3月3日. 周一.

1.签到 . 2.作业周六结束前提交.

今日主要内容: 函数的泰勒公式II.(带 Lagrange 余项).

不定积分

定积分

Topic 1: 函数的泰勒公式II.(带 Lagrange 余项). [续 0227讲义]

(3) 带 Lagrange 余项的泰勒公式的应用: 估计函数值.

e.g.1. 估计 $\sin\frac{1}{2}$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1} + \frac{(-1)^n\cdot\sin(\theta x)}{(2n)!}\cdot x^{2n}.$$

比如取 $n=3$. 此时我们只取了 $\sin x$ 的泰勒多项式的前3项

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{1}{120}x^5 - \frac{\cos(\theta x)}{7!}\cdot x^7 \qquad \theta\in(0,1)$$

$$\therefore \sin\frac{1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{8} + \frac{1}{120}\cdot\frac{1}{32}}_{=\frac{1841}{3840}\approx 0.4794271} - \underbrace{\cos(\theta x)\cdot\frac{1}{5040}\cdot\frac{1}{128}}_{\text{估计误差}}, \quad \theta\in(0,1)$$

$$= \frac{1841}{3840} \approx 0.4794271 \quad \text{(用计算器)}.$$

$$\text{估计误差} = \left|\frac{\cos(\theta x)}{5040\times 128}\right| \le \left|\frac{1}{5040\times128}\right| = \frac{1}{645120} \approx 1.6\times10^{-6}$$

由此可以估计, $\frac{1841}{3840} - \frac{1}{645120} \le \sin\frac{1}{2} \le \frac{1841}{3840} + \frac{1}{645120}$

$$\approx 0.4794255 \qquad\qquad \approx 0.4794286$$

事实上, $\sin\frac{1}{2}\approx 0.4794255$. 可见 $\sin x$ 的带 Lagrange 余项的泰勒公式只取前3项就能很好地估计 $\sin\frac{1}{2}$.

eg. 2. 在使用sinx的带 Lagrange 余项的泰勒公式估计 $\sin\frac{1}{2}$ 时，至少取多少项才能确保 误差 $\le 10^{-10}$？

取 n 项时，泰勒公式为.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}\cdot x^{2n-1} + \frac{(-1)^n\cdot\sin(\theta x)}{(2n)!}\cdot x^{2n}.$$

估计 $\frac{1}{2}$ 时对应的误差为 $\left|\frac{(-1)^n\cdot\sin(\theta x)}{(2n)!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\right| \le \frac{1}{(2n)!\cdot 4^n}$.

所以只要找最小的满足 $\frac{1}{(2n)!\cdot 4^n} \le 10^{-10}$ 的 n 即可.

即 $10^{10} \le (2n)!\cdot 4^n$.

(用计算器算出). $n=5$ 时 $(10)!\cdot 4^5 \approx 3.72\times 10^9$，不满足要求；

$n=6$ 时，$(12)!\cdot 4^6 \approx 1.96\times 10^{12}$，满足要求.

$\therefore$ 至少取 6 项 能确保误差 $\le 10^{-10}$

remark：使用带 Lagrange 余项的泰勒公式进行估计的一大优势是可以估计误差的大小. 用计算器算 $\sin\frac{1}{2}$，e^2 等函数值，背后的原理就是带 Lagrange 余项的泰勒公式.

(4). 泰勒公式的局限性：

并非所有函数都能用泰勒公式求值.

e.g. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & (x\ne 0) \\ 0, & (x=0). \end{cases}$ $\quad f'(x)=\begin{cases} \frac{2}{x^3}\cdot e^{-\frac{1}{x^2}}. & (x\ne 0) \\ \lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-1/x^2}}{x}=0. & (x=0). \end{cases}$

可以进一步证明 f(x)在 $x=0$ 处的任意阶导数均为0. $f^{(n)}(0)=0 \quad (n\in N_+)$.

故 f(x)在 $x=0$ 处的任意次泰勒多项式都为0，无法估计 $x=0$ 附近的函数值.

Topic 2. 不定积分 (indefinite integral).

