

Ejercicio 1

Control de tonos y ecualizador de fase

Un ecualizador es un dispositivo que modifica la ganancia de determinadas frecuencias, y de esta manera altera el contenido de graves, medios y agudos.

Se implementó el siguiente ecualizador, donde K es una constante que vale entre 0 y 1, modelando un potenciómetro.

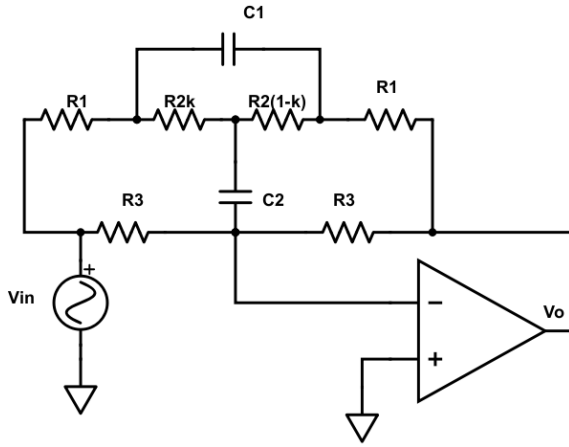


Figura 1.1: Circuito del control de tonos

1.1 Función transferencia

Para hallar la función transferencia $H(s) = \frac{V_o}{V_{in}}$ del circuito de la figura 1.1, se realizaron transformaciones estrella a triángulo y viceversa, reduciendo el circuito. Dichas transformaciones se realizaron con Matlab.

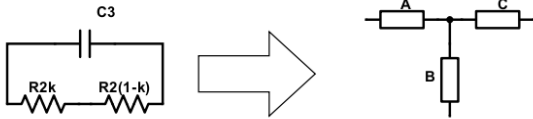


Figura 1.2: Transformación triángulo a estrella

Reemplazando el circuito triángulo por el estrella, se puede agrupar A con R_1 , C con R_1 y B con C_1 . Se ob-

tiene así un nuevo circuito estrella con las impedancias K_1 , K_2 y K_3 , tal como se observa en la figura 1.3.

$$A = \frac{K R_2}{C_1 s \left(\frac{1}{C_1 s} - R_2 (K - 1) + K R_2 \right)} \quad (1.1)$$

$$B = -\frac{R_2 (K - 1)}{C_1 s \left(\frac{1}{C_1 s} - R_2 (K - 1) + K R_2 \right)} \quad (1.2)$$

$$C = -\frac{K R_2^2 (K - 1)}{\frac{1}{C_1 s} - R_2 (K - 1) + K R_2} \quad (1.3)$$

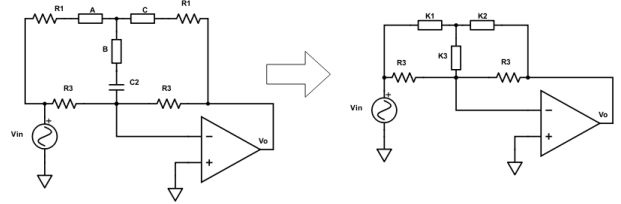


Figura 1.3: Agrupación de impedancias en serie



Figura 1.4: Transformación estrella a triángulo

Dicho circuito estrella se transformó a triángulo, para de esta manera poder agrupar F_2 con R_3 y F_3 con R_3 (figura 1.5).

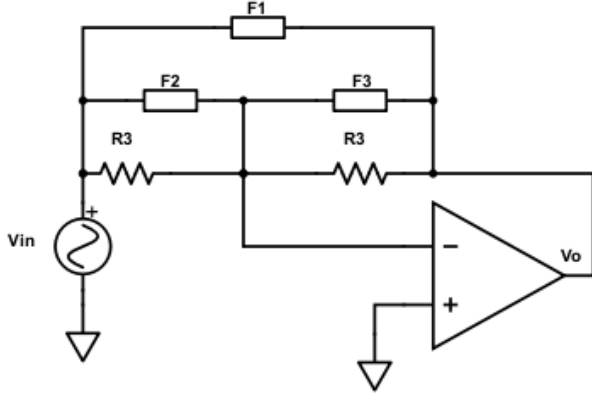


Figura 1.5: Agrupación de impedancias en paralelo

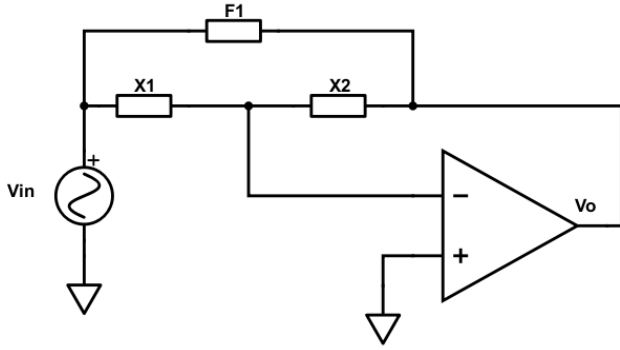


Figura 1.6: Circuito equivalente

Finalmente se obtiene el circuito de la figura 1.6. Considerando que el opamp se comporta idealmente, y por lo tanto la corriente que circula internamente por la entrada del amplificador es cero, resulta la siguiente función transferencia:

