3月27日. 周四. 第11次课.

1. 签到. 2. HW4截止时间: 本周五24:00

3. Calculus学习App推荐: Maple Calculator.

可以计算积分,并显示详细步骤

Topic 1: 分部积分法. (Integration by Parts) [续]

[中文课本(5.2 分部积分法) P205~P210; 英文课本(7.1. Integration by Parts) P472~P476]

(2) 分部积分法的使用:

①. 基本思路.

$\boxed{\text{Try it!}}$

$\int x^2 \cdot e^x dx =$

$(x^2-2x+2)\cdot e^x + C$

$\int x \cdot \cos x \, dx =$

$x \cdot \sin x + \cos x + C.$

②. 循环现象.

有时对 $\int f(x)\cdot dx$ 用分部积分时可能会重新出现 $\int f(x)dx$,

由此可根据等式求解 $\int f(x)\cdot dx$.

e.g. 1. 求 $I = \int e^x \cdot \sin x \, dx$

$I = \int \sin x \cdot de^x = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot d\sin x$

$= e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx$

$= e^x \cdot \sin x - \int \cos x \cdot de^x$

$= e^x \cdot \sin x - [e^x \cdot \cos x - \int e^x \cdot d\cos x]$

$= e^x(\sin x - \cos x) + \int e^x(-\sin x)dx$

$= e^x(\sin x - \cos x) - I$

$\therefore I = \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$

e.g.2. 求 $\int \frac{1}{\cos^3 x} dx$.

$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$.

$d\left(\frac{1}{\cos x}\right) = \frac{\tan x}{\cos x} \cdot dx$

$d(\tan x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx$

$= \int \frac{1}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot dx$

$= \int \frac{1}{\cos x} \cdot (1 + \tan^2 x)\, dx$

$= \int \frac{dx}{\cos x} + \int \tan x \cdot \frac{\tan x}{\cos x} dx$

$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + \int \tan x \cdot d\left(\frac{1}{\cos x}\right)$

$= \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + \frac{\tan x}{\cos x} - \int \frac{1}{\cos^3 x} dx$

$\therefore \int \frac{1}{\cos^3 x} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\frac{1+\sin x}{\cos x}\right| + \frac{1}{2} \cdot \frac{\tan x}{\cos x} + C$

e.g.3. 求 $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx \quad (a > 0)$.

$= \sqrt{a^2 - x^2} \cdot x - \int x \cdot d\sqrt{a^2 - x^2} = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

$= x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{(x^2 - a^2) + a^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

$= x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2} \cdot dx + a^2 \cdot \int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx$

$= x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx + a^2 \cdot \arcsin\frac{x}{a}$

$\therefore \int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \frac{1}{2} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \cdot \arcsin\frac{x}{a} + C$

e.g.4. 求 $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx \quad (a > 0)$. 可以用类似于e.g.3的方法做.

e.g.5. 求 $\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx \quad (a > 0)$.

$\boxed{\text{Try it!}}$ $\int e^{2x} \cdot \cos x\, dx = e^{2x} \cdot \left[\frac{1}{5} \sin x + \frac{2}{5} \cos x\right] + C$

③. 递推现象

e.g. 计算 $I_n = \int \cos^n x \, dx$, $(n=0,1,2,\cdots)$.

$I_n = \int \cos^n x \cdot dx = \int \cos^{n-1} x \cdot (\cos x \, dx) = \int \cos^{n-1} x \cdot d(\sin x)$

$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int \sin x \,(d \cos^{n-1} x)$

$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot (-\sin x)\, dx$

$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \cdot \int \cos^{n-2} x \cdot \underbrace{\sin^2 x}_{1-\cos^2 x} \, dx$

$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \cdot \int \cos^{n-2} x \, dx - (n-1) \cdot \int \cos^n x \, dx$

$= \cos^{n-1} x \cdot \sin x + (n-1) \cdot I_{n-2} - (n-1) \cdot I_n$

$\therefore \quad I_n = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \cdot \sin x + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2} \quad (n \geq 2)$

$I_0 = \int \cos^0 x \cdot dx = \int 1 \cdot dx = x \, (+C)$

$I_1 = \int \cos x \, dx = \sin x \, (+C)$

$(n=2) \quad I_2 = \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot I_0$

$= \frac{1}{2} \cdot \cos x \cdot \sin x + \frac{1}{2} \cdot x \quad (+C)$

$(n=3). \quad I_3 = \frac{1}{3} \cdot \cos^2 x \cdot \sin x + \frac{2}{3} \cdot I_1 = \frac{1}{3} \cdot \cos^2 x \cdot \sin x + \frac{2}{3} \cdot \sin x \quad (+C)$

$\int \sin^n x \, dx$ 的对应递推结果见 英文课本 P475. EXAMPLE 6.

