3月31日. 周一. 第12次课.

Topic: 有理函数不定积分 (Integration of Rational Functions).

[中文课本: (5.3 有理函数的积分). P210 ~ P215;

Calculus: C7.4 Integration of Rational Functions by Partial Fractions)

P493 ~ P500)]

(1). 有理函数定义:

有理函数 (rational function): 两个多项式(polynomial)的比值.

i.e. $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, 若 $P(x), Q(x)$ 是多项式, 则 $f(x)$ 称为有理函数.

e.g.1. $\frac{1}{x}$; $\dfrac{4x+5}{x^2+2x+3}$; $\dfrac{x^{10}+x^9+8}{2x+5}$; $\dfrac{1-x^{10}}{1-x}$;

知识点回顾:

多项式 $f(x)$ 的次数 (degree): $\deg(f(x))$.

e.g.2. $f(x)=4x+3$, $\deg(f(x))=1$;

$f(x)=-x^{10}+1$, $\deg(f(x))=10$.

有理函数 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 也可以称为分式.

若 $\deg(P(x)) < \deg(Q(x))$. 则 $f(x)$ 称为真分式. (proper rational function)

若 ~~~ $\geq$ ~~~, ——— 假分式. (improper ———)

假分式 = 多项式 + 真分式. (类似于 假分数 = 整数 + 真分数. e.g. $\frac{24}{7}=3+\frac{3}{7}$)

可以用多项式除法(long division)做到这一点. [Precalculus: P269~270]

e.g.3 $f(x)=\dfrac{x^3+x}{x-1}$.

$$\begin{array}{r|l} & x^2+x+2 \ \to \text{商(quotient)} \\ x-1 & x^3+x \\ & \underline{x^3-x^2} \\ & x^2+x \\ & \underline{x^2-x} \\ & 2x \\ & \underline{2x-2} \\ & 2 \ \to \text{余式(remainder)}. \end{array}$$

$\therefore x^3+x=(x-1)\cdot(x^2+x+2)+2$

$\therefore f(x)=\dfrac{x^3+x}{x-1}=x^2+x+2+\dfrac{2}{x-1}$.

$$\therefore \int \frac{x^3+x}{x-1}dx = \int \left(x^2+x+2+\frac{2}{x-1}\right)dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+2x+2\ln|x-1|+C$$

所以假分式的积分可以转化为多项式积分+真分式积分

而多项式的积分很好求.

下面我们主要讲真分式的积分怎么求.

(2) 将真分式分解为部分分式.(partial fractions)

部分分式是具有以下形式的特殊分式:

$$\frac{A}{(x+a)^n},\ n\in N_+ \quad \text{or} \quad \frac{Bx+D}{(x^2+bx+c)^m},\ m\in N_+,\ \Delta=b^2-4c<0.$$

e.g.4 是部分分式: $\frac{1}{x-1}$, $\frac{3}{x+1}$, $\frac{1}{(x-2)^5}$, $\frac{1}{x^2+x+1}$, $\frac{3x-4}{(x^2+x+1)^4}$

不是部分分式: $\frac{1}{(x-1)(x+1)}$; $\frac{1}{x^2+x-1}$

部分分式无法再进一步化简,也可以称为最简真分式

而不是部分分式的式子可以进一步化简. (指降低分子 or 分母的次数).

e.g.5. $$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$\frac{x}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)+1}{(x-1)^2} = \frac{1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}$$

$$\frac{1}{x^2+2x-3} = \frac{1}{(x+3)(x-1)} = \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x+3}\right)$$

部分分式的积分都能求出来.

而所有真分式都能分解成几个部分分式之和.

所以所有的真分式积分都可求,进而所有的有理函数积分都可求.

Question: 如何将真分式 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 分解成几个部分分式之和?

step 1：对 $Q(x)$ 进行因式分解.

Linear and Quadratic Factors Theorem: [Precalculus. P292~293].

(中文名：实系数多项式分解定理)

(系数都是实数的)多项式 可以分解成

(系数都是实数的) 一次多项式与 不可约二次多项式的乘积.

没有实数根的二次多项式.

i.e. ax^2+bx+c, ($a\neq 0$ & $\Delta=b^2-4ac<0$)

e.g. 6. $x^4+2x^3-x-2 \underset{x=1\text{ 时为 }0}{=} (x-1)[x^3+3x^2+3x+2] \underset{x=-2\text{ 时为 }0}{=} (x-1)(x+2)(x^2+x+1)$.

