitás a határérték és a műveletek felcserélhetőségéből következik. A folytonosságra vonatkozó állítást a korlátosság bizonyításával igazoljuk. A norma folytonossága alapján

$$\|A(x)\|_Y = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\|_Y \qquad (x \in X).$$

Mindegyik A_n korlátos, ezért

$$\|A_n x\|_Y \le \|A_n\| \cdot \|x\|_X \qquad (x \in X,\ n \in \mathbb{N}).$$

Itt mindkét oldal limesz inferiorját véve és felhasználva azt, hogy konvergens sorozatok határértéke a limesz inferiorjával egyenlő, azt kapjuk, hogy

$$\|A(x)\|_Y = \lim_{n\to+\infty} \|A_n x\|_Y = \liminf_{n\to+\infty} \|A_n x\|_Y \le \left(\liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|\right) \cdot \|x\|_X \qquad (x \in X). \tag{7.5}$$

Mivel

$$\liminf_{n\to+\infty} \|A_n\| \le \sup_{n\to+\infty} \|A_n\|,$$

és az egyenletes korlátosságra vonatkozó tétel alapján a jobb oldal véges, ezért (7.5) miatt az A limesz-operátor valóban korlátos, továbbá fennáll az

$$\|A\| \le \liminf_{n\to+\infty} \|A_n\|$$

egyenlőtlenség is. ■

4. tétel (a Banach–Steinhaus-tétel I.). *Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ Banach-tér és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér, továbbá $(A_n) \subset B(X,Y)$ és $A \in B(X,Y)$. Ekkor a következő két állítás egymással ekvivalens:*

1^o *Az (A_n) operátorsorozat az X-en pontonként tart az A operátorhoz, azaz*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n x = Ax \qquad (x \in X).$$

2^o (a) *Van olyan $Z \subset X$ zárt rendszer, hogy (A_n) a Z-n pontonként tart A-hoz, azaz*

$$\lim_{n\to+\infty} A_n z = Az \qquad (z \in Z) \quad \textit{és}$$

(b) *az operátornormák $(\|A_n\|)$ sorozata egyenletesen korlátos, azaz*

$$\exists\, C > 0 : \quad \|A_n\| \le C \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Bizonyítás. $\boxed{\mathbf{1^o} \Rightarrow \mathbf{2^o}}$ Az (a) feltétel szükségessége nyilvánvaló. Ha az $(A_nx) \subset Y$ sorozat minden $x \in X$ pontban konvergens, akkor az $(\|A_nx\|_Y, n \in \mathbb{N})$ számsorozat az X tér minden x pontjában korlátos, ezért az egyenletes korlátosság tétele miatt (b) is teljesül.

$\boxed{\mathbf{2^o} \Rightarrow \mathbf{1^o}}$ Most megmutatjuk, hogy az (a) és a (b) feltételekből következik az $(A_nx, n \in \mathbb{N})$ sorozatok konvergenciája minden $x \in X$ pontban, azaz

$$\forall\, x \in X \quad \text{esetén} \quad \|A_nx - Ax\|_Y \to 0, \quad \text{ha} \quad n \to +\infty. \tag{7.6}$$

Először azt jegyezzük meg, hogy az A_n $(n \in \mathbb{N})$ operátorok linearitása és az (a) feltétel miatt az (A_nz) sorozat minden $z \in [Z]$ pontban konvergens.

A $Z \subset X$ egy zárt rendszer, ami azt jelenti, hogy $\overline{[Z]} = X$, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0\text{-hoz} \quad \exists\, y \in [Z]: \quad \|x - y\|_X < \varepsilon. \tag{7.7}$$

Az előző megjegyzés értelmében

$$\lim_{n\to+\infty} \|A_ny - Ay\|_Y = 0 \qquad (y \in [Z]). \tag{7.8}$$

Így

$$\begin{aligned} \|Ax - A_nx\|_Y &\le \|Ax - Ay\|_Y + \|Ay - A_ny\|_Y + \|A_ny - A_nx\|_Y \le \\ &\le \big(\|A\| + \|A_n\|\big)\|x - y\|_X + \|Ay - A_ny\|_Y, \end{aligned}$$

és ez a kifejezés (7.7) és (7.8) miatt tetszőlegesen kicsi, ha n elég nagy, ami a (7.6) állítás bizonyítását jelenti. ■

Hasonló módon igazolható a

5. tétel (a Banach–Steinhaus-tétel II.). *Legyenek $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banach-terek. Ekkor a folytonos lineáris operátoroknak az $(A_n) \subset B(X,Y)$ sorozata akkor és csak akkor konvergál minden $x \in X$ pontban, ha*

(a) *van olyan $Z \subset X$ zárt rendszer, amelynek $z \in Z$ pontjaiban az (A_nz) sorozat konvergens, és*

(b) *az operátornormák $(\|A_n\|)$ sorozata egyenletesen korlátos, azaz*

$$\exists\, C > 0: \quad \|A_n\| \le C \quad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

7.3. Alkalmazások

• Fourier-sor divergenciája

Az egyenletes korlátosság tételének alkalmazásaként megmutatjuk, hogy van olyan folytonos függvény, amelyiknek a trigonometrikus Fourier-sora egy előre megadott pontban divergens.

Emlékeztetünk arra, hogy egy $f \in C_{2\pi}$ függvény **trigonometrikus Fourier-sorának** az

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

alakú függvénysort neveztük, ahol az együtthatókat az

$$a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

$$b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin kt \, dt \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

képletekkel definiáltuk. A sor

$$\big(S_n f\big)(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big) \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}).$$

részletösszegei az együtthatók képletének és a koszinuszfüggvényre vonatkozó addíciós tételnek a felhasználásával a következő alakban írhatók fel:

$$\big(S_n f\big)(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x + t) D_n(t) \, dt, \tag{7.9}$$

ahol

$$D_n(t) = \tfrac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos nt = \begin{cases} \dfrac{\sin\big(n + \frac{1}{2}\big)t}{2 \sin \frac{t}{2}}, & \text{ha } \sin(t/2) \neq 0 \\ n + \frac{1}{2}, & \text{ha } \sin(t/2) = 0 \end{cases}$$

a **Dirichlet-féle magfüggvény**.

