3月6日. 周四. 第5次课

1. 签到. 2. 周六晚上前提交作业. (交了就有分! 请合并成一个PDF!)

关于如何把照片转换成一份PDF:

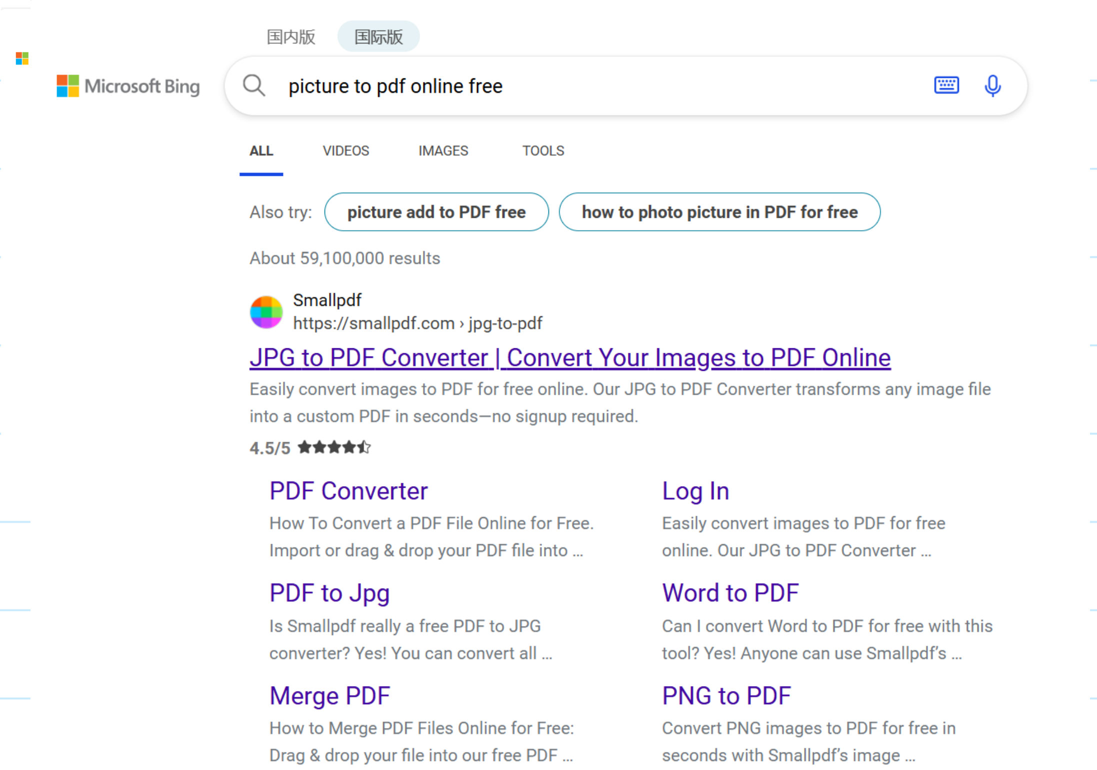
way 1: 手机APP: 扫描全能王

way 2: 使用在线工具.

Warning!!

旷课次数 > 总课程次数 × 1/4 (=7次.

将直接取消成绩!!

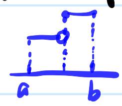


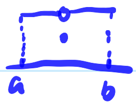
Topic1. 上节课"定积分"Topic的补充.(详见0303讲义).

remark. 4. 所有的连续函数在闭区间上都可积.

事实上,只要$f(x)$在$[a,b]$上只有有限个第一类间断点,f一定可积.

第一类间断点 $\begin{cases} \text{跳跃间断点} \\ \text{可去间断点} \end{cases}$





它们都不影响"面积"的计算,自然也不影响可积性.

参考中文课本图象 ←

(6). 若 $\forall x \in [a,b]$, $m \le f(x) \le M$.

则 $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

(7). 若 $\forall x \in [a,b]$, $f(x) \ge g(x)$.

则 $\int_a^b f(x)dx \ge \int_a^b g(x)dx$.

Topic2: 微积分基本定理.

