

**Analízis 2.
Programtervező informatikus szak
A, B és C szakirány
2016-2017. tanév őszi félév**

Az 1–9. előadások

(Szili László)

2016. szeptember–november

1. előadás

2016. szeptember 12.

Az előadó:

Szili László (déli épület 2.309 szoba)

A tantárgy honlapja (2016-ban):

http://numanal.inf.elte.hu/~szili/Oktatas/An2_BSc_2016/index_An2_2016.htm

A honlapon van:

- a követelményrendszer,
- tervezett zh időpontok,
- gyakorlatanyagok,
- segédanyagok.

A követelményrendszer:

- Az előadásokon és a gyakorlatokon a részvétel kötelező.
- A gyakorlatokon heti rendszeres számonkérés lesz.
- Megajánlott vizsgajegyet lehet szerezni.

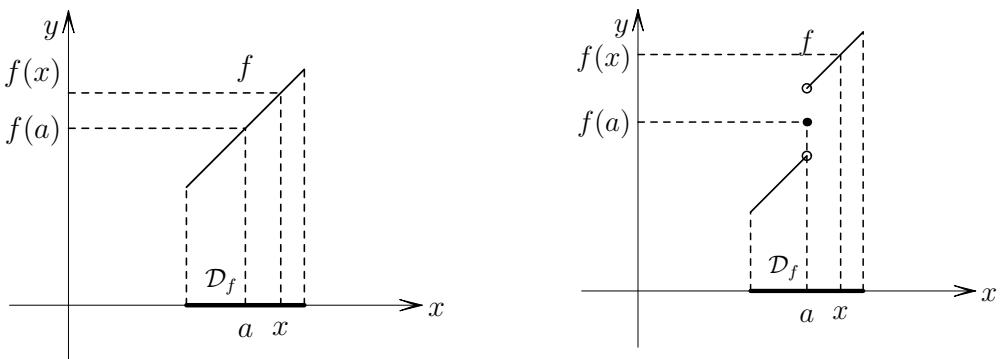
A részletes követelményrendszer a honlapon megtalálható.

Irodalom:

- Kósa András: *Ismerkedés a matematikai analízzsel*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1981.
- Lackovich Miklós–T. Sós Vera: *Aanalízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó Rt., Budapest, 2005.
- Leindler László–Schipp Ferenc: *Analízis I.*, Nemzeti Tankönyvkiadó, Budapest, 1998.
- Schipp Ferenc: *Analízis II., Folytonosság, differenciálhatóság*, Janus Pannonius Tudományegyetem, Pécs, 1996.
- Simon Péter: *Bevezetés az analízisbe I.*, egyetemi jegyzet, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest, 2016.

FÜGGVÉNYEK FOLYTONOSSÁGA

A folytonosság szemléletes jelentése. A „folytonos” kifejezést a minden nap i életben gyakran használjuk. Most függvényekre értelmezzük ezt a fogalmat. Motivációként tekintsük a következő két függvényt:



A jobb oldali f függvényénél: „ha x közel van a -hoz (jelben $x \sim a$), akkor $f(x)$ nincs közel $f(a)$ -hez”. A függvénynek ezt a tulajdonságát úgy fejezzük ki, hogy az f függvény nem folytonos az $a \in D_f$ pontban.

A bal oldali függvénynél: minden $a \in D_f$ pontban igaz az, hogy „ha $x \sim a$, akkor $f(x) \sim f(a)$ ”. Ekkor azt mondjuk, hogy az f függvény folytonos az $a \in D_f$ pontban. ■

Megjegyzés. Hasonló problémával találkoztunk függvény végesen vett véges határértékénél. Ott azt a szemléletes tartalmat fogalmaztuk meg pontosan, hogy ha f egy valós-valós függvény, akkor az „ $a \in \mathbb{R}$ ponthoz közelíti helyeken az $f(x)$ függvényértékek közel vannak az $A \in \mathbb{R}$ számhoz” (röviden: „ha $x \sim a \Rightarrow f(x) \sim A$ ”).

Emlékeztetünk a definícióra:

Ha $a, A \in \mathbb{R}$, $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}'_f$, akkor

$$\lim_a f = A \iff \begin{cases} \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathcal{D}_f, \\ 0 < |x - a| < \delta \text{ esetén } |f(x) - A| < \varepsilon. \end{cases} \blacksquare$$

Pontbeli folytonosság

Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban folytonos, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad |x - a| < \delta \quad \text{esetén} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Jelölése: $f \in C\{a\}$.

Megjegyzések.

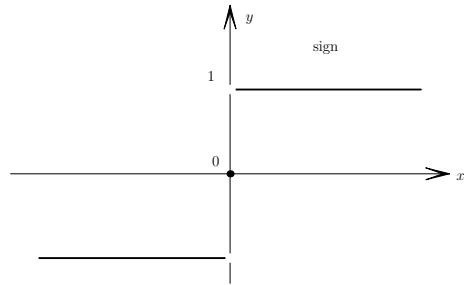
1º Függvény folytonosságát csak az **értelmezési tartományának** pontjaiban értelmezzük.

2º Gondoljuk meg, hogy a fenti definíció egy függvénynek valóban azt a szemléletes tulajdonságát írja le pontosan, hogy „ha $x \sim a \implies f(x) \sim f(a)$ ”. ■

Kezdjük néhány egyszerű példával!

1. példa. Az előjel-függvény:

$$f(x) := \text{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$



A definíció alapján igazoljuk, hogy ez a függvény NEM folytonos az $a = 0$ pontban:

$$f \notin C\{0\} \iff \exists \varepsilon > 0, \text{ hogy } \forall \delta > 0-\text{hoz } \exists |x| < \delta : |f(x) - f(0)| \geq \varepsilon.$$

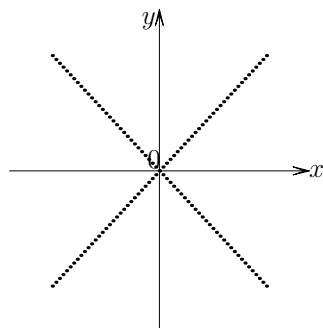
Legyen (például) $\varepsilon = 1/2$. Ekkor $\forall \delta > 0$ szám és $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pont esetén

$$|f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = 1 > 1/2 \implies f \notin C\{0\}.$$

A függvény minden $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban viszont folytonos, mert (például) egy rögzített $a > 0$ pontban minden $\varepsilon > 0$ -hoz $\delta = a$ egy(!) megfelelő δ . ■

2. példa. Dirichlet-típusú függvény:

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ -x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$



A definíció alapján egyszerűen igazolható, hogy

- a függvény **folytonos a 0 pontban** (tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz $\delta = \varepsilon$ „jó” δ),
- $f \notin C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Az utóbbi állítást így bizonyítjuk: Legyen (például) $a \neq 0$ racionális szám. Ekkor minden $-a$ -val egyező előjelű irracionális x helyen $|f(x) - f(a)| > |a|$. Ez azt jelenti, hogy $0 < \varepsilon < |a|$ esetén ε -hoz nem létezik „jó” δ . Hasonló a bizonyítás, ha a irracionális. (Tudjuk, hogy minden $(a - \delta, a + \delta)$ intervallumban van racionális és irracionális szám is.) ■

A következő tételekben folytonos függvények néhány alapvető tulajdonságát fogalmazzuk meg.

Tétel. Ha $a \in \mathcal{D}_f$ izolált pont (azaz $\exists K(a) : K(a) \cap \mathcal{D}_f = \{a\}$) $\implies f \in C\{a\}$.

Bizonyítás. A definíció alapján. ■

Tétel. (A folytonosság és a határérték kapcsolata.) Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor

$$f \in C\{a\} \iff \exists \lim_a f \text{ és } \lim_a f = f(a).$$

Bizonyítás. A definíció alapján. ■

Tétel. (Hatványszor összegfüggvényének folytonossága.)

1º Hatványszor összegfüggvénye a konvergenciahalmaz minden pontjában folytonos.

2º Az \exp , $a \sin$, $a \cos$, $a \operatorname{sh}$ és $a \operatorname{ch}$ függvény minden \mathbb{R} -beli pontban folytonos.

Bizonyítás.

1º A hatványszor összegfüggvényének határértékére vonatkozó téTEL, valamint az előző állítások alapján.

2º A szóban forgó függvényeket az egész \mathbb{R} -en konvergens hatványszorok összegeként értelmeztük, ezért az állítás 1º következménye. ■

Tétel. (Folytonosságra vonatkozó átviteli elv.) Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, és $a \in \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$f \in C\{a\} \iff \forall (x_n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{D}_f, \lim(x_n) = a \text{ esetén } \lim(f(x_n)) = f(a).$$

Bizonyítás.

• Ha $a \in \mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}'_f$, akkor az állítás a határértékre vonatkozó átviteli elv, valamint a folytonosság és a határérték kapcsolatát lefró téTEL következménye.

• Ha $a \in \mathcal{D}_f$ és $a \notin \mathcal{D}'_f \Rightarrow a$ izolált pont. Ebben az esetben az állítás nyilvánvaló. ■

Tétel. (A műveletek és a folytonosság kapcsolata.) Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1º Ha $f, g \in C\{a\}$, akkor λf ($\lambda \in \mathbb{R}$), $f + g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ ($ha g(a) \neq 0$) $\in C\{a\}$.

2º Ha $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, $g \in C\{a\}$ és $f \in C\{g(a)\}$ $\implies f \circ g \in C\{a\}$.

Bizonyítás. Az állításokat az átviteli elv felhasználásával lehet bebizonyítani. ■

Megjegyzés. Az *inverz függvény* folytonosságának a kérdése nehezebb probléma. Ezt később fogjuk megvizsgálni. ■

Egyoldali folytonosság

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \mathcal{D}_f$. Az f függvény jobbról folytonos az a pontban, ha

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0, \quad \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad a \leq x < a + \delta \quad \text{esetén} \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Megjegyzés. A bal oldali folytonosság fogalmát hasonló módon definiáljuk. ■

Tétel. $f \in C\{a\} \iff$ ha f jobbról és balról is folytonos az $a \in \mathcal{D}_f$ pontban.

Halmazon folytonos függvények

Definíció. Legyen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $A \subset \mathcal{D}_f$. Az f függvény **folytonos az A halmazon**, ha

$$\forall a \in A \text{ esetén } f|_A \in C\{a\}.$$

Jelölése: $f \in C(A)$.

Megjegyzések.

1º A műveleti tételek halmazon folytonos függvényekre is érvényesek.

2º Felhívjuk a figyelmet arra, hogy az $f \in C(A)$ reláció *nem jelenti* azt, hogy f az A halmaz minden pontjában folytonos. Például az ent (egészrész-) függvény folytonos a $[0, 1/2]$ halmazon, de az (egész \mathbb{R} -en értelmezett) ent függvény nem folytonos a $0 \in [0, 1/2]$ pontban. ■

Korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények tulajdonságai

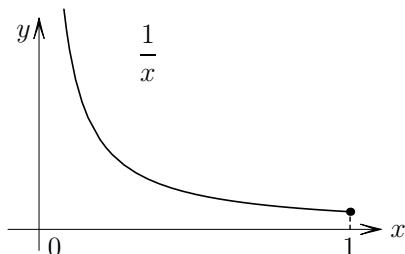
Megjegyzés. A továbbiakban $[a, b]$ nemelfajuló korlátos és zárt intervallumot jelöl, vagyis feltesszük azt, hogy $-\infty < a < b < +\infty$. ■

Az alábbi tételek azt mutatják, hogy ha egy f függvény folytonos egy korlátos és zárt intervallumban, akkor ebből következik, hogy f számos egyéb fontos tulajdonsággal is rendelkezik.

Tétel. ($[a, b]$ -n folytonos függvény korlátos.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tegyük fel, hogy az } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény} \\ \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \end{array} \right\} \implies f \text{ korlátos } [a, b]\text{-n.}$$

Megjegyzés. A tételben lényeges feltétel az, hogy az f függvény egy *korlátos* és *zárt* intervallumon folytonos. Bármelyik feltételt elhagyva a tétel állítása nem marad igaz. Például az $f(x) := \frac{1}{x}$ ($x \in (0, 1]$) függvény folytonos a korlátos $(0, 1]$ intervallumon, de f itt *nem korlátos*.



Az $f(x) := x^2$ ($x \in [0, +\infty)$) függvény folytonos a $[0, +\infty)$ intervallumon, de szintén nem korlátos itt. ■

Bizonyítás. f korlátos, ha

$$\exists K > 0 : \forall x \in [a, b] \text{ esetén } |f(x)| \leq K.$$

Indirekt módon bizonyítunk: Tegyük fel, hogy f nem korlátos, azaz

$$\forall K > 0 \text{-hoz } \exists x \in [a, b] : |f(x)| > K.$$

A $K = n \in \mathbb{N}$ választással azt kapjuk, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{-hez } \exists x_n \in [a, b] : |f(x_n)| \geq n.$$

Az $(f(x_n))$ sorozat tehát nem korlátos.

Mivel $(x_n) \subset [a, b]$ korlátos sorozat $\xrightarrow[\text{kiválasztási téTEL}]{\text{Bolzano-Weierstrass}} \exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata. Legyen

$$\alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Ekkor: $\alpha \in [a, b]$. (Ezt indirekt módon igazoljuk: Ha $\alpha \notin [a, b] \Rightarrow \exists K(\alpha) : K(\alpha) \cap [a, b] = \emptyset$. De $\alpha := \lim(x_{n_k}) \Rightarrow \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k \geq k_0, x_{n_k} \in K(\alpha)$. Ez ellentmondás, mivel $x_{n_k} \in [a, b]$).

Az f függvény folytonos $[a, b]$ -n $\xrightarrow{\text{átviteli elv}}$

$$\lim(x_{n_k}) = \alpha \text{ miatt } \lim(f(x_{n_k})) = f(\alpha).$$

Ez azt jelenti, hogy $(f(x_{n_k}))$ korlátos sorozat, ami ellentmondás. ■

Az analízis alkalmazásai gyakran vezetnek **szélsőérték-feladatokra**, amikor is egy valós értékű függvény legnagyobb, illetve legkisebb helyettesítési értékét keressük (ha egyáltalán ilyenek léteznek). Ezzel a feladattal kapcsolatosak következő fogalmak.

Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek **van abszolút maximuma**, ha

$$\exists \alpha \in \mathcal{D}_f : \forall x \in \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) \leqq f(\alpha).$$

α : **abszolút maximumhely**,

$f(\alpha)$: **a függvény abszolút maximuma**.

Megjegyzés. Az **abszolút minimumra** hasonló definíciók fogalmazhatók meg.

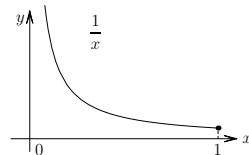
Az abszolút maximum-, illetve abszolút minimumhelyeket közösen **abszolút szélsőértékhelyeknek** nevezzük.
■

Egy valós-valós függvénynek vagy vannak abszolút szélsőértékei, vagy nincsenek. Ez utóbbi esetre mutatunk példákat.

1. példa.

Az $f(x) = \frac{1}{x}$ ($x \in (0, 1]$) függvény

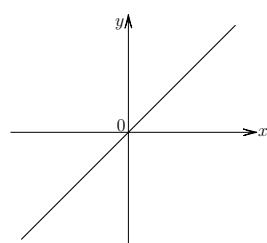
- folytonos $(0, 1]$ -en,
- \exists abszolút minimuma,
- $\not\exists$ abszolút maximuma.



2. példa.

Az $f(x) = x$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény

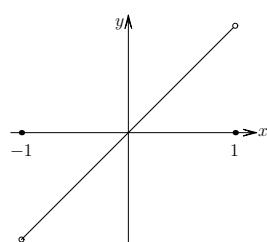
- folytonos \mathbb{R} -en,
- $\not\exists$ abszolút minimuma,
- $\not\exists$ abszolút maximuma.



3. példa.

Az $f(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } x \in (-1, 1) \\ 0, & \text{ha } x = \pm 1 \end{cases}$ függvény

- nem folytonos $[-1, 1]$ -en,
- $\not\exists$ abszolút minimuma,
- $\not\exists$ abszolút maximuma.



Megjegyzés. A következő tétel azt állítja, hogy egy *korlátos* és *zárt* intervallumon *folytonos* függvénynek minden van abszolút maximum- és abszolút minimumhelye. ■

Weierstrass-tétel.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ha az } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény} \\ \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} f\text{-nek léteznek abszolút szélsőértékei, azaz} \\ \exists \alpha, \beta \in [a, b] : \\ f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha) \quad (\forall x \in [a, b]). \end{array}$$

Bizonyítás. f folytonos $[a, b]$ -n $\implies f$ korlátos $[a, b]$ -n. Ezért

$$\begin{aligned} \exists \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\} &=: M \in \mathbb{R}, \\ \exists \inf \{f(x) \mid x \in [a, b]\} &=: m \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Igazoljuk: az f függvénynek van abszolút maximumhelye, azaz $\exists \alpha \in [a, b] : f(\alpha) = M$.

A szupréum definíciójából következik, hogy

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists y_n \in \mathcal{R}_f : \quad M - \frac{1}{n} < y_n \leq M.$$

Viszont:

$$y_n \in \mathcal{R}_f \implies \exists x_n \in [a, b] : f(x_n) = y_n \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$$

Az így definiált $(x_n) : \mathbb{N} \rightarrow [a, b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tétel miatt az (x_n) sorozatnak létezik (x_{n_k}) konvergens részsorozata. Jelölje α ennek a határértékét, azaz legyen

$$(*) \quad \alpha := \lim(x_{n_k}).$$

Indirekt módon belátható, hogy $\alpha \in [a, b]$.

$$f \text{ folytonos } [a, b]\text{-n} \implies f \in C\{\alpha\} \xrightarrow[\substack{\text{átviteli} \\ \text{elv}}]{}$$

$$(*) \text{ miatt} \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} = f(\alpha).$$

Mivel

$$M - \frac{1}{n_k} < f(x_{n_k}) = y_{n_k} \leq M \quad (\text{minden } k\text{-ra}),$$

ezért $\lim_{k \rightarrow +\infty} y_{n_k} = M$, ami azt jelenti, hogy az $f(\alpha) = M$ egyenlőség valóban fennáll.

Hasonlóan bizonyítható az abszolút minimum létezése. ■

2. előadás

2016. szeptember 19.

Emlékeztető. Korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvények fontos tulajdonságaiból kettőt ismertünk meg:

- $[a, b]$ -n folytonos függvény korlátos,
- az abszolút szélsőértékek létezésére vonatkozó Weierstrass-tételt.

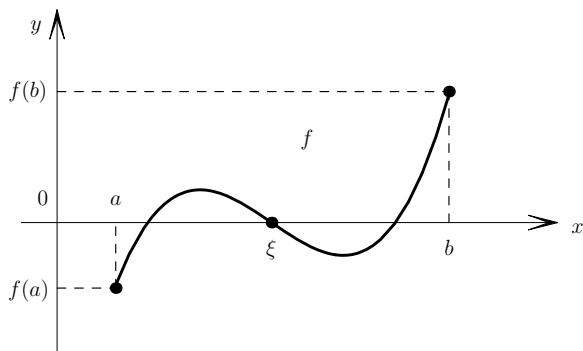
Most további fontos tulajdonságokat fogunk igazolni.

Bolzano-tétel.

Tegyük fel, hogy az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ folytonos } [a, b]\text{-n,} \\ \bullet f(a) \cdot f(b) < 0 \\ (f \text{ a két végpontban különböző eljelű}) \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \exists \xi \in (a, b), \\ \text{ami gyöke az } f \text{ függvénynek, azaz} \\ f(\xi) = 0. \end{array}$$

Szemléletesen:



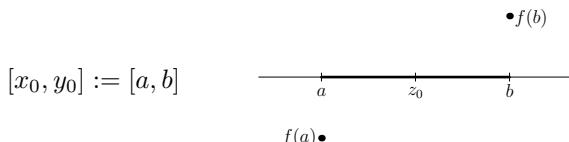
Megjegyzés. A fenti ábra azt is illusztrálja, hogy f -nek az intervallumban több gyöke is lehet, és ezek az intervallumban „bárhol” elhelyezkedhetnek. ■

Bizonyítás. (A Bolzano-féle felezési eljárással.)

Tegyük fel, hogy

$$f(a) < 0 < f(b).$$

A ξ számot egymásba skatulyázott zárt intervallumsorozat közös pontjaként fogjuk definiálni. Legyen



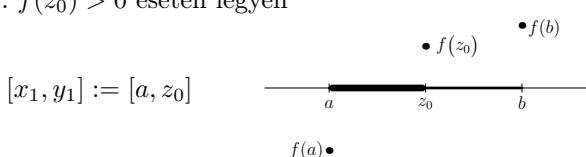
Az intervallumot megfelezzük. Legyen

$$z_0 := \frac{a + b}{2}.$$

Három eset lehetséges:

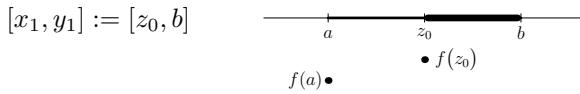
1. $f(z_0) = 0$, ekkor $\xi := z_0$ gyöke az egyenletnek.

2. $f(z_0) > 0$ esetén legyen



3. $f(z_0) < 0$ esetén legyen

$$\bullet f(b)$$



Az $[x_1, y_1]$ intervallumot megfelezve is három eset lehetséges.

⋮

Az eljárást folytatjuk.

Vagy véges sok lépéssorozatban találunk olyan ξ -t, amelyre $f(\xi) = 0$, vagy nem. Az utóbbi esetben

$\exists [x_n, y_n] \quad (n \in \mathbb{N})$ intervallumsorozat, amelyre

(i) $[x_{n+1}, y_{n+1}] \subset [x_n, y_n] \quad (\forall n \in \mathbb{N}),$

(ii) $f(x_n) < 0, \quad f(y_n) > 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

(iii) $y_n - x_n = \frac{b-a}{2^n} \quad (\forall n \in \mathbb{N}).$

A Cantor-féle közösrész tételeből és (iii)-ból következik, hogy az intervallumsorozatnak pontosan egy közös pontja van. Legyen ez ξ , azaz

$$\text{egyértelműen } \exists \xi \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} [x_n, y_n] \neq \emptyset.$$

A konstrukcióból következik, hogy

$$\xi = \lim(x_n) = \lim(y_n).$$

Mivel f folytonos ξ -ben, ezért

$$\lim(f(x_n)) = f(\xi) = \lim(f(y_n)).$$

De (ii)-ből

$$\lim(f(x_n)) \leq 0 \leq \lim(f(y_n)),$$

azaz $f(\xi) \leq 0$ és $f(\xi) \geq 0$, ami csak úgy teljesülhet, ha $f(\xi) = 0$.

A bizonyítás hasonló, ha $f(a) > 0$ és $f(b) < 0$. ■

Megjegyzés. Az eljárásban az $f(x) = 0$ **egyenlet közelítő megoldásait** is elő lehet állítani. ■

Bolzano–Darboux-tétel.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ha az } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény} \\ \text{folytonos } [a, b]\text{-n} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \text{f minden } f(a) \text{ és } f(b) \text{ közötti értéket felvesz } [a, b]\text{-n,} \\ \text{azaz ha } f(a) < f(b), \text{ akkor} \\ \forall c \in (f(a), f(b))\text{-hez } \exists \xi \in (a, b) : f(\xi) = c. \end{array} .$$

Bizonyítás. Alkalmazzuk a Bolzano-tételt a $\varphi(x) := f(x) - c$ ($x \in [a, b]$) függvényre. ■

Definíció. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **Darboux-tulajdonságú I-n**, ha minden $a, b \in I$, $a < b$ esetén az f függvény minden $f(a)$ és $f(b)$ közötti értéket felvesz $[a, b]$ -ben.

Az előzőek alapján a Bolzano–Darboux-tételt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy a korlátos és zárt $[a, b]$ intervallumon folytonos függvény Darboux-tulajdonságú $[a, b]$ -n. Ennek felhasználásával viszonylag egyszerűen igazolhatók a tetszőleges $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon ($I = (a, b)$, $(a, b]$, $(0, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$, stb.) folytonos függvények alábbi tulajdonságai.

Tétel. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges intervallum, és tegyük fel, hogy az $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény folytonos I-n. Ekkor

1º f Darboux-tulajdonságú I-n,

2º \mathcal{R}_f intervallum, vagyis intervallum folytonos képe is intervallum.

