第三次作业答案

解答题

1. 使用带 Lagrange 余项的麦克劳林公式，估计以下函数值，要求估计误差不大于 10^{-5}. (可以使用计算器）

   (1) $\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}x^{2n-1} + \frac{(-1)^n\cos(\theta x)}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \quad (x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0,1))$

   估计 $\sin\frac{1}{2}$ 时,误差项的大小 $|\frac{(-1)^n\cos(\frac{\theta}{2})}{(2n+1)!}(\frac{1}{2})^{2n+1}| \le \frac{1}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}}$

   要求 $\frac{1}{(2n+1)!\cdot 2^{2n+1}} \le 10^{-5}$, 即要求 $(2n+1)!\cdot 2^{2n+1} \ge 100000.$

   $n=2$时, $5!\cdot 2^5 = 120 * 32 = 3840 < 100000;$

   $n=3$时, $7!\cdot 2^7 = 645120 > 100000;$

   因此选择 $n=3$时的泰勒多项式,也就是取泰勒多项式的前3项, $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5$

   $\sin\frac{1}{2} \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{120}(\frac{1}{2})^5 = \frac{1841}{3840} = 0.47942708\bar{3} \approx 0.47943$

   (事实上,直接用计算器计算可得, $\sin\frac{1}{2} \approx 0.47942553860 \approx 0.47943$)

   (2) $e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad (x \in (-\infty, +\infty), \theta \in (0,1))$

   估计 $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ 时,误差项的大小 $|\frac{e^{\frac{\theta}{2}}}{(n+1)!}(\frac{1}{2})^{n+1}| \le \frac{e}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} \le \frac{3}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}}$

   要求 $\frac{3}{(n+1)!\cdot 2^{n+1}} \le 10^{-5}$, 即要求 $(n+1)!\cdot 2^{n+1} \ge 300000.$

   $n=5$时, $6!\cdot 2^6 = 46080 < 300000;$

   $n=6$时, $7!\cdot 2^7 = 645120 > 300000;$

   因此选择 $n=6$时的泰勒多项式,也就是取泰勒多项式的前6项, $e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{720}x^6$

   $e^{\frac{1}{2}} \approx 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{6}(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{24}(\frac{1}{2})^4 + \frac{1}{120}(\frac{1}{2})^5 + \frac{1}{720}(\frac{1}{2})^6 = \frac{75973}{46080} = 1.6487196180\bar{5} \approx 1.64872$

   (事实上,直接用计算器计算可得, $\sqrt{e} \approx 1.6487212707 \approx 1.64872$)

   (3) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \frac{(-1)^n}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}x^{n+1}, \quad (x \in (-1, +\infty), \theta \in (0,1))$

   估计 $\ln 1.1 = \ln(1+0.1)$ 时,误差项的大小 $|\frac{(-1)^n}{(n+1)(1+0.1\theta)^{n+1}}(0.1)^{n+1}| \le \frac{1}{1.1(n+1)\cdot 10^{n+1}}$

   要求 $\frac{1}{1.1(n+1)\cdot 10^{n+1}} \le 10^{-5}$, 即要求 $1.1(n+1)\cdot 10^{n+1} \ge 100000.$

   $n=3$时, $1.1\cdot 4\cdot 10^4 = 44000 < 100000;$

   $n=4$时, $1.1\cdot 5\cdot 10^5 = 550000 > 100000;$

   因此选择 $n=4$时的泰勒多项式,也就是取泰勒多项式的前4项, $x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4$

   $\ln 1.1 \approx 0.1 - \frac{1}{2}0.1^2 + \frac{1}{3}0.1^3 - \frac{1}{4}0.1^4 = 0.09530833333 \approx 0.09531$

   (事实上,直接用计算器计算可得, $\ln 1.1 \approx 0.095310179804 \approx 0.09531$)

2. 求下列不定积分

(a) $\displaystyle\int \frac{1-x}{1-\sqrt{x}}\ \mathrm{d}x = \int 1+\sqrt{x}\ \mathrm{d}x = x + \frac{2}{3}x^{3/2} + C$

(b) $\displaystyle\int (1+\cos^2 x)\sec^2 x\ \mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos^2 x}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{\cos^2 x}\ \mathrm{d}x + \int 1\ \mathrm{d}x = \tan x + x + C$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2(1+x^2)}\ \mathrm{d}x = \int (\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2})\ \mathrm{d}x = -\frac{1}{x} - \arctan x + C$

(d) $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2 x+\cos^2 x}\ \mathrm{d}x = \int \frac{1}{1}\ \mathrm{d}x = x + C$

3. 求下列函数的导数

这道题考察的是变上限定积分的导数的求法，具体方法在课上讲的例题内都有。

(a) $\displaystyle F(x) = \int_0^x 2xt\ \mathrm{d}t = 2x\int_0^x t\ \mathrm{d}t$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (2x)'\int_0^x t\ \mathrm{d}t + 2x(\int_0^x t\ \mathrm{d}t)' \\
&= 2\int_0^x t\ \mathrm{d}t + 2x\cdot x \\
&= 2\frac{x^2}{2} + 2x^2 \\
&= 3x^2
\end{aligned}$$

