Komplex függvénytani feladatok I.

(Komplex számok, elemi függvények)

Programozó matematikus hallgatóknak

Összeállította:

Szili László

2002. február

Komplex számhalmazok szemléltetése

1. Feladat. *Szemléltesse a komplex számsíkon a megadott feltételeknek eleget tevő $z \in \mathbb{C}$ számok halmazát:*

(a) $|\mathrm{Re}\, z| > 1$ *és* $|\mathrm{Im}\, z| > 2$, *(b)* $|z| + \mathrm{Re}\, z \leq 1$, *(c)* $|z-1| \leq |z+1|$,
(d) $|z-1| + |z+1| = 4$, *(e)* $\mathrm{Im}\,(z^2) = -1$, *(f)* $\mathrm{Re}\, |\frac{z-1}{z+i}| = 0$.

2. Feladat. *Mutassa meg, hogy a komplex számsík köreinek és egyeneseinek általános egyenlete:*

$$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0,$$

ahol A és C tetszőleges ***valós****, B pedig tetszőleges* ***komplex*** *paraméter.*

Megoldás. Legyen $z = \mathrm{Re}\, z + i\mathrm{Im}\, z =: x + iy$. Az (x, y)-sík köreinek és egyeneseinek általános egyenlete: $a(x^2 + y^2) + bx + cy + d = 0$, ahol a, b, c és d tetszőleges valós paraméterek. (Ha $a = 0$, akkor az egyenesek általános egyenletét kapjuk.) Mivel

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \qquad y = \frac{z - \overline{z}}{2i},$$

ezért

$$az\overline{z} + \frac{b - ic}{2}z + \frac{b + ic}{2}\overline{z} + d = 0,$$

amiből következik a feladat állítása. (Ha $A = 0$, akkor a komplex számsík egyeneseinek komplex egyenletét kapjuk meg.) ■

3. Feladat. *Írja fel z és $\overline{z}$ segítségével a következő görbék egyenletét:*

(a) $y = 3x - 7$, *(b)* $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 10 = 0$,
(c) $x^2 + 3y^2 = 1$, *(d)* $x^2 - 2y^2 = 1$.

4. Feladat. *Határozza meg azon pontok halmazát a síkban, amelyeknek két adott ponttól mért távolságának az aránya 1-től különböző adott pizitív szám (**Apollonios-kör**).*

Megoldás. Tekintsük a komplex számsíkot, és legyen $z = x + iy$, $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$. A két adott pontot helyezzük el a valós tengely -1, illetve 1 pontjába, és legyen $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ a megadott arány. Meghatározandó tehát azon $z \in \mathbb{C}$ számok halmaza, amelyekre

$$\frac{|z-1|}{|z+1|} = \lambda \qquad \Longleftrightarrow \qquad |z-1|^2 = \lambda^2 |z+1|^2.$$

Mivel $z \cdot \overline{z} = |z|^2$, ezért a keresett z pontokra $(z-1)(\overline{z}-1) = \lambda^2(z+1)(\overline{z}+1)$, azaz

$$(\lambda^2 - 1)z\overline{z} + (\lambda^2 + 1)\overline{z} + (\lambda^2 + 1)z + \lambda^2 - 1 = 0$$

teljesül. A $\lambda \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ feltétel miatt ez egy kör egyenlete. (Határozza meg a középpontját és a sugarát!) ■

Az $\exp$, a $\cos$, a $\sin$, a sh és a ch függvények értelmezése

1. Feladat. *Mutassa meg, hogy az alábbi sorok mindegyike abszolút konvergens minden $z \in \mathbb{C}$ számra:*

$$\sum_{n=0} \frac{z^n}{n!}, \quad \sum_{n=0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}, \quad \sum_{n=0} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \sum_{n=0} \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Ezért értelmesek az alábbi definíciók:

$$\exp z := e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

$$\operatorname{sh} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (z \in \mathbb{C}),$$

$$\operatorname{ch} z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \quad (z \in \mathbb{C}).$$

Megjegyzés. A függvényértékek tetszőleges $z \in \mathbb{C}$ esetén (elvileg) tetszőleges pontossággal kiszámolhatók.

2. Feladat. *Igazolja az alábbi, ún.* ***Euler-féle*** *összefüggéseket:*

(a) $e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (z \in \mathbb{C})$,

(b) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad (z \in \mathbb{C})$, *(c)* $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \quad (z \in \mathbb{C})$.

3. Feladat. *Mutassa meg, hogy minden $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ esetén*

(a) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}$, *(b)* $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$,

(c) $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$,

(d) $\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2$,

(e) $\operatorname{sh}(z_1 + z_2) = \operatorname{sh} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{ch} z_1 \operatorname{sh} z_2$,

(f) $\operatorname{ch}(z_1 + z_2) = \operatorname{ch} z_1 \operatorname{ch} z_2 + \operatorname{sh} z_1 \operatorname{sh} z_2$,

(g) $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$,

(h) $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$.

Komplex függvény valós és képzetes része

1. Feladat. *Keressen „zárt” alakot a következő összegekre:*

(a) $1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$,
$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$;
(b) $\sin\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin(2n-1)\varphi$;
(c) $n\cos\varphi+(n-1)\cos 2\varphi+(n-2)\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$,

ahol $n=1,2,\ldots$ *és* $\varphi\in\mathbb{R}$.

Megoldás. (a) Legyen $z:=\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$. A Moivre-formula alapján

$$z^n=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi=e^{in\varphi}\qquad(n=0,1,2,\ldots,\ \ \varphi\in\mathbb{R}),$$

ezért

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi=\mathrm{Re}\,\Big(\sum_{k=0}^{n} z^k\Big),$$

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin n\varphi=\mathrm{Im}\,\Big(\sum_{k=0}^{n} z^k\Big).$$

A geometriai sor részletösszegeire vonatkozó ismert összefüggés alapján minden $z\in\mathbb{C}\setminus\{1\}$ (azaz $\varphi\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$) számra azt kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{n} z^k=\frac{z^{n+1}-1}{z-1}=\frac{e^{i(n+1)\varphi}-1}{e^{i\varphi}-1}=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}\cdot\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}-e^{-i\frac{n+1}{2}\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}-e^{-i\frac{\varphi}{2}}}=$$

$$=\frac{e^{i\frac{n+1}{2}\varphi}}{e^{i\frac{\varphi}{2}}}\cdot\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}=\frac{\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}e^{i\frac{n}{2}\varphi}=$$

$$=\frac{\cos\frac{n}{2}\varphi\cdot\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}+i\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\cdot\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}.$$

Ezért

$$1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cos 3\varphi+\cdots+\cos n\varphi=\frac{\cos\frac{n}{2}\varphi\cdot\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}},$$

$$\sin\varphi+\sin 2\varphi+\sin 3\varphi+\cdots+\sin n\varphi=\frac{\sin\frac{n}{2}\varphi\cdot\sin\frac{n+1}{2}\varphi}{\sin\frac{\varphi}{2}}$$

minden $n=1,2,\ldots$ és $\varphi\in\mathbb{R}\setminus\{2k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ esetén. (Pontosan ezekre a φ értékekre lesznek a nevezők 0-tól különbözők.) Mit mondhatunk akkor, ha $\varphi=2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$? ■

2. Feladat. *Igazolja, hogy minden* $0\le r<1$ *és* $\varphi\in\mathbb{R}$ *esetén a*

(a) $\sum\limits_{n=0} r^n\cos n\varphi$, *(b)* $\sum\limits_{n=1} r^n\sin n\varphi$

sorok konvergensek, és számítsa ki az összegüket!

Megoldás. Legyen $z := r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. A Moivre-formula alapján

$$z^n = r^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} \qquad (n = 0, 1, 2, \dots,\ \varphi \in \mathbb{R}),$$

ezért

$$\mathrm{Re}\Big(\sum_{n=0} z^n\Big) = \sum_{n=0} r^n \cos n\varphi,$$
$$\mathrm{Im}\Big(\sum_{n=0} z^n\Big) = \sum_{n=1} r^n \sin n\varphi.$$

Mivel $r = |z| < 1$, ezért a $\sum\limits_{n=0} z^n$ sor (abszolút) konvergens, és az összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}.$$

A komplex tagú sorok konvergenciájára vonatkozó tétel alapján tehát a $\sum\limits_{n=0} z^n$ sor valós- és képzetes része is konvergens.

A feladatban megadott sorok összegének a kiszámításához az

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-re^{i\varphi}} \qquad (0 \le r < 1,\ \varphi \in \mathbb{R})$$

számok valós- és képzetes részét kell meghatározni. Mivel

$$\frac{1}{1-re^{i\varphi}} = \frac{1}{1-re^{i\varphi}} \cdot \frac{\overline{1-re^{i\varphi}}}{\overline{1-re^{i\varphi}}} = \frac{1-re^{-i\varphi}}{(1-re^{i\varphi})(1-re^{-i\varphi})} =$$
$$= \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi + r^2} + i\frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2},$$

ezért minden $0 \le r < 1$ és $\varphi \in \mathbb{R}$ számra

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2},$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

■

Megjegyzés. Az $\frac{1}{2} + \sum\limits_{n=1} z^n$ sor (abszolút) konvergens minden $|z| < 1$ komplex számra. Ennek valós-, illetve képzetes része az

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1} r^n \cos n\varphi, \quad \text{illetve a} \quad \sum_{n=1} r^n \sin n\varphi$$

sor, ahol $z := r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}$. Az előző feladat alapján minden $0 \le r < 1$ és $\varphi \in \mathbb{R}$ esetén

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} r^n \cos n\varphi - \frac{1}{2} = \frac{1-r\cos\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2},$$

illetve

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \sin n\varphi = \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2}.$$

A

$$P(r,\varphi) := \frac{1}{2}\cdot\frac{1-r^2}{1-2r\cos\varphi+r^2} \qquad (0\le r<1,\ \varphi\in\mathbb{R})$$

függvényt *Poisson-mag*nak, a

$$Q(r,\varphi) := \frac{r\sin\varphi}{1-2r\cos\varphi+r^2} \qquad (0\le r<1,\ \varphi\in\mathbb{R})$$

függvényt pedig *konjugált Poisson-mag*nak nevezik. ■

3. Feladat. *Határozza meg a következő komplex függvények valós és képzetes részét:*

(a) $f(z) := \dfrac{z^2+1}{z} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{0\});$

(b) $f(z) := \dfrac{z-i}{z+i} \quad (z\in\mathbb{C}\setminus\{-i\});$

(c) exp, cos, sin, sh, ch.

