2月24日. 周一.

1. 签到　　2. 作业. 周五结束前提交.

Topic 1: 函数草图的绘制.

[中文: P144. 3.7节.　英文: P315, 4.5节]

(1) 主要步骤: 1. 求定义域.

2. 判断是否有奇偶性.周期性.

3. 求单调性&极值点.

4. 求凹凸性&拐点.

5. 求渐近线(水平.垂直 or 斜).

6. 求重要点上的函数值. 如与坐标轴的交点、极值点、拐点

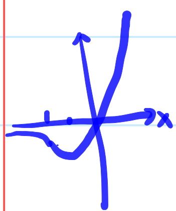
7. 作图: 先画出6中的点和5中的渐近线

再根据3.4得到的单调性.凹凸性连线.

(2). 求渐近线回顾. [详见上学期讲义 1128 & 1202].

水平渐近线: 判断 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 或 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 这两个极限值是否存在.

i.e. $\pm\infty$ 处极限是否存在.



eg. $f(x)=x\cdot e^x$. $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

$\therefore$ $f(x)$ 有一条水平渐近线 $y=0$.

垂直渐近线: 判断是否存在某点 a 使得 $\lim_{x\to a^-} f(x)$ 或 $\lim_{x\to a^+} f(x)$ 为 $+\infty$ 或 $-\infty$.

i.e. 左极限或右极限为 ∞.

一般只用检查定义域的端点即可.

eg. $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$. 定义域为 $(-1,+\infty)$. 只用检查 $\lim_{x\to-1^+} f(x)$.

而 $\lim_{x\to-1^+} f(x)=+\infty$. $\therefore$ $f(x)$ 有一条垂直渐近线 $x=-1$.

斜渐近线：判断 $f(x)$ 是否分子、分母都是多项式，且分子中 x 的次数比分母大 1.

e.g. $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2+1}$. 分子、分母均为多项式. 分子中 x 的次数为 3

分母中 x 的次数为 2.

使用多项式除法：

$$
\begin{array}{r}
x \\
x^2+1 \enclose{longdiv}{x^3} \\
\underline{x^3+x} \\
-x
\end{array}
$$

$\therefore f(x)=x+\dfrac{-x}{x^2+1}$. 而 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-x}{x^2+1}=0$

$\therefore y=x$ 是 $f(x)$ 的斜渐近线.

(3). 函数作图举例：

e.g. $f(x)=(x+1)\cdot e^x$

step 1：定义域：$x\in(-\infty,+\infty)$.

step 2：没有奇偶性、周期性.

step 3：$f'(x)=(x+2)\cdot e^x$.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↓	极小	↑

step 4：$f''(x)=(x+3)\cdot e^x$.

x	$(-\infty,-3)$	-3	$(-3,+\infty)$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	↓	极小	↑
$f(x)$	∩. 凹	拐点.	∪ 凸.

step 5：$\lim\limits_{x\to-\infty}(x+1)\cdot e^x=0$. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)\cdot e^x=+\infty$ $\therefore$ 有水平渐近线 $y=0$.

定义域无端点 $\therefore$ 无垂直渐近线.

不是分式 $\therefore$ 无斜渐近线.

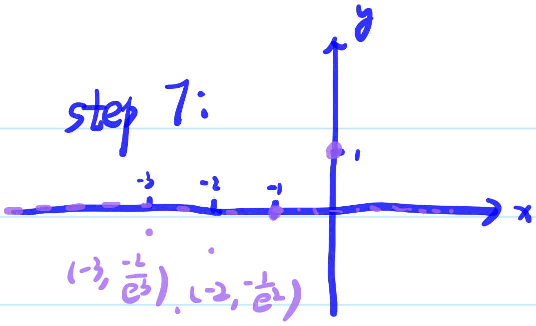
step 6：与 x 轴交点：令 $f(x)=0$. 得 $x=-1$. $\Rightarrow(-1,0)$.