Így minden n természetes számra tekinthetjük az

$$\boldsymbol{S}_n : \big(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty\big), \quad \boldsymbol{S}_n f := S_n f$$

operátorokat. Az $(\boldsymbol{S}_n)$ operátorsorozat pontonkénti konvergenciája tehát az $(S_n f)$ függvénysorozat egyenletes konvergenciáját jelenti. $\boldsymbol{S}_n$ lineáris, mert az integrál lineáris; $\boldsymbol{S}_n$ korlátos is, mert (7.9) alapján

$$\|\boldsymbol{S}_n f\|_\infty \leq \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, dt\right) \cdot \|f\|_\infty \qquad (f \in C_{2\pi}).$$

Az 5.4. pont 3. példájából következik, hogy a korlátos lineáris $\boldsymbol{S}_n$ operátor normája

$$\|\boldsymbol{S}_n\| = \tfrac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} |D_n(t)| \, dt \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Bebizonyítható, hogy az $(\|\boldsymbol{S}_n\|)$ sorozat nagyságrendje $\log n$, azaz léteznek olyan c_1, c_2 pozitív számok, hogy

$$c_1 \log n \le \|\boldsymbol{S}_n\| \le c_2 \log n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

ezért az operátorok normáiból képzett $\big(\|\boldsymbol{S}_n\|\big)$ sorozat nem korlátos:

$$\|\boldsymbol{S}_n\| \to +\infty, \qquad n \to +\infty.$$

Az egyenletes korlátosság tételéből tehát azonnal adódik az alábbi

6. tétel. *Van olyan 2π szerint periodikus folytonos f függvény, amelyik trigonometrikus Fourier-sorának $(S_n f)$ részletösszegei nem konvergálnak egyenletesen az $\mathbb{R}$-en, sőt $\sup_n \|S_n f\|_\infty = +\infty$.*

Teljesen hasonlóan olyan folytonos függvénynek a létezése is bebizonyítható, amelynek a trigonometrikus Fourier-sora egy megadott pontban divergens.

7. tétel. *Tetszőleges $x_0 \in \mathbb{R}$ ponthoz van olyan $f \in C_{2\pi}$ függvény, amelynek a trigonometrikus Fourier-sora x_0-ban divergens, sőt $\sup_n |S_n f(x_0)| = +\infty$.*

Tekintsük ui. a

$$\Phi_n : \big(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty\big) \to \big(\mathbb{R}, |\cdot|\big), \quad \Phi_n f := \big(S_n f\big)(x_0)$$

funkcionált, és vegyük figyelembe, hogy

$$\|\Phi_n\| = \|\boldsymbol{S}_n\| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Megjegyezzük még azt, hogy 1876-ban du Bois Reymondnak sikerült példát adnia olyan konkrét folytonos függvényre, amelynek a Fourier-sora egy pontban divergál, tehát nem állítja elő a függvényt. Utána többeknek is sikerült ilyen példákat megszerkeszteni. 1909-ben Fejér Lipót adott egy igen egyszerű példát (l. *Szőkefavi-Nagy Béla: Valós függvények és függvénysorok* című tankönyvének 334. oldalát).

• Fejér szummációs tétele

A Banach–Steinhaus-tétel alkalmazásaként most bebizonyítjuk Fejér Lipótnak az alábbi, 1904-ben publikált alapvető eredményét.

8. tétel (Fejér szummációs tétele). *Minden 2π szerint periodikus folytonos f függvényre teljesül, hogy trigonometrikus Fourier-sorának $S_n f$ részletösszegeiből képzett számtani közepek*

$$\big(\sigma_n f\big)(x) := \frac{\big(S_0 f\big)(x) + \big(S_1 f\big)(x) + \cdots + \big(S_n f\big)(x)}{n+1} \qquad (x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N})$$

sorozata az egész számegyenesen egyenletesen konvergál az f függvényhez.

Bizonyítás. 1. lépés. Először azt mutatjuk meg, hogy $\sigma_n f$-eket az $S_n f$-ekhez hasonlóan zárt alakban lehet felírni.

A részletösszegekre vonatkozó (7.9) képletből azt kapjuk, hogy

$$\big(\sigma_n f\big)(x) = \frac{\big(S_0 f\big)(x) + \big(S_1 f\big)(x) + \cdots + \big(S_n f\big)(x)}{n+1} = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)F_n(t)\,dt,$$

ahol

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \cdots + D_n(t)}{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} \frac{\sin\big(k+\frac{1}{2}\big)\,t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

a **Fejér-féle magfüggvény**.

Mivel

$$\sum_{k=0}^{n} 2\sin\big(k+\tfrac{1}{2}\big)\,t\cdot\sin\tfrac{t}{2} = -\sum_{k=0}^{n}\big[\cos(k+1)t - \cos t\big] = 1-\cos(n+1)t = 2\sin^2\tfrac{n+1}{2}t,$$

ezért F_n-re az

$$F_n(t) = \frac{\sin^2\frac{n+1}{2}t}{2(n+1)\sin^2\frac{t}{2}} \qquad (t\in(0,2\pi)),$$

$\sigma_n f$-re pedig a

$$\big(\sigma_n f\big)(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)F_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi n}\int_0^{2\pi} f(x+t)\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 dt \tag{7.10}$$

zár előállítást kapjuk.

A Dirichlet-féle magfüggvénnyel összehasonlítva, a Fejér-féle magoknak a legszembetűnőbb tulajdonsága az, hogy nem változtatják meg az előjelüket, hanem

$$F_n(t)\ge 0 \qquad (t\in(0,2\pi)). \tag{7.11}$$

E tulajdonsága miatt a Fejér-féle magfüggvény sokkal kezelhetőbb a Dirichlet-félénél, s végeredményben ezen a tulajdonságon múlik, hogy a részletösszegek számtani közepeivel való összegzés a Fourier-sorok esetében sokkal hatékonyabb, mint a közönséges összegzés magukkal a részletösszegekkel.

A Fejér-féle magfüggvény további, fontos tulajdonsága:

$$\int_0^{2\pi} F_n(t)\,dt = \pi \qquad (n\in\mathbb{N}). \tag{7.12}$$

Ez azonnal következik a $D_j(t) = \frac{1}{2} + \cos t + \cdots + \cos jt$ Dirichlet-magok tagonkénti integrálásával adódó

$$\int_0^{2\pi} D_j(t)\,dt = \pi \qquad (j=0,1,2,\ldots)$$

összefüggésből.

2. lépés. Tekintsük minden n-re a

$$\boldsymbol{\sigma}_n : (C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty) \to (C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty), \qquad \boldsymbol{\sigma}_n f := \sigma_n f$$

operátorokat. $\boldsymbol{\sigma}_n$ lineáris, mert az integrál lineáris. $\boldsymbol{\sigma}_n$ korlátos is, mert (7.10), (7.11) és (7.12) alapján

$$\|\boldsymbol{\sigma}_n f\|_\infty = \|\sigma_n f\|_\infty \le \tfrac{1}{\pi}\|f\|_\infty \cdot \int_0^{2\pi} |F_n(t)|\,dt = \tfrac{1}{\pi}\|f\|_\infty \cdot \int_0^{2\pi} F_n(t)\,dt = \|f\|_\infty \qquad (f \in C_{2\pi}).$$

Megmutatjuk, hogy a $(\boldsymbol{\sigma}_n)$ operátorsorozat az egész $C_{2\pi}$ téren pontonként tart az identitás-operátorhoz, azaz

$$\forall\, f \in C_{2\pi}\text{-re} \qquad \boldsymbol{\sigma}_n f \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f, \quad \text{ha } n \to +\infty. \tag{7.13}$$

Ez azt jelenti, hogy minden $f \in C_{2\pi}$ esetén a $(\sigma_n f)$ függvénysorozat az $\mathbb{R}$-en egyenletesen tart f-hez.