Megoldás. (b) Legyen $z := \operatorname{Re} z + i\operatorname{Im} z =: x+iy \in \mathbb{C}\setminus\{-i\}$ (azaz $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}$). Ekkor

$$\frac{z-i}{z+i} = \frac{z-i}{z+i}\cdot\frac{\overline{z+i}}{\overline{z+i}} = \frac{(z-i)(\overline{z}-i)}{(z+i)(\overline{z}-i)} = \frac{z\overline{z}-1-i(z+\overline{z})}{z\overline{z}+1+i(\overline{z}-z)} =$$

$$= \frac{x^2+y^2-1-2ix}{x^2+y^2+1-2y} = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1-2y} - i\frac{2x}{x^2+y^2+1-2y},$$

ezért az f függvény valós-, illetve képzetes része

$$f_1(x,y) = \frac{x^2+y^2-1}{x^2+y^2+1-2y}, \qquad \text{illetve} \qquad f_2(x,y) = -\frac{2x}{x^2+y^2+1-2y}$$

$$\big((x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,-1)\}\big).$$

(c) Mutassa meg, hogy minden $x,y\in\mathbb{R}$ számra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

$$\begin{aligned}
e^{x+iy} &= e^x\cos y + ie^x\sin y,\\
\sin(x+iy) &= \sin x\operatorname{ch} y + i\cos x\operatorname{sh} y,\\
\cos(x+iy) &= \cos x\operatorname{ch} y - i\sin x\operatorname{sh} y,\\
\operatorname{sh}(x+iy) &= \operatorname{sh} x\cos y + i\operatorname{ch} x\sin y,\\
\operatorname{ch}(x+iy) &= \operatorname{ch} x\cos y + i\operatorname{sh} x\sin y.
\end{aligned}$$

■

Elemi függvények tulajdonságai és szemléltetésük

$\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ típusú függvények esetében *z-sík*nak nevezzük az értelmezési tartományt, *w-sík*nak pedig az értékkészletet tartalmazó számsíkot.

Lineáris törtfüggvények az

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d} \qquad (z \in \mathbb{C}, \quad \text{ha} \quad c = 0 \quad \text{és} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \quad \text{ha} \quad c \neq 0)$$

függvények (vagy leképezések), ahol a, b, c és d olyan komplex paraméterek, amelyekre $ad - bc \neq 0$ (egyébként a kevésbé érdekes konstansfüggvényről van szó).

Ezek a leképezések kapcsolatba hozhatók egy adott sík bizonyos transzformációival.

Az alábbi síkbeli geometriai transzformációk definícióit, valamint az alapvető tulajdonságaikat ismertnek tételezzük fel:
(a) adott vektorral való *eltolás* (vagy *transzláció*),
(b) a sík adott pontja körüli, adott szöggel való *elforgatás* (vagy *rotáció*),
(c) a sík adott pontjából történő adott arányú kicsinyítés vagy nagyítás (vagy *dilatáció*),
(d) a sík adott egyenesére vonatkozó *tükrözés*.

Gyakran célszerű a z-síkot és a w-síkot összeeső helyzetben felfogni. Ekkor a függvény a z-sík önmagába való leképezését szolgáltatja.

Először néhány speciális lineáris törtfüggvénnyel ismerkedünk meg.

1. Feladat. *(a) Igazolja, hogy az*

$$f(z) := az + b \qquad (z \in \mathbb{C})$$

lineáris függvény, *ahol $a, b \in \mathbb{C}$ adott paraméterek akkor és csak akkor invertálható, ha $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ és $b \in \mathbb{C}$. Adja meg az inverz leképezést.*

(b) Tetszőleges lineáris leképezésnél bármely z-beli D halmaz képe
(i) origóból történő nagyítás vagy kicsinyítés (dilatáció),
(ii) origó körüli elforgatás (rotáció),
(iii) adott vektorral való eltolás (transzláció)
egymásutánjával kapható meg.

(c) Minden lineáris leképezésnél z-beli egyenesek képe w-beli egyenesek, z-beli körök képe pedig w-beli körök. A leképezés szögtartó és forgásiránytartó.

Megoldás. (a) Invertálhatóság:

$$\big(az_1 + b = az_2 + b \quad \Rightarrow \quad z_1 = z_2\big) \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big(a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad \text{és} \quad b \in \mathbb{C}\big).$$

Az inverz:

$$f^{-1}(z) = \frac{1}{a}z - \frac{b}{a} \qquad (z \in \mathbb{C}).$$

(b) Legyen $a := re^{i\varphi}$ $(r \geq 0,\ -\pi < \varphi \leq \pi)$. Az általános lineáris leképezések az alábbi speciális leképezések kompozíciójaként állíthatók elő:

$$f_1(z) := rz \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad f_2(z) := e^{i\varphi}z \quad (z \in \mathbb{C}), \qquad f_3(z) := z + b \quad (z \in \mathbb{C}),$$

ui. minden $z \in \mathbb{C}$ számra

$$\big(f_3 \circ f_2 \circ f_1\big)(z) = f_3\big(f_2\big(f_1(z)\big)\big) = f_3(f_2(rz)) = f_3(re^{i\varphi}z) = f_3(az) = az + b = f(z).$$

Gondolja meg, hogy az f_1 leképezés geometriai jelentése az origóból történő nagyítás $(r \geq 1)$ vagy kicsinyítés $(r \leq 1)$, az f_2-é az origó körüli φ-szöggel történő elforgatás, az f_3-é pedig a b vektorral való eltolás.

(c) Az állítás (b)-ből, valamint az ott leírt geometriai transzformációk tulajdonságaiból következik. ■

$\boxed{\textbf{2. Feladat.}}$ *A következő lineáris leképezések a z-sík megadott taromány át a w-sík mely tartományára képezik le?*

(a) $f(z) := i(z+1)$ $(z \in \mathbb{C})$ *a* $\operatorname{Re} z > 0$ *tartományt,*
(b) $f(z) := (1+i)z$ $(z \in \mathbb{C})$ *az* $\operatorname{Im} z > 0$ *tartományt,*
(c) $f(z) := -(iz+1)$ $(z \in \mathbb{C})$ *a* $|z| < 1$ *tartományt,*
(d) $f(z) := (i-1)z$ $(z \in \mathbb{C})$ *a* $|z| > 1$ *tartományt.*

Megoldás. (a) Legyen $z \in \mathbb{C}$ és $w := f(z) = i(z+1)$. Mivel $z = -iw - 1$, ezért

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re}(-iw - 1) = \operatorname{Im}(w) - 1.$$

Ha $\operatorname{Re} z > 0$, akkor a w képpontokra az $\operatorname{Im}(w) - 1 > 0$ egyenlőtlenség adódik. (Szemléltesse a megfelelő halmazokat!)

Mi a geometriai jelentése az adott leképezésnek? Ennek felhasználásával oldja meg geometriai úton is a feladatot! ■

$\boxed{\textbf{3. Feladat.}}$ *Milyen geometriai transzformációval ekvivalens az*

$$f(z) := \frac{1}{\overline{z}} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

leképezés?

Megoldás. Jelölje O a komplex számsík origóját, P, illetve P' a $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, illetve a $w := \dfrac{1}{\overline{z}}$ számoknak megfelelő pontokat. A

$$w = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{\overline{z}} \cdot \frac{z}{z} = \frac{1}{|z|^2} \cdot z$$

egyenlőségből következik, hogy a P' pont az OP félegyenesen helyezkedik el. Mivel $|z| = |\overline{z}|$, ezért

$$\overline{OP} \cdot \overline{OP'} = |z| \cdot \frac{1}{|\overline{z}|} = 1,$$

ami azt jelenti, hogy a leképezés azzal a geometriai transzformációval ekvivalens, amelyik a sík origótól különböző P pontjához azt, az OP félegyenesen elhelyezkedő P' pontot rendeli, amelyre $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=1$ teljesül. Ezt a geometriai transzformációt az O középpontú egységsugarú körre vonatkozó *inverzió*nak nevezik. ■

DEFINÍCIÓ. Adott egy S sík, abban egy O pont és egy O körüli r sugarú kör. Azt a transzformációt nevezzük a *sík adott körre vonatkozó inverziójának*, amely a sík egy O-tól különböző P pontjához azt a P' pontot rendeli, amely az OP félegyenesen helyezkedik el úgy, hogy $\overline{OP}\cdot\overline{OP'}=r^2$.

$\boxed{\textbf{4. Feladat.}}$ *Mutassa meg, hogy az*

$$f(z) := \frac{1}{z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

leképezés a z-sík köreit a w-sík köreibe vagy egyeneseibe, a z-sík egyeneseit a w-sík egyeneseibe vagy köreibe viszi át. Pontosabban: az O ponton át nem haladó kör képe is ilyen kör, az O-n áthaladó kör képe az O-n át nem haladó egyenes; az O-n át nem haladó egyenes képe az O-n áthaladó kör. Végül az O-n áthaldó egyenes képe önmaga. (Ugyanez érvényes a megfelelő geometriai transzformációra is.)