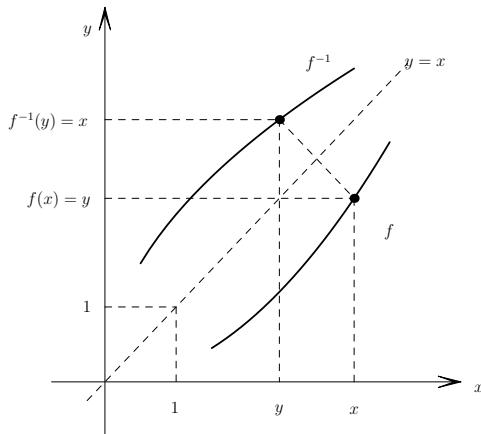
Megjegyzés. Van Darboux-tulajdonságú NEM folytonos függvény is. ■

Az inverz függvény folytonossága

Emlékeztetünk arra, hogy az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény invertálható, ha különböző értelmezési tartománybeli elemekhez különböző helyettesítési értékek tartoznak, azaz minden $y \in \mathcal{R}_f$ elemhez létezik egyetlen olyan $x \in \mathcal{D}_f$ elem, amelyre $f(x) = y$. Ebben az esetben f inverz függvénye:

$$f^{-1} : \mathcal{R}_f \ni y \mapsto x, \quad \text{amelyre } f(x) = y.$$

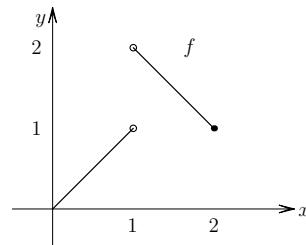
Tegyük fel, hogy f invertálható, és ábrázoljuk f és f^{-1} grafikonját egy olyan koordinátarendszerben, amelynek tengelyein az egységek egyenlő hosszúak. Vegyük f grafikonjának egy (x, y) pontját, azaz legyen $y = f(x)$. Ekkor $f^{-1}(y) = x$, vagyis az (y, x) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján. Ha egy pont két koordinátáját felcseréljük, akkor a pont tükröképét kapjuk meg a két tengely szögfelező egyenesére (vagyis az $y = x$ egyenletű egyenesre) vonatkozóan. Ez azt jelenti, hogy f és f^{-1} – geometriailag – egymás tükröképei a szóban forgó szögfelezőre vonatkozóan:



Megjegyzés. A következő egyszerű példa azt mutatja, hogy az f függvény folytonossága NEM „öröklődik” az f^{-1} inverz függvényre.

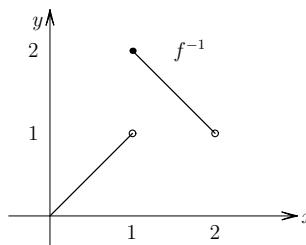
Példa. Ha

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 3 - x, & \text{ha } 1 < x \leq 2, \end{cases}$$



akkor

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} x, & \text{ha } 0 \leq x < 1 \\ 3 - x, & \text{ha } 1 \leq x < 2. \end{cases}$$



Világos, hogy

- f folytonos a $\mathcal{D}_f = [0, 2] \setminus \{1\}$ halmazon,
- f invertálható és $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, 2]$,
- $f^{-1} \notin C\{1\}$. ■

A következő tétel azt állítja, hogy ha feltezzük, hogy f invertálható, az értelmezési tartománya korlátos és zárt intervallum, továbbá f folytonos \mathcal{D}_f -en, akkor az inverz függvénye is folytonos.

Tétel. (Az inverz függvény folytonossága.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tegyük fel, hogy az } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény} \\ \bullet \text{ folytonos } [a, b]\text{-n,} \\ \bullet \exists f^{-1} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \text{az } f^{-1} \text{ függvény folytonos a} \\ \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f \text{ halmazon.} \end{array}$$

Bizonyítás. Indirekt. Tegyük fel, hogy $f^{-1} : \mathcal{R}_f \rightarrow [a, b]$ nem folytonos a $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ halmazon, azaz

$$\exists y_0 \in \mathcal{R}_f, \text{ hogy } f^{-1} \notin C\{y_0\}.$$

A folytonosságra vonatkozó átviteli elvből $\implies \exists (y_n) \subset \mathcal{R}_f$ úgy, hogy

$$\lim(y_n) = y_0, \text{ DE } \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) \neq f^{-1}(y_0).$$

Legyen

$$\begin{aligned} x_n &:= f^{-1}(y_n) \quad (\text{azaz } f(x_n) = y_n) \quad (\forall n \in \mathbb{N}), \\ x_0 &:= f^{-1}(y_0) \quad (\text{azaz } f(x_0) = y_0). \end{aligned}$$

Ekkor az indirekt feltétel alapján

$$\lim(x_n) \neq x_0.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$(*) \quad \exists \delta > 0, \text{ hogy az } \{n \in \mathbb{N} \mid |x_n - x_0| \geq \delta\} \text{ halmaz végtelen.}$$

Az $(x_n) \subset [a, b]$ sorozat korlátos, ezért a Bolzano–Weierstrass-féle kiválasztási tételből következik, hogy $\exists (x_{n_k})$ konvergens részsorozata.

Legyen $\bar{x} := \lim(x_{n_k})$. Indirekt úton belátható, hogy $\bar{x} \in [a, b]$.

$(*)$ -ból következik, hogy az (x_{n_k}) részsorozat megválasztható úgy, hogy

$$(\triangle) \quad \bar{x} \neq x_0.$$

Mivel $f \in C\{\bar{x}\}$ és $\lim(x_{n_k}) = \bar{x}$, ezért a folytonosságra vonatkozó átviteli elv alapján

$$\lim(f(x_{n_k})) = \lim(y_{n_k}) = f(\bar{x}).$$

Az (y_n) (vagyis az $(f(x_n))$) sorozat határértéke y_0 (vagyis $f(x_0)$), és ez igaz minden részsorozatára is, következésképpen

$$\lim(y_{n_k}) = f(x_0),$$

ami azt jelenti, hogy $f(\bar{x}) = f(x_0)$. Az f függvény azonban invertálható, ezért $\bar{x} = x_0$, ami ellentmondásban van a (\triangle) relációval. ■

Tétel.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tegyük fel, hogy az } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény} \\ \bullet \text{ folytonos } [a, b]\text{-n,} \\ \bullet \exists f^{-1} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \text{az } f \text{ függvény szigorúan monoton} \\ (\text{növekedő vagy csökkenő}) [a, b]\text{-n.} \end{array}$$

Tétel.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Legyen } I \subset \mathbb{R} \text{ tetszőleges intervallum} \\ \bullet f : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ folytonos } I\text{-n,} \\ \bullet \exists f^{-1} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \mathcal{R}_f \text{ is intervallum,} \\ f^{-1} \text{ folytonos a } \mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f \text{ intervallumon.} \end{array}$$

Szakadási helyek

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény **szakadási helye**, ha $f \notin C\{a\}$.

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

1^o Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény **megszüntethető szakadási helye**, ha

$$\exists \lim_a f \text{ véges határérték és } \lim_a f \neq f(a).$$

2^o Az $a \in \mathcal{D}_f$ pont az f függvény **elsőfajú szakadási helye**, ha

$$\exists \lim_{a+0} f \text{ és } \exists \lim_{a-0} f, \text{ ezek végesek, de } \lim_{a+0} f \neq \lim_{a-0} f.$$

3^o Az egyéb szakadási pontokat **másodfajú szakadási helyeknek** nevezzük.

3. előadás

2016. szeptember 26.

Emlékeztető:

- Szakadási helyek: $f \notin C\{a\}$.
- A szakadási helyek osztályozása. ■

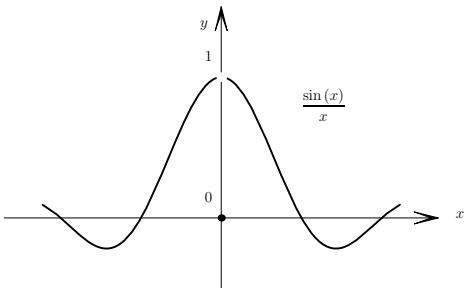
A továbbiakban néhány példát mutatunk szakadási helyekre.

1. példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ megszüntethető szakadási hely, mert

$$\lim_{0} f = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \neq f(0) = 0.$$



A megszüntethető szakadási hely elnevezés arra utal, hogy ebben az esetben az

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x), & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ \lim_0 f = 1, & \text{ha } x = 0 \end{cases}$$

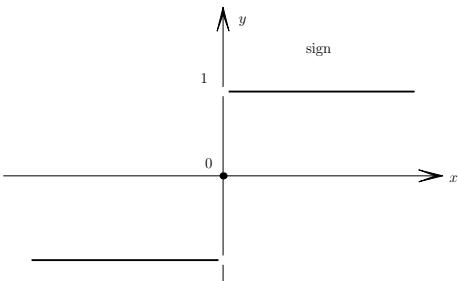
függvény „már” folytonos az $a = 0$ pontban, azaz $\tilde{f} \in C\{0\}$, mert $\lim_0 \tilde{f} = \tilde{f}(0) = 1$. ■

2. példa. Az előjel-függvény:

$$f(x) := \text{sign}(x) \quad (x \in \mathbb{R})$$

- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ elsőfajú szakadási hely, mert

$$\lim_{0+0} f = 1 \neq \lim_{0-0} f = -1.$$



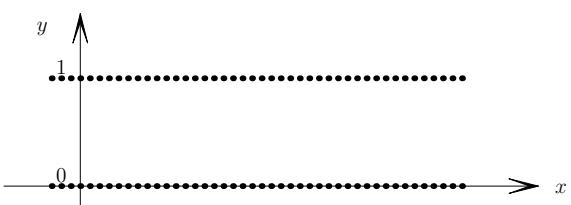
Megjegyzés. Másodfajú szakadás sokféleképpen lehet.

3. példa. A Dirichlet-függvény:

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

- $\forall a \in \mathbb{R}$ másodfajú szakadási hely, mert

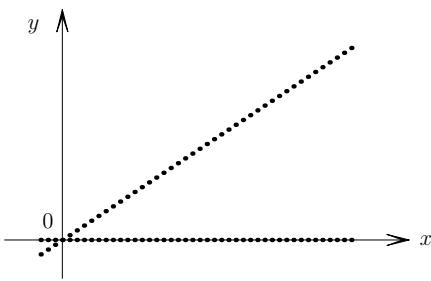
$$\nexists \lim_{a+0} f \text{ és } \nexists \lim_{a-0} f.$$



4. példa. Dirichlet-típusú függvény

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q}^* = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

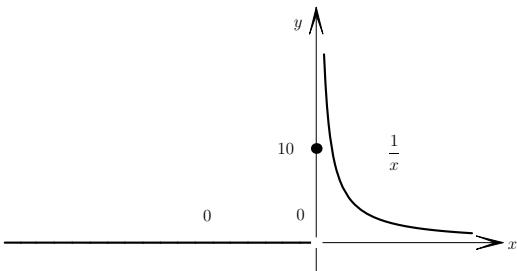
- $f \in C\{0\}$,
- $\forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ másodfajú szakadási hely, mert
 $\nexists \lim_{a+0} f$ és $\nexists \lim_{a-0} f$.



5. példa.

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x < 0 \\ 10, & \text{ha } x = 0 \\ \frac{1}{x}, & \text{ha } x > 0. \end{cases}$$

- $f \in C\{a\}$, ha $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,
- $a = 0$ másodfajú szakadási hely, mert
 $\lim_{0-0} f = 0 \neq \lim_{0+0} f = +\infty$.



Tétel. (Monoton függvények szakadási helyei.)

Legyen $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ monoton függvény. Ekkor f -nek legfeljebb elsőfajú szakadásai lehetnek, azaz egy $a \in \mathcal{D}_f = (\alpha, \beta)$ pontban f folytonos vagy elsőfajú szakadása van.

Bizonyítás nélkül. ■

Elemi függvények

1. A hatvány- és a gyökfüggvények

Legyen $n \in \mathbb{N}$ rögzített természetes szám.

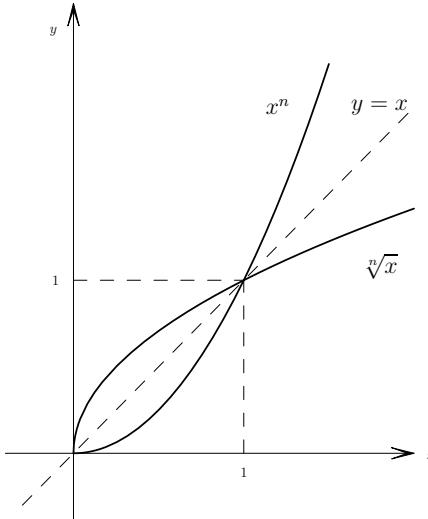
Hatványfüggvény: $f(x) := x^n$ ($x \in [0, +\infty)$).

Gyökfüggvény: $\sqrt[n]{} : [0, +\infty) \ni x \mapsto \sqrt[n]{x}$.

Igazolható:

- $f \uparrow$ és folytonos $[0, +\infty)$ -n $\implies \exists$ inverze,
- $f^{-1} = \sqrt[n]{}$ (a gyökfüggvény a hatványfüggvény inverze),
- $f^{-1} \uparrow$ és folytonos $[0, +\infty)$ -n.

A függvények képe:



Megjegyzés. A függvény tulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. Például:

$$\lim_{0^+} \sqrt[n]{x} = 0, \quad \lim_{+\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty. \blacksquare$$

2. Az exp és az ln függvény

Tétel. (Az exp függvény tulajdonságai.)

$$1^o \exp(x) := \exp x := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

$$2^o \bullet \exp(0) = 1,$$

$$\bullet \exp(1) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e \left(:= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right).$$

3^o A függvényegyenlet:

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (x, y \in \mathbb{R}).$$

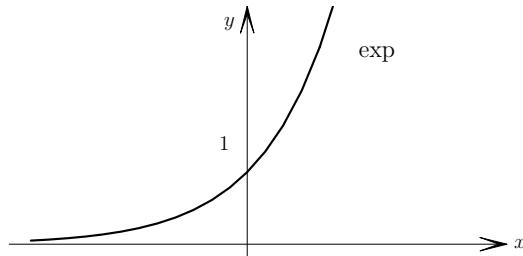
4^o $\exp \uparrow$ és folytonos \mathbb{R} -en.

$$5^o \mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty).$$

$$6^o \lim_{+\infty} \exp = +\infty \quad \text{és} \quad \lim_{-\infty} \exp = 0.$$

Bizonyítás nélkül. ■

Az exp függvény képe:



Definíció. Mivel az $\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény \uparrow \mathbb{R} -en, ezért \exists inverze. Legyen

$$\ln := \log := \exp^{-1}$$

a (természetes alapú vagy e alapú) logaritmusfüggvény.

Megjegyzések.

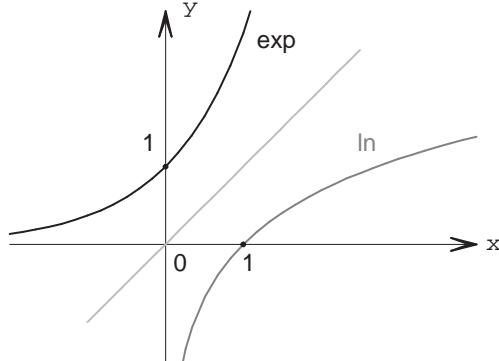
1° $\mathcal{D}_{\ln} = \mathcal{R}_{\exp} = (0, +\infty)$ és $\mathcal{R}_{\ln} = \mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$.

2° Ha $x > 0$, akkor

$$\ln x := \ln(x) = y \quad \xrightarrow[\text{def.}]{\text{inverz}} \quad e^y = x.$$

$\ln x$ tehát az a kitevő, amire az alapot (vagyis az e számot) emelve x -et kapunk. Ez azt jelenti, hogy a fenti módon értelmezett logaritmus a középiskolai definícióval egyezik meg. ■.

Az \ln függvény képe az \exp függvény képének az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükröképe.



Megjegyzés. A függvény tulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Tétel. (Az \ln függvény tulajdonságai.)

1° • $\ln e^x = x \quad (\forall x \in \mathbb{R})$,

• $e^{\ln x} = x \quad (\forall x > 0)$.

2° $\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y \quad (x, y > 0)$.

3° $\ln \uparrow$ és folytonos $(0, +\infty)$ -en, továbbá $\mathcal{R}_{\ln} = \mathbb{R}$.

4° $\lim_{+\infty} \ln = +\infty$ és $\lim_{0+0} \ln = -\infty$.

Megjegyzések.

1° Az $\exp x$ „jól számolható” $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, mert $\exp x$ egy végtelen sor összege.

2° Az $\ln x$ minden $x > 0$ számra értelmezve van, de az értéke így nem számolható. Később majd az \ln függvényt is előállítjuk hatványsor összegeként, és annak felhasználásával lehet a függvényértékeket kiszámolni. ■

3. Az \exp_a és a \log_a függvények

Megjegyzés. A célunk az a^x értelmezése tetszőleges $a > 0$ alap és $x \in \mathbb{R}$ kitevő esetére úgy, hogy a hatványozás $x \in \mathbb{Q}$ esetén „megszokott” azonosságai érvényben maradjanak.

Az e szám tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ kitevő hatványait már értelmeztük. a^x értelmezéséhez abból indulunk ki, hogy az $a > 0$ számot felírhatjuk e hatványaként:

$$a = e^{\ln a}.$$

A hatvány hatványozására vonatkozó azonosság csak úgy marad érvényben, ha a^x -t így értelmezzük:

$$a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \ln a}. \blacksquare$$

Definíció. Legyen $a > 0$ valós szám. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén az a szám x -edik hatványát így értelmezzük:

$$a^x := e^{x \ln a}$$

Igazolható: $(ab)^x = a^x \cdot b^x$ és $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ ($a, b > 0$; $x, y \in \mathbb{R}$). ■

Definíció. Legyen $a > 0$ valós szám. Az a alapú exponenciális függvényt így értelmezzük:

$$\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \exp_a(x) := a^x = \exp(x \cdot \ln a) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\exp_e = \exp$. ■

Igazolható (az exp és az ln függvény tulajdonságait is figyelembe véve):

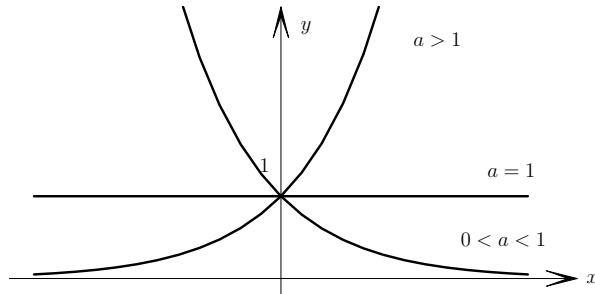
- Ha $0 < a \neq 1$, akkor az $\exp_a : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$ függvény egy folytonos bijekció.
- Ha $a > 1$, akkor \exp_a szigorúan monoton növő és

$$\lim_{-\infty} \exp_a = 0, \quad \lim_{+\infty} \exp_a = +\infty.$$

- Ha $0 < a < 1$, akkor \exp_a szigorúan monoton fogyó és

$$\lim_{-\infty} \exp_a = +\infty, \quad \lim_{+\infty} \exp_a = 0. \quad ■$$

Az \exp_a függvény képe



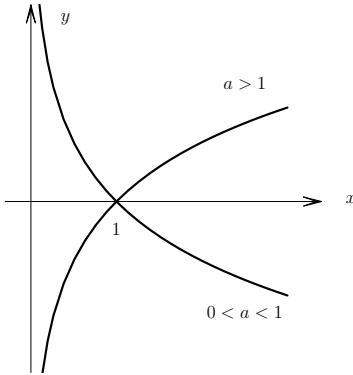
Megjegyzés. A függvény tulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Definíció. Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor az \exp_a szigorúan monoton és folytonos \mathbb{R} -en, ezért van inverze, amelyet a alapú logaritmusfüggvénynek nevezünk és \log_a -val jelölünk, azaz

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}, \quad \text{ha } a > 0 \text{ és } a \neq 1.$$

Megjegyzés. Világos, hogy $\log_e = \ln = \log$. Továbbá $\log_a(x) = \log_a x = y \iff a^y = x$, azaz $\log_a x$ az a kitevő, amire a-t emelve x-et kapunk. ■

A \log_a függvény képe:



Megjegyzés. A függvény tulajdonságok megfogalmazhatók, megjegyzendők. ■

Tétel. (A \log_a függvény tulajdonságai.)

1° Ha $a > 1$, akkor \log_a szigorúan monoton növő folytonos függvény és $\mathcal{R}_{\log_a} = \mathbb{R}$, továbbá

$$\lim_{0+0} \log_a = -\infty, \quad \lim_{+\infty} \log_a = +\infty.$$

2° Ha $0 < a < 1$, akkor \log_a szigorúan monoton fogyó folytonos függvény és $\mathcal{R}_{\log_a} = \mathbb{R}$, továbbá

$$\lim_{0+0} \log_a = +\infty, \quad \lim_{+\infty} \log_a = -\infty.$$

3° Logaritmusazonosságok: Legyen $0 < a \neq 1$. Ekkor

- $\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \quad (x, y > 0);$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y \quad (x, y > 0);$
- $\log_a(x^y) = y \log_a x \quad (x > 0, y \in \mathbb{R}).$

4. Hatványfüggvények

Definíció. Tetszőleges $\alpha \in \mathbb{R}$ szám esetén az α kitevőjű hatványfüggvényt így értelmezzük:

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha := e^{\alpha \ln x}.$$

Tétel. (A hatványfüggvény tulajdonságai.)

Legyen $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$. Ekkor a $h_\alpha : (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ függvény egy folytonos bijekció, amely

- $\alpha > 0$ esetén szigorúan monoton növő, és

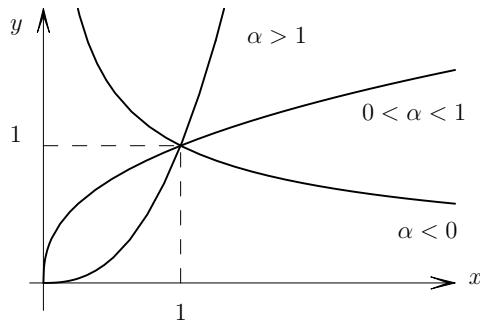
$$\lim_{0+0} h_\alpha = 0, \quad \lim_{+\infty} h_\alpha = +\infty,$$

- $\alpha < 0$ esetén pedig szigorúan monoton fogyó, és

$$\lim_{0+0} h_\alpha = +\infty, \quad \lim_{+\infty} h_\alpha = 0.$$

Bizonyítás. Az eddigiek alapján. ■

A h_α hatványfüggvény képe:



DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS

Előzetes megjegyzések

Korábban megismertük a matematikai analízis egyik legalapvetőbb fogalmát, nevezetesen: valós-valós függvény **pontbeli határértékének** a definíóját. Emlékeztetünk arra, hogy ezzel a fogalommal egy függvénynek azt a – szemléletünk alapján elégé világos – tulajdonságát fogalmaztuk meg matematikai szempontból is *pontos* formában, hogy egy *adott ponthoz „közeli” helyeken a függvényértékek „közel” vannak valamely (valós, $+\infty$ vagy akár $-\infty$) értékhez.*

A további néhány előadáson a **differenciálszámítás** legfontosabb eredményeivel és eszköztárával ismerkedünk meg. Ez a téma a matematikai analízisnek, sőt az egész matematikának és az alkalmazásoknak is egyik igen fontos fejezete. A differenciálszámítás jól használható általános módszert ad többek között függvények tulajdonságainak a leírásához.

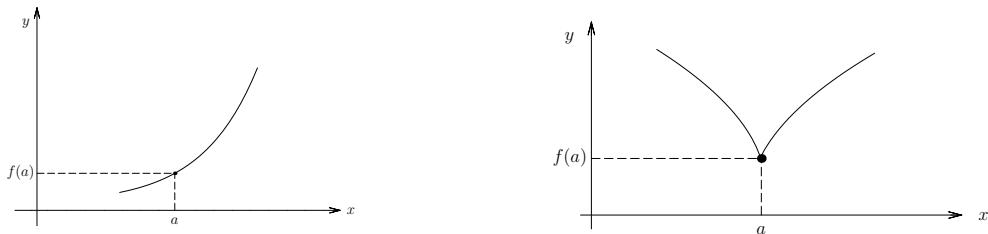
Több elemi függvényt hatványsor összegfüggvényeként értelmeztünk. Például az exp függvény szigorú monotonitása a definícióból kiindulva viszonylag könnyen igazolható. Más a helyzet a sin vagy a cos függvényekkel. Megemlíttetük, hogy ezek a függvények a középiskolai tanulmányainkban megismert függvényekkel azonosak. A megszokott tulajdonságok igazolása (például a monotonitási intervallumok) a „hatványsoros” definícióból kiindulva azonban nem egyszerű feladat; ehhez (is) szükségünk lesz a differenciálszámítás eszköztárához.

A kiindulópontunk a pontbeli **derivált** fogalmának az értelmezése.

