Kidolgozott mintapéldák

a III. éves programtervezők

Operációkutatás II.

c. tárgyához

2004. december 30.

1. Példa a 7.1. Fejezethez

Feladat

Vizsgálja meg a megengedett csökkenési irányok módszerével, hogy a (7,7) pont optimális-e az

$$
\begin{aligned}
xy &\rightarrow \max & (1.1)\\
x^2+y^2 &\leq 100 & (1.2)\\
x+y &\leq 14 & (1.3)\\
x &\geq 0 & (1.4)\\
y &\geq 0 & (1.5)
\end{aligned}
$$

feladatra!

Megoldás

Térjünk át minimalizálási feladatra és $\leq$ típusú feltételekre és jelöljük az egyes függvényeket a jegyzet jelöléseivel:

$$
\begin{aligned}
f(x,y) &= -xy \rightarrow \min & (1.6)\\
g_1(x,y) &= x^2+y^2 \leq 100 & (1.7)\\
g_2(x,y) &= x+y \leq 14 & (1.8)\\
g_3(x,y) &= -x \leq 0 & (1.9)\\
g_4(x,y) &= -y \leq 0 & (1.10)
\end{aligned}
$$

Az adott pontban a (1.8) feltétel aktív és ez lineáris. Így, ha az adott pont optimális, akkor tételünk szerint szükséges, hogy a

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma & \rightarrow & \max \\
\langle f'(7,7),s\rangle+\sigma & \leq & 0 \\
\langle g_2'(7,7),s\rangle & \leq & 0 \\
\|s\|_1 & \leq & 1 \\
\sigma & \geq & 0
\end{array}
\qquad (1.11)
$$

feladat optimális megoldására $\sigma=0$ adódjon.

Minthogy

$$
f'(x,y)\Big|_{(x,y)=(7,7)} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(7,7)} = \begin{pmatrix} -7 \\ -7 \end{pmatrix}
$$

és

$$
g_2'(x,y)\Big|_{(x,y)=(7,7)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},
$$

az (1.11) LP feladat a mi esetünkben

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma & \rightarrow & \max \\
-7s_1-7s_2+\sigma & \leq & 0 \\
s_1+s_2 & \leq & 0 \\
-1 \leq s_1 & \leq & 1 \\
-1 \leq s_2 & \leq & 1 \\
\sigma & \geq & 0
\end{array}
\qquad (1.12)
$$

Mivel a megengedett tartomány negatív koordinátájú pontokat is tartalmaz, először egy transzformációval ezt szüntetjük meg. Vezessük be a

$$d_i = s_i + 1, \quad i = 1,2$$

vátozókat. Ezekkel az új változókkal az (1.12) feladat

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \rightarrow & \max \\ -7d_1 - 7d_2 + \sigma & \leq & -14 \\ d_1 + d_2 & \leq & 2 \\ d_1 & \leq & 2 \\ d_2 & \leq & 2 \\ d_1, d_2, \sigma & \geq & 0 \end{array} \tag{1.13}$$

feladattá transzformálódik.

Mivel (1.13) első feltételében a jobboldalon negatív érték van, -1-gyel szorozva és a w kiegészítő változót bevezetve ezt a feltételt pozitív jobboldalú egyenlőség-feltétellé alakítjuk:

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \rightarrow & \max \\ 7d_1 + 7d_2 - \sigma - w & = & 14 \\ d_1 + d_2 & \leq & 2 \\ d_1 & \leq & 2 \\ d_2 & \leq & 2 \\ d_1, d_2, \sigma, w & \geq & 0 \end{array} \tag{1.14}$$

Minthogy szigorúan megkövetelt egyenlőség-feltételünk is van, a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk.

