

Analízis 3. vizsga írásbeli része

(Minták)

1. Legyen $f \in D(0, 1) \cap C[0, 1]$, $f'(x) \neq 0$ ($x \in (0, 1)$). Lehet-e $f(0) = f(1)$?
 2. Hogyan értelmezi a π számot?
 3. Adjon meg egy elégséges feltételt arra vonatkozóan, hogy egy függvény Taylor-sora előállítsa a függvényt!
 4. Igaz-e az, hogy egy differenciálható $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ függvény szigorúan növekedő akkor és csak akkor, ha $f'(x) > 0$ ($x \in (a, b)$)?
 5. Fogalmazza meg a lokális minimum létezésére vonatkozó másodrendű elégséges feltételt!
 6. Fogalmazza meg a Banach-féle fixpont-tételt!
 7. Adjon meg olyan $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, aminek nincs primitív függvénye!
 8. Fogalmazza meg a primitív függvényekre vonatkozó parciális integrálás elvét!
 9. Adjon meg olyan függvényt, aminek van primitív függvénye, de az nem elemi függvény!
 10. Definiálja az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ korlátos függvény Darboux-féle felső integrálját!
 11. Milyen tételt ismer a Riemann-integrálhatóság oszcillációs összegekkel való jellemzésére?
 12. Igaz-e az, hogy ha az $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ függvény integrálható, akkor folytonos is?
 13. Fogalmazza meg a Newton–Leibniz-tételt!
 14. Konvergens-e a $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$ improprius integrál? Ha igen, akkor mi az értéke?
 15. Definiálja \mathbb{R}^n -ben ($n = 1, 2, \dots$) a ϱ_1 -es metrikát!
-

1. Igaz-e, hogy ha egy intervallumon értelmezett, differenciálható valós függvény deriváltja sehol sem nulla, akkor a függvény invertálható?
2. Fogalmazza meg a $\frac{0}{0}$ típusú határértékekre vonatkozó L'Hospital-szabályt!
3. Fogalmazza meg a Taylor-formulát a Lagrange-féle maradéktaggal!
4. Igaz-e az, hogy ha egy f függvény Taylor-sora konvergens, akkor a konvergenciahalmazon a Taylor-sor összegfüggvénye f -fel egyenlő?
5. Igazolja, hogy ha $f : [a, b] \rightarrow [a, b]$ deriválható és van olyan $\alpha < 1$ valós szám, hogy
$$|f'(x)| \leq \alpha \quad (x \in [a, b]),$$
akkor f kontrakció!
6. Definiálja a primitív függvényt!
7. Fogalmazza meg a primitív függvényekre vonatkozó második helyettesítési szabályt!
8. Milyen tételt ismer két függvény hányadosának integrálhatóságával kapcsolatban?
9. Mutassa meg, hogy a $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$ halmaz Lebesgue szerint nullamértékű halmaz!
10. Milyen állítást ismer a binomiális sor konvergenciájával kapcsolatban?
11. Tegyük fel, hogy az $|f(x)|$ ($x \in [-1, 1]$) függvény integrálható. Következik-e ebből az, hogy f is integrálható a $[-1, 1]$ intervallumon?
12. Legyen $f(x) := \frac{\sin x}{x}$, ha $x \in (0, 1]$ és $f(0) := 0$. Igaz-e az, hogy $f \in R[0, 1]$?
13. Mit jelent az, hogy egy $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ sima görbe rektifikálható, és hogyan definiálja az ívhosszát?
14. Milyen $\alpha \in (0, +\infty)$ esetén konvergens az $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ improprius integrál? Válaszát indokolja!
15. Fogalmazza meg az integrálokra vonatkozó Hölder-egyenlőtlenséget.