A derivált motivációja, szemléletes jelentése

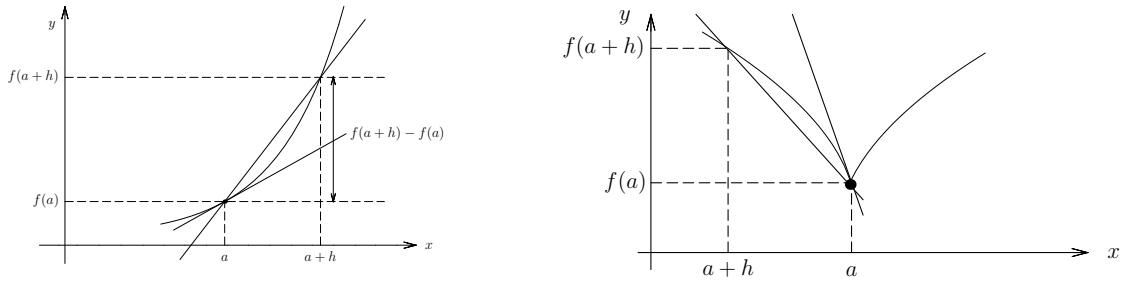
Valós-valós függvény grafikonjának egyik „jellegzetes” tulajdonsága az, hogy annak vajon van-e „töréspontja” vagy nincsen.

Vegyük két egyszerű példát:



A jobb oldali függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pont egy „töréspontja”. A bal oldali függvény grafikonjának nincs „töréspontja”.

A különbség pontos leírásához indulunk ki abból az *ötletből*, hogy húzzunk szelőt a grafikon $(a, f(a))$ pontjában:



A szelő meredeksége:

$$m_h = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

A bal oldali függvénynél a szelőknek van „határhelyzete”, a jobb oldali függvénynél nincs, amit „geometriamentesen” úgy fogalmazhatunk meg, hogy a bal oldali függvénynél

$$\exists \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ határérték és az véges,}$$

a jobb oldali függvénynél a szóban forgó határérték nem létezik. Ezt úgy fejezzük ki, hogy a bal oldali függvény „deriválható az a pontban”, a jobb oldali függvény pedig „nem deriválható az a pontban”.

4. előadás

2016. október 3.

Emlékeztető:

- A derivált motivációja, szemléletes jelentése.

A derivált fogalma

A deriváltat először az értelmezési tartomány **belső pontjaiban** értelmezzük.

Definíció. Tegyük fel, hogy $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$. Az $a \in A$ pont az A **halmaz belső pontja**, ha

$$\exists K(a), \text{ hogy } K(a) \subset A.$$

Jelölje

$$\text{int } A := \{a \in A \mid a \text{ belső pontja } A\text{-nak}\}$$

az A halmaz **belső pontjainak a halmazát**.

Példák:

- Ha $A = [0, 1]$, akkor $\text{int } A = (0, 1)$.
- Ha $A = (5, 6]$, akkor $\text{int } A = (5, 6)$.
- Ha $A = \{2; 3; 4\}$, akkor $\text{int } A = \emptyset$.

DEFINÍCIÓ. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban **differenciálható** (vagy **deriválható**), ha

$$\exists \text{ és véges } a \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ határérték.}$$

Ezt a határértéket az $f'(a)$ szimbólummal jelöljük, és az f függvény a **pontbeli deriváltjának** (vagy **differenciálhányadosának**) nevezik, azaz

$$f'(a) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}.$$

Jelölése: $f \in D\{a\}$.

Megjegyzések.

1^o A fenti definícióban szereplő határértéket az $x = a + h$ helyettesítéssel gyakran írjuk fel:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

2^o Ha $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, akkor a

$$\Delta_a f(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\})$$

függvényt az f függvény a ponthoz tartozó **különbséghányados-függvényének** vagy **differenciahányados-függvényének** nevezik.

3^o A derivált definíciójában 0/0-típusú kritikus határértékről van szó. ■

A differenciálhatóság erősebb megkötés, mint a folytonosság.

Tétel. (A folytonosság és a deriválhatóság kapcsolata.)

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Ekkor

$$1^o \quad f \in D\{a\} \implies f \in C\{a\},$$

$$2^o \quad \nLeftarrow .$$

Bizonyítás.

$$1^o \quad f \in D\{a\} \implies$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - f(a)) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot (x - a) \right) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} (x - a) = f'(a) \cdot 0 = 0.$$

Ez éppen azt jelenti, hogy $f \in C\{a\}$.

2^o Van olyan folytonos függvény, amelyik egy pontban folytonos, de ott nem deriválható. Például

$$\text{abs} \in C\{0\}, \quad \text{de} \quad \text{abs} \notin D\{0\},$$

mert az

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \ni x \mapsto \frac{\text{abs}(x) - \text{abs}(0)}{x - 0} = \frac{|x| - |0|}{x} = \begin{cases} 1, & \text{ha } x > 0 \\ -1, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

függvénynek a 0 pontban nincs határértéke. ■

• Egyoldali deriváltak

A most vizsgált példában a 0 pontbeli különböző határértékek nincs ugyan határértéke a 0 pontban, de létezik a jobb- és bal oldali határértéke. Ilyenkor azt mondjuk, hogy a függvénynek a 0 pontban van *jobb-* és *bal oldali deriváltja*.

Célszerű bevezetni tehát a derivált fogalmának a féloldali variánsait.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \mathcal{D}_f$ és tegyük fel, hogy $\exists \delta > 0$ úgy, hogy $[a, a + \delta) \subset \mathcal{D}_f$. Ha

$$\exists \quad \text{és véges } a \quad \lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{határérték},$$

akkor azt mondjuk, hogy f az a **pontban jobbról deriválható**, és a fenti határértéket az f függvény a **pontbeli jobb oldali deriváltjának** nevezzük és az $f'_+(a)$ szimbólummal jelöljük.

Megjegyzések.

1^o Analóg módon értelmezzük az $f'_-(a)$ szimbólummal jelölt **bal oldali deriváltat**.

2^o Nyilvánvaló, hogy $f \in D\{a\} \iff \exists f'_+(a), \exists f'_-(a)$ és $f'_+(a) = f'_-(a) (= f'(a))$. ■

• Deriváltfüggvény

Megjegyzés. Látni fogjuk, hogy a derivált a leghatékonyabb segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez lokálisan és globálisan is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke az f függvény a -beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körüli viselkedésére vonhatunk le következtetéseket. (Egy ilyen kapcsolatot már találtunk, amikor beláttuk, hogy a differenciálhatóságból következik a folytonosság.)

Ha viszont f egy halmaz (például intervallum) minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. Az alkalmazásokban legtöbbször olyan függvények szerepelnek, amelyek valamely halmazon (például intervallumon) deriválhatók. Célszerű tehát a deriválást olyan operációként felfogni, amely függvényekhez rendel függvényeket. ■

Definíció. Ha $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\{x \in \text{int } \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\} \neq \emptyset$, akkor az

$$\{x \in \text{int } \mathcal{D}_f \mid f \in D\{x\}\} \ni x \mapsto f'(x)$$

függvényt az f deriváltfüggvényének (vagy differenciálhányados-függvényének) nevezik, és az f' szimbólummal jelöljük.

Néhány elemi függvény deriváltja

1. Konstans függvények. Tetszőleges $c \in \mathbb{R}$ esetén az

$$f(x) := c \quad (x \in \mathbb{R})$$

konstans függvény minden $x \in \mathbb{R}$ ($= \text{int } \mathcal{D}_f$) pontban deriválható és a deriváltja 0, azaz

$$\boxed{f'(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R})} \quad \text{vagy} \quad \boxed{(c)' = 0 \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = 0. \blacksquare$$

2. Hatványfüggvények. Tetszőleges n természetes szám esetén az

$$f(x) := x^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványfüggvény minden $x \in \mathbb{R}$ ($= \text{int } \mathcal{D}_f$) pontban deriválható, és a deriváltja nx^{n-1} , azaz

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \\ (\text{az } a^n - b^n &= (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \text{ azonosság miatt}) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[(x+h)^{n-1} + (x+h)^{n-2}x + \dots + (x+h)x^{n-2} + x^{n-1}]}{h} = nx^{n-1} \end{aligned}$$

a hatványfüggvény folytonossága alapján. ■

3. Az abszolút érték függvény az $a = 0$ pontban nem deriválható, azaz $\text{abs} \notin D\{0\}$. (v.ö. a függvény grafikonjának ott töréspontja van).

Bizonyítás. Volt. ■

4. A reciprokfüggvény, azaz az

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

függvény tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ($= \text{int } \mathcal{D}_f$) pontban deriválható és

$$\boxed{\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ pontban

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+h} - \frac{1}{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{-h}{(x+h)x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} -\frac{1}{x(x+h)} = -\frac{1}{x^2}. \blacksquare$$

5. A négyzetgyök függvény, azaz az

$$f(x) := \sqrt{x} \quad (x \in [0, +\infty)).$$

függvény minden $x \in (0, +\infty)$ ($= \text{int } \mathcal{D}_f$) pontban deriválható és

$$\boxed{(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad (x \in (0, +\infty))}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in (0, +\infty)$ pontban

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

a négyzetgyök függvény folytonossága alapján. ■

Megjegyzés. Az $x = 0$ pontban a függvénynek csak a **jobb oldali** deriválhatóságát vizsgálhatjuk:

$$\lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{\sqrt{h} - \sqrt{0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0+0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty.$$

A különbséghányados-függvényének a 0 pontban tehát létezik a jobb oldali határértéke, azonban az **nem véges**, ezért a négyzetgyökfüggvény a 0 **pontban jobbról nem deriválható**. ■

6.a A szinuszfüggvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható, és

$$\boxed{\sin' x := (\sin x)' = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ ($= \text{int } \mathcal{D}_f$) pontban

$$\begin{aligned} (\sin x)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot \cos h + \cos x \cdot \sin h - \sin x}{h} = \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h}. \end{aligned}$$

Mivel

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$$

és

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{\cos h - 1}{h} \cdot \frac{\cos h + 1}{\cos h + 1} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos^2 h - 1}{h(\cos h + 1)} = -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin^2 h}{h(\cos h + 1)} = \\ &= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \sin h \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\cos h + 1} = -1 \cdot 0 \cdot \frac{1}{2} = 0, \end{aligned}$$

ezért

$$\sin' x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \cos x. \quad ■$$

6.b A koszinuszfüggvény minden $x \in \mathbb{R}$ pontban deriválható és

$$\boxed{\cos' x := (\cos x)' = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ ($= \text{int } \mathcal{D}_f$) pontban az előzőekhez hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos h - \sin x \cdot \sin h - \cos x}{h} = \\ &= -\sin x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} + \cos x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cos h - 1}{h} = -\sin x. \quad ■ \end{aligned}$$

A deriválhatóság ekvivalens átfogalmazása: lineáris közelítés.

Az érintő fogalma

Megjegyzés. Gyakori jelenség, hogy valamely problémánál fellépő függvényel dolgozva egyszerűbb és áttekinthetőbb eredményhez juthatunk, ha a függvény helyett egy másik, az eredetit „jól közelítő”, de egyszerűbb típusú függvényt tekintünk. Az egyik legegyszerűbb függvénytípus az elsőfokú polinom (vagyis az $mx+b$ ($x \in \mathbb{R}$) függvény). Megmutatjuk, hogy *egy f függvény deriválhatósága az $a \in \text{int } D_f$ pontban éppen azt jelenti, hogy a függvény bizonyos értelemben „jól közelíthető” elsőfokú polinommal.* ■

Tétel. (Lineáris közelítés.)

Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } D_f$. Ekkor

$$f \in D\{a\} \iff \begin{cases} \exists A \in \mathbb{R} \text{ és } \exists \varepsilon : D_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_{a \rightarrow a} \varepsilon = 0 : \\ f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in D_f). \end{cases}$$

Az A szám az f függvény $a \in \text{int } D_f$ pontbeli deriváltja, vagyis $A = f'(a)$.

Bizonyítás.

$$\boxed{\Rightarrow} \quad f \in D\{a\} \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R} \iff \lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \right) = 0.$$

Ha

$$\varepsilon(x) := \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a) \quad (x \in D_f),$$

akkor $\lim_{a \rightarrow a} \varepsilon = 0$ és

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in D_f),$$

ezért a feltétel az $A = f'(a)$ választással teljesül.

$\boxed{\Leftarrow}$ Most tegyük fel, hogy $\exists A \in \mathbb{R}$ és $\exists \varepsilon : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $\lim_{a \rightarrow a} \varepsilon = 0$, hogy

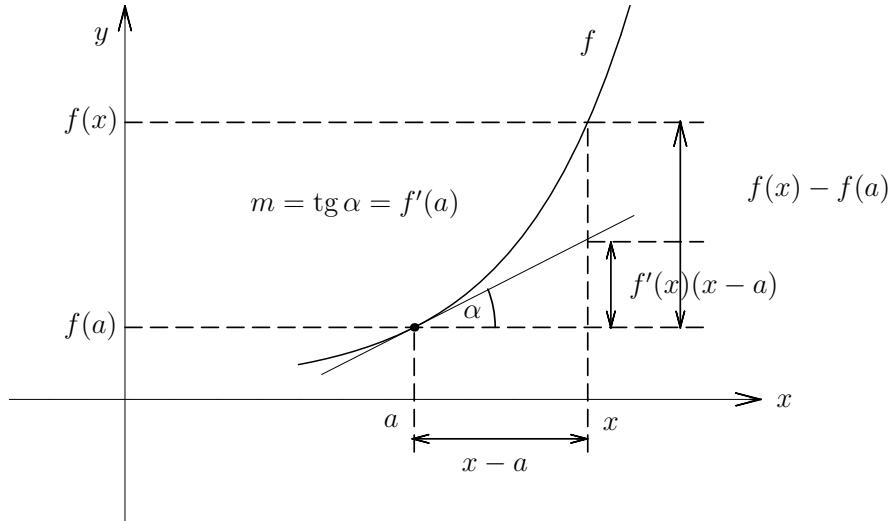
$$f(x) - f(a) = A \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in D_f).$$

Ebből

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = A + \varepsilon(x) \longrightarrow A, \text{ ha } x \longrightarrow a$$

adódik, ami azt jelenti, hogy $f \in D\{a\}$ és $f'(a) = A$. ■

Szemléletes jelentés:



Megjegyzések.

1º A függvényértékek megváltozása

$$f(x) - f(a) = f'(a) \cdot (x - a) + \varepsilon(x)(x - a) \quad (x \in D_f).$$

A jobb oldalon álló első tag egy lineáris függvény, a második tag pedig a $\lim_{a \rightarrow 0} \varepsilon = 0$ feltétel miatt az elsőhöz képest „kicsi”. Az f függvény a pontbeli deriválhatósága tehát azt jelenti, hogy a függvény megváltozása az a pont környezetében, „jól” közelíthető lineáris függvénytelivel.

2º Az $f(x) - f(a)$ megváltozás első tagját (vagyis az $x \mapsto f'(a)(x - a)$ lineáris függvényt) az a helyhez tartozó megváltozás **fő részének** vagy **differenciáljának** nevezzük. Azt a tényt, hogy ez a tag a második taghoz képest „kicsi” gyakran az

$$f(x) - f(a) \sim f'(a)(x - a) \quad (\text{ha } x \sim a)$$

jelöléssel fejezzük ki.

3º A deriválhatóság előzőkben igazolt ekvivalens átfogalmazásának a jelentősége többek között abban áll, hogy ha a differenciálhatóság fogalmát ki akarjuk terjeszteni más – nem feltétlenül valós változós vagy valós értékű – függvényekre, akkor a definícióval analóg értelmezésre nem minden van lehetőség, míg a lineáris közelítéssel az általánosítás gyakran problémamentes. ■

• Érintő

Megjegyzés. A középiskolai tanulmányaink során megismertünk néhány síkbeli görbe (kör, parabola) érintőjének a fogalmával.

Az előzőek alapján, ha $f \in D\{a\}$, akkor az $(a, f(a))$ és az $(x, f(x))$ pontokon átmenő szelőknek van „határ-egyenese”, ha $x \rightarrow a$. Függvény grafikonjának (mint síkbeli halmaznak) az érintőjén éppen ezt az egyenest célszerű érteni. Az $f \in D\{a\}$ függvény esetén a szóban forgó egyenes átmegy az $(a, f(a))$ ponton és a meredeksége $f'(a)$. ■

Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény grafikonjának az $(a, f(a))$ pontban van **érintője**, ha $f \in D\{a\}$. Az f függvény grafikonjának $(a, f(a))$ pontbeli **érintőjén** az

$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

egyenletű egyenest értjük.

- $f'(a)$ szemléletes jelentése:

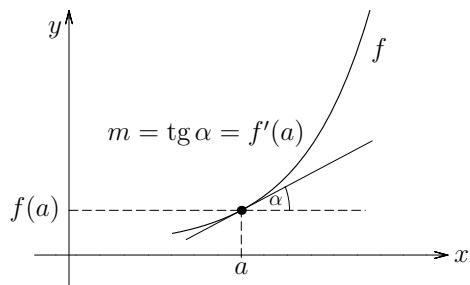
a grafikon $(a, f(a))$ pontbeli érintőjének

a meredeksége,

- $f'(a)$ definíciójában szereplő határérték **véges**,

ezért az érintő **nem** párhuzamos az

y -tengellyel.



Megjegyzés. Érdemes meggondolni, hogy a kör és a parabola érintőjének a fenti definíciója *ekvivalens* a középiskolában geometriai úton megadott definícióval. ■

5. előadás

2016. október 10.

Deriválási szabályok

Megjegyzés. Az analízisben (és általában a matematikában) a legegyszerűbb függvények a polinomok, a racionális függvények, az exponenciális, a hatvány- és logaritmuspontjából függvények, a trigonometrikus függvények és a hiperbolikus függvények. **Elémi függvényeknek** nevezzük azokat a függvényeket, amelyeket a fentiekből kaphatunk meg a négy alapművelet, a kompozíció és az invertálás segítségével.

Az előző órán a definicióból kiindulva vizsgáltunk meg differenciálhatóság szempontjából néhány elemi függvényt. A definíció alapján annak eldöntése, hogy egy adott függvény deriválható-e valamelyen pontban, esetenként szinte reménytelen feladat. Éppen ezért különös jelentőséggel bírnak az állítások, amelyek ezt megkönyítik. Ezek az ún. **deriválási szabályok**, amelyek segítségével bizonyos függvények differenciálhatóságából és deriváltjának ismeretéből következtetni tudunk további függvények differenciálhatóságára és deriváltjára.

• Algebrai műveletek

Tétel. (Az algebrai műveletek és a derivált kapcsolata.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $f, g \in D\{a\}$ valamelyen $a \in \text{int}(\mathcal{D}_f \cap \mathcal{D}_g)$ pontban. Ekkor

- 1^o $cf \in D\{a\}$ és $(cf)'(a) = cf'(a)$ ($c \in \mathbb{R}$),
 - 2^o $f + g \in D\{a\}$ és $(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,
 - 3^o $f \cdot g \in D\{a\}$ és $(f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,
 - 4^o ha még a $g(a) \neq 0$ feltétel is teljesül, akkor
- $$\frac{f}{g} \in D\{a\} \quad \text{és} \quad \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Bizonyítás. A bizonyítások közös **ötlete** az, hogy az egyes függvények differenciahányadosait az $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ és $\frac{g(x) - g(a)}{x - a}$ differenciahányadosok segítségével fejezzük ki.

3^o **A szorzatfüggvény deriválása.** Az $f \cdot g$ szorzatfüggvény különbséghányados-függvénye az a pontban

$$\begin{aligned} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \frac{f(x) \cdot g(x) - f(a) \cdot g(a)}{x - a} = \\ &= \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot g(x) + f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_{fg} \setminus \{a\}). \end{aligned}$$

Mivel $g \in D\{a\}$, ezért $g \in C\{a\}$, tehát $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$. Így

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{(fg)(x) - (fg)(a)}{x - a} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) + f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \\ &= f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $fg \in D\{a\}$ és

$$(fg)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a). \blacksquare$$

4^o **A hányadosfüggvény deriválása.**

Először azt igazoljuk, hogy $a \in \text{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \implies g \in C\{a\}$, ezért a $g(a) \neq 0$ feltétel miatt

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f : g(x) \neq 0 \quad (\forall x \in K(a)) \implies a \in \text{int} \mathcal{D}_{\frac{f}{g}}.$$

Az $\frac{f}{g}$ hánnyadosfüggvény különbséghánnyados-függvénye az a pontban

$$\begin{aligned} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{f(a)}{g(a)}}{x-a} = \frac{1}{g(a)g(x)} \cdot \frac{f(x) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(x)}{x-a} = \\ &= \frac{1}{g(a)g(x)} \left(\frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) \quad (x \in \mathcal{D}_{\frac{f}{g}} \setminus \{a\}). \end{aligned}$$

Vegyük figyelembe azt, hogy $g \in C\{a\} \implies \lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, és a feltételünk miatt $g(a) \neq 0$. Ezért

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\left(\frac{f}{g}\right)(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(a)}{x-a} &= \frac{1}{g(a) \lim_{x \rightarrow a} g(x)} \left(\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \cdot g(a) - f(a) \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x) - g(a)}{x-a} \right) = \\ &= \frac{1}{g^2(a)} (f'(a)g(a) - f(a)g'(a)). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\frac{f}{g} \in D\{a\}$ és

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}. \blacksquare$$

• Összetett függvény

Tétel. (Az összetett függvény deriválása.)

<i>Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és</i> <ul style="list-style-type: none"> • $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$, • $g \in D\{a\}$ egy $a \in \text{int } \mathcal{D}_g$-ra, • $f \in D\{g(a)\}$ 	$\left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\}$	$f \circ g \in D\{a\}$ és $(f \circ g)'(a) = f'(g(a)) \cdot g'(a).$
--	--	--

Bizonyítás.

(i) Először azt igazoljuk, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_{f \circ g}$.

Valóban: $g \in D\{a\} \implies a \in \text{int } \mathcal{D}_g$, és $\mathcal{R}_g \subset \mathcal{D}_f$ miatt $\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathcal{D}_g$, tehát $a \in \text{int } \mathcal{D}_{f \circ g}$.

(ii) $g \in D\{a\} \xrightarrow[\text{közelítés}]{\text{lineáris}} \exists \varepsilon : \mathcal{D}_g \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \varepsilon = 0:$

$$(*) \quad g(x) - g(a) = g'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_g).$$

Hasonlóan: $f \in D\{g(a)\} \xrightarrow[\text{közelítés}]{\text{lineáris}} \exists \eta : \mathcal{D}_f \rightarrow \mathbb{R}, \lim_a \eta = 0:$

$$f(y) - f(g(a)) = f'(g(a))(y-g(a)) + \eta(y)(y-g(a)) \quad (y \in \mathcal{D}_f).$$

Ebbe $y = g(x)$ -et helyettesítve:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) - (f \circ g)(a) &= f(g(x)) - f(g(a)) = \\ &= f'(g(a))(g(x) - g(a)) + \eta(g(x))(g(x) - g(a)) \stackrel{(*)}{=} \\ &\stackrel{(*)}{=} f'(g(a)) [g'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)] + \eta(g(x)) [g'(a)(x-a) + \varepsilon(x)(x-a)] = \\ &= f'(g(a)) g'(a)(x-a) + (x-a) [f'(g(a)) \cdot \varepsilon(x) + \eta(g(x)) (g'(a) + \varepsilon(x))] = \\ &= A \cdot (x-a) + \delta(x)(x-a) \quad (x \in \mathcal{D}_{f \circ g}), \end{aligned}$$

ahol

$$A := f'(g(a)) \cdot g'(a), \\ \delta(x) := f'(g(a)) \cdot \varepsilon(x) + \eta(g(x)) \cdot (g'(a) + \varepsilon(x)).$$

Mivel $x \rightarrow a$ esetén $g(x) \rightarrow g(a)$, ezért $\eta(g(x)) \rightarrow 0$, ha $x \rightarrow a$ (feltehető ugyanis, hogy $\eta(g(a)) = 0$, ezért η folytonos $g(a)$ -ban). Ebből, továbbá a $\lim_a \varepsilon = 0$ -ból következik, hogy

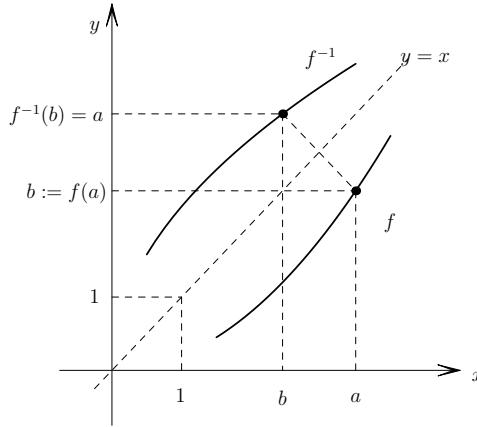
$$\delta(x) \rightarrow 0, \text{ ha } x \rightarrow a.$$

Ez pedig a lineáris közelítésre vonatkozó téTEL szerint éppen azt jelenti, hogy $f \circ g \in D\{a\}$ és

$$(f \circ g)'(a) = f'(g(a))g'(a). \blacksquare$$

• Inverz függvény

Szemléletesen. Tegyük fel, hogy az f függvény invertálható. Emlékeztetünk arra, hogy az f és az f^{-1} függvények grafikonjai egymásnak az $y = x$ egyenesre vonatkozó tükröképe:



Tekintsük az f függvény grafikonjának egy $(a, f(a)) =: (a, b)$ pontját. Ennek tükröképe az $y = x$ egyenletű szögefelező egyenesre a (b, a) pont. Mivel $a = f^{-1}(b)$, ezért a (b, a) pont rajta van az f^{-1} függvény grafikonján.

