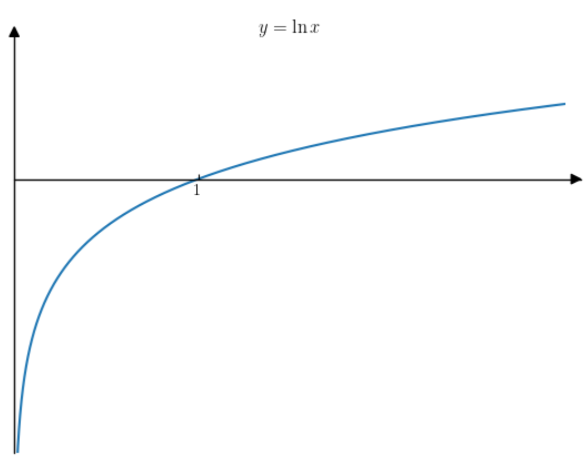
第一次作业答案

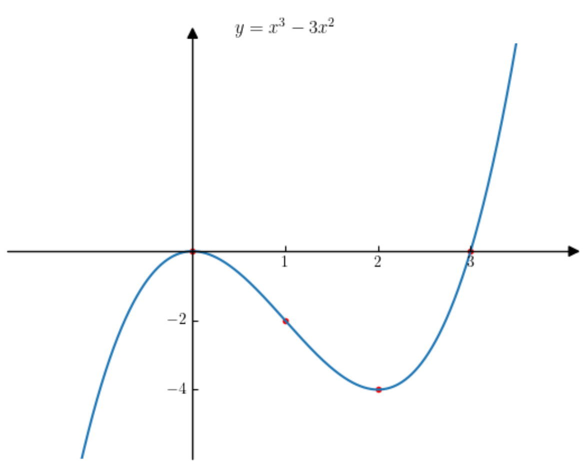
解答题

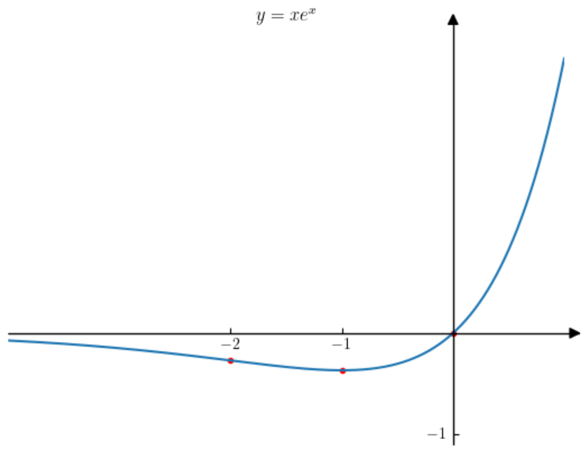
1. 如下表。

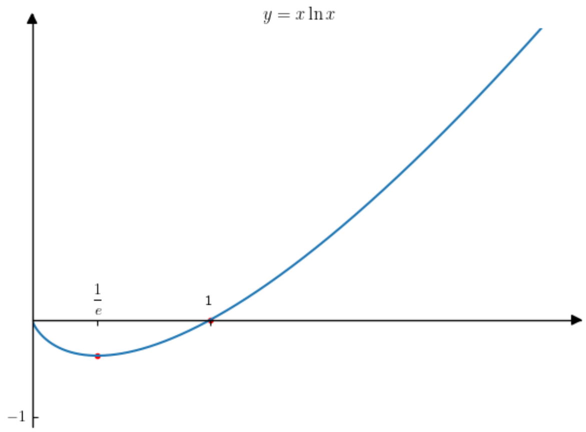
	驻点	单调递增区间	单调递减区间	拐点	凹区间	凸区间
(a)	无	$(0,+\infty)$	无	无	$(0,+\infty)$	无
(b)	$x=0,2$	$(-\infty,0)$和$(2,+\infty)$	$(0,2)$	$x=1$	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$
(c)	$x=-1$	$(-1,+\infty)$	$(-\infty,-1)$	$x=-2$	$(-\infty,-2)$	$(-2,+\infty)$
(d)	$x=\frac{1}{e}$	$(\frac{1}{e},+\infty)$	$(0,\frac{1}{e})$	无	无	$(0,+\infty)$
(e)	$x=1$	$(-\infty,1)$	$(1,+\infty)$	$x=2$	$(-\infty,2)$	$(2,+\infty)$
(f)	$x=\pm1$	$(-1,1)$	$(-\infty,-1)$和$(1,+\infty)$	$x=0,\pm\sqrt{3}$	$(-\infty,-\sqrt{3})$和$(0,\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3},0)$和$(\sqrt{3},+\infty)$