$\boxed{\text{Try it!}}$

$\int \cos^4 x \, dx = \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{4} I_2$

$= \frac{1}{4} \cos^3 x \sin x + \frac{3}{8} \cos x \sin x + \frac{3}{8} x + C$

$\int \cos^5 x \, dx = \frac{1}{5} \cdot \cos^4 x \cdot \sin x + \frac{4}{5} I_3$

$= \frac{1}{5} \cos^4 x \cdot \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \sin x + C$

e.g. 计算 $I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n} \, dx$, $n \in N_+$.

$I_1 = \int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$

$$I_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x \cdot d\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int x\,(-n)\cdot\frac{2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n} - 2n\cdot a^2\cdot\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\cdot I_n - 2n\cdot a^2\cdot I_{n+1}$$

$$I_{n+1} = \frac{1}{2n\cdot a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n\cdot a^2}\cdot I_n. \qquad (n\geq 1)$$

$\therefore$ 取 $n=1$, $I_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\cdot\arctan\frac{x}{a} + C$

Topic2: 有理函数不定积分 (Integration of Rational Functions).

[中文课本: (5.3 有理函数的积分). P210 ~ P215 ;

Calculus: (7.4 Integration of Rational Functions by Partial Fractions)

P493 ~ P500)]

(1). 有理函数定义:

有理函数 (rational function): 两个多项式(polynomial)的比值.

i.e. $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 若 $P(x)$, $Q(x)$ 是多项式. 则 $f(x)$ 称为有理函数.

e.g.1. $\dfrac{1}{x}$; $\dfrac{4x+5}{x^2+2x+3}$; $\dfrac{x^{10}+x^9+8}{2x+5}$; $\dfrac{1-x^{10}}{1-x}$;

知识点回顾:

多项式 $f(x)$ 的次数 (degree) : $\deg(f(x))$.

e.g.2. $f(x) = 4x+3$, $\deg(f(x)) = 1$;

$f(x) = -x^{10}+1$, $\deg(f(x)) = 10$.

有理函数 $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 也可以称为分式.

若 $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$. 则 $f(x)$ 称为真分式. (proper rational function)

若 ～～～ $\geq$ ～～～, ——— 假分式. (improper ———)

假分式 = 多项式 + 真分式. (类似于 假分数 = 整数 + 真分数. e.g. $\frac{24}{7} = 3 + \frac{3}{7}$)

可以用多项式除法(long division)做到这一点. [Precalculus: P269~270]

e.g.3 $f(x) = \dfrac{x^3+x}{x-1}$.

$$
\begin{array}{r l}
 & x^2+x+2 \rightarrow \text{商(quotient)} \\
x-1 \,\big) & x^3+x \\
 & \underline{x^3-x^2} \\
 & x^2+x \\
 & \underline{x^2-x} \\
 & 2x \\
 & \underline{2x-2} \\
 & 2 \rightarrow \text{余式(remainder)}.
\end{array}
$$

$\therefore x^3+x = (x-1)\cdot(x^2+x+2) + 2$

$\therefore f(x) = \dfrac{x^3+x}{x-1} = x^2+x+2 + \dfrac{2}{x-1}$.

$$\therefore \int \frac{x^3+x}{x-1}dx = \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+2\ln|x-1|+C$$

所以假分式的积分可以转化为多项式积分+真分式积分

而多项式的积分很好求.

下面我们主要讲真分式的积分怎么求.