Az f függvény grafikonjának $(a, f(a)) = (a, b)$ pontbeli érintőegyenesének tükröképe az f^{-1} függvény grafikonjának az $(f(a), a) = (b, a)$ pontbeli érintője. Ha az f -hez húzott érintő nem párhuzamos az x -tengellyel (vagyis $f'(a) \neq 0$), akkor a tükröképe nem párhuzamos az y -tengellyel. Ekkor a meredekségeik egymás reciprokai, vagyis

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}. \blacksquare$$

Tétel. (Az inverz függvény deriválása.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tegyük fel, hogy az } f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R} \text{ függvény} \\ \bullet \text{ szigorúan monoton és} \\ \text{folytonos az } (\alpha, \beta) \text{ intervallumon,} \\ \bullet \text{ valamelyen } a \in (\alpha, \beta) \text{ pontban } f \in D\{a\}, \\ \bullet f'(a) \neq 0 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \text{az } f^{-1} \text{ függvény deriválható a} \\ \text{b} := f(a) \text{ pontban és} \\ (f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \end{array}$$

Bizonyítás. Tekintsünk egy olyan $(y_n) \subset \mathcal{R}_f$ sorozatot, amelyre $\lim_{n \rightarrow +\infty} y_n = b$.

Legyen $x_n := f^{-1}(y_n)$ ($n \in \mathbb{N}$). Ekkor

$$f^{-1}(b) = a \quad \text{és} \quad f(x_n) = y_n \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Az inverz függvény folytonossága alapján

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(y_n) = f^{-1}(b) = a.$$

Ezeket felhasználva az f^{-1} függvény b -pontbeli különbségihányados függvénye:

$$\frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \frac{x_n - a}{f(x_n) - f(a)} = \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A határértékre vonatkozó átviteli elv és a hánnyados határértékére vonatkozó tétel alapján, $f'(a) \neq 0$ figyelembevételével következik, hogy $f^{-1} \in D\{b\}$ és

$$(f^{-1})'(b) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(y_n) - f^{-1}(b)}{y_n - b} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{f(x_n) - f(a)}{x_n - a}} = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}. \blacksquare$$

Megjegyzés. Legyen f szigorúan monoton és folytonos az (α, β) intervallumban, és tegyük fel, hogy f mindenütt deriválható (α, β) -ban. Ha f' sehol sem nulla, akkor az előbbi tétel szerint f^{-1} mindenütt deriválható a $J = D_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$ intervallumban, és $(f^{-1})'(f(x)) = 1/f'(x)$ minden $x \in (\alpha, \beta)$. Ha $y \in J$, akkor $f^{-1}(y) \in (\alpha, \beta)$ és $f(f^{-1}(y)) = y$. Ebből azt kapjuk, hogy $(f^{-1})'(y) = 1/f'(f^{-1}(y))$. Mivel ez minden $y \in J$ -re igaz, ezért

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}. \blacksquare$$

• Hatványsor összegfüggvénye

Tétel. (Hatványsor összegfüggvényének deriválása.)

Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($n = 0, 1, \dots$). Tegyük fel, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in K_R(a)).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n (x-a)^{n-1} \quad (\forall x \in K_R(a)).$$

Bizonyítás. Nem kérdezzük. Az érdeklődők a bizonyítást az órai anyag végén megtalálják. ■

Megjegyzés. A sin és a cos függvény deriválhatóságára vonatkozó állításokat korábban már igazoltuk. A fenti tétel alapján a szóban forgó állításokra új bizonyításokat adunk.

Emlékeztetünk arra, hogy a sin és a cos függvényt az egész \mathbb{R} -en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

és

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A fenti tétel alapján $\forall x \in \mathbb{R}$ pontban $\sin, \cos \in D\{x\}$ és

$$\begin{aligned} \sin' x &= (\sin x)' = 1 - 3 \cdot \frac{x^2}{3!} + 5 \cdot \frac{x^4}{5!} - 7 \cdot \frac{x^6}{7!} + \cdots = \\ &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos' x &= (\cos x)' = -2 \cdot \frac{x}{2!} + 4 \cdot \frac{x^3}{4!} - 6 \cdot \frac{x^5}{6!} + 8 \cdot \frac{x^7}{8!} \dots = \\ &= -x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = -\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right) = -\sin x \quad (x \in \mathbb{R}). \blacksquare\end{aligned}$$

Néhány elemi függvény deriváltja (folytatás)

7. Polinomfüggvénynek nevezzük a

$$P(x) := a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

valós-valós függvényeket, ahol $a_0, a_1, \dots, a_n, a_n \neq 0$ valós számok. A hatványfüggvények deriválására, valamint az algebrai műveletek és a derivált kapcsolatára vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R} \text{ pontban } P \in D\{x\}, \text{ és} \\ P'(x) = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + 2 a_2 x + a_1 = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1}. \blacksquare\end{aligned}$$

8a. A tangensfüggvényt így értelmezzük:

$$\operatorname{tg} := \frac{\sin}{\cos}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{tg} x := \operatorname{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \cos x \neq 0\}).$$

A cos függvény általunk megadott definíciójából nem nyilvánvaló, hogy hol vannak a függvénynek a zérushelyei. Ezeket hamarosan meg fogjuk adni.

A sin, a cos és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}}$ pontban $\operatorname{tg} \in D\{x\}$, és

$$\operatorname{tg}' x = (\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' x \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos' x}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

azaz

$$\operatorname{tg}' x = (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathcal{D}_{\operatorname{tg}}). \blacksquare$$

8b. A kotangensfüggvényt így értelmezzük:

$$\operatorname{ctg} := \frac{\cos}{\sin}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{ctg} x := \operatorname{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \in \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \sin x \neq 0\}).$$

A sin függvény általunk megadott definíciójából nem nyilvánvaló, hogy hol vannak a függvénynek a zérushelyei. Ezeket hamarosan meg fogjuk adni.

A sin, a cos és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}}$ pontban $\operatorname{ctg} \in D\{x\}$, és

$$\operatorname{ctg}' x = (\operatorname{ctg} x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{\cos' x \cdot \sin x - \cos x \cdot \sin' x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x},$$

azaz

$$\operatorname{ctg}' x = (\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} \quad (x \in \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}}). \blacksquare$$

9. A természetes alapú exponenciális függvény $\forall x \in \mathbb{R}$ ($= \mathcal{D}_{\exp}$) pontban deriválható, és

$$\boxed{\exp'(x) = (e^x)' = e^x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Az \exp függvényt az egész \mathbb{R} -en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\exp x := \exp(x) := e^x := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tételel az $a := 0$, $\alpha_n := \frac{1}{n!}$ ($n \in \mathbb{N}$) szereposztással alkalmazva azt kapjuk, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ pontban $\exp \in D\{x\}$, és

$$\exp'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n (x - a)^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{1}{n!} x^{n-1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} x^n = \exp(x) = e^x. \blacksquare$$

Megjegyzés. Az állítás úgy is megfogalmazható, hogy az \exp függvény deriváltfüggvénye önmaga. Tüldönképpen ez az összefüggés indokolja, hogy az e számot tekintjük az analízis (és általában a matematika) egyik legfontosabb állandójának. ■

10. A természetes alapú logaritmusfüggvény $\forall x \in (0, +\infty)$ ($= \mathcal{D}_{\ln}$) pontban deriválható, és

$$\boxed{\ln' x = (\ln x)' = \frac{1}{x} \quad (x \in (0, +\infty))}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy az \ln függvényt az \exp függvény inverzeként értelmeztük:

$$\ln := \exp^{-1}.$$

Az \exp függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó térel valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)$ ($= \mathcal{D}_{\ln}$) pontban $\ln \in D\{x\}$, és

$$\ln' x = (\ln x)' = \frac{1}{\exp'(\ln x)} = \frac{1}{\exp(\ln x)} = \frac{1}{x}. \blacksquare$$

11. Exponenciális függvények. Ha $a > 0$ valós szám, akkor $\forall x \in \mathbb{R}$ ($= \mathcal{D}_{\exp_a}$) pontban $\exp_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\exp'_a(x) = (a^x)' = a^x \ln a \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a > 0$ valós szám esetén az a alapú exponenciális függvényt így értelmeztük:

$$a^x := \exp_a(x) := \exp(x \cdot \ln a) \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Ha $f := \exp$ és $g(x) := x \ln a$ ($x \in \mathbb{R}$), akkor

$$\exp_a = f \circ g.$$

Az \exp és az összetett függvény deriválására vonatkozó állítások alapján azt kapjuk, hogy az \exp_a függvény minden $x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\exp_a}$ pontban deriválható, és

$$\exp'_a(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \exp(x \ln a) \cdot \ln a = a^x \ln a. \blacksquare$$

12. Logaritmusfüggvények. Ha $a > 0$ valós szám és $a \neq 1$, akkor $\forall x \in (0, +\infty)$ ($= \mathcal{D}_{\log_a}$) pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\log'_a x = (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (x \in (0, +\infty))}.$$

Bizonyítás. Emlékeztetünk arra, hogy $a \in (0, +\infty) \setminus \{1\}$ esetén az a alapú logaritmusfüggvényt így értelmeztük:

$$\log_a := (\exp_a)^{-1}.$$

Az \exp_a függvényre az inverz függvény deriválására vonatkozó téTEL valamennyi feltétele teljesül. Ezért minden $x \in (0, +\infty)$ ($= \mathcal{D}_{\log_a}$) pontban $\log_a \in D\{x\}$, és

$$\log'_a x = (\log_a x)' = \frac{1}{\exp'_a(\log_a x)} = \frac{1}{(\ln a) \cdot \exp_a(\log_a x)} = \frac{1}{x \ln a}. \blacksquare$$

13. Általánosított hatványfüggvények. Ha α tetszőleges valós szám, akkor a

$$h_\alpha : (0, +\infty) \ni x \mapsto x^\alpha$$

általánosított hatványfüggvény minden $x \in (0, +\infty)$ ($= \mathcal{D}_{h_\alpha}$) pontban deriválható, és

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \quad (x \in (0, +\infty)).$$

Bizonyítás. Rögzítsük az $\alpha \in \mathbb{R}$ számot. Írjuk fel az $x > 0$ alapot e -hatvánnyént: $x = e^{\ln x}$. Ekkor

$$x^\alpha = (e^{\ln x})^\alpha = e^{\alpha \ln x} \quad (x > 0),$$

majd alkalmazzuk az összetett függvény deriválására vonatkozó állításunkat. Azt kapjuk, hogy minden $x > 0$ esetén $h_\alpha \in D\{x\}$ és

$$h'_\alpha(x) = (x^\alpha)' = (e^{\alpha \ln x})' = e^{\alpha \ln x} \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = x^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha x^{\alpha-1}. \blacksquare$$

14. A $h(x) = f(x)^{g(x)}$ alakú függvények deriválásánál az $f(x)$ alapot ismét e -hatvánnyént írjuk fel: ha $f(x) > 0$, akkor

$$f(x) = e^{\ln f(x)}.$$

Ekkor

$$h(x) = f(x)^{g(x)} = \left(e^{\ln f(x)}\right)^{g(x)} = e^{g(x) \cdot \ln f(x)}.$$

Ebből az alakból már látható, hogy h egy összetett függvény, exp a külső és $g \cdot (\ln \circ f)$ a belső függvény.

Példa. Legyen $f(x) := x^x$ ($x > 0$). Ekkor

$$f(x) = x^x = (e^{\ln x})^x = e^{x \cdot \ln x} \quad (x > 0).$$

Ebből az alakból már látszik, hogy f összetett függvény: az exp a külső függvény és $x \cdot \ln x$ ($x > 0$) a belső függvény. Az összetett függvény deriválására vonatkozó téTEL összes feltétele teljesül, ezért az f függvény minden $x > 0$ pontban deriválható és

$$f'(x) = (x^x)' = (e^{x \cdot \ln x})' = e^{x \cdot \ln x} \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) = x^x \cdot (\ln x + 1). \blacksquare$$

15. Hiperbolikusz függvények

15a. A szinuszhiperbolikusz-függvény és a koszinuszhiperbolikusz-függvény

Először emlékeztetünk arra, hogy a szinuszhiperbolikusz-függvényt (jelölése sh) és a koszinuszhiperbolikusz-függvényt (jelölése ch) az egész \mathbb{R} -en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\text{sh } x := \text{sh}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\text{ch } x := \text{ch}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Jegyezzük meg jól, hogy ezek a függvények kifejezhetők az \exp függvénnnyel. Mivel minden $x \in \mathbb{R}$ pontban

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \dots,$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} - \dots,$$

ezért

$$(*) \quad \text{sh } x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{és} \quad \text{ch } x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\forall x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. $\forall x \in \mathbb{R} (= \mathcal{D}_{\text{sh}} = \mathcal{D}_{\text{ch}})$ pontban $\text{sh}, \text{ch} \in D\{x\}$, és

$$\boxed{\text{sh}'x = (\text{sh } x)' = \text{ch } x \quad (x \in \mathbb{R})} \quad \text{és} \quad \boxed{\text{ch}'x = (\text{ch } x)' = \text{sh } x \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Bizonyítás. A sh és a ch függvényre a hatványsor összegfüggvényének deriválására vonatkozó tétel feltételei teljesülnek, ezért $\forall x \in \mathbb{R}$ pontban $\text{sh}, \text{ch} \in D\{x\}$, és minden $x \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned} \text{sh}'x &= (\text{sh } x)' = \left(x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots \right)' = \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{x^2}{3!} + 5 \cdot \frac{x^4}{5!} + 7 \cdot \frac{x^6}{7!} + \dots = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots = \text{ch } x, \\ \text{ch}'x &= (\text{ch } x)' = \left(1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots \right)' = \\ &= 2 \cdot \frac{x}{2!} + 4 \cdot \frac{x^3}{4!} + 6 \cdot \frac{x^5}{6!} + 8 \cdot \frac{x^7}{8!} + \dots = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots = \text{sh } x. \blacksquare \end{aligned}$$

Megjegyzések.

1º A tétel állításait a (*) képletek felhasználásával is bizonyíthatjuk.

2º Korábban már megjegyeztük, hogy a trigonometrikus függvényekkel sok rokon vonást mutatnak a hiperbolikusz függvények. A hasonlóságot mutatják az előző félévben ismertetett állítások:

Az addíciós tételek: minden x, y valós számra

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y, \\ \text{sh}(x+y) &= \text{sh } x \cdot \text{ch } y + \text{ch } x \cdot \text{sh } y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y, \\ \text{ch}(x+y) &= \text{ch } x \cdot \text{ch } y + \text{sh } x \cdot \text{sh } y. \end{aligned}$$

A négyzetes összefüggések: minden x valós számra

$$\begin{aligned} \cos^2 x + \sin^2 x &= 1, \\ \text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x &= 1. \end{aligned}$$

Az analógiát tovább erősítik a deriváltakra vonatkozó állítások.

A jelzett hasonlóságok azt mutatják, hogy az exponenciális függvényeknek (vagyis a hatványozásnak) sok köze van a trigonometrikus függvényekhez. Ez elégé megdöbbentő, ha a szóban forgó függvények garfikonjaira gondolunk. Az exponenciális- és a trigonometrikus függvények közötti összefüggést azonban csak a komplex számokon keresztül érhetjük meg. Komplex értékű függvényeket azonban csak később fogunk tárgyalni. ■

15b. A tangenshiperbolikusz-függvény és a kotangenshiperbolikusz-függvény

A tg és a ctg függvények mintájára értelmezzük a tangenshiperbolikusz-függvényt (jelölése th) és a kotangenshiperbolikusz-függvényt (jelölése cth):

$$\text{th} := \frac{\text{sh}}{\text{ch}}, \quad \text{azaz} \quad \text{th } x := \text{th}(x) := \frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \quad \left(x \in \mathcal{D}_{\text{th}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \text{ch } x \neq 0\} \right),$$

$$\operatorname{cth} := \frac{\operatorname{ch}}{\operatorname{sh}}, \quad \text{azaz} \quad \operatorname{cth} x := \operatorname{cth}(x) := \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \quad \left(x \in \mathcal{D}_{\operatorname{cth}} = \{x \in \mathbb{R} \mid \operatorname{sh} x \neq 0\} \right).$$

A ch függvény definíciójából következik, hogy $\operatorname{ch} x \geq 1$ minden x valós számra, ezért

$$\mathcal{D}_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}.$$

Mivel

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \iff x = 0, \quad \text{ezért} \quad \mathcal{D}_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Az sh, a ch és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathbb{R} (= \mathcal{D}_{\operatorname{th}})$ pontban $\operatorname{th}' \in D\{x\}$, és

$$\operatorname{th}' x = (\operatorname{th} x)' = \left(\frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \right)' = \frac{\operatorname{sh}' x \cdot \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch}' x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x}{\operatorname{ch}^2 x} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{th}'(x) = (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_{\operatorname{th}})}.$$

Az sh, a ch és a hányadosfüggvény deriválására vonatkozó állításokból következik, hogy minden $x \in \mathcal{D}_{\operatorname{cth}}$ pontban $\operatorname{cth}' \in D\{x\}$, és

$$\operatorname{cth}' x = (\operatorname{cth} x)' = \left(\frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \right)' = \frac{\operatorname{ch}' x \cdot \operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh}' x}{\operatorname{sh}^2 x} = \frac{\operatorname{sh}^2 x - \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

azaz

$$\boxed{\operatorname{cth}' x = (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathcal{D}_{\operatorname{ctg}})}. \blacksquare$$

Kiegészítés: Hatványsor összegfüggvényének deriválása

Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($n = 0, 1, \dots$). Tegyük fel, hogy a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x-a)^n \quad (x \in K_R(a)).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x-a)^{n-1} \quad (\forall x \in K_R(a)).$$

Bizonyítás.

1. lépés. Először azt mutatjuk meg, hogy minden $x_0 \in K_R(a)$ pontban az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n(x_0-a)^{n-1}$$

számsor abszolút konvergens, tehát konvergens is.

Ezt az állítást a következőképpen látjuk be. Tekintsük a konvergenciaintervallum egy $x_0 \in K_R(a)$ pontját és válasszuk meg a ϱ számot úgy, hogy még az is a konvergenciaintervallum belséjébe tartozék és az

$$|x_0 - a| < |\varrho - a| < R$$

egyenlőtlenség is teljesüljön. Ekkor a $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(\varrho-a)^n$ számsor konvergens, tehát a tagjai nullához tartanak, ezért korlátosak is, azaz

$$\exists K > 0 : |\alpha_n| \cdot |\varrho - a|^n < K \quad (n = 0, 1, 2 \dots).$$

A tagonkénti deriválással kapott sor n -edik tagja x_0 -ban

$$n\alpha_n(x_0-a)^{n-1} = n\alpha_n(\varrho-a)^n \cdot \frac{1}{\varrho-a} \left(\frac{x_0-a}{\varrho-a} \right)^{n-1},$$

ezért

$$|n\alpha_n(x_0-a)^{n-1}| \leq nK \cdot \frac{1}{|\varrho-a|} \left| \frac{x_0-a}{\varrho-a} \right|^{n-1} = \frac{K}{|\varrho-a|} \cdot nq^{n-1},$$

ahol $0 \leq q := \left| \frac{x_0-a}{\varrho-a} \right| < 1$.

A $\sum_{n=0}^{\infty} |n\alpha_n(x_0-a)^{n-1}|$ sornak tehát majoránsa a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{K}{|\varrho-a|} nq^{n-1}$ számsor. Ez $q = 0$ mellett nyilván konvergens, $q > 0$ esetén pedig pozitív tagú számsor és szomszédos tagainak hárnyadosa

$$\frac{(n+1)q^n}{nq^{n-1}} = \frac{n+1}{n} \cdot q \rightarrow q < 1, \quad \text{ha } n \rightarrow +\infty.$$

A számsorokra vonatkozó hárnyadoskritérium szerint tehát a talált majoráns sor konvergens, így az eredeti $\sum_{n=0}^{\infty} n\alpha_n(x_0-a)^{n-1}$ sor abszolút konvergens. Ezzel az állítást igazoltuk.

2. lépés. Jelöljük F -vel az eredeti sor tagonkénti deriválásával kapott hatványsor összegfüggvényét:

$$F(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x-a)^{n-1} \quad (x \in K_R(a)).$$

Megmutatjuk, hogy minden $x_0 \in K_R(a)$ pontban

$$(*) \quad \lim_{t \rightarrow x_0} \left(\frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0) \right) = 0.$$

Ebből már következik, hogy az f függvény differenciálható az x_0 pontban és a deriváltja $F(x_0)$ -lal egyenlő, azaz

$$f'(x_0) = \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x_0 - a)^{n-1}.$$

A (*) egyenlőség igazolásához rögzítsük az $x_0 \in K_R(a)$ pontot és vegyük egy olyan $0 < R_0 < R$ számot, amelyre $x_0 \in K_{R_0}(a)$. Legyen $\xi := t - a$ és $\xi_0 := x_0 - a$. Ekkor minden $t \in K_{R_0}(a)$ esetén

$$\begin{aligned} f(t) - f(x_0) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(t - a)^n - \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(x_0 - a)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(\xi^n - \xi_0^n) = \\ &= (\xi - \xi_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \dots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}) = \\ &= (t - x_0) \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \dots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}). \end{aligned}$$

Ezért

$$\begin{aligned} \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n(\xi^{n-1} + \xi^{n-2}\xi_0 + \dots + \xi\xi_0^{n-2} + \xi_0^{n-1}) - \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n\xi_0^{n-1} = \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha_n[(\xi^{n-1} - \xi_0^{n-1}) + \xi_0(\xi^{n-2} - \xi_0^{n-2}) + \dots + \xi_0^{n-2}(\xi - \xi_0)]. \end{aligned}$$

Mivel

$$\xi^l - \xi_0^l = (\xi - \xi_0)(\xi^{l-1} + \dots + \xi_0^{l-1}) \quad (l \in \mathbb{N}),$$

$|\xi| = |t - a| < R_0$ és $|\xi_0| = |x_0 - a| < R_0$, ezért

$$|\xi^l - \xi_0^l| \leq |\xi - \xi_0| \cdot l \cdot R_0^{l-1}.$$

A fentiek alapján tehát

$$\begin{aligned} &\left| \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0) \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \cdot |\xi - \xi_0| [(n-1)R_0^{n-2} + (n-2)R_0^{n-2} + \dots + 1 \cdot R_0^{n-2}] = \\ &= |t - x_0| \sum_{n=1}^{+\infty} |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} R_0^{n-2}. \end{aligned} \tag{1}$$

Alkalmazzuk most az 1. lépésben kapott eredményt a $\sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha_n(x-a)^{n-1}$ hatványsorra. A tagonkénti deriválással nyert

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha_n(x-a)^{n-2}$$

sor tehát konvergens, sőt abszolút konvergens minden $x \in K_R(a)$ pontban. Ebből következik, hogy az (1)-ben szereplő $\sum |\alpha_n| \frac{n(n-1)}{2} R_0^{n-2}$ sor konvergens. Jelöljük M -mel az összegét. Így kapjuk az

$$\left| \frac{f(t) - f(x_0)}{t - x_0} - F(x_0) \right| \leq M|t - x_0|$$

becslést, amiből $t \rightarrow x_0$ határátmenetet véve adódik (1), és ez a téTEL bizonyítását jelenti. ■

6. előadás

2016. október 17.

Többször deriválható függvények, magasabb rendű deriváltak

Ha valamely valós-valós függvénynek létezik a deriváltfüggvénye, akkor természetes módon felvethetjük an-

nak újból deriválhatóságát, és így eljuthatunk a *többször deriválható függvények* és a *magasabb rendű deriváltak* fogalmához. A rekurzió módszerét alkalmazzuk. Először a kétszer deriválhatóság fogalmát definiáljuk.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$. Azt mondjuk, hogy f **kétszer deriválható az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban** (jelölése: $f \in D^2\{a\}$), ha

- f függvény deriválható az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pont egy környezetében, azaz $\exists r > 0 : f \in D(K_r(a))$, és
- az f' deriváltfüggvény deriválható a -ban, azaz $f' \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f''(a) := (f')'(a)$$

az f függvény a -beli második deriváltja.

Ha $H := \{x \in \text{int } \mathcal{D}_f \mid f \in D^2\{x\}\} \neq \emptyset$, akkor

$$H \ni x \mapsto f''(x)$$

az f függvény **második deriváltfüggvénye**, amit röviden az f'' szimbólummal jelölünk.

