

Merton model and Poisson process with Log Normal intensity function

[https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/64de0777-bf7d-42ea-b5be-640e75c7313d/Merton_Poisson_process_\(2\).pdf](https://s3-us-west-2.amazonaws.com/secure.notion-static.com/64de0777-bf7d-42ea-b5be-640e75c7313d/Merton_Poisson_process_(2).pdf)

Abstract

この研究では、マートンモデルを考えます。

マートンモデルが、連続極限で対数正規分布強度関数をもつポアソンモデルになることを示します。

このモデルとHawkesモデルの関係について説明します。

このモデルをデフォルトのポートフォリオに適用します。

さらに、ベータ分布とパイチェック分布モデルが類似している理由を示します。

1. INTRODUCTION

異常拡散は、社会物理学と経済物理学が最も興味深い話題の1つです。[1-3]

このような現象を特徴付けるモデルは長期記憶を持ち[4-10]、いくつかのタイプの相転移を示します。

以前の研究では、情報カスケードの投票モデルを調査しました。[11-17]

このモデルには2種類の相転移があります。

1つは分布が収束するかどうかを示すイジングモデル[13]の相転移に似ている情報カスケード遷移です。

もう一つは、異常拡散に対応する超正常拡散の収束遷移です。[12,18]

金融工学では、リスクヘッジするためにいくつかの製品が発明されています。

クレジットデフォルトスワップは、信用リスクをヘッジするためのツールであり、単一の債務者のデフォルトを対象とする単名クレジットデリバティブです。

合成債務担保証券（CDO）は、資産のポートフォリオを証券化する金融確信であり、2000年代には2008年に大不況の引き金となりました。

これらの商品は、支払いと引き換えに与信ポートフォリオの総損失の一部から保護するもので、デフォルトの依存関係とデフォルトのクラスタリングに関する市場の影響（意味？）について貴重な洞察を提供する。

信用事由の管理の難しさが相関関係に依存するため、最後の側面は重要です。

破産確率（PD）と債務者間の相関は過去のデータに対する実証研究に基づいて推定される。

これらの2つのパラメータは合成CDOなどの金融商品の価格設定のときに重要です。[19-21]

また、金融機関にとってはポートフォリオ運用（管理）する上で重要であり、規制上は「長期PD」と呼ばれている。

デフォルトが最小のとき、相関関係があるときに、これらのパラメータを推定することは容易ではない。
[22,23]

近年、経済物理学の観点から金融市場の時系列に関するいくつかの研究が行われています。[24-28]

これらのデータの重要な性質は、特にリターンのファットテール分布、ボラティリティへの長期記憶、およびマルチフラクタルの性質です。

これらの研究の殆どで、株価と外国為替の市場データが使用されています。

ボラティリティの長期記憶はボラティリティクラスタリング[28]として知られており、リスク管理、特にVaRの計算に影響を与えます。

この研究では、長期デフォルトデータを用いて資産価値の時系列を調査し、資産価値の隠れた時系列が長期記憶であることを示します。

マートンモデルを使用してベイズ推定法を研究します。

通常の場合では、マートンモデルはPDと相関を推定するのに使用されるを推定するために使用される資産価格の動きの相関（資産相関）によるデフォルト相関を組み込んでいます。

モンテカルロシミュレーションは、大規模な同種ポートフォリオの制限を除いて、パラメータ推定するための適切なツールです。[21]

この場合、分布は分析的に計算できるパイチェック分布になります。[29]

以前の研究では、デフォルト相関のあるベータ二項分布を使用したパラメータ推定について説明し、時間相関のある複数年のケースを検討しました。[17]