Megoldás. Azt már tudjuk, hogy a z-sík köreinek és egyeneseinek az általános egyenlete

$$Az\overline{z} + \overline{B}z + B\overline{z} + C = 0,$$

ahol A és C tetszőleges *valós*, B pedig tetszőleges *komplex* szám.

Ha $A = 0$, akkor a z-sík egyeneseit kapjuk. $C = 0$ esetén az origón átmenő, ha $C \neq 0$, akkor az origón át nem menő egyenesek adódnak.

A z-sík köreit $A \neq 0$ esetén kapjuk meg. A körök az origón átmennek, ha $C = 0$ és nem mennek át az origón, ha $C \neq 0$.

Legyen w a $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pont képe: $w := \dfrac{1}{z}$. A

$$z = \frac{1}{\overline{w}} \qquad \text{és} \qquad \overline{z} = \frac{1}{w}$$

helyettesítést a fenti általános egyenletben elvégezve azt kapjuk, hogy a képpontok eleget tesznek a

$$Cw\overline{w} + \overline{B}w + B\overline{w} + A = 0$$

egyenletnek, ahol C és A tetszőleges *valós*, B pedig tetszőleges *komplex* paraméter, amiből a feladat állítása már következik. ■

$\boxed{\textbf{5. Feladat.}}$ *Határozza meg az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbola*

$$f(z) := \frac{1}{z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

leképezés által meghatározott képét! (Itt $z = x + iy$.)

6. Feladat. *Mi a geometriai jelentése az*

$$f(z) := \frac{1}{z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

reciprokfüggvény*nek?*

Megoldás. Mivel

$$f(z) = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)} = f_2(f_1(z)),$$

ahol

$$f_1(z) := \frac{1}{\overline{z}} \;\; (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}), \qquad f_2(z) := \overline{z} \;\; (z \in \mathbb{C}),$$

ezért a reciprokfüggvény geometriai jelentése: az egységkörre vonatkozó inverziónak és a valós tengelyre vonatkozó tükrözésnek az egymásutánja. ■

7. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy minden $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, $ad - bc \neq 0$ számmal képzett*

$$f(z) := \frac{az+b}{cz+d} \quad (z \in \mathbb{C}, \quad \text{ha} \quad c = 0, \quad \text{és} \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}, \quad \text{ha} \quad c \neq 0)$$

lineáris törtfüggvény

(a) előállítható az alábbi speciális leképezések alkalmas kompozíciójával:

(i) $f_1(z) := z + \beta \;(z \in \mathbb{C})$,

(ii) $f_2(z) := \alpha z \;(z \in \mathbb{C})$,

(iii) $f_3(z) := \dfrac{1}{z} \;(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$;

(b) megtartja a szögeket és a forgásirányt, kört körbe vagy egyenesbe, egyenest egyenesbe vagy körbe visz át.

8. Feladat. *Mibe viszi át az*

$$f(z) := i\frac{1-z}{1+z} \qquad (z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\})$$

leképezés a tengelyekkel párhuzamos egyeneseket, illetve az origó középpontú köröket?

9. Feladat. *Határozza meg az összes olyan lineáris törtfüggvényt, ami a felső félsíkot az egységkör-lemezre képezi.*

Megoldás. Ls. *Szőkefalvi-Nagy Béla: Komplex függvénytan* 15. oldal. ■

10. Feladat. *Határozza meg egységkör-lemezt önmagára leképező összes lineáris tört-függvényt.*

Megoldás. Ls. *Szőkefalvi-Nagy Béla: Komplex függvénytan* 17. oldal. ■

A négyzet- és a négyzetgyökfüggvény

1. Feladat. *(a) Muatassa meg, hogy*

$$z_1^2 = z_2^2 \quad (z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_1 = z_2 \quad \textit{vagy} \quad z_1 = -z_2.$$

(b) Igazolja, hogy az

$$f(z) := z^2 \quad (z \in \mathbb{C})$$

***(komplex) négyzetfüggvény** nem invertálható. Ennek a függvénynek a $T \subset \mathbb{C}$ halmazra vett leszűkítése akkor és csak akkor invertálható, ha T nem tartalmaz origóra szimmetrikus pontokat.*

Megoldás. (a) A $z_1^2 - z_2^2 = (z_1 - z_2)(z_1 + z_2)$ azonosság alapján.
(b) Az (a) közvetlen következménye. ■

2. Feladat. *Legyen T_0 a jobb oldali komplex félsík:*

$$T_0 := \left\{ re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \geq 0, \quad -\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Bizonyítsa be, hogy az

$$f_0 : T_0 \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto z^2$$

függvény bijekció.

Megoldás. Mivel T_0 nem tartalmaz origóra szimmetrikus pontokat, ezért az előző feladat szerint f_0 injektív (invertálható).

Legyen $w = re^{i\varphi} \in \mathbb{C}$ tetszőleges komplex szám, ahol $r \geq 0$ és $-\pi < \varphi \leq \pi$. Nyilvánvaló, hogy a $z := \sqrt{r}e^{i\varphi/2}$ komplex szám T_0-ban van és $z^2 = w$, ami azt jelenti, hogy f_0 szürjektív is. ■

DEFINÍCIÓ. Az előző feladatban definiált f_0 függvény inverzét (**komplex**) **négyzetgyökfüggvénynek** nevezzük, és a $\sqrt{}$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzések. (1) Tetszőleges $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ esetén $\sqrt{z}$ tehát *két különböző* komplex számot, $\sqrt{z}$ pedig a kettő közül a jobb oldali T_0 félsíkba eső, *egyértelműen meghatározott* komplex számot jelöl.

(2) Világos, hogy a komplex négyzetgyökfüggvény a valós négyzetgyökfüggvény egy kiterjesztése.

(3) T_0 helyett más halmazokból kiindulva is értelmezhetnénk a komplex négyzetgyökfüggvényt. Minden $\alpha \in [0, 2\pi)$ esetén vehetnénk például az

$$S_\alpha := \left\{ re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \mid r \geq 0, \quad \alpha \leq \varphi < \alpha + \pi \right\}$$

halmazokat is. Matematikai programcsomagok használatánál különösen figyeljünk arra, hogy az adott program készítői a többféle lehetőség közül hogyan értelmezték a komplex négyzetgyökfüggvényt. ■

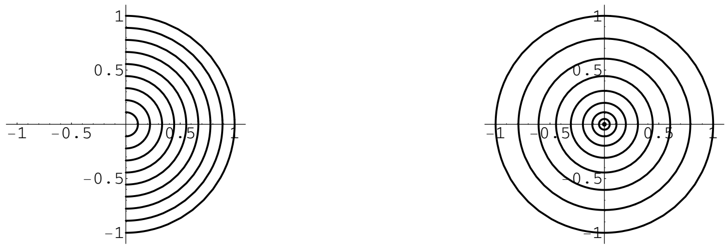
3. Feladat. *Határozza meg az origó középpontú körök, illetve az origóból kiinduló félegyenesek* ***négyzetfüggvény*** *által létesített képét.*

Megoldás. A négyzetfüggvény az origóra szimmetrikus pontokban egyenlő értékeket vesz fel, ezért elég például a jobb oldali z-síkot tekinteni.

A $z = re^{i\varphi}$ $\left(\varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ z-síkbeli r-sugarú *félkör* képe a w-síkbeli

$$w = z^2 = r^2 e^{2i\varphi} \qquad \left(2\varphi \in \left(-\pi, \pi\right]\right)$$

teljes kör:



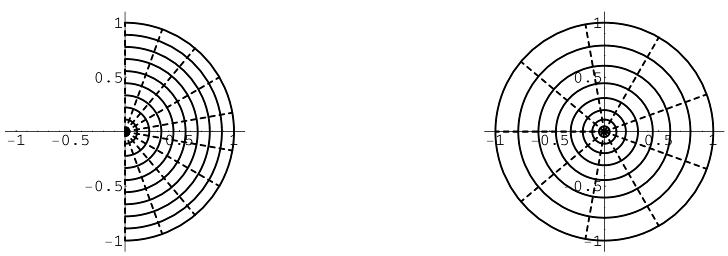
Világos, hogy a leképezés megtartja a forgásirányt. (Mi lesz a teljes kör képe?)

A $z = re^{i\varphi}$ $(r \geq 0)$ z-síkbeli, φ-argumentumu félegyenes képe a w-síkban:

$$w = z^2 = r^2 e^{2i\varphi} \qquad (r \geq 0).$$

Ez pedig egy origóból kiinduló, 2φ-argumentumu félegyenes.

Összefoglalva:



$\blacksquare$

4. Feladat. *Határozza meg a valós és a képzetes tengelyekkel párhuzamos egyenesek* ***négyzetfüggvény*** *által létesített képét.*

Megoldás. (a) *A képzetes tengellyel párhuzamos egyenesek képe.* Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és tekintsük a

$$z := x_0 + iy \qquad (y \in \mathbb{R})$$

z-síkbeli egyenest. Ekkor a képpontokra

$$w = f(z) = z^2 = (x_0 + iy)^2 = x_0^2 - y^2 + 2ix_0y =: u + iv,$$

azaz

$$(*) \qquad \begin{cases} u = x_0^2 - y^2 \\ v = 2x_0y \end{cases} \quad (y \in \mathbb{R}).$$

adódik.