(1). 变上限的定积分. [中文课本P186 ; 英文课本 P392]

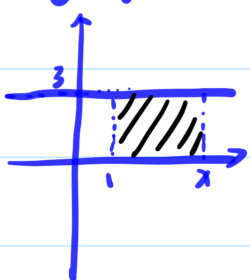
定义: $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

那么 $\forall x \in [a,b]$, $\int_a^x f(t)dt$ 存在.

它是x的一个函数. 称为变上限的定积分.

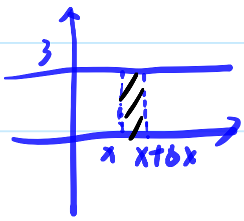
e.g. $f(x) = 3$. $g(x) = \int_1^x f(t)dt$. 则 $g(x) = 3x - 3$.

而且 $g'(x) = 3 = f(x)$.



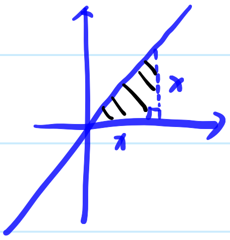
可以用面积求简单的定积分.

why? $g'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x}$.



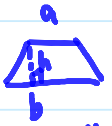
$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\text{矩形面积}}{\text{矩形宽度}} = \lim_{\Delta x \to 0} \text{矩形高} = 3 = f(x)$.

e.g. $f(x)=x$ $\quad g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$, 则 $g(x)=\frac{x^2}{2}$.

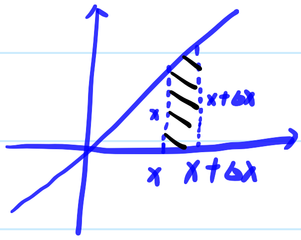


而且 $g'(x)=x=f(x)$.

why? $g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)\cdot dt}{\Delta x}$

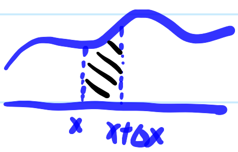


$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$



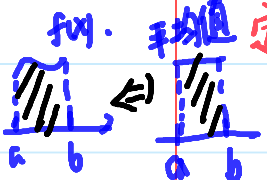
$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\text{梯形面积}}{\text{梯形宽度}}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(x+\frac{\Delta x}{2})=f(x)$.

似乎有一些规律. 如果 $g(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt$, 那么 $g'(x)=f(x)$?



$g'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{g(x+\Delta x)-g(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x}f(t)dt}{\Delta x}$

$=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\text{曲边梯形面积}}{\text{曲边梯形宽度}}$, 是否 $=f(x)$?



定义: 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, 则 f 在 $[a,b]$ 上的平均值定义为 $\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\cdot dx$.

于是上面的问题转化为, 当 $\Delta x\to 0$ 时 $f(t)$ 在 $[x,x+\Delta x]$ 上的平均值是否 $\to f(x)$?

我们需要研究 f 在区间上的平均值.

(2). 积分中值定理: [中文课本 P184. 4.3.1节]

若 f 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $\exists c\in[a,b]$,

使 f 在 $[a,b]$ 上的平均值在 c 处被取到

i.e. $f(c)=\frac{1}{b-a}\cdot\int_a^b f(x)\,dx$.

①.定理证明: [参考 1128讲义: 闭区间上连续函数的性质]

由于 f 在 $[a,b]$ 上连续 $\therefore$ f 在 $[a,b]$ 上有最大值 M 和最小值 m. (最值性)

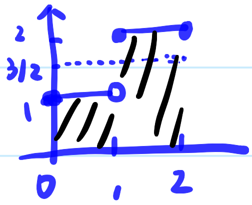
$\therefore$ $\forall x\in[a,b]$ $\quad m\le f(x)\le M$ $\quad\therefore$ $m\cdot(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M\cdot(b-a)$

∴平均值 $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \in [m, M]$,

又由于闭区间上连续函数的介值性，$\exists\, c \in [a,b]$ 使得 $f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

② 在定理中，f的连续性是必要的.

当f在[a,b]上可积但不连续时 平均值不一定能取到.

e.g. 

$\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)\,dx = \frac{1+2}{2} = \frac{3}{2}$，不是f在[0,2]上任一点处的取值.