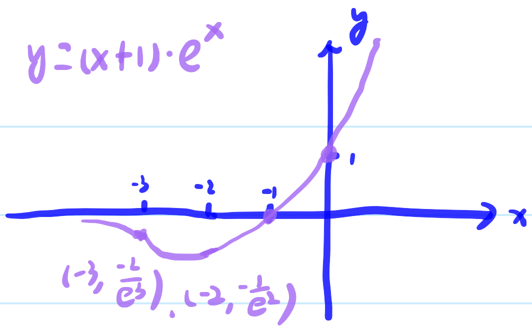
与 y 轴交点：令 $x=0$ 得 $f(x)=1$ $\Rightarrow(0,1)$.

极小值点：$f(-2)=-\dfrac{1}{e^2}$, $\Rightarrow\left(-2,-\dfrac{1}{e^2}\right)$

拐点：$f(-3)=-\dfrac{2}{e^3}$ $\Rightarrow\left(-3,-\dfrac{2}{e^3}\right)$

step 7:





eg. $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$

step 1: 定义域: $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

step 2: 无奇偶性.周期性.

step 3:

$f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	+	0	−	无	−	0	+
$f(x)$	↗	极大	↘	无	↘	极小	↗

step 4:

$f''(x)=\frac{(2x-2)(x-1)^2-x(x-2)\cdot 2(x-1)}{(x-1)^4}=\frac{2}{(x-1)^3}$

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f''(x)$	−	无	+
$f(x)$	∩ 凹	无	∪ 凸

step 5: $\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$. ∴无水平渐近线.

$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty$. $\lim_{x\to1^+}f(x)=+\infty$. ∴有垂直渐近线 $x=1$.

$$\begin{array}{r} x+1 \\ x-1\,\overline{)\,x^2\qquad} \\ \underline{x^2-x} \\ x \\ \underline{x-1} \\ 1 \end{array}$$

∴ $f(x)=x+1+\frac{1}{x-1}$. 有斜渐近线 $y=x+1$.

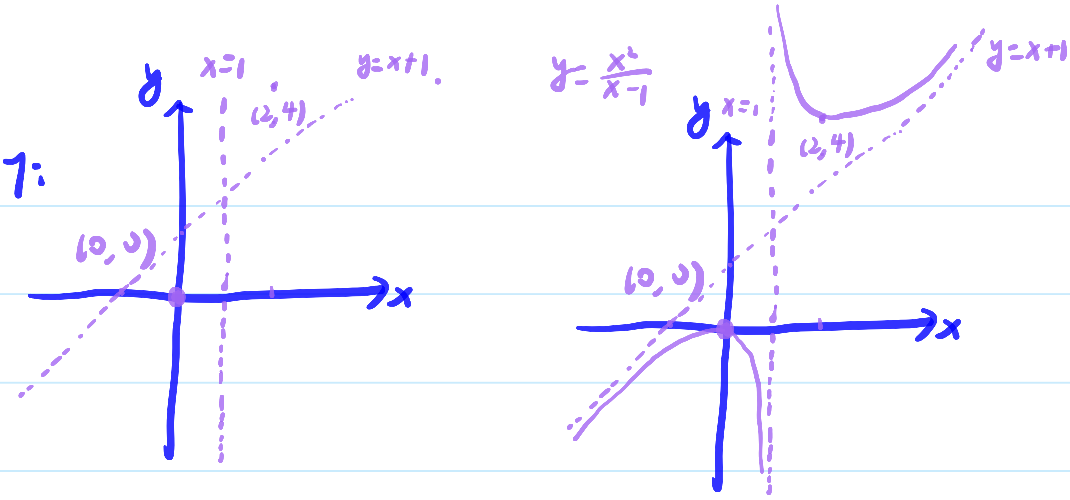
step 6: 与x轴交点: 令 $f(x)=0$. 得 $x=0$. $\Rightarrow (0,0)$.

与y轴交点: 令 $x=0$, 得 $f(x)=0$ $\Rightarrow (0,0)$.

