Szili László

Többváltozós analízis

Analízis 3.

Programtervező informatikus szak

BSc, B és C szakirány

2013. tavaszi félév

1. Metrikus terek

Definíció. Az (M, ϱ) rendezett párt **metrikus térnek** nevezzük, ha M tetszőleges nemüres halmaz, $\varrho : M \times M \to \mathbb{R}$ pedig olyan függvény, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(i) minden $x, y \in M$ esetén $\varrho(x, y) \geq 0$;
(ii) $\varrho(x, y) = 0 \iff x = y \quad (x, y \in M)$;
(iii) bármely $x, y \in M$ esetén $\varrho(x, y) = \varrho(y, x) \quad$ (*szimmetriatulajdonság*);
(iv) tetszőleges $x, y, z \in M$ elemekkel fennáll a

$$\varrho(x, y) \leq \varrho(x, z) + \varrho(z, y)$$

háromszög-egyenlőtlenség. A ϱ leképezést *távolságfüggvénynek* (vagy **metrikának**) mondjuk, a $\varrho(x, y)$ számot az x és az y pontok *távolságának* nevezzük.

Tétel. (Az $\big(\mathbb{R}^n, \varrho_p\big)$ terek.) *Legyen $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq p \leq +\infty$ és $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ esetén*

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k - y_k|^p \right)^{1/p}, & \textit{ha } 1 \leq p < +\infty \\ \max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k - y_k|, & \textit{ha } p = +\infty. \end{cases}$$

Ekkor $\big(\mathbb{R}^n, \varrho_p\big)$ metrikus tér.

F1. Bizonyítsa be a fenti állítást a $p = 1$, a $p = 2$, valamint a $p = +\infty$ esetekre.

F2. Mutassa meg, hogy tetszőleges M nemüres halmazon értelmezett

$$\varrho(x, y) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x = y \\ 1, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$$

függvény metrika. A (M, ϱ) párt *diszkrét metrikus térnek* nevezzük.

2. Normált terek. Az $\mathbb{R}^n$-tér topológiája

Megjegyzés. Igen fontosak az olyan metrikus terek, amelyek egyúttal lineáris terek (vektorterek) is az $\mathbb{R}$ számtest felett. Az $(\mathbb{R}^n, \varrho_p)$ metrikus terek nem csak „metrikus", hanem „lineáris térstruktúrával" is el vannak látva. Bevezethetnénk tehát a *lineáris metrikus terek* absztrakt fogalmát, és vizsgálhatnánk azok általános tulajdonságait.

Már a legegyszerűbb ilyen példa, az $\mathbb{R}^2$ kétdimenziós lineáris tér is azt sugallja, hogy vektortéren nem célszerű akármiféle metrikát bevezetni, hanem csak olyat, amelyre teljesülnek a műveletek (összeadás, számmal való szorzás) és a metrika kapcsolatára vonatkozó bizonyos természetes elvárások: a metrika invarianciája a „párhuzamos eltolással" szemben, arányos változása a vektorok „nyújtásának" a hatására, valamint az a követelés, hogy a műveletek legyenek *folytonosak* az adott metrikára nézve.

E követelések megfogalmazása lényegesen egyszerűbb, ha a lineáris téren nem közvetlenül a metrikát, hanem az ún. **normát** értelmezzük. A *norma* az $\mathbb{R}^2$-beli vektorok hosszának (abszolút értékének) absztrakciója. Íly módon jutunk el a **lineáris normált tér** (röviden **normált tér**) fogalmához.

■ Definíciók és példák

Definíció. Az $\big(X, \|\cdot\|\big)$ rendezett párt **normált térnek** nevezzük, ha

1^o X egy lineáris tér az $\mathbb{R}$ számtest felett (röviden: X valós lineáris tér);

2^o $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ egy olyan függvény, amelyik tetszőleges $x, y, z \in X$ elemre és $\lambda \in \mathbb{R}$ számra eleget tesz az alábbi követelményeknek:

(i) $\|x\| \geq 0$,
(ii) $\|x\| = 0 \iff x = \theta$ (θ az X lineáris tér nulleleme),
(iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,
(iv) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Az utolsó tulajdonságot *háromszög-egyenlőtlenségnek* nevezzük. A $\|\cdot\|$ leképezést **normának**, az $\|x\|$ számot pedig az x elem *normájának* mondjuk.

F3. Mutassa meg, hogy ha $\big(X, \|\cdot\|\big)$ normált tér, akkor a

$$\varrho(x, y) := \|x - y\| \qquad (x, y \in X)$$

függvény metrika X-en, vagyis egy normált tér egyúttal metrikus tér is.

A metrika a következő alaptulajdonságokkal rendelkezik:

(a) $\varrho(x + z, y + z) = \varrho(x, y) \quad (\forall\, x, y, z \in X)$,

(b) $\varrho(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| \varrho(x, y) \quad (\forall\, x, y \in X,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R})$.

Tétel. (Az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ terek.) *Egy pozitív egész n szám esetén tekintsük a szokásos műveletekkel ellátott $\mathbb{R}^n$ valós lineáris teret. Legyen $1 \le p \le +\infty$ és*

$$\|x\|_p := \begin{cases} \left(\sum\limits_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{1 \le k \le n} \{|x_k|\}, & \text{ha } p = +\infty \end{cases} \qquad (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n).$$

Ekkor $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ normált tér.

F4. Bizonyítsa be a fenti állítást a $p = 1$, a $p = 2$, valamint a $p = +\infty$ esetekre.

Tétel. (A $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ függvényterek.) *A $C[a,b]$ halmazt a függvények közötti szokásos műveletekkel ellátva egy valós lineáris teret kapunk. Ezen az*

$$\|f\|_p := \begin{cases} \left(\int\limits_a^b |f|^p\right)^{1/p}, & \text{ha } 1 \le p < +\infty \\ \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)|, & \text{ha } p = +\infty \end{cases} \qquad (f \in C[a,b])$$

függvény norma, tehát $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ valós normált tér.

F5. Bizonyítsa be a fenti állítást a $p = 1$, a $p = 2$, valamint a $p = +\infty$ esetekre.

Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ egy normált tér, $a \in X$ és $r \in \mathbb{R}^+$. A

$$k_r(a) := k_r^{\|\cdot\|}(a) := \left\{ x \in X \mid \|x - a\| < r \right\}$$

halmazt az $a \in X$ pont r-sugarú **környezetének** nevezzük. $k(a)$-t írunk, ha nem akarjuk jelölni a környezet sugarát.

F6. Szemléltesse az $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_i)$ $(i = 1, 2, +\infty)$ normált terekben az origó 1-sugarú környezeteit.

Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér $A \subset X$ részhalmazát **korlátosnak** nevezzük, ha

$$\exists\, r > 0 \ \text{ valós szám, hogy } \ A \subset k_r(\mathbf{0}).$$

■ Konvergens sorozatok normált terekben

Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér egy (a_n) sorozata **konvergens**, ha

$$\exists\, \alpha \in X,\ \forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N},\ \ \forall\, n \geq n_0 : \quad \|a_n - \alpha\| < \varepsilon.$$

Ha létezik ilyen α, akkor az egyértelmű, és azt az (a_n) sorozat **határértékének** nevezzük, és az alábbi szimbólumok valamelyikével jelöljük:

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \overset{\|\cdot\|}{=} \alpha, \qquad \lim\,(a_n) \overset{\|\cdot\|}{=} \alpha, \qquad a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|} \alpha.$$

(Ha nem vezet félreértéshez, akkor a norma jelét elhagyjuk.)

Az ellenkező esetben (vagyis akkor, ha nincs ilyen α) azt mondjuk, hogy az (a_n) sorozat **divergens**.

Tétel. (Konvergens sorozatok alaptulajdonságai.) *Legyen (a_n) az $(X, \|\cdot\|)$ normált tér egy tetszőleges* ***konvergens*** *sorozata. Ekkor a következő állítások teljesülnek:*

1^o *Az (a_n) sorozat* ***korlátos****, azaz az értékkészlete korlátos X-beli halmaz.*

2^o *(a_n) minden részsorozata is konvergens, és a határértéke megegyezik (a_n) határértékével.*

3^o *Ha az (a_n) sorozatnak van két különböző X-beli elemhez tartó részsorozata, akkor (a_n) divergens.*

F7. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér, és tegyük fel, hogy az X-beli (a_n) és (b_n) sorozatok konvergensek. Ekkor az $(a_n + b_n)$ és a (λa_n) sorozat $(\lambda \in \mathbb{R})$ is konvergens és

$$\lim\,(a_n + b_n) = \lim\,(a_n) + \lim\,(b_n), \qquad \lim\,(\lambda a_n) = \lambda \lim\,(a_n).$$

Ezek a relációk az összeadás, a számmal való szorzás és a norma folytonosságát fejezik ki.

■ Ekvivalens normák, konvergencia $\mathbb{R}^n$-ben

Megjegyzés. Ugyanazon a halmazon többféle módon is meg lehet adni normát, és a konvergencia ténye függ attól, hogy azt melyik normában tekintjük. Előfordulhat az, hogy egy adott halmazbeli sorozat az egyik normában konvergens, a másikban pedig divergens. Sokkal kedvezőbb a helyzet akkor, ha a két norma **ekvivalens**. Ebben az esetben konvergencia szempontjából a két norma között nincs különbség: mind a két normában ugyanazok lesznek a konvergens (divergens) sorozatok.

Definíció. Azt mondjuk, hogy az X lineáris téren adott $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ norma **ekvivalens** (jelben $\|\cdot\|_1 \sim \|\cdot\|_2$), ha léteznek olyan m, M pozitív valós számok, hogy

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1$$

minden $x \in X$-re.

Tétel. (Konvergencia ekvivalens normák esetén.) *Legyen X lineáris tér. Tegyük fel, hogy az X-en értelmezett $\|\cdot\|_1$ és $\|\cdot\|_2$ normák ekvivalensek. Ekkor tetszőleges X-beli (a_n) sorozatra*

$$\lim\,(a_n) \overset{\|\cdot\|_1}{=} \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \lim\,(a_n) \overset{\|\cdot\|_2}{=} \alpha.$$

F8. Bizonyítsa be, hogy minden $x \in \mathbb{R}^n$ vektorra fennállnak a következő egyenlőtlenségek:

$$\begin{aligned} \|x\|_\infty \leq& \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty \leq& \|x\|_2 \leq \sqrt{n}\|x\|_\infty, \\ \frac{1}{\sqrt{n}}\|x\|_1 \leq& \|x\|_2 \leq n\|x\|_1; \end{aligned}$$

és ez azt jelenti, hogy az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren értelmezett $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ és $\|\cdot\|_\infty$ normák ekvivalensek.

F9. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}^n$ halmazon ($n \in \mathbb{N}$) bevezetett $\|\cdot\|_p$ ($1 \leq p \leq +\infty$) normák egymással ekvivalensek.

