3月24日. 周一 第10次课

1. 签到 . 2. 作业 HW4. 截止时间: 本周五晚上 24:00

Topic 1: 换元积分法: 第二换元法(代入法, inverse substitution) [续]

[中文课本: $P_{202}\sim 205$; 英文课本: 7.3. Trigonometric Substitution P486 ~ 491]

(2). 第二换元法的使用:

①. 三角换元消除根号.

第二积分法通常用在含根号($\sqrt{\ }$)的式子, 利用三角函数的等式消除根号, 这种积分方式也称为三角换元. (Trigonometric Substitution).

三角换元的一般流程: <a> 选择合适的公式消除根号, 转化为三角函数的积分

<b>. 计算三角函数的积分.

<c>. 将结果从关于θ的式子转化回关于x的式子.

<a>. 公式如下表: (默认 $a>0$).

<1> $\sqrt{a^2-x^2} \xrightarrow[\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]]{x=a\cdot\sin\theta} a\cdot\cos\theta$. . 利用公式 $1-\sin^2\theta=\cos^2\theta$.

<2> $\sqrt{a^2+x^2} \xrightarrow[\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})]{x=a\cdot\tan\theta} \frac{a}{\cos\theta}$. 利用公式 $1+\tan^2\theta=\frac{1}{\cos^2\theta}$

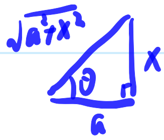
<3> $\sqrt{x^2-a^2} \xrightarrow[\theta\in[0,\frac{\pi}{2})\cup[\pi,\frac{3}{2}\pi)]{x=a/\cos\theta} a\cdot\tan\theta$. 利用公式 $\frac{1}{\cos^2\theta}-1=\tan^2\theta$.

e.g.6 $\int \frac{1}{\sqrt{a^2+x^2}}\,dx$. $(a>0)$.

<a>. 三角换元 $\xrightarrow[\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})]{x=a\cdot\tan\theta}$ $\int \frac{1}{a/\cos\theta}\cdot a\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\,d\theta = \int\frac{d\theta}{\cos\theta}$

<b>. 三角函数的积分: $= \ln\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)+C$

<c>. $x=a\cdot\tan\theta \Rightarrow \tan\theta=\frac{x}{a}$.



$\therefore \cos\theta=\frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$$\therefore \sim = \ln\left(\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\frac{x}{a}\right)+C$$

$$= \ln\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right) - \ln a + C$$

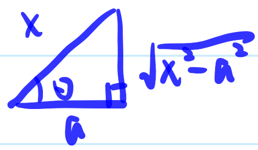
$$= \ln\left(\sqrt{a^2+x^2}+x\right) + C'.$$

e.g.7. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$. $(a>0)$ $\Rightarrow x\in(-\infty,-a)\cup(a,+\infty)$

<a> 三角换元: $\xrightarrow[\theta\in(0,\frac{\pi}{2})\cup(\pi,\frac{3}{2}\pi)]{x=a/\cos\theta}$ $\int\frac{1}{a\cdot\tan\theta}\cdot a\cdot\frac{1}{\cos\theta}\cdot\tan\theta\cdot d\theta = \int\frac{d\theta}{\cos\theta}$

<b>. 三角函数积分: $= \ln\left(\frac{1}{\cos\theta}+\tan\theta\right)+C$

<c>. $x=a/\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{a}{x}$.



$\tan\theta=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}$

$$\therefore \sim = \ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)+C$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2-a^2}+x\right)+C' \quad (C'=C-\ln a)$$

note: $$\int\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right|+C.$$

比较推荐大家记住这个式子。($=\ln|x+$分母$|+C$)

(*). e.g.8.. $\int\sqrt{a^2+x^2}\,dx \quad (a>0)$.

<a>. 三角换元: $\xlongequal[\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})]{x=a\cdot\tan\theta} \int\frac{a}{\cos\theta}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}\,d\theta = a^2\cdot\int\frac{d\theta}{\cos^3\theta}$

<b>. 计算三角积分: $= a^2\cdot\int\frac{1}{\cos^4\theta}\cdot(\cos\theta\cdot d\theta) = a^2\cdot\int\frac{1}{(1-\sin^2\theta)^2}\cdot d(\sin\theta)$

$$\xlongequal{t=\sin\theta} a^2\cdot\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}.$$

我们目前还不会求解 $\int\frac{dt}{(1-t^2)^2}$! . 之后的Topic: 有理函数的不定积分中会讲如何拆分这种函数,在此直接给出结论: (可以课下自行验证).

