实验题目：四阶龙格—库塔(Runge—Kutta)方法

0.1 问题分析

龙格-库塔(Runge-Kutta)方法是一种在工程上应用广泛的高精度单步算法，其中包括著名的欧拉法，用于数值求解微分方程。由于此算法精度高，采取措施对误差进行抑制，所以其实现原理也较复杂。在各种龙格- 库塔法当中有一个方法十分常用，以至于经常被称为“RK4”或者就是“龙格- 库塔法”。该方法主要是在已知方程导数和初值信息，利用计算机仿真时应用，省去求解微分方程的复杂过程。

本实验要求对于如下形式微分方程和初值

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x,y), a \le x \le b \\ y(a) = \alpha \qquad h = \dfrac{b-a}{N} \end{cases}$$

对于给定的输入a, b, α, N，输出给定

0.2 数学原理

建立微分方程，

$$y' = f(x,y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \le x \le x_n$$

可将其表示为，

$$y_{i+1} = y_i + h\varphi(x_i, y_i)$$

再令$\varphi(x_i, y_i) = a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4$，可得到

$$y_{i+1} = y_i + h(a_1k_1 + a_2k_2 + a_3k_3 + a_4k_4)$$

其中，

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_i, y_i) \\ k_2 &= f(x_i + b_1h, y_i + c_{11}k_1h) \\ k_3 &= f(x_i + b_2h, y_i + c_{21}k_1h + c_{22}k_2h) \\ k_4 &= f(x_i + b_3h, y_i + c_{31}k_1h + c_{32}k_2h + c_{33}k_3h) \end{aligned}$$

令，

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}h(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

其中，

$$
\begin{aligned}
k_1 &= f\left(x_i, y_i\right) \\
k_2 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_1 h\right) \\
k_3 &= f\left(x_i + \frac{1}{2}h, y_i + \frac{1}{2}k_2 h\right) \\
k_4 &= f\left(x_i + h, y_i + k_3 h\right)
\end{aligned}
$$

可利用此方法求解微分方程，对于一般的ODE来说精度足够

0.3 程序设计流程

0.3.1 函数主体

```
function [x,y] = RungeKutta4(fun,a, b, y0, n)
h = (b-a)/n;
x = zeros(n+1,1);
y = zeros(n+1,1);
x(1) = a;
y(1) = y0;
for i = 1:n
   x(i+1) = x(i)+h;
   K1 = fun(x(i), y(i));
   K2 = fun(x(i)+h/2, y(i)+K1*h/2);
   K3 = fun(x(i)+h/2, y(i)+K2*h/2);
   K4 = fun(x(i)+h, y(i)+K3*h);
   y(i+1) = y(i)+h/6*(K1+2*K2+2*K3+K4);
end
end
```

0.3.2 测试脚本

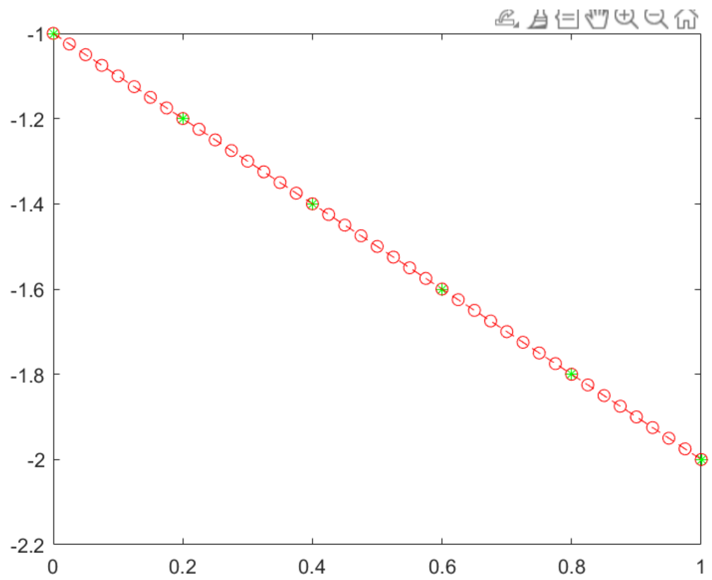
```
clc,clear
set(0,'defaultfigurecolor','w')

f = @(x,y) x +y

n = 5

a = 0; %x初值
b = 1; %x终值
alpha = -1; %y初值

[x,y] = RungeKutta4(f, a, b, alpha, n);
[x2,y2] = ode45(f, [a,b], alpha);   %matlab内部函数,用作参考
plot(x,y,'g--*',x2,y2,'r--o') % 自己实现的是绿色的，标准库的是红色的

