Néhány nevezetes síkgörbe

Javasolt irodalom:

http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history

Itt a matematikusokról (életrajz, munkásság, stb.) és számos nevezetes görbéről is (ki vizsgálta és miért, definíciójuk, stb.) találunk érdekes információkat.

Síkgörbék megadásának módjai

1. Explicit: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (például C^1-beli) függvény képe.

2. Implicit: $F(x, y) = 0$, ahol $F \in \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1$ adott függvény.

3. Paraméteres alakban:

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t), \end{aligned} \qquad (t \in [\alpha, \beta]), \qquad \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2.$$

4. Polárkoordinátákban: egy

$$r = r(\varphi) \quad (\varphi \in I \subset \mathbb{R})$$

függvénnyel.

Síkgörbék (egy) osztályozása

1. Algebrai görbék. Ezek lehetnek például

- másodrendűek,
- harmadrendűek,
- negyedrendűek.

2. Cikloisok.

3. Spirálisok.

ALGEBRAI GÖRBÉK

Egy síkgörbét n-**edrendű algebrai görbének** nevezünk, ha egy kétváltozós, n összfokszámú, $F(x, y) = 0$ alakú polinomegyenlettel írható le.

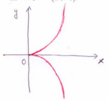
Másodrendű görbék.

Ezek a jól ismert kúpszeletek: az ellipszis, a parabola és a hiperbola.

Harmadrendű görbék.

1. Szemikubikus parabola:

$$y^2 - ax^3 = 0 \qquad (a > 0).$$



2. A Descartes-féle levél:

$$x^3 + y^3 = 3\alpha xy \qquad (\alpha > 0).$$

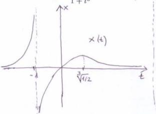
Ennek ábrázolásához két észrevételt teszünk:

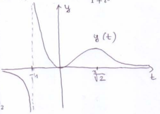
Az első észrevétel: a $t := \frac{y}{x}$ paraméter bevezetésével a görbe paraméteres alakját egyszerűen megkaphatjuk, ui. az

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3\alpha \frac{y}{x} \cdot \frac{1}{x}, \quad \text{ill. az} \quad 1 + t^3 = \frac{3\alpha t}{x}$$

alapján a görbe egy **paraméteres alakja:**

$$x(t) = \frac{3\alpha t}{1+t^3}, \qquad (t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}) \qquad y(t) = \frac{3\alpha t^2}{1+t^3}.$$





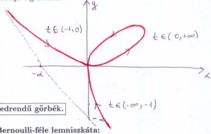
A második észrevétel az, hogy a görbének $(+\infty)$-ben és $(-\infty)$-ben is van aszimptotája. Valóban, ha $y = f(x)$, akkor $\frac{f(x)}{x} = \frac{y}{x}$ és

$$1 + \left(\frac{y}{x}\right)^3 = 3\alpha\frac{y}{x}\cdot\frac{1}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{y}{x} = \frac{f(x)}{x} \to -1 =: a, \quad \text{ha } x \to \pm\infty.$$

Másrészt

$$f(x) - ax = y + x = \frac{3\alpha xy}{x^2 - xy + y^2} = \frac{3\alpha\cdot\frac{y}{x}}{1 - \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \to -\alpha, \quad \text{ha } x \to \pm\infty,$$

és ez azt jelenti, hogy az $x + y + \alpha = 0$ egyenletű egyenes $(+\infty)$-ben és $(-\infty)$-ben is aszimptotája a görbének.



Negyedrendű görbék.

