3月10日. 周一. 第6次课.

1. 签到. 2. 提交作业截止时间(deadline): 周六晚上24:00.

关于作业: ① 交了就有分! 证明题或别的题目不会写的话在作业里说明一下就可以!

② 作业文件命名: "第x次作业-学号-姓名". 邮件命名也一样. 方便孙老师集中批改.

③ 不会写作业的话请尽量参加习题课. 课上会讲.

④ 之前的作业提交情况: HW1 ×17; HW2 ×14. 了解未提交作业的原因.

Topic 1: 换元积分法: 第一换元法 (凑微分法, The Substitution Rule).

[中文课本 P193~202; 英文课本 P412~416]

(1). 从复合函数求导的链式法则 (Chain Rule) 出发.

e.g. $\int 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\cdot dx = ?$

one way: $\int 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx = F(x) + C$.

need to find $F(x)$. s.t. $F'(x) = 2x\sqrt{1+x^2}$. not easy!

another way: $\int 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx = f(g(x)) + C$.

so. $\underbrace{2x}_{g'(x)}\cdot\underbrace{\sqrt{1+x^2}}_{f'(g(x))} = [f(g(x))]' = f'(g(x))\cdot g'(x)$.

$g(x) = x^2+1$ $f'(t) = \sqrt{t}$. easier!

$f(t) = \frac{2}{3}\cdot t^{\frac{3}{2}}$ 即可.

$\therefore \int 2x\cdot\sqrt{1+x^2}\,dx = f(g(x)) + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

if you let $t = x^2+1$ then $\frac{dt}{dx} = 2x \Rightarrow dt = 2x \cdot dx$.

$\therefore \int 2x\sqrt{1+x^2}\,dx = \int \sqrt{t}\,dt = \frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}} + C = \frac{2}{3}(1+x^2)^{\frac{3}{2}} + C$.

(2). 第一换元法的内容：

如果被积函数 $u(x)$ 可以看成 $u(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$，（其中 f 连续，g 可导），

则 $\int u(x)dx = \int f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int f(g(x)) \cdot d\,g(x) \overset{t=g(x)}{=\!=} \int f(t) \cdot dt$.

将 $\underbrace{\int f(t)\,dt}_{\text{关于}t\text{的函数}}$ 算出来后，再将 $t = g(x)$ 代入，即可得到 $\underbrace{\int u(x)\,dx}_{\text{关于}x\text{的函数}}$.

换句话说，积分符号后面的"dx"和"dt"可以按照微分的法则互换。

留作习题 证明：利用链式法则可证。

(3). 第一换元法的使用：

①. $t = ax+b$ 的类型.

e.g. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$. （从 $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$ 出发）

$= \int \frac{dx}{\sqrt{a^2(1-(\frac{x}{a})^2)}} = \int \frac{dx}{a\cdot\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} \xrightarrow[dt=\frac{dx}{a}]{t=\frac{x}{a}} \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C$

$= \arcsin\frac{x}{a} + C$.

e.g. $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$. $(a>0)$. （从 $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$ 出发）.

$= \int \frac{dx}{a^2\cdot(1+(\frac{x}{a})^2)} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} \xrightarrow[dt=\frac{dx}{a}]{t=\frac{x}{a}} \frac{1}{a}\int \frac{dt}{1+t^2}$

$= \frac{1}{a}\cdot\arctan t + C = \frac{1}{a}\cdot\arctan\frac{x}{a} + C$.

e.g. $\int \sin(ax+b)\cdot dx \xlongequal[dt=a\cdot dx]{t=ax+b} \int \sin t\cdot\frac{dt}{a} = \frac{-\cos t}{a}+C$

$= -\frac{1}{a}\cdot\cos(ax+b)+C$

e.g. $\int \sqrt{ax+b}\,dx \xlongequal[dt=a\cdot dx]{t=ax+b} \int \sqrt{t}\cdot\frac{dt}{a} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{a}\cdot t^{\frac{3}{2}}+C = \frac{2}{3a}(ax+b)^{\frac{3}{2}}+C$

e.g. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \int\frac{dx}{(a-x)\cdot(a+x)} = \int\frac{1}{2a}\left[\frac{1}{a-x}+\frac{1}{a+x}\right]\cdot dx$.

