Analízis 7. vizsgakérdések
Programtervező matematikus szak

2006-2007. tanév 1. félév

1. Adja meg paraméteres alakban az origó középpontú R sugarú gömbfelületet.

Válasz: Vezessük be az u és a v paramétereket. (Itt ábrát is várunk!) A gömbfelület (x, y, z) Descartes-koordinátái a bevezetett paraméterekkel így fejezhető ki:

$$x = R \cdot \sin v \cdot \cos u, \quad y = R \cdot \sin v \cdot \sin u, \quad z = R \cdot \cos v,$$
$$0 \le u \le 2\pi;\ 0 \le v \le \pi.$$

A gömbfelület egy paraméterezése tehát az alábbi függvény:

$$F(u,v) = \begin{bmatrix} R \cdot \sin v \cdot \cos u \\ R \cdot \sin v \cdot \sin u \\ R \cdot \cos v \end{bmatrix} \qquad \big((u,v) \in [0,2\pi] \times [0,\pi]\big).$$

2. Adja meg paraméteres alakban azt a körhenger-felületet, amelynek a forgástengelye a z-tengely, az erre merőleges síkmetszet pedig egy a sugarú kör.

3. Definiálja az egyszerű sima felületdarabot.

Válasz: Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ halmaz egy *egyszerű sima felületdarab* (röviden: ESF), ha létezik olyan $F \in C^1\big(\mathbb{I}^2, \mathbb{R}^3\big)$ leképezés, hogy

(i) $F : \mathbb{I}^2 \to \mathcal{F}$ bijekció és

(ii) $\operatorname{rang} F'(w) = 2$ minden $w \in \mathbb{I}^2$ pontban.

Ekkor a F függvényt az $\mathcal{F}$ felület egy *paraméterezésének* nevezzük.

4. Definiálja a felületi görbét.

Válasz: Legyen $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ ESF egy paraméterezése. Az $\mathbb{I}^2$ paramétertartományban fekvő egyszerű sima síkgörbe F által létesített képét nevezzük *felületi görbének*.

Formálisan: Ha $\gamma : [\alpha, \beta] \to \Gamma \subset \mathbb{I}^2$ egyszerű sima görbe, akkor a

$$\varphi := F \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}$$

függvény értékkészlete egy felületi görbe.

5. Írja fel azt az állítást, amelynek alapján az érintősíkot értelmeztük.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése, $(u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ egy rögzített pont a paramétertartományban és $P_0 := F(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$ a megfelelő felületi pont. Ekkor minden P_0-on átmenő reguláris (egyszerű sima) felületi görbe érintői valamennyien egy síkban vannak. Ezt a síkot a felület P_0 *pontbeli érintősíkjának* nevezzük.

6. Írja fel egy egyszerű sima felület P_0 pontbeli érintősíkjának egy bázisát.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése, $(u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ egy rögzített pont a paramétertartományban és $P_0 := F(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$ a megfelelő felületi pont. A P_0 pontbeli érintősík egy bázisa a

$$\partial_u F(u_0, v_0),\ \partial_v F(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^3$$

vektorok. Ezek ui. egyrészt benne vannak az érintősíkban, másrészt pedig lineárisan függetlenek, mert $\operatorname{rang} F'(u_0, v_0) = 2$.

7. Adja meg a paraméteres alakban megadott felület felületi normális egységvektorának a definícióját.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése, $(u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ egy rögzített pont a paramétertartományban és $P_0 := F(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$ a megfelelő felületi pont. A P_0 pontbeli felületi normális egységvektor:

$$\mathbf{m}(u_0, v_0) := \frac{\partial_u F(u_0, v_0) \times \partial_v F(u_0, v_0)}{|\partial_u F(u_0, v_0) \times \partial_v F(u_0, v_0)|}.$$

8. Írja fel egy adott ponton átmenő, adott normálvektorú sík egyenletét.

9. Írja fel a paraméteres alakban megadott egyszerű sima felület P_0 pontbeli érintősíkjának az egyenletét.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése, $(u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ egy rögzített pont a paramétertartományban és $P_0 := F(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$ a megfelelő felületi pont. Ekkor a felület P_0 pontbeli érintősíkjának egyenlete (az $\mathbf{x} := (x, y, z)$ jelöléssel):

$$0 = \langle\, \mathbf{x} - F(u_0, v_0), \mathbf{m}(u_0, v_0)\,\rangle = (\mathbf{x} - F(u_0, v_0)) \cdot \partial_u F(u_0, v_0) \cdot \partial_v F(u_0, v_0) =$$

$$= \det \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{\partial F_1}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial u}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_3}{\partial u}(u_0, v_0) \\ \frac{\partial F_1}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_2}{\partial v}(u_0, v_0) & \frac{\partial F_3}{\partial v}(u_0, v_0) \end{bmatrix} = 0.$$

10. Milyen állítást ismer az *explicit alakban* megadott egyszerű sima felület érintősíkjával kapcsolatban?

Válasz: A $z = g(x, y)$ $(g \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1,\ g \in C^1)$ explicit alakban megadott $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima felület minden $P_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0) \in \mathcal{F}$ pontjában van érintősík. Ennek egy *normálvektora*:

$$\mathbf{m}(P_0) = (\partial_x g(x_0, y_0),\, \partial_y g(x_0, y_0),\, -1)$$

és *egyenlete*:

$$z - z_0 = \partial_x g(x_0, y_0)(x - x_0) + \partial_y g(x_0, y_0)(y - y_0).$$

11. Milyen állítást ismer az *implicit alakban* megadott egyszerű sima felület érintősíkjával kapcsolatban?

Válasz: A $G(x, y, z) = 0$ $(G \in \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^1,\ G \in C^1)$ implicit alakban megadott $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima felület minden $P_0 = (x_0,\, y_0,\, z_0) \in \mathcal{F}$ pontjában van érintősík. Ennek egy *normálvektora*:

$$\mathbf{m}(P_0) = (\partial_x G(x_0, y_0, z_0),\, \partial_y G(x_0, y_0, z_0),\, \partial_z G(x_0, y_0, z_0))$$

és *egyenlete*:

$$\partial_x G(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \partial_y G(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + \partial_z G(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0.$$

12. Írja fel a felületi görbe ívhosszára vonatkozó alapképletet.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése. Tegyük fel, hogy $\Gamma \subset \mathcal{F}$ egy sima *felületi görbe* és $\varphi = F \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}$ ennek egy parméterezése. Mivel $\varphi : (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in C^1([\alpha, \beta], \mathbb{R}^3)$, ezért Γ *rektifikálható* és az *ívhossza*:

$$l_\Gamma = \int_\alpha^\beta |\, \dot{\varphi}(t)\, |\; dt = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\dot{\varphi}_1(t)]^2 + [\dot{\varphi}_2(t)]^2 + [\dot{\varphi}_3(t)]^2}\, dt.$$