Az állítás bizonyításához a Banach–Steinhaus-tételt használjuk fel. Azt kell megmutatni, hogy

(a) a $C_{2\pi}$ térben van olyan Z zárt rendszer, hogy a $(\boldsymbol{\sigma}_n)$ sorozat a Z-n pontonként tart az identitásoperátorhoz,

(b) az operátornormák $(\|\boldsymbol{\sigma}_n\|)$ sorozata egyenletesen korlátos.

Az utóbbi állítás bizonyítása egyszerű, mert az 5.4. pont 3. példája, (7.11) és (7.12) alapján

$$\|\boldsymbol{\sigma}_n\| = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} |F_n(t)|\,dt = \tfrac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F_n(t)\,dt = 1 \qquad (\forall\, n \in \mathbb{N}).$$

Az (a) állítást a

$$Z := \{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots\}$$

függvényrendszerre látjuk be. Weierstrass második approximációs tétele szerint ez valóban egy zárt rendszer a $(C_{2\pi}, \|\cdot\|_\infty)$ Banach-térben.

Rögzítsünk egy $m = 0, 1, 2, \ldots$ számot, és legyen

$$f_m(x) := \cos mx \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Mivel minden trigonometrikus polinom Fourier-sora megegyezik magával a polinommal, ezért

$$S_n f_m = \begin{cases} 0, & \text{ha } n < m \\ f_m, & \text{ha } n \ge m. \end{cases}$$

Következésképpen

$$\sigma_n f_m = \frac{S_0 f_m + \cdots + S_{m-1} f_m + S_m f_m + \cdots + S_n f_m}{n+1} = \left(1 - \tfrac{m}{n+1}\right) f_m,$$

amiből következik, hogy a $(\sigma_n f_m, n \in \mathbb{N})$ függvénysorozat $\mathbb{R}$-en egyenletesen tart f_m-hez.

Az állítás hasonlóan igazolható a Z szinuszfüggvényeire is.

Ezzel (7.13)-at, tehát a tétel állítását bebizonyítottuk. ■

• Általános kvadratúra formulák

Most megmutatjuk, hogy a Banach–Steinhaus-tétel speciális esetként tartalmazza a numerikus matematikában fontos szerepet játszó kvadratúra eljárásokat is.

Integrálok közelítő kiszámítására ún. *kvadratúra formulákat* szokás használni. Az

$$\int_a^b f(x)w(x)\,dx \qquad (f \in C[a,b]) \tag{7.14}$$

alakú integrálokat fogjuk tekinteni, ahol az egyszerűség végett feltesszük, hogy $[a,b]$ kompakt intervallum és $w : [a,b] \to \mathbb{R}$ egy adott integrálható függvény (az ún. *súlyfüggvény*). Rögzítsük az $[a,b]$ intervallumon az n számú

$$a \le x_1 < x_2 < \cdots < x_n \le b$$

alap- vagy **csomópontot**. Egy tetszőleges $f \in C[a,b]$ függvény (7.14) típusú integrálját ezeken a helyeken vett függvényértékek lineáris kombinációjával közelítjük:

$$Q(f) := \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \qquad (f \in C[a,b]), \tag{7.15}$$

ahol A_k-k ($k = 1, 2, \ldots, n$) rögzített számok. A (7.15) alatti Q funkcionált **kvadratúra formulának** nevezzük, az A_k számokat pedig a kvadratúra formula **együtthatóinak** hívjuk.

Nyilvánvaló, hogy

$$Q : (C[a,b], \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{R}$$

egy folytonos lineáris funkcionál, és az 5.4. pontban azt is láttuk, hogy a normája

$$\|Q\| = \sum_{k=1}^{n} |A_k|.$$

Egyetlen (7.15) alatti formulától természetesen nem lehet elvárni azt, hogy jól közelítse a (7.14) integrált. Ilyen formulák sorozatát fogjuk tekinteni. Ez viszont a következő kérdés feltevéséhez vezet: Adva van tehát két háromszög alakú mátrix, amelyek egyike a csomópontok mátrixa, míg a másik az együtthatók mátrixa:

$$\begin{array}{lllll}
x_{1,1}, & & & & \\
x_{1,2}, & x_{2,2}, & & & \\
x_{1,3}, & x_{2,3}, & x_{3,3} & & \\
\vdots & & & & \\
x_{1,n}, & x_{2,n}, & x_{3,n}, & \ldots, & x_{n,n} \\
\vdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllll}
A_{1,1} & & & & \\
A_{1,2}, & A_{2,2} & & & \\
A_{1,3}, & A_{2,3}, & A_{3,3} & & \\
\vdots & & & & \\
A_{1,n}, & A_{2,n}, & A_{3,n}, & \ldots, & A_{n,n} \\
\vdots & & & &
\end{array} \tag{7.16}$$

ahol feltesszük, hogy a csomópontok az $[a, b]$ intervallumban vannak. Ekkor minden $f \in C[a, b]$ függvényhez definiáljuk a

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(x_{k,n}) \qquad (f \in C[a, b]) \tag{7.17}$$

kvadratúra-sorozatot vagy (általános) **kvadratúra eljárást**. Kérdés: *milyen feltételek mellett áll fenn az, hogy*

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)w(x)\,dx \qquad (\forall\, f \in C[a, b]). \tag{7.18}$$

Azokban az esetekben, amikor (7.18) teljesül, azt mondjuk, hogy az (7.16) mátrixokhoz tartozó (7.17) kvadratúra eljárás **konvergens**.

Az általános kvadratúra eljárás konvergenciájára a következő **alaptétel** érvényes:

9. tétel (Pólya–Szegő-tétel). *Legyen $[a, b]$ egy tetszőleges kompakt intervallum, w egy súlyfüggvény $[a, b]$-n, és tegyük fel, hogy adott az alappontoknak egy*

$$a \le x_{1,n} < x_{2,n} < x_{3,n} < \cdots < x_{n,n} \le b \qquad (n \in \mathbb{N})$$

és az együtthatóknak egy

$$A_{1,n},\ A_{2,n},\ \ldots,\ A_{n,n} \in \mathbb{R} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

rendszere. Tekintsük a

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(x_{k,n}) \qquad (f \in C[a, b],\ n \in \mathbb{N})$$

kvadratúra eljárást.

Ekkor a

$$\lim_{n\to+\infty} Q_n f = \int_a^b f(x)w(x)\,dx \qquad (f \in C[a, b])$$

egyenlőségeknek, vagyis a kvadratúra eljárás konvergenciájának a szükséges és elégséges feltétele az, hogy

(a) *az eljárás minden polinomra konvergens legyen és*

(b) $\exists\, M > 0$: $\sum\limits_{k=0}^{n} |A_{k,n}| \le M \quad (\forall\, n \in \mathbb{N})$.

