2月27日.周四.

1.签到.　　2.作业 周五结束前提交.

今日主要内容：函数的泰勒公式Ⅰ.(带peano余项);

函数的泰勒公式Ⅱ.(带Lagrange余项).

Topic 1. 函数的泰勒公式Ⅰ.(带peano余项).[续 2月24日讲义]

(3).带Peano余项的泰勒公式的应用.

回顾常见函数的麦克劳林公式：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n),(x\to 0).$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cdot x^n+o(x^n).(x\to 0).$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+o(x^{2n}),(x\to 0)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}+o(x^{2n+1}),(x\to 0)$$

$$\underset{(\alpha\in R)}{(1+x)^\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\cdot x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\cdot x^n+o(x^n),(x\to 0)$$

以上公式的推导过程不要求记忆，但公式一定要记住.可以结合以下规律记忆.

公式的规律：e^x、$(1+x)^\alpha$ 的高阶导数好求，可以在使用时利用高阶导数推导；

$\ln(1+x)$、$\sin x$、$\cos x$ 公式 都是首项为正，之后正负交错.

e^x 的公式中，x^n项对应分母为 $n!$

$\sin x$ 的公式中，x^n项对应分母为 $n!$，但只出现奇数次项 $(x,x^3,x^5,\cdots)$.

$\cos x$ 的公式中，x^n项对应分母为 $n!$，但只出现偶数次项 $(1,x^2,x^4,\cdots)$

$\ln(1+x)$ 的公式中，x^n项对应分母为 n.

需要用这些公式时可以先写出前两项，再根据上方的规律往后写.

(i).求极限值.

e.g.1. 求 $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{\sin^6 2x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{e^{x^3}-1-x^3}{(2x)^6}$ (等价无穷小:
$\sin x\sim x\quad(x\to 0)$
$\sin 2x\sim 2x\quad(x\to 0)$)

利用 e^{x^3} 的泰勒展开.

$$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)\quad(x\to 0)$$

用 x^3 替换上面 x.

$$e^{x^3}=1+x^3+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{3!}x^9+\cdots+\frac{1}{n!}x^{3n}+o(x^{3n}).\ (x\to 0).$$

分母中 x 次数为6，所以只要让 $o(x^{3n})$ 中，$3n\geq 6$，取 $n=2$.

$$e^{x^3}=1+x^3+\frac{1}{2}x^6+o(x^6)\ (x\to 0),$$

$o(\ )$ 的定义
$\lim_{x\to a}\dfrac{o(f(x))}{f(x)}=0$
$(\lim_{x\to a}f(x)=0)$.

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{64\cdot x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}\cdot x^6+o(x^6)}{64\cdot x^6}=\frac{1}{128}+\lim_{x\to 0}\frac{o(x^6)}{64\cdot x^6}=\frac{1}{128}.$$

remark 1: 麦克劳林公式中可以进行换元，将 x 换成 x 的倍数 (kx) 或 x 的幂次. (x^k)，从而得到新函数的麦克劳林公式.

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1}+o(x^{2n})\quad(x\to 0).$$

x 换成 $2x$，有: $\sin(2x)=2x-\frac{4}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot 2^{2n-1}\cdot x^{2n-1}+o(2^{2n}\cdot x^{2n})\ .\ (x\to 0).$

x 换成 x^2，有 $\sin x^2=x^2-\frac{1}{6}x^6+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{4n-2}+o(x^{4n}).\ (x\to 0).$

上方式子中，$o(2^{2n}\cdot x^{2n})$ 可以进一步简写成 $o(x^{2n})$.

这是由于小o记号的性质: 若 c 为非0常数，$\lim_{x\to a}f(x)=0$.

则 $g(x)=o(c\cdot f(x)),(x\to a)\Leftrightarrow g(x)=o(f(x)),(x\to a)$

$$\Updownarrow\qquad\qquad\qquad\Updownarrow$$

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{c\cdot f(x)}=0\iff\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=0.$$

remark 2: 在用麦克劳林公式计算极限时需要确定公式中的 n,

或者说公式展开到哪一位.

一般来说，要确定 $o(\cdot)$ 中 n 的次数比分母中的次数更大.

n 取得更大时,展开的位数更多,精度更高,也能算出极限,但更复杂.

