Hiperbolikus függvények és inverzeik

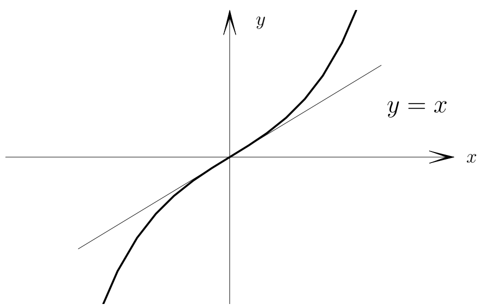
A szinuszhiperbolikusz-függvény

$$\boxed{\operatorname{sh} x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})}$$

A sh függvény tulajdonságai:
- páratlan $[\operatorname{sh} x = -\operatorname{sh}(-x) \ (x \in \mathbb{R})]$;
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és

$$\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\operatorname{sh}' 0 = \operatorname{ch} 0 = 1;$$

- $\uparrow$ az $\mathbb{R}$-en;
- konvex $(0, +\infty)$, konkáv $(-\infty, 0)$-n;
- $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{sh} = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{sh} = -\infty$,
- $\mathcal{R}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$;



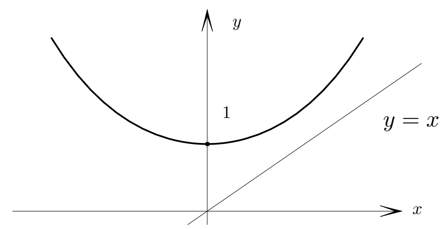
A koszinuszhiperbolikusz-függvény

$$\boxed{\operatorname{ch} x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (x \in \mathbb{R})}$$

A ch függvény tulajdonságai:
- páros $[\operatorname{ch} x = \operatorname{ch}(-x) > 0 \ \ (x \in \mathbb{R})]$;
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és

$$\operatorname{ch}' x = \operatorname{sh} x \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\operatorname{ch}' 0 = \operatorname{sh} 0 = 0;$$

- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n, $\uparrow$ $(0, +\infty)$-n;
- konvex $\mathbb{R}$-en;
- $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{ch} = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{ch} = +\infty$,
- $\mathcal{R}_{\operatorname{ch}} = [1, +\infty)$;



A trigonometrikus függvények nevére utalást indokolják az alábbi azonosságok.

Tétel. *Fennállnak a következő egyenlőségek:*

(a) $\operatorname{sh}(x+y) = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y + \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$,

(b) $\operatorname{ch}(x+y) = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y + \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$

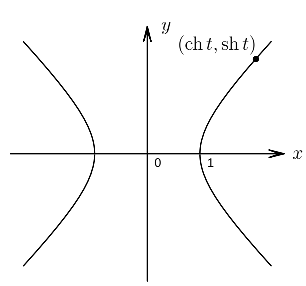
(*addíciós formulák*),

(c) $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$

(*négyzetes összefüggés*).

Bizonyítás. Behelyettesítéssel ■

A hiperbolikus függvényekre vonatkozó négyzetes összefüggés geometriai tartalma a következő: Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén a $(\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t) \in \mathbb{R}^2$ pontok rajta vannak az $x^2 - y^2 = 1$ $(x > 0)$ egyenletű hiperbolaágon. A függvények nevében szereplő hiperbolikus jelző erre a geometriai kapcsolatra utal.



A trigonometrikus esethez hasonlóan az (a), (b) és (c)-ből további azonosságok nyerhetők. Például:

$$\operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, \qquad \operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \operatorname{ch} \frac{x \mp y}{2} \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A ch függvény képét **láncgörbé**nek is nevezik, mert egy homogén, hajlékony, nyúlásmentes, két végén felfüggesztett fonal (lánc) ilyen alakot vesz fel.

