ANALÍZIS 3. **1. ZÁRTHELYI** **2004. október 29.**

Programtervező matematikus szak

1. feladat. *Írja fel az* $f(x) := \left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}$ $(0 < x < \pi^2)$ *függvény grafikonjának az* $x_0 := \frac{\pi^2}{4}$ *abszcisszájú pontjához tartozó érintőegyenesének az egyenletét.*

Megoldás. Az $a = e^{\ln a}$ $(a > 0)$ azonosság felhasználásával $f(x)$ így alakítható át:

$$f(x) = \left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}} = e^{e^{1/x}\ln(\sin\sqrt{x})} \qquad (0 < x < \pi^2).$$

Az f függvénynek ebből az alakjából már következik, hogy f deriválható, és minden $x \in (0, \pi^2)$ pontban

$$f'(x) = \left(\sin\sqrt{x}\right)^{e^{1/x}}\left[-\frac{1}{x^2}\cdot e^{1/x}\cdot\ln(\sin\sqrt{x}) + e^{1/x}\cdot\frac{1}{\sin\sqrt{x}}\cdot\cos\sqrt{x}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right].$$

Az f függvény grafikonjának az $(x_0, f(x_0))$ pontban van érintője, és az érintőegyenes egyenlete:

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Mivel $x_0 = \frac{\pi^2}{4}$, $\sin\sqrt{x_0} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$, $\cos\sqrt{x_0} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$, $\ln(\sin\sqrt{x_0}) = \ln 1 = 0$ és $f(x_0) = 1$ $(e^{1/x_0} \neq 0!)$, ezért $y = 1$ a keresett érintőegyenes egyenlete. ■

2. feladat. *Bizonyítsa be, hogy ha* $\alpha \in (0, 1)$*, akkor minden* $a, b > 0$ *valós számra fennáll az*

$$\frac{1}{2^{1-\alpha}}\left(a^\alpha + b^\alpha\right) \le (a+b)^\alpha \le a^\alpha + b^\alpha$$

egyenlőtlenség.

Megoldás. Nyilván feltehető, hogy $0 < a \le b$.

A bal oldali egyenlőtlenség igazolásához vegyük észre azt, hogy az

$$f(x) := x^\alpha \qquad (x \in [0, 1],\ 0 < \alpha < 1)$$

függvény konkáv $[0, 1]$-en, ui. $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2} < 0$, ha $x \in (0, 1)$ és $0 < \alpha < 1$. A konkávitás definíciója alapján

$$f\left(\tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}b\right) \ge \tfrac{1}{2}f(a) + \tfrac{1}{2}f(b) \quad\Leftrightarrow\quad \left(\frac{a+b}{2}\right)^\alpha \ge \frac{a^\alpha + b^\alpha}{2} \quad\Leftrightarrow\quad (a+b)^\alpha \ge \tfrac{1}{2^{1-\alpha}}\left(a^\alpha + b^\alpha\right).$$

A bal oldali egyenlőtlenséget tehát bebizonyítottuk.

A jobb oldali egyenlőtlenség igazolása: osszuk el először az egyenlőtlenség mindkét oldalát $b^\alpha > 0$-val:

$$(a+b)^\alpha \le a^\alpha + b^\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad \left(\frac{a}{b} + 1\right)^\alpha \le \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha + 1,$$

és ez $0 < a \le b$ miatt ekvivalens a következővel:

(1) $\qquad (1+x)^\alpha \le 1 + x^\alpha \qquad \forall\, x \in (0, 1]$ esetén, ha $0 < \alpha < 1$.

Tekintsük most a $g(x) := (1+x)^\alpha$ $(x > -1)$ függvényt. Rögzítsünk egy $x \in (0, 1]$ pontot, és alkalmazzuk a Lagrange-féle középértéktételt a g függvényre a $[0, x]$ intervallumon. (Ezt megtehetjük, mert $g \in C[0, x]$ és $g \in D(0, x)$.) Létezik tehát olyan $\xi \in (0, x)$ pont, amelyre

$$g(x) - g(0) = g'(\xi)\cdot x \quad\Longleftrightarrow\quad (1+x)^\alpha - 1 = \alpha(1+\xi)^{\alpha-1}\cdot x.$$