$$H(S) = -\frac{X_2}{X_1} \quad (1.4)$$

Donde

$$X_1 = \frac{1}{\frac{\#1}{\#3\#2 + \#1\#3 + \#1\#2} + \frac{1}{R_3}} \quad (1.5)$$

$$X_2 = \frac{1}{\frac{*1}{*3*2 + *1*3 + *1*2} + \frac{1}{R_3}} \quad (1.6)$$

$$*1 = R_1 + \frac{KR_2}{C_1s \left(\frac{1}{C_1s} - R_2(K-1) + KR_2 \right)} \quad (1.7)$$

$$*2 = \frac{1}{C_2s} - \frac{KR_2^2(K-1)}{\left(\frac{1}{C_1s} - R_2(K-1) + KR_2 \right)} \quad (1.8)$$

$$*3 = R_1 - \frac{KR_2}{C_1s \left(\frac{1}{C_1s} - R_2(K-1) + KR_2 \right)} \quad (1.9)$$

$$\#1 = R_1 - \frac{R_2(K-1)}{C_1s \left(\frac{1}{C_1s} - R_2(K-1) + KR_2 \right)} \quad (1.10)$$

$$\#2 = \frac{1}{C_2s} - \frac{R_2^2(K-1)K}{\left(\frac{1}{C_1s} - R_2(K-1) + KR_2 \right)} \quad (1.11)$$

$$\#3 = R_1 + \frac{R_2K}{C_1s \left(\frac{1}{C_1s} - R_2(K-1) + KR_2 \right)} \quad (1.12)$$

Aplicando las siguientes condiciones de diseño sobre la función transferencia

$$R_3 \gg R_1 \quad (1.13)$$

$$R_3 = 10R_2 \quad (1.14)$$

$$C_1 = 10C_2 \quad (1.15)$$

Obtenemos

$$H(s) = -\frac{As^2 + Bs + C}{As^2 + Ds + C} \quad (1.16)$$

$$A = -20C_2^2K^2R_2^2R_1 + 20C_2^2KR_1R_2^2 + 10C_2^2R_1^2R_2 + 100C_2^2R_1R_2^2 \quad (1.17)$$

$$B = -C_2K^2R_2^2 - 9C_2KR_2^2 + C_2R_1^2 + 31C_2R_1R_2 + 10C_2R_2^2 \quad (1.18)$$

$$D = -C_2K^2R_2^2 + 11C_2KR_2^2 + C_2R_1^2 + 31C_2R_1R_2 \quad (1.19)$$

$$C = 2R_1 + R_2 \quad (1.20)$$

Si

$$\begin{aligned} & -20C_2^2K^2R_2^2R_1S^2 + 20C_2^2KR_1R_2^2 + \\ & 10C_2^2R_1^2R_2S^2 + 100C_2^2R_1R_2^2S^2 \\ & \approx 100C_2^2R_1R_2^2S^2 \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$H(S) = -\frac{AS^2 + BS + C}{AS^2 + DS + \bar{C}} \quad (1.22)$$

$$A = 100C_2^2 R_1 R_2^2 S^2 \quad (1.23)$$

$$B = -C_2 K^2 R_2^2 - 9C_2 K R_2^2 + C_2 R_1^2 + 31C_2 R_1 R_2 + 10C_2 R_2^2 \quad (1.24)$$

$$D = -C_2 K^2 R_2^2 + 11C_2 K R_2^2 + C_2 R_1^2 + 31C_2 R_1 R_2 \quad (1.25)$$

$$C = 2R_1 + R_2 \quad (1.26)$$

La ecuación 1.22 posee la forma

$$H(s) = \frac{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{s}{Q_Z \omega_0} + 1}{\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + \frac{s}{Q_Z \omega_0} + 1} \quad (1.27)$$

Dicha función transferencia corresponde a un circuito pasa banda de segundo orden, donde ω_0 es la frecuencia central de la banda y Q_Z , Q_P , son los respectivos factores de calidad.