(3).微积分基本定理I.[中文课本 P187；英文课本 P394]

如果f在[a,b]上连续，则 $F(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 在[a,b]上连续，在(a,b)上可导，且 $F'(x)=f(x)$.

i.e. F(x)是f在[a,b]上的一个原函数.

① 证明：直接用导数定义求 $F'(x)$ 即可.

$$F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}$$

根据积分中值定理，$\exists\, c\in(x, x+\Delta x)$. s.t. $f(c)=\frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,dt}{\Delta x}$.

可知c是 Δx 的函数，且 $\lim_{\Delta x\to 0} c = x$.

$$\therefore F'(x)=\lim_{\Delta x\to 0} f(c) = f(\lim_{\Delta x\to 0} c) = f(x).$$

②.应用：可用于求各种变上限定积分的导数

(i)、以x为上限的变上限定积分：

e.g. $F(x)=\int_0^x (e^t+\sin t)\,dt$. 求 $F'(x)$.

则 $F'(x)=e^x+\sin x$.

(ii). 以 x 的函数为上限的变上限定积分.

e.g. $F(x)=\int_0^{x^2}(e^t+\sin t)\,dt$, 求 $F'(x)$.

令 $G(x)=\int_0^x(e^t+\sin t)\,dt$. $G'(x)=e^x+\sin x$

$F(x)=G(x^2)$ $\therefore F'(x)=G'(x^2)\cdot 2x=(e^{x^2}+\sin x^2)\cdot 2x$

e.g. $F(x)=\int_0^{f(x)} g(t)\,dt$, f可导, g连续, 求 $F'(x)$.

令 $G(x)=\int_0^x g(t)\,dt$. $\therefore G'(x)=g(x)$

$\therefore F(x)=G(f(x))$. $\therefore F'(x)=G'(f(x))\cdot f'(x)=g(f(x))\cdot f'(x)$

(iii). 下限含 x 的变下限定积分:

e.g. $F(x)=\int_x^0(e^t+\sin t)\,dt$, 求 $F'(x)$.

$F(x)=-\int_0^x(e^t+\sin t)\,dt$.

$\therefore F'(x)=-(e^x+\sin x)$

e.g. $F(x)=\int_{-x^2}^{\sin x}(\cos t+\frac{1}{t})\,dt$, 求 $F'(x)$.

$=\int_{-x^2}^{0}(\cos t+\frac{1}{t})\,dt+\int_0^{\sin x}(\cos t+\frac{1}{t})\,dt$

$=-\int_0^{-x^2}(\cos t+\frac{1}{t})\,dt+\int_0^{\sin x}(\cos t+\frac{1}{t})\,dt$

$=-[\cos x^2-\frac{1}{x^2}]\cdot(-2x)+[\cos(\sin x)+\frac{1}{\sin x}]\cdot(\cos x)$

(iv). 积分函数内含 x.

e.g. $F(x)=\int_0^x x^2\,dt$, 求 $F'(x)$.

因为积分变量是 t. $\therefore x^2$ 相对于 t 是无关的数.

$\therefore F(x)=x^2\int_0^x 1\cdot dt=x^3$. $\therefore F'(x)=3x^2$.

e.g. $F(x)=\int_0^x(3x+5t+\cos t)\,dt$, 求 $F'(x)$

$=\int_0^x 3x\,dt+\int_0^x(5t+\cos t)\,dt$

$=3x^2+\int_0^x(5t+\cos t)\,dt$

$\therefore F'(x)=6x+(5x+\cos x)=11x+\cos x$

e.g. $F(x)=\int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{1+t^2}}dt$， 求 $F'(x)$.

$F(x)=\underset{\sim}{x^2}\cdot\underbrace{\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt}$ 是两个函数乘积

$\therefore F'(x)=2x\cdot\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt+x^2\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

e.g. $F(x)=\int_0^x g(x)f(t)\,dt$，在$(-\infty,+\infty)$上$f$连续，$g$可导. 求$F'(x)$.

$F(x)=g(x)\cdot\int_0^x f(t)\cdot dt$

$\therefore F'(x)=g'(x)\cdot\int_0^x f(t)dt+g(x)f(x)$

(v). 综合情况:

e.g. $F(x)=\int_{-x^2}^{e^x}\sin x\cdot(\frac{1}{1+t^2})dt$， 求 $F'(x)$.