Bizonyítás. A kvadratúra eljárást a $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ Banach-téren értelmezett funkcionálsorozatnak tekintjük:

$$Q_n : \big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big) \to \mathbb{R}, \qquad Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(x_{k,n}) \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az 5.4. pontban megmutattuk, hogy Q_n folytonos lineáris funkcionál és a normája

$$\|Q_n\| = \sum_{k=1}^{n} |A_{k,n}| \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Weierstrass első approximációs tételéből következik, hogy az algebrai polinomok zárt rendszert alkotnak a $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ Banach-térben, ezért az állítás a Banach–Steinhaus-tétel közvetlen következménye. ■

Különösen fontosak azok az eljárások, amelyekben valamennyi $A_{k,n}$ együttható nemnegatív.

10. tétel (Sztyeklov-tétel). *Ha a*

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(x_{k,n}) \qquad (f \in C[a,b],\ n \in \mathbb{N})$$

*kvadratúra eljárásban minden $A_{k,n}$ együttható **nemnegatív**, azaz*

$$A_{k,n} \ge 0 \qquad (\forall\ k, n \in \mathbb{N}),$$

akkor az eljárás pontosan akkor konvergens minden folytonos függvényre, ha minden polinomra konvergens.

Bizonyítás. Azt kell megmutatni, hogy ebben az esetben az előző tétel (b) feltétele automatikusan teljesül. Ez azonban nyilvánvaló, mert a $p(x) \equiv 1$ polinomra a konvergencia azt jelenti, hogy

$$\int_a^b w(x)\,dx = \lim_{n\to+\infty} Q_n(1) = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} |A_{k,n}|,$$

következésképpen a $\sum_{k=1}^{n} |A_{k,n}|$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat valóban egyenletesen korlátos. ■

• Interpolációs kvadratúra eljárások

Az előzőekben szükséges és elégséges feltételeket adtunk meg kvadratúra eljárások konvergenciájára, de nem volt szó arról a fontos a kérdésről, hogy milyen csomópont- és együtthatórendszer elégíti ki ezeket a feltételeket.

Az együtthatók megválasztásának egy igen természetes módja a következő: Rögzítsünk egy tetszőleges $x_{k,n}$ $(k = 1, 2, \ldots, n;\ n \in \mathbb{N})$ pontrendszert és minden n-re vegyük az f függvénynek az $x_{k,n}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ pontokhoz tartozó **Lagrange-féle interpolációs polinomját**:

$$\big(L_n f\big)(x) := \sum_{k=1}^{n} f(x_{k,n}) l_{k,n}(x) \qquad (x \in [a, b]),$$

ahol tehát

$$l_{k,n}(x) := \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_{k,n})(x - x_{k,n})}, \qquad \omega_n(x) := \prod_{k=1}^{n}(x - x_{k,n}).$$

Ha f „jó” függvény, akkor az $L_n f$ polinom az $[a, b]$ intervallumon „jól” közelíti f-et, ezért várható, hogy a

$$Q_n(f) := \int_a^b \big(L_n f\big)(x) w(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} \left(\int_a^b l_{k,n}(x) w(x)\, dx \right) f(x_{k,n}) =$$
$$= \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(x_{k,n}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

kvadratúra sorozat konvergencia szempontjából „jól” viselkedik.

Interpolációs kvadratúra eljárásnak nevezzük azokat a kvadratúra eljárásokat, amelyekben az együtthatókat az

$$A_{k,n} := \int_a^b l_{k,n}(x) w(x)\, dx \qquad (k, n \in \mathbb{N})$$

képletekkel értelmezzük, ahol minden n-re $l_{k,n}$-ek $(k = 1, 2, \dots, n)$ az $x_{k,n}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ csomópontokhoz tartozó *Lagrange-féle interpolációs alappolinomok*. Egy ilyen eljárásnál a csomópontok tetszőlegesek, az együtthatók pedig egyértelműen meg vannak határozva.

Az algebra alaptételéből azonnal adódik, hogy minden n-nél alacsonyabb fokú polinom egyenlő az $x_{k,n}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ pontokhoz tartozó Lagrange-féle interpolációs polinomjával. Ezt felhasználva egyszerűen bizonyítható a

11. tétel. *A $Q_n(f)$ $(n \in \mathbb{N},\ f \in C[a, b])$ kvadratúra eljárás akkor és csak akkor interpolációs kvadratúra eljárás, ha tetszőleges n esetén a*

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x) w(x)\, dx \tag{7.19}$$

egyenlőség minden n-nél alacsonyabb fokú f polinomra fennáll.

Az interpolációs kvadratúra eljárás nyilván konvergál minden polinomra. Valóban, ha f egy tetszőleges m-edfokú polinom, akkor (7.19) minden $n > m$ esetén teljesül. Ezt az észrevételt, valamint az alaptételt felhasználva azonnal adódik a

12. tétel. (a) *Tetszőleges interpolációs kvadratúra eljárás minden polinomra konvergens.*

(b) *Egy interpolációs kvadratúra eljárás pontosan akkor konvergens, ha*

$$\exists\ M > 0 : \quad \sum_{k=1}^{n} |A_{k,n}| \le M \qquad (\forall\ n \in \mathbb{N}).$$

(c) *Nemnegatív együtthatójú interpolációs kvadratúra eljárások minden folytonos függvényre konvergensek.*

Konvergencia szempontjából tehát a nemnegatív együtthatójú interpolációs kvadratúra eljárások a legkedvezőbbek. Az $x_{k,n}$ csomópontok alkalmas megválasztásával elérhető, hogy az interpolációs kvadratúra formulákban minden $A_{k,n}$ együttható nemnegatív legyen. Ez a helyzet akkor, ha az alappontok a w **súlyfüggvényre ortogonális polinomok gyökei**.

Az eddigieknél általánosabban legyen most (a, b) egy tetszőleges (korlátos vagy nem korlátos) $\mathbb{R}$-beli intervallum. Feltesszük, hogy a $w : (a, b) \to \mathbb{R}$ súlyfüggvényre a következők teljesülnek:

- $0 \le w(x)$ $(x \in (a, b))$;
- w Lebesgue-integrálható (a, b)-n és $0 < \int_a^b w(x)\,dx < +\infty$;
- minden $n \in \mathbb{N}$ számra a

$$\mu_n := \int_a^b x^n w(x)\,dx$$

integrálok (az ún. *momentumok*) abszolút konvergensek.