Jelölések. A deriváltakra és a deriváltfüggvényekre a következő jelöléseket is fogjuk használni:

$$\begin{aligned} f^{(1)}(a) &:= f'(a) \quad \text{és} \quad f^{(1)} := f', \\ f^{(2)}(a) &:= f''(a) \quad \text{és} \quad f^{(2)} := f''. \end{aligned}$$

Megállapodunk abban is, hogy

$$f^{(0)}(a) := f(a) \quad \text{és} \quad f^{(0)} := f. \blacksquare$$

Indukcióval értelmezzük az n -szer deriválhatóságot és az n -edik deriváltat. Tegyük fel, hogy valamely $n \in \mathbb{N}$ esetében már értelmeztük azt, hogy valamely $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény mikor deriválható $(n-1)$ -szer egy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban (jelölése: $f \in D^{n-1}\{a\}$), továbbá azt is, hogy mikor létezik és mi az $(n-1)$ -edik deriváltfüggvénye. Ha ez utóbbi létezik, akkor jelöljük azt az $f^{(n-1)}$ szimbólummal.

Definíció. Legyen $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$, és tegyük fel, hogy valamely $n = 2, 3, \dots$ esetén létezik az $f^{(n-1)}$ -gyel jelölt $(n-1)$ -edik deriváltfüggvény. Azt mondjuk, hogy f **n -szer deriválható az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban** (jelölése: $f \in D^n\{a\}$), ha

- $\exists r > 0 : f \in D^{n-1}(K_r(a))$, és
- az $f^{(n-1)}$ deriváltfüggvény deriválható a -ban, azaz $f^{(n-1)} \in D\{a\}$.

Legyen ekkor

$$f^{(n)}(a) := (f^{(n-1)})'(a)$$

az f függvény a -beli n -edik deriváltja.

Ha $H := \{x \in \text{int } \mathcal{D}_f \mid f \in D^n\{x\}\} \neq \emptyset$, akkor $H \ni x \mapsto f^{(n)}(x)$ az f függvény n -edik deriváltfüggvénye, amit röviden az $f^{(n)}$ szimbólummal jelölünk.

Ha egy f függvényre valamilyen $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban minden $n \in \mathbb{N}$ mellett teljesül, hogy $f \in D^n\{a\}$, akkor azt mondjuk, hogy az f függvény **a -ban végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty\{a\}$ szimbólumot használjuk. Ha ez minden $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban igaz, akkor az f függvény **végtelen sokszor** (vagy **akárhányszor**) deriválható, amit röviden így jelölünk: $f \in D^\infty$.

A deriválási szabályok némelyike magasabb rendű deriváltakra is átvihető.

Tétel. Ha valamelyen $n \in \mathbb{N}$ esetén $f, g \in D^n\{a\}$, akkor

$$1^\circ f + g \in D^n\{a\} \quad \text{és} \quad (f + g)^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) + g^{(n)}(a),$$

$$2^\circ f \cdot g \in D^n\{a\} \quad \text{és} \quad (f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a)g^{(n-k)}(a).$$

(Ez a **Leibniz-szabály**.)

Bizonyítás. Mindkét állítás teljes indukcióval igazolható. 1° bizonyítása szinte triviális, 2° belátása némi számolatot igényel. ■

A lokális szélsőérték és a derivált kapcsolata

Megjegyzés. Megemlíttük már azt, hogy a differenciálszámítás jól használható általános módszert ad többek között függvények tulajdonságainak a leírásához.

Hamarosan látni fogjuk, hogy a derivált minden hatékony segédeszköz egy függvény tulajdonságainak vizsgálatára. Ez *lokálisan* és *globálisan* is igaz. Az $f'(a)$ derivált létezése és értéke a függvény a -beli (lokális) viselkedésére jellemző: $f'(a)$ értékéből az f függvény a pont körül viselkedésére vonhatunk le következtetéseket.

Ha viszont f egy intervallum minden pontjában deriválható, akkor az $f'(x)$ értékekből az f függvény globális viselkedésére következtethetünk. ■

Korábban már értelmeztük az **abszolút szélsőértékek** fogalmát. Célszerű bevezetni ezek **lokális** változatait.

Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontban **lokális maximuma van**, ha

$$\exists K(a) \subset \mathcal{D}_f : \forall x \in K(a) \subset \mathcal{D}_f \text{ esetén } f(x) \leq f(a).$$

Ekkor az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pontot **lokális maximumhelyének** nevezzük, az $f(a)$ érték pedig a függvény **lokális maximuma**.

Hasonlóan értelmezzük a **lokális minimum** fogalmát. A lokális maximumot, illetve minimumot közösen **lokális szélsőértéknek**, a lokális maximumhelyet, illetve lokális minimumhelyet **lokális szélsőértékhelynek** nevezzük.

Megjegyzés. Az abszolút szélsőértékhely és a lokális szélsőértékhely fogalmai között a következő kapcsolat áll fenn. Egy abszolút szélsőértékhely nem szükségképpen lokális szélsőértékhely, mert a lokális szélsőértékhelynek feltétele, hogy a függvény értelmezve legyen a pont egy környezetében. Így például az x ($x \in [0, 1]$) függvénynek a 0 pontban abszolút minimuma van, de ez nem lokális minimumhely. Azonban, ha az $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in A$ pontban abszolút szélsőértéke van és A tartalmazza a egy környezetét, akkor a lokális szélsőértékhely.

Egy lokális szélsőértékhely nem szükségképpen abszolút szélsőértékhely, hiszen attól, hogy az f függvénynek az a pont egy környezetében nincs $f(a)$ -nál nagyobb értéke, a környezeten kívül f felvehet $f(a)$ -nál nagyobb értéket. ■

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel.)

Tegyük fel, hogy $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $\left. \begin{array}{l} \bullet f \in D\{a\} \text{ valamelyen } a \in \text{int } \mathcal{D}_f \text{-ben} \\ \bullet f\text{-nek } a\text{-ban lokális szélsőértéke van.} \end{array} \right\} \implies f'(a) = 0.$

Bizonyítás. Tegyük fel, hogy az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pont **lokális maximumhelye** az $f \in D\{a\}$ függvénynek. Ekkor

$$\exists r > 0 : \forall x \in (a - r, a + r) \text{ esetén } f(x) \leq f(a).$$

Tekintsük az f függvény a -hoz tartozó különbséghányados-függvényét:

$$(*) \quad \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}).$$

Ha $a < x < a + r$, azaz $x - a > 0$, akkor $f(x) \leq f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \leq 0$) miatt a fenti tört nem pozitív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq 0.$$

Mivel $f \in D\{a\}$, ezért

$$\lim_{x \rightarrow a+0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_+(a) = f'(a) \leq 0.$$

Ha $a - r < x < a$, azaz $x - a < 0$, akkor $f(x) \leq f(a)$ (vagyis $f(x) - f(a) \leq 0$) miatt a (*) alatti tört nem negatív:

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \geq 0,$$

ezért ismét az $f \in D\{a\}$ feltétel alapján

$$\lim_{x \rightarrow a-0} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_-(a) = f'(a) \geq 0.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $f'(a) \leq 0$ és $f'(a) \geq 0$, ami csak úgy lehetséges, ha $f'(a) = 0$.

A bizonyítás hasonló akkor is, ha a lokális minimumhelye az f függvénynek. ■

Megjegyzések.

1º Deriválható f függvénynek csak olyan pontban lehet lokális szélsőértéke, ahol a függvény deriváltja nulla. A lokális szélsőértékek meghatározásához tehát az $f'(x) = 0$ egyenletet kell megoldani.

2º Abból, hogy $f'(a) = 0$, nem következik, hogy az f függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ pont lokális szélsőértékelye. Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvényre $f'(x) = 3x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) miatt $f'(0) = 0$, de a függvénynek nincs 0-ban lokális szélsőértéke (hiszen a függvény az egész számegyenesen szigorúan monoton növekedő). Ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy ha f differenciálható a -ban, akkor az $f'(a) = 0$ csak **sziűséges**, de **nem elégsges** feltétele annak, hogy az f függvénynek a -ban lokális szélsőértéke legyen. ■

A fenti példa motiválja a következő fogalom bevezetését.

Definíció. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek az $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ stacionárius pontja, ha

$$f \in D\{a\} \quad \text{és} \quad f'(a) = 0.$$

A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltétel azt állítja, hogy deriválható függvénynek lokális szélsőértékelyei a függvény stacionárius pontjaiban lehetnek. A fenti példa azonban azt mutatja, hogy lehetnek olyan stacionárius pontok, amelyek nem lokális szélsőértékelyek. Fontos feladat tehát annak eldöntése, hogy egy stacionárius pont vajon lokális szélsőértékely-e. Erre hamarosan jól használható eredményeket fogunk mutatni.

A differenciálszámítás középértéktételei

Tétel. (A Rolle-féle középértéktétel.)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Tegyük fel,

hogy $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ és <ul style="list-style-type: none"> • $f \in C[a, b]$, • $f \in D(a, b)$, • $f(a) = f(b)$. 	$\left. \right\} \implies \begin{array}{l} \exists \xi \in (a, b), \\ f'(\xi) = 0. \end{array}$
---	---

Bizonyítás. Mivel $f \in C[a, b]$, ezért Weierstrass tételeből következik, hogy

$$\exists \alpha, \beta \in [a, b] : f(\alpha) = \min_{[a, b]} f =: m \quad \text{és} \quad f(\beta) = \max_{[a, b]} f =: M.$$

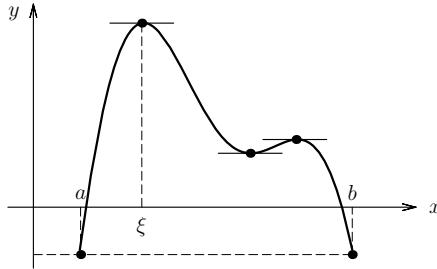
1. eset: $m = M$. Ekkor f állandó (a, b) -n, így tetszőleges $\xi \in (a, b)$ pontban $f'(\xi) = 0$.

2. eset: $m \neq M$, tehát $m < M$.

Ha $m \neq f(a) = f(b)$, akkor az α abszolút minimumhely az (a, b) intervallumban van. Világos, hogy α egyúttal lokális minimumhelye is az f függvénynek. A feltételeink alapján $f \in D\{\alpha\}$, ezért a lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű szükséges feltételből következik, hogy $f'(\alpha) = 0$. A tételet állítása tehát a $\xi := \alpha \in (a, b)$ választással teljesül.

Ha $m = f(a) = f(b) < M$, akkor a β abszolút maximumhely van az (a, b) intervallumban, és ez egyúttal lokális maximumhely is, tehát $f'(\beta) = 0$. Ebben az esetben tételet állítása tehát a $\xi := \beta \in (a, b)$ választással teljesül. ■

Megjegyzés. A Rolle-féle középpértéktétel szemléletes jelentése a következő: Ha f folytonos $[a, b]$ -n és differenciálható (a, b) -n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben az érintő párhuzamos az x -tengellyel:



Tétel. (A Lagrange-féle középpértéktétel.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Legyen } a, b \in \mathbb{R}, \quad a < b. \quad \text{Tegyük fel,} \\ \text{hogy } f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{és} \\ \bullet \quad f \in C[a, b], \\ \bullet \quad f \in D(a, b). \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a, b), \quad \text{hogy} \quad f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Bizonyítás. Az $(a, f(a))$ és a $(b, f(b))$ pontokon átmenő szelő egyenesének az egyenlete:

$$y = h_{a,b}(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Megmutatjuk, hogy az

$$F(x) := f(x) - h_{a,b}(x) \quad (x \in [a, b])$$

függvény kielégíti a Rolle-féle középpértéktétel feltételeit.

Valóban, f és $h_{a,b}$ mindenketten folytonosak $[a, b]$ -n és deriválhatók (a, b) -n, ezért a különbségük, F szintén rendelkezik ezekkel a tulajdonságokkal. Továbbá

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - h_{a,b}(a) = f(a) - f(a) = 0, \\ F(b) &= f(b) - h_{a,b}(b) = f(b) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}(b - a) + f(a) \right) = 0, \end{aligned}$$

tehát $F(a) = F(b)$ is teljesül.

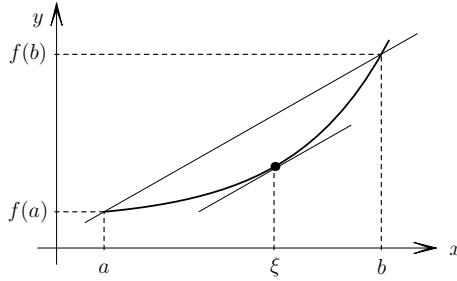
A Rolle-tétel alapján tehát van olyan $\xi \in (a, b)$ pont, amelyre

$$F'(\xi) = f'(\xi) - h'_{a,b}(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

következésképpen

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}. \blacksquare$$

Megjegyzés. A Lagrange-féle középértéktétel szemléletes jelentése a következő: ha az f függvény folytonos $[a, b]$ -n és deriválható (a, b) -n, akkor f grafikonjának van olyan pontja, amelyben húzott érintő párhuzamos az $(a, f(a)), (b, f(b))$ pontokon áthaladó szelővel:



Tétel. (A Cauchy-féle középértéktétel.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Legyen } a, b \in \mathbb{R}, a < b. \text{ Tegyük fel,} \\ \text{hogy } f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ és} \\ \bullet f, g \in C[a, b], \\ \bullet f, g \in D(a, b), \\ \bullet \forall x \in (a, b) \text{ esetén } g'(x) \neq 0. \end{array} \right\} \Rightarrow \exists \xi \in (a, b), \text{ hogy } \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Bizonyítás. A Rolle-tételből következik, hogy $g(a) \neq g(b)$. Valóban, $g(a) = g(b)$ -ből az következne, hogy g deriváltja nulla az (a, b) intervallum legalább egy pontjában, amit kizártunk.

Legyen

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} (g(x) - g(a)) \quad (x \in [a, b]).$$

Az F függvény folytonos $[a, b]$ -n, deriválható (a, b) -n és $F(a) = F(b) = 0$. Így a Rolle-tétel szerint létezik olyan $\xi \in (a, b)$, amelyre $F'(\xi) = 0$. Ekkor

$$0 = F'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(\xi).$$

Mivel a feltételeink szerint $g'(\xi) \neq 0$, ezért azt kapjuk, hogy

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}. \blacksquare$$

A Lagrange-féle középértéktétel egyszerű, de fontos következményei a következő állítások:

Tétel. (A deriváltak egyenlősége.)

1° Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in D(a, b)$. Ekkor

$$f' \equiv 0 \text{ } (a, b)\text{-n} \iff f \equiv \text{állandó } (a, b)\text{-n}.$$

2° Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f, g \in D(a, b)$. Ekkor

$$f' \equiv g' \text{ } (a, b)\text{-n} \iff \exists c \in \mathbb{R} : f(x) = g(x) + c \text{ } (\forall x \in (a, b)).$$

Bizonyítás.

1° \Leftarrow Ezt már tudjuk, ugyanis a konstansfüggvény deriváltja 0.

\Rightarrow Legyen $a < x_1 < x_2 < b$. Alkalmazzuk az f függvényre az $[x_1, x_2]$ intervallumon a Lagrange-féle középértéktételt. Ekkor van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Mivel $f'(\xi) = 0$, ezért $f(x_1) = f(x_2)$, következésképpen f állandó.

2° Az $F := f - g$ függvényre alkalmazzuk az 1° állítást. \blacksquare

A monotonitás és a derivált kapcsolata

Az alkalmazások szempontjából hasznosak az alábbi állítások.

Tétel. (Elégséges feltétel a monotonitásra.)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$ és $f' \in D(a, b)$. Ekkor,

- 1º (a) ha $f' \geq 0$ (a, b) -n $\implies f$ monoton növekedő $[a, b]$ -n;
- (b) ha $f' \leq 0$ (a, b) -n $\implies f$ monoton csökkenő $[a, b]$ -n;
- 2º (a) ha $f' > 0$ (a, b) -n $\implies f$ szigorúan monoton növekedő $[a, b]$ -n;
- (b) ha $f' < 0$ (a, b) -n $\implies f$ szigorúan monoton csökkenő $[a, b]$ -n.

Bizonyítás. Legyen $a < x_1 < x_2 < b$. Ekkor $f \in C[x_1, x_2]$ és $f' \in D(x_1, x_2)$, ezért a Lagrange-féle középérték-tétel szerint van olyan $\xi \in (x_1, x_2)$, amelyre

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1).$$

Ezt felhasználva mindegyik állítás egyszerűen bizonyítható. ■

Megjegyzések.

1º A fenti tétel szerint a *derivált előjeléből* következtethetünk a *monotonitásra*.

2º A tételben **lényeges** feltétel, hogy **intervallumon értelmezett** a függvény. Például, ha

$$f(x) := \frac{1}{x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}), \quad \text{akkor } f'(x) = -\frac{1}{x^2} < 0 \quad (\forall x \in \mathcal{D}_f),$$

de az f függvény nem szigorúan csökkenő a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon, ami *nem intervallum*. ■

A monotonitásra vonatkozó állítások *megfordíthatók*.

Tétel. (Szükséges és elégséges feltétel a monotonitásra.)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$ és $f' \in D(a, b)$. Ekkor

- 1º f monoton növekedő $[a, b]$ -n $\iff f' \geq 0$ (a, b) -n,
- 2º f monoton csökkenő $[a, b]$ -n $\iff f' \leq 0$ (a, b) -n.

Bizonyítás.

1º $\boxed{\Leftarrow}$ Az előző tétel 1º (a) része.

$\boxed{\Rightarrow}$ Tegyük fel, hogy f monoton növekedő $[a, b]$ -n, azaz

$$\forall x, t \in [a, b], \quad x \leq t \quad \text{esetén} \quad f(x) \leq f(t).$$

Rögzítsünk egy tetszőleges $x \in (a, b)$ pontot, és tekintsük az f függvény x -hez tartozó különbségihányados-függvényét:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \quad (t \in [a, b] \setminus \{x\}).$$

Ha $[a, b] \ni t > x$, akkor $t - x > 0$, és $f(t) \geq f(x)$ (vagyis $f(t) - f(x) \geq 0$) miatt a fenti tört nem negatív:

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

Ha $[a, b] \ni t < x$, akkor $t - x < 0$, és $f(t) \leq f(x)$ (vagyis $f(t) - f(x) \leq 0$) miatt a szóban forgó tört szintén nem negatív.

Mivel $f \in D\{x\}$, ezért

$$f'(x) = \lim_{t \rightarrow x} \frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq 0.$$

2º Hasonló a bizonyítás monoton csökkenő függvény esetére. ■

A szigorú monotonitásra vonatkozó elégséges feltételek nem fordíthatók meg. Például az

$$f(x) := x^3 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvény szigorúan monoton növekedő az egész \mathbb{R} -en, de a deriváltja 0 értéket is felvesz: $f'(0) = 0$.

Tétel. (Szükséges és elégséges feltétel a szigorú monotonitásra.)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy $f \in C[a, b]$ és $f \in D(a, b)$. Ekkor

- 1° f szigorúan monoton növekedő $[a, b]$ -n $\iff f' \geq 0$ (a, b) -n, és $[a, b]$ -nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla;
- 2° f szigorúan monoton csökkenő $[a, b]$ -n $\iff f' \leq 0$ (a, b) -n, és $[a, b]$ -nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f' azonosan nulla.

Bizonyítás. Egyszerűen belátható, hogy egy f függvény pontosan akkor szigorúan monoton $[a, b]$ -n, ha monoton, és $[a, b]$ -nek nincs olyan részintervalluma, amelyen f állandó. Így az állítás egyszerűen következik abból, hogy $f' \equiv 0$ $(c, d) \subset [a, b]$ -n $\iff f \equiv$ állandó (c, d) -n. ■

A lokális szélsőértékre vonatkozó elégséges feltételek

Az eddigiek alapján könnyen kaphatunk elégséges feltételeket arra, hogy egy függvénynek valamilyen pontban lokális szélsőértéke legyen.

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó elsőrendű elégséges feltétel.)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

- $f \in D(a, b)$,
- egy $c \in (a, b)$ pontban $f'(c) = 0$ és
- az f' deriváltfüggvény előjelet vált c -ben.

Ekkor,

1° ha az f' függvény negatívból pozitívba megy át, akkor a $c \in (a, b)$ pont az f függvénynek lokális minimumhelye;

2° ha az f' függvény pozitívból negatívba megy át, akkor a $c \in (a, b)$ pont az f függvénynek lokális maximumhelye.

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Megjegyzés. Az előjelváltást formálisan így definiáljuk: Legyen $h \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $a \in \text{int } \mathcal{D}_h$. Azt mondjuk, hogy a h függvény az a pontban negatívból pozitívba megy át (röviden: $(-, +)$ előjelváltása van), ha $h(a)=0$ és $\exists \delta > 0$ úgy, hogy

$$h(x) < 0, \text{ ha } x \in (a - \delta, a) \quad \text{és} \quad h(x) > 0, \text{ ha } x \in (a, a + \delta).$$

A $(+, -)$ előjelváltást hasonló módon értelmezzük. ■

Tétel. (A lokális szélsőértékre vonatkozó másodrendű elégséges feltétel.)

Legyen $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ és $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$. Tegyük fel, hogy

- f kétszer deriválható egy $c \in (a, b)$ pontban, azaz $f \in D^2\{c\}$,
- $f'(c) = 0$,
- $f''(c) \neq 0$.

Ekkor c lokális szélsőértékelye az f függvénynek;

1° ha $f''(c) > 0$, akkor f -nek c -ben lokális minimuma van,

2° ha $f''(c) < 0$, akkor f -nek c -ben lokális maximuma van.

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Megjegyzés. Ha $f'(c) = 0$ és $f''(c) = 0$ akkor, sem arra nem következhetünk, hogy f -nek van, sem arra, hogy f -nek nincs lokális szélsőértéke c -ben. A különböző lehetőségeket mutatják például az

$$f(x) := x^3, \quad f(x) := x^4 \quad \text{és az} \quad f(x) := -x^4 \quad (x \in \mathbb{R})$$

függvények a $c = 0$ helyen. Ebben az esetben további vizsgálatok kellenek. ■

7. előadás

2016. október 24.

Konvex és konkáv függvények

Megjegyzés. Valós-valós függvények konvexitását és konkávitását **intervallumon** fogjuk értelmezni. **Intervallumon** mindenkor nem üres és nem egyetlen pontból álló \mathbb{R} -beli halmazt értünk. A továbbiakban gyakran használt

„ $I \subset \mathbb{R}$ (tetszőleges) intervallum”

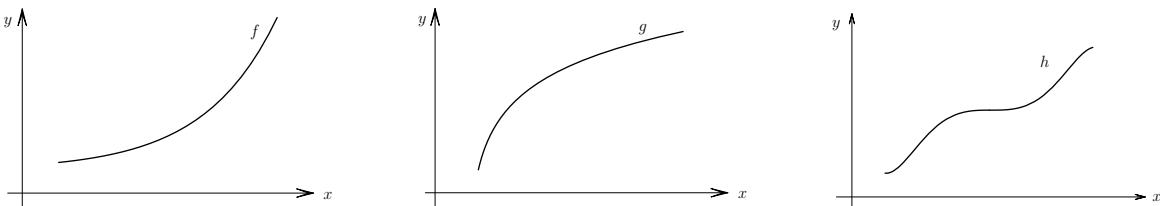
kijelentésen (hacsak más nem mondunk) azt értjük, hogy I korlátos vagy nem korlátos, nyílt, zárt, félig nyílt vagy félig zárt intervallum. A következő halmazok mindegyike intervallum:

$$(-1, 1), [-1, 1], [-1, 0), [0, +\infty), (-\infty, 0), (-\infty, +\infty). \blacksquare$$

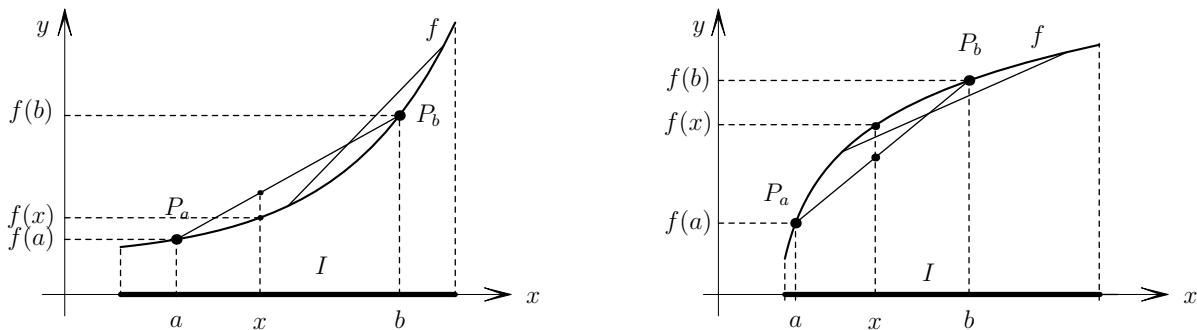
• A konvexitás és a konkávitás szemléletes jelentése

Célunk továbbra is függvények általános tulajdonságainak a leírása, jellemzése. Azt már láttuk, hogy a differenciáliszámítás milyen hatékony eszközöket kínál a monotonitás és a szélsőértékek vizsgálatához.

