

3月6日，周四，第5次课

1. 签到。 2. 周六晚上前提交作业。(交了就有分！请合并成一个PDF！)

关于如何把照片转换成一份 PDF：

way 1：手机 APP：扫描全能王

way 2：使用在线工具。

Warning!!

旷课次数 / 总课程次数 × 1/4 (=1次)

将直接取消成绩！！

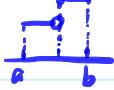
Microsoft Bing search results for "图片在线转pdf".
Results: 6,610,000
Top result: Smallpdf (https://smallpdf.com/cn/jpg-to-pdf)
Title: JPG转PDF——免费在线将图片转换成PDF！
Description: 优质而免费的在线图片转PDF服务：无文件大小限制，无附加水印，支持多种图像格式，可自定义PDF风格。将JPG文件拖放到方框中。您可以立即对文件进 ...
Rating: 4.5/5 ★★★★★ (72.7万 reviews)
Links:
- 登录 (Login)
- 繁體中文 (Traditional Chinese)
- 定价 (Pricing)
- JPG to PDF
- 壓縮PDF (Compress PDF)
- PDF转Excel (PDF to Excel)

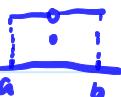
Microsoft Bing search results for "picture to pdf online free".
Results: 59,100,000
Top result: Smallpdf (https://smallpdf.com/jpg-to-pdf)
Title: JPG to PDF Converter | Convert Your Images to PDF Online
Description: Easily convert images to PDF for free online. Our JPG to PDF Converter transforms any image file into a custom PDF in seconds—no signup required.
Rating: 4.5/5 ★★★★★ (4.5/5)
Links:
- PDF Converter (PDF Converter)
- How To Convert a PDF File Online for Free.
- Import or drag & drop your PDF file into ...
- PDF to Jpg (PDF to Jpg)
- Is Smallpdf really a free PDF to JPG converter? Yes! You can convert all ...
- Merge PDF (Merge PDF)
- How to Merge PDF Files Online for Free:
- Drag & drop your file into our free PDF ...
- Log In (Log In)
- Easily convert images to PDF for free online. Our JPG to PDF Converter ...
- Word to PDF (Word to PDF)
- Can I convert Word to PDF for free with this tool? Yes! Anyone can use Smallpdf's ...
- PNG to PDF (PNG to PDF)
- Convert PNG images to PDF for free in seconds with Smallpdf's image ...

Topic 1. 上节课“定积分”Topic 的补充. (详见 0303 讲义).

remark. 4. 所有的连续函数在闭区间上都可积.

事实上, 只要 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上只有有限个第一类间断点, f 一定可积.

第一类间断点. { 跳跃间断点 

可去间断点. 

它们都不影响“面积”的计算, 自然也不影响可积性.

(6). 若 $\forall x \in [a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$.

则 $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$.

(7). 若 $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \geq g(x)$.

则 $\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx$.

参考书←
文课本
图象

Topic 2: 微积分基本定理.

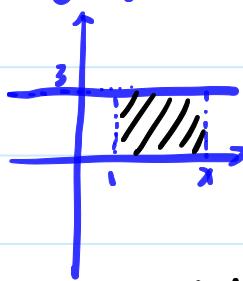
(1). 变上限的定积分. [中文课本 P186; 英文课本 P392]

定义: $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积.

那么 $\forall x \in [a, b]$, $\int_a^x f(t) dt$ 存在.

它是 x 的一个函数. 称为变上限的定积分.

e.g. $f(x) = 3$. $\theta(x) = \int_1^x f(t) dt$. 则 $\theta(x) = 3x - 3$.



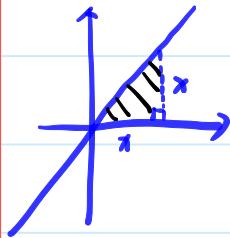
而且 $\theta'(x) = 3 = f(x)$.

$$\theta'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\theta(x + \Delta x) - \theta(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}$$

可以用面积求简单的定积分.