$$\frac{1}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{(1-t)^2(1+t)^2} = \frac{1}{4}\cdot\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right].$$

$$\therefore\ = \frac{a^2}{4}\cdot\int\left[\frac{1}{(1-t)^2}+\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{1-t}+\frac{1}{1+t}\right]dt$$

$$= \frac{a^2}{4}\cdot\left[\frac{1}{1-t}-\frac{1}{1+t}-\ln|1-t|+\ln|1+t|\right]+C$$

$$= \frac{a^2}{4}\left[\frac{2t}{1-t^2}+\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right|\right]+C$$

$$= \frac{a^2}{4}\cdot\left[\frac{2\sin\theta}{1-\sin^2\theta}+\ln\cdot\left|\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right|\right]+C$$

$$= \frac{a^2}{4}\cdot\left[\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}+\ln\cdot\left|\frac{(1+\sin\theta)^2}{(1-\sin\theta)\cdot(1+\sin\theta)}\right|\right]+C$$

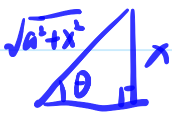
$$= \frac{a^2}{4}\cdot\left[\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}+\ln\cdot\left|\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}\right|\right]+C$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\left[\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}+\ln\left|\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right|\right]+C$$

$$= \frac{a^2}{2}\cdot\left[\frac{\tan\theta}{\cos\theta}+\ln\left|\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right|\right]+C$$

<c>. 转化回关于x的式子:

$x = a\cdot\tan\theta \Rightarrow \tan\theta = \frac{x}{a}$.



$\therefore\ \sin\theta = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$

$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$.

$$\therefore\ = \frac{a^2}{2}\cdot\left[\frac{x}{a}\cdot\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}+\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}\right|\right]+C$$

$$= \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right|-\frac{a^2}{2}\cdot\ln|a|+C$$

由于 $x+\sqrt{a^2+x^2}>0$. $(\forall x\in(-\infty,+\infty))$.

$\therefore\ = \frac{1}{2}\cdot x\cdot\sqrt{a^2+x^2}+\frac{a^2}{2}\cdot\ln(x+\sqrt{a^2+x^2})+C'$. $\quad (C' = C-\frac{a^2}{2}\cdot\ln a)$.

注：很多三角换元的问题也可以使用双曲三角来做.

可以参考中文课本 P204. 例5.1.7. or 英文课本 P489. Example 5.

留作习题. 但是我们不会在课上讲. 可能会布置一两道相关的习题.

② 其它换元方式:

e.g. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+1}$. 把根号整体作为新的变量. 目的是消除根号.

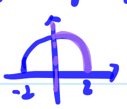
$t=\sqrt{x+1}$. $x\in[-1,+\infty)$. $t\in[0,+\infty)$ $x=t^2-1$.

$\sim = \int \frac{2t\cdot dt}{t+1} = \int \frac{2(t+1)-2}{t+1}\,dt = \int \left(2-\frac{2}{t+1}\right)dt = 2t - 2\cdot\ln|t+1| + C$

$= 2\cdot\sqrt{x+1} - 2\ln|\underbrace{\sqrt{x+1}+1}_{>0}| + C = 2\sqrt{x+1} - 2\ln(\sqrt{x+1}+1) + C$

e.g. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x}\,dx$.

令 $f(x)=\sqrt{4-x^2}$, $x\in[-2,2]$. $f(x)=f(-x)$



$t=\sqrt{4-x^2}$. $x\in[-2,2]$, t与x不是一一对应的!

把 $[-2,2]$ 分成几部分来积分.

① $x\in[0,2]$, $t=\sqrt{4-x^2}$ $x=\sqrt{4-t^2}$, $t\in[0,2]$ $dx=\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$

$\sim = \int \frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\cdot\frac{-t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \int \frac{4-t^2-4}{4-t^2}\,dt = \int 1-\frac{4}{4-t^2}\,dt$

$= \int 1-\left(\frac{1}{2-t}+\frac{1}{2+t}\right)dt = t + \ln|t-2| - \ln|t+2| + C$

$= \sqrt{4-x^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right| + C$

② $x\in[-2,0]$, $t=\sqrt{4-x^2}$, $x=-\sqrt{4-t^2}$, $t\in[0,2]$ $dx=\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$.

