

2022 年度  
修 士 論 文

自己励起 NBD 過程  
と  
金融時系列データへの応用

指導教員 守 真太郎 教授

弘前大学大学院 理工学研究科  
博士前期課程 理工学専攻  
数理科学コース

学生証番号：21MS111

氏名：服部 航大

## 概要

本論文では、多期間ポリア壺過程を導入し、極限操作により離散時間自己励起負の 2 項分布 (SE-NBD) 過程を、さらに連続時間極限によりマーク付き Hawkes 過程を導出する。離散時間 SE-NBD 過程は多期間ポリア壺過程の持つ同時刻相関と異時刻相関の 2 つの相関構造を持ち、特にマーク付き Hawkes 過程でのマークの分布関数、または条件付強度関数の分散に同時刻相関が反映している。さらに離散時間 SE-NBD 過程を多次元に拡張しクラスタリング表現が可能となった。以上の確率過程を金融デフォルトデータに適用し、離散時間 SE-NBD 過程が離散時間 Hawkes 過程よりも有用であることを示す。多次元のモデルを多業種のデフォルト時系列データに適用することで、業界間のデフォルトの影響を可視化することに成功した。

# 目次

第 1 章	はじめに	2
第 2 章	Hawkes 過程	4
2.1	定義 . . . . .	4
2.2	拡張 . . . . .	7
2.3	特性 . . . . .	9
第 3 章	自己励起 NBD 過程	15
3.1	多期間壺過程と Hawkes 過程 . . . . .	16
3.2	二重スケーリング極限：BBD から NBD へ . . . . .	18
3.3	連続時間極限 . . . . .	20
3.4	自己励起 NBD 過程の相転移 . . . . .	22
3.5	パラメータ推定 . . . . .	23
第 4 章	多次元自己励起 NBD 過程とデータ分析	28
4.1	多次元自己励起 NBD 過程 . . . . .	28
4.2	連続極限 . . . . .	31
4.3	パラメータ推定 . . . . .	33
第 5 章	まとめ	40

# 第 1 章

## はじめに

世の中の現象の発生の多くは、過去の現象の影響を受けている。中でも、地震や SNS 上での会話、脳神経細胞のスパイク、金融市場での取引などはイベントが起きることで、以降のイベントの起きやすさが上昇する特性を持っていると考えられている。地震でいえば、東日本大震災の最初の地震が 3 月 11 日に起きてから、長期間連続して地震が頻繁に発生した。つまり、3 月 11 日の地震がトリガーとなり、それによってその後の地震が誘発されたと考えられる。金融時系列でも取引頻度は一定ではなく、取引が次の取引を呼び込むようなことが知られている。こうした特性を自己励起性と呼び、この特性を再現できる Hawkes 過程が前述のイベントのモデル化によく用いられる。

Hawkes 過程は過去のすべてのイベントに依存する点過程の一種であり、条件付き強度関数によって特徴づけられる自己励起過程である。この過程がもつ強度関数は線形であるため、解析的に非常に扱いやすい過程となっている。また、先で述べたように、地震のようなクラスター性を持ったイベントを表現でき、分岐過程としても解釈できることから、多くの分野で応用されている。近年では、金融の分野で注目されている。というのも、前述のように金融における取引イベントも地震と同様にクラスターリング性をもつと考えられているから、Hawkes 過程が扱われている。

しかし、Hawkes 過程は有用性が多くある一方で、離散時間モデルでは同時刻の相関を表現できないという欠点がある。つまり、Hawkes 過程は過去イベントの影響を現在に反映することはできるが、同じ期間に起きたイベントの影響を反映することができないモデルである。例えば、1 日におきた地震の回数をイベントサイズとする。このとき、1 日毎の地震の回数のデータに離散時間 Hawkes 過程を用いて分析を行うことを考える。この場合、一日前までの地震の回数の影響が今日起きる地震の回数（イベントサイズ）に影響を与えるようなモデルが再現ができる。しかし、実際は前日の地震だけでなく、数秒前や数時間前のような同じ日に起きた地震の影響も受けて地震の回数は変動するはずであるから、離散時間 Hawkes 過程では 1 日毎の地震のデータ

は完全に再現することができないと考えられる。これは、離散時間 Hawkes 過程のある時刻に起きるイベント数の分布が単なる Poisson 分布に従っていることによる。そこで、過去の影響だけでなく、同時刻の影響も再現できる自己励起 NBD(SE-NBD) 過程を紹介する。

SE-NBD 過程も Hawkes 過程と同様に、自己励起過程であり、クラスター性をもつイベントを再現することができる。ただ、Hawkes 過程とは異なり、離散時間 SE-NBD(DT-SE-NBD) 過程は同時刻の相関も考慮できることで、より実際のイベント間の影響を表すことができるモデルである。この過程では、ある時刻におけるイベント数は負の二項分布 (NBD) に従うことから、期待値と分散は独立にコントロール可能となり、同時刻の相関を考慮できる。また、NBD の再生性から Hawkes 同様、連続時間に拡張することができる。さらに多次元モデルにも拡張できることから非常に有用な過程である。

この論文は以下のように構成している。第 2 章では、Hawkes 過程について紹介していく。第 3 章では、自己励起 NBD(SE-NBD) 過程を導入し、その特性について説明する。また、SE-NBD 過程を用いたデフォルトデータ分析による結果も示す。これを通して、まず SE-NBD 過程と Hawkes 過程の関係性と違いを説明する。次にデータ分析の結果から、SE-NBD 過程が Hawkes 過程よりも有用であることを示す。第 4 章では、SE-NBD 過程を多次元に拡張した多次元 SE-NBD 過程を紹介し、そのモデルを用いたデフォルトデータ分析の結果を示す。ここで、実際のデフォルトが自己励起性を持ち、他セクターのデフォルトとも相互作用していることを示す。最後に第 5 章で、本論文のまとめを述べる。

## 第 2 章

# Hawkes 過程

本章では、Hawkes 過程の定義と特性について説明していく。Hawkes 過程は 1970 年代初頭に Hawkes[10, 11] によって導入された点過程の一種であり、条件付き強度関数によって特徴付けられる過程である。ここで、強度とはイベントの起きやすさを意味し、強度が時間変化する場合は強度関数によってそれを表す。さらに、時間変化するだけでなく過去のイベントにも依存する場合には条件付き強度関数によってイベントの起きやすさを表す。一般の点過程は時刻  $t$  における条件付き強度関数  $\lambda_t$  によって特徴付けられ、その  $\lambda_t$  は計数過程  $N_t$  を用いて次式で定義される。

$$\lambda_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} \mathbb{E}[N_{t+\Delta} - N_t | \mathcal{F}_t] \quad (2.1)$$

$\mathcal{F}_t$  は時刻  $t$  までのイベント情報（時刻  $t$  は含まない）を示す。

例として、Poisson 過程の場合、過去のイベントには依存せず、時刻  $t$  にのみ依存する強度関数  $\lambda_t = \lambda(t)$  で特徴づけられるが、Hawkes 過程の場合は過去のイベントに依存する単純な線形関数  $\lambda(t | \mathcal{F}_t)$  で表せられる。

### 2.1 定義

**定義 1 (Hawkes 過程)** Hawkes 過程は、強度関数が以下のように定義される計数過程  $N_t$  である。

$$\lambda_t^i = \mu^i + \sum_{j=1}^D \int dN_{t'}^j \phi^{ij}(t - t') \quad (2.2)$$

ここで  $\mu = \{\mu^i\}_{i=1}^D$  は外因性強度を表し、 $\Phi(t) = \{\phi^{ij}(t)\}_{i,j=1}^D$  は以下を満たすカーネル行列である。

- $\phi^{ij}(t) \geq 0$  for each  $1 \leq i, j \leq D$

- if  $t < 0$ ,  $\phi^{ij}(t) = 0$  for each  $1 \leq i, j \leq D$
- カーネル行列の各成分  $\phi^{ij}(t)$  は  $L^1$  に属する

すなわち, Hawkes 過程はイベントの起きやすさが,  $\mu$  を基準として過去のイベントの影響によって大きくなる過程であることがわかる. また, 3つの条件を満たすカーネル関数  $\Phi(t)$  を決めてやることにより一意に決まる過程である.

まず, Hawkes 過程の定常条件を示す. 定常性を仮定することで, 点過程の様々な性質を解析的に調べることが可能になる. Hawkes 過程においても同様に, 様々な分野に応用するにあたって非常に重要な性質である.

**命題 1 (定常性)**  $\lambda_t$  のカーネル関数がつぎの仮定 **(H)** を満たすとき, Hawkes 過程  $N_t$  は定常増分性を持ち, 定常な点過程となる. これは安定条件とも呼ばれる.

**(H)** スペクトル半径  $\|\Phi\| = \{\|\phi^{ij}\|\}_{i,j=1}^D$  が 1 未満

ここで, スペクトル半径とは固有値の最大値を表す.

**(証明)** 2次元 Hawkes 過程を考える. 定常状態における平均強度関数を  $\Lambda_1, \Lambda_2$  とする. このとき定常であることを仮定すると,  $i = 1$  のとき

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[dN_t^1] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_{t+\Delta}^1 - N_t^1 | \mathcal{F}_t]] \\
&= \mathbb{E}[\lambda_t^1] \Delta \quad (\because \text{式2.1}) \\
&= \mathbb{E} \left[ \mu^1 + \int_{-\infty}^t dN_{t'}^1 \phi^{11}(t-t') + \int_{-\infty}^t dN_{t'}^2 \phi^{12}(t-t') \right] \Delta \\
&= \left( \mu^1 + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \{ \mathbb{E}[dN_{t-(i+1)\Delta}^1] \phi^{11}(i\Delta) + \mathbb{E}[dN_{t-(i+1)\Delta}^2] \phi^{12}(i\Delta) \} \right) \Delta \\
&= \left( \mu^1 + \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} \{ \Lambda_1 \phi^{11}(i\Delta) \Delta + \Lambda_2 \phi^{12}(i\Delta) \Delta \} \right) \Delta
\end{aligned}$$

$\Delta = 1/s$  とおくと

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[dN_t^1] &= \left( \mu^1 + \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{\infty} \left\{ \Lambda_1 \phi^{11} \left( \frac{i}{s} \right) \frac{1}{s} + \Lambda_2 \phi^{12} \left( \frac{i}{s} \right) \frac{1}{s} \right\} \right) \Delta \\
&= \left( \mu^1 + \Lambda_1 \int_0^{\infty} \phi^{11}(\tau) d\tau + \Lambda_2 \int_0^{\infty} \phi^{12}(\tau) d\tau \right) \Delta \quad (2.3)
\end{aligned}$$

このとき定常であるから, 上式の左辺は  $\mathbb{E}[dN_t^1] = \Lambda_1 \Delta$  となる. よって

$$\Lambda_1 = \frac{\mu^1 + \Lambda_2 \int_0^{\infty} \phi^{12}(\tau) d\tau}{1 - \int_0^{\infty} \phi^{11}(\tau) d\tau}$$

$i = 2$  の場合も同様に

$$\Lambda_2 = \frac{\mu^2 + \Lambda_1 \int_0^\infty \phi^{21}(\tau) d\tau}{1 - \int_0^\infty \phi^{22}(\tau) d\tau}$$

すなわち,

$$\Lambda_1 = \frac{(1 - \int_0^\infty \phi^{22}(\tau) d\tau) \mu^1 + \int_0^\infty \phi^{12}(\tau) d\tau \mu^2}{(1 - \int_0^\infty \phi^{11}(\tau) d\tau) (1 - \int_0^\infty \phi^{22}(\tau) d\tau) - \int_0^\infty \phi^{12}(\tau) d\tau \int_0^\infty \phi^{21}(\tau) d\tau}$$

定常であるとき平均強度は非負の値になるので

$$\begin{aligned} & \left(1 - \int_0^\infty \phi^{11}(\tau) d\tau\right) \left(1 - \int_0^\infty \phi^{22}(\tau) d\tau\right) - \int_0^\infty \phi^{12}(\tau) d\tau \int_0^\infty \phi^{21}(\tau) d\tau > 0 \\ \therefore & \frac{\int_0^\infty \phi^{11}(\tau) d\tau + \int_0^\infty \phi^{22}(\tau) d\tau}{2} \\ & \pm \frac{\sqrt{(\int_0^\infty \phi^{11}(\tau) d\tau - \int_0^\infty \phi^{22}(\tau) d\tau)^2 + 4 \int_0^\infty \phi^{12}(\tau) d\tau \int_0^\infty \phi^{21}(\tau) d\tau}}{2} < 1 \quad (2.4) \end{aligned}$$

これが定常条件となる.

次に (H) が式 (2.4) に等しくなることを示す. カーネル行列を次のように仮定する.

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^{11}(t) & \phi^{12}(t) \\ \phi^{21}(t) & \phi^{22}(t) \end{pmatrix}$$

このとき, 固有値  $A$  は以下のようになる.

$$\begin{aligned} A &= \frac{\int \phi^{11}(t) dt + \int \phi^{22}(t) dt}{2} \\ &\pm \frac{\sqrt{(\int \phi^{11}(t) dt - \int \phi^{22}(t) dt)^2 + 4 \int \phi^{12}(t) dt \int \phi^{21}(t) dt}}{2} \end{aligned}$$

すなわち, スペクトル半径は  $\max(A)$  であり, スペクトル半径が 1 未満であることは上で示した定常条件 (2.4) に一致する.  $\square$

ここで,  $\mathbb{E}[\cdot]$  は定常状態での平均を表す.

以降  $\mathbb{E}[\cdot]$ ,  $\mathbb{V}[\cdot]$  は定常状態における平均と分散を表し, 指定しない限り定常条件 (H) が成り立つとする.

次に, Hawkes 過程の典型的な例であるカーネル関数  $\phi^{ij}(t)$  が指数関数の場合と冪乗則の場合について紹介する.

**例 1 (Exponential kernel)** カーネル行列の形式が式 (2.5) である 2 次元 Hawkes 過程について考える.

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} \phi^{(s)}(t) & \phi^{(c)}(t) \\ \phi^{(c)}(t) & \phi^{(s)}(t) \end{pmatrix} \quad (2.5)$$



ここで各成分は指数関数で次式で表される.

$$\phi^{(s)}(t) = \alpha^{(s)} \beta^{(s)} e^{-\beta^{(s)} t} \mathbf{1}_{t \in \mathbb{R}^+} \quad (2.6a)$$

$$\phi^{(c)}(t) = \alpha^{(c)} \beta^{(c)} e^{-\beta^{(c)} t} \mathbf{1}_{t \in \mathbb{R}^+} \quad (2.6b)$$

ここで,  $\mathbf{1}_x$  は指示関数を示している. カーネル関数の条件より式 (2.5) は  $L^1$  積分可能であるため,  $\alpha, \beta > 0$  の場合に Hawkes 過程が一意に決まる. また, 過程の定常条件は  $\|\Phi\| = \|\phi^{(s)}\| + \|\phi^{(c)}\| < 1$  であり,  $\alpha^{(s)} = \int_0^\infty \phi^{(s)}(t)$  より

$$\alpha^{(s)} + \alpha^{(c)} < 1 \quad (2.7)$$

つまり,  $\alpha$  は相互作用の強さを表すパラメータで,  $\beta$  は, 未来のイベントへの影響の緩和時間を制御するパラメータであると解釈することができる.

**例 2 (Power-law kernel)** ここで  $D = 1$  で, カーネルが式 (2.8) のような冪乗則である場合を考える.

$$\Phi(t) = \frac{\alpha\beta}{(1 + \beta t)^{1+\gamma}} \mathbf{1}_{t \in \mathbb{R}^+} \quad (2.8)$$

この場合過程は  $\alpha, \beta > 0$  に対して一意に決まる. このとき, 定常条件 (H) より次が満たされる.

$$\alpha < \gamma \quad (2.9)$$

つまり, 冪乗則カーネルのテール指数  $\gamma$  が正であるときに過程が定常となる.

## 2.2 拡張

これまでのセクションで定義されたモデルは [10, 11] で最初に導入されたモデルであり, 多くの文献で用いられている. しかし, それから現在に至るまでいくつかの一般化が提案されている. そのうちの一部を紹介していく.