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{矩形面积}}{\text{矩形宽度}} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{矩形高}}{\Delta x} = f(x)$$

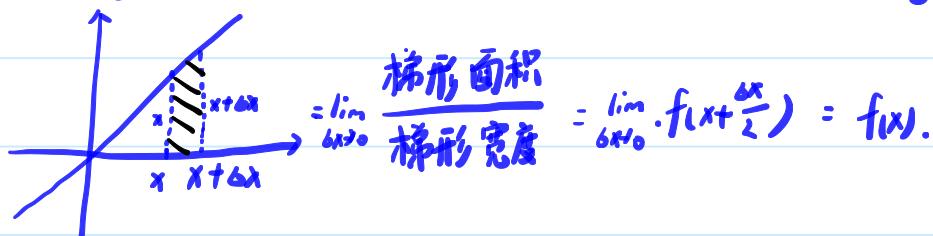
e.g. $f(x) = x$ $g(x) = \int_0^x f(t) dt$, 则 $g(x) = \frac{x^2}{2}$.



而且 $g'(x) = x = f(x)$.

$$\text{why? } g'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}$$

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



似乎有一些规律. 如果 $g(x) = \int_a^x f(t) dt$, 那么 $g'(x) = f(x)$?

$$g(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\Delta x} f(t) dt}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\text{曲边梯形面积}}{\text{曲边梯形宽度}}, \text{是否} = f(x)?$$

定义: 若 f 在 $[a, b]$ 上可积, 则 f 在 $[a, b]$ 上的平均值定义为 $\frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx$.
 于是上面的问题转化为, 当 $\Delta x \rightarrow 0$ 时, $f(t)$ 在 $[x, x + \Delta x]$ 上的平均值是否 $\rightarrow f(x)$?

我们需要研究 f 在区间上的平均值.

(2). 积分中值定理: [中文课本 P184. 4.3.1 节]

若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $\exists c \in [a, b]$,

使 f 在 $[a, b]$ 上的平均值在 c 处被取到.

$$\text{i.e. } f(c) = \frac{1}{b-a} \cdot \int_a^b f(x) dx.$$

①. 定理证明: [参考 1128 讲义: 闭区间上连续函数的性质]

由于 f 在 $[a, b]$ 上连续 $\therefore f$ 在 $[a, b]$ 上有最大值 M 和最小值 m . (最值性).

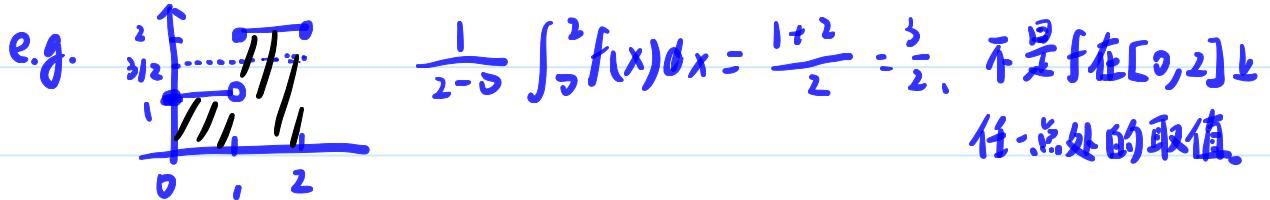
$$\therefore \forall x \in [a, b] \quad m \leq f(x) \leq M \quad \therefore m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b-a)$$

\therefore 平均值 $\bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \in [m, M]$.

又由于闭区间上连续函数的介值性, $\exists c \in [a, b]$ 使得 $f(c) = \bar{f} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

② 在定理中, f 的连续性是必要的.

当 f 在 $[a, b]$ 上可积但不连续时, 平均值不一定能取到.



(3). 微积分基本定理 I. [中文课本 P187; 英文课本 P394]

如果 f 在 $[a, b]$ 上连续, 则 $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ 在 $[a, b]$ 上连续,
在 (a, b) 上可导, 且 $F'(x) = f(x)$.

i.e. $F(x)$ 是 f 在 $[a, b]$ 上的一个原函数.

① 证明: 直接用导数定义求 $F'(x)$ 即可.

$$F'(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \delta x) - F(x)}{\delta x} = \lim_{\delta x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+\delta x} f(t) dt}{\delta x}$$

根据积分中值定理, $\exists c \in (x, x + \delta x)$. s.t. $f(c) = \frac{\int_x^{x+\delta x} f(t) dt}{\delta x}$.

可知 c 是 δx 的函数, 且 $\lim_{\delta x \rightarrow 0} c = x$.

$$\therefore F'(x) = \lim_{\delta x \rightarrow 0} f(c) = f(\lim_{\delta x \rightarrow 0} c) = f(x).$$

②. 应用: 可用于求各种变上限定积分的导数.

(i). 以 x 为上限的变上限定积分:

e.g. $F(x) = \int_0^x (e^t + \sin t) dt$. 求 $F'(x)$.