Ha $x_0 = 0$ (a képzetes tengely a z-síkon), akkor a képpontok valós, illetve képzetes része

$$u = -y^2, \quad v = 0 \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Ez azt jelenti, hogy a z-sík képzetes tengelyének pozitív ágán ($y > 0$) növekedő y irányába futó pont képe a w-sík valós tengelyének negatív ágán csökkenő u irányába futó pont. A z-sík képzetes tengelye negatív ágának a képe szintén a w-sík valós tengelyének negatív ága:

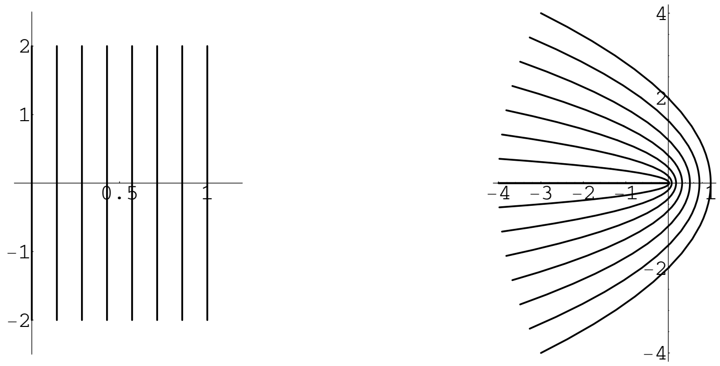
Ha $x_0 \neq 0$, akkor (*)-ból azt kapjuk, hogy

$$v^2 = 4x_0^2(x_0^2 - u).$$

Ilyen egyenesek képe tehát parabola; paramétere $p = 2x_0^2$, fókusztávolsága $p/2 = x_0^2$, fókuszpontja tehát a w-sík origója (minden $x_0 \neq 0$ esetén). A képpontok növekedő y mellett ezen a parabolán futnak végig a következő ábrán jelzett irányban:

Ha x_0 helyett a $-x_0$ állandót vesszük, akkor a $-x_0+iy$ $(y \in \mathbb{R})$ z-beli egyenesen növekedő y mellett a képpontok ugyanezen a parabolán futnak végig az ellenkező irányban.

A következő ábrán a jobb félsíkba eső egyenesek képét szemléltetjük:



(b) *A valós tengellyel párhuzamos egyenesek képe.* Legyen $y_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és tekintsük a

$$z := x + iy_0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

z-síkbeli egyenest. A képpontokra most a

$$w = f(z) = z^2 = (x+iy_0)^2 = x^2 - y_0^2 + 2ixy_0 =: u + iv,$$

azaz

$$(**) \qquad \begin{cases} u = x^2 - y_0^2 \\ v = 2xy_0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

adódik.

Ha $y_0 = 0$ (a valós tengely a z-síkon), akkor a képpontok valós, illetve képzetes része

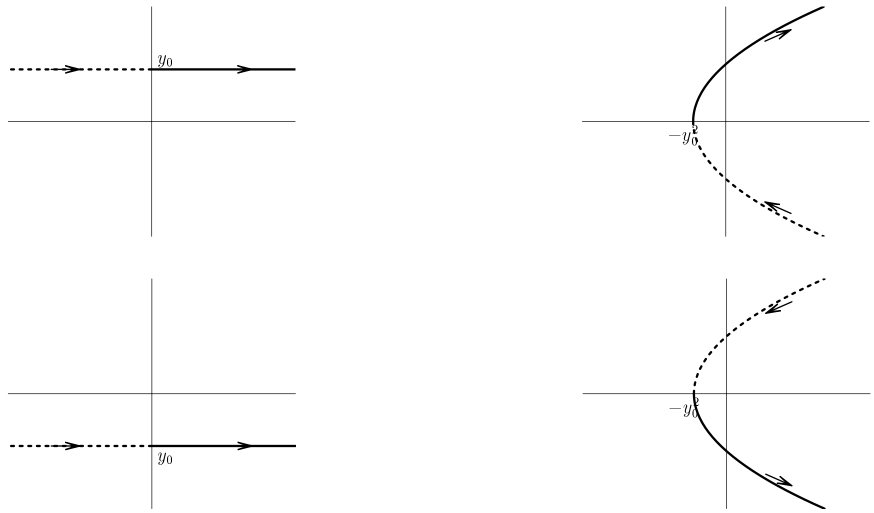
$$u = x^2, \quad v = 0 \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

Ez azt jelenti, hogy a z-sík valós tengelyének pozitív ága a w-sík valós tengelyének pozitív ágára képződik. Továbbá: a z-sík valós tengelye negatív ágának a képe szintén a w-sík valós tengelyének pozitív ága:

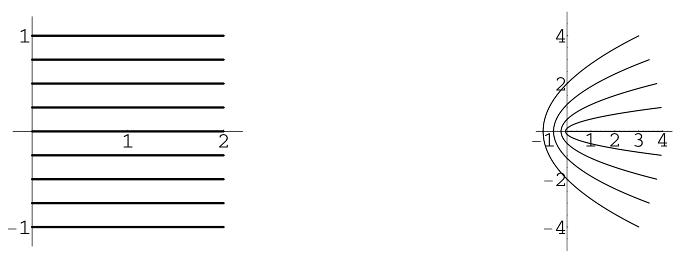
Ha $y_0 \neq 0$, akkor (**)-ból azt kapjuk, hogy

$$v^2 = 4y_0^2(u + y_0^2).$$

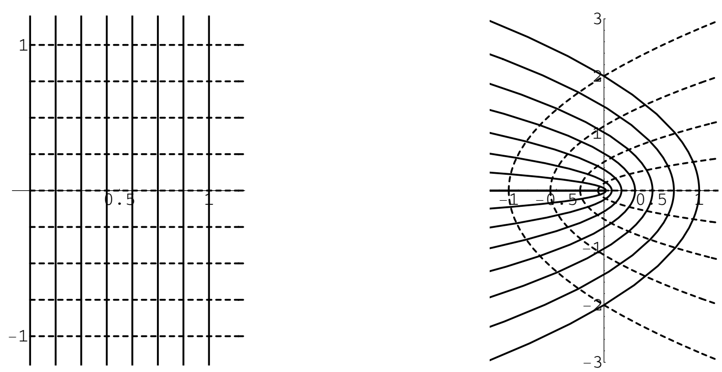
Az ilyen egyenesek képe is parabola, amelynek a paramétere $p = 2y_0^2$, fókusztávolsága $p/2 = y_0^2$, fókuszpontja tehát ismét a w-sík origója (minden $y_0 \neq 0$-ra):



A jobb oldali félsíkba eső egyenesek képe:



Összefoglalva:

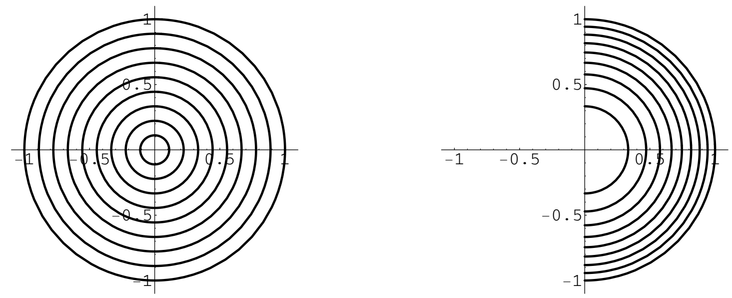


■

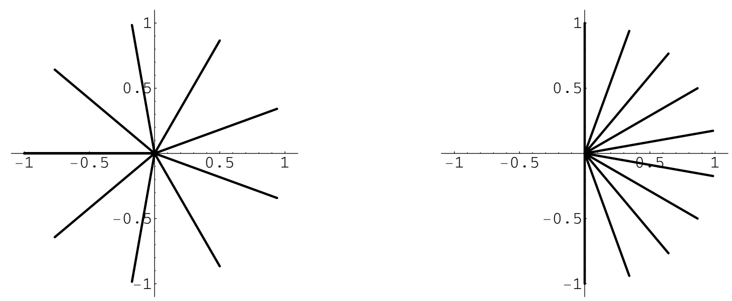
$\boxed{\textbf{5. Feladat.}}$ *Határozza meg az alábbi halmazok négyzetfüggvény által létesített képét:*
(a) $\{z \in \mathbb{C} \mid -1 \le \operatorname{Re} z < 3 \quad \textit{és} \quad 0 < \operatorname{Im} z \le 2\}$;
(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| \le 1 \quad \textit{és} \quad \pi/4 < \arg z < \pi/2\}$.

$\boxed{\textbf{6. Feladat.}}$ *Határozza meg az origó középpontú körök, illetve az origóból kiinduló félegyenesek* ***négyzetgyökfüggvény*** *által létesített képét.*

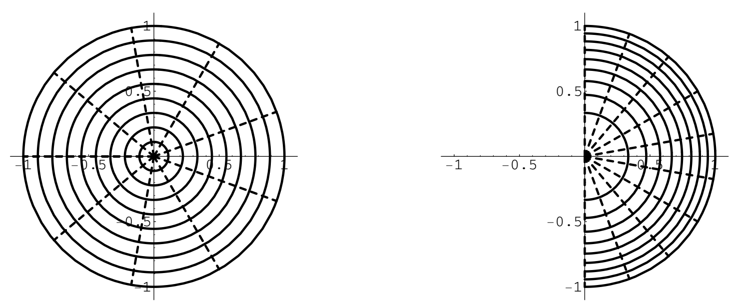
Megoldás. A z-sík r-sugarú körének a képe a w-síkon egy olyan, origó középpontú, $\sqrt{r}$-sugarú *félkör*, amelyik a jobb oldali félsíkba esik.



A z-sík origóból kiinduló, φ-argumentumu félegyenesének a képe a w-sík origójából kiinduló, $\varphi/2$-argumentumu félegyenes.