1. A Bernoulli-féle lemniszkáta:

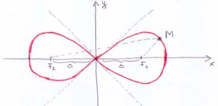
$$\left(x^2 + y^2\right)^2 - 2a^2\left(x^2 - y^2\right) = 0 \qquad (a > 0).$$

A görbe egyenletét *polárkoordinátákban* az

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

helyettesítéssel kapjuk meg:

$$r = a\sqrt{2\cos 2\varphi} \qquad \left(\varphi \in \left[-\tfrac{\pi}{4}, \tfrac{\pi}{4}\right] \cup \left[-\tfrac{3}{4}\pi, \tfrac{5}{4}\pi\right]\right)$$



Meggondolható, hogy azon M pontok mértani helyéről van szó, amelyekre

$$\overline{F_1M} \cdot \overline{F_2M} = \left(\frac{\overline{F_1F_2}}{2}\right)^2.$$

$\boxed{2.}$ **Kardiodid:**

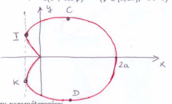
$$\left(x^2+y^2\right)^2 - 2ax\left(x^2+y^2\right) = a^2y^2 \qquad (a>0).$$

A görbe egyenletét *polárkoordinátákban* az

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi$$

helyettesítéssel kapjuk meg:

$$r = a(1+\cos\varphi) \qquad \left(\varphi \in [0, 2\pi],\ a>0\right)$$



A görbe egy paraméterezése:

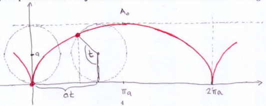
$$x(t) = a(\cos t)(1+\cos t), \qquad y(t) = a(\sin t)(1+\cos t), \qquad \left(\varphi \in [0, 2\pi]\right).$$

Ennek felhasználásával a C, D, I, K „nevezetes" pontok meghatározhatók.

CIKLOISOK

$\boxed{1.}$ **Közönséges ciklois** az olyan görbe, amelyet egy egyenesen csúszás nélkül gördülő körnek egy pontja ír le.

A görbe **paraméteres alakját** az alábbi ábra felhasználásával határozzuk meg:



$$x(t) = a(t - \sin t)$$
$$y(t) = a(1 - \cos t) \qquad (t \in \mathbb{R}, \quad a > 0).$$

A görbe *periodikus*, periódusa $2\pi a$. Az érintő irányvektora a t_0 paraméterű $\big(x(t_0), y(t_0)\big)$ pontban

$$\big(x'(t_0), y'(t_0)\big) = \big(a(1 - \cos t_0), a \sin t_0\big),$$

ezért az érintő meredeksége:

$$\frac{a \sin t_0}{a(1 - \cos t_0)} = \frac{2 \sin \frac{t_0}{2} \cos \frac{t_0}{2}}{2 \sin^2 \frac{t_0}{2}} = \operatorname{ctg} \frac{t_0}{2}.$$

A $t_0 = \pi + 2k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ paraméterű pontokban, azaz a görbe

$$A_k = \big(a(2k + 1)\pi, 2a\big) \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

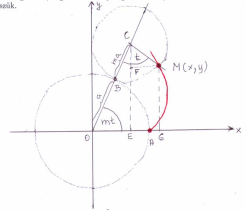
pontjaiban az érintő vízszintes. Mivel

$$\lim_{t \to 0+0} \operatorname{ctg} \frac{t}{2} = +\infty,$$

ezért a 0 (hasonlóan a $2k\pi a$, $k \in \mathbb{Z}$) abszcisszájú pont(ok)ban az érintő függőleges.

$\boxed{2.}$ **Epiciklois** (pl. a **kardiodid**) az olyan görbe, amelyet egy kör külső oldalán csúszás nélkül legördülő másik körnek egy kerületi pontja ír le.

A **paraméteres alakját** az alábbi ábra felhasználásával határozzuk meg. A rögzített kös sugara: a, a gördülő köré pedig ma. A t paraméternek az $\measuredangle OCM$ szöget vesszük.