可以通过猜根的方式一点一点分解 简单的多项式

次数很高的多项式 很难做因式分解.

一般来说, 有理函数积分的题目里给出的 $Q(x)$ 要么次数不高,

要么是已经分解好的.

e.g. 7. $\dfrac{x^3+x^2+1}{x(x-1)(x^2+x+1)(x^2+1)^3}$. [Calculus. P499. EXAMPLE 7]

step 2：待定系数法 求 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 分解为部分分式和的结果.

定理：若 $(x+a)^n$ 是 $Q(x)$ 的因子, 则 $Q(x)$ 分解出的部分分式包括

$$\frac{A_1}{x+a}+\frac{A_2}{(x+a)^2}+\frac{A_3}{(x+a)^3}+\cdots+\frac{A_n}{(x+a)^n};$$

若 $(x^2+bx+c)^m$ 是 $Q(x)$ 的因子, 则 $Q(x)$ 分解出的部分分式包括

$$\frac{B_1x+D_1}{x^2+bx+c}+\frac{B_2x+D_2}{(x^2+bx+c)^2}+\cdots+\frac{B_m x+D_m}{(x^2+bx+c)^m} \quad (\Delta=b^2-4c<0).$$

而且 $Q(x)$ 的部分分式中只包括上面方式得到的分式.

e.g.8. 若 $Q(x)=(x-1)^4\cdot(x-2)^2\cdot(x^2+x+1)^2$.

且 $\deg(P(x))<\deg(Q(x))$,

则 $f(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 分解出的部分分式为:

$$\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{A_3}{(x-1)^3}+\frac{A_4}{(x-1)^4}+\frac{A_5}{x-2}+\frac{A_6}{(x-2)^2}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+x+1}+\frac{B_2x+C_2}{(x^2+x+1)^2}.$$

其中 $A_1,\cdots,A_6$, B_1,B_2, C_1, C_2 是待定的系数,可以列方程求解.

(当然,我们一般不会分解出这么多部分分式).

如何求解这些待定的系数?

e.g.9. $f(x)=\dfrac{x^2+2x-1}{x(2x-1)(x+2)}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{2x-1}+\dfrac{C}{x+2}$.

求 A, B, C.

两边同时乘 $Q(x)=x(2x-1)\cdot(x+2)$. 得

$$x^2+2x-1=A\cdot(2x-1)(x+2)+B\cdot x(x+2)+C\cdot x(2x-1).$$

两边都是关于 x 的多项式.

way 1: 直接对比左右两边的各项系数,列出线性方程组.

$$\begin{aligned}RHS&=A\cdot(2x^2+3x-2)+B\cdot(x^2+2x)+C\cdot(2x^2-x)\\&=\underbrace{(2A+B+2C)}_{\parallel}\cdot x^2+\underbrace{(3A+2B-C)}_{\parallel}x\ \underbrace{-2A}_{\parallel}.\\LHS&=\qquad 1\quad x^2+\qquad 2\quad x\ -1.\end{aligned}$$

$$\therefore\begin{cases}2A+B+2C=1\\3A+2B-C=2\\-2A=-1\end{cases}\qquad\therefore\begin{cases}A=\frac{1}{2}.\\B=\frac{1}{5}\\C=-\frac{1}{10}\end{cases}$$

way 2：代入 x 的一些取值，列出线性方程组.

$$x^2+2x-1 = A\cdot(2x-1)(x+2) + B\cdot x(x+2) + C\cdot x(2x-1).$$

有多少个未知数，就代入多少次 x 的取值，列出多少个方程.

最好代入一些能消去部分式子的 x 值，或代入较小的 x.

这个问题中有3个未知数，所以要代入3次 x 取值，列3个方程.

①. 代入 $x=0$. 则 $-1 = -2\cdot A + 0\cdot B + 0\cdot C$. $\Rightarrow A=\frac{1}{2}$.

