2月20日

1. 日程安排

i. 两次标准化考试日期：4月18日、6月6日．3h．300分．

ii. 4月18日前最多有11次课．

后 9． ．用于复习．

iii. 本学期无期中．期末6月13日

2. i. 分数比例： 10%签到 + 30%作业 + 60%期末

作业转成PDF文档．用学号邮箱．发给课程邮箱

240~ @stu.pku.edu.cn yukeshuxuea@163.com

PDF命名："第x次作业+姓名+学号"．

e.g."第一次作业+张三+2401…"．

Topic 1: 函数的单调性与极值.

[中文课本: P_{133}, 3.5节; 英文课本: P_{293}, 4.3节].

(1). 单调性 定义回顾: (5min).

函数 $f(x)$ 在区间 I 上单调递增 $\Leftrightarrow \forall x_1, x_2 \in [a,b]$, if $x_1 < x_2$, then $f(x_1) \le f(x_2)$

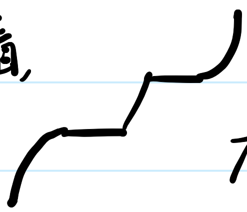
单调递减: $\ge$

严格单调递增: $<$

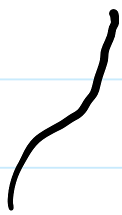
——减: $>$

①. 简单地说, 单调递增 (简记为 ↑) 就是: x 越大, $f(x)$ 越大 (或相等).
严格单调递增 (简记为严格↑) 则排除了相等的情况.

②. 从图像上看,



单调↑. 不严格↑.



: 严格↑.

③. 这里的定义与我们上学期所讲的单调性定义有所不同, 更加细致. 上学期讲的↑实际对应这里的严格↑.
改进定义是为了更方便与导数相结合, 参见下方定理.

(2). 单调性与导数的关系. (定理 10min + 例题 10~20min = 20~30min).

定理 1: 若 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 在 (a,b) 上 ↑ $\Leftrightarrow \forall x \in (a,b)$, $f'(x) \ge 0$.

↓ $\le$.

证明思路: ($\Leftarrow$): 使用拉格朗日中值定理即可.

($\Rightarrow$): 导数的定义 + 极限的保号性.

定理2: 若$f(x)$在(a,b)上可导 则

$f(x)$在(a,b)上严格↑ $\Leftrightarrow$ $\forall x\in(a,b), f'(x)\geq 0$, 且在$(a,b)$的任意子区间上 $f'(x)$不恒为0.

严格↓ $\leq$

①证明思路: ($\Rightarrow$)反设在(a,b)的子区间(a_1,b_1)上$f'(x)$恒为0, 则 $f(a_1)=f(b_1)$,

(反证法). 这与$f(x)$在(a,b)严格↑矛盾. 故反设不成立.

($\Leftarrow$)反设$f(x)$在(a,b)上不严格↑.

$\because \forall x\in(a,b), f'(x)\geq 0$ $\therefore f(x)$在(a,b)上↑.

$\therefore \exists a_1, b_1\in(a,b)$ 使得 $f(a_1)=f(b_1), a_1<b_1$

$\therefore$在(a_1,b_1)上 $f(x)$恒等于$f(a_1)$, 进而$f'(x)$恒为0.

这与在(a,b)的任意子区间上$f'(x)$不恒为0矛盾. 故反设不成立.

②定理理解: 只要$f'(x)\geq 0$, 且只在某些点上取到0, $f(x)$就严格↑.

e.g. $f(x)=x^3$. 在$(-\infty,+\infty)$上严格↑.

$f'(x)=3x^2\geq 0$. 且仅在$x=0$一点处$f'(x)=0$.

③应用举例:

(i). 求出单调区间后求极值&最值.

step 1: 求解不等式 $f'(x)\begin{matrix}\geq 0\\ \leq 0\end{matrix}$. 得到 $\begin{matrix}\uparrow\\ \downarrow\end{matrix}$ 区间

step2: 列出表格, 根据表格判断极值.

step3: 结合区间端点处函数值, 得到最值.

e.g. 求出 $f(x)=(x+2)^2(x-1)^3$ 在区间$[-3,3]$上的极值与最值.

step1. $f'(x)=2(x+2)\cdot(x-1)^3+(x+2)^2\cdot 3\cdot(x-1)^2$

$=(x+2)(x-1)^2\cdot[2(x-1)+3(x+2)]$

$=(x+2)(x-1)^2\cdot(5x+4)$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=-2,1,-\frac{4}{5}$

$f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow (-\infty,-2]\cup[-\frac{4}{5},+\infty)$

$\leq$ $\Leftrightarrow$ $[-2,-\frac{4}{5}]$

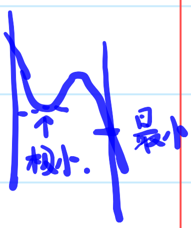
$\therefore f(x)$在$(-\infty,-2]\cup[-\frac{4}{5},+\infty)$上↑

$[-2,-\frac{4}{5}]$ 上↓.

