ANALÍZIS 3. **2. ZÁRTHELYI** **2004. december 10.**

Programtervező matematikus szak

1. feladat. *Számítsa ki az*

$$\int e^{-x} \sin^2 x \, dx \qquad (x \in \mathbb{R})$$

határozatlan integrált.

Megoldás. A $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ $(x \in \mathbb{R})$ azonosság alapján

$$\int e^{-x} \sin^2 x \, dx = \int e^{-x} \frac{1-\cos 2x}{2} \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} - \frac{1}{2} \int e^{-x} \cos 2x \, dx.$$

Parciálisan integrálva azt kapjuk, hogy

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = -e^{-x} \cos 2x - 2 \int e^{-x} \sin 2x \, dx = -e^{-x} \cos 2x -$$

$$-2\Big[-e^{-x} \sin 2x + 2 \int e^{-x} \cos 2x \, dx\Big] = -e^{-x} \cos 2x + 2e^{-x} \sin 2x - 4 \int e^{-x} \cos 2x \, dx.$$

Az utolsó tagot a bal oldalra átvive, majd az egyenletet rendezve:

$$\int e^{-x} \cos 2x \, dx = -\frac{1}{5} e^{-x} \cos 2x + \frac{2}{5} e^{-x} \sin 2x + c \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Ezért

$$\int e^{-x} \sin^2 x \, dx = -\frac{e^{-x}}{2} + \frac{1}{10} e^{-x} \cos 2x - \frac{1}{5} e^{-x} \sin 2x + c \qquad (x \in \mathbb{R}). \ \blacksquare$$

2. feladat. *Mutassa meg, hogy az*

$$a_n := \frac{\sqrt{n^2+1^2} + 2 \cdot \sqrt{n^2+2^2} + \cdots + n \cdot \sqrt{n^2+n^2}}{n^3} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

sorozat konvergens, és számítsa ki a határértékét.

Megoldás. Az

$$a_n = \frac{1}{n} \left(\frac{1}{n} \cdot \sqrt{1 + \Big(\frac{1}{n}\Big)^2} + \frac{2}{n} \cdot \sqrt{1 + \Big(\frac{2}{n}\Big)^2} + \cdots + \frac{n}{n} \cdot \sqrt{1 + \Big(\frac{n}{n}\Big)^2} \right) \qquad (n \in \mathbb{N})$$

átalakításból következik, hogy a_n felfogható úgy is, mint az

$$f(x) := x\sqrt{1+x^2} \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvénynek a $[0,1]$ intervallum egyenletes felosztásához tartozó *felső* közelítő összege (f monoton növekedő $[0,1]$-en, mert két ilyen függvény szorzata!). Az f függvény folytonos, ezért integrálható $[0,1]$-en, és

$$\int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2x)\sqrt{1+x^2} \, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \Big[\frac{(1+x^2)^{3/2}}{3/2} \Big]_0^1 = \frac{1}{3}(2\sqrt{2} - 1).$$

Mivel f integrálható $[0,1]$-en, ezért a tanult tétel alapján a (τ_n) egyenletes felosztássorozathoz tartozó $S(f, \tau_n)(= a_n)$ $(n \in \mathbb{N})$ sorozat *konvergens*, és $\int_0^1 f$ a határértéke. Ezért az (a_n) sorozat valóban konvergens, és

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} \, dx = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}. \ \blacksquare$$

3. feladat. *Határozza meg az*

$$\int_{1/8}^{1} \frac{1}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x}}\,dx$$

integrált.

Megoldás. Először az integrandus egy primitív függvényét számítjuk ki. Alkalmazzuk a

$$t=\sqrt{\frac{x+3}{x}}=\sqrt{1+\frac{3}{x}}, \qquad \tfrac{1}{8}\le x\le 1,\quad 2\le t\le 5,$$

helyettesítést, azaz tekintsük az

$$x=\frac{3}{t^2-1}:=g(t) \qquad (2\le t\le 5)$$

helyettesítő függvényt. g nyilván szigorúan monoton csökkenő a $[2,5]$ intervallumon, deriválható és $g'(t)=-\frac{6t}{(t^2-1)^2}$ $(t\in[2,5])$, ezért a határozatlan integrálokra vonatkozó második helyettesítési szabályt alkalmazhatjuk:

$$\int \frac{1}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x}}\,dx=\int \frac{1}{\left(\frac{3}{t^2-1}+3\right)^2}\cdot t\cdot\frac{-6t}{(t^2-1)^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{x+3}{x}}}=$$

$$=-\frac{2}{3}\int\frac{1}{t^2}\,dt\Big|_{t=\sqrt{\frac{x+3}{x}}}=\frac{2}{3t}\Big|_{t=\sqrt{\frac{x+3}{x}}}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}}+c$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$\int_{1/8}^{1}\frac{1}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x}}\,dx=\left[\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}}\right]_{1/8}^{1}=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}+3}}=\frac{1}{3}-\frac{2}{15}=\frac{1}{5}. \quad \blacksquare$$