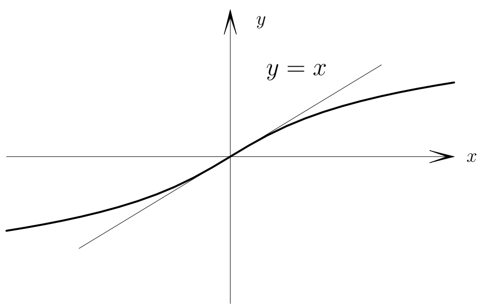
Az área szinuszhiperbolikusz-függvény

Mivel a sh függvény szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en, ezért invertálható:

$$\boxed{\operatorname{arsh} := \operatorname{sh}^{-1}}$$

Az arsh függvény tulajdonságai:

- $\mathcal{D}_{\operatorname{arsh}} = \mathcal{R}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{R}_{\operatorname{arsh}} = \mathcal{D}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$;
- páratlan $[\operatorname{arsh} x = -\operatorname{arsh}(-x)\ (x \in \mathbb{R})]$;
- deriválható $\mathbb{R}$-en, és
$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (x \in \mathbb{R});$$
- $\uparrow$ $\mathbb{R}$-en;
- konkáv $(0,+\infty)$-en, konvex $(-\infty,0)$-n;
- $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{arsh} = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{arsh} = -\infty$,
- az ln függvénnyel így fejezhető ki:
$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})$$



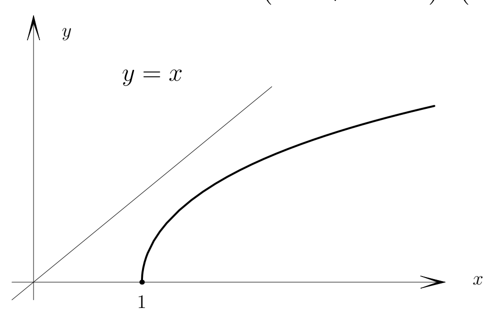
Az área koszinuszhiperbolikusz-függvény

A ch függvény nem, de például az $\mathbb{R}_0^+$-ra való leszűkítése már invertálható. Legyen

$$\boxed{\operatorname{arch} := (\operatorname{ch}_{|\mathbb{R}_0^+})^{-1}}$$

Az arch függvény tulajdonságai:

- $\mathcal{D}_{\operatorname{arch}} = [1,+\infty)$, $\quad \mathcal{R}_{\operatorname{arch}} = [0,+\infty)$;
- deriválható $(1,+\infty)$-en, és
$$\operatorname{arch}' x = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \quad (x \in (1,+\infty));$$
- $\uparrow$ $[1,+\infty)$-en;
- konkáv $[1,+\infty)$-en;
- $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{arch} = +\infty$;
- az ln függvénnyel így fejezhető ki:
$$\operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \in [1,+\infty))$$



Tétel. *Az* arsh *függvény deriválható az* $\mathbb{R}$*-en, és*

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Mivel a sh függvény differenciálható és $\operatorname{sh}' x = \operatorname{ch} x \neq 0$ $(\forall\, x \in \mathbb{R})$, ezért az inverz függvény deriválására vonatkozó tétel alapján az arsh függvény is differenciálható, és

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\operatorname{sh}'(\operatorname{arsh} x)} = \frac{1}{\operatorname{ch}(\operatorname{arsh} x)} \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Legyen $y := \operatorname{arsh} x$, azaz $\operatorname{sh} y = x$. A négyzetes összefüggés alapján $\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y} = \sqrt{1+x^2}$ $(y \in \mathbb{R})$, ezért

$$\operatorname{arsh}' x = \frac{1}{\operatorname{ch} y} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad (x \in \mathbb{R}).\blacksquare$$

Tétel. *Az* arsh *függvény az* ln *függvénnyel így fejezhető ki:*

$$\operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Bizonyítás. Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $y := \operatorname{arsh} x$, azaz $x = \operatorname{sh} y = \dfrac{e^y - e^{-y}}{2}$. Bevezetve a $t := e^y$ jelölést t-re a $t^2 - 2tx - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Mivel $t > 0$, ezért $t = e^y = x + \sqrt{x^2+1}$, azaz

$$y = \operatorname{arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1} \qquad (x \in \mathbb{R}).\blacksquare$$

Az arch függvényre vonatkozó analóg állítások hasonlóan igazolhatók.