```

0.4 实验结果、结论与讨论

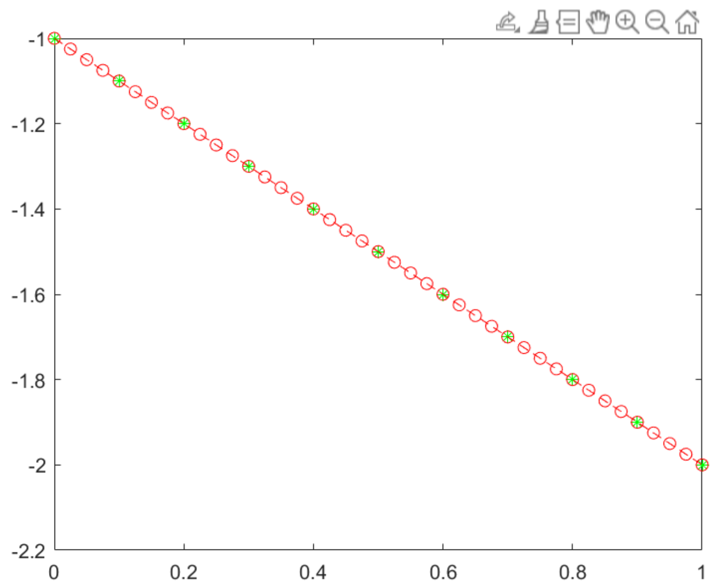
0.4.1 题目1

0.4.1.1 1.1 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x + y$

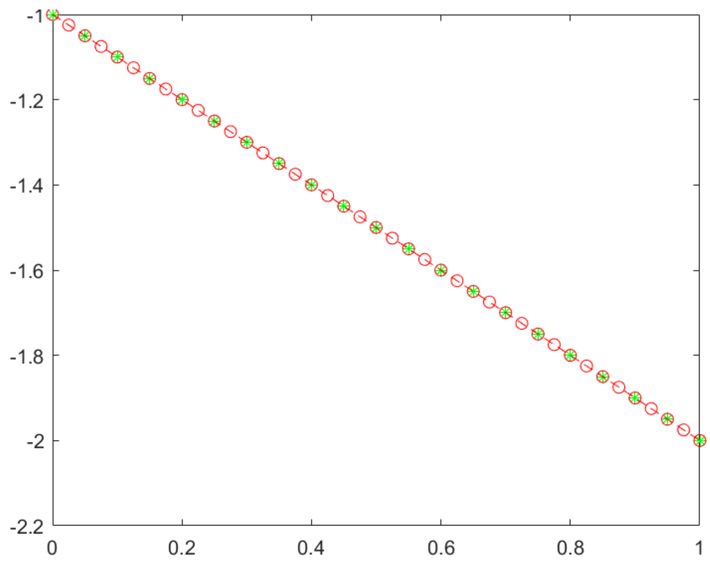
- n = 5



- n = 10

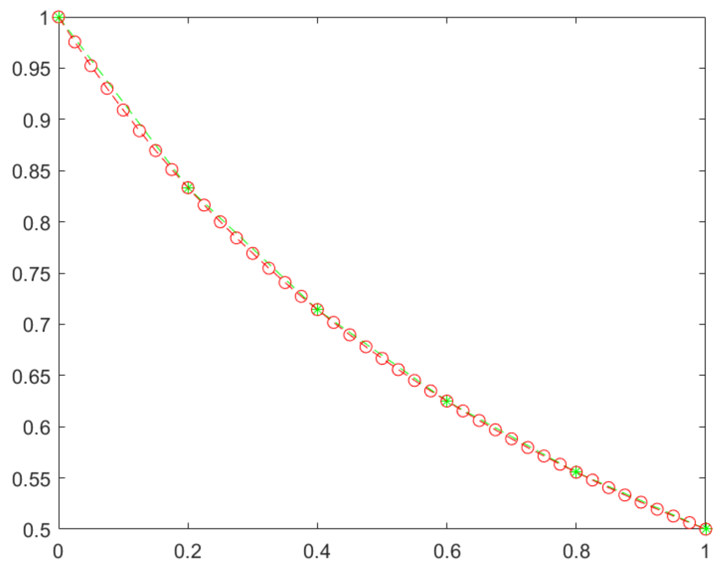


- n = 20

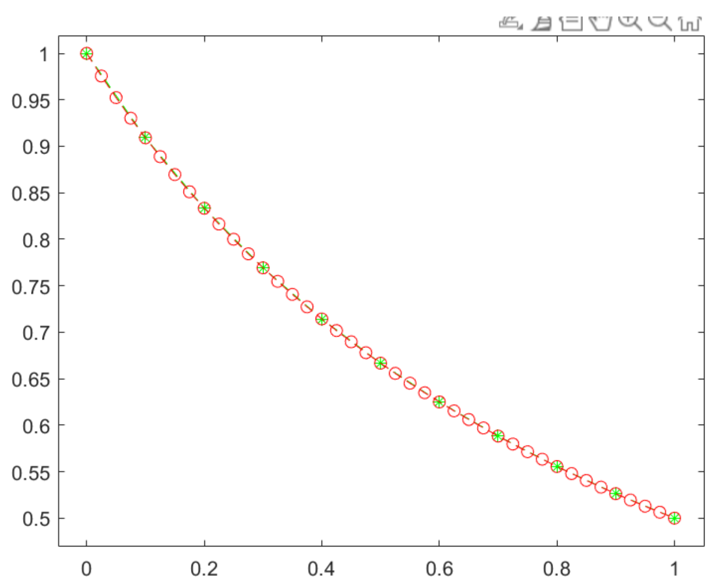