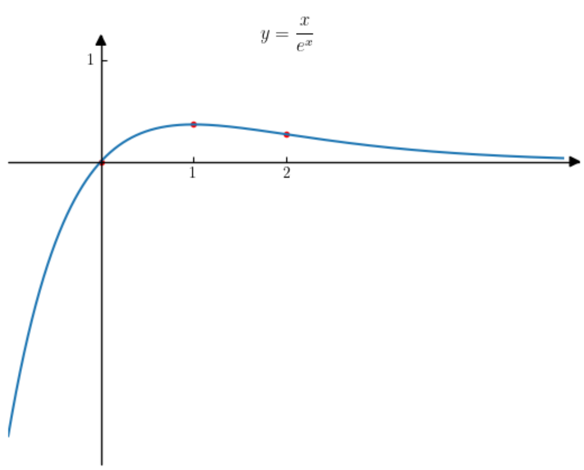
函数草图如下：

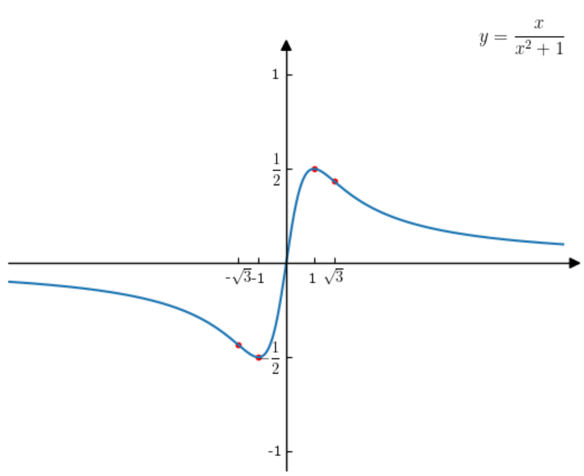




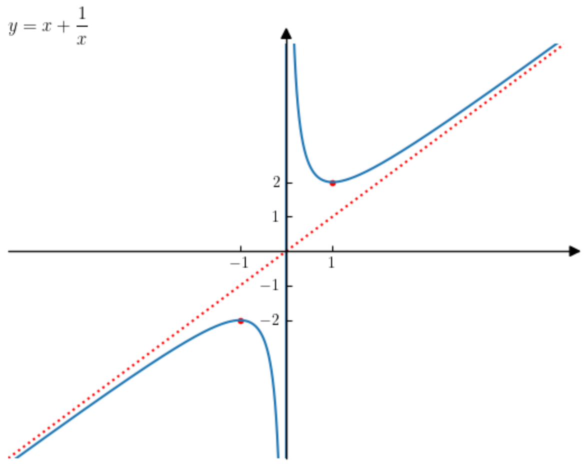

$y = xe^x$
-2
-1
-1


$y = x \ln x$
$\frac{1}{e}$
1
-1

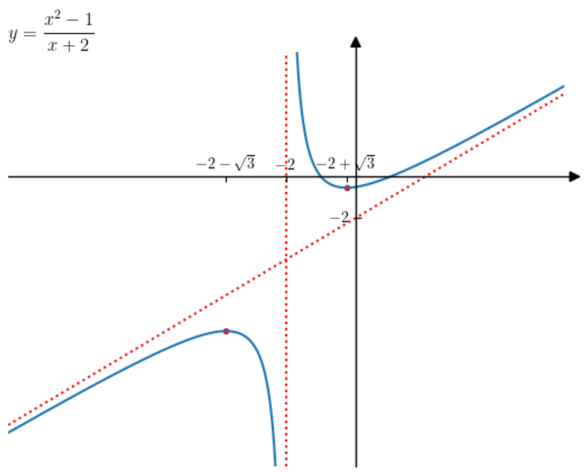

$y = \frac{x}{e^x}$
1
1
2


$y = \frac{x}{x^2+1}$
1
$\frac{1}{2}$
$-\sqrt{3}$ -1
1 $\sqrt{3}$
$-\frac{1}{2}$
-1