[中文课本 P_{165}. 4.1节 英文课本 P_{402}. 5.4节].

(1). 原函数. (antiderivative).

定义: 若 $\forall x\in I, F'(x)=f(x)$, 则 $F(x)$ 称为 $f(x)$ 在 $x\in I$ 上的一个原函数.

求原函数和求导函数是一组互逆的操作,类似于乘法和除法的关系. 一般用大写字母表示原函数.

e.g. 写出下列函数的一个原函数:

(1). $f(x)=2x$ (2). $g(x)=e^x$ (3). $h(x)=\sin x$

(1). $F(x)=x^2$. $F(x)=x^2+1$, $F(x)=x^2+2$

(2). $G(x)=e^x$. (3). $H(x)=-\cos x$

定理: 若 F 是 f 在 $x\in I$ 上的一个原函数, 则 f 在 $x\in I$ 上的所有原函数是 $F(x)+C$, 其中 C 是任意常数.

定理的证明:

step 1: 证明对任意常数 C, $F(x)+C$ 是 f 的原函数.

i.e. $(F(x)+C)'=f(x)$. 而 $(F(x)+C)'=F'(x)=f(x)$

step 2: 证明对 f 的任一原函数 G, $H(x)=G(x)-F(x)$ 恒为常数.

(hint: 使用拉格朗日中值定理证明.

$\forall x_1,x_2\in I$, $H(x_1)-H(x_2)=0$).

留作习题.

定理的含义: 确定好 f 的一个原函数 F 后,

f 的其它原函数可由 F 上下平移得到(如右图)

所以,给定 f 和它的原函数上一点后,可以唯一确定一个原函数. (i.e. 确定一个 C).

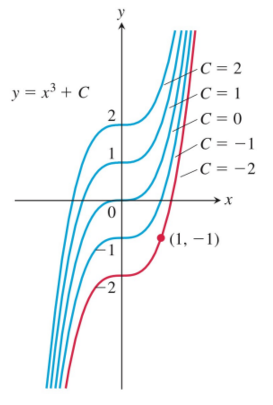


图 4.1 函数 $y=3x^2$ 的原函数

e.g. 找到 $f(x)=3x^2$ 满足 $F(1)=-1$ 的原函数 $F(x)$.

$f(x)=3x^2$ 的原函数是 $F(x)=x^3+C$.

$F(1)=-1 \iff -1=1^3+C \quad \therefore C=-2$

$\therefore F(x)=x^3-2$

(2). 不定积分的定义与性质.

定义：一个函数 $f(x)$ 的全部原函数称为 f 关于 x 的不定积分，

记为 $\int f(x)\,dx$.

其中 $\int$ 称为积分号. (integral sign)

$f(x)$ 称为被积函数 (integrand).

x 称为积分变量.

一些说明：①. $\int f(x)\,dx$ 是一个整体，不能写成 $\int f(x)$. 这样可能造成歧义.

e.g. $\int (x+a)\,dx=\frac{1}{2}x^2+ax+C$,

$\int (x+a)\,da=ax+\frac{1}{2}a^2+C$.

单独写 $\int (x+a)$，无法分清是前者还是后者.

②. 若 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$. 则 $\int f(x)\,dx=F(x)+C$. (C 为任意常数)

方便起见，以后讲义中不再写这一句.(但是作业和考试中要写).

结尾的 $+C$ 容易被漏掉.

e.g. $\int 2x\,dx=x^2$. (×). $\quad \int 2x\,dx=x^2+C$. (√).

常用的不定积分公式：

$\int x^a\,dx=\frac{1}{a+1}\cdot x^{a+1}+C \quad (a\neq -1)$.

$\int \frac{1}{x}\,dx=\ln|x|+C$.

$\int \sin x\,dx=-\cos x+C$

$\int \cos x\,dx=\sin x+C$.

$\int \frac{1}{\cos^2 x}\,dx=\tan x+C$

$\int a^x\,dx=\frac{1}{\ln a}\cdot a^x+C. \quad (a>0, a\neq 1)$.

$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx=\arcsin x+C_1$

$=-\arccos x+C_2$. $\quad C_2=C_1+\frac{\pi}{2}$

$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx=\arctan x+C$.