（也可以用定积分直接算出 $F(x) = x^3$, 然后求导）

(b) $\displaystyle F(x) = \int_{-1}^{x^2} \sin t\ \mathrm{d}t$,取 $\displaystyle G(x) = \int_{-1}^{x} \sin t\ \mathrm{d}t$, 则 $F(x) = G(x^2), G'(x) = \sin t$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= G'(x^2)(x^2)' \\
&= \sin x^2\cdot 2x \\
&= 2x\sin x^2
\end{aligned}$$

（也可以用定积分直接算出 $F(x) = \cos(1) - \cos x^2$, 然后直接求导）

(c) $\displaystyle F(x) = \int_x^{x^2} e^{x+t}\ \mathrm{d}t = e^x\int_x^{x^2} e^t\ \mathrm{d}t = e^x(\int_0^{x^2} e^t\ \mathrm{d}t - \int_0^x e^t\ \mathrm{d}t)$

取 $\displaystyle G(x) = \int_0^x e^t\ \mathrm{d}t$, 则 $F(x) = e^x(G(x^2)-G(x)), G'(x) = e^x$

$$\begin{aligned}
F'(x) &= (e^x)'(G(x^2)-G(x)) + e^x(G(x^2)-G(x))' \\
&= e^x(G(x^2)-G(x)) + e^x(G'(x^2)\cdot 2x - G'(x)) \\
&= e^x(\int_0^{x^2} e^t\ \mathrm{d}t - \int_0^x e^t\ \mathrm{d}t) + e^x(e^{x^2}\cdot 2x - e^x) \\
&= e^x(e^{x^2} - 1 - e^x + 1) + e^x(e^{x^2}\cdot 2x - e^x) \\
&= (2x+1)e^{x^2+x} - 2e^{2x}
\end{aligned}$$

（也可以用定积分直接算出 $F(x) = e^{x^2+x} - e^{2x}$ ，然后直接求导）

4. 求下列极限

这道题主要是利用洛必达法则，以及变上限定积分的求导。

(a)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sin t^2\ \mathrm{d}t}{x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x^2}{3x^2} && \text{（洛必达法则）}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2} && \text{（等价无穷小）}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{x^2} t\sin t\ \mathrm{d}t}{x^6} &= \lim_{u\to 0}\frac{\int_0^u t\sin t\ \mathrm{d}t}{u^3} && \text{（换元，}u=x^2\text{）}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{u\sin u}{3u^2} && \text{（洛必达法则）}\\ &= \lim_{u\to 0}\frac{u^2}{3u^2} && \text{（洛必达法则）}\\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x \sqrt{1+t^4}\ \mathrm{d}t - x}{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3} &= \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^4}-1}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2} && \text{（洛必达法则）}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^4}-1)(\sqrt{1+x^4}+1)}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+x^4}+1}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2}\cdot\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)-1+\frac{1}{2}x^2} && \text{（泰勒公式）}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{\frac{1}{24}x^4+o(x^4)}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{1}{24}+\frac{o(x^4)}{x^4}}\\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{24}}\\ &= 12\end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t}{x^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}\\ &= \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\\ &= \frac{1}{2}f'(0)\end{aligned}$$

注意: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{2x} = \dfrac{1}{2}f'(0)$这一步不能直接由洛必达法则得出,因为 $f'(x)$ 在 $x=0$ 附近未必连续,不一定符合洛必达法则的使用条件.

证明题

1. 证明：如果 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 在 $x\in I$ 上的原函数, $H(x)=F(x)-G(x)$ 则 $\forall x_1,x_2\in I.H(x_1)=H(x_2)$

   [Hint：使用拉格朗日中值定理证明。这道题说明了 $H(x)$在$x\in I$ 上恒为常数。].

因为$F(x)$ 和 $G(x)$ 都是 $f(x)$ 在 $x \in I$ 上的原函数, 所以 $F'(x) = G'(x) = f(x)$.

所以 $H'(x) = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0, \forall x \in I$.

根据拉格朗日中值定理,$\forall x_1, x_2 \in I, H(x_1) - H(x_2) = H'(x_3)(x_1 - x_2) = 0$, 其中 x_3 位于x_1 与 x_2之间. 所以$\forall x_1, x_2 \in I. H(x_1) = H(x_2)$

2. 证明：若 $F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数， $G(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数，则 $\int (f(x) + g(x)) \mathrm{dx} = F(x) + G(x) + C$，其中 C 为任意常数。

   因为$F(x)$ 是 $f(x)$ 的一个原函数， $G(x)$ 是 $g(x)$ 的一个原函数, 所以 $F'(x) = f(x), G'(x) = g(x)$.

   所以$(F(x) + G(x))' = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x)$. 所以 $F(x) + G(x)$ 是 $f(x) + g(x)$ 的一个原函数.

   所以$\int (f(x) + g(x)) \mathrm{dx} = F(x) + G(x) + C$，其中 C 为任意常数。