0.4.1.2 $1.2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -y^2$

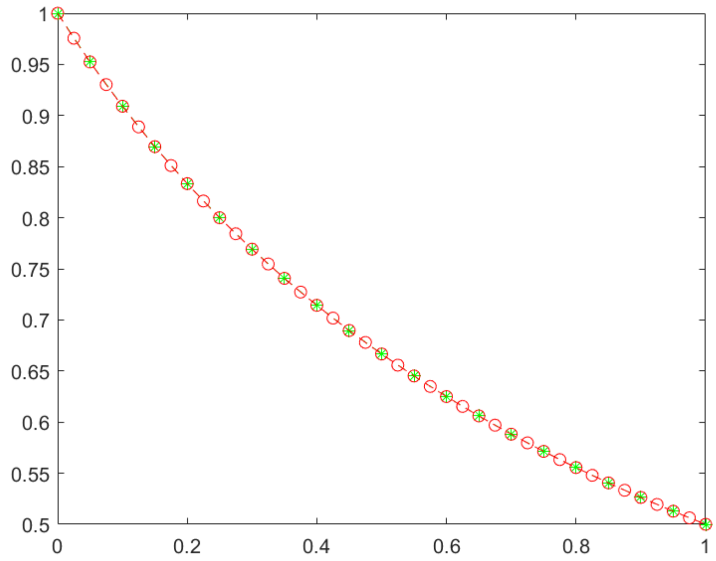
- n = 5



- n = 10



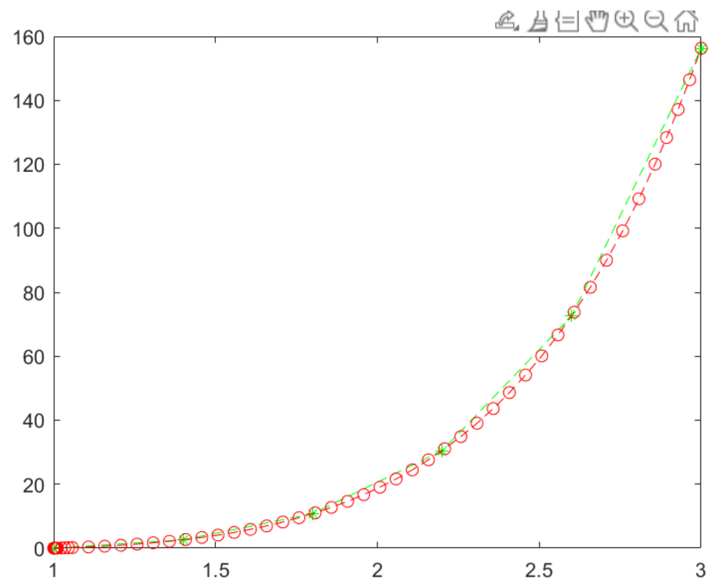
- n = 20



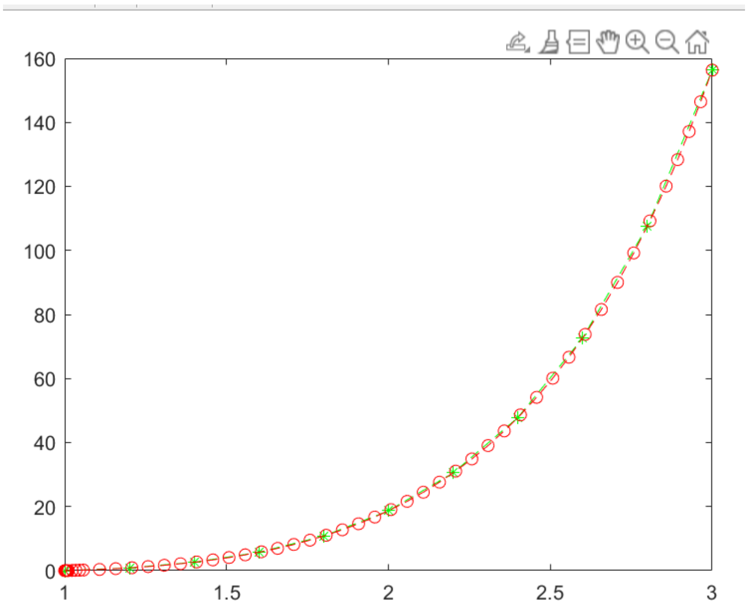
0.4.2 题目2

0.4.2.1 2.1 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2y}{x} + x^2e^x$