Az induló szimplex-tábla:

	d_1	d_2	σ	w	u_1^*	u_2	u_3	u_4	
u_1^*	$\boxed{7}$	7	-1	-1	1	0	0	0	14
u_2	1	1	0	0	0	1	0	0	2
u_3	1	0	0	0	0	0	1	0	2
u_4	0	1	0	0	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	0	0	0
z^*	7	7	1	-1	1	0	0	0	14

ahol u_1 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Első lépésben a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	d_1	d_2	σ	w	u_1^*	u_2	u_3	u_4	
d_1	1	1	$-\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	0	0	0	2
u_2	0	0	$\boxed{\frac{1}{7}}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	1	0	0	0
u_3	0	-1	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{7}$	$-\frac{1}{7}$	0	1	0	0
u_4	0	1	0	0	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	0	0	0
z^*	0	0	0	0	-1	0	0	0	0

Mivel a másodlagos célfüggvény értéke 0, az elsődleges célfüggvény szerint folytatjuk a bázistranszformációt (a szimplex-táblázatból elhagyhatjuk a másodlagos célfüggvény sorát és az u_1^* eltérésváltozó oszlopát):

	d_1	d_2	σ	w	u_2	u_3	u_4	
d_1	1	1	-0	-0	0	0	0	2
σ	0	0	1	1	7	0	0	0
u_3	0	-1	0	0	1	1	0	0
u_4	0	1	0	0	0	0	1	2
z	0	0	0	-1	-7	0	0	0

Nincs az elsődleges célfüggvény sorában pozitív elem, tehát optimális megoldáshoz jutottunk, ahol

$$d_1 = 2, \quad d_2 = 0, \quad \sigma = 0,$$

ill.

$$s_1 = 1, \quad s_2 = -1, \quad \sigma = 0.$$

Mivel teljesül az optimális pontban, hogy $\sigma = 0$, így a vizsgált pont optimális.

Figyelem! Az optimalitást eldöntő LP feladatot ne próbáljuk találgatással megoldani!

2. Példa a 7.3. Fejezethez

Feladat

A Kuhn-Tucker tétel segítségével ellenőrizze, hogy a

$$x^2 + y \to \min \tag{2.15}$$
$$x^2 + y^2 \leq 9 \tag{2.16}$$
$$x + y^2 \leq 3 \tag{2.17}$$
$$x + y \leq 1 \tag{2.18}$$

lehet-e feladat optimumpontjában pontosan az első két korlátozó feltétel aktív!

Megoldás

Ha az optimumpontban pontosan az első két feltétel aktív, akkor ez a pont ki kell elégítse az

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\leq 9 \\ x + y^2 &\leq 3 \end{aligned}$$

egyenletrendszert. Ennek 3 pont tesz eleget:

$$u_1 = (x_1, y_1) = (-2, -\sqrt{5}), \quad u_2 = (x_2, y_2) = (-2, \sqrt{5}), \quad u_3 = (x_3, y_3) = (3, 0)$$

Azonban az optimumpontnak megengedettnek kell lennie, ezért a 3. feltételi egyenlőtlenségnek is teljesülnie kell, ez kizárja u_3 optimalitását.

A feladat konvex programozási feladat (ellenőrizze!) és teljesíti a Slater feltételt (találjon Slater pontot!), így a két lehetséges pont valamelyike pontosan akkor optimumpont, ha az adott pontban létezik a

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \tag{2.19}$$
$$\lambda_1(x^2 + y^2 - 9) = 0 \tag{2.20}$$
$$\lambda_2(x + y^2 - 3) = 0 \tag{2.21}$$
$$\lambda_3(x + y - 1) = 0 \tag{2.22}$$

rendszernek $\lambda_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad \sum_{i=1,2,3} \lambda_i \neq 0$ megoldása.

A aktivitási feltétel miatt az első két komplementaritási feltétel triviálisan teljesül mindkét pontban bármely $\lambda_1 \geq 0, \lambda_g e0$-ra, a harmadik komplementaritási feltételből pedig

$$\lambda_3 = 0$$

adódik mindkét esetben.

λ_1 és λ_2 meghatározása a (2.19) egyenletrendszerből történik.