则 $F'(x) = e^x + \sin x$.

(ii). 以 x 的函数为上限的变上限定积分.

e.g. $F(x) = \int_0^{x^2} (e^t + \sin t) dt$, 求 $F'(x)$.

令 $G(x) = \int_0^x (e^t + \sin t) dt$. $G'(x) = e^x + \sin x$

$F(x) = G(x^2) \quad \therefore F'(x) = G'(x^2) \cdot 2x = (e^{x^2} + \sin x^2) \cdot 2x$

e.g. $F(x) = \int_0^{f(x)} g(t) dt$, f 可导, g 连续, 求 $F'(x)$.

令 $G(x) = \int_0^x g(t) dt$. $\therefore G'(x) = g(x)$

$\therefore F(x) = G(f(x))$. $\therefore F'(x) = G'(f(x)) \cdot f'(x) = g(f(x)) \cdot f'(x)$

(iii). 下限含 x 的变下限定积分:

e.g. $F(x) = \int_x^0 (e^t + \sin t) dt$, 求 $F'(x)$.

$F(x) = - \int_0^x (e^t + \sin t) dt$.

$\therefore F'(x) = -(e^x + \sin x)$

e.g. $F(x) = \int_{-\pi^2}^{\sin x} (\cos t + \frac{1}{t}) dt$, 求 $F'(x)$.

$= \int_{-\pi^2}^0 (\cos t + \frac{1}{t}) dt + \int_0^{\sin x} (\cos t + \frac{1}{t}) dt$

$= - \int_0^{-\pi^2} (\cos t + \frac{1}{t}) dt + \int_0^{\sin x} (\cos t + \frac{1}{t}) dt$

$= -[\cos t^2 - \frac{1}{t}] \Big|_{-\pi^2}^0 + [\cos t \sin x + \frac{1}{t}] \Big|_0^{\sin x} \cdot (\cos x)$

(iv). 积分函数内含 x .

e.g. $F(x) = \int_0^x x^2 dt$, 求 $F'(x)$.

因为积分变量是 t . $\therefore x^2$ 相对于 t 是无关的数.

$\therefore F(x) = x^2 \cdot \int_0^x 1 dt = x^3$. $\therefore F'(x) = 3x^2$.

e.g. $F(x) = \int_0^x (3x + 5t + \omega t) dt$, 求 $F'(x)$.

$= \int_0^x 3x dt + \int_0^x (5t + \omega t) dt$

$= 3x^2 + \int_0^x (5t + \omega t) dt$

$\therefore F(x) = 6x + (5x + \omega x) = 11x + \omega x$

e.g. $F(x) = \int_0^x \frac{x^2}{\sqrt{1+t^2}} dt$, 求 $F'(x)$.

$$F(x) = x^2 \cdot \underbrace{\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt}_{\text{是两个函数乘积}}$$

$$\therefore F'(x) = 2x \cdot \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} dt + x^2 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

e.g. $F(x) = \int_0^x g(u)f(t) dt$, 在 $(-\infty, +\infty)$ 上 f 连续, g 可导. 求 $F'(x)$.

$$F(x) = g(x) \cdot \int_0^x f(t) dt$$

$$\therefore F'(x) = g'(x) \cdot \int_0^x f(t) dt + g(x) f(x)$$

(v). 综合情况:

e.g. $F(x) = \int_{-x^2}^{e^x} \sin x \cdot \left(\frac{1}{1+t^2} \right) dt$, 求 $F'(x)$.

积分上下限都有 x . 积分函数也有 x .

$$F(x) = \sin x \cdot \int_{-x^2}^{e^x} \frac{1}{1+t^2} dt = \sin x \cdot \left[\int_0^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} - \int_0^{-x^2} \frac{dt}{1+t^2} \right]$$

$$\therefore F'(x) = \cos x \cdot \int_{-x^2}^{e^x} \frac{dt}{1+t^2} + \sin x \cdot \left[\frac{e^x}{1+e^{2x}} - \frac{-2x}{1+x^4} \right]$$

(结合 $\int \frac{dt}{1+t^2} = \arctan t$ 可以进一步化简).