(2) 将真分式分解为部分分式.(partial fractions)

部分分式是具有以下形式的特殊分式:

$$\frac{A}{(x+a)^n},\ n\in N_+ \quad \text{or} \quad \frac{Bx+D}{(x^2+bx+c)^m},\ m\in N_+,\ \Delta=b^2-4c<0.$$

e.g.4 是部分分式: $\frac{1}{x-1}$, $\frac{3}{x+1}$, $\frac{1}{(x-2)^5}$, $\frac{1}{x^2+x+1}$, $\frac{3x-4}{(x^2+x+1)^4}$

不是部分分式: $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{1}{x^2+x-1}$

部分分式无法再进一步化简,也可以称为最简真分式

而不是部分分式的式子可以进一步化简. (指降低分子or分母的次数).

e.g.5. $$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

部分分式的积分都能求出来.

而所有真分式都能分解成几个部分分式之和.

所以所有的真分式积分都可求,进而所有的有理函数积分都可求.

Question: 如何将真分式 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成几个部分分式之和?

step 1：对 $Q(x)$ 进行因式分解.

Linear and Quadratic Factors Theorem: [Precalculus. P292~293].

(中文名：实系数多项式分解定理)

(系数都是实数的)多项式 可以分解成

(系数都是实数的)一次多项式与 不可约二次多项式的乘积.

没有实数根的二次多项式.

i.e. ax^2+bx+c, ($a\neq 0$ & $\Delta = b^2-4ac<0$)

e.g. 6. $x^4+2x^3-x-2 = (x-1)[x^3+3x^2+3x+2] = (x-1)(x+2)(x^2+x+1)$

$x=1$ 时为 0　　$x=-2$ 时为 0

可以通过猜根的方式一点一点分解 简单的多项式

次数很高的多项式 很难做因式分解.

一般来说, 有理函数积分的题目里给出的 $Q(x)$ 要么次数不高,

要么是已经分解好的.

e.g. 7. $\dfrac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$. [Calculus. P499. EXAMPLE 7]

step 2：待定系数法 求 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 分解为部分分式和的结果.

定理：若 $(x+a)^n$ 是 $Q(x)$ 的因子, 则 $Q(x)$ 分解出的部分分式包括

$$\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\frac{A_3}{(x+a)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(x+a)^n};$$

若 $(x^2+bx+c)^m$ 是 $Q(x)$ 的因子, 则 $Q(x)$ 分解出的部分分式包括

$$\frac{B_1x+D_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+D_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_m x+D_m}{(x^2+bx+c)^m} \quad (\Delta=b^2-4c<0).$$

而且 $Q(x)$ 的部分分式中只包括上面方式得到的分式.

e.g.8. 若 $Q(x)=(x-1)^4\cdot(x-2)^2\cdot(x^2+x+1)^2$.

且 $\deg(P(x))<\deg(Q(x))$,

则 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 分解出的部分分式为:

$$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_4}{(x-1)^4}+\frac{A_5}{x-2}+\frac{A_6}{(x-2)^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

其中 $A_1,\cdots,A_6$, B_1,B_2, C_1, C_2 是待定的系数,可以列方程求解.

(当然,我们一般不会分解出这么多部分分式).

如何求解这些待定的系数?

e.g.9. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{2x-1}+\dfrac{C}{x+2}$.

求 A,B,C.

两边同时乘 $Q(x)=x(2x-1)\cdot(x+2)$, 得

$$x^2+2x-1=A\cdot(2x-1)(x+2)+B\cdot x(x+2)+C\cdot x(2x-1).$$

两边都是关于 x 的多项式.

way 1: 直接对比左右两边的各项系数,列出线性方程组.

$$RHS=A\cdot(2x^2+3x-2)+B\cdot(x^2+2x)+C\cdot(2x^2-x)$$

$$=\underbrace{(2A+B+2C)}_{=}\cdot x^2+\underbrace{(3A+2B-C)}_{=}x\ \underbrace{-2A}_{=}.$$

$$LHS=\underline{\quad 1\quad}x^2+\underline{\quad 2\quad}x\ \underline{-1}.$$

$$\therefore\begin{cases}2A+B+2C=1\\3A+2B-C=2\\-2A=-1\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}A=\frac{1}{2}.\\B=\frac{1}{5}\\C=-\frac{1}{10}\end{cases}$$