1.1.1 Frecuencia central

El coeficiente normalizado del término s^2 , tanto para el numerado como en el denominador (1.22), es:

$$\frac{100C_2^2 R_1 R_2^2}{2R_1 + R_2} \quad (1.28)$$

Entonces por la ecuación 1.27 y 1.28, se obtiene la frecuencias central del pasa banda.

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\text{ecuacion1.28}} = \frac{2R_1 + R_2}{100C_2^2 R_1 R_2^2} \quad (1.29)$$

$$\omega_0 = \frac{\sqrt{2 + \frac{R_2}{R_1}}}{10C_2 R_2} \quad (1.30)$$

$$f_0 = \frac{\sqrt{2 + \frac{R_2}{R_1}}}{20\pi C_2 R_2} \quad (1.31)$$

1.1.2 Factores de calidad

A partir de los coeficientes normalizados de los términos de s , obtenemos los factores de calidad

Factor de calidad Q_Z

El coeficiente normalizado correspondiente al termino de s del numerador, es

$$\frac{-C_2 K^2 R_2^2 - 9C_2 K R_2^2 + C_2 R_1^2 + 31C_2 R_1 R_2 + 10C_2 R_2^2}{2R_1 + R_2} \quad (1.32)$$

Entonces por la ecuación 1.27 y 1.32, se obtiene:

$$Q_Z = \frac{1}{\omega_0 \cdot \text{ecuacion1.32}} \quad (1.33)$$

$$Q_Z = \frac{(2R_1 + R_2) 10R_2}{(-K^2 R_2^2 - 9K R_2^2 + R_1^2 + 31R_1 R_2 + 10R_2^2) \sqrt{2 + \frac{R_2}{R_1}}} \quad (1.34)$$

Factor de calidad Q_P

El coeficiente normalizado correspondiente al termino de S del denominador, es

$$\frac{-C_2 K^2 R_2^2 + 11C_2 K R_2^2 + C_2 R_1^2 + 31C_2 R_1 R_2}{2R_1 + R_2} \quad (1.35)$$

Entonces por la ecuación 1.27 y 1.35, se obtiene:

$$Q_P = \frac{1}{\omega_0 \cdot \text{ecuacion1.35}} \quad (1.36)$$

$$Q_P = \frac{(2R_1 + R_2) 10R_2}{(-K^2 R_2^2 + 11K R_2^2 + R_1^2 + 31R_1 R_2) \sqrt{2 + \frac{R_2}{R_1}}} \quad (1.37)$$

Módulo de $H(f)$ en ω_0

Definimos A_0 como:

$$A_0 \hat{=} |H(S = j\omega_0)| \quad (1.38)$$

Reemplazamos $s = j\omega_0$ en 1.27

$$A_0 = \frac{Q_P}{Q_Z} \quad (1.39)$$

$$A_0 = \frac{-K^2 R_2^2 - 9K R_2^2 + R_1^2 + 31R_1 R_2 + 10R_2^2}{-K^2 R_2^2 + 11K R_2^2 + R_1^2 + 31R_1 R_2} \quad (1.40)$$

Si $K = 0$

$$\begin{aligned} A_0(K = 0) &= \frac{R_1^2 + 31R_1 R_2 + 10R_2^2}{R_1^2 + 31R_1 R_2} \\ &= \frac{R_1(R_1 + 31R_2) + 10R_2^2}{R_1(R_1 + 31R_2)} \\ &\approx \frac{R_1 31 + 10R_2}{31R_1} \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$A_0(K = 0) \approx \frac{3R_1 + R_2}{3R_1} \quad (1.42)$$

Si $K = 1$

$$\begin{aligned}
A_0(K=1) &= \frac{R_1^2 + 31R_1R_2}{10R_2^2 + R_1^2 + 31R_1R_2} \\
&\approx \frac{R_1 31}{10R_2 + 31R_1} \\
&\approx \frac{3R_1}{R_2 + 3R_1}
\end{aligned} \tag{1.43}$$

$$A_0(K=1) \approx \frac{3R_1}{3R_1 + R_2} \tag{1.44}$$

A partir de 1.42 y 1.44 obtenemos que

$$\frac{3R_1}{3R_1 + R_2} \leq A_0 \leq \frac{3R_1 + R_2}{3R_1} \tag{1.45}$$

1.2 Análisis paramétrico

La función transferencia depende de un parámetro K que pertenece al intervalo $[0,1]$. Dicho parámetro provino del modelado del potenciómetro. Para analizar el funcionamiento del circuito, se realizaron gráficos de las distintas características del circuito en función de la constante.