### 2.2.1 マーク付き Hawkes 過程

Hawkes 過程はマーク変数を使用することで, イベント時間とイベントの種類にプラスしてイベントサイズなどの情報を付加することができる. これにより, 異なるマークでラベル付けされたイベントごとに, 将来の強度に与える影響を区別することができ, より一般的なモデルを得ることができる. これをマーク付き Hawkes 過程と呼

び、強度関数はマーク  $\{(t_m, k_m, \xi_m)\}_{m=1}^M$  を用いて次式のような形で得られる.

$$\lambda_t^i = \mu^i + \sum_{m=1}^M \phi^{i, k_m}(t - t_m, \xi_m) \quad (2.10)$$

一般的にマーク  $\xi$  は共通の分布  $p(\xi)$  からサンプリングされ、独立同分布に従う確率変数であると仮定する. また、カーネル  $\phi$  は通常のカネルとマークによる影響  $\chi$  について因数分解された  $\phi^{ij}(t, \xi) = \phi^{ij}(t)\chi^{ij}(\xi)$  のような形式を想定する. マーク付き Hawkes 過程は異なる重みを持つイベントを再現するのに用いられ、元々マグニチュードが異なる地震の発生のモデルに使用されてきた [19]. 金融では、マーク  $\xi_m$  は時刻  $t_m$  に起きたイベントのボリューム [8, 2] やドローダウン [20, 24] による影響をモデル化するのに使用される. ここで、多次元 Hawkes 過程はイベントの種類を区別するマーク付き Hawkes 過程として見るができることに注意してください [17].

## 2.2.2 非定常外因性

外因性強度  $\mu$  は時刻  $t$  による関数  $\mu(t)$  に一般化できる. つまり、もともとの基準の強度が時間変化する場合にも対応できる. これによって、金融市場における日中の季節性 ([4] を参照) のような非定常の外因性の影響をモデル化することが可能になる.

## 2.2.3 非定常内因性

非定常の場合として、 $\|\Phi\| > 1$  と  $\|\Phi\| = 1$  の 2 つの場合が考えられる. これらには、明確な違いがある.  $\|\Phi\| > 1$  場合、平均強度は時間とともに増加するが、 $\|\Phi\| = 1$  の場合は平均強度が有限の値を持つ可能性がある. これを準定常と呼び、金融の応用において、Hawkes 過程を適用したときに  $\|\Phi\| \approx 1$  が満たされることが多くある. これは多くの研究で強い関心を集めている. また、 $\|\Phi\| \approx 1$  の領域における Hawkes 過程の振る舞いは Brémaud と Massoulié[6] によって分析されており、次のことが示されている.

**命題 2 (Degeneracy of critical, short-range Hawkes)** 強度関数 (式 (2.2)) が  $\|\Phi\| = 1$  かつ  $\mu = 0$  である 1 次元 Hawkes 過程  $N_t$  を考える. このとき、カーネル関数が式 (2.11) を満たす場合、平均強度は 0 か  $+\infty$  をとる.

$$\int_0^\infty dt \, t\phi(t) < \infty \quad (2.11)$$

したがって、1 次元の場合、影響が長期間残らないカーネルは自明な過程となる.

## 2.2.4 非線形 Hawkes

式 (2.2) で定義される Hawkes 過程は強度関数が線形であり、その線形性から解析的に扱いやすいという有用性を持っている。一方で、非線形一般化についても研究されている。[5, 21, 23, 25] 非線形の場合、強度関数はつぎのように書ける。

$$\lambda_t^i = h \left( \mu^i + \sum_{j=1}^D \int dN_{t'}^j \phi^{ij}(t - t') \right) \quad (2.12)$$

ここで、 $h(\cdot)$  は  $\mathbb{R}^+$  で与えられる非線形関数であり、一般的に  $h(x) = 1_{x \in \mathbb{R}^+}$  と  $h(x) = e^x$  を含む関数となる。この関数  $h$  についての定常条件は Brémaud と Massoulié[5] によって研究された。この非線形 Hawkes 過程への拡張によるメリットは、負の値を持つカーネルによってモデル化をできることである。それにより Hawkes 過程の解析的な扱いやすさを失うが、この過程においてもモデルのシミュレーションとパラメータの推定は可能である [9, 3]。

## 2.3 特性

Hawkes 過程の強度関数  $\lambda_t$  の線形性により、多くの特性が得られる。特に、1 次特性、2 次特性と呼ばれる平均強度と相関行列は強度関数の線形性により容易に得ることができる。また Hawkes 過程の自己励起性を表す線型性の点から、クラスター表現を用いることができる。

### 2.3.1 1 次特性と 2 次特性

(H) を仮定したとき、カーネル  $\Phi$  のラプラス変換を用いることで、平均強度関数と相関行列が得られる。そこで、つぎのように定義された関数  $\Psi$  を導入する。

**定義 2 (反転カーネル)** 定常増分を持つ Hawkes 過程  $N_t$  を考えたとき、 $\Psi(t)$  を式 (2.13) のように定義する。

$$\Phi(t) + \Psi(t) * \Phi(t) = \Psi(t) \quad (2.13)$$

このとき、(H) を満たすことにより、 $\Psi(t)$  が存在し、次式の無限の畳込みとして表せる。

$$\Psi(t) = \Phi(t) + \Phi(t) * \Phi(t) + \Phi(t) * \Phi(t) * \Phi(t) + \cdots \quad (2.14)$$

**記法 1 (ラプラス変換)** 関数  $f(t) \in L^1(-\infty, +\infty)$  が与えられたとき, そのラプラス変換をつぎのように表す.

$$\hat{f}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(t) e^{zt} \quad (2.15)$$

ベクトルと行列のラプラス変換は上記の変換を各成分ごとに適用する.

式 (2.14) は, ラプラス変換により, 次のように書ける.

$$\hat{\Psi}(z) = (\mathbb{I} - \hat{\Phi}(z))^{-1} - \mathbb{I} \quad (2.16)$$

ここで,  $\mathbb{I}$  は単位行列を示す. このとき, 式 (2.16) より Hawkes 過程に関して, 以下の重要な結果が得られる.

**命題 3 (1 次特性と 2 次特性)** 定常増分の Hawkes 過程  $N_t$  の場合, つぎの命題が成り立ちます.

1. 平均強度は  $\Lambda = \mathbb{E}[dN_t]/dt$  はつぎに等しい.

$$\Lambda = (\mathbb{I} + \hat{\Psi}(0))\mu \quad (2.17)$$

2. 相関行列式 (2.18) のラプラス変換は式 (2.19) に等しくなる.

$$c(t - t') = \frac{\mathbb{E}[dN_t dN_{t'}^T] - \mathbb{E}[dN_t] \mathbb{E}[dN_{t'}^T]}{dt dt'} \quad (2.18)$$

$$\hat{c}(z) = (\mathbb{I} + \hat{\Psi}(-z)) \Sigma (\mathbb{I} + \hat{\Psi}^T(z)) \quad (2.19)$$

ここで,  $\Sigma$  は非ゼロ要素を持つ対角行列で,  $\Sigma^{ii} = \Lambda_i$ .

**(証明)** (命題 3.1) 2 次元 Hawkes 過程を考える. このとき, 式 (2.15) と式 (2.16) より

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(0) &= \begin{pmatrix} \int_0^\infty \phi^{11}(t) dt & \int_0^\infty \phi^{12}(t) dt \\ \int_0^\infty \phi^{21}(t) dt & \int_0^\infty \phi^{22}(t) dt \end{pmatrix} \\ \therefore \hat{\Psi}(0) &= \begin{pmatrix} 1 - \int_0^\infty \phi^{11}(t) dt & \int_0^\infty \phi^{12}(t) dt \\ \int_0^\infty \phi^{21}(t) dt & 1 - \int_0^\infty \phi^{22}(t) dt \end{pmatrix}^{-1} - \mathbb{I} \end{aligned}$$

すなわち, 式 (2.17) は

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 - \int_0^\infty \phi^{11}(t) dt & \int_0^\infty \phi^{12}(t) dt \\ \int_0^\infty \phi^{21}(t) dt & 1 - \int_0^\infty \phi^{22}(t) dt \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

また、命題1証明より、

$$\Lambda = \frac{1}{(1 - \int_0^\infty \phi^{11}(\tau) d\tau) (1 - \int_0^\infty \phi^{22}(\tau) d\tau) - \int_0^\infty \phi^{12}(\tau) d\tau \int_0^\infty \phi^{21}(\tau) d\tau} \\ \times \begin{pmatrix} 1 - \int_0^\infty \phi^{11}(t) dt & \int_0^\infty \phi^{12}(t) dt \\ \int_0^\infty \phi^{21}(t) dt & 1 - \int_0^\infty \phi^{22}(t) dt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

これは (2.20) と一致する.  $\square$

Hawkes 過程の特性は, [10, 11] で最初に定式化され, [3] で完全に一般化された. これによって,  $\mu$  と  $\Phi$  のみ与えられれば, Hawkes モデルの線形予測を得られる. また, 式 (2.17) と式 (2.19) の関係を反転することにより, データからカーネル  $\Phi$  をノンパラメトリック推定することができる.

### 2.3.2 クラスタリング表現

Hawkes 過程は, 強度関数 (式 (2.2)) による自己励起性よりクラスタリング表現ができる.

**命題 4 (クラスタリング表現)** 期間  $[0, T]$  に  $D$  種類のイベントが発生することを考える. ここで, イベント系列  $\{(t_m, k_m)\}_{m=1}^M$  をつぎの手順に従って定義する.

1.  $1 \leq i \leq D$  ごとに, 期間  $[0, T]$  で平均  $\mu^i$  のポアソン過程に従うイベント  $\{(t_m^{(0)}, i)\}_{m=1}^{M_i^{(0)}}$  を生成する.
2. 次に, イベント  $(t_{m'}^{(0)}, j)$  ごとに, 各イベント  $1 \leq i \leq N$  について, 期間  $[t_{m'}^{(0)}, T]$  で平均  $\phi^{ij}(t - t_{m'})$  のポアソン過程に従う第 1 世代のイベント系列  $\{(t_m^{(1)}, i)\}_{m=1}^{M_i^{(1)}}$  を作成する.
3. 最後に, 区間  $[0, T]$  で作成されなくなるまで, 2 のルールを  $n-1$  世代から  $n$  世代まで繰り返し, イベント系列  $\{(t_m^{(n)}, k_m^{(n)})\}_{m=1}^{M^{(n)}}$  を取得する.

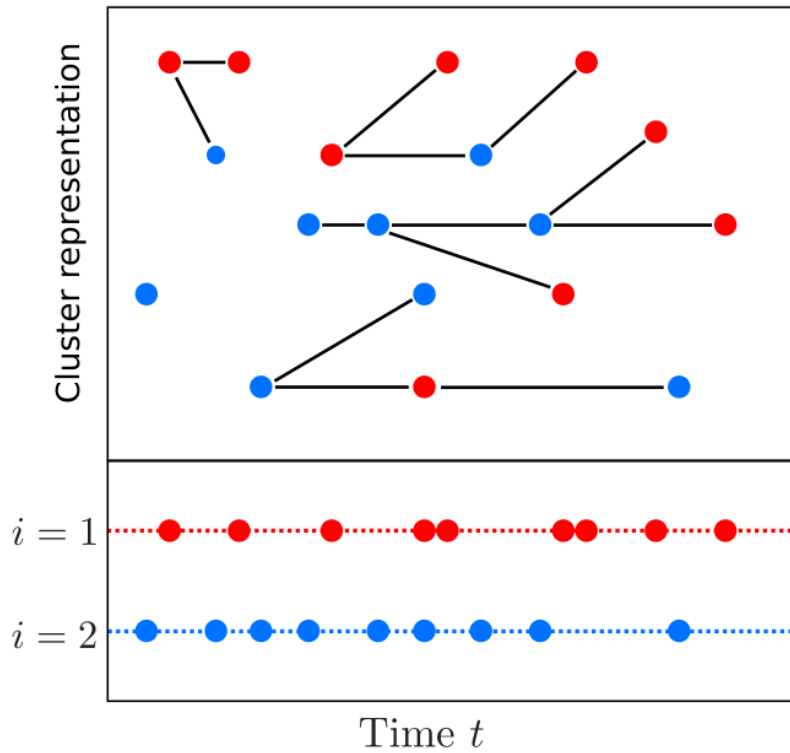
このとき, 全てのイベントの和集合 (2.21) は期間  $[0, T]$  で強度関数 (式 (2.2)) をもつ Hawkes 過程によって生成されたものに対応する.

$$\{(t_m, k_m)\}_{m=1}^M = \bigcup_{n=0}^{\infty} \{(t_m^{(n)}, k_m^{(n)})\}_{m=1}^{M^{(n)}} \quad (2.21)$$

また, 上記の手順で  $T = \infty$  を考えたとき, 平均子孫数が  $\|\Phi\|$  となるガルトンワトソン過程の分岐構造にイベントをマッピングすることができる. つまり, Hawkes 過程は

分岐過程としても解釈することができる．ここで，ガルトンワトソン過程の振る舞いは，親イベントによって生成されたイベントの平均数（分岐比： $\int_0^\infty \phi(t) dt = \hat{\phi}(0) = \|\Phi\|$ ）によって決まり，Hawkes 過程の3つの相（定常  $\|\Phi\| < 1$ ，非定常  $\|\Phi\| > 1$ ，準定常  $\|\Phi\| = 1$ ）それぞれ対応する．

- $\|\Phi\| < 1$  の場合，各親イベントが平均して1つ未満の子イベントを生成する劣臨界相に対応する．これは各イベント子孫の総数が有限であり，絶滅までの平均世代数が有限であることを意味している．
- $\|\Phi\| > 1$  の場合，各親イベントによって生成される子イベントが1より大きくなる優臨界相に対応する．この場合親イベントの合計子孫は有限確率で無限になる可能性がある．
- $\|\Phi\| = 1$  の場合，子孫の総数は有限であるが，子孫の総数は大きな変動があり，絶滅までの平均世代数の発散に繋がる臨界点に対応する．



**図2.1:** Hawkes 過程のクラスター表現．上のパネルは2変量 Hawkes 過程の分岐構造を表し，下のパネルはクラスター構造を無視して得られたものを示す．また上のパネルの繋がっている構造はクラスターを表し，図だと4つのクラスターを示す．

### 2.3.3 イベント間の関係

前節で Hawkes 過程は、分岐過程として解釈できることを紹介した。これにより、クラスタリング表現を用いることでイベント間の親子関係を知ることができる。つまり、時系列の前後における、イベント間の因果関係を解明することができる。

そこで、次の計数過程を導入する。

$$N_t^{i \leftarrow 0} = (\text{外因的に生成されたタイプ } i \text{ のイベント}) \quad (2.22)$$

$$N_t^{i \leftarrow j} = (\text{親がタイプ } j \text{ であるタイプ } i \text{ のイベント}) \quad (2.23)$$

$$N_t^{i \leftarrow j*} = (\text{第 } 0 \text{ 世代が } j \text{ タイプであるタイプ } i \text{ のイベント}) \quad (2.24)$$

すなわち、 $N_t^{i \leftarrow 0} + \sum_j N_t^{i \leftarrow j} = N_t^{i \leftarrow 0} + \sum_j N_t^{i \leftarrow j*} = N_t^i$  であり、分岐過程として解釈することで、任意の種類のイベントから発生したイベントの総数を知ることができる。

**命題 5 (Causality)** 定常 Hawkes 過程の場合、 $N^{i \leftarrow 0}$ 、 $N^{i \leftarrow j}$ 、 $N^{i \leftarrow j*}$  の平均増分はつぎのように表される。

$$\mathbb{E} [dN_t^{i \leftarrow 0}] / dt = \mu^i \quad (2.25)$$

$$\mathbb{E} [dN_t^{i \leftarrow j}] / dt = \hat{\phi}^{ij}(0) \Lambda^j \quad (2.26)$$

$$\mathbb{E} [dN_t^{i \leftarrow j*}] / dt = \hat{\psi}^{ij}(0) \mu^j \quad (2.27)$$

**(証明)** イベント  $i$  のイベント総数は  $N_t^i = N_t^{i \leftarrow 0} + \sum_j N_t^{i \leftarrow j}$  となる。このとき、

$$\frac{\mathbb{E}[dN_t^i]}{dt} = \mu^i + \sum_{j=1}^D \Lambda_j \int \phi^{ij}(\tau) d\tau$$

$N_t^{i \leftarrow 0}$  は親を持たない第 0 世代のイベントの個数であり、イベント  $i$  の第 0 世代は強度  $\mu^i$  で生まれる。すなわち  $\mathbb{E}[dN_t^{i \leftarrow 0}] / dt = \mu^i$

□

また、1 つのイベント  $j$  が生むイベント  $i$  の総数は  $\phi^{ij}$  の影響を直接受けて生まれるイベント数なので  $\int \phi^{ij}(\tau) d\tau$  である。さらに、イベント  $j$  は定常性から  $\Lambda_j$  個あるから、全イベント  $j$  が生むイベント  $i$  は  $\mathbb{E}[dN_t^{i \leftarrow j}] / dt = \hat{\phi}^{ij}(0) \Lambda_j$  となる。

□

第 0 世代のイベント  $j$  の個数は  $\mathbb{E}[\mu^j] = \mu^j$ 。そのイベント  $j$  のうちの 1 つが生む第 1 世代のイベント総数は  $\sum_{k=1}^D \hat{\phi}^{kj}(0)$  であり、そのうちのイベント  $i$  の数は  $\hat{\phi}^{ij}(0)$  となる。また、その第 1 世代のイベント  $k$  も  $\sum_{l=1}^D \hat{\phi}^{lk}(0)$  個のイベントを生むので、第 2 世代のイベント総数は  $\sum_{l=1}^D \sum_{k=1}^D \hat{\phi}^{kj}(0) \hat{\phi}^{lk}(0)$  となり、そのうち  $\sum_{k=1}^D \hat{\phi}^{kj}(0) \hat{\phi}^{ik}(0)$  個のイベント  $i$  を生む。つま

り各世代におけるイベント  $i$  の総数は次のようになる.

$$\text{第 1 世代の } i \text{ の総数} = \mu^j \hat{\phi}^{ij}(0) = \mu^j \left( \hat{\Phi}(0) \right)_{ij}$$

$$\text{第 2 世代の } i \text{ の総数} = \mu^j \left( \sum_{k=1}^D \hat{\phi}^{kj}(0) \hat{\phi}^{ik}(0) \right) = \mu^j \left( \hat{\Phi}(0) \hat{\Phi}(0) \right)_{ij}$$

$$\text{第 3 世代の } i \text{ の総数} = \mu^j \left( \sum_{l=1}^D \sum_{k=1}^D \hat{\phi}^{kj}(0) \hat{\phi}^{lk}(0) \hat{\phi}^{il}(0) \right) = \mu^j \left( \hat{\Phi}(0) \hat{\Phi}(0) \hat{\Phi}(0) \right)_{ij}$$

$\vdots$

$$\text{第 } n \text{ 世代の } i \text{ の総数} = \mu^j \left( \hat{\Phi}(0)^n \right)_{ij}$$

つまり,

$$\text{第 0 世代が } j \text{ であるイベント } i \text{ の総数} = \mu^j \left( \hat{\Psi}(0) \right)_{ij} = \hat{\psi}^{ij}(0)$$

□

この特性は Hawkes 過程の特定の構成要素によって引き起こされるイベントの平均割合を（直接的，間接的関係なく）推定するのに使用できる.