13. Adja meg a paraméteres alakban megadott felület első Gauss-féle alapmennyiségeinek a definícióját.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése. A $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$ pontban az *első Gauss-féle alapmennyiségeket* így értelmezzük:

$$\mathbb{E}(w_0) := \mathbb{E}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big)\, \rangle\,,$$
$$\mathbb{F}(w_0) := \mathbb{F}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_u F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big)\, \rangle\,,$$
$$\mathbb{G}(w_0) := \mathbb{G}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big),\, \partial_v F\big(u_0, v_0\big)\, \rangle\,.$$

14. Hogyan lehet egy felületi görbe ívhosszát az első Gauss-féle alapmennyiségekkel kifejezni?

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése. Tegyük fel, hogy $\Gamma \subset \mathcal{F}$ egy sima *felületi görbe* és $\varphi = F \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}$ ennek egy parméterezése. Ekkor Γ *rektifikálható* és az *ívhossza*

$$\ell_\Gamma = \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathbb{E}(t)\, \dot\gamma_1^2(t) + 2\mathbb{F}(t)\, \dot\gamma_1(t)\, \dot\gamma_2(t) + \mathbb{G}(t)\, \dot\gamma_2^2(t)}\; dt,$$

ahol $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$.

15. Adja meg a felület első alapformájának a definícióját.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ egy folytonosan deriválható paraméterezése. Jelölje $\mathbb{E}(w), \mathbb{F}(w), \mathbb{G}(w)$ a $w = (u, v) \in \mathbb{I}^2$ pontban az első Gauss-féle alapmennyiségeket. A

$$G(w) := \begin{bmatrix} \mathbb{E}(w) & \mathbb{F}(w) \\ \mathbb{F}(w) & \mathbb{G}(w) \end{bmatrix} \qquad \big(w \in \mathbb{I}^2\big)$$

szimmetrikus mátrixszal képzett

$$Q\big(\mathbf{x}\big) := Q\big(x_1, x_2\big) := \langle\, G(w)\mathbf{x},\, \mathbf{x}\, \rangle = \\ = \mathbb{E}(w)\, x_1^2 + 2\,\mathbb{F}(w)\, x_1 x_2 + \mathbb{G}(w)\, x_2^2 \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\big)$$

kvadratikus alakot a *felület első alapformájának* nevezzük.

16. Definiálja az egyszerű sima felületdarab felszínét.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : T \to \mathbb{R}^3$ $(T \subset \mathbb{I}^2)$ ennek egy folytonosan deriválható paraméterezése. Ekkor $\mathcal{F}$ felszínén az

$$\mathcal{S} := \iint_T \left|\partial_u F(u, v) \times \partial_v F(u, v)\right|\, du\, dv$$

számot értjük.

17. Hogyan lehet egy egyszerű sima felület felszínét az első Gauss-féle alapmennyiségekkel kifejezni?

Válasz: Legyen $F : T \to \mathbb{R}^3$ $(T \subset \mathbb{I}^2)$ az $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egyszerű sima felület egy folytonosan deriválható paraméterezése. Ekkor a felületnek van felszíne, és erre a következő képlet érvényes:

$$\mathcal{S} = \iint_T \sqrt{\mathbb{E}(u, v) \cdot \mathbb{G}(u, v) - \mathbb{F}^2(u, v)}\, du\, dv.$$

18. Adja meg a paraméteres alakban megadott felület második Gauss-féle alapmennyiségeinek a definícióját.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése. Jelölje $\mathbf{m}(w_0)$ a felület $w_0 = (u_0, v_0) \in \mathbb{I}^2$

paraméterű pontjában a felületi normális egységvektort (azaz az érintősík egy normálvektorát). Ekkor a felület w_0 paraméterű $P_0 := F(w_0) = F(u_0, v_0)$ pontjában a *Gauss-féle második alapmennyiségeket* így értelmezzük:

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}(w_0) &:= \mathbb{L}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_{uu}F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{uu}F\big(w_0\big)\cdot \mathbf{m}(w_0),\\
\mathbb{M}(w_0) &:= \mathbb{M}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_{uv}F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{uv}F\big(w_0\big)\cdot \mathbf{m}(w_0),\\
\mathbb{N}(w_0) &:= \mathbb{N}\big(u_0, v_0\big) := \langle\, \partial_{vv}F\big(w_0\big),\, \mathbf{m}(w_0)\,\rangle = \partial_{vv}F\big(w_0\big)\cdot \mathbf{m}(w_0).
\end{aligned}$$

19. Milyen képletet ismer pont és sík távolságának a meghatározására?

20. Adja meg a felület második alapformájának a definícióját.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése. Jelölje $\mathbb{L}(w), \mathbb{M}(w), \mathbb{N}(w)$ a felület $w = (u, v) \in \mathbb{I}^2$ paraméterű pontjában a Gauss-féle második alapmennyiségeket. A

$$H(w) := \begin{bmatrix} \mathbb{L}(w) & \mathbb{M}(w) \\ \mathbb{M}(w) & \mathbb{N}(w) \end{bmatrix} \qquad \big(w \in \mathbb{I}^2\big)$$

szimmetrikus mátrixszal képzett

$$\begin{aligned}
Q\big(\mathbf{x}\big) : &= Q\big(x_1, x_2\big) := \langle\, H(w)\mathbf{x},\, \mathbf{x}\,\rangle = \\
&= \mathbb{L}(w)\, x_1^2 + 2\,\mathbb{M}(w)\, x_1 x_2 + \mathbb{N}(w)\, x_2^2 \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\big)
\end{aligned}$$

kvadratikus alakot a *felület második alapformájának* nevezzük.