Tegyük fel, hogy $u_1 = (x_1, y_1) = (-2, -\sqrt{5})$ optimális. Akkor a (2.19) feltétel alakja

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -4 \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2\sqrt{5} \end{pmatrix} = 0.$$

Innét

$$\lambda_1 = -\frac{8\sqrt{5} - 1}{10\sqrt{5}} < 0,$$

ami ellentmond a nemnegatívitási feltételnek, tehát u_1 nem lehet optimális.

Tegyük fel, hogy $u_2 = (x_2, y_2) = (-2, \sqrt{5})$ optimális. Akkor a (2.19) feltétel alakja

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2\sqrt{5} \end{pmatrix} = 0.$$

Innét

$$\lambda_1 = -\frac{8\sqrt{5}+1}{10\sqrt{5}} < 0,$$

ami szintén ellentmond a nemnegatívitási feltételnek, tehát u_2 sem lehet optimális.

3. Példa a 7.5. Fejezethez

Feladat

A megengedett irányok módszerével a $(6,8)$ pontból kiindulva hajtson végre egy teljes iterációt, majd írja fel a következő iterációhoz megoldandó LP feladatot az 1. Fejezet példájában szereplő

$$xy \to \max \tag{3.23}$$
$$x^2 + y^2 \le 100 \tag{3.24}$$
$$x + y \le 14 \tag{3.25}$$
$$x \ge 0 \tag{3.26}$$
$$y \ge 0 \tag{3.27}$$

feladatra!

Megoldás

Áttérünk minimalizálási feladatra mindenütt $\le$ típusú korlátozásokkal:

$$f(x,y) = -xy \to \min \tag{3.28}$$
$$g_1(x,y) = x^2 + y^2 \le 100 \tag{3.29}$$
$$g_2(x,y) = x + y \le 14 \tag{3.30}$$
$$g_3(x,y) = -x \le 0 \tag{3.31}$$
$$g_4(x,y) = -y \le 0 \tag{3.32}$$

Az adott pontban a (3.29) és a (3.30) feltételek aktívak és az utóbbi lineáris. Így a megengedett csökkenési irány kereséséhez a

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ \langle f'(6,8), s\rangle + \sigma & \le & 0 \\ \langle g_1'(6,8), s\rangle + \sigma & \le & 0 \\ \langle g_2'(6,8), s\rangle & \le & 0 \\ \|s\|_1 & \le & 1 \\ \sigma & \ge & 0 \end{array} \tag{3.33}$$

LP feladatot kell megoldanunk.

Minthogy

$$f'(x,y)\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \end{pmatrix},$$

$$g_1'(x,y)\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} 12 \\ 16 \end{pmatrix},$$

és

$$g_2'(x,y)\Big|_{(x,y)=(6,8)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

az (3.33) LP feladat a mi esetünkben

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \to & \max \\ -8s_1 - 6s_2 + \sigma & \le & 0 \\ 12s_1 + 16s_2 + \sigma & \le & 0 \\ s_1 + s_2 & \le & 0 \\ -1 \le s_1 & \le & 1 \\ -1 \le s_2 & \le & 1 \\ \sigma & \ge & 0 \end{array} \tag{3.34}$$

Mivel a megengedett tartomány negatív koordinátájú pontokat is tartalmaz, először egy transzformációval ezt szüntetjük meg. Vezessük be a

$$d_i = s_i + 1, \quad i = 1, 2$$

vátozókat. Ezekkel az új változókkal az (3.34) feladat

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \rightarrow & \max \\ -8d_1 - 6d_2 + \sigma & \leq & -14 \\ 12d_1 + 16d_2 + \sigma & \leq & 28 \\ d_1 + d_2 & \leq & 2 \\ d_1 & \leq & 2 \\ d_2 & \leq & 2 \\ d_1, d_2, \sigma & \geq & 0 \end{array} \tag{3.35}$$

feladattá transzformálódik.