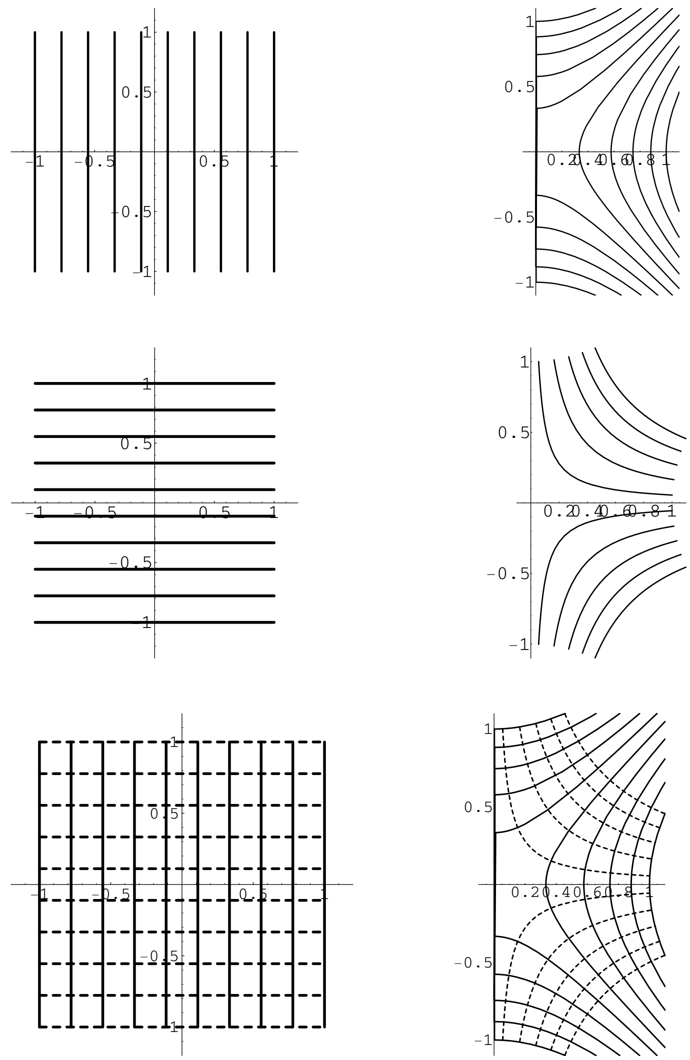
Összefoglalva:



■

$\boxed{\textbf{7. Feladat.}}$ *Határozza meg a valós és a képzetes tengelyekkel párhuzamos egyenesek* ***négyzetgyökfüggvény*** *által létesített képét.*

Megoldás.



■

$\boxed{\textbf{8. Feladat.}}$ *Vizsgálja meg folytonosság szempontjából a komplex négyzetgyökfüggvényt! Bizonyítsa be, hogy egy $z_0 \in \mathbb{C}$ pontban akkor és csak akkor folytonos, ha*

$$z_0 \in \mathbb{C} \setminus \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \quad \textit{és} \quad \operatorname{Re} z < 0 \right\}.$$

Megjegyzés. A komplex négyzetgyökfüggvénynek a negatív valós féltengely pontjaiban tehát szakadása van. Ezt a halmazt a komplex négyzetgyökfüggvény *szakadási ágá*nak is nevezik.

Komplex szám négyzetgyökei közül egynek a kiválasztását a szakadási ág kijelölésével is egyértelművé tehetjük. Ha a négyzetgyökfüggvényt úgy definiáltuk volna, hogy a szakadási ága a pozitív valós féltengely legyen, akkor annak helyettesítési értékei a felső félsíkba esnének.

Hasonló a helyzet a többi elemi függvény inverzénél is (log, arccos, stb.). Matematikai programcsomagokban általában ezen függvények szakadási ágát szokás megadni. Ebből következtethetünk arra, hogy a program készítői hogyan definiálták az adott inverz függvényt. ■

Megoldás. Legyen z_0 a negatív valós féltengely pontjaitól különböző pont. Feltehetjük, hogy $z_0 \neq 0$. (Igazolja, hogy a komplex négyzetgyökfüggvény a $z_0 = 0$ pontban folytonos!) Vegyük z_0-nak egy olyan környezetét, amely nem tartalmaz negatív valós féltengelyen levő pontokat, és benne foglaltatik egy $\pi/2$ nyílású szögtérben. (Ilyen környezet választható!) Mutassa meg, hogy a szóban forgó szögtér bármely z pontjára fennáll a

$$\left|\sqrt{z}+\sqrt{z_0}\right| \geq \sqrt{|z_0|}$$

egyenlőtlenség. Ezért a komplex négyzetgyökfüggvény ilyen z_0 pontbeli folytonossága a

$$\left|\sqrt{z}-\sqrt{z_0}\right| = \frac{1}{\left|\sqrt{z}+\sqrt{z_0}\right|}\left|z-z_0\right| \leq \frac{1}{\sqrt{|z_0|}}\left|z-z_0\right|$$

relációkból következik.

Tegyük most fel azt, hogy z_0 a negatív valós féltengely egy pontja: $z_0 := x_0 + i0$, ahol $x_0 < 0$. Legyen $z = x_0 + iy$ $(y \in \mathbb{R})$. Ha $y > 0$, akkor $\sqrt{z}$ az első síknegyedbe, ha $y < 0$, akkor $\sqrt{z}$ a negyedik síknegyedbe esik. (Ls. a $\sqrt{\ }$ függvény definícióját.) Ebben az esetben $\left|\sqrt{z}+\sqrt{z_0}\right|$ tetszőlegesen kicsivé tehető, amiből már egyszerűen igazolható, hogy a $\sqrt{\ }$ függvény nem folytonos a z_0 pontban. ■

Az exp függvény

1. Feladat. *Igazolja, hogy*

$$e^{z_1}=e^{z_2}\quad (z_1,z_2\in\mathbb{C})\quad\Longleftrightarrow\quad z_1-z_2=2k\pi i\ \ \textit{valamilyen } k\in\mathbb{Z}\textit{ számra.}$$

Megoldás. Legyen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ és $z := z_1 - z_2 = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$. Ekkor a komplex exp függvény korábban megismert tulajdonságai alapján

$$e^{z_1}=e^{z_2}\quad\Longleftrightarrow\quad e^{z_1-z_2}=e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)=1,$$

ami akkor és csak akkor igaz, ha $x = 0$ és van olyan k egész szám, hogy $y = 2k\pi$. Ez meg pontosan azt jelenti, hogy $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ számra. ■

2. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy*

(a) a komplex exp *függvény* ***periodikus*** *(mutassa meg, hogy $2\pi i$ egy periódusa),*

(b) ha $p \in \mathbb{C}$ az exp *függvény egy periódusa, akkor létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$ szám, hogy $p = 2k\pi i$.*

Megoldás. (a) Mivel minden $z \in \mathbb{C}$ számra

$$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{2\pi i}=e^z(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^z,$$

ezért a komplex exp függvény valóban periodikus, és $2\pi i$ egy periódusa. (Nyilvánvaló, hogy bármely $k \in \mathbb{Z}$ esetén $2k\pi i$ is periódusa az exp függvénynek.)

(b) Tegyük fel, hogy $p \in \mathbb{C}$ az exp függvény egy *tetszőleges* periódusa, azaz

$$e^{z+p}=e^z\qquad (z\in\mathbb{C}).$$

Ekkor $e^p = 1$, amiből az következik, hogy van olyan $k \in \mathbb{Z}$, hogy $p = 2k\pi i$ (ls. az előző feladat megoldását). ■

3. Feladat. *Mutassa meg, hogy a komplex* exp *függvény 0-n kívül minden más értéket felvesz. Pontosabban: Ha $w = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (tehát $r > 0$ és $-\pi < \varphi \le \pi$), akkor a*

$$z:=\ln r+i(\varphi+2k\pi)\qquad (k\in\mathbb{Z})$$

számok mindegyikére $e^z = w$. Ez azt is jelenti, hogy

$$\mathcal{R}_{\exp}=\mathbb{C}\setminus\{0\}.$$

Megoldás. Az állítások az

$$e^z=e^{\ln r+i(\varphi+2k\pi)}=e^{\ln r}\cdot e^{i(\varphi+2k\pi)}=$$
$$=r\big(\cos(\varphi+2k\pi)+i\sin(\varphi+2k\pi)\big)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=w$$

egyenlőségekből következnek. ■

4. Feladat. *Oldja meg az $e^z + i = 0$ egyenletet!*

$\boxed{\textbf{5. Feladat.}}$ *A komplex* exp *függvény* ***nem invertálható****. Egy $T \subset \mathbb{C}$ halmazra az $\exp_{|T}$ akkor és csak akkor invertálható, ha T nem tartalmaz olyan z_1, z_2 pontokat, amelyekre $z_1 - z_2 = 2k\pi i$ teljesül valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ számmal.*

Adjon példákat ilyen tulajdonságú, legbővebb $\mathbb{C}$-beli T halmazokra!

Megoldás. Az állítás az 1. feladat közvetlen következménye.

Tetszőleges $y_0 \in \mathbb{R}$ esetén a z-sík 2π-szélességű, valós tengellyel párhuzamos, felső oldalán zárt sávjai, azaz a

$$T_{y_0} := \big\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}, \quad y_0 - \pi < \operatorname{Im} z \leq y_0 + \pi \big\}$$

halmazok mindegyike olyan legbővebb $\mathbb{C}$-beli halmaz, amelyekre az $\exp_{|T_0}$ invertálható. ■

$\boxed{\textbf{6. Feladat.}}$ *Legyen T_0 az alábbi, 2π-szélességű, valós tengellyel párhuzamos sáv:*

$$T_0 := \big\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}, \quad \textit{és} \quad -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi \big\}.$$

Bizonyítsa be, hogy az

$$\exp_{|T_0} : T_0 \to \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad z \mapsto e^z$$

függvény bijekció.

Megoldás. Az előző feladat alapján az $\exp_{|T_0}$ függvény injektív.