Útmutatás. Elég igazolni (miért?), hogy minden $p \in [1, +\infty)$ esetén $\|\cdot\|_p$ és $\|\cdot\|_\infty$ ekvivalensek. Ez viszont következik a

$$\max_{1\leq k\leq n} |x_k| \leq \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p} \leq \sqrt[p]{n}\, \max_{1\leq k\leq n} |x_k| \qquad \big(x_k \in \mathbb{R},\ k = 1, 2, \ldots, n\big)$$

egyenlőtlenségből. ■

F10. Bizonyítsa be, hogy az $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) lineáris téren értelmezett bármely két norma ekvivalens egymással.

Megoldás. Elég igazolni (miért?), hogy ha $\|\cdot\|$ egy tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-en, akkor ez ekvivalens a $\|\cdot\|_\infty$ maximum-normával, azaz léteznek olyan m és M pozitív valós számok, hogy

$$(*) \qquad m\|x\|_\infty \leq \|x\| \leq M\|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbb{R}^n).$$

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolása: Jelölje $e_1, e_2, \ldots, e_n$ az $\mathbb{R}^n$ térbeli „szokásos” bázist, azaz e_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) i-edik koordinátája 1, a többi 0. A tetszőleges $x \in \mathbb{R}^n$ vektor felírható az $x = \sum\limits_{k=1}^n x_k e_k$ alakban, így

$$\begin{aligned} \|x\| = \left\|\sum_{k=1}^n x_k e_k\right\| \leq \sum_{k=1}^n \|x_k e_k\| = \sum_{k=1}^n |x_k| \cdot \|e_k\| \leq \\ \leq \left(\sum_{k=1}^n \|e_k\|\right) \max_{1\leq k\leq n} |x_k| = M\|x\|_\infty. \end{aligned}$$

A $(*)$ jobb oldali egyenlőtlensége tehát az $M := \sum\limits_{k=1}^{n} \|e_k\|$ számmal valóban teljesül.

A $(*)$ bal oldali egyenlőtlenségét indirekt módon igazoljuk. Az állítással ellentétben tegyük fel, hogy minden $k \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan $x_k \in \mathbb{R}^n$ vektor, hogy

$$\|x_k\|_\infty > k\|x_k\|.$$

Legyen

$$y_k := \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty} \qquad (k \in \mathbb{N}).$$

Ekkor

$$\|y_k\| = \frac{\|x_k\|}{\|x_k\|_\infty} < \frac{1}{k} \qquad (k \in \mathbb{N}),$$

következésképpen $\lim\limits_{k\to+\infty} \|y_k\| = 0$, ezért (y_k) a $\|\cdot\|$ normában az $\mathbb{R}^n$ tér nulleleméhez, a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz tart:

$$y_k \xrightarrow[k\to+\infty]{\|\cdot\|} \mathbf{0}.$$

Másrészt

$$\|y_k\|_\infty = \left\| \frac{x_k}{\|x_k\|_\infty} \right\|_\infty = \frac{\|x_k\|_\infty}{\|x_k\|_\infty} = 1 \quad (k \in \mathbb{N}).$$

Ebből következik, hogy (y_k) az $\big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty\big)$ normált tér egy korlátos sorozata. A Bolzano–Weierstrass-tétel ebben a térben érvényes, tehát az (y_k) sorozatnak van egy $\big(y_{k_i}\big)$ konvergens részsorozata. Jelölje $y \in \mathbb{R}^n$ ennek a határértékét:

$$y_{k_i} \xrightarrow[k_i\to+\infty]{\|\cdot\|_\infty} y.$$

Ez a részsorozat a $\|\cdot\|$ normában a $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ vektorhoz tart:

$$y_{k_i} \xrightarrow[k_i\to+\infty]{\|\cdot\|} \mathbf{0}.$$

A $(*)$ jobb oldali egyenlőtlensége alapján

$$\|y_{k_i} - y\| \le M\|y_{k_i} - y\|_\infty \to 0, \quad \text{ha } k_i \to +\infty,$$

másrészt a határérték (a $\|\cdot\|$ normában is!) egyértelmű, ezért $y = \mathbf{0}$ is igaz, ami ellentmond annak, hogy $\|y_{k_i}\|_\infty = 1$ minden k_i indexre. Ez az ellentmondás igazolja, hogy $(*)$ bal oldali egyenlőtlensége valóban fennáll. ∎

Tétel. (Konvergencia $\mathbb{R}^n$-ben.) *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $\|\cdot\|$ egy tetszőleges norma az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren. Ekkor az*

$$\big(a_k\big) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n, \qquad a_k := \big(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}\big) \in \mathbb{R}^n$$

sorozat akkor és csak akkor konvergens az $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|\right)$ *normált térben, és*

$$\lim_{k\to+\infty} a_k \overset{\|\cdot\|}{=} \alpha = \left(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(n)}\right),$$

ha minden $i = 1, 2, \dots, n$ *esetén az* $\left(a_k^{(i)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ *valós sorozat (az* i*-edik koordinátasorozat) konvergens, és*

$$\lim_{k\to+\infty} a_k^{(i)} = \alpha^{(i)}.$$

F11. Bizonyítsa be, hogy a $C[0,1]$ halmazon értelmezett $\|\cdot\|_\infty$ és $\|\cdot\|_1$ normák *nem ekvivalensek.*

Útmutatás. Világos, hogy

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f| \le \max |f| = \|f\|_\infty \qquad (f \in C[0,1]).$$

A fordított irányú egyenlőtlenség, vagyis az, hogy létezik olyan $c > 0$ valós szám, hogy

$$\|f\|_\infty \le c\,\|f\|_1 \qquad (f \in C[0,1])$$

azonban nem igaz. Ezt indirekt módon látjuk be. Azt kell megmutatni, hogy minden $n \in \mathbb{N}$ számhoz létezik olyan $f_n \in C[0,1]$ függvény, amelyre $\|f_n\|_\infty > n\,\|f_n\|_1$. Tekintsük most minden $n \in \mathbb{N}$ esetén az

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2\left(\frac{1}{n} - x\right), & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1 \end{cases}$$

függvényt.

■ A Cauchy-féle konvergenciakritérium, Banach-terek

Megjegyzés. Emlékeztetünk a valós analízis egyik legfontosabb tételére, a **Cauchy-féle konvergenciakritériumra**: *az* (a_n) *valós sorozat akkor és csak akkor konvergens, ha* (a_n) *Cauchy-sorozat, azaz*

$$(a_n) \subset \mathbb{R} \ \text{ konvergens} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{l} \forall\,\varepsilon > 0\text{-hoz } \ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \ \text{ hogy} \\ \forall\, m, n \ge n_0 \ \text{ esetén } \ |a_n - a_m| < \varepsilon. \end{array} \right.$$

Az analízis alapvető fogalmának, a sorozat konvergenciájának a definíciójában szerepel egy, a sorozat tagjain „kívüli” dolog is. Nevezetesen: a sorozat határértéke. Ez alapján a konvergenciát csak akkor tudjuk eldönteni, ha ismerjük a sorozat határértékét. A Cauchy-féle konvergenciakritérium azt állítja, hogy a konvergenciára megadható egy olyan *szükséges és elégséges* (tehát a konvergenciával ekvivalens) feltétel is, amely kizárólag a sorozat tagjainak a segítségével dönt a sorozat konvergens vagy divergens voltáról.

Világos, hogy a Cauchy-sorozat fogalmát megadó tulajdonságot — tehát azt, hogy „a sorozat elég nagy indexű tagjai tetszőlegesen közel vannak egymáshoz” — normált térben is lehet értelmezni.

Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált térbeli (a_n) sorozat **Cauchy-sorozat**, ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, m, n \geq n_0 : \quad \|a_n - a_m\| < \varepsilon.$$

Megjegyzés. Normált terekben a Cauchy-féle konvergenciakritérium általában *nem igaz.* A konvergens és a Cauchy-sorozatok kapcsolatáról a következőt mondhatjuk.

Tétel. (A konvergens- és a Cauchy-sorozatok kapcsolata.)

1^o *Tetszőleges* $(X, \|\cdot\|)$ *normált térben minden konvergens sorozat Cauchy-sorozat is.*

2^o *Az állítás megfordítása általában nem igaz: Van olyan* $(X, \|\cdot\|)$ *normált tér, hogy abban van divergens Cauchy-sorozat.*

Definíció. Az $(X, \|\cdot\|)$ normált teret **teljes normált térnek** vagy **Banach-térnek** nevezzük, ha benne minden Cauchy-sorozat konvergens, vagyis a tér teljes, ha igaz benne a Cauchy-féle konvergenciakritérium, azaz

$$(a_n) \subset (X, \|\cdot\|) \text{ konvergens} \qquad \Longleftrightarrow \qquad (a_n) \subset (X, \|\cdot\|) \text{ Cauchy-sorozat.}$$

Példák.

- A Cauchy-féle konvergenciakritérium alapján $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ egy **teljes** normált tér.
- $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ **nem teljes** normált tér. (Például minden $\sqrt{2}$-höz tartó racionális sorozat — ilyen például az $a_0 := 2$, $a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ sorozat — nem konvergens Cauchy-sorozat a $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ normált térben.)

F12. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és minden $\mathbb{R}^n$-en értelmezett $\|\cdot\|$ norma esetén $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ **teljes** normált tér, vagyis **Banach-tér**.

Útmutatás. Mivel az $\mathbb{R}^n$-en értelmezett normák ekvivalensek, ezért az állítást elég a $\|\cdot\|_\infty$ normára igazolni. Tegyük fel, hogy $a_k := \big(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}, \ldots, a_k^{(n)}\big) \in \mathbb{R}^n \quad (k \in \mathbb{N})$ Cauchy-sorozat $\big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty\big)$-ben, azaz

$$\forall\, \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists\, k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall\, k, l \geq k_0 : \quad \|a_k - a_l\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \big|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\big| < \varepsilon.$$

Ekkor minden $i = 1, 2, \ldots, n$ esetén

$$\big|a_k^{(i)} - a_l^{(i)}\big| < \varepsilon \qquad (\forall\, k, l \geq k_0)$$

is teljesül, ami azt jelenti, hogy az i-edik koordináták $\big(a_k^{(i)}\big)_{k \in \mathbb{N}}$ sorozata $\mathbb{R}$-beli Cauchy-sorozat is, következésképpen konvergens. Legyen

$$\alpha^{(i)} := \lim_{k \to +\infty} a_k^{(i)} \in \mathbb{R} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \qquad \text{és} \qquad \alpha := \big(\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \ldots, \alpha^{(n)}\big) \in \mathbb{R}^n.$$

Bizonyítsa be, hogy az (a_k) sorozat a $\|\cdot\|_\infty$ normában α-hoz tart, azaz az (a_k) Cauchy-sorozat konvergens az $\big(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty\big)$ normált térben.

F13. Mutassa meg, hogy

(a) a $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált tér **teljes**;

(b) a $\big(C[a,b], \|\cdot\|_1\big)$ normált tér **nem teljes**.

