实验题目：高斯（Gauss）列主元消去法

0.1 问题分析

本实验为高斯列主元消去法，本实验主要学习高斯消元法的代码实现，对于 n 阶线性方程组 $Ax=b$，首先进行列主元消元过程，最后进行回代，得到方程的解或确定该方程为奇异的。

高斯消去法从第k步到第k+1步的消元过程，必须满足条件$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$。而这个元素即被称为第k步的主元(素)。显然，高斯消去法是按方程排列的自然顺序产生主元的，这样，一旦出现

$a_{kk}^{(k-1)} = 0$ 计算就归于失败，而且即使$a_{kk}^{(k-1)} \neq 0$，但若其绝对值很小，也将会因用它作除数，引起其他元素的数量级及舍人误差急剧增大，导致最终计算结果不可靠。为了避免在高斯消去法应用中可能出现的这类问题，就发展形成了列主元、全主元等多种消去法。这些方法的基本点在于对高斯消去法的过程作某些技术性修改，全面或局部地选取绝对值最大的元素为主元素，从而构成了相应的主元(素)消去法。列主元(素)消去法以处理简单、相对计算量小的特点，在各类主元消去法中得到最为广泛的应用。

0.2 数学原理

高斯消去法中第k-1步消元得到的结果可由分块矩阵记为

$$\left[\boldsymbol{A}^{(k-1)}, \boldsymbol{b}^{(k-1)}\right] = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} & \vdots & \boldsymbol{b}_1 \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{A}_{kk} & \vdots & \boldsymbol{b}_2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

式中 b_1, b_2 对应于右端常数列的两个子块，而

$$\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(0)} & a_{12}^{(0)} & \cdots & a_{1,k-1}^{(0)} \\ & a_{22}^{(1)} & \cdots & a_{2,k-1}^{(1)} \\ & & & \vdots \\ & & & a_{k-1,k-1}^{(k-2)} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_{kk} = \begin{bmatrix} a_{kk}^{(k-1)} & a_{k,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k,n}^{(k-1)} \\ a_{k+1,k}^{(k-1)} & a_{k+1,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{k+1,n}^{(k-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n,k}^{(k-1)} & a_{n,k+1}^{(k-1)} & \cdots & a_{n,n}^{(k-1)} \end{bmatrix}.$$

与高斯消去法不同的是，列主元消去法在第k步消元之前，先在它的第k列主对角元$a_{kk}^{(k-1)}$及其下方的所有元素中(亦即 A_{kk} 的第一列元素中)选出绝对值最大的元素 $a_{ik,k}^{(k-1)}$ 作为这一列的主元，即

$$\left|a_{i_k,k}^{(k-1)}\right| = \max_{k \leq i \leq n} \left|a_{ik}^{(k-1)}\right| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1),$$

对式(1)，作初等行变换

$$[i_k] \leftrightarrow [k], \qquad (i_k \geq k),$$

这样，就把 $a_{ik,k}^{(k-1)}$ 换到主对角元位置上。经过选列主元与行交换之后，再如高斯消去法一样作行的消元变换。上述过程从第一步消元开始执行，即k=1，2，···，n—1，这就构成了**列主元消去法**

0.3 程序设计流程

0.3.1 函数主体

```
function Result = Gauss(n, A, b)
    for k = 1:n-1
        max = abs(A(k, k));
        p = k;
        for j = k+1:n
            if(abs(A(j, k)) > max)
                max = abs(A(j, k));
                p = j;
            end
        end
        if(A(p, k) == 0)
            Result = 'Singular matrix!';
            return;
        end
        if(p ~= k)
           A([k p], :) = A([p k], :);
           b([k p], :) = b([p k], :);
        end
        for i = k+1:n
            Mik = A(i, k)/A(k, k);
            for j = k:n
                A(i, j) = A(i, j) - A(k, j)*Mik;
            end
            b(i) = b(i) - b(k)*Mik;
        end
    end
    if(A(n, n) == 0)
        Result = 'Singular matrix!';
        return;
    end
    Result = zeros(n, 1);
    Result(n, 1) = b(n)/A(n, n);
    for k = n-1:-1:1
        Sum = 0;
        for j = k+1:n
            Sum = Sum + A(k, j)*Result(j, 1);
        end
        Result(k, 1) = (b(k) - Sum)/A(k, k);
    end
end
```