积分上下限都有x. 积分函数也有x.

$F(x)=\sin x\cdot\int_{-x^2}^{e^x}\frac{1}{1+t^2}\cdot dt=\sin x\cdot[\int_0^{e^x}\frac{dt}{1+t^2}-\int_0^{-x^2}\frac{dt}{1+t^2}]$

$\therefore F'(x)=\cos x\cdot\int_{-x^2}^{e^x}\frac{dt}{1+t^2}+\sin x\cdot[\frac{e^x}{1+e^{2x}}-\frac{-2x}{1+x^4}]$

(结合 $\int\frac{dt}{1+t^2}=\arctan t$ 可以进一步化简).

e.g. $F(x)=\int_0^{x^2}[e^t\cdot\underline{\int_0^t \sin z\,dz}]dt$. 求 $F''(x)$

取 $G(x)=\int_0^x \sin z\,dz$. 则 $G'(x)=\sin x$.

$F(x)=\int_0^{x^2}[e^t\cdot G(t)]dt$.

$\therefore F'(x)=e^{x^2}\cdot G(x^2)\cdot 2x=(e^{x^2}\cdot 2x)\cdot G(x^2)$

$F''(x)=(e^{x^2}\cdot 2x)'\cdot G(x^2)+(e^{x^2}\cdot 2x)\cdot G'(x^2)\cdot 2x$

$=(e^{x^2}\cdot 4x^2+2\cdot e^{x^2})\cdot\int_0^{x^2}\sin z\,dz+(e^{x^2}\cdot 2x)\cdot\sin x^2\cdot 2x$.

(4). 微积分基本定理II. [中文课本P189；英文课本P398].

若f在$[a,b]$上连续，且F是f的原函数.

则 $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$. (也可记为 $F(x)\Big|_a^b$).

这个式子也称为 牛顿-莱布尼兹公式 (Newton-Leibniz formula)

① 证明：由微积分基本定理，$G(x)=\int_a^x f(t)\,dt$ 是 f 的一个原函数.

∴ $F(x)=G(x)+C$，C为常数。 $\forall x\in(a,b)$

又由于 $F(x)$、$G(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续.

∴ 当 $x=a$ 或 $x=b$ 时 同样有 $F(x)=G(x)+c$.

$$
\begin{aligned}
\therefore F(b)-F(a) &= [G(b)+c]-[G(a)+c] \\
&= G(b)-G(a) \\
&= \int_a^b f(t)\,dt-\int_a^a f(t)\,dt \\
&= \int_a^b f(x)\,dx-0 \\
&= \int_a^b f(x)\,dx.
\end{aligned}
$$

② 应用：

(i) 直接求定积分.

eg. $\int_0^1 (e^x+x)\,dx$

$$
\begin{aligned}
&= \left(e^x+\tfrac{1}{2}x^2\right)\Big|_0^1 \\
&= \left(e^1+\tfrac{1}{2}\cdot 1^2\right)-\left(e^0+\tfrac{1}{2}\cdot 0^2\right) = e+\tfrac{1}{2}-1 = e-\tfrac{1}{2}
\end{aligned}
$$

e.g. 已知 $F(x)=\frac{1}{2}\cdot e^x(\sin x-\cos x)$，求 $F'(x)$.

并据此求 $\int_0^1 e^x\cdot\sin x\,dx$.

$$
\begin{aligned}
F'(x) &= \tfrac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+\tfrac{1}{2}\cdot e^x\cdot(\cos x+\sin x) \\
&= e^x\cdot\sin x
\end{aligned}
$$