Útmutatás. (a) Legyen (f_n) egy $\big(C[a,b], \|\cdot\|_\infty\big)$ térbeli Cauchy-sorozat:

$$\forall\,\varepsilon > 0 \;\text{ számhoz }\; \exists\, k_0 \in \mathbb{N}: \;\forall\, k, l \geq k_0 \;\text{ esetén }\; \|f_k - f_l\|_\infty = \max_{x\in[a,b]} \big|f_k(x) - f_l(x)\big| < \varepsilon.$$

Ebből következik, hogy minden $x \in [a,b]$ pontban az $(f_k(x))$ számsorozat Cauchy-sorozat $\mathbb{R}$-ben, következésképpen konvergens. Legyen

$$f(x) := \lim_{k\to+\infty} f_k(x) \qquad (x \in [a,b]).$$

Így értelmeztünk egy $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ függvényt. (Ezt az (f_n) függvénysorozat **pontonkénti határfüggvényének** nevezzük.) Az

$$\big|f_k(x) - f_l(x)\big| < \varepsilon \quad \big(k, l \geq k_0, \;\; x \in [a,b]\big)$$

egyenlőtlenségekben rögzített k esetén az $l \to +\infty$ határátmenetet véve adódik f-re az

$$\big|f_k(x) - f(x)\big| < \varepsilon \quad \big(k \geq k_0, \;\; x \in [a,b]\big)$$

egyenlőtlenség. Ezt és az f_k függvények folytonosságát felhasználva mutassa meg, hogy az f függvény folytonos $[a,b]$-en, és (f_n) a $\|\cdot\|_\infty$ normában f-hez konvergál.

(b) Az állítást az $[a,b] := [-1,1]$ intervallumra igazoljuk. Azt kell megmutatni, hogy van olyan $(f_n) : \mathbb{N} \to C[-1,1]$ függvénysorozat, ami a $\|\cdot\|_1$ normában Cauchy-sorozat, de ebben a normában nem konvergens. Legyen $n \in \mathbb{N}$ és

$$f_n(x) := \begin{cases} -1, & \text{ha } -1 \leq x \leq -\frac{1}{n} \\ nx & \text{ha } -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n} \\ \;\;1, & \text{ha } \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Ha $l > k$, akkor $\int_{-1}^1 |f_k - f_l| = \frac{1}{k} - \frac{1}{l} = \frac{l-k}{l\cdot k} \leq \frac{1}{k}$. (Készítsen ábrát! A szóban forgó integrál két egybevágó háromszög területének az összege. A háromszög egyik oldala $\frac{1}{k} - \frac{1}{l}$, a magassága pedig 1.) Ebből következik, hogy (f_n) Cauchy-sorozat a $\|\cdot\|_1$ normában. Mutassa meg, hogy tetszőleges $f \in C[-1,1]$ függvényre

$$\int_{-1}^1 \big|f - \operatorname{sign}\big| > 0,$$

és ezt felhasználva indirekt módon lássa be, hogy az (f_n) függvénysorozat nem konvergens a $\|\cdot\|_1$ normában.

Adjon meg *tetszőleges* $[a,b]$ intervallum esetén olyan $(f_n): \mathbb{N} \to C[a,b]$ függvénysorozatot, amelyik a $\big(C[a,b], \|\cdot\|_1\big)$ normált térben Cauchy-sorozat, de nem konvergens.

■ A Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel

Megjegyzés. Az $\mathbb{R}$-beli konvergens sorozatoknak egy másik alapvető tulajdonságát a **Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel** fejezi ki. Azt állítja, hogy *minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.* Ez normált terekben általában nem igaz.

Tétel. (Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel $\mathbb{R}^n$-ben.) *Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és minden $\mathbb{R}^n$-en értelmezett $\|\cdot\|$ norma esetén az $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ normált térben igaz a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel, azaz minden korlátos sorozatnak van konvergens részsorozata.*

F14. Bizonyítsa be, hogy a $\big(C[0,1], \|\cdot\|_\infty\big)$ normált térben **nem igaz** a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel, azaz van olyan korlátos $(f_n) \subset C[0,1]$ sorozat, amelyiknek nincs konvergens részsorozata.

Útmutatás. Tekintse az

$$f_n(x) := \sin\big(2^n \pi x\big) \qquad (x \in [0,1], \quad n = 0, 1, 2, \ldots)$$

függvénysorozatot.

3. Normált terek közötti leképezések folytonossága

■ A folytonosság általános definíciója

Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér és $A \subset X$. Az A halmaz

1^o **nyílt halmaz**, ha

$$\forall\, a \in A \quad \exists\, k(a): \quad k(a) \subset A,$$

azaz A minden pontja belső pont;

2^o **zárt halmaz**, ha $X \setminus A$ nyílt halmaz, és ez azzal ekvivalens, hogy A tartalmazza minden A-beli konvergens sorozat határértékét.

Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f \in X \to Y$ függvény *folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban* (jelben $f \in C\{a\}$), ha

$$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta > 0, \;\; \forall\, x \in k_\delta^{\|\cdot\|_X}(a) \cap \mathcal{D}_f : \quad f(x) \in k_\varepsilon^{\|\cdot\|_Y}\big(f(a)\big),$$

azaz, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0, \ \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ \ \|x-a\|_X < \delta : \ \ \|f(x)-f(a)\|_Y < \varepsilon.$$

Tétel. (A folytonosságra vonatkozó átviteli elv.) *Legyen* $(X, \|\cdot\|_X)$ *és* $(Y, \|\cdot\|_Y)$ *normált tér,* $f \in X \to Y$ *és* $a \in \mathcal{D}_f$. *Ekkor:*

1^o $f \in C\{a\} \iff \forall\ (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f,\ x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_X} a$ *esetén* $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_Y} f(a)$.

2^o *Tegyük fel, hogy a* $\mathcal{D}_f$*-beli* (x_n) *sorozat az* $a \in \mathcal{D}_f$ *ponthoz konvergál és*

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq f(a).$$

Ekkor az f *függvény nem folytonos* a*-ban:* $f \notin C\{a\}$.

■ $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-típusú függvények

Definíció. ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény folytonossága.) Az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény *folytonos az* $a \in \mathcal{D}_f$ *pontban*, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0, \ \ \text{hogy} \ \ \forall x \in \mathcal{D}_f, \ \|x-a\| < \delta \ \ \text{esetén} \ \ |f(x)-f(a)| < \varepsilon,$$

ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges norma az $\mathbb{R}^2$ lineráris téren.

F15. Szemléltesse a síkon azoknak az (x, y) koordinátájú pontoknak a legbővebb halmazát, amelyekre az alábbi kifejezések értelmezhetők:

(a) $\sqrt{x-1}+\sqrt{y}$; (b) $\sqrt{2-(x^2+y^2)}$;

(c) $\dfrac{2}{(x^2+y^2-4)^{1/2}}+\sqrt{9-(x^2+y^2)}$;

(d) $\ln\sqrt{x^2+y^2}$; (e) $\sqrt{x^2-y^2}$;

(f) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-y^2}}$; (g) $\dfrac{1}{4-x^2-y^2}$;

(h) $\ln(x+y)$; (i) $\sqrt{xy}$;

(j) $\sqrt{1-x^2-2y^2}$; (k) $\arcsin(y-x)$.

F16. Határozza meg az alábbi $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvényeknek az (x, y) koordinátasíkkal párhuzamos síkmetszeteit (*szintvonalait*). Szemléltesse az (x, y) síkon a szintvonalakat. Alkalmas síkmetszetek alapján állapítsa meg, hogy milyen felülettel szemléltethető a függvény az (x, y, z) térbeli koordináta-rendszerben. Készítsen ábrát a felületről.

(a) $f(x,y) := x^2+y^2 \ \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(b) $f(x,y) := \sqrt{x^2+y^2} \ \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(c) $f(x,y) := \sqrt{1-x^2-y^2} \ \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2 \le 1\big)$;

(d) $f(x,y) := y^2 - 2x \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(e) $f(x,y) := \sqrt{x+y} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x+y \geq 0\big)$;

(f) $f(x,y) := e^{x+y} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(g) $f(x,y) := e^{-(x^2+y^2)} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(h) $f(x,y) := y^2 - x^2 \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(i) $f(x,y) := xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(j) $f(x,y) := \cos(x + \sqrt{3}y) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(k) $f(x,y) := \ln\sqrt{x^2+y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$;

(l) $f(x,y) := \sqrt{2x^2+3y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(m) $f(x,y) := \dfrac{1}{2x^2+3y^2} \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}\big)$.

F17. Szemléltesse az $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$-típusú függvény folytonosságának a fogalmát.

■ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$-típusú függvények folytonossága

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n,m \in \mathbb{N})$ és $x \in \mathcal{D}_f$. Jelölje $f_i(x)$ $(x \in \mathcal{D}_f)$ az $f(x) \in \mathbb{R}^m$ vektor i-edik koordinátáját $(i = 1,2,\ldots,m)$. Az $f_i \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ függvényt az f függvény *i-edik koordinátafüggvényének* nevezzük. Ha azt írjuk, hogy $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$, akkor f_i-k f koordinátafüggvényeit jelölik.

Tétel. *Legyen $n,m \in \mathbb{N}$, $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor*

1^o *f folytonossága független az $\mathbb{R}^n$, illetve az $\mathbb{R}^m$-beli normák megválasztásától.*

2^o *$f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \in C\{a\} \iff f_i \in C\{a\}$ $(i = 1,2,\ldots,m)$.*

F18. Mutassa meg, hogy ha

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

akkor

(a) minden $x \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni y \mapsto f(x,y)$ függvény folytonos;

(b) minden $y \in \mathbb{R}$ esetén az $\mathbb{R} \ni x \mapsto f(x,y)$ függvény folytonos;

(c) f nem folytonos a $(0,0)$ pontban.

F19. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 \neq 0 \\ 0, & \text{ha } x = y = 0 \end{cases}$$

függvény nem folytonos az origóban, de „minden az origón átmenő egyenes mentén folytonos”.

F20. Legyenek $I, J \subset \mathbb{R}$ intervallumok, és $g : I \to \mathbb{R}$, $f : I \times J \to \mathbb{R}$ folytonos függvények. Mutassa meg, hogy az $F(x) := \big(f(x), g(x)\big)$ $(x \in I)$ függvény is folytonos.

F21. Folytonosak-e az alábbi függvények?

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^3}{2x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 1, & \text{ha } (x,y) = (0,0); \end{cases}$$

$$g(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+xy+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

■ Korlátos és zárt halmazon folytonos függvények

Tétel. (Weierstrass abszolút szélsőértékekre vonatkozó tétele.) *Legyen $n \in \mathbb{N}$ és tegyük fel, hogy*

(a) $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$,

(b) $\mathcal{D}_f \subset \mathbb{R}^n$ *korlátos és zárt halmaz,*

(c) f *folytonos* $\mathcal{D}_f$*-en.*

Ekkor f-nek vannak abszolút szélsőértékei, azaz

$\exists\, x_1 \in \mathcal{D}_f$: $\quad f(x) \le f(x_1)$ $\quad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f)$ $\quad$ (x_1 *abszolút maximumhely*);

$\exists\, x_2 \in \mathcal{D}_f$: $\quad f(x) \ge f(x_2)$ $\quad (\forall\, x \in \mathcal{D}_f)$ $\quad$ (x_2 *abszolút minimumhely*).