(参考. $\int\frac{dx}{x} = \ln|x|+C$
注意不要漏掉 $|\cdot|$)

$= \frac{1}{2a}\cdot\int\frac{dx}{a-x} + \frac{1}{2a}\cdot\int\frac{dx}{a+x}$

$\xlongequal[u=a+x]{t=a-x} \frac{1}{2a}\cdot\int\frac{-dt}{t} + \frac{1}{2a}\cdot\int\frac{du}{u}$

$= -\frac{1}{2a}\cdot\ln|t| + \frac{1}{2a}\ln|u| + C$.

$= -\frac{1}{2a}\cdot\ln|a-x| + \frac{1}{2a}\cdot\ln|a+x| + C$

$= \frac{1}{2a}\cdot\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$

e.g. $\int \sin nx\cdot\sin mx\,dx$. $(0<n<m)$.

$\cos(mx+nx) = \cos mx\cdot\cos nx - \sin mx\cdot\sin nx$

$\cos(mx-nx) = \cos mx\cdot\cos nx + \sin mx\cdot\sin nx$

$\therefore -\cos[(m+n)x] + \cos((m-n)x) = 2\cdot\sin mx\cdot\sin nx$.

$\therefore \int \sin nx\cdot\sin mx\,dx = \int\frac{\cos((m-n)x) - \cos((m+n)x)}{2}\cdot dx$

$= \int\frac{\cos((m-n)\cdot x)}{2}\cdot dx - \int\frac{\cos((m+n)x)}{2}dx$

$\xlongequal[u=(m+n)x]{t=(m-n)x} \int\frac{\cos t}{2}\cdot\frac{dt}{m-n} - \int\frac{\cos u}{2}\frac{du}{m+n}$

$$= \frac{\sin t}{2(m-n)} - \frac{\sin u}{2(m+n)} + C$$

$$= \frac{\sin((m-n)x)}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + C.$$

② 、$t=x^a$. e^x. $\ln x$ 等的类型

e.g. $\int x^3 \cdot \cos(x^4+2)\,dx \xlongequal[dt=3x^3 \cdot dx]{t=x^4+2} \int \cos t \cdot \frac{dt}{3} = \frac{\sin t}{3} + C = \frac{\sin(x^4+2)}{3} + C$

e.g. $\int \frac{x \cdot dx}{1+x^4} \xlongequal[dt=2x \cdot dx]{t=x^2} \int \frac{dt}{2\cdot(1+t^2)} = \frac{1}{2} \cdot \arctan t + C = \frac{1}{2} \cdot \arctan x^2 + C$

换元的关键是发现积分式子的一部分是另一部分的导数.

e.g. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}\,dx = \int \frac{de^x}{1+(e^x)^2} = \arctan \cdot e^x + C.$

如果对换元足够熟练,可以不明确写出换元 $t=e^x$,

用微分的方式替代 $(e^x dx = d\,e^x)$,

这里 把 e^x 看成一个整体进行积分.

e.g. $\int \frac{dx}{x \cdot \ln x} = \int \frac{d \ln x}{\ln x} \xlongequal{t=\ln x} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\ln x| + C$

e.g. $\int \frac{\ln x}{x}\,dx = \int \ln x \cdot d \ln x \xlongequal{t=\ln x} \int t \cdot dt = \frac{t^2}{2} + C = \frac{(\ln x)^2}{2} + C.$

e.g. $\int \frac{dx}{x \cdot (\ln x)^2} = \int \frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2} \xlongequal{t=\ln x} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\ln x} + C$

③ 、$t=$ x 的三角函数的类型.