$\sim = \int \frac{t}{-\sqrt{4-t^2}}\cdot\frac{t}{\sqrt{4-t^2}}\,dt = \int \frac{-t^2}{4-t^2}\,dt$ (跟上面一样)

∴最后的结果是 $\sqrt{4-x^2} + \ln\left|\frac{\sqrt{4-x^2}-2}{\sqrt{4-x^2}+2}\right| + C$

e.g. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

$t=\sqrt{1+e^x}$, $x\in(-\infty,+\infty)$, $t\in(1,+\infty)$

$t^2=1+e^x$. $\Rightarrow e^x=t^2-1 \Rightarrow x=\ln(t^2-1)$. $\Rightarrow dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$

$\therefore \sim = \int \frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{t^2-1}dt = \int\frac{2}{t^2-1}dt = \int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$

$= \ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + C = \ln\cdot\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right| + C$

e.g. $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}dx$

不一定要用三角换元. 用第一换元法会更会

$\sim = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot d(x^2+4)}{\sqrt{x^2+4}} \xlongequal{t=x^2+4} \int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \sqrt{t}+C = \sqrt{x^2+4}+C$

$\boxed{\text{Try it !}}$ $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x-1}} = ?$ $\int\frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}dx = ?$

$\int\frac{dx}{1+\sqrt{x-1}} \xlongequal[t\in[0,+\infty)]{t=\sqrt{x-1},\ x=t^2+1} \int\frac{2t\cdot dt}{1+t} = \int\left(2-\frac{2}{1+t}\right)\cdot dt = 2t-2\cdot\ln(1+t)+C$

$= 2\sqrt{x-1}-2\ln(1+\sqrt{x-1})+C$.

or. $\xlongequal[t\in[1,+\infty)]{t=1+\sqrt{x-1},\ x=(t-1)^2+1} \int\frac{(2t-2)\cdot dt}{t} = \int 2-\frac{2}{t}dt = 2t-2\ln t+C$

$= 2+2\sqrt{x-1}-2\ln(1+\sqrt{x-1})+C$

$\int\frac{x\,dx}{\sqrt[3]{1+x}} \xlongequal[t\neq 0.]{t=\sqrt[3]{1+x},\ x=t^3-1} \int\frac{t^3-1}{t}\cdot 3t^2dt = 3\int(t^4-t)dt = 3\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^2}{2}\right)+C$

$= \frac{3}{5}(1+x)^{\frac{5}{3}} - \frac{3}{2}(1+x)^{\frac{2}{3}}+C$

(3). 第一换元法和第二换元法的区别:

(一): 如果被积函数 $u(x)$ 可以看成 $u(x)=f(g(x))\cdot g'(x)$, (其中f连续, g可导),

则 $\int u(x)dx = \int f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int f(g(x)).dg(x) \xlongequal{t=g(x)} \int f(t)\,dt$.

将 $\int f(t)dt$ 算出来后, 再将 $t=g(x)$ 代入, 即可得到 $\int u(x)dx$.

(二)：对 $\int f(x)\,dx$，令 $x=g(t)$.（g 可逆）. 则 $dx=g'(t)\cdot dt$.

$\therefore \int f(x)\,dx = \int f(g(t))\cdot g'(t)\cdot dt$.

右边计算出来后是关于 t 的函数. 再将 $t=g^{-1}(x)$ 代入, 即可得 $\int f(x)\,dx$.

区别：(一) 的核心是发现积分式子中某一部分是另一部分的导数, 从而令式子变得更简单：e.g. $\int \frac{x}{1+x^4}\,dx = \int \frac{\frac{1}{2}\cdot d(x^2)}{1+(x^2)^2} \overset{t=x^2}{=\!=} \sim$

(二) 的核心则是将 x 变得更复杂, 从而消除式子中的根号

e.g. $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx \xrightarrow[\theta\in[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]]{x=a\sin\theta} \sim$

(一) 中的换元为 $t=g(x)$ 并未要求可逆.

(二) 中的换元为 $x=g(t)$, 必须可逆. 所以 t 的范围要写清楚.

Topic 2：分部积分法. (Integration by Parts).

[中文课本(5.2 分部积分法) P205~P210；英文课本(7.1. Integration by Parts) P472~P476]

(1). 分部积分法的内容：

从函数乘积的求导公式出发：

$$(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

两边求不定积分可知：

$$u(x)\cdot v(x) + C = \int u'(x)\cdot v(x)\,dx + \int u(x)\cdot v'(x)\cdot dx$$

$$\therefore \int u(x)\cdot v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) + C - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$$

因于 $\int u'(x)\cdot v(x)\,dx$ 的结果中也会加上任意常数，因此这个+C可以去掉。

得到 分部积分公式：$\int u(x)\cdot v'(x)dx = u(x)\cdot v(x) - \int u'(x)\cdot v(x)\,dx.$

也可简写为 $\int u\cdot dv = u\cdot v - \int v\, du.$

eg. 求 $\int x\cdot \ln x\,dx.$ $\qquad x\cdot dx = d(\frac{x^2}{2})$

$$\int x\cdot \ln x\,dx = \int \ln x\cdot d\frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot d(\ln x)$$

$(u = \ln x,\ v' = x)$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \int \frac{x}{2}\,dx = \frac{x^2}{2}\cdot \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$(u = x,\ v' = \ln x) \rightarrow v = \int \ln x\,dx$. 我们现在还不会！

分部积分法中的 u, v' 的选取很重要.