■ A határérték általános definíciója

Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|)$ normált tér. Az $a \in X$ pont az $A \subset X$ halmaz *torlódási pontja* (jelben $a \in A'$), ha

$$\forall\, k(a) \text{ esetén } \big(A \cap (k(a) \setminus \{a\})\big) \neq \emptyset,$$

azaz a minden környezete tartalmaz a-tól különböző A-beli pontot.

Definíció. Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér. Azt mondjuk, hogy az $f \in X \to Y$ függvénynek *az $a \in \mathcal{D}_f'$ pontban van határértéke*, ha létezik olyan $A \in Y$, hogy az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \\ A, & \text{ha } x = a \end{cases}$$

függvény folytonos az $a \in \mathcal{D}_{\tilde{f}}$ pontban. Ha létezik ilyen A, akkor az egyértelmű, és azt az *f függvény a-beli határértékének* nevezzük (jelben $\lim\limits_a f = A$).

Tétel. (*A határértékre vonatkozó átviteli elv.*) Legyen $(X, \|\cdot\|_X)$ és $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normált tér, $f \in X \to Y$ és $a \in \mathcal{D}_f'$. Ekkor:

1^o $\lim\limits_a f = A \iff \forall\, (x_n) : \mathbb{N} \to \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$, $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_X} a$ esetén $f(x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{\|\cdot\|_Y} A$.

2^o Tegyük fel, hogy a $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ halmazbeli (x_n) és (u_n) sorozatok mindegyike az $a \in \mathcal{D}_f'$ ponthoz konvergál és

$$\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(u_n).$$

Ekkor az f függvénynek *nincs határértéke* a-ban: $\nexists \lim\limits_a f$.

F22. Legyen

$$f(x,y) := \frac{x-y}{x+y} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2,\ x\neq -y\big).$$

Bizonyítsa be, hogy

(a) $\exists \lim\limits_{x\to 0}\big(\lim\limits_{y\to 0} f(x,y)\big)$;

(b) $\exists \lim\limits_{y\to 0}\big(\lim\limits_{x\to 0} f(x,y)\big)$;

(c) $\nexists \lim\limits_{(0,0)} f$.

F23. Igazolja az előző feladatbeli állításokat az

$$f(x,y) := \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} \qquad \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\big)$$

függvényre.

F24. Léteznek-e az alábbi határértékek? Ha igen, számolja ki az értéküket.

(a) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^2}{x^2+y^2}$;

(b) $\lim\limits_{(6,3)} xy\cos(x-2y)$;

(c) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$;

(d) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^3+y^4}{x^2+y^2}$;

(e) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$;

(f) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

(g) $\lim\limits_{(0,0)} \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(h) $\lim\limits_{(0,0)} (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2)$.

4. $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ típusú függvények differenciálszámítása

4.1. $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ típusú függvények deriváltjai

■ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ típusú függvények parciális deriváltjai. Jelölések

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_n$ a kanonikus bázis $\mathbb{R}^n$-ben, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban *létezik az i-edik változó szerinti parciális deriváltja*, ha az

$$F : k(0) \ni t \mapsto f(a + te_i) \quad (\in \mathbb{R} \to \mathbb{R})$$

függvény deriválható a 0 pontban. Az $F'(0)$ valós szám az f függvény *i-edik változó szerinti parciális deriváltja* az a pontban.

Jelölések. Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ egy n-változós ($n \in \mathbb{N}$) valós értékű függvény, és tegyük fel, hogy $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$.

• Az f függvény $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{D}_f$ pontban vett helyettesítési értékét így jelöljük:

$$f(x) \qquad \text{vagy} \qquad f(x_1, \ldots, x_n).$$

Ha $n = 2$, illetve $n = 3$, akkor a koordináták (x_1, x_2), illetve (x_1, x_2, x_3) jelölése mellett használni fogjuk a hagyományos (x, y), illetve (x, y, z) jelölést is.

• Az f függvény *a pontbeli, i-edik* $(i = 1, \ldots, n)$ *változó szerinti parciális deriváltját* az alábbi szimbólumokkal szokás jelölni:

$$\partial_i f(a), \quad \frac{\partial f}{\partial x_i}(a), \quad \partial_{x_i} f(a), \quad f'_{x_i}(a), \quad f_{x_i}(a), \quad D_i f(a), \quad D_{x_i} f(a).$$

• A magasabb rendű parciális deriváltakra használatos jelölések:

$$\partial_{ij} f(a) := \partial_i \partial_j f(a) := \partial_i \big(\partial_j f\big)(a) \qquad (1 \leq i, j \leq n)$$

vagy

$$\frac{\partial f}{\partial x_i \partial x_j}(a), \quad f''_{x_i x_j}(a), \quad \ldots$$

Általában: tetszőleges $1 \leq i_1, \ldots, i_s \leq n$ indexek esetén a

$$\partial_{i_1 i_2 \ldots i_s} f(a)$$

szimbólum azt jelenti, hogy az f függvényt először az i_s, utána az i_{s-1}, s.í.t., végül az i_1 változó szerint deriváljuk és az így kapott függvénynek vesszük a-ban a helyettesítési értékét.

Ha $i = 1, 2, \ldots, n$ és k tetszőleges természetes szám, akkor:

$$\partial_i^k f(a) := \partial_{i\cdots i} f(a) \qquad \text{itt „}i \cdots i\text{" } k \text{ darab } i\text{-t jelöl.}$$

• Legyen $\partial_i^0 f(a) := f(a)$, illetve $\partial_i^1 f(a) := \partial_i f(a)$. Ha $i := (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n$ egy *multiindex*, akkor

$$\partial^i f(a) := \partial_1^{i_1} \cdots \partial_n^{i_n} f(a).$$

F25. Határozza meg, hogy mely pontokban léteznek az alábbi kétváltozós függvények parciális deriváltjai, és számítsa is ki azokat:

(a) $f(x, y) := |x + y| \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big);$

(b) $f(x, y) := \sqrt{x^2 + y^2} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big);$

(c) $f(x, y) := \sqrt[3]{x^3 + y^3} \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big);$

(d) $f(x, y) := y^2 \ln(xy) \qquad (x, y > 0);$

(e) $f(x, y) := e^{x^2 y} - 2x^2 y^7 \sin(x + y) \qquad (x, y \in \mathbb{R});$

(f) $f(x, y) := e^x \cos y - x \ln y \qquad (x, y > 0);$

(g) $f(x, y) := \frac{x^3 - y^3}{xy} \qquad (x, y > 0).$

F26. Legyen

$$f(x, y) := x^3 y + x^2 y^2 + x + y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

Számítsa ki a következő másodrendű parciális deriváltakat

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} := \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

az $(x, y) = (1, 0)$ pontban.

F27. Határozza meg az $f(x, y) := x^3 e^{y^2}$ $\big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$ függvény összes első- és másodrendű parciális deriváltját az $(x, y) := (2, 1)$ ponbtban.

F28. Mutassa meg, hogy a parciális deriváltak létezéséből általában nem következik a függvény folytonossága. Tekintse például az

$$f(x, y) := \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

függvényt, és lássa be, hogy a $\partial_i f(0, 0)$ $(i = 1, 2)$ parciális deriváltak léteznek, de $f \notin C\{(0, 0)\}$.

■ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ típusú függvények iránymenti deriváltjai

Definíció. Legyen $n \in \mathbb{N}$, $e \in \mathbb{R}^n$ egy adott vektor, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Akkor mondjuk, hogy az f függvénynek az a pontban *létezik az e irányban vett iránymenti deriváltja*, ha az

$$F : k(0) \ni t \mapsto f(a + te)$$

valós-valós függvény deriválható a 0 pontban. Az $F'(0)$ valós számot az f függvény e *iránymenti deriváltjának* nevezzük az a pontban, és a $\partial_e f(a)$ szimbólummal jelöljük.

Tétel. (Az iránymenti derivált kiszámolása.) *Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény mindegyik változója szerinti parciális deriváltak léteznek és azok folytonosak az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont egy környezetében. Ekkor f-nek minden a-ból induló $e \in \mathbb{R}^n$ irányban létezik az iránymenti deriváltja, és*

$$\partial_e f(a) = \langle f'(a), e \rangle = \sum_{k=1}^{n} \partial_k f(a) \cdot e^{(k)},$$

ahol $e = (e^{(1)}, e^{(2)}, \ldots, e^{(n)})$ egy ***egységvektor*** *a $\|\cdot\|_2$ normában, azaz*

$$\|e\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |e^{(k)}|^2} = 1.$$

F29. Számolja ki a következő függvények iránymenti deriváltjait a megadott irányok mentén:

(a) $f(x, y) := xy$, a tetszőleges (x_0, y_0) pontban az $(1, 1)$ irány mentén;

(b) $f(x, y) := xy$, a $(-1, 2)$ pontban tetszőleges irány mentén;

(c) $f(x, y) := xe^{yx} - xy$, az $(1, 1)$ pontban a $(3, 4)$ irány mentén;

(d) $f(x, y, z) := \sin(xyz)$, a $(\pi, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ pontban a $(-1, 2, 2)$ irány mentén.

F30. (a) Számolja ki az $(1, 2, 3)$ pontban az

$$f(x, y, z) := x^2 y + x\sqrt{1 + z} \qquad (x, y, z \in \mathbb{R},\ z > -1)$$

függvény $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ irány menti derváltját.

(b) Határozza meg az

$$f(x, y) := 1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad a, b > 0\big)$$

függvény iránymenti deriváltját az $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ pontban az $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ egyenletű ellipszis belső normálisának irányában.

F31. Számítsa ki az

$$f(x,y) := x^2 - xy + y^2 \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény $e \in \mathbb{R}^2$ irányban vett iránymenti deriváltját a $P(1,1)$ pontban, ha e az x-tengely pozitív ágával α szöget bezáró vektor. Melyik irány esetén lesz a derivált értéke a legnagyobb?