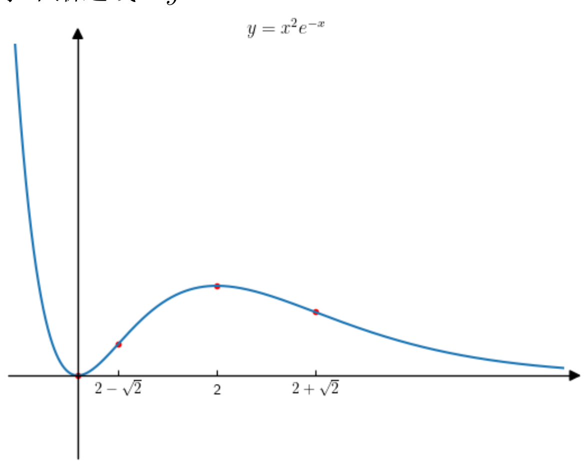
2. (a) 斜渐近线：$y = x$　垂直渐近线：$x = 0$



(b) 斜渐近线：$y = x - 2$　垂直渐近线：$x = -2$



(c) 水平渐近线：$y = 0$



3. $a = -2, \quad b = 0$

4. (a) $f(x) = -x^4, \quad c = 0$

(b) $f(x) = x^4, \quad c = 0$

(c) $f(x) = x^3, \quad c = 0$

证明题

1. 令$g(x) = f(x) - f'(x_0)(x - x_0) - f(x_0)$，则$g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$。

由于$f''(x) \geq 0$，则$f'(x)$单调递增。

则当$x \geq x_0$时，$f'(x) \geq f'(x_0)$，则$g'(x) \geq 0$，$g(x)$单调递增。则当$x \leq x_0$时，$f'(x) \leq f'(x_0)$，则$g'(x) \leq 0$，$g(x)$单调递减。

则$g(x)$在$x = x_0$有最小值，则$g(x) \geq g(x_0) = 0$，原题得证。

2. (a) 令$x = x_2, x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，则

$$f(x_2) \geq f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) \cdot (x_2 - \frac{x_1 + x_2}{2}) = f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) \cdot \frac{x_2 - x_1}{2}$$

(b) 令$x = x_1, x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$，则

$$f(x_1) \geq f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) \cdot (x_1 - \frac{x_1 + x_2}{2}) = f(\frac{x_1 + x_2}{2}) + f'(\frac{x_1 + x_2}{2}) \cdot \frac{x_1 - x_2}{2}$$