Mivel (3.35) első feltételében a jobboldalon negatív érték van, -1-gyel szorozva és a w kiegészítő változót bevezetve ezt a feltételt pozitív jobboldalú egyenlőségfeltétellé alakítjuk:

$$\begin{array}{rcl} \sigma & \rightarrow & \max \\ 8d_1 + 6d_2 - \sigma - w & = & 14 \\ 12d_1 + 16d_2 + \sigma & \leq & 28 \\ d_1 + d_2 & \leq & 2 \\ d_1 & \leq & 2 \\ d_2 & \leq & 2 \\ d_1, d_2, \sigma, w & \geq & 0 \end{array} \tag{3.36}$$

Minthogy szigorúan megkövetelt egyenlőség-feltételünk is van, a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk.

Az induló szimplex-tábla:

	d_1	d_2	σ	w	u_1^*	u_2	u_3	u_4	u_5	
u_1^*	$\boxed{8}$	6	-1	-1	1	0	0	0	0	14
u_2	12	16	1	0	0	1	0	0	0	28
u_3	1	1	0	0	0	0	1	0	0	2
u_4	1	0	0	0	0	0	0	1	0	2
u_4	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
z^*	8	6	-1	-1	1	0	0	0	0	14

ahol u_1 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Első lépésben a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	d_1	d_2	σ	w	u_1^*	u_2	u_3	u_4	u_5	
d_1	1	$\frac{6}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	0	0	0	0	$\frac{14}{8}$
u_2	0	7	$\frac{5}{2}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	0	0	7
u_3	0	$\frac{2}{8}$	$\boxed{\frac{1}{8}}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	1	0	0	$\frac{2}{8}$
u_4	0	$-\frac{6}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$	0	0	1	0	$\frac{2}{8}$
u_5	0	1	0	0	0	0	0	0	1	2
z	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
z^*	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Mivel a másodlagos célfüggvény értéke 0, az elsődleges célfüggvény szerint folytatjuk a bázistranszformációt (a szimplex-táblázatból elhagyhatjuk a másodlagos célfüggvény sorát és és az u_1^* eltérésváltozó oszlopát):

	d_1	d_2	σ	w	u_2	u_3	u_4	u_5	
d_1	1	1	0	0	0	1	0	0	2
u_2	0	2	0	-1	1	-20	0	0	2
σ	0	2	1	1	0	8	0	0	2
u_4	0	-1	0	0	0	-1	1	0	0
u_5	0	1	0	0	0	0	0	1	2
z	0	-2	0	-1	0	-8	0	0	-2

Nincs az elsődleges célfüggvény sorában pozitív elem, tehát optimális megoldáshoz jutottunk, ahol

$$d_1 = 2, \;\; d_2 = 0, \;\; \sigma = 2,$$

ill.

$$s_1 = 1, \;\; s_2 = -1, \;\; \sigma = 2.$$

Mivel $\sigma \neq 0$, így a $(6,8)$ pont nem optimális és az $(s_1, s_2) = (1, -1)$ megengedett csökkenési irány.

Azt kell megvizsgálnunk, hogy ebben az irányban melyik megengedett pontban minimális az (3.23) célfüggvény.

A $(6,8)$ pontból kiinduló félegyenes $[0, \lambda]$ szakasza az (3.24)–(3.27) által meghatározott tartományban van, azaz megengedett, ha $\lambda > 0$ kielégíti az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$(6+\lambda)^2 + (8-\lambda)^2 \leq 100 \tag{3.37}$$
$$6+\lambda+8-\lambda \leq 14 \tag{3.38}$$
$$6+\lambda \geq 0 \tag{3.39}$$
$$8-\lambda \geq 0. \tag{3.40}$$

A (3.37)-t a $[0,2]$,(3.38)-t a $(-\infty, \infty)$, a (3.39)-t a $[-6, \infty)$, a (3.40)-t a $(-\infty, 8]$ intervallumok elégítik ki, a rendszert pedig ezek metszete, azaz a $[0,2]$ intervallum a maximális megengedett intervallum.