Megoldás.

$$e = (\cos\alpha, \sin\alpha) \quad (0 \le \alpha < 2\pi); \qquad \text{ekkor } \|e\|_2 = \sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = 1.$$

Mivel

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 2x - y, \qquad & \partial_1 f(1,1) &= 1, \\ \partial_2 f(x,y) &= -x + 2y, \qquad & \partial_2 f(1,1) &= 1, \end{aligned}$$

ezért

$$\partial_e f(1,1) = \left\langle \begin{bmatrix} \partial_1 f(1,1) \\ \partial_2 f(1,1) \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{bmatrix} \right\rangle = \cos\alpha + \sin\alpha.$$

A $g : [0, 2\pi) \ni \alpha \mapsto \sin\alpha + \cos\alpha$ függvény abszolút maximumát keressük. Mivel

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\alpha + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha\right) = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \tfrac{\pi}{4}\right) \qquad (\alpha \in \mathbb{R}),$$

ezért g-nek van abszolút maximuma, ezt az $\alpha + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, vagyis az $\alpha = \frac{\pi}{4}$ pontban veszi fel. Az iránymenti derivált tehát az $\alpha = \frac{\pi}{4}$ irányszögű egységvektor esetén lesz a legnagyobb. ■

F32. Milyen $\mathbf{e}$ irányban lesz a $\partial_{\mathbf{e}} f(1,2)$ iránymeni derivált a legnagyobb, ha

$$f(x,y) := e^{y-2x}\sin\pi xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}\big)?$$

■ $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ típusú függvény totális deriváltja

Definíció. Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ vektor-vektor függvény *totálisan deriválható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban*, ha

$$\exists\, A \in \mathbb{R}^{m\times n} \text{ mátrix és } \exists\, \varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,\ \lim_{h\to 0}\varepsilon(a+h) = 0 \text{ függvény, hogy}$$
$$f(a+h) - f(a) = A\cdot h + \varepsilon(a+h)\cdot\|h\|$$

teljesül minden olyan $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ vektorra, amelyre $a + h \in \mathcal{D}_f$, ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges norma az $\mathbb{R}^n$ lineáris téren. Ha létezik ilyen A mátrix, akkor az egyértelmű. A-t az f függvény a-beli *deriváltmátrixának* nevezzük, és az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük.

Tétel. *Legyen* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$$f \in D\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, A \in \mathbb{R}^{m \times n}: \ \lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - Ah\|_1}{\|h\|_2} = 0,$$

ahol $\|\cdot\|_1$ *tetszőleges* $\mathbb{R}^m$*-beli és* $\|\cdot\|_2$ *tetszőleges* $\mathbb{R}^n$*-beli norma.*

Megjegyzés. A derválhatóság ténye és a deriváltmátrix független a normák megválasztásától.

Tétel. *Legyen* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ $(n, m \in \mathbb{N})$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. *Ekkor*

$$f \in D\{a\} \quad \Longleftrightarrow \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, m \ : \ f_i \in D\{a\}.$$

Tétel. (A deriváltmátrix előállítása.) *Tegyük fel, hogy az* $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény totálisan deriválható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban. Ekkor* f *mindegyik koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és véges az* a *pontban. Az* $f'(a)$ *deriváltmátrix a parciális deriváltakkal így fejezhető ki:*

$$f'(a) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(a) & \partial_2 f_1(a) & \cdots & \partial_n f_1(a) \\ \partial_1 f_2(a) & \partial_2 f_2(a) & \cdots & \partial_n f_2(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_1 f_m(a) & \partial_2 f_m(a) & \cdots & \partial_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

Az $f'(a)$ *deriváltmátrixot az* f ***függvény*** $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ ***pontbeli Jacobi-mátrixának*** *nevezzük.*

Megjegyzés. A parciális deriváltak létezéséből nem következik a totális deriválhatóság. A következő tételben olyan elégséges feltételt adunk meg a parciális deriváltakra vonatkozóan, amely maga után vonja a totális deriválhatóságot.

Tétel. (Elégséges feltétel a totális deriválhatóságra.) *Ha az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *függvény mindegyik koordinátafüggvényének mindegyik változó szerinti parciális deriváltja létezik és véges az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pont egy környezetében és folytonos* a*-ban, akkor* f *totálisan deriválható* a*-ban.*

Tétel. *Ha az* $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ *függvény differenciálható az* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontban, akkor minden* $e \in \mathbb{R}^n$ *vektor esetén létezik az* e *irány mentén vett iránymenti deriváltja* a*-ban. Az állítás megfordítása nem igaz.*

F33. Legyen

(a) $f(x, y) := 2x^2 + 3xy - y^2 \ \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big), \ a := (1, 2);$

(b) $f(x, y) := x^3 + xy \ \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big), \ a := (2, 3);$

(c) $f(x, y) := \begin{bmatrix} x^2 + xy \\ y^2 - 2x^2 \end{bmatrix} \ \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big), \ a := (-1, 1);$

(d) $f(x,y) := \begin{bmatrix} x^2+y^2 \\ x^2-y^2 \end{bmatrix} \ \big((x,y)\in\mathbb{R}^2\big),\ \ a:=(1,2).$

A definíció alapján lássa be, hogy az f függvény deriválható az $a \in \operatorname{int}\mathcal{D}_f$ pontban, és adja meg az $f'(a)$ mátrixot. Az $f'(a)$-ra így kapott eredményt ellenőrizze a Jacobi-mátrix kiszámításával.

Megoldás. (a) Legyen $a = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ és $h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$\begin{aligned} f(a+h)-f(a) &= f(a_1+h_1, a_2+h_2) - f(a_1,a_2) = \\ &= 2(1+h_1)^2 + 3(1+h_1)(2+h_2) - (2+h_2)^2 - \big[2\cdot 1^2 + 3\cdot 1\cdot 2 - 2^2\big] = \\ &= 10h_1 - h_2 + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2 = [10,-1]\cdot\begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + 2h_1^2 + 3h_1h_2 - h_2^2. \end{aligned}$$

Az $A := [10,\ -1]$ mátrixszal és a $\|h\|^{(2)} = \sqrt{h_1^2+h_2^2}$ euklideszi normával azt kapjuk, hogy

$$\frac{\big|f(a+h)-f(a)-A\cdot h\big|}{\|h\|^{(2)}} = \frac{\big|2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2\big|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}}.$$

Mivel

$$0 \le \frac{\big|2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2\big|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{2(h_1^2+h_2^2)+\frac{3}{2}(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le 4\sqrt{h_1^2+h_2^2},$$

ezért

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\big|2h_1^2+3h_1h_2-h_2^2\big|}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 0.$$

(A becslésnél felhasználtuk a $|h_1h_2| \le \frac{1}{2}(h_1^2+h_2^2)$ egyenlőtlenséget.) Ez azt jelenti, hogy $f \in D\{(1,2)\}$ és a deriváltmátrix az

$$f'(1,2) = [10,-1]$$

sormátrix.

Mivel

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= 4x+3y, \qquad & \partial_1 f(1,2) &= 10, \\ \partial_2 f(x,y) &= 3x-2y, \qquad & \partial_2 f(1,2) &= -1, \end{aligned}$$

ezért a Jacobi-mátrix:

$$\big[\partial_1 f(1,2),\ \partial_2 f(1,2)\big] = [10,\ -1],$$

és ez valóban megegyezik a definíció alapján kapott deriváltmátrixszal. ■

(c) Legyen $h := (h_1,h_2) \in \mathbb{R}^2$. Ekkor

$$f(-1+h_1, 1+h_2) - f(-1,1) =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1+h_1)^2 + (-1+h_1)(1+h_2) \\ (1+h_2)^2 - 2(-1+h_1)^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (-1)^2 + (-1)\cdot 1 \\ 1^2 - 2(-1)^2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -2h_1 + h_1 - h_2 \\ 2h_2 + 4h_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^2 + h_1h_2 \\ -2h_1^2 + h_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} h_1^2 + h_1h_2 \\ -2h_1^2 + h_2^2 \end{bmatrix}.$$

Ha $A := \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, akkor minden $h \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ esetén

$$0 \le \frac{\|f(-1+h_1, 1+h_2) - f(-1,1) - A \cdot h\|_1}{\|h\|_2} = \frac{|h_1^2 + h_1 h_2| + |-2h_1^2 + h_2^2|}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} \le$$

$$\le \frac{3h_1^2 + \frac{h_1^2+h_2^2}{2} + h_2^2}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} \le \frac{4(h_1^2+h_2^2)}{\sqrt{h_1^2+h_2^2}} = 4\sqrt{h_1^2+h_2^2},$$

és ez azt jelenti, hogy

$$\lim_{h \to (0,0)} \frac{\|f(-1+h_1, 1+h_2) - f(-1,1) - A \cdot h\|_1}{\|h\|_2} = 0.$$

A definíció alapján tehát az f függvény deriválható a $(-1,1)$ pontban, és $f'(-1,1)$ az A mátrixszal egyenlő.

Legyen $f =: \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$. Ekkor a Jacobi-mátrix az (x,y) pontban

$$f'(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_1 f_1(x,y) & \partial_2 f_1(x,y) \\ \partial_1 f_2(x,y) & \partial_2 f_2(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x+y & x \\ -4x & 2y \end{bmatrix}.$$

Ha $(x,y) = (-1,1)$, akkor $f'(-1,1) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$, és ez valóban megegyezik az A mátrixszal.

■

F34. A totális deriválhatóságra vonatkozó elégséges feltétel alapján lássa be, hogy az alábbi függvények deriválhatók az a pontban, és adja meg az $f'(a)$ deriváltmátrixot:

(a) $f(x,y) := xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \qquad a := (1,2);$

(b) $f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2+y^2 > 0 \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad a := (0,0),$

(c) $f(x,y) := x^3 + xy \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \ a := (2,3);$

(d) $f(x,y) := (x^2+y^2, x^2-y^2) \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \ a := (1,2);$

(e) $f(x,y) := \begin{bmatrix} x^3 + xy \\ x - y^2 \\ 1 + y \end{bmatrix} \ \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big), \ a := (1,2).$

■ Kapcsolat a deriváltak között

F35. Bizonyítsa be, hogy az

$$f(x,y) := \sqrt{|xy|} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény folytonos a $(0,0)$ pontban, ott léteznek a parciális deriváltak, de f *nem differenciálható* $(0,0)$-ban.

Megoldás. Mivel

$$\sqrt{|xy|} \le \frac{|x|+|y|}{2} \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

ezért $f \in C\{(0,0)\}$.

A parciális deriváltak az origóban léteznek és

$$\partial_1 f(0,0) = 0 \qquad \partial_2 f(0,0) = 0.$$

Belátjuk, hogy $f \notin D\{(0,0)\}$. Valóban, a fenti következmény alapján f pontosan akkor deriválható az origóban, ha

$$\lim_{(h_1,h_2)\to(0,0)} \frac{\sqrt{|h_1 h_2|}}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2}} = 0$$

teljesül. Azonban (pl.) az $y = x$ egyenes pontjaiban a tört értéke $\frac{1}{\sqrt{2}}$, tehát a $(0,0)$ pont minden környezetében van olyan pont, amelyben a tört $\frac{1}{\sqrt{2}}$-őt vesz fel. Így a fenti limeszreláció nem igaz, ami azt jelenti, hogy f nem differenciálható a $(0,0)$ pontban. ∎

F36. Legyen

$$A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + (y-1)^2 < 1 \;\text{ vagy }\; x^2 + (y+1)^2 < 1\big\},$$
$$B := \big\{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\big\}.$$

Bizonyítsa be, hogy a

$$\chi_{A\cup B}(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } (x,y) \in A \cup B \\ 0, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \big(A \cup B\big) \end{cases}$$

függvény (az $A \cup B$ halmaz *karakterisztikus függvénye*) minden irányban deriválható a $(0,0)$ pontban, de nem deriválható (totálisan) a $(0,0)$ pontban.