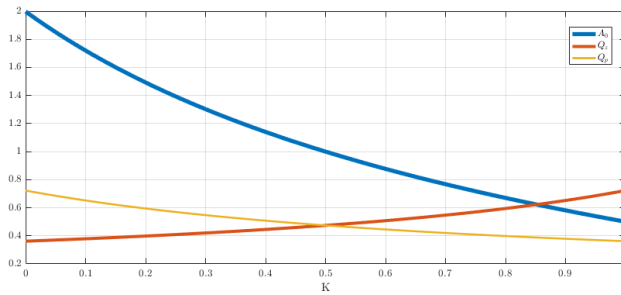


Figura 1.7: Diagrama paramétrico

Como se observa en la figura, la posición del potenciómetro altera la ganancia del circuito (línea azul), con $K=0$ el circuito multiplica la entrada por 2 (gana 6dB) y con $K=1$ multiplica a la entrada por 0.5 (atenúa 6dB).

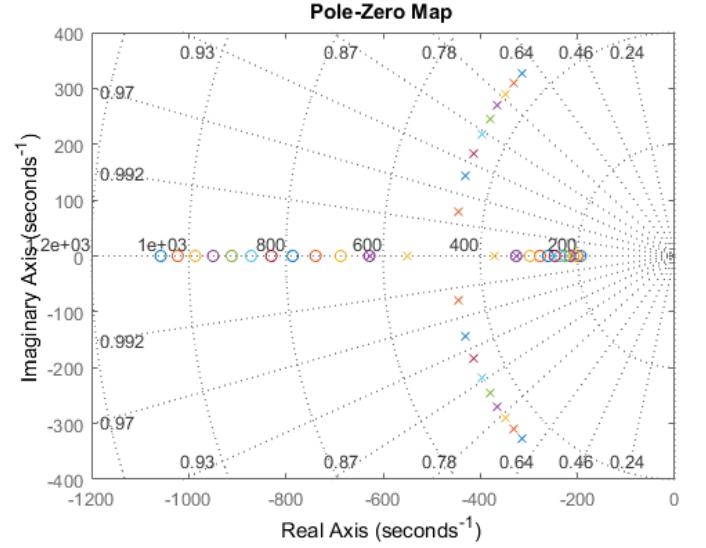


Figura 1.8: Diagrama paramétrico de polos y ceros, $K \in [0, 0.5]$

Con K variando desde 0 a 0.5, se observa que los ceros son reales y se aproximan hacia el valor de $-\omega_0$ en el eje real. En cuanto a los polos, se alejan del eje imaginario.

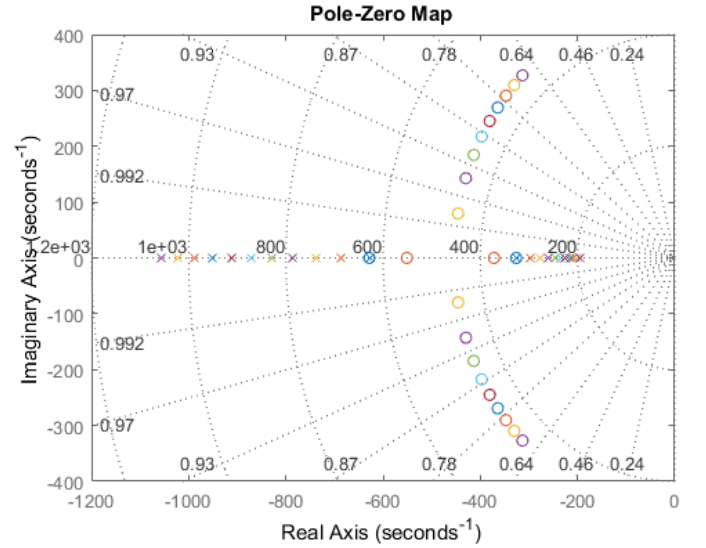


Figura 1.9: Diagrama paramétrico de polos y ceros, $K \in [0.5, 1]$

Con k variando desde 0.5 a 1, se observa que los polos son reales y que a medida que aumenta K se alejan del valor de $-\omega_0$. Los ceros son imaginarios y a medida que aumenta K se acercan al eje imaginario.