Tekintsük az

$$\langle f, g\rangle := \int_a^b f(x)g(x)w(x)\,dx$$

skaláris szorzattal ellátott $L^2_w(a, b)$ Hilbert-teret. Ekkor minden algebrai polinom benne van az $L^2_w(a, b)$ térben. A lineárisan független $h_n(x) := x^n$ $(x \in (a, b); n \in \mathbb{N})$ hatványfüggvényekre a Gram–Schmidt-féle ortogonalizációs eljárást alkalmazva egy, a fenti skaláris szorzatra nézve ortonormált (p_n) polinomrendszert kapunk. Bebizonyítható, hogy az n-edfokú p_n polinomnak n egyszeres gyöke van az (a, b) intervallumban.

Jelölje $y_{k,n}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ a p_n $(n \in \mathbb{N})$ polinom n különböző gyökét. Ezen a csomópontrendszeren vett interpolációs kvadratúra eljárás minden

$$A_{k,n} = \int_a^b l_{k,n}(x) w(x)\, dx$$

együtthatója *nemnegatív*. Ez az állítás a minden $k, n \in \mathbb{N}$ számra fennálló

$$\int_a^b l_{k,n}(x) w(x)\, dx = \int_a^b [l_{k,n}(x)]^2 w(x)\, dx$$

egyenlőségekből következik. Ezek igazolásához a viszonylag egyszerűen bizonyítható alábbi azonosságokat használhatjuk fel:

$$\sum_{k=1}^{n} l_{k,n}(x) = 1 \qquad (x \in (a,b);\ k, n \in \mathbb{N});$$

$$\int_a^b l_{k,n}(x) l_{j,n}(x) w(x)\, dx \neq 0, \qquad \text{ha}\ \ k, j = 1, 2, \dots, n \text{ és } k \neq j;\ n \in \mathbb{N};$$

$$\int_a^b l_{k,n}(x) \big[l_{k,n}(x) - 1\big] w(x)\, dx = 0, \qquad \text{ha}\ \ k = 1, 2, \dots, n,\ \ n \in \mathbb{N}.$$

A fentieket összefoglalva kapjuk az alábbi alapvető állítást.

13. tétel (Stieltjes tétele). *Legyen $(a, b) \subset \mathbb{R}$ egy tetszőleges intervallum és w egy tetszőleges súlyfüggvény (a, b)-n. Jelölje (p_n) a w súlyfüggvényre ortonormált polinomrendszert és $y_{k,n}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ a p_n $(n \in \mathbb{N})$ gyökeit. Ekkor az*

$$A_{k,n} := \int_a^b l_{k,n}(x) w(x)\, dx \qquad (k, n \in \mathbb{N})$$

együtthatókkal képzett

$$Q_n(f) := \sum_{k=1}^{n} A_{k,n} f(y_{k,n}) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

interpolációs kvadratúra eljárás konvergens, azaz a

$$\lim_{n \to +\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x) w(x)\, dx$$

egyenlőség minden $f \in C(a, b)$ függvényre teljesül.

8. Az inverz operátor folytonossága. Nyílt leképezések és zárt gráfok

8.1. Előzetes megjegyzések

Ebben a fejezetben a funkcionálanalízis három további alapvető jelentőségű tételét ismertetjük. A **Banach-féle homeomorfia tétel** folytonos lineáris operátor inverzének a folytonosságára ad elégséges feltételt. A **zárt gráf tétel** operátor folytonosságát a sok esetben egyszerűbben ellenőrizhető feltételre, nevezetesen az operátor grafikonjának a zártságára vezeti vissza. Mindkét tétel bizonyításának alapja az önmagában is érdekes és fontos **nyílt leképezések tétele**.

Az egész problémakör **motivációjaként** emlékeztetünk arra, hogy eddig az X és Y normált terek közötti $A : X \to Y$ **lineáris** és **folytonos** leképezések általános tulajdonságait elemeztük. Az $X \to Y$ típusú lineáris leképezések azonban nem feltétlenül folytonosak. Láttuk azt, hogy az analízisben fontos szerepet játszó differenciáloperátor például olyan **lineáris** leképezés, amely **nem folytonos**.

Fontos tehát az, hogy minél több módszer álljon rendelkezésünkre operátor folytonosságának a vizsgálatához. Tudjuk azt, hogy lineáris operátor folytonossága ekvivalens a korlátossággal; és ezt a tulajdonságot minden *eddigi példánkban* viszonylag egyszerűen meg tudtuk mutatni. A korlátosságot azonban sok esetben jóval nehezebb ellenőrizni. Ez a helyzet például az **inverz operátor** folytonosságának a problémájánál.

8.2. Az inverz operátor

Emlékeztetünk arra, hogy valamely függvénynek akkor van inverze, ha a függvény által létesített leképezés **injektív**, azaz ha az értelmezési tartomány bármely két egymástól különböző elemét egymástól különböző elemekbe viszi át. Ebben az esetben természetes módon értelmezhető a leképezés **inverze**. Korábban ezeket a fogalmakat *metrikus terek közötti* leképezések esetében is tekintettük; és megvizsgáltuk azt a fontos kérdést, hogy egy ilyen leképezés *folytonosságát* vajon megtartja-e az inverz leképezés is. Az alapvető eredmény a következő: *Ha egy* ***kompakt*** *metrikus téren értelmezett folytonos függvény injektív, akkor az inverz leképezés is folytonos.*

Nézzük meg ezt a problémát most *normált terek* közötti leképezésekre. Legyenek X és Y normált terek. Az $A : X \to Y$ operátort *invertálhatónak* nevezzük, ha tetszőleges $y \in \mathcal{R}_A$ elemre az $A(x) = y$ egyenletnek pontosan egy megoldása van. Ebben az esetben minden $y \in \mathcal{R}_A$ elemhez hozzárendelhetjük a megfelelő $A(x) = y$ egyenlet egyetlen $x \in \mathcal{D}_A$ megoldását. Az ezzel a hozzárendeléssel kapott (az $\mathcal{R}_A$ halmazon értelmezett) operátort az A operátor *inverzének* nevezzük, és az A^{-1} szimbólummal jelöljük:

$$A^{-1} : \mathcal{R}_A \to \mathcal{D}_A.$$

Lineáris operátorok esetén az inverz folytonosságának a vizsgálatához más eszközökre van szükség.