F37. Mutassa meg, hogy az

$$f(x,y) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \text{ és } y = x^2 \\ 0, & \text{egyéb } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ pontban} \end{cases}$$

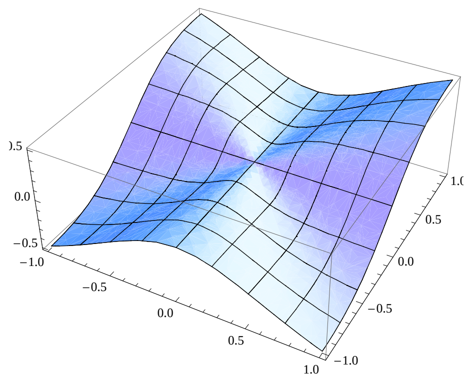
képlettel értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény a $(0,0)$ pontban deriválható minden irányban, de ott totálisan nem deriválható, mert még csak nem is folytonos a $(0,0)$ pontban.

F38. Megadható a $(0,0)$ pontban olyan *folytonos* függvény is, amelyik *minden irányban deriválható*, de totálisan *nem deriválható* az origóban. Ilyen függvényre egy példa az

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } x^2 + y^2 > 0 \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

képlettel értelmezett $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény.

A függvény képét az alábbi ábrán szemléltetjük:



■ Érintősík

Definíció. Tegyük fel, hogy az $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ függvény mindkét változója szerinti parciális deriváltak léteznek és azok folytonosak az $(x_0, y_0) \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pont egy környezetében. Ekkor az f függvény grafikonjához az (x_0, y_0) pontban *érintősík* húzható. Ennek egyenlete:

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(y - y_0).$$

A sík egy normálvektora:

$$\mathbf{n} = \big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big).$$

F39. Mutassa meg, hogy a háromdimenziós térben a síkok általános egyenlete

$$Ax + By + Cz = D,$$

alakú, ahol az A, B, C együtthatók legalább egyike nem nulla. Ekkor az

$$\mathbf{n} = (A, B, C) \in \mathbb{R}^3$$

egy olyan vektor, amelyik a sík minden vektorára merőleges (ez a sík egy *normálvektora*).

Megoldás. Tekintsünk a térben egy S síkot. Legyen $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ az S sík egy tetszőleges pontja, és $\mathbf{x_0}$ ebbe a pontba mutató helyvektor. Legyen $\mathbf{n} = (A, B, C)$ az S síkra merőleges nemnulla vektor (az S sík egy *normálvektora*). A tér geometriájából következik, hogy egy $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ koordinátájú pont (az ide mutató helyvektor $\mathbf{x}$) akkor és csak akkor eleme S-nek, ha az $\mathbf{x} - \mathbf{x_0}$ vektor merőleges az $\mathbf{n}$ vektorra, azaz

$$\langle \mathbf{x} - \mathbf{x_0}, \mathbf{n} \rangle = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Ebből átrendezéssel adódik az állítás, ahol $D = \langle \mathbf{n}, \mathbf{x_0} \rangle$. ■

F40. Írja fel az alábbi felületek érintősíkjának az egyenletét a megadott helyhez tartozó pontban, és adja meg a sík egy normálvektorát:

(a) $z = \sqrt{x^2 - 2y^2}$; $(x_0, y_0) = (3, 2)$;

(b) $z = \cos(x - 2y)$; $(x_0, y_0) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$;

(c) $z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$; $(x_0, y_0) = (1, 2)$ (elliptikus paraboloid);

(d) $z = \sqrt{xy}$; $(x_0, y_0) = (2, 6)$.

Megoldás. A szóban forgó felület az $f(x,y) := \sqrt{x^2 - 2y^2}$ $\big((x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2 \geq 2y^2\big)$ függvény grafikonja. (Szemléltesse az értelmezési tartományt!) Legyen $(x_0, y_0) = (3, 2)$.

Mivel f parciális deriváltjai léteznek és folytonosak, ezért a felület

$$(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$$

pontjához érintősík húzható. Ennek egyenlete a

$$z - f(x_0, y_0) = \partial_1 f(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_2 f(x_0, y_0)(x_0, y_0)(y - y_0)$$

képlettel adható meg. A szóban forgó sík egy *normálvektora*:

$$\mathbf{n} = \big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big).$$

Mivel

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) &= \sqrt{x_0^2 - 2y_0^2} = 1, \\ \partial_1 f(x_0, y_0) &= \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = 3, \\ \partial_2 f(x_0, y_0) &= -2\frac{y_0}{\sqrt{x_0^2 - 2y_0^2}} = -4, \end{aligned}$$

ezért a sík egyenlete:

$$z - 1 = 3(x - 3) - 4(y - 2) \qquad \Longleftrightarrow \qquad 3x - 4y - z = 0,$$

egy *normálvektora*:

$$\mathbf{n} = \big(\partial_1 f(x_0, y_0), \partial_2 f(x_0, y_0), -1\big) = (3, -4, -1). \ \blacksquare$$

■ Műveletek deriválható függvényekkel

Tétel. *Tegyük fel, hogy az $f, g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ függvények differenciálhatóak az $a \in \mathbb{R}^n$ pontban. Ekkor az $f + g$ és minden $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén a λf függvény is differenciálható a-ban és*

$$\begin{aligned} (f + g)'(a) &= f'(a) + g'(a), \\ (\lambda f)(a) &= \lambda f'(a). \end{aligned}$$

Tétel. (Az összetett függvény deriválhatósága. Láncszabály.) *Legyen* $n, m, s \in \mathbb{N}$. *Ha* $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *és* $g \in D\{a\}$, *továbbá* $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ *és* $f \in D\{g(a)\}$, *akkor* $f \circ g \in D\{a\}$ *és*

$$\big(f \circ g\big)'(a) = f'\big(g(a)\big) \cdot g'(a), \tag{1}$$

ahol $\cdot$ *a mátrixok közötti szorzás műveletét jelöli.*

Megjegyzés. Figyeljük meg az (1) egyenlőség két oldalán álló matematikai objektumokat.
A jobb oldal: Mivel

- $g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, ezért $g'(a) =: B \in \mathbb{R}^{m \times n}$;
- $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$, ezért $f'\big(g(a)\big) =: A \in \mathbb{R}^{s \times m}$.

Az $(s \times m)$-es A és az $(m \times n)$-es B mátrix szorzata tehát képezhető, és $A \cdot B$ egy $(s \times n)$-es mátrix.
A bal oldal: Mivel $f \circ g \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^s$, ezért $\big(f \circ g\big)'(a) \in \mathbb{R}^{s \times n}$, vagyis (1) bal oldala is egy $(s \times n)$-es mátrix.

Tétel. (Az $s = 1$ speciális eset.) *Legyen* $n, m \in \mathbb{N}$. *Ha* $g = (g_1, \ldots, g_m) \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *és* $g \in D\{a\}$, *továbbá* $f \in \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^1$ *és* $f \in D\{g(a)\}$, *akkor az*

$$F(x) := \big(f \circ g\big)(x) = f(g(x)) = f\big(g_1(x), \ldots, g_m(x)\big)$$

függvény differenciálható az a pontban, és

$$\partial_j F(a) = \sum_{k=1}^{m} \partial_k f\big(g(a)\big) \cdot \partial_j g_k(a) \tag{2}$$

minden $j = 1, 2, \ldots, m$*-re.*

Megjegyzés. A (2) összefüggés könnyebben megjegyezhető a következő alakba. Jelöljük f változóit $y_1, \ldots, y_m$-mel, és g_k helyett is írjunk y_k-t. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial y_1}{\partial x_j} + \frac{\partial f}{\partial y_2} \cdot \frac{\partial y_2}{\partial x_j} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial y_m} \cdot \frac{\partial y_m}{\partial x_j}.$$

F41. Mutassa meg, hogy ha $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F \in D$ és

$$f(x, y) := yF(x^2 - y^2) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big),$$

akkor

$$y^2 \partial_x f(x, y) + xy \partial_y f(x, y) = x f(x, y) \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big).$$

F42. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f \in D^3$ és

$$F(x, y, z) := f(xyz) \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

Bizonyítsa be, hogy alkalmas $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvénnyel

$$\partial_{123} F(x, y, z) = g(xyz) \qquad \big((x, y, z) \in \mathbb{R}^3\big).$$

■ **Magasabb rendű deriváltak**

F43. Legyen

$$f(x,y) := \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Igazolja, hogy a $\partial_1\partial_2 f(0,0)$ és a $\partial_2\partial_1 f(0,0)$ parciális deriváltak léteznek, de ezek nem egyenlők:

$$\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0).$$

Mutassa meg azt is, hogy f nem differenciálható kétszer a $(0,0)$ pontban.

4.2. Taylor-polinom, Taylor-formula

Definíció. Ha az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény kétszer deriválható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban (röviden $f \in D^2\{a\}$), akkor az

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{21} f(a) & \dots & \partial_{n1} f(a) \\ \partial_{12} f(a) & \partial_{22} f(a) & \dots & \partial_{n2} f(a) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \partial_{1n} f(a) & \partial_{2n} f(a) & \dots & \partial_{nn} f(a) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

szimmetrikus mátrixot (l. Young tételét) az f *függvény* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *pontbeli Hesse-féle mátrixának* nevezzük.