Mivel $0 < \alpha < 1$ és $0 < \xi < x$, ezért

$$(1+x)^\alpha - 1 = \frac{\alpha}{(1+\xi)^{1-\alpha}}\cdot x \le x = x^{1-\alpha}\cdot x^\alpha \le x^\alpha,$$

és ez az (1), következésképpen a jobb oldali egyenlőtlenség igazolását jelenti. ■

3. feladat. *Legyen*

$$f(x) := \left(x - \frac{\pi}{6}\right)\cos x + x\operatorname{tg}\frac{3x}{2} \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right)\right).$$

Mutassa meg, hogy az $f(x) = 0$ *egyenletnek pontosan egy gyöke van a* $(0, \frac{\pi}{6})$ *intervallumban.*

Megoldás. Mivel $f(0) = -\frac{\pi}{6} < 0$, $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{6} > 0$ és $f \in C\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, ezért a Bolzano-tételből következik, hogy az $f(x) = 0$ egyenletnek *van* (legalább egy!) gyöke a $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ intervallumban. Ha sikerül megmutatni, azt hogy f szigorúan monoton a $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ intervallumon, akkor ebből már következik, hogy az egyenletünknek *pontosan egy* gyöke van ebben az intervallumban.

Az f függvény deriválható, és

$$f'(x) = \cos x - \left(x - \tfrac{\pi}{6}\right)\sin x + \operatorname{tg}\frac{3x}{2} + \frac{x}{\cos^2\frac{3x}{2}} \cdot \frac{3}{2} \qquad \left(x \in \left(-\tfrac{\pi}{3}, \tfrac{\pi}{3}\right)\right).$$

Ennek az összegnek mindegyik tagja minden $x \in \left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ esetén pozitív:

$$f'(x) > 0 \qquad \left(x \in \left(0, \tfrac{\pi}{6}\right)\right),$$

ezért f szigorúan monoton növekedő a $\left(0, \frac{\pi}{6}\right)$ intervallumon, tehát itt az $f(x) = 0$ egyenletnek valóban egy gyöke van. ■

4. feladat. *Az* $f(x) := \dfrac{1}{\sqrt[3]{1+x}}$ $(x > -1)$ *függvény* 0 *pont körüli harmadfokú Taylor-polinomjának felhasználásával számítsa ki* $\dfrac{1}{\sqrt[3]{1030}}$ *egy közelítő értékét, és határozza meg a közelítés hibáját. A kapott közelítés hány tizedesjegye pontos?*

Megoldás. Vegyük észre, hogy $B := \frac{1}{\sqrt[3]{1030}} = \frac{1}{10\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}}$, és számítsuk ki először az $A := \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{3}{100}}} = f\left(\frac{3}{100}\right)$ szám egy közelítő értékét.

Az f függvény akárhányszor deriválható, és minden $x \in \mathcal{D}_f = (-1, +\infty)$ pontban

$$f'(x) = -\tfrac{1}{3}(1+x)^{-4/3}, \quad f''(x) = \tfrac{4}{9}(1+x)^{-7/3}, \quad f'''(x) = -\tfrac{28}{27}(1+x)^{-10/3},$$

ezért

$$f(0) = 1, \qquad f'(0) = -\tfrac{1}{3}, \qquad f''(0) = \tfrac{4}{9}, \qquad f'''(0) = -\tfrac{28}{27}.$$

Az f függvény 0 ponthoz tartozó harmadfokú Taylor-polinomja:

$$\left(T_{3,0}f\right)(x) = f(0) + \tfrac{f'(0)}{1!}x + \tfrac{f''(0)}{2!}x^2 + \tfrac{f'''(0)}{3!}x^3 = 1 - \tfrac{1}{3}x + \tfrac{2}{9}x^2 - \tfrac{14}{81}x^3.$$

Az A szám egy közelítő értéke:

$$A = f\left(\tfrac{3}{100}\right) \approx \left(T_{3,0}f\right)\left(\tfrac{3}{100}\right) = 1 - 10^{-2} + 2\cdot 10^{-4} - \tfrac{14}{3}\cdot 10^{-6} = 0,9902 - \tfrac{15-1}{3}\cdot 10^{-6} =$$
$$= 0,9902 + 0,\dot{3}\cdot 10^{-6} - 5\cdot 10^{-6} = 0,990200\dot{3} - 0,000005 = 0,990195\dot{3}.$$