如在上方例题中,取 $n=3$. 有 $e^{x^3}=1+x^3+\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{6}x^9+o(x^9),\ (x\to 0)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{64x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2}x^6+\frac{1}{6}x^9+o(x^9)}{64x^6}=\frac{1}{128}+\lim_{x\to 0}\frac{x^3}{384}+\lim_{x\to 0}\frac{x^3\cdot o(x^9)}{64\cdot x^9}$$

$$=\frac{1}{128}.$$

n 取得更小时,展开位数更少,精度更低. 不能算出极限

如在上方例题中,取 $n=1$. 有 $e^{x^3}=1+x^3+o(x^3)$

$$\therefore \lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{64\cdot x^6}=\lim_{x\to 0}\frac{o(x^3)}{64\cdot x^6},$$ 无法再算下去.

在不确定 n 取多大时,应该尽量取得大一些.

remark3: 能用泰勒公式求的极限,一般也可以用洛必达法则做.

如求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^{x^3}-1-x^3}{64\cdot x^6}$ 时,可以先做换元 $t=x^3$,用洛必达求 $\lim_{t\to 0}\frac{e^t-1-t}{64\cdot t^2}$,

也可以用洛必达直接求,但计算量会大很多.

e.g.2. 求 $\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x-\frac{x}{2}\cdot\sin x}{\sin x-x\cdot\cos x}$

step 1: 列出式子中所有 不是幂函数 的函数的泰勒展开.

$e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)$. (展开到 x^3 项)

$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)$ (展开到 x^3 项.)

$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)$ (展开到 x^2 项).

step2: 将 step 1 中得到的式子代入、化简.

$$\lim_{x\to0}\frac{1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+o(x^3)-1-x-\frac{x}{2}\cdot\left[x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\right]}{x-\frac{1}{6}x^3+o(x^4)\ -x\cdot\left[1-\frac{1}{2}x^2+o(x^3)\right]}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}x^4+o(x^3)-\frac{x}{2}\cdot o(x^4)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)-x\cdot o(x^3)}.$$

step 3: 利用小o记号 $o(\cdot)$ 的性质化简.

性质1: 对非0常数 c, $o(c\cdot f)$ 可化简为 $o(f)$.

$c\cdot o(f)$ 也可化简为 $o(f)$. i.e.常数和符号不重要.

性质2: 对函数 g, $g\cdot o(f)$ 可化简为 $o(g\cdot f)$;

$o(g)\cdot o(f)$ 也可化简为 $o(g\cdot f)$. i.e.乘法可以乘到$o()$里.

性质3: 对 $0<n\le m$, $o(x^n)+o(x^m)$, $(x\to0)$ 可化简为 $o(x^n)$, $(x\to0)$.

i.e. 加法保留指数小的项.

性质4: $\lim\limits_{x\to0}\frac{o(x^n)}{x^n}=0$. (这是$o(x^n)$的定义);

分子上, $o(x^3)-\frac{x}{2}\cdot o(x^4)\Rightarrow o(x^3)-o(x^5)\Rightarrow o(x^3)$.

分母上, $o(x^4)-x\cdot o(x^3)\Rightarrow o(x^4)-o(x^4)\Rightarrow o(x^4)$.

注意,这里的两项不能抵消!

$x^5=o(x^4)$. 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^5}{x^4}=0$

$x^6=o(x^4)$. 因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^6}{x^4}=0$

因为小o记号的运算与一般表达式运算规则不同.

但 $x^6-x^5\neq0$.

$$\therefore\text{极限值}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{12}\cdot x^4+o(x^3)}{\frac{1}{3}x^3+o(x^4)}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{6}+\frac{1}{12}x+\frac{o(x^3)}{x^3}}{\frac{1}{3}+\frac{o(x^4)}{x^3}}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{12}x+\frac{o(x^3)}{x^3}\right)}{\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1}{3}+\frac{x\cdot o(x^4)}{x^4}\right)}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}}=\frac{1}{2}.$$

(ii). 求复杂函数在某点处的高阶导数

基本原理：(n阶泰勒公式的唯一性)