イジングモデルと同様の非平衡相転移は、時間相関がべき法則によって減衰する時に発生します。

この研究では、マートンモデルを強いようする場合の相転移について説明します。

べき指数が1未満の場合、PDの推定量分布はデルタ関数にゆっくりと収束します。

対症的に、べき指数が1より大きい場合、収束は通常の場合と同じになります。

分布の収束が遅い場合、限られたデータでのPDの推定に時間がかかります。

時間相関の減衰形式を確認するために、実際のデフォルトデータを扱います。

遅い収束領域でのべき指数の推定を検証します。

これは適切な履歴データが利用できる場合でもPD、資産相関、そして時間相関の正確なパラメータ推定には時間がかかることを示しています。

この論文の残りは、つぎのように構成されています。

Sec.2では、マートンモデルの確率過程を紹介し、二重スケーリング極限でポアソン過程を取得します。

Sec.3では、通常の遅い相転移について説明します。

Sec.4ではマートンモデルを使用して、デフォルト履歴の実際のデータへのベイズ推定アプローチの適用について説明し、そのパラメータを確認します。

最後にSec.5で結論を示します。

2. ASSET CORRELATION AND DEFAULT CORRELATION

このセクションでは、Mertonモデル[30]を使用して、確率過程の時系列を考える。

プロセスの極限をとり、対数正規強度関数でポアソン過程を取得する。

通常の変数 y_t は、経済の状態を説明する隠れ変数であり、 y_t は t 番目の期間の全ての債務者に影響を与えます。

異なる期間からの時間相関を導入するために、 $\{y_t, 1 \leq t \leq T\}$ をつぎの相関行列を持つ相関正規分布の確率変数の時系列とします。

$$\Sigma \equiv \begin{pmatrix} 1 & d_1 & d_2 & \cdots & d_{T-1} \\ d_1 & 1 & d_1 & \ddots & \vdots \\ \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & d_1 \\ d_{T-1} & \cdots & d_2 & d_1 & 1 \end{pmatrix} \quad (1)$$

ここで、 $(y_1, \dots, y_T)^T \sim N_T(0, \Sigma)$ 。

時間相関の2つのケースを考えます。

1. 指数減衰、 $d_i = \theta^i$, $0 \leq \theta \leq 1$ 。
2. べき減衰、 $d_i = 1/(i+1)^{-\gamma}$, $\gamma \geq 0$ 。

指数減衰は短期記憶に対応し、べき減衰は中期記憶、長期記憶に対応します[31]。

一般性を失うことなく、 t 期間の目の債務者の数は定数であると仮定し、それを N と表します。

資産相関 ρ_A は同じ期間の債務者の資産の価値の間の相関を表すパラメータです。

t 期間目の i 番目の資産価値 \hat{U}_{it} をつぎのようになる。

$$\hat{U}_{it} = \sqrt{\rho_A} y_t + \sqrt{1 - \rho_A} \epsilon_{it} \quad (2)$$

ここで、 $\epsilon_{it} \sim N(0, 1)$ は独立同分布。

この定式化によって、 U_{it} の等時間相関は ρ_A となります。

過程の離散ダイナミクスは、つぎのように記述されます。

$$X_{it} = 1_{\hat{U}_{it} \leq Y} \quad (3)$$

ここで、 Y はしきい値で、 $1 \leq i \leq N$ 。

$X_{it} = 1(0)$ のとき、 t 期間目の i 番目の債務者がデフォルト（非デフォルト）です。

式(3)は $y_t = y$ の条件付きデフォルト確率(4)に対応します。

$$G(y) \equiv P(X_t = 1 | y_t = y) = \Phi \left(\frac{Y - \sqrt{\rho_A} y}{\sqrt{1 - \rho_A}} \right) \quad (4)$$

ここで、 $\Phi(x)$ は標準正規分布、 $G(y_t)$ はポートフォリオのt期間目のデフォルト確率の分布、平均PDは $p' = \Phi(Y)$ であり、これはPDの長期間平均です。

ここで、多項モデルに拡張します。

企業数は N 、条件付き確率は $G(y)$ である。

デフォルト数の分布はつぎようになる。

$$\begin{aligned} P[X_t = k_t] &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N!}{k_t!(N - k_t)!} G(y)^{k_t} (1 - G(y))^{N - k_t} \phi(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{N!}{k_t!(N - k_t)!} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p') - \sqrt{\rho_A}y}{\sqrt{1 - \rho_A}}\right)^{k_t} \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p') - \sqrt{\rho_A}y}{\sqrt{1 - \rho_A}}\right)\right)^{N - k_t} \phi(y) dy \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、 $\phi(y)$ は正規分布、 $1/\sqrt{2\pi}e^{-y^2/2}$ 。