A célfüggvény ebben az irányban

$$f(\lambda) = -(6+\lambda)(8-\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 48$$

szigorúan konvex függvény. Mivel $f(0) = f(2) = -48$, így az $f(\lambda)$ függvény a $[0,2]$ intervallum belsejében veszi fel a minimumát, ahol $f'(\lambda) = 2\lambda - 2 = 0$, vagyis $\lambda = 1$-nél.

A következő iteráció kezdőpontja tehát: $(6+1, 8-1) = (7,7)$.

Mivel az 1. fejezet példájában szereplő NLP feladat azonos az ittenivel, és ott pontosan a $(7,7)$ pontot vizsgáltuk, innét az ottani elemzést kell megismételni.

Figyelem! Ne keressünk megengedett csökkenési irányt találgatással, még akkor sem, ha a feladat struktúrája nagyon egyszerű. A vizsgán a programozható algoritmus ismeretéről kell számot adni, ami bármilyen méretű feladatra működik. A megengedett csökkenési irányt meghatározó LP feladatot se akarjuk találgatással megoldani!

4. Példa a 7.7. Fejezethez

Feladat

Milyen p paraméter mellett lehet a

$$\begin{aligned} x^2 - py &\rightarrow \min && (4.41) \\ x^2 + y^2 &\leq 9 && (4.42) \\ x + y^2 &\leq 3 && (4.43) \\ x + y &\geq 1 && (4.44) \end{aligned}$$

feladatnak olyan nyeregpontja, amelyre pontosan 2. és a 3. korlátozó feltétel aktív?

Megoldás

Ha a nyeregpontban a 2. és a 3. feltétel aktív, akkor ez a pont megoldása az

$$\begin{aligned} x + y^2 &= 3 && (4.45) \\ x + y &= 1 && (4.46) \end{aligned}$$

egyenletrendszernek, azaz az

$$u_1 = (x_1, y_1) = (-1, 2) \qquad u_2 = (x_2, y_2) = (2, -1)$$

pontok jöhetnek számításba. Ezek megengedettek is, mivel kielégítik az első korlátozó feltételt is.

Ahhoz, hogy a két lehetséges pont valamelyike nyeregpont lehessen, ki kell elégítenie a nyeregpontfeltételeket.

A jegyzet jelöléseinek megfelelően legyen

$$\begin{aligned} f(x,y) &= x^2 - py \\ g_1(x,y) &= x^2 + y^2 - 9 \leq 0 \\ g_2(x,y) &= x + y^2 - 3 \leq 0 \\ g_3(x,y) &= -x - y + 1 \leq 0 \end{aligned}$$

és a megfelelő

$$\mathcal{L}(x,y) = f(x,y) + \lambda_1 g_1(x,y) + \lambda_2 g_2(x,y) + \lambda_3 g_3(x,y)$$

Lagrange függvénnyel a nyeregpontfeltételek az

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'_{x,y} = \begin{pmatrix} 2x \\ -p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix} \lambda_1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 2y \end{pmatrix} \lambda_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \lambda_3 = 0 && (4.47) \\ \lambda_1(x^2 + y^2 - 9) = 0 && (4.48) \\ \lambda_2(x + y^2 - 3) = 0 && (4.49) \\ \lambda_3(-x - y + 1) = 0 && (4.50) \end{aligned}$$

alakot öltik, azaz az adott pontban léteznie kell a (4.47)-(4.50) rendszernek olyan $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \lambda_3 \geq 0$ megoldásának, ahol $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3$ nem mindegyike 0.

A (4.49) és a (4.50) komplementaritási feltételek mindkét pontban triviálisan teljesülnek bármely $\lambda_2 \geq 0, \lambda_3 \geq 0$ esetén, a (4.48) pedig mindkét esetben csak akkor, ha $\lambda_1 = 0$.