极大值点: $f(0)=0\Rightarrow(0,0)$ 极小值点: $f(2)=4$ $\Rightarrow(2,4)$.

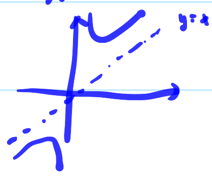
拐点: 无.

step 1:



推荐一些数学网站：wolframalpha.

类似于 $y=x+\frac{1}{x}$ Nike



Topic 2. 函数的泰勒公式 (Taylor's Formula). I

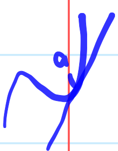
[中文课本 P_{149}. 3.8节；英文课本 P_{258}. Taylor Polynomials]

(1). 基本思想：用多项式近似函数.

(i) 为什么要用多项式近似. (why).

在上学期 12月26日的课程中,我们讲了用切线对函数进行线性估计.

[详见上学期讲义 1226 Topic 2].



在 $x\approx a$ 时, 有 $f(x)\approx \underbrace{f'(a)\cdot(x-a)+f(a)}$.

f(x)在a处的切线方程. 是关于x的一次多项式.

事实上,我们可以用关于x的更高次多项式去估计f(x)在a附近的情况.

为什么是多项式? 因为多项式更简单,更好求值.

eg. 在 $x\approx 0$ 时, $\sin x \approx x-\frac{1}{6}\cdot x^3$

取 $x=0.06$ 时, $\sin 0.06$ 并不好求, 但右边可以很快得到答案.

事实上, $x=0.06$ 时 左边 $=\sin 0.06\approx 0.0599\ 6400648$,

右边 $=0.059964$, 二者已经非常接近了.

(ii) 怎么用多项式近似函数.

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n阶可导, 我们用一个 n阶多项式 $P_n(x)$ 去估计它.

我们希望 $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 在a附近尽可能接近.

能否让 $f(x)$ 与 $P_n(x)$ 在 a 处的值相同，

且在 a 处的一阶导数、二阶导数、⋯，n 阶导数都相同？

取 $P_n(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\frac{f'''(a)}{3!}\cdot(x-a)^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$.

$=\sum_{k=0}^{n}\underbrace{\frac{f^{(k)}(a)}{k!}}\cdot(x-a)^k$. (规定 $f^{(0)}(a)=f(a)$, $0!=1$, $(x-a)^0=1$)

是关于 x 的 k 次多项式，且 x 都出现在 $x-a$ 中. centered at a.

∴ $P_n(x)$ 是关于 x 的 n 次多项式

而且，$\left[(x-a)^k\right]^{(m)}=\begin{cases}0, & (m>k)\\ \frac{k!}{(k-m)!}\cdot(x-a)^{k-m}, & (m\le k).\end{cases}$ ∴ $\left[(x-a)^k\right]^{(m)}\Big|_{x=a}=\begin{cases}0, & (m\ne k)\\ k!, & (m=k)\end{cases}$

∴ $P_n^{(m)}(a)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(a)}{k!}\left[(x-a)^k\right]^{(m)}\Big|_{x=a}=\begin{cases}f^{(m)}(a), & m=1,2,\cdots,n\\ 0.\end{cases}$

有 $P_n(a)=f(a)$, $P'(a)=f'(a)$, $P''(a)=f''(a)$, ⋯, $P^{(n)}(a)=f^{(n)}(a)$.

∴ 这样的 $P_n(x)$ 是对 $f(x)$ 在 a 附近的一个较好的 n 阶多项式估计，

称为 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 n 次泰勒多项式.

(nth-degree Taylor polynomial of f centered at a).

(iii). who is Taylor?

Brook Taylor. (1685-1731). A British mathematician.

Taylor's Theorem (or Taylor's Formula) was stated in 1710s.

(2). 泰勒定理(带Peano余项的泰勒公式).

若 $f(x)$ 在 $x=a$ 处 n 阶可导，则

$f(x)=P_n(x)+o\left((x-a)^n\right)$ $(x\to a)$. i.e. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-a)^n}=0$.