## 第 3 章

# 自己励起 NBD 過程

前章までで、自己励起過程の一種である Hawkes 過程の定義と金融における応用を説明した。本章では、我々が導入した自己励起過程を紹介し、Hawkes 過程との関係とその有用性について示していく

以前の研究 [14] で、ポリア壺過程をくり返す多期間ポリア壺過程が導入された。ここでポリア壺過程とは以下のような確率過程を示す。壺の中に赤玉と白玉の 2 色の玉がそれぞれ  $\alpha$  個と  $\beta$  個、合計  $n = \alpha + \beta$  個の玉が入っているとする。はじめに、壺の中から無作為に玉を 1 つを取り出し、色を確認し、取り出した玉を壺に戻す。次に、確認した色と同じ色の玉を壺に追加する。これを一回の試行として、 $N$  回くり返し、 $j$  回目に赤玉を取り出した場合  $Y_j = 1$ 、白玉を取り出した場合  $Y_j = 0$  とする確率過程  $\mathbf{Y} = \{Y_1, \dots, Y_N\}$  である。 $N$  回の試行後の赤玉を取り出した回数  $X = Y_1 + \dots + Y_N$  はベータ二項分布  $\text{BBD}(n, \alpha, \beta)$  に従う。 $X$  の確率質量関数 (PMF) は、

$$P(X = k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{\prod_{l=0}^{k-1} (\alpha + l) \prod_{l=0}^{N-k-1} (\beta + l)}{\prod_{l=0}^{N-1} (n + l)}$$

となる。 $Y_j$  の期待値  $p$  は  $p = \alpha/n$ 、また、 $j \neq k$  のとき、 $Y_j$  と  $Y_k$  の相関係数  $\rho$  は、 $1/(n+1)$  となる [13]。  $q = 1 - p = \beta/n$ ,  $1/n = \rho/(1 - \rho)$  として、 $X$  の PMF を書き直すと

$$P(X = k) = \frac{N!}{k!(N-k)!} \frac{\prod_{l=0}^{k-1} (p + l\rho/(1 - \rho)) \prod_{l=0}^{N-k-1} (\beta + l\rho/(1 - \rho))}{\prod_{l=0}^{N-1} (1 + l\rho/(1 - \rho))}$$

となる、 $X$  の期待値は  $Np$ 、分散は  $Npq + N(N-1)\rho pq$  となる。

多期間ポリア壺過程はポリア壺過程をくり返す確率過程である。第  $i$  期間のポリア壺過程を  $\mathbf{Y}^i = \{Y_1^i, \dots, Y_N^i\}$  と表し、最初に壺に入っている赤玉と白玉の個数を、第 1 回目から  $i-1$  回目のポリア壺過程の  $N$  回試行後の壺の中のそれぞれの色の玉の個数の履歴  $\{(X_i, N - X_i)\}_{i=1, \dots, i-1}$  の重み付きの和とする。そして、 $X_i = \sum_{j=1}^N Y_j^i$  と

して確率過程  $\mathbf{X} = \{X_1, X_2, \dots\}$  を定義する．こうして，同一期間内の二値の確率変数間の相関はポリア壺過程のメカニズムで，また，異なる期間の確率変数間の相関は，それぞれの期間での初期状態が相関を持つことから，相関を持つ．この確率過程は履歴の重み付けに用いる関数（カーネル関数）がべき減衰の場合に，相関関数の極限値を秩序変数とする相転移を起こし、臨界点近傍での相関関数の漸近的振る舞いなども研究されている [18]．

一方，この過程は各期間での初期条件である玉の個数が時間と共に増大するため非定常な過程であった．そこで，我々は玉の個数を一定になるようにスケールした多期間ポリア壺過程を導入した．この過程はパラメータによって定常状態－非定常状態間の相転移を起こし，連続時間極限ではマーク付き Hawkes 過程となる．また，ポリア壺過程を機序とする同時刻相関のパラメータをゼロとする極限で，マークのない通常の Hawkes 過程となる．

### 3.1 多期間壺過程と Hawkes 過程

多期間ポリア壺過程を考える．まず，第 1 期間について，本章のはじめに説明したポリア壺過程を行う．ただし追加する玉の個数は  $\omega$  とする．最初，壺には  $\theta_0$  個の赤玉と  $n_0 - \theta_0$  個の白玉が入っており，玉を 1 個取り出したあと壺には同じ色の玉を  $\omega$  個追加するとし，また，玉を取り出す回数は  $\tilde{N}$  回とする．つまり，第 1 期間の壺過程  $\{Y_1^1, \dots, Y_{\tilde{N}}^1\}$  の  $\tilde{N}$  回の試行終了時点で壺の中に  $n_0 + \omega \tilde{N}$  個の玉が入っている．赤玉を取り出す毎に，壺の中の赤玉の個数は一回の試行で  $\omega$  個増加し，次の試行で赤玉を取り出す確率は増加する．このことから， $\omega$  は第 1 期間に  $\tilde{N}$  回試行を繰り返す中で，赤玉の引きやすさに影響をあたえ，相関を表すパラメータであることがわかる [13]．実際，各試行の異なる二値変数  $Y_i^1, Y_j^1, i \neq j$  の相関係数は  $1/(n_0/\omega + 1)$  となるが，これは追加する玉の個数を 1 にスケールしたとき，最初の玉の個数が  $n_0/\omega$  と変換されることからわかる．特に， $\omega = 0$  では無相関， $\omega \rightarrow \infty$  の極限では相関係数は 1 となる．第 1 期間はポリア壺過程なので，赤玉を取り出した回数  $X_1 = \sum_{i=1}^{\tilde{N}} Y_i^1$  がベータ二項分布：BBD  $\left(\tilde{N}, \frac{\theta_0}{\omega}, \frac{n_0 - \theta_0}{\omega}\right)$  に従うことがわかる．ここで，この壺モデルのパラメータを付録A.にまとめておく．

次に多期間に拡張するために第  $t+1$  期間を考える．期間  $t$  までに赤玉を取り出した回数を  $k_1, \dots, k_t$  と書くことにする．第  $t+1$  期間でも，第 1 期間と同じように  $\tilde{N}$  回玉を取り出し，毎試行後に  $\omega$  個玉を追加する壺過程を考えるが，壺の中に初期状態が入っている玉の個数は第 1 期間と異なり， $\theta_t = \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_{i=1}^t k_i$  個の赤玉と  $n_0 - \theta_t$  個の白玉が入っているとする．このとき， $h(t)$  はカーネル関数であり，自己励起の影響の減少を表す減少関数，正規化のため  $h(0) = 1$  とする．つまり，第  $t+1$  期

間の最初の玉の総数は  $n_0$  で第 1 期間と一緒にあるが赤玉と白玉の個数が  $\theta_t, n_0 - \theta_t$  となり、 $\theta_0, n_0 - \theta_0$  とは一般に異なっている。また、 $\theta_t$  の式から、 $\theta_t$  はそれまでの各期間で行った壺過程で赤玉を取り出した回数  $k_1, \dots, k_t$  に依存することわかる。さらに、 $\tilde{\omega}$  は過去の期間の結果が将来の結果に対して影響を与えるパラメータであり、確率過程  $\{X_1, \dots\}$  の異時刻相関に関わるパラメータであることがわかる。以上から、第  $t+1$  期間目では最初の赤玉の個数  $\theta_t$  と白玉の個数  $n_0 - \theta_t$  のみ更新されて、他のパラメータ  $n_0, \tilde{N}, \omega$  は第 1 期間と変わらない壺過程である。

ここまでの内容をまとめると、まず第 1 期間は初期状態として  $\theta_0$  個の赤玉と  $n_0 - \theta_0$  個の白玉が壺の中に入っており、追加する玉の個数が  $\omega$  個の試行を  $\tilde{N}$  回試行を行うポリア壺過程である。つぎに第  $t+1$  期間は、第 1 期間目と比較して、初期状態の玉の総数や、追加する玉の個数、試行回数は同じであるが、初期状態の赤玉の個数が  $\theta_t = \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_i^t k_i h(t-i+1)$  個であることのみ異なる壺過程となるということであった。以上から、このモデルは 2 種類の相関を持っていることがわかる。1 つは同一期間内の相関を表す  $\omega$ 、もう 1 つは  $\tilde{\omega}$  と関数  $h(t)$  によって表される異時刻相関である。ここで、時間相関を表す  $\tilde{\omega}$  と  $h(t)$  は  $\omega$  とは独立であることに注意してほしい。また、各期間がポリア壺モデルであることから期間  $t+1$  において赤玉を取り出す回数  $X_{t+1}$  はパラメータが  $N = \tilde{N}, \alpha = \theta_t/\omega, \beta = (n_0 - \theta_t)/\omega$  の BBD に従うことがわかる。

$$X_{t+1} \sim \text{BBD} \left( \tilde{N}, \frac{\theta_t}{\omega}, \frac{n_0 - \theta_t}{\omega} \right)$$

[14] の多期間ポリア壺過程でも同一期間内の相関と異時刻相関をもつ多期間壺過程を導入している。本論文で紹介する多期間壺過程と異なる点は第 2 期間以降での初期条件である。[14] で紹介した過程も赤玉の個数は本論文と同じ  $\theta_t$  だが、白玉の数は  $n_0 - \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_i^t (\tilde{N} - k_i) h(t-i+1)$  で定義している。すなわち、各期間の初期状態の玉の総数は  $n_0$  ではない。

次に、異時刻相関について考える。この過程において異なる時刻  $t, t' = t + \tau, \tau > 0$  での  $X_t, X_{t'}$  の相関は、 $\theta_{t-1}, \theta'_{t-1}$  の相関から生じる。なぜなら、第  $t, t'$  期間の最初の赤玉の個数は  $\theta_{t-1}, \theta'_{t-1}$  より、 $Y_j^t, Y_k^t$  の期待値はそれぞれ  $\theta_{t-1}/n_0, \theta'_{t-1}/n_0$  となる。 $t' = t + \tau, \tau > 0$  の場合、時系列  $\{k_1, \dots, k_{t'-1}\}$  の部分列  $\{k_1, \dots, k_{t-1}\}$  を  $\theta_{t-1}$  と  $\theta'_{t-1}$  の評価で共通に持つ。その結果  $Y_j^{t-1}$  と  $Y_k^{t'-1}$  は相関を持つ。 $\tau$  が大きくなると部分列の占める割合が低下するため  $\theta_{t-1}$  と  $\theta'_{t-1}$  の相関が小さくなり、結果  $Y_j^t, Y_k^{t'}$ 、および  $X_t, X_{t'}$  の相関も小さくなる。特に、 $\tau_t, \tau_{t+\tau}$  が定数  $\tau_0$  の場合、 $Y_j^{t+1}, Y_k^{t'+1}$  は独立となり、結果  $X_{t+1}, X_{t'+1}$  も独立となる。

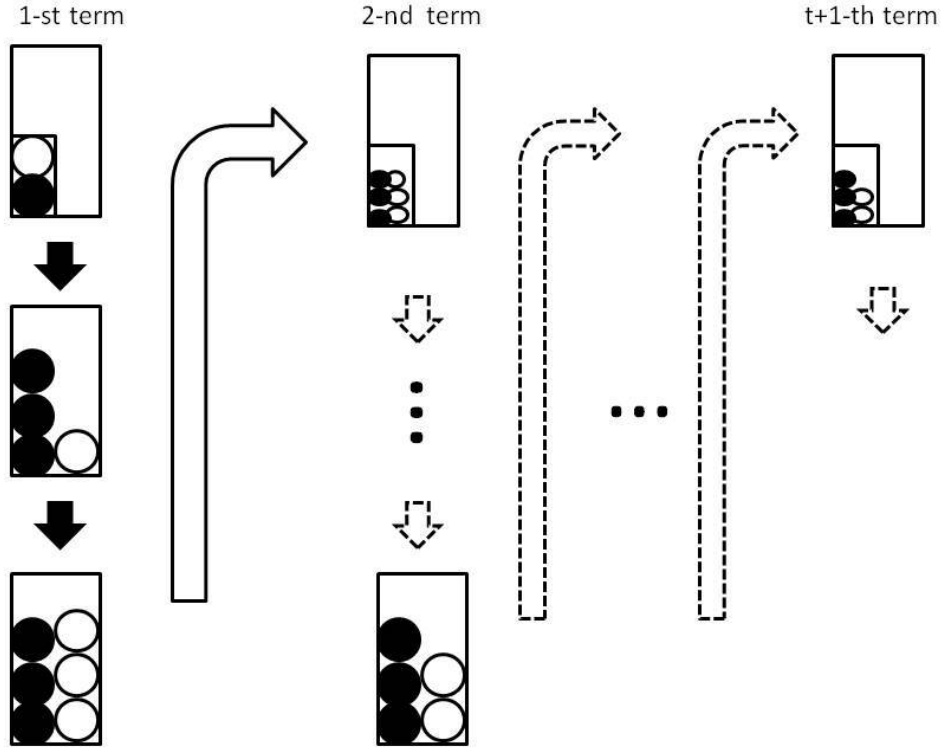


図3.1: 多期間ポリア壺過程の図. 各期間の過程はポリア壺過程である.