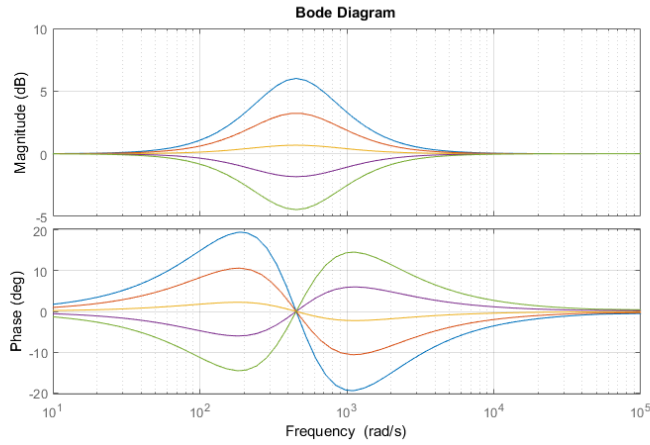


Figura 1.10: Diagrama paramétrico, respuesta en frecuencia

Como se observa en el gráfico de la respuesta en frecuencia, cuando K vale 0 se produce la máxima ganancia, y a medida que aumenta disminuye la ganancia hasta el punto de no atenuar ni ganar ($K=0.5$), y a partir de ese punto comienza a atenuar.

1.3 Análisis de singularidades

Partimos de que el comportamiento del circuito es descrito por la ecuación 1.27, y que Q_p se refiere al factor de calidad de los polos, Q_z se refiere al factor de calidad de los ceros y ω_0 es la frecuencia de pasa banda.

1.3.1 Polos

Aplicando la fórmula resolvente obtenemos:

$$Polos_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q_p} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q_p^2} - 4}$$

Como Q_p siempre es positivo para todo valor de R_1 , R_2 , C_2 y K entre 0 y 1, entonces la parte real de los polos siempre es negativa. Por ende el sistema es estable. Además los polos que tienen parte imaginaria no nula son complejos conjugados

1.3.2 Ceros

El resultado de aplicar la fórmula resolvente:

$$Ceros_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q_z} \pm \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q_z^2} - 4}$$

Análogamente a los polos, también se cumple que Q_z sea positivo para todas las combinaciones admisibles de parámetros. Por ende, la parte real de los ceros es negativa y son complejos conjugados.

1.3.3 Sistema de fase mínima

Se definen los sistemas de fase mínima como aquellos en los cuales todas sus singularidades se encuentran en el semiplano izquierdo.

Como se mostró anteriormente, tanto los polos y ceros se encuentran en el semiplano izquierdo, por ende el sistema es de fase mínima.

1.4 Ecualizador de fase

Un ecualizador de fase es un circuito que no altera la amplitud de la señal pero sí la fase. Se desea implementar un circuito de segundo orden, que pueda convertir un sistema de fase mínima a uno de fase no mínima.

Se implementó el siguiente circuito:

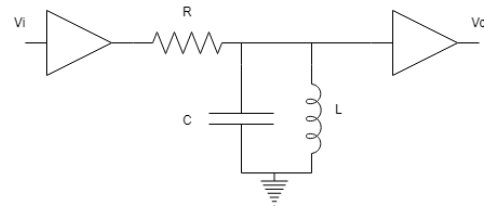


Figura 1.11: Circuito ecualizador de fase

Aplicando la fórmula de divisor de tensión se obtiene la función transferencia:

$$H(S) = \frac{L}{R} \frac{S}{\frac{S^2}{\frac{1}{LC}} + \frac{SL}{R} + 1} \quad (1.46)$$

Tal como se observa en la función transferencia, los polos poseen su parte real negativa (por ende el sistema es estable). En cuanto al cero, éste se encuentra en el origen, entonces el sistema no es de fase mínima.

Para hallar la función transferencia final, basta con multiplicar 1.46 y 1.22.

1.5 Equalizador de 3 bandas

1.5.1 Espectro audible

Los seres humanos pueden percibir un rango de frecuencias desde 20Hz hasta 20KHz. Dicho rango depende de la salud auditiva de cada persona.

El espectro se puede dividir en tres partes, llamadas graves, medios y agudos.

- Tonos graves, frecuencias comprendidas entre 20Hz y 256Hz.

- Tonos medios, frecuencias comprendidas entre 256Hz y 2KHz.
- Tonos Agudos, frecuencias comprendidas entre 2KHz y 20KHz.

Etapa	R_1	R_2	R_3	C_1	C_2	f_0
1	$1.6K\Omega$	$5K\Omega$	$50K\Omega$	$1\mu F$	$100nF$	71Hz
2	$1.6K\Omega$	$5K\Omega$	$50K\Omega$	$100nF$	$10nF$	776Hz
3	$1.6K\Omega$	$5K\Omega$	$50K\Omega$	$12nF$	$1.2nF$	6000Hz

Tabla 1.2: Componentes

1.5.2 Elección de la frecuencia central

Como se trata de un ecualizador de tres bandas, se deben elegir una frecuencia central para cada pasa banda. Consideramos que las frecuencias deben estar equiespaciadas en escala logarítmica, para lograr abarcar todo el espectro audible.

