3月20日. 周四　　第 9 次课

1. 签到 . 2. 作业 HW4. 截止时间: 下周五晚上 24:00

3. 使用 geogebra 或 wolframalpha 求积分的演示.

Topic 1: 简单三角函数的积分. [英文课本7.2. Trigonometric Integrals. P479~P484]

(1) $\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ 类型.

(2) $\begin{cases} \sin mx \cdot \cos nx \\ \sin mx \cdot \sin nx \\ \cos mx \cdot \cos nx \end{cases}$ $(m, n \in \mathbb{R})$ 类型.
$m \neq n$

(3) $\dfrac{\tan^m x}{\cos^n x}$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ 类型

主要用到的三角函数公式:

$$\frac{d\tan x}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}\ ; \quad \frac{d\left(\frac{1}{\cos x}\right)}{dx} = \frac{\tan x}{\cos x}. \quad \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x\ ;$$

e.g. $$\int \frac{\tan^6 x}{\cos^4 x} \cdot dx = \int \tan^6 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x}$$

$$= \int \tan^6 x\,(1 + \tan^2 x)\, d(\tan x)$$

$$\underline{\underline{t = \tan x}} \int t^6 \cdot (1 + t^2) \cdot dt = \int (t^6 + t^8)\, dt$$

$$= \frac{1}{7} t^7 + \frac{1}{9} t^9 + C = \frac{1}{7} \tan^7 x + \frac{1}{9} \tan^9 x + C$$

e.g. $$\int \frac{\tan^5 \theta}{\cos^7 \theta} \cdot d\theta = \int \frac{\tan^4 \theta}{\cos^6 \theta} \cdot \left(\frac{\tan \theta}{\cos \theta}\, d\theta\right)$$

$$= \int \frac{(\tan^2 \theta)^2}{\cos^6 \theta}\, d\frac{1}{\cos \theta}$$

$$= \int \frac{\left(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\right)^2}{\cos^6\theta} \cdot d\frac{1}{\cos\theta}$$

$$\xlongequal{t=\frac{1}{\cos\theta}} \int (t^2-1)^2 \cdot t^6 \cdot dt = \int (t^{10}-2t^8+t^6)\cdot dt$$

$$= \frac{1}{11}t^{11} - \frac{2}{9}\cdot t^9 + \frac{1}{7}\cdot t^7 + C = \frac{1}{11}\frac{1}{\cos^{11}\theta} - \frac{2}{9}\frac{1}{\cos^9\theta} + \frac{1}{7}\frac{1}{\cos^7\theta} + C.$$

总结：对于 $\int \frac{\tan^m x}{\cos^n x}\cdot dx$ 而言，

①. 若 n 是偶数 $(n=2k,\ k\in\mathbb{Z})$，可以做换元 $t=\tan x$.

$$\int \frac{\tan^m x}{\cos^{2k} x}\, dx = \int \tan^m x\cdot\left(\frac{1}{\cos^2 x}\right)^{k-1}\cdot\frac{dx}{\cos^2 x} = \int \tan^m x\cdot(1+\tan^2 x)^{k-1}\cdot d(\tan x) = \int t^m\cdot(1+t^2)^{k-1}\cdot dt$$

②. 若 m 是奇数 $(m=2k+1,\ k\in\mathbb{Z})$，可以做换元 $t=\frac{1}{\cos x}$.

$$\int \frac{\tan^{2k+1} x}{\cos^n x}\, dx = \int (\tan^2 x)^k\cdot\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{n-1}\cdot\left(\frac{\tan x}{\cos x}dx\right) = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)^k\left(\frac{1}{\cos x}\right)^{n-1}\cdot d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \int (t^2-1)^k\cdot t^{n-1}\, dt$$