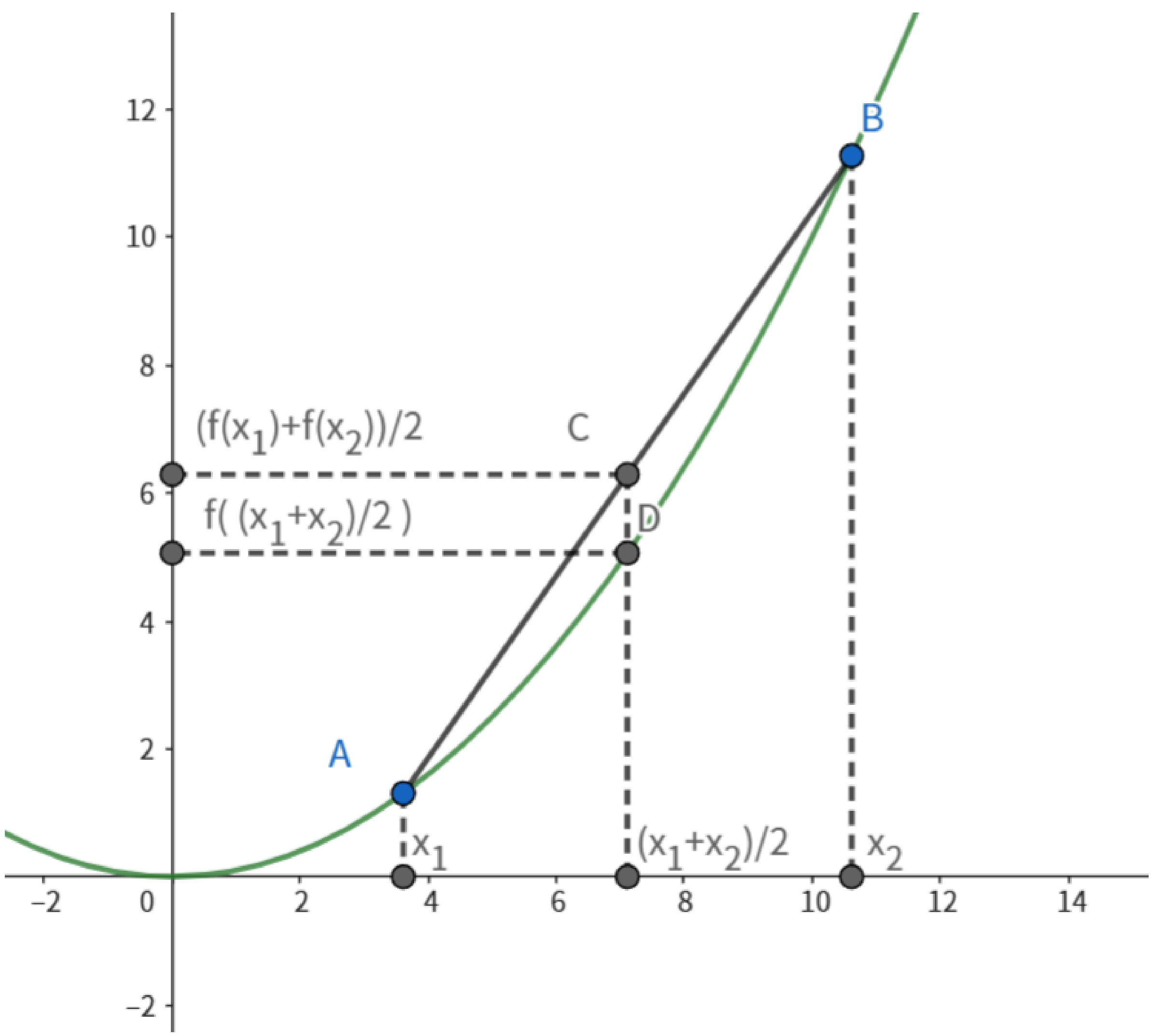
(c) 将(a),(b)中的不等式相加，可得

$$f(x_2) + f(x_1) \geq 2f(\frac{x_1 + x_2}{2})$$

即

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1 + x_2}{2})$$

(d) 对于任何一个凸函数图像，其上有两点A, B，则线段AB的中点始终在函数图像的上方，如图所示：



3. (a) 令$f(x)=x^2$，则由第2题有

$$\frac{x_1^2+x_2^2}{2} \geq (\frac{x_1+x_2}{2})^2$$

即

$$x_1^2+x_2^2 \geq \frac{1}{2}(x_1+x_2)^2$$

(b) 令$f(x)=e^x$，则由第2题有

$$\frac{e^{x_1}+e^{x_2}}{2} \geq e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$$

(c) 令$t_1=e^{x_1}, t_2=e^{x_2}$，则$e^{\frac{x_1+x_2}{2}}=(e^{x_1}e^{x_2})^{\frac{1}{2}}=\sqrt{t_1t_2}$ 则

$$\frac{t_1+t_2}{2} \geq \sqrt{t_1t_2}$$

4. 由于f是凹函数，则对任意x, x_0，都有

$$f(x) \leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$$

令$g(x)=-f(x)$，则$g'(x)=-f'(x)$，则

$$g(x)=-f(x) \geq -f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0)=g(x_0)+g'(x_0)(x-x_0)$$

则$g(x)=-f(x)$是凸函数