A λ_2 és λ_3 paraméterek meghatározása a (4.47)-ből történik:

<u>1.eset:</u> Ha $(x,y) = (-1,2)$, akkor a (4.47)

$$\begin{aligned} -2 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ -p + 4\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása

$$\lambda_2 = \frac{p-2}{3}, \qquad \lambda_3 = \frac{p-8}{3}.$$

Innét

$\lambda_2 \geq 0$, ha $p \geq 2$ és $\lambda_2 > 0$, ha $p > 2$.

$\lambda_3 \geq 0$, ha $p \geq 8$.

Vagyis, ha $p \geq 8$, akkor teljesülnek a nyeregpont-feltételek a $(-1, 2)$ pontban.

2.eset: Ha $(x, y) = (2, -1)$, akkor a (4.47)

$$\begin{aligned} 4 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ -p + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

egyenletrendszer megoldása

$$\lambda_2 = \frac{-p-4}{3}, \qquad \lambda_3 = \frac{-p+8}{3}.$$

Innét

$\lambda_2 \geq 0$, ha $p \leq -4$.

$\lambda_3 \geq 0$, ha $p \leq 8$ és $\lambda_3 > 0$, ha $p < 8$.

Vagyis, ha $p < -4$, akkor teljesülnek a nyeregpont-feltételek a $(2, -1)$ pontban.

Mivel a feladat konvex programozási feladat (ellenőrízze!) a kapott feltételek mellett mindkét pont nyeregpont is.

5. Példa a 10. Fejezethez

Feladat

Ellenőrizze, hogy megoldható-e az

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{x+y-1}{x-4y-6} & \to & \max \\ 2x+y & \geq & 4 \\ 3x-4y & \leq & 12 \\ -x+2y & \leq & 12 \\ x,y & \geq & 0 \end{array}$$

hiperbolikus programozási feladat a Charnes-Cooper eljárással és pozitív válasz esetén oldja is meg ezzel a módszerrel!

Megoldás

A feladat Charnes-Cooper algoritmussal való megoldhatóságának két feltétele van:

a) a korlátozó tartomány korlátos legyen,

b) a nevező a korlátozó tartományon ne váltson előjelet.

A korlátosság ellenőrzése:

A korlátozó tartomány korlátos, ha minden hozzá tartozó pont $\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|$ normája véges. Mivel a tartomány csak nemnegatív koordinátájú pontokat tartalmaz, ennek ellenőrzése az

$$\begin{array}{rcl} x+y & \to & \max \\ 2x+y-w & = & 4 \\ 3x-4y & \leq & 12 \\ -x+2y & \leq & 12 \\ x,y,w & \geq & 0 \end{array}$$

LP feladat megoldását igényli, ahol az első, $\geq$ típusú feltételi egyenlőtlenséget kiegészítő változóval egyenlőség-feltétellé alakítottuk.

A szigorúan megkövetelt egyenlőségfeltétel miatt a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk. Ehhez az alábbi induló szimplex-táblázat tartozik:

	x	y	w	u_1^*	u_2	u_3	
u_1^*	$\boxed{2}$	1	-1	1	0	0	4
u_2	3	-4	0	0	1	0	12
u_3	-1	2	0	0	0	1	12
z	1	1	0	0	0	0	
z^*	2	1	-1	1	0	0	4

ahol u_1 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Első lépésben a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	x	y	w	u_1^*	u_2	u_3	
x	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	2
u_2	0	$-\frac{11}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	6
u_3	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	14
z	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	-2
z^*	0	0	0	0	0	0	14

Mivel a másodlagos célfüggvány értéke 0, az elsődleges célfüggvény szerint folytatjuk a bázistranszformációt (a szimplex-táblázatból elhagyhatjuk a másodlagos célfüggvény sorát és és az u_1^* eltérésváltozó oszlopát):

	x	y	w	u_2	u_3	
x	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	4
w	0	$-\frac{11}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	4
u_3	0	$\boxed{\frac{2}{3}}$	0	$\frac{1}{3}$	1	16
z	0	$\frac{8}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	-4

	x	y	w	u_2	u_3	
x	1	0	0	1	2	36
w	0	0	1	$\frac{5}{2}$	$\frac{11}{2}$	92
y	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	24
z	0	1	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	-60

Minthogy a tábla utolsó sorában nincs pozitív elem, a célfüggvény értéke véges ($z = 60$), a korlátozó tartomány korlátos. A korlátozó tartomány origótól leftávolabbi pontja $(36, 24)$.