$f'(x)=0$ 的各个点 以及它们把 $(-\infty,+\infty)$ 分成的部分.

step2.

x	$[-3,-2)$	-2	$(-2,-\frac{4}{5})$	$-\frac{4}{5}$	$(-\frac{4}{5},1)$	1	$(1,3]$.
$f'(x)$	+	0	−	0	+	0	+
$f(x)$	↗	极大.	↘	极小	↗	不是	↗.



step3. $f(x)$ 有两个极值点 -2, $-\frac{4}{5}$. 两边的端点为 -3, 3.

$f(-2)=0$. $f(-\frac{4}{5})=(\frac{6}{5})^2\cdot(-\frac{9}{5})^3=-\frac{4\times3^8}{5^5}\approx-8$

$f(-3)=(-1)^2\cdot(-4)^3=-64$, $f(3)=5^2\cdot2^3=200$.

$\therefore f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上最小值为 $f(-3)=-64$. 最大值为 $f(3)=200$.

(ii) 利用导数证明不等式.

一般步骤. $f(x)\geq g(x)$

$\Leftrightarrow F(x)=f(x)-g(x)\geq0$

$\Leftrightarrow F(x)_{min}\geq0$

e.g. 证明 $e^x\geq1+x$, $x\in(-\infty,+\infty)$.

取 $f(x)=e^x-1-x$.

那么要证明 $f(x)\geq0 \Leftrightarrow f(x)_{min}\geq0$.

step1: $f'(x)=e^x-1$. $f'(x)\geq0 \Leftrightarrow x\in[0,+\infty)$

$f'(x)\leq0 \Leftrightarrow x\in(-\infty,0]$.

step2:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,+\infty)$
$f'(x)$	−	0	+
$f(x)$	↘	极小	↗

step3: $f(x)_{min}=f(0)=e^0-1-0=0$.

$\therefore f(x)_{min}\geq0$

$\therefore e^x\geq1+x$.

(3). 极值与导数的关系总结:

(i). 已知一阶导数 f'. [英文课本 P294. The First Derivative Test]

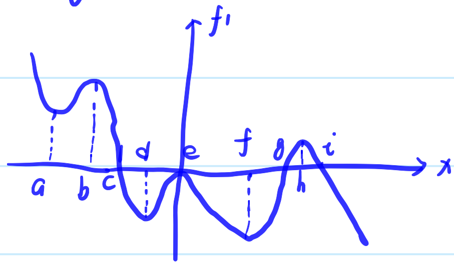
若 c 是 f 的极值点, 且 f 在 c 处可导, 则 $f'(c)=0$. (费马原理)

若 f' 在点 c 处由 + 变为 −. 则 c 处 f 为极大值.

− + 极小值.

若 f' 在点 c 两边正负性一样. 则 c 处 f 不是极值.

eg. f' 图象如下，求 f 的极值.



f 的极大值点: $c \cdot i$

小 : g

e 不是极值点.

导数为0的点称为驻点. (stationary point / critical point).

从上一个例子可以看出, 极值点一定是驻点,

驻点不一定是极值点.

(ii). 已知一阶与二阶导数. (f' & f'').

[英文课本 P297. The Second Derivative Test]

若 $f'(c)=0$, $f''(c)>0$. 则 c 处 f 为极小值. 原因: f': c

<0, 大. f' c

$=0$ f 是否为极值无法判断.

e.g. $f(x)= x^4 - 4x^3$

$f'(x) = 4x^3-12x^2=4x^2(x-3)$

$\therefore f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$ or $x=3$

x	$(-\infty, 0)$	0	$(0, 3)$	3	$(3, +\infty)$
f'	$-$	0	$-$	0	$+$
f	$\downarrow$	不是	$\downarrow$	极小	$\uparrow$

$f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$

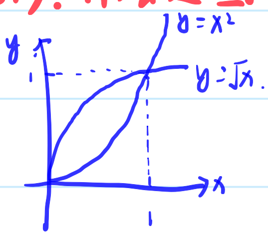
$\therefore f''(3)=12\times3\times1=36>0$. $\therefore x=3$ 是极小值点.

$f''(0)=0$. $x=0$ 无法确定是否为极值点

$\therefore f(x)$ 有极小值点 $x=3$, 没有极大值点.

Topic 2. 函数的凹(āo)凸(tū)性. [中文: P138. 3.6节; 英文: P295. What Does f'' say About f?]

(1). 什么是凹凸性? 凹: , concave; 凸: , convex.



在 $[0,1]$ 上, $y=x^2$ 与 $y=\sqrt{x}$ 都是↗, 且值域都是 $[0,1]$.

但是二者↗的速度不同. 与切线的关系也不同.