$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}. \quad (\forall x\in[-1,1])$

$\arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$

$\arcsin 1 + \arccos 1 = \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{\pi}{2}$.

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

不定积分的性质.

若 $f(x)$ 的一个原函数为 $F(x)$，$g(x)$ 的一个原函数为 $G(x)$. 则.

①. $\int k f(x)\,dx = k\cdot F(x) + C$. $(k\in\mathbb{R})$.

②. $\int (f(x) \pm g(x))\,dx = F(x) \pm G(x) + C$.

证明: ①. 只要说明 $k\cdot F(x)$ 是 $k\cdot f(x)$ 的一个原函数即可.

而 $(k\cdot F(x))' = k\cdot (F(x))' = k\cdot f(x)$.

$\therefore$ $k\cdot F(x)$ 是 $k\cdot f(x)$ 的一个原函数 $\therefore \int k f(x)\,dx = kF(x) + C$.

习题 ②. 留作习题.

e.g. 求 $\int (\sqrt{x} + 2^x + 3\sin x)\,dx$.

$= \int \sqrt{x}\,dx + \int 2^x\,dx + 3\cdot\int \sin x\,dx$

$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{\ln 2}\cdot 2^x - 3\cos x + C$.

remark: 不定积分的公式与性质都是从导数的公式与性质出发得到的，但是不定积分比导数难算得多. 很多不定积分甚至不能写成初等函数的形式. e.g. $\int \frac{\sin x}{x}\,dx$; $\int e^{x^2}\,dx$.

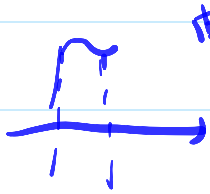
在之后的章节中，我们会讨论一些特殊形式的，能算出来的不定积分.

Topic 3. 定积分. (definite integral)

[中文课本 P170. 4.2节 ; 英文课本 P366. 5.1节; P378. 5.2节.]

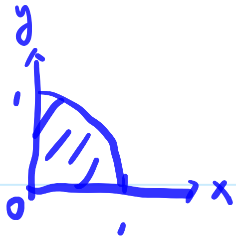
(1). 近似计算面积

曲边梯形



图很多. 建议直接看课本.

e.g. 课本 P173 . 例 4.2.2.



$f(x)=1-x^2$、和 $x=0$. $x=1$. x 轴围成的图形.

把区间 $[0,1]$ 分成 n 等份 $[0,\frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n},\frac{2}{n}]$, $\cdots[\frac{n-1}{n},1]$

这 n 个区间上最小值: $f(\frac{1}{n})$ $f(\frac{2}{n})$, $\cdots$ $f(1)$,

对应的矩形面积加起来.是

$$A_n=f(\tfrac{1}{n})\cdot\tfrac{1}{n}+f(\tfrac{2}{n})\cdot\tfrac{1}{n}+\cdots+f(1)\cdot\tfrac{1}{n}$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}f(\tfrac{i}{n})$$

Σ: 求和符号.

把 $i=1,2,\cdots,n$ 时后面的东西加起来

$f(\frac{1}{n})+f(\frac{2}{n})+\cdots+f(\frac{n}{n})$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left[1-\frac{i^2}{n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}1-\sum_{i=1}^{n}\frac{i^2}{n^2}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\left[n-\frac{1}{n^2}\cdot\underbrace{\sum_{i=1}^{n}i^2}_{=1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}\right]$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left[n-\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$=1-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}$$

$$\lim_{n\to\infty}A_n=1-\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3}=1-\frac{2}{6}=\frac{2}{3}$$

(2). 定积分的定义 (不严谨版): [英文课本 P378.]

定义: 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义. 对 $n\in N_+$, 我们将 $[a,b]$ 均分为 n 个长度为 $\frac{b-a}{n}$ 的区间. $[a,a+\frac{b-a}{n}]$, $[a+\frac{b-a}{n},a+2\cdot\frac{b-a}{n}]$, $\cdots$ $[a+\frac{n-1}{n}(b-a),b]$

然后在这 n 个区间里各自任意取一点. $x_1, x_2, \cdots, x_n$.