e.g. $F(x) = \int_0^x \left[e^t \cdot \underbrace{\int_0^t \sin z dz}_{G(z)} \right] dt$. 求 $F'(x)$

$$\text{取 } G(x) = \int_0^x \sin z dz. \text{ 则 } G'(x) = \sin x.$$

$$F(x) = \int_0^x \left[e^t \cdot G(t) \right] dt.$$

$$\therefore F'(x) = e^{x^2} \cdot G(x^2) \cdot 2x = (e^{x^2} \cdot 2x) \cdot G(x^2)$$

$$F''(x) = (e^{x^2} \cdot 2x) \cdot G(x^2) + (e^{x^2} \cdot 2x) \cdot G'(x^2) \cdot 2x$$

$$= (e^{x^2} \cdot 4x^3 + 2 \cdot e^{x^2}) \cdot \int_0^{x^2} \sin z dz + (e^{x^2} \cdot 2x) \cdot \sin x^2 \cdot 2x.$$

(4). 微积分基本定理 II. [中文课本 P189; 英文课本 P398].

若 f 在 $[a, b]$ 上连续, 且 F 是 f 的原函数.

则 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$. (也可记为 $F(x)|_a^b$).

这个式子也称为 牛顿-莱布尼兹公式 (Newton-Leibniz formula).

① 证明：由微积分基本定理， $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ 是 f 的一个原函数。

$$\therefore F(x) = G(x) + C, \quad C \text{ 为常数.} \quad \forall x \in (a, b)$$

又由于 $F(x), G(x)$ 均在 $[a, b]$ 上连续。

\therefore 当 $x=a$ 或 $x=b$ 时同样有 $F(x) = G(x) + C$.

$$\begin{aligned}\therefore F(b) - F(a) &= [G(b) + C] - [G(a) + C] \\&= G(b) - G(a) \\&= \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt \\&= \int_a^b f(x) dx - 0 \\&= \int_a^b f(x) dx.\end{aligned}$$

② 应用：

(i). 直接求定积分。

$$\begin{aligned}\text{eg. } \int_0^1 (e^x + x) dx &= (e^x + \frac{1}{2}x^2) \Big|_0^1 \\&= (e^1 + \frac{1}{2} \cdot 1^2) - (e^0 + \frac{1}{2} \cdot 0^2) = e + \frac{1}{2} - 1 = e - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

e.g. 已知 $F(x) = \frac{1}{2} \cdot e^x (\sin x - \cos x)$, 求 $F'(x)$.

并据此求 $\int_0^1 e^x \cdot \sin x dx$.

$$F'(x) = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + \frac{1}{2} \cdot e^x (\cos x + \sin x)$$

$$= e^x \cdot \sin x$$

$$\therefore \int_0^1 e^x \cdot \sin x dx = F(1) - F(0) = \frac{e}{2} (\sin 1 - \cos 1) - \frac{1}{2} (-1)$$

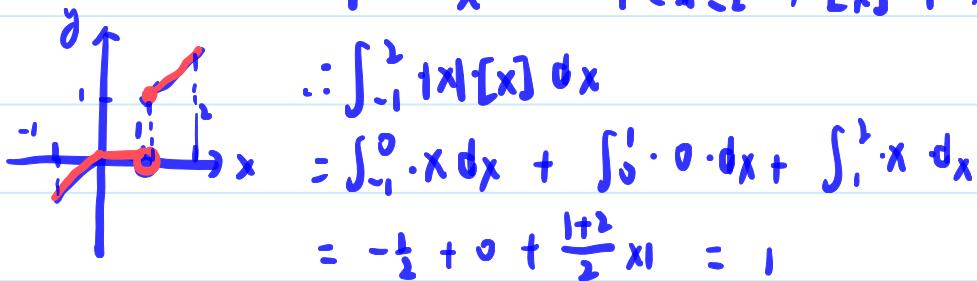
e.g. 求定积分 $\int_{-1}^2 |x| \cdot [x] dx$. 其中 $[x]$ 为向下取整函数,