Idézzük fel a metrikus terek közötti folytonos leképezések jellemzésére már megismert alábbi fontos eredményt: *Ha M_1 és M_2 metrikus tér, akkor az $f : M_1 \to M_2$ függvény akkor és csak akkor folytonos az M_1 halmazon, ha minden M_2-beli nyílt halmaz ősképe M_1-beli nyílt halmaz.* Ezt normált terek közötti leképezésekre alkalmazva adódik az

1. tétel. *Legyen X és Y normált tér. Tegyük fel, hogy az $f : X \to Y$ egy invertálható szürjektív leképezés. Ekkor az f^{-1} függvény akkor és csak akkor folytonos, ha f minden X-beli nyílt halmazt Y-beli nyílt halmazba visz át.*

Ez a motivációja a következő fogalomnak:

Definíció. Az X és az Y normált terek közötti $f : X \to Y$ függvényt **nyílt leképezésnek** nevezzük, ha minden X-beli nyílt halmaz f által létesített képe Y-beli nyílt halmaz, azaz

$$\forall\ G \subset X \ \text{ nyílt halmaz esetén } \ f(G) \subset Y \ \text{ is nyílt halmaz.}$$

Az inverz operátor folytonosságával kapcsolatos alapvető kérdést tehát így fogalmazhatjuk meg: *Ha a normált terek közötti $f : X \to Y$ szürjektív leképezés invertálható, akkor f-re milyen további feltételeket kell tenni ahhoz, hogy f nyílt leképezés is legyen.* A következő példa azt mutatja, hogy már a lineáris leképezésekre is kell további feltétel, ti. *van olyan injektív, folytonos és lineáris leképezés, amelyiknek az inverze nem folytonos.*

• **Példa** *olyan injektív, folytonos és lineáris leképezésre, amelyiknek az inverze nem folytonos.*

Legyen $X := l^2$ és tekintsük az

$$A : X \ni x \mapsto Ax := \Big(\frac{x_n}{n}\Big) \quad \big(x = (x_n) \in l^2\big)$$

operátort. Világos, hogy A lineáris, továbbá

$$\|Ax\|_{l^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \big|\tfrac{x_n}{n}\big|^2 \leq \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^2 = \|x\|_{l^2} \qquad \big(x \in l^2\big),$$

ezért $Ax \in l^2$ és A korlátos, tehát folytonos leképezés is. Ha $y = (y_n) \in \mathcal{R}_A$, akkor az $Ax = y$ egyenletnek egyetlen megoldása van: $x = (ny_n)$, ezért A invertálható, és az inverz operátor:

$$A^{-1} : \mathcal{R}_A \to l^2, \qquad A^{-1}(y) = (ny_n).$$

Innen következik, hogy az A^{-1} operátor az $e_n := \big(\delta_{nk}, k \in \mathbb{N}\big)$ egységvektorokat az ne_n $(n \in \mathbb{N})$ vektorokba viszi át; és ez azt jelenti, hogy A^{-1} *nem korlátos*.

8.3. A nyílt leképezések tétele

A továbbiakban feltesszük, hogy $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ **Banach-terek**. Ebben a pontban $k_X(x, \delta)$-val, ill. $k_Y(y, \delta)$-val jelöljük az X, ill. az Y tér x, ill. y pontjának a δ-sugarú (nyílt) környezetét.

Először a következő állítást bizonyítjuk be.

Segédtétel. *Legyenek X és Y* ***Banach-terek****. Ha a folytonos lineáris $A : X \to Y$ operátor szürjektív (vagyis $\mathcal{R}_A = Y$), akkor az origó középpontú X-beli 1-sugarú gömb képe tartalmaz Y-beli gömböt, azaz*

$$\exists\ r > 0 : \quad A\big(k_X(0,1)\big) \supset k_Y(0,r). \tag{8.1}$$

A segédtétel bizonyítása. *Először* azt igazoljuk, hogy

$$\exists\ r > 0 : \quad \overline{A\big(k_X(0,1)\big)} \supset k_Y(0,2r). \tag{8.2}$$

Legyen

$$Y_n := \overline{A\big(k_X(0,n)\big)} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mivel A szürjektív, ezért

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} A\big(k_X(0,n)\big) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{A\big(k_X(0,n)\big)} = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

A Baire-lemma alapján az Y_n zárt halmazok valamelyike tartalmaz gömböt, mondjuk

$$k_Y(y,s) \subset Y_n.$$

Ekkor

$$k_Y(-y,s) \subset -Y_n = Y_n$$

is teljesül.

Legyen $x \in k_Y(0,s)$. Ekkor $x \pm y \in k_Y(\pm y, s) \subset Y_n$. Felhasználva Y_n konvexitását ebből

$$x = \frac{(x+y)+(x-y)}{2} \in Y_n$$

adódik, ami azt jelenti, hogy

$$k_Y(0,s) \subset Y_n = \overline{A\big(k_X(0,n)\big)}.$$

Ebből A homogenitása miatt (8.2) az $r := \frac{s}{2n}$-nel adódik.

A (8.1) bizonyításához rögzítsünk most egy tetszőleges $y \in k_Y(0,r)$ pontot. Olyan $x \in k_X(0,1)$ elemet kell találnunk, amelyre $Ax = y$ teljesül. Jegyezzük meg ehhez azt, hogy A homogenitása miatt a (8.2)-ből a következő általánosabb relációk is adódnak:

$$k_Y\big(0, 2r \cdot \tfrac{1}{2^n}\big) \subset \overline{A\Big(k_X\big(0, \tfrac{1}{2^n}\big)\Big)} \qquad (n \in N).$$

Ezeket felhasználva rekurzióval olyan X-beli $x_1, x_2, \ldots$ sorozatot konstruálhatunk, amelyre

$$\|x_n\|_X \le \tfrac{1}{2^n} \qquad \text{és} \qquad \|y - A(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\|_Y < \tfrac{r}{2^n}$$

teljesül minden n-re. Ekkor a $\sum x_n$ sor konvergál valamely $x \in k_X(0,1)$ elemhez és A folytonossága miatt

$$Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} Ax_n = y,$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

2. tétel (a nyílt leképezések tétele). *Legyenek X és Y **Banach-terek**. Ha a folytonos lineáris $A : X \to Y$ operátor szürjektív, akkor A egy nyílt leképezés is, vagyis A minden X-beli nyílt halmazt Y-beli nyílt halmazba visz át.*

Bizonyítás. Legyen $G \subset X$ egy tetszőleges nyílt halmaz. Megmutatjuk, hogy az $A(G) \subset Y$ halmaz is nyílt, azaz

$$\forall\ y_0 \in A(G)\text{-hez} \quad \exists\ s > 0 : \quad k_Y(y_0, s) \subset A(G). \tag{8.3}$$

Valóban, legyen $y_0 \in A(G)$ egy tetszőleges pont. Ekkor van olyan $x_0 \in G$, hogy $Ax_0 = y_0$. Mivel G nyílt, ezért az x_0 pontnak van olyan ε-sugarú $k_X(x_0, \varepsilon)$ környezete, amelyik benne van a G halmazban. Ezt az egyszerűen igazolható

$$k_X(x_0, \varepsilon) = x_0 + \varepsilon k_X(0,1)^1$$

egyenlőség alapján így is írhatjuk:

$$x_0 + \varepsilon k_X(0,1) \subset G.$$

Ebből A linearitását felhasználva adódik, hogy

$$A\big(x_0 + \varepsilon k_X(0,1)\big) = Ax_0 + \varepsilon A\big(k_X(0,1)\big) = y_0 + \varepsilon A\big(k_X(0,1)\big) \subset A(G).$$

A segédtétel alapján létezik olyan $r > 0$, hogy $k_Y(0,r) \subset A\big(k_X(0,1)\big)$, ezért

$$y_0 + \varepsilon k_Y(0,r) \subset y_0 + \varepsilon A\big(k_X(0,1)\big) \subset A(G).$$

Mivel $\varepsilon k_Y(0,r) = k_Y(\varepsilon r)$ és $y_0 + k_Y(0, \varepsilon r) = k_Y(y_0, \varepsilon r)$, ezért (8.3) az $s := \varepsilon r$ számmal teljesül. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

[1] $x \in X$ és $H \subset X$ esetén $x + H := \{x + h \mid h \in H\}$.

