第一次作业：函数的凹凸性与作图

请于 2 月 28 日 23:59 前提交

作业说明

提交方式

- **只需提交电子版作业**。若作业为手写，请拍照上传，并合成为**一个 PDF**，命名为**"第一次作业 + 学号 + 姓名.pdf"**。提交格式不对的作业将不予批改，请大家注意提交的格式，谢谢！
- 提交作业后的下一个工作周之内会收到批改反馈。如果你没有收到反馈，请先检查自己的提交情况，再联系孙老师核实自己的作业成绩。

评分标准

- 部分习题的题号旁边有 $*$. 这部分题目属于附加题，比较困难，因此它们并不参与作业的评分. 如果你做了这些题我们会很高兴，如果你没做也不会扣分.
- 拒绝抄袭. 抄袭的作业按零分计算；完成度越高, 作业分数越高; 我们重视作业的过程. 如果你没有做对题目, 但是过程中有一部分是正确的, 我们也会给你相应的分数.
- 如果你使用了 AI 协助答题,没有关系,但请**给出你所使用的 prompt** 和对应的输出作为附件。
- 如果无法按时提交作业, 请及时告诉习题课老师. 一个学期有 2 次不交作业的机会. 如果在课前没有收到作业且没有提前告诉习题课老师的, 将视作使用一次机会. 当机会用完后, 缺交的作业视作 0 分.
- 若对题目中的描述（包括中文理解）有任何问题，请及时向我们提出.

解答题

以下题目无需写出过程，**只需写出答案**

1. 求下述函数的驻点、单调性、拐点、凹凸性，并画出函数的草图。
   (a) $f(x) = \ln x$
   (b) $f(x) = x^3 - 3x^2$
   (c) $y = xe^x$
   (d) $y = x \ln x$
   (e) $y = \dfrac{x}{e^x}$
   (f) $y = \dfrac{x}{x^2+1}$
2. 求下列函数的渐近线，并画出函数的草图
   (a) $y = x + \dfrac{1}{x}$
   (b) $y = \dfrac{x^2-1}{x+2}$
   (c) $y = x^2 e^{-x}$
3. 设函数 $f(x) = x^4 + ax^3 + bx^2$，若其图像在 $x = 1$ 处有拐点且斜率为-2，求参数 a, b 的值
4. 在课堂上，我们讲解了已知一阶导数和二阶导数时判断极值的方法，并强调，二阶导数为 0 时这种方法无法判断极值。我们希望通过下面的题目让大家加深对此的印象。

   在以下各小题中，请举出满足条件的函数 $f(x)$ 与 $c \in \mathbb{R}$，并证明这样的 $f(x)$ 与 c 确实满足条件。
   (a) $f'(c) = f''(c) = 0$, 且 c 是 $f(x)$ 的极大值点。
   (b) $f'(c) = f''(c) = 0$, 且 c 是 $f(x)$ 的极小值点。
   (c) $f'(c) = f''(c) = 0$, 且 c 不是 $f(x)$ 的极值点。

证明题

以下题目需要写出推导过程

1. 函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 上二阶可导，且 $f''(x) \geq 0, \forall x \in (a, b)$. 对于 $x_0 \in (a, b)$, 证明：$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0), \forall x \in (a, b)$.

   (Hint: 考虑将不等式转化为关于 x 的函数，并证明函数的最小值大于 0。你可能需要对这个函数求两次导数。)

2. 已知函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是凸函数，即对 $\forall x, x_0 \in [a,b]$，$f(x) \geq f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$。

   设 $x_1, x_2 \in [a,b]$，我们希望证明 Jensen 不等式：

   $$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1+x_2}{2})$$

   我们分以下步骤完成：

   (a) 证明：$f(x_2) \geq f(\frac{x_1+x_2}{2}) + f'(\frac{x_1+x_2}{2}) \cdot \frac{x_2-x_1}{2}$

   (b) 证明：$f(x_1) \geq f(\frac{x_1+x_2}{2}) + f'(\frac{x_1+x_2}{2}) \cdot \frac{x_1-x_2}{2}$

   (c) 证明：$\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \geq f(\frac{x_1+x_2}{2})$

   (d) 你能对这一不等式给出具有几何直观的解释吗？

3. 利用上一题的结论，证明如下不等式：

   (a) 证明：$x_1^2 + x_2^2 \geq \frac{1}{2}(x_1+x_2)^2$

   (b) 证明：$e^{x_1} + e^{x_2} \geq 2e^{\frac{x_1+x_2}{2}}$

   (c) 令 $t_1 = e^{x_1}$，$t_2 = e^{x_2}$，证明：$t_1 + t_2 \geq 2\sqrt{t_1 t_2}$

4. 证明：若 f 是凹函数，则 $-f$ 是凸函数