21. Milyen tételt ismer felületi görbék görbületével kapcsolatban?

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab és $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy folytonosan deriválható paraméterezése. Tegyük fel, hogy $\Gamma \subset \mathcal{F}$ egy sima *felületi görbe* és $\varphi = F \circ \gamma : [\alpha, \beta] \to \mathcal{F}$ ennek egy parméterezése. Tekintsük a felületnek egy olyan P_0 pontját, amelyen ez a görbe átmegy:

$$\mathcal{F} \ni P_0 = \varphi(t_0) = F\big(\gamma(t_0)\big) = F(u_0, v_0) = F(w_0).$$

Tegyük fel még azt is, hogy a felület P_0 pontbeli érintősíkja (ennek normálvektora az $\mathbf{m}(w_0)$ felületi normális egységvektor) nem egyezik meg a görbe P_0 pontbeli simulósíkjával, azaz $\mathbf{n}(P_0) \cdot \mathbf{m}(w_0) \neq 0$, ahol $\mathbf{n}(P_0)$ a görbe főnormális egységvektora. Ekkor a görbe P_0 pontjában a görbületre a következő képlet érvényes:

$$\begin{aligned}
\kappa(P_0) &= \frac{1}{\mathbf{n}(P_0)\cdot \mathbf{m}(w_0)} \cdot \frac{\langle H(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle}{\langle G(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle} = \\
&= \frac{1}{\mathbf{n}(P_0)\cdot \mathbf{m}(w_0)} \cdot \frac{\mathbb{L}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{M}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{N}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}.
\end{aligned}$$

22. Egy adott érintővel rendelkező felületi görbék közül melyiknek legkisebb a görbülete? Miért?

Válasz: Adott érintőjű síkmetszetek közül a normálmetszet a legkisebb görbületű az adott pontban. Ebben az esetben ui. az $\mathbf{m}(P_0)$ és az $\mathbf{n}(P_0)$ vektorok párhuzamosak, tehát $\mathbf{n}(P_0)\cdot\mathbf{m}(P_0) = \pm 1$

23. Miért elég síkmetszetek görbületét vizsgálni?

Válasz: Egy tetszőleges Γ felületi görbe P_0 pontbeli görbülete megegyezik a görbe P_0 pontjához tartozó simulósíkja által a felületből kimetszett felületi síkgörbe P_0 pontbeli görbületével. Ezért a felület P_0 pontján áthaladó görbék görbületének vizsgálatánál *elegendő a síkmetszetek görbületét* tekinteni.

24. Definiálja a következő fogalmakat: normálsík, normálmetszet, normálgörbület, ferdemetszet.

Válasz: A felület valamely pontjabeli érintősíkra e pontban merőleges síkokat *normálsíkoknak*, a normálsík által kimetszett görbét *normálmetszetnek*, a normálmetszet görbületét pedig *normálgörbületnek* nevezzük. Minden más síkmetszetet *ferdemetszetnek* hívunk.

25. Definiálja az előjelezett normálgörbületet.

Válasz: A normálgörbületnek előjelet is adunk: az előjel *pozitív* (illetve *negatív*), ha görbe főnormális egységvektora a felület egységnyi normálvektorával *megegyező* (illetve *ellentétes* irányú). Ezt az $\mathbf{n}(P_0) \cdot \mathbf{m}(w_0)$ skaláris szorzat mutatja, amely az első esetben $+1$, a másodikban pedig -1. Vegyünk fel a felület P_0 pontbeli érintősíkjában egy e egyenest (ez jelöli ki az adott érintő irányát). Ekkor a $\kappa_e(P_0)$-lal jelölt *előjelezett normálgörbületet* tehát:

$$\kappa_e(P_0) = \frac{\langle H(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle}{\langle G(w_0)\,\dot\gamma(t_0), \dot\gamma(t_0)\rangle} = \frac{\mathbb{L}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{M}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{N}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}{\mathbb{E}\,\dot\gamma_1^2(t_0) + 2\mathbb{F}\,\dot\gamma_1(t_0)\,\dot\gamma_2(t_0) + \mathbb{G}\,\dot\gamma_2^2(t_0)}.$$

26. Mondja ki Meusnier tételét.

Válasz: Tekintsük a reguláris $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}$ felület P_0 pontjára és az ehhez tartozó érintősík egy e egyenesére illeszkedő tetszőleges, de az érintősíktól különböző σ síkot. Legyen $\kappa(P_0)$ a σ sík által kimetszett felületi görbe görbülete és $\kappa_e(P_0)$ az e irányhoz tartozó normálmetszet előjeles görbülete. Ekkor

$$\kappa(P_0) = \frac{\kappa_e(P_0)}{\cos\alpha},$$

ahol α ($\alpha \in (0,\pi)\setminus\{\frac{\pi}{2}\}$) a felület P_0 pontjában felületi normális egységvektora és a felületi görbe fönormális egységvektora által bezárt szög.

27. Fogalmazza meg azt az általános szélsőérték-feladatot, amelyet felhasználtunk a fő(normál)görbületek értelmezéséhez. Adja meg a megoldást is.

Válasz: Legyenek $\mathbf{A}$ és $\mathbf{B}$ $n \times n$-es szimmetrikus mátrixok és tegyük fel még azt is, hogy $\mathbf{B}$ pozitív definit. Keressük az

$$f(\mathbf{x}) := \frac{\langle\, \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle}{\langle\, \mathbf{B}\mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle} \qquad \big(\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}\big),$$

függvény abszolút szélsőértékeit.

A feladat megoldása: Tekintsük az $\mathbf{A}\mathbf{B}^{-1}$ szimmetrikus mátrixot, és jelölje

$\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ ennek a sajátértékeit,

$\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ pedig a megfelelő sajátvektorokat.

Ekkor

(a) az f függvénynek létezik abszolút maximuma és minimuma;

(b) $\min f = \lambda_1 = f\big(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_1\big), \qquad \max f = \lambda_n = f\big(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{r}_n\big)$.

28. Mondja ki egyszerű sima felület főgörbületeire vonatkozó tételt.

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése és $P_0 = F(w_0)$ a felület egy pontja. Ekkor az

$$f(\mathbf{x}) := \kappa_e\big(P_0\big) := \frac{\langle\, H(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle}{\langle\, G(w_0)\mathbf{x}, \mathbf{x}\,\rangle} = \frac{\mathbb{L}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{M}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{N}(w_0)x_2^2}{\mathbb{E}(w_0)x_1^2 + 2\mathbb{F}(w_0)x_1x_2 + \mathbb{G}(w_0)x_2^2}$$

$$\big(\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$$

függvénynek van abszolút minimuma (κ_1) és maximuma (κ_2). Ezeket a számokat *fő(normál)görbületeknek* nevezzük.

29. Adja meg azt a mátrixot, amelyiknek a sajátértékei a fő(normál)görbületek.

Válasz: Egy adott pontban a κ_1 és κ_2 fő(normál)görbületek a $H(w_0)G^{-1}(w_0)$ mátrix sajátértékei, ahol $G(w_0)$, illetve $H(w_0)$ az adott pontban az első-, illetve a második Gauss-féle alapmennyiségekből képzett szimmetrikus mátrix.

30. Írja fel azt az egyenletet, amelyiknek megoldásai a fő(normál)görbületek.

Válasz: Adott pontbeli fő(normál)görbületek a

$$\lambda^2 - \operatorname{tr}\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big)\lambda + \det\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big) = 0$$

sajátérték-egyenlet megoldásai, ahol $G(w_0)$, illetve $H(w_0)$ az adott pontban az első-, illetve a második Gauss-féle alapmennyiségekből képzett szimmetrikus mátrix. Ennek a másodfokú egyenletnek csak valós gyökei vannak.