Para ello utilizamos la media geométrica, $f_0 = \sqrt{f_{inicial} f_{final}}$. De esta manera calculamos las frecuencias de cada banda, representando los tonos graves, medios y agudos.

Etapa	Tonos	f_0
1	Graves	64Hz
2	Medios	716Hz
1	Agudos	6324Hz

Tabla 1.1: Frecuencias centrales

1.5.3 Ganancia en la frecuencia central - A_0

Los ecualizadores comerciales se construyen de 3 ganancias/atenuaciones en las frecuencias centrales de cada banda, de 6dB, 12dB y 18dB.

En este caso elegimos que nuestro ecualizador atenúe o amplifique 6dB, para así evitar que el amplificador operacional sature.

Reemplazando el criterio de los 6dB en 1.45

$$\frac{3R_1 + R_2}{3R_1} = 2 \quad (1.47)$$

$$\frac{3R_1}{3R_1 + R_2} = 0.5 \quad (1.48)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos

$$R_2 = 3R_1 \quad (1.49)$$

Reemplazando 1.49 en 1.31 y despejando, obtenemos una expresión para hallar C_2

$$C_2 = \frac{\sqrt{5}}{20\pi R_2 f_0} \quad (1.50)$$

A partir de este resultado, de las frecuencias de corte y de las condiciones de diseño ya mencionadas, se calcularon los componentes de cada etapa.

1.5.4 Conexión de las etapas

Las etapas se podrían conectar de dos maneras, en cascada o en paralelo.

Cascada

La salida de una etapa se conecta a la entrada de la otra etapa. Si H_1 , H_2 y H_3 , son las funciones transferencia de cada etapa, entonces la función transferencia del sistema es $H = H_1 \cdot H_2 \cdot H_3$.



Figura 1.12: Esquema de conexión cascada

Paralelo

Las entradas de cada etapa se conectan juntas y las salidas también. Sin embargo las salidas se deben conectar juntas a través de por ejemplo un sumador.

En esta configuración la función transferencia del sistema es $H = H_1 + H_2 + H_3$.

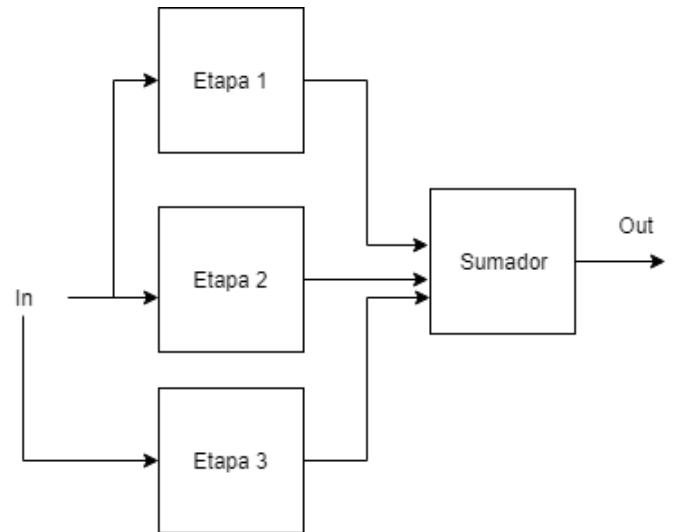


Figura 1.13: Esquema de conexión paralelo

Simulación

Se simularon ambas configuraciones cascada y paralelo.