其它情况不确定，需要用其它技巧（或者之后讲的有理三角函数通解）。

eg. $\int \tan x\cdot dx = \int \cos x\cdot\frac{\tan x}{\cos x}\cdot dx = \int \cos x\cdot d\left(\frac{1}{\cos x}\right) \xlongequal{t=\frac{1}{\cos x}} \int \frac{1}{t}\, dt$

$$= \ln|t| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}\right| + C = -\ln|\cos x| + C$$

eg. $\int \frac{1}{\cos x}\cdot dx$ （参见 0311 讲义 or 0312 讲义：$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C$

事实上也有 $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$ ）

$$\therefore \int \frac{dx}{\cos x} \xlongequal{t=\frac{\pi}{2}+x} \int \frac{dt}{\cos(t-\frac{\pi}{2})} = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left|\frac{1-\cos t}{\sin t}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1-\cos(\frac{\pi}{2}+x)}{\sin(\frac{\pi}{2}+x)}\right| + C = \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + C = \ln\left|\frac{1}{\cos x}+\tan x\right| + C.$$

Try it yourself!

$\int \tan^3 x\cdot dx = \frac{1}{2}\tan^2 x + \ln|\cos x| + C$ ； $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dx}{\tan^2 x\cdot\cos^2 x}$

$$= -\frac{1}{\tan x} + C.$$

（与 $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$ 很像）。

Topic 2：换元积分法：第二换元法（代入法，inverse substitution）

[中文课本：$P_{202} \sim 205$；英文课本：7.3. Trigonometric Substitution $P486 \sim 491$]

(1). 第二换元法的内容：

对 $\int f(x)\,dx$，令 $x = g(t)$.（g 可逆）. 则 $dx = g'(t)\cdot dt$.

$\therefore \int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\cdot dt$.

右边计算出来后是关于 t 的函数. 再将 $t = g^{-1}(x)$ 代入，即可得 $\int f(x)\,dx$.

证明方法：令 $G(t) = \int f(g(t))\cdot g'(t)\,dt$. 证明 $\frac{d}{dx} G(g^{-1}(x)) = f(x)$ 即可.

(2). 第二换元法的使用：

①. 三角换元 消除根号.

第二积分法 通常用在含根号($\sqrt{\ }$)的式子，利用 三角函数的等式消除根号，这种积分方式也称为三角换元.（Trigonometric Substitution）.

三角换元的一般流程：<a> 选择合适的公式消除根号，转化为三角函数的积分

<b>. 计算三角函数的积分.

<c>. 将结果从关于 θ 的式子转化回关于 x 的式子.

<a>. 公式如下表：（默认 $a > 0$）.

<1> $\sqrt{a^2 - x^2} \xrightarrow[\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]]{x = a\cdot\sin\theta} a\cdot\cos\theta$. 利用公式 $1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$.

<2> $\sqrt{a^2 + x^2} \xrightarrow[\theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})]{x = a\cdot\tan\theta} \frac{a}{\cos\theta}$. 利用公式 $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$

<3> $\sqrt{x^2 - a^2} \xrightarrow[\theta \in [0, \frac{\pi}{2}) \cup [\pi, \frac{3}{2}\pi)]{x = a/\cos\theta} a\cdot\tan\theta$. 利用公式 $\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 = \tan^2\theta$.

取值范围的意义：① 覆盖x的取值范围 & 可逆

② 使平方根能不带符号地算出.

详细解释如下：(不要求掌握，记住上面三个公式就好).

<1>. $\sqrt{a^2-x^2}$, $x\in[-a,a]$.

取 $x=a\cdot\sin\theta$, $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$, 使得 $x\in[-a,a]$, 且 $\cos\theta\geq0$.

$\therefore \sqrt{a^2-x^2}=\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}=\sqrt{a^2\cos^2\theta}=a\cdot\cos\theta$

<2>. $\sqrt{a^2+x^2}$, $x\in R$.

取 $x=a\cdot\tan\theta$, $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, 使得 $x\in R$, 且 $\cos\theta\geq0$.