31. Hogyan lehet az összeggörbületet a Gauss-féle alapmennyiségekkel kifejezni?

Válasz: Ha $G(w_0)$, illetve $H(w_0)$ az adott pontban az első-, illetve a második Gauss-féle alapmennyiségekből képzett szimmetrikus mátrix, akkor a fő(normál)görbületek összege

$$\mathcal{H} := \kappa_1 + \kappa_2 = \operatorname{tr}\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big).$$

32. Hogyan lehet a szorzatgörbületet a Gauss-féle alapmennyiségekkel kifejezni?

Válasz: Ha $G(w_0)$, illetve $H(w_0)$ az adott pontban az első-, illetve a második Gauss-féle alapmennyiségekből képzett szimmetrikus mátrix, akkor a fő(normál)görbületek szorzata

$$\mathcal{K} := \kappa_1 \cdot \kappa_2 = \det\big(H(w_0)G^{-1}(w_0)\big).$$

(Ezt a számot *Gauss-féle görbületnek* is nevezik.)

33. Mik a főirányok?

Válasz: Legyen $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^3$ egy egyszerű sima felületdarab, $F : \mathbb{I}^2 \to \mathbb{R}^3$ ennek egy kétszer folytonosan deriválható paraméterezése és $P_0 = F(w_0)$ a felület egy pontja. Tekintsük ebben a pontban az előjelezett normálgörbületeket. Az érintősíkban megadható két egymásra merőleges irány (ezek a ***főirányok***) úgy, hogy egyikben a legkisebb, a másikban pedig legnagyobb az előjelezett normálgörbület.

34. Lehet-e egy adott pontban minden irány főirány? Ha igen, akkor mikor?

Válasz: Igen. Akkor, ha a pontban a főgörbületek megegyeznek.

35. Hogyan lehet a főirányokat meghatározni?

Válasz: Az érintősíkban a

$$\xi\, \partial_u F(w_0) + \eta\, \partial_v F(w_0)$$

képlet alapján jelöljük ki a (ξ, η) koordinátájú irányokat. A főirányokat megadó (ξ, η) értékeket a

$$\det \begin{bmatrix} \eta^2 & -\xi\eta & \xi^2 \\ \mathbb{E}(w_0) & \mathbb{F}(w_0) & \mathbb{G}(w_0) \\ \mathbb{L}(w_0) & \mathbb{M}(w_0) & \mathbb{N}(w_0) \end{bmatrix} = 0$$

másodfokú egyenlet gyökeiből határozzuk meg.

36. Mondja ki Euler tételét.

Válasz: Egy egyszerű sima felület tetszőleges pontjában bármely normálmetszet κ görbülete kifejezhető a $\kappa_1 \le \kappa_2$ fő(normál)görbületekkel. Az összefüggés:

$$\kappa = \kappa_1 \cos^2 \vartheta + \kappa_2 \sin^2 \vartheta,$$

ahol ϑ a görbeérintő és a κ_1-nek megfelelő főgörbületi irány bezárta szög.

37. Hogyan osztályoztuk a felületi pontokat?

Válasz: Ha a felület egy pontjában a $\mathcal{K}$ szorzatgörbület pozitív, negatív, illetve zérus, akkor azt mondjuk, hogy ez a pont a felületnek ***elliptikus***, ***hiperbolikus***, illetve ***parabolikus*** pontja. Ha $\kappa_1 = \kappa_2 \neq 0$, akkor a pont (amely nyilván elliptikus) ***szférikus pont***; ha $\kappa_1 = \kappa_2 = 0$, akkor a pontot (amely nyilván parabolikus) ***planáris pontnak*** nevezzük.

A 38-51. kérdésekre a választ l. a Gyakorló feladatok 3. segédanyagot.

38. Hogyan értelmezzük a skalármezőket?

39. Adja meg a skalármező pontbeli gradiensvektorának a definícióját.

40. Hogyan értelmezzük a vektormezőket?

41. Hogyan értelmezzük egy vektormező pontbeli deriváltmátrixát?

42. Mit nevezünk egy vektormező divergenciájának?

43. Definiálja vektormező rotációját.

44. Írja fel a divergenciát és a rotációt a nabla szimbólum segítségével.

45. Definiálja a Laplace operátort.

46. Definiálja skalármező térfogati integrálját.

47. Definiálja vektormező vonalintegrálját.

48. Definiálja vektormező felületi integrálját.

49. Mondja ki a Gauss–Osztrogradszkij-tételt.

50. Fogalmazza meg a Stokes-tételt.

51. Fogalmazza meg a szimmetrikus Green-tételt.

52. Mi a Riemann-integrálhatóság Lebesgue-féle kritériuma?

Válasz: Az f függvény Riemann-integrálható az $[a,b]$ intervallumon ($f \in R[a,b]$) $\iff$ ha f egy Lebesgue-értelemben nullamértékű halmaz kivételével folytonos $[a,b]$-n ($\exists\, A \subset [a,b]$ Lebesgue-értelemben nullamértékű halmaz, hogy $f \in C\big([a,b] \setminus A\big)$).

53. Adjon meg Riemann-integrálható függvényeknek egy olyan sorozatát, amelynek a pontonkénti határfüggvénye Riemann-integrálható, az integrálok sorozata konvergens, de e sorozat határértéke nem egyenlő a határfüggvény integráljával.

Válasz: Legyen

$$f_n(x) := \begin{cases} 4n^2 x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 4n^2\big(\frac{1}{n} - x\big), & \text{ha } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in R[0,1]$,

$$\int_0^1 f_n = 1 \quad \text{(a háromszög területe)}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = 1.$$

A pontonkénti határfüggvény nyilván:

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad (x \in [0,1]),$$

tehát

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = 1 \ne \int_0^1 \lim_n (f_n) = 0.$$

54. Adjon meg olyan (f_n) függvénysorozatot, amelyre a következők teljesülnek:

(a) $f_n \in R[0,1]$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén,

(b) az integrálok $\big(\int_0^1 f_n\big)$ sorozata nem konvergens,

(c) a pontonkénti határfüggvény integrálható.

Válasz: Legyen

$$f_n(x) := \begin{cases} 2n^3 x, & \text{ha } 0 \le x \le \frac{1}{2n} \\ 2n^3\big(\frac{1}{n} - x\big), & \text{ha } \frac{1}{2n} \le x \le \frac{1}{n} \\ 0, & \text{ha } \frac{1}{n} \le x \le 1. \end{cases}$$

Ekkor minden $n \in \mathbb{N}$ esetén $f_n \in R[0,1]$,

$$\int_0^1 f_n = \frac{n}{2} \quad \text{(a háromszög területe)}, \qquad \lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n = +\infty.$$

Az integrálok sorozata tehát nem konvergens. A pontonkénti határfüggvény nyilván:

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = 0 \qquad (x \in [0,1]),$$

és ez a függvény integrálható $\big(\int_0^1 f = 0\big)$.