### 3.2 二重スケーリング極限：BBD から NBD へ

BBD の二重スケーリング極限を考える．これは二項分布  $\text{Bin}(n, p)$  が、 $\lambda = np$  を保ったまま  $n \rightarrow \infty, p \rightarrow 0$  の極限でポアソン分布  $\text{Po}(\lambda)$  に収束することと類似の極限である．いま、先で述べたように、各期間において赤玉を取り出す個数は BBD に従っている．このとき、 $\tilde{N}/n_0 = \Delta$  を固定し、 $\tilde{N} \rightarrow \infty, n_0 \rightarrow \infty$  とする 二重スケーリング極限により次式が得られる（付録B.参照）．

$$\begin{aligned} P(X_1 = k_1) &\sim \text{NBD} \left( X_1 = k_1 \mid n = \frac{\theta_0}{\omega}, p = \frac{1}{\omega\Delta + 1} \right) \\ &= \frac{(\theta_0/\omega + k_1 - 1)!}{k_1!(\theta_0/\omega - 1)!} \left( \frac{1}{\omega\Delta + 1} \right)^{\theta_0/\omega} \left( \frac{\omega\Delta}{\omega\Delta + 1} \right)^{k_1} \end{aligned} \quad (3.1)$$

ここで、 $\sim$  は左辺の確率変数が右辺の確率分布に従うことを意味する．つまり、二重スケーリング極限で各期間で赤玉を取り出す個数が BBD から負の二項分布 (NBD) に従

うように変化する．なお， $\text{NBD}(n, p)$  のとき<sup>\*1</sup>，平均は  $n(1-p)/p$ ，分散は  $n(1-p)/p^2$  であるから，各期間における赤玉を取り出す個数の平均と分散は  $\theta_0\Delta$  と  $\theta_0\Delta(1+\omega\Delta)$  となる．すなわち，この極限においても，パラメータ  $\omega$  は BBD の場合と同じように同一期間の相関に関係していることがわかる．特に， $\omega \rightarrow 0$  の極限では期待値と分散が一致し，ポアソン分布  $\text{Po}(\theta_0\Delta)$  に収束する．

さらに，負の二項分布  $\text{NBD}\left(X_1 = k_1 \mid \frac{\theta_0}{\omega}, \frac{1}{\omega\Delta+1}\right)$  は次のように 混合分布の形に書き換えられる（付録B.参照）．

$$\begin{aligned}\text{NBD}\left(X_1 = k_1 \mid \frac{\theta_0}{\omega}, \frac{1}{\omega\Delta+1}\right) &= \int_0^\infty \text{Poisson}(k_1|\lambda_1) \cdot \text{Gamma}\left(\lambda_1 \mid \frac{\theta_0}{\omega}, \frac{1}{\omega\Delta}\right) d\lambda_1 \\ &= \int_0^\infty \frac{\lambda_1^{k_1} e^{-\lambda_1}}{k_1!} \frac{\lambda_1^{\theta_0/\omega-1}}{\Gamma(\theta_0/\omega)} \left(\frac{1}{\omega\Delta}\right)^{\theta_0/\omega} e^{-\lambda_1/(\omega\Delta)} d\lambda_1\end{aligned}\quad (3.2)$$

ここで， $\text{Poisson}(k_1 | \lambda)$  はポアソン分布， $\text{Gamma}(\lambda | \frac{\theta_0}{\omega}, \frac{1}{\omega\Delta})$  はガンマ分布を示す．このことから各期間で NBD に従う離散時間 NBD 過程は期待値がガンマ分布に従う離散時間ポアソン過程とみなせる．また，すべての期間で同じように NBD を分解できることにより，第  $t$  期間目でも  $\lambda_t$  がガンマ分布に従うポアソン過程とみなせる．つまり，多期間のポリア壺過程は二重スケーリング極限によって離散時間自己励起  $\text{NBD}(\text{DT-SE-NBD})$  過程に、また、期待値  $\lambda_t$  がガンマ分布に従う離散時間自己励起  $\text{Poisson}(\text{DT-SE-Poisson})$  過程に対応する．ここで自己励起とは、 $X_{t+1}$  の確率分布のパラメータ  $\theta_t$  が過去の時系列  $\{X_1, \dots, X_t\}$  に依存しているからである．上記の  $X_{t+1}$  が NBD 分布に従う、などは正確には  $\theta_t$  に関する条件付分布のことを意味している．

$$P(X_{t+1} = k_{t+1} | X_0 = k_0, \dots, X_t = k_t) = \text{NBD}\left(X_{t+1} = k_{t+1} \mid \frac{\theta_t}{\omega}, \frac{1}{\omega\Delta+1}\right) \quad (3.3)$$

$$\theta_t = \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_{i=1}^t X_i h(t-i+1) \quad (3.4)$$

ここで， $\{k_1, \dots, k_t\}$  は  $t$  期間目までに赤玉を取り出した個数．自己励起性は条件付き確率（式 (3.3)）が  $\theta_t$  によって定義されることで導入される．第 1 期間目と第  $t+1$  期間目の違いは初期条件の赤玉の個数（と白玉の個数）のみであるから，第  $t+1$  期間目の条件付き確率は  $\omega$  と  $\theta_t$  によって定義される．なお， $\text{Gamma}(\lambda | \theta_t/\omega, 1/(\omega\Delta))$  は平均  $\theta_t/\omega$ ，分散  $\theta_t\omega\Delta^2$  をもつ分布である． $\omega \rightarrow 0$  の極限では分散がゼロになり，期待値  $\lambda_t$  は定数  $\theta_t/\omega$  に収束する．このことから、 $\omega \rightarrow 0$  の極限で  $\text{DT-SE-NBD}$  過程は  $\text{DT-SE-Poisson}$  過程となることがわかる．

<sup>\*1</sup> 本論文では、「成功確率が  $p$  のときに  $n$  回成功するまでの失敗回数が従う確率分布」と定義する

各期間における同一期間内の相関  $\omega$  が第  $t$  期間目に依存せず、いつの期間においても一定であることに注意する．この条件によって、DT-SE-NBD 過程は NBD のパラメータ  $p$  一定であるため再生性を持ち、連続時間極限をとることができる．また、混合分布表示においてポアソン分布のパラメータの従うガンマ分布の平均は  $\theta_t \Delta$ 、分散は  $\theta_t \omega \Delta^2$  であるから、同一期間内の相関  $\omega$  を大きくすることでパラメータの分散（変化）も大きくなり、 $X_{t+1}$  の分散もポアソン分布の場合の  $\theta_t \Delta$  より大きくなる．すなわち、同一期間内の相関  $\omega$  が確率過程の分散に影響を与えることを意味している．なお、極限  $\omega \rightarrow 0$  をとると、パラメータの分散は 0 になり、ガンマ分布はデルタ関数に収束する．これは離散時間 hawkes(DT-Hawkes) 過程 [15] として知られている．ここで、過程の違いによる強度関数の違いを図3.2aに示す．

ここまでを、要約すると、ポリア壺過程の二重スケーリング極限から  $X_t$  が NBD に従う DT-SE-NBD 過程が得られた．

$$X_{t+1} \sim \text{NBD} \left( \frac{\theta_t}{\omega}, \frac{1}{\omega \Delta + 1} \right), t \geq 0 \quad (3.5)$$

ここで、

$$\theta_t = \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_i^t X_i h(t-i), t \geq 1 \quad (3.6)$$

また、極限  $\omega \rightarrow 0$  で、DT-SE-NBD 過程が  $X_t$  がポアソン過程に従う DT-Hawkes 過程になる．

$$X_{t+1} \sim \text{Poisson}(\theta_t \Delta), t \geq 0 \quad (3.7)$$

ここで、

$$\theta_t = \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_i^t X_i h(t-i) t \geq 1 \quad (3.8)$$

さらに、極限  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$  で、異時刻相関がなくなることで、過程は自己励起性を持たない各期間で独立な NBD に従う DT-NBD 過程になる．

### 3.3 連続時間極限

連続時間極限について検討していく．計数過程  $N_t = \sum_{i=1}^t X_i$  を導入する．単純に考えると多期間ポリア壺過程の  $(t, t+1)$  の 1 時間での 試行回数は  $\tilde{N}$  回だったので、微小時間  $(t, t+dt)$  での試行回数は  $\tilde{N}dt$  となる．二重スケーリング 極限  $\tilde{N}, n_0 \rightarrow \infty, N/n_0 = \Delta$  は微小時間  $dt$  では  $\tilde{N}dt/n_0 = \Delta dt$  となり、

$$dN_t \equiv N_{t+dt} - N_t \sim \text{NBD} \left( n = \frac{\theta_t}{\omega}, p = \frac{1}{\omega \Delta dt + 1} \right)$$

となる.  $dN_t$  の期待値は  $\theta_t \Delta dt$  となるが、再生性は持たない. つまり、重なりのない微小時間  $(t, t + dt), (u, u + dt)$  での増分  $dN_t, dN_u$  はそれぞれ NBD に従うが、和  $dN_t + dN_u$  は NBD には従わない. 実際、 $dN_t$  の期待値と分散は  $dt \rightarrow 0$  で一致し、通常のポアソン過程となることが分かる. この連続時間極限では DT-SE-NBD 過程は連続時間 SE-Poisson(CT-SE-Poisson) 過程、所謂 Hawkes 過程になる.

NBD の再生性を保つには NBD のパラメータ  $p$  を固定したまま  $n = \theta_t/\omega$  を  $dt$  倍する必要がある.

$$dN_t \equiv N_{t+dt} - N_t \sim \text{NBD} \left( n = \frac{\theta_t}{\omega \Delta} \Delta dt, p = \frac{1}{\omega \Delta + 1} \right)$$

このとき、NBD の再生性から

$$dN_t + dN_u \sim \text{NBD} \left( n = 2 \frac{\theta_t}{\omega \Delta} \Delta dt, p = \frac{1}{\omega \Delta + 1} \right)$$

となることが分かる.  $dN_t/dt$  の期待値は、

$$\mathbb{E}[dN_t/dt | \mathcal{F}_t] = \theta_t \Delta \quad (3.9)$$

となる. ここで、 $\mathcal{F}_t$  はそれまでに取り出した赤玉の個数の履歴  $\{X_1 = k_1, \dots, X_t = k_t\}$  を表し、式 (3.9) はハザード関数 [22] である.

また、 $dN_t/dt$  の分散は次のようになる.

$$\mathbb{V}[dN_t/dt | \mathcal{F}_t] = \theta_t \Delta (\omega \Delta + 1). \quad (3.10)$$

$\omega \rightarrow 0$  の極限で  $dN_t/dt$  の期待値と分散は一致し、Poisson 分布の性質を持つことが分かる. 離散時間の場合と同じく連続時間 SE-NBD(CT-SE-NBD) 過程を CT-SE-Poisson 過程でポアソン分布の期待値がガンマ分布に従うという表現をすることも可能である.

$$\begin{aligned} dN_t &\sim \text{Po}(\lambda) \\ \lambda &\sim \text{Gamma} \left( \frac{\theta_t}{\omega \Delta} \Delta dt, \frac{1}{\omega \Delta} \right) \end{aligned}$$

そのとき、 $\omega \rightarrow 0$  の極限でガンマ分布はデルタ関数  $\delta(\lambda - \theta_t \Delta dt)$  となり、CT-SE-NBD 過程は Hawkes 過程となる.

つまり、ここまでをまとめると連続時間極限で次の式が成り立つ.

$$dN_t \sim \text{NBD} \left( n = \frac{\theta_t}{\omega \Delta} \Delta dt, p = \frac{1}{\omega \Delta + 1} \right), \quad t \geq 0 \quad (3.11)$$

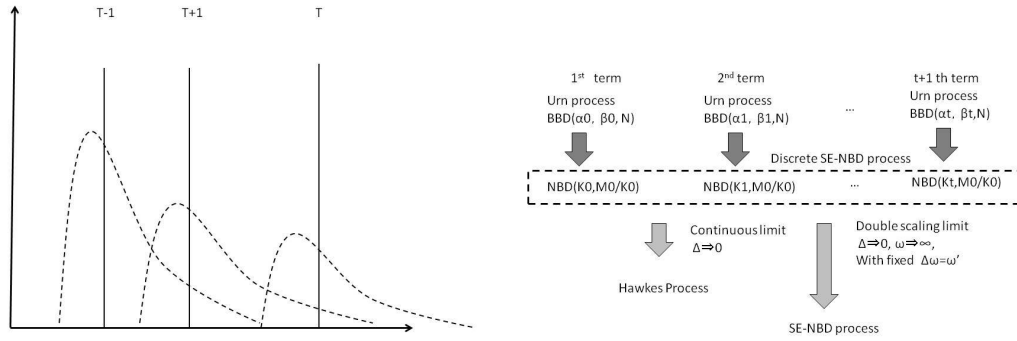
$$\theta_t = \theta_0 + \tilde{\omega} \int_0^t h(t-s) dN_s, \quad t \geq 0 \quad (3.12)$$

ここで、離散時間カーネル関数  $h(t)$  を連続時間カーネル関数とし、 $\int_0^\infty h(s)ds = 1$  の規格化条件を課す。また、この変換に伴い  $\tilde{\omega}$  も適宜変更されるとする。

極限  $\omega \rightarrow 0$  の極限で、CT-SE-NBD 過程の  $\theta_t$  の分散が 0 になる。すなわち、

$$dN_t \sim \text{Poisson}(\theta_t \Delta dt), t \geq 0 \quad (3.13)$$

これは Hawkes 過程である。付録Cに DT-SE-NBD 過程から CT-SE-NBD 過程へ道筋を示している。図3.2bは、多期間ポリア壺過程から DT-SE-NBD 過程および DT-Hawkes 過程への流れをまとめたものである。



(a) 連続 SE-NBD 過程の強度関数であるガンマ分布 (破線) と Hawkes 過程の強度関数であるデルタ関数 (実線)。 $t - \Delta$ ,  $t$ ,  $t + \Delta$  のときの強度関数 (b) 多期間壺過程から NBD 過程と Hawkes 過程導出の流れを表している

図3.2: 連続 SE-NBD 過程と Hawkes 過程の違い。

### 3.4 自己励起 NBD 過程の相転移

ここでは CT-SE-NBD 過程の相転移について考える。ここで  $E[dN_t] = \Lambda dt$  とする平均場近似を適用する。まず、微小時間  $dt$  に対する計数過程の増加の期待値は次式になる。

$$\mathbb{E}[dN_t] = \Lambda dt = E[\theta_t] \Delta dt = (\theta_0 + \Lambda \tilde{\omega} \int_0^t h(t-s)ds) \Delta dt \quad (3.14)$$

すなわち、

$$\Lambda = (\theta_0 + \tilde{\omega} \Lambda) \Delta$$

よって、次式を得ることができる。

$$\Lambda = \frac{\theta_0 \Delta}{1 - \tilde{\omega} \Delta} \quad (3.15)$$



ここで  $\tilde{\omega}\Delta$  を  $n$  で表すとする．すると、

$$\Lambda = \frac{\theta_0 \Delta}{1 - n}. \quad (3.16)$$

なお、第3.1節で述べたように、極限  $\tilde{\omega} \rightarrow 0$  で CT-SE-NBD 過程は NBD 過程になり、時間相関は 0 であった．すなわち、NBD 過程の場合、相転移は存在しない．

このとき、SE-NBD 過程は Hawkes 過程を含むことから分岐過程として見るができる．定常状態の場合、次を満たす．

$$n = \tilde{\omega}\Delta < 1 \quad (3.17)$$

つまり、定常状態と非定常状態の相転移は臨界点  $n = 1$  で起きる．この転移点は Hawkes 過程と同じになる．

この分岐比  $n$  は感染症における実行再生産数に対応している．すなわち、これは感染モデルにおける一人の患者によって感染した患者数を表し、実行再生産数が  $n = 1$  を超えると患者数は無限に増え続ける非定常状態を示す．

また、SE-NBD 過程は、強度関数が分散をもつポアソン過程であったが、Hawkes 過程は強度関数の分散が 0 となるデルタ関数をもつポアソン過程であった．このとき、イベント数の分散に対応する強度関数の分散は、分岐比の分散を発生させると考えられる．すなわち、強度関数が分散を持っている SE-NBD 過程の分岐比も分散をもつということである．実際、[12] では、実行再生産数が COVID-19 の環境に依存することが示された．つまり、分岐比は、強度関数の期待値（式 (3.15)）だけでなく、強度関数の分散にも影響うけ、常に一定ではないと考えられる．このことから、分散をもつガンマ分布が強度関数である SE-NBD 過程の方がより有用性が高い可能性がある．第3.5節でこれを確認する．

### 3.5 パラメータ推定

金融債務不履行の 2 つの実際のデータを用いてパラメータ推定を行う．1 つ目は 1981 年から 2020 年までの S&P のデフォルトデータ．ここで、投機的各付け (SG, speculative grade) は BBB- (Baa3) 格未満の格付けを表し、投資適格 (IG, investment grade) は BBB- (Baa3) 格より上の格付けを表す．2 つ目は 1920 年から 2020 年までの Moody's のデフォルトデータを用いる．これは 1929 年の世界恐慌と 2008 年の世界不況を含む．

今回、ベイスの公式を使用してパラメータ推定を行う．

$$\begin{aligned} P(\theta_0, \omega, \tilde{\omega}, \beta | k_0, \dots, k_T) &= \frac{P(r_T | \theta_0, \omega, \tilde{\omega}, \beta)}{P(K_T)} \dots \frac{P(k_0 | \theta_0, \omega, \tilde{\omega}, \beta)}{P(k_0)} \\ &\times f(\theta_0, \omega, \tilde{\omega}, \beta) \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで、 $f(\theta_0, \omega, \tilde{\omega}, \beta)$  は事前分布 [17] であり、一様分布を使用する。このとき、式 (3.18) で表される最大事後確率 (MAP) 推定を行う。つまり、分布  $P$  について NBD を用いることは、第3.1節で紹介した DT-SE-NBD 過程のパラメータ推定を行うことになる。また、NBD の代わりにポアソン分布を用いた場合、DT-Hawkes 過程のパラメータ推定になり、推定するパラメータは  $\theta_0, \omega, \Delta$  となる。

表3.1, 3.2, 3.3に DT-SE-NBD, DT-Hawkes, DT-NBD 過程の推定結果を示す。ここで、NBD 過程はデータに自己励起がそもそも存在するか確認するために用いた。第3.1節で説明したように DT-SE-NBD 過程は  $\omega \rightarrow 0$  の極限で DT-Hawkes 過程となり、また、 $\tilde{\omega} \rightarrow 0$  の極限では DT-NBD 過程となる。つまり推定された  $\omega$  の値が小さい場合、モデルは Hawkes 過程に近く、 $\tilde{\omega}$  が小さい場合、モデルはほぼ NBD 過程であり、自己励起性をもたないことを示す。