$\sqrt{a^2+x^2}=\sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)}=\sqrt{a^2/\cos^2\theta}=\frac{a}{\cos\theta}$

<3>. $\sqrt{x^2-a^2}$, $x\in(-\infty,-a]\cup[a,+\infty)$.

取 $x=\frac{a}{\cos\theta}$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3}{2}\pi)$, 使得x满足要求, 且 $\tan\theta\geq0$

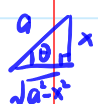
$\sqrt{x^2-a^2}=\sqrt{a^2(\frac{1}{\cos^2\theta}-1)}=\sqrt{a^2\tan^2\theta}=a\cdot\tan\theta$.

<b>. 三角函数的积分方式见 Topic 1.

<c>. 如何将结果从关于θ的式子转化为关于x的式子?

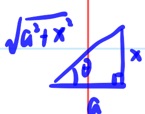
结果中可能含 $\sin\theta$、$\cos\theta$、$\tan\theta$、θ 等. 不同的换元要用不同的方式.

☆图形理解:



<1>. $x=a\cdot\sin\theta$, $\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]\Rightarrow\cos\theta\geq0$. 利用公式: $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

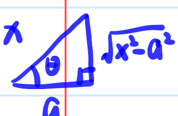
$\sin\theta=\frac{x}{a}$; $\cos\theta=\sqrt{1-\sin^2\theta}=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$; $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$; $\theta=\arcsin\frac{x}{a}$.



<2>. $x=a\cdot\tan\theta$, $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\Rightarrow\cos\theta\geq0$. 利用公式: $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$.

$\tan\theta=\frac{x}{a}$; $\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{x^2}{a^2}}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$;

$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$; $\theta=\arctan\frac{x}{a}$.



<3>. $x=\frac{a}{\cos\theta}$, $\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3}{2}\pi)\Rightarrow\tan\theta\geq0$. 利用公式: $\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\tan^2\theta$.

画一个直角△, 标上θ, a, x, 最后一条边用勾股定理算出, 即可得到 $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$.

$\cos\theta=\frac{a}{x}$; $\tan\theta=\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}-1}=\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

$\sin\theta=\tan\theta\cdot\cos\theta=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{x}$; $\theta=\arccos\frac{a}{x}$.

在做题时更推荐图形的方式。

e.g.1. $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$. $(a>0)$.

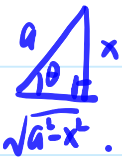
<a>. 三角换元： $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx \xlongequal[\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]]{x=a\cdot\sin\theta} \int a\cos\theta\cdot a\cos\theta\, d\theta = a^2\cdot\int\cos^2\theta\, d\theta$

<b>.计算三角积分： $=a^2\cdot\int\frac{\cos2\theta+1}{2}d\theta \xlongequal{u=2\theta} a^2\cdot\int\frac{\cos u+1}{2}\cdot\frac{du}{2} = \frac{a^2}{4}\cdot\sin u+\frac{a^2}{4}\cdot u+C$

$$=\frac{a^2}{4}\cdot\sin2\theta+\frac{a^2}{4}\cdot2\theta+C = \frac{a^2}{2}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta+\frac{a^2}{2}\cdot\theta+C.$$

<c>.转化回关于x的式子:

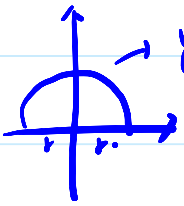
$x=a\cdot\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{x}{a} \Rightarrow$



$\therefore \cos\theta=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$.

$$\therefore \int\sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\cdot\sin\theta\cdot\cos\theta+\frac{a^2}{2}\cdot\theta+C.$$
$$=\frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+C$$
$$=\frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{a}+C$$

e.g.2. 求证 半径为r的圆面积为$\pi\cdot r^2$.



$y^2+x^2=r^2\ (y>0)$

$y=\sqrt{r^2-x^2}$.

$$S_{半圆}=\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot dx.$$

取 $F(x)=\frac{x}{2}\sqrt{r^2-x^2}+\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin\frac{x}{r}$.