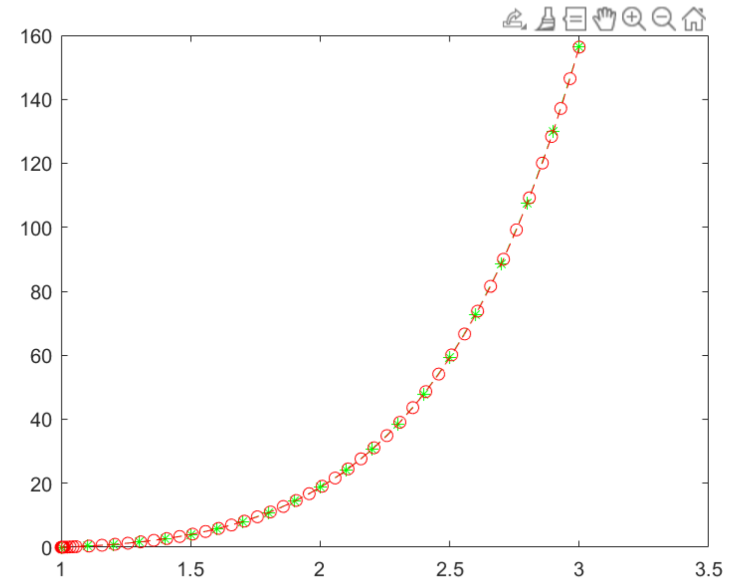
- n = 5



- n = 10

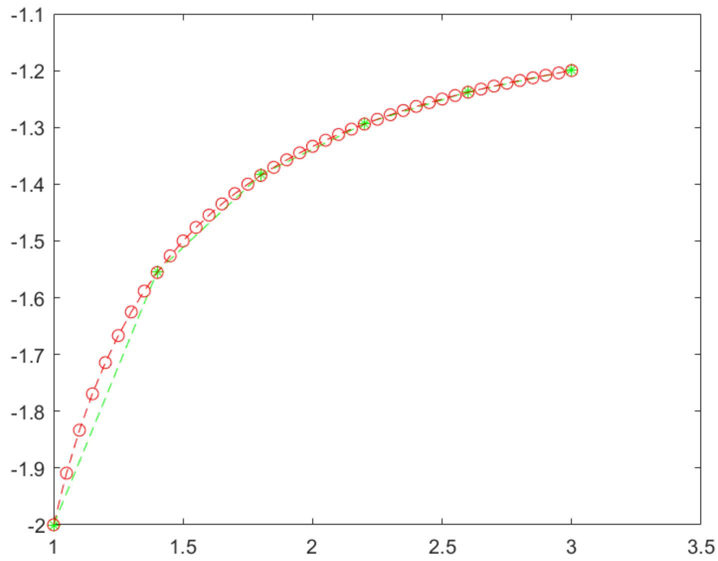


- n = 20

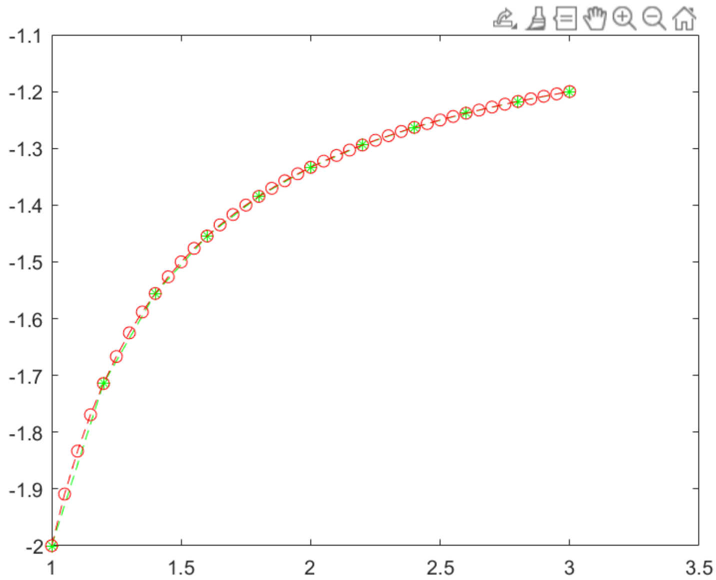


0.4.2.2 2.2 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y^2+y}{x}$

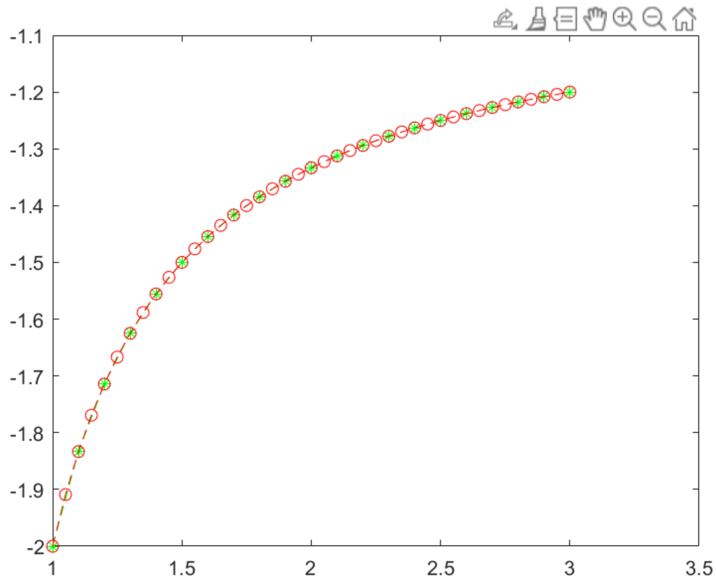
- n = 5


-1.1
-1.2
-1.3
-1.4
-1.5
-1.6
-1.7
-1.8
-1.9
-2
1
1.5
2