$y=x^2$ ↑的速度由慢到快. 且始终位于切线上方.

$y=\sqrt{x}$ 快 慢. 下方.

这两种不同的性质,在数学上称为凹凸性.

它有许多种等价的表述.我们列举简单的几种如下.

(2).可导函数 凹凸性的判断

(i). 利用切线判断:

it's concave if you look from above.

可导函数 f 在区间 I 上是凸的(convex or concave upward, 上凹 or 下凸),

$\Leftrightarrow$ f 的图象始终位于切线上方.

$\Leftrightarrow$ $\forall x_0\in I$, $\forall x\in I$, $f(x)\geq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

可导函数 f 在区间 I 上是凹的(concave or concave downward, 下凹 or 上凸)

$\Leftrightarrow$ f 的图象始终位于切线下方

$\Leftrightarrow$ $\forall x_0\in I,\forall x\in I$, $f(x)\leq f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$.

it's concave if you look from below.

(ii) 利用导数 f' 的单调性:

可导函数 f 在区间 I 上是凸的 $\Leftrightarrow$ f' 在 I 上 ↑.

凹 $\Leftrightarrow$ f' ↓.

(iii). 二阶可导函数 利用二阶导数 f'' 的正负性:

二阶可导函数 f 在区间 I 上是凸的 $\Leftrightarrow$ f'' 在 I 上 ≥ 0 恒成立

凹 $\Leftrightarrow$ ≤ 0.

其中,(i)适用于已知函数图象时判断,

(ii).(iii) 表达式.

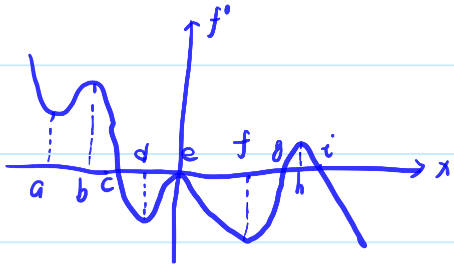
eg $f(x)=x^4-4x^3$. 求它的凹凸性区间. (使用(iii))

$f'(x)=4x^3-12x^2$. $f''(x)=12x^2-24x=12x(x-2)$

$f''\geq 0 \iff x\in(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$ ∴ $f(x)$在$(-\infty,0]\cup[2,+\infty)$上是凸的

$f''\leq 0 \iff x\in[0,2]$ $[0,2]$ 上是凹的

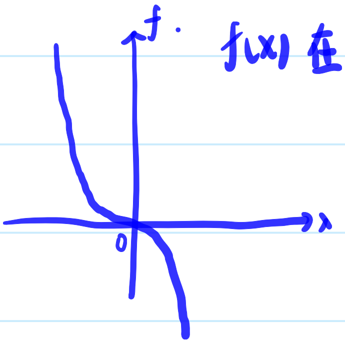
eg. f'图象如下. 求f的凹凸性区间. (使用(ii))



$f(x)$在$(a,b),(d,e),(f,h)$ 上是凸的

$(-\infty,a),(b,d),(e,f),(h,+\infty)$ 上是凹的

eg. f图象如下. 求f的凹凸性区间.



$f(x)$在$(-\infty,0)$上凸. (使用(ii))

$(0,+\infty)$上凹.

(3). 拐点 (inflection point).

(i). 定义: 若函数$f(x)$在点x_0两边凹凸性不同. 则x_0称为$f(x)$的拐点.

(2). 判断法:

x_0是$f(x)$的拐点 $\iff$ x_0是$f'(x)$的极值点.

所以求极值点的方式可以用于求拐点.

eg. $f(x)=2x^6-5x^4$, 求它的所有拐点.

$f'(x)=12x^5-20x^3$.

$f''(x)=60x^4-60x^2=60x^2(x+1)(x-1)$.

∴ $f(x)$的拐点是 $x=-1,\ x=1$.

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
f''	+	0	−	0	−	0	+
f'	↗	极大	↘	不是	↘	极小	↗

Topic 3: 函数草图的绘制.

[中文: P144. 3.7节.　英文: P315. 4.5节]

(1). 主要步骤: 1. 求定义域.

2. 判断是否有奇偶性. 周期性.

3. 求单调性 & 极值点.

4. 求凹凸性 & 拐点.

5. 求渐近线 (水平. 垂直 or 斜).

6. 求重要点上的函数值. 如与坐标轴的交点.

7. 作图.

(2). 求渐近线回顾. [详见上学期讲义 1128 & 1202].

e.g. $f(x) = x \cdot \ln x$

1. 定义域: $(0, +\infty)$

2. 没有奇偶性/周期性

3. $f'(x) = \ln x + 1$

x	$(0, e)$	$\frac{1}{e}$	$(e, +\infty)$
f'	$-$	0	$+$
f	$\searrow$	极小.	$\nearrow$

4. $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$.

$\therefore f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上凹.

5.