高阶无穷小量. small o notation

$P_n(x)$ 是上方提到的 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 n 次泰勒多项式.

(i). 证明：见中文课本 P_{149} 对定理 3.8.1 的证明.

需要连用 $n-1$ 次 L'Hospital 法则，之后用 $f^{n}(a)$ 的定义证明.

(ii). 泰勒定理的理解：

定义函数 $R_n(x)=f(x)-P_n(x)$. 它被称为泰勒公式的余项 (remainder).

上方的定理告诉我们，$R_n(x)$ 是 $x\to a$ 时，$(x-a)^n$ 的<u>高阶无穷小量</u>.

[参考讲义 1223. Topic 2. (2). ①]

泰勒定理实际上是对余项 $R_n(x)$ 的估计. 用 $o((x-a)^n)$ 作为余项的估计.

这种余项称为 Peano 余项，

对应的泰勒公式 $f(x)=P_n(x)+o((x-a)^n)$ 称为带 Peano 余项的（n阶）泰勒公式.

特别地，$a=0$ 时对应的公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

$(x\to 0)$.

称为带 Peano 余项的 n阶 麦克劳林 (Maclaurin) 公式.

大多数情况下，我们用麦克劳林公式就够了.

下面的公式与例题出现的都是麦克劳林公式.

(iii). 常见函数的麦克劳林公式.

(a). $f(x)=e^x$. 则 $f^{(k)}(x)=e^x$，$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{1}{k!}$. $(k=1,2,\cdots,n)$

$$\therefore e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)\quad,(x\to 0)$$

(b). $f(x)=\sin x$. 则 $f^{(k)}(x)=\sin(x+k\cdot\frac{\pi}{2})$

$$\frac{f^{(k)}(0)}{k!}=\frac{\sin(k\cdot\frac{\pi}{2})}{k!}=\begin{cases}0, & k\text{ 为偶数}\\ (-1)^{\frac{k-1}{2}}/k!, & k\text{ 为奇数}.\end{cases}$$

注意此处不是 x^{2n-1}

$\therefore \sin x = 0 + \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1} + o(x^{2n})$. $(x \to 0)$.

(c). $f(x) = \cos x$. 则 $f^{(k)}(x) = \cos(x + k\cdot\frac{\pi}{2})$. $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \begin{cases} 0 & . k \text{ 为奇数} \\ (-1)^{\frac{k}{2}}/k! & . k \text{ 为偶数.} \end{cases}$

$\therefore \cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n} + o(x^{2n+1})$ $(x \to 0)$.

(d). $f(x) = \ln(1+x)$. $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}\cdot(k-1)!}{(x+1)^k}$ $\therefore \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = (-1)^{k-1}\frac{1}{k}$.

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n + o(x^n)$, $(x \to 0)$.

(e). $f(x) = (1+x)^\alpha$. $f^{(k)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$. $(\alpha \in R)$

$\therefore (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}\cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n + o(x^n)$ $(x \to 0)$.

(3). 带 Peano 余项的泰勒公式的应用:

(i). 求极限值.

e.g. 求 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{\sin^6 2x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{(2x)^6}$

利用 e^{x^3} 的泰勒展开.

$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}\cdot x^n + o(x^n)$ $(x \to 0)$

用 x^3 替换上面 x.

$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{1}{3!}x^9 + \cdots + \frac{1}{n!}x^{3n} + o(x^{3n})$. $(x \to 0)$.

分母中 x 次数为 6，所以只要让 $o(x^{3n})$ 中. $3n \geq 6$. 取 $n=2$.

$e^{x^3} = 1 + x^3 + \frac{1}{2}x^6 + o(x^6)$ $\cdot (x \to 0)$,

$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^3} - 1 - x^3}{64\cdot x^6} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2}x^6 + o(x^6)}{64\cdot x^6} = \frac{1}{128} + \lim_{x\to 0} \frac{o(x^6)}{64\cdot x^6} = \frac{1}{128}$.