A szürjektivitás pedig így igazolható: ha $w = r(\cos\varphi + i \sin\varphi) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ (azaz $r > 0$ és $-\pi < \varphi \leq \pi$), akkor a

$$z := \ln r + i\varphi$$

szám T_0-ban van és $e^z = e^{\ln r + i\varphi} = r(\cos\varphi + i\varphi) = w$. ■

$\boxed{\textbf{7. Feladat.}}$ *Mibe képezi a komplex* exp *függvény a z-síkbeli valós- és képzetes tengelyekkel párhuzamos egyeneseket? Hogyan tükröződik az* exp *függvény periodicitása?*

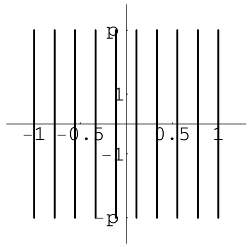
Megoldás. (a) *A képzetes tengellyel párhuzamos egyenesek képe.* Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és tekintsük a

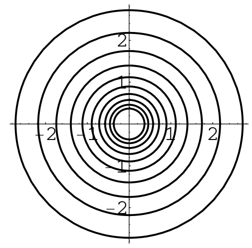
$$z := x_0 + iy \qquad (y \in \mathbb{R})$$

z-síkbeli egyenest. Mivel

$$\exp(z) = e^z = e^{x_0 + iy} = e^{x_0}(\cos y + i \sin y) \qquad (y \in \mathbb{R}),$$

ezért ennek az egyenesnek a képe a w-síkban egy origó középpontú e^{x_0} sugarú kör. Az egyenesen az $y \in \mathbb{R}$ paraméterekre végigfutó pont képe a w-síkban végtelen sokszor befutja az előbb említett kört; az egyenes minden 2π hosszúságú darabjának a kör egyszeri befutása felel meg. A következő ábrán a T_0 sávba eső szakaszok képeit szemléltetjük (minden ilyen szakasz képe a w-síkban egy teljes kör):





(b) *A valós tengellyel párhuzamos egyenesek képe.* Legyen $y_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és tekintsük a

$$z := x + iy_0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

z-síkbeli egyeneset. Mivel

$$\exp(z) = e^z = e^{x+iy_0} = e^x(\cos y_0 + i \sin y_0) \qquad (x \in \mathbb{R}),$$

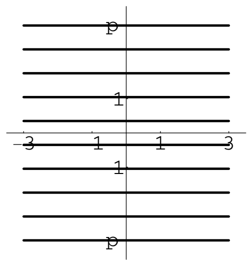
ezért ennek az egyenesnek a képe a w-síkban egy origóból kiinduló, y_0-argumentumu nyílt félegyenes. Világos, hogy minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén az

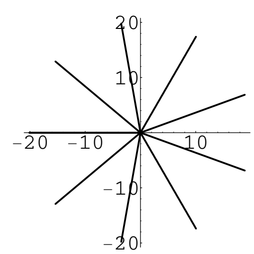
$$x + i(y_0 + 2k\pi) \qquad (x \in \mathbb{R})$$

egyenesnek is ugyanaz a képe. A következő ábra a

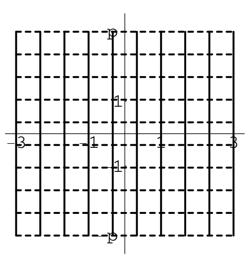
$$T_0 := \left\{ z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \in \mathbb{R}, \quad -\pi < \operatorname{Im} z \leq \pi \right\}$$

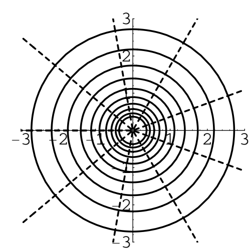
halmazba tartozó egyenesek képeit szemlélteti.





(c) Összefoglalva:





■

$\boxed{\textbf{8. Feladat.}}$ *Határozza meg az alábbi z-síkbeli halmazok* exp *függvény által létesített képét: (i) az $y = mx + b$ egyenletű egyenesek, ahol $z = x + iy$ és $m, b \in \mathbb{R}$; (ii) $\left\{ z \in \mathbb{C} \mid \alpha < \operatorname{Re} z < \beta, \quad \gamma < \operatorname{Im} z < \delta \right\}$ $(\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R})$.*

$\boxed{\textbf{A Log függvény}}$

DEFINÍCIÓ. A *komplex logaritmusfüggvényt* így értelmezzük:

$$\mathrm{Log} := \left(\exp_{|T_0}\right)^{-1},$$

ahol $T_0 := \{\, z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}\, z \in \mathbb{R}, \quad -\pi < \mathrm{Im}\, z \leq \pi\}$.

1. Feladat. *Számítsa ki a következő komplex számok valós és képzetes részét:*

$$\mathrm{Log}\,(i\frac{\pi}{2}), \quad \mathrm{Log}\,(-1), \quad \mathrm{Log}\,(-i), \quad \mathrm{Log}\,(1+i), \quad \mathrm{Log}\,\frac{1+i}{2}.$$

Megoldás. A $\mathrm{Log}\,(-1)$ például így számolható ki: A definíció szerint $\mathrm{Log}\,(-1) =: u + iv$ az az egyértelműen meghatározott, T_0-ba eső ($u \in \mathbb{R}$ és $-\pi < v \leq \pi$) szám, amelyre

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v) = -1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi)$$

teljesül. Ebből $u = 0$ és $v = \pi$ adódik, azaz $\mathrm{Log}\,(-1) = i\pi$. ■

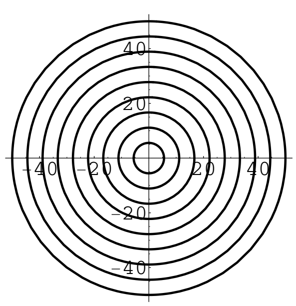
2. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy*

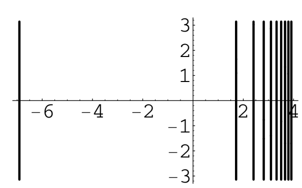
(a) minden $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *esetén* $\mathrm{Log}\, z = \ln |z| + i \arg z$,
(b) ha $z > 0$, *akkor* $\mathrm{Log}\, z = \ln z$.

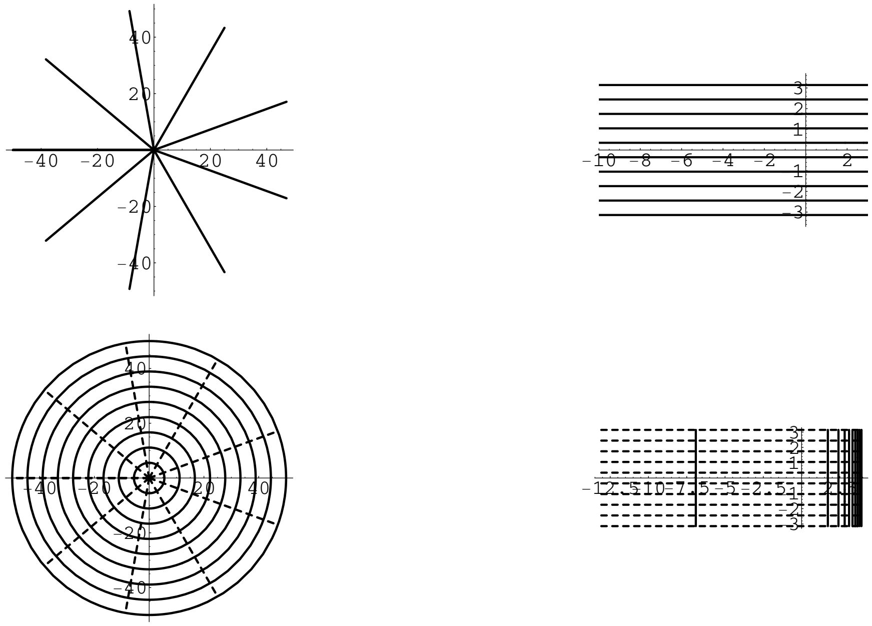
Megoldás. Ls. *Az* exp *függvény* című pont 3. és 6. feladatát. ■

3. Feladat. *Mibe viszi át a* Log *függvény az origó középpontú köröket, illetve az origóból kiinduló félegyeneseket?*

Megoldás. Ls. az exp függvényt.







■

$\boxed{\textbf{4. Feladat.}}$ *Határozza meg az alábbi z-síkbeli halmazok* Log *függvény által létesített képét:*

(a) rögzített $a, b \in \mathbb{R}$ esetén a $z(t) := e^{(a+ib)t}$ $\quad (t \in \mathbb{R})$ ***logaritmikus spirális****;*

(b) $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1, \quad 0 < \arg z < \alpha\}$, ahol $\alpha \in \mathbb{R}$ paraméter;

(c) $\{z \in \mathbb{C} \mid r_1 < |z| < r_2\}$, ahol $r_1 < r_2$ valós paraméterek.

$\boxed{\textbf{5. Feladat.}}$ *Vizsgálja meg a* Log *függvényt folytonosság szempontjából. Bizonyítsa be, hogy*

$$\operatorname{Log} \in C\{z_0\} \qquad \Longleftrightarrow \qquad z_0 \in \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z = 0 \quad \textit{és} \quad \operatorname{Re} z < 0\}.$$

A komplex logaritmusfüggvénynek a negatív valós féltengely pontjaiban szakadása van. Ez a komplex logaritmusfüggvény ***szakadási ága****.*

$\boxed{\textbf{6. Feladat.}}$ *Milyen z_1, z_2 komplex számokra érvényes a*

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$$

egyenlőség?