Definíció. Legyen $n, m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ és $f \in D^m\big(k(a)\big)$. Az f függvény $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ *ponthoz tarozó m-edfokú, n-változós Taylor-polinomját* így értelmezzük:

$$\big(T_{m,a} f\big)(x) = \big(T_{m,a} f\big)(a+h) := f(a) + \sum_{k=1}^{m} \Big(\sum_{|i|=k} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i \Big)$$
$$(x = a + h \in \mathbb{R}^n).$$

Tétel. (A másodfokú Taylor-polinom.) *Az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f \in D^2\big(k(a)\big)$ függvény a ponthoz tartozó másodfokú Taylor-polinomja a következő alakban írható fel:*

$$\big(T_{2,a} f\big)(x) = \big(T_{2,a} f\big)(a+h) := f(a) + \langle f'(a), h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle f''(a)h, h\rangle$$
$$(x = a + h \in \mathbb{R}^n).$$

Bizonyítás. Tekintsük először a **kétváltozós** esetet, azaz legyen $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ekkor tehát

$$i = (i_1, i_2) \in \mathbb{N}_0^2 \ \text{ multiindex}, \qquad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

A definíció alapján

$$\big(T_{2,a}f\big)(x) = \big(T_{2,a}f\big)(a+h) := f(a) + \sum_{|i|=1} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i + \sum_{|i|=2} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i. \tag{3}$$

Az első összeg meghatározása. Mivel $|i| = i_1 + i_2 = 1$, ezért az i multiindex lehetséges értékei ebben az esetben:

$$i = (1,0), \qquad i = (0,1).$$

A szóban forgó összeg tagjainak a meghatározásához szükséges értékeket a következő táblázatban adjuk meg:

$i = (i_1, i_2)$	$(1,0)$	$(0,1)$
$i! = i_1!\, i_2!$	1	1
$h^i = h_1^{i_1} h_2^{i_2}$	h_1	h_2
$\partial^i f = \partial_1^{i_1}\, \partial_2^{i_2} f$	$\partial_1 f$	$\partial_2 f$

Az első összeg tehát

$$\begin{aligned} \sum_{|i|=1} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i &= \partial_1 f(a) h_1 + \partial_2 f(a) h_2 = \sum_{j=1}^{2} \partial_j f(a) h_j = \\ &= \big[\partial_1 f(a),\, \partial_2 f(a)\big] \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \langle f'(a), h\rangle. \end{aligned} \tag{4}$$

A második összeg meghatározása. Most $|i| = i_1 + i_2 = 2$, ezért az $i = (i_1, i_2)$ multiindex lehetséges értékei:

$$i = (2,0), \qquad i = (1,1), \qquad i = (0,2).$$

A szóban forgó összeg tagjainak a meghatározásához szükséges értékeket a következő táblázatban adjuk meg:

$i = (i_1, i_2)$	$(2,0)$	$(1,1)$	$(0,2)$
$i! = i_1! i_2!$	2	1	2
$h^i = h_1^{i_1} h_2^{i_2}$	h_1^2	$h_1 h_2$	h_2^2
$\partial^i f = \partial_1^{i_1} \partial_2^{i_2} f$	$\partial_1^2 f$	$\partial_1 \partial_2 f$	$\partial_2^2 f$

A második összeg tehát

$$\sum_{|i|=2} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i = \tfrac{1}{2}\partial_1^2 f(a) h_1^2 + \partial_{12} f(a) h_1 h_2 + \tfrac{1}{2}\partial_2^2 f(a) h_2^2 = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{2} \partial_{jl} f(a) h_j h_l. \qquad (5)$$

Az utolsó egyenlőségnél figyelembe vettük azt, hogy az $f \in D^2\big(k(a)\big)$ feltétel miatt

$$\partial_{12} f(a) = \partial_{21} f(a) \qquad (6)$$

(l. Young tételét). (5) jobb oldalán álló összeget jóval áttekinthetőbb alakban is fel lehet írni az

$$f''(a) = \begin{bmatrix} \partial_1^2 f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_2^2 f(a) \end{bmatrix}$$

szimmetrikus (l. (6)-et) Hesse-féle mátrix segítségével. Mivel

$$f''(a) \cdot h = \begin{bmatrix} \partial_1^2 f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_2^2 f(a) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_1^2 f(a) h_1 + \partial_{12} f(a) h_2 \\ \partial_{21} f(a) h_1 + \partial_2^2 f(a) h_2 \end{bmatrix},$$

ezért

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\langle f''(a)h, h\rangle &= \frac{1}{2}\left\langle \begin{bmatrix} \partial_1^2 f(a) h_1 + \partial_{12} f(a) h_2 \\ \partial_{21} f(a) h_1 + \partial_2^2 f(a) h_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{2} \partial_{jl} f(a) h_j h_l = \\ &= \tfrac{1}{2}\partial_1^2 f(a) h_1^2 + \partial_{12} f(a) h_1 h_2 + \tfrac{1}{2}\partial_2^2 f(a) h_2^2 = \sum_{|i|=2} \frac{\partial^i f(a)}{i!} h^i. \end{aligned} \qquad (7)$$

Az $n = 2$ esetben a tétel állítása az (3), a (4) és az (7) egyenlőségekből következik.

Az $n > 2$ **eset** is hasonlóan kezelhető. Ekkor

$$i = (i_1, i_2, \cdots, i_n) \in \mathbb{N}_0^n, \quad h = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Az i multiindex lehetséges értékei, ha $|i| = i_1 + i_2 + \cdots + i_n = 1$:

$$i = (1, 0, \ldots, 0), \quad i = (0, 1, \ldots, 0), \quad \ldots, i = (0, 0, \ldots, 1),$$

ezért
$$\sum_{|i|=1}\frac{\partial^i f(a)}{i!}h^i=\sum_{j=1}^n \partial_j f(a)h_j=\langle f'(a),h\rangle.$$
Ha $|i|=i_1+i_2+\cdots+i_n=2$, akkor
$$\begin{gathered} i=(2,0,0,\dots,0,0),\\ i=(1,1,0,\dots,0,0),\quad i=(1,0,1,\dots,0,0),\quad \dots,\quad i=(0,0,\dots,1,1),\\ i=(0,0,0,\dots,0,2).\end{gathered}$$
Ezért
$$\sum_{|i|=2}\frac{\partial^i f(a)}{i!}h^i=\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^n \partial_j\partial_l f(a)h_jh_l. \tag{8}$$
Az
$$f''(a)=\begin{bmatrix} \partial_{11}f(a) & \partial_{12}f(a) & \dots & \partial_{1n}f(a)\\ \partial_{21}f(a) & \partial_{22}f(a) & \dots & \partial_{2n}f(a)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ \partial_{n1}f(a) & \partial_{n2}f(a) & \dots & \partial_{nn}f(a)\end{bmatrix}\in\mathbb{R}^n$$
Hesse-féle (szimmetrikus) mátrix felhasználásával a (8) összeg is felírható az
$$\frac{1}{2}\langle f''(a)h,h\rangle$$
alakban. ■

Tétel. (A Taylor-formula a Peano-féle maradéktaggal.) *Legyen $f\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^1$ $(n\in\mathbb{N})$ és $a\in\operatorname{int}\mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $f\in C^m\{a\}$ $(m\in\mathbb{N})$. Ekkor:*

1^o *$\exists\,\varepsilon\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, $\lim\limits_{h\to0}\varepsilon(a+h)=0$ függvény, hogy*
$$f(a+h)=\big(T_{m,a}f\big)(a+h)+\varepsilon(a+h)\|h\|^m\quad(h\in\mathbb{R}^n,\ a+h\in\mathcal{D}_f),$$
azaz
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-\big(T_{m,a}f\big)(a+h)}{\|h\|^m}=0,$$
ahol $\|\cdot\|$ tetszőleges norma $\mathbb{R}^n$-en.

2^o *Ha a $G\in\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ egy legfeljebb m-edfokú, n-változós polinomra teljesül a*
$$\lim_{h\to0}\frac{f(a+h)-G(a+h)}{\|h\|^m}=0$$
egyenlőség, akkor $G\equiv T_{m,a}f$. (Tehát a legfeljebb m-edfokú polinomok közül a $T_{m,a}f$ polinom az, amelyik az f függvényt az a pont egy környezetében a legjobban közelíti.)

Tétel. (A Taylor-formula $m = 2$ esetén.) *Legyen $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$ $(n \in \mathbb{N})$ és $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$. Tegyük fel, hogy $f \in C^2\{a\}$ $(m \in \mathbb{N})$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^1$, $\lim_{h \to 0} \varepsilon(a+h) = 0$ függvény, hogy*

$$\begin{aligned} f(a+h) &= \big(T_{2,a} f\big)(a+h) + \varepsilon(a+h)\|h\|^2 = \\ &= f(a) + \langle f'(a), h\rangle + \tfrac{1}{2}\langle f''(a)h, h\rangle + \varepsilon(a+h)\|h\|^2, \end{aligned}$$

ha $h \in \mathbb{R}^n$ és $a + h \in \mathcal{D}_f$.

F44. Írja fel a következő függvények másodfokú Taylor-polinomját.

(a) $f(x,y) := \dfrac{x}{y}$ $\big((x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}\big)$ az $a := (1,1)$ pontban;

(b) $f(x,y) := e^x \sin y$ $\big((x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}\big)$ az $a := (0,0)$ pontban.

F45. Írja fel az

$$f(x,y) := 2x^2 - xy - y^2 - 6x - 3y + 5 \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvényt $(x-1)^k (y+2)^\ell$ $(k, \ell \in \mathbb{N})$ típusú szorzatok lineáris kombinációjaként.

F46. Becsülje meg az

$$(1+x)^k (1+y)^l \approx 1 + kx + ly$$

közelítés hibáját, ha $k, l \in \mathbb{N}$ és $x, y \in [0,1]$.

F47. Legyen az $f \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvény m-szer differenciálható az $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$ pontban. Mutassa meg, hogy a $T_{m,a} f$ az egyetlen a legfeljebb m-edfokú, n-változós polinomok között, amelyre teljesül, hogy $\big(T_{m,a} f\big)(a) = f(a)$ és

$$\partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} \big(T_{m,a} f\big)(a) = \partial_{i_1 i_2 \ldots i_k} f(a)$$

minden $k \le m$ és $1 \le i_1, \ldots, i_k \le n$ esetén.

4.3. Többváltozós függvények szélsőértékei

Tétel. (2×2-es mátrixokra vonatkozó Sylvester-féle kritérium.) *Legyen*

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}.$$

A

$$Q(h) := \langle Ah, h\rangle = ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2 \qquad \left(h = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2\right)$$

kvadratikus alak, illetve az $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ *mátrix*

$$\begin{array}{lcl} \textit{pozitív definit} & \Longleftrightarrow & a > 0 \textit{ és } \det A > 0; \\ \textit{negatív definit} & \Longleftrightarrow & a < 0 \textit{ és } \det A > 0; \\ \textit{indefinit} & \Longleftrightarrow & \det A < 0. \end{array}$$

Tétel. (Kétváltozós függvény lokális szélsőértékére vonatkozó másodrendű **elégséges** feltétel.) *Legyen* $f \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *és* $a \in \operatorname{int} \mathcal{D}_f$*. Tegyük fel, hogy az* f *függvény első- és másodrendű parciális deriváltjai léteznek és folytonosak. Tekintsük a Hesse-mátrixot az* a *pontban:*

$$f''(a) = H(a) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(a) & \partial_{12} f(a) \\ \partial_{21} f(a) & \partial_{22} f(a) \end{bmatrix} =: \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

Tegyük fel még azt is, hogy a *az* f *függvény stacionárius pontja, azaz* $f'(a) = 0$*.*

Ekkor:

1^o *Ha* $A > 0$ *és* $\det H(a) > 0$*, akkor* f*-nek* a*-ban lokális minimuma van;*

2^o *Ha* $A < 0$ *és* $\det H(a) > 0$*, akkor* f*-nek* a*-ban lokális maximuma van;*

3^o *Ha* $\det H(a) < 0$*, akkor* f*-nek* a*-ban nincs lokális szélsőértéke (az* a *pont nyeregpont).*

F48. Határozza meg az

$$f(x, y) := x^3 - 3x^2 + 2xy + y^2 \qquad \big((x, y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) & = & 3x^2 - 6x + 2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 2x + 2y & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x = -y,\ x = 0,\ x = \frac{8}{3},$$

ezért az f függvény stacionárius helyei, azaz a lehetséges lokális szélsőértékhelyek:

$$P_0(0, 0), \quad P_1(\tfrac{8}{3}, -\tfrac{8}{3}).$$

Az elégséges feltétel alkalmazásához először a Hesse-féle mátrixot határozzuk meg. Mivel

$$\partial_{xx} f(x, y) = 6x - 6, \quad \partial_{xy} f(x, y) = 2 = \partial_{yx} f(x, y), \quad \partial_{yy} f(x, y) = 2,$$

így

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} 6x - 6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

A $P_0(0, 0)$ pontban $H(0, 0) = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix indefinit, ui. $\det H(0, 0) < 0$, ezért $(0, 0)$-ban f*-nek nincsen szélsőértéke.*

A $P_1(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$ pontban $H(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3}) = \begin{bmatrix} 10 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ mátrix pozitív definit, ui. mindkét sarokaldetermináns pozitív, ezért $P_1(\frac{8}{3}, -\frac{8}{3})$-ben *$f$-nek lokális minimuma van.*

Megjegyzés. A $(0,0)$ stacionárius hely esetén eljárhatunk a következő módon is: f grafikonjának és az $y = x$ szögfelező síknak a metszete a $z = f(x,x) = x^3$ görbe. Mint azt már az egyváltozós függvényekre vonatkozó ismeretekből tudjuk, hogy ennek a görbének nincsen 0-ban szélsőértéke, így mivel $f(0,0) = 0$ és f az origó tetszőleges környezetében felvesz negatív és pozitív értéket is, itt nem lehet szélsőértéke. ■

F49. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 \quad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$

függvény lokális szélsőértékhelyeit.