②. 代入 $x=\frac{1}{2}$. 则 $\frac{1}{4} = 0\cdot A + \frac{5}{4}B + 0\cdot C \Rightarrow B=\frac{1}{5}$

③. 代入 $x=-2$. 则 $-1 = 0\cdot A + 0\cdot B + 10C \Rightarrow C=-\frac{1}{10}$.

$$\therefore f(x) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2x-1} - \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{x+2}$$

$$\therefore \int f(x)\,dx = \frac{1}{2}\cdot\ln|x| + \frac{1}{10}\cdot\ln|2x-1| - \frac{1}{10}\cdot\ln|x+2| + C_1$$

另一个例子：

e.g. 10. 求 $f(x)=\dfrac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}$ 的部分分式分解.

$$\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}.$$

$$\therefore 1-x+2x^2-x^3 = A\cdot(x^2+1)^2 + (Bx+C)\cdot x(x^2+1) + (Dx+E)\cdot x.$$

way1: $RHS = A\cdot(x^4+2\cdot x^2+1) + (Bx^4+Cx^3+Bx^2+Cx) + (Dx^2+Ex)$

$= (A+B)\cdot x^4 + C\cdot x^3 + (2A+B+D)\cdot x^2 + (C+E)\cdot x + A.$

$LHS = 0\cdot x^4 + (-1)x^3 + 2\cdot x^2 + (-1)\cdot x + 1$

$\therefore \cancel{A+B=0},\ \cancel{C=-1},\ 2A+B+D=2,\ \cancel{C+E=-1},\ \cancel{A=1}.$

$\therefore A=1,\ B=-1,\ C=-1,\ D=1,\ E=0$

way 2: $1-x+2x^2-x^3 = A\cdot(x^2+1)^2+(Bx+C)\cdot x(x^2+1)+(Dx+E)\cdot x$

① 代入 $x=0$. $1 = A\cdot 1$ $\quad\therefore A=1$

② 代入 $x=1$. $1 = 4+(B+C)\cdot 2+(D+E)$

③ 代入 $x=-1$. $5 = 4+(-B+C)(-2)+(-D+E)\cdot(-1)$.

④ 代入 $x=2$. $-1 = 25+(2B+C)\cdot 10+(2D+E)\cdot 2$

⑤ 代入 $x=-2$ $19 = 25+(-2B+C)(-10)+(-2D+E)(-2)$

$$\begin{cases} -3 = 2B+2C+D+E & \langle 1\rangle \\ 1 = 2B-2C+D-E & \langle 2\rangle \\ -26 = 20B+10C+4D+2E & \langle 3\rangle \\ -6 = 20B-10C+4D-2E. & \langle 4\rangle. \end{cases}$$

$\langle 1\rangle+\langle 2\rangle$. $-2 = 4B+2D$

$\langle 3\rangle+\langle 4\rangle$. $-32 = 40B+8D$. $\Rightarrow \begin{cases} B=-1 \\ D=1 \end{cases}$

$\langle 1\rangle-\langle 2\rangle$ $-4 = 4C+2E$

$\langle 3\rangle-\langle 4\rangle$ $-20 = 20C+2E$. $\quad \begin{cases} C=-1 \\ E=0 \end{cases}$

总结: 对于 $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ 的积分.

如果 $Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$ ($a_1, a_2, \cdots, a_n$ 都不同).

用 way2 更快. 分别令 $x=a_1, a_2, \cdots, a_n$, 每次都能求出一个未知数.

其它情况用 way1 更快. (也可以先用 way2, 再用 way1).

[Calculus: P496, EXAMPLE 4]

$\boxed{\text{Try it!}}$. $\frac{4x}{(x-1)^2\cdot(x+1)} = \frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}-\frac{1}{x+1}$

$\frac{2x^2-x+4}{x^3+4x} = \frac{1}{x}+\frac{x-1}{x^2+4}$

[Calculus: P497, EXAMPLE 5]

(3). 求部分分式的不定积分.

回顾部分分式的一般形式:

$$\frac{A}{(x+a)^n},\ (n\in N_+) \qquad \frac{Bx+D}{(x^2+bx+c)^m}\ (m\in N_+,\ \Delta=b^2-4c<0).$$

如何求它们的不定积分?

可以分成4种情况分别求:

<i>. $\frac{A}{x+a}$; <ii> $\frac{A}{(x+a)^n}$ $(n\geq 2)$; <iii>. $\frac{Bx+D}{x^2+bx+c}$; <iv>. $\frac{Bx+D}{(x^2+bx+c)^m}$ $(m\geq 2)$.