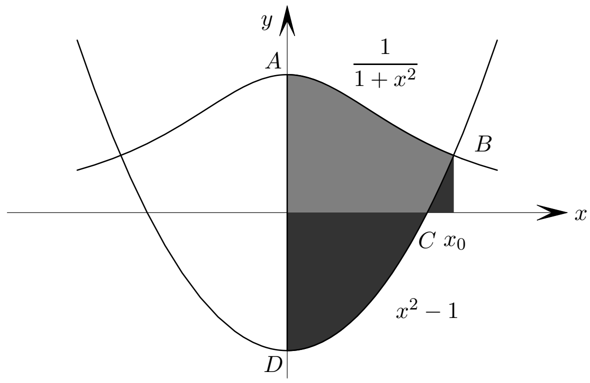
Megjegyzés. Az integrandus primitív függvényét meghatározhatjuk így is:

$$\int\frac{1}{(x+3)^2}\sqrt{\frac{x+3}{x}}\,dx=\int\frac{1}{x^2}\left(\frac{x}{x+3}\right)^2\sqrt{\frac{x+3}{x}}\,dx=\int\frac{1}{x^2}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-3/2}dx=$$

$$=\frac{2}{3}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{-1/2}+c=\frac{2}{3}\sqrt{\frac{x}{x+3}}+c \quad \blacksquare$$

4. feladat. *Számítsa ki az* $y=\dfrac{1}{1+x^2}$ *és az* $y=x^2-1$ *egyenletű görbék által meghatározott síkidom területét.*

Megoldás. Készítsünk ábrát! Az $y=\frac{1}{1+x^2}$ egyenletű görbe az $f(x):=\frac{1}{1+x^2}$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény, az $y=x^2-1$ egyenletű görbe pedig a $g(x):=x^2-1$ $(x\in\mathbb{R})$ függvény grafikonja. Mivel f és g páros függvények, ezért a szóban forgó síkidom az y-tengelyre szimmetrikus. Elég tehát az A,B,C és D pontok által meghatározott síkidom T területét kiszámolni.



A B pont x_0 abszcisszája az $\frac{1}{1+x^2}=x^2-1$ egyenlet alapján $x_0=\sqrt[4]{2}$.

Mivel

$$T=\int_0^{\sqrt[4]{2}}\frac{1}{1+x^2}\,dx-\int_1^{\sqrt[4]{2}}(x^2-1)\,dx-\int_0^1(x^2-1)\,dx=$$

$$=\int_0^{\sqrt[4]{2}}\frac{1}{1+x^2}\,dx-\int_0^{\sqrt[4]{2}}(x^2-1)\,dx=\Big[\operatorname{arctg}x\Big]_0^{\sqrt[4]{2}}-\Big[\frac{x^3}{3}-x\Big]_0^{\sqrt[4]{2}}=\operatorname{arctg}\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{2}+\frac{\sqrt[4]{8}}{3}.$$

ezért a kérdezett síkidom területe $2T$. ■

5. feladat. *Határozza meg az*

$$f(x):=\sqrt{\frac{\cos x}{2+\cos x}}\qquad\big(x\in(0,\tfrac{\pi}{2})\big)$$

függvény grafikonjának az x-tengely körüli megforgatásával adódó forgástest térfogatát.

Megoldás. A

$$V:=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}f^2(x)\,dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{2+\cos x}\,dx$$

integrált kell meghatároznunk.

Először az integrandus primitív függvényeit határozuk meg. Némi „ügyeskedéssel”

$$\int\frac{\cos x}{2+\cos x}\,dx=\int\left(1-\frac{2}{2+\cos x}\right)dx=x-2\int\frac{1}{3\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}\,dx=$$

$$=x-\frac{2}{3}\int\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)^2}\,dx=x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+c.$$

A Newton–Leibniz-tétel alapján tehát

$$V=\pi\left[x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\pi\left[\frac{\pi}{2}-\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\big(\frac{1}{\sqrt{3}}\big)\right]=\frac{\pi^2}{18}\big(9-4\sqrt{3}\big).$$

Megjegyzés. A primitív függvény meghatározásához a

$$t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\quad x=2\operatorname{arctg}t=:g(t)\ \ (t\in(0,\tfrac{\pi}{4}));\quad g'(t)=\frac{2}{1+t^2},\quad g\uparrow,$$

$$\cos x=\frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

helyettesítést is alkalmazhatjuk:

$$\int\frac{\cos x}{2+\cos x}\,dx=\int\frac{\frac{1-t^2}{1+t^2}}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}=2\int\frac{1-t^2}{(3+t^2)(1+t^2)}\,dt\Big|_{t=\operatorname{tg}\frac{x}{2}}.$$

Mivel

$$\frac{1-t^2}{(3+t^2)(1+t^2)}=\frac{(3+t^2)-2(1+t^2)}{(3+t^2)(1+t^2)}=\frac{1}{1+t^2}-\frac{2}{3+t^2},$$

ezért

$$\int\frac{1-t^2}{(3+t^2)(1+t^2)}\,dt=\operatorname{arctg}t-\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\big(\frac{t}{\sqrt{3}}\big)+c.$$

Így

$$\int\frac{\cos x}{2+\cos x}\,dx=x-\frac{4\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)+c.$$

■