0.4 实验结果、结论与讨论

0.4.1 问题1

$$(1)\quad \begin{bmatrix} 0.4096 & 0.1234 & 0.3678 & 0.2943 \\ 0.2246 & 0.3872 & 0.4015 & 0.1129 \\ 0.3645 & 0.1920 & 0.3781 & 0.0643 \\ 0.1784 & 0.4002 & 0.2786 & 0.3927 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1.1951 \\ 1.1262 \\ 0.9989 \\ 1.2499 \end{bmatrix}$$

```
ans =

   1.000000000000003
   1.000000000000002
   0.999999999999997
   0.999999999999999
```

$$(2)\quad \begin{bmatrix} 136.01 & 90.860 & 0 & 0 \\ 90.860 & 98.810 & -67.590 & 0 \\ 0 & -67.590 & 132.01 & 46.260 \\ 0 & 0 & 46.260 & 177.17 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 226.87 \\ 122.08 \\ 110.68 \\ 223.43 \end{bmatrix}$$

```
ans =

   1.000000000000118
   0.999999999999824
   0.999999999999901
   1.000000000000026
```

$$(3)\quad \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 1/3 & 1/4 & 1/5 \\ 1/3 & 1/4 & 1/5 & 1/6 \\ 1/4 & 1/5 & 1/6 & 1/7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 25/12 \\ 77/60 \\ 57/60 \\ 319/420 \end{bmatrix}$$

```
ans =

   0.999999999999993
   1.000000000000069
   0.999999999999855
   1.000000000000085
```

$$(4)\quad \begin{bmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 \\ 7 & 5 & 6 & 5 \\ 8 & 6 & 10 & 9 \\ 7 & 5 & 9 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 32 \\ 23 \\ 33 \\ 31 \end{bmatrix}$$

```
Gauss 1.(4)

ans =

     1
     1
     1
     1
```

实验题目的准确结果：

（1） $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(1,1,1,1)^T$；

（2） $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(1,1,1,1)^T$；

（3） $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(1,1,1,1)^T$；

（4） $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T=(1,1,1,1)^T$。

0.4.2 问题2

（1） $$\begin{bmatrix} 197 & 305 & -206 & -804 \\ 46.8 & 71.3 & -47.4 & 52.0 \\ 88.6 & 76.4 & -10.8 & 802 \\ 1.45 & 5.90 & 6.13 & 36.5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 136 \\ 11.7 \\ 25.1 \\ 6.60 \end{bmatrix}$$

```
ans =

   0.953679106901772
   0.320956845521104
   1.078708075793238
  -0.090108509539579
```

（2） $$\begin{bmatrix} 0.5398 & 0.7161 & -0.5554 & -0.2982 \\ 0.5257 & 0.6924 & 0.3565 & -0.6255 \\ 0.6465 & -0.8187 & -0.1872 & 0.1291 \\ 0.5814 & 0.9400 & -0.7779 & -0.4042 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0.2058 \\ -0.0503 \\ 0.1070 \\ 0.1859 \end{bmatrix}$$

```
ans =

   0.516177297958542
   0.415219472830135
   0.109966102867889
   1.036539223336201
```

$$(3)\quad \begin{bmatrix} 10 & 1 & 2 \\ 1 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 13 \\ 7 \end{bmatrix}$$

```
ans =

   1.000000000000000
   1.000000000000000
   1.000000000000000
```

$$(4)\quad \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 17 & 10 \\ -4 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 25 \\ 15 \end{bmatrix}$$

```
ans =

     1
     1
     1
```