求和 $A_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}$.

如果. $\lim_{n\to\infty} A_n=S$. 那么称 S 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的定积分.

记为 $S=\int_a^b f(x)\cdot dx$. 并称 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积

其中 a 称为积分下限 (lower limit) $f(x)$ 称为被积函数.

b 积分上限. (upper limit) x 称为积分变量.

remark: 1: $A_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\cdot\frac{b-a}{n}$ 和之前说的矩形面积求和一样.

A_n 不只跟 n 有关, 还跟 $x_1, \cdots, x_n$ 的选取有关

remark 2: $\lim_{n\to\infty} A_n=S$ 不够严谨. 因为给定 n 时, A_n 不是固定的值

严谨地定义要用 $\varepsilon-N$ 语言:

$\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in N_+$. 当 $n>N$ 时 无论 $x_1, \cdots, x_n$ 怎么选,

都有 $|A_n-S|<\varepsilon$.

remark 3: 不是所有函数都可积.

狄利克雷函数. $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q.\\ 0, & x\notin Q.\end{cases}$

$D(x)$ 在 $[0,1]$ 上不可积.

理由: 在 n 个小区间上取 $x_1,\cdots,x_n$ 时.

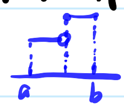
如果都取成有理数. 则 $A_n=\frac{1}{n}\times n=1$

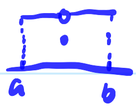
无理数 $A_n=\frac{1}{n}\cdot 0=0$.

remark. 4. 所有的连续函数在闭区间上都可积.

事实上,只要 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上只有有限个第一类间断点, f 一定可积.

第一类间断点. $\begin{cases}\text{跳跃间断点}\\ \text{可去间断点}\end{cases}$





它们都不影响"面积"的计算, 自然也不影响可积性.

remark 5. 定积分是一个数字. 不是函数.

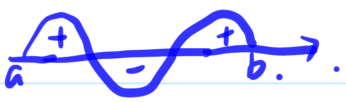
这个数字跟变量记号无关

i.e. $\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt$

remark 6: $\int_a^b f(x)dx$ 表示的是类似于面积的概念, 不过具有正负号

具体来说, $\int_a^b f(x)dx=x$ 轴上方图形面积之和

$-x$ 轴下方图形面积之和.



定积分的性质：［可参考中文课本 P182 的图象，or 英文课本 P385 ~ P387］.

假设 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，则

(1). $\int_a^b (k f(x))\cdot dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$. $(k\in R)$.

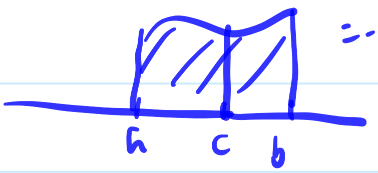
(2). $\int_a^b (f(x)\pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b f(x)\,dx$.

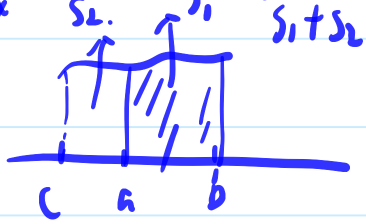
(3). $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$.

(4). $\int_a^a f(x)\,dx = 0$

(5). $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$. $(c\in R)$.

$\parallel$ S_1 $\quad = \int_c^c f(x)\,dx$ $\quad = -S_2$ $\quad$ S_2. $\quad$ S_1 $\quad$ $S_1 + S_2$





(6). 若 $\forall x\in[a,b]$, $m\le f(x)\le M$.

则 $m(b-a)\le\int_a^b f(x)\,dx\le M(b-a)$.

(7). 若 $\forall x\in[a,b]$, $f(x)\ge g(x)$.

则 $\int_a^b f(x)\,dx \ge \int_a^b g(x)\,dx$.

Topic4 微积分基本定理.

(1). 变上限的定积分.

定义：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

那么 $\forall x\in[a,b]$, $\int_a^x f(t)\,dt$ 存在.

它是 x 的一个函数，称为变上限的定积分.