A csúszás nélküli gördülés azt jelenti, hogy az A és B, valamint a B és M pontot összekötő körívek hossza megegyezik, azaz

$$\widehat{AB} = \widehat{MB}.$$

Mivel

$$\widehat{MB} = m \cdot a \cdot t = \widehat{AB} = a \cdot \sphericalangle AOB,$$

ezért

$$\sphericalangle AOB = m \cdot t.$$

Az ábra alapján

$$x = \overline{OG} = \overline{OE} + \overline{FM} = (a + ma)\cos(mt) + ma \sin \sphericalangle FCM.$$

Mivel

$$\sphericalangle FCM = \sphericalangle BCM - \sphericalangle OCE \quad \text{és} \quad \sphericalangle OCE = \tfrac{\pi}{2} - mt,$$

ezért

$$\sin \sphericalangle FCM = \sin\big[(1+m)t - \tfrac{\pi}{2}\big] = -\cos\big[(1+m)t\big].$$

Azt kaptuk tehát, hogy

$$x = a(1+m)\cos(mt) - am\cos\big[(1+m)t\big].$$

Az M pont y koordinátája:

$$y = \overline{MG} = \overline{EC} - \overline{FC} = a(1+m)\sin(mt) - am\sin\big[(1+m)t\big].$$

Az epiciklois paraméteres egyenletei tehát:

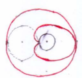
$$\begin{aligned} x(t) &= a(1+m)\cos(mt) - am\cos\big[(1+m)t\big] \\ y(t) &= a(1+m)\sin(mt) - am\sin\big[(1+m)t\big]. \end{aligned} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

A görbék alakja az $m = \frac{\text{gördülő kör sugara}}{\text{rögzített kör sugara}}$ hányadostól függ.

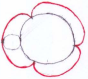
Például:

$m = 1$

$m = 2$



$m = \frac{1}{3}$



ez egy **kardiodid**

3. **Hipociklois** (pl. a **asztrois**) az olyan görbe, amelyet egy kör belső oldalán csúszás nélkül legördülő másik körnek egy kerületi pontja ír le.

Paraméteres alakjuk az epicikloisnál bemutatott módszerrel határozhatók meg:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a(1-m)\cos(mt) + am\cos\big[(1-m)t\big] \\ y(t) &= -a(1-m)\sin(mt) + am\sin\big[(1-m)t\big]. \end{aligned}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Itt m ugyanazt jelöli, mint az epicikloisnál:

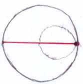
$$m = \frac{\text{gördülő kör sugara}}{\text{rögzített kör sugara}}.$$

Ezeket az egyenleteket az epiciklois egyenleteiből (formálisan) úgy kapjuk meg, hogy m helyébe $(-m)$-et írunk.

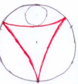
Az $m = \frac{1}{2}$ esetén a görbe a rögzített kör átmérőjévé fajul el. A görbék alakja itt is az m hányadostól függ.

Például:

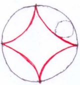
$m = \frac{1}{2}$



$m = \frac{1}{3}$



$m = \frac{1}{4}$



asztrois

Az **asztrois** egy paraméterezése tehát:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= \tfrac{3}{4}a\cos\tfrac{t}{4} + \tfrac{a}{4}\cos\big(\tfrac{3}{4}t\big) \\ y(t) &= -\tfrac{3}{4}a\sin\tfrac{t}{4} + \tfrac{a}{4}\sin\big(\tfrac{3}{4}t\big) \end{aligned}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Írjunk itt t helyébe $(-4t)$-t és használjuk fel a $\cos 3t = 4\cos^3 t - 3\cos t$, $\sin 3t = 3\sin t - 4\sin^3 t$ azonosságokat. Ekkor az asztrois alábbi paraméterezését kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= a\cos^3 t, \\ y(t) &= a\sin^3 t \end{aligned}\right. \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

amiből már egyszerűen adódik a Descartes-koordinátás egyenlet is:

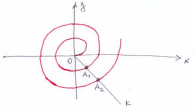
$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} \qquad (a > 0).$$

SPIRÁLISOK

1. **Archimédeszi spirális** az olyan görbe, amelyet egy, a koordinátarendszer kezdőpontja körül állandó ω szögsebességgel (pl. pozitív irányban) forgó félegyenesen állandó v sebességgel mozgó pont ír le.