2.5
3
3.5

- n = 10


-1.1
-1.2
-1.3
-1.4
-1.5
-1.6
-1.7
-1.8
-1.9
-2
1
1.5
2
2.5
3
3.5

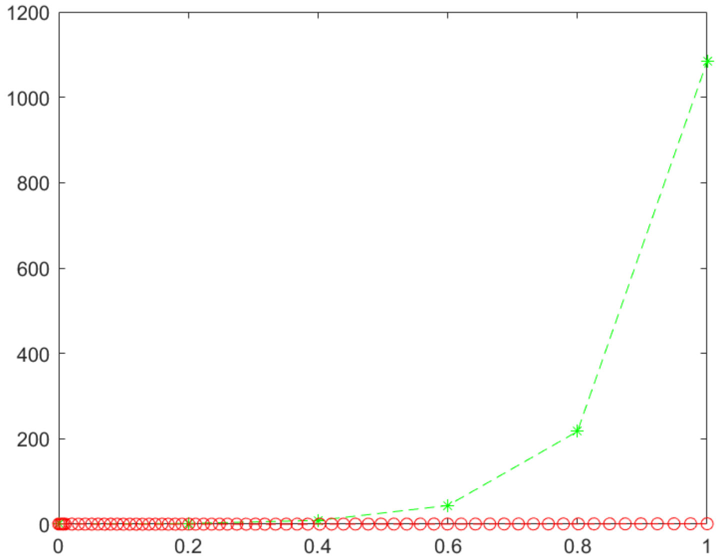
- n = 20


-1.1
-1.2
-1.3
-1.4
-1.5
-1.6
-1.7
-1.8
-1.9
-2
1
1.5
2
2.5
3
3.5

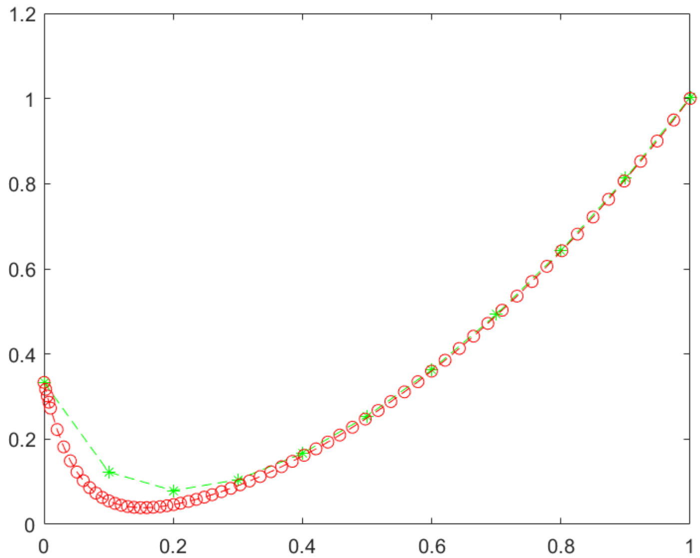
0.4.3 题目3

0.4.3.1 3.1 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -20(y - x^2) + 2x$