A hibabecsléshez a Taylor-formulát alkalmazzuk a Lagrange-féle maradéktaggal: létezik olyan $\xi \in (0, \frac{3}{100})$, hogy

$$A - 0,990195\dot{3} = f\left(\tfrac{3}{100}\right) - \left(T_{3,0}f\right)\left(\tfrac{3}{100}\right) = \tfrac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\cdot\left(\tfrac{3}{100}\right)^4.$$

Mivel $f^{(4)}(\xi) = \frac{280}{81(1+\xi)^{13/3}}$ és $0 < \xi < \frac{3}{100}$, ezért $|f^{(4)}(\xi)| \le \frac{280}{81}$. Ezt felhasználva azt kapjuk, hogy

$$|A - 0,990195\dot{3}| \le \tfrac{280}{81}\cdot\tfrac{1}{24}\cdot 81\cdot 10^{-8} = \tfrac{35}{3}\cdot 10^{-8} \le \tfrac{36}{3}\cdot 10^{-8} = 1,2\cdot 10^{-7}.$$

A kérdezett B szám egy közelítő értéke tehát

$$B = \frac{A}{10} \approx 0,0990195\dot{3},$$

a közelítés hibája

$$|B - 0{,}0990195\dot{3}| \le 1{,}2 \cdot 10^{-8},$$

és ez azt jelenti, hogy

$$B \in [0{,}099019521\dot{3}; 0{,}099019545\dot{3}],$$

ezért a közelítés 7 tizedesjegyre pontos. ■

5. feladat. *Teljes függvényvizsgálat elvégzése után vázolja az*

$$f(x) := e^{\frac{1}{1-x}} \qquad \big(x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\big)$$

függvény grafikonját.

Megoldás. Mivel $f(x) > 0$ minden $x \in \mathcal{D}_f$ esetén, ezért f grafikonja az első- és a második síknegyedben van.

Az f függvény akárhányszor (is) deriválható, és minden $x \in \mathcal{D}_f$ pontban

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} e^{\frac{1}{1-x}}, \qquad f''(x) = \frac{3-2x}{(1-x)^4} e^{\frac{1}{1-x}}.$$

$f'(x) > 0$ a $(-\infty, 1)$ *intervallumon* (!), ezért itt f szigorúan monoton növekedő;
$f'(x) > 0$ az $(1, +\infty)$ *intervallumon* is, ezért f ezen is szigorúan monoton növekedő.
Az f függvénynek nincs lokális szélsőértéke, mert $f'(x) \ne 0$ $\forall\, x \in \mathcal{D}_f$ pontban.

$f''(x) > 0$ a $(-\infty, 1)$ intervallumon, ezért itt a függvény szigorúan konvex;
$f''(x) > 0$ az $(1, \frac{3}{2})$ intervallumon is, ezért a függvény ezen is szigorúan konvex;
$f''(x) < 0$ a $(\frac{3}{2}, +\infty)$ intervallumon, ezért itt a függvény szigorúan konkáv, és az $x = \frac{3}{2}$ inflexiós pont.

A határértékeket a $\pm\infty$-ben és az 1 pontban kell megvizsgálni:

$$\lim_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to 0-0} e^y = 1 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to 0+0} e^y = 1,$$

azaz

$$\lim_{x\to+\infty} \big(f(x) - (0\cdot x + 1)\big) = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to-\infty} \big(f(x) - (0\cdot x + 1)\big) = 0,$$

és ez azt jelenti, hogy az $y = 1$ egyenes az f függvény aszimptotája a $+\infty$-ben is, meg a $-\infty$-ben is.

$$\lim_{x\to 1+0} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to-\infty} e^y = 0 \qquad \text{és} \qquad \lim_{x\to 1-0} e^{\frac{1}{1-x}} = \lim_{y\to+\infty} e^y = +\infty.$$

Az $x = 1$ helyen jobbról a görbe érintője az x tengely, mert $x \to 1+0$ esetén $f'(x) \to 0$:

$$\lim_{x\to 1+0} \frac{e^{\frac{1}{1-x}}}{(1-x)^2} = \lim_{y\to+\infty} \frac{y^2}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2y}{e^y} = \lim_{y\to+\infty} \frac{2}{e^y} = 0.$$