实验题目：拉格朗日（Lagrange）插值

问题分析

1. 利用拉格朗日插值算法，根据参考程序流程实现算法，利用多项式$P_n(x)$来求$f(x)$的近似值。
2. 通过对具体实例的分析探索插值多项式次数对结果的影响
3. 通过对具体实例的分析探索插值区间大小对结果的影响
4. 理解插值问题的内插与外推的方法，对两者可靠性进行比较

数学原理

插值基函数

令插值基函数 $l_j(x)$ $(j=0,1,2,\dots,n)$ 为如下的多项式：

$$l_j(x)=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

Lagrange插值公式

显然存在某多项式

$$y(x)=\sum_{j=0}^{n} f(x_j)l_j(x) \tag{1}$$

满足插值条件，$l_j(x)$ 有 n 个零点 $x_0,x_1,x_2,\dots,x_{j-1},xj+1,\dots,x_n$ ，所以应当具有形式

$$l_j(x)=A_j(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n),$$

结合$l_j(x_j)=1$ 可求得 A_j，综合得

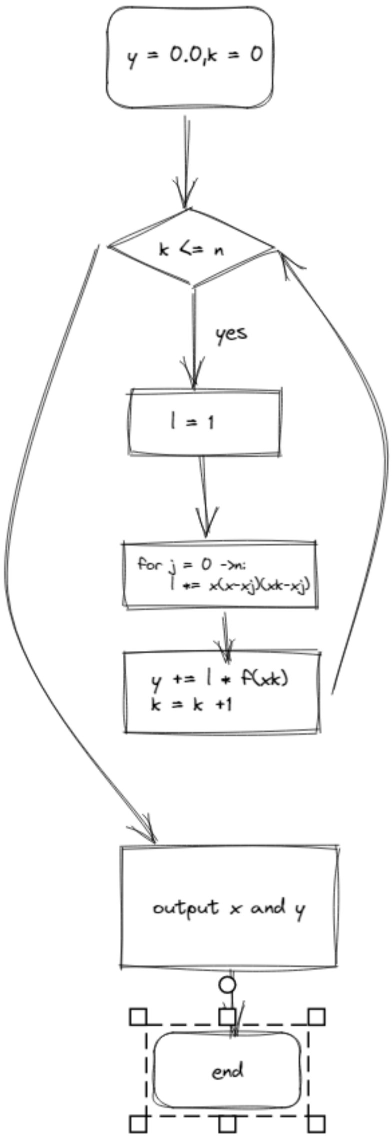
$$l_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\dots(x-x_n)}{}, \quad j=0,1,2,\dots,n \tag{2}$$

$$(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)$$

其中式（1）称为Lagrange插值公式，式（2）称为 Lagrange 插值多项式，记作 $L_n(x)$

程序设计流程

流程图



代码

函数实现

```
%----------------------file name: Lagrange_vec--------------------
function v = lagrange_vec(x_in, y_in, u)
n = length(x_in);
v = zeros(size(u));
for k = 1:n
    w = ones(size(u));
    for j = [1:k-1 k+1:n] %除去它自己不要乘
        w = (u-x_in(j))./(x_in(k)-x_in(j)).*w; %Lagrange多项式
    end
    v = v + w*y_in(k);
end
```

交互脚本

```
%-----------------------file name: Lagrange_vec_interactive------------------
syms x;
format long;
n = input('多项式的次数n: ');
u = input('请输入待估值点序列u的值(例如:[1,2,3,4]): ');
a = input('请输入区间下界a的值: ');
b = input('请输入区间上界b的值: ');
f = input('请输入函数f(x)的表达式(如1+x^2）: ');
x = linspace(a,b,n);
y = subs(f, symvar(f), x);
lagrange_vec(x,y,u);
ans = lagrange_vec(x,y,u);
exact_value = subs(f,symvar(f),u);
fprintf('\t\t\t结果表格\n');
fprintf('--------------------------------------------------------------------\n');
fprintf('\t     u \t    f(u) \t\t    exact \t\t    error\n');
fprintf('\t %2.3f \t %2.9f \t %2.9f\t %2.9f\n ', [u;ans;exact_value;exact_value-ans]);

```

实验结果、结论与讨论

问题1

拉格朗日插值多项式的次数n越大越好吗?

输出结果:

- 1.(1) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

```
                   结果表格(n=5)
----------------------------------------------------------
        u      f(u)            exact           error
     0.750   0.905441810     0.640000000     -0.265441810
     1.750   0.525799901     0.246153846     -0.279646054
     2.750   0.009553216     0.116788321     0.107235105
     3.750   -0.356826094    0.066390041     0.423216136
     4.750   -0.159544927    0.042440318     0.201985245
                    结果表格(n=10)
-----------------------------------------------------------
        u      f(u)            exact           error
     0.750   0.690717622     0.640000000     -0.050717622
     1.750   0.232998135     0.246153846     0.013155711
     2.750   0.112245498     0.116788321     0.004542823
     3.750   0.108400418     0.066390041     -0.042010377
     4.750   -0.236036985    0.042440318     0.278477303

                    结果表格(n=20)
----------------------------------------------------------
        u      f(u)            exact           error
     0.750   0.641340347     0.640000000     -0.001340347
```

```
        1.750    0.249055753      0.246153846      -0.002901907
        2.750    0.128218767      0.116788321      -0.011430446
        3.750    0.190261670      0.066390041      -0.123871629
        4.750    6.415032061      0.042440318      -6.372591743
```