Most tovább folytatjuk függvények „alaki” tulajdonságainak a tanulmányozását. Számos konkrét függvény grafikonját már jól ismerjük. Gondolunk most a *monoton növekedésre*. Világos, hogy egy függvény többféle képpen is lehet monoton növekedő:



A jobb oldali grafikonnal ellentétben a másik kettő bizonyos jellegzetes „szabályosságot” mutat. Ezeket a tulajdonságokat célszerű definiálni. Az f függvényt (bal oldali ábra) **konvexnek**, g -t pedig (középső ábra) **konkávnak** fogjuk nevezni. A definíció megfogalmazásához használjuk fel a derivált definíciójánál már bevált ötletet: húzzunk be húrokat:



Szemléletesen világos, hogy az I intervallum tetszőleges $a < b$ pontjai esetén az f (g) függvény grafikonjának az (a, b) intervallumhoz tartozó része a P_a és P_b pontokat összekötő húr alatt (felett) van. A szóban forgó húr egyenesének az egyenlete:

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a), \quad \text{vagy} \quad y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b).$$

A fentiek alapján elégé természetesek a következő definíciók. ■

• A konvexitás és a konkávitás fogalma

Definíció. Az $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **konvex az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon**, ha

$$\forall a, b \in I, a < b \text{ esetén}$$

$$(*) \quad f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad (\forall x \in (a, b)).$$

Ha $(*)$ -ban \leq helyett $<$ áll, akkor f -et **I -n szigorúan konvexnek**, ha \geq , illetve $>$ áll, akkor f -et **I -n konkávnak**, illetve **szigorúan konkávnak** nevezzük.

Megjegyzések.

1° Ha az f függvény elsőfokú \mathbb{R} -en, azaz $f(x) = cx + d$ ($x \in \mathbb{R}$) valamely c és d állandóval, akkor $(*)$ -ban egyenlőség áll minden x -re. Tehát egy elsőfokú függvény egyszerre konvex és konkáv is.

2° Az abs függvény konvex, de nem szigorúan konvex \mathbb{R} -en. ■

A konvexitást jellemző egyenlőtlenséget érdemes más formában is megadni.

Tétel. Az $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon értelmezett $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ függvény akkor és csak akkor konvex I -n, ha

$$\forall a, b \in I, a < b \text{ és } \forall \lambda \in (0, 1) \text{ esetén}$$

$$f(\lambda a + (1 - \lambda)b) \leq \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b).$$

Megjegyzés. Szigorúan konvex, konkáv, illetve szigorúan konkáv függvényekre hasonló állítások érvényesek. ■

Bizonyítás. Legyen $a, b \in I$, $a < b$ és $0 < \lambda < 1$. Ekkor

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b \in (a, b),$$

mert

$$a = \lambda a + (1 - \lambda)a < \lambda a + (1 - \lambda)b = x < \lambda b + (1 - \lambda)b = b.$$

Másrészt az (a, b) intervallum minden eleme előáll $\lambda a + (1 - \lambda)b$ alakban, ahol $0 < \lambda < 1$. Ha ugyanis $x \in (a, b)$, akkor a

$$\lambda := \frac{b - x}{b - a}$$

választás megfelelő, mert

$$\frac{b - x}{b - a} \cdot a + \left(1 - \frac{b - x}{b - a}\right) \cdot b = x.$$

A definíció szerint az f függvény konvex az I intervallumon, ha $\forall a, b \in I$, $a < b$ esetén

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad (\forall x \in (a, b)).$$

Ha $a < x < b$ és $x = \lambda a + (1 - \lambda)b$, akkor a fenti egyenlőtlenség azzal ekvivalens, hogy

$$\begin{aligned} f(\lambda a + (1 - \lambda)b) &\leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}([\lambda a + (1 - \lambda)b - a]) + f(a) = \\ &= \frac{f(b) - f(a)}{b - a}[(1 - \lambda)(b - a)] + f(a) = \lambda f(a) + (1 - \lambda)f(b), \end{aligned}$$

és ez az állítás bizonyítását jelenti. ■

Korábban láttuk, hogy függvények monotonitása kapcsolatba hozható azok különböző hányszámos-függvényeivel. Hasonló a helyzet a konvexitás és a konkávitás esetében is. Emlékeztetünk arra, hogy ha $f \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és $c \in \text{int } \mathcal{D}_f$, akkor a

$$\Delta_c f(x) := \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (x \in \mathcal{D}_f \setminus \{c\})$$

függvényt nevezünk az f függvény c ponthoz tartozó **különböző hányszámos-függvényének**.

Tétel. Legyen $I \subset \mathbb{R}$ tetszőleges nyílt intervallum, és $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Ekkor

$$1^o f \text{ konvex [szigorúan konvex]} I\text{-n} \iff \forall c \in I \text{ esetén } \Delta_c f \nearrow [\uparrow].$$

$$2^o f \text{ konkáv [szigorúan konkáv] } I\text{-n} \iff \forall c \in I \text{ esetén } \Delta_c f \searrow [\downarrow].$$

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak a konvexitásra vonatkozó rész igazolását részletezzük.

\Rightarrow Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az I intervallumon, azaz

$$\forall a, b \in I, a < b \text{ esetén}$$

$$(*) \quad f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a) \quad (\forall x \in (a, b)).$$

Be kell látnunk, hogy tetszőleges $c \in I$ esetén a $\Delta_c f$ függvény monoton növekedő, vagyis hogy

$$(\#) \quad \forall x, t \in I \setminus \{c\}, x < t \text{ esetén } \Delta_c f(x) \leq \Delta_c f(t).$$

A c és az $x < t$ pontok helyzetét illetően három eset lehetséges:

$$1^o c < x < t, \quad 2^o x < c < t, \quad 3^o x < t < c.$$

1^o eset ($c < x < t$): Legyen (*)-ban $a := c$, $x := x$, $b := t$. Ekkor

$$f(x) \leq \frac{f(t) - f(c)}{t - c}(x - c) + f(c),$$

amiből egyszerű átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \quad \text{azaz } \Delta_c f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \frac{f(t) - f(c)}{t - c} = \Delta_c f(t),$$

vagyis ebben az esetben igaz a (#) egyenlőtlenség.

2^o eset ($x < c < t$): Ha (*)-ban $a := x$, $x := c$ és $b := t$, akkor

$$f(c) \leq \frac{f(t) - f(x)}{t - x}(c - x) + f(x),$$

amiből ekvivalens átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(c) - f(x)}{c - x} \leq \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \iff \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq \frac{f(t) - f(c)}{t - c}, \quad \text{azaz } \Delta_c f(x) \leq \Delta_c f(t),$$

ezért a (#) egyenlőtlenség ebben az esetben is teljesül.

3^o eset ($x < t < c$): (*) helyett most a vele nyilván ekvivalens

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) + f(b) \quad (\forall x \in (a, b))$$

egyenlőtlenségből indulunk ki. Ebből az $a := x$, az $x := t$ és az $b := c$ szereposztással azt kapjuk, hogy

$$f(t) \leq \frac{f(c) - f(x)}{c - x}(t - c) + f(c).$$

Vegyük figyelembe, hogy $t < c$, azaz $t - c < 0$, ezért

$$\frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq \frac{f(c) - f(x)}{c - x}.$$

Következésképpen

$$\Delta_c f(t) = \frac{f(t) - f(c)}{t - c} \geq \frac{f(c) - f(x)}{c - x} = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \Delta_c f(x) \quad (x < t),$$

és ez azt jelenti, hogy a (#) egyenlőtlenség ebben az esetben is teljesül.

Az állítás \Rightarrow részét tehát bebizonyítottuk.

\Leftarrow Tegyük fel, hogy $\forall c \in I$ -re $\Delta_c f \nearrow$. Be kell látnunk, hogy f konvex I -n, vagyis hogy

$$\begin{aligned} & \forall a, b \in I, a < b \text{ és } \forall x \in (a, b) \text{ esetén} \\ & f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \end{aligned}$$

Valóban, legyen $c := a$ és $(a <) x < b$. Mivel $\Delta_a f \nearrow$, ezért

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \Delta_a f(b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

amiből átrendezéssel az adódik, hogy

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a),$$

és ez éppen azt jelenti, hogy az f függvény konvex az I intervallumon. ■

• A konvexitás-konkávitás és a folytonosság, illetve a deriválhatóság kapcsolata

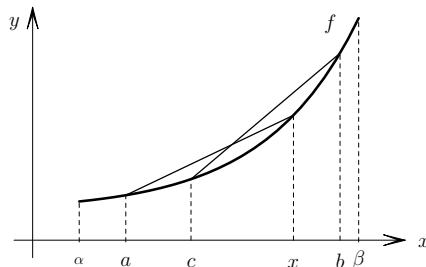
A következő tétel azt állítja, hogy a konvexitás a folytonosság és a deriválhatóság fogalma „között” van abban az értelemben, hogy a konvexitás fogalma a folytonosságnál „erősebb”, a deriválhatóságnál pedig „gyengébb” fogalom.

Tétel.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tegyük fel, hogy az } f \text{ függvény} \\ \text{konvex az} \\ (\alpha, \beta) \subset \mathbb{R} \text{ intervallumon.} \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} 1^{\circ} f \text{ az } (\alpha, \beta) \text{ intervallum minden } c \text{ pontjában folytonos.} \\ 2^{\circ} f \text{ az } (\alpha, \beta) \text{ intervallum minden } c \text{ pontjában} \\ \text{jobbról is és balról is deriválható.} \end{array}$$

Bizonyítás.

1° Rögzítsük a $c \in (\alpha, \beta)$ pontot és válasszuk meg a -t és b -t úgy, hogy $\alpha < a < c < b < \beta$. Vegyük egy tetszőleges $x \in (c, b)$ elemet, és tekintsük a következő ábrát:



Alkalmazzuk az f függvényre a konvexitás definícióját a $c < x < b$ pontokban:

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}(x - c) + f(c).$$

Írjuk most fel az $a < c < x$ pontokban is a megfelelő egyenlőtlenséget:

$$f(c) \leq \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(c - a) + f(a).$$

Ebből átrendezéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) + f(a) \leq f(x).$$

Így

$$\frac{f(c) - f(a)}{c - a}(x - a) + f(a) \leq f(x) \leq \frac{f(b) - f(c)}{b - c}(x - c) + f(c) \quad (x \in (c, b)).$$

A fenti egyenlőtlenség bal és jobb oldalán álló függvények folytonosak c -ben, és

$$\lim_{x \rightarrow c+0} \left(\frac{f(c) - f(a)}{c - a} (x - a) + f(a) \right) = \lim_{x \rightarrow c+0} \left(\frac{f(b) - f(c)}{b - c} (x - c) + f(c) \right) = f(c),$$

ezért a függvény határértékére vonatkozó közrefogási elv alapján

$$\lim_{x \rightarrow c+0} f(x) = f(c).$$

Ugyanígy adódik, hogy

$$\lim_{x \rightarrow c-0} f(x) = f(c),$$

és ez azt jelenti, hogy az f függvény folytonos a c pontban.

2º Legyen $c \in (\alpha, \beta)$. Egyik korábbi tételünk szerint az f függvény tetszőleges $c \in (\alpha, \beta)$ ponthoz tartozó különbséghányados-függvénye, vagyis a

$$\Delta_c f(x) = \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (x \in (\alpha, \beta) \setminus \{c\})$$

függvény monoton növekedő. Rögzítünk egy $d \in (\alpha, c)$ számot. Ekkor

$$\frac{f(d) - f(c)}{d - c} \leq \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \quad (x \in (c, \beta)),$$

tehát $\Delta_c f$ monoton növekedő és alulról korlátos a (c, β) intervallumon, ezért a monoton függvények szakadási helyeire vonatkozó állításból következik, hogy a

$$\lim_{x \rightarrow c+0} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

határérték létezik és véges, ami éppen azt jelenti, hogy f jobbról deriválható c -ben. Ugyanígy bizonyítható, hogy f balról is differenciálható c -ben. ■

Tétel. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha, \beta)$.

1º Az f függvény konvex [szigorúan konvex] (α, β) -n \iff az f' függvény \nearrow [\uparrow].

2º Az f függvény konkav [szigorúan konkav] (α, β) -n \iff az f' függvény \searrow [\downarrow].

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak a konvexitásra vonatkozó rész igazolását részletezzük.

\implies Tegyük fel, hogy az f függvény konvex az (α, β) intervallumon, azaz

$$\forall a, b \in (\alpha, \beta), a < b \text{ esetén}$$

$$f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a) \quad (\forall x \in (a, b)).$$

Ebből következik, hogy a $\Delta_a f$ függvény \nearrow az $(\alpha, \beta) \setminus \{a\}$ halmazon, ezért

$$\Delta_a f(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \forall x < b, x \neq a \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \Delta_a f(x)$, ezért

$$(*) \quad f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Hasonlóan, a $\Delta_b f$ függvény \nearrow az $(\alpha, \beta) \setminus \{b\}$ halmazon, ezért

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{f(a) - f(b)}{a - b} = \Delta_b f(a) \leq \Delta_b f(x) = \frac{f(x) - f(b)}{x - b} \quad \forall a < x, x \neq b \text{ esetén.}$$

Mivel $f'(b) = \lim_{x \rightarrow b} \Delta_b f(x)$, ezért

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Így (*) alapján azt kapjuk, hogy $f'(a) \leq f'(b)$. Mivel ez minden $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$ -re igaz, ezért f' monoton növekedő az (α, β) intervallumon.

\Leftarrow Tegyük fel, hogy f' monoton növekedő (α, β) -n. Legyen $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$ és $x \in (a, b)$ tetszőleges. f -re a Lagrange-féle középtéktételt először az $[a, x]$, majd az $[x, b]$ intervallumra alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\exists \xi_1 \in (a, x) : f'(\xi_1) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{és} \quad \exists \xi_2 \in (x, b) : f'(\xi_2) = \frac{f(b) - f(x)}{b - x}.$$

Mivel $\xi_1 < \xi_2$ és $f' \nearrow$, ezért $f'(\xi_1) \leq f'(\xi_2)$. Így

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &\leq \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \frac{[f(b) - f(a)] - [f(x) - f(a)]}{b - x} \iff \\ \iff [f(x) - f(a)] \cdot [(b - x) + (x - a)] &\leq [f(b) - f(a)] \cdot (x - a) \iff f(x) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a). \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenség minden $a, b \in (\alpha, \beta)$, $a < b$ és $x \in (a, b)$ esetén fennáll, ami éppen azt jelenti, hogy az f függvény konvex az (α, β) intervallumon. ■

Tétel. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D^2(\alpha, \beta)$. Ekkor

- 1º f konvex (α, β) -n $\iff f''(x) \geq 0$ ($\forall x \in (\alpha, \beta)$),
- 2º f konkáv (α, β) -n $\iff f''(x) \leq 0$ ($\forall x \in (\alpha, \beta)$),
- 3º ha $f''(x) > 0$ ($\forall x \in (\alpha, \beta)$) $\implies f$ szigorúan konvex (α, β) -n,
- 4º ha $f''(x) < 0$ ($\forall x \in (\alpha, \beta)$) $\implies f$ szigorúan konkáv (α, β) -n.

Bizonyítás. A téTEL állításai az előző téTEL, valamint a monotonitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó állítások egyszerű következményei. ■

Tétel.

$$\left. \begin{array}{l} \text{Legyen } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta. \text{ Tegyük fel, hogy } \\ \bullet f \in D(\alpha, \beta), \\ \bullet f \text{ konvex } (\alpha, \beta)\text{-n.} \end{array} \right\} \iff \begin{array}{l} \forall c \in (\alpha, \beta) \text{ pontban} \\ f(x) \geq f'(c)(x - c) + f(c) \quad (\forall x \in (\alpha, \beta)). \end{array}$$

Bizonyítás. Nélkül. ■

Megjegyzés. A téTEL geometriai tartalma a következő: Az f függvény akkor és csak akkor konvex (α, β) -n, ha minden $c \in (\alpha, \beta)$ esetén az f függvény grafikonja a c pontban húzott érintő felett halad. ■

• Inflexiós pont

Definíció. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$, és tegyük fel, hogy $f \in D(\alpha, \beta)$. Azt mondjuk, hogy a $c \in (\alpha, \beta)$ pont az f függvénynek **inflexiós pontja**, ha

$$\exists \delta > 0 : f \text{ konvex } (c - \delta, c] \text{-n és konkáv } [c, c + \delta] \text{-n vagy fordítva.}$$

Tétel. (Szükséges feltétel az inflexiós pontra.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Legyen } \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \alpha < \beta. \text{ Tegyük fel, hogy } \\ \bullet f \in D^2(\alpha, \beta) \text{ és} \\ \bullet c \in (\alpha, \beta) \text{ inflexiós pontja } f\text{-nek.} \end{array} \right\} \implies f''(c) = 0.$$

Magasabb rendű *elégséges feltételek* a lokális szélsőértékekre és az inflexióra.

Tétel. Legyen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha < \beta$. Tegyük fel, hogy $f : (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ és

- valamelyen $n \in \mathbb{N}$ számra egy $c \in (\alpha, \beta)$ pontban $f \in D^n\{c\}$, továbbá
- $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ és $f^{(n)}(c) \neq 0$.

Ekkor a következő állítások teljesülnek:

- 1° A $c \in (\alpha, \beta)$ pont az f függvénynek lokális szélsőértékhelye \iff ha n páros ($ha f^{(n)}(c) > 0$, illetve $f^{(n)}(c) < 0$ akkor az f függvénynek c -ben lokális minimuma, illetve lokális maximuma van).
- 2° A $c \in (\alpha, \beta)$ pont az f függvénynek inflexiós pontja \iff ha n páratlan.

Aszimptoták

Definíció. Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$. azt mondjuk, hogy az f függvénynek van aszimptotája $(+\infty)$ -ben, ha

$$\exists l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

elsőfokú függvény, amelyre

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - l(x)) = 0.$$

Ebben az esetben az $l(x) = Ax + B$ ($x \in \mathbb{R}$) egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$ -ben.

Megjegyzés. Hasonló módon értelmezzük a $(-\infty)$ -beli aszimptotát. ■

Tétel. Legyen $a \in \mathbb{R}$. Az $f : (a, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ függvénynek akkor és csak akkor van aszimptotája $(+\infty)$ -ben, ha léteznek és végesek a következő határértékek:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} =: A \in \mathbb{R} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - Ax) =: B \in \mathbb{R}.$$

Ekkor az

$$l(x) = Ax + B \quad (x \in \mathbb{R})$$

egyenes az f függvény aszimptotája $(+\infty)$ -ben.

Megjegyzés. Hasonló állítás érvényes a $(-\infty)$ -beli aszimptoták meghatározására. ■

Teljes függvényvizsgálat

Adott f valós-valós függvény teljes függvényvizsgálatán f analitikus és geometriai tulajdonságainak a megállapítását értjük. Ennek során a következőket kell meghatározni:

- 1° Kezdeti vizsgálatok. (Deriválhatóság, paritás, periodicitás megállapítása.)
- 2° Monotonitási intervallumok.
- 3° Lokális és abszolút szélsőértékek.
- 4° Konvexitási, konkávitási intervallumok.
- 5° A határértékek a $\mathcal{D}'_f \setminus \mathcal{D}_f$ pontokban.
- 6° Aszimptota $(\pm\infty)$ -ben.
- 7° A függvény grafikonjának felrajzolása.

8. előadás

2016. november 7.

ELEMI FÜGGVÉNYEK

Trigonometrikus függvények

• Előzetes megjegyzések a trigonometrikus függvényekről

A trigonometrikus függvényeket más szóval szögfüggvényeknek is nevezik, mert szögekhez, pontosabban szögek mérőszámaihoz rendelnek valós számokat.

A középiskolában már megismerkedtünk tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\sin x$, a $\cos x$, valamint alkalmas $x \in \mathbb{R}$ esetén a $\operatorname{tg} x$ és a $\operatorname{ctg} x$ számok szemléletes definícióival, amiket érdemes felidézni és megjegyezni. Ezekből kiindulva értelmeztük a trigonometrikus függvényeket, és megállapítottuk számos érdekes és fontos tulajdonságait. A szóban forgó értelmezésekhez a következő megjegyzéseket fűzzük: Egyrészt ezek a definíciók még utalást sem adnak a függvényértékek (akkárcsak közelítő) kiszámolására. Másrészt az egyszerű geometriai fogalmakon túl szerpelnek viszonylag bonyolult és definiáltan fogalmak is, így a valós számoknak a kör kerületére való „felmérése” vagy a *körív hossza*. A π **számot** az egységsugarú kör kerületének a felével definiáltuk, amelyről megtudtuk, hogy az egy *irracionális szám*, század pontossággal 3,14.

Az Analízis 1-ben a **szinusz-** és a **koszinuszfüggvényt** bizonyos hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük. Egyáltalán nem nyilvánvaló, hogy ezek ekvivalensek a középiskolai definíciókkal. Néhány már megismert összefüggés azonban jelzi a hasonlóságot. A kétféle bevezetés ekvivalenciájának az igazolását majd az integrálszámítás alkalmazásainak a tárgyalásánál fejezzük be, amikor is értelmezzük a körív hosszát, és meghatározzuk a kör kerületét. A hatványsoros definíció alapján kapott szinusz- és koszinuszfüggvény jelölésére a jelzett ekvivalencia miatt használtuk a „szokásos” \sin és \cos szimbólumokat. ■

A trigonometrikus függvényekkel kapcsolatos alapvető fogalom a következő:

Definíció. Az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvény **periodikus**, ha van olyan $p > 0$ valós szám, hogy minden $x \in \mathcal{D}_f$ elemre $x \pm p \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x + p) = f(x).$$

A p számot **periódusának**, az f függvényt pedig p szerint **periodikus függvénynek** nevezzük.

Megjegyzés. Ha az f függvény p szerint periodikus, akkor bármely $x \in \mathcal{D}_f$, $k \in \mathbb{Z}$ esetén $x \pm kp \in \mathcal{D}_f$ és

$$f(x + kp) = f(x).$$

Vagyis, ha p az f függvénynek periódusa, akkor minden $k = 1, 2, \dots$ esetén kp is periódusa f -nek. Egy függvény periódusának megadásán általában a legkisebb (pozitív) periódus megadását értjük, amennyiben ilyen létezik.

Nem minden periodikus függvénynek van legkisebb periódusa. Az

$$f(x) := \begin{cases} 0, & \text{ha } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dirichlet-függvénynek minden *racionális* szám periódusa, és ezek között nyilván nincs legkisebb. ■

• A \sin és a \cos függvény

Megjegyzés. A **szinusz-** és a **koszinuszfüggvényt** az egész \mathbb{R} -en konvergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\sin x := \sin(x) := x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (x \in \mathbb{R}),$$

$$\cos x := \cos(x) := 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Most összefoglaljuk azokat az állításokat, amelyeket korábban (többek között az Analízis 1-ben) már megismertünk:

1º A sin függvény páratlan, azaz $\sin(-x) = -\sin x$ ($x \in \mathbb{R}$),
a cos függvény páros, vagyis $\cos(-x) = \cos x$ ($x \in \mathbb{R}$).

2º Addíciós képletek: minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$\begin{aligned}\sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y.\end{aligned}$$

3º Négyzetes összefüggés:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

4º A sin és a cos függvény differenciálható (tehát folytonos is) \mathbb{R} -en, és $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$. ■

Most a sin és a cos függvények hatványsoros definícióiból kiindulva, a differenciálszámítás eszköztárát felhasználva bevezetjük az egész matematika egyik fontos állandóját, a **π számot**.

Tétel. A cos függvénynek a $[0, 2]$ intervallumban pontosan egy zérushelye van, azaz $[0, 2]$ -nek pontosan egy ξ pontjában áll fenn a $\cos \xi = 0$ egyenlőség. Ennek a ξ számnak a kétszereseként értelmezzük a π számot:

$$\pi := 2\xi.$$

Bizonyítás. A Bolzano-tételt alkalmazzuk. Világos, hogy $\cos \in C[0, 2]$ és $\cos 0 = 1$. MÁsrészt

$$\begin{aligned}\cos 2 &= 1 - \frac{2^2}{2!} + \frac{2^4}{4!} - \frac{2^6}{6!} + \frac{2^8}{8!} - \frac{2^{10}}{10!} + \frac{2^{12}}{12!} - \cdots = 1 - 2 + \frac{2}{3} - \frac{2^6}{6!} \left(1 - \frac{2^2}{7 \cdot 8}\right) - \frac{2^{10}}{10!} \left(1 - \frac{2^2}{11 \cdot 12}\right) - \cdots < \\ &< (\text{a zárójeleken belüli számok nyilván pozitívak}) < -\frac{1}{3} < 0.\end{aligned}$$

A Bolzano-tétel feltételei tehát teljesülnek, ezért $\exists \xi \in [0, 2]: \cos \xi = 0$.