由上方例子可知，$F(x)$是$\sqrt{r^2-x^2}$的一个原函数

$$\therefore S_{半圆}=F(r)-F(-r) = (0+\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin1)-(0+\frac{r^2}{2}\cdot\arcsin(-1))$$
$$=\frac{r^2}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{r^2}{2}\cdot(-\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}r^2$$

e.g.3. $\int\frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2}dx$

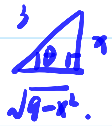
<a>. 三角换元. $\xlongequal[\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]]{x=3\sin\theta} \int\frac{3\cdot\cos\theta}{9\cdot\sin^2\theta}\cdot3\cdot\cos\theta\, d\theta = \int\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta$

<b>. 计算三角积分. $=\int\frac{1-\sin^2\theta}{\sin^2\theta}d\theta = \int\frac{d\theta}{\sin^2\theta}-\int1\cdot d\theta$

$$=-\frac{1}{\tan\theta}-\theta+C$$

<c>. 转化回关于x的式子.

$x=3\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{x}{3} \Rightarrow$



$\therefore \tan\theta=\frac{x}{\sqrt{9-x^2}}$.

$$\therefore = -\frac{\sqrt{9-x^2}}{x} - \arcsin\frac{x}{3} + C$$

e.g.4. $\int \frac{1}{x^2\cdot\sqrt{x^2+4}}\,dx$

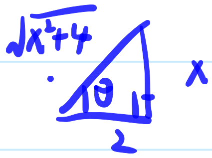
<a>. 三角换元 $\xlongequal[\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})]{x=2\cdot\tan\theta} \int \frac{1}{4\tan^2\theta\cdot\frac{2}{\cos\theta}}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}d\theta = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{d\theta}{\tan^2\theta\cdot\cos\theta}$

$$= \frac{1}{4}\cdot\int\frac{d\theta}{\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}\cdot\cos\theta} = \frac{1}{4}\cdot\int\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}\cdot d\theta$$

<b>. 计算三角 $=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{d(\sin\theta)}{\sin^2\theta} \xlongequal{t=\sin\theta} \frac{1}{4}\cdot\int\frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{4\cdot\sin\theta}+C$

<c>. 转化回关于x的式子.

$x=2\tan\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{x}{2}$



$\therefore \sin\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$

$$\therefore \sim = -\frac{1}{4x}\cdot\sqrt{x^2+4} + C.$$

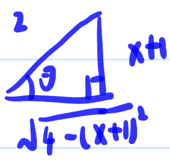
e.g.5. $\int\frac{x}{\sqrt{3-2x-x^2}}\cdot dx$

<a>. 三角换元: $=\int\frac{x}{\sqrt{4-(x+1)^2}}dx \xlongequal[\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})]{x+1=2\sin\theta} \int\frac{2\sin\theta-1}{2\cdot\cos\theta}2\cos\theta\cdot d\theta$

<b>. 计算三角积分: $=\int(2\sin\theta-1)\,d\theta = -2\cos\theta-\theta+C$

<c>. 转化回关于x的式子.

$x+1=2\sin\theta \Rightarrow \sin\theta=\frac{x+1}{2}$.



$\therefore \sim = -2\frac{\sqrt{4-(x+1)^2}}{2} - \arcsin\frac{x+1}{2}+C$

$= -\sqrt{3-2x-x^2} - \arcsin\frac{x+1}{2}+C$

Try it Yourself!

$\int\frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+26}}\cdot dx = 2\sqrt{(x+1)^2+25} - 2\ln\left|\sqrt{(x+1)^2+25}+x+1\right| + C$.

$\int\frac{\sqrt{4-x^2}}{x}dx = 2\cdot\ln\left|\frac{2-\sqrt{4-x^2}}{x}\right| + \sqrt{4-x^2}+C$; $\int\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx = \sqrt{x^2+4}+C$