ここでは、正規分布について $\beta \sim 1.3$ のロジスティック関数を用いた近似を使用する。

$$\Phi(x) \approx \frac{1}{1 + e^{-\beta x}} \quad (6)$$

この近似を使用するとつぎようになります。

$$G(y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p') - \sqrt{\rho_A}y}{\sqrt{1 - \rho_A}}\right) = p \sim \frac{1}{1 + ((1 - p')/p')^{1/\sqrt{1 - \rho_A}} e^{\beta\sqrt{\rho_A}y/\sqrt{1 - \rho_A}}} \quad (7)$$

このとき、この関係式を用いる。

$$Y = \Phi^{-1}(p') \approx \log \frac{p'}{1 - p'} \quad (8)$$

$p \ll 1$ の場合つぎようになる。

$$G(y) = p'^{1/\sqrt{1 - \rho_A}} e^{-\frac{\sqrt{\rho_A}}{\sqrt{1 - \rho_A}} \beta y} \quad (9)$$

ここで、 $\lambda_0 = Np'^{1/\sqrt{1 - \rho_A}}$ が固定するような、 $p', p \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$ の極限を考える。

このとき、強度関数をつぎのように定義する。

$$\lambda(y) = Np'^{1/\sqrt{1 - \rho_A}} e^{-\frac{\sqrt{\rho_A}}{\sqrt{1 - \rho_A}} \beta y} = \lambda_0 e^{-\frac{\sqrt{\rho_A}}{\sqrt{1 - \rho_A}} \beta y} \quad (10)$$

$\lambda(y)$ の期待値は(11)のようになる。

$$\bar{\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda(y) \phi(y) dy = \lambda_0 e^{-\frac{\rho_A}{2(1 - \rho_A)} \beta^2} = \lambda_0 e^{\alpha^2/2} \quad (11)$$

ここで、 $\alpha = \frac{\sqrt{\rho_A}}{\sqrt{1 - \rho_A}} \beta$ 。

このとき、変数 y から $\hat{y} = -y$ に変更する。

$$\lambda(\hat{y}) = \lambda_0 e^{\frac{\sqrt{\rho_A}}{\sqrt{1 - \rho_A}} \beta \hat{y}} = \lambda_0 e^{\alpha \hat{y}} \quad (12)$$

この極限で式(5)はつぎのように計算できる。

$$\begin{aligned} P[X_t = k_t] &\sim \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\hat{y})^{k_t} e^{-\lambda(\hat{y})}}{k_t!} \phi(\hat{y}) d\hat{y} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda(\hat{y})^{k_t} e^{-\lambda(\hat{y})}}{k_t!} f(\lambda) d\lambda \end{aligned} \quad (13)$$

ここで、

$$f(\lambda) = \phi(\hat{y}) \frac{d\hat{y}}{d\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha\lambda}} e^{-\frac{(\log \lambda - \log \lambda_0)^2}{2\alpha^2}} \quad (14)$$

このとき、強度関数の分布は対数正規分布になる。

期待値は $\bar{\lambda} = \lambda_0 e^{\alpha^2/2}$ 、分散は $\bar{V} = \bar{\lambda}^2 (e^{\alpha^2} - 1)$ 。

期待値は ρ_A の関数であることに注意。

極限 $\rho_A \rightarrow 0$ で、 $\bar{\lambda} = \lambda_0$ かつ $\bar{V} = 0$ のときポアソン過程。

極限 $\rho_A \rightarrow 1, \alpha \rightarrow \infty$ で $f(\lambda) \sim 1/\lambda$ 、ここで $\bar{\lambda} \rightarrow \infty, \bar{V} \rightarrow \infty$ 。