Megoldás. A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételt alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\left.\begin{array}{rcccl} \partial_x f(x,y) & = & 4x^3 - 2x - 2y & = & 0 \\ \partial_y f(x,y) & = & 4y^3 - 2x - 2y & = & 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow (x,y) \in \{(-1,-1); (0,0); (1,1)\}.$$

Az elégséges feltétel alkalmazásához először a Hesse-féle mátrixot határozzuk meg. Mivel

$$\partial_{xx} f(x,y) = 12x^2 - 2, \quad \partial_{xy} f(x,y) = -2 = \partial_{yx} f(x,y), \quad \partial_{yy} f(x,y) = 12y^2 - 2,$$

ezért

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 12x^2 - 2 & -2 \\ -2 & 12y^2 - 2 \end{bmatrix}$$

Mivel a $H(1,1) = H(-1,-1) = \begin{bmatrix} 10 & -2 \\ -2 & 10 \end{bmatrix}$ pozitív definit, így f-nek $(-1,-1)$-ben és $(1,1)$-ben lokális minimuma van.

A $(0,0)$ pontban $\det H(0,0) = \det \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} = 0$, ezért a tanult másodrendű elégséges feltétel most nem alkalmazható. Mivel $f(0,0) = 0$, ezért a lokális szélsőérték f-nek az origó körüli *előjelétől* függ. *Vegyük észre*, hogy

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - 2xy - y^2 = x^4 + y^4 - (x+y)^2,$$

ezért

$$f(x,-x) = 2x^4 > 0 \qquad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}),$$

ami azt jelenti, hogy f az $y = -x$ egyenes mentén az origót kivéve pozitív értéket vesz fel. *Tekintsük most* a függvényértékeket az x-tengely, vagyis az $y = 0$ egyenletű egyenes mentén. Mivel $f(x,0) = x^4 - x^2 = x^2(x^2 - 1) < 0$, ha $|x| < 1$ és $x \neq 0$, ezért az f függvény az origó tetszőleges környezetében felvesz pozitív és negatív értéket is. Ez azt jelenti, hogy $f(0,0) = 0$ *nem lokális szélsőérték.* ■

F50. Határozza meg az alábbi függvények *lokális szélsőértékeit.*

(a) $f(x,y) := x^2 + xy + y^2 - 3x - 3y \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(b) $f(x,y) := x^3 + y^3 - 9xy \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(c) $f(x,y) := x^3y^2(4 - x - y) \ \big((x,y) \in \mathbb{R}\big)$;

(d) $f(x,y) := x^4y^2(4 - x - y) \ \big((x,y) \in \mathbb{R}\big)$;

(e) $f(x,y) := e^{-x^2-y^2}(x^2 + y^2) \quad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$;

(f) $f(x,y) := (1 + e^y)\cos x - ye^y \ (x, y \in \mathbb{R})$;

(g) $f(x,y) := x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z \ (x, y, z \in \mathbb{R})$.

F51. Legyen $f(x,y) := x^4 + y^2$, $g(x,y) := x^3 + y^2$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Igazolja, hogy mindkét függvény teljesíti a szélsőérték létezésére vonatkozó másodrendű szükséges feltételt a $(0,0)$ pontban. Indokolja meg, hogy f-nek minimuma van, míg g-nek nincs szélsőértéke a $(0,0)$ pontban.

F52. Határozza meg az

$$f(x,y) := x^3 + y^3 - 9xy \qquad \big((x,y) \in \mathbb{R}^2\big)$$

függvénynek a

(a) lokális szélsőértékeit;

(b) az $A := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 2x\big\}$ halmazon az abszolút szélsőértékeit.

Megoldás. (a) A függvény kétszer (sőt akárhányszor is!) deriválható az egész $\mathbb{R}^2$-ön.

Először a lokális szélsőértékre vonatkozó **elsőrendű szükséges** feltételt alkalmazzuk: Mivel a

$$\partial_1 f(x,y) = 3x^2 - 9y = 0, \qquad \partial_2 f(x,y) = 3y^2 - 9x = 0$$

egyenletrendszernek valós megoldásai $(0,0)$ és $(3,3)$, ezért ezekben a pontokban *lehet* a függvénynek lokális szélsőértéke.

A **másodrendű elégséges** feltétel ellenőrzéséhez a másodrendű parciális deriváltakat kell kiszámolni: Mivel

$$\partial_{11} f(x,y) = 6x, \quad \partial_{12} f(x,y) = \partial_{21} f(x,y) = -9, \quad \partial_{22} f(x,y) = 6y$$

minden $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ esetén, ezért a Hesse-mátrix az (x,y) pontban

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} \partial_{11} f(x,y) & \partial_{12} f(x,y) \\ \partial_{21} f(x,y) & \partial_{22} f(x,y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x & -9 \\ -9 & 6y \end{bmatrix}.$$

A $P_1(3,3)$ pontban ez $H(3,3) = \begin{bmatrix} 18 & -9 \\ -9 & 18 \end{bmatrix}$. Ennek sarokaldeterminánsai pozitívak, ezért ez a mátrix pozitív definit, következésképpen a $P_1(3,3)$ pont **lokális minimumhely**.

A $P_2(0,0)$ pontban $H(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & -9 \\ -9 & 0 \end{bmatrix}$. Mivel $\det H(0,0) < 0$, ezért a Hesse-féle mártix (ill. az általa generált kvadratikus alak) *indefinit*, ezért ebben a pontban a függvénynek *nincs lokális szélsőértéke*.

(b) Az A halmaz a $(0,0)$, az $(5,0)$ és az $(5,10)$ pontok által meghatározott zárt háromszöglap, ami egy korlátos és zárt, következésképpen kompakt halmaz. Az f függvény folytonos ezen a halmazon, ezért Weierstrass tétele szerint a függvénynek van abszolút maximuma és abszolút minimuma az A halmazon. Ez a $P_1(3,3) \in A$ belső pontban lehet, vagy pedig a határon.

Az A határa három részre bontható:

(i) $A_1 := \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 5\}$. A $g(x) := f(x,0) = x^3$ $(0 \le x \le 5)$ függvény abszolút minimumhelye 0, abszolút maximumhelye pedig 5. Az f függvény az A_1 halmazon a $(0,0)$ pontban veszi fel a legkisebb, az $(5,0)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, és

$$\boxed{f(0,0) = 0} \ \text{(min.)}, \qquad \boxed{f(5,0) = 125} \ \text{(max.)}.$$

(ii) $A_2 := \{(5,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le 10\}$. Most a $g(y) := f(5,y) = 125 + y^3 - 45y$ $(0 \le y \le 10)$ függvény abszolút szélsőértékeit kell meghatároznunk.

$$g'(y) = 3y^2 - 45 = 0 \ \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{15}; y_1 = \sqrt{15} \in (0,10), \quad -\sqrt{15} \notin (0,10);$$

mivel $g''(y_1) = 6y_1 > 0$, ezért y_1 lokális minimumhelye g-nek.

$$g(\sqrt{15}) = 125 - 30\sqrt{15}, \quad g(0) = 125 \ \text{ és } \ g(10) = 675,$$

következésképpen g abszolút minimumhelye $\sqrt{15}$, abszolút maximumhelye pedig 10. Az f függvény az A_2 halmazon a $(5,\sqrt{15})$ pontban veszi fel a legkisebb, az $(5,10)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, és

$$\boxed{f(5,\sqrt{15}) = 125 - 30\sqrt{15}} \ \text{(min.)}, \qquad \boxed{f(5,10) = 675} \ \text{(max.)}.$$

(iii) $A_3 := \{(x,2x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 5\}$. A $g(x) := f(x,2x) = 9x^3 - 18x^2$ $(0 \le x \le 5)$ függvény abszolút szélsőértékeinek meghatározása:

$$g'(x) = 27x^2 - 36x = 0 \ \Leftrightarrow x = 0 \text{ vagy } x = \frac{4}{3}; \quad g''(\tfrac{4}{3}) = 54 \cdot \frac{4}{3} - 36 > 0;$$
$$g(0) = 0, \quad g(\tfrac{4}{3}) = 9 - \frac{32}{3} < 0, \quad g(5) > 0,$$

következésképpen g abszolút minimumhelye $\frac{4}{3}$, abszolút maximumhelye pedig 5. Az f függvény az A_3 halmazon a $\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$ pontban veszi fel a legkisebb, az $(5,10)$ pontban pedig a legnagyobb értékét, és

$$\boxed{f\left(\tfrac{4}{3}, \tfrac{8}{3}\right) = -\tfrac{32}{3}} \ \text{(min.)}, \qquad \boxed{f(5,10) = 675} \ \text{(max.)}.$$

Vegyük még figyelembe azt is, hogy $f(3,3) = -27$.

Az eddigieket összefoglalva azt kapjuk, hogy az f függvény abszolút szélsőértékei az A halmazon:

$$f(3,3) = -27 \quad \text{(min.)} \qquad f(5,10) = 675 \quad \text{(max.)} \quad \blacksquare$$

F53. Keresse meg a következő függvények abszolút szélsőértékhelyeit a megadott halmazokon:

(a) $f(x,y) := y(2x-3)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le x^2\}$;

(b) $f(x,y) := x^2 - y^2$, $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x, y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\}$;

(c) $f(x,y) := x^3 - 3x^2 - y^2$, $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,:\, x \ge -1,\ x - 1 \le y \le 4\}$;

(d) $f(\alpha,\beta,\gamma) := \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, ahol α, β, γ egy háromszög szögei.