e.g. $\int \sin^3 x \cdot dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x \cdot dx = \int (1-\cos^2 x) \sin x\,dx$

$= \int (1-\cos^2 x) \cdot (-d\cos x) \xlongequal{t=\cos x} \int (t^2-1) \cdot dt$

$= \frac{t^3}{3} - t + C = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

(对于 $\int \sin^5 x\,dx$. $\int \cos^3 x\,dx$, …. 只要是 $\int \sin^{2n+1} x\,dx$ or $\int \cos^{2n+1} x\,dx$ $(n \in N_+)$ 的

形式,都可以做类似的换元: $\int \sin^{2n+1} x\,dx = \int (\sin^2 x)^n \cdot \sin x\,dx = \int (1-\cos^2 x)^n (-d\cos x)$,

作换元 $t=\cos x$ 即可).

e.g. $\int \tan x \cdot dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} \xlongequal{t=\cos x} \int -\frac{dt}{t}$

$= -\ln|t| + C = -\ln|\cos x| + C$

e.g. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} \cdot dx = \int \frac{d(\sin x)}{1+\sin^2 x} \xlongequal{t=\sin x} \int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t + C$

$= \arctan(\sin x) + C$

$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

e.g. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x} = \int \frac{1}{\tan^2 x + 3} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \int \frac{d\tan x}{\tan^2 x + 3} \xlongequal{t=\tan x} \int \frac{dt}{t^2+3}$

分母都是sin.cos的二次式时，可以用tan换元.

$= \int \frac{1}{3} \cdot \frac{dt}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2} \xlongequal{u=\frac{t}{\sqrt{3}}} \int \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}\, du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan u + C$

$= \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan \frac{t}{\sqrt{3}} + C = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \arctan \frac{\tan x}{\sqrt{3}} + C.$

e.g. $\int \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x} = \int \frac{1}{\tan x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \xlongequal{t=\tan x} \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$

$= \ln|\tan x| + C.$

e.g. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{1}{\tan^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} \xlongequal{t=\tan x} \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{t} + C$

$= -\frac{1}{\tan x} + C$

e.g. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\sin x\, dx}{\sin^2 x} = \int \frac{-d\cos x}{1-\cos^2 x} \xlongequal{t=\cos x} \int \frac{-dt}{1-t^2}$

$= -\frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = -\frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C.$

$\sin 2x$
$= 2\sin x\cdot\cos x$

习题：证明这个结果和上一个一样。

e.g. $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\cdot\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} \xlongequal[dt=\frac{dx}{2}]{t=\frac{x}{2}} \int \frac{dt}{\sin t\cdot\cos t} = \ln|\tan t| + C$

$= \ln|\tan\frac{x}{2}| + C$

复杂函数的积分，尤其是与三角函数有关的，可能会得到"看上去"不同的结果。这是因为三角函数有很多等式，这些结果可能都是对的。只要求导之后等于积分函数，这些积分结果就都对。

$$\left(-\frac{1}{2}\cdot\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|\right)' = -\frac{1}{2}\cdot\left(\ln|1+\cos x| - \ln|1-\cos x|\right)'$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{-\sin x}{1+\cos x} - \frac{\sin x}{1-\cos x}\right)$$

$$= -\frac{\sin x}{2}\cdot\frac{\cos x - 1 - (1+\cos x)}{(1+\cos x)(1-\cos x)}$$

$$= \frac{1}{\sin x};$$

$$\left(\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right)' = \frac{1}{\tan\frac{x}{2}}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{\sin x}.$$

$\cos(x-\frac{\pi}{2})$
$= \sin x$

$\boxed{\cos(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x,}$

e.g. $\int\frac{dx}{\cos x} \xlongequal{t=x+\frac{\pi}{2}} \int\frac{dt}{\cos(t-\frac{\pi}{2})} = \int\frac{dt}{\sin t} = \ln|\tan\frac{t}{2}| + C = \ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{2}}{2}\right| + C.$