<i>. $\int \frac{A}{x+a}dx = A\cdot \ln|x+a| + C_1.$

<ii>. $\int \frac{A}{(x+a)^n}dx = -\frac{A}{n-1}\cdot\frac{1}{(x+a)^{n-1}} + C_1.$ $(n\geq 2)$.

<iii>. $\int \frac{Bx+D}{x^2+bx+c}dx = ?$ $(\Delta=b^2-4c<0)$

基本思路: 让分母更简单, 通过换元, 把分母变成 x^2+1 的样子.

① 如果 $b=0$, $\because \Delta = 0-4c<0$ $\therefore c>0)$

积分变成 $\int\frac{Bx+D}{x^2+c}dx = B\cdot\int\frac{x}{x^2+c}dx + D\cdot\int\frac{dx}{x^2+c}$,

$$= B\cdot\int\frac{\frac{1}{2}\cdot d(x^2+c)}{x^2+c} + D\int\frac{1}{c}\cdot\frac{dx}{(\frac{x}{\sqrt{c}})^2+1}$$

$\to t=x^2+c$ $\quad \to s=\frac{x}{\sqrt{c}}$

$$= \frac{B}{2}\cdot\int\frac{dt}{t} + D\cdot\int\frac{1}{c}\frac{\sqrt{c}\cdot ds}{s^2+1}$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\ln|t| + \frac{D}{\sqrt{c}}\cdot\arctan s + C_1$$

$$= \frac{B}{2}\cdot\ln(x^2+c) + \frac{D}{\sqrt{c}}\cdot\arctan\frac{x}{\sqrt{c}} + C_1.$$

②.如果$b\neq 0$. 可以对分母进行凑平方:

$$x^2+bx+c=(x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}.$$

进行换元 $t=x+\frac{b}{2}$, 可以转化为上一种情况.

e.g.11. $\int \frac{x-1}{4x^2-4x+3}dx$.

Step 1: 凑平方. 换元. $=\int \frac{x-1}{(2x-1)^2+2}dx \xlongequal{t=2x-1} \int \frac{\frac{t+1}{2}-1}{t^2+2}\cdot\frac{dt}{2}$

step 2: 按①中方法. 分成两部分, 换元求积分.

$$=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{t-1}{t^2+2}dt=\frac{1}{4}\int\frac{t\cdot dt}{t^2+2}-\int\frac{1}{t^2+2}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int\frac{\frac{1}{2}\cdot d(t^2+2)}{t^2+2}-\int\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(\frac{t}{\sqrt{2}})^2+1}dt$$

$$\xlongequal[n=t/\sqrt{2}]{m=t^2+2}\frac{1}{8}\cdot\int\frac{dm}{m}-\int\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}\cdot dn}{n^2+1}$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\ln|m|-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan n+C$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\ln(t^2+2)-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan\frac{t}{\sqrt{2}}+C$$

$$=\frac{1}{8}\cdot\ln[(2x-1)^2+2]-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{2}}+C$$

<iv>. $\int\frac{Bx+D}{(x^2+bx+c)^m}dx=?$ $(\Delta=b^2-4c<0,\ m\in N_+)$

①.如果 $b=0$. $\because \Delta=0^2-4c<0$ $\therefore c>0$.

积分变成 $\int\frac{Bx+D}{(x^2+c)^m}=B\cdot\int\frac{x\,dx}{(x^2+c)^m}+D\cdot\int\frac{dx}{(x^2+c)^m}$.

$$\int\frac{x\cdot dx}{(x^2+c)^m}\xlongequal{t=x^2+c}\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t^m}=-\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{t^{m-1}}+C_1=-\frac{1}{2(m-1)}\cdot\frac{1}{(x^2+c)^{m-1}}+C_1.$$

而 $I_m=\int\frac{dx}{(x^2+c)^m}$ 可以用上一个Topic中分部积分法的递归现象的例子，递归地从 I_1 出发计算 I_m.

②.如果 $b\neq0$. 可以对分母进行凑平方:

$$x^2+bx+c=(x+\frac{b}{2})^2+c-\frac{b^2}{4}.$$

进行换元 $t=x+\frac{b}{2}$，可以转化为上一种情况.

e.g.12. $\int\frac{1-x+2x^2-x^3}{x(x^2+1)^2}dx=?$ (可以利用e.g.10的结果).