表3.1から、SE-NBD モデルにおいて  $\omega$  は大きい値をとっていることがわかる。特に IG の場合、平均イベント数  $\Lambda$  と比較すると大きい値をとっている。つまり、あらゆる格付けのデフォルトにおいて、SE-NBD モデルのほうが適していると考えられる。同じことを AIC をまとめた表3.3からも確認できる。すなわち、デフォルトの強度関数は、強度関数がデルタ関数である Hawkes 過程とは異なり、分散をもつ強度関数であることを意味する。これは、他の債務者に影響を与える債務者もいれば、他の債務者に影響を与えない債務者もいることに一致する。また、前者は連鎖倒産に該当し、ネットワーク効果によって起きるものだと考えられている。つまり、多くの債務者と繋がりのある債務者は他の多くの債務者に影響を与えると考えられる。ここで、他の会社からの信用度が高く、債権が他社より市場の広範囲かつ多く出回っている優良格付け会社はこれに一致する。すなわち、ネットワーク効果により、IG の場合にとくに  $\omega$  が大きかったと推測される。また、すべてのデータにおいて SE-NBD モデルの AIC のほうが NBD モデルよりも小さい値をとることは、各デフォルトが他のデフォルトを誘発することによるものだと考えられる。以上から、実際の信用格付けデータの自己励起性の存在が確認できた。

**表3.1:** MAP 推定による，離散 Hawkes モデルと離散 SE-NBD モデルのパラメータ

Model				SE-NBD					Hawkes			
No	grade			$\theta_0$	$\omega$	$\tilde{\omega}$	$\beta$	$\Lambda$	$\theta_0$	$\tilde{\omega}$	$\beta$	$\Lambda$
1		1920-2020	Moody's	5.31	18.89	0.86	2.94	58.35	3.4	0.96	15.98	86.85
2		1981-2020	S&P	19.99	18.95	0.72	16.08	71.22	13.3	0.84	18.40	83.65
3			Moody's	23.14	22.55	0.72	15.97	82.79	17.2	0.81	16.69	91.72
4		1990-2020	S&P	34.83	23.04	0.56	16.23	78.64	29.2	0.64	13.01	81.82
5			Moody's	44.12	27.92	0.51	14.40	90.00	40.6	0.56	19.9	91.38
6	SG	1920-2020	Moody's	5.11	17.81	0.86	3.03	56.04	2.9	0.97	13.57	105.32
7		1981-2020	S&P	18.77	17.9	0.73	16.22	69.90	1.0	0.86	17.57	85.29
8			Moody's	22.17	21.65	0.73	15.99	80.65	15.4	0.83	15.71	92.38
9		1990-2020	S&P	33.62	21.85	0.56	16.02	76.39	28.2	0.65	18.97	79.59
10			Moody's	43.46	26.76	0.50	15.44	87.09	39.6	0.55	14.57	88.57
11	IG	1920-2020	Moody's	0.52	4.06	0.47	0.99	2.13	1.14	0.4	0.98	1.24
12		1981-2020	S&P	1.20	3.06	0.42	15.32	2.05	1.2	0.43	14.68	2.05
13			Moody's	1.53	5.37	0.25	1.26	2.36	1.7	0.28	14.63	2.34
14		1990-2020	S&P	1.25	3.75	0.46	16.80	2.32	1.2	0.47	17.46	2.32
15			Moody's	1.63	5.80	0.39	13.27	2.69	1.8	0.32	16.26	2.68

表3.2: MAP 推定による, NBD モデルのパラメータ

Model				NBD		
No	grade			$\theta_0$	$\omega$	$\Lambda$
1		1920-2020	Moody's	37.86	80.64	37.86
2		1981-2020	S&P	59.62	38.61	59.62
3			Moody's	69.78	45.76	69.78
4		1990-2020	S&P	71.29	34.37	71.29
5			Moody's	83.23	38.86	83.23
6	SG	1920-2020	Moody's	35.81	76.28	35.81
7		1981-2020	S&P	57.57	37.14	57.57
8			Moody's	67.45	44.00	67.45
9		1990-2020	S&P	68.97	32.46	68.97
10			Moody's	80.58	36.65	80.58
11	IG	1920-2020	Moody's	2.05	7.18	2.05
12		1981-2020	S&P	2.05	4.42	2.05
13			Moody's	2.33	6.30	2.33
14		1990-2020	S&P	2.32	5.63	2.32
15			Moody's	2.65	7.32	2.65

**表3.3:** 離散 SE-NBD モデル, 離散 Hawkes モデル, NBD モデルの AIC

Model				SE-NBD	Hawkes	NBD
No.	grade			AIC		
1		1920-2020	Moody's	791.9	2193.1	904.0
2		1981-2020	S&P	386.7	1010.6	407.9
3			Moody's	399.3	1186.1	420.9
4		1990-2020	S&P	316.3	923.0	323.5
5			Moody's	327.1	1098.6	332.4
6	SG	1920-2020	Moody's	781.5	2060.1	893.0
7		1981-2020	S&P	383.2	975.8	405.1
8			Moody's	396.5	1140.0	417.8
9		1990-2020	S&P	313.9	894.0	321.0
10			Moody's	325.1	1062.4	329.9
11	IG	1920-2020	Moody's	321.7	490.1	360.3
12		1981-2020	S&P	150.0	197.6	153.2
13			Moody's	156.8	257.1	156.8
14		1990-2020	S&P	121.3	168.3	124.2
15			Moody's	127.4	219.7	127.9

## 第 4 章

# 多次元自己励起 NBD 過程とデータ分析

本章では、SE-NBD 過程を多次元に拡張し、デフォルトデータに適用する。多次元の場合にも、1 次元のときと同様に Hawkes 過程との関係を表し、有用性を示していく。

### 4.1 多次元自己励起 NBD 過程

#### 4.1.1 多次元自己励起 NBD 過程の導入

DT-SE-NBD 過程を多次元モデル (MD-DT-SE-NBD 過程) に拡張する。D 次元時系列とし、各時間で NBD に従う  $D$  個の  $X_t^{(i)}, i = 1, \dots, D$  の確率過程を考える。

$$X_{t+1}^{(i)} \sim \text{NBD} \left( \frac{\theta_t^{(i)}}{\omega^{(i)}}, \frac{1}{\omega^{(i)}\Delta + 1} \right), t \geq 0 \quad (4.1)$$

ここで、

$$\theta_t^{(i)} = \theta_0^{(i)} + \sum_{j=1}^D \tilde{\omega}_{ij} \sum_{k=1}^t X_k^{(j)} h^{(i)}(t-k+1), t \geq 1 \quad (4.2)$$

このとき、カーネル関数は指数減衰とする： $h^{(i)}(k) = e^{-\beta_i k}$ 。このモデルにおける、 $i$  から  $j$  への相互作用を  $\omega_{ji}$ 、 $j$  から  $i$  への相互作用を  $\omega_{ij}$  と表す。すなわち、このモデルの相互作用は非対称であることに注意する。

同様に、 $X_t^{(i)}$  が Poisson 分布に従う離散時間多次元 Hawkes 過程 (DT-MD-Hawkes) を考える。

$$X_{t+1}^{(i)} \sim \text{Poisson} \left( \theta_t^{(i)} \Delta \right), t \geq 0 \quad (4.3)$$

ここで,

$$\theta_t^{(i)} = \theta_0^{(i)} + \sum_{j=1}^D \tilde{\omega}_{ij} \sum_{k=1}^t X_k^{(j)} h^{(i)}(t-k+1), \quad t \geq 1 \quad (4.4)$$

このときも, カーネル関数は指数減衰とする:  $h^{(i)}(k) = e^{-\beta_i k}$ .

次に,  $S_{ij}$  を次式で定義して, イベント  $j$  からイベント  $i$  への相互作用を考える.

$$S_{ij} = \tilde{\omega}_{ij} T^{(i)} \quad (4.5)$$

ここで,  $T^{(i)} = \sum_{k=1}^{\infty} h^{(i)}(k)$ . 行列形式で,

$$\mathbf{S} \equiv \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & \cdots & S_{1D} \\ S_{21} & S_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ S_{D1} & \cdots & \cdots & S_{DD} \end{pmatrix} \quad (4.6)$$

この  $S_{ij}$  は感染症における実行再生産数に対応し, 感染モデルにおける一人の患者によって感染した患者数を表す. したがって, この行列  $\mathbf{S}$  の各成分を比較することによって,  $i$  と  $j$  の相互作用を調べることができる.

また, イベント  $i$  の平均を  $\Lambda_i$  として, 式 (4.2) を用いることで,  $\Lambda^{(i)}$  について行列形式の等式が得られる.

$$\mathbf{\Lambda} = \boldsymbol{\theta} + \mathbf{S}\mathbf{\Lambda} \quad (4.7)$$

ここで,  $\boldsymbol{\theta} = (\theta^{(0)}, \dots, \theta^{(D)})$  と  $\mathbf{\Lambda} = (\Lambda^{(1)}, \dots, \Lambda^{(D)})$  はベクトル. 式 (4.7) を  $\boldsymbol{\theta}$  について解くことで次が得られる.

$$\mathbf{\Lambda} = (\mathbb{I} - \mathbf{S})^{-1} \boldsymbol{\theta} \quad (4.8)$$

ここで,  $\mathbb{I}$  は単位行列. 式 (4.8) は一次元の場合の式 (3.15) に対応し, 式 (4.7) は MD-SE-NBD における平均場近似を表す. この式 (4.8) から多次元モデルにおける, 定常状態と非定常状態の転移点  $\mathbb{I} = \mathbf{S}$  を確認できる. この結果は, 各イベントが SE-NBD 過程または Hawkes 過程となるような, モデルが混合している場合にも同様な結果が得られる. すなわち, MD-SE-NBD 過程と MD-Hawkes 過程が互いに相互作用を与えるような場合にも, 転移点が存在する.

#### 4.1.2 DT-MD-SE-NBD 過程のインパクト分析

この節では, 「インパクトの度合い」について考える. 「インパクト」とは, あるイベントが発生したことによる各イベント (自身も含む) への影響のことを表す. つまり,

あるイベントが発生した場合に、ネットワークを介して将来の各イベントどれくらい増えるのかを調べる．ここで、Google ページランク [16] のようなネットワークを使用して、各イベントの変化を比較する．

はじめに、種類  $i$  のイベントで衝撃が発生したことを考える．「衝撃」とは、時刻 0 にあるイベントが瞬間的に一回発生したことをいう．衝撃ベクトルは、時刻 0 に種類  $i$  のイベントのみ起きた場合であるから、 $\mathbf{v}_0^{(i)} = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  のようにかける．つまり単次元の場合、インパクトは自身に衝撃が発生したときの将来のイベント増加数となるので、次式で得られる．

$$v_\infty = \tilde{\omega} \sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{\omega} + e^{-\beta})^i = \tilde{\omega} \frac{1}{1 - e^{-\beta} - \tilde{\omega}} \quad (4.9)$$

ここで、 $h(t) = e^{-\beta t}$  であり、 $\tilde{\omega} = 1 - e^{-\beta}$  は転移点．

次に多次元の場合を考えていく．行列  $\hat{\mathbf{S}}$  と対角行列  $\hat{\mathbf{T}}$  を導入する．

$$\hat{\mathbf{S}} = \tilde{\omega}_{ij} \quad (4.10)$$

$$\hat{\mathbf{T}} = \hat{T}^{(ii)} = e^{\beta_i} \quad (4.11)$$

最初に、 $\boldsymbol{\theta}_t = (\theta^{(1)}, \dots, \theta^{(D)})$  について考える． $\boldsymbol{\theta}_t$  は第 1 期間目から第  $t$  期間目までのイベントの影響を含み、時刻 0 におきる衝撃  $\mathbf{v}_0^{(i)}$  を含まない関数であった．そこで、衝撃  $\mathbf{v}_0^{(i)}$  の影響を含む  $\boldsymbol{\theta}_t^+$  を導入する．まず、時刻  $t$  のインパクトの影響  $\mathbf{v}_t^{(i)}$  は次の式で定義される．

$$\mathbf{v}_t^{(i)} = \sum_{j=1}^t \mathbb{E}[\theta_j^{(i)+} - \theta_j^{(i)}] \Delta \quad (4.12)$$

すなわち、衝撃が発生したときの強度関数の増加分の期待値の総和である．言い換えると、衝撃によって将来発生するイベントの期待値で定義される．よって、 $\mathbf{v}_t^{(i)}$  について次が得られる．

$$\mathbf{v}_t^{(i)} = \hat{\mathbf{S}} \sum_{j=1}^t (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{S}})^j \mathbf{v}_0^{(i)} \quad (4.13)$$

ここで、 $j = t$  は衝撃による最初の伝染であり． $j = 1, \dots, t$  は衝撃の時間減衰を表している．

また、式 (4.13) より、極限  $t \rightarrow \infty$  での  $\mathbf{v}_\infty^{(i)}$  も求まる．

$$\mathbf{v}_\infty^{(i)} = \hat{\mathbf{S}} \sum_{j=1}^{\infty} (\hat{\mathbf{T}} + \hat{\mathbf{S}})^j \mathbf{v}_0^{(i)} = (\mathbb{I} - \mathbf{S})^{-1} \mathbf{S} \mathbf{v}_0^{(i)} \quad (4.14)$$



これは、式 (4.9) の拡張式である。  $\mathbf{v}_\infty^{(i)}$  は衝撃  $\mathbf{v}_0^{(i)}$  が発生したときの、それによって発生した各イベント数を表す。すなわち、各成分の総和  $v_\infty^{(i)} = \mathbf{v}_\infty^{(i)} \cdot (1, 1, \dots, 1)$  は  $\mathbf{v}_0^{(i)}$  によって引き起こされたイベント総数を表している。つまり、  $\mathbf{v}_\infty^{(i)}$  が大きい値をとるとき、それは影響が伝染していく流れの中で、そのイベントが他のイベントに対して上流に位置することを意味し、小さい値をとるときは、そのイベントが下流に位置すること意味する。ここで、式 (4.14) から  $\mathbb{I} = \mathbf{S}$  が転移点になる。

式 (4.13) は第2章の式 (2.16) に対応し、式 (2.27) とほぼ一緒である。式 (2.27) は、第0世代が  $j$  である子  $i$  の数を表していた。このことから、インパクトは分岐過程における、ある親イベントによって発生した将来の子イベントの総数に対応していることがわかる。

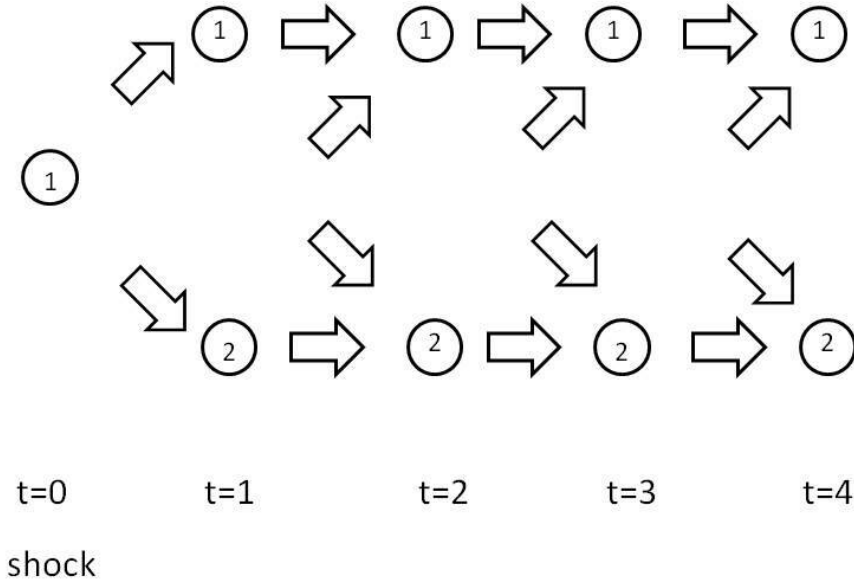


図4.1: 2次元の場合の衝撃の伝染

## 4.2 連続極限

DT-MD-SE-NBD モデルの連続極限について説明する。そのために計数過程  $N_t^{(i)} = \sum_j X_j^{(i)}$  を導入する。第3.1節で説明したように  $\Delta$  は各期間の間の期間をあらわし、微小時間における  $\theta_t^{(i)}$  の変動は  $\theta_t^{(i)} \Delta$  で表せる。また、  $\omega^{(i)}$  は単次元とき同様、期間  $t$  に