A görbe egyenlete **polárkoordinátákban**:

$$r = a\varphi \qquad \left(\varphi \geq 0, \quad a = \tfrac{v}{\omega}\right).$$



Minden OK félegyenes a görbét olyan $O, A_1, A_2, \dots$ pontokban metszi, amelyek egymástól mért távolsága $\overline{A_iA_{i+1}} = 2\pi a$.

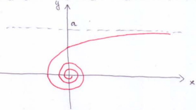
2. A **hiperbolikus spirális** egyenlete polárkoordinátákban:

$$r = \frac{a}{\varphi} \qquad (\varphi > 0, \quad a > 0).$$

Mivel $x = a\frac{\cos\varphi}{\varphi}$ és $y = a\frac{\sin\varphi}{\varphi}$, ezért

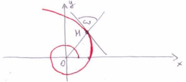
$$\lim_{\varphi \to 0+0} y = \lim_{\varphi \to 0+0} a\frac{\sin\varphi}{\varphi} = a,$$

ami azt jelenti, hogy a görbének az $y = a$ egyenletű egyenes aszimptotája $(+\infty)$-ben.



$\boxed{3.}$ A **logaritmikus spirális** egyenlete polárkoordinátákban:

$$r = ae^{k\varphi} \qquad (\varphi \geq 0,\ a > 0,\ k > 0).$$



($k = 0$ esetén kört kapnánk.)

Megmutatjuk, hogy a logaritmikus spirális olyan görbe, amelyik a koordinátarendszer O kezdőpontjából kiinduló minden félegyenest azonos ω szög alatt metsz. Ez azt jelenti, hogy a görbe minden M pontjában az M-beli érintőnek és az OM félegyenesnek a szöge ugyanannyi (ω).

Ennek az érdekes tulajdonságnak az igazolásához felhasználjuk az alábbi hasznos állítást:

Tétel. *Legyen a Γ görbe polárkoordinátákban adott egyenlete $r = r(\varphi)$ $(\varphi \in I)$. Tegyük fel, hogy az $r(\varphi)$ függvény deriválható és $0 \notin \mathcal{R}_{r'}$. Ekkor a Γ görbének tetszőleges $P_0 = (r(\varphi_0), \varphi_0)$ pontjában van érintője. Az érintőegyenesnek és az OP_0 félegyenesnek az ω hajlásszögére a*

$$\operatorname{tg}\omega = \frac{r(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)}$$

képlet érvényes.

Bizonyítás. A Γ görbe egy paraméteres előállítása:

$$x(\varphi) = r(\varphi)\cos\varphi$$
$$y(\varphi) = r(\varphi)\sin\varphi.$$

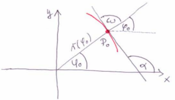
A φ_0 paraméterhez tartozó P_0 pontban az érintővektor (a feltétel miatt ez létezik!)

$$\big(x'(\varphi_0), y'(\varphi_0)\big) = \big(r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0;\ r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + r(\varphi_0)\cos\varphi_0\big),$$

ezért ebben a pontban az érintő iránytangense:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{r'(\varphi_0)\sin\varphi_0 + r(\varphi_0)\cos\varphi_0}{r'(\varphi_0)\cos\varphi_0 - r(\varphi_0)\sin\varphi_0} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\varphi_0 + \frac{r(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)}}{1 - \frac{r(\varphi_0)}{r'(\varphi_0)}\cdot\operatorname{tg}\varphi_0}.$$



Mivel $\alpha = \varphi_0 + \omega$, ezért

$$\operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg}\left(\varphi_0 + \omega\right) = \frac{\operatorname{tg} \varphi_0 + \operatorname{tg} \omega}{1 - \operatorname{tg} \varphi_0 \cdot \operatorname{tg} \omega},$$

amiből már következik az állítás. ∎

A logaritmikus spirális megfogalmazott tulajdonságának az igazolásához csupán azt kell megjegyeznünk, hogy

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{r(\varphi)}{r'(\varphi)} = \frac{ae^{k\varphi}}{ake^{k\varphi}} = \frac{1}{k}$$

minden $\varphi \geq 0$ esetén.