实验题目：牛顿（Newton）迭代法

0.1 问题分析

实验的目的为使用牛顿迭代法，在给定初值的条件下数值求解非线性方程的根。

在给定输入初值精度以及最大迭代次数的情况下输出方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 的近似值或者计算失败的标志

牛顿迭代法：多数方程不存在求根公式，因此求精确根非常困难，甚至不可解，从而寻找方程的近似根就显得特别重要。方法使用函数

$$f(x)$$

的泰勒级数的前面几项来寻找方程

$$f(x)=0$$

的根。牛顿迭代法是求方程根的重要方法之一，其最大优点是在方程

$$f(x)=0$$

的单根附近具有平方收敛，而且该法还可以用来求方程的重根、复根，此时线性收敛，但是可通过一些方法变成超线性收敛。另外该方法广泛用于计算机编程中。

0.2 数学原理

用牛顿迭代法解非线性方程，是把非线性方程 $f(x)=0$ 线性化的一种近似方法。把 $f(x)$ 在点 x_0的某邻域内展开成泰勒级数

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+R_n(x)$$

取其线性部分（即泰勒展开的前两项），并令其等于0，即

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)=0$$

以此作为非线性方程 $f(x)=0$ 的近似方程，若 $f\prime(x)\neq 0$ 则其解为

$$x_1=x_0-\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

这样，得到牛顿迭代法的一个迭代关系式：

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

0.3 程序设计流程

0.3.1 函数实现

```
function Newton(alpha,eps1,eps2,N)

syms x;
f(x) = cos(x)-x;

display('The equation to be solved is: f(x) = cos(x) - x ')

n = 1;
x0 = alpha;
while(n<=N)
    F = double(subs(f(x),x,x0));
    Diif_F = double(subs(diff(f(x)),x,x0));
    if(abs(F)<eps1)
        fprintf('The root is: %f\n',x0)
        return;
    end
    if(abs(Diif_F)<eps2) % 寻找失败了，停机输出
        disp("Not found");
        return;
    end
    x1 = double(x0 - F/Diif_F);
    Tol = double(abs(x1-x0));
    if(Tol<eps1)
        fprintf('The root is: %f\n',x0)
        return;
    end
    n = n+1;
    x0 = x1;
end
disp("Not found");
end
```

0.3.2 测试脚本

```
clc
clear
format long

alpha = input('请输入初值α:');
eps1 = input('请输入精度ε1:');
eps2 = input('请输入精度ε2:');
n = input('请输入最大迭代次数N:');
Newton(alpha,eps1,eps2,n);
```

0.4 实验结果、结论与讨论

0.4.1 问题1

0.4.1.1 （1） $\cos x - x = 0 \quad \varepsilon_1 = 10^{-6} \quad \varepsilon_2 = 10^{-4} \quad x_0 = \frac{\pi}{4} \quad N = 10$

```
>> Newton(pi/4,1e-6,1e-4,10)
The equation to be solved is: f(x) = cos(x) - x
The root is: 0.739085
```

0.4.1.2 （2） $e^{-x} - \sin x \quad \varepsilon_1 = 10^{-6} \quad \varepsilon_2 = 10^{-4} \quad x_0 = 0.6 \quad N = 10$

```
>> Newton(0.6,1e-6,1e-4,10)
The equation to be solved is: f(x) = exp(-x) - sin(x)
The root is: 0.588533
```

0.4.2 问题2

0.4.2.1 (1) $x - e^{-x} = 0 \quad \varepsilon_1 = 10^{-6} \quad \varepsilon_2 = 10^{-4} \quad x_0 = 0.5 \quad N = 10$

```
>> Newton(0.5,1e-6,1e-4,10)
The equation to be solved is: f(x) = x - exp(-x)
The root is: 0.567143
```

0.4.2.2 (2) $x^2 - 2xe^{-x} + e^{-2x} = 0 \quad \varepsilon_1 = 10^{-6} \quad \varepsilon_2 = 10^{-4} \quad x_0 = 0.5 \quad N = 20$

```
>> Newton(0.5,1e-6,1e-4,20)
The equation to be solved is: f(x) = x - exp(-x)
The root is: 0.566606
```

0.4.3 思考题:

1. 0.4.3.1 对实验1 确定初值的原则是什么？实际计算中应如何解决？

0.4.3.1.1 回答

原则应该是:

1. 区间存在根，可以通过二分法来找到一个含有根的区间
2. 尽可能与根接近，实际计算中可以先绘图，通过图像估计初值，通常来说会获得更加准确的初值
3. 0.4.3.2 对实验2 如何解释在计算中出现的现象？试加以说明

0.4.3.2.2 回答

实验2中（2）的收敛速度明显较慢，原因是方程存在重根，当存在重根时牛顿迭代法的收敛速度为线性收敛，所以收敛速度变慢了。