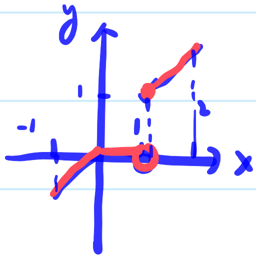
$\therefore \int_0^1 e^x\sin x\,dx = F(1)-F(0) = \frac{e}{2}(\sin 1-\cos 1)-\frac{1}{2}\cdot(-1)$

eg. 求定积分 $\int_{-1}^2 |x|\cdot[x]\,dx$. 其中 $[x]$ 为向下取整函数，

表示不大于 x 的最大整数。

$[0]=0$，$[1]=1$ $[1.1]=1$ $[-1.1]=-2$

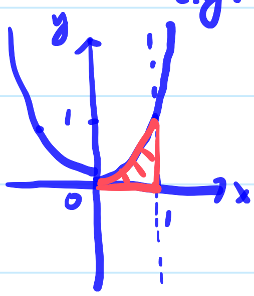
$$|x|\cdot[x] = \begin{cases} x, & -1\le x<0 \to [x]=-1,\ |x|=-x \\ 0, & 0\le x<1 \to [x]=0,\ |x|=x \\ x & 1\le x\le 2 \to [x]=1,\ |x|=x \end{cases}$$



$$\therefore \int_{-1}^{2} |x|[x]\,dx$$
$$= \int_{-1}^{0} x\,dx + \int_0^1 0\cdot dx + \int_1^2 x\,dx$$
$$= -\frac{1}{2} + 0 + \frac{1+2}{2}\times 1 = 1$$

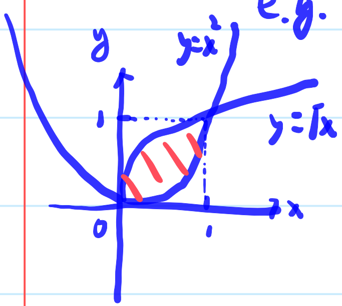
(ii). 求图形面积.

e.g. 求 $y=x^2$ 与 x轴.y轴.$x=1$ 围成的图形的面积.



$$\int_0^1 x^2\,dx = \left(\frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{0}{3} = \frac{1}{3}$$

e.g. 求 $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 围成的图形面积.



$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1$$
$$= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right) - (0-0) = \frac{1}{3}$$

一般地求图形面积，关键要确定好积分上下限和积分函数.
可以通过画图象的方法确定.

如.求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 围起来的面积，可以先解方程 $f(x)=g(x)$，
得到积分上下限.

(iii).结合定积分的定义，求某些极限.(不要求掌握)

e.g. 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\frac{k}{n}+1\right)^3 \cdot \frac{1}{n}$.

事实上这个极限可以转化成一个定积分.

取 $f(x)=(x+1)^3$. 考虑它在$[0,1]$上的积分 $\int_0^1 (x+1)^3dx$

根据定积分的定义，

把 $[0,1]$ 均匀分成 n 个区间 $[0,\frac{1}{n}],[\frac{1}{n},\frac{2}{n}],\cdots,[\frac{n-1}{n},\frac{n}{n}]$，

在 n 个区间上分别取点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，

i.e. $x_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. $k=1,2,\cdots,n$.

然后 $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k)\cdot\frac{1}{n} = \int_0^1 f(x)dx$

如果 $x_1,\cdots,x_n$ 都取右端点. i.e. $x_k=\frac{k}{n}$

$\therefore \int_0^1 f(x)\,dx = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})\cdot\frac{1}{n}$

$= \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} (\frac{k}{n}+1)^3\cdot\frac{1}{n}$

$\therefore$ 答案 $= \int_0^1 (x+1)^3\cdot dx = \frac{1}{4}\cdot(x+1)^4\Big|_0^1 = \frac{2^4}{4}-\frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}$.

③、微积分基本定理只适用于连续函数. 对有间断点的函数不成立.

e.g. (错误使用). $\int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}\,dx = (-\frac{1}{x})\Big|_{-1}^{3} = -\frac{1}{3}-1 = -\frac{4}{3}$.

事实上，$\frac{1}{x^2}$ 在 $x=0$ 处为无穷间断点 $\therefore \int_{-1}^{3}\frac{1}{x^2}dx$ 不存在.

④. 微积分基本定理的进一步理解: [中文课本 P191；英文课本 P398~399]

I. f 连续，则 $\left(\int_a^x f(t)dt\right)' = f(x)$

II. 如果 $F'=f$，则. $\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$

I. $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)\cdot dt = f(x)$ f 先积分，再求导，变回 f.

II. $\int_a^x \frac{d}{dx}F(x)\cdot dx = F(x)-F(a)$. F 先求导，再积分，变回 F + 常数.

$(-F(a))$.