8.4. A Banach-féle homeomorfia tétel

3. tétel (a Banach-féle homeomorfia tétel). *Legyenek X és Y **Banach-terek**. Ha $A : X \to Y$ folytonos lineáris bijekció, akkor A^{-1} folytonos lineáris operátor, azaz $A^{-1} \in B(Y, X)$*

Bizonyítás. Tekintsük az $A^{-1} : Y \to X$ inverz operátort. Egyszerűen igazolható, hogy tetszőleges $G \subset X$ halmaz A^{-1} által létesített ősképe éppen az $A(G) \subset Y$ halmaz, azaz

$$\left(A^{-1}\right)^{-1}[G] = A(G).$$

Az előző tétel alapján A nyílt leképezés, ezért minden X-beli G nyílt halmaz $A(G)$ képe Y-beli nyílt halmaz. Azt kaptuk tehát, hogy minden X-beli G nyílt halmaz A^{-1} által létesített ősképe Y-beli nyílt halmaz. A folytonosság nyílt halmazokkal való jellemzéséből tehát következik, hogy A^{-1} valóban folytonos leképezés. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

4. tétel (ekvivalens normák). *Legyenek $(X, \|\cdot\|_1)$ és $(X, \|\cdot\|_2)$ Banach-terek, és tegyük fel, hogy van olyan $c > 0$ állandó, hogy*

$$\|x\|_2 \le c\|x\|_1 \qquad (\forall\ x \in X). \tag{8.4}$$

Ekkor a két norma ekvivalens, azaz létezik olyan $C > 0$ állandó is, hogy

$$\|x\|_1 \le C\,\|x\|_2 \qquad (\forall\ x \in X).$$

Bizonyítás. Tekintsük az

$$I : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2), \qquad I(x) := x$$

identikus leképezést. I nyilván lineáris bijekció és a (8.4) feltétel miatt

$$\|I(x)\|_2 \le c\|x\|_1 \qquad (x \in X),$$

ezért I korlátos, következésképpen folytonos is. A Banach-féle homeomorfia tételből következik, hogy ekkor I^{-1} is folytonos, tehát korlátos, ami azt jelenti, hogy van olyan $C > 0$ állandó, hogy

$$\|I^{-1}(x)\|_1 \le C\|x\|_2 \qquad (x \in X).$$

Ebből a nyilvánvaló $I^{-1}(x) = x$ egyenlőség alapján már következik a tétel állítása. ■

8.5. A zárt gráf tétel

Emlékeztetünk arra, hogy az $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény **grafikonján** a

$$\Gamma(f) := \left\{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}\right\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

halmazt értjük. Fontos észrevétel, hogy f folytonossága a síkbeli $\Gamma(f)$ halmaz bizonyos topológiai tulajdonságával hozható kapcsolatba. Egyszerűen bebizonyítható az, hogy *ha az f függvény folytonos az egész $\mathbb{R}$ halmazon, akkor a $\Gamma(f) \subset \mathbb{R}^2$ zárt halmaz, azaz ha*

$$(x_n, y_n) \in \Gamma(f) \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \textit{és} \quad x_n \to x, \quad y_n \to y, \qquad \textit{akkor} \quad (x, y) \in \Gamma(f).$$

Az állítás megfordítása nem igaz (l. pl. az $f(x) := x^{-1}$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ és $f(0) := 1$, vagy pedig a Riemann-függvényt).

Normált terek közötti függvényekre is természetes módon értelmezhető a grafikon fogalma, és a fenti állítás általánosítása is igaz. A **zárt gráf tétel** azt állítja, hogy *Banach-terek közötti lineáris* leképezések esetén a szóban forgó állítás megfordítható, azaz Banach-terek közötti lineáris operátorok folytonossága ekvivalens módon jellemezhető az operátor grafikonjának a zártságával. Így tehát a folytonosság eldöntéséhez egy újabb lehetőséget nyerünk. Az alkalmazásokban vannak olyan konkrét esetek, amikor a folytonosságot éppen a grafikon zártságával lehet a legegyszerűbben ellenőrizni.

$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ mintájára először normált terek Descartes-szorzatát értelmezzük. Legyenek tehát $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ tetszőleges normált terek. Egyszerűen bebizonyítható, hogy $X \times Y$ lineáris tér ($\mathbb{R}$ felett) és az

$$\|(x, y)\| := \|x\|_X + \|y\|_Y \qquad \big((x, y) \in X \times Y\big)$$

függvény norma ezen a lineáris téren. Ax $\big(X \times Y, \|\cdot\|\big)$ normált teret az X és Y normált terek **Descates-szorzatának** nevezzük. A teljesség definíciójából az is azonnal adódik, hogy $\big(X \times Y, \|\cdot\|\big)$ *pontosan akkor Banach-tér, ha X és Y is Banach-tér.*

A továbbiakban csak az X és Y terek közötti **lineáris** leképezéseket tekintjük.

Definíció. Az X és az Y normált terek közötti $A : X \to Y$ lineáris leképezés **grafikonján** vagy **gráfján** a

$$\Gamma(A) := \big\{(x, Ax) \mid x \in X\big\} \subset X \times Y$$

halmazt értjük.