55. Riemann-integrálható függvényeknek van-e olyan sorozata, amelynek a pontonkénti határfüggvénye nem Riemann-integrálható?

Válasz: Igen. Ilyen például a következő függvénysorozat: Jelölje (x_n) a $[0,1]$ intervallum racionális pontjainak egy sorozatba rendezését, és legyen

$$f_n(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \\ 1, & \text{ha } x \in [0,1] \setminus \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \end{cases} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Mindegyik f_n függvény véges sok pont kivételével folytonos, ezért Riemann-integrálható ($\int_0^1 f_n = 1$ minden $n \in \mathbb{N}$ esetén).
A pontonkénti határfüggvény:

$$f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in [0,1]\text{-beli irracionális szám.} \end{cases}$$

Ez az f függvény nem Riemann-integrálható a $[0,1]$ intervallumon. (Ui. az alsó közelítő összegek szuprémuma – ami nyilván 0 – nem egyezik meg a felső közelítő összegek infimumával – ez 1-gyel egyenlő.)

56. Mikor nevezzük az $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert X-beli σ-algebrának?

Válasz: Az $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszert X-beli σ-algebrának nevezzük, ha

(i) $X \in \Omega$,

(ii) $\forall A \in \Omega$ esetén $X \setminus A \in \Omega$,

(iii) tetszőleges Ω-beli $A_n \in \Omega$ $(n = 1, 2, \ldots)$ halmazsorozatra $\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \Omega$.

57. Definiálja a mérhető tér és a mérhető halmaz fogalmát.

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz és $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ egy X-beli σ-algebra. Az

- (X, Ω) párt *mérhető térnek*,
- az Ω elemeit pedig *mérhető halmazoknak* nevezzük.

58. Definiálja a mérték fogalmát.

Válasz: Legyen X egy nemüres halmaz és $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ egy X-beli σ-algebra.
A $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvényt az (X, Ω) mérhető téren értelmezett *mértéknek* nevezzük, ha

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) minden $A \in \Omega$ halmazra $\mu(A) \geq 0$,

(iii) tetszőleges Ω-beli, páronként diszjunkt $(A_k, k \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén fennáll a

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k)$$

egyenlőség. (Röviden ezt úgy fejezzük ki, hogy a μ halmazfüggvény *σ-additív.*)

$\mu(A)$-t az A halmaz *mértékének* nevezzük.

59. Mikor mondjuk azt, hogy egy μ mérték véges, illetve σ-véges?

Válasz: Tegyük fel, hogy $X \neq \emptyset$ tetszőleges halmaz, $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ egy X-beli σ-algebra és a $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvény mérték. A μ mérték *véges*, ha $\mu(X) < +\infty$. A μ mérték *σ-véges*, ha létezik olyan Ω-beli páronként diszjunkt (A_k) halmazsorozat, amelyre a következők teljesülnek:

(i) $\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k = X$,

(ii) $\forall k \in \mathbb{N}$ esetén $\mu(A_k) < +\infty$.

60. Definiálja a mértéktér fogalmát.

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz, $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ egy X-beli σ-algebra és $\mu : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ egy mérték. Az (X, Ω, μ) hármast nevezzük *mértéktérnek.*

61. Adjon meg egy triviális példát mértéktérre.

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz és $\Omega = \mathcal{P}(X)$. Vegyük az X halmaz egy ω elemét és tekintsük a

$$\mu_\omega(A) := \begin{cases} 1, & \text{ha } \omega \in A \\ 0, & \text{ha } \omega \notin A \end{cases} \qquad (A \in \mathcal{P}(X))$$

halmazfüggvényt. Ekkor $\big(X, \Omega, \mu\big)$ egy mértéktér.

62. Definiálja a félgyűrű fogalmát.

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz. A nemüres $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer X-beli ***félgyűrű***, ha

(i) $\emptyset \in \mathcal{H}$,

(ii) $\forall\, A, B \in \mathcal{H} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{H}$,

(iii) $\forall\, A, B \in \mathcal{H}$-hoz $\exists$ véges sok páronként diszjunkt $\mathcal{H}$-beli $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ halmaz úgy, hogy

$$A \setminus B = \bigcup_{k=1}^{n} Q_k.$$

63. Definiálja a halmazgyűrű fogalmát.

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz. A nemüres $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ halmazrendszer X-beli ***gyűrű***, ha

(i) $\forall\, A, B \in \mathcal{G} \Longrightarrow A \cup B \in \mathcal{G}$,

(ii) $\forall\, A, B \in \mathcal{G} \Longrightarrow A \setminus B \in \mathcal{G}$.

64. Milyen állítást ismer halmazgyűrűk metszetével kapcsolatban?

Válasz: Akárhány gyűrű metszete is gyűrű.

65. Mit értünk egy halmazrendszer által generált gyűrűn?

Válasz: Legyen X egy nemüres halmaz és $Y \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges X-beli halmazrendszer. Az *Y halmazrendszer által generált gyűrűn* a legszűkebb, Y-t tartalmazó X-beli gyűrűt értjük. Ez az Y-t tartalmazó X-beli gyűrűk közös része, azaz

$$\mathcal{G}(Y) = \bigcap_{\substack{Y \subset \mathcal{G} \\ \mathcal{G} \subset X \text{ gyűrű}}} \mathcal{G}.$$

66. Mondja ki a félgyűrű által generált gyűrű előállítására vonatkozó tételt.

Válasz: Legyen $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ egy félgyűrű. Ekkor a $\mathcal{H}$ által generált $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ gyűrűre a következő explicit előállítás érvényes:

$$\mathcal{G}(\mathcal{H}) = \left\{ \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{P}(X) \;\middle|\; A_k \in \mathcal{H},\ k = 1, 2, \ldots, n,\ \ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

67. Adja meg az előmérték definícióját.

Válasz: Legyen X egy nemüres halmaz és $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges X-beli félgyűrű, vagy gyűrű. Az $m : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvényt ***előmértéknek*** nevezzük, ha

(i) $m(A) \geq 0 \quad \forall\, A \in \mathcal{H}$ esetén,

(ii) $m(\emptyset) = 0$,

(iii) *m végesen additív.* Ezen azt értjük, hogy minden olyan $\mathcal{H}$-beli, páronként diszjunkt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ halmazok esetén, amelyekre $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{H}$ is igaz, fennáll az

$$m\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} m(A_k)$$

egyenlőség.