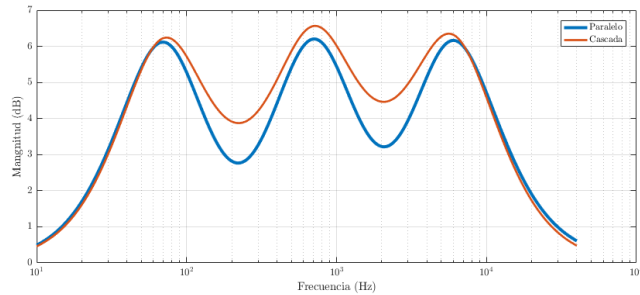


Figura 1.14: Máxima ganancia - magnitud

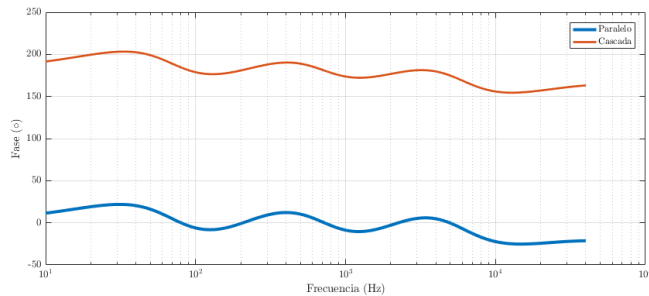


Figura 1.15: Máxima ganancia - fase

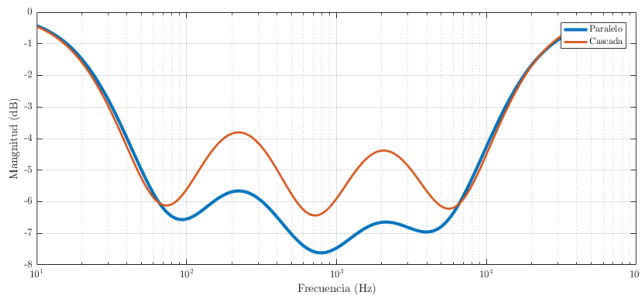


Figura 1.16: Máxima atenuación - magnitud

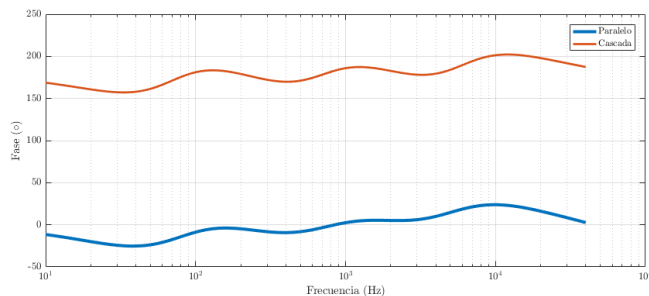


Figura 1.17: Máxima atenuación - fase

Como se observa en los gráficos, en la condición de máxima ganancia la amplitud de los sobre picos es mayor en paralelo y en máxima atenuación la máxima atenuación de los sobrepicos corresponde a la configuración cascada.

Just-noticeable difference (JND)

Es la mínima variación perceptible por el humano en al menos el 50% de los casos. En el caso del audio, la just noticeable difference es de 1dB.

Figura de ruido

El objetivo es determinar qué configuración es más susceptible al ruido. Los componentes, tantos pasivos como activos generan ruido. En la conexión cascada, el ruido de cada etapa es amplificado por la etapa posterior, por ende posee más ruido que la configuración en paralelo.

Elección de topología

En cuanto al JND tanto el paralelo como serie, dependiendo si se encuentra en máxima ganancia o atenuación, tienen máxima amplitud, por ende no es criterio para elegir. El oído humano no puede percibir la diferencia de fase, por lo tanto no aporta a la elección de topología.

Sobre el ruido, la configuración paralelo tiene una leve ventaja sobre la cascada, sin embargo para realizarla se debe agregar un sumador, lo que complejiza el circuito. Por ende se eligió la topología cascada.

1.5.5 Realización de la placa

Se conectaron las tres etapas en cascada, se agregó una entrada de audio mono (Jack 3,5 mini plug) además de pines, y lo mismo se hizo a la salida. En cuanto al amplificador operacional, se decidió utilizar tres TL081, debido a sus altas prestaciones en cuanto al slew rate y ruido.

1.5.6 Mediciones

Se realizaron las siguientes mediciones del circuito:

- Respuesta en frecuencia a máxima ganancia.
- Respuesta en frecuencia a máxima atenuación.
- Respuesta en frecuencia sin atenuar ni ganar.
- Impedancia de entrada máxima y mínima.
- Impedancia de salida máxima y mínima.

