

## 第三次作业：不定积分与定积分

请于3月15日23:59前提交

### 作业说明

#### 提交方式

- 只需提交电子版作业到yukeshuxuea@163.com。若作业为手写，请拍照上传，并合成为一个PDF，命名为“第三次作业+学号+姓名.pdf”。提交格式不对的作业将不予批改，请大家注意提交的格式，谢谢！
- 提交作业后的下一个工作周之内会收到批改反馈。如果你没有收到反馈，请先检查自己的提交情况，再联系孙老师核实自己的作业成绩。

#### 评分标准

- 部分习题的题号旁边有\*。这部分题目属于附加题，比较困难，因此它们并不参与作业的评分。如果你做了这些题我们会很高兴，如果你没做也不会扣分。
- 拒绝抄袭。抄袭的作业按零分计算；完成度越高，作业分数越高；我们重视作业的过程。如果你没有做对题目，但是过程中有一部分是正确的，我们也会给你相应的分数。
- 如果你使用了AI协助答题，没有关系，但请给出你所使用的prompt和对应的输出作为附件。
- 如果无法按时提交作业，请及时告诉习题课老师。一个学期有2次不交作业的机会。如果在课前没有收到作业且没有提前告诉习题课老师的，将视作使用一次机会。当机会用完后，缺交的作业视作0分。
- 若对题目中的描述（包括中文理解）有任何问题，请及时向我们提出。

## 解答题

以下题目无需写出过程，只需写出答案

1. 使用带 Lagrange 余项的麦克劳林公式，估计以下函数值，要求估计误差不大于  $10^{-5}$ . (可以使用计算器)

(1)  $\sin \frac{1}{2}$

(2)  $\sqrt{e}$

(3)  $\ln 1.1$

2. 求下列不定积分

(a)  $\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}} dx$

(b)  $\int (1+\cos^2 x) \sec^2 x dx$

(c)  $\int \frac{1}{x^2(1+x^2)} dx$

(d)  $\int \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 x} dx$

3. 求下列函数的导数

(a)  $F(x) = \int_0^x 2xt dt$

(b)  $F(x) = \int_{-1}^{x^2} \sin t dt$

(c)  $F(x) = \int_x^{x^2} e^{x+t} dt$

4. 求下列极限

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sin t^2 dt}{x^3}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} t \sin t dt}{x^6}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4} dt - x}{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}$

5. 已知  $f(0) = 0$ ，且  $f(x)$  在  $x = 0$  处可导，求

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t) dt}{x^2}$$

### 证明题

以下题目需要写出推导过程

1. 证明：如果  $F(x)$  和  $G(x)$  都是  $f(x)$  在  $x \in I$  上的原函数,  $H(x) = F(x) - G(x)$  则  $\forall x_1, x_2 \in I. H(x_1) = H(x_2)$

[Hint: 使用拉格朗日中值定理证明。这道题说明了  $H(x)$  在  $x \in I$  上恒为常数。].

2. 证明：若  $F(x)$  是  $f(x)$  的一个原函数,  $G(x)$  是  $g(x)$  的一个原函数, 则  $\int (f(x) + g(x))dx = F(x) + G(x) + C$ , 其中  $C$  为任意常数。