Az $X \times Y$ normált térben beszélhetünk topológiai fogalmakról, pl. halmazok zártságáról. Emlékeztetünk arra, hogy valamely normált tér egy részhalmaza akkor és csak akkor **zárt halmaz**, ha minden torlódási pontját tartalmazza. A zárt halmazokat konvergens sorozatokkal is jellemeztük. Ezzel kapcsolatban érdemes megjegyezni azt, hogy az $(x_n, y_n) \in X \times Y$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat pontosan akkor konvergál az $(x,y) \subset X \times Y$ ponthoz, ha

$$x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x \quad \text{és} \quad y_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$$

Definíció. Az $A : X \to Y$ leképezést **zárt gráfú operátornak** nevezzük, ha a $\Gamma(A)$ gráfja az $X \times Y$ normált térnek zárt részhalmaza, azaz ha

$$\forall \ x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x, \quad Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y \qquad \text{esetén} \qquad y = Ax.$$

Folytonos lineáris leképezés gráfja nyilván zárt halmaz:

5. tétel. *Ha X és Y normált terek és $A \in B(X,Y)$, akkor $\Gamma(A)$ az $\big(X \times Y, \|\cdot\|\big)$ normált tér zárt részhalmaza.*

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy

$$(x_n, Ax_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} (x,y).$$

Ekkor $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} x$ és $Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} y$. Mivel A folytonos, ezért $Ax_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} Ax$, következésképpen $Ax = y$. ■

A most vizsgált probléma is rávilágít a **véges** és a **végtelen dimenziós** terek közötti lényeges különbségekre. A fent elmondottaknak abban az esetben, ha csak véges dimenziós terek közötti lineáris leképezéseket vizsgálunk, nincs különösebb jelentősége, ti. ekkor minden ilyen leképezés már automatikusan folytonos is; de azért azt is mondhatjuk, hogy ekkor a folytonosság az operátor zártságával is jellemezhető. Lényegesen megváltozik a helyzet azonban akkor, ha az X és Y normált terek végtelen dimenziósak. A következő példa azt mutatja, hogy ekkor még a lineáris leképezések folytonossága sem jellemezhető a gráfjuk zártságával.

Példa *nem folytonos lineáris zárt gráfú leképezésre.*

Tekintsük az

$$X := \big(C^1[0,1], \|\cdot\|_\infty\big), \qquad Y := \big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$$

normált tereket és a

$$D : X \to Y, \qquad Df := f'$$

differenciáloperátort. Ez nyilván lineáris, és azt is láttuk már, hogy D nem folytonos/korlátos. (Emlékeztetőül: vegyük az $f_n(t) := t^n$ $(t \in [0,1], n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatot.)

Megmutatjuk, hogy D egy zárt gráfú operátor. Valóban, legyen $(f_n, Df_n) \subset X \times Y$ $(n \in \mathbb{N})$ olyan sorozat, amelyik konvergens az $X \times Y$ normált térben, azaz

$$f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_X} f \quad \text{és} \quad Df_n \xrightarrow{\|\cdot\|_Y} g.$$

Ez azt jelenti, hogy a folytonosan differenciálható (f_n) függvénysorozat egyenletesen konvergál az f függvényhez, és a deriváltak $(Df_n) = (f_n')$ sorozata pedig egyenletesen konvergál egy $g \in C[0,1]$

függvényhez. A függvénysorozatok tagonkénti deriválására vonatkozó tételből következik, hogy ekkor f szükségképpen folytonosan deriválható, és $f' = g$, azaz a $g = Df$ egyenlőség fennáll, ami azt jelenti, hogy D valóban egy zárt gráfú operátor.

Az alábbi tétel azt állítja, hogy Banach-terek közötti zárt gráfú lineáris operátorok már szükségképpen folytonosak is, vagyis a folytonosság az operátor grafikonjának a zártságával jellemezhető. (Az előző példában megadott D operátor értelmezési tartománya nem teljes, tehát nem Banach-tér; l. pl. Weierstrass első approximációs tételét.)

6. tétel (a zárt gráf tétel). *Legyenek X és Y Banach-terek és tegyük fel, hogy $A : X \to Y$ egy lineáris zárt gráfú operátor, azaz az A lineáris leképezés $\Gamma(A) = \{(x, Ax) \mid x \in X\}$ grafikonja az $(X \times Y, \|\cdot\|)$ Banach-tér egy zárt részhalmaza. Ekkor A folytonos is, azaz $A \in B(X, Y)$.*

Bizonyítás. Mivel X és Y Banach-terek, ezért egy korábbi megjegyzésünk alapján az $\big(X \times Y, \|\cdot\|\big)$ Descartes-szorzatuk is Banach-tér. Nyilvánvaló, hogy $\Gamma(A)$ az $X \times Y$ tér egy lineáris altere. A tétel feltétele szerint ez tehát egy zárt altér, következésképpen $\Gamma(A)$ maga is Banach-tér.

Tekintsük a
$$\Lambda : X \to \Gamma(A), \quad \Lambda x := (x, Ax)$$
operátort. Ez a leképezés egy lineáris bijekció az X és a $\Gamma(A)$ Banach-terek között. Az inverze, vagyis a
$$\Lambda^{-1} : \Gamma(A) \to X, \quad \Lambda^{-1}(x, Ax) = x$$
operátor korlátos (folytonos). Valóban
$$\big\|\Lambda^{-1}(x, Ax)\big\|_X = \|x\|_X \le \|x\|_X + \|Ax\|_Y = \|(x, Ax)\| \qquad \big((x, Ax) \in \Gamma(A)\big).$$
A Banach-féle homeomorfia tétel alapján ennek a folytonos lineáris bijekciónak az inverze, vagyis a $\big(\Lambda^{-1}\big)^{-1} = \Lambda$ operátor is folytonos (korlátos), azaz van olyan $C > 1$ állandó, hogy
$$\|\Lambda x\| = \|(x, Ax)\| = \|x\|_X + \|Ax\|_Y \le C\|x\|_X \qquad (x \in X)$$
teljesül, amiből
$$\|Ax\|_Y \le (C - 1)\|x\|_X \qquad (x \in X)$$
következik. Ez viszont azt jelenti, hogy A valóban egy korlátos (folytonos) leképezés. Ezzel a tételt bebizonyítottuk. ■

Irodalom

[1] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, Théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.

[2] N. Dunford and J. T. Schwartz, *Linear Operators, Part I: General Theory*, John Wiley & Sons, New York (1988).

[3] L. V. Kantorovics–G. P. Akilov, *Funkcionálanalízis*, Nauka, Moszkva, 1977. (oroszul)

[4] Karvasz Gyula, *Analízis III. és IV.*, ELTE jegyzet, 1978. és 1979.

[5] A. N. Kolmogorov–Sz. V. Fomin, *A függvényelmélet és a funkcionálanalízis elemei*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.

[6] Komornik Vilmos, *Valós analízis előadások I., II.*, TypoTEX, Budapest, 2003.

[7] Máté László, *Funkcionálanalízis műszakiaknak*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1976.

[8] I. P. Natanszon, *Konstruktív függvénytan*, Akadémiai Kiadó, 1952.

[9] Petz Dénes, *Lineáris analízis*, Akadémiai Kiadó, Budapest, 2002.

[10] Riesz Frigyes és Szőkefalvi-Nagy Béla, *Funkcionálanalízis*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1988.

[11] Schipp Ferenc, *Analízis IV. (Funkcionálanalízis)*, Egyetemi jegyzet, 2004. (http://numanal.inf.elte.hu/ schipp/)

[12] Simon Péter, *Analízis V.*, Egyetemi jegyzet, Eötvös Kiadó, Budapest, 1996.

[13] Szőkefalvi-Nagy Béla, *Valós függvények és függvénysorok*, Tankönyvkiadó, Budapest, 1975.

[14] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer–Verlag (1965).