68. Mondja ki az első kiterjesztési tételt.

Válasz: Tegyük fel, hogy:

(i) X egy tetszőleges nemüres halmaz,

(ii) $\mathcal{H} \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges X-beli félgyűrű,
(iii) $m : \mathcal{H} \to \overline{\mathbb{R}}$ egy előmérték.
Ekkor m egyértelműen kiterjeszthető a $\mathcal{G}(\mathcal{H})$ gyűrűn értelmezett előmértékké.

69. Milyen fontos tulajdonságokkal rendelkezik az $\mathbb{I}^p \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^p)$ félgyűrűn értelmezett előmérték (azaz az intervallumok „természetes" mértéke)?

Válasz: 1. Az $\mathbb{I}^p$ félgyűrün értelmezett előmérték egyértelműen kiterjeszthető az $\mathbb{I}^p$ által generált $\mathcal{G}(\mathbb{I}^p)$ gyűrűn értelmezett előmértékké.

2. A $\mathcal{G}(\mathbb{I}^p)$ gyűrűn ez az előmérték σ-additív is. Ez azt jelenti, hogy ha $(A_k, k \in \mathbb{N})$ egy olyan páronként diszjunkt $\mathcal{G}(\mathbb{I}^p)$-beli halmazsorozat, amelynek az egyesítése is benne van $\mathcal{G}(\mathbb{I}^p)$-ben, akkor fennáll az

$$m\left(\bigcup_{i=k}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} m(A_k)$$

egyenlőség.

70. Definiálja a kvázimérték fogalmát.

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ pedig egy X-beli gyűrű. A $\mu : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ halmazfüggvényt ***kvázimértéknek*** nevezzük, ha az alábbiak teljesülnek:
(i) $\forall\, A \in \mathcal{G}$ esetén $\mu(A) \geq 0$,
(ii) $\mu(\emptyset) = 0$,
(iii) μ σ-additív. Ezen azt értjük, hogy minden olyan $\mathcal{G}$-beli $(A_k, k \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén, amelynek a tagjai páronként diszjunktak és $\cup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{G}$ is igaz, teljesül, hogy

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \mu(A_k).$$

71. Mondja ki a második kiterjesztési tételt.

Válasz: Minden gyűrűn értelmezett kvázimérték kiterjeszthető mértékké. Ez azt jelenti, hogy ha
(i) X egy tetszőleges nemüres halmaz,
(ii) $\mathcal{G} \subset \mathcal{P}(X)$ egy tetszőleges X-beli gyűrű,
(iii) $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ egy kvázimérték,
akkor létezik olyan $\mathcal{G}$-t tartalmazó X-beli Ω σ-algebra és olyan μ mérték Ω-n, amelyik kiterjesztése $\tilde{\mu}$-nek.

72. Értelmezze a külső mértéket.

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{G}$ egy X-beli gyűrű és $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ egy kvázimérték. Ekkor az $A \in \mathcal{P}(X)$ halmaz ***külső mértékét*** így értelmezzük:

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}(A_k) \mid A_k \in \mathcal{G}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{és } A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right\}.$$

A $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to [0, +\infty]$ halmazfüggvényt pedig ***külső mértéknek*** nevezzük.

73. Milyen tulajdonságai vannak a $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ külső mértéknek?

Válasz: A $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ külső mértékre a következők teljesülnek:
(i) $\mu^*(A) \geq 0$ minden $A \in \mathcal{P}(X)$ esetén,
(ii) $\mu^*(\emptyset) = 0$,
(iii) ha $A, B \subset X$ és $A \subset B \Longrightarrow \mu^*(A) \leq \mu^*(B)$ (a külső mérték ***monoton***),
(iv) ***σ-szubadditív***; ez azt jelenti, hogy minden X-beli $(A_n, n \in \mathbb{N})$ halmazsorozat esetén fennáll a

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

egyenlőtlenség.

74. Mikor nevezünk egy $B \in \mathcal{P}(X)$ halmazt Carathèodory értelemben mérhetőnek?

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{G}$ egy X-beli gyűrű és $\tilde{\mu} : \mathcal{G} \to \overline{\mathbb{R}}$ egy kvázimérték. Jelölje μ^* az ezek által megahtározott $\mu^* : \mathcal{P}(X) \to \overline{\mathbb{R}}$ külső mértéket. A $B \in \mathcal{P}(X)$ halmazt *Caratheodory értelemben mérhetőnek* nevezzük akkor, ha μ^* minden X-beli A halmazt additív módon vág szét, azaz a

$$\mu^*(A) = \mu^*(A \cap B) + \mu^*(A \setminus B)$$

egyenlőség az X halmaz minden A részhalmazára teljesül.

75. Milyen kapcsolat van a 2. kiterjesztési tételből adódó Ω σ-algebra és a $\mathcal{G}$ által generált $\Omega(\mathcal{G})$ σ-algebra között?
Válasz: Az $\Omega(\mathcal{G}) \subset \Omega$ reláció az általános esetben is teljesül (ez triviális). Az $\Omega(\mathcal{G}) = \Omega$ egyenlőség azonban általában nem igaz, l. az $\mathbb{R}^p$-n értelmezett Lebesgue-mértéket.

76. Definiálja teljes mérték fogalmát.
Válasz: Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér. A μ mérték *teljes*, ha minden nullamértékű halmaz tetszőleges részhalmaza is mérhető (persze ez is nullmértékű).

77. Adjon meg a $[0, 1]$ intervallumon egy olyan halmazt, amelyik nem Lebesgue-mérhető.
Válasz: Értelmezzük $\mathbb{R}$-en a következő relációt:

$$x, y \in \mathbb{R} \quad \text{esetén legyen } x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Q}.$$

Ez egy ekvivalencia reláció, ami $\mathbb{R}$-nek egy osztályfelbontását indukálja. Legyen K az a halmaz, amelyik minden ekvivalenciaosztályból pontosan egy [0,1)-beli elemet tartalmaz. Ez a $K \subset [0, 1]$ halmaz nem Lebesgue-mérhető.

78. Mi az alapvető különbség a Borel-mérték és a Lebesgue-mérték között?
Válasz: Legyen $p \geq 1$ rögzített természetes szám.
(a) Az $\big(\mathbb{R}^p, \Omega(\mathbb{I}^p), \lambda_{|\Omega(\mathbb{I}^p)}\big)$ Borel-féle mértéktér *nem teljes.*
(b) Az $(\mathbb{R}^p, \Lambda, \lambda)$ Lebesgue-féle mértéktér *teljes*; ez a Borel-féle mértéktér „teljessé tétele".