A ξ pont egyértelműsége következik abból, hogy $\cos \downarrow$ a $[0, 2]$ intervallumban. Ez az állítás a szigorú monoton csökkenésre vonatkozó elégsgéges feltétel, a $\cos' = -\sin$ képlet, valamint a

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = x \left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 3}\right) + \frac{x^5}{5!} \left(1 - \frac{x^2}{6 \cdot 7}\right) + \cdots > 0 \quad (x \in (0, 2))$$

egyenlőtlenség következménye. ■

Megjegyzések.

1º A Bolzano-tétel bizonyításánál alkalmazott *Bolzano-féle felezési eljárással* π közelítő értékei meghatározhatók.

2º Igazolható, hogy π **irracionális** és **transzcendens** szám.

3º Az addíciós képletek, valamint a négyzetes összefüggés felhasználásával a sin és a cos függvény számos helyen vett helyettesítési értékeit pontosan ki tudjuk számolni. Például:

$$\sin \frac{\pi}{2} = 1, \quad \cos \pi = -1, \quad \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

4º Az integrálszámítás alkalmazásainál értelmezni fogjuk a körív hosszát, és mutatjuk, hogy az egységsugarú kör kerülete 2π . Ez azt jelenti, hogy az előző tételben definiált π szám valóban megegyezik a korábbi tanulmányainkban megismert π számmal. ■

A sin és a cos függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

$$(1) \quad \sin x = \cos \left(x - \frac{\pi}{2}\right), \quad \cos x = \sin \left(x + \frac{\pi}{2}\right) \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Tétel. A sin és a cos függvény 2π szerint periodikus, azaz

$$\sin(x + 2\pi) = \sin x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R}),$$

és 2π minden egyik függvénynek a legkisebb periódusa.

Bizonyítás. Meggondolható. ■

Most a sin és a cos függvény „alaki” tulajdonságait tanulmányozzuk. A periodicitást, valamint a paritást figyelembe véve, a vizsgálatokat elég egy π hosszú intervallumon elvégezni. Legyen ez az intervallum $[0, \pi]$.

Az (1) azonosságok alapján egyszerűen igazolható

$$\cos x > 0 \quad (x \in (0, \frac{\pi}{2})) \quad \cos x < 0 \quad (x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)) \quad \text{és} \quad \sin x > 0 \quad (x \in (0, \pi))$$

egyenlőtlenségeket, a deriváltakra vonatkozó már ismert

$$\sin' x = \cos x, \quad \cos' x = -\sin x, \quad \sin'' x = -\sin x, \quad \cos'' x = -\cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

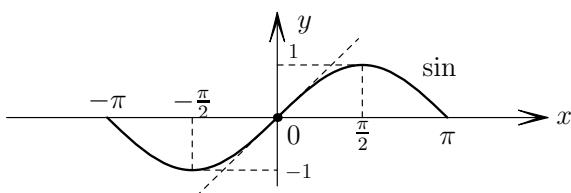
képleteket, továbbá a monotonitás, illetve a konvexitás-konkávitás és a derivált kapcsolatára vonatkozó eredményeket felhasználva kapjuk a következő állításokat.

Tétel.

1° $\sin \uparrow [0, \frac{\pi}{2}]$ -en, $\downarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$ -n és szigorúan konkáv $[0, \pi]$ -n.

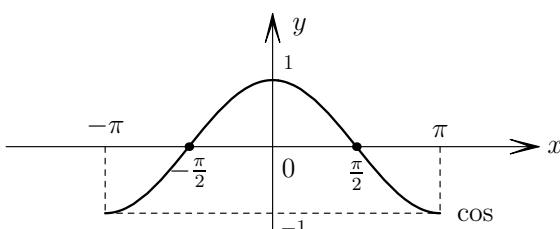
2° $\cos \downarrow [0, \pi]$ -n, szigorúan konkáv $[0, \frac{\pi}{2}]$ -en és szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ -n.

A sin függvény *páratlan*, ezért a grafikonja szimmetrikus az origóra. A következő ábrán szemléltetjük a sin függvény grafikonját a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:



- $\downarrow [-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ -en, $\uparrow [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ -en és $\downarrow [\frac{\pi}{2}, \pi]$ -n;
- szigorúan konvex $[-\pi, 0]$ -n és szigorúan konkáv $[0, \pi]$ -n,
- 0 inflexiós pont.

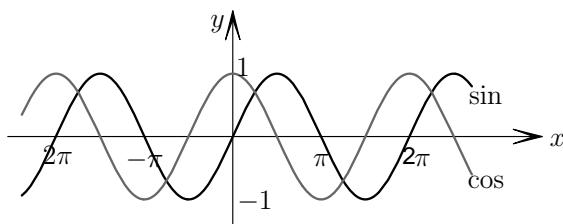
A cos függvény *páros*, ezért a grafikonja szimmetrikus az y -tengelyre. A következő ábrán a cos függvény grafikonját szemléltetjük a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, majd felsoroljuk a függvény néhány fontos tulajdonságát:



A cos függvény

- $\uparrow [-\pi, 0]$ -n és $\downarrow [0, \pi]$ -n;
- szigorúan konvex $[-\pi, -\frac{\pi}{2}]$ -en, szigorúan konkáv $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ -en, szigorúan konvex $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ -n,
- $\pm \frac{\pi}{2}$ inflexiós pontok.

Az alábbi ábrán a sin és a cos függvény grafikonjait szemléltetjük:



Az előzőekből már következnek a sin és a cos függvény **zérushelyeire** vonatkozó alábbi állítások:

$\sin x = 0 \iff x = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}),$
$\cos x = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}).$

• A tg és a ctg függvény

A tg függvény korábbi értelmezésénél még nem tudtuk jellemzni a \cos függvény zérushelyeit. Ezek ismertében a **tangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\boxed{\operatorname{tg} x := \operatorname{tg}(x) := \frac{\sin x}{\cos x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi \mid k\pi \in \mathbb{Z}\})}.$$

A tg függvény *páratlan* és π szerint *periodikus*, ezért a tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -en megállapítani. Azt már tudjuk, hogy $\operatorname{tg} \in D^\infty(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, és például

$$\operatorname{tg}' x = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad \operatorname{tg}'' x = 2 \frac{\sin x}{\cos^3 x} \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

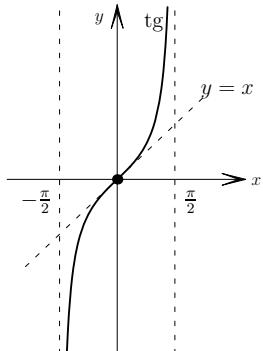
Meg kell azonban vizsgálnunk a tg függvény $\pm\frac{\pi}{2}$ pont körül viselkedését. Mivel

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}} \sin x &= \sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1, \quad \text{és} \\ \lim_{x \rightarrow \pm\frac{\pi}{2}} \cos x &= \cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0, \quad \text{továbbá } \cos x > 0, \quad \text{ha } x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \end{aligned}$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty.$$

A tg függvény grafikonja a $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:



A tg függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- \uparrow $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ -en,
- szigorúan konkáv $(-\frac{\pi}{2}, 0)$ -n, szigorúan konvex $(0, \frac{\pi}{2})$ -en,
- 0 inflexiós pont,
- $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}+0} \operatorname{tg} x = -\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \operatorname{tg} x = +\infty$.

A **kotangensfüggvényt** így értelmezzük:

$$\boxed{\operatorname{ctg} x := \operatorname{ctg}(x) := \frac{\cos x}{\sin x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\})}.$$

A tg és a ctg függvények között a következő kapcsolat áll fenn:

$$(2) \quad \operatorname{ctg} x = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}).$$

A ctg függvény *páratlan* és π szerint *periodikus*, ezért a tulajdonságait elég egy π hosszú intervallumon, mondjuk $(0, \pi)$ -n megvizsgálni. Azt már tudjuk, hogy $\operatorname{ctg} \in D^\infty(0, \pi)$, és például

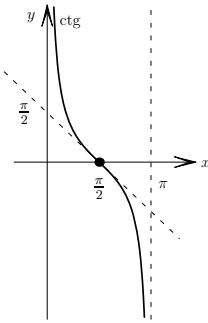
$$\operatorname{ctg}' x = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad \operatorname{ctg}'' x = 2 \cdot \frac{\cos x}{\sin^3 x} \quad (x \in (0, \pi)),$$

ezért a monotonitási, illetve a konvexitási tulajdonságok egyszerűen megállapíthatók.

A ctg függvény 0 és π pont körül viselkedésére a következők teljesülnek:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty.$$

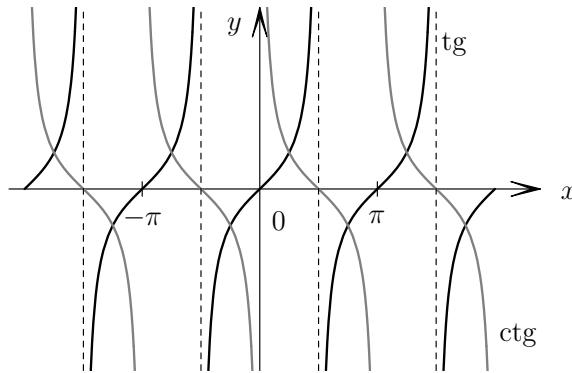
A ctg függvény grafikonja a $(0, \pi)$ intervallumon, és néhány tulajdonsága:



A ctg függvény

- páratlan,
- π szerint periodikus,
- $\downarrow (0, \pi)$ -n,
- szigorúan konvex $(0, \frac{\pi}{2})$ -en, szigorúan konkáv $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ -n,
- $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont,
- $\lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{ctg} x = +\infty$ és $\lim_{x \rightarrow \pi-0} \operatorname{ctg} x = -\infty$.

Az alábbi ábrán a tg és a ctg függvények grafikonjait szemléltetjük:



Trigonometrikus függvények inverzei (arkuszfüggvények)

Megjegyzés. A trigonometrikus függvények mindegyike periodikus, ezért egyikük sem invertálható. Mind a négy függvénynek vannak azonban olyan alkalmás intervallumra vonatkozó leszűkítései, amelyeken a függvények szigorúan monotonok, ezért invertálhatók. Ki fogunk választani egy-egy ilyen intervallumot, és ezekre vonatkozó leszűkítéseket invertáljuk. Az így kapott függvényeket **arkuszfüggvényeknek** nevezzük. (Az *arcus* — latinul ívet jelent — azt jelzi, hogy a függvények helyettesítési értékei bizonyos körív hosszával hozható kapcsolatba.) ■

Definíció. A szigorúan monoton

$$\sin|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}], \quad \cos|[0, \pi], \quad \operatorname{tg}|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}), \quad \operatorname{ctg}|(0, \pi)$$

függvények inverzeit rendre **arkuszszinusz-, arkuszkoszinusz-, arkusztangens-, arkuszkotangens-függvényeknek** nevezzük és így jelöljük:

$$\begin{aligned} \operatorname{arc sin} &:= (\sin|[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}])^{-1}, & \operatorname{arc cos} &:= (\cos|[0, \pi])^{-1}, \\ \operatorname{arc tg} &:= (\operatorname{tg}|(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))^{-1}, & \operatorname{arc ctg} &:= (\operatorname{ctg}|(0, \pi))^{-1}. \end{aligned}$$

Emlékeztetünk arra, hogy ha egy invertálható függvényt és annak inverzét egy koordinátarendszerben ábrázoljuk (feltéve azt, hogy a tengelyeken az egységek egyenlő hosszúak), akkor a szóban forgó függvények grafikonjai egymás tükréi az $y = x$ egyenletű szögfelező egyenesre vonatkozóan. Következetképpen minden egyik arkuszfüggvény grafikonját a neki megfelelő trigonometrikus függvény (már ismert) grafikonjából kapjuk meg.

Az arc sin függvény definíciójából következik, hogy tetszőleges $x \in [-1, 1]$ esetén $\arcsin x$ az a $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ intervallumba eső y szög, amelynek a szinusza x -szel egyenlő, azaz

$$\begin{aligned} \arcsin x &= y && \Leftrightarrow \sin y = x. \\ (x \in [-1, 1]) & & (y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \end{aligned}$$

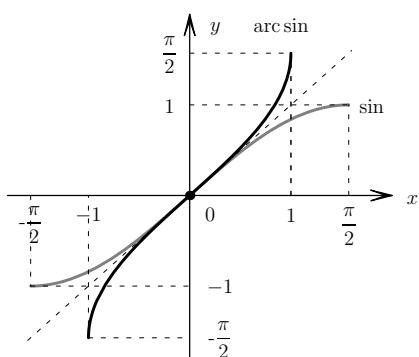
Az \arcsin függvény *folytonos* $[-1, 1]$ -en (l. az „inverz függvény folytonosságára” vonatkozó tételt), a függvény *deriválhatósága* pedig egyszerűen adódik az inverz függvény deriválási szabályából: Legyen $y \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ és $\sin y = x \in [-1, 1]$, azaz $y = \arcsin x$. Mivel $\sin' y = \cos y > 0$, ha $y \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ezért minden $x \in (-1, 1)$ esetén $\arcsin \in D\{x\}$ és

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sin' y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

azaz

$$(3) \quad \arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)).$$

A következő ábrán szemléltetjük az \arcsin függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az \arcsin függvény

- $D_{\arcsin} = [-1, 1]$, $R_{\arcsin} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,
 - folytonos $[-1, 1]$ -en,
 - deriválható $(-1, 1)$ -en, és
- $$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)),$$
- \uparrow $[-1, 1]$ -en,
 - szigorúan konkáv $[-1, 0]$ -n, szigorúan konvex $[0, 1]$ -en,
 - 0 inflexiós pont.

Az \arccos függvény definíciójából következik, hogy

$$\begin{aligned} \arccos x &= y && \Leftrightarrow \cos y = x. \\ (x \in [-1, 1]) & & (y \in [0, \pi]) \end{aligned}$$

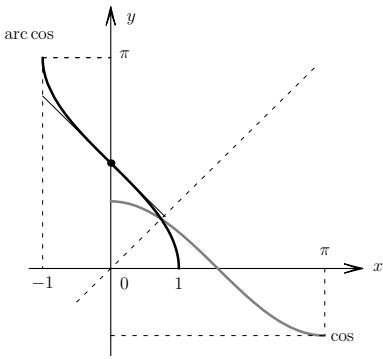
Az (1) azonosságok felhasználásával igazolható, hogy

$$(4) \quad \arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in [-1, 1]).$$

Az inverz függvény folytonosságára vonatkozó tétel alapján az \arccos függvény *folytonos* $[-1, 1]$ -en. A (4) és a (3) képletekből pedig az következik, hogy minden $x \in (-1, 1)$ esetén $\arccos \in D\{x\}$ és

$$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (x \in (-1, 1)).$$

A következő ábrán szemléltetjük az \arccos függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az \arccos függvény

- $D_{\arccos} = [-1, 1]$, $R_{\arccos} = [0, \pi]$,
 - folytonos $[-1, 1]$ -en,
 - deriválható $(-1, 1)$ -en, és
- $$\arccos' x = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1, 1)),$$
- \downarrow $[-1, 1]$ -en,
 - szigorúan konvex $[-1, 0]$ -n, szigorúan konkáv $[0, 1]$ -en,
 - $\frac{\pi}{2}$ inflexiós pont.

Az \arctg függvény definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$D_{\arctg} = \mathbb{R}, \quad R_{\arctg} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad \arctg \uparrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}-en,$$

$$\boxed{\begin{aligned} \arctg x &= y && \iff \operatorname{tg} y = x, \\ (x \in \mathbb{R}) & & (y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)) \end{aligned}}$$

továbbá

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = +\frac{\pi}{2}.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = -\frac{\pi}{2}$ (illetve az $y = \frac{\pi}{2}$) egyenletű egyenes az \arctg függvény aszimptotája a $(-\infty)$ -ben (illetve a $(+\infty)$ -ben).

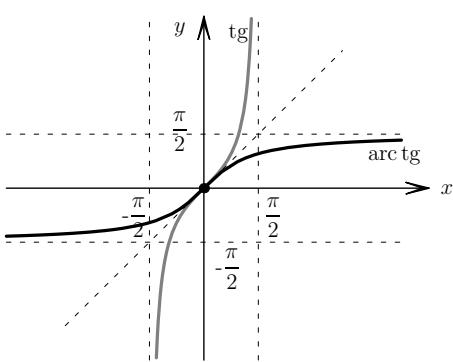
Mivel minden $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén $\operatorname{tg}'y = \frac{1}{\cos^2 y} > 0$, ezért minden $x = \operatorname{tg} y \in \mathbb{R}$ pontban az \arctg függvény deriválható és az inverz függvény deriválási szabálya alapján

$$\arctg' x = \frac{1}{\operatorname{tg}'y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2},$$

azaz

$$\boxed{\arctg' x = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

A következő ábrán szemléltetjük az \arctg függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az \arctg függvény

- $D_{\arctg} = \mathbb{R}$, $R_{\arctg} = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$,
 - folytonos \mathbb{R} -en,
 - deriválható \mathbb{R} -en, és
- $$\arctg' x = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
- $\uparrow \mathbb{R}$ -en,
 - szigorúan konvex $(-\infty, 0]$ -n, szigorúan konkáv $[0, +\infty)$ -en,
 - 0 inflexiós pont,
 - $y = \pm\frac{\pi}{2}$ aszimptota a $(\pm\infty)$ -ben.

Az $\operatorname{arc ctg}$ függvény definíciójából és a korábbi eredményeinkből azonnal következik, hogy

$$D_{\operatorname{arc ctg}} = \mathbb{R}, \quad R_{\operatorname{arc ctg}} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \quad \operatorname{arc ctg} \downarrow \text{ és folytonos } \mathbb{R}-en,$$

$$\boxed{\begin{aligned} \operatorname{arc ctg} x &= y && \iff \operatorname{ctg} y = x, \\ (x \in \mathbb{R}) & & (y \in (0, \pi)) \end{aligned}}$$

továbbá

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arc ctg} x = 0 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{arc ctg} x = \pi.$$

Az utóbbi két állítás azt jelenti, hogy az $y = 0$ (illetve az $y = \pi$) egyenletű egyenes az $\operatorname{arc ctg}$ függvény aszimptotája $(-\infty)$ -ben (illetve $(+\infty)$ -ben).

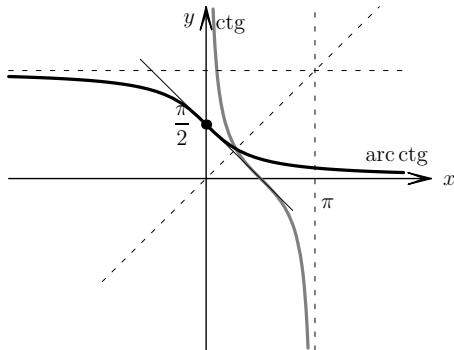
A (2) azonosságból következik, hogy az $\operatorname{arc tg}$ és az $\operatorname{arc ctg}$ függvény között a következő kapcsolat áll fenn:

$$\boxed{\operatorname{arc tg} x + \operatorname{arc ctg} x = \frac{\pi}{2} \quad (x \in \mathbb{R})},$$

ezért $\operatorname{arc ctg} \in D(\mathbb{R})$, és

$$\boxed{\operatorname{arc ctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R})}.$$

Most szemléltetjük az $\operatorname{arc ctg}$ függvény grafikonját, és felsoroljuk néhány fontos tulajdonságát:



Az $\operatorname{arc ctg}$ függvény

- $D_{\operatorname{arc ctg}} = \mathbb{R}$, $R_{\operatorname{arc ctg}} = (0, \pi)$,
 - folytonos \mathbb{R} -en,
 - deriválható \mathbb{R} -en, és
- $$\operatorname{arc ctg}' x = -\frac{1}{1+x^2} \quad (x \in \mathbb{R}),$$
- $\downarrow \mathbb{R}$ -en,
 - szigorúan konkav $(-\infty, 0]$ -n, szigorúan konvex $[0, +\infty)$ -en,
 - 0 inflexiós pont,
 - $y = 0$ aszimptota a $(-\infty)$ -ben,
 - $y = \pi$ aszimptota a $(+\infty)$ -ben.

Hiperbolikus függvények és inverzeik

• Hiperbolikus függvények

Emlékeztetünk arra, hogy a **szinuszhiperbolikusz**- és a **koszinuszhyperbolikusz-függvényt** az egész \mathbb{R} -en konergens hatványsor összegfüggvényeként értelmeztük:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &:= \operatorname{sh}(x) := x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{ch} x &:= \operatorname{ch}(x) := 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{2k}}{(2k)!} \quad (x \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Az \exp függvény

$$e^x := \exp(x) := 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} \quad (x \in \mathbb{R})$$

definíciójából közvetlenül következnek az alábbi fontos formulák:

$$(5) \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad (x \in \mathbb{R}).$$

A hiperbolikus függvények sok rokon vonást mutatnak a trigonometrikus függvényekkel, ezekre utalnak az elnevezések. Az (5) formulák, valamint az

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

alapvető képlet felhasználásával egyszerűen bizonyíthatók a trigonometrikus függvényekhez hasonló alábbi állítások:

1º A sh *páratlan*, a ch pedig *páros* függvény.

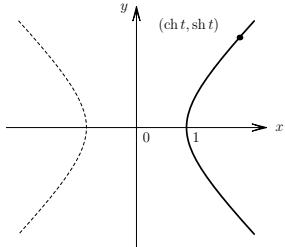
2º Addíciós képletek:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x+y) &= \operatorname{sh}x \operatorname{ch}y + \operatorname{ch}x \operatorname{sh}y & (x, y \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{ch}(x+y) &= \operatorname{ch}x \operatorname{ch}y + \operatorname{sh}x \operatorname{sh}y & (x, y \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

3º Négyzetes összefüggés:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Megjegyzés. A négyzetes összefüggés geometriai tartalma a következő:



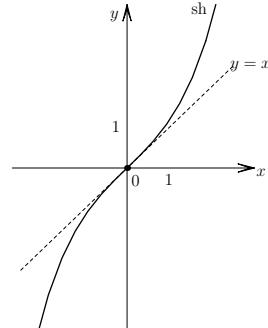
Minden $t \in \mathbb{R}$ valós szám esetén az $(x, y) = (\operatorname{ch}t, \operatorname{sh}t)$ síkbeli pont rajta van az $x^2 - y^2 = 1$ ($x > 0$) egyenletű hiperbolaágon (innen származik a szóban forgó függvények nevében szereplő „hiperbolikus” jelző). ■

4º A sh és a ch függvény differenciálható (tehát folytonos is) \mathbb{R} -en, és $\operatorname{sh}' = \operatorname{ch}$, $\operatorname{ch}' = \operatorname{sh}$.

A differenciálszámítás eszköztárának a felhasználásával vizsgálhatjuk a sh és a ch függvény analitikus és „alaki” tulajdonságait. Most a részletek mellőzése nélkül felsoroljuk ezeknek a függvényeknek a tulajdonságait, majd azok felhasználásával ábrázoljuk a grafikonjaikat.

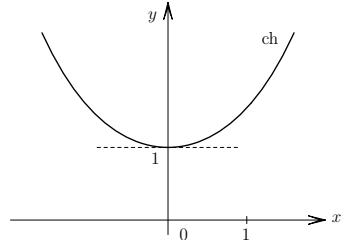
A sh függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{sh}} = \mathbb{R}$,
- páratlan függvény,
- deriválható \mathbb{R} -en, és $\operatorname{sh}'x = \operatorname{ch}x \geq 1 > 0$ ($x \in \mathbb{R}$),
 $\operatorname{sh}'0 = \operatorname{ch}0 = 1$,
- $\uparrow \mathbb{R}$ -en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$ -n,
szigorúan konvex $[0, +\infty)$ -en,
- 0 inflexiós pont.



A ch függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{ch}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{ch}} = [1, +\infty)$,
- páros függvény,
- deriválható \mathbb{R} -en, és $\operatorname{ch}'x = \operatorname{sh}x$ ($x \in \mathbb{R}$),
 $\operatorname{ch}'0 = \operatorname{sh}0 = 0$,
- $\downarrow (-\infty, 0)$ -n, $\uparrow (0, +\infty)$ -en,
- szigorúan konvex \mathbb{R} -en.



Megjegyzés. A ch függvény képét **láncgörbének** is nevezik, mert egy homogén, hajlékony, nyúlásmentes, két végén felfüggeszett fonal (lánc) ilyen alakot vesz fel. ■

A **tangenshiperbolikusz**- és a **kotangenshiperbolikusz-függvényeket** a tg és a ctg függvények mintájára korábban már bevezettük:

$$\operatorname{th}x := \operatorname{th}(x) := \frac{\operatorname{sh}x}{\operatorname{ch}x} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \operatorname{cth}x := \operatorname{cth}(x) := \frac{\operatorname{ch}x}{\operatorname{sh}x} \quad (x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}).$$

(A definícióknál figyelembe vettük azt, hogy minden $x \in \mathbb{R}$ -re $\operatorname{ch}x \neq 0$, és $\operatorname{sh}x = 0 \iff x = 0$.)