依存しないので、多次元モデルの連続極限においても、NBD の再生性をもつことがわかる。

このことから、連続時間極限における時刻  $t$  での強度関数  $\lambda_t^{(i)}$  の平均が得られる。

$$\mathbb{E}[\lambda_t^{(i)} | \mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}[dN_t^{(i)} | \mathcal{F}_t]}{dt} = \theta_0^{(i)} + \sum_{j=1}^D \tilde{\omega}_{ij} \sum_{k < t} X_k^{(i)} h^{(i)}(t - k) \quad (4.15)$$

ここで、 $\mathcal{F}_t$  は時刻  $t$  までのイベント数の情報を表す。これは、ハザード関数 [MD4] に対応する。

時刻  $t$  での強度関数の分散も単次元の場合と同様に次の式で与えられる。

$$\mathbb{V}[\lambda_t^{(i)} | \mathcal{F}_t] = \lim_{(\Delta, \omega^{(i)}) \rightarrow (0, \infty)} \frac{\theta_t \omega \Delta^2}{\Delta} = \omega^{(i)'} (\theta_0^{(i)} + \sum_{j=1}^D \tilde{\omega}_{ij} \sum_{k < t} X_k h^{(i)}(t - k)) \quad (4.16)$$

また、CT-MD-SE-NBD 過程の強度関数も、DT-MD-SE-NBD 過程と同様にガンマ分布になる。すなわち、連続時間極限において次式が得られる。

$$dN_t^{(i)} \sim \text{NBD} \left( \frac{\theta_t^{(i)} \Delta^2}{\omega^{(i)'}}, \frac{1}{\omega^{(i)'} + 1} \right), \quad t \geq 0 \quad (4.17)$$

ここで、

$$\theta_t^{(i)} = \theta_0^{(i)} + \sum_{j=1}^D \tilde{\omega}_{ij} \sum_{k < t} X_k h(t - k), \quad t \geq 0 \quad (4.18)$$

次に極限  $\omega' \rightarrow 0$  で、CT-SE-NBD 過程は強度関数の分散が 0 になる。これにより、MD-SE-NBD 過程は MD-Hawkes 過程になる。すなわち、

$$dN_t^{(i)} \sim \text{Poisson}(\theta_t^{(i)} \Delta), \quad t \geq 0 \quad (4.19)$$

ここで、

$$\theta_t^{(i)} = \theta_0^{(i)} + \sum_{j=1}^D \tilde{\omega}_{ij} \sum_{k < t} X_k h(t - k), \quad t \geq 0 \quad (4.20)$$

最後に、CT-MD-SE-NBD 過程の相関関数を検討する。詳細の計算は付録Eに記載する。共分散は次式で得られる。

$$\mathbb{E}[X_t^{(i)}, X_{t+\tau}^{(j)}] = [C_{ij}(\tau) + \Lambda_i \Lambda_j + (1 + \omega^{(i)'}) \Lambda_i \delta_{ij} \delta(\tau)] \Delta^2 \quad (4.21)$$

ここで、 $C_{ij}(\tau)$  は  $\tau > 0$  で共分散密度関数を表す。また、 $\delta_{ij}$  はクロネッカーのデルタ、 $\delta(\tau)$  はデルタ関数である。すなわち、同時刻に  $i$  と  $j$  に相関はないが、同一期間

内の相関を表す  $\omega^{(i)'}$  を SE-NBD 過程は含むので Hawkes 過程よりも同時刻の相関が大きくなることがわかる。

したがって、 $\tau > 0$  で  $\phi^{ij}(t) = \tilde{\omega}_{ij}h^{(i)}(t)$  と定義することで、式 (4.8) を用いて相関関数についての積分方程式が得られる。

$$C_{ij}(\tau) = (1 + \omega^{(i)'})\Lambda_i\phi^{ii}(\tau) + \sum_{k=1}^D \int_0^\infty \phi_{jk}(\omega)C_{ik}(\tau - \omega) d\omega \quad (4.22)$$

これは  $\omega^{(i)' = 0$  のとき、MD-Hawkes 過程に対応する (参照D.)。すなわち、SE-NBD 過程と Hawkes 過程の違いは式 (4.22) の右辺の第一項の同一期間内の相関  $\omega^{(i)'}$  の有無である。

### 4.3 パラメータ推定

この節では、デフォルトデータ用いてパラメータ推定を行う。扱うデータは S&P の 1981 年から 2020 年までの四半期ごとのデフォルトデータ。このデータ以下の 13 種のセクター [1] で構成されている。(1) 林業・建設・住宅メーカー、(2) 消費者サービス、(3) エネルギー資源、(4) 金融機関 (FI)、(5) ヘルスケア/化学、(6) ハイテク/コンピュータ/オフィス機器、(7) 保険、(8) 娯楽/メディア、(9) 航空宇宙/自動車/資本財/金属、(10) 不動産、(11) 電気通信、(12) 物流、(13) 公益事業。このデータを用いてセクター間の相互作用をネットワークとして考える。

第3.5章と同じ様にベイズ公式 (3.18) を用いて、MAP 推定でパラメータ推定を行った。

今回、5 つのモデルを適用した。(1)MD-SE-NBD モデル、(2)MD-Hawkes モデル、(3)SE-NBD モデル、(4)Hawkes モデル、(5)NBD モデル。モデル (3)、(4)、(5) は、セクター間の相互作用を含んでいない。すなわち各々独立しており、各セクターに影響をあたえない。また、モデル (5) に関しては第3.1節で説明したように自己励起性もっていないため、モデル (5) と比較することで、そもそも自己励起性を持つのかどうかを確認できる。ここで、(1)MD-SE-NBD モデルと (2)MD-Hawkes モデルの定義により、各セクターごとに独立したモデルとして適合できることに注意してください。このモデルの概要は表4.1に示す。推定した各モデルのパラメータは表4.3,4.4,4.5に、AIC を表4.2にまとめた。

はじめに、表4.2では、(1)MD-SE-NBD モデルが不動産以外のセクターで最も低い AIC をとることが確認できる。一方、不動産セクターは (2)MD-Hawkes で一番 AIC が低くなっており、表4.3と表4.5から、(1)MD-SE-NBD と (3)SE-NBD において  $\omega$  が小さいことが確認できる。ここで、第3.1節で記したように、Hawkes モデルは分散が 0 となる強度関数をもつモデルであった。つまり、不動産セクターは分散が小さい強度

表4.1: モデルの概要

No.	property	(1)MD-SE-NBD	(2)MD-Hawkes	(3)SE-NBD	(4)Hawkes	(5) NBD
1	強度関数の分散	○		○		○
2	セクター間の相互作用	○	○			
3	自己励起性	○	○	○	○	

関数をもっているため、Hawkes モデルで一番 AIC が低くなると考えられる。対照的に、不動産以外のセクターは分散が大きい強度関数をもっていることがわかる。

次に、(1)MD-SE-NBD と (3)SE-NBD の AIC を比較すると、すべてのセクターで (1)MD-SE-NBD の AIC の方が小さいため、他セクターからの相互作用の影響が有ることが確認できる。これは、(2)MD-Hawkes モデルと (4)Hawkes モデルの AIC を比較することでも同じ結果が確認できる。

また、(3)SE-NBD と (5)NBD の AIC を比較すると、(3)SE-NBD の AIC の方がすべてのセクターで小さいため、自己励起性をもつことが確認できる。

次に、モデル (1)MD-SE-NBD と (2)MD-NBD を比較してセクター間の相互作用を確認する。相互作用は、式 (4.6) で定義される行列  $S_{ij}$  によって表される。そこで、表4.3,4.4,4.5 のパラメータを使用して、図4.2でセクター間の相互作用を示した。Hawkes 過程の場合、この図は Hawkes グラフと呼ばれる [7]。しかし、このネットワーク図から上流セクターと下流セクターの相互作用を確認することは難しい。

そこで、上流セクターと下流セクター判別するために、(1)MD-SE-NBD と (2)MD-Hawkes におけるインパクト  $\mathbf{v}_{\infty}^{(i)}$  を計算した (図4.3, 図4.4)。これは、セクター  $i$  の衝撃によって引き起こされた各デフォルト数を示している。また、図4.5は、(1)MD-SE-NBD と (2)MD-Hawkes の  $v^{(i)}$  を示しており、各々が引き起こした合計デフォルト数を比較できる。ここから、不動産セクターと FI セクターは、(1)MD-SE-NBD と (2)MD-Hawkes のどちらのモデルでも上流であることがわかる。この結果は、SE-NBD モデルと Hawkes モデルの混合モデルを適用しても、MD-SE-NBD モデルとほぼ同じ結果が得られる。しかし、図4.3と図4.4から、各セクターから最も影響を受けたセクターも不動産セクターであることがわかる。そして、その不動産のセクターは FI セクターに影響を与えていることもわかる。すなわち、不動産セクターの衝撃は FI セクターを通じて、すべてのセクションに広がり、不動産セクターに再び影響を与えている。つまり、図4.6のような、不動産、FI、その他のセクターの順のサイクルで影響は伝染し、広がっていると考えられる。この結果は、2009 年のアメリカの不動産会社の価格下落によって引き起こされたリーマンショック時の大不況とも一致している。

表4.2: 離散 SE-NBD, 離散 Hawkes, 離散 NBD の AIC

No.	Model	(1)MD-SE-NBD	(2)MD-Hawkes	(3)SE-NBD	(4)Hawkes	(5)NBD
	sector	AIC	AIC	AIC	AIC	AIC
1	建設	369.76	377.56	386.65	403.04	420.21
2	消費者サービス	616.63	626.16	627.20	647.18	710.24
3	エネルギー資源	498.82	552.08	504.77	570.07	625.28
4	金融機関 (FI)	402.54	408.21	414.26	427.76	476.45
5	ヘルスケア	387.40	390.22	389.28	395.27	420.75
6	ハイテク	278.24	276.42	290.52	289.49	311.62
7	保険	253.37	261.49	256.48	267.26	257.72
8	娯楽	543.19	570.96	559.42	608.11	625.08
9	金属	556.09	582.94	566.31	609.69	621.96
10	不動産	124.39	122.39	133.37	131.37	166.12
11	電気通信	327.39	331.41	345.65	359.99	426.96
12	物流	359.57	357.73	378.34	377.81	405.68
13	公益事業	252.26	266.78	270.09	313.79	285.89

表4.3: MAP 推定による, 離散 MD-SE-NBD のパラメータ

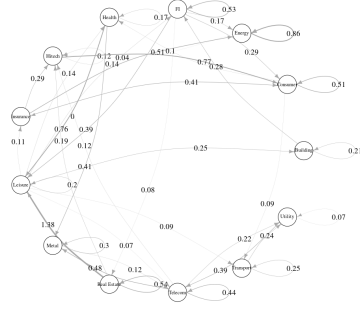
No.	sector	$\theta_0$	$\omega$	$S_{ij}$				
1	建設	0.18	0.43	$S_{11} = 0.21$	$S_{18} = 0.25$			
2	消費者サービス	0.51	0.46	$S_{22} = 0.51$	$S_{24} = 0.29$	$S_{26} = 0.77$	$S_{27} = 0.41$	
3	エネルギー資源	0.00	1.30	$S_{33} = 0.86$	$S_{34} = 0.17$	$S_{37} = 0.51$		
4	金融機関 (FI)	0.00	0.39	$S_{44} = 0.53$	$S_{41} = 0.28$	$S_{48} = 0.14$		
5	ヘルスケア	0.14	0.30	$S_{55} = 0.17$	$S_{52} = 0.10$	$S_{58} = 0.14$		
6	ハイテク	0.09	0.05	$S_{66} = 0.12$	$S_{63} = 0.04$	$S_{67} = 0.29$	$S_{610} = 0.19$	$S_{611} = 0.12$
7	保険	0.14	0.47	$S_{77} = 0.00$	$S_{78} = 0.11$			
8	娯楽	0.28	0.82	$S_{88} = 0.20$	$S_{84} = 0.39$	$S_{85} = 0.76$	$S_{810} = 1.38$	
9	金属	0.58	0.78	$S_{99} = 0.30$	$S_{95} = 0.41$	$S_{911} = 0.48$		
10	不動産	0.00	0.00	$S_{1010} = 0.54$	$S_{104} = 0.08$			
11	電気通信	0.00	0.38	$S_{1111} = 0.44$	$S_{118} = 0.07$	$S_{119} = 0.12$	$S_{1113} = 0.39$	
12	物流	0.19	0.04	$S_{1212} = 0.25$	$S_{122} = 0.09$	$S_{128} = 0.09$		
13	公益事業	0.02	0.73	$S_{1313} = 0.07$	$S_{1311} = 0.22$	$S_{1312} = 0.24$		

表4.4: MAP 推定による, 離散 MD-Hawkes のパラメータ

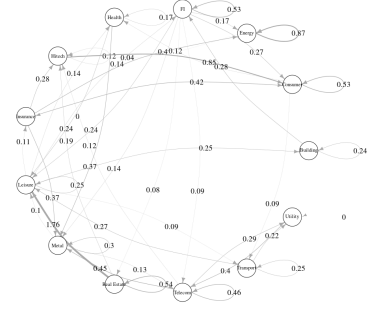
No.	sector	$\theta_0$	$S_{ij}$					
1	建設	0.16	$S_{11} = 0.24$	$S_{18} = 0.25$				
2	消費者サービス	0.45	$S_{22} = 0.53$	$S_{24} = 0.27$	$S_{26} = 0.85$	$S_{27} = 0.42$		
3	エネルギー資源	0.00	$S_{33} = 0.86$	$S_{34} = 0.17$	$S_{37} = 0.39$			
4	金融機関 (FI)	0.00	$S_{44} = 0.53$	$S_{41} = 0.28$	$S_{48} = 0.14$			
5	ヘルスケア	0.12	$S_{55} = 0.17$	$S_{52} = 0.12$	$S_{58} = 0.14$			
6	ハイテク	0.09	$S_{66} = 0.12$	$S_{63} = 0.04$	$S_{67} = 0.29$	$S_{610} = 0.19$	$S_{611} = 0.12$	
7	保険	0.14	$S_{77} = 0.00$	$S_{78} = 0.11$				
8	娯楽	0.32	$S_{88} = 0.25$	$S_{84} = 0.24$	$S_{85} = 0.24$	$S_{89} = 0.10$	$S_{810} = 1.76$	$S_{812} = 0.27$
9	金属	0.36	$S_{99} = 0.30$	$S_{94} = 0.14$	$S_{95} = 0.37$	$S_{97} = 0.37$	$S_{911} = 0.45$	
10	不動産	0.00	$S_{1010} = 0.54$	$S_{104} = 0.08$				
11	電気通信	0.00	$S_{1111} = 0.46$	$S_{114} = 0.09$	$S_{119} = 0.13$	$S_{1113} = 0.43$		
12	物流	0.19	$S_{1212} = 0.25$	$S_{122} = 0.09$	$S_{128} = 0.09$			
13	公益事業	0.00	$S_{1313} = 0.00$	$S_{1311} = 0.29$	$S_{1312} = 0.22$			

表4.5: MAP 推定による, 離散 SE-NBD, 離散 Hawkes, NBD のパラメータ

Model		(3)SE-NBD			(4)Hawkes		(5)NBD	
No.	sector	$\theta_0$	$\omega$	$S_{ii}$	$\theta_0$	$S_{ii}$	$\theta_0$	$\omega$
1	建設	0.38	0.65	0.56	0.33	0.62	0.86	1.25
2	消費者サービス	0.70	0.66	0.75	0.62	0.78	2.75	2.07
3	エネルギー資源	0.31	1.40	0.88	0.27	0.90	2.28	5.95
4	金融機関 (FI)	0.21	0.56	0.82	0.22	0.81	1.10	1.40
5	ヘルスケア	0.19	0.41	0.81	0.17	0.83	0.85	0.87
6	ハイテク	0.21	0.13	0.57	0.21	0.57	0.49	0.37
7	保険	0.18	0.52	0.53	0.23	0.37	0.36	0.53
8	娯楽	0.46	1.11	0.78	0.43	0.79	1.99	2.31
9	金属	0.62	0.99	0.69	0.55	0.73	1.97	2.22
10	不動産	0.05	0.00	0.78	0.05	0.78	0.18	0.37
11	電気通信	0.17	0.59	0.845	0.17	0.83	0.98	2.87
12	物流	0.41	0.15	0.49	0.42	0.48	0.81	0.36
13	公益事業	0.21	1.07	0.56	0.16	0.65	0.45	1.44