79. Definiálja $\overline{\mathbb{R}}$ Borel-halmazait.
Válasz: $\overline{\mathbb{R}}$ Borel-halmazai a $B \cup C$ halmazok, ahol $B \in \Omega(\mathbb{I})$ és $C = \emptyset$, vagy $C = \{+\infty\}$, vagy $C = \{-\infty\}$, vagy $C = \{\pm\infty\}$.

80. Definiálja a mérhető függvény fogalmát.
Válasz: Legyen (X, Ω) egy tetszőleges mérhető tér. Az $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *függvény Ω-mérhető*, ha

$$\forall\, A \subset \overline{\mathbb{R}} \ \text{ Borel-halmaz esetén} \qquad f^{-1}[A] = \{x \in X \mid f(x) \in A\} \in \Omega.$$

Jelölés: $\mathcal{M}(X, \Omega)$ az Ω-mérhető függvények halmaza.

81. Mi a jelentése az $\{f \geq \alpha\}$ jelölésnek?
Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz, $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ és $\alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor:

$$\{f \geq \alpha\} := \{x \in X \mid f(x) \geq \alpha\}.$$

82. Mit jelent függvény mérhetőségének a nívóhalmazokkal való jellemzése?
Válasz: Legyen (X, Ω) egy mérhető tér és $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. Az f függvény akkor és csak akkor Ω-mérhető, ha

$$\forall\, \alpha \in \mathbb{R} \ \text{ esetén } \ \{f \geq \alpha\} \in \Omega.$$

(Az állítás igaz marad akkor is, ha az $\{f \geq \alpha\}$ nívóhalmazok helyett az $\{f < \alpha\}, \ldots$ stb. nívóhalmazokat tekintjük.

83. Definiálja absztrakt halmazon a lépcsősfüggvény fogalmát.
Válasz: Legyen X egy nemüres halmaz. Az $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ *lépcsősfüggvény*, ha az $\mathcal{R}_f \subset \overline{\mathbb{R}}$ halmaz véges.

84. Fogalmazza meg a lépcsősfüggvények kanonikus előállítására vonatkozó állítást.

Válasz: Legyen X egy tetszőleges nemüres halmaz. Az $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény akkor és csak akkor lépcsősfüggvény, ha

$$\left.\begin{array}{l}\exists\, A_1, A_2, \dots, A_n \subset X \text{ diszjunkt halmazok, és} \\ \exists\, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}\end{array}\right\} : f(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(x) \quad (x \in X),$$

ahol χ_{A_i} az A_i halmaz karakterisztikus függvénye.

85. Milyen tételt ismer nemnegatív mérhető függvény lépcsősfüggvényekkel való előállításáról?

Válasz: Legyen (X, Ω) egy mérhető tér és f egy nemnegatív Ω-mérhető függvény. Ekkor létezik nemnegatív, Ω-mérhető lépcsősfüggvényeknek egy olyan *monoton növekedő* (f_n) sorozata, amelyik pontonként tart az f függvényhez:

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \qquad (x \in X).$$

86. Hogyan lehet függvény mérhetőségét lépcsősfüggvény-sorozattal jellemezni?

Válasz:

$$f \in \mathcal{M}(X, \Omega) \iff \exists\,(f_n) \subset \mathcal{M}(X, \Omega) : \lim_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x) \quad (x \in X).$$

87. Fogalmazza meg Jegorov tételét.

Válasz: Legyen (X, Ω, μ) mértéktér. Tegyük fel, hogy $\mu(X) < +\infty$ és $f_n : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ Ω-mérhető függvényekből álló, pontonként konvergens függvénysorozat. Jelölje f a határfüggvényt: $f(x) := \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ $(x \in X)$. Ekkor:

(a) $f \in \mathcal{M}(X, \Omega)$,

(b) $\forall\, \varepsilon > 0 : \exists\, X_\varepsilon \in \Omega$, amelyre $\mu(X \setminus X_\varepsilon) < \varepsilon$, és az (f_n) függvénysorozat már egyenletesen konvergál az X_ε halmazon az f függvényhez.

88. Fogalmazza meg Luzin tételét.

Válasz: Tekintsük az $(\mathbb{R}^p, \Lambda, \lambda)$ $(p \in \mathbb{N})$ Lebesgue-féle mértékteret. Legyen $A \subset \mathbb{R}^p$ véges mértékű halmaz és $f : A \to \mathbb{R}$ Lebesgue-értelemben mérhető, véges értékű függvény. Ekkor: $\forall\, \varepsilon > 0$ számhoz $\exists\, A_\varepsilon \subset A$ halmaz, hogy

(a) $A_\varepsilon \in \Lambda$,

(b) $\lambda(A_\varepsilon) < \varepsilon$,

(c) $f_{|A \setminus A_\varepsilon}$ folytonos.

89. Definiálja nemnegatív lépcsősfüggvény μ mérték szerinti integrálját.

Válasz: Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér. Tekintsük a nemnegatív f lépcsősfüggvénynek a kanonikus előállítását:

$$f(x) = \sum_{y \in \mathcal{R}_f} y \cdot \chi_{\{f=y\}} \qquad (x \in X).$$

Az f függvény μ *mérték szerinti integrál*ján a következő számot értjük:

$$\int_X f \mathrm{d}\mu := \sum_{y \in R_f} y \cdot \mu(\{f = y\}).$$

90. Sorolja fel az $L_0^+(X, \Omega, \mu)$ függvényhalmazon értelmezett integrál alaptulajdonságait.

Válasz: Legyen $f, g \in L_0^+(X, \Omega, \mu)$ és $\alpha \geq 0$. Ekkor:

(a) $\int_X \alpha \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int_X f \,\mathrm{d}\mu$ (homogén),

(b) $\int_X (f + g) \,\mathrm{d}\mu = \int_X f \,\mathrm{d}\mu + \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ (additív),

(c) $f \leq g \Longrightarrow \int_X f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_X g \,\mathrm{d}\mu$ (az integrál az integrandusban monoton).

91. Definiálja az $L^+(X, \Omega, \mu)$ függvényhalmazt. Hogyan lehet más módon jellemezni a halmazhoz tartozó függvényeket?

Válasz: Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér. Az $L^+(X, \Omega, \mu)$ függvényhalmazhoz (definíció szerint) pontosan azok az $f : X \to [0, +\infty]$ függvények tartoznak, amelyekhez létezik olyan monoton növekedő, nemnegatív mérhető (f_n) lépcsősfüggvény-sorozat, amelyiknek a pontonkénti határfüggvénye az f függvény.
Egy ekvivalens jellemzés: $f \in L^+(X, \Omega, \mu)$ akkor és csak akkor, ha f nemnegatív Ω-mérhető függvény.