$\boxed{\textbf{7. Feladat.}}$ *Bizonyítsa be, hogy az*

$$f(z) := \operatorname{Log} \frac{a+z}{a-z}$$

leképezés a $(-\infty, a])$, $[a, +\infty)$ félegyenesek mentén felvágott síkot a w-sík $|\operatorname{Im} w| \leq \pi$ sávjára képezi le.

A $\cos$ függvény

1. Feladat. *Mutassa meg, hogy*

(a) $\cos z = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}: \; z = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$*,*

(b) $\sin z = 0 \quad (z \in \mathbb{C}) \quad \Longleftrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{Z}: \; z = k\pi \; (k \in \mathbb{Z})$*,*

azaz a komplex koszinusz- és szinuszfüggvénynek a valósban megismert zérushelyeken kívül más zérushelyei nincsenek;

(c) $\cos z_1 = \cos z_2 \; (z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}: \; z_1 - z_2 = 2k\pi$ *vagy* $z_1 + z_2 = 2k\pi$*,*

(d) $\sin z_1 = \sin z_2 (z_1, z_2 \in \mathbb{C}) \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z}: \; z_1 - z_2 = 2k\pi$ *vagy* $z_1 + z_2 = \pi + 2k\pi$*.*

Megoldás. (a) $\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 0 \Longleftrightarrow e^{2iz} = -1 = e^{i\pi}$, ami azzal ekvivalens, hogy $2iz - i\pi = 2k\pi i$ valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ számra (ls. az exp függvényt), azaz létezik olyan $k \in \mathbb{Z}$ szám, hogy $z = \pi/2 + k\pi$.

(b) $\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = 0 \Longleftrightarrow e^{2iz} = 1 = e^0 \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} : z = 2k\pi$.

(c) Az addíciós tételekből következő

$$\cos z_1 - \cos z_2 = 2 \sin \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$$

azonosságból és (a)-ból közvetlenül következik.

(d) Az addíciós tételekből következő

$$\sin z_1 - \sin z_2 = 2 \cos \frac{z_1 + z_2}{2} \sin \frac{z_1 - z_2}{2}$$

azonosságból, (a)-ból és (b)-bő közvetlenül következik. ■

2. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy*

(a) a komplex $\cos$ *függvény periodikus, és* 2π *egy periódusa,*

(b) ha $p \in \mathbb{C}$ *a* $\cos$ *függvény egy periódusa, akkor létezik olyan* $k \in \mathbb{Z}$ *szám, hogy* $p = 2k\pi$*.*

Megoldás. (a) Az addíciós tétel, a $\cos 2\pi = 1$ és a $\sin 2\pi = 0$ alapján

$$\cos(z + 2\pi) = \cos z \cos 2\pi - \sin z \sin 2\pi = \cos z \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

azaz a $\cos$ függvény periodikus és 2π egy periódusa.

(b) Az előző feladat (c) részéből azonnal adódik. ■

3. Feladat. *Bizonyítsa be, hogy a komplex koszinuszfüggvény minden komplex értéket felvesz, azaz* $\mathcal{R}_{\cos} = \mathbb{C}$

Megoldás. Legyen $w \in \mathbb{C}$ tetszőleges. Igazoljuk, hogy létezik olyan $z \in \mathbb{C}$, hogy $w = \cos z$.

Ha z egy ilyen komplex szám, akkor $\sin^2 z = 1 - \cos^2 z = 1 - w^2$, azaz $i \sin z = \sqrt{w^2 - 1}$ (a $\sqrt{w^2-1}$ mindkét értékére). Így

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z = w + \sqrt{w^2 - 1},$$

amiből

$$z = \frac{1}{i} \mathrm{Log}\,(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

adódik. E komplex számok mindegyikére teljesül a $\cos z = w$ egyenlőség. ■

$\boxed{\textbf{4. Feladat.}}$ *Igazolja, hogy a* cos *függvény* ***nem invertálható****. Egy $T \subset \mathbb{C}$ esetén az $\cos_{|T}$ akkor és csak akkor invertálható, ha T nem tartalmaz olyan z_1, z_2 pontokat, amelyekre*

$$z_1 - z_2 = 2k\pi \quad \textit{vagy} \quad z_1 + z_2 = 2k\pi$$

teljesül valamilyen $k \in \mathbb{Z}$ számmal.

Adjon példákat ilyen tulajdonságú, legbővebb $\mathbb{C}$-beli T halmazokra!

Megoldás. Az állítás az 1. feladat közvetlen következménye.

Az alábbi halmazok mindegyike olyan legbővebb $\mathbb{C}$-beli halmaz, amelyre leszűkítve a cos függvényt invertálható függvényt kapunk:

$$T_0 := \big\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < \pi\big\} \cup \big\{iy \mid y \geq 0\big\} \cup \big\{\pi + iy \mid y \leq 0\big\},$$
$$S_0 := \big\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < 2\pi, \quad \mathrm{Im}\, z \geq 0\big\} \cup \big\{iy \mid y \geq 0\big\} \cup \big\{2\pi + iy \mid y > 0\big\}.$$

■

$\boxed{\textbf{5. Feladat.}}$ *Legyen*

$$T_0 := \big\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < \pi\big\} \cup \big\{iy \mid y \geq 0\big\} \cup \big\{\pi + iy \mid y \leq 0\big\}.$$

Bizonyítsa be, hogy a

$$\cos_{|T_0} : T_0 \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \cos z$$

függvény bijekció.

Megoldás. Az előző feladat alapján a $\cos_{|T_0}$ függvény *injektív.* Megmutatjuk, hogy *szürjektív* is, azaz minden $w \in \mathbb{C}$ számhoz létezik olyan $z_0 \in T_0$, amire $\cos z_0 = w$.

Vegyünk egy tetszőleges $w \in \mathbb{C}$ számot. A 3. feladat szerint a

$$z = \frac{1}{i} \mathrm{Log}\,(w + \sqrt{w^2 - 1}) = -i \mathrm{Log}\,(w + \sqrt{w^2 - 1})$$

komplex számokra (a $\sqrt{w^2-1}$ két lehetséges értékére) $\cos z = w$. Azt igazoljuk, hogy a $\sqrt{w^2-1}$ két értéke közül az egyikkel $z \in T_0$ teljesül.

A w helyzetétől függően három esetet különböztetünk meg:

1^o *eset*: $\mathrm{Im}\, z > 0$ (w a felső fésíkba esik). A $\sqrt{w^2-1}$ két értéke közül válasszuk most azt, amelyik szintén a felső félsíkba esik: $\mathrm{Im}\sqrt{w^2-1} > 0$. Világos, hogy az

$$x_0 := w + \sqrt{w^2 - 1}$$

szám is a felső félsíkban van, azaz $\mathrm{Im}\, x_0 = \mathrm{Im}\,(w + \sqrt{w^2-1}) > 0$. Ekkor a

$$z_0 := -i\mathrm{Log}\, x_0 = i(\ln|x_0| + i\arg x_0) = \arg x_0 - i\ln|x_0|$$

számra $\cos z_0 = w$, valamint az $\mathrm{Im}\, x_0 > 0$ miatt $0 < \arg x_0 < \pi$ is fennáll, ami azt jelenti, hogy $z_0 \in T_0$.

2^o *eset*: $\mathrm{Im}\, z < 0$ (w az alsó fésíkban van). Ekkor a felső félsíkba eső $-w$ számhoz az eőzőek miatt létezik olyan $\tilde{z} \in T_0$, amelyre $\cos\tilde{z} = -w$, azaz

$$w = -\cos\tilde{z} = \cos(\pi - \tilde{z}).$$

Továbbá $\pi - \tilde{z}$ benne van T_0-ban, ui.

$$\mathrm{Re}\,(\pi - \tilde{z}) = \pi - \mathrm{Re}\,\tilde{z} \in (0,\pi), \quad \text{mivel} \quad \mathrm{Re}\,\tilde{z} \in (0,\pi),$$

és ez az állításunkat bizonyítja ebben az esetben is.

3^o *eset*: $\mathrm{Im}\, z = 0$ (w a valós tengelyen van). Ha $|w| \le 1$, akkor (egyértelműen) létezik olyan $0 \le \alpha \le \pi$, amelyre $\cos\alpha = w$. Ekkor $z_0 := \alpha + i\cdot 0 \in T_0$ és $\cos z_0 = w$.

Ha $w > 1$, akkor (egyértelműen) létezik olyan $y_0 > 0$, amelyre $\mathrm{ch} y_0 = w$. Tekintsük most a $z_0 := iy_0$ T_0-beli számot. Erre

$$\cos z_0 = \cos(iy_0) = \frac{e^{i(iy_0)} + e^{-i(iy_0)}}{2} = \mathrm{ch} y_0 = w$$

is teljesül.

Végül, ha $w < -1$, akkor vegyük azt az (egyértelműen meghatározott) $y_0 \le 0$ számot, amire $\mathrm{ch} y_0 = -w$, és legyen $z_0 := \pi + iy_0$. Mivel $z_0 \in T_0$ és $\cos z_0 = w$, ezért az állításunkat ebben az esetben is beláttuk. ∎

DEFINÍCIÓ. A *komplex arkuszkoszinusz-függvényt* így értelmezzük:

$$\arccos := \left(\cos_{|T_0}\right)^{-1},$$

ahol $T_0 := \{\, z \in \mathbb{C} \mid 0 < \mathrm{Re}\, z < \pi\} \cup \{iy \mid y \ge 0\} \cup \{\pi + iy \mid y \le 0\}$.

