第四次作业：微积分基本定理与不定积分的换元积分法

请于3月28日23:59前提交

作业说明

提交方式

- **只需提交电子版作业到yukeshuxuea@163.com**。若作业为手写，请拍照上传，并合成为**一个PDF**，命名为**"第四次作业+学号+姓名.pdf"**。提交格式不对的作业将不予批改，请大家注意提交的格式，谢谢！
- 提交作业后的下一个工作周之内会收到批改反馈。如果你没有收到反馈，请先检查自己的提交情况，再联系孙老师核实自己的作业成绩。

评分标准

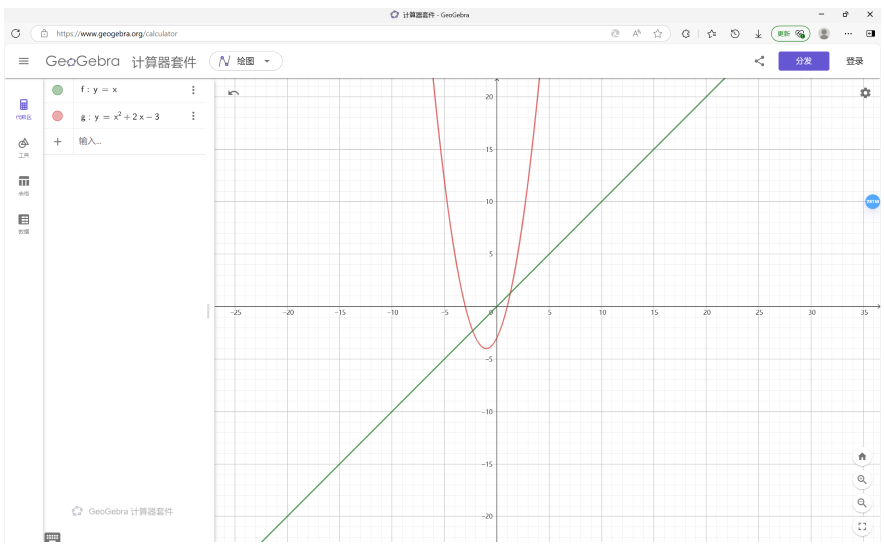
- 部分习题的题号旁边有$*$.这部分题目属于附加题，比较困难，因此它们并不参与作业的评分. 如果你做了这些题我们会很高兴，如果你没做也不会扣分.
- 拒绝抄袭. 抄袭的作业按零分计算；完成度越高, 作业分数越高; 我们重视作业的过程. 如果你没有做对题目, 但是过程中有一部分是正确的, 我们也会给你相应的分数.
- 如果你使用了AI协助答题，没有关系，但请**给出你所使用的prompt**和对应的输出作为附件。
- 如果无法按时提交作业, 请及时告诉习题课老师. 一个学期有2次不交作业的机会. 如果在课前没有收到作业且没有提前告诉习题课老师的, 将视作使用一次机会. 当机会用完后, 缺交的作业视作0分.
- 若对题目中的描述（包括中文理解）有任何问题，请及时向我们提出.

解答题

以下题目无需写出过程，**只需写出答案**

1. 计算下列函数图像围成的图形的面积.

   Help:你可以使用网络工具帮你画出函数的图像,从而判断你应该计算哪些积分. 例如,如果你想算$y = x$ 与 $y = x^2 + 2x - 3$ 围成的面积, 你可以在 https://www.geogebra.org/calculator 中绘制如下图形:



   这个网站会告诉你曲线交点的大致坐标, 于是你只需要求解方程 $x = x^2 + 2x - 3$, 得到确切的积分上下限,然后求 $x - (x^2 + 2x - 3)$的积分就可以了.