Mindkét függvény páratlan, ezért a tulajdonságaiat elég a $(0, +\infty)$ intervallumon megállapítani. Meg kell még vizsgálni a $\lim_{+\infty} \operatorname{th} x$, a $\lim_{+\infty} \operatorname{cth} x$ és a $\lim_{0+0} \operatorname{cth} x$ határértékeket. Mivel

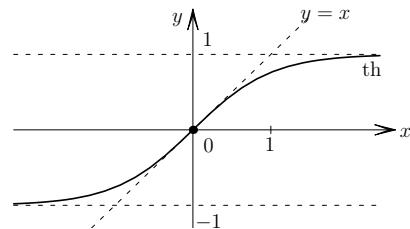
$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \stackrel{(5)}{=} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-2x} = 0, \quad \operatorname{cth} x = \frac{1}{\operatorname{th} x} \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{sh} x = 0,$$

ezért

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{th} x = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \operatorname{cth} x = 1 \quad \text{és} \quad \lim_{x \rightarrow 0+0} \operatorname{cth} x = +\infty.$$

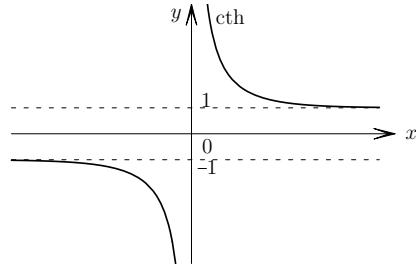
A th függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{th}} = \mathbb{R}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{th}} = (-1, 1)$,
- páratlan függvény,
- deriválható \mathbb{R} -en, és $\operatorname{th}'x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$ ($x \in \mathbb{R}$), $\operatorname{th}'0 = 1$,
- $\uparrow \mathbb{R}$ -en,
- szigorúan konvex $(-\infty, 0]$ -n, szigorúan konkáv $[0, +\infty)$ -en,
- 0 inflexiós pont,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$ -ben.



A cth függvény

- $\mathcal{D}_{\operatorname{cth}} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathcal{R}_{\operatorname{cth}} = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$,
- páratlan függvény,
- deriválható, és $\operatorname{cth}'x = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$ ($x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$),
- $\downarrow (-\infty, 0)$ -n és $\downarrow (0, +\infty)$ -en,
- szigorúan konkáv $(-\infty, 0]$ -n, szigorúan konvex $[0, +\infty)$ -en,
- $y = \pm 1$ aszimptota $(\pm\infty)$ -ben.



9. előadás

2016. november 14.

ELEMI FÜGGVÉNYEK (folytatás)

- Hiperbolikus függvények inverzei (areafüggvények)

Definíció. A szigorúan monoton sh , $\operatorname{ch}|_{[0,+\infty)}$, th , $\operatorname{cth}|_{(0,+\infty)}$ függvények inverzeit rendre **areaszinuszhiperbolikusz**-, **areakoszinuszhiperbolikusz**-, **areatangenshiperbolikusz**-, **areakotangenshiperbolikusz**-függvényeknek nevezzük és így jelöljük:

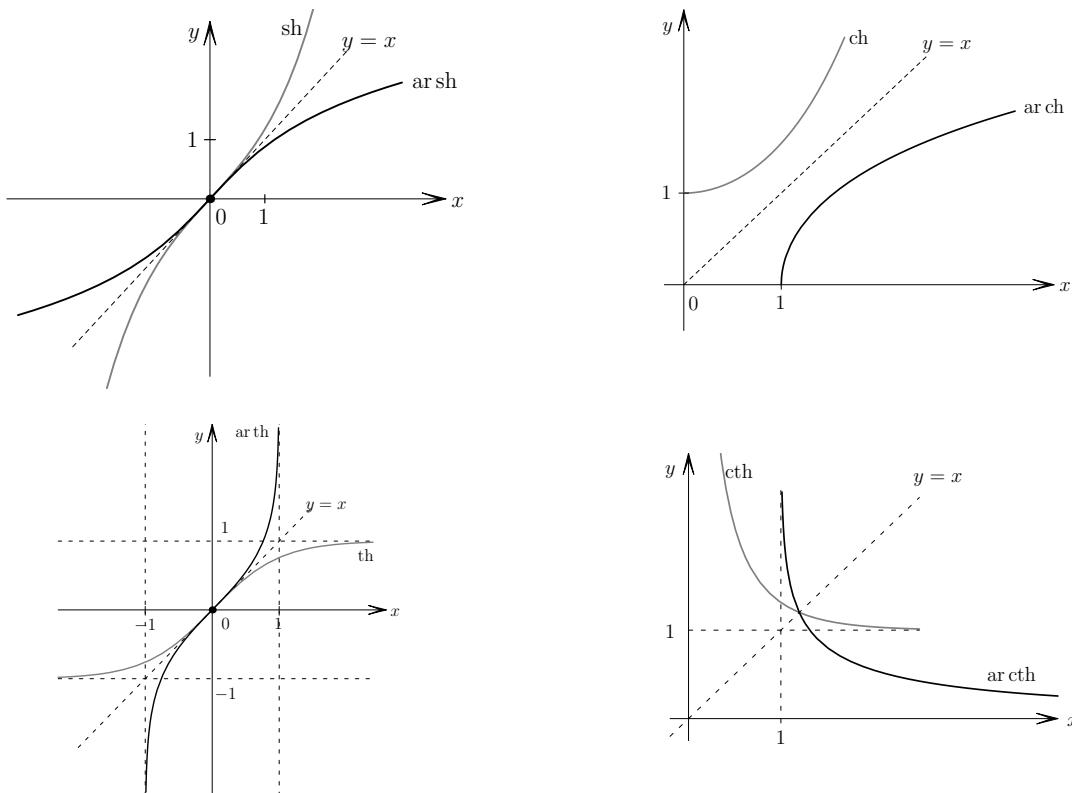
$$\operatorname{ar sh} := \operatorname{sh}^{-1}, \quad \operatorname{ar ch} := (\operatorname{ch}|_{[0,+\infty)})^{-1}, \quad \operatorname{ar th} := \operatorname{th}^{-1}, \quad \operatorname{ar cth} := (\operatorname{cth}|_{(0,+\infty)})^{-1}.$$

Megjegyzés. Az inverz hiperbolikus függvények nevében megjelenő *area*=terület szó azt jelzi, hogy az $\operatorname{ar ch} u$ mennyisége egy bizonyos síkdom területével egyenlő. Pontosabban: Legyen $u \geq 1$ és $v = \sqrt{u^2 - 1}$. Jelölje A_u azt a tartományt, amelyet az origót az (u, v) és $(u, -v)$ pontokkal összekötő két szakasz, valamint az $x^2 - y^2 = 1$ hiperbolának az (u, v) és $(u, -v)$ pontok közötti íve határol. Meg lehet mutatni, hogy az A_u tartomány területe éppen $\operatorname{ar ch} u$ -val egyenlő. ■

Az inverz függvény deriválási szabályából következik, hogy mindegyik areafüggvény az értelmezési tartományának minden belső pontjában deriválható, és

$$\begin{aligned} \operatorname{ar sh}'x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \quad (x \in \mathbb{R}), & \operatorname{ar ch}'x &= \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \in (1, +\infty)), \\ \operatorname{ar th}'x &= \frac{1}{1 - x^2} \quad (x \in (-1, 1)), & \operatorname{ar cth}'x &= \frac{1}{1 - x^2} \quad (x \in (1, +\infty)). \end{aligned}$$

Az areafüggvények alábbi ábrákon szemléltetett analitikus és geometriai tulajdonságai a korábbiakhoz hasonlóan állapíthatók meg.



A hiperbolikus függvényeket ki lehet fejezni az \exp függvénnyel. Az \exp függvény inverze az \ln függvény, ezért nem meglepő, hogy az areafüggvényeket az \ln segítségével is fel tudjuk írni.

Tétel. A következő azonosságok teljesülnek:

$$\begin{aligned}\operatorname{ar sh} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (x \in \mathbb{R}), \\ \operatorname{ar ch} x &= \ln \left(x + \sqrt{x^2 - 1} \right) \quad (x \in [1, +\infty)), \\ \operatorname{ar th} x &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (x \in (-1, 1)), \\ \operatorname{ar cth} x &= \frac{1}{2} \cdot \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right) \quad (x \in (1, +\infty)).\end{aligned}$$

Bizonyítás. A bizonyítások hasonlók, ezért csak az első azonosság igazolását részletezzük.

Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $y := \operatorname{ar sh} x$, azaz $x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$. Bevezetve a $t := e^y$ jelölést, t -re a $t^2 - 2tx - 1 = 0$ másodfokú egyenletet kapjuk. Mivel $t > 0$, ezért $t = e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$, azaz

$$y = \operatorname{ar sh} x = \ln \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) \quad (x \in \mathbb{R}). \blacksquare$$

Megjegyzés. A fenti képletek jelentősége a következő: Ha az \ln függvény helyettesítési értékeit ki tudjuk számolni, akkor az areafüggvények helyettesítési értékei is számolhatók. ■

A DIFFERENCIÁLSZÁMÍTÁS TOVÁBBI ALKALMAZÁSAI

L'Hospital-szabályok

Megjegyzés. Emlékeztetünk arra, hogy függvények határértékével kapcsolatban **kritikus határértékeknek** neveztük azokat az eseteket, amikor az $\overline{\mathbb{R}}$ -beli műveletek és a határérték kapcsolatára vonatkozó tételek nem alkalmazhatók. Ilyenek például a következők:

$$(+\infty) + (-\infty), \quad 0 \cdot (\pm\infty), \quad \frac{0}{0}, \quad \frac{\pm\infty}{\pm\infty}, \quad 0^0.$$

Eddig azt az „elvet” követtük, hogy egy kritikus határértéket igyekeztünk nem kritikus határértékké átalakítani (például *szorzatra bontással*, *gyöktelenítéssel* vagy *leosztással*). ■

A L'Hospital-szabályok hatékony módszerek kritikus határértékek kiszámolására.

Tétel. (L'Hospital-szabály a $\frac{0}{0}$ esetben.)

$$\left. \begin{array}{l} \text{Tegyük fel, hogy } f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ és} \\ \bullet f, g \in D(a, b), \quad (-\infty \leq a < b < +\infty), \\ \bullet g(x) \neq 0 \text{ és } g'(x) \neq 0 \quad (x \in (a, b)), \\ \bullet \lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0, \\ \bullet \exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}} \text{ határérték.} \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \text{ és} \\ \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}$$

Bizonyítás. 1. eset: $a > -\infty$ (véges).

Legyen

$$A := \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}.$$

Azt kell igazolni, hogy

$$(\#) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 : \forall x \in (a, a + \delta) \subset (a, b) \text{ esetén } \frac{f(x)}{g(x)} \in K_\varepsilon(A).$$

Az $A = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ feltétel azt jelenti, hogy

$$(*) \quad \forall \varepsilon > 0 \text{ számhoz } \exists \delta > 0 : \forall y \in (a, a + \delta) \subset (a, b) \text{ esetén } \frac{f'(y)}{g'(y)} \in K_\varepsilon(A).$$

Értelmezzük az f és a g függvényt az a pontban úgy, hogy

$$f(a) := 0 \text{ és } g(a) := 0.$$

A $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = 0$ feltételből következik, hogy ekkor $f, g \in C[a, a + \delta]$.

Legyen most $x \in (a, a + \delta)$ tetszőleges pont. A Cauchy-féle középértéktétel feltételei az f és a g függvényre az $[a, x]$ intervallumon teljesülnek. Így $\exists \xi_x \in (a, x)$, amelyre

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(\xi_x)}{g'(\xi_x)} \text{ (és ez (*) miatt) } \in K_\varepsilon(A).$$

A (#) állítást tehát bebizonyítottuk, és az azt jelenti, hogy a $\lim_{a+0} \frac{f}{g}$ határérték létezik, és

$$\lim_{a+0} \frac{f}{g} = A.$$

2. eset: $a = -\infty$. Nem bizonyítjuk. ■

Most megfogalmazzuk a $\frac{+\infty}{+\infty}$ kritikus határértékre vonatkozó L'Hospital-szabályt.

Tétel. (L'Hospital-szabály a $\frac{+\infty}{+\infty}$ esetben.)

Tegyük fel, hogy $f, g \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ és

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> • $f, g \in D(a, b)$, $(-\infty \leq a < b < +\infty)$, • $g(x) \neq 0$ és $g'(x) \neq 0$ ($x \in (a, b)$), • $\lim_{a+0} f = \lim_{a+0} g = +\infty$, • $\exists \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}$ határérték. | $\left. \begin{array}{c} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{c} \exists \lim_{a+0} \frac{f}{g} \text{ és} \\ \lim_{a+0} \frac{f}{g} = \lim_{a+0} \frac{f'}{g'} \in \overline{\mathbb{R}}. \end{array}$ |
|---|---|

Bizonyítás. Nem bizonyítjuk. ■

Megjegyzések.

1º A $\frac{0}{0}$ esetre vonatkozó L'Hospital-szabályt az a pontbeli **jobb oldali határértékre** fogalmaztuk meg. Használó állítások érvényesek (az értelemszerű módszerekkel) a **bal oldali határértékre**, valamint a (kétoldali) **határértékre**, sőt a $(+\infty)$ -ben vett határértékre is (akkor $a = +\infty$).

2º A $\frac{+\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{+\infty}$, $\frac{+\infty}{-\infty}$ kritikus határértékekre, a bal oldali határértékre, valamint a (kétoldali) határértékre, sőt a $(+\infty)$ -ben vett határértékre használó állítások érvényesek. ■

3º A többi típusú kritikus határértéket gyakran vissza lehet vezetni $\frac{0}{0}$ vagy $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ típusú határértékre.

Taylor-polinomok és Taylor-sorok

Többször volt már szó arról, hogy hatványsor összegfüggvényének helyettesítési értékeit (elvben) tetszőleges pontossággal meg lehet határozni csupán a négy alapművelet felhasználásával.

Az exp, a sin, a cos, a sh, valamint a ch függvényt hatványsor összegfüggvényeként definiáltuk. Megmutattuk azt, hogy ezeknek bizonyos intervallumokra vonatkozó leszűkítéseik invertálhatók. A szóban forgó inverz függvények helyettesítési értékeit tetszőleges helyen a definíció alapján nem lehet kiszámolni. Ezért (is) fontos a következő kérdésfelvetés.

Probléma. *Egy adott függvényt vajon elő lehet-e állítani hatványsor összegfüggvényeként? Ha igen, akkor a függvény ismeretében hogyan lehet az együtthatókat meghatározni?*

Indulunk ki a hatványsor összegfüggvényének a deriválására vonatkozó tételeből.

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_n \in \mathbb{R}$ ($n = 0, 1, \dots$). Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n (x-a)^n \quad (x \in K_R(a)).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D\{x\}$ és

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n \alpha_n (x-a)^{n-1} \quad (\forall x \in K_R(a)).$$

Az f' deriváltfüggvény is egy hatványsor összegfüggvénye, ezért a fenti tétel alapján f' is deriválható, vagyis f kétszer deriválható. Világos, hogy f'' -re minden esetben $f'' \in D$. Ebben az esetben f'' a gondolatmenetet folytatva kapjuk azt, hogy minden $n = 1, 2, \dots$ esetén az f függvény n -szer deriválható, amit úgy fejeztünk ki, hogy f végtelen sokszor (vagy akárhányszor) deriválható. Ennek jelölésére az $f \in D^\infty$ szimbólumot vezettük be.

Tétel. *Legyen $a \in \mathbb{R}$ és $\alpha_k \in \mathbb{R}$ ($k = 0, 1, \dots$). Tegyük fel, hogy*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (x-a)^k \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsor R konvergenciasugara pozitív, és jelölje f az összegfüggvényét:

$$f(x) := \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k (x-a)^k \quad (x \in K_R(a)).$$

Ekkor minden $x \in K_R(a)$ pontban $f \in D^\infty\{x\}$ és minden $n = 1, 2, \dots$ esetén

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1) \alpha_k (x-a)^{k-n} \quad (\forall x \in K_R(a)).$$

Ha $x = a$, akkor

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

A tétel tehát azt is állítja, hogy egy hatványsor együtthatói és az összegfüggvénye között szoros kapcsolat van.

A fentiek motiválják a következő fogalmak bevezetését.

Definíciók.

1^o Ha $f \in D^\infty\{a\}$, akkor a

$$\begin{aligned} T_a(f, x) &:= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + \cdots = \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{R})$$

hatványsort az f függvény $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó Taylor-sorának nevezzük. (Az $a = 0$ esetben használatos a Maclaurin-sor elnevezés is.)

2^o Ha $n \in \mathbb{N}$ és $f \in D^{(n)}\{a\}$, akkor

$$\begin{aligned} T_{n,a}(f, x) &:= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \end{aligned} \quad (x \in \mathbb{R})$$

az f függvény $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$ ponthoz tartozó n -edik Taylor-polynomja.

Az előző tételben megfogalmazott állítás — a most bevezetett szóhasználattal élve — pontosan azt jelenti, hogy minden konvergens hatványsor az összegfüggvényének a Taylor-sora.

Természetes módon vethetők fel a következő kérdések.

A sorfejtés problémája. Legyen $f \in D^\infty$ egy adott függvény és tegyük fel, hogy $a \in \text{int } \mathcal{D}_f$.

1^o Hol konvergens a $T_a(f)$ Taylor-sor?

2^o Ha a Taylor-sor konvergens egy $I \subset \mathbb{R}$ intervallumon, akkor vajon fennáll-e az

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k \quad (x \in I)$$

azonosság, azaz a Taylor-sor vajon előállítja-e a függvényt?

1. példa. Legyen

$$f(x) := \frac{1}{1+x} \quad (x \in (-1, +\infty)).$$

Állítsuk elő az f függvény $a = 0$ ponthoz tartozó Taylor-sorát.

Most a magasabb rendű deriváltak egyszerűen meghatározhatók. Teljes indukcióval igazolható, hogy

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(1+x)^{-n} \quad (x > -1), \quad \text{és} \quad f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \quad (n = 1, 2, \dots).$$

A keresett Taylor-sor tehát

$$T_0(f, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \quad (x \in \mathbb{R}).$$

Ez $(-x)$ hármasosú geometriai sor, ami pontosan akkor konvergens, ha $|x| < 1$, és ekkor az összege:

$$\frac{1}{1 - (-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \quad (|x| < 1).$$

A Taylor-sor konvergenciahalmaza a $(-1, 1)$ intervallum, és az összegfüggvénye ezen az intervallumon az f függvénnel egyenlő.

Azt kaptuk tehát, hogy a $(-1, +\infty)$ intervallumon értelmezett f függvényt a 0 ponthoz tartozó Taylor-sora csak a $(-1, 1)$ intervallumon állítja elő, azaz

$$f(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots \quad (x \in (-1, 1)). \blacksquare$$

Megjegyzés. A Taylor-sor előállításához a függvény magasabb rendű deriváltjait kell egy pontban meghatározni. Ez sok esetben nem egyszerű feladat. Bizonyos függvények hatványsorát más, egyszerűbb módon is meg lehet kapni. Például a $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ ($x \in \mathbb{R}$) azonosság alapján a \sin^2 függvény Taylor-sora azonnal felírható, és az is látható, hogy a Taylor-sor az egész \mathbb{R} -en előállítja a függvényt. ■

2. példa. Legyen

$$f(x) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{ha } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ 0, & \text{ha } x = 0. \end{cases}$$

Igazolható, hogy $f \in D^\infty \{0\}$, és $f^{(n)}(0)=0$ minden n természetes számra, ezért f Taylor-sorának minden együtthatója 0, ezért az mindenütt konvergens, és az összegfüggvénye az azonosan 0 függvény, amely nyilván nem egyenlő f -vel. ■

A sorfejtés problémájának a vizsgálatához az

$$f(x) - T_{n,a}(f, x)$$

különbséget kell tekinteni. A következő téTELben ezt egy jól kezelhető alakban állítjuk elő.

TéTEL. (Taylor-formula a Lagrange-féle maradéktaggal.) *Legyen $n \in \mathbb{N}$, és tegyük fel, hogy $f \in D^{n+1}(K(a))$. Ekkor*

$$\forall x \in K(a) \text{ ponthoz } \exists \xi \text{ a és } x \text{ között :}$$

$$f(x) - T_{n,a}(f, x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}.$$

Bizonyítás. A Cauchy-féle középértéktételt fogjuk felhasználni.

Legyen

$$\begin{aligned} F(x) := f(x) - T_{n,a}(f, x) &= f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \\ &= f(x) - \left(f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \right) \quad (x \in K(a)). \end{aligned}$$

Ekkor

$$\begin{aligned} F(a) &= f(a) - f(a) = 0, \\ F'(a) &= f'(a) - f'(a) = 0, \\ F''(a) &= f''(a) - \frac{f''(a)}{2!} \cdot 2 \cdot 1 = f''(a) - f''(a) = 0, \\ &\vdots \\ F^{(n)}(a) &= 0, \\ F^{(n+1)}(x) &= f^{(n+1)}(x) \quad (x \in K(a)). \end{aligned}$$

Legyen tetszőleges $x \in K(a)$ esetén

$$\begin{aligned} G(x) &:= (x-a)^{n+1} &\implies G(a) = 0, \\ G'(x) &= (n+1)(x-a)^n &\implies G'(a) = 0, \\ G''(x) &= (n+1)n(x-a)^{n-1} &\implies G''(a) = 0, \\ &\vdots && \vdots \\ G^{(n)}(x) &= (n+1)!(x-a) &\implies G^{(n)}(a) = 0, \\ G^{(n+1)}(x) &= (n+1)! \end{aligned}$$

Legyen $x \in K(a)$, és tegyük fel, hogy például $x > a$. (Az $x < a$ eset hasonlóan vizsgálható.) Az F és a G függvényekre az $[a, x]$ intervallumon alkalmazható a Cauchy-féle középértéktétel, következésképpen

$$\exists \xi_1 \in (a, x) : \frac{f(x) - T_{n,a}(f, x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)}.$$

Ha a Cauchy-féle középértéktételt az F' és a G' függvényekre az $[a, \xi_1]$ intervallumon alkalmazzuk, azt kapjuk, hogy

$$\exists \xi_2 \in (a, \xi_1) : \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F'(\xi_1) - F'(a)}{G'(\xi_1) - G'(a)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)}.$$

A fenti gondolatmenetet n -szer megismételve adódik, hogy

$$\exists \xi_{n+1} \in (a, \xi_n) : \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n)}(\xi_n) - F^{(n)}(a)}{G^{(n)}(\xi_n) - G^{(n)}(a)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})}.$$

A bizonyítás során kapott egyenlőségeket egybevetve azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f, x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F'(\xi_1)}{G'(\xi_1)} = \frac{F''(\xi_2)}{G''(\xi_2)} = \cdots = \frac{F^{(n)}(\xi_n)}{G^{(n)}(\xi_n)} = \frac{F^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{G^{(n+1)}(\xi_{n+1})},$$

ahonnan $F^{(n+1)} = f^{(n+1)} - T_{n,a}^{(n+1)} = f^{(n+1)}$ és $G^{(n+1)} = (n+1)!$ figyelembevételével azt kapjuk, hogy

$$\frac{f(x) - T_{n,a}(f, x)}{(x-a)^{n+1}} = \frac{f^{(n+1)}(\xi_{n+1})}{(n+1)!}$$

A $\xi := \xi_{n+1}$ választással a bizonyítandó állítást kapjuk. ■

Függvények egy fontos osztályára igaz, hogy egy rögzített a helyhez tartozó Taylor-polynomok sorozata egy $K(a)$ környezet bármely x helyén $f(x)$ -hez tart, ha $n \rightarrow +\infty$. Az egyik legegyszerűbb, de fontos ilyen jellegű téTEL a következő.

Tétel. (Elégséges feltétel az előállításra.) Legyen $f \in D^\infty(K(a))$, és tegyük fel, hogy

$$\exists M > 0 \text{ valós szám: } |f^{(n)}(x)| \leq M \quad (\forall x \in K(a), \forall n \in \mathbb{N}).$$

Ekkor f -nek az a ponthoz tartozó Taylor-sora a $K(a)$ halmazon előállítja az f függvényt, vagyis fennáll az

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (x \in K(a))$$

egyenlőség.

Bizonyítás. Legyen $x \in K(a)$ egy tetszőleges pont. Ekkor az előző téTEL alapján létezik olyan ξ pont a és x között, hogy

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \right| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \right| \leq M \cdot \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ebből a téTEL állítása már következik, mert

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} = 0. \blacksquare$$