92. Definiálja az $f \in L^+(X, \Omega, \mu)$ függvény μ mérték szerinti integrálját.

Válasz: A definíció szerint f akkor és csak akkor eleme az $L^+(X, \Omega, \mu)$ függvényhalmaznak, ha létezik olyan $f_n \in L_0^+(X, \Omega, \mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ nemnegatív lépcsősfüggvény-sorozat, amelyik monton növekedő módon tart az X halmazon pontonként az f függvényhez. Egy ilyen sorozatot véve az f függvény μ mérték szerinti integrálját így értelmezzük:

$$\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu := \lim_n \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu.$$

93. Fogalmazza meg Beppo Levi tételét.

Válasz: Tegyük fel, hogy $f_n \in L^+(X, \Omega, \mu)$ $(n \in \mathbb{N})$ egy monoton növekedő függvénysorozat, és legyen $f := \lim\limits_n f_n (= \sup f_n)$.
Ekkor $f \in L^+(X, \Omega, \mu)$ és $\int\limits_X f \, \mathrm{d}\mu = \lim\limits_n \int\limits_X f_n \, \mathrm{d}\mu$.

94. Definiálja egy függvény pozitív és negatív részét. Írja fel a három függvény közötti kapcsolatot.

Válasz: Legyen X egy nemüres halmaz és $f : X \to \mathbb{R}$. Az

$$\begin{aligned} f^+ &:= \max\{f, 0\} \quad \text{függvény } f \text{ pozitív része,} \\ f^- &:= -\min\{f, 0\} \quad \text{pedig } f \text{ negatív része.} \end{aligned}$$

E három függvény közötti kapcsolat: $f = f^+ - f^-$.

95. Definiálja mérhető függvény mérték szerinti integrálját.

Válasz: Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér és tegyük fel, hogy $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy olyan Ω-mérhető függvény, amelyre az $\int\limits_X f^+ \, d\mu$ és az $\int\limits_X f^- \, d\mu$ integrálok közül legalább az egyik véges. Az ilyen f függvény μ mérték szerinti integrálját így értelmezzük:

$$\int\limits_X f \, d\mu := \int\limits_X f^+ \, d\mu - \int\limits_X f^- \, d\mu.$$

96. Definiálja a Lebesgue-integrálható függvény fogalmát és az $L(X, \Omega, \mu)$ függvényhalmazt.

Válasz: Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér. Az Ω-mérhető $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ függvény *Lebesgue-integrálható*, ha az $\int\limits_X f \, d\mu$ integrál (véges) valós szám.

$$L(X, \Omega, \mu) := \Big\{ f : X \to \overline{\mathbb{R}} \ \mid \ f \ \ \Omega\text{-mérhető és } \int_X f \, d\mu \ \text{ véges} \Big\}.$$

97. Milyen ekvivalens állításokat ismer egy függvény Lebesgue-integrálhatóságával kapcsolatban?

Válasz: Legyen (X, Ω, μ) egy mértéktér és $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ egy Ω-mérhető függvény. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:

(a) az f függvény Lebesgue-integrálható (röviden: $f \in L$);
(b) $f^+, f^- \in L$;
(c) $\exists \, g, h \in L; g, h \geq 0 \ : f = g - h$;
(d) $\exists \, G \in L : |f| \leq G$ (f-nek van integrálható majoránsa);
(e) $|f| \in L$.

98. Mit jelent a μ-*majdnem mindenütt* szóhasználat?

Válasz: Legyen (X, Ω, μ) tetszőleges mértéktér. Tegyük fel, hogy T az X elemeire vonatkozó „logikai kifejezés" (tulajdonság, kijelentés), azaz $\forall\, x \in X$-re $T(x)$ vagy igaz, vagy hamis. Azt mondjuk, hogy a T tulajdonság az X-en *μ-majdnem mindenütt* (röviden: μ-m.m. X-en) teljesül, ha $\exists\, A \in \Omega$, $\mu(A) = 0$ halmaz, hogy $\forall\, x \in X \setminus A$ elemre a $T(x)$ tulajdonság igaz.

99. Mit értünk azon, hogy a Lebesgue-integrál „érzéketlen" a μ-nullamértékű halmazokra?

Válasz:

(a) Bármely $f \in L^+$ esetén

$$\int\limits_X f\, d\mu = 0 \Longleftrightarrow \mu\text{-m.m. } X\text{-en.}$$

(b) Ha $f, g \in \mathcal{M}(X, \Omega)$, $f = g$ μ-m.m. és $f \in L$, akkor $g \in L$ és $\int_X g\, d\mu = \int_X f\, d\mu$.

(c) Minden L-beli f függvényre igaz, hogy $|f| < +\infty$ μ-m.m.

100. Fogalmazza meg a Lebesgue-integrálható függvényekre vonatkozó Beppo Levi tételt.

Válasz: Tegyük fel, hogy

(a) $f_n \in L$ $(n \in \mathbb{N})$,

(b) az (f_n) monoton növő függvénysorozat, és $f := \lim\limits_{n\to\infty} f_n$,

(c) az integrálok $\int\limits_X f_n\, d\mu$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozata korlátos.

Ekkor az f függvény Lebesgue-integrálható és

$$\int\limits_X f\, d\mu = \int\limits_X \lim_n (f_n)\, d\mu = \lim_n \int\limits_X f_n\, d\mu.$$

101. Mondja ki Fatou tételét.

Válasz:

(a) Bármely $f_n \in L^+$ $(n \in \mathbb{N})$ függvénysorozatra

$$\int\limits_X \Big(\liminf_n f_n\Big)\, d\mu \le \liminf_n \Big(\int\limits_X f_n\, d\mu\Big).$$

(b) Ha $\exists\, F \in L : f_n \le F$ $(\forall n \in \mathbb{N}$ μ-m.m. az X-en), akkor

$$\limsup_n \Big(\int\limits_X f_n\, d\mu\Big) \le \int\limits_X (\limsup_n f_n)\, d\mu.$$

102. Mondja ki a függvénysorozatok tagonkénti integrálhatóságára vonatkozó Lebesgue-tételt.

Válasz: Legyen (X, Ω, μ) tetszőleges mértéktér, és tegyük fel, hogy

(i) $f_n \in L \quad (n \in \mathbb{N})$,

(ii) a függvénysorozatnak van integrálható majoránsa, azaz $\exists\, g \in L : |f_n| \le g$ $(n \in \mathbb{N})$ μ-m.m. X-en,

(iii) az (f_n) függvénysorozat az X-en μ-m.m. konvergál az f függvényhez.

Ekkor $f \in L(X, \Omega, \mu)$ és

$$\int\limits_X f\, d\mu = \int\limits_X \Big(\lim_n f_n\Big)\, d\mu = \lim_n \int\limits_X f_n\, d\mu.$$