对n次多项式 $q(x)$ 而言，

$f(x)=q(x)+o((x-a)^n) \Leftrightarrow q(x)=f(x)$在$x=a$处的n次泰勒多项式

$$=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

根据这个原理，可以使用(i)中介绍的换元、小o记号的性质，在不求导的前提下较快地求解一些函数的泰勒公式，从而得到函数在 $x=a$ 处的高阶导数

e.g. 求 $f(x)=e^{-x^2}$ 的麦克劳林公式，并据此给出 $f^{(100)}(0)$.

e^x 的麦克劳林公式为 $e^x=1+x+\frac{1}{2}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)\quad(x\to0)$

将 x 替换为 $-x^2$，得 $e^{-x^2}=1-x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}\cdot x^{2n}+o(x^{2n}).\ (x\to0)$

$\therefore e^{-x^2}$ 在 $x=0$ 处的100次泰勒多项式为 $1-x^2+\frac{1}{2}x^4+\cdots+\frac{1}{50!}\cdot x^{100}$.

又由于 $g(x)=e^{-x^2}$ 在 $x=0$ 处的100次泰勒多项式 $=g(0)+g'(0)x+\cdots+\frac{g^{(100)}(0)}{100!}\cdot x^{100}$

$\therefore \frac{g^{(100)}(0)}{100!}=\frac{1}{50!}\qquad\therefore g^{(100)}(0)=\frac{100!}{50!}$.

e.g. $f(x)=\cos 2x\cdot\ln(1+x)$，求 $f^{(4)}(0)$.

直接求导也可以做，但是比较麻烦.

用麦克劳林公式做，要找一个4次多项式 $q(x)$，使 $f(x)=q(x)+o(x^4)$ $(x\to0)$

$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n+o(x^n).$

$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+o(x^{2n+1}).$

$\cos 2x=1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot2^{2n}\cdot x^{2n}+o(x^{2n+1})$

我们需要确定 $\ln(1+x)$ 与 $\cos 2x$ 应该展开到哪一项.

应该让它们 $o(\cdot)$ 至少是 x^4.

$\because \ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}\cdot x^3 - \frac{1}{4}\cdot x^4 + o(x^4)$

$\cos 2x = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5).$

$\therefore f(x) = \cos 2x \cdot \ln(1+x)$

$= [1-2x^2+\frac{2}{3}x^4+o(x^5)]\cdot[x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4+o(x^4)].$

$= (1-2x^2+\frac{2}{3}x^4)\cdot(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4)$ ①

$+(1-2x^2+\frac{2}{3}x^4)\cdot o(x^4)$ ②

$+o(x^5)\cdot(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4)$ ③

$+o(x^5)\cdot o(x^4).$ ④

① $= (x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + x^4 \underbrace{-\frac{2}{3}x^5 + \frac{1}{2}x^6 + \frac{2}{3}x^5 - \frac{1}{3}x^6 + \frac{2}{9}x^7 - \frac{1}{6}x^8)}_{= o(x^4)}$

② $= o(x^4) - 2x^2\cdot o(x^4) + \frac{2}{3}x^4\cdot o(x^4)$

$= o(x^4) + o(x^6) + o(x^8)$

$= o(x^4).$

③ $= o(x^5)$

④ $= o(x^9).$

$\therefore f(x) = x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \underbrace{o(x^4)+o(x^4)+o(x^5)+o(x^9)}_{= o(x^4)}$

$\therefore f(x)$的4次泰勒多项式是 $x-\frac{1}{2}x^2-\frac{5}{3}x^3+\frac{3}{4}x^4.$

$\therefore \frac{f^{(4)}(0)}{4!} = \frac{3}{4}$ $\quad\therefore f^{(4)}(0) = 18.$

上面的过程明显很慢. 怎么快一点做？

$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + o(x^4).$

$\cos(2x) = 1 - 2x^2 + \frac{2}{3}x^4 + o(x^5).$ 让x的次数都≥目标导数的阶数 4.

找 $\ln(1+x)$ 与 $\cos(2x)$ 乘积中 x^4 项: $-\frac{1}{4}x^4 + 1\cdot x^4 = \frac{3}{4}x^4$

$\therefore f^{(4)}(0) = 4!\cdot\frac{3}{4} = 18$

Topic 2. 函数的泰勒公式 II (带 Lagrange 余项).

[中文课本: P157~P161]

(1). 基本思想: 用中值定理估计余项.