A nevező előjelváltásának vizsgálata:

Minthogy a $(36, 24)$ pont megengedett, és ebben a pontban a nevező függvényértéke -66, azaz negatív, a nevező nem vált előjelet, ha az egész megengedett tartományon negatív marad, azaz a nevezőnek, mint célfüggvénynek a megengedett tartományon vett maximuma is negatív kell legyen. Ennek eldöntésére a

$$\begin{aligned} x - 4y - 6 &\rightarrow \max \\ 2x + y - w &= 4 \\ 3x - 4y &\leq 12 \\ -x + 2y &\leq 12 \\ x, y, w &\geq 0 \end{aligned}$$

LP feladatot kell megoldanunk, ahol az első, $\geq$ típusú feltételi egyenlőtlenséget már egyenlőség-feltétellé alakítottuk.

A szigorúan megkövetelt egyenlőségfeltétel miatt a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk. Ehhez az alábbi induló szimplex-tábla tartozik:

	x	y	w	u_1^*	u_2	u_3	
u_1^*	$\boxed{2}$	1	-1	1	0	0	4
u_2	3	-4	0	0	1	0	12
u_3	-1	2	0	0	0	1	12
z	1	-4	0	0	0	0	6
z^*	2	1	-1	1	0	0	4

ahol u_1 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Első lépésben a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	x	y	w	u_1^*	u_2	u_3	
x	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	2
u_2	0	$-\frac{11}{2}$	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	6
u_3	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	14
z	0	$-\frac{9}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	4
z^*	0	0	-0	0	0	0	0

A másodlagos célfüggvény értéke 0, tehát teljesíthető az egyenlőségfeltétel. Így a másodlagos célfüggvény sorát és a most már felesleges u_1^* eltérésváltozó oszlopát elhagyhatjuk, és az eredeti célfüggvény szerint folytathatjuk az algoritmust.

	x	y	w	u_2	u_3	
x	1	$-\frac{4}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	0	4
w	0	$-\frac{11}{3}$	1	$\frac{2}{3}$	0	4
u_3	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	16
z	0	$-\frac{8}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	0	2

Mivel az utolsó sorban nincs pozitív elem, optimális megoldáshoz jutottunk, vagyis a nevező maximális értéke -2, vagyis negatív, így beláttuk, hogy a nevező nem vált előjelet.

A Charnes-Cooper algoritmus alkalmazása:

Mivel sem a célfüggvény értéke, sem az optimum helye nem változik, ha célfüggvény számlálóját és nevezőjét ugyanazzal a számmal megszorozzuk, ezért változtassuk pozitív nevezőjűvé a célfüggvényt, azaz szorozzuk meg a célfuggvény számlálóját és nevezőjét is -1-gyel, azaz az új ekvivalens feladatunk a következő:

$$\begin{aligned}
\frac{-x-y+1}{-x+4y+6} &\rightarrow \max \\
2x+y &\geq 4 \\
3x-4y &\leq 12 \\
-x+2y &\leq 12 \\
x,y &\geq 0
\end{aligned}$$

Vezessük be a

$$t=\frac{1}{-x+4y+6}, \quad \bar{x}=tx, \quad \bar{y}=ty$$

változókat.