A tangenshiperbolikusz-függvény

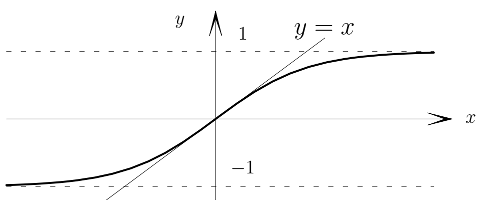
$$\boxed{\operatorname{th} x := \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R})}$$

A th függvény tulajdonságai:

- $\mathcal{D}_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}$;
- páratlan $[\operatorname{th} x = -\operatorname{th}(-x)\ (x \in \mathbb{R})]$;
- deriválható az $\mathbb{R}$-en, és

$$\operatorname{th}' x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} > 0 \quad (x \in \mathbb{R}),$$
$$\operatorname{th}' 0 = 1;$$

- $\uparrow$ az $\mathbb{R}$-en;
- konvex $(-\infty, 0)$-n, konkáv $(0, +\infty)$-n;
- $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{th} = -1$, $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{th} = 1$;
- $\mathcal{R}_{\operatorname{th}} = (-1, 1)$;



A kotangenshiperbolikusz-függvény

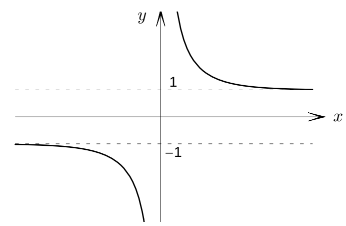
$$\boxed{\operatorname{cth} x := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})}$$

A cth függvény tulajdonságai:

- $\mathcal{D}_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;
- páratlan ;
- deriválható az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$-n, és

$$\operatorname{cth}' x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\});$$

- $\downarrow$ $(-\infty, 0)$-n, $\downarrow$ $(0, +\infty)$-n;
- konkáv $(-\infty, 0)$-n, konvex $(0, +\infty)$-n;
- $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{cth} = -1$, $\lim\limits_{0-0} \operatorname{cth} = -\infty$,
- $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{cth} = 1$, $\lim\limits_{0+0} \operatorname{cth} = +\infty$,
- $\mathcal{R}_{\operatorname{cth}} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$;



Az área tangenshiperbolikusz-függvény

Mivel a th függvény szigorúan monoton növő $\mathbb{R}$-en, ezért invertálható. Legyen

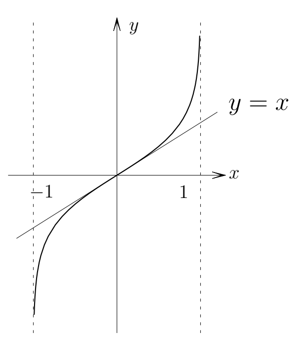
$$\boxed{\operatorname{arth} := \operatorname{th}^{-1}}$$

A arth függvény tulajdonságai:

- $\mathcal{D}_{\operatorname{arth}} = \mathcal{R}_{\operatorname{th}} = (-1, 1)$, $\quad \mathcal{R}_{\operatorname{arth}} = \mathcal{D}_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}$;
- páratlan;
- deriválható $(-1, 1)$-en, és

$$\operatorname{arth}' x = \frac{1}{1 - x^2} \quad (x \in (-1, 1)),$$
$$\operatorname{arth}' 0 = 1;$$

- $\uparrow$ az $\mathbb{R}$-en;
- konkáv $(-1, 0)$-n, konvex $(0, 1)$-en,
- $\lim\limits_{-1+0} \operatorname{arth} = -\infty$, $\lim\limits_{1-0} \operatorname{arth} = +\infty$,
- $\operatorname{arth} x = \dfrac{1}{2} \cdot \ln \dfrac{1 + x}{1 - x} \quad (x \in (-1, 1))$;



Az área kotangenshiperbolikusz-függvény

A cth függvény invertálható.
Legyen

$$\boxed{\operatorname{arcth} := \operatorname{cth}^{-1}}$$

A arcth függvény tulajdonságai:

- $\mathcal{D}_{\operatorname{arcth}} = \mathcal{R}_{\operatorname{cth}}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{arcth}} = \mathcal{D}_{\operatorname{cth}}$;
- páratlan;
- deriválható, és

$$\operatorname{arcth}' x = \frac{1}{1 - x^2} \quad (|x| > 1);$$

- $\downarrow$ $(-\infty, -1)$-en, $\downarrow$ $(1, +\infty)$-en;
- konkáv $(-\infty, -1)$-en, konvex $(1, +\infty)$-n;
- $\lim\limits_{-\infty} \operatorname{arcth} = 0$, $\lim\limits_{-1-0} \operatorname{arcth} = -\infty$,
- $\lim\limits_{+\infty} \operatorname{arcth} = 0$, $\lim\limits_{1+0} \operatorname{arth} = +\infty$,
- $\operatorname{arcth} x = \dfrac{1}{2} \cdot \ln \dfrac{x + 1}{x - 1} \quad (|x| > 1)$;