- 1.(2) $f(x) = e^x$

```
                     结果表格(n=5)
----------------------------------------------------------
         u       f(u)            exact            error
     -0.95    0.386293876      0.386741023      0.000447148
     -0.05    0.951334528      0.951229425      -0.000105103
     0.05     1.051164240      1.051271096      0.000106857
     0.95     2.586322530      2.585709659      -0.000612871
                     结果表格(n=10)
----------------------------------------------------------
         u       f(u)            exact            error
     -0.95    0.386741027      0.386741023      -0.000000003
     -0.05    0.951229425      0.951229425      -0.000000000
     0.05     1.051271096      1.051271096      -0.000000000
     0.95     2.585709663      2.585709659      -0.000000004
                     结果表格(n=20)
----------------------------------------------------------
         u       f(u)            exact            error
     -0.95    0.386741023      0.386741023      0.000000000
     -0.05    0.951229425      0.951229425      0.000000000
     0.05     1.051271096      1.051271096      0.000000000
     0.95     2.585709659      2.585709659      0.000000000
```

回答

不是，次数过高的话会出现Runge现象,使用切比雪夫节点代替等距点可以减小震荡，在这种情况下，随着多项式阶次的增加最大误差逐渐减小。这个现象表明高阶多项式通常不适合用于插值。使用分段多项式样条可以避免这个问题。如果要减小插值误差，那么可以增加构成样条的多项式的数目，而不必是增加多项式的阶次。

> 参考：维基百科：龙格现象

问题2

插值区间越小越好吗?

输出结果

- 2.(1)

```
                     结果表格(n=5)
---------------------------------------------------------
         u       f(u)            exact            error
     -0.95    0.513552500      0.525624179      0.012071679
     -0.05    0.997752500      0.997506234      -0.000246266
     0.05     0.997752500      0.997506234      -0.000246266
     0.95     0.513552500      0.525624179      0.012071679

                     结果表格(n=10)
---------------------------------------------------------
```

```
        u      f(u)           exact          error
     -0.95    0.524273975    0.525624179    0.001350204
     -0.05    0.997464702    0.997506234    0.000041533
     0.05     0.997464702    0.997506234    0.000041533
     0.95     0.524273975    0.525624179    0.001350204

                    结果表格(n=20)
---------------------------------------------------------
        u      f(u)           exact          error
     -0.95    0.525631202    0.525624179    -0.000007023
     -0.05    0.997506234    0.997506234    0.000000000
     0.05     0.997506234    0.997506234    0.000000000
     0.95     0.525631202    0.525624179    -0.000007023
```

- 2.(2)

```
                   结果表格(n=5)
------------------------------------------------------------
        u      f(u)           exact          error
     -4.75    -1.932149264   0.008651695    1.940800959
     -0.25    1.427537021    0.778800783    -0.648736238
     0.25     0.588185464    1.284025417    0.695839953
     4.75     123.714558835  115.584284527  -8.130274308
                    结果表格(n=10)
------------------------------------------------------------
        u      f(u)           exact          error
     -4.75    0.042515959    0.008651695    -0.033864263
     -0.25    0.779562066    0.778800783    -0.000761282
     0.25     1.284820075    1.284025417    -0.000794659
     4.75     115.663039200  115.584284527  -0.078754673
                    结果表格(n=20)
------------------------------------------------------------
        u      f(u)           exact          error
     -4.75    0.008651704    0.008651695    -0.000000009
     -0.25    0.778800783    0.778800783    0.000000000
     0.25     1.284025417    1.284025417    0.000000000
     4.75     115.584284542  115.584284527  -0.000000014
```

回答

不一定，虽然从精度上考虑是区间变窄具有一定的合理性，但是过于密集时舍入误差被放大，而且计算量成本也大幅增加，但是却对精度的提升不大。实际计算时应当合理考虑，取合适的区间长度进行插值。

问题4

考虑拉格朗日插值问题，内插比外推更可靠吗？

结果输出

```
                 （1）结果表格 x_in = [1,4,9]
------------------------------------------------------------
        u      f(u)           exact          error
       5.00   2.266666667    2.236067977    -0.030598689
      50.00   -20.233333333  7.071067812    27.304401145
     115.00   -171.900000000 10.723805295   182.623805295
```

```
     185.00  -492.733333333  13.601470509    506.334803842

                 （2）结果表格 x_in = [36,49,64]
------------------------------------------------------------
        u      f(u)            exact           error
       5.00   3.115750916     2.236067977     -0.879682938
      50.00   7.071794872     7.071067812     -0.000727060
     115.00  10.167032967    10.723805295    0.556772328
     185.00  10.038827839    13.601470509    3.562642670

                 （3）结果表格 x_in = [100,115,185]
------------------------------------------------------------
        u      f(u)            exact           error
       5.00   4.537585505     2.236067977     -2.301517527
      50.00   7.314155736     7.071067812     -0.243087924
     115.00  10.723805295    10.723805295    0.000000000
     185.00  13.601470509    13.601470509    0.000000000


                 （4）结果表格 x_in = [169,196,225]
------------------------------------------------------------
        u      f(u)            exact           error
       5.00   5.497172049     2.236067977     -3.261104071
      50.00   7.800127714     7.071067812     -0.729059902
     115.00  10.800492611    10.723805295    -0.076687316
     185.00  13.600620325    13.601470509    0.000850184
```

回答

不一定，取决于具体函数的形式，但通常来说连续函数内插的可靠程度更高。外推相当于根据已知点推测未知点的信息。而我们的已知区间内是不含有区间外的信息的。从上述结果也可以看出，当需要推测的点落在 x_in 的内部时，$error$ 的值就会非常的小，精度明显比外推情况更高