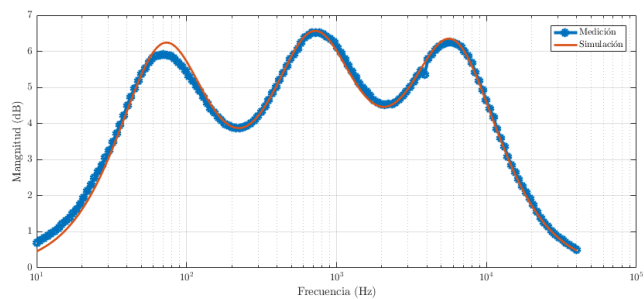


Figura 1.18: Máxima ganancia - magnitud

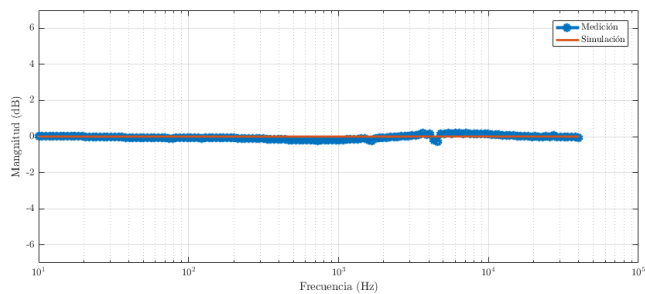


Figura 1.22: Sin ganancia ni atenuación - magnitud

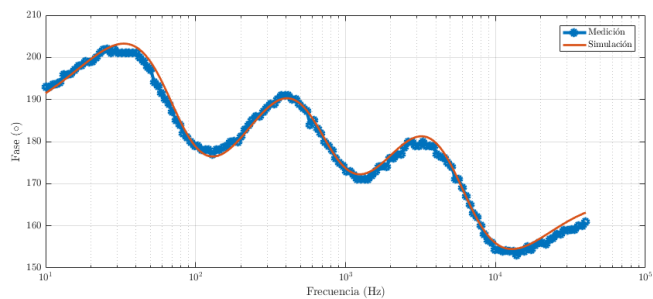


Figura 1.19: Máxima ganancia - fase

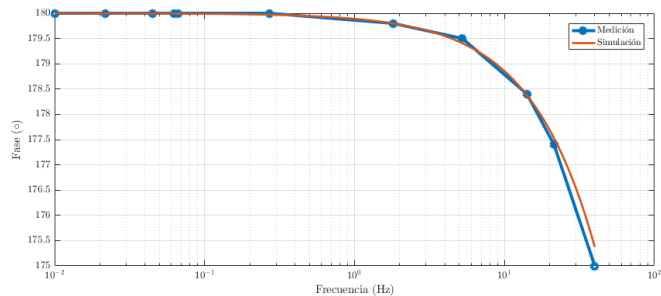


Figura 1.23: Sin ganancia ni atenuación - fase

Impedancia	Máxima	Mínima
Entrada	3.69 $K\Omega$	1.584 $K\Omega$
Salida	8.122 Ω	0.022 Ω

Tabla 1.3: Impedancia

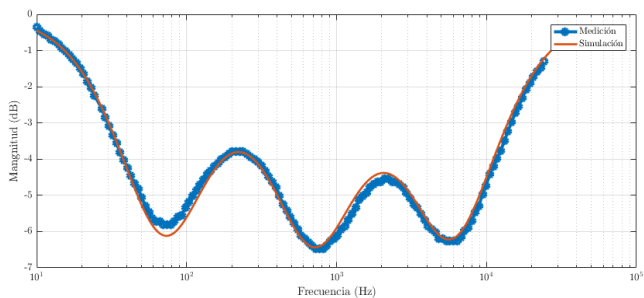


Figura 1.20: Máxima atenuación - magnitud

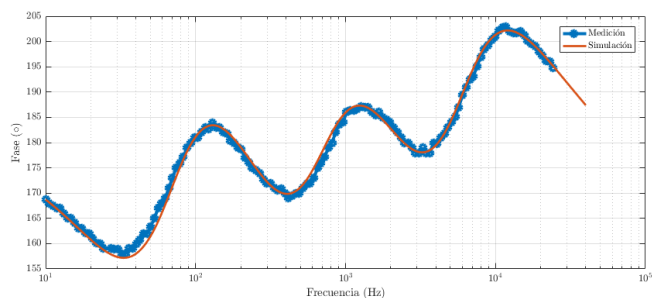


Figura 1.21: Máxima atenuación - fase

1.6 Conclusión

Se logró realizar el ecualizador de tres bandas. El circuito se comportó como era de esperarse en el rango de frecuencias audibles. Tal como se observan en las mediciones, las simulación y las mediciones ajustan perfectamente.

Ecualizador de tres bandas

Características generales:

- Entrada Jack mini plug 3,5 mm mono, con pines de prueba.
- Salida Jack mini plug 3,5 mm mono, con pines de prueba.
- Alimentación con fuente partida.
- Máxima atenuación/amplificación 6dB.

Características eléctricas:

Alimentación del ecualizador		
+VCC	15	volt
-VCC	-15	volt

Impedancia			
	Máxima	Mínima	
Entrada	3,69	1,584	K Ω
Salida	8,122	0,022	Ω

Frecuencias centrales de cada banda		
Graves	71	Hz
Medios	776	Hz
Agudos	6000	Hz