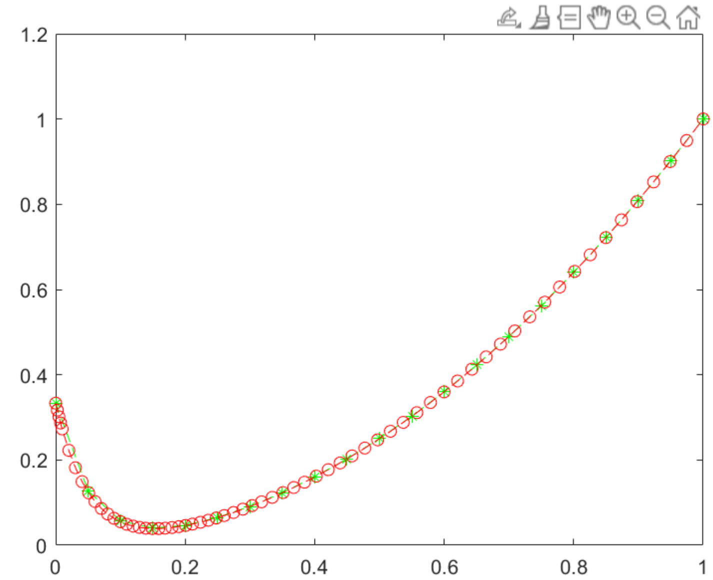
- n = 5



- n = 10

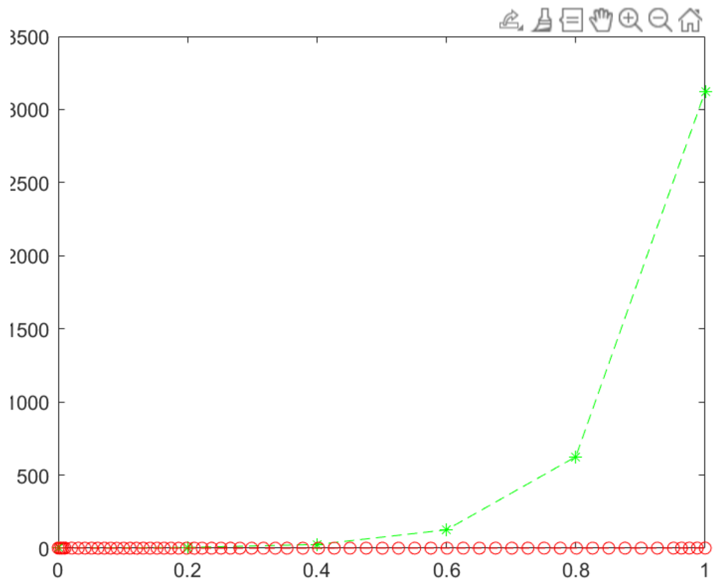


- n = 20

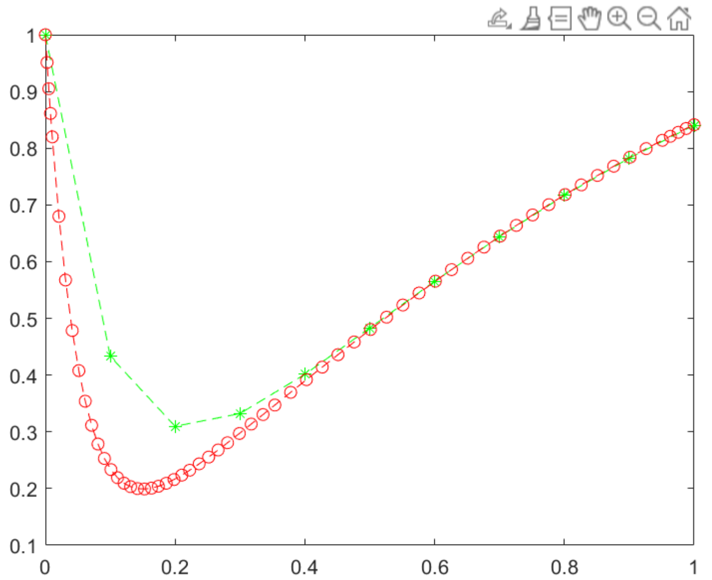


0.4.3.2 3.2 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -20y + 20\sin x + \cos x$