(a) MD-SE-NBD



(b) MD-Hawkes

図4.2: セクター間の相互作用

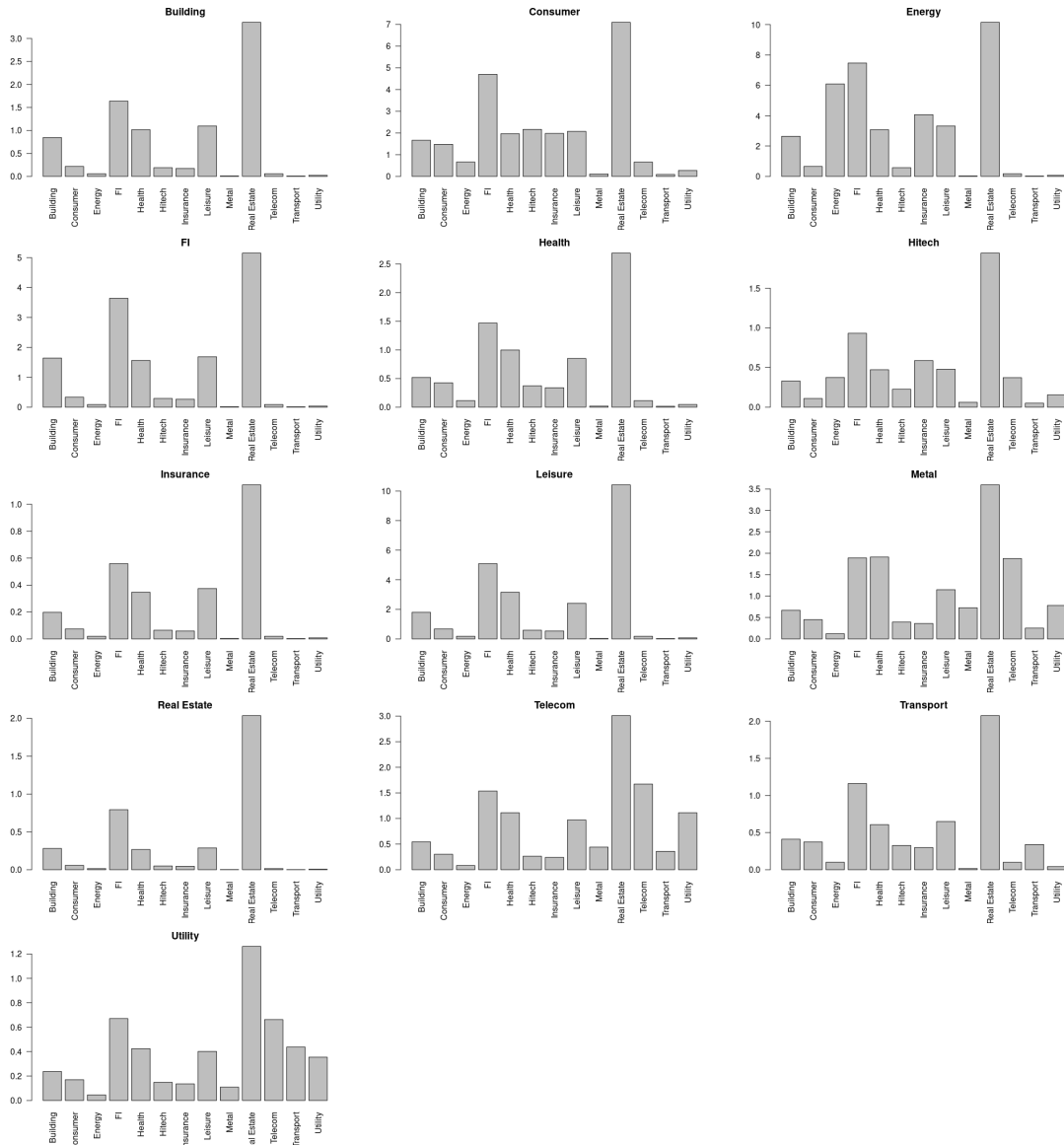


図4.3: (1)MD-SE-NBD モデルから求めた各セクターのインパクト  $\mathbf{v}_{\infty}^{(i)}$

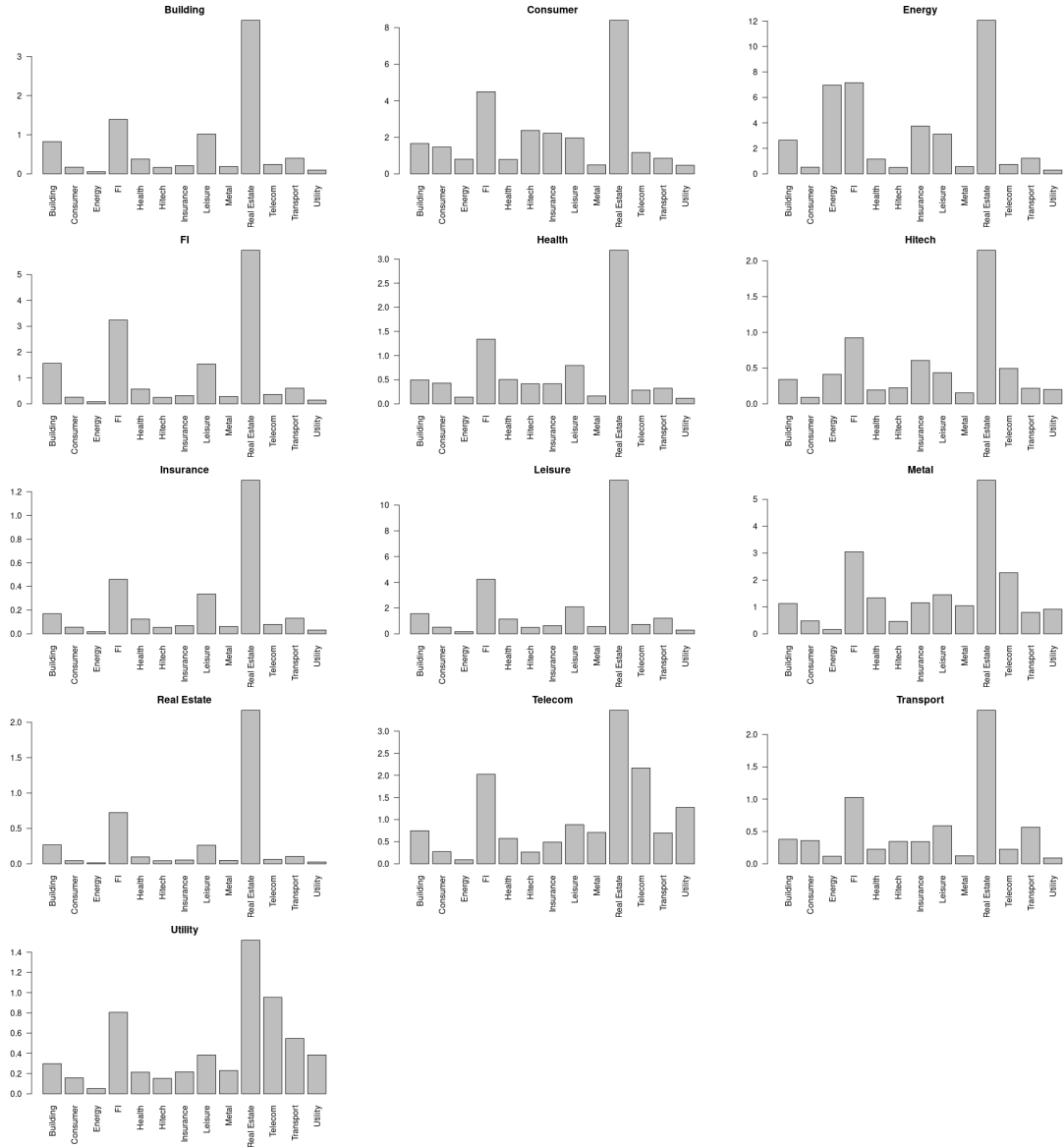
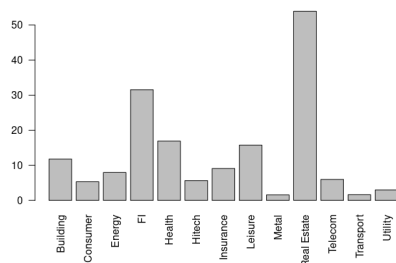
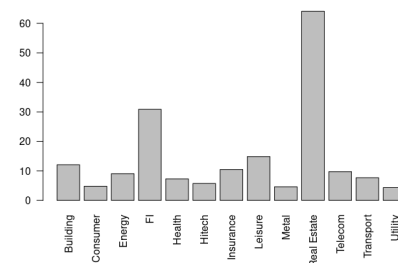


図4.4: (2)MD-Hawkes モデルから求めた各セクターのインパクト  $\mathbf{v}_{\infty}^{(i)}$



(a) MD-SE-NBD



(b) MD-Hawkes

図4.5: セクター間の相互作用



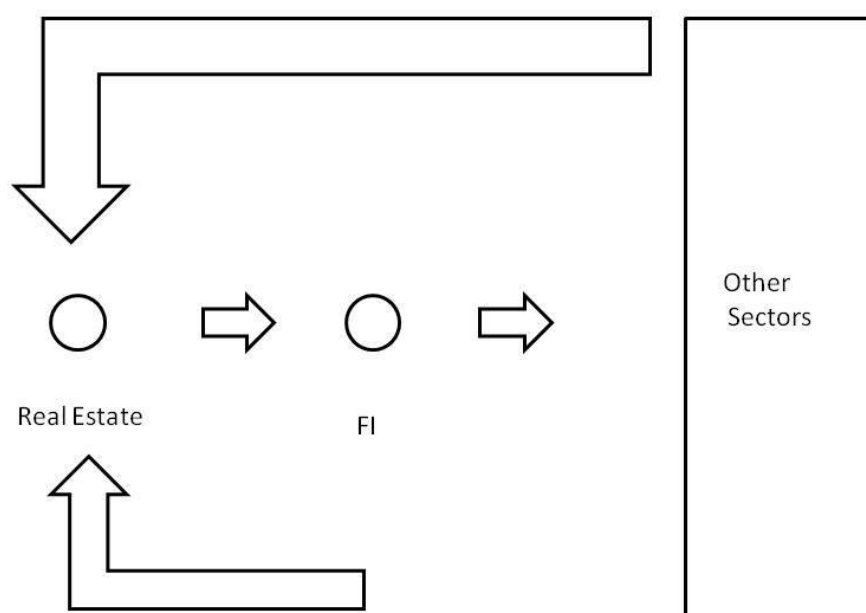


図4.6: セクター間の衝撃の伝染のイメージ図. FI が拡散する働きをしている.

## 第 5 章

### まとめ

本論文では、最初に Hawkes 過程の定義と基本性質について説明した。Hawkes 過程は条件付き強度関数によって特徴付けられる点過程の一種であり、その強度関数の線形性から解析的に非常に扱いやすいモデルであった。特に、平均強度と相関行列はラプラス変換を用いて、非常に簡単に得られることから、外因性強度  $\mu$  とカーネル行列  $\Phi$  のみでモデルの予測が可能となる。これはデータ解析をする上で非常に有用な点である。また、Hawkes 過程の持つ自己励起性はクラスタリング表現を可能にし、Hawkes 過程を分岐過程として解釈することを可能にした。これにより、新たな計数を導入でき、イベント間の因果関係をより詳しく分析できることも紹介した。本論文で紹介した性質は一部であるが、今回挙げたものだけでも非常にデータ解析に向いているモデルであることがわかる。

次に、他期間に渡る時間相関だけでなく、同一期間内の相関ももつ多期間ポリア壺過程を最初に紹介した。この過程はこれまで行っていた研究の壺過程と異なり、各期間における最初の玉の総数に初期条件を加えた壺過程であった。この初期条件により、それまでの過程と異なり、定常-非定常の相転移をおこす過程となった。また、その二重スケーリング極限を考えることにより、自己励起 NBD 過程を導入することができた。この過程は Hawkes 過程と同様に自己励起過程であったが、各期間におけるイベント数が Poisson ではなく NBD に従う過程であり、同時刻内の相関を含む過程であった。また、NBD の再生性から、Hawkes 過程と同じ様に連続時間極限を考えることができた。すなわち、この自己励起 NBD 過程は Hawkes 過程と同じ様にクラスタリング表現が可能で、連続時間極限について考えることもできて、さらに Hawkes では再現できない同時刻の相関を再現できることから非常に有用なモデルであるとわかる。

そこでデフォルトデータに Hawkes 過程と自己励起 NBD 過程と NBD 過程を適用して 2 つのモデルを比較した。結果、まずデフォルトデータは自己励起性を持っていると考えられる。また、その上で同時刻内の相関を再現できる自己励起 NBD 過程の

ほうが良い結果を示した。

さらに、多次元にも拡張した。多次元自己励起 NBD 過程も一次元の場合と同様に同時刻相関をもつモデルであり、連続時間に拡張することも可能であった。また 2 章で紹介した Hawkes 過程のクラスタリング表現から得られる因果関係を用いて、各イベントの「衝撃」による他のイベントへの影響を示す「インパクト」導入した。これにより各イベントによる影響の大きさを比較することが可能になった。

最後に、13 種類のセクターのデフォルトデータに多次元自己励起 NBD 過程を適用することで、各セクター間において、影響がどのような流れで作用しているのか推測することが可能になった。多次元のデフォルトデータ解析では、まず多次元自己励起 NBD 過程がすべてのセクターで一番適合していた。また、クラスタリング表現から不動産セクターから金融セクターに影響が回ってから、広範囲に拡散されることが推測された。これは 2008 年のリーマンショックの出来事とも一致している。

以上から本論文で紹介した自己励起 NBD 過程が非常に有用であり、Hawkes 過程のように様々な分野で扱われることが期待される過程である。

# 付録

## 付録 A. 壺過程のパラメータ

- $\theta_0$  : 第 1 期間目の最初の赤玉の個数  
 $n_0$  : 各期間の最初の玉の総数  
 $\tilde{N}$  : 各期間における玉を取り出す試行の回数  
 $\omega$  : 玉を取り出した後に追加する玉の個数. 同一期間における相関に関係する.  
 $h(t)$  : 期間前のイベントの影響を表す. 他期間に渡る時間相関のパラメータの 1 つ.  
 $k_i$  : 第  $i$  期間目に赤玉を取り出した回数  
 $\tilde{\omega}$  : 各期間における初期条件についての母数尺度

## 付録 B. 式 (3.1) と式 (3.2) の証明

$$\begin{aligned}
 & \int_0^\infty \text{Poisson}(k|\lambda) \cdot \text{Gamma}\left(\lambda \mid \frac{\theta_t}{\omega}, \frac{1}{\omega\Delta}\right) d\lambda \\
 &= \int_0^\infty \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \cdot \frac{\lambda^{\theta_t/\omega-1}}{\Gamma(\theta_t/\omega)} \left(\frac{1}{\omega\Delta}\right)^{\theta_t/\omega} e^{-\lambda/(\omega\Delta)} d\lambda \\
 &= \frac{1}{k! \Gamma(\theta_t/\omega)} \left(\frac{1}{\omega\Delta}\right)^{\theta_t/\omega} \int_0^\infty \lambda^{\theta_t/\omega+k-1} e^{-\lambda/(\omega\Delta)} d\lambda \\
 &= \frac{\Gamma(\theta_t/\omega+k)}{k! \Gamma(\theta_t/\omega)} \left(\frac{1}{\omega\Delta}\right)^{\theta_t/\omega} \left(\frac{\omega\Delta}{\omega\Delta+1}\right)^{\theta_t/\omega+k} \\
 &= \binom{\theta_t/\omega+k-1}{k} \left(\frac{1}{\omega\Delta+1}\right)^{\theta_t/\omega} \left(\frac{\omega\Delta}{\omega\Delta+1}\right)^k = \text{NBD}\left(n = \frac{\theta_t}{\omega}, p = \frac{1}{\omega\Delta+1}\right)
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
\text{BBD} \left( n = N, \alpha = \frac{\theta_0}{\omega}, \beta = \frac{n - \theta_0}{\omega} \right) &= \binom{n}{k} \frac{B(\alpha + k, \beta + (n - k))}{B(\alpha, \beta)} \\
&= \binom{n}{k} \frac{(\alpha)^{(k)} (\beta)^{(n-k)}}{(\alpha + \beta)^{(n)}} = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(n-k+1)} \frac{\Gamma(\alpha+k)\Gamma(\beta+n-k)\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta+n)} \\
&= \frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(N-k+1)} \frac{\Gamma(\theta_0/\omega+k)\Gamma((n-\theta_0)/\omega+N-k)\Gamma(n/\omega)}{\Gamma(\theta_0/\omega)\Gamma((n-\theta_0)/\omega)\Gamma(n/\omega+N)} \\
&= \binom{\theta_0/\omega+k-1}{k} (N) \cdots (N-k+1) \frac{(n/\omega - \theta_0/\omega) \cdots (n/\omega - 1)}{(n/\omega + N - \theta_0/\omega - k) \cdots (n/\omega + N - 1)} \\
&\xrightarrow{N, n \rightarrow \infty} \binom{\theta_0/\omega+k-1}{k} N^k \frac{(n/\omega)^{\theta_0/\omega}}{(n/\omega + N)^{\theta_0/\omega+k}} \\
&= \binom{\theta_0/\omega+k-1}{k} \left( \frac{n/\omega}{n/\omega + N} \right)^{\theta_0/\omega} \left( \frac{N}{n/\omega + N} \right)^k \\
&= \binom{\theta_0/\omega+k-1}{k} \left( \frac{1}{1+\omega x} \right)^{\theta_0/\omega} \left( \frac{\omega x}{1+\omega x} \right)^k \tag{2}
\end{aligned}$$