6. Feladat. *Mibe képezi a* cos *függvény a z-síkbeli valós és képzetes tengelyekkel párhuzamos egyeneseket? Hogyan tükröződik a* cos *függvény periodicitása?*

Megoldás. (a) *A képzetes tengellyel párhuzamos egyenesek képe.* Legyen $x_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és tekintsük a

$$z := x_0 + iy \qquad (y \in \mathbb{R})$$

z-síkbeli egyenest. Ekkor

$$\cos z = \cos(x_0 + iy) = \cos(x_0)\cdot\cos(iy) - \sin(x_0)\cdot\sin(iy) =$$

$$= \cos(x_0)\cdot\frac{e^{i(iy)} + e^{-i(iy)}}{2} - \sin(x_0)\cdot\frac{e^{i(iy)} - e^{-i(iy)}}{2i} =$$

$$= \cos(x_0)\cdot\frac{e^{y} + e^{-y}}{2} + i\sin(x_0)\cdot\frac{e^{-y} - e^{y}}{2} = \cos(x_0)\cdot\mathrm{ch}\,(y) - i\sin(x_0)\cdot\mathrm{sh}\,(y) =: u + iv,$$

azaz

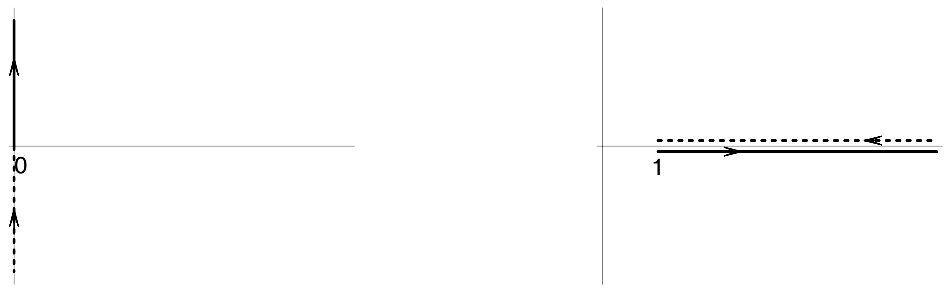
$$(*) \qquad \begin{cases} u = \cos(x_0) \cdot \mathrm{ch}\,(y) \\ v = -\sin(x_0) \cdot \mathrm{sh}\,(y) \end{cases} \quad (y \in \mathbb{R}).$$

A cos függvény periodicitása miatt elég a $0 \le x_0 < 2\pi$ értékeket tekinteni, mivel az $x_0 + iy$ $(y \in \mathbb{R})$, valamint az $x_0 + 2k\pi + iy$ $(y \in \mathbb{R})$ pontokban felvett függvényértékek minden $k \in \mathbb{Z}$ esetén megegyeznek.

Ha $x_0 = 0$ (a képzetes tengely a z-síkon), akkor a képpontok valós, illetve képzetes része

$$u = \mathrm{ch}\, y, \qquad v = 0 \qquad (y \in \mathbb{R}),$$

ami azt jelenti, hogy a z-sík képzetes tengelyének pozitív ágán $(y > 0)$ növekedő y irányába futó pont képe a w-sík valós tengelyének $[1, +\infty)$ intervallumán növekedő u irányába futó pont. A z-sík képzetes tengelye negatív ágának a képe szintén ez az intervallum (ti. a valós ch függvény páros és minden $y \in \mathbb{R}$ esetén $\mathrm{ch}\, y \ge 1$):



Legyen $x_0 = \frac{\pi}{2}$, azaz tekintsük a $\frac{\pi}{2} + iy$ $(y \in \mathbb{R})$ z-síkbeli egyenest. A képpontok valós és képzetes része ebben az esetben (ls. (*)-ot):

$$u = 0, \quad v = -\mathrm{sh}\, y \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

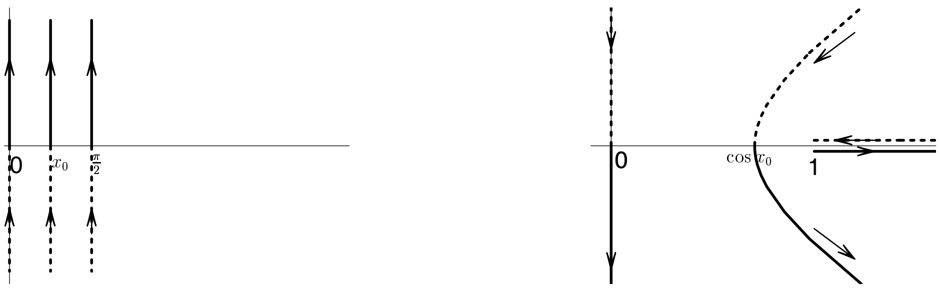
Az egyenes képe:

Ha $0 < x_0 < \frac{\pi}{2}$, akkor (*)-ból azt kapjuk, hogy

$$\Big(\frac{u}{\cos x_0}\Big)^2 - \Big(\frac{v}{\sin x_0}\Big)^2 = 1.$$

Az ilyen egyenesek képe tehát hiperbola:

Az eddigieket összefoglalva:



Ha $\frac{\pi}{2} \leq x_0 \leq \pi$, akkor az előzőekhez hasonló módon kapjuk a következőt:

Tekintsük a

$$T_0 := \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < \pi\} \cup \{iy \mid y \geq 0\} \cup \{\pi + iy \mid y \leq 0\}$$

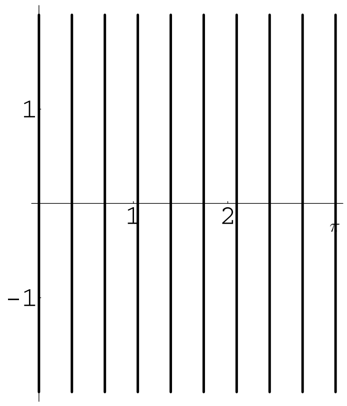
sávot. A fentiekből következik, hogy a

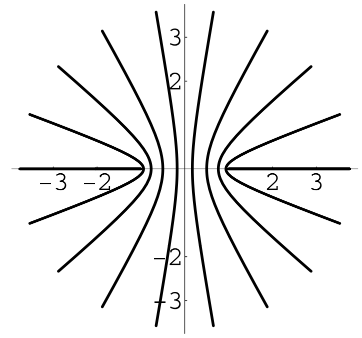
$$\cos_{|T_0} : T_0 \to \mathbb{C}, \quad z \mapsto \cos z$$

függvény bijekció.

Hasonló módon vizsgálhatjuk a $\pi \leq x_0 \leq 2\pi$ paraméterekhez tartozó z-síkbeli $x_0 + iy$ $(y \in \mathbb{R})$ egyenesek képét. (*)-ból következik, hogy az $x_0 + iy$ $(y \in \mathbb{R})$ és az $x_0 + \pi + iy$ $(y \in \mathbb{R})$ egyenesek képe ugyanaz, csupán az irányításukban különböznek.

Összefoglalásként a következő ábrán a T_0-ba tartozó, képzetes tengellyel párhuzamos egyenesek képeit szemléltetjük:





(b) *A valós tengellyel párhuzamos egyenesek képe.* Legyen $y_0 \in \mathbb{R}$ rögzített szám, és tekintsük a

$$z := x + iy_0 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

z-síkbeli egyenest. Ekkor

$$\cos z = \cos(x + iy_0) = \cos \operatorname{ch} y_0 - i \sin x_0 \operatorname{sh} y = u + iv,$$

azaz

$$(**) \qquad \begin{cases} u = \cos x \operatorname{ch} y_0 \\ v = -\sin x \operatorname{sh} y_0 \end{cases} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ha $y_0 = 0$ (a valós tengely a z-síkon), akkor a képpontok valós, illetve képzetes része

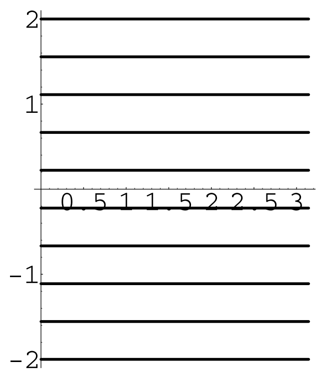
$$u = \cos x, \qquad v = 0 \qquad (y \in \mathbb{R}).$$

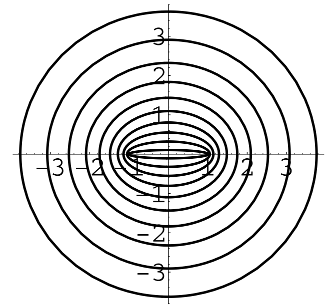
Az egyenesen az $x \in \mathbb{R}$ paraméterekre végigfutó pont képe a w-síkban tehát végtelen sokszor befutja az a valós tengely $[-1, 1]$ szakaszát; az egyenes minden 2π hosszúságú darabjának a a szakasz egyszeri befutása felel meg.

Ha $y_0 \neq 0$, akkor (**)-ból azt kapjuk, hogy

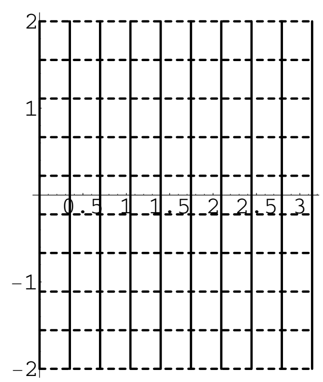
$$\left(\frac{u}{\operatorname{ch} y_0}\right)^2 + \left(\frac{v}{\operatorname{sh} y_0}\right)^2 = 1.$$

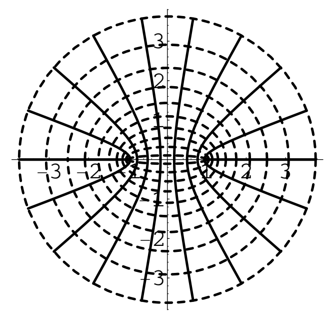
Az $x + iy$ ($x \in \mathbb{R}$) egyenes képe tehát ellipszis. Az egyenes minden 2π hosszúságú darabjának a képe a teljes ellipszis.





Összefoglalva:





■