(2). 分部积分法的使用：

①. 基本思路：

应用分部积分法，需要将积分函数拆成 $u\cdot v'$，

之后用分部积分公式，转化为求 $\int u' v\cdot dx$.

我们应当让 $\int u' v\,dx$ 比原本的 $\int u\cdot v' dx$ 好求.

因此应当有以下条件：<1>. 从 v' 容易计算出 v.

常见的 v': e^x, $\sin x$, $\cos x$, x^n.

不常见的 v': $\ln x$, $\arctan x$ 等.

v' 有时也会取 1.(见下方 $\int \arctan x\,dx$ 例子)

<2>. u' 应当比 u 更简单.

常见的 u: $\ln x$. $\arctan x$. x^n.

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$u' = \frac{1}{x},\quad \frac{1}{1+x^2},\quad n\cdot x^{n-1}$$

e.g. $\int x\cdot e^x\,dx$.

$(u=x, v'=e^x)$ $= \int x\cdot d(e^x) = x\cdot e^x - \int e^x\,dx = x\cdot e^x - e^x + C$

$(u=e^x, v'=x)$ $= \int e^x\cdot(x\,dx) = \int e^x\cdot d(\frac{x^2}{2}) = \frac{x^2}{2}\cdot e^x - \int \frac{x^2}{2}\,de^x$

$= \frac{x^2}{2}\cdot e^x - \int \frac{x^2}{2}\cdot e^x\,dx$ 变得更复杂了.

e.g. $\int \arctan x\,dx$

$(u=\arctan x$ $= x\cdot \arctan x - \int x\cdot d(\arctan x)$

$v'=1\ )$ $= x\cdot \arctan x - \int \frac{x\,dx}{1+x^2}$

$= x\cdot \arctan x - \int \frac{\frac{1}{2}\cdot d(x^2)}{1+x^2}$

$= x\cdot \arctan x - \frac{1}{2}\cdot \ln(1+x^2) + C$

e.g. $\int \ln x\cdot dx$

$= x\cdot \ln x - \int x\cdot d(\ln x)$

$= x\cdot \ln x - \int 1\,dx$

$= x\cdot \ln x - x + C$

e.g. $\int x^2 \cdot \sin x \, dx$

$= \int x^2 (\sin x \cdot dx) = \int x^2 \, d(-\cos x) = -x^2 \cdot \cos x - \int (-\cos x) \cdot d(x^2)$

$= -x^2 \cdot \cos x + \int \cos x \cdot 2x \, dx$

$= -x^2 \cdot \cos x + \int 2x \cdot d(\sin x)$

$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - \int \sin x \cdot d(2x)$

$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x - 2 \cdot \int \sin x \, dx$

$= -x^2 \cdot \cos x + 2x \cdot \sin x + 2\cos x + C$

e.g. $\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

($u = \ln x$, $v' = x^3$，则 $v = \frac{1}{4}x^4$. 更复杂了)。

($u = x^3$, $v' = \ln x$)

$= \int x^3 \cdot (\ln x \cdot dx) = \int x^3 \cdot d(x\ln x - x)$. (用上面 $\int \ln x \, dx = x\ln x - x + C$)

$= x^3 \cdot (x\ln x - x) - \int x\ln x - x \cdot d(x^3)$

$= x^3 \cdot (x\ln x - x) - \int (3x^3 \ln x - 3x^3) \, dx$

$= x^3 \cdot (x\ln x - x) - 3 \cdot \int x^3 \ln x \, dx + \frac{3}{4}x^4$

取 $I = \int x^3 \cdot \ln x \, dx$

$\therefore I = -3I + x^3 \cdot (x\ln x - x) + \frac{3}{4}x^4$

$\therefore 4I = x^3 \cdot (x\ln x - x) + \frac{3}{4}x^4 = x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4}x^4$

$\therefore I = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4$

$\therefore \int x^3 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4$

$\boxed{\text{Try it!}}$ $\int x^2 \cdot e^x \, dx = ?$ $\int x \cdot \cos x \, dx = ?$