## 付録 C. 離散 Hawkes から Hawkes 過程

離散 Hawkes 過程

$$X_{t+1} \sim \text{Poisson} \left( \frac{\theta_t}{\omega} \right), \quad t \geq 0 \tag{3}$$

このとき,

$$\theta_t = \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_{i=1}^t X_i h(t-i), \quad t \geq 1 \tag{4}$$

計数過程  $N_t = \sum_i X_i$  を導入する.  $\Delta = N/n_0 \rightarrow 0$  として, 過程  $N_t$  の連続極限をとる. これにより, 強度関数  $\lambda_t$  は次のようになる.

$$\lambda_t = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}[dN_t | \mathcal{F}_t]}{\Delta} = \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_{i < t} k_i h(t-i) \tag{5}$$

過程は Hawkes 過程となる.

$$dN_t \sim \text{Poisson}(\theta_t \Delta), \quad t \geq 0 \tag{6}$$

ここで,

$$\theta_t = \theta_0 + \tilde{\omega} \sum_{i=1}^t X_i h(t-i), \quad t \geq 0 \quad (7)$$

#### 付録 D. Hawkes 過程の相関関数

$D$  次元 Hawkes 過程の相関関数について考える．強度の共分散密度は次のように定義される．

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\text{d}N_t^i, \text{d}N_{t'}^j) &= \mathbb{E}[\text{d}N_t^i \text{d}N_{t'}^j] - \mathbb{E}[\text{d}N_t^i] \mathbb{E}[\text{d}N_{t'}^j] \\ &= \mathbb{E}[\text{d}N_t^i \text{d}N_{t'}^j] - \Lambda_i \Lambda_j \Delta^2 = C_{ij}^*(t, t') \Delta^2 \end{aligned} \quad (8)$$

まず  $t = t'$  のとき,  $\text{d}N_t^i$  は 0 か 1 しかとらないので,  $\mathbb{V}[\text{d}N_t^i] = \mathbb{E}[\text{d}N_t^i]$  となる．すなわち

$$\mathbb{E}[\text{d}N_t^i \text{d}N_t^i] = \mathbb{E}[(\text{d}N_t^i)^2] = \Lambda_i \Delta + (\Lambda_i \Delta)^2$$

また,  $\text{d}N_t^i$  と  $\text{d}N_t^j$  は独立であるから

$$\mathbb{E}[\text{d}N_t^i \text{d}N_t^j] = \Lambda_i \Lambda_j \Delta^2$$

すなわち,  $t = t'$  かつ  $i = j$  のときのみ共分散に  $\Lambda_i/\Delta$  が発生する．よって, 共分散密度関数のデルタ関数を含まない項を  $C(\cdot)$  とおくと, 次式のようになる．

$$C_{ij}^*(t, t') = \Lambda_i \delta_{ij} \delta(t - t') + C_{ij}(t - t') \quad (9)$$

ここで,  $C(\cdot)$  は相関関数であり,  $\delta_{ij}$  と  $\delta(x)$  はクロネッカーのデルタとデルタ関数を表す．

次に,  $\tau = t' - t$  について考える．このとき  $\mathbb{E}[\text{d}N_t^i \text{d}N_{t'}^j]$  は式 (8) と式 (9) から次式で書ける．

$$\mathbb{E}[\text{d}N_t^i \text{d}N_{t'}^j] = [C_{ij}(\tau) + \Lambda_i \Lambda_j + \Lambda_i \delta_{ij} \delta(t - t')] \Delta^2$$

$\tau > 0$  のとき

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\mathrm{d}N_t^i \mathrm{d}N_{t+\tau}^j] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[\mathrm{d}N_t^i \mathrm{d}N_{t+\tau}^j | \mathcal{F}_{t+\tau}] \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathrm{d}N_t^i \lambda_{t+\tau}^j \right] \Delta \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathrm{d}N_t^i \left( \mu^j + \sum_{k=1}^D \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{jk}(l\Delta) \mathrm{d}N_{t+\tau-(l+1)\Delta}^k \right) \right] \Delta \\
&= \mu^j \mathbb{E} \left[ \mathrm{d}N_t^i \right] \Delta + \sum_{k=1}^D \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{jk}(l\Delta) \mathbb{E}[\mathrm{d}N_t^i \mathrm{d}N_{t+\tau-(l+1)\Delta}^k] \Delta \\
&= \sum_{k=1}^D \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{jk}(l\Delta) \mathbb{E}[\mathrm{d}N_t^i \mathrm{d}N_{t+\tau-(l+1)\Delta}^k] \Delta \\
&= \sum_{k=1}^D \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{jk}(l\Delta) [C_{ik}(\tau - (l+1)\Delta) + \Lambda_i \Lambda_k + \Lambda_i \delta_{ik} \delta(\tau - (l+1)\Delta)] \Delta^3
\end{aligned}$$

2 行目から 3 行目の変形は、 $t + \tau$  までの情報が与えられているため、 $\mathbb{E}[\mathrm{d}N_t^i]$  が定数になる。

ここで、左辺は  $[C_{ij}(\tau) + \Lambda_i \Lambda_j] \Delta^2$  であるから、 $\Delta = 1/s$  とおくと

$$\begin{aligned}
[C_{ij}(\tau) + \Lambda_i \Lambda_j] \Delta^2 &= \sum_{k=1}^D \lim_{s \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{jk} \left( \frac{l}{s} \right) \left[ C_{ik} \left( \tau - \frac{l+1}{s} \right) + \Lambda_i \Lambda_k + \Lambda_i \delta_{ik} \delta \left( \tau - \frac{l+1}{s} \right) \right] \frac{1}{s} \Delta^2 \\
&= \Delta^2 \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk}(\omega) (C_{ik}(\tau - \omega) + \Lambda_i \Lambda_k + \Lambda_i \delta_{ik} \delta(\tau - \omega)) \mathrm{d}\omega \\
&= \Delta^2 \Lambda_i \phi^{ii}(\tau) + \Delta^2 \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk}(\omega) (C_{ik}(\tau - \omega) + \Lambda_i \Lambda_k) \mathrm{d}\omega
\end{aligned}$$

ここで、左辺の  $\Lambda_j = \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk} \Lambda_k \mathrm{d}\omega$  であるから、 $\tau > 0$  の  $C_{ij}(\tau)$  について次式のような積分方程式が得られる。

$$C_{ij}(\tau) = \Lambda_i \phi^{ii}(\tau) + \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk}(\omega) C_{ik}(\tau - \omega) \mathrm{d}\omega \quad (10)$$

## 付録 E. MD-SE-NBD 過程の相関関数

MD-SE-NBD 過程の相関関数について考える。強度の共分散密度は次のように定義される。

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}(X_t^{(i)}, X_{t'}^{(j)}) &= \mathbb{E}[X_t^{(i)} X_{t'}^{(j)}] - \mathbb{E}[X_t^{(i)}] \mathbb{E}[X_{t'}^{(j)}] \\
&= \mathbb{E}[X_t^{(i)} X_{t'}^{(j)}] - \Lambda_i \Lambda_j \Delta^2 = C_{ij}^*(t, t') \Delta^2
\end{aligned} \quad (11)$$

ここで,  $C_{ij}^*(t, t')$  が共分散密度関数.

このとき,  $t = t'$  について

$$\mathbb{E}[X_t^{(i)} X_{t'}^{(i)}] = \mathbb{E}[(X_t^{(i)})^2] = (1 + \omega'_i) \Lambda_i \Delta + (\Lambda_i \Delta)^2 \quad (12)$$

また,  $X_t^{(i)}$  と  $X_t^{(j)}$  は独立であるから,

$$\mathbb{E}[X_t^{(i)} X_{t'}^{(j)}] = \Lambda_i \Lambda_j \Delta^2 \quad (13)$$

SE-NBD 過程と Hawkes 過程の違いは  $t = t'$  における相関の有無のみであるから次の式が得られる.

$$C_{ij}^*(t, t') = (1 + \omega'_i) \Lambda_i \delta_{ij} \delta(t - t') + C_{ij}(t - t') \quad (14)$$

ここで,  $C(t - t')$  は相関密度関数であり,  $\delta_{ij}$  と  $\delta(x)$  はクロネッカーのデルタとデルタ関数を表す.

つぎに,  $\tau = t' - t$  のとき式 (14) を用いて, 式 (11) を次式で書ける

$$\mathbb{E}[X_t^{(i)} X_{t+\tau}^{(j)}] = [C_{ij}(\tau) + \Lambda_i \Lambda_j + (1 + \omega'_i) \Lambda_i \delta_{ij} \delta(\tau)] \Delta^2 \quad (15)$$

したがって,  $\phi^{ij}(t) = \tilde{\omega} h^{(i)}(t)$  と定義することで,  $\tau > 0$  についての相関関数が計算できる.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_t^{(i)} X_{t+\tau}^{(j)}] &= [C_{ij}(\tau) + \Lambda_i \Lambda_j] \Delta^2 \\ &= \theta_0^{(j)} \Lambda_i \Delta^2 + \sum_{k=1}^D \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{jk}(l\Delta) \mathbb{E}[X_t^{(i)} X_{t+\tau-(l+1)\Delta}^{(k)}] \Delta \\ &= \theta_0^{(j)} \Lambda_k \Delta^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^D \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{l=0}^{\infty} \phi^{jk}(l\Delta) [C_{ik}(\tau - (s+1)\Delta) + \Lambda_i \Lambda_k + (\omega'_i + 1) \Lambda_i \delta_{ik} \delta(\tau - (s+1)\Delta)] \Delta^3 \\ &= \theta_0^{(j)} \Lambda_i \Delta^2 + \Delta^2 \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk}(\omega) [C_{ik}(\tau - \omega) + \Lambda_i \Lambda_k + (\omega'_i + 1) \Lambda_i \delta_{ik} \delta(\tau - \omega)] d\omega \\ &= \theta_0^{(j)} \Lambda_i \Delta^2 + \Delta^2 (\omega'_i + 1) \Lambda_i \phi^{ii}(\tau) + \Delta^2 \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk}(\omega) [C_{ik}(\tau - \omega) + \Lambda_i \Lambda_k] d\omega \\ &= \Lambda_i \Lambda_j \Delta^2 + \Delta^2 (\omega'_i + 1) \Lambda_i \phi^{ii}(\tau) + \Delta^2 \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk}(\omega) C_{ik}(\tau - \omega) d\omega \end{aligned}$$

また, 平均場近似 (式 (4.7)) を用いることで

$$\Lambda_j = \theta_0^{(j)} + \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk}(\omega) \Lambda_k d\omega \quad (16)$$

よって,  $\tau > 0$  における相関関数についての積分方程式が得られる.

$$C_{ij}(\tau) = (\omega'_i + 1) \Lambda_i \phi^{ii}(\tau) + \sum_{k=1}^D \int_0^{\infty} \phi^{jk}(\omega) C_{ik}(\tau - \omega) d\omega \quad (17)$$



ここで、Hawkes 過程の積分方程式 (10) と比べ、第一項の  $\omega'$  の有無のみ異なっていることがわかる。これは同一期間内の相関の有無に対応している。

最後に、カーネル関数が指数関数 ( $\phi(t) = \alpha\beta e^{-\beta t}$ ) で単次元の場合について記述する。式 (17) は次式のように書ける。

$$C(\tau) = (\omega' + 1)\Lambda\phi(\tau) + \int_0^\tau \phi(\omega)C(\tau - \omega) d\omega + \int_0^\infty \phi(\tau + \omega)C(\omega) d\omega \quad (18)$$

この式にラプラス変換を用いることで、 $C(\tau)$  について次式が得られる。

$$C(\tau) = \frac{\alpha\beta(\omega' + 1)\Lambda}{2(1 - a)} e^{-\beta(1 - \alpha)\tau} \quad (19)$$

これは  $\omega' = 0$  の場合、Hawkes 過程の自己相関関数と一致する。この結果から SE-NBD 過程と Hawkes 過程の違いは自己相関関数であり、同一期間内の相関の有無であることが確認できる。

# 参考文献

- [1] 2020 annual global corporate default study and rating transitions, 2021.
- [2] Emmanuel Bacry, Adrian Iuga, Matthieu Lasnier, and Charles-Albert Lehalle. Market impacts and the life cycle of investors orders, 2014.
- [3] Emmanuel Bacry and Jean-Francois Muzy. Second order statistics characterization of hawkes processes and non-parametric estimation, 2014.
- [4] Luc Bauwens and Nikolaus Hautsch. *Modelling Financial High Frequency Data Using Point Processes*, pages 953–979. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2009.
- [5] Pierre Brémaud and Laurent Massoulié. Stability of nonlinear Hawkes processes. *The Annals of Probability*, 24(3):1563 – 1588, 1996.
- [6] Pierre Brémaud and Laurent Massoulié. Hawkes branching point processes without ancestors. *Journal of Applied Probability*, 38(1):122–135, 2001.
- [7] P. Embrechts and M. Kirchner. Hawkes graphs. *Theory of Probability & Its Applications*, 62(1):132–156, 2018.
- [8] Alexis Fauth and Ciprian A. Tudor. Modeling first line of an order book with multivariate marked point processes, 2012.
- [9] Niels Richard Hansen, Patricia Reynaud-Bouret, and Vincent Rivoirard. Lasso and probabilistic inequalities for multivariate point processes. *Bernoulli*, 21(1), feb 2015.
- [10] A. G. Hawkes. Point spectra of some mutually exciting point processes. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B: Methodological*, 33(3), 1971.
- [11] A. G. Hawkes. Spectra of some self-exciting and mutually exciting point processes. *Biometrika*, 58(1), 1971.
- [12] Nishiura Hiroshi et al. Closed environments facilitate secondary transmission of coronavirus disease 2019 (covid-19). *medRxiv*, 2020.
- [13] Masato Hisakado, Kenji Kitsukawa, and Shintaro Mori. Correlated binomial models and correlation structures. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 39(50):15365–15378, nov 2006.
- [14] Masato Hisakado and Shintaro Mori. Quantum statistics and networks by asymmetric preferential attachment of nodes-between bosons and fermions. *Journal of the Physical Society of Japan*, 90(8):084801, 2021.
- [15] Matthias Kirchner. An estimation procedure for the hawkes process. *Quantitative Finance*, 17, 09 2015.

- [16] Amy N. Langville and Carl D. Meyer. *Google's PageRank and Beyond: The Science of Search Engine Rankings*. Princeton Univ Pr, 2006.
- [17] Iacopo Mastromatteo, Emmanuel Bacry, and Jean-François Muzy. Linear processes in high dimensions: Phase space and critical properties. *Physical Review E*, 91(4), apr 2015.
- [18] Shintaro Mori, Masato Hisakado, and Kazuaki Nakayama. Pólya urn with memory kernel and asymptotic behaviors of autocorrelation function. *Journal of the Physical Society of Japan*, 90(11):114010, 2021.
- [19] Yoshihiko Ogata. Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. *Journal of the American Statistical Association*, 83(401), 1988.
- [20] Lu Lin Paul Embrechts, Thomas Liniger. Multivariate hawkes processes: an application to financial data. *Journal of Applied Probability: Methodological*, 48, 2011.
- [21] Patricia Reynaud-Bouret and Sophie Schbath. Adaptive estimation for hawkes processes; application to genome analysis. *The Annals of Statistics*, 38(5):2781 – 2822, 2010.
- [22] Gunter M. Schütz and Steffen Trimper. Elephants can always remember: Exact long-range memory effects in a non-markovian random walk. *Phys. Rev. E*, 70:045101, Oct 2004.
- [23] D. Sornette and G. Ouillon. Multifractal scaling of thermally activated rupture processes. *Phys. Rev. Lett.*, 94:038501, Jan 2005.
- [24] J. A. McGill V. Chavez-Demoulin. High-frequency financial data modeling using hawkes processes. *Journal of Banking & Finance*, 36(12), 2012.
- [25] Ban Zheng, François Roueff, and Frédéric Abergel. Ergodicity and scaling limit of a constrained multivariate hawkes process, 2013.

# 謝辞

本論文の執筆にあたり多くの肩附形にご支援いただきました。共同研究者である野村證券株式会社の久門正人さんには、分析や解析の方法について貴重なご指導とご助言を賜りました。感謝申し上げます。

主導教員である守真太郎教授には、研究の着想から、分析解析、論文執筆まで多くのご指導をいただきました。ここに深謝の意を表します。

最後に所属する守ゼミの皆様には多くのご支援をいただきました。お礼申し上げます。