回顾 Lagrange 中值定理: $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0).$

其中 ξ 介于 x 与 x_0 之间.

$f(x_0)$ 可以看成 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处的 0 次泰勒多项式.

则它对应的余项为 $f(x) - f(x_0) = f'(\xi)\cdot(x - x_0).$

换句话说,我们可以用中值定理得出泰勒公式的余项.

若 $f'(\xi)$ 有界, 我们可以用它来估计余项的范围.

进而可以估计 $f(x)$ 的范围.

e.g. 用 Lagrange 中值定理估计 $\sin\frac{1}{2}$ 的范围.

有 $\sin\frac{1}{2} - \sin 0 = \cos\xi\cdot(\frac{1}{2} - 0),\quad \xi\in(0,\frac{1}{2})$

$\therefore \sin\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\cos\xi.$

$\cos\xi\in[-1,1]$ $\quad\therefore \sin\frac{1}{2}\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}].$

这个估计明显有很大误差.

使用更高次的泰勒多项式,我们能减小误差.

(2). 带 Lagrange 余项的泰勒公式:

若 $f(x)$ 在 (A, B) 上 $n+1$ 阶可导, 则 $\forall x, a \in (A,B)$, 有

$$f(x) = P_n(x) + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}.$$

其中 $P_n(x)$ 是 $f(x)$ 在 $x=a$ 处的 n 次泰勒多项式,

ξ 介于 x 与 a 之间. [或者说 $\xi = a + \theta(x-a)$, $\theta \in (0,1)$]

$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$ 称为 Lagrange 余项.

(i). 证明过程见中文课本 P158.

构造辅助函数, 之后使用一次柯西中值定理即可.

(ii). 定理的理解.

它的余项 $\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}$ 和

n 阶泰勒多项式的最后一项 $\frac{f^{(n)}(a)}{n!}\cdot(x-a)^{n}$

形式上很像. 区别在于不是 $f^{(n+1)}(a)$ 而是 $f^{(n+1)}(\xi)$.

如果 $f^{(n+1)}(\xi)$ 在 ξ 位于 x 和 a 之间时有界.

那么我们可以估计余项的值. $\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-a)^{n+1}\right|$.

进而估计 $f(x)$ 的值.

(iii) 常见函数带 Lagrange 余项的麦克劳林公式.

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}\cdot x^{n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty),\ \theta\in(0,1)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\cdot x^n+\frac{(-1)^n}{(n+1)\cdot(1+\theta x)^{n+1}}\cdot x^{n+1},\quad x\in(-1,+\infty).\ \theta\in(0,1)$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1}+\frac{(-1)^n\cdot\cos(\theta x)}{(2n+1)!}\cdot x^{2n+1},\quad x\in(-\infty,+\infty),\ \theta\in(0,1)$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot x^{2n}+\frac{(-1)^{n+1}\cdot\cos(\theta x)}{(2n+2)!}\cdot x^{2n+2},\quad x\in(-\infty,+\infty),\ \theta\in(0,1)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}\cdot(1+\theta x)^{\alpha-n-1}\cdot x^{n+1}$$

$$x\in(-1,+\infty),\ \theta\in(0,1).$$

(3). 带 Lagrange 余项的泰勒公式的应用：估计函数值.

e.g. 估计 $\sin\frac{1}{2}$.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1}+\frac{(-1)^n\cdot\sin(\theta x)}{(2n)!}\cdot x^{2n}.$$

比如取 $n=3$.

$$\sin x=x-\frac{x^3}{6}+\frac{1}{120}x^5-\frac{\cos(\theta x)}{7!}\cdot x^7\qquad \theta\in(0,1)$$

$$\therefore\ \underbrace{\sin\tfrac{1}{2}}_{\text{约为 }0.4794255}=\underbrace{\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{6}\cdot\tfrac{1}{8}+\tfrac{1}{120}\cdot\tfrac{1}{32}}_{\text{约为 }0.4794271}-\cos(\theta x)\cdot\frac{1}{5040}\cdot\frac{1}{128},\quad\theta\in(0,1)$$

约为 0.4794255　约为 0.4794271

$$\text{误差}=\left|\frac{\cos(\theta x)}{5040\times128}\right|\le\left|\frac{1}{5040\times128}\right|\approx1.6\times10^{-6}$$