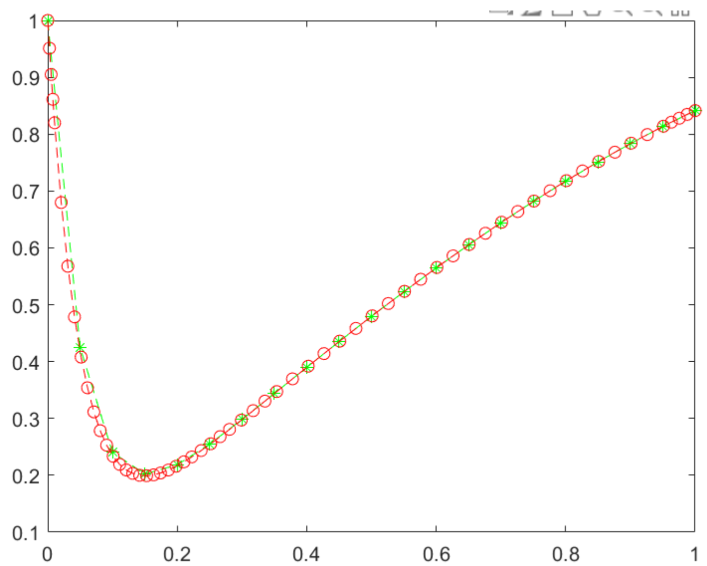
- n = 5



- n = 10

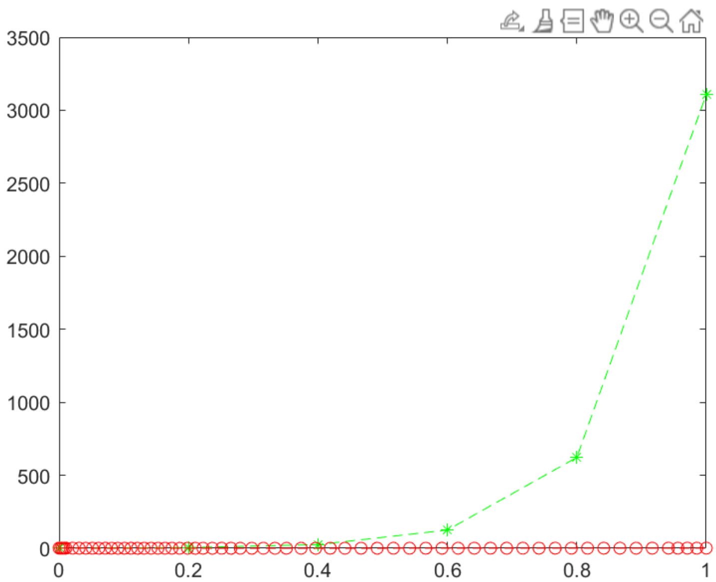


- n = 20

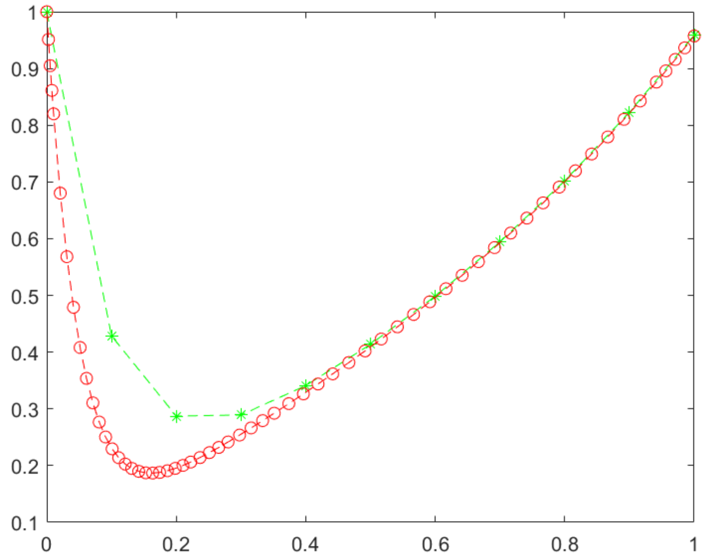


0.4.3.3 3.3 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -20(y - x^x \sin x) + e^x(\sin x + \cos x)$

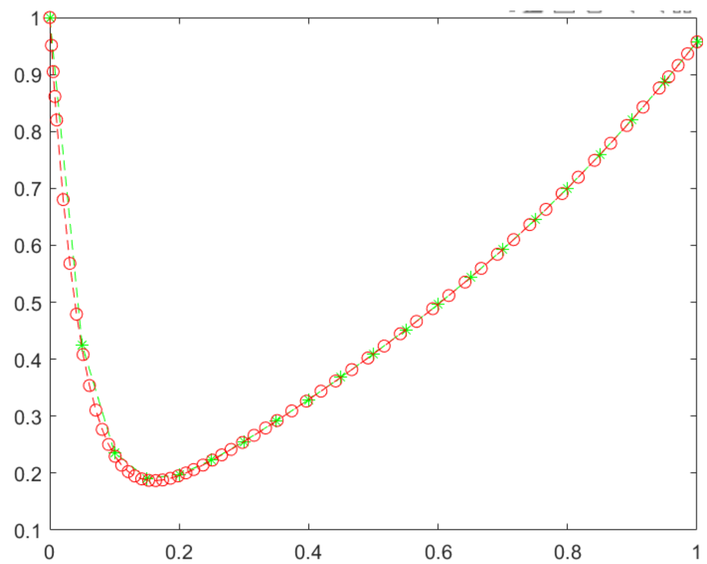
- n = 5



- n =10



- n = 20



0.4.4 思考题

1. 对实验 1，数值解和解析解相同吗？为什么？试加以说明。

答：

- 对于1.1：数值解和解析解是相同的，因为本题的解是线性的，能够通过所得数值解的两个点确定所求直线。
- 对于1.2：虽然数值解与解析解之间的差值已经极小，但是仍然是不相等的，RK-4方法本就有误差，不可能保证数值解和解析解完全相同

2. 对实验 2， N 越大越精确吗？试加以说明。

答：

- 是的，随着 N 的增大精度确实在提高，但是精度增加不大的同时计算量大幅提升，所以实际运用中还是需要按需进行精度的设置。

2. 对于实验 3， N 较小时会出现什么现象，试加以说明。

答:

- 在 N 较小时数值解与解析解出现了较大的差一，说明根据函数性质的不同，区间的不同，还是需要保证有一定量的 N 来保证结果的精度，不然就会出现较大的失真，至于这个 N 该如何选取，需要根据实际进行判断。