この過程の変数間の関係のイメージをFig1(a)に示します。

比較のために、Fig1(b)にSE-NBDとHawkes過程の場合も示します。

この過程では y_t は λ_t および k_t のデータとは独立です。

また、時間相関は y_t の時系列によるものです。

一方、NBD過程とHawkes過程では、強度関数 λ_t とデフォルト数 k_t の間にあります。

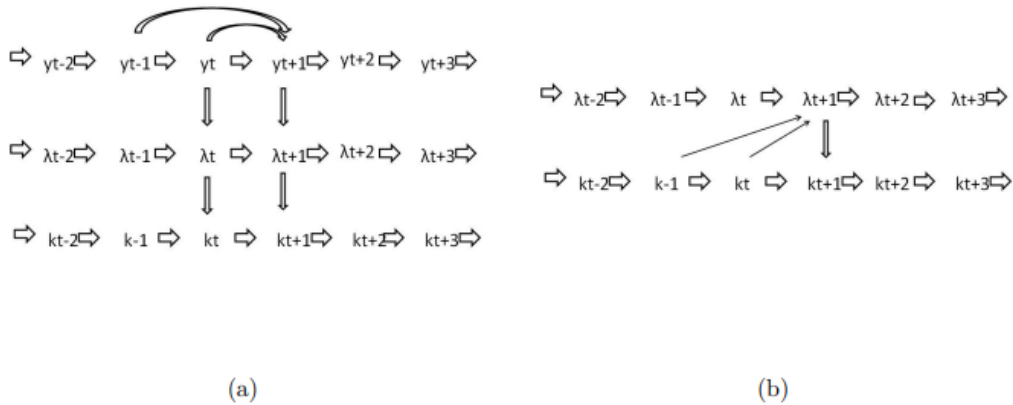


FIG. 1. The relation among the variables of (a) this process and (b) SE-NBD and Hawkes process

次に、影響（インパクト）分析について考える。

これは、期間 t におけるノイズ δ の衝撃の影響の研究です。

\hat{y}_t に衝撃が加わった時に、 $t + 1$ から ∞ までの強度関数の期待値の加算を考える。

最初に、指数関数減衰モデル $d_i = \theta^i, \theta \leq 1$ の場合を考える。

加えた衝撃 δ の比率を考えると、

$$\frac{\bar{\lambda}_\delta}{\bar{\lambda}} = E[\log \frac{\lambda_0 e^{\alpha\delta + \alpha\hat{y}_t}}{\lambda_0 e^{\alpha\hat{y}_t}} \frac{\lambda_0 e^{\alpha\delta\theta + \alpha\hat{y}_t}}{\lambda_0 e^{\alpha\hat{y}_{t+1}}} \frac{\lambda_0 e^{\alpha\delta\theta^2 + \alpha\hat{y}_t}}{\lambda_0 e^{\alpha\hat{y}_{t+2}}} \dots] = \frac{\alpha\delta}{1 - \theta} \quad (15)$$

このとき、影響は有限の値になる。

次に、 $d_i = 1/(i+1)^\gamma, i = 1, 2, \dots$ の場合を考える、ここで $\gamma \geq 0$ はべき指数。

加えた衝撃 δ の比率を考えると、

$$\frac{\bar{\lambda}_\delta}{\bar{\lambda}} = E[\log \frac{\lambda_0 e^{\alpha\delta + \alpha\hat{y}_t}}{\lambda_0 e^{\alpha\hat{y}_t}} \frac{\lambda_0 e^{\alpha\delta/2^\gamma + \alpha\hat{y}_t}}{\lambda_0 e^{\alpha\hat{y}_{t+1}}} \frac{\lambda_0 e^{\alpha\delta/3^\gamma + \alpha\hat{y}_t}}{\lambda_0 e^{\alpha\hat{y}_{t+2}}} \dots] \quad (16)$$

$\gamma > 1$ のとき、(17) が得られる。

$$\frac{\bar{\lambda}_\delta}{\bar{\lambda}} < \alpha\delta \left(1 + \frac{1}{\gamma - 1}\right) \quad (17)$$

このとき衝撃は有限。

$\gamma = 1$ のとき、(18) が得られる。

$$\frac{\bar{\lambda}_\delta}{\bar{\lambda}} \sim \alpha\delta \log T \quad (18)$$

このとき衝撃は無限大。

$\gamma < 1$ のとき、(19) が得られる。

$$\frac{\bar{\lambda}_\delta}{\bar{\lambda}} \sim \alpha\delta T^{1-\gamma} \quad (19)$$

このとき衝撃は無限大。

要約すると、 $\gamma > 1$ のとき衝撃は有限、 $\gamma \leq 1$ のとき衝撃は無限大

つぎのセクションでは、衝撃の相転移について考えます。