表示不大于 x 的最大整数。

$$[2] = 2, [1] = 1, [1.1] = 1, [-1.1] = -2$$

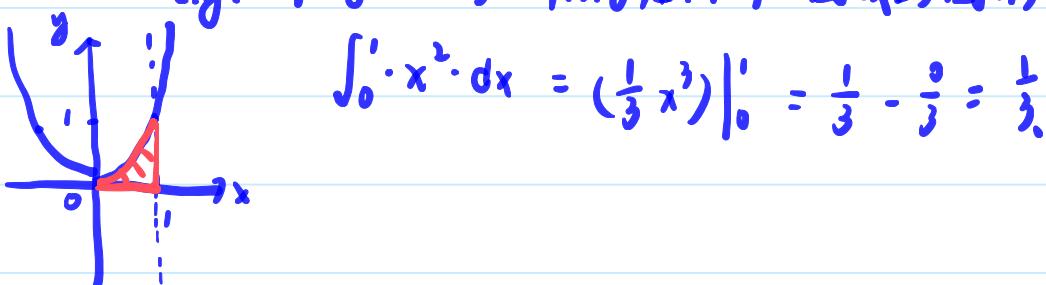
$$\frac{1}{2}, \frac{-1}{2}$$

$$|x| \cdot [x] = \begin{cases} x, & -1 \leq x < 0, \rightarrow [x] = -1, |x| = -x \\ 0, & 0 \leq x < 1, \rightarrow [x] = 0, |x| = x \\ x, & 1 \leq x \leq 2 \rightarrow [x] = 1, |x| = x \end{cases}$$

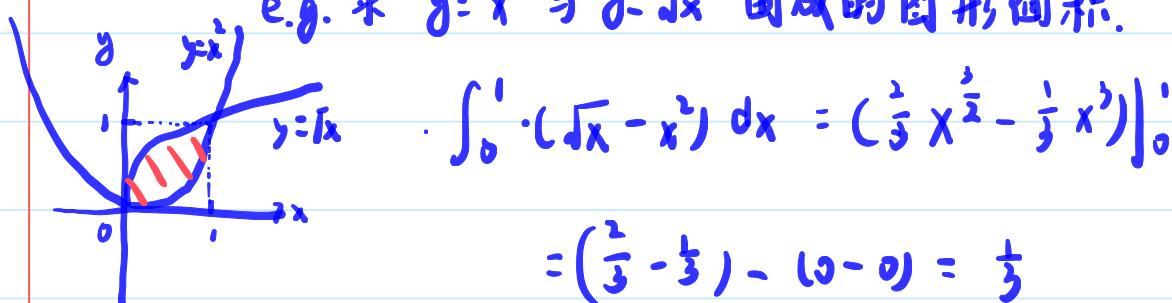


(ii). 求图形面积.

e.g. 求 $y = x^2$ 与 x 轴, y 轴, $x = 1$ 围成的图形的面积.



e.g. 求 $y = x^2$ 与 $y = \sqrt{x}$ 围成的图形面积.



一般地求图形面积, 关键要确定好积分上下限和积分函数.

可以通过画图象的方法确定.

如.求 $f(x)$ 和 $g(x)$ 围起来的面积. 可以先解方程 $f(x) = g(x)$, 得到积分上下限.

(iii). 结合定积分的定义, 求某些极限.(不要求掌握)

e.g. 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n (\frac{k}{n} + 1)^3 \cdot \frac{1}{n}$.

事实上这个极限可以转化成一个定积分.

取 $f(x) = (x+1)^3$. 考虑它在 $[0, 1]$ 上的积分 $\int_0^1 (x+1)^3 dx$

根据定积分的定义。

把 $[0, 1]$ 均分成 n 个区间 $[0, \frac{1}{n}], [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}], \dots, [\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}]$.

在各区间上分割取点 x_1, x_2, \dots, x_n .

i.e. $x_k \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]$. $k=1, 2, \dots, n$.

$$\text{然后 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(x_k) \cdot \frac{1}{n} = \int_0^1 f(x) dx$$

如果 x_1, \dots, x_n 都取右端点. i.e. $x_k = \frac{k}{n}$

$$\therefore \int_0^1 f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right) \cdot \frac{1}{n}$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left(\frac{k}{n} + 1 \right)^3 \cdot \frac{1}{n}$$

$$\therefore \text{答案} = \int_0^1 (x+1)^3 \cdot dx = \frac{1}{4} \cdot (x+1)^4 \Big|_0^1 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{15}{4}.$$

③. 微积分基本定理只适用于连续函数。对有间断点的函数不成立。

$$\text{e.g. (错误使用). } \int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx = \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^3 = -\frac{1}{3} - 1 = -\frac{4}{3}.$$

事实上， $x=0$ 处为无穷间断点. $\therefore \int_{-1}^3 \frac{1}{x^2} dx$ 不存在。

④. 微积分基本定理的进一步理解: [中文课本 P191; 英文课本 P398~399]

I. f 连续, 则 $(\int_a^x f(t) dt)' = f(x)$

II. 如果 $F' = f$, 则 $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$

I. $\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$ f 先积分再求导, 变回 f .

II. $\int_a^x \frac{d}{dx} F(t) dt = F(x) - F(a)$. F 先求导再积分, 变回 F + 常数.

$(-F(a))$.