Figyelembe véve, hogy $t \geq 0$ (ezért volt célszerű az eredeti célfüggvény számlálójának és nevezőjének is -1-gyel való szorzása), az új változók bevezetésével

$$\frac{-x-y+1}{-x+4y+6}=-tx-ty+t=-\bar{x}-\bar{y}+t \rightarrow \max$$

$$t(-2x-y+4)=-2\bar{x}-\bar{y}+4t \leq 0$$

$$t(3x-4y-12)=3\bar{x}-4\bar{y}-12t \leq 0$$

$$t(-x+2y-12)=-\bar{x}+2\bar{y}-12t \leq 0$$

$$t(-x+4y+6)=-\bar{x}+4\bar{y}+6t=1$$

$$tx = \bar{x} \geq 0$$

$$ty = \bar{y} \geq 0$$

így a HP feladat a következő LP feladatba transzformálódik:

$$\begin{array}{rcl} -\bar{x} - \bar{y} + t & \rightarrow & \max \\ -2\bar{x} - \bar{y} + 4t & \leq & 0 \\ 3\bar{x} - 4\bar{y} - 12t & \leq & 0 \\ -\bar{x} + 2\bar{y} - 12t & \leq & 0 \\ -\bar{x} + 4\bar{y} + 6t & = & 1 \\ \bar{x}, \bar{y}, t & \geq & 0 \end{array}$$

Mivel szigorúan teljesítendő egyenlőség-feltételünk is van, a megoldásra a kétfázisú szimplex módszert alkalmazzuk. Ennek induló szimplex táblázata:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	t	u_1	u_2	u_3	u_4^*	
u_1	-2	-1	$\boxed{4}$	1	0	0	0	0
u_2	3	-4	-12	0	1	0	0	0
u_3	-1	2	-12	0	0	1	0	0
u_4^*	-1	4	6	0	0	0	1	1
z	-1	-1	1	0	0	0	0	
z^*	-1	4	6	0	0	0	1	1

ahol u_4 mellett a * jelzi, hogy melyik az az eltérésváltozó, amelyik csak 0 értéket vehet fel, azaz ki kell kerüljön a bázisból. z jelöli az elsődleges, z^* a másodlagos célfüggvényt.

Először a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk:

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	t	u_1	u_2	u_3	u_4^*	
t	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	0	0	0
u_2	-3	-7	0	3	1	0	0	0
u_3	-7	-1	0	3	0	1	0	0
u_4^*	2	$\boxed{\frac{11}{2}}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	1
z	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	0	0
z^*	2	$\frac{11}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	1

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	t	u_1	u_2	u_3	u_4^*	
t	$-\frac{9}{22}$	0	1	$\frac{2}{11}$	0	0	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{22}$
u_2	$-\frac{5}{11}$	0	0	$\frac{12}{11}$	1	0	$\frac{14}{11}$	$\frac{14}{11}$
u_3	$-\frac{73}{11}$	0	0	$\frac{30}{11}$	0	1	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$
$\bar{y}$	$\frac{4}{11}$	1	0	$-\frac{3}{11}$	0	0	$\frac{2}{11}$	$\frac{2}{11}$
z	$-\frac{5}{22}$	0	0	$-\frac{5}{11}$	0	0	$\frac{3}{22}$	$\frac{3}{22}$
z^*	0	0	0	0	0	0	0	0

A másodlagos célfüggvény értéke 0, tehát teljesíthető az egyenlőségfeltétel. Így a másodlagos célfüggvény sorát és a most már felesleges u_4^* eltérésváltozó oszlopát elhagyjuk, és az eredeti célfüggvény szerint folytatjuk az algoritmust. Azonban a megmaradt szimplex tábla utolsó sorában, azaz az elsődleges célfüggvény sorában nincs pozitív elem, így a tábla máris az optimális megoldást tartalmazza, nevezetesen

$$\bar{x} = 0, \quad \bar{y} = \frac{2}{11}, \quad t = \frac{1}{22}, \quad z = -\frac{3}{22}$$

Innét, visszatérve az eredeti változókra

$$x = 0, \quad y = 4$$

és a célfüggvény optimális értéke $-\frac{3}{22}$.