   (1) $y = 2x^2 + 4x + 3$ 与 $y = -4x - 3$

   (2) $y = x^3$ 与 $y = x$

   (3) $y = x^2$ 与 $y = 2^x$. (你可以将这两个函数的第一个交点的横坐标记为 $a, a \approx -0.77$ 但难以算出具体数值. 你的结果是一个包含 a 的式子)

2. 求下列不定积分（以下默认$a > 0$）

   (1) $\displaystyle\int \frac{x}{1 + x^4}\,\mathrm{d}x$

   (2) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos x}\,\mathrm{d}x$

   (3) $\displaystyle\int \sin^3 x \cos^2 x\,\mathrm{d}x$

(4) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^3 x \, \mathrm{d}x$

(5) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos x} \, \mathrm{d}x$

(6) $\displaystyle\int \sin^2 x \cos^2 x \, \mathrm{d}x$

(7) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \, \mathrm{d}x$

(8) $\displaystyle\int \frac{1}{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

(9) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2-x^2} \, \mathrm{d}x$

(10) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

(11) $\displaystyle\int \frac{1}{a^2+x^2} \, \mathrm{d}x$

(12) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$

(13) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} \, \mathrm{d}x$

(14) $\displaystyle\int \sqrt{1-x^2} \, \mathrm{d}x$

(15) $\displaystyle\int \sqrt{a^2-x^2} \, \mathrm{d}x$

(16) $\displaystyle\int \sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x$

(17) $\displaystyle\int \sqrt{a^2+x^2} \, \mathrm{d}x$

(18) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \, \mathrm{d}x$

(19) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}} \, \mathrm{d}x$

(20) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x} \, \mathrm{d}x$

(21) $\displaystyle\int \sqrt{1+2x} \, \mathrm{d}x$

(22) $\displaystyle\int x\sqrt{2x^2+7} \, \mathrm{d}x$

(23) $\displaystyle\int (2x^{\frac{3}{2}}+1)^{\frac{2}{3}}\sqrt{x} \, \mathrm{d}x$

(24) $\displaystyle\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}} \, \mathrm{d}x$

(26) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^8}}\ \mathrm{d}x$

(27) $\displaystyle\int \sin x \sin 2x\ \mathrm{d}x$

证明题

以下题目需要写出推导过程

1. 已知 $F(t)$ 是 $f(t)$ 的一个原函数, 则 $F(g(x))$ 是 $f(g(x))g'(x)$ 的一个原函数.

   [这道题证明了第一换元法: $\displaystyle\int f(g(x))g'(x)\ \mathrm{d}x = \int f(t)\ \mathrm{d}t$ $(t = g(x))$的正确性.]

2. 在3月10日课上的例题中,我们通过两种不同的换元方式得到了$\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$的不同结果:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right| + C$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$$

   请验证: $-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+\cos x}{1-\cos x}\right|$ 和 $\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|$ 的定义域和周期相同, 且它们的差值是一个常数.

   [Hint: 你可以把它们的差值当成新的函数,利用求导来证明这个新函数在一个周期内为常数.]

3. 已知 $x = g(t)$ 是一个可逆函数, 且 $F(t)$ 是 $f(g(t))g'(t)$的一个原函数, 则 $F(g^{-1}(x))$ 是 $f(x)$的原函数.

   [这道题证明了第二换元法: $\displaystyle\int f(x)\ \mathrm{d}x = \int f(g(t))g'(t)\ \mathrm{d}t$ $(x = g(t))$的正确性.]

4. 双曲函数是与三角函数具有相似性质的一类函数,也可以用于第二消元法中. 它们的定义如下:

$$\text{双曲正弦(hyperbolic sine):}\quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$
$$\text{双曲余弦(hyperbolic cosine):}\quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$
$$\text{双曲正切(hyperbolic tangent):}\quad \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

   这三个函数的反函数分别记为 $\mathrm{arsinh}x$, $\mathrm{arcosh}x$, $\mathrm{artanh}x$.

   请根据以上定义证明下方结论:

(1) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ (这一点和三角函数的$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$非常像)

(2) $\mathrm{arsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1}), (\mathrm{arsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

(3) $\mathrm{arcosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2-1}), (\mathrm{arsinh} x)' = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.

(4) $\mathrm{artanh} x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}, (\mathrm{artanh} x)' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

[如果你对双曲函数感兴趣,可以参考英文课本 Section 3.11 Hyperbolic Functions (P259-P264) 或中文课本附录 A.3.3 双曲函数及常用公式 (P451-P457).]