

第二次作业：泰勒公式

请于3月8日23:59前提交

作业说明

提交方式

- 只需提交电子版作业到yukeshuxuea@163.com。若作业为手写，请拍照上传，并合成为一个PDF，命名为“第二次作业+学号+姓名.pdf”。提交格式不对的作业将不予批改，请大家注意提交的格式，谢谢！
- 提交作业后的下一个工作周之内会收到批改反馈。如果你没有收到反馈，请先检查自己的提交情况，再联系孙老师核实自己的作业成绩。

评分标准

- 部分习题的题号旁边有*。这部分题目属于附加题，比较困难，因此它们并不参与作业的评分。如果你做了这些题我们会很高兴，如果你没做也不会扣分。
- 拒绝抄袭。抄袭的作业按零分计算；完成度越高，作业分数越高；我们重视作业的过程。如果你没有做对题目，但是过程中有一部分是正确的，我们也会给你相应的分数。
- 如果你使用了AI协助答题，没有关系，但请给出你所使用的prompt和对应的输出作为附件。
- 如果无法按时提交作业，请及时告诉习题课老师。一个学期有2次不交作业的机会。如果在课前没有收到作业且没有提前告诉习题课老师的，将视作使用一次机会。当机会用完后，缺交的作业视作0分。
- 若对题目中的描述（包括中文理解）有任何问题，请及时向我们提出。

解答题

以下题目无需写出过程，只需写出答案

1. 请写出下列函数在 $x = 0$ 处的带Peano余项的泰勒公式，要求展开到 x^5

(1) $\cos x$

(2) $\sin x$

(3) $\ln(1+x)$

(4) e^x

(5) $\tan x$

(6) $(1+x)^a$

(7) $\cos x \ln(1+x)$

(8) $e^x \cdot \sqrt{1+x}$

(9) $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$

(10) $\frac{1}{2} \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$

(11) $\sin^2 x$

(12) $\cos x^3$

2. 用泰勒公式计算下列极限

(1) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\ln(1+x)} \right)$

(2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{x}{2} \sin x}{\sin x - x \cos x}$

(3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - x^2 - e^{-x^2}}{x \sin^3 2x}$

(4) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x} \right) \frac{1}{\sin x}$

(5) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right)$

3. 用泰勒公式求下列高阶导数

(1) 已知 $f(x) = e^{\sin x}$ ，求 $f^{(5)}(0)$

(2) 已知 $f(x) = \sin(e^x)$ ，求 $f^{(3)}(0)$

证明题

以下题目需要写出推导过程

1. 用带拉格朗日余项的泰勒公式，证明：

(1) 当 $x > 0$ 时, $e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2}$, 当 $x < 0$ 时, $e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}$

(2) 当 $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ 时, $x - x^3 \leq \sin x \leq x$