Topic：定积分的换元法与分部积分法.

使用之前讲述的不定积分方法,结合微积分基本定理，理论上来说我们已经能求很多定积分了.

求解定积分 $\int_a^b f(x)\,dx$ 的策略:

step 1. 求解不定积分 $\int f(x)\,dx$,获得 $f(x)$ 的一个原函数 $F(x)$;

step 2. 利用微积分基本定理,有 $\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$.

e.g.1. 求定积分 $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx$.

step 1: $\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln x\cdot d(\ln x) \xlongequal{t=\ln x} \int t\,dt = \frac{t^2}{2}+C = \frac{1}{2}(\ln x)^2+C$.

$\therefore F(x)=\frac{1}{2}\cdot(\ln x)^2$ 是 $\frac{\ln x}{x}$ 的一个原函数.

step 2: $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx = F(e)-F(1) = \frac{1}{2}(\ln e)^2-\frac{1}{2}(\ln 1)^2 = \frac{1}{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot 0=\frac{1}{2}$.

所以说,只要能求出 $f(x)$ 的不定积分,

就能求出 $f(x)$ 的定积分.

一些技巧可以让定积分的计算过程比不定积分的简单一些.

以下我们将分别讨论定积分的第一换元法.第二换元法与分部积分法.

(1). 定积分的第一换元法.(The Substitution Rule).

[中文课本: 6.1 定积分的换元法. P227~P228; Calculus: P416~P417]

如果被积函数 $u(x)$ 可以看成 $u(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$,(其中 f 连续, g 可导).

则 $\int_a^b u(x)\,dx = \int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_a^b f(g(x))\cdot d(g(x))$

$$\xlongequal{t=g(x)} \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\cdot dt.$$

核心想法：定积分在进行换元积分 $t=g(x)$ 时，

要将所有与 x 相关的部分.（积分上下限，积分函数，积分变量）.

都换成与 t 相关的内容.

$$\int_{a}^{b} f(g(x))\cdot d(g(x)) \xlongequal{t=g(x)} \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\cdot dt$$

x from → a, ← x to b；t from → $g(a)$, ← t to $g(b)$

e.g.1.

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \int_1^e \ln x\cdot d(\ln x) \xlongequal{t=\ln x} \int_0^1 t\cdot dt = \left(\frac{t^2}{2}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

可以看到，我们并没有求 $\int\frac{\ln x}{x}dx$，在换元积分时省去了

不定积分的分部积分中将 $t=g(x)$ 代入到 $\int f(t)dt$ 积分结果的一步.

证明：利用不定积分的分部积分 & 微积分基本定理证明.

已知 $u(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$

若 $\int f(t)\cdot dt = F(t)+C$. 即 $\frac{d}{dt}F(t)=f(t)$.

则 $\int u(x)dx = F(g(x))+C$. 即 $\frac{d}{dx}F(g(x))=u(x)$

$$\therefore \int_a^b u(x)dx = F(g(b))-F(g(a))$$

$$= \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt$$

e.g.2. $\int_{-1}^{2} x^3\cdot\cos(x^4+2)\cdot dx =$

e.g.3. $\int_0^2 \frac{dx}{1+\sin x}$

e.g.4. $\int_0^{\pi/4} \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x}dx$

$\boxed{\text{Try it}}$ $\int_0^1 e^{-x^2}\cdot x\,dx = ?$ $\int_{-\pi}^{\pi} \sin x\cdot\sin 2x\,dx$

(2). 定积分的第二换元法 (Inverse Substitution).

[中文课本: 6.1 定积分的换元法. P228~P229; Calculus: P487, P490]

对 $\int_a^b f(x)\,dx$. 若 $x = g(t)$, $g(\alpha)=a$, $g(\beta)=b$

且 $t\in[\alpha,\beta]$ 时 $x=g(t)$ 不超出 $f(x)$ 的定义域,

则 $\int_a^b f(x)\cdot dx = \int_\alpha^\beta f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$.

在定积分的第二积分法中,我们不用求出 $f(x)$ 的原函数.

因此不需要将 $t=g^{-1}(x)$ 代入 $\int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$ 积分结果中.

因此不要求 $x=g(t)$ 可逆. 但要求检验 $x=g(t)$ 是否会超出 $f(x)$ 的定义域.

HW!

证明: 留作习题.

e.g. 5. $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx =$

e.g. 6. $\int_0^{3\sqrt{3}/2} \frac{x^3}{(4x^2+9)^{3/2}}\,dx$

Try it $\int_0^3 \frac{x\,dx}{\sqrt{36-x^2}} = ?$ $\int_2^3 \frac{dx}{(x^2-1)^{3/2}} = ?$

(3). 定积分的分部积分法.(Integration by Parts).

[中文课本: 6.2 定积分的分部积分法. P229~P232; Calculus: P475~P476]

$$\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x)\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx.$$

HW!

证明: 直接使用微积分基本定理即可. 留作习题.

e.g. 7. $\int_1^2 x\cdot \ln x\cdot dx$

e.g. 8. $\int_0^1 \arctan x\cdot dx$

讲不定积分时提到的"循环现象"与"递推现象仍会出现.

e.g. 9. 求 $I = \int_0^{\pi/2} e^{3x}\cdot \cos 2x\,dx$.

e.g. 10. 求 $I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\,dx$.