[Calculus: P499, EXAMPLE 8]

根据e.g.10,

$$=\int\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2+1}+\frac{x}{(x^2+1)^2}\right)dx$$

$$=\int\frac{dx}{x}-\int\frac{x\cdot dx}{x^2+1}-\int\frac{dx}{x^2+1}+\int\frac{x\cdot dx}{(x^2+1)^2}$$

$$=\ln|x|-\int\frac{\frac{1}{2}\cdot d(x^2+1)}{x^2+1}-\arctan x+\int\frac{\frac{1}{2}\cdot d(x^2+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$\overset{t=x^2+1}{=\!=\!=}\ln|x|-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t}-\arctan x+\frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t^2}$$

$$=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln|t|-\arctan x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{t}+C=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln(x^2+1)-\arctan x-\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1}+C$$

通过上面的内容，理论上来说我们能求出所有的有理函数的不定积分.(我们不会考察太难的情况).

总结一般的流程如下:

对于有理函数 $f(x)$ 的积分 $\int f(x)\cdot dx$:

<1>. 利用多项式除法，将 $f(x)$ 写成 多项式＋真分式的形式:

$$f(x)=p(x)+\frac{P(x)}{Q(x)}.$$

<2>. 对 $Q(x)$ 进行因式分解.

<3>. 将 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 写成部分分式之和.

<4>. 分别求 $f(x)$ 各个部分的积分，再加起来.

$\boxed{\text{Try it!}}$ ① $\int \frac{x \cdot dx}{(x^2+1)(x-1)} = ?$ ② $\int \frac{3x^2+6x+2}{x^2+3x+2} dx.$

① <3>. $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$

$x = A(x^2+1) + (Bx+C)\cdot(x-1).$

$x = (A\cdot x^2 + A) + (B\cdot x^2 + (C-B)x - C)$

$0\cdot x^2 + 1\cdot x + 0 = (A+B)x^2 + (C-B)\cdot x + (A-C)$

$\therefore \begin{cases} 0 = A+B \to B=-A \\ 1 = C-B \longrightarrow 1 = A-(-A) \\ 0 = A-C \to C=A \end{cases} \quad \therefore \begin{cases} A = \frac{1}{2} \\ B = -\frac{1}{2} \\ C = \frac{1}{2}. \end{cases}$

<4> $\frac{x}{(x^2+1)(x-1)} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}\frac{-x+1}{x^2+1}$

$\therefore \int \frac{x\ dx}{(x^2+1)\cdot(x-1)} = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dx}{x-1} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{-x+1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\cdot \ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{x\ dx}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{1}{x^2+1}dx$

$= \frac{1}{2}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{2}\cdot\int\frac{\frac{1}{2}d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{2}\arctan x$

$= \frac{1}{2}\cdot\ln|x-1| - \frac{1}{4}\cdot\ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\arctan x + C_1.$

$$
\begin{array}{r}
3 \\
x^2+3x+2 \enclose{longdiv}{3x^2+6x+2} \\
3x^2+9x+6 \\
\hline
-3x-4
\end{array}
$$

② . <1>. $\dfrac{3x^3+6x+2}{x^2+3x+2}$

$$= 3 + \frac{-3x-4}{x^2+3x+2}$$

<2>. $\dfrac{-3x-4}{x^2+3x+2} = \dfrac{-3x-4}{(x+1)(x+2)}$

<3>. $= \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+2}$

$\therefore -3x-4 = A\cdot(x+2) + B\cdot(x+1)$

令 $x=-1$ $\quad -1 = A\cdot 1 \quad \therefore A=-1.$

令 $x=-2.$ $\quad 2 = B\cdot(-1) \quad \therefore B=-2.$

$\therefore \dfrac{-3x-4}{x^2+3x+2} = -\dfrac{1}{x+1} - 2\cdot\dfrac{1}{x+2}$

<4>. $\displaystyle\int \frac{3x^2+6x+2}{x^2+3x+2}dx = \int \left(3 - \frac{1}{x+1} - 2\cdot\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$= \int 3\cdot dx - \int \frac{dx}{x+1} - 2\cdot\int\frac{dx}{x+2}$$

$$= 3x